AFTERMATH

LØSNINGER

Alle opgaver er løst af problemgruppen "Con Amore" (CA).

Fra børnehaven 1

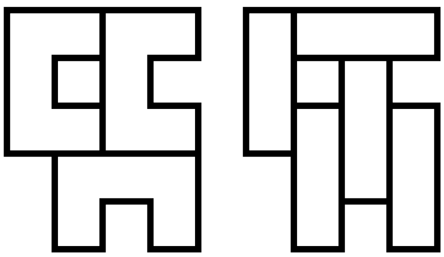
Lille Peter Dummkopf sidder og leger med sine klodser. Han har 9 klodser, og på dem står tallene fra 1 til 9. Stiller han nogle af dem på række, danner de jo et tal. Nogle af tallene er primtal.
Hvad er det største primtal, han kan få frem på denne måde?

Vi må nøjes med at bruge 8 klodser, da alle tal af cifrene 1 til 9 er delelige med 3. Det største 8-cifrede er lige, men det næststørste er heldigvis et primtal:

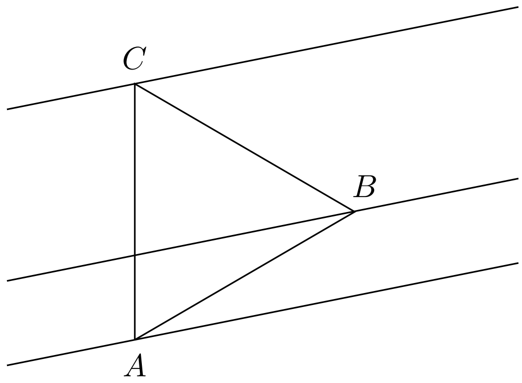
98765431

Fra børnehaven 2

Lille Peter sidder med sine puslebrikke, han har 3 u-formede og 5 i-formede:
Han prøver nu på, om han kan dække de 3 U-er med de 5 I-er uden at lade de ens brikker lappe over hinanden. Vil det lykkes for ham?



Et trekantet problem



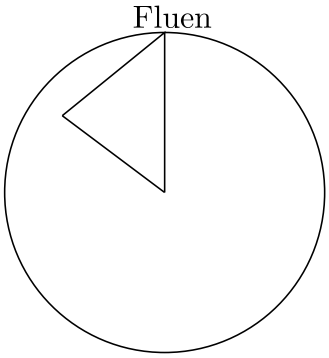
Der er givet tre parallelle linier. Man skal så i al sin enkelhed konstruere en ligesidet trekant, der har et hjørne på hver af de tre parallelle linier.

Denne opgave er løst af Henrik Meyer.

Drejes figuren om A 60^o går B over i C og den midterste linie over i en linie gennem C. Punktet findes derfor som skæringen mellem de to linier.

Fluen i flasken

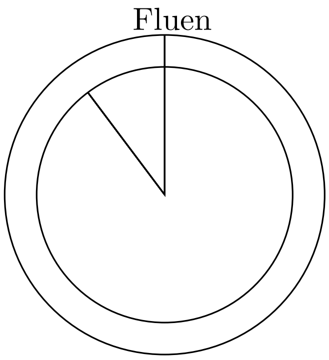
På bunden af en flaske ligger en tændstik, der er 4 cm lang. Den ligger sådan, at svovlet netop er i centrum af flaskens bund, som for resten er 10 cm i diameter.



Nu går der en flue rundt på flasken langs kanten. Fluen ser med 1000 øjne på tændstikken, og den bemærker, at nogle steder fra syner tændstikken længere end andre steder fra. Der er endda to steder, hvorfra tændstikken nærmest ligner et punkt.

Når fluen befinder sig der, hvorfra tændstikken syner størst, hvor langt er fluen så fra tændstikkens anden ende end svovlenden?

Denne opgave er løst af Henrik Meyer.



3 cm. Hvis vi lader fluen sidde, og blot roterer tændstikken om svovlet, så er det klart, at den syner størst, når sigtelinien fra flue til tændstikende er tangent til den cirkel, tændstikken beskriver. Så afstanden bliver den ene katete i en retvinklet trekant med hypotenuse 5 cm og den anden katete 4 cm.

Skovturen

CA's løsning er ikke den her givne.

Jeg har denne opgave fra Peter Winckler.

Arrangøren af institutskovturen, Jörg Trinkwasser, var fanatisk afholdsmand. Han ville derfor forsøge at lokke deltagerne til at miste chancen for en snaps til frokosten. Han foreslog derfor følgende julileg:

Han stillede 50 lukkede kasser på række, og i hver kasse lagde han navnet på en af de 50 deltagere, så hvert navn lå i en og kun en kasse. Nu foreslog han deltagerne at gå ind til kasserne en ad gangen og åbne 25 kasser. Hvis nu det lykkedes for samtlige deltager at finde sit eget navn i en af de åbnede kasser, så skulle der serveres snaps til frokost.

Deltagerne drøftede om det ikke var lidt for chanceløst. Hvis hver deltager valgte 25 tilfældigt ud, så var chancen for en snaps jo $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$, et ikke så stor tal igen.

Er der et godt forslag til forbedring af sandsynligheden?

Ja, sandsynligheden kan øges betydeligt, til ca. 31%. Vi aftaler en nummerorden af kasserne og af deltagerne. Hver deltager går nu hen til kassen med hans nummer og åbner den. Derefter går han til nummeret på den i kassen nævnte etc. Til sidst når han jo sit eget nummer, spørgsmålet er kun om det sker før eller efter det 25. forsøg. Det er tilfældet, hvis den tilfældigt valgte permutation har alle cykler af længde højst 25. Nu er sandsynligheden for, at der er en cykel af længde $k > \frac{n}{2}$ jo

$$\frac{\binom{n}{k}(k-1)!}{n!} = \frac{1}{k}$$

så sandsynligheden for at alle er så lange er

$$\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{1}{k} \simeq \log 2 \simeq 0,69$$

De glemte byttepenge

Der var udsalg hos den lokale matematiker. Man kunne købe 100 formler for 5 kr. stykket, så det var ikke underligt, at ved udsalgets start kl. 7 om morgenen var der allerede en kø på 100 begejstrede amatører.

I sin distraktion havde matematikeren glemt at få byttepengene med, men det kunne måske lade sig gøre at få solgt de 100 formler alligevel. Faktisk havde 50 af personerne i køen lige penge, mens de øvrige 50 kun havde en 10 krone. Så hvis vi var så heldige, at de 50 med femmerne stod forrest, så kunne det jo sagtens gå.

Selvfølgelig kunne man også tænke sig, at folk snakkede sammen og så videre. Men egentlig kunne matematikeren ikke lide at indrømme, at han ikke havde husket byttepengene.

Problemet er, hvor stor er sandsynligheden for, at ingen opdager, at der mangler byttepenge? Altså, hvad er sandsynligheden for, at for hver 10–er i køen er der en 5–er, der kommer før 10–eren til kassen?

Sandsynligheden er $\frac{1}{51}$.

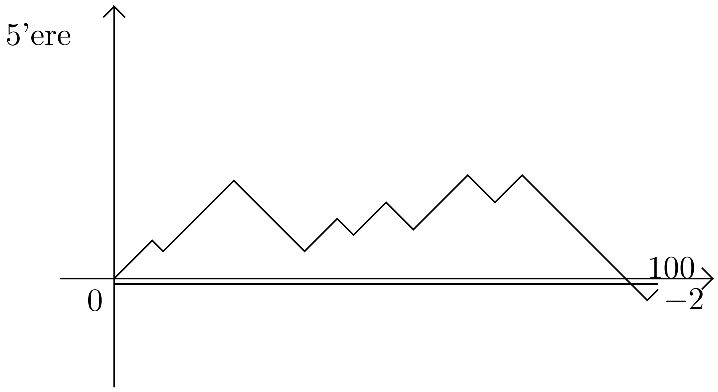
Lad os først tænke os, at vi har byttepenge nok. Vi tegner nu et diagram over antallet af femmere i kassen. Deres antal begynder og ender med det samme antal, der kommer 50 ind og går 50 ud. Og hver ekspedition giver en forandring, enten én ind eller én ud. På figuren er tegnet et typisk forløb.

Et gunstigt forløb er et forløb, hvor antallet aldrig når under startniveauet. Hvis vi tillader gæld, er spørgsmålet, hvor mange sådanne knækfunktioner er aldrig negative, og hvor mange knækfunktioner er der ialt, som begynder og ender med 0?

Antallet af funktioner er let at beregne, det er antallet af måder, vi kan placere de 50 femmere på de 100 pladser, altså

$$\binom{100}{50} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 51}{50!}$$

I stedet for at beregne antallet af gunstige, beregner vi antallet af ugunstige. Vi betragter derfor en funktion, der på et tidspunkt bliver -1. Fra det sted spejler vi funktionen i linien $y = -1$, og derved fås en funktion, der ender i -2



Og det kan vi jo gøre med enhver ugunstig. Så antallet af ugunstige er det samme som antallet af funktioner, der starter i 0 og ender i -2. Men det må jo være dem, der kun får 49 femmere ind, men 51 ud, altså

$$\binom{100}{49} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 52}{49!}$$

Sandsynligheden for et ugunstigt forløb er derfor

$$\frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 52 \cdot 50!}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 51 \cdot 49!} = \frac{50}{51}$$

NYE OPGAVER

Polynomielt

Vis, at rødderne i et 5–te grads polynomium med reelle koefficienter,

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

der opfylder betingelsen $2a^2 < 5b$, ikke alle er reelle.

Systematisk

Løs ligningerne

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3 \end{aligned}$$

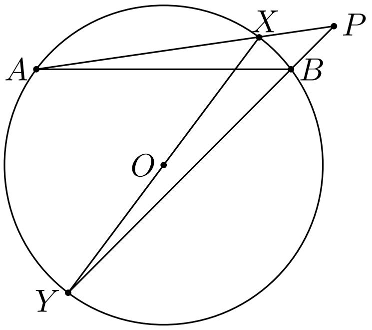
Diophantisk

Find samtlige heltallige løsninger til

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$$

Geometrisk

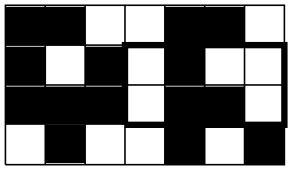
Lad A og B være to punkter på en cirkel. Lad XY være en diameter, og lad P være skæringspunktet mellem linierne gennem A og X og B og Y hhv.



Bestem det geometriske sted for skæringspunkterne P, når XY gennemløber diametrene.

Skuffende

Antag, at hvert felt af et 4×7 skakbræt er farvet enten hvidt eller sort.

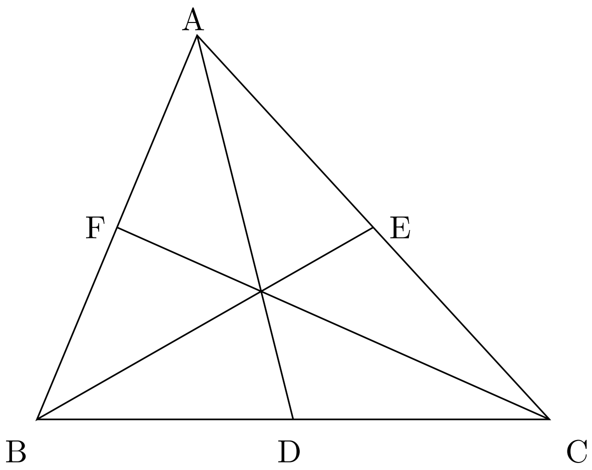


Vis, at for enhver sådan farvelægning findes et rektangel med akseparallelle sider og de fire hjørner af samme farve.

Babylonisk

Ni matematikere mødes til en international konference og opdager, at blandt hver tripel er der to, som taler et fælles sprog. Hvis vi yderligere ved, at hver matematiker højst taler tre sprog, så skal man vise, at der er tre matematikere, der taler et fælles sprog.

Noget om medianerne



I en trekant, $\triangle ABC$, er tegnet de tre medianer, dvs. at f. eks. D er midtpunktet af liniestykket BC. Trekanten $\triangle DEF$ er ligedannet med $\triangle ABC$, og da siderne er halvt så lange, er dens areal en fjerdedel. Også hver af de tre trekanter, $\triangle AEF$, $\triangle BDF$, og $\triangle CDE$ er ligedannede med den oprindelige i halv størrelse og derfor af areal en fjerdedel.

Man kan nu tegne en trekant med siderne af længde som de tre medianer, AD, BE og CF. Opgaven går ud på at vise, at denne mediantrekants areal er $\frac{3}{4}$ af trekantens, $\triangle ABC$.