AFTERMATH

LØSNINGER

Opgaverne var hentet fra Charles W. Trigg, Mathematical Quickies, McGraw–Hill 1967 og Raymond M. Smullyan, Logical Labyrinths, A. K. Peters Ltd. 2009.

Opgaverne er løst af problemgruppen "Con Amore," der også havde løst opgaverne i nr. 40, men fik dem afleveret for sent til at blive nævnt, og af Ebbe Thue Poulsen, hvis løsninger gengives i det følgende. Dog først hans kommentar til opgave 1 i nr. 40.

Sæt

$$P(x,y) = x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + y^8.$$

Så er

$$(x+y)P(x,y) = x^9 + y^9 = x^9 - (-1)y^9.$$

Lad $\xi_k = e^{(2k+1)\pi i/9},\ k = 0, 1, \dots, 8$ være de 9 niende-rødder af -1. Så er

$$(x+y)P(x,y) = \prod_{k=0}^{8}(x - \xi_k y) = (x+y)\prod_{k=0}^{3}(x-\xi_k y)\prod_{k=5}^{8}(x-\xi_k y),$$

og altså har vi den komplekse faktorisering

$$P(x,y) = \prod_{k=0}^{3}(x-\xi_k y)\prod_{k=5}^{8}(x-\xi_k y).$$

Samler vi komplekst konjugerede faktorer parvis, får vi den reelle faktorisering

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \prod_{k=0}^{3}(x^2 - 2\cos\left(\frac{2k+1}{9}\pi\right)xy + y^2) \\ &= (x^2 - xy + y^2)(x^2 - 2\cos\frac{\pi}{9}xy + y^2)(x^2 - 2\cos\frac{5\pi}{9}xy + y^2)(x^2 - 2\cos\frac{7\pi}{9}xy + y^2) \end{aligned}$$

Opgave 1.

Vis, at for alle positive tal, p, q, r, s vil

$$\frac{\left(p^2+p+1\right)\left(q^2+q+1\right)\left(r^2+r+1\right)\left(s^2+s+1\right)}{pqrs} \geq 81$$

Da

$$\frac{x^2+x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} + 3 \geq 3$$

for alle $x > 0$, er

$$\frac{(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)(s^2+s+1)}{pqrs} \geq 3^4$$

for $p, q, r, s > 0$.

Opgave 2.

En bestyrelse har 15 medlemmer, som tillige sidder tilsammen i 20 udvalg. Hvert bestyrelsesmedlem sidder i 4 udvalg. Hvert udvalg har 3 medlemmer. To udvalg har højst et medlem fælles.

Er dette muligt?

Ja: De 15 medlemmer betegnes $x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5, z_1, \ldots, z_5$, og de 20 udvalg betegnes $U_{m,n}$, $m = 1, \ldots, 5$, $n = 1, \ldots, 4$.

Til udvalget $U_{m,n}$ udpeges medlemmerne x_i, y_j, og z_k bestemt ved $i = m$, $j \equiv m+n \pmod 5$, $k \equiv m + 2n \pmod 5$.

Opgave 3.

Lad

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Hvilken rest fås ved division af $f\left(x^5\right)$ med $f(x)$?

Da

$$x^5 - 1 = (x - 1)f(x)$$

er

$$x^5 \equiv 1 \pmod{f(x)},$$

og følgelig

$$f\left(x^5\right) = \left(x^5\right)^4 + \left(x^5\right)^3 + \left(x^5\right)^2 + x^5 + 1 \equiv 5 \pmod{f(x)}.$$

Selv om Paulus hævder, at alle kretensere er løgnere (brev til Titus), så er denne tilstand ændret i årtusindernes løb. Nu er det kun en del af befolkningen, der lyver bestandig. Lad os kalde disse forvorpne for knægte, og den sanddru del af befolkningen for bønder. En knægt lyver altid og en bonde taler altid sandt!

Opgave 4.

En dansk turist, måske J. L. Heiberg?, mødte to indfødte, lad os kalde dem A og B. A sagde nu: “Vi er begge knægte!”

Hvad ved Heiberg nu?

A er knægt, B er bonde.

Opgave 5.

Hvad om A havde sagt: “Mindst en af os er en knægt!”

A er bonde, B er knægt.

Opgave 6.

Og hvad om A havde sagt: “Vi er begge af samme slags!”

B er bonde.

Opgave 7.

Vi ved også, at knægtene bor i Knossos, mens bønderne dyrker deres sukkerrør i Candia. I en vejgaffel møder Heiberg en indfødt, og vil gerne finde vejen til Candia. Hvad kan Heiberg spørge om, som kan besvares med “ja” eller “nej” og give den relevante oplysning?

Heiberg peger på en af vejene og spørger: ’Fører denne vej til din hjemby”?

NYE OPGAVER

Opgave 1.

Nu er der tre trillinger, det ikke er til at se forskel på. De to af dem, Hans og Tøger er knægte, mens den tredje, Børge, er bonde. Nu møder Heiberg en af dem, og vil vide om det er Hans. Han kan stille ham et spørgsmål på tre ord, som Hans vil svare “ja” til, mens begge de andre vil svare “nej.”

Opgave 2.

To tvillinger, Erik og Einar, er identiske bortset fra, at den ene er knægt og den anden bonde. Heiberg møder den ene og vil vide, hvem det er. Han kan stille ham et spørgsmål på tre ord, hvis svar vil afklare sagen.

Opgave 3.

Heiberg møder den ene og vil vide hvem, der er knægt, og hvem, der er bonde. Han kan stille ham et spørgsmål på tre ord, hvis svar vil afklare sagen.

Opgave 4.

Hvis Heiberg vil vide alt, både hvem, der er hvad, og hvem, han står overfor, kan han så også klare det?

Opgave 5.

Heiberg møder en kretenser, der kommer med et udsagn. Heiberg bemærker til ham, at før udsagnet blev udtalt, ville han ikke kunne vide, om det var sandt eller falskt. Men nu ved han både, at det er falskt og derfor, at kretenseren er er en knægt!