MAT 1100
FUNKSJONER AV FLERE VARIABLE

Tore August Kro
Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo

Våren 2003

Forord

Dette heftet er en introduksjon til funksjoner av flere variable, skrevet for kurset MAT1100. Målet har vært å dekke emnene tegning av grafer, kontinuitet, derivasjon, ekstremalverdiproblemer og Lagranges multiplikatormetode. I stor utstrekning er bevis for setningene tatt med, men det er urealistisk å tro at alle disse kan gjennomgås på forelesninger i løpet av fire uker. Mange bevis er derfor *-merket og må ses på som bakgrunnsstoff for den interesserte leser.

Jeg har fått være så heldig at jeg har kunnet ta utgangspunkt i Tom Lindstrøms hefte: MA114 FUNKSJONER AV FLERE VARIABLE, Matematisk Institutt, UiO, våren 1997. Deler av teksten i disse to sammenfaller derfor.

Siden dette er en førsteutgave, kan det ikke utelukkes at det finnes både trykkfeil og mangler i hovedfremstillingen, oppgavene og fasiten. Med tanke på reviderte utgaver mottar jeg gjerne påpekninger om slikt i form av e-mail.

Tore August Kro

Tore August Kro
`toreak@math.uio.no`

Innhold

Innledning

De funksjonene du er mest vant til fra før, er funksjoner av *en* variabel – det vil si at du putter inn ett tall x, og får ut et annet tall $y = f(x)$. I dette heftet skal vi studere funksjoner av *flere* variable, det vi si funksjoner der vi putter inn flere tall $x_1, x_2, \ldots, x_n$ og får ut en verdi $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Vi skal være spesielt interessert i hvordan man deriverer slike funksjoner. Teorien vil nok på mange måter minne deg om det du kan om derivasjon av funksjoner av en variabel, men det vil også være viktige forskjeller – spesielt kommer geometriske betraktninger til å spille en viktigere rolle i den nye teorien.

Før vi begynner med matematikken, er det et spørsmål vi bør avklare – hva er egentlig hensikten med å studere funksjoner av flere variable? Tenker du deg om, er det ikke vanskelig å finne eksempler på situasjoner der vi trenger funksjoner av flere variable for å beskrive det som foregår. Her er noen eksempler:

* Du varmer opp en metallstang fra den ene enden og lurer på hvordan varmen brer seg til andre deler av stangen. Da vil temperaturen T avhenge av avstanden x til oppvarmingspunktet og av tiden t siden oppvarmingen begynte. Vi får altså en funksjon $T(x,t)$ av to variable.

* Du slår på en gitarstreng slik at den begynner å vibrere opp og ned. For å beskrive bevegelsen til strengen må du kjenne utslaget $u(x,t)$ i posisjonen x ved tiden t. Dette er en funksjon av to variable.

* Du er interessert i å studere hvordan saltkonsentrasjonen i havet varierer. For å angi posisjonen trenger du tre variable x, y, z, og for å angi tiden trenger du en fjerde variabel t. Konsentrasjonen c blir da en funksjon $c(x, y, z, t)$ av fire variable.

* Du driver en bedrift som produserer n forskjellige vareslag. Bruttoinntekten avhenger av prisene $p_1, p_2, \ldots, p_n$ du kan få for disse varene. Den er altså en funksjon $I(p_1, \ldots, p_n)$ av n variable.

Sannsynligvis har du ikke store problemer med å fortsette denne listen av eksempler på egenhånd.

Kapittel 1

Visualisering

1.1 Funksjoner av flere variable

Dette kapittelet skal handle om hvordan vi kan gå frem for å skissere grafen til en funksjon av flere variable. Vi er vant med å tegne grafen til en funksjon av en variabel i et to-dimensjonalt koordinatsystem. Vi skal se at grafen til en funksjon av to variable kan tegnes opp i et tre-dimensjonalt koordinatsystem. Har vi enda flere variable, begrenses med en gang mulighetene for å tegne grafen. Rommet vi lever i har rett og slett ikke stor nok dimensjon til at grafen lar seg tegne. Men det er heldigvis mulig å visualisere grafen på andre måter.

Det er greit å sette navn på ting. De reelle tallene kjenner du forhåpentligvis allerede. Vi skriver $\mathbb{R}$ for mengden av disse. Når vi jobber med to variable, for eksempel x og y, kan vi danne paret (x, y). Mengden av alle tallpar (x, y), hvor x og y er reelle kaller vi $\mathbb{R}^2$. Vi kaller ofte et slikt tallpar for et punkt, og tenker på $\mathbb{R}^2$ som et plan. Mengden av alle talltripler av reelle tall kaller vi $\mathbb{R}^3$, og vi tenker på et talltrippel som et punkt i rommet. Generelt kaller vi mengden av n-tupler av reelle tall for $\mathbb{R}^n$, og et punkt, altså et n-tuppel, kan skrives som $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, hvor hver av x_1, x_2, ..., x_n er et reelt tall.

Vi er nå klare for å definere hva en funksjon av flere variable er:

1.1 Definisjon
En funksjon av n variable definert på en delmengde A av $\mathbb{R}^n$ er en funksjon $f : A \to \mathbb{R}$.

Sagt på en annen måte er f en regel som til hvert punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ tilordner et tall $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$. Vi kaller A for *definisjonsmengden* til f, og ofte skriver vi D_f i stedet for A. Funksjonen har også en verdimengde,

V_f, som er definert ved

$$V_f = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A\}$$

Med andre ord er verdimengden mengden av alle funksjonsverdier.

De fleste funksjoner vi skal støte på, er gitt ved formeluttrykk. Her er noen eksempler:

1.2 Eksempel

a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_4^2 - \frac{1}{3} x_2 x_3^3$. Dette er en funksjon av fire variable og definisjonsmengden er hele $\mathbb{R}^4$. Velger vi et punkt i $\mathbb{R}^4$, for eksempel $(1, -2, \frac{1}{2}, 1)$, kan vi regne ut den tilhørende funksjonsverdien.

$$f(1, -2, \frac{1}{2}, 1) = 1 \cdot 1^2 - \frac{1}{3}(-2) \cdot (\frac{1}{2})^3 = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Dette er en funksjon av tre variable som er definert for alle (x_1, x_2, x_3) i $\mathbb{R}^3$ unntatt $(0, 0, 0)$. Definisjonsmengden er da $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

c) $f(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-(x-y)^2}{2t}}$. Dette er en funksjon av tre variable som er definert i alle punkt hvor $t > 0$. Legg merke til at vi bruker x, y og t som variabelnavn istedenfor x_1, x_2 og x_3. Dette er helt vanlig – når funksjoner brukes i praksis, heter variablene ofte noe helt annet enn $x_1, x_2, \ldots, x_n$!

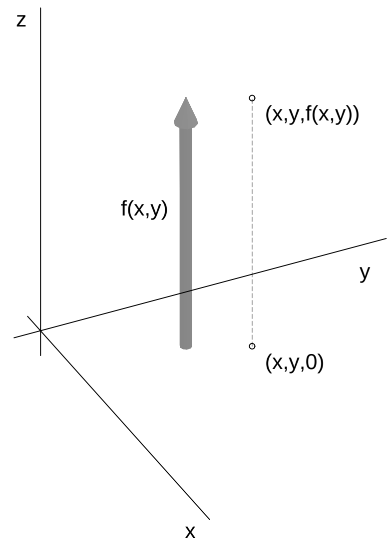
$\square$

1.2 Visualisering for tovariable funksjoner

Noe av det første vi gjør når vi studerer en funksjon av en variabel, er å lage en skisse av grafen. Også i det flervariable tilfellet er det viktig å danne seg et bilde av hvordan funksjonen ser ut, men har den flere enn to variable, er det umulig å lage en tegning av grafen i vanlig forstand. Heldigvis gir det tovariable tilfellet oss mye intuisjon som vi kan bygge på når vi skal studere funksjoner av enda flere variable. I dette avsnittet skal vi derfor se forholdsvis nøye på hvordan vi kan tegne grafen til en funksjon av to variable.

For å unngå altfor mange indekser, skal vi kalle de variable x og y istedenfor x_1 og x_2, og vi skal bruke z som en betegnelse på funksjonsverdien. Vi har altså funksjoner $z = f(x, y)$.

Før vi ser på noen eksempler må vi presisere hva grafen til en funksjon av to variable er. Den befinner seg i et tredimensjonalt koordinatsystem. Aksene



Figur 1.1: Punkt på grafen til f

gir vi navn etter variablene, i vårt tilfelle blir dette x-, y- og z-aksen. Gitt variableverdier x og y slik at (x, y) ligger i definisjonsmengden til f, kan vi finne funksjonsverdien i dette punktet, dvs. $f(x, y)$. Talltrippelet $(x, y, f(x, y))$ er koordinatene til et punkt i det tredimensjonale koordinatsystemet. Dette punktet ligger på grafen til funksjonen f. Se figur 1.1. Vi definerer grafen til f som samlingen av alle punkt på formen $(x, y, f(x, y))$, slik at (x, y) ligger i definisjonsmengden til f.

Legg merke til at vi i prinsippet kan avlese funksjonsverdiene til f dersom vi har en tegning av grafen. For å lese av $f(x, y)$, finner en først punktet $(x, y, 0)$, deretter beveger en seg loddrett (dvs. parallelt med z-aksen) til en støter på grafen, dette vil skje i et punkt (x, y, z). Funksjonsverdien $f(x, y)$ er da z-verdien i dette punktet. Se figur 1.2.

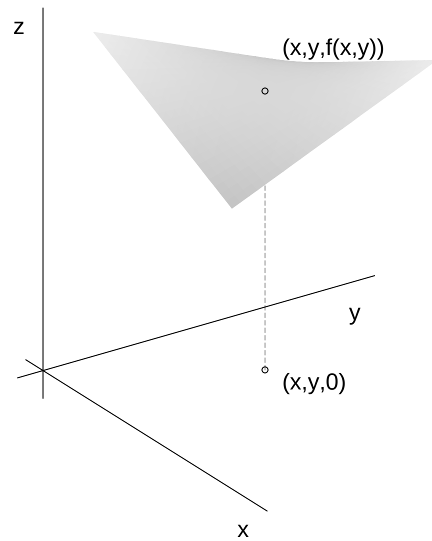
1.3 Eksempel
Bruk av dataverktøy er ofte nyttig når en skal se på grafen til en funksjon av to variable. Vi skal se hvordan vi kan bruke MAPLE til å tegne grafene til følgende funksjoner:

a) $f(x, y) = xy$

b) $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$

c) $h(x, y) = \frac{4-3y}{x^2+y^2+1}$

Vi definerer funksjonene i MAPLE ved å gi følgende kommandoer:



Figur 1.2: Avlesning av funksjonsverdien

```
f:= (x,y) -> x*y;
g:= (x,y) -> cos(x^2+y^2);
h:= (x,y) -> (4-3*y)/(x^2+y^2+1);
```

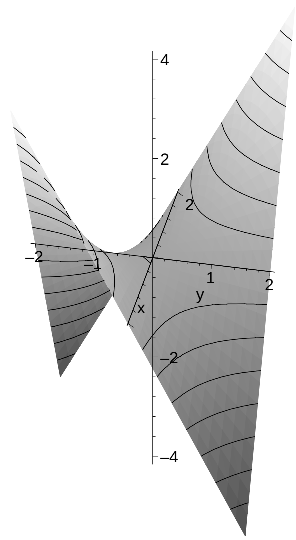
For å tegne grafen til disse funksjonene skiver vi

```
plot3d(f(x,y), x=-2..2, y=-2..2);
plot3d(g(x,y), x=-2.5..2.5, y=-2.5..2.5);
plot3d(h(x,y), x=-3..3, y=-4..2);
```

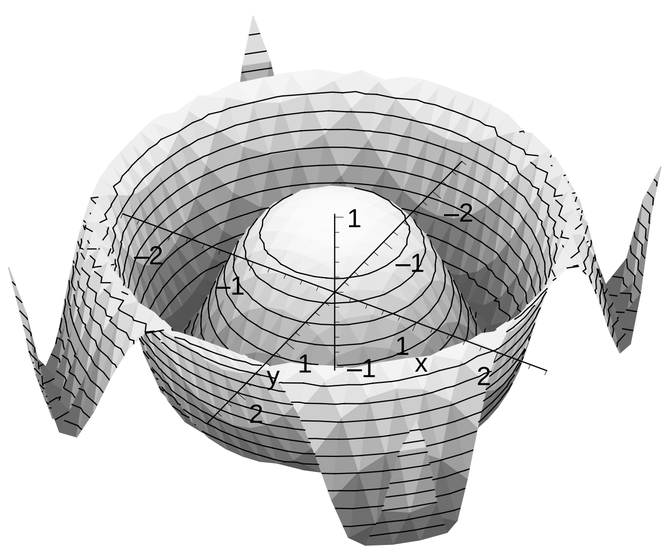
Vi har i hvert av tilfellene angitt et område for x og y. For eksempel har vi for funksjonen h latt x gå fra -3 til 3 og y fra -4 til 2. Grafene vi da får kan du se på figurene 1.3, 1.4 og 1.5. $\square$

Stoffet vi har gjennomgått hittil har tatt sikte på å gi deg god intuisjon om hva grafen til en funksjon av to variable er, men vi har ikke undersøkt hvordan en i praksis kan gå fram for å skissere grafen. Å bruke dataverktøy, som i eksemplene over, er ofte praktisk, men det er likevel nyttig å beherske kunsten å skissere en graf uten andre hjelpemiddel enn papir og blyant. Når en studerer grafen for hånd blir forståelsen av grafens kvalitative egenskaper ofte dypere enn ved bruk av dataverktøy. Og med trening og erfaring kan det til og med være raskere å skissere grafen på papir enn å bruke en datamaskin.

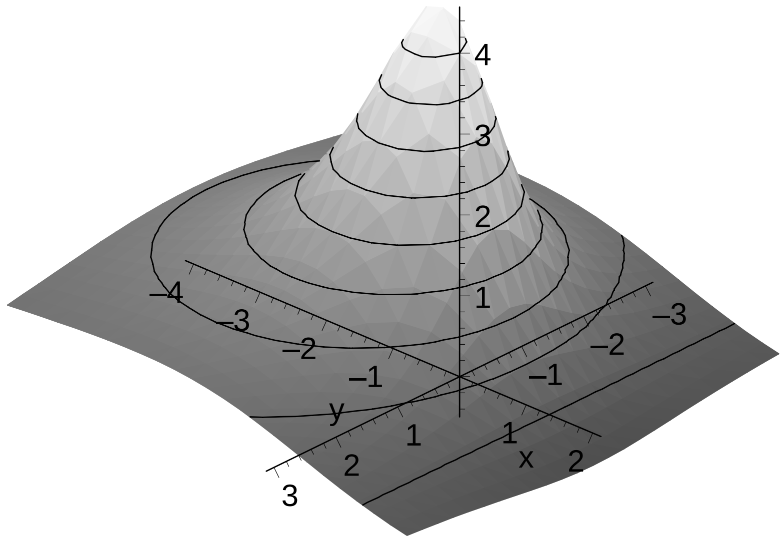
Vi skal se på to ulike framgangsmåter for å studere grafen. Konturen til grafen over en linje i xy-planet blir en envariabelfunksjon, som vi kan tegne grafen til. Ved å sette sammen mange konturer kan vi danne oss et bilde av



Figur 1.3: Grafen til $f(x, y) = xy$



Figur 1.4: Grafen til $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$



Figur 1.5: Grafen til $h(x,y) = \frac{4-3y}{x^2+y^2+1}$

grafen. Nivåkurver er snittet mellom grafen og plan som er parallelle med xy-planet, og en samling av nivåkurver beskriver grafen på samme måte som høydekoter på et kart beskriver terrenget.

1.2.1 Konturer

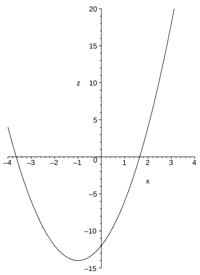
De enkleste eksemplene på konturer for en funksjon f av to variable x og y får vi ved å sette inn en fast verdi for en av variablene. Da blir det gjenstående en funksjon av en variabel, som vi kan tegne grafen til. La oss se på noen eksempler.

1.4 Eksempel
Vi skal i dette eksempelet forsøke å skissere grafen til

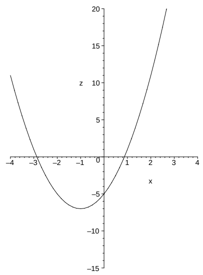
$$f(x,y) = 2x^2 + 4x - y^2 + 4y$$

I sin enkleste form er idéen bak konturer å sette inn tall for en av variablene. Da får vi en funksjon av den andre variabelen, en envariabelfunksjon, og da vet vi hvordan en skal tegne opp grafen.

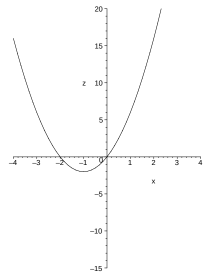
Vi prøver med å sette inn noen verdier for y. For eksempel $y = -2$, $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, $y = 4$ og $y = 5$. Det er ikke noen spesiell grunn til at vi valgte nettopp disse tallene, andre valg av tall kan fungere like



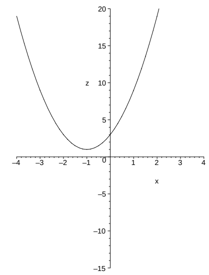
(a) $y = -2$



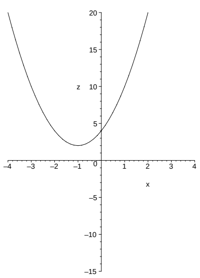
(b) $y = -1$



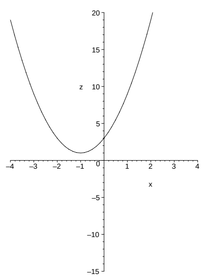
(c) $y = 0$



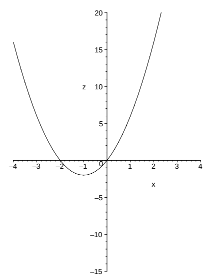
(d) $y = 1$



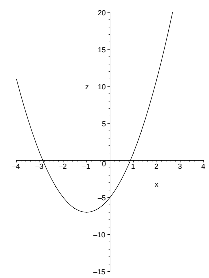
(e) $y = 2$



(f) $y = 3$



(g) $y = 4$



(h) $y = 5$

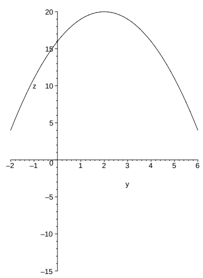
Figur 1.6: Konturer for $f(x, y) = 2x^2 + 4x - y^2 + 4y$

bra. La oss se hva som hender når vi setter inn:

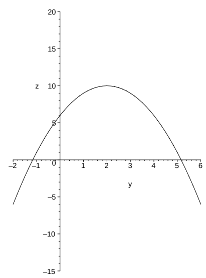
$$
\begin{array}{lll}
y = -2 & \text{gir} & f(x,-2) = 2x^2 + 4x - 12 \\
y = -1 & \text{gir} & f(x,-1) = 2x^2 + 4x - 5 \\
y = 0 & \text{gir} & f(x,0) = 2x^2 + 4x \\
y = 1 & \text{gir} & f(x,1) = 2x^2 + 4x + 3 \\
y = 2 & \text{gir} & f(x,2) = 2x^2 + 4x + 4 \\
y = 3 & \text{gir} & f(x,3) = 2x^2 + 4x + 3 \\
y = 4 & \text{gir} & f(x,4) = 2x^2 + 4x \\
y = 5 & \text{gir} & f(x,5) = 2x^2 + 4x - 5
\end{array}
$$

Tegner vi grafene får vi parabler, som alle har samme form. Eneste forskjellen er en forskyvning i z-retningen. Se figur 1.6.

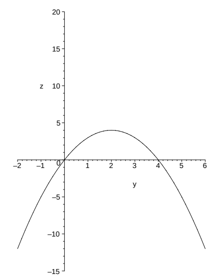
Nå forsøker vi å sette inn verdier for x, og deretter tegne $z = f(x, y)$ som en funksjon av y for de valgte x-verdiene. Vi prøver med $x = -4$, $x = -3$,



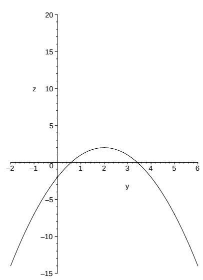
(a) $x = -4$



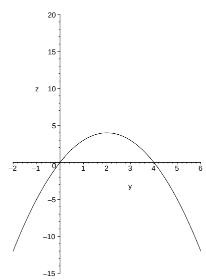
(b) $x = -3$



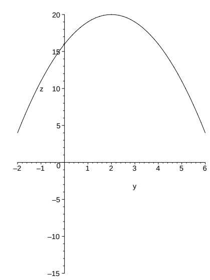
(c) $x = -2$



(d) $x = -1$



(e) $x = 0$



(f) $x = 2$

Figur 1.7: Konturer for $f(x,y) = 2x^2 + 4x - y^2 + 4y$

$x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ og $x = 2$ Da har vi:

$$\begin{array}{lll}
x = -4 & \text{gir} & f(-4,y) = 16 - y^2 + 4y \\
x = -3 & \text{gir} & f(-3,y) = 6 - y^2 + 4y \\
x = -2 & \text{gir} & f(-2,y) = -y^2 + 4y \\
x = -1 & \text{gir} & f(-1,y) = -2 - y^2 + 4y \\
x = 0 & \text{gir} & f(0,y) = -y^2 + 4y \\
x = 2 & \text{gir} & f(2,y) = 16 - y^2 + 4y
\end{array}$$

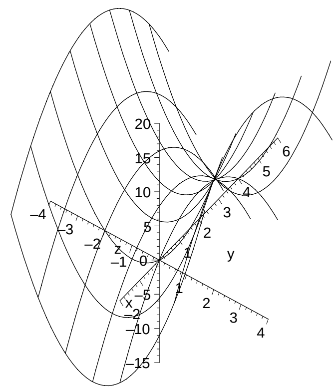
Igjen får vi parabler, og disse kan du se i figur 1.7.

Vi setter nå disse grafene sammen i et 3-dimensjonalt koordinatsystem. Da får vi frem flaten i figur 1.8. Du finner igjen konturene fra figur 1.6 tegnet opp parallelt med x-aksen, og konturene fra figur 1.7 ligger parallelt med y-aksen. □

1.5 Eksempel

La f være gitt ved

$$f(x,y) = \ln(x+y) - y$$



Figur 1.8: Konturene til f satt sammen til grafen til funksjonen.

Som i eksempelet over skal vi sette inn noen verdier for x og y, tegne konturene for disse verdiene og til sist sette sammen grafen til f. Vi velger konturer for $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$ og $y = -1$, $y = 0$ og $y = 2$. De funksjonene vi ønske å tegne er:

$$
\begin{array}{lll}
x = -1 & \text{gir} & f(-1, y) = \ln(y - 1) - y \\
x = 0 & \text{gir} & f(0, y) = \ln(y) - y \\
x = 2 & \text{gir} & f(2, y) = \ln(y + 2) - y \\
y = -1 & \text{gir} & f(x, -1) = \ln(x - 1) + 1 \\
y = 0 & \text{gir} & f(x, 0) = \ln(x) \\
y = 2 & \text{gir} & f(x, 2) = \ln(x + 2) - 2
\end{array}
$$

Vi tegner konturene i figur 1.9.

Vi ser at dersom vi setter inn ulike verdier for x får vi formlike konturer. Lavere verdier for x forskyver konturen ned mot høyre, høyere verdier for x forskyver konturen opp mot venstre. Legg merke til at funksjonen $f(x_0, y) = \ln(x_0 + y) - y$, sett på som en funksjon av y, har en vertikal asymptote i $y = -x_0$.

Likens ser vi at når vi setter inn ulike verdier for y får vi igjen formlike konturer. Lavere verdier for y forskyver konturen opp mot høyre, mens høyere verdier for y forskyver konturen ned mot venstre. Som funksjon av x har $f(x, y_0)$ en vertikal asymptote i $x = -y_0$.

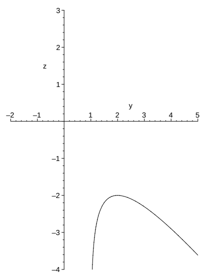
Grafen til f får vi ved å sette sammen konturene. Den er tegnet i figur 1.10

$\square$

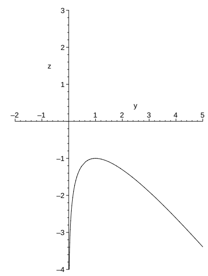
1.6 Eksempel

La f være gitt ved

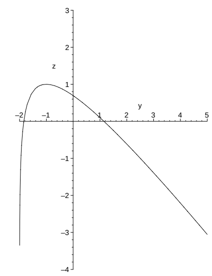
$$f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2 + 2x - 1}$$



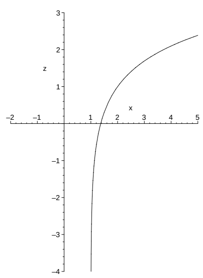
(a) $x = -1$



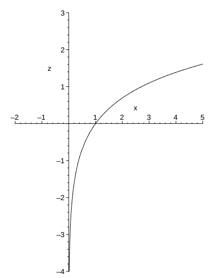
(b) $x = 0$



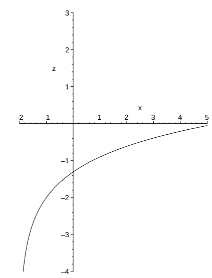
(c) $x = 2$



(d) $y = -1$

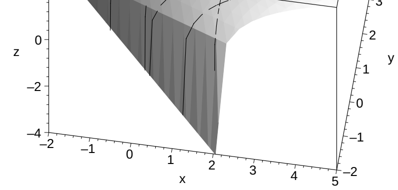


(e) $y = 0$

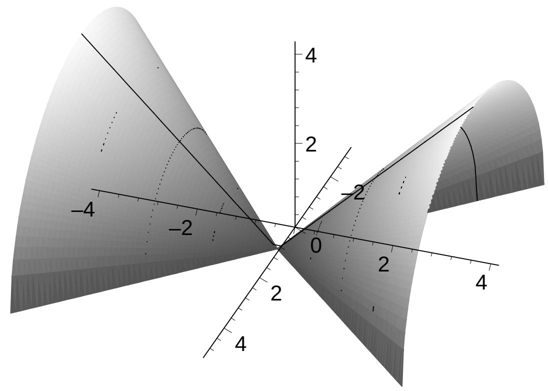


(f) $y = 2$

Figur 1.9: Konturer for $f(x, y) = \ln(x + y) - y$



Figur 1.10: Grafen til $f(x, y) = \ln(x + y) - y$.



Figur 1.11: Grafen til $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2 + 2x - 1}$.

Vi ønsker å tegne grafen til f. La oss derfor diskutere hvordan forskjellige konturer ser ut. Vi ser først på hva som hender dersom vi setter y til å være en konstant.

$$y = c \quad \text{gir} \quad z = f(x, c) = \sqrt{c^2 - x^2 + 2x - 1}$$

Ved å skrive om på denne ligningen ser vi at konturen over $y = c$ er de (x, z) hvor

$$z \geq 0 \quad \text{og} \quad z^2 + (x-1)^2 = c^2$$

Konturen er altså halvsirkelen med radius $|c|$ og sentrum i $(1, 0)$ med $z \geq 0$. Grafen blir derfor øvre halvdel av en liggende dobbel kjegle med akse $x = 1$, $z = 0$. For å tegne grafen kan det være lurt å først tegne opp konturen over $x = 1$, fordi punktet $(1, c, f(1, c))$ er maksimalverdien på konturen for $y = c$. Deretter kan en tegne halvsirklene hengende ned fra denne kurven. Vi har at

$$f(1, y) = \sqrt{y^2 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 1} = \sqrt{y^2} = |y|$$

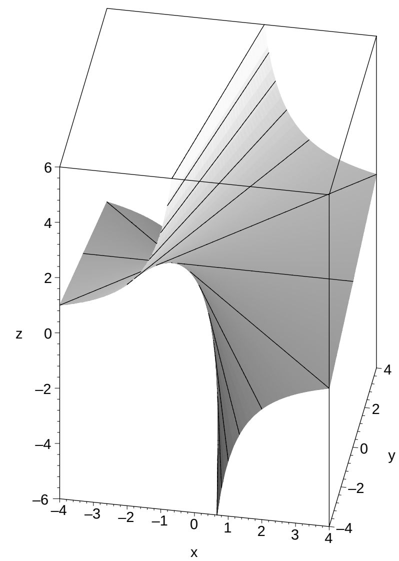
Og vi kan tegne grafen som vist i figur 1.11 $\square$

Noen ganger kan det også være hensiktsmessig å tegne opp konturen for f over en linje som ikke er parallell med koordinataksene. Vi skal se et eksempel på dette.

1.7 Eksempel
I dette eksempelet skal vi se på funksjonen

$$f(x, y) = \frac{y}{x}$$

Men i motsetning til eksemplene over skal vi ikke sette inn konstanter for x eller y for å danne konturer. Derimot skal vi se hvordan grafen ser ut over



Figur 1.12: Grafen til $f(x, y) = \frac{y}{x}$.

linjer som går gjennom origo. Rette linjer i xy-planet som går gjennom origo kan skrives på formen $y = ax$, unntatt linja $x = 0$. Dersom vi setter inn $y = ax$ i funksjonen f får vi

$$f(x, ax) = \frac{ax}{x} = a$$

Vi ser at over linja $y = ax$ er f konstant lik a. Dermed kan vi tegne grafen. Se figur 1.12. □

1.2.2 Nivåkurver

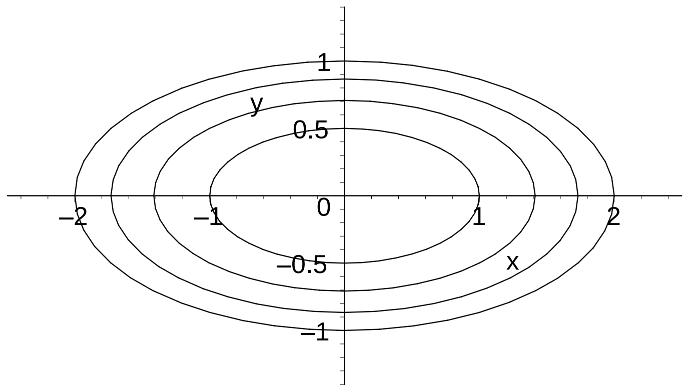
En nivåkurve til en funksjon f av to variable i høyden c er kurven i xy-planet som kommer fram når en løser ligningen $f(x, y) = c$. Ved å tegne opp flere nivåkurver for samme funksjon, kan en etterhvert skissere funksjonen. Vi skal se på et eksempel:

1.8 Eksempel
Bruk nivåkurver for å skissere grafen til

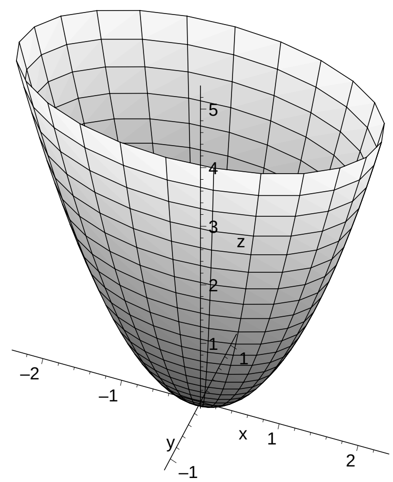
$$f(x, y) = x^2 + 4y^2$$

For å finne nivåkurvene forsøker vi å løse ligningen

$$x^2 + 4y^2 = c$$



Figur 1.13: Nivåkurver til $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ ved $c = 1$, $c = 2$, $c = 3$ og $c = 4$.

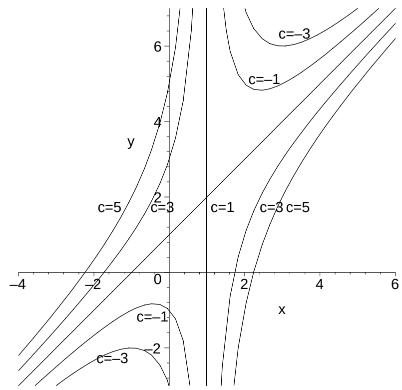


Figur 1.14: Grafen til $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

Hvordan løsningskurven ser ut er selvfølgelig avhengig av verdien til c. Dersom c er negativ har ligningen ingen løsninger, siden $x^2 + 4y^2 \geq 0$ for alle x og y. For $c = 0$ har vi kun en løsning, nemlig $x = y = 0$. Og for $c > 0$ får vi ellipser. Jo større c blir, jo større er ellipsene. Se figur 1.13 for en skisse av nivåkurvene for $c = 1$, $c = 2$, $c = 3$ og $c = 4$. Vi bruker nivåkurvene som hjelpemiddel for å skissere grafen. Se figur 1.14. $\square$

Avslutningsvis i dette avsnittet vil vi se på noen eksempler der vi både bruker konturer og nivåkurver for effektivt å kunne skissere grafen til noen funksjoner av to variable.

1.9 Eksempel
La f være gitt ved
$$f(x, y) = x^2 - xy + y$$



Figur 1.15: Nivåkurver til $f(x,y) = x^2 - xy + y$.

For å undersøke denne funksjonen ser vi først på nivåkurvene. La c være et reelt tall. Da ønsker vi å finne løsningen til

$$c = f(x,y) = x^2 - xy + y$$

Når $x \neq 1$ kan vi skrive denne ligningen som

$$y = x + 1 + \frac{1-c}{x-1}$$

og dersom $x = 1$ blir ligningen

$$c = f(1,y) = 1^2 - 1 \cdot y + y = 1$$

Nivåkurvene blir derfor $y = x + 1 + \frac{1-c}{x-1}$ og når $c = 1$ får vi $x = 1$ i tillegg. Se figur 1.15 Du bør spesielt legge merke til hvordan nivåkurvene ser ut for $c = 1$. For alle andre tilfeller blir nivåkurvene krummede, men i dette tilfellet får vi to rette linjer; $x = 1$ og $y = x + 1$. Disse linjene er asymptotene til de andre nivåkurvene. Og skjæringspunktet til linjene er $(1, 2)$.

Når vi nå skal tegne grafen er det greit å tegne noen konturer. Deretter kan vi "henge opp" nivåkurvene i konturene. Vi ønsker å plukke ut konturene våre med omhu, målet er å velge disse slik at vi med få konturer klarer å henge opp samtlige nivåkurver. Se først på konturen over $y = 2$. ($y = 2$ er en rett linje gjennom punktet $(1, 2)$.) Vi har at

$$f(x,2) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

Til denne konturen får vi festet alle nivåkurvene med $c \geq 1$. For å feste opp de resterende nivåkurvene ser vi på konturen over $y = 2x$. (Dette er også en linje gjennom $(1, 2)$.) Dette gir

$$f(x,2x) = -x^2 + 2x = 1 - (x-1)^2$$

På denne konturen kan vi feste alle nivåkurver med $c \leq 1$. Vi skisserer nå først de to konturene, deretter fester vi nivåkurvene til disse og får frem grafen, se figur 1.16 $\square$

1.10 Eksempel
En affin funksjon i to variable er en funksjon f på formen

$$f(x,y) = ax + by + d$$

hvor a, b og d er reelle tall. La oss undersøke hvordan grafen til en affin funksjon ser ut ved å bruke nivåkurve og konturer. Vi ser først på nivåkurvene, det vil si at vi forsøker å løse ligningen

$$c = f(x,y) = ax + by + d$$

Kurvene som fremkommer for ulike verdier av c er parallelle rette linjer i xy-planet, bortsett fra dersom $a = b = 0$. I dette tilfellet blir "nivåkurvene" den tomme mengden for $c \neq d$ og hele xy-planet for $c = d$.

Konturen over den rette linja $y = kx + l$ finner vi ved å sette inn i funksjonsuttrykket. Vi får:

$$f(x, kx + l) = ax + bkx + bl + d = (a + bk)x + (d + bl)$$

Vi tenker på uttrykkene som står inne i parantesene som konstanter og ser at konturen er en rett linje. Også konturene over linjer på formen $x = k$ blir rette linjer fordi

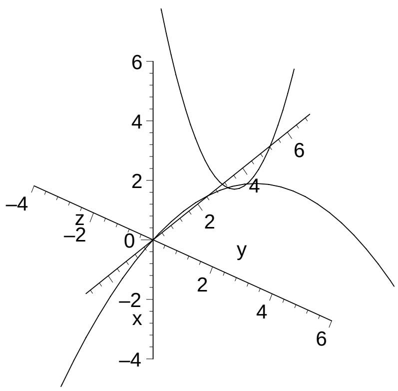
$$f(k,y) = ak + by + d = by + (ak + d)$$

Siden alle nivåkurvene og alle konturene var rette linjer må grafen til en affin funksjon være et plan i $\mathbb{R}^3$. $\square$

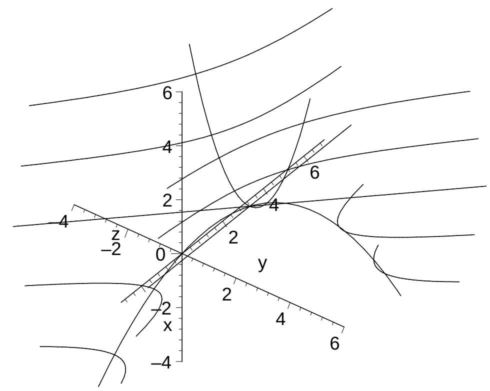
1.3 Visualisering for tre og flere variable

Når en møter funksjoner av tre eller flere variable kan en ikke lengre tegne grafen av den grunn at rommet i den fysiske verden vi lever i har 3 dimensjoner, mens det matematiske rommet hvor den abstrakte grafen ligger har 4 eller flere dimensjoner. Det er rett og slett ikke plass nok til å tegne grafen. Likevel kan en visualisere funksjoner av tre eller flere variable. Idéen er å generalisere hjelpemidlene "konturer" og "nivåkurver".

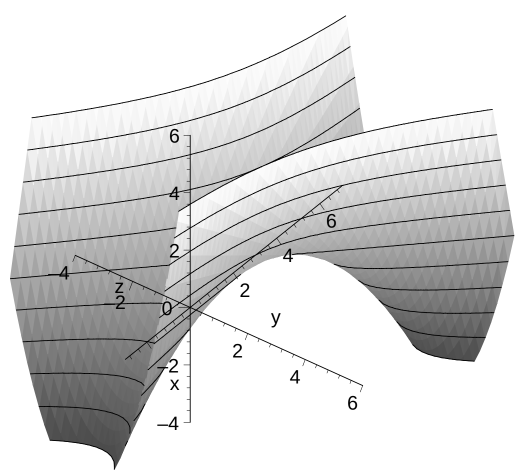
La oss se på noen eksempler med funksjoner av tre variable.



(a) Konturene

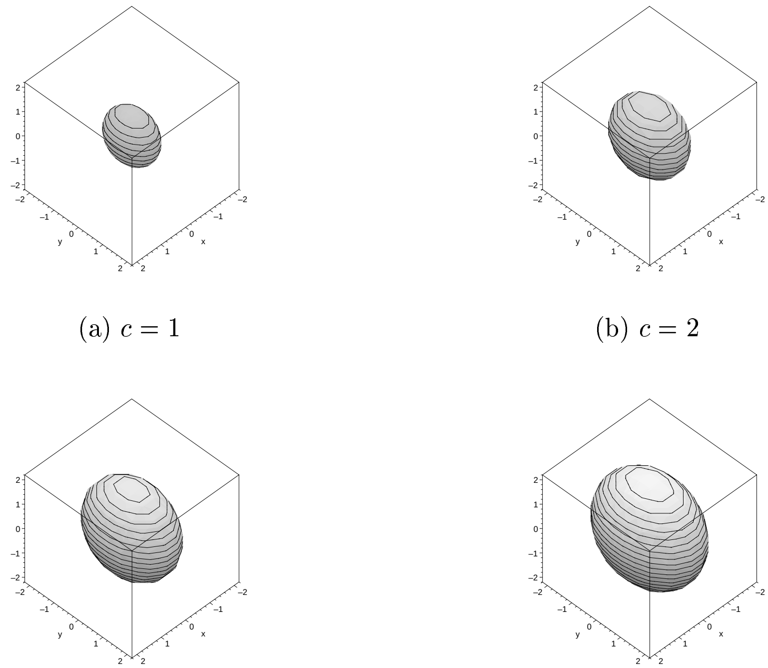


(b) med nivåkurver



(c) Grafen

Figur 1.16: Å tegne grafen til $f(x, y) = x^2 - xy + y$



(a) $c = 1$ (b) $c = 2$

(c) $c = 3$ (d) $c = 4$

Figur 1.17: Nivåflater til $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$

1.11 Eksempel
La $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$$

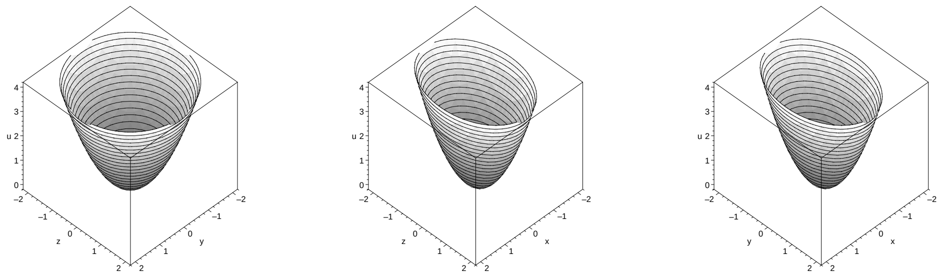
Vi ønsker å visualisere grafen til f ved hjelp av nivåflater og konturer. Nivåflatene fremkommer ved å løse ligningen

$$c = f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$$

Vi ser at dersom $c < 0$ kan ikke ligningen ha noen løsning fordi $2x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$ og $z^2 \geq 0$ for alle x, y og z. Dersom $c = 0$ er den eneste løsningen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ og for $c > 0$ beskriver ligningen $c = 2x^2 + y^2 + z^2$ en ellipsoide. Se figur 1.17 for nivåflatene $c = 1$, $c = 2$, $c = 3$ og $c = 4$.

Det er også mulig å bruke konturer. For eksempel kan vi sette $x = 0$, $y = 0$ eller $z = 0$. Da får vi funksjoner av to variable og kan tegne grafen. Se figur 1.18.

Som en mental øvelse i 4-dimensjonal geometri bør du nå sammenligne figur 1.17 med figur 1.18. Husk at både konturer og nivåflater er tegninger



(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $z = 0$

Figur 1.18: Konturer til $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$

av grafen snittet med et plan. Derfor representerer punktene som er tegnet opp i de ulike figurene, punkt på grafen til $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$. Tenk på en av nivåflatene og en av konturene. Har disse noen felles punkt? Og hvor ligger i så fall disse punktene? $\square$

1.12 Eksempel
La g være funksjonen gitt ved

$$g(x, y, z) = z + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nivåflatene til g finner vi ved å løse ligningen

$$c = z + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dette uttrykket kan omskrives slik at z blir en funksjon av x og y, det vil si

$$z = c - \sqrt{x^2 + y^2}$$

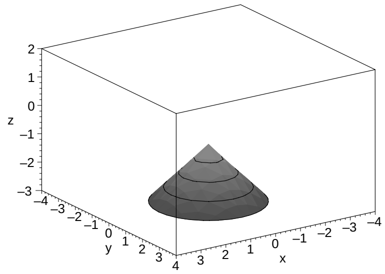
Dermed kan en se at nivåflatene er sirkulære kjegler med toppunkt i $(0, 0, c)$. Disse er skissert i figur 1.19

La oss også skissere konturer for g. I figur 1.20 vises konturene $x = 0$, $y = 0$ og $z = 0$. $\square$

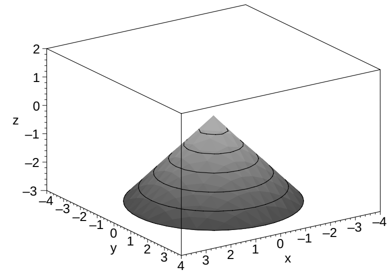
1.4 Andre koordinatsystemer

1.4.1 Polarkoordinater

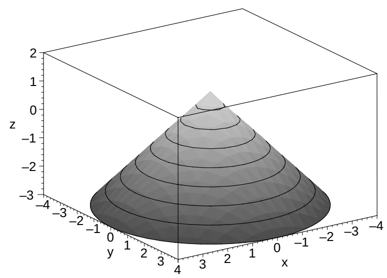
Når vi skal angi posisjonen til et punkt i planet, er det vanligste å oppgi x- og y-koordinaten som vist i figur 1.21. I en del sammehenger er det imidlertid



(a) $c = -1$

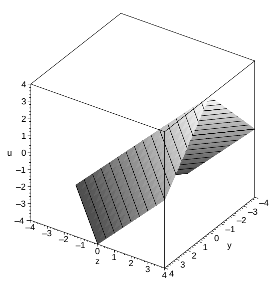


(b) $c = 0$

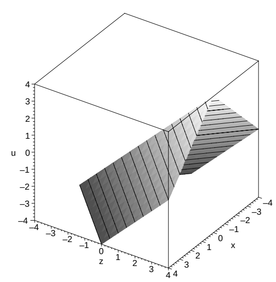


(c) $c = 1$

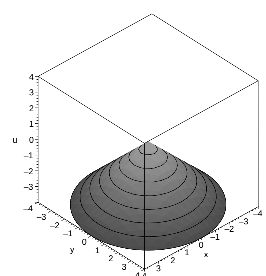
Figur 1.19: Nivåflater til $g(x, y, z) = z + \sqrt{x^2 + y^2}$



(a) $x = 0$

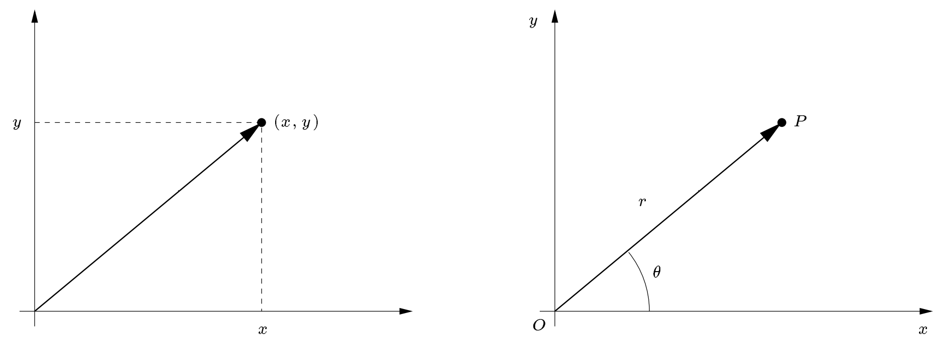


(b) $y = 0$

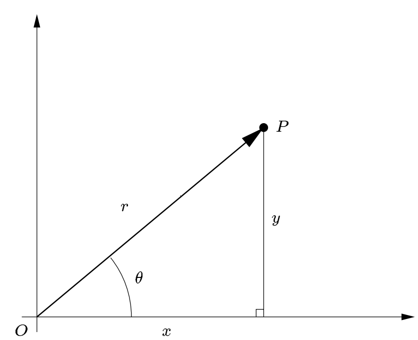


(c) $z = 0$

Figur 1.20: Konturer til $g(x, y, z) = z + \sqrt{x^2 + y^2}$



Figur 1.21: Kartesiske koordinater og polarkoordinater



Figur 1.22: Omregning mellom kartesiske koordinater og polarkoordinater

enklere og nyttigere å bruke *polarkoordinater* (r, θ) som vist i figur 1.21. Her står r for avstanden fra punktet til origo, men θ er vinkelen mellom vektoren $\overrightarrow{OP}$ og den positive x-aksen. Vinkelen θ er da bare bestemt opp til et heltallig multippel av 2π, men som regel velger man θ til å ligge i intervallet $[0, 2\pi)$, alternativt $[-\pi, \pi)$.

Før vi begynner å benytte polarkoordinater for å studere grafer av to variable skal vi se på hvordan en uttrykker et punkt gitt i kartesiske koordinater i polarkoordinater, og omvendt.

Grunnlaget for omregningen er elementær trigonometri. Se på den rettvinklede trekanten i figur 1.22. Katetene har lengde x og y, hypotenusen har lengde r og vinkelen i origo er θ. For å finne polarkoordinatene til punktet (x, y) regner vi først ut

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \, .$$

Deretter regner vi ut

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

Det er to vinkler i første omløp med samme sinus, men ved å se på hvilken kvadrant punktet (x, y) ligger i, er det ikke vanskelig å plukke ut den riktige vinkelen.

Det hender også at vi må gå den andre veien – at vi kjenner polarkoordinatene r og θ, og ønsker å finne x og y. Dette er lettere – vi observerer bare at

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

1.13 Eksempel
Finn polarkoordinatene til punktet $(-6, 2\sqrt{3}\,)$. Vi regner ut avstanden fra punktet til origo:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-6)^2 + (2\sqrt{3}\,)^2} = \sqrt{36+12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

For å finne vinkelen θ kan vi for eksempel regne ut sinus:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\,.$$

Det finnes to vinkler i første omløp med $\sin\theta = \frac{1}{2}$, nemlig $\theta = \frac{\pi}{6}$ og $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Siden vårt punkt $(-6, 2\sqrt{3}\,)$ ligger i andre kvadrant, må vi ha $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Polarkoordinatene til $(-6, 2\sqrt{3}\,)$ blir dermed $r = 4\sqrt{3}\,$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$. $\square$

Siden vi kan angi punkt i planet ved hjelp av polarkoordinater (r, θ) istedenfor kartesiske koordinater (x, y), kan vi også beskrive funksjoner av to variable ved hjelp av polarkoordinater

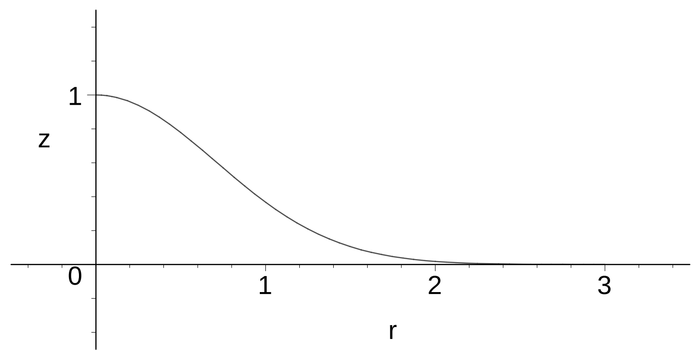
$$z = g(r, \theta)$$

istedenfor kartesiske koordinater

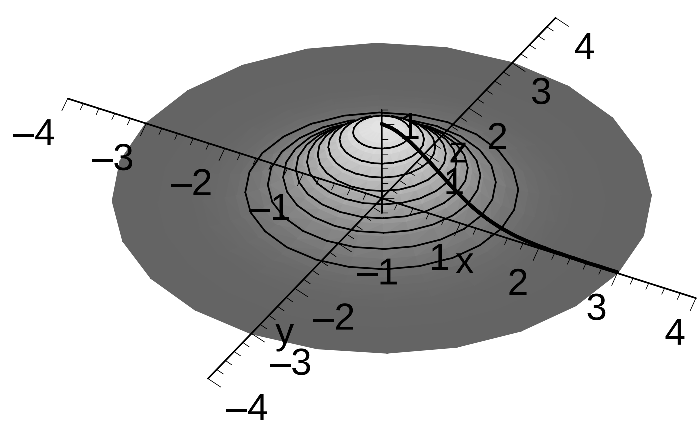
$$z = f(x, y)$$

Dette gjør en ved å sette $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Ofte kan det være nyttig å skrive om en funksjon til polarkoordinater for å få et bedre inntrykk av grafen.

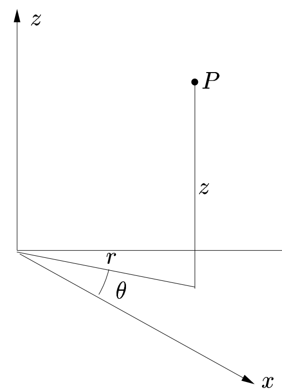
1.14 Eksempel
Hvis vi skriver om $z = e^{-(x^2+y^2)}$ til polarkoordinater, får vi $z = e^{-r^2}$. Tegner vi $z = e^{-r^2}$ som en funksjon av én variabel, får vi grafen i figur 1.23. Grafen til funksjonen $z = e^{-(x^2+y^2)}$ får vi ved å rotere denne grafen om z-aksen (se figur 1.24). $\square$



Figur 1.23: Funksjonen $z = e^{-r^2}$



Figur 1.24: Funksjonen $z = e^{-r^2}$ rotert omkring z-aksen



Figur 1.25: Sylinderkoordinater

Vi tar med et eksempel til:

1.15 Eksempel
Skriver vi om funksjonen $z = x^2 - y^2$ til polarkoordinater, får vi

$$z = x^2 - y^2 = (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta\,.$$

Dette betyr at hvis vi holder vinkelen θ konstant og varierer avstanden r, så følger z en parabelbue $z = r^2\cos 2\theta$. Fortegnet til $\cos 2\theta$ avgjør om parabelen vokser oppover eller nedover når r øker, og størrelsen til $|\cos 2\theta|$ avgjør hvor rask denne veksten er. Forsøk å lage en skisse av grafen ut i fra den informasjonen du nå har. □

1.4.2 Sylinderkoordinater

Også for funksjoner av tre variable kan det ofte lønne seg å skrive om til andre koordinatsystemer. Vi skal se raskt på to slike koordinatsystemer – sylinderkoordinater og kulekoordinater. Figur 1.25 viser grunnidéen for *sylinderkoordinater*; vi angir posisjonen til punktet P ved hjelp av de tre størrelsene r, θ og z. Sylinderkoordinater er nært beslektet med polarkoordinater – vi har bare hektet på en tredjekoordinat z.

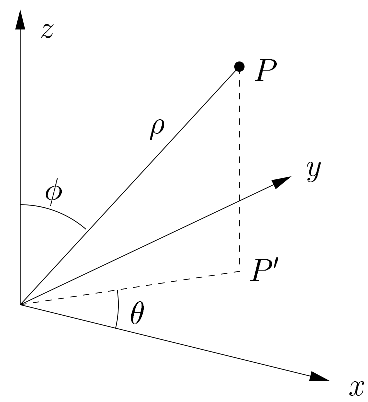
1.16 Eksempel
Skriv funksjonen

$$u = f(x, y, z) = (x^2 + y^2)e^{-z}$$

ved hjelp av sylinderkoordinater.

Siden $x^2 + y^2 = r^2$, får vi

$$u = r^2e^{-z}$$



Figur 1.26: Kulekoordinater

□

1.17 Eksempel
Beskriv nivåflatene til

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z}$$

ved hjelp av sylinderkoordinater.

Igjen kan vi sette inn $x^2 + y^2 = r^2$. Dette gir

$$u = f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z} = \frac{r^2}{z}$$

Nivåflaten $c = u$ bli dermed gitt av ligningen

$$c = \frac{r^2}{z}$$

Dette uttrykket kan omskrives til formen

$$z = \frac{r^2}{c}$$

Dermed ser vi at nivåflaten er en rotasjonsparaboloide med en radius som øker med c. □

1.4.3 Kulekoordinater

I *kulekoordinater* beskrives posisjonen til et punkt $P(x,y,z)$ ved hjelp av en lengde ρ og to vinkler θ og ϕ. Figur 1.26 viser idéen – ρ er avstanden fra P til origo, ϕ er vinkelen mellom z-aksen og vektoren $\overrightarrow{OP}$, og θ er den samme vinkelen som for sylinderkoordinatene, nemlig vinkelen mellom x-aksen og projeksjonen $\overrightarrow{OP'}$ av $\overrightarrow{OP}$ ned i xy-planet. Vinkelen ϕ ligger mellom 0 og π, mens θ ligger mellom 0 og 2π. For å uttrykke x, y og z ved hjelp av ρ, ϕ og θ, observerer vi først at

$$z = \rho \cos \phi$$

Vi ser også at $|\overrightarrow{OP'}| = |\overrightarrow{OP}| \cdot \sin \phi = \rho \sin \phi$. Dette betyr at

$$\begin{aligned} x &= |\overrightarrow{OP'}| \cos \theta = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y &= |\overrightarrow{OP'}| \sin \theta = \rho \sin \theta \sin \phi \end{aligned}$$

La oss se hvordan disse formlene brukes i praksis:

1.18 Eksempel
Hva slags flate beskriver ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

hvor $a > 0$ er en konstant?

For å svare på dette spørsmålet forsøker vi å sette inn formlene for kulekoordinater inn i ligningen. Dette gir

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi = a^2$$

Dersom vi rydder på uttrykket i midten får vi

$$\begin{aligned} &\rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi \\ &\qquad = \rho^2 \left(\left(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \right) \\ &\qquad\qquad = \rho^2 \left(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \right) = \rho^2 \end{aligned}$$

Ligningen reduseres altså til

$$\rho^2 = a^2$$

Men siden både a og ρ var større eller lik 0 beskriver $\rho = a$ flaten. Vi har altså en kule med radius a. □

1.19 Eksempel
Skriv om

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

til kulekoordinater. Vi ser at

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\rho \cos \theta \sin \phi)^2 + (\rho \sin \theta \sin \phi)^2 = \rho^2 \sin^2 \phi \\ z^2 &= \rho^2 \cos^2 \phi \end{aligned}$$

så
$$u = \rho^2 \sin^2 \phi - \rho^2 \cos^2 \phi = -\rho^2 \cos 2\phi\,.$$

Dette betyr at u er uavhengig av vinkelen θ. Holder vi vinkelen ϕ konstant, vokser eller avtar u proporsjonalt med ρ^2. Om u er positiv eller negativ avhenger av størrelsen på ϕ. Vi ser at u er positiv for $\phi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ og negativ for $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. $\square$

Til sist skal vi ta med et eksempel hvor vi beskriver en nivåflate ved hjelp av kulekoordinater:

1.20 *Eksempel

La funksjonen f være gitt ved

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{x^2}$$

Definisjonsmengden til f er alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ slik at både $x \neq 0$ og $z \neq 0$. Vi skriver om funksjonsuttrykket til sfæriske koordinater:

$$f(\rho, \theta, \phi) = \cos^2 \theta \tan^2 \phi + \tan^2 \theta$$

Legg merke til at ρ ikke inngår i dette funksjonsuttrykket. Det betyr at for alle punkt på en rett linje i $\mathbb{R}^3$ som går gjennom origo, er funksjonsverdien den samme.

Vi ønsker å beskrive nivåflatene til f. Derfor ser vi på ligningen

$$\cos^2 \theta \tan^2 \phi + \tan^2 \theta = c$$

Begge leddene på venstre side er større eller lik 0. Derfor har ligningen ingen løsning for $c < 0$. Dersom $c = 0$ må både $\cos\theta \tan\phi = 0$ og $\tan\theta = 0$. Men vi ser da at $\tan\theta = 0$ medfører at $\cos\theta = \pm 1$ og da må $\tan\phi = 0$. Dermed er også $\sin\phi = 0$. Men dette er umulig siden punkt med $x = \rho\cos\theta\sin\phi = 0$ ikke er i definisjonsmengden til f. Vi kan derfor anta at $c > 0$.

Husk at (ρ, θ, ϕ) er sfæriske koordinater. Som nevnt inngår ikke ρ i ligningen og derfor vil løsningen bestå av en mengde linjer gjennom origo. For å tegne opp nivåflatene, ser vi derfor først på hvordan de snitter en kule med sentrum i origo. Vi setter derfor ρ til å være en konstant, for eksempel $\rho = 1$.

For å forenkle situasjonen ser vi nå litt på symmetrien i uttrykket. Dersom vi har en løsning og lar θ øke med π får vi igjen en løsning. Likens dersom vi erstatter ϕ med $\pi - \phi$ har vi fremdeles en løsning. Det siste utsagnet betyr at nivåflaten er symmetrisk om xy-planet, mens den første sier at $180°$ omkring z-aksen sender nivåflaten på seg selv. Derfor holder det å se på θ mellom

$-\frac{\pi}{2}$ og $\frac{\pi}{2}$ og ϕ mellom 0 og $\frac{\pi}{2}$, resten av løsningene får vi frem ved å bruke symmetriene.

La oss først se på hva som skjer dersom c er liten. Vi skal bruke at for små vinkler α er

$$\begin{aligned}\sin\alpha &\approx \alpha\\ \cos\alpha &\approx 1\\ \tan\alpha &\approx \alpha\end{aligned}$$

Dette er ikke godt nok om vi skal finne eksakt hvordan nivåflatene ser ut, men er godt nok for å skissere nivåflatene.

For å tydeliggjøre diskusjonen av ligningen skriver vi den litt om:

$$(\cos\theta\tan\phi)^2 + (\tan\theta)^2 = c$$

Poenget er at dette ligner på ligningen for en sirkel. Altså $a^2 + b^2 = c$ med $a = \cos\theta\tan\phi$ og $b = \tan\theta$. Vi har at $\tan^2\theta \le c$, dermed er θ en liten vinkel. Det følger at $\cos\theta \approx 1$ og deremed at $\tan^2\phi \approx (\cos\theta\tan\phi)^2 \le c$, så også ϕ er liten.

Som en tilnærming kan vi nå bruke ligningen

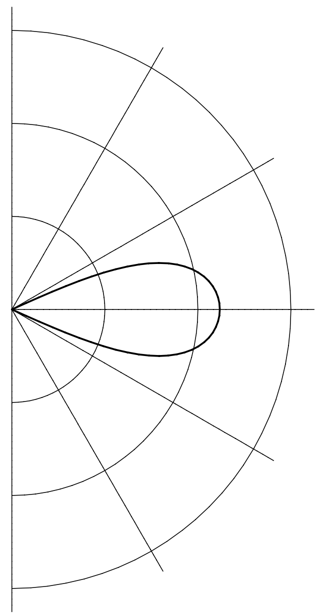
$$\phi^2 + \theta^2 = c \quad \text{hvor } \phi \ge 0$$

Vi setter da $\phi = \sqrt{c}\sin t$ og $\theta = \sqrt{c}\cos t$, hvor t går fra 0 til π. For å tegne denne kurven (med $\rho = 1$) setter vi inn i ligningene for sfæriske koordinater.

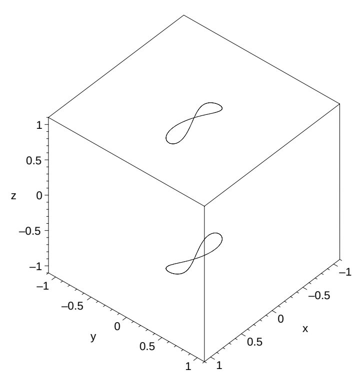
$$\begin{aligned}x &= \rho\cos\theta\sin\phi \approx \phi = \sqrt{c}\sin t\\ y &= \rho\sin\theta\sin\phi \approx \theta\phi = c\cos t\sin t = \frac{1}{2}c\sin(2t)\\ z &= \rho\cos\phi \approx 1\end{aligned}$$

Dette blir en liten løkke som slynger seg ut fra nordpolen. Se figur 1.27 for en skisse når $c = 0.2$.

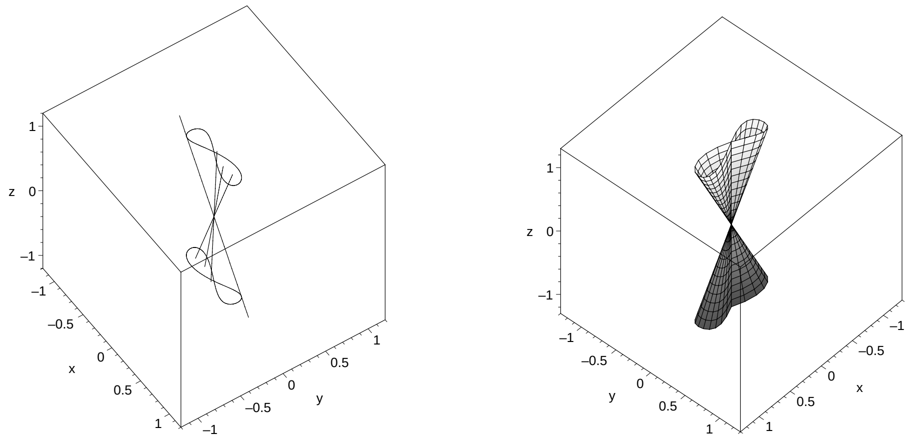
Vi bruker nå symmetriene for å skissere hele løsningsmengden til ligningen på sfæren $\rho = 1$. Se figur 1.28. For å tegne hele nivåflaten trekker vi rette linjer fra kurven og gjennom origo. (Figur 1.29). Når c øker vil snittet mellom nivåflatene og sfæren $\rho = 1$ fremdeles være åttetallsformede kurver, størrelsen vil øke og formen vil deformeres. Se figur 1.30. □



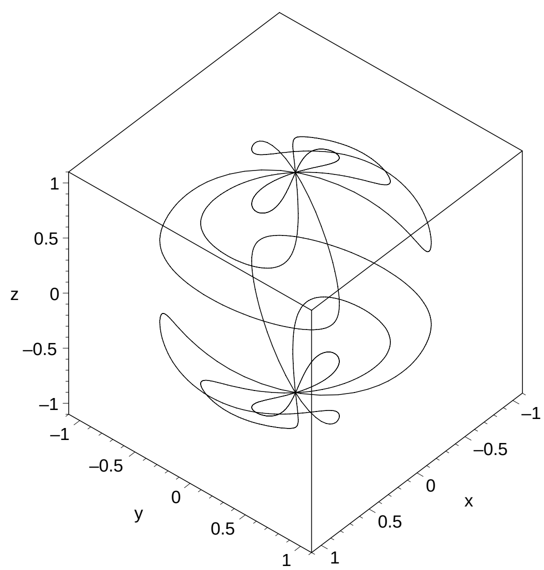
Figur 1.27: Tilnærming til en del av kurven $\phi^2 + \theta^2 = 0.2,\ \rho = 1$



Figur 1.28: Hele kurven $\phi^2 + \theta^2 = 0.2,\ \rho = 1$



Figur 1.29: Tegning av nivåflate for $c = 0.2$



Figur 1.30: Snitt mellom sfæren $\rho = 1$ og nivåflatene $c = 0.2$, $c = 1$ og $c = 4$.

1.4.4 Formelsamling for koordinatsystemer

Vi tar her med en formelsamling for de ulike koordinatsystemene vi nå har sett på.

Polarkoordinater
Polarkoordinater (r, θ) for planet er gitt ved

$$x = r\cos\theta \tag{1.1}$$
$$y = r\sin\theta \tag{1.2}$$

Sylinderkoordinater
Sylinderkoordinater (r, θ, z) for rommet er gitt ved

$$x = r\cos\theta \tag{1.3}$$
$$y = r\sin\theta \tag{1.4}$$
$$z = z \tag{1.5}$$

Kulekoordinater
Kulekoordinater (ρ, θ, ϕ) for rommet er gitt ved

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi \tag{1.6}$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\phi \tag{1.7}$$
$$z = \rho\cos\phi \tag{1.8}$$

1.5 Oppgaver

Oppgave 1.1
Finn definisjonsmengden til funksjonen.

a) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+4y^2}$
b) $f(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}$
c) $f(x,y) = \ln(x+y)$
d) $f(x,y) = \tan(x-y)$
e) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2-25}$

Oppgave 1.2
Tegn konturer for funksjonen. Skisser deretter grafen.

a) $f(x,y) = x$
b) $f(x,y) = \cos y$
c) $f(x,y) = y + 2e^x$
d) $f(x,y) = \frac{2x-3}{x^2+y^2+1}$
e) $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$
f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Oppgave 1.3
Finn nivåkurvene til funksjonen. Tegn nok av dem til at du kan danne deg et bilde av funksjonsgrafen.

a) $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2$
b) $f(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}$
c) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$
d) $f(x,y) = e^{x^2-y}$
e) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

Oppgave 1.4
Skisser grafen til funksjonen

a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$
b) $f(x,y) = y^2 - x$
c) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$
d) $f(x,y) = x^2 - 4y^2$
e) $f(x,y) = \ln(xy)$
f) $f(x,y) = \sqrt{4xy - 3y^2}$

Oppgave 1.5
Tegn opp nivåflater for funksjonene.

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
b) $f(x,y,z) = 2x + y - z$
c) $f(x,y,z) = xy + xz$
d) $f(x,y,z) = \frac{x^2-y}{z^2}$
e) $f(x,y,z) = e^{xyz}$
f) $f(x,y,z) = x^2 - 2(x-y+z)y + z^2$

Oppgave 1.6
Skriv om funksjonen til polarkoordinater. Skisser grafen.

a) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
b) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$
c) $f(x,y) = \frac{x}{y}$
d) $f(x,y) = x^2 - 4y^2$
e) $f(x,y) = e^{xy}$
f) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

Oppgave 1.7
Skriv om funksjonen til både sylinder- og kulekoordinater. Avgjør hva du synes er mest informativt i hvert enkelt tilfelle.

a)	$f(x,y,z) = (x^2+y^2)e^{-z^2}$	d)	$f(x,y,z) = \frac{x^2-y^2}{z}$
b)	$f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$	e)	$f(x,y,z) = z \cdot \arctan(\frac{y}{x})$
c)	$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z^2}$	f)	$f(x,y,z) = x^2+y^2-2z^2$

Oppgave 1.8
Bruk MAPLE eller et annet egnet dataverktøy til å tegne følgende grafer:

a) $f(x,y) = \frac{e^x}{1+y^2}$ for $-2 \leq x \leq 2$ og $-2 \leq y \leq 2$.

b) $f(x,y) = 5x^2 + y^3 - 4y$ for $-2 \leq x \leq 2$ og $-3 \leq y \leq 3$.

c) $f(x,y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$ for $-1 \leq x \leq 1$ og $-1 \leq y \leq 1$.

Oppgave 1.9
Bruk MAPLE eller et annet egnet dataverktøy til å tegne nivåflater for følgende funksjoner:

a) $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$ for $c = -1$, $c = 0$ og $c = 1$.

b) $f(x,y,z) = xyz$ for $c = -10$, $c = 0$, $c = 10$ og $c = 100$.

c) $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}$ for $c = 0$ og $c = 1$.

d) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^2+y^2-z^2) + 1$ for $c = 0$, $c = \frac{1}{2}$, $c = 1$ og $c = 2$.

Kapittel 2

Kontinuitet og derivasjon

Målet med dette kapittelet er å etablere et solid fundament for å kunne drøfte funksjoner av flere variable. Fra en teoretisk synsvinkel er et hovedproblem at funksjonsbegrepet favner svært vidt. Dersom vi vet at f er en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$ vet vi ikke mer enn at for hvert punkt (x, y) så er $f(x, y)$ et reelt tall. Spesielt sier definisjonen ingen ting om at $f(1, 2)$ skal være i nærheten av 3 selv om både $f(1.001, 2)$ og $f(1, 1.9999)$ skulle vise seg å være 3. Derfor er en sky av punkt en god beskrivelse av grafen til en tilfeldig valgt funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Om grafen likevel skulle vise seg å være en glatt flate, må dette sies å være et mirakuløst sammentreff.

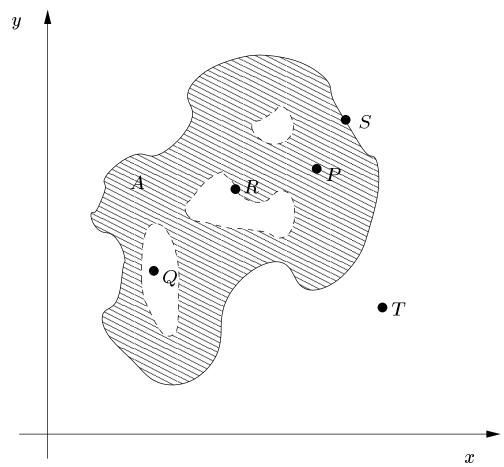
Likevel, som du kanskje har oppdaget, innehar de fleste funksjoner som vi møter i praksis, ikke en slik vilkårlighet. Som matematiker bør en derfor stille spørsmålet: **Kan vi finne et anvendelig kriterium for at en funksjon skal ha kvalitative egenskaper i samsvar med vår intuisjon?**

Vår tilnærming til dette spørsmålet vil være å formulere slike kriteria, og deretter undersøke hvilke kvalitative egenskaper som følger. Hvorvidt kriteriene er anvendelige vil vi se ved å forsøke å bruke dem i eksempler, oppgaver og anvendelser. Intuisjonen vil helt sikkert møte utfordringer underveis og gradvis endre og utvikle seg i møte med teorien for funksjoner av flere variable.

2.1 Topologiske begreper

Vi skal innføre noen begrep som omhandler mengder $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Det er viktig at du får en intuitiv forståelse av disse begrepene, fordi du vil møte dem ofte, både i dette heftet og i senere matematikkurs.

En mengde A i $\mathbb{R}^n$ er en samling av punkt, og kan forsåvidt se ganske vilkårlig ut. Men de fleste mengdene vi vil møte i praksis har greie beskriv-



Figur 2.1: En mengde A og noen punkt

elser, gjerne gitt ved ulikheter.

Randen til en mengde A er de punktene i $\mathbb{R}^n$ som skiller A fra det som ligger utenfor. Se på figur. Randen til A er en mengde og vi skriver ∂A for denne. Et punkt **a** kalles et **randpunkt** for A dersom det ligger på randen til A.

Det indre av A er de punktene i A som ikke ligger på randen. Dette er altså de punktene i A som er fullstendig omsluttet av andre punkt i A. Et punkt **a** kalles et **indre punkt** for A dersom det ligger i det indre av A.

Tillukningen til A er unionen av randen til A og det indre av A. Vi innfører notasjonen $\overline{A}$ for tillukningen til A, og vi kan skrive $\overline{A} = A \cup \partial A$.

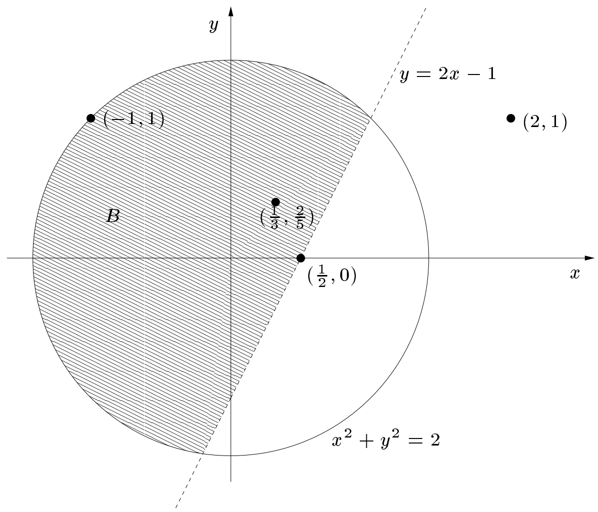
La oss se på noen eksempler.

2.1 Eksempel

Figur 2.1 viser et skravert område, mengden A. Vi bruker konvensjonen at en heltrukken linje angir punkt som er med i mengden, mens en stiplet linje ikke er med i mengden.

Vi ønsker nå å karakterisere punktene P, Q, R, S og T.

> Punktet P ligger i mengden A. Notasjon for dette er $P \in A$. Vi ser at P ikke er et randpunkt, derfor må det være et indre punkt for A.
>
> Punktet Q ligger ikke i mengden A. Det er heller ikke noe randpunkt siden alle andre punkt tilstrekkelig nær Q heller ikke er i A. Derfor er Q ikke med i tillukningen til A. Vi kan derfor skrive $Q \notin \overline{A}$.
>
> Punktet R ligger ikke i mengden A. Linjen er stiplet. Derimot ligger det på randen til A. Siden det ligger på randen er det også et punkt i tillukningen. Vi kan skrive $R \notin A$, $R \in \partial A$ og $R \in \overline{A}$.



Figur 2.2: Mengden B

Punktet S ligger i mengden A. Linjen er heltrukket. Det er også et randpunkt siden det finnes punkt vilkårlig nær S som ikke er i A. S er også et punkt i tillukningen til A siden det allerede ligger i A. Vi har $S \in A$, $S \in \partial A$ og $S \in \overline{A}$.

Punktet T ligger hverken i A eller på randen til A og følgelig ligger det heller ikke i tillukningen. Vi har da $T \notin \overline{A}$.

$\square$

La oss se på enda et eksempel, men i dette tilfellet med en mer konkret angitt mengde.

2.2 Eksempel

La B være mengden punkt (x, y) i $\mathbb{R}^2$ som oppfyller de to ulikhetene

$$x^2 + y^2 \leq 2$$
$$y > 2x - 1$$

La oss avgjøre hvordan punktene $(\frac{1}{2}, 0)$, $(-1, 1)$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ og $(2, 1)$ forholder seg til mengden B. Først skisserer vi mengden. Vi ser at den første ulikheten angir at punktene i B ligger på eller innenfor en sirkel med radius $\sqrt{2}$ og sentrum i origo. Den andre ulikheten angir at punktene i B ligger over og til venstre for linja $y = 2x - 1$. Dette gir figuren 2.2. Vi ser at $(-1, 1)$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}) \in B$ siden disse punktene oppfyller begge ulikhetene. Punktet $(\frac{1}{2}, 0) \notin B$ siden $(\frac{1}{2}, 0)$ ikke oppfyller den andre ulikheten, mens $(2, 1) \notin B$ siden punktet ikke oppfyller noen av ulikhetene. Videre ser vi at $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ ligger i det indre av B, mens punktene $(-1,1)$ og $(\frac{1}{2}, 0)$ er randpunkt til B. □

En **åpen mengde** er en mengde som ikke inneholder noen av sine randpunkt. Sagt på en annen måter er A åpen hvis og bare hvis det indre av A er hele mengden.

En **lukket mengde** en en mengde som inneholder alle sine randpunkt. Det vil si at A er lukket hvis og bare hvis $A = \overline{A}$.

2.3 Eksempel
La oss avgjøre om mengden A fra eksempel 2.1 og mengden B fra eksempel 2.2 er åpne eller lukkede.

Vi ser først på A. Mengden er ikke åpen siden punktet S er både på randen og i A. Den er heller ikke lukket siden R er et eksempel på et punkt på randen som ikke er i A.

Mengden B er på samme måte hverken åpen eller lukket. Vi ser at B ikke er åpen siden $(-1,1) \in B$ og $(-1,1) \in \partial B$, og at B ikke er lukket siden $(\frac{1}{2}, 0) \in \partial B$, men $(\frac{1}{2}, 0) \notin B$. □

Vi tar også med noen eksempler på mengder som er lukkede eller åpne:

2.4 Eksempel
Vi vil se på følgende mengder, og avgjøre om de er åpne eller lukkede:

a) La $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 0\}$.

b) La $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{1}{4}y^2 \geq 1\}$.

c) La C være det lukkede intervallet $[-1, 4]$ på $\mathbb{R}$.

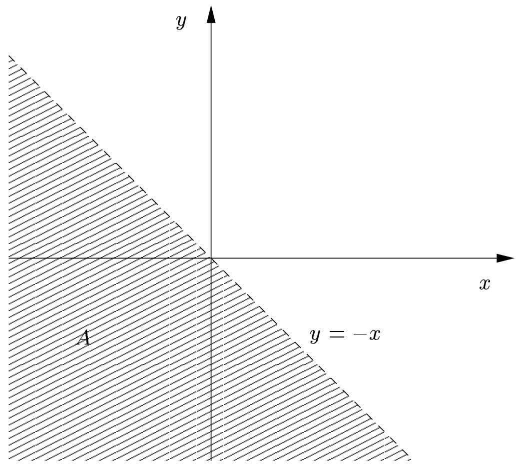
d) La $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

e) La $E = \mathbb{R}^4$.

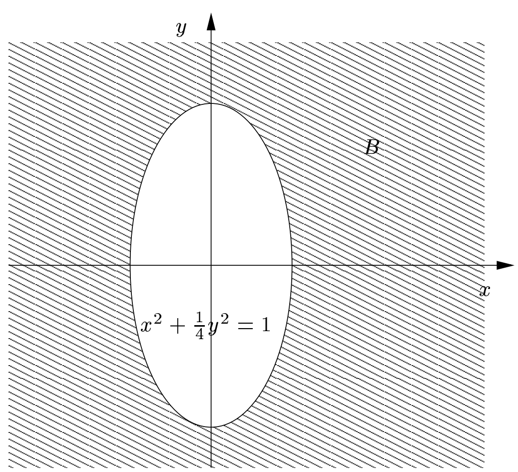
f) La $F = \{(1, \pi)\}$.

a) Mengden A er de punktene som nedenfor og til venstre for linjen $y = -x$. Se figur 2.3. Vi ser at randen til A er punktene som ligger på denne linjen. Det vil si at $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$. Men ingen av disse punktene ligger i mengden A. Følgelig er A en åpen mengde.

b) B er mengden av alle punkt i planet som ligger på eller utenfor ellipsen $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$. Se figur 2.4. Randen til B er $\{(x,y) \mid x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1\}$, og disse punktene er med i B. Derfor er B lukket.



Figur 2.3: Mengden $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 0\}$



Figur 2.4: Mengden $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{1}{4}y^2 \geq 1\}$

c) C er intervallet $[-1, 4]$ og randen består av endepunktene -1 og 4. Disse er med i intervallet, per def. Derfor er C en lukket mengde. Dette gjelder generelt: Alle lukkede intervaller er lukkede mengder.

d) Mengden D består av alle punkt i $\mathbb{R}^3$ unntatt origo. Randen består derfor av nettopp punktet origo: $\partial D = \{(0,0,0)\}$, og dette punktet ligger ikke i D. Derfor er D en åpen mengde.

e) Mengden $E = \mathbb{R}^4$ har ingen rand, det vil si at $\partial E = \emptyset$, den tomme mengden. Og siden randen ikke har noen punkt er det tautologisk sant at ingen av randpunktene ligger i E. Dermed er E åpen. Men den tomme mengden er også inneholdt i enhver annen mengde. Derfor er $\partial E = \emptyset \subseteq E$, altså er E også en lukket mengde.

f) Randen til mengden $F = \{(1, \pi)\}$ består av punktet $(1, \pi)$, og derfor er $\partial F \subseteq F$. Det vil si at F er lukket. □

En mengde kalles **begrenset** dersom vi kan omslutte hele mengden med en kule (eller sirkel) som har sentrum i origo. Det vil si at A er begrenset dersom det finnes en radius R slik at $\|\mathbf{a}\| < R$ for alle $\mathbf{a}$ i A. En mengde som ikke er begrenset kalles **ubegrenset**.

2.5 Eksempel
Vi skal nå se på noen mengder og avgjøre om de er begrensede eller ikke:

a) La $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x \leq 3 \text{ og } 3 \leq y \leq 5\}$.

b) La $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$.

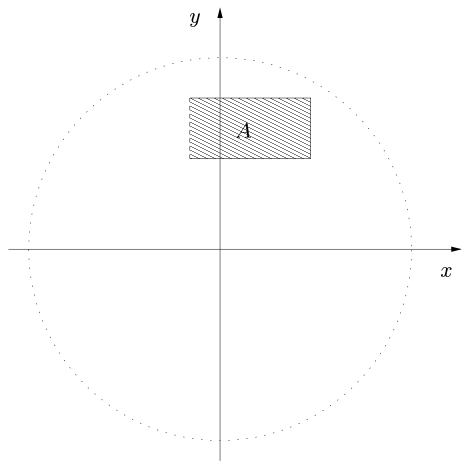
c) La $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x - 2 \text{ og } x \geq -1\}$.

d) La $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 4\}$.

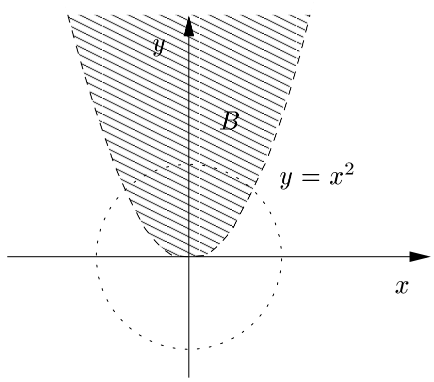
e) La $E = \mathbb{R}$.

a) Vi skisserer mengden, figur 2.5, og ser at den prikkede sirkelen med sentrum i origo omslutter hele mengden. Derfor er A begrenset.

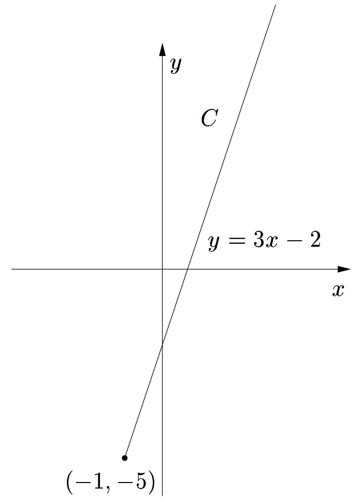
b) Mengden B består av alle punkt over parabelen $y = x^2$. Se figur 2.6. Vi ser at uansett hvor stor vi lager en sirkel med sentrum i origo, vil mengden B ha punkt som ligger utenfor sirkelen. Derfor er B ubegrenset.



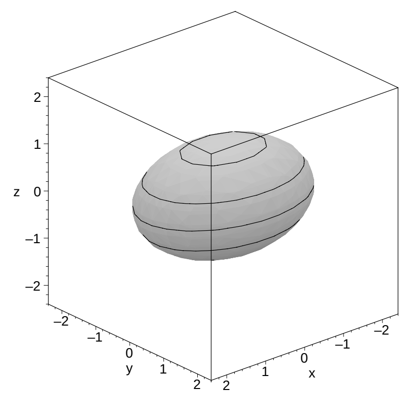
Figur 2.5: Mengden $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x \leq 3 \text{ og } 3 \leq y \leq 5\}$



Figur 2.6: Mengden $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$



Figur 2.7: Mengden $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x - 2 \text{ og } x \geq -1\}$



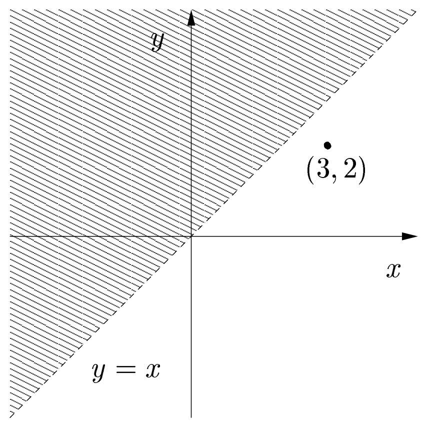
Figur 2.8: Ellipsoiden som avgrenser mengden D.

c) Mengden C er en stråle ut fra punktet $(-1, -5)$, se figur 2.7 , og denne strålen har punkt som befinner seg vilkårlig langt borte fra origo. C er derfor en ubegrenset mengde.

d) D er de punktene som ligger på og innenfor ellipsoiden $x^2+2y^2+3z^2 = 4$. Se figur 2.8. Ingen av punktene har avstand større enn 2 til origo. Derfor er D begrenset.

e) $E = \mathbb{R}$ er en ubegrenset mengde siden det finnes vilkårlig store tall. Husk at avstanden til origo, punktet 0, er absoluttverdien til tallet. □

Et punkt $\mathbf{a}$ i en mengde A sies å være et **isolert punkt** for mengden A



Figur 2.9: Mengden $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\} \cup \{(3, 2)\}$

dersom det ikke finnes andre punkt i A vilkårlig nær $\mathbf{a}$. Sagt på en annen måte er $\mathbf{a} \in A$ et isolert punkt dersom $\mathbf{a}$ ikke ligger i tillukningen til $A \setminus \{\mathbf{a}\}$.

Et punkt $\mathbf{a}$ kalles et **akkumulasjonspunkt** til mengden A dersom $\mathbf{a}$ ligger i $\overline{A}$ og ikke er et isolert punkt.

La oss se på to eksempler på mengder som har isolerte punkt.

2.6 Eksempel
La A være mengden gitt ved

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\} \cup \{(3, 2)\}$$

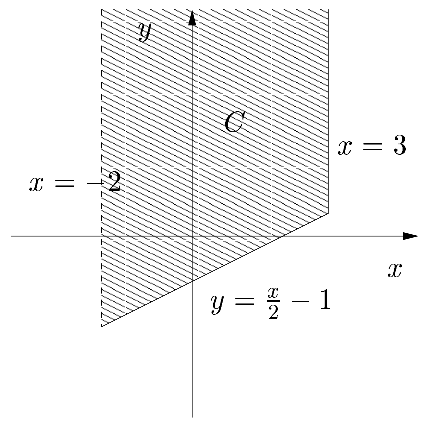
Se figur 2.9 for en skisse av mengden. Legg merke til at A består både av punktene med $x < y$ og punktet $(3, 2)$. Vi ser at $(3, 2)$ ikke ligger i nærheten av andre punkt på A og derfor er $(3, 2)$ et isolert punkt for A. Ingen av de andre punktene på A er isolerte.

Tillukningen til A er mengden

$$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\} \cup \{(3, 2)\}$$

Vi ser derfor at akkumulasjonspunktene til A er de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ med $x \leq y$. Det vi har gjort er å kaste bort de isolerte punktene fra tillukningen $\overline{A}$. □

2.7 Eksempel
La B være mengden som består av de to punktene $(0, 1, 2)$ og $(\pi, \ln 5, -2)$. Vi kan skrive $B = \{(0, 1, 2), (\pi, \ln 5, -2)\}$. Begge de to punktene i B er isolerte punkt. Videre er tillukningen til B lik B selv. Altså $\overline{B} = B$. Og når vi kaster bort de isolerte punktene får vi den tomme mengden. Følgelig har B ingen akkumulasjonspunkt. □



Figur 2.10: Mengden $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 < x \leq 3 \text{ og } y \geq \frac{x}{2} - 1\}$

2.8 Eksempel
Som et siste eksempel skal vi finne akkumulasjonspunktene til mengden C gitt ved

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 < x \leq 3 \text{ og } y \geq \frac{x}{2} - 1\}$$

Vi skisserer mengden i figur 2.10. Det første vi observerer er at C ikke har noen isolerte punkt. Derfor er akkumulasjonspunktene lik tillukningen til C. Tillukningen finner vi ved å ta unionen av punktene på C og punktene på randen til C. Dette gir

$$\overline{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 3 \text{ og } y \geq \frac{x}{2} - 1\}$$

(Den eneste forskjellen på angivelsen av C og $\overline{C}$ er at et $<$-tegn er forandret til et $\leq$-tegn.) Akkumulasjonspunktene til C er derfor de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ som oppfyller ulikhetene $-2 \leq x \leq 3$ og $y \geq \frac{x}{2} - 1$. $\square$

2.1.1 *Formelle definisjoner

De uformelle definisjonene over er ment å skulle gi en intuitiv forståelse av begrepene. Selv om det ikke er svært relevant for dette kurset skal vi nå gi mer presise definisjoner av disse begrepene. Dersom du synes du har forstått begrepene godt nok, kan du gjerne hoppe videre til neste seksjon.

Vi definerer først randpunkt.

2.9 Definisjon
La $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da er $\mathbf{a}$ et randpunkt for A dersom for hver $\delta > 0$ så finnes $\mathbf{x} \in A$ og $\mathbf{y} \notin A$ med

$$||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| < \delta \quad \textit{og} \quad ||\mathbf{y} - \mathbf{a}|| < \delta$$

Nå kan vi definere randen til en mengde som samlingen av alle randpunkt.

2.10 Definisjon
Randen til en mengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er mengden av alle randpunkt. Det vi si

$$\partial A = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} \textit{ er et randpunkt for } A\}$$

Vi kan nå definere det indre av en mengde og tillukningen til en mengde.

2.11 Definisjon
Det indre av A er $A \setminus \partial A$. *Et punkt* $\mathbf{a}$ *er et indre punkt for* A *dersom* $\mathbf{a} \in A$ *og* $\mathbf{a} \notin \partial A$.

2.12 Definisjon
Tillukningen til A *er* $A \cup \partial A$.

Åpne og lukkede mengder kan nå defineres som følger.

2.13 Definisjon
En mengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er åpen dersom A er lik det indre av A.

2.14 Definisjon
En mengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er lukket dersom $A = \overline{A}$.

Vi har også følgende karrakteristikk av indre punkt

2.15 Setning
La $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da er $\mathbf{a}$ et indre punkt for A hvis og bare hvis det finnes en $\delta > 0$ slik at alle $\mathbf{x}$ som oppfyller

$$||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| < \delta$$

er med i A.

Merk at en mengde er åpen hvis og bare hvis alle punkt $\mathbf{a} \in A$ er indre punkt for A.

Vi skal nå definere hva det vil si at en mengde er begrenset.

2.16 Definisjon
La $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Vi sier at A er begrenset dersom det finnes et positivt reelt tall R slik at for alle $\mathbf{a} \in A$ er

$$||\mathbf{a}|| < R$$

Isolerte punkt defineres som følger:

2.17 Definisjon
La $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da er $\mathbf{a}$ et isolert punkt for A dersom $\mathbf{a} \in A$ og det finnes en $\delta > 0$ slik at for alle $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ så er

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| > \delta$$

Tilslutt kan vi definere akkumulasjonspunkt som over.

2.18 Definisjon
La $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da er $\mathbf{a}$ et akkumulasjonspunkt for A dersom $\mathbf{a} \in \overline{A}$ og $\mathbf{a}$ ikke er et isolert punkt for A.

Vi har følgende karrakteristikk av akkumulasjonspunkt.

2.19 Setning
La $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da er $\mathbf{a}$ et akkumulasjonspunkt for A hvis og bare hvis det for hver $\delta > 0$ finnes en $\mathbf{x} \in A$ slik at

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$$

2.2 Grenseverdier

Grenseverdier er et viktig begrep i studiet av funksjoner. I teorien for én variabel brukte vi grenseverdibegrepet til å definere både kontinuitet og den deriverte. Vi skal nå definere grenseverdier for funksjoner av flere variable. Senere i kapittelet skal vi se hvordan grenseverdier kan brukes for å forstå kontinuitet og derivasjon i tilfellet med to eller flere variable. Grenseverdier har også sjarm helt på egen hånd.

Intuitivt betyr $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ at funksjonsverdiene $f(\mathbf{x})$ nærmer seg L når $\mathbf{x}$ nærmer seg $\mathbf{a}$. For å skrive ned en presis definisjon av grenseverdi må vi avklare et problem. Funksjonen f har en definisjonsmengde, D_f; hvordan skal punktet $\mathbf{a}$ forholde seg til D_f for at begrepet grenseverdi skal være meningsfult?

For å illustrere det første problemet skal vi se på et eksempel:

2.20 Eksempel
Definer funksjonen f ved

$$f(x, y) = \sqrt{x + 1} + \frac{\sin y}{y}$$

Legg merke til at definisjonsmengden D_f er

$$D_f = \{(x, y) \quad | \quad x \geq -1 \text{ og } y \neq 0\}$$

Er det noen av disse grenseverdiene du umiddelbart kan se at ikke eksisterer?

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,2)} f(x,y)$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-5,1)} f(x,y)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-1)} f(x,y)$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Poenget er om punktet vi nærmer oss ligger i det indre av eller på randen til definisjonmengden til funksjonen. For eksempel ligger $(4,2)$ i det indre av D_f, punktene $(-1,-1)$ og $(0,0)$ ligger på randen til D_f, mens $(-5,1)$ ligger adskilt fra D_f. Rent umiddelbart kan vi derfor si at grenseverdien b) ikke eksisterer fordi når (x,y) er nær nok $(-5,1)$ vil ikke $f(x,y)$ være definert. $\square$

Moralen i eksempelet over er at om det skal gi mening å spørre om hva grenseverdien $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ er, så bør punktet **a** ligge i tillukningen til definisjonsmengden til f.

Hva så med isolerte punkt? Bør grenseverdien i **a** eksistere dersom **a** er et isolert punkt for definisjonsmengden til f. La oss se på et eksempel.

2.21 Eksempel

Definer funksjonen f ved

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{hvis } x > 0 \\ 4 & \text{hvis } (x,y) = (-1,3) \end{cases}$$

Spørsmålet er om $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,3)} f(x,y)$ eksisterer. Merk at definisjonsmengden til f er $D_f = \{(x,y) \mid x > 0\} \cup \{(-1,3)\}$ og at $(-1,3)$ er et isolert punkt for denne mengden. Det betyr at når (x,y) nærmer seg $(-1,3)$ vil $f(x,y)$ etterhvert bli udefinert. Derfor sier vi at grenseverdien $\lim_{(x,y)\to(-1,3)} f(x,y)$ ikke eksisterer. $\square$

Lærdommen fra dette eksempelet er at grenseverdien $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ ikke bør eksistere dersom **a** er et isolert punkt for D_f. Vi ser derfor at grenseverdien ikke bør være definert med mindre **a** er et akkumulasjonspunkt for definisjonsmengden til f.

Formelt definerer vi grenseverdien på denne måten:

2.22 Definisjon

Anta at $f : A \to \mathbb{R}$ er definert på en delmengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og at **a** *er et akkumulasjonspunkt for A. Vi sier at det reelle tallet L* er grenseverdien for

$f(\mathbf{x})$ når $\mathbf{x}$ går mot $\mathbf{a}$ *dersom det for ethvert tall* $\varepsilon > 0$ *finnes et tall* $\delta > 0$ *slik at for alle* $\mathbf{x} \in A$ *som oppfyller ulikheten* $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta$, *så er* $|f(\mathbf{x})-L| < \varepsilon$. *Vi skriver*

$$L = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$$

På samme måte som for funksjoner av en variabel er det svært omstendelig å bruke definisjonen av grenseverdi til å gjøre beregninger. Derfor lønner det seg å innse at vi stort sett kan bruke de vanlige regnereglene. For ordens skyld skriver vi opp disse:

2.23 Setning
La f *og* g *betegne funksjoner av* n *variable og la* h *være en funksjon av en variabel. Anta at grenseverdiene* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ *og* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ *eksisterer og at* $\mathbf{a}$ *er et akkumulasjonspunkt for* $D_f \cap D_g$. *Da er*

1. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$
2. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) - \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$
3. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$
4. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})}$ *forutsatt at* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) \neq 0$.
5. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(f(\mathbf{x})) = h(L)$ *dersom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ *og* h *er kontinuerlig i* L.

Vi utelater beviset siden det er nøyaktig det samme som i det en-dimensjonale tilfellet. Isteden tar vi med noen eksempel på hvordan setningen brukes.

2.24 Eksempel
Finn

$$\lim_{(x,y)\to(1,4)} \left(2x - y^2\right)$$

Ved å bruke regel 2 og 3 ser vi at vi kan sette inn 1 for x og 4 for y. Vi får da:

$$\lim_{(x,y)\to(1,4)} \left(2x - y^2\right) = 2 \cdot 1 - 4^2 = -14$$

$\square$

2.25 Eksempel
Beregn grenseverdien

$$\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2, \frac{\pi}{2}, 0)} \left(e^x + \frac{xz + \sin y}{z+1}\right)$$

Ved å bruke regel 2 har vi

$$\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)}\left(e^x+\frac{xz+\sin y}{z+1}\right)=\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)}e^x+\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)}\frac{xz+\sin y}{z+1}$$

Vi ser på det først leddet og ved å bruke regel 5 får vi

$$\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)}e^x=e^{\ln 2}=2$$

Det andre leddet beregner vi ved å bruke regel 4:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)}\frac{xz+\sin y}{z+1}&=\frac{\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)}(xz+\sin y)}{\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)}(z+1)}\\&=\frac{0\cdot\ln 2+\sin\frac{\pi}{2}}{0+1}=\frac{1}{1}=1\end{aligned}$$

Dermed blir grenseverdien lik

$$\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)}\left(e^x+\frac{xz+\sin y}{z+1}\right)=2+1=3$$

□

2.26 Eksempel
Finn

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}\frac{x^2+4\sin y}{xy^2}$$

Ved å bruke regel 4, ser vi at

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}\frac{x^2+4\sin y}{xy^2}=\frac{\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}(x^2+4\sin y)}{\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}(xy^2)}$$

Tar vi telleren og nevneren hver for seg, har vi at

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}(x^2+4\sin y)=\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}x^2+\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}4\sin y=1+4=5$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}xy^2=\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}x\cdot\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}y^2=1\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}$$

Dette gir $\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}\frac{x^2+4\sin y}{xy^2}=\frac{5}{\frac{\pi^2}{4}}=\frac{20}{\pi^2}$. □

Også for grenseverdier i flere variable har vi ubestemte uttrykk. Et typisk eksempel på slike er grenseverdier på formen $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$, hvor både $f(\mathbf{x}) \to 0$ og $g(\mathbf{x}) \to 0$ når $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$. Slike kalles "0/0"-uttrykk. Andre eksempler er "∞/∞"-uttrykk, "$\infty - \infty$"-uttrykk, og så videre.

Det er ikke noen generell metode en kan benytte for å avgjøre om et ubestemt uttrykk har en grenseverdi eller ikke. Men vi skal se på noen eksempler, og gi forslag til ulike angrepsmåter. Noen av disse tipsene fungerer best på grenseverdier som eksisterer, mens andre er nyttige for å vise at uttrykket ikke har noen grenseverdi.

La oss se på noen eksempler med ubestemte uttrykk:

2.27 Eksempel
Finn grenseverdien

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

Dette er et "0/0"-uttrykk, derfor kan vi ikke sette inn $x = 1$ og $y = 1$ for å finne grenseverdien. Vi må finne på noe annet; kanskje uttrykket kan forenkles? La oss forsøke å faktorisere telleren. Det er lett å se at dersom vi setter $y = x$ inn i $x^3 - y^3$ så får vi 0. Derfor utfører vi polynomdivisjonen $(x^3 - y^3) : (x - y)$. Dette gitt at $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Vi setter inn i grenseverdien og får:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3 - y^3}{x - y} &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{x - y} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 + xy + y^2) = 1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2 = 3\end{aligned}$$

□

2.28 Eksempel
Finn grenseverdien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

En god idé kan være å skrive om uttrykket til polarkoordinater. Da vil $(x, y) \to 0$ tilsvare at $r \to 0$, mens θ er en ondsinnet variabel som forsøker å forsure regnearbeidet vårt. La oss se hva som skjer:

$$\frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{r\cos\theta \cdot r^2 \sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2} = r\cos\theta\sin^2\theta$$

Denne gangen er vi heldige fordi tallverdien til $\cos\theta\sin^2\theta$ må være mindre enn 1 uansett hva θ skulle være. Da har vi at:

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy^2}{x^2 + y^2}\right| = \lim_{r\to 0} \left|r\cos\theta\sin^2\theta\right| \le \lim_{r\to 0} |r| = 0$$

Derfor må $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$. $\square$

La oss nå se på to klassiske eksempler hvor noe går galt.

2.29 Eksempel
Undersøk grensen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

For å undersøke grenseverdien over kan vi forsøke å nærme oss punktet $(0,0)$ langs ulike linjer. Det vil si at vi studerer ulike konturer for funksjonen $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Vi ser først på tilfellet $y = 0$. Da har vi at:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

Prøver vi å se hva som skjer for $x = 0$ får vi:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{2 \cdot 0 \cdot y}{0^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Til nå ser det lovende ut, men dersom vi undersøker hva som skjer over en generell linje gjennom origo, det vil si $y = kx$, har vi:

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2k}{1+k^2}$$

Men $\frac{2k}{1+k^2} \neq 0$ for $k \neq 0$. Derfor nærmer uttrykket $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ seg ulike verdier alt etter langs hvilken linje en går mot origo. Grenseverdien $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ kan følgelig ikke eksistere, siden den i så fall skal være et entydig gitt tall.

For å forstå dette eksempelet bedre kan det være nyttig å skrive funksjonen $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ om til polarkoordinater, og deretter skissere grafen.

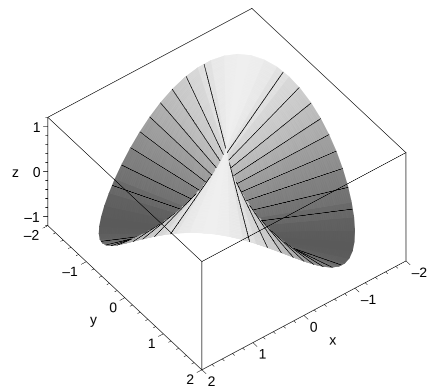
I polarkoordinater har vi

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^2} = \sin(2\theta) = f(r,\theta)$$

Funksjonsverdien bølger opp og ned, med en amplitude uavhengig av r, når en roterer omkring origo. Se figur 2.11. $\square$

2.30 Eksempel
Undersøk grensen til funksjonen f gitt ved

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$



Figur 2.11: Grafen til $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

når $(x,y) \to (0,0)$.

Vi forsøker å nærme oss origo langs linjer. Dersom $x = 0$ får vi:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2 \cdot y}{0^4 + y^2} = 0$$

Og langs linja $y = kx$ har vi

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4 + kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+1} = 0$$

Dette skulle jo tyde på at grenseverdien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ eksisterer og er null, **men dette er ikke sant!** La oss se hvorfor: Dersom vi nærmer oss origo langs parabelen $y = x^2$ får vi:

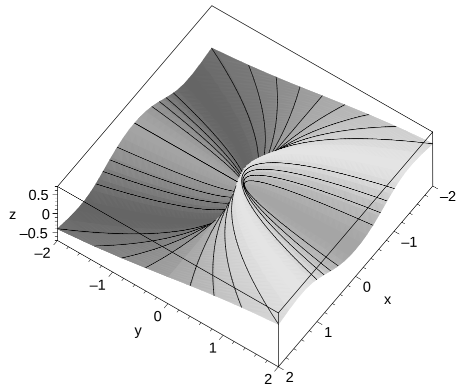
$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Siden $0 \neq \frac{1}{2}$ kan ikke grenseverdien eksistere.

For bedre å se hva som foregår skal vi se på grafen til f. Se figur 2.12. Den ser ut som en parabelformet demning der toppen følger parabelen $y = x^2$. Helt forrest i demningen, i punktet $(0,0)$, har vannet gravd et hull og rent ut. $\square$

2.3 Kontinuitet

Et sentralt begrep i teorien for funksjoner av flere variable er kontinuitet. Intuitivt kan en forstå dette som at grafen til funksjonen danner en flate. Dette er i motsetning til funksjoner hvis graf er en sky av punkt, eller brutte flater. Ved hjelp av grenseverdier kan vi gi en presis definisjon av kontinuitet:



Figur 2.12: Grafen til $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$.

2.31 Definisjon

Funksjonen f er kontinuerlig i punktet $\mathbf{a} \in D_f$ dersom $\mathbf{a}$ er et isolert punkt for D_f eller

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

Vi sier at f er kontinuerlig dersom den er kontinuerlig i alle punkt i sin definisjonsmengde.

Når vi støter på en funksjon av flere variable er et av de første spørsmålene vi vanligvis stiller å avgjøre hvor funksjonen er kontinuerlig. Når det gjelder funksjoner av en variabel er det sjeldent at en bruker definisjonen direkte til å sjekke kontinuitet. Oftest er funksjonen gitt ved en formel og en begrunner kontinuiteten ved å si at formeluttrykket er bygget opp av kontinuerlige funksjoner ved hjelp av addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon og sammensetning av funksjoner. Vi har nemlig en setning som sier at om vi bruker disse operasjonene på kontinuerlige funksjoner, så vil resultatet også være en kontinuerlig funksjon. En tilsvarende setning har en for funksjoner av flere variable.

For addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon har vi:

2.32 Setning

Dersom funksjonene f og g er kontinuerlige i $\mathbf{a}$, så er funksjonene $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ og (forutsatt at $g(\mathbf{a}) \neq 0$) $\frac{f}{g}$ det også.

For sammensetning av funksjoner:

2.33 Setning

Dersom f er en funksjon av flere variable som er kontinuerlig i $\mathbf{a}$ og h er en funksjon av en variabel som er kontinuerlig i $f(\mathbf{a})$, så er sammensetningen $h \circ f$ også kontinuerlig i $\mathbf{a}$.

Vi tar noen eksempler på kontinuerlige funksjoner og hvordan vi begrunner at de er kontinuerlige:

2.34 Eksempel
La f være gitt ved

$$f(x,y) = 3xy - x^4 + 9y^2 + 4$$

Dette er et polynom i variablene x og y. For å begrunne at f er kontinuerlig bruker vi setning 2.32.

Vi ser først på leddene $3xy$, x^4, $9y^2$ og 4. Alle disse uttrykkene er formler for kontinuerlige funksjoner. For eksempel er $3xy$ kontinuerlig siden dette uttrykket er produktet av de kontinuerlige funksjonene 3, x og y. På samme måte er x^4 kontinuerlig siden det er produktet av den kontinuerlige funksjonen x med seg selv fire ganger. Lignende argument gir at $9y^2$ og 4 er kontinuerlige uttrykk.

Funksjonen f er gitt ved å addere og subtrahere disse uttrykkene. Ved setning 2.32 blir resultatet da en kontinuerlig funksjon. $\square$

2.35 Eksempel
La

$$g(x,y,z) = \frac{x^2 - 4y}{z - y^2}$$

Legg merke til at definisjonsmengden til g er $D_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq y^2\}$.

Først ser vi at x^2, $4y$, z og y^2 er kontinuerlige uttrykk siden de er produkter av uttrykk som opplagt er kontinuerlige. Derfor må differansene $x^2 - 4y$ og $z - y^2$ også være kontinuerlige. Setning 2.32 sier så at kvotienten

$$\frac{x^2 - 4y}{z - y^2}$$

er kontinuerlig dersom nevneren er ulik 0. Dermed er funksjonen g kontinuerlig. Det er underforstått at dette betyr kontinuerlig i definisjonsmengden til g. Se definisjonen 2.31. Legg merke til denne språkbruken: Utenfor definisjonsmengden sier vi ikke at g er diskontinuerlig, men kun udefinert. $\square$

2.36 Eksempel
Vi skal nå se på en funksjon gitt ved et delt forskrift. La h være gitt ved

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 + x - y + xy - y^2 & \text{når } x \geq y \\ \cos(x-y) & \text{når } x < y \end{cases}$$

Det er klart at hver for seg så er uttrykkene $1 + x - y + xy - y^2$ og $\cos(x - y)$ kontinuerlige for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. (For å vise at $\cos(x - y)$ er kontinuerlig bruker vi setning 2.33 for å si at resultatet når en setter $x - y$ inn i $\cos(t)$ er kontinuerlig.) Spørsmålet vi må svare på er hvorvidt disse to uttrykkene skjøter seg sammen til en kontinuerlig funksjon langs linja $y = x$.

Dersom vi sette $y = x$ inn i $1 + x - y + xy - y^2$ får vi:

$$1 + x - y + xy - y^2 = 1 + x - x + x \cdot x - x^2 = 1$$

og i uttrykket $\cos(x - y)$ får vi

$$\cos(x, y) = \cos(x - x) = \cos(0) = 1$$

Siden uttrykkene samsvarte i skjøten er funksjonen h kontinuerlig. $\square$

Vi skal nå se et eksempel på en diskontinuerlig funksjon. Her bygger vi på eksempel 2.30.

2.37 Eksempel

La funksjonen f være definert ved

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{for } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{for } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Vi ser at definisjonsmengden til f er hele $\mathbb{R}^2$. Utenfor origo er f gitt ved det kontinuerlige uttrykket $\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Spørsmålet er da om f er kontinuerlig i $(0, 0)$.

Men fra eksempel 2.30 hadde vi at grenseverdien

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

ikke eksisterte. Dermed sier definisjonen av kontinuitet at f ikke er kontinuerlig i $(0, 0)$. $\square$

Det finnes også eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige i noe punkt.

2.38 Eksempel

La funksjonen f være gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dersom } x \text{ og } y \text{ begge er rasjonale} \\ 1 & \text{dersom } x \text{ er rasjonal og } y \text{ er irrasjonal} \\ 2 & \text{dersom } x \text{ er irrasjonal og } y \text{ er rasjonal} \\ 3 & \text{dersom både } x \text{ og } y \text{ er irrasjonale} \end{cases}$$

Vilkårlig nær et hvilket som helst punkt (x, y) finnes det punkt av alle de fire typene over. Derfor kan ikke f være kontinuerlig i noe punkt. $\square$

2.3.1 Ekstremalverdisetningen

Senere i heftet skal vi se hvordan vi kan finne maksimal- og minimalverdier til funksjoner av flere variable. I dette avsnittet skal vi se på betingelser som sikrer at maksimal- og minimalverdier finnes.

Vi begynner med definisjonen.

2.39 Definisjon
Et punkt $\mathbf{a}$ *i definisjonsmengden til* f *kalles et globalt maksimalpunkt for funksjonen* f *dersom* $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ *for alle* $\mathbf{x}$ *i definisjonsmengden til* f*. Tilsvarende kalles* $\mathbf{a}$ *et globalt minimalpunkt for* f *dersom* $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ *for alle* $\mathbf{x}$ *i definisjonsmengden til* f*.*

Et ofte brukt synonym til *globalt* maksimalpunkt er *absolutt* maksimalpunkt.

Ikke alle funksjoner har maksimal- og minimalpunkt – det kan hende at de har vilkårlig store eller lave verdier og det kan også hende at de nærmer seg en øvre eller nedre grense uten noen gang å nå den. Vårt mål er å vise at hvis f er en kontinuerlig funksjon definert på en lukket, begrenset mengde, så har den faktisk minimal- og maksimalpunkt. Husk at en mengde $A \subset \mathbb{R}^n$ kalles *begrenset* dersom det finnes et tall M slik at $\|\mathbf{x}\| \leq M$ for alle $\mathbf{x} \in A$.

2.40 Setning (Ekstremalverdisetningen)
La $A \subset \mathbb{R}^n$ *være en lukket, begrenset mengde, og anta at* $f : A \to \mathbb{R}$ *er kontinuerlig. Da har* f *maksimal- og minimalpunkt.*

La oss se på to eksempel hvor ekstremalverdien gjelder.

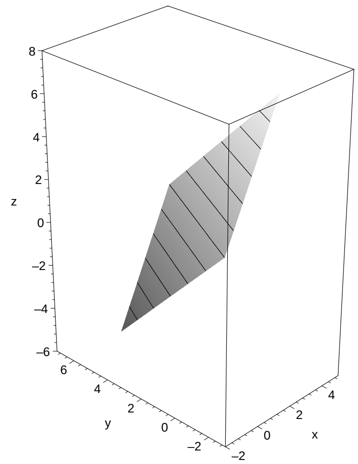
2.41 Eksempel
La A være rektangelet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3 \text{ og } -1 \leq y \leq 5\}$. Vi kan definere funksjonen f på A ved formelen

$$f(x, y) = 2x - y$$

Utenfor A lar vi $f(x, y)$ være udefinert. Grafen er skissert i figur 2.13. Siden A er en lukket og begrenset mengde sier ekstremalverdisetningen at f har både maksimumspunkt og minimumspunkt på A. At dette virkelig er sant kan vi se ved å bruke ulikhetene $0 \leq x \leq 3$ og $-1 \leq y \leq 5$ til å vise at $-5 \leq 2x - y \leq 7$. Deretter kan vi sjekke at $f(0, 5) = -5$ og $f(3, -1) = 7$. Dette viser at f antar sin maksimalverdi 7 i punktet $(3, -1)$ og at f antar sin minimalverdi -5 i punktet $(0, 5)$. □

2.42 Eksempel
Definer funksjonen g ved

$$g(x, y) = \frac{4x - 3}{x^2 + y^2 + 1}$$



Figur 2.13: Grafen til $f(x,y) = 2x - y$ for $0 \leq x \leq 3$ og $-1 \leq y \leq 5$.

og la definisjonsmengden til g være

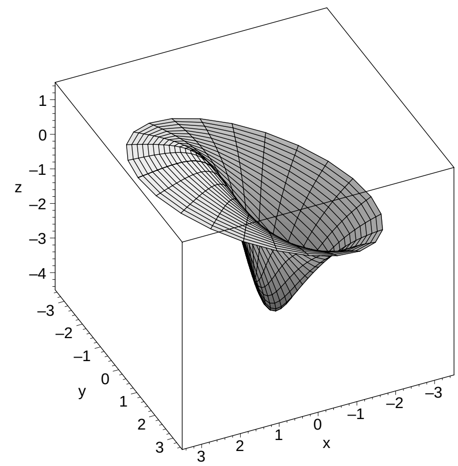
$$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Grafen til g har vi tegnet i figur 2.14. Siden D_g er en lukket og begrenset mengde, sier igjen ekstremalverdisetningen at det skal finnes maksimal- og minimalpunkt for g. Av grafen kan vi se at maksimalverdien må være positiv, mens minimalverdien må være negativ. Av funksjonsuttrykket ser vi at dersom tallverdien til y, det vil si $|y|$, øker så må tallverdien til $g(x,y)$ avta. Dermed må $y = 0$ for maksimal- og minimalpunktene til g. Vi setter

$$h(x) = g(x,0) = \frac{4x-3}{x^2+1}$$

Ved å derivere h finner en at maksverdien til h er 1, og at denne verdien antas i $x = 2$. Videre er $h(-\frac{1}{2}) = -4$ minimalverdien til h. Dette viser at g har maksimalverdi 1 i $(2,0)$ og minimalverdi -4 i $(-\frac{1}{2}, 0)$. $\square$

I disse to eksemplene har vi sett at ekstremalverdisetningen er sann ved at vi har sjekket at funksjonene, som i begge tilfeller var kontinuerlige og definert på lukkede og begrensede mengder, virkelig hadde både maksimal- og minimalpunkt. Men du la kanskje merke til at vi brukte andre argumenter enn ekstremalverdisetningen for å finne disse punktene. Mye av dette heftet skal handle om metoder for å finne ekstremalpunkt. Slik som vi har formulert ekstremalverdisetningen er den *ikke* noen metode for å lokalisere ekstremalpunkt, den er kun et redskap for å si at det finnes slike punkt. Slik sett kan ekstremalverdisetningen virke som et kraftløst teorem, men dersom vi skifter fokus og tenker på spørsmålet vi stilte i innledningen, “Kan



Figur 2.14: Grafen til $g(x,y) = \frac{4x-3}{x^2+y^2+1}$ for $x^2 + y^2 \leq 9$.

vi finne et anvendelig kriterium for at en funksjon skal ha kvalitative egenskaper i samsvar med vår intuisjon?", ser vi at ekstremalverdisetningen er en tydelig bekreftelse på at *kontinuitet* er en svært sentral egenskap i studiet av funksjoner. Kontinuerlige funksjoner definert på en lukket og begrenset mengde har nettopp en av de egenskapene vi intuitivt håper at den skal ha, nemlig at det finnes maksimal- og minimalpunkt for funksjonen.

Før vi ser på beviset for denne setningen skal vi se på noen eksempler som viser at det er nødvendig å forutsette at definisjonsmengden A er lukket og begrenset.

2.43 Eksempel

a) La $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x,y) = x^2 + y^2$. Siden f er dannet av kontinuerlige funksjoner ved hjelp av multiplikasjon og addisjon er f kontinuerlig, men f har ingen maksimalverdi, siden vi kan få $f(R,0) = R^2$ så stor vi bare vil ved å la $R \to \infty$.

b) Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$ ikke er begrenset. Definer $g : A \to \mathbb{R}$ ved $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$. Da er g kontinuerlig, men siden A er ubegrenset, vil g ha vilkårlig store verdier, og kan følgelig ikke ha noe maksimalpunkt.

c) Se igjen på $f(x,y) = x^2 + y^2$, men innskrenk definisjonsmengden til de (x,y) slik at $x^2 + y^2 < 1$. f er fremdeles kontinuerlig, men har heller ikke nå noen maksimalverdi. Funksjonsverdien 1 oppnås nemlig ikke i noe punkt i definisjonsmengden, men vi kan finne (x,y) med $x^2+y^2 < 1$ slik at $f(x,y)$ ligger vilkårlig nær 1.

d) Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$ ikke er lukket. Da må A ha minst et randpunkt $\mathbf{a}$ som ikke er med i A. Definer $f : A \to \mathbb{R}$ ved

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}$$

Da er f en kontinuerlig funksjon, men siden vi kan finne punkt i A vilkårlig nær $\mathbf{a}$, er f ubegrenset og har følgelig ikke noe maksimalpunkt.

Punkt a) og b) viser at det er nødvendig å anta at definisjonsmengden er begrenset for at ekstremalverdisetningen skal kunne være sann, mens punkt c) og d) viser at lukkethet av definisjonsmengden er en nødvendig betingelse. $\square$

2.3.2 *Bevis for ekstremalverdisetningen

Bevis: For at ikke notasjonen skal bli for komplisert, skal vi nøye oss med å gi beviset for funksjoner av to variable. Vi antar altså at $A \subset \mathbb{R}^2$ er en lukket, begrenset mengde og at $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Vi skal vise at f har et maksimalpunkt – beviset for eksistensen av et minimalpunkt er helt analogt.

Vi lar m være den minste øvre skranken til f:

$$m = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A\}$$

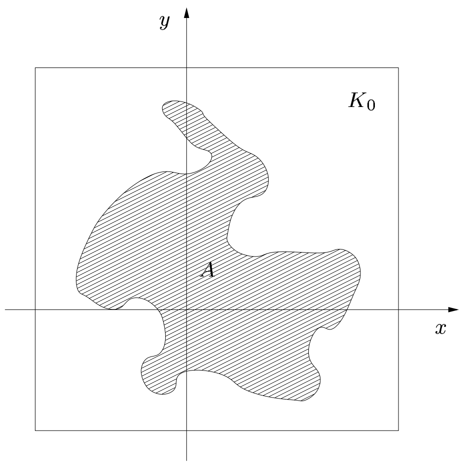
der vi setter $m = \infty$ hvis funksjonen f er ubegrenset oppad. Husk at en øvre skranke for en delmengde B av $\mathbb{R}$ er tall b slik at for alle $x \in B$ er b større eller lik x. Den minste øvre skranken er mindre eller lik alle andre øvre skranker og den kalles $\sup B$. Husk at kompletthetsprinsippet sier at alle ikke-tomme oppad begrensede delmengder B av de reelle tall har en veldefinert minste øvre skranke.

Siden definisjonsmengden A er begrenset, kan vi finne et kvadrat K_0 med side R som inneholder hele A, se figur 2.15(a). Vi kan dele dette kvadratet opp i fire mindre kvadrater K_a, K_b, K_c, K_d med side $\frac{R}{2}$ som vist i figur 2.15(b). La m_a, m_b, m_c, m_d være supremum til f over de delene av A som ligger innenfor henholdsvis K_a, K_b, K_c, K_d, det vil si

$$m_a = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A \cap K_a\}$$

og tilsvarende for m_b, m_c, m_d. Dersom en av mengdene $A \cap K_a$, $A \cap K_b$, $A \cap K_c$, $A \cap K_d$ er tom, neglisjerer vi den og lar være å definere den tilsvarende m'en.

Siden $A \cap K_a$, $A \cap K_b$, $A \cap K_c$, $A \cap K_d$ tilsammen utgjør hele A, må minst én av verdiene m_a, m_b, m_c, m_d være lik m. La K_1 være et av rektanglene K_a, K_b, K_c, K_d slik at den tilhørende m-supremumsverdien er lik m.



(a) Den begrensede mengden A (b) Oppdeling av K_0

Figur 2.15: Bevis for ekstremalverdisetningen

Vi kan nå gjenta prosedyren med K_1. Vi deler dette kvadratet opp i fire mindre kvadrater og plukker ut et av disse kvadratene, K_2, slik at

$$\sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A \cap K_2\} = m.$$

Fortsetter vi på denne måten får vi en sekvens $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ av stadig mindre kvadrater slik at

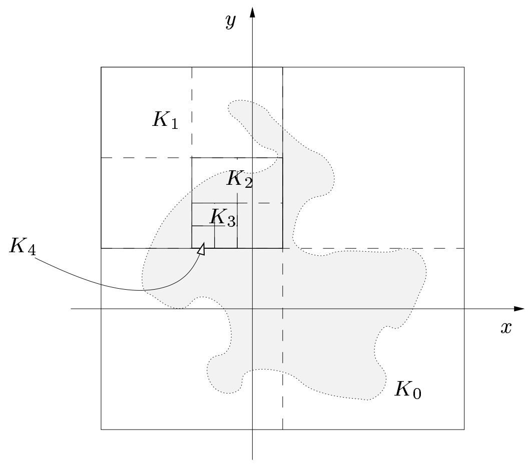
$$\sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A \cap K_n\} = m$$

for alle n. Figur 2.16 viser hvordan en slik sekvens kan se ut. De helttrukne kvadratene er de som hører med til sekvensen $K_0, K_1, K_2, \ldots$ Siden i hvert kvadrat er halvparten av siden i det foregående, og siden i det n-te kvadratet K_n har derfor lengde $\frac{R}{2^n}$ (husk at R er sidelengden i det opprinnelige kvadratet K_0).

La (a_n, b_n) være koordinatene til det nedre, venstre hjørnet i K_n. Det er lett å se at $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er voksende (ikke-avtagende) følger, og de må også være begrensede siden (a_n, b_n) ligger innenfor det første kvadratet K_0. Voksende, begrensede følger konvergerer, og det må derfor finnes tall a, b slik at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Anta nå at (x_n, y_n) er et annet punkt i K_n. Siden størrelsen til K_n går mot null, må også (x_n, y_n) gå mot (a, b).

Vi er nå klare til å avslutte beviset. Siden m er supremum til f over hver av mengdene $A \cap K_n$, kan vi finne en følge av punkt $\{(x_n, y_n)\}$ slik at $(x_n, y_n) \in A \cap K_n$ og

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = m$$



Figur 2.16: Sekvensen $K_0, K_1, K_2, K_3, K_4, \ldots$

Vi har allerede observert at $(x_n, y_n) \to (a, b)$. Siden hvert punkt (x_n, y_n) er med i A og A er lukket, så må også grensen (a, b) tilhøre A. Dermed er

$$f(a,b) = \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = m$$

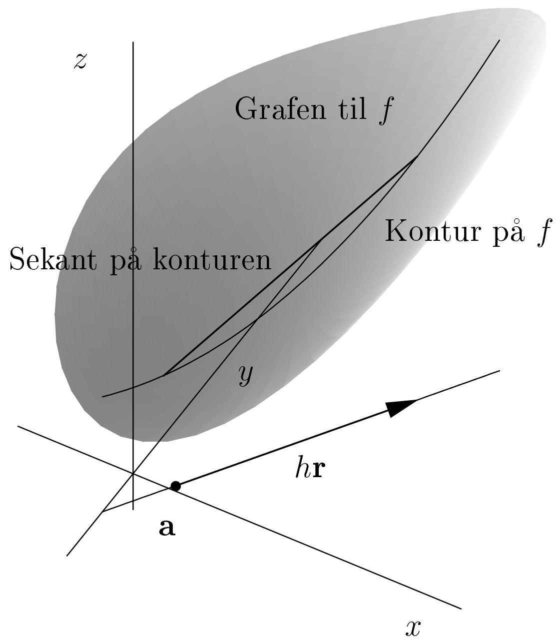
siden f er kontinuerlig. Dette betyr at (a, b) er et maksimalpunkt for f, og beviset er fullført. $\square$

I beviset for ekstremalverdisetningen har vi på flere punkt brukt egenskaper til følger i $\mathbb{R}^2$. Oppgave 2.6 utdyper disse egenskapene. Referer derfor til denne oppgaven når du leser beviset over.

Ekstremalverdisetningen garanterer at visse funksjoner har maksimal- og minimalpunkt, men den gir ikke noe hint om hvordan vi kan finne disse punktene i praksis. Dette er et problem vi skal komme tilbake til senere i heftet.

2.4 Derivasjon

For en funksjon $y = f(x)$ av én variabel forteller den deriverte $f'(x)$ oss hvor fort funksjonen vokser i punktet x – går vi et lite skritt med lengde h langs x-aksen, vil funksjonsverdien øke med $f'(x)h$. For funksjoner av flere variable er situasjonen mer komplisert; vi har flere akser å bevege oss langs, og vi kan ikke regne med at funksjonen stiger like mye uansett hvilken retning vi går i. Før vi regner ut stigningstallet til funksjonen må vi derfor spesifisere hvilken retning vi er interessert i. Dette er idéen bak begrepet retningsderivert:



Figur 2.17: Idéen bak definisjonen av retningsderivert.

2.4.1 Retningsderivert

2.44 Definisjon
Anta at funksjonen $f : A \to \mathbb{R}$ er definert på en delmengde A av $\mathbb{R}^n$ og at $\mathbf{a}$ er et indre punkt i A. Tenk på $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ som en vektor. Den retningsderiverte til f i punktet $\mathbf{a}$ og retningen $\mathbf{r}$ *er gitt ved*

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

(forutsatt at denne grensen eksisterer selvfølgelig).

Figur 2.17 viser idéen bak definisjonen. Punktene $\mathbf{a}+h\mathbf{r}$ er de punktene vi kommer til hvis vi starter i $\mathbf{a}$ og går i retning $\mathbf{r}$. Vi ser på konturen til f over denne linja. Differansen $f(\mathbf{a}+h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})$ forteller oss hvor mye funksjonen øker når vi beveger oss på denne konturen, og brøken

$$\frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

er økningen per lengdeenhet når vi bruker $\|\mathbf{r}\|$ som lengdeenhet.

2.45 Eksempel
La $f(x,y) = x^2 + xy$. Vi skal beregne den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ når

$\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{r} = (2, 1)$. Først observerer vi at

$$\mathbf{a} + h\mathbf{r} = (1, 0) + h(2, 1) = (1 + 2h, h),$$

som gir $f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) = (1 + 2h)^2 + (1 + 2h)h = 1 + 5h + 6h^2$. Tilsvarende er $f(\mathbf{a}) = f(1, 0) = 1^2 + 1 \cdot 0 = 1$. Vi får

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1 + 5h + 6h^2) - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{5h + 6h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(5 + 6h) = 5. \end{aligned}$$

Hva betyr dette resultatet? Legg merke til at lengden til vektoren $\mathbf{r}$ er $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Dersom vi går et stykke $h\sqrt{5}$ i retning av vektoren $\mathbf{r} = (2, 1)$, vil funksjonsverdien stige med (omtrent) $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) \cdot h = 5 \cdot h$. □

Det er lettest å forstå hva den retningsderiverte er dersom vektoren $\mathbf{r}$ har lengde 1 – da er $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ rett og slett stigningstallet til grafen i retning $\mathbf{r}$ når vi måler med vanlige enheter.

2.4.2 Partielt deriverte

Så langt kan det se ut som om vi må bygge opp en ny derivasjonsteori helt fra bunnen av for å kunne beregne retningsderiverte til funksjoner av flere variable. Det er heldigvis ikke nødvendig; ved hjelp av såkalte partiell deriverte kan vi føre mye av teorien tilbake til vanlig derivasjon av funksjoner av én variabel. Før vi definerer partiell deriverte, er det lurt å bli enig om litt notasjon.

Den *i-te enhetsvektoren* $\mathbf{e}_i$ i $\mathbb{R}^n$ er vektoren

$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te plass}}}{1}, 0, \ldots, 0)$$

parallell med den i-te koordinataksen.

2.46 Definisjon
La $f : A \to \mathbb{R}$ være en funksjon av n variable og la $\mathbf{a}$ være et indre punkt i A. Den i-te partiell deriverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ er den retningsderiverte av f i retning av den i-te enhetsvektoren $\mathbf{e}_i$; det vil si

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)$$

forutsatt at den retningsderiverte eksisterer.

Andre notasjoner for $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ er $D_i f(\mathbf{a})$ og $f_i(\mathbf{a})$. De partiell deriverte er altså stigningstallene til funksjonen parallelt med koordinataksene. Skriver vi ut definisjonen i detalj, ser vi at

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h}\end{aligned}$$

Det siste uttrykket har en slående likhet med definisjonen av vanlig derivert. Underslår vi de variablene hvor det ikke skjer noen endring, ser vi at

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_i + h) - f(a_i)}{h}$$

Dette betyr at vi kan finne den partiell deriverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ved å derivere uttrykket $y = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ med hensyn på x_i mens vi later som om alle de andre variablene er konstanter.

2.47 Eksempel
Finn de partielt deriverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + \sin(xy).$$

For å finne $\frac{\partial f}{\partial x}$ deriverer vi uttrykket med hensyn på x mens vi later som om y er en konstant:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y^3 + y\cos(xy)$$

For å finne $\frac{\partial f}{\partial y}$ deriverer vi med hensyn på y mens vi holder x konstant:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 + 3xy^2 + \cos(xy)x = 3xy^2 + x\cos(xy)$$

□

2.4.3 C^1-funksjoner

Vi trenger et godt kriterium for om en funksjon av flere variable har pene egenskaper med hensyn på derivasjon. Kriteriet vi skal bruke heter C^1-funksjoner. De fleste funksjonene vi møter på i dette kurset vil oppfylle dette kriteriet. Og vi skal se at det er enkelt å sjekke om en gitt funksjon er C^1.

2.48 Definisjon
En funksjon f definert på en åpen mengde A er C^1 dersom de partielt deriverte eksisterer på A og er kontinuerlige.

Hva så med funksjoner som ikke har en definisjonsmengde som er åpen, kan de være C^1? Dette problemet er ikke verre enn at vi innskrenker definisjonsmengden ørlite, det vil si at vi kan betrakte mengdens indre. For en vilkårlig funksjon f er vi derfor interessert i å avgjøre om den er C^1 på det indre av D_f.

Vi skal se på noen eksempler:

2.49 Eksempel
Avgjør om f gitt ved

$$f(x,y) = e^{x-\sin(y)} + 3xy^2$$

er en C^1 funksjon.

Vi finner da først de partielt deriverte. Vi har:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{x-\sin(y)} + 3y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\cos(y)e^{x-\sin(y)} + 6xy \end{aligned}$$

Siden formlene for de partielt deriverte er bygget opp ved hjelp av addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og innsetting i de kontinuerlige funksjonene sin, cos og e^x må $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ være kontinuerlige funksjoner. Dette viser at f er C^1.
□

2.50 Eksempel
Undersøk hvorvidt funksjonen g gitt ved

$$g(x,y,z) = \sqrt{1-x^2} + \frac{y}{z}$$

er en C^1-funksjon.

Vi finner de partielt deriverte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{1}{z} \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) &= -\frac{y}{z^2} \end{aligned}$$

Disse er alle kontinuerlige funksjoner. Men legg merke til at $\frac{\partial g}{\partial x}$ ikke er definert for $x = \pm 1$, selv om g er definert her. Dette er ikke noe problem fordi punkt med $x = \pm 1$ er ikke i det indre av definisjonsmengden til g og da er det underforstått at vi ser bort fra disse når vi undersøker om g er C^1.

Vi ser derfor at g er C^1 på det indre av sin definisjonsmengde. □

2.51 Eksempel
Se på $h(x,y) = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Dette er funksjonen som måler avstanden fra punktet (x,y) til origo. h er definert på hele $\mathbb{R}$. Er h en C^1-funksjon?

Vi finner de partielt deriverte:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Her ser en at de partielt deriverte eksisterer og er kontinuerlige bortsett fra i origo. Dersom en undersøker grenseverdiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \quad \text{og} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$$

vil en se at de ikke eksisterer. Derfor er ikke g en C^1-funksjon. Hvis vi derimot fjerner $(0,0)$ fra definisjonsmengden ville de partieltderiverte være definerte og kontinuerlige. Derfor kan vi si at g er C^1 på $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $\square$

2.4.4 Gradienten

I teorien for funksjoner av en variabel har vi ett begrep, *den deriverte*, som vi flittig benytter oss av. For eksempel bruker vi den deriverte til å finne tangenter, eller til å finne lokale maksimum og minimum for funksjonen. Til nå kan det synes som om teorien for flere variable har en vrimlende mengde ulike former for deriverte; de retningsderiverte i alle ulike retninger og partielt deriverte, en for hver dimensjon. Frem fra denne ansamlingen av begreper trer gradienten ut som et sentralt begrep. Under skal vi først definere gradienten, deretter skal vi se at vi kan bruke den til å regne ut retningsderiverte for C^1-funksjoner. Den brukes også når en skal finne tangentplan for en funksjon av to variable (eller tangenthyperplan i høyere dimensjoner).

2.52 Definisjon
Gradienten til en funksjon f av n variable i et indre punkt $\mathbf{a}$ i definisjonsmengden er vektoren

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right)$$

Eksempelvis har vi for en funksjon av to variable at gradienten til f i (x,y) er gitt ved

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

Vi ser på noen enkle eksempler:

2.53 Eksempel
Finn gradienten til $f(x, y) = 3x^2 - 4\ln(y)$ i punktet $(-1, 2)$.

Vi finner først de partielt deriverte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{4}{y}$$

Setter vi inn $(x, y) = (-1, 2)$ får vi $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2) = -6$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2) = -2$. Dette gir at gradienten i $(-1, 2)$ er:

$$\nabla f(-1, 2) = (-6, -2)$$

□

2.54 Eksempel
La funksjonen g være gitt ved

$$g(x, y, z) = 2xy + z^2$$

Vi skal nå finne en formel for gradienten. Først finner vi de partielt deriverte:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2x \quad \text{og} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 2z$$

Dermed er gradienten til g i (x, y, z) gitt ved formelen

$$\nabla g = (2y, 2x, 2z)$$

□

Vi skal nå studere endel egenskaper til gradienten for C^1-funksjoner. Disse setningene er svar på spørsmålet stilt i innledningen til dette kapittelet: “Kan vi finne et anvendelig kriterium for at en funksjon skal ha kvalitative egenskaper i samsvar med vår intuisjon?” Svaret vi gir her er at C^1 kriteriet gjør at funksjonene har retningsderiverte, gradient, tangentplan/tangentrom, og så videre, og at disse størrelsene forholder seg til hverandre på den naturlige måten.

Den første setningen relaterer gradienten og de retningsderiverte til hverandre:

2.55 Setning
Anta at f er C^1. Da eksisterer den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ og

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}$$

Beviset for denne setningen finner du nedenfor i seksjon 2.4.7.

Umiddelbart fra setningen over kan vi utlede en nyttig, geometrisk tolkning av gradienten:

2.56 Setning
Anta at f er C^1 og at $\mathbf{a}$ ligger i det indre av definisjonsmengden. Da peker gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ i den retningen hvor f vokser hurtigst i punktet $\mathbf{a}$.

Bevis: La $\mathbf{u}$ være en enhetsvektor. Funksjonen f vokser hurtigst i den retningen $\mathbf{u}$ hvor $f'(\mathbf{a};\mathbf{u})$ er størst. Siden $f'(\mathbf{a};\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$ og indreproduktet $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$ har sin største verdi $\|\nabla f(\mathbf{a})\| \, \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{a})\|$ når $\mathbf{u}$ og $\nabla f(\mathbf{a})$ er parallelle, er setningen bevist. $\square$

Fra envariabelfunksjoner vet vi at deriverbarhet medfører kontinuitet. Tilsvarende har vi følgende setning i det flervariable tilfellet:

2.57 Setning
En C^1-funksjon f definert på en åpen A i $\mathbb{R}^n$ er kontinuerlig på A.

Igjen utsettes beviset til seksjon 2.4.7.

Før vi går videre med teorien skal vi se på et eksempel hvor vi bruker setningene vi har utledet over.

2.58 Eksempel
La f være funksjonen gitt ved

$$f(x, y) = y^4 - 3x^2y + 5xy$$

Vi skal først forklare hvorfor f er C^1, deretter finne gradienten, og til slutt skal vi beregne de retningsderiverte til f i $(0, 1)$ i retningene:

$$\text{a) } \mathbf{r} = (1, 0), \quad \text{b) } \mathbf{r} = (-1, 3) \quad \text{og} \quad \text{c) } \mathbf{r} = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

Vi begynner med å finne de partieltderiverte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6xy + 5y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 3x^2 + 5x$$

Vi ser at disse uttrykkene er kontinuerlige. Dermed er f en C^1-funksjon. Gradienten er gitt ved

$$\nabla f(x,y) = (-6xy + 5y, 4y^3 - 3x^2 + 5x)$$

For å finne retningsderiverte i $(0,1)$ evaluerer vi gradienten i dette punktet:

$$\nabla f(0,1) = (5,4)$$

Dette gir:

a) $f'(0,1;1,0) = \nabla f(0,1) \cdot (1,0) = (5,4) \cdot (1,0) = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 5$

b) $f'(0,1;-1,3) = \nabla f(0,1) \cdot (-1,3) = (5,4) \cdot (-1,3) = 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 7$

c) $f'(0,1;\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) = \nabla f(0,1) \cdot (\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) = (5,4) \cdot (\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5}{2} + 2\sqrt{3}$

$\square$

2.4.5 Tangentplan til grafen

I teorien for funksjoner av en variabel kunne vi bruke den deriverte for å finne tangentlinja til en funksjon f i et punkt a. Vi skal se at vi kan bruke gradienten til å finne tangentplan for funksjoner av to variable, og tangenthyperplan for funksjoner i tre eller flere variable. Men først må vi definere hva vi mener med tangentplan og tangenthyperplan. Figur 2.18 illustrerer hva et tangentplan kan se ut for en funksjon av to variable.

I kapittel 1 så vi et eksempel (1.10) på det som kalles en affin funksjon. I to variable er dette en funksjon som kan skrives på formen:

$$h(x,y) = ax + by + d$$

hvor a, b og d er konstander. I tre variable har en affin funksjon formen

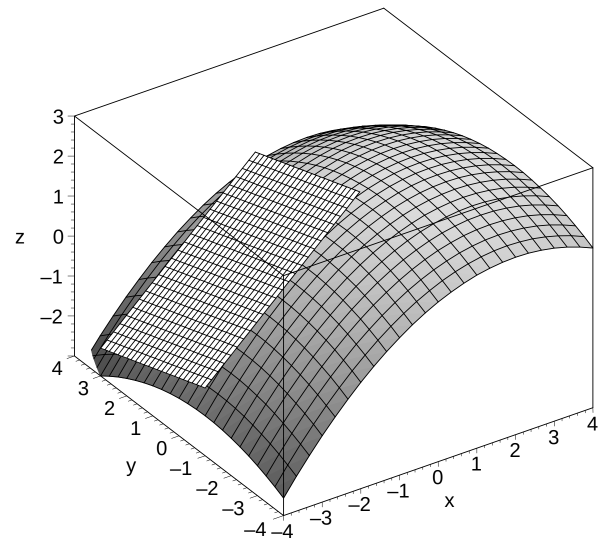
$$h(x,y,z) = ax + by + cz + d$$

igjen er a, b, c og d konstanter. Dette kan generaliseres til n-dimensjoner. En affin funksjon i n vaiable har formen

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + d$$

hvor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ og d er konstanter. Slike funksjoner kan også skrives på vektorform: $h(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + d$, hvor $\mathbf{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

I eksempel 1.10 så vi at grafen ble et plan. Tilsvarende gjelder det i høyere dimensjoner at grafen til en affin funksjon er et hyperplan. Når vi spør etter



Figur 2.18: En graf med ett tangentplan.

tangenthyperplanet til en flervariabelfunksjon f i et punkt $\mathbf{a}$ er vi ute etter å finne en affin funksjon. Men dette er ikke hvilken som helst affin funksjon.

La oss tenke tilbake på funksjoner av en variable. Da kan tangentlinja til f i a tolkes som den beste approksimasjonen til f i nærheten av a ved hjelp av rette linjer. Denne tolkningen forsøker vi i videreføre til flere variable. Vi har følgende definisjon:

2.59 Definisjon

Anta at f er en funksjon definert på $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er en affin funksjon. Vi sier at h tangerer f i $\mathbf{a} \in A$ dersom

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - \mathbf{a}||} = 0$$

Intuisjonen vår sier at det bare er ett tangent(hyper)plan til en funksjon f i hvert punkt $\mathbf{a}$. Det sier derimot definisjonen over ingenting om. Som matematiker er det derfor på sin plass å vise en setning som sier at for de funksjonene vi vanligvis møter så er tangent(hyper)planet til f i $\mathbf{a}$ entydig gitt.

2.60 Setning

Dersom $\mathbf{a}$ er et indre punkt i D_f, er tangenthyperplanet til f i $\mathbf{a}$ entydig, forutsatt at det eksisterer.

Hvordan finner en tangentplanet til en gitt funksjon f i et punkt $\mathbf{a}$? Dersom f er C^1 i $\mathbf{a}$ kan en, ved hjelp av gradienten, skrive opp en formel.

2.61 Setning
Anta at f er C^1 og $\mathbf{a}$ et indre punkt i D_f. Da er tangentplanet til f i $\mathbf{a}$ entydig og gitt ved formelen

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

De to setningene over bevises i seksjon 2.4.7.

La oss se på et par eksempler der vi bestemmer ligningen til tangentplan:

2.62 Eksempel
La funksjonen f være gitt ved

$$f(x, y) = x^4 + y^2 + e^{xy}$$

og la h være tangentplanet til f i punktet $(0, 1)$. Vi skal finne formelen til h.

Vi starter med å regne ut de partieltderiverte til f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + ye^{xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + xe^{xy}$$

Gradienten er derfor

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 + ye^{xy}, 2y + xe^{xy})$$

Vi setter inn $(x, y) = (0, 1)$ og finner at

$$\nabla f(0, 1) = (1, 2)$$

Setning 2.61 sier at formelen til h er

$$h(x, y) = f(0, 1) + \nabla f(0, 1) \cdot ((x, y) - (0, 1))$$

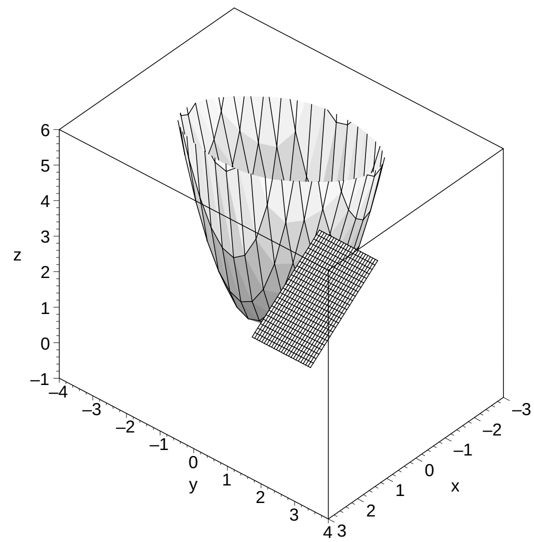
Vi setter inn for f og ∇f og får

$$h(x, y) = 2 + (1, 2) \cdot (x, y - 1) = 2 + x + 2y - 2 = x + 2y$$

Tangentplanet til $f(x, y) = x^4 + y^2 + e^{xy}$ i punktet $(0, 1)$ er $h(x, y) = x + 2y$. Se figur 2.19 $\square$

2.63 Eksempel
La oss se på funksjonen fra eksempel 1.6. f var gitt ved formelen

$$f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2 + 2x - 1}$$



Figur 2.19: Grafen til $f(x,y) = x^4 + y^2 + e^{xy}$ og tangentplanet i $(0,1)$.

Vi skal finne tangentplanet til f i $(4,5)$. Vi begynner med å finne de partielt-deriverte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1-x}{\sqrt{y^2 - x^2 + 2x - 1}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2 + 2x - 1}}$$

Ved å sette inn $x = 4$ og $y = 5$ finner vi at gradienten i $(4,5)$ er

$$\nabla f(4,5) = (-\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$$

Tangentplanet er dermed grafen til funksjonen h gitt ved

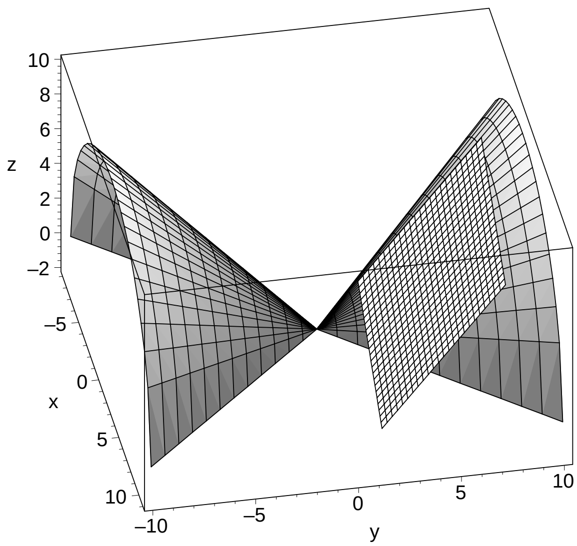
$$h(x,y) = f(4,5) + \nabla f(4,5) \cdot ((x,y) - (4,5)) = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y + \frac{3}{4}$$

Se figur 2.20. $\square$

Vi avslutter med et eksempel der vi finner tangenthyperplan for en funksjon av tre variable:

2.64 Eksempel
La g være funksjonen gitt ved

$$g(x,y,z) = \frac{xyz}{x+y+2z}$$



Figur 2.20: Grafen til $f(x,y)=\sqrt{y^2-x^2+2x-1}$ og tangentplanet i $(4,5)$.

Finn tangenthyperplanet til g i $(2,1,-1)$.

De partielt deriverte er:

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{y^2z+2yz^2}{(x+y+2z)^2}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{x^2z+2xz^2}{(x+y+2z)^2}$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{x^2y+xy^2}{(x+y+2z)^2}$$

Gradienten i punktet $(2,1,-1)$ blir da:

$$\nabla g(2,1,-1)=(1,0,6)$$

Fra formelen i setning 2.61 ser vi at tangenthyperplanet er grafen til funksjonen

$$\begin{aligned}h(x,y,z)&=g(2,1,-1)+\nabla g(2,1,-1)\cdot((x,y,z)-(2,1,-1))\\&=-2+(1,0,6)\cdot(x-2,y-1,z+1)=x+6z+2\end{aligned}$$

Tangenthyperplanet er grafen til $h(x,y,z)=x+6z+2$. $\square$

2.4.6 Deriverbarhet

Vi har enda ikke definert deriverbarhet for en funksjon av flere variable. Grunnen til dette er at vi har begrepet C^1-funksjoner, som gir oss de resultatene vi ønsker. I tillegg er de fleste funksjonene vi har møtt C^1 i nesten alle punkt. Men fra et teoretisk synspunkt er ikke C^1 det samme som deriverbar. Vi har følgende definisjon

2.65 Definisjon
En funksjon f er deriverbar i $\mathbf{a}$ dersom det finnes et entydig tangentplan h til f i $\mathbf{a}$.

Merk at setning 2.61 over viser at alle C^1-funksjoner er deriverbare. I dette heftet vil vi bruke begrepet C^1, selv om flere av resultatene også vil gjelde dersom en erstatter C^1 med deriverbar.

2.4.7 *Bevis for setningene 2.55, 2.57, 2.60 og 2.61

Vi skal nå se på hvordan setningene 2.55, 2.57, 2.60 og 2.61 bevises. Du kan godt la være å lese disse bevisene, men om du har interesse for matematikk bør du gjøre deg kjent med hvordan resultatene utledes.

Setning 2.55 sa at for en C^1-funksjon f eksisterer de retningsderiverte og

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}$$

Vi skal nå bevise denne setningen.

Bevis for setning 2.55: Vi skal kun se på tilfellet med funksjoner av to variable. Beviset er i prinsippet det samme for tre og flere variable, men noen uttrykk blir lengre, og derfor blir notasjonen vanskeligere. Dersom du forstår beviset under, bør du ikke ha problemer med å skrive ut det generelle tilfellet.

Vi starter med å sette navn på koordinatene til $\mathbf{a}$ og $\mathbf{r}$. La

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) \quad \text{og} \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2)$$

Målet er å finne den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$. Husk at denne er definert ved

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

For å komme igang med beviset skal vi bruke middelverdisetningen fra teorien for funksjoner av en variabel. Den sier at for en kontinuerlig funksjon $g : [b, d] \to \mathbb{R}$ som er deriverbar på intervallet (b, d), finnes et tall c mellom b og d slik at

$$g(d) - g(b) = g'(c)(d - b)$$

Poenget er at vi skrive om uttrykket $f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1, a_2)$ slik at de partieltderiverte dukker opp når vi anvender middelverdisetningen:

$$\begin{aligned} &f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1, a_2) \\ &\quad = f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1 + hr_1, a_2) + f(a_1 + hr_1, a_2) - f(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Ved å tenke på $a_1 + hr_1$ som en konstant i de to første leddene og a_2 som konstant i de to siste, kan vi innføre to nye funksjoner gitt ved

$$\begin{aligned} g_1(t) &= f(a_1 + tr_1, a_2) \\ g_2(t) &= f(a_1 + hr_1, a_2 + tr_2) \end{aligned}$$

Observer at g_1 og g_2 er deriverbare siden $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ og $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ eksisterer. Derfor kan vi anvende middelverdisetningen på g_1 og g_2 mellom 0 og h. Dette gir at det finnes tall c_1 og c_2 begge mellom 0 og h slik at

$$\begin{aligned} g_1(h) - g_1(0) &= g_1'(c_1) \cdot h \\ g_2(h) - g_2(0) &= g_2'(c_2) \cdot h \end{aligned}$$

Vi setter inn definisjonene av g_1 og g_2 og får ut at:

$$\begin{aligned} f(a_1 + hr_1, a_2) - f(a_1, a_2) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + c_1 r_1, a_2) \cdot r_1 \cdot h \\ f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1 + hr_1, a_2) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + hr_1, a_2 + c_2 r_2) \cdot r_2 \cdot h \end{aligned}$$

La oss nå se hvordan vi kan bruke dette til å evaluere grenseverdien som definerer $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$. Vi har:

$$\begin{aligned} &\frac{f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1, a_2)}{h} \\ &\quad = \frac{f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1 + hr_1, a_2) + f(a_1 + hr_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} \\ &\quad = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + c_1 r_1, a_2) \cdot hr_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + hr_1, a_2 + c_2 r_2) \cdot hr_2}{h} \\ &\quad = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + c_1 r_1, a_2) \cdot r_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + hr_1, a_2 + c_2 r_2) \cdot r_2 \end{aligned}$$

Når $h \to 0$ må også c_1 og c_2 gå mot 0. Vi vet at de partieltderiverte $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ og $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ er kontinuerlige derfor vil

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + c_1 r_1, a_2) &\to \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + hr_1, a_2 + c_2 r_2) &\to \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \end{aligned}$$

når h nærmer seg 0. Dette viser at

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1, a_2)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdot r_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) \cdot r_2 = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} \end{aligned}$$

□

Vi skal nå bevise en setning som vi kan tenke på som utvidelsen av middelverdisetningen til teorien for flere variable. Imidlertid skal vi ikke tenke på denne setningen som noe hovedresultat, men heller som en hjelpesetning bruk i senere bevis.

2.66 Setning (Middelverdisetningen for flere variable)
La f være en C^1-funksjon på en åpen mengde A. Anta at $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{x}$ *er punkt i A slik at det rette linjestykket mellom dem også er i A, da finnes et tall c mellom* 0 *og* 1 *slik at*

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a} + c(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Bevis: For å gjøre notasjonen litt enklere lar vi $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Vi definerer nå den envariable funksjonen g ved

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$$

Legg merke til at g er definert på et åpent intervall som inneholder punktene 0 og 1 siden linjestykket mellom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{x}$ er i A. Vi har også at g' er gitt ved den retningsderiverte til f i retningen $\mathbf{v}$. Altså

$$g'(t) = f'(\mathbf{a} + t\mathbf{v}; \mathbf{v})$$

Setning 2.55 sier at den retningsderiverte eksisterer, dermed er g en deriverbar funksjon. Og formelen for den retningsderiverte gir at

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$$

Middelverdisetningen for g på fra 0 til 1 sier at det finnes en $c \in (0, 1)$ slik at

$$g(1) - g(0) = g'(c)$$

Setningen er bevist når vi setter inn formlene for g og g':

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a} + c\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$$

□

Setning 2.57 sa at C^1-funksjoner er kontinuerlige. Dette beviser vi på følgende måte:

Bevis for setning 2.57: Vi skal vise at grenseverdien

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})|$$

er lik 0 for alle $\mathbf{a} \in A$. Da følger det lett at f er kontinuerlig.

Vi kan skrive

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| = |f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})|$$

hvor $\mathbf{u}$ er en enhetsvektor i $\mathbb{R}^n$. La S være mengden av alle enhetsvektorer. (Legg merke til at S er en lukket og begrenset mengde.) At $\mathbf{x}$ går mot $\mathbf{a}$ tilsvarer at $h \to 0^+$, mens $\mathbf{u}$ kan bevege seg fritt rundt i mengden av alle enhetsvektorer.

La oss bruke setning 2.66 på dette tilfellet: Vi får da en c mellom 0 og 1 slik at

$$f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a}) = h\nabla f(\mathbf{a} + ch\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$$

Tenker vi på $(t, \mathbf{u}) \mapsto \nabla f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$ som en funksjon definert på den lukkede og begrensede mengden $\{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq t \leq h \text{ og } \mathbf{u} \in S\}$, (funksjonen er kontinuerlig siden den er satt sammen av de partieltderiverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ og andre kontinuerlige funksjoner ved hjelp av $+$, $\cdot$ og innsetting) kan vi bruke ekstremalverdisetningen til å finne et tall M slik at $|\nabla f(\mathbf{a} + ch\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}| \leq M$ for alle $\mathbf{u} \in S$ og c mellom 0 og 1. Dermed er

$$0 \leq |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| = |h\nabla f(\mathbf{a} + ch\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}| \leq hM$$

Og når $h \to 0^+$, må også $hM \to 0^+$. Derfor er

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| = 0$$

□

Vi fortsetter med å se på beviset for entydighet av tangenthyperplan:

Bevis for setning 2.60: For å vise en slik setning antar vi at h_1 og h_2 er to affine funksjoner som begge tangerer f i $\mathbf{a}$. I utgangspunktet kunne det jo tenkes at disse var forskjellige, men om vi kunne vise at de var like, da ville jo setningen være bevist.

Siden h'ene er affine kan de skrives på formen:

$$h_1(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + d_1$$
$$h_2(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + d_2$$

Vå første observasjon er å finne ut hva d_1 og d_2 må være. La oss se på hva det betyr at h_1 tangerer f: Definisjonen sier at grenseverdien

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - h_1(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0$$

Siden nevneren er 0 når $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ må også telleren gå mot 0, ellers kunne jo ikke grenseverdien eksistere. Dette betyr at $f(\mathbf{a}) = h_1(\mathbf{a})$. Men vi ser at $h_1(\mathbf{a}) = d_1$. Derfor er $d_1 = f(\mathbf{a})$. Tilsvarende er $d_2 = f(\mathbf{a})$. For å fullføre beviset gjenstår det nå å vise at vektorene $\mathbf{n}_1$ og $\mathbf{n}_2$ er like.

La $\mathbf{u}$ være en enhetsvektor i $\mathbb{R}^n$, og la $t > 0$. Vi ønsker å sammenligne $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}$ med $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{u}$, vi har:

$$|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{u}| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot t\mathbf{u} - \mathbf{n}_2 \cdot t\mathbf{u}|}{t}$$

Vi ønsker nå å få høyre side til å ligne på grenseverdiene $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})-h_1(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0$ og den tilsvarende for h_2. Dette gjøres ved å la $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$ og så snike inn f: Vi har

$$\begin{aligned}
|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{u}| &= \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot t\mathbf{u} - \mathbf{n}_2 \cdot t\mathbf{u}|}{t} \\
&= \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot t\mathbf{u} - f(\mathbf{a}+t\mathbf{u}) + f(\mathbf{a}) - \mathbf{n}_2 \cdot t\mathbf{u} + f(\mathbf{a}+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})|}{t} \\
&\leq \frac{|f(\mathbf{a}+t\mathbf{u}) - \mathbf{n}_1 \cdot t\mathbf{u} - d_1|}{t} + \frac{|f(\mathbf{a}+t\mathbf{u}) - \mathbf{n}_2 \cdot t\mathbf{u} - d_2|}{t} \\
&= \frac{|f(\mathbf{a}+t\mathbf{u}) - h_1(\mathbf{a}+t\mathbf{u})|}{t} + \frac{|f(\mathbf{a}+t\mathbf{u}) - h_2(\mathbf{a}+t\mathbf{u})|}{t}
\end{aligned}$$

Lar vi nå $t \to 0^+$ vil $\frac{|f(\mathbf{a}+t\mathbf{u})-h_1(\mathbf{a}+t\mathbf{u})|}{t} \to 0$ og $\frac{|f(\mathbf{a}+t\mathbf{u})-h_2(\mathbf{a}+t\mathbf{u})|}{t} \to 0$. Derfor må $|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{u}| = 0$. Siden dette gjelder for alle enhetsvektorer $\mathbf{u}$ er $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$. □

Setning 2.61 ga formelen

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

for tangentplanet til en C^1-funksjon f. Dette kan utledes som følger:

Bevis for setning 2.61: Vi har allerede sett at tangent(hyper)planet er entydig. Dersom vi kan vise at grenseverdien

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}))|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}$$

eksisterer og er lik 0, vil vi også ha bevist formelen for tangent(hyper)planet. Vi setter $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$, hvor $t \geq 0$ og $\mathbf{u}$ er en enhetsvektor. På samme måte som i beviset for setning 2.57 kan vi la $t \to 0^+$, mens vi lar $\mathbf{u}$ virre rundt på egen hånd. Dermed er det nok å betrakte på grenseverdien

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|f(\mathbf{a}+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a}) - t\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}|}{t}$$

som kan forenkles til

$$\lim_{t\to 0^+}\left|\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{u})-f(\mathbf{a})}{t}-\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{u}\right|$$

Men setning 2.66 sier at det finnes et tall c mellom 0 og 1, avhengig av $\mathbf{u}$, slik at

$$\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{u})-f(\mathbf{a})}{t}=\nabla f(\mathbf{a}+ct\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}$$

Dette gir at grenseverdien er lik

$$\lim_{t\to 0^+}|(\nabla f(\mathbf{a}+ct\mathbf{u})-\nabla f(\mathbf{a}))\cdot\mathbf{u}|$$

Siden $\mathbf{u}$ er enhetsvektor har vi ulikheten

$$|(\nabla f(\mathbf{a}+ct\mathbf{u})-\nabla f(\mathbf{a}))\cdot\mathbf{u}|\leq\|\nabla f(\mathbf{a}+ct\mathbf{u})-\nabla f(\mathbf{a})\|$$

Lar vi $t\to 0^+$, nærmer $\mathbf{a}+ct\mathbf{u}$ seg $\mathbf{a}$ og kontinuiteten av de partieltderiverte gir at $\nabla f(\mathbf{a}+ct\mathbf{u})\to\nabla f(\mathbf{a})$. Setningen følger da av ulikheten

$$0\leq\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})-\nabla f(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a}))|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\leq\lim_{t\to 0^+}\|\nabla f(\mathbf{a}+ct\mathbf{u})-\nabla f(\mathbf{a})\|=0$$

□

2.4.8 Kjerneregelen

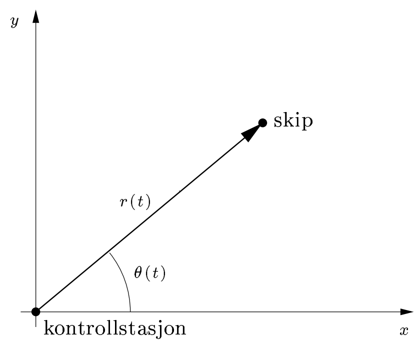
En av de nyttigste derivasjonsreglene vi har for funksjoner av én variabel er kjerneregelen. Vi skal nå se på hvordan kjerneregel generaliseres til funksjoner av flere variable. Siden formelen har et ganske komplisert utseende, skal vi først se på noen konkrete tilfeller med ikke altfor mange variable.

Anta at $f(u,v)$ er en C^1-funksjon i to variable og at $g(x)$ og $h(x)$ er deriverbare funksjoner av en variabel. Ved å sette $u=g(x)$ og $v=h(x)$ danner vi en sammensatt funksjon

$$k(x)=f(g(x),h(x))$$

Tenk deg at du allerede har regnet litt med funksjonene f, g og h, hver for seg. Sannsynligvis har du da funnet uttrykk for de partielt deriverte til f, $\frac{\partial f}{\partial u}$ og $\frac{\partial f}{\partial v}$, samt $\frac{dg}{dx}$ og $\frac{dh}{dx}$. Hvis du deretter ønsker å studere den sammensatte funksjonen k og derivere denne kan kjerneregelen være til god hjelp. Den gir nemlig formelen

$$\frac{dk}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{dg}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dh}{dx}$$



Figur 2.21: Måling av posisjonen til skipet.

Så dersom $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{dg}{dx}$ og $\frac{dh}{dx}$ allerede er kjente uttrykk, kan en sette disse inn i formelen over. Da finner en et uttrykk for den deriverte til k. I denne formelen vil selvfølgelig de partiell deriverte til f, $\frac{\partial f}{\partial u}$ og $\frac{\partial f}{\partial v}$, være funksjoner av u og v. For å få en funksjon x må vi substituere $u = g(x)$ og $v = h(x)$. Legg merke til at ved denne fremgangsmåten for å finne $\frac{dk}{dx}$ er det ikke nødvendig å skrive ut formeluttrykket for k.

La oss se på et eksempel:

2.67 Eksempel

Posisjonen til et skip bestemmes ved at man fra en kontrollstasjon måler avstanden r og vinkelen θ til skipet. Se figur 2.21 Fra disse målingene kan vi bestemme de deriverte $r'(t)$ og $\theta'(t)$ som forteller oss hvor fort avstanden og vinkelen endrer seg. Signalene fra en radiosender treffer skipet med en styrke $f(x, y)$. Avgjør hvor mye signalstyrken endrer seg per tidsenhet.

Posisjonen ved tiden t er

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t) \qquad \text{og} \qquad y(t) = r(t)\sin\theta(t)$$

Signalstyrken blir dermed

$$S(t) = f(x(t), y(t))$$

der $x(t)$ og $y(t)$ er som ovenfor. Ifølge kjerneregelen er

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Siden

$$\frac{dx}{dt} = r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\sin\theta(t)\cdot\theta'(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = r'(t)\sin\theta(t) + r(t)\cos\theta(t)\cdot\theta'(t)$$

får vi
$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(r' \cos\theta - t \cdot \theta' \sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r' \sin\theta + r \cdot \theta' \cos\theta)$$

□

La oss se på et nytt tilfelle av kjerneregelen: Anta at $f(u,v)$ er en C^1-funksjon av to variable og at $g(x,y,z)$ og $h(x,y,z)$ er to C^1-funksjoner av tre variable. Vi kan da lage den sammensatte funksjonen
$$k(x,y,z) = f(g(x,y,z), h(x,y,z))$$
ved å gjøre substitusjonene $u = g(x,y,z)$, $v = h(x,y,z)$. Kjerneregelen forteller oss hvordan vi kan regne ut de partiell deriverte til k dersom vi kjenner de partiell deriverte til f, g og h:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\\
\frac{\partial k}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial h}{\partial y}\\
\frac{\partial k}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial h}{\partial z}
\end{aligned}$$
Igjen er det slik at de partiell deriverte til f, $\frac{\partial f}{\partial u}$ og $\frac{\partial f}{\partial v}$, vil være funksjoner av u og v. For å få funksjoner av x, y og z må vi substituere $u = g(x,y,z)$ og $v = h(x,y,z)$. La oss ta et konkret eksempel for å se hvordan formlene fungerer i praksis.

2.68 Eksempel
Vi velger $f(u,v) = uv^2$, $g(x,y,z) = x + z + 2yz$, $h(x,y,z) = x^2yz$. La oss først finne de partiell deriverte til f:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= v^2 = (x^2yz)^2 = x^4y^2z^2\\
\frac{\partial f}{\partial v} &= 2uv = 2(x+z+2yz)(x^2yz) = 2x^3yz + 2x^2yz^2 + 4x^2y^2z^2
\end{aligned}$$
Her har vi brukt substitusjonene $u = x + z + 2yz$ og $v = x^2yz$ for å uttrykke $\frac{\partial f}{\partial u}$ og $\frac{\partial f}{\partial v}$ ved hjelp av x, y og z. Vi kan nå regne ut de deriverte til funksjonen $k(x,y,z) = f(g(x,y,z), h(x,y,z))$ ved hjelp av kjerneregelen: Siden $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial h}{\partial x} = 2xyz$ får vi at
$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\\
&= (x^4y^2z^2)\cdot 1 + (2x^3yz + 2x^2yz^2 + 4x^2y^2z^2)\cdot 2xyz\\
&= 5x^4y^2z^2 + 4x^3y^2z^3 + 8x^3y^3z^3
\end{aligned}$$

Den partieltderiverte $\frac{\partial k}{\partial y}$ finner vi ved å sette inn $\frac{\partial g}{\partial y} = 2z$ og $\frac{\partial h}{\partial y} = x^2 z$ i formelen for $\frac{\partial k}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \\ &= (x^4y^2z^2) \cdot 2z + (2x^3yz + 2x^2yz^2 + 4x^2y^2z^2) \cdot x^2 z \\ &= 6x^4y^2z^3 + 2x^5yz^2 + 2x^4yz^3\end{aligned}$$

Til slutt finner vi $\frac{\partial k}{\partial z}$ ved å sette inn $\frac{\partial g}{\partial z} = 1 + 2y$ og $\frac{\partial h}{\partial z} = x^2 y$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \\ &= (x^4y^2z^2) \cdot (1 + 2y) + (2x^3yz + 2x^2yz^2 + 4x^2y^2z^2) \cdot x^2 y \\ &= 3x^4y^2z^2 + 6x^4y^3z^2 + 2x^5y^2z\end{aligned}$$

$\square$

Vi er nå klare til å se på den fulle versjonen av kjerneregelen.

2.69 Setning (Kjerneregel)
La $f(u_1, \ldots, u_m)$ være en C^1-funksjon av m variable definert på en åpen mengde og la $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)$ være m C^1-funksjoner av n variable med åpne definisjonsmengder. Da er den sammensatte funksjonen

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

en C^1-funksjon, og dersom h er definert i $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b} = (g_1(\mathbf{a}), \ldots, g_m(\mathbf{a}))$ så er

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\mathbf{a})$$

Kjerneregelen kan virke komplisert og vanskelig å huske, men egentlig er den svært naturlig. Anta at vi gir variabelen x_i et lite tillegg k – da vil h øke med $\frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot k$. Siden h er en sammensatt funksjon, kan vi tenke oss at denne økningen foregår i to trinn. I første trinn fører økningen i x_i til at funksjonen g_j øker med $\ell_j = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot k$. Siden denne økningen går inn i j-te variabel i f, medfører den en økning på $\frac{\partial f}{\partial u_j} \cdot \ell_j = \frac{\partial f}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot k$ i hele funksjonsuttrykket. Summerer vi bidraget fra alle komponentene $j = 1, 2, \ldots, m$, får vi økningen

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \cdot k + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_i} \cdot k + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_i} \cdot k$$

Dette uttrykket skal altså være lik $\frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot k$, og dermed har vi kjerneregelen. Argumentet ovenfor er ikke et matematisk bevis for kjerneregelen (blant annet fordi det bare er tilnærmet sant at når vi øker x_i med et lite tall k, så vil h vokse med $\frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot k$), men det gir oss en god forståelse av hvorfor formelen ser ut som den gjør.

La oss se på et eksempel der vi setter opp kjerneregelen for et tilfelle:

2.70 Eksempel
La $f(u, v, w)$ være en C^1-funksjon av tre variable og la $g(x, y)$, $h(x, y)$ og $k(x, y)$ være tre C^1-funksjoner av to variable. La $F(x, y)$ være den sammensatte funksjonen

$$F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y), k(x, y))$$

Vi skal nå sette formelen for den partieltderiverte $\frac{\partial F}{\partial y}$. Kjerneregelen gir

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial k}{\partial y}$$

□

2.4.9 *Bevis for kjerneregelen

Det er på tide å bevise kjerneregelen. Den versjonen av regelen som vi har sett på ovenfor, er den som brukes mest i praksis, men når vi skal bevise regelen, er det greiere å bruke mer vektornotasjon. Vi skal derfor skrive $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ istedenfor

$$(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

og vi skal la $\mathbf{g}'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = (g_1'(\mathbf{a}; \mathbf{r}), \ldots, g_m'(\mathbf{a}; \mathbf{r}))$.

2.71 Setning (Kjerneregelen i vektornotasjon)
La $f(u_1, \ldots, u_m)$ være en C^1-funksjon av m variable definert på en åpen mengde og la $\mathbf{g}(\mathbf{x} = (g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$ være m C^1-funksjoner av n variable, hver med åpen definisjonsmengde. Da er den sammensatte funksjonen

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

en C^1-funksjon, og dersom h er definert i $\mathbf{a}$ så er

$$h'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$$

La oss aller først vise at denne versjonen av kjerneregelen impliserer den opprinnelige. Setter vi $\mathbf{r} = \mathbf{e}_i$ i formelen ovenfor, får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= h(\mathbf{a}; \mathbf{e}_i) = \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{a}; \mathbf{e}_i) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{b}), \dots, \frac{\partial f}{\partial u_m}(\mathbf{b})\right) \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\mathbf{a})\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\mathbf{a})
\end{aligned}$$

Dette er den opprinnelige versjonen av kjerneregelen.

For å bevise kjereneregelen skal vi benytte oss av middelverdisetningen for funksjoner av flere variable. Husk at setning 2.66 sa at dersom f er en C^1-funksjon definert på en åpen mengde som inneholder linjestykket mellom punktene $\mathbf{a}$ og $\mathbf{x}$, så finnes et tall c mellom 0 og 1 slik at

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a} + c(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Bevis for kjerneregelen på vektorform: Vi må beregne

$$\lim_{t \to 0} \frac{h(\mathbf{a} + t\mathbf{r}) - h(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{g}(\mathbf{a} + t\mathbf{r})) - f(\mathbf{g}(\mathbf{a}))}{t}$$

Definer $\Delta\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{a} + t\mathbf{r}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})$ og observer at

$$\lim_{t \to 0} \Delta\mathbf{g}(t)t = \mathbf{g}'(\mathbf{a}; \mathbf{r}).$$

Bruker vi middelverdisetningen for flere variable, setning 2.66, kan vi nå skrive

$$\begin{aligned}
\frac{f(\mathbf{g}(\mathbf{a} + t\mathbf{r})) - f(\mathbf{g}(\mathbf{a}))}{t} &= \frac{1}{t}\left(f(\mathbf{g}(\mathbf{a}) + \Delta\mathbf{g}(t)) - f(\mathbf{g}(\mathbf{a}))\right) \\
&= \frac{1}{t} \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{a}) + c\Delta\mathbf{g}(t)) \cdot \Delta\mathbf{g}(t)
\end{aligned}$$

for en konstant c mellom 0 og 1. Lar vi nå t gå mot null, får vi

$$\begin{aligned}
h'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) &= \lim_{t \to 0} \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{a}) + c\Delta\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{\Delta\mathbf{g}(t)}{t} \\
&= \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{a}, \mathbf{r})
\end{aligned}$$

Dette beviser formelen i kjerneregelen. For å se at h er en C^1 funksjon observerer vi at siden f og $g_1, \dots, g_m$ er C^1-funksjoner så er uttrykket $\nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{a}, \mathbf{r})$ bygget opp av kontinuerlige funksjoner. Dette viser at alle de partielt deriverte til h er kontinuerlige. $\square$

2.4.10 Nivåkurver, nivåflater og gradienten

I dette avsnittet skal vi se på tangentlinjer til nivåkurver og tangentplan til nivåflater. Vi skal ikke ha noen ambisjoner om å gi disse resultatene er solid teoretisk fundament her. I så fall måtte vi sett på *det implisitte funksjonsteorem*. Dette er et fantastisk resultat, og har mange betydningsfulle konsekvenser, men beviset involverer nye matematiske idéer og det blir for omstendelig å gå inn på disse. Derfor skal vi nøye oss med å sannsynliggjøre resultatene.

Vi skal først se på nivåkurvene til en funksjon av to variable. Husk at nivåkurvene til $f(x, y)$ er løsningsmengder til

$$f(x, y) = c$$

for ulike konstante tall c. Vi kan tenke på nivåkurven som skjæringspunktene mellom grafen til f og planet $z = c$.

Anta at f er C^1 slik at vi kan finne gradienten og tangentplan til grafen. La (a, b) være et punkt i det indre av definisjonsmengden til f og anta at

$$f(a, b) = c$$

Det er nå naturlig å tro at dersom vi tar tangentplanet til grafen til f i (a, b) og snitter med planet $z = c$, så skulle resultatet være tangentlinja til nivåkurven $f(x, y) = c$ i punktet (a, b). La oss forsøke å regne på dette: Vi vet at tangentplanet til grafen til f i (a, b) er grafen til den affine funksjonen

$$h(x, y) = f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot ((x, y) - (a, b))$$

Å snitte med planet $z = c$ betyr her at vi kan sette $h(x, y) = c$. Om vi også bruker at $f(a, b) = c$ får vi:

$$c = c + \nabla f(a, b) \cdot ((x, y) - (a, b))$$

Forenkler vi dette finner vi at tangentlinja til nivåkurva $f(x, y) = c$ i punktet (a, b) skal være gitt ved formelen

$$\nabla f(a, b) \cdot ((x, y) - (a, b)) = 0$$

Dette er linja gjennom (a, b) med normalvektor $\nabla f(a, b)$.

Legg merke til at dersom $\nabla f(a, b) = 0$ så vil dette skjære seg. Ligningen for tangentlinjen til nivåkurven blir i så fall ikke ligningen for noen rett linje, men kun $0 = 0$. Derfor skal vi konsekvent se bort fra dette tilfellet.

Argumentasjonen over leder oss til følgende definisjon:

2.72 Definisjon
La f være en C^1-funksjon i to variable, la (a,b) være et indre punkt i D_f og la $c = f(a,b)$. Dersom $\nabla f(a,b) \neq 0$ definerer vi tangentlinja til nivåkurven $f(x,y) = c$ i (a,b) til å være gitt ved

$$\nabla f(a,b) \cdot ((x,y) - (a,b)) = 0$$

Umiddelbart fra denne definisjonen kan vi avlede følgende setning:

2.73 Setning
La f være en C^1-funksjon i to variable, la (a,b) være et indre punkt i D_f og la $c = f(a,b)$. Da står $\nabla f(a,b)$ normalt på tangentlinja til nivåkurven $f(x,y) = c$ i (a,b).

Siden nullvektoren står normalt på alle linjer trenger vi ikke å gjøre noe unntak for dette tilfellet i setningen over. La oss se på et eksempel:

2.74 Eksempel
La funksjonen f være gitt ved

$$f(x,y) = xe^{-y}$$

Vi skal se på nivåkurven som går gjennom punktet $(2,0)$ og finne tangenten i dette punktet.

Setter vi inn $(x,y) = (2,0)$ får vi $f(2,0) = 2$. Dermed er det nivåkurven

$$f(x,y) = 2$$

vi undersøker i denne oppgaven. For å bruke formelen for tangentlinje til en nivåkurve trenger vi å regne ut gradienten. Vi har:

$$\nabla f(x,y) = (e^{-y}, -xe^{-y})$$

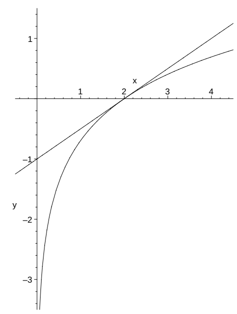
I punktet $(2,0)$ gir dette:

$$\nabla f(2,0) = (1,-2)$$

Dermed er tangenten gitt ved ligningen

$$0 = \nabla f(2,0) \cdot ((x,y) - (2,0)) = (1,-2) \cdot (x-2, y) = x - 2 - 2y$$

Tangenten til nivåkurven $f(x,y) = 2$ i $(2,0)$ er $x - 2y = 2$. Se figur 2.22. $\square$



Figur 2.22: Nivåkurven $f(x, y) = xe^{-y} = 2$ og tangenten i $(2, 0)$.

Argumentet over gjelder også for funksjoner av flere variable. La $f : A \to \mathbb{R}$ være en C^1-funksjon av n variable, definert på en åpen mengde A. Vi ser på en nivåhyperflate, det vil si løsningsmengden til $f(\mathbf{x}) = c$. Anta at $\mathbf{a} \in A$ oppfyller $f(\mathbf{a}) = c$. Tangenthyperplanet til f i $\mathbf{a}$ er grafen til

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Vi finner snittet med nivået c ved å løse $h(\mathbf{x}) = c$. Dette gir ligningen

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

Dersom $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$ kan vi bruke dette som en definisjon på tangenthyperplanet til nivåhyperflaten i $\mathbf{a}$:

2.75 Definisjon
La f være en C^1-funksjon i n variable, la $\mathbf{a}$ være et indre punkt i D_f og la $c = f(\mathbf{a})$. Dersom $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$ definerer vi tangenthyperplanet til nivåhyperflaten $f(\mathbf{x}) = c$ i $\mathbf{a}$ til å være gitt ved

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

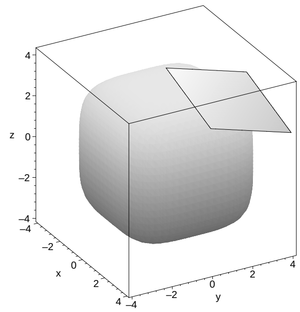
Igjen kan vi avlede følgende setning:

2.76 Setning
La f være en C^1-funksjon i to variable, la $\mathbf{a}$ være et indre punkt i D_f og la $c = f(\mathbf{a})$. Da står $\nabla f(\mathbf{a})$ normalt på tangenthyperplanet til nivåhyperflaten $f(\mathbf{x}) = c$ i $\mathbf{a}$.

La oss se på et eksempel med en funksjon av tre variable:

2.77 Eksempel
La f være gitt ved

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$$



Figur 2.23: Nivåflaten $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ gjennom $(2, 2, 3)$ og tangentplanet.

Vi skal finne tangentplanet til nivåflaten som går gjennom punktet $(2, 2, 3)$.

Vi regner ut gradienten:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(4x^3, 4y^3, 4z^3\right)$$

I punktet $(2, 2, 3)$ er den lik

$$\nabla f(2, 2, 3) = (32, 32, 108)$$

Dermed er tangentplanet i $(2, 2, 3)$ gitt ved ligningen

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla f(2, 2, 3) \cdot ((x, y, z) - (2, 2, 3)) \\ &= 32(x-2) + 32(y-2) + 108(z-3) = 32x + 32y + 108z - 452 \end{aligned}$$

som kan forenkles til

$$8x + 8y + 27z = 113$$

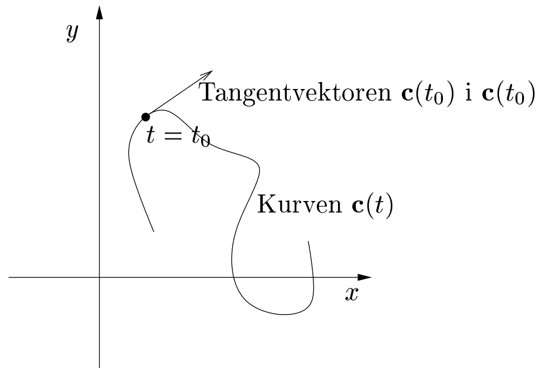
I figur 2.23 har vi skissert nivåflaten og tangentplanet i samme koordinatsystem. □

Vi skal å forsøke å bekrefte definisjonene 2.72 og 2.75 på en ny måte. Idéen er å bruke kurver som ligger på nivåhyperflatene. En *parametrisert kurve* i $\mathbb{R}^2$ er to funksjoner $x(t)$ og $y(t)$ definert for t i et intervall. For hver t_0 gir funksjonene et punkt i planet, nemlig $(x(t_0), y(t_0))$. Og når t_0 varieres tegnes kurven opp. Ofte bruker vi notasjonen

$$\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$$

Dersom x og y er deriverbare i t kan vi finne den deriverte

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t))$$



Figur 2.24: En kurve $\mathbf{c}(t)$ og tangentvektoren i $t = t_0$.

Den geometriske tolkningen av dette er at $\mathbf{c}'(t_0)$ er tangentvektoren til den parametriserte kurven i punktet $\mathbf{c}(t_0)$. Se figur 2.24.

Vi kan også se på parametriserte kurver i $\mathbb{R}^n$. Da trenger vi n funksjoner $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Og vi skriver

$$\mathbf{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

Dersom alle x_i'ene er deriverbare er tangentvektoren til den parametriserte kurven i punktet $\mathbf{c}(t_0)$ gitt ved $\mathbf{c}'(t_0) = (x_1'(t_0), x_2'(t_0), \ldots, x_n'(t_0))$.

La $f(x, y)$ være en C^1-funksjon. Idéen for å bekrefte formelen for tangentlinja til nivåkurvene er å se hva som skjer dersom vi har en parametrisering av nivåkurven. Da bør tangentvektoren til parametriseringen, som definert over, også være parallell med retningsvektoren til tangentlinja til nivåkurven, som definert i definisjon 2.72. Ved setning 2.73 holder det å sjekke at

$$\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{c}'(t_0) = 0$$

dersom $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ er en parametrisering og $(a, b) = \mathbf{c}(t_0)$. Men hva vil det si at $\mathbf{c}(t)$ parametriserer nivåkurven $f(x, y) = k$? Kravet vi stiller er at for alle t skal punktet $\mathbf{c}(t)$ ligge på nivåkurven. Altså om vi setter inn $\mathbf{c}(t)$ i funksjonen f så får vi:

$$f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t)) = k$$

Denne ligningen kan vi derivere med hensyn på t. Høyre side blir 0, mens på venstre side kan vi bruke kjerneregelen. Dette gir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

Setter vi inn $t = t_0$ og lar $(a, b) = \mathbf{c}(t_0)$ ser vi at dette er det samme som:

$$\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{c}'(t_0) = 0$$

Dermed bekrefter dette resonnementet vår definisjon av tangentlinje til en nivåkurve. For C^1-funksjoner f av tre eller flere variable gjelder tilsvarende argument. Men i stedet for å parametrisere hele nivåhyperflaten kan vi greie oss med å se på en parametrisert kurve $\mathbf{c}(t)$ som ligger på nivåhyperflaten $f(\mathbf{x}) = k$. Det overlates til den interesserte leser å selv utdype dette.

Problemet med resonnementene over er at vi apriori ikke vet om nivåkurvene og nivåflatene virkelig er kurver og flater. Det kan tenkes at løsningsmengden til ligningen $f(\mathbf{x}) = c$ er så stygg at den ikke kan ha noen tangentlinje eller tangentplan. Det er dette problemet *det implisitte funksjonsteorem* løser. En konsekvens av dette teoremet er at dersom f er C^1 og $\nabla f(\mathbf{a})$ ikke forsvinner, så er nivåflaten som går gjennom $\mathbf{a}$ virkelig en flate, den kan faktisk parametrieres. Dette er en betryggelse, og betyr at formlene for tangentlinjer og tangentplan til nivåkurver og nivåflater, som vi har utledet over, har den geometriske betydningen vi intuitivt legger i dem.

2.5 Høyere ordens deriverte

Fra teorien for funksjoner av en variabel vet vi at det ofte er nyttig eller nødvendig å derivere mer enn én gang. Også i flervariabel teori er det ofte nyttig å arbeide med annenderiverte, tredjederiverte osv. Den stor forskjellen er at vi har så mange flere muligheter

2.78 Eksempel
La $f(x, y) = x^2y^3 + y^2$. Vi har to partieltderiverte av første orden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2y$$

Når vi skal regne ut annenderiverte, har vi mange valg. Vi kan for eksempel derivere $\frac{\partial f}{\partial x}$ med hensyn på x en gang til

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3) = 2y^3.$$

Vi kan også derivere $\frac{\partial f}{\partial x}$ med hensyn på y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) = 6xy^2.$$

Vi kan også derivere $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn på både x og y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + 2y) = 6xy^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + 2y) = 6x^2y + 2$$

□

Den generelle notasjonen skulle fremgå av eksemplet ovenfor –

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$$

er den funksjonen vi får ved å derivere funksjonen f r ganger, først med hensyn på variabelen x_{i_1}, så med hensyn på variabelen x_{i_2} osv.

Selv om en funksjon f er C^1, det vil si at alle de partielt deriverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eksisterer og er kontinuerlige, kan vi ikke fra dette konkludere at de annenordens partieltderiverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ eksisterer. Likevel vil vi se at den annenordens partieltderiverte både eksisterer og er kontinuerlige for de fleste funksjoner vi støter på i praksis. Videre kan en spørre seg om de tredjeordens partieltderiverte eksisterer. Og er de i så fall kontinuerlige?

For å håndtere denne situasjonen er det lurt å innføre terminologien at en funksjon er C^r. Vi har følgende definisjon:

2.79 Definisjon
En funksjon f av n variable definert på en åpen menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er en C^2-funksjon dersom alle de annenordens partielt deriverte, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, eksisterer og er kontinuerlige på A.

Mer generelt sier vi at en funksjon f av n variable som er definert på en åpen mengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$, er C^r dersom alle de r'te ordens partieltderiverte, $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$, eksisterer og er kontinuerlige.

Observer at ved å bruke setning 2.57 kan en enkelt vise at en C^2-funksjon f også er en C^1-funksjon. Mer generelt er en C^r-funksjon også en C^{r-1}-funksjon, og dermed også en C^{r-2}-funksjon, og så videre.

2.5.1 Hessematrisen

På samme måte som gradienten var en smart måte å skrive opp de førsteordens partielt deriverte er Hessematrisen en måte å skrive ned de annenordens partielt deriverte. Mens gradienten var en vektor, det vil si en liste av tall, vil Hessematrisen være en matrise, det vil si at tallene plasseres i et rutenett.

La oss se på tilfellet med to variable. Vi skal da skrive opp gradienten og Hessematrisen til en funksjon $f(x,y)$:

Gradienten er

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

mens Hessematrisen er

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

I det generelle tilfellet hvor f er en funksjon av n variable er Hessematrisen:

$$Hf(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

La oss se på noen eksempler:

2.80 Eksempel

Finn uttrykk for gradienten og Hessematrisen til $f(x,y) = x\cos y$ og regn deretter ut $Hf(1,-\pi)$.

For å finne gradienten regner vi ut de partielt deriverte av første orden. Vi har:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x\sin y \end{aligned}$$

Dermed blir gradienten lik

$$\nabla f(x,y) = (\cos y, -x\sin y)$$

For å finne Hessematrisen finner vi de annenordens partieltderiverte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos y) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos y) = -\sin y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-x\sin y) = -\sin y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-x\sin y) = -x\cos y \end{aligned}$$

Dermed blir Hessematrisen lik

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin y \\ -\sin y & -x\cos y \end{bmatrix}$$

Til slutt evaluerer vi Hessematrisen i punktet $(1,-\pi)$ og får:

$$Hf(1,-\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Vi tar også med et eksempel hvor vi ser på en funksjon av tre variable:

2.81 Eksempel
La $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x,y,z) = \frac{2xy-1}{1+z^2}$$

I dette eksempelet skal vi først finne gradienten, deretter skal vi finne de punktene i $\mathbb{R}^3$ hvor $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$. Vi finner så Hessematrisen og evaluerer denne i de punktene hvor gradienten forsvant.

Vi regner ut gradienten ved å finne de partieltderiverte av første orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{1+z^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{1+z^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z-4xyz}{(1+z^2)^2}$$

Gradienten er derfor gitt ved formelen

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{2y}{1+z^2}, \frac{2x}{1+z^2}, \frac{2z-4xyz}{(1+z^2)^2}\right)$$

Dersom $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ får vi ved å se på første koordinat at $\frac{2y}{1+z^2} = 0$. Dermed må $y = 0$. Ser vi på annen koordinat har vi at $\frac{2x}{1+z^2} = 0$ og derfor er også $x = 0$. Tilsist gir tredjekoordinat ligningen

$$\frac{2z-4xyz}{(1+z^2)^2} = 0$$

Her kan vi nå sette inn $x = 0$ og $y = 0$. Dette gir

$$\frac{2z}{(1+z^2)^2} = 0$$

og vi ser at løsningen er $z = 0$. Dermed har vi funnet ut at den eneste løsningen til $\nabla f(x,y,z) = 0$ er punktet $(0,0,0)$. Nå fortsetter vi med å regner ut de annenordens partieltderiverte for å finne Hessematrisen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{1+z^2}\right) = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{1+z^2}\right) = \frac{2}{1+z^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2y}{1+z^2}\right) = -\frac{4yz}{(1+z^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{1+z^2}\right) = \frac{2}{1+z^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{1+z^2}\right) = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2x}{1+z^2}\right) = -\frac{4xz}{(1+z^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2z-4xyz}{(1+z^2)^2}\right) = -\frac{4yz}{(1+z^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2z-4xyz}{(1+z^2)^2}\right) = -\frac{4xz}{(1+z^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2z-4xyz}{(1+z^2)^2}\right) = \frac{2(2xy-1)(3z^2-1)}{(1+z^2)^3}
\end{aligned}$$

Hessematrisen blir altså:

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{1+z^2} & -\frac{4yz}{(1+z^2)^2} \\ \frac{2}{1+z^2} & 0 & -\frac{4xz}{(1+z^2)^2} \\ -\frac{4yz}{(1+z^2)^2} & -\frac{4xz}{(1+z^2)^2} & \frac{2(2xy-1)(3z^2-1)}{(1+z^2)^3} \end{bmatrix}$$

Vi setter inn punktet hvor gradienten forsvant, $(0,0,0)$, og får

$$Hf(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\square$

2.5.2 Symmetri av blandede partieltderiverte

Du har forhåpentligvis lagt merke til at i eksemplene ovenfor (2.78, 2.80, 2.81) er de blandede partieltderiverte like. Det vil si at $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ er lik $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$

er lik $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ er lik $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$. Dette er ikke en universell regel; det finnes funksjoner f slik at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ er forskjellige, men for de fleste vi støter på i praksis vil de blandede partieltderiverte være like.

2.82 Setning
La $f(x_1, \ldots, x_n)$ være en C^2-funksjon av n variable definert på en åpen mengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og la $\mathbf{a}$ være et punkt i definisjonsmenden. Da er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$$

for alle i, j.

Denne setningen sier at de blandede partielt deriverte er like dersom funksjonen er en C^2-funksjon, altså dersom de annenordens partieltderiverte eksisterer og er kontinuerlige. Dette vil gjelde de fleste funksjonene vi møter i dette heftet.

At blandede partiell deriverte av annen orden er like, medfører også at blandede partiell deriverte av r'te orden til en C^r-funksjon er like dersom de inneholder like mange derivasjoner med hensyn på hver variabel. Dersom f er C^4, kan vi for eksempel vise at

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial x}$$

på følgende måte:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial x}$$

Overbevis deg selv om at du kan begrunne disse overgangene.

Setning 2.82 sier at dersom vi på forhånd kan overbevise oss om at en funksjon er C^2, så er det unødvendig å regne ut både $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Det holder å regne ut en av disse siden de er like. Dette kan spare oss for endel regnearbeid. Vi avslutter med et eksempel på dette:

2.83 Eksempel
La $f(x, y, t)$ være gitt ved

$$f(x, y, t) = e^t(x^3 + xy^2) - t^2$$

Vi skal beregne Hessematrisen til f.

Dersom vi deriverer uttrykket $e^t(x^3 + xy^2) - t^2$ med hensyn på x, y eller t sier derivasjonsreglene at vi får et uttrykk som er bygd opp av elementære funksjoner ved de fire regneartene og innsetting. Uttrykket vil derfor være kontinuerlig. Og deriverer vi enda en gang vil vi igjen få et uttrykk oppbygd av elementære funksjoner, dette er igjen kontinuerlig. Slik kan vi fortsette med å derivere med hensyn på x, y eller t så mange ganger vi ønsker og resultatet vil alltid være kontinuerlig. Spesielt vil alle de annenordens partieltderiverte være kontinuerlige. Derfor er f C^2.

Vi finner først de partieltderiverte av første orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^t(3x^2 + y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xye^t$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = e^t(x^3 + xy^2) - 2t$$

For å finne Hessematrisen regner vi ut de partieltderiverte av annen orden. Vi har

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(e^t(3x^2 + y^2)) = 6xe^t$$

For å finne $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ kan vi enten derivere $\frac{\partial f}{\partial x}$ med hensyn på y, eller derivere $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn på x, vi velger det siste alternativet siden uttrykket for $\frac{\partial f}{\partial y}$ er enklest:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2xye^t) = 2ye^t$$

For å finne $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$ velger vi å derivere $\frac{\partial f}{\partial x}$ med hensyn på t:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(e^t(3x^2 + y^2)) = e^t(3x^2 + y^2)$$

Videre er

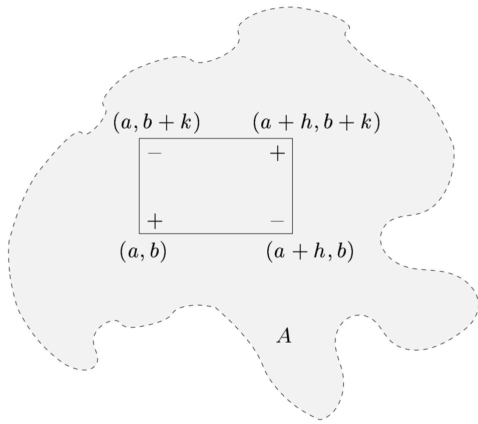
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2xye^t) = 2xe^t$$

Vi finner $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}$ ved å derivere $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn på t:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} = \frac{\partial}{\partial t}(2xye^t) = 2xye^t$$

Og til slutt er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = e^t(x^3 + xy^2) - 2$$



Figur 2.25: Rektangel i A

Dette gir at Hessematrisen er

$$Hf(x,y,t) = \begin{bmatrix} 6xe^t & 2ye^t & e^t(3x^2+y^2) \\ 2ye^t & 2xe^t & 2xye^t \\ e^t(3x^2+y^2) & 2xye^t & e^t(x^3+xy^2)-2 \end{bmatrix}$$

Merk at vi ved å bruke symmetri av de blandede partielt deriverte, sparte oss for å utføre derivasjonene $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$ og $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$. $\square$

2.5.3 *Bevis for setning 2.82

Vi skal nå se hvordan setningen om likhet av de blandede partielt deriverte kan bevises:

Bevis for setning 2.82: For å forenkle notasjonen antar vi at $f(x,y)$ er en funksjon av to variable. La $\mathbf{a} = (a,b)$ være et punkt i definisjonsmengden og anta at tallene h, k er så små at hele rektangelet i figur 2.25 ligger i den åpne mengden A. La

$$\Delta(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a,b)$$

der vi har kombinert funksjonsverdiene i hjørnene på rektanglet vårt ved å bruke fortegnene vist på figuren. Vi skal vise at grenseverdien

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk}$$

er lik både $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$.

Først skritt er å bruke middelverdisetningen på funksjonen

$$g(x) = f(x, b+k) - f(x, b).$$

Vi får
$$g(a+h)-g(a)=g'(c)\cdot h$$
for en c mellom a og $a+h$. Setter vi inn den opprinnelige funksjonen, og bruker at $g'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,b)$, ser vi at

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b) & \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(c,b)\right]h \end{aligned}$$

Dette kan også skrives
$$\Delta(h,k)=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(c,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(c,b)\right]h$$

Neste steg er å bruke middelverdisetningen på funksjonen
$$G(y)=\frac{\partial f}{\partial x}(c,y).$$

Vi får
$$G(b+k)-G(b)=G'(d)\cdot k$$
for en d mellom b og $b+k$. Ved å bruke at $G'(y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(c,y)$ kan dette også skrives
$$\frac{\partial f}{\partial x}(c,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(c,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(c,d)\cdot k$$
Kombinerer vi formlene våre, ser vi at
$$\Delta(h,k)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(c,d)\cdot hk$$

Siden $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ er kontinuerlig, vil $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(c,d)\to\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)$ når $(h,k)\to 0$. Følgelig er
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta(h,k)}{hk}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)$$
For å vise at også $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta(h,k)}{hk}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$, bytter vi om på rollene til variablene x og y i argumentet ovenfor. Vi starter med å bruke middelverdisetningen på funksjonen
$$\gamma(y)=f(a+h,y)-f(a,y)$$
og fortsetter på akkurat samme måte som ovenfor. Detaljene overlates til leserne. $\square$

2.6 Oppgaver

Oppgave 2.1
Avgjør om hver av mengdene i eksempel 2.5 er åpne eller lukkede.

Oppgave 2.2
Avgjør om hver av mengdene i eksempel 2.4 er begrensede eller ikke.

Oppgave 2.3
Avgjør om mengden er åpen eller lukket eller ingen av delene.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ og } |y| \leq 1\}$
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ og } |y| < 1\}$
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ og } |y| < 1\}$
d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$
e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y < 1\}$
f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$
g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ og } y \text{ er rasjonale}\}$
h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$

Oppgave 2.4
I denne oppgaven skal vi se litt på egenskapene til de åpne mengdene.

a) Vis at $A \subset \mathbb{R}^n$ er åpen hvis og bare hvis følgende er oppfylt: For ethvert punkt $\mathbf{a} \in A$ finnes det et positivt tall r slik at for alle $\mathbf{x}$ som oppfyller $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r$ er $\mathbf{x} \in A$.

b) Anta at $A, B \subset \mathbb{R}^n$ er åpne mengder. Vis at $A \cup B$ og $A \cap B$ er åpne mengder.

c) Hvis $A \subset \mathbb{R}^n$, så kalles mengden

$$A^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin A\}$$

komplementet til A. Vis at A og A^c har samme rand, det vil si $\partial A = \partial(A^c)$.

d) Vis at en mengde $A \subset \mathbb{R}^n$ er åpen hvis og bare hvis komplementet A^c er lukket.

Oppgave 2.5
I denne oppgaven skal vi se litt på egenskapene til de lukkede mengdene. Det er lurt å gjøre oppgave 2.4 før du begynner på denne.

a) Anta at $A, B \in \mathbb{R}^n$ er lukkede mengder. Vis at $A \cup B$ og $A \cap B$ er lukkede mengder.

b) Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$ er lukket og at $B \subset \mathbb{R}^n$ er åpen. Vis at

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

er lukket.

Oppgave 2.6
I denne oppgaven skal vi se litt på konvergens av følger i $\mathbb{R}^n$.

a) La $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge av punkt i $\mathbb{R}^n$. Forklar hva det vil si at $\{\mathbf{x}_k\}$ konvergerer mot et punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

b) La $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge av punkt i $\mathbb{R}^n$ som konvergerer mot $\mathbf{a}$. Anta at $\mathbf{x}_k \in A$ for alle k. Vis at da er $\mathbf{a} \in \overline{A}$. Finn et eksempel som viser at $\mathbf{a}$ ikke behøver å være med i A.

c) Bevis følgende påstand: En delmengde $A \subset \mathbb{R}^n$ er lukket hvis og bare hvis enhver konvergent følge av punkt i A konvergerer mot et punkt i A.

d) Anta at $\mathbf{a}$ er med i definisjonsmengden til en funksjon f. Vis at f er kontinuerlig i $\mathbf{a}$ hvis og bare hvis

$$f(\mathbf{a}) = \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k)$$

for alle følger $\{\mathbf{x}_k\}$ som konvergerer mot $\mathbf{a}$ og der hver $\mathbf{x}_k$ er med i definisjonsmengden til f.

Oppgave 2.7
Finn grenseverdiene

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (x^3 + 2xy)$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} x^2 \sin(xy)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{e^{x+y}}{x^2+3y}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \cos(x+y)$

Oppgave 2.8
Finn grenseverdiene eller begrunn hvorfor grensen ikke eksisterer.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{3x^3-3xy-6x+2y}{x-y}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},0)} \frac{\sin y+\tan x}{1+x+y}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,4)} \frac{1+2x+3y+4xy}{x^2+y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2x+y)(1+x+y)}{2x^2+xy}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^4+x^5y^6}{x^2+y^2}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{3x^2+4y^2}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\sqrt{3})} \frac{\arctan\frac{x}{y}}{x^2+y^2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-xy^3}{x^4+2x^2y^2+y^4}$

Oppgave 2.9
Vis at funksjonen f er kontinuerlig

a) $f(x,y) = x+y$

b) $f(x,y) = x^2y+y$

c) $f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = e^{-x}\sin(x+y)$

e) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

Oppgave 2.10

a) Bruk setning 2.23 til å bevise setning 2.32.

b) Bevis setning 2.23.

Oppgave 2.11
I denne oppgaven har du bruk for trekantulikheten som sier at hvis $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, så er $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

a) Vis at $|\,\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\,| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ for alle $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$.

b) La $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$. Vis at funksjonen $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$ er kontinuerlig.

c) Vis at funksjon $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}$ er kontinuerlig der den er definert.

Oppgave 2.12
Vis at funksjonen f har et maksimalpunkt på mengden A.

a) $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$ $\qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9\}$

b) $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^3$ $\qquad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|+|y|+|z| \leq 1\}$

c) $f(x,y,z,u) = e^{-(x-u)^2}(z^2+y^2)$
$A = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq u \leq 1\}$

Oppgave 2.13
La $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon og anta at det finnes et punkt $\mathbf{a}$ slik at $f(\mathbf{a}) > 0$. Anta videre at for hver $\epsilon > 0$ finnes en $R > 0$ slik at $|f(\mathbf{x})| < \epsilon$ når $\|\mathbf{x}\| > R$. For $\mathbf{x}$ tilstrekkelig langt borte fra origo er altså $f(\mathbf{x})$ vilkårlig liten. Vis at f har et maksimalpunkt.

Oppgave 2.14
Finn gradienten til f.

a)	$f(x,y) = x^3y + 3xy^4$	e)	$f(x,y,z) = (x+y)e^{-z}$
b)	$f(x,y) = \frac{x^2+x^3}{y}$	f)	$f(x,y,z) = \frac{z^2 \tan x}{1+y^2}$
c)	$f(x,y) = \cos(x+y^2)$	g)	$f(x,y,z) = z \arctan(x+y)$
d)	$f(x,y) = x^2 \ln(xy^2)$	h)	$f(x,y,z,u) = (z^2+u)e^{-x+3y}$

Oppgave 2.15
Finn den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$:

a) $f(x,y) = 3xy + y^2; \quad \mathbf{a} = (1,2); \quad \mathbf{r} = (3,-1)$

b) $f(x,y) = \ln(x+y^2); \quad \mathbf{a} = (1,0); \quad \mathbf{r} = (-1,1)$

c) $f(x,y,z) = x^2y + z^2; \quad \mathbf{a} = (1,0,1); \quad \mathbf{r} = (1,1,-1)$

d) $f(x,y,z) = z\sin(xy); \quad \mathbf{a} = (\frac{\pi}{2},1,0); \quad \mathbf{r} = (-1,0,2)$

Oppgave 2.16
I hvilken retning vokser funksjonen hurtigst i det angitte punktet

a) $f(x,y) = -x^2y + 7y^3, \quad \mathbf{a} = (4,-3)$

b) $f(x,y,z) = (x^2-y^2)e^z; \quad \mathbf{a} = (1,-1,3)$

Oppgave 2.17
Finn tangentplanet til funksjonen i det angitte punktet.

a) $f(x,y) = 1 - 2x + 3y - 4xy$ i $\mathbf{a} = (1,-1)$.

b) $g(x,y) = \frac{1}{3}x^2 \cos y$ i $\mathbf{b} = (\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$.

c) $h(x,y) = (x+y)e^{x-y^2}$ i $\mathbf{c} = (4,-2)$.

d) $k(x,y) = \frac{x \ln y}{\sqrt{1+x^2}}$ i $\mathbf{d} = (0,e)$.

Oppgave 2.18
Finn tangentplanet i $\mathbf{a}$ til den nivåflaten til f som går gjennom punktet $\mathbf{a}$ når

a) $f(x,y,z) = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}$ og $\mathbf{a} = (0,0,0)$

b) $f(x,y,z) = \frac{x+2y+4xy}{5z^2+3}$ og $\mathbf{a} = (6,1,-1)$

c) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2} \sin z$ og $\mathbf{a} = (2,-3,\frac{\pi}{3})$

Oppgave 2.19
La $f(u,v) = u^2 + v$, $g(x,y) = 2xy$, $h(x,y) = x + y^2$. Bruk kjerneregelen til å finne de partiell deriverte av $k(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$.

Oppgave 2.20
La $f(u,v) = u \cdot e^{-v}$, $g(x,y,z) = 2xy + z$, $h(x,y,z) = 2y(z+x)$. Bruk kjerneregelen til å finne de partiell deriverte av $k(x,y,z) = f(g(x,y,z), h(x,y,z))$.

Oppgave 2.21
I teorien for gasser er trykket ρ gitt som en funksjon av volumet V og temperaturen T. Vi har altså $\rho = f(V,T)$, der funksjonen f avhenger av hva slags type gass vi ser på. Anta at vi vet hvordan volumet $V = V(t)$ og temperaturen $T = T(t)$ forandrer seg med tiden t. Vis at

$$\rho'(t) = \frac{\partial f}{\partial V} V'(t) + \frac{\partial f}{\partial T} T'(t)$$

Hva får du hvis $\rho = c\frac{T}{V}$, der c er en konstant?

Oppgave 2.22
To vareslag konkurrerer om det samme markedet. Etterspørselen E_1 etter det første vareslaget varierer med prisene p_1 og p_2 på begge vareslagene.

Vi har altså en funksjon $E_1 = E_1(p_1, p_2)$. Anta at vi vet hvordan prisene $p_1 = p_1(t)$ og $p_2 = p_2(t)$ varierer med tiden. Vis at etterspørselens variasjon med tiden kan uttrykkes ved

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{\partial E_1}{\partial p_1} p_1'(t) + \frac{\partial E_1}{\partial p_2} p_2'(t)$$

Oppgave 2.23
Volumet til en sylinder med radius r og høyde h er $V = \pi r^2 h$. Når høyden og radien varierer, kan vi tenke på dette som en funksjon i to variable $V(r,h) = \pi r^2 h$. Forklar at når radien endrer seg fra r til $r + \Delta r$ og høyden endrer seg fra h til $h + \Delta h$, så er endringen i V tilnærmet gitt ved

$$\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h = 2\pi r h\, \Delta r + \pi r^2 \Delta h.$$

Anta at du har en sylinder hvor du vet at radien ligger mellom 2 m og 2.05 m og hvor høyden ligger mellom 5 m og 5.05 m. Bruk formelen ovenfor til å anslå usikkerheten i volumet.

Oppgave 2.24
Regn ut Hessematrisene:

a) $f(x,y) = 3x^2y + 2y^2x$

b) $f(x,y) = x \sin y$

c) $f(x,y) = x^2 e^{x-y}$

d) $f(x,y,z) = x^2 z - y^2 z^2$

I oppgavene som følger skal vi se på noen funksjoner som **ikke** er mors beste barn. Poenget er å gi eksempler på noen funksjoner som ikke oppfyller de betingelsene vi vanligvis stiller, og se noen konsekvenser av det.

Oppgave 2.25
La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen definer ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0, \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

a) Finn et uttrykk for $f'(x)$ når $x \neq 0$.

b) Vis at f er deriverbar i 0 og at $f'(0) = 0$.

c) Avgjør om $f'(x)$ er en kontinuerlig funksjon.

d) Er f C^1? Er f deriverbar?

Oppgave 2.26
La funksjonen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } 0 < y < x^2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Finn den retningsderiverte til g i origo og i retningen $(1,0)$.

b) La $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ være en vektor i $\mathbb{R}^2$ med $r_2 \neq 0$. Finn den retningsderiverte til g i origo og i retningen $\mathbf{r}$.

c) Begrunn hvorfor g ikke er kontinuerlig i origo.

d) Hvorfor er ikke denne funksjonen et moteksempel til setning 2.57?

Oppgave 2.27
Definer funksjonen $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y} & \text{for } x^2+y \neq 0, \\ 0 & \text{for } x^2+y = 0. \end{cases}$$

a) Regn ut den retningsderiverte til h i origo i retningen $(1,0)$.

b) La $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ være en vektor med $r_2 \neq 0$. Finn $h'(0,0;\mathbf{r})$.

c) Begrunn at $\nabla h(0,0) = (0,0)$.

d) Finn en retning $\mathbf{r}$ slik at $h'(0,0;\mathbf{r}) \neq \nabla h(0,0) \cdot \mathbf{r}$.

e) Hvorfor er ikke denne funksjonen et moteksempel til setning 2.55?

Oppgave 2.28
La funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være definert ved det delte forskriftet

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Vis at f er kontinuerlig.

b) Regn ut de partieltderiverte for $(x,y) \neq 0$.

c) Bruk definisjonen til å regne ut $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

d) Er f C^1?

e) Regn ut grenseverdiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} \quad \text{og} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$$

f) Hva er $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Strider dette mot setning 2.82? Hvorfor/hvorfor ikke?

Kapittel 3

Maks/min problemer

Hvordan finner vi maksimums- og minimumsverdier for funksjoner av flere variable? For funksjoner av én variabel vet vi at vi først må finne de punktene der den førstederiverte er null, og deretter undersøke hva slags punkt dette er ved enten å se på fortegnskiftet til den førstderiverte eller på fortegnet til den annenderiverte. I dette kapitlet skal vi se at det er en tilsvarende teori for funksjoner av flere variable. Hovedideene er de samme som i det envariable tilfellet, men siden geometrien er rikere, finnes det flere muligheter å holde styr på i den flervariable teorien.

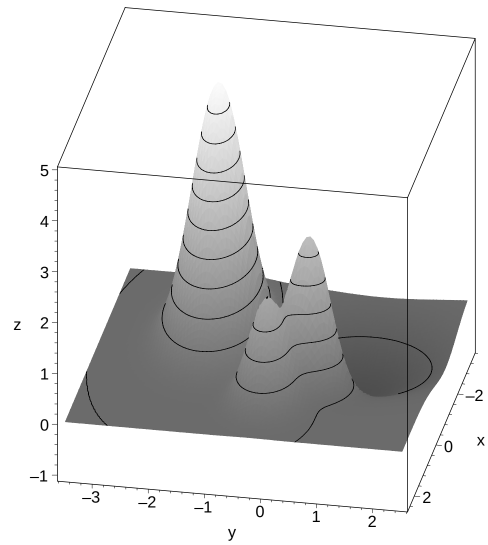
I kapittel 2 definerte vi (globale) maksimal- og minimalpunkt for funksjoner av flere variable. Vi kan imidlertid ikke regne med å finne de globale ekstremalpunktene direkte, men må gå veien om lokale maksima og minima.

3.1 Definisjon
La $f : A \to \mathbb{R}$ være en funksjon av n variable. Vi sier at f har et lokalt maksimum i punktet $\mathbf{a} \in A$ dersom det finnes en radius $r > 0$ slik at $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{y} \in A$ med avstand mindre enn r til $\mathbf{a}$; det vil si $\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < r$.

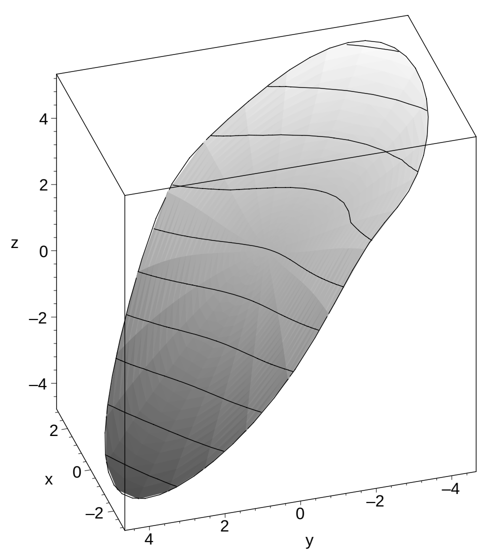
Tilsvarende kalles $\mathbf{a}$ et lokalt minimum dersom det finnes en radius $r > 0$ slik at $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{y})$ for alle $y \in A$ med $\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < r$.

Det er klart at et globalt ekstremalpunkt også vil være et lokalt ekstremalpunkt.

Lokale maksimumspunkt ser litt forskjellige ut ettersom $\mathbf{a}$ er et indre punkt eller er randpunkt. Er $\mathbf{a}$ et indre punkt, vil $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ være en "fjelltopp" på funksjonsgrafen som vist i figur 3.1. Er derimot $\mathbf{a}$ et randpunkt, er det nok at $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ er det høyeste punktet i en "skråning" som hadde blitt enda høyere om den hadde fått lov å fortsette utenfor A. Se figur 3.2



Figur 3.1: Lokale ekstremalpunkt i det indre av D_f.



Figur 3.2: Lokale ekstremalpunkt på randen til D_f.

3.1 Førstederiverttesten

Når en drøfter en funksjon i en variabel for å finne lokale ekstremalpunkt, starter en med å finne de kritiske punktene. Disse er de eneste som **kan** være lokale ekstremalpunkt. Den samme fremgangsmåten kan benyttes for å lete etter lokale maks og min for en funksjon av flere variable, og benytter da gradienten i stedet for den deriverte. Dette er førstederiverttesten:

3.2 Setning
La $f : A \to \mathbb{R}$ være en funksjon av n variable. Anta at f har et lokalt maksimum eller minimum i $\mathbf{a}$. Da er enten

i) $\mathbf{a}$ *et randpunkt til A eller*

ii) gradienten ∇f eksisterer ikke i $\mathbf{a}$ *eller*

iii) $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

Bevis: Idéen i beviset er å anta at $\mathbf{a}$ er et indre punkt hvor gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ eksistere, men er ulik 0. Hvis vi kan vise at et slikt punkt umulig kan være et ekstremalpunkt, så er setningen bevist. Når $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$ må minst en av de partieltderiverte også være ulik 0. Anta derfor at $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \neq 0$. La $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{a}$ og se på konturen

$$g(x) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

Siden $g'(a_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \neq 0$ vet fra envariabelteorien at g ikke har noe lokalt ekstremalpunkt i a_j. Men det følger at heller ikke f kan ha et ekstermalpunkt i $\mathbf{a}$. □

La oss innføre litt terminologi. Et punkt $\mathbf{a}$ der $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ vil vi kalle et *stasjonært* punkt for funksjonen f. Dersom $\mathbf{a}$ er et indre punkt, men $\nabla f(\mathbf{a})$ ikke eksisterer kaller vi $\mathbf{a}$ et *singulært* punkt for f. *Kritiske* punkt er en fellesbetegnelse som omfatter stasjonære punkt, singulære punkt og randpunkt for definisjonsmengden til f.

Et stasjonært punkt som hverken er et lokalt maksimum eller et lokalt minimum, vil vi kalle et *sadelpunkt*. Det er ikke så vanskelig å forstå hvor det siste navnet kommer fra – det punktet du sitter på når du rir på en hest, er et typisk eksempel på et sadelpunkt; det er et minimum når du beveger det i hestens lengderetning og et maksimum nå du beveger deg på tvers av hesten.

Ved hjelp av setning 3.2 kan vi redusere jakten på mulige maksimal- og minimalpunkt betraktelig. Det holder å lete blant de kritiske punktene:

3.3 Eksempel
La oss forsøke på lokalisere eventuelle maksimal- og minimalpunkt for funksjonen

$$f(x,y) = 3xy - 3x + 9y$$

f er definert på hele $\mathbb{R}^2$, derfor er det ingen randpunkt. Vi deriverer:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 9$$

Disse eksisterer overalt, f er faktisk C^1, og ifølge setningen ovenfor bør vi da se etter punkt hvor begge de partiell deriverte er null. Dette gir ligningssystemet

$$3y - 3 = 0$$
$$3x + 9 = 0$$

som har løsningen $x = -3$, $y = 1$. Dette betyr at det eneste mulige maksimal- eller minimalpunktet til f er $(-3, 1)$.

Neste spørsmål er om $(-3, 1)$ virkelig er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt. For å avgjøre dette skal vi bruke et triks som av og til er nyttig. Vi skal se på konturer for f over linjer som går gjennom $(-3, 1)$. Prøver vi med $x = -3$ eller $y = 1$ får vi

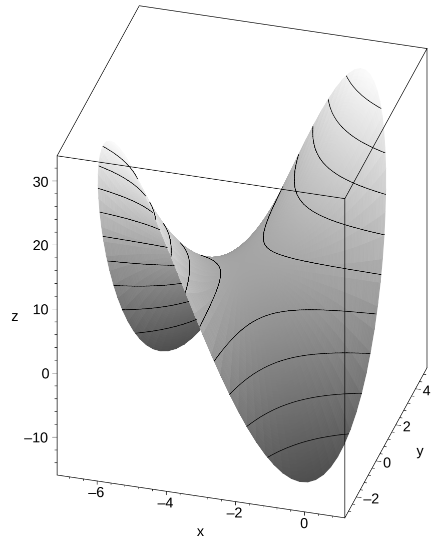
$$f(-3,y) = 3\cdot(-3)\cdot y - 3\cdot(-3) + 9y = 9$$
$$f(x,1) = 3x - 3x + 9 = 9$$

Disse konturene er konstante funksjoner og vi kan derfor enda ikke avgjøre om $(-3, 1)$ er et makspunkt, et minpunkt eller et sadelpunkt. Men la oss se på de to linjene $y - 1 = x + 3$ og $y - 1 = -x - 3$. Vi har

$$f(x, x+4) = 3x(x+4) - 3x + 9(x+4) = 3x^2 + 18x + 36$$
$$f(x, -x-2) = -3x(x+2) - 3x - 9(x+2) = -3x^2 - 18x - 18$$

Konturen over $y - 1 = x + 3$ er en parabel som krummer oppover. Derfor kan ikke det stasjonære punktet $(-3, 1)$ være et maksimum. Mens konturen over $y - 1 = -x - 3$ er en parabel som krummer nedover. Derfor kan heller ikke det stasjonære punktet være et minimum. Den eneste muligheten som gjenstår er at $(-3, 1)$ er et sadelpunkt.

Det betyr at f ikke har noen maks eller min punkt på $\mathbb{R}^2$. Grafen til f finner du i figur 3.3. $\square$



Figur 3.3: Grafen til $f(x, y) = 3xy - 3x + 9y$.

Eksemplet ovenfor peker på det som skal være hovedproblemstillingen i resten av dette kapitlet: Hvis $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$, hvordan avgjør vi da på en effektiv måte om $\mathbf{a}$ er et lokalt maksimum, minimum eller ingen av delene? Teknikken med å se på konturer kan ofte brukes for å vise at et stasjonært punkt er et sadelpunkt, men vi ønsker oss en mer generell fremgangsmåte.

3.2 Annenderiverttesten

La f være en to ganger deriverbar funksjon av en variabel og anta at $f'(a) = 0$. Da forteller *annenderiverttesten* oss at a er et lokalt minimum dersom $f''(a) > 0$ og at a er et lokalt maksimum dersom $f''(a) < 0$. Vi skal nå begynne arbeidet med å lage en tilsvarende test for funksjoner av to variable. Det er også mulig å lage annenderiverttester for tre og flere variable, men dette blir ganske komplisert fordi en funksjon av flere variable har så mange forskjellige annenderiverte, og de må kombineres på riktig måte for å få en test som virker. For å få til dette for flere enn to variable brukes lineær algebra. En regner ut det som heter egenverdiene til Hessematrisen. Dette skal vi derimot ikke gå videre inn på i dette heftet, men vi skal nøye oss med å se på funksjoner av to variable.

3.4 Setning (Annenderiverttesten)
La $f(x, y)$ være en C^2-funksjon og anta at (a, b) er et stasjonært punkt for

f. La

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \text{ og } \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

og la D være gitt ved $D = AC - B^2$. Da gjelder:

i) Hvis $D < 0$, så er (a,b) et sadelpunkt.

ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, så er (a,b) et lokalt minimum.

iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, så er (a,b) et lokalt maksimum.

Dersom $D = 0$, gir testen ingen konklusjon.

Tallet D som forekommer i setningen over er et eksempel på en determinant, det er determinanten til Hessematrisen i (a,b). Dette kan skrives som følger:

$$D = \det(Hf(a,b)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

Den generelle formelen for en determinant til en 2×2-matrise er:

$$\det(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Beviset for annenderiverttesten utsetter vi en liten stund, vi ser først på noen eksempler på hvordan den brukes i praksis:

3.5 Eksempel

La oss gå tilbake til funksjonen fra eksempel 3.3 og se hvordan annenderiverttesten virker i dette tilfellet. Vi har sett at funksjonen $f(x,y) = 3xy - 3x + 9y$ har partieltderiverte

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 9$$

Disse forsvant samtidig hvis og bare hvis $x = -3$ og $y = 1$, derfor er $(-3,1)$ et stasjonært punkt. For å bruke annenderiverttesten regner vi ut Hessematrisen. Vi har

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

som gir

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

Ifølge annenderiverttesten er $(-3, 1)$ et sadelpunkt siden $D < 0$. $\square$

La oss se på et litt mer komplisert eksempel:

3.6 Eksempel
La $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved

$$f(x, y) = xye^{x-y^2}$$

Vi skal finne de stasjonære punktene og avgjøre om de er lokale maksimums-, minimums- eller sadelpunkt.

Derivasjon gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot y \cdot e^{x-y^2} + x \cdot y \cdot e^{x-y^2} = y(1+x)e^{x-y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot 1 \cdot e^{x-y^2} + xye^{x-y^2}(-2y) = x(1-2y^2)e^{x-y^2}$$

Siden e^{x-y^2} ikke kan være null, er det nok å løse ligningene

$$y(1+x) = 0$$
$$x(1-2y^2) = 0$$

for å finne de stasjonære punktene. Den første ligningen har to løsninger $x = -1$ og $y = 0$. Setter vi $x = -1$ inn i den andre ligningen, får vi $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Setter vi $y = 0$ inn i den andre ligningen, får vi $x = 0$. Vi har altså tre stasjonære punkt $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ og $(0, 0)$.

Neste skritt er å regne ut de annenderiverte:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^{x-y^2} + y(1+x)e^{x-y^2} = y(2+x)e^{x-y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1+x)e^{x-y^2} + y(1+x)e^{x-y^2}(-2y) = (1+x)(1-2y^2)e^{x-y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x(-4y)e^{x-y^2} + x(1-2y^2)e^{x-y^2}(-2y) = -2xy(3-2y^2)e^{x-y^2}$$

Vi må undersøke de stasjonære punktene hver for seg.

Det stasjonære punktet $(0,0)$: Her er

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0(2+0)e^{0-0^2} = 0 \\
B &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = (1+0)(1-2\cdot 0^2)e^{0-0^2} = 1 \\
C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2\cdot 0\cdot 0(3-2\cdot 0^2)e^{0-0^2} = 0.
\end{aligned}$$

Dette gir $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 0 - 1^2 = -1$. Altså er $(0,0)$ et sadelpunkt.

Det stasjonære punktet $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$: Her er

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2+(-1))e^{-1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{2}} \\
B &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (1+(-1))\left(1-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)e^{-1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 0 \\
C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}) = -2(-1)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)e^{-1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

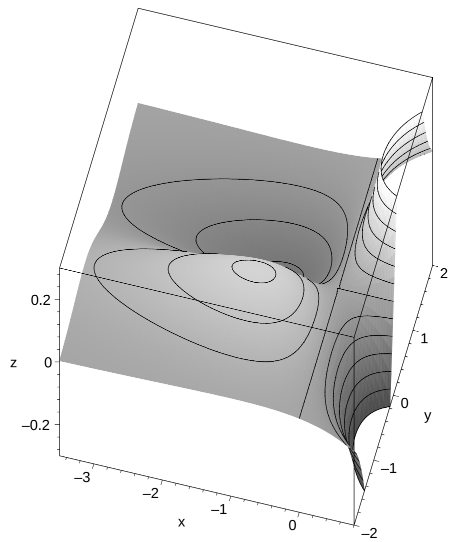
Dette gir

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = 2e^{-3}$$

Siden $D > 0$, $A > 0$, forteller annenderiverttesten oss at $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ er et lokalt minimum.

Det stasjonære punktet $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$: Her er

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{2}} \\
B &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \\
C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -2\sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$



Figur 3.4: Grafen til $f(x,y) = xye^{x-y^2}$.

Dette gir

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = 2e^{-3}$$

Siden $D > 0$ og $A < 0$, må $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ være et lokalt maksimum.

Grafen til f finner du i figur 3.4 □

La oss avslutte med to eksempler der determinanten til Hessematrisen forsvinner.

3.7 Eksempel

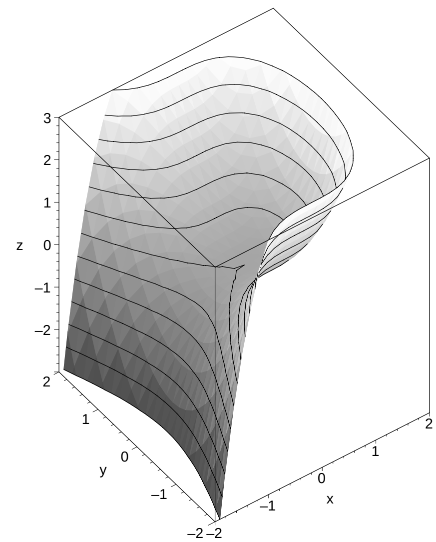
La f være gitt ved

$$f(x,y) = x^3 + y^2$$

Vi regner ut gradienten og Hessematrisen. Vi får:

$$\nabla f(x,y) = (3x^2, 2y) \quad \text{og} \quad Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Det eneste stasjonære punktet er origo, og her er Hessematrisen lik $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Dette gir $D = 0 \cdot 2 - 0^2 = 0$. Dermed kan ikke annenderiverttesten brukes. Likevel kan vi si at $(0,0)$ er et sadelpunkt. Se på konturen $f(x,0) = x^3$. Denne er strengt voksende. Derfor kan ikke $(0,0)$ være maks eller min. Se grafen i figur 3.5. □



Figur 3.5: Grafen til $f(x,y) = x^3 + y^2$.

3.8 Eksempel
La h være gitt ved

$$h(x,y) = x^4 + y^4$$

Da er gradienten

$$\nabla h(x,y) = (4x^3, 4y^3)$$

Derfor er origo det eneste stasjonære punktet. Hessematrisen er

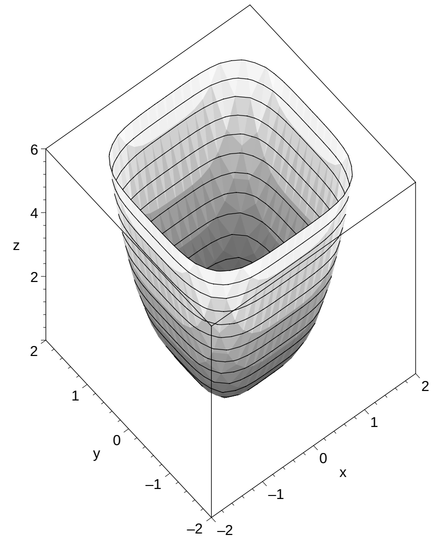
$$Hh(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

Evaluert i origo er $Hh(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dermed er $D = 0$. Heller ikke for denne funksjonen kan annenderiverttesten brukes, men det er likevel klart at origo er et absolutt minimum for h siden $x^4 \geq 0$ og $y^4 \geq 0$, hvor vi har likheter hvis og bare hvis $x = 0$ og $y = 0$. Grafen finner du i figur 3.6. $\square$

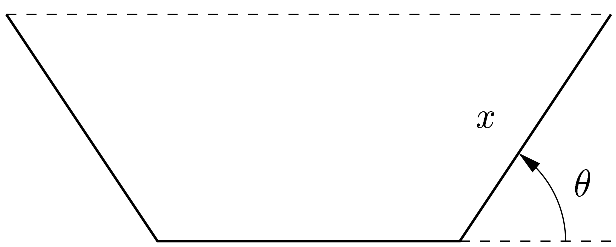
De to siste eksemplene viste at dersom $D = 0$, så kan vi ikke avgjøre om det kritiske punktet er et ekstremalpunkt eller et sadelpunkt.

La oss til sist se på et praktisk eksempel.

3.9 Eksempel
Av et rektangulært stykke metall med stor lengde og bredde L vil vi lage en takrenne, se figur 3.7. Vi ønsker at arealet av tverrsnittet skal bli så stort som mulig. Av naturlige grunner må x ligge mellom 0 og $\frac{1}{2}L$, og det er klart



Figur 3.6: Grafen til $h(x, y) = x^4 + y^4$.



Figur 3.7: Tverrsnittet av en takrenne.

at vi kan anta at θ ligger mellom 0 og $\frac{\pi}{2}$. (Hvis θ overstiger $\frac{\pi}{2}$ er det klart at arealet blir mindre enn for $\theta = \frac{\pi}{2}$.)

Tverrsnittet er et trapes med høyde $x \sin\theta$, og de to parallelle sidene har lengde $L - 2x$ og $L - 2x + 2x\cos\theta$. Arealet er derfor

$$A = \frac{1}{2}\left((L-2x) + (L-2x+2x\cos\theta)\right) x \sin\theta$$

Vi tenker på A som en funksjon av x og θ og forenkler uttrykket:

$$A(x,\theta) = Lx\sin\theta - 2x^2\sin\theta + x^2\sin\theta\cos\theta$$

Nå vil vi bruke førstederiverttesten for å finne kritiske punkt når $0 < x < \frac{1}{2}L$ og $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Vi finner de partieltderiverte:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = L\sin\theta - 4x\sin\theta + 2x\sin\theta\cos\theta$$
$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = Lx\cos\theta - 2x^2\cos\theta + x^2\cos^2\theta - x^2\sin^2\theta$$

Ser vi på $\frac{\partial A}{\partial x} = 0$ har vi

$$L\sin\theta - 4x\sin\theta + 2x\sin\theta\cos\theta = 0$$

som gir

$$\cos\theta = 2 - \frac{L}{2x}$$

siden $x \neq 0$ og $\sin\theta \neq 0$ her. Videre ser vi på $\frac{\partial A}{\partial \theta} = 0$:

$$Lx\cos\theta - 2x^2\cos\theta + x^2\cos^2\theta - x^2\sin^2\theta = 0$$

og setter inn $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ og $\cos\theta = 2 - \frac{L}{2x}$. Da får vi

$$Lx\left(2 - \frac{L}{2x}\right) - 2x^2\left(2 - \frac{L}{2x}\right) + 2x^2\left(2 - \frac{L}{2x}\right)^2 - x^2 = 0$$

Dette forenkles til

$$3x^2 - Lx = 0$$

Altså må $x = \frac{1}{3}L$. Den tilsvarende verdien for θ finner vi ved å løse

$$\cos\theta = 2 - \frac{L}{2x} = 2 - \frac{L}{2\frac{1}{3}L} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Vi ser at $\theta = \frac{\pi}{3}$. Arealet er da

$$A(\frac{1}{3}L, \frac{\pi}{3}) = L \cdot \frac{L}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{L^2}{9} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{L^2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}L^2$$

Vår intuisjon sier oss nå at vi har funnet ut at det maksimale arealet er $\frac{\sqrt{3}}{12}L^2$ og at dette oppnås ved $x = \frac{1}{3}L$ og $\theta = \frac{\pi}{3}$. La oss se hvordan vi kan argumentere for dette matematisk. Førstederiverttesten hjelper oss til å finne kritiske punkt for A i den åpne mengden gitt ved $0 < x < \frac{L}{2}$ og $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Eventuelle maks eller minpunkt som vi ikke har fanget opp ved førstederiverttesten må derfor være ekstremtilfeller. Vi undersøker derfor $x = 0$, $x = \frac{1}{2}L$, $\theta = 0$ og $\theta = \frac{\pi}{2}$ separat.

Dersom $x = 0$ er $A = 0$.

Dersom $\theta = 0$ er også $A = 0$.

Dersom $x = \frac{1}{2}L$ er $A = \frac{L^2}{8}\sin 2\theta$.

Dersom $\theta = \frac{\pi}{2}$ er $A = Lx - 2x^2$.

Når $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ er $0 \leq \frac{L^2}{8}\sin 2\theta \leq \frac{1}{8}L^2$, og når $0 \leq x \leq \frac{1}{2}L$ er $0 \leq Lx - 2x^2 \leq \frac{1}{8}L^2$.

Ekstremalverdisetningen sier at funksjonen A har et maksimum på den lukkede og begrensede mengden gitt av $0 \leq x \leq \frac{1}{2}L$ og $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. I ekstremtilfellene er $A \leq \frac{1}{8}L^2$, og det eneste kritiske punktet i det indre har kritisk verdi $A = \frac{\sqrt{3}}{12}L^2$. Siden $\frac{\sqrt{3}}{12}L^2 > \frac{1}{8}L^2$, kan vi konkludere med at maksimum er i punktet $(\frac{1}{3}L, \frac{\pi}{3})$.

Legg merke til at vi ikke har brukt annenderiverttesten. La oss nå bruke denne til å bekrefte det vi allerede vet; at $(\frac{1}{3}L, \frac{\pi}{3})$ er et maksimum. Vi regner ut Hessematrisen til A:

$$HA(x, \theta) = \begin{bmatrix} \sin 2\theta - 4\sin\theta & L\cos\theta - 4x\cos\theta + 2x\cos 2\theta \\ L\cos\theta - 4x\cos\theta + 2x\cos 2\theta & -Lx\sin\theta + 2x^2\sin\theta - 2x^2\sin 2\theta \end{bmatrix}$$

Evaluerer vi Hessematrisen i det kritiske punktet får vi

$$HA(\frac{1}{3}L, \frac{\pi}{3}) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}L \\ -\frac{1}{2}L & -\frac{\sqrt{3}}{6}L^2 \end{bmatrix}$$

Dette gir $D = \frac{1}{2}L^2$. Derfor har vi et maks- eller minpunkt. Siden $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$ er negativ har vi et maksimum. $\square$

3.2.1 *Maks og min for annengradspolynom

En vesentlig ingrediens i beviset for annenderiverttesten er å vise at testen fungerer for annengradspolynom. Vanligvis brukes lineær algebra for å drøfte maks og min for annengradspolynom; en studerer kvadratiske former. I dette heftet ønsker vi derimot å unnvære utstrakt bruk av lineæralgebra. Derfor skal vi med mer elementære metoder drøfte de stasjonære punktene til et annengradspolynom i to variable. Utledningene under kan kanskje oppleves som lange og uelegante, men det er prisen som må betales for å unngå lineæralgebraen. Likevel er rammeverket for argumentasjonen det samme.

I eksempel 3.3 så vi at annengradspolynomet $f(x,y) = 3xy - 3x + 9y$ hadde et sadelpunkt i $(-3,1)$. La oss nå se på et generelt annengradspolynom, og prøve å avgjøre hva slags stasjonære punkt det har.

Et annengradspolynom i to variable har formen:

$$p(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

hvor a, b, c, d, e og f er konstanter. Gradienten til p er

$$\nabla p(x,y) = (b + 2dx + ey, c + ex + 2fy)$$

og Hessematrisen er

$$Hp(x,y) = \begin{bmatrix} 2d & e \\ e & 2f \end{bmatrix}$$

De stasjonære punktene til p er der hvor $\nabla p(x,y) = 0$, det vil si løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2dx + ey &= -b \\ ex + 2fy &= -c \end{aligned}$$

Tenk på en slik løsning som et skjæringspunkt i xy-planet mellom de to linjene $2dx + ey = -b$ og $ex + 2fy = -c$. Det kan imidlertid skje at en eller begge av disse ligningene ikke beskriver en linje. Dette er tilfellet kun dersom

i) $d = e = 0$ og $f \neq 0$,

ii) $d \neq 0$ og $e = f = 0$ eller

iii) $d = e = f = 0$

I tillegg må vi ta høyde for spesialtilfellet der de to linjene er parallelle. Dette skjer hvis og bare hvis prikkproduktet mellom normalvektoren til den første linja, $(2d, e)$, og en retningsvektor til den andre linja, f.eks. $(2f, -e)$, er null. Det vil si

$$(2d, e) \cdot (2f, -e) = 4df - e^2 = 0$$

Legg merke til at denne ligningen også er oppfylt av tilfellene i), ii) og iii). Dermed har vi vist at

3.10 Setning
Dersom $4df - e^2 \neq 0$, så beskriver $2dx + ey = -b$ og $ex + 2fy = -c$ to ikkeparallelle linjer. Altså har ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2dx + ey &= -b \\ ex + 2fy &= -c \end{aligned}$$

nøyaktig en løsning.

Legg merke til at $4df - e^2$ er determinanten til Hessematrisen. Setningen over sier at dersom denne er ulik 0 så har polynomet $p(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$ nøyaktig ett stasjonært punkt. Vi skal heretter kun konsentrere oss om de tilfellene hvor $4df - e^2 \neq 0$. De andre tilfellene er degenererte og kan ikke brukes i beviset for annenderiverttesten.

La (x_0, y_0) være det stasjonære punktet. For å forenkle beregningene ville det vært fint om en kunne anta at $(x_0, y_0) = (0, 0)$. En kan innføre nye koordinater (x', y') for å oppnå dette. La

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' + y_0 \end{aligned}$$

Vi setter inn i polynomet og får

$$\begin{aligned} p(x, y) &= a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 \\ &= a + b(x' + x_0) + c(y' + y_0) \\ &\quad + d(x' + x_0)^2 + e(x' + x_0)(y' + y_0) + f(y' + y_0)^2 \\ &= a + bx' + bx_0 + cy' + cy_0 \\ &\quad + d(x')^2 + 2dx_0x' + dx_0^2 \\ &\quad + ex'y' + ex_0y' + ey_0x' + ex_0y_0 \\ &\quad + f(y')^2 + 2fy_0y' + fy_0^2 \\ &= a + bx_0 + cy_0 + dx_0^2 + ex_0y_0 + fy_0^2 \\ &\quad + (b + 2dx_0 + ey_0)x' + (c + ex_0 + 2fy_0)y' \\ &\quad + d(x')^2 + ex'y' + f(y')^2 \end{aligned}$$

Siden (x_0, y_0) er et stasjonært punkt vil $b+2dx_0+ey_0 = 0$ og $c+ex_0+2fy_0 = 0$. Dermed er

$$p(x', y') = a' + d(x')^2 + ex'y' + f(y')^2$$

hvor $a' = a + bx_0 + cy_0 + dx_0^2 + ex_0y_0 + fy_0^2 = p(x_0, y_0)$. Vi ser at ved å skifte koordinater fra (x, y) til (x', y') får vi eliminert førstegradsleddene fra polynomet; i det nye koordinatsystemet er det stasjonære punktet origo.

Vi er interessert i å avgjøre om origo er et maks eller min for $p(x', y')$. Dette kan gjøres ved å se på fortegnet til hvert av leddene, men $ex'y'$ leddet er brysomt. Vi forsøker derfor å gjøre et koordinatskifte slik at dette leddet forsvinner. Det er tre tilfeller; I) $d \neq 0$, II) $f \neq 0$ og III) $d = f = 0$.

Tilfelle I): Anta $d \neq 0$. Vi forsøker å sette

$$x' = x'' + ky'$$

Her er k en konstant som vi skal justere slik at $x''y'$-leddet forsvinner. Setter vi inn i polynomet får vi:

$$\begin{aligned}
p(x', y') &= a' + d(x')^2 + ex'y' + f(y')^2 \\
&= a' + d(x'' + ky')^2 + e(x'' + ky')y' + f(y')^2 \\
&= a' + d(x'')^2 + 2dkx''y' + dk^2(y')^2 + ex''y' + ek(y')^2 + f(y')^2 \\
&= a' + d(x'')^2 + (2dk + e)x''y' + (dk^2 + ek + f)(y')^2
\end{aligned}$$

Ved å velge $k = -\frac{e}{2d}$ oppnår vi at $2dk + e = 0$. Dermed blir

$$\begin{aligned}
p(x'', y') &= a' + d(x'')^2 + (d\frac{e^2}{4d^2} - \frac{e^2}{2d} + f)(y')^2 \\
&= a' + d(x'')^2 + \frac{4df - e^2}{4d}(y')^2
\end{aligned}$$

Nå har vi skrevet funksjonsuttrykket på en slik måte at vi direkte kan se hvorvidt $(x'', y') = (0, 0)$ er et maksimum, et minimum eller et sadelpunkt. La $D = 4df - e^2$.

i) Dersom $D < 0$ vil d og $\frac{4df-e^2}{4d} = \frac{D}{4d}$ ha motsatt fortegn. De to konturene $p(x'', 0) = a' + d(x'')^2$ og $p(0, y') = a' + \frac{4df-e^2}{4d}(y')^2$ vil da være parabler som krummer hver sin vei. Det følger at det stasjonære punktet er et sadelpunkt.

ii) Dersom $D > 0$ og $2d > 0$ vil både d og $\frac{4df-e^2}{4d}$ være positive. Da er $d(x'')^2 \geq 0$ og $\frac{4df-e^2}{4d}(y')^2 \geq 0$. Dermed må

$$p(x'', y') = a' + d(x'')^2 + \frac{4df - e^2}{4d}(y')^2 \geq a'$$

Dette viser at det stasjonære punktet er et minimum. Minimumsverdien er a'. Legg også merke til at $p(x'', y') = a'$ hvis og bare hvis $(x'', y') = (0, 0)$. Ulikheten er altså ekte utenfor det stasjonære punktet.

iii) Dersom $D > 0$ og $2d < 0$ vil både d og $\frac{4df-e^2}{4d}$ være negative. Det følger at

$$p(x'', y') = a' + d(x'')^2 + \frac{4df - e^2}{4d}(y')^2 \leq a'$$

Dermed er $(x'', y') = (0, 0)$ et maksimum og $p(x'', y') = a'$ hvis og bare hvis $(x'', y') = (0, 0)$.

Tilfelle II): Anta at $f \neq 0$. Dersom $d \neq 0$, kan vi bruke drøftingen i tilfelle I). Anta derfor at $d = 0$. Da er $D = 4df - e^2 = -e^2 < 0$. Vi studerer $p(x', y') = a' + ex'y' + f(y')^2$ ved å se på konturene $x' = 0$ og $x' = -\frac{2f}{e}y'$.

$$\begin{aligned} p(0, y') &= a' + f(y')^2 \\ p(-\frac{2f}{e}y', y') &= a' - e\frac{2f}{e}(y')^2 + f(y')^2 = a' - f(y')^2 \end{aligned}$$

Dette er parabler som svinger hver sin vei. Derfor har vi et sadelpunkt.

Tilfelle III): Dersom $d = f = 0$ må $D = 4df - e^2 < 0$. Vi ser på $p(x', y') = a' + ex'y'$. Ved å se på konturene $y' = x'$ og $y' = -x'$ får vi

$$\begin{aligned} p(x', x') &= a' + e(x')^2 \\ p(x', -x') &= a' - e(x')^2 \end{aligned}$$

Siden disse parablene svinger hver sin vei har vi igjen et sadelpunkt.

Vi har nå nesten bevist følgende setning:

3.11 Setning
La $p(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$ og anta at $D = 4df - e^2 \neq 0$. Da finnes nøyaktig ett stasjonært punkt, (x_0, y_0), for p. Videre gjelder:

i) Dersom $D < 0$, så finnes en kontur gjennom (x_0, y_0) som er en parabel som krummer oppover, og en annen kontur gjennom (x_0, y_0) som er en parabel som krummer nedover. Altså er (x_0, y_0) et sadelpunkt.

ii) Dersom $D > 0$ og $2d > 0$, så finnes et tall $m > 0$ slik at

$$p(x, y) - p(x_0, y_0) \geq m[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$$

for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Altså er (x_0, y_0) et minimum.

iii) Dersom $D > 0$ og $2d < 0$, så finnes et tall $m > 0$ slik at

$$p(x, y) - p(x_0, y_0) \leq -m[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$$

for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Altså er (x_0, y_0) et maksimum.

Bevis: Det som gjenstår er i punkt ii) og iii) å vise at det finnes $m > 0$ slik at den angitte ulikheten holder.

Vi skal se på tilfelle ii), hvor $D > 0$ og $2d > 0$. Det siste tilfellet vises på tilsvarende måte. Husk at vi kan skrive

$$p(x', y') = a' + d(x')^2 + ex'y' + f(y')^2$$

hvor $x' = x - x_0$ og $y' = y - y_0$. La oss nå innføre polarkoordinater. Vi setter

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\theta \\ y' &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Da har vi

$$\begin{aligned} p(r, \theta) &= a' + dr^2\cos^2\theta + er^2\cos\theta\sin\theta + fr^2\sin^2\theta \\ &= a' + (d\cos^2\theta + e\cos\theta\sin\theta + f\sin^2\theta)r^2 \\ &= a' + g(\theta)r^2 \end{aligned}$$

Her er g funksjonen gitt ved $g(\theta) = d\cos^2\theta + e\cos\theta\sin\theta + f\sin^2\theta$. La definisjonsmengden til g være det begrensede lukkede intervallet $[0, 2\pi]$. Da sier ekstremalverdisetningen at det finnes tall θ_0 og θ_1 slik at

$$g(\theta_0) \leq g(\theta) \leq g(\theta_1)$$

Siden vi vet at minimumsverdien til p er a' må $p(1, \theta_0) = a' + g(\theta_0) \geq a'$. Følgelig er $g(\theta_0) \geq 0$. Men vi har sett at $p(x', y') = a'$ hvis og bare hvis $(x', y') = (0, 0)$. Derfor må $p(1, \theta_0) > a'$. Og det følger at $g(\theta_0) > 0$. La $m = g(\theta_0)$. Da er

$$p(r, \theta) = a' + g(\theta)r^2 \geq a' + mr^2$$

Vi bruker nå at $r^2 = (x')^2 + (y')^2 = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$, og at $a' = p(x_0, y_0)$. Da har vi

$$p(x, y) - p(x_0, y_0) = p(r, \theta) - a' \geq mr^2 = m[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$$

som var det vi skulle vise. $\square$

3.2.2 *Taylors formel

La f være en C^2-funksjon av to variable og anta at (a,b) er et indre punkt. Vi ønsker nå å finne det annengradspolynomet p som har samme funksjonsverdi, gradient og Hessematrise som f i (a,b). Vi kaller p for *Taylorapproksimasjonen til f av annen grad i (a,b)*. Generelt kan vi skrive p på formen:

$$p(x,y) = c + d_1(x-a) + d_2(y-b) + e_1(x-a)^2 + e_2(x-a)(y-b) + e_3(y-b)^2$$

Her ønsker vi å bestemme konstantene c, d_1, d_2, e_1, e_2 og e_3. Vi regner ut gradienten og Hessematrisen til p og får:

$$\nabla p(x,y) = (d_1 + 2e_1(x-a) + e_2(y-b), d_2 + e_2(x-a) + 2e_3(y-b))$$

og

$$Hp(x,y) = \begin{bmatrix} 2e_1 & e_2 \\ e_2 & 2e_3 \end{bmatrix}$$

Kravet $f(a,b) = p(a,b)$ gir:

$$f(a,b) = p(a,b) = c$$

Samme gradient i (a,b) gir at

$$(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)) = \nabla f(a,b) = \nabla p(a,b) = (d_1, d_2)$$

og samme Hessematrise gir

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix} = Hf(a,b) = Hp(a,b) = \begin{bmatrix} 2e_1 & e_2 \\ e_2 & 2e_3 \end{bmatrix}$$

Dermed er p gitt ved:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 \end{aligned}$$

Vi er nå klare til å vise Taylors formel for funksjoner av to variable.

3.12 Setning (Taylors formel)
La f være en C^2-funksjon av to variable, la $\mathbf{a}$ være et indre punkt og la p være Taylorapproksimasjonen til f av annen grad i $\mathbf{a}$. Da finnes en funksjon ϵ av to variable slik at

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \epsilon(\mathbf{h}) = 0$$

og

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) + \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2$$

for alle tilstrekkelig små $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$.

Bevis: I dette beviset vil det av notasjonsmessige grunner være nyttig å skrive (x_1, x_2) i stedet for (x, y).

Hold $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ fast. Definer en funksjon g av en variabel ved

$$g(t) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$$

Ved å bruke kjerneregelen for funksjoner av flere variable finner vi at

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})\right] h_i$$

og ved å bruke kjerneregelen enda en gang får vi

$$g''(t) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})\right] h_i h_j$$

Lagranges restleddsformel for Taylorpolynomer av en variabel sier at det finnes et tall c mellom 0 og 1 slik at

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(c)$$

Legg merke til at $g(0) = 0$ siden $f(\mathbf{a}) = p(\mathbf{a})$ og $g'(0) = 0$ siden $\nabla f(\mathbf{a}) = \nabla p(\mathbf{a})$. Setter vi inn for $g(1)$ og $g''(c)$ får vi

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h})\right] h_i h_j$$

Fra definisjonen av p følger det at $\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$. Vi setter inn og får:

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})\right] h_i h_j$$

Vi definerer nå funksjonen ϵ ved

$$\epsilon(\mathbf{h}) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})\right] h_i h_j}{\|\mathbf{h}\|^2} & \text{for } \mathbf{h} \neq 0 \\ 0 & \text{for } \mathbf{h} = 0 \end{cases}$$

Det er da klart at

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2$$

Derfor gjenstår det kun å vise at ϵ er kontinuerlig i origo, men dette er lett:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} |\epsilon(\mathbf{h})| = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \left| \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) \right] \frac{h_i}{\|\mathbf{h}\|}\frac{h_j}{\|\mathbf{h}\|} \right|$$
$$\leq \lim_{\mathbf{h}\to 0} \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) \right| = 0$$

Her har vi brukt at $\frac{h_1}{\|\mathbf{h}\|} \leq 1$, $\frac{h_2}{\|\mathbf{h}\|} \leq 1$ og at $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$ siden f er C^2. □

3.2.3 *Bevis for annenderiverttesten

For å bevise annenderiverttesten skal vi sammenligne funksjonen f med en polynomfunksjon. Anta at $\mathbf{a}$ er et stasjonært punkt for f. Vi ønsker å finne en polynomfunksjon p som er en god tilnærming til f i nærheten av $\mathbf{a}$. Et polynom av grad 0 er det samme som en konstant funksjon. Og den beste tilnærmingen til f i nærheten av $\mathbf{a}$ ved hjelp av 0'te grads polynomer må derfor være gitt ved $p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ Men den konstante funksjonen p sier ingenting om hvorvidt $\mathbf{a}$ er maks-, min- eller sadelpunkt for f. La oss derfor prøve med førstegradspolynomer. Dette er det samme som affine funksjoner, og den beste tilnærmingen til f med en affin funksjon er tangentplanet, det vil si det førstegradspolynomet som har samme funksjonsverdi og samme gradient som f i punktet $\mathbf{a}$. Men i et stasjonært punkt er tangentplanet horisontalt, og vi kan fremdeles ikke bruke p til å si noe om hva slags stasjonært punkt $\mathbf{a}$ er for f.

Vi ser derfor på annengradspolynomer. Den beste tilnærmingen til f i nærheten av $\mathbf{a}$ ved hjelp av annengradspolynomer bør ha samme funksjonsverdi, gradient og Hessematrise som f i punktet $\mathbf{a}$. Dette er Taylorapproksimasjonen til f av annen grad i $\mathbf{a}$ og vi håper at en slik tilnærming p til f skal være så god at f og p begge har et stasjonært punkt i $\mathbf{a}$ og at dette punktet er av samme type for begge funksjonene.

Vi kombinerer setning 3.11 med Taylors formel for å bevise annenderiverttesten.

Bevis for annenderiverttesten 3.4: Anta at $\mathbf{a} = (a, b)$ er et stasjonært punkt for C^2-funksjonen f, la $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a})$, la D være determinanten til Hessematrisen i $\mathbf{a}$ og la p være Taylorapproksimasjonen til f av annen grad i $\mathbf{a}$. Vi skal se på tre ulike tilfeller.

Tilfelle ii): Anta at $D > 0$ og $A > 0$. Da sier setning 3.11 at det finnes en $m > 0$ slik at

$$p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \geq m\|\mathbf{h}\|^2$$

La ϵ være funksjonen gitt i Taylors formel. Siden $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \epsilon(\mathbf{h}) = 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at for alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ med $\|\mathbf{h}\| < \delta$ er $|\epsilon(\mathbf{h})| < \frac{m}{2}$. Taylors formel gir at

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) + p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \\ &= \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 + p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Vi bruker ulikheten over for å få

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geq \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 + m\|\mathbf{h}\|^2 = (\epsilon(\mathbf{h}) + m)\|\mathbf{h}\|^2$$

Dersom $\|\mathbf{h}\| < \delta$ vil $\epsilon(\mathbf{h}) + m \geq \frac{m}{2}$. Dette gir

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geq \frac{m}{2}\|\mathbf{h}\|^2$$

Det følger at $\mathbf{a} = (a, b)$ er et lokalt minimum for f.

Tilfelle iii): Anta at $D > 0$ og $A < 0$. Vi resonnerer på samme måte som tilfelle ii). Ved setning 3.11 finnes det en $m > 0$ slik at

$$p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \leq -m\|\mathbf{h}\|^2$$

Vi har da at:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) + p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \\ &= \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 + p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \\ &\leq \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 - m\|\mathbf{h}\|^2 \\ &= (\epsilon(\mathbf{h}) - m)\|\mathbf{h}\|^2 \end{aligned}$$

Siden $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \epsilon(\mathbf{h}) = 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at for alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ med $\|\mathbf{h}\| < \delta$ er $|\epsilon(\mathbf{h})| < \frac{m}{2}$. Da er $\epsilon(\mathbf{h}) - m < -\frac{m}{2}$. Altså vil

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \leq -\frac{m}{2}\|\mathbf{h}\|^2$$

når $\|\mathbf{h}\| < \delta$ og det følger at $\mathbf{a} = (a, b)$ er et lokalt maksimum for f.

Tilfelle i): Anta at $D < 0$. For annengradspolynomet p vet vi at det da finnes en kontur $p(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ som krummer oppover. Vi kan anta at

$$p(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = c + kt^2$$

hvor $c = p(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$ og $k > 0$. Da er

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - p(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) + p(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \\ &= \epsilon(t\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 t^2 + kt^2 \\ &= (\epsilon(t\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 + k)t^2 \end{aligned}$$

Dersom vi bare velger t liten nok vil $\epsilon(t\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 + k > \frac{k}{2}$. Da vil

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geq \frac{k}{2}t^2$$

Følgelig kan ikke $\mathbf{a}$ være et lokalt maksimum for f.

Vi vet også at det finnes en annen kontur $p(\mathbf{a}+t\mathbf{h}')$ som krummer nedover. På samme måte som sist finnes da en $k' > 0$ slik at

$$p(\mathbf{a} + t\mathbf{h}') = p(\mathbf{a}) - k't^2$$

Da kan vi vise at for små t så vil

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \leq -\frac{k'}{2}t^2$$

Dermed kan $\mathbf{a}$ heller ikke være et lokalt minimum. Den eneste muligheten som gjenstår er at $\mathbf{a}$ er et sadelpunkt. $\square$

3.3 Oppgaver

Oppgave 3.1
Finn de stasjonære punktene til funksjonen:

a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$
c) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 2y^2 + x + 7y$
d) $f(x,y) = xe^{y^2+x}$
e) $f(x,y) = xy - \frac{1}{x} + \frac{2}{y}$

Oppgave 3.2
Finn de stasjonære punktene og avgjør om de er lokale maksimal-, minimal- eller sadelpunkt:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$

b) $f(x,y) = x^2y^2 - 4xy + 6x - 6y$

c) $f(x,y) = e^{x^2+3y^2}$

d) $f(x,y) = \frac{1}{1-x+y+x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = x + \ln(x^2 + y^2)$

Oppgave 3.3
Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x,y,z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$$

og avgjør om de er lokale maksima, minima eller sadelpunkt.

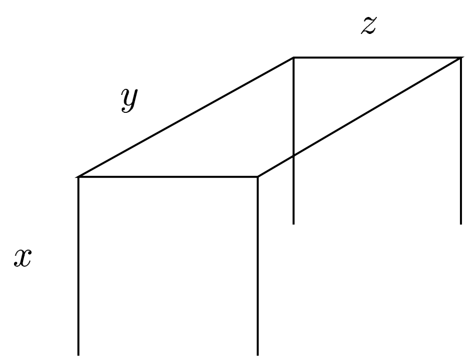
Oppgave 3.4
Du skal lage en ramme av stålrør som skal brukes som reisverk til et telt. Rammen består av fire bein med lengde x festet til et rektangel med sider y og z, se figur 3.8. Lengdene x, y og z måles i meter.

Volumet $V = xyz$ av teltet skal være 50 m^3. Din oppgave er å lage teltet slik at den totale lengden L av stålrør som går med blir minst mulig.

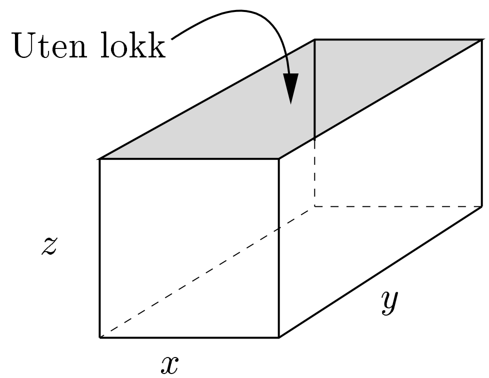
a) Begrunn at lengden L kan skrives som

$$L(x,y) = 4x + 2y + \frac{100}{xy}$$

og finn de partielle deriverte $\frac{\partial L}{\partial x}$ og $\frac{\partial L}{\partial y}$.



Figur 3.8: Reisverk til telt.



Figur 3.9: Kasse uten lokk.

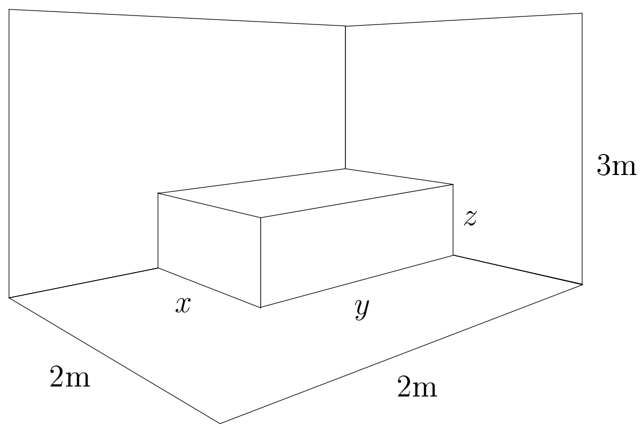
b) Bestem de dimensjonene av teltet som gjør totallengden av stålrør minst mulig.

Oppgave 3.5
Vi skal bygge en rettvinklet kasse uten lokk, se figur 3.9. Kassen skal ha sidelengder x og y, og høyde z. Selve "skjelettet" til kassen skal lages av 12 tynne rør (markert med streker på figuren). Den totale lengden rør vi skal benytte er 56 meter.

a) Begrunn at arealet A av kassens utside (de fire veggene pluss bunnen) som funksjon av x og y kan skrives

$$A(x,y) = 28x + 28y - 2x^2 - 2y^2 - 3xy.$$

og finn de partielle deriverte av A. Bestem deretter eventuelle punkt (x, y) der begge de partielle deriverte er null, og avgjør om disse punktene er lokale minimumspunkt for A, lokale maksimumspunkt for A eller ingen av delene.



Figur 3.10: Baderom med badekar.

b) Finn maksimumsverdien for $A(x, y)$ på området i xy-planet gitt ved $0 \leq x \leq 14$, $0 \leq y \leq 14$. (Begrunn først hvorfor vi vet at en slik maksimumsverdi finnes.)
Hvordan bør sidelengdene x og y velges for at arealet av kassens utside skal bli størst mulig? (Begrunn svaret.)

Oppgave 3.6

Et baderom har takhøyde 3 m og et kvadratisk gulv som er 4 m^2. I dette rommet skal vi plassere et badekar av lengde x, bredde y og høyde z (målt i meter) og med volum $xyz = \frac{2}{3}$ m^3. Badekaret skal plasseres i det ene hjørne av baderommet som vist på tegningen, figur 3.10.

Utifra dimensjonene på rommet og karet får vi: $0 < x \leq 2$, $0 < y \leq 2$, $0 < z \leq 3$ (og derfor også $xy = \frac{2}{3z} \geq \frac{2}{9}$ $(\text{m})^2$). Vi skal flislegge de to veggene badekaret berører, samt badegulvet, men vi flislegger bare de delene av veggene og gulvet som badekaret ikke dekker. Vi bruker to forskjellige typer fliser til vegger og gulv. Prisen på veggflisene er 90 kr/m^2 og på gulvflisene 60 kr/m^2. La $P(x, y)$ betegne totalprisen på flisene, angitt i kr, som funksjon av x og y.

a) Vis at vi får $P(x, y) = 1320 - \frac{60}{x} - \frac{60}{y} - 60xy$, og beregn $\frac{\partial P}{\partial x}$ og $\frac{\partial P}{\partial y}$.

b) For å få oversikt over utgiftene til flisleggingen ønsker vi å finne den verdi av (x, y) slik at $P(x, y)$ blir størst mulig.
Finn denne verdi av (x, y) og den tilsvarende verdien til P.

Oppgave 3.7

En fabrikk produserer to modeller av en vare. Det koster 400 kr å lage standardmodellen og 600 kr for luksusmodellen. Undersøkelser viser at når utsalgsprisen for standardmodellen er x kr og y kr for luksusmodellen, så får fabrikken solgt $500(y-x)$ standardmodeller og $450000+500(x-2y)$ luksusmodeller. Hvordan skal prisen settes for å maksimere fortjenesten?

Oppgave 3.8
To bedrifter konkurrerer om å selge nesten identiske varer i samme marked. En økning i produksjonen hos den ene bedriften fører derfor til svikt i inntektene hos den andre bedriften. Hvis bedrift A produserer x enheter pr måned og bedrift B produserer y enheter pr måned, er de månedlige fortjenestene gitt ved

$$\begin{aligned} P &= 12000x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2 \quad \text{for bedrift } A, \\ Q &= 12000y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}x^2 \quad \text{for bedrift } B. \end{aligned}$$

a) Dersom bedriftene ikke samarbeider om å fastsette produksjonene er det naturlig å anta at hver av bedriftene uavhengig av hverandre fastsetter sin produksjon slik at egen fortjeneste blir så stor som mulig. Dessuten antar hver av bedriftene at den andre gjør det samme. Forklar hvorfor produksjonsnivået (x, y) er løsningen av ligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

og finn fortjenesten til A og B henholdsvis i dette tilfellet.

b) Bedriftsledelsene i A og B tror at ved å samarbeide om produksjonsnivået, så kan den totale fortjenesten til bedriftene samlet økes. Forklar hvorfor det optimale produksjonsnivået, dersom bedriftene samarbeider, er løsningen av ligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

og finn fortjenesten til A og B henholdsvis i dette tilfellet.

c) Anta at bedriftene i hemmelighet har samarbeidet om fastsettelse av produksjonsnivået, og at dette har pågått en stund. Bedrift B, som tidligere var den mest lønnsomme, oppdager at produksjonssamarbeidet har ført til at bedrift A nå har blitt markedsleder. Bedrift B bestemmer seg derfor for å bryte avtalen, uten å si fra til A. Gitt at A holder fast på produksjonsnivået fra deloppgave b), hvordan skal B velge sitt produksjonsnivå for selv å få størst mulig fortjeneste, og hva blir fortjenesten til A og B henholdsvis i dette tilfellet?

Oppgave 3.9

a) La $f(x,y) = x^2 + y^4$. Vis at (0,0) er et stasjonært punkt der Hesse-determinanten D er lik null. Vis at (0,0) er et minimumspunkt for funksjonen.

b) Lag en funksjon $g(x,y)$ der (0,0) er et maksimumspunkt, men hvor Hesse-determinanten i (0,0) er lik null.

c) Lag en funksjon $h(x,y)$ slik at (0,0) er et sadelpunkt, men hvor Hesse-determinanten i (0,0) er lik null.

Oppgave 3.10

a) La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en deriverbar funksjon av én variabel og anta at det eneste stasjonære punktet til f er et lokalt maksimum i a. Vis at da er a et globalt maksimum for f.

b) La
$$g(x,y) = 1 - x^2 - (1+x)^3 y^2$$
Vis at $(0,0)$ er det eneste stasjonære punktet til g.

c) Vis at $(0,0)$ er et lokalt maksimum, men ikke et globalt maksimum for g. Tegn gjerne grafen til g. Tenk gjennom forskjellen på én og flere dimensjoner.

Oppgave 3.11

a) La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon av én variabel og anta at f har lokale maksima i a og b. Vis at det finnes et et lokalt minimum c som ligger mellom a og b.

b) La
$$g(x,y) = 4x^2 e^y - 2x^4 - e^{4y}$$
Vis at de kritiske punktene til g er $(-1,0)$ og $(1,0)$.

c) Vis at begge de kritiske punktene er lokale maksima. Tegn grafen til g og tenk gjennom forskjellen på én og flere dimensjoner.

Kapittel 4

Lagranges multiplikatormetode

4.1 Maks/min problemer med betingelser

Første- og annenderiverttesten er metoder for å studere maks/min problemer for funksjoner definer på åpne mengder. Men for mange av de maks/min problemene vi møter i praksis vil det være betingelser som begrenser definisjonsmengden. Vi ser på et eksempel:

4.1 Eksempel
Tenk deg at du skal produsere hermetikkbokser. Boksene skal være sylinderformede, med topp og bunn. Prisen per produserte boks avhenger av hvor mye metall som brukes, og boksen er derfor billigst når overflaten er minst mulig. Gitt at boksens volum skal være V, hvordan skal høyden, h, og diameteren, d, velges?

Vi ser at overflatearealet A er gitt ved

$$A(h,d) = \frac{\pi}{2}d^2 + \pi hd$$

Betingelsen angående volumet gir

$$V = \frac{\pi hd^2}{4}$$

Oppgaven blir derfor å finne minimum til $A(h,d)$ på mengden

$$\{(h,d) \in \mathbb{R}^2 \mid V = \frac{\pi hd^2}{4}\}$$

En måte å gjøre dette på er å løse ligningen $V = \frac{\pi hd^2}{4}$ med hensyn på for eksempel h, og deretter sette dette inn i A. Dette gir en funksjon av en variabel som vi lett kan finne minimum til. Vi har

$$h = \frac{4V}{\pi d^2}$$

Dette gir at

$$A(d) = \frac{\pi}{2}d^2 + \frac{4V}{d}$$

Vi deriverer og får

$$A'(d) = \pi d - \frac{4V}{d^2}$$

Løser vi $A'(d) = 0$ finner vi at $d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. Dette må være et minimum og den tilsvarende verdien til h er $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. $\square$

Lagranges multiplikatormetode er en annen måte å løse maks/min problemer med betingelser. Fordelen med denne metoden er at en ikke trenger å løse ut en av variablene fra betingelsen.

4.2 Setning
La f og g være C^1-funksjoner av n variable definert på en åpen mengde A. La $\mathbf{a} \in A$ og $g(\mathbf{a}) = c$. La S være mengden gitt ved

$$S = \{\mathbf{x} \in A \subseteq \mathbb{R}^n \mid g(\mathbf{x}) = c\}$$

Hvis f har et lokalt ekstremalpunkt på S i $\mathbf{a}$, så er enten

i) $\nabla g(\mathbf{a}) = 0$ *eller*

ii) det finnes et tall λ slik at $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$.

Legg merke til at S er en nivåhyperflate til g, og at $\nabla g(\mathbf{a})$ står normalt på S i punktet $\mathbf{a}$. Ligningen $g(\mathbf{x}) = c$ er en betingelse, og et lokalt makspunkt for f på S er det intuitivt opplagte; et punkt $\mathbf{a} \in S$ slik at det finnes en radius $r > 0$ slik at for alle $\mathbf{x} \in S$ med $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r$ er $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$. Lokale minpunkt for f på S er definert tilsvarende. Dette er egentlig ikke noe annet enn de lokale ekstremalpunktene til f dersom vi setter definisjonsmengden til å være S.

La oss nå se hvordan vi kan bruke Lagranges multiplikatormetode til å gjøre eksempel 4.1 på en annen måte:

4.3 Eksempel
Vi skal finne minimum for $A(h, d) = \frac{\pi}{2}d^2 + \pi hd$ gitt betingelsen $\frac{\pi hd^2}{4} = V$. Her er h og d positive tall.

La $g(h, d) = \frac{\pi hd^2}{4}$. Vi ser at både A og g er C^1-funksjoner. Setning 4.2 sier at vi skal lete etter de punktene hvor gradienten til A og gradienten til g er parallelle. Vi finner derfor gradientene.

$$\nabla A(h, d) = (\pi d, \pi d + \pi h) \quad \text{og} \quad \nabla g(h, d) = (\frac{\pi}{4}d^2, \frac{\pi}{2}hd)$$

Disse vektorene er parallelle dersom det finnes et tall λ slik at

$$\pi d = \lambda \frac{\pi}{4} d^2$$
$$\pi d + \pi h = \lambda \frac{\pi}{2} hd$$

I tillegg må vi huske på betingelsen vår:

$$\frac{\pi h d^2}{4} = V$$

For å finne minimum forsøker vi nå å løse ligningssettet som består av disse tre ligningene. Den første ligningen kan forenkles til

$$4 = \lambda d$$

Den andre ligningen gir så at

$$d + h = \frac{1}{2} h \lambda d$$

Nå kan vi erstatte λd på høyre side med 4. Da får vi

$$d + h = \frac{1}{2} h \cdot 4 = 2h$$

Dermed blir $d = h$. Og setter vi dette inn i betingelsen har vi

$$\frac{\pi}{4} d^3 = V$$

som gir at $h = d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. Dette er samme svar som vi fikk i eksempel 4.1. $\square$

4.4 Eksempel
I dette eksempelet skal vi finne de kritiske punktene til funksjonen

$$f(x, y) = 3x - 5y$$

under betingelsen

$$x^2 + 16 = y^2$$

Vi begynner med å skrive om betingelsen til formen

$$x^2 - y^2 + 16 = 0$$

og la $g(x, y)$ være uttrykket på venstre side. For å bruke Lagranges multiplikatormetode trenger vi gradientene til f og g. Vi har

$$\nabla f(x, y) = (3, -5) \quad \text{og} \quad \nabla g(x, y) = (2x, -2y)$$

Deretter kan vi sette opp ligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 3 = 2\lambda x = \lambda\frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -5 = -2\lambda y = \lambda\frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = x^2 - y^2 + 16 = 0 \end{aligned}$$

Løsningene av dette systemet gir kritiske punkt for f gitt $g(x,y) = 0$. La oss se på den første ligningen. Siden $3 = 2\lambda x$ kan ikke x være 0. Og dermed må $\lambda = \frac{3}{2x}$. På samme måte får vi fra den andre ligningen at $\lambda = \frac{5}{2y}$. Dette gir

$$\frac{3}{2x} = \lambda = \frac{5}{2y}$$

Altså må

$$y = \frac{5}{3}x$$

Setter vi inn for y i betingelsen får vi

$$0 = x^2 - y^2 + 16 = x^2 - \frac{25}{9}x^2 + 16 = 16 - \frac{16}{9}x^2$$

Altså må $x^2 = 9$. Dermed er $x = -3$ eller $x = 3$. Og de tilsvarende verdiene for y er -5 og 5 henholdsvis.

For å avgjøre om de kritiske punktene $(-3,-5)$ og $(3,5)$ er maksimum, minimum eller ingen av delene kan vi skissere noen nivåkurver for f og kurven $x^2 + 16 = y^2$ i samme koordinatsystem. Se figur 4.1. (Legg merke til at nivåkurvene til f tangerer $g(x,y) = 0$ i de kritiske punktene.) Vi ser at $(-3,-5)$ er et lokalt minimum, minimalverdien er $f(-3,-5) = 16$, og $(3,5)$ er et lokalt maksimum, maksimalverdien er $f(3,5) = -16$.

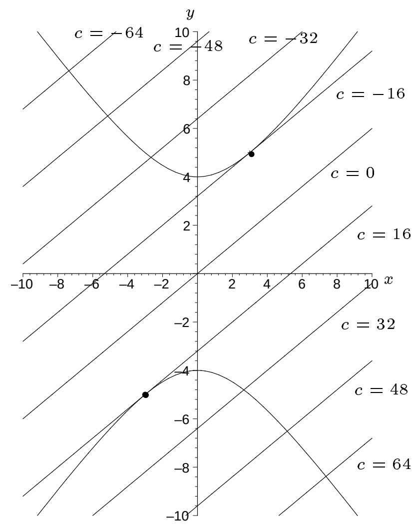
□

Vi skal nå se på hvordan Lagranges multiplikatormetode kan brukes for å finne de punktene på en ellipse som ligger nærmest eller lengst fra origo.

4.5 Eksempel
Ligningen

$$13x^2 + 12xy + y^2 = 80$$

beskriver en ellipse. Dette kan du sjekke ved å skissere grafen. I dette eksempelet skal vi finne punktene på ellipsen som ligger nærmest eller lengst fra origo. Vi vet at uttrykket $\sqrt{x^2+y^2}$ måler avstanden fra (x,y) til origo. Punktene vi ønsker å finne er derfor min og maks for $\sqrt{x^2+y^2}$ gitt $13x^2 + 12xy + y^2 = 80$.



Figur 4.1: Nivåkurver $f(x, y) = c$ og kurven $x^2 + 16 = y^2$.

For å forenkle utregningen er det lurt å se på funksjonen $f(x, y) = x^2+y^2$ i stedet for å bruke uttrykket $\sqrt{x^2 + y^2}$. Det er klart at maks og min punktene for det ene uttrykket også er maks og min punkt for det andre. Vi skal altså bruke Lagranges multiplikatormetode til å finne maks og min punktene til

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

under forutsetningen

$$g(x, y) = 13x^2 + 12xy + 4y^2 = 80$$

Vi starter med å regne ut gradientene til f og g. Disse er

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) \quad \text{og} \quad \nabla g(x, y) = (26x + 12y, 12x + 8y)$$

Lagranges multiplikatormetode sier at vi finner de kritiske punktene ved å løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda(26x + 12y) \\ 2y &= \lambda(12x + 8y) \\ 13x^2 + 12xy + 4y^2 &= 80 \end{aligned}$$

De to første ligningene gir hver et uttrykk for λ. Dermed har vi

$$\frac{2x}{26x + 12y} = \lambda = \frac{2y}{12x + 8y}$$

Vi kryssmultipliserer og får:

$$\begin{aligned} 2x(12x+8y) &= 2y(26x+12y) \\ 24x^2+16xy &= 52xy+24y^2 \\ 2x^2-3xy-2y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ved å dividere med y^2 får vi annengradsligningen

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} - 2 = 0$$

De to løsningene blir

$$\frac{x}{y} = 2 \quad \text{og} \quad \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$$

Enda har vi ikke brukt betingelsen $13x^2+12xy+4y^2=80$. Men det skal vi gjøre nå. La oss se hva som skjer når vi setter inn løsningen $\frac{x}{y}=2$. Dette blir det samme som å sette $x=2y$. Da får vi

$$13x^2+12xy+4y^2 = 52y^2+24y^2+4y^2 = 80y^2 = 80$$

Som har løsningene $y=1$ og $y=-1$. Dette gir de kritiske punktene $(2,1)$ og $(-2,-1)$.

Ser vi på tilfellet der $\frac{x}{y}=-\frac{1}{2}$, finner vi ved å sette inn $y=-2x$ i $13x^2+12xy+4y^2=80$ at

$$13x^2+12xy+4y^2 = 13x^2-24x^2+16x^2 = 5x^2 = 80$$

Som gir $x=\pm 4$. Dermed får vi de kritiske punktene $(4,-8)$ og $(-4,8)$.

Vi kan nå konkludere med at punktene på ellipsen $13x^2+12xy+4y^2=80$ som har størst avstand til origo er $(4,-8)$ og $(-4,8)$, mens punktene med minst avstand til origo er $(2,1)$ og $(-2,-1)$. $\square$

Ekstremalverdisetningen 2.40 sier at en funksjon definert på en lukket og begrenset mengde har maksimal- og minimalpunkt. Vi skal nå se på et eksempel på hvordan vi kan kombinere førstederiverttesten med Lagranges multiplikatormetode for å finne ekstremalpunktene for en slik funksjon.

4.6 Eksempel

La funksjonen

$$f(x,y) = 4xy - 2x^4 - y^2$$

være definert for de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ som ligger på eller innenfor ellipsen

$$y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x = 1$$

Vi ønsker å finne ekstremalpunktene. Siden definisjonsmengden til f er lukket og begrenset vet vi at maks- og minpunkt finnes. Derfor lager vi en liste av kritiske punkt og undersøker funksjonsverdien til disse. For å finne kritiske punkt i det indre av ellipsen bruker vi førstederiverttesten. På randen til ellipsen bruker vi Lagranges multiplikatormetode. La oss sette igang.

Kritiske punkt i det indre: Vi leter etter kritiske punkt i mengden

$$\{(x, y) \mid y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x < 1\}$$

Dette er punktene hvor $\nabla f = 0$. For å finne disse regner vi ut gradienten. Den er

$$\nabla f(x, y) = (4y - 8x^3, 4x - 2y)$$

Setter vi denne lik null får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4y - 8x^3 &= 0 \\ 4x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Den andre ligningen gir at $y = 2x$. Dette setter vi inn i den første og får:

$$8x - 8x^3 = 0$$

Løsningene er $x = -1$, $x = 0$ og $x = 1$. Dermed er de mulige kritiske punktene $(-1, -2)$, $(0, 0)$ og $(1, 2)$. Det eneste vi må passe på er om punktene faktisk ligger innenfor ellipsen. Vi må altså sjekke om de oppfyller ulikheten $y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x < 1$.

- $(-1, -2)$ innsatt i $y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x$ gir 72. Dermed ligger $(-1, -2)$ utenfor ellipsen.
- $(0, 0)$ innsatt i $y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x$ gir 0. Dermed ligger $(0, 0)$ innenfor ellipsen.
- $(1, 2)$ innsatt i $y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x$ gir -24. Dermed ligger $(1, 2)$ innenfor ellipsen.

De kritiske punktene i det indre av ellipsen er $(0, 0)$ og $(1, 2)$.

Kritiske punkt på randen: Vi leter etter kritiske punkt for f under bibetingelsen

$$y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x = 1$$

La derfor g være funksjonen gitt ved

$$g(x,y) = y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x$$

Lagranges multiplikatormetode sier at vi skal finne de punktene hvor ∇f og ∇g er parallelle. Vi regner derfor ut gradienten til g. Den er:

$$\nabla g(x,y) = (-4y + 56x - 48, 2y - 4x)$$

Kravet om at gradientene skal være parallelle gir ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4y - 8x^3 &= \lambda(-4y + 56x - 48) \\ 4x - 2y &= \lambda(2y - 4x) \end{aligned}$$

I tillegg har vi kravet

$$y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x = 1$$

Vi begynner med å se på den andre ligningen. Den kan omskrives som

$$(1+\lambda)(4x - 2y) = 0$$

Det er derfor to mulige løsninger. Enten er $\lambda = -1$ eller $y = 2x$.

- Hvis $\lambda = -1$ gir den første ligningen at

  $$4y - 8x^3 = 4y - 56x + 48$$

  Dette uttrykket kan forenkles til

  $$x^3 - 7x + 6 = 0$$

  Her tipper en lett at $x = 1$ er en løsning. De to andre løsningene er $x = 2$ og $x = -3$. For å finne de tilsvarende y verdiene setter vi inn i ligningen $y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x = 1$. Vi har

  $x = 1$ gir $y^2 - 4y - 20 = 1$, som har løsningene $y = -3$ og $y = 7$.

  $x = 2$ gir $y^2 - 8y + 16 = 1$, som har løsningene $y = 3$ og $y = 5$.

  $x = -3$ gir $y^2 + 12y + 396 = 1$, som ikke har noen reell løsning.

- Hvis $y = 2x$ lønner det seg å sette dette inn i ligningen $y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x = 1$. Da får en

  $$4x^2 - 8x^2 + 28x^2 - 48x = 1$$

som kan forenkles til

$$24x^2 - 48x - 1 = 0$$

Løsningene er $x = 1 - \frac{5}{12}\sqrt{6}$ og $x = 1 + \frac{5}{12}\sqrt{6}$. De tilsvarende verdiene for y er $y = 2 - \frac{5}{6}\sqrt{6}$ og $y = 2 + \frac{5}{6}\sqrt{6}$, henholdsvis. Det er mulig å sette disse to løsningene inn i den første ligningen for å finne λ, men verdien til λ skal vi ikke bruke til noe.

De kritiske punktene som ligger på randen til ellipsen er derfor

$$(1,-3), \quad (1,7), \quad (2,3), \quad (2,5), \quad (1-\frac{5}{12}\sqrt{6}, 2-\frac{5}{6}\sqrt{6}) \text{ og } (1+\frac{5}{12}\sqrt{6}, 2+\frac{5}{6}\sqrt{6})$$

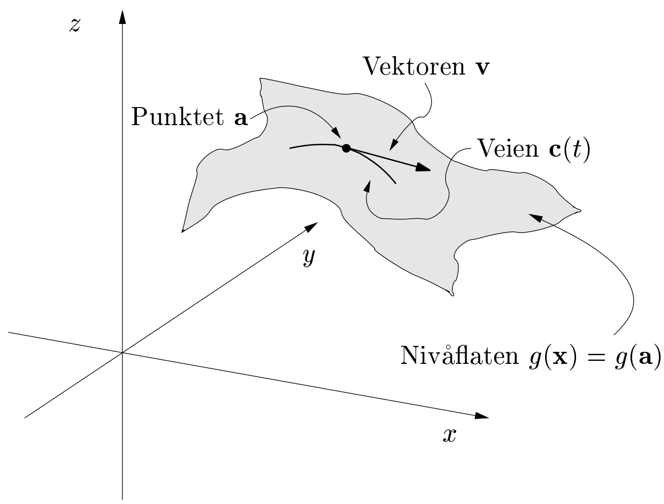
Globale maks- og minpunkt: Vi ha nå funnet en liste med 8 kritiske punkt for f på eller innenfor ellipsen $y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x = 1$. Førstederiverttesten og Lagranges multiplikatormetode sier at disse punktene er de eneste kandidatene til å være maks- eller minpunkt. Ekstremalverdisetningen sier at maks- og minpunkt finnes. For å finne de globale ekstremalpunktene gjenstår det kun å beregne funksjonsverdiene i de kritiske punktene og deretter sammenligne. Vi får følgende tabell

kritisk punkt (x,y)	kritisk verdi $f(x,y)$
$(0,0)$	0
$(1,2)$	2
$(1,-3)$	-23
$(1,7)$	-23
$(2,3)$	-17
$(2,5)$	-17
$(1-\frac{5}{12}\sqrt{6}, 2-\frac{5}{6}\sqrt{6})$	$-\frac{632}{9} + \frac{250}{9}\sqrt{6} \approx -2,1808$
$(1+\frac{5}{12}\sqrt{6}, 2+\frac{5}{6}\sqrt{6})$	$-\frac{632}{9} - \frac{250}{9}\sqrt{6} \approx -138,2636$

Vi ser at maksimalverdien er 2 og oppnås i punktet $(1,2)$, mens minimalverdien er $-\frac{632}{9} - \frac{250}{9}\sqrt{6}$ og antas i $(1+\frac{5}{12}\sqrt{6}, 2+\frac{5}{6}\sqrt{6})$. $\square$

4.2 *Bevis for Lagranges multiplikatormetode

Vi skal nå bevise Lagranges multiplikatormetode 4.2. For å gjøre dette trenger vi en hjelpesetning. Beviset for hjelpesetningen bygger på implisitte funksjonsteorem, se seksjon 2.4.10, og vi skal derfor ikke se på dette. Derimot skal vi forklare hva hjeplesetningen innebærer.



Figur 4.2: En vei $\mathbf{c}(t)$ i nivåflaten som tangerer $\mathbf{v}$ i $\mathbf{a}$.

4.7 Setning
La g være en C^1-funksjon i n variable og $\mathbf{a}$ et indre punkt i D_g. Dersom $\nabla g(\mathbf{a}) \neq 0$ og $\mathbf{v}$ er en vektor slik at $\mathbf{v} \cdot \nabla g(\mathbf{a}) = 0$, så finnes en vei $\mathbf{c}(t)$, definert for t i et åpent intervall som inneholder 0, slik at

i) $\mathbf{c}(0) = \mathbf{a}$,

ii) $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$ *og*

iii) $g(\mathbf{c}(t))$ *er konstant.*

Denne setningen handler om en nivå(hyper)flate til g. På denne flaten ligger punktet $\mathbf{a}$. Siden $\nabla g(\mathbf{a}) \neq 0$ ser nivåflaten virkelig ut som en flate i nærheten av $\mathbf{a}$, og $\nabla g(\mathbf{a})$ er normalvektoren. Vektoren $\mathbf{v}$ må være en tangentvektor til nivåflaten siden $\mathbf{v} \cdot \nabla g(\mathbf{a}) = 0$.

På slutten av seksjon 2.4.10 så vi at tangentvektoren til en vei på nivåflaten også ville være en tangentvektor til nivåflaten. Men hva med tangentvektoren $\mathbf{v}$ til nivåflaten, finnes det en vei $\mathbf{c}(t)$ som ligger på nivåflaten og har $\mathbf{v}$ som tangentvektor? Setning 4.7 sier at en slik vei finnes. Se figur 4.2.

Vi er nå klare til å vise setning 4.2.

Bevis for Lagranges multiplikatormetode: La f og g være C^1 funksjoner, $\mathbf{a}$ et indre punkt, $c = g(\mathbf{c})$ og S nivåflaten $g(\mathbf{x}) = c$. Anta at $\nabla g(\mathbf{a}) \neq 0$. Vi skal vise at dersom $\nabla f(\mathbf{a})$ og $\nabla g(\mathbf{a})$ ikke er parallelle så kan heller ikke $\mathbf{a}$ være et ekstremalpunkt for f på S.

La $\mathbf{v}$ være projeksjonen av $\nabla f(\mathbf{a})$ ned på tangentplanet til S i $\mathbf{a}$. En kan utlede følgende formel for $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{a}) - \frac{\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \nabla g(\mathbf{a})}{\|\nabla g(\mathbf{a})\|^2} \nabla g(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) - \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos\theta \frac{\nabla g(\mathbf{a})}{\|\nabla g(\mathbf{a})\|}$$

Her er θ vinkelen mellom $\nabla f(\mathbf{a})$ og $\nabla g(\mathbf{a})$. Siden $\nabla f(\mathbf{a})$ og $\nabla g(\mathbf{a})$ ikke er parallelle må $\mathbf{v} \neq 0$. Setning 4.7 sier at det finnes en vei $\mathbf{c}(t)$ slik at $g(\mathbf{c}(t)) = c = g(\mathbf{a})$, $\mathbf{c}(0) = \mathbf{a}$ og $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$. La h være funksjonen av en variabel definert ved

$$h(t) = f(\mathbf{c}(t))$$

Det er klar at hvis h ikke har et lokalt ekstremalpunkt i 0, så kan heller ikke f ha et lokalt ekstremalpunkt på S i $\mathbf{a}$. Vi er derfor interessert i å vise at $h'(0) \neq 0$. Vi bruker kjerneregelen til å derivere h og får:

$$h'(t) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$$

La nå $t = 0$. Dette gir:

$$h'(0) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$$

Setter vi inn det andre uttrykket for $\mathbf{v}$ får vi

$$\begin{aligned} h'(0) &= \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \left(\nabla f(\mathbf{a}) - \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos\theta \frac{\nabla g(\mathbf{a})}{\|\nabla g(\mathbf{a})\|} \right) \\ &= \|\nabla f(\mathbf{a})\|^2 - \|\nabla f(\mathbf{a})\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|\nabla f(\mathbf{a})\|^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

Dermed er $h'(0) \neq 0$ når θ ikke er 0 eller π, altså når $\nabla f(\mathbf{a})$ og $\nabla g(\mathbf{a})$ ikke er parallelle. $\square$

4.3 Oppgaver

Oppgave 4.1
Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne maksimums- og minimumspunkt for funksjonen f under den gitte bibetingelsen.

a) $f(x,y) = 4y - 3x$ gitt $x^2 + y^2 = 1$

b) $f(x,y) = x + y$ gitt $4x^2 + y^2 = 1$

c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ gitt $x - 5y = 52$

d) $f(x,y) = xy$ gitt $x^2 + 9y^2 = 18$

e) $f(x,y) = 4x^3 + y^2$ gitt $6x - y = 7$

f) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ gitt $y^2 - 4x^2 = 1$

g) $f(x,y) = x$ gitt $y^2 = x^3 + x - 2$

h) $f(x,y) = 200x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{5}}$ gitt $x + 128y = 800$

Oppgave 4.2
Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne maksimums- og minimumspunkt for funksjonen f under den gitte bibetingelsen.

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ gitt $2x - 3y + 2z = 17$

b) $f(x,y,z) = 2x - z$ gitt $4x + y = z + 9$

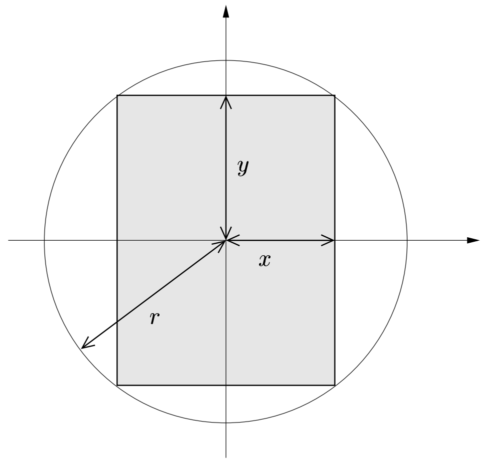
c) $f(x,y,z) = x + y + z$ gitt $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

d) $f(x,y,z) = xyz$ gitt $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12$

e) $f(x,y,z) = 4x^2 + 3xz - 12y$ gitt $x^2 + y^2 + z^2 = 84$

Oppgave 4.3
Finn den minste avstanden fra kurven $x^2 + x + \frac{3}{4} = y^2$ til origo.

Oppgave 4.4
Du skal lage en boks med volum V. Boksen skal ha bunn og fire sideflater, men ingen topp.
Hvordan skal du lage boksen for at overflatearealet skal bli minst mulig?



Figur 4.3: Bjelke skåret ut av stokk.

Oppgave 4.5
Av en sylinderformet stokk med radius r skal det skjæres ut en bjelke med bredde $2x$ og høyde $2y$. (Se figur 4.3). Bæreevnen til bjelken er proporsjonal med x og med kvadratet av y, dvs. den er gitt ved funksjonen

$$f(x, y) = kxy^2$$

der k er en konstant.

Finn de verdier av x og y som gir størst verdi for $f(x, y)$.

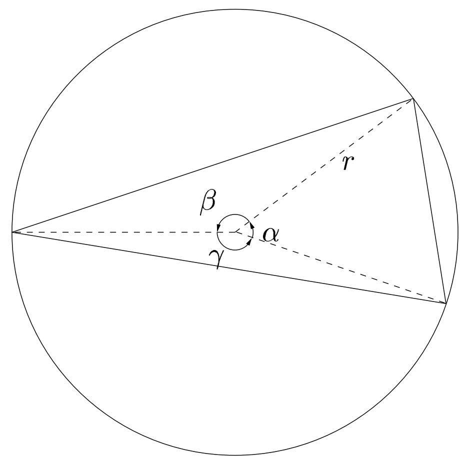
Oppgave 4.6
Det amerikanske postvesenet ekspederer bare pakker der summen av lengde, bredde og høyde er mindre enn 108 tommer.
Hva er det største volumet en kasseformet pakke kan ha?

Oppgave 4.7
En trekant med sidelengder x, y og z har omkrets $O = x + y + z$. La s være halve omkretsen. Arealet kan beregnes ved å bruke formelen

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

Anta at omkretsen er gitt. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne trekanten som har det største arealet.

Oppgave 4.8
Se på trekanter innskrevet i en sirkel med radius r, figur 4.4. Finn et uttrykk for arealet til den innskrevne trekanten gitt ved radius r, og vinklene α, β og γ. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne trekanten med størst areal.



Figur 4.4: En trekant innskrevet i en sirkel

Det kan være greit å bruke at arealet til en trekant er $A = \frac{1}{2}ab\sin\theta$, hvor a og b er sidelengder og θ er den mellomliggende vinkelen.

Oppgave 4.9

En bedrift produserer to typer varer. Disse heter X og Y. Fortjenesten ved å selge x enheter av X og y enheter av Y er gitt ved formelen

$$P(x,y) = 10x + 20y - \frac{x^2+y^2}{10}$$

Anta at det totale antallet av X og Y bedriften produserer ikke kan overstige 100 enheter. Hvor mye av hver vare skal bedriften produsere for å oppnå maksimal fortjeneste?

Fasit

Oppgave 1.1: a) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y \text{ og } x \neq -y\}$
c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$
d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{det ikke finnes heltall k slik at } x - y = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$
e) $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{kulen med sentrum i origo og radius } 5\}$

Oppgave 1.3: Du skal velge deg passende tall c og deretter skissere løsningsmengden til $f(x,y) = c$.

Oppgave 1.6: I polarkoordinater er funksjonene gitt ved:
a) $f(r,\theta) = \frac{1}{r^2}$
b) $f(r,\theta) = \frac{\cos\theta}{r}$
c) $f(r,\theta) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
d) $f(r,\theta) = r^2(5\cos^2\theta - 4)$
e) $f(r,\theta) = e^{\frac{r^2\sin(2\theta)}{2}}$
f) $f(r,\theta) = r^3\cos(3\theta)$

Oppgave 1.7: a) I sylinderkoordinater: $f(r,\theta,z) = r^2e^{-z^2}$, I kulekoordinater: $f(\rho,\theta,\phi) = \rho^2\sin^2\phi e^{-\rho^2\cos^2\phi}$.
b) I sylinderkoordinater: $f(r,\theta,z) = \frac{1}{r^2+z^2}$, I kulekoordinater: $f(\rho,\theta,\phi) = \frac{1}{\rho^2}$.
c) I sylinderkoordinater: $f(r,\theta,z) = \frac{r^2}{z^2}$, I kulekoordinater: $f(\rho,\theta,\phi) = \tan^2\phi$.
d) I sylinderkoordinater: $f(r,\theta,z) = \frac{r^2\cos(2\theta)}{z}$, I kulekoordinater: $f(\rho,\theta,\phi) = \rho\cos(2\theta)\sin\phi\tan\phi$.
e) I sylinderkoordinater: $f(r,\theta,z) = z(\theta - k\pi)$ når θ ligger i intervallet $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, I kulekoordinater: $f(\rho,\theta,\phi) = \rho\cos(\phi)(\theta - k\pi)$ når θ ligger i intervallet $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.
f) I sylinderkoordinater: $f(r,\theta,z) = r^2 - 2z^2$, I kulekoordinater: $f(\rho,\theta,\phi) = \rho^2(3\sin^2\phi - 2)$.

Oppgave 1.8: I MAPLE kan grafene tegnes ved å gi følgende kommandoer:

a) `plot3d(exp(x)/(1+y^2),x=-2..2,y=-2..2);`
b) `plot3d(5*x^2+y^3-4*y,x=-2..2,y=-3..3);`
c) `plot3d(x^5-10*x^3*y^2+5*x*y^4,x=-1..1,y=-1..1);`

Oppgave 1.9: Tips: I MAPLE kan kommandoen `implicitplot3d` være nyttig. Husk å gi kommandoen `with(plots):` til å begynne med.

Oppgave 2.1: a) A er hverken åpen eller lukket, b) B er åpen, c) C er lukket, d) D er lukket, e) E er både åpen og lukket

Oppgave 2.2: a) A er ubegrenset, b) B er ubegrenset, c) C er begrenset, d) D er ubegrenset, e) E er ubegrenset, f) F er begrenset

Oppgave 2.3: a) lukket, b) åpen, c) hverken åpen eller lukket, d) lukket, e) åpen, f) lukket, g) hverken åpen eller lukket, h) åpen, i) lukket

Oppgave 2.4: a) Hint: Bruk de formelle definisjonene.
b) Hint: Se på en av mengdene $A \cup B$ og $A \cap B$ om gangen. La $\mathbf{a}$ være et punkt i mengden og bruk egenskapen fra a).
c) Hint: Bruk den formelle definisjonen for rand.
d) Hint: Bruk deloppgave c).

Oppgave 2.5: a) Hint: De Morgans lover sier at $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ og $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Bruk dette sammen med resultatene fra oppgave 2.4.
b) Hint: Bruk at $A \setminus B = A \cap B^c$.

Oppgave 2.6: a) Følgen $\{\mathbf{x}_k\}$ konvergerer mot $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ hvis det for hver $\epsilon > 0$ finnes en tall N slik at $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| < \epsilon$ når $k \geq N$.
b) Hint: Dersom $\mathbf{a}$ ikke er med i $\overline{A}$, er $\mathbf{a}$ et indre punkt i A^c. Dermed finnes en $r > 0$ slik at for alle $\mathbf{x}$ med $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r$ er $\mathbf{x} \notin A$. Bruk dette til å utlede en selvmotsigelse. Eksempel på at $\mathbf{a}$ ikke behøver å ligge i A: La $A = (0, \infty)$ og $\mathbf{x}_k = \frac{1}{k}$.
c) Hint: Dersom A ikke er lukket så finnes et punkt $\mathbf{a}$ i ∂A som ikke er i A. Forsøk å vise at det finnes en følge av punkt i A som konvergerer mot $\mathbf{a}$.
d) Hint: Dersom $\mathbf{a}$ er et isolert punkt må det finnes en N slik at $\mathbf{x}_k = \mathbf{a}$ for alle $k \geq N$ og derfor er det opplagt at $f(\mathbf{a}) = \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k)$. Dersom $\mathbf{a}$ ikke er isolert er det to ting som må vises: Først at $f(\mathbf{a}) = \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k)$ for alle følger $\{\mathbf{x}_k\}$ som konvergerer mot $\mathbf{a}$. Til å vise dette bruker en definisjonene. Det andre er å vise at dersom $f(\mathbf{a}) = \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k)$ for alle følger $\{\mathbf{x}_k\}$ som konvergerer mot $\mathbf{a}$ så er f kontinuerlig i $\mathbf{a}$. For å vise dette kan en anta at f

ikke er kontinuerlig i $\mathbf{a}$ og så forsøke å konstruere en følge som konvergerer mot $\mathbf{a}$, men hvor $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) \neq f(\mathbf{a})$. (Bruk $\delta = \frac{1}{k}$.)

Oppgave 2.7: a) 20, b) 1, c) e, d) 1

Oppgave 2.8: a) Hint:$(x-y)$ er en faktor i telleren. Grenseverdien er 1.
b) Eksisterer ikke siden $\tan x \to \pm\infty$.
c) Sett inn. Grenseverdien er $-\frac{5}{17}$.
d) Eksisterer ikke. Hint: Teller og nevner har felles faktor.
e) Eksisterer ikke. Hint: Undersøk konturene $y=0$ og $x=0$.
f) Grenseverdien er 0. Hint: Skift til polarkoordinater.
g) Grenseverdien er 0. Hint: Skift til polarkoordinater.
h) Sett inn. Grenseverdien er $\frac{\pi}{24}$.
i) Eksisterer ikke. Sammenlign grenseverdien f.eks over linjene $y=0$ og $y=2x$.

Oppgave 2.9: Hint: Bruk setning 2.32 og setning 2.33

Oppgave 2.10: a) Hint: bruk definisjonen på kontinuitet

Oppgave 2.11: a) Hint: Resultatet følger av de to ulikhetene $\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ og $\|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.
b) Hint: For å vise at f er kontinuerlig i $\mathbf{b}$ må du se på størrelsen $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{b})| = |\,\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|\,|$. Bruk deretter ulikheten fra deloppgave a).
c) Hint: Bruk deloppgave b), setning 2.32 og setning 2.33.

Oppgave 2.12: Hint: Bruk ekstremalverdisetningen.

Oppgave 2.13: Hint: La $\epsilon = \frac{f(\mathbf{a})}{2}$. Bruk da ekstremalverdisetningen på mengden $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq R\}$ og at $f(\mathbf{x}) < \epsilon = \frac{f(\mathbf{a})}{2}$ utenfor.

Oppgave 2.14: a) $\nabla f(x,y) = (3x^2y + 3y^4, x^3 + 12xy^3)$.
b) $\nabla f(x,y) = (\frac{2x+3x^2}{y}, -\frac{x^2+x^3}{y^2})$.
c) $\nabla f(x,y) = (-\sin(x+y^2), -2y\sin(x+y^2))$.
d) $\nabla f(x,y) = (2x\ln(xy^2) + x, \frac{2x^2}{y})$.
e) $\nabla f(x,y,z) = (e^{-z}, e^{-z}, -(x+y)e^{-z})$.
f) $\nabla f(x,y,z) = (\frac{z^2}{(1+y^2)\cos^2 x}, -\frac{2yz^2\tan x}{(1+y^2)^2}, \frac{2z\tan x}{1+y^2})$.
g) $\nabla f(x,y,z) = (\frac{z}{1+(x+y)^2}, \frac{z}{1+(x+y)^2}, \arctan(x+y))$.
h) $\nabla f(x,y,z,u) = (-(z^2+u)e^{-x+3y}, 3(z^2+u)e^{-x+3y}, 2ze^{-x+3y}, e^{-x+3y})$.

Oppgave 2.15: a) $f'((1,2);(3,-1)) = 11$
b) $f'((1,0);(-1,1)) = -1$
c) $f'((1,0,1);(1,1,-1)) = -1$
d) $f'((\frac{\pi}{2},1,0);(-1,0,2)) = 2$

Oppgave 2.16: a) I retningen gitt av vektoren $(24,173)$.
b) I retningen gitt av vektoren $(1,1,0)$.

Oppgave 2.17: a) $z = 2x-y-3$, b) $z = x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{\pi}{12}$, c) $z = 3x+9y+8$, d) $z = x$

Oppgave 2.18: a) $x-2y+z = 0$, b) $5x+26y+40z = 16$, c) $12x-18y+\sqrt{3}z = 78+\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$

Oppgave 2.19: $\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial x} = 8xy^2 + 1$
$\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial y} = 8x^2y + 2y$

Oppgave 2.20: $\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial x} = e^{-2y(z+x)} \cdot 2y - (2xy+z)e^{-2y(z+x)} \cdot 2y$
$\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial y} = e^{-2y(z+x)} \cdot 2x - (2xy+z)e^{-2y(z+x)} \cdot 2(z+x)$
$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial z} = e^{-2y(z+x)} - (2xy+z)e^{-2y(z+x)} \cdot 2y$

Oppgave 2.21: Hint: Bruk kjerneregelen på den sammensatte funksjonen $\rho(t) = f(V(t),T(t))$. Hvis $\rho = c\frac{T}{V}$ blir $\rho'(t) = c\frac{T'(t)V(t)-T(t)V'(t)}{(V(t))^2}$.

Oppgave 2.22: Hint: Bruk kjerneregelen på den sammensatte funksjonen $E_1(p_1(t),p_2(t))$.

Oppgave 2.23: Hint: Bruk at $\Delta V \approx V'((r,h);(\Delta r,\Delta h))$.
Anslått usikkerhet: $\Delta V \approx 3.8$ m^3

Oppgave 2.24: a) $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6y & 6x+4y \\ 6x+4y & 4x \end{bmatrix}$
b) $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x\sin y \end{bmatrix}$
c) $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} (x^2+4x+2)e^{x-y} & -(x^2+2x)e^{x-y} \\ -(x^2+2x)e^{x-y} & x^2e^{x-y} \end{bmatrix}$
d) $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & -2z^2 & -4yz \\ 2x & -4yz & -2y^2 \end{bmatrix}$

Oppgave 2.25: a) $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.

b) Hint: Bruk definisjonen av den deriverte til å regne ut $f'(0)$.
c) Hint: Grenseverdien $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ eksisterer ikke.
d) f er deriverbar, men ikke C^1.

Oppgave 2.26: a) $g'(0,0;1,0) = 0$
b) $g'(0,0;\mathbf{r}) = 0$
c) Det finnes punkt (x,y) vilkårlig nær origo med $g(x,y) = 1$.
d) g er ikke en C^1 funksjon på tross av at alle de retningsderiverte eksisterer i origo.

Oppgave 2.27: a) $h'(0,0;1,0) = 0$
b) $h'(0,0;r_1,r_2) = r_1$
c) De partieltderiverte er definert som $\frac{\partial h}{\partial x} = h'(0,0;1,0) = 0$ og $\frac{\partial h}{\partial y} = h'(0,0;0,1) = 0$. Dette gir $\nabla h(0,0) = (0,0)$.
d) For eksempel er $h(0,0;1,1) = 1$ mens $\nabla h(0,0)\cdot(1,1) = 0$. e) Dette er ikke et moteksempel siden h ikke er C^1. (De partieltderiverte eksisterer ikke i alle punkt nær origo.)

Oppgave 2.28: a) Hint: Regn ut grenseverdien $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ved å skifte til polarkoordinater.
b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$
c) Hint: For å finne f.eks. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ regner du ut grenseverdien $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$. Dette gir $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
d) f er C^1 siden $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ er kontinuerlige også i origo.
e) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 1$ og $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = -1$.
f) Definisjonen av $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ er henholdsvis den første og den andre av grenseverdiene i deloppgave e). Derfor er $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = -1$. Setning 2.82 sier at for en C^2 funksjon er $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$, men f er ikke C^2.

Oppgave 3.1: a) $(2,-1)$, b) $(0,0)$, c) $(-\frac{3}{2},1)$, d) $(-1,0)$, e) $(\frac{1}{4},-4)$

Oppgave 3.2: a) Minimum i $(1,-2)$.
b) Sadelpunkt i $(-1,1)$.
c) Minimum i $(0,0)$.
d) Maksimum i $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.
e) Sadelpunkt i $(-2,0)$

Oppgave 3.3: Minimum i $(0,0,0)$, sadelpunkt i $(2,2,2)$, $(2,-2,-2)$, $(-2,2,-2)$ og $(-2,-2,2)$.

Oppgave 3.4: a) $\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - \frac{100}{x^2 y}$ og $\frac{\partial L}{\partial y} = 2 - \frac{100}{xy^2}$.
b) $x = \sqrt[3]{\frac{25}{2}}$ og $y = z = \sqrt[3]{100}$

Oppgave 3.5: a) $\frac{\partial A}{\partial x} = 28 - 4x - 3y$ og $\frac{\partial A}{\partial y} = 28 - 4y - 3x$. A har lokalt maksimum for $x = y = 4$.
b) Maksimalt areal $A = 112$ når $x = y = 4$.

Oppgave 3.6: a) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{60}{x^2} - 60y$ og $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{60}{y^2} - 60x$
b) P har maksimum lik 1140 når $x = y = 1$.

Oppgave 3.7: Hint: Fortjenesten er gitt ved $P(x,y) = 500(y-x)(x-400) + (450000 + 500(x-2y))(y-600)$.
Finner kritisk punkt når $x = 650$ og $y = 750$. Dette er et maksimum.

Oppgave 3.8: a) Produksjonsnivået blir $x = 12.000$ og $y = 12.000$. Dette gir $P = 36.000.000$ og $Q = 48.000.000$.
b) Ved samarbeid blir produksjonsnivået $x = 9.000$ og $y = 8.000$. Dette gir $P = 51.500.000$ og $Q = 50.500.000$.
c) Produksjonsnivået blir $x = 9.000$ og $y = 12.000$. Dette gir $P = 31.500.000$ og $Q = 58.500.000$.

Oppgave 3.9: b) Se eksempel 3.7, c) Hint: Bytt fortegn på funksjonen i a).

Oppgave 3.10: a) Dersom vi kan finne et punkt $b \neq a$ slik at $f(a) = f(b)$ sier Rolles teorem at for en c mellom a og b er $f'(c) = 0$. Men da ville ikke a være det eneste stasjonære punktet. Anta at a ikke er et globalt maksimum. Da finnes det et punkt d slik at $f(d) > f(a)$. I nærheten av a og på samme side av a som d finnes det et punkt e med $f(e) \leq f(a)$, siden a er et lokalt maksimum. Vi har sett at dersom $f(e) = f(a)$ så får vi en motsigelse mot at a var det eneste stasjonære punktet. Derfor må $f(e) < f(a)$. Fordi $f(e) < f(a) < f(d)$ må det ved skjæringssetningen finnes et punkt b mellom e og d slik at $f(b) = f(a)$, og $b \neq a$ siden d og e ligger på samme side av a. Dermed får vi en motsigelse mot at a er det ensete stasjonære punktet.
c) Hint: For å vise at $(0,0)$ ikke er et globalt maksimum kan du se på konturen $y = x$.

Oppgave 3.11: a) Ekstremalverdisetningen sier at f har et minimum på intervallet $[a, b]$. La c være dette minimumspunktet. Siden a og b er lokale maksima er $c \neq a$ og $c \neq b$.
c) Hint: Annenderiverttesten fungerer.

Oppgave 4.1: a) Makspunkt i $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. Maksverdien er $f(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = 5$. Minpunkt i $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$. Minverdien er $f(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = -5$.
b) Makspunkt i $(\frac{1}{10}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5})$. Maksverdien er $f(\frac{1}{10}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Minpunkt i $(-\frac{1}{10}\sqrt{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5})$. Minverdien er $f(-\frac{1}{10}\sqrt{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5}) = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$.
c) Minpunkt i $(2, -10)$. Minverdien er $f(2, -10) = 104$.
d) Minpunkt i $(3, -1)$ og $(-3, 1)$. Minverdier $f(3, -1) = -3$ og $f(-3, 1) = -3$. Makspunkt i $(3, 1)$ og $(-3, -1)$. Maksverdier $f(3, 1) = 3$ og $f(-3, -1) = 3$.
e) Minpunkt i $(1, -1)$. Minverdi $f(1, -1) = 5$. Makspunkt i $(7, 35)$. Maksverdi $f(7, 35) = 2597$.
f) Har ingen maks- eller minpunkt.
g) Minpunkt i $(1, 0)$. Minverdi $f(1, 0) = 1$.
h) Makspunkt i $(160, 5)$. Maksverdi $f(160, 5) = 2000$.

Oppgave 4.2: a) Minpunkt i $(2, -3, 2)$. Minimalverdien er $f(2, -3, 2) = 17$.
b) Ingen kritiske punkt.
c) Kritiske punkt i $(-1, -1, 1)$ og $(1, 1, -1)$. Disse er hverken maks eller min. De kritiske verdiene er $f(-1, -1, 1) = -1$ og $f(1, 1, -1) = 1$.
d) Det er 14 kritiske punkt: $(-2\sqrt{3}, 0, 0)$, $(2\sqrt{3}, 0, 0)$ $(0, -\sqrt{6}, 0)$, $(0, \sqrt{6}, 0)$, $(0, 0, -2)$, $(0, 0, 2)$, $(-2, -\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(-2, -\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(2, \sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$ og $(2, \sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$. Det absolutte maksimum er $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ og oppnås i punktene $(-2, -\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$ og $(2, \sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$. Det absolutte minimum er $-\frac{4}{3}\sqrt{6}$ og oppnås i punktene $(-2, -\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$ og $(2, \sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$. De resterende kritiske punktene er sadelpunkt og har kritisk verdi lik 0.
e) Makspunkt i $(-\sqrt{74}, -\frac{4}{3}, -3\sqrt{74})$ og $(\sqrt{74}, -\frac{4}{3}, 3\sqrt{74})$. Maksverdien er $f(-\sqrt{74}, -\frac{4}{3}, -3\sqrt{74}) = f(\sqrt{74}, -\frac{4}{3}, 3\sqrt{74}) = 978$. Minpunkt i $(0, 2\sqrt{21}, 0)$. Minverdien er $f(0, 2\sqrt{21}, 0) = -24\sqrt{21}$. Det kritiske punktet i $(0, -2\sqrt{21}, 0)$ er hverken maks eller min og har kritisk verdi $f(0, 2\sqrt{21}, 0) = 24\sqrt{21}$.

Oppgave 4.3: Den minste avstanden er $\frac{1}{4}\sqrt{10}$ og oppnås av punktene $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ og $(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$.

Oppgave 4.4: Bunnen skal være kvadratisk med sidelengde $\sqrt[3]{2V}$ og høyden skal være $\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$.

Oppgave 4.5: f har maksimum når $x = \frac{1}{\sqrt{3}}r$ og $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$.

Oppgave 4.6: Største volum er 46656 tommer^3.

Oppgave 4.7: Hint: Betrakt A som en funksjon av x, y og z. Det kan lønne seg å maksimere A^2 i stedet for A. Da forsvinner rottegnet, og utregningen blir enklere.
Trekanten med det største arealet er den likesidete.

Oppgave 4.8: Arealet er gitt ved $A = \frac{1}{2}r^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$. Maksimerer en A som en funksjon av α, β og γ under betingelsen $2\pi = \alpha + \beta + \gamma$, finner en at den likesidete trekanten har størst areal.

Oppgave 4.9: Den maksimale fortjenesten er $P = 1125$ og oppnås ved $x = 25$ og $y = 75$. Husk å sjekke at P ikke har noe maksimum når $x+y < 100$.