Matematik H1

Forelæsningsnoter til

Lineær Algebra

Niels Vigand Pedersen

Udgivet af

Asmus L. Schmidt

Københavns Universitet Matematisk Afdeling

August 2000

3. oplag, juni 2005.

Forord

Gennem en særlig aftale varetages undervisningen i matematik på erhvervsøkonomi-matematikstudiet ved Handelshøjskolen i København af Matematisk Afdeling, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet. Denne undervisning består af to kurser, Matematik H1 og Matematik H2, der følges på henholdsvis første og andet år af studiet.

Matematik H1 er opdelt i to dele, nemlig et kursus i lineær algebra og et kursus i matematisk analyse. Nærværende notesæt udgør det skriftlige materiale til kurset i lineær algebra. Det er beregnet til et halvt års studier med 2×2 forelæsningstimer, 2×2 øvelsestimer samt en skriftlig aflevering om ugen. Sættet består af forelæsningsnoter, 35 hjemmeopgaver, 146 øvelsesopgaver og en samling af blandede opgaver.

I forelæsningsnoterne er der lagt vægt på en stringent gennemgang af matematikken. Det betyder, at alle definitioner er omhyggeligt og præcist givet, og der bliver ført bevis (argumenteret) for langt de fleste påstande. Formålet med at give disse beviser er først og fremmest, at det er gennem arbejdet med dem (naturligvis forenet med øvelsesregning), at den dybe forståelse nås. Men formålet er også at præsentere den videnskabelige matematiske metode. Det er formålet med de fleste videnskaber at finde frem til "sandheder", men matematik adskiller sig ved at kræve absolut sandhed. I matematik kan et udsagn ikke være nogenlunde rigtigt. I andre teorier, som f.eks. økonomi, ville et sådant krav være absurd; hvis bare virkeligheden beskrives godt (efter en given målestok) betragtes teorien som værende "sand". Det er efter min mening vigtigt, når man arbejder med matematisk økonomi, at man behersker metoderne fra begge områder, således at man kan overskue hvad der er "sandt" i hvilken forstand.

Som regel præsenteres beviserne med mange detaljer, men det er, som med al matematisk læsning, alligevel nødvendigt at læseren hele tiden stopper op og tænker hvert enkelt skridt igennem, før det næste tages. Den matematiske sprogbrug er tit meget kortfattet, og der bruges en række faste vendinger, som det er helt afgørende at forstå den præcise betydning af (f.eks. er "hvis" ikke det samme som "hvis og kun hvis"). Det kan være en langsommelig, og af og til måske kedelig, proces, og det kan undervejs blive svært at se skoven for bare træer. Forhåbentlig kan øvelser og forelæsninger her bidrage til at fremhæve de centrale (og smukke!) punkter i teorien.

I denne udgave af forelæsningsnoterne er der foretaget en hel del rettelser i forhold til tidligere, ligesom opgavesamlingerne er let reviderede. Afsnittene 1.4, 2.5-2.6, 3.3, 3.5-3.7 er omskrevet, og der er tilføjet en samling af blandede opgaver.

Forfatteren til notesættet, Niels Vigand Pedersen, afgik alt for tidligt ved døden i 1995. Da det ikke har været muligt at finde filen med kildeteksten, har det været nødvendigt at genskabe kildeteksten (i LATEX) på grundlag af den seneste udgave (1998) ved Henrik Schlichtkrull. Overassistent Dita Andersen har ydet en forbilledlig indsats ved skrivning af manuskriptet.

København, juli 2000 — Asmus L. Schmidt

Indhold

1 Lineære afbildninger og matricer

1.1 Talrummene R^n.

De naturlige tal betegnes med $\mathbf{N}$ og de reelle tal betegnes med $\mathbf{R}$ (jvf. A.1). Lad n være et naturligt tal. Mængden af alle n-talsæt

$$\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n),$$

hvor $x_1, \cdots, x_n$ er reelle tal, betegnes med $\mathbf{R}^n$. Vi kalder også $\underline{x}$ for en *vektor* i $\mathbf{R}^n$. Tallene $x_1, \cdots, x_n$ kaldes *koordinaterne* for vektoren $\underline{x}$. Det er ofte bekvemt at skrive $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ som en n-talsøjle

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Denne – dobbelttydige – skrivemåde er kendt fra regning med (koordinater for) vektorer i planen, der jo betegnes både med f.eks. (x, y) og $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

For en vektor

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

i $\mathbf{R}^n$ og et tal $\lambda \in \mathbf{R}$ defineres vektoren $\lambda\underline{x}$ ("$\underline{x}$ multipliceret med λ") ved

$$\lambda\underline{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Med $-\underline{x}$ betegner vi vektoren $(-1)\underline{x}$, altså

$$-\underline{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}.$$

For to vektorer

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

i $\mathbf{R}^n$ defineres vektoren $\underline{x} + \underline{y}$ ("summen af $\underline{x}$ og $\underline{y}$") ved

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} .$$

Med $\underline{x} - \underline{y}$ betegner vi vektoren $\underline{x} + (-\underline{y})$, altså

$$\underline{x} - \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix} .$$

Med disse definitioner af $-\underline{x}$ og $\underline{x} - \underline{y}$ opnås, at vi kan regne med minustegn på sædvanlig måde. Et udtryk af formen $\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}$ kaldes en *linearkombination* af $\underline{x}$ og $\underline{y}$.

Eksempel 1.1.1. Hvis vektorerne $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er givet ved

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

er

$$2\underline{x} + \underline{y} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Nulvektoren $\underline{o}$ i $\mathbf{R}^n$ defineres ved

$$\underline{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

En vektor $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$, der ikke er nulvektoren, kaldes en *egentlig* vektor.

Vi har nu defineret to operationer på vektorer i $\mathbf{R}^n$, nemlig multiplikation af en vektor med et tal (skalarmultiplikation) og dannelse af to vektorers sum (addition). Om disse operationer gælder følgende regneregler, der i tilfældet $n = 2$ er bekendte fra regning med (koordinater for) vektorer i planen.

Sætning 1.1.2 (Regneregler for vektorer i $\mathbf{R}^n$)**.** *For vilkårlige vektorer* $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ *i* $\mathbf{R}^n$ *og vilkårlige tal* λ, μ *i* $\mathbf{R}$ *gælder:*

V1: $(\underline{x}+\underline{y})+\underline{z}=\underline{x}+(\underline{y}+\underline{z})$

V2: $\underline{x}+\underline{o}=\underline{x}$

V3: $\underline{x}+(-\underline{x})=\underline{o}$

V4: $\underline{x}+\underline{y}=\underline{y}+\underline{x}$

V5: $\lambda(\underline{x}+\underline{y})=\lambda\underline{x}+\lambda\underline{y}$

V6: $(\lambda+\mu)\underline{x}=\lambda\underline{x}+\mu\underline{x}$

V7: $(\lambda\mu)\underline{x}=\lambda(\mu\underline{x})$

V8: $1\underline{x}=\underline{x}$

Bevis. Disse regneregler følger let af de tilsvarende regneregler for de reelle tal. Vi nøjes med et par eksempler. Lad

$$\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \underline{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\ \underline{z}=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$$

være vektorer i $\mathbf{R}^n$. Der gælder da:

$$(\underline{x}+\underline{y})+\underline{z}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1+z_1\\ \vdots\\ x_n+y_n+z_n\end{pmatrix}$$

og

$$\underline{x}+(\underline{y}+\underline{z})=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1+z_1\\ \vdots\\ y_n+z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1+z_1\\ \vdots\\ x_n+y_n+z_n\end{pmatrix}.$$

Heraf ses, at $(\underline{x}+\underline{y})+\underline{z}=\underline{x}+(\underline{y}+\underline{z})$, altså er V1 opfyldt. For f.eks. at indse, at V5 er opfyldt skriver vi

$$\lambda(\underline{x}+\underline{y})=\lambda\begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda(x_1+y_1)\\ \vdots\\ \lambda(x_n+y_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1+\lambda y_1\\ \vdots\\ \lambda x_n+\lambda y_n\end{pmatrix}$$

og

$$\lambda\underline{x}+\lambda\underline{y}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda y_1\\ \vdots\\ \lambda y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1+\lambda y_1\\ \vdots\\ \lambda x_n+\lambda y_n\end{pmatrix},$$

hvoraf gyldigheden af V5 aflæses. De øvrige regneregler bevises efter et tilsvarende mønster. □

Den fælles værdi af $(\underline{x}+\underline{y})+\underline{z}$ og $\underline{x}+(\underline{y}+\underline{z})$ (regneregel V1) betegnes $\underline{x}+\underline{y}+\underline{z}$. Den fælles værdi af $(\lambda\mu)\underline{x}$ og $\lambda(\mu\underline{x})$ (regneregel V7) betegnes $\lambda\mu\underline{x}$.

Eksempel 1.1.3. Hvis vektorerne $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ er givet ved

$$\underline{x}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix},\ \underline{y}=\begin{pmatrix}3\\5\\-1\\-2\end{pmatrix},\ \underline{z}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

er

$$2\underline{x}+\underline{y}-3\underline{z}=2\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\5\\-1\\-2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\9\end{pmatrix}.$$

For to vektorer

$$\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \underline{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

i $\mathbf{R}^n$ defineres *skalarproduktet* $\underline{x}\cdot\underline{y}$ ved

$$\underline{x}\cdot\underline{y}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n,$$

også betegnet $\sum_{j=1}^n x_jy_j$. Om skalarproduktet gælder følgende regneregler, der i tilfældet $n=2$ er bekendte fra regning med skalarprodukt af vektorer i planen.

Sætning 1.1.4 (Regneregler for skalarprodukt)**.** *For vilkårlige vektorer $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ i $\mathbf{R}^n$ og vilkårlige tal $\lambda\in\mathbf{R}$ gælder:*

S1: $(\underline{x}+\underline{y})\cdot\underline{z}=\underline{x}\cdot\underline{z}+\underline{y}\cdot\underline{z}$

S2: $(\lambda\underline{x})\cdot\underline{y}=\lambda(\underline{x}\cdot\underline{y})$

S3: $\underline{x}\cdot\underline{y}=\underline{y}\cdot\underline{x}$

S4: $\underline{x} \cdot \underline{x} \geq 0$

S5: $\underline{x} \cdot \underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{o}$

Bevis. Regnereglerne S1, S2 og S3 følger let af de tilsvarende regneregler for de reelle tal. Vi nøjes derfor med et enkelt eksempel. Lad

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ , \ \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \ , \ \underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

være vektorer i $\mathbf{R}^n$. Der gælder da:

$$\begin{aligned} (\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{z} &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1 + y_1)z_1 + \cdots + (x_n + y_n)z_n \\ &= x_1 z_1 + y_1 z_1 + \cdots + x_n z_n + y_n z_n \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \underline{x} \cdot \underline{z} + \underline{y} \cdot \underline{z} &= (x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n) + (y_1 z_1 + \cdots + y_n z_n) \\ &= x_1 z_1 + y_1 z_1 + \cdots + x_n z_n + y_n z_n. \end{aligned}$$

Heraf ses, at $(\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{z} = \underline{x} \cdot \underline{z} + \underline{y} \cdot \underline{z}$, altså er S1 opfyldt. Beviset for regnereglerne S2 og S3 følger et tilsvarende mønster.

Gyldigheden af S4 og S5 følger umiddelbart af, at

$$\underline{x} \cdot \underline{x} = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

□

For en vektor $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ defineres *længden* af vektoren $\underline{x}$ som tallet

$$|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}}.$$

Denne definition giver mening da $\underline{x} \cdot \underline{x} \geq 0$ (S4). Vi bemærker, at $|\underline{x}| = 0$ netop hvis $\underline{x} = \underline{o}$, og at $|\lambda \underline{x}| = |\lambda| \, |\underline{x}|$ for $\lambda \in \mathbf{R}$, $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$.

En vektor $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ for hvilken $|\underline{x}| = 1$ kaldes en *enhedsvektor*. Hvis $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ er en egentlig vektor, da er vektoren

$$\underline{y} = \frac{1}{|\underline{x}|}\underline{x}$$

en enhedsvektor. Vektoren $\underline{y}$ siges at være fremgået af $\underline{x}$ ved *normering*.

To vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i $\mathbf{R}^n$ siges at være *ortogonale*, hvis

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = 0.$$

Eksempel 1.1.5. Hvis $\underline{x}$, $\underline{y}$ er givet ved

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

er

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = 2 \cdot 7 + (-3) \cdot 1 + 6 \cdot (-2) = -1$$

og

$$|\underline{x}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7\,, \ |\underline{y}| = \sqrt{7^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

Vektorerne

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \underline{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j, \cdots, \underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kaldes *standard enhedsvektorerne* i $\mathbf{R}^n$. Der gælder, at $|\underline{e}_i| = 1$ og $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = 0$ for $i \neq j$.

Hvis

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

er en vektor i $\mathbf{R}^n$ gælder, at

$$\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n,$$

og at

$$x_j = \underline{x} \cdot \underline{e}_j.$$

1.2 Matricer

En *matrix* er et rektangulært talskema af formen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Den i'te række i $\underline{\underline{A}}$, der også betegnes $\underline{\underline{A}}[i,*]$, er

$$(a_{i1} \ldots a_{in}),$$

og den j'te søjle i $\underline{\underline{A}}$, der også betegnes $\underline{\underline{A}}[*,j]$, er

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Tallet a_{ij} står i den i'te række og den j'te søjle og betegnes også $\underline{\underline{A}}[i,j]$. Matricen $\underline{\underline{A}}$ har m rækker og n søjler, og består således af mn reelle tal. Vi kalder også $\underline{\underline{A}}$ for en $m \times n$-matrix.

Vi kan opfatte $\underline{\underline{A}}$ som opbygget af n m-talsøjler, og omtaler

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

som matricens *søjlevektorer*. Den j'te søjlevektor er

$$\underline{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

En matrix, hvori alle elementer er lig 0 kaldes en *nulmatrix*. Nulmatricer betegnes $\underline{\underline{0}}$ eller $\underline{\underline{0}}_{m,n}$.

Eksempel 1.2.1. En 3×2-matrix ser således ud

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.2.2. Matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & -7 & 3 \\ -5 & 5 & 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

har to rækker og fem søjler, og er altså en 2×5-matrix. Her er $\underline{\underline{A}}[1,*] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & -7 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{A}}[*,2] = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{A}}[2,4] = 8$.

I stedet for at opskrive matricen $\underline{\underline{A}}$ i et skema bruges også den kortere skrivemåde

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}.$$

Som en forkortelse af dette udtryk skriver vi ofte kun

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$$

og fremhæver, at dette sidste udtryk altså er ensbetydende med

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

En $n \times n$ matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kaldes også en *kvadratisk* matrix. I en kvadratisk matrix siges a_{ij} at stå i *diagonalen* dersom $i = j$, og *uden for diagonalen* dersom $i \neq j$.

En kvadratisk matrix, hvori alle elementer uden for diagonalen er lig 0 kaldes en *diagonalmatrix*. En diagonalmatrix hvori alle diagonalelementer er lig 1 kaldes en *enhedsmatrix*. Enhedsmatricer betegnes $\underline{\underline{E}}$ eller $\underline{\underline{E}}_{n,n}$, dersom man ønsker at fremhæve række- og søjleantal. Enhedsmatricer har altså formen

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det ses, at den j'te søjlevektor i $\underline{\underline{E}}$ netop er den j'te standard enhedsvektor i $\mathbf{R}^n$.

Eksempel 1.2.3. De følgende matricer er eksempler på diagonalmatricer:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den sidste af disse matricer er en enhedsmatrix.

En kvadratisk matrix

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kaldes en *nedre trekantsmatrix* hhv. *øvre trekantsmatrix* dersom $a_{ij} = 0$ for alle i og j med $i < j$ hhv. $i > j$. En nedre trekantsmatrix hhv. øvre trekantsmatrix er altså en matrix af formen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{hhv.} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.2.4. De følgende matricer er eksempler på nedre trekantsmatricer:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

og de følgende matricer er eksempler på øvre trekantsmatricer:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

En $m \times 1$-matrix har formen

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \text{eller blot} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

og kaldes en *søjlematrix*, og en $1 \times n$-matrix har formen

$$(a_{11} \dots a_{1n}) \text{ eller blot } (a_1 \dots a_n)$$

og kaldes en *rækkematrix*.

Det ses, at vi nu har to måder på hvilken vi kan navngive en n-talsøjle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

nemlig

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

I første tilfælde kalder vi søjlen for en vektor, og i andet tilfælde kalder vi søjlen for en (søjle-)matrix. Det er bekvemt at have disse to muligheder for navngivning af en søjle; det afhænger af sammenhængen hvilken man bruger, men vi vil i øvrigt ikke skelne skarpt mellem de to muligheder. På samme måde som vi taler om en matrices søjlevektorer, taler vi om en matrices *søjlematricer*.

Matricerne

$$\underline{\underline{E}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \underline{\underline{E}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

kaldes for *standard enhedssøjlematricerne*.

Er der givet en $m \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ og en $m \times p$-matrix $\underline{\underline{B}}$ kan man danne en $m \times (n+p)$-matrix $\underline{\underline{C}}$ ud fra $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$'s søjler ved at opskrive $\underline{\underline{B}}$'s søjler efter $\underline{\underline{A}}$'s søjler. Matricen $\underline{\underline{C}}$ kaldes en *blokmatrix* med blokkene $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ og man skriver

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix}.$$

Tilsvarende kan man slå flere matricer sammen og opnå blokmatricer af formen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_1 & \cdots & \underline{\underline{A}}_n \end{pmatrix}.$$

Er specielt $\underline{\underline{A}}_1, \cdots, \underline{\underline{A}}_n$ søjlematricer med m elementer, er

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_1 & \cdots & \underline{\underline{A}}_n \end{pmatrix}$$

en $m \times n$-matrix, hvis j'te søjlematrix er $\underline{\underline{A}}_j$. Er tilsvarende $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ vektorer i $\mathbf{R}^m$ kan disse opfattes som søjlematricer, og vi benytter da også betegnelsen

$$\underline{\underline{A}} = (\underline{a}_1 \ \ \cdots \ \ \underline{a}_n)$$

for den $m \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$, hvis j'te søjlevektor er $\underline{a}_j$.

Eksempel 1.2.5. Hvis

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

er

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

og hvis

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

er

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 & \underline{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Lineære afbildninger

Lad

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

være en $m \times n$-matrix. Til $\underline{\underline{A}}$ knyttes en afbildning $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ved fastsættelsen

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Definition 1.3.1. En afbildning $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, der på denne måde er knyttet til en $m \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$, kaldes *lineær*.

Eksempel 1.3.2. En lineær afbildning $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ har formen

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.3.3. Afbildningen $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ givet ved

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 3x_5 \\ -5x_1 + 5x_2 + 8x_4 + 10x_5 \end{pmatrix}$$

er lineær, idet den er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & -7 & 3 \\ -5 & 5 & 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.3.4. En fabrik fremstiller to varer X_1 og X_2 under anvendelse af tre råvarer Y_1, Y_2 og Y_3. Hvis der dagligt fremstilles x_1 enheder af X_1 og x_2 enheder af X_2 siger vi, at fabrikkens *produktionssæt* er (x_1, x_2). Hvis fabrikken dagligt forbruger y_1 enheder af Y_1, y_2 enheder af Y_2 og y_3 enheder af Y_3 siger vi, at fabrikkens *forbrugssæt* er (y_1, y_2, y_3).

Om den pågældende produktion gælder, at

$$\text{produktion af en enhed af } X_1 \text{ kræver } \begin{cases} 3 \text{ enheder af } Y_1 \\ 2 \text{ enheder af } Y_2 \\ 1 \text{ enhed af } Y_3 \end{cases}$$

og

$$\text{produktion af en enhed af } X_2 \text{ kræver } \begin{cases} 5 \text{ enheder af } Y_1 \\ 5 \text{ enheder af } Y_2 \\ 3 \text{ enheder af } Y_3 \end{cases}.$$

Der er da følgende sammenhæng mellem forbrugssæt og produktionssæt:

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 5x_2 \\ y_2 &= 2x_1 + 5x_2 \\ y_3 &= x_1 + 3x_2. \end{aligned}$$

Lader vi $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ betegne den afbildning, der til et produktionssæt (x_1, x_2) knytter det tilsvarende forbrugssæt (y_1, y_2, y_3) ser vi, at

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix},$$

og dermed, at f er en lineær afbildning givet ved 3×2-matricen

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Til en given $m \times n$-matrix $\underset{=}{A} = (a_{ij})_{m,n}$ knytter vi altså en lineær afbildning $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Vi ser at

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Med andre ord har vi:

Sætning 1.3.5 (Søjlereglen)**.** *Den j'te søjlevektor i $\underline{\underline{A}}$ er lig med billedet ved f af den j'te standard enhedsvektor.*

Af denne sætning fås umiddelbart:

Sætning 1.3.6. *En lineær afbildning $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er knyttet til netop en $m \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$.*

Eksempel 1.3.7. Lad afbildningen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ være givet ved

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Vi vil undersøge, om denne afbildning er lineær. Er f lineær, må den tilhørende matrix ifølge søjlereglen være

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Men den til $\underline{\underline{A}}$ hørende lineære afbildning $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ er så

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Det ses umiddelbart, at afbildningerne f og g er forskellige, og derfor er f ikke lineær.

Idet $\underline{a}_j$ betegner den j'te søjlevektor i $\underline{\underline{A}}$

$$\underline{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

kan Sætning 1.3.5 udtrykkes:

$$f(\underline{e}_j) = \underline{a}_j, \quad 1 \le j \le n.$$

For en vektor

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

i $\mathbf{R}^n$ finder vi så følgende udtryk for $f(\underline{x})$:

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

altså

$$f(\underline{x}) = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n.$$

Eksempel 1.3.8. Den lineære afbildning f fra Eksempel 1.2.2 kan skrives

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Den *identiske afbildning* på $\mathbf{R}^n$, dvs. den afbildning $e : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ for hvilken $e(\underline{x}) = \underline{x}$ for alle $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$, er lineær, idet den er givet ved $n \times n$-enhedsmatricen $\underline{\underline{E}}$.

Sætning 1.3.9. *Lad $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning. Da gælder*

L1: $f(\lambda\underline{x}) = \lambda f(\underline{x})$ *for alle* $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

L2: $f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$ *for alle* $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbf{R}^n$.

Hvis omvendt $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er en afbildning, så L1 *og* L2 *er opfyldt, da er f en lineær afbildning.*

Bevis. Antag først, at f er lineær, og lad $\underline{\underline{A}}$ være den tilhørende $m \times n$-matrix. Idet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ betegner søjlevektorerne i $\underline{\underline{A}}$ gælder for en vilkårlig vektor

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

i $\mathbf{R}^n$, at

$$f(\underline{x}) = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n.$$

Men da

$$\lambda\underline{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

gælder

$$\begin{aligned} f(\lambda\underline{x}) &= \lambda x_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda x_n\underline{a}_n \\ &= \lambda(x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n) = \lambda f(\underline{x}). \end{aligned}$$

Dette viser, at L1 er opfyldt. For at vise at L2 er opfyldt bemærker vi, at der for vilkårlige vektorer

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

gælder, at

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix},$$

og derfor er

$$\begin{aligned} f(\underline{x} + \underline{y}) &= (x_1 + y_1)\underline{a}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\underline{a}_n \\ &= x_1\underline{a}_1 + y_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n + y_n\underline{a}_n \\ &= (x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n) + (y_1\underline{a}_1 + \cdots + y_n\underline{a}_n) \\ &= f(\underline{x}) + f(\underline{y}). \end{aligned}$$

Dette viser, at L2 er opfyldt.

Antag nu omvendt at $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er en afbildning, så L1 og L2 er opfyldt. Sæt $\underline{a}_j = f(\underline{e}_j)$, lad $\underline{\underline{A}}$ være $m \times n$-matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \ldots & \underline{a}_n \end{pmatrix},$$

og lad $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være den lineære afbildning, der er knyttet til $\underline{\underline{A}}$. Der gælder

$$\begin{aligned} g(\underline{x}) &= x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n \\ &= x_1 f(\underline{e}_1) + \cdots + x_n f(\underline{e}_n) \\ &= f(x_1\underline{e}_1) + \cdots + f(x_n\underline{e}_n) \quad \text{(her benyttes L1)} \\ &= f(x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n) \quad \text{(her benyttes L2)} \\ &= f(\underline{x}). \end{aligned}$$

Dette viser, at afbildningen f er lig med afbildningen g, og dermed at f er lineær. $\square$

Vi slutter med følgende

Sætning 1.3.10. *Hvis* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *er en lineær afbildning knyttet til matricen* $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ *gælder, at*

$$a_{ij} = f(\underline{e}_j) \cdot \underline{e}_i\,, \quad 1 \leq i \leq m\,, 1 \leq j \leq n.$$

Bevis. Hvis

$$\underline{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

er den j'te søjlevektor i $\underline{\underline{A}}$ gælder, at

$$a_{ij} = \underline{a}_j \cdot \underline{e}_i.$$

Men da $\underline{a}_j = f(\underline{e}_j)$ fås heraf, at $a_{ij} = f(\underline{e}_j) \cdot \underline{e}_i$. □

1.4 Matrix algebra

For matricer er der 3 regneoperationer: *multiplikation med skalar*, *addition* og *multiplikation.*

For

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

defineres

$$\lambda\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij}).$$

For

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ begge er $m \times n$ matricer, defineres

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij} + b_{ij}).$$

For

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \, , \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er en $m \times p$-matrix, og $\underline{\underline{B}}$ er en $p \times n$-matrix, defineres $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$, som den $m \times n$-matrix

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

for hvilken

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \, , \quad 1 \le i \le m \, , \, 1 \le j \le n,$$

eller anderledes udtrykt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \, , \; 1 \le i \le m \, , \, 1 \le j \le n.$$

Som det ses, er c_{ij} lig med skalarproduktet af den i'te række i $\underline{\underline{A}}$ med den j'te søjle i $\underline{\underline{B}}$, altså $c_{ij} = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})[i,j] = \underline{\underline{A}}[i,*] \cdot \underline{\underline{B}}[*,j]$. Dette gør, at det er meget nemt at huske reglen for matrixmultiplikation.

Bemærk, at for at produktet $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ skal være defineret skal antallet af søjler i $\underline{\underline{A}}$ være lig med antallet af rækker i $\underline{\underline{B}}$.

Eksempel 1.4.1. Hvis

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

er

$$3\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 12 & -3 & -6 \end{pmatrix}, \quad 2\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad 3\underline{\underline{A}} + 2\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 8 & 17 & 1 \\ 16 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.4.2. Hvis

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

er en 3×2-matrix hhv. 2×2-matrix er

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.4.3. Vi udregner et produkt af en 2×3-matrix og en 3×4-matrix. Den resulterende matrix bliver en 2×4-matrix.

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 23 & 21 & 10 \\ -1 & 11 & 6 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Sætning 1.4.4. *For matrixregning gælder følgende regneregler:*

M1: $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}})$

M2: $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{A}}$

M3: $\underline{\underline{A}} + (-\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{0}}$

M4: $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$

M5: $\lambda(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = \lambda\underline{\underline{A}} + \lambda\underline{\underline{B}}$

M6: $(\lambda + \mu)\underline{\underline{A}} = \lambda\underline{\underline{A}} + \mu\underline{\underline{A}}$

M7: $(\lambda\mu)\underline{\underline{A}} = \lambda(\mu\underline{\underline{A}})$

M8: $1\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$

M9: $\lambda(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = (\lambda\underline{\underline{A}})\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}(\lambda\underline{\underline{B}})$

M10: $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}$

M11: $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}$

M12: $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})$

Her er $\underline{\underline{0}}$ nulmatricen, og $-\underline{\underline{A}} = (-1)\underline{\underline{A}}$ den matrix, der fremgår af $\underline{\underline{A}}$ ved at skifte fortegn for alle elementer i $\underline{\underline{A}}$. Sidstnævnte matrix kaldes $\underline{\underline{A}}$'s *modsatte* matrix.

Bemærk, at det er et krav, at operationerne i M1-M12 skal være definerede.

Reglerne bevirker, at man stort set kan regne med matricer som med tal, men med en betydningsfuld forskel. Der gælder normalt *ikke*

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}.$$

Derfor må man ikke ændre på rækkefølgen af faktorerne i et matrixprodukt. Derimod kan man udelade parenteser ved produkt af 3 eller flere matricer, hvilket er en konsekvens af den vigtige regel M12, den såkaldte *associative* regel for matrixmultiplikation.

Bevis. De første 11 regneregler er alle simple at vise. For at vise M12 indfører vi *elementære* matricer

$$\underline{\underline{I}}_{j,k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

hvor der er 1 på plads (j,k) og 0 ellers. En vilkårlig $m \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ kan derfor skrives

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{j,k} a_{jk} \underline{\underline{I}}_{j,k},$$

hvor alle de indgående elementære matricer er $m \times n$.

Der gælder åbenbart for 2 elementære matricer (der kan multipliceres)

$$\underline{\underline{I}}_{j,k} \underline{\underline{I}}_{m,n} = \delta_{km} \underline{\underline{I}}_{j,n}\ , \text{ hvor } \delta_{km} = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}.$$

(δ_{km} defineret på denne måde kaldes ofte Kroneckers delta.)

Det følger nu, at

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} &= \left(\sum_{j,k} a_{jk} \underline{\underline{I}}_{j,k} \sum_{m,n} b_{mn} \underline{\underline{I}}_{m,n} \right) \sum_{r,s} c_{rs} \underline{\underline{I}}_{r,s} = \sum_{j,k} \sum_{m,n} \sum_{r,s} a_{jk} b_{mn} c_{rs} \left(\underline{\underline{I}}_{j,k} \underline{\underline{I}}_{m,n} \right) \underline{\underline{I}}_{r,s}, \\ \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}) &= \sum_{j,k} a_{jk} \underline{\underline{I}}_{j,k} \left(\sum b_{mn} \underline{\underline{I}}_{m,n} \sum c_{rs} \underline{\underline{I}}_{r,s} \right) = \sum_{j,k} \sum_{m,n} \sum_{r,s} a_{jk} b_{mn} c_{rs} \underline{\underline{I}}_{j,k} \left(\underline{\underline{I}}_{m,n} \underline{\underline{I}}_{r,s} \right), \end{aligned}$$

og derfor er $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})$, såfremt

$$\left(\underline{\underline{I}}_{j,k} \underline{\underline{I}}_{m,n} \right) \underline{\underline{I}}_{r,s} = \underline{\underline{I}}_{j,k} \left(\underline{\underline{I}}_{m,n} \underline{\underline{I}}_{r,s} \right).$$

Af reglen for produkt af 2 elementære matricer følger, at

$$\begin{aligned} \left(\underline{\underline{I}}_{j,k} \underline{\underline{I}}_{m,n} \right) \underline{\underline{I}}_{r,s} &= \delta_{km} \underline{\underline{I}}_{j,n} \underline{\underline{I}}_{r,s} = \delta_{km} \delta_{nr} \underline{\underline{I}}_{j,s}, \\ \underline{\underline{I}}_{j,k} \left(\underline{\underline{I}}_{m,n} \underline{\underline{I}}_{r,s} \right) &= \underline{\underline{I}}_{j,k} \delta_{nr} \underline{\underline{I}}_{m,s} = \delta_{nr} \underline{\underline{I}}_{j,k} \underline{\underline{I}}_{m,s} = \delta_{nr} \delta_{km} \underline{\underline{I}}_{j,s}, \end{aligned}$$

og det viser det ønskede. □

Lad $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning knyttet til $m \times n$-matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Der gælder da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

Hvis vi skriver vektorer i $\mathbf{R}^n$ som søjlematricer

$$\underset{=}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

kan $(*)$ udtrykkes ved hjælp af matrix multiplikation på følgende måde:

$$f(\underset{=}{X}) = \underset{=}{A}\underset{=}{X},$$

eller mere udførligt

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vi skal nu se, at matrix multiplikation hænger nøje sammen med sammensætning af lineære afbildninger. Først et eksempel:

Eksempel 1.4.5. Lad de lineære afbildninger $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ hhv. $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ være givet ved matricerne

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{hhv.} \quad \underset{=}{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vil beregne den sammensatte afbildning $h = f \circ g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$. Der gælder

$$\begin{aligned} h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= f \circ g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f(g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = f\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (2x_1 + x_2) - 2 \cdot (-x_1 + x_2) \\ 2 \cdot (2x_1 + x_2) + 0 \cdot (-x_1 + x_2) \\ 3 \cdot (2x_1 + x_2) + 3 \cdot (-x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi ser altså at den sammensatte afbildning $h = f \circ g$ er lineær, og at den er givet ved 3×2-matricen

$$\underset{=}{C} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ved udregning ses, at $\underset{=}{C} = \underset{=}{A}\underset{=}{B}$.

Sætning 1.4.6. *Lad $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$ og $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ være lineære afbildninger. Den sammensatte afbildning $h = f \circ g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er da ligeledes lineær. Hvis f svarer til $m \times p$-matricen $\underline{\underline{A}}$ og g svarer til $p \times n$-matricen $\underline{\underline{B}}$, da svarer $h = f \circ g$ til $m \times n$-matricen $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$.*

Bevis. Da $f\colon \underline{\underline{Y}} \to \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Y}}$, $g\colon \underline{\underline{X}} \to \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{X}}$ er $f \circ g\colon \underline{\underline{X}} \to \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{X}}) = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{X}}$, idet vi benytter den associative regel for matrixprodukt. Men heraf følger, at $f \circ g$ er den lineære afbildning, der svarer til matricen $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$. □

Sætning 1.4.7. *Idet $\underline{\underline{A}}$ er en $m \times n$-matrix gælder*

$$\underline{\underline{E}}_{m,m}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{E}}_{n,n} = \underline{\underline{A}}.$$

Bevis. Dette ses ved en simpel udregning, men følger også umiddelbart ved at opfatte $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{E}}_{m,m}$ hhv. $\underline{\underline{E}}_{n,n}$ som matricer for lineære afbildninger. □

For en $n \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ og et naturligt tal k defineres den k'te *potens* af $\underline{\underline{A}}^k$ af $\underline{\underline{A}}$ ved

$$\underline{\underline{A}}^k = \underline{\underline{A}} \dots \underline{\underline{A}} \quad (k \text{ faktorer }).$$

Specielt bemærkes, at $\underline{\underline{A}}^1 = \underline{\underline{A}}$.

Vi bemærker, at matrixproduktet *ikke* er *kommutativt*, idet der for to $n \times n$-matricer $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ i almindelighed gælder, at $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$.

For diagonalmatricer er matrixmultiplikation særlig overskuelig. Hvis

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$

er

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.4.8. Vi ser igen på fabrikken fra Eksempel 1.3.4. Råvarerne Y_1, Y_2 og Y_3 fremstilles af fabrikken selv ud fra to andre råvarer Z_1 og Z_2. Om denne produktion gælder, at

$$\text{produktion af en enhed af } Y_1 \text{ kræver } \begin{cases} 1 \text{ enhed af } Z_1 \\ 1 \text{ enhed af } Z_2 \end{cases},$$

og

$$\text{produktion af en enhed af } Y_2 \text{ kræver } \begin{cases} 4 \text{ enheder af } Z_1 \\ 3 \text{ enheder af } Z_2 \end{cases},$$

og

$$\text{produktion af en enhed af } Y_3 \text{ kræver } \begin{cases} 10 \text{ enheder af } Z_1 \\ 0 \text{ enheder af } Z_2 \end{cases}.$$

Ved denne produktion beskrives den fremstillede mængde af varerne Y_1, Y_2 og Y_3 ved produktionssættet (y_1, y_2, y_3) og den hertil forbrugte mængde af Z_1 og Z_2 beskrives ved forbrugssættet (z_1, z_2). Mellem disse to sæt gælder følgende sammenhæng:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + 4y_2 + 10y_3 \\ z_2 &= y_1 + 3y_2. \end{aligned}$$

Hvis $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ betegner den afbildning, der til sættet (y_1, y_2, y_3) knytter det tilhørende sæt (z_1, z_2), ser vi, at

$$g \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 4y_2 + 10y_3 \\ y_1 + 3y_2 \end{pmatrix},$$

og dermed, at g er en lineær afbildning knyttet til 2×3-matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Idet vi stadig benytter betegnelserne fra Eksempel 1.3.4 ser vi, at den sammensatte afbildning $g \circ f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ knytter produktionssættet (x_1, x_2) for varerne X_1 og X_2 til forbrugssættet (z_1, z_2) for råvarerne Z_1 og Z_2. Ifølge Sætning 1.4.4 er den sammensatte afbildning $g \circ f$ lineær, og den er knyttet til produktmatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 55 \\ 9 & 20 \end{pmatrix}.$$

Heraf sluttes

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 55 \\ 9 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

eller

$$\begin{aligned} z_1 &= 21x_1 + 55x_2 \\ z_2 &= 9x_1 + 20x_2. \end{aligned}$$

1.5 Invers matrix

Vi ser først på den omvendte til en bijektiv lineær afbildning. Der gælder:

Sætning 1.5.1. *Lad $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være en bijektiv lineær afbildning. Den omvendte afbildning $f^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ er ligeledes lineær.*

Bevis. Vi viser, at f^{-1} opfylder L1 og L2 fra Sætning 1.3.9. Først L1: Lad $\lambda \in \mathbf{R}$ og $\underline{y} \in \mathbf{R}^n$, og sæt $\underline{x} = f^{-1}(\underline{y})$, hvoraf $\underline{y} = f(\underline{x})$. Der gælder så $f^{-1}(\lambda\underline{y}) = f^{-1}(\lambda f(\underline{x})) = f^{-1}(f(\lambda\underline{x})) = \lambda\underline{x} = \lambda f^{-1}(\underline{y})$, altså gælder L1. Dernæst L2: Lad $\underline{y}_1, \underline{y}_2 \in \mathbf{R}^n$, og sæt $\underline{x}_1 = f^{-1}(\underline{y}_1)$, $\underline{x}_2 = f^{-1}(\underline{y}_2)$, hvoraf $\underline{y}_1 = f(\underline{x}_1)$, $\underline{y}_2 = f(\underline{x}_2)$. Der gælder $f^{-1}(\underline{y}_1 + \underline{y}_2) = f^{-1}(f(\underline{x}_1) + f(\underline{x}_2)) = f^{-1}(f(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)) = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 = f^{-1}(\underline{y}_1) + f^{-1}(\underline{y}_2)$, altså gælder L2. Undervejs har vi adskillige gange benyttet at f er lineær. □

Definition 1.5.2. En $n \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ kaldes *regulær* (eller *invertibel*), hvis den tilhørende lineære afbildning $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ er bijektiv. I givet fald kaldes den til f^{-1} hørende $n \times n$-matrix for den *inverse* til $\underline{\underline{A}}$ og betegnes $\underline{\underline{A}}^{-1}$.

Eksempel 1.5.3. Vi betragter afbildningen $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ givet ved

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

Denne afbildning er lineær, idet den er givet ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

At f er bijektiv vil sige, at ligningen $f(\underline{x}) = \underline{y}$ har netop en løsning $\underline{x} \in \mathbf{R}^3$ for hvert $\underline{y} \in \mathbf{R}^3$. I koordinater betyder denne ligning

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= y_1 \\ x_1 + x_2 &= y_2 \\ x_1 - x_3 &= y_3. \end{aligned}$$

Ved addition af første og sidste ligning efterfulgt af division med 2 ses, at

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_3),$$

der ved indsættelse i første og anden ligning giver

$$\begin{aligned} x_2 &= -\tfrac{1}{2}y_1 + y_2 - \tfrac{1}{2}y_3 \\ x_3 &= \tfrac{1}{2}y_1 - \tfrac{1}{2}y_3. \end{aligned}$$

Det ses heraf (samt ved at gøre prøve), at der for hvert $\underline{y} \in \mathbf{R}^3$ findes netop et $\underline{x} \in \mathbf{R}^3$ så $\underline{y} = f(\underline{x})$, altså er f bijektiv og dermed er matricen $\underline{\underline{A}}$ regulær. Af de fundne udtryk for x_1, x_2, x_3 ses, at

$$f^{-1} : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ -\frac{1}{2}y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3 \end{pmatrix}.$$

Den tilhørende matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ kan herefter nedskrives:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Det bemærkes, at vi senere vil finde mere effektive metoder til at afgøre om en kvadratisk matrix er regulær, og i givet fald finde dens inverse.

Sætning 1.5.4. *Der gælder følgende:*

(1) *Enhedsmatricen* $\underline{\underline{E}}$ *er regulær, og*

$$\underline{\underline{E}}^{-1} = \underline{\underline{E}}.$$

(2) *Hvis* $\underline{\underline{A}}$ *er regulær, er* $\underline{\underline{A}}^{-1}$ *regulær, og*

$$(\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1} = \underline{\underline{A}}.$$

(3) *Hvis* $\underline{\underline{A}}$ *er regulær er*

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}.$$

(4) *Hvis* $\underline{\underline{A}}$ *og* $\underline{\underline{B}}$ *er regulære, da er* $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$ *regulær, og*

$$(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}.$$

Bevis. (1) følger umiddelbart af, at den identiske afbildning er bijektiv, og har sig selv til invers. (2) følger af, at hvis en afbildning f er bijektiv, da er f^{-1} bijektiv, og $(f^{-1})^{-1} = f$. (3) følger af, at hvis f er en bijektiv afbildning, da er $f^{-1} \circ f$ og $f \circ f^{-1}$ begge lig med den identiske afbildning. (4) følger af, at hvis afbildningerne f og g er bijektive, da er $f \circ g$ bijektive, og $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, jvf. A.2. for en nærmere omtale af disse ting. □

Lad os herefter se på hvornår diagonalmatricer er regulære. Lad

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

være en diagonalmatrix. Den til $\underline{\underline{A}}$ hørende lineære afbildning er

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}.$$

Det ses umiddelbart, at f er bijektiv netop når tallene $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ alle er forskellige fra 0, og i givet fald er den omvendte afbildning givet ved

$$f^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} y_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda_n} y_n \end{pmatrix}$$

Af dette slutter vi umiddelbart følgende:

Sætning 1.5.5. *En diagonalmatrix*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

er regulær netop når alle diagonalelementerne er forskellige fra nul. I givet fald er

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

For en $n \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ har vi defineret den k'te potens for hvert naturligt tal k. Hvis $\underline{\underline{A}}$ er regulær definerer vi for hvert naturligt tal k den *negative potens* $\underline{\underline{A}}^{-k}$ ved

$$\underline{\underline{A}}^{-k} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^k,$$

og vi sætter endvidere

$$\underline{\underline{A}}^0 = \underline{\underline{E}}.$$

Herved har vi opnået, at $\underline{\underline{A}}^k$ er defineret for alle *hele* tal k. Det er ikke svært at se, at

$$\underline{\underline{A}}^{k_1}\underline{\underline{A}}^{k_2} = \underline{\underline{A}}^{k_1+k_2}$$

for alle hele tal k_1, k_2.

Vi slutter med en nyttig sætning, som vi senere (Sætning 2.6.6) skal bevise en forbedret udgave af.

Sætning 1.5.6. *Hvis* $\underline{\underline{A}}$ *og* $\underline{\underline{B}}$ *er* $n \times n$*-matricer, således at*

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}},$$

da er $\underline{\underline{A}}$ *(og* $\underline{\underline{B}}$*) regulær, og* $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{B}}$ *(og* $\underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{A}}$*).*

Bevis. Lad $f, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være de lineære afbildninger der hører til $\underline{\underline{A}}$, hhv. $\underline{\underline{B}}$. Da er $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$ og $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$, hvoraf fås (A.2), at f (og g) er bijektiv, og $f^{-1} = g$ (og $g^{-1} = f$). Dette viser, at $\underline{\underline{A}}$ er regulær, og $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{B}}$. □

1.6 Transponeret matrix

For en given $m \times n$-matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

definerer vi den *transponerede matrix* $\underline{\underline{A}}^t$ som den $n \times m$-matrix

$$\underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nm} \end{pmatrix}$$

hvorom det gælder, at

$$a'_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \le i \le n\,, \ 1 \le j \le m.$$

Vi har altså

$$\underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matricen $\underline{\underline{A}}^t$ opstår ud fra $\underline{\underline{A}}$ ved at skrive første række i $\underline{\underline{A}}$ som første søjle i $\underline{\underline{A}}^t$, anden række i $\underline{\underline{A}}$ som anden søjle i $\underline{\underline{A}}^t$, o.s.v. Der gælder derfor $\underline{\underline{A}}^t[i, j] = \underline{\underline{A}}[j, i]$.

Eksempel 1.6.1. Hvis $\underline{\underline{A}}$ er 3×2-matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

er $\underline{\underline{A}}^t$ givet ved 2×3-matricen

$$\underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.6.2. Hvis

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & -7 & 3 \\ -5 & 5 & 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

er

$$\underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 5 \\ 4 & 0 \\ -7 & 8 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Hvis

$$\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

er en søjlematrix, er $\underline{\underline{X}}^t$ rækkematricen givet ved

$$\underline{\underline{X}}^t = (x_1 \ \cdots \ x_n).$$

Hvis

$$\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{Y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

er to søjlematricer, er skalarproduktet af vektorerne $\underline{x} = \underline{\underline{X}}$ og $\underline{y} = \underline{\underline{Y}}$ givet ved

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \underline{\underline{X}}^t \underline{\underline{Y}}.$$

Om transponering af matricer gælder:

Sætning 1.6.3. *For en vilkårlig $m \times n$ matrix $\underline{\underline{A}}$ gælder*

$$(\underline{\underline{A}}^t)^t = \underline{\underline{A}}.$$

Bevis. Dette følger af udregningen

$$(\underline{\underline{A}}^t)^t[i,j] = \underline{\underline{A}}^t[j,i] = \underline{\underline{A}}[i,j].$$

□

Sætning 1.6.4. *Idet $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er vilkårlige $m \times p$- hhv. $p \times n$-matricer gælder*

$$(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^t = \underline{\underline{B}}^t \underline{\underline{A}}^t.$$

Bevis. Dette følger af udregningerne

$$\begin{aligned}(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^t[i,j] &= (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})[j,i] = \underline{\underline{A}}[j,*]\cdot\underline{\underline{B}}[*,i],\\ (\underline{\underline{B}}^t\underline{\underline{A}}^t)[i,j] &= \underline{\underline{B}}^t[i,*]\cdot\underline{\underline{A}}^t[*,j] = \underline{\underline{B}}[*,i]\cdot\underline{\underline{A}}[j,*].\end{aligned}$$

□

Sætning 1.6.5. *Hvis $\underline{\underline{A}}$ er en regulær $n\times n$-matrix, da er den transponerede $\underline{\underline{A}}^t$ ligeledes regulær, og der gælder*

$$(\underline{\underline{A}}^t)^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^t.$$

Bevis. Idet

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$$

fås af Sætning 1.6.4 at

$$\underline{\underline{A}}^t(\underline{\underline{A}}^{-1})^t = (\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}})^t = \underline{\underline{E}}^t = \underline{\underline{E}} \quad \text{og} \quad (\underline{\underline{A}}^{-1})^t\underline{\underline{A}}^t = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1})^t = \underline{\underline{E}}^t = \underline{\underline{E}}.$$

Herefter følger resultatet af Sætning 1.5.6. □

Definition 1.6.6. Lad $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning hørende til $m \times n$-matricen $\underline{\underline{A}}$. Ved den *transponerede lineære afbildning* til f forstås den lineære afbildning $f^t : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, der hører til den transponerede matrix $\underline{\underline{A}}^t$.

Om transponeret lineær afbildning gælder følgende vigtige sætning:

Sætning 1.6.7. *Lad $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning. Der gælder da*

$$f(\underline{x})\cdot\underline{y} = \underline{x}\cdot f^t(\underline{y}) \tag{$*$}$$

for alle vektorer $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ og alle vektorer $\underline{y} \in \mathbf{R}^m$. Er endvidere $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ en afbildning for hvilken

$$f(\underline{x})\cdot\underline{y} = \underline{x}\cdot g(\underline{y}) \tag{$**$}$$

for alle vektorer $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ og alle vektorer $\underline{y} \in \mathbf{R}^m$, da er $g = f^t$.

Bevis. Idet vi skriver vektorerne $\underline{x}$ og $\underline{y}$ som søjlematricer $\underline{\underline{X}}$ og $\underline{\underline{Y}}$ fås

$$f(\underline{x})\cdot\underline{y} = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}})^t\underline{\underline{Y}} = (\underline{\underline{X}}^t\underline{\underline{A}}^t)\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{X}}^t(\underline{\underline{A}}^t\underline{\underline{Y}}) = \underline{x}\cdot f^t(\underline{y}).$$

Dette viser at $(*)$ er opfyldt. Antag at $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ er en lineær afbildning, der opfylder $(**)$ for alle vektorer $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ og alle vektorer $\underline{y} \in \mathbf{R}^m$. Da er $0 = f(\underline{x})\cdot\underline{y} - f(\underline{x})\cdot\underline{y} = \underline{x}\cdot g(\underline{y}) - \underline{x}\cdot f^t(\underline{y}) = \underline{x}\cdot(g(\underline{y}) - f^t(\underline{y}))$ for alle vektorer $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ og alle vektorer $\underline{y} \in \mathbf{R}^m$. Specielt for $\underline{x} = g(\underline{y}) - f^t(\underline{y})$ fås $0 = |g(\underline{y}) - f^t(\underline{y})|^2$, hvoraf $g(\underline{y}) = f^t(\underline{y})$ for alle $\underline{y} \in \mathbf{R}^m$, og det viser, at $g = f^t$. □

En matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ kaldes *symmetrisk*, hvis $\underline{\underline{A}}^t = \underline{\underline{A}}$. Dette er ensbetydende med at $m = n$, og $a_{ij} = a_{ji}$ for alle $1 \leq i, j \leq n$. En lineær afbildning f kaldes *symmetrisk* hvis den tilhørende matrix er symmetrisk. Dette er ensbetydende med at $f^t = f$.

Eksempel 1.6.8. Følgende matricer er symmetriske

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Af Sætning 1.6.7 fås umiddelbart

Sætning 1.6.9. *For en symmetrisk lineær afbildning $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ gælder*

$$f(\underline{x}) \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot f(\underline{y})$$

for alle vektorer $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ og alle vektorer $\underline{y} \in \mathbf{R}^n$.

2 Række- og søjleoperationer Lineære ligningssystemer

2.1 Række- og søjleoperationer

En given $m \times n$-matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kan omformes til en ny $m \times n$-matrix ved hjælp af de såkaldte række- og søjleoperationer. Vi ser først på *rækkeoperationer*. Af sådanne er der tre typer, nemlig

> Type M: *Multiplikation af en række med et tal* $c \neq 0$.
>
> Type B: *Ombytning af to rækker.*
>
> Type S: *Addition af et multiplum af en række til en anden række.*

(Her hentyder M til "multiplikation", B til "byt" og S til "sum".)

Eksempel 2.1.1. Vi viser nu eksempler på de tre typer rækkeoperationer, og demonstrerer samtidig hvorledes rækkeoperationer angives. Først multipliceres første række i den nedenfor givne matrix med $\frac{1}{2}$, dernæst ombyttes første og anden række og endelig adderes den anden række multipliceret med -2 til første række:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times\frac{1}{2} \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2R_2 \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eksempel 2.1.2. To (eller flere) operationer, der ikke influerer på hinanden (d.v.s. er ombyttelige) kan udføres i samme skridt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times\frac{1}{2} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -R_2 \\ \\ +3R_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Til hver rækkeoperation svarer en *omvendt* rækkeoperation:

Den omvendte til den rækkeoperation, der består i at multiplicere den række med en konstant $c \neq 0$*, er den rækkeoperation, der består i at multiplicere samme række med* $\frac{1}{c}$*.*
Den rækkeoperation, der består i at ombytte to rækker, har sig selv til omvendt rækkeoperation.
Den omvendte til den rækkeoperation, der består i at multiplicere en række med en konstant c *og addere den til en anden række, er den rækkeoperation, der består i at multiplicere den samme række med* $-c$ *og addere den til samme anden række.*

Hvis man udfører en rækkeoperation på en matrix, og på den fremkomne matrix dernæst udfører den omvendte rækkeoperation, kommer man tilbage til den oprindelige matrix.

Eksempel 2.1.3. Vi udfører de omvendte til de i Eksempel 2.1.1 udførte rækkeoperationer, og kommer herved tilbage til den oprindelige matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} +2R_2 \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 2 \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tilsvarende er der tre typer søjleoperationer, nemlig
Type M: *Multiplikation af en søjle med et tal* $c \neq 0$*.*
Type B: *Ombytning af to søjler.*
Type S: *Addition af et multiplum af en søjle til en anden søjle.*

Eksempel 2.1.4. Vi viser nu eksempler på de tre typer søjleoperationer, og demonstrerer samtidig hvorledes søjleoperationer angives:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \times \frac{1}{2} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \uparrow\!\!\_\!\!\uparrow \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ +3S_1 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.2 Trappematricer

Lad $\underset{=}{A} = (a_{ij})_{m,n}$ være en $m \times n$-matrix.

Definition 2.2.1. Matricen $\underset{=}{A}$ kaldes en *trin*-1 *matrix*, hvis den har formen

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a & \star & \dots & \star \\ 0 & & 0 & 0 & \star & & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix},$$

hvor $a \neq 0$, og hvor $\star$ betyder, at der på de pågældende pladser kan stå vilkårlige tal. Tallet a kaldes da for matricens *første trin*. Positionen (i, j) for første trin i en trin-1 matrix er $(1, j_1)$ for $1 \leq j_1 \leq n$. Matricen $\underline{\underline{A}}_1$, der fremkommer af $\underline{\underline{A}}$ ved at slette første række kaldes *restmatricen* for trin-1 matricen $\underline{\underline{A}}$. Hvis restmatricen $\underline{\underline{A}}_1$ også er en trin-1 matrix kaldes $\underline{\underline{A}}$ for en *trin*-2 *matrix*. I givet fald kaldes *første trin* i $\underline{\underline{A}}_1$ for *andet trin* i $\underline{\underline{A}}$. Positionen (i, j) for andet trin i en trin-2 matrix er $(2, j_2)$ for $j_1 < j_2 \leq n$. Restmatricen $\underline{\underline{A}}_2$ for trin-1 matricen $\underline{\underline{A}}_1$ kaldes også restmatricen for trin-2 matricen $\underline{\underline{A}}$. Tilsvarende defineres *trin*-3, *trin*-4, ... matricer.

Matricen $\underline{\underline{A}}$ kaldes en *trappematrix*, hvis den er en trin-d matrix for et $d = 1, 2, 3, \ldots$, og hvis den tilsvarende restmatrix enten er tom (dvs. uden elementer) eller en nulmatrix.

Hvis $\underline{\underline{A}}$ er en trappematrix kaldes tallene $j_1 < \cdots < j_d$ for *trinpositionerne* for $\underline{\underline{A}}$.

Vi definerer nulmatricen til at være en trappematrix.

Eksempel 2.2.2. Følgende matricer er trin-1 matricer. Første trin er indrammet. Det ses, at $j_1 = 1$, hhv. $j_1 = 2$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 5 & 7 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

De tilhørende restmatricer er

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eksempel 2.2.3. Følgende matricer er trin-2 matricer. Trinnene er indrammet. Det ses, at $j_1 = 1$ og $j_2 = 3$, hhv. $j_1 = 2$ og $j_2 = 4$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eksempel 2.2.4. Følgende matricer er (trin-3 hhv. trin-4) trappematricer. Trinnene er indrammet. Det ses, at $j_1 = 1$, $j_2 = 3$ og $j_3 = 6$, hhv. $j_1 = 2$, $j_2 = 4$, $j_3 = 5$ og $j_4 = 7$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

For at afgøre om en given matrix er en trin-1 matrix opsøger man altså første søjle, der ikke er nulsøjlen. Har denne søjle formen $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ er matricen en trin-1 matrix. Man kan så danne restmatricen, og undersøge om den er en trin-1 matrix. Er dette tilfældet kan man fortsætte, og ender man til sidst med en nulmatrix eller den tomme matrix, er den givne matrix en trappematrix.

Nedenstående Sætning 2.2.7 siger, at enhver matrix ved hjælp af rækkeoperationer kan omformes til en trappematrix. Vi giver først et par eksempler på, at det er tilfældet. Som det vil fremgå af det følgende, er man normalt interesseret i, at trinnene i en trappematrix har værdien 1, og det kan man naturligvis altid opnå (ved hjælp af rækkeoperationer af Type M).

Eksempel 2.2.5. En matrix omdannes til en (trin-2) trappematrix ved hjælp af rækkeoperationer:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_1 \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times -\frac{1}{3} \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +R_2 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eksempel 2.2.6. En matrix omdannes til en (trin-4) trappematrix ved hjælp af rækkeoperationer:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -3 & 6 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2R_1 \\ -R_1 \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -R_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -3R_3 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times -1 \\ \\ \times\frac{1}{2} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sætning 2.2.7. *Enhver $m \times n$-matrix kan ved hjælp af rækkeoperationer omformes til en trappematrix.*

Bevis. Lad $\underset{=}{A} = (a_{ij})_{m,n}$ være den givne matrix. Vi kan antage, at $\underset{=}{A}$ ikke er nulmatricen. Lad j_1 være det mindste tal, så den j_1'te søjle ikke er nulsøjlen. Vi sørger først for, at $a_{1j_1} \neq 0$, ved om nødvendigt at foretage en rækkeombytning. Det kan lade sig gøre, da den j_1'te søjle ikke er nul. Dernæst skaffer vi nuller under a_{1j_1} ved at addere 1. række multipliceret med $-\frac{a_{2j_1}}{a_{1j_1}}$ til 2. række, 1. række multipliceret med $-\frac{a_{3j_1}}{a_{1j_1}}$ til 3. række etc. På denne måde bliver $\underset{=}{A}$ omdannet til en trin-1 matrix. Idet rækkeoperationer, der ikke involverer 1. række, i en trin-1 matrix ikke ødelægger, at matricen er en trin-1 matrix, kan vi nu behandle restmatricen $\underset{=}{A_1}$ på samme måde, og når herved frem til en trin-2 matrix. Således fortsættes, indtil restmatricen enten er tom eller en nulmatrix, og den fremkomne matrix er en trappematrix. $\square$

For at omdanne en given matrix til en trappematrix opsøges altså den første søjle forskellig fra nul, og ved hjælp af rækkeoperationer omdannes matricen til en matrix, der har nuller i denne søjle, undtagen på første plads. Herved er fremkommet en trin-1 matrix. Restmatricen behandles nu på samme måde, og fortsættes på den måde fremkommer til sidst en trappematrix.

Bemærk, at antallet d af trin i en $m \times n$-matrix trappematrix naturligvis altid er mindre end eller lig med både række- og søjleantallet. Der gælder, at $m = d$ netop hvis sidste række ikke er en nulrække, og $d = n$ netop hvis der om trinpositionerne gælder, at $j_1 = 1, j_2 = 2, \cdots, j_d = n = d$.

Definition 2.2.8. En *reduceret* trappematrix er en trappematrix, således at trinnene alle har værdien 1, og således, at der er nuller ikke blot under, men også over trinnene.

Sætning 2.2.9. *Enhver $m \times n$-matrix kan ved hjælp af rækkeoperationer omformes til en reduceret trappematrix.*

Bevis. Det drejser sig om at vise, at en trappematrix kan omformes til en reduceret trappematrix (Sætning 2.2.7). Først skaffes 1-taller i trinnene ved rækkeoperationer af type M. Dernæst begynder vi bagfra, idet der først skaffes nuller over sidste trin ved hjælp af rækkeoperationer af Type S. Dette influerer ikke på de søjler, der står til venstre for den søjle, der indeholder sidste trin, og de rækker der står under den række, der indeholder sidste trin. Herefter fortsættes på samme måde med næstsidste trin, og vi ender til slut med en reduceret trappematrix. $\square$

Eksempel 2.2.10. Matricen fra Eksempel 2.2.5 videreomformes til en reduceret trappematrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -4R_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eksempel 2.2.11. Matricen fra Eksempel 2.2.6 videreomformes til en reduceret trappematrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +2R_4 \\ +2R_4 \\ -2R_4 \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2R_3 \\ -2R_3 \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +2R_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Lineære ligningssystemer

Et lineært ligningssystem med m ligninger og n ubekendte har formen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

En *løsning* til ligningssystemet er et talsæt $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, som tilfredsstiller alle ligningssystemets ligninger. Mængden af alle løsninger kaldes *løsningsmængden*.

Hvis alle b_i-erne er lig med 0 kaldes ligningssystemet *homogent*, ellers kaldes det *inhomogent*. Et homogent ligningssystem har altid løsningen $(x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0)$.

Eksempel 2.3.1. Ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

der består af 3 ligninger med 3 ubekendte, er inhomogent. Det tilhørende homogene ligningssystem er

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0. \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kaldes for ligningssystemets *koefficientmatrix*. Tilføjes søjlematricen

$$\underset{=}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

der kaldes ligningssystemets *konstantsøjle* efter sidste søjle i $\underset{=}{A}$, fås ligningssystemets *totalmatrix*

$$\underset{=}{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

der er en $m \times (n+1)$-matrix. Bemærk, at $\underset{=}{C}$ kan skrives som blokmatricen

$$\underset{=}{C} = \begin{pmatrix} \underset{=}{A} & \underset{=}{B} \end{pmatrix}.$$

Det er klart, at enhver $m \times (n+1)$-matrix $\underset{=}{C}$ kan opfattes som totalmatrix for et lineært ligningssystem med m ligninger og n ubekendte.

Eksempel 2.3.2. Totalmatricen for det inhomogene ligningssystem fra Eksempel 2.3.1 er

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Af hensyn til overskueligheden er der her sat en skillelinie mellem ligningssystemets koefficientmatrix og dets konstantsøjle.

Sætter vi

$$\underset{=}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ser vi, at ligningssystemet kan skrives

$$\underset{=}{A}\underset{=}{X} = \underset{=}{B}.$$

Sætning 2.3.3. *Hvis det om totalmatricerne for to lineære ligningssystemer gælder, at den ene fremgår af den anden ved udførelse af rækkeoperationer, da har de to lineære ligningssystemer samme løsningsmængde.*

Bevis. Vi illustrerer sætningen på et ligningssystem bestående af 3 ligninger med 4 ubekendte. Vi skriver totalmatricen under ligningssystemet:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned} \tag{$*$}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Hvis vi udfører en rækkeoperation af type M på totalmatricen, f.eks. multiplicerer vi tredie række med $c \neq 0$, får vi følgende ligningssystem og totalmatrix

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_3 &= b_2 \\ ca_{31}x_1 + ca_{32}x_2 + ca_{33}x_3 + ca_{34}x_3 &= cb_3 \end{aligned} \tag{$**$}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} & ca_{34} & cb_3 \end{pmatrix}.$$

Det er klart, at de to ligningssystemer $(*)$ og $(**)$ har samme løsningsmængde; ligningen $(**)$ fremkommer jo fra ligningen $(*)$ ved multiplikation af tredie ligning med c.

Hvis vi udfører en rækkeoperation af type B på totalmatricen, svarer det til at to af ligningerne ombyttes, og det ændrer naturligvis ikke på løsningsmængden.

Hvis vi udfører en rækkeoperation af type S på totalmatricen, f.eks. multiplicerer vi tredie række med $c \neq 0$ og adderer den til første række, får vi følgende ligningssystem og totalmatrix

$$\begin{aligned} (a_{11} + ca_{31})x_1 + (a_{12} + ca_{32})x_2 + (a_{13} + ca_{33})x_3 + (a_{14} + ca_{34})x_4 &= b_1 + cb_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned} \tag{$***$}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + ca_{31} & a_{12} + ca_{32} & a_{13} + ca_{33} & a_{14} + ca_{34} & b_1 + cb_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Igen er det klart, at en løsning til ligningen $(*)$ også er løsning til ligningen $(***)$; den sidste ligning i $(*)$ er jo blot multipliceret med c og adderet til den første ligning. Omvendt er en løsning til $(***)$ også løsning til $(*)$, idet $(*)$ jo fremkommer fra $(***)$ ved at multiplicere tredie ligning med c og trække den fra første ligning. $\square$

Vi vil nu give en række eksempler på, hvorledes man ved hjælp af Sætning 2.3.3 på behændig måde kan løse lineære ligningssystemer. Fremgangsmåden er, at man omdanner det givne lineære ligningssystems totalmatrix til en trappematrix.

Eksempel 2.3.4. Vi vil bestemme løsningsmængden til det lineære ligningssystem

$$\begin{array}{rcr} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &=& -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &=& 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &=& 3 \end{array} .$$

Vi opskriver totalmatricen for ligningssystemet, og omdanner denne til en trappematrix ved hjælp af rækkeoperationer:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +2R_1 \longrightarrow \\ +3R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 9 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +5R_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 24 \end{array}\right)\begin{array}{l} \times -1 \\ \times -1 \longrightarrow \\ \times -\frac{1}{6} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) .$$

Vi opskriver herefter ligningssystemet, der har den herved fremkomne matrix til totalmatrix:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 &=& -2 \\ x_2 + x_3 &=& -3 \\ x_3 &=& -4 \end{array} .$$

Heraf aflæses, at $x_3 = -4$. Dette indsættes så i den anden ligning, og vi finder $x_2 - 4 = -3$, hvoraf $x_2 = 1$, og indsættes så endelig i den første ligning fås $x_1 - 1 - 4 = -2$, hvoraf $x_1 = 3$. Vi slutter altså, at ligningssystemet har netop en løsning, nemlig $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, -4)$.

Eksempel 2.3.5. Vi vil bestemme løsningsmængden til det lineære ligningssystem

$$\begin{array}{rcr} -x_1 - 2x_2 - 5x_3 &=& -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 &=& 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 14x_3 &=& 10 \end{array} .$$

Vi opskriver totalmatricen for ligningssystemet, og omdanner denne til en trappematrix ved hjælp af rækkeoperationer:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 14 & 10 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +2R_1 \longrightarrow \\ +2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \qquad\longrightarrow \\ +2R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times -1 \\ \times -1 \longrightarrow \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi opskriver så ligningssystemet, der har den herved fremkomne matrix til totalmatrix:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & 3 \\ x_2 + 2x_3 & = & 2 \end{array} .$$

Her har vi kun nedskrevet ligningerne, der kommer fra de to første rækker; den sidste række giver jo ligningen $0 = 0$, og den kan vi derfor se bort fra. Det ses, at for hvert valg af en værdi t af x_3 har systemet en løsning (x_1, x_2, x_3), nemlig $x_2 = 2 - 2x_3 = 2 - 2t$ og $x_1 = 3 - 2x_2 - 5x_3 = 3 - 2(2 - 2t) - 5t = -1 - t$. Løsningsmængden er altså

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - t \\ 2 - 2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\} .$$

Vi siger, at løsningsmængden er beskrevet ved en *parameterfremstilling* med parameter t. Bemærk, at en løsning også kan skrives

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Eksempel 2.3.6. Vi vil bestemme løsningsmængden til det lineære ligningssystem

$$\begin{array}{rcr} -x_1 - 2x_2 - 5x_3 & = & -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 14x_3 & = & 5 \end{array} .$$

Dette ligningssystem har samme koefficientmatrix som ligningssystemet i Eksempel 2.3.5, men konstantsøjlen er en anden. Vi opskriver igen totalmatricen for ligningssystemet, og omdanner denne til en trappematrix ved hjælp af de samme rækkeoperationer som i Eksempel 2.3.5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 14 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2R_1 \longrightarrow \\ +2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2R_2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times -1 \\ \times -1 \longrightarrow \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Vi opskriver så ligningssystemet, der har den herved fremkomne matrix til totalmatrix:

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & 3 \\ x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ 0 & = & -5 \end{array} .$$

Da den sidste ligning *aldrig* er opfyldt, idet venstresiden altid er 0, har ligningssystemet *ingen* løsninger.

Eksempel 2.3.7. Vi vil bestemme løsningsmængden til det lineære ligningssystem

$$\begin{array}{rcr} 4x-6y+2z &=& -2 \\ 2x-3y+z &=& -1 \end{array}.$$

Vi opskriver totalmatricen for ligningssystemet, og omdanner denne til en trappematrix:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -6 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right)\times\tfrac{1}{2} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -R_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vi opskriver så ligningssystemet, der har den herved fremkomne matrix til totalmatrix:

$$2x-3y+z=-1.$$

Sætter vi her $z=t$ og $y=s$ fås $2x-3s+t=-1$, hvoraf $x=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}s-\frac{1}{2}t$. Der gælder altså, at der for hvert valg af en værdi t af z og en værdi af s af y findes en løsning (x,y,z), nemlig

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}s-\frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi siger, at løsningsmængden er beskrevet ved en parameterfremstilling med parametrene (s,t).

Eksempel 2.3.8. Vi vil bestemme løsningsmængden til det lineære ligningssystem

$$\begin{array}{rcr} 2x_3-x_4+8x_5 &=& -13 \\ x_1-2x_2+3x_3+2x_4+x_5 &=& 10 \\ 3x_1-6x_2+10x_3+6x_4+5x_5 &=& 27 \end{array}.$$

Vi opskriver totalmatricen for ligningssystemet og omdanner denne til en trappematrix ved hjælp af rækkeoperationer:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{array}\right)\begin{array}{l} \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -3R_1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \times -1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{array}\right)$$

Vi opskriver så ligningssystemet, der har den herved fremkomne matrix til totalmatrix:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 10 \\ x_3 \qquad + 2x_5 &= -3. \\ x_4 - 4x_5 &= 7 \end{aligned}$$

Sætter vi her $x_5 = t_2$, ses at $x_4 = 7 + 4t_2$ og $x_3 = -3 - 2t_2$. Sætter vi videre $x_2 = t_1$ ses, at $x_1 - 2t_1 + 3(-3 - 2t_2) + 2(7 + 4t_2) + t_2 = 10$, hvoraf $x_1 = 5 + 2t_1 - 3t_2$. Der gælder altså, at der for hvert valg af en værdi t_2 af x_5 og en værdi t_1 af x_2 findes en løsning $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, nemlig

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2t_1 - 3t_2 \\ t_1 \\ -3 - 2t_2 \\ 7 + 4t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det ses, at løsningsmængden er beskrevet ved en parameterfremstilling med parametrene (t_1, t_2).

Den i eksemplerne illustrerede metode, der består i at omdanne totalmatricen for et givet lineært ligningssystem til en trappematrix, og hermed opnå et simplere ligningssystem, der har de samme løsninger som det oprindelige, kaldes *Gauss-elimination*. Af og til går man videre og benytter *Gauss-Jordan* elimination, der består i at omdanne totalmatricen til en *reduceret* trappematrix. Herved opnår man, at løsningsmængden umiddelbart kan opskrives. Når man alligevel normalt foretrækker at nøjes med Gauss-elimination hænger det sammen med, at det samlede skrive- og regnearbejde i reglen er mindre end når der benyttes Gauss-Jordan elimination. Eliminationsmetoderne er opkaldt efter den store tyske matematiker C.F. Gauss (1777-1855), og den tyske geodæt W. Jordan (1842-1899).

Eksempel 2.3.9. Vi ser på ligningssystemet i Eksempel 2.3.4. Dets totalmatrix blev i nævnte eksempel omformet til en trappematrix. Vi går nu videre og omformer det til en reduceret trappematrix:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} -R_3 \\ -R_3 \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} +R_2 \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

Det hertil hørende ligningssystem er

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 1, \\ x_3 &= -4 \end{aligned}$$

der netop angiver løsningen.

Eksempel 2.3.10. Vi ser på ligningssystemet i Eksempel 2.3.8. Dets totalmatrix blev i nævnte eksempel omformet til en trappematrix. Vi går nu videre og omformer den til en reduceret trappematrix:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{array}\right) \begin{matrix} -2R_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{array}\right) \begin{matrix} -3R_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{array}\right).$$

Det hertil hørende ligningssystem nedskrives:

$$\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + 3x_5 & = & 5 \\ x_3 + 2x_5 & = & -3 \\ x_4 - 4x_5 & = & 7 \end{array}.$$

Indsættes heri $x_2 = t_1$, $x_5 = t_2$ fås

$$\begin{array}{rcr} x_1 - 2t_1 + 3t_2 & = & 5 \\ x_3 + 2t_2 & = & -3 \\ x_4 - 4t_2 & = & 7 \end{array},$$

hvoraf vi finder, som ovenfor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2t_1 - 3t_2 \\ t_1 \\ -3 - 2t_2 \\ 7 + 4t_2 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

Vi kan opsummere den beskrevne løsningsmetode for lineære ligningssystemer på følgende måde:
(1) *For et givet lineært ligningssystem*

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}, \tag{$*$}$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ *er en* $m \times n$*-matrix og* $\underline{\underline{B}}$ *er en søjlematrix, opskrives totalmatricen*

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix}.$$

Denne omdannes ved hjælp af rækkeoperationer til en trappematrix

$$\underline{\underline{C}}' = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}' & \underline{\underline{B}}' \end{pmatrix}.$$

Det hertil hørende lineære ligningssystem

$$\underline{\underline{A}}'\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}' \tag{$**$}$$

har de samme løsninger som det oprindelige system $(*)$.
(2) Betragt så det tilfælde, hvor totalmatricen $\underline{\underline{C}}$ *for ligningssystemet* $(*)$ *er en trappematrix med* d *trin og med trinpositioner* $j_1 < \cdots < j_d$. *Hvis sidste trin står i sidste søjle af* $\underline{\underline{C}}$ *er der ingen løsninger (jvf. Eksempel 2.3.6). Antag så, at sidste trin ikke står i sidste søjle. Hvis antallet af trin er lig antallet af søjler i* $\underline{\underline{A}}$, *altså* $n = d$, *er der netop en løsning (jvf. Eksempel 2.3.4), og hvis antallet af søjler i* $\underline{\underline{A}}$ *er større end antallet af trin, altså* $n > d$, *sættes de variable* x_j, *hvor* j *ikke er en af trinpositionerne* $j_1, \cdots, j_d$ *lig med parametrene* $t_1, \cdots, t_{n-d}$, *og dernæst udtrykkes de variable* $x_{j_1}, \cdots, x_{j_d}$ *svarende til trinpositioner, ved parametrene* $t_1, \cdots, t_{n-d}$ *(jvf. Eksempel 2.3.5, 2.3.8).*

Sætning 2.3.11. *Lad* $\underline{\underline{A}}$ *være en* $m \times n$*-matrix, og antag at* $\underline{\underline{A}}$ *ved hjælp af rækkeoperationer er omdannet til en trappematrix* $\underline{\underline{A}}'$ *med* d *trin. Der gælder da:*

(1) *Hvis* $m > d$ *findes der en søjle* $\underline{\underline{B}}$, *så ligningssystemet* $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ *ingen løsninger har.*

(2) *Hvis* $n > d$ *har ligningen* $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{0}}$ *en løsningsmængde givet ved parameterfremstilling med* $n - d$ *parametre, og ligningen har altså uendeligt mange løsninger.*

(3) *Hvis* $m = n = d$ *har ligningssystemet* $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ *netop en løsning for hvert valg af* $\underline{\underline{B}}$.

Bevis. (1): Hvis $m > d$ sætter vi $\underline{\underline{B}}' = \underline{e}_{d+1}$, hvor $\underline{e}_{d+1}$ er den $(d+1)$'te standard enhedsvektor. Ligningssystemet $\underline{\underline{A}}'\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}'$ har da ingen løsninger, idet totalmatricen $\underline{\underline{C}}' = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}' & \underline{\underline{B}}' \end{pmatrix}$ er en trappematrix, der har sidste trin i sidste søjle. Udfører vi nu på $\underline{\underline{C}}'$ de omvendte til rækkeoperationer, der førte $\underline{\underline{A}}$ over i $\underline{\underline{A}}'$, vil $\underline{\underline{C}}'$ blive overført i en matrix $\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix}$, og det ligningssystem $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$, der har $\underline{\underline{C}}$ til totalmatrix, har da heller ingen løsninger. Dette viser, at (1) gælder. (2) og (3): Dette følger umiddelbart af ovenstående opsummering af løsningsmetoden for lineære ligningssystemer. □

Eksempel 2.3.12. Vi betragter 3×3-matricen (jvf. Eksempel 2.3.5 og 2.3.6)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 2 & 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Denne omdannes ved hjælp af rækkeoperationer til en trappematrix:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 2 & 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2R_1 \\ +2R_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2R_2 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times -1 \\ \times -1 \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Idet antallet af trin er mindre end antallet af rækker i matricen findes ifølge Sætning 2.3.11 en søjle $\underset{=}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, så ligningen $\underset{=}{A}\underset{=}{X} = \underset{=}{B}$ ingen løsninger har. Vi vil finde en sådan søjle $\underset{=}{B}$. Ligningssystemet, der har totalmatricen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

har ingen løsninger. Vi udfører nu de *omvendte* rækkeoperationer på denne matrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \times -1 \\ \times -1 \\ \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -2R_2 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2R_1 \\ -2R_1 \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 0 \\ 2 & 6 & 14 & 1 \end{array}\right).$$

Ligningssystemet, der har denne matrix til totalmatrix, har heller ingen løsninger. Som søjlen $\underset{=}{B}$ kan vi da bruge $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sætning 2.3.13. *Lad $\underset{=}{A}$ være en $m \times n$-matrix, og antag at $\underset{=}{A}$ ved hjælp af rækkeoperationer er omdannet til en trappematrix $\underset{=}{A'}$ med d trin. Der gælder da:*

(1) *Hvis ligningssystemet $\underset{=}{A}\underset{=}{X} = \underset{=}{B}$ har mindst en løsning for hvert valg af $\underset{=}{B}$, da er $d = m$.*

(2) *Hvis ligningssystemet $\underset{=}{A}\underset{=}{X} = \underset{=}{0}$ kun har en løsning (nemlig $\underset{=}{0}$), da er $d = n$.*

(3) *Hvis ligningssystemet $\underset{=}{A}\underset{=}{X} = \underset{=}{B}$ har netop en løsning for hvert valg af $\underset{=}{B}$, da er $d = m = n$.*

Bevis. (1) og (2) følger umiddelbart af (1) og (2) i den foregående sætning. (3) følger af (1) og (2). □

2.4 Lineære ligningssystemer og lineære afbildninger

Vi skal nu drage nogle konklusioner om lineære afbildninger på baggrund af den viden om lineære ligningssystemer vi har opnået i afsnit 2.3.

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en $m \times n$-matrix. Et lineært ligningssystem med $\underline{\underline{A}}$ som koefficientmatrix har formen

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}, \tag{$*$}$$

hvor $\underline{\underline{B}}$ er en given søjlematrix, og det drejer sig om at finde de søjler $\underline{\underline{X}}$, der tilfredsstiller ligningen. Lader vi så $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være den lineære afbildning der hører til $\underline{\underline{A}}$, og skriver vi $\underline{x} = \underline{\underline{X}}$, $\underline{b} = \underline{\underline{B}}$ lyder ligningen

$$f(\underline{x}) = \underline{b}. \tag{$**$}$$

At ligningen ($*$) har en løsning for *hvert* valg af $\underline{\underline{B}}$ betyder derfor, at f er *surjektiv*, og at ligningen ($*$) har *højst* en løsning for *hvert* valg af $\underline{\underline{B}}$ betyder at f er *injektiv*. Endelig er f *bijektiv* når ligningen ($*$) har *netop en* løsning for *hvert* valg af $\underline{\underline{B}}$.

Om injektivitet af lineære afbildninger gælder følgende

Sætning 2.4.1. *En lineær afbildning $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er injektiv netop når ligningen $f(\underline{x}) = \underline{o}$ kun har løsningen $\underline{x} = \underline{o}$.*

Bevis. For en lineær afbildning gælder altid, at $f(\underline{o}) = \underline{o}$. Hvis f er injektiv er det derfor klart, at $f(\underline{x}) = \underline{o}$ medfører at $\underline{x} = \underline{o}$. Antag omvendt at $f(\underline{x}) = \underline{o}$ medfører at $\underline{x} = \underline{o}$. Hvis $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_2$ er løsninger til ligningen $f(\underline{x}) = \underline{b}$, gælder at $f(\underline{x}_1) = \underline{b} = f(\underline{x}_2)$, hvoraf $\underline{o} = f(\underline{x}_1) - f(\underline{x}_2) = f(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)$. Men så er $\underline{x}_1 - \underline{x}_2 = \underline{o}$ ifølge forudsætningen, og dermed er $\underline{x}_1 = \underline{x}_2$. Vi har hermed vist, at f er injektiv. Bemærk, at vi undervejs benyttede at f er lineær. □

Sætning 2.4.2. *Lad $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning. Der gælder*

(1) *Hvis f er surjektiv er $m \leq n$.*

(2) *Hvis f er injektiv er $m \geq n$.*

(3) *Hvis f er bijektiv er $m = n$.*

Bevis. Lad $\underline{\underline{A}}$ være den $m \times n$-matrix der er knyttet til f. Vi omdanner $\underline{\underline{A}}$ til en trappematrix $\underline{\underline{A}}'$ med d trin. (1): Hvis f er surjektiv følger det af Sætning 2.3.13, at $m = d \leq n$. (2): Hvis f er injektiv følger det af Sætning 2.3.13, at $n = d \leq m$. (3): Hvis f er bijektiv er den surjektiv og injektiv, hvoraf $m = n$ $(= d)$ ifølge (1) og (2). □

2.5 Operationsmatricer

Definition 2.5.1. Ved en *operationsmatrix* forstås en matrix, der fremkommer ud fra enhedsmatricen ved udførelse af en rækkeoperation.

Svarende til de tre typer rækkeoperationer er der tre typer operationsmatricer.

(1) Type M: Matricerne $\underset{=}{M}_i(c)(c \neq 0)$, der fremkommer ud fra enhedsmatricen ved multiplikation af i'te række med $c \neq 0$. De tilsvarende rækkeoperationer betegnes $M_i(c)$.

(2) Type B: Matricerne $\underset{=}{B}_{ij}(i \neq j)$, der fremkommer ud fra enhedsmatricen ved ombytning af i'te og j'te række $(i \neq j)$. De tilsvarende rækkeoperationer betegnes B_{ij}.

(3) Type S: Matricerne $\underset{=}{S}_{ij}(c)(i \neq j)$, der fremkommer ud fra enhedsmatricen ved addition af j'te række multipliceret med c til i'te række. De tilsvarende rækkeoperationer betegnes $S_{ij}(c)$.

Disse matricer er alle $n \times n$ matricer for et eller andet n. Det vil fremgå af sammenhængen hvilket n der i en given situation er tale om.

Eksempel 2.5.2. Betragter vi 4×4-matricer er f.eks.

$$\underset{=}{M}_2(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underset{=}{B}_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\underset{=}{S}_{24}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operationsmatricerne kan på simpel måde udtrykkes ved de i afsnit 1.4 indførte elementære matricer:

$$\begin{aligned} \underset{=}{M}_i(c) &= \underset{=}{E} + (c-1)\underset{=}{I}_{i,i}, \\ \underset{=}{B}_{ij} &= \underset{=}{E} - \underset{=}{I}_{i,i} - \underset{=}{I}_{j,j} + \underset{=}{I}_{i,j} + \underset{=}{I}_{j,i}, \\ \underset{=}{S}_{ij}(c) &= \underset{=}{E} + c\underset{=}{I}_{i,j}. \end{aligned}$$

Sætning 2.5.3. *Lad $\underline{\underline{A}}$ være en $m \times n$-matrix. Hvis $\underline{\underline{A}}$ ved rækkeoperationen P (som er $M_i(c)$, B_{ij} eller $S_{ij}(c)$) omdannes til $\underline{\underline{B}} = P(\underline{\underline{A}})$, da er $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}$, hvor $\underline{\underline{P}}$ er den til P svarende operationsmatrix (som er $m \times m$).*

Bevis. Da

$$\underline{\underline{I}}_{r,s}\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow r, \\ \\ \\ \end{array}$$

hvor $\underline{\underline{I}}_{r,s}$ er en $m \times m$-matrix, udregner man umiddelbart, at

$$\underline{\underline{M}}_i(c)\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} + (c-1) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i = M_i(c)(\underline{\underline{A}}), \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\underline{\underline{B}}_{ij}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j = B_{ij}(\underline{\underline{A}}), \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\underline{\underline{S}}_{ij}(c)\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} + c \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i = S_{ij}(c)(\underline{\underline{A}}). \\ \\ \\ \end{array}$$

□

Sætning 2.5.4. *Lad $\underline{\underline{A}}$ være en $m \times n$-matrix. Hvis $\underline{\underline{A}}$ ved successive rækkeoperationer $P_1, \cdots, P_k$ omdannes til $\underline{\underline{B}}$, da er $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P}}_k \cdots \underline{\underline{P}}_1\underline{\underline{A}}$, hvor $\underline{\underline{P}}_1, \cdots, \underline{\underline{P}}_k$ er de tilsvarende operationsmatricer (alle $m \times m$).*

Bevis. Gentagen anvendelse af Sætning 2.5.3. □

Sætning 2.5.5. *Operationsmatricerne er regulære, og*

(1) $\underline{\underline{M}}_i(c)^{-1} = \underline{\underline{M}}_i\left(\frac{1}{c}\right)$,

(2) $\underline{\underline{B}}_{ij}^{-1} = \underline{\underline{B}}_{ij}$,

(3) $\underline{\underline{S}}_{ij}(c)^{-1} = \underline{\underline{S}}_{ij}(-c)$.

Bevis. Enhver $m \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ omdannes ved hver af operationerne $M_i\left(\frac{1}{c}\right) \circ M_i(c)$ og $M_i(c) \circ M_i\left(\frac{1}{c}\right)$ til $\underline{\underline{A}}$. Ifølge Sætning 2.5.4 er derfor $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}'\underline{\underline{A}}$, hvor $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{M}}_i\left(\frac{1}{c}\right)\underline{\underline{M}}_i(c)$, $\underline{\underline{P}}' = \underline{\underline{M}}_i(c)\underline{\underline{M}}_i\left(\frac{1}{c}\right)$. Da $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}'\underline{\underline{A}}$ for enhver $m\times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ (specielt $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}_{m,m}$), og $\underline{\underline{P}}, \underline{\underline{P}}'$ er uafhængige af $\underline{\underline{A}}$, er $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}' = \underline{\underline{E}}_{m,m}$. Altså er $\underline{\underline{M}}_i\left(\frac{1}{c}\right)\underline{\underline{M}}_i(c) = \underline{\underline{M}}_i(c)\underline{\underline{M}}_i\left(\frac{1}{c}\right) = \underline{\underline{E}}_{m,m}$, og (1) følger derfor af Sætning 1.5.6. Tilsvarende vises (2) og (3). □

Vi skal kort omtale søjleoperationer og de dertil svarende operationsmatricer.

Sætning 2.5.6. *Idet $M_i(c)^s$, B_{ij}^s, $S_{ij}(c)^s$ betegner de tre typer af søjleoperationer (altså f.eks. $S_{ij}(c)^s$ den søjleoperation, der består i til i'te søjle i $\underline{\underline{A}}$ at addere j'te søjle i $\underline{\underline{A}}$ multipliceret med c) gælder:*

(1) *Matricen, der fås ud fra enhedsmatricen ved at anvende $M_i(c)^s$, er $\underline{\underline{M}}_i(c)^t = \underline{\underline{M}}_i(c)$.*

(2) *Matricen, der fås ud fra enhedsmatricen ved at anvende B_{ij}^s er $\underline{\underline{B}}_{ij}^t = \underline{\underline{B}}_{ij}$.*

(3) *Matricen, der fås ud fra enhedsmatricen ved at anvende $S_{ij}(c)^s$ er $\underline{\underline{S}}_{ij}(c)^t = \underline{\underline{S}}_{ji}(c)$.*

Bevis. Lad P^s være en vilkårlig søjleoperation og P den tilsvarende rækkeoperation. Da er

$$P^s(\underline{\underline{E}}) = P(\underline{\underline{E}}^t)^t = P(\underline{\underline{E}})^t = \underline{\underline{P}}^t,$$

hvor $\underline{\underline{P}}$ er operationsmatricen (jvf. Definition 2.5.1) der svarer til rækkeoperationen P. □

Sætning 2.5.7. *Lad $\underline{\underline{A}}$ være en $m \times n$-matrix. Hvis $\underline{\underline{A}}$ ved successive søjleoperationer $Q_1, \cdots, Q_k$ omdannes til $\underline{\underline{B}}$, da er $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}_1 \cdots \underline{\underline{Q}}_k$, hvor $\underline{\underline{Q}}_1, \cdots, \underline{\underline{Q}}_k$ er de tilsvarende operationsmatricer i henhold til Sætning 2.5.6 (alle $n \times n$).*

Bevis. Vi lader $P_1, \cdots, P_k$ være de tilsvarende rækkeoperationer. Ifølge Sætning 2.5.4 vil successive rækkeoperationer $P_1, \cdots, P_k$ omdanne $\underline{\underline{A}}^t$ til $\underline{\underline{B}}^t$, hvor

$$\underline{\underline{B}}^t = \underline{\underline{P}}_k \cdots \underline{\underline{P}}_1 \underline{\underline{A}}^t = \underline{\underline{Q}}_k^t \cdots \underline{\underline{Q}}_1^t \underline{\underline{A}}^t = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}_1 \cdots \underline{\underline{Q}}_k)^t.$$

Altså er $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}_1 \cdots \underline{\underline{Q}}_k$. □

Eksempel 2.5.8. Matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

omdannes ved rækkeoperationerne $P_1 = S_{21}(-2)$, $P_2 = S_{12}(-2)$ til

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dette stemmer med at

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P}}_2 \underline{\underline{P}}_1 \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}_{12}(-2)\underline{\underline{S}}_{21}(-2)\underline{\underline{A}} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}}. \end{aligned}$$

Tilsvarende omdannes $\underline{\underline{A}}$ ved søjleoperationerne $Q_1 = S_{32}(-2)^s$, $Q_2 = S_{21}(-2)^s$ til

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dette stemmer med at

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}_1 \underline{\underline{Q}}_2 &= \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}_{23}(-2)\underline{\underline{S}}_{12}(-2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}}. \end{aligned}$$

2.6 Regulære matricer. Matrixinversion

Vi har i afsnit 2.4 set, at hvis $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er en *bijektiv*, *lineær* afbildning, da er $m = n$. (Her finder vi forklaringen på, at vi i afsnit 1.5 kun betragtede bijektive, lineære afbildninger fra $\mathbf{R}^n$ til $\mathbf{R}^n$ og ikke fra $\mathbf{R}^n$ til $\mathbf{R}^m$ for $m \neq n$.)

Vi skal i dette afsnit se på hvordan man afgør om en given lineær afbildning $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ er bijektiv, eller, ækvivalent hermed, om en given $n \times n$-matrix er regulær (jvf. afsnit 1.5). Desuden skal vi se på, hvorledes man finder den inverse til en regulær matrix.

Sætning 2.6.1. *At en $n \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ er regulær betyder, at ligningen $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{Y}}$ har netop en løsning $\underline{\underline{X}}$ for hvert valg af søjle $\underline{\underline{Y}}$.*

Bevis. Lad f være den til $\underline{\underline{A}}$ hørende lineære afbildning. At $\underline{\underline{A}}$ er regulær betyder ifølge definitionen, at f er bijektiv. Men at f er bijektiv betyder at ligningen $f(\underline{x}) = \underline{y}$ har netop en løsning $\underline{x}$ for hvert valg af $\underline{y}$. Men hvis $\underline{x} = \underline{\underline{X}}$ og $\underline{y} = \underline{\underline{Y}}$ betyder $f(\underline{x}) = \underline{y}$ netop at $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{Y}}$. □

Bemærk, at hvis $\underline{\underline{A}}$ er regulær, da er den entydigt bestemte løsning $\underline{\underline{X}}$ til ligningen

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{Y}}$$

givet ved

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{Y}};$$

thi $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{Y}}) = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1})\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{Y}}$.

Sætning 2.6.2. *Hvis $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{A}}'$ er $n \times n$-matricer, og $\underline{\underline{A}}'$ fremgår af $\underline{\underline{A}}$ ved udførelse af rækkeoperationer, da er $\underline{\underline{A}}$ regulær netop når $\underline{\underline{A}}'$ er regulær.*

Bevis. Da $\underline{\underline{A}}'$ fremgår af $\underline{\underline{A}}$ ved k rækkeoperationer, er

$$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{P}}_k \cdots \underline{\underline{P}}_1 \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}},$$

hvor $\underline{\underline{P}}_1, \cdots, \underline{\underline{P}}_k$ er operationsmatricer. Da en operationsmatrix er regulær ifølge Sætning 2.5.5, er også $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}_k \cdots \underline{\underline{P}}_1$ regulær ifølge Sætning 1.5.4. At $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{A}}'$ er samtidigt regulære følger derfor af Sætning 1.5.4. □

Sætning 2.6.3. *En $n \times n$-trappematrix er regulær netop hvis den har n trin.*

Bevis. Det følger umiddelbart af afsnit 2.3 (Sætning 2.3.11 og 2.3.13). □

Sætning 2.6.4. *En $n \times n$-matrix er regulær netop når den ved udførelse af rækkeoperationer kan overføres i enhedsmatricen.*

Bevis. Hvis den givne matrix kan overføres i enhedsmatricen er den regulær ifølge Sætning 2.6.2. Hvis omvendt den givne matrix antages regulær, kan den overføres i en trappematrix, der ifølge Sætning 2.6.2 og Sætning 2.6.3 må have n trin. Men det ses umiddelbart at hvis man omdanner en sådan trappematrix til en reduceret trappematrix, da når man netop frem til enhedsmatricen. □

Sætning 2.6.5. *Lad $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være en lineær afbildning. Følgende betingelser er ækvivalente:*

(1) *f er bijektiv,*

(2) *f er surjektiv.*

(3) *f er injektiv.*

Bevis. Lad $\underline{\underline{A}}$ være matricen knyttet til f. Vi omformer $\underline{\underline{A}}'$ til en trappematrix med d trin. Det fremgår af Sætning 2.3.11 og 2.3.13 at de tre betingelser (1), (2) og (3) alle er ensbetydende med, at $d = n$. Hermed er sætningen vist. □

Vi udnytter nu Sætning 2.6.5 til at vise følgende skærpelse af Sætning 1.5.6:

Sætning 2.6.6. *Lad $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ være $n \times n$-matricer og antag, at*

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}}.$$

Da er $\underline{\underline{A}}$ (og $\underline{\underline{B}}$) regulær, og $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{B}}$ (og $\underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{A}}$).

Bevis. Lad f og g være de lineære afbildninger der hører til $\underline{\underline{A}}$ hhv. $\underline{\underline{B}}$. Der gælder da, at $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$ hvoraf vi slutter, at f er surjektiv. Men da er f bijektiv ifølge Sætning 2.6.5 og dermed er $\underline{\underline{A}}$ regulær. □

Sætning 2.6.7. *Hvis $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er $n \times n$-matricer således at $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ er regulær, da er $\underline{\underline{A}}$ (og $\underline{\underline{B}}$) regulær.*

Bevis. Idet $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1})$ slutter vi af Sætning 2.6.6, at $\underline{\underline{A}}$ er regulær. □

Vi vil beskrive hvordan man i praksis kan bestemme den inverse $\underline{\underline{A}}^{-1}$ til en regulær matrix $\underline{\underline{A}}$. Ifølge Sætning 2.6.4 findes rækkeoperationer og tilhørende operationsmatricer $\underline{\underline{P}}_1, \cdots, \underline{\underline{P}}_k$, så at $\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}_k \cdots \underline{\underline{P}}_1 \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$. Anvendes disse rækkeoperationer på blokmatricen $(\underline{\underline{A}}|\underline{\underline{E}})$, omdannes den til $(\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}|\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{E}}) = (\underline{\underline{E}}|\underline{\underline{A}}^{-1})$, hvoraf $\underline{\underline{A}}^{-1}$ kan aflæses. Tilsvarende kan man finde søjleoperationer og tilhørende operationsmatricer $\underline{\underline{Q}}_1, \cdots, \underline{\underline{Q}}_\ell$, så at $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}_1 \cdots \underline{\underline{Q}}_\ell = \underline{\underline{E}}$. Anvendes disse søjleoperationer på blokmatricen $(\underline{\underline{A}}|\underline{\underline{E}})$, omdannes den til $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}|\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{Q}}) = (\underline{\underline{E}}|\underline{\underline{A}}^{-1})$, hvoraf $\underline{\underline{A}}^{-1}$ ligeledes kan aflæses.

Det er på sin plads at advare mod at sammenblande række- og søjleoperationer ved denne metode. Antag, at der er rækkeoperationer og tilsvarende operationsmatricer $\underline{\underline{P}}_1, \cdots, \underline{\underline{P}}_k$ samt søjleoperationer og tilsvarende operationsmatricer $\underline{\underline{Q}}_1, \cdots, \underline{\underline{Q}}_\ell$, så at

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{P}}_k \cdots \underline{\underline{P}}_1 \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}_1 \cdots \underline{\underline{Q}}_\ell = \underline{\underline{E}}.$$

Anvendes disse operationer på blokmatricen $(\underline{\underline{A}}|\underline{\underline{E}})$, omdannes den til $(\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}|\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{Q}}) = (\underline{\underline{E}}|\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{Q}})$. Her er $\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{E}}$, hvorfor $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{Q}}^{-1} = (\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{P}})^{-1}$, altså $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{P}}$, men i matricen $(\underline{\underline{E}}|\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{Q}})$ aflæser vi $\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{Q}}$, som i almindelighed *ikke* er $\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$.

Eksempel 2.6.8. Lad os igen se på matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

fra Eksempel 1.5.3. Først omdanner vi $\underline{\underline{A}}$ til en trappematrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -R_1 \\ -R_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

der er en trappematrix med 3 trin. Vi ser altså påny, at $\underline{\underline{A}}$ er regulær. Vi vil så finde den inverse: Vi opskriver blokmatricen $(\underline{\underline{A}}|\underline{\underline{E}})$, og omdanner den ved hjælp af rækkeoperationer til matricen $(\underline{\underline{E}}|\underline{\underline{A}}^{-1})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -R_1 \\ -R_1 \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \times -\frac{1}{2} \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{matrix} -R_3 \\ +R_3 \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Heraf aflæses, at

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

i overensstemmelse hvad vi fandt tidligere.

Vi ser så på det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 \qquad &= 2\,. \\ x_1 \qquad - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Dette kan naturligvis løses ved som sædvanligt at omdanne dets totalmatrix til en trappematrix. Men bemærker vi at koefficientmatricen netop er den givne matrix $\underline{\underline{A}}$ kan vi – med vores kendskab til $\underline{\underline{A}}^{-1}$ – umiddelbart skrive løsningen ned:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Eksempel 2.6.9. Vi ser på matricen

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

og vi vil undersøge om den er regulær, og i givet fald finde dens inverse. Vi går direkte løs på at finde den inverse; hvis den alligevel ikke findes viser det sig under vejs (ved at vi når frem til en trappematrix med mindre end 3 trin):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -R_3 \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -5R_1 \\ -3R_1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 16 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & 2 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -R_3 \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -5R_2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2R_2 \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -9 \end{array}\right).$$

Heraf aflæses, at $\underset{=}{A}$ er regulær og

$$\underset{=}{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -7 & 11 & -9 \end{pmatrix}.$$

Eksempel 2.6.10. Vi vil undersøge om matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

er regulær. Vi omdanner den til en trappematrix ved hjælp af rækkeoperationer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -R_1 \\ -5R_1 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \\ -4R_2 \end{array}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ -R_3 \end{array}\end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dette er en 4×4-matrix med 3 trin; en sådan er ikke regulær, og dermed er den oprindelige matrix heller ikke regulær.

Antag, at $\underline{\underline{A}}$ er en regulær $n \times n$-matrix og antag, at der er givet en $n \times p$-matrix $\underline{\underline{B}}$. Vi ønsker at finde en $n \times p$-matrix $\underline{\underline{X}}$ således at

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}.$$

Det ses umiddelbart, at der findes netop en sådan matrix $\underline{\underline{X}}$, nemlig

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{B}}.$$

3 Determinanter

3.1 Determinant af 2×2-matrix

For en 2×2-matrix

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

defineres determinanten af $\underset{=}{A}$ som tallet

$$\det \underset{=}{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

For determinanten af $\underset{=}{A}$ benyttes også betegnelserne $|\underset{=}{A}|$ og

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3.2 Determinant af 3×3-matrix

For en 3×3-matrix

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

defineres determinanten $\det \underset{=}{A}$ af $\underset{=}{A}$ som tallet

$$\det \underset{=}{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

For determinanten af $\underset{=}{A}$ benyttes også betegnelserne $|\underset{=}{A}|$ og

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3.3 Permutationer

Med henblik på definition af determinant af en vilkårlig $n \times n$-matrix, behandles i dette afsnit de såkaldte permutationer.

Definition 3.3.1. Ved en *permutation* (af tallene $1, \cdots, n$) forstås en bijektiv afbildning af mængden $\{1, \cdots, n\}$ på sig selv. Mængden af samtlige permutationer af tallene $1, \cdots, n$ betegnes S_n.

Hvis $\sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ er en permutation, angiver vi σ på følgende måde:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } j_i = \sigma(i).$$

Da σ er bijektiv, er tallene $j_1, j_2, \cdots, j_n$ en omordning af tallene $1, 2, \cdots, n$.

Eksempel 3.3.2. Først angives en permutation σ med $n = 3$ og dernæst angives en permutation τ med $n = 6$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Idet den omvendte til en bijektiv afbildning igen er en bijektiv afbildning ses, at hvis σ er en permutation, da er også σ^{-1} en permutation.

Eksempel 3.3.3. Den omvendte til permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

er permutationen

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Idet sammensætning af bijektive afbildninger igen giver en bijektiv afbildning ses, at hvis σ og τ er permutationer i S_n, da er også $\sigma \circ \tau$ en permutation i S_n. Ved udregning af $\sigma \circ \tau$ skal man (jvf. A.2) først udføre permutationen τ og dernæst σ.

Eksempel 3.3.4. Den sammensatte permutation af permutationerne

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

er permutationen

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Den identiske afbildning af $\{1, \cdots, n\}$ på sig selv kaldes den *identiske permutation* eller *enhedspermutationen*, og betegnes e. Den er givet ved skemaet

$$e = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Definition 3.3.5. Lad der være givet en permutation σ af $\{1, \cdots, n\}$. Et talpar (i, j), hvor $1 \leq i < j \leq n$, siges at svare til en *inversion* i σ, hvis $\sigma(i) > \sigma(j)$. Antallet af inversioner kaldes $I(\sigma)$. Hvis $I(\sigma)$ er lige kaldes σ for en *lige permutation*, og hvis $I(\sigma)$ er ulige kaldes σ for en *ulige permutation*.

Definition 3.3.6. *Fortegnet* sign σ for en permutation σ er tallet $+1$, hvis σ er en lige permutation, og tallet -1, hvis σ er en ulige permutation. Altså er sign $\sigma = (-1)^{I(\sigma)}$.

Eksempel 3.3.7. Vi betragter permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser, at talparrene $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$ og $(4, 5)$ svarer til inversioner, altså er $I(\sigma) = 7$, og dermed er σ ulige, og sign $\sigma = -1$.

Definition 3.3.8. Ved en *naboombytning* forstås en permutation af formen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i+1 & i & \cdots & n \end{pmatrix};$$

med andre ord er $\sigma(k) = k$ for alle $k \neq i$, $k \neq i+1$, medens $\sigma(i) = i+1$ og $\sigma(i+1) = i$. For naboombytninger benytter vi også betegnelsen

$$\sigma = \begin{bmatrix} i & i+1 \\ i+1 & i \end{bmatrix}.$$

Det ses umiddelbart, at hvis σ er en naboombytning, da er $I(\sigma) = 1$, og dermed at σ er en *ulige* permutation. Endvidere er $\sigma \circ \sigma = e$, hvoraf $\sigma^{-1} = \sigma$.

Sætning 3.3.9. *Enhver permutation σ fremkommer ved sammensætning af et antal naboombytninger.*

Bevis. Lad $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ være en given permutation. Lad i være tallet så $\sigma(i) = j_i = n$, og lad τ_1 være naboombytningen $\begin{bmatrix} i & i+1 \\ i+1 & i \end{bmatrix}$. Da er

$$\sigma \circ \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_{i+1} & n & \cdots & j_n \end{pmatrix}.$$

På denne måde har vi opnået en ny permutation $\sigma_1 = \sigma \circ \tau_1$, hvor n (i anden række) er rykket en plads til højre. Således fortsættes indtil vi efter $n - i$ skridt har opnået en permutation $\sigma_{n-i} = \sigma \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{n-i}$ således at $\sigma_{n-i}(n) = n$. Herefter fortsættes med at bringe $n - 1$ på plads, dernæst $n - 2$ etc. indtil vi har fundet naboombytninger $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_p$ således at

$$\sigma \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p = e.$$

Men så er

$$\sigma = \tau_p^{-1} \circ \cdots \circ \tau_1^{-1} = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_1.$$

□

Eksempel 3.3.10. Vi ser på permutationen σ fra Eksempel 3.3.3, og omdanner den skridt for skridt til enhedspermutationen ved multiplikation fra højre med naboomskrivninger:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&1&6&5&2\end{pmatrix}\circ\begin{bmatrix}4&5\\5&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&1&5&6&2\end{pmatrix}\circ\begin{bmatrix}5&6\\6&5\end{bmatrix}\longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&1&5&2&6\end{pmatrix}\circ\begin{bmatrix}4&5\\5&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&1&2&5&6\end{pmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&1&2&5&6\end{pmatrix}\circ\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&4&2&5&6\end{pmatrix}\circ\begin{bmatrix}3&4\\4&3\end{bmatrix}\longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&2&4&5&6\end{pmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&2&4&5&6\end{pmatrix}\circ\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}\longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$$

Heraf sluttes, at

$$\sigma=\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}3&4\\4&3\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}4&5\\5&4\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}5&6\\6&5\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}4&5\\5&4\end{bmatrix}.$$

Sætning 3.3.11. *Hvis permutationen σ er sammensat af p naboombytninger, da er sign $\sigma=(-1)^p$; med andre ord, σ er lige hvis p er lige, og σ er ulige hvis p er ulige.*

Bevis. Hvis $\sigma=\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\j_1&\cdots&j_n\end{pmatrix}$ og hvis τ er naboombytningen $\begin{bmatrix}i&i+1\\i+1&i\end{bmatrix}$ er $\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix}1&\cdots&i&i+1&\cdots&n\\j_1&\cdots&j_{i+1}&j_i&\cdots&j_n\end{pmatrix}$. Heraf fremgår $I(\sigma\circ\tau)=I(\sigma)\pm1$; men heraf følger, at sign $(\sigma\circ\tau)=-$ sign σ. Er nu $\sigma=\tau_p\circ\cdots\circ\tau_1$ sammensat af p naboombytninger, er $\sigma\circ\tau_1\circ\cdots\circ\tau_p=e$, og ved gentagen anvendelse af bevisets indledende bemærkninger fås $1=\text{sign } e=\text{sign }(\sigma\circ\tau_1\circ\cdots\circ\tau_p)=-\text{ sign}(\sigma\circ\tau_1\circ\cdots\circ\tau_{p-1})=(-1)^p\text{ sign }\sigma$, hvoraf sign $\sigma=(-1)^p$. Dette viser sætningen. □

Sætning 3.3.12. *Lad*

$$\sigma=\begin{bmatrix}i&j\\j&i\end{bmatrix},\quad i\neq j,$$

være en transposition, dvs. en permutation i S_n, der ombytter 2 tal $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$, og lader de øvrige urørte. Da er sign $\sigma=-1$.

Bevis. For en transposition med $j=i+1$ eller $j=i-1$ følger dette af Sætning 3.3.11 (med $p=1$). For en vilkårlig transposition henvises til øvelsesopgave 61. □

Sætning 3.3.13. *Hvis σ og τ er permutationer er*

$$\text{sign }(\sigma\circ\tau)=\text{sign }\sigma\cdot\text{sign }\tau.$$

Bevis. Skriv $\sigma = \sigma_p \circ \cdots \circ \sigma_1$ som en sammensætning af naboombytninger, og skriv $\tau = \tau_q \circ \cdots \circ \tau_1$ ligeså; da er sign $\sigma = (-1)^p$ og sign $\tau = (-1)^q$. Men $\sigma \circ \tau = \sigma_p \circ \cdots \circ \sigma_1 \circ \tau_q \circ \cdots \circ \tau_1$, hvoraf sign $(\sigma \circ \tau) = (-1)^{p+q} = (-1)^p (-1)^q =$ sign $\sigma \cdot$ sign τ. □

Sætning 3.3.14. *Hvis σ er en permutation, da er*

$$\text{sign } \sigma = \text{sign } (\sigma^{-1}).$$

Bevis. Da $1 = \text{sign } e = \text{sign}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \text{sign } \sigma \cdot \text{sign}(\sigma^{-1})$ følger sætningen. □

Sætning 3.3.15. *Afbildningen $\sigma \to \sigma^{-1}$ er en bijektiv afbildning af S_n. For ethvert (fast) $\tau \in S_n$ er afbildningen $\sigma \to \tau \circ \sigma$ en bijektiv afbildning af S_n. For $n \geq 2$ er der lige mange ($= \frac{1}{2} n!$) lige og ulige permutationer i S_n.*

Bevis. Da S_n er en endelig mængde, er det tilstrækkeligt at vise, at afbildningerne $\sigma \to \sigma^{-1}$ og $\sigma \to \tau \circ \sigma$ er injektive. Dette følger af at

$$\begin{aligned}
\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} &\Rightarrow \sigma_1 = (\sigma_1^{-1})^{-1} = (\sigma_2^{-1})^{-1} = \sigma_2, \\
\tau \circ \sigma_1 = \tau \circ \sigma_2 &\Rightarrow \sigma_1 = e \circ \sigma_1 = (\tau^{-1} \circ \tau) \circ \sigma_1 = \tau^{-1} \circ (\tau \circ \sigma_1) \\
&\qquad = \tau^{-1} \circ (\tau \circ \sigma_2) = (\tau^{-1} \circ \tau) \circ \sigma_2 = e \circ \sigma_2 = \sigma_2.
\end{aligned}$$

Antag $n \geq 2$, og lad $\sigma_1, \cdots, \sigma_p$ være de lige permutationer i S_n og $\sigma_{p+1}, \cdots, \sigma_n$ være de ulige permutationer i S_n. Lad τ være en (fast) ulige permutation i S_n, f.eks. en transposition. Da er

$$\begin{aligned}
&\tau \circ \sigma_1, \cdots, \tau \circ \sigma_p && \text{alle ulige permutationer,} \\
&\tau \circ \sigma_{p+1}, \cdots, \tau \circ \sigma_n && \text{alle lige permutationer}
\end{aligned}$$

ifølge Sætning 3.3.13. Men det medfører netop, at der må være lige mange lige og ulige permutationer i S_n. □

3.4 Determinant af $n \times n$-matrix

Til enhver $n \times n$-matrix $\underset{=}{A}$ knyttes et bestemt tal, determinanten af $\underset{=}{A}$, der betegnes det $\underset{=}{A}$ eller $|\underset{=}{A}|$.

Definition 3.4.1. Determinanten af $n \times n$-matricen $\underset{=}{A} = (a_{ij})_{n,n}$ defineres som

$$\det \underset{=}{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

For $n = 2$ og $n = 3$ genfindes determinanten som den er defineret i afsnit 3.1 og 3.2.

Sætning 3.4.2. *For en vilkårlig $n \times n$-matrix $\underset{=}{A}$ gælder, at*

$$\det \underset{=}{A} = \det \underset{=}{A}^t.$$

Bevis. Vi skriver $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$ og $\underline{\underline{A}}^t = (a'_{ij})_{n,n}$, og der gælder så $a'_{ij} = a_{ji}$. For simpelheds skyld antager vi nu, at $n = 3$. Det generelle tilfælde behandles efter samme mønster. Determinanten af $\underline{\underline{A}}$ er givet ved

$$\det \underline{\underline{A}} = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sign} \sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}.$$

Ordner vi nu faktorerne i produktet $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$ efter andet indeks i stedet for efter første indeks, fås

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} = a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} a_{\sigma^{-1}(3)3} = a'_{1\sigma^{-1}(1)} a'_{2\sigma^{-1}(3)} a'_{3\sigma^{-1}(3)},$$

og da $\operatorname{sign} \sigma = \operatorname{sign} (\sigma^{-1})$, finder vi så

$$\det \underline{\underline{A}} = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sign} (\sigma^{-1}) a'_{1\sigma^{-1}(1)} a'_{2\sigma^{-1}(2)} a'_{3\sigma^{-1}(3)}.$$

Idet nu $\sigma \to \sigma^{-1}$ er en bijektiv afbildning af S_3 på sig selv, (jvf. Sætning 3.3.15) finder vi endelig

$$\det \underline{\underline{A}} = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sign} \sigma \, a'_{1\sigma(1)} a'_{2\sigma(2)} a'_{3\sigma(3)} = \det \underline{\underline{A}}^t.$$

Hermed er sætningen vist. □

Vi skal nu se, hvad der sker med determinanten for en matrix når vi udfører rækkeoperationer på matricen. Ved hjælp af Sætning 3.4.2 udleder vi tilsvarende resultater for søjleoperationer.

Sætning 3.4.3. *Lad $\underline{\underline{A}}$ være en $n \times n$-matrix. Antag, at $\underline{\underline{B}}$ er en matrix der er dannet ud fra $\underline{\underline{A}}$ ved*

(1) *multiplikation af en række (søjle) i $\underline{\underline{A}}$ med et tal c; da er $\det \underline{\underline{B}} = c \det \underline{\underline{A}}$;*

(2) *ombytning af 2 rækker (søjler); da er $\det B = -\det \underline{\underline{A}}$;*

(3) *addition af et multiplum af en række (søjle) til en anden række (søjle); da er $\det \underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{A}}$.*

Bevis. Vi skriver $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$ og $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})_{n,n}$. Vi illustrerer beviset på en 3×3-matrix. Det generelle tilfælde behandles efter samme mønster. (1): Hvis f.eks. den anden række i $\underline{\underline{A}}$ multipliceres med c gælder for $1 \le j \le 3$ at $b_{2j} = ca_{2j}$ medens $b_{ij} = a_{ij}$ for $i \neq 2$. Men så er

$$\begin{aligned}\det \underline{\underline{B}} &= \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sign} \sigma \, b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sign} \sigma \, a_{1\sigma(1)} c a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \\ &= c \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sign} \sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} = c \det \underline{\underline{A}}.\end{aligned}$$

(2): Vi ser på ombytning af to søjler. Hvis f.eks. anden og tredie søjle ombyttes gælder for $1 \leq i \leq 3$ at $b_{i1} = a_{i1}$, $b_{i2} = a_{i3}$ og $b_{i3} = a_{i2}$, altså at $b_{ij} = a_{i\tau(j)}$, hvor τ er naboombytningen $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Men så er

$$\begin{aligned} \det \underset{=}{B} &= \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}\ \sigma\, b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}\ \sigma\, a_{1\tau\circ\sigma(1)} a_{2\tau\circ\sigma(2)} a_{3\tau\circ\sigma(3)} \\ &= -\sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}\ (\tau \circ \sigma) a_{1\tau\circ\sigma(1)} a_{2\tau\circ\sigma(2)} a_{3\tau\circ\sigma(3)} \\ &= -\sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}\ \sigma\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} = -\det \underset{=}{A}, \end{aligned}$$

idet afbildningen $\sigma \to \tau \circ \sigma$ er en bijektiv afbildning af S_3 på sig selv, jvf. Sætning 3.3.15.
(3): Antag nu, at den tredie række er multipliceret med c og adderet til den anden række. Da gælder for $1 \leq j \leq 3$, at $b_{1j} = a_{1j}$, $b_{2j} = a_{2j} + ca_{3j}$ og $b_{3j} = a_{3j}$, og dermed

$$\begin{aligned} \det \underset{=}{B} &= \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}\ \sigma\, b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}\ \sigma\, a_{1\sigma(1)} (a_{2\sigma(2)} + ca_{3\sigma(2)}) a_{3\sigma(3)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}\ \sigma\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} + c \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}\ \sigma\, a_{1\sigma(1)} a_{3\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \\ &= \det \underset{=}{A} + c \det \underset{=}{C}, \end{aligned}$$

hvor

$$\underset{=}{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Der gælder imidlertid $\det \underset{=}{C} = -\det \underset{=}{C}$, da $\underset{=}{C}$ fremgår af sig selv ved ombytning af to rækker; men så er $\det \underset{=}{C} = 0$, og dermed er $\det \underset{=}{B} = \det \underset{=}{A}$. □

Sætning 3.4.4. *Lad $\underset{=}{A}$ være en øvre (nedre) trekantsmatrix (specielt en diagonalmatrix); determinanten for $\underset{=}{A}$ er lig med produktet af diagonalelementerne.*

Bevis. Antag f.eks. at $\underset{=}{A} = (a_{ij})_{n,n}$ er en nedre trekantsmatrix. Da er $a_{ij} = 0$ for $i < j$. Hvis så σ er en permutation i S_n, der ikke er den identiske permutation, findes der $1 \leq i \leq n$, så $i < \sigma(i)$; men det betyder, at produktet $a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ er nul, thi det indeholder faktoren $a_{i\sigma(i)} = 0$. Konklusionen er, at det eneste led i summen

$$\det \underset{=}{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}\ \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

der eventuelt ikke er nul, kommer fra den identiske permutation; altså er

$$\det \underline{\underline{A}} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Resultatet for en øvre trekantsmatrix følger nu af Sætning 3.4.2. □

Sætning 3.4.5. *Lad $\underline{\underline{A}}$ være en $n \times n$-matrix af formen*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \underline{\underline{B}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{B}}$ er en $(n-1) \times (n-1)$-matrix. Da er

$$\det \underline{\underline{A}} = a_{11} \det \underline{\underline{B}}.$$

Bevis. Ved hjælp af rækkeoperationer af type S overfører vi $\underline{\underline{B}}$ til en øvre trekantsmatrix $\underline{\underline{B}}_1$. Vi udfører så de samme rækkeoperationer på $\underline{\underline{A}}$, hvorved $\underline{\underline{A}}$ overføres i en øvre trekantsmatrix

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \underline{\underline{B}}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Idet rækkeoperationer af type S ikke ændrer determinanten skal vi blot vise, at $\det \underline{\underline{A}}_1 = a_{11} \det \underline{\underline{B}}_1$. Men det er klart ifølge Sætning 3.4.4. □

Eksempel 3.4.6. Vi beregner determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{array}{@{}c@{}l} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ +2R_1 \\ -2R_1 \\ +R_1 \end{array} \end{array} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{array}{@{}c@{}l} \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -6 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ +R_1 \end{array} \end{array} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -(12-8) = -4.$$

Vi har undervejs anvendt Sætning 3.4.3 og 3.4.5.

Sætning 3.4.7. *Lad $\underline{\underline{A}}$ være en $n \times n$-matrix. Da er $\underline{\underline{A}}$ regulær netop hvis* $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$.

Bevis. Matricen $\underline{\underline{A}}$ kan ved hjælp af rækkeoperationer overføres i en trappematrix $\underline{\underline{B}}$, og der gælder $(\det \underline{\underline{A}} \neq 0 \Leftrightarrow \det \underline{\underline{B}} \neq 0)$ ifølge Sætning 3.4.3. Men der gælder også at ($\underline{\underline{A}}$ regulær $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{B}}$ regulær) ifølge Sætning 2.6.2. Vi kan derfor nøjes med at se på tilfældet, hvor $\underline{\underline{A}}$ er en trappematrix. Men en kvadratisk trappematrix er specielt en øvre trekantsmatrix, og derfor er dens determinant lig med produktet af diagonalelementerne. Men dette produkt er forskellig fra nul netop hvis alle diagonalelementer er forskellige fra nul, der netop er betingelsen for at en øvre trekantsmatrix er regulær. ☐

Sætning 3.4.8. *Lad $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ være $n \times n$-matricer. Der gælder*

$$\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{B}}.$$

Bevis. Antag først, at $\underline{\underline{A}}$ er en operationsmatrix. Det ses da umiddelbart ved hjælp af Sætning 3.4.3, at identiteten er opfyldt. Antag dernæst, at $\underline{\underline{A}}$ ikke er regulær. Da er $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ heller ikke regulær ifølge Sætning 2.6.7, og dermed er højreside og venstreside i identiteten begge lig med nul. Antag så endelig, at $\underline{\underline{A}}$ er regulær. Da kan $\underline{\underline{A}}$ skrives som et produkt af operationsmatricer $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}_1 \cdots \underline{\underline{P}}_k$, og under anvendelse af første del af beviset fås så $\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{P}}_1 \det(\underline{\underline{P}}_2 \cdots \underline{\underline{P}}_k) = \det \underline{\underline{P}}_1 \cdots \det \underline{\underline{P}}_k$, og $\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \det(\underline{\underline{P}}_1 \cdots \underline{\underline{P}}_k \underline{\underline{B}}) = \det(\underline{\underline{P}}_1) \det(\underline{\underline{P}}_2 \cdots \underline{\underline{P}}_k \underline{\underline{B}}) = \det \underline{\underline{P}}_1 \cdots \det \underline{\underline{P}}_k \det \underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{B}}$. Hermed er sætningen vist. ☐

Sætning 3.4.9. *For en regulær matrix $\underline{\underline{A}}$ gælder, at*

$$\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}}.$$

Bevis. Da $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$, er $\det \underline{\underline{A}} \det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = \det \underline{\underline{E}} = 1$ ifølge den foregående sætning. Heraf fremgår sætningen. ☐

3.5 Cramers formler

Vi ser på et lineært ligningssystem bestående af *n ligninger med n ubekendte*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

Idet $\underline{\underline{A}}$ betegner ligningssystemets koefficientmatrix kan (1) skrives

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Vi antager nu, at $\underline{\underline{A}}$ er *regulær*. Ligningssystemet har da netop en løsning, nemlig

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Vi vil finde en formel for x_j, $j = 1, \cdots, n$. Med henblik herpå bemærker vi, at

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & x_j & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & x_n & & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ j \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ j \end{array}. \tag{3}$$

Af Sætning 3.4.5 (anvendt $j-1$ gange) og Sætning 3.4.4 fås

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & & & x_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & x_j & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & x_n & & & 1 \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ j \end{array} = \begin{vmatrix} x_j & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = x_j.$$

Af Sætning 3.4.8 fås så, at determinanten af venstresiden i (3) er lig med $\det \underline{\underline{A}} \cdot x_j$, og dermed er

$$\det \underline{\underline{A}} \cdot x_j = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ j \end{array}$$

hvoraf

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \ j = 1, \cdots, n,$$

hvor altså b'erne er skrevet i den j'te søjle. Disse udtryk for $x_1, \cdots, x_n$ kaldes *Cramers formler*, efter den schweiziske matematiker G. Cramer (1704-1752).

For $n = 2$ lyder ligningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_2 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \end{aligned}$$

og Cramers formler giver de velkendte udtryk

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

For $n = 3$ lyder ligningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2\,, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

og Cramers formler giver

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Eksempel 3.5.1. Vi betragter ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0\,. \\ x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Determinanten for koefficientmatricen er

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -12.$$

Ligningssystemet kan altså løses ved hjælp af Cramers formler; vi finder

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}, \\
x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}, \\
x_3 &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

3.6 Determinant og invers matrix

Vi skal i dette afsnit udlede en formel for den inverse til en regulær matrix.

Lad $\underset{=}{A} = (a_{ij})_{n,n}$ være en $n \times n$-matrix. Ved *komplementet* til a_{ij} forstås tallet

$$
A_{ij} = \begin{array}{cc}
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \leftarrow i \\
\begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & \uparrow & & \phantom{a_{nn}} \\ & & j & & \end{array} &
\end{array}
.
$$

A_{ij} er altså determinanten af matricen, der fremkommer af $\underset{=}{A}$ ved at skrive 1 på pladsen (i, j) og 0 på de øvrige pladser i i'te række og j'te søjle. For hvert $1 \leq i, j \leq n$ defineres matricen $\underset{=}{A}_{ij}$ som matricen der fremkommer af $\underset{=}{A}$ ved at slette i'te række og j'te søjle.

Sætning 3.6.1. *Der gælder*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \underset{=}{A}_{ij}.$$

Bevis. Ved $(i-1)$ rækkeombytninger efterfulgt af $(j-1)$ søjleombytninger overføres matricen

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix} & \leftarrow i \\
\begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & \uparrow & & \phantom{a_{nn}} \\ & & j & & \end{array} &
\end{array}$$

i matricen

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & & & \\
\vdots & & \underline{\underline{A}}_{ij} & \\
0 & & &
\end{pmatrix}.$$

Men så er

$$A_{ij} = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1}
\begin{vmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & & & \\
\vdots & & \underline{\underline{A}}_{ij} & \\
0 & & &
\end{vmatrix}
= (-1)^{i+j} \det \underline{\underline{A}}_{ij}$$

ifølge Sætning 3.4.3 og Sætning 3.4.5. Hermed er sætningen vist. □

Sætning 3.6.2. *For enhver $n \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ gælder*

$$\begin{aligned}
\det \underline{\underline{A}} &= a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}, \\
0 &= a_{j1}A_{i1} + \cdots + a_{jn}A_{in}, \quad j \neq i.
\end{aligned}$$

Bevis. Af definitionen på determinant

$$\det \underline{\underline{A}} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

fremgår, at

$$\det \underline{\underline{A}} = a_{i1}A^*_{i1} + \cdots + a_{ij}A^*_{ij} + \cdots + a_{in}A^*_{in}, \tag{4}$$

hvor $A^*_{i1}, \cdots, A^*_{in}$ ikke afhænger af elementerne i i'te række af $\underline{\underline{A}}$. Ændrer vi $\underline{\underline{A}}$, således at

$$a_{i1} = \cdots = a_{i,j-1} = a_{i,j+1} = \cdots = a_{i,n} = 0\,, \quad a_{ij} = 1,$$

fås derfor

$$A_{ij} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ j \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i = \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ j \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i = A_{ij}^* \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

idet overensstemmelsen mellem de 2 determinanter fremgår ved $n-1$ rækkeoperationer. Den første formel følger derfor af (4). Ændrer vi derimod $\underline{\underline{A}}$, således at i'te række i $\underline{\underline{A}}$ erstattes af j'te række i $\underline{\underline{A}}$, fås

$$0 = \begin{vmatrix} a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} = a_{j1}A_{i1}^* + \cdots + a_{jn}A_{in}^* = a_{j1}A_{i1} + \cdots + a_{jn}A_{in},$$

idet en $n \times n$-matrix med 2 ens rækker har determinant 0, og vi benytter det tidligere viste resultat $A_{ij}^* = A_{ij}$. □

Sætning 3.6.3. *For komplementmatricen*

$$K(\underline{\underline{A}}) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

hørende til en $n \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ gælder

$$\underline{\underline{A}}K(\underline{\underline{A}})^t = (\det \underline{\underline{A}})\underline{\underline{E}}.$$

Bevis. Af Sætning 3.6.2 fås

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}K(\underline{\underline{A}})^t[i,j] &= \underline{\underline{A}}[i,*] \cdot K(\underline{\underline{A}})^t[*,j] = \underline{\underline{A}}[i,*] \cdot K(\underline{\underline{A}})[j,*] \\ &= a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} \\ &= \begin{cases} \det \underline{\underline{A}} & \text{for} \quad j = i \\ 0 & \text{for} \quad j \neq i \end{cases}, \end{aligned}$$

og det viser påstanden. □

Sætning 3.6.4. *For en regulær matrix $\underline{\underline{A}}$ gælder*

$$\underline{\underline{A}}^{-1}[i,j] = \frac{A_{ji}}{\det \underline{\underline{A}}} = \frac{(-1)^{i+j} \det \underline{\underline{A}}_{ji}}{\det \underline{\underline{A}}},$$

d.v.s. den inverse matrix til $\underline{\underline{A}}$ er givet ved formlen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} K(\underline{\underline{A}})^t.$$

Bevis. Når $\underline{\underline{A}}$ er regulær viser Sætning 3.6.3, at

$$\underline{\underline{A}} \left(\frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} K(\underline{\underline{A}})^t \right) = \underline{\underline{E}}.$$

Af Sætning 2.6.6 følger heraf, at $\underline{\underline{A}}^{-1} = \dfrac{1}{\det \underline{\underline{A}}} K(\underline{\underline{A}})^t$. ☐

Eksempel 3.6.5. Vi betragter matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi udregner $\det \underline{\underline{A}} = -2$, og dermed er $\underline{\underline{A}}$ regulær. Vi udregner så

$$\begin{aligned} &\det \underline{\underline{A}}_{11} = -1, \quad &&\det \underline{\underline{A}}_{12} = -1, \quad &&\det A_{13} = -1 \\ &\det \underline{\underline{A}}_{21} = 0, \quad &&\det \underline{\underline{A}}_{22} = -2, \quad &&\det \underline{\underline{A}}_{23} = 0 \\ &\det \underline{\underline{A}}_{31} = -1, \quad &&\det \underline{\underline{A}}_{32} = -1, \quad &&\det \underline{\underline{A}}_{33} = 1, \end{aligned}$$

hvoraf (idet fortegnsfaktorerne $(-1)^{i+j}$ skal huskes)

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3.7 Udvikling af determinant

Sætning 3.7.1. *Lad $\underline{\underline{A}}$ være en $n \times n$-matrix. Da gælder for hvert $1 \leq i \leq n$, at*

$$\det \underline{\underline{A}} = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} = (-1)^{i+1} a_{i1} \det \underline{\underline{A}}_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det \underline{\underline{A}}_{in},$$
$$\det \underline{\underline{A}} = a_{1i}A_{1i} + \cdots + a_{ni}A_{ni} = (-1)^{1+i} a_{1i} \det \underline{\underline{A}}_{1i} + \cdots + (-1)^{n+i} a_{ni} \det \underline{\underline{A}}_{ni}.$$

Bevis. Den første formel blev vist i Sætning 3.6.2, og den alternative version følger af Sætning 3.6.1. Den anden formel fås af den første formel anvendt på $\underline{\underline{A}}^t$, idet vi benytter, at $\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{A}}^t$ (jvf. Sætning 3.4.2). □

Disse formler kaldes for *udviklingen* af $\det \underline{\underline{A}}$ efter i'te række hhv. i'te søjle. Vi har på denne måde udtrykt $\det \underline{\underline{A}}$ ved determinanter af lavere orden. For $i = 1$ fås specielt

$$\begin{aligned}\det \underline{\underline{A}} &= a_{11} \det \underline{\underline{A}}_{11} - a_{12} \det \underline{\underline{A}}_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det \underline{\underline{A}}_{1n}\\ \det \underline{\underline{A}} &= a_{11} \det \underline{\underline{A}}_{11} - a_{21} \det \underline{\underline{A}}_{21} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det \underline{\underline{A}}_{n1}.\end{aligned}$$

Normalt vil man vælge at udvikle efter rækker eller søjler med mange nuller. Eventuelt må man først ved række- eller søjleoperationer skaffe nuller (jvf. Eksempel 3.7.3).

Eksempel 3.7.2. Vi beregner en determinant ved udvikling efter første række:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -6 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 3 \\ -6 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2(-1) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3(-1) \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(12 - 10) + 3(14 + 18) = 92.$$

Til sammenligning giver udvikling efter 2. række:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -6 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 7 & 3 & 5 \\ -6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} \right) = -\left(2(12 - 10) - 3(14 + 18)\right) = 92.$$

Eksempel 3.7.3. Vi beregner en determinant ved først at udføre rækkeoperationer, og dernæst udvikle efter første søjle

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5R_4 \\ -2R_4 \\ +5R_4 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & 7 & -19 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & -17 & -8 & 29 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 14 & 7 & -19 \\ 7 & 3 & -10 \\ -17 & -8 & 29 \end{vmatrix} = 38.$$

Bemærk, at Sætning 3.4.5, der blev benyttet på afgørende måde ved udledning af tidligere sætninger, er et specialtilfælde af Sætning 3.7.1 (udvikling efter 1. søjle).

4 Vektorrum

4.1 Definition af vektorrum; eksempler

Lad V være en mængde, hvori der er givet to operationer, nemlig multiplikation af et element med en skalar og dannelse af to elementers sum; dette betyder, at der til et reelt tal $\lambda \in \mathbf{R}$ og et element $\underline{x} \in V$ er knyttet et nyt element $\lambda\underline{x} \in V$ kaldet $\underline{x}$ *multipliceret med* λ, og til to elementer $\underline{x}, \underline{y} \in V$ er der knyttet et nyt element $\underline{x} + \underline{y} \in V$ kaldet *summen* af $\underline{x}$ og $\underline{y}$.

Definition 4.1.1. (Regneregler i et vektorrum) Mængden V udstyret med de to givne operationer siges at være et *vektorrum*, hvis følgende regneregler er opfyldt: For vilkårlige vektorer $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ i V og vilkårlige tal λ, μ i $\mathbf{R}$ gælder

V1: $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$

V2: $\underline{x} + \underline{o} = \underline{x}$

V3: $\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{o}$

V4: $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$

V5: $\lambda(\underline{x} + \underline{y}) = \lambda\underline{x} + \lambda\underline{y}$

V6: $(\lambda + \mu)\underline{x} = \lambda\underline{x} + \mu\underline{x}$

V7: $(\lambda\mu)\underline{x} = \lambda(\mu\underline{x})$

V8: $1\underline{x} = \underline{x}$

Elementerne i et vektorrum kaldes også for *vektorer*. Regnereglen V2 skal forstås således, at der findes en vektor $\underline{o}$, kaldet *nulvektoren*, så V2 er opfyldt. Det ses let, at der kun findes en nulvektor i et vektorrum. Regnereglen V3 skal forstås således, at der for hver vektor $\underline{x} \in V$ findes en vektor $\underline{y} \in V$ så $\underline{x} + \underline{y} = \underline{o}$. Det ses let, at der kun findes et sådant element $\underline{y}$. Dette element kaldes så $-\underline{x}$. Det ses let, at $-\underline{x} = (-1)\underline{x}$ og at $0\underline{x} = \underline{o}$ for alle vektorer i vektorrummet V. For to vektorer $\underline{x}$, $\underline{y}$ sættes $\underline{x} - \underline{y} = \underline{x} + (-1)\underline{y}$. Det ses let, at hvis $\underline{x} + \underline{y} = \underline{z}$ er $\underline{x} = \underline{z} - \underline{y}$.

Vi indfører betegnelsen $\mathbf{R}^0 = \{0\}$. Dette er et eksempel på et vektorrum, der kun indeholder et element, nemlig nulvektoren $\underline{o} = 0$.

Eksempel 4.1.2. Talrummet $\mathbf{R}^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ er et vektorrum. Det følger af Sætning 1.1.2. Bemærk udseendet af $\underline{o}$ og $-\underline{x}$.

Eksempel 4.1.3. Med $\mathbf{M}_{m,n}$ betegnes mængden af alle $m \times n$-matricer. Med de i afsnit 1.4 indførte matrixoperationer multiplikation med skalar og addition, er $\mathbf{M}_{m,n}$ et vektorrum, jvf. regnereglerne M1-M8 i Sætning 1.4.4.

Eksempel 4.1.4. Lad Pol $(\mathbf{R})$ betegne mængden af polynomier i en variabel, dvs. funktioner p af formen

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \ x \in \mathbf{R},$$

hvor $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$, og $n \in \mathbf{N}_0$. Vi udstyrer Pol $(\mathbf{R})$ med sædvanlig addition og med sædvanlig multiplikation med skalarer. Herved bliver Pol $(\mathbf{R})$ et vektorrum med nulpolynomiet som nulvektor. Hvis f.eks. p og q er polynomierne givet ved

$$\begin{aligned} p(x) &= 3 - x + x^4 - 5x^6, \\ q(x) &= x + 2x^6 + x^7, \end{aligned}$$

er $p + q$ givet ved

$$(p+q)(x) = 3 + x^4 - 3x^6 + x^7.$$

4.2 Lineære afbildninger; isomorfi

Lad U og V være vektorrum.

Definition 4.2.1. Ved en *lineær afbildning* f fra U til V forstås en afbildning $f : U \to V$, så

L1: $f(\lambda \underline{x}) = \lambda f(\underline{x})$ for alle $\underline{x} \in U, \ \lambda \in \mathbf{R}$.

L2: $f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$ for alle $\underline{x}, \underline{y} \in U$.

En lineær afbildning kaldes også for en *homomorfi*.

Tilsammen kaldes L1 og L2 for *linearitetsbetingelserne*. Hvis $U = \mathbf{R}^n$ og $V = \mathbf{R}^m$, ses, at der er overensstemmelse med vores tidligere betegnelser (Sætning 1.3.9).

Bemærk, at vi for $U = \mathbf{R}^n$ og $V = \mathbf{R}^m$ har to måder på hvilken vi kan udtrykke at en afbildning $f : U \to V$ er lineær, nemlig dels at f er givet ved en matrix, og dels at f opfylder linearitetsbetingelserne L1 og L2. Hvis U og V er vilkårlige vektorrum kan vi ikke umiddelbart definere linearitet af en afbildning $f : U \to V$ ved hjælp af matricer, men må benytte L1 og L2. Det ses let, at der for en lineær afbildning $f : U \to V$ gælder, at $f(\underline{o}) = \underline{o}$.

Lad U, V og W være vektorrum.

Sætning 4.2.2. *Hvis $f : W \to V$ og $g : U \to W$ er lineære afbildninger, da er den sammensatte afbildning $f \circ g : U \to V$ ligeledes lineær.*

Bevis. Det vises uden komplikationer, at $f \circ g$ opfylder L1 og L2, når f og g gør det. $\square$

Lad V være et vektorrum. Vi vil et øjeblik se på lineære afbildninger $f : \mathbf{R}^n \to V$. Idet vi sætter $\underline{a}_j = f(\underline{e}_j)$, $j = 1, \cdots, n$ hvor $\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n$ er standard enhedsvektorerne i $\mathbf{R}^n$, får vi for en vektor

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n,$$

at

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= f(x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n) \\ &= x_1 f(\underline{e}_1) + \cdots + x_n f(\underline{e}_n) = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n, \end{aligned}$$

altså

$$f(\underline{x}) = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n. \tag{$*$}$$

Hvis $V = \mathbf{R}^m$ genfinder vi udtrykket fra afsnit 1.3, og i dette tilfælde er $\underline{a}_j$ den j'te søjlevektor for matricen $\underset{=}{A}$ hørende til f.

Sætning 4.2.3. *Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være vektorer i vektorrummet V. Afbildningen $f : \mathbf{R}^n \to V$ givet ved*

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n$$

er lineær, og alle lineære afbildninger $f : \mathbf{R}^n \to V$ har denne form. Der gælder $\underline{a}_j = f(\underline{e}_j)$.

Bevis. Hvis f er lineær har vi ovenfor set, at f har formen $(*)$, og det er klart, at $\underline{a}_j = f(\underline{e}_j)$. Antag nu omvendt, at $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er givne vektorer i V, og definer afbildningen $f : \mathbf{R}^n \to V$ ved formlen $(*)$. Det eftervises så umiddelbart, at f opfylder L1 og L2, og dermed er f lineær. $\square$

Lad U og V være vektorrum.

Definition 4.2.4. En bijektiv lineær afbildning $f : U \to V$ kaldes for en *isomorfi* fra U til V.

To vektorrum U og V kaldes *isomorfe*, hvis der findes en isomorfi fra U til V.

Sætning 4.2.5. *Lad U, V og W være vektorrum.*

(1) *Den identiske afbildning* $\mathrm{id}_U : U \to U$ *er en isomorfi.*

(2) *Hvis $f : U \to V$ er en isomorfi, er $f^{-1} : V \to U$ en isomorfi.*

(3) *Hvis $f : W \to V$ og $g : U \to W$ er isomorfier, er $f \circ g : U \to V$ en isomorfi.*

Bevis. (1): Den identiske afbildning er oplagt lineær og bijektiv, altså en isomorfi. (2): Hvis $f : U \to V$ er bijektiv, er $f^{-1} : V \to U$ bijektiv. At yderligere f^{-1} er lineær, hvis f er det, ses ved at vise, at f^{-1} opfylder L1 og L2; dette gøres på nøjagtigt samme måde som i beviset for Sætning 1.5.1. (3): Hvis $f : W \to V$ og $g : U \to W$ er isomorfier, da er $f \circ g$ bijektiv og lineær, da sammensætning af to bijektive afbildninger igen er bijektiv (A.2), og da sammensætning af to lineære afbildninger igen er lineær (Sætning 4.2.2). □

4.3 Endeligdimensionale vektorrum; basis

Sætning 4.3.1. *Hvis $\mathbf{R}^m$ er isomorft med $\mathbf{R}^n$, da er $m = n$.*

Bevis. Hvis $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er bijektiv og lineær, da er $m = n$ ifølge Sætning 2.4.2. □

Definition 4.3.2. Et vektorrum V kaldes *endeligdimensionalt*, hvis det er isomorft med et talrum $\mathbf{R}^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Dimensionen* $\dim V$ sættes i givet fald til n.

Bemærk, at hvis et vektorrum er isomorft med $\mathbf{R}^m$ og med $\mathbf{R}^n$, da er $\mathbf{R}^m$ og $\mathbf{R}^n$ isomorfe ifølge Sætning 4.2.5, og dermed er $m = n$ ifølge Sætning 4.3.1. Dimensionen $\dim V$ af et endeligdimensionalt vektorrum er derfor veldefineret. Bemærk også, at hvis $\dim V = 0$, da er $V = \{\underline{o}\}$.

Lad V være et vektorrum.

Definition 4.3.3. Et sæt af vektorer $\underline{a}_1, \cdots \underline{a}_n$ i V kaldes en *basis* for V, hvis hver vektor a i V på netop en måde kan skrives på formen

$$\underline{a} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n,$$

hvor $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

Antag, at $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er en basis i V. Skrives en vektor $\underline{a} \in V$ på formen $\underline{a} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n$ kaldes tallene $x_1, \cdots, x_n$ for *koordinaterne* for vektoren $\underline{a}$ med hensyn til basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$; tilsvarende taler vi om *koordinatsættet* $(x_1, \cdots, x_n)$ og *koordinatsøjlen* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ for $\underline{a}$.

Lad $\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n$ være standardenhedsvektorerne i $\mathbf{R}^n$. Idet det gælder

$$x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ses, at $\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n$ er en basis for det n-dimensionale vektorrum $\mathbf{R}^n$. Denne basis kaldes for den *naturlige basis* i $\mathbf{R}^n$. Koordinatsøjlen for vektoren

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

med hensyn til den naturlige basis er vektoren $\underline{x}$ selv.

Eksempel 4.3.4. Vektorrummet $\mathbf{M}_{m,n}$ af $m \times n$-matricer er et mn-dimensionalt vektorrum. I specialtilfældet $m = 2$, $n = 3$ ses, at en isomorfi $f : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{M}_{2,3}$ er givet ved

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}.$$

Tilsvarende opskrives let en isomorfi fra $\mathbf{R}^{mn}$ til $\mathbf{M}_{m,n}$ for vilkårlige m og n.

En basis for $\mathbf{M}_{2,3}$ er

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I $\mathbf{M}_{m,n}$ udgør de elementære matricer $\underline{\underline{I}}_{i,j}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ en basis.

Sætning 4.3.5. *Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være et sæt af vektorer i vektorrummet V. Den lineære afbildning $f : \mathbf{R}^n \to V$ givet ved*

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \underline{a}_1 + \cdots + x_n \underline{a}_n$$

er en isomorfi netop når $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er en basis.

Bevis. At f er en isomorfi betyder, at f er bijektiv, altså, at der for hver vektor $\underline{a} \in V$ findes netop en vektor $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$, så $f(\underline{x}) = \underline{a}$. Men det betyder netop, at $\underline{a}_1, \cdots \underline{a}_n$ er en basis. □

Sætning 4.3.6. *Et vektorrum V har en basis netop hvis det er endeligdimensionalt. I givet fald indeholder enhver basis for V netop* $\dim V$ *elementer.*

Bevis. Antag, at V er endeligdimensionalt med $\dim V = n$. Der findes da en isomorfi $f : \mathbf{R}^n \to V$, og denne har formen

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \underline{a}_1 + \cdots + x_n \underline{a}_n \qquad (*)$$

ifølge Sætning 4.2.3. Men da f er en isomorfi, er $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ en basis ifølge Sætning 4.3.5. Hvis omvendt $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er en basis for V, er den lineære afbildning givet ved formlen $(*)$ en isomorfi også ifølge Sætning 4.3.5, og dermed er V isomorft med $\mathbf{R}^n$, og dermed endeligdimensionalt med $\dim V = n$. □

Sætning 4.3.7. *Et sæt $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ af n vektorer i $\mathbf{R}^n$ er en basis netop hvis $n \times n$-matricen*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \cdots & \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

er regulær.

Bevis. Sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er en basis netop når den lineære afbildning $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ givet ved

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n \tag{$*$}$$

er bijektiv. Men f er den lineære afbildning givet ved matricen $\underline{\underline{A}}$, og f er bijektiv netop når $\underline{\underline{A}}$ er regulær. □

Eksempel 4.3.8. I $\mathbf{R}^3$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Vi ønsker at undersøge om $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ er en basis i $\mathbf{R}^3$. Vi opskriver matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$

og finder, at $\det \underline{\underline{A}} = 2$. Matricen $\underline{\underline{A}}$ er altså regulær, og dermed er $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ en basis. Der er så yderligere givet vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Vi ønsker at finde koordinaterne for $\underline{a}$ med hensyn til basen $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$. Vi skal altså løse ligningen

$$\underline{a} = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3\underline{a}_3,$$

altså ligningen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Dette gøres på sædvanlig måde, og man finder at det søgte koordinatsæt er $(x_1, x_2, x_3) = (5, -2, 3)$.

4.4 Underrum

Lad V være et vektorrum.

Definition 4.4.1. En ikke-tom delmængde $U \subseteq V$ kaldes for et *underrum* hvis følgende to betingelser er opfyldt

U1: Hvis $\underline{x} \in U$ og $\lambda \in \mathbf{R}$ gælder $\lambda\underline{x} \in U$.

U2: Hvis $\underline{x}, \underline{y} \in U$ gælder $\underline{x} + \underline{y} \in U$.

Bemærk, at hvis U er et underrum er $\underline{o} \in U$; hvis nemlig $\underline{x}$ er et element i U er ifølge U1 også vektoren $0\underline{x} = \underline{o}$ et element i U.

Vi udtrykker U1 og U2 ved at sige, at et underrum er *stabilt* ved vektorrumsoperationerne. I et underrum U af vektorrummet V gælder naturligvis regnereglerne V1-V8 (Definition 4.1.1), så U er i sig selv et vektorrum. Vi kan derfor specielt tale om, at et underrum kan have endelig dimension, og i givet fald om dets dimension samt om baser herfor.

Bemærk specielt, at $\{\underline{o}\}$ og V begge er underrum i vektorrummet V. Disse to underrum kaldes *trivielle*.

Eksempel 4.4.2. I $\mathbf{R}^3$ betragtes mængden

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} | x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Det verificeres let at U1 og U2 er opfyldt for N, og dermed at N er et underrum. Derimod er mængden

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} | x_1 + x_2 + x_3 = 1 \right\}.$$

ikke et underrum; faktisk er hverken U1 eller U2 opfyldt for M, idet f.eks. $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$ medens $2\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin M$ og $\underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$ medens $\underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin M$.

Definition 4.4.3. Lad V være et vektorrum, og lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være et sæt af vektorer i V. En vektor $\underline{a}$ af formen

$$\underline{a} = \lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{a}_n,$$

hvor $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, siges at være en *linearkombination* af vektorerne $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$.

Bemærk, at et sæt af vektorer $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ i vektorrummet V er en basis netop når enhver vektor $\underline{a} \in V$ på entydig måde kan skrives som linearkombination af $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$.

Eksempel 4.4.4. I $\mathbf{R}^3$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Idet

$$3\underline{a}_1 - 2\underline{a}_2 = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

ses, at $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ er en linearkombination af $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_2$. Vi betragter så vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix},$$

hvor $k \in \mathbf{R}$. Vi ønsker at undersøge, for hvilke værdier af k vektoren $\underline{a}$ er en linearkombination af $\underline{a}_1, \underline{a}_2$. Det drejer sig altså om at finde x_1, x_2 så

$$\underline{a} = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2,$$

altså så

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix},$$

hvilket igen betyder, at vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}.$$

Dette gøres på sædvanlig måde, og man finder at dette ligningssystem kan løses netop når $k = -8$. For denne værdi af k er løsningen $(x_1, x_2) = (-1, 2)$. For $k \neq -8$ er $\underline{a}$ altså *ikke* en linearkombination af vektorerne $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_2$. For $k = -8$ er derimod $\underline{a} = -\underline{a}_1 + 2\underline{a}_2$.

Sætning 4.4.5. *Lad M være en ikke-tom delmængde af V. Mængden af alle linearkombinationer af vektorer i M udgør et underrum i V. Det kaldes det af M frembragte underrum, og betegnes* span M.

Bevis. Hvis
$$\underline{a} = \lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{a}_n,$$
hvor $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ og $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n \in M$, gælder for $\lambda \in \mathbf{R}$ at
$$\lambda\underline{a} = \lambda\lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda\lambda_n\underline{a}_n,$$
der er i span M; dette viser, at span M opfylder U1. Antag så, at
$$\underline{a} = \lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{a}_n,$$
og
$$\underline{b} = \mu_1\underline{b}_1 + \cdots + \mu_m\underline{b}_m,$$
hvor $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ og $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n \in M$, $\mu_1, \cdots, \mu_m \in \mathbf{R}$ og $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_m \in M$; da er
$$\underline{a} + \underline{b} = \lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{a}_n + \mu_1\underline{b}_1 + \cdots + \mu_m\underline{b}_m,$$
der er i span M; dette viser at U2 er opfyldt. Hermed er vist, at span M er et underrum. □

Hvis U er et underrum i vektorrummet V, og M er en delmængde af U ses det let, at span $M \subseteq U$. Endvidere ses let, at M er et underrum netop hvis span $M = M$.

Lad U og V være vektorrum, og lad $f : U \to V$ være en lineær afbildning.

Definition 4.4.6. Ved *kernen* $\ker f$ for f forstås mængden
$$\ker f = \{\underline{x} \in U \mid f(\underline{x}) = \underline{o}\}.$$

Sætning 4.4.7. *Kernen* $\ker f$ *for den lineære afbildning* $f : U \to V$ *er et underrum i* U*. Ligeledes er billedet* $f(U)$ *af* U *ved* f *et underrum i* V*.*

Bevis. Først ser vi på kernen $K = \ker f$. Hvis $\underline{x} \in K$ og $\lambda \in \mathbf{R}$ er $f(\lambda\underline{x}) = \lambda f(\underline{x}) = \lambda\underline{o} = \underline{o}$; dette viser, at U1 er opfyldt. Hvis $\underline{x}, \underline{y} \in K$ er $f(\underline{x}+\underline{y}) = f(\underline{x})+f(\underline{y}) = \underline{o}+\underline{o} = \underline{o}$; dette viser, at U2 er opfyldt. Hermed er vist, at K er et underrum. Dernæst ser vi på $f(U)$. Hvis $\lambda \in \mathbf{R}$ og $\underline{y} \in f(U)$ findes $\underline{x} \in U$ så $\underline{y} = f(\underline{x})$, og dermed er $\lambda\underline{y} = \lambda f(\underline{x}) = f(\lambda\underline{x}) \in f(U)$; dette viser, at U1 er opfyldt. Hvis $\underline{y}_1, \underline{y}_2 \in f(U)$ findes $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in U$, så $f(\underline{x}_1) = \underline{y}_1$ og $f(\underline{x}_2) = \underline{y}_2$, og dermed er $\underline{y}_1 + \underline{y}_2 = f(\underline{x}_1) + f(\underline{x}_2) = f(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) \in f(U)$; dette viser, at U2 er opfyldt. Hermed er vist, at $f(U)$ er et underrum. □

Sætning 4.4.8. *Den lineære afbildning* $f : U \to V$ *er injektiv netop når* $\ker f = \{\underline{o}\}$*.*

Bevis. Dette bevises nøjagtigt som Sætning 2.4.1. □

Lad $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning, og lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ være den tilhørende matrix. Idet

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ses, at kernen for f netop er løsningsmængden til ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hvis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er søjlevektorerne i $\underline{\underline{A}}$, er

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n,$$

hvoraf ses, at $f(U) = \text{ span } \{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$.

Eksempel 4.4.9. En lineær afbildning $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ er givet ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vi vil bestemme kernen $K = \ker f$ for f. Vi skal altså løse ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{0}}$, hvor $\underline{\underline{X}} \in \mathbf{R}^5$. Dette gøres på sædvanlig måde, og vi finder at løsningsmængden beskrives ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_1 - 3t_2 \\ t_1 \\ -2t_2 \\ 4t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}.$$

Hermed har vi fundet K. Sætter vi

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ses, at enhver vektor $\underline{x}$ i K kan skrives på netop en måde på formen $\underline{x} = t_1\underline{a}_1 + t_2\underline{a}_2$, altså er $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ en basis for K.

4.5 Lineær afhængighed; lineær uafhængighed

Lad V være et vektorrum.

Definition 4.5.1. Et sæt af vektorer $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ i V kaldes *lineært uafhængigt*, hvis ligningen

$$x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n = \underline{o}$$

kun har løsningen $(x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0)$. Hvis sættet ikke er lineært uafhængigt kaldes det *lineært afhængigt*.

Bemærk, at en basis for V (eller for et underrum heraf) består af lineært uafhængige vektorer.

Eksempel 4.5.2. I $\mathbf{R}^4$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vi vil undersøge om sættet $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ er lineært uafhængigt. Vi skal løse ligningen $x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3\underline{a}_3 = \underline{o}$, altså ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dette gøres på sædvanlig måde, og man finder at der kun er løsningen $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Det givne sæt er altså lineært uafhængigt.

Sætning 4.5.3. *Et sæt $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ af vektorer i vektorrummet V er lineært afhængigt netop hvis en af sættets vektorer kan skrives som linearkombination af de øvrige.*

Bevis. Antag, at en af sættets vektorer, f.eks. $\underline{a}_n$, kan skrives som linearkombination af de øvrige. Der findes da $x_1, \cdots, x_{n-1} \in \mathbf{R}$ så

$$\underline{a}_n = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_{n-1}\underline{a}_{n-1};$$

men så er

$$x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_{n-1}\underline{a}_{n-1} - \underline{a}_n = \underline{o},$$

og dette viser, at sættet er lineært afhængigt. Antag omvendt, at sættet er lineært afhængigt. Da findes et sæt $(x_1, \cdots, x_n) \neq (0, \cdots, 0)$, så

$$x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n = \underline{o}.$$

Ikke alle tallene $x_1, \cdots, x_n$ kan være nul. Hvis f.eks. $x_n \neq 0$ får vi

$$\underline{a}_n = -\frac{x_1}{x_n}\underline{a}_1 + \cdots + -\frac{x_{n-1}}{x_n}\underline{a}_{n-1},$$

og altså er $\underline{a}_n$ en linearkombination af de øvrige. $\square$

Eksempel 4.5.4. I $\mathbf{R}^3$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Det ses umiddelbart, at $\underline{a}_3 = 2\underline{a}_1 - \underline{a}_2$, og dermed er det givne sæt af vektorer lineært afhængigt.

Et sæt bestående af en vektor $\underline{a}_1$ er lineært uafhængigt netop hvis $\underline{a}_1 \neq 0$. Et sæt bestående af to vektorer $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ er lineært uafhængigt netop hvis de to vektorer ikke er proportionale.

Sætning 4.5.5. *Et sæt af vektorer $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ i vektorrummet V er lineært uafhængigt netop hvis den lineære afbildning $f : \mathbf{R}^n \to V$ givet ved*

$$f\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n$$

er injektiv.

Bevis. Løsningsmængden for ligningen $x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n = \underline{o}$ er netop kernen $\ker f$ for f. Derfor gælder, at sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er lineært uafhængigt netop hvis $\ker f = \{\underline{o}\}$; men det er tilfældet netop hvis f er injektiv (Sætning 4.4.8). $\square$

Sætning 4.5.6. *Et sæt af vektorer $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ i vektorrummet V er lineært uafhængigt netop hvis det udgør en basis for* span $\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$.

Bevis. Sæt $U =$ span $\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$. Det er klart, at hvis sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er en basis i U, da er det lineært uafhængigt. Antag så, at sættet er lineært uafhængigt. Da er den lineære afbildning $f : \mathbf{R}^n \to U$ givet ved

$$f\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n$$

injektiv; da f ifølge definitionen af U er surjektiv, er f bijektiv og altså en isomorfi. Men så er $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ en basis i U (Sætning 4.3.5). $\square$

Sætning 4.5.7. *Lad V være et endeligdimensionalt vektorrum, og lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være et sæt af lineært uafhængige vektorer i V. Der gælder da, at $n \leq \dim V$, og $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er en basis netop når $n = \dim V$.*

Bevis. Sæt $m = \dim V$, og lad $\varphi : \mathbf{R}^m \to V$ være en isomorfi. Lad $f : \mathbf{R}^n \to V$ være den lineære afbildning givet ved

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n.$$

Denne afbildning er injektiv, da $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er lineært uafhængige. Men så er afbildningen $\varphi^{-1} \circ f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ også injektiv, hvorfor $n \leq m$ (Sætning 2.4.2). Videre gælder, at $\varphi^{-1} \circ f$ er bijektiv netop når $n = m$ (jvf. Sætningerne 2.3.11, 2.3.13(2) og 2.4.2), og da $\varphi^{-1} \circ f$ er bijektiv netop når f er det, er sætningen vist. □

Sætning 4.5.8. *Lad V være et endeligdimensionalt vektorrum, og lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være et sæt af vektorer i V, der frembringer V. Der gælder da, at $n \geq \dim V$, og $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er en basis netop når $n = \dim V$.*

Bevis. Sæt $m = \dim V$, og lad $\varphi : \mathbf{R}^m \to V$ være en isomorfi. Lad $f : \mathbf{R}^n \to V$ være den lineære afbildning givet ved

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n.$$

Denne afbildning er surjektiv, da $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ frembringer V. Men så er afbildningen $\varphi^{-1} \circ f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ også surjektiv, hvorfor $n \geq m$ (Sætning 2.4.2). Videre gælder, at $\varphi^{-1} \circ f$ er bijektiv når $n = m$, og da $\varphi^{-1} \circ f$ er bijektiv netop når f er det, er sætningen vist. □

Sætning 4.5.9. *Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være et sæt af lineært uafhængige vektorer i vektorrummet V, og lad $\underline{a}_{n+1}$ være yderligere en vektor i V. Da er $\underline{a}_{n+1} \in$ span $\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$ netop hvis sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n, \underline{a}_{n+1}$ er lineært afhængigt.*

Bevis. Antag, at sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_{n+1}$ er lineært afhængigt. Da findes et talsæt $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \neq (0, \cdots, 0, 0)$ så

$$x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n + x_{n+1}\underline{a}_{n+1} = \underline{o}.$$

Hvis $x_{n+1} = 0$, er

$$x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n = \underline{o},$$

og dermed er $(x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0)$, da $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er lineært uafhængige. Men det giver modstrid; altså gælder, at $x_{n+1} \neq 0$, og dermed er

$$\underline{a}_{n+1} = -\frac{x_1}{x_{n+1}}\underline{a}_1 - \cdots - \frac{x_n}{x_{n+1}}\underline{a}_n.$$

Heraf ses, at $\underline{a}_{n+1} \in \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$. Hvis omvendt $\underline{a}_{n+1} \in \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$ er det klart, at sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n, \underline{a}_{n+1}$ er lineært afhængigt. Hermed er sætningen vist. □

Definition 4.5.10. Lad M være en delmængde af vektorrummet V. Ved et *maksimalt lineært uafhængigt* sæt af vektorer fra M forstås et sæt af lineært uafhængige vektorer $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n \in M$, der ikke kan udvides til et større lineært uafhængigt sæt $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n, \underline{a}_{n+1} \in M$.

Eksempel 4.5.11. Vi betragter delmængden $M = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\} \subseteq \mathbf{R}^3$, hvor

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Idet $\underline{a}_3 = \underline{o}$ ikke kan være indeholdt i et lineært uafhængigt sæt af vektorer må et lineært uafhængigt delsæt af M være indeholdt i $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4\}$. Idet $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_2$ er lineært afhængige kan disse ikke samtidigt være indeholdt i et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra M. Derfor er der to maksimalt lineært uafhængige delsæt af M, nemlig $\{\underline{a}_1, \underline{a}_4\}$ og $\{\underline{a}_2, \underline{a}_4\}$.

Sætning 4.5.12. *Lad M være en delmængde af det endeligdimensionale vektorrum V. Ethvert lineært uafhængigt sæt af vektorer fra M (specielt det tomme sæt) kan udvides til et maksimalt lineært uafhængigt sæt af vektorer fra M.*

Bevis. Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_p$ være det givne sæt af lineært uafhængige vektorer fra M. Hvis ikke allerede dette sæt selv er maksimalt, findes der en vektor $\underline{a}_{p+1} \in M$, således at også sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_p, \underline{a}_{p+1}$ er lineært uafhængigt; hvis heller ikke dette sæt er maksimalt tilføjes på samme måde endnu en vektor etc. Til sidst når vi frem til et maksimalt lineært uafhængigt sæt, da et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra V højst kan indeholde $\dim V$ lineært uafhængige vektorer (Sætning 4.5.7). □

Sætning 4.5.13. *Lad M være en delmængde af det endeligdimensionale vektorrum V. Ethvert maksimalt lineært uafhængigt sæt af vektorer fra M er en basis for* $\operatorname{span} M$.

Bevis. Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være et maksimalt lineært uafhængigt sæt af vektorer fra M, og $\underline{a} \in M$. Idet sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n, \underline{a}$ *ikke* er lineært uafhængigt, altså lineært afhængigt, er $\underline{a} \in \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$ ifølge Sætning 4.5.9. Hermed har vi vist, at $M \subseteq \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$; men så er $\operatorname{span} M \subseteq \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$, altså er $\operatorname{span}\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\} = \operatorname{span} M$, og det viser, at $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er en basis for $\operatorname{span} M$ (Sætning 4.5.6). □

Sætning 4.5.14. *Et underrum U af et endeligdimensionalt vektorrum V er endeligdimensionalt og* $\dim U \leq \dim V$.

Bevis. Et maksimalt lineært uafhængigt sæt af vektorer fra det givne underrum U er en basis for $\operatorname{span} U = U$. □

Sætning 4.5.15. *Et lineært uafhængigt sæt af vektorer i det endeligdimensionale vektorrum V kan udvides til en basis for V.*

Bevis. Det følger af Sætning 4.5.12. □

4.6 Udtyndingsalgoritmen; udvidelsesalgoritmen

Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være et sæt af vektorer i et endeligdimensionalt vektorrum. Der findes da et delsæt af $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$, der er en basis for span $\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$ (nemlig et maksimalt lineært uafhængigt sæt af vektorer i $\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$ ifølge Sætning 4.5.13). Vi skal nu se på hvorledes man i praksis finder et sådant delsæt i tilfældet $V = \mathbf{R}^m$.

Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være et sæt af vektorer fra $\mathbf{R}^m$. Vi opskriver matricen $\underline{\underline{A}}$ der har $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ til søjlevektorer:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \cdots & \underline{a}_n \end{pmatrix}.$$

Udfører vi nu rækkeoperationer på $\underline{\underline{A}}$, så der herved fremkommer en ny matrix

$$\underline{\underline{A}}' = \begin{pmatrix} \underline{a}'_1 & \cdots & \underline{a}'_n \end{pmatrix},$$

gælder, at delsættet $\underline{a}_{j_1}, \cdots, \underline{a}_{j_d}$ svarende til søjlenumrene $j_1, \cdots, j_d$ i matricen $\underline{\underline{A}}$ er lineært uafhængigt netop når delsættet $\underline{a}'_{j_1}, \cdots, \underline{a}'_{j_d}$ svarende til de samme søjlenumre i matricen $\underline{\underline{A}}'$, er lineært uafhængigt; thi ligningen

$$x_1\underline{a}_{j_1} + \cdots + x_d\underline{a}_{j_d} = \underline{o}$$

har samme løsningsmængde som ligningen

$$x_1\underline{a}'_{j_1} + \cdots + x_d\underline{a}'_{j_d} = \underline{o},$$

og dermed har de specielt samtidigt løsningsmængden $(x_1, \cdots, x_d) = (0, \cdots, 0)$.

Omdanner vi specielt $\underline{\underline{A}}$ til en trappematrix $\underline{\underline{A}}'$ ses, at hvis vi vælger $j_1, \cdots, j_d$ til at være trinpositionerne i $\underline{\underline{A}}'$, da er $\underline{a}'_{j_1}, \cdots, \underline{a}'_{j_d}$ en basis for span $\{\underline{a}'_1, \cdots, \underline{a}'_n\}$, altså et maksimalt lineært uafhængigt delsæt af $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$. Men så er $\underline{a}_{j_1}, \cdots, \underline{a}_{j_d}$ et maksimalt lineært uafhængigt delsæt af $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$, altså en basis for span $\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$. Den angivne metode til at finde et delsæt af $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$, der udgør en basis for span $\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$, kalder vi her for *udtyndingsalgoritmen.*

Eksempel 4.6.1. I $\mathbf{R}^4$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vi vil finde en basis for underrummet frembragt af disse vektorer ved hjælp af udtyndingsalgoritmen. Vi opskriver matricen, der har de givne vektorer til søjlevektorer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Denne omdannes ved hjælp af rækkeoperationer til en trappematrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Det ses heraf, at $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4$ er en basis for $\operatorname{span}\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_5\}$. Ønsker vi at udtrykke vektorerne $\underline{a}_3$ og $\underline{a}_5$ som linearkombination af den fundne basis, er det bekvemt at gå videre og omdanne den fundne trappematrix til en reduceret trappematrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 & -39 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Heraf aflæses umiddelbart, at

$$\underline{a}_3 = 7\underline{a}_1 - 3\underline{a}_2 \quad \text{og} \quad \underline{a}_5 = -39\underline{a}_1 + 31\underline{a}_2 - 7\underline{a}_4.$$

Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være et *lineært uafhængigt* sæt af vektorer i et endeligdimensionalt vektorrum. Dette sæt kan udvides til en basis for V (Sætning 4.5.15). Vi skal nu se på, hvorledes man i praksis finder en sådan udvidelse i tilfældet $V = \mathbf{R}^m$: Vi opskriver vektorsættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n, \underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_m$, hvor $\underline{e}_j$ betegner den j'te standardenhedsvektor. Dette sæt frembringer V, da allerede vektorerne $\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_m$ gør det. Udtyndingsalgoritmen anvendt på sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n, \underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_m$ giver derfor en basis for V, hvis første elementer er $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$, altså den søgte udvidelse af det lineært uafhængige sæt $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ til en basis for V. Vi kalder her denne procedure for *udvidelsesalgoritmen*.

Eksempel 4.6.2. I $\mathbf{R}^4$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Disse ses let at være lineært uafhængige. Vi vil udvide sættet $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ til en basis for $\mathbf{R}^4$. Vi opskriver matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

og omdanner denne til en trappematrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Heraf aflæses, at $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_3$ er en basis for $\mathbf{R}^4$.

4.7 Direkte sum af underrum

Lad V være et vektorrum, og lad U_1 og U_2 være to underrum i V.

Definition 4.7.1. Vektorrummet V siges at være *direkte sum* af underrummene U_1 og U_2, hvis hver vektor $\underline{v} \in V$ på netop en måde kan skrives på formen

$$\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2,$$

hvor $\underline{u}_1 \in U_1$ og $\underline{u}_2 \in U_2$; er dette tilfældet skrives

$$V = U_1 \oplus U_2.$$

Vektoren $\underline{u}_1$ kaldes *projektionen af* $\underline{v}$ på U_1 *langs* U_2, og vektoren $\underline{u}_2$ kaldes *projektionen af* $\underline{v}$ på U_2 *langs* U_1.

At V er direkte sum af U_1 og U_2 udtrykkes også ved at sige, at de to underrum er *komplementære* i V.

Eksempel 4.7.2. I $\mathbf{R}^3$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lad U_1 være underrummet udspændt af $\underline{a}_1$, og lad U_2 være underrummet udspændt af $\underline{a}_2, \underline{a}_3$. Vi har

$$t_1\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad t_2\underline{a}_2 + t_3\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

Det ses, at enhver vektor $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ på netop en måde kan skrives på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix},$$

idet nemlig $t_3 = x_3$, $t_2 = x_2$ og $t_1 = x_1 - x_2$. Det aflæses heraf, at projektionen $\underline{u}_1$ af $\underline{x}$ på U_1 langs U_2 hhv. projektionen $\underline{u}_2$ af $\underline{x}$ på U_2 langs U_1 er

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{hhv.} \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Lad V være et endeligdimensionalt vektorrum, og lad U_1 og U_2 være to underrum i V.

Sætning 4.7.3. *Hvis* $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_m$ *er en basis for* U_1 *og* $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ *er en basis for* U_2*, da er* U_1 *og* U_2 *komplementære netop hvis* $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_m, \underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ *er en basis for* V*.*

Bevis. Antag at $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_m, \underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ er en basis for V. En vektor $\underline{v} \in V$ kan da skrives

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda_m \underline{a}_m + \mu_1 \underline{b}_1 + \cdots + \mu_n \underline{b}_n,$$

og sættes

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \lambda_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda_m \underline{a}_m, \\ \underline{u}_2 &= \mu_1 \underline{b}_1 + \cdots + \mu_n \underline{b}_n, \end{aligned}$$

er $\underline{u}_1 \in U_1$ og $\underline{u}_2 \in U_2$, og $\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$. Er nu $\underline{v} = \underline{u}'_1 + \underline{u}'_2$ med $\underline{u}'_1 \in U_1$ og $\underline{u}'_2 \in U_2$ kan vi skrive

$$\begin{aligned} \underline{u}'_1 &= \lambda'_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda'_m \underline{a}_m, \\ \underline{u}'_2 &= \mu'_1 \underline{b}_1 + \cdots + \mu'_n \underline{b}_n, \end{aligned}$$

hvorfor

$$\underline{v} = \lambda'_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda'_m \underline{a}_m + \mu'_1 \underline{b}_1 + \cdots + \mu'_n \underline{b}_n,$$

og dermed er $\lambda_j = \lambda'_j$ for $1 \leq j \leq m$, $\mu_j = \mu'_j$ for $1 \leq j \leq n$, da $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_m, \underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ er en basis. Men så er $\underline{u}_1 = \underline{u}'_1$ og $\underline{u}_2 = \underline{u}'_2$. Alt i alt har vi vist, at $\underline{v}$ på entydig måde kan skrives $\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$, hvor $\underline{u}_1 \in U_1$ og $\underline{u}_2 \in U_2$.

Antag så omvendt at U_1 og U_2 er komplementære. Hvis $\underline{v}$ er en vektor i V kan vi skrive $\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$, hvor $\underline{u}_1 \in U_1$ og $\underline{u}_2 \in U_2$. Vi skriver så

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \lambda_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda_m \underline{a}_m, \\ \underline{u}_2 &= \mu_1 \underline{b}_1 + \cdots + \mu_n \underline{b}_n, \end{aligned}$$

hvoraf

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda_m \underline{a}_m + \mu_1 \underline{b}_1 + \cdots + \mu_n \underline{b}_n.$$

Hvis så også

$$\underline{v} = \lambda'_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda'_m \underline{a}_m + \mu'_1 \underline{b}_1 + \cdots + \mu'_n \underline{b}_n,$$

er

$$\begin{aligned} \underline{u}'_1 &= \lambda'_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda'_m \underline{a}_m \in U_1, \\ \underline{u}'_2 &= \mu'_1 \underline{b}_1 + \cdots + \mu'_n \underline{b}_n \in U_2, \end{aligned}$$

hvoraf $\underline{u}_1 = \underline{u}'_1$ og $\underline{u}_2 = \underline{u}'_2$, da U_1 og U_2 er komplementære. Men så er også $\lambda_j = \lambda'_j$ for $1 \leq j \leq m$, $\mu_j = \mu'_j$ for $1 \leq j \leq n$, da $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_m$ er en basis i U_1 og $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ er en basis i U_2. Men vi har så vist, at enhver vektor $\underline{v} \in V$ på entydig måde kan skrives på formen $\underline{v} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda_m \underline{a}_m + \mu_1 \underline{b}_1 + \cdots + \mu_n \underline{b}_n$, og dette viser, at $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_m, \underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ er en basis i V. $\square$

Lad V være et endeligdimensionalt vektorrum, og lad U_1 og U_2 være to underrum i V.

Sætning 4.7.4. *Underrummene U_1 og U_2 er komplementære netop hvis følgende to betingelser er opfyldt:*

(1) $U_1 \cap U_2 = \{\underline{o}\}$.

(2) $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V$.

Bevis. Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_m$ være en basis i U_1 og lad $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ være en basis i U_2. Antag først, at de to underrum er komplementære. Der gælder da, at $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_m, \underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ er en basis i V, og dermed er $\dim U_1 + \dim U_2 = n + m = \dim V$, altså er (2) opfyldt. Hvis $\underline{v} \in U_1 \cap U_2$ gælder, at $\underline{o} = \underline{v} + (-\underline{v})$, og $\underline{v} \in U_1$ og $-\underline{v} \in U_2$, hvoraf $\underline{v} = \underline{o}$ ifølge definitionen af direkte sum. Hermed er vist at (1) er opfyldt. Antag så omvendt at betingelserne (1) og (2) er opfyldt. Hvis vi kan vise at $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_m, \underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ er et lineært uafhængigt sæt, følger det af (2) at det er en basis (jvf. Sætning 4.5.7), og dermed er de to underrum komplementære ifølge Sætning 4.7.3. Lad så

$$\lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_m\underline{a}_m + \mu_1\underline{b}_1 + \cdots + \mu_n\underline{b}_n = \underline{o}.$$

Da er

$$\lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_m\underline{a}_m = -(\mu_1\underline{b}_1 + \cdots + \mu_n\underline{b}_n),$$

og da venstresiden er i U_1 og højresiden i U_2 er de begge indeholdt i $U_1 \cap U_2 = \{\underline{o}\}$, og dermed er

$$\begin{aligned} \lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_m\underline{a}_m &= \underline{o}, \\ \mu_1\underline{b}_1 + \cdots + \mu_n\underline{b}_n &= \underline{o}, \end{aligned}$$

hvoraf $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) = (0, \cdots, 0)$ og $(\mu_1, \cdots, \mu_n) = (0, \cdots, 0)$. Dette viser, at sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_m, \underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ er en basis i V, og dermed er de to underrum komplementære ifølge Sætning 4.7.3. ☐

Eksempel 4.7.5. I $\mathbf{R}^4$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi sætter $U_1 = \text{ span } \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ og $U_2 = \text{ span } \{\underline{a}_3, \underline{a}_4\}$. Idet matricen

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 & \underline{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ses at være regulær (den har determinant 1), finder vi, at underrummene U_1 og U_2 danner direkte sum. Vi vil finde projektionen af vektoren

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

på U_1 langs U_2. Hertil opskriver vi ligningen

$$x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3\underline{a}_3 + x_4\underline{a}_4 = \underline{v}. \tag{$*$}$$

Dette er et lineært ligningssystem med totalmatrix

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Heraf finder vi på sædvanlig måde, at ligningen $(*)$ har løsningen $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3, -1, 8, 4)$. Herefter kan projektionen $\underline{u}_1$ af $\underline{v}$ på U_1 langs U_2 nedskrives:

$$\underline{u}_1 = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 = (-3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tilsvarende kan projektionen $\underline{u}_2$ af $\underline{v}$ på U_2 langs U_1 beregnes:

$$\underline{u}_2 = x_3\underline{a}_3 + x_4\underline{a}_4 = 8\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Som kontrol verificerer vi, at

$$\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2.$$

4.8 Rang; dimensionssætningen

Lad U og V være endeligdimensionale vektorrum.

Definition 4.8.1. Ved *rangen* $\mathrm{rg} f$ af en lineær afbildning $f : U \to V$ forstås dimensionen af billedrummet $f(U)$, altså

$$\mathrm{rg} f = \dim f(U).$$

Definition 4.8.2. Ved *rangen* $\text{rg}\underline{\underline{A}}$ af en $m \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ forstås rangen af den til $\underline{\underline{A}}$ hørende lineære afbildning $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

Hvis $\underline{\underline{A}}$ er en $m \times n$-matrix med søjlevektorer $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ og $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ den til $\underline{\underline{A}}$ hørende lineære afbildning gælder, at $f(U) = \text{ span } \{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$, idet jo

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n,$$

Altså er

$$\text{rg}\underline{\underline{A}} = \dim(\text{ span } \{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}),$$

og dermed har vi (Sætning 4.5.13):

Sætning 4.8.3. *Rangen af $m \times n$-matricen*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \cdots & \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

er lig med antallet af vektorer i et maksimalt lineært uafhængigt sæt af vektorer fra $\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$.

Det ses umiddelbart, at hvis $\underline{\underline{A}}$ er en trappematrix, da er rangen af $\underline{\underline{A}}$ lig med antallet af trin i $\underline{\underline{A}}$.

Eksempel 4.8.4. Matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er en trappematrix med 3 trin, og dens rang er altså 3.

Sætning 4.8.5. *Rangen af en matrix ændres ikke ved udførelse af række- og søjleoperationer.*

Bevis. Hvis $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \cdots & \underline{a}_n \end{pmatrix}$ og $\underline{\underline{A}}' = \begin{pmatrix} \underline{a}'_1 & \cdots & \underline{a}'_n \end{pmatrix}$, og $\underline{\underline{A}}'$ fremgår af $\underline{\underline{A}}$ ved udførelse af søjleoperationer, er $\text{ span } \{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\} = \text{ span } \{\underline{a}'_1, \cdots, \underline{a}'_n\}$, og dermed er $\text{rg}\underline{\underline{A}} = \text{rg}\underline{\underline{A}}'$. Hvis $\underline{\underline{A}}'$ fremgår af $\underline{\underline{A}}$ ved udførelse af rækkeoperationer, har vi i indledningen af afsnit 4.6 set, at et delsæt $\underline{a}_{j_1}, \cdots, \underline{a}_{j_d}$ af $\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$ er lineært uafhængigt netop hvis delsættet $\underline{a}'_{j_1}, \cdots, \underline{a}'_{j_d}$ af $\underline{a}'_1, \cdots \underline{a}'_n$ er lineært uafhængigt. Heraf fås, at $\text{rg}\underline{\underline{A}} = \text{rg}\underline{\underline{A}}'$ (Sætning 4.8.3). $\square$

Eksempel 4.8.6. Vi betragter matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Denne omformes ved hjælp af rækkeoperationer til trappematricen

$$\underline{\underline{A}}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

da $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}' = 3$ er dermed også $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = 3$.

Lad U og V være endeligdimensionale vektorrum.

Sætning 4.8.7. (Dimensionssætningen) *For en lineær afbildning $f : U \to V$ gælder*

$$\mathrm{rg} f + \dim(\ker f) = \dim U.$$

Bevis. Idet U hhv. V er isomorft med $\mathbf{R}^n$ hhv. $\mathbf{R}^m$ ses, at vi kan nøjes med at se på tilfældet, hvor $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er den lineære afbildning knyttet til matricen $\underline{\underline{A}}$. Vi omdanner $\underline{\underline{A}}$ ved hjælp af rækkeoperationer til trappematricen $\underline{\underline{A}}'$ med d trin. Der gælder, at

$$\begin{aligned} \ker f &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{X}} \mid \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{0}} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{X}} \mid \underline{\underline{A}}'\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{0}} \right\}, \end{aligned}$$

og dette er et underrum af dimension $n - d$ (jvf. kapitel 2). Endvidere er $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = \mathrm{rg}\underline{\underline{A}}' = d$, så $\mathrm{rg} f + \dim(\ker f) = d + (n - d) = n = \dim \mathbf{R}^n$. Dette viser sætningen. □

Eksempel 4.8.8. Vi betragter matricen $\underline{\underline{A}}$ fra Eksempel 4.8.6. Vi så, at $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = 3$. Vi vil nu bestemme kernen for den lineære afbildning $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ hørende til $\underline{\underline{A}}$. Vi omdanner $\underline{\underline{A}}$ til trappematricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

vi skal så løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 &= 0\,. \\ x_4 - 7x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Vi indfører parametrene $t_1 = x_3$ og $t_2 = x_5$ og får $x_4 = 7t_2$, $x_2 = 3t_1 - 31t_2$, $x_1 = -7t_1 + 39t_2$, altså

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7t_1 + 39t_2 \\ 3t_1 - 31t_2 \\ t_1 \\ 7t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 39 \\ -31 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det ses heraf, at en basis for $\ker f$ er $\underline{a}_1, \underline{a}_2$, hvor

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 39 \\ -31 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hermed har vi verificeret at $\mathrm{rg} f + \dim(\ker f) = \dim \mathbf{R}^5$.

Sætning 4.8.9. *For en $m \times n$-matrix $\underset{=}{A}$ gælder, at $\underset{=}{A}$ har samme rang som den transponerede $\underset{=}{A}^t$, altså*

$$\mathrm{rg}\underset{=}{A} = \mathrm{rg}\underset{=}{A}^t.$$

Bevis. Sætningen ses umiddelbart at gælde, hvis $\underset{=}{A}$ er en trappematrix (brug Sætning 4.8.3; rangen er antallet af trin). Hvis $\underset{=}{A}$ er en vilkårlig matrix, omdannes $\underset{=}{A}$ til trappematricen $\underset{=}{A}'$ ved hjælp af rækkeoperationer; udføres så på $\underset{=}{A}^t$ de analoge søjleoperationer fremkommer matricen $(\underset{=}{A}')^t$. Men så har vi $\mathrm{rg}\underset{=}{A} = \mathrm{rg}\underset{=}{A}' = \mathrm{rg}(\underset{=}{A}')^t = \mathrm{rg}\underset{=}{A}^t$. □

Bemærk specielt følgende konsekvens af dimensionssætningen:

Sætning 4.8.10. *For en lineær afbildning $f : U \to V$, hvor $\dim U = \dim V$, er følgende tre udsagn ækvivalente:*

(1) *f er surjektiv.*

(2) *f er injektiv.*

(3) *f er bijektiv.*

Dette følger også af Sætningerne 2.3.11, 2.3.13 og 2.4.2.

5 Vektorrum og matricer

5.1 Koordinattransformationer

Lad V være et endeligdimensionalt vektorrum med $\dim V = n$, og lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være en basis i V. Den lineære afbildning $\varphi : \mathbf{R}^n \to V$ givet ved

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n$$

er da en isomorfi, den såkaldte *koordinatafbildning*. Antag nu, at $\underline{\tilde{a}}_1, \cdots, \underline{\tilde{a}}_n$ er en anden basis i V. Denne anden basis giver da også anledning til en isomorfi $\widetilde{\varphi} : \mathbf{R}^n \to V$ givet ved

$$\widetilde{\varphi} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = \tilde{x}_1\underline{\tilde{a}}_1 + \cdots + \tilde{x}_n\underline{\tilde{a}}_n.$$

Lad så $\underline{v}$ være en vektor i V, og antag at $\underline{v}$ har koordinaterne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ med hensyn til basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ ("den gamle basis"), og koordinaterne $\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ med hensyn til basen $\underline{\tilde{a}}_1, \cdots, \underline{\tilde{a}}_n$ ("den nye basis"). Vi skal se på sammenhængen mellem de to koordinatsæt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$.

Idet

$$\widetilde{\varphi} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = \underline{v} = \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

gælder, at

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = \widetilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ xn \end{pmatrix}.$$

Sætter vi $\tau = \widetilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ er τ en isomorfi. Men så er τ givet ved en regulær matrix $\underline{\underline{S}}$, og der gælder

$$\underline{\underline{\widetilde{X}}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{X}}, \qquad (*)$$

hvor vi har sat

$$\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\widetilde{X}}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}.$$

Indsætter vi for $\underline{\underline{X}}$ den j'te enhedssøjle $\underline{\underline{E}}_j$ i formlen $(*)$, er $\underline{\underline{\widetilde{X}}}$ den j'te søjle i $\underline{\underline{S}}$. Men vektoren $\underline{a}_j$ har koordinatsøjlen $\underline{\underline{E}}_j$ med hensyn til den gamle basis, altså *er den j'te søjle i* $\underline{\underline{S}}$ *koordinatsøjlen for vektoren* $\underline{a}_j$ *med hensyn til den nye basis.*

Matricen $\underline{\underline{S}}$ kaldes for *koordinattransformationsmatricen* for overgang fra basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ til basen $\underline{\tilde{a}}_1, \cdots, \underline{\tilde{a}}_n$.

Af $(*)$ fås, at

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{\widetilde{X}}},$$

hvoraf ses, at $\underline{\underline{S}}^{-1}$ er koordinattransformationsmatricen for overgang fra basen $\underline{\tilde{a}}_1, \cdots, \underline{\tilde{a}}_n$ til basen $\underline{a}_1, \cdots \underline{a}_n$, dvs. den j'te søjle i $\underline{\underline{S}}^{-1}$ er koordinatsøjlen for vektoren $\underline{\tilde{a}}_j$ m.h.t. basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$.

Alt i alt har vi vist:

Sætning 5.1.1. *Hvis* $\underline{\underline{X}}$ *hhv.* $\underline{\underline{\widetilde{X}}}$ *er koordinatsøjlen for vektoren* $\underline{v} \in V$ *med hensyn til den gamle hhv. nye basis, er*

$$\underline{\underline{\widetilde{X}}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{X}},$$

hvor $\underline{\underline{S}}$ *er den regulære* $n \times n$*-matrix, hvis søjlevektorer er koordinatsøjler for vektorerne i den gamle basis med hensyn til den nye basis. Endvidere er søjlevektorerne i* $\underline{\underline{S}}^{-1}$ *lig med koordinatsøjlerne for vektorerne i den nye basis med hensyn til den gamle basis.*

Hvis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er en basis i $\mathbf{R}^n$, og $\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n$ betegner den naturlige basis i $\mathbf{R}^n$ er koordinattransformationsmatricen for overgang fra $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ til $\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n$ ifølge Sætning 5.1.1 lig med matricen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \cdots & \underline{a}_n \end{pmatrix}$; koordinattransformationsmatricen for overgang fra $\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n$ til $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er derfor lig med matricen $\underline{\underline{A}}^{-1}$.

Eksempel 5.1.2. I $\mathbf{R}^2$ er givet basen

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

og basen

$$\underline{\tilde{a}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\tilde{a}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vil finde koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$ for overgang fra $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ til $\underline{\tilde{a}}_1, \underline{\tilde{a}}_2$. Idet

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= \underline{\tilde{a}}_1 + 2\underline{\tilde{a}}_2, \\ \underline{a}_2 &= -\underline{\tilde{a}}_1 + 3\underline{\tilde{a}}_2, \end{aligned}$$

er

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Koordinattransformationsmatricen for overgang fra $\underline{\tilde{a}}_1, \underline{\tilde{a}}_2$ til $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ er

$$\underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

5.2 Lineære afbildninger og matricer

Lad U og V være endeligdimensionale vektorrum med $\dim U = n$, $\dim V = m$. Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være en basis i U og lad $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_m$ være en basis i V, og lad $\varphi : \mathbf{R}^n \to U$ og $\psi : \mathbf{R}^m \to V$ være de tilsvarende koordinatafbildninger, altså

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n,$$

$$\psi \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = y_1\underline{b}_1 + \cdots + y_m\underline{b}_m.$$

For en given lineær afbildning $f : U \to V$ definerer vi afbildningen $\alpha : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ved diagrammet:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & U \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{R}^m \arrow[r, "\psi"'] & V \end{tikzcd}$$

vi sætter altså
$$\alpha = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi.$$
Vi ser, at $\alpha : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er lineær, altså er den givet ved en $m \times n$-matrix $\underset{=}{A}$. Hvis $\underset{=}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ betegner koordinatsøjlen for vektoren $\underline{x}$ med hensyn til basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$, og $\underset{=}{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ betegner koordinaterne for vektoren $\underline{y} = f(\underline{x})$ med hensyn til basen $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_m$ kan vi nedskrive følgende diagram

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & \underline{x} \arrow[d, "f"] \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \arrow[r, "\psi"'] & \underline{y} \end{tikzcd} ;$$

Med andre ord har vi
$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \psi^{-1} \circ f(\underline{x}) = \psi^{-1}(\underline{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$
altså
$$\underset{=}{A}\underset{=}{X} = \underset{=}{Y}.$$
Indsætter vi i dette udtryk for $\underset{=}{X}$ den j'te enhedssøjle $\underset{=}{E}_j$, er $\underset{=}{Y}$ den j'te søjle i $\underset{=}{A}$. Men vektoren $\underline{a}_j$ har koordinatsøjlen $\underset{=}{E}_j$ med hensyn til basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$, altså *er den j'te søjle i $\underset{=}{A}$ koordinatsøjlen for vektoren $f(\underline{a}_j)$ med hensyn til basen $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_m$*. Matricen $\underset{=}{A}$ siges at repræsentere f i baserne $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n, \underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_m$.

Alt i alt har vi vist *den generelle søjleregel:*

Sætning 5.2.1. *Hvis $\underset{=}{X}$ hhv. $\underset{=}{Y}$ er koordinatsøjlerne for vektoren $\underline{x}$ hhv. $\underline{y} = f(\underline{x})$, er*
$$\underset{=}{Y} = \underset{=}{A}\underset{=}{X},$$
hvor $\underset{=}{A}$ er den $m \times n$-matrix, hvis søjlevektorer er koordinatsøjlerne for vektorerne $f(\underline{a}_1), \cdots, f(\underline{a}_n)$ med hensyn til basen $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_m$.

Bemærkning 1. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum med gammel basis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ og ny basis $\underline{\tilde{a}}_1, \cdots, \underline{\tilde{a}}_n$, og lad $\underset{=}{S}$ være koordinattransformationsmatricen for overgang fra gammel til ny basis. Da er $\underset{=}{S}$ også er den matrix der repræsenterer $\mathrm{id}_U : U \to U$ i baserne $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$; $\underline{\tilde{a}}_1, \cdots, \underline{\tilde{a}}_n$.

Bemærkning 2. Lad U, V, W være endeligdimensionale vektorrum med baser $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$; $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_m$; $\underline{c}_1, \cdots, \underline{c}_p$. Lad $f : W \to V$ og $g : U \to W$ være lineære afbildninger, og antag at f ved de givne baser i W og V repræsenteres ved $m \times p$-matricen $\underset{=}{A}$, og at g ved de givne baser i U og W repræsenteres ved $p \times n$-matricen $\underset{=}{B}$. Da vil den lineære afbildning $f \circ g : U \to V$ være repræsenteret ved $m \times n$-matricen $\underset{=}{C} = \underset{=}{A}\underset{=}{B}$ ved de givne baser i U og V. Jævnfør Sætning 1.4.6 og beviset for denne, som overføres uændret til den mere generelle situation.

Eksempel 5.2.2. I det todimensionale vektorrum U er der givet basen $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ og i det tredimensionale vektorrum V er der givet basen $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$. Om den lineære afbildning $f : U \to V$ vides, at

$$\begin{aligned} f(\underline{a}_1) &= 2\underline{b}_1 - \underline{b}_2, \\ f(\underline{a}_2) &= \underline{b}_1 + \underline{b}_2 - 2\underline{b}_3. \end{aligned}$$

I de givne baser repræsenteres f så ved matricen

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi vil f.eks. beregne billedet af vektoren $\underline{x} = -\underline{a}_1 + \underline{a}_2$ ved f. Idet (y_1, y_2, y_3) betegner koordinaterne for $\underline{y} = f(\underline{x})$ fås

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dette stemmer med at $f(\underline{x}) = f(-\underline{a}_1 + \underline{a}_2) = -f(\underline{a}_1) + f(\underline{a}_2) = -2\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_1 + \underline{b}_2 - 2\underline{b}_3 = -\underline{b}_1 + 2\underline{b}_2 - 2\underline{b}_3$.

Hvis $f : V \to V$ er en lineær afbildning fra et vektorrum ind i sig selv, og hvis der er givet en basis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ i V taler vi om at f er repræsenteret ved matricen $\underset{=}{A}$ i basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$. . Det er da underforstået, at basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ anvendes i V både når V anvendes som definitionsmængde for f og som dispositionsmængde for f.

5.3 Lineære afbildninger og koordinattransformationer

Lad U og V være endeligdimensionale vektorrum med $\dim U = n$, $\dim V = m$. Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ hhv. $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_m$ være baser ("de gamle") i U hhv. V. Vi tænker os nu, at der i U hhv. V er givet andre baser ("de nye") $\tilde{\underline{a}}_1, \cdots, \tilde{\underline{a}}_n$ hhv. $\tilde{\underline{b}}_1, \cdots, \tilde{\underline{b}}_m$. Vi lader $\underline{\underline{S}}$ hhv. $\underline{\underline{T}}$ betegne koordinattransformationsmatricerne for overgang fra basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ til basen $\tilde{\underline{a}}_1, \cdots, \tilde{\underline{a}}_n$ hhv. fra basen $\underline{b}_1, \cdots \underline{b}_m$ til basen $\tilde{\underline{b}}_1, \cdots, \tilde{\underline{b}}_m$.

Sætning 5.3.1. *Hvis den lineære afbildning $f : U \to V$ er repræsenteret ved matricen $\underline{\underline{A}}$ hhv. $\widetilde{\underline{\underline{A}}}$ i de gamle baser hhv. de nye baser, er*

$$\widetilde{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}.$$

Bevis. Vi har diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{f,\underline{\underline{A}}} & V \\
\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n & & \underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_m \\
\Big\downarrow \mathrm{id}_U, \underline{\underline{S}} & & \Big\downarrow \mathrm{id}_V, \underline{\underline{T}} \\
U & \xrightarrow{f,\widetilde{\underline{\underline{A}}}} & V \\
\tilde{\underline{a}}_1, \cdots, \tilde{\underline{a}}_n & & \tilde{\underline{b}}_1, \cdots, \tilde{\underline{b}}_m
\end{array}$$

Ifølge bemærkningerne til Sætning 5.2.1 er $f = \mathrm{id}_V \circ f : U \to V$ repræsenteret ved $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}$, og $f = f \circ \mathrm{id}_U : U \to V$ er repræsenteret ved $\widetilde{\underline{\underline{A}}}\,\underline{\underline{S}}$, i begge tilfælde mht. basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ i U og basen $\tilde{\underline{b}}_1, \cdots, \tilde{\underline{b}}_m$ i V. Derfor er $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}} = \widetilde{\underline{\underline{A}}}\,\underline{\underline{S}}$ eller $\widetilde{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$. □

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning og lad der i V være givet en "gammel" basis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ og en "ny" basis $\tilde{\underline{a}}_1, \cdots, \tilde{\underline{a}}_n$. Idet $\underline{\underline{A}}$ hhv. $\widetilde{\underline{\underline{A}}}$ betegner matricen, der repræsenterer f i den gamle hhv. nye basis, og $\underline{\underline{S}}$ betegner koordinattransformtionsmatricen for overgang fra $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ til $\tilde{\underline{a}}_1, \cdots, \tilde{\underline{a}}_n$, gælder ifølge Sætning 5.2.1, at

$$\widetilde{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}.$$

Eksempel 5.3.2. I det tredimensionale vektorrum U er der givet baserne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ og $\tilde{\underline{a}}_1, \tilde{\underline{a}}_2, \tilde{\underline{a}}_3$, hvor

$$\begin{aligned}
\tilde{\underline{a}}_1 &= 2\underline{a}_1 - \underline{a}_2, \\
\tilde{\underline{a}}_2 &= \underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 + 3\underline{a}_3 \\
\tilde{\underline{a}}_3 &= \underline{a}_1 + \underline{a}_2 - 2\underline{a}_3,
\end{aligned}$$

og i det todimensionale vektorrum V er der givet baserne $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ og $\tilde{\underline{b}}_1, \tilde{\underline{b}}_2$, hvor

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{b}}_1 &= 5\underline{b}_1 - 2\underline{b}_2,\\ \tilde{\underline{b}}_2 &= -2\underline{b}_1 + \underline{b}_2.\end{aligned}$$

En lineær afbildning $f : U \to V$ repræsenteres i baserne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{b}_1, \underline{b}_2$ (de gamle) ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vil finde den matrix $\widetilde{\underline{\underline{A}}}$, der repræsenterer f i baserne $\tilde{\underline{a}}_1, \tilde{\underline{a}}_2, \tilde{\underline{a}}_3$, $\tilde{\underline{b}}_1, \tilde{\underline{b}}_2$ (de nye). Vi aflæser umiddelbart, at koordinattransformationsmatricerne $\underline{\underline{S}}$ hhv. $\underline{\underline{T}}$ for overgang fra gamle til nye baser opfylder, at

$$\begin{aligned}\underline{\underline{S}}^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\\ \underline{\underline{T}}^{-1} &= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Idet $\widetilde{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ udregner vi

$$\underline{\underline{T}} = (\underline{\underline{T}}^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

og vi finder så

$$\widetilde{\underline{\underline{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 24 & -3 \\ 20 & 53 & -6 \end{pmatrix}.$$

Bemærk, at det er unødvendigt at udregne $\underline{\underline{S}}$.

5.4 Determinant af endomorfi

Lad V være et vektorrum. En lineær afbildning f af V ind i sig selv kaldes også for en *endomorfi*.

Antag nu, at vektorrummet V er endeligdimensionalt, og at $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er en basis for V.

Definition 5.4.1. Ved *determinanten* $\det f$ af endomorfien $f : V \to V$ forstås determinanten $\det \underline{\underline{A}}$ af den matrix $\underline{\underline{A}}$, der repræsenterer f i den givne basis.

Den netop givne definition af $\det f$ afhænger *ikke* af den valgte basis. Er nemlig $\underline{\tilde{a}}_1, \cdots, \underline{\tilde{a}}_n$ en ny basis, og er $\underline{\underline{S}}$ koordinattransformationsmatricen for overgang fra basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ til basen $\underline{\tilde{a}}_1, \cdots, \underline{\tilde{a}}_n$, og repræsenteres f i den nye basis ved matricen $\underline{\underline{\widetilde{A}}}$, er

$$\underline{\underline{\widetilde{A}}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$$

ifølge Sætning 5.3.1. Men så er

$$\begin{aligned}\det \underline{\underline{\widetilde{A}}} &= \det(\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}) \\ &= \det \underline{\underline{S}} \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{S}}^{-1} \\ &= \det \underline{\underline{S}} \det \underline{\underline{A}} (\det \underline{\underline{S}})^{-1} \\ &= \det \underline{\underline{A}},\end{aligned}$$

hvor vi har anvendt Sætning 3.4.8 og 3.4.9.

Sætning 5.4.2. *Den lineære afbildning $f : V \to V$ er bijektiv netop når* $\det f \neq 0$.

Bevis. Vælg en basis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ i V, og lad f være repræsenteret ved matricen $\underline{\underline{A}}$ i denne basis. Da er f bijektiv netop når $\underline{\underline{A}}$ er regulær, dvs. netop når $\det f = \det \underline{\underline{A}} \neq 0$. □

Hvis $\underline{\underline{A}}$ er en $n \times n$-matrix, og $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ den tilhørende lineære afbildning (endomorfi), repræsenteres f ved $\underline{\underline{A}}$ i den naturlige basis, og dermed er $\det f = \det \underline{\underline{A}}$.

6 Diagonalisering af matricer

6.1 Diagonaliserbare matricer; egenværdier og egenvektorer

Lad $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være en lineær afbildning hørende til $n \times n$-matricen $\underline{\underline{A}}$. Dersom $\underline{\underline{A}}$ er en diagonalmatrix, altså

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

hvor alle elementerne i $\underline{\underline{A}}$ uden for diagonalen er lig med nul, er virkningen af f særlig simpel, idet nemlig

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}.$$

Hvis nu V er et endeligdimensionalt vektorrum, og $f : V \to V$ er en lineær afbildning (endomorfi af V) er vi derfor interesserede i at finde en basis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ for V, således at f i denne basis repræsenteres af en diagonalmatrix. Herved får vi et særligt godt overblik over virkningen af f.

Lad V være et endeligdimensionalt vektorrum.

Definition 6.1.1. En lineær afbildning $f : V \to V$ kaldes *diagonaliserbar*, hvis der findes en basis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ således at f i denne basis repræsenteres af en diagonalmatrix.

Hvis $f : V \to V$ er diagonaliserbar, og $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er en basis for V i hvilken f repræsenteres af en diagonalmatrix

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

gælder, at $f(\underline{a}_1) = \lambda_1 \underline{a}_1, \cdots, f(\underline{a}_n) = \lambda_n \underline{a}_n$. Der gælder med andre ord, at $f(\underline{a}_j)$ er proportional med $\underline{a}_j$, og proportionalitetsfaktoren er λ_j.

Definition 6.1.2. Ved en *egenvektor* for den lineære afbildning $f : V \to V$ forstås en vektor $\underline{x} \in V$, så $\underline{x} \neq \underline{o}$ og så $f(\underline{x})$ er proportional med $\underline{x}$. Proportionalitetsfaktoren kaldes den til egenvektoren $\underline{x}$ hørende *egenværdi*.

At $\underline{x}$ er egenvektor for f med tilhørende egenværdi λ betyder altså, at

$$\underline{x} \neq \underline{o} \text{ og } f(\underline{x}) = \lambda \underline{x}.$$

Med disse betegnelser fås så:

Sætning 6.1.3. *Den lineære afbildning $f : V \to V$ er diagonaliserbar netop hvis der findes en basis for V bestående af egenvektorer for f.*

Vi indfører nu yderligere nogle betegnelser. Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning.

Definition 6.1.4. Ved *egenrummet* V_λ hørende til $\lambda \in \mathbf{R}$ forstås underrummet

$$V_\lambda = \{\underline{x} \mid f(\underline{x}) = \lambda \underline{x}\},$$

og ved *egenværdimultipliciteten* em λ hørende til $\lambda \in \mathbf{R}$ forstås tallet

$$\text{em } \lambda = \dim V_\lambda.$$

Lad $e : V \to V$ betegne den identiske afbildning $e : \underline{x} \to \underline{x}$; denne er klart lineær. For hvert $\lambda \in \mathbf{R}$ lader vi $f - \lambda e$ betegne den lineære afbildning af V ind i sig selv defineret ved, at

$$(f - \lambda e)(\underline{x}) = f(\underline{x}) - \lambda e(\underline{x}) = f(\underline{x}) - \lambda \underline{x}.$$

Med denne betegnelse har vi

Sætning 6.1.5. *For $\lambda \in \mathbf{R}$ gælder*

(1) $V_\lambda = \ker(f - \lambda e)$.

(2) $\text{em } \lambda + \text{rg}(f - \lambda e) = \dim V$.

Bevis. Idet $f(\underline{x}) = \lambda \underline{x} \Leftrightarrow f(\underline{x}) - \lambda \underline{x} = \underline{o} \Leftrightarrow \underline{x} \in \ker(f - \lambda e)$ ses, at (1) er opfyldt. Af dimenssionssætningen (Sætning 4.8.7) fås, at

$$\text{rg}(f - \lambda e) + \dim \ker(f - \lambda e) = \dim V,$$

hvoraf

$$\text{em } \lambda + \text{rg}(f - \lambda e) = \dim V,$$

og hermed er (2) vist. □

Sætning 6.1.6. *Lad $\lambda \in \mathbf{R}$. Da er følgende betingelser ensbetydende*

(1) *λ er egenværdi for f.*

(2) $V_\lambda \neq \{\underline{o}\}$.

(3) em $\lambda > 0$.

(4) *$f - \lambda e$ er ikke bijektiv.*

(5) $\det(f - \lambda e) = 0$.

Bevis. Der gælder λ egenværdi $\Leftrightarrow V_\lambda \neq \{\underline{o}\} \Leftrightarrow \dim V_\lambda > 0 \Leftrightarrow$ em $\lambda > 0$, og $\det(f - \lambda e) = 0 \Leftrightarrow f - \lambda e$ ikke bijektiv $\Leftrightarrow \ker(f - \lambda e) \neq \{\underline{o}\} \Leftrightarrow V_\lambda \neq \{\underline{o}\}$. Hermed er sætningen vist. □

Definition 6.1.7. Det *karakteristiske polynomium P_f* hørende til den lineære afbildning $f : V \to V$ defineres ved

$$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda e).$$

Nedenfor gøres rede for, at P_f faktisk er et polynomium.

Af Sætning 6.1.6 fremgår umiddelbart:

Sætning 6.1.8. *Egenværdierne for den lineære afbildning $f : V \to V$ er netop rødderne i det karakteristiske polynomium $P_f(\lambda)$.*

Hvis $\underline{\underline{A}}$ er en $n \times n$-matrix og $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ den tilhørende lineære afbildning, taler vi i det følgende om *egenværdier* for $\underline{\underline{A}}$, *egenvektorer* for $\underline{\underline{A}}$, det *karakteristiske polynomium* $P_{\underline{\underline{A}}}$ for $\underline{\underline{A}}$, om at $\underline{\underline{A}}$ er *diagonaliserbar* etc. Hermed menes naturligvis de tilsvarende begreber defineret som ovenfor for f. Specielt er

$$P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}).$$

Endvidere er egenrummet V_λ givet ved

$$V_\lambda = \{\underline{\underline{X}} \in \mathbf{R}^n \mid (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{0}}\},$$

og der gælder

$$\text{em}\,\lambda + \text{rg}(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = n.$$

Hvis $f : V \to V$ er en endomorfi, og $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er en basis for V, og hvis f repræsenteres ved matricen $\underline{\underline{A}}$ i basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$, da er $P_f(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda)$ (se afsnit 5.4), og det fremgår heraf, at $P_f(\lambda)$ er et polynomium i λ.

Vi vil nu et øjeblik se specielt på lineære afbildninger fra $\mathbf{R}^n$ til $\mathbf{R}^n$.

Sætning 6.1.9. *En $n \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar netop hvis der findes en regulær $n \times n$-matrix $\underline{\underline{S}}$, så*

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$$

er en diagonalmatrix. I givet fald er den j'te søjle i $\underline{\underline{S}}^{-1}$ en egenvektor for $\underline{\underline{A}}$ med tilhørende egenværdi lig med det j'te diagonalelement i $\underline{\underline{D}}$.

Bevis. Lad $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være den lineære afbildning der hører til matricen $\underline{\underline{A}}$.

Antag først, at $\underline{\underline{S}}$ er en regulær $n \times n$-matrix, så $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix. Skriver vi $\underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \cdots & \underline{a}_n \end{pmatrix}$ er $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ en basis i $\mathbf{R}^n$, og $\underline{\underline{S}}$ er koordinattransformationsmatricen for overgang fra naturlig basis til basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$. Men så repræsenteres f ved matricen $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ i basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ (Sætning 5.3.1). Skrives

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

er derfor $f(\underline{a}_j) = \lambda_j \underline{a}_j$. Dette viser den ene halvdel af sætningen.

Antag dernæst at $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar. Da findes en basis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ for $\mathbf{R}^n$ bestående af egenvektorer for f. I denne basis repræsenteres f af en diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}$, og der gælder $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$, hvor $\underline{\underline{S}}$ er koordinattransformationsmatricen for overgang fra naturlig basis til basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$. Dette viser den anden halvdel af sætningen. $\square$

Eksempel 6.1.10. En lineær afbildning $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vi vil finde egenværdierne og de tilhørende egenvektorer for f. Først opskrives det karakteristiske polynomium

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) &= P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 7 \\ -2 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-4-\lambda) + 14 = \lambda^2 - \lambda - 6, \end{aligned}$$

og rødderne i ligningen $P_f(\lambda) = 0$ findes; rødderne er $\lambda = 3$ og $\lambda = -2$.

Vi finder så egenvektorerne hørende til $\lambda = -2$: Vi skal løse ligningen

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{0}}.$$

Vi opskriver matricen

$$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}} + 2\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -2 & -2 \end{pmatrix};$$

denne matrix omformes ved hjælp af rækkeoperationer til trappematricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hvoraf aflæses, at en basis for egenrummet V_{-2} er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi finder dernæst egenvektorerne hørende til $\lambda = 3$. Vi opskriver

$$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}} - 3\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -2 & -7 \end{pmatrix},$$

der ved hjælp af rækkeoperationer omformes til trappematricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hvoraf aflæses, at en basis for egenrummet V_3 er

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Idet sættet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

udgør en basis i $\mathbf{R}^2$, ses, at f og dermed $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar. Koordinattransformationsmatricen for overgang fra naturlig basis til denne basis bestående af egenvektorer opfylder, at

$$\underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

og dermed er

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Der gælder så, at

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1},$$

hvilket også ses ved direkte udregning.

Eksempel 6.1.11. Det karakteristiske polynomium for matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

er

$$P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -5 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) + 25 = \lambda^2 + 16,$$

der ingen rødder har (inden for de reelle tal $\mathbf{R}$). Altså har $\underline{\underline{A}}$ ingen egenværdier. Vi slutter specielt, at matricen $\underline{\underline{A}}$ ikke er diagonaliserbar.

Eksempel 6.1.12. Det karakteristiske polynomium for matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

er

$$P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2,$$

der har (dobbelt-) roden $\lambda = 2$. Matricen $\underline{\underline{A}}$ har altså kun den ene egenværdi $\lambda = 2$. For at finde det tilhørende egenrum V_2 opskrives matricen

$$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

og vi ser, at en basis for V_2 er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi slutter, at matricen $\underline{\underline{A}}$ ikke er diagonaliserbar.

Eksempel 6.1.13. Vi vil finde egenværdier og tilhørende egenvektorer for matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Først opskrives det karakteristiske polynomium:

$$\begin{aligned}
P_f(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) &= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ -2+\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)(3-\lambda)\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda).
\end{aligned}$$

Rødderne er altså $\lambda = 2$ og $\lambda = 3$.

Først findes egenrummet V_2 hørende til $\lambda = 2$. Matricen $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}$ opskrives:

$$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 4-2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

denne omdannes ved hjælp af rækkeoperationer til trappematricen

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi skal så løse ligningen $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Sættes $x_2 = s$ og $x_3 = 2t$ fås

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ 2t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

hvoraf fremgår, at sættet

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

udgør en basis for V_2.

Dernæst findes egenrummet V_3 hørende til $\lambda = 3$. Matricen $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}$ opskrives:

$$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}} - 3\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 4-3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

denne omdannes ved hjælp af rækkeoperationer til trappematricen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi skal så løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}.$$

Sættet $x_3 = t$ fås

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hvoraf fremgår, at vektoren

$$\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

udgør en basis for V_3.

Sættet $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ udgør en basis i $\mathbf{R}^3$, og koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$ for overgang fra naturlig basis til denne nye basis opfylder, at

$$\underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

hvoraf

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der gælder, at

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}.$$

6.2 Betydningen af rodmultipliciteterne

Lad $x \to P(x)$ være et polynomium. Vi siger som bekendt, at et reelt tal x_0 er rod i P hvis $P(x_0) = 0$. I givet fald er P deleligt med $(x - x_0)$, dvs. der findes et polynomium Q, så $P(x) = (x - x_0)Q(x)$. Vi siger, at en rod x_0 har (*rod*-)-*multipliciteten* k, hvis P er deleligt med $(x - x_0)^k$, men ikke med $(x - x_0)^{k+1}$. Eksempelvis gælder for polynomiet $x^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2$, at det kan skrives $(x + 1)^2(x - 1)^3(x - 2)$. Derfor er $x_0 = -1$ rod med multiplicitet to (også kaldet *dobbeltrod*), $x_0 = 1$ er rod med multiplicitet tre, og $x_0 = 2$ er rod med multiplicitet én. Rodmultipliciteten af en rod x_0 i et givet polynomium betegnes rm x_0. At skrive et polynomium som produkt af led af formen $(x - x_0)^k$ kalder man at *faktorisere* polynomiet fuldstændigt. En sådan fuldstændig faktorisering er entydig (bortset selvfølgelig fra faktorernes rækkefølge). Imidlertid er det ikke alle polynomier der lader sig fuldstændigt faktorisere. F.eks. kan polynomiet $x^3 - x^2 + x - 1$ skrives $(x - 1)(x^2 + 1)$, men leddet $x^2 + 1$ har ingen reelle rødder og kan derfor ikke faktoriseres. I dette polynomium er $x_0 = 1$ altså den eneste rod, og den har multiplicitet rm $x_0 = 1$.

Der gælder for ethvert polynomium, at summen af rodmultipliciteterne er mindre end eller lig med graden af polynomiet. Summen er lig med graden netop når polynomiet kan faktoriseres fuldstændigt. I praksis bestemmes rodmultipliciteterne for et polynomium ved hjælp af rodbestemmelse samt polynomiers division, jvf. nedenstående eksempel.

Eksempel 6.2.1. For polynomiet $P(x) = x^5+4x^4+7x^3+12x^2+12x$ finder vi, at $x_0 = 0$ og $x_0 = -2$ er rødder. Ved division med x og $x+2$ fås $P(x) = x(x+2)(x^3+2x^2+3x+6)$. Den sidste faktor heri har roden $x_0 = -2$ og kan skrives $x^3+2x^2+3x+6 = (x+2)(x^2+3)$. Leddet x^2+3 har ingen rødder. Altså er $P(x) = x(x+2)^2(x^2+3)$, og dermed er $\operatorname{rm} 0 = 1$, $\operatorname{rm} (-2) = 2$.

Lad V være et endeligdimensionalt vektorrum.

Sætning 6.2.2. *Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning. For hvert reelt tal λ_0 gælder, at*

$$\operatorname{em} \lambda_0 \leq \operatorname{rm} \lambda_0,$$

hvor $\operatorname{rm} \lambda_0$ *er rodmultipliciteten af λ_0 i det karakteristiske polynomium P_f for f.*

Bevis. Lad $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, og lad V_{λ_0} være egenrummet hørende til λ_0. Lad $p = \operatorname{em} \lambda_0 = \dim V_{\lambda_0}$ og lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_p$ være en basis for V_{λ_0}. Udvid denne til en basis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ for V. Idet de første p vektorer i basen er egenvektorer for f med egenværdi λ_0, har matricen $\underline{\underline{A}}$, der repræsenterer f i denne basis, følgende form:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{D}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{D}} = \lambda_0 \underline{\underline{E}}$ er $p \times p$-diagonalmatricen med λ_0 i diagonalen, og $\underline{\underline{0}}$ er $(n-p) \times p$-nulmatricen. Matricerne $\underline{\underline{B}}$ og $\underline{\underline{C}}$ har dimension $p \times (n-p)$, henholdsvis $(n-p) \times (n-p)$. Der gælder så (Sætning 3.4.5)

$$P_f(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \det(\underline{\underline{D}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \det(\underline{\underline{C}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = (\lambda_0 - \lambda)^p \det(\underline{\underline{C}} - \lambda \underline{\underline{E}}).$$

Heraf fremgår, at λ_0 har multiplicitet mindst p som rod i P_f. Bemærk, at $\underline{\underline{E}}$ indretter sin størrelse efter behov. □

Sætning 6.2.3. *Hvis summen af rodmultipliciteterne for den lineære afbildning $f : V \to V$ er (skarpt) mindre end* $\dim V$*, eller hvis der findes en egenværdi λ_0 med* $\operatorname{em} \lambda_0 < \operatorname{rm} \lambda_0$*, da er f ikke diagonaliserbar.*

Bevis. Antag f er diagonaliserbar. Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være en basis for V bestående af egenvektorer med tilhørende egenværdier $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. I denne basis repræsenteres f ved diagonalmatricen $\underline{\underline{D}}$ med diagonalelementerne $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, og derfor er

$$P_f(\lambda) = \det(\underline{\underline{D}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

Herved er P_f fuldstændigt faktoriseret. For ethvert tal λ_0 gælder altså, at rodmultipliciteten $\operatorname{rm} \lambda_0$ er lig det antal gange λ_0 optræder blandt tallene $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Summen af alle disse rodmultipliciteter er netop n.

Hvis λ_0 optræder p gange blandt $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, findes der p basisvektorer som tilhører egenrummet V_{λ_0}, og der må derfor gælde $p \leq \dim V_{\lambda_0} = \text{ em } \lambda_0$. Vi kan altså konkludere at $\text{rm } \lambda_0 \leq \text{em } \lambda_0$. Ifølge Sætning 6.2.1 gælder så endda $\text{rm } \lambda_0 = \text{ em } \lambda_0$.

Sammenfattende har vi vist, at hvis f er diagonaliserbar er summen af rodmultipliciteterne n, og der gælder $\text{rm } \lambda_0 = \text{ em } \lambda_0$ for alle egenværdier λ_0. Sætningens udsagn fås umiddelbart heraf ved kontraponering. □

Eksempel 6.2.4. I Eksempel 6.1.11 har det karakteristiske polynomium slet ingen rødder, derfor er summen af rodmultipliciteterne 0. I Eksempel 6.1.12 er $\lambda_0 = 2$ dobbeltrod, og summen af rodmultipliciteterne er dermed lig n, som er 2. Men egenværdimultipliciteten af λ_0 er kun 1, altså gælder $\text{em } \lambda_0 < \text{ rm } \lambda_0$. I begge tilfælde konkluderede vi at f ikke er diagonaliserbar. Dette er i overensstemmelse med Sætning 6.2.3.

6.3 Betydningen af egenværdimultipliciteterne

Lad V være et endeligdimensionalt vektorrum, og lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning.

Sætning 6.3.1. *Hvis summen af rodmultipliciteterne for f er $n = \dim V$, og der gælder $\text{em } \lambda_0 = \text{ rm } \lambda_0$ for alle λ_0, da er f diagonaliserbar. En diagonaliserende basis fås i så fald ved at vælge en basis for hvert af egenrummene og sammenstille disse baser.*

Bevis. Vi vælger en basis for hvert egenrum og sammenstiller disse. Det følger af antagelserne om f, at det fremkomne sæt af egenvektorer har præcis $n = \dim V$ elementer. Vi betegner sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$, og de tilhørende egenværdier $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Vi skal vise, at dette sæt er lineært uafhængigt, idet det så udgør en basis ifølge Sætning 4.5.7, og dermed diagonaliserer f.

Antag sættet er lineært afhængigt. Der findes da et tal $k < n$ således at sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_k$ er lineært uafhængigt, mens sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_{k+1}$ er lineært afhængigt. Da er $\underline{a}_{k+1} \in \text{ span } \{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_k\}$ ifølge Sætning 4.5.9, altså

$$\underline{a}_{k+1} = x_1 \underline{a}_1 + \cdots + x_k \underline{a}_k.$$

Vi anvender f, og får dels

$$f(\underline{a}_{k+1}) = \lambda_{k+1} \underline{a}_{k+1} = \lambda_{k+1} x_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda_{k+1} x_k \underline{a}_k$$

(fordi $\underline{a}_{k+1}$ er egenvektor), og dels

$$f(\underline{a}_{k+1}) = x_1 f(\underline{a}_1) + \cdots + x_k f(\underline{a}_k) = x_1 \lambda_1 \underline{a}_1 + \cdots + x_k \lambda_k \underline{a}_k$$

(fordi f er lineær og $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_k$ er egenvektorer). Vektoren $f(\underline{a}_{k+1})$ er nu på to måder fremstillet som linearkombination af sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_k$; da dette sæt er lineært uafhængigt må koefficienterne i de to udtryk stemme overens, dvs. $\lambda_{k+1} x_i = x_i \lambda_i$ for $i = 1, \cdots, k$.

Dette er kun muligt hvis $x_i = 0$ hver gang $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$. Fjerner man nullerne i ligningen $\underline{a}_{k+1} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_k\underline{a}_k$, udtrykkes $\underline{a}_{k+1}$ altså som linearkombination af andre basisvektorer fra det samme egenrum $V_{\lambda_{k+1}}$. Dette strider mod at sættet var sammensat af baser for de enkelte egenrum: vektorer fra sættet som tilhører samme egenrum er på forhånd lineart uafhængige. Vi har dermed nået en modstrid og kan konkludere, at antagelsen at sættet er lineært afhængigt, var forkert. □

Eksempel 6.3.2. I Eksempel 6.1.13 fandt vi basen $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ for egenrummet V_2 og basen $\underline{a}_3$ for egenrummet V_3. Ifølge Sætning 6.3.1 er så $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ en basis for $V = \mathbf{R}^3$. I det nævnte eksempel blev dette verificeret ved direkte udregning: det nyttige ved Sætning 6.3.1 er netop, at man kan udelade denne verificering.

Sætning 6.3.3. *Hvis det karakteristiske polynomium P_f for f har $n = \dim V$ forskellige rødder $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, da er f diagonaliserbar. En diagonaliserende basis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ fås i dette tilfælde ved for hver rod λ_i at vælge en egenvektor $\underline{a}_i$ med egenværdien λ_i.*

Bevis. For hver af rødderne $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ gælder nødvendigvis $\operatorname{rm} \lambda_i = 1$ (ellers ville summen af rodmultipliciteterne jo overstige n). Ifølge Sætning 6.2.1 gælder dermed $\operatorname{em} \lambda_i \leq 1$, og da hver rod ifølge Sætning 6.1.8 er egenværdi, er $\operatorname{em} \lambda_i \neq 0$. Altså er $\operatorname{em} \lambda_i = \operatorname{rm} \lambda_i = 1$. Det følger nu af Sætning 6.3.1, at f diagonaliseres af den omtalte basis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$. □

6.4 Potensopløftning af matricer; anvendelser

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en $n \times n$-matrix. Af og til har man brug for at udregne potensen $\underline{\underline{A}}^k$ for $k = 1, 2, 3, \cdots$. Hvis $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar kan potensopløftning bekvemt gøres ved at diagonalisere $\underline{\underline{A}}$ først. Hvis nemlig $\underline{\underline{S}}$ er en regulær matrix, så matricen

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$$

er en diagonalmatrix gælder, at

$$\underline{\underline{D}}^k = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}^k\underline{\underline{S}}^{-1},$$

(thi $\underline{\underline{D}}^2 = (\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1})(\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}) = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{S}}^{-1}$ etc) og dermed er

$$\underline{\underline{A}}^k = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{D}}^k\underline{\underline{S}}.$$

Man udnytter så, at $\underline{\underline{D}}^k$ er meget let at udregne.

Eksempel 6.4.1. Vi betragter matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

fra Eksempel 6.1.13. Vi vil finde $\underset{=}{A}^5$. Naturligvis kan vi udregne den direkte; men vi kan også bemærke, at

$$\underset{=}{A}^5 = \underset{=}{S}^{-1}\underset{=}{D}^5\underset{=}{S},$$

hvor

$$\underset{=}{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underset{=}{S} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{=}{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

ifølge Eksempel 6.1.13. Men så er

$$\begin{aligned} \underset{=}{A}^5 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 454 & -422 & 211 \\ 422 & -390 & 211 \\ 422 & -422 & 243 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eksempel 6.4.2. Lad os antage at Københavns befolkningstal (gennem en årrække) konstant er 1 million. Byen opdeles i to dele, city og forstæderne. Lad C_n betegne befolkningstallet i city, og lad F_n betegne befolkningstallet i forstæderne efter n år (regnet i millioner). Befolkningsfordelingen mellem city og forstæderne angives ved en befolkningsvektor

$$\underset{=}{B}_n = \begin{pmatrix} C_n \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Antag, at 15% af befolkningen i city flytter til forstæderne, og at 10% af befolkningen i forstæderne flytter til city hvert år. Der må gælde, at

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= 0.85C_n + 0.10F_n \quad . \\ F_{n+1} &= 0.15C_n + 0.90F_n \end{aligned} \qquad (*)$$

Dette gælder for $n = 0, 1, 2, \cdots$. Denne sammenhæng kan skrives

$$\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.10 \\ 0.15 & 0.90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Matricen

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.10 \\ 0.15 & 0.90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{20} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

kaldes *overgangsmatricen*. Vi kan skrive formlen $(*)$ som

$$\underset{=}{B}_{n+1} = \underset{=}{A}\underset{=}{B}_n.$$

Specielt får vi, at $\underline{\underline{B}}_1 = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}_0$, $\underline{\underline{B}}_2 = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}_1 = \underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}_0$ etc., således at

$$\underline{\underline{B}}_n = \underline{\underline{A}}^n\underline{\underline{B}}_0.$$

Vi vil undersøge, hvorledes befolkningsfordelingen udvikler sig efter et stort antal år. Vi har altså brug for at beregne $\underline{\underline{A}}^n$ for store værdier af n. Vi forsøger at diagonalisere $\underline{\underline{A}}$: Det karakteristiske polynomium skrives op:

$$P_{\underline{\underline{A}}} = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = \det\begin{pmatrix} \frac{17}{20} - \lambda & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{20} & \frac{9}{10} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{7}{4}\lambda + \frac{3}{4}.$$

Rødderne heri er $\lambda = 1$ og $\lambda = \frac{3}{4}$. Matricen $\underline{\underline{A}}$ er altså diagonaliserbar.

Vi finder egenrummet hørende til egenværdien $\lambda = 1$:

$$\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

der ved hjælp af rækkeoperationer omdannes til

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hvoraf vi finder, at vektoren

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

er en basis for V_1.

Dernæst finder vi egenrummet hørende til egenværdien $\lambda = \frac{3}{4}$:

$$\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{20} \end{pmatrix},$$

der ved hjælp af rækkeoperationer omdannes til

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hvoraf vi finder, at vektoren

$$\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

er en basis for $V_{\frac{3}{4}}$.

Om koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$ for overgang fra naturlig basis til basen $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ gælder så, at

$$\underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

hvoraf

$$\underline{\underline{S}} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix},$$

og dermed er

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1},$$

hvor

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Men så er

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}^n = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{D}}^n\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}\underline{\underline{S}} &= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n & \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n & \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hvis nu f.eks. $n = 20$ er $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ tilnærmelsesvis lig med 0.00317 (lommeregner), hvorefter vi finder følgende tilnærmede værdi for $\underline{\underline{A}}^{20}$:

$$\underline{\underline{A}}^{20} \simeq \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Vi finder så, idet M er 1 million,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}_{20} = \underline{\underline{A}}^{20}\underline{\underline{B}}_0 \simeq \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_0 \\ F_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}C_0 + \frac{2}{5}F_0 \\ \frac{3}{5}C_0 + \frac{3}{5}F_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}(C_0 + F_0) \\ \frac{3}{5}(C_0 + F_0) \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.60 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Efter et antal år vil befolkningsfordelingen altså være stabil, og 40% af befolkningen vil bo i city, og 60% vil bo i forstæderne.

7 Vektorrum med skalarprodukt

7.1 Skalarprodukt; Gram-Schmidt ortogonalisering

Lad V være et vektorrum.

Definition 7.1.1. Ved et *skalarprodukt* (eller *indre produkt* i V forstås en forskrift hvorved der til hvert par af vektorer $\underline{x}, \underline{y}$ i V knyttes et tal $\underline{x} \cdot \underline{y}$, skalarproduktet af $\underline{x}$ og $\underline{y}$, således at der for vilkårlige vektorer $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ i V og vilkårlige tal $\lambda \in \mathbf{R}$ gælder:

S1: $(\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{z} = \underline{x} \cdot \underline{z} + \underline{y} \cdot \underline{z}$

S2: $(\lambda \underline{x}) \cdot \underline{y} = \lambda(\underline{x} \cdot \underline{y})$.

S3: $\underline{x} \cdot \underline{y} = \underline{y} \cdot \underline{x}$

S4: $\underline{x} \cdot \underline{x} \geq 0$

S5: $\underline{x} \cdot \underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{o}$

Vektorrummet V udstyret med et skalarprodukt kaldes for et *euklidisk vektorrum.*

Eksempel 7.1.2. I talrummet $\mathbf{R}^n$ defineres et skalarprodukt ved for to vektorer

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

i $\mathbf{R}^n$ at sætte

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Det følger af Sætning 1.1.4. Dette skalarprodukt kaldes for det *sædvanlige skalarprodukt* på $\mathbf{R}^n$.

Lad V være et euklidisk vektorrum. For en vektor $\underline{x} \in V$ defineres *længden* af vektoren $\underline{x}$ som tallet

$$|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}}.$$

Denne definition giver mening, da $\underline{x} \cdot \underline{x} \geq 0$ ifølge S4. Vi bemærker, at $|\underline{x}| = 0$ netop hvis $\underline{x} = \underline{o}$, og at $|\lambda \underline{x}| = |\lambda|\, |\underline{x}|$ for $\lambda \in \mathbf{R}$, $\underline{x} \in V$.

En vektor $\underline{x} \in V$ for hvilken $|\underline{x}| = 1$ kaldes en *enhedsvektor.* Hvis $\underline{x} \in V$ er en egentlig vektor, da er vektoren

$$\underline{y} = \frac{1}{|\underline{x}|}\underline{x}$$

en enhedsvektor. Vektoren $\underline{y}$ siges at være fremgået af $\underline{x}$ ved *normering.*

To vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ siges at være *ortogonale* hvis $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$. Dette skrives også $\underline{x} \perp \underline{y}$.

Definition 7.1.3. Et sæt af vektorer $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ i V kaldes et *ortogonalsæt*, hvis hver af vektorerne er forskelligt fra nulvektoren, og hvis de er indbyrdes ortogonale, altså hvis $\underline{a}_i \neq \underline{o}$ for $1 \leq i \leq n$ og $\underline{a}_i \cdot \underline{a}_j = 0$ for $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Sættet kaldes et *ortonormalsæt*, hvis der yderligere gælder, at alle vektorerne er enhedsvektorer, altså $|\underline{a}_i| = 1$ for alle $1 \leq i \leq n$.

Definition 7.1.4. En basis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ for V kaldes for en *ortonormalbasis* hvis sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er et ortonormalsæt.

En basis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er altså en ortonormalbasis, hvis $\underline{a}_i \cdot \underline{a}_i = 1$ for $1 \leq i \leq n$ og $\underline{a}_i \cdot \underline{a}_j = 0$ for alle $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

Det ses umiddelbart, at den naturlige basis $\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n$ i $\mathbf{R}^n$ er en ortonormalbasis i $\mathbf{R}^n$.

Sætning 7.1.5. *Hvis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er en ortonormalbasis for det euklidiske vektorrum V, og hvis vektoren $\underline{x}$ hhv. $\underline{y}$ har koordinatsøjlen $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ hhv. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ med hensyn til basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$, da er*

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Bevis. Vi ser på tilfældet $n = 2$. Der gælder så

$$\begin{aligned} \underline{x} \cdot \underline{y} &= (x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2) \cdot (y_1 \underline{a}_1 + y_2 \underline{a}_2) \\ &= x_1 y_1 \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1 + x_1 y_2 \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 + x_2 y_1 \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_1 + x_2 y_2 \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2. \end{aligned}$$

□

Sætning 7.1.6. *Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være et ortogonalsæt i det euklidiske vektorrum V. Sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er lineært uafhængigt, og for $\underline{a} \in \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$ gælder*

$$\underline{a} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{a}_1}{\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1}\underline{a}_1 + \cdots + \frac{\underline{a} \cdot \underline{a}_n}{\underline{a}_n \cdot \underline{a}_n}\underline{a}_n.$$

Bevis. Hvis $\underline{a} \in$ span $\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$ findes tal $\lambda_1, \cdots \lambda_n$, så

$$\underline{a} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n \underline{a}_n,$$

Heraf fås ved at multiplicere skalært med $\underline{a}_j$, at

$$\underline{a} \cdot \underline{a}_j = \lambda_j \underline{a}_j \cdot \underline{a}_j,$$

idet vektorerne $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er indbyrdes ortogonale. Idet $\underline{a}_j \cdot \underline{a}_j \neq 0$ er så $\lambda_j = \frac{\underline{a} \cdot \underline{a}_j}{\underline{a}_j \cdot \underline{a}_j}$. Dette viser formlen for $\underline{a}$. Hvis en linearkombination $\underline{a} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n \underline{a}_n$ er $\underline{o}$, viser formlen at $\lambda_j = \frac{\underline{o} \cdot \underline{a}_j}{\underline{a}_j \cdot \underline{a}_j} = 0$ for $1 \leq j \leq n$, og det viser at sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er lineært uafhængigt. □

Sætning 7.1.7. *Lad $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ være et ortogonalsæt i det euklidiske vektorrum V, og lad $\underline{a}_{n+1} \in V$ være yderligere en vektor i V. Sættes*

$$\underline{b}_{n+1} = \underline{a}_{n+1} - \frac{\underline{a}_{n+1} \cdot \underline{b}_1}{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1} \underline{b}_1 - \cdots - \frac{\underline{a}_{n+1} \cdot \underline{b}_n}{\underline{b}_n \cdot \underline{b}_n} \underline{b}_n,$$

er $\underline{b}_{n+1} \neq \underline{o}$ netop hvis sættet $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$, $\underline{a}_{n+1}$ er lineært uafhængigt; endvidere er $\underline{b}_{n+1}$ ortogonal på $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$. Under alle omstændigheder er span $\{\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n, \underline{a}_{n+1}\} =$ span $\{\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n, \underline{b}_{n+1}\}$.

Bevis. Hvis $\underline{b}_{n+1} = \underline{o}$ har vi klart, at $\underline{a}_{n+1} \in \{\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n\}$, og dermed er $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n, \underline{a}_{n+1}$ lineært afhængigt. Hvis omvendt $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n, \underline{a}_{n+1}$ er lineært afhængigt, er $\underline{b}_{n+1} = \underline{o}$ ifølge Sætning 7.1.6. Antag så, at $\underline{b}_{n+1} \neq \underline{o}$. Ved skalær multiplikation af $\underline{b}_{n+1}$ med $\underline{b}_j$, $1 \leq j \leq n$, fås

$$\underline{b}_{n+1} \cdot \underline{b}_j = \underline{a}_{n+1} \cdot \underline{b}_j - \frac{\underline{a}_{n+1} \cdot \underline{b}_j}{\underline{b}_j \cdot \underline{b}_j} \underline{b}_j \cdot \underline{b}_j = 0.$$

Det er klart, at span $\{\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n, \underline{a}_{n+1}\} =$ span $\{\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n, \underline{b}_{n+1}\}$. Hermed er sætningen vist. □

Hvis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er et sæt af lineært uafhængige vektorer i vektorrummet V, og vi sætter $\underline{b}_1 = \underline{a}_1$, og dernæst danner vektoren $\underline{b}_2$ ud fra sættet $\underline{b}_1, \underline{a}_2$ som i Sætning 7.1.7, og dernæst danner vektoren $\underline{b}_3$ ud fra sættet $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{a}_3$ som i denne sætning etc; opstår der herved et ortogonalsæt $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$, med span $\{\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n\} =$ span $\{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\}$. Sættet $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ siges at fremgå af sættet $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ ved *Gram-Schmidt ortogonalisering.* Hvis vi ydermere normerer vektorerne $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ taler vi om *Gram-Schmidt ortonormalisering.* Metoden er opkaldt efter J.P. Gram (1850-1916), dansk forsikringsmatematiker og E. Schmidt (1845-1921), tysk matematiker.

Sætning 7.1.8. *Ethvert endeligdimensionalt euklidisk vektorrum V har en ortonormalbasis.*

Bevis. Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være en basis for V. Ved Gram-Schmidt ortonormalisering af denne basis opstår en ortonormalbasis $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n$ for V. □

Eksempel 7.1.9. I $\mathbf{R}^4$ er der givet de tre vektorer

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi udfører Gram-Schmidt ortogonalisering på dette sæt: Vi begynder med at sætte $\underline{b}_1 = \underline{a}_1$. Dernæst sættes

$$\underline{b}_2 = \underline{a}_2 - \frac{\underline{a}_2 \cdot \underline{b}_1}{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1}\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{8}{10}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

For nemheds skyld omdefinerer vi nu $\underline{b}_2$ idet vi fjerner faktoren $\frac{1}{5}$, og vi sætter altså

$$\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Herefter findes $\underline{b}_3$:

$$\underline{b}_3 = \underline{a}_3 - \frac{\underline{a}_3 \cdot \underline{b}_1}{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1}\underline{b}_1 - \frac{\underline{a}_3 \cdot \underline{b}_2}{\underline{b}_2 \cdot \underline{b}_2}\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{10}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{11}{65}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi omdefinerer så $\underline{b}_3$, idet faktoren $\frac{1}{13}$ fjernes, og vi sætter altså

$$\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hermed har vi fundet en ortogonalbasis for underrummet udspændt af $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$, nemlig

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ønsker vi at finde en ortonormalbasis normerer vi blot disse vektorer, og får

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{91}}\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.2 Ortogonale matricer

Definition 7.2.1. En $n \times n$-matrix $\underset{=}{S}$ kaldes *ortogonal*, hvis dens søjler udgør en ortonormalbasis i $\mathbf{R}^n$.

Eksempel 7.2.2. Matricen

$$\underset{=}{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ses umiddelbart at være en ortogonal matrix.

Sætning 7.2.3. *For en $n \times n$-matrix $\underset{=}{S}$ er følgende betingelser ensbetydende*

(1) $\underset{=}{S}$ *er ortogonal.*

(2) $\underset{=}{S}^t \underset{=}{S} = \underset{=}{E}$.

(3) $\underset{=}{S}$ *er regulær, og* $\underset{=}{S}^{-1} = \underset{=}{S}^t$.

Bevis. Først (1) $\Leftrightarrow$ (2): Da

$$(\underset{=}{S}^t \underset{=}{S})[i,j] = \underset{=}{S}^t[i,*] \cdot \underset{=}{S}[*,j] = \underset{=}{S}[*,i] \cdot \underset{=}{S}[*,j],$$

udgør søjlerne i $\underset{=}{S}$ et ortonormalsæt hvis og kun hvis

$$(\underset{=}{S}^t \underset{=}{S})[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases},$$

og det er ensbetydende med $\underset{=}{S}^t \underset{=}{S} = \underset{=}{E}$. Dette viser (1) $\Leftrightarrow$ (2). Dernæst (2) $\Leftrightarrow$ (3): Hvis $\underset{=}{S}^t \underset{=}{S} = \underset{=}{E}$ er $\underset{=}{S}$ regulær, og $\underset{=}{S}^{-1} = \underset{=}{S}^t$ ifølge Sætning 2.6.6. Hvis omvendt $\underset{=}{S}$ er regulær, og $\underset{=}{S}^{-1} = \underset{=}{S}^t$ er $\underset{=}{S}^t \underset{=}{S} = \underset{=}{S}^{-1} \underset{=}{S} = \underset{=}{E}$. Dette viser (2) $\Leftrightarrow$ (3). □

Eksempel 7.2.4. Idet matricen $\underset{=}{S}$ fra Eksempel 7.2.2 er ortogonal, finder vi umiddelbart den inverse $\underset{=}{S}^{-1} = \underset{=}{S}^t$ til $\underset{=}{S}$:

$$\underset{=}{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Lad V være et euklidisk vektorrum.

Sætning 7.2.5. *Koordinattransformationsmatricen $\underset{=}{S}$ for overgang fra en ortonormalbasis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ til en anden ortonormalbasis $\underline{\tilde{a}}_1, \cdots, \underline{\tilde{a}}_n$ er en ortogonal matrix.*

Bevis. Skriver vi matricen

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{s}_1 & \cdots & \underline{s}_n \end{pmatrix}$$

er

$$\begin{pmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{pmatrix}$$

koordinatsøjlen for vektoren $\underline{a}_j$ med hensyn til basen $\underline{\tilde{a}}_1, \cdots, \underline{\tilde{a}}_n$. Men da $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ og $\underline{\tilde{a}}_1, \cdots, \underline{\tilde{a}}_n$ er ortonormalbaser fås så, at

$$\underline{s}_j \cdot \underline{s}_j = s_{1j}^2 + \cdots + s_{nj}^2 = \underline{a}_j \cdot \underline{a}_j = 1,$$

og

$$\underline{s}_i \cdot \underline{s}_j = s_{1i}s_{1j} + \cdots + s_{ni}s_{nj} = \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j = 0$$

for $i \neq j$. Her har vi anvendt Sætning 7.1.5. Dette viser sætningen. $\square$

7.3 Ortogonalprojektion

Lad V være et euklidisk vektorrum

Definition 7.3.1. For en delmængde $M \subseteq V$ sættes

$$M^\perp = \{\underline{x} \in V \mid \underline{x} \cdot \underline{y} = 0 \text{ for alle } \underline{y} \in M\} = \{\underline{x} \in V \mid \underline{x} \perp \underline{y} \text{ for alle } \underline{y} \in M\}.$$

Det ses umiddelbart, at $M^\perp$ er et underrum i V, og at

$$M^\perp = (\text{ span } M)^\perp.$$

Sætning 7.3.2. *Lad U være et underrum i V. Underrummet $U^\perp$ er komplementært til U, altså*

$$V = U \oplus U^\perp;$$

endvidere er

$$(U^\perp)^\perp = U.$$

Hvis $\dim V = n$, $\dim U = p$, *så er* $\dim U^\perp = n - p$.

Bevis. Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_p$ være en ortonormalbasis for U og udvid $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_p$ til en ortonormalbasis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ for V. Idet $\underline{a} \in V$ skrives

$$\underline{a} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n \underline{a}_n$$

gælder, at $\underline{a} \cdot \underline{a}_j = \lambda_j$, hvoraf ses, at $\underline{a} \in U^\perp$ netop hvis $\lambda_j = 0$ for $j = 1, \cdots, p$. Men det betyder, at $U^\perp = \text{ span } \{\underline{a}_{p+1}, \cdots, \underline{a}_n\}$, hvoraf fås, at U og $U^\perp$ er komplementære (Sætning 4.7.3). På samme måde ses, at $(U^\perp)^\perp = \text{ span } \{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_p\}$, der viser, at $(U^\perp)^\perp = U$. $\square$

Definition 7.3.3. Lad U være et underrum i V. Ved *ortogonalprojektionen* af vektoren $\underline{a}$ på U forstås projektionen af $\underline{a}$ på U langs $U^\perp$.

Underrummet $U^\perp$ kaldes for det *ortogonale komplement* til U.

Bemærk, at ortogonalprojektionen af $\underline{a}$ på underrummet U er den entydigt bestemte vektor $\underline{x} \in U$ for hvilken vektoren $\underline{y} = \underline{a} - \underline{x}$ tilhører $U^\perp$. Af beviset for Sætning 7.3.2 fremgår følgende sætning:

Sætning 7.3.4. *Hvis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_p$ er en ortonormalbasis for underrummet U i V er ortogonalprojektionen $\underline{x}$ af vektoren $\underline{a}$ på U givet ved*

$$\underline{x} = (\underline{a} \cdot \underline{a}_1)\underline{a}_1 + \cdots + (\underline{a} \cdot \underline{a}_p)\underline{a}_p.$$

Er der i et underrum U givet en ortonormalbasis kan man direkte nedskrive ortogonalprojektionen af en vektor $\underline{a}$ på U ved hjælp af den foregående sætning. Er der derimod blot givet en basis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_p$, der (måske) ikke er en ortonormalbasis, kan man gå frem på følgende måde: Idet ortogonalprojektionen af $\underline{a}$ på U kaldes $\underline{x}$ skrives

$$\underline{x} = x_1 \underline{a}_1 + \cdots + x_p \underline{a}_p.$$

Det bemærkes så, at $\underline{a} - \underline{x} \in U^\perp$, hvoraf $(\underline{a} - \underline{x}) \cdot \underline{a}_j = 0$ for $1 \leq j \leq p$. Men dette betyder, at $\underline{a}_j \cdot \underline{x} = \underline{a}_j \cdot \underline{a}$, hvoraf

$$x_1 \underline{a}_j \cdot \underline{a}_1 + \cdots + x_p \underline{a}_j \cdot \underline{a}_p = \underline{a}_j \cdot \underline{a}$$

for $1 \leq j \leq p$. Dette kan også skrives

$$\begin{aligned} (\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1)x_1 + \cdots + (\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_p)x_p &= \underline{a}_1 \cdot \underline{a} \\ &\vdots \\ (\underline{a}_p \cdot \underline{a}_1)x_1 + \cdots + (\underline{a}_p \cdot \underline{a}_p)x_p &= \underline{a}_p \cdot \underline{a}, \end{aligned}$$

eller

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1 & \cdots & \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_p \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{a}_p \cdot \underline{a}_1 & \cdots & \underline{a}_p \cdot \underline{a}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a} \cdot \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a} \cdot \underline{a}_p \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Af dette ligningssystem kan så tallene $x_1, \cdots, x_p$ bestemmes, og dermed kan ortogonalprojektionen $\underline{x}$ bestemmes. Bemærk, at den kvadratiske matrix der figurerer i formlen $(*)$ er *symmetrisk*. Den kaldes i øvrigt *Gram-matricen* hørende til basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_p$.

Eksempel 7.3.5. I $\mathbf{R}^3$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vil bestemme ortogonalprojektionen af vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

på underrummet U udspændt af $\underline{a}_1, \underline{a}_2$. Idet vektorerne $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ klart er lineært uafhængige, udgør de en basis for U. Vi opskriver så ligningssystemet $(*)$ svarende til den forhåndenværende situation:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

der har løsningen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Ortogonalprojektionen $\underline{x}$ af $\underline{a}$ på U er da

$$\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Som kontrol verificerer vi, at vektoren

$$\underline{a} - \underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

er ortogonal til $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_2$.

7.4 Diagonalisering af symmetriske matricer

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en $m \times n$-matrix, og lad $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være den tilhørende lineære afbildning. Vi har i afsnit 1.6 set, at hvis $f^t : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ er den lineære afbildning, der hører til den transponerede matrix $\underline{\underline{A}}^t$, da gælder

$$f(\underline{x}) \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot f^t(\underline{y})$$

for alle $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$, $\underline{y} \in \mathbf{R}^m$. Er nu $\underline{\underline{A}}$ en *symmetrisk* $n \times n$-matrix, gælder $\underline{\underline{A}}^t = \underline{\underline{A}}$, og dermed gælder for den lineære afbildning $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, at

$$f(\underline{x}) \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot f(\underline{y})$$

for alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbf{R}^n$.

Lad V være et euklidisk vektorrum.

Definition 7.4.1. En lineær afbildning $f : V \to V$ kaldes *symmetrisk* hvis

$$f(\underline{x}) \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot f(\underline{y})$$

for alle $\underline{x}, \underline{y} \in V$.

Sætning 7.4.2. *En symmetrisk lineær afbildning $f : V \to V$ repræsenteres i en ortonormalbasis af en symmetrisk matrix.*

Bevis. Lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være den givne ortonormalbasis, og lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$ være matricen der repræsenterer f i denne basis. Der gælder så:

$$a_{ij} = f(\underline{a}_j) \cdot \underline{a}_i = \underline{a}_j \cdot f(\underline{a}_i) = f(\underline{a}_i) \cdot \underline{a}_j = a_{ji}.$$

Her har vi anvendt Sætning 5.2.1, og at f er symmetrisk. □

Sætning 7.4.3. *Hvis $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er egenvektorer for den symmetriske lineære afbildning $f : V \to V$ hørende til forskellige egenværdier, er $\underline{x}$ og $\underline{y}$ ortogonale.*

Bevis. Der gælder, at $f(\underline{x}) = \lambda\underline{x}$ og $f(\underline{y}) = \mu\underline{y}$, hvor $\lambda \neq \mu$. Men så er $\lambda\underline{x} \cdot \underline{y} = (\lambda\underline{x}) \cdot \underline{y} = f(\underline{x}) \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot f(\underline{y}) = \underline{x} \cdot (\mu\underline{y}) = \mu\underline{x} \cdot \underline{y}$. Heraf ses, at $(\lambda - \mu)\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$, og dermed er $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$, da $\lambda \neq \mu$. □

Symmetriske matricer har en afgørende egenskab, givet i den følgende sætning. Beviset anføres i appendiks, idet det benytter et resultat fra analysen.

Sætning 7.4.4. *Det karakteristiske polynomium for en symmetrisk matrix har (mindst) én rod.*

Af Sætning 7.4.4 fås, at hvis $f : V \to V$ er en symmetrisk lineær afbildning, da har f en egenværdi (medmindre $V = \{\underline{o}\}$). I en ortonormalbasis repræsenteres f nemlig ved en symmetrisk matrix $\underline{\underline{A}}$, og da $P_f = P_{\underline{\underline{A}}}$, har P_f en rod, som så er egenværdi for f ifølge Sætning 6.1.8.

Sætning 7.4.5. *Lad $f : V \to V$ være en symmetrisk lineær afbildning. Da er f diagonaliserbar. En diagonaliserende ortonormalbasis fås ved at vælge en ortonormalbasis for hvert egenrum og sammenstille disse baser.*

Bevis. Lad M være mængden af samtlige egenvektorer for f og sæt $U = M^\perp$. Vi påstår, at underrummet U er *invariant* ved f, hvilket vil sige at $\underline{y} \in U$ medfører $f(\underline{y}) \in U$. Lad $\underline{x} \in M$. Da er $\underline{x}$ egenvektor, altså $f(\underline{x}) = \lambda\underline{x}$ for et tal λ. Dermed gælder for $\underline{y} \in U$

$$f(\underline{y}) \cdot \underline{x} = \underline{y} \cdot f(\underline{x}) = \underline{y} \cdot \lambda\underline{x} = \lambda(\underline{y} \cdot \underline{x}) = 0.$$

Altså er $f(\underline{y}) \perp \underline{x}$ for alle $\underline{x} \in M$, dvs. $f(\underline{y}) \in M^\perp = U$. Dette viser påstanden. Lad nu $g : U \to U$ betegne restriktionen af f til U. Da ses fra Definition 7.4.1 at g også er symmetrisk. Ifølge bemærkningerne efter Sætning 7.4.4 har g en egenvektor, medmindre $U = \{\underline{o}\}$. Men en egenvektor for g er også egenvektor for f og vil derfor tilhøre M. Da $M \cap U = \emptyset$ er dette udelukket. Altså må $U = \{\underline{o}\}$. Altså udspænder M hele V (Sætning 7.3.2). Heraf sluttes, at vi kan finde en basis bestående af egenvektorer, og dermed er f diagonaliserbar.

At fremgangsmåden anført til sidst i sætningen fører til en diagonaliserende ortonormalbasis, følger af sætningerne 6.3.1 og 7.4.3. $\square$

Af den netop viste sætning fås så følgende sætning om symmetriske matricer:

Sætning 7.4.6. *En symmetrisk $n \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar, og der findes en ortogonal $n \times n$-matrix $\underline{\underline{S}}$ så*

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$$

er en diagonalmatrix.

Bevis. Lad $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være den lineære afbildning der hører til $\underline{\underline{A}}$. Der findes da en ortonormalbasis $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ for $\mathbf{R}^n$ bestående af egenvektorer for f (Sætning 7.4.5). Koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$ for overgang fra naturlig basis til basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er da en ortogonal matrix (Sætning 7.2.5), og der gælder, at $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$, hvor $\underline{\underline{D}}$ er matricen, der repræsenterer f i basen $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ (Sætning 5.3.1). Men $\underline{\underline{D}}$ er en diagonalmatrix, da vektorerne $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ er egenvektorer for f. Dette viser sætningen. $\square$

Bemærkning. Omvendt til Sætning 7.4.6 gælder: *Hvis en $n \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar m.h.t. en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$, så er $\underline{\underline{A}}$ symmetrisk.*

Af $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ fås $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{S}}$, og heraf ses at

$$\underline{\underline{A}}^t = \underline{\underline{S}}^t\underline{\underline{D}}^t(\underline{\underline{S}}^{-1})^t = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}},$$

hvoraf symmetrien af $\underline{\underline{A}}$ fremgår.

Eksempel 7.4.7. Der er givet den symmetriske matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & 11 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vi vil finde en basis for $\mathbf{R}^3$ bestående af egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$, og en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$ så $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix.

Vi opskriver først det karakteristiske polynomium:

$$
\begin{aligned}
P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 11-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12-\lambda & 0 & 12-\lambda \\ -2 & 11-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (12-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 11-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (12-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 11-\lambda & 4 \\ 4 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (12-\lambda) \begin{vmatrix} 11-\lambda & 4 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (12-\lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 36) = (12-\lambda)^2(3-\lambda).
\end{aligned}
$$

Det karakteristiske polynomium har altså rødderne $\lambda = 3$ og $\lambda = 12$ (dobbeltrod).

Vi finder dernæst de tilhørende egenrum.

For $\lambda = 3$ fås:

$$
\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix},
$$

der ved hjælp af rækkeoperationer omdannes til matricen

$$
\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Vi opskriver så ligningssystemet hørende hertil:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 4x_2 - x_3 &= 0 \\
2x_2 + x_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Dette løses, og vi finder

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.
$$

Vektoren

$$
\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

er altså en basis for egenrummet V_3 hørende til egenværdien $\lambda = 3$.

For $\lambda = 12$ fås:

$$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

der ved hjælp af rækkeoperationer omdannes til matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi opskriver så ligningssystemet hørende hertil:

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

Dette løses, og vi finder

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+t \\ 2s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

Vektorerne

$$\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

er altså en basis for egenrummet V_{12} hørende til egenværdien $\lambda = 12$.

Vi har nu fundet en basis $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ for $\mathbf{R}^3$ bestående af egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$. Vi skal så finde en ortonormalbasis bestående af egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$. Vi bemærker, at vektoren $\underline{a}_1$ er ortogonal på vektorerne $\underline{a}_2, \underline{a}_3$ i overensstemmelse med Sætning 7.4.3. Ved hjælp af Gram-Schmidt omdanner vi så sættet $\underline{a}_2, \underline{a}_3$ til en ortonormalbasis for V_{12}: Vi sætter $\underline{b}_2 = \underline{a}_2$, og

$$\underline{b}_3 = \underline{a}_3 - \frac{\underline{a}_3 \cdot \underline{b}_2}{\underline{b}_2 \cdot \underline{b}_2} \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi omdefinerer så $\underline{b}_3$ til

$$\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

og sætter $\underline{b}_1 = \underline{a}_1$. Hermed har vi opnået et ortogonalsæt

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bestående af egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$. Den søgte ortonormalbasis fås nu ved normering af dette sæt:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Om koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$ for overgang fra naturlig basis til denne nye ortonormalbasis gælder:

$$\underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

og dermed er

$$\underline{\underline{S}} = (\underline{\underline{S}}^{-1})^{-1} = (\underline{\underline{S}}^{-1})^t = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Der gælder så, at

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1},$$

hvor

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

7.5 Kvadratiske former

Lad $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})_{n,n}$ være en *symmetrisk* $n \times n$-matrix. For $\underline{x} = \underline{\underline{X}} \in \mathbf{R}^n$ sættes

$$K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) = \underline{\underline{X}}^t \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{X}}.$$

Funktionen $K_{\underline{\underline{B}}} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ kaldes den til $\underline{\underline{B}}$ hørende *kvadratiske form.*

For $n = 2$ er

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix},$$

og

$$\begin{aligned} K_{\underline{\underline{B}}}(x_1, x_2) &= (x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + 2b_{12}x_1x_2. \end{aligned}$$

For $n = 3$ er

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix},$$

og

$$\begin{aligned} K_{\underline{\underline{B}}}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3. \end{aligned}$$

Generelt gælder

$$K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} b_{ij}x_ix_j.$$

Eksempel 7.5.1. a. Funktionen $K : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ givet ved

$$K(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$$

er en kvadratisk form; thi sættes

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

er $K = K_{\underline{\underline{B}}}$.

b. Funktionen $K : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ givet ved

$$K(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$$

er en kvadratisk form; thi sættes

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

er $K = K_{\underline{\underline{B}}}$.

Definition 7.5.2. Lad $K_{\underline{\underline{B}}}$ være den kvadratiske form hørende til den symmetriske matrix $\underline{\underline{B}}$. Vi siger, at

(1) $K_{\underline{\underline{B}}}$ er *positivt definit*, hvis $K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) > 0$ for alle $\underline{x} \neq \underline{o}$.

(2) $K_{\underline{\underline{B}}}$ er *positivt semidefinit*, hvis $K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) \geq 0$ for alle $\underline{x}$.

(3) $K_{\underline{\underline{B}}}$ er *negativt definit*, hvis $K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) < 0$ for alle $\underline{x} \neq \underline{o}$.

(4) $K_{\underline{\underline{B}}}$ er *negativt semidefinit*, hvis $K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) \leq 0$ for alle $\underline{x}$.

Hvis ingen af disse betingelser er opfyldt siges $K_{\underline{\underline{B}}}$ at være *indefinit*.

Hvis en kvadratisk form $K_{\underline{\underline{B}}}$ er positivt definit er den også positivt semidefinit. At $K_{\underline{\underline{B}}}$ er indefinit betyder, at der findes en vektor $\underline{x}$, så $K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) > 0$ og en vektor $\underline{y}$, så $K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{y}) < 0$.

Hvis $K_{\underline{\underline{B}}}$ er negativt definit er $-K_{\underline{\underline{B}}}$ positivt definit.

Hvis $K_{\underline{\underline{B}}}$ er positivt definit siges matricen $\underline{\underline{B}}$ at være *positivt definit* etc.

Vi er interesserede i at kunne afgøre om en given kvadratisk form er positivt (semi)definit, negativt (semi)definit eller indefinit.

Først ser vi på tilfældet, hvor $\underline{\underline{B}}$ er en diagonalmatrix, altså

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix};$$

da er

$$K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Heraf fremgår klart, at $K_{\underline{\underline{B}}}$ er positivt definit netop hvis $\lambda_j > 0$ for alle $1 \leq j \leq n$, positivt semidefinit netop hvis $\lambda_j \geq 0$ for alle $1 \leq j \leq n$, negativt definit netop hvis $\lambda_j < 0$ for alle $1 \leq j \leq n$, negativt semidefinit netop hvis $\lambda_j \leq 0$ for alle $1 \leq j \leq n$ og indefinit netop hvis der findes et j, så $\lambda_j > 0$ og et k ($\neq j$) så $\lambda_k < 0$.

Antag så, at $\underline{\underline{B}}$ er en vilkårlig symmetrisk $n \times n$-matrix. Der findes da en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$, så matricen $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix};$$

her er $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ egenværdierne for $\underline{\underline{B}}$.

For en vektor $\underline{x} = \underline{\underline{X}}$ skriver vi $\underline{\tilde{x}} = \underline{\underline{\widetilde{X}}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{X}}$ (jvf. Sætning 5.1.1). Idet $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{\widetilde{X}}}$ gælder så:

$$\begin{aligned} K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) &= \underline{\underline{X}}^t\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{X}} = (\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{\widetilde{X}}})^t\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{\widetilde{X}}} = \underline{\underline{\widetilde{X}}}^t(\underline{\underline{S}}^{-1})^t\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{\widetilde{X}}} \\ &= \underline{\underline{\widetilde{X}}}^t\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{\widetilde{X}}} = \underline{\underline{\widetilde{X}}}^t\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{\widetilde{X}}} = K_{\underline{\underline{D}}}(\underline{\tilde{x}}). \end{aligned}$$

Heraf fås

Sætning 7.5.3. *Den kvadratiske form $K_{\underline{\underline{B}}}$ hørende til en symmetrisk matrix $\underline{\underline{B}}$ er positivt definit (hhv. positivt semidefinit, hhv. negativt definit, hhv. negativt semidefinit) netop hvis samtlige egenværdier for $\underline{\underline{B}}$ er positive (hhv. positive eller nul, hhv. negative, hhv. negative eller nul), og den er indefinit netop hvis der findes både positive og negative egenværdier.*

Eksempel 7.5.4. En kvadratisk form $K : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ er givet ved

$$K(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 + 11x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Den tilhørende symmetriske matrix er

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & 11 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Denne matrix blev i Eksempel 7.4.7 vist at have egenværdierne 3 og 12, altså er den kvadratiske form K positivt definit.

Hvis $\underline{\underline{B}}$ er en symmetrisk matrix, og $\underline{\underline{S}}$ er en ortogonal matrix, så $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix, da er $\det \underline{\underline{D}} = \det \underline{\underline{B}}$. Hvis derfor $\underline{\underline{B}}$ er positivt definit, er $\det \underline{\underline{B}} > 0$, idet jo så alle diagonalelementerne i $\underline{\underline{D}}$ er positive, og determinanten for $\underline{\underline{D}}$ er produktet af egenværdierne.

Lad $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})_{n,n}$ være en symmetrisk matrix. Ved den i'te *ledende undermatrix* forstås den $i \times i$-matrix $\underline{\underline{B}}_i$ der fremgår ved sletning af de sidste $n - i$ rækker og søjler. Altså er

$$\underline{\underline{B}}_1 = b_{11}$$
$$\underline{\underline{B}}_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$
$$\vdots$$
$$\underline{\underline{B}}_i = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ii} \end{pmatrix}.$$

Specielt er $\underline{\underline{B}}_n = \underline{\underline{B}}$.

Det er klart, at $K_{\underline{\underline{B}}_i}(x_1, \cdots, x_i) = K_{\underline{\underline{B}}}(x_1, \cdots, x_i, 0, \cdots, 0)$. Hvis derfor $\underline{\underline{B}}$ er positivt definit er $\underline{\underline{B}}_i$ positivt definit, og dermed er også den *ledende underdeterminant* $\det \underline{\underline{B}}_i > 0$ for alle $1 \leq i \leq n$. Dette viser den ene halvdel af følgende sætning. Den anden del af sætningen beviser vi ikke her.

Sætning 7.5.5. *En symmetrisk matrix er positivt definit netop hvis alle dens ledende underdeterminanter er positive.*

Eksempel 7.5.6. Vi betragter igen matricen

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & 11 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

fra Eksempel 7.5.4. De ledende underdeterminanter beregnes til $\det \underline{\underline{B}}_1 = 8$, $\det \underline{\underline{B}}_2 = 84$, $\det \underline{\underline{B}}_3 = \det \underline{\underline{B}} = 432$. Idet disse alle er positive, fås igen at $\underline{\underline{B}}$ er positivt definit.

Appendiks

Mængder

De grundlæggende begreber fra mængdelæren forudsættes bekendt. Her indskrænker vi os til at minde om følgende standardbetegnelser:

N betegner de naturlige tal, dvs. tallene $1, 2, 3, \cdots$.

$\mathbf{N}_0$ betegner de naturlige tal med tilføjelse af 0, dvs. tallene $0, 1, 2, 3, \cdots$.

Z betegner de *hele* tal, dvs. tallene $\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Q betegner de *rationale* tal, dvs. mængden af alle brøker $\frac{p}{q}$, hvor p og q er hele tal, $q \neq 0$.

R betegner de *reelle* tal. Disse tal svarer til mængden af punkter på en tallinie.

Afbildninger

Ved en *afbildning* af en mængde af X *ind i* en mængde Y, eller en *funktion* fra X til Y, forstås en forskrift, hvorved der til hvert element $x \in X$ knyttes et bestemt element $y \in Y$.

En afbildning betegnes i reglen ved et enkelt bogstav. Af f er en afbildning af X ind i Y skrives

$$f : X \to Y.$$

Mængden X kaldes afbildningens *definitionsmængde* og mængden Y kaldes dens *dispositionsmængde*. Det til et element $x \in X$ svarende element af Y betegnes $f(x)$. Det kaldes *billedet* af x ved f eller den til x hørende *funktionsværdi*. At $f(x)$ svarer til x skrives hyppigt

$$x \to f(x).$$

For en vilkårlig delmængde A af X udgør billederne af alle $x \in A$ en delmængde af Y, der kaldes *billedet af* A ved f og betegnes $f(A)$, altså

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Bemærk, at medens $f(x)$ for $x \in X$ er et element i Y, er $f(A)$ for $A \subseteq X$ en delmængde af Y. Billedet $f(X)$ kaldes *billedmængden* eller *værdimængden* for f.

En afbildning $f : X \to Y$ kaldes *surjektiv* eller en afbildning af X *på* Y, hvis $f(X) = Y$. Den kaldes *injektiv*, hvis der for vilkårlige indbyrdes forskellige $x_1, x_2 \in X$ gælder $f(x_1) \neq f(x_2)$. Sagt anderledes er f injektiv, hvis $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Afbildningen kaldes *bijektiv*, hvis den både er surjektiv og injektiv, altså hvis ethvert $y \in Y$ er billede af et og kun et $x \in X$.

Er der givet en afbildning $f : X \to Y$ kan vi for givet $y \in Y$ betragte ligningen $y = f(x)$. Der gælder da:

a. Ligningen har *mindst* en løsning for hvert valg af y netop hvis f er surjektiv.

b. Ligningen har *højst* en løsning for hvert valg af y netop hvis f er injektiv.

c. Ligningen har *netop* en løsning for hvert valg af y netop hvis f er bijektiv.

Til en bijektiv afbildning $f : X \to Y$ hører en *omvendt* afbildning $f^{-1} : Y \to X$. Denne er defineret ved, at billedet af $y \in Y$ ved f^{-1} er det (entydigt bestemte) element $x \in X$ for hvilket $y = f(x)$. Sagt anderledes er $f^{-1}(y)$ den entydigt bestemte løsning x til ligningen $y = f(x)$. Den omvendte afbildning til den bijektive afbildning f kaldes også for den *inverse* afbildning til f. Det er klart, at hvis $f : X \to Y$ er en bijektiv afbildning, da er den omvendte afbildning $f^{-1} : Y \to X$ også bijektiv, og $(f^{-1})^{-1} = f$.

Lad X, Y, Z være mængder og lad $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ være afbildninger. Den *sammensatte afbildning* $g \circ f : X \to Z$ defineres da som den afbildning, der til hvert element $x \in X$ lader svare elementet $g(f(x))$ i Z, altså

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

For sammensætning af afbildninger gælder den *associative regel*: Hvis X, Y, Z, W er mængder og $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ er afbildninger, er

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Der gælder nemlig, at $h \circ (g \circ f)$ og $(h \circ g) \circ f$ begge er afbildninger af X ind i W, og på ethvert element $x \in X$ har begge disse afbildninger værdien $h(g(f(x)))$. Man kan derfor udelade parenteserne og simpelthen skrive $h \circ g \circ f$.

Lad $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ være afbildninger. Da gælder: Hvis f og g begge er surjektive, er $g \circ f$ surjektiv. Hvis f og g begge er injektive, da er $g \circ f$ injektiv. Hvis f og g begge er bijektive, da er $g \circ f$ bijektiv, og da er $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

En speciel afbildning af en mængde X ind i sig selv er den *identiske* afbildning $\mathrm{id}_X : X \to X$, der lader ethvert element $x \in X$ svare til sig selv: $\mathrm{id}_X : x \to x$. For enhver bijektiv afbildning $f : X \to Y$ gælder $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ og $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

Hvis X og Y er mængder og $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ er afbildninger, så $g \circ f = \mathrm{id}_X$ og $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, da gælder at f er bijektiv, og $f^{-1} = g$. For at indse det bemærker vi, at $g(f(x)) = x$ for alle $x \in X$ og $f(g(y)) = y$ for alle $y \in Y$. Heraf ses umiddelbart, at f er henholdsvis injektiv og surjektiv, altså bijektiv; og da $f(g(y)) = y$ slutter vi, at $f^{-1}(y) = g(y)$ for alle $y \in Y$, altså $f^{-1} = g$.

Eksempel. Afbildningen

$$\mathrm{Cpr} : X \to Y,$$

hvor X er mængden af danske statsborgere (og udlændinge på længerevarende ophold i Danmark) og Y er mængden af 10-cifrede naturlige tal, har stor praktisk betydning. Det er vigtigt, at denne afbildning er *injektiv*, altså at forskellige personer har forskellige Cpr-numre. Derimod er afbildningen ikke *surjektiv*. For det første kan ikke alle 4-cifrede naturlige tal forekomme som de 4 første cifre i et Cpr-nummer men kun 366 af i alt 10000 muligheder. Men derudover har man for ethvert Cpr-nummer af formen

$$c_9c_8c_7c_6c_5c_4c_3c_2c_1c_0 = c_0 + c_1 \cdot 10 + c_2 \cdot 10^2 + \cdots + c_9 \cdot 10^9, \quad 0 \le c_j < 10,$$

forlangt, at tallet

$$4c_9 + 3c_8 + 2c_7 + 7c_6 + 6c_5 + 5c_4 + 4c_3 + 3c_2 + 2c_1 + c_0$$

er deleligt med 11. Dette har den gode virkning, at ombytning af to nabocifre i et lovligt Cpr-nummer gør det til et ulovligt Cpr-nummer. Prøv at teste dit eget Cpr-nummer for denne betingelse!

Bevis for Sætning 7.4.4.

I beviset benyttes Lagranges multiplikatorsætning. Vi minder først om hvad den siger, idet vi henholder os til den upræcise formulering givet i K. Sydsæter, Matematisk Analyse I, afsnit 9.9.

Der er givet en funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Der er endvidere givet et antal $m < n$, bibetingelser af formen $g_j(\underline{x}) = b_j$, hvor $g_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ og $b_j \in \mathbf{R}$ for $j = 1, \cdots, m$. Om funktionerne f og g_j skal gøres nogle antagelser, som vi ikke kommer nærmere ind på (se K. Sydsæter, Matematisk Analyse II, Afsnit 8.4; i nedenstående anvendelse er det let at konstatere, at disse betingelser faktisk er opfyldt). Problemet består i at finde (lokalt) ekstremum for f blandt de punkter $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$, som opfylder bibetingelserne.

Til dette problem er knyttet den såkaldte *Lagrangefunktion* $\mathcal{L}$. For hver bibetingelse indføres en hjælpevariabel λ_j, som kaldes en *Lagrangemultiplikator*. Funktionen $\mathcal{L}$ er givet ved

$$\mathcal{L}(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = f(x_1, \cdots, x_n) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x_1, \cdots, x_n) - b_j).$$

Lagranges sætning siger, at hvis $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ er en løsning til det ovennævnte problem, da findes $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ således, at $(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ er et stationært punkt for $\mathcal{L}$, hvilket vil sige $\partial\mathcal{L}/\partial x_i = 0$ for $i = 1, \cdots, n$ og $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_j = 0$ for $j = 1, \cdots, m$ (de sidstnævnte ligninger betyder blot at $\underline{x}$ opfylder bibetingelserne).

Vi vil anvende denne sætning til at bevise Sætning 7.4.4. Lad $\underline{\underline{A}}$ være en symmetrisk matrix, og lad $K_{\underline{\underline{A}}} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ være den til $\underline{\underline{A}}$ hørende kvadratiske form (se side 129), altså

$$K_{\underline{\underline{A}}}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k.$$

Mængden $S = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n \mid |\underline{x}| = 1\}$ er afsluttet (fordi $\underline{x} \to |\underline{x}|$ er kontinuert) og begrænset (fordi $|\underline{x}| \leq 1$ for alle $\underline{x} \in S$). Idet $K_{\underline{\underline{A}}}$ er kontinuert, antager den et ekstremum på S (den antager naturligvis både minimum og maksimum). Ifølge Lagranges sætning, med $f = K_{\underline{\underline{A}}}$, $m = 1$ og $g_1(\underline{x}) = |\underline{x}|^2 = \underline{x} \cdot \underline{x}$, $b_1 = 1$ eksisterer der derfor et stationært punkt $(\underline{x}, \lambda) \in S \times \mathbf{R}$ for funktionen

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \lambda) = K_{\underline{\underline{A}}}(\underline{x}) - \lambda(\underline{x} \cdot \underline{x} - 1).$$

De partielle afledede af $\mathcal{L}$ beregnes som følger. Lad os bestemme $\partial\mathcal{L}/\partial x_1$. Idet

$$K_{\underline{\underline{A}}}(x_1, \cdots, x_n) = a_{11} x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} a_{i1} x_i x_1 + \sum_{k=2}^{n} a_{1k} x_1 x_k + \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=2}^{n} a_{ik} x_i x_k,$$

ses (under anvendelse af symmetrien af $\underline{\underline{A}}$), at

$$\frac{\partial K_{\underline{\underline{A}}}}{\partial x_1} = 2a_{11} x_1 + \sum_{i=2}^{n} a_{i1} x_i + \sum_{k=2}^{n} a_{1k} x_k = 2 \sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k,$$

hvilket netop er førstekoordinaten af $2\underline{\underline{A}}\underline{x}$. Idet $\partial(\underline{x} \cdot \underline{x})/\partial x_1 = 2x_1$ følger det, at $\partial\mathcal{L}/\partial x_1$ er førstekoordinaten af $2(\underline{\underline{A}}\underline{x} - \lambda\underline{x})$. Tilsvarende fås, at $\partial\mathcal{L}/\partial x_i$ er i-koordinaten af $2(\underline{\underline{A}}\underline{x} - \lambda\underline{x})$. At punktet $(\underline{x}, \lambda) \in S \times \mathbf{R}$ er stationært for $\mathcal{L}$ betyder altså at $\underline{\underline{A}}\underline{x} - \lambda\underline{x} = \underline{o}$, dvs. at $\underline{x}$ er egenvektor for $\underline{\underline{A}}$ med egenværdien λ. Dermed følger eksistensen af en egenvektor og en egenværdi for $\underline{\underline{A}}$ af Lagranges sætning. Da egenværdien er rod i det karakteristiske polynomium, har dette dermed en rod. $\square$

Det græske alfabet

A, α: alfa	B, β: beta	Γ, γ: gamma	Δ, δ: delta
E,ϵ, ε: epsilon	Z, ζ: zeta	H, η: eta	Θ, θ, ϑ: theta
I, ι: iota	K, κ: kappa	Λ, λ: lambda	M, μ: my
N, ν: ny	Ξ, ξ: ksi	Π, π, ϖ: pi	R, ρ, ϱ: ro
Σ, σ, ς: sigma	T, τ: tau	Υ, υ: ypsilon	Φ, ϕ, φ: fi
X, χ: ki	Ψ, ψ: psi	Ω, ω: omega	

Hjemmeopgaver

1. Afgør hvilke af følgende afbildninger der er lineære, og angiv i givet fald den tilhørende matrix.

a.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

b.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ x-z \end{pmatrix}.$$

c.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+x \\ y-y^2 \end{pmatrix}.$$

2. Om den lineære afbildning $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ vides at

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestem matricen for f.

3. Der er givet matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & d & f \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ t & s & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ w & v & 1 \end{pmatrix}.$$

Beregn matrixprodukterne $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}$.

4. En fabrik producerer tre varer X_1, X_2 og X_3 ud fra de to råvarer Y_1 og Y_2. De tilhørende produktionssæt hhv. forbrugssæt betegnes (x_1, x_2, x_3) hhv. (y_1, y_2).

Om den pågældende produktion gælder, at

$$\text{produktion af en enhed af } X_1 \text{ kræver } \begin{cases} 2 \text{ enheder af } Y_1 \\ 5 \text{ enheder af } Y_2 \end{cases}$$

og

$$\text{produktion af en enhed af } X_2 \text{ kræver } \begin{cases} 3 \text{ enheder af } Y_1 \\ 6 \text{ enheder af } Y_2 \end{cases}$$

og

$$\text{produktion af en enhed af } X_3 \text{ kræver } \begin{cases} 4 \text{ enheder af } Y_1 \\ 7 \text{ enheder af } Y_2 \end{cases} .$$

a. Opskriv sammenhængen mellem forbrugssæt og produktionssæt.

b. Idet $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ betegner den afbildning, der til produktionssættet (x_1, x_2, x_3) knytter det tilsvarende forbrugssæt (y_1, y_2) skal der redegøres for, at f er lineær, og matricen $\underset{=}{A}$ for f skal opskrives.

5. Den lineære afbildning $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ er givet ved

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z \\ 2y - z \\ x + 3y + z \end{pmatrix} .$$

a. Gør rede for, at f er bijektiv.

b. Bestem den inverse afbildning $f^{-1} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ til f.

c. Angiv matricerne for f, f^{-1} og f^{-2}, samt produktet af de to førstnævnte matricer.

6. Vis, at den lineære afbildning $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som er givet ved

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

hverken er injektiv eller surjektiv. Anfør matricen $\underset{=}{C}$ for φ, og find $\underset{=}{C}^3$.

7. Der er givet en øvre trekantsmatrix af formen

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hvor a, b, c er vilkårlige relle tal. Gør rede for, at en sådan matrix er regulær, og find et udtryk for $\underset{=}{A}^{-1}$.

8. Løs det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 \qquad\qquad &= 3 \\ -x_2 + x_3 + 10x_4 &= 4 \end{aligned}\ .$$

9. Løs det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 + x_3 + 13x_4 &= 15 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 21x_4 &= 21\ . \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 26x_4 &= 23 \end{aligned}$$

10. For ethvert $a \in \mathbf{R}$ betegner L_a løsningsmængden til det lineære ligningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \qquad 5x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 - \qquad\ \ x_3 &= -1\ . \\ 3x_1 - 2x_2 + (a^2 + a)x_3 &= a + 1 \end{aligned}$$

a. Bestem L_{-1} og L_0.

b. Bestem L_a for ethvert $a \in \mathbf{R}$.

11. En afbildning $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ er givet ved

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_3 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Gør rede for, at f er lineær og undersøg om f er bijektiv. Find i givet fald f^{-1}, idet dennes matrix angives.

12. Der er givet matricerne

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underset{=}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Gør rede for, at der findes netop én løsning til matrixligningen

$$\underset{=}{A}\underset{=}{X}\underset{=}{A} = \underset{=}{B},$$

og find denne.

13. Givet matricen

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Omform $\underset{=}{A}$ ved hjælp af rækkeoperationer til en øvre trekantsmatrix og afgør herved, for hvilke værdier af a den givne matrix er regulær.

14. Der er givet permutationerne

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Find fortegnet for σ hhv. τ.

b. Find permutationerne $\sigma \circ \tau$ og $\tau \circ \sigma$.

c. Find permutationen σ^{-1}.

15. Givet matricen

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Find det $\underset{=}{A}$ for enhver værdi af a.

16. Der er givet matricen

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & a+1 & 4 \\ a & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a. Bestem de værdier $a \in \mathbf{R}$ for hvilke matricen er regulær.

b. Idet

$$\underset{=}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & a+2 & 0 \\ a & a+2 & 1-a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{R}$$

skal man bestemme de værdier af $a \in \mathbf{R}$ for hvilke matrixligningen

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$$

har mindst en løsning. (Vink: I det tilfælde hvor $\underline{\underline{A}}$ ikke er regulær, undersøg da determinanten på begge sider af ligningstegnet).

c. Løs ligningen for $a = -1$.

17. Løs følgende ligningssystem ved hjælp af Cramers formler:

$$\begin{array}{rcr} 3x_1 - x_2 - 5x_3 & = & 3 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 & = & -4\,. \\ x_1 - 5x_3 & = & -3 \end{array}$$

18. Find den inverse til matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

ved hjælp af determinantformlen for invers matrix.

19. Udregn værdien af determinanten

$$\begin{vmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix}.$$

(Vink: Begynd eventuelt med at trække sidste række fra de øvrige rækker.)

20. I $\mathbf{R}^3$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

For hvilke værdier af k er vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 5 \end{pmatrix}$$

indeholdt i $\operatorname{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$?

21. Vis at vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

udgør en basis i $\mathbf{R}^4$, og fremstil vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som linearkombination af disse vektorer.

22. Vis at vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

i $\mathbf{R}^4$ er lineært afhængige, og fremstil $\underline{o}$ som en linearkombination af disse vektorer med koefficienter der ikke alle er nul.

23. I $\mathbf{R}^4$ er der givet vektorerne

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a. Vis, at $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ er lineært uafhængige.

b. Udvid sættet $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ til en basis for $\mathbf{R}^4$ ved tilføjelse af en af vektorerne fra den naturlige basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$. Find også en der ikke kan bruges.

c. Find projektionen $\underline{v}$ af $\underline{e}_1$ på $\operatorname{span}\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ langs $\operatorname{span}\{\underline{e}_4\}$, idet $\underline{v}$ angives som linearkombination af $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$, og derefter udregnes som talsæt i $\mathbf{R}^4$.

24. Lad U_1 og U_2 være komplementære underrum i vektorrummet V. Vi definerer en afbildning $P_1 : V \to V$ på følgende måde: Vi skriver $\underline{x} \in V$ (entydigt!) som $\underline{x} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$, hvor $\underline{u}_1 \in U_1$ og $\underline{u}_2 \in U_2$. Vi definerer så

$$P_1(\underline{x}) = \underline{u}_1.$$

a. Vis, at P_1 er en homomorfi.

b. Vis, at $P_1^2 = P_1$ (altså $P_1 \circ P_1 = P_1$).

c. Vis, at $P_1(V) = U_1$.

25. Find et maksimalt lineært uafhængigt sæt fra sættet $(\underset{=}{A}_1, \underset{=}{A}_2, \underset{=}{A}_3, \underset{=}{A}_4)$ hvor

$$\underset{=}{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underset{=}{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{=}{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underset{=}{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

idet $\underset{=}{A}_1, \underset{=}{A}_2, \underset{=}{A}_3, \underset{=}{A}_4$ betragtes som elementer i vektorrummet $\mathbf{M}_{2,2}$.

26. Idet a og b er reelle tal, er der givet matricen

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & b \end{pmatrix}.$$

Udregn $\det \underset{=}{A}$, og angiv rangen $\operatorname{rg} \underset{=}{A}$ for ethvert sæt $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

27. I det tredimensionale vektorrum U er der givet basen $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$, og i det todimensionale vektorrum V er der givet basen $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$.

a. Homomorfien $f : U \to V$ er fastlagt ved at $f(\underline{a}_1) = \underline{b}_1 + \underline{b}_2$, $f(\underline{a}_2) = 2\underline{b}_1 - \underline{b}_2$ og $f(\underline{a}_3) = 3\underline{b}_2$. Bestem den matrix $\underset{=}{A}$ der repræsenterer f i de nævnte baser.

b. Bestem en basis for $\ker f$.

c. Gør rede for, at f er surjektiv.

d. I U og V indføres nye baser $(\underline{\tilde{a}}_1, \underline{\tilde{a}}_2, \underline{\tilde{a}}_3)$ og $(\underline{\tilde{b}}_1, \underline{\tilde{b}}_2)$ således:

$$\underline{\tilde{a}}_1 = 2\underline{a}_1 + \underline{a}_3, \qquad \underline{\tilde{a}}_2 = 3\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3, \qquad \underline{\tilde{a}}_3 = 2\underline{a}_1 + \underline{a}_2;$$
$$\underline{\tilde{b}}_1 = \underline{b}_1 + \underline{b}_2, \qquad \underline{\tilde{b}}_2 = 2\underline{b}_1 + \underline{b}_2.$$

Bestem koordinattransformationsmatricerne $\underset{=}{T}$, hhv. $\underset{=}{S}$ fra gammel til ny basis i U hhv. V.

e. Bestem nye koordinatsøjler for vektorerne $\underline{u} = \underline{a}_1 - \underline{a}_2$ hhv. $\underline{v} = \underline{b}_1 - \underline{b}_2$ i U hhv. V.

f. Find den matrix $\underset{=}{\widetilde{A}}$, der i de nye baser repræsenterer homomorfien f fra punkt a.

g. Bestem den nye koordinatsøjle for $f(\underline{u})$.

h. En homomorfi $g : V \to U$ er givet ved

$$g(y_1\underline{b}_1 + y_2\underline{b}_2) = (2y_1 - 3y_2)\underline{a}_1 + (y_1 + y_2)\underline{a}_2 + (y_1 - 2y_2)\underline{a}_3.$$

Find den matrix $\underline{\underline{B}}$ der repræsenterer g i de gamle baser.

28. Afgør i hvert af følgende tilfælde, om den angivne matrix er diagonaliserbar, og find i bekræftende fald en diagonaliserende koordinattransformationsmatrix.

a.
$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

b.
$$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

c.
$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

29. En lineær afbildning $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ er givet ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a. Gør rede for, at $\ker f$ har dimensionen 0.

b. Bestem egenværdier og egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$.

c. Angiv en basis for $\mathbf{R}^4$ i hvilken den til $\underline{\underline{A}}$ hørende homomorfi repræsenteres ved en diagonalmatrix, og angiv en sådan diagonalmatrix.

30. I vektorrummet $\mathbf{R}^3$ er givet de lineært uafhængige vektorer

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En endomorfi $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ er fastlagt ved

$$f(\underline{a}) = \underline{b}, \quad f(\underline{b}) = \underline{a}, \quad f(\underline{c}) = \underline{o}.$$

a. Opskriv den matrix der repræsenterer f i basen $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$.

b. Gør rede for at f er diagonaliserbar.

c. Find den matrix der repræsenterer f i den naturlige basis for $\mathbf{R}^3$.

31. Find i det euklidiske vektorrum $\mathbf{R}^4$ en ortonormalbasis for løsningsrummet til ligningssystemet:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

32. Find i hvert af følgende to tilfælde ortogonalprojektionen af $\underline{x}$ på underrummet U:

a.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad U = \text{ span } \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\},$$

hvor

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U = \text{ span } \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\},$$

hvor

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

33. I det euklidiske vektorrum $\mathbf{R}^3$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = (1, -1, 2)\,,\ \underline{a}_2 = (1, 2, 2)\,,\ \underline{x} = (2, 1, 2).$$

a. Gør rede for, at $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_2$ er lineært uafhængige.

b. Find ortogonalprojektionen af $\underline{x}$ på underrummet $U = \text{ span } \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$.

c. Ortonormer sættet $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ til en ortonormalbasis $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ for U.

d. Suppler $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ op til en ortonormalbasis $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ for $\mathbf{R}^3$.

34. Lad $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ være den lineære afbildning som er knyttet til matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

a. Find dimensionen af $f(\mathbf{R}^3)$, og angiv en basis for $f(\mathbf{R}^3)$.

b. Find dimensionen af $\ker f$, og find en basis for $\ker f$.

c. Begrund, at der findes en ortonormalbasis $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ som diagonaliserer f, og find en sådan.

d. Angiv en diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}$ og en ortogonal matrix $\underline{\underline{T}}$ således at $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$.

35. En lineær afbildning $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Find kernen $\ker f$ for f, og eftervis at dimensionen af $\ker f$ er 2.

b. Find en ortonormalbasis $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ for $\ker f$.

c. Suppler den fundne ortonormalbasis $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ op til en basis for $\mathbf{R}^4$ ved at udvælge to passende vektorer fra den naturlige basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ i $\mathbf{R}^4$.

d. Ortonormer den i punkt c. fundne basis for $\mathbf{R}^4$ til en ortonormalbasis for $\mathbf{R}^4$.

e. Find ortogonalprojektionen af

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

på $\ker f$ og på $(\ker f)^{\perp}$.

Øvelsesopgaver

1. Idet

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \underline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

skal man beregne

a. $3\underline{x} - 4\underline{y}$.

b. $2\underline{x} + 3\underline{y} - 5\underline{z}$.

c. $\underline{x} \cdot \underline{y}$, $\underline{x} \cdot (\underline{z} + \underline{y})$.

2. Find de reelle tal x, y og z, når

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Bestem de reelle tal k, så vektorerne $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er ortogonale, når

a. $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$

b. $\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3k \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \\ 2k \end{pmatrix}.$

4. De lineære afbildninger $f, g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ hører til matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ hhv. } \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestem $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ og $g\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

5. Gør i hvert af følgende tilfælde rede for, at den angivne afbildning f er lineær, idet den tilhørende matrix angives:

a. $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\end{pmatrix}$.

b. $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_1\end{pmatrix}$.

6. Der er givet en lineær afbildning $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ med den egenskab, at

$$f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\9\end{pmatrix}.$$

Find matricen $\underset{=}{A}$ for f.

7. Lad afbildningerne $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ og $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ være givet ved

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2-x_4\\x_2-x_4\\x_1+x_2+x_3+x_4\end{pmatrix}$$

og

$$g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1^2+x_2^2+x_3^2\\x_1+x_2+x_3\end{pmatrix}$$

a. Gør rede for, at f er lineær idet den tilhørende matrix angives.

b. Gør rede for, at g *ikke* er lineær. (Vink: Benyt Sætning 1.3.9).

8. Findes der en lineær afbildning $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ således at

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}\ ?$$

9. Angiv samtlige lineære afbildninger $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ med den egenskab, at

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

ved at angive de tilhørende matricer.

10. Idet $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ er vektorer i $\mathbf{R}^n$ og $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ er vektorer i $\mathbf{R}^m$ defineres en afbildning $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ved

$$f(\underline{x}) = (\underline{a}_1 \cdot \underline{x})\underline{b}_1 + (\underline{a}_2 \cdot \underline{x})\underline{b}_2.$$

a. Gør rede for at f opfylder linearitstsbetingelserne L1 og L2, og at f er lineær.

b. Idet nu

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \; \underline{a}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \quad \text{og } \underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \; \underline{b}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$$

skal man opskrive matricen for f.

11. Der er givet tre matricer

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 10\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \; \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix}3 & -9\\0 & 0\\-1 & 3\end{pmatrix}, \; \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Udregn matrixprodukterne $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}$.

12. Betragt matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}, \; \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix}1 & \mu\\0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \; \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix}2 & 4 & 6 & 7\\0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

a. Hvilke matrixprodukter $\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{Y}}$ kan dannes, hvor $\underline{\underline{X}}$ og $\underline{\underline{Y}}$ er en af matricerne $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ eller $\underline{\underline{C}}$?

b. Udregn alle sådanne matrixprodukter.

13. Udregn følgende matrixprodukter

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

14. Løs matrixligningerne

$$(a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{=}{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{=}{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(c)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{=}{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (d)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{=}{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem altså for hver matrixligning mængden af matricer $\underset{=}{X}$, der opfylder ligningen.

15. Denne øvelse viser, at multiplikationen af reelle tal har nogle egenskaber som ikke deles af matrixmultiplikation. Kommenter i hvert tilfælde resultatet set i lyset af de reelle tals egenskaber:

a. Idet

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } \underset{=}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

skal man udregne $\underset{=}{A}\underset{=}{B}$ og $\underset{=}{B}\underset{=}{A}$.

b. Idet

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ og } \underset{=}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

skal man udregne $\underset{=}{A}\underset{=}{B}$.

c. Idet

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

skal man udregne $\underset{=}{A}^2$.

d. Idet

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

skal man udregne $\underset{=}{A}^2$.

e. Idet

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

skal man udregne $\underset{=}{A}^2$.

16. Idet $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er en lineær afbildning skal man gøre rede for, at

a. $f(\lambda \underline{x} + \mu \underline{y}) = \lambda f(\underline{x}) + \mu f(\underline{y})$ for $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbf{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

b. $f(\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \lambda_3 \underline{x}_3) = \lambda_1 f(\underline{x}_1) + \lambda_2 f(\underline{x}_2) + \lambda_3 f(\underline{x}_3)$ for $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3 \in \mathbf{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$.

c. $f(\lambda_1 \underline{x}_1 + \cdots + \lambda_k \underline{x}_k) = \lambda_1 f(\underline{x}_1) + \cdots + \lambda_k f(\underline{x}_k)$ for $\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_k \in \mathbf{R}^n$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbf{R}$.

17. Udregn følgende to matrixprodukter, idet der redegøres for den anvendte strategi:

a.

$$\begin{pmatrix} 17 & 231 & 100 \\ 91 & 640 & 77 \\ -11 & 1003 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 & 546 & 0 \\ -19 & -34 & 1 \\ 22 & 1001 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 670 & 546 & 45 \\ 1 & 0 & 0 \\ 22 & 1001 & 99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 231 & 100 \\ 91 & 640 & 77 \\ -11 & 1003 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Idet

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ og } \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

skal man udregne

a. $\underline{\underline{A}}^2$, $\underline{\underline{A}}^3$, $\underline{\underline{A}}^2 \underline{\underline{A}}^3$, $\underline{\underline{A}}^5$.

b. $\underline{\underline{B}}^{10}$.

c. $\underline{\underline{C}}^3$.

19. Afgør i hvert af følgende tilfælde om den angivne afbildning f er injektiv, surjektiv, bijektiv, og angiv billedmængden ved f. I de tilfælde hvor den angivne afbildning er bijektiv, skal man angive den omvendte afbildning.

a. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$.

b. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$.

c. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$.

d. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$.

e. $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

e′. $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

f. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = xy$.

g. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

h. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (y + x^2, 1 - x)$.

i. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$.

20. Der er givet en afbildning $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ ved

$$g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u+2v \end{pmatrix},$$

og en afbildning $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ ved

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix}.$$

a. Gør rede for, at g er injektiv men ikke surjektiv.

b. Gør rede for, at h er surjektiv men ikke injektiv.

c. Gør rede for, at g og h er lineære afbildninger, idet de tilsvarende matricer anføres.

d. Gør rede for, at de sammensatte afbildninger $g \circ h$ og $h \circ g$ er lineære og anfør de tilsvarende matricer.

21. Lad X, Y og Z være mængder, og lad $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ være afbildninger.

a. Gør rede for, at hvis f og g er injektive, da er også $g \circ f$ injektiv.

b. Gør rede for, at hvis f og g er surjektive, da er også $g \circ f$ surjektiv.

c. Gør rede for, at hvis f og g er bijektive, da er også $g \circ f$ bijektiv, og $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

d. Gør rede for, at hvis $g \circ f$ er injektiv, da er også f injektiv.

e. Gør rede for, at hvis $g \circ f$ er surjektiv, da er også g surjektiv.

22. Gør rede for, at den lineære afbildning $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ som er givet ved

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

er bijektiv, og find matricen for den omvendte afbildning.

23. De lineære afbildninger $f, g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ er givet ved

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

a. Gør rede for, at f er bijektiv, og at g ikke er bijektiv.

b. Angiv den inverse afbildning til f.

c. Angiv matricerne for f, f^{-1}.

24. Givet matricerne

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{A}}_4 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 8 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{A}}_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}}_8 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

For hvilke værdier af i og j er $\underline{\underline{A}}_i = \underline{\underline{A}}_j^{-1}$? (Undersøg om $\underline{\underline{A}}_i\underline{\underline{A}}_j = \underline{\underline{E}}$).

25. Der er givet matricen

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} -1 & -19 & 10 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & 11 & -5 \end{pmatrix}.$$

Eftervis, at $\underline{\underline{C}}^3 = \underline{\underline{E}}$, og gør rede for at dette medfører, at $\underline{\underline{C}}$ er regulær med $\underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{C}}^2$.

26. Der er givet matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

a. Find determinanten og den inverse matrix til hver af matricerne $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$.

b. Find den inverse til hver af afbildningerne $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, hvor

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos t - x_2 \sin t \\ x_1 \sin t + x_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

c. Bestem $\underline{\underline{A}}^2$, $\underline{\underline{B}}^2$ og $\underline{\underline{B}}^3$. (Vedrørende $\underline{\underline{B}}^2$, $\underline{\underline{B}}^3$: Benyt additionsformlerne

$$\begin{aligned} \cos(u+v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v \\ \sin(u+v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v.) \end{aligned}$$

27. Afgør om følgende er rigtigt eller forkert:

a. Når $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$ og $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}$ begge eksisterer er både $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ kvadratiske.

b. $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}}$.

c. $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}$, når $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er kvadratiske $n \times n$-matricer.

d. $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{O}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{O}}$ eller $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{O}}$.

e. Hvis $\underline{\underline{A}}$ er regulær og $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$ er regulær, så er $\underline{\underline{B}}$ regulær.

28. Der er givet matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gør rede for, at den til $\underline{\underline{A}}$ hørende lineære afbildning f er bijektiv, og find f^{-1}. Find herved $\underline{\underline{A}}^{-1}$.

29. Der er givet matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Undersøg hvornår den til $\underline{\underline{A}}$ hørende lineære afbildning er bijektiv, og find i de fundne tilfælde f^{-1}. Gør herefter rede for, hvornår $\underline{\underline{A}}$ er regulær, og find i de fundne tilfælde $\underline{\underline{A}}^{-1}$.

30. Der er givet tre matricer

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opskriv de transponerede matricer til $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ og $\underline{\underline{C}}$.

31. Der er givet matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Idet $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ er søjlevektorerne i $\underline{\underline{A}}$ defineres afbildningen $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ ved

$$f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \underline{x} \cdot \underline{a}_1 \\ \underline{x} \cdot \underline{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Gør rede for, at f er lineær idet den tilhørende matrix opskrives.

32. Der er givet en 3×2-matrix $\underline{\underline{A}}$. Idet $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ betegner søjlevektorerne i $\underline{\underline{A}}$ defineres afbildningen $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ ved

$$f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \underline{x} \cdot \underline{a}_1 \\ \underline{x} \cdot \underline{a}_2 \end{pmatrix}.$$

a. Gør rede for, at f er lineær idet den tilhørende matrix opskrives.

b. Der er nu yderligere givet en 3×2-matrix $\underline{\underline{B}}$ med søjlevektorer $\underline{b}_1, \underline{b}_2$. Afbildningen $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ defineres ved

$$h(\underline{x}) = (\underline{x} \cdot \underline{a}_1)\underline{b}_1 + (\underline{x} \cdot \underline{a}_2)\underline{b}_2.$$

Gør rede for, at h er lineær og find den tilhørende matrix. (Vink: Afbildningen h kan opfattes som den sammensatte afbildning $g \circ f$, hvor g er den lineære afbildning der hører til $\underline{\underline{B}}$).

33. Lad $\underline{\underline{A}}$ være 2×3-matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Udregn matricerne $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^t$ og $\underline{\underline{A}}^t\underline{\underline{A}}$.

34. Lad $\underline{\underline{A}}$ være en $m \times n$-matrix. Gør rede for, at $\underline{\underline{A}}^t\underline{\underline{A}}$ er en *symmetrisk* $n \times n$-matrix, og at $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^t$ er en *symmetrisk* $m \times m$-matrix.

35. Der er givet den symmetriske matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

og den symmetriske matrix

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Undersøg under hvilke betingelser matricen $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ er symmetrisk.

36. Omform ved hjælp af rækkeoperationer matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -4 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{pmatrix}$$

til en trappematrix.

37. Omform ved hjælp af rækkeoperationer matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix}$$

til en reduceret trappematrix.

38. Hvad sker der, når man ganger en 4×4-matrix foran hhv. bagved med en af matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}.$$

39. Løs følgende 3 lineære ligningssystemer:

a.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned} .$$

b.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned} .$$

c.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \,. \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

40. Løs det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ -4x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 7x_4 &= -7 \,. \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 3 \\ -x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 3x_4 &= -3 \end{aligned}$$

41. Løs det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ 2x - y + 4z &= 0 \,. \\ x + 3y - 2z &= 3 \\ -3x - 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

42. Vis, at ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x + y + z &= a \,. \\ x + 2z &= 3 \end{aligned}$$

ikke har nogen løsning (x, y, z) hvis $a \neq 5$, men derimod uendeligt mange løsninger hvis $a = 5$, idet disse angives.

43. Løs det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 + 3x_5 &= 9 \,. \\ 5x_1 + 8x_2 - 7x_3 + 6x_4 + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

44. Der er givet to matricer

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gør rede for, at begge matricer er regulære og find deres inverse.

45. Undersøg hvilke af følgende matricer der er regulære:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

46. En afbildning $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ er givet ved

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Gør rede for, at f er lineær og undersøg, om f er bijektiv. Find i givet fald f^{-1}, idet dennes matrix angives.

47. Om en lineær afbildning $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ med matrix $\underline{\underline{X}}$ vides, at

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a. Gør rede for, at

$$\underline{\underline{X}}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Find $\underline{\underline{X}}$.

c. Gør rede for at $\underline{\underline{X}}^3 = \underline{\underline{E}}$.

48. Betragt matricerne

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underset{=}{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Bemærk, at $a_{ij} = b_{ij}$ for alle i, j, hvor $j \leq 3$). Afgør, om $\underset{=}{A}$ er invertibel og find $\underset{=}{A}^{-1}$, hvis $\underset{=}{A}$ er invertibel. Udfør det samme for $\underset{=}{B}$.

49. Lad $\underset{=}{A}$ være en matrix og lad f være den tilhørende lineære afbildning. Gør rede for, at hvis $\underset{=}{A}$ indeholder en nulsøjle, da er f ikke injektiv og hvis $\underset{=}{A}$ indeholder en nulrække, da er f ikke surjektiv. Specielt er en matrix, der indeholder en nulrække eller en nulsøjle ikke regulær.

50. Gør rede for, at en matrix med to ens rækker eller to ens søjler ikke er regulær.

51. Der er givet matricerne

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{=}{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underset{=}{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vis ved udregning, at

$$\underset{=}{A}\underset{=}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{=}{A}\underset{=}{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hvad kan heraf sluttes om regularitet af matricerne $\underset{=}{A}$, $\underset{=}{B}$ og $\underset{=}{C}$?

52. Gør rede for, at hvis blot en af $n \times n$-matricerne $\underset{=}{C}_1, \cdots, \underset{=}{C}_k$ ikke er regulær, så er produktet $\underset{=}{C}_1 \cdots \underset{=}{C}_k$ heller ikke regulært.

53. Idet $\underset{=}{A}$ er matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -4 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{pmatrix}$$

skal man finde en regulær matrix $\underset{=}{P}$, så $\underset{=}{P}\underset{=}{A}$ er en trappematrix. Skriv dernæst $\underset{=}{P}$ som et produkt af operationsmatricer.

54. Idet $\underset{=}{A}$ er matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix}$$

skal man finde en regulær matrix $\underset{=}{P}$, så $\underset{=}{P}\underset{=}{A}$ er en reduceret trappematrix. Bestem den inverse matrix til $\underset{=}{P}$.

55. Udregn

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

56. Udregn

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

57. Find i hvert af følgende tilfælde antallet af inversioner og fortegnet for den angivne permutation.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

58. Fremstil i hvert af følgende tilfælde den angivne permutation som sammensætning af naboombytninger.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

59. Opskriv samtlige permutationer i S_2 og S_3 og angiv disses fortegn.

60. Vi betragter mængden S_3 af permutationer af tallene $1, 2, 3$.

a. Beskriv afbildningen $f : S_3 \to S_3$ givet ved $f : \sigma \to \sigma^{-1}$, idet billedet af hvert element opskrives. Verificer herved, at afbildningen f er bijektiv.

b. Idet τ er permutationen
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
skal man opskrive afbildningen $g : S_3 \to S_3$ givet ved $g : \sigma \to \sigma \circ \tau$, idet billedet af hvert element opskrives. Verificer herved, at afbildningen g er bijektiv.

61. En permutation σ, der ombytter to tal i og j og lader de øvrige tal urørte kaldes en *transposition*. Der gælder altså at $\sigma(i) = j$ og $\sigma(j) = i$ medens $\sigma(k) = k$ for $k \neq i$, $k \neq j$.

a. Naboombytninger er transpositioner.

b. Opskriv nogle eksempler på transpositioner, der ikke er naboombytninger, og find antallet af inversioner for disse.

c. Gør rede for, at antallet af inversioner i transpositionen σ ovenfor er $2(j-i-1)+1$, og vis herved, at en transposition altid er ulige.

62. Bestem determinanterne af følgende matricer:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

63. Bestem de tal $t \in \mathbf{R}$ for hvilke matricen
$$\begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{pmatrix}$$
er regulær.

64. For hvilke værdier af a har det lineære ligningssystem
$$\begin{aligned} ax - y + 3z &= 0 \\ 4x + (a-4)y + 6z &= 0 \\ x - ay + 5z &= 0 \end{aligned}$$
egentlige løsninger, dvs. løsninger $(x, y, z) \neq 0$. Angiv for de fundne værdier af a systemets fuldstændige løsning.

65. Besvar følgende spørgsmål:

a. Hvad kan man sige om værdien af determinanten af en matrix, der indeholder 2 ens rækker ?

b. Hvad sker der med værdien af en determinant, når man skifter fortegn på alle elementer i en række, og hvad hvis man skifter fortegn på alle elementer i matricen ?

c. Hvad er forskellen på en determinant og en matrix ?

d. Er det rigtigt, at en determinant er $\neq 0$, hvis alle elementerne i matricen er $\neq 0$?

66. Er følgende rigtig eller forkert ?

a.

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

b.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & e \\ a & d & f \end{vmatrix} = -abc.$$

c.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd.$$

d.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -abcd.$$

67. Vis, at

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & 1 \\ ca & b & 1 \\ ab & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c).$$

68. Udregn

a.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

b.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

69. Udregn
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

70. Find de værdier af $a \in \mathbf{R}$ for hvilke matricen givet ved
$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2a & a \\ 1 & a & 2a & 1 \\ 1 & 1 & a & 2a \\ 1 & a & a & 2a \end{pmatrix}$$
er regulær.

71. Givet matricen
$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Beregn det $\underset{=}{A}$.

b. Gør rede for at $\underset{=}{A}$ er regulær.

c. Anvend Cramers formel til at løse ligningssystemet $\underset{=}{A}\underset{=}{X} = \underset{=}{B}$, hvor
$$\underset{=}{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

72. Givet matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Beregn $\det \underline{\underline{A}}$.

b. Gør rede for, at $\underline{\underline{A}}$ er regulær for alle værdier af t på nær $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

c. Anvend Cramers formel til for hvert t på nær $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ at løse ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$, hvor

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

73. Lad

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Udregn $\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})$.

b. Udregn $\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^{-1})$.

74. Lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$ være en $n \times n$-matrix. Med $-\underline{\underline{A}}$ betegnes matricen $(-a_{ij})_{n,n}$.

a. Gør rede for, at $\det(-\underline{\underline{A}}) = (-1)^n \det \underline{\underline{A}}$.

Matricen $\underline{\underline{A}}$ kaldes *skævsymmetrisk* hvis $\underline{\underline{A}}^t = -\underline{\underline{A}}$.

b. Gør rede for, at hvis $\underline{\underline{A}}$ er skævsymmetrisk og *regulær*, da er n lige.

75. Find den inverse til matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

ved hjælp af determinantformlen for invers matrix.

76. For ethvert $c \in \mathbf{R}$ betragtes matricen:

$$\underset{=}{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & c+1 & 1 \\ 1 & 2 & c+1 \end{pmatrix}.$$

Bestem de værdier af c, for hvilke $\underset{=}{S}$ er invertibel og bestem $\underset{=}{S}^{-1}$ for disse værdier af c.

77. Udregn determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

78. Udregn determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & b \\ -a & 0 & b & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \\ -b & 0 & -a & 0 \end{vmatrix}.$$

79. Udregn følgende determinanter

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

80. Udregn

$$\begin{vmatrix} 1+a & -1 & -1 & 1-a \\ 1 & 1+a & 1-a & 1 \\ 1 & 1-a & 1+a & 1 \\ 1-a & -1 & -1 & 1+a \end{vmatrix}.$$

81. Find de værdier af $\lambda \in \mathbf{R}$ for hvilke

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

82. Angiv for hver værdi af a den fuldstændige løsning til ligningssystemet:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -6 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 4 \\ x_2 - 5x_3 + x_4 &= a \end{aligned} .$$

83. Der er givet matricerne

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{=}{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Gør rede for, at $\underset{=}{A}$ er regulær og find $\underset{=}{A}^{-1}$.

b. Gør rede for, at der findes netop en løsning til matrixligningen

$$\underset{=}{A}\underset{=}{X}\underset{=}{A}^{-1} = \underset{=}{B}.$$

og find denne.

84. Givet matricen

$$\underset{=}{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix},$$

hvor $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Find $\underset{=}{M}^{-1}$.

85. Der er givet matricerne

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{=}{B} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Find de værdier af a for hvilke matrixligningen

$$\underset{=}{A}\underset{=}{X} = \underset{=}{B}$$

har en løsning, og løs ligningen for disse værdier af a.

86. Gør rede for, at matricen

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er regulær, og find $\underline{\underline{A}}^{-1}$.

Idet

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

skal man beregne

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{B}}^{-1}.$$

87. Lad V være et vektorrum, og lad $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ være vektorer i V. Idet afbildningen $f : \mathbf{R}^n \to V$ defineres

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n,$$

skal man gøre rede for, at f er lineær ved at vise at f opfylder L1 og L2.

88. Lad U og V være vektorrum. Idet $f : U \to V$ er en lineær afbildning skal man gøre rede for, at

a. $f(\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}) = \lambda f(\underline{x}) + \mu f(\underline{y})$ for $\underline{x}, \underline{y} \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

b. $f(\lambda_1\underline{x}_1 + \lambda_2\underline{x}_2 + \lambda_3\underline{x}_3) = \lambda_1 f(\underline{x}_1) + \lambda_2 f(\underline{x}_2) + \lambda_3(\underline{x}_3)$ for $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3 \in U$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$.

c. $f(\lambda_1\underline{x}_1 + \cdots + \lambda_k\underline{x}_k) = \lambda_1 f(\underline{x}_1) + \cdots + \lambda_k f(\underline{x}_k)$ for $\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_k \in U$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbf{R}$.

89. Lad V være et vektorrum. Gør rede for, at følgende er rigtigt:

a. Der findes kun én nulvektor i V.

b. For hver vektor $\underline{x} \in V$ findes der kun én vektor $\underline{y} \in V$, så $\underline{x} + \underline{y} = \underline{o}$.

c. For hver vektor $\underline{x} \in V$ er $0\underline{x} = \underline{o}$.

d. For hvert $\lambda \in \mathbf{R}$ er $\lambda\underline{o} = \underline{o}$.

e. Hvis $\underline{x} + \underline{y} = \underline{z}$ er $\underline{x} = \underline{z} - \underline{y}$.

Der er nu givet yderligere et vektorrum U.

f. Gør rede for, at hvis $f : U \to V$ er en lineær afbildning da er $f(\underline{o}) = \underline{o}$.

90. Lad $V = \mathbf{M}_{2,2}$ være mængden af 2×2-matricer udstyret med den i noterne angivne multiplikation med skalarer og addition.

a. Eftervis, at V er et vektorrum.

b. I V er der givet vektorerne

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Find de vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i V for hvilke

$$\underline{x} + 2\underline{y} = \underline{a} \quad \text{og} \quad 2\underline{x} - \underline{y} = \underline{b}.$$

91. For ethvert $c \in \mathbf{R}$ er der i vektorrummet $\mathbf{R}^3$ givet vektorsættet

$$\underline{a}_1 = (1, 0, 1)\,, \quad \underline{a}_2 = (0, c, 0)\,, \quad \underline{a}_3 = (x, 0, 1).$$

Bestem de værdier af c, for hvilke dette sæt er en basis i $\mathbf{R}^3$.

92. Lad V være mængden af 2-talsøjler $\mathbf{R}^2$. Gør i hvert af følgende tilfælde rede for, at V *ikke* er et vektorrum med hensyn til den angivne multiplikation med skalarer og addition.

a. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$ og $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

b. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ og $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$.

c. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$ og $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 x_1 \\ \lambda^2 x_2 \end{pmatrix}$.

93. Undersøg i hvert af følgende tilfælde om den angivne mængde er et underrum i $\mathbf{R}^4$.

a. Mængden af alle vektorer hvis førstekoordinat er et helt tal.

b. Mængden af alle vektorer hvis førstekoordinat er lig nul.

c. Mængden af alle vektorer hvori mindst en af de to første koordinater er nul.

d. Mængden af alle vektorer hvori de første to koordinater tilfredsstiller ligningen $x_1 + 2x_2 = 0$.

e. Mængden af vektorer hvori de to første koordinater tilfredsstiller ligningen $x_1 + 2x_2 = 1$.

94. Undersøg om vektorsættet

$$\underline{a}_1 = (0,1,1,1)\,, \quad \underline{a}_2 = (1,0,1,1)\,, \quad \underline{a}_3 = (1,1,0,1)\,, \quad \underline{a}_4 = (1,1,1,0)$$

udgør en basis i $\mathbf{R}^4$.

95. Undersøg i hvert af følgende tilfælde om det angivne vektorsæt er lineært afhængigt, lineært uafhængigt, eller udgør en basis i $\mathbf{R}^3$.

a. $\underline{a}_1 = (1,1,0), \quad \underline{a}_2 = (1,1,1).$

b. $\underline{a}_1 = (1,0,0), \quad \underline{a}_2 = (-1,1,0), \quad \underline{a}_3 = (0,-1,0).$

c. $\underline{a}_1 = (1,0,0), \quad \underline{a}_2 = (1,1,0), \quad \underline{a}_3 = (1,1,1).$

96. Lad V være et vektorrum og lad U være et underrum i V. Gør rede for, at

a. $\lambda\underline{x} + \mu\underline{y} \in U$ for $\underline{x}, \underline{y} \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

b. $\lambda_1\underline{x}_1 + \lambda_2\underline{x}_2 + \lambda_3\underline{x}_3 \in U$ for $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3 \in U$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$.

c. $\lambda_1\underline{x}_1 + \cdots + \lambda_k\underline{x}_k \in U$ for $\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_k \in U$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbf{R}$.

Antag nu yderligere, at M er en delmængde af U.

d. Gør rede for, at hvis $M \subseteq U$ da er $\operatorname{span} M \subseteq U$.

e. Gør rede for, at M er et underrum netop hvis $\operatorname{span} M = M$.

97. Lad der være givet et ligningssystem

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0\ . \end{aligned}$$

Gør rede for, at mængden af løsninger $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ til dette ligningssystem udgør et underrum i $\mathbf{R}^n$.

98. Find en basis for løsningsrummet til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_3 - x_4 - 5x_5 &= 0\ . \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0 \end{aligned}$$

99. Undersøg i hvert af følgende tilfælde om det angivne vektorsæt er lineært afhængigt, lineært uafhængigt, eller udgør en basis i $\mathbf{R}^4$. I de tilfælde hvor sættet er lineært afhængigt skal man angive en af vektorerne som linearkombination af de øvrige.

a. $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b. $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

c. $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

d. $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$

100. Lad $f : U \to V$ være en homomorfi fra vektorrummet U ind i vektorrummet V. Lad $\underline{b} \in V$ og lad L være mængden

$$L = \{\underline{x} \in U \mid f(\underline{x}) = \underline{b}\}.$$

Gør rede for, at L *ikke* er et underrum når $\underline{b} \neq \underline{o}$.

Lad $\underline{x}_0 \in U$ være en vektor og antag, at $f(\underline{x}_0) = \underline{b}$. Idet K betegner kernen for f skal man gøre rede for, at hvis $\underline{x} \in U$ også opfylder $f(\underline{x}) = \underline{b}$, da findes der en vektor $\underline{y} \in K$, så $\underline{x} = \underline{x}_0 + y$. (Dette resultat kan kort udtrykkes således: $L = \underline{x}_0 + K$.)

101. Graden af et polynomium

$$f(x) = a_0 x + \cdots + a_n x^n\,, \quad x \in \mathbf{R},$$

i Pol $(\mathbf{R})$ er det største tal j så $a_j \neq 0$. Lad for $n = 0, 1, 2, \cdots$ Pol $_n(\mathbf{R})$ betegne mængden af polynomier af grad højst n.

a. Vis, at Pol $_n(\mathbf{R})$ er et underrum i Pol $(\mathbf{R})$.

b. Vis, at afbildningen $\phi : \mathbf{R}^{n+1} \to$ Pol $_n(\mathbf{R})$ givet ved

$$\phi : \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \to f,$$

hvor

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

er en isomorfi. Hvad er dimensionen af Pol $_n(\mathbf{R})$?

c. Gør rede for, at polynomierne x^j, $j = 0, 1, \cdots, n$ er en basis for Pol $_n(\mathbf{R})$.

d. Vis, at mængden af polynomier af grad lig med n *ikke* er et underrum i Pol $(\mathbf{R})$.

102. Lad $\underline{\underline{A}}$ være matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vis ved udregning, at

$$\underline{\underline{A}}^2 \in \text{ span } (\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{A}}),$$

idet $\underline{\underline{E}}$ betegner 2×2-enhedsmatricen. (Vi arbejder her i vektorrummet $\mathbf{M}_{2,2}$.) Skriv $\underline{\underline{A}}^2$ som linearkombination af $\underline{\underline{E}}$ og $\underline{\underline{A}}$.

103. Underrummet U i $\mathbf{R}^5$ udspændes af

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= (1, 1, -1, 0, 5), \\ \underline{a}_2 &= (1, 4, -5, 1, 3), \\ \underline{a}_3 &= (3, 2, 5, 2, 2), \\ \underline{a}_4 &= (2, -2, 10, 1, -1), \end{aligned}$$

dvs. $U = \text{ span } (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$.

Find et delsæt af $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ der er en basis for U, og skriv de øvrige vektorer som en linearkombination af vektorer fra den fundne basis.

104. I $\mathbf{R}^4$ er der givet vektorerne

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= (1, 0, -1, 1), \\ \underline{a}_2 &= (0, 1, 2, -1), \\ \underline{a}_3 &= (2, 1, 0, 1), \\ \underline{a}_4 &= (1, 1, 1, 0), \\ \underline{a}_5 &= (3, 2, 1, 1). \end{aligned}$$

Bestem en basis for $U = \text{ span } (\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_5)$ der indeholder $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_5$. Bestem dernæst en basis for U, der indeholder $\underline{a}_3$ og $\underline{a}_4$. Skriv i begge tilfælde hver af vektorerne $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_5$ som linearkombination af de fundne basisvektorer.

105. Lad V være et vektorrum.

a. Vis, at hvis U_1, U_2 er underrum i V, da er også

$$U = U_1 \cap U_2$$

et underrum.

b. Vis, at hvis $U_1, \cdots, U_p$ er underrum i V, da er også

$$U = U_1 \cap \cdots \cap U_p$$

et underrum.

106. Idet U_1 og U_2 er underrum i vektorrummet V defineres *summen* $U_1 + U_2$ af U_1 og U_2 som mængden

$$U_1 + U_2 = \{\underline{x} + \underline{y} \mid \underline{x} \in U_1,\ \underline{y} \in U_2\}.$$

a. Gør rede for, at $U_1 + U_2$ er et underrum i V.

b. Idet $(\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_m)$ er et frembringersæt for U_1 og $(\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n)$ er et frembringersæt for U_2 skal man gøre rede for, at $(\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_m, \underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_n)$ er et frembringersæt for $U_1 + U_2$.

Lad nu U_1 være underrummet i $\mathbf{R}^4$ frembragt af vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

og lad U_2 være underrummet i $\mathbf{R}^4$ frembragt af vektorerne

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c. Bestem en basis for $U_1 + U_2$.

d. Bestem en basis for $U_1 \cap U_2$.

107. I $\mathbf{R}^3$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Angiv samtlige maksimalt lineært uafhængige sæt af vektorer fra mængden $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$.

108. I $\mathbf{R}^4$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{a}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Angiv samtlige maksimalt lineært uafhængige sæt af vektorer fra mængden $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5, \underline{a}_6\}$.

109. Der er givet følgende vektorer i $\mathbf{R}^5$:

$$\begin{aligned}\underline{a}_1 &= (1,1,0,0,0),\\ \underline{a}_2 &= (0,1,1,0,0),\\ \underline{a}_3 &= (0,0,1,1,0),\\ \underline{a}_4 &= (-1,0,0,1,0),\\ \underline{a}_5 &= (0,0,-1,0,1).\end{aligned}$$

a. Gør rede for, at $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5)$ er en basis for $\mathbf{R}^5$.

b. Udregn projektionen af
$$\underline{x} = (2,0,0,0,1)$$
på $\operatorname{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ langs $\operatorname{span}(\underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5)$. Projektionen angives som linearkombination af vektorerne $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_2$, og udregnes derefter som talsæt i $\mathbf{R}^5$.

110. I $\mathbf{R}^4$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

a. Gør rede for, at $U_1 = \operatorname{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ er et to-dimensionalt underrum.

b. Find et underrum U_2 i $\mathbf{R}^4$ der er komplementært til U_1. (Vink: Som U_2 kan man bruge underrummet udspændt af passende valgte vektorer fra den naturlige basis.)

111. I $\mathbf{R}^4$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix}3\\-2\\2\\4\end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

a. Find en basis for $U_1 = \operatorname{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$.

b. Find et underrum U_2 i $\mathbf{R}^4$ der er komplementært til U_1.

c. Find projektionen af

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

på U_2 langs U_1.

112. Undersøg om de to vektorer

$$\underline{a}_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0)\,, \quad \underline{a}_2 = (0, 1, 1, 1, 1, -1)$$

udspænder samme underrum i $\mathbf{R}^6$ som de to vektorer

$$\underline{b}_1 = (4, -5, -1, -5, -1, 5)\,, \quad \underline{b}_2 = (-3, 2, -1, 2, -1, -2).$$

113. Bestem rangen af følgende matricer:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{O}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

114. Lad $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ være den lineære afbildning der hører til matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

a. Bestem $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}$.

b. Bestem en basis for $\ker f$.

c. Bestem en basis for $f(\mathbf{R}^4)$, altså for billedet af $\mathbf{R}^4$ ved f.

d. Bestem en basis $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ for $\mathbf{R}^4$ og en basis $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ for $\mathbf{R}^4$, således at

$$f(x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3\underline{a}_3 + x_4\underline{a}_4) = x_1\underline{b}_1 + \cdots + x_r\underline{b}_r,$$

hvor $r = \mathrm{rg}\underline{\underline{A}}$.

115. Lad U og V være endeligt dimensionale vektorrum, og lad $f : U \to V$ være en homomorfi. Der er valgt en basis $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_r$ for $f(U)$.

a. Gør rede for, at der findes vektorer $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_r \in U$, så $f(\underline{a}_1) = \underline{b}_1, \cdots, f(\underline{a}_r) = \underline{b}_r$.

b. Gør rede for, at $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_r$ er lineært uafhængige.

c. Sæt $U_1 = \text{span}\,(\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_r)$, og sæt $U_2 = \ker f$. Gør rede for, at U_1 og U_2 er komplementære underrum.

116. For ethvert $t \in \mathbf{R}$ er der givet matricen

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix}.$$

a. Bestem for ethvert $t \in \mathbf{R}$ determinanten $\det \underline{\underline{B}}$.

b. Bestem for ethvert $t \in \mathbf{R}$ rangen af $\underline{\underline{B}}$.

c. Bestem for ethvert $t \in \mathbf{R}$ løsningsmængden til ligningen

$$\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d. Bestem for ethvert $t \in \{0, 1, 2\}$ løsningsmængden til ligningen

$$\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

117. I vektorrummet $U = \mathbf{R}^3$, hhv. $V = \mathbf{R}^2$ betragtes den naturlige basis

$$\varepsilon_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \text{hhv. } \varepsilon_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

samt sættet

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad \text{hhv. } \beta = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

a. Gør rede for at α, hhv. β er en basis for U, hhv. V. Denne basis kaldes den nye basis for U, hhv. V.

b. Vektoren $\underline{u} \in U$ har den nye koordinatsøjle $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (altså koordinatsøjlen i basen α). Find $\underline{u}$.

c. Bestem koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$, hhv. $\underline{\underline{T}}$, for overgang fra naturlig basis til ny basis i U, hhv. V.

d. Bestem nye koordinatsøjler for vektorerne $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

e. Den lineære afbildning $f : U \to V$ repræsenteres i de naturlige baser af matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestem den matrix $\widetilde{\underline{\underline{A}}}$ der repræsenterer f i de nye baser.

f. Bestem vektorerne $f(\underline{u})$ og $f(\underline{x})$ i V.

g. Bestem disse vektorers nye koordinatsøjler på to måder (dvs. ved benyttelse af matricen $\underline{\underline{T}}$ og ved benyttelse af matricen $\widetilde{\underline{\underline{A}}}$).

h. Den lineære afbildning $g : U \to V$ repræsenteres i de nye baser af matricen

$$\begin{pmatrix} 14 & 18 & 5 \\ 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Bestem den matrix $\underline{\underline{B}}$, der repræsenterer g i de naturlige baser.

118. En lineær afbildning (homomorfi) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ er givet ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(dette er altså matricen for f hørende til den *naturlige basis*), og vektorerne $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_2$ er givet ved

$$\underline{a}_1 = (1, 2)\,, \quad \underline{a}_2 = (2, 1).$$

a. Vis, at $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ er en basis for $\mathbf{R}^2$.

b. Find matricen for f med hensyn til basen $\underline{a}_1, \underline{a}_2$.

119. Lad $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ være en lineær afbildning, og lad vektorerne $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ være givet ved

$$\underline{b}_1 = (-1, 1, 1)\,, \quad \underline{b}_2 = (1, 0, -1)\,, \quad \underline{b}_3 = (0, 1, 1).$$

a. Vis, at $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ udgør en basis i $\mathbf{R}^3$.

b. Det vides, at den lineære afbildning f har matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

m.h.t. basen $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$. Find matricen for f m.h.t. den naturlige basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ for $\mathbf{R}^3$.

120. Lad $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ være den lineære afbildning hvis matrix med hensyn til den naturlige basis er

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lad desuden $\underline{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{q}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a. Vis, at sættet $Q = (\underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{q}_3)$ udgør en basis for $\mathbf{R}^3$.

b. Udregn $f(\underline{q}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, og bestem dens koordinatsæt med hensyn til Q.

c. Benyt resultatet i (b) til at bestemme matricen for f med hensyn til Q.

d. Find den fuldstændige løsning til ligningssystemet $f(\underline{x}) = \underline{q}_1$. (Vink: Det er lettest at udføre regningerne i Q-koordinater).

121. Find i hvert af følgende tilfælde eventuelle egenværdier og tilhørende egenvektorer for matricen $\underline{\underline{A}}$. Undersøg endvidere om matricen er diagonaliserbar, og find i givet fald en basis der diagonaliserer matricen, samt en matrix $\underline{\underline{T}}$, så $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$ er en diagonalmatrix.

a.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

b.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

c.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

d.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

122. Lad

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 6 & t \\ -t & 6 \end{pmatrix} \text{ og } \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & t & -2 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Bestem de værdier af t, for hvilke $\underline{\underline{A}}$ hhv. $\underline{\underline{B}}$ er diagonaliserbare.

123. Find egenværdier og egenvektorer for matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 12 & -18 \\ 2 & -2 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

124. Afgør i hvert af følgende tilfælde, om den angivne matrix er diagonaliserbar, og find i bekræftende fald en diagonaliserende koordinattransformationsmatrix:

a.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

b.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

125. Lad endomorfierne f og g af talrummet $\mathbf{R}^3$ have matricerne henholdsvis

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

med hensyn til den naturlige basis for $\mathbf{R}^3$. Find en basis for $\mathbf{R}^3$ med hensyn til hvilken matricerne for f og g begge er diagonalmatricer, og opskriv en matrix $\underline{\underline{T}}$, så $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$ og $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$ begge er diagonalmatricer.

126. Antag, at $\underline{x}$ er egenvektor for matricen $\underline{\underline{A}}$ med tilhørende egenværdi λ, og at $\underline{x}$ er egenvektor for matricen $\underline{\underline{B}}$ med tilhørende egenværdi μ. Gør rede for, at $\underline{x}$ er egenvektor for matricerne $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ og $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$, og angiv de tilsvarende egenværdier.

127. Hvert år optræder den frygtede MØK-influenza som man har 40% chance for at få, idet chancen dog kun er 20% hvis man har haft den året før.

I en given stor befolkningsgruppe beskrives sundhedstilstanden (hvad angår MØK-influenzaen) efter n år ved en sundhedsvektor

$$\underline{\underline{X}}_n = \begin{pmatrix} P_n \\ N_n \end{pmatrix},$$

hvor P_n er antallet der får MØK-influenzaen, og N_n er antallet der ikke får MØK-influenzaen i år n.

a. Find en matrix $\underline{\underline{A}}$, så $\underline{\underline{X}}_{n+1} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}_n$.

b. Gør rede for, at $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar, og find en regulær matrix $\underline{\underline{S}}$ så $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix.

c. Udregn ved hjælp af punkt b. en tilnærmet værdi for $\underline{\underline{X}}_{10}$, og find hvorledes sygdomsfordelingen udvikler sig efter et stort antal år.

128. I $\mathbf{R}^3$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Find en ortonormalbasis for underrummet U i $\mathbf{R}^3$ udspændt af $\underline{a}_1, \underline{a}_2$. Udvid dernæst den fundne ortonormalbasis til en ortonormalbasis for $\mathbf{R}^3$.

129. I $\mathbf{R}^4$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Find en ortonormalbasis for underrummet U i $\mathbf{R}^4$ udspændt af $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$. Udvid dernæst den fundne ortonormalbasis til en ortonormalbasis for $\mathbf{R}^4$.

130. I $\mathbf{R}^3$ er givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{a}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a. Eftervis, at $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_2$ er ortogonale enhedsvektorer.

b. Find en vektor $\underline{a}_3$, så $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ er ortogonale enhedsvektorer.

c. Idet $\underline{\underline{S}}$ er 3×3-matricen $\begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 \end{pmatrix}$ skal man eftervise, at $\underline{\underline{S}}^t\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{E}}$, dvs. at $\underline{\underline{S}}$ er regulær med $\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^t$.

d. Bestem koordinaterne af standardenhedsvektorerne med hensyn til basen $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$.

131. I $\mathbf{R}^4$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{153}}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a. Eftervis, at $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ er ortogonale enhedsvektorer.

b. Find en vektor $\underline{a}_4$ så $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ er ortogonale enhedsvektorer.

c. Idet $\underline{\underline{S}}$ er 4×4-matricen $\begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 & \underline{a}_4 \end{pmatrix}$ skal man eftervise, at $\underline{\underline{S}}^t\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{E}}$, dvs. at $\underline{\underline{S}}$ er regulær med $\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^t$.

132. Lad M være følgende delmængde af $\mathbf{R}^4$:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a. Bestem en basis for span M.

b. Bestem en basis for $M^{\perp}$.

c. Bestem ortogonale baser for de to ovennævnte underrum af $\mathbf{R}^4$.

133. Er følgende udsagn sandt? Et sæt bestående af n indbyrdes vinkelrette egentlige vektorer i et n-dimensionalt euklidisk vektorrum, er en basis for vektorrummet.

134. Gør rede for, at hvis $\underset{=}{S}$ er en ortogonal matrix, så er $\det \underset{=}{S}$ enten $+1$ eller -1.

135. Gør rede for, at hvis $\underset{=}{S}$ og $\underset{=}{T}$ er ortogonale $n \times n$-matricer, da er $\underset{=}{S}\underset{=}{T}$ ligeledes en ortogonal $n \times n$-matrix.

136. I det euklidiske vektorrum $\mathbf{R}^3$ er givet

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestem ortogonalprojektionen af $\underline{a}$ på span $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$.

137. I det euklidiske vektorrum $\mathbf{R}^4$ er givet

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem ortogonalprojektionen af $\underline{a}$ på span $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$.

138. I det euklidiske vektorrum $\mathbf{R}^4$ er givet vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

samt vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestem ortogonalprojektionen af $\underline{a}$ på span $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$.

139. En lineær afbildning $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ er givet ved den symmetriske matrix

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Bestem egenværdierne for f.

b. Find en ortonormalbasis $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ for $\mathbf{R}^3$ (med hensyn til det sædvanlige skalarprodukt på $\mathbf{R}^3$) bestående af egenvektorer for f.

c. Find en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$ således at $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix, og opskriv denne diagonalmatrix.

140. En lineær afbildning $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ er med hensyn til den naturlige basis i $\mathbf{R}^3$ givet ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Bestem en ortonormalbasis $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ for $\mathbf{R}^3$ således at f i denne basis repræsenteres ved en diagonalmatrix, og opskriv denne diagonalmatrix.

b. Opskriv koordinattransformationsmatricen for overgang fra den naturlige basis til basen $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$.

141. En lineær afbildning $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ er givet ved matricen

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 9 & -9 & -18 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Undersøg om f er diagonaliserbar, og find i givet fald en basis bestående af egenvektorer.

b. Findes der en ortonormalbasis bestående af egenvektorer?

142. Der er givet matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -a & 2+2a \\ -a & 1+2a \end{pmatrix},$$

hvor a betegner et givet reelt tal.

a. Find samtlige egenværdier for $\underline{\underline{A}}$.

b. Find de værdier af a for hvilke $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar.

c. Gør rede for, at hvis $a = -\frac{2}{3}$, da findes en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$, så $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix, og find en sådan matrix $\underline{\underline{S}}$.

143. Vi betragter en kvadratisk form k ved

$$k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ax_1^2 + ax_2^2 + (a+6)x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2ax_2x_3.$$

Bestem de værdier af a for hvilke k er positivt definit.

144. Lad $\underline{\underline{B}}$ være den symmetriske 4×4-matrix til hvilken der svarer den kvadratiske form

$$k(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4.$$

a. Bestem egenrummet $V_0 \subset \mathbf{R}^4$ svarende til egenværdien 0 for $\underline{\underline{B}}$.

b. Bestem en basis for ${V_0}^{\perp}$.

c. Diagonaliser $\underline{\underline{B}}$ (vink: benyt a. og b.), og afgør definitheden af k.

145. Lad $\underline{\underline{B}}$ være en symmetrisk matrix. Gør rede for, at $\underline{\underline{B}}$ er negativt definit hvis og kun hvis $-\underline{\underline{B}}$ er positivt definit. Benyt dette samt Sætning 7.5.5 til at indse gyldigheden af følgende udsagn:

$\underline{\underline{B}}$ *er negativt definit netop hvis der om de ledende underdeterminanter gælder*

$$\begin{cases} \det \underline{\underline{B}}_i < 0 & \text{for } i \text{ ulige} \\ \det \underline{\underline{B}}_i > 0 & \text{for } i \text{ lige} \end{cases}.$$

Undersøg dernæst definitheden af matricen

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

146. Find et eksempel på en 2×2 symmetrisk matrix $\underline{\underline{B}}$, hvis ledende underdeterminanter $\det \underline{\underline{B}}_1$ og $\det \underline{\underline{B}}_2$ begge er ≥ 0, uden at $\underline{\underline{B}}$ er positivt semidefinit.

Blandede opgaver

1. Find den fuldstændige løsning til følgende lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -2x_1 + x_3 + 2x_4 &= -6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned} \quad .$$

2. Find den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned} \quad .$$

3. Angiv for hver værdi af a den fuldstændige løsning til ligningssystemet:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -6 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 4 \\ x_2 - 5x_3 + x_4 &= a \end{aligned} \quad .$$

4. Der er givet matricen

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -8 & -7 & 4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix} .$$

a. Find samtlige egenværdier for $\underset{=}{A}$.

b. Find en basis for hvert af egenrummene for $\underset{=}{A}$.

c. Undersøg, om der findes en regulær matrix $\underset{=}{S}$, således at $\underset{=}{S}\underset{=}{A}\underset{=}{S}^{-1}$ er en diagonalmatrix, og find i givet fald en sådan matrix $\underset{=}{S}$.

5. I talrummet $\mathbf{R}^4$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a. Gør rede for, at vektorerne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ er lineært uafhængige.

b. Idet $\mathbf{R}^4$ udstyres med det sædvanlige skalarprodukt skal man bestemme ortogonalprojektionen af vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

på span $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$.

6. En homomorfi $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ er givet ved

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4x_1 + x_3 \\ 3x_2 \\ x_1 + 4x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3.$$

a. Opskriv matricen, der repræsenterer f i den naturlige basis for $\mathbf{R}^3$.

b. Gør rede for, at f er diagonaliserbar i en ortonormalbasis.

c. Bestem egenværdierne for f.

d. Find en ortonormalbasis i $\mathbf{R}^3$ (med hensyn til det sædvanlige skalarprodukt) bestående af egenvektorer for f.

e. Find en egenvektor, der er vinkelret på vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. En funktion $k : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ er givet ved

$$k : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2.$$

a. Gør rede for, at k er en kvadratisk form, og opskriv den tilhørende symmetriske matrix $\underset{=}{B}$.

b. Bestem antallet af positive og negative karakteristiske rødder og rangen af $\underset{=}{B}$.

8. Find den fuldstændige løsning til følgende lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned} \quad .$$

9. Find den fuldstændige løsning til følgende lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \quad .$$

10. Find den fuldstændige løsning til følgende lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned} \quad .$$

11. *Hilbertmatricen*

$$\underset{=}{H}(n) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \cdots & & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \le i,j \le n} .$$

Det kan vises, at $\underset{=}{H}(n)$ er regulær for $n \geq 1$. Endvidere er $(\det \underset{=}{H}(n))^{-1}$ et naturligt tal som vokser meget hurtigt med n. Derfor benyttes $\underset{=}{H}(n)$ ofte til at teste programmer til brug i lineær algebra. Find $\underset{=}{H}(n)^{-1}$ for $n = 1, 2, 3, 4$.

12. En *cyklisk* permutation af længde p (en p-*cykel*) er en permutation i S_n $(n \geq p)$, hvor $x_1, \cdots, x_p$ er forskellige tal i $\{1, 2, \cdots, n\}$ og

$$x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{p-1} \to x_p \,, \quad x_p \to x_1,$$

og alle øvrige $n - p$ tal er uberørte. Den skrives kort $(x_1 x_2 \cdots x_p)$.

a. Vis, at en p-cykel kan fås ved sammensætning af en $(p-1)$-cykel og en 2-cykel.

b. Vis, at
$$\operatorname{sign}\,(x_1 x_2 \cdots x_p) = (-1)^{p-1}.$$

13. Skriv permutationen
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 1 & 2 & 9 & 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
som sammensætninger af cykliske permutationer, der ikke berører fælles elementer, og beregn herved fortegnet for σ.

14. *Fibonaccitallene* er defineret ved
$$f_0 = 0\,,\ f_1 = 1\,,\ f_2 = 1\,,\ f_3 = 2\,,\ f_4 = 3, \cdots$$
hvor $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ for $n \geq 1$.

Vis (ved induktion), at
$$\underset{=}{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \text{ for } n \geq 1.$$
Find en regulær 2×2-matrix $\underset{=}{S}$, så at
$$\underset{=}{S}\underset{=}{A}\underset{=}{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$
Find herved følgende formel for f_n:
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \right)^n - \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \right)^n \right).$$
Vis, at
$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \to \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \text{ for } n \to \infty.$$
Tallet $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ kaldes *det gyldne snit*, og er kendt fra den europæiske kunsthistorie.

15. I vektorrummet $V = \mathrm{Pol}_{\,3}(\mathbf{R})$ betragtes den naturlige basis
$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, x, x^2, x^3).$$
Vis, at
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$$

også er en basis for V og angiv koordinattransformationsmatricerne ved basisskift mellem de to baser.

16. Idet

$$c(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\,, \quad s(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}),$$

er $V = \operatorname{span}\,(c(t), s(t))$.

Vis, at $\dim V = 2$.

Lad $D = \frac{d}{dt}$. Vis, at $D : V \to V$ er en lineær afbildning, og angiv den matrix $\underline{\underline{A}}$, der repræsenterer D i basen $(c(t), s(t))$.

Find en basis for V bestående af egenvektorer for D, og angiv den matrix, der repræsenterer D i en sådan basis.

Stikord