

# Analyse 1

Matthias Christandl

Marts 2019



# Forord

Følger af tal kan opføre sig på mange forskellige måder, bare tænk på talfølgerne

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots,$$

som går mod uendelig,

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots,$$

som konvergerer mod nul, og

$$1, -1, 1, -1, 1, \dots,$$

som hopper fra plus ét til minus ét og tilbage. I dette kursus, tilrettelagt til førsteårsstuderende i matematik ved Københavns Universitet, starter vi med at udvikle metoder til at *analysere* konvergens af disse og mere generelle talfølger. Vi vil bagefter se på talrækker, dvs. summer af leddene i en talfølge som fx

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Når vi har fået et godt grundlag for at forstå talfølger og -rækker, generaliserer vi teorien og ser på følger af funktioner, f.eks.

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

For et givet  $x$  kan en funktionsfølge selvfølgelig betragtes og undersøges som talfølge. Hvis vi derimod ser samlet på alle værdier af  $x$ , opdager vi, at der findes andre typer af konvergens (uniform konvergens). Vi beviser også kriterier for konvergens af funktionsrækker og lægger specielt vægt på potensrækker, f.eks.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

og trigonometriske rækker, f.eks.

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots$$

Sidstnævnte er yderst vigtige både i ren matematik samt i anvendt matematik (signalbehandling) og bliver behandlet i emnet Fourieranalyse.

Ligesom et reelt tal kan betragtes som et punkt i rummet  $\mathbb{R}$ , kan en funktion anses som værende et punkt i et rum af funktioner (f.eks er  $\sin x$  et punkt i rummet af kontinuerte funktioner). Både talfølger og funktionsfølger er derfor eksempler på *punktfølger* i mere generelle rum, hvor vi kan tale om afstand mellem to punkter: metriske rum. Til sidst i kurset vil jeg derfor give en kort introduktion til dette emne.

De første fire kapitler af bogen er inspireret af Tom Lindstrøms bog *Kalkulus*. Kapitel 5 om Fourierrækker og Kapitel 6 om metriske rum tager udgangspunkt i noterne af henholdsvis Jan Philip Solovej og Christian Berg.

# Indhold

<b>Forord</b>	<b>iii</b>
<b>1 Tal og Talfølger</b>	<b>1</b>
1.1 Reelle tal . . . . .	1
1.2 Komplekse tal . . . . .	6
1.3 Talfølger . . . . .	12
1.4 Delfølger og Cauchys kriterium . . . . .	35
<b>2 Talrækker</b>	<b>45</b>
2.1 Introduktion . . . . .	45
2.2 Positive rækker . . . . .	54
2.3 Absolut og betinget konvergens . . . . .	60
<b>3 Funktionsfølger og -rækker</b>	<b>69</b>
3.1 Konvergens af funktionsfølger . . . . .	70
3.2 Integration og afledning af funktionsfølger . . . . .	80
3.3 Funktionsrækker . . . . .	83
<b>4 Potensrækker</b>	<b>87</b>
4.1 Punktvis og uniform konvergens . . . . .	87
4.2 Integration og differentiering . . . . .	95
4.3 Taylorrækker . . . . .	97
<b>5 Fourierrækker</b>	<b>103</b>
5.1 Introduktion . . . . .	103
5.2 Periodiske funktioner og trigon. rækker . . . . .	106
5.3 Vektorrumstruktur . . . . .	120

5.4	Fourierrækker . . . . .	122
5.5	Pythagoras, Bessel, Parseval . . . . .	129
5.6	Punktvis konvergens . . . . .	138
5.7	Uniform konvergens . . . . .	144
<b>6</b>	<b>Metriske rum</b>	<b>149</b>
6.1	Metriske rum og normerede vektorrum . . . . .	150
6.2	Punktfølger, konvergens og fuldstændighed . . . . .	159
6.3	Delmængder og topologi . . . . .	165

# Kapitel 1

## Tal og Talfølger

I kursets første del ser vi på følger af reelle og komplekse tal. For at forstå begreberne konvergens og divergens, er det i princippet tilstrækkeligt kun at se på de reelle tal. Vi vælger dog også at se på komplekse talfølger, da vi erved får en mere omfattende eksempel-mængde, der illustrerer den generelle teori om talfølger. Undersøgelsen af komplekse talfølger leder hen mod undersøgelsen af funktionsfølger og -rækker, specielt potens- og Fourierrækker, hvilket vi behandler senere i kurset.

For at begynde kurset på et solidt grundlag starter vi med at repetere de reelle og komplekse talrum og fremhæve de egenskaber ved de reelle og komplekse tal, som vil være afgørende for vores forståelse af talfølger.

### 1.1 Reelle tal

**Introduktion** Strukturen af de reelle tal er essentiel i det matematiske fag *analyse*. I denne del vil vi diskutere konstruktionen af de reelle tal og deres egenskaber. For at fastlægge notationen introducerer vi

- de naturlige tal  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- de naturlige tal med nul  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- de hele tal  $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
- de rationelle tal  $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ .

Tallene har en orden  $\leq$ , som gør at det er naturligt at præsentere dem som tal på en linie. Mens det er åbenlyst, at de hele tal ikke fylder hele tallinien, så er situationen mindre klar i forhold til de rationelle tal. Det bliver mere klart, at der er huller (linien består faktisk næsten udelukkende af huller), når vi prøver at løse ligningen

$$x^2 = 2,$$

idet det kan bevises, at der ikke findes et tal  $x \in \mathbb{Q}$  med  $x^2 = 2$ . Ved hjælp af Newtons metode, kan vi få en følge af rationelle tal, der kommer tættere og tættere på at løse ligningen. Bemærk, at vi prøver at finde nulpunkter for funktionen

$$f(x) = x^2 - 2.$$

Metoden fungerer sådan:

- gæt  $x_0$
- tegn tangenten til  $f$  i punktet  $x_0$ . Beregn tallet, hvor tangenten rammer  $x$ -aksen. Kald det tal  $x_1$  og brug  $x_1$  som det næste gæt. Bemærk, at 
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Metoden fungerer godt, hvis vi starter tilstrækkeligt tæt på en løsning. I vores tilfælde,  $f(x) = x^2 - 2$ , finder vi, at  $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ . Bemærk, at alle tal i følgen er rationelle, hvis vi starter med et rationelt gæt  $x_0$ .

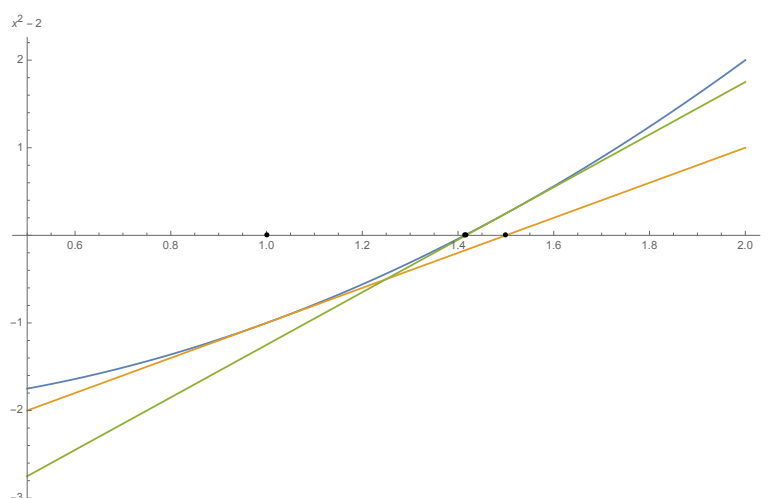
n	$x_n$	$x_n^2 \approx$
0	1 = 1	1
1	$\frac{3}{2} = 1.5$	2.25
2	$\frac{17}{12} \approx 1.416..$	2.006..
3	$\frac{577}{408} \approx 1.414215..$	2.00001..

Vi kan derfor konstruere en følge af rationelle tal, som går mod et tal som ikke findes på tallinien - vi har fundet et hul i tallinien. Se Figur 1.1 for en illustration.

En anden måde at se på, at der mangler noget på tallinien, er at se på talmængden

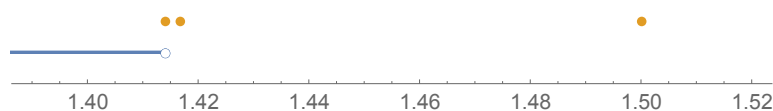
$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}.$$





Figur 1.1: Grafen viser funktionen  $x^2 - 2$  (blå) samt tangenten tilhørende den første (orange) og den anden (grøn) Newton-iteration. På  $x$ -aksen er punkterne  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 1.5$ ,  $x_2 = 1.416$  og grænseværdien  $\sqrt{2}$  vist. Bemærk, at  $x_2$  er allerede meget tæt på  $\sqrt{2}$ .

Mængden har en øvre grænse (f.eks. gælder det for  $c = 1.5$ :  $x \leq c$  for alle  $x \in A$ ), men for hver øvre grænse  $c$  i  $\mathbb{Q}$  kan vi finde en mindre øvre grænse i  $\mathbb{Q}$ : da de  $x_n$ , som vi har konstrueret ovenfor, er strengt aftagende for alle  $n \geq 1$ , er  $x_{n+1}$  en mindre øvre grænse end  $x_n$  for alle  $n$ . Den *mindste* øvre grænse  $\sqrt{2}$  ligger ikke i  $\mathbb{Q}$  og mangler derfor i tallinien. Figur 1.2 illustrerer dette.



Figur 1.2: Grafen viser talmængden  $A$ , samt de øvre grænser  $x_1, x_2, x_3$ .

**Fuldstændiggørelse** En matematisk metode, som fylder alle disse huller, kaldes for fuldstændiggørelsen af de rationelle tal, og vi betegner resultatet - de reelle tal - med  $\mathbb{R}$ . Der findes flere forskellige måder at fuldstændiggøre de rationelle tal på, men heldigvis er resultatet altid det samme, så det er veldefineret at tale om  $\mathbb{R}$  uden at referere til, hvilken metode, der blev brugt.

Vi starter med at diskutere en aksiomatisk metode, som tager udgangspunkt i manglen af den mindste øvre grænse i  $\mathbb{Q}$ . Vi vil senere i kurset se, at metoden er tæt beslægtet med en anden metode, som tilføjer grænsepunkter af følge af rationale tal.

Den følgende sætning definerer de reelle tal. Vi giver den her uden bevis og diskuterer begreberne nedenfor.

**Sætning 1.1** (De reelle tal). *Det reelle tal  $\mathbb{R}$  er det entydige legeme, der har en total ordning, og som også er Dedekind-fuldstændigt.*

**Definition 1.2** (Legeme). *Et legeme  $(\mathbb{F}, +, *)$  er en mængde  $\mathbb{F}$  med en addition  $(+)$  og multiplikation  $(*)$ , som opfylder<sup>1</sup>*

- (afslutning)  $\forall x, y \in \mathbb{F} : x + y \in \mathbb{F}, x * y \in \mathbb{F}$
- (kommutativitet)  $\forall x, y \in \mathbb{F} : x + y = y + x$  og  $x * y = y * x$
- (assosiativitet)  $\forall x, y, z \in \mathbb{F} : (x + y) + z = x + (y + z)$  og  $(x * y) * z = x * (y * z)$
- (identitet)  $\exists 1 \in \mathbb{F}, 0 \in \mathbb{F}, 1 \neq 0 : \forall x \in \mathbb{F} : x + 0 = x$  og  $x * 1 = x$
- (additiv invers)  $\forall x \in \mathbb{F} : \exists (-x) \in \mathbb{F} : x + (-x) = 0$
- (multiplikativ invers)  $\forall x \in \mathbb{F}, x \neq 0 : \exists x^{-1} \in \mathbb{F}, x * x^{-1} = 1$
- (distribution)  $\forall x, y, z \in \mathbb{F} : x * (y + z) = x * y + x * z$

**Definition 1.3** (Total ordning). *Et legeme  $(\mathbb{F}, +, *)$  har en total ordning  $\leq$ , hvis mængden  $\mathbb{F}$  har en total ordning  $\leq$*

- (refleksiv)  $\forall x \in \mathbb{F} : x \leq x$
- (symmetrisk)  $\forall x, y \in \mathbb{F} : \text{hvis } x \leq y \text{ og } y \leq x, \text{ så er } x = y$
- (transitiv)  $\forall x, y, z \in \mathbb{F} : \text{hvis } x \leq y \text{ og } y \leq z, \text{ så er } x \leq z$
- (total)  $\forall x, y \in \mathbb{F} : \text{enten er } x \leq y \text{ eller } y \leq x,$

og hvis  $\leq$  er kompatibel med addition og multiplikation

<sup>1</sup>Vi skriver kort  $\forall$ , når vi mener "for alle", og  $\exists$ , hvis vi vil sige, "der findes".

- $\forall x, y, z \in \mathbb{F}: x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{F}: x \leq y, 0 \leq z \Rightarrow x * z \leq y * z.$

Det er en god øvelse at tjekke, at de rationelle tal opfylder alle disse aksiomer, og derfor er et legeme med en total orden.

For at definere, hvad Dedekind-fuldstændigt betyder, har vi brug for en formel definition af øvre grænser og den mindste øvre grænse.

**Definition 1.4** (Øvre grænse). *Lad  $(\mathbb{F}, \leq)$  være en mængde med en total orden.  $c \in \mathbb{F}$  er en øvre grænse for  $A \subseteq \mathbb{F}$ , hvis for alle  $x \in A: x \leq c$ .  $g$  er en mindste øvre grænse for  $A \subseteq \mathbb{F}$ , hvis,  $g$  er en øvre grænse for  $A$ , og hvis, for alle øvre grænser  $c$  af  $A$  gælder, at  $g \leq c$ .*

**Definition 1.5** (Dedekind-fuldstændig). *Et legeme  $(\mathbb{F}, +, *)$  med en total orden  $\leq$  er Dedekind-fuldstændig, hvis alle delmængder, som ikke er tomme, og som har en øvre grænse, også har en mindste øvre grænse.*

Vores diskussion af de rationelle tal viste, at for hver øvre grænse  $c \in \mathbb{Q}$  af  $A = \{x^2 < 2, x \in \mathbb{Q}\}$ , findes der en mindre øvre grænse. De rationelle tal er derfor ikke Dedekind-fuldstændige.

For at bevise Sætning 1.1, skal man konstruere de reelle tal, og man skal vise, at alle andre konstruktioner har det samme resultat. Desværre kan vi ikke lave en formel konstruktion af de reelle tal i kurset, men jeg vil prøve at forklare ideen bag konstruktionen.

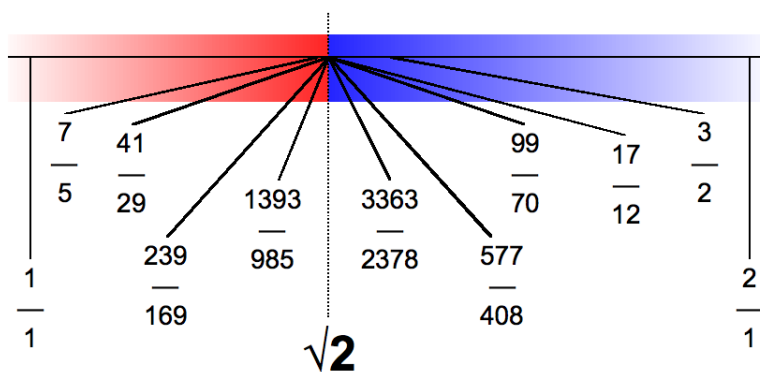
Ideen bruger konceptet *Dedekind-snit*. Et Dedekind-snit er en opdeling af  $\mathbb{Q}$  i delmængder  $A$  og  $B$ , sådan at  $A \cap B = \emptyset$  og  $A \cup B = \mathbb{Q}$ , og sådan, at alle  $a \in A$  og  $b \in B$  opfylder  $a \leq b$ . Desuden skal  $A$  ikke have et maximalt element (et element  $a_{\max} \in A$  med  $a \leq a_{\max}$  for alle  $a \in A$ ). Et Dedekind-snit repræsenterer det mindste tal, som er større end alle tal i  $A$ .

**Eksempel 1.6.** *Betragt som eksempel Dedekind-snittet*

$$A = \{x \in \mathbb{Q}, x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2, x \geq 0\}.$$

*Det er nemt at tjekke, at  $A \cap B = \emptyset$  og  $A \cup B = \mathbb{Q}$ , da  $\sqrt{2}$  ikke er rationelt. Dette Dedekind-snit repræsenterer det irrationale tal  $\sqrt{2}$  og er illustreret i Figur 1.3*



Figur 1.3: Illustration af Dedekind-snit (By Hyacinth [Public domain], from Wikimedia Commons)

Man kan nu lave regler for addition og multiplikation af Dedekind-snit, sådan at alle aksiomer for et legeme med total orden er opfyldt. Dedekind-fuldstændighed følger nærmest fra definitionen, og det er den egenskab, der er vigtig for os. Det er lidt mere vanskeligt at vise, at resultatet er entydigt.

## 1.2 Komplekse tal

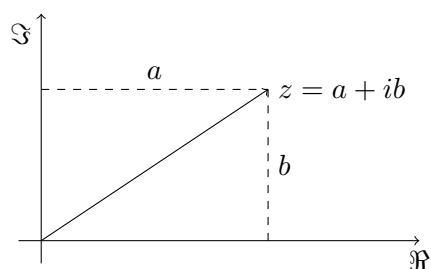
**Introduktion** De reelle tal blev indført, da man ikke kunne løse ligningen  $x^2 = 2$  i  $\mathbb{Q}$  (selvom det vigtigste for os var supremumsegenskaben). Hvis vi nu prøver at løse ligningen

$$x^2 = -1,$$

så støder vi igen på et problem, fordi for alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 \geq 0$ . Denne gang kan vi heller ikke tilnærme os løsningen, så der er ikke tale om at lukke nogle huller i tallinien. Vi skal i stedet tilføje en yderligere dimension for at kunne løse ligningen. For at gøre dette introducerer vi et nyt symbol  $i$ , som vi forestiller os repræsenterer  $\sqrt{-1}$ . De komplekse tal  $\mathbb{C}$  er nu reelle linearkombinationer af tallet 1 og symbolet  $i$ :

- $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : z = a + ib$

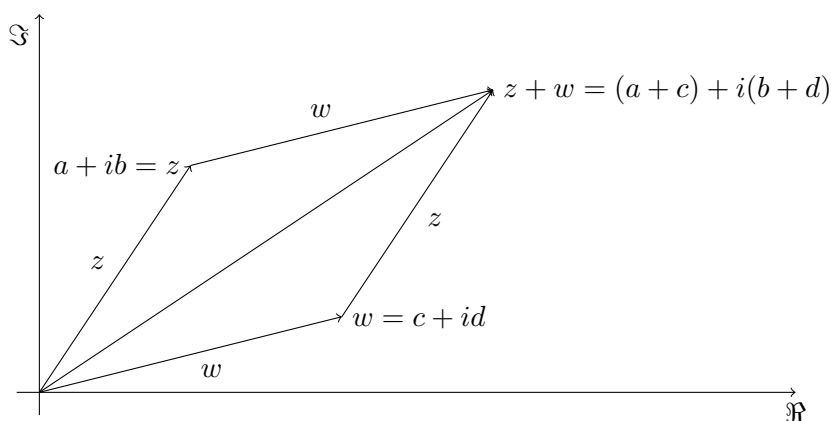
Givet et komplekst tal  $z$ , siger vi også, at  $a = \operatorname{Re}(z)$  er realdelen, og at  $b = \operatorname{Im}(z)$  er imaginærdelen af  $z$ .



Addition i  $\mathbb{C}$  bliver nedarvet fra de reelle tal

- (addition) For alle  $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C} : z + w = (a + c) + i(b + d)$ .

Indtil nu har vi præsenteret  $\mathbb{C}$  som et to-dimensionelt reelt rum  $\mathbb{R}^2$ , hvilket bliver tydeligt, hvis vi identificerer 1 med vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  og  $i$  med  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , for så bliver det komplekse tal  $z$  repræsenteret med  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



For at give  $\mathbb{C}$  en multiplikation skal vi først postulere, at  $i$  opfylder  $i^2 = -1$ , hvilket er naturligt, da  $i$  skal repræsentere  $\sqrt{-1}$ . Vi postulerer også, at  $i$  kommuterer med alle reelle tal, dvs.  $ir = ri$  for alle  $r \in \mathbb{R}$ . Sammen med distributionsegenskaben finder vi

- (multiplikation) For alle  $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C} : z * w = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(bc + ad)$ .

Det er ikke svært at se, at de komplekse tal opfylder de fleste aksiomer for at være et legeme. Vi mangler bare at finde den multiplikative invers til  $z \neq 0$

(den additive invers til  $z = a + ib$  er  $(-a) + i(-b)$ .) Man kan beregne den inverse til et komplekst tal  $z = a + ib$  ved at multiplicere både nævneren og tælleren med den kompleks-konjugerede

$$\bar{z} := a - ib.$$

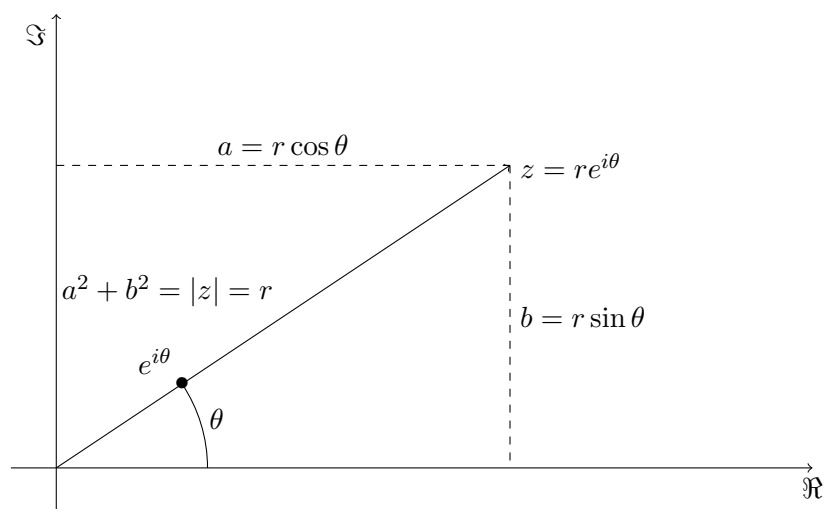
Vi finder således

$$\bullet \text{ (inverse) } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2},$$

og det er nemt at se, at  $z * \frac{1}{z} = 1$ . De komplekse tal  $(\mathbb{C}, +, *)$  er derfor et legeme, men de har ikke en total ordening  $\leq$ , da man ikke kan sammenligne 1 og  $i$ , som repræsenterer forskellige dimensioner.

**Polarformen** Hvis vi igen ser på det komplekse talplan, ser vi, at kompleks konjugation svarer til en spejling i  $x$ -aksen. Anskuet som vektor kan vi beregne længden af  $z$ , hvilket er  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , som også kan skrives på følgende måde:  $|z| = \sqrt{z * \bar{z}}$ . Hvorimod det er oplagt at arbejde med real- og imaginærdel, når det drejer sig om den additive struktur af  $\mathbb{C}$ , er det ofte mere naturligt at repræsentere komplekse tal ved hjælp af polarformen, når man kigger på den multiplikative struktur. Polarformen får man ved at dividere med længden  $r = |z|$  og ved at skrive det komplekse tal på enhedscirklen ved hjælp af cosinus og sinus.

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$



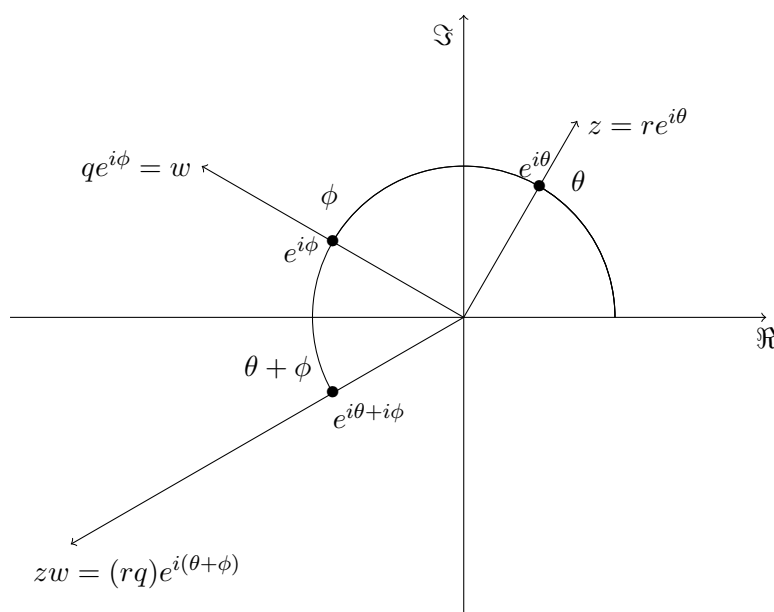
Skriver vi nu også

$$w = s(\cos \phi + i \sin \phi),$$

hvor  $s = |w|$ , så finder vi

$$\begin{aligned} z * w &= r * s ((\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + i(\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi)) \\ &= r * s (\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)), \end{aligned}$$

hvor vi brugte additionsreglerne for cosinus og sinus. Vi ser, at vinklerne opfører sig additivt under multiplikation!



Vi kender dette fænomen fra eksponentialfunktionen og er derfor ledt til følgende definition

**Definition 1.7** (Euler's formel). Lad  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta,$$

Som vi lige har vist opfylder den komplekse exponentialfunktion

$$e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta} e^{i\phi}.$$

Multiplikation af  $z$  og  $w$  kan derfor skrives som

$$z * w = rse^{i(\theta+\phi)}.$$

Da det gælder, at  $e^{a+c} = e^a e^c$  for de reelle tal  $a$  og  $c$ , kan vi udvide definitionen af eksponentialfunktionen fra reelle og imaginære til alle komplekse tal  $z = a + ib$  ved at definere

**Definition 1.8** (Euler's formel). *Lad  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ .*

$$e^z := e^a e^{ib}.$$

Husk at den reelle eksponentialfunktion var defineret som

$$e^a = \sup_{r \in \mathbb{Q}, r \leq a} e^r,$$

hvor for  $r = \frac{p}{q}$  med  $p, q \in \mathbb{N}$ , hvor  $e^r = \left(e^{\frac{1}{q}}\right)^p$ , hvor  $e^{\frac{1}{q}}$  er den positive løsning til  $x^q = e$ .

**Eksponentialfunktion** Eksponentialfunktionen får en særlig vigtig rolle i Fourieranalysen, hvor vi, for hvert  $k \in \mathbb{Z}$ , ser på

$$e_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$e_k : x \mapsto e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx.$$

Det er vigtigt at bemærke, at  $e_k$  er periodisk med periode  $\frac{2\pi}{|k|}$  ( $k \neq 0$ ). Ud af eksponentialfunktionens egenskaber er det nemt at verificere, at

$$e_k e_l = e_{k+l},$$

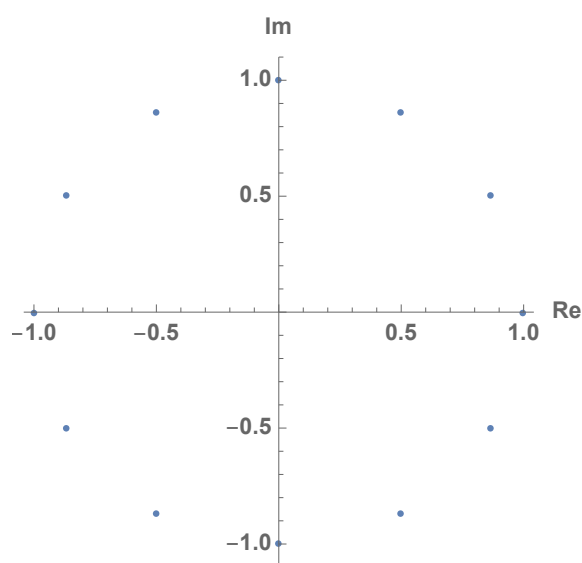
hvorimod beviset af denne formel er lidt mere vanskeligt ved brug af cosinus og sinus. Hvis  $k, l > 0$ , så er perioden af den multiplicerede funktion blevet mindre, nemlig fra  $\frac{2\pi}{k}$  og  $\frac{2\pi}{l}$  til  $\frac{2\pi}{k+l}$ .

Det er også naturligt at fiksere  $x \in [0, 2\pi)$  og at se på  $k$ -afhængigheden af  $e^{ikx}$  eller mere præcist på følgen

$$e^{ikx} = (e^{ix})^k.$$

Hvis vi følger punktet på cirklen igennem følgen  $k = 1, 2, \dots$ , så ser vi, at vinklen fordobles hver gang. Er  $x$  rationel er der endeligt mange punkter, som vi hvert rammer uendeligt mange gange. Er  $x$  irrationel, så kommer vi arbitrært tæt på ethvert punkt på cirklen, men rammer næsten intet punkt præcist. Se Fig. 1.4 for en illustration.





Figur 1.4: Grafen viser tallene for  $x = \frac{2\pi}{12}$ , som talfølgen går igennem som viseren på en urskive

**Metrik** I undersøgelsen af talfølger er det afgørende, hvilken funktion man benytter til at måle afstande for at kunne forstå, om man er tæt på eller langt fra en særlig værdi. Når vi måler afstanden mellem to reelle tal  $x_0$  og  $x_1$ , bruger vi absolutværdien af differencen  $|x_0 - x_1|$ . Ofte bruger vi trekantsuligheden

$$|x_0 + x_1| \leq |x_0| + |x_1|$$

som den vigtigste egenskab ved absolutværdifunktionen. Ofte også i formen

$$|x_2| - |x_1| \leq |x_2 - x_1|,$$

hvilken man får, når man sætter  $x_0 := x_2 - x_1$ . De komplekse tal er udstyret med absolutværdien ( $z = a + ib$ )

$$|z| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2} = r,$$

som opfylder trekantsuligheden

$$|z_0 + z_1| \leq |z_0| + |z_1|,$$

og som er nem at bevise. Bemærk, at vi ofte bruger trekantsuligheder sammen med en teleskopsummering

$$|z_0 - z_1| = |z_0 - z_2 + z_2 - z_1| \leq |z_0 - z_2| + |z_2 - z_1|.$$

Når vi taler om metriske rum senere i kurset, skal vi kalde absolutværdifunktionen for en *norm*, som inducerer denne afstandsfunktion (eller *metrik*) på de reelle eller komplekse tal.

### 1.3 Talfølger

I denne del skal vi introducere de grundlæggende begreber inden for studiet af talfølger. Vi starter med definitionen af en talfølge og ser på mange eksempler herpå. Vi introducerer derefter begreberne fortætningspunkt, konvergens og divergens. Til sidst ser vi på reelle følger, hvor vi kan sammenligne størrelser på følgeleddene og f.eks. undersøge følgens øvre grænse (limsup).

#### Definition og eksempler

**Definition 1.9** (Reel talfølge). *Lad  $a_n \in \mathbb{R}$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ . Vi siger, at*

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

*eller  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er en reel talfølge.*

Vi starter med at illustrere begrebet talfølge med en række karakteristiske eksempler, som vi vil referere tilbage til senere i kurset.

**Eksempel 1.10.** *Den aftagende reelle talfølge*

$$a_n = \frac{1}{n} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots,$$

*går tilsyneladende mod nul. Faktisk aftager den ret langsomt, hvis vi sammenligner den med*

$$a_n = 2^{-n} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \quad (\text{binær}) \quad 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \dots$$

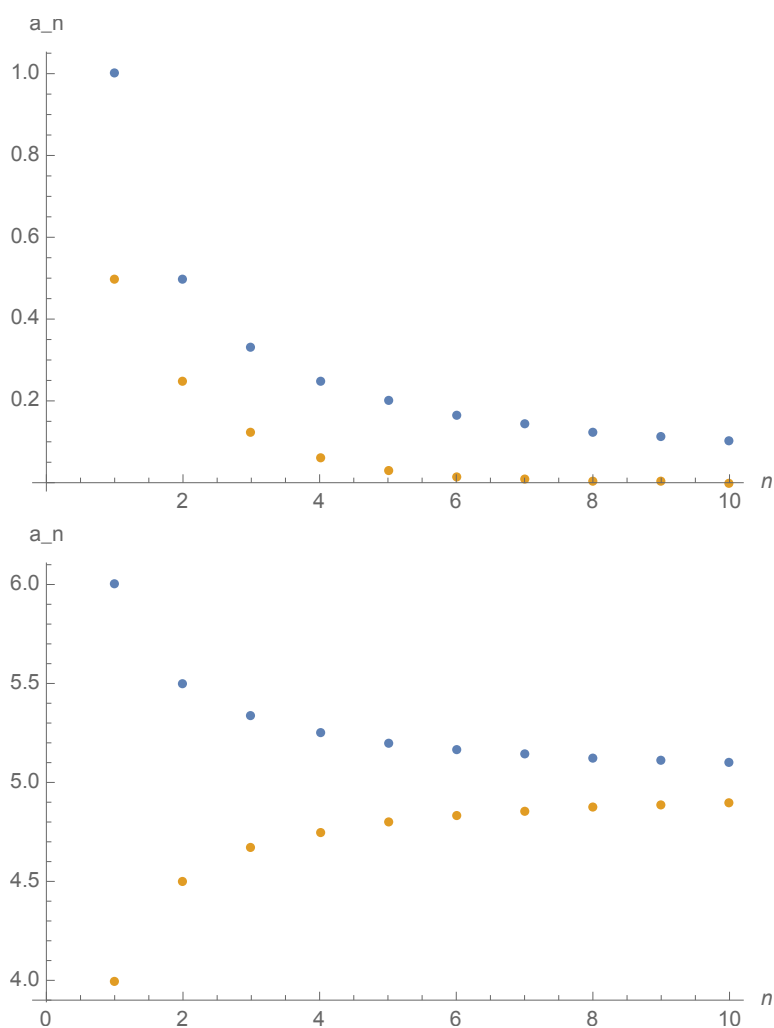
*Talfølger kan selvfølgelig også gå mod andre værdier end nul, som fx*

$$a_n = 5 + 1/n \quad 5.5, 5.33\dots, 5.25, 5.2, \dots,$$

*eller være stigende*

$$a_n = 5 - 1/n \quad 4.5, 4.66\dots, 4.75, 4.8, \dots$$

*Vi kalder sådanne følger monotone, da værdierne enten stiger hver gang eller aftager hver gang (en formel definition af monoton bliver givet senere). Den første graf illustrerer de første to følger, den anden de sidste to.*



**Eksempel 1.11.** *Følger kan også gå mod uendelig*

$$a_n = n \quad 1, 2, 3, \dots,$$

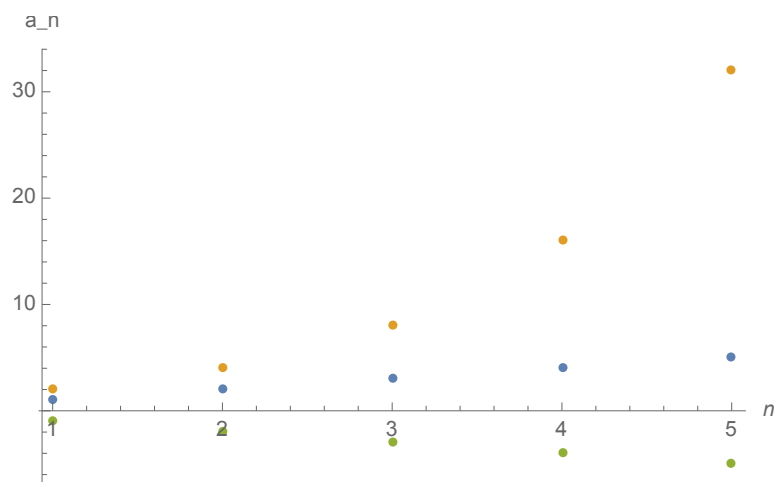
*på en langsom måde eller på en hurtig måde*

$$a_n = 2^n \quad 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots,$$

*eller gå mod minus uendelig*

$$a_n = -n \quad -1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots$$

*Grafen illustrerer de forskellige hastigheder.*



**Eksempel 1.12.** Der findes også følger, som vakler lidt

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \dots,$$

men som alligevel går mod en særlig værdi, og nogle, som vakler så meget, at de ikke kan bestemme sig, hvor de skal hen:

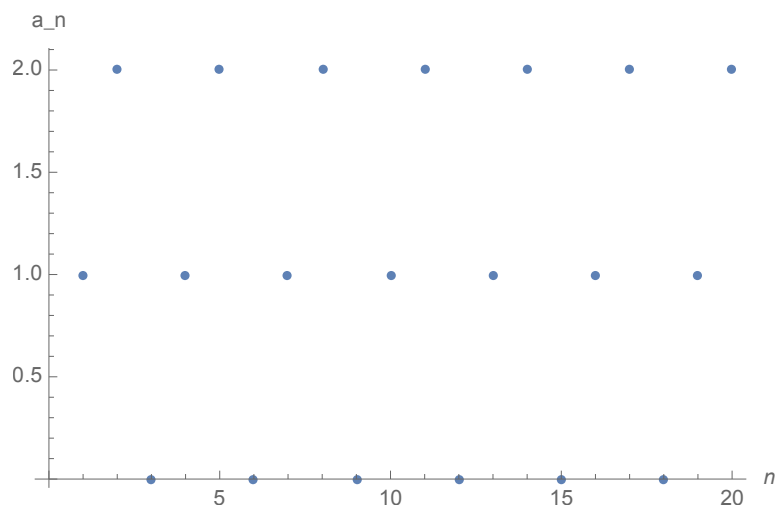
$$a_n = (-1)^n \quad -1, 1, -1, 1, \dots$$

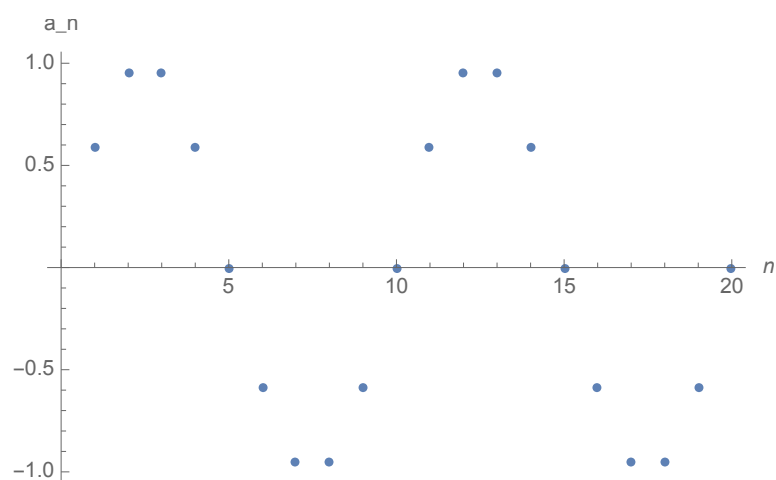
En talfølge kan også hoppe mellem flere end to værdier, fx tre

$$a_n = n \pmod{3} \quad 1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots$$

eller rigtig mange ( $k \gg 1$ , i grafen med  $k = 10$ )

$$a_n = \sin\left(\frac{2\pi}{k}n\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi}{k}\right), \sin\left(\frac{2 * 2\pi}{k}\right), \sin\left(\frac{3 * 2\pi}{k}\right), \dots$$



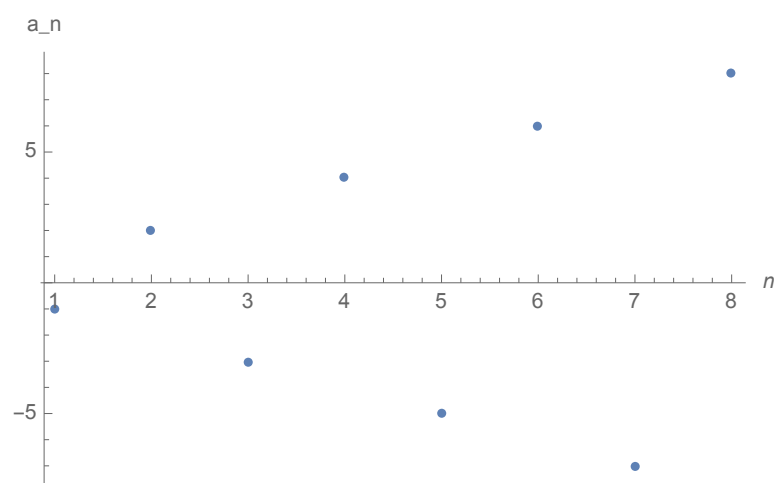


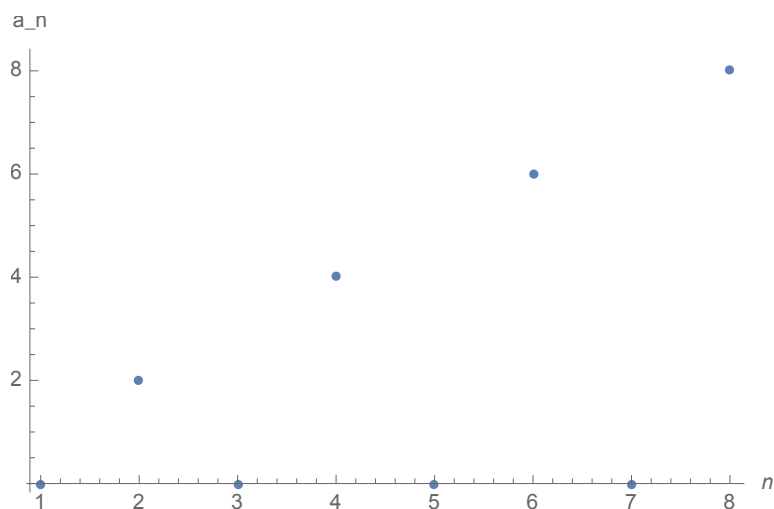
*Følger kan også hoppe mellem store positive og negative værdier*

$$a_n = (-1)^n n \quad -1, 2, -3, 4, \dots$$

*eller mellem en konstant følge og en følge af tal som bliver større og større:*

$$a_n = \max\{(-1)^n n, 0\} \quad 0, 2, 0, 4, 0, 6, \dots$$





**Eksempel 1.13** (Implicit definerede følger). *Udover at definere en følge ved hjælp af en given funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$*

$$a_n := f(n),$$

*så kan følger også være givet via rekursion. F.eks. bliver*

$$a_0 = 0, a_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$$

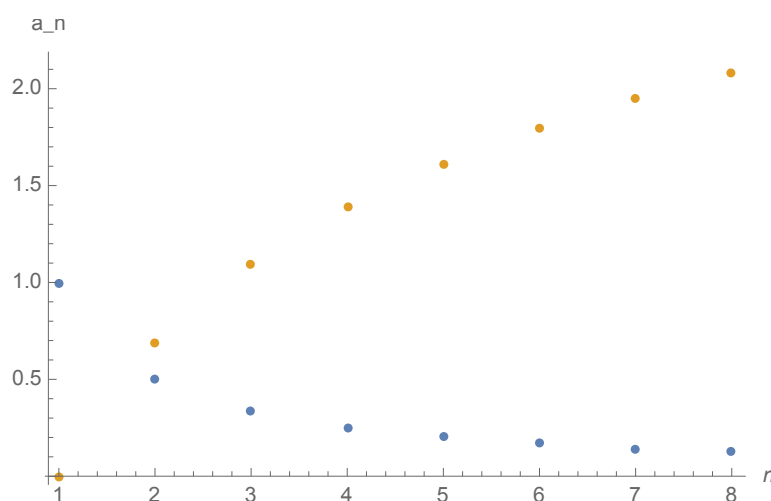
*til følgen af Fibonacci-tal*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

*En talfølge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  kunne også være defineret ved at lade  $a_n$  være den positive løsning af ligningen  $x^n = 2$ :*

$$2, 2^{1/2}, 2^{1/3}, \dots$$

*Eller talfølgen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  kunne være defineret som en funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  af en givet talfølge  $\{b_n\}$ :  $a_n := f(b_n)$ . Hvis  $f(x) = -\log x$ , bliver  $b_n = \frac{1}{n}$  til  $a_n = \log n$  (se følgende graf).*



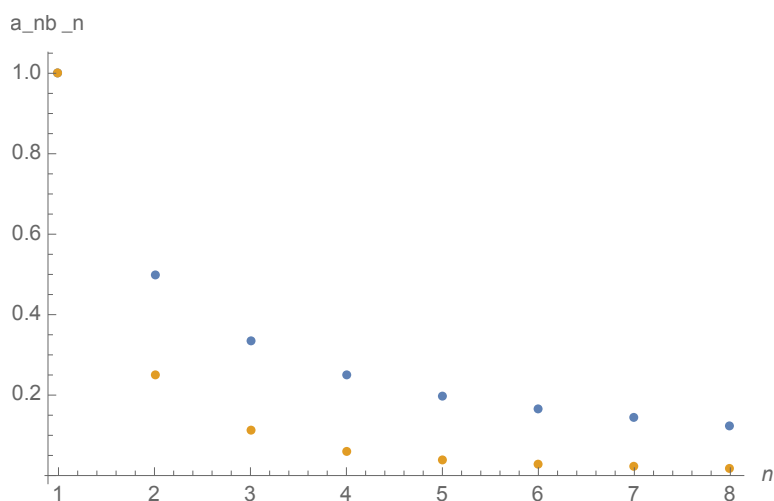
**Eksempel 1.14.** Ofte ser vi ikke på enkelte eksplicitte talfølger, men i stedet på en mængde af følger med en særlig egenskab. Derefter vil vi gerne aflede et nyt udsagn, som gælder for alle talfølger i mængden. F.eks. kan vi se på mængden af følger, der er positive,  $a_n \geq 0$ , og aftagende,  $a_n \geq a_{n+1}$ :

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$

For alle sådanne følger betragter vi talfølgen  $b_n := a_n^2$ . Udsagnet, vi vil vise er, at  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  også er positiv og aftagende. Her kommer beviset:

$$b_{n+1} = a_{n+1}^2 = a_{n+1} * a_{n+1} \leq a_n a_{n+1} = b_n.$$

Vi udtrykte  $n+1$ -leddet  $b_{n+1}$ , ved hjælp af definitionen, så brugte vi monotoniciteten af  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  og satte resultatet sammen til  $b_n$ . Grafen viser eksemplet med  $a_n = \frac{1}{n}$ :



Og så er der selvfølgelig de komplekse talfølger:

**Definition 1.15** (Kompleks talfølge). *Lad  $z_n \in \mathbb{C}$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ . Vi siger, at*

$$z_1, z_2, z_3, \dots$$

eller  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er en kompleks talfølge.

Bemærk, at en reel talfølge også er en kompleks talfølge, da  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

**Eksempel 1.16** (Real- og imaginærdel). *Når man betragter en følge af komplekse tal, er det ofte oplagt først at se på de relaterede reelle talfølger af realdelene  $\{\operatorname{Re}(z_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , imaginærdelene  $\{\operatorname{Im}(z_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ . På den måde ses den komplekse talfølge som to reelle talfølger, som skal analyseres samtidigt. Følgen*

$$z_n = \frac{1 + in}{n} \quad 1 + i, \frac{1 + i2}{2}, \frac{1 + i3}{3}, \dots$$

har

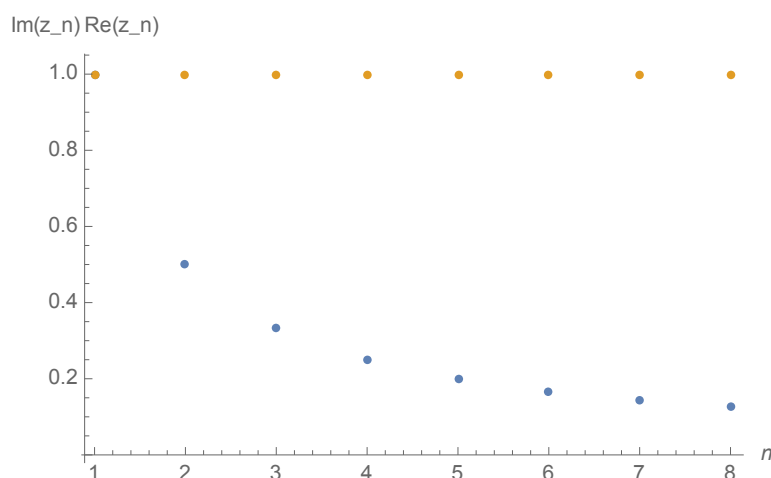
$$\operatorname{Re}(z_n) = \frac{1}{n} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

og

$$\operatorname{Im}(z_n) = \frac{n}{n} = 1 \quad 1, 1, 1, \dots$$

og går tydeligvis mod  $0 + i \cdot 1 = i$ .

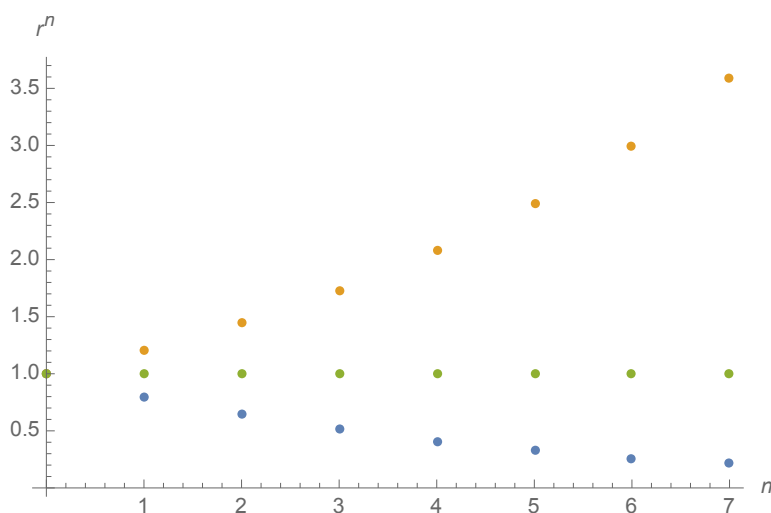




**Eksempel 1.17** (Polarform). I andre tilfælde er det godt at se på den reelle talfølge af absolutværdierne  $\{|z_n|\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , da deres konvergens eller divergens ofte giver en god indikation af, hvordan den komplekse talfølge opfører sig. Det er især tilfældet, hvis talfølgen har en multiplikativ struktur, f.eks

$$z_n := z^n \quad 1, z, z^2, z^3, \dots,$$

for et  $z \in \mathbb{C}$  med  $z \neq 0$ . Skriver man  $z$  om på polarformen  $z = re^{i\phi}$ , så bliver  $|z_n| = r^n$ . Grafen viser tilfældet med  $r = 0.8, 1, 1.2$ .

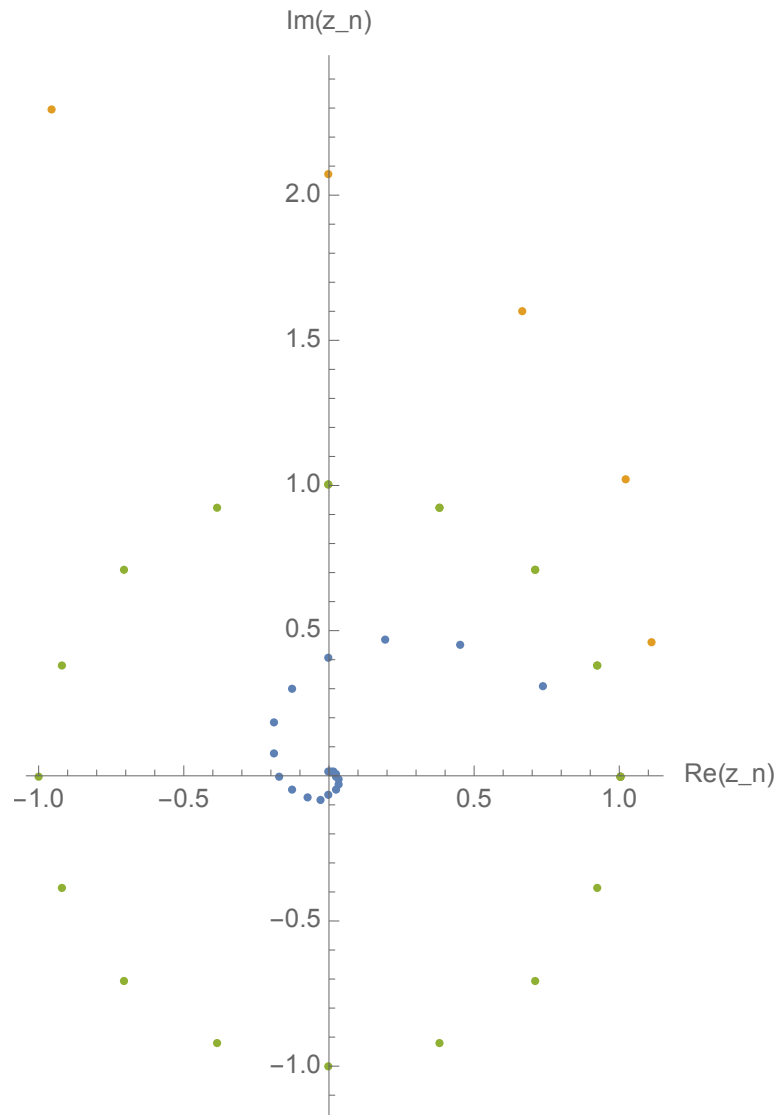


Hvis  $r < 1$ , går talfølgen  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (i en spiral) mod nul uanset  $\phi$ , hvorimod den spirallerer udad, hvis  $r > 1$ . Hvis  $r = 1$ , så forbliver tallene på

cirklen med radius 1. Som eksempler lad os betragte  $\phi = \pi/8$ , hvor

$$z_n = z^n = r^n e^{i \frac{n\pi}{8}} \quad 1, r e^{i \frac{\pi}{8}}, r^2 e^{i \frac{2\pi}{8}}, r^3 e^{i \frac{3\pi}{8}}, \dots$$

Graferne viser tilfældene  $r = 0.8, 1, 1.2$



**Fortætningspunkt** Som vi har set i eksemplerne har talfølger det karakteristiskum, at der kan findes ingen, én eller flere værdier, som en følge ofte kommer tæt på. Sådanne værdier kalder vi fortætningspunkter.

**Definition 1.18.** Lad  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en reel (eller kompleks) talfølge.  $a \in \mathbb{R}$

(eller  $a \in \mathbb{C}$ ) er et fortætningspunkt for  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , hvis der for alle  $\epsilon > 0$  findes uendeligt mange  $n \in \mathbb{N}$  med  $|a_n - a| < \epsilon$ .

For at vise, at  $a$  ikke er et fortætningspunkt, skal der gælde at der findes et  $\epsilon > 0$  sådan at  $|a_n - a| < \epsilon$  gælder kun for endelig mange  $n$ .

**Eksempel 1.19** (Et fortætningspunkt). Den reelle talfølge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  givet ved

$$a_n = \frac{1}{n} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

har  $a = 0$  som fortætningspunkt. For at kunne se dette, bemærker vi, at for et givet  $\epsilon > 0$  og for alle naturlige tal  $n$ , som opfylder  $n > \frac{1}{\epsilon}$  (det er uendeligt mange værdier af  $n$ ) gælder det, at

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

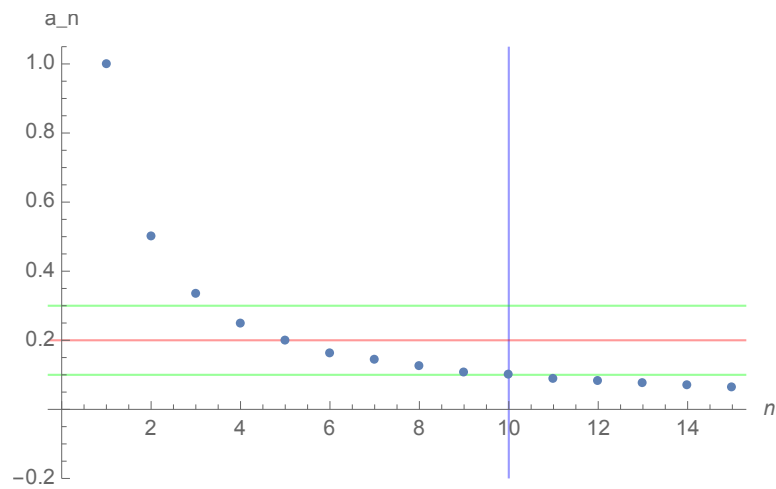
Følgen har ikke andre fortætningspunkter. For at vise dette, lad  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  være vilkårlig, og lad  $\epsilon = \frac{|a|}{2}$ . For alle naturlige tal  $n$ , som opfylder  $n \geq \frac{2}{|a|}$ , finder vi:

$$|a_n - a| \geq |a| - |a_n| = |a| - \frac{1}{n} \geq |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}.$$

Vi brugte trekantsuligheden i den første ulighed og  $\frac{1}{n} \leq \frac{|a|}{2} = \epsilon$  i den anden. Det betyder, at

$$|a_n - a| < \epsilon$$

ikke kan gælde for andre  $n$  end  $n = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{2}{|a|} \rfloor$  ( $\lfloor x \rfloor$  betegner det største heltal mindre end eller lig med  $x$ ). Vi har derfor fundet et  $\epsilon > 0$  (lig med  $\frac{|a|}{2}$ ), sådan at der kun findes endeligt mange led i følgen, som ligger i " $\epsilon$ -omgaven" af  $a$ . Det betyder, at  $a$  ikke kan være et fortætningspunkt for følgen. I grafen er  $a = \frac{1}{5}$  indikeret med den røde streg.  $a \pm \epsilon$  er i grøn. Alle værdier  $n \geq \lfloor \frac{2}{|a|} \rfloor = 10$  har  $a_n$ , som er mindst  $\epsilon$  langt væk fra  $a$ .



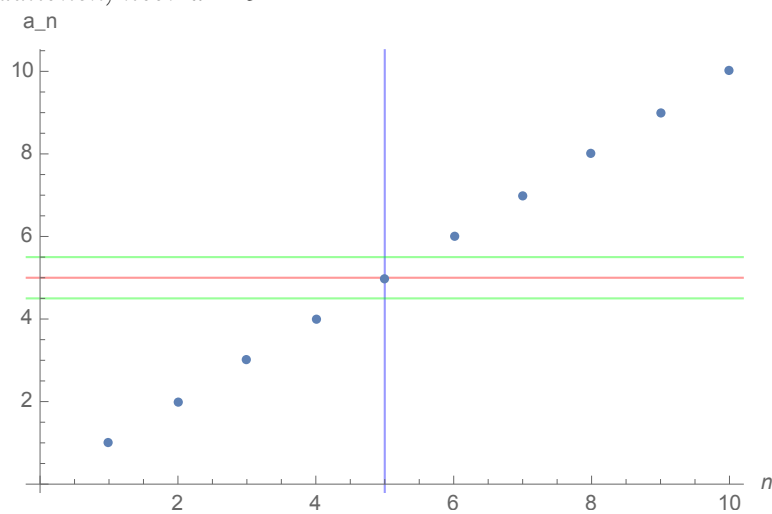
**Eksempel 1.20** (Nul fortætningspunkter). Lad den reelle talfølge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være givet ved

$$a_n = n \quad 1, 2, 3, \dots$$

Følgen har ikke nogen positive fortætningspunkter, da for alle  $a \geq 0.5$ , og for et specifikt  $\epsilon$ , nemlig  $\epsilon = 0.5$ ,

$$|a_n - a| = |n - a| < 0.5 \tag{1.1}$$

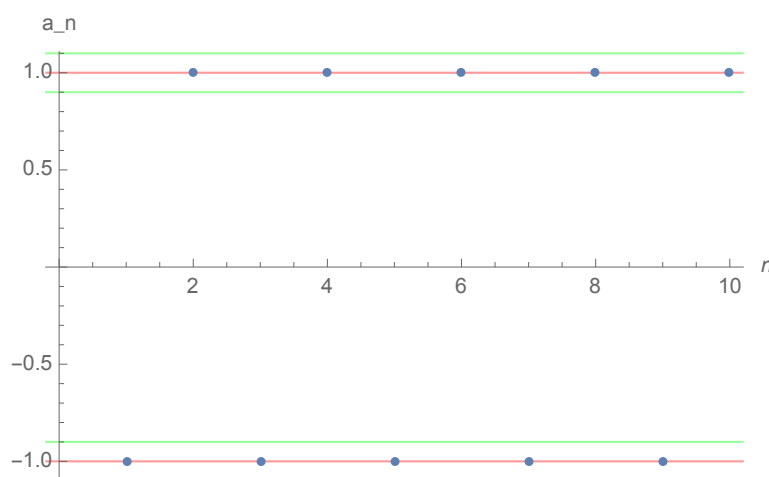
kun gælder for højst en værdi af  $n$ . Hvis  $a < 0.5$ , findes der slet ikke nogen værdier  $n$ , som opfylder (1.1), fordi  $a_n \geq 1$  for alle  $n$ . Grafen viser situationen, hvor  $a = 5$ .



**Eksempel 1.21** (To fortætningspunkter). Lad  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være givet ved

$$a_n = (-1)^n \quad -1, 1, -1, 1, \dots$$

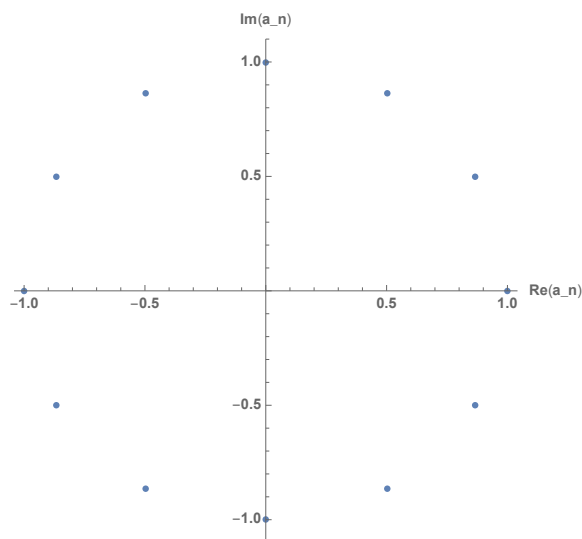
$a = 1$  er et fortætningspunkt, fordi  $a_n = 1$  for alle lige  $n$  (og der findes uendelig mange) og dermed  $|a_n - 1| = 0 < \epsilon$  for alle  $\epsilon > 0$ . På lignende vis ser man, at  $a = -1$  er et fortætningspunkt. Der findes ikke andre fortætningspunkter.



**Eksempel 1.22** (Mange fortætningspunkter). Følgen  $-1, 1, -1, 1, \dots$  har en elegant generalisering i det komplekse talplan. Lad  $t \in \mathbb{N}$ . Den komplekse talfølge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  givet ved

$$a_n = e^{-\frac{2\pi * n}{t}} \quad e^{-\frac{2\pi}{t}}, e^{-\frac{2\pi * 2}{t}}, \dots, e^{-\frac{2\pi t}{t}} = 1, e^{-\frac{2\pi}{t}}, \dots$$

er periodisk og gennemgår de  $t$  fortætningspunkter  $e^{-\frac{2\pi * m}{t}}$  ( $1 \leq m \leq t$ ) igen og igen. Det er også muligt at konstruere en følge med uendeligt mange fortætningspunkter. Grafen viser fortætningspunkterne for  $t = 12$ , som følgen løber igennem, ligesom en viser løber tallene igennem på en urskive.



**Konvergens** Vi har allerede bemærket, at talfølger sommetider *går mod en værdi*, hvis følgens led kommer tættere og tættere på værdien. Vi skal nu lave en formel definition af begrebet konvergens, som udtrykker dette og som er det mest centrale begreb i hele kurset.

**Definition 1.23** (Konvergens). *En reel (eller kompleks) talfølge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer mod  $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , hvis der for alle  $\epsilon > 0$  findes et  $N \in \mathbb{N}$ , således at det for alle  $n \geq N$  gælder, at*

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

*En følge, som konvergerer, kaldes for konvergent. I så fald skriver vi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

*Omvendt er det indforstået, at følgen konvergerer med grænseværdi  $a$ , hvis vi skriver  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . En følge, som ikke konvergerer, kaldes for divergent.*

Bemærk at  $N$  er et naturligt tal. Sommetider skriver vi  $N(\epsilon)$  for at tydeliggøre, at  $N$  er afhængig af  $\epsilon$ .

**Eksempel 1.24** (Konvergent). *Talfølgen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  givet ved  $a_n = \frac{1}{n}$  er konvergent mod  $a = 0$ : Givet et  $\epsilon > 0$ , vælger vi  $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$ , og finder for alle  $n \geq N$ :*

$$|a_n - a| = |a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil} \leq \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Se graf i Eksempel 1.19.

**Eksempel 1.25** (Divergent 1). Talfølgen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  givet ved  $a_n = n$  divergerer. Vi skal vise, at der for alle  $a \in \mathbb{R}$  findes et  $\epsilon > 0$ , sådan at der for alle  $N$  findes et  $n \geq N$ , sådan at  $|a_n - a| \geq \epsilon$ . Lad  $\epsilon = 1$ . Vælg  $n = \max\{N, \lceil a \rceil\} + 1$ . Så estimerer vi

$$|a - a_n| \geq a_n - a = n - a = \max\{N, \lceil a \rceil\} + 1 - a \geq \lceil a \rceil + 1 - a \geq 1.$$

Følgen kan dermed ikke være konvergent og er i så fald divergent per definition.

**Eksempel 1.26** (Divergent 2). Talfølgen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  givet ved  $a_n = (-1)^n$  divergerer. Vi skal vise, at der for alle  $a \in \mathbb{R}$  findes et  $\epsilon > 0$ , sådan at der for alle  $N$  findes et  $n \geq N$ , sådan at  $|a_n - a| \geq \epsilon$ .

Lad  $a$  være givet og  $\epsilon = \frac{1}{2}$ . For alle  $N$ , hvis  $|a_N - a| < \epsilon$ , lad  $n = N + 1$  og dermed

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |a_n - a_N + a_N - a| \\ &\geq |a_n - a_N| - |a_N - a| \\ &\geq |(-1)^{N+1} - (-1)^N| - |a_N - a| \\ &\geq 1 - \epsilon \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hvis  $|a_N - a| \geq \epsilon$ , lad  $n = N$  og dermed

$$|a_n - a| = |a_N - a| \geq \epsilon.$$

Bemærk, at følgen divergerer 'anderledes' end i det forrige eksempel.

Koncepterne grænseværdi og fortætningspunkt er tæt beslægtede, hvilket følgende lemma viser. Grunden til, at vi lagde så meget vægt på fortætningspunkter, er, at mængden af fortætningspunkter kan undersøges ved alle talfølger, hvorimod grænseværdien kun findes for de konvergente talfølger.

**Lemma 1.27** (Grænseværdi versus fortætningspunkt). Hvis en  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer mod  $a$ , så er  $a$  det entydige fortætningspunkt for talfølgen. Det medfører at konvergenspunktet er entydigt og notationen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  er veldefineret.

*Bevis.* Lad os først vise, at hvis  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , så er  $a$  et fortætningspunkt for talfølgen. Lad  $\epsilon > 0$  været givet. Ifølge antagelsen findes der et  $N$ , sådan at der for alle  $n \geq N$  (der er uendeligt mange!) gælder at  $|a_n - a| < \epsilon$ .  $a$  er dermed et fortætningspunkt for følgen.

Lad os nu vise, at der ikke findes andre fortætningspunkter for en følge med  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . For at gøre dette antager vi, at  $a' \neq a$  er et yderligere fortætningspunkt og viser, at dette fører til en modsigelse. Vælg  $\epsilon = \frac{1}{2}|a - a'| > 0$ . Så ligger der alle  $a_n$  med  $n \geq N$  i afstand  $\epsilon$  fra  $a$ . Ved konstruktion af  $\epsilon$  kan de ikke ligge i afstand strengt mindre end  $\epsilon$  fra  $a'$ :

$$|a_n - a'| = |a_n - a + a - a'| \geq |a - a'| - |a_n - a| \geq |a - a'| - \epsilon = 2\epsilon - \epsilon = \epsilon.$$

Vi har brugt trekantsuligheden i den første ulighed. Maksimalt kan  $|a_n - a'| < \epsilon$  derfor være sandt for alle  $n < N$ . Men dette tæller kun værdierne  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ . Det findes således færre end  $N$  (og specielt kun endelig mange) forskellige værdier af  $n$ .  $\square$

Desværre gælder det omvendte ikke, dvs. en følge med unikt fortætningspunkt er ikke nødvendigvis konvergent, som eksemplet  $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \dots$  viser.

Bemærk, at alle fortætningspunkter af en reel talfølge, betragtet som en kompleks talfølge, er reelle. Konvergenssegenskaber og grænseværdierne af reelle talfølger ændres derfor ikke, selvom de bliver betraget som komplekse talfølger.

**Regneregler for konvergente talfølger** Man kan undersøge konvergens af en lidt mere kompliceret talfølge ved at skrive den som sum og produkt af flere mindre komplicerede talfølger.

**Sætning 1.28** (Regneregler for konvergente følger). *Lad  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  og  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være konvergente følger med respektive grænseværdier  $a$  og  $b$ . Så gælder*

1. Følgen  $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er konvergent med grænseværdi  $a + b$ .
2. Følgen  $\{a_n - b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er konvergent med grænseværdi  $a - b$ .
3. Følgen  $\{a_n b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er konvergent med grænseværdi  $ab$ .



4. Hvis  $b, b_n \neq 0$ , så er følgen  $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent med grænseværdi  $\frac{a}{b}$ .

*Bevis.* Da  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  og  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer mod  $a$  og  $b$ , ved vi, at for alle  $\tilde{\epsilon} > 0$  findes et  $N_A(\tilde{\epsilon})$  og et  $N_B(\tilde{\epsilon})$  således at for alle  $n \geq \max\{N_A(\tilde{\epsilon}), N_B(\tilde{\epsilon})\}$  gælder, at  $|a_n - a| < \tilde{\epsilon}$  og  $|b_n - b| < \tilde{\epsilon}$ .

1. Antag et givent  $\epsilon > 0$  for at vise den første påstand. Trekantsuligheden medfører, at

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\tilde{\epsilon}.$$

Hvis vi sætter  $\tilde{\epsilon} := \frac{\epsilon}{2}$  og definerer  $N(\epsilon) := \max\{N_A(\frac{\epsilon}{2}), N_B(\frac{\epsilon}{2})\}$ , gælder for alle  $n \geq N(\epsilon)$ :

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \epsilon$$

Dvs.,  $a_n + b_n$  konvergerer mod  $a + b$ .

2. Udsagnet følger fra 1. og 3., hvilket vi først beviser.

3. Lad  $\epsilon > 0$  være givet. Ved hjælp af trekantsuligheden (to gange) finder vi

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \\ &= |a_n - a + a||b_n - b| + |a_n - a||b| \\ &\leq (|a_n - a| + |a|)|b_n - b| + |a_n - a||b| \\ &< (\tilde{\epsilon} + |a|)\tilde{\epsilon} + \tilde{\epsilon}|b|. \end{aligned}$$

Hvis vi nu sætter  $\tilde{\epsilon} \leq 1$ , bliver den højre side mindre end eller lig med  $\tilde{\epsilon}(|a| + |b| + 1)$ , hvilket er mindre end ethvert  $\epsilon$ , hvis vi sætter  $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{|a| + |b| + 1}$ .

Vi har derfor vist, at der for alle  $\epsilon > 0$  findes

$$N(\epsilon) := \max\left\{N_A\left(\frac{\epsilon}{|a| + |b| + 1}\right), N_B\left(\frac{\epsilon}{|a| + |b| + 1}\right)\right\}$$

med den egenskab, at der for alle  $n \geq N(\epsilon)$  gælder

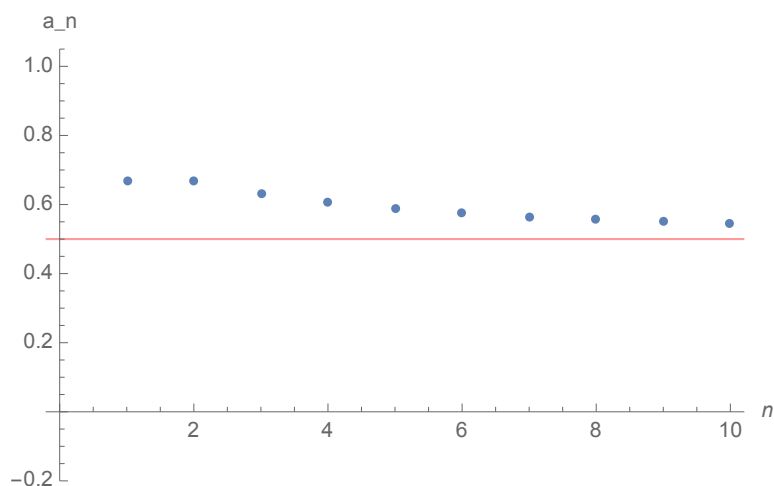
$$|a_n b_n - ab| < \epsilon.$$

Dvs,  $a_n b_n$  konvergerer mod  $ab$ .

4. Beviset ligner 3.

□

**Eksempel 1.29** (Regneregler). Vi skal undersøge  $a_n := \frac{1+1/n}{2+1/n^2}$ . Ved at definere de fire konvergente følger  $b_n = 1$ ,  $c_n = 1/n$ ,  $d_n = 1$  og  $f_n = 1/n^2$  med grænseværdierne  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $d = 2$ ,  $f = 0$ , ser vi ved hjælp af Sætning 1.28, at  $a_n = \frac{b_n+c_n}{d_n+f_n}$  konvergerer mod  $\frac{b+c}{d+f} = \frac{1}{2}$ .



**Eksempel 1.30** (Forberedelse til brug af regneregler). Det er tit vigtigt at bearbejde følgen, inden man bruger regnereglerne: Vi skal undersøge  $a_n := \frac{n+1}{2n+1/n}$ . Sætning 1.28 er ikke direkte brugbar, fordi tælleren og nævneren divergerer. Men hvis vi forkorter med  $n$ , ser vi, at  $a_n = \frac{1+1/n}{2+1/n^2}$ , og dermed er følgen den samme, som i forrige eksempel.

**Begrænsede talfølger** Vi har i Eksemplerne 1.25 og 1.26 set, at følger kan divergere på forskellige måder. Dette skal vi nu undersøge nærmere. Vi starter med begrebet *begrænset*.

**Definition 1.31.** En kompleks talfølge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  kaldes begrænset, hvis der findes et  $c \in \mathbb{R}$  med  $|a_n| \leq c$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lemma 1.32.** En konvergent talfølge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er altid begrænset.

*Bevis.* Lad  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en konvergent følge af reelle eller komplekse tal. Dvs. der findes et  $a$ , sådan at der for hvert  $\epsilon > 0$  findes et  $N(\epsilon)$ , således at for alle  $n \geq N(\epsilon)$ :  $|a_n - a| \leq \epsilon$ . Specielt gælder dette udsagn for  $\epsilon = 1$ . Alle  $n \geq N(1)$  opfylder derfor

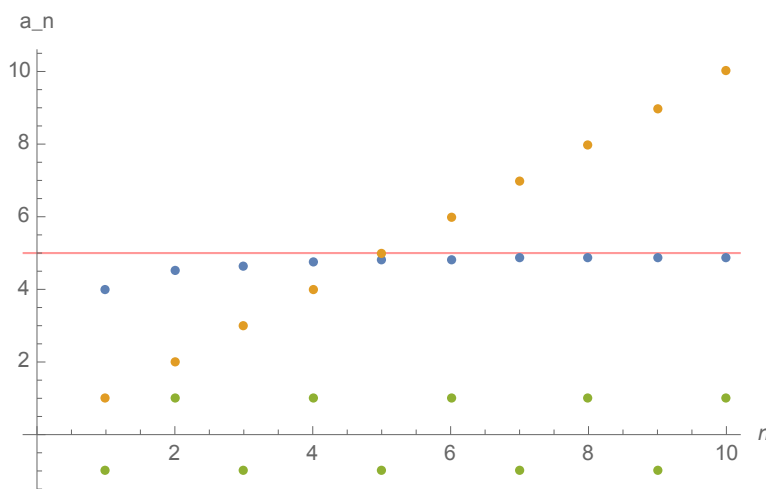
$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq |a| + 1.$$

Der findes kun endeligt mange værdier – nemlig dem i mængden  $\{a_n : n < N(1)\}$  – som potentielt har en større absolutværdi. Dermed er *alle*  $|a_n|$  begrænset ved  $c := \max\{|a| + 1, |a_1|, \dots, |a_{N(1)}|\}$ .  $\square$

**Eksempel 1.33.** *Hvorimod egenskaben konvergent medfører egenskaben begrænset er det omvendte ikke nødvendigvis rigtigt, som f.eks. ved talfølgen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  givet ved  $a_n = (-1)^n$ , eller ved  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  givet ved  $z_n = i^n$ .*

*Grafen viser den konvergente talfølge givet ved  $a_n = 5 - 1/n$  og dens græsenværdien samt den ubegrænsede følge givet ved  $a_n = n$  og den ikke-konvergente begrænsede talfølge givet ved  $a_n = (-1)^n$ .*

For bedre at kunne forstå konvergens og divergens, skal vi først se på de reelle talfølger, hvor vi har en total orden på talrummet, og senere komme tilbage til de komplekse talfølger.



**Divergens mod  $\pm\infty$**  Hvis vi kun ser på reelle talfølger, så kan vi udvide vores notation  $\lim a_n = a$  og skrive  $\lim a_n = \pm\infty$  for særlige divergente følger:

**Definition 1.34** (Divergens mod  $\pm\infty$ ). *Vi siger, at en reel talfølge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  divergerer mod uendelig, hvis der for alle  $c \in \mathbb{R}$  findes  $N \in \mathbb{N}$ , således at  $a_n \geq c$  for alle  $n \geq N$ . I så fald skriver vi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

*Vi siger, at en reel følge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  divergerer mod minus uendelig, hvis der for alle  $c \in \mathbb{R}$  findes et  $N \in \mathbb{N}$ , således at  $a_n \leq c$ , for alle  $n \geq N$ . I så fald skriver vi*

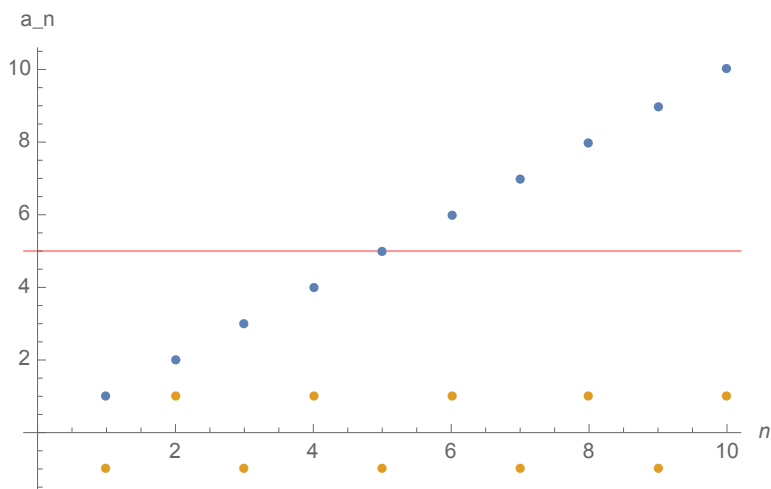
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Bemærk, at det er tilstrækkeligt at se på positive  $c \in \mathbb{R}$ , hvis man vil vise divergens mod uendelig, og at det er tilstrækkeligt at se på negative  $c \in \mathbb{R}$ , hvis man vil vise divergens mod minus uendelig.

**Eksempel 1.35.** *Den divergente følge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  givet ved  $a_n = n$  divergerer mod uendelig, fordi der for alle  $c \in \mathbb{R}$  findes et  $N$  (fx  $N := \lceil |c| \rceil$ ), således at der for alle  $n \geq N$  gælder, at*

$$a_n = n \geq N \geq c.$$

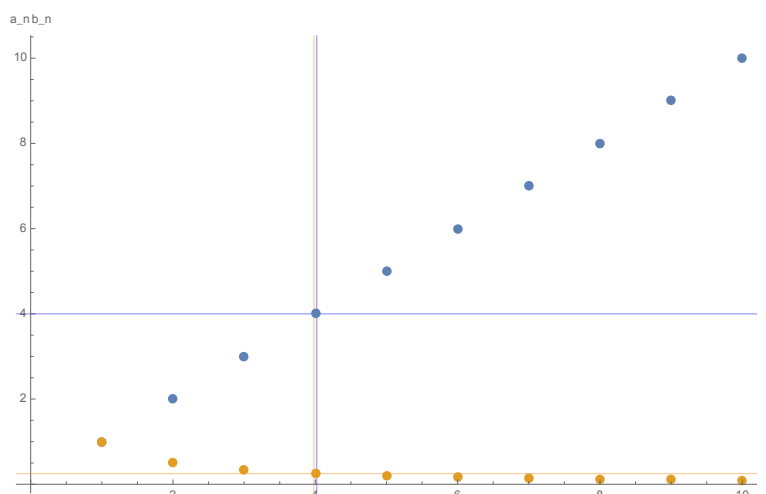
*Den divergente følge  $a_n = (-1)^n$  divergerer hverken mod uendelig eller minus uendelig, fordi for alle  $n$ :  $|a_n| = 1$ . Grafen viser begge følger og linien  $c = 5$ .*



**Eksempel 1.36.** Lad  $a_n := \frac{1}{b_n}$ , hvor  $b_n$  er en følge af strengt positive tal, som konvergerer mod nul. Der er indlysende, at  $a_n$  divergerer mod uendelig. Mere præcist: Lad  $c \in \mathbb{R}$  være givet. Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , findes der for alle  $\epsilon > 0$  et  $N$ , således at der for alle  $n \geq N$  gælder at  $b_n \leq \epsilon$ . Da  $b_n > 0$  gælder også  $\frac{1}{b_n} \geq \frac{1}{\epsilon}$ . Ved at sætte  $\epsilon := \frac{1}{|c|}$  ( $c \neq 0$ ), ser vi, at for alle  $n \geq N$

$$a_n = \frac{1}{b_n} \geq \frac{1}{\epsilon} = |c| \geq c.$$

Fordi  $c$  var arbitrær, divergerer talfølgen mod uendelig. Grafen viser følgen  $a_n = \frac{1}{n}$  sammen med den horisontale  $\epsilon = \frac{1}{4}$  linie og den vertikale  $N = 4$  linie i orange samt de tilsvarende grafer for  $b_n = n$   $c = 4$  og  $N = 4$  i blå.



Det er en god øvelse at udvide regnereglerne for konvergente følger til følger, der divergerer mod plus eller minus uendelig.

**Monotone reelle talfølger** Bemærk at vi ikke altid kan afgøre om følger konvergerer ved hjælp af regnereglerne, da det sommetider er svært at transformere følgen om til noget, der kan behandles med Sætning 1.28.

Der er andre gange, hvor vi ikke har den fulde information om talfølgen. Det kan være, fordi talfølgen er implicit defineret, eller fordi vi kun kender få af dens egenskaber. Vi skal nu undersøge dette nærmere.

**Definition 1.37** (Monoton). En reel talfølge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  kaldes monotont voksende, hvis

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots,$$

dvs. hvis  $a_{n+1} \geq a_n$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  kaldes monotont aftagende, hvis

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots,$$

dvs. hvis  $a_{n+1} \leq a_n$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ . Talfølgen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  kaldes monoton, hvis den enten er monotont voksende eller monotont aftagende. Hvis ulighedstegnene er strenge, kalder vi talfølgen strengt monoton.

**Eksempel 1.38** (Ubegrænset). Talfølgen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  med  $a_n = n$  opfylder  $a_{n+1} = n + 1 \geq n = a_n$  og er dermed monotont voksende. Den er ikke begrænset, fordi for alle  $c$  findes der et  $n$ , nemlig  $n = \lceil c \rceil + 1$ , sådan at  $a_n = \lceil c \rceil + 1 \geq c + 1 > c$ .

**Eksempel 1.39** (Monotont aftagende og begrænset).  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  med  $a_n = \frac{1}{n}$  er monotont aftagende, fordi  $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = a_n$ , og begrænset, fordi  $1 \geq a_n \geq 0$ , og dermed er  $|a_n| \leq 1$  for alle  $n$ .

**Eksempel 1.40** (Begrænset og ikke-monoton).  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  med  $a_n = (-1)^n$  er ikke monotont voksende, fordi der for lige  $n$  gælder, at  $a_{n+1} = -1 < 1 = a_n$ . Den er heller ikke monotont aftagende, fordi der for ulige  $n$  gælder, at  $a_{n+1} = 1 > -1 = a_n$ . Den er dog begrænset, da  $|a_n| = 1$  for alle  $n$ .

Den følgende sætning er den første vigtige sætning inden for talfølger og er central for den videre teori, der behandles i kurset.

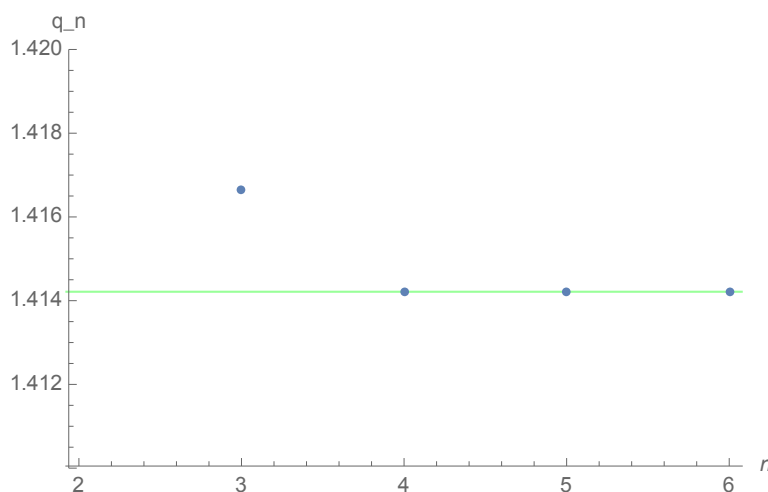
**Sætning 1.41.** *En monoton og begrænset reel talfølge er konvergent.*

I betragtning af de eksempler vi har set, virker sætningen måske trivielt. Beviset bruger dog supremumsegenskaben af de reelle tal, og udsagnet er derfor alt andet end trivielt.

*Bevis.* Lad følgen  $\{a_n\}$  være monotont voksende, og lad  $a := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ , hvilket er endeligt, da følgen er begrænset. Vi vil vise, at  $a_n$  er konvergent med grænseværdi  $a$ . Fra definitionen af  $a$  er  $a_n \leq a$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ . Fordi  $a$  er den mindste øvre grænse på følgen, eksisterer der for ethvert  $\epsilon > 0$  et  $N$  med egenskaben  $a_N > a - \epsilon$ . Men da  $a_n$  er monotont voksende, må  $a_n \geq a_N > a - \epsilon$  for alle  $n \geq N$ . Med andre ord er  $|a_n - a| < \epsilon$ , og følgen er konvergent med grænseværdi  $a$ .  $\square$

**Eksempel 1.42** (Rationelle talfølger). *Bemærk, at definitionen af konvergens er afhængig af talrummet, vi bruger. Betragt vi en talfølge af rationelle tal  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $q_n \in \mathbb{Q}$ , som konvergerer mod det irrationelle tal  $\sqrt{2}$ , så konvergerer talfølgen ikke mod et rationelt tal  $q \in \mathbb{Q}$ . Selvom talfølgen er begrænset og monoton og alle led er i  $\mathbb{Q}$ , vil følgen derfor ikke konvergere i  $\mathbb{Q}$ . Det vil derfor være mere præcist at formulere sætningen på følgende måde: "En monoton og begrænset reel talfølge er konvergent i  $\mathbb{R}$ ." Vores eksempel vil derfor være et modeksempel til udsagnet: "En monoton og begrænset rational talfølge er konvergent i  $\mathbb{Q}$ ."*

*Grafen viser de første led i den rationelle og monotone talfølge diskuteret i Sektion 1.1, som konvergerer mod  $\sqrt{2}$ .*



**Limes superior og limes inferior** Når der er tale om reelle talfølger, har vi en orden  $\leq$ , som vi kan benytte til at finde den asymptotisk mindste øvre grænse for talfølgen, dens limes superior eller  $\limsup$ . På lignende vis kan vi definere den mindste øvre grænse, limes inferior eller  $\liminf$ .

**Definition 1.43.** *Lad  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en reel talfølge.*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sup\{a_n : n \geq N\}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \inf\{a_n : n \geq N\}.$$

*Bemærk, at disse er veldefineret, fordi  $\sup\{a_n : n \geq N\}$  enten er uendelig for alle  $N$  eller monotont aftagende. Hvis den er monotont aftagende, kon-*

vergerer den eller divergerer mod minus uendelig. På lignende vis er  $\liminf$  veldefineret.

**Eksempel 1.44.** Fra vores tidligere eksempler er

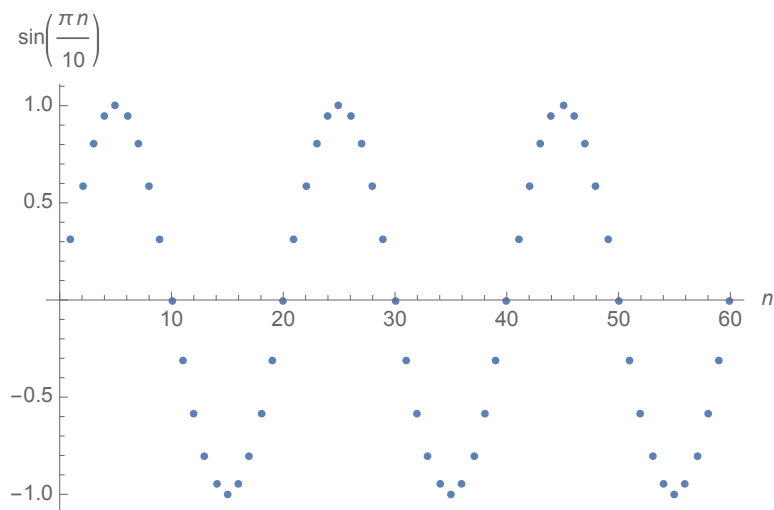
$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} &= 0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} n &= \infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} n \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n &= 1 > -1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n.\end{aligned}$$

Hvis vi har en kompleks talfølge, ser vi ofte på  $\limsup$  af leddenes absolutværdier

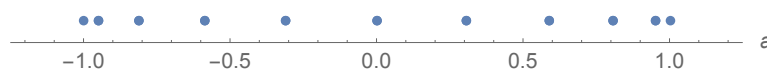
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |e^{2\pi i \frac{n}{t}}| = 1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} |e^{2\pi i \frac{n}{t}}|.$$

Bemærk, at  $\limsup$  og  $\liminf$  svarer til det største og mindste fortætningspunkt, hvis følgen er begrænset og kun har endeligt mange fortætningspunkter.

Graferne viser henholdsvis de første led i talfølgen  $a_n = \sin \frac{2\pi}{20n}$  og mængden af fortætningspunkterne. Bemærk, at  $\limsup$  og  $\liminf$  svarer til henholdsvis det største og mindste fortætningspunkt ( $\pm 1$ ).







## 1.4 Delfølger og Cauchys kriterium

Vi dykker nu dybere ned i temaet konvergens og vil vise, at en talfølges konvergens kan bestemmes direkte ud fra leddenes opførsel via *Cauchys kriterium*. Resultatet er både indlysende og kraftfuldt og vil være højdepunktet af den følgende analyse af talfølgers konvergens ud fra den måde, delfølgerne opfører sig på. Vi starter med at definere begrebet delfølge, som er tæt beslægtet med begrebet fortætningspunkt.

### Delfølge versus fortætningspunkt

**Definition 1.45** (Delfølge). *Lad  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en reel eller kompleks talfølge, og  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  være en strengt voksende følge af naturlige tal, dvs.  $n_1 < n_2 < \dots$ . Talfølgen  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  med  $b_k := a_{n_k}$  kaldes en delfølge af  $\{a_n\}$ .*

**Eksempel 1.46.** *Lad  $n_k := 2k$  være den strengt voksende følge af de lige naturlige tal:  $2, 4, 6, \dots$ . Lad*

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

være en given talfølge, og lad følgen  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være givet ved  $b_k := a_{n_k}$ . Dette er delfølgen af  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , som består af de elementer af  $a_n$  med lige indeks  $n = 2k$ , dvs. hvert andet led i følgen:

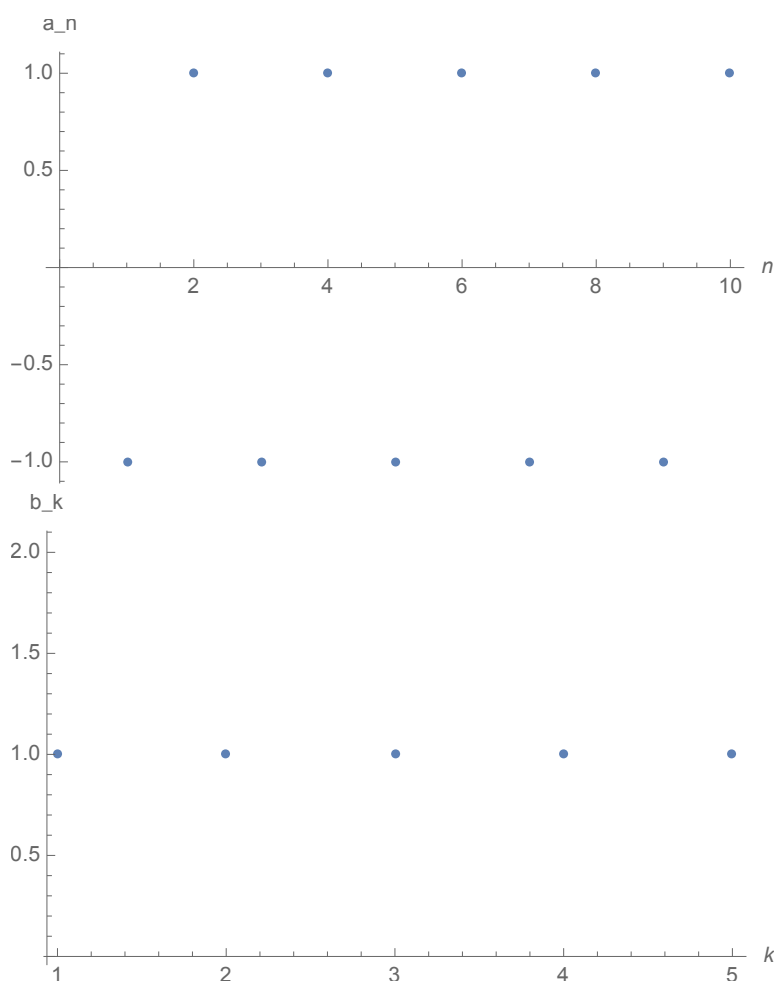
$$\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}} \quad b_1 = a_2, b_2 = a_4, b_3 = a_6, \dots$$

*Bemærk, at en delfølge altid består af uendeligt mange elementer. En delfølge af en konvergent følge er altid konvergent, men en ikke-konvergent følge kan sommetider have en konvergent delfølge, f.eks. er delfølgen af den divergente følge*

$$a_n = (-1)^n \quad -1, 1, -1, 1, \dots$$

af leddene med lige indeks  $n_k = 2k$  den konstante (og specielt konvergente) følge

$$b_k = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad 1, 1, 1, \dots$$



Det følgende lemma viser, at begreberne delfølge og fortætningspunkt er tæt forbundne.

**Lemma 1.47.** *Lad  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en reel eller kompleks talfølge.  $a \in \mathbb{R}$  (eller  $a \in \mathbb{C}$ ) er et fortætningspunkt for talfølgen, hvis og kun hvis talfølgen har en konvergent delfølge med grænseværdi  $a$ .*

*Bevis.* "⇐" Lad  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  være en konvergent delfølge af  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  med grænseværdi  $a$ , dvs  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = a$ . Specielt er  $a$  et fortætningspunkt for  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Dermed er  $a$  også et fortætningspunkt for  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

"⇒" Lad  $a$  være et fortætningspunkt for  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Dvs. for alle  $\epsilon > 0$  eksisterer der uendelig mange værdier  $n$  med

$$|a_n - a| < \epsilon. \quad (1.2)$$

Vi vil nu se på en følge af mindre og mindre værdier for  $\epsilon$  og hver gang vælge et nyt led som opfylder (1.2). Mere præcist, lad  $n_k$  være indekset på det første led i talfølgen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , som opfylder (1.2) for  $\epsilon = 1/k$ , men (hvis  $k > 1$ ) som også er strengt større end  $n_{k-1}$ . Bemærk, at det altid er muligt at finde sådan et  $n_k$ , fordi der er uendelig mange  $n$  som opfylder (1.2). De valgte elementer danner en talfølge  $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , som konvergerer mod  $a$ .  $\square$

**Eksempel 1.48.** Lad  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være den reelle talfølge givet ved  $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ . I decimalapproximation ser følgen sådan ud

$$\begin{aligned} & -2, 1.70\dots, -1.57\dots, 1.5, -1.44\dots, 1.40\dots, -1.37\dots, 1.35\dots, \\ & -1.33\dots, 1.31\dots, -1.30\dots, 1.28\dots, -1.27\dots, 1.26\dots, -1.25\dots, 1.25, \dots \end{aligned}$$

Følger vi konstruktionen fra beviset for Lemma 1.47 med fortætningspunktet  $a = 1$  finder vi

$$\begin{aligned} n_1 &= 6 : |a_6 - 1| = \frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{1}{2} \\ n_2 &= 10 : |a_{10} - 1| < \frac{1}{3} \\ n_3 &= 18 : |a_{18} - 1| = \frac{1}{\sqrt{18}} < \frac{1}{4} \\ & \vdots \end{aligned}$$

med leddene

$$a_6, a_{10}, a_{18}, \dots, \quad 1.4, 1.31\dots, \dots$$

**Lemma 1.49.** Hvis  $\{a_n\}$  konvergerer med en grænseværdi  $a$ , så konvergerer enhver delfølge med den samme grænseværdi.

*Bevis.* Lad  $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  være en delfølge af  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . At  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer mod  $a$  betyder, at der for alle  $\epsilon > 0$ , findes et  $N$ , således at: for alle  $n \geq N$  gælder

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

eller specielt

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon$$

for alle  $n_k \geq N$ . Dvs., der findes et  $K$ , således at  $n_K \geq N$  og dermed

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon$$

for alle  $k \geq K$ . Vi konkluderer, at delfølgen konvergerer mod  $a$ .  $\square$

**Bolzano-Weierstrass Sætning** At en monoton og begrænset, reel talfølge altid er konvergent, har været vores første vigtige resultat om talfølger (Sætning 1.41). Det har givet os en håndterbar klasse af talfølger, som vi nu skal bruge til at undersøge konvergens af generelle talfølger. Vi starter med at finde en monoton delfølge i enhver reel talfølge. Vi bruger dette til at vise, at hver begrænset talfølge har en konvergent delfølge, det berømte resultat fra Bolzano-Weierstrass.

**Sætning 1.50.** *Enhver reel talfølge har en monoton delfølge.*

*Bevis.* Et led  $x_n$  i følgen, som opfylder  $x_n \geq x_k$  for alle  $k \geq n$  kaldes en *spids*. Vi analyserer nu to tilfælde hver for sig: Enten har følgen uendeligt mange spidser eller kun endeligt mange.

- Hvis der er uendeligt mange, så er følgen af spidserne  $x_{n_k}$  i sig selv en monotont aftagende delfølge, da der for hver spids  $x_{n_k}$  gælder, at for alle  $n \geq n_k$ :  $x_n \leq x_{n_k}$  og dermed også for  $n = n_{k+1}$ :  $x_{n_{k+1}} \leq x_{n_k}$ .
- Hvis der kun er endelig mange spidser, lader vi  $x_{n_1-1}$  være den sidste spids. Fordi  $x_{n_1}$  ikke er en spids, må der findes et senere led  $x_{n_2}$  ( $n_2 > n_1$ ) med  $x_{n_2} > x_{n_1}$ . Men  $x_{n_2}$  kan heller ikke være en spids, så vi kan finde  $n_3$  med  $x_{n_3} > x_{n_2}$ . På den måde konstruerer vi en monotont voksende delfølge  $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \dots$

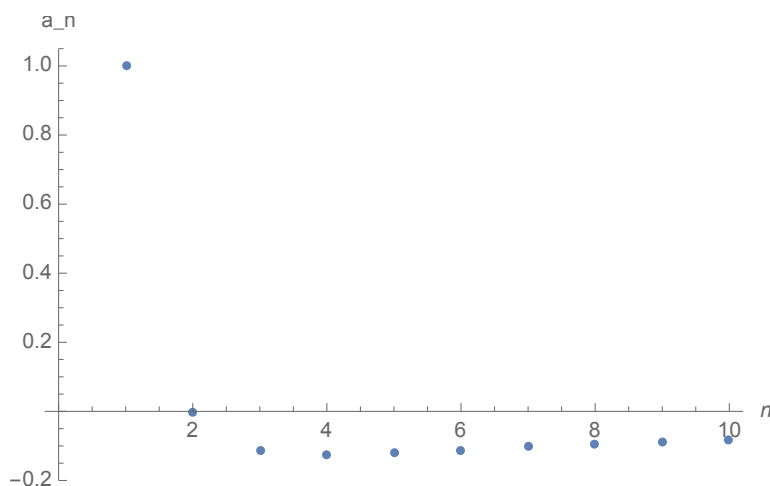
□

**Eksempel 1.51.**  $x_n = \frac{1}{n}$ . Lad  $n$  være vilkårlig. Der gælder, at  $x_n \geq x_k$  for alle  $k \geq n$ , og derfor er  $x_n$  en spids. Fordi  $n$  var vilkårlig, så er alle følgeleddene spidser (specielt er der uendeligt mange), og vi har fundet en monoton delfølge (nemlig hele følgen).

Lad nu  $x_n = (-1)^n$ . Lad  $n$  være lige (der er uendelig mange lige tal). I så fald gælder  $x_n = 1$ , og dermed er  $x_n \geq x_k$  for alle  $k \geq n$ . Delfølgen  $b_m$  med  $b_m = a_{2m} = 1$  er dermed en monoton delfølge af  $a_n$ .

$$x_n = \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} \quad 1, 0, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{25}, -\frac{1}{9}, -\frac{4}{49}, \dots, \rightarrow 0$$

Spidserne er de første to elementer  $x_1 = 1, x_2 = 0$ . Da  $y_1 := x_3 = -\frac{1}{8}$  ikke er en spids (følgen konvergerer til 0), finder vi et element  $y_2 := x_6 \geq x_3 = y_1$ . Men  $x_6$  er igen ingen spids, da  $y_3 := x_7$  er større...



Sammensættes alle ingredienserne vises at:

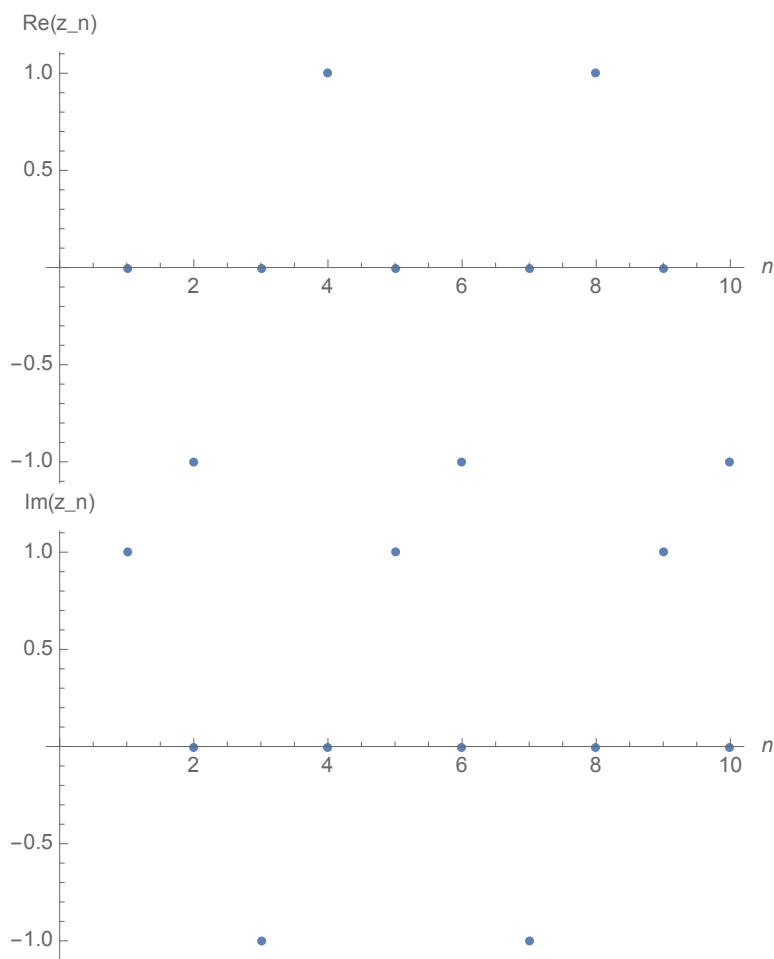
**Sætning 1.52** (Bolzano-Weierstrass (reel)). *Enhver begrænset reel talfølge har en konvergent delfølge.*

*Bevis.* Ifølge Sætning 1.50 har følgen en monoton delfølge. Fordi delfølgen også er begrænset, er den konvergent ifølge Sætning 1.41.  $\square$

**Sætning 1.53** (Bolzano-Weierstrass (kompleks)). *Enhver begrænset kompleks talfølge har en konvergent delfølge.*

*Bevis.* Lad  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en begrænset kompleks talfølge. Lad os se på realdelen  $a_n = \operatorname{Re}(z_n)$ . Ifølge Sætning 1.52 har  $a_n$  en konvergent delfølge  $a'_k := a_{n_k}$ . Lad os nu se på de tilsvarende imaginærdele  $b'_k := b_{n_k}$ , hvor  $b_n = \operatorname{Im}(z_n)$ . Ifølge Sætning 1.52 har  $\{b'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  også en konvergent delfølge  $b_{k_m}$ . Følgen  $\{z_{n_{k_m}}\}_{m \in \mathbb{N}}$  er en konvergent delfølge af  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , fordi følgen af imaginærdele er lig med den konvergente følge  $\{b_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ , og fordi følgen af realdelene  $\{a_{n_{k_m}}\}_{m \in \mathbb{N}}$  er en delfølge af den konvergente følge  $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  og dermed konvergent ifølge Lemma 1.49.  $\square$

**Eksempel 1.54.**  $z_n = i^n$   $\operatorname{Re}(z_n) = 0$  for ulige  $n$ ,  $\operatorname{Re}(z_n) = (-1)^{n/2}$  for lige  $n$ . Vælg de ulige  $n$ .  $\operatorname{Im}(z_n) = (-1)^{(n-1)/2}$  for ulige  $n$ ,  $\operatorname{Im}(z_n) = 0$  for lige  $n$ . Blandt de ulige, vælg  $n$  med  $(n-1)/2$  lige. Dvs. for  $n_k = 4k+1$  er  $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} = 1$  en konvergent delfølge af  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .



**Cauchys kriterium** Vi starter med at introducere konceptet Cauchy-følge.

**Definition 1.55.** En følge  $\{x_n\}$  er en Cauchy-følge, hvis  $\forall \epsilon > 0, \exists N$ , således at der  $\forall n, m \geq N$  gælder

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Hvis en talfølge er en Cauchy-følge, siger vi ofte, at talfølgen er Cauchy.

**Eksempel 1.56.** Lad  $x_n = \frac{1}{n}$ , da er  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy, fordi der for alle  $\epsilon > 0$  findes et  $N$  (f.eks.  $N = \lceil \frac{2}{\epsilon} \rceil$ ), sådan at for alle  $m, n \geq N$   $|x_n - x_m| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \leq |x_n| + |x_m| \leq \frac{2}{N} \leq \frac{2}{\lceil \frac{2}{\epsilon} \rceil} \leq \epsilon$ .

**Eksempel 1.57.** Lad  $x_n = (-1)^n$ , da er  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ikke Cauchy, fordi der for  $\epsilon = 1$ , og for alle  $N$  findes der  $n, m \geq N$  ( $N = m$  og  $n = N + 1$ ), sådan

at  $|x_n - x_m| = 1$ . Dermed er  $|x_n - x_m|$  ikke mindre end  $\epsilon$ , og følgen er ikke Cauchy.

**Eksempel 1.58.** Lad  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en rational talfølge, som konvergerer mod  $\sqrt{2}$ , da er  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy, fordi der for alle  $\epsilon > 0$  eksisterer et  $N$ , sådan at

$$|x_n - x_m| = |x_n - \sqrt{2} + \sqrt{2} - x_m| \leq |x_n - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - x_m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

for alle  $n, m \geq N$ . Bemærk, at talfølgen ikke er konvergent i  $\mathbb{Q}$ , da  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Det er oplagt, at konvergente følger er Cauchy, da afstanden af leddene (f.eks.  $x_n$  og  $x_m$ ) fra grænseværdien  $x$  bliver mindre for større  $m, n$ . Med trekantsuligheden bliver afstanden mellem  $x_n$  og  $x_m$  også mindre, og vi finder:

**Lemma 1.59.** En konvergent følge er en Cauchy-følge.

*Bevis.* Lad  $\epsilon > 0$  være givet, og lad  $x$  være grænseværdien af  $\{x_n\}$ . Da  $\{x_n\}$  konvergerer mod  $x$ , findes der et  $N$ , således at der  $\forall n \geq N$  gælder

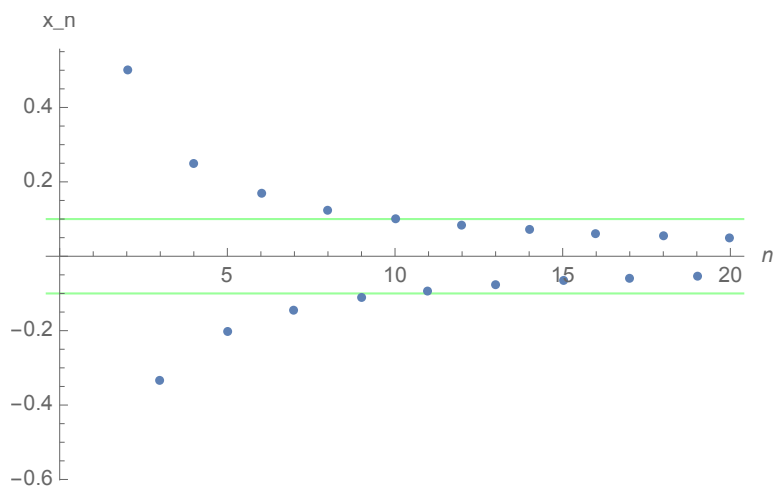
$$|x_n - x| < \epsilon/2.$$

Ved hjælp af trekantsuligheden finder vi

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \epsilon,$$

hvilket betyder, at  $\{x_n\}$  er en Cauchy-følge. □

**Eksempel 1.60.** Grafen viser den nulkonvergente talfølge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , hvor  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , og  $\epsilon = 0.2$ . Når følgeleddene har en afstand på mindre end 0.1 fra grænseværdien, ligger de mellem de to grønne linier, dvs. de har en afstand på maksimalt 0.2.



Det er mere overraskende, at det omvendte også gælder. Vi skal forberede dette resultat med to lemmaer.

**Lemma 1.61.** *En Cauchy-følge er begrænset.*

*Bevis.* Ifølge definitionen for Cauchy-følger gælder, at  $\forall \epsilon > 0, \exists N$ , således at  $\forall n, m \geq N$  gælder

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Vi betragter specialtilfældet,  $\epsilon = 1$  og  $m = N$ . Vi har nu, at for alle  $n \geq N$ :

$$|x_n - x_N| < 1.$$

Det betyder, at

$$x_N - 1 \leq x_n \leq x_N + 1,$$

hvilket viser, at følgen er begrænset.  $\square$

Det næste lemma siger, at en Cauchy-følge klammer sig til en delfølge. Hvis den konvergerer mod  $x$ , så konvergerer Cauchy-følgen mod den samme værdi.

**Lemma 1.62.** *Hvis en Cauchy-følge har en konvergent delfølge med grænseværdi  $x$ , så konvergerer Cauchy-følgen og har grænseværdi  $x$ .*

*Bevis.* Lad  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være Cauchy-følgen. Lad  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  være dens konvergente delfølge, som konvergerer mod  $x$ . Vi skal vise, at  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer mod  $x$ . Vi antager et givent  $\epsilon > 0$ .



- Da  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergerer mod  $x$  findes et  $K$ , således at der  $\forall k \geq K$  gælder

$$|x_{n_k} - x| < \epsilon/2.$$

- Da  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er en Cauchy-følge, findes et  $M$ , således at der  $\forall m, n \geq M$  gælder

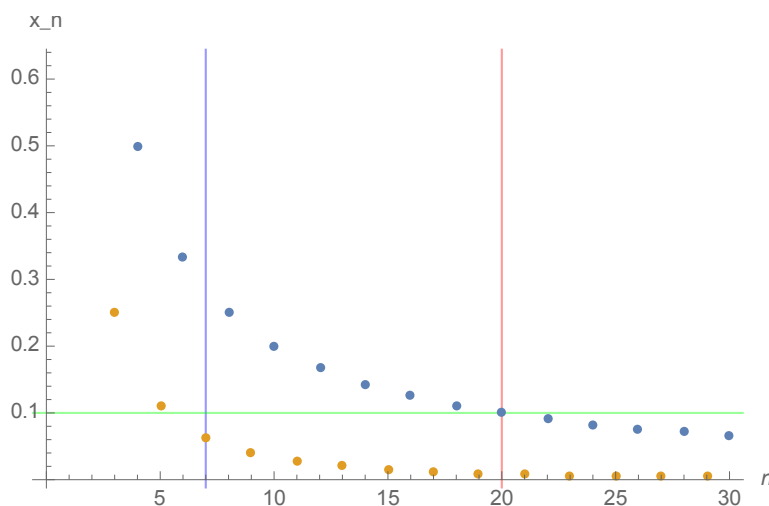
$$|x_m - x_n| < \epsilon/2.$$

For  $N := \max\{M, n_K\}$  finder vi et  $k$  med  $n_k \geq N$ . Derved gælder for alle  $n \geq N$ :

$$|x - x_n| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Det viser, at  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer med grænseværdi  $x$ .  $\square$

**Eksempel 1.63.** Grafen viser Cauchy-følgen  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  givet ved  $x_{2k} = 1/k$  og  $x_{2k-1} = 1/k^2$ . Værdierne fra delfølgen  $\{x_{2k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$  er farvet med orange. For  $\epsilon = 0.1$  (grøn) falder delfølgen under  $\epsilon$  for  $k \geq K = 3$ , da  $x_{2 \cdot 4 - 1} = x_7 = 1/4^2 < 0.1$ . For  $M = 20$  er følgen Cauchy med dette  $\epsilon$ . Det mindste  $n_k$ , som opfylder betingelserne, er  $n_k = 21$ .



Vi er nu klar til at bevise vores hovedsætning.

**Sætning 1.64** (Cauchys kriterium). *En reel (kompleks) talfølge er konvergent i  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ , hvis og kun hvis den er Cauchy.*

*Bevis.* " $\Rightarrow$ ": Lemma 1.59 viser, at en konvergent følge er en Cauchy-følge.  
" $\Leftarrow$ ": En Cauchy-følge er ifølge Lemma 1.61 begrænset. Den har derfor en konvergent delfølge (Sætning 1.53 (Bolzano-Weierstrass)). Vi kan nu bruge Lemma 1.62 til at se, at selve Cauchy-følgen konvergerer.  $\square$

Det er vigtigt at fastslå, at Cauchys kriterium afhænger af talrummet, vi undersøger konvergens i. Udsagnet "En rationel talfølge er konvergent i  $\mathbb{Q}$ , hvis den er Cauchy" er nemlig forkert. Vi gav et modeksempel i vores diskussion af de reelle tal, hvor vi konstruerede en rationel følge af tal  $\{x_n\}$ , som det er nemt at se, er Cauchy, men som ikke konvergerer mod noget tal i  $\mathbb{Q}$ , da den konvergerer mod  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Når vi prøver at finde ud af, hvor i beviset af Sætning 1.64 egenskaber ved de reelle tal er krybet ind, ser vi, at vi benyttede Bolzano-Weierstrass sætningen, som bruger Sætningen 1.41 (monoton & begrænset  $\Rightarrow$  konvergent), som bruger supremumsegenskaben. Dermed er vores bevis af Cauchys kriterium baseret på Dedekind-fuldstændighed af de reelle tal.

Det virker måske mere naturligt at kalde en mængde med en afstandsfunktion "fuldstændig", hvis enhver følge af elementer i mængden, som kommer tættere og tættere på hinanden (dvs. en Cauchy-følge), er konvergent. Det giver anledning til at betragte konvergens og Cauchy-følger i mere generelle metriske rum og fører os til en ny definition af fuldstændighed, Cauchy-fuldstændighed, som vi vil se på senere i kurset, når vi betragter metriske rum.

## Kapitel 2

# Talrækker

I denne del skal vi se på summen af leddene i en talfølge

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Da det er en sum af uendeligt mange led, skal vi være meget omhyggelige med vores analyse. Vi starter derfor med at definere præcist, hvad vi mener med en uendelig sum, og afleder derefter nogle grundlæggende egenskaber (fx at summen kun kan være endelig, hvis talfølgen bestående af leddene konvergerer mod nul). Bagefter undersøger vi dybdegående den relativt nemme situation, hvor leddene er positive, og hvor vi derfor ikke får led der går ud med hinanden. Det er interessant at observere, at vi ofte er i stand til at afgøre konvergens uden at have mulighed for at udregne summen. I den sidste del behandler vi den sværeste, men også sjoveste situation, hvor ophævelse som i

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \dots$$

kan føre til det overraskende resultat, at vi kan ombytte led i rækken, sådan at rækken konvergerer mod en vilkårlig værdi.

### 2.1 Introduktion

**Definition og divergenstest** Vi starter med en præcis definition af en talrække, dvs. af den uendelige sum af leddene i en talfølge.

**Definition 2.1.** Lad  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en reel eller kompleks talfølge. Talfølgen  $\{s_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  af afsnitssummerne

$$s_N := \sum_{n=1}^N a_n$$

kaldes for talrækken genereret af  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Vi betegner den med

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Hvis  $\{s_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  konvergerer med grænseværdi  $A$ , kalder vi  $A$  for summen af talrækken  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  og skriver

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim A.$$

I så fald kalder vi talrækken  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  for konvergent. Ellers kaldes den divergent.

Mange benytter notationen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ , i stedet for  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim A$ , men bemærk, at det kan skabe forvirring, da  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  er en talfølge og  $A$  et tal.

Vær opmærksom på, at en talrække per definition er en talfølge, nemlig talfølgen af afsnitssummerne. Summen af talrækken er kun veldefineret, hvis talfølgen af afsnitssummerne konvergerer.

For endelige summer, f.eks.  $a_1 + a_2 + a_3$ , gælder

- (kommutativitet)  $a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_1 + a_3$
- (associativitet)  $(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$
- (skalar multiplikation) for alle  $c \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ :  $c(a_1 + a_2 + a_3) = ca_1 + ca_2 + ca_3$

For en talrække er det a priori ikke tilladt at ombytte leddene (kommutativitet), sætte parentes (associativitet) eller multiplicere med et tal (skalar multiplikation), da det muligvis kan ændre konvergenssegenskaber og givetvis grænseværdierne. Senere ser vi på betingelser, som giver os lov til at lave disse operationer (Sætning 2.6(Parentes), Sætning 2.9(Regneregler), Korollar 2.32(Ombytte)). Men inden vi gør det, vil vi gerne komme igang med at se på en vigtig konvergenstest og nogle eksempler.

**Sætning 2.2** (Divergenstesten). Hvis rækken  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergerer, så er  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en nulfølge, dvs. konvergerer mod nul.

*Bevis.* Hvis rækken  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergerer mod  $S$ , så konvergerer følgerne  $\{s_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  og  $\{s'_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  givet ved  $s_N := \sum_{n=1}^N a_n$  og  $s'_N := \sum_{n=1}^{N+1} a_n$  også mod  $S$ . Ved hjælp af regnereglerne for talfølger ser vi, at følgen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  går mod nul, da vi kan skrive  $a_{n+1} = s'_n - s_n$ .

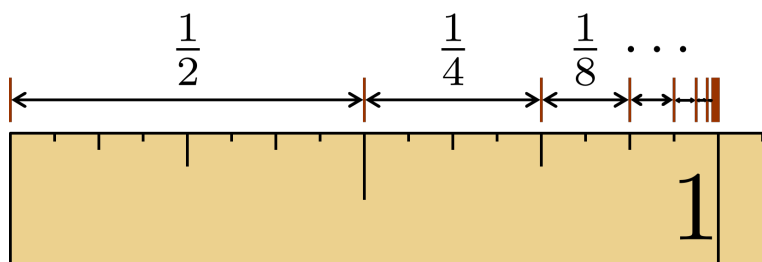
□

Divergenstesten ser i første omgang ikke ud som en særlig dyb indsigt eftersom en positiv talfølge, som ikke konvergerer mod nul tydeligvis vil føre til en række, som divergerer mod uendelig (fx talfølgen  $1, 1, 1, \dots$ ). Bemærk dog, at den også behandler talrækker med både positive og negative led, f.eks.  $a_n = (-1)^n$ , såvel som komplekse talfølger, f.eks.  $a_n = e^{i\phi n}$ , hvor situationen ikke er helt så åbenlys (især, når vi tænker på irrationelt  $\phi$ ). Vi skal bruge divergenstesten, netop i denne situation, i analysen af det følgende vigtige eksempel.

**Geometriske række** Betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots,$$

som konvergerer til 1 ifølge illustrationen (taken from Wikimedia commons, Copyright Jim.belk):



Vi skal nu vise dette udsagn i større generalitet. Lad  $x \in \mathbb{C}$  og for alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $a_n = x^n$ . Talrækken  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  kaldes *den geometriske række* (Sommetider er det mere naturligt, at starte i andre værdier end 1). Vi begynder med at finde en formel for afsnitsummerne.

**Lemma 2.3** (Afsnitssum af den geometriske række). *For alle  $N \in \mathbb{N}_0$  og alle  $x \neq 1$ :*

$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \quad (2.1)$$

For  $x = 1$  gælder selvfølgelig

$$\sum_{n=0}^N x^n = N + 1 \quad (2.2)$$

*Bevis.* Lad  $P_N$  være udsagnet (2.1). Vi vil nu bevise, at  $P_N$  er sandt for alle  $N \in \mathbb{N}_0$ . Induktionsstarten er opfyldt, dvs  $P_0$  er sandt, fordi

$$\sum_{n=0}^0 x^n = x^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1 - x}{1 - x} = \frac{1 - x^{0+1}}{1 - x}.$$

Lad os nu tjekke induktionsskridtet:  $P_N$  sandt  $\Rightarrow P_{N+1}$  sandt. Vi skal vise, at

$$\sum_{n=0}^{N+1} x^n = \frac{1 - x^{N+2}}{1 - x} \quad (2.3)$$

ud fra induktionsantagelsen

$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}. \quad (2.4)$$

Det er oplagt at prøve at splitte de sidste led af summen på venstresiden af (2.3) og bruge induktionsantagelsen (2.4)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N+1} x^n &= \left( \sum_{n=0}^N x^n \right) + x^{N+1} \\ &= \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} + x^{N+1} \\ &= \frac{1 - x^{N+1} + (1 - x)x^{N+1}}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{N+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

I de sidste to skridt har vi bare forenklet udtrykket. Dermed er både induktionsstarten og induktionsskridtet opfyldt, og vi kan nu bruge induktionsprincippet til at konkludere, at påstanden (2.1) er rigtig for alle  $N \in \mathbb{N}_0$ .  $\square$

**Sætning 2.4** (Den geometriske række). *Lad  $x \in \mathbb{C}$ . Hvis  $|x| < 1$ , gælder*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sim \frac{1}{1-x}.$$

*Hvis  $|x| \geq 1$  divergerer rækken.*

*Bevis.* Udsagnet er trivielt for  $x = 0$ , så lad os antage at  $x \neq 0$ . Vi ved fra Lemma 2.3, at for  $x \neq 1$

$$s_N := \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}.$$

Hvis  $|x| < 1$ , gælder

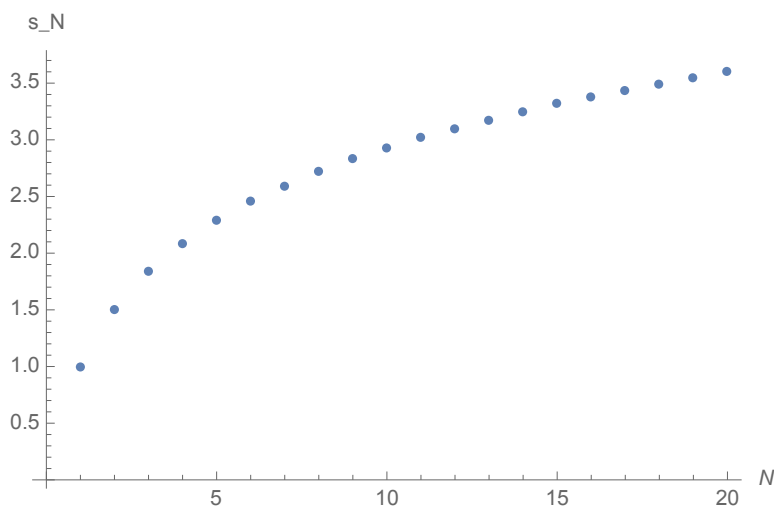
$$\lim_{N \rightarrow \infty} x^{N+1} = 0,$$

da for alle  $\epsilon > 0$ , og  $M := \left\lceil \frac{\log \epsilon}{\log |x|} \right\rceil$ :

$$|x^{N+1} - 0| < \epsilon$$

for alle  $N \geq M$ . Med regnereglerne for talfølger finder vi, at den højre side konvergerer mod  $\frac{1}{1-x}$ . Hvis  $|x| \geq 1$ , er  $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ikke en nulfølge, og dermed divergerer rækken ifølge divergenstesten.  $\square$

**Den harmoniske række** Rækken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  kaldes den *harmoniske række*. Rækken er særligt interessant, da leddene er positive og går mod nul, mens rækken stadig divergerer. Specielt viser den harmoniske række, at ikke enhver nulfølge har en konvergent række.



**Sætning 2.5** (Den harmoniske række). *Den harmoniske række divergerer mod uendelig.*

*Bevis.* Lad  $N$  være lige. Vi estimerer afsnitssummen:

$$\begin{aligned} s_N &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N}\right) \\ &\geq \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{\frac{N}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} + s_{\frac{N}{2}} \end{aligned}$$

Lad os antage, at rækken konvergerer mod sum  $S$  og vise at dette fører til en modsigelse. Ifølge denne antagelse konvergerer  $\{s_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  mod  $S$ , men også delfølgen  $\{s_N\}_{N \in \mathbb{N}, N \text{ lige}}$ . Hvis vi nu lader  $N$  gå mod uendelig, ser vi, at den venstre side konvergerer mod summen  $S$ , hvorimod den højre side konvergerer mod  $\frac{1}{2} + S$ , hvilket er strengt større, og ikke mindre, end  $S$ . Dette er en modsigelse, hvilket viser, at antagelsen om konvergens af den harmoniske række må være forkert. Vi konkluderer, at rækken divergerer.

For at se, at den divergerer mod uendelig bemærker vi, at afsnitssummerne er monotont voksende. Afsnitssummerne kan derfor ikke være begrænsede (da rækken ellers vil være konvergent ifølge Sætning 1.41). Rækken divergerer derfor mod uendelig.  $\square$

Den harmoniske række har en sjov anvendelse til bog-stablings problemet. Spørgsmålet er, hvordan vi kan stable  $n$  bøger (hver med længde 1 og masse  $m$ ) ud over en bordkant, sådan at de hænger længst muligt ud over kanten.

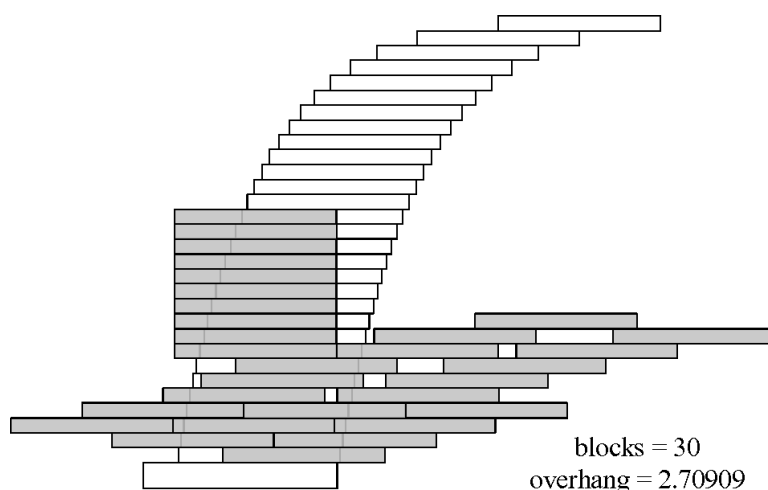
$n = 1$ : Hvis vi lægger bogen med midten lige over kanten, får vi en længde  $d_1 = \frac{1}{2}$ . Generelt  $n$ : Lad  $n - 1$  bøger være stablet, sådan at tyngdepunktet ligger lige ved kanten. Nu lægger vi den  $n$ te bog under stablen, sådan at den også flugter med kanten. Bemærk, at den har en tyngdepunkt i dens midte. Den nye stabel er stadig stabil, men tyngdepunktet ligger nu strengt inde på bordpladen, da vi har tilføjet en bog, som ligger helt inde på bordpladen. Præcist, så ligger den  $d_n$  inde, som opfylder (se Wikipedia for at se, hvordan



man beregner *center of mass* for to objekter med masse  $m$  og  $M$  og afstand  $\frac{1}{2}$  (en halv boglængde).

$$m\left(\frac{1}{2} - d_n\right) = Md_n,$$

hvor  $M = (n - 1)m$  er massen af stablen inden vi tilføjede bogen. Løser vi ligningen, finder vi  $d_n = \frac{1}{2n}$ . Vi kan derfor flytte hele stablen ud over kanten med  $d_n$ , sådan at det nye massecenter igen ligger på kanten. Den totale længde man får ved at stable  $N$  bøger efter denne metode er derfor  $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ . Da denne sum divergerer for  $N$  mod uendelig, kan vi stable bøger uendeligt langt over bordpladen. Mere præcist, så giver  $N$  bøger en længde på ca.  $\frac{1}{2} \ln N$  (hvorfor?). Det viser sig, at hvis man stabler lidt mere gennemtænkt kan man få ca.  $n^{1/3}$  (Patersen Zwick 2006, vist optimalt af Paterson, Peres, Thorup, Winkler, Zwick i 2007, grafen er fra denne publikation)



**Regneregler for talrækker** Hvis vi har en konvergent talrække, så kan vi sætte parentes.

**Sætning 2.6** (Parentes). Lad  $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  være en strengt voksende følge af naturlige tal, hvor  $n_1 = 1$ . Hvis

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim A$$

så gælder også

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_{n_i} + a_{n_i+1} + \cdots + a_{n_{i+1}-1}) \sim A.$$

*Bevis.* Bemærk, at følgen af afsnitssummerne af rækken

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_{n_i} + a_{n_i+1} + \cdots + a_{n_{i+1}-1})$$

er en delfølge af følgen af afsnitssummerne af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Da denne følge er konvergent, er også delfølgen konvergent med samme grænseværdi ifølge Lemma 1.49.  $\square$

**Eksempel 2.7.** Lad  $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , med  $n_i = 2^{i-1}$ , så bliver rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

til

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_{2^{i-1}} + a_{2^{i-1}+1} + \cdots + a_{2^i-1}) = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + \cdots + a_7) + \cdots$$

Ifølge Sætning 2.6 er medfører konvergens af den første række konvergens af den anden række (med samme grænseværdi).

Hvis talrækken er derimod divergent er det vanskeligt at sætte parentes, da resultatet kan blive konvergent som følgende eksempel viser.

**Eksempel 2.8.** Lad  $a_n = (-1)^n$ . Da er

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

divergent, fordi  $s_N = -1$  for ulige  $N$  og  $s_N = 0$  for lige  $N$ . Hvis vi derimod ser på

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0,$$

så er den konvergent med sum  $S = 0$ , da  $s_N = 0$  for alle  $N$ .

I analogi med regnereglerne for talfølger finder vi følgende regneregler for talrækker.

**Sætning 2.9** (Regneregler for talrækker). Hvis rækkerne  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  og  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  er konvergente mod henholdsvis  $A$  og  $B$ , så gælder at

- (Sum)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  konvergerer mod summen  $A + B$
- (Differens)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$  konvergerer mod summen  $A - B$
- (Skalar multiplikation) For  $c \in \mathbb{C}$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  konvergerer mod summen  $cA$ .

*Bevis.* Rækkerne  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  og  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  har sum  $A$  og  $B$ , hvis følgen af afsnitssummerne  $\{s_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  og  $\{t_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  konvergerer mod henholdsvis  $A$  og  $B$ . Efter regnereglerne for følger er også  $\{s_N \pm t_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  konvergent mod  $A \pm B$ . For at vise det tredje udsagn, bemærk at afsnitssummerne af  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  er givet ved  $(ca_1 + ca_2 + \dots + ca_N) = c(a_1 + a_2 + \dots + a_N) = cs_N$ . Det medfører, at  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  har sum  $cA$ .  $\square$

**Eksempel 2.10.** Talrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n} - \frac{2}{3}3^{-n}) \quad (2.5)$$

er sammensat af to geometriske rækker  $\sum (\frac{1}{2})^n$  og  $\sum (\frac{1}{3})^n$ , som konvergerer mod henholdsvis 2 og  $\frac{3}{2}$ . (2.5) konvergerer derfor mod 1.

Bemærk, at beviset for multiplikation af talfølger ikke kan overføres på lignende vis til produktet af talrækkerne, da produktet af afsnitssummerne for  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  og  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ikke er afsnitssummen for  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n * b_n$ . Det forventede udsagn er ikke engang rigtigt, idet, som vi ser senere, rækken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergerer, mens  $\sum \frac{1}{n}$  divergerer ( $a_n = b_n = \frac{1}{n}$ ).

De følgende udsagn udvider regnereglerne til divergente rækker.

**Korollar 2.11.** Hvis rækken  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  er konvergent, og  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  er divergent, så divergerer  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ .

*Bevis.* Vi laver et bevis ved modsigelse. Lad os antage, at  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  konvergerer. Da også  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergerer, finder vi ved hjælp af regnereglerne for talrækker, at  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergerer. Dette er en modsigelse.  $\square$

**Proposition 2.12.** *Givet  $m \in \mathbb{N}$  vil  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  og  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  enten begge konvergere eller divergere.*

*Bevis.* Påstanden er en konsekvens af, at differensen  $\sum_{n=1}^{m-1} a_n$  er endelig.  $\square$

## 2.2 Positive rækker

### Generelle udsagn

**Definition 2.13.** *Rækken genereret af følgen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  kaldes for positiv, hvis følgen er positiv, dvs hvis  $a_n \geq 0$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ .*

Positive talrækker fører til monotont voksende afsnitssummer, da

$$s_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_N + a_{N+1} = s_{N+1}.$$

Fra vores undersøgelse af talfølger ved vi, at monotone talfølger har gode konvergensforhold, som vi nu skal bruge til at undersøge positive rækker.

**Sætning 2.14.** *En positiv række konvergerer, hvis og kun hvis den er begrænset.*

*Bevis.* Hvis rækken er positiv, så er følgen af delsummerne monotont voksende. Hvis den også er begrænset, så er den konvergent (Sætningen 1.41). Hvis den er ubegrænset, så divergerer den.  $\square$

For at vise, at en positiv række er konvergent, er det derfor nok at finde et  $M \in \mathbb{R}$  med  $\sum_{n=0}^m a_n \leq M$  for alle  $m \in \mathbb{N}$ .

**Eksempel 2.15.** *Lad  $0 \leq r < 1$  og betragt rækken*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n+1}.$$

*Afsnitssummerne er begrænsede af  $M = \frac{1}{1-r}$ , da*

$$\sum_{n=0}^N \frac{r^n}{n+1} \leq \sum_{n=0}^N r^n \leq \frac{1}{1-r}.$$

*Rækken er dermed konvergent ifølge Sætning 2.14.*

Bemærk, at vi ikke bare fandt en øvre grænse i eksemplet, men faktisk sammenlignede talrækken med den geometriske række. Ved at betragte  $M$  som summen af den 'større' talrække, er følgende en direkte konsekvens.

**Korollar 2.16** (Sammenligningstest).  $c > 0$ . Lad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  og  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  være to positive talrækker med  $b_n \leq ca_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  konvergerer, hvis  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergerer.
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergerer, hvis  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  divergerer.

Sammenligningstesten kan udvides til en den såkaldte grænsesammenligningstest, som også giver os informationen om grænseværdien.

**Konvergenstests** Med sammenligningstesten har vi set en første test, som hjælper os at afgøre, om en talrække er konvergent eller divergent. Bemærk, at vi har brug for en anden (nemmere) talrække at sammenligne med, før vi kan bruge testen.

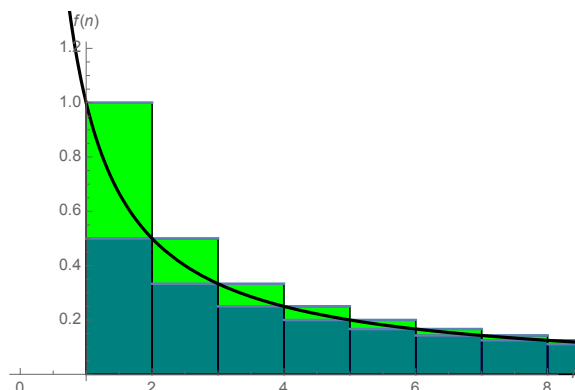
I det følgende skal vi aflede en del flere tests som er tilpasset for at afgøre konvergens til særlige typer af rækker. Vi starter med integraltesten. Det virker intuitivt, at man skulle kunne undersøge konvergens ved at approksimere rækken med et integral.

**Sætning 2.17** (Integraltest).  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  er en positiv, kontinuert og aftagende funktion. Rækken  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  konvergerer, hvis og kun hvis integralet  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  er endeligt.<sup>1</sup>

*Bevis.* Lad  $c \in \mathbb{N}, c > 1$ . Det følger direkte af definition af Riemann-integralet, at

$$0 \leq \sum_{n=2}^c f(n) \leq \int_1^c f(x)dx \leq \sum_{n=1}^c f(n).$$

<sup>1</sup>  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  er det uegentlige integral defineret ved  $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c f(x)dx$ , hvis sidstnævnte eksisterer og er endeligt.



Rækken er derfor begrænset, hvis og kun hvis integralet er begrænset. Påstanden er bevist, fordi en positiv række konvergerer, hvis og kun hvis den er begrænset.  $\square$

**Eksempel 2.18** (Den harmoniske række). Vi giver et alternativt bevis for divergensen af den harmoniske række. Lad  $f(x) = \frac{1}{x}$ , så er  $\int_1^\infty \frac{1}{x} = [\log x]_1^\infty = \infty$ . Det viser, at den harmoniske række  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$  er divergent. Mere generelt, er  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$  konvergent, hvis og kun hvis  $p > 1$  - et meget vigtigt eksempel.

**Sætning 2.19** (Kvotienttest). Lad  $\sum_{n=0}^\infty a_n$  være en positiv række.

- Rækken konvergerer, hvis  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ .
- Rækken divergerer, hvis der findes et  $N$  sådan at for alle  $n \geq N$ :  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ .

*Bevis.* Lad  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$ . Dvs. for alle  $r$  med  $a < r < 1$  findes der et  $N$ , sådan at for alle  $n \geq N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r,$$

eller

$$a_n \leq a_N r^{-N} r^n.$$

Den højre side er proportional til leddene i den geometriske række, hvilken konvergerer. Vi kan derfor bruge sammenligningstesten til at konkludere, at talrækken konvergerer.

Hvis for alle  $n \geq N$ ,  $a_{n+1} \geq a_n$ , så kan  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ikke være en nulfølge. Rækken må derfor være divergent.  $\square$

Bemærk at testen ikke siger noget om konvergens, hvis  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , da både  $a_n = \frac{1}{n}$  og  $\frac{1}{n^2}$  resulterer i denne limesup, men har forskellige konvergenssegenskaber.

Testen er nem at bruge i praksis, men ikke særligt stærk, fordi leddene enten skal aftage eller vokse eksponentielt, inden man kan sige noget: fra beviset ser vi at testen i princippet bare sammenligner rækken med den geometriske række. En anden test, som er lidt bedre, men stadig væk svag af samme grund, er rodtesten.

**Sætning 2.20** (Rodtest). *Lad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  være en positiv række.*

- Rækken konvergerer, hvis  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} < 1$ .
- Rækken divergerer, hvis  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} > 1$ .

*Bevis.* Definer  $a := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}$ .

- Det er intuitivt, at rækken forholder sig som en geometrisk række med parameter  $a$ . Det skal vi nu bevise. Ud fra definition af limes superior kan vi, for alle  $r > a$ , finde et  $N$ , sådan at for alle  $n \geq N$ :  $a_n^{1/n} < r$ , eller med andre ord  $a_n \leq r^n$ . Da  $a < 1$ , kan vi indskrænke os til  $r < 1$ . Ved grænsesammenligningstesten er summen af  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  mindre end  $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$ , hvilket er mindre end  $\frac{1}{1-r}$ . Rækken konvergerer, fordi summen af de første  $N$  led også er endelig.
- Hvis  $a > 1$ , findes der uendeligt mange elementer  $n_k$ , sådan at  $a_{n_k}^{1/n_k} > 1$ , og dermed også

$$a_{n_k} > 1.$$

Talfølgen  $a_{n_k}$  kan derfor ikke være en nulfølge, og rækken divergerer ifølge divergenstesten (Sætning 2.2).

□

Bemærk, at vi ikke har et udsagn, hvis  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = 1$ . Kan du illustrere dette ved to eksempler?

**Cauchy-fortætning** Man kan, f.eks. ved hjælp af integraltesten, se, at talrækken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  er konvergent for  $p > 1$ , men divergent for  $p \leq 1$ . Den følgende test, som kaldes for Cauchy-fortætnings- eller kondensationstest giver os en yderligere måde at analysere denne række (og andre rækker som ligner denne) på.

**Sætning 2.21** (Cauchy-fortætning). *Lad  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en monotont aftagende, reel talfølge af ikke negative tal, dvs.  $a_n \geq 0$  og  $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ . Det gælder, at  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergerer, hvis og kun hvis  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  konvergerer.*

Resultatet er ret overraskende, da det siger, at vi ikke behøver at se på alle led for at afgøre konvergens. Vi har set tidligere, at starten af en række er ikke afgørende for dens konvergenssegenskaber. Cauchy fortætningssætningen siger, at vi ikke ens behøver at se på hele halen, men kun en tynd (men uendelig stor) delmængde af leddene.

Cauchy-fortætning kan også bruges for talrækker som ikke starter i  $n = 1$ , hvis man kombinerer udsagnet i Sætning 2.21 med Korollar 2.12).

*Bevis.* "←" Lad

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ t_k &= a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k} \end{aligned}$$

være afsnitsfølgerne af de to rækker.

For  $n < 2^{k+1}$ :

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k} = t_k, \end{aligned}$$

hvor vi bruge monotonicitet i den anden ulighed. Derfor er  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} t_k$  (begge udtryk er veldefinerede, da  $s_n$  og  $t_k$  er monotone). For  $n \geq 2^k$ :

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k \end{aligned}$$

Derfor er  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \geq \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} t_k$ . Vi konkluderer, at begge rækker enten er konvergente eller divergente.  $\square$

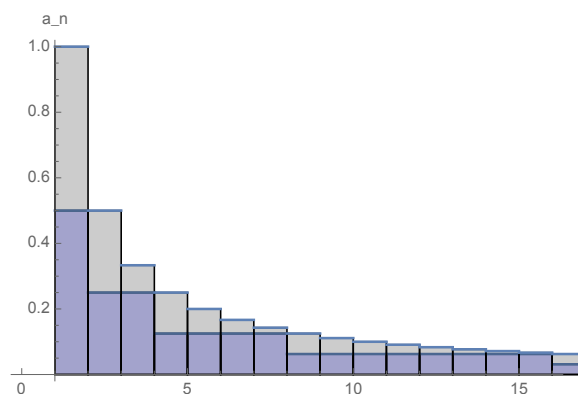


**Eksempel 2.22.** Ifølge sætningen er  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  konvergent, hvis og kun hvis

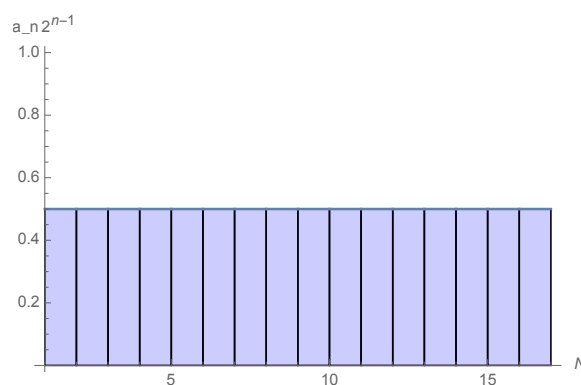
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{(1-p)})^n$$

er konvergent. Men denne er en geometrisk række, som konvergerer, hvis og kun hvis  $2^{1-p} < 1$ , hvilket er ækvivalent med  $p > 1$ . Vi ser, at Cauchys fortætnings-test omdanner  $p$ -rækkerne til geometriske rækker.

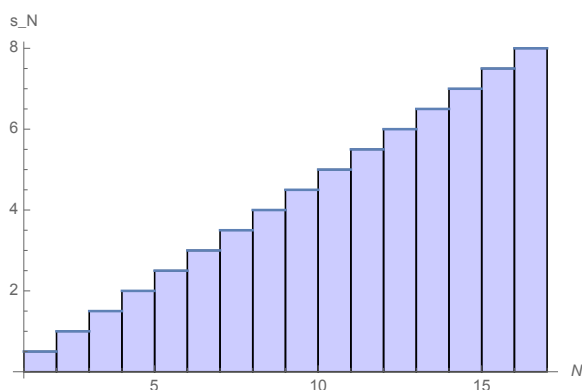
Beviset er illustreret i tilfældet  $p = 1$ . Den første graf viser talrækken  $a_n = \frac{1}{n}$ , sammen med den talfølge man får, når man estimerer  $a_n \geq a_{2^k}$  for  $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$ .



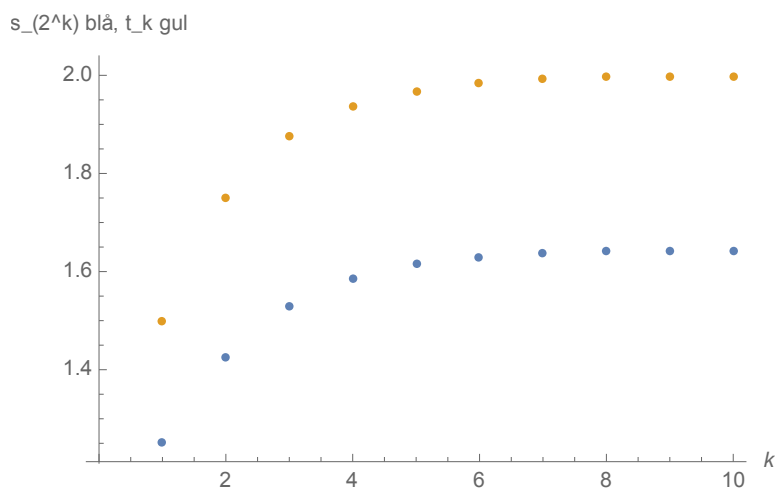
Hvis man nu sammenfatter de  $2^k$  led af størrelse  $a_{2^k}$  i estimatet til et led, ser vi med vores valg, at de allesammen er lig med  $\frac{1}{2}$ .



Den tilsvarende række divergerer selvfølgelig, som forventet.



I tilfældet  $p = 2$  viser vi graferne for  $s_{2^k}$  og  $t_k$ , hvor begge konvergerer som forventet.



## 2.3 Absolut og betinget konvergens

I dette afsnit behandler vi rækker med led, som ikke kun har positivt fortegn. Vi skal først se på reelle rækker, hvor fortegnet skifter (alternerende rækker) og bagefter mere generelle rækker. Vi vil møde de vigtige begreber *absolut konvergens* og *betinget konvergens*.

### Alternerende række

**Definition 2.23** (Alternerende række). Vi siger, at en reel talrække  $\sum_n^\infty a_n$

er alternerende, hvis  $a_n$  har alternerende foretegn, dvs. hvis enten

$$\underbrace{a_1}_{\leq 0} + \underbrace{a_2}_{\geq 0} + \underbrace{a_3}_{\leq 0} + \underbrace{a_4}_{\geq 0} + \dots$$

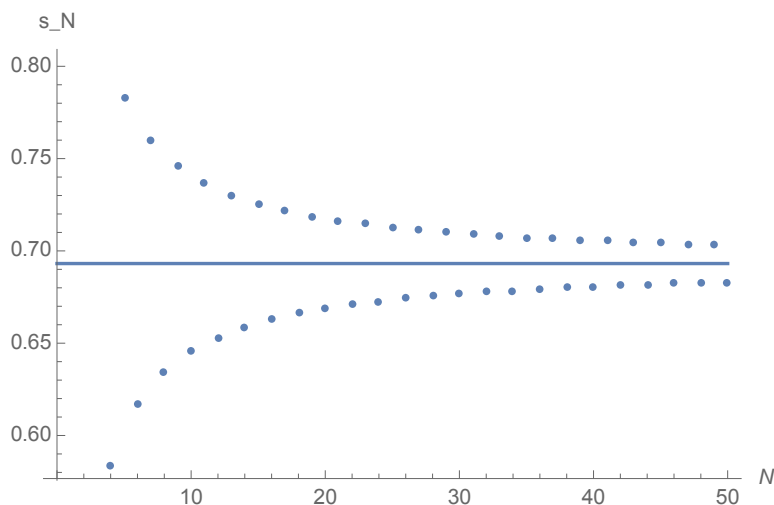
eller

$$\underbrace{a_1}_{\geq 0} + \underbrace{a_2}_{\leq 0} + \underbrace{a_3}_{\geq 0} + \underbrace{a_4}_{\leq 0} + \dots$$

**Eksempel 2.24.** Et karakteristisk eksempel er den alternerende harmoniske række

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}.$$

I første omgang er der ingen grund til at gå ud fra, at rækken forholder sig anderledes end den harmoniske række, som divergerer. Men et plot af afsnitsfølgens led ser ud til at konvergere mod  $\ln 2$ , som er indikeret med en linie.



Den følgende sætning viser konvergens, uden at kunne afgøre summen.

**Sætning 2.25** (Leibniz test). Lad  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  være en alternerende talrække. Hvis talfølgen  $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  er monotont aftagende med  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , er  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent.

*Bevis.* Lad  $a_1 > 0$  uden tab af generalitet (UTAG), så er  $a_2 \leq 0, a_3 \geq 0, \dots$

Derved er følgen af de lige afsnitssummer er voksende:

$$s_{2(m+1)} = \sum_{n=1}^{2(m+1)} a_n = \left( \sum_{n=1}^{2m} a_n \right) + \underbrace{a_{2m+1} + a_{2m+2}}_{\geq 0} \geq \sum_{n=1}^{2m} a_n = s_{2m}, \quad (2.6)$$

da det ulige led  $a_{2m+1}$  er positivt og større end  $a_{2m+2}$  i absolutværdi.

Omvendt er de ulige afsnitssummer aftagende:

$$s_{2(m+1)-1} = \sum_{n=1}^{2(m+1)-1} a_n = \left( \sum_{n=1}^{2m-1} a_n \right) + \underbrace{a_{2m} + a_{2m+1}}_{\leq 0} \leq \sum_{n=1}^{2m-1} a_n = s_{2m-1}. \quad (2.7)$$

Vi ved også, at

$$s_{2m} = s_{2m-1} + \underbrace{a_{2m}}_{\leq 0} \leq s_{2m-1},$$

da de lige led er negative. Da de ulige afsnitssummer er monotont aftagende, og de lige monotont voksende, finder vi derfor

$$s_2 \leq s_{2m} \leq s_{2m-1} \leq s_1$$

og ser, at  $\{s_{2m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  og  $\{s_{2m-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  er begrænsede og dermed konvergente.

Vi betegner grænseværdierne med henholdsvis  $s_{lige}$  og  $s_{ulige}$ .

Da  $a_{2m} = s_{2m} - s_{2m-1}$  finder vi med regnereglerne for talfølger at

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = \left( \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} \right) - \left( \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m-1} \right) = s_{lige} - s_{ulige}.$$

Da den venstre side konvergerer mod nul ved antagelse, finder vi, at  $s_{lige} = s_{ulige} =: s$ .  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer derfor mod  $s$ .

□

Det følger direkte fra beviset, at

$$|s - s_n| \leq |a_n|,$$

dvs. at det sidste led, som blev tilføjet, er en øvre grænse på fejlen man gør ved at afbryde summen. Bemærk, at Leibniz-testen kun behandler rækker med alternerende fortegn og ikke med generelle fortegn, et emne vi nu skal beskæftige os med.

**Generelle rækker**

**Definition 2.26.** En talrække  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergerer absolut, hvis  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergerer. En talrække, som konvergerer, men som ikke konvergerer absolut, kaldes for betinget konvergent.

Bemærk, at for positive rækker, konvergens er detsamme som absolut konvergens.

**Eksempel 2.27.** Bemærk, at den alternerende harmoniske række

$$\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

er betinget konvergent, da den er konvergent, men

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

er divergent, da vi genkender den som den harmoniske række.

**Sætning 2.28.** Lad  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  og definer for alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_n^+ := \max\{0, a_n\}$$

og

$$a_n^- := \max\{0, -a_n\}.$$

Hvis  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  er absolut konvergent, konvergerer  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  og  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ . For

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm} \sim A_{\pm}$$

gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim A_+ - A_-$$

og

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sim A_+ + A_-.$$

Specielt er en absolut konvergent række konvergent.

*Bevis.* Hvis  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  er absolut konvergent betyder det, at  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergerer. Fordi  $a_n^+ \leq |a_n|$  og  $a_n^- \leq |a_n|$  konkluderer vi i så fald, ud fra sammenligningstesten Sætning 2.16, at rækkerne  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  og  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  konvergerer. Ifølge Sætning 2.9 konvergerer differensen og summen, hvilke er lig med henholdsvis summen af  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  og  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .  $\square$

Med den sidste sætning kan vi nu anvende vores konvergenskriterier på rækker med generelle fortegn. Divergensen kan ofte ses med Leibniz testen. Set i det lys behøver vi ikke diskutere forholdstesten og rodtesten for generelle rækker.

**Definition 2.29.** En følge af naturlige tal  $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  er en permutation af  $\mathbb{N}$ , hvis alle naturlige tal forekommer nøjagtigt én gang, dvs. hvis funktionen  $i \mapsto n_i$  er en bijektiv afbildning fra  $\mathbb{N}$  til  $\mathbb{N}$ .

**Eksempel 2.30.** Lad  $\pi$  være en permutation af  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Så er

$$\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(N), N+1, N+2, \dots$$

en permutation af  $\mathbb{N}$ . Anvendt på en talrække ændrer de kun rækkefølgen på de første  $N$  led og har dermed ingen indflydelse på konvergenssegenskaberne eller summen.

For at se på en mere drastisk måde at ombytte leddene på, bemærk, at ethvert naturligt tal  $n$  kan skrives nøjagtigt enten som  $2k-1$  (ulige),  $n = 2(2k-1)$  (lige, men ikke deleligt med 4) eller  $n = 4k$  (deleligt med 4), hvor  $k \in \mathbb{N}$ . Betragt permutationen

$$1, 2, 4, 3, 6, 8, 5, 10, 12, \dots, 2k-1, 2(2k-1), 4k, \dots$$

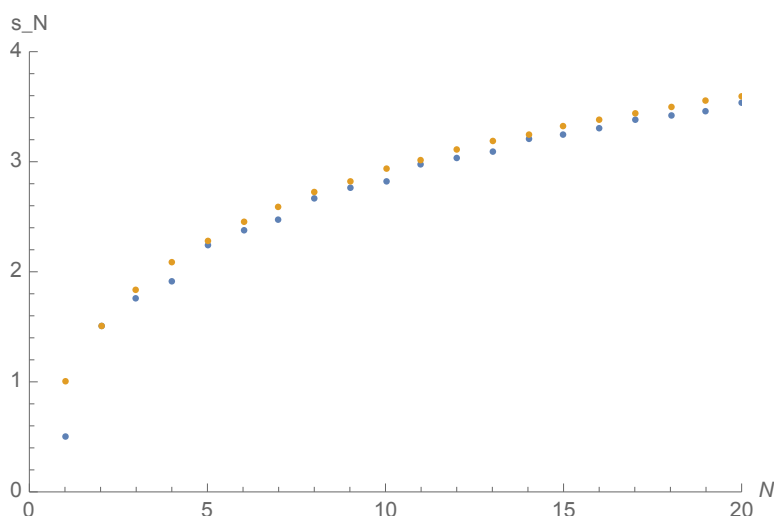
Ved hjælp af denne permutation bliver rækken

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

ombyttet til

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2(2k-1)} + \frac{1}{4k} + \dots$$

Grafen viser afsnitsummerne af den oprindelige og den ombyttede række.



Grafen indikerer, at konvergensen ikke afhænger af ombytningen.

**Sætning 2.31** (Ombytte af led i positive rækker). Lad  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  være en konvergent, positiv række med sum  $A$ , og lad  $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  være en permutation af  $\mathbb{N}$ . Da er  $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$  konvergent med sum  $A$ .

*Bevis.* Definer  $b_i := a_{n_i}$  for alle  $i \in \mathbb{N}$ . For alle  $N \in \mathbb{N}$ , findes der et  $M \in \mathbb{N}$ , således at alle  $n_1, \dots, n_N \leq M$ . Fordi leddene er positive, gælder

$$\sum_{i=1}^N b_i = \sum_{i=1}^N a_{n_i} \leq \sum_{n=1}^M a_n.$$

$A$  er dermed en øvre grænse på summen af  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ . Specielt er  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  konvergent. Lad  $B$  være dens sum, som opfylder  $B \leq A$ . Da  $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  er bijektiv kan  $a_n$  betragtes som ombytte af  $b_i$  (inverse permutation), og vi ser også, at  $B \geq A$  gælder.  $\square$

Hvis vi bruger sætningen, som gælder for positive rækker, på de positive og negative værdier af en absolut konvergent række finder vi følgende

**Korollar 2.32.** Hvis  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  er en absolut konvergent række, som konvergerer mod  $A$ , så gælder det samme for  $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$ , hvor  $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  er en permutation.

*Bevis.* Da  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  er absolut konvergent mod  $A$ , er  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$  konvergente mod  $A_{\pm}$  med  $A = A_+ - A_-$  ifølge Sætning 2.28. Bruger vi nu Sætning 2.31

på de to positive rækker ser vi at  $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}^{\pm}$  er konvergente med sum  $A_{\pm}$ . Med regnereglerne for talrækker konkluderer vi, at  $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$  er konvergent med sum  $A_+ - A_- = A$ .  $\square$

Men det, der er sjovt, er, at betinget konvergente følger kan konvergere mod hvad som helst, når man bytter om på leddene.

**Sætning 2.33** (Riemann-ombytte). *Hvis  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  er en betinget konvergent, reel række, og  $a \in \mathbb{R}$  er arbitrær, så findes der en ombytning af rækken som konvergerer mod  $a$ .*

Riemann-sætningen antyder, at ombytte altid leder til en konvergent række. En direkte generalisering kan dog vise, at man kan ombytte leddene, sådan at den resulterende talrække har et vilkårligt  $\limsup > \liminf$  (se f.eks Rudin). Ud fra denne diskussion kan man udlede, at en række er absolut konvergent, hvis og kun alle ombyttede talrækker er konvergente og har den samme sum.

**Eksempel 2.34.** *Ved at skrive de ulige naturlige tal på formen  $2k - 1$  og de lige enten som  $4k$  eller som  $2(2k - 1)$  kan vi ombytte følgen fra forrige eksempel til*

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k} + \dots$$

*Hvis denne følge konvergerer, kan vi sætte parenteser (Sætning 2.6),*

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots \\ + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)}\right) - \frac{1}{4k} + \dots \end{aligned}$$

*og ser derved, at den bliver til*

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots - \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} + \dots\right)$$

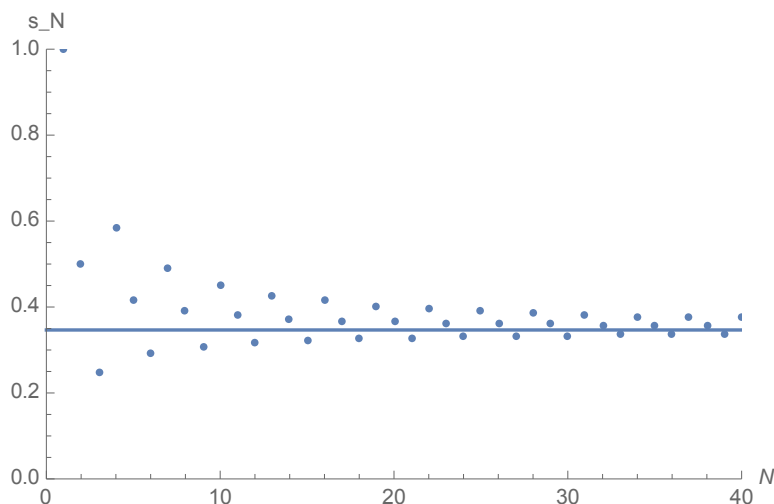
*hvilket er lige med*

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

*og den har derfor dens halve sum.*



Grafen viser afsnitssummerne i den ombyttede talrække, sammen med den forvente sum  $\frac{\ln 2}{2}$ .



Følgende lemma forbereder beviset af sætningen (sammenlign med Sætning 2.28).

**Lemma 2.35.** Hvis  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  er betinget konvergent, divergerer både rækken af de positive og de negative led.

*Bevis (ved modstrid).* Antag, at  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  konvergerer. Ved antagelse konvergerer også  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Da  $a_n^- = a_n^+ - a_n$  finder vi ved hjælp af regnereglerne at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

konvergerer. På lignende vis finder vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

konvergerer, da  $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ . Det er i modstrid med antagelsen om, at rækken er betinget konvergent, og vi konkluderer, at talrækken af de positive led divergerer. På lignende vis, ses, at talrækken af de negative led divergerer.  $\square$

*Bevis for Sætning 2.33.* Givet  $B \in \mathbb{R}$  skal vi definere en ombytning som konvergerer mod  $B$ . Lad  $a_1 \geq 0$  og  $B \geq 0$  uden tab af generalitet.

Lad  $b_1 := a_1$ . For  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,

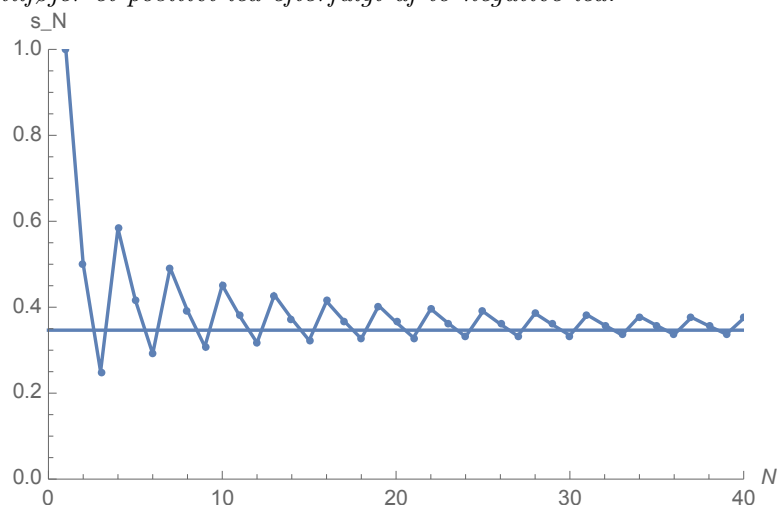
- Hvis  $\sum_{i=1}^k b_i < B$ , lad  $b_{k+1}$  = næste nye positive led
- Hvis  $\sum_{i=1}^k b_i \geq B$ , lad  $b_{k+1}$  = næste nye negative led

Bemærk, at hver betingelse kun er opfyldt endeligt mange gange efter hinanden, da rækken af de positive og negative led er divergente. Bemærk også, at når fortegnet skifter, dvs. når  $\sum_{i=1}^k b_i < B$  og  $\sum_{i=1}^{k+1} b_i \geq B$ , finder vi, at

$$\left| \sum_{i=1}^k b_i - B \right| \leq b_{k+1}.$$

Da  $b_{k+1}$  konvergerer mod nul, konvergerer summen derfor mod  $B$ .  $\square$

**Eksempel 2.36.** Lad  $B = \frac{\ln 2}{2}$ . Hvis vi følger algoritmen i beviset til at bytte om på  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , finder vi præcis den ombytning, som vi har betragtet tidligere. I grafen har vi forbundet linierne, således at det er nemt at se, at vi tilføjer et positivt led efterfulgt af to negative led.



## Kapitel 3

# Funktionsfølger og -rækker

Vi vil nu udvide vores undersøgelse af talfølger og talrækker til følger af funktioner

$$f_1, f_2, f_3, \dots,$$

og senere til rækker af funktioner

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots,$$

hvor  $f_n$  er reelle eller komplekse funktioner. Hvis vi tænker os et givet  $x$ , så er en funktionsfølge ikke andet end en talfølge  $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ , og vi kan undersøge dens konvergens for all  $x$ . Dette fører til konceptet *punktvise konvergens* af funktionsfølgen til en mulig grænsefunktion  $f$ . Allerede det første eksempel vil vise, at egenskaber af en funktionsfølge, f.eks. kontinuitet af alle  $f_n$ , ikke nødvendigvis overlever grænseprocessen og at  $f$  kan være diskontinuert. Dette leder os til at se på alle  $x$  samlet og til en definition af en *uniform konvergens*, som sikrer, at kontinuitetsbegrebet overlever grænseprocessen (Afsnit 3.1).

Da en funktion er kontinuert i  $x$ , hvis

$$f(x) = \lim_{x' \rightarrow x} f(x'),$$

kan dette resultat ses som et kriterium, som giver tilladelse til ombytning af to grænseprocesser:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x' \rightarrow x} f_n(x') = \lim_{x' \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x').$$

Vi vil undersøge i Afsnit 3.2, under hvilke betingelser det er tilladt, at ombytte  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  og integration

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

og under hvilke betingelser

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'$$

Husk, at både Riemann-integration og differentiation er givet ved en grænseprocess.

### 3.1 Konvergens af funktionsfølger

#### Definition, eksempler og punktvis konvergens

**Definition 3.1** (Funktionsfølge). *Lad  $A \subseteq \mathbb{R}$  eller  $A \subseteq \mathbb{C}$  og for alle  $n \in \mathbb{N}$*

$$f_n : A \rightarrow \mathbb{R}.$$

*Vi siger at*

$$f_1, f_2, f_3, \dots$$

*eller  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er en reel funktionsfølge. Hvis  $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ , kalder vi  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  for en kompleks funktionsfølge.*

Hvis vi ser på et specielt punkt  $x$ , bliver funktionsfølgen til talfølgen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  med  $a_n = f_n(x)$ . Det er derfor ofte nyttigt at se på en funktionsfølge som en familie af talfølger for hvert  $x$ . Dette fører til følgende konvergensbegreb.

**Definition 3.2** (Punktvis konvergens). *Lad  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer punktvis mod  $f : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , hvis for alle  $x \in A$ :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

*Dvs., hvis*

$$\forall x \in A \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Når vi siger, at en funktion  $f_n : A' \rightarrow \mathbb{R}$  konvergerer punktvis mod  $f$  på  $A \subset A'$  mener vi at funktionen betragtet som funktion  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  konvergerer punktvis mod  $f : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ .

**Eksempel 3.3** ( $x^n$  på  $\mathbb{R}$ ). Lad

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = x^n$$

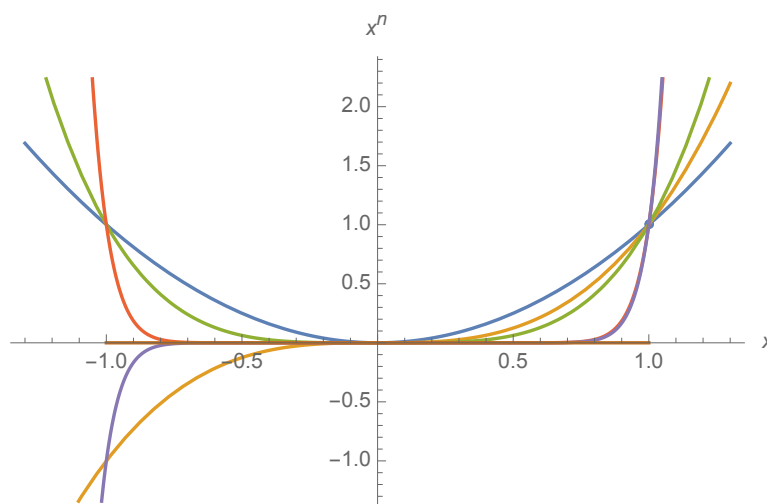
for alle  $n \in \mathbb{N}$ . Funktionsfølgen er givet ved

$$x, x^2, x^3, \dots$$

Bemærk, at  $x^n$  er en nulfølge for alle  $x$  med  $|x| < 1$ , at  $x^n$  er divergent for  $|x| > 1$  og  $x = -1$ , og at  $x^n$  er lig med 1 for  $x = 1$ . Derfor er funktionsfølgen punktvis konvergent på  $A = (-1, 1]$  mod grænsefunktionen  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-1, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Bemærk, at grænsefunktionen ikke er kontinuert, selvom funktionerne i følgen er kontinuerte. Grafen viser  $f_n$  for  $n = 2, 3, 4, 16, 17$  samt grænsefunktionen  $f$ .



For at understrege, hvad vi ser i grafen, betragt funktionsfølgen i punk-

terne  $x = -2, -1, \frac{1}{2}, 1, 2$ :

$$\begin{aligned} \{f_n(-2)\}_{n \in \mathbb{N}} & -2, 4, -8, 16, -32, \dots \\ \{f_n(-1)\}_{n \in \mathbb{N}} & -1, 1, -1, 1, -1, \dots \\ \{f_n(\frac{1}{2})\}_{n \in \mathbb{N}} & \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \\ \{f_n(1)\}_{n \in \mathbb{N}} & 1, 1, 1, \dots \\ \{f_n(2)\}_{n \in \mathbb{N}} & 2, 4, 8, \dots \end{aligned}$$

Med en enkel funktionfølge kan vi altså generere et hav af interessante talfølger.

**Eksempel 3.4** ( $x^n$  på  $\mathbb{C}$ ). Lad

$$f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad f_n(x) = x^n$$

Følgen konvergerer mod nul for alle  $x$  med  $|x| < 1$  og divergerer for alle  $x$  med  $|x| > 1$ . For  $x$  på cirklen  $|x| = 1$  er det bedst at skrive  $x$  på polarformen  $x = e^{i2\pi\theta}$ . Talfølgen er kun konvergent for  $\theta \in \mathbb{Z}$  ( $x = 1$ ) og ellers divergent. Hvis  $\theta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ , er mængden af fortætningspunkter endelig (med mindst to elementer); hvis  $\theta$  er irrationel, er mængden af fortætningspunkter hele cirklen (dette er ikke-trivielt).  $f$  er dermed punktvis konvergent på

$$A = \{x : |x| < 1\} \cup \{1\}$$

med grænsefunktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  givet ved

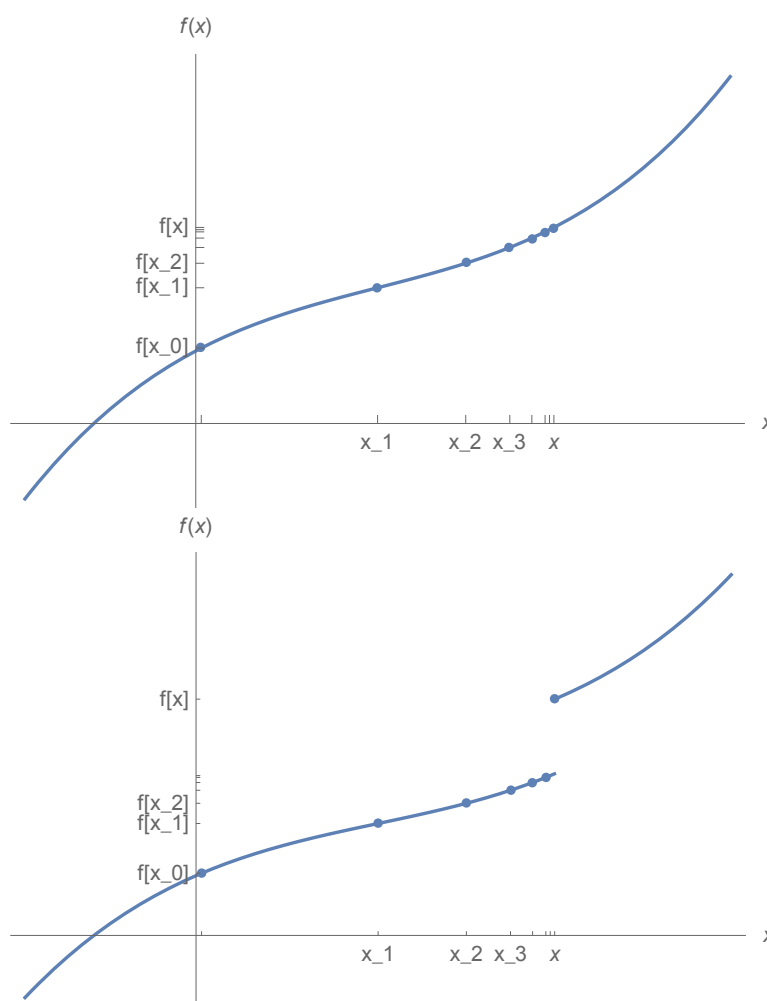
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x : |x| < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Begge eksempler viser, at en funktionsfølge  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  af kontinuerte funktioner kan konvergere punktvis til en diskontinuert grænsefunktion  $f$ . Grunden til det er, at det er vanskeligt, at ombytte to grænseprocesser. For bedre at kunne forstå dette problem, omskriver vi den almindelige definition af kontinuitet (f.eks. fra Analyse 0 bogen) til en definition, som er baseret på talfølger.

**Sætning 3.5.** Lad  $A \subset \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . En funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  er kontinuert i  $a \in A$ , hvis og kun hvis der for alle  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  med  $x_n \in A$  og  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , gælder, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Grafen illustrerer sætningen for en kontinuert og en diskontinuert funktion.



*Bevis.* "  $\Rightarrow$  ": Hvis  $f$  er kontinuert i  $A$ , findes der for alle  $a \in A$ , for alle  $\epsilon > 0$ , et  $\delta > 0$ , sådan at

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

for alle  $x$  med  $|x - a| < \delta$ . Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , findes der et  $N \equiv N(\delta(\epsilon))$ , sådan at for alle  $n \geq N$ :  $|x_n - a| < \delta$ . Dette medfører, at  $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$ .

” $\Leftarrow$ ”: Hvis  $f$  ikke er kontinuert, så findes der et  $\epsilon > 0$ , sådan at for alle  $\delta > 0$ , der findes et  $x$  med

$$|x - a| < \delta, \quad (3.1)$$

men

$$|f(x) - f(a)| > \epsilon. \quad (3.2)$$

Sæt nu  $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  og lad  $x_1, x_2, x_3, \dots$  være tilhørende værdier af  $x$ , som opfylder (3.1) og (3.2). Bemærk, at  $\lim x_n = a$ , men at  $|f(x_n) - f(a)| > \epsilon$  for alle  $n$  og derfor konvergerer talfølgen  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ikke mod  $f(a)$ .  $\square$

Grænsefunktionen  $f$  af en funktionsfølge  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er derfor kontinuert i  $x$ , hvis og kun hvis for alle  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , som konvergerer mod  $x$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} f_n(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_m). \quad (3.3)$$

Dvs. hvis og kun hvis vi får lov til at ombytte de to grænseprocesser.

**Eksempel 3.6.** I vores eksempel  $f_n(x) = x^n$ , lad  $x_m = 1 - \frac{1}{m}$  med  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = 1$ . Dermed bliver den venstre side af (3.3) til

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} f_n(x_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

hvor imod for alle  $m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^n = 0,$$

da  $|x_m| < 1$ . Dermed er den højre side af (3.3) lig med

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Grænseprocesserne må derfor ikke altid ombyttes.

**Uniform konvergens** For at forstå, hvorfor grænsefunktionen af funktionsfølgen  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , hvor  $f_n(x) = x^n$ , ikke er kontinuert, er det bedst, at vi ser en gang til på beviset af punktvis konvergens. Lad  $0 < x < 1$  og  $\epsilon > 0$ . Så er

$$|x^n - 0| = x^n < \epsilon \quad \forall n \geq N := \left\lceil \frac{\log \epsilon}{\log x} \right\rceil \quad (3.4)$$



Vi ser, at  $N$  ikke kun afhænger af  $\epsilon$ , men også af  $x$ :  $N(x, \epsilon)$ .

Mens talfølgen er konstant (og dermed hurtigst muligt konvergerende) for  $x = 1$ :

$$N(1, \epsilon) := 1,$$

bliver konvergensten langsommere og langsommere (dvs.  $N$  større og større), jo mere vi nærmer os  $x = 1$  nedefra

$$N(x, \epsilon) = \left\lceil \frac{\log \frac{1}{\epsilon}}{\log \frac{1}{x}} \right\rceil \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} N(x, \epsilon) = \infty.$$

Da  $N$  kan ikke vælges uafhængigt af  $x$ , siger vi, at konvergensten ikke er uniform i  $x$ . Det er intuitivt, at dette er grunden til at, at grænsefunktionen får en diskontinuitet ved  $x = 1$ . Udstyret med dette eksempel, indfører vi nu formelt definitionen *uniform konvergens*. Som vi senere skal se, sikrer os en uniform konvergent funktionsfølge, at grænsefunktionen er kontinuert.

Vi starter med at definere en såkaldt norm på mængden af funktioner med samme definitionsområde.

**Definition 3.7** (Den uniforme norm (sup-norm)). *Lad  $f : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , så er den uniforme norm (sup-normen) givet ved*

$$\|f\|_A = \sup\{|f(x)|, x \in A\}.$$

*Når vi undlader at sætte  $A$  i subskript, er  $A$  indforstået.*

Denne norm karakteriserer, hvornår en funktion  $f$  er begrænset ( $f$  er begrænset, hvis og kun hvis  $\|f\|_A < \infty$ ), men den er også god til at måle afstandene mellem to funktioner. Den uniforme norm er for funktioner, hvad absolutværdien var for tal. Specielt opfylder den trekantsuligheden

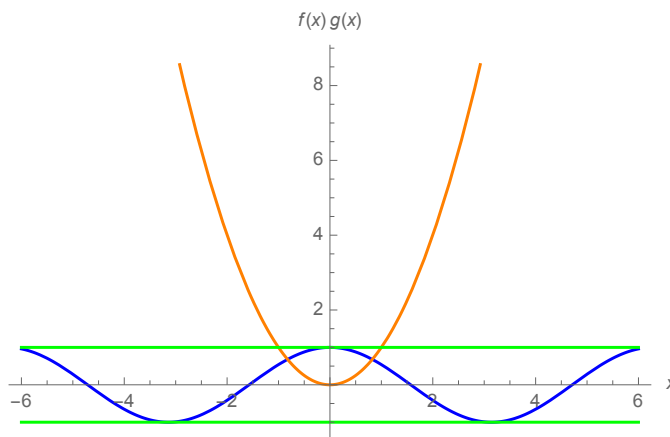
$$\|f + g\|_A \leq \|f\|_A + \|g\|_A.$$

**Definition 3.8** (Afstand). *Lad  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Så er afstanden mellem  $f$  og  $g$  givet ved*

$$d_A(f, g) := \|f - g\|_A.$$

I den sidste del af kurset, som handler om metriske rum, skal vi kalde  $d$  for en metrik på funktionsrummet.

**Eksempel 3.9** (Begrænsede funktioner).  $f(x) = \cos x$  er en begrænset funktion, da  $\|f\|_{\mathbb{R}} = 1$ .  $g(x) = x^2$  er ikke begrænset på  $\mathbb{R}$ , da  $\|g\|_{\mathbb{R}} = \infty$ , men begrænset på  $[0, 1]$ , da  $\|g\|_{[0,1]} = 1$ .

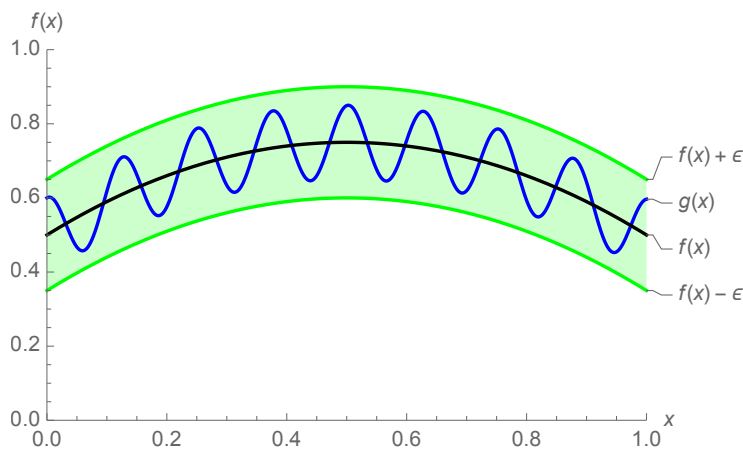


Lad  $A \subset \mathbb{R}$ . Det er ikke svært at vise, at mængden af begrænsede funktioner

$$B(A, \mathbb{R}) := \{f : A \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_A < \infty\}$$

udgør et reelt vektorrum med metrik  $d_A$ .

Når vi tegner grafer af begge funktioner i det samme koordinatsystem, så svarer afstanden mellem funktionerne til den maksimale vertikale afstand mellem graferne. Hvis  $d_A(f, g) \leq \epsilon$ , så ligger  $g$  i " $\epsilon$ -båndet omkring  $f$ " (og omvendt). Grafen illustrer en funktion  $g$ , som ligger i  $\epsilon$ -båndet af  $f$ . Her valgte vi  $f(x) = \frac{1}{2} + x - x^2$ ,  $g(x) = f(x) + \frac{1}{10} \cos(50x)$  og  $\epsilon = 0.15$ .



**Definition 3.10.** Lad  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ . En funktionsfølge  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer uniformt mod  $f : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , hvis

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : d(f_n, f) \leq \epsilon.$$

Med andre ord, hvis talfølgen  $\{d_A(f, f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer mod nul. Hvis vi skriver definitionen helt ud, bliver den til

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Hvis konvergenen er uniform, så gælder, at for alle  $\epsilon > 0$ , findes der et  $N$ , således at for alle  $n \geq N$ , ligger  $f_n$  i  $\epsilon$ -båndet af  $f$  (se grafen). Det er vigtigt at påpege, at forskellen mellem punktvis konvergens ligger i rækkefølgen af kvantorerne. For punktvis konvergens skriver vi  $\forall x \exists N$ , hvilket betyder, at  $N$  må afhænge af  $x$ :  $N \equiv N(x)$ , mens vi skriver for uniform konvergens  $\exists N \forall x$  hvilket betyder, at  $N$  ikke må afhænge af  $x$ .

Bemærk, at uniform konvergens medfører punktvis konvergens med samme grænsefunktion.

Vi vil nu udvide Cauchys kriterium til uniform konvergens og begynder med definitionen af Cauchy for funktioner.

**Definition 3.11.** Lad  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ . En funktionsfølge  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er en Cauchy-følge hvis

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N : d(f_n, f_m) \leq \epsilon.$$

Selve Cauchy-kriteriet vil vi bruge til at bevise det vigtige Weierstrass-Majorant-kriterium senere hen. Det vil også have betydning for vores studier af fuldstændige metriske funktionsrum.

**Sætning 3.12** (Cauchy-kriterium for uniform konvergens). Lad  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er uniformt konvergent mod  $f$ , hvis og kun hvis  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er en Cauchy-følge.

*Bevis.* Vi viser først, at uniform konvergens medfører Cauchy-egenskaben. Hvis  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer uniformt mod  $f$ , findes der for alle  $\epsilon > 0$  et  $N$ , sådan at for alle  $n \geq N$

$$d(f_n, f) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ved hjælp af trekantsuligheden ser vi at for alle  $n, m \geq N$

$$d(f_n, f_m) \leq d(f_n, f) + d(f, f_m) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

dvs. funktionsfølgen er Cauchy.

Vi viser nu, at Cauchy-egenskaben medfører, at konvergens er uniform. For alle  $x \in A$  (dvs. punktvis), er  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  en Cauchy-følge. Cauchy-kriteriet for talfølger medfører, at

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

eksisterer (punktvis konvergens). Hvis vi skriver konvergensbegrebet ud, siger det, at der for alle  $x$  og alle  $\delta > 0$ , findes et  $M(x, \delta)$ , sådan at for alle  $m \geq M(x, \delta)$ :

$$|f_m(x) - f(x)| < \delta.$$

Da  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er en Cauchy-følge, gælder det, at der for alle  $\epsilon > 0$ , findes et  $N$ , sådan at for alle  $n, m \geq N(\epsilon)$  og alle  $x$ :

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon.$$

Kombinerer vi de to udsagn, finder vi, at for alle  $n \geq N(\epsilon)$ , og  $m \geq \max\{N(\epsilon), M(x, \delta)\}$ :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon + \delta.$$

Da dette gælder for alle  $\delta > 0$  og  $x$ , har vi vist, at for alle  $\epsilon > 0$  og  $n \geq N(\epsilon)$ :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

□

Bemærk, at bevisets vigtigste ingrediens var Cauchys kriterium, men at beviset alligevel ikke var trivielt. Vi skal bruge resultatet lidt senere, når vi ser på funktionsrækker.

Vores næste sætning viser at uniform konvergens af kontinuerte funktioner fører til en kontinuert grænsefunktion. Husk, at vi indførte begrebet uniform konvergens netop for at vise dette resultat.

**Sætning 3.13.** Lad  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  være kontinuerte for alle  $n \in \mathbb{N}$ . Hvis  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer uniformt mod  $f : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , så er  $f$  kontinuert.

*Bevis.* Lad  $a \in A$ . Vi skal vise, at  $f$  er kontinuert i  $a \in A$ , dvs., givet  $\epsilon > 0$ , skal vi finde  $\delta > 0$ , således at  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$  for alle  $|x - a| < \delta$ .

Lad  $\epsilon > 0$  være givet. Da konvergensten er uniform, kan vi finde et  $N$ , således at  $d_A(f, f_N) \leq \epsilon/3$ . Fordi  $f_N$  nu også er kontinuert kan vi finde et  $\delta > 0$ , sådan at  $|f_N(x) - f_N(a)| < \epsilon/3$  for alle  $|x - a| < \delta$ . Ved hjælp af trekantsuligheden finder vi

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

som er præcis det, vi vil vise.  $\square$

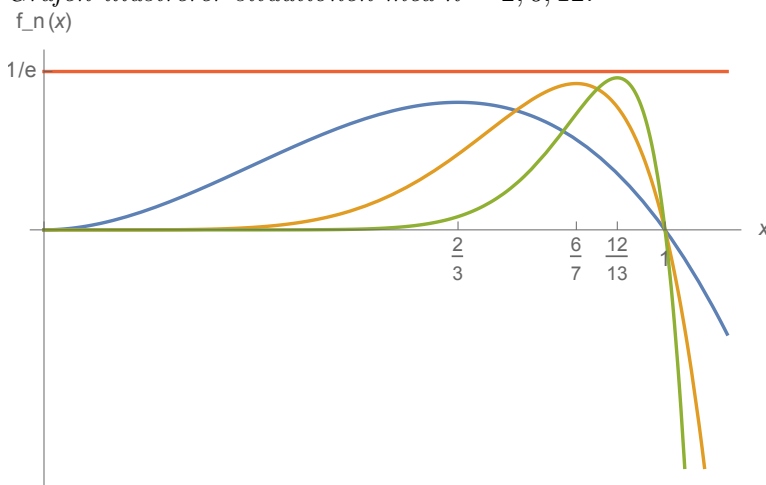
**Eksempel 3.14.** Følgende funktionsfølge skal illustrere, at funktioner kan konvergere til en kontinuert funktion, selvom konvergensten kun er punktvis (og endda følgen er begrænset) og ikke uniform. Lad  $f_n(x) = nx^n(1-x)$ , som konvergerer punktvis mod nulfunktionen på  $[0, 1]$ . Konvergensten er ikke uniform, da funktionsværdien i maximalpunktet  $x_n = \frac{n}{n+1}$  er givet ved

$$f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

og dermed forbliver udenfor et  $\epsilon$ -bånd for alle  $\epsilon < \frac{1}{e}$  og stort nok  $n$ , da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Grafen illustrerer situationen med  $n = 2, 6, 12$ .



### 3.2 Integration og afledning af funktionsfølger

Hvis en funktionsfølge bestående af differentiable/ kontinuerte  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer, konvergerer så også følgen af de afledte  $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  og/ eller følgen af stamfunktionerne  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ?

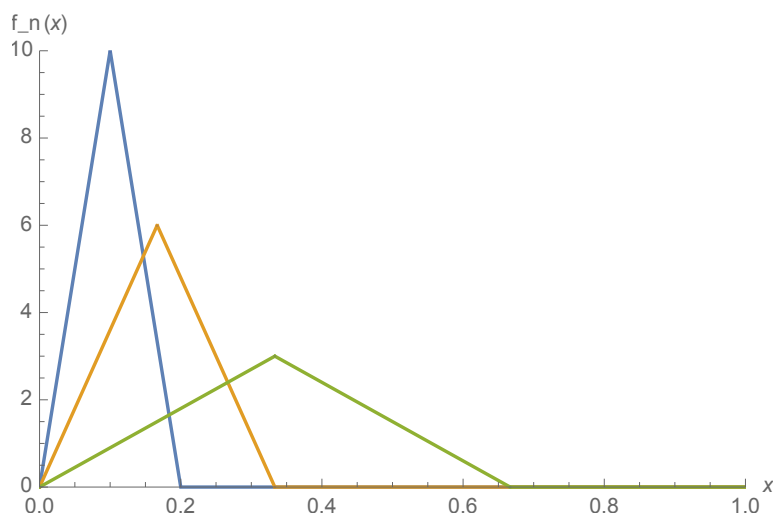
**Eksempel 3.15** (Stamfunktionen). *Lad  $n \geq 2$ . Betragt den kontinuerte funktion*

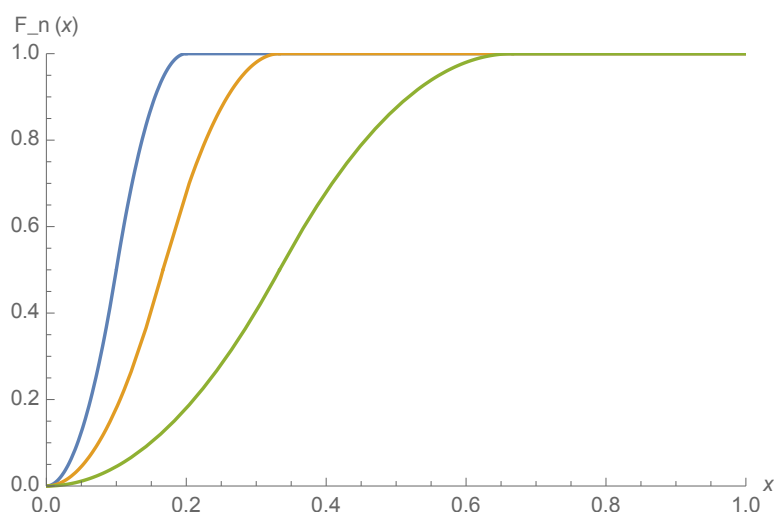
$$\begin{aligned} f_n(x) &= n^2 x & x \in [0, \frac{1}{n}) \\ f_n(x) &= n - n^2(x - \frac{1}{n}) & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ f_n(x) &= 0 & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{aligned}$$

som konvergerer punktvis til nulfunktionen  $f(x) = 0$ . Stamfunktionen  $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$  er derimod ikke lig med stamfunktionen af grænsefunktionen,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt = 0$ . Specielt er ved  $x = 1$ :  $F_n(1) = 1$  for alle  $n \geq 2$ , hvorimod  $F(1) = 0$ . Vi ser derfor, at integration og  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  generelt ikke kan byttes om:

$$\int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 f_n(t) dt \right)$$

Graferne illustrerer situationen med  $n = 3, 6, 10$ .





Eksemplet viser, at punktvis konvergens af  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mod  $f$  ikke er tilstrækkeligt for at sikre, at  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer til  $F$ . Følgende sætning viser, at uniform konvergens er tilstrækkeligt.

**Sætning 3.16.** *Lad  $\{f_n\}$  være en funktionsfølge af kontinuerte funktioner på  $[a, b]$  med stamfunktioner  $F_n(x) := \int_c^x f_n(t) dt$ , hvor  $c \in [a, b]$ . Hvis  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer uniformt mod  $f$ , så konvergerer  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uniformt mod  $F(x) := \int_c^x f(t) dt$ . Specielt gælder for hvert  $x$ :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_c^x f_n(t) dt \right) = \int_c^x \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt.$$

*Bevis.* Lad  $\epsilon > 0$  være givet. Fordi konvergens  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mod  $f$  er uniform, kan vi finde et  $N$ , således at der for alle  $n \geq N$  gælder

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}.$$

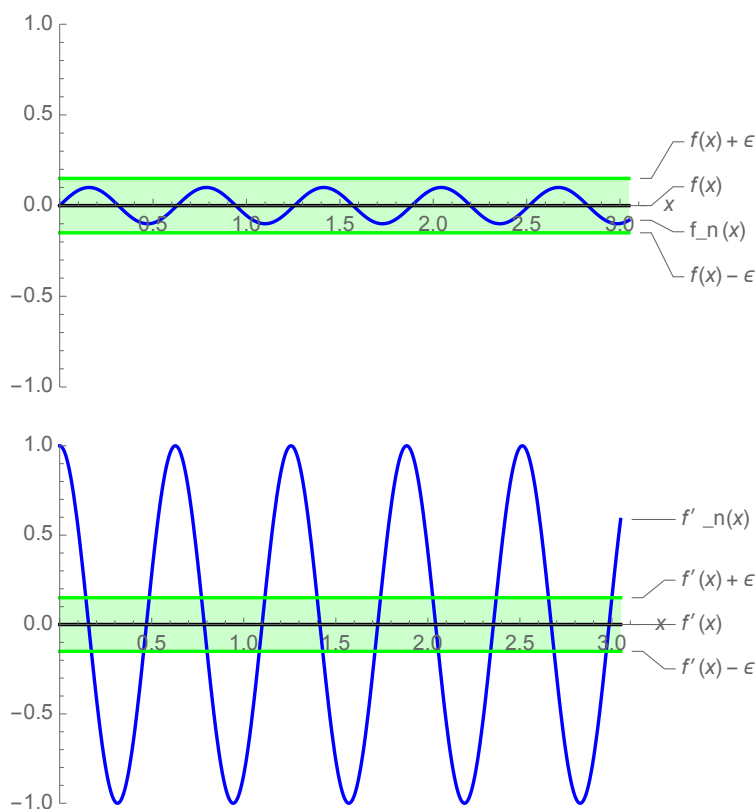
Nu bruger vi denne ulighed til at estimere differensen

$$\begin{aligned} |F(x) - F_n(x)| &= \left| \int_c^x f(t) - f_n(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_c^x |f(t) - f_n(t)| dt \right| \\ &\leq \left| \int_c^x \frac{\epsilon}{b-a} dt \right| \\ &= \epsilon \frac{|x-a|}{b-a} \leq \epsilon \end{aligned}$$

hvilket viser påstanden. □

Det er naturligt at ønske, at et lignende resultat skal holde for den afledte, men det er ikke tilfældet, som det følgende eksempel viser.

**Eksempel 3.17** (Den afledte). Lad  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  med  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$  konvergerer uniformt mod nulfunktionen  $f(x) = 0$ , hvorimod følgen af afledningerne  $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  med  $f'_n(x) = \cos(nx)$  ikke konvergerer, specielt ikke til den afledte  $f'(x) = 0$ . Grafen illustrerer situationen med  $n = 10$  og  $\epsilon = 0.15$ .



Hvis vi fordrer at de afledte konvergerer uniformt, kan vi dog bruge Sætning 3.16 på  $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  og bevise følgende udsagn for  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Korollar 3.18.** Lad  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en funktionsfølge af kontinuert differentiable funktioner på  $[a, b]$  som konvergerer mindst i et punkt  $d \in [a, b]$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(d) = c.$$

Antag at  $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer uniformt mod en funktion  $h$ . Da konvergerer  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uniformt mod en differentiabel funktion  $f$  og der gælder  $f' = h$ .



Specielt gælder for hvert  $x$ :

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x).$$

*Bevis.* Bemærk, at antagelsen at  $f_n$  er kontinuert differentiabel betyder, at  $f_n$  er differentiabel og at den afledte  $f_n'$  er kontinuert og derfor integrabel. Integralerne

$$g_n(x) := \int_d^x f_n'(t) dt$$

og

$$g(x) := \int_d^x h(t) dt$$

er derfor veldefineret. Ved hjælp af Sætning 3.16 ser vi, at  $g_n(x)$  konvergerer uniformt mod  $g(x)$ .

Bemærk, at  $g_n$  og  $f_n$  er begge to stamfunktioner for  $f_n'$ . Med analysens fundamnetalsætning kan vi derfor konkludere, at

$$f_n(x) = g_n(x) + c_n,$$

hvor vi brugte  $g_n(d) = 0$  og har indført konstanterne  $c_n := f_n(d)$ .

Da  $c_n$  konvergerer mod  $c$  ifølge antagelsen, finder vi, at  $f_n(x)$  konvergerer uniformt mod  $f(x) := g(x) + c$ . Specielt gælder  $f' = h$ .  $\square$

### 3.3 Funktionsrækker

**Definition 3.19.** Lad  $A \subseteq \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Lad  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en funktionsfølge med  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ , hvor  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Definer  $\sigma_N := \sum_{n=1}^N f_n$ . Da kaldes funktionsfølgen  $\{\sigma_N\}_{n \in \mathbb{N}}$  for funktionsrækken genereret af  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  og betegnes ved

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

**Definition 3.20.** Funktionsrækken  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  konvergerer punktvis (uniformt) hvis afsnitfunktionsfølgerne  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ , konvergerer punktvis (uniformt).

**Eksempel 3.21** (Geometriske række). Vores undersøgelser i konteksten af talrækker fører umiddelbart til udsagnet at

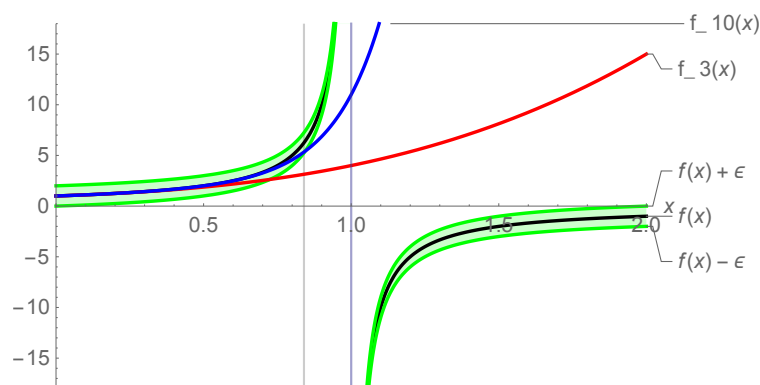
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

konvergerer punktvis på  $[0, 1)$  mod grænsefunktionen  $\frac{1}{1-x}$ . For ethvert  $\delta > 0$  er konvergenen uniform på  $[0, 1 - \delta]$ , da

$$\left| \sum_{n=0}^N x^n - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{x^{N+1}}{1-x} \leq \frac{(1-\delta)^{N+1}}{\delta} < \epsilon$$

for  $N := \left\lceil \frac{\log(\delta\epsilon)}{\log(1-\delta)} \right\rceil$ , specielt er  $N$  uafhængig af  $x$ .

Grafen viser afsnitssummerne for  $N = 3, 10$  (blå og rød) sammen med grænsefunktionen  $\frac{1}{1-x}$  samt dens  $\epsilon$ -bånd ( $\epsilon = 1$ ). Vi kan se, at  $f_{10}$  ligger indenfor båndet i intervallet  $[0, 1 - \delta]$  med  $\delta = 0.16$  (vertikal linie). Divergensen ved  $x = 1$  er også indikeret.



Det er nemt at udvide argumentationen til at vise uniform konvergens i området

$$A = \{x : |x| \leq 1 - \delta\} \subset \mathbb{C}.$$

**Sætning 3.22** (Weierstraß Majoranttest). Lad  $A \subseteq \mathbb{R}(\mathbb{C})$  og lad  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Hvis  $|f_n(x)| \leq a_n$  for alle  $x \in A$  og  $n \in \mathbb{N}$  og hvis  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  er konvergent, så konvergerer  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  uniformt.

*Bevis.* Lad  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være følgen af afsnitssummerne for talfølgen og  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være følgen af afsnitssummerne for funktionsfølgen. Da  $|f_n(x)| \leq a_n$  for alle  $x$  ifølge antagelsen, finder vi, at for alle  $m \geq n$ :

$$\|\sigma_n - \sigma_m\|_A = \left\| \sum_{k=n}^m f_k \right\|_A \leq \sum_{k=n}^m \|f_k\|_A \leq \sum_{k=n}^m a_k = s_n - s_m. \quad (3.5)$$

Da  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er konvergent ifølge antagelsen, er den også Cauchy. Uligheden (3.5) medfører nu, at også  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er en Cauchy-følge i den uniforme forstand og dermed uniformt konvergent ifølge Sætning 3.12.  $\square$

Bemærk, at konvergens af

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_n\|_A$$

medfører uniform konvergens af

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_n,$$

og at dette kan testes ved hjælp af sammenligning af talrækken  $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_n\|_A$  med  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Når vi taler om metriske rum, skal vi omformulere dette ved at sige, at absolut konvergens af  $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$  medfører konvergens i den uniforme norm.

Vi betragter følgende eksempel.

**Eksempel 3.23.** Lad  $R > 0$ . Vi vil vise, at funktionsrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

er uniformt konvergent i regionen

$$\bar{B}_R := \{x : |x| \leq R\}.$$

Bemærk, at for alle  $x \in \bar{B}_R$  gælder

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{R^n}{n!}$$

Vi vil nu bruge kvotienttesten for at se, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!}$$

er konvergent:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{R^n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{R}{n+1} = 0.$$

Vi konkluderer med Sætning 3.22 at funktionsrækken er uniformt konvergent i regionen  $\bar{B}_R$ . Da  $R$  er arbitrært, er funktionen punktvis konvergent på hele  $\mathbb{C}$ . Konvergens er dog kun uniform på begrænsede mængder, som man kan nemt verificere.



## Kapitel 4

# Potensrækker

Betragtet som kompleks funktionsrække, har vi set, at den geometriske række konvergerer indenfor enhedscirklen og divergerer udenfor. I dette afsnit skal vi se på arbitrære *potensrækker*, dvs. funktionsrækker af formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

hvor  $x \in \mathbb{C}$  og vil vise, at konvergensområdet altid er en cirkel med radius  $r$ . Hvis vi indskrænker til reelle  $x$ , bliver cirklen til et interval og vil vi også finde et kriterium for kontinuitet i endepunkterne af intervallet, f. eks.  $x = r$  (Abels sætning). Bagefter finder vi regler for integration og differentiering af potensrækker ud fra de kendte regler for monomerne  $x^n$ . Til sidst ser vi på Taylorrækken, hvilken, som vi bemærker, er en potensrække. Dermed får vi mulighed for at finde potensrækker til vigtige funktioner såsom sinus, cosinus og eksponentialfunktionen.

### 4.1 Punktvis og uniform konvergens

**Konvergensradius** Vi starter med at definere, hvad en potensrække er, for derefter at undersøge områder af punktvis og uniform konvergens.

**Definition 4.1.** Lad  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  være en reel eller kompleks talfølge. *Funktionsrækken*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

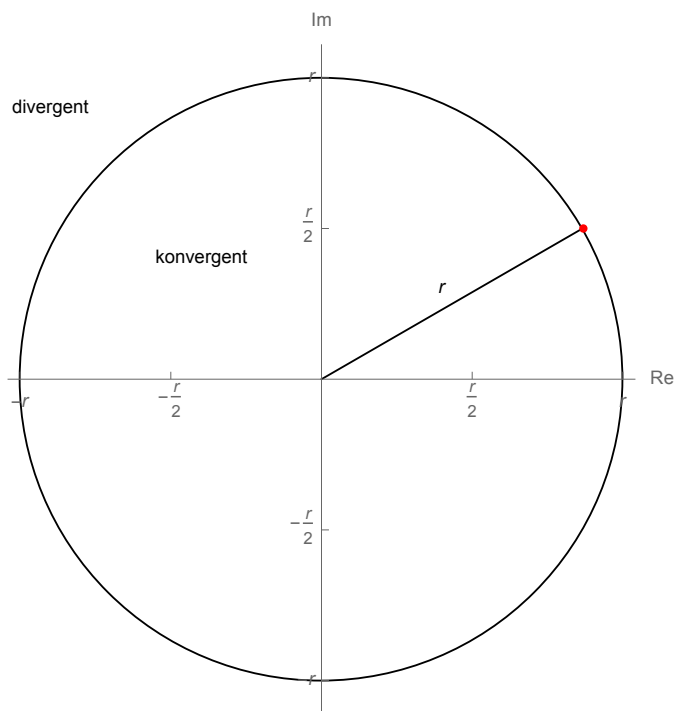
kaldes en potensrække.  $x$  kan betragtes enten som en reel eller kompleks variabel.

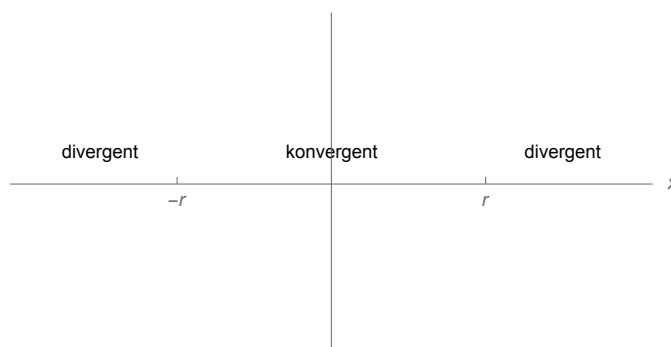
Mere generelt er en potensrække en række af formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$$

for et  $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , men som udgangspunkt betragter vi kun situationen  $a = 0$ , da alle resultater uden problemer kan overføres dertil med en variabelsubstitution  $x \mapsto x + a$ .

Konvergens af en potensrække kan beskrives med et enkelt tal  $r$  (positiv, lig med nul eller lig med uendelig), som benævnes konvergensradien. Graferne illustrerer situationen, hvis  $x \in \mathbb{C}$  og  $x \in \mathbb{R}$ . Den efterfølgende sætning karakteriserer  $r$ .





For at formulere sætningen bedst muligt indfører vi

$$B_r := \{x \in \mathbb{C} : |x| < r\}$$

og repeterer definitionen

$$\bar{B}_r := \{x \in \mathbb{C} : |x| \leq r\},$$

hvor vi tillader  $r = \infty$ .

**Sætning 4.2.** For hver potensrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

findes der en konvergensradius  $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ , sådan at rækken er

- absolut konvergent for alle  $x \in B_r$
- divergent for alle  $x \notin \bar{B}_r$
- uniformt konvergent i området  $\bar{B}_s$  for alle  $s < r$ .

Ydermere er  $r$  givet ved Cauchy-Hadamard formelen

$$r = \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}, \quad (4.1)$$

hvor vi bruger konventionen  $\frac{1}{0} = \infty$  og  $\frac{1}{\infty} = 0$ .

Hvis man kun betragter reelle  $x$ , kan man erstatte  $B_r$  med intervallet  $(-r, r)$  og  $\bar{B}_r$  med  $[-r, r]$ .

*Bevis.* Lad  $x$  være et konkret tal. Ifølge rodtesten er talfølgen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  konvergent / divergent, hvis

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

er strengt mindre / strengt større end et. Dermed er  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  konvergent for alle  $x$  med

$$|x| < \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1},$$

og divergent for alle  $x$  med

$$|x| > \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}.$$

Dette viser de første to påstande. Lad nu  $s < r$ . For at bevise, at uniform konvergens holder i  $\bar{B}_s$ , bemærk da, at

$$|a_n x^n| \leq |a_n| s^n,$$

for alle  $x$  med  $|x| \leq s$  og alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $s < r$ , er

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| s^n$$

konvergent, som vi lige har vist. Vi kan derfor bruge Weierstrass Majoranttest til at konkludere, at potensrækken er uniformt konvergent i området  $\bar{B}_s$ .  $\square$

Vi betragter tre eksempler, hvor henholdsvis  $r = 1, \infty$  og  $0$ .

**Eksempel 4.3** (Geometriske rækker). *Som vi har set tidligere, har den geometriske række*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

konvergensradius  $r = 1$ . Denne gang ser vi det ved hjælp af Cauchy-Hadamard formelen

$$r^{-1} := \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

**Eksempel 4.4.** *Potensrækken*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$



har konvergensradius  $r = \infty$ , da

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = 0. \quad (4.2)$$

Dette udsagn kan vises ved at observere, at for  $S > 0$ , findes der et  $N \in \mathbb{N}$ , sådan at

$$n! \geq S^n,$$

for alle  $n \geq N$ . Derved er

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{S^n} \right)^{\frac{1}{n}} = S^{-1}.$$

Da dette gælder for arbitrære  $S > 0$ , må (4.2) være sandt. Alternativt kan man bruge kvotienttesten til at bestemme konvergensradien, hvilket er nemmere i dette tilfælde og hvilket vi allerede gjorde, da vi diskuterede uniform konvergens af dette række i Eksempel 3.23.

**Eksempel 4.5.** *Potensrækken*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

har konvergensradius  $r = 0$ , da

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty.$$

Bemærk, at rækken konvergerer i  $x = 0$  (ligesom enhver potensrække konvergerer i det centrale punkt  $a$ ).

Bemærk, at sætningen ikke siger noget om konvergens i punkterne  $r$  og  $-r$ . Hvis rækken konvergerer i disse punkter, er det også muligt, at rækken konvergerer uniformt på hele det lukkede interval  $[r, -r]$

**Eksempel 4.6** (Endepunkter). *Ifølge formelen for konvergensradien har rækkerne  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  og  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$  konvergensradius lig med 1.*

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  konvergerer ikke i nogen endepunkter, da  $x^n$  ikke er en nulfølge for  $|x| = 1$ .

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  konvergerer i punktet  $x = -1$ , da det svarer til den alternerende række, men ikke i  $x = 1$ , da det svarer til den harmoniske række.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$  konvergerer uniformt på hele intervallet  $[-1, 1]$ , hvilket kan vises ved hjælp af Weierstraß Majoranttest, da

$$\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

for alle  $x$  med  $|x| \leq 1$ , og da  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergerer.

**Kontinuitet** Ud fra vores generelle undersøgelser af uniform konvergens er det oplagt, at grænsefunktionen er kontinuert i  $B_r$ . Vi skal hurtigt skrive dette ned og bagefter undersøge, hvornår konvergens kan udvides til randpunkterne.

**Korollar 4.7** (Kontinuitet i det indre). *Potensrækken  $\sum_n a_n x^n$  med konvergensradius  $r$  har sumfunktion, som er kontinuert i  $B_r$ . Specielt er den konvergent for reelle  $x$  i det åbne interval  $(-r, r)$ .*

*Bevis.* Vi viser kontinuitet for hvert  $x \in B_r$ . Da  $|x| < r$  kan vi vælge et  $s$ , sådan at  $|x| < s < r$ . Da vi med Sætning 4.2 ved, at funktionsrækken er uniformt konvergent i  $\bar{B}_s$ , ser vi med Sætning 3.13, at den også er kontinuert i  $\bar{B}_s$ . Da  $x \in B_s$ , er  $x$  et kontinuitetspunkt for sumfunktionen. Beviset er fuldført, da  $x \in B_r$  var arbitrært valgt.  $\square$

Hvis potensrækken konvergerer i et endepunkt (fx  $x = r$ ) af konvergensintervallet  $(-r, r)$ , så kan vi med følgende sætning konkludere, at kontinuitetsområde udvides til  $(-r, r]$ . Beviset er en af de længste, men også en af de mest fascinerende i kurset.

**Sætning 4.8** (Abel). *Lad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  være en potensrække med konvergensradius  $r$ , hvor  $0 < r < \infty$ , og som også er konvergent i  $x = r$ . Da er sumfunktionen  $f(x)$  kontinuert i endepunktet  $x = r$ , dvs.*

$$f^-(r) = f(r),$$

hvor  $f^-(r) := \lim_{x \rightarrow r^-} f(x)$ . *Specielt er sumfunktionen kontinuert i intervallet  $(-r, r]$ .*

*Bevis.* Uden tab af generalitet antager vi, at  $r = 1$ , da vi altid kan betragte funktionsrækken i  $y = \frac{x}{r}$ , som giver en ny potensrække. Lad  $1 > x \geq 0$  i hele beviset. Ved antagelse gælder

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sim f(x)$$

og

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sim f(1).$$

Lad  $s_n$  være afsnitssummerne af talrækken  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Definer  $s_{-1} = 0$ , og bemærk, at

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m a_k x^k &= \sum_{k=0}^m (s_k - s_{k-1}) x^k \\ &= s_m x^m + \sum_{k=0}^{m-1} s_k x^k - \sum_{k=1}^m s_{k-1} x^k \\ &= s_m x^m + \sum_{k=0}^{m-1} s_k x^k - x \sum_{k=1}^m s_{k-1} x^{k-1} \\ &= s_m x^m + \sum_{k=0}^{m-1} s_k x^k - x \sum_{k=0}^{m-1} s_k x^k \\ &= s_m x^m + (1-x) \sum_{k=0}^{m-1} s_k x^k. \end{aligned}$$

Da  $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$  er begrænset, og  $x < 1$ , har vi  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m x^m = 0$ , og derfor er

$$(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k \sim f(x).$$

Ved hjælp af sumfunktionen for den geometriske række ser vi, at

$$(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sim 1$$

og ved hjælp af regnereglerne for talfølger finder vi

$$(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - f(1)) x^k \sim f(x) - f(1) \quad (4.3)$$

Vi vil nu vise, at rækken til venstre konvergerer til noget småt. For at gøre dette, splitter vi summen op i to dele og giver en øvre grænse på hver del.

Lad  $\epsilon > 0$  være givet. Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f(1)$ , findes der et  $N \in \mathbb{N}$ , sådan at

$$|f(1) - s_n| \leq \epsilon/2$$

for alle  $n \geq N$ . Hvis vi nu ser på den venstre side af (4.3), ser vi, at summen til

$$(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - f(1))x^k$$

er lig med

$$(1-x) \sum_{k=0}^N (s_k - f(1))x^k$$

plus summen til

$$(1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} (s_k - f(1))x^k.$$

Den sidste sum er mindre i absolutværdi end summen til

$$(1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2} x^k$$

og dermed mindre end  $\frac{\epsilon}{2}$ . Da  $N$  er endeligt og  $|x| \leq 1$ , findes der ydermere et  $\delta > 0$ , sådan at

$$(1-x) \sum_{k=0}^N |s_k - f(1)|x^k \leq \epsilon/2$$

for alle  $x > 1 - \delta$ . Vi har derfor fundet et estimat af  $2 \times \frac{\epsilon}{2}$  på den venstre side af (4.3) og konkluderer derfor, at

$$|f(x) - f(1)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

for alle  $1 > x > 1 - \delta$ . Dermed ser vi, at

$$\lim_{x \rightarrow r^-} f(x) = f(r).$$

□

## 4.2 Integration og differentiering

Vi vil nu undersøge specieltilfældet af vores sætning om integration og differentiering af funktionsfølger for potensrækker. Følgende korollar er en direkte konsekvens af vores karakterisering af konvergensområdet.

**Korollar 4.9.** *Lad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim f(x)$$

være en potensrække med konvergensradius  $r$ . Da gælder

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \sim F(x) := \int_0^x f(t) dt,$$

og

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \sim f'(x)$$

for alle  $x$  med  $|x| < r$ . Desuden har begge rækker konvergensradius lig med  $r$ .

*Bevis.* Vi starter med at verificere, at de to potensrækker har konvergensradius lig med  $r$ . For den første potensrække finder vi ved hjælp af Cauchy-Hadamard formelen,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{n+2} \right|^{\frac{1}{n+2}} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+2}} \left( \frac{1}{n+2} \right)^{\frac{1}{n+2}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+2}} e^{\frac{1}{n+2} \ln \frac{1}{n+2}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = r^{-1}, \end{aligned}$$

da  $\frac{1}{n+2} \ln \frac{1}{n+2}$  er en nulfølge og dermed  $e^{\frac{1}{n+2} \ln \frac{1}{n+2}}$  konvergerer til 1.

Et lignende argument kan bruges for at udregne konvergensradien for den anden potensrække:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}(n+1)|^{\frac{1}{n+2}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = r^{-1}.$$

Vi vil nu undersøge grænsefunktionerne. Bemærk, at afsnitsfølgerne

$$f_N(x) := \sum_{n=0}^N a_n x^n$$

er kontinuerte. Vi bruger nu Sætning 3.16 (med  $c = 0$ ) til at konkludere, at integration og grænseprocessen bytter plads

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^x f_n(t) dt \right) = \int_0^x \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt.$$

og finder det første udsagn, da

$$\int_0^x f_N(t) dt = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^N a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^N a_n \left( \int_0^x t^n \right) dt = \sum_{n=0}^N a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Ved at differentiere de differentiable funktioner  $f_N$  finder vi

$$f'_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n.$$

Da  $f'_N$  er kontinuert, og rækken er uniformt konvergent i  $\overline{B}_s$  for  $s < r$ , konvergerer den mod en kontinuert funktion  $h$  på  $\overline{B}_r$ . Da  $f_N$  konvergerer i punktet 0 kan vi bruge Korollar 3.18 til at konkludere, at  $f_N$  konvergerer til en differentiable funktion som opfylder  $f' = h$ .  $\square$

**Eksempel 4.10.** *Betragt den geometriske række,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \sim \frac{1}{1+x},$$

som har  $r = 1$ . Ved Korollar 4.9 kan vi integrere begge sider og får

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \sim \ln(1+x).$$

I punktet  $x = 1$  er rækken lig med den alternerende harmoniske række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

hvilken konvergerer til en grænseværdi  $c$  ifølge Leibniztesten. Vi kan derfor bruge Abels sætning til at konkludere, at sumfunktionen opfylder

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1).$$

Bemærk, at den højre side er lig med  $c$  og at den venstre side kan regnes ud som

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln 2,$$

da  $\ln(1+x)$  er kontinuert i  $x = 1$ . Vi har derfor givet bevis for vores tidligere numeriske observation, at den alternerende harmoniske række har sum  $\ln 2$ .

Vi kan også aflede den oprindelige række for at vise, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} \sim \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

### 4.3 Taylorrækker

Vores spørgsmål indenfor funktionsrækker (men også talrækker) har været:

- Givet en funktionsrække, konvergerer den? Og hvis ja, hvad er dens sumfunktion?

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \sim f \quad ?$$

Hvorimod funktionsrækker og talrækker generelt er svær at analysere, har vi set, at potensrækker er en del nemmere, blandt andet er konvergensområdet en cirkel, der er givet ved en eksPLICIT formel. Selv hvis vi har en simpel funktion (f.eks. sinus), er det meget nyttigt at betragte den som potensrække. Det er derfor naturligt at spørge omvendt:

- Kan en given funktion  $f(x)$  opfattes som sumfunktion af en potensrække? Og hvis ja, hvad er potensrækken?

$$f(x) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ?$$

Svaret til dette spørgsmål er naturligvis relateret til Taylors sætning, som giver en polynomiell approksimation til funktionen.

**Sætning 4.11** (Analyse 0 bog, Sætning 4.20 (Taylors formel med restled)).

Lad  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  være  $n$  gange kontinuert differentiabel i et lukket interval  $A \subseteq \mathbb{R}$  og lad  $a, x \in A$  med  $a < x$ . Der findes et  $\xi$  med  $a < \xi < x$ , sådan at

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

Vi vil nu undersøge, hvad der sker, hvis vi lader  $n$  gå mod uendelig. Som før indskrænker vi situationen til  $a = 0$  uden tab af generalitet. Om

Taylor sætningen giver en brugbar approksimation til funktionen  $f$ , afhænger selvfølgelig af, om restleddet går mod nul. Nogle gange gør det, andre gang ikke, som de følgende to eksempler viser

**Definition 4.12.** *Lad  $f$  være en reel funktion, der er uendeligt mange gange differentiable i punktet  $a$ . Vi siger, at potensrækken*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

er Taylorrækken til  $f$  i punktet  $a$ .

Hovedspørgsmålet er, hvornår sumfunktion af Taylorrækken til  $f$  er lig med  $f$ .

At det ikke altid er tilfældet, viser følgende eksempel.

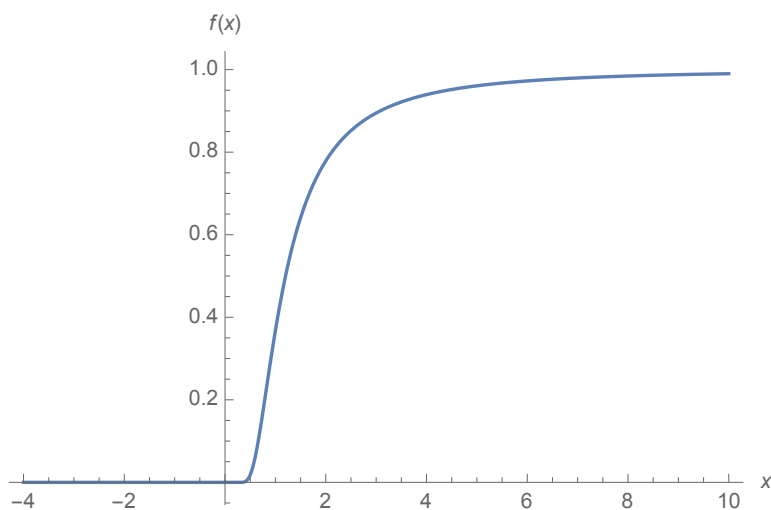
**Eksempel 4.13.** *Lad*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

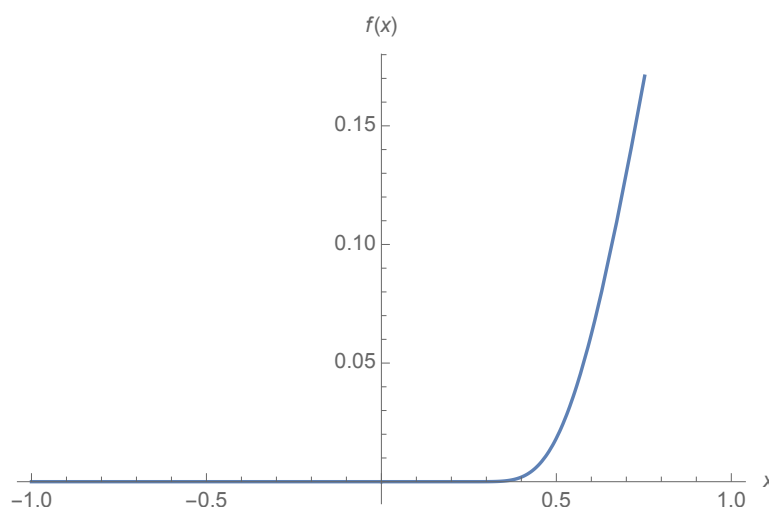
være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \end{cases}$$

Graferne viser funktionen omkring nul og i et større interval.







For  $x > 0$  er den  $n$ 'te afledning givet ved (produktregel for differentiering)

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

hvor  $p_n(x)$  er et polynomium af grad  $2(n-1)$ . For  $x < 0$ , er  $f^{(n)}(x) = 0$ . Da  $e^{-\frac{1}{x^2}}$  går hurtigere mod nul end ethvert polynomium,<sup>1</sup> finder vi at

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(n)}(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f^{(n)}(x).$$

Funktionen er dermed uendeligt ofte differentiable i punktet nul og

$$f^{(n)}(0) = 0$$

Taylorrækken til  $f$  i punktet nul er dermed konstant nul og stemmer dermed ikke overens med  $f$  i et vilkårligt lille interval. Selvfølgelig er dette ikke et modeksempel til Taylors sætning, men kun en advarsel om, at restleddet kan være betydeligt i størrelse.

Det næste eksempel er af en mere positiv natur.

**Eksempel 4.14** (Eksponentialfunktionen). Husk definitionen af eksponentialfunktionen ( $x \in \mathbb{R}$ )

$$e^x = \sup_{r \in \mathbb{Q}, r \leq x} e^r,$$

<sup>1</sup>Det er en god øvelse at formalisere dette argument.

hvor  $e^{\frac{p}{q}} = (e^{\frac{1}{q}})^p$ , og  $e^{\frac{1}{q}}$  er det positive tal med  $(e^{\frac{1}{q}})^q = e$  for  $p, q \in \mathbb{N}$ . Ud fra disse egenskaber kan man vise, at  $e^x$  opfylder

$$(e^x)' = e^x,$$

Dermed er  $e^x$  uendeligt mange gange (kontinuert) differentiabel på  $\mathbb{R}$  og specielt på  $[-R, R]$ . Ved Taylors sætning ser vi, at for alle  $N \in \mathbb{N}$ , eksisterer der et  $\xi \in [-R, R]$ , sådan at

$$e^x = \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi} \xi^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Da

$$\frac{e^{\xi} \xi^{N+1}}{(N+1)!} \leq \frac{e^R R^{N+1}}{(N+1)!}$$

går mod nul for  $N \rightarrow \infty$ , ser vi, at

$$\|e^x - \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!}\|_{\mathbb{B}_R} \leq \frac{e^R R^{N+1}}{(N+1)!},$$

og dermed er Taylorrækken uniformt konvergent indenfor intervallet  $[-R, R]$ . Dermed er den konvergent på hele  $\mathbb{R}$ . Det samme argument holder også for den komplekse eksponentialfunktion og for cosinus og sinus (se Lindstrøm Sætning 12.8.2).

Den følgende sætning siger, at en potensrække er Taylorrækken for sin sumfunktion. Dermed finder vi et tilfredsstillende resultat om potensrækker som afslutning på dette afsnit.

**Sætning 4.15.** *Givet en potensrække*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

med konvergensradius  $r > 0$  og sumfunktion  $f(x)$ . Potensrækken er da lig med Taylorrækken til  $f(x)$  i punktet 0, dvs.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

*Bevis.* Lad  $f$  være sumfunktionen til potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

med positiv konvergenradius. Bemærk, at

$$f(0) = a_0.$$

Ved hjælp af Korollar 4.9 finder vi, at  $f'$  er sumfunktionen til

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1},$$

med samme konvergenradius. Ved evaluering i  $x = 0$  finder vi,

$$f'(0) = 1 \cdot a_1.$$

Vi kan nu fortsætte med at aflede og evaluere og finder (formelt ved hjælp af induktion)

$$f^{(n)}(0) = n! a_n.$$

□

**Eksempel 4.16.** Vi bemærker, at sætningen sikrer os, at Taylorrækken til sumfunktionen af

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

er lig med denne række uden eksplicit brug af at sumfunktionen er lig med  $f(x) = e^x$ , som vi tidligere havde vist.

Sætningen opfordrer os til at give en speciel status til funktioner  $f(x)$ , som i et område omkring  $a$  er givet som sumfunktioner af potensrækker

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

Disse bliver kaldt *analytiske funktioner* og vi kan sammenfatte sætningen til at sige, at sumfunktionen til Taylorrækken af en analytisk funktion er (indenfor konvergensoområdet) lig med funktionen.



# Kapitel 5

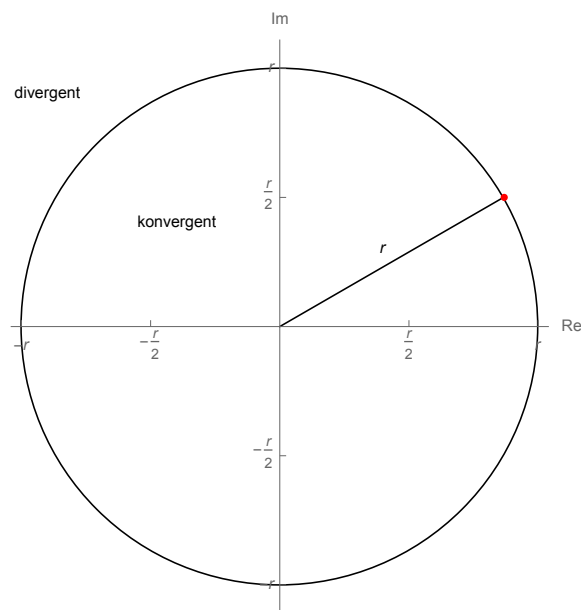
## Fourierrækker

### 5.1 Introduktion

**Udgangspunkt** Hovedresultatet fra vores undersøgelse af potensrækker var, at enhver potensrække

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

(tænk  $x \in \mathbb{C}$ ) har en konvergensradius  $r \in [0, \infty]$ , sådan at rækken divergerer for alle  $x$  uden for radiussen ( $|x| > r$ ), mens rækken konvergerer for alle  $x$  inden for radiussen ( $|x| < r$ ).



Situationen er noget mere kompliceret for  $x$ , som ligger nøjagtig på konvergenscirklen ( $|x| = r$ ), og vi har kun formået at se på nogle enkelte tal på cirklen. For bedre at kunne forstå denne situation, sætter vi  $r = 1$  uden tab af generalitet. På sådan en cirkel kan alle punkter  $x$  skrives som  $x = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$  for et  $\theta \in [-\pi, \pi)$  (eller faktisk  $\theta \in \mathbb{R}$ ). Nu begrænser vi potensrækken til disse værdier ved at erstatte  $x$  med  $e^{i\theta}$  og får derved funktionsrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Bemærk, at denne funktionsrække har  $e_n(\theta) = e^{in\theta}$  i stedet for monomerne. Da alle  $e^{in\theta}$  er periodiske med periode  $2\pi$ , dvs.

$$e_n(\theta + 2\pi) = e^{in(\theta+2\pi)} = e^{in\theta} * e^{in2\pi} = e^{in\theta} = e_n(\theta),$$

er deres sum (og dermed afsnitsfølgerne samt den potentielle sumfunktion),  $2\pi$ -periodisk.

Emnet Fourierrækker beskæftiger sig med konvergens af sådanne rækker og mere generelle trigonometriske rækker, hvor vi også inddrager  $e^{-in\theta}$ , hvilket fører til udtryk af formen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

**Opbygning** Vi begynder denne del af kurset med at definere trigonometriske rækker og udlede deres grundlæggende egenskaber (Afsnit 5.2). Bagefter fremlægger vi strukturen af vektorrummet af  $2\pi$ -periodiske funktioner og definerer et indre produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  på rummet (Afsnit 5.3). Rummet er uendelig-dimensionelt, men ud fra vores viden fra lineær algebra har vi et godt grundlag for at kunne forstå, at funktionerne  $e_n$  skal betragtes som en basis for rummet, og at vi skal forvente<sup>1</sup>

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

---

<sup>1</sup>Hvis en talrække  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  er konvergent med sum  $A$  skriver vi  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sim A$ . Hvis vi skriver  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k \sim f$  mener vi at  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \sim f(x)$  for alle  $x$  i konvergensområdet for  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ .

Mere eksplicit lærer vi den højre side at kende som *Fourierrækken*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{in\theta}$$

for  $f$ , hvor  $c_k(f) := \langle f, e_k \rangle$  (Afsnit 5.4). Vi diskuterer den vigtige lighed, der findes mellem summen af kvadraterne af Fourierkoefficienterne og funktionens norm (Parsevals identitet). Til sidst analyserer vi punktvis konvergens mod dens forventede sumfunktion  $f$  (Afsnit 5.6) og uniform konvergens (Afsnit 5.7)

**Opsummering** I vores undersøgelser skal vi opdage, at Fourierrækkerne er for  $2\pi$ -periodiske funktioner, hvad Taylorrækker er for analytiske funktioner, og at den Fourierteoretiske analogi til polynomier er trigonometriske polynomier og det samme for potensrækker og trigonometriske rækker:

analytisk	periodisk
polynomier	trigonometriske polynomier
potensrækker	trigonometriske rækker
Taylorrækker	Fourierrækker

Vi vælger at fremlægge teorien bag Fourierrækker ved hjælp af  $e^{i\theta}$ , da den derved opnår sin mest elegante form. I kraft af Eulers formel  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  omskrives rækkerne ofte til cosinus og sinusrækker, når vi skal illustrere eksempler. Fourierrækker, og mere generelt, Fourieranalyse er vigtigt både i abstrakt matematik (harmonisk analyse), anvendt matematik (signalbehandling) og fysik (kvanteteori).

Ved brug af Parsevals identitet og ved evaluering af Fourierrækker i specielle punkter, finder vi eksakte værdier for specielle talrækker. F.eks. finder vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{\pi^2}{6}$$

og får derved en lille talteoretisk indsigt fra Fouriers verden. Dette er specielt bemærkelsesværdigt, da vi i vores undersøgelse af talrækker kun formåede at vise, at denne talrække konvergerer (f.eks. via integraltesten eller Cauchy fortætning) uden at kunne bestemme dens sum.

## 5.2 Periodiske funktioner og trigonometriske rækker

I dette afsnit definerer vi periodiske funktioner, trigonometriske polynomier og trigonometriske rækker samt præsenterer vigtige eksempler og udleder grundlæggende egenskaber.

**Periodiske funktioner** Vi skifter fra  $\theta$  til  $x$ , da det er mere standard.

**Definition 5.1** (Periodisk funktion). *En funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  er  $2\pi$ -periodisk, hvis  $f(x + 2\pi) = f(x)$  for alle  $x \in \mathbb{R}$ .*

Når vi taler om konkrete  $2\pi$ -periodiske funktioner, så er det tilstrækkeligt, at definere dem på et interval  $[a, a + 2\pi)$ . Vi vælger ofte  $a = -\pi$ , dvs. intervallet  $[-\pi, \pi)$ .

**Definition 5.2** (Lige og ulige). *En funktion kaldes lige, hvis  $f(-x) = f(x)$  for alle  $x \in \mathbb{R}$  og ulige, hvis  $f(-x) = -f(x)$ .*

**Eksempel 5.3** (Cosinus, sinus og den komplekse eksponentialfunktion).  *$\cos kx$  og  $\sin kx$  er de mest velkendte  $2\pi$ -periodiske funktioner, da*

$$\cos k(x + 2\pi) = \cos(kx + k2\pi) = \cos kx$$

$$\sin k(x + 2\pi) = \sin(kx + k2\pi) = \sin kx.$$

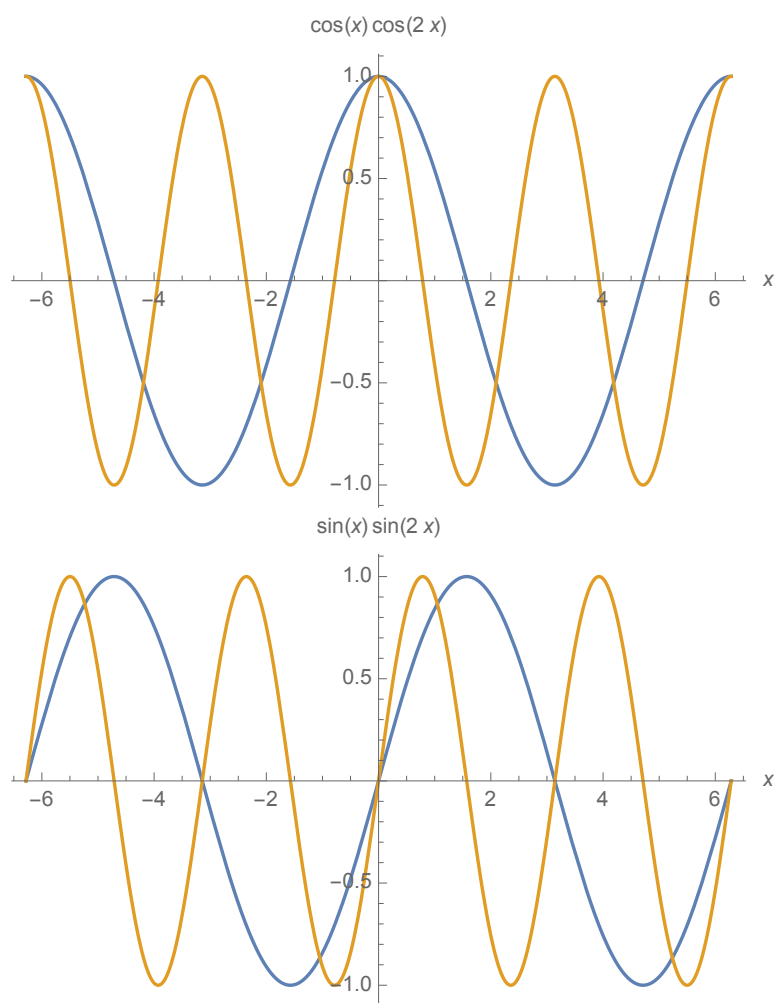
*Faktisk er perioden  $2\pi/k$  og cosinus er lige mens sinus er ulige:*

$$\cos kx = \cos(-kx).$$

$$\sin kx = -\sin(-kx).$$

*Graferne viser situationen for  $k = 1, 2$  i intervallet  $[-2\pi, 2\pi]$ , dvs. vi ser 2 perioder for tilfældet  $k = 1$ , og 4 perioder for  $k = 2$ :*





Vi kan ydermere fortolke graferne som real- og imaginærdel af  $e^{ikx}$ , da ved Eulers formel

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx.$$

$2\pi$ -periodiciteten

$$e^{ik(x+2\pi)} = e^{ikx}$$

følger umiddelbart fra periodiciteten af cosinus og sinus og kan ses grafisk i det komplekse talplan, idet funktionsværdien svarer til det røde punkt, som bevæger sig med konstant hastighed på cirklen ( $x$  er nu vinklen!). Bemærk, at  $e^{ikx}$  hverken er lige eller ulige, da den er summen af en lige og en ulige funktion.

Undersøgelse af Fourierrækker er ofte integraltungt. Vi bemærker derfor den ofte brugte observation, at for  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \left[ \frac{1}{k} \sin kx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = \left[ -\frac{1}{k} \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

og for  $k = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 * x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(0 * x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 0 dx = 0$$

og dermed for alle  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = \delta_{k,0}, \quad (5.1)$$

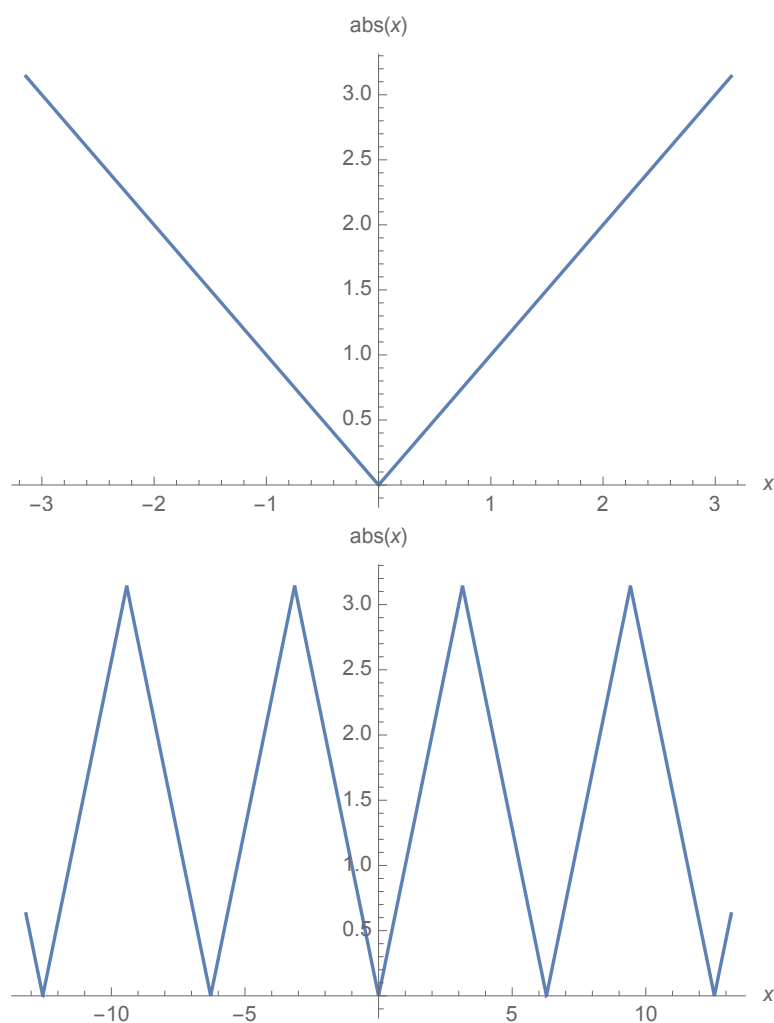
hvor Kroneckers delta  $\delta_{m,n}$  er defineret sådan, at  $\delta_{m,n} = 0$ , hvis  $m \neq n$ , og  $\delta_{m,n} = 1$  hvis  $m = n$ .

Vi bemærker også, at for  $k \neq 0$  er stamfunktionen til  $e^{ikx}$  givet ved  $\frac{1}{ik} e^{ikx}$ . Det er derfor muligt at vise (5.1) uden at referere til cosinus og sinus ved at benytte analysens fundamentalsætning for funktioner med komplekse værdier. Den afledte af  $e^{ikx}$  er  $ike^{ikx}$ .

**Eksempel 5.4** (Absolutværdifunktion). Betragt funktionen givet ved

$$\text{abs}(x) = |x|$$

i intervallet  $[-\pi, \pi)$  og udvidet periodisk til hele  $\mathbb{R}$ , sådan at:  $\text{abs}(x + 2\pi) = \text{abs}(x)$  for all  $x \in \mathbb{R}$ . Graferne viser definitionsperioden og dens periodiske fortsættelse.



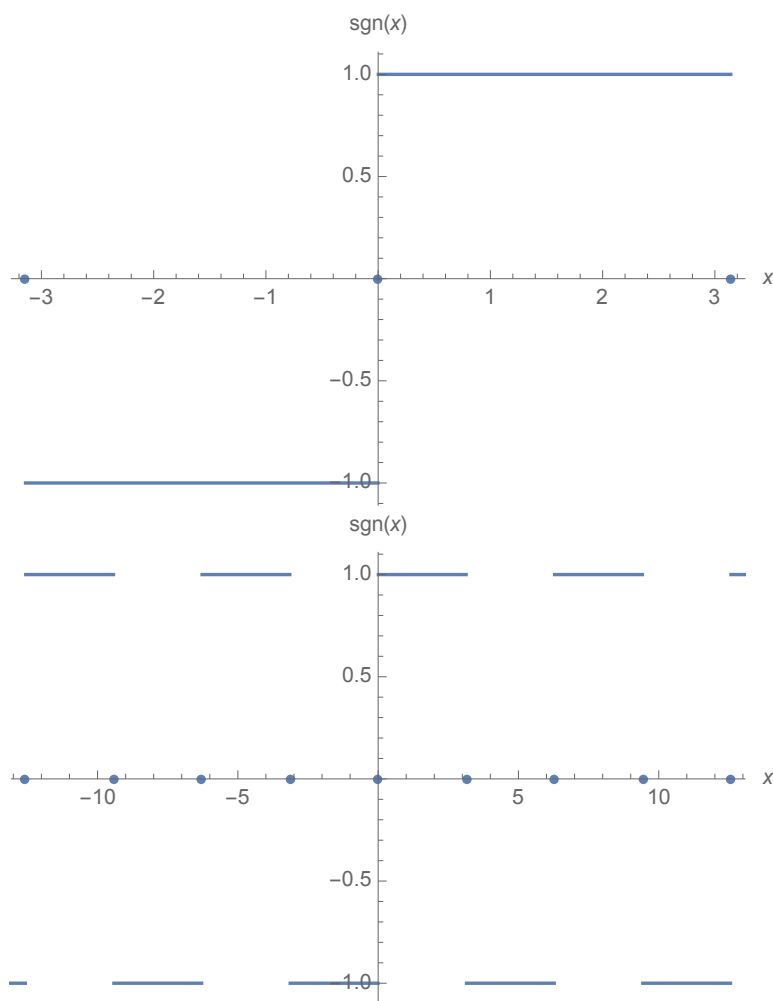
**Eksempel 5.5** (Signumfunktion). Vi ser også på fortegnsfunktionen med definitionsperioden

$$\text{sign}(x) = -1 \quad x \in (-\pi, 0)$$

$$\text{sign}(x) = 1 \quad x \in (0, \pi)$$

$$\text{sign}(0) = \text{sign}(-\pi) = 0$$

og periodisk fortsættelse. Graferne viser definitionsperioden og dens periodiske fortsættelse.



Bemærk, at  $\text{sign}$  er den afledte af  $\text{abs}$  i alle punkter, hvor  $\text{abs}$  er differentiable. I de resterende punkter  $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$  er  $\text{sign}(x)$  sat til nul, hvilket er middelværdien af  $f^+(n\pi) := \lim_{x \rightarrow n\pi^+} f(x)$  og  $f^-(n\pi) := \lim_{x \rightarrow n\pi^-} f(x)$ , hvor  $f = \text{sign}$ .

$\text{sign}$  og  $\text{abs}$  er et karakteristisk par af eksempler i Fourierrækkernes analyse. Mere generelt skal vi senere se på stykvist kontinuerte funktioner og deres integraler.

**Trigonometriske polynomier** Analogt til polynomier, som er endelige summer af monomier (dvs. potenser  $x^n$ ), er trigonometriske polynomier endelige summer af  $e^{ikx}$ .

**Definition 5.6** (Trigonometrisk polynomium). Lad  $c_{-N}, \dots, c_N$  være komplekse tal. Det tilhørende trigonometriske polynomium er givet ved

$$t_N(x) := \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}. \quad (5.2)$$

Vi siger, at  $t_N$  har grad  $N$ .

**Lemma 5.7** (Cosinus-sinus form). Det trigonometriske polynomium

$$t_N(x) := \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

er lig med

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad (5.3)$$

hvor  $a_0, a_1 \dots a_N$  og  $b_1 \dots b_N$  er komplekse tal givet ved

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k + c_{-k} = a_k, i(c_k - c_{-k}) = b_k, k \in \mathbb{N}.$$

*Bevis.* Vi bruger Eulers formel for at omskrive  $t_N$  til:

$$t_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k (\cos kx + i \sin kx).$$

Den højre side er lig med

$$\begin{aligned} & c_0 + \sum_{k=1}^N c_k (\cos kx + i \sin kx) + \sum_{k=1}^N c_{-k} (\cos(-kx) + i \sin(-kx)) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^N c_k (\cos kx + i \sin kx) + \sum_{k=1}^N c_{-k} (\cos kx - i \sin kx), \end{aligned}$$

da cosinus er lige og sinus ulige. Udsagnet følger, da den sidste formel kan omskrives til

$$c_0 + \sum_{k=1}^N (c_k + c_{-k}) \cos kx + \sum_{k=1}^N i(c_k - c_{-k}) \sin kx.$$

□

Da trigonometriske polynomier er endelige summer af  $2\pi$ -periodiske funktioner, er de selvfølgelig også  $2\pi$ -periodiske. Det følgende eksempel kommer vi til at se igen og igen, specielt i vores undersøgelse af punktvis konvergens.

**Eksempel 5.8** (Dirichlets kerne). *Dirichlets kerne af grad  $N$  er det trigonometriske polynomium givet ved*

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^N e^{ikx}.$$

Da  $c_k$  er lig med 1 for alle  $k$  med  $|k| \leq N$ , finder vi ved hjælp af Lemma 5.7, for alle  $k \in \mathbb{N}_0$ :  $a_k = 2$  og for alle  $k \in \mathbb{N}$ :  $b_k = 0$ , dvs.

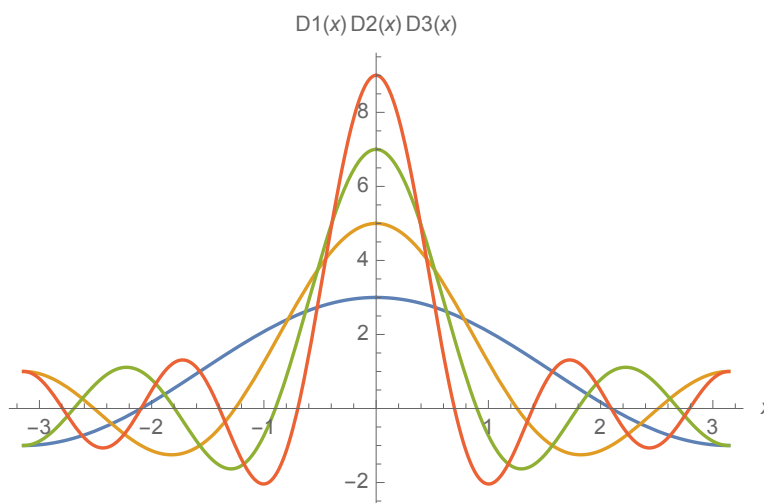
$$D_N(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(kx).$$

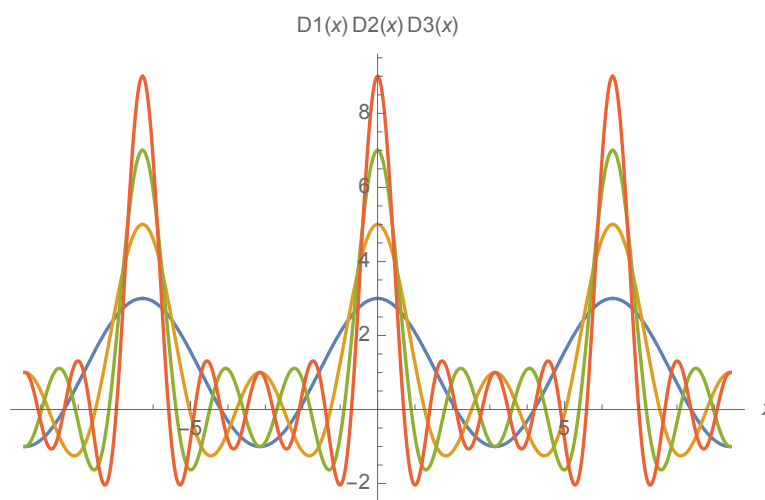
Vi bemærker følgende:

- Dirichlets kerner har nulfunktionen som imaginærdel
- Dirichlets kerner er lige funktioner
- Ved (5.1) har Dirichlets kerner følgende integral:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1.$$

Her er  $D_N$  plottet for  $N = 1$  (blå), 2 (orange), 3 (grøn), 4 (rød) i intervallet  $[-\pi, \pi]$ , og  $[-3\pi, 3\pi]$  for at illustrere periodiciteten.





Da vi udelukkende ser på  $2\pi$ -periodiske funktioner, vil vi ofte kun plote funktioner i intervallet  $[-\pi, \pi]$ .

Graferne motiverer os til at bevise følgende udsagn, som vi får gavn af senere hen.

**Lemma 5.9** (Dirichlets kerne). *Dirichlets kerner opfylder følgende formel*

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^N e^{ikx} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})},$$

hvor  $D_N(0) = 2N + 1$  svarende til grænseværdien  $x \rightarrow 0$ .

*Bevis.* For at kunne se at ligheden er sand, beregner vi

$$(e^{ix} - 1)D_N(x) = \sum_{k=-N}^N e^{i(k+1)x} - \sum_{k=-N}^N e^{ikx} = e^{i(N+1)x} - e^{-iNx},$$

da resten af leddene i de to summer går ud med hinanden. Ganger vi begge sider med  $e^{-i\frac{x}{2}}$  finder vi

$$(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})D_N(x) = e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x},$$

hvilket er ækvivalent med udsagnet på grund af Eulers formel.  $\square$

**Trigonometriske rækker** Vi udvider nu begrebet trigonometrisk polynomium til trigonometrisk række, helt i analogi med det skridt vi foretog, da vi udvidede begrebet polynomium til potensrække.

**Definition 5.10** (Trigonometrisk række). Lad  $c_k \in \mathbb{C}$  for alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Den tilhørende trigonometriske række er givet ved

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}).$$

Det er kutyme at skrive

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

i stedet. I hvert fald er afsnitssummerne  $t_N(x)$  af denne række givet ved (5.2).<sup>2</sup>

Følgende lemma er en direkte konsekvens af Lemma 5.7 anvendt på afsnitssummerne.

**Lemma 5.11.** Den trigonometriske række

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

er lig med funktionsrækken

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

for  $2c_0 = a_0$ ,  $c_k + c_{-k} = a_k$ ,  $i(c_k - c_{-k}) = b_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Ved hjælp af Weierstrass M-test får vi et første konvergenzkriterium for trigonometriske rækker.

**Sætning 5.12** (Uniform konvergens af trigonometriske rækker). Hvis

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$$

er konvergent,<sup>3</sup> så er  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  uniformt konvergent med kontinuert sumfunktion.

<sup>2</sup>Husk, at dette kan have betydning, da rækken ikke nødvendigvis er absolut konvergent, så at parenteserne kan have betydning.

<sup>3</sup>dvs.  $\sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| + |c_{-k}|)$  er konvergent



*Bevis.* Da  $|e^{-ikx}| = 1$ , gælder det at

$$|c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}| \leq |c_k e^{ikx}| + |c_{-k} e^{-ikx}| = |c_k| + |c_{-k}|,$$

hvor vi har brugt trekantsuligheden. Da  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$  er konvergent ifølge antagelsen, er den trigonometriske række uniformt konvergent ifølge Weierstrass M-test (Sætning 3.22). Afsnitssummerne er trigonometriske polynomier og derfor kontinuerte. Da konvergensen er uniform, er sumfunktionen kontinuert ifølge Sætning 3.13.  $\square$

**Eksempel 5.13** (Absolutværdifunktion). *Betragt den trigonometriske række*

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

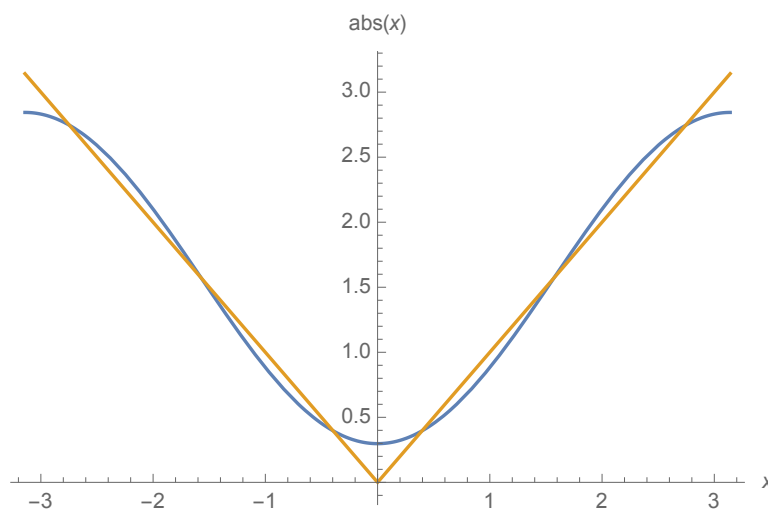
Ved Lemma 5.11 er  $c$ -koefficienterne givet ved

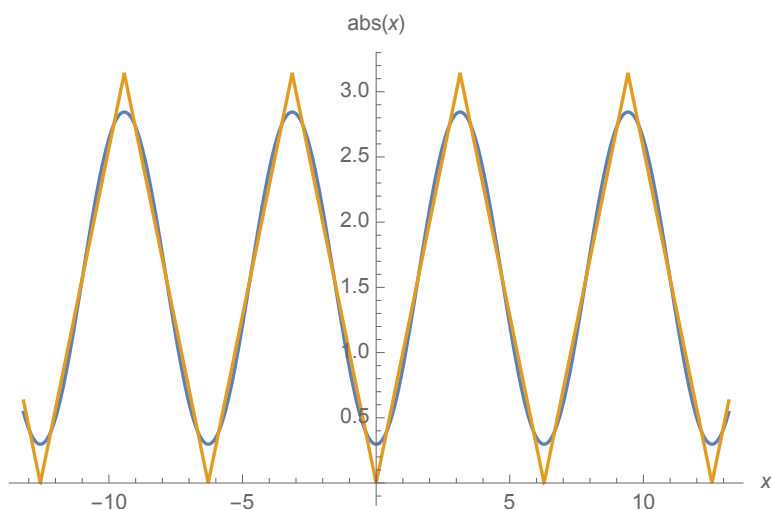
$$c_{2k+1} = c_{-(2k+1)} = \frac{-2}{\pi(2k+1)^2},$$

og

$$c_0 = \frac{\pi}{2}, \quad c_{2k} = 0$$

for  $k \in \mathbb{N}_0$ . Talrækken  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$  er altså konvergent (f.eks. Cauchy for-tætning) og ifølge Sætning 5.12 er den trigonometriske række uniformt konvergent med kontinuert sumfunktion  $f$ . Men hvad er  $f$ ? Tegning af de første afsnitssummer (grafnen viser den første) indikerer, at  $f$  er lig med  $\text{abs}$ :





Men bemærk, at vi ikke har bevis for det endnu. Selv hvis det er rigtigt, fordrer det spørgsmålet om, hvordan man finder en sådan række for et givet  $f$ . Dette vil blive behandlet i det næste afsnit.

**Eksempel 5.14** (Signumfunktionen). Betragt den trigonometriske række

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

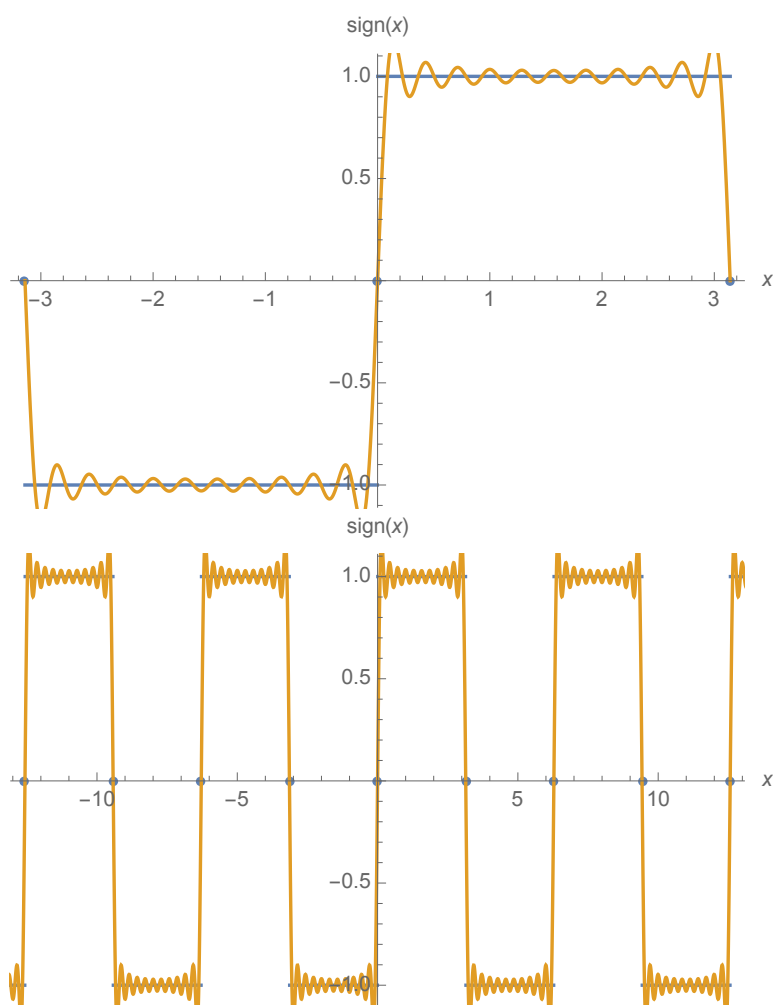
Ved Lemma 5.11 er  $c$ -koefficienterne givet ved

$$c_{2k+1} = -c_{-(2k+1)} = \frac{-2i}{\pi(2k+1)},$$

og

$$c_{2k} = 0$$

$k \in \mathbb{N}_0$ . Grafen viser  $s_{10}$  sammen med signum funktionen, som rækken ser ud til at konvergere imod:



Bemærk, at konvergensten ikke kan være uniform, da signumfunktionen ikke er kontinuert. Bemærk også, at kriteriet fra Sætning 5.12 ikke er opfyldt, da

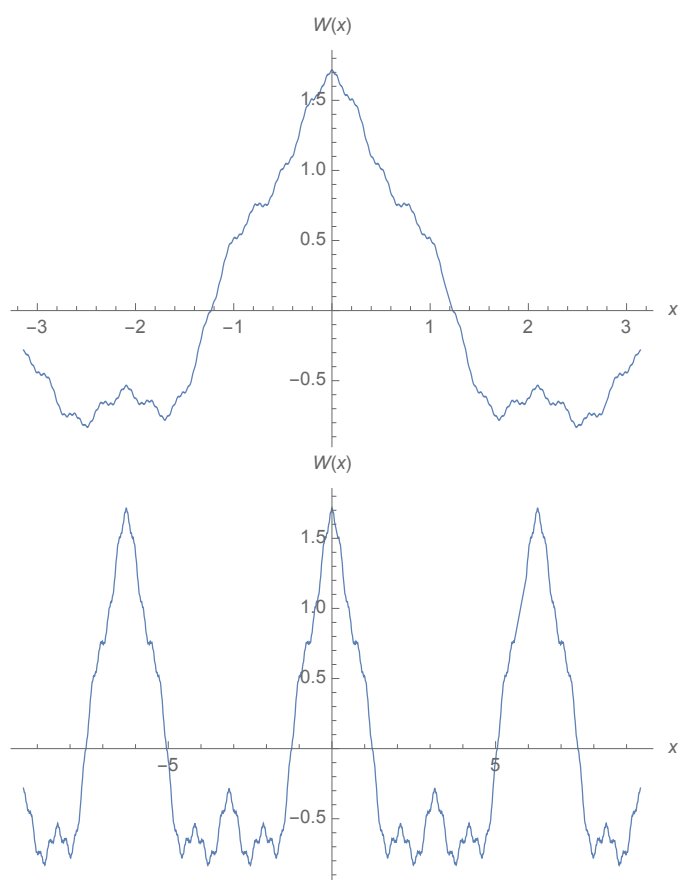
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$$

er divergent (harmoniske række). Bemærk, at leddene i rækken er de afledte af leddene i den cosinusrække, som vi har set på. Dette harmonerer derfor godt med observationen af, at signumfunktionen er — i næsten alle punkter — den afledte af absolutværdifunktionen.

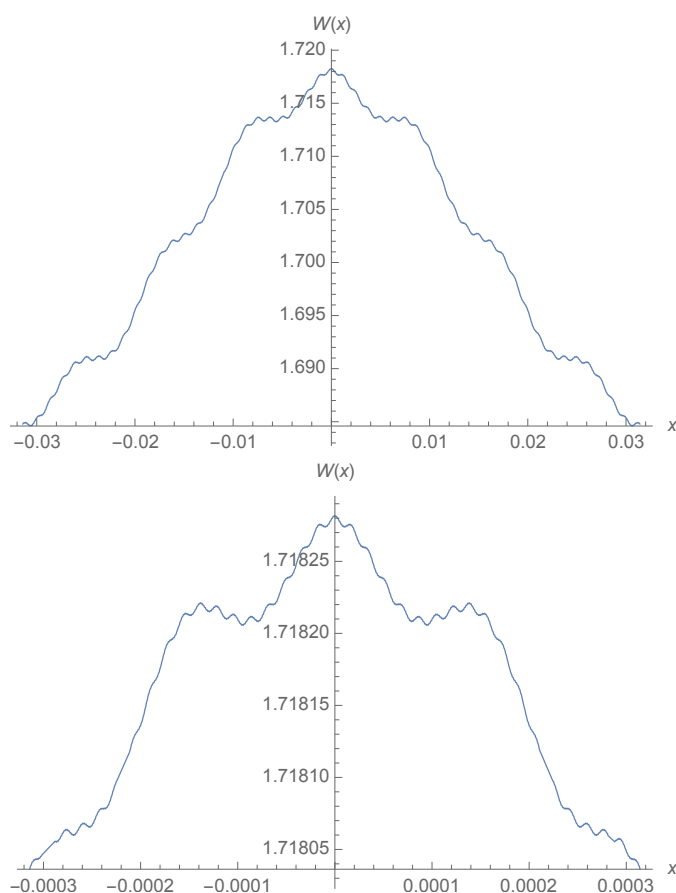
**Eksempel 5.15** (Weierstrass funktion). Den trigonometriske række

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(n!^2 x)}{n!},$$

har  $c$ -koefficienter givet ved  $c_{\pm n!} = \frac{1}{2^{n!}}$  (og nul ellers). Da  $n! \geq 2^n$  for  $n \geq 4$ , og da  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$  er konvergent (geometriske række), ved vi ved Sætning 5.12 at den trigonometriske række konvergerer uniformt mod en kontinuert sumfunktion  $W$ . Grafen illustrerer at  $W$  er kontinuert.



Hvis vi zoomer mere og mere ind, bemærker vi, at  $W$  har en fraktal struktur og derfor er svær at differentiere.



Weierstrass opdagede dette eksempel ved sin undersøgelse af potensrækker og havde dermed en forståelse af sammenhængen mellem potensrækker og Fourierrækker som fremlagt i introduktionen. Fourier undersøgte derimod Fourierrækker udelukkende på cosinus- og sinusformen.

**Eksempel 5.16** (Geometriske række versus Dirichlets kerne). Hvis vi betragter den geometriske række

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

på cirklen  $z = e^{ix}$  finder vi den trigonometriske række

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{ikx}.$$

Bemærk, at realdelene af afsnitssummerne er lig med  $\frac{1}{2} \cdot D_N$ . Den geometriske række har konvergensradius lig med 1 og har sumfunktion  $\frac{1}{1-z}$ , dvs. divergerer

ved  $z \rightarrow 1$ . Den trigonometriske række divergerer for alle  $x$  (reel) på grund af divergenstesten.

### 5.3 Vektorrumstruktur

Vi vil nu betragte  $2\pi$ -periodiske funktioner som vektorer i et vektorrum og bruge vores intuition fra linear algebra til at skrive vilkårlige funktioner som linearkombinationer af basisfunktioner ( $e^{ikx}$ ).

Da vi har brug for nogle integrationsegenskaber af funktionerne vil vi gerne se på kontinuerte  $2\pi$ -periodiske funktioner. Desværre er det en for fattig mængde af eksempler, da den udelukker f.eks. signumfunktionen. Mængden af  $2\pi$  periodiske Riemann-integrable funktioner er til gengæld en lidt for stor mængde, hvor teorien vil blive alt for indviklet. Fourieranalyse er smukkeste formuleret ved hjælp af Lebegue-integralet, men da det først er Analyse 2-materiale satser vi her på mængden  $\text{PC}_{2\pi}$  af  $2\pi$ -periodiske funktioner  $f$ , som er såkaldt stykvis kontinuerte på  $[-\pi, \pi]$  og som ved en diskontinuitet  $c$  tager middelværdien

$$f(c) = \frac{f^+(c) + f^-(c)}{2},$$

hvor  $f^\pm(c) := \lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x)$ . Bemærk, at  $\text{PC}_{2\pi}$  inkluderer vores to eksempler  $\text{abs}$  og  $\text{sign}$ , som er karakteristiske for teorien.

**Definition 5.17.** En  $2\pi$ -periodisk funktion er stykvis kontinuert på  $[-\pi, \pi]$ , hvis der findes et  $d \in \mathbb{N}$  og en inddeling

$$-\pi = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_d = \pi$$

således, at for alle  $i = 0, 1, \dots, d$ :

$$f : (c_i, c_{i+1}) \rightarrow \mathbb{C},$$

er kontinuert og alle  $f^\pm(c_i)$  eksisterer og er endelige. Vi siger, at  $f$  er normaliseret, hvis for alle  $i$ :

$$f(c_i) = \frac{f^-(c_i) + f^+(c_i)}{2}.$$

Mængden af  $2\pi$ -periodiske funktioner, som er stykvis kontinuerte på  $[-\pi, \pi]$  og normaliserede betegnes med  $\text{PC}_{2\pi}$ .

Stykvis kontinuerte funktioner er Riemann-integrable, da Riemann-integralet ikke ændres ved ændring af funktionsværdien i endeligt mange punkter (se også Analyse 0 bogen, eksempel 5.19).

Det er nemt at tjekke, at  $\text{PC}_{2\pi}$  er et komplekst vektorrum og vi konstaterer (uden bevis):

**Lemma 5.18.**  $\text{PC}_{2\pi}$  er et komplekst vektorrum, da for alle  $f, g, h \in \text{PC}_{2\pi}$  og  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha f + \beta g \in \text{PC}_{2\pi}$ :

- (associativ)  $(f + g) + h = f + (g + h)$
- (kommutativ)  $f + g = g + f$
- (nul)  $0 := \text{nulfunktionen opfylder } 0 + f = f$
- (inverse)  $f + (-f) = 0$
- (skalar associativitet)  $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$
- (skalar distributivitet)  $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$
- (distributivitet)  $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$
- (skalar identitet)  $1f = f$ .

$\text{PC}_{2\pi}$  kan udstyres med et indre produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \text{PC}_{2\pi} \times \text{PC}_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C}$  givet ved

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (5.4)$$

Definitionen opfylder betingelserne for et indre produkt, da for alle  $f, g, h \in \text{PC}_{2\pi}$  og  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ :

- $\langle f, f \rangle \geq 0$  for alle  $f$  med lighed kun for  $f = 0$
- $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$
- $\overline{\langle f, g \rangle} = \langle g, f \rangle$ .

Det indre produkt definerer en norm (se Kapitel 6)

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}$$

på  $\text{PC}_{2\pi}$  og en afstandsfunktion (som vi senere i kurset vil kalde for en metrik)

$$d_2(f, g) := \|f - g\|_2,$$

som vi kan bruge til at måle afstanden mellem to funktioner  $f, g \in \text{PC}_{2\pi}$ .

**Lemma 5.19** (Ortonormalitet af  $e^{ikx}$ ). *Funktionerne givet ved  $e_k(x) := e^{ikx}$  udgør en ortonormal familie af funktioner i  $\text{PC}_{2\pi}$ , dvs. det gælder for alle  $k, k' \in \mathbb{Z}$ , at*

$$\langle e_k, e_{k'} \rangle = \delta_{k, k'}.$$

*Bevis.*

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_{k'} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ik'x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-k')x} dx \\ &= \delta_{k-k', 0} = \delta_{k, k'} \end{aligned}$$

ifølge (5.1). □

I  $\mathbb{C}^d$  med indre produkt  $\langle v, w \rangle_{\mathbb{C}^d} := \sum_{i=1}^d v_i \bar{w}_i$  udgør vektorerne  $b_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (med 1 på plads  $i$ ) for  $i = 1, 2, \dots, d$ , en ortonormalbasis

## 5.4 Fourierrækker

**Definition** Hvis vi har et endelig-dimensionalt vektorrum  $\mathbb{C}^d$  med et indre produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^d}$  og en ortonormalbasis  $\{b_i\}_{i=1}^d$ , så kan vi skrive enhver vektor  $v$  som linearkombination af basisvektorerne,

$$v = \sum_{i=1}^d c_i b_i,$$

med koefficienter  $c_i = \langle v, b_i \rangle_{\mathbb{C}^d}$  givet ved det indre produkt mellem  $v$  og  $b_i$ .

I vores tilfælde vil vi gerne skrive en  $2\pi$ -periodisk funktion  $f \in \text{PC}_{2\pi}$  som linearkombination af de ortonormale funktioner  $e_k(x) = e^{ikx}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k, \quad (5.5)$$

men komplikationer optræder, fordi  $\text{PC}_{2\pi}$  er et uendeligt dimensionalt rum:



- Den højre side af (5.5) er en række, så  $f$  kan i bedste tilfælde være rækkens sumfunktion.
- En mulig konvergens forventes i afstandsfunktionen tilhørende til normen  $\|\cdot\|_2$  og det er ikke oplagt, hvordan denne konvergenstype forholder sig til punktvis konvergens eller uniform konvergens.
- Funktionerne  $e_k$  er ortonormale, men vi har ikke undersøgt, at de udspænder hele  $\text{PC}_{2\pi}$ . I princippet kunne der derfor findes andre funktioner i det uendelig-dimensionale rum  $\text{PC}_{2\pi}$ .

Uanset disse matematiske vanskeligheder starter vi med at navngive den højre side af (5.5):

**Definition 5.20** (Fourierrække til  $f$ ). *Lad  $f \in \text{PC}_{2\pi}$ , så kaldes*

$$c_k(f) := \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

for Fourierkoefficienter for  $f$ , og

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

for Fourierrække af  $f$ . Bemærk, at den  $N$ te afsnitssum er givet ved det trigonometriske polynomium:

$$s_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ikx}$$

Hovedspørgsmålet indenfor Fourieranalysen er, under hvilke betingelser, sumfunktionen af Fourierrækken til  $f$  er lig med selve funktionen  $f$ , og hvilken type konvergens (punktvis eller uniform) vi kan forvente. Med andre ord undersøger Fourieranalysen hvornår og hvor godt, de nævnte komplikationer kan overkommes.

**Eksempel 5.21** (Trigonometrisk polynomium). *I det nemmeste tilfælde er  $f$  selv et trigonometrisk polynomium  $\sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$  for et endeligt  $N \in \mathbb{N}_0$ .*

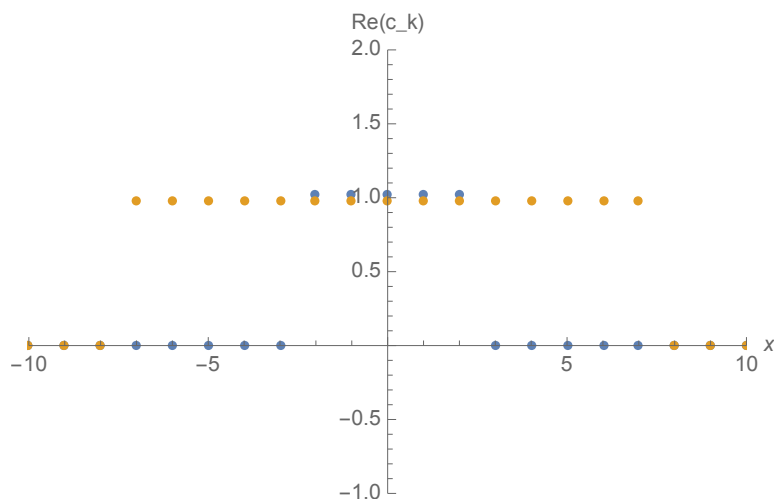
Fourierkoefficienterne er

$$\begin{aligned}
 c_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k'=-N}^N c_{k'} e^{ik'x} e^{-ikx} dx \\
 &= \sum_{k'=-N}^N c_{k'} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik'x} e^{-ikx} dx \\
 &= \sum_{k'=-N}^N c_{k'} \delta_{k,k'}
 \end{aligned}$$

For  $|k| \leq N$  er det ovenstående lig  $c_k$ , mens det for  $|k| > N$  er lig 0. Dermed er sumfunktionen til Fourierrækken

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

lig med  $f$ . Dette resultat er fuldstændig analogt med resultatet, at Taylorudviklingen af et polynomium er lig med polynomiet selv. Som konkret eksempel, betragt Dirichlets kerne af grad  $N$ :  $D_N(x)$ , som er et trigonometrisk polynomium for hvert  $N \in \mathbb{N}$ . Grafen viser Fourierkoefficienterne for  $D_2$  (blå) og  $D_7$  (orange).



Situationen kan direkte generaliseres til uniformt konvergente trigonometriske rækker.

**Proposition 5.22.** *Lad  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  være en uniformt konvergent trigonometrisk række med sumfunktion  $f$ . Da er Fourierkoefficienterne for  $f$  givet ved  $c_k(f) = c_k$  og  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  er Fourierrækken til  $f$ .*

*Bevis.* Da afsnitssummen  $s_N$  er kontinuert og konvergerer uniformt mod  $f$ , er  $f$  kontinuert. Da  $e_{-k}$  er kontinuert og begrænset, konvergerer  $s_N e_{-k}$  uniformt mod  $f e_{-k}$ . Da integration og  $\lim_{N \rightarrow \infty}$  bytter plads for uniformt konvergente funktioner (Sætning 3.16) finder vi, at

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_N(x) e^{-ikx} dx \right)$$

eksisterer og er lig med

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) e^{-ikx} \right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = c_k(f).$$

Udsagnet følger, hvis vi bemærker at

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_N(x) e^{-ikx} dx = c_k$$

for alle  $N \geq k$  ifølge Eksempel 5.21. □

Husk, at cosinus og sinus var vores standardeksempler på lige og ulige funktioner. Følgende lemma siger, at Fourierrækken til en lige funktion kan skrives som ren cosinusrække og at Fourierrækken til en ulige funktion kan skrives som en ren sinusrække.

**Lemma 5.23.** *Hvis  $f \in PC_{2\pi}$  er lige medfører det, at  $c_k = c_{-k}$  dvs.  $b_k = 0$ ; Fourierrækken til  $f$  er i det tilfælde givet ved*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

*Er  $f \in PC_{2\pi}$  ulige medfører det,  $c_k = -c_{-k}$  dvs.  $a_k = 0$ ; Fourierrækken er her givet ved*

$$\sum b_n \sin nx.$$

*Bevis.* For lige  $f$ :

$$\begin{aligned}
 c_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x)e^{-ikx} dx \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(x')e^{ikx'}(-1)dx' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x')e^{ikx'} dx' \\
 &= c_{-k}(f),
 \end{aligned}$$

hvor (\*) sker ved substitutionen  $x' = -x$ . På lignende vis bevises tilfældet, hvor  $f$  er ulige.  $\square$

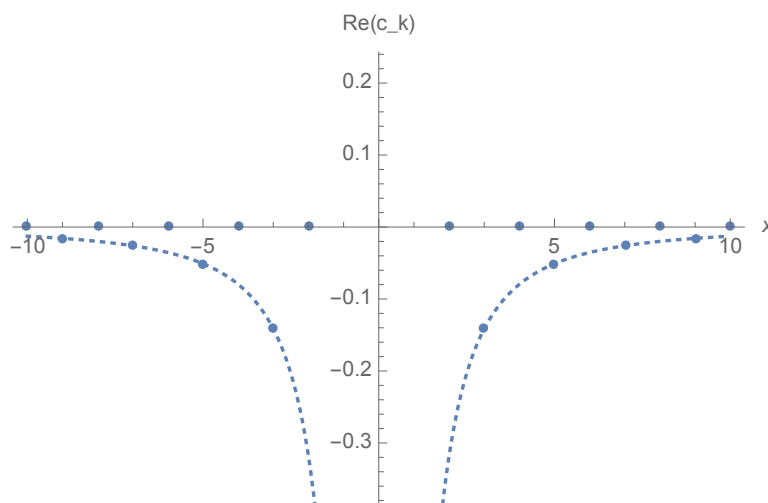
**Eksempel 5.24** (Absolutværdifunktion). *Vi kan nu beregne Fourierrækken til abs: Vi ser at*

$$c_0(\text{abs}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

For alle andre  $k \neq 0$  udregner vi at

$$\begin{aligned}
 c_k(\text{abs}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{abs}(x)e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (-x)e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} xe^{-ikx} dx \\
 &\stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{2\pi} \left[ x \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{e^{-ikx}}{-ik} dx + \frac{1}{2\pi} \left[ x \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik} dx \\
 &= \frac{-1}{2} \left( \frac{(-1)^k}{-ik} \right) + \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-ikx}}{(-ik)^2} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{2} \left( \frac{(-1)^k}{-ik} \right) - \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-ikx}}{(-ik)^2} \right]_0^{\pi} \\
 &= -\frac{1 - (-1)^k}{\pi k^2},
 \end{aligned}$$

hvor (\*) sker ved partiel integration ( $\int f'g = [fg] - \int fg'$ ). Grafen illustrerer Fourierkoefficienterne og understreger med den stiplede linie at koefficienterne aftager som  $\frac{1}{k^2}$ .



Fordi  $\text{abs}(x)$  er en lige funktion er det naturligt at skrive rækken i cosinusform (ved Lemma 5.7)

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2},$$

hvilket afmystificerer vores tidligere valg af denne trigonometriske række. Selvom vi nu ved, at denne række er Fourierrækken til  $\text{abs}$  og at rækken konvergerer uniformt mod en funktion  $f$  (se Eksempel 5.13), har vi endnu ikke bevis for, at  $f = \text{abs}$ . (Vi ved dog at  $f$  og  $\text{abs}$  har samme Fourierrække ved Proposition 5.22) Men hvis det er tilfældet, så kan vi evaluere både rækken og absolutværdifunktionen i punktet  $x = 0$  og finder

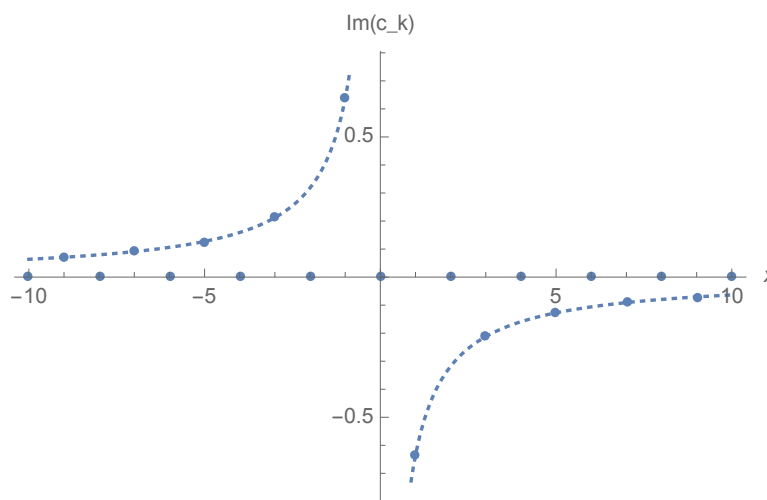
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{\pi^2}{8}.$$

**Eksempel 5.25** (Signumfunktion). *Fourierkoefficienterne for sign-funktionen*

er givet ved

$$\begin{aligned}
 c_k(\text{sign}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}(x) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-ikx} dx \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_0^{\pi} \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{1 - (-1)^k}{-ik} \right) + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{(-1)^k - 1}{-ik} \right) \\
 &= -\frac{i}{\pi} \left( \frac{1 - (-1)^k}{k} \right).
 \end{aligned}$$

$c_k(\text{sign})$  er derfor nul for lige  $k$  og lig med  $\frac{-2i}{\pi k}$  for ulige  $k$ . Grafen illustrerer Fourierkoefficienternes imaginærdele (realdelene er nul). Den stiplede linie understreger, at koefficienterne aftager som  $\frac{1}{k}$ .



Ved hjælp af Lemma 5.11 omskriver vi rækken til cosinus og sinus form. Vi får den rene sinusrække

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x),$$

da signumfunktionen er en ulige funktion. Denne udregning forklarer vores tidligere valg af denne række.

## 5.5 Pythagoras, Bessel, Parseval

Formålet ved dette afsnit er argumentere for at  $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$  er lig med summen af rækken  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ . Udsagnet kommer i forskellige sværhedsgrader, som hver har sit navn, og som vi viser i dette afsnit:

- Hvis  $f$  er et trigonometrisk polynomium, hedder udsagnet Pythagoras' formel (Lemma 5.26).
- Hvis  $f \in PC_{2\pi}$  hedder uligheden  $\leq$  Bessels ulighed (Korollar 5.32).
- Hvis  $f \in L^2[-\pi, \pi]$  (Funktioner med  $\|f\|_2 < \infty$  og det såkaldte Lebegue-integral) hedder udsagnet Parsevals identitet, hvilket vi viser i det specialtilfælde, hvor  $f$  er sumfunktion af en uniformt konvergent trigonometrisk række (Lemma 5.28)

**Lemma 5.26** (Pythagoras). *Lad  $f$  være et trigonometrisk polynomium af grad  $N$ , da gælder*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2.$$

*Bevis.*

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \left\langle \sum_{k=-N}^N c_k(f) e_k, \sum_{k'=-N}^N c_{k'}(f) e_{k'} \right\rangle \\ &= \sum_{k=-N}^N \sum_{k'=-N}^N c_k(f) \overline{c_{k'}(f)} \langle e_k, e_{k'} \rangle \\ &= \sum_{k=-N}^N \sum_{k'=-N}^N c_k(f) \overline{c_{k'}(f)} \delta_{k,k'} \\ &= \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 \end{aligned}$$

hvor vi brugte ortonormaliteten af  $e_k$ . □

**Eksempel 5.27** (Dirichlets kerne). *Betragt den trigonometriske række med  $c_k = 1$  for alle  $k$ :*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$$

Den  $N$ 'te afsnitssum af denne række er Dirichlets kerne af grad  $N$ :  $D_N(x)$ . Det er ikke svært at se, at  $\|D_N\|_2^2 = 2N+1$ , hvilket er lig med  $\sum_{k=-N}^N |c_k(D_N)|^2 = \sum_{k=-N}^N 1^2$ .

Det følgende lemma generaliserer Lemma 5.26.

**Lemma 5.28** (Parseval for uniform konvergent række). *Lad*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

være en uniform konvergent trigonometrisk række med sumfunktion  $f$ . Da er

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

konvergent med sum  $\|f\|_2^2$ .

*Bevis.* Vi har tidligere vist, at  $f$  er kontinuert på  $[-\pi, \pi]$  og dermed begrænset. Da  $s_N$  konvergerer uniformt mod  $f$ , konvergerer også  $\overline{s_N} f$  uniformt mod  $|f|^2$ . Da integral og  $\lim_{N \rightarrow \infty}$  bytter plads ved uniform konvergens, konkluderer vi, at

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{s_N(x)} f(x) dx \right)$$

konvergerer mod

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{s_N(x)} f(x) \right) dx = \|f\|_2^2$$

Udsagnet følger, da

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{s_N(x)} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-N}^N \bar{c}_k e^{-ikx} f(x) dx = \sum_{k=-N}^N \bar{c}_k c_k(f)$$

og den højre side er lig med

$$\sum_{k=-N}^N |c_k|^2$$

ved Proposition 5.22, som fastslår  $c_k(f) = c_k$ . □



**Eksempel 5.29** (Absolutværdifunktion). *Fourierrækken af abs konvergerer uniformt. Den ser ud til at konvergere mod absolutværdifunktionen. Hvis det viste sig at være rigtigt, kunne vi bruge Lemma 5.28 til at beregne summen af*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(\text{abs})|^2 = \frac{\pi^2}{4} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^4}$$

ved at udregne

$$\|\text{abs}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{2\pi} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Vi ser, at Fourierrækker kunne fortælle os noget om den eksakte sum af en talrække, hvor vi tidligere kun har formået at vise konvergens (f. eks. ved hjælp af Cauchy fortætning eller integraltest). Vi skal bare kunne vise, at Fourierrækken konvergerer mod abs.

**Eksempel 5.30** (Signumfunktion). *Bemærk, at vi ikke kan bruge Lemma 5.28 til at regne summen ud, selv hvis vi vidste, at den trigonometriske række ville konvergere til sign, da vi ved at konvergens ikke er uniform.*

Bessels ulighed er en konsekvens af det følgende sætning, som bekræfter vores intuition om, at  $f$  kunne være lig med Fourierrækkens sumfunktion. Mere præcist siger sætningen, at Fourierrækkens afsnitssummer leverer den bedste approksimation til  $f$  (i  $\|\cdot\|_2$ -normen) blandt alle trigonometriske polynomer.

**Sætning 5.31** (Bedste approksimation). *Lad  $f \in \text{PC}_{2\pi}$ . Så er er den  $N$ 'te afsnitssum  $s_N$  af dens Fourierrække*

$$s_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ikx}$$

en bedre approksimation til  $f$  end et vilkårligt  $N$ -te-grads trigonometrisk polynomium

$$t_N(x) = \sum_{k=-N}^N d_k e^{ikx}.$$

Mere præcist gælder

$$\|f - s_N\|_2 \leq \|f - t_N\|_2,$$

med lighed, hvis og kun hvis  $d_k = c_k(f)$  for alle  $k$ .

*Bevis.* Vi starter med at ekspandere  $\|f - t_N\|_2^2$ :

$$\begin{aligned}\|f - t_N\|_2^2 &= \langle f - t_N, f - t_N \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \langle f, t_N \rangle - \langle t_N, f \rangle + \langle t_N, t_N \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \langle s_N, t_N \rangle - \langle t_N, s_N \rangle + \langle t_N, t_N \rangle\end{aligned}$$

da

$$\langle f, t_N \rangle = \sum_{k=-N}^N \bar{d}_k \langle f, e_k \rangle = \sum_{k=-N}^N c_k(f) \bar{d}_k = \sum_{k, k'=-N}^N c_k(f) \bar{d}_{k'} \langle e_k, e_{k'} \rangle = \langle s_N, t_N \rangle.$$

Hvis vi nu bruger denne ligning igen med  $t_N = s_N$  finder vi

$$\langle s_N, f \rangle = \langle f, s_N \rangle = \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 = \langle s_N, s_N \rangle$$

og dermed

$$\begin{aligned}\|f - t_N\|_2^2 &= \langle f, f \rangle - \langle s_N, t_N \rangle - \langle t_N, s_N \rangle + \langle t_N, t_N \rangle \\ &= (\langle f, f \rangle - \langle f, s_N \rangle - \langle s_N, f \rangle + \langle s_N, s_N \rangle) \\ &\quad + (\langle s_N, s_N \rangle - \langle s_N, t_N \rangle - \langle t_N, s_N \rangle + \langle t_N, t_N \rangle) \\ &= \langle f - s_N, f - s_N \rangle + \langle s_N - t_N, s_N - t_N \rangle \\ &= \|f - s_N\|_2^2 + \|s_N - t_N\|_2^2.\end{aligned}$$

Fordi  $\|s_N - t_N\|_2^2$  altid er større end eller lig med nul, finder vi

$$\|f - t_N\|_2^2 \geq \|f - s_N\|_2^2.$$

□

I beviset brugte vi

$$\langle s_N, f \rangle = \langle f, s_N \rangle = \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 = \langle s_N, s_N \rangle = \|s_N\|_2^2.$$

Hvis vi nu omskriver afstanden mellem  $f$  og  $s_N$  ved hjælp af denne relation, finder vi

$$\begin{aligned}0 \leq \|f - s_N\|_2^2 &= \langle (f - s_N), (f - s_N) \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \langle f, s_N \rangle - \langle s_N, f \rangle + \langle s_N, s_N \rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \|s_N\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2\end{aligned}$$

eller med andre ord

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \geq \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2.$$

Da ulighed gælder for alle  $N$ , gælder det også for summen  $S$  af rækken

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2,$$

at

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \geq S.$$

**Korollar 5.32** (Bessels ulighed). *Lad  $f \in \text{PC}_{2\pi}$ . Da er*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$$

*konvergent med sum mindre end eller lig med*

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Bessels ulighed har som konsekvens, at rækken  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$  er begrænset.  $|c_k(f)|$  går derfor mod nul for  $|k| \rightarrow \infty$  ifølge divergenstesten.

**Korollar 5.33** (Riemanns lemma). *Hvis  $f \in \text{PC}_{2\pi}$ , så gælder  $|c_k(f)| \rightarrow 0$  for  $|k| \rightarrow \infty$ .*

**Eksempel 5.34** (Absolutværdifunktion). *Da  $\text{abs} \in \text{PC}_{2\pi}$  finder vi, at rækken*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(\text{abs})|^2 = \frac{\pi^2}{4} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^4}$$

*har sum mindre end eller lig med  $\|\text{abs}\|_2^2 = \frac{\pi^2}{3}$ . Bemærk, at  $|c_k(\text{abs})|$  er en nulfølge, hvilket er konsistent med Riemanns lemma.*

**Eksempel 5.35** (Signumfunktionen). *Da  $\text{sign} \in \text{PC}_{2\pi}$  finder vi at*

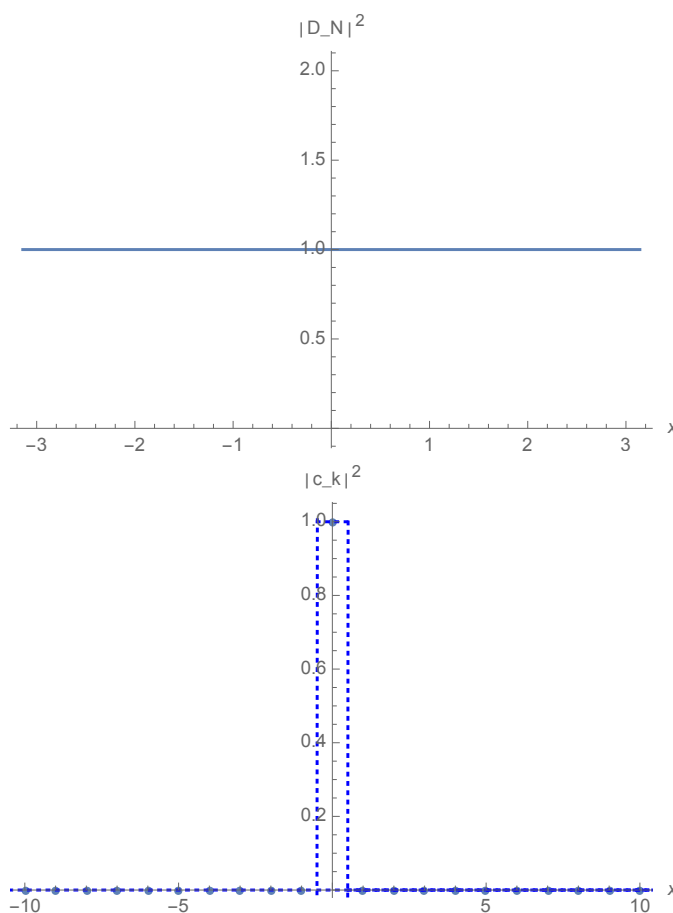
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(\text{sign})|^2 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

*er konvergent ifølge Bessels ulighed med sum mindre end eller lig med  $\|\text{sign}\|_2^2 = \frac{\pi}{2}$ . Bemærk, at  $|c_k(\text{sign})|$  er en nulfølge, hvilket er konsistent med Riemanns lemma.*

**Usikkerhedsprincip** Som vi vil diskutere i det følgende, leder vores eksempler til den observation, at jo mere spids og diskontinuert  $f$  er, jo mere spredt og langsommere aftagende er Fourierkoefficienterne — og omvendt.

For bedre at kunne sammenligne funktionerne, normaliserer vi dem, sådan at  $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int |f(x)|^2 dx = 1$ , og  $\frac{1}{2\pi} \int |f(x)|^2 dx$  kan derved tolkes som et sandsynlighedsmål på  $[-\pi, \pi]$ . Når Parsevals identitet holder, er også  $\sum_k |c_k|^2 = 1$  og dermed er  $|c_k|^2$  en sandsynlighedsfordeling på  $\mathbb{Z}$ . Vi vil nu undersøge, hvordan disse sandsynlighedsfordelinger spiller sammen ved at se på tre eksempler i mere detalje:

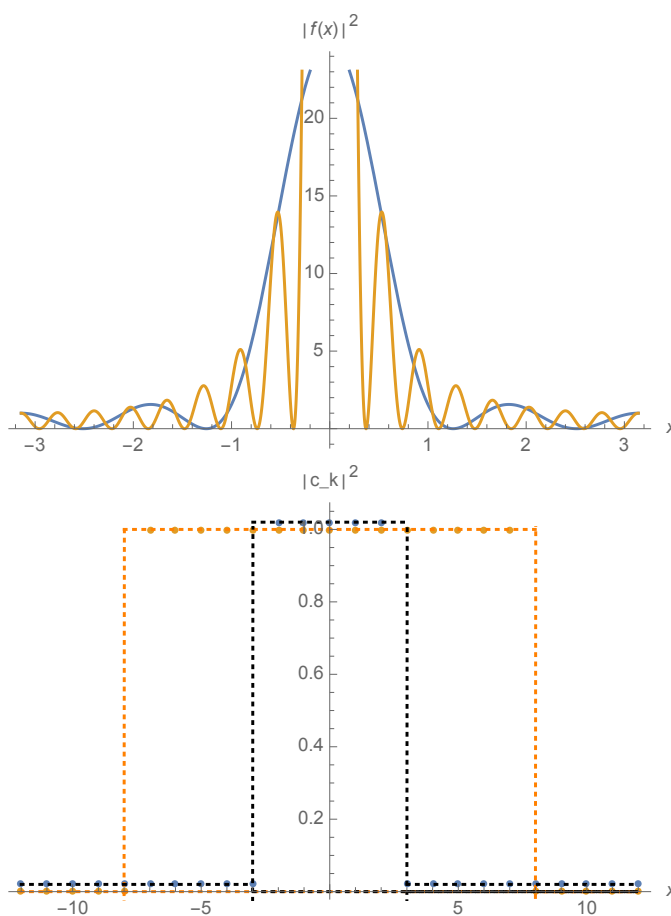
1. (Den konstante funktion)  $f(x) = 1$ ,  $|f(x)|^2 = 1$ ,  $|c_k(f)|^2 = \delta_{k,0}$



Vi observerer, at  $|f(x)|^2$  er konstant og dermed er  $x$  fuldstændig delo-

kaliseret på cirklen, mens fordelingen af Fourierkoefficienterne er lokaliseret omkring  $k = 0$ .

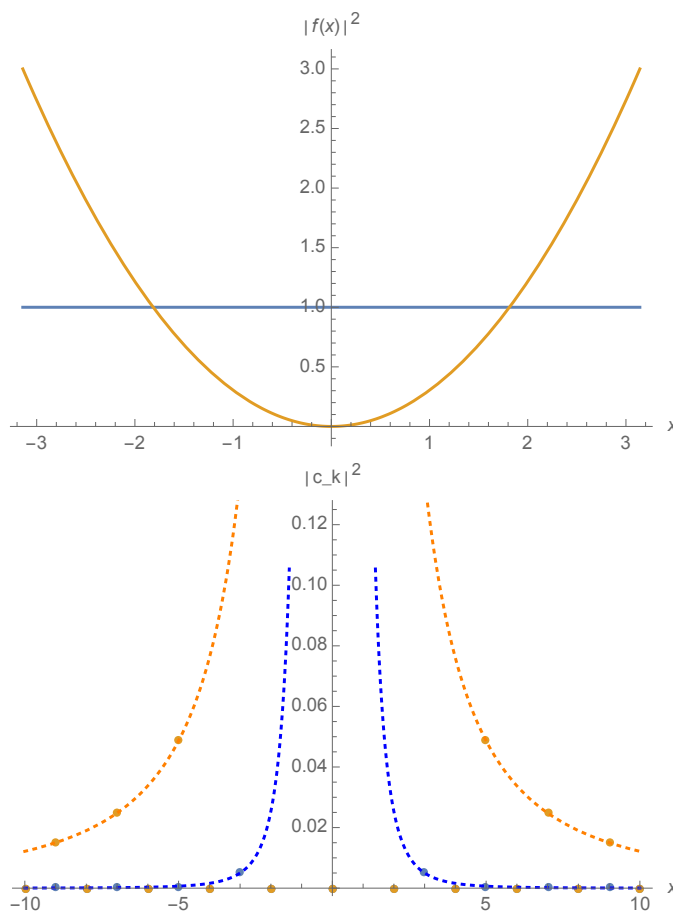
2. (Dirichlets kerne)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}D_N(x)$ ,  $|f(x)|^2 = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin^2((N+\frac{1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}$ ,  
 $|c_k(f)|^2 = \frac{1}{2N+1}$  hvis  $|k| \leq N$ , nul ellers



Vi ser at jo større  $N$  i  $D_N$ , jo mere lokaliseret bliver  $x$ . Grafen illustrerer dette ved  $D_2$ , som har en smal fordeling af Fourierkoefficienter og en spids, men ikke alt for spids distribution af  $x$  på cirklen (orange). For  $D_7$  derimod, som er tegnet i blå, er Fourierkoefficienterne bredere fordelt, mens distributionen på cirklen er spidsere og mere lokaliseret.

3. (Absolutværdi- og signumfunktion) Hvis  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \text{abs}(x)$ , hvor  $|f(x)|^2 = \frac{3}{\pi^2} |x|^2$  gælder at  $|c_k(f)|^2 = \frac{12}{\pi^2 k^2}$  hvis  $k$  er ulige, ellers er  $c_k = 0$  (orange

i grafen). Hvis  $f(x) = \text{sign}(x)$ , som opfylder  $|f(x)|^2 = 1$ , gælder at  $|c_k(f)|^2 = \frac{4}{\pi^2 k^4}$  hvis  $k$  er ulige, ellers er  $c_k = 0$  (blå i grafen).



Vi ser, at Fourierkoefficienterne (orange), for den kontinuerte absolutværdifunktion (ved  $x = -\pi$ ) aftager hurtigere end dem for den diskontinuerte signumfunktion (blå).

Vores eksemper leder til følgende generelle observation:

- højere usikkerhed af værdien  $x$  (fordelt med sandsynlighed  $\frac{1}{2\pi}|f(x)|^2 dx$ ) medfører en lavere usikkerhed af værdien  $k$  (fordelt med sandsynlighed  $|c_k|^2$ )
- lavere usikkerhed af værdien  $x$  medfører en højere usikkerhed af værdien  $k$ .

Med andre ord observerer vi, at enten  $x$  eller  $k$  har en høj usikkerhed.

Dette udsagn er sandt for alle  $f \in \text{PC}_{2\pi}$  og vi vil nu formulere dette mere præcist. Der findes flere måder, at måle usikkerheden på, f.eks. variansen eller entropien. Vi vælger en entropisk formulering, da variansen af en størrelse fordelt på en cirkel er vanskeligt at definere. Da sandsynlighedsmål ofte er komplicerede at håndtere, indfører vi en diskretisering af cirklen i  $T$  dele med størrelse  $2\pi\Delta$ , hvor  $\Delta = 1/T$  (vi vælger  $T$  ulige). Den diskretiserede version af  $f$  bliver så til  $g(\chi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\chi\Delta}^{-\pi+(\chi+1)\Delta} |f(x)|^2 dx$  for  $\chi = 0, \dots, T-1$ .  $g(\chi)$  er nu en sandsynlighedsfordeling på  $0, \dots, T-1$ , og vi kommer ikke ind i noget matematisk vanskeligt terræn.

Shannon entropi er et mål for usikkerheden for en given sandsynlighedsfordeling. Shannon entropien af  $g(\chi)$  og  $|c(k)|^2$  er givet henholdsvis ved

$$H(K) \sim - \sum_k |c(k)|^2 \log |c(k)|^2$$

og

$$H(\chi) = - \sum_\chi g(\chi) \log g(\chi),$$

og vi ved, at

- høj usikkerhed  $\Leftrightarrow$  høj entropi
- lav usikkerhed  $\Leftrightarrow$  lav entropi

Lad os se på de første to eksempler:

1.  $|c_k|^2 = \delta_{k,0}$  og dermed er  $H(K) = 0$ ; vi kender værdien  $k$  præcist ( $k = 0$ !), og derfor er der ingen usikkerhed. Derimod er  $|f(x)|^2 = 1$  of  $g(\chi) = \Delta$  konstant.  $H(\chi) = \log \frac{1}{\Delta}$ , og usikkerheden, omkring i hvilket af de  $T = \frac{1}{\Delta}$  intervaller  $x$  falder, maximal.
2.  $k$  er uniformt fordelt på  $T = \frac{1}{\Delta}$  værdier og har derfor  $H(K) = \log \frac{1}{\Delta}$ , men vi ser, at  $|f(x)|^2$  er mest koncentreret i intervallet omkring nul, derfor,  $H(\chi) \approx 0$ .

Dette motiverer følgende *usikkerhedsprincip*, som Biralynicki-Birula beviste generelt: For alle  $f \in \text{PC}_{2\pi}$  gælder at

$$H(\chi) + H(K) \geq \log \frac{1}{\Delta}.$$

Usikkerhedsprincipper gælder mere generelt i Fourieranalysen på andre funktionsrum. Hvis man f. eks. ser på en arbitrær funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (som ikke nødvendigvis er perodisk), så afbilder den såkaldte Fouriertransformation den til en funktion  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (og ikke kun på  $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  som for periodiske funktioner) og man kan vise, at

$$H(\chi) + H(K) \geq \log \frac{1}{\Delta^2},$$

hvilket er den diskretiserede, entropiske form af det berømte Heisenberg usikkerhedsprincip

$$\text{Var}(X)\text{Var}(K) \geq \frac{1}{2},$$

hvor  $x$  (uden diskretisering) bliver fortolket som position, og  $k$  som impuls (=masse  $\times$  hastighed):

## 5.6 Punktvis konvergens

Indtil nu har vi kun haft indicier for vores forventede udsagn om, at  $f$  er sumfunktionen til Fourierrækken

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e_k(x).$$

I dette afsnit skal vi finde et kriterium, som medfører *punktvis* konvergens af Fourierrækken i et punkt  $x$  til  $f(x)$ . I modsætning til vores undersøgelser af punktvis konvergens af potensrækker, inddrager vores kriterium ikke kun Fourierrækken i punktet  $x$ , men også i en omegn af  $x$  (ved at fordre en vis kontinuitet). Før vi kommer til kriteriet for punktvis konvergens, er vi dog nødt til at have et kort lemma om afsnitssummer af Fourierrækker på plads.

**Lemma 5.36** (Fourierrækkens afsnitssum). *Lad  $f \in \text{PC}_{2\pi}$  med afsnitssummerne  $s_N$  til dens Fourierrække. Da gælder:*

$$s_N(x) = (f * D_N)(x),$$

hvor foldningen af  $f$  og  $D_N$  er givet ved  $(f * D_N)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)dt$ .



*Bevis.* Vi starter med at omformulere definitionen af afsnitssummen:

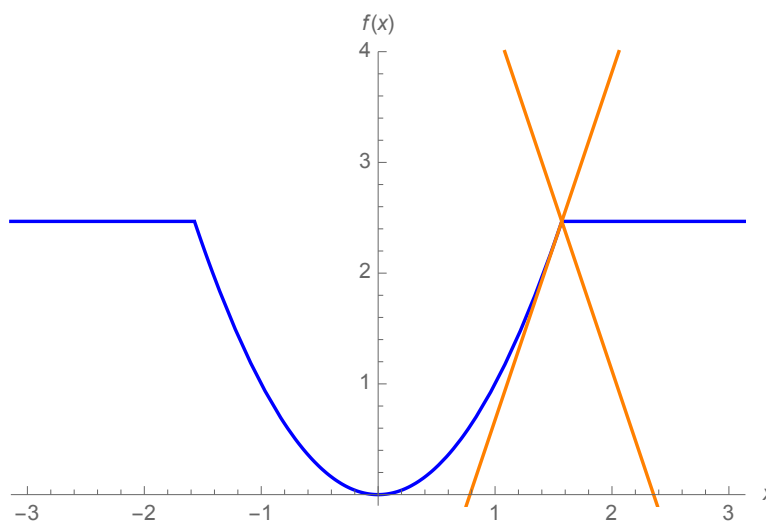
$$\begin{aligned}
 s_N(x) &= \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ikx} \\
 &= \sum_{k=-N}^N \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku} \right) e^{ikx} du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-N}^N f(u) e^{-iku} e^{ikx} du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{k=-N}^N e^{ik(x-u)} du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_N(x-u) du.
 \end{aligned}$$

Substituerer vi  $x - u = t$ , finder vi

$$\begin{aligned}
 s_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_N(x-u) du \\
 &= \frac{-1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-t) D_N(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t) D_N(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt.
 \end{aligned}$$

Den sidste lighed er sand, fordi både  $f$  og  $D_N$  er  $2\pi$ -periodiske.  $\square$

Vi er nu klar til konvergenstesten. Kontinuitetsbetingelsen, som vi kræver i punktet  $x_0$ , er en Lipschitzbetingelse. Det vil sige, vi kræver, at funktionen i en omegn af  $x_0$  ligger i en kegle omkring  $f(x_0)$ . Grafen viser et eksempel, hvor vi ser på en funktion, som er ikke differentiabel i  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ , men hvor funktionen ligger i en kegle med hældning  $M = \pi$ .



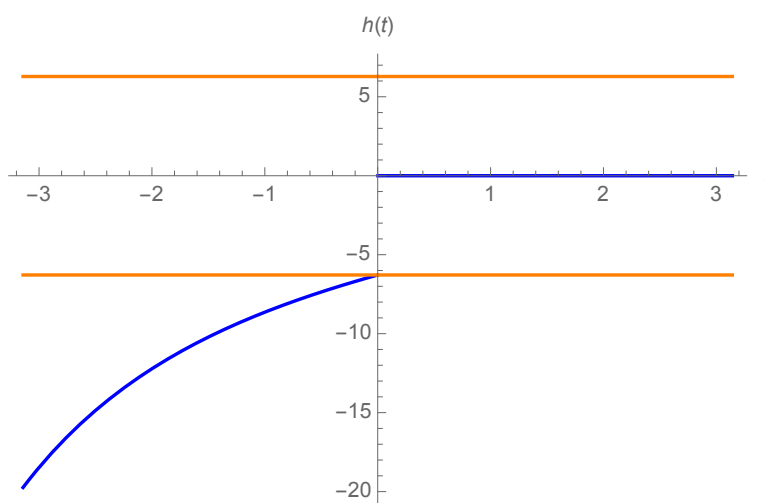
**Sætning 5.37** (Konvergenstest). Lad  $f \in \text{PC}_{2\pi}$ . Hvis der, for  $x_0 \in \mathbb{R}$ , findes et  $\delta > 0$  og et  $M \in \mathbb{R}_+$ , sådan at der for alle  $t \in (-\delta, \delta)$  gælder

$$|f(x_0 - t) - f(x_0)| \leq M|t|, \quad (5.6)$$

så er Fourierrækken konvergent i  $x_0$  med sum  $f(x_0)$ . Specielt medfører differentiability i  $x_0$  punktvis konvergens i  $x_0$ .

*Bevis.* Vi skal vise, at differensen mellem  $s_N(x_0)$  og  $f(x_0)$  går mod nul. Vi gør dette ved hjælp af funktionen  $h(t) := \frac{f(x_0-t) - f(x_0)}{\sin \frac{t}{2}}$  som vi definerer for alle  $t \neq 0$ . Tæt på  $t = 0$  er den næsten identisk med  $2 \cdot f'$  tæt på  $x_0$  (da  $\sin(t) \approx t$  for lille  $t$ ), og som har en begrænset diskontinuitet i  $x_0$  på grund af Lipschitzbetingelsen.

Grafen illustrerer  $h(t)$  versus grænserne  $2M$  og  $-2M$  med det tidligere eksempel.



Vi starter med at omskrive differensen til

$$\begin{aligned} s_N(x_0) - f(x_0) &= (f * D_N)(x_0) - f(x_0) \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_N(t) dt - f(x_0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt, \end{aligned}$$

hvor vi har brugt Lemma 5.36 i det første lighedstegn og at  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$  i det andet. Vi bruger nu lineariteten af integralet og Lemma 5.9 til at omskrive den højre side til

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 - t) - f(x_0)) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 - t) - f(x_0)) \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin \frac{1}{2}t} dt \end{aligned}$$

Ved definitionen af  $h(t)$  bliver dette til

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin \left( \left( N + \frac{1}{2} \right) t \right) dt, \quad (5.7)$$

som vi, ved hjælp af Eulers formel, omskriver til

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \frac{1}{2i} \left( e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t} \right) dt \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} h_+(t) e^{iNt} dt - \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} h_-(t) e^{-iNt} dt, \end{aligned} \quad (5.8)$$

hvor  $h_{\pm}(t) := h(t)e^{\pm i\frac{t}{2}}$ .

Ved konstruktion er  $h_{\pm}(t)$  stykvis kontinuert på nær muligvis i  $t = 0$ , da vi dividerede med  $\sin \frac{t}{2} \approx \frac{t}{2}$ . Men i punktet  $t = 0$  er  $h_{\pm}(t)$  begrænset på grund af Lipschitzbetingelsen. Vi konkluderer, at  $h_{\pm}(t) \in \text{PC}_{2\pi}$ . Vi kan derfor anvende Riemanns lemma på  $h_{\pm}(t)$ , som viser, at Fourierkoefficienterne  $c_{-N}(h_+)$  og  $c_N(h_-)$ , og dermed også den højre side af (5.8), går mod nul.  $\square$

**Eksempel 5.38** (Absolutværdifunktion). *Absolutværdifunktionen opfylder Lipschitzbetingelsen med  $M = 1$  for alle  $x$ , da*

$$|\text{abs}(x - t) - \text{abs}(x)| \leq 1 \cdot |t|.$$

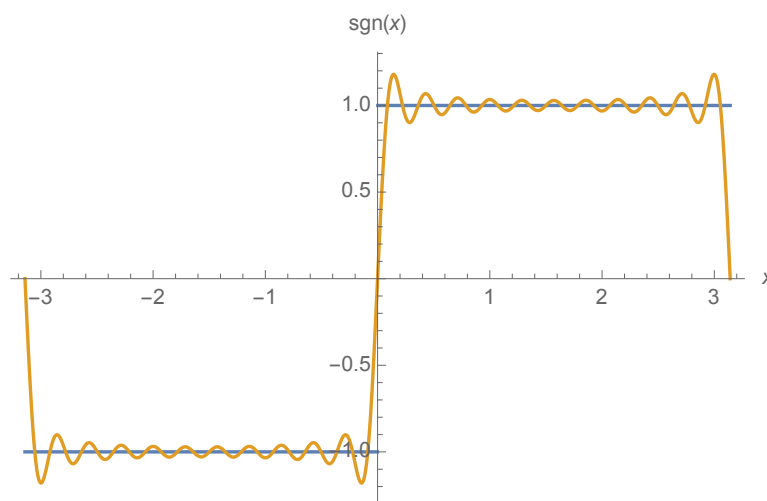
*Vi konkluderer, at Fourierrækken for abs (den  $2\pi$ -periodiske version af absolutværdifunktionen) konvergerer punktvis mod abs. Konvergensten er ydermere uniform ifølge vores tidligere diskussion.*

Man kan selvfølgelig anvende sætningen på funktioner, som ikke opfylder Lipschitzbetingelsen overalt, men kun for nogle værdier. I så fald vil udsagnet kun gælde i disse værdier. Men hvordan vil funktionen opføre sig i punkter, som ikke opfylder Lipschitz-betingelsen eller hvor funktionen ikke engang er kontinuert?

**Eksempel 5.39** (Signum funktion). *Signumfunktionen opfylder Lipschitzbetingelsen for alle  $x \neq n\pi$ . Vi konkluderer, at dens Fourierrække*

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

*konvergerer punktvis til sign på nær muligvis i  $x \neq n\pi$  for  $n \in \mathbb{Z}$ . Men i disse punkter er den lig med nul og derfor også lig med sign. Fourierrækken til signumfunktionen er derfor overalt punktvis konvergent. Grafen viser signumfunktionen sammen med  $s_{10}$ .*



Konvergensen er ikke uniform, da  $\text{sgn}$  ikke er kontinuert. Indsættes  $x = \frac{\pi}{2}$ , finder vi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \sim \frac{\pi}{4},$$

da  $\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^k$ .

Som eksemplet indikerer, gælder punktvis konvergens mere generelt for  $f \in \text{PC}_{2\pi}$ , da den højre og venstre afledte i diskontinuitetspunktet eksisterer i dette tilfælde. I så fald konvergerer funktionen til middelværdien

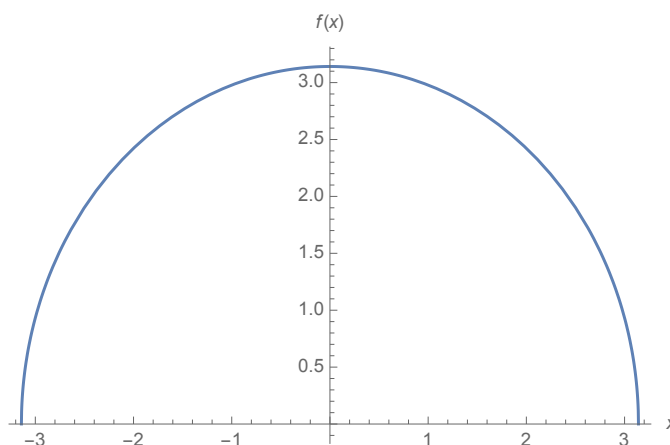
$$f(x) = \frac{1}{2} (f^+(x) + f^-(x)).$$

Dette kan vises ved en let generalisering af vores sætning.

**Eksempel 5.40** (Halvcirkelfunktionen). *Funktionen*

$$f(x) = \pi \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2}$$

som vi ser i grafen



er ikke Lipschitz, og har heller ingen højre eller venstre-afledte i  $x = -\pi$ . Sætningen (og den nævnte udvidelse) kan derfor ikke anvendes. Men den konvergerer sikkert alligevel punktvis, da et eksempel på en kontinuert funktion med en ikke-konvergent Fourierrække ikke er nemt at finde (men det findes!).

## 5.7 Uniform konvergens

Vi bemærker at vi har vist, at

- Fourierrækken til abs konvergerer punktvis mod abs if Sætning 5.37. Konvergensten er uniform ifølge Sætning 5.12, da Fourierkoefficienterne aftager med  $\frac{1}{k^2}$ :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\text{abs})e^{ikx} \sim_{\text{uniform}} \text{abs.}$$

- Fourierrækken til sign konvergerer punktvis, men ikke uniformt mod sign:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\text{sign})e^{ikx} \sim_{\text{punktvis}} \text{sign}$$

Bemærk også, at sign er den afledte af abs i alle punkter  $x$ , hvor abs er differentiabel.

$$\text{abs}'(x) = \text{sign}(x) \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$$

Omvendt er abs integralet af sign i alle punkter.

$$\text{abs}(x) := \int_0^x \text{sign}(x) dx \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Det samme gælder, når vi ser på leddene i Fourierrækkerne af abs og sign. Leddene i den sidstnævnte er de afledte af leddene i den førstnævnte og leddene i den førstnævnte er integralerne af leddene i den sidstnævnte (se diskussion i Eksempel 5.14). For Fourierkoefficienterne betyder det

$$c_k(\text{sign}) = ikc_k(\text{abs}),$$

for  $k \neq 0$ .

Vi kunne derfor have en formodning om, at det generelt gælder, at Fourierrækken til integralet

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt \quad x \in [-\pi, \pi)$$

konvergerer uniformt, hvis  $f \in \text{PC}_{2\pi}$  og  $F$  er kontinuert.

Dette er præcis det, som vil vi vise i det følgende afsnit. Vi må bare være forsigtige med at håndtere  $F$ , da den ikke er differentiabel overalt (og derfor ikke må blive kaldt stamfunktion til  $f$ ). Vi bemærker dog, at  $F$  er kontinuert og stykvis kontinuert differentiabel.

Vi starter med et lemma, som relaterer Fourierrækkerne for  $f$  og  $F$ .

**Lemma 5.41** (Fourierkoefficienter af  $f$  og  $F$ ). *Lad  $f \in \text{PC}_{2\pi}$  med  $c_0(f) = 0$ , så gælder for alle  $k \in \mathbb{Z}$  ( $k \neq 0$ )*

$$c_k(f) = ikc_k(F).$$

*Bevis.* Vi starter med at observere, at  $F(-\pi) = F(\pi)$ , da

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_0^\pi f(t) dt - \int_0^{-\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^\pi f(t) dt = c_0(f) = 0.$$

Vi finder ved hjælp af partiel integration ( $\int fg = [Fg] - \int Fg'$ )<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} [F(x) e^{-ikx}]_{-\pi}^\pi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi F(x) (-ike^{-ikx}) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( F(\pi) e^{-ik\pi} - F(-\pi) e^{-ik(-\pi)} \right) + ik \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi F(x) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Partiel integration for kontinuerte funktioner  $f$  udvides uden problemer til  $f \in \text{PC}_{2\pi}$ .

Den første summand er lig med nul, fordi  $F$  og eksponentialfunktionen er  $2\pi$ -periodiske og dermed

$$F(\pi)e^{-ik\pi} = F(-\pi)e^{-ik(-\pi)}.$$

Den anden summand er lig med  $ikc_k(F)$  som ønsket.  $\square$

**Sætning 5.42** (Uniform konvergens). *Lad  $f \in \text{PC}_{2\pi}$  med  $c_0(f) = 0$ , så konvergerer Fourierrækken til  $F$  uniformt mod sumfunktion  $F$ .*

*Bevis.* Da  $f \in \text{PC}_{2\pi}$ , er den også begrænset ved et  $M \in \mathbb{R}_+$ :  $|f(x)| \leq M$  for alle  $x$ . Da den også er integrabel, finder vi at

$$\begin{aligned} |F(x + \Delta) - F(x)| &= \left| \int_0^{x+\Delta} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt \right| \\ &= \left| \int_x^{x+\Delta} f(t)dt \right| \leq \int_x^{x+\Delta} |f(t)|dt \leq |\Delta|M. \end{aligned}$$

Dvs. funktionen er Lipschitz, og vi kan bruge Sætning 5.37 til at konkludere, at Fourierrækken konvergerer punktvis mod  $F$ . Vil vil nu vise, at

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(F)|$$

er konvergent, og vil medføre (Sætning 5.12), at Fourierrækkens konvergens er uniform. Vi ved fra Bessels ulighed, at  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(F)|^2$  er konvergent, men det medfører generelt ikke, at  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(F)|$  er konvergent (f.eks hvis  $|c_k(F)| = \frac{1}{k}$ ). Men fordi  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  kan vi bruge Bessels ulighed på  $f$  i stedet og finder, at  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$  er konvergent. Ifølge Lemma 5.41 gælder at

$$c_k(f) = ikc_k(F) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

Ved brug af den geometrisk-aritmetiske ulighed ( $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ) finder vi at

$$|c_k(F)| = \frac{1}{|k|} |c_k(f)| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{|k|^2} + |c_k(f)|^2 \right),$$

for  $k \neq 0$ . Sammenligningskriteriet for rækker, og det faktum, at både  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|^2}$  og

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$$

er konvergente rækker, medfører at  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(F)|$  er konvergent.  $\square$



Dette konkluderer vores undersøgelse af uniform konvergens og Fourier-rækker mere generelt.



## Kapitel 6

# Metriske rum

I dette sidste afsnit af kurset samler vi vores forskellige emner under ét tag, som hedder metriske rum. Et metrisk rum  $(M, d)$  er en mængde  $M$  udstyret med en metrik (afstandsfunktion)  $d$ , som associerer en afstand  $d(x, y) \geq 0$  til enhver par af to punkter  $x$  og  $y$  i  $M$ .

Udgangspunktet for vores undersøgelse er observationen, at både talfølger og funktionsfølger kan betragtes som følger af punkter i metriske rum. I tilfældet med talfølger, er mængden givet ved de reelle tal ( $M = \mathbb{R}$ ), som vi udstyrer med metrikken  $d_1(x, y) := |x - y|$ . I tilfældet med funktionsfølger udstyrer vi mængden af begrænsede funktioner  $B$  med metrikken  $d_\infty(f, g) := \|f - g\|_\infty$ , hvor  $\|\cdot\|_\infty$  er den uniforme norm. Vi skal også se på helt nye metriske rum og se, blandt andet, at mængden af facebook-deltagere udstyret

med afstanden

$$d_{\text{facebook}}(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \text{ og } y \text{ er facebook-venner} \\ 2 & x \text{ og } y \text{ er ikke facebook-venner,} \\ & \text{men de har en fælles facebook-ven} \\ 3 & x \text{ og } y \text{ er ikke facebook-venner,} \\ & \text{og har heller ikke en fælles facebook-ven,} \\ & \text{men } x \text{ har en facebook-ven,} \\ & \text{som har en fælles facebook-ven med } y \\ \vdots & \end{cases}$$

er et metrisk rum.

Vi vil lægge vægt på at forstå vores tidligere resultater, f.eks. fuldstændighed, Cauchy-følger og uniform konvergens, i den nye ramme og diskutere koncepter som Cauchy-fuldstændighed og Banachrum.

Vi afslutter studiet af metriske rum ved at undersøge særlige delmængder. Koncepterne vi vil møde, er generaliseringer af åbne  $(a, b)$  og lukkede  $[a, b]$  intervaller i  $(\mathbb{R}, d_1)$ , som leder os mod det vigtige matematiske fagområde topologi. I den sammenhæng vil vi undersøge begreber som indre punkter, randpunkter osv. Vi vil også udvikle vores forståelse af mængder i metriske rum ved introduktion af det vigtige begreb kompakthed.

## 6.1 Metriske rum og normerede vektorrum

Vi starter med at definere, hvad et metrisk rum er og betragter derefter i mere detalje en vigtig klasse af eksempler, som kommer fra normerede vektorrum.

### Metriske rum

**Definition 6.1** (Metrisk rum). *Lad  $M$  være en ikke-tom mængde. Vi siger at*

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

er en afstandsfunktion (metrik) på  $M$ , såfremt der for alle  $x, y, z \in M$  gælder:

- (positivitet)  $d(x, y) \geq 0$ , med lighed hvis og kun hvis  $x = y$ ,
- (symmetri)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- (trekantsulighed)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Parret  $(M, d)$  kaldes et metrisk rum. Elementerne i mængden  $M$  kalder vi for punkter i rummet.

Bemærk, at hvis  $(M, d)$  er et metrisk rum, og  $X \subseteq M$ , så er  $(X, d)$  også et metrisk rum. (Mere præcist skulle vi skrive  $(X, d_X)$ , hvor  $d_X$  er  $d$  indskrænket til  $X$ .)

**Eksempel 6.2** (talrum). Lad  $x, y \in \mathbb{C}$  og definer  $d_1(x, y) = |x - y|$ , så er  $d_1$  en metrik på  $\mathbb{C}$  (og dermed også på  $\mathbb{R}$  og  $\mathbb{Q}$ ), da den opfylder:

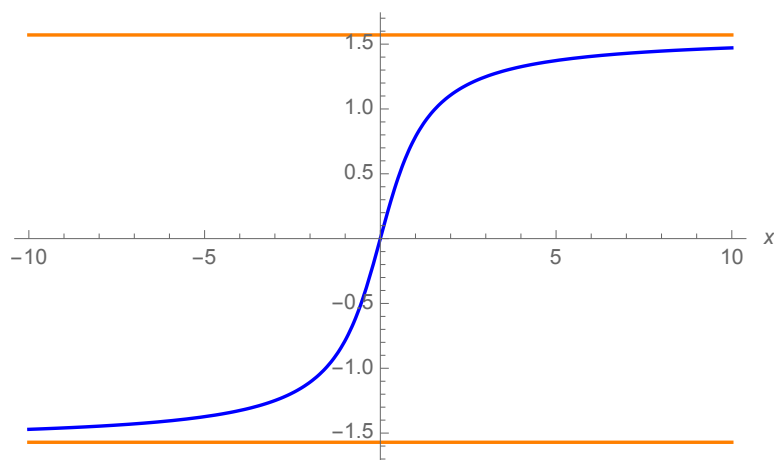
- (positivitet)  $d_1(x, y) = |x - y| \geq 0$  med lighed hvis og kun hvis  $x = y$ .
- (symmetri)  $d_1(x, y) = |x - y| = |y - x| = d_1(y, x)$
- (trekantsulighed)  $d_1(x, z) = |x - z| \leq |x - y| + |y - z| = d_1(x, y) + d_1(y, z)$ .

Dermed er  $(\mathbb{Q}, d_1)$ ,  $(\mathbb{R}, d_1)$  og  $(\mathbb{C}, d_1)$  tre metriske rum.

**Eksempel 6.3** (arctan). Lad  $x, y \in \mathbb{R}$  og definer  $d_{\arctan}(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ , så er  $d_{\arctan}$  en metrik på  $\mathbb{R}$ , da den opfylder:

- (ikke-negativitet)  $d_{\arctan}(x, y) = |\arctan x - \arctan y| \geq 0$ , med lighed hvis og kun hvis  $x = y$ ,
- (symmetri)  $d_{\arctan}(x, y) = |\arctan x - \arctan y| = |\arctan y - \arctan x| = d_{\arctan}(y, x)$ ,
- (trekantsulighed)  $d_{\arctan}(x, z) = |\arctan x - \arctan z| \leq |\arctan x - \arctan y| + |\arctan y - \arctan z| = d_{\arctan}(x, y) + d_{\arctan}(y, z)$ .

Dermed er  $(\mathbb{R}, d_{\arctan})$  et metrisk rum. Bemærk, at afstanden mellem  $x$  og  $y$  altid er mindre end  $\pi$ . Grafen viser arctan-funktionen med angivelse af linien  $y = \pm \frac{\pi}{2}$ .



**Eksempel 6.4** (Funktionsrum). Lad  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  være mængden af funktioner  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Definer

$$d_\infty(f, g) := \|f - g\|_\infty,$$

hvor

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

er den uniforme norm. Lad

$$B(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \|f\|_\infty < \infty\}$$

være mængden af begrænsede funktioner. Da er  $(B(\mathbb{R}, \mathbb{R}), d_\infty)$  et metrisk rum, da for alle  $f, g, h$ :

- (ikke-negativitet)  $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty \geq 0$  med lighed kun hvis  $f = g$ ,
- (symmetri)  $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty = \|g - f\|_\infty = d_\infty(g, f)$ ,
- (trekantsulighed)  $d_\infty(f, h) = \|f - h\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty + \|g - h\|_\infty = d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)$ .

Bemærk, at  $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), d_\infty)$  ikke er et metrisk rum, da en metrik skal tage værdier i  $\mathbb{R}$ , og da der findes funktioner  $f$  (fx  $f(x) = x$ ) med  $\|f\|_\infty = \infty$  og dermed  $d_\infty(f, 0) = \infty$ .

**Eksempel 6.5** (Diskret metrisk rum). Lad  $M$  være en mængde og lad for alle  $x, y \in M$ :

$$d_{\text{disk}}(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

Da gælder

- (ikke-negativitet)  $d_{\text{disk}}(x, y) \geq 0$  og  $d_{\text{disc}}(x, y) = 0$  kun hvis  $x = y$ .
- (symmetry)  $d_{\text{disk}}(x, y) = d_{\text{disk}}(y, x)$
- (trekantsulighed)  $d_{\text{disk}}(x, z) \leq d_{\text{disk}}(x, y) + d_{\text{disk}}(y, z)$ , som indses således: hvis  $d_{\text{disk}}(x, z) = 1$  må  $x$  være forskellig fra  $y$  eller  $y$  må være forskellig fra  $z$ .

Vi konkluderer, at  $(M, d_{\text{disk}})$  er et metrisk rum. Bemærk, at selv hvis  $M$  har uendeligt mange elementer, så er diameteren af  $M$

$$\text{diam } M := \sup_{x, y \in M} d(x, y),$$

aldrig større end 1.

**Eksempel 6.6** (graf). Lad  $G = (V, E)$  være en graf med en mængde af knuder (vertices)  $V$  og en mængde af kanter (edges)  $E$ . En kant forbinder to knuder, og er altså givet ved et uordnet par af knuder:  $e \in E$  er givet ved  $e = (x, y)$  med  $x \neq y$ , hvor  $x, y \in V$ . Grafafstanden mellem  $x$  and  $y$  er givet ved længden af den korteste vej, der forbinder  $x$  og  $y$ . Formelt

$$d_G(x, y) := \min\{n : \exists x = x_0, x_1, \dots, x_n = y \\ \text{med } (x_i, x_{i+1}) \in E, \forall i = 0, \dots, n-1\}$$

Hvis  $x$  og  $y$  ikke er forbundet, sætter vi  $d_G(x, y) := \infty$ . En graf kaldes forbundet, hvis alle par af punkter er forbundet med en vej af kanter. I dette tilfælde er det nemt at se, at  $(V, d_G)$  et metrisk rum. Hvis  $G$  ikke er forbundet, så er  $(V, d_G)$  ikke et metrisk rum, da afstanden nogle gange bliver uendelig.

Hvis knuder er personer på facebook, og kanterne forbinder venner, så er afstanden mellem to (forbundne) personer  $x$  og  $y$  på facebook lig med det antal personer (+ 1) som er nødvendig for at forbinde de to (se introduktionen til dette kapitel). LinkedIn viser faktisk denne distance direkte til brugerne. Hvis knuderne er matematikere, og kanterne forbinder matematikere, som har en fælles publikation, og  $x$  er matematikeren Paul Erdős, så er grafafstanden

$$d_{\text{matematik}}(x, y)$$

kendt som Erdős-tal af  $y$ . Ligesom facebook-distancen, er Erdős-tallet overraskende lille (selv mit er kun 3 via Harry Buhrman og Mario Szegedy) hvis det er endeligt.

Bemærk, at der er en stor forskel mellem eksemplerne talrum og funktionsrum på den ene side og diskret metrisk rum og det metriske rum afledt fra en graf. Forskellen ligger i det, at talrum og funktionsrum har en vektorrumstruktur, hvor afstanden er induceret af normen på vektorrummet. Denne egenskab førte også til at vi kunne betragte talrækker og funktionsrækker (dette kræver nemlig en sum-struktur). I den følgende afsnit undersøger vi sådanne normerede vektorrum i mere detalje.

### Normerede vektorrum

**Definition 6.7** (Normeret vektorrum). *Lad  $E$  være et reelt eller komplekst vektorrum (addition betegnes med  $+$ ). En norm på vektorrummet er en afbildning*

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R},$$

som opfylder for alle  $x, y \in E$ , og  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

- (ikke-negativitet)  $\|x\| \geq 0$ , med lighed hvis og kun hvis  $x = 0$  (nulvektoren)
- (skalering)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (trekantsulighed)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Parret  $(E, \|\cdot\|)$  kaldes for et normeret vektorrum.

**Lemma 6.8.** *Lad  $(E, \|\cdot\|)$  være et normeret vektorrum. Da er*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

en metrik på  $E$ .

*Bevis.* For alle  $x, y, z \in E$  gælder:

- (ikke-negativitet)  $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ , med lighed hvis og kun hvis  $x - y = 0$  ifølge ikke-negativitetsegenskaben af normen. Dette er ækvivalent med  $x = y$ , da  $E$  er et vektorrum.



- (symmetri)  $d(x, y) = \|x - y\| = |-1| \cdot \|(-1)(x - y)\| = \|y - x\| = d(y, x)$ , hvor vi bruger skaleringen af normen
- (trekantsulighed)  $d(x, z) = \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$ , hvor vi bruger trekantsuligheden for normen.

□

Bemærk også at metrikken i Lemma 6.8 opfylder  $d(x, 0) = \|x\|$ . Vi kan derfor ekstrahere normen fra metrikken.

**Eksempel 6.9.** Normen på  $\mathbb{R}$  er absolutværdifunktionen

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

og ledte os til afstanden  $d_1(x, y) = |x - y|$ . Bemærk, at

$$d_{\arctan}(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$$

ikke kommer fra en norm, da

$$\|x\| := d_{\arctan}(x, 0) = |\arctan x|$$

ikke opfylder skaleringsegenskaben, og derfor gælder generelt

$$\|x - y\| \neq d_{\arctan}(x, y).$$

Den uniforme norm  $\|\cdot\|_\infty$  er dog en norm på  $B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Den diskrete metrik kommer heller ikke fra en norm på et vektorrum  $M$  af den trivielle grund, at  $M$  ikke behøver være et vektorrum. På lignende måde ser vi, at  $(V, d_G)$  heller ikke kommer fra et normeret vektorrum, da punktmængden  $V$  mangler en addition på  $V$  og derfor ikke er et vektorrum.

Bemærk, at normerne på vektorrum ikke er unikke. Som det følgende eksempel viser, kan vi indføre flere naturlige normer på de endelig-dimensionelle vektorrum  $\mathbb{R}^d$  og  $\mathbb{C}^d$ .

**Lemma 6.10** ( $\mathbb{R}^d$  og  $\mathbb{C}^d$ ). De følgende tre er normer på vektorrummet  $\mathbb{R}^d$  ( $\mathbb{C}^d$ ) (Her er  $x = (x_1, \dots, x_d)$ ):

- (1-norm)  $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^d |x_j|$

- (2-norm eller euklidisk norm)  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^d |x_j|^2}$
- ( $\infty$ -norm eller sup-norm)  $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}$ .

Bemærk, at alle tre normer er lig med absolutværdien, hvis  $d = 1$ . Faktisk er enhver norm på  $\mathbb{R}$  en positiv skalering af absolutværdien. Kan du vise dette?

*Bevis.* Alle tre er ikke-negative ifølge absolutværdiens egenskaber og også lig med nul, hvis og kun hvis  $x = 0$ . Vi starter med at verificere skaleringsegenskaberne

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{j=1}^d |\lambda x_j| = \sum_{j=1}^d |\lambda| |x_j| = |\lambda| \|x\|_1$$

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_\infty &= \max\{|\lambda x_1|, \dots, |\lambda x_d|\} \\ &= \max\{|\lambda| |x_1|, \dots, |\lambda| |x_d|\} \\ &= |\lambda| \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\} = |\lambda| \|x\|_\infty \end{aligned}$$

$$\|\lambda x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^d |\lambda x_j|^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{j=1}^d |x_j|^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{j=1}^d |x_j|^2} = |\lambda| \|x\|_2.$$

Til sidst verificerer vi trekantsuligheden:

$$\|x + y\|_1 = \sum_{j=1}^d |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^d |x_j| + |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \max\{|x_1 + y_1|, \dots, |x_d + y_d|\} \\ &\leq \max\{|x_1| + |y_1|, \dots, |x_d| + |y_d|\} \\ &\leq \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\} + \max\{|y_1|, \dots, |y_d|\} \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \end{aligned}$$

Den euklidiske norm kommer fra det indre produkt<sup>1</sup>

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^d x_j \bar{y}_j$$

<sup>1</sup>Generelt gælder at et indre product inducerer en norm.

og opfylder trekantsuligheden på grund af Cauchy-Schwarz uligheden for det indre produkt (se lineær algebra)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle},$$

da

$$\begin{aligned} \|x + y\|_2^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2|\langle x, y \rangle| \\ &\leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} \\ &= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2. \end{aligned}$$

Vi har dermed vist, at alle tre er normer på  $\mathbb{R}^d$  og  $\mathbb{C}^d$ . □

$\|x\|_1$  og  $\|x\|_2$  er del af familien af  $p$ -normer ( $p \geq 1$ )

$$\|x\|_p := \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

og  $\|x\|_\infty$  kan opnås ved at lade  $p$  gå mod uendelig

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Vi kan desværre ikke vise i dette kursus, at  $\|x\|_p$  er normer for alle  $p \geq 1$ , da man for trekantsuligheden har brug for den sværere Minkowski-ulighed.

**Lemma 6.11** (Funktionsrum). *Lad  $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$  være et lukket interval. Lad  $F \equiv F(A, \mathbb{R})$  være mængden af funktioner  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  og definer*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in A\} \geq 0.$$

*De følgende tre er normerede reelle vektorrum:*

- $B \equiv B(A, \mathbb{R}) := \{f \in F : f \text{ begrænset}\}$
- $C \equiv C(A, \mathbb{R}) := \{f \in F : f \text{ kontinuert}\}$
- $C^1 \equiv C^1(A, \mathbb{R}) := \{f \in F : f \text{ kontinuert differentiabel}\},$

*Bevis.* Det er ikke svært at verificere, at alle tre rum er reelle vektorrum:  $\|f\|_\infty \equiv \|f\|_{\infty, A}$  er en norm på  $B(A, \mathbb{R})$ , da

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in A\} \geq 0$$

med lighed kun hvis  $f(x) = 0$  for alle  $x$ , og fordi  $\|f\|_\infty < \infty$  for alle begrænsede funktioner. Normen opfylder skaleringskravet, da

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(x)| : x \in A\} = |\lambda| \sup\{|f(x)| : x \in A\} = |\lambda| \|f\|_\infty.$$

Trekantsuligheden følger, da

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup\{|f(x) + g(x)| : x \in A\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| : x \in A\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\} + \sup\{|g(x)| : x \in A\} \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Den er selvfølgelig også en norm på de andre to rum, da

$$C^1 \subseteq C \subseteq B.$$

Derfor er  $(B, \|\cdot\|_\infty)$ ,  $(C, \|\cdot\|_\infty)$  og  $(C^1, \|\cdot\|_\infty)$  tre normerede vektorrum.  $\square$

På  $C^1$  er det naturligt at indføre en lidt stærkere norm:

$$\|f\|_{\infty^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Normegenskaberne er nemme at verificere.

Man kan også indføre lidt svagere normer på  $C([a, b], \mathbb{R})$ : 1- og 2-normen er givet ved

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx,$$

og

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

Mere generelt, kan man indføre  $p$ -normer (med Lebegue-integral)

$$\|f\|_p := \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

som fører til konceptet  $L^p$  rum

$$L^p(A, \mathbb{R}) := \{f \in F(A, \mathbb{R}) : \|f\|_p < \infty\}.$$

Man kan også betragte rum af stykvis kontinuerte (PC) eller stykvis kontinuert differentiable ( $PC^1$ ) funktioner, som er lidt større end henholdsvis de kontinuerte C eller kontinuert differentiable  $C^1$ , eller komplekse funktionsrum. 2-normen kommer fra et indre produkt, som vi havde vi set på rummet  $PC_{2\pi} = PC([- \pi, \pi], \mathbb{C})$  i sammenhæng med Fourierrækker (Bessels ulighed).

## 6.2 Punktfølger, konvergens og fuldstændighed

Vi vil nu se på konvergenegenskaber i metriske rum. Til dette formål introducerer vi punktfølger (som generaliserer talfølger og funktionsfølger) og indfører begrebet Cauchy-fuldstændighed.

**Punktfølger og konvergens** Begreberne talfølge og funktionsfølge generaliserer til punktfølge i generelle metriske rum.

**Definition 6.12** (Punktfølge). *Lad  $(M, d)$  være et metrisk rum, og  $x_n \in M$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ . Vi kalder*

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad x_1, x_2, x_3, \dots$$

en punktfølge i  $(M, d)$ .

**Eksempel 6.13.** *En punktfølge i  $(\mathbb{R}, d_1)$ , hvor  $d_1(x, y) = |x - y|$ , er en reel talfølge, som vi har set på i starten af kurset. En punktfølge i  $(\mathbb{C}, d_1)$  er en kompleks talfølge.*

**Eksempel 6.14.** *En punktfølge i  $(B, d_\infty)$ , hvor  $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$  er afstanden, som kommer fra den uniforme norm, er en funktionsfølge.*

Afstandsfunktionen i det metriske rum giver os en mulighed for at tale om konvergensegenskaber af punktfølger.

**Definition 6.15** (Konvergens). *Lad  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en punktfølge i et metrisk rum  $(M, d)$ . Vi siger, at følgen konvergerer mod  $x \in M$ , hvis der for alle  $\epsilon > 0$ , findes et  $N \in \mathbb{N}$ , sådan at for alle  $n \geq N$ :*

$$d(x_n, x) < \epsilon.$$

I så fald skriver vi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Vi siger, at følgen konvergerer, hvis der findes et  $x \in M$ , sådan at  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

**Eksempel 6.16** (Talfølge). At en punktfølge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(\mathbb{R}, d_1)$ , hvor  $d_1(x, y) = |x - y|$ , konvergerer mod  $x$ , betyder, at den reelle talfølge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer mod  $x$  som defineret i Kapitel 1

**Eksempel 6.17** (Funktionsfølge). En punktfølge  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(C([a, b]), d_\infty)$ , hvor  $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$ , er en følge af kontinuerte funktioner. Punktfølgen  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer mod punktet  $f$ , hvis funktionsfølgen  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer uniformt mod funktionen  $f$ .

**Definition 6.18** (Fortætningspunkt). Lad  $(M, d)$  være et metrisk rum.  $x \in M$  er et fortætningspunkt for punktfølgen  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , hvis der for alle  $\epsilon > 0$ , der findes uendeligt mange  $n \in \mathbb{N}$  med

$$d(x, x_n) < \epsilon.$$

**Definition 6.19** (Delfølge). Lad  $(M, d)$  være et metrisk rum,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en punktfølge og  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en strengt voksende følge af naturlige tal. Da kaldes  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  en delfølge af  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Eksempel 6.20** (Funktionsdelfølge). Vi har tidligere set på delfølger af talfølger, men ikke så meget på delfølger af funktionsfølger. Hvis vi opfatter en talfølge som en følge af konstante funktioner

$$f_n(x) = a_n,$$

finder vi selvfølgelig eksempler på funktionsfølger, som ikke er konvergente, men som har konvergente delfølger. Et mere interessant eksempel er

$$f_n(x) = \sin((-1)^n x) = (-1)^n \sin x.$$

Funktionsfølgen er ikke konvergent, men har  $\{f_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  som konstant (og dermed konvergent) delfølge, da

$$f_{2k}(x) = (-1)^{2k} \sin x = \sin x.$$

Følgende lemma bevises som for  $(\mathbb{R}, d_1)$ .

**Lemma 6.21.** *En følge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i et metrisk rum  $(M, d)$  har punktet  $a \in M$  som fortætningspunkt, hvis og kun hvis der findes delfølge som konvergerer mod  $a$ .*

**Eksempel 6.22.** *Betragt det normerede vektorrum  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_\infty)$ . Bemærk, at funktionsfølgen  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  givet ved*

$$f_n(x) = \sin((-1)^n x) = (-1)^n \sin x$$

har  $\sin x$  og  $-\sin x$  som fortætningspunkter med  $\{f_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  og  $\{f_{2n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  som uniformt konvergente delfølger.

På samme måde generaliseres begrebet Cauchy-følger til metriske rum.

**Definition 6.23** (Cauchy). *Lad  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en punktfølge i et metrisk rum  $(M, d)$ . Vi siger, at punktfølgen er en Cauchy-følge, hvis der, for alle  $\epsilon > 0$ , findes et  $N$ , således at for alle  $n, m \geq N$  gælder:*

$$d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Følgende tre lemmaer er generaliseringer af Lemma 1.47, Lemma 1.62 og Lemma 1.59. Bevisene følger umiddelbart ved at erstatte  $|x - y|$  med  $d(x, y)$  fra de gamle beviser. Vi giver her kun det tredje bevis.

**Lemma 6.24.** *Lad  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en konvergent følge i et metrisk rum  $(M, d)$  med grænsepunkt  $x \in M$ . Da er enhver delfølge af  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent med grænsepunkt  $x$ . Specielt har en konvergent følge sit grænsepunkt som eneste fortætningspunkt.*

**Lemma 6.25.** *Lad  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en Cauchy-følge i et metrisk rum  $(M, d)$ , og antag, at den har en konvergent delfølge. Da er  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent. Specielt har en Cauchy følge højst et fortætningspunkt, og hvis den har et, da er den konvergent.*

**Lemma 6.26.** *Enhver konvergent punktfølge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i et metrisk rum  $(M, d)$  er en Cauchy-følge.*

*Bevis.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  betyder at for alle  $\epsilon > 0$ , findes der et  $N$ , sådan at for alle  $n \geq N$ :

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

Lad nu også  $m \geq N$ , ved hjælp af trekantsuligheden finder vi

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

**Eksempel 6.27.** Lad  $f_n$  være givet ved Dirichlets kerne (cf Eksempel 5.8)

$$f_n(x) = D_n(x).$$

Funktionsfølgen  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  er ikke konvergent i  $(C([a, b]), d_\infty)$ , da den ikke er Cauchy:

$$\begin{aligned} \|D_n - D_{n-1}\|_\infty^2 &= \|e_n + e_{-n}\|_\infty^2 \\ &\geq \|e_n + e_{-n}\|_2^2 \\ &= \|e_n\|_2^2 + \|e_{-n}\|_2^2 + \langle e_n, e_{-n} \rangle + \langle e_{-n}, e_n \rangle = 2, \end{aligned}$$

hvor vi brugte, at  $\|\cdot\|_\infty \geq \|\cdot\|_2$ , hvilket er nemt at se.

Den følgende definition giver en måde at se på fuldstændighed, som er alternativ til Dedekind-fuldstændighed.

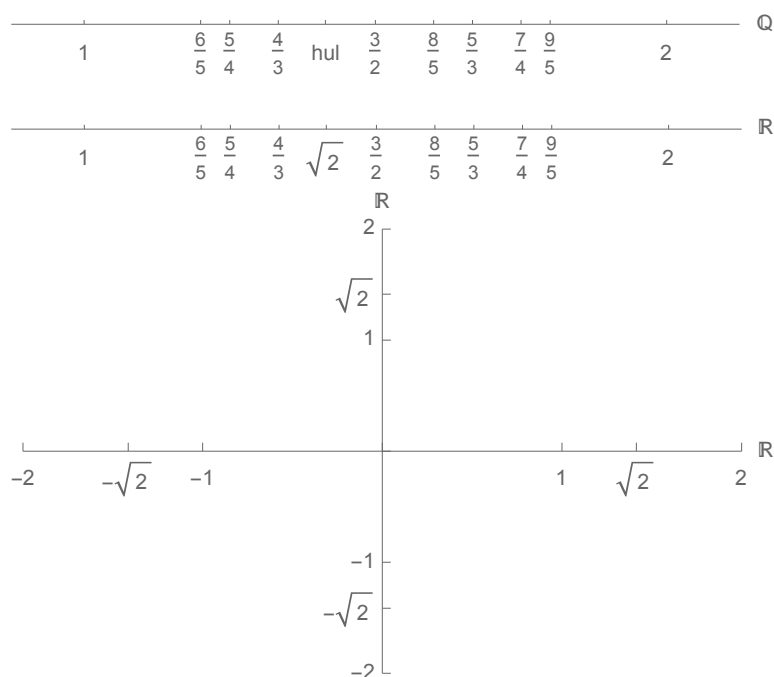
**Definition 6.28** (Cauchy-fuldstændighed). *Et metrisk rum  $(M, d)$  kaldes Cauchy-fuldstændigt, såfremt enhver Cauchy-følge er konvergent.*

Med andre ord siger vi, at et rum er fuldstændigt, hvis udsagnet i Sætning 1.64 gælder. Dette fænomen, at en sætning bliver til en definition, ses ofte i matematikken og illustrerer pointen at sætninger sjældent er slutpunkter i en matematisk udvikling, men ofte markerer en ny begyndelse grundet i en dybere forståelse af emnet.

**Eksempel 6.29** ( $\mathbb{R}$ ). *I starten af kurset havde viste vi (Sætning 1.64), at  $(\mathbb{R}, d_1)$  og  $(\mathbb{C}, d_1)$  er metriske rum og bemærkede også, at  $(\mathbb{Q}, d_1)$  ikke er et Cauchy-fuldstændigt rum. Bemærk specielt, at Dedekind-fuldstændighed af  $\mathbb{R}$  medfører dets Cauchy-fuldstændighed.*

*Graferne illustrerer de rationelle, de reelle tal og de komplekse tal og indikerer  $\sqrt{2}$ :*





Denne nye definition af fuldstændighed, fører til en måde at fuldstændiggøre et ikke-fuldstændigt metrisk rum ved at sige, at hvert punkt i fuldstændiggørelsen er repræsenteret ved en Cauchy-følge.

Specielt opnår vi en alternativ måde at fuldstændiggøre de rationelle tal. I stedet for at repræsentere et reelt tal ved et Dedekind-snit, bliver et reelt tal repræsenteret ved en Cauchy-følge.  $\sqrt{2}$  kan dermed forstås som repræsenteret af den rationelle talfølge

$$\frac{3}{2} = 1.5, \frac{17}{12} \approx 1.416\dots, \frac{577}{408} \approx 1.414215\dots$$

som vi havde konstrueret ved hjælp af Newtons metode.

Som vi har set tidligere, er mange af vores eksempler oprindeligt normerede vektorrum. Vi definerer derfor

**Definition 6.30** (Banachrum). *Et normeret vektorrum kaldes et Banachrum, hvis det tilhørende metriske rum er Cauchy-fuldstændigt.*

**Eksempel 6.31** ( $\mathbb{R}^d$  eller  $\mathbb{C}^d$ ). *Udstyret med 1-normen, 2-normen eller  $\infty$ -normen bliver  $\mathbb{R}^d$  og  $\mathbb{C}^d$  Banachrum: Man kan gå fra fuldstændighed af  $\mathbb{R}$  til  $\mathbb{R}^d$  på samme måde, som vi gik fra  $\mathbb{R}$  til  $\mathbb{C} (\cong \mathbb{R}^2)$ .*

**Sætning 6.32** (Funktionsrum). *De følgende tre rum er Banachrum:*

- $(B[a, b], \|\cdot\|_\infty)$
- $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$
- $(C^1[a, b], \|f\|)$ , hvor  $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

*Bevis.* Vi starter med at vise, at  $B([a, b], \mathbb{R})$  er fuldstændigt. Lad  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  være en Cauchy-følge af begrænsede funktioner. Da er, for alle  $x$ , talfølgen  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  en Cauchy-følge, som konvergerer ifølge Cauchy-kriteriet. Dvs.  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer punktvis mod en funktion  $f$ . Ved hjælp af Cauchy-kriteriet for uniform konvergens (Sætning 3.12) ser vi, at konvergenen er uniform, dvs. for alle  $\epsilon > 0$ , findes der et  $N \in \mathbb{N}$ , sådan at for alle  $n \geq N$  gælder at

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon$$

Specielt findes der et  $N$ , sådan at

$$\|f_N - f\|_\infty \leq \epsilon.$$

Lad nu  $\epsilon = 1$ . Vi ser nu, at  $f$  er begrænset, da der findes et  $N$ , sådan at

$$\|f\|_\infty = \|f - f_N + f_N\|_\infty \leq \|f - f_N\|_\infty + \|f_N\|_\infty \leq \|f_N\|_\infty + 1,$$

og da  $\|f_N\|$  er begrænset. Vi konkluderer, at enhver Cauchy-følge af begrænsede funktioner konvergerer uniformt mod en begrænset funktion.  $B([a, b], \mathbb{R})$  er dermed Cauchy-fuldstændigt.

For at vise, at  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  er fuldstændigt, er det tilstrækkeligt, at vise, at grænsefunktionen er kontinuert, hvis funktionsfølgen består af kontinuerte funktioner (da alle andre udsagn følger fra det første bevis). Men dette er sandt, da en uniformt konvergent følge af kontinuerte funktioner konvergerer mod en kontinuert funktion. I vores nye sprog betyder det, at vi har vist, at en Cauchy-følge i  $C$  konvergerer i  $C$ . Dermed er  $C$  udstyret med den uniforme norm Cauchy-fuldstændigt.

Et lignende argument holder i det tredje tilfælde. □

### 6.3 Delmængder og topologi

For at forstå strukturen af et metrisk rum vil vi nu undersøge delmængder af punkter i et metrisk rum. Vi vil møde generaliseringer af åbne  $(a, b)$  og lukkede  $[a, b]$  intervaller ved hjælp af generaliseringer af kugler. I den forbindelse vil vi også undersøge indre punkter  $x \in (a, b)$ , randpunkter, som kan ligge inde i eller udenfor mængderne ( $a \in [a, b]$  eller  $a \notin (a, b)$ ), og andre typer af punkter. Vi vil også generalisere de begrænsede mængder og udvikle vores forståelse af metriske rum ved introduktion af kompakte mængder.

#### Kugler og begrænsede mængder

**Definition 6.33** (Kugle). *Lad  $(M, d)$  være et metrisk rum,  $a \in M$  og  $r > 0$ . Vi siger, at*

$$K(a, r) := \{x : d(a, x) < r\}$$

*er kuglen med radius  $r$  omkring punktet  $a$ . Hvis  $r = 1$ , kalder vi kuglen for enhedskuglen omkring  $a$ .*

**Definition 6.34** (Diameter og begrænset mængde). *Lad  $(M, d)$  være et metrisk rum, og  $A \subseteq M$ . Vi siger, at*

$$\text{diam } A := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

*er diameteren af  $A$ . Hvis  $\text{diam } A < \infty$ , siger vi, at  $A$  er begrænset.*

Bemærk det strenge ulighedstegn i definitionen, og at kuglerne ligger i hinanden, da

$$K(a, r_1) \subseteq K(a, r_2)$$

for alle  $r_1 \leq r_2$ .

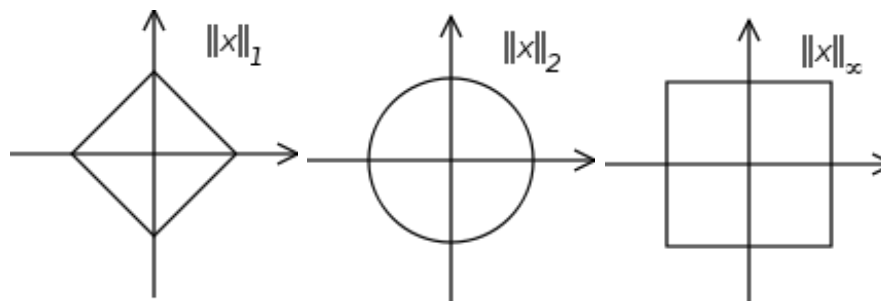
**Eksempel 6.35** ( $\mathbb{R}^2$ ). *Betragt de tre metriske rum  $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ,  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ,  $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ . De tilsvarende enhedskugler omkring nulpunktet er givet ved:*

$$K_1(0, 1) := \{x : \|x\|_1 < 1\},$$

$$K_2(0, 1) := \{x : \|x\|_2 < 1\},$$

$$K_\infty(0, 1) := \{x : \|x\|_\infty < 1\},$$

og er plottet i de følgende grafer.



Vi ser, at

$$K_1(0, 1) \subseteq K_2(0, 1) \subseteq K_\infty(0, 1)$$

hvilket kan fortolkes ved at sige, at  $\|x\|_\infty$  er en svagere norm på rummet end  $\|x\|_2$ , som igen er svagere end  $\|x\|_1$ . Bemærk, at  $\mathbb{R}^2$  også kan forstås som  $\mathbb{C}$  uden multiplikativ struktur. Generaliseringen til  $\mathbb{R}^d$  følger umiddelbart. Bemærk også, at kuglerne er ens på  $\mathbb{R}$ , da afstanden i det tilfælde er lig med absolutværdien af differensen. Hvordan ser kuglerne ud, hvis vi ser på  $\mathbb{R}$  udstyret med  $\arctan$  afstanden?

**Eksempel 6.36** (Funktionsrum). Betragt  $(C([0, 1]), d_1)$ ,  $(C([0, 1]), d_2)$  og  $(C([0, 1]), d_\infty)$ . De tilsvarende enhedskugler omkring nulpunktet er givet ved

$$K_1(0, 1) := \{f : \|f\|_1 < 1\}$$

$$K_2(0, 1) := \{f : \|f\|_2 < 1\}$$

$$K_\infty(0, 1) := \{f : \|f\|_\infty < 1\}$$

Denne gang er inklusionerne omvendte

$$K_\infty(0, 1) \subseteq K_2(0, 1) \subseteq K_1(0, 1).$$

Inklusionerne er strenge, da der, for  $\epsilon > 0$  tilstrækkeligt lille, gælder at

$$f(x) = (2 - \epsilon)x$$

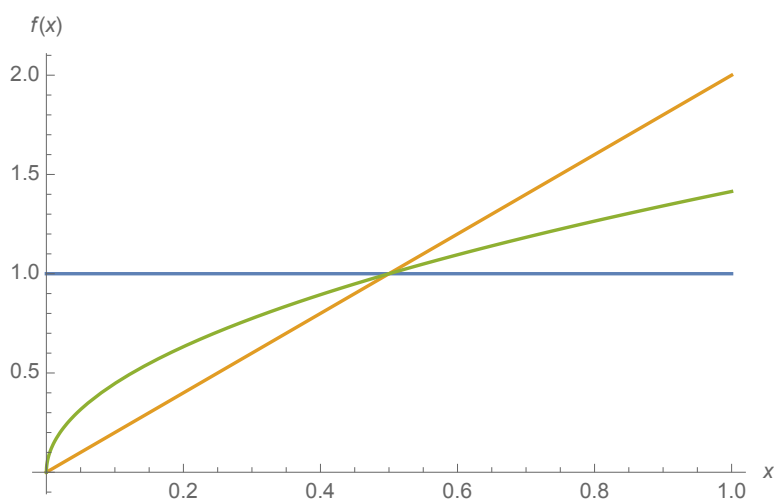
ligger i  $K_1(0, 1)$ , men ikke i  $K_2(0, 1)$ , og

$$f(x) = \sqrt{(2 - \epsilon)x}$$

ligger i  $K_2(0, 1)$ , men ikke i  $K_\infty(0, 1)$ . Selvfølgelig ligger

$$f(x) = 1$$

i alle tre rum. Grafen illustrerer funktionerne for  $\epsilon = 0$ .



Det er vigtigt at forstå, at  $(C([0, 1]), d_1)$  er uendelig-dimensionelt, og at det er derfor ikke muligt at tegne kuglerne i en graf.

**Eksempel 6.37** (Diskret metrisk rum). I et diskret metrisk rum  $(M, d)$  er kuglerne lidt underlige, da de enten består af et enkelt punkt, eller hele rummet:

$$K(a, r) = \begin{cases} \{a\} & r < 1 \\ M & r \geq 1 \end{cases}$$

**Åbne og afsluttede mængder** Vi bruger nu kuglerne til at definere, hvad en åben mængde er, og hvordan man afslutter en mængde. Vi begynder med at definere nogle punkter i forhold til en given mængde.

**Definition 6.38** (Punkter). Lad  $x \in M$  og  $A \subseteq M$ . Vi siger, at

- $x$  er et indre punkt for  $A$ , hvis  $\exists r > 0: K(x, r) \subseteq A$
- $x$  er et ydre punkt for  $A$ , hvis  $\exists r > 0: K(x, r) \cap A = \emptyset$
- $x$  er et randpunkt for  $A$ , hvis det hverken er et indre eller ydre punkt for  $A$

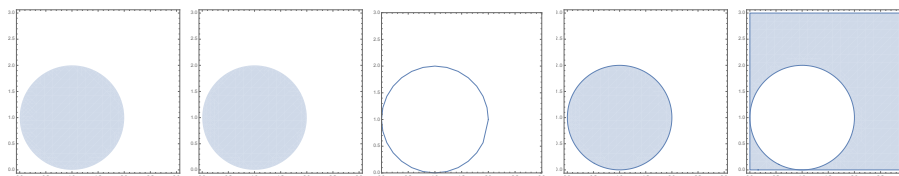
- $x$  er et kontaktpunkt for  $A$ , hvis  $\forall r > 0: K(x, r) \cap A \neq \emptyset$ , dvs. hvis  $x$  ikke er et ydre punkt for  $A$ .

**Definition 6.39** (Det indre, randen, afslutningen, komplementærmængden). Lad  $A \subseteq M$ . Vi siger, at

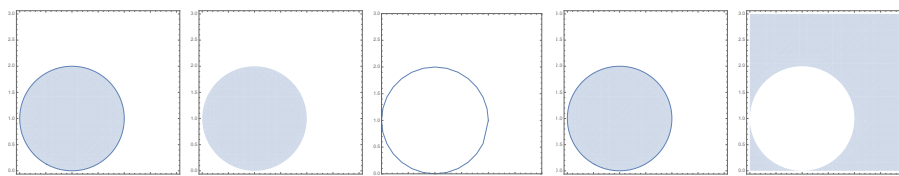
- $A^\circ := \{x \in M : x \text{ indre punkt for } A\}$  er det indre af  $A$
- $\partial A := \{x \in M : x \text{ randpunkt for } A\}$  er randen af  $A$
- $\bar{A} := \{x \in M : x \text{ kontaktpunkt for } A\}$  er afslutningen af  $A$ .
- $A^c := \{x \in M : x \notin A\}$  er komplementærmængden (eller komplementet) til  $A$ .

Det er en god øvelse at tjekke, at disse begreber stemmer overens med vores terminologi fra talrummet  $(\mathbb{R}, d_1)$ . Specielt, hvis  $A = (a, b]$  er det halvåbne interval ( $a < b$ ), så er  $A^\circ = (a, b)$ ,  $\partial A = \{a, b\}$  og  $\bar{A} = [a, b]$ . Dette generaliserer på en naturlig måde til højere dimensioner, som følgende eksempel viser.

**Eksempel 6.40** ( $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ). Lad  $A = K((1, 1), 1)$  være kuglen med radius 1 omkring punktet  $(1, 1)$ . Graferne viser  $A$ ,  $A^\circ$ ,  $\partial A$ ,  $\bar{A}$  og  $A^c$ .



Lad  $A = \overline{K((1, 1), 1)}$  være afslutningen af kuglen af radius 1 omkring punktet  $(1, 1)$ . Graferne viser  $A$ ,  $A^\circ$ ,  $\partial A$ ,  $\bar{A}$  og  $A^c$ .



Følgende eksempler er mere overraskende og illustrerer samtidigt, at man skal være forsigtig med at bestemme f.eks. det indre og afslutningen af en mængde.

**Eksempel 6.41** (diskret metrisk rum). *I et diskret metrisk rum  $(M, d_{\text{disk}})$  og i en mængde  $A \subseteq M$  er alle punkter indre punkter og der findes ikke nogen randpunkter.*

**Eksempel 6.42** ( $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ). *Lad  $(\mathbb{R}, d_1)$  være vores metriske rum, og  $A = \mathbb{Q}$ . Da er*

$$A^\circ = \emptyset, \partial A = \mathbb{R}, \bar{A} = \mathbb{R}, A^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Vi er nu klar til at definere åbne og afsluttede mængder og se på deres relationer.

**Definition 6.43** (åben, afsluttet). *Lad  $A \subseteq M$ . Vi siger, at*

- *$A$  er åben, hvis  $A = A^\circ$ .*
- *$A$  er afsluttet (lukket), hvis  $A = \bar{A}$ .*

**Sætning 6.44** (dualitet). *Lad  $(M, d)$  være et metrisk rum, og lad  $A \subseteq M$ . Så gælder, at*

- *$A$  er afsluttet, hvis og kun hvis  $A^c$  er åben.*
- *$A$  er åben, hvis og kun hvis  $A^c$  er afsluttet.*

*Bevis.* Det er tilstrækkeligt at vise den første påstand, da vi kan bruge den første påstand på  $B = A^c$  og finde at

- *$B = A^c$  er afsluttet, hvis og kun hvis  $B^c = (A^c)^c = A$  er åben.*

For at vise den første påstand, bemærk, at

$$(\bar{A})^c = (A^c)^\circ.$$

Hvis  $A$  er afsluttet, dvs.  $A = \bar{A}$ , gælder

$$A^c = (\bar{A})^c = (A^c)^\circ,$$

og dermed er  $A^c$  åben. Omvendt, hvis  $A^c$  er åben, dvs.  $(A^c)^\circ = A^c$ , så gælder

$$A^c = (A^c)^\circ = (\bar{A})^c,$$

hvilket er ækvivalent med

$$A = \bar{A},$$

og viser dermed, at  $A$  er afsluttet. □

Både definitionen og sætningen illustreres ved vores tidligere grafer. Bemærk følgende vigtige eksempel.

**Eksempel 6.45.** *Lad  $(M, d)$  være et metrisk rum. Da er  $M$  og  $\emptyset$  både åbne og afsluttede:  $\emptyset$  er lig med sit indre og sin afslutning og dermed både afsluttet og åben.  $M$  er komplementærmængden af  $\emptyset$  og er dermed (Sætning 6.44) også åben og afsluttet.*

Vi er nu klar til at se på alle åbne mængder på en gang og på denne måde undersøge *topologiske* egenskaber af metriske rum, dvs. egenskaber som er uændrede ved kontinuerte deformationer.

**Definition 6.46** (Systemet af åbne mængder). *Lad  $(M, d)$  være et metrisk rum. Da kaldes*

$$\mathcal{G} := \{A : A \text{ åben i } (M, d)\}$$

*for systemet af åbne mængder. Et begreb, som kun afhænger af systemet af åbne mængder kaldes for et topologisk begreb. To metrikker  $d$  og  $d'$  på  $M$  kaldes ækvivalente, hvis de tilhørende systemer af åbne mængder er identiske.*

**Lemma 6.47.** *Begreberne åben og afsluttet er topologiske begreber. Begrebet begrænset er ikke et topologisk begreb.*

*Bevis.* Det er åbenlyst, at begrebet åben kun er afhængigt af systemet af åbne mængder. Da en mængde er afsluttet, hvis og kun hvis komplementærmængden er åben (Lemma 6.44), ser vi, at også dette begreb kun afhænger af systemet af åbne mængder. At begrebet begrænset ikke er et topologisk begreb, ses ved at systemet af åbne mængder i  $(\mathbb{R}, d_1)$  er identisk med systemet af åbne mængder i  $(\mathbb{R}, d_{\arctan})$ , men at alle mængder i den sidstnævnte er begrænsede, hvorimod mængden  $\mathbb{R}$  ikke er begrænset i  $(\mathbb{R}, d_1)$ .  $\square$

**Kompakte mængder** Mange gange, når man har brug for en nem mængde i  $\mathbb{R}$ , tager man et lukket interval  $[a, b]$ . Overvej f.eks. hvorfor funktionsmængden  $C([a, b])$  er 'nemmere' end  $C((a, b))$  eller  $C(\mathbb{R})$ . I denne sektion skal vi udvide konceptet lukket interval til generelle metriske rum.  $[a, b]$  i  $(\mathbb{R}, d_1)$  er et eksempel på en sekventiel kompakt mængde:



**Definition 6.48.** Lad  $(M, d)$  være et metrisk rum og  $A \subseteq M$ .  $A$  er sekventielt kompakt (eller følge-kompakt), hvis enhver punktfølge i  $A$  har et fortætningspunkt i  $A$ . (Specielt er  $A = \emptyset$  sekventiel kompakt).

Vi skal senere hen se, at sekventiel kompakthed er et topologisk begreb (Sætning 6.53).

Følgende lemma vil vi nok forvente ud fra vores eksempel  $[a, b]$ .

**Lemma 6.49.** Lad  $(M, d)$  være et metrisk rum, og  $A \subseteq M$  en sekventiel kompakt delmængde. Da er  $A$  afsluttet og begrænset.

*Bevis.* Da  $A$  er sekventiel kompakt, har enhver punktfølge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $A$  et fortætningspunkt ifølge definitionen. Hvis  $A$  ikke er afsluttet, findes der et  $x \in \overline{A} \setminus A$ . Det er nemt at se, at der findes en punktfølge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $A$ , sådan at  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Dvs.  $x$  er den unikke fortætningspunkt for punktfølgen, men ifølge antagelsen ligger  $x$  i  $A$ , hvilket er en modsigelse.  $A$  må derfor være afsluttet.

$A$  ubegrænset betyder, at

$$\text{diam } A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} = \infty.$$

Det medfører, at der findes en punktfølge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  med  $d(x_n, x_1) \geq n$ . Ellers vil der findes  $R > 0$ , så at  $d(x, x_1) \leq R$  for alle  $x \in A$ , men så er  $\text{diam } A \leq 2R$  ved trekantsulighed.

Sådan en følge har ikke noget fortætningspunkt, da der for alle  $x$  med  $d(x, x_1) \leq N - 1$  gælder, at

$$d(x, x_n) \geq d(x_n, x_1) - d(x_1, x) \geq n - (N - 1) \geq 1$$

for alle  $n \geq N$ . Dermed kan

$$d(x, x_n) \leq 1$$

gælde for højst endelig mange  $n$  og  $x$  kan derfor ikke være et fortætningspunkt. Da  $N$  var arbitrært, gælder dette udsagn for alle  $x$ .  $\square$

Intuitionen fra  $[a, b]$  vil lede os til at spekulere på, om det omvendte udsagn også gælder, altså om enhver afsluttet og begrænset mængde er kompakt. Dette er ikke altid rigtigt, som følgende eksempel viser.

**Eksempel 6.50.** Lad  $(M, d)$  være et diskret metrisk rum med uendeligt mange punkter.  $M$  er en begrænset mængde, da  $d(x, y) \leq 1$  for alle  $x, y \in M$  og også afsluttet, da  $M$  altid er afsluttet. Til gengæld er  $M$  ikke sekventiel kompakt, da der findes en punktfølge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  med  $x_n \neq x_m$  for alle  $m \neq n$ , og dermed  $d(x_n, x) \geq 1$  for alle på nær maksimalt et punkt i rummet.  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  har derfor intet fortætningspunkt, og  $M$  er ikke sekventiel kompakt.

Men i tilfældet af  $\mathbb{R}^d$  kan vi redde situationen. Beviset er næsten det samme som for den komplekse Bolzano-Weierstrass Sætning (Sætning 1.53).

**Sætning 6.51** (Heine-Borel). Lad  $(\mathbb{R}^d, d_2)$  være et Euklidisk rum og  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  en delmængde. Da er  $A$  sekventiel kompakt hvis og kun hvis  $A$  er afsluttet og begrænset.

*Bevis.*  $\Rightarrow$  er indholdet i Lemma 6.49.

$\Leftarrow$ : Hvis  $A$  er begrænset er enhver punktfølge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  begrænset. Hvis vi skriver  $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^d)$ , er også talfølgen af koordinaterne  $\{x_n^j\}_{n \in \mathbb{N}}$  begrænset for hvert  $j$ , da

$$|x_n^j|^2 \leq \sum_{i=1}^d |x_n^i|^2 = \|x_n\|_2^2.$$

Ifølge Sætning 1.52 har  $\{x_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$  en konvergent delfølge i  $(\mathbb{R}, d_2)$ :

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} x_{n'}^1 = x^1.$$

Vi ser nu på punktfølgen  $\{x_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}}$  og gentager det samme argument med den anden koordinatfølge og finder en delfølge  $\{x_{n'_n''}^2\}_{n'' \in \mathbb{N}}$ , sådan at

$$\lim_{n'' \rightarrow \infty} x_{n'_n''}^2 = x^2.$$

Bemærk, at

$$\lim_{n'' \rightarrow \infty} x_{n'_n''}^1 = x^1.$$

Vi fortsætter på den måde og finder en delfølge  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , sådan at

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^1 = x^1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^2 = x^2$$

$$\vdots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^d = x^d$$

Dvs.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x := (x^1, x^2, \dots, x^d).$$

Da  $A$  er afsluttet, ligger  $x$  i  $A$ , og vi har dermed fundet en konvergent delfølge, og dermed et fortætningspunkt for hver punktfølge.  $A$  er dermed sekventiel kompakt.  $\square$

Vi afslutter kurset med denne vigtige sætning, som karakteriserer de sekventiel kompakte mængder ved hjælp af systemet af åbne mængder. Før vi kan formulere sætningen, definerer vi:

**Definition 6.52.** *Lad  $(M, d)$  være et metrisk rum,  $A \subseteq M$ , og  $A_i$  åbne mængder med  $i \in I$ . Vi siger at  $\{A_i\}_{i \in I}$  er en åben overdækning af  $A$ , hvis  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ . Hvis der findes en endelig delmængde  $J \subseteq I$ , sådan at  $A \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i$ , siger vi, at den åbne overdækning kan udtyndes til en endelig en.*

**Sætning 6.53** (Overdækningssætningen). *Lad  $(M, d)$  være et metrisk rum og  $A \subset M$  en delmængde. Da er  $A$  sekventiel kompakt, hvis og kun hvis enhver åben overdækning af  $A$  kan udtyndes til en endelig overdækning.*

*Bevis.* Vi viser først, at hvis enhver åben overdækning af  $A$  kan udtyndes til en endelig en, så må  $A$  være sekventiel kompakt. Antag at  $A$  ikke er sekventiel kompakt, dvs., antag at der findes en punktfølge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $A$  som ikke har noget fortætningspunkt i  $A$ . For hvert  $y \in A$ , findes der derfor en radius  $r_y > 0$ , sådan at kuglen  $K(y, r_y)$  kun indeholder endeligt mange punkter af følgen. Bemærk, at foreningsmængden

$$\bigcup_{y \in A} K(y, r_y)$$

indeholder  $A$  og at dermed  $\{K(y, r_y)\}_{y \in A}$  er en åben overdækning af  $A$ . Denne overdækning kan ikke udtyndes til en endelig overdækning: hver kugle indeholder nemlig kun endeligt mange led i punktfølgen, og en endelig

mængde af disse kugler kan derfor ikke indeholde hele punktfølgen (og dermed ikke overdække  $A$ ). Vi har derfor konstrueret en åben overdækning som ikke kunne udtyndes til en endelig overdækning.

Vi vil nu vise, at  $A$  er sekventiel kompakt medfører, at enhver åben overdækning kan udtyndes til en endelig en. Antag at  $A$  er sekventiel kompakt og lad  $\{G_i\}_{i \in I}$  være en åben overdækning af  $A$ . Vi skal nu konstruere en endeligt udtynding af  $A$ . Hvis  $A = \emptyset$  kan vi udtynde ned til en tom (eller faktisk en vilkårlig endelig) overdækning, så lad os antage at  $A \neq \emptyset$ .

Vi viser først, at vi kan finde en radius  $s > 0$ , sådan at enhver kugle  $K(x, s)$ , hvor  $x \in A$ , er indeholdt i en af mængderne i overdækningen  $\{G_i\}_{i \in I}$ . Hvis det ikke var tilfældet, ville vi kunne finde for hvert  $n$  et  $x_n \in A$ , sådan at  $K(x_n, \frac{1}{n})$  ikke ligger i nogen af mængderne  $G_i$ . Da  $A$  er sekventiel kompakt, har  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et fortætningspunkt  $x \in A$ . Da  $\{G_i\}_{i \in I}$  er en overdækning af  $A$ , findes der et  $i$ , sådan at  $x \in G_i$ . Da  $G_i$  er åben, findes der en radius  $r > 0$ , sådan at kuglen  $K(x, r)$  ligger i  $G_i$ . Da  $x$  er fortætningspunkt kan vi finde et  $n$ , sådan at  $x_n \in K(x, r/2)$  og  $1/n < r/2$ . Dette viser at  $K(x_n, 1/n) \subseteq K(x, r) \subseteq G_i$  i strid med at  $K(x_n, \frac{1}{n})$  ikke ligger i nogen af mængderne. Vi ved altså, at der findes et  $s > 0$ , sådan at der for hvert  $x \in A$  gælder at  $K(x, s)$  er indeholdt i en af mængderne  $G_i$ .

Vi skal nu udtynde den givne åbne overdækning. Lad  $y_1 \in A$ . Hvis  $A \subseteq K(y_1, s)$ , så er  $A$  overdækket af en  $G_i$ , da  $K(y_1, s)$  er delmængde af en  $G_i$ . Hvis  $A \not\subseteq K(y_1, s)$ , så vælger vi et punkt  $y_2 \in A \setminus K(y_1, s)$ . Hvis  $A \subseteq (K(y_1, s) \cup K(y_2, s))$ , så har vi fundet den ønskede udtynding. Ellers fortsætter vi med at finde  $y_3 \in A \setminus (K(y_1, s) \cup K(y_2, s))$  og så videre. Enten ophører vores punktfølge efter endelig mange trin (i hvilket tilfælde vi er færdige) eller så ophører den ikke. I sidstnævnte tilfælde, så opfylder den  $d(y_m, y_n) \geq s$  for alle  $m, n$ , og kan derfor ikke have noget fortætningspunkt. Per antagelse er  $A$  sekventiel kompakt hvilket fører os til en modsigelse. Følgen må derfor være endelig og vi har fundet en endelig udtynding.  $\square$

Sætningen viser, at begrebet sekventiel kompakthed er af topologisk natur. Som ofte i matematik, giver denne sætning anledning til at definere et nyt begreb, som skal erstatte sekventiel kompakthed.

**Definition 6.54.** Lad  $(M, d)$  være et metrisk rum, og  $A \subseteq M$ . Da er  $A$

*kompakt, hvis og kun hvis enhver åben overdækning af  $A$  kan udtyndes til en endelig overdækning.*

Sætningen kan derfor omformuleres til at sekventiel kompakthed og kompakthed er identiske begreber for metriske rum.

