

## **Vandraketter og differentiaalligninger**

Af Katja Skaanning og Rikke Anthon d. 10/4-07

### **- Beskrivelse af emne/tema**

Forløbet er tænkt som et tværfagligt projekt mellem fagene matematik og fysik.

Ideen er, at eleverne skal arbejde med forskellige værktøjer i matematik, og anvende denne viden i forhold til vandraketter i fysik. Der vil i fysik især være fokus på klassisk mekanik.

Der er en del overordnede matematiske begreber der ligger udenfor kernepensum både i fysik og matematik, som eleverne kan beskæftige sig med, disse findes under de faglige mål.

### **- Elevernes faglige forudsætninger**

Eleverne skal have en viden om klassisk mekanik, at man kan opskrive bevægelsesligninger for bevægelse af forskellige objekter. Derudover skal eleverne kunne differentiere, og kende simple regneregler for differentiation.

### **- Fysikfaglige mål**

Impuls

Impulsbevarelse

Energital - friktion - luftmodstand.

Newtons 2. lov

Usikkerhedsberegninger

Bernoullis ligning, i det tilfælde man vælger at se på væskers egenskaber og vandet når det strømmer ud af raketten.

### **- Matematikfaglige mål**

Differentiaalligninger (Rakettens bevægelse,  $dp/dt$   $dv/dt$ )

Partiel differentiation

Modellering - 3. gradspolynomium

Areal af vandspejl

Parallakse problemet. Kan der ses bort fra dette? -Ellers beregninger af dennes betydning

Numerisk integration

Modellering - simulering - computer

Programmering - teori for plotning af graf

### **- Projektbeskrivelse**

Gør rede for fysikken bag vandraketten, det vil sige raketprincippet og opstilling af bevægelsesligning for raketten, deri kunne redegøre for betydningen af  $dm$ ,  $dt$  og  $dp$ . Opstillingen af raketligningen kan gøres for et feltfrit område og for et tyngdefelt, eventuelt med luftmodstand.

Redegørelsen skal indeholde en gennemgang af (dele af) teorien for 1. ordens differentialligninger.

Læreren kan vælge en eller flere fordybninger, evt. som variationsmuligheder for projektet:

- Afprøvning af forskellige andre materialer end vand, samt en vurdering af deres betydning for raketten. F.eks sand, flamingokugler, olie, mælk mfl. (der bør dog tages hensyn til at dette kan svine en del, og eleven bør overveje dette inden forsøget). (Fokus på fysik)
- Udregne hvor højt raketten kommer op, og sammenligne svaret med empirisk resultat (med vindmodstand). (Fokus på fysik)
- Tage udgangspunkt i matematikken og løsningsmetoder af oplagte differentialligninger. Matematisk modellering kan derefter efterfølges af forsøg eller bare en fysisk beskrivelse af teorien.
- Udregne  $dv/dt$  for raketten for at finde dennes acceleration (fokus på matematiske udledninger)
- Lade raketten overføre sin kraft til en opstillet plade, og sammenligne denne med en beregnet kraft, dvs. "ingen" vindmodstand. (Fokus på fysik)
- Udregn udstrømningshastigheden for vandet i raketten som funktion af tiden. Dette er ret indviklet, men man kan opstille en model og efterprøve denne. (Fokus på matematik)
- Udregne trykændringen i raketten vha. Poissons ligning. (Fokus på fysik)
- Beregne den optimale mængde vand i raketten (dvs. den mængde der gør at raketten kommer højest), og se om det også får den til at komme højest, samt en vurdering af hvorfor det ikke er godt at fylde raketten med vand. (Fokus på fysik)
- Finde en god opstilling til at måle på raketter, og at overveje hvordan man kan optimere vandraketten så den kommer højere op. (Fokus på fysik)

#### **- Materialer**

J. M. Knudsen, *elements of Newtonian Mechanics* (Springer 2002) s. 57-61. *Første års universitetsbog på engelsk, den er god og det drejer sig om ganske få sider.*

Per Holm: *Raketter* (Gyldendal, 1974). *Rigtig fin gennemgang af raketens fysik, indeholder også en gennemgang af matematikken i appendix.*

Kleppner, Daniel mfl, *An introduction to mechanics* (McGraw-Hill, 1987)  
*Indeholder bla. en gennemgang af udledning af raketligning I homogent gravitationsfelt.*

F.Andersen, O.Bostrup, E.Halkjær og K.G.Hansen: Fysik for gymnasiet 2 (Gyldendal, 2.udg., 1972) s. 81-83 *Raket og rekylvirkning, samt beskrivelse af fremdriften for en raket.*

Mogens Pihl og Henning Storm: Fysik 3 (GAD, 1974) s. 131-134. *Fin gennemgang af raketter i rummet, relevant nok for vandraketten.*

Satffanson, Eve mfl: Fysik i grundtræk 2A (Munksgaard 1973) s. 92-99 *Eksempel på raket s. 99*

Esper Fogh og Knud Erik Nielsen: Fysik for 2.G s. 172-183 *Generel gennemgang af Mekanik.*

Jens Ingwersen, Hans Birger Jensen og Knud Erik Sørensen: Kernestoffet - højt niveau (Sys time 1980) s. 26-28 *God gennemgang af impuls og impulsbevarelse.*

Claus Christensen, Carsten Clausen og bjørn Felsager: Fysikkens Spor(Gyldendal, 1990) s. 20-23 *Impulsbevarelse og raketligningen*

Henrik og Helle Stub: Rummet - vor nye grænser (Rhodos, 1978). *Rumforskning i tiderne, hverken så meget fysik eller matematik, men til gengæld en masse om rumforskning.*

A. F. Andersen og Poul Mogensen: Lære i matematik (Gyldendal, 1961)

## **En lille smule teori**

### **Raket uden tyngdekraft**

Hvis man antager at raketten bevæger sig uden for nogle tyngdefelter, altså et sted i rummet hvor raketten ikke bliver påvirket af kræfter fra nogle planeter vil man kunne opskrive raketligningen ud fra følgende.

Rakettens fart til et givet tidspunkt betegnes  $v$  og dens masse  $m$ . Ser vi nu på en lille ændring i raketts masse,  $dm$  ( $dm$  vil så være negativ!) og den tilhørende lille ændring i dens fart,  $dv$  giver impulsbevarelse følgende ligning

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (v - u)(-dm)$$

hvor  $u$  er den hastighed hvorved brændstoffet bevæger sig ift. et initialsystem der ikke er i bevægelse ift. raketten.

Når parenteserne i ligningen ganges ud fremkommer så differentialligningen

$$mdv - udm = 0$$

Ved separation af de variable fås så ligningen

$$dv = u \cdot \frac{1}{m} dm$$

med løsningen

$$v = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) + v_0$$

hvor  $v_0$  er raketts begyndelsesfart og  $m_0$  er dens startmasse.

### **Med tyngdekraft**

Da vandraketten bevæger sig i jordens tyngdefelt vil det være nødvendigt at have dette med i overvejelserne om raketligningen. Raketts bevægelsesligning er da givet ud ved:

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{P(t+dt) - P(t)}{dt} = m \frac{dv}{dt} + u \frac{dm}{dt}$$

Hvor  $u$  er vandets relative hastighed i forhold til raketten til tiden  $t$ , og  $P$  er raketts impuls.

$$\text{Hvor } \frac{dv}{dt} = \frac{dm}{m} \cdot \frac{v_d}{dt} g \text{ og } dv = \frac{dm}{m} v_d - g dt$$