Helt sikkert

Weekendavisen 11. august 2006, 4. sektion side 8

Bevist? Matematisk sandhed er ikke, hvad den var engang. Computeres månedlange bevisførelser er med til at rykke ved forestillingen om matematikken som absolut sand.

Af Mikkel Willum Johansen, Ekstern lektor, H.C. Ørsted Instituttet, Københavns Universitet

Paul Erdös, en af det 20. århundredes mest produktive matematikere, forestillede sig, at Gud oppe i sin himmel havde en stor bog, fyldt med matematiske beviser. »Den er lige til bogen,« plejede han at sige, når han havde lavet et særlig smukt bevis. Og Paul Erdös er ikke den eneste, der har haft det sådan. Siden antikken har matematiske beviser bestået af kompakte, ofte digtsmukke stykker logik, der gav læseren klare og uimodsigelige argumenter for, at en bestemt matematisk sætning nødvendigvis måtte være sand.

Men sådan er det ikke mere. Med fremkomsten af elektroniske computere har matematikere fået et nyt redskab, der på én gang giver nye, spændende muligheder, men samtidig koster både den absolutte vished og muligheden for at forstå visse beviser.

Det klassiske bevisideal var sådan set allerede truet. Et af de mest kendte og omtalte resultater fra nyere tid er utvivlsomt Andrew Wiles' bevis for Fermats sidste sætning. Da beviset blev offentliggjort i 1996, kunne man læse interviews med og se pæne billeder af dets ophavsmand i aviser verden over. Selve beviset fik ikke så meget omtale, men det fylder også mere end hundrede tætpakkede sider og spænder over adskillige nye og meget komplicerede matematiske teoridannelser. Derfor er der højst et par tusind matematikere verden over, der overhovedet er i stand til at læse det, og af disse er det næppe mere end nogle få hundrede, der forstår det i en sådan grad, at de kan tjekke, om beviset er korrekt.

Så når vi siger, at sætningen er bevist, skyldes det - for de fleste af os - ikke, at vi selv er i stand til at forstå beviset, eller at beviset har givet os et lille kig i Guds store bog, men udelukkende at vi har tillid til de få matematikere, der har forstået beviset.

Andrew Wiles' bevis er intet mod sætningen om klassifikation af endelige simple grupper. Beviset for denne sætning blev til som et samarbejde mellem mere end hundrede matematikere, der - spredt over hele verden - arbejdede på hver sin lille del af beviset. Beviset blev derfor publiceret i småstumper i over 500 videnskabelige artikler, der tilsammen fylder mere end 15.000 sider!

Det første, man gjorde, da alle stumperne lå klar i begyndelsen af 1980erne, var at iværksætte et program, der skulle finde alle fejl og lukke alle huller i ræsonnementet. Det program står stadig på, og man har faktisk fundet en del - også enkelte ret alvorlige - fejl. Det siges, at kun en enkelt person nogensinde har forstået hele beviset, og det var projektets leder, Daniel Gorenstein, der døde i 1992. Så er sætningen bevist? Tja. Ikke godt at vide.

Beviset for Fermats sidste sætning og sætningen om de endelige simple grupper illustrerer, at det i den moderne matematik ikke er nok at tro på ens egne evner til at tjekke og forstå beviser. De matematiske problemstillinger er blevet så komplekse, at man også er nødt til at have tillid til andre mennesker og sociale institutioner som tidsskrifter og universiteter, hvis man vil nå nogen vegne.

Et er at have tillid til mennesker, noget helt andet at have tillid til computere. Lige siden de elektroniske datamater blev opfundet i 1940rne, har man forsøgt at få dem til at bevise matematiske sætninger. Første gang det lykkedes at få en computer til at bevise noget nyt, var i 1976 i forbindelse med den såkaldte firefarvesætning. Sætningen siger i al sin korthed, at man kun behøver fire forskellige farver for at kunne farvelægge et hvilket som helst kort på en sådan måde, at ingen lande, der deler grænse, får samme farve.

Sætningen har været kendt siden midten af 1800-tallet, men det havde vist sig overraskende svært at bevise den på traditionel vis, og derfor besluttede Kenneth Appel og Wolfgang Haken fra universitetet i Illinois sig i begyndelsen af 1970erne for at tage skrappere midler i brug. Det lykkedes dem at bryde problemet ned til omkring 2000 specialtilfælde, som de så satte en computer til at tjekke ét for ét. Computeren måtte stå og regne i godt 1200 timer (cirka syv uger) før den kunne komme med det glade budskab, at sætningen passede i alle specialtilfælde og derfor er sand.

Problemet med beviset er, at computeren foretog så uhyrlig mange beregninger, at det er helt og aldeles udelukket, at noget menneske nogensinde kan tjekke beviset igennem i alle detaljer. Bevisets gyldighed afhænger derfor af, at computeren, både hvad angår software og hardware, fungerede korrekt i alle 1200 timer. Softwaren kan selvfølgelig tjekkes, men som alle, der har prøvet at programmere en computer, ved, er det meget let at overse fejl i det stort set meningsløse, symbolske volapyk, computerprogrammer består af, så den eneste ordentlige måde at tjekke et program på, er ved hjælp af et andet program. Og så er man principielt set lige vidt.

Men det værste er nu hardwaren. Vores tro på, at programmet blev afviklet som det nu skulle,

afhænger nemlig af vores viden om ledninger og transistorer og alle de andre elektroniske dimser, computeren rummer i sit indre. Dermed kommer vores tillid til sætningens sandhed til at afhænge af vores tillid til en række empiriske resultater.
Og det huer ikke matematikerne. Matematik har nemlig siden antikken brystet sig af at være en særlig privilegeret videnskab, der er i stand til at skaffe absolut sikker viden, og derfor har matematikken (i det mindste i matematikernes egne øjne) været højt hævet over de empiriske videnskaber, der kun kan frembringe usikre og omtrentlige resultater. Men hvis man accepterer beviset for firefarvesætningen, må man samtidig acceptere, at matematikken er mindst lige så usikker som de empiriske videnskaber, der ligger bag computerens design. Og det er en bitter pille at sluge.
For filosoffer har der nu længe været revner i matematikkens sikkerhed. Problemerne begyndte allerede i begyndelsen af 1800-tallet, da man opdagede, at der findes andre geometrier end den euklidiske. Euklids geometri var ellers i mere end totusinde år blevet anset for at være en korrekt og nødvendig sand beskrivelse af verdens geometriske struktur, og Euklids resultater, for eksempel at trekantens vinkelsum er 180 grader, var blevet anset som glanseksempler på, at man med den rene, matematiske tænkning kan opnå absolut sikker viden om verden omkring os.
Det kunne man så bare ikke alligevel. Euklids geometri er ikke nødvendigvis sand, og vi kan ikke med nogen logisk nødvendighed sige, hvad trekantens vinkelsum er. Opdagelser som denne rystede matematikerne og førte til en række forsøg på at finde et sikkert grundlag for matematikken. Det viste sig desværre at være lettere sagt end gjort, og i 1930rne måtte man erkende, at man enten var nødt til at opgive store dele af matematikken - hvad kun meget få matematikere var villige til - eller også måtte man acceptere, at matematikken simpelthen ikke kunne få et sikkert grundlag.
For mange filosoffer var forestillingen om matematik som nødvendig sand viden dermed slut. Matematikerne derimod lod som ingenting - de fleste af dem i hvert fald. De fortsatte med at arbejde, som de altid havde gjort, altså ud fra en forestilling om, at de afdækkede evige og nødvendige sandheder: beviserne i Guds store bog.
Det er på den baggrund, man skal se reaktionen på computerbeviserne. For med fremkomsten af computerbeviser kommer tabet af den absolutte vished ud af filosofibøgerne og langt ind i den matematiske praksis, hvor den ikke kan ignoreres. Derfor stritter traditionalister stærkt imod anvendelsen af computere i matematik. Der gik således lang tid, før firefarvesætningen for alvor blev accepteret, og flere betydende matematikere kom med bemærkninger om, at sætningen åbenbart slet ikke havde været så interessant alligevel (underforstået: fordi en computer kunne bevise den).
Forrige år brød striden om computerbeviser så igen ud i lys lue, da det ansete tidsskrift Annals of Mathematics afviste at bringe et computerassisteret bevis for en anden klassisk, ubevist sætning, nemlig fysikeren Keplers sætning, der i korte træk fortæller, hvordan appelsiner skal stables, så der bliver plads til flest mulige i en kasse. Beviset bestod - som beviset for firefarvesætningen - i en teoretisk indledning, hvor beviset blev brudt ned i en række særtilfælde, som en computer så kunne tygge sig igennem. Tidsskriftet nedsatte et panel på hele tyve matematikere til at vurdere beviset, og de fandt efter heftig diskussion, at bevisets teoretiske del godt kunne publiceres, men at den computerassisterede del ikke hørte hjemme i et matematisk tidsskrift. I stedet foreslog de venligt, at forfatteren kunne sende det til et tidsskrift for computervidenskab.
Der findes dog også mere progressive kræfter, der - sikkerhed eller ej - bevidst søger at anvende computeren som et redskab i den matematiske erkendelsesproces. Således har der siden 1992 eksisteret et tidsskrift, der simpelthen hedder Experimental Mathematics - en titel, der for blot få år siden ville blive betragtet som en selvmodsigelse af samme kaliber som »rund firkant«. Tilsvarende findes matematiske laboratorier, hvor man målrettet udnytter computerskabte visualiseringsteknikker til at gå på opdagelse i kringlede matematiske sætninger.
Herhjemme er vi med den nye gymnasiereform såmænd også godt med på den progressive vogn. I matematikundervisningen må beviserne nemlig træde i baggrunden til fordel for eksperimentel- og anvendelsesorienteret matematik, hvor computere og lommeregnere spiller en fremtrædende rolle - til mangen en traditionelt skolet matematiklærers store fortrydelse, forstås.
Det bliver spændende at se, om brugen af computere vil ændre vores opfattelse af matematik og af matematikkens (u)vished og status i forhold til de empiriske videnskaber.