Dimension

Mogens Esrom Larsen
Københavns universitets matematiske institut, Universitetsparken 5, 2100 København Ø

Ordet dimension, størrelse, har flere betydninger. Dimensionerne af en kasse er længde, højde og bredde, dimensionerne af en fodboldbane længde og bredde, osv. I fysik er man tilbøjelig til at tænke på størrelsesart, sådan noget som meter pr. sekund eller kvadratmeter.

I matematik tænker man på, at et liniestykke og måske også en kurve har dimension 1, et rektangel og måske også en flade som f. eks. kuglens overflade har dimension 2, og en kasse eller en kugle har dimension 3. Her standser de fysiske illustrationer, men i algebraiske sammenhænge kan man jo let have flere og også uendelig mange dimensioner. Betragter man vektorer som talsæt, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, er dimensionen n, og det kan jo være et hvilket som helst naturligt tal, mens en talfølge $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ har uendelig dimension.

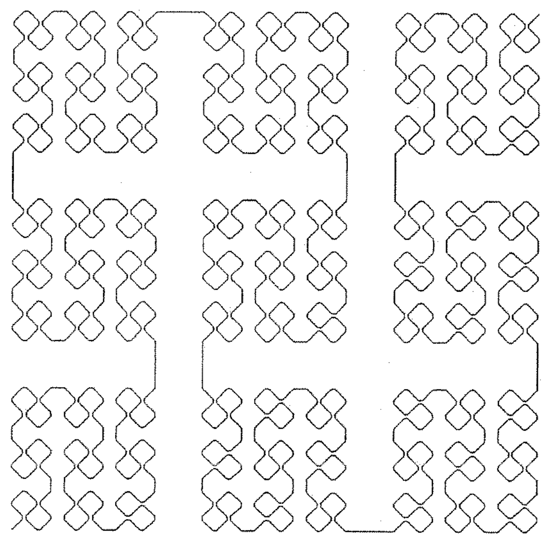
Den såkaldte *topologiske* dimension er det vanskeligere at få defineret. For at få et begreb om den, definerer vi først en generel kugle som mængden af de punkter, der ligger nærmere ved centrum end kuglens radius. Derefter definerer vi en generel kugleskal eller sfære som mængden af de punkter der ligger nøjagtig i radiens afstand fra centrum. Vi er nu i stand til at definere dimensionen i et punkt rekursivt. Vi betragter for et lille positivt tal, $\delta > 0$, kuglen med centrum i punktet og radius δ. Den tilhørende kugleskal består af de punkter, der har afstand netop δ fra det givne centrum. Vi definerer nu dimensionen i punktet som 1 større end dimensionen af kugleskallen. Altså, hvis kugleskallen har dimensionen n, så har vor mængde dimension $n + 1$ i punktet.

Tager vi i det fysiske rum en kasse, så vil en kugleskal være en almindelig sfære. Vi tager nu et punkt på sfæren og en kugle med lille radius om punktet. Den bliver en kalot, hvis skal bliver en cirkel. På cirklen har et punkt en kugle omkring, der er en cirkelbue med skal bestående af 2 punkter. Et af dem har en kugle om sig, der kun består af punktet, så dens skal er tom. Nu siger vi, at den tomme mængde har dimensionen -1, derefter får punktet dimensionen 0, cirkelbuen dimensionen 1, kalotten dimensionen 2 og endelig kuglen og dermed punktet i kassen dimensionen 3. Da det galdt for ethvert punkt i kassen, har kassen overalt dimensionen 3.

Når dimensionen angiver størrelsens art, betyder det, at hvis dimensionen er for stor eller for lille, så bliver størrelsen enten 0 eller ∞ henholdsvis. I det 3–dimensionale rum er en flade, der egentlig er 2–dimensional, en genstand uden rumfang. Den har sit 3–dimensionale mål lig med 0, selv om den har et areal og dermed et positivt 2–dimensionalt mål. Tilsvarende har et målebånd en længde, et 1–dimensionalt mål, mens dets areal er 0. Og omvendt er "længden" af en fodboldbane og "arealet" af en fodbold uendelig. Det er vor intuitive opfattelse af situationen, som den har været overleveret mere eller mindre præcist siden oldtiden.

Osgood's kurve

Osgood's kurve er dannet ved en deling af et enhedskvadrat i ni ens kvadrater. Der tegnes først en sammenhængende kurve af diagonaler, derefter fjernes selvgennemskæringen ved at kortslutte diagonalerne med små lodrette eller vandrette liniestykker. Dette kan opfattes som en fjernelse af smalle lodrette stolper fra kvadratet. De tilbageblevne stykker af diagonalen erstattes nu med en lignende konstruktion, men sådan at de fjernede stolper har et mindre bredde/højde forhold. Det fjernede areal udgør så en forholdsvis mindre del af det lille kvadrat, end det fjernede areal fra det store kvadrat. Denne proces gentages i det uendelige. Summen af de fjernede arealer bliver så mindre end 1, og kurven går gennem alle punkter, der ikke er fjernet. Derfor får kurvens billedmængde et positivt areal.



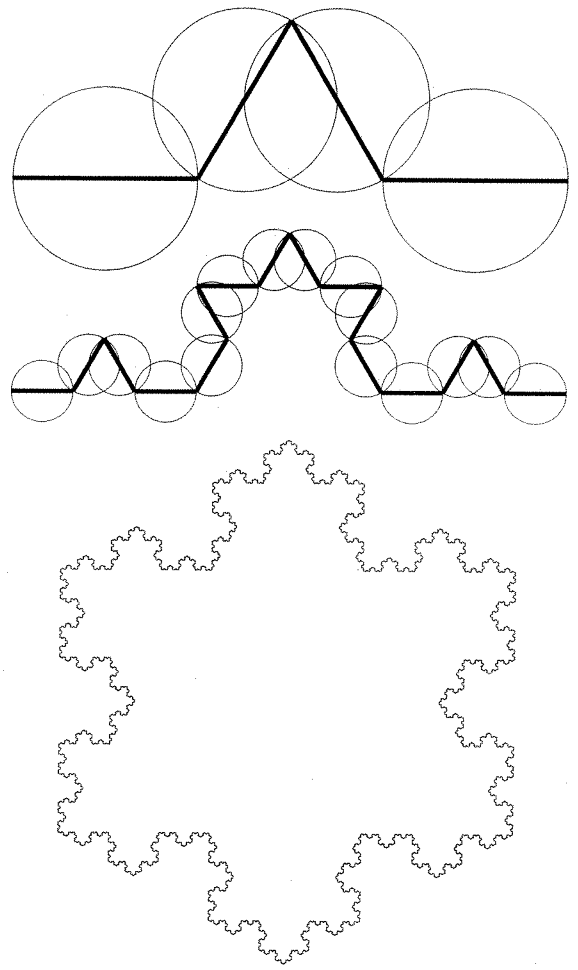
3. iteration på vej til Osgoods kurve.

Denne opfattelse fik sin første rystelse i 1890, da Peano konstuerede en kurve, der fyldte et kvadrat. Med andre ord, en kurve, der havde et areal! Men den blev anset for lidt snyd, fordi den skar gennem sig selv mange gange. Eksemplet blev anset for lidt patologisk. Så skete der et virkeligt jordskælv: I 1903 viste Osgood, at man ved at modificere kurven en lille smule kunne opnå, at den aldrig skar gennem sig selv og alligevel havde et positivt areal! Nu stod verden ikke længere. Dimensionsbegrebet trængte til en revision.

Set med vore dages øjne var Osgood's kurve det første eksempel på en fraktal, en kurve dannet ved iteration af et ligedannethedsmønster. Denne idé dukker op igen allerede året efter i von Koch's berømte snefnug, der dog som en god kurve har arealet 0.

Von Koch's snefnug

Von Koch's snefnug dannes ved at erstatte et liniestykke med en brudt linie i fire dele, som om liniestykket får en spids. Derefter erstattes hver af de fire stykker af en ligedannet figur. Således fortsættes i det uendelige, og grænsekurven ligner et snefnug. Denne figur er selvligedannet, så hvert stykke er mage til hele figuren, blot ganget ned med en potens af 3. Der skal derfor altid 4 gange så mange kugler til af trediedel størrelse. Det er dette forhold vi udtrykker ved at sige at, von Koch's snefnug har Hausdorff dimension $\frac{\log 4}{\log 3}$.



Men forståelsen af disse fænomener lod vente på sig. Først i 1919 kom Hausdorff med løsningen på problemet. Han generaliserede begrebet mål til det s–dimensionale mål, så definitionen ikke alene var den samme for længde, areal og rumfang, men også havde mening, selv om s ikke var et helt tal. Han gik frem på følgende måde:

Punktmængden, der skal måles, overdækkes med et antal kugler med samme radius, δ. Dette gøres på alle mulige måder, og det mindste antal, man kan nøjes med, kaldes N_δ. Nu sættes det s–dimensionale δ–mål af mængden til at være

$$H_{s,\delta} = \delta^s \cdot N_\delta$$

Dette gentages for vilkårlig små værdier af $\delta > 0$. Grænseværdien for $\delta \to 0$ er så det s–dimensionale Hausdorff –mål,

$$H_s = \lim_{\delta \to 0} H_{s,\delta}$$

Der gælder i overensstemmelse med intuitionen, at hvis s er stor, så er Hausdorff–målet 0, og hvis s er lille, så er Hausdorff–målet ∞. Det interessante er, at der er én og kun en værdi af s, der skiller vandene, så Hausdorff–målet blive r 0 for alle større dimensioner, og ∞ for alle mindre dimensioner. Denne grænsedimension kaldes så *Hausdorff dimensionen* eller den *fraktale dimension* af mængden. Når så s er valgt som Hausdorff–dimensionen, så kaldes grænseværdien for de s–dimensionale δ–mål for $\delta \to 0$ for *Hausdorff–målet* af punktmængden.

Hvis $H_{s,\delta}$ konvergerer mod en værdi, $0 < m < \infty$, for $\delta \to 0$, så betyder det, at dens logaritme går mod noget endeligt, nemlig

$$-\infty < \log m < \infty$$

Med andre ord,

$$s \log \delta + \log N_\delta \to \log m$$

eller bedre formuleret,

$$\log \delta \left(s - \frac{\log N_\delta}{\log \frac{1}{\delta}} \right) \to \log m$$

Heraf ses, at hvis

$$\frac{\log N_\delta}{\log \frac{1}{\delta}} \to S$$

så vil vi for $s > S$ få grænseværdien $-\infty$ svarende til $m = 0$, og for $s < S$ få grænseværdien ∞ svarende til $m = \infty$. Derfor må vi have $s = S$, eller en formel for Hausdorff–dimensionen:

$$s = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta}{\log \frac{1}{\delta}}$$

For almindelige punktmængder er det den sædvanlige dimension. Vi kan dække et enhedskvadrat med n^2 kugler med diameter $\frac{2}{n}$, så vi finder dimensionen

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log n^2}{\log \frac{n}{2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 \log n}{\log n - \log 2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{1 - \frac{\log 2}{\log n}} = 2$$

Siden i kvadratet dækkes med n kugler med diameter $\frac{1}{n}$, så vi finder dimensionen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log n} = 1$$

Men for punktmængder, der er selvligedannede som f. eks. von Koch's snefnug og Sierpinski's si (1929), går det anderledes. Hvis vi mindsker δ med en passende faktor, f. eks. 3 i von Koch's snefnug, så kan vi jo dække hver af de 4 dele med en kopi af det oprindelige mønster i en trediedel størrelse. Men derved bliver antallet af kugler forøget med en en faktor, der svarer til antallet af dele, altså her 4. Vi kan med andre ord dække en fjerdedel af snefnugget ved en ligedannethedstransformation, da den er ligedannet med hele figuren i forholdet 1:3, hvis kugler får diameteren netop trediedelt. Det må derfor gælde for Hausdorff–dimensionen s for fnugget, at $\delta^s \cdot N_\delta$ har samme grænseværdi som

$$\left(\frac{\delta}{3}\right)^s \cdot 4N_\delta = \frac{4}{3^s} \cdot \delta^s \cdot N_\delta$$

Det går kun, hvis faktoren er lig med 1, altså hvis

$$\frac{4}{3^s} = 1 \Leftrightarrow s = \frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1,26186$$

Selvligedannethed er nøglen til beregning af Hausdorff–dimensionen. Sierpinski's si dannes af en ligesidet trekant. Denne deles i 4 ligedannede trekanter, 3 retvendte og en på hovedet. Den retvendte fjernes. Nu gentages processen igen og igen på de tilbageblevne, retvendte trekanter de punkter der bliver tilbage udgør Sierpinski's si. Det overlades til læseren at vise at Hausdorff–dimensionen s, for sien er ca.

$$s \simeq 1,58496$$

For Osgood's kurve er betragtningen en anden, da den ikke er fuldstændig selvligedannet. Men den er tilbage, når vi har fjernet resten, og summen af den borttagne punktmængders arealer er mindre end 1. Derfor har kurven et 2–dimensionalt Hausdorff–mål, – altså et areal, – der hverken er 0 eller ∞. Men så er Hausdorff–dimensionen jo 2.

Skal man derimod skønne over Hausdorff–dimensionen af en kystlinie, går man direkte til definitionen. Man måler kystlængden i hele kilometer, hele hektometer, hele dekameter og hele meter. Man danner de fire forhold mellem de relevante logaritmer og ekstrapolerer til et skøn over dimensionen. Det er på denne måde, man har skønnet Norges kyst til dimensionen 1,4 mod Englands kysts 1,2.

Det, at der faktisk kan konstrueres mængder med ikke hel eller brudden Hausdorff–dimension, berettiger definitionen. Det er derved muligt at sammenligne mængder i størrelse, hvor man uden den kun kunne sige om kurverne, at de er begge uendelig lange, eller uendelig tynde. Nu kan man sige, at den ene snor sig så meget mere end den anden, at den har en større dimension. På den måde fylder maskerne tilsammen i Sierpinski's net mere end kanten af von Koch's snefnug, der igen er væsentlig mindre snoet end Osgood's kurve. Det er denne sammenligningsmulighed, der har inspireret til formuleringen, at Norges og Englands kyster begge er uendelig lange, men Norges er meget mere snoet.

PS. En sproglig bemærkning. Når disse fænomener kaldes *fraktaler*, stammer ordet fra B. Mandelbrot, der i 1975 lancerede denne påmindelse om både den brudne dimension og konstruktionens brudte linier. Senere har enkelte forfattere indskrænket betydningen af ordet fraktal til de selvligedannede mængder, men det var ikke Mandelbrot's idé, tværtimod. Som et eksempel på en tvivlsom fraktal, er Mandelbrot–mængdens rand ikke noget sted selvligedannet, selv om den ligner sig selv i meget høj grad. Så Mandelbrot ville kalde den en fraktal, mens andre ville sige, at det er den netop ikke. Dens Hausdorff–dimension er iøvrigt 2.