

17. februar 2007.

Matematik og Musik

Tolvtonemetoden

Jan Egballe

Thomas Meesenburg

Tolvtonemetoden blev skabt i tyverne af Arnold Schönberg. Idéen er at alle tolv halvtoner i en oktav bliver sidestillet og tillægges den samme betydning, i modsætning til musik hvor én bestemt tone er styrende for det enkelte værk. Metoden er således et oprør mod den bestående orden, og er en interessant del af musikhistorien.

På det fundamentale plan benytter den sig af gruppeteori, først og fremmest permutationer.

Matematik

Det forudsættes at eleven er blevet introduceret til gruppeteori. Læreren kan med fordel introducere restklasser (og som eksempel på regning modulo 12 kan nævnes læreren nævne transponering i en fastholdt oktav). Desuden kan læreren (hvis der er tid nok) vælge at introducere relationer (først og fremmest ækvivalensrelationer).

Det introducerende forløb kan fx se således ud:

Definitionen af en gruppe (gruppetavle, entydighed af neutralt og inverst element).

Abelske grupper (Nævn fx V_4).

Elementers orden – Cykliske grupper (alle cykliske grupper er abelske, hvorfor?).

Diedergrupper (Gruppetavle for D_4).

Permutationer (cykelnotation, fokus på S_4).

Læreren kan afslutte forløbet ved at give definitionen på en homomorfi og en isomorfi (dvs. også hvad en bijektiv afbildning er). Det kan evt også være et punkt i opgaven at eleven selv skal definere dem.

Det matematiske formål med projektet er at eleven skal fordybe sig i gruppeteorien og stifte bekendtskab med nogle af de tidlige hovedsætninger. Eleven skal kunne tænke på en gruppe som noget visuelt (cykliske grupper og diedergrupper) men samtidig også behandle grupper abstrakt.

Han eller hun skal også kunne genkende dem ud fra et musikeksempel (Disse kan fx findes i 4) side 297-302). Eleven skal altså (uden at vide det) få opbygget en naiv intuition til gruppevirkninger, hvilket vil give ham/hende et forspring hvis der fortsættes med matematik på universitetet.

Musik

Det forudsættes at eleven har et basalt kendskab til musikanalyse. Dvs. at eleven kan få udleveret et stykke musik på nodeform og ud fra dette foretage en elementær analyse.

Eleven skal i opgaven demonstrere at han/hun har sat sig ind i den musikhistoriske kontekst i tyverne. Desuden skal der foretages en analyse af et kendt tolvtoneværk, fx en af Schönbergs egne. Dette er enten vedlagt som bilag, eller også kræves det at eleven selv finder det (hvilket ikke burde være alt for svært). Hvis eleven selv skal ud og lede kan læreren vælge at vægte matematikken mindre.

Emnet

Tolvtoneteknikken behandler som sagt alle halvtoner ens (dvs. afstanden mellem dem er den tolvte rod af 2). Komponisten vælger en række, dvs. et element i S_{12} . Hermed forstås at 1 er C og 2 er C^\sharp etc. Bemærk at 10 da er A (med frekvensen 440 Hz).

Komponisten vælger en "række" dvs. et element i S_{12} . Denne giver altså musiksekvens hvor alle tolv halvetoner spilles en enkelt gang.

En række kan fx være $(2,5,8,4,1,7,10,3,12,11,6,9)=(1\ 2\ 5)(3\ 8)(4)(6\ 7\ 10\ 11)(9\ 12)$.

Bemærk at når en halvtone er blevet spillet må den ikke spilles igen førend alle de andre elleve er blevet spillet. Rækken varieres gennem forskellige operationer:

Krebs: Rækken spejles horisontalt.

Omvending: Række spejles vertikalt.

Omvendingskrebs: Begge dele.

Transponering: Alle toner rykkes en halvtone op (modulo 12), dvs A bliver til A^\sharp og H bliver til C.

Ved at kombinere disse permutationer på den valgte startrække fås i alt 48 rækker. Disse bruger komponisten så som fundament i sit værk. Der er valgfrihed om tonernes varighed og i hvilken rækkefølge de 48 rækker spilles. Nabotoner kan desuden også spilles samtidigt.

"Harmonien" i værket opstår altså ikke som i tonal musik, hvor noderne står i forhold til en enkelt tone. I stedet står passager i forhold til startrækken, og således er ingen af de tolv toner vigtigere end de andre.

Mulige problemformuleringer:

Vi har altså følgende emner for studieretningsprojektet:

Gruppeteori

Musikhistorie

Musikanalyse

Formentlig vil eleven lave dette projekt med ene på A-niveau og det andet på B-niveau. Hvis Matematik er på A-niveau kan læreren bede eleven gå i dybden med en eller flere af følgende sætninger:

- Cykelsætningen (**GRP 2 s. 59**).

- $C_n \times C_m$ er cyklisk hvis og kun hvis n og m er primiske. (**GRP 3 s. 76**).

- Lagranges indekssætning (**GRP 4 s. 79**).

- Struktursætningen er for endelige abelske grupper (**GRP 6 s. 104**).

(eleven skal ikke bevise denne, men i stedet vise at han/hun forstår resultatet. Opgaver kan være at finde alle endelige abelske grupper der er isomorfe med fx C_{12}).

(henvisningerne i parenteserne er til 2AL-noterne, anden udgave).

Hvis Musik er på A-niveau kan der stilles skrapere krav til musikanalysens niveau. Desuden kan der tilføjes spørgsmål hvor eleven skal perspektivere til *serialismen*. Andre spørgsmål kunne være:

- Redegør for den historiske baggrund bag tolvtoneteknikken. Hvad var den gængse måde at komponere på? Hvordan reagerede samtiden på Schönbergs metode?

- Hvilke grupper "svarer til" transponering, omvending og krebs?

Læreren kan her skrive at eleven kan tænke på en node som et par (t, h) , hvor t er det tidspunkt i værket hvor tonen forekommer, og h er dens højde (dvs. et tal mellem 1 og 12).

- Bruges tolvtonemetoden i musikken i dag? Eksempler?

Litteratur og links

Links er gældende august 2016

1) <http://www.math.ku.dk/noter/filer/2al.pdf>

Her foreslås **TAL** 1-6 (specielt 6), **GRP** 1-3+5 (evt. også 7) og **SYM** 1-4 (evt. også 6).

2) http://mathematics.dk/fileadmin/Files/DMF/Matilde/Matilde_28.pdf

Det matematiske grundlag for den udvidede tolvtonemetode

Artikel i Matilde. Lidt teknik hidsig og opædagogisk fra en gymnasieelevs synspunkt, men interessant alligevel.

Musikeksempler fra artiklen forefindes i mp3-format på

<http://mathematics.dk/matilde/arkiv/> - se under Matilde 28.

3) *Musikk og kjedebrøker*

Endnu en artikel i Matilde #28. Sproget er norsk, men der er mange figurer og tonen er uformel.

4) <https://homepages.abdn.ac.uk/mth192/pages/html/music.pdf>

Online version af bog om matematik og musik. Kapitel 9 om symmetri i musik er interessant her. Indeholder opgaver til inspiration for læreren.

5) Bent Olsen (red.), *Fra Platon til Stockhausen*, Munksgaard 1973.

Side 29-35.

Musiktekster til gymnasiet. Indeholder to dimentralt modsatte holdninger til tolvtoneteknik.