10. april 2007

Oplæg til studieretningsprojekt i matematik og filosofi

”Hvad er et matematisk bevis?”

Skrevet af Flóvin Tór Nygaard Næs og Lise Danelund

Introduktion

Tror vi på matematiske beviser som evigt gyldige argumentationer for matematiske sætninger? Eller er beviser fejlbarlige? Hvad udgør egentlig et matematisk bevis? Og hvad ligger til grund for anerkendelsen/verifikationen af sådanne?
Dette er nogle af de spørgsmål dette studieretningsprojekt beskæftiger sig med og søger at besvare/diskutere. Udgangspunktet er Imre Lakatos meget inspirerende hovedværk “Proofs and Refutations”, hvor forfatteren på en meget læsevenlig måde, introducerer sin egen holdning til, hvad matematiske beviser er.

Faglige forudsætninger (matematik)

- Kendskab til bevisteknikker.
- Kendskab til forskellige beviser (eksempelvis de som gennemgås i undervisningen).
- Introduktion til grafteori (nødvendig for at kunne beskæftige sig med firfarvesætningen) – Kan dog evt. indgå som et af de faglige mål i forbindelse med projektet.

Faglige forudsætninger (filosofi)

- Kendskab til naturvidenskabernes videnskabsteori og filosofi.
- Erkendelsesteori.
- Viden om debatten om ontologisk realisme/evt. om eksistensen af teoretiske entiteter.
- Indblik i argumentationsteori og logik.

Faglige mål (matematik)

- Det overordnede mål er at få eleverne til at reflektere over, hvad matematisk viden er, og specielt hvilken status et matematisk bevis har.
- En bedre indsigt i matematisk argumentation, herunder en forståelse af den traditionelle opbygning af et bevis med visse antagelser, som leder til en konklusion.
- Desuden bør eleven stifte bekendtskab med forskellige typer beviseførelse.
- Indsigt i de grundlæggende grafteoretiske begreber.

Faglige mål (filosofi)

- At kunne redegøre for forskellige filosofiske holdninger til matematikkens status (vs. de øvrige naturvidenskabelige fag (a priori vs. a posteriori videnskab)).
- At kunne redegøre for og analysere Lakatos videnskabsteori (specielt hans matematikfilosofi). Evt. i denne forbindelse at kunne give en karakteristik af de matematiske metoder, på baggrund af denne videnskabsteori.
- Eleven kunne reflektere over Lakatos filosofi som en kombination af Poppers falsifikationisme og Kuhn's paradigmeteori.
- Diskussion af hvilken betydning rene erkendelsesteoretiske overvejelser har/bør have for den matematiske praksis.

Nærmere beskrivelse af projektemnet

Et af de primære mål med dette projekt er reflektion over matematisk viden samt karakteren af denne. Således kan man ud fra et pædagogisk synspunkt med fordel tage udgangspunkt i traditionelle beviser, som eleverne allerede kender, med henblik på først at cementere elevernes viden for dernæst at problematisere den.

Det er altså vigtigt, at eleven får en god fornemmelse af strukturen i nogle af de klassiske og mest anvendte bevistyper. Dette skal helst resultere i, at eleven selv kan identificere, om beviser er af deduktiv, induktiv eller måske indirekte form. Specielt bør der være fokus på implikationers betydning og forskellen mellem implikation og biimplikation. Med denne basisviden på plads kan man så vove at kritisere og perspektivere den viden, som opnås ved traditionel matematisk bevisførelse.

Eksempelvis kunne man starte med at arbejde med Pythagoras' sætning, som eleverne kender og har bevist (Mat B1 s. 316- 333). Viden herom kan problematiseres ved at nævne eksistensen af ikke-euklidisk geometri, hvor Pythagoras' sætning ikke længere er gyldig.

Herefter kan følge en gennemgang af Lakatos' gennemgang af beviset for Eulers polyedersætning, V-E+F=2, i "Proofs and Refutations". Der bør selvfølgelig fokuseres på opbygningen af beviset, som Lakatos inddeler i tre lemmaer ("Proofs and Refutations" s. 7), men samtidig bør der også lægges vægt på den filosofiske diskussion, som Lakatos' uformelle fortolkning af et bevis leder til, idet denne opfattelse strider mod den traditionelle euklidiske tanke om, hvad et bevis er.

Opgavens fokus bør altså være på bevisets stilling og/eller definitionen af et matematisk bevis (se fx Tymoczkos artikel). Ovenstående kan følges op af en gennemgang af idéerne bag og strukturen i beviset for den såkaldte "firfarveformodning", som hævder, at alle landekort kan farves med fire farver på en sådan måde, at nabolande ikke tildeles samme farve.
Det problematiske ved beviset for firfarveformodningen er, at en del af det er afhængigt af computergenererede resultater – en teknisk del af beviset, som fylder så meget, at det aldrig vil lade sig gøre for noget menneske at gennemtjekke beviset for eventuelle fejl. Ved at acceptere sådanne beviser får matematikken, qua dens afhængighed af soft- og hardware, status som empirisk videnskab (jf. Mikkel Willum Johansens artikel). Dette er en filosofisk diskussion, som kunne være relevant at tage op, idet man kan se en forbindelse til Lakatos' problematisering af den traditionelle form for beviser.

Matematisk set er der flere aspekter, som er oplagte at beskæftige sig med i tilknytning til firfarveproblemet. Ved at sætte sig ind i den overordnede struktur finder man ud af, at beviset for firfarvesætningen er et indirekte bevis (Dam, s. 44). Desuden rummer grafteorien, som anvendes, mange induktionsbeviser (Dam, side 14, 23, 30 og 40), som derfor oplagt kunne blive et gennemgående tema. I den grafteoretiske diskussion er det også vigtigt, at have forståelse for, hvad nødvendige og tilstrækkelige betingelser er (Dam, side 18, 22 og 39).

Variationsmuligheder:

Afhængigt af ambitionsniveau kan opgaven varieres på flere områder. For det første er det en mulighed at gå mere i dybden med Eulers polyedersætning, end der lægges op til ovenfor. Inspiration kan måske hentes i de fyldige fodnoter i ”Proofs and Refutations”.

Desuden er det oplagt at variere, hvilke aspekter man lægger vægt på ved gennemgang af firfarvesætningen. Nogle vil måske nøjes med at gennemgå nogle induktionsbeviser. Andre vil måske kaste sig ud i at arbejde med beviser, som ikke er inkluderet i Dams bog (eksempelvis s. 21), og atter andre har måske lyst til at dykke ned i de mere tekniske detaljer af beviser (Se afsnittet om 4-farvning, side 44-70 i Dams bog).

Yderligere en variationsmulighed findes i sidste afsnit af Dams bog, hvor der gennemgås farvninger af andre flader end kuglefladen.

En helt anden variationsmulighed ville være at vælge at beskæftige sig med et andet problematisk bevis, som også gør brug af computerassistance. Et eksempel kunne være Keplers formodning om, hvordan man mest effektivt stabler kanonkugler, appelsiner eller andre objekter af samme form (Jvf henvisninger under ”Om Keplers formodning”).

Fermats sidste sætning og sætningen om endelige simple grupper er også eksempler på andre problematiske beviser, man kunne beskæftige sig med.

Indenfor filosofidelen af opgaven kunne fokus varieres i form af eksempelvis en diskussion af Lakatos’ holdning til ontologisk realisme indenfor matematikken.
Man kunne endvidere diskutere bevisets stilling med udgangspunkt i Kuhn eller Poppers generelle videnskabsteori mv.

Som tidligere nævnt kunne også en filosofisk diskussion, i forbindelse med arbejdet med firfarveproblemet, omkring hvad der egentlig udgør et bevis samt i samme kontekst diskussionen omkring matematikkens status i relation til de øvrige naturvidenskabelig fag, være meget relevant. Man kunne i denne forbindelse lade eleverne arbejde med forskellen i sandhedsopfattelse i matematik vs. de andre naturvidenskabelige fag og på denne måde søge at give indsigt i forskellene mellem status for fx deduktivt udledte sætninger overfor empirisk induktivt frembragte lovmæssigheder.

Henvisninger (links pr. 03.04.2007)

Angående Lakatos/Filosofi:

Imre Lakatos: "Proofs and Refutations", Cambridge University Press 1976 (Lakatos' mest kendte værk. Oplagt at anvende uddrag fra værket til at vise, hvordan Lakatos illustrerer sin holdning til matematiske beviser i en gennemgang af Eulers polyedersætning). Bogen er også oversat til dansk af Kurt Ramskov til "Bevis og gendrivelser", Århus Universitet 1989.

http://www.complete-review.com/reviews/lakatosi/pandr.htm
https://web.archive.org/web/20050209141816/http://www.owlnet.rice.edu/~phil530/JohnBBookR.pdf
(To anmeldelser af "Proofs and Refutations". På engelsk.)

Ole Skovsmose: Ud over matematikken", Systime 1990 (Kapitel 9 giver et hurtigt resumé af indholdet i Lakatos' "Proofs and Refutations". Desuden kan kap. 8 og 10 give en idé om Lakatos' filosofiske holdning til matematikken)

Imre Lakatos: "What does a Mathematical Proof Prove" (side 153-162 i Thomas Tymoczko: "New Directions in the Philosophy of Mathematics", Boston: Birkhäuser, 1985) (Lakatos forklarer, hvordan han ser beviset for Eulers polyedersætning som et uformelt bevis.)

Poul Lübcke (red.): "Engelsk og amerikansk filosofi", Politiken 2003. (Afsnit om Lakatos, herunder hans matematikfilosofi på side 249-255. Desuden også afsnit om bl.a. Popper og Kuhn. Fin generel introduktion til den filosofiske del af projektet.)

A.F. Chalmers: "Hvad er videnskab", Gyldendal 2003 (Kapitel 7 giver overordnet beskrivelse af Lakatos generelle videnskabsfilosofi – omhandler bl.a. forskningsprogrammer samt metodologien indenfor et sådant. Øvrige kapitler giver indføring i Poppers falsifikationisme (kap. 4-6), Kuhns paradigmeteori (kap.8))

Peter Godfrey-Smith: "Theory and Reality", The University of Chicago Press 2003 (side 103 – 108 (afsnit 7.2) om Lakatos, Popper, Kuhn. På engelsk)

Generelt om matematisk bevisførsel

Carstensen, Fransen, Studsgaard: "Mat B1", Systime, 2005, s.316- 333 (Introduktion til Euklids Elementer og forskellige beviser for Pythagoras' sætning.)

Carstensen og Frandsen: "Matematik 2 for obligatorisk niveau", Systime, 1989. (Kap. 12 "Om matematik" omhandler sætninger, direkte & inddirekte bevis, bevis v. kontraposition, modbevis, induktionsbevis samt det induktive og det deduktive princip)

Clausen Schomaker og Tolnø: "Gyldendals Gymnasiematematik Grundbog B1"(Kap 5 s. 152-183 (+evt s 218) Nogle geometribeviser gennemgås detaljeret, demonstrerende forskellige bevistyper. Endvidere omtales beviset for Fermats sidste sætning.)

Mikkel Willum Johansen: "Helt Sikkert", artikel i Weekendavisen 11.08.2006 (Velskrevet, lettilgængelig introduktion til emnet. Inddrager både firfarvesætningen og Keplers formodning)

Om firfarveproblemet:

Karsten Dam: “Firfarveproblemet”, systime 1990 (Et glimrende og lettilgængeligt værk. Oplagt at anvende som hovedkilde til et studieretningsprojekt)

Flóvin Tór Næs og Sandra de Blecourt (Populærvidenskabelig artikel omhandlende beviset for firfarveproblemet) (Bilag 1)

“The Solution of the Four Color Map Problem”, Scientific American , CXXXVII, 8 (Oktober 1977) s.108 – 121 (Giver en relativt simpel version af Appel og Haken’s bevis. På engelsk)

http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html (En let introduktion til firfarveproblemet. På engelsk)

http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem (Kort oversigt over firfarveproblemet. På engelsk.)

http://www.ams.org/notices/199807/thomas.pdf (En mere teknisk beskrivelse af beviset. På engelsk og af højere sværhedsgrad.)

Thomas Tymoczko: “The four-Color Problem and its Philosophical Significance”, s. 57 – 83 i The Journal of Philosophy, Vol. 76, No. 2, Feb. 1979 (Alternativt: side 245n – 266 i Thomas Tymoczko: “New Directions in the Philosophy of Mathematics”, Boston: Birkhäuser, 1985)

Om Keplers formodning:

George G. Szpiro: “Keplers kugler”, Ingeniøren 2003 (En lettilgængelig men omfattende fortælling om Keplers formodning. På side 228-234 er der desuden omtale af firfarvesætningen).

Flóvin Tór Næs og Sandra de Blecourt (Populærvidenskabelig artikel omhandlende beviset for Keplers sætning) (Bilag 2)

Om Kuhns paradigmer

Jørgen Husted & Poul Lübcke: “Filosofi håndbog”, Politikens Forlag, 2001 (s.118 – 126 omhandler Kuhn samt kritik af samme - De videnskabelige revolutioner, Normalvidenskab mv.)

David Favrholdt: “Farvel til paradigmerne”, artikel i Weekendavisen 02.09.2005

David Favrholdt: “Kuhn selv”, artikel i Weekendavisen 02.09.2005

I udarbejdelsen af ovennævnte skylder vi tak for gode råd og kommentarer til Søren Drejer, Næstved Gymnasium & HF.

Bilag 1

Matematik i alle regnbuens farver

Farverigt problem: På et verdenskort har hvert land ofte fået en farve, sådan at det adskiller sig fra sine nabolande. Men hvor mange farver kan man egentlig nøjes med for at farve hele verden på denne måde? Denne lille problemstilling har voldt verdens største matematikere hovedbrud de seneste 150 år.

Skrevet af Flóvin Tór Næs og Sandra de Blecourt

I 1852 sad en ung englænder ved navn Francis Guthrie og syslede med at tegne et kort af England og dets grevedømmer. Guthrie tildelte for klarheds skyld hvert grevedømme en farve, sådan at det ikke havde samme farve som sine nabogrevedømmer. Den unge mand bemærkede da, at han til dette formål med lidt omhyggelighed kun havde brug for fire forskellige farver.

Nysgerrighed fik Guthrie til at overveje, om det virkelig kunne forholde sig sådan, at fire farver er tilstrækkelige til at farve landene på et hvilket som helst kort, uanset hvor stort det måtte være.

Guthrie sendte en forespørgsel til sin gamle matematiklærer Augustus De Morgan (1806-1871) ved University College London, men den overraskede professor kunne ikke give et entydigt svar på spørgsmålet. Det viste sig nemlig at være meget svært at finde et kort, som havde brug for fem eller flere farver. Faktisk har ingen nogensinde formået at tegne et sådant kort.
Måske har læseren selv lyst til at tegne et vilkårligt kort og derved forhåbentlig overbevise sig om, at fire farver er tilstrækkelige. Et lille vink er, at det kan betale sig ved farvelægningen at vente med at bruge den fjerde farve, indtil det er strengt nødvendigt.

Figur 1: *Englands grevedømmer, som Guthrie farvede. Kan du også nøjes med fire farver?*

Ønsket om et bevis

Guthries hypotese, at ethvert kort kan farvelægges med fire farver, blev kendt som firfarveformodningen, og den har været et af matematikkens største uløste problemer. Det fascinerende ved denne simple påstand viste sig nemlig at være, hvor drilsk den var at give et bevis for. Manglen af et bevis medførte, at man ikke kunne være sikker på, at der ikke eksisterede et kort, hvis lande måtte have flere end fire forskellige faver, hvis alle nabolande skulle have forskellig farve.
Faktisk blev firfarveformodningen bevist i 1976, mere end hundrede år efter Guthries indledende overvejelser. Beviset, som er udarbejdet af amerikanerene Wolfgang Haken (f. 1928) og Kenneth Appel (f. 1932), er dog ret kontroversielt, da der gøres brug af enorme computerberegninger, og denne bevismetode er endnu ikke helt alment accepteret indenfor matematik.
Nogle vil sikkert undre sig over, hvorfor det nu er så vigtigt at bevise firfarveformodningen. For de allerfleste mennesker vil det være totalt ligegyldigt, om en person en dag vil tegne et kort, som kræver fem farver. Verden går nok ikke under af den årsag, kunne man fristes til at sige.

Indenfor matematikkens verden gælder dog visse regler. For mere end 2000 år siden begyndte oldgrækerne at opbygge matematikken med sætninger. Et velkendt eksempel er Pythagoras' sætning, der siger os noget om forholdet mellem siderne i en retvinklet trekant.
Beviserne for disse sætninger er fundamentet for matematikstrukturen. De skal overbevise os alle om, at sætningerne er korrekte, sådan at vi kan benytte dem til at bevise andre nye sætninger, og derved udvide vores matematiske viden. Matematikken er altså opbygget af en masse sætninger, som det er umådeligt vigtigt at man kan stole på. Hvis en af byggeklodserne viser sig ikke at være bæredygtig, altså hvis en af sætningerne viser sig at være usand, vil dette have store konsekvenser.
At ethvert kort kan farves med kun fire farver, er i al sin enkelthed et ret kraftigt udsagn, som kan anvendes til at underbygge andre matematiske sætninger. Det har derfor været meget utilfredsstillende for matematikere, at firfarveformodningen var ubevist, og at de ikke kunne bruge den uden at risikere, at der en dag viste sig at findes et kort, som krævede fem farver.
Siden Guthries forespørgsel til De Morgan har mange kompetente personer i årenes løb forsøgt at bevise sandheden af, at firfarveformodningen ikke kun var en formodning, men at den kunne kaldes firfarvesætningen.
At der skal mindst fire farver til at farve et vilkårligt kort er ret oplagt. For eksempel kunne Guthrie ikke på nogen måde have nøjedes med kun tre farver til at farve grevedømmene i England. I figur 2 er der givet endnu et eksempel på et kort, som kræver fire farver.

Figur 2: *De fire områder er alle hinandens naboer. Derfor er fire farver nødvendige for at farve dette kort*

Kempes kæder

Det første store gennembrud kom i 1879. Da offentliggjorde den engelske jurist Alfred Kempe (1849-1922) et tilsyneladende elegant bevis af firfarveformodningen.
I elleve år levede alle i den tro, at Kempes bevis løste gåden om de fire farver en gang for alle, men i 1890 fandt en anden englænder ved navn John Heawood (1861-1955) et kæmpehul i Kempes bevis. Dette medførte, at Kempe faktisk kun havde bevist, at fem farver var nok til at farve et vilkårligt kort. Så nu manglede matematikere at vise, om svaret var fire eller fem farver.
Kempes bevis var ikke kun det første forsøg på at bevise firfarvemodningen. Det fik også en stor indflydelse på senere bevisforsøg. Selv da Haken og Appel endelig fik brudt isen i 1976 var det også med nogle idéer, som oprindelig var Kempes, og den overordnede strategi var den samme.
En af de smarte idéer, som Kempe brugte i sit "bevis", var et begreb, der siden fik navnet Kempekæde. Dette begreb giver en fornemmelse af, hvordan man bliver nødt til at tænke for at angribe firfarveproblemet.
For at konstruere en Kempekæde skal du vælge et land som udgangspunkt. Kempekæden består så af alle de lande, som du kan komme til fra dette land ved kun at bruge to farver.

Figur 3a **Figur 3b** **Figur 3c**

Figur 3: *Med det blå land i midten af figur 3a som udgangspunkt, så er illustrerer figur 3b den blå-røde Kempekæde og figur 3c den blå-grønne Kempekæde*

For at illustrere hvordan en Kempekæde kan anvendes, kan vi betragte følgende eksempel. Vi forestiller os et kort, som "næsten" kan farvelægges ved brug af fire farver. Lad os sige, at disse fire farver er blå, grøn, gul og rød. Med ordet "næsten" mener vi, at der findes et enkelt område, som

nødvendigvis må have en femte farve. Dette "problembarn" af et område i vores kort tildeler vi farven sort.
Ved at kigge lidt nærmere på området af kortet omkring problembarnet, kan vi indse, at området med den sorte farve nødvendigvis må have naboer med alle de fire andre farver. Hvis dette ikke var tilfældet, kunne vi nemlig have skiftet den sorte farve ud med enten blå, grøn, gul eller rød. Et eksempel ses i figur 4a.

Figur 4a: *Hvis området med den sorte farve ikke har fælles grænse med et område, der er blåt, så kan kortet omfarves, sådan at det sorte område i stedet bliver farvet blåt.*

Påstanden er nu, at vi enten ikke har været dygtige nok eller økonomiske nok, når vi har farvet dette kort. Vi vil med andre ord vise, at det er muligt at omfarve kortet på en sådan måde, at den sorte farve bliver overflødig.
Kempe iagttog de to tilfælde:

(a) Der findes en kæde af områder fra den blå nabo hos problembarnet til den røde nabo hos problembarnet, hvis områder er blå og røde på skift.

(b) Der findes ikke en kæde af områder fra den blå nabo hos problembarnet til den røde nabo hos problembarnet, hvor landene er farvede blå og røde på skift.

Hvis mulighed (b) er tilfældet, skal man vælge den røde nabo som udgangspunkt, og se på den blå-røde Kempekæde. Nu er det muligt, at skifte den sorte farve ud med rød, og siden at bytte om på blå og rød for alle områderne i den blå-røde Kempekæde. Voila! Dette er muligt, da nabolandene til den blå-røde Kempekæde hverken kan være blå eller røde, da kæden er den maksimale. Se figur 4b.

Figur 4b: *Hvis der ikke eksisterer en blå-rød kæde fra den røde nabo til den blå nabo, så kan sort byttes ud med rød, og derefter kan man bytte om på blå og rød i Kempekæden*

I tilfælde (a) derimod, altså hvis der eksisterer en sammenhængende blå-rød kæde rundt fra den blå nabo til den røde nabo hos problembarnet, så skal man indse, at tilfælde (b) ikke kan gælde for gul og grøn. En sådan gul-grøn kæde ville nemlig bryde den blå-røde kæde, som det også ses af figur 4c.

Figur 4c: *Hvis der findes en blå-rød kæde mellem den røde nabo til den blå nabo, så kan der ikke eksistere en tilsvarende grøn-gul kæde, da den grønne farve er blevet indelukket af den blå-røde kæde*

Men hvis mulighed (b) ikke er tilfældet for gul og grøn, så kan problemet løses ved samme fremgangsmåde som nævnt foroven, hvor (b) ikke var tilfældet for blå og rød. Altså er det nu vist, at man altid kan få den sorte farve til at forsvinde ved en omfarvning af kortet.

Dette ene eksempel er ikke nok til at bevise hele firfarveformodningen, som skal gælde for et hvilket som helst kort. Vi antog jo i eksemplet, at vores kort kun havde brug for fire farver bortset fra det sorte område. Men hvem siger, at der ikke findes kort med flere problembørn, og hvad nu hvis der findes endnu mere besværlige typer?

Så selv om Kempekæder er et smart middel til at slås mod firfarveformodningen, så skal der tages endnu stærkere matematiske redskaber i brug, hvis det generelle bevis skal komme indenfor rækkevidde.

De grafteoretiske briller

I matematikkens verden er det ofte en god idé at se problemerne fra forskellige vinkler, og sådan er det også i tilfældet med firfarveformodningen. I stedet for kun at se på almindelige kort, kan vi nemlig med fordel lade landene illustrere med punkter. Mellem hvert land og dets nabolande trækkes så en streg.
En anden populær måde at forklare denne omskrivning på er, at hvert lands hovedstad bliver illustreret med et punkt, og at veje trækkes op til nabolandenes hovedstader.
For helt klart at vise, hvad vi mener med denne vigtige fremgangsmåde, har vi i figur 5 taget et konkret eksempel med et udsnit af Europakortet.

Figur 5: *Alle kort kan omskrives til grafer. Selv små lande som Luxemborg, Andorra og Liechtenstein er illustreret med et punkt med streger til deres nabolande*

Brugen af punkter og streger til at illustrere problemer tilhører den del af matematikken, som kaldes grafteori. Her bliver vores kort altså til en graf, landene bliver til punkter og grænserne bliver til streger.
Der er mange fordele ved at tackle farveproblemet på den grafteoretiske måde. En af dem er, at når man ser på et almindeligt kort, så kan det nogle gange være uklart, om to lande virkelig har en fælles grænse, hvis den er meget lille. Eksempelvis kan man på kortet i figur 5 måske være i tvivl om, hvorvidt lilleputnationen Liechtenstein, som helt klart ligger mellem Schweiz og Østrig, også har en fælles grænse med Tyskland. På grafen i figur 5 er man derimod helt klar over, at det har den ikke.
Der kan også opstå tvivl, hvis to lande kun mødes i et enkelt punkt på et kort. I denne situation siger man, at landene ikke har fælles grænse. Med de grafteoretiske briller på er denne problematik helt udryddet. Enten er to punkter forbundet med en streg eller også er de ikke.

Figur 6: *Når lande kun mødes i et enkelt punkt, så har de ikke en fælles grænse*

I grafteorien bliver firfarveformodningen omformuleret til: Kan man for alle grafer tildele alle grafens punkter en af kun fire farver, sådan at ingen to nabopunkter, altså punkter der er forbundet med en streg, har samme farve?
Når man ser firfarveformodningen gennem de grafteoretiske briller, kan man pludselig analysere situation på en helt anden måde. Det viser sig nemlig, at der indenfor grafteori findes en en masse teori og sætninger om punkterne, stregerne og deres egenskaber, som kan udnyttes i forsøget at bevise firfarveformodningen.
Faktisk har firfarveformodningen selv været en stor årsag til udviklingen af grafteori i sidste århundrede. Matematikere indså nemlig hurtigt, at grafteori var et gunstigt område at vælge, hvis planerne at bevise firfarveformodningen skulle realiseres. At beviset udeblev i så lang tid, motiverede bare matematikere endnu mere til at udvikle nye metoder og teknikker indenfor grafteori.
På denne måde har firfarveproblemet haft betydning for andre områder, der også anvender grafteori. I flæng kan nævnes kommunikation, kemi, elektronik, geografi, arkitektur, økonomi, sociologi og

lingvistik. Faktisk kan alle ting, der har noget med et netværk at gøre, som regel drage nytte af grafteori. Bare tænk på, hvordan punkter bliver forbundne i kemiske molekyler, telefonnetværke eller i DSB's transportnetværk.

Det minimale modeksempel

En af hovedidéerne bag de fleste forsøg på at bevise firfarveformodningen er begrebet "minimalt modeksempel". Man antager, at firfarveformodningen ikke holder, og at der derfor eksisterer kort, hvor det virkelig er nødvendigt med fem farver. Så er det minimale modeksempel det af disse kort, som har færrest lande.
Motivationen for at indføre dette begreb er, at man kan konstatere visse egenskaber, som dette minimale modeksempel må have. Strategien er typisk den, at man ud fra disse egenskaber prøver at udlede, at det minimale modeksempel ved en omfarvning alligevel kan firfarves. Hvis dette er muligt, så er det selvfølgelig slet ikke tale om noget modeksempel alligevel. Men hvis der ikke findes noget minimalt modeksempel, så kan der ikke eksistere nogle modeksempler overhovedet, og firfarveformodningen ville derfor være sand.
Vi kan også forestille os firfarveformodningen som en lov, der er blevet brudt af nogen kriminelle. Hvis vi går på jagt efter den minimalt kriminelle, og finder ud af at denne ikke eksisterer, så findes der ingen kriminelle, og loven er derfor slet ikke blevet overtrådt.

Eftersom at vi ved, at ethvert kort kan tegnes som en graf, svarer det minimale modeksempel altså til en graf, hvis punkter kræver 5 forskellige farver.
På den anden side kan alle grafer, som har færre punkter end det minimale modeksempel, farves med fire farver. Så hvis vi tillader os at fjerne et enkelt punkt fra det minimale modeksempel, så kan den derved opståede graf firfarves. Fidusen er så, at genindsætte det fjernede punkt på samme sted, men på en måde, sådan at firfarvningen bevares. Klarer vi dette, så har vi vist, hvordan det minimale modeksempel alligevel kan firfarves.
I tilfældet hvor det fjernede punkt kun har tre eller færre naboer, løser problemet sig næsten selv, idet naboerne da højst kan have tre forskellige farver. Derfor har vi en farve i overskud til det genindsatte punkt.
Hvis det fjernede punkt har fire naboer, som alle har forskellig farve, så kan vi betragte det fjernede punkt som problembarnet i eksemplet med Kempekæderne. Omfarvningen kan vi i dette tilfælde klare ved brug af samme argumentation som i forbindelse med omfarvningen af problembarnet.
Af ovenstående kan vi nu se, at hvis der i en graf findes et punkt, som har fire eller færre naboer, så kan denne graf ikke være det minimale modeksempel. Altså må alle punkter i det minimale modeksempel have mindst fem naboer.
At finde den ønskede omfarvning af det minimale modeksempel bliver nu meget problematisk, da det fjernede punkt har fem naboer. Det er her, at historien om firfarveformodningen får en ny og interessant drejning.

Da Wolfgang Haken og Kenneth Appel i 1976 endelig beviste firfarveformodningen, så var det med hjælp af en computer. Haken og Appel formåede at konstruere en samling af 1936 grafer, hvor alle punkter havde mindst fem naboer. Ved computerens hjælp kunne de påvise, at mindst en af disse grafer var indeholdt i det minimale modeksempel. Denne samling af grafer kaldes derfor en nødvendig samling.

Derefter klarede de to matematikere også at bevise, igen med hjælp fra en computer, at tilstedeværelsen af mindst en af 1936 grafer i det minimale modeksempel sikrede firfarvningen.

Man kunne altså i alle de 1936 tilfælde fjerne et punkt, og genindsætte det med den opnåede firfarvning af det minimale modeksempel i behold.
Dermed var firfarveformodningen langt om længe bevist.

Hvad er et bevis?

Man skulle måske tro, at matematikere nu var lettede over, at denne svære nød endelig var knækket, men sådan fungerer tingene altså ikke helt i matematikkens verden. Appel og Hakens bevis for firfarveformodningen var nemlig det første matematiske bevis, hvor en computer havde udført en så væsentlig del af arbejdet.
Dette skabte grundlag for en heftig debat om, hvorvidt det såkaldte computerbevis skulle accepteres eller ej. Hovedproblemet er, at selvom man kan sige at computerens del af beviset er ret komplet, da alle muligheder synes at være udtømt, så er det praktisk set umuligt for et menneske at checke, om computeren har begået en fejl. Computerudregningerne fylder simpelthen så meget, at det ville tage rigtig mange år, måske århundreder, for en enkelt person at gennemgå beviset i alle detaljer. Desuden ville risikoen for at personen overså en eventuel fejl i beviset være stor.
Et bevis har siden oldgrækernes tid været set som noget, der var alment accepteret. Enhver skal altså i princippet kunne gennemgå beviset, og blive overbevist om sætningens gyldighed. Således kan alle i ro og mag sætte sig ned og gennemgå Pythagaros' bevis for forholdet mellem siderne i en retvinklet trekant. Derved vil vedkommende ret sikkert i løbet af kort tid overbevise sig om, at sådan forholder tingene sig virkelig for enhver retvinklet trekant.
Dette er ikke muligt i tilfældet med beviset for firfarveformodningen. Vores liv på jorden er simpelthen for kort til, at nogen skal kunne gennemgå det enorme bevis. Men hvis ingen person nogensinde har læst beviset for firformodningen, hvordan skal vi så føle os overbeviste om, at formodningen er sand?
Et andet kritikpunkt af beviset er, at computerens udregninger i beviset ikke giver mennesket nogen dybere indsigt i løsningen af problemet. Vi opnår ikke nogen forståelse for, hvorfor det er umuligt at finde et kort, som vitterlig kræver fem forskellige farver.
I 1996 formåede fire matematikere, Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour og Robin Thomas, at forenkle Appels og Hakens bevis fra tyve år forinden. Det nye bevis er langt mere overskueligt, da det bygger på en nødvendig samling, der indeholder langt færre grafer. Ialt er der 633 grafer i modsætning til 1936 i det gamle bevis, men computeren er selvfølgelig stadigvæk et nødvendigt hjælpemiddel.

Nyt computerfrit bevis

I 2000 kom inderen Ashay Dharwadker (f. 1967) frem med et nyt bevis, hvor han overhovedet ikke gør brug af en computer. I stedet bruger Dharwadker et andet område indenfor matematikken, gruppeteori, til at bevise, at fire farver er tilstrækkelige til at farve alle kort. Endnu er dette bevis dog ret ungt, og der findes kun beskedent materiale om det. Det tager også altid lidt tid, når et så vigtigt bevis kommer på banen, indtil det er fuldt ud accepteret i matematiske kredse. Man vil selvfølgelig være meget sikker på, at der ikke findes fejl i beviset, før man endegyldigt accepterer det.
Det må dog siges, at hvis Ashay Dharwadkers bevis virkelig holder, er der tale om et stort gennembrud.

Kilder

Jensen, Tommy R. & Toft, Bjarne (1995). *Graph Coloring Problems.* New York: John Wiley & Sons.

Matousek, Jiri & Nesetril, Jaroslav (1998): *An Invitation to Discrete Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

Wilson, Robert A. (2002): *Graphs, colourings and the Four-colour Theorem.*Oxford: Oxford University Press

Wilson, Robin J. & Beineke, Lowell (1979). *Applications of Graph Theory.* London: Academic Press

Wilson, Robin J. (1972). *Introduction to Graph Theory.* Essex: Addison Wesley Longman Limited

Websider:
http://matholymp.com/ARTICLES/4color.pdf
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/The_four_colour_theorem.html
http://www.geocities.com/dharwadker/
http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html

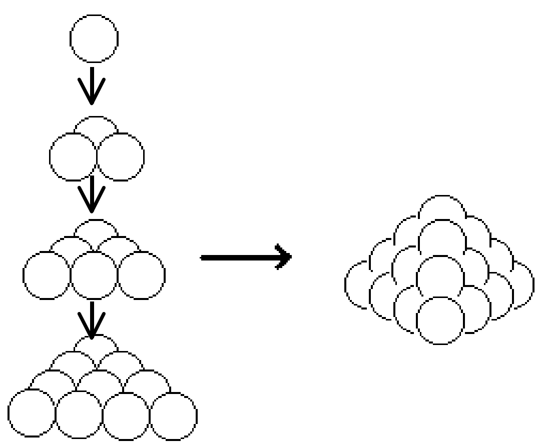
Bilag 2

OM APPELSINER OG MATEMATIK

Skrevet af Sandra de Blécourt og Flóvin Tór Næs

Hvordan stabler man runde genstande, således at de optager så lidt plads som muligt? Grønthandlere verden over møder dette optimeringsproblem hver dag, når de indretter deres butikker med store stakke af appelsiner, æbler og andre forholdsvis runde varer. Den foretrukne løsning er lige så gammel som grønthandlerens erhverv, men optimaliteten af denne metode er utrolig svær at bevise. Så svær, at det er et af de mest berømte og hårdnakkede åbne problemer i matematikken.

Det er klart, at når man stabler runde objekter såsom appelsiner, vil der altid være lidt spildplads imellem dem. Ud fra økonomiske overvejelser er det i grønthandlerens interesse at minimere hullerne mellem appelsinerne for at gøre plads til flere varer. Derfor lægges appelsinerne i en stak bestående af flere lag. I første lag ligger appelsinerne i forskudte rækker, således at hver appelsin har 6 naboer. Det næste lag konstrueres ved at lade hver appelsin støtte på tre appelsiner i det første lag. Sådan fortsætter man lag efter lag.



Figur 1: Grønthandlerens stabling

Allerede i 1611 skrev den berømte fysiker Johannes Kepler til en ven, at "stablingen [er] den tættest mulige, idet i ingen anden opstilling kan flere [appelsiner] stuves sammen i den samme beholder." (Kepler: The six-cornered snowflake). Ifølge Kepler er grønthandlerens stablemetode altså den, hvor hullerne mellem appelsinerne er mindst.

Keplers formodning

Kepler gav dog intet bevis for sin påstand. Det manglende bevis er et problem, hvis vi gerne vil være sikre på, at grønthandlerens måde at stable appelsiner på virkelig er den bedste metode der findes. Så længe optimaliteten af grønthandlerens metode ikke står fast, kunne det jo godt være, at en bedre metode dukker op.

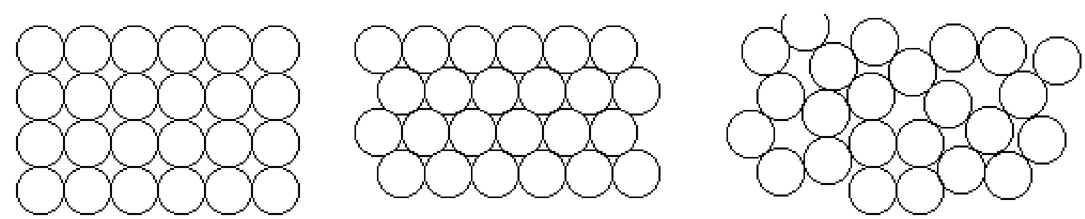
Efter Kepler har mange matematikere beskæftiget sig med en abstrakt version af appelsinproblemet. Da det er lige meget for løsningen, om vi betragter appelsiner, æbler eller andre runde objekter, går den matematiske, idealiserede version af problemet ud på at pakke et vilkårligt antal lige store kugler i det 3-dimensionelle rum. Hypotesen, at grønthandlerens pakning er den, hvor kuglerne ligger tættest i rummet, er kendt som Keplers formodning.

Først i 1998, næsten 400 år efter at Kepler fremsatte sin formodning, annoncerede den amerikanske matematiker Thomas Hales, at han havde fundet et bevis for Keplers formodning. I Hales' bevis spiller computeren en central rolle. Efter at Hales havde udtænkt en måde at klassificere alle mulige kuglepakninger på, har computeren nemlig sammenlignet alle disse pakninger med grønthandlerens pakning. Hvis beviset er korrekt, har Thomas Hales ikke bare løst en af matematikkens største gåder efter Fermats sidste sætning, men han rokker også ved et af matematikkens dogmer: det logiske bevis, som skal kunne efterprøves af alle.

Thomas Hales' bevis er, som det ofte er tilfældet i matematikken, en blanding af gamle resultater og nye ideer. Nogle af disse vil vi beskrive i det efterfølgende. For at give læseren en optimal forståelse af Keplers formodning, vil vi først betragte 2-dimensionelle pakninger af cirkelskiver, før vi fortsætter med det 3-dimensionelle tilfælde.

Simplificering af problemet

Hvis man vil løse et komplekst problem, kan det ofte betale sig først at løse en simplificeret udgave af problemet. Appelsinproblemet er et problem, der omfatter 3-dimensionelle objekter, nemlig kugler. Det er dog tit nemmere at løse problemer i planet end i rummet. I to dimensioner svarer appelsinproblemet til, hvordan man kan lægge cirkelskiver ved siden af hinanden, således at de ligger så tæt på hinanden som muligt, uden at der er overlap. En måde at lægge cirklerne på er at lægge dem tilfældigt, som i figur 2c. En anden måde er at lave rækker, hvor den ene række ligger lodret ovenpå den anden (figur 2a). Et bedre resultat fås, hvis rækkerne forskydes lidt i forhold til hinanden, som i figur 2b. Hullerne imellem cirklerne er mindre i figur 2b end i figur 2a og 2c. Men hvordan kan man indse, at stablingen i figur 2b faktisk er den bedste, der findes?

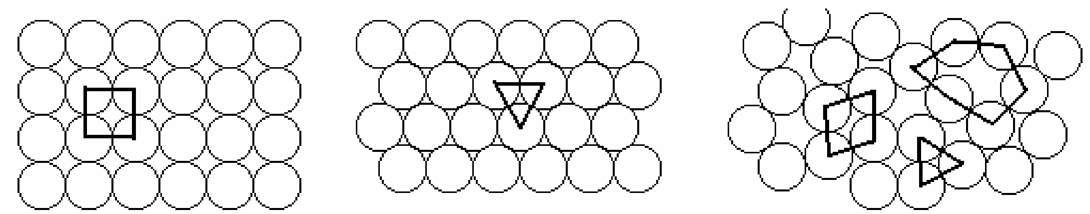


Figur 2: To periodiske og en vilkårlig stabling af cirkelskiver

Tæthed af en cirkelpakning

Hvor optimal en pakning af cirkelskiver er, afhænger direkte af størrelsen af hullerne imellem cirkelskiverne. Jo mindre hullerne fylder, desto mindre spildplads har vi, og desto større en del af planen er dækket af cirkelskiverne. Forholdet mellem arealet dækket af cirklerne og det totale areal kaldes for pakningens tæthed. Dette forhold er nemt at beregne for pakninger af endelig mange cirkelskiver. I matematikken betragter man dog gerne et uendeligt antal cirkelskiver på et uendeligt areal. Da kan tætheden af pakningen desværre ikke udregnes direkte. I stedet kan vi opdele en uendelig pakning i endelige stykker, og udregne tætheden af pakningen indenfor hvert stykke. Tætheden af pakningen indenfor sådan et stykke er en såkaldt lokal tæthed. Da er tætheden af den totale pakning en slags gennemsnit af de lokale tætheder.

En effektiv måde at dele en uendelig pakning af cirkelskiver op i stykker på, er at forbinde en cirkels midtpunkt med midtpunkterne i cirklens direkte naboer ved hjælp af en ret linie. Linjestykkerne deler planen op i små stykker, som kaldes enheder, og for hver af disse enheder kan vi beregne den lokale tæthed af pakningen ved at bestemme, hvor stor en procentdel af arealet, der er dækket af cirkelskiverne. Bemærk, at den lokale tæthed ikke behøver at være ens for alle disse enheder! Hvis den lokale tæthed er ens for alle enheder, er den lig med tætheden af hele pakningen.



Figur 3: Den firkantede, trekantede og en tilfældig pakning, hvor nogle enheder er indtegnet

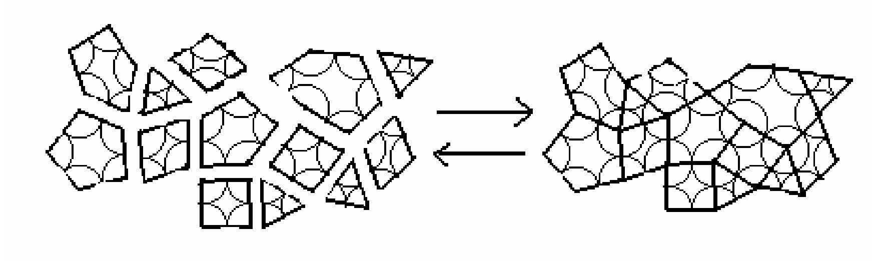
I figur 3a er hvert enhed i pakningen et rektangel, der indeholder arealet af en hel cirkelskive. Ved hjælp af elementær geometri kan det regnes ud, at tætheden af pakningen så er $\pi/4 \approx 0.7853$. Med andre ord dækker denne pakning næsten 79% af planen. I figur 3b er hver enhed en ligesidet trekant, der indeholder arealet af en halv cirkelskive. Dette medfører en tæthed på $\pi/\sqrt{(12)} \approx 0.9069$. Altså bedre end i den første pakning. Spørgsmålet er, om der findes pakninger, der har en endnu højere tæthed.

Selvom det virker ret oplagt, at pakningen i figur 3b er den tætteste cirkelpakning der findes, blev denne formodning først bevist i 1940 af en ungarsk matematiker ved navnet László Fejes Tóth. Vi vil nu se, hvorfor denne cirkelskivepakning er optimal, og dertil bruges pakningens enheder.

Byggeklodser

At dele en pakning op i enheder er ikke bare til nytte, når vi vil beregne dens tæthed. Enhederne afslører også interessante aspekter af pakningens opbygning. Hvis alle enheder er ens eller hvis enhederne udformer et gentagende mønster, så kalder vi det en periodisk pakning.

I stedet for at tage udgangspunkt i en pakning, og se på enhederne som et biprodukt af pakningen, kan vi også vende det om, og betragte enhederne som pakningens byggeklodser. Således kan vi lave en pakning ved at lægge disse byggeklodser sammen som et puslespil.



Figur 4: Man kan lave en pakning ud fra enhederne (defragmentering) eller omvendt opdele en pakning i enheder (fragmentering)

Selvom enhederne i figur 4 er forskellige i form og størrelse, har de også nogle vigtige egenskaber tilfælles. Hver enhed er en mangekant med udadbøjede hjørner, og hvert hjørne er samtidig midtpunktet af en cirkelskive. Alle siderne af enhederne har samme længde, nemlig diameteren af en cirkelskive.

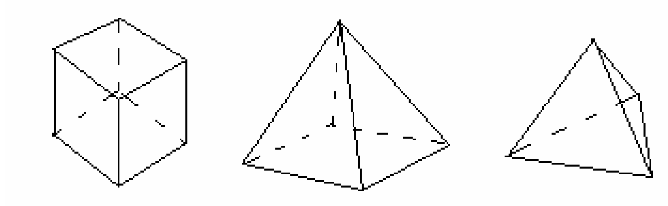
Hvis vi vil konstruere en pakning ud fra løse enheder, skal enhederne lægges sammen som fliser på en terrasse. Der må ikke være huller mellem enhederne, og de skal ligge side om side, hjørne til hjørne. Man kan frit vælge, hvilke enheder man bruger, bare disse krav er opfyldt.

Hvis målet er at bygge en pakning med den højest mulige tæthed, gælder det om at bruge de byggeklodser, der medfører den højest mulige lokale tæthed. I planet er den ligesidede trekant faktisk den byggeklods, der har den højeste lokale tæthed. Da det er muligt at dække hele planet ved hjælp af ligesidede trekanter, er den tætteste pakning af cirkelskiver den, som er vist i figur 3b. Denne pakning kaldes også for den trekantede pakning.

Fra cirkelskiver til kugler

Som næste trin i analysen bruges viden fra pakning af cirkelskiver i planen til pakning af kugler i rummet. Grønthandlerens kuglepakning fås ved at lægge kuglerne i første lag i samme opstilling som cirkelskiverne i den trekantede pakning. De efterfølgende lag lægges på samme måde, men bare lidt forskudt, således at hver kugle hviler på tre kugler i det foregående lag (figur 1). Denne pakning kaldes også for den centrerede trekantede pakning. I stedet for denne centrerede pakning kan man også lægge kuglerne tilfældigt i rummet eller man kan lægge kuglerne i hvert lag som i den firkantede pakning i figur 2a, med lagene direkte ovenpå hinanden.

Forbindes midtpunktet af en kugle med midtpunkterne af dens naboer, så opstår igen et system af byggeklodser, lige som med cirklerne i det 2-dimensionelle tilfælde. Her er byggeklodserne såkaldte polyedre: tredimensionelle objekter, hvis sider udformes af enhederne fra cirkelpakningerne i planen. I den pakning, hvor hvert lag er en firkantet pakning, og hvor kuglerne ligger direkte ovenpå hinanden, er hver byggeklods en terning, og derfor kaldes den for den kubiske pakning. I den centrerede trekantede pakning er byggeklodserne tetraedre og pyramider. Her har hver pyramide en side tilfælles med en anden pyramide og fire sider med tetraedre, mens enhver tetraeder har alle fire sine sider tilfælles med pyramider.



Figur 5: Nogle byggeklodser i 3D: En terning, en pyramide og en tetraeder. Kuglerne er ikke indtegnet, men de befinder sig i byggeklodsernes hjørner. Pyramidens grundflade passer præcis på terningens sider, mens pyramidens øvrige sider passer præcis på tetraederens sider.

Ligesom med enhederne i planet kan vi bruge de 3-dimensionelle byggeklodser til at bygge pakninger med. Her lægges byggeklodserne således, at deres sider passer præcis på hinanden, uden at der opstår huller mellem klodserne.

Tæthed af en kuglepakning

Tætheden af en kuglepakning i rummet beregnes på samme måde som tætheden af en cirkelpakning i planen. Det handler nemlig om at finde ud af, hvor stor en procentdel af rummet, der er fyldt med kugler. Hvis vi betragter en pakning af endelig mange kugler i en endelig volumen, så kan denne procentdel beregnes ved at finde forholdet mellem volumen af kuglerne og den totale volumen. Generelt betragter man dog et uendeligt antal kugler i en uendelig volumen. Da kan tætheden af pakningen bestemmes ved hjælp af byggeklodsernes lokale tæthed.

Af terningen, pyramiden og tetraederen har tetraederen den største lokale tæthed og terningen den mindste. Heraf kan vi allerede slutte, at den centrerede trekantede pakning er bedre end den kubiske pakning (faktisk har den centrerede pakning en tæthed på $\pi/\sqrt{(18)}\approx 0.7405$, mens den kubiske pakning kun har en tæthed på $\pi/6\approx 0.5236$), men det er stadig uvist, om den centrerede pakning er den tættest mulige. Ville det for eksempel være muligt at lave en pakning, hvor alle byggeklodser er tetraedre? Hvis svaret er ja, så må den tilsvarende tæthed være større end for den centrerede pakning, hvor der også findes pyramider. Og findes der måske en tilfældig pakning med en større tæthed?

Det er i hvert fald ikke muligt at lave en pakning, hvor alle byggeklodser er tetraedre. Hvis der fandtes en sådan kuglepakning, da ville tetraedrene udfylde hele rummet. Men allerede den oldgræske filosof Platon viste, at det ikke er muligt at fylde rummet med tetraedre! De tætteste pakninger af kugler frembringer altså et pakningsmønster, der er en blanding af flere forskellige polyedre. Det er netop derfor, at Keplers formodning er så svær at bevise.

Periodiske pakninger og tilfældige pakninger

I 1831 lykkedes det for den berømte tyske matematiker Carl Friedrich Gauss at give et bevis for, at den centrerede trekantede kuglepakning er den optimale periodiske kuglepakning. Sjovt nok er det mere end hundrede år før Fejes Tóth beviste, at den trekantede cirkelpakning er den optimale pakning i planet! Gauss' resultat er et stort skridt i retningen af en løsning på Keplers problem. Han kunne dog ikke vise, at periodiske kuglepakninger er bedre end tilfældige pakninger. For at finde ud af om der findes en tilfældig pakning, der er bedre end den centrerede trekantede kuglepakning, findes der måske ikke nogen bedre metode end at prøve dem alle sammen.

Først i 1953 viste Fejes Tóth, at der overraskende nok kun findes endelig mange relevante tilfældige kuglepakninger. At der kun er endelig mange relevante pakninger, skyldes, at kun endelig mange kugler (maksimalt 12) kan røre ved den samme kugle samtidigt. Antallet af relevante pakninger var dog ekstremt stort. For stort til at efterprøve i hånden, og det var først i 1990erne, at computere blev hurtige nok til at kunne regne alle de forskellige muligheder igennem. I 1998 annoncerede den amerikanske matematiker Thomas Hales, at han havde lavet en algoritme til at beregne tætheden af alle tilfældige kuglepakninger. Dette gjorde han ved at inddele alle mulige pakninger i 5 forskellige kategorier.

Thomas Hales' program

Som vist ovenfor genererer enhver kuglepakning et system af byggeklodser, hvorved rummet bliver delt op i konvekse polyedre såsom kubuser, tetraedre, pyramider, parallelepipeder og prismer. Enhver af disse byggeklodser medfører en lokal tæthed, der indgår i sammenligningen af pakningen med den centrerede trekantede pakning.

Thomas Hales' beregninger tager udgangspunkt i den enkelte kugle. Hvis man betragter det lokale pakningsmønster af en kugle og dens direkte naboer, får man en klump af polyedre, der møder hinanden i midtpunktet af kuglen. En sådan klump af polyedre kaldes for en Delone-stjerne. Der findes en Delone-stjerne omkring enhver kugle i pakningen. I den centrerede trekantede pakning, for eksempel, er alle Delone-stjerner ens.

Delone-stjernerne får en score baseret på deres lokale tæthed. Hvis scoren af en Delone-stjerne er lavere end scoren af Delone-stjernerne i den centrerede trekantede pakning, så skal der i hvert fald findes en stjerne med en højere score for at kunne konkurrere med den centrerede trekantede pakning. Thomas Hales redegjorde for, at der kun optræder fem forskellige typer Delone-stjerner i de relevante tilfældige pakninger af Fejes Tóth, og ved hjælp af computerberegninger viste han, at der ikke findes en Delone-stjerne, der har en bedre score end stjernerne i den centrerede trekantede pakning. Heraf konkluderede han, at den centrerede trekantede pakning er den tætteste pakning, der findes. Altså er grønthandlerens måde at stable appelsiner på den mest optimale metode.

Hvis computerberegningerne er korrekte, så har Thomas Hales løst et af de mest hårdnakkede problemer i matematikkens historie. Men computerprogrammet alene har en størrelse på 3 gigabyte, og dermed er det muligt, at hans bevis ikke er fejlfrit. Matematikere verden over er stadigvæk i gang med at gennemgå Hales' beregninger, og hans resultat tæller først som endegyldigt bevis, når denne gennemgang er afsluttet. Det kan sagtens tage nogle år. Desuden er det ikke helt usandsynligt, at der findes et kortere og mere elegant bevis, baseret på helt andre ideer.

Litteratur

Kepler, Johannes (1611/1966). *The six-cornered snowflake.*Oxford University Press.

Thompson, Thomas M. (1983). *From error-correcting codes through sphere packings to simple groups.*Mathematical Association of America.

Zong, Chuanming (1999). *Sphere packings.* Springer Verlag.

Websider

http://mathworld.wolfram.com/SpherePacking.html