

8. april 2007

Studieretningsprojekt i matematik og biologi

” Lotka-Volterra modellen – en beskrivelse af forholdet mellem byttedyr og rovdyr”

Skrevet af Flóvin Tór Nygaard Næs og Lise Danelund

Introduktion

Formålet med dette projekt er at analysere samspillet i et biologisk system mellem antal byttedyr $N(t)$ og antal rovdyr $P(t)$. Dette kan gøres vha. differentiallyigningerne

$$N'(t) = aN(t) - bN(t)P(t) \text{ og}$$

$$P'(t) = -dP(t) + cN(t)P(t),$$

som er udgangspunktet for den såkaldte Lotka-Volterra model.

Faglige forudsætninger (matematik)

- Erfaringer med og forståelse for matematisk modellering.
- Differential- og integralregning.
- Endvidere er det en fordel tidligere at have stiftet bekendtskab med differentiallyigninger og kvalitativ analyse af disse.

Faglige forudsætninger (biologi)

- Basal viden inden for populationsbiologi. Herunder kendskab til forskellige typer vækstmodeller.

Faglige mål (matematik)

- Forståelse af differentiallyigningssystemer og mulige modifikationer af disse.
- At have forståelse for og fortrolighed med en generel anvendelse af modellering.
- At kunne forholde sig kritisk i vurderingen af anvendelsen af matematiske modeller og deres resultater.
- Illustration af differentiallyigningssystemers løsningsfunktioner vha. lommeregner eller computerprogram.

- Forståelse af vektorrumms rolle i forbindelse med løsningsfunktionerne.
- Anvendelse af funktioner af flere variable og deres partielt afledte.
- Matrixregning, herunder egenverdier og egenvektorer, kan også inddrages i projektet.
- Et ambitiøst projekt kan desuden også anvende komplekse tal, hvor dette er relevant.

Faglige mål (biologi)

- Forståelse af de biologiske begrundelser for Lotka-Volterra modellen og dens begrænsninger.
- Analyse af modellens anvendelse i biologiske sammenhænge.

Nærmere beskrivelse af projektemnet

Eleven skal opnå en god fornemmelse af det system, som differentialligningerne i Lotka-Volterra modellen beskriver. Herunder hører en forståelse af, hvordan differentialligningernes løsningsfunktioner hænger sammen med det vektorfelt, som man kan optegne ved at anvende de to differentialligninger som retningsvektorer i ethvert punkt. Eleven skal kunne forstå, hvordan man kan optegne løsningskurverne til ligningssystemet, eksempelvis som niveaukurver omkring et ligevægtspunkt. Eleverne skal også forstå, hvilke betydning forskellige værdier for konstanterne a , b , c og d eller forskellige begyndelsesværdier $N(t_0)$ og $P(t_0)$ har for systemet. Her kan lommeregneren eller et computerprogram som Maple med fordel benyttes til simuleringer, som kan udgøre en slags matematiske eksperimenter.

Den basale Lotka-Volterra model, som opstillet under punktet ”introduktion” er meget forenklet. Derfor er det essentielt, at eleven introduceres for forskellige biologiske modifikationer af modellen. Faktorer som kunne tænkes at have indflydelse:

- Menneskelig jagt af rovdyr og/eller byttedyr.
- Andre dødsårsager hos byttedyrene end mødet med rovdyrene.
- Fødebegrænsning på byttedyrene.
- Flere konkurrerende arter.
- Rovdyret kan have flere fødekilder.
- Eksterne faktorer som klimaændringer.

Biologisk set kunne det være interessant at analysere, hvorvidt modellen stemte overens med virkeligheden. Projektet bør derfor indeholde en sammenligning mellem et datasæt og sammenligning af dette med forudsigelserne i en Lotka-Volterra model, som kunne tænkes at være sandsynlig i det givne tilfælde. Under henvisninger er der et link til et konkret biologiekperiment, hvor man undersøger interaktionen mellem to konkurrerende hvepsearter i et isoleret system. Hvis man er mere interesseret i at arbejde teoretisk i relation til biologidelen af projektet kan man vælge at se på tallene for hare- og losbestandene i Canada (Se henvisning) og eksempelvis analysere, hvor godt eller dårligt de passer til modellen og hvad koefficienterne i så fald bør være.

Variationsmuligheder

I udgangspunktet skal eleven opnå en matematisk forståelse af Lotka-Volterra modellen, som beskrevet i første afsnit under forrige punkt. Derefter er der i stor grad mulighed for at variere sværhedsgraden af det matematiske indhold alt efter forudsætninger og ambitioner. I et ambitiøst projekt er det således muligt at gå videre og eksempelvis bevise, at løsningskurverne er lukkede (Illner et al. s. 86-87. Se også Poulsen, side 223-233 for gennemgang af ABC-kriteriet). Man kan også se på den lineariserede model, som kan bruges til at klassificere ligevægtpunkterne (Illner et al. s. 92-100. Notesæt fra Århus kapitel 16). Dette kræver dog i det første tilfælde, at man inkluderer bl.a. funktioner af flere variable, integralregning, og i det andet tilfælde, at man inkluderer matrixregning, herunder egenverdier og egenvektorer (som eksempelvis bliver gennemgået i notesættet fra Århus Universitet, kapitel 10). Hvor meget der gøres ud af de komplekse egenverdier er igen afhængigt af projektets ambitionsniveau.

Det er på sin plads at nævne, at det også er muligt at formulere Lotka-Volterra systemet i form af differensligninger (Se Jesper Michael Møllers noter, afsnit 3.4). Dette kan måske være en nemmere tilgang til projektet, idet det her er mere enkelt for eleverne at overbevise sig om dynamikken i systemet ved at indsætte nogle konkrete værdier.

Der findes rigtig mange forskellige slags biologiske anvendelser af Lotka-Volterra modellen, som det kunne være muligt at beskæftige sig med. Som inspirationsmuligheder kan nævnes:

- Traditionelle jagtmodeller (F.eks. interaktion mellem dingo og får i Australien. Se henvisning.)
- Fiskerimodeller (Den optimale fiskekvote (Illner et. al., kap. 6)
- Forholdet mellem vært og parasit (Se henvisning).
- Effekt af skadedyrsbekæmpelse (Se henvisning)
- Genetiske sprednings- og invasionsmodeller (Se henvisning)
- Udsætninger af pighvar (Se henvisning).

Henvisninger

Illner, Reinhard et al.: Mathematical Modelling, American Mathematical Society 2000 (Kapitel 5 og 6)

Poulsen, Ebbe Thue: "Indledning til Matematisk Analyse I", Århus Universitet 2000.

Allman, Elizabeth og Rhodes, John: "Mathematical Models in Biology", Cambridge University Press 2004 (Kap. 3 behandler Lotka-Volterra modellen)

Websider (ajourført august 2016):

<http://home.imf.au.dk/holger/cs06/noter/noter.pdf> (Notesæt til lineær algebra og differentialligninger fra Århus Universitet. Lotka-Volterra introduceres på side 159)

<http://www.math.ku.dk/~moller/e04/bio/notes/bionotes.pdf> (Jesper Michael Møllers undervisningsnoter. Afsnit 3.4)

<http://www.math.ku.dk/~thorup/h2/dokexpl.pdf> (Eksempel 14 og 15 omhandler Lotka-Volterra)

<http://www.sosmath.com/diffeq/system/introduction/intro.html> (Introduktion til Lotka-Volterra)

<http://www.aw-bc.com/ide/idefiles/navigation/toolindexes/21.htm#21> (Lab nr. 21 (punkt b og c) er interaktive simuleringer af Lotka Volterra modellen for forskellige startbetingelser og for forskellige værdier af konstanterne a, b, c og d)

<http://www.mat1.dk/WYDifLig.htm> (Diverse materiale om differentialligninger)

<http://www.esa.org/tiee/vol/v2/experiments/wasps/abstract.html> (Et forslag til biologisk eksperiment med to konkurrerende hvepsearter)

<http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/engin/predprey/contents.html> (Graf over udviklingen af harer og los i Canada. Desuden meget andet materiale, bl.a. eksempler på, hvordan Maple kan anvendes)

<http://www.math.montana.edu/frankw//ccp/modeling/continuous/springmass/learn.htm> (Her er de konkrete tal af hare- og losbestandene i Canada sammen med en generel omtale af modellen). *Siden findes ikke mere, men kan dog ses her, på web-archive:* <https://web.archive.org/web/20111227032453/http://www.math.montana.edu/frankw//ccp/modeling/continuous/springmass/learn.htm>

<http://www.matfys.kvl.dk/biomodel/biomodeller-g-98/projects/grete.mws> (Et glimrende og omfattende projekt, skrevet på engelsk i Maple, der omhandler effekten af skadedyrsbekæmpelse. Kræver, at Maple er installeret på computeren.)

Siden findes ikke, men kan genfindes her: <https://web.archive.org/web/20070609164811/http://www.matfys.kvl.dk/biomodel/biomodeller-g-98/projects/grete.mws>

<http://www.bio.ntnu.no/users/reidara/bi233ny13.pdf> (Mange eksempler på anvendelse af modellen. Se eksempelvis side 11 og 12 for eksempler på, hvilken konsekvens det har, hvis byttedyret fjernes). *Siden er nedlagt, men kan genfindes her:*

<https://web.archive.org/web/20040422035028/http://www.bio.ntnu.no/users/reidara/bi233ny13.pdf>

http://orgprints.org/471/01/rap_16.pdf (Omtale af genetiske sprednings- og invasionsmodeller på s. 88.)

I forbindelse med udarbejdelsen af ovenstående skylder vi tak til Lektor Frank Spoorendonk, Næstved Gymnasium & HF samt Inge Danielsen, Tidl. Frederiksberg Gymnasium.