19.3.07 - links ajourført aug. 2016
Sofie Stoustrup & Kristian Priisholm

Logik & sandhed

- et studieretningsprojekt i matematik (A) og filosofi (B)

Introduktion

Dette projekt omhandler formel logik, et område som er fælles for både matematik og filosofi.
I projektet skal eleverne stifte bekendtskab formel logik og aksiomatiske systemer.
Særligt skal de arbejde med Euklidisk geometri som et historisk interessant eksempel på et aksiomatisk system og bevisførelse inden for et sådan system.

Det er tænkt, at matematik vejer tungest som fag i dette projekt. Ønskes et mere filosofisk tungt projekt kan eleven undersøge logikkens udvikling inden for filosofi og brugen af logik hos f.eks. Thomas Aquinas og Descartes.

Faglige forudsætninger, matematik:

Formel logik er ikke noget, der normalt berøres i matematikundervisningen i gymnasiet. Projektet er derfor forholdsvis forudsætningsfrit. Den selvstændige tilegnelse af denne forholdsvis abstrakte del af matematik vil dog kræve gode abstraktionsevner og fortrolighed med symbolsprog fra elevens side.
Der ud over skal eleverne have kendskab til matematisk bevisførelse.

Faglige mål, matematik:

Eleverne skal tilegne sig kendskab til matematik som en logisk, aksiomatisk struktur. Et udvalgt emne skal i denne forbindelse studeres indgående (eksempelvis Euklidisk geometri som foreslået i dette projekt).
Eleverne skal herigennem tilegne sig kendskab til formel logik og formel logisk bevisførelse ud fra aksiomer.

Faglige forudsætninger, filosofi:

På B-niveau skal eleverne stifte bekendtskab med elementær argumentationsteknik og logik (https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=132670#B9. Det er formodentlig en fordel for eleverne at have beskæftiget sig hermed, men det er ingen forudsætning.

Faglige mål, filosofi:

Eleverne skal opnå kendskab til logik generelt og forskellige former for logik, med særlig vægt på formel, aksiomatisk logik og argumentation indenfor et system opbygget på basis heraf. Af hensyn til den matematiske del af projektet vil det være naturligt især at undersøge første ordens prædikatslogik.

Nærmere beskrivelse af projektet

Overvej udtrykket: ”Hvis n er lige, så er n + 1 et primtal” – for hvilke tal mellem 1 og 10 er dette udsagn sandt?

Dette er naturligvis et matematisk udsagn i det omfang, at man skal kende nogle matematiske grundbegreber for at forstå udsagnet. Men samtidig er udsagnet et logisk udsagn, der udtaler sig om sammenhængen mellem to deludsagn ”n er lige” og ”n + 1 er et primtal”, og i det perspektiv hører udsagnet nærmere hjemme i logik end i matematik.
Endelig kan udsagnet indenfor formel logik udtrykkes som: ”(n lige) $\Rightarrow$ (n + 1 primtal)” eller ”$\neg$ (n lige) $\vee$ (n + 1 primtal)”, og der kan opstilles en sandhedstabel for dette formelt logiske udsagn.
Dette projekt omhandler alle disse tre aspekter. Desuden lægges der op til en diskussion af sammenhængen mellem logisk og almindelig sandhed. Det vil nok være overraskende for de fleste, at ovenstående udsagn er sandt for alle tal mellem 1 og 10 på nær 8, da mange intuitivt vil mene, at det må være falskt for alle ulige n > 1.

Projektet skal omhandle, hvad et logisk udsagn er - matematisk og filosofisk set. Særligt skal eleverne forklare aksiomsystemet i Euklids Elementer, gennemgå et eller flere af hans beviser og/eller evt. selv opstille et bevis på basis af aksiomerne - fx et bevis for Pythagoras Sætning.

For at kunne gøre dette skal eleverne forklare forskellige aspekter af, hvad logik og sandhed er. Det vil oplagt være dele af følgende:

- Forskellen på formel logik og en intuitionistisk forståelse af gyldigheden af et logisk udsagn. Hvad et aksiomsystem er og hvordan man argumenterer for, at et udsagn er sandt inden for et aksiomatisk system. Herunder redegøres for deduktive beviser.
- En dybere diskussion af, hvad der egentlig forstås ved et sandt udsagn, matematisk, filosofisk og i almindelig sprogbrug og hvad forskellen på sandhed og logik er.
- Hvordan brug af logik har udviklet sig historisk.
- Hvad man forstår ved fuldstændige og ved sunde aksiomatiske systemer, herunder evt. en diskussion af Gödels sætninger.

Bemærk, at Euklids plangeometri ikke i sig selv bør udgøre noget problem for en elev med A-niveau i matematik. Det medtages her som et eksempel på et aksiomatisk system og skal forstås i den sammenhæng, også fra elevens side.

Variationsmuligheder

Forskellige matematiske aspekter kan inddrages i større eller mindre grad:

- Gödels ufuldstændighedssætninger og løgnerparadokset.
- ZFC som det aksiomatiske system den moderne matematik bygger på.
- De komplekse tal som aksiomatisk system (dette er muligvis mere matematisk interessant end plangeometri for den dygtige elev).
- Forskellige bevistyper i matematik og disses logiske grundlag, fx induktionsbeviser eller modstridsbeviser.

Filosofi:

- Thomas Aquinas eller Descartes beviser for Guds eksistens.
- Aristoteles’ logiske grundregler
- Forskellen mellem induktive og deduktive slutninger
- Forskellen mellem logisk sandhed og almindelig sandhed. Visse argumenter er logisk gyldige, men vi ville aldrig acceptere at de skulle være sande eller brugbare.
- Poppers paradoks (hører lige så meget under matematik).

Litteratur

Topsøe, F. (2002). ”Introduktion til abstrakt matematik”. Matematisk afdeling.
Forelæsningsnoter til det nu nedlagte fag, Mat Y matematikstudiet på Københavns Universitet.
Velskreven og ikke svær at læse, men stoffet er muligvis svært at forstå.

Kiming, I. (2007). ”Mathematical Method”. Pearson Custom Publication.
Lærebog til faget Mat M på matematikstudiet på Københavns Universitet.

Janussen, K (2007). ”Det gode argument i matematik”. Forlaget Systime.
Fin bog, der på 15 sider præsenterer mange hovedpunkter i matematisk logik og bevisførelse. En god introduktion til den matematiske vinkel i dette projekt. Eksisterer desværre kun som e-bog.
Link: https://shop.systime.dk/dk/det-gode-argument-i-matematikken.html

Carstensen, J. (2002) ”Euklidisk Geometri”. Forlaget Systime.
Link: https://www.saxo.com/dk/euklidisk-geometri_jens-carstensen_haeftet_9788761606549

Carstensen, J. (2002) “Om matematik”. Forlaget Systime.
Bogen gennemgår blandt andet forskellige bevistyper i matematik.
Link: https://www.saxo.com/dk/om-matematik_jens-carstensen_haeftet_9788761606396

Glunk, C. mfl (2006). ”QED”. Forlaget Gyldendal.
Indeholder bla. introduktion til Euklids ”Elementerne”, en liste af hans aksiomer og en lang række af hans beviser. Link: http://gyldendal-uddannelse.dk/gymnasiet/matematik/isbn13-9788702048490/q-e-d-platon-og-euklid-tegner-og-fortaeller

Hendricks, Vincent F. (2002). “Moderne elementær logik”. Høst og Søns forlag.
En grundig gennemgang af såvel klassisk som moderne logik. Herunder logiske paradokser og Gödels ufuldstændighedssætninger. Især det sidste er dog på et ret højt niveau.

Nissen, K. (1991). ”På søndagstur i den logiske have”. Forlaget Abacus.

Collin, F. (1987). ”Derfor. Bogen om argumentation”. Hans Reitzels Forlag.

Clausen, F. ”B1” (side 152-184). Forlaget Gyldendal.

Kristensen, E. m.fl.. ”Matematik 1”. Forlaget Gad.
Kapitel om formel logik.

Euklid. ”Elementer”. Findes i dansk oversættelse ved Thyra Eibe, udgivet af Gyldendal siden 1936. Kan fås på flere biblioteker (søg på www.bibliotek.dk på Thyra Eibe som forfatter.)

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html
Engelsk oversættelse af Euklids Elementer med kommentarer, bl.a. om den logisk struktur af hver bog.