

Matematik og fysik

Tynde linsers matricer

Rikke Anthon og Katja Skaanning

9. april 2007

Resumé

Forløbet er tænkt som et tværfagligt projekt mellem fagene matematik og fysik.

Ideen er, at eleverne skal arbejde med lineær algebra i matematik, og anvende denne viden i geometrisk optik i fysik. Helt konkret skal eleven arbejde med tynde linser og med hvordan effekten af disse kan beskrives som matricer.

Projektet kan udvides både matematik-fagligt og fysik-fagligt alt efter elevens interesse.

- **Elevernes faglige forudsætninger**

Fysik: Læreren bør inden projektet stilles have gennemgået hvorledes matricen for en linse og forskydningsmatricen skrives op (se bilag 1). Definition af brændvidde, men ikke nødvendigvis gennemgang af hvordan denne findes eksperimentelt eller beregnes ud fra linsens form. Lys som bølgefænomen.

Matematik: Vektorregning. Kendskab til vinkler målt i radianer.

- **Matematikfaglige mål**

Eleven skal som et minimum have forstået begrebet *matrix*, og skal kunne multiplicere to 2×2 matricer, samt kunne multiplicere en 2×2 matrix med en 2-dimensionel vektor. Eleven skal have forståelse af begrebet enhedsmatrix. Derudover skal eleven kunne regne med vinkler i radianer.

Ved variation af opgaven, kan et eller flere af følgende mål indgå (jf problemformuleringen):

- (a) Eleven forstår den kommutative lov og kan vise at denne ikke gælder for rummet af 2×2 matricer.
- (b) Eleven har forstået sammenhængen mellem en matrix og dens inverse, og kan finde den inverse til en givet matrix ved håndkraft og vha CAS-værktøjer.
- (c) Eleven kan applikere sin viden om retvinklede trekanten og trigonometriske funktioner og forstå konsekvenserne af at approximere sinus til en vinkel med vinklen (målt i radianer!).
- (d) Eleven har forstået 2×2 matricer som lineære afbildninger på \mathbb{R}^2 . For en givet matrix kunne finde definitions- og billedmængde. Evt ud fra en givet definitions- og billedmængde at kunne finde billedmængden.
- (e) Eleven har forstået begreberne *vektorrum* og *vektorrumsegenskaber*. Eleven kan vise nogle eller alle af disse egenskaber for rummet af 2×2 matricer.

ret avanceret usikkerhedsberegning her

- **Fysikfaglige mål**

Eleven skal have et grundlæggende kendskab til lys og linser herunder bestemmelse af linsetype (konveks, konkav, osv).

Eleven skal kunne applikere den lineære algebra og forstå dennes betydning for eksperimentet. Dette skal kunne eftervises eksperimentelt.

Ved variation af opgaven, kan et eller flere af følgende mål indgå (jf problemformuleringen):

- (f) Eleven skal kunne forstå Fermats princip og konsekvensen af dette princip. Vis, at brydningsloven fører til korteste rejsetid - f.eks ved hjælp af optimering og CAS-værktøjer.
- (g) Eleven skal kunne bestemme brændvidden for en givet linse.
- (h) Eleven skal kunne analysere fejlkilder og deres betydning for resultaterne f.eks måleusikkerheder og linsefejl.

- **Projektbeskrivelse**

1. Gør rede for hvordan effekten af både én og flere på hinanden følgende tynde linser kan beskrives ved hjælp af matricer.
Redegørelsen skal indeholde en beskrivelse af hvordan en 2×2 matrix multipliceres med i) en anden 2×2 matrix og ii) en 2-dimensional vektor.
2. Sandsynliggør linse/matrix-teorien eksperimentelt.
3. Læreren kan derudover vælge en eller flere fordybninger:
 - (a) Brug teorien om matricer til at vise, at rækkefølgen af to linser ikke er ligegyldig. Eftervis dette eksperimentelt.
 - (b) Vis, at teorien om inverse matricer kan bruges til at bestemme matricen for én linse med ukendt brændvidde placeret i en serie af linser, med kendte brændvidder. Eftervis dette eksperimentelt. Bedøm usikkerhedsfaktoren i forhold til antallet af linser i serien.
 - (c) Vis, ved hjælp trigonometri og sætninger om retvinklede trekanter at forskydningsmatricen ikke er korrekt. Hvilken antagelse er der gjort og er denne antagelse rimelig? (Er det muligt at konstruere en korrekt forskydningsmatrix?)
 - (d) En linse repræsenterer en lineær afbildning - bestem for en given linse en rimelig definitions­mængde for denne afbildning. Hvad bliver billed­mængden? Hvordan skal dette fortolkes i forhold til eksperimentet? Eftervis din formodning eksperimentelt. (Eventuelt også med kernen af afbildningen og dennes fortolkning.)
 - (e) Forklar, hvad det vil sige, at 2×2 matricer udgør et *vektorrum*. Eftervis dette.
 - (f) Forklar Fermat's princip og overvej, hvilken betydning det har for forsøget at betragte lys som noget 1-dimensionelt.
 - (g) Beregn en linses brændvidde både ved hjælp af teorien om matricer og ved hjælp af linseformlen. Sammenlign de to resultater og lav en analyse af usikkerhedsfaktorerne ved de to metoder.
 - (h) Lav en opstilling med mindst 3 forskellige linser. Sammenlign det beregnede resultat med det eksperimentelt opnåede. Variér afstand og rækkefølge. Lav en grundig analyse af alle usikkerhedsfaktorerne.
4. Lav en rapport over udførelsen af øvelserne i 2. og 3. - rapporten skal også indeholde vurdering af fejlkilder.

- **Materialer**
Matematik

Pedersen, Niels Vigand: "Lineær Algebra", København Universitets matematiske afdeling 2000, s. 1-26, 49-54, 71-72, 94-96 og 133-135. (1. års universitetsbog på dansk. Tilgængelig på nettet: <http://www.math.ku.dk/noter/filer/h1.pdf>)

Messer, Robert: "Linear Algebra", Harper Collins College Publishers 1994, s. 9-17, 29-31, 176-191, 212-238 og 245-250. (1. års universitetsbog på engelsk, ret pædagogisk.)

Egsging, Jens: "Lineæralgebra", Matematisk institut, 1993. (Rigtig fin gennemgang af matricer)

Kristensen og Rindung: "Matematik 2.2 matematisk-fysiske gren", GEC Gadsforlag, 1977. (God til at få en forståelse af matricer.)

Terkelsen, Frode: "Lineær algebra", (Københavns Universitets Økonomiske Institut, 1980. (Rimelig let læselig bog om lineær algebra.)

Jensen, Helle: "Affine bildninger og algebra", Forlaget Frederikssund Arbejdsgruppen Aps, 1982. (Nem indføring i matrixberegning.)

Fysik

Experimentelle materialer forskellige typer af linser, laser(e), linealer, vinkelmåler. Fogh, Esperm.fl.: "Fysik for 2.G", Silkeborg Bogtrykkeri 1994, s. 7-28 Andersen, Frode m.fl.: "Geometrisk Optik", Gyldendal 1972 (Lille hæfte - let at gå til.)

Ståffansson, Eva m.fl.: "Fysik grundtræk 3A", Munksgaard 1974, s. 41-63 (Generel gymnasiebog med grundlæggende fysik.)

Chartier, Germain: "Introduction to optics" (Springer 2005) Virkelig god bog der bruger matriser til beskrivelse af linser. På engelsk, men det er få sider der er nødvendige. s. 119-130

Nussbaum, Allen: "Geometric optics: an introduction" (Addison-Wesley 1968) Matriser og linser, ikke helt så overskuelig som Chartiers men ok. s. 12-15, 21-25, 57-59

Geometric Optics for Dummies (power point):

<http://www.physics.gatech.edu/gcuo/lectures/3803/OpticsI13GeometricalOpticsTheEye.ppt>
høstdato: 27. januar 2007