10. April 2007

Oplæg til Studieretningsprojekt i Matematik og Naturgeografi

”Kortprojektioner – i matematisk og geografisk perspektiv”

Af Astrid Pørtner Nielsen & Lise Danelund

Introduktion:

Formålet med projektet er at beskrive en eller flere kortprojektioner dels geografisk og dels som geometrisk(e) funktion(er). I denne forbindelse ønskes også en vurdering af den eller de matematiske modeller, som de inddragede kortprojektioner udgør, herunder dels en vurdering af de pågældende modellers relation til virkeligheden og dels en vurdering af betydningen heraf.

Faglige forudsætninger (matematik)

Opgaven kan varieres således at den kan tilpasses elever med enten A- eller B-niveau matematik. Eleven bør dog gennem undervisningen have stiftet bekendtskab med:

- Trigonometri
- Differentialregning.
- Endvidere er det en fordel hvis eleven har kendskab til vektorbaseret koordinatgeometri

Faglige forudsætninger (naturgeografi)

Opgaven kan benyttes til elever med enten B- eller C-niveau Naturgeografi.

Faglige mål (matematik)

- At opnå indsigt i matematisk modellering. (Fokus på matematikkens anvendelsesmuligheder i forbindelse med problembehandling inden for naturgeografi).
- At give eleven indblik i koordinatgeometri (sfæriske koordinater & kartesiske koordinater i 3 dimensioner samt polære koordinater & kartesiske koordinater i 2 dimensioner) samt fremme dennes forståelse for geometri i henholdsvis 2 og 3 dimensioner. (Forståelsen af storcirkler er et centralt emne).
- At kunne skelne mellem og arbejde med matematiske egenskaber ved forskellige typer af afbildninger (vinkel-, areal- og afstandsbevarende)
- Evt. beregninger af målestoksforhold (vinkler, afstande, arealer) og forvanskninger ved forskellige afbildninger.

Faglige mål (naturgeografi)

- At kunne redegøre for Jordens form (ellipsoiden/geoiden), meridianer, paralleller, loxodromer, geodætiske linier mv. Evt. simpel gennemgang af en ellipsoides geometri (herunder også beskrivelse af geodætiske koordinater) samt en oversigt over hvordan ellipsoidens dimensioner har ændret sig gennem tiderne.
- At kunne redegøre for formålet med kortlægning (herunder evt. korthistorie).
- At kunne redegøre for hvilke problemstillinger der knytter sig til kartografi og i denne forbindelse beskrivelse af forskellige kortprojektioner/projektionsmetoder. Herunder redegørelse for/analyse af ægte (skyggeprojektioner) henholdsvis uægte projektioner.
- Diskussion af hvorledes man i praksis vælger kortprojektion til givne formål (herunder beskrivelse af anvendelsesmulighederne).
- At bidrage til elevens forståelse af naturvidenskabelig metode – herunder modelvalg og forudsætningerne herfor.

Nærmere beskrivelse af projektemnet

I et studieretningsprojekt som dette, bør der som nævnt redegøres for en eller flere kortprojektioner. Dette bør være med vægt dels på de geografiske aspekter af projektionen/-rne og dels synes det oplagt at beskrive konstruktionen af den matematiske afbildning reflekterende den/de givne projektioner eller såfremt niveauet hæves, selv at forsgøe at konstruere en afbildning (jvf. eksempelvis bilag 1 for inspiration, Timothy G. Feeman:"Portraits of the Earth – A mathematician Looks at Maps"eller Lisbeth Fajstrup: "Kortprojektioner og forvanskninger").

Opgaveformulering bør lægge op til at give eleven indsigt i sammenhængen mellem kortprojektioner og geometriske afbildninger (en udemærket indføring heri forefindes i Lisbeth Fajstrup: "Kortprojektioner og forvanskninger" Kap. 3, 4 & 5) - altså blandt andet hvorledes førstnævnte kan beskrives vha. sidstnævnte, som ovenfor beskrevet, samt hvorledes man således, på baggrund af sådanne geometriske afbildninger, bliver i stand til dels at manipulere med kortene/modellerne samt dels at foretage vigtige beregninger. Dette kunne eksempelvis være i forbindelse med planlægning af byggeri, navigation mv.

I forlængelse heraf er en vurdering af den eller de behandlede modellers relation til virkeligheden af essentiel betydning og afgørende for brugen af samme og derfor et interessant emne. Er de vinkel-, areal- eller afstandstro? Hvad er konsekvenserne heraf? Hvilke kort benyttes til hvilke formål? Mv.

Såfremt flere forskellige typer af kortprojektioner inddrages, er sammenligning af sådanne også af relevant karakter – f.eks. i relation til ovenstående faktorer.

Kuglefladen bør, for simplificeringens skyld, i de fleste tilfælde benyttes som tilnærmelse til jordoverfladen i den matematiske behandling af kortprojektionerne. Imidlertid kunne/bør, som nævnt ovenfor, en relevant geografi-faglig diskussion omkring jordens sande form (geoiden/ellipsoiden mv.) indgå.

Det er muligt at hæve det matematiske niveau i opgaven og beskæftige sig med udregninger af fx målestoksforhold og deformation af vinkler og arealer og i denne forbindelse at berøre emner som L'Hôpital's regel, kædereglen og Første Fundamentalform (jf. Lisbeth Fajstrup: "Kortprojektioner og forvanskninger" Kap. 6 & 7).

Variationsmuligheder:

I forbindelse med behandlingen af projektioner/projektionsmetoder, kan fokus i en given opgave varieres. Eksempelvis kan flg. af en projektions karakteristika varieres:

- *Projektionsplan*: Azimuthal, cylinder, konisk;
- *Placering af projektionsplan*: Polar, Ækvatorial, Skæv;
- *Projektionscentrum*: Gnomonisk, Stereografisk, Ortografisk

Endvidere er mulighederne for forskellige fokusområder talrige. Som eksempler kan nævnes:

- Kortlægning i Danmark - valget af nationale kortprojektioner (diskutér fx fordele og ulemper ved forskellige projektioner for forskellige brancher, og om hvad der vindes mht. præcision, hvad enten man vælger KP2000 eller UTM for Danmark – jvf. iøvrigt Thomas Balstrøm, Ole Jacobi og Lars Bodum: "Bogen om GIS og geodata", hvor kortlægning i DK behandles indgående)
- Navigationskort
- Lamberts koniske projektion
- Mercator-projektion/Universal Transvarsal Mercator projektion (jf. fx henvisning [10])
- Stereografisk projektion (jf. fx henvisning [5])
- Peters projektion (jf. fx henvisning [15])

Henvisninger (links ajourført august 2016)

1. Feeman, Timothy G.:"Portraits of the Earth – A mathematician Looks at Maps", AMS, 2002 ((På engelsk) Behandler kortprojektioner ud fra et matematisk perspektiv, God introduktion til sammenhængen mellem geometriske afbildninger og projektioner. Stort set alle kapitler i bogen er tilgængelige for en gymnasieelev, de relevante dele af bogen afhænger naturligvis af hvilke fokusområder man ønsker at behandle i sin opgave samt på hvilket niveau).

2. Fajstrup, Lisbeth: Kortprojektioner og forvanskninger, institut for matematiske fag, Ålborg Universitet, April 2004 (Juni 2006)
Kan findes på:
http://people.math.aau.dk/~fajstrup/UNDERVISNING/KORTPROJEKTIONER/NOTER/kortprojektioner1.pdf
(Kap. 3 omhandler kort, Kap. 4 omhandler geografiske koordinater, Kap. 5 omhandler kortprojektioner fra geometrisk synsvinkel. På højere niveau behandles i Kap. 6 og 7 Målestoksforhold, Første fundamentalform & Forvanskninger af vinkler og arealer. Kap.8 og 9 omhandler konstruktion af projektioner).

3. Noter af Lisbeth Fajstrup, Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet og Dorthe Nielsen, Vesthimmerlands Gymnasium, 2004. (Noter udarbejdet til forløb om projektioner i matematik i gymnasiet. Omhandler primært sfærisk geometri, men med henblik på anvendelser i teorien om kortprojektioner. Let forståelige)
http://people.math.aau.dk/~fajstrup/UNDERVISNING/GYMNASIE/KORTPROJEKTIONER/Sfaerisk_Geometri_1009.doc (få begge linjer med!)

4. Thomas Balstrøm, Ole Jacobi og Lars Bodum: "Bogen om GIS og geodata", Forlaget GIS & Geodata, 2006, ISBN 87-991446-0-3
(Se evt. www.gis-geodata.dk).
"I denne første dansksprogede lærebog gives der en introduktion til de basale begreber i forståelsen af GIS eksemplificeret ved fokus på danske, færøske og grønlandske geodata. Introduktionerne omfatter lagringen af en abstraktion af den virkelige verden i computeren, forståelsen af afbildninger af den runde Jord på et plant kort og metoder anvendt til topografisk kortlægning i historisk tid. Derefter er der en beskrivelse af lagringen af geodata i databaser, analysemetoder, kartografiske principper, metadata (data om data) og udvalgte eksempler på geodata til brug for den offentlige forvaltning, private virksomheder og borgere. Bogen afrundes med en perspektivering om mulighederne i fremtidens brug af GIS og geodata, som desværre ikke har den fortjente nationale bevågenhed."[1]

5. http://web.tag-gym.dk/TG/-2mMa2/2mMa2.htm - af Torben Geilman, Langkær Gymnasium og HF (1999).
Intorduktion dels til kuglens geometri (herunder præsentation af meridianer, breddeparalleller, loxodromer) dels til stereografiske- og gnomoniske projektioner, Peters projektion og Mercator projektionen. Endvidere forefindes links til andre sider omhandlende kortprojektioner.

[1] http://www.gis-geodata.dk/produkter.html#gisgeodata

6. Carstensen, Frandsen, Studsgaard: ”Mat B1”, Systime, 2005. (Kap B1 giver god introduktion til analystisk plangeometri)
7. http://www.postamenter.dk/projektion/projektion.pdf (Introduktion til kortprojektioner - herunder bl.a. UTM-nettet. Opbygget på baggrund af ”UTM-Nettet - Opbygning og Anvendelse”, Geodætisk Institut 1981, 4 oplag
8. https://web.archive.org/web/20070612140850/http://www.gfy.ku.dk/~cct/4geo_k24.htm (Kortprojektioner ud fra matematisk perspektiv. Fokus på bl.a. transvers cylinder projektion. Af Professor Christian Tscherning, Niels Bohr Institute, MOG Group. Relativt højt niveau)
9. https://web.archive.org/web/20070208160026/http://www.246.dk/kortproj.html (Kort introduktion til flere forskellige typer af projektioner samt illustrationer af samme. Links)
10. http://kartoweb.itc.nl/geometrics/Map%20projections/body.htm (Introduktion til samt behandling af forskellige typer af projektioner. Engelsk)
11. http://www.se16.info/js/earthtopogproj.htm (Side med mulighed for, vha Java applets, selv at vælge udsnit af jorden og betragte disse ved forskellige projektionstyper. Benytter kort fra NASA/USGS via planetscapes)
12. http://geography.about.com/od/understandmaps/Understand_Maps_and_Cartography.htm (Side omhandlende geografiske emner, herunder kortprojektioner. Her forefindes både introduktioner, illustrationer og sammenligninger af diverse projektioner)

Endvidere kan følgende 2 letlæselige artikler af Mogens Esrom Larsen anbefales:

13. ”*Den korteste vej mellem 2 punkter på et landkort*”, Naturens Verden 5-6, 191, (1984) (Bilag 2)

14. ”*Peters Atlas*”, KVANT (December 1990) (Bilag 3)

I forbindelse med udarbejdelsen af ovenstående skylder vi tak til Lektor Birgit Justesen, Nærum Amtsgymnasium, Geodata/GIS konsulent Bjarne Fog, Geografisk Institut KU, Professor i Geodæsi Christian Tscherning, NBI KU, Lektor Thomas Balstrøm, Geografisk Institut KU samt Lektor Mogens Esrom Larsen, Matematisk Institut KU.

Bilag 1: Eksempel på matematisk beskrivelse af gnomonisk projektion

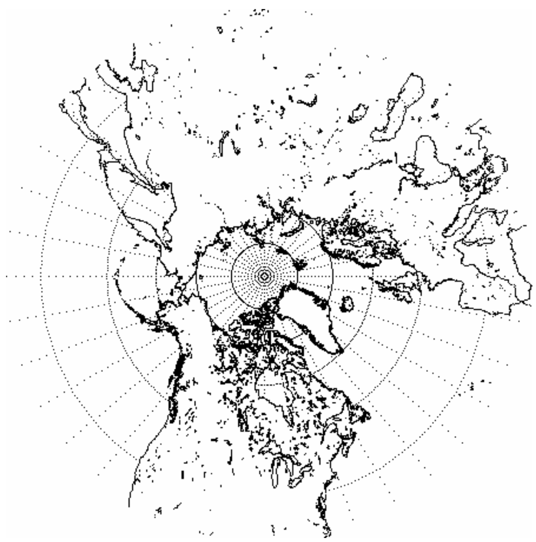

Fig. 5 – polar gnomonisk azimutalprojektion Nordpolen
(Greenwich meridianen afbildes her på den positive del af x-aksen)[2]

Vi kan beskrive konstruktionen af en gnomonisk projektion matematisk.
Antag at vi placerer en kugle (jorden) med radius R på en projektionsplan, således at tangeringspunktet T er nordpolen (jvf. fig.4 og 5). Lad Greenwich Meridianen (med længdegraden $\lambda = 0$) være projiceret ned på den positive halvdel af x-aksen i vores koordinatsystem på projektionsplanen, således at enhver lokalmeridian λ_1 projiceret ned på planen vil afbildes som en ret linie placeret i en vinkel, λ_1, i forhold til netop x-aksen, målt mod urets retning. (Jvf. iøvrigt *fig. 2*). Et punkt P på denne meridian vil således have den polære koordinat λ_1.
Breddelinierne vil, som det også fremgår af figuren ovenfor, afbildes som koncentriske cirkler (dvs. med samme centrum) med forskellig radii. Med henblik på at bestemme de enkelte breddeliniers radius kan man betragte kuglen (jorden) fra siden. (*Fig. 6*)

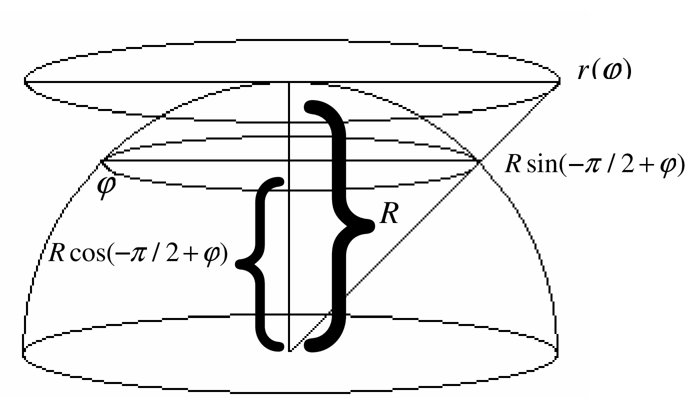

Fig. 6

[2] http://www.246.dk/kortproj.html

Da vil vi, betragtende vores fiktive lysstråler gennem en af breddelinierne φ op på planen (tangerende nordpolen), kunne se 2 ligedannede retvinklede trekanter, begge med toppunkt i projektionscentrum (kuglens centrum).
Den vandrette side af den mindste trekant vil have radius svarende til breddelinien med bredde φ, hvor $\varphi \in (0, \pi/2)$, og således vil den mindste trekants vandrette side være givet ved $R\sin(-\pi/2+\varphi)$. Dens lodrette side vil tilsvarende være givet ved $R\cos(-\pi/2+\varphi)$.
Den største trekants lodrette side er præcis kuglens radius og vil således være givet ved R, mens dens vandrette side er netop radius af den cirkel i projektionsplanen som afbilder den projicerede breddelinie, og altså netop den størrelse vi søger! Vi betegner denne $r(\varphi)$ idet den jo netop er afhængig af breddegraden φ. Fra vores viden om proportionalitet mellem ligedannede trekanter kan vi således nu deducere følgende[3]:

$$\frac{r(\varphi)}{R} = \frac{R\sin(-\pi/2+\varphi)}{R\cos(-\pi/2+\varphi)} \Leftrightarrow r(\varphi) = \frac{R^2\sin(-\pi/2+\varphi)}{R\cos(-\pi/2+\varphi)} = R\tan(-\pi/2+\varphi) = R\cot\varphi$$

hvor altså i dette tilfælde $\varphi \in (0, \pi/2)$

Efter således at have etableret placeringen af henholdsvis længdegrader (meridianer) og breddelinier i projektionsplanen, kan vi nu aftegne et gradnet i planen, med henblik på en gnomonisk projektion – i ovenstående eksempel af den nordlige halvkugle.
Punkter $P = (\lambda, \varphi)$ på kuglefladen med radius R vil således have de polære koordinater $(\lambda, R\cot\varphi)$ i projektionsplanen.

I forbindelse med at skabe en gnomoniske projektion kan bestemmelse af projektionens koordinater også beskrives som følger (kartesisk!). Vi eksemplificerer i relation til ovenstående eksempel.[4] Antag kuglefladen har radius *R* og lad projektionsplanen være givet ved *Z=R*.. En linie gennem punktet $P = (R\cos\lambda\cos\varphi, R\sin\lambda\cos\varphi, R\sin\varphi)$ og Origo kan da parameterfremstilles som

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + tR\begin{pmatrix} \cos\lambda\cos\varphi - 0 \\ \sin\lambda\cos\varphi - 0 \\ \sin\varphi - 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser altså at $Z = tR\sin\varphi$, Og da skæring med projektionsplanen *Z=R* således sker når $R = tR\sin\varphi \Leftrightarrow 1 = t\sin\varphi$, får vi altså at $t = \dfrac{1}{\sin\varphi}$

Dermed er projektionen på analytisk form givet ved følgende:

$$(\lambda, \varphi) \to (\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}R\cos\lambda, \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}R\sin\lambda) = R\cot\varphi(\cos\lambda, \sin\lambda),$$
hvor $-\pi \le \lambda \le \pi$ og $0 \le \varphi \le \pi/2$

[3] Feeman, Timothy G: "Portraits of the Earth – A mathematician Looks at Maps", AMS, 2002, p.42
[4] Fajstrup, Lisbeth: Kortprojektioner og Forvanskninger, Institut for matematiske fag, Århus pp.13-14