Grundlagskrisen i matematik
Studieretningsprojekt i matematik og filosofi
Jan Egballe
4 marts 2007

Formålet med dette projekt er, at eleverne får et indblik i de tanker, som de store matematikfilosoffer har haft om matematikkens grundlag. De tre store fokuspunkter er *logicismen*, *formalismen* og *intuitionismen*. Den uindviede eller uerfarnes syn på matematik er som regel, at matematikken glimrer ved sin *endelighed*, dvs at den, i modsætning til de andre naturvidenskaber, har et solidt fundament, som ingen kan rokke ved. Historien har vist, at dette ikke passer. Håbet er, at man gennem projektet kan tilegne sig en sund skepsis, i forhold til hvad der er ”sikkert” i matematik, og desuden opdage, at der faktisk er alternativer til den gængse matematiske praksis (formalismen).

Det filosofiske aspekt ligger først fremmest i matematikfilosofien, men indeholder også sammenhængen mellem matematik og de andre naturfag (fx fysik) i forbindelse med naturbeskrivelsen.

Matematik
Forudsætninger
Det forudsættes at eleverne i *grove* træk er blevet introduceret til logicisme, formalisme og intuitionisme. En mulighed er, at opgaven er en udvidelse af et tidligere AT-forløb som eleverne har haft, om matematisk logik.

Mål
Eleverne skal opnå et dybt kendskab til *en* af de tre skoler, eller på et moderat plan kunne foretage sammenligninger mellem to af dem.

Filosofi
Der forudsættes generel viden om logik og slutningsregler.

Mål
Eleverne skal kunne identificere de filosofiske grundbegreber, som bruges i de nævnte skoler. Desuden skal der tages stilling til et eller flere af de filosofiske spørgsmål, som emnet lægger op til.

Variationsmuligheder:
Læreren kan fx tage udgangspunkt i følgende spørgsmål:

Beskriv Russels paradoks (barberen der kun barberer… etc). Hvad er problemet, og hvordan løste Russel det? Hvordan løses problemet i moderne matematik?

Forklar hvad cantormængden er. Eksisterer denne mængde?

Redegør for hvad ZFC er. Hvilke af aksiomerne kan godtages. Beskriv udvalgsaksiomet. Hvad siger intuitionisten herom?

Redegør for Hilberts program på konferencen i Paris 1900. Hvori ligger det formalistiske program.

Kan formalisten forklare matematikkens effektivitet i naturbeskrivelsen? Sammenlign Hilbert og Haskell Curry. Forklar sidstnævntes brug af ”acceptabilitets”-begrebet. Giver dette en naturlig beskrivelse af matematikkens historiske sammespil med de andre naturvidenskaber?

Hvad er ”implicitte definitioner”? Hvilke problemer skaber det for naturbeskrivelsen?

Hvad siger Gödels sætninger? (her menes *selvfølgelig* at eleven blot skal kende konsekvensen af dem. Beviserne, endsige formuleringen af sætningerne, kan springes over). Hvorfor er formalismen stadig den foretrukne diskurs, på trods af disse resultater?

Sammenlign logicismen med formalismen. Hvordan forholder de sig hver især til matematikkens forhold til naturbeskrivelsen? Hvad stemmer bedst overens med den historiske udvikling?

Hvad er ”det udelukkede tredjes princip”? Hvordan forholder intuitionisten sig til dette?
Giv et eksempel på et bevis der ikke kan accepteres af denne grund (læreren kan her selv komme med et eksempel). Eksisterer der et bevis for denne sætning som intuitionisten godt kan acceptere?

Hvad er ”Brouwers bille”? Redegør for styrkerne og svaghederne i intuitionismen. Det er blevet påstået at intuitionismen ikke blev en succes fordi den afskrev ”smukke” sætninger, eller i bedste fald kun accepterede dem hvis de ”smukke” beviser blev fjernet (fx modstridsbeviser). Giv et eksempel på dette. Hvordan forholder filosoffen sig til æstetik i matematikken?

Litteratur
Internetlinks er testet 17/8 2016.

1) Ole Skovsmose, *Ud over matematikken*, Systime 1990.
En noget tør, men grundig gennemgang af logicisme og Hilberts metamatematik (siderne 33-45). Desuden nævnes Curry, der beskrives som en mere rabiat formalist end Hilbert.

2) Philip Davis & Reuben Hirsh, *The Mathematical Experience*, Brighton: Harvester Press 1982. Siderne 369-374 indeholder en beskrivelse af Brouwers fascinerende konstruktion af et tal der hverken er positivt, nul eller negativt: pi-hat.

3) http://mathworld.wolfram.com/HilbertsProblems.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_problems
http://platonicrealms.com/encyclopedia/Hilberts-Problems
Tre forskellige sider der beskriver Hilberts problemer. Meget forskellige i formuleringerne.

4) http://plato.stanford.edu/entries/brouwer/
Side om L.E.J Brouwer med kronologisk oversigt. Henvisninger til sekundærlitteratur om intuitionisme i bunden af siden (med beskrivelse og vurdering).

5) http://plato.stanford.edu/entries/principia-mathematica/
Fra samme side. Om *Principia Mathematica*.