

## OPLÆG TIL STUDIERETNINGSPROJEKT I MATEMATIK-HISTORIE OM FERMATS SIDSTE SÆTNING OG SOPHIE GERMAIN

### Indledning

Fermats sidste sætning påstår, at ligningen  $x^n + y^n = z^n$  ikke har positive heltalsløsninger for  $n > 2$ . I 1630 skrev Pierre de Fermat (1601-1665) i marginen i sin kopi af Diophantos' *Arithmetica* om ovenstående påstand: „Jeg har fundet et virkelig vidunderligt bevis for denne sætning, men denne margen kan ikke rummet det.“

Selvom Fermats sidste sætning først blev endeligt bevist i 1995 af den engelsk-amerikanske matematiker Andrew Wiles (1953-), var Sophie Germain (1776-1831) den første matematiker der kom med et virkeligt gennembrud inden for beviset. Forskellige matematikere havde bevist sætningen i specieltilfælde, for eksempel for  $n = 3$  og  $n = 4$ , men Germain anlagde en mere generel strategi i den såkaldte Sophie Germain sætning, der gjorde det muligt at bevise Fermats sætning i en række nye tilfælde.

Her anføres et uddrag af et brev skrevet af matematikkens ukronede konge, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), stilet til Sophie Germain:

„Men når en person af det køn som, ifølge vore sædvaner og fordomme, må støde på uendelig mange flere vanskeligheder end mænd for at gøre sig bekendt med denne tornestrøede forskning, alligevel har held til at overstige disse vanskeligheder og trænge ind i de mest dunkle dele deraf, må hun uden tvivl besidde det ædleste mod, helt udsædvanlige evner og overlegent geni.“

Simon Singh: Fermats store sætning  
p. 134

Sophie Germain's interesse for matematik begyndte, da hun en dag som 13 årig fandt en bog i matematikhistorie i faderens bibliotek. Hun begyndte et selvstudium i talteori og analyse, selvom faderen var imod det og konfiskerede hendes stearinlys, kaminbrænde og endda hendes tøj for at forhindre hende i dette galemandsværk.

Selvom Sophie var både en sky og kejtet person, var hun også utrolig viljestærk, og hun fortsatte ufortrødent sine studier på trods af diverse forhindringer.

*École Polytechnique* åbnede i Paris i 1794, men institutionen var kun for mænd (kvinder først fik adgang i 1972!), og Sophie Germain måtte rekvirere forelæsningsnoter under pseudonymet Monsieur Le Blanc. Kursuslederen, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), blev imidlertid snart klar over Le Blancs sande identitet, og han blev hendes ven og vejleder.

Germain, der nu fik inspiration udefra, kastede sig over talteorien og blev bekendt med Fermats sidste sætning. I en årrække havde hun en korrespondance om talteori med Gauss, som var til stor inspiration for hendes arbejde.

Sophie Germain døde i 1831 af brystkræft.

## **Faglige forudsætninger**

Oplægget henvender sig til eleverne med matematik A og historie A.

Det forudsættes, at eleven har rimelig gode engelskkundskaber.

Matematik:

- eleven skal være fortrolig med talområderne  $N$ ,  $Z$ ,  $Q$  og  $R$ , regneoperationerne og potensregnerreglerne
- eleven skal være fortrolig med håndteringen af ligninger og formler, herunder kunne anvende elementær algebra
- eleven skal være fortrolig med matematisk ræsonnerende og bevisførelse, samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori

Historie:

- eleven kan med fordel have fulgt emneforløb om oplysningstiden og revolutionen i Frankrig i slutningen af 1700-tallet, samt have beskæftiget sig med "Kvindernes historie" som supplerende stof
- eleven skal have kendskab til fornuftig behandling af historisk kildemateriale

## **Faglige mål**

Matematik:

- eleven skal opnå fortrolighed i arbejdet med primtal og kongruenser (modulær aritmetik); eleven skal kunne definere begreberne største fælles divisor, primiske tal og mindste fælles divisor, samt kunne regne med restklasser
- eleven skal kunne bevise Fermats sidste sætning i tilfældet  $n = 4$  og opnå indsigt i problematikken omkring det generelle bevis; eleven vil nødvendigvis opnå fortrolighed med forskellige måder at føre matematiske beviser på, herunder indirekte beviser
- eleven skal kunne formulere Sophie Germain's sætning korrekt og kunne bevise sætningen ved brug af modulær aritmetik
- eleven skal opnå en større forståelse af matematikkens natur som deduktivt system, herunder kunne opstille komplicerede matematiske beviser på fornuftig vis
- eleven skal kunne arbejde med/have en dybere forståelse af diofantiske ligninger

Historie:

- eleven skal kunne beskrive det franske samfunds opbygning både før og efter 1789 samt kunne definere rebellerens idealer og mål, samt kunne gøre rede for oplysningsfilosoffen Jean-Jacques Rousseaus (1712-1778) syn på kvinder sammenholdt med John Stuart Mills (1806-1873) syn på kvinder.

- eleven skal opnå indsigt i den franske revolutions betydning for matematikudøvelsen i Frankrig og omverden; eleven skal kunne uddrage generelle slutninger om samfundsforhold og sammenspillet mellem samfund og mennesker ved brug af konkrete historiske kilder
- eleven skal have indsigt i tidligere tiders metoder at kommunikere matematik på, herunder brevvekslinger, konferencer, præmiebelønnet opgaver mv.
- eleven skal kunne indhente relevant historisk kildemateriale, bearbejde dette på fornuftig vis og forholde sig kritisk til dette
- eleven skal opnå indsigt i sammenhængen mellem at forme og styre et samfund og hvilken betydning det har for individets vilkår

### **Emnebeskrivelse**

Dette oplæg har til formål at virke som inspirationskilde til studieretningsprojekter i matematik-historie om Fermats sidste sætning med fokus på Sophie Germain's arbejde og den franske revolutions betydning for det franske uddannelsessystem (specielt med hensyn til matematik og naturvidenskab med omdrejningspunkt omkring École Polytechnique). Der kan foretages en sammenligning af matematikudøvelsen før og efter 1789 (før den franske revolution fandt udøvelsen af matematik ofte sted ved private monarkers akademier for at opnå prestige; som regel var aftagerne militæret). Eventuelt vurderes kvinders muligheder for at få en boglig uddannelse før og efter revolutionen.

Projekter af denne type kan tilrettelægges på mange forskellige måder, men det er vigtigt at de matematiske og historiske aspekter bindes sammen på fornuftig vis. Da der ikke findes meget materiale om matematikken i Sophie Germain resultater, kan projektet for eksempel fokusere mere generelt på matematikken i Fermats sidste sætning, mens Sophie Germain og hendes forhold behandles i historisk lys. En problemformulering i et studieretningsprojekt om Fermats sidste sætning og Sophie Germain kan indeholde følgende opgaver

- Redegør kort for den ændrede opbygning af det franske samfund på baggrund af revolutionen i 1789. Hvilken betydning fik revolutionen for det franske uddannelsessystem, herunder matematikuddannelsen? Man kan blandt andet komme ind på universiteternes betydning for matematikforskningen før og efter 1789 (matematik bliver jo primært praktiseret på militærakademierne).
- Diskutér rebellernes syn på uddannelse og videnskab. Man kan blandt andet tage udgangspunkt i Antoine Laurent Lavoisier skæbne og standardisering af vægt og længde (metersystemet). Man kan også komme ind på stiftelsen af École Polytechnique i 1794 (til at belyse dette skal der bruges yderligere litteratur end nedenstående materialeliste angiver).
- Med udgangspunkt i relevante historiske materialer ønskes en redegørelse og diskussion af Sophie Germain baggrund og hendes muligheder som naturvidenskabskvinde i det franske

samfund i slutningen af 1700-tallet. Du kan blandt andet komme ind på kønsrollefordeling, forholdet mellem aristokrati og borgerlig, den franske revolutions betydning for naturvidenskab og forskning, bøger om naturvidenskab for kvinder, rollemønstre i familieforholdet mv.

- Diskutér hvordan man kommunikerede matematik i slutningen af 1700-tallet (brevvekslinger, konferencer, præmiebelønnet opgaver). Man kan tage udgangspunkt i Sophie Germain.
- Redegør for Fermats sidste sætning, og vis for eksempel at påstanden er sand for  $n = 4$ . Der kan også arbejdes med pythagoræiske tripler. Anfør og diskuter nogle af Sophie Germain's resultater om Fermats sidste sætning. Hvad er Sophie Germain primtal?
- Diskutér Sophie Germain's indflydelse på det videre arbejde med Fermats sidste sætning og vigtigheden af hendes bidrag til matematikken i øvrigt. Der kan også drages sammenligning med andre store kvinder i naturvidenskab (eksempelvis Sofya Kovalevskaya).
- Diskutér hvilken betydning den franske revolution fik på uddannelsessystemet, specielt matematikuddannelsen i Frankrig og omverden.

### **Eksempel på problemformulering**

Du skal gøre rede for baggrunden for Fermats sidste sætning, herunder skal du kort karakterisere sætningens fader Pierre de Fermat (1601-1665) og det samfund han lever i. Vis først, ved at benytte modulær aritmetik, at hvis  $(x, y, z)$  er en pythagoræisk tripel, hvor  $x, y$  og  $z$  er indbyrdes primiske, så er enten  $x$  eller  $y$  lige, mens den anden er ulige. Vis dernæst, under anvendelse af foregående resultat, at Fermats sætning er sand for  $n = 4$  ved brug af den såkaldte Fermat nedstigning. Du kan selv vælge, om du vil vise, at primitive pythagoræiske tripler kan parameteriseres (dette skal du bruge for at anvende Fermat nedstigning). Med udgangspunkt i Sophie Germain ønskes en redegørelse for det samfund hun lever i (gerne sammenholdt med Fermats samfund) og en gennemgang af hendes muligheder som naturvidenskabskvinde i dette samfund. Anfør og diskuter nogle af Sophie Germain's resultater om Fermats sidste sætning. Hvad er Sophie Germain primtal?

Diskutér sluttelig École Polytechniques betydning for matematikuddannelsen i Frankrig og omverden.

### **Materialer**

Denne materialeliste er ikke fuldstændig. Forslag til yderligere materialer der er relevant for emnet er derfor meget velkomment.

Alle bøger angivet herunder er tilgængelige fra biblioteker i Danmark.

Bucciarelli, Louis L.; Dworsky, Nancy. Sophie Germain – An Essay in the History of the Theory of Elasticity. D. Reidel Publishing Company (1989) [Engelsk]  
(p. 9-19, p. 20-29, p. 85-87)

Singh, Simon. Fermats store sætning. Gyldendal (2000) [Dansk]  
(p. 124-135: *Monsieur Le Blanc*)

*De to ovenstående bøger danner udgangspunkt for karakteriseringen af Sophie Germain. De relevante sider er angivet i parenteserne. Bøgerne indeholder desuden en række afkopierede brevudvekslinger.*

Vestergaard, Preben D. Løste og uløste matematiske problemer. Aalborg Universitetsforlag (1985) [Dansk]  
(p. 124-140: *Fermats sidste sætning*)

Hansen, Johan P.; Spalk, Henrik G. Algebra og talteori. Gyldendal (2002). [Dansk]  
(p. 95-107)

Carstensen, Jens. Talteori. Systime (1993) [Dansk]  
(baggrundslæsning)

*De tre ovenstående bøger indeholder materiale til matematikken i Fermats sidste sætning. De kan betragtes som de vigtigste kilder til udarbejdelsen af projektets matematiske del.*

Olsen, Finn; Christensen, Jeppe; Gaardboe, Henrik. Ça ira! – Revolutionens gang Frankrig 1789-95. Gjellerup & Gad (1988)

Høffding, Niels. Den franske revolution 2 – vurderinger og synspunkter. Gyldendal (1981).

*De to ovenstående bøger indeholder baggrundsinformation om den franske revolution. Det er blot medtaget som eksempler og kan let substitueres af andet og måske bedre materiale.*

Katz, Victor J. A History of Mathematics – An Introduction. Addison Wesley Longman (1998).  
(p. 637-640: *Den franske revolution og matematikuddannelsen*)

*Katz indeholder et relevant afsnit om den franske revolution og matematikuddannelse.*

Steffen Due Bentzen: Fermats Sidste Sætning – hvorfor er den stadig ikke bevist, i  
Matematiske Ideer, Matematiklærerforeningen 1992.

Alle referencer herunder var tilgængelige på Internettet august 2016.

*Introduction to number theory:*

<http://www.math.nmsu.edu/~history/book/numbertheory.pdf>

*Germain's General Approach:*

<http://www.math.nmsu.edu/~history/book/germain.pdf>

*Sophie Germain:*

<http://www.mathsci.appstate.edu/~sjg/womeninmath/SophieGermain.html>

*History topic: Fermat's last theorem:*

[http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Fermat's\\_last\\_theorem.html#40](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Fermat's_last_theorem.html#40)

*Fermat's Last Theorem*

<http://mathworld.wolfram.com/FermatsLastTheorem.html>

*Kvinder i matematik:*

<http://www.matematiksider.dk/kvinder.html>

*Fermats sidste sætning:*

[http://da.wikipedia.org/wiki/Fermats\\_sidste\\_s%C3%A6tning](http://da.wikipedia.org/wiki/Fermats_sidste_s%C3%A6tning)

*Marie-Sophie Germain (biografier):*

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Germain.html>

<http://www.agnesscott.edu/Lriddle/WOMEN/germain.htm>

*Sofja Kovalevskaja (1850-1891): Verdens første kvindelige, professionelle matematiker:*

[http://mathematics.dk/fileadmin/Files/DMF/Matilde/Matilde\\_20.pdf](http://mathematics.dk/fileadmin/Files/DMF/Matilde/Matilde_20.pdf) - side 21

*Den franske revolution:*

<http://www.perbenny.dk/Viva.html>

*Forslag til litteratur om ligestilling:*

[http://www.jafnretti.is/D10/\\_Files/LiseBuskJensen2004.pdf](http://www.jafnretti.is/D10/_Files/LiseBuskJensen2004.pdf)

*De ovenstående links er mere eller mindre vigtige i forhold til dette studieretningsprojekt, og kan anvendes efter behov; det skal dog bemærkes at flere af ovenstående links nødvendigvis må danne udgangspunkt for Sophie Germain's matematiske arbejde. Hjemmesidernes titler er anførte for at anskueliggøre deres indhold.*