OPLÆG TIL STUDIERETNINGSPROJEKT I MATEMATIK-HISTORIE OM CUBA-KRISEN OG MATEMATISKE SPIL

Indledning

Den kolde krig er betegnelsen for perioden 1948 til 1989, hvor USA og USSR i kølvandet på anden verdenskrig havde delt en stor del af verden i hver deres interessesfære, og holdt hinanden skak med en magtbalance. Da begge parter kunne gøre ubodelig skade på hinanden, hvis der kom åben konflikt, sørgede begge parter for, at der ikke kom åben konflikt, deraf navnet den kolde krig. USA havde allerede ved afslutningen af 2. verdenskrig i Hiroshima og Nagasaki vist verden at de havde atomvåben, mens USSR foretog sine første prøvesprængninger i 1949. Derefter byggede magtbalancen mellem de to lande på muligheden for atomkrig. Langt frem i tiden havde ingen af parterne langtrækkende atomvåben, der kunne krydse fra kontinent til kontinent og de var derfor afhængige af at kunne stille våben op i lande nær modstanderen, hvis de ville kunne ramme modstanderen umiddelbart. Det var dette, der skete under Cuba-krisen, hvor USSR havde stillet atommissiler op på Cuba. Et amerikansk rekognosceringsfly opdagede dette og det bekræftedes for den amerikanske præsident Kennedy den 14. oktober 1962. Herefter skulle Kennedy og hans administration finde ud af hvordan de ville svare på dette ryk i magtbalancen. Den konservative fløj ønskede et hurtigt luftangreb mod missilerne, men præsidenten selv var bange for at dette kunne føre til modangreb og i sidste ende atomkrig. I stedet iværksattes en blokade for de skibe, der sejlede yderligere materiel mod Cuba samt et pres på, for at få USSR til at fjerne de opstillede missiler, blandt andet ved at true om værre sanktioner, hvis USSR ikke gjorde det. I løbet af de 12 dage, der fulgte den 14. oktober balancerede USA og USSR (og verden) på kanten af en atomkrig, men det endte med at USSR overholdt blokaden og fjernede de allerede opstillede missiler, mod at USA fjernede deres missiler i Tyrkiet.

Kan teorien om matematiske spil anvendes som et redskab i udenrigspolitik? USA's og USSR's beslutning om at starte eller ikke at starte en væbnet konflikt under Cuba-krisen undersøges med udgang i spilteori; beslutningsprocesserne kan beskrives både som simultant-træk-spil og sekventielt-træk-spil, og løsningsmulighederne til disse spil bestemmes ved hjælp af spil-træer og spil-matricer. Deltagerne i konflikten vil blive betragtet som rationelle aktører, deres ønske om udkom beskrives samt der mulige tab. På baggrund af en beskrivelse af aktørernes viden på beslutningstidspunktet og ved brug af de opstillet matematiske spil, skal man vise hvad deres rationelle beslutning vil være.

Som udgangspunkt for de matematiske spil i Cuba-krisen anvendes ikke nul-sum-spillet *Chicken* (bangebuks) (se Edmund Christiansen: Elementer af matematisk spilteori, p.79). Dette spil har samme centrale dilemma som Cuba-krisen, nemlig en løbende balance mellem den aktuelle trussels effektivitet og sandsynlighed, dvs. for at en trussel skal virke skal den være både effektiv og sandsynlig.

Faglige forudsætninger

Dette oplæg henvender sig til elever med matematik A og historie A.

Matematik:

- eleven skal kunne arbejde fornuftigt med mængdelære og uligheder samt have en dyb forståelse af funktionsbegrebet
- eleven skal have en forståelse af matematiske modellers mangfoldighed (beskrivende og forklarende modeller), deres anvendelser og begrænsninger
- eleven skal have en god sans for matematiske ræsonnementer og beviser

Historie:

- eleven kan have fulgt forløb i historie om 2. verdenskrig og ideologiernes kamp
- eleven skal have kendskab til fornuftig behandling af historisk kildemateriale

Faglige mål

Matematik:

- eleven skal have opnået en generel forståelse af matematiske spils natur, herunder hvad der forstås ved begrebet strategi, og deres udbredte anvende til beskrivelse af beslutnings-processer
- eleven skal som minimum kunne definere begrebne nyttefunktion, sekventielt-træk-spil, simulant-træk-spil, spil-træer, spil-matricer, Nash ligevægt (løsning til spil), Zero-sum spil og ikke zero-sum spil, Zermelo's algoritme
- eleven skal vide hvad man forstår ved endelige deterministiske spil med fuld information og spil uden fuld information samt kunne vise grundlæggende resultater inden for disse kategorier

Historie:

- eleven skal opnå faglig indsigt i den kolde krig og specielt Cuba-krisen, herunder indkredse de forskellige aktører og deres interesser
- eleven skal med baggrund i historisk kildemateriale opstille matematiske spil, hvorfra aktørerne i Cuba-krisens beslutninger kan forklares
- eleven skal kunne foretage fornuftige systemafgræsninger; en politisk konflikt som Cuba-krisen kan være svær at indkredse med hensyn til start- og sluttidspunkt samt hvilke aktører der indgår
- eleven skal mere generelt kunne indhente relevant historisk kildemateriale, bearbejde dette på fornuftig vis og forholde sig kritisk til dette

Emnebeskrivelse

Dette oplæg har til formål at virke som inspirationskilde til studieretningsprojekter i matematik-historie om Cuba-krisen eller andre historiske konflikter og teorien om matematiske spil. Eftersom matematiske spil hurtigt kan blive komplicerede, vil dette oplæg primært omhandle elementære sider af denne matematiske disciplin. Det forudsættes at eleven har nogenlunde gode engelsk-kundskaber, da den meste litteratur om emnet er på engelsk.

For at opnå en sammenhængende og velstruktureret opgave, hvor matematikken og historien indgår side om side, kan lærerne vælge at vedlægge eventuelle opgaver i matematik om spilteori som bilag til opgaveformuleringen, og disse skal så løses og vedlægges i et appendiks til opgaven. Projektet kan blandt andet indeholde:

- Der ønskes en redegørelse af de udenrigspolitiske beslutninger der leder til Cuba-krisen under den kolde krig. Der foretages en systemafgræsning, og med udgangspunkt i teori om matematiske spil opstilles spillet Cuba-krisen.
- Der redegøres for motivationen for netop at benytte matematiske spil som model for beslutningsprocesserne i Cuba-krisen, og der ønskes en gennemgang af begreberne nyttefunktion (værdifunktion), information, træer og matricer, Nash ligevægt og Zero-sum spil. Begreberne kan forklares ved brug af konkrete eksempler.
- Det diskuteres på baggrund af den opstillet matematiske model om de beslutningsprocesser der blev foretaget under Cuba-krisen var rationelle set i lyset af teorien om matematiske spil, dvs. om de var i overensstemmelse med spillets løsning. Derudover kan det diskuteres om beslutningerne gav bedste payoff for aktørerne, dvs. var aktørerne fuldstændige rationelle? Der foretages en modelkritik på baggrund af det historiske forløb, dvs. teorien om matematiske spils begrænsninger og mangler til at beskrive Cuba-krisen diskuteres.
- Det kan desuden vises, at Cuba-krisen som simultant-træk-spil og sekventielt-træk-spil har samme løsning.

<u>Variationsmuligheder</u>

Matematiske spil kan også anvende på en lang række andre historie krigssituationer; et godt eksempel er slaget i Bismarck Havet. Under kampen om New Guinea under 2. verdenskrig fik USA information om, at japanerne ville sende en troppe- og forsyningskonvoj fra Rabaul på New Britain til Lea på New Guinea. Konvojen kunne sejle enten nord om New Britain, hvor man kunne være sikker på dårlig sigtbarhed, eller syd om øen, hvor man måtte regne med klart vejr. I begge tilfælde ville rejsen have en varighed på 3 dage.

Den amerikanske generel Kenney havde valget mellem at koncentrere rekognosceringsflyvene på den nordlige eller sydlige rute. Når først konvojen var opdaget, ville den blive bombet resten af vejen til Lea. Kennys mandskab antog følgende resultat af de forskellige valg målt i antal bombedage:

		Japanernes valg	
		Nordlig rute	Sydlig rute
USA's valg	Nordlig rute	2	2
	Sydlig rute	1	3

Både japanerne og Kenney valgte den nordlige rute, og konvojen blev opdaget kun en dag efter afsejlingen, og den led svære tab. Det bemærkes at kombinationen nordlig rute-nordlig rute er saddelpunkt, og dermed løsnings til spillet (fordi max min = 2 = min max). De valgte altså begge den optimale strategi; japanernes tab skyldes således ikke deres strategi, men deres beslutning om at sende en konvoj af sted med mulighed for at blive opdaget.

Eksempel: Ikke-nul sum spil og Cuba-krisen

Lad os betragte to spillere, A og B. Spiller A har to forskellige handlemåder eller strategier, nemlig a_1 og a_2. Tilsvarende har spiller B to forskellige strategier, nemlig b_1 og b_2. De to spillere skal vælge deres strategi uden kendskab til hvad den anden spiller vælger. Spillet normalform eller matrixform bliver da

		Spiller B	
Spiller A		b_1	b_2
	a_1	(3,3)	(2,4)
	a_2	(4,2)	(1,1)

Talsættet (x, y) betegner spiller A's payoff (nytte) henholdsvis spiller B's payoff, hvor 4 er bedst og 1 er dårligst. Spillet har øjensynlig to Nash ligevægte, nemlig (4,2) og (2,4). For disse strategier kan hverken spiller A eller spiller B opnå et bedre payoff, givet den anden spillers valg.

Lad nu spiller A betegne USA og spiller B betegne USSR, og lad strategierne a_1 og a_2 betegne blokade henholdsvis luftangreb og b_1 og b_2 tilbagetrækning henholdsvis opretholdelse. Da Cuba-krisen kan betragtes som et spil med fuld information, burde spillet gå mod et af de ligevægts-punkter. Hvis for eksempel USA har første træk burde spillet gå mod (4,2). Spillet har imidlertid ikke nogen af de to Nash ligevægte som løsning i praksis, eftersom spillerne ikke kan betragtes som fuldstændige rationelle, dvs. de vil ikke nødvendigvis vælge en strategi der giver dem bedste payoff. USA kan altså ikke regne med at Sovjet vil vælge at trække sig, hvis USA vælger et luftangreb, selvom udkommet for Sovjet ved at trække sig ville blive 2, mens det ved at forsvare missilerne kun ville blive 1. Dette skyldes, at der er kommet en trussel om irrationalitet med i spillet, og denne trussel er en af de vigtige pointer i den kolde krig set med teorien om matematiske spil. For kunne enten USA eller Sovjet regne med at modparten var fuldstændig rationel og aldrig ville besvare et første angreb med det modangreb, der kunne starte en atomkrig, kunne den ene part jo let starte dette første angreb. På den anden side måtte heller ingen af parterne opfatte modparten som værende så irrationel at denne kunne starte en atomkrig når som helst, da det jo i så fald kunne være smart at slå først og have en lille chance for at ramme vitale anlæg. Der måtte altså fra begge parters side ligge en trussel om, at de kunne finde på at være passende irrationelle.

Eksempler på de konkrete matematiske muligheder med dette projekt findes i *Elementer af matematisk spilteori* af Edmund Christiansen (se nedenstående materialeliste).

Materialer

Alle bøger angivet herunder er tilgængelige fra biblioteker i Danmark.

Christiansen, Edmund
Elementer af matematisk spilteori
Odense Universitets Trykkeri (1997)

Trap, Allan
Spilteori og afstemningsteori
GMT (1973)

Brams, Steven
Superpower Games
Yale University Press (1985)

Ellsberg, Daniel
The Theory and Practice of Blackmail
University of Illinois (1975)

Alle referencer herunder var tilgængelige på Internettet august 2016.

Game Theory
http://plato.stanford.edu/entries/game-theory/

Prospect Theory and the Cuban Missile Crisis
www.blackwell-synergy.com/doi/pdf/10.1111/0020-8833.00190

A Brief Introduction to Non-Cooperative Game Theory
http://www.ewp.rpi.edu/hartford/~stoddj/BE/IntroGameT.htm

Game Theory and Nuclear Weapons
https://www.yumpu.com/en/document/view/46668770/game-theory-and-nuclear-warfare-condensed

Game Theory
http://en.wikipedia.org/wiki/Game_Theory

Note til Spilteori
bennike.org/downloads/mikro/spilteor.pdf

Spilteori
http://www.leksikon.org/art.php?n=2414

Spilteori
www2.imm.dtu.dk/courses/02701/kap14.pdf

Game theory and the Cuban missile crisis
http://plus.maths.org/issue13/features/brams/