



Visit MATH 2018: Geometri og energi i fysik - abstrakte idéer i dagligdagens fænomener

Visit MATH

Niels Martin
Møller



Niels Martin Møller (KU MATH)
Sektion for Geometrisk Analyse & Matematisk Fysik



Nogle nyttige links:

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Links

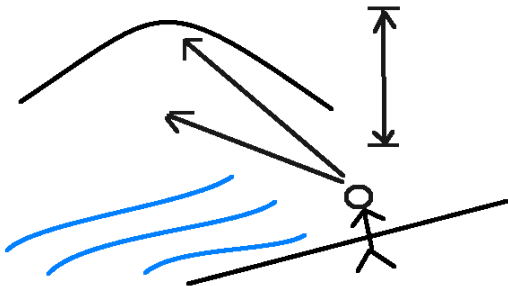
- KU-hjemmeside: <http://bit.ly/2cgxKZ5>
- Det Unge Akademi, Kongelige Danske Videnskabernes Selskab: <http://www.youngacademy.dk>
- Videnskabsklubben: <http://www.videnskabsklubben.dk>
- Bloom 2019 Festival, 25.-26. maj, 2019 (program snart): <https://www.facebook.com/events/170166426998024>
- Videnskab.dk: <https://videnskab.dk>
- Applet til middelkrumningsflow for kurver: <http://a.carapetis.com/csf>



En krum, krum verden - vi starter meget jordnært.

Visit MATH

Niels Martin
Møller



"Hvis vi boede på en kugle, som er cirka 12000 kilometer i diameter, så ville ting begynde at forsvinde bag horisonten efter fem kilometer [...] hvorfor kan jeg så se Mols Bjerger, når jeg står på stranden ved Sjællands Odde?"
[Ole, fladjordsentusiast i BT, 2017]



Niels Martin
Møller





**Niels Martin
Møller**

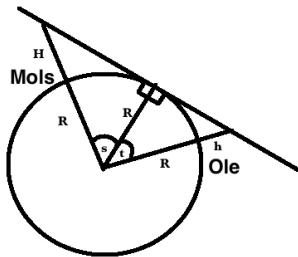




En krum, krum verden - vi starter meget jordnært

Visit MATH

Niels Martin
Møller



Trekanter : $s = \arccos\left(\frac{R}{R+H}\right), \quad t = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right).$

Afstand (målt langs kuglefladen) som en Ole i højde h kan se et bjerg i højde H i er: $d = R \left[\arccos\left(\frac{R}{R+H}\right) + \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right) \right].$

Med $R = 6371$ km, $h = 0.004$ km og $H = 0.137$ km fås:

$$d = 6371 \left[\arccos\left(\frac{6371}{6371+0.137}\right) + \arccos\left(\frac{6371}{6371+0.004}\right) \right] \simeq \underline{49 \text{ km}}.$$

Men 52 km Odden til Agri Bavnehøj (137 m): 3 km mangler!?

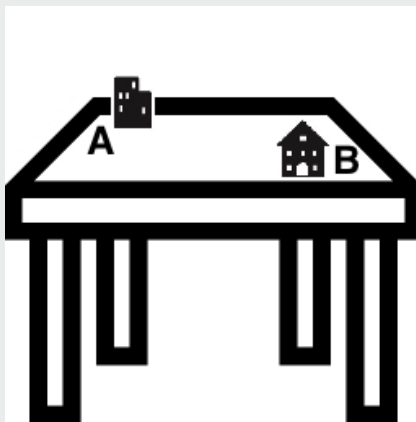


Babystep: Velkommen til "Fladland"

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Korteste veje i "Fladland"?



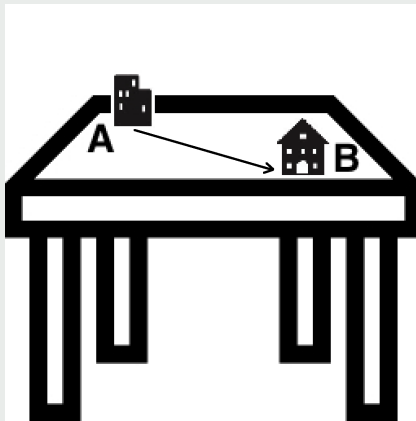


Babystep: Velkommen til "Fladland"

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Korteste veje i "Fladland"?



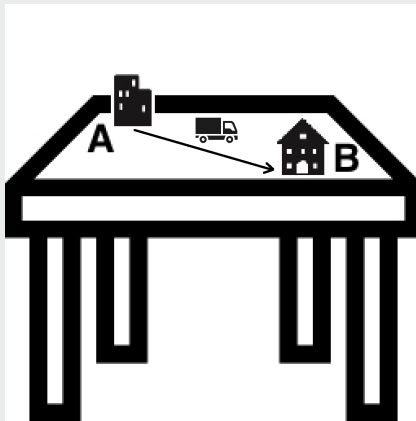


Babystep: Velkommen til "Fladland"

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Korteste veje i "Fladland"?



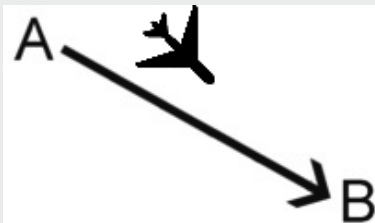


Babystep: Velkommen til "Fladland"

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Genveje i den flade plan: Rette linjer



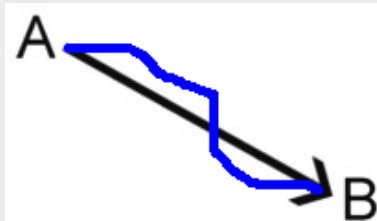


Babystep: Velkommen til "Fladland"

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Genveje i den flade plan: Rette linjer



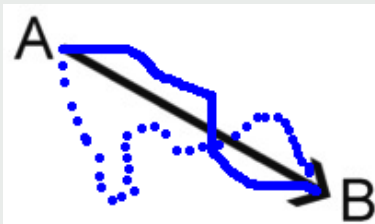


Babystep: Velkommen til "Fladland"

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Genveje i den flade plan: Rette linjer



- Rette linjer (sort) giver altid de korteste veje fra A til B. Kaldes geodæter (egtl. geodætiske kurver): **I planen er geodæterne rette linjer.** Og afstand "=" (rejse-)tid. Og tid "=" penge.

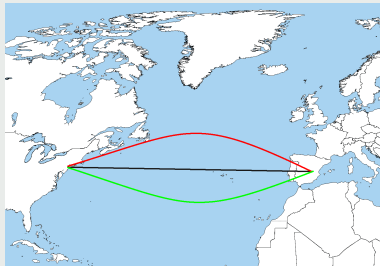


Jordkloden: Geodætiske genveje?

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Genveje på en kugle? (*Lokalt* korteste.)



- Find *geodæterne* (= lokalt korteste veje) på (jord-)kuglen?
- Hvilke ruter (rød, sort, grøn) er kortest, næstkortest, længst? (Svar: Den røde er kortest. Geodæterne er storcirkler: To punkter A, B samt kuglecentrum C giver *plan*, snittet med kugleskal er geodætisk kurve fra A til B.)



Matematisk forsøg #1

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Lad os prøve om vi kan lave retvisende kort (altså: så alle afstande vises korrekt) på fladt papir - ved at pakke fladerne ind! Det "overskydende" papir når vi folder kan vi farve sort og få et simpelt krumningsmål.

Retvisende flade kort?

- *Den flade plan* (bordpladen)? Ja!
- *Kuglen* (jordkloden)? Nej!
- *Kegleoverfladen*? Hmm...vi må undersøge det...



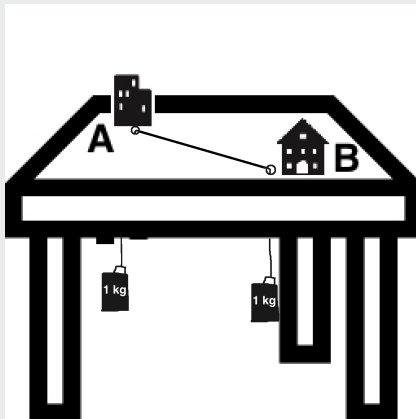
Tilbage til “Fladland”

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Spisebordet igen...nu med et smart “trick”: Vægte.

Nu strammer det til





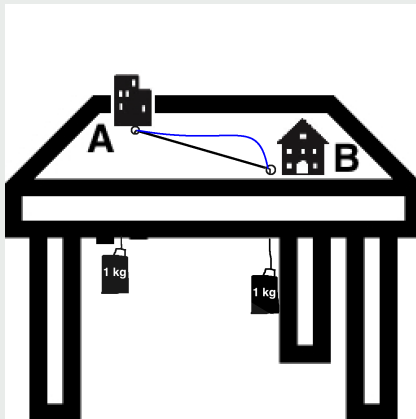
Tilbage til “Fladland”

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Spisebordet igen...nu med et smart “trick”: Vægte.

Nu strammer det til



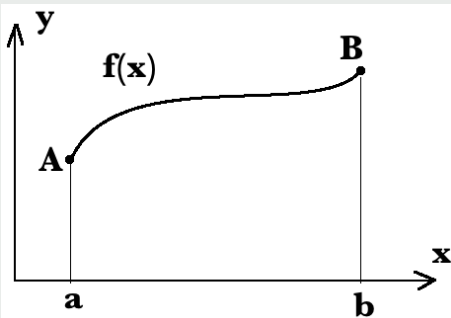


Variationskalkyle

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Eksempel på variationskalkyle: Korteste veje i planen



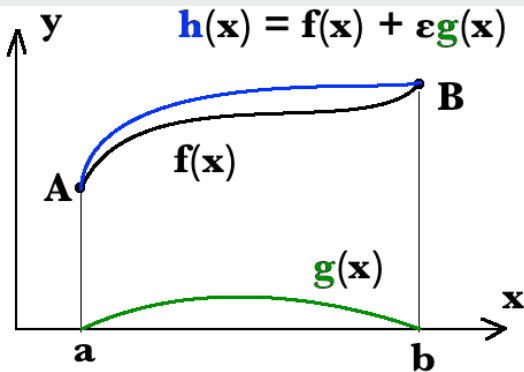


Variationskalkylen

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Eksempel på variationskalkyle: Korteste veje i planen



Kurvelængde: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

$L(\varepsilon) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x) + \varepsilon \cdot g'(x))^2} dx$, og minimal: $\frac{dL}{d\varepsilon} = 0$.



Variationskalkylen

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Eksempel på variationskalkyle: Korteste veje i planen

Minimal: (Faste endepunkter, $g(a) = 0$ og $g(b) = 0$)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dL(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{d\varepsilon} \left(\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x) + \varepsilon \cdot g'(x))^2} dx \right) \\ &= \int_a^b \frac{1}{2} (1 + (f'(x) + \varepsilon g'(x))^2)^{-\frac{1}{2}} 2g'(x)(f'(x) + \varepsilon g'(x)) dx, \end{aligned}$$

Så for $\varepsilon = 0$: $\int_a^b g'(x) (1 + (f'(x))^2)^{-\frac{1}{2}} f'(x) dx = 0$. Vi vil gerne flytte differentiationen væk fra $g \dots$

Det vil sige: Vi vil bruge partiel integration.



Variationskalkylen

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Vi husker
$$\int_a^b g'(x) [1 + (f'(x))^2]^{-\frac{1}{2}} f'(x) dx = 0,$$

og husker formelen for partiel integration:

$$\int_a^b g'(x) h(x) dx = g(x) h(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) h'(x) dx.$$

Vi har derfor at for *alle* $g(x)$ (hvis de da antages nul i a, b):

$$0 = \frac{dL(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_a^b g(x) \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right)' dx, \quad \text{derfor :}$$

$$L^2\text{-gradienten } \nabla L(f) =: \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right)'.$$



Variationskalkylen

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Indtil videre: Korteste veje $\Rightarrow$ differentialligning

Vi har nu altså en lidt vanskeligt udseende (ikke-lineær) - men heldigvis ikke så svær differentialligning:

$$\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right)' = 0.$$

Husk her at $(\dots)'$ betyder $\frac{d}{dx}(\dots)$.

Men så må der findes en konstant C , så for $x \in (a, b)$:

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \stackrel{(*)}{=} C.$$



Variationskalkylen

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Vi må nu løse: $\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} \stackrel{(*)}{=} C$, for alle $x \in (a, b)$.

Andengradsligning:

$$(f'(x))^2 = C^2(1 + (f'(x))^2) = C^2 + C^2(f'(x))^2$$

$$(1 - C^2)(f'(x))^2 = C^2,$$

$$f'(x) = \pm \frac{|C|}{\sqrt{1 - C^2}},$$

som jo er *konstant*. NB: $|C| < 1$ følger af ligningen $(*)$ ovenfor.

Konstant hældning $\Rightarrow$ ret linje!

Kurven = en ret linje! Altså, som forventet: $f(x) = ax + b$.



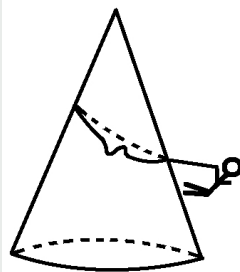
Variation af “energi” (kurvelængde)

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Husk igen vores “energi-trick” til at forstå geodæter.

Snor rundt om en kegle: (Potential) energi = snorlængde





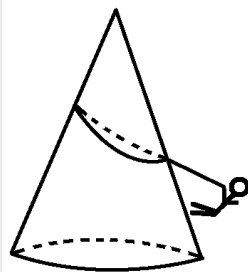
Variation af “energi” (kurvelængde)

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Igen vores trick til at forstå geodæter.

Snor rundt om en kegle: (Potential) energi = snorlængde



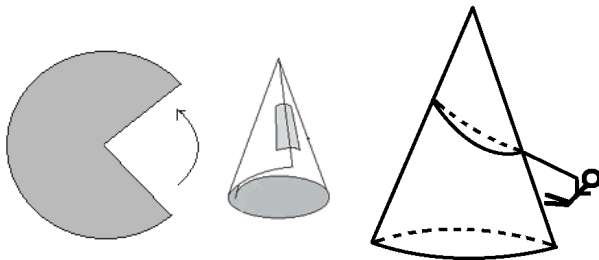


Matematisk forsøg #2

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Genveje på keglen?



Matematisk forsøg #2:

- (1) Fold en kegle. Hæng bjergbestigeren i en løkke for at tegne en geodæt på keglen.
- (2) Fold keglen ud til fladt papir igen. Hvilken kurve ser vi at geodæten er?

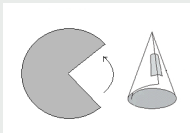


Matematisk forsøg #2

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Genveje på keglen?



Matematisk forsøg #2 - svar: Her er geodæterne også linjer!

- Hvad hulen foregår der? To slags afstande! Indre og ydre. (Eks. *Ecuador* $\leftrightarrow$ *Singapore*).
- For planen og keglen: Alle **indre** afstande (= i overfladen) er de samme... selvom de **ydre** afstande *ikke* er de samme.
- Keglen er krum, men kun "ydre", ingen "indre krumning"! (En myre som bor på et *lille* stykke overflade kan ikke ved at måle afstande indeni fladen kende forskel på keglen og planen! Stort stykke, publikum...?)

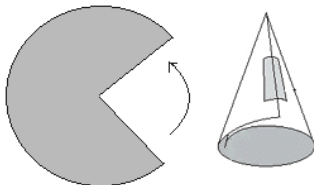


Om flade, retvisende kort

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Flade kort eller ej?



Hvor kan vi så lave flade, retvisende kort?

- (1) På *kuglen*/jordkloden: Nej!
- (2) På *keglen*: Ja!
- (3) Hvad så med *cylindren*? Vi prøver!



Om flade, retvisende kort

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Cylinder: Flade kort eller ej? (Foto på Glasmuseet, Ebeltoft)



Hvor kan vi lave flade, retvisende kort?

- (1) På *kuglen*/jordkloden: Nej! (2) På *keglen*: Ja!
- (3) **Hvad så med *cylinderen*? Vi prøver!** (Svar: Ja.)

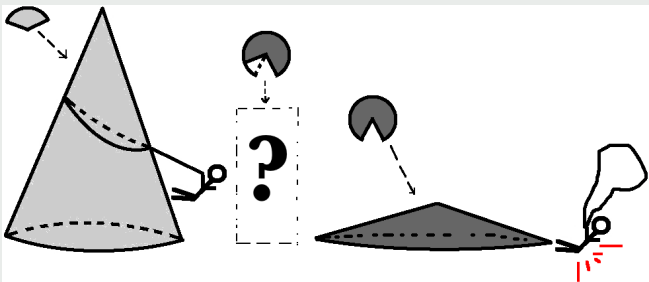


Anvendelse: Matematisk forsøg #2

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Klatring på keglen? Et kritisk problem.



Matematisk forsøg #3:

- Hvor *stejl* skal keglen være for at bjergbestigeren bliver hængende? Lav 1 stk. meget stejl, 1 stk. meget flad.

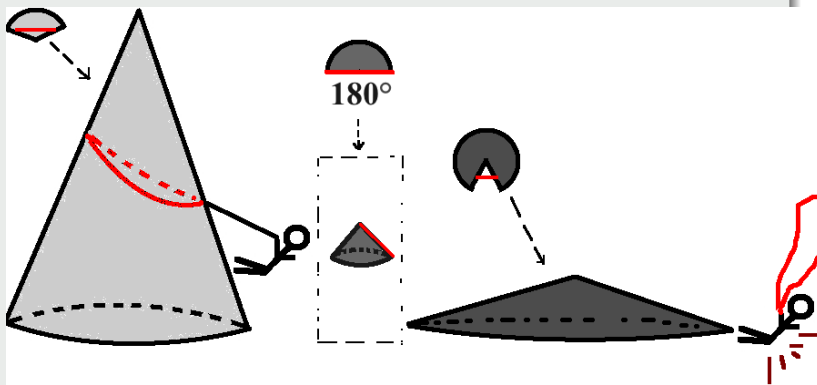


Anvendelse: Matematisk forsøg #2

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Klatring på keglen? Et kritisk problem!



- Svar: Fjern netop π radianer (180°) fra cirkelskiven for at folde den "kritiske" kegle.



Fysikkens geometriske verdensbillede

Visit MATH

Niels Martin
Møller

- Vi har genopdaget begrebet **isometri**. (“Iso” = samme, “metri” = mål).
- Den *ydre* fladekrumning kaldes “**middelkrumning**”, “mean curvature”. “Mean” betyder “gennemsnit” (altså “middel”) ikke “ond”. Selvom det jo er en krum, krum verden!
- Den *indre* fladekrumning kaldes **Gauß-krumningen**.
- Vores “trick”: Et skridt i jagten på “Theory of Everything”... Flere århundreders fysik = “gæt en geometri og en energi”. Variér så energien, og få en (partiel) differentiaalligning frem.

Newtons love, elektromagnetismen, Einsteins generelle relativitetsteori (vha. Einstein-Hilbert-integralet), kernekrafter (to slags), Higgs-feltet...



Niels Martin
Møller

Standardmodel m. geometrisk energi L , for $\mathcal{L}$ (= Lagrange-tæthed):

[illegible]

Kilde: <https://www.symmetrymagazine.org/article/the-deconstructed-standard-model-equation>



Andre krumme rum: Sukkervand og laser

Visit MATH

Niels Martin
Møller





Andre krumme rum: Sukkervand og laser

Visit MATH

Niels Martin
Møller





Andre krumme rum: Sukkervand og laser

Visit MATH

Niels Martin
Møller



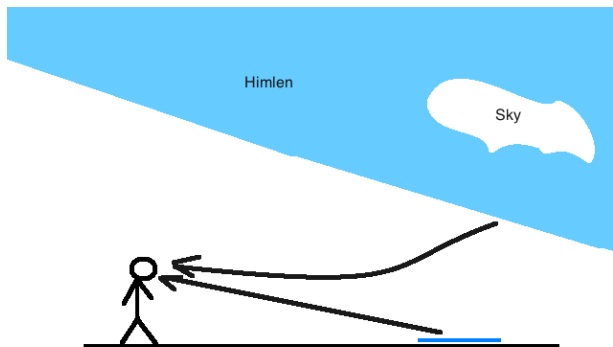
- Lyset finder (lokalt) den hurtigste vej ml. givne (nære) punkter A og B. (Fermat's Princip). "Hurtig" = "kort i tid".
- Det vil sige: Geodæter igen! Minimér $L = \int n(\gamma(s)) d\sigma(s)$ over alle kurver $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ med $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$.
Kurvelængde-element: $d\sigma(s) = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} ds$



Andre krumme rum: Varm luft

Visit MATH

Niels Martin
Møller



- Lyset finder (lokalt) den hurtigste vej fra himlen til dit øje.
- Lysets hastighed i luft afhænger af temperatur/tryk - ligesom af sukkerindholdet før → **luftspejlinger** på varme dage.



Andre krumme rum: Varm luft

Visit MATH

Niels Martin
Møller



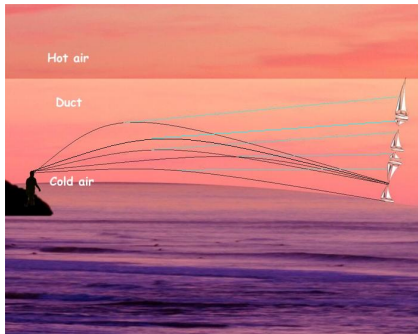
- En specielt slående luftspejling: *Fata Morgana* (Foto: Wiki Commons).
- Måske $\Rightarrow$ myterne om flyvende spøgelseskibe?



Andre krumme rum: Varm luft

Visit MATH

Niels Martin
Møller



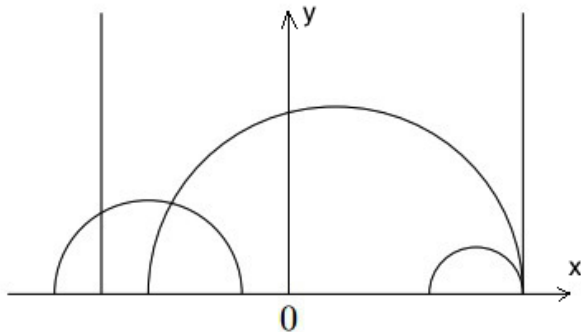
- Geodæt bøjer her...*nedad*. Derfor ser vi *længere*.
- Typisk 8%–15% ekstra fra “luft tykkest ved overfladen”:
 $1.08 \cdot 49 \text{ km} \simeq 53 \text{ km} > 52 \text{ km}$.
- Kun fordi disse lys-geodæter krummer så meget grundet atmosfærens “usynlige geometri” kan vi se Mols Bjerge helt fra Sjællands Odde! (Billede: Wiki).



Andre krumme rum: Varm luft og hyperbolsk (ikke-Euklidisk) geometri

Visit MATH

Niels Martin
Møller



- Her er det lokale længdemål (= Riemannsk metrik g_{ij}):

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

- Varm luft/sukkervand med brydningsindeks: $n(x, y) = \frac{1}{y}$.

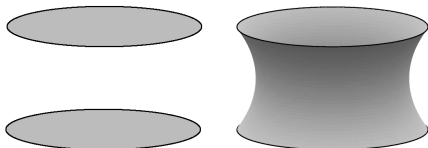
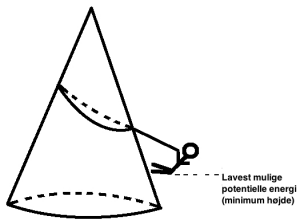


Sæbefilm: Mindst muligt areal?

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Arealet af overflader: Helt ligesom længden før!



Geodæt

Sæbefilm

- (1) Længde af 1-dimensionale kurver (geodætiske kurver).
→ (Ordinær) Differentialligning (én variabel).
- (2) Areal af 2-dimensionale overflader (sæbefilm!).
→ *Partiel* Differentialligning (*flere* variable):

$$0 = H = \kappa_1 + \kappa_2 = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right), \text{ for } (x, y, u(x, y))$$

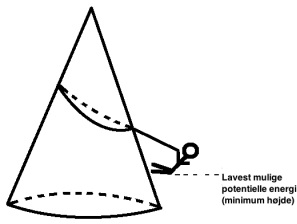


Sæbefilm: Mindst muligt areal?

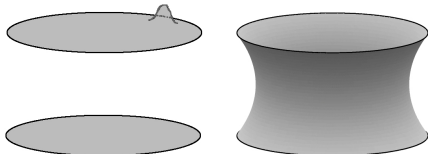
Visit MATH

Niels Martin
Møller

Arealet af overflader: Helt ligesom længden før!



Geodæt



Sæbefilm

- (1) Længde af 1-dimensionale kurver (geodætiske kurver).
→ (Ordinær) Differentialligning (én variabel).
- (2) Areal af 2-dimensionale overflader (sæbefilm!).
→ *Partiel* Differentialligning (*flere* variable):

$$0 = H = \kappa_1 + \kappa_2 = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right), \text{ for } (x, y, u(x, y))$$

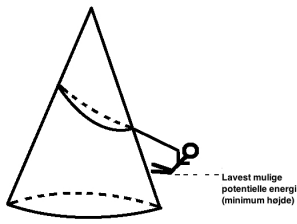


Sæbefilm: Mindst muligt areal?

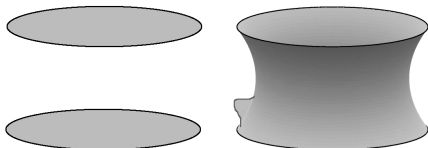
Visit MATH

Niels Martin
Møller

Arealet af overflader: Helt ligesom længden før!



Geodæt



Sæbefilm

- (1) Længde af 1-dimensionale kurver (geodætiske kurver).
→ (Ordinær) Differentialligning (én variabel).
- (2) Areal af 2-dimensionale overflader (sæbefilm!).
→ *Partiel* Differentialligning (*flere* variable):

$$0 = H = \kappa_1 + \kappa_2 = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right), \text{ for } (x, y, u(x, y))$$

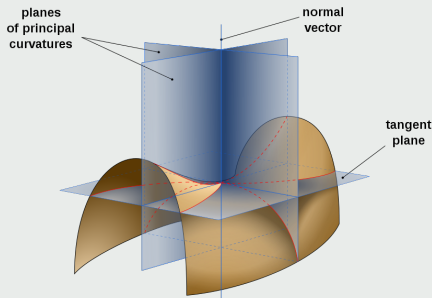


Minimalflader: (Lokalt) mindst muligt areal

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Hovedkrumninger for en flade



κ_1 og κ_2 : Størst og mindst krumning af snitkurve. (Wiki)

Minimalflade: Partiel differentiaalligning vs. geometri:

$$0 = H = \kappa_1 + \kappa_2 = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right), \text{ for } (x, y, u(x, y))$$

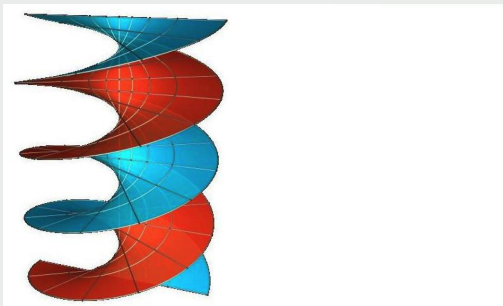


Minimalflader

Visit MATH

Niels Martin
Møller

En vigtig minimalflade?



Helicoid (Meusnier, 1776)

(Billeder: <http://www.indiana.edu/~minimal> & Wiki)

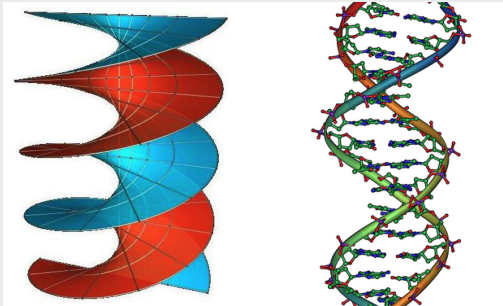


Minimal Surfaces in the Calculus of Variations

Visit MATH

Niels Martin
Møller

En vigtig minimalflade og et meget stabilt molekyle:



Helioid (Meusnier, 1776)

DNA (Livet, -4.1×10^9)

(Billeder: <http://www.indiana.edu/~minimal> & Wiki)

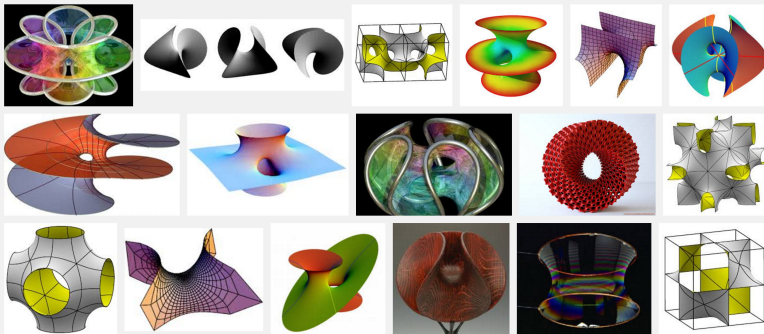


Minimalflader (Billeder: Google “minimal surface”)

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Endnu flere (lokalt) mindste-areal flader: Sæbefilm...



En slags “2-dimensionale geodæter”! Med $\iint |\kappa_1 \cdot \kappa_2| < \infty$):
Flade planer, “katenoiden” (omdrejningslegeme af kædelinje),
...og...?... 200 år senere... Costa-fladen (1982)!

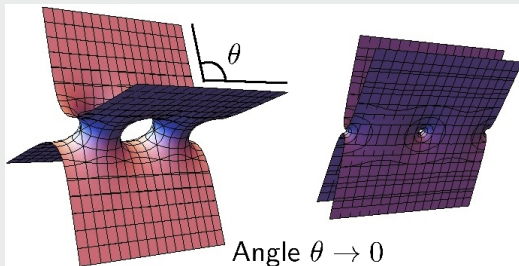


Familier af minimalflader (Scherk-flader)

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Kollapset version af minimalfladeligningen



Angle $\theta \rightarrow 0$

- (1) Kollaps beskrives ved $f(x, y)$ og en *simple* partiel diff. lign. (velkendt: *Laplace-ligningen* for e.g. elektriske felter, mere generelt Schrödinger-type):

$$\Delta f = 0, \quad \text{Laplace : } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

- (2) Harmonisk funktion her: $f(x, y) = \ln(\cosh x - \cos y)$.



Nedad bakken til geodæter og minimalflader: Krumningsflow

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Middelkrumningsflow “MCF” (Mean Curvature Flow):
 L^2 -gradient-flow for areal (længde)

Enkel definition: Formindsk arealet (for kurver: længde)
hurtigst muligt.

Tidsafh. partiel diff. lign. (2-dim. hyperflade)

Ikke-lineær varmeligning:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right),$$

for grafer $(x, y, u(x, y, t))$ (afh. af tid t).

Ikke i dag: $(M^n, g_{ij}), \frac{\partial g_{ij}(x, t)}{\partial t} = -2\operatorname{Ric}_{ij}(x, t)$ (Ricci flow).

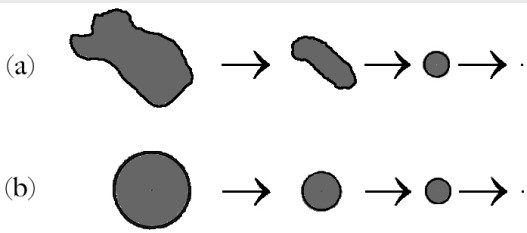


Nedad bakken til geodæter og minimalflader: Krumningsflow

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Kurver i planen $\mathbb{R}^2$



Anvendelse: Egenskab for alle plane kurver (Gage-Hamilton)

Gammel Viden (Isoperimetriske Ulighed): $L^2 \geq 4\pi A$.

Bevis via *monotonicitet* under flow:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L^2}{4\pi A} \right) \leq 0 \quad (\text{konvekse plane kurver})$$

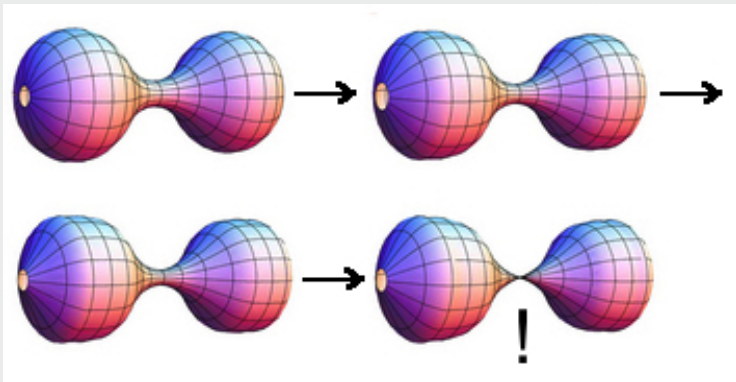


Nedad bakken til geodæter og minimalflader: Krumningsflow

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Krumningsflow for 2-dimensionale flader



Zoom ind på singularitet: Round cylinder i grænsen. Eksempel på *selv-skrumpende soliton*.

(Billede: <http://inspirehep.net/record/1249871/plots>)

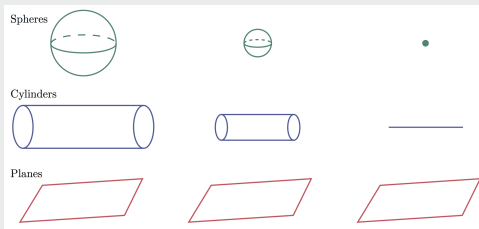


Nedad bakken til geodæter og minimalflader: Krumningsflow

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Eks. self-skrumpende flader, samme form men skaleret version:
Solitoner (ej vist: Angenents torus 1989)



Singularitetsmodeller: Selv-skrumpende flader (solitoner)

En anden PDE:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{p \cdot \nabla u - u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}.$$

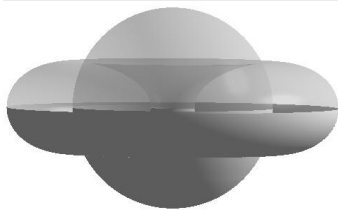
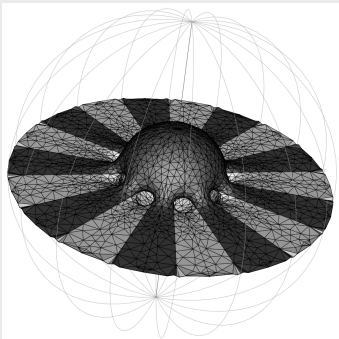


Nedad bakken med MCF...

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Nye eksempler:



I min egen forskning, et spørgsmål/en formodning tilbage fra 1970'erne: Findes der andre selv-skrumpende solitoner? Ja!

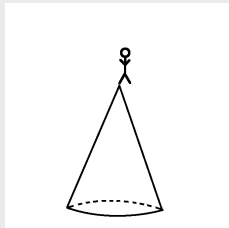


Geometri og energi i fysik: Abstrakte idéer i dagligdags fænomener

Visit MATH

Niels Martin
Møller

Tak for opmærksomheden!



"Hvorfor kan jeg så se Mols Bjerget? [...] Jeg synes ikke, det kræver høje uddannelser eller stor matematisk viden."

[Ole, 52 år]

Tjoh, men lidt uddannelse hjælper! :)