Søren Asmussen Helle Johansen

Über eine Stetigkeitsfrage betreffend das Bedienungssystem GI/GI/s

Preprint
March
1985
3

Institute of Mathematical Statistics
University of Copenhagen

Søren Asmussen und Helle Johansen

ÜBER EINE STETIGKEITSFRAGE BETREFFEND DAS BEDIENUNGSSYSTEM GI/GI/s

Preprint 1985 No. 3

INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE STATISTIK
UNIVERSITÄT KOPENHAGENS

März 1985

ÜBER EINE STETIGKEITSFRAGE BETREFFEND DAS BEDIENUNGSSYSTEM GI/GI/s

Søren Asmussen und Helle Johansen

Institut für Mathematische Statistik
Universität Kopenhagen

Zusammenfassung Es sei eine Folge von stationären Bedienungssystemen vom Typ GI/GI/s gegeben und es bezeichne $A^{(k)}$ die Pausenzeitverteilung im k-ten System, $B^{(k)}$ die Verteilung der Bedienungszeiten und $W(k)$ die Wartezeit. Sei ferner $A^{(k)} \xrightarrow{w} A^{(0)}$, $B^{(k)} \xrightarrow{w} B^{(0)}$. Als Antwort zu einer von Stoyan (1983) gestellte Frage wird bewiesen, daß $EW(k)^p \to EW(0)^p$ wenn zusätzlich $\int_0^\infty x^{p+1} B^{(k)}(dx) \to \int_0^\infty x^{p+1} B^{(0)}(dx)$ erfüllt ist.

On a robustness problem for the GI/GI/s queue

Summary Consider a system of stable GI/GI/s queues with distributions $A^{(k)}, B^{(k)}$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ of the interarrival time, resp. service time, let $W(k)$ denote the stationary waiting time in the k^{th} system and assume that $A^{(k)} \xrightarrow{w} A^{(0)}$, $B^{(k)} \xrightarrow{w} B^{(0)}$ as $k \to \infty$. As answer to a question posed by Stoyan (1983), it is shown that if in addition $\int_0^\infty x^{p+1} B^{(k)}(dx) \to \int_0^\infty x^{p+1} B^{(0)}(dx)$, then $EW(k)^p \to EW(0)^p$

1. EINLEITUNG

Wir betrachten eine Folge von Bedienungssystemen vom Typ GI/GI/s, die durch die Verteilungen $A^{(k)}, B^{(k)}$ der Pausenzeiten, bzw. Bedienungszeiten gegeben sind (Für die p-ten Momente wird $\mu_A(p;k)$, $\mu_B(p;k)$ geschrieben). Wenn $\rho^{(k)} = \mu_B(1;k)/s\mu_A(1;k) < 1$, existiert eine stationäre Verteilung der Wartezeit, die wir durch eine Zufallsgröße $W(k)$ vertreten lassen. Eine klassische Frage ist dann die Stetigkeit: Wenn wir ein weiteres Bedienungssystem (mit A, B, $\mu_A(p), \rho, W$ u.s.w. bezeichnet) haben und $A^{(k)} \overset{w}{\to} A$, $B^{(k)} \overset{w}{\to} B$ (schwache Konvergenz), wann konvergieren dann auch Systemkarakteristiken (z.B. Funktionale der stationären Wartezeit)? Folgendes Ergebnis ist in dieser Richtung klassisch (mindestens für $s = 1$; für eine allgemeine Fassung für $s > 1$ siehe [3]):

<u>Satz 1</u> <u>Es sei eine Folge von Bedienungssystemen vom Typ GI/GI/s gegeben.</u> <u>Wenn</u> (mit den Bezeichnungen wie oben) <u>außer</u> $A^{(k)} \overset{w}{\to} A$, $B^{(k)} \overset{w}{\to} B$ <u>auch die Bedingung</u> $\mu_B(1;k) \to \mu_B(1)$ <u>erfüllt ist, dann gilt</u> $W(k) \overset{D}{\to} W$.

[Hier steht $\overset{D}{\to}$ für Verteilungskonvergenz, d.h. schwache Konvergenz der Verteilungen].

Nun sind in vielen Anwendungen die interessanten Charakteristiken nicht die ganze Verteilung, sondern einfachere Grössen wie EW, EW^2 etc. Etwas erstaunlich ist es, daß hier die Stetigkeitsfrage ungeklärt geblieben zu sein scheint und z.B. in [9], S. 182, als offenes Problem angegeben wird. Unser Hauptzweck ist, hier folgendes Ergebnis zu beweisen:

<u>Satz 2</u> <u>Sei</u> $p > 0$, <u>und sei zusätzlich zu den Bedingungen von Satz</u> 1 <u>auch</u> $\mu_B(p+1;k) \to \mu_B(p+1)$ <u>erfüllt. Dann gilt</u> $EW(k)^p \to EW^p$.

Man bemerkt hier, daß die Bedingungen des Satzes den Vermutungen in [9] entsprechen und auch natürlich scheinen, wenn man Satz 1 mit folgendem klassischen Satz vergleicht:

Satz 3 Sei $p > 0$ und $\rho < 1$. Dann ist die Bedingung $\mu_B(p+1) < \infty$ für $EW^p < \infty$ hinreichend. Sie ist auch notwendig wenn $\mu_A(1) < \infty$.

2. BEWEIS VON SATZ 2 UNTER ZUSATZBEDINGUNGEN

Beim Beweis von Satz 2 scheint es natürlich, zunächst den Fall $s=1$ anzugehen. Viele Formeln haben hier eine etwas explizitere Gestalt, und insbesondere bieten sich Irrfahrten als ein nützliches Hilfsmittel an. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsgrößen mit gemeinsamer Verteilung F und bezeichne

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \ldots X_n, \quad M = \max_{0 \leqq n < \infty} S_n .$$

Wir werden (ähnlich wie in der Einleitung) Folgen solcher Irrfahrten betrachten und verwenden also hier und im folgenden ohne weitere Erklärung Bezeichnungen wie $F^{(k)}$, $X_n(k)$, $M(k)$ etc.

Im GI/GI/1 Fall mit

$$F(x) = \int_0^\infty B(x+y)A(dy)$$

ist bekannt, daß $W \overset{D}{=} M$, und es ist leicht einzusehen, daß sich Satz 2 an folgenden Satz zurückführen lässt:

<u>Satz 2A</u> <u>Es sei eine Folge von Irrfahrten gegeben und ein</u> $p > 0$. <u>Wenn</u> (mit den Bezeichnungen wie oben) <u>außer</u> $EX = \int_{-\infty}^{\infty} xF(dx) < 0$ <u>und</u> $F^{(k)} \overset{w}{\to} F$ <u>auch die Bedingung</u> $\int_0^\infty x^{p+1}F^{(k)}(dx) \to \int_0^\infty x^{p+1}F(dx)$ <u>erfüllt ist, dann gilt</u> $EM(k)^p \to EM^p$.

Eine Hauptfrage beim Beweis von Satz 2A ist die Wahl des Formelapparates. Möglichkeiten sind die Methode in [6] (mittels welcher wir einen einfachen Beweis für ganzzahlige p geben könnten) oder, wie in [9], die Spitzersche Identität. Wir werden aber von Leitergrößen ausgehen, in einer Weise, die unabhängig in [1] und [11] zum Beweis von Satz 3 verwendet wurde (siehe dazu insbesondere (1) und (3) unten). Es bezeichne

$$\tau_+ = \inf\{n \geqq 1 : S_n > 0\}, \quad G_+(x) = P(S_{\tau_+} \leqq x;\ \tau_+ < \infty)$$

$$\tau_- = \inf\{n \geqq 1 : S_n \leqq 0\}, \quad G_-(x) = P(S_{\tau_-} \leqq x)$$

(Man beachte hier, daß wegen $EX < 0$

$$\| G_+ \| = \int_0^\infty G_+(dx) = P(\tau_+ < \infty) < 1$$

während im Gegenteil $\| G_- \| = 1$). Weitere Größen , die gebraucht werden, sind die Erneuerungsmaße

$$U_+ = \sum_{n=0}^\infty G_+^{*n} \qquad (\| U_+ \| = (1 - \| G_+ \|)^{-1}), \qquad U_- = \sum_{n=0}^\infty G_-^{*n}.$$

Dann gilt

$$EM^p = (1 - \| G_+ \|) \int_0^\infty x^p U_+(dx) = (1 - \| G_+ \|) \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty x^p G_+^{*n}(dx), \tag{1}$$

vgl. [4], Formel (5.3), S. 409, und entsprechende Formeln für die $EM(k)^p$ durch $G_+^{(k)}$ ausgedrückt.

Unmittelbar ist die Formel (1) dadurch wenig ermutigend, daß G_+ und $\| G_+ \|$ im allgemeinen nicht stetig von F abhängen. [Für ein einfaches Beispiel braucht man nur $X(k) = 1 + 1/k$ mit Wahrscheinlichkeit $1/3$, $= -1$ m.W. $2/3$ zu setzen. Dann hat $F = \lim F^{(k)}$ den Träger $\{-1,1\}$ und folglich G_+ den Träger $\{1\}$. Aber $G_+^{(k)}(1/k) \geqq 2/9$ schließt dann Stetigkeit aus]. Dieses Problem werden wir später umgehen, so daß die Hauptarbeit darin besteht, folgenden Satz zu beweisen:

<u>Satz 2B</u> <u>Seien außer den Annahmen von Satz 2A auch</u> F <u>und alle</u> $F^{(k)}$ <u>stetig,</u> <u>und gebe es ein</u> $c > 0$ <u>so daß</u> F <u>und alle</u> $F^{(k)}$ <u>den Träger</u> $[-c,\infty)$ <u>haben</u>. <u>Dann gilt</u> $EM(k)^p \to EM^p$.

Für den Beweis brauchen wir eine Folge von Lemmata, für welche immer die Voraussetzungen von Satz 2B angenommen werden. Konvergenz von unnormierten Massen bedeutet hier vage Konvergenz, d.h. Konvergenz von Integralen stetiger Funktionen mit kompaktem Träger (Für Wahrscheinlichkeitsmaße ist dies dasselbe wie schwache Konvergenz).

<u>Lemma 1</u> (a) $G_-^{(k)} \to G_-$; (b) $\| G_+^{(k)} \| \to \| G_+ \|$; (c) $G_+^{(k)} \to G_+$.

<u>Beweis</u> (a) Wegen einer bekannten Beziehung zwischen schwacher Konvergenz und Konvergenz f.ü. ([8]) kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß für jedes n $S_n(k) \underset{k\to\infty}{\to} S_n$ f.ü. gilt. Wegen $P(S_n = 0) = 0$, gilt dann auch f.ü., daß die Mengen

$$\{\tau_-(k) = n\} = \{S_1(k) < 0, \dots, S_{n-1}(k) < 0, S_n(k) > 0\},$$

$$\{\tau_- = n\} = \{S_1 < 0, \dots, S_{n-1} < 0, S_n > 0\}$$

für genügend große k übereinstimmen. Daraus folgt unmittelbar $S_{\tau_-(k)}(k) \to S_{\tau_-}$ f.ü. und $G_-^{(k)} \to G_-$

(b) Mittels [4], Formel (2.5), S. 396, und der Wald'schen Identität erhalten wir

$$(2) \qquad 1 - \| G_+ \| = \frac{1}{E\tau_-} = \frac{EX}{ES_{\tau_-}} .$$

Sei $X^- = \max\{-X, 0\}$. Dann sichert $X \geqq -c$, $X(k) \geqq -c$, daß $EX(k)^- \to EX^-$. Die Annahme über die Momente liefert auch $EX(k)^+ \to EX^+$ und somit $EX(k) \to EX$. Entsprechend sichert $S_{\tau_-} \geqq -c$, daß $ES_{\tau_-(k)}(k) \to ES_{\tau_-}$, und $\|G_+^{(k)}\| \to \|G_+\|$ folgt dann aus (2).

(c) Unter Anwendung von (b) kann dieses ähnlich wie (a) bewiesen werden (oder durch Wiener-Hopf Faktorisierung).

<u>Lemma 2</u> (a) <u>Für geeignete Konstanten</u> $c_1, c_2 > 0$ <u>gilt für alle</u> $x < 0$ <u>und alle</u> k, <u>daß</u> $U_-^{(k)}(x) \leqq -c_1 x + c_2$; (b) $U_-^{(k)} \to U_-$.

<u>Beweis</u> (a) Seien α_k^1, α_k^2 die zwei ersten Momente von $G_-^{(k)}$. Dann gilt für $x < 0$ ([7])

$$U_-^{(k)}(x) \leqq -x/\alpha_k^1 + \alpha_k^2/2\,\alpha_k^1 .$$

Man benutze dann, daß $\alpha_k^2 \leqq c^2$ und daß wie in Lemma 1 $\alpha_k^1 \to \alpha^1 < 0$.

(b) Weil U_- auf $(-\infty, 0)$ stetig ist, muß gezeigt werden, daß $U_-^{(k)}(x) \to U_-(x)$ für $x < 0$. Schreiben wir

$$U_- = H_N + K_N = \sum_{n=0}^{N-1} G_-^{*n} + \sum_{n=N}^{\infty} G_-^{*n} = H_N + G_-^{*N} * U_-$$

und entsprechend für $U_-^{(k)}$. Nach Lemma 1 (a) gilt $H_N^{(k)}(x) \to H_N(x)$. Ferner kann N so gewählt werden, daß $G_-^{*N}(x) < \varepsilon$. Nach (a) ergibt sich dann

$$\limsup_{k\to\infty} K_N^{(k)}(x) \leqq G_-^{*N}(x)(-c_1 x + c_2) < \varepsilon(-c_1 x + c_2)$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt (b).

<u>Lemma 3</u> $\int_0^\infty x^p G_+^{(k)}(dx) \to \int_0^\infty x^p G_+(dx)$.

<u>Beweis</u> Für $x > 0$ gilt nach [4] (Formel (3.6a), S. 399, mit vertauschten auf- und absteigenden Leitergrößen, was im stetigen Fall trivial ist), daß $U_- * F(dx) = G_+(dx)$ und daher

$$\int_0^\infty x^p G_+^{(k)}(dx) = \int_0^\infty x^p U_-^{(k)} * F^{(k)}(dx). \tag{3}$$

Nach partieller Integration schreibt sich (3) als

$$\int_0^\infty f_k(x) F^{(k)}(dx), \text{ wobei } f_k(x) = p \int_0^x y^{p-1} U_-^{(k)}(y-x)\,dy.$$

Mit entsprechend definiertem f muß also gezeigt werden, daß $\int f_k dF^{(k)} \to \int f dF$. Gemäß Lemma 2(a),(b) und majorisierter Konvergenz hat man unmittelbar $f_k(x) \to f(x)$ für jedes $x > 0$. Ferner liefern Lemma 2(a) und einfache Rechnungen $f_k(x) \leqq (c_3 + c_4 x^{p+1})$. Da unsere Momentannahme mit der gleichmäßigen Integrierbarkeit der Menge $\{(X(k)^+)^p\}$ äquivalent ist, können wir ein T so wählen, daß

$$\int_T^\infty f_k(x) F^{(k)}(dx) < \varepsilon \quad \text{für alle } k, \quad \int_T^\infty f(x) F(dx) < \varepsilon.$$

Da offensichtlich $\int_0^T f_k dF^{(k)} \to \int_0^T f dF$ (z.B. [2], Th.5.5), ist das Lemma bewiesen.

<u>Lemma 4</u> <u>Seien</u> $Y(n,k)$ <u>nicht-negative Zufallsgrössen so dass</u> $\{Y(n,k)^p\}$ <u>für jedes feste</u> n <u>gleichmäßig integrierbar (g.i.) ist, und bezeichne</u> $T(n,k) = Y(1,k) + \ldots + Y(n,k)$. <u>Dann ist auch für jedes feste n</u> $\{T(n,k)^p\}$ <u>g.i.</u>

Dies Lemma kann mit Standardmethoden bewießen werden.

<u>Beweis von Satz 2B.</u> Seien in Lemma 4 für jedes k die $Y(n,k)$ unabhängig und mit der Verteilung $G_+^{(k)}/\|G_+^{(k)}\|$. Dann schreibt sich (1) als

$$EM(k)^p = (1 - \|G_+^{(k)}\|) \sum_{n=0}^{\infty} \|G_+^{(k)}\|^n ET(n,k)^p. \tag{4}$$

Mit $Y(n)$, $T(n)$ entsprechend definiert, gilt nach Lemma 3 und Lemma 1(b) $ET(1,k)^p \to ET(1)^p$. Aus Lemma 4 und Stetigkeitseigenschaften der Faltung folgt dann auch $ET(n,k)^p \to ET(n)^p$ für $n > 1$. Es gibt ferner ein $\beta < \infty$ mit $ET(1,k)^p \leqq \beta$ für alle k, und die Minkowskische Ungleichung liefert dann $ET(n,k)^p \leqq n^p \beta$. Man wende nun majorisierte Konvergenz in (4) an und erhalte

$$EM(k)^p \to (1 - \|G_+\|) \sum_{n=0}^{\infty} \|G_+\|^p ET(n)^p = EM^p .$$

3. BEWEISE FÜR DIE SÄTZE 2A UND 2

Wir werden ein Beschränkungsverfahren verwenden und brauchen dazu das folgende einfache Lemma, das unmittelbar von der (unter schwacher Konvergenz) bekannten Äquivalenz der gleichmäßigen Integrierbarkeit und Konvergenz des Erwartungswerts geliefert wird.

Lemma 5 Seien $0 \leqq Z(k) \leqq \tilde{Z}(k)$ und $0 \leqq Z \leqq \tilde{Z}$ Zufallsgrößen, so daß $Z(k) \xrightarrow{D} Z$, $\tilde{Z}(k) \xrightarrow{D} \tilde{Z}$. Wenn $E\tilde{Z}(k) \to E\tilde{Z}$, gilt dann auch $EZ(k) \to EZ$.

Beweis für Satz 2A Wir wenden Lemma 5 mit $Z(k) = M(k)^p$, $Z = M^p$ an, womit die Annahme $Z(k) \xrightarrow{D} Z$ nach Satz 1 erfüllt ist. Seien nun für jedes feste k $U_1(k)$, $U_2(k), \ldots$ unabhängige Zufallsgrößen, die im Interval $(0,\varepsilon)$ gleichverteilt sind, und sei

$$\tilde{X}_n(k) = \max\{X_n(k), -c\} + U_n(k),$$

wobei (mit entsprechend definiertem $\tilde{X}_n$) $\varepsilon, c > 0$ hier mit $E\tilde{X}_n = \max\{X_n, -c\} + \varepsilon/2 < 0$ und $P(X_n = -c) = 0$ gewählt werden müssen. Es ist dann leicht nachzuprüfen, daß diese modifizierte Irrfahrten alle Bedingungen von Satz 2B erfüllen, so daß $E\tilde{Z}(k) \to E\tilde{Z}$ und $\tilde{Z}(k) \xrightarrow{D} Z(k)$. Aber offensichtlich wird $\tilde{Z}(k) \geqq Z(k)$ von $\tilde{X}_n(k) \geqq X_n(k)$ geliefert, und die Folgerung $EZ(k) \to EZ$ von Lemma 5 ist dann die Behauptung des Satzes 2B.

Bevor wir den Beweis für Satz 2 (d.h. den Fall $s > 1$) angehen, bemerken wir, daß weitere Stetigkeitseigenschaften des Bedienungssystems GI/GI/1 sich leicht aus den Sätzen 1 und 2A herleiten lassen. Betrachten wir z.B. die virtuelle Wartezeiten $V(k), V$ im stationären Fall (der Fall der Schlangenlänge ist ganz ähnlich):

Korollar Es gelte zusätzlich zu den Annahmen von Satz 2 (mit $s = 1$), daß $A^{(k)}, A$ nicht gitterförmig seien und daß $\mu_A(1;k) \to \mu_A(1)$. Dann gilt $V(k) \xrightarrow{D} V$, $EV(k)^p \to EV^p$.

Beweis Es ist bekannt ([5]), daß $V \stackrel{D}{=} [W + U - T]^+$, wo W, U, T unabhängig sind,

U die Verteilung B hat und T die Dichte $(1-A(t))/\mu_A(1)$. Hieraus folgt das Korollar leicht (das Verhalten der höheren Momente der Pausenzeitverteilungen ist wegen des Minuszeichens ohne Bedeutung).

<u>Beweis für Satz 2</u> $(s>1)$: Unter Anwendung von [10] folgt wie in [3], daß im Sinn der stochastischen Ordnung

$$W \leqq \tilde{W} = \sum_{i=1}^{s} W^{(i)}, \quad W(k) \leqq \tilde{W}(k) = \sum_{i=1}^{s} W^{(i)}(k)$$

wo $W^{(1)},\dots,W^{(s)}$ die stationären Wartezeiten in s (abhängigen) GI/GI/1-Systemen mit Pausenzeitverteilung A^{*s} und Bedienungszeitverteilung B sind (und entsprechend für die $W^{(i)}(k)$). Gemäss Satz 2 mit $s=1$ gilt dann $EW^{(i)}(k)^p \to EW^{(i)p}$, $W^{(i)}(k) \xrightarrow{\mathcal{D}} W^{(i)}$. Somit ist $\{W^{(i)}(k)^p\}$ g.I., daher auch $\{W(k)^p\}$ (Lemma 4) und $\{W(k)^p\}$ (wegen $W(k) \leqq \tilde{W}(k)$). Also gilt $EW(k)^p \to EW^p$.

Für ihre Bemerkungen zur Darstellung des Manuskriptes sind wir den Gutachtern recht herzlich dankbar.

Literaturverzeichnis

[1] Asmussen, S., Applied Probability and Queueing. John Wiley and Sons, Chichester 1986.

[2] Billingsley, P., Convergence of Probability Measures. John Wiley and Sons, New York 1968.

[3] Brandt, A., Lisek, B., On the continuity of G/GI/m queues. Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statist. 12 (1981), 577-587.

[4] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications 2 (2. Aufl.). John Wiley and Sons, New York 1971.

[5] Harrison, J.M., Lemoine, A.J., On the virtual and actual waiting time of a GI/G/1 queue. J. Appl. Probab. 13 (1976), 833-836.

[6] Lemoine, A.J., On random walks and stable GI/G/1 queues. Math. Opns. Res. 1 (1976), 159-164.

[7] Lorden, G., On excess over the boundary. Ann. Math. Statist. 41 (1970), 520-527.

[8] Skorohod, A.V., Limit theorems for stochastic processes. Theor. Probab. Appl. 1 (1956), 261-290.

[9] Stoyan, D., Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models (D.J. Daley, Hrsg.). John Wiley and Sons, Chichester 1983.

[10] Фосс,. (1980). Об аппроксимации многоканальных систем обслуживания. *Сиб. мат. журнал* **XXI**, 6, 132–140.

[11] Wolff, R., Conditions for finite ladder height and delay moments. Opns. Res. 32 (1984), 909-916.

PREPRINTS 1984

COPIES OF PREPRINTS ARE OBTAINABLE FROM THE AUTHOR OR FROM THE INSTITUTE OF MATHEMATICAL STATISTICS, UNIVERSITETSPARKEN 5, 2100 COPENHAGEN Ø, DENMARK.

No. 1 Rootzén, Holger and Sternby, Jan: Consistency in Least Squares Estimation: A Bayesian Approach.

No. 2 Hougaard, Philip: Parameter Transformations in Multiparameter Nonlinear Regression Models.

No. 3 Jacobsen, Martin: Cooptional Times and Invariant Measures for Transient Markov Chains.

No. 4 Rootzén, Holger: Attainable Rates of Convergence of Maxima.

No. 5 Asmussen, Søren and Thorisson, Hermann: Boundary Problems and Large Deviation Results for Queue Length Processes.

No. 6 Björnsson, Ottó J.: Notes on Right-(Left-)Continuous Functions.

No. 7 Hougaard, Philip: Frailty Models Derived from the Stable Distributions.

No. 8 Hougaard, Philip: Saddlepoint Approximations for Curved Exponential Families.

PREPRINTS 1985

COPIES OF PREPRINTS ARE OBTAINABLE FROM THE AUTHOR OR FROM THE INSTITUTE OF MATHEMATICAL STATISTICS, UNIVERSITETSPARKEN 5, 2100 COPENHAGEN Ø, DENMARK.

No. 1 Cohn, Harry: Almost Sure Convergence for Stochastically Monotone Temporally Homogeneous Markov Processes and Applications.

No. 2 Rootzén, Holger: Maxima and Exceedances of Stationary Markov Chains.

No. 3 Asmussen, Søren und Johansen, Helle: Über eine Stetigkeitsfrage betreffend das Bedienungssystem GI/GI/s.