Matematik Y

Introduktion
til
abstrakt matematik

Flemming Topsøe

2002

Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
ISBN 87-91180-11-2

Indhold

Forord

Nærværende hæfte består af en samling til dels uafhængige afsnit udarbejdet gennem de sidste ca. fem år i forbindelse med kurserne Mat X og Mat Y. Materialet er uhomogent og formen til tider uhøjtidelig, snakkende. Notesættet skal tjene flere formål:

- at give den absolut nødvendige ballast i matematisk logik og mængdelære
- at levere studiemateriale til kurset Mat Y
- at tilbyde videre studiemateriale i matematikkens grundlag, der kan følge den studerende gennem hele matematikstudiet
- at pege på spændende filosofisk/erkendelsesteoretiske problemer, der kan inspirere til videre fordybelse

Her nogle kommentarer til hvert af disse mål:

Første mål: Det nødvendige stof dækkes af afsnittene BML samt NM. Emnekredsen er de sidste år blevet fremdraget under introduktionsugen på Matematik 1. Vi har desuden ofte anbefalet et ældre notesæt til selvstudium. Et islæt af matematisk logik og naiv mængdelære kunne godt fortjene en mere rodfæstet plads i studieplanen. Der vil være flere muligheder for egnet studiemateriale, altså også dele af nærværende hæfte.

Andet mål: På Mat Y suppleres de ovenfor nævnte dele med omtale af uendelighedsbegrebet (UES og evt. KT), aksiomatisk mængdelære (kun de indledende dele af AM) og så et afsnit (MT) om matematisk teoridannelse, som jeg håber vil være en hjælp for den studerende som forberedelse til de mange teorier, man senere bliver præsenteret for. Det er også hensigten med MT-afsnittet at opdrage (indoktrinere?) den studerende til at se, hvad der er "god smag" i matematikken.

Tredie mål: Alle matematikstuderende møder gennem hele studiet betragtninger, der inddrager matematikkens grundlag. Her er det rart at have en reference, hvor man kan slå dette eller hint op. Det er lidt prætentiøst at hævde, at nærværende hæfte opfylder dette behov. Måske burde der suppleres med mere omkring matematisk logik. Men jeg vover alligevel at hævde, at med dette hæfte er man godt rustet, hvis man blot er interesseret i at *anvende* grundlagstingene, og ikke har ambitioner om at studere grundlaget i sin egen ret.

Fjerde mål: Især logik-afsnittet og flere af betragtningerne i den aksiomatiske mængdelære kan medvirke til at vække interessen for matematikkens grundlag (Gödel og alt det der!). Det er min erfaring, at denne interesse i vid udstrækning allerede er tilstede ved studiets start—og at vi under studiet, ak det er vist ikke urigtigt, snarere medvirker til at kvæle denne interesse, end til at fremme den. Kan dette notesæt medvirke til at fastholde og udvide en interesse for den smukke matematik, er det fornemmeste mål med disse noter indfriet.

Jeg bør måske undskylde, at jeg har medtaget nok så vidtløftige dele (noget af AM og UD). Det kan give antydninger af muligheder for senere fordybelse, og I bør ikke blive forskrækkede, hvis I finder det uforståeligt ved første øjekast. Her er faktisk stof til 2.dels kurser.

I den anden ende af spektret er medtaget ganske let-tilgængelige sager. Afsnittet JBHH er fra en samling "appetitvækkere" udgivet af Matematiklærerforeningen og gengives her med Foreningens tilladelse. Og MNNM er et matematik-filosofisk essay fra vort eget fakultets blad, *Naturligvis*. Også UES er rimeligt elementært og oprindeligt skrevet til interesserede gymnasieelever.

Min tidligere kollega, lektor Anton Jensen, ekspert i matematikkens grundlag, samt endnu en ekspert på området, professor Mai Gehrke, der i 1996/97 var gæst på instituttet, har givet råd vedrørende BML og AM. Jeg har også lyttet til mange studerende, hvilket—det håber jeg da—har medvirket til at centrale dele af noterne præsenteres på et rimeligt niveau.

Det er en fornøjelse at udgive notesættet på HCØ-tryk fremfor at uddele (til dels håndskrevne) noter. Det vil sikkert også øge jeres nydelse. Men I bør naturligvis ikke lade jer blænde af den ydre form. Notesættet er ikke i endegyldig form og kan til dels ses som et debatoplæg.

I kan takke jeres medstuderende, stud. scient. Jan Caesar, for at noterne (afsnittene NM, KT, MT, AM, UD) er transformeret fra min håndskrift til LaTeX format. JC har uopfordret gjort dette og uegennyttigt stillet TeX-filerne til Matematisk Afdeling's disposition. Tak! Finpudsning m.v. er som sædvanlig foretaget her på Afdelingen, hvor sekretær Lene Körner har ydet en stor indsats, ikke mindst set i lyset af min lidt rodede/stressende arbejdsform.

Flemming Topsøe
København, 9. februar 1998

Ved revisionen er der foretaget en del rettelser og omlægninger af teksten. De tekniske forbedringer skyldes igen Jan Caesar, nu cand. scient.

Flemming Topsøe
København, januar 2001

Endnu en revision er foretaget. Kun få rettelser og justeringer er gennemført. Egentlig ville jeg godt have lavet en mere gennemgribende revision af BML og NM. Specielt tænkes på en grundigere behandling via eksempler af ræsonnementer, hvori kvantorerne indgår. Som det er nu, har mange endog meget svært ved at se meningen med de prædikatlogiske slutningsregler (US, UG, ES og EG). Hvis den påtænkte studiereform levner plads for genbrug af nærværende notesæt, kan en revision som antydet komme på tale.

Flemming Topsøe
København, november 2001

Brudstykker af den matematiske logik

1 Introduktion

Al matematik består af tre dele. De to første er

- Et regelsæt for vor ræsonneren.
- Noget at ræsonnere om.

Første del dækkes af den matematiske logik, anden del af mængdelæren. Mængdelæren indeholder de objekter, matematikken beskæftiger sig med.

I streng formel forstand skal ethvert matematisk objekt kunne henføres til mængdelæren og ethvert matematisk udsagn (enhver "sætning", ethvert "teorem", hvilken sprogbrug I nu foretrækker) skal kunne udledes ved brug af logikkens regler ud fra særlig simple udsagn, de såkaldte mængdeteoretiske aksiomer.

Logikken og mængdelæren udgør matematikkens grundlag. De er vores spilleregler. Kender vi dem, har vi i princippet mulighed for at beherske al matematik. Historisk set, har der ikke været en skelnen mellem logikken og mængdelæren. Denne skelnen er af nyere dato, den stammer fra vort århundrede. Den har ført til en klargøring af matematikken og til helt ny erkendelse af matematisk-filosofisk karakter.

Jeg nævnte, at der er tre bestanddele i matematik. Ifølge ovenstående skulle de to første, logikken og mængdelæren, være nok. Men der mangler noget, ja faktisk det vigtigste, nemlig

- resten: hensigten, fortolkningerne, drømmene, visionerne, skønheden!

Det var med hensigten matematikken begyndte. Tal og regning hermed til at holde hus med ting og sager, geometriske objekter og manipulationer hermed til at beskrive og forstå form (flodkulturerne and all that!).

Der ligger nok mere hensigt og fortolkning og mindre skønhed bag ovenstående antydninger. Og det humanistiske islæt i beskrivelsen ødelægges helt, når vi betænker den magt der har ligget i—og stadig ligger i—at beherske videnskaberne, her altså specielt matematikken.

Æstetikken, skønheden, er gradvist vokset frem i forbindelse med mere reflektive overvejelser, der har ført til en udstrakt abstraktion. Og hvad er det så, der er så smukt ved matematikken? Opdagelsen af tankens kraft, opdagelsen af fællestræk, muligheden for at sammenfatte, friheden til at modellere virkeligheden, det overraskende ræsonnement, den smukke sætning, ... Jeg skal spare jer for mere end disse overskrifter på mulige svar. Men sikkert er det, at det æstetiske element for mange—og ikke blot for os "professionelle" lærere, men, ja det håber jeg da, også for jer studerende—er det vigtigste incitament til at give sig matematikken i vold. Hos enkelte er der ligefrem tale om en besættelse ... det er selvfølgelig for meget af det gode, der er jo, heldigvis, andet end matematik i tilværelsen.

Lad mig igen understrege betydningen af “det tredje element” (hensigten ...). Det siger sig selv, at dette spiller ind når man arbejder med modeller af virkeligheden (anvendt matematik). Men, noget overraskende, gælder det enhver selv nok så abstrakt arbejdende matematiker. Nok har vi det formelle apparat at holde os til, altså de to første elementer, logikken og mængdelæren. Men det viser sig at være praktisk umuligt at arbejde strengt formelt uden at hensigten og skønheden går tabt. Situationen er endda helt absurd, idet kun de aller færreste matematikere kender matematikkens grundlag som det er indeholdt i logikken og mængdelæren.

Senere—i kapitlet om aksiomatisk mængdelære—skal jeg nærmere komme ind på grundene hertil.

Nok er det kun de færreste, der kender matematikkens grundlag, men alle matematikere kender *til det*! Det er nødvendigt for at opnå sikkerhed i ræsonnementer og teoridannelse, og desuden for at erkende matematikkens muligheder. Derfor skal I også—her på Mat Y—have et indblik i matematikkens grundlag. Herved får I en ballast, der vil være en stor styrke på jeres videre vej ind i matematikkens verden. Lad mig vide, hvis jeg tager fejl!

Endelig nogle ord om niveau og sprog. Niveauet vil være noget overfladisk og ufuldstændigt, men med enkelte videregående afsnit og opgaver. Sproget er naturligvis dansk, men når jeg fremdrager det, er det faktisk en lidt anden dimension, jeg har i tankerne. Netop når man ser på matematikkens grundlag, bør man i princippet nøje redegøre for sprogbrug (behov for et formelt sprog). Dette er dog at gå for vidt. Ikke alene skal vi anvende dansk, vi skal anvende pæredansk og gå ud fra en velvillig indstilling som den kommer til udtryk i følgende

Tese. Vi kan tale og forstå hinanden

—Næppe rigtigt, men uden denne tese risikerer vi at blive suget ned i et bundløst, selvbeskuende filosofisk morads, og det vil næppe fremme tilegnelsen af de idéer og den visdom der ligger gemt i matematikkens grundlag.

2 Kontekst

Logikken giver et regelsæt for vor tænkning, som er uafhængig af *konteksten* (kontekst = sammenhæng, omstændigheder). En *kontekst* består af et *univers*, hvortil er knyttet *funktioner, relationer* og *udsagn*.

Selve *universet* indeholder *objekterne* (genstandene), vi interesserer os for.

Funktionerne kan være af flere typer. De simpleste er de 0-*ære* funktioner, funktioner, der ikke kræver noget argument. Med andre ord, dette er *konstanterne*. De 1-*ære* funktioner er funktioner, der til hvert objekt knytter et andet objekt. De 2-*ære*, eller *binære*, funktioner knytter objekter til givne par af objekter. Og så fremdeles for 3-ære, 4-ære, ... , n-ære funktioner.

Relationerne falder også i typer efter “æritet”. De simpleste og vigtigste er her de 2-*ære*, normalt kaldet de *binære* relationer. Disse knytter en af sanhedsværdierne “sand” og “falsk” til et givet par af objekter. Enhver kontekst har tilknyttet en bestemt relation, kaldet *identiteten* og betegnet “=”. Det er en binær relation, der “opfører sig som lighed bør gøre” (præciseres ikke i alle detaljer, men belyses ved eksempler).

Udsagnene knyttet til en kontekst falder dels i *atomiske* udsagn, dels i *sammensatte* udsagn. De atomiske udsagn udnytter de funktioner og relationer, der er knyttet til konteksten. Da enhver kontekst er udstyret med identitet, har vi altid atomiske udsagn så som "$x = y$" og "$a = b$". Udsagnet "$x = y$" er sandt, hvis sandhedsværdien, som relationen "identitet" knytter til parret (x, y) af objekter netop er "sand". Ellers er udsagnet falsk. Vi kan nu nævne nogle af de krav, der stilles til identiteten. Det er følgende tre krav: *Refleksivitet*: "$x = x$" skal være sand for alle objekter x, *symmetri:* er "$x = y$" sand, da også "$y = x$" og *transitivitet:* er "$x = y$" og "$y = z$" sande, da også "$x = z$".

Indeholder konteksten også en 1-ær funktion f, er der flere muligheder for at danne atomiske udsagn, nemlig "$y = f(x)$", "$f(x_1) = f(x_2)$" og varianter heraf ("$b = f(a)$" osv.). Identitetsrelationen antages at være så "stærk", at vi ikke kommer i strid med almindelig sund fornuft, med det, der er vores hensigt med denne relation ("identitetsrelationens idé"). Hermed mener vi blot, at vi af sandheden af udsagnene "$y = f(x)$" og "$z = y$" kan slutte sandheden af udsagnet "$z = f(x)$". Der skal altså gælde et *substitutionsprincip* for identitetsrelationen (ovenfor blev y substitueret med z). Når konteksten indeholder flere relationer og funktioner, udvides substitutionsprincippet for identitetsrelationen tilsvarende.

De *sammensatte* udsagn er udsagn, der dannes ud fra atomiske udsagn eller ud fra tidligere fundne sammensatte udsagn efter særlige regler, der behandles udførligt i det følgende.

Udsagnene kan også opdeles efter *aksiomer* og andre udsagn. *Aksiomerne* er særlige (sammensatte) udsagn knyttet til konteksten som på forhånd er erklæret at være sande.

Eksempel 2.1. Konteksten de naturlige tal med 0. Her er universet mængden $\mathbb{N}_0$ af naturlige tal inklusiv 0. Desuden hører der til konteksten konstanten 0, de to binære funktioner "+" og "·" samt, som sædvanlig, identiteten "=" og derudover endnu en binær relation, "$\leq$". Af udsagn har vi "$2+2 = 4$" osv. Det er konkrete udsagn, der ikke kræver videre specifikation for at fastslå sandhedsværdien. Mere generelle *åbne* udsagn (også kaldet *prædikater,* se senere) er udsagn af typen "$a = b + c$", "$a \leq 2 + x$" osv. Disse udsagn kræver en specifikation (ovenfor af a, b, c og x) før sandhedsværdierne kan fastlægges. I denne kategori findes også mere komplicerede udsagn som f.eks.følgende: "for alle x gælder $2+x \geq a$" eller, udtrykt ved brug af *alkvantoren* (se også senere): "$\forall x : 2 + x \geq a$". Læg mærke til at sandhedsværdien af det sidst nævnte udsagn kun afhænger af værdien af a (ikke af nogen specifikation af x).

Blandt aksiomerne, der hører til denne kontekst nævnes følgende to "$\forall x : x + 0 = x$" og "$\forall x \forall y : x + y = y + x$". Der er mange flere, men vi skal ikke komme ind herpå. □

Eksempel 2.2. Konteksten alle endelig dimensionale vektorrum over $\mathbb{R}$. Her interesserer vi os for to slags objekter, dels de enkelte vektorrum, der kan komme på tale (f.eks. $\mathbb{R}^3$, vektorrumet af polynomier af grad højst 5 med reelle koefficienter osv.), dels elementerne (vektorerne) i disse vektorrum (f.eks. vektoren $(5, 0, -\sqrt{2})$ i $\mathbb{R}^3$ eller polynomiet $x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x^5$ i vektorrummet af polynomier af grad højst 5). Universet indeholder så vektorrum og vektorer.

Betegner vi vektorrum med store latinske bogstaver og vektorer med fed skrift, kan vi f.eks. se på følgende atomiske udsagn: "$\mathbf{a} = \mathbf{b}$", "$\mathbf{a} \in X$", "$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$" osv. samt følgende mere komplicerede udsagn: "for vektorrummet X findes en basis med 3 elementer", "Y er et underrum af X", "underrummene Y og Z i X danner direkte sum" osv. Aksiomerne er dem, vi kender fra den lineære algebra, f.eks. "er X et vektorrum, findes en vektor $\mathbf{0} \in X$ så $\mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}$ for alle $\mathbf{a} \in X$" osv. □

Eksempel 2.3. Konteksten reelle funktioner af en reel variabel. Universet består så af disse funktioner og udvalget af (atomiske) udsagn og aksiomer afspejler vor hensigt, der typisk består i at vi vil kunne tale om funktionsværdier, vi vil kunne regne med funktioner og vi vil kunne sammenligne funktioner. □

Eksempel 2.4. Konteksten af dagligdags objekter og idéer samt udsagn herom. Mens de allerede nævnte eksempler fra matematikkens verden kunne defineres ganske præcist (hvilket vi dog ikke gjorde), er det ikke klart, hvordan dette skulle gøres for denne kontekst. Universet kunne indeholde objekter som "hus", "dreng", "pige", "regn", "kultur" osv. og udsagn kunne være "det regner", "huset har 4 vinduer", "Morlille er en sten" osv. Vi skal ikke søge at præcisere denne kontekst nærmere. Den er medtaget for at understrege, at en kontekst ikke behøver være af matematisk natur. □

Måske kan følgende billede være til hjælp: En kontekst kan vi forestille os som en æske, universet, der indeholder alle kontekstens objekter. Æsken har på indersiden af låget påskrevet en masse tekst, der dels fortæller os om nogle muligheder, vi har (svarende til f.eks. muligheden for at undersøge lighed, størrelsesforhold, sammensætning v.hj. af regneregler osv. osv.), dels fremhæver visse egenskaber, aksiomerne, som fabrikanten højt og helligt sværger på er opfyldt.

Tit er det væsentligste ved en kontekst de tilhørende objekter, mens de tilhørende udsagn, specielt aksiomerne er underforstået. Derfor vil vi ofte tillade os at tale om universet, selvom vi egentlig har hele konteksten i tankerne.

Den fremstilling, vi har lagt op til med fokusering på begrebet kontekst, sigter mod det *semantiske,* det betydningsbærende. Objekterne i en bestemt kontekst har en betydning for os og de relationer, der findes mellem objekterne i en kontekst fortæller os om fortolkningerne. Man kan godt have en anden kontekst med objekter og relationer af helt samme type, men for hvilken der gælder lidt andre udsagn. Eksempelvis kunne vi se på "en gruppe". Én kontekst af denne type kunne være en kommutativ gruppe, en anden kunne dreje sig om en ikke-kommutativ gruppe.

Ovenstående kan nok virke noget uklart. I mere udførlige fremstillinger skelner man mellem "typer" (f.eks.typen af grupper) og realisationer heraf, som man så foretrækker at kalde "modeller" (frem for vores mere neutrale betegnelse "kontekst").

Det semantiske lag indeholder nogle dybe filosofiske problemer: Er der nogen forbindelse mellem det matematiske eksistensbegreb og virkelighedens eksistensbegreb? I øvrigt, hvad er "virkeligheden"? Og hvad dækker det matematiske sandhedsbegreb over? Min egen indstilling til sådanne problemer er dyb fascination, men samtidig vægrer jeg mig ved at fortabe mig heri, da det let kan blive for navlebeskuende og lidet konstruktivt.

Det sproglige—og nu tænker jeg på vort sædvanlige sprog, dagligsproget, brugssproget—spiller ind ved diskussion af kontekst og fortolkninger. Det er jo dette værktøj vi bruger, når vi opstiller modeller, ræsonnerer derover og fortæller om hensigten. Og vi må bygge på, at dette "metasprog" (vort daglige sprog, som jo ligger uden for den matematiske teoridannelse og det matematisk logiske sprog, men hvorigennem vi betragter og diskuterer disse sager) forstås i kommunikationen mennesker imellem. Lad mig derfor igen minde om tesen fra indledningen: *Vi kan tale og forstå hinanden!*

3 Konkrete udsagn, udsagnsvariable

Det kan virke mærkeligt, at vi brugte megen tid på at diskutere kontekst, når vi netop slog fast, at *logik er kontekstuafhængig.* Jeg tror nu, det vil lette forståelsen en hel del.

Lad os først se på betrebet "udsagn". Dette begreb har en dagligdags betydning, der faktisk ligger tæt på logikkens brug. Der er dog i logikken flere beslægtede, men forskellige begreber, der knytter an hertil. Når vi har opnået en vis øvelse, vil vi bruge "udsagn" som fællesbetegnelse for disse forskellige begreber. Hvilket begreb, man har i tankerne kan variere fra gang til gang og må så fremgå af sammenhængen.

Vi ser først på det, vi udførligt vil kalde *konkrete udsagn*. Som eksempler nævnes "$2+2=4$", "der er uendelig mange primtal af formen $2^{2^n}+1$", "$\int_0^1 e^x dx = 0$", "det regner", osv. Mere præcist kan vi sige, at *et konkret udsagn er en bestemt påstand hørende til en bestemt kontekst*. Desuden skal det understreges, at vi udelukkende vil arbejde inden for den klassiske logiks rammer, hvilket giver sig udslag i, at ethvert konkret udsagn enten er sandt eller falskt, og ikke begge dele.[1].

For at kunne arbejde kontekstuafhængigt i logikken, indfører vi begrebet *udsagnsvariabel*. En udsagnsvariabel er sådan set kun et tegn, f.eks. P, Q, R, S, T, P_1, P_2, P_3 eller visse andre tegn. Tanken er den, at—lad os f.eks. se på tegnet P—P kan stå for et hvilket som helst udsagn. For at tillægge P en konkret "værdi", skal der en *specifikation* til. Dels skal konteksten specificeres, dels skal man inden for den valgte konteksts rammer specificere et konkret udsagn. Så P kan både stå for det konkrete udsagn "$2+2=4$" og det konkrete udsagn "der er uendelig mange primtal af formen $2^{2^n}+1$", begge hørende til konteksten af naturlige tal. Eller P kunne stå for andre konkrete udsagn hørende til andre kontekster.

Der er endnu en ting at sige om udsagnsvariable. I princippet skal de tegn, vi bruger til at betegne udsagnsvariable tages fra en på forhånd fastlagt liste af *reserverede* tegn, dvs. disse tegn må ikke senere benyttes til andre formål. Dette strenge krav vil vi dog ikke overholde. F.eks. vil vi i plangeometrien ikke afholde os fra at bruge P og Q til at betegne punkter i planen, selvom det strengt taget er forbudt, når tegnene nu optræder i den reserverede liste af tegn til at betegne udsagnsvariable. Vi vil ikke være alt for pernittengryn, og skal således afholde os fra at nedskrive en præcis liste af tegn, reserveret til udsagnsvariable. Vor løsagtighed på dette punkt giver i praksis ingen problemer fremover. Det væsentlige er, at vi kan *forestille* os, at der findes en sådan liste af reserverede tegn, der står for hver deres udsagnsvariabel. To udsagnsvariable er altså kun den samme udsagnsvariabel, når tegnet, der betegner dem er det samme.

Når en udsagnsvariabel er specificeret, er der to muligheder for sandhedsværdien af det derved fremkomne konkrete udsagn: "sand" og "falsk". Dette giver vi udtryk for i *sandhedstabellen* over P, der blot opregner mulighederne. Vi har valgt overalt i sandhedstabeller og lignende opskrivninger at bruge *sandhedsværdierne* 1 og 0, "1" til at betegne "sand" og "0" til at betegne "falsk".

P
1
0

Arbejder vi i en vis sammenhæng med flere udsagnsvariable på én gang, kan vi i en sandhedstabel opregne de muligheder, der er for sandhedsværdierne af de indgående udsagnsvariable.

[1] Jeg forestiller mig, at mange, der allerede har hørt om Gödel's uafhængighedsresultater, her kunne komme i tvivl om fornuften heri. Sagen er jo den, at Gödel har vist, at enhver blot nogenlunde righoldig matematisk teori fastlagt ved aksiomer tillader udsagn, der hverken kan bevises eller modbevises. Hvordan kan vi så insistere på at hvert konkret udsagn er enten sandt eller falskt? For at forstå det, må vi holde fast i kontekstbegrebet. To kontekster (tænk evt. på æsker med objekter, som vi lagde op til) kan udmærket være forskellige og alligevel have tilknyttet helt samme begreber og aksiomer (deklarationer på indersiden af æskens låg). De er så af samme type (jf. s. 2). Så er der mulighed for at et og samme (sammensatte) udsagn giver god mening i begge kontekster og er sand i den ene kontekst og falsk i den anden. Som antydet s. 2 kunne det dreje sig om noget så uskyldig som den kendsgerning, at der både findes kommutative og ikke-kommutative grupper. Det, der gør Gödel's resultat ejendommeligt, overraskende og måske svært forståeligt er, at det også gælder, når vi ser på kontekster, der sigter på at afspejle *hele* matematikken

F.eks. for de tre udsagnvariable P, Q og R finder vi de otte muligheder udtrykt i nedenstående sandhedstabel

P	Q	R
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Sandhedstabel for P, Q, R.

Når flere udsagnsvariable optræder, vil vi altid antage (uden eksplicit at gøre opmærksom herpå), at vi ved specifikation vælger samme kontekst for dem alle. Derimod er der, så snart konteksten er fastlagt, fuld frihed til at vælge konkrete udsagn (fra den givne kontekst) til at stå for de indgående udsagnsvariable. Vedtægten er helt naturlig. Den svarer blot til, at man først specificerer konteksten og dermed de objekter, man vil sige noget om, før man underkaster konkrete udsagn en nærmere undersøgelse.

Det er let at se, at alle 8 muligheder for sandhedsværdierne af P, Q og R opregnet i ovenstående tabel kan forekomme ved specifikation. Hvis vi arbejder med plangeometrien—dette er så vor kontekst—og A betegner en retvinklet trekant, kan vi f.eks. specificere P, Q og R som følger:

P : A er en polygon
Q : A er en trekant
R : A indeholder en ret vinkel.

Med denne specifikation bliver alle tre udsagn sande, svarende til den første af de opregnede muligheder. Det er klart, at vi med andre specifikationer kan illustrere alle opregnede muligheder (gør det!).

4 Sammensatte udsagn (udsagnsformer), ækvivalens

Lidt løst kan vi definere et *sammensat udsagn*, også kaldet en *udsagnsform* på følgende måde: Lad $P, Q, \dots, V$ være udsagnsvariable. Vi siger da, at $\varphi(P, Q, \dots, V)$ er et *sammensat udsagn* med $P, Q, \dots, V$ som indgående udsagnsvariable, såfremt der til enhver specifikation af $P, Q, \dots, V$ er knyttet en bestemt sandhedsværdi, som vi kalder sandhedsværdien af $\varphi(P, Q, \dots, V)$, og såfremt denne sandhedsværdi kun afhænger af sandhedsværdierne for de indgående udsagnsvariable $P, Q, \dots, V$.

Det, der interesserer os ved sammensatte udsagn er de tilknyttede sandhedsværdier. Og ifølge definitionen giver dette, præcis som for udsagnsvariable, kun mening når vi har foreskrevet en specifikation. I henhold til definitionen behøver vi imidlertid ikke angive en fuld specifikation for at kende sandhedsværdien af et sammensat udsagn. Det er nok, vi angiver sandhedsværdierne for de indgående udsagnsvariable. Derfor kan sammensatte udsagn angives via sandhedstabeller. Lad os se et eksempel.

Eksempel 4.1. Lad P, Q og R være udsagnsvariable og definer udsagnsformen $U = \varphi(P, Q, R)$ via nedenstående skema.

P	Q	R	U
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

F.eks. ser vi, at hvis, ved en bestemt specifikation, P er falsk og Q og R begge sande, så er U sand. □

Vi fremhævede før, at det, der interesserer os ved en udsagnsform er dets sandhedsværdier (svarende til de forskellige spcifikationer). Denne holdning afpejles i følgende vigtige definition: *To udsagnsformer er ækvivalente, når de har samme sandhedsværdier.* Mere præcist: Udsagnsformen U og udsagnsformen V er *ækvivalente*, og vi skriver $U \equiv V$, når U og V har samme sandhedsværdi ved enhver specifikation af samtlige udsagnsvariable, der indgår enten i U eller i V.

I logisk henseende regnes ækvivalente udsagnsformer for helt ligeberettigede, og der er ingen grund til at skelne sådanne udsagnsformer fra hinanden.

To udsagnsformer, *tautologien* og *absurditeten* (eller *kontradiktionen*), spiller en særlig rolle. Kort kan tautologien defineres som *den altid sande udsagnsform* og absurditeten som *den altid falske udsagnsform.* Mere præcist kan de defineres som udsagnsformerne U og V med kun den ene indgående udsagnsvariabel P ud fra sandhedstabellen:

P	U	V
1	1	0
0	1	0

Vi kunne også have defineret tautologien og absurditeten som udsagnsformerne med f.eks. P og Q som indgående udsagnsvariable ud fra tabellen

P	Q	U'	V'
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	0

Selvom formen på U og U' er lidt forskellig (U har én, U' to indgående udsagnsvariable), kommer de ud på ét; ved specifikation af P og Q giver de altid samme sandhedsværdi. M.a.o., U og U' er ækvivalente: $U \equiv U'$. Tilsvarende er $V \equiv V'$. Da vi ikke ønsker at skelne mellem de mulige udsagnsformer, der alle er ækvivalente med tautologien U, indfører vi fællesbetegnelsen 1 for en vilkårlig af de mulige udsagnsformer, og vi tænker på 1 som én udsagnsform tautologien 1.

Tilsvarende indfører vi betegnelsen 0 for absurditeten. At vi misbruger symbolerne 0 og 1—der jo allerede har mange betydninger (tal, sandhedsværdier, nulvektorer osv.)—giver normalt ikke anledning til misforståelser, men medvirker til at holde matematikkens symbolskov nede. Prisen herfor er en vis flertydighed.

5 De logiske konnektiver

Vi indfører nogle helt centrale udsagnsformer: *negation, konjunktion, disjunktion* og *implikation.* Hertil ser vi på de to skemaer

P	$\neg P$
1	0
0	1

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Den første udsagnsform, $\neg P$, er *negationen* af P, også kaldet non-P. De næste, der har to indgående udsagnsvariable, her P og Q, er *konjunktionen* $P \wedge Q$ af P og Q ("både og"), *disjunktionen* $P \vee Q$ af P og Q ("enten eller", i matematikken altid forstået som enten den ene, eller den anden eller begge) og *implikationen* $P \Rightarrow Q$ ("hvis, så" eller "$\cdots$ medfører $\cdots$").

Vi refererer til $\neg, \wedge, \vee$ og $\Rightarrow$ som *logiske konnektiver.*

Ovenstående er et første skridt i opbygningen af nye udsagnsformer. Vi skal blot anvende et enkelt princip, *substitutionsprincippet*, sammen med ovenstående konstruktioner for at få en metode til dannelse af et sandt væld af nye udsagnsformer. For eksempel kan vi se på konjunktion. Vi har kun defineret konjunktion af to udsagnsvariable (vi valgte P og Q ovenfor). Men det er klart, at såfremt U og V er vilkårlige udsagnsformer, giver det god mening at se på udsagnsformen "både U og V", som vi betegner $U \wedge V$. Tilsvarende giver det for vilkårlige udsagnsformer god mening at se på udsagnsformerne $\neg U, U \vee V$ og $U \Rightarrow V$.

Eksempel 5.1. Lad os se på udsagnsformen U fra Eksempel 4.1 og udsagnsformen $V = P \vee Q$. Udsagnsformen $U \wedge V$ har så sandhedsværdier som vist i tabellen.

P	Q	R	U	V	$U \wedge V$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

Nedskriver vi også sandhedsværdierne for $Q \wedge R$, ser vi, at det giver samme resultat som $U \wedge V$. Derfor gælder ækvivalensen $U \wedge V \equiv Q \wedge R$. $\square$

Vi anvender substitutionsprincippet til på én gang at definere den logiske konnektiv *biimplikation*, betegnet $\Leftrightarrow$ for vilkårlige udsagnsformer U og V: Ved *biimplikationen* $U \Leftrightarrow V$ forstås konjunktionen af de to implikationer $U \Rightarrow V$ og $V \Rightarrow U$. Vi har altså pr. definition ækvivalensen

$$U \Leftrightarrow V \equiv (U \Rightarrow V) \wedge (V \Rightarrow U).$$

Dette kan også tydeliggøres i en sandhedstabel:

U	V	$U \Rightarrow V$	$V \Rightarrow U$	$U \Leftrightarrow V$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Læg mærke til, at vi her har anført en sandhedstabel med udsagnsformer (og ikke udsagnsvariable som hidtil) som indgange. Det er der heller ikke noget i vejen for, sålænge man ser på egenskaber, der kun afhænger af sandhedsværdierne for de anførte udsagnsformer (og ikke på egenskaber, der kræver kendskab til sandhedsværdierne for de—muligvis mange—udsagnsvariable, der indgår i disse udsagnsformer).

6 Udsagnskalkylen, udsagnslogiske identiteter

Udsagnskalkylen giver os nogle regler i hænde, der kan hjælpe os til at etablere sammenhænge mellem givne udsagnsformer. Der er især to former for sammenhæng, der interesserer os: Dels den allerede indførte *logiske ækvivalens* (før blot kaldet ækvivalens), dels *logisk konsekvens*. Lad os først omformulere kravet til ækvivalens (se afsnit 4) på to måder.

To udsagnsformer U og V er logisk ækvivalente hvis og kun hvis udsagnsformen $U \Leftrightarrow V$ er sand ved en vilkårlig specifikation. Dette er klart (overvej!) Da en tautologi er en altid sand udsagnsform, ses heraf, at ækvivalens kan udtrykkes mere elegant som følger.

> *To udsagnsformer U og V er logisk ækvivalente, hvis og kun hvis udsagnsformen $U \Leftrightarrow V$ er en tautologi.*

Vi vil nu definere, hvad det vil sige, at en udsagnsform V er en *logisk konsekvens* af en anden udsagnsform U. Vi vedtager, at dette skal betyde, at implikationen $U \Rightarrow V$ er sand ved en vilkårlig specifikation. Lidt mere malende og intuitivt ser vi, at dette kommer ud på at V af rent logiske grunde følger af U, idet gyldigheden af implikationen $U \Rightarrow V$ ikke afhænger af konteksten, men er noget, der gælder for enhver specifikation.

I lighed med logisk ækvivalens, ser vi, at logisk konsekvens også kan udtrykkes elegant via tautologier:

> *Udsagnsformen V er en logisk konsekvens af udsagnsformen U, hvis og kun hvis implikationen $U \Rightarrow V$ er en tautologi.*

For logisk konsekvens bruges tegnet $\models$, altså skrives $U \models V$ for "V er en logisk konsekvens af U". Bemærk, at den form for logisk ækvivalens og logisk konsekvens, som vi har indført, er semantik-orienterede, idet de knytter an til specifikationer af en kontekst.

Lad os nedenfor samle de vigtigste logiske ækvivalenser, som vi også kalder de *udsagnslogiske identiteter:*

UDSAGNSLOGISKE IDENTITETER, UI 1–16

$$
\begin{array}{lrcl}
1. & U \vee V & \equiv & V \vee U \\
2. & U \wedge V & \equiv & V \wedge U \\
3. & T \vee (U \vee V) & \equiv & (T \vee U) \vee V \\
4. & T \wedge (U \wedge V) & \equiv & (T \wedge U) \wedge V \\
5. & T \vee (U \wedge V) & \equiv & (T \vee U) \wedge (T \vee V) \\
6. & T \wedge (U \vee V) & \equiv & (T \wedge U) \vee (T \wedge V) \\
7. & U \vee 0 & \equiv & U \\
8. & U \wedge 1 & \equiv & U \\
9. & U \vee \neg U & \equiv & 1 \\
10. & U \wedge \neg U & \equiv & 0 \\
11. & U & \equiv & \neg(\neg U) \\
12. & U \Rightarrow V & \equiv & \neg U \vee V \\
13. & U \Rightarrow V & \equiv & \neg V \Rightarrow \neg U \\
14. & U \Leftrightarrow V & \equiv & (U \Rightarrow V) \wedge (V \Rightarrow U) \\
15. & \neg(U \vee V) & \equiv & \neg U \wedge \neg V \\
16. & \neg(U \wedge V) & \equiv & \neg U \vee \neg V\ .
\end{array}
$$

Vi bør måske også eksplicit nævne følgende to regler:

$$
\begin{array}{ll}
17. & 1 \vee 1 \equiv 1 \\
18. & 0 \wedge 0 \equiv 0,
\end{array}
$$

der dog forholdsvis let kan udledes af de øvrige (eller mere banalt via sandhedstabeller).

Reglerne 1 og 2 er de *kommutative* regler, 3 og 4 er de *associative* regler, 5 og 6 er *distributive* regler, 11 er reglen om *dobbeltnegering*, 13 er reglen om *kontraponering* og 14 og 15 er *de Morgan's regler*. Ved hjælp af de Morgans regler og reglen om dobbeltnegering indses, at der gælder en vis form for *dualitet* blandt udsagnsformer, der kun indeholder konnektiverne $\neg, \vee$ og $\wedge$ (sammenlign 1 og 2, 3 og 4, 5 og 6). Vi overlader det til læseren at eftervise alle disse ækvivalenser. Beviserne kan føres via sandhedstavler.

Vi vil ikke her være lige så grundige ved opstilling af logiske konsekvenser, men nøjes med et enkelt eksempel og vil så senere vende tilbage hertil.

Eksempel 6.1. Der gælder for vilkårlige udsagnsformer U og V, at V er en logisk konsekvens af konjunktionen af U og $U \Rightarrow V$, dvs. der gælder

$$U \wedge (U \Rightarrow V) \models V.$$

Ifølge definitionen kommer dette ud på, at udsagnsformen

$$(U \wedge (U \Rightarrow V)) \Rightarrow V$$

er en tautologi. Det kan læseren sikkert let vise ved at opstille en sandhedstabel. Imidlertid vil vi vise, at man kan klare sig uden (de lidt barnlige!) sandhedstabeller og i stedet benytte de udsagnslogiske identiteter. Vi har

$$\begin{aligned}
(U \wedge (U \Rightarrow V)) \Rightarrow V &\equiv (U \wedge (\neg U \vee V)) \Rightarrow V \\
&\equiv ((U \wedge \neg U) \vee (U \wedge V)) \Rightarrow V \\
&\equiv (0 \vee (U \wedge V)) \Rightarrow V \\
&\equiv (U \wedge V) \Rightarrow V \\
&\equiv \neg(U \wedge V) \vee V \\
&\equiv (\neg U \vee \neg V) \vee V \\
&\equiv V \vee (\neg U \vee \neg V) \\
&\equiv V \vee (\neg V \vee \neg U) \\
&\equiv (V \vee \neg V) \vee \neg U \\
&\equiv 1 \vee \neg U \\
&\equiv 1\,,
\end{aligned}$$

som ønsket. Læseren opfordres til for hver ækvivalens at gøre sig klart, hvilken regel, der er anvendt.

Eksemplet er interessant ved at vi har bevæget os ind på det syntaktiske plan. Herom mere senere. □

Vedrørende hierarkiet af de logiske symboler gælder følgende vedtægter (som vi i det foregående stiltiende har benyttet nogle gange): Fra "stærkest" til "svagest" er rækkefølgen af symbolerner følgende:

$$\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow .$$

Negationssymbolet er altså det, der binder stærkest. Vi tilføjer, at det af og til er bekvemt at benytte "impliceres af", $\Leftarrow$, der binder lige så stærkt som $\Rightarrow$ og defineres ved:

$$U \Leftarrow V \equiv V \Rightarrow U.$$

Til rækken af logiske konnektiver skal tilføjes "metasymbolerne" $\equiv$ og $\vdash$. Disse kommer sidst i rækken og binder altså svagest. Således betyder ovenstående ækvivalens $(U \Leftarrow V) \equiv (V \Rightarrow U)$. Af andre eksempler nævnes, at $\neg U \Rightarrow V$ betyder $(\neg U) \Rightarrow V$, ikke $\neg(U \Rightarrow V)$, at $U \wedge V \Rightarrow W$ betyder $(U \wedge V) \Rightarrow W$, ikke $U \wedge (V \Rightarrow W)$, at $U \Leftrightarrow V \Rightarrow W$ betyder $U \Leftrightarrow (V \Rightarrow W)$, ikke $(U \Leftrightarrow V) \Rightarrow W$ og endelig fremhæves de ikke helt så naturlige vedtægter:

$$\begin{aligned}
U \vee V \wedge W &\equiv (U \vee V) \wedge W\,, \\
U \wedge V \vee W &\equiv U \wedge (V \vee W)\,,
\end{aligned}$$

hvor man nok står sig ved altid at sætte parenteserne.

Som en sidste notationsmæssig regel nævnes, at hvis der er tvivl om betydningen af en udsagnsform, så sætter man parenteserne længst til højre først.

7 Udsagnsformer på konjunktiv normalform

Udsagnsformer kan være opbygget på meget kompliceret og uoverskuelig vis ud fra de indgående udsagnsvariable. Se f.eks. på udsagnsformen

$$(\neg P \vee (Q \Rightarrow \neg(P \vee R))) \wedge \neg(P \wedge Q \wedge R \Leftrightarrow S).$$

Det er imidlertid betryggende, at enhver udsagnsform er ækvivalent med en udsagnsform skrevet på en standard form. Man kan vælge mellem forskellige standardformer. Af hensyn til et senere resultat skal vi hæfte os ved *konjunktiv normalform.*Først nogle hjælpebegreber. En *simpel udsagnsform* er en udsagnsform, der enten er en udsagnsvariabel eller negationen af en udsagnsvariabel. Eksempelvis er P, $\neg P$, S og $\neg S$ simple udsagnsformer. En *klausul* er en disjunktion af simple udsagnsformer, dog regnes tautologien 1 og absurditeten 0 også med til klausulerne (de *trivielle klausuler*). Eksempelvis er 0, 1, P, R, $P \vee R$, $P \vee R \vee \neg S \vee \neg T$ alle klausuler. Også $P \vee R \vee S \vee \neg R \vee \neg T$ er en klausul. Den er dog logisk ækvivalent med tautologien 1, og man vil normalt skrive den på denne form. Udsagnsformen $P \Rightarrow Q$ er ikke skrevet som en klausul, men dog ækvivalent med klausulen $\neg P \vee Q$.

Vi kan nu indføre den bebudede standardform:

En udsagnsform er på *konjunktiv normalform*, hvis den er skrevet som en konjunktion af klausuler.

Udsagnsformen $P \wedge (Q \vee \neg R) \wedge \neg S$ er på konjunktiv normalform (med 3 klausuler), mens $(P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow Q)$ ikke er det. Udsagnsformen $P \vee \neg R \vee S$ er også på konjunktiv normalform, selvom den slet ikke indeholder konjunktioner. Den indeholder kun én klausul.

Sætning 7.1. *Enhver udsagnsform er ækvivalent med en udsagnsform på konjunktiv normalform.*

Bevis. Lad U være en udsagnsform med indgående udsagnsvariable $P, Q, \dots, T$. Sæt $V = \neg U$. Tænk på sandhedstabellen for V:

P	Q	T	V
...	...	...	$\vdots$
1	1	0	1
...	...	...	$\vdots$
0	1	1	0
...	...	...	$\vdots$

Enhver række i tabellen svarer til en konjunktion af simple udsagn (de to antydede rækker svarer til hhv. $P \wedge Q \wedge \cdots \wedge \neg T$ og $\neg P \wedge Q \wedge \cdots \wedge T$). Se nu på de rækker, der giver V sandhedsværdien 1. Det er klart, at V er ækvivalent med disjunktionen af de tilhørende konjunktioner af simple udsagn. Så er negationen af V, altså U, ækvivalent med den tilhørende konjunktion af disjunktioner af simple udsagn, hvilket netop er en udsagnsform på konjunktiv normalform. □

Bemærkning 7.2. Den metode, der bruges i beviset virker, men er typisk den dårligste metode, hvis vi stræber efter at nå frem til en enkel konjunktiv normalform.

Normalt er følgende en bedre strategi: Fjern først implikationer og biimplikationer ved hjælp af ækvivalenserne

$$U \Rightarrow V \equiv \neg U \vee V \ ; \ \ U \Leftrightarrow V \equiv (U \Rightarrow V) \wedge (V \Rightarrow U).$$

Fjern dernæst negationer eller flyt dem så langt ind i parentesudtryk som muligt; hertil benyttes ækvivalenserne

$$\neg\neg U \equiv U \ ; \ \ \neg(U \wedge V) \equiv \neg U \vee \neg V \ ; \ \ \neg(U \vee V) \equiv \neg U \wedge \neg V.$$

Benyt endelig de distributive love.

Eksempel 7.3. Lad os skrive $\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \wedge P$ på konjunktiv normalform. Vi anvender opskriften ovenfor og finder

$$\begin{aligned} \neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \wedge P &\equiv \neg\neg(P \Rightarrow Q) \vee (R \wedge P) \\ &\equiv (P \Rightarrow Q) \vee (R \wedge P) \\ &\equiv (\neg P \vee Q) \vee (R \wedge P) \\ &\equiv ((\neg P \vee Q) \vee R) \wedge ((\neg P \vee Q) \vee P) \\ &\equiv (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee P) \\ &\equiv \neg P \vee Q \vee R\,, \end{aligned}$$

der er på den ønskede form. □

8 Formelle beviser i udsagnslogikken

Definition 8.1. Ved et *logisk argument* (i udsagnslogikken) forstås et skema af formen

$$\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \\ \hline V \end{array}$$

hvor $U_1, U_2, \ldots, U_n$ og V er udsagnsformer. U'erne kaldes argumentets *præmisser* og V kaldes argumentets *konklusion*. Det logiske argument siges at være *gyldigt*, hvis V er en logisk konsekvens af konjunktionen af U'erne, altså hvis

$$U_1 \wedge U_2 \wedge \cdots \wedge U_n \models V.$$

Vi ser altså, at det logiske argument er gyldigt, netop når det for enhver specifikation af de udsagnsvariable, der indgår i præmisserne og i konklusionen gælder, at såfremt alle præmisserne er sande, så er også konklusionen sand.

Læg mærke til, at vi også taler om et logisk argument i tilfælde, hvor det ikke er gyldigt. I så fald findes en specifikation, så alle præmisserne er sande, men konklusionen falsk.

Vi udnævner 5 særlig enkle gyldige logiske argumenter som "byggesten" for andre gyldige logiske argumenter. Tanken er den, at vi ved hjælp af disse byggesten—*udsagnlogikkens slutningsregler*—samt de tidligere fremhævede logiske ækvivalenser stiler efter at kunne afgøre om et vilkårligt logisk argument er gyldigt eller ej.

De 5 særlige regler er følgende:

UDSAGNSLOGISKE SLUTNINGSREGLER, SR 1–5

$$\text{SR 1}: \quad \begin{array}{l} U \Rightarrow V \\ U \\ \hline V \end{array}$$

$$\text{SR 2}: \quad \begin{array}{l} U \\ \hline U \vee V \end{array}$$

$$\text{SR 3}: \quad \begin{array}{l} U \wedge V \\ \hline U \end{array}$$

$$\text{SR 4}: \quad \begin{array}{l} U \\ V \\ \hline U \wedge V \end{array}$$

$$\text{SR 5}: \quad \begin{array}{l} U \vee V \\ \neg U \vee R \\ \hline V \vee R \end{array}$$

At disse logiske argumenter alle er gyldige, checkes let efter (vedrørende SR 1, se afsnit 6, Eksempel 6.1).

Slutningreglen SR 1 hedder *modus ponens* og slutningsreglen SR 5 kaldes *resolution.*

Definition 8.2. Lad

$$\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \\ \hline V \end{array}$$

være et logisk argument i udsagnskalkylen. Ved et *formelt bevis* for argumentet forstås en nummereret liste af udsagnsformer, der starter med præmisserne $U_1, \ldots, U_n$ og slutter med konklusionen V og er således indrettet, at enhver udsagnsform på listen fremkommer ved at anvende de udsagnslogiske identiteter samt slutningsreglerne SR 1–5 på udsagnsformer tidligere på listen. Desuden kræves, at det for hver udsagnsform på listen er angivet, hvordan den er fremkommet af tidligere udsagnsformer.

Det er klart, at formelle beviser kunne være defineret anderledes uden at det havde ført til noget væsentligt andet. Vi kunne have hæftet os ved at andre slutningsregler og andre identiteter. Vi har valgt et system, der gør det ret let at behandle forbindelsen mellem det semantiske og det syntaktiske. Derimod ligger vort valg ikke særlig tæt på sædvanlig praksis for bevisførelse. Hvis f.eks. vi i en speciel sammenhæng skal eftervise implikationen $A \Rightarrow B$, er det hyppigt mest nærliggende at ræsonnere i følgende trin: Lad mig antage, at A gælder;

så må ... og ... gælde; ergo gælder B. Denne vigtige form for ræsonneren har vi ikke specielt lagt op til. Vi ønsker kun at belyse nogle fundamentale begreber og sammenhænge, ikke at give en udtømmende behandling af almindelig praksis i konkrete situationer. Derfor opfordres I til at fortsætte med at bruge “almindelig sund fornuft”. Nok er det meningen, at betragtningerne her skal hjælpe jer, men hvis I insisterer på at jeres matematiske ræsonneren fra nu af udelukkende skal bygge på retningslinierne fra dette kursus, kommer I galt af sted!

Eksempel 8.3. Man kan let—via en sandhedstabel eller mere direkte—overbevise sig om gyldigheden af følgende logiske argument

$$\begin{array}{l} P \vee Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow S \\ \neg S \\ \hline \neg Q \end{array}$$

Vi skal nu føre et formelt bevis for argumentet. Med “UI” refereres til de udsagnslogiske identiteter, som blev nummereret i afsnit 6, og med “SR” til udsagnlogikkens slutningsregler. Her er beviset:

1.	$P \vee Q \Rightarrow R$	præmis
2.	$R \Rightarrow S$	præmis
3.	$\neg S$	præmis
4.	$\neg S \Rightarrow \neg R$	UI 13 på 2.
5.	$\neg R$	SR 1 på 3. og 4.
6.	$\neg R \Rightarrow \neg(P \vee Q)$	UI 13 på 1.
7.	$\neg(P \vee Q)$	SR 1 på 5. og 6.
8.	$\neg P \wedge \neg Q$	UI 15 på 7.
9.	$\neg Q \wedge \neg P$	UI 2 på 8.
10.	$\neg Q$	SR 3 på 9.

I 10. genfinder vi den ønskede konklusion og beviset er ført.

Bemærk iøvrigt, at hvis de udsagnsvariable P, Q, R og S erstattes med vilkårlige udsagnsformer U, V, W og Z (tegn, der ikke er på vor liste af reserverede tegn over udsagnsvariable), kan betragtningerne ovenfor gennemføres på helt samme måde, og fører så til et formelt bevis for det logiske argument

$$\begin{array}{l} U \vee V \Rightarrow W \\ W \Rightarrow Z \\ \neg Z \\ \hline \neg V \end{array}$$

□

Det er klart, at *ethvert logisk argument, der har et formelt bevis, er gyldigt*. Overvej! Man anvender sprogbrugen, at det formelle bevis er et (formelt) *bevis for gyldigheden* af det logiske argument. Normalt er et formelt bevis noget mere uoverskueligt end et bevis på almindelig godt dansk, hvor vi blot bruger vor sunde fornuft. Tænk blot på eksemplet ovenfor!

Det er alligevel uhyre interessant at hæfte sig ved de formelle beviser. Herved får vi en mulighed for at præcisere den ingrediens i matematikken, nemlig beviset, der mere end nogen anden skiller matematik ud fra de andre videnskaber. Desuden er der andre grunde til at fremhæve det formelle bevis, bl.a.at dette peger på et moderne forskningsfelt i datalogi og matematik, der beskæftiger sig med konstruktion af programmer (algoritmer) til automatisk bevisførelse. Og naturligvis er det interessant, at alle ræsonnementer i udsagnslogikken kan baseres på ganske få slutningsregler og identiteter.

Vi kan lære meget mere med udgangspunkt i eksemplet og definitionen ovenfor. Tænker vi over det, indser vi nemlig, at vi med beviset for gyldigheden af det logiske argument i eksemplet har forladt vor semantiske betragtningsmåde. Det var på intet tidspunkt nødvendigt at tænke på en bestemt kontekst og bestemte specifikationer. Beviset var netop formelt, rent mekanisk, byggende på en bestemt *syntaks*. Syntaksen er givet med slutningsreglerne og de udsagnslogiske identiteter. Vi har dermed introduceret det syntaktiske lag i den matematiske logik.

Mange undersøgelser i logik går ud på at sammenholde det semantiske lag med det syntaktiske. Vi vil også skelne notationsmæssigt mellem disse lag, idet tegnet $\models$ (som hidtil) bruges til at udtrykke logisk konsekvens af semantiske grunde, mens $\vdash$ bruges til at udtrykke logisk konsekvens af syntaktiske grunde. Således udtrykker $(U_1 \wedge U_2 \wedge \cdots \wedge U_n) \models V$, at det logiske argument med $U_1, U_2, \ldots, U_n$ som præmisser og V som konklusion er gyldigt, mens $(U_1 \wedge U_2 \wedge \cdots \wedge U_n) \vdash V$ udtrykker, at der findes et formelt bevis for argumentet.

Læseren har sikkert allerede stillet sig et centralt spørgsmål: Vi udvalgte lidt tilfældigt nogle basale ækvivalenser og slutningsregler (UI 1–16 og SR 1–5), og definerede så et formelt bevis med reference hertil. Var det nu klogt? Har vi "glemt" nogle basale regler? Med andre ord, vi spørger om ethvert gyldigt logisk argument også kan begrundes med et formelt bevis efter vores definition. Det kan det:

Sætning 8.4. *Ethvert gyldigt logisk argument i udsagnskalkylen har et formelt bevis.*

Dette hovedresultat er ikke helt let at vise. Jeg henviser til Appendix.

Selvom vi altså viger tilbage for at bevise sætningen i hovedteksten, kan vi dog let angive en opskrift, der altid virker! Opskriften er ganske enkel:

- Erstat præmisserne med dermed ækvivalente udsagnsformer på konjunktiv normalform;
- Erstat hver præmis, nu skrevet på konjunktiv normalform, med de indgående klausuler (hertil udnyttes SR 3);
- Anvend resolution (og SR 2) indtil man har fundet udsagnsformer, der er identiske med de klausuler, der indgår i den ønskede konklusion, skrevet på konjunktiv normalform.
- Indgår flere klausuler i konklusionen, anvendes tilsidst SR 4 til at "sammenstykke" hele konklusionen.

Eksempel 8.5. Vi vil give et formelt bevis for gyldigheden af følgende logiske argument:

$$\begin{array}{ll} 1. & (P \wedge Q) \Rightarrow R \\ 2. & T \Rightarrow Q \\ 3. & W \Rightarrow P \\ 4. & \neg R \\ \hline & W \Rightarrow \neg T \end{array}$$

Anvendes metoden skitseret ovenfor, kan det formelle bevis forløbe ved tilføjelse af følgende udsagnsformer til præmisserne 1–4:

5.	$\neg(P \wedge Q) \vee R$	UI 12 på 1.
6.	$\neg P \vee \neg Q \vee R$	UI 16 (og 3) på 5.
7.	$\neg T \vee Q$	UI 12 på 2.
8.	$\neg P \vee R \vee \neg T$	SR 5($+\cdots$) på 6. og 7.
9.	$\neg W \vee P$	UI 12 på 3.
10.	$R \vee \neg T \vee \neg W$	SR 5 ($+\cdots$) på 8. og 9.
11.	$\neg T \vee \neg W$	SR 5 ($+\cdots$) på 4. og 10.
12.	$W \Rightarrow \neg T$	UI 12 ($+\cdots$) på 11.

Bemærk, at når vi kan anvende resolution på 4 og 10 (se 11), skyldes det, at 4 kan skrives på formen $\neg R \vee 0$.

Da vi endte med den ønskede konklusion, har vi hermed ført formelt bevis for gyldigheden af det logiske argument. □

Ofte står man sig ved beviset for gyldigheden af et argument at benytte et *indirekte bevis*. Dette svarer til, at det logiske argument

$$\frac{U}{V} \tag{8.5.1}$$

erstattes af det logiske argument

$$\frac{\begin{matrix} U \\ \neg V \end{matrix}}{0} \tag{8.5.2}$$

Grunden til fornuften heri skyldes følgende:

Sætning 8.6. *Lad U og V være udsagnsformer. Da gælder, at det logiske argument* (8.5.1) *er gyldigt, hvis og kun hvis det logiske argument* (8.5.2) *er gyldigt.*

Bevis. At argumentet (8.5.2) er gyldigt, betyder, at $(U \wedge \neg V) \Rightarrow 0 \equiv 1$. Tilsvarende for (8.5.1). Nu er

$$\begin{aligned} (U \wedge \neg V) \Rightarrow 0 &\equiv \neg(U \wedge \neg V) \vee 0 \\ &\equiv \neg U \vee V \vee 0 \\ &\equiv \neg U \vee V \\ &\equiv U \Rightarrow V \ , \end{aligned}$$

hvorfor $(U \wedge \neg V) \Rightarrow 0$ er en tautologi, hvis og kun hvis $U \Rightarrow V$ er det. Heraf følger påstanden. □

Eksempel 8.7. Vi vil bevise gyldigheden af det logiske argument

$$\frac{\begin{matrix} \neg(U \wedge W) \\ \neg\, V \Rightarrow W \end{matrix}}{U \Rightarrow V.}$$

Negationen af den ønskede konklusion er $U \wedge \neg V$, der er på konjunktiv normalform med to klausuler. Disse føjes til præmisserne og vi søger at føre et formelt bevis for absurditeten ("nå til en modstrid", er vi vant til at sige):

1.	$\neg(U \wedge W)$	
2.	$\neg V \Rightarrow W$	
3.	U	
4.	$\neg V$	
5.	$\neg U \vee \neg W$	UI 16 på 1.
6.	$V \vee W$	UI 11 og 12 på 2.
7.	W	SR 1 på 2. og 4.
8.	$\neg W$	SR 5 på 3. og 5.
9.	0	SR 5 på 7. og 8.

Vi er hermed, som ønsket, nået frem til absurditeten, og har ført det bebudede indirekte bevis. □

En anden velkendt bevisform er *bevis ved kontraponering.* Her bytter præmis og konklusion plads efter negering. Denne bevisform bygger på at det logiske argument (8.5.1) er gyldigt, hvis og kun hvis det logiske argument

$$\frac{\neg V}{\neg U}$$

er gyldigt. At dette er tilfældet, ses direkte af UI 13.

Endnu en bevisform, der hyppigt kan anvendes er *opdeling i mulige tilfælde.* Den bygger på at det logiske argument

$$\begin{array}{r} T_1 \vee T_2 \vee \cdots \vee T_n \\ T_1 \Rightarrow V \\ T_2 \Rightarrow V \\ \vdots \\ T_n \Rightarrow V \\ \hline V \end{array} \tag{8.7.1}$$

er gyldigt. Ud fra præmisserne kan vi altså konkludere V. Se i øvrigt Opgave 20.

For vilkårlige udsagnsformer U og V er det logiske argument

$$\begin{array}{c} U \\ \neg U \\ \hline V \end{array}$$

gyldigt. Hvis, derfor, en teori (kontekst) indeholder en modstrid (en udsagnsform, som er sand tillige med sin negation), så kan man bevise enhver påstand hørende til teorien. En sådan teori vil dermed være helt værdiløs.

9 Grundbegreber i prædikatkalkylen

Se på udtrykket "x er et primtal", hvor x betegner et naturligt tal. Der er intet unaturligt herved. Vi indser imidlertid, at et sådant simpelt udtryk ikke omfattes af udsagnslogikken. Det er ikke et konkret udsagn knyttet til konteksten $\mathbb{N}$. Så skulle det jo enten være sandt eller falskt—og det kommer jo an på, hvad x er, og til mange formål er det netop hensigtsmæssigt at give mulighed for at x kan være snart det ene, snart det andet tal.

Et andet eksempel: Se på udtrykket "$xy = 0$" knyttet til konteksten af reelle tal. Her optræder nu to ikke-specificerede størrelser, x og y, og udtrykket "siger noget" om x og y. I det første eksempel "x er et primtal" siges noget om x.

Vi må udvide logikken til også at omfatte udtryk som ovenstående. Udtryk af den betragtede art kaldes *prædikater* eller *åbne udsagn* og de størrelser, prædikaterne "siger noget om" kaldes *individvariable.* I prædikatet "x er et primtal" er der én individvariabel, x. I prædikatet "$xy = 0$" er der to individvariable, x og y. Typisk reserverer vi $x, y, z, \ldots$ til at betegne individvariable.

Til enhver kontekst—der her bruges synonymt med model—hører en række prædikater, dels prædikater i én individvariabel, dels prædikater i to eller flere individvariable. Hvorledes disse prædikater dannes rent sprogligt syntaktisk (ud fra " atomiske udtryk" som f.eks. "$x = y$", "$x \in y$", "$x = 0$" eller, hvad det nu kan være i en given kontekst), skal vi ikke hæfte os nærmere ved, bortset fra to nyskabelser.

Tænk på en bestemt kontekst og et bestemt prædikat $P(x)$ i den ene individvariable x. Hermed menes, at vi til ethvert objekt i universet hørende til den givne kontekst har knyttet et udsagn (der så enten er sandt eller falskt). Er objektet x, betegner $P(x)$ netop dette udsagn. Vi tænker os nu, at vi for ethvert objekt x i universet undersøger, om udsagnet $P(x)$ er sandt. Efter denne undersøgelse træder vi et skridt tilbage og ser på resultatet. Er ethvert af udsagnene $P(x)$ sandt, udtrykker dette en egenskab knyttet til konteksten. Er det ikke rigtigt, at ethvert af udsagnene $P(x)$ er sandt, gælder denne egenskab ikke. Egenskaben er et udsagn. Dette udsagn har en ganske bestemt betegnelse i logikken, nemlig $\forall\, xP(x)$ og læses "for alle x gælder $P(x)$". Eventuelt skrives $\forall\, x :\ P(x)$.

Ovenstående beskrivelse af betydningen af et nyt udsagn som $\forall\, xP(x)$ var knyttet til en fiktiv (tænkt) undersøgelse af alle udsagnene $P(x)$. Normalt kan en sådan undersøgelse ikke gennemføres. Det væsentlige er, at vi insisterer på, at der til ethvert prædikat $P(x)$ i én individvariabel hørende til en bestemt kontekst er knyttet et bestemt udsagn, og at dette opfører sig som beskrevet, dvs. hvis alle $P(x)$ er sande, så er udsagnet sandt, og er udsagnet sandt, så er alle $P(x)$ sande. Dette udtrykkes i to vigtige slutningsregler. Før vi nævner dem, indfører vi endnu et udsagn knyttet til prædikatet $P(x)$. Det nye udsagn betegnes $\exists\, xP(x)$, evt. $\exists\, x : P(x)$, og læses "der findes x så $P(x)$". Tanken er den, at mens vi for gyldigheden af $\forall\, xP(x)$ krævede, at vor undersøgelse af udsagnene $P(x)$ resulterer i at de alle er sande, kræver vi nu blot at der findes et x, så $P(x)$ er sand.

I prædikatkalkylen har vi brug for følgende fire slutningsregler udover de fem slutningsregler, der knytter sig til udsagnskalkylen. Tegnene "$\forall$" og "$\exists$" kaldes *kvantorer*, hhv. *al-kvantoren* og *eksistens-kvantoren.* Hyppigt bruges de i forbindelse med prædikater i flere individvariable, og hyppigt bruges de i kombinationer, hvor også konnektiverne fra udsagnslogikken forekommer. Meningen med alle de udtryk, der derved kan forekomme er egentlig klar, og vi skal ikke give en systematisk fremstilling heraf. Lad os i stedet se nogle eksempler.

SR 6:	(*universel specifikation,* US):
	$$\frac{\forall\, x P(x)}{P(a) \text{ for alle } a \text{ i universet}}$$
SR 7:	(*universel generalisation,* UG):
	$$\frac{P(a) \text{ for alle } a \text{ i universet}}{\forall\, x P(x)}$$
SR 8:	(*eksistentiel specifikation,* ES):
	$$\frac{\exists x P(x)}{\text{der findes } a \text{ i universet, så } P(a)}$$
SR 9:	(*eksistentiel generalisation,* EG):
	$$\frac{\text{der findes } a \text{ i universet, så } P(a)}{\exists\, x P(x)}$$

Eksempel 9.1. Se på udtrykkene

(1). $\forall\, x P(x, y)$,

(2). $\exists\, x \forall\, y P(x, y, z)$,

(3). $P \wedge \forall\, x Q(x)$,

(4). $\forall\, x\, ((P(x) \Rightarrow Q(x, y)) \wedge (\exists\, y Q(x, y)))$.

Bemærk, at kun (3) betegner et udsagn. (1) er et prædikat i individvariablen y, idet det jo siger noget om y (nemlig at for alle x gælder $P(x, y)$), og (2) er et prædikat i individvariablen z. Udtrykket (4) er måske mere uklart. Det er faktisk et prædikat i y. Meningen med det træder klarere frem, når vi skriver det på formen

$$\forall\, x\, ((P(x) \Rightarrow Q(x, y)) \wedge (\exists\, z Q(x, z)))\,.$$

I (4) havde vi valgt et uhensigtsmæssigt navn for individvariablen knyttet til eksistenskvantoren. Måske bliver meningen med (4) først klar, når vi indfører betegnelsen $R(x)$ for prædikatet $\exists\, y Q(x, y)$. Så kan (4) skrives på formen

$$\forall\, x\, ((P(x) \Rightarrow Q(x, y)) \wedge R(x)).$$

□

I forbindelse med udtryk som ovenstående taler man om at individvariablene er *bundne* eller *fri*. De bundne variable er bundet af den kvantor, de hører til. Lad os bruge eksemplerne (1)-(4) ovenfor til at forklare meningen.

Eksempel 9.2. I (1) er x bundet (af alkvantoren) og y er fri. Derfor er (1) et prædikat i y. I (2) er x og z frie i udtrykket $\forall\, y P(x, y, z)$, mens y er bundet af al-kvantoren. Da x er bundet af den yderste eksistens-kvantor, er hele udtrykket et prædikat i z. Da x er bundet i (3), og der ikke er andre individvariable, er (3) et udsagn (et prædikat i nul variable). Se på (4): Her er y bundet i udtrykket $\exists\, y\, Q(x,y)$, men da det første y er fri, er hele udtrykket et prædikat i y. □

Ganske tilsvarende til forholdene i udsagnskalkylen, hvor vi skelnede mellem udsagn, udsagnsvariable og udsagnsformer, må vi i prædikatkalkylen skelne mellem *prædikater, prædikatvariable* og *prædikatformer*. Lad os kort præcisere: Prædikater er det, vi har haft i tankerne ovenfor. Det er åbne udsagn hørende til en bestemt kontekst. For at få et udsagn ud fra et prædikat kræves specifikation af de til prædikatet hørende individvariable.

Prædikatvariable har vi ikke nævnt før. Det er reserverede tegn eller tegnstrenge, f.eks. $P(x)$, $P(x,y)$, $P(x_1,x_2)$, $Q(x),\ldots$ som ikke i sig selv har en fast betydning. Det får de først ved specifikation. F.eks. for $P(x)$ er tanken, at vi kan specificere en kontekst som vi vil, og derefter kan vi specificere et prædikat i x hørende til konteksten. Så har vi et (konkret) prædikat. Skal vi have et udsagn frem, må vi yderligere specificere, hvilket objekt i universet, x skal være.

Prædikatformer dannes ud fra prædikatvariable (de indgående prædikatvariable) ved brug af kvantorer og konnektiver, som beskrevet før. En fuld specifikation af en prædikatform, så vi når frem til et udsagn, kræver specifikation af en kontekst (skal være den samme for alle indgående prædikatvariable), specifikation af prædikater for hver prædikatvariabel (med det rigtige antal individvariable) og endelig kræves spcifikation af alle frie variable.

Kvantisering er altid over hele universet, dvs. i udtrykkene $\forall\, xP(x)$ og $\exists\, xP(x)$ "løber" x over objekterne i universet. Denne forestilling afspejles i definitionerne (indeholdt i SR 6–9). Tit kan det dog være bekvemt at tillade "delkvantisering". Skriver vi f.eks. $\forall\, x$ så $S(x) : P(x)$ skal dette tolkes derhen, at x nu kun "løber" over de objekter for hvilke $S(x)$ er sand. Mere præcist skal $\forall\, x$ så $S(x)$: $P(x)$ betyde det samme som $\forall\, x(S(x) \Rightarrow P(x))$. Og $\exists\, x$ så $S(x)$: $P(x)$ skal betyde $\exists\, x : S(x) \wedge P(x)$. Delkvantisering er velkendt fra analysen ($\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, \delta > 0 \ldots$ eller konstruktioner som denne: $\exists\, n_0 \forall\, n \geq n_0 \ldots$).

Vi kan nu udvide de centrale begreber fra udsagnskalkylen til prædikatkalkylen. Således siges to prædikatfomer $P(x,y,\ldots,w)$ og $Q(x,y,\ldots,w)$ at være *ækvivalente*, og vi skriver $P(x,y,\ldots,w) \equiv Q(x,y,\ldots,w)$, såfremt enhver specifikation fører til en sand biimplikation $P(x,y,\ldots,w) \Leftrightarrow Q(x,y,\ldots,w)$. Tilsvarende defineres logisk *konsekvens*, for hvilken vi bruger samme symbol som i udsagnslogikken, altså skrives $P(x,y,\ldots,w) \models Q(x,y,\ldots,w)$. Mere elegant kan vi først udvide begrebet en *tautologi* til at betegne en prædikatform, der er sand ved en vilkårlig specikation, og så definere ækvivalens og konsekvens ved $P(x,\ldots,w) \equiv Q(x,\ldots,w)$, hvis og kun hvis $P(x,\ldots,w) \Leftrightarrow Q(x,\ldots,w)$ er en tautologi, og ved $P(x,\ldots,w) \models Q(x,\ldots,w)$, hvis og kun hvis $P(x,\ldots,w) \Rightarrow Q(x,\ldots,w)$ er en tautologi. Da vi som i udsagnslogikken ikke ønsker at skelne mellem ækvivalente prædikatformen, bruges 1 til at betegne tautologien (en vilkårlig tautologi) og 0 til at betegne absurditeten (negationen til 1).

Et *logisk argument* og et *gyldigt logisk argument* i prædikatlogikken defineres helt i analogi til definitonerne i udsagnslogikken. En væsentlig forskel, når vi sammenligner med udsagnslogikken, er, at vi ikke har mulighed for at benytte os af sandhedstabeller eller andre "primitive" værktøjer. I prædikatlogikken er det typisk en vanskeligere opgave at eftervise gyldigheden af et logisk argument.

Som hjælp til denne opgave har vi dels alle de tidligere udviklede relationer, dels nogle nye relationer. Hvad angår de gamle relationer (ækvivalenserne UI 1–16 og slutningsreglerne SR

1–5), er det vigtigt at påpege, at de bevarer deres gyldighed i udvidet form, idet de indgående udtryk nu kan være vilkårlige prædikatfomer (substitutionsprincippet anvendes).

Af nye relationer, har vi allerede nævnt de nye slutningsregler SR 6–9, vi vil hæfte os ved. Desuden fremhæver vi relationerne nedenfor:

NOGLE PRÆDIKATLOGISKE ÆKVIVALENSER	
1.	$\neg\forall\, xP(x) \equiv \exists\, x\neg P(x)$
2.	$\neg\exists\, xP(x) \equiv \forall\, x\neg P(x)$
3.	$(\forall\, xP(x)) \wedge (\forall\, xQ(x)) \equiv \forall\, x\,(P(x) \wedge Q(x))$
4.	$(\exists\, xP(x)) \vee (\exists\, xQ(x)) \equiv \exists\, x\,(P(x) \vee Q(x))$

NOGLE PRÆDIKATLOGISKE KONSEKVENSER	
5.	$\forall\, xP(x) \models \exists\, xP(x)$
6.	$(\forall\, xP(x)) \vee (\forall\, xQ(x)) \models \forall\, x\,(P(x) \vee Q(x))$
7.	$\exists\, x\,(P(x) \wedge Q(x)) \models (\exists\, xP(x)) \wedge (\exists\, xQ(x))$

Vi skal henvise beviserne for disse relationer til øvelserne (det er ikke svært!).

Begrebet *formelt bevis* udvides til prædikatlogikken, idet SR 1–9 tages som slutningsregler og UI 1–16 samt 1–4 ovenfor udgør vort reservoir af ækvivalenser.

Bemærk, at vi nu i nogen grad har opgivet strengt at reservere visse symboler til prædikatvariable. $P(x)$ og $Q(x)$ oven for kan faktisk stå for vilkårlige prædikatformer. Endnu en bemærkning er værd at gøre sig: Såfremt $P(x)$ og $Q(x)$ ovenfor erstattes af prædikatformer med yderligere individvariable, f.eks. $P(x, y, \dots, w)$ og $Q(x, y, \dots, w)$, så kan relationerne ovenfor stadig opretholdes. Så kommer relationerne blot til at vedrøre prædikatformer i individvariablene $y, \dots, w$.

Ganske som i udsagnslogikken er det klart, at ethvert logisk argument i prædikatlogikken, der har et formelt bevis, er gyldigt. Det omvendte gælder også, men beviset er noget omstændeligt, og vi skal ikke komme ind herpå. Faktisk er man tvunget til mere detaljeret at præcisere påstanden. Præcis hvordan er prædikatformerne bygget op? Præcis hvordan defineres frie og bundne variable? Først med sådanne præciseringer giver det mening at kaste sig over problemet. Der henvises til fremstillinger af matematisk logik.

Resultatet, at ethvert gyldigt argument i prædikatlogikken har et formelt bevis, omtales også som *prædikatlogikkens fuldstændighed.* Det tilsvarende resultat for udsagnslogikken, som faktisk bevises i Appendix, udtrykker *udsagnslogikkens fuldstændighed.* Et svagere, men allerede meget fint resultat.

For prædikatlogikkens fuldstændighed er det vigtigt, at vi her taler om *1. ordens logik,* hvor kvantisering sker over objekter i universet. Tillader man mere generel kvantisering (2. og højere ordens logik) gælder fuldstændighedsresultatet ikke længere. I stedet gælder de fundamentale *ufuldstændighedssætninger,* der har gjort Gödel's navn udødeligt. Hvor spændende dette end er, slutter vi her. Til den der vil vide mere, uden dog at kaste sig over den meget tekniske speciallitteratur, henvises til de sidste afsnit af Brandt og Nissen: Q.E.D. (se litteraturlisten). Desuden kan Burris' bog tilføjet til Litteraturlisten være nyttig.

Opgaver

Opgave 1. Bestem sandhedstavlen for udsagnene

$$\neg Q, \quad P \Rightarrow Q \quad \text{og} \quad P \Leftrightarrow (P \Rightarrow \neg Q).$$

Opgave 2. Et sammensat udsagn S har sandhedstavlen som anført i tabellen. Find ved brug af de logiske konnektiver en enkel måde at skrive S på (dvs. find et sammensat udsagn dannet ud fra P, Q og R, der er logisk ækvivalent med S—og helst ét, der er væsentlig simplere end f.eks.

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)).$$

P	Q	R	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Opgave 3. Er "$\Rightarrow$" associativ? Mere præcist: Gælder den logiske ækvivalens

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \equiv P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)?$$

Opgave 4. Eftervis de logiske ækvivalenser

$$\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R\big) \wedge P \equiv \big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \wedge P \equiv (Q \Rightarrow R) \wedge P.$$

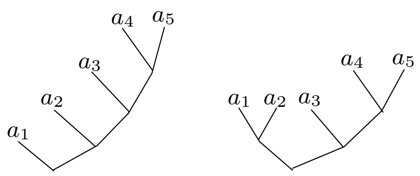
Opgave 5. Eftervis, at "$\Leftrightarrow$" er associativ. Mere præcist: Vis, at

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R \equiv P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R).$$

Opgave 6 (Generel opgave vedrørende associativitet; se også Appendix s. 35)**.** Lad "$\circ$" betegne en binær komposition, der til vilkårlige givne objekter af en vis art, lad os sige a og b (med a det første og b det andet objekt), knytter et nyt objekt, som betegnes $a \circ b$. Et udtryk af typen $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ kan da (muligvis) betyde mange forskellige ting alt efter, "hvor vi sætter paranteserne". F.eks. behøver

$$a_1 \circ (a_2 \circ (a_3 \circ (a_4 \circ a_5))) = (a_1 \circ a_2) \circ (a_3 \circ (a_4 \circ a_5)) \tag{$*$}$$

ikke gælde. Bevis, at såfremt "den associative lov gælder i det enkleste tilfælde", hvormed vi mener, at $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$, så gælder den associative lov generelt, dvs. udtryk som $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ (hvor $n \in \mathbb{N}$) afhænger ikke af, "hvor man sætter paranteserne". (Præcisér evt. først opgaven!).



Vejledning: Forslag I: Indse f.eks. først, at til ethvert udtryk $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ *med* paranteser eksplicit angivet, svarer et binært træ, der anviser, hvordan beregningen af $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ skal foregå. Meningen med dette fremgår vist ved at vise de to træer, der hører til hhv. venstresiden og højresiden i $(*)$. Træet svarende til venstresiden i $(*)$ kan vi kalde det "højreskæve træ hørende til $a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ a_4 \circ a_5$". Indse så, at ud fra den generelle gyldighed af $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ kan træet hørende til en bestemt form (med paranteser) af $a_1 \circ \cdots \circ a_n$ omformes til det "højreskæve træ" (gennem successive omformninger). Forslag II: Definér $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ ved rekursion ved $a_1 \circ \cdots \circ a_{n+1} = a_1 \circ (a_2 \circ \cdots \circ a_{n+1})$. Lad $[a_1 \circ \cdots \circ a_n]$ stå for et vilkårligt parentesudtryk og vis ved induktion, at det er lig med $a_1 \circ \cdots \circ a_n$. Hertil opsøges første højreparentes i $[a_1 \circ \cdots \circ a_n]$, lad os sige, det er her: $\cdots \circ a_\nu) \circ \cdots$. Så må $2 \leq \nu \leq n$ og $[a_1 \circ \cdots \circ a_n] = \cdots \circ (a_{\nu-1} \circ a_\nu) \circ \cdots$. Inddel nu i tilfældene $\nu = n$ (let!), $\nu = n-1, \nu = n-2, \cdots$.

Opgave 7. Fra opgaverne 5 og 6 ved vi, at et sammensat udsagn som

$$P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow P_n \tag{†}$$

giver mening (det er nemlig uafhængig af, hvor paranteserne sættes i den forstand, at alle udsagn, der fremkommer ved at sætte paranteser, er logisk ækvivalente). Opgaven er nu, at afgøre *hvilken* mening, der ligger i (†). Faktisk gælder det, at (†) er sand, hvis og kun hvis et lige antal af udsagnene er falske! Vis dette! finder man opgaven svær, kan man evt. nøjes med at se på tilfældende $n = 2, 3$ og 4.

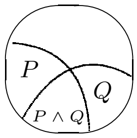
Bemærkninger (Advarsel!) Når vi her skriver $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow P_n$, menes noget helt andet end de fleste er vant til. F.eks. beteyder $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R \Leftrightarrow S$ her udsagnet $P \Leftrightarrow \big(Q \Leftrightarrow (R \Leftrightarrow S)\big)$, mens mange fra opgavebesvarelser m.v. er vant til at $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R \Leftrightarrow S$ betyder $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R) \wedge (R \Leftrightarrow S)$. Da den første betydning overhovedet ikke er hensigtsmæssig eller naturligt forekommende i sædvanlig matematisk tekst, mens den anden betydning kan være bekvem, accepterer vi (ved opgavebesvarelser m.v), at man bruger serier af biimplikationer "som sædvanlig". Dog understreges, at vi *ikke* accepterer en brug af f.eks. $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R \Leftrightarrow S$ til at betyde dels $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R) \wedge (R \Leftrightarrow S)$ og dels en underforstået forudsætning, at det første udsagn P antages eller vides at være sand. Analogt tilllader vi forsigtig!) brug af f.eks. $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ til at betyde $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ (Bemærk: her er en anden betydning urimelig, jf. opg. 3).

Opgave 8. Bevis den logiske ækvivalens

$$(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \equiv (P \vee Q) \wedge \neg (P \wedge Q),$$

dels ved at se på sandhedstavler, dels ved at foretage omformninger byggende på standard logiske ækvivalenser (som ækvivalenserne UI 1-16 s. 16).

Opgave 9. Denne opgave, der ikke skal tages alt for formelt, foreslår en illustration af udsagn og relationer herimellem. Tanken er den, at alle udsagn, vi vil have i tankerne, er udsagn af typen $x \in A$, hvor A er en delmængde af en vis mængde U. F.eks. kan konjunktionen $P \wedge Q$ illustreres som vist på figuren.



Giv illustrationer af udsagnene

$$\neg P, \quad P \vee Q, \quad P \Rightarrow Q \quad \text{og} \quad P \Leftrightarrow Q$$

samt af tautologien og absurditeteten. Illustrer også de distributive regler samt slutningsreglen modus ponens.

Opgave 10. Antallet af udsagnsformer med P, Q og R som indgående udsagnsvariable er 256, og tæller vi kun dem med, der ikke blot afhænger af to eller færre af udsagnsvariablene, er antallet 218. Vis det! Præcisér evt. først spørgsmålet.—Generalisér opgaven, hvis du har lyst! (Se på t_n lig med det totale antal udsagnsformer i $P_1, \cdots, P_n$ samt antallet e_n blandt disse, der afhænger af alle udsagnsvariablene $P_1, \cdots, P_n$).

Opgave 11. De banale ækvivalenser $U \vee U \equiv U$ og $U \wedge U \equiv U$ er ikke taget med i de udagnslogiske identiteter. Udled dem heraf!

Opgave 12. En Mat Y-studerende fortalte mig, at Witgenstein bruger $P|Q$, der betyder "hverken P eller Q" som fundamental konnektiv i sit kendte værk "Tractatus". Kan det være rigtigt? (Definér først $P|Q$ præcist, og søg så at indføre de andre konnektiver på basis heraf).

Opgave 13. Skriv udsagnene $A \Rightarrow B$, $\neg(A \Rightarrow B)$, $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ og $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ på konjunktiv normalform.

Opgave 14. Skriv udsagnene $A \Leftrightarrow B$, $\neg(A \Leftrightarrow B)$ og $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ (ækvivalent med $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$ jf. opgave 5) på konjunktiv normalform.

Opgave 15. Lad K være en ikke-triviel klausul i en konjunktiv normalform. Vis, at K kan skrives på følgende form:

$$\bigvee_{i=1}^{n} P_i \vee \bigvee_{j=1}^{m} \neg Q_j \,, \tag{$*$}$$

hvor $P_1, \cdots, P_n, Q_1, \cdots, Q_m$ er udsagnsvariable (og vel at mærke forskelligige udsagnsvariable—som det sådan set fremgår ved valg af notation), hvor $n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_0$ og ikke bådre n og m er 0. Udtrykket $(*)$ skal forstås som

$$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2 \vee \cdots \vee \neg Q_m \,,$$

hvor "P-delen"mangler, hvis $n = 0$ og "Q-delen"mangler, hvis $m = 0$. Dette er let! Noget sværere er det at vise, at fremstillingen $(*)$ af K er entydig på nær rækkefølgen af de indgående udsagnsvariable. Vis også det!

Opgave 16. Udsagnsformen

$$(\neg P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (P_1 \vee P_2)$$

er skrevet på konjunktiv normalform med 3 klausuler. Kan den skrives på konjunktiv normalform med færre klausuler?

Opgave 17. Med en notation som den i opgave 15 indførte, skal man vise ækvivalenserne

$$\begin{aligned} \bigvee_{i=1}^{n} A_i \wedge \bigvee_{j=1}^{m} B_j &\equiv \bigvee_{(i,j)} (A_i \wedge B_j) \\ \bigwedge_{i=1}^{n} A_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} B_j &\equiv \bigwedge_{(i,j)} (A_i \wedge B_j) \,, \end{aligned}$$

hvor (i, j) på højresiderne løber over alle par (i, j) med $i \in \{1, \ldots, n\}$ og $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Opgave 18. Ofte omtales kædeslutningsreglen

$$\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ \hline P \Rightarrow R \end{array}$$

som en vigtig slutningsregel. Den står imidlertid ikke nævnt, hvor man ellers kunne forvente det (afsnit 8). Diskutér!

Opgave 19. Vis den logiske identitet

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow Q) \equiv Q$$

ved at udnytte de basale identiteter (UI 1-16 s.16). (De, der har lyst, kan også vise identiteten v.hj. af sandhedstavler). Eftervis dernæst slutningsreglen

$$\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ \neg P \Rightarrow Q \\ \hline Q \end{array}$$

Hvad har denne opgave med følgende opgave at gøre: Vis at der findes irrationale tal a og b, så a^b er rational?

Bemærkning: Forbindelsen er mere til følgende bevis for påstanden: I begge tilfældene "$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational" og "$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational" er sagen klar (se på $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$).

Bemærk: Denne opgave kan naturligt føre til en diskussion af klassisk (vores!) kontra intuitionistisk logik.

Opgave 20. Eftervis gyldigheden af argumentet (8.7.1). Eftervis også, at hvis det første af argumenterne

$$\begin{array}{lcl} U & \Rightarrow & T_1 \vee T_2 \\ T_1 & \Rightarrow & V \\ T_2 & \Rightarrow & V \\ \hline V & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} U \\ \hline V \end{array}$$

er gyldigt, så er det andet også. Er de to argumenter ækvivalente (dvs. samtidigt gyldige)?

Opgave 21. Giv et formelt bevis for hosstående logiske argument. Forsøg dernæst at karakterisere alle udsagnsformer, der kan sluttes ud fra præmisserne (m.a.o., hvilke udsagnsformer kan optræde i stedet for $\neg(Q \Rightarrow R) \vee S \vee T$ i et gyldigt logisk ræsonnement?).

$$\begin{array}{c} P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P) \\ \neg(P \vee \neg(Q \vee R)) \\ R \Rightarrow P \vee S \\ \hline \neg(Q \Rightarrow R) \vee S \vee T \end{array}$$

Opgave 22. Vis, at netop ét af hosstående logiske argumenter er gyldigt og før et formelt bevis for det pågældende argument.

$$\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ B \Leftrightarrow C \\ \neg C \\ \hline \neg A \end{array} \qquad \begin{array}{c} B \Rightarrow A \\ B \Leftrightarrow C \\ \neg C \\ \hline \neg A \end{array}$$

Opgave 23. Her er et argument: Alle studerende fester. Nogle studerende drikker for meget. Ergo, nogle, der drikker for meget, fester. Indfør et passende univers og passende prædikater, så ovenstående argument fås ved specifikation af et logisk argument i prædikatkalkylen. Vis, at argumentet er gyldigt og før et formelt bevis for det.

Opgave 24. Hvordan vil du i prædikatlogikken udtrykke påstanden "Ikke alle, der går i krig bliver dræbt"? (Brug prædikaterne $K(x)$ og $D(x)$).

Opgave 25. Find et logisk argument i prædikatlogikken, så hosstående argument fremkommer på naturlig måde ud fra dette ved specifikation. Diskutér.

$$\begin{array}{l} \text{En sten kan ikke flyve} \\ \text{Morlille kan ikke flyve} \\ \hline \text{Morlille er en sten} \end{array}$$

Opgave 26. Vis gyldigheden (via et formelt bevis i prædikatkalkylen) af følgende argument: "Alle spillere bliver ruineret før eller senere. Ingen, der bliver ruineret før eller senere, er lykkelig. Ergo, ingen spillerer er lykkelige."

Opgave 27. Lad $P(x,y)$, $Q(x,y)$ og $R(x)$ være prædikater i hhv. 2, 2 og 1 variabel. Betragt udtrykket

$$\big(\forall x : P(x,y)\big) \vee \big(\exists y : \big(Q(x,y) \Rightarrow R(x)\big)\big).$$

Gør rede for hvilke variable, der er bundne og hvilke, der er fri. Bemærk, at en variabel kan optræde både bunden og fri i et udtryk.

Er ovenstående udtryk: – et udsagn? – et prædikat af formen $S(x, y)$? – eller ét af formen $S(x)$ eller $S(y)$?

Lad os specificere udtrykket ved som univers at vælge $\mathbb{N}$ og for de indgående prædikater at vælge følgende: $P(x, y) : x^2 + y^2$ er lige, $Q(x, y) : xy$ er lige, $R(x) : x$ er lige.

Hvis vi sætter frie variable i udtrykket til 2, får vi da et sandt udsagn? Og hvad får vi, hvis vi i stedet vælger værdien 3?

Bemærkning. Selvom udtrykket ovenfor er skrevet på fuldt ud lovlig form, vil man nok stå sig ved at vælge andre variabelbetegnelser for at undgå forvirring. F.eks. kunne man have set på det ækvivalente udtryk:

$$\Big(\forall s : P(s, y)\Big) \vee \Big(\exists t : \big(Q(x, t) \Rightarrow R(x)\big)\Big).$$

Opgave 28. I mange situationer er det bekvemt at tillade en notation, hvor man kvantiserer over en del af universet, dvs. tillader udtryk af formen

$$\forall x \text{ så at} \cdots : \cdots \quad \text{eller} \quad \exists x \text{ så at} \cdots : \cdots$$

F.eks. tillader vi notationen $\forall x$ så $P(x) : Q(x)$, hvilket tolkes $\forall x : \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$. Lignende tolkninger anvendes i andre situationer. Hvis vi *ikke* tillader "del-kvantiseringer", hvorledes skulle vi så skrive udsagnet:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Her er $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en given funktion og universet kan vælges til $\mathbb{R}$)? I øvrigt, hvad siger udsagnet om funktionen f? Man skal dog passe på i de situationer, hvor betingelserne, der fortæller, hvilken del-kvantisering, der tænkes på indeholder variable, der optræder i det betragtede udtryk. Diskutér f.eks. hvilken betydning udtrykkene $\forall x < y : xy > 0$ og $\forall y > x : xy > 0$ har, hvis vi bruger ovenstående fortolkning vedrørende delkvantisering. Vis f.eks., at begge udtryk er prædikater med én fri variabel, og hvis vi indsætter samme værdi i begge udtryk for den fri variabel fås udsagn med forskellige sandhedsværdier (med en enkelt undtagelse. Universet i de angivne udtryk tænkes at være $\mathbb{R}$.

Opgave 29. Negér udsagnet

$$\forall x \forall y \exists z \forall w : P(x, z) \wedge \neg Q(z, y, w).$$

Opgave 30. Vis den prædikatlogiske konsekvens:

$$\forall y \exists z \forall w \forall x : P(w, z) \Rightarrow Q(x, y, w) \vdash \forall x \forall y \exists z \forall w : P(w, z) \Rightarrow Q(x, y, w)$$

Hvad mon dette har at gøre med sætningen om at en uniform konvergent følge af funktioner er punktvis konvergent? (Lad f.eks. $f_n :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ for $n \in \mathbb{N}$ og lad $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ og udtryk med brug af logiske tegn betingelserne for at f_n konvergerer punktvis, hhv. uniformt mod f i $]0, \infty[$).

Opgave 31. Lad mig i denne opgave vælge "hensigtsmæssige" betegnelser for de variable i de optrædende prædikater: $S = S(n, N)$, $D = D(n, x, \varepsilon)$ og $D^* = D^*(n, m, \varepsilon)$. Bevis, at følgende argument er gyldigt:

$$\begin{array}{ll} \forall n, m, x, \varepsilon : & \big(D(n, x, \varepsilon) \wedge D(m, x, \varepsilon) \Rightarrow D^*(n, m, \varepsilon)\big) \\ \exists x \forall \varepsilon \exists N \forall n : & \big(S(n, N) \Rightarrow D(n, x, \varepsilon)\big) \\ \hline \forall \varepsilon \exists N \forall n, m : & \big(S(n, N) \wedge S(m, N) \Rightarrow D^*(n, m, \varepsilon)\big). \end{array}$$

(Bemærk: $\forall n, m, x, \varepsilon$ betyder $\forall m \forall m \forall x \forall \varepsilon$. Tilsvarende for $\forall n, m$).

Vis dernæst, ved passende definitioner af de indgående prædikater, hvordan man kan udnytte dette til at vise, at enhver konvergent følge på $\mathbb{R}$ er en Cauchy-følge (se på en given følge $(x_n)_{n \geq 1}$ på $\mathbb{R}$).

Opgave 32. Giv et formelt bevis for gyldigheden af nedenstående argument. Udnyt dette sammen med universel specifikation og universel generalisation til at vise den prædikatlogiske slutningsregel:

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ A \Rightarrow C \\ B \Rightarrow C \\ \hline C \end{array}$$

$$\big(\forall x : P(x)\big) \vee \big(\forall x : Q(x)\big) \models \forall x : P(x) \vee Q(x).$$

Opgave 33. Vis den prædikatlogiske ækvivalens

$$\exists x : \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \equiv \big(\forall x : P(x)\big) \Rightarrow \big(\exists x : Q(x)\big).$$

Opgave 34. Vis de to prædikatlogiske ækvivalenser

$$\big(\forall x : P(x)\big) \vee Q \quad \equiv \quad \forall x : \big(P(x) \vee Q\big), \tag{$*$}$$

$$\forall x : \big(P(x) \Rightarrow Q\big) \quad \equiv \quad \big(\exists x : P(x)\big) \Rightarrow Q. \tag{$\dagger$}$$

Appendix

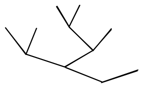
Om associativitet

Her følger en skitse af spændende bemærkninger i relation til Opgave 6. Vi vælger nu additiv skrivemåde i stedet for "bolle-notation": $a_1 + a_2$ i stedet for $a_1 \circ a_2$. Først ser vi på tre forskellige repræsentationer af beregningsmåder for $a_1 + \cdots + a_n$: *Træ*-repræsentation (som i opgaven), *polsk* repræsentation og reræsentation ved en *sti*. To eksempler viser, hvad vi har i tankerne:

I Beregningmåde:

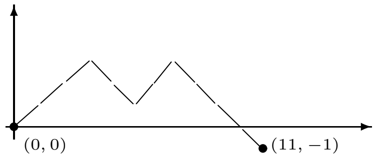
Parantes repr. $\big((a_1 + a_2) + \big((a_3 + a_4) + a_5\big)\big) + a_6$

Træ repr.



Polsk repr. $+ + + - - + + - - - -$

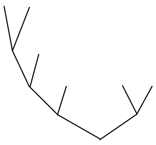
Sti repr.



II Beregningsmåde:

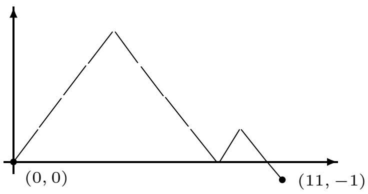
Parantes repr. $\big(((a_1 + a_2) + a_3) + a_4\big) + (a_5 + a_6)$

Træ repr.



Polsk repr. $+ + + + - - - - + - -$

Sti repr.



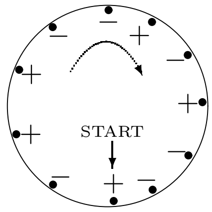
Diskutér disse repræsentationer nærmere. Vis specielt, at de stier, der fremkommer, netop er dem, der forbinder $(0,0)$ med $(2n-1,-1)$ og som helt forløber *over* x-aksen *på nær* det sidste stykke fra $(2n-2,0)$ til $(2n-1,-1)$.

Vis, at man ved *polsk notation* (det vil sige polsk repræsentation) kun behøver $2n-4$ bit til at angive en bestemt beregningsmåde af $a_1 + \cdots + a_n$.

Vis, at antallet c_n af beregningsmåder af $a_1 + \cdots + a_n$ er $\binom{2n-1}{n}\frac{1}{2n-1}$.

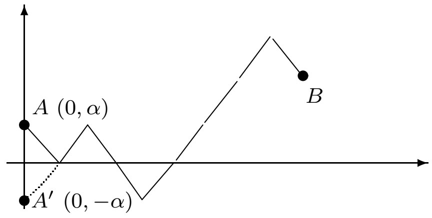
Vejledning: METODE 1 (slavemetoden — *frembringende funktioner*): Se på $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ og på $\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right)^2$!

METODE 2: Vælg $n-1$ +'er blandt $2n-1$ positioner på en orienteret cirkel og bemærk, at præcis én begyndelsesposition giver en tilladt polsk repræsentation.

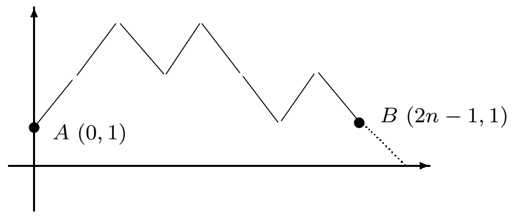


Et eksempel.

METODE 3 (*refleksionsprincippet*): [# = "antal"] #stier $A \rightsquigarrow B$ som rører eller krydser x-aksen er lig med #stier $A' \rightsquigarrow B$ (se figur 1). Indse dette!
Så er #stier $A \rightsquigarrow B$ (figur 2), som ikke rører eller krydser x-aksen = totale # − # af de stier, der gør $= \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} = \binom{2n-1}{n}\frac{1}{2-1}$.
Angående metode 3: Læs videre om andre spændende anvendelser i *Feller: An introduction to Probability Theory, Vol. I, kapitel III* — et klassisk værk.



Figur 1.



Figur 2.

Bevis for udsagnslogikkens fuldstændighed

Klausuler skrives på formen 0 eller 1 (de to trivielle) eller

$$P_1 \vee \cdots \vee P_n \vee \neg P_{n+1} \vee \cdots \vee \neg P_{n+m},$$

hvor $0 \leq n$ og $0 \leq m$ og ikke både $n=0$ og $m=0$ (er $n=0$ mangler P'er og er $m=0$ mangler $\neg P$'er). Her er det underforstået, at P'er betegner udsagnsvariable.

Da enhver udsagnsform er ækvivalent med en konjunktion af én eller flere klausuler, kan vi, når vi skal undersøge, hvad der kan sluttes ud fra givne udsagnsformer, reducere undersøgelsen til en situation, hvor vi spørger, hvilke klausuler, der kan sluttes ud fra givne klausuler. Overvej! (Bemærk, at reduktion til konjunktiv normalform kan gennemføres ved et formelt bevis).

Hovedresultatet i udsagnslogikken, at *ethvert gyldigt argument har et formelt bevis*, kommer derfor ud på følgende:

Sætning. *Lad $K_1, K_2, \dots, K_n$ samt K^* være klausuler og antag, at argumentet*

$$\begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \\ \hline K^* \end{array} \qquad (*)$$

er gyldigt. Da findes der et formelt bevis for dette argument.

For at bevise det bemærker vi først, at vi kan tillade os at antage, at $K_1, \ldots, K_n$ er *resolutionslukket*, hvormed vi mener, at såfremt resolution kan udføres på to af klausulerne, så giver dette enten tautologien 1 eller en klausul, der allerede er med blandt $K_1 \ldots, K_n$. Overvej! Vi kan også antage, at tautologien 1 *ikke* findes blandt $K_1 \ldots, K_n$ eller K^* (overvej igen!).

Lad $P_1, \ldots, P_N$ betegne de udsagnsvariable, der indgår i mindst én af klausulerne $K_1, \ldots, K_n$ (enten negeret eller unegeret). Så er $N \geq 1$. Vi kan også antage, at K^* enten er absurditeten 0 eller en klausul, der kun indeholder udsagnsvariablene $P_1, \ldots, P_N$ (i negeret eller unegeret form og ikke nødvendigvis alle).

Alle ovenstående små reduktioner—som vi i det følgende antager gennemført—er egentlig ganske trivielle. Den sidste reduktion, vi skal gennemføre, går ud på at indse, at såfremt sætningen kan vises i specialtilfældet, hvor K^* er absurditeten 0, så kan vi vise sætningen generelt. Hvis K^* ikke er absurditeten, kan vi gerne antage, at alle indgående udsagnsvariable indgår unegerede, og at det drejer sig om de første s udsagnsvariable. M.a.o., vi kan antage, at K^* er udsagnesformen $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_s$ (med $1 \leq s \leq N$).

Antagelsen i sætningen er, at $(*)$ er et gyldigt argument. Vi skal vise, at der findes et formelt bevis. Dette gøres ved at vise, at der blandt klausulerne $K_1, \ldots, K_n$ findes en *delklausul* af K^*, dvs. en klausul, der enten er absurditeten 0 eller en disjunktion af visse af de variable $P_1, \ldots, P_s$.

Beviset herfor føres indirekte. Antag altså, at ingen delklausul til K^* optræder blandt $K_1, \ldots, K_n$. Vi skal få en modstrid frem ved at vise, at der findes en specifikation af sandhedsværdier for $P_1, \ldots, P_N$ så alle klausuler $K_1, \ldots, K_n$ er sande, men K^* falsk. Vi specificerer først, at $P_1, \ldots, P_s$ alle skal være falske. Vi behøver så kun interessere os for de klausuler K_i, der enten ingen P_j'er med $1 \leq j \leq s$ indeholder eller kun indeholder sådanne P_j'er i unegeret form. Lad os holde styr på det i skemaform:

	$P_1 \quad\quad P_s$	$P_{s+1} \quad\quad P_N$
K_1 $\vdots$	mindst ét $-$ i hver række	
$\vdots$ K_n	ingen eller kun $+$	I

Her tænker vi os et $+$, hvis pågældende udsagnsvariabel står i unegeret form, et $-$, hvis den står i negeret form og ingen tegn, hvis udsagnsvariablen ikke optræder i pågældende klausul. Vi har tænkt os, at de første klausuler netop er dem, der indeholder mindst et $\neg P_j$ med $1 \leq j \leq s$.

Vi ser nu på restriktionerne af de sidste klausuler svarende til skemaets blok I (dvs. svarende til $P_{s+1}, \ldots, P_N$). Det er vist klart, hvad jeg mener med disse restriktioner (faktisk delklausuler). Ingen af de pågældende delklausuler er absurditeten 0 (overvej!). Og samlingen af disse delklausuler ses at være resolutionslukket (overvej!). Hermed har vi faktisk reduceret problemet til følgende problem:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & P_1 & \cdots & \cdots & P_N \\
\hline
K_1 & & & & \\
\vdots & & & & \\
K_n & & & &
\end{array}$$

Problem: Givet sæt af klausuler $K_1, \ldots, K_n$ som er resolutionslukket og ikke indeholder absurditeten. Kan vi så foreskrive sandhedsværdier for de indgående udsagnsvariable $P_1, \ldots, P_N$, så alle K'erne bliver sande? (Præcisér evt. dette—og indse, at reduktionen svarer til en antagelse om at K^* er absurditeten).

For at løse dette problem, lægger vi os først fast på en sandhedsværdi for P_1. Dette sker ved at bemærke, at enten vil alle klausuler, der indeholder leddet P_1 indeholde yderligere led, eller også vil alle klausuler, der indeholder leddet $\neg P_1$ indeholde yderligere led. Lad os antage det første er tilfældet. Så tillægges P_1 sandhedsværdien "falsk". Ved at udelade alle klausuler, der indeholder leddet $\neg P_1$, samt at se på restriktioner af de tilbageværende klausuler svarende til at P_1 "skæres bort", er reduceret til en lignende situation som den vi startede med. Så fastlægges sandhedsværdien for P_2 og ræsonnementet fortsætter til vi er færdige (formelt: induktion). Voila!

Naiv mængdelære

1 Mængder

En *mængde* er en samling objekter, kaldet mængdens *elementer*, der kan sammenfattes til et hele. For hvert objekt skal det være klart, om objektet er med i mængden eller ej.

Notation: $x \in A$ for "x er element i mængden A". Og $x \notin A$ betyder $\neg(x \in A)$.

Identitet: Er A og B mængder, opfatter vi A og B som samme mængde (identiske mængder), og skriver $A = B$, hvis A og B indeholder samme elementer. Mere præcist:

$$A = B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

1.1 Delmængde

A er en *delmængde* af B (notation: $A \subseteq B$), hvis $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$. A er en *mængde!ægte delmængde* af B, hvis $A \subseteq B$ og $A \neq B$. Vi har: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

Nogle konkrete mængder:

$\emptyset$	*den tomme mængde:* har ingen elementer ($\forall x : x \notin \emptyset$)
$\mathbb{N}$	mængden af de *naturlige tal:* $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	mængden af *hele tal:* $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	mængden af *rationale tal*
$\mathbb{R}$	mængden af *reelle tal*
$\overline{\mathbb{R}}$	mængden af*udvidet reelle tal* ($+\infty$ og $-\infty$ tilføjes til $\mathbb{R}$)
$\mathbb{R}^n$	det *n-dimensionale reelle talrum*
$\mathbb{C}$	mængden af *komplekse tal*
$\mathbb{C}^n$	det *n-dimensionale komplekse talrum*
$\mathbb{R}_+$	mængden af *positive reelle tal*
$[a, b]$	lukket interval: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$[a, b[$	halvlukket interval: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$]a, b]$	halvlukket interval: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$]a, b[$	åbent interval: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

I grene af matematikken, der ligger tæt på grundlaget regnes $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ som mængden af naturlige tal (jeg skal dog nok prøve på at huske at tilkendegive om 0 er med eller ej ved at skrive $\mathbb{N}$ og $\mathbb{N}_0$).

1.2 Notation for mængder

Vi har allerede brugt $\{\cdots\}$. Hvis $P(x)$ er en prædikatform med x som variabel (og universet er "mængder"—præciseres senere), og hvis der findes en mængde A så $\forall x : (x \in A \Leftrightarrow P(x))$, skriver vi også $A = \{x \mid P(x)\}$. *Advarsel*: Se senere vedr. Russell's paradox ....

Notation som $\{x \in A \mid P(x)\}$ bruges for $\{x \mid P(x) \wedge (x \in A)\}$.

Singleton: En mængde med kun ét element, altså $\{x\}$, hvis elementet er x.

En n*-mængde* er en mængde med n elementer.

En *tællelig mængde* er en uendelig mængde, hvis elementer kan nummereres med de naturlige tal. En *nummerabel mængde* er en mængde, der enten er endelig eller tællelig. Man kan let komme til at forveksle disse begreber og det er derfor ofte hensigtsmæssigt at præcisere, hvad man mener.

1.3 Ordnede par, n-tupler, følger, familier

Lad x'er og y'er betegne mulige elementer i en mængde (faktisk mere korrekt—når vi forlader det naive—at se på vilkårlige mængder). Med (x, y) betegnes det *ordnede par* af x og y, karakteriseret ved at $(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$. Vi har $(x, y) \neq (y, x)$ (med mindre $x = y$).

Vi definerer *n-tupler, følger* og *familier (indicerede familier)* som: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, hhv. $(x_1, x_2, \ldots)$, hhv. $(x_i)_{i\in I}$. Meningen er vist klar: I følgen $(x_1, x_2, \ldots) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er x_1 det første, x_2 det andet element osv., og i $(x_i)_{i\in I}$ er I en *indeksmængde* (tilfældet med følger svarer til $I = \mathbb{N}$) og x_i er det til i hørende element i familien.

Er $(x_i)_{i\in I}$ en familie og $J \subseteq I$, kan vi se på en ny familie $(x_i)_{i\in J}$, hvor i kun gennemløber J. Denne familie kaldes *restriktionen* af $(x_i)_{i\in I}$ til J. En sådan familie kan vi også omtale som en *delfamilie* af $(x_i)_{i\in I}$.

1.4 Komplement, differensmængde, symmetrisk differens

Betragtes i en given sammenhæng en fast grundmængde X og er $A \subseteq X$, defineres *komplementet* A^c som mængden $\{x \in X \mid x \notin A\}$. Mere generelt, for to mængder A og B defineres *differensmængden* $B\backslash A$ som $\{x \in B \mid x \notin A\}$, altså $B\backslash A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$. Den *symmetriske differens* af A og B betegnes og defineres som følger: $A \triangle B = \{x \mid (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)\}$. Vi har således $A \triangle B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. Komplement betegnes også med tegnet $\complement$, altså $\complement A$ i stedet for A^c. Af og til er den ene notation bekvem, af og til den anden.

1.5 Foreningsmængde, fællesmængde, produktmængde, disjunkt sum

Lad $(A_i)_{i\in I}$ være en familie af mængder. Vi definerer:

$$\begin{array}{ll}
\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\} & (\textit{foreningsmængde}) \\
\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\} & (\textit{fællesmængde}) \\
\prod_{i\in I} A_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I : x_i \in A_i\} & (\textit{produktmængde}) \\
\sum_{i\in I} A_i = \{(t, x) \mid \exists i \in I : t = i \wedge x \in A_i\} & (\textit{disjunkt sum} \text{ eller} \\
 & \quad \textit{disjunkt foreningsmængde})
\end{array}$$

Den sidste definition vedrørende disjunkt sum er ikke så vigtig.

Vigtige specialtilfælde: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$ for foreningsmængde, fællesmængde og produktmængde af to mængder A og B (svarende til "familien"(A, B)). Andre specialtilfælde: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$, $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$, $A_1 \times A_2 \times \cdots$.

A og B er *disjunkte*, hvis $A \cap B = \emptyset$. Familien $(A_i)_{i \in I}$ er disjunkt eller (som flere foretrækker at sige) består af parvis disjunkte mængder såfremt $\forall i_1 \forall i_2 \, (i_1 \in I \wedge i_2 \in I \wedge i_1 \neq i_2 \Rightarrow A_{i_1} \cap A_{i_2} = \emptyset)$ (kort udtrykt: $\forall i_1 \neq i_2 : A_{i_1} \cap A_{i_2} = \emptyset$).

1.6 Spor

Ses på delmængder $A, B, \ldots$ af mængden X og ønsker vi at "gå ned til en mindre mængde"X_0, hvor $X_0 \subseteq X$, taler vi af og til om *sporet* af A på X_0, som blot er mængden $A \cap X_0$, og vi skriver $\operatorname{tr}_{X_0} A$ for denne mængde (tr=trace=spor).

1.7 Regneregler

Der gælder et hav af regneregler, der knytter de indførte begreber sammen. De aller-aller fleste er banale og ikke værd at huske på, da man enten hurtigt kan udlede dem til lejligheden eller evt. slå dem op. Hyppigt optræder **de Morgans regler** (i mængdeteoretisk skikkelse):

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \quad ; \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

eller, mere generelt,

$$A \backslash \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A \backslash A_i \quad ; \quad A \backslash \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A \backslash A_i$$

samt de *distributive regler* (i mængdeteoretisk skikkelse)

$$A \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A \cup A_i \quad ; \quad A \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A \cap A_i.$$

1.8 Potensmængde, familier (ikke-indicerede)

Ved *potensmængden* $\mathcal{P}(X)$ hørende til mængden X forstås mængden af delmængder af X:

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

Et element i $\mathcal{P}(X)$ er altså en delmængde af X. En delmængde af $\mathcal{P}(X)$, lad os sige $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, er en mængde af delmængder af X. Vi omtaler af og til $\mathcal{F}$ som en (ikke indiceret) *familie* af delmængder af X. For en sådan defineres foreningsmængde og fællesmængde ved hhv.

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \mid \exists A \in \mathcal{F} : x \in A\} \quad ; \quad \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \mid \forall A \in \mathcal{F} : x \in A\}.$$

I stedet for notationen vist her, kan man anvende den mere strømlinede notation $\bigcup \mathcal{F}$ og $\bigcap \mathcal{F}$.

Hvis $\mathcal{F}$ er indiceret, dvs. der findes en indiceret familie af mængder $(A_i)_{i \in I}$ så $\mathcal{F} = \{A \mid \exists i \in I : A = A_i\}$ ses, at

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \bigcup_{i \in I} A_i \quad ; \quad \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

2 Brolægninger

Jeg har en svaghed—som ikke deles af alle—for at kalde en familie af delmængder af en mængde X for en *brolægning* på X. At $\mathcal{F}$ er en brolægning på X betyder altså blot, at $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. For at undgå trivielle tilfælde, antages normalt—hvilket vi også fremover vil gøre—at $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Parret $(X, \mathcal{F})$ kaldes så et *brolagt* rum. Og mængderne i $\mathcal{F}$ (altså A med $A \in \mathcal{F}$) kaldes *stenene* i brolægningen. For brolægninger indføres en særlig notation, der gør det nemt at udtrykke, at brolægningen har visse strukturelle egenskaber. Sådanne strukturelle egenskaber er en vigtig mulighed—men ikke den eneste—for at udtrykke, at X har en eller anden struktur.

Vi bruger bogstaverne "f", "c" og "a" til at udtrykke hhv. "endelig" ($f$inite), "tællelig" ($c$ountable) og "vilkårlig" ($a$rbitrary). Disse bogstaver kan så kombineres på forskellig vis med $\cup$- og med $\cap$-symbolet, og desuden optræde sammen med symbolerne ^{c}, $\setminus$ og evt. andre. Meningen med dette fremgår af nogle eksempler.

Eksempel 2.1 (En topologi). : Lad X være en mængde. Ved en *topologi* på X forstås en $(\emptyset, X, \cap f, \cup a)$-lukket brolægning på X. Kaldes brolægningen $\mathcal{G}$, forlanger vi følgende:

1. $\emptyset \in \mathcal{G}$,
2. $X \in \mathcal{G}$,
3. $(G_i)_{i\in I}$ en endelig familie af mængder i $\mathcal{G} \Rightarrow \bigcap_{i\in I} G_i \in \mathcal{G}$,
4. $(G_i)_{i\in I}$ en vilkårlig familie af mængder i $\mathcal{G} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} G_i \in \mathcal{G}$.

Dette er, hvad der ligger i kravet om at $\mathcal{G}$ skal være $(\emptyset, X, \cap f, \cup a)$-lukket. Vi siger også at $(X, \mathcal{G})$ er en *topologi* eller et *topologisk rum*. Mængderne (stenene) i $\mathcal{G}$ kaldes de *åbne mængder*.

Definitionen er en af de vigtigste i matematikken, men den elegante definition fortæller ikke meget om hensigten dermed: At give en ramme for studiet af konvergens og kontinuitet. Det ser vi nærmere på i øvelserne! Og den studerende møder senere teorien for topologiske rum på kurset Mat 3 GT. □

Eksempel 2.2 (En Borelstruktur). : Lad X være en mængde. Ved en *Borelstruktur* på X forstås en $(^c, \cup c)$-lukket brolægning på X. Kaldes brolægningen $\mathcal{B}$, er kravene til $\mathcal{B}$ følgende to:

1. $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B^c \in \mathcal{B}$,
2. $B_k \in \mathcal{B}$ for alle $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{B}$.

Dette er, hvad der ligger i kravet om at $\mathcal{B}$ skal være $(^c, \cup c)$-lukket.

Vi siger også at $\mathcal{B}$ er en *Borelstruktur* eller et *måleligt rum*, og vi refererer til mængderne (stenene) i $\mathcal{B}$ som de *målelige* mængder (ikke så gerne som Borelmængderne, da denne betegnelse reserveres til visse specielle, særligt betydningsfulde Borelstrukturer). Det bør også nævnes, at betegnelsen σ-algeba ("sigma-algebra") hyppigt bruges i stedet for Borelstruktur.

Igen drejer det sig om en uhyre vigtig definition i matematikken. Og igen er hensigten bestemt ikke klar ud fra den elegante definition. Hensigten er at afgrænse et system af delmængder af X, man i en given sammenhæng kan tillægge et "mål", dvs. en talværdi, der angiver, hvor "stor" den pågældende mængde er. "Målet" kunne f.eks. være 1-dimensional udstrækning ("længde"), hvis $X = \mathbb{R}$, 2-dimensional udstrækning ("areal"), hvis $X = \mathbb{R}^2$, 3-dimensional udstrækning ("volumen"), hvis $X = \mathbb{R}^3$, sandsynlighed, hvis X er et udfaldsrum. Men der er mange andre muligheder—hvoraf vi måske vil se lidt nærmere på nogle ret specielle situationer, man støder på i grundlagsforskningen. Mindre specielle og mere anvendelige situationer behandles på Mat 3 MI. □

Ovenstående eksempler på elegante måder at udtrykke struktur på via brolægninger, så man hurtigt kan overskue de krav, der stilles, er blot to ud af et væld af muligheder. Her er en liste over de symboler, der hyppigst indgår for brolægninger på en given mængde X:

$$\emptyset, X, {}^c, \setminus, \cup f, \cup c, \cup a, \cap f, \cap c, \cap a, -, \triangle, \Sigma f, \Sigma c, \Sigma a,$$

hvor "$-$" er ægte differens ($A \setminus B$, hvor $A \supseteq B$), og "Σ" refererer til disjunkt sum.

2.1 Eksempler på sprogbrug

Endnu en bekvem sprogbrug for brolægninger vil vi indføre. I stedet for at gøre det helt generelt, ser vi på de to vigtige eksempler: topologier og Borelstrukturer.

Lad X være en mængde. Lad os tænke os, at vi søger at fastlægge en topologi, altså en $(\emptyset, X, \cap f, \cup a)$-brolægning på X, men at vi ikke umiddelbart kan karakterisere eller nedskrive brolægningen, vi er ude efter. Derimod har vi visse forestillinger om visse mængder, der skal være åbne. Problemet er så, om der findes en topologi med disse mængder (samt muligvis andre) som åbne mængder og, mere interessant, hvilke mængder vi tvinges til at medtage. Findes der et mindste system af mængder, vi kan medtage?

Kvalitativt, idémæssigt er problemstillingen helt på linie med den I kender fra Mat 1LA, hvor man til givne vektorer $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ spørger efter det mindste lineære underrum, der indeholder disse.

Nu en helt præcis definition: Lad $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$. Hvis $\mathcal{G}$ er en topologi på X således at

1. $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$ og
2. $\mathcal{G}^*$ topologi på X, $\mathcal{G}^* \supseteq \mathcal{G}_0 \Rightarrow \mathcal{G}^* \supseteq \mathcal{G}$,

så kaldes $\mathcal{G}$ *topologien frembragt* af $\mathcal{G}_0$ eller, i brolægningssproget, for $(\emptyset, X, \cap f, \cup a)$-afslutningen af $\mathcal{G}_0$. Notation: $\tau(\mathcal{G}_0)$.

Kort kan vi karakterisere $\tau(\mathcal{G}_0)$ som den mindste topologi, der indeholder $\mathcal{G}_0$.

Ganske tilsvarende: Hvis $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$ og $\mathcal{B}$ er en Borelstruktur på X, således at

1. $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{B}_0$,
2. $\mathcal{B}^*$ Borelstruktur på X, $\mathcal{B}^* \supseteq \mathcal{B}_0 \Rightarrow \mathcal{B}^* \supseteq \mathcal{B}$,

så kaldes $\mathcal{B}$ *Borelstrukturen* (eller *σ-algebraen*) *frembragt* af $\mathcal{B}_0$ eller, i brolægningssproget, for $({}^c, \cup c)$-afslutningen af $\mathcal{B}_0$. Notation: $\sigma(\mathcal{B}_0)$.

Mere generelt, hvis $(\cdots)$ symboliserer en liste i vort notationssystem (ovenfor så vi på hhv. $(\emptyset, X, \cap f, \cup a)$ og $({}^c, \cup c)$), og $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$, så betegner $(\cdots)$-afslutningen af $\mathcal{E}_0$ den mindste $(\cdots)$-brolægning, der indeholder $\mathcal{E}_0$, såfremt denne findes.

Notation: $\mathrm{cl}_{(\ldots)}(\mathcal{E}_0)$. F.eks. er $\tau(\mathcal{G}_0) = \mathrm{cl}_{(\emptyset, X, \cap f, \cup a)}(\mathcal{G}_0)$ og $\sigma(\mathcal{B}_0) = \mathrm{cl}_{({}^c, \cup c)}(\mathcal{B}_0)$.

Det viser sig, at med de kombinationsmuligheder, vi har indført, eksisterer $\mathrm{cl}_{(\ldots)}(\mathcal{E}_0)$ altid (se øvelserne). Noget andet er, at $(\cdots)$-afslutningen ikke altid er lige let at karakterisere. Der er f.eks. himmelhvid forskel på at karakterisere $\tau(\mathcal{G}_0)$ og $\sigma(\mathcal{B}_0)$. Den første brolægning (det topologiske tilfælde) er "pladder let" at karakterisere (se øvelserne). Også $\sigma(\mathcal{B}_0)$ kan konstrueres mere eksplicit, men det er langt vanskeligere og må vente til vi har indført ordinaltallene.

2.2 co-brolægning, sporbrolægning, produktbrolægning, sumbrolægning

Er $\mathcal{E}$ en brolægning på X, defineres *co-brolægningen* ved

$$\mathrm{co}(\mathcal{E}) = \{E^c \mid E \in \mathcal{E}\}.$$

Er f.eks. $\mathcal{E}$ brolægningen af endelige delmængder af X, er $\mathrm{co}(\mathcal{E})$ brolægningen af *co-endelige* mængder. Og er $\mathcal{E}$ brolægningen af tællelige delmængder af X, er $\mathrm{co}(\mathcal{E})$ brolægningen af *co-tællelige* mængder.

Er $\mathcal{E}$ en brolægning på X og $X_0 \subseteq X$, defineres *sporet* af $\mathcal{E}$ på X_0 som brolægningen

$$\mathrm{tr}_{X_0}(\mathcal{E}) = \{\mathrm{tr}_{X_0}(E) \mid E \in \mathcal{E}\},$$

altså

$$\mathrm{tr}_{X_0}(\mathcal{E}) = \{X_0 \cap E \mid E \in \mathcal{E}\}.$$

Er $\mathcal{E}$ en brolægning på X og $\mathcal{F}$ en brolægning på Y, defineres *produktbrolægningen* $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ som brolægningen på $X \times Y$ bestående af alle mængder $E \times F$ med $E \in \mathcal{E}$ og $F \in \mathcal{F}$. Produktbrolægninger $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$ for endeligt mange brolægninger defineres analogt, derimod viser erfaringen, at man ved definitionen af produktbrolægning for uendeligt mange brolægninger står sig ved at gå lidt anderledes til værks, end man umiddelbart skulle tro.

Lad $\mathcal{E}_i$ være brolægninger på mængderne X_i, $i \in I$, og antag, at $X_i \in \mathcal{E}_i$ for alle $i \in I$. Produktbrolægningen $\times_{i\in I}\mathcal{E}_i$ er så brolægningen på $\prod_{i\in I} X_i$ af mængder af formen $\prod_{i\in I} E_i$ med $E_i \in \mathcal{E}_i$ for alle $i \in I$, således at $E_i = X_i$ for alle på nær højst endelig mange $i \in I$.

Man kan også definere *sumbrolægning*, der dog ikke er så vigtig.

Lad $\mathcal{E}_i$ være brolægninger på mængderne $X_i, i \in I$. Så er sumbrolægningen givet ved $\sum_{i\in I} \mathcal{E}_i = \{E \subseteq \sum_{i\in I} X_i \mid \forall i \in I : E \cap X_i \in \mathcal{E}_i\}$. Her identificeres X_i med $\{(i,x) \mid x \in X_i\}$.

Vi slutter dette afsnit med et enkelt konkret resultat om $(\cdots)$-afslutningen af en brolægning i en situation, hvor denne kan gives ganske let. Det karakteristiske er, at $(\cdots)$ indeholder begge tegnene "$\cup$" og "$\cap$", *gitteroperationerne*, og at en af disse optræder i "endelig udgave" ($\cup f$ eller $\cap f$).

Som forberedelse først nogle helt banale betragtninger samt endnu lidt notation. Det banale drejer sig om tilfældet, hvor $(\cdots)$ kun indeholder ét af tegnene "$\cup$" eller "$\cap$". Her er der ingen problemer. F.eks. består $\mathrm{cl}_{\cup f}(\mathcal{E})$ af alle endelige foreningsmængder af mængder i $\mathcal{E}$. Tilsvarende for $\mathrm{cl}_{\cup c}(\mathcal{E}), \mathrm{cl}_{\cup a}(\mathcal{E}), \mathrm{cl}_{\cap f}(\mathcal{E}), \mathrm{cl}_{\cap c}(\mathcal{E}), \mathrm{cl}_{\cap a}(\mathcal{E})$. Vi indfører notationen $\mathcal{E}_{\cup\alpha}$ for $\mathrm{cl}_{\cup\alpha}(\mathcal{E})$, hvor "$\alpha$" er ét af tegnene "$f$", "$c$" eller "$a$". Tilsvarende indføres $\mathcal{E}_{\cap\alpha}$ for $\mathrm{cl}_{\cap\alpha}(\mathcal{E})$. Vi har altså (lidt sjusket skrevet):

$$\mathcal{E}_{\cup\alpha} = \Big\{ \bigcup_{i\in I} E_i \mid (E_i)_{i\in I} \text{ familie af mængder fra } \mathcal{E} \text{ og } I \text{ er endelig,} \\ \text{tællelig eller vilkårlig svarende til } \alpha = f, c, \text{ el. } a \Big\}$$

og tilsvarende for $\mathcal{E}_{\cap\alpha}$.

Endelig vedtager vi, at $\mathcal{E}_{\cup\alpha,\cap\beta}$ betyder $(\mathcal{E}_{\cup\alpha})_{\cap\beta}$ og at $\mathcal{E}_{\cap\alpha,\cup\beta}$ betyder $(\mathcal{E}_{\cap\alpha})_{\cup\beta}$. Og selvom vi allerede har overlæsset læseren med masser af nye begreber og notation, nævner vi, at for de tællelige operationer—der i mange sammenhænge er specielt vigtige—indføres ultrakort notation, nemlig $\mathcal{E}_\sigma$ for $\mathcal{E}_{\cup c}$ og $\mathcal{E}_\delta$ for $\mathcal{E}_{\cap c}$, og man taler om mængderne i $\mathcal{E}_\sigma$ hhv. $\mathcal{E}_\delta$ som $\mathcal{E}_\sigma$-hhv. $\mathcal{E}_\delta$-mængder.

Sætning 2.3. *Lad $\mathcal{E}$ være en brolægning på en mængde X og lad α stå for ét af tegnene "f", "c" eller "a". Da gælder:*

$$\mathrm{cl}_{\cup f, \cap\alpha}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_{\cup f, \cap\alpha},$$

$$\mathrm{cl}_{\cap f, \cup\alpha}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_{\cap f, \cup\alpha}.$$

Bevis. (Kortfattet!) Af den generelle identitet

$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i} E_{i,j} = \bigcup_{(j_i)}\bigcap_{i\in I} E_{i,j_i},$$

hvor foreningsmængden på højre-siden er over alle familier $(j_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} J_i$, udleder vi den sidste af de anførte ligheder i sætningen. Den første lighed følger af den sidste ved dualitet (dvs. spil på $A \leftrightarrow A^c$, de Morgan, ...). □

2.3 Overdækning, klassedeling

Lad $\mathcal{E}$ være en brolægning på X og lad $X_0 \subseteq X$. Vi siger, at $\mathcal{E}$ er en *overdækning* af X_0, såfremt $X_0 \subseteq \bigcup_{E\in\mathcal{E}} E$. Vi siger, at $\mathcal{E}$ er en *klassedeling* af X såfremt $\mathcal{E}$ er en overdækning af X med ikke-tomme mængder og $\mathcal{E}$ består af parvis disjunkte mængder. Betingelserne er altså:

1. $\forall E \in \mathcal{E} : E \neq \emptyset$,
2. $\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E = X$, og
3. $\forall E \in \mathcal{E} \forall F \in \mathcal{E} : E \neq F \Rightarrow E \cap F = \emptyset$.

Har vi en indiceret familie af delmængder af X, lad os sige $(E_i)_{i\in I}$, siger vi, at familien er en overdækning af $X_0 \subseteq X$, såfremt $X_0 \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i$, og vi siger, at $(E_i)_{i\in I}$ er en *klassedeling* af X, såfremt

1. $\forall i \in I : E_i \neq \emptyset$,
2. $\bigcup_{i\in I} E_i = X$, og
3. $\forall i \in I \forall j \in I : i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$.

Faktisk er de første definitioner (via brolægninger) de primære, og vi benytter kun de sidste definitioner, når vi finder det bekvemt at indicere de mængder, vi arbejder med, og når der ikke kan opstå misforståelser. (Der er en subtil forskel på de to måder at anskue tingene på, idet en indicering indeholder information om indeksmængden, og denne er uden betydning for begreberne overdækning og klassedeling; i praksis giver dette ikke problemer, så hvis vi synes, det letter fremstillingen i en given situation, indicerer vi uden videre).

3 Afbildninger

Afbildning og *funktion* bruges synonymt, dog med en tendens til at reservere "funktion" til situationer, hvor værdierne er tal.

At f er en *afbildning fra X til Y* (eller fra X ind i Y) betyder, at

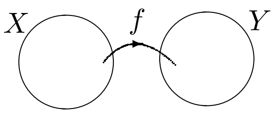
$$f \subseteq X \times Y \quad \text{og at} \quad (x,y) \in f,\, (x,y') \in f \Rightarrow y = y'.$$

Bemærkning 3.1. Mange—også jeg—bruger tit "," i stedet for "$\wedge$").

Definitionsmængde og *værdimængde* defineres ved hhv.

$$\begin{aligned}\mathrm{Dm}(f) &= \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x,y) \in f\},\\ \mathrm{Vm}(f) &= \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x,y) \in f\}.\end{aligned}$$

Hvis $(x,y) \in f$ skrives også $y = f(x)$. Denne velkendte notation afspejler bedre vore "fornemmelser" vedrørende, hvad en afbildning er, end ovenstående formelle definition via en delmængde af produktmængden $X \times Y$. Vi tænker jo normalt på en afbildning som en tilknytningsregel, der til visse elementer x knytter et velbestemt element y, betegnet $f(x)$ og kaldet *funktionsværdien* af f i x eller *billedelementet* svarende til x. Og når vi endelig tænker på en afbildning som en delmængde af den relevante produktmængde—og det gør vi sådan set tit, især for X og Y lig med $\mathbb{R}$ eller delmængder heraf, thi da får vi et godt visuelt overblik over afbildningen—er vi vel vant til at tænke på dette som noget *andet* end afbildningen selv, og vi taler om afbildningens *graf.* Men faktisk kommer det ud på ét, og formelt set er det mere hensigtsmæssigt at introducere afbildningsbegrebet som vi gjorde via en delmængde af en produktmængde. Herved fokuseres på et mere generelt, abstrakt funktionsbegreb, som selvfølgelig finder anvendelse i alle de situationer, vi kender så godt, hvor der foreligger en konkret forskrift, der til givet x tillader os at beregne funktionsværdien $f(x)$. Men det er netop et hovedformål—også set i historisk lys—at frigøre sig fra sådanne konkrete forestillinger og tillade, at man opererer med vilkårlige afbildninger. Erfaringen har vist, at denne grad af abstraktion er overordentlig nyttig, ja nærmest en forudsætning for den rivende udvikling af matematikken og dens anvendelser, som har fundet sted gennem de seneste 1-200 år. Tidligere var matematikerne bundet af et underforstået krav om en konkret forskrift for at kunne arbejde med en funktion. Nu kan vi sige "lad f være en afbildning" uden at være hæmmet af konkrete krav, og for at støtte vore forestillinger om, hvad vi mener hermed, laver vi måske en simpel figur som den viste.



Er $\mathrm{Dm}(f) = X$ taler vi om en afbildning *af* X (snarere end fra X) med værdier i Y. Vi bruger notation som $f : X \to Y$ for at tilkendegive, at $\mathrm{Dm}(f) = X$. En anden notation, der er bekvem, illustreres af følgende eksempler:

"... betragt funktionen $x \curvearrowright x^2 - 1 \ldots$"

eller (hvis det ikke var klart, hvad definitionsmængden tænkes at være)

"... betragt funktionen $x \curvearrowright x^2 - 1$; $x \in \mathbb{R} \ldots$".

Og endnu et eksempel:

"... sumfunktionen $f + g$ defineres som funktionen $x \curvearrowright f(x) + g(x) \ldots$",

hvor vi selvfølgelig ligeså godt kunne have skrevet

"... sumfunktionen $f + g$ defineres ved $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$; $x \in \cdots$".

3.1 Surjektion, injektion, bijektion, indlejring

En lille spidsfindig detalje: Antag X, X^*, Y og Y^* er mængder med $X \subseteq X^*$ og $Y \subseteq Y^*$, og at f er en afbildning fra X til Y. Vi kan da også betragte f som en afbildning fra X^* til Y^*, og man kan spørge, om dette er samme afbildning som f. Og her er svaret "tjah, det kommer an på ...", idet der ud fra et formelt synspunkt ingen forskel er, mens det i praksis meget ofte er sådan, at man har helt faste mængder X og Y i tankerne, således at disse er underforstået. Således kan man sige, at f er *overalt defineret*, som udtryk for at $\mathrm{Dm}(f) = X$, når det er klart, hvilken mængde X, man har i tankerne. Og man kan sige, at f er *surjektiv* (eller en *surjektion*) for at udtrykke, at $\mathrm{Vm}(f) = Y$, hvilket kræver, at man ved, hvilken mængde Y, der tænkes på.

En afbildning f er *injektiv* (eller en *injektion*), såfremt implikationen

$$(x, y) \in f,\ (x', y) \in f \Rightarrow x = x', \quad \text{altså såfremt} \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

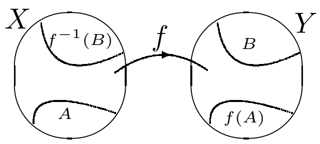
gælder.

En afbildning, der er overalt defineret, injektiv og surjektiv hedder en *bijektiv* afbildning eller en *bijektion*. Denne definition—som er central—kræver, at mængderne X og Y er underforstået. For at understrege dette, kunne vi også have formuleret definitionen ved at sige, at $f : X \to Y$ er en bijektion, såfremt f er både injektiv og surjektiv. Den *identiske afbildning* af X ind i X, dvs. afbildningen $x \curvearrowright x$, $x \in X$, er et trivielt—men vigtigt—eksempel på en bijektion. Den betegnes hyppigt id_X.

Er $f : X \to Y$ injektiv, giver flere forfattere udtryk herfor notationsmæssigt ved at skrive $f : X \hookrightarrow Y$. I så fald er $f : X \to \mathrm{Vm}(f)$ en bijektion, og man kan opfatte $\mathrm{Vm}(f)$ som en "kopi" af X, indlejret i Y. Dette suggestive billede kan være nyttigt, og man omtaler derfor i mange sammenhænge f som en *indlejring* af X i Y, når $f : X \to Y$ er injektiv. Såfremt X_0 er en delmængde af X, er id_{X_0} en indlejring af X_0 i X, den *naturlige indlejring* af X_0 i X.

3.2 Billede og urbillede

Lad f være en afbildning fra X til Y. Tillad mig en naiv betragtning: Mængden X tænker jeg på som mængden af mulige "årsager", og Y som mængden af mulige "virkninger", og afbildningen f fortæller, hvilken virkning y en given årsag x har. Har vi givet en mængde A af årsager, kan vi spørge, hvilke virkninger dette giver mulighed for, og hvis vi har givet en mængde B af virkninger, kan vi spørge, hvilke årsager, der kunne tænkes at ligge bag.



Disse betragtninger fører til definitionen af *billedet* af A og til definitionen af *urbilledet* (eller *originalmængden*) af B. Betegnelse og definition fremgår af ligningerne:

$$f(A) = \{y \mid \exists x \in A : y = f(x)\} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{så vi har:}\\ y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A : y = f(x)\end{array}\right]$$

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{så vi har:}\\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B\end{array}\right]$$

Udtrykt direkte via grafen kan definitionerne skrives:

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A) & \Leftrightarrow & \exists x \in A : (x, y) \in f, \\ x \in f^{-1}(B) & \Leftrightarrow & \exists y \in B : (x, y) \in f. \end{array}$$

I definitionen af $f^{-1}(B)$ står "$f(x) \in B$" for $x \in \mathrm{Dm}(f) \wedge f(x) \in B$, og i definitionen af $f(A)$ betyder "$y = f(x)$", at $x \in \mathrm{Dm}(f) \wedge f(x) = y$. Normalt vil $\mathrm{Dm}(f) = X$. Så er $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$. Bemærk, at generelt er $f(X) = \mathrm{Vm}(f)$ og $f^{-1}(Y) = \mathrm{Dm}(f)$.

Er B en singleton, $B = \{y\}$, skrives $f^{-1}(y)$ i stedet for $f^{-1}(\{y\})$, altså er $f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$, *$y$-fiberen* for f.

3.3 Eksempler på afbildninger

Ovenstående naive betragtning vedrørende årsag/virkning peger på en lang række muligheder for at modellere fænomener fra virkeligheden med én eller flere afbildninger. Men afbildninger optræder også af rent interne matematiske grunde, faktisk så hyppigt, at vi kan påstå:

TESE: Alt er afbildninger.

Det er nok en kende overdrevet, men lad os se nogle eksempler til støtte herfor. Lad $(X_i)_{i\in I}$ være en familie af mængder. Så består produktmængden $\prod_{i\in I} X_i$ af familier $(x_i)_{i\in I}$, hvor $x_i \in X_i$ for alle $i \in I$. Lad os se på en sådan familie og kalde den $x : x = (x_i)_{i\in I}$. Dette er faktisk det samme som afbildningen $i \curvearrowright x_i$, der til $i \in I$ lader svare elementet $x_i \in X_i$. Med andre ord, x er en afbildning af indeksmængden I ind i en vis mængde. Denne visse mængde skal indeholde alle mængderne X_i, så det er naturligt at betragte x som en afbildning $I \to \bigcup_{i\in I} X_i$. Særlig vigtig er forholdene, hvor alle X_i'erne er identiske, lad os sige $X_i = X$ for alle $i \in I$. Så er et element $x \in \prod_{i\in I} X_i$ det samme som en funktion $I \to X$. I dette tilfælde bruger vi betegnelsen X^I for produktrummet $\prod_{i\in I} X_i$. Vi har altså:

$$X^I = \{x \mid x \text{ er en afbildning } I \to X\}.$$

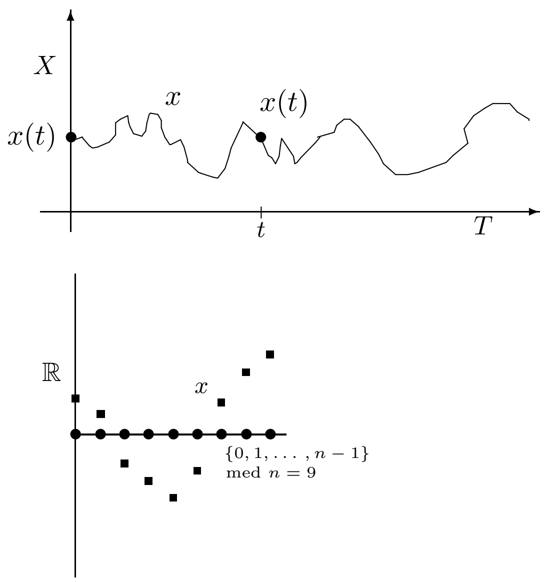


Illustration af et typisk element $x \in \mathbb{R}^9$

Produktrum giver altså en naturlig ramme for studiet af vigtige typer af afbildninger og er netop derfor uhyre vigtige. Figuren (øverste del) giver et billede af et element x i X^T (billedet skal ikke forstås alt for konkret og kan bruges som visuel hjælp selv i situationer, der ligger langt fra $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, som måske er det konkrete eksempel, man mest nærliggende knytter til figuren; i øvrigt, jeg valgte T i stedet for I for indeksmængden, da det tit kan være en hjælp at tænke på indeksmængden som angivende "tiden"). Mængderne $\mathbb{R}^n$—de kære Euklidiske rum[1]—som tit er hovedeksempler, der kan tages som udgangspunkt ved udviklingen af denne eller hin teori—kan vi også tænke på som mængder af afbildninger, altså som funktionsrum. Til givet $n \in \mathbb{N}$, ser vi på en fast n-mængde, lad os sige $\{0, 1, \dots, n-1\}$.[2] Så kan $\mathbb{R}^n$ identificeres som $\mathbb{R}^{\{0,1,\dots,n-1\}}$, ja det kommer egentlig ud på helt det samme, da $\mathbb{R}^n$ er mængden af vektorer $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ af reelle tal og $\mathbb{R}^{\{0,1,\dots,n-1\}}$ er mængden af funktioner på $\{0, 1, \dots, n-1\}$, og en sådan funktion x kan angives ved sine funktionsværdier $x(0), x(1), \dots, x(n-1)$. Se figuren (nederste del).

[1] Betegnelsen "Euklidisk rum" bruges lidt løst, simpelthen som betegnelsen for mængderne $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Mere strengt skal disse mængder udstyres med den sædvanlige vektorrumsstruktur og med "sædvanlig" geometrisk struktur for at fortjene denne betegnelse.

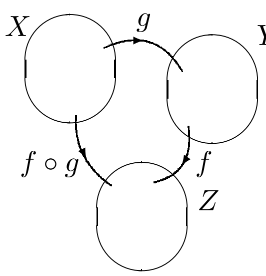
[2] Faktisk er, i den mængdeteoretiske opbygning af de naturlige tal $\mathbb{N}$, hvert n identisk med mængden af sine forgængere, således at $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, f.eks. er $2 = \{0, 1\}$.

Mængden 2^X kan vi dels tænke på som mængden af alle afbildninger af X ind i topunktsmængden $\{0,1\}$, dels kan vi identificere 2^X med potensmængden $\mathcal{P}(X)$ (overvej!).

Spørgsmålet om sammenligning af mængders "størrelse" kan afgøres ved at se på visse afbildninger (se UES). Og fra den lineære algebra ved vi, at afbildninger kan bruges til at udtrykke strukturbevarende transformationer fra et vektorrum til et andet. Osv. osv.. Det vrimler altså med afbildninger i matematikken. Endnu en gruppe eksempler fås, når man ser på *kompositionsregler*. F.eks. kan "+" i $\mathbb{R}$ betragtes som en vis afbildning $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

3.4 Sammensatte afbildninger

Under temaet "nye afbildninger ud fra gamle" er det vigtigste begreb *sammensætning* af afbildninger. Er g en afbildning fra X til Y og f en afbildning fra Y til Z, defineres den *sammensatte afbildning* $f\circ g$ ved



$$f\circ g=\{(x,z)\in X\times Z \mid \exists y\in Y:(x,y)\in g\wedge(y,z)\in f\}.$$

Vi finder

$$\mathrm{Dm}(f\circ g)=\{x\in X \mid g(x)\in\mathrm{Dm}(f)\}=g^{-1}(\mathrm{Dm}(f))=g^{-1}\left(f^{-1}(Z)\right)$$

og

$$\mathrm{Vm}(f\circ g)=f(g(X))=f(\mathrm{Vm}(g)).$$

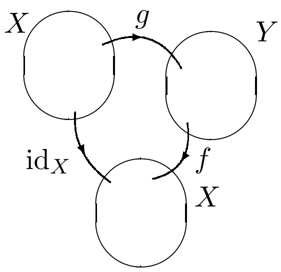
Definitionen på $f\circ g$ kan også gives ved først at angive, at $\mathrm{Dm}(f\circ g)=g^{-1}\left(f^{-1}(Z)\right)$ og dernæst anføre definitionsligningen $(f\circ g)(x)=f(g(x))$, $x\in\mathrm{Dm}(f\circ g)$. Man finder følgende formler:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(A)&=f(g(A)),\quad A\subseteq X,\\(f\circ g)^{-1}(C)&=g^{-1}\left(f^{-1}(C)\right),\quad C\subseteq Z,\end{aligned}$$

der kan betragtes som generalisationer af formlerne for $\mathrm{Dm}(f\circ g)$ og $\mathrm{Vm}(f\circ g)$ anført ovenfor.

3.5 Højre og venstre invers

I situationen $Z=X$ ser vi specielt på tilfældet, hvor f og g opfylder ligningen



$$f\circ g=\mathrm{id}_X\,.$$

Er denne ligning opfyldt, kaldes g en *højre invers* til f, og f en *venstre invers* til g. Bemærk, at der gælder:

Sætning 3.2. *Hvis $f\circ g=\mathrm{id}_X$, så må f nødvendigvis være surjektiv og g må nødvendigvis være en indlejring af X i Y (dvs. g må være injektiv og overalt defineret).*

Bevis. Antag altså $f \circ g = \mathrm{id}_X$. Så er

$$X = \mathrm{Vm}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{Vm}(f \circ g) = f\left(g(X)\right) \subseteq f(Y) = \mathrm{Vm}(f) \quad \text{og}$$
$$X = \mathrm{Dm}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{Dm}(f \circ g) = g^{-1}\left(f^{-1}(X)\right) \subseteq g^{-1}(Y) = \mathrm{Dm}(g),$$

så f må være surjektiv og g overalt defineret. At g må være injektiv ses af implikationen

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = (f \circ g)(x_1) = f\left(g(x_1)\right) = f\left(g(x_2)\right) = (f \circ g)(x_2) = x_2.$$

□

Vi tænker os nu enten f eller g givet og opsøger en højre- hhv. en venstre invers. Der gælder:

Sætning 3.3. *(a) Lad $g : X \hookrightarrow Y$ være en indlejring af X i Y. Der findes da en venstre invers f til g. Denne behøver ikke være entydigt bestemt, men er det, hvis g er en bijektion—og ellers ikke.*

(b) Lad f være en surjektiv afbildning fra Y til X. Da findes en højre invers g til f. Denne behøver ikke være entydigt bestemt, men er det, hvis f er en bijektion af $\mathrm{Dm}(f)$ *på X—og ellers ikke.*

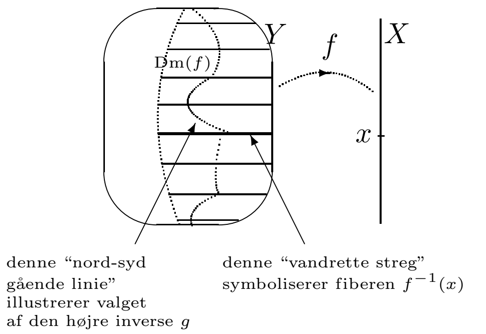
Bevis. (a): Definer $f \subseteq Y \times X$ ved $f = \{(y,x) \mid y \in Y \wedge x \in X \wedge (x,y) \in g\}$. Det checkes let efter, at f definerer en afbildning fra Y til X (udnyt g injektiv!). For at vise, at $f \circ g = \mathrm{id}_X$, kan vi f.eks. for $x_1 \in X$ og $x_2 \in X$ bemærke, at der gælder

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \in f \circ g \quad &\Leftrightarrow \quad \exists y \in Y : (x_1, y) \in g \wedge (y, x_2) \in f \\ &\Leftrightarrow \quad \exists y \in Y : (x_1, y) \in g \wedge (x_2, y) \in g \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2, \end{aligned}$$

hvor vi til sidst for "$\Rightarrow$" udnyttede, at g er injektiv og for "$\Leftarrow$" udnyttede, at $\mathrm{Dm}(g) = X$. Vi kan bemærke, at en venstre invers til g er entydigt bestemt på $\mathrm{Vm}(g)$, hvorfor den er entydigt bestemt såfremt g er en bijektion. At en venstre invers ikke er entydigt bestemt ellers, er ikke så vigtigt, og beviset overlades til læseren (beviset involverer et valg af et element i X—og den meget pedantiske læser vil bemærke, at man strengt taget må antage, at $X \neq \emptyset$!).
(b): Nu er f givet, en surjektion fra Y til X, og vi søger g, så $f \circ g = \mathrm{id}_X$. Vi har

$$(f \circ g) = \mathrm{id}_X \Leftrightarrow \forall x \in X : f\left(g(x)\right) = x \Leftrightarrow \forall x \in X : g(x) \in f^{-1}(x),$$

med andre ord, g løser vores problem, hvis og kun hvis vi for hvert $x \in X$ vælger funktionsværdien $g(x)$ som et element i fiberen $f^{-1}(x)$. Da f er surjektiv, er enhver fiber $f^{-1}(x)$ ikke-tom, hvorfor et sådant valg kan foretages (se bemærkning nedenfor!). Dermed er eksistensen bevist. At der ikke behøver være entydighed, fremgår tydeligt af beviset, thi indeholder blot én fiber mere end ét punkt, kan valget af en højre invers foregå på flere måder. Er derimod hver fiber $f^{-1}(x)$ en sigleton, er valget entydigt. Hermed er også den sidste del af sætningen vist.



□

Bemærkning 3.4. Bemærk, hvor let vi i tilfælde (a) kunne nedskrive (grafen for) den søgte afbildning. Tænker man over det, vil man se, at en sådan direkte konstruktiv fremgangsmåde ikke er mulig i tilfælde (b). Dér er det faktisk nødvendigt at påberåbe sig en ubestemt fremgangsmåde baseret på valg. Og faktisk skal der mange valg til, eller—bedre udtrykt—der skal et simultant valg til, hvor vi fra hver fiber udvælger et element så at sige på én gang, således at "hele" den søgte afbildning bestemmes.

Der er intet i vejen for sådanne ukonstruktive valg som beskrevet ovenfor—det er noget, mængdelæren tillader ved nærmere præcisering af, hvad man må og ikke må. Det er et enkelt aksiom fra mængdelæren, *udvalgsaksiomet*, der "giver lov" til den slags. Det er klart at foretrække, såfremt et ræsonnement kan gennemføres konstruktivt, uden brug af udvalgsaksiomet (og så er det naturligt, at gøre opmærksom herpå). Det lader sig bare ikke altid gøre. Vi skal se flere eksempler herpå. Det første er netop eksistens af højre invers for en surjektion. Dette resultat er ganske enkelt galt uden udvalgsaksiomet! Med andre ord, hvis man ikke har udvalgsaksiomet med (men beholder alle de andre aksiomer—se senere), kan man risikere at arbejde i et matematisk univers, hvor nævnte resultat er galt!

3.6 Invers

Lad $f : X \to Y$ være en bijektion. Så findes entydigt bestemte afbildninger ϕ og ψ, begge fra Y til X, så $\phi \circ f = \mathrm{id}_X$ og $f \circ \psi = \mathrm{id}_Y$. Disse afbildninger må være identiske og en bijektion. Dette følger f.eks. af udregningerne

$$\phi = \phi \circ \mathrm{id}_Y = \phi \circ (f \circ \psi) = (\phi \circ f) \circ \psi = \mathrm{id}_X \circ \psi = \psi,$$

hvor vi har udnyttet to generelle regneregler, dels de to samhørende regler for sammensætning med en identitet (nemlig: Er g en afbildning fra X til Y, er $\mathrm{id}_Y \circ g = g \circ \mathrm{id}_X = g$), dels den associative lov for sammensætning af afbildninger (se opg. 12 s. 68).

Ovenstående udregning gennemtænkes måske bedst ved "diagramjagt". Hvad der her sigtes til, fremgår ved at følge udregningen skridt for skridt på hosstående diagram. Prøv blot! De to inverse—højre og venstre—er altså identiske og må være en bijektion. Denne kaldes den *inverse* til f og betegnes f^{-1}.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"] \arrow[d, "\psi"'] & Y \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_X"'] & X \end{tikzcd}$$

Betegnelsen er heldig, thi de to betydninger, der for en bijektion kan tillægges udtrykket $f^{-1}(B)$ stemmer overens.

Er f blot en injektion fra X til Y, kan man også benytte betegnelsen f^{-1} for en afbildning, nemlig for den inverse til bijektionen $f : \mathrm{Dm}(f) \to \mathrm{Vm}(f)$.

I tilfældet, hvor f er en afbildning fra X til sig selv ($Y = X$!), betegnes sammensætningen $f \circ f$ med $f^{\circ 2}$ (evt. f^2, hvis det ikke giver anledning til misforståelser), og for multiple sammensætninger benyttes betegnelsen $f^{\circ n}$ (evt. f^n). Såfremt f er bijektiv (eller blot injektiv), betegnes afbildningen $(f^{-1})^n$ med $f^{\circ -n}$ (evt. blot f^{-n}).

3.7 Restriktion, projektionsafbildning

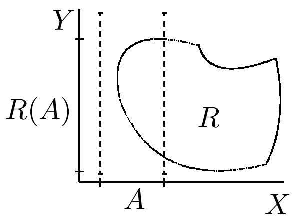
$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "\mathrm{id}_{X_0}"] \arrow[dr, "f_{|X_0}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Er f en afbildning fra X til Y og er X_0 en delmængde af X, betegner vi med $f_{|X_0}$ *restriktionen* af f til X_0, dvs. sammensætningen $f \circ \mathrm{id}_{X_0}$, jf. diagrammet. Vi siger, at en afbildning f er en *udvidelse* af en afbildning g, hvis g er en restriktion af f.
Et diagram som dette—og som det forrige diagram—hvor man kan gå fra ét sted i diagrammet til et andet ad flere veje, og hvor de afbildninger, der svarer til de forskellige veje er identiske, kaldes *kommutative diagrammer*. Sådanne kan være nyttige til at holde styr på begreberne, når flere afbildninger betragtes.

I forbindelse med produktrum giver muligheden for at danne restriktioner en nem måde at definere de vigtige projektionsafbildninger på. Lad os se på en familie $(X_i)_{i\in I}$ af mængder og det tilhørende produktrum $\prod_{i\in I} X_i$. Et element $x \in \prod_{i\in I} X_i$ er så, som vi så tidligere, en afbildning x defineret på I, så $x(i) \in X_i$ for alle $i \in I$. Hvis nu $I_0 \subseteq I$ og vi betragter x's restriktion til I_0, fås et element i $\prod_{i\in I_0} X_i$. Denne afbildning, der herved defineres af $\prod_{i\in I} X_i$ ind i $\prod_{i\in I_0} X_i$, kaldes *projektionsafbildningen* af $\prod_{i\in I} X_i$ *på* $\prod_{i\in I_0} X_i$, evt. tales om den *naturlige projektion* af $\prod_{i\in I} X_i$ på $\prod_{i\in I_0} X_i$. F.eks. er den naturlige projektion af $X \times Y$ på X afbildningen $(x, y) \curvearrowright x$ af $X \times Y$ på X.

4 Relationer

Lad X og Y være mængder. En *relation* fra X til Y er en delmængde af $X \times Y$. Lad $R \subseteq X \times Y$ være en relation fra X til Y. Ved den *inverse relation* forstås relationen R^{-1} fra Y til X givet ved $R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\}$. Ved *restriktionen* af R til delmængden $X_0 \subseteq X$ forstås relationen $R_{|X_0}$ fra X_0 til Y givet ved $R_{|X_0} = \{(x, y) \in X_0 \times Y \mid (x, y) \in R\}$ $(= \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X_0 \wedge (x, y) \in R\})$.



For $A \subseteq X$ defineres $R(A) \subseteq Y$ ved

$$R(A) = \{y \in Y \mid \exists a \in A : (a, y) \in R\},$$

hvilket også kan skrives $R(A) = \mathrm{pr}_Y((A \times Y) \cap R)$, hvor pr_Y er den naturlige projektion af $X \times Y$ på Y. Vi finder for $B \subseteq Y$, at $R^{-1}(B) = \{x \in X \mid \exists b \in B : (x, b) \in R\} = \mathrm{pr}_X((X \times B) \cap R)$, hvor pr_X er den naturlige projektion af $X \times Y$ på X. Vi skriver normalt $R(x)$ i stedet for $R(\{x\})$ og $R^{-1}(y)$ i stedet for $R^{-1}(\{y\})$.

Hvordan tænker vi på relationer? Hvad vil vi med dem? Her er tre svar:

1) Det er jo en generalisation af afbildningsbegrebet. Dette er dog det dårligste svar, thi der er ingen særlig dyd i at generalisere bare for generalisationens skyld.

2) Ved hjælp af en relation kan vi udtrykke, at der består en særlig forbindelse—nuvel, relation—mellem visse af X's elementer og visse af Y's elementer. Dette er et godt svar. F.eks. kunne $P(x, y)$ være et prædikat i de to variable x og y, og vi kunne hertil betragte relationen R givet ved $(x, y) \in R \Leftrightarrow P(x, y)$. Hvis $(x, y) \in R$ kan vi suggestivt sige, at "x står i relationen R til y", og vi kan afspejle denne tankemåde ved at skrive xRy i stedet for $(x, y) \in R$. Denne skrivemåde er meget udbredt og foretrækkes normalt ved studiet af relationer.

3) Ved hjælp af en relation kan vi udtrykke en sammenhæng—lad os tænke på det som en årsagssammenhæng—i tilfælde, hvor der godt kan svare flere “virkninger” til samme årsag. Ligeledes et godt svar. Men ét, der leder tankerne i en anden retning end svaret under 2). Her har vi virkelig en klar generalisation—med et fornuftigt sigte—af afbildningsbegrebet. Når man tænker på denne måde, bruger man hellere betegnelsen *korrespondance* end relation, og man kan f.eks. tale om korrespondancen $R : X \to Y$. Korrespondancer optræder f.eks. naturligt i matematisk økonomi.

4.1 Ækvivalensrelationer

Vi skal egentlig kun interessere os for to slags relationer, her på Mat Y: *Ækvivalensrelationer* og (forskellige slags) *ordensrelationer*.

Vi siger, at R er en *ækvivalensrelation* i mængden X, hvis R er en relation fra X til sig selv (altså fra X til X) som opfylder de tre krav:

1) xRx for alle $x \in X$ (R er *refleksiv*),
2) $xRy \Rightarrow yRx$ (R er *symmetrisk*),
3) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (R er *transitiv*).

Ækvivalensrelationer optræder i sammenhænge, hvor man studerer elementer x i en vis mængde X, og finder, at visse elementer “ligner” hinanden så meget, at det egentlig er fornuftigt at betragte dem som “samme”element, altså at *identificere* sådanne elementer. Vi kan altså læse xRy som “x og y 'ligner' hinanden så meget, at jeg (i en række sammenhænge) ikke vil skelne dem fra hinanden, men betragte dem som identiske”. Lad os forfølge denne tankegang: Vi antager altså, at R er en ækvivalensrelation i X. For fastholdt x ser vi nu på mængden af alle $y \in X$, der “ligner” x så meget, at vi vil “identificere” y med x. Det drejer sig om mængden af alle $y \in X$ så xRy, altså om mængden $R(x)$. Bemærk, at $x \in R(x)$ (fint!—selvfølgelig vil vi identificere x med x!). Mængderne $R(x)$, $x \in X$, er dermed alle ikke-tomme og tilsammen udgør de en overdækning af X. Faktisk udgør de en klassedeling af X. Dette følger af, at der gælder implikationen

$$R(x_1) \cap R(x_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow R(x_1) = R(x_2), \tag{4.0.1}$$

og dermed gælder:

$$\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X : (R(x_1) = R(x_2)) \vee (R(x_1) \cap R(x_2) = \emptyset) .$$

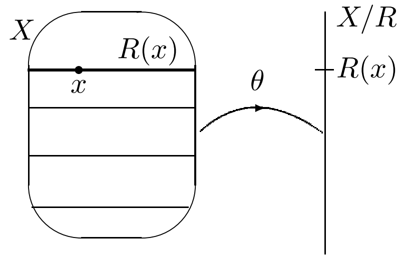
Bevis for (4.0.1)*:* Antag $z \in R(x_1) \cap R(x_2)$. Lad os vise, at $R(x_1) \subseteq R(x_2)$. Se på et $y \in R(x_1)$. Skal vise $y \in R(x_2)$. Vi har x_2Rz og zRx_1 (af x_1Rz), hvoraf x_2Rx_1, der sammen med x_1Ry giver x_2Ry, altså $y \in R(x_2)$ som ønsket. Dermed er $R(x_1) \subseteq R(x_2)$ vist. Inklusionen $R(x_2) \subseteq R(x_1)$ vises på samme måde. □

Til enhver ækvivalensrelation R hører altså på naturlig måde en klassedeling $\mathcal{E}$ givet ved $\mathcal{E} = \{E \subseteq X \mid \exists x : E = R(x)\}$.

Afbildningen $R \to \mathcal{E}$ er en bijektion mellem ækvivalensrelationer og klassedelinger, og i retningen klassedeling til ækvivalensrelation er sammenhængen givet ved til en given klassedeling $\mathcal{E}$ at knytte ækvivalensrelationen R bestemt ved $xRy \Leftrightarrow \exists E \in \mathcal{E} : x \in E \wedge y \in E$ (dvs. x og y er ækvivalente, hvis de ligger i samme klasse). De supplerende overvejelser, der skal til for at indse dette, overlades til læseren.

4.2 Kvotientmængde

Lad R være en ækvivalensrelation i X. Ved *kvotientmængden* X/R ("X over R") forstås den tilhørende klassedeling (ovenfor betegnet $\mathcal{E}$). Ved den *naturlige projektion* af X på X/R forstås afbildningen θ, der til x knytter den klasse, x tilhører, dvs. θ er afbildningen $x \curvearrowright R(x)$, $x \in X$. Figur 1 søger at klargøre forholdene; på figuren tænker vi os, at ækvivalensrelationen er "x og y ligger i samme vandrette niveau".



Figur 1.

Som vi husker fra de indledende bemærkninger, optræder ækvivalensrelationer i situationer, hvor det er rimeligt at identificere visse elementer. Denne identifikation får netop sit præcise matematiske udtryk gennem kvotientmængden. Når vi foretager identifikationen, svarer dette til, at vi, i stedet for at arbejde i mængden X, går over til at arbejde i mængden X/R. Dette betyder ikke, at man kan eller bør glemme mængden X. Ser vi f.eks. på et element i X/R, lad os sige på $E \in X/R$, er det meget hyppigt, at man studerer dette element i X/R ved at vælge en *repræsentant* for E, hvilket blot vil sige et element $x \in E$. I sådanne situationer må man så være opmærksom på, at de overvejelser man gør sig, byggende på den valgte repræsentant x, skal være uafhængige af *hvilken* repræsentant, der er valgt. Ellers kan man ikke sige noget om E som element i X/R. Noget tilsvarende gælder, hvis man studerer flere elementer $E_1, E_2, \ldots$ i X/R via valg af repræsentanter $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots$.

Det er helt nødvendigt, at man tilegner sig ovenstående tankegang. Den optræder i en række konkrete sammenhænge, måske hyppigst i algebrakurserne på andet og tredje studieår. Det kræver nok en del tilvænning før man har tilegnet sig tankegangen. Jeg skal anføre nogle opgaver, der dels er centrale begyndelsesgrunde i talteorien dels gode illustrationer af tankegangen.

4.3 Ordensrelationer

Nu til en helt anden type relationer, *ordensrelationer*. Man skriver normalt "$\leq$" i stedet for et bogstav som R, altså $x \leq y$ i stedet for xRy. Måske er det farligt lige fra starten at bruge "$\leq$", der jo vækker gode og velkendte associationer, idet vi ikke ved valg af notation vil lægge os fast på noget konkret. Så "$\leq$" kan i princippet stå for hvad som helst, og det er kun ved nedenstående definitioner, vi indskrænker mulighederne, dog stadig med et meget vidt råderum. Lad mig i skemaform indføre de centrale begreber:

Egenskaber for $\leq$		Ordningstyper
refleksiv:	$x \leq x$ for alle x	
transitiv:	$x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$	**præordning**
antisymmetrisk:	$x \neq y \wedge x \leq y \Rightarrow \neg(y \leq x)$	**(partiel) ordning**
(total):	$x \leq y \vee y \leq x$ for alle x, y	**total ordning**
$\star$:	$\forall A \subseteq X, A \neq \emptyset \exists a \in A \forall b \in A : a \leq b$	**velordning**

Meningen hermed turde være klar. F.eks. er en *ordning* (af og til kaldet en *partiel ordning* for at præcisere, at ordningen ikke behøver være *total*) det samme som en refleksiv, transitiv og antisymmetrisk relation. Vedrørende antisymmetrien bemærkes, at denne egenskab er ækvivalent med at implikationen $x \le y \wedge y \le x \Rightarrow x = y$ gælder (underforstået: for alle x, y med $x \in X$ og $y \in X$). Denne implikation er hyppigt mest naturlig at arbejde med.

Vi siger, at vi kan *sammenligne* x og y, såfremt enten $x \le y$ eller $y \le x$ gælder. En *total ordning* er altså en ordning, hvor alle par af elementer kan sammenlignes.

Egenskaben $\star$ (min ad hoc betegnelse) siger i ord, at enhver ikke-tom delmængde af X har et første element, idet et element a kaldes et *første element i* A, såfremt $a \in A$ og $a \le b$ for ethvert element $b \in A$.

I skemaet har jeg sat "total" i parantes fordi denne sprogbrug kun er standard for en relation, der vides at være en ordning.

Eksempel 4.1. Den *diffuse ordning* på X givet ved $x \le y$ for alle x og y i X er et typisk eksempel på en præordning, der ikke er en ordning (med mindre X er en singleton!). $\square$

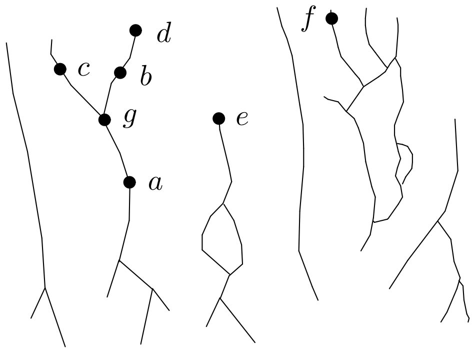
Eksempel 4.2. Den *punktvise ordning* på mængden $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ af reelle funktioner af en reel variabel givet ved $f \le g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \le g(x)$, er et typisk eksempel på en ordning, der ikke er total (det er altså en "ægte" partiel ordning). $\square$

Eksempel 4.3. Et andet typisk eksempel på en ægte partiel ordning er "$\subseteq$" i $\mathcal{P}(X)$ (altså givet ved at lade $A \le B$ betyde, at $A \subseteq B$ for $A, B \in \mathcal{P}(X)$. $\square$

Eksempel 4.4. Et typisk eksempel på en total ordning er den *sædvanlige ordning* på $\mathbb{R}$ (givet ved $x \le y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} : x + a = y$. Denne er ikke en velordning, idet f.eks $\mathbb{R}_+$ ikke har et første element. $\square$

Eksempel 4.5. Restriktioner af den sædvanlige ordning på $\mathbb{R}$ refererer vi også til som "sædvanlige" ordninger. De er alle totale ordninger. Den sædvanlige ordning på $\mathbb{N}$ eller på $\mathbb{N}_0$ er endog velordninger, mens f.eks. den sædvanlige ordning på $\mathbb{Z}$ eller på $\mathbb{Q}$ ikke er velordninger (da f.eks. $\mathbb{Z}$ ikke har noget første element). $\square$

Selvom nogle måske finder det umuligt, eller barnligt, skal jeg med hosstående figur søge at illustrere et "typisk" eksempel på en præordensrelation. Tanken er den, at $x \le y$ betyder, at der findes en stedse stigende vej fra x til y. Således er (med henvisning til figuren) $a \le b \le d$ og $a \le c$, men c og b kan ikke sammenlignes (vi har både $\neg(c \le b)$ og $\neg(b \le c)$). (Som vi er vant til fra ordninger, skriver vi $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_n$ i stedet for $x_1 \le x_2 \wedge x_2 \le x_3 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \le x_n$).



Figuren illustrerer måske bedst en ordnet mængde, men hvis vi f.eks. forestiller os, at punktet a i virkeligheden repræsenterer flere elementer $a_1, a_2, \ldots$, ville der for alle disse gælde $a_i \le a_j$ (altså f.eks. $a_1 \le a_2$ og $a_2 \le a_1$) og alligevel ville $a_1, a_2, \ldots$ være forskellige elementer. I den situation ville figuren illustrere en "ægte" præordnet mængde (ikke en ordning).

Lad os med støtte i figuren definere nogle vigtige begreber for en vilkårlig præordning. Først definerer vi “strengt ulighedstegn” ved $x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(y \leq x)$. Vi skriver også $y > x$ i stedet for $x < y$. På figuren er $a < b < d$ og $a < c$ (men hvis punktet a repræsenterede flere elementer $a_1, a_2, \ldots$, ville der ikke gælde hverken $a_1 < a_2$ eller $a_2 < a_1$ eller $\ldots$).

Vi siger, at x er et *maksimalt element* i X såfremt $x \in X$ og det for alle $y \in X$ gælder, at $\neg(y > x)$. På figuren er antydet, at d, e og f alle er maksimale elementer.

Elementet x er en *øvre grænse* for $A \subseteq X$ såfremt $x \in X$ og $a \leq x$ for alle $a \in A$. Og x er en *mindste øvre grænse* for A, hvis x er en øvre grænse for A og $x \leq x'$ for enhver øvre grænse x' for A. På figuren er både d og b øvre grænser for $\{a, b\}$ og b er en mindste øvre grænse. Som bekendt behøver en mindste øvre grænse for en mængde A ikke tilhøre A (på figuren er b en mindste øvre grænse for mængden af alle x med $x < b$).

Et *største* eller *sidste* element i en mængde A er et element x så $x \in A$ og $y \leq x$ for alle $y \in A$. Dette er det samme som en mindste øvre grænse for A som tilhører A (overvej!). Såfremt vi har med en ordning—og ikke bare en præordning—at gøre, er en mindste øvre grænse for en mængde A entydigt bestemt, thi er x_1 mindste øvre grænse for A og er ligeledes x_2 en mindste øvre grænse for A, er $x_1 \leq x_2$ og $x_2 \leq x_1$; dermed er $x_1 = x_2$. Ligeledes er et største element i en ordnet mængde entydigt bestemt. Vi kan således tale om *den* mindste øvre grænse for A, og vi bruger i så fald en notation, der er velkendt fra $\mathbb{R}$ (jf. Mat 1) og skriver $x = \sup A$, evt. $x = \sup_{y \in A} y$ eller $x = \sup\{y \mid y \in A\}$. Tilsvarende, hvis der findes et største element i A (og præordningen er en ordning), skrives $x = \max A$, evt. $x = \max_{y \in A} y$ eller $x = \max\{y \mid y \in A\}$ for *det* største element i A.

Ganske svarende til ovenstående definitioner indføres begreberne et *minimalt* element i X, en *nedre grænse* for en mængde $A \subseteq X$, en *største nedre grænse* for A, et *mindste* eller *første* element i en mængde $A \subseteq X$, samt—hvis præordningen er en ordning—*den* største nedre grænse for A, for hvilken vi bruger notationen $\inf A$, $\inf_{y \in A} y$ eller $\inf\{y \mid y \in A\}$ såfremt den findes, og *det* mindste eller første element i A, for hvilket vi bruger notationen $\min A$, $\min_{y \in A} y$ eller $\min\{y \mid y \in A\}$ såfremt det eksisterer.

På figuren har $\{a, b\}$ både et største og et mindste element—hhv. b og a—mens mængderne $\{c, b\}, \{a, e\}$ og $\{e, f\}$ hverken har et største eller et mindste element; bemærk også, at mens $\{a, e\}$ og $\{e, f\}$ hverken har en øvre eller nedre grænse, så har $\{c, b\}$ en nedre og faktisk en største nedre grænse, nemlig elementet g, altså $g = \inf\{c, b\}$. Derimod har $\{e, b\}$ ingen øvre grænse.

En ordnet mængde $(X, \leq)$ siges at være *fuldstændig ordnet*, og ordningen kaldes *fuldstændig*, såfremt følgende to betingelser er opfyldt: 1) Enhver delmængde af X, der har en øvre grænse, har en mindste øvre grænse og 2) Enhver delmængde af X, der har en nedre grænse, har en største nedre grænse.

Eksempel 4.6. $\mathbb{Q}$ er *ikke* fuldstændig i den sædvanlige ordning, idet f.eks. mængden $A \subseteq \mathbb{Q}$ givet ved $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ er opadtil begrænset og dermed har en øvre grænse, men mængden har (som bekendt!) ikke en mindste øvre grænse. □

I modsætning hertil gælder følgende hovedresultat om $\mathbb{R}$:

Sætning 4.7. *$\mathbb{R}$ med den sædvanlige ordning er fuldstændig.*

Vi kommer (formentlig) ikke ind på beviset for dette. For at forstå beviset, må man vide, hvordan $\mathbb{R}$ kan konstrueres. Dette ser man vist nok nærmere på på Mat 2AL. Ganske som på Mat 1 vil vi godtage resultatet uden bevis (men vi får nu ikke megen brug for det—i modsætning til kurset Mat 1, der er helt afhængig af fuldstændigheden af $\mathbb{R}$).

For os spiller velordninger en særlig rolle. Vi noterer os først, at vi kan nøjes med at checke to ud af de fem egenskaber i skemaet s. 54 for at slutte, at vi har med en velordning at gøre:

Sætning 4.8. *Lad $\leq$ være en relation i mængden X. Antag, at $\leq$ opfylder følgende to betingelser:*

1. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$, *($\leq$ er antisymmetrisk),*
2. *Enhver ikke-tom delmængde A af X har et første element.*

Så er $\leq$ en velordning.

Bevis. Anvendes 2) på en singleton ($A = \{x\}$), ses at $\leq$ er refleksiv. Og anvendes 2) på en to-mængde ($A = \{x, y\}$), ses at $\leq$ er total ($\forall x \forall y : x \leq y \vee y \leq x$). Vi mangler nu blot at vise, at $\leq$ er transitiv. Til dette formål antages, at x, y og z opfylder $x \leq y$ og $y \leq z$. Vi ønsker at vise, at $x \leq z$. Sæt $A = \{x, y, z\}$. Er x det første element i A, følger $x \leq z$ umiddelbart. Er y det første element i A, er $y \leq x$, hvorfor (da også $x \leq y$) $x = y$ følger, og så følger $x \leq z$ af $y \leq z$. Endelig, er z det første element i A, er $z \leq y$, hvorfor (da også $y \leq z$) $y = z$ følger, og så følger $x \leq z$ af $x \leq y$. I alle tilfælde fandt vi $x \leq z$ som ønsket. $\square$

Da egenskaben 1) (antisymmetrien) er ret uskyldig og i alle konkrete tilfælde let at checke, viser resultatet, at 2) er den centrale betingelse. Den er til gengæld vanskelig at checke, thi der forlanges jo, at *enhver* delmængde (bortset fra $\emptyset$) har en vis egenskab (nemlig indeholder et første element), og skal dette undersøges, skal et hav af mængder i princippet checkes efter. Dette forhold har som konsekvens, at man kun eksplicit kan konstruere eller angive velordninger i simple tilfælde—således har ingen endnu eksplicit angivet en velordning i en overtællelig mængde, og dette er i en vis forstand principielt umuligt!

Alligevel skal vi arbejde med et sandt festfyrværkeri af "store" velordnede mængder. Og disse spiller en central rolle for opbygningen af matematikken på aksiomatisk grundlag. Da, som sagt, alle disse velordninger ligger hinsides det konstruktive, det vi eksplicit kan angive, går man en anden vej og bruger mængdelærens aksiomer til at påvise (ikke konstruere!) eksistensen af alle de velordninger, vi kan ønske os. Som vi siden skal se (omend ikke i alle detaljer) sker dette ved at vi afgrænser nogle simple egenskaber, viser at disse fører til velordninger, og så klarer eksistensproblemet via en snedig anvendelse af udvalgsaksiomet.

Her skal vi nøjes med at vise nogle eksempler på velordnede mængder og udlede nogle generelle egenskaber for velordnede mængder. Nøgleegenskaberne er relativt lette at bevise—vanskeligheden ligger i at skaffe sig velordnede mængder.

Sætning 4.9. $\mathbb{N}_0$ *er velordnet i den sædvanlige ordning. Det samme gælder enhver delmængde af* $\mathbb{N}_0$.

Bevis. Dette er klart, thi er $A \subseteq \mathbb{N}_0$ ikke-tom findes $n \in A$. Blandt tallene $0, 1, \ldots, n$ kan man så opsøge det mindste, der ligger i A. Da således enhver ikke-tom delmængde af $\mathbb{N}_0$ har et første element, er $\mathbb{N}_0$ velordnet. Klart at det samme gælder enhver delmængde af $\mathbb{N}_0$. $\square$

Ovenstående ræsonnement bygger på vores sædvanlige "naive" kendskab til $\mathbb{N}_0$. Ræsonnementet er som sådan i orden på dette niveau, men vi nævner allerede nu, at i den aksiomatiske opbygning af mængdelæren, er sætningen (stort set) ækvivalent med et aksiom, uendeligheds-aksiomet.

Til en velordnet mængde $(X, \leq)$ knytter vi forskellige begreber. Ved *venstreafsnittet* $V(x)$ knyttet til et element i X forstås mængden

$$V(x) = \{y \in X \mid y < x\}.$$

Bemærk, at x selv ikke regnes med til $V(x)$. Til ethvert element $x \in X$ for hvilket der findes $y \in X$ med $y > x$, betegner x^+ det første sådanne element y, dvs. x^+ er bestemt ved de to betingelser:

1. $x^+ > x$,
2. $y > x \Rightarrow y \geq x^+$.

Elementet x^+ kaldes *efterfølgeren af* x. Et element i X som hverken er det første element i X eller en efterfølger (dvs. af formen x^+ for et $x \in X$) kaldes et *grænseelement* i X. På denne måde deles elementerne i en velordnet mængde op i tre kategorier: Første kategori indeholder kun ét element, det første element i X; anden kategori indeholder alle efterfølgere (hvis X kun indeholder ét element er der ingen elementer i denne kategori) og endelig er der tredje kategori, der indeholder alle grænseelementer.

Er $X = \{0, 1, \dots, n\}$ med sædvanlig ordning, er 0 det første element, og alle andre elementer er efterfølgere. Ligeledes for $X = \mathbb{N}_0$ med sædvanlig ordning er alle elementer, på nær 0 efterfølgere. Som eksempel på en velordnet mængde med et grænseelement nævnes $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, hvor ordningen er den sædvanlige suppleret med vedtægten $n < \infty$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Her er ∞ ingen efterfølger, men derimod et grænseelement, og det eneste sådanne.

Et *afsnit* i en velordnet mængde X er en delmængde A, så følgende implikation gælder:

$$x \leq a \wedge a \in A \Rightarrow x \in A.$$

Afsnittet er et *ægte afsnit* såfremt $A \neq X$. Det er klart, at ethvert venstreafsnit $V(x)$ er et ægte afsnit i X. Det omvendte gælder også:

Sætning 4.10. *Til ethvert ægte afsnit A i en velordnet mængde X findes $x \in X$, så $A = V(x)$. Dette element x er entydigt bestemt.*

Bevis. Da $A \neq X$, er $A^c \neq \emptyset$. Lad x være det første element i A^c. Så må $V(x) \subseteq A$ (overvej!), og også $A \subseteq V(x)$ ses let (hvis $a \in A$ og $\neg(a < x)$, vil $x \leq a$ og $x \in A$ vil følge). At x er entydigt bestemt, følger af at $V(x_1) = V(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, som let vises (hvis f.eks. $x_1 < x_2$, vil $x_1 \in V(x_2) \backslash V(x_1)$). □

5 Induktionsprincippet

Følgende sætning kan betragtes som en udvidelse af en af versionerne af induktionsprincippet for $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{N}_0$:

Sætning 5.1 (Induktionsprincippet). *Lad $(X, \leq)$ være en velordnet mængde.*

a) Hvis A er en delmængde af X, hvorom det gælder, at for alle $x \in X$ gælder implikationen

$$V(x) \subseteq A \Rightarrow x \in A,$$

så er $A = X$.

b) Hvis $P(x)$ er et prædikat, hvor x er en variabel fra mængden X, og hvis der for alle $x \in X$ gælder implikationen

$$\big(\forall y \in V(x) : P(y)\big) \Rightarrow P(x),$$

så er $P(x)$ sand for alle $x \in X$.

Bevis. a): Hvis $A \neq X$, findes $x \in A^c$. Lad x_0 være det første element i A^c. Så gælder $V(x_0) \subseteq A$, hvorfor $x_0 \in A$ ifølge forudsætningen. Dette strider mod $x_0 \in A^c$. Vi har dermed vist $A = X$ ved et indirekte ræsonnement.
b): Anvend a) på mængden A af de $x \in X$ for hvilke $P(x)$ er sand. □

Ved at splitte elementerne i X op i de tre kategorier, kan sætningen gives en mere bekendt form, når man tænker på tilfældet $X = \mathbb{N}$ eller $X = \mathbb{N}_0$. Vi nøjes med at se på tilfældet svarende til a) i sætningen ovenfor:

Sætning 5.2 (Induktionsprincippet, anden udgave). *Lad $(X, \leq)$ være en velordnet mængde, og lad A være en delmængde af X. Hvis*

(a) $x_0 \in A$, hvor x_0 er det første element i X,

(b) $\forall x \in X : x \in A \Rightarrow x^+ \in A$ (såfremt x^+ veldefineret i X),

(c) $\forall x \in X : x$ grænseelement i $X \wedge V(x) \subseteq A \Rightarrow x \in A$,

så er $A = X$.

Bevis. Antag $A \neq X$ og lad x betegne det første element i A^c. Så må $x \neq x_0$ (thi $x_0 \in A$). Og x kan heller ikke være en efterfølger: $x = y^+$, thi så ville $y \in A$ og anden betingelse giver så $x \in A$. Heller ikke den sidste mulighed, at x er et grænseelement kan foreligge, thi i så fald ville $V(x) \subseteq A$, og $x \in A$ vil så kunne sluttes af sidste betingelse. Vi er ført til en modstrid og må konkludere at $A = X$. □

6 Velordningssætningen

I stedet for at fortsætte den naive behandling af velordnede mængder med at indføre flere begreber (jeg var ellers fristet af at se på isomorfibegrebet) og vise flere sætninger, vælger jeg at afslutte med at opbygge intuitionen—det håber jeg da—vedrørende velordnede mængder. Det gør jeg ved som udgangspunkt at tage en fantastisk (i ordets bogstaveligste forstand) sætning af Zermelo:

Sætning 6.1 (Velordningssætningen). *Enhver mængde kan velordnes, dvs. for enhver mængde X findes en relation $\leq$ i X, som er en velordning.*

Sætningen er ingenlunde intuitiv, og selvom vi nok kunne give et naivt bevis, ville dette dels være ganske kompliceret og dels sløre sagens rette sammenhæng. Vi accepterer altså sætningen uden videre—den er jo også let at formulere og indholdet tilsyneladende let at forstå.

Det vi så vil gøre er at tage en "stor" mængde som X og så se nærmere på, hvordan en velordning af X kan se ud. Som X kunne vi tage $\mathbb{R}$ eller evt. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Lad $\leq$ være en velordning på X. Vi skal se, at i hvertfald "begyndelsen" af X må have en ganske bestemt struktur, og vi skal indføre helt faste navne for en række elementer i X.

Da $X \neq \emptyset$ (X er jo stor!), findes et første element i X. Dette betegner vi 0. Lad os se på det, der bliver tilbage af X: $X\backslash\{0\}$. Det er en ikke-tom mængde og har som sådan et første element. Dette betegner vi 1. Det vi gjorde, var ikke andet end at se på efterfølgeren af 0: $1 = 0^+$. Dernæst ses på efterfølgeren af 1. Den betegner vi 2: $2 = 1^+$. Og således fortsætter vi og konstruerer elementer i X, som vi betegner $3, 4, 5, \ldots$. Når vi har gjort dette, har vi konstrueret så meget af X:

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & | & | & | & | & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{array}$$

Ganske vist har vi konstrueret uendelig mange elementer af X, men kun tælleligt mange, så da X er "stor", er der masser af elementer tilbage i X. Blandt disse må der ifølge velordningsegenskaben være et første. Dette betegner vi ω.

$$\begin{array}{cccccccc} | & | & | & | & | & | & \cdots & | \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \omega \end{array}$$

Det er et interessant element, idet det er det første grænseelement i X. Det næste element i X er ω^+ som betegnes $\omega + 1$. Dernæst følger $\omega + 2$, $\omega + 3$, osv., og når vi er færdige med disse, og dermed har konstrueret endnu en "ω-blok", har vi langt fra opbrugt elementerne i X.

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} | & | & | & | & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \end{array}}_{\omega-\text{blok}}\underbrace{\begin{array}{cccc} | & | & | & | \ \cdots \\ \omega & \omega+1 & \omega+2 & \end{array}}_{\omega-\text{blok}}$$

Nu kommer elementet, vi betegner 2ω (nogle vil foretrække at kalde det $\omega 2$), dernæst $2\omega + 1$, $2\omega + 2$, osv. Og efter alle disse—altså efter endnu en ω-blok—kommer 3ω. Så følger endnu en ω-blok, herefter 4ω, endnu en ω-blok osv. På den måde når vi så langt:

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} | & | & | & | & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \end{array}}_{\omega-\text{blok}}\underbrace{\begin{array}{cccc} | & | & | & \cdots \\ \omega & \omega+1 & \omega+2 & \end{array}}_{\omega-\text{blok}}\underbrace{\begin{array}{cccc} | & | & | & \cdots \\ 2\omega & 2\omega+1 & & \end{array}}_{\omega-\text{blok}}\underbrace{\begin{array}{cccc} | & | & | & \cdots \\ 3\omega & 3\omega+1 & & \end{array}}_{\omega-\text{blok}} \quad \cdots$$

Men hermed er der stadig langt igen. Vi har stadig kun opbrugt en tællelig del af X's elementer, så der er masser tilbage. Det første af de tilbageblevne—og det må blive vores næste element—betegner vi ω^2. Vi er nået så langt:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} | & | & \cdots & | & | & \cdots & | & | & \cdots & | & | & \cdots & \cdots & | \\ 0 & 1 & & \omega & \omega+1 & & 2\omega & 2\omega+1 & & 3\omega & 3\omega+1 & & & \omega^2 \end{array}$$

Vi ser at ω^2 er et grænseelement, og det kan karakteriseres som det første grænseelement med uendelig mange forudgående grænseelementer, nemlig elementerne $\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots$. Vi fortsætter og finder nye elementer $\left(\omega^2\right)^+ = \omega^2 + 1$ og mange, mange flere. Efter en ω-blok til (den første, der begynder med ω^2) kommer $\omega^2+\omega$, efter endnu en ω-blok kommer $\omega^2+2\omega$ osv. osv. indtil vi finder $2\omega^2$, der følger efter den anden "ω^2-blok", som udgår fra ω^2.

$$\underbrace{\underset{0}{|}| \cdots || \cdots || \cdots || \cdots \cdots \underset{\omega^2}{|}}_{\omega^2-\text{blok}}\underbrace{| \cdots || \cdots || \cdots || \cdots \cdots \underset{2\omega^2}{|}}_{\omega^2-\text{blok}}$$

Så kan vi fortsætte med ω^2-blokke og finder let (!?) elementer $3\omega^2, 4\omega^2, \ldots$. Og efter alle disse kommer det første element i X, der ligger længere ude end $0, \omega^2, 2\omega^2, 3\omega^2, \ldots$, og det element betegner vi naturligvis ω^3. Så ved vi, hvad en ω^3-blok er, den går fra 0 til, men ikke med, ω^3 og indeholder præcis alle elementer, der udgør venstreafsnittet $V(\omega^3)$. Vi fortsætter, og efter at have lagt en serie ω^3-blokke til, har vi fundet elementerne $2\omega^3, 3\omega^3, \ldots$. Herefter kommer ω^4. Efter en serie ω^4-blokke kommer så ω^5 osv. osv. osv. Efter at have fundet $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \ldots$ (og en masse elementer herimellem—efterfølgere såvel som grænseelementer) kommer der et nyt element, det første, der ligger længere ude end $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \ldots$. Dette element betegner vi —naturligt nok—ω^ω. Vor fremgangsmåde er helt konstruktiv og kan—om vi vil—formaliseres ved at tage $\mathbb{N}_0$ som udgangspunkt. Vi kan også notere, at på hvert trin har vi konstrueret en velordnet mængde. Hvert konstrueret element bestemmer jo via sit venstreafsnit en velordnet mængde.
Efter ω^ω kommer (jeg går nu lidt hurtigere frem) elementer som $2\omega^\omega$, $\omega^{\omega+1}$, $\omega^{\omega+2}, \omega^{2\omega}$, $\omega^{3\omega}$, ω^{ω^2}, $\omega^{\omega^3}, \omega^{\omega^\omega}$, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$ osv. (med et hav af overspringelser). Efter $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots$ løber vi så at sige ud af almindelig algebraisk notation—men vi løber slet ikke ud af mængden X. Vi har stadig masser af elementer i X tilgode, da vi stadig kun har set tælleligt mange af X's elementer. Det første element blandt de elementer, vi endnu ikke har set efter at være "løbet tør" for algebraisk notation, betegner vi ε_0, det er det første såkaldte *ε-ordinaltal*. Og vi kunne fortsætte $(2\varepsilon_0, \varepsilon_0^2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_\omega, \varepsilon_{\varepsilon_0}, \ldots)$, men hverken jeg eller læseren orker mere.

Hvad har vi lært: Med vores beskrivelseskraft kan vi ikke nå længere ud end til elementer i X med tælleligt venstreafsnit, og dette kan kan føre til ganske komplicerede velordnede mængder. På denne måde vil vi altid kun have set tælleligt mange elementer i X, der er altid masser af elementer tilbage.

Ved at anvende velordningssætningen kan vi imidlertid indse, at vi må kunne komme endnu længere ud end det er muligt med ovenstående i princippet eksakt beskrivelige, konstruktive proces. For at indse dette er det nok nemmest at sikre sig, at X har et største element. Hvis X ikke allerede har et største element, kan vi bare tilføje ét, lad os kalde det x^*. Udvides velordningen til $X \cup \{x^*\}$ ved at vedtage, at $x \leq x^*$ for alle $x \in X \cup \{x^*\}$ fås en velordning på $X \cup \{x^*\}$, der på naturlig måde udvider velordningen på X.
Så kan vi betragte mængden af de $x \in X \cup \{x^*\}$ for hvilke $V(x)$ er overtællelig. Denne mængde er ikke-tom (thi x^* tilhører mængden). Ifølge velordningsegenskaben indeholder denne mængde et første element. Dette helt specielle element betegner vi ω_1.

$$\underset{0}{||}\cdots\underset{\omega}{||}\cdots\underset{\omega^2}{|}\cdots\underset{\omega^3}{|}\cdots\underset{\omega^\omega}{|}\cdots\underset{\omega^{\omega^\omega}}{|}\cdots\underset{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}{|}\cdots\cdots\underset{\varepsilon_0}{|}\cdots\cdots\cdots\underset{\omega_1}{|}$$

Det er karakteriseret ved følgende to egenskaber:

$V(\omega_1)$ er overtællelig,

For alle $\beta < \omega_1$ er $V(\beta)$ tællelig.

Så ω_1 er præcis det punkt, hvor vi kommer ud af vor tællelig suppedas. på en måde minder ω_1's egenskaber om ω's:

$V(\omega)$ er over-endelig (altså uendelig),

For alle $\beta < \omega$ er $V(\beta)$ endelig.

På vejen fra 0 til ω “sker der hele tiden noget” i den forstand, at vi hele tiden får større og større mængder, først $V(0) = \emptyset$ (0 elementer), så $V(1) = \{0\}$ (ét element), så $V(2) = \{0,1\}$ (to elementer) osv. Og ude ved ω får vi en uendelig mængde $V(\omega) = \{0,1,2,\dots\}$. Men på hele den meget lange vej fra ω til ω_1 sker der i en vis forstand ikke en brik! For ethvert β med $\omega \leq \beta < \omega_1$ vil $V(\beta)$ jo være numerabelt uendeligt. Alle disse er lige store. Elementerne i hver $V(\beta)$ (med β fast) kan få plads i Hilberts Hotel. Først når vi er ude ved ω_1 sker der noget. Elementerne i mængden $V(\omega_1)$, som er den samme som mængden $\bigcup_{\beta<\omega_1} V(\beta)$, kan *ikke* alle få plads i Hilberts Hotel (men der er snildt plads til dem i Jessens Balsal!).

Det mærkelige er, at selvom der i nævnte forstand ikke sker en brik mellem ω og ω_1, er dette stykke nødvendigt for at vi overhovedet kan nå ud til ω_1, til et element, der ligger så langt ude, at der går mere end tælleligt mange elementer forud.

Selvom den menneskelige hjerne har svært ved at fatte et element som ω_1—ja vi kan vel ikke fatte det, ihvertfald ikke *omfatte* det med vor tanke—så volder det faktisk ikke store problemer at arbejde med ω_1 og lignende elementer. Vi lader bare forvirringen omkring alle de mystiske elementer vi så på træde i baggrunden (glemmer det så at sige) og udnytter de to ganske enkle egenskaber, der karakteriserer ω_1 (og tilsvarende for andre elementer).

7 Ordinaltal og kardinaltal

Elementerne vi er stødt på ($0, 1, \dots, \omega, \dots, \omega_1$ og så hinsides ω_1) kalder vi (med en vis tilsnigelse, jeg senere skal gøre rede for) *ordinaltal.* De særlige ordinaltal, hvor “der sker noget”, hedder *kardinaltal.* Ordinaltallene $0, 1, \dots, \omega$ og ω_1 er kardinaltal. Hvis vi opfatter endelige mængder som “små, uinteressante” mængder—og det gør vi til en vis grad her—så er ω det første interessante og ω_1 det andet interessante kardinaltal. Disse kardinaltal har særlige betegnelser, nemlig $\aleph_0$ (“alef-nul”) for ω og $\aleph_1$ (“alef-en”) for ω_1.

Såfremt vi blot til at begynde med valgte en tilstrækkelig “stor” mængde som vores udgangsmængde X, kan vi fortsætte længe, længe, meget længe endnu efter at være kommet til ω_1 ($= \aleph_1$). Lige efter ω_1 kommer $(\omega_1)^+ = \omega_1 + 1$, noget længere ude har vi $\omega_1 + \omega$, meget længere ude har vi $\omega_1 + \varepsilon_0$, endnu meget længere ude har vi $2\omega_1$ og så en dag (??!) efter endnu mange flere ordinaltal når vi ud til det næste kardinaltal efter ω_1. Det betegnes ω_2 eller $\aleph_2$ og er karakteriseret ved følgende to egenskaber:

(i) Der går flere elementer forud for ω_2 end der går forud for ω_1,

(ii) ω_2 er det første ordinaltal med denne egenskab.

Med andre ord:

(i) $|V(\omega_2)| > |V(\omega_1)|$,

(ii) $\forall \beta < \omega_2 : |V(\beta)| \leq |V(\omega_1)|$.

Ser vi igen på vor række af ordinaltal kan vi (blot X er valgt stor nok) fortsætte et godt stykke endnu:

$$
\begin{array}{lllllllll}
|\cdots & |\cdots\cdots & |\cdots\cdots & |\cdots\cdots & |\cdots\cdots \quad \cdots\cdots & |\cdots\cdots & |\ \cdots\cdots & |\ \cdots\cdots & |\ \cdots \\
0 & \omega & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_\omega & \omega_{\omega+1} & \omega_{\omega+2} & \omega_{2\omega} \\
 & \aleph_0 & \aleph_1 & \aleph_2 & \aleph_3 \cdots\cdots \quad \cdots\cdots & \aleph_\omega & \aleph_{\omega+1} & \aleph_{\omega+2} & \aleph_{2\omega} \cdots
\end{array}
$$

Her har jeg med aleph'er ($\aleph$'er) markeret kardinaltal og undladt at markere ordinaltallene, der ligger imellem—disse er natuligvis vigtige, for uden dem får vi slet ikke arbejdet os frem til kardinaltallene.

Vi ser: Alt, hvad vi møder på vor vej er ordinaltal. Nogle af disse er tillige kardinaltal. Vi kan også karakterisere de ordinaltal, der er kardinaltal:

> Et kardinaltal er et ordinaltal β med den egenskab, at intet venstreafsnit $V(\alpha)$ med et $\alpha < \beta$ er ækvipotent med $V(\beta)$. $\big[$Husk: *A ækvipotent med B* $\Leftrightarrow |A| = |B|$, se UES$\big]$

Vi skal nu foretage os et aller sidste skridt. Vi har indset, at vi med en "stor" mængde X kan komme godt langt ud, dog ikke ud over X's mægtighed. Men den vanskelighed kan vi overkomme ved blot at tage en endnu større mængde som udgangspunkt, lad os kalde den $X!$. Så velordner vi $X!$ og starter helt som med X. Her finder vi igen helt samme struktur som da vi arbejdede med X, og da vi vælger samme betegnelser, får vi eksakt samme elementer, samme ordinaltal, som da vi arbejdede med X—blot holder overenstemmelsen op, dér hvor vi "løb tør" for elementer i X, thi fra det trin er det nyt land vi møder, når vi bruger "supermængden" $X!$. Derud kunne X ikke bringe os.

$$\begin{array}{lllll}
\mid \;\cdots\cdots\cdots & \mid \;\cdots\cdots & & \leftarrow & \text{Hertil nåede vi med } X \\
0 & \aleph_{\omega+1} & & & \\
\mid \;\cdots\cdots\cdots & \mid \;\cdots\cdots\;\cdots & \mid \;\cdots\cdots & \leftarrow & \text{og hertil med } X! \\
0 & \aleph_{\omega+1} & \aleph_{\omega+2} & &
\end{array}$$

Det sidste skridt, vi vil gå, er at sige, lad os se på, hvor langt vi kan nå med nogen mængde overhovedet! Denne betragtning er der ikke noget i vejen for at vores tanke kan acceptere. Det vi når frem til er så vores slutobjekt, som vi kalder *ordinalrækken*. Ordinalrækken betegner vi $\mathbb{ON}$. Den indeholder alle ordinaltal og alle kardinaltal og enhver selv nok så stor mængde kan måles med ordinalrækkens målestok, dvs. for enhver mængde X findes et ordinaltal β så $|X| = |V(\beta)|$; det første ordinaltal β med denne egenskab er (naturligvis) et kardinaltal og hedder X's *kardinalitet*.

Ordinalrækken er rar at have til rådighed—det er netop to eksemplarer af dem, der er brugt som stolerækker til hhv. drengene og pigerne i Jessens Balsal. Men—lidt malurt i bægeret skal der—med ordinalrækken er vi løbet ud af mængdelæren! Fortsættelse følger.

8 Rekursion

I fodnoten s. 80 i UES har vi kort anført princippet for *rekursion* over $\mathbb{N}$. Idéen illustreres af følgende eksempel:

Vi vil definere $n!$ for ethvert $n \in \mathbb{N}_0$ Dette gøres i og for sig tilfredsstillende ved at definere $0! = 1$ og, for $n \in \mathbb{N}$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Men dette er kun tilfredstillende på et intuitivt plan. Selvom meningen er klar, er det noget utilfredsstillende ud fra et mere formelt synspunkt ved at måtte bruge "$\cdots$" eller "osv." i en definition. Sætningen om rekursion tillader os at konstruere forskellige objekter uden at måtte ty til sprogbrug med "$\cdots$" eller "osv.". I vores eksempel giver sætningen mulighed for at konstruere afbildningen $n \curvearrowright n!$ (se også opg. 16).

Sætning 8.1 (Rekursion over $\mathbb{N}_0$). *Lad Y være en mængde, lad $y_0 \in Y$ og lad $\Phi : (n,f) \curvearrowright \Phi(n,f)$ være en afbildning med værdier i Y og defineret på mængden af par (n,f), hvor $n \in \mathbb{N}$ og f er en afbildning af $\{0,1,\ldots,n-1\}$ [3] ind i Y. Da findes en entydig bestemt afbildning F af $\mathbb{N}_0$ ind i Y, så*

$$F(0) = y_0 \quad \text{og} \quad \forall n \in \mathbb{N} : F(n) = \Phi(n, F_{|n}),$$

hvor $F_{|n}$ er F's resriktion til $\{0,1,\ldots,n-1\}$ [5].

Defineres Y, y_0 og Φ ved $Y = \mathbb{R}$, $y_0 = 1$, $\Phi(n,f) = f(n-1)\cdot n$ ses, at vi via sætningen på entydig vis får defineret funktionen $F : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ved

$$F(0) = 1,\ \ F(n) = F(n-1)\cdot n \quad \text{for } n \in \mathbb{N}\,.$$

Dette er netop fakultetsfunktionen $n \curvearrowright n!$. Har man først vænnet sig til at anvende rekursion, kan man meget kort give udtryk for en række definitioner. F.eks. kunne vi sige: "Definer fakultetsfunktionen $n \curvearrowright n!$, $n \in \mathbb{N}_0$, ved rekursion ud fra kravene $0! = 1$ og $n! = (n-1)!\cdot n$ for $n \in \mathbb{N}$".

Sætningen kan sådan set formuleres mere elegant med henvisning til venstreafsnittene i $\mathbb{N}_0$ (inklusiv det tomme venstreafsnit: $\emptyset = V(0)$):

Sætning 8.2 (Rekursion over $\mathbb{N}_0$, elegant formulering). *Lad $f \curvearrowright \Phi(f)$ være en afbildning, der til hver afbildning f defineret på et venstreafsnit i $\mathbb{N}_0$ knytter et element. Da findes en entydig bestemt afbildning F defineret på $\mathbb{N}_0$ så $F(n) = \Phi\big(F_{|V(n)}\big)$ for ethvert $n \in \mathbb{N}_0$.*

Her er $F_{|V(n)}$ restriktionen af F til venstreafsnittet $V(n) = \{k \in \mathbb{N}_0 \mid k < n\}$. At man kan "slippe" for at nævne mængden Y, der optræder i første version af sætningen, er ikke klart, men skyldes et af mængdelærens aksiomer (substitutionsaksiomet, se senere). At vi ikke behøver nævne y_0 eksplicit, er derimod klart, idet $\emptyset$ betragtes som en afbildning defineret på $V(0) = \emptyset$, og $\Phi(\emptyset)$ så erstatter y_0.

Man kan udvide rekursion fra $\mathbb{N}_0$ til en vilkårlig velordnet mængde:

Sætning 8.3 (Rekursion over en velordnet mængde). *Lad $(X,\leq)$ være en velordnet mængde og lad $f \curvearrowright \Phi(f)$ være en afbildning, der til hver afbildning f defineret på et venstreafsnit i X knytter et element $\Phi(f)$. Så findes en entydigt bestemt afbildning F defineret på X så $F(x) = \Phi\big(F_{|V(x)}\big)$ for alle $x \in X$.*

Bevis. (Kortfattet—jeg forestiller mig, at mange springer det over!) Hvis både F_1 og F_2 løser opgaven, må $F_1 = F_2$, thi ellers får vi let en modstrid frem ved at se på første $x \in X$ så $F_1(x) \neq F_2(x)$ (eller bedre: vis $F_1 = F_2$ ved induktion). Hermed er entydigheden vist.

Det væsentlige er altså at vise eksistensen. Hertil kan man se på "partielle løsninger", dvs. afbildninger, defineret på et afsnit i X som opfylder kravet for alle elementer i afsnittet. To sådanne partielle løsninger stemmer overens, hvor de begge er defineret (i henhold til ovenstående ræsonnement). Ved induktion ses, at der er partielle løsninger defineret på ethvert venstreafsnit. P.g.a. entydigheden kan disse stykkes sammen til at give den ønskede afbildning. ☐

[3] Obs.: Denne mængde er netop $V(n)$—så "$\cdots$" kan undgås.

I virkeligheden volder det ikke de store problemer at udføre konstruktioner ved rekursion. Man står sig ved at tænke lidt intuitivt og ikke føle sig tynget af det formelle apparat. Det væsentlige er at sikre, at man på hvert niveau i konstruktionen kan komme videre. Hyppigt behandles efterfølgere og grænseelementer forskelligt. Med henvisning til diskussionen, der førte til ordinalrækken $\mathbb{ON}$, kan vi f.eks. definere sum af ordinaltal rekursivt.[4] Vi kan kort forklare, hvordan $\alpha + \beta$ defineres for vilkårlige ordinaltal α og β ved at sige, at for fast α defineres $\alpha + \beta$ ved rekursion over β ved følgende krav:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha, \\ \alpha + \beta^+ &= (\alpha + \beta)^+, \quad \big[\text{måske klarere}: \ \alpha + \beta = (\alpha + \gamma)^+, \ \text{hvis } \beta = \gamma^+\big], \\ \alpha + \beta &= \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\} \ \text{ hvis } \beta \text{ er et grænseelement.} \end{aligned}$$

Her har vi sikret os, at for et vilkårligt ordinaltal kan vi "komme videre" (dvs. definere summen), hvadenten ordinaltallet er 0, en efterfølger eller et grænseordinaltal. Vi noterer også, at vi har været så "frække", at bruge rekursion, ikke over en fast velordnet mængde, men faktisk over hele ordinalrækken $\mathbb{ON}$.

[4] Hvad angår sum af ordinaltal kan man dog gå mere direkte til værks

Opgaver

OBS: Enkelte opgaver om ækvipotens vedrører også næste afsnit (UES).

Opgave 1. I 2^X indføres *sum* og *produkt* som følger:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

For $f, g \in 2^X$ er $f \cdot g$ funktionen givet ved $x \to f(x) \cdot g(x)$ og $f + g$ er funktionen givet ved $x \to f(x) + g(x)$ (mod 2), hvilket svarer til hosstående additionstabel for $\{0, 1\}$ (addition modulo 2).

Bevis, at fællesmængdeoperationen $\cap$ svarer til $\cdot$ og at symmetrisk differens $\triangle$ svarer til $+$ i den forstand, at der for delmængder A og B af X gælder relationerne:

$$\begin{aligned} 1_{A\cap B} &= 1_A \cdot 1_B, \\ 1_{A\triangle B} &= 1_A + 1_B. \end{aligned} \quad \text{(højresiden forstået mod 2)}$$

Udnyt dette til at bevise, at "$\triangle$ er associativ" dvs. $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$, samt at der gælder følgende distributive lov:

$$(A\triangle B) \cap C = (A \cap C)\triangle(B \cap C).$$

Opgave 2. De elementære mængdeteoretiske operationer for en eller to mængder er $\cup, \cap, \setminus, \triangle, ^c$ (hvor ^{c} kun giver mening, hvis det er klart, hvilken grundmængde man arbejder i). Faktisk kunne vi klare os med operationerne $\cap$ og $\triangle$. Indse dette ved at udtrykke $A\setminus B$, A^c og $A \cup B$ ved brug af $\cap$ og $\triangle$ (samt kendte mængder). (Se evt. først opg. 1)

Opgave 3. Se på definitionen af produktmængder og gør rede for, at $(A\times B)\times C$, $A\times(B\times C)$ og $A \times B \times C$ sådan set er forskellige mængder!

Bemærkning. I tilfælde som dette, hvor der findes en naturlig ("kanonisk") bijektion mellem et vilkårlig par af de betragtede mængder, skelner vi ikke mellem mængderne. Vi skriver således frejdigt $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$.

Begrund dernæst, mere generelt, at såfremt $(X_i)_{i\in I}$ er en familie af mængder, og såfremt $(I_j)_{j\in J}$ udgør en klassedeling af I, så kan vi tillade os at skrive

$$\prod_{i\in I} X_i = \prod_{j\in J} \Big(\prod_{i\in I_j} X_i \Big).$$

Opgave 4. Vis, at $A \mapsto 1_A$ definerer en bijektion af $\mathcal{P}(X)$ på 2^X. Her er 1_A *indikatorfunktionen* på A defineret ved $1_A(x) = 0$ for $x \notin A$, $1_A(x) = 1$ for $x \in A$.

Opgave 5. Funktionen $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splittes i to funktioner, INT (heldelsfunktionen) og FRAC (brøkdelsfunktionen) på sædvanlig vis (kendt fra lommeregnere, bl.a!). Således gælder

$$\begin{aligned} &\mathrm{id}_{\mathbb{R}} = \mathrm{INT} + \mathrm{FRAC}, \\ &\mathrm{Vm}(\mathrm{INT}) = \mathbb{Z}, \\ &\mathrm{Vm}(\mathrm{FRAC}) = [0, 1[, \\ &\forall x : x - 1 < \mathrm{INT}(x) \le x. \end{aligned}$$

Hvilke af funktionerne $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, INT og FRAC er injektive, surjektive eller bijektive? Samme spørgmål ønskes besvaret for disse funktioners restriktioner til $\mathbb{N}$, til $[0, 1]$ og til $[0, 1[$.

Opgave 6. Betragt funktionen $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{for } x \in \mathbb{N}_0, \\ x & \text{ellers.} \end{cases}$$

Undersøg, om f er injektiv og bestem $\mathrm{Vm}(f)$. Vis, at $|[0,\infty[| = |]0,\infty[|$.

Opgave 7. Lad X være mængden af polynomier i en reel variabel (med reelle koefficienter) og betragt afbildningen $D : X \to X$ givet ved $D(p) = p'$ (den afledede af p). Undersøg, om D er injektiv, surjektiv eller bijektiv. Samme spørgsmål for restriktionen af D til X_0, hvor $X_0 = \{p \in X \mid p(0) = 0\}$.

Opgave 8. Lad $f : X \to Y$ samt $A \subseteq X$ og $B \subseteq Y$ være givet. Bevis, at

$$f\left(f^{-1}(B)\right) \subseteq B$$

og at

$$f^{-1}\left(f(A)\right) \supseteq A,$$

samt at der ingen af stederne behøver at gælde "=". Kan vi sikre os, at der gælder "=" i én eller begge disse ligninger ved yderligere at antage, at f er injektiv eller surjektiv?

Opgave 9. Vis, at der generelt for en afbildning $f : X \to Y$ gælder

$$\begin{aligned} f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) &= \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{og} \\ f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) &\subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i). \end{aligned}$$

[se evt. blot på tilfældene, hvor to mængder A_1 og A_2 betragtes og hvor numerabelt mange mængder $A_1, A_2, \ldots$ betragtes.]

Illustrér ved et simpelt eksempel, at inklusionen "$\subseteq$" kan være ægte. "Hjælper" det at forudsætte, at f er injektiv?

Vis også, at der for $A \subseteq X$ ikke generelt gælder nogen af inklusionerne $f(A^c) \subseteq f(A)^c$ eller $f(A^c) \supseteq f(A)^c$ og undersøg om forholdene ændres, hvis f antages at være injektiv eller surjektiv.

Opgave 10. Vis, at der generelt for en afbildning $f : X \to Y$ (og B-mængder indeholdt i Y) gælder identiteterne:

$$\begin{aligned} f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) &= \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \\ f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) &= \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i), \\ f^{-1}(B^c) &= \left(f^{-1}(B)\right)^c \end{aligned}$$

—så i en vis forstand opfører urbilleddannelse sig meget pænere end direkte billeddannelse (se opg. 9). Indse f.eks., at

$$\begin{aligned} f^{-1}(\liminf_{n\to\infty} B_n) &= \liminf_{n\to\infty} f^{-1}(B_n), \\ f^{-1}(\limsup_{n\to\infty} B_n) &= \limsup_{n\to\infty} f^{-1}(B_n). \end{aligned}$$

Opgave 11. Lad g være en afbildning fra X til Y og f en afbildning fra Y til Z. Bevis følgende implikationer:

(i) f og g begge overalt definerede $\Rightarrow$ ligeså $f \circ g$.

(ii) f og g begge injektive $\Rightarrow$ ligeså $f \circ g$.

(iii) f og g begge surjektive $\Rightarrow$ ligeså $f \circ g$.

(iv) f og g begge bijektive $\Rightarrow$ ligeså $f \circ g$.

(v) Udfordring: Find en egenskab for afbildninger, der *ikke* bevares ved sammensætning! (Dem er der masser af, men kan du mon selv finde på en, og gerne én, der er bare en smule interessant).

Opgave 12. Lad $h \subseteq X \times Y$ være en afbildning fra X til Y, $g \subseteq Y \times Z$ en afbildning fra Y til Z og $f \subseteq Z \times W$ en afbildning fra Z til W. Eftervis, at den associative lov $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ gælder.

Opgave 13. En brolægning $\mathcal{I}$ på en mængde X kaldes et *ideal* såfremt $\mathcal{I}$ er $\cup f$-lukket og *heriditær*, dvs. der gælder $I \in \mathcal{I} \wedge J \subseteq I \Rightarrow J \in \mathcal{I}$. Intuitivt kan man tænke på mængderne i et ideal som de "små" delmængder af X. Et ideal hedder et σ-ideal, såfremt det er $\cup c$-lukket.

Vis, at brolægningen af endelige delmængder af X er et ideal i X og også brolægningen af tællelige delmængder af X er et ideal. Vil disse idealer altid være forskellige? Kan man risikere, at et af disse eller begge idealer er det såkaldt *trivielle* ideal, nemlig hele $\mathcal{P}(X)$? (Et ikke-trivielt ideal hedder et ægte ideal).

Opgave 14. Vi ser på reelle funktioner af en reel variabel, altså på elementer $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Hyppigt er det urimeligt at skelne mellem to funktioner, der kun afviger "ganske lidt" fra hinanden i den forstand, at mængden $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$ er lille (hvor f og g er de betragtede funktioner). Dette kan formaliseres som følger: Vi antager, at der er givet et ideal $\mathcal{I}$ af delmængder af $\mathbb{R}$ (se opg. 13), og definerer så en relation $\equiv \pmod{\mathcal{I}}$ (læses "ækvivalens modulo $\mathcal{I}$"), som vi blot skriver $\equiv$, ved at fastsætte, at

$$f \equiv g \overset{\text{def}}{\iff} \{f \neq g\} \in \mathcal{I}$$

for $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Eftervis, at der herved er defineret en ækvivalensrelation i $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Bevis følgende:

$$\begin{aligned} f_1 \equiv g_1 \wedge f_2 \equiv g_2 \quad \Rightarrow \quad & f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \\ \wedge\ & f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \\ \wedge\ & \max(f_1, f_2) \equiv \max(g_1, g_2) \\ \wedge\ & \lambda f_1 \equiv \lambda g_1 \quad \text{for alle } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lad $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\mathcal{I}$ betegne det såkaldte *kvotientrum*, dvs. mængden af ækvivalensklasser for ækvivalensrelationen $\equiv$. Giv en fornuftig definition af skalar-multiplikation, sum, produkt og maksimum i $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\mathcal{I}$!

Opgave 15. Ladd $\mathcal{I}$ være et ideal af delmængder af mængden X. Definer en relation $\equiv$ (mere udførligt kan skrives $\equiv \pmod{\mathcal{I}}$) på $\mathcal{P}(X)$ ved:

$$A \equiv B \overset{\text{def}}{\iff} A \triangle B \in \mathcal{I}.$$

(F.eks. kunne $\mathcal{I} = \{A \subseteq X \mid A \text{ endelig}\}$, og dette kan man have i tankerne nedenfor). Vis, at der herved er defineret en ækvivalensrelation på $\mathcal{P}(X)$. Gør rede for at denne opfylder følgende implikationer:

$$\begin{aligned}(A_1 \equiv B_1) \wedge (A_2 \equiv B_2) \quad \Rightarrow \qquad & A_1^c \equiv B_1^c \\ \wedge \;\; & A_1 \cup A_2 \equiv B_1 \cup B_2 \\ \wedge \;\; & A_1 \cap A_2 \equiv B_1 \cap B_2 \\ \wedge \;\; & A_1 \triangle A_2 \equiv B_1 \triangle B_2 \\ \wedge \;\; & A_1 \backslash A_2 \equiv B_1 \backslash B_2 .\end{aligned}$$

I tilfældet $X = \mathbb{N}$ og $\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ endelig}\}$ skal man nærmere beskrive ækvivalensklassen, der indeholder $\mathbb{N}$ og ækvivalensklassen, der indeholder $L = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Vis også, at der findes uendeligt mange ækvivalensklasser.

Opgave 16. Vi har set flere eksempler på resultater, der fører til identiteter for endelige summer, f.eks. $\forall n \; \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ og $\forall n \; \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$. Typisk vises "den slags" ved induktion. Men der er strengt taget—som antydet i forelæsningerne—et problem, vi har negligeret, nemlig følgende: Hvad forstås ved $\sum_{k=1}^{n} k$, ved $\sum_{k=1}^{n} k^3$ og lignende udtryk? Vi arbejder jo med dem som om det er klart, at disse udtryk giver mening for alle n. Det er det også—på et naivt plan. Men vi må erkende—når først problemet er blevet påpeget for os—at vi ikke sådan uden videre kan definere den slags udtryk for alle n.

Vanskeligheden kan overkommes ved at udnytte *rekursionsprincippet* (over $\mathbb{N}$). Dette princip er anført i fodnoten s. 80 i UES. Princippet kan bevises ved at udnytte induktion, men vi springer det over (jeg beviser det måske senere i en mere generel udgave).

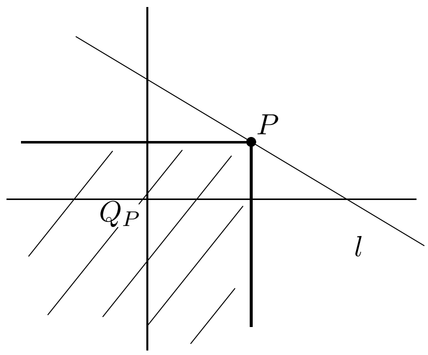
Opgaven går ud på at vise, hvordan man for enhver funktion $n \curvearrowright a_n$ af $\mathbb{N}$ ind i $\mathbb{R}$ kan definere summerne $\sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 17. Kan man finde en klassedeling $\mathcal{E}$ af $\mathbb{N}$ med mere end numerabelt mange mængder? Og hvad er svaret, hvis $\mathbb{N}$ erstattes af $\mathbb{Q}$ eller $\mathbb{R}$? Og hvad er svaret, hvis man kigger på klassedelinger af $\mathbb{R}$ og forlanger, at hver klasse $E \in \mathcal{E}$ indeholder et åbent interval?

Opgave 18. For hvert punkt P tilhørende linien l i $\mathbb{R}^2$ betragtes mængden Q_P.

De to kanter (halvlinier), der begrænser figuren Q_P tænkes høre med til Q_P. (Er $P = (x, y)$, er $Q_P = \{(\xi, \eta) \mid \xi \leq x \wedge \eta \leq y\}$). Bestem $\bigcup_{P \in l} Q_P$. Undersøg, om der findes en numerabel delmængde $l_0 \subseteq l$, således at vi får samme foreningsmængde, når vi nøjes med at se på disse P'er (m.a.o kan vi opnå, at $\bigcup_{P \in l_0} Q_P = \bigcup_{P \in l} Q_P$ med l_0 numerabel?).

Samme to spørgsmål ønskes besvaret for mængderne Q_P'er, der er de samme som før, blot regnes kanterne ikke længere med til mængderne.



Opgave 19. Lad $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ være en funktion. Vis, at g altid kan udvides til en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og at en eventuel kontinuert udvidelse er entydigt bestemt. Find eksempler, der viser, at en kontinuert udvidelse af g ikke nødvendigvis findes (se f.eks. på *Dirichlet funktionen* $1_{\mathbb{Q}}$). Evt. kan læseren vise, at enhver funktion $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ har mere end kontinuum mange udvidelser til funktioner defineret på $\mathbb{R}$.

Opgave 20. Lad $\mathcal{E}$ betegne brolægningen af lukkede intervaller i $\mathbb{R}$ (udartede intervaller, dvs. singletons og $\emptyset$, medregnes i $\mathcal{E}$). Undersøg, hvilke af følgende operationer $\mathcal{E}$ er lukket overfor: $\cup f, \cap a$.

Bevis, at $\mathcal{E}_\sigma$ indeholder enhver numerabel og enhver åben mængde (sædvanlig topologi).

Bevis, at $\mathcal{E}_\sigma$ ikke indeholder mængden $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ af irrationale tal, men at $\mathcal{E}_{\sigma\sigma}$ indeholder denne mængde.

Opgave 21. Antag, at $\mathcal{E}$ er en brolægning på mængden X så $\mathcal{E}$ indeholder alle singleton'er (altså $\{x\} \in \mathcal{E}$ for alle $x \in X$). Vis, at såfremt $\mathcal{E}$ er en topologi, må $\mathcal{E}$ være den diskrete topologi (dvs. $\mathcal{E} = \mathcal{P}(X)$).

Opgave 22. Lad $(X, \mathcal{G})$ være et topologisk rum og $(x_n)_{n\geq 1}$ en følge på X. Vi siger da, at $(x_n)_{n\geq 1}$ er *konvergent* såfremt der findes $x \in X$ så $\forall G \in \mathcal{G} : x \in G \Rightarrow x_n \in G$ f.v.t., og i så fald kaldes x et *grænsepunkt* for (x_n) og vi skriver $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ eller $x_n \to x$ for $n \to \infty$. Altså: $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall G \in \mathcal{G}(x \in G \Rightarrow \exists\, n \forall m \geq n : x_m \in G)$.

Bevis, at følgende egenskaber gælder (lidt kort skrevet):

1. $x, x, \dots \to x$ (altså $(\forall n \in \mathbb{N} : x_n = x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$).
2. $x_n \to x$ for $n \to \infty$, $(x_n)_{k\geq 1}$ delfølge af $(x_n) \Rightarrow x_{n_k} \to x$ for $k \to \infty$.
3. Hvis det for følgen $(x_n)_{n\geq 1}$ og punktet $x \in X$ gælder, at enhver delfølge $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ indeholder en videre delfølge $(x_{n_{k_l}})_{l\geq 1}$ med grænsepunkt x, så vil $x_n \to x$.

Opgave 23. Lad X være en mængde. Ved den *diskrete topologi* på X forstås topologien givet ved brolægningen $\mathcal{P}(X)$ af åbne mængder, og ved den *diffuse topologi* på X forstås topologien givet ved brolægningen $\{\emptyset, X\}$ af åbne mængder. Vis, at hvis en topologi $\mathcal{G}$ på X er en *Hausdorff topologi*, dvs. hvis

$$\forall x \in X \forall y \in X \ (x \neq y \Rightarrow \exists G_x \in \mathcal{G} \exists G_y \in \mathcal{G} : x \in G_x \wedge y \in G_y \wedge G_x \cap G_y = \emptyset),$$

så opfylder konvergens for følger denne 4. egenskab (sml. opg. 22):

4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = y \Rightarrow x = y$.[5]

Opgave 24. Kald en delmængde $A \subseteq \mathbb{R}$ åben, hvis der for alle $x \in A$ findes et $\varepsilon > 0$, så $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq A$. Eftervis, at der herved er defineret en topologi på $\mathbb{R}$, den *sædvanlige* eller *Euklidiske* topologi.

Bevis, at konvergens for følger i denne topologi stemmer overens med det på Mat 1 indførte konvergensbegreb.

Find selv en fornuftig generalisation af betragtningerne til $\mathbb{R}^n$, hvor n er et vilkårligt naturligt tal.

Opgave 25. Kald en delmængde $A \subseteq \mathbb{R}$ åben, hvis der for alle $x \in A$ findes et $\varepsilon > 0$, således at $[x, x + \varepsilon[\subseteq A$. Eftervis, at der herved er defineret en topologi på $\mathbb{R}$ og undersøg det tilhørende konvergensbegreb.

Bemærkning. Det drejer sig *ikke* om den sædvanlige topologi, men om en ret speciel topologi. $\mathbb{R}$ med denne topologi kaldes *Sorgenfrey* linien.

[5] Man kan vise—et ikke trivielt resultat af Kisynski—at såfremt et konvergensbegreb for følger på X opfylder 1, 2, 3 og 4, findes en topologi på X som netop giver dette konvergensbegreb.

Opgave 26. Lad X være en mængde og $\mathcal{E}$ en brolægning på X. Lad endvidere $X_0 \subseteq X$. Eftervis implikationerne

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E} \text{ topologi på } X \Rightarrow \operatorname{tr}_{X_0}(\mathcal{E}) \text{ topologi på } X_0,\\
&\mathcal{E} \text{ Borelstruktur på } X \Rightarrow \operatorname{tr}_{X_0}(\mathcal{E}) \text{ Borelstruktur på } X_0.
\end{aligned}$$

Bemærkning. Er $\mathcal{E}$ hhv. en topologi eller en Borelstruktur på X, kaldes $\operatorname{tr}_{X_0}(\mathcal{E})$ for den *relative topologi* (eller *sportopologien*) hhv. den *relative Borelstruktur* (eller *spor-Borelstrukturen*) på X_0.

Uendelighedsbegrebet – et supplement

Forord[1]

Et supplement! Hvorfor det? Ganske enkelt, fordi Lars Mejlbo i samarbejde med Matematiklærerforeningen allerede har udgivet to hæfter, der egner sig udmærket til formålet: at bidrage til 3g'ernes arbejde med et valgfrit emne i matematik, nærmere betegnet om uendelighedsbegrebet.

Der er flere muligheder for at tilrettelætte et arbejde omkring uendelighedsbegrebet. Jeg tror, jeg ville vælge at hæfte mig ved fire punkter:

- inspiration ved opridsning af baggrunden og den historiske udvikling
- Hilberts hotel
- Cantors sætning (diagonalbeviset)
- Bernsteins ækvivalenssætning

I Lars Mejlbo's hæfter findes materiale nok om de tre første punkter og vedrørende det sidste, er sætningen formuleret, og desuden er så tilpas mange anvendelser af sætningen anført, at læseren kan indse, at det er en helt nødvendig og meget nyttig sætning. Men sætningen er ikke bevist. Det er synd! Sætningen er nemlig ganske let at vise – hvis man blot angriber problemet på "den rigtige" måde. Det er denne påstand, der har fået mig til at fare i blækhuset. Tænk, hvis man kunne overbevise Kongerigets generationer af 3g'ere om at det hele er ganske enkelt – så let, at man umuligt kan glemme det, først man én gang har set lyset! Så kunne et arbejde med uendelighedsbegrebet komme til at stå helt afsluttet, hvor alt er afklaret – på nær det chok, eleverne bydes, når de til sidst hos Lars Mejlbo læser, at man i øvrigt slet ikke ved, hvad en mængde er! (Måske nogle lærere kan følge dette op ved at fortælle lidt mere om Gödel, Cohen ...).

Nu jeg er gået igang med at skrive, vil jeg gå lidt videre end blot at give beviset for Bernstein's sætning (faktisk giver jeg to beviser for denne sætning). De to første emner – det historiske og Hilberts hotel – skal jeg ikke sige mere om, udover at jeg, inspireret af Radiserne, foretrækker at begynde fortællinger om Hilberts hotel med "En mørk og stormfuld nat ... ".

[1] Forordet – og teksten i øvrigt – bærer præg af at manuskriptet var tænkt som et bidrag til en samling "appetitvækkere", som Matematiklærerforeningen i øjeblikket arbejder på, se [MLF]. Manuskriptet blev imidlertid for langt, og indgår nu som baggrundsmateriale til en ganske kort "appetitvækker". I omarbejdet form vil manuskriptet muligvis blive udnyttet i et tilsvarende norsk projekt. Materialet vil desuden finde anvendelse i kurset Matematik X i foråret 1993 (hvor det vil blive suppleret med mere teknisk stof om matematikkens grundlag). Endelig vil manuskriptet blive anvendt i forbindelse med Åbent Hus arrangementet 26. november 1992 på Københavns Universitet, H. C. Ørsted Institutet. Manuskriptet udsendes hermed i en uformel publikationsserie fra Københavns Universitet. Tilføjelse: Materialet indgår nu i kurset Matematik Y: "Introduktion til abstrakt matematik". ©: Forfatteren

Cantors sætning har jeg tilladt mig at skrive lidt mere om. Og så har jeg gjort en del ud af at skabe en bedre indlevelse ved overvejelser om, hvilken af to mængder, der er "størst", ved at indføre, hvad jeg vil kalde *Cantors balsal*. Det er et pædagogisk trick, der for mange, det tror jeg, jeg kan sige, letter tilegnelsen af begreberne ganske betydeligt. Jeg har ikke selv æren af at have fundet herpå – den må (vist nok) tilskrives professor Børge Jessen (i øvrigt æresmedlem af Matematiklærerforeningen).[2]

Jeg håber ikke, mine betragtninger vil virke som goldt "besser-macherei". Mit hovedmål er Bernstein's ækvivalenssætning og i den forbindelse håber jeg, at alle, der giver sig i kast hermed, vil nå det laveste, og enkelte det højeste af de mål, jeg hermed opstiller for udbyttet ved læsningen:

Niveau 1. Jo, jeg kunne godt følge beviset skridt for skridt.

Niveau 2. Jeg forstod endog idéen.

Niveau 3. Hvor smukt, havde jeg bare lært at tænke på den måde, kunne jeg selv have fundet på det! Er matematik så let, så smuk?

De, der når niveau 3, er matematikere, de der når niveau 2 kan blive det! Er det ikke muligt at nå niveau 1 på basis af det følgende, har jeg forfejlet mit mål. Med opbydelsen af en smule selverkendelse, må jeg indrømme, at det nok er nødvendigt for eleven i 3g at søge vejledning hos sin lærer. Ellers kan det blive svært at leve op til målsætningen.

Som så ofte når man begynder at skrive, dukker flere muligheder, idéer op. Der er ikke blevet plads til alt i dette "supplement". Jeg håber at få energi og tid til at genoptage tråden inden for længe.

FT, Tryggerød Mose, efteråret 1992.

[2]Tilføjelse (marts 1999). Børge Jessen døde i 1993. Balsalen hedder nu *Jessens balsal* (da forbeholdet "vist nok" kan fjernes). Betegnelsen er ændret i denne udgave af supplementet. Navngivningen kan opfattes som en anerkendelse af Børge Jessens engagement i undervisningen. Jeg har været i tvivl om jeg skulle beholde Cantor som dansemester, eller lade Jessen optræde i denne rolle. Jeg valgte det første. Det svarer vist bedst til Jessens beskedenhed og beundring for Cantor (kun overgået af Jessens beundring for Hilbert).

1 Jessens balsal

Lad det være sagt med det samme, det er en *stor* balsal. Ganske ligesom Hilberts hotel er et *stort* hotel. Måske hører balsalen ligefrem til Hilberts hotel og udgør dette hotels grandiose festsal. [3]

Balsalen indeholder to lange – meget lange – stolerækker. På den ene er det meningen, at drengene skal sidde; den anden – lige over for – er beregnet til pigerne. Cantor er dansemester.

Hvad kan vi bruge balsalen til? Jo, lad X og Y være mængder. X er mængden af "drenge", Y mængden af "piger". Skal vi nu undersøge om der er flest drenge eller piger, eller eventuelt lige mange drenge og piger, kan vi føre de forventningsfulde x'er og y'er ind i Jessens balsal og bede dem tage plads på de dertil indrettede stolerækker. Beder vi drengene byde pigerne op til dans, og lykkes det for alle drengene at komme ud at danse, må det være udtryk for, at der er nok af piger at tage, altså, at der er flere eller i hvert fald mindst lige så mange piger som drenge.

Når drengene byder pigerne op til dans, og lad os tænke os, at det lykkes for alle drenge at komme ud at danse, er der tale om at hver dreng udvælger en pige, *inklinerer* for hende med et fremmedord, som jeg vil bruge (og som de fleste vist kender?). Da ingen pige må danse med mere end én dreng – nej, sådan noget vil vi virkelig ikke have – opfylder afbildningen *dreng* $\curvearrowright$ *udvalgt pige* den betingelse, vi kender så godt (?) fra definitionen af en injektiv afbildning. Selvom alle drengene, sådan som vi forestiller os, danser lysteligt, kan der udmærket være nogen blandt pigerne, der ikke tager del i morskaben. Med andre ord, der kan være bænkevarmere. Men er vi heldige, er der ingen bænkevarmere, enhver pige er budt op til dans. Betingelsen for at dette finder sted, genkender vi også: Det er jo, at afbildningen *dreng* $\curvearrowright$ *udvalgt pige* er surjektiv. For at præcisere:

Definition 1.1. Lad X (drengemængden) og Y (pigemængden) være mængder. Ved en *drenge-inklination* forstås en injektiv afbildning $X \to Y$. Ved en *fuldstændig drenge-inklination* forstås en bijektiv afbildning $X \to Y$. Tilsvarende defineres en *pige-inklination* som en injektiv afbildning $Y \to X$ og en *fuldstændig pige-inklination* som en bijektiv afbildning $Y \to X$.

For at sikre at vi er helt enige om terminologien, skal det understreges, at når der tales om en afbildning $X \to Y$, er det underforstået, at afbildningen har hele X som definitionsmængde. I situationer, hvor det af sammenhængen fremgår, om vi betragter en drenge- eller en pige-inklination, tales ofte bare om en inklination.

Definitionen er intet andet end en anden og mere malende, suggestiv måde end den sædvanlige at udtrykke på, at en afbildning er henholdsvis injektiv eller bijektiv. Jeg tror, jeg tør kalde det en kendsgerning, at mange gymnasieelever ikke har rigtig fat på disse begreber. Måske kan ovenstående (poppede?) definition hjælpe til at klare begreberne. Det var hensigten. Hvis du, min læser, slet ikke kan lide forestillingen om drenge, piger og dans, ja, så vil du næppe komme til at bryde dig om det følgende. Måske er du formalist og foretrækker en rent teknisk matematisk referenceramme. [4]

[3] Efter læsningen vil læseren dog nok indvende, at selv Hilberts hotel er alt, alt for lille til at huse Jessens balsal.

[4] Her er, til formalisten, de kolde matematiske definitioner. Lad X og Y være mængder. *Produktmængden* $X \times Y$ er mængden af ordnede par (x, y) med $x \in X$ og $y \in Y$. En *afbildning fra* X *til* Y er en mængde $f \subseteq X \times Y$ så at implikationen $(x, y) \in f$, $(x, y') \in f \Rightarrow y = y'$ gælder. Hvis $(x, y) \in f$, skrives hyppigt $y = f(x)$, evt. $x \curvearrowright y$. *Definitionsmængden* er mængden $\mathrm{Dm}(f) = \{x \mid \exists y : y = f(x)\}$ og *værdimængden* er

Vi vender tilbage til spørgsmålet om, hvilken af mængderne X og Y, der indeholder "flest" elementer og udmønter vore betragtninger fra før i endnu en definition:

Definition 1.2. Vi siger, at *mægtigheden, kardinaliteten* eller *kardinaltallet* af (drenge-) mængden X er mindre end eller lig med mægtigheden (kardinaliteten, kardinaltallet) af (pige-) mængden Y, og skriver

$$|X| \leq |Y|,$$

såfremt der findes en inklination $X \to Y$.

Vi siger, at *mægtigheden (kardinaliteten, kardinaltallet)* af de to mængder er den samme, og kalder mængderne ækvipotente, og skriver

$$|X| = |Y|,$$

såfremt der findes en fuldstændig inklination $X \to Y$.

Sprogbrugen følger her Lars Mejlbo.[5]

Kort skrevet kan de to definitioner udtrykkes således

$$\begin{aligned} |X| \leq |Y| &\Leftrightarrow \exists \text{ drenge-inklination } X \to Y \\ &\Leftrightarrow \exists f : X \to Y \text{ injektiv,} \\ |X| = |Y| &\Leftrightarrow \exists \text{ fuldstændig drenge-inklination } X \to Y \\ &\Leftrightarrow \exists f : X \to Y \text{ bijektiv.} \end{aligned}$$

Endnu en definition har vi brug for:

Definition 1.3. Vi siger, at mægtigheden (kardinaliteten, kardinaltallet) af X er strengt mindre end mægtigheden (kardinaliteten, kardinaltallet) af Y, og vi skriver

$$|X| < |Y|,$$

såfremt $|X| \leq |Y|$ og non($|X| = |Y|$) gælder.

For at understøtte intuitionen, vil vi fra tid til anden bruge endnu nogle udtryk hentet fra dagligdagen. Lad $f : X \to Y$ være en inklination. Når x inklinerer for y, altså, når $y = f(x)$, omtaler vi også y som den *udkårne* og x som *tilbederen* eller *beundreren.* Om de varme følelser, der her tænkes at herske, er gængældt, er ikke godt at vide. Hvis pigerne en aften byder drengene op til dans, lad os sige ved inklinationen $g : Y \to X$, er det jo ikke givet – som mange vil vide af bitter erfaring – at pigen y fra før netop foretrækker drengen x altså, at $x = g(y)$. Også når pigerne byder op til dans, bruger vi betegnelserne "udkåren" og "tilbeder".

mængden $\mathrm{Vm}(f) = \{y \mid \exists x : y = f(x)\}$. Afbildningen er en *afbildning af X ind i Y*, og vi skriver $f : X \to Y$, hvis $\mathrm{Dm}(f) = X$. Afbildningen er *injektiv* hvis implikationen $(x, y) \in f$, $(x', y) \in f \Rightarrow x = x'$ gælder, *surjektiv* hvis $\mathrm{Vm}(f) = Y$ og *bijektiv*, hvis den både er injektiv og surjektiv. Er afbildningen f fra X til Y injektiv, defineres den *inverse afbildning*, f^{-1}, som afbildningen fra Y til X defineret ved $(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in f$. For at fuldende definitionerne af grundlæggende begreber, anføres, at for afbildninger $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ defineres den *sammensatte afbildning* $g \circ f : X \to Z$ ved $(x, z) \in g \circ f \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in f, (y, z) \in g$.

[5]Sprogbrugen er standard, notationen ligeså, omend card(X) også bruges af mange forfattere. I [LM1] og [LM2] bruges notationen $\overline{\overline{X}}$

Når a inklinerer for b (a er tilbederen, b den udkårne), og vi ikke har behov for at minde om, hvilken speciel inklination, vi har i tankerne, skriver vi

$$a \vdash b.$$

Notationen kan altså bruges både i tilfældet $x \vdash y$, med $y = f(x)$, og i tilfældet $y \vdash x$, med $x = g(y)$.

Lad os nu hæfte os ved situationen, hvor $|X| = |Y|$ (det havde vi nok også i tankerne ovenfor). Kravet hertil er, at der findes en fuldstændig inklination $f : X \to Y$. Kun tilsyneladende behandler denne betingelse X og Y forskelligt (kravet er jo ækvivalent med at der findes en fuldstændig inklination $g : Y \to X$). For at bringe symmetrien bedre til udtryk, kan vi tale om en *fuldstændig sammenparring* af drengene og pigerne, når der foreligger en fuldstændig inklination (hvadenten dette refererer til et $f : X \to Y$ eller et $g : Y \to X$).

Af og til er det dog nyttigt netop at behandle drenge og piger forskelligt. Det kender vi jo så godt . . . . Hvis nogen taler om Anna Bertelsen, spørger vi måske først "hvem er det, hvem er hun gift med?" og reagerer på svaret med et "åhh, det er bankdirektørens, hvor interessant!". Anna Bertelsen er ikke længere Anna, nej, hun er bankdirektørens kone. Vi har "omkodet hende", brugt bankdirektøren til at identifisere hende, fortælle, hvem hun er. Omend denne praksis er lidet påskønnelsesværdig, er den til tider nyttig i matematikken. Er $f : X \to Y$ en fuldstændig inklination, siger vi, at den giver en *kodning* af pigerne, eller at pigerne er *kodet* ved drengene. Hvis f.eks. Anna (bankdirektørens kone, I ved!), Bergthora, Christina, Anders, Bergfinnur og Christian frekventerer Cantor's balsal og Anders inklinerer for Anna, Bergfinnur for Bergthora og Christian for Christina, så giver det en kodning af pigerne, som vi så ikke længere tænker på som de tre søde piger Anna, Bergthora og Christina, hvorom meget kan siges, men som henholdsvis Anders' pige, Bergfinnurs pige og Christians pige: $\text{pige}_{\text{anders}}$, $\text{pige}_{\text{bergfinnur}}$ og $\text{pige}_{\text{christian}}$.

ØVELSE 1.1. Indse, at $|X| < |Y|$ kommer ud på, at der findes en inklination $X \to Y$ – så alle drengene kan altså komme ud at danse – men ligegyldigt hvordan drengene byder pigerne op til dans (altså ligegyldigt, hvilken inklination de anvender), vil der være bænkeværmere blandt pigerne (mindst én).

ØVELSE 1.2. Antag, at $|X| < |Y|$ og at X er uendelig. Bevis, at for enhver inklination $X \to Y$, må der være uendeligt mange bænkevarmere blandt pigerne!

Vejledning: Udnyt [LM1], Sætning 2 (som sikrer, at der findes en numerabelt uendelig delmængde af X) og tænk som receptionisten på Hilberts hotel!

ØVELSE 1.3. Antag igen, at $|X| < |Y|$ og at X er uendelig. Bevis følgende skærpelse af resultatet i Øvelse 1.2: For enhver inklination $X \to Y$, vil $|B| > |\mathbb{N}|$, hvor B er mængden af bænkevarmere.

Vejledning: Igen, receptionisten på Hilberts hotel kan klare denne opgave.

Bemærkning 1.4. Der gælder et endnu stærkere resultat – og et, selv receptionisten på Hilberts hotel har svært ved at fatte, se Øvelse 4.1.

2 Variationer over et tema af Cantor

Udgangspunktet er Cantors sætning. Den har vi jo set i Lars Mejlbo's hæfter. I al sin enkelhed siger den, at $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. I dansesproget siger den, at ligegyldigt, hvordan de "naturlige drenge" byder de "reelle piger" op til dans, vil der altid være bænkevarmere blandt pigerne. Det snedige og uhyre simple ræsonnement, diagonalræsonnementet, vil vi give en udformning, så det direkte kan anvendes på enhver mængde X. Herved vil vi vise følgende resultat (omtalt i [LM1], Kapitel 7):

Sætning 2.1. *For enhver mængde X findes en mængde Y med større kardinalitet: $|X| < |Y|$.*

Denne sætning er selvfølgelig banal for endelige mængder. For uendelige mængder kan vi ved gentagen anvendelse af sætningen konstruere flere og flere uendelige mængder, for eksempel kan vi vise:

Sætning 2.2. *Der findes en følge af uendelige mængder $X_1, X_2, \ldots$ således, at*

$$|X_1| < |X_2| < |X_3| < \cdots ,$$

altså $|X_n| < |X_{n+1}|$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

ØVELSE 2.1. Indse det!

Vejledning: Det er ganske let! Start med $X_1 = \mathbb{N}$, f. eks., og anvend Sætning 2.1 (som ganske vist endnu ikke er vist).

Om Sætning 2.2: Det er ligegodt uhyggeligt! Der må altså ikke bare være mere end én slags "uendelighed" (det vidste vi fra resultatet $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$), men uendelig mange slags uendeligheder! Og situationen er langt mere kompliceret end antydet i Sætning 2.2. Det vender vi tilbage til i afsnit 4 (se Øvelse 4.2).

Vi vender os mod beviset for Sætning 2.1. Læseren er advaret, sætningen har nogle konsekvenser, der let kan få det til at svimle for os. Så læseren må være på vagt. Kan det virkelig være rigtigt? Men beviset er uafviseligt simpelt − selv den mest pedantiske læser må bøje sig. Se blot! Først en definition, som egentlig bare er en introduktion af en bekvem notation, standard i almindelig mængdelære:

Definition 2.3. Lad X være en mængde. Med 2^X betegnes mængden af afbildninger af X ind i mængden, der indeholder de to elementer 0 og 1:

$$2^X = \{f \mid f : X \to \{0, 1\}\} .$$

Vi kan nu vise Sætning 2.1 i følgende konkrete udgave

Sætning 2.4. *For alle mængder X gælder*

$$|X| < |2^X|.$$

Bevis. (Cantors diagonalmetode, strømlinet udgave) Vi fører elementerne i X ind som drenge og elementerne i 2^X ind som piger i Jessens balsal. Det er let at se, at alle drengene kan komme ud at danse. Vi skal bare lade drengen $x_0 \in X$ byde pigen $f_0 \in 2^X$ op, hvor

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = x_0, \\ 0 & \text{for } x \neq x_0. \end{cases}$$

Overvej! Dermed har vi vist, at $|X| \leq |2^X|$.

For at vise, at $|X| < |2^X|$, lader vi $f : X \to 2^X$ betegne en vilkårlig inklination. I stedet for den sædvanlige betegnelse $f(x)$ for billedet af x under afbildningen f, bruger vi betegnelsen f_x. For ethvert $x \in X$, er f_x altså en afbildning af X ind i $\{0,1\}$. Og som sådan har f_x for ethvert element $x' \in X$ en funktionsværdi $f_x(x')$, som altså enten er 0 eller 1.

Se nu på pigen ("diagonalpigen") $\delta \in 2^X$ defineret ved forskriften

$$\delta(x) = 1 - f_x(x), \quad x \in X. \tag{2.4.1}$$

At vi ved (2.4.1) virkelig har defineret en pige (et element i 2^X), er klart. Overvej! Men det er også klart, at hun er bænkeværmer. For lad x_0 betegne en af drengene (et element i X). Så danser x_0 med pigen f_{x_0}, og det er i hvert fald ikke pigen δ, thi

$$\delta(x_0) = 1 - f_{x_0}(x_0) \neq f_{x_0}(x_0).$$

Dette ræsonnement kan, som sagt, anvendes for enhver dreng $x_0 \in X$. Ergo må pigen δ være bænkevarmer (ved inklinationen f). Inklinationen f var vilkårlig. Så ved enhver inklination findes en bænkevarmer! □

Øvelse 2.2. Det væsentlige i beviset er, at *ingen* afbildning (injektiv eller ej) $x \curvearrowright f_x$ af X ind i $Y = 2^X$ er surjektiv. Dette i sig selv sikrer, at $|X| < |Y|$. Bevis dette!

Vejledning: Vi må bede læseren udnytte et resultat fra mængdelæren uden bevis, nemlig at for alle mængder A og B gælder et af udsagnene $|A| < |B|$, $|A| = |B|$ eller $|A| > |B|$ (se [LM1], Sætning 5). Dette resultat, som lyder så plausibelt, er dybtliggende og bygger på et spidsfindigt aksiom (udvalgsaksiomet) fra aksiomatisk mængdelære.

Øvelse 2.3. [6] For hver af mængderne $X = \{0\}$, $\{0,1\}$ og $\{0,1,2\}$ skal man bestemme 2^X og angive $|2^X|$ (husk: for endelige mængder skrives $|Y| = n$ såfremt Y er ækvipotent med en mængde med n elementer).

Det er muligt, at den, der nøjere har tænkt over Øvelse 2.3 vil have fået øje på at 2^X har "noget med" mængden af delmængder af X at gøre. Har man først fået øje på det, er det ikke svært at formalisere:

Definition 2.5. Lad X være en mængde, og A en delmængde af X. Ved indikatorfunktionen for A, der betegnes 1_A, forstås funktionen $1_A : X \to \{0,1\}$ givet ved

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in A, \\ 0 & \text{for } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

[6]En bemærkning til den formalistisk indstillede læser: Øvelsen ser på Sætning 2.4 for endelige mængder bestående af henholdsvis 1, 2 og 3 elementer. Man kan også se på sætningen for en mængde med 0 elementer, altså for den tomme mængde. En formalist, der nøje følger definitionerne på afbildninger m.v. givet i en tidligere fodnote, vil se, at sætningen også gælder i dette tilfælde, idet $2^\emptyset = \{\emptyset\}$, en mængde med ét element. Andre vil foretrække at sige, at den tomme mængde interesserer os ikke i Sætning 2.4.

Sætning 2.6. *Lad X være en mængde. Da er afbildningen*

$$A \curvearrowright 1_A$$

en bijektion af mængden af delmængder af X på mængden 2^X.

ØVELSE 2.4. Bevis dette!

Hvilken delmængde svarer til konstantfunktionen 0 ved bijektionen i sætningen? – Og til konstantfunktionen 1?

ØVELSE 2.5. Udnyt sætningerne 2.4 og 2.6 til at vise, at enhver mængde indeholder flere delmængder end elementer. Præcisér først påstanden. Gælder påstanden også for den tomme mængde?

ØVELSE 2.6. Konstruér en konkret følge af uendelige mængder, der opfylder betingelserne i Sætning 2.2.

Vejledning: Se Øvelse 2.1. Konstruktionen bør kunne udføres "naivt" af alle (f. eks. ved anvendelse af udtryk som "o.s.v."). De, der kender til induktion og, bedre, rekursion[7] kan formalisere konstruktionen, hvis de finder det spændende.

ØVELSE 2.7. Bevis, at der findes en injektiv afbildning $F : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, og slut heraf, at $\mathbb{R}$ indeholder en delmængde, som er ækvipotent med $2^{\mathbb{N}}$. (Se videre i Øvelse 4.5).

Vejledning: F. eks. kunne vi til $f \in 2^{\mathbb{N}}$ lade svare

$$F(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot 10^{-n}.$$

(Tænk på det som decimaltal).

ØVELSE 2.8. Udnyt resultatet i Øvelse 2.7 og Sætning 2.4 til at vise Cantor's sætning

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|.$$

Sammenlignes med det bevis for Cantor's sætning, der er lagt op til i sidste øvelse med det i [LM1] og [LM2] givne, vil man se, at det egentlig er samme bevisidé, der ligger bag, ja, det er faktisk "samme" bevis. Vores betragtningsmåde er altså en variation over et tema af Cantor.

[7] Lad os kort minde om principperne for induktion og rekursion (over $\mathbb{N}$). Lad $p(n)$ være et udsagn, parametriseret ved $n \in \mathbb{N}$ (f.eks. kunne det være udsagnet $\forall x \in \mathbb{R} : \sum_1^n \sin(kx) = \sin(\frac{n}{2}x) \cdot \sin(\frac{n+1}{2}x)/\sin(\frac{x}{2})$ eller udsagnet $\forall f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} : f$ injektiv $\Rightarrow f$ surjektiv). *Induktionsprincippet* siger, at såfremt $p(1)$ er sand og såfremt implikationen "$p(n)$ sand $\Rightarrow p(n+1)$ sand" gælder for alle $n \in \mathbb{N}$, så er $p(n)$ sand for alle $n \in \mathbb{N}$. For *rekursionsprincippet* (eller princippet for konstruktion ved induktion) er der (i vores udgave) givet en mængde Y, et element $y_1 \in Y$ og en afbildning, der til hvert $n \in \mathbb{N}$ og enhver afbildning $f : \{1, \dots, n\} \to Y$ lader svare et element $\Phi(n, f) \in Y$. Ifølge rekursionsprincippet findes da en entydigt bestemt afbildning $F : \mathbb{N} \to Y$ således, at $F(1) = y_1$ og så at det for hvert $n \in \mathbb{N}$ gælder, at $F(n+1) = \Phi(F|n)$, hvor $F|n$ betegner F's restriktion til $\{1, 2, \dots, n\}$. For dette princip er det ikke vigtigt at vi på forhånd har givet en mængde Y. Det er nok at have givet et y_1 og en afbildning, der til hvert n, f med $n \in \mathbb{N}$ og f en afbildning af $\{1, 2, \dots, n\}$ knytter en eller anden mængde $\Phi(n, f)$.

3 Bernstein's ækvivalenssætning

Matematikken er fuld af sætninger eller, højtideligere, teoremer, der alle er irriterende – eller fascinerende, alt efter smag – ved at kræve et stringent, uimodsigeligt bevis. Nogle sætninger er lette at formulere, andre komplicerede, nogle er "oplagte", andre overraskende eller endog direkte i modstrid med vores intuition. Og "oplagte" sætninger kan have lange, besværlige beviser, mens lange sætninger med komplicerede formuleringer meget vel kan have ganske korte beviser. Læseren kan more sig med at finde eksempler frem på disse fænomener – fra Lars Mejlbo's noter og dette supplement eller fra bekendtskabet med anden matematik.

Den sætning, vi ser på, udmærker sig ved at være så intuitivt oplagt, at den første vanskelighed er at indse, at der overhovedet er noget at bevise. Det drejer sig om følgende resultat (se også Sætning 4 i [LM1]):

Sætning 3.1 (Bernstein's ækvivalenssætning). *Hvis to mængder X og Y opfylder de to betingelser*

$$|X| \leq |Y| \text{ og } |Y| \leq |X|,$$

så er mængderne ækvipotente, altså

$$|X| = |Y|.$$

Hvis vi havde skrevet "det er klart at ... " i stedet – og læseren ikke var advaret – så havde de fleste nok accepteret påstanden uden videre. Lad os først prøve at finde ud af, hvor problemet ligger.

Vi bruger vores dansesymbolik. Det hele foregår i Jessens balsal. Betingelsen $|X| \leq |Y|$ betyder, at alle drengene (x'erne) kan komme ud at danse, når de byder pigerne (y'erne) op til dans. Der findes altså en drenge-inklination $f : X \to Y$. Og tilsvarende siger betingelsen $|Y| \leq |X|$, at alle pigerne kan komme ud at danse, når de byder drengene op til dans, der findes altså en pige-inklination $g : Y \to X$.

Problemet er, at der kan være bænkevarmere blandt pigerne ved drenge-inklinationen, således, at denne ikke er fuldstændig, og at der også kan være bænkevarmere blandt drengene ved pige-inklinationen, således, at heller ikke denne er fuldstændig.

Problemet opstår altså, når såvel f som g giver bænkevarmere. Kan det tænkes? Ja det kan det da. Med den baggrund læseren forudsættes at have fra diskussionen af Hilberts Hotel, er dette klart – og vi skal også snart se eksempler herpå. Men problemet opstår ikke for endelige mængder:

Øvelse 3.1. Bevis det! Mere præcist skal man bevise, at såfremt X og Y er endelige mængder (det er nok at antage, at en af mængderne er endelig) og der findes $f : X \to Y$ injektiv og $g : Y \to X$ injektiv, så er såvel f som g surjektive (ingen bænkevarmere!) og X og Y indeholder altså samme antal elementer: $|X| = |Y|$.

Bemærkning. Vi anfører faktisk senere et bevis herfor. Men læseren bør selv kunne finde et bevis – og så kan det være interessant at sammenligne med det, vi foreslår senere (Øvelse 3.7).

Hvordan kan vi leve os mere ind i problemstillingen? Tit, når man skal vise en generel sætning, er det en god idé at undersøge nogle simple specialtilfælde, nogle eksempler. Ligeledes her. Vi vil se på ét enkelt eksempel og må vælge ét med uendelige mængder X og Y – ellers er der intet problem. Da sætningen *er* sand, er vi nødt til at vælge et eksempel med X og Y ækvipotente mængder. Så kan vi lige så godt vælge et eksempel med X og Y eksemplarer af *samme* uendelige mængde. Og hvorfor ikke vælge den simpleste uendelige mængde, vi kender, nemlig $\mathbb{N}$?

Det bør ikke forvirre, at vi vælger et eksempel med eksemplarer af samme mængde og skriver $X = Y$, hvor vi tænker på X og Y som disjunkte (X indeholder jo kun drenge, Y kun piger). Formalisten står sig måske ved at sikre sig, at X og Y er forskellige. Når vi f.eks. skriver "lad $X = Y = \mathbb{N}$", kan formalisten lade $X = \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ og $Y = \{(n, 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$, d.v.s. et ekstra mærke "0" indføres for at vise, det er en dreng, og et "1" viser, det er en pige. Vi vil dog ikke være så formelle i det følgende.

Hvordan kan vi lære noget af et så simpelt eksempel, hvor $X = Y = \mathbb{N}$? Her er det jo oplagt, at $|X| = |Y|$ – vi behøver blot betragte den identiske afbildning $X \to Y$ for at se dette. Men pointen er, at vi skal vise $|X| = |Y|$ udelukkende på basis af det, der er givet, nemlig inklinationerne $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$. Vores eksempel er ikke helt fastlagt, idet vi endnu intet har sagt om f og g. Det vil vi gøre nu. Lad os tænke os, at den "naturlige" dreng $n \in X$ tilhører det "n'te sociale lag". Jo højere socialt lag, jo bedre. Den naturlige dreng 1 tilhører altså det laveste sociale lag. Tilsvarende forestilling gør vi også gældende for pigerne. Det virker så rimeligt, at når den naturlige dreng n byder en pige op til dans, vælger han én, der tilhører et højere socialt lag, men kun lige ét lag højere. Med andre ord, vi ser på inklinationen $f : X \to Y$ givet ved

$$f(n) = n + 1, \quad n \in X\,(= \mathbb{N}).$$

Ved inklinationen f vil pigen $1 \in Y$ være bænkevarmer. Ganske tilsvarende, tænker vi os, at pigerne, når de skal byde op til dans, gør dette efter inklinationen $g : Y \to X$ givet ved

$$g(n) = n + 1, \quad n \in Y\,(= \mathbb{N}).$$

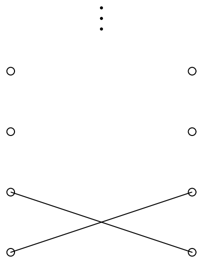
Når pigerne byder op til dans, er drengen $1 \in X$ bænkevarmer.

drenge-inklinationen f pige-inklinationen g

Figur 1:

Vi har nu et helt konkret eksempel at tænke på. Alle indgående størrelser X, Y, f og g er fastlagt. Ud fra *dem* (og ikke ud fra anden "inside" viden om at X og Y klart er ækvipotente) skal vi vise, at *alle* kan komme ud at danse. Det er nærliggende at søge en løsning, så hver enkelt *enten* kommer til at danse med sin udkårne *eller* med sin tilbeder (hvis vedkommende da har en tilbeder, altså ikke er bænkevarmer). Med andre ord, hvis vi ser på en dreng $n \in X$, vil vi sørge for at n enten komme til at danse med pigen $n+1$ (n's udkårne) eller, hvis $n > 1$, med pigen $n-1$ (n's tilbeder). Og tilsvarende for pigerne.

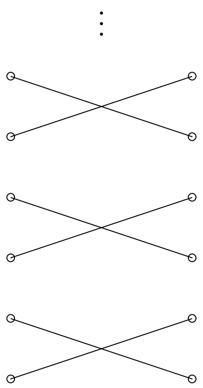
Nu er det faktisk også klart, hvordan vi må parre drengene og pigerne sammen for at alle kan komme ud at danse. Dreng 1, der er bænkevarmer, når pigerne byder op til dans, må nødvendigvis parres med pige 2. Tilsvarende må pige 1 nødvendigvis parres med dreng 2. Så er vi så langt (Figur 2): Så ser vi, at dreng 3 nødvendigvis må parres med pige 4 – thi pige 2



Figur 2:

(tilbederen) er optaget. Tilsvarende må pige 3 danse med dreng 4 – thi dreng 2 (tilbederen) er optaget.

Sådan kan vi fortsætte og ser, at vi føres til den fuldstændige sammenparring vist i Figur 3 (hvor alle ulige gæster i Jessens balsal – drenge som piger – danser med deres udkårne).



Figur 3:

Øvelse 3.2. Antag nu, at $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ og $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er givet ved

1° $f(n) = n+2$, $g(n) = n+2$,

2° $f(n) = n+1$, $g(n) = n+2$,

og vis, i hvert tilfælde, at princippet om at alle skal danse enten med deres udkårne eller deres tilbeder fører til en fuldstændig sammenparring af "drengene" med "pigerne".

Øvelse 3.3. Antag nu, at $X = Y = (0, \infty)$ og at inklinationerne $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ er givet ved

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1, \quad x \geq 0, \\ g(y) &= y + 2, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Find også i dette tilfælde en sammenparring af "drengene" og "pigerne", så alle kommer ud at danse og således, at hvis x og y danser sammen, så vil enten $f(x) = y$ eller $g(y) = x$.

Øvelse 3.4. Lad $X = [0, 1]$ og $Y = [0, 1)$ (intervallet Y har altså ikke højre endepunkt med). Se på inklinationerne $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ givet ved $f(x) = \frac{x}{2}$ og $g(y) = y$. Brug disse inklinationer til at konstruere en fuldstændig sammenparring af "drengene" og "pigerne".

Bemærkning. Man kan overveje, om en fuldstændig inklination kan være kontinuert. Det er i øvrigt lærerigt at sammenligne med øvelserne 4–15 i [LM1].

Øvelse 3.5. De eksempler, der er angivet ovenfor (i øvelserne og i hovedteksten) fører alle til en entydigt bestemt sammenparring af drenge og piger ud fra de givne inklinationer $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$, når vores princip om, at alle skal danse med en tilbeder eller den udkårne skal opretholdes. Konstruer simple eksempler, hvor den søgte sammenparring ikke er entydigt bestemt. (Se videre i Øvelserne 4.12–4.15).

Vi er nu så langt, at vi kan se, hvordan vi kan ræsonnere for at konstruere den ønskede sammenparring i Bernsteins ækvivalenssætning. Vi mangler bare at formalisere betragtningerne og løsrive os fra de konkrete eksempler. Det er måske bekvemt at indføre en sprogbrug:

Lad X og Y være mængder og $f : Y \to Y$ og $g : Y \to X$ inklinationer. Vi siger da, at

$$(y_1, x_1, y_2, \ldots , x_{n-1}, y_n)$$

er en *inklinationsstreng med udgangspunkt* y_1 såfremt

$$x_1 = g(y_1),\ y_2 = f(x_1),\ x_2 = g(y_2),\ \ldots ,\ y_n = f(x_{n-1}).$$

(y_1 inklinerer for x_1, som inklinerer for y_2, som inklinerer for x_2 o.s.v.). De enkelte elementer $y_1, x_1, \ldots , y_n$ er *deltagerne* i inklinationsstrengen.

Vi skriver også en inklinationsstreng på formen

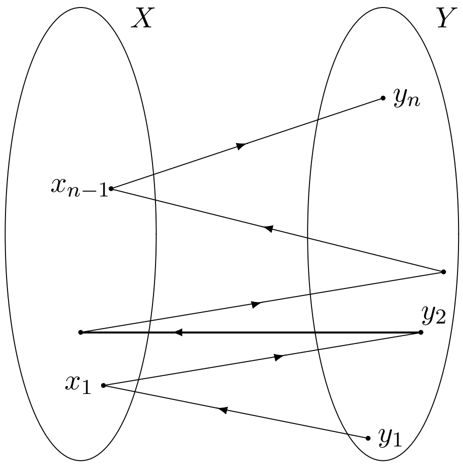
$$y_1 \vdash x_1 \vdash y_2 \vdash \cdots \vdash y_n,$$

hvilket harmonerer med den tidligere indførte notation $a \vdash b$ for "a inklinerer for b". Med denne sprogbrug er det ret let at formulere det ønskede bevis.

Bevis for Sætning 3.1. Lad $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ være inklinationer. Vi vil konstruere en sammenparring vejledt af to principper, dels vores standardprincip, at alle danser enten med deres udkårne eller med deres tilbeder, dels et princip om at vi kun vil lade en pige danse med sin udkårne, hvis det er strengt nødvendigt for at undgå bænkevarmere.

Lad B være mængden af alle piger, der er med i en inklinationsstreng, som har en bænkevarmer blandt pigerne som udgangpunkt:

$$B = \{y \in Y \mid \text{ der findes } y_1 \vdash x_1 \vdash y_2 \vdash \cdots \vdash x_{n-1} \vdash y_n \text{ med } y_1 \notin f(X) \text{ og } y_n = y\}.$$



Figur 4:

(Her kan n være et vilkårligt naturligt tal – tilfældet $n = 1$ svarer til at y selv er bænkevarmer).

Dansemesteren Cantor parrer nu alle piger i B med deres udkårne, og beder alle de par, der herved dannes om at gå ud at danse.

Dernæst beder Cantor alle de resterende drenge byde deres udkårne op til dans. Og se, nu danser alle! Lad os vise det.

Først bemærkes, at hvis x er en af de resterende drenge, så er hans udkårne, altså pigen $y = f(x)$, ikke blandt dem, der allerede danser, d.v.s. der gælder $y \notin B$. Dette indses let indirekte (ellers ville y være med i en inklinationsstreng af typen $y_0 \vdash \cdots \vdash y' \vdash x \vdash y$, hvor y_0 er en af bænkevarmerne, og så ville x allerede være ude at danse med pigen y').

Det er klart, at alle drenge danser. Men også alle piger danser. Hvis nemlig pigen y ikke kom ud at danse i første omgang, har hun selvfølgelig en tilbeder, lad os sige x, og x kan ikke være blevet budt op til dans i første omgang (thi var han det, ville vi have en inklinationsstreng af typen $y_0 \vdash \cdots \vdash y' \vdash x \vdash y$, hvor y_0 er en af bænkevarmerne, og så ville $y \in B$). Drengen x hører altså til de resterende drenge efter første sammenparring og har derfor, i henhold til Cantors instruks, budt sin udkårne, pigen y, op til dans.

Hermed er beviset ført. □

Øvelse 3.6. Drengene og pigerne har hver aften, lige fra tidernes begyndelse, danset i Jessens Balsal. De skiftes, som rimeligt er, til at byde op til dans. Alle har deres faste foretrukne partner.

Generte er de, de unge mennesker – undtagen når der danses. Da går snakken til gengæld livligt. Men hver aften er der bænkevarmere – enten nogle drenge eller noge piger. Det ærgrer den gamle dansemester Cantor. Men han har en plan.

På den yderste dags morgen – det er dagen ω, den første dag med uendeligt mange forudgående dage – meddeler han, at ω-jubilæet skal fejres om aftenen, og det på en festlig måde, ved at alle danser. Meddelelsen hilses med skepsis og forsigtige mishagsytringer, som dog hurtigt lægger sig, da dansemesteren forsikrer, at ingen vil komme til at danse med en ukendt partner.

Aftenen oprinder. Dansemesteren, der altid har haft særlig ondt af de piger, der har været bænkevarmere, beder nu dem, og alle piger, der har hørt om disse stakler, om at byde deres udkårne op. Det gør de, og stiller op, parate til dans. Dernæst beder dansemesteren alle drenge, der endnu ikke er kommet på dansegulvet, om at inklinere for deres udkårne. Musikken spiller op, dansen kan begynde. Og se, alle danser! – Og den gamle dansemester glædede sig derved.

Diskutér! Sammenlign med beviset for Bernstein's ækvivalenssætning. Hvorfor måtte Cantor vente til ω-jubilæet med at sætte sin plan i værk?

Øvelse 3.7. Igen har vi to inklinationer $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ i tankerne. Bemærk først, at enhver dreng, og også enhver pige, fastlægger en uendelig inklinationsstreng. Pigen y fastlægger således en inklinationsstreng

$$y_1 \vdash x_1 \vdash y_2 \vdash \cdots \vdash y_n \vdash x_n \vdash \cdots$$

Bevis, at hvis y_1 er bænkevarmer, så er alle x'erne og alle y'erne forskellige i den uendelige inklinationsstreng med udgangspunkt i pigen y_1 ($i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ og $y_i \neq y_j$).

Benyt dette til at give et let bevis for Bernstein's ækvivalenssætning i det tilfælde, hvor en af mængderne X eller Y vides at være endelig.

Benyt også betragtningen til at vise, at enhver injektiv afbildning af en endelig mængde ind i sig selv er surjektiv.

Øvelse 3.8. (Til formalisten). Lad $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ være injektive afbildninger. Sæt $h = f \circ g$ og definer mængderne $B_0, B_1, \dots$ ved

$$B_0 = Y \setminus f(X), \quad B_n = h(B_{n-1}) \quad \text{for } n \geq 1.$$

Vis, at $\varphi : Y \to X$ givet ved

$$\varphi(y) = \begin{cases} g(y) & \text{for } y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n, \\ f^{-1}(y) & \text{ellers,} \end{cases}$$

er en veldefineret afbildning, og at φ er en bijektion af Y på X. Sammenlign med hovedtekstens bevis for Bernstein's sætning.

4 Lidt udfordring

Vi anfører her en række øvelser, der enten kræver mere snilde af læseren end de fleste tidligere øvelser (eller øvelserne i [LM1]), eller kræver mere baggrundsviden, specielt vedrørende regning med uendelige kardinaltal. Den fulde forståelse kræver i nogle tilfælde, at man er nogenlunde fortrolig med mængdelærens aksiomer, specielt udvalgsaksiomet.

Ganske kort skal nævnes nogle resultater, der ikke kan siges at være elementære, (resultaterne er også nævnt i [LM1]).

Lad X og Y være mængder. Så vil enten $|X| < |Y|$, $|X| = |Y|$ eller $|Y| < |X|$ gælde. Antag nu, at $|X| \leq |Y|$ og at Y er uendelig. Så er alle mængderne

$$Y, \quad X \cup Y \quad \text{og} \quad X \times Y$$

ækvipotente. (Vedrørende produktmængden, skal det dog antages, at X er ikke-tom). Dette er velkendt, hvis X og Y er eksemplarer valgt blandt standardmængderne $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$ (overvej!).

ØVELSE 4.1. Antag at mængden X er uendelig og at $|X| < |Y|$. Bevis, at for enhver inklination $X \to Y$, vil $|B| = |Y|$, hvor B er mængden af bænkevarmere. (Sammenlign med Øvelse 1.3).

ØVELSE 4.2. For en vilkårlig følge af mængder, findes en mængde med større kardinalitet end enhver af mængderne i følgen. Vis det!

Bemærkning. Det ligger snublende nær at konkludere heraf, at der er mere end tælleligt mange forskellige slags uendeligheder (thi for enhver afbildning, der til $n \in \mathbb{N}$ lader svare en uendelig mængde X_n, findes en mængde – en "bænkevarmer" – med større mægtighed end alle de andre). Forklar evt., hvorfor dette ræsonnement ikke er korrekt!

Konklusionen *er* rigtig. Der gælder endog, at for enhver mængde findes der "flere" forskellige slags uendeligheder end der er elementer i mængden!

ØVELSE 4.3. Med $\mathbb{A}$ betegner vi mængden af *algebraiske tal,* dvs. mængden af reelle tal, der er rod i et polynomium med heltallige koefficienter. Med $\mathbb{N}^*$ betegnes mængden af alle endelige tupler af naturlige tal (f.eks. (1,3,17), (32), (1,2,3,4,5) der er hhv. en 3-tupel, en 1-tupel og en 5-tupel).

Bevis, at mængderne

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{A} \quad \text{og} \quad \mathbb{N}^*$$

alle er numerable, og dermed har samme mægtighed som $\mathbb{N}$.

ØVELSE 4.4. Generelt betegner X^Y mængden af afbildninger $Y \to X$. Vis, at mængderne

$$2^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \quad (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \quad \text{og} \quad (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$$

er ækvipotente.

Vejledning: Bemærk, at $(X^Y)^Z$ er ækvipotent med $X^{Y \times Z}$.

ØVELSE 4.5. Vis, at mængderne

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R}^3, \ldots \quad \text{og} \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

alle er ækvipotente med $2^{\mathbb{N}}$.

Vejledning: Konstruer en injektion $\mathbb{R} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (eller måske én $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; f.eks. kunne $-142,0987\ldots \curvearrowright (-143, 9, 0, 1, 2, \ldots)$). Udnyt resultaterne fra øvelserne 2.7 og 4.4.

ØVELSE 4.6. Bevis, at $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ og $2^{\mathbb{R}}$ er ækvipotente og slut, at der er "lige så mange" funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som der er delmængder af $\mathbb{R}$. Der er altså utroligt mange funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, specielt er der "flere" end der er reelle tal.

Bemærkning. Når vi ser bort fra de mængder, der er tænkt på i Sætning 2.2 eller i Øvelse 4.2, har vi derfor med en konkret (velkendt?) mængde at gøre, der er større end andre konkrete mængder, vi har set på.

ØVELSE 4.7. Generaliser resultatet i Øvelse 4.6 og vis, at for enhver uendelig mængde X er X^X og 2^X ækvipotente.

Vejledning: Sammenlign X^X med $(2^X)^X$.

ØVELSE 4.8. Lad os kalde et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ *rationalt,* hvis begge endepunkterne er rationale, og et rektangel $I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$ *rationalt,* hvis I og J er rationale. Vis, at mængden af rationale rektangler i $\mathbb{R}^2$ er tællelig.

Vis, at der findes en følge af rationale kvadrater $K_1, K_2, \ldots$, hvis foreningsmængde er den åbne enhedscirkel.

Lad os kalde en delmængde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ *åben*, hvis der for ethvert punkt $(x, y) \in G$ findes et $\varepsilon > 0$, således at cirklen med centrum (x, y) og radius ε er indeholdt i G. Vis, at enhver åben delmængde er en foreningsmængde af rationale kvadrater og slut heraf, at mængden af åbne delmængder af $\mathbb{R}^2$ er ækvipotent med $\mathbb{R}$ selv. (Der er altså "ganske få" sådanne delmængder).

ØVELSE 4.9. Bevis, at

$$|C(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|,$$

hvor $C(\mathbb{R})$ netop betegner mængden af kontinuerte reelle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Der er altså ganske "få" kontinuerte funktioner – sammenlign med Øvelse 4.6).

Vejledning: Identificér en kontinuert funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med dens graf. Se på komplementet af grafen og udnyt resultatet af Øvelse 4.8. En anden (og måske noget enklere) idé: Udnyt, at to kontinuerte funktioner der stemmer overens på de rationale tal, er identiske.

ØVELSE 4.10. Lad M betegne mængden af monotont voksende funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vis, at der er ganske "få" af disse funktioner, forstået på tilsvarende måde som i Øvelse 4.9.

Vejledning: En monoton funktion er karakteriseret ved sine springsteder og funktionens værdier i de rationale tal og i springstederne. (Iøvrigt, udfordring: Konstruer en monoton funktion der har $\mathbf{Q}$ som mængden af springsteder!).

ØVELSE 4.11. Hvor "mange" polygoner er der i $\mathbb{R}^2$, når vi regner kanterne med til en polygon? (I øvrigt, prøv at definere en polygon præcist – ikke bare de konvekse).

ØVELSE 4.12. Punktet $x \in X$ er *fixpunkt* for afbildningen $f : X \to X$, såfremt $f(x) = x$. Er der ingen fixpunkter, er f *fixpunktfri.* Det er intuitivt "oplagt", at til enhver mængde X med mere end ét element findes en fixpunktfri bijektion $f : X \to X$. Dette er også rigtigt, men ikke elementært (udvalgsaksiomet kan udnyttes).

Udnyt resultatet om fixpunktfrie bijektioner til at vise, at for enhver uendelig mængde X, er mængden af bijektioner $X \to X$ ækvipotent med 2^X.

Bemærkning. For $X = \mathbb{R}$ kan ovenstående let vises (uden at påberåbe sig ukendte resultater vedrørende fixpunktfrie afbildninger), såfremt kontinuumshypotesen antages at gælde. Der er altså "utroligt mange" bijektioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (men "næsten ingen" kontinuerte eller monotone funktioner).

ØVELSE 4.13. Lad $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ være inklinationer. Vi siger, at en sammenparring (altså en bijektion mellem X og Y) er en *Schröder-Bernstein dans* såfremt det for alle par (x, y) i sammenparringen gælder enten, at $x \vdash y$ (altså $y = f(x)$) eller, at $y \vdash x$ (altså $x = g(y)$). Med $\mathrm{SB}(f \otimes g)$ betegner vi alle sådanne sammenparringer.

Ved en *inklinationscykel af længde* $2n$ (eller bare en *cykel*) forstås en inklinationsstreng af typen

$$x_1 \vdash y_1 \vdash x_2 \vdash \cdots \vdash x_n \vdash y_n \vdash x_1,$$

hvor $x_1, \ldots , x_n$ er n forskellige "drenge" og $y_1, \ldots , y_n$ er n forskellige "piger".

Ved en *dobbelt undelig inklinationsstreng* (uden gentagelser) forstås en inklinationsstreng af typen

$$\cdots \vdash x_{-1} \vdash y_{-1} \vdash x_0 \vdash x_1 \vdash y_1 \vdash \cdots$$

som ikke indeholder cykler.

Bevis, at en Schröder-Bernstein dans er entydigt bestemt hvis og kun hvis der hverken findes cykler, udover sammenparringer (2-cykler) eller dobbelt uendelige inklinationsstrenge.

Øvelse 4.14. Lad igen $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ være inklinationer. Betragt situationen som en *todelt graf*, hvor $x \in X$ og $y \in Y$ er forbundet med en kant, hvis og kun hvis $x \vdash y$ eller $y \vdash x$. Denne graf betegnes $f \otimes g$.

Bevis, at $f \otimes g$ falder i disjunkte bestanddele bestående af mængder af:

$2-$ cykler (sammenparringer)
$4-$ cyker
$6-$ cykler
$\vdots$
dobbelt-uendelige inklinationsstrenge
inklinationsstrenge med et $x \in X \setminus g(y)$ som udgangspunkt
inklinationsstrenge med et $y \in Y \setminus f(X)$ som udgangspunkt.

Bemærkning. Man kunne også bruge observationen til at definere *typen* af $f \otimes g$ (via en følge af kardinaltal).

Øvelse 4.15. Find et eksempel på inklinationer f og g med $X = Y = \mathbb{N}$, så $\mathrm{SB}(f \otimes g)$ og $2^{\mathbb{N}}$ er ækvipotente.

Øvelse 4.16. Lad igen $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ være inklinationer. Bevis, at der findes $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ og en bijektion $\varphi : A \to B$ således, at

(i) For alle $\psi \in \mathrm{SB}(f \otimes g)$ er ψ's restriktion til A identisk med φ.

(ii) f's restriktion til $X \setminus A$ er en bijektion $X \setminus A \to Y \setminus B$ og g's restriktion til $Y \setminus B$ er en bijektion $Y \setminus B \to X \setminus A$.

(iii) Hvis det om $x \in X$ og $y \in Y$ gælder, at $\psi(x) = y$ for alle $\psi \in \mathrm{SB}(f \otimes g)$, så vil $x \in A$ og $y \in B$.

Bemærkning. A, B og φ er naturligvis entydigt bestemt; $A = B = \emptyset$ kan forekomme.

Øvelse 4.17. (Hall's sætning eller giftesætningen). Hvordan kan drengene bestemme sig for, hvem de vil byde op til dans? Givet er, som sædvanlig, X, drengemængden, og Y, pigemængden. Der er endvidere givet en relation $R \subseteq X \times Y$, hvor $y \in R(x)$ (altså xRy eller $(x, y) \in R$) tolkes "x kan godt lide y". Vi siger, at R *tillader en (drenge-) inklination* såfremt der findes en inklination $f : X \to Y$ (altså en injektiv afbildning) med $f \subseteq R$.

(i) Bevis, at såfremt R tillader en inklination, må *Hall's betingelse* (udvidet form):

$$\forall X_0 \subseteq X : |R(X_0)| \geq |X_0|$$

gælde.

(ii) Bevis, at såfremt $R(x)$ er endelig for alle $x \in X$, såfremt *Hall's betingelse:*

$$\forall X_0 \subseteq X, X_0 \text{ endelig} : |R(X_0)| \geq |X_0|$$

er opfyldt og såfremt R er minimal (dvs. $S \subseteq R$, S opfylder Hall's betingelse $\Rightarrow S = R$), så er R selv en injektion.

Vejledning: Antag $R(x_0)$ indeholder mindst to punkter y_1 og y_2. Udnyt minimaliteten til at finde to mængder X_1 og X_2 som ikke indeholder x_0 således, at $X_1 \cup \{x_0\}$ og $X_2 \cup \{x_0\}$ bryder Hall's betingelse, hvis henholdsvis (x_0, y_1) eller (x_0, y_2) fjernes fra R. Så vil $R(X_1)$ indeholde alle punkter i $R(x_0)$ på nær y_1, og X_1 er en *kritisk* mængde, dvs. en endelig mængde, så $|R(X_1)| = |X_1|$. Tilsvarende ræsonnement kan anvendes på X_2. Vis nu, at foreningsmængden af to kritiske mængder er kritisk og udnyt dette til at indse, at $X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\}$ bryder Hall's betingelse (for relationen R)!

(iii) Bevis *Hall's sætning* i det endelige tilfælde, dvs.: såfremt R opfylder Hall's betingelse, såfremt $R(x)$ er endelig for alle $x \in X$ og såfremt X er endelig, så tillader R en inklination.

Bemærkninger: Læsere, der behersker Zorn's lemma vil umiddelbart kunne bevise Hall's sætning generelt (dvs. udsagnet i (iii), men uden en forudsætning om at X er endelig).

Såfremt man dropper betingelsen om endelighed af $R(x)$'erne, er det mere naturligt at se på Hall's betingelse i udvidet form og spørge, om denne i sig selv sikrer, at R tillader en inklination. Dette er dog ikke tilfældet – man kan angive eksempler, der viser, at der skal mere til (overvej!).

Påstand: Det bevis for Hall's sætning, der er lagt op til, er det kortest tænkelige – og mest elegante! Beviset er imidlertid ikke konstruktivt.

ØVELSE 4.18. (*Haremssætningen*). Lad, som i Øvelse 4.17, R være en relation mellem X og Y. Antag, at $R(x)$ er endelig for alle $x \in X$ og antag desuden, at for et $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\forall X_0 \subseteq X, X_0 \text{ endelig} : |R(X_0)| \geq n|X_0|.$$

Bevis, at der findes en relation $R' \subseteq R$ med $|R'(x)| = n$ for alle $x \in X$ og således, at mængderne $(R'(x))_{x \in X}$ er parvis disjunkte.

ØVELSE 4.19. (*Ungkarlesætningen*). Antag nu, at $R \subseteq X \times Y$ opfylder betingelsen $R(x)$ endelig for alle $x \in X$ samt betingelsen

$$\forall X_0 \subseteq X, X_0 \text{ endelig} : |R(X_0)| \geq |X_0| - \delta,$$

hvor δ er et fast naturligt tal (eller 0).

Vis, at der findes en partiel injektion $f \subseteq R$, som er defineret overalt på X på nær højst δ punkter ("ungkarlene"). Præcisér evt. først påstanden (hvad mon der forstås ved en partiel injektion?).

ØVELSE 4.20. Lad A være en $n \times n$ dobbelt stokastisk matrix (de n^2 elementer i A er alle ikke-negative, og alle rækkesummer såvel som alle søjlesummer er 1). Bevis, at der findes en permutation τ af $\{1, 2, \ldots, n\}$ således, at $a_{i,\tau(i)} > 0$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vejledning: Anvend Hall's sætning med R en passende relation, der til enhver række i A knytter visse søjler i A.

Bemærkning. Resultatet kan af den energiske læser udnyttes til at vise, at permutationsmatricerne netop er de ekstremale dobbelt stokastiske matricer.

ØVELSE 4.21. Ethvert bevis for Cantors sætning må udnytte "kontinuiteten" af de reelle tal. I Cantors oprindelige bevis fra 1873 udnyttes, at en vilkårlig følge $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ af lukkede intervaller, hvis længder konvergerer mod 0, indeholder et fælles punkt. Hvordan mon Cantor ræsonnerede?

Vejledning: Sørg for at det fælles punkt bliver bænkevarmer.

ØVELSE 4.22. (En sætning af Sierpinski). Vis, at der findes en familie $(A_i)_{i\in I}$ af delmængder af $\mathbb{N}$ som opfylder betingelserne

1) $\forall\, i : A_i$ er uendelig,
2) $\forall\, i \neq j : A_i \cap A_j$ er endelig,
3) I er ækvipotent med $2^{\mathbb{N}}$.

Kan anden betingelse strammes til et krav om at A_i'erne skal være parvis disjunkte?

Vejledning: Udnyt, at der for ethvert reelt tal findes en følge af forskellige rationale tal som konvergerer mod tallet.

Litteratur

[LM1] Lars Mejlbo: *Uendelighedens paradokser*, Matematiklærerforeningen, 1991.

[LM2] Lars Mejlbo: *Om det uendelige*, Matematiklærerforeningen, 1991.

To let-tilgængelige hæfter, der også udmærker sig ved at være på dansk og billige. Kan rekvireres fra LMFK sekretariatet, Slotsgade 2, 2200 København N.

[GH] Klaus Grünbaum, Tom Høholt: *Kombinatorik med anvendelser,* Matematisk Institut, Danmarks Tekniske Højskole, 1980.

Ganske vist indeholder bogen ikke "uendelig kombinatorik". Den er anført i forbindelse med Øvelse 4.16 (Hall's sætning). Behandlingen af dette emne (Kapitel VI) er elementær og fører til vigtige algoritmer.

[HH] Torkil Heiede, Hans Jørgen Helms: *Mængdelære og transfinite kardinaltal*, Universitetsforlaget, Oslo, 1964. (Også udgivet i Nordisk Matematisk Tidsskrift, vol 10 (1962)).

En elementær artikel. Den noget vidtløftige behandling gør dog, at det kan være svært at "se skoven for bare træer". Bogen er skrevet på et tidspunkt, hvor mængdelæren trængte sig på i skolens undervisning, og mange lærere havde behov for at læse en omhyggelig fremstilling af dette emne. Kommer (næsten) ikke ind på aksiomatisk mængdelære.

[H] Paul R. Halmos: *Naive Set Theory*, D. van Nostrand, Princeton, 1960.

En matematisk behandling af aksiomatisk mængdelære, som er omhyggelig og ikke alt for teknisk. Når dog ikke så langt.

[HJ] Karel Hrbacek. Thomas Jech: *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, New York, 1984.

En mere teknisk bog end Halmos'. Kræver universitetsniveau. Mange afsnit er dog både spændende og interessante selv uden alt for stor baggrundsviden.

[R] Rudolf von B. Rucker: *Infinity and the Mind. The science and philosophy of the infinite*, Birkhäuser, Boston, 1982.

En bredt skreven bog, der for en stor dels vedkommende kan læses med udbytte af "alle". Den prøver dog også at give et indtryk af mere "hidsige" og svært tilgængelige emner, som f.eks. store kardinaltal.

[KD1] Keith Devlin: *Mathematics: The New Golden Age,* Penguin, New York, 1990.

En spændende bog, der indeholder en række "appetitvækkere", herunder kapitel 2: "Sets, Infinity, and the Undecidable". Her fokuseres bl.a. på nødvendigheden af aksiomatisk mængdelære.

[KD2] Keith Devlin: *Fundamentals of Contemporary Set Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

Desværre har jeg ikke haft adgang til denne bog, men efter at have set [KD1], har jeg tiltro til at den holder, hvad den lover: "A gentle but thorough introduction to set theory... ".

[MLF] *Matematiklærerforeningen: Matematiske Ideer,* Matematiklærerforeningen, 1993.

En spændende samling af "appetitvækkere", som der arbejdes på i øjeblikket. Jeg har selv sendt et bidrag – ganske kort, ca. 3 sider – om Jessens Balsal og Hilbert's Hotel. Her findes bl.a. hvad jeg vil betegne som den ultamative fortælling om Hilbert's Hotel (dette være sagt for at vække nysgerrigheden!). ⟨Tilføjelse: Se disse noter, JBHH⟩

Uendelige mængder, Kardinaltal

I al hast skriver jeg lidt herom. Blot en skitse, der går videre end UES, idet ordinaltallene udnyttes. Husk fra UES:

(i) $|X| = |Y| \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists f : X \to Y$ bijektion,

(ii) $|X| \leq |Y| \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists f : X \hookrightarrow Y$ injektion,

(iii) $|X| < |Y| \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |X| \leq |Y| \wedge \neg(|X| = |Y|)$.

Det var definitioner. Desuden sætninger:

Schröder–Bernstein: $|X| \leq |Y| \wedge |Y| \leq |X| \Rightarrow |X| = |Y|$,

Cantor: $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Desuden vides

(1) $|\mathcal{P}(X)| = |2^X|$ (let) og

(2) $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ (Se UES Øvelse 4.5 eller se på den injektive afbildning $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathbb{R}$ fra UES Øvelse 2.7 og afbildningen $t \curvearrowright \{q \in \mathbb{Q} \mid q > t\}$ af $\mathbb{R}$ ind i $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ ...).

(3) $|X| \leq |Y| \Leftrightarrow \exists f : Y \to X$ surjektion (Indses v.hj. af udvalgsaksiomet—se s. 46 og følgende sider)

Her nogle vigtige sætninger, der nok er rimeligt intuitive, men ikke lette at vise:

(4) $\forall X \forall Y : |X| \leq |Y| \vee |Y| \leq |X|$.

(5) *X uendelig $\Rightarrow$ X indeholder numerabelt uendelig delmængde.*

De kræver udvalgsaksiomet, der udnyttes via velordningssætningen (s. 59). Desuden kræves egenskaber for $\mathbb{ON}$, specielt at enhver velordnet mængde er ordensisomorf med venstreafsnittet $[0, \alpha[= V(\alpha)$ for et entydigt bestemt $\alpha \in \mathbb{ON}$. Kendes alt dette (jeg forestiller mig ikke, at man har været omhyggeligt gennem det—se s. 132 og frem—men at man ved dette og kan udnytte det), kan man tillægge det, der før blot var symbol ($|X|$) en præcis betydning:

"Redefinition". $|X|$ er det første $\alpha \in \mathbb{ON}$ så α er ækvipotent med X. (Se også afsnit 7 s. 62).

Passer med gamle definition:

(i) $|X| = |Y|$ (gammel definition) $\Leftrightarrow$ ordinaltallet $|X| =$ ordinaltallet $|Y|$,

(ii) $|X| \leq |Y|$ (gammel definition) $\Leftrightarrow$ ordinaltallet $|X| \leq$ ordinaltallet $|Y|$,

(iii) $|X| < |Y|$ (gammel definition) $\Leftrightarrow$ ordinaltallet $|X| <$ ordinaltallet $|Y|$.

Et ordinaltal, der er på formen $|X|$ hedder et *kardinaltal*. Klart, at et ordinaltal α er et kardinaltal hvis og kun hvis det er *"det første i sin ækvipotensklasse"*, dvs. for intet $\beta < \alpha$ er $[0, \beta[$ ækvipotent med $[0, \alpha[$ (som sædvanlig betegner $[0, \gamma[$ venstreafsnittet $V(\gamma)$, der for ordinaltal er det samme som γ—en smart, men for begynderen lidt forvirrende egenskab). Notation: $\kappa \in \mathbb{CN}$ for "κ kardinaltal".

Alle ordinaltal før ω er kardinaltal. Det er de *endelige kardinaltal.* Mere interessant er de *uendelige kardinaltal* (dvs. de kardinaltal, der ikke er endelige). Det første sådanne er ω. Når vi tænker på ω som kardinaltal benævnes det $\aleph_0$ ("aleph-nul").

Er $\kappa \in \mathbb{CN}$, betegnes med κ^+ *efterfølgeren* af κ, dvs. det første kardinaltal, der er større end κ. Dette er veldefineret, da 1) der findes kardinaltal større end κ (Cantor!) og 2) $\mathbb{ON}$ er velordnet.

Anden vigtig måde at få nye kardinaltal på er supremumsdannelse. Her bemærkes, at er K en vilkårlig mængde af kardinaltal, så findes $\sup_{\kappa\in K}\kappa$ $\big($kræver en lille overvejelse at indse, at dette er veldefineret; det væsentlige er, at der findes et $\kappa_0 \in \mathbb{CN}$ så κ_0 er øvre grænse. Her kan $\kappa_0 = \bigcup_{\kappa\in K}[0,\kappa[$ bruges. Faktisk er κ_0 også det mindste overtal, så $\sup_{\kappa\in K}\kappa = \bigcup_{\kappa\in K}[0,\kappa[$ $(= \cup K)\big)$.

Med fastsættelse af $\aleph_0$ samt efterfølger og supremum til rådighed kan vi vise:

Sætning 1. *Der findes en entydigt bestemt måde at indicere alle uendelige kardinaltal på, så hvert uendeligt kardinaltal får et ordinaltal som indeks og så følgende gælder:*

(i) $\aleph_0 = \omega$,

(ii) $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$ *for ethvert ordinaltal* α,

(iii) $\aleph_\lambda = \sup_{\beta<\lambda}\aleph_\beta$ *for ethvert grænseordinaltal* λ.

Beviset føres let ved transfinit rekursion over $\mathbb{ON}$ (som i afsnit 8 s. 63 har vi her brugt rekursion over hele $\mathbb{ON}$).

Samtlige uendelige kardinaltal står altså opregnet i den transfinite føle $(\aleph_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{ON}}$ (og hvert enkelt uendeligt kardinaltal står kun opregnet én gang her).

Vi skal nu indføre de vigtige operationer sum, produkt og potens af kardinaltal. Det understreges, at de indførte operationer er ganske forskellige fra de tilsvarende operationer for ordinaltal. Generelt kan vi iøvrigt sige, at regneoperationerne for kardinaltal er vigtigere end for ordinaltal.

Definition 2. Lad κ og λ være kardinaltal. Vælg mængder X og Y, så $\kappa = |X|, \lambda = |Y|$ og (af hensyn til definition af sum) $X \cap Y = \emptyset$. Vi definerer da

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda &= |X \cup Y|, \\ \kappa \cdot \lambda &= |X \times Y|, \\ \kappa^\lambda &= |X^Y|. \end{aligned}$$

For at indse, at disse definitioner er tilladelige, skal man vise, at de er uafhængige af valget af "repræsenterende mængder" (X og Y). Dette gøres let.

Vi kan nu skrive $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$.

Hvor "stor" er $2^{\aleph_0}$? Cantor opstillede den hypotese, *kontinuumshypotesen* (CH), at $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Som det vist er de fleste bekendt er CH uafhængig af ZFC (resultater af Gödel (1938) og af Cohen (1963)) Den *generaliserede kontinuumshypotese* (GCH) siger, at $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ for alle ordinaltal α. Også den er konsistent med ZFC.

Der gælder en række ganske nemme resultater om regning med kardinaltal:

Sætning 3. *(i)* $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$,

(ii) $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$,

(iii) $\kappa_1 \leq \lambda_1 \wedge \kappa_2 \leq \lambda_2 \Rightarrow \kappa_1 + \kappa_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \;\wedge\; \kappa_1 \cdot \kappa_2 \leq \lambda_1 \cdot \lambda_2 \;\wedge\; \kappa_1^{\kappa_2} \leq \lambda_1^{\lambda_2}$,

(iv) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$,

(v) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$,

(vi) $\lambda > 0 \Rightarrow \kappa \cdot \lambda \geq \kappa$,

(vii) $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$,

(viii) $\kappa \cdot \kappa = \kappa^2$,

(ix) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$,

(x) $\left(\kappa^\lambda\right)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$,

(xi) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.

Beviserne føres let i hvert enkelt tilfælde. F.eks. kan vi se på den sidste relation: $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$. For at vise dette udnyttes, at der er en naturlig bijektion af $(X \times Y)^Z$ på $X^Z \times Y^Z$ for vilkårlige mængder X, Y og Z. Overvej!

Udover disse relationer gælder nogle basale og ikke så oplagte relationer. Udover Cantors sætning: $\kappa < 2^\kappa$, som vi har bevist tidligere (se UES Sætning 2.4), peges på følgende:

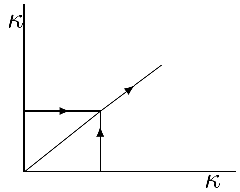
Sætning 4. *Lad κ og λ være kardinaltal med $\kappa \leq \lambda$ og λ uendelig. Så gælder:*

(1) $\kappa + \lambda = \lambda$,

(2) $\kappa \geq 1 \Rightarrow \kappa \cdot \lambda = \lambda$,

(3) $\kappa \geq 2 \Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda$.

Bevis. Vi viser følgende: (i) For alle uendelige kardinaltal κ, er $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.



Bevis for (i) (måske lidt kort): Dette vises ved induktion. Antag for κ uendeligt kardinaltal at for hvert kardinaltal α med $\alpha < \kappa$ gælder, at enten er α endelig, eller også er $\alpha \cdot \alpha = \alpha$. Vi vil så vise, at $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. Dette gøres ved at vise, at der findes en velordning på $\kappa \times \kappa$, så $|V(\xi)| < \kappa$ for ethvert venstreafsnit $V(\xi)$. Den ønskede velordning bestemmes ved "først at ordne efter diagonalen, dernæst at ordne leksikografisk", m.a.o. $(a, b) \leq (a', b')$ hvis og kun hvis $\big(\max(a, b) < \max(a', b')\big)$ eller $\big(\max(a, b) = \max(a', b')$ og $(a, b) \leq (a', b')$ i den leksikografiske ordning$\big)$. Dette ses at være en velordning. Hvis $\xi = (a, b) \in \kappa \times \kappa$, er $V(\xi) \subseteq \alpha \times \alpha$, hvor $\alpha = \max(a, b)$. Hvis α er endelig, er $V(\xi)$ endelig og $|V(\xi)| < \kappa$. Hvis α er uendelig, er $|V(\xi)| \leq |\alpha \times \alpha| = \alpha < \kappa$. Heraf følger resultatet. (Udfyld selv manglende detaljer!)

Med (i) til rådighed er det let at etablere egenskaberne i sætningen (forbavsende let!): (1): $\lambda \leq \kappa + \lambda \leq \lambda + \lambda = 2\lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda$. (2): $\lambda \leq 1 \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda$. (3): $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq \left(2^\lambda\right)^\lambda = 2^{\lambda\times\lambda} = 2^\lambda$. □

Opgaver

Opgave 1. Bevis det hjælperesultat, der blev udnyttet under beviset for at $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ for uendelige kardinaltal, dvs. bevis, at såfremt $(X, \leq)$ er en velordning så $\forall x \in X : |V(x)| < \kappa$, så vil $|X| \leq \kappa$. Gælder der et stærkere resultat med forudsætningen svækket til $\forall x \in X : |V(x)| \leq \kappa$?

Opgave 2. Generalisér definitionerne på sum og produkt af kardinaltal.

Vejledning: Se på familie $(\kappa_i)_{i\in I}$ af kardinaltal. Vælg familie $(X_i)_{i\in I}$ af mængder så $|X_i| = \kappa_i$, $i \in I$. Sæt $\sum_{i\in I} \kappa_i = |\sum_{i\in I} X_i|$, $\prod_{i\in I} \kappa_i = |\prod_{i\in I} X_i|$, se afsnit 1.5 s. 40.

Opgave 3. Vis, at der findes et ordinaltal α, så $\aleph_\alpha = \alpha$. Det ser mystisk ud!

Vejledning: Konstruér kardinaltal $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ ved $\sigma_0 = \aleph_0, \sigma_n = \aleph_{\sigma_{n+1}}$. Sæt $\alpha = \sup_{n\geq 0} \sigma_n$.

Bemærkning. $\alpha = \aleph_a$ ser umiddelbart helt abnormt stort ud. Det behøver det ikke at være. Faktisk er det konsistent med ZFC, at $2^{\aleph_0} > \alpha$! (Dermed er $2^{\aleph_0} = \alpha$ udelukket!)

Opgave 4. Lad κ være et kardinaltal. $A \subseteq [0, \kappa[$ er *kofinal* i κ såfremt A er "ubegrænset", dvs. såfremt $\forall \beta < \kappa \exists \alpha : \alpha \in A \wedge \alpha \geq \beta$. *Kofinaliteten* $\mathrm{cf}(\kappa)$ af κ er den mindste kardinalitet af en kofinal mængde. κ er *regulært*, hvis $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

Vis, at det første regulære kardinaltal større end 1 er $\aleph_0$.

Vis også, at $\aleph_1$ er regulært, men at $\aleph_\omega$ ikke er regulært.

Vis evt., at $\aleph_{\alpha+1}$ er regulært for ethvert ordinaltal α.

Matematiske Teorier

Resumé

Det er formålet med dette afsnit af noterne at give et lille indblik i matematiske teoridannelser. Især lægges der vægt på isomorfibegrebet. Forhåbentlig kan behandlingen her—hvor beskeden den end er—hjælpe den studerende som forberedelse til de mange teorier, der senere i studiet bliver taget op.

1 Eksempler på matematiske teorier

I enhver matematisk teori er der nogle centrale objekter at se på. Og næsten altid defineres disse centrale objekter med udgangspunkt i en mængde. Lad os kalde denne mængde X. For at få et objekt i teorien skal man på en eller anden måde specificere en særlig struktur—karakteristisk for den teori, man nu ser på—i tilknytning til X. Her er mange muligheder:

1. Strukturen kan være givet via en brolægning på X.
2. Strukturen kan være givet via en relation i mængden X.
3. Strukturen kan være givet via visse afbildninger.

Kombinationer af disse muligheder kan også forekomme. I tilfældet 3, hvor strukturen er fastlagt via afbildninger peger vi på nogle muligheder, der ofte forekommer ved specifikation af algebraiske strukturer:

3a. Der kan være givet, hvad vi vil kalde *kompositionsregler*, dvs. regler (i form af afbildninger), der fortæller, hvordan elementer kombineres til nye elementer. Her kan man tænke på *interne kompositionsregler*, der udtrykkes ved en eller flere afbildninger af X ind i X eller af $X \times X$ ind i X (eller $\cdots$). Og man kan tænke på *eksterne kompositionsregler*, f.eks. udtrykt ved en afbildning $L \times X \to X$, hvor L er en fast "ekstern" mængde.

Tankegangen indkredses bedst ved at anføre en række eksempler.

Eksempel 1.1 (Mængdelære). I mængdelæren er et objekt en mængde X, hvor vi som yderligere struktur intet forlanger. Et objekt i mængdelæren er altså en "nøgen" mængde X. I den rene mængdelære interesserer vi os altså for strukturløse mængder. Når vi f.eks. i mængdelæren ser på mængden $\mathbb{R}$, så "ser" vi slet ikke al den dejlige struktur som vi normalt forsyner $\mathbb{R}$ med (ordningsstruktur, algebraisk struktur, topologisk struktur, ...). De mængdeteoretiske briller er meget svage og kan slet ikke få øje på, hvad der måtte være af ekstra struktur. Men hvad kan man da overhovedet se med disse briller? Det spørgsmål vender vi tilbage til! □

Eksempel 1.2 (Topologi). I topologien hedder de centrale objekter *topologiske rum* og et sådant består dels af en mængde X, dels af yderligere struktur—den egentlige topologiske struktur—specificeret ved en brolægning $\mathcal{G}$ på X, der pr. definition forlanges at være

$(\emptyset, X, \cap f, \cup a)$-lukket. Er $X = (X, \mathcal{G})$ et topologisk rum,[1] kaldes mængderne i $\mathcal{G}$ *åbne*. Ser vi på X med "topologiske briller", ser vi mere end hvis vi blot ser på X med mængdeteoretiske briller. Vi ser også de åbne mængder. Igen, hvad præcis vi ser, vender vi tilbage til.

Konkret eksempel: $\mathbb{R}$ med *sædvanlig topologi* ($G \subseteq \mathbb{R}$ er åben $\Leftrightarrow \forall x \in G \exists \varepsilon > 0 :]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq G$). □

Eksempel 1.3 (Borelstruktur). I denne teori hedder objekterne *Borelrum* eller *målelige rum*, og et sådant består af en mængde X (som sædvanlig!) med en $(\emptyset, {}^c, \cup c)$-lukket brolægning $\mathcal{B}$. Mængderne i $\mathcal{B}$ hedder de *målelige* mængder. Konkret eksempel: $\mathbb{R}$ med *sædvanlig Borelstuktur* (dvs. $\mathcal{B}$ er den mindste Borelstruktur på $\mathbb{R}$, således at enhver åben mængde i den sædvanlige topologi er målelig). □

Eksempel 1.4 (Teorien for præordnede mængder). Her er et objekt i teorien en mængde X og en refleksiv og transitiv relation, normalt betegnet $\leq$, på X. Konkret eksempel: $\mathbb{R}$ med sædvanlig ordning. □

Eksempel 1.5 (Teorien for vektorrum (over $\mathbb{R}$)). I denne teori hedder objekterne *vektorrum* (over $\mathbb{R}$). Et sådant er en mængde X forsynet med en intern kompositionsregel $X \times X \to X$, noteret $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, samt en ekstern kompositionsregel $\mathbb{R} \times X \to X$, noteret $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, således at følgende betingelser er opfyldt:

(1) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1, \quad (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$,

(2) $\exists x_0 \in X \forall x : x + x_0 = x$ (vises at være entydigt bestemt, betegnes 0),

(3) $\forall x \exists x' : x + x' = 0$ (vises at være entydigt bestemt, betegnes $-x$),

(4) $0x = 0$ (her 0 i to betydninger!), $1x = x$,

(5) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \quad \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$.

Det kender I jo særdeles godt! Kompositionsreglen $X \times X \to X$ hedder *addition* (evt. vektoraddition) og kompositionsreglen $\mathbb{R} \times X \to X$ hedder *multiplikation* (evt. skalarmultiplikation).

Konkrete eksempler: For hvert $n \in \mathbb{N}$ er $\mathbb{R}^n$ et eksempel, hvor $\mathbb{R}^n$ udstyres med sædvnlig addition $\big((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\big)$ og sædvanlig skalar-multiplikation $\big(\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\big)$. □

Eksempel 1.6 (Grafteori). Objekterne her hedder *grafer*. En sådan er en mængde X og en relation R i X. Elementerne i X er grafens *punkter* og elementerne i R er grafens *kanter* (orienterede kanter). □

Listen over eksempler kunne være fortsat! I støder nok senere på følgende teorier: Ringe, moduler, forskellige former for geometri, topologiske vektorrum, algebraer, Banachrum, … Der er altså frit slag ved afgrænsning af en teoridannelse. Noget andet er, at det bestemt ikke er alle muligheder, der er lige interessante. Hensigten med en teoridannelse og erfaringen vundet gennem en lang udvikling har lært os, hvilke teoridannelser det svarer sig at underkaste en nærmere undersøgelse.

[1]Vi tillader os at sige "lad X være et topologisk rum". Så er det underforstået, at der på X er givet en topologi $\mathcal{G}$, altså en $(\emptyset, X, \cap f, \cup a)$-lukket brolægning på X.

2 Isomorfibegrebet

Lad os vende tilbage til den i en vis forstand enkleste teori, mængdelæren, og tage spørgsmålet op, om hvad det er vi ser, når vi ser på en mængde med mængdeteoretiske briller. Det er svært at svare på, helt absolut, giver måske næppe mening. Det er derimod uhyre frugtbart at se på spørgmålet relativt, hvormed vi mener, at vi ser på flere mængder. Det centrale spørgsmål er følgende: Hvad vil det sige, at vi ser "det samme", når vi ser på to mængder X og Y (med vore mængdeteoretiske briller)? Idet vi *ikke* ser arten af elementerne i X eller Y eller eventuel ekstra struktur, indser vi det fornuftige i at betragte X og Y som mængdeteoretisk ens, såfremt der er en en-entydig korrespondance mellem X's og Y's elementer. Med andre ord, vi siger, at X og Y er *mængdeteoretisk isomorfe*, såfremt der findes en bijektion $f : X \to Y$. Hermed er X og Y mængdeteoretisk isomorfe, hvis og kun hvis X og Y er ækvipotente: $|X| = |Y|$.

Lad os nu tænke på en anden teoridannelse end den nøgne mængdelære, og lad os med denne teoris briller se på to objekter i teorien, lad os sige det igen drejer sig om mængderne X og Y. Her må det naturligvis understreges, at udover X er der specificeret en struktur på X (i form af brolægninger, relationer, afbildninger eller hvad det nu kan være), således at X med denne struktur virkelig er et objekt i den teori, vi ser på. Tilsvarende for Y. Vi giver nu følgende lidt løse definition:

Definition 2.1. To objekter $X = (x, \dots)$ og $Y = (z, \dots)$ i en teori siges at være *isomorfe inden for denne teoris rammer* såfremt der findes en bijektion $f : X \to Y$, således at såvel $f : X \to Y$ som $f^{-1} : Y \to X$ bevarer al struktur, der indgår i teorien.

Jeg vil tillade mig at indføre en lidt hjemmestrikket notation og skrive

$$X \cong Y \quad (\cdots)$$

for "X og Y er isomorfe inden for teorien $\cdots$'s rammer.

Eksempel 2.2 (Mængdelære). I overenstemmelse med både den generelle definition af isomorfi og med den indledende diskussion har vi:

$$\begin{aligned} X \cong Y \quad (\text{mængdeteoretisk}) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists f : X \to Y \quad \text{bijektion} \\ &\Leftrightarrow \quad |X| = |Y|. \end{aligned}$$

□

Eksempel 2.3 (Topologi). Lad $X = (X, \mathcal{G}_X)$ og $Y = (Y, \mathcal{G}_Y)$ være topologiske rum. I henhold til den generelle definition har vi:

$X \cong Y$ *(topologisk set)* $\Leftrightarrow$ *der findes en bijektion* $f : X \to Y$, *således at følgende to egenskaber gælder*:

$$\begin{aligned} &1) \quad G \in \mathcal{G}_X \Rightarrow f(G) \in \mathcal{G}_Y, \\ &2) \quad G \in \mathcal{G}_Y \Rightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{G}_X. \end{aligned}$$

Når $X \cong Y$ (topologisk set), siger vi, at X og Y er *topologisk isomorfe* eller at X og Y er *homeomorfe* og f med egenskaberne ovenfor kaldes en *homeomorfi*. Det understeges igen, at selvom vi taler om at X og Y er topologisk isomorfe uden eksplicit at nævne brolægningerne $\mathcal{G}_X$ og $\mathcal{G}_Y$ af åbne mængder, er disse brolægninger naturligvis underforstået.

Idet egenskaben 1) kan udtrykkes kort ved den ene inklusion $f(\mathcal{G}_X) \subseteq \mathcal{G}_Y$ og 2) kan udtrykkes ved $f^{-1}(\mathcal{G}_Y) \subseteq \mathcal{G}_X$ ser vi, at der gælder følgende:

$$X \cong Y \quad \textit{(topologisk set)} \quad \Leftrightarrow \quad \exists f : X \to Y \quad \textit{bijektion så} \\ f(\mathcal{G}_X) \subseteq \mathcal{G}_Y \ \textit{og så}\ f^{-1}(\mathcal{G}_Y) \subseteq \mathcal{G}_X.$$

□

Vi kan imidlertid gå lidt videre, idet vi husker fra Mat 1, at en afbildning mellem $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$ er kontinuert hvis og kun hvis urbilledet af enhver åben mængde er åben. Inspireret heraf indfører vi følgende generelle definition på kontinuitet:

Definition 2.4. Lad $X = (X, \mathcal{G}_X)$ og $Y = (Y, \mathcal{G}_Y)$ være topologiske rum og lad $g : X \to Y$ være en afbildning af X ind i Y. Vi siger da, at g er *kontinuert* såfremt $g^{-1}(\mathcal{G}_Y) \subseteq \mathcal{G}_X$, altså såfremt $g^{-1}(G)$ er åben i X for enhver mængde G, der er åben i Y.

Denne helt centrale definition stemmer overens med hvad vi kender for afbildninger, hvor både X og Y er af typen $\mathbb{R}^n$ (med sædvanlig topologi). Det var det, vi antydede ovenfor. Da dette er nok så vigtigt, vil vi bevise det her og gøre det i den mere generelle ramme af *metriserbare rum*. Vi gør det kort:

Definition 2.5. $X = (X, d)$ er et metrisk rum såfremt X er en mængde og $d : X \times X \to \mathbb{R}$ en afbildning, der opfylder følgende:

a) $d(x, y) \geq 0$ for alle $x \in X$,
b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ for alle $x, y \in X$,
c) $d(x, y) = d(y, x)$ for alle $x, y \in X$,
d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ for alle $x, y, z \in X$ (trekantsuligheden).

Definition 2.6. For et metrisk rum $X = (X, d)$ defineres for $x \in X$ og $r > 0$ den *åbne kugle* med centrum x og radius r ved $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$.

Sætning 2.7. *Er $X = (X, d)$ et metrisk rum og definerer vi en brolægning $\mathcal{G}$ på X ved*

$$G \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \forall x \in G \exists r > 0 : B(x, r) \subseteq G,$$

så er $\mathcal{G}$ en topologi på X.

Beviset overlades til læseren som en nem øvelse (evt. kendt fra Mat 1).

Topologien i sætningen hedder den *metriske topologi*, og vi siger også, at denne topologi er *induceret* af metrikken d.[2]

For metriske rum er det naturligt at definere kontinuitet ved den sædvanlige ε, δ-definition:

Definition 2.8. Er $X = (X, d_X)$ og $Y = (Y, d_Y)$ metriske rum og $f : X \to Y$ en afbildning af X ind i Y, så siger vi, at f er *kontinuert i punktet* $x_0 \in X$ såfremt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : f\big(B(x_0, \delta)\big) \subseteq B\big(f(x_0), \varepsilon\big).$$

Og vi siger, at f er *kontinuert* såfremt f er kontinuert i ethvert punkt af X.

[2] Bekvemt er her at bemærke, at enhver åben kugle $B(x, r)$ vitterlig *er* åben i denne topologi (vises let ved anvendelse af trekantsuligheden).

Sætning 2.9. *Lad $X = (X, d_X)$ og $Y = (Y, d_Y)$ være metriske rum og $f : X \to Y$ en afbildning. Der gælder da, at f er kontinuert (efter ovenstående ε, δ-definition), hvis og kun hvis f er kontinuert betragtet som afbildning mellem de to inducerede topologiske rum $(X, \mathcal{G}_X)$ og $(Y, \mathcal{G}_Y)$, altså såfremt $f^{-1}(G) \in \mathcal{G}_X$ for alle $G \in \mathcal{G}_Y$.*

Bevis. Antag først, at f er ε, δ-kontinuert. Lad G være åben i Y for den inducerede topologi $\mathcal{G}_Y$ og sæt $H = f^{-1}(G)$. Vi skal vise, at H er åben i X (for den inducerede topologi $\mathcal{G}_X$). Lad $x \in H$. Sæt $y = f(x)$. Så vil $y \in G$. Derfor findes $\delta > 0$, så $B(y, \varepsilon) \subseteq G$. Nu findes $\delta > 0$ så $f\big(B(x,\delta)\big) \subseteq B(y, \varepsilon)$. Så vil $f\big(B(x,\delta)\big) \subseteq G$ og $B(x, \varepsilon) \subseteq f^{-1}(G) = H$ følger. Dette ræsonnement viser—da x var valgt som et vilkårligt element i H—at H er åben i X. Hermed har vi vist, at f er kontinuert efter definition 2.4 s. 100.

Antag dernæst, at f er kontinuert efter definition 2.2. Lad $x \in X$ og lad $\varepsilon > 0$. Da $B\big(f(x), \varepsilon\big)$ er åben i Y (fodnote 2!), er $f^{-1}\big(B\big(f(x), \varepsilon\big)\big)$ åben i X. Så er $f\big(B(x,\delta)\big) \subseteq B\big(f(x), \varepsilon\big)$. Da $\varepsilon > 0$ var vilkårlig, ses heraf, at f er kontinuert i x. Da $x \in X$ var vilkårlig, ses heraf, at f er kontinuert (efter ε, δ-definitionen). □

Definition 2.10. Det topologiske rum $(X, \mathcal{G})$ er *metriserbart*, hvis der findes en metrik d på X, så det metriske rum (X, d) netop inducerer topologien $(X, \mathcal{G})$.

Sætning 2.9 kan så formuleres som følger:

Sætning 2.11. *Antag, at de topologiske rum X og Y er metriserbare. Da er en afbildning $f : X \to Y$ kontinuert hvis og kun hvis den er kontinuert efter ε, δ-definitionen ved valg af metrikker på X og Y som inducerer de givne topologier.*

Ovenstående ekskursion til metrikker m.v. tjener udelukkende til at motivere den centrale definition 2.4 på kontinuitet anført s. 100. Udnyttes kontinuitetsbegrebet, kan det topologiske isomorfibegreb udtrykkes således:

$X \cong Y$ (topologisk set) hvis og kun hvis der findes en bijektion $f : X \to Y$, således at såvel $f : X \to Y$ som $f^{-1} : X \to Y$ er kontinuerte.

Eksempel 2.12 (Borelstruktur). Vi nøjes med at udmønte vor generelle princip (definition 2.1 s. 99) i en præcis definition af *Borelisomorfi*:

Definition 2.13. To Borelrum $(X, \mathcal{B}_X)$ og $(Y, \mathcal{B}_Y)$ er *Borelisomorfe* [$X \cong Y$ (i teorien for Borelrum)] såfremt der findes en bijektion $f : X \to Y$, så $f(\mathcal{B}_X) \subseteq \mathcal{B}_Y$ og så $f^{-1}(\mathcal{B}_Y) \subseteq \mathcal{B}_X$.

□

Eksempel 2.14 (Teorien for præordnede mængder). Vort generelle princip fører her til følgende isomorfibegreb:

Definition 2.15. Lad $X = (X, \leq)$ og $Y = (Y, \leq)$ være præordnede mængder.[3] Vi siger da, at X og Y er *ordensisomorfe* (man plejer ikke at sige "præordensisomorfe"!) såfremt der findes en bijektion $f : X \to Y$, således at følgende to egenskaber gælder:

1) $\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,

[3] Selvom "$\leq$" her står for to forskellige (*normalt* forskellige) relationer, er det sædvane at bruge samme betegnelse. Begynderen kan evt. skrive $\leq_X$ og $\leq_Y$.

2) $\forall y_1 \in Y \forall y_2 \in Y : y_1 \leq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2)$.

Egenskaben 1) udtrykkes ved at sige, at $f : X \to Y$ er *ikke-aftagende* eller *ordensbevarende* og 2) udtrykkes ved at sige, at $f^{-1} : Y \to X$ er ikke aftagende eller ordensbevarende.

Hvis vi kun ser på totale ordninger, viser det sig, at egenskaben 2) er overflødig at checke. Der gælder nemlig:

Sætning 2.16. *Lad $X = (X, \leq)$ og $Y = (Y, \leq)$ være totalt ordnede mængder. Såfremt $f : X \to Y$ er en ikke aftagende bijektion, så er f en ordensisomorfi, dvs. egenskaberne fra ovenstående definition er opfyldte.*

Bevis. Lad $y_1 \in Y$ og $y_2 \in Y$. Sæt $x_1 = f^{-1}(y_1)$ og $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Antag, at $y_1 \leq y_2$. Vi skal vise, at så er $x_1 \leq x_2$. Antag, indirekte, at $\neg(x_1 \leq x_2)$. Så vil $x_2 < x_1$, dvs. $x_2 \leq x_1$ og $x_2 \neq x_1$. Så må $y_2 \leq y_1$ og $y_2 \neq y_1$. Af $y_1 \leq y_2$ og $y_2 \leq y_1$ sluttes $y_1 = y_2$. Hermed er vi nået frem til en modstrid. Altså: $x_1 \leq x_2$ må gælde. □

□

Eksempel 2.17 (Teorien for vektorrum). Her fører vort princip til følgende definition:

Definition 2.18. To vektorrum $X = (X+, \cdot)$ og $Y = (Y, +, \cdot)$[4] er *vektorrumsisomorfe* såfremt der findes en bijektion $f : X \to Y$, således at:

$$\begin{array}{ll} 1') & \forall x_1 \in X \forall x_2 \in X : f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \\ 1'') & \forall x \in X \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda x) = \lambda f(x), \\ 2') & \forall y_1 \in Y \forall y_2 \in Y : f^{-1}(y_1 + y_2) = f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2), \\ 2'') & \forall y \in Y \forall \lambda \in \mathbb{R} : f^{-1}(\lambda y) = \lambda f^{-1}(y). \end{array}$$

En afbildning af denne art hedder en *vektorrumsisomorfi.*

Vi ser, at kravene $1'$ og $1''$ kan sammenfattes i kravet om at $f : X \to Y$ skal være lineær, mens kravene $2'$ og $2''$ betyder, at $f^{-1} : Y \to X$ skal være lineær.

Lidt i lighed med sætning 2.16 for ordninger gælder, at man kan undvære betingelserne $2'$ og $2''$:

Sætning 2.19. *Er $X = (X, +, \cdot)$ og $Y = (Y, +, \cdot)$ vektorrum og $f : X \to Y$ en lineær bijektion, så er $f^{-1} : Y \to X$ også lineær og f er dermed en vektorrumsisomorfi.*

Bevis. (sikkert velkendt fra Mat 1). Antag, at $f : X \to Y$ er en lineær bijektion. Se på en linearkombination $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ i Y. Sæt $x_i = f^{-1}(y_i)$. Så er $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$, hvorfor $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = f^{-1}(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i)$. Derfor er $f^{-1}(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f^{-1}(y_i)$, som ønsket. □

□

Eksemplet vedrørende grafteori overlades til jeres egen behandling!

[4]Igen tillader vi samme symbol (+ eller $\cdot$) for to (normalt) forskellige ting.

3 Teoriegenskaber, invarianter og fuldstændige invarianter

Det kan være ganske svært at afgøre om to forelagte objekter inden for en teori er isomorfe set med denne teoris øjne. For at angribe dette problem, kan man gå mange veje, helt afhængig af hvilken konkret teori man ser på. Jeg skal forsøge på at angive nogle generelle principper og illustrere med enkle eksempler og opgaver.

Først gør man klogt i at isolere vigtige egenskaber og se, om et forelagt objekt har disse egenskaber. Dette er under alle omstændigheder nyttigt og altså ikke blot relevant, når man vil undersøge spørgsmålet om isomorfi.

Vedrørende "egenskaber" må man gøre sig klart, at det kun giver mening at se på egenskaber, der giver mening i den pågældende teori. Arbejder vi f.eks. i mængdelæren og ser på mængden $\mathbb{R}$, kunne vi måske hæfte os ved at enhver opadtil begrænset delmængde af $\mathbb{R}$ har et supremum. Dette er imidlertid *ikke* nogen egenskab, vi kan "se", når vi har de mængdeteoretiske briller på. Så kan vi jo slet ikke se ordningen. Derimod kunne vi hæfte os ved, at der findes en ægte delmængde af $\mathbb{R}$, der er ækvipotent med $\mathbb{R}$. *Det* er en egenskab, vi kan se med mængdeteoretiske briller på!

Lad os præcisere: Ved en egenskab inden for teorien $\mathcal{T}$ forstås en egenskab om objekter i teorien, således at såfremt egenskaben er obfyldt for ét objekt objekt i teorien, så er egenskaben også opfyldt for ethvert andet objekt i teorien, der—inden for denne teoris rammer—er isomorf med det første objekt.

Mere formelt: En egenskab inden for teorien $\mathcal{T}$ er et prædikat P, der har den egenskab at såfremt $x \in \mathcal{T}$ (x er et objekt i teorien $\mathcal{T}$) og $P(x)$, så gælder $P(x')$ for ethvert objekt $x' \in \mathcal{T}$ så $x' \cong x$ (i teorien $\mathcal{T}$).

Eksempel 3.1. "Mængden X indeholder en ægte delmængde, ækvipotent med X" er en mængdeteoretisk egenskab. ☐

Eksempel 3.2. "Den præordnede mængde X er totalt ordnet" er en (præ-)ordensteoretisk egenskab. ☐

Eksempel 3.3. "Der findes en kontinuert afbildning af $[0, 1]$ i den sædvanlige topologi på X" er en topologisk egenskab. ☐

Eksempel 3.4. "Der findes numerabelt mange åbne mængder $G_1, G_2, \dots$, således at enhver åben mængde er en foreningsmængde af en delfamilie af de åbne mængder $G_1, G_2, \dots$" er en topologisk egenskab. ☐

Eksempel 3.5. "X er endelig dimensional" er en vektorrumsegenskab. ☐

I nogle tilfælde kan man på naturlig vis knytte objekter fra andre teorier til objekter i en teori, man studerer, og det på en sådan måde, at isomorfe objekter i teorien knyttes til samme objekt. Man taler så om *invarianter*.

Eksempel 3.6. I teorien for endelig-dimensionale vektorrum er "dimension" en invariant. Dette betyder simpelthen, at såfremt X og Y er vektorrum (endelig-dimensionale) og såfremt X og Y er vektorrumsisomorfe, så er $\dim(X) = \dim(Y)$. ☐

Eksempel 3.7. I teorien for præordnede mængder kunne vi se på invarianten "antallet af maksimale elementer", antal her forstået som kardinaliteten af mængden af maksimale elementer i en præordnet mængde. ☐

Invarianter udvider sådan set blot begrebet teoriegenskaber. F.eks. for den vigtige invariant “dimension” i teorien for endelig-dimensionale vektorrum, kunne vi se på egenskaben “X er 4-dimensional”.

Invarianter og teoriegenskaber kan udnyttes til at vise, at to forelagte objekter i en teori *ikke* er isomorfe.

Eksempel 3.8. Ser vi på $\mathbb{R}$ og $[0, \infty[$ med mængdeteoretiske briller, ser vi “det samme”, disse mængder er mængdeteoretisk isomorfe, altså ækvipotente. Ser vi derimod på $\mathbb{R}$ og $[0, \infty[$ med ordensteoretiske briller (idet $\mathbb{R}$ og $[0, \infty[$ tænkes udstyret med sædvanlig ordning) er der pludselig forskel. Vi ser noget forskelligt, når vi kigger på disse ordnede mængde, og en nem måde at indse dette på er at notere, at mens $\mathbb{R}$ ikke har noget mindste element, så har $[0, \infty[$ et sådant mindste element. $\mathbb{R}$ og $[0, \infty[$ har altså forskellige egenskaber (ordensegenskaber!) og er derfor forskellige (ikke ordensisomorfe!). $\square$

Vi kan derimod normalt *ikke* bruge teoriegenskaber eller invarianter til at slutte isomorfi. Der er dog vigtige eksempler på at dette kan lade sig gøre. En invariant (inden for teorien $\mathcal{T}$) hedder en *fuldstændig invariant* såfremt to objekter i teorien er isomorfe (igen inden for den betragtede teori), hvis og kun hvis den pågældende invariant knytter samme objekt til de to objekter i teorien.

Eksempel 3.9. Til hver mængde X har vi knyttet en ganske bestemt mængde, nemlig kardinaltallet af X, betegnet $|X|$ eller bedre måske $\text{card}(X)$ (så er ingen misforståelse mulig). Det er klart, at tilordningen $X \mapsto \text{card}(X)$ er en invariant i mængdelæren og ligeså klart, at det er en fuldstændig invariant i mængdelæren.

I en vis forstand er det *eneste*, vi kan se om en mængde med vore svage mængdeteoretiske briller, kardinaliteten af mængden. Alt, hvad der ligger derudover, må bero på ekstra struktur som strengt taget er mængdeteorien uvedkommende.

Går vi over til teorien for topologiske rum $X = (X, \mathcal{G})$ eller teorien for Borelrum $X = (X, \mathcal{B})$ eller teorien for præordning $X = (X, \leq)$ eller teorien for vektorrum $X = (X, +, \cdot)$, er—i hver af disse teorier—tilordningen $X \to \text{card}(X)$ narturligvis også en invariant. I ingen af tilfældende er det en særlig interessant invariant. Dertil er den alt for svag. For at sikre, at to objekter skal være isomofe (i den pågældende teori), sikrer denne invariant kun, at grundmængderne er ækvipotente og dette er ikke nær nok til at sikre isomorfi (på nær i den nøgne mængdelære, som sagt). $\square$

Eksempel 3.10. Et hovedresultat i teorien for endelig-dimensionale vektorrum kan formuleres ved at sige, at “dimension”er en fuldstændig invariant i denne teori. Dette resultat kender I fra Mat 1. I øvrigt kan resultatet generaliseres så det gælder teorien for vilkårlige vektorrum. Man har så brug for at definere $\dim(X)$, dimensionen af vektorrummet X, som kardinaliteten af en maksimal, lineært uafhængig delmængde af X. (Se i øvrigt øvelse 9 s. 152). $\square$

Ser vi på de “succeshistorier” vi har, hvor vi faktisk *har* en fuldstændig invariant, kunne man spørge sig selv om de pågældende teorier dermed er “døde”. På ingen måde! Dels er der interessante spørgsmål at stille sig, dels er det ikke *hele* sandheden, f.eks. for vektorrum, at alt man interesserer sig for er indeholdt i den fuldstændige invariant. Jo på en måde *er* det sandt, men på en anden måde er det interessant at se på det konkrete vektorrum. Dels kunne den ekstra stuktur i et konkret objekt hjælpe en til at formulere interessante egenskaber, dels er de konkrete objekter ofte de, vi naturligt har at arbejde med. Ovenstående er nok lidt tåget—ligesom hele dette afsnit? Man må nok ved at arbejde lidt med de forskellige teorier (Mat 2, Mat 3 og andel del) selv arbejde sig frem mod en holdning. Gad vide om mit forsøg på allerede nu—på 1. år—at bibringe lidt forståelse, at hjælpe lidt på det, der kommer, bærer frugt.

4 Lidt mere topologi

Først en bekvem sprogbrug: Lad $(X, \mathcal{G})$ være et topologisk rum. En mængde $G \in \mathcal{G}$ som indeholder punktet x (altså $x \in G$) kaldes ofte en *åben omegn* af x.[5] En sådan mængde betegnes ofte $N(x)$ (N for "neighbourhood"). Omegnsbegrebet kan f.eks. være bekvemt, når vi ser på konvergens. Vi kan i stedet for definitionen

$$x_n \to x \Leftrightarrow \forall G \in \mathcal{G} \left(x \in G \Rightarrow x_n \in G \text{ f.v.t} \right)$$

skrive

$$x_n \to x \Leftrightarrow \forall N(x) : x_n \in N(x) \text{ f.v.t}$$

Her er det så underforstået, at $N(x)$ automatisk betegner en åben omegn af x, altså at $x \in N(x)$ og at $N(x) \in \mathcal{G}$.

Sprogbrugen giver visse lettelser—den er nemmere at overskue—og desuden fokuserer den på noget væsentligt, nemlig at dét, der spiller en rolle i topologien er, hvad der foregår "lokalt", dvs. i "omegnen" af et punkt.

I forelæsningerne har jeg flere gange understreget, at den primære opgave i generel topologi er at give en ramme for studiet af konvergens og kontinuitet. Der er flere muligheder for topologiske teoridannelser, hvoraf vi har set på de to vigtigste: Teorien for metriske rum og den generelle topologi selv. Vi har set, at i en vis forstand er den første teori mere speciel end den anden—enhver metrik giver jo på naturlig måde anledning til en topologi. Så i den forstand er den generelle topologi "bedre", mere, vel, generel. På den anden side er teorien for metriske rum på en måde mindre abstrakt (ingen brolægninger, men derimod en "gammeldags" funktion, afstandsfunktionen, som giver os nogle behagelige associationer til tilvante objekter—$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ osv.).

Med baggrund i ovenstående skal vi se nøjere på forbindelsen mellem metrik og topologi. Lad os først indføre konvergens i metriske rum på en måde, der er naturlig i denne teori:

Definition 4.1. Lad $X = (X, d)$ være et metrisk rum, lad $(x_n)_{n \geq 1}$ være en følge af elementer i X og lad $x \in X$. Vi siger da, at $(x_n)_{n \geq 1}$ er *konvergent* (evt. konvergent i (X, d)) med *grænsepunkt* x, og vi skriver $x_n \to x$, såfremt $d(x_n, x) \to 0$. Anderledes udtrykt:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Så konvergens føres tilbage til konvergens for sædvanlige reelle talfølger. Meget naturligt! Og heldigvis har vi overensstemmelse med det i den generelle topologi indførte konvergensbegreb:

[5] En (vilkårlig) omegn af x er en (ikke nødvendigvis åben) mængde N, således at der findes $G \in \mathcal{G}$ så $x \in G \subseteq N$. Vi behøver ikke dette begreb.

Sætning 4.2. *Lad (X,d) være et metrisk rum og lad $\mathcal{G}$ være den inducerede topologi. For en følge $(x_n)_{n\geq 1}$ på X og et punkt $x \in X$ gælder da, at $x_n \to x$ i metrikken d hvis og kun hvis $x_n \to x$ i topologien $\mathcal{G}$.*

Bevis. "hvis": Antag $x_n \to x$ i $\mathcal{G}$, dvs. antag at $\forall N(x) : x_n \in N(x)$ f.v.t. Lad $\varepsilon > 0$ være vilkårlig. Da $B(x,\varepsilon)$ *er* en åben omegn af x, gælder det, at $x_n \in B(x,\varepsilon)$ f.v.t., altså at $d(x_n,x) < \varepsilon$ f.v.t. Da ε var vilkårlig, ser vi, at $d(x_n,x) \to 0$, dvs. $x_n \to x$ i metrikken d.

"kun hvis": Antag, at $x_n \to x$ i metrikken d. Lad $N(x)$ være en vilkårlig åben omegn af x. Så findes $\varepsilon > 0$, så $B(x,\varepsilon) \subseteq N(x)$. Da $d(x_n,x) \to 0$, vil $x_n \in B(x,\varepsilon)$ f.v.t. Så vil også $x_n \in N(x)$ f.v.t. Da $N(x)$ var en vilkårlig omegn af x, ses at $x_n \to x$ i topologien $\mathcal{G}$. $\square$

Nu har vi indført begge centrale begreber, konvergens og kontinuitet, både inden for rammen af metriske rum og inden for rammen af den generelle topologi, og vi har set, at disse begreber passer pænt sammen i de to teorier. Vi skal nu studere en vigtig forbindelse mellem konvergens og kontinuitet. Lad os opstille en naturlig (?) tese:

TESE: Kontinuitet er det samme som bevarelse af konvergens.

Dette er nu ikke rigtigt uden videre. Der gælder følgende vigtige resultat:

Sætning 4.3. *Lad $X = (X, \mathcal{G}_X)$ og $Y = (Y, \mathcal{G}_Y)$ være topologiske rum og lad $f : X \to Y$ være en afbildning.*

(i) Såfremt f er kontinuert, så bevarer f konvergens af følger (dvs. af $x_n \to x$ kan vi slutte $f(x_n) \to f(x)$).

(ii) Såfremt topologien på X er induceret af en metrik (dvs. der findes metrik på X, således at d netop inducerer den givne topologi $\mathcal{G}_X$), så gælder også det omvendte, altså: Hvis f bevarer konvergente følger, er f kontinuert.

(iii) Der findes eksempler, så f bevarer konvergente følger, men f er ikke *kontinuert.*

Bevis. (i): Antag, at $f : X \to Y$ er kontinuert. Lad (x_n) være en konvergent følge: $x_n \to x$. Vi vil vise, at $f(x_n) \to f(x)$. Lad $N(x)$ være en åben omegn af $f(x)$. Da f er kontinuert, er $f^{-1}\big(N(f(x))\big)$ åben. Denne mængde indeholder åbenbart punktet x (thi $f(x) \in N\big(f(x)\big)$). Da $x_n \to x$ må derfor $x_n \in f^{-1}\big(N(f(x))\big)$ f.v.t. Derfor vil $f(x_n) \in N\big(f(x)\big)$ f.v.t. Da $N\big(f(x)\big)$ var en vilkårlig åben omegn af $f(x)$, sluttes nu, som ønsket, at $f(x_n) \to f(x)$.
(ii): Vi har altså en metrik d på X som inducerer topologien $\mathcal{G}_X$. Vi viser det ønskede ved kontraposition. Dvs. vi antager, at f *ikke* er kontinuert og søger at vise, at så vil f ikke bevare konvergente følger. Da f ikke er kontinuert, har vi $\neg\big(\forall G \in \mathcal{G}_Y : f^{-1}(G) \in \mathcal{G}_X\big)$, altså vil $\exists G \in \mathcal{G}_Y : \neg\big(f^{-1}(G) \in \mathcal{G}_X\big)$. Lad nu G være en sådan mængde. Da $\neg\big(f^{-1}(G) \in \mathcal{G}_X\big)$ har vi $\neg\big(\forall x \in f^{-1}(G) \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq f^{-1}(G)\big)$. Dermed gælder $\exists x \in f^{-1}(G) \forall r > 0 : B(x,r) \not\subseteq f^{-1}(G)$, eller $\exists x \in f^{-1}(G) \forall r > 0 \exists x' \in B(x,r) \setminus f^{-1}(G)$. Lad nu x være et sådant punkt $\big($altså $x \in f^{-1}(G)$ og $\forall r > 0 \exists x' \in B(x,r) \setminus f^{-1}(G)\big)$. Sæt, for $n \geq 1$, $r_n = 1/n$ og vælg en følge $(x_n)_{n\geq 1}$, så $\forall n \geq 1 : x_n \in B(x, r_n) \setminus f^{-1}(G)$. Så vil $\forall n \geq 1 : d(x_n, x) < 1/n$, hvorfor $d(x_n,x) \to 0$, dvs. $x_n \to x$. Så følgen $(x_n)_{n\geq 1}$ er konvergent. Imidlertid er billedfølgen ikke konvergent mod billedpunktet. Og hvorfor ikke? Jo, G er en åben omegn af $f(x)$ (husk at $x \in f^{-1}(G)$), men for hvert $n \geq 1$ vil $x_n \notin f^{-1}(G)$, dvs. for hvert $n \geq 1$ vil $f(x_n) \notin G$—og så har vi ihvertfald ikke at $f(x_n) \in G$ f.v.t., som vi jo må forlange for konvergens. Hermed er beviset ført.

(iii): Her er det opgaven at konstruere et passende konkret eksempel. Vi vælger en overtællelig mængde X og et punkt i X, som vi vil benævne ∞ (helt konkret kunne vi sætte $X = \mathbb{R}$ og som ∞ tage punktet 0). Vi vil indføre to topologier på X: $\mathcal{G}_1$ og $\mathcal{G}_2$. Topologien $\mathcal{G}_1$ fastlægges således:

$$G \in \mathcal{G}_1 \Leftrightarrow (\infty \notin G) \vee (\infty \in G \wedge G^c \text{ er tællelig}).$$

Som man let checker efter, *er* $\mathcal{G}_1$ defineret på denne måde en topologi. Den anden topologi vi har brug for er den diskrete topologi på X altså $\mathcal{G}_2 = \mathcal{P}(X)$.
Vi ser nu på den identiske afbildning $f : X \to X$, hvor definitionsmængden tænkes udstyret med topologien $\mathcal{G}_1$ og værdimængden tænkes udstyret med topologien $\mathcal{G}_2$. Afbildningen f er bestemt ikke kontinuert—thi $f^{-1}(\mathcal{G}_2) = \mathcal{G}_2 \not\subseteq \mathcal{G}_1$ (udnyt f.eks. at $\{\infty\} \in \mathcal{G}_2 \setminus \mathcal{G}_1$). Men f bevarer konvergente følger. Det vi har brug for, for at indse dette er, at såfremt $x_n \to x$ (i topologien $\mathcal{G}_1$), så må $x_n = x$ f.v.t. Dette er klart, hvis $x \neq \infty$ (thi så er $\{x\}$ en åben omegn af x), og hvis $x = \infty$, ser vi på mængden $G = X \setminus \{x_n \mid n \geq 1 \text{ og } x_n \neq \infty\}$, bemærker at dette er en åben omegn af ∞, hvorfor $x_n \in G$ f.v.t—da $x_n \to \infty$. Det kan kun lade sig gøre såfremt $x_n = \infty$ f.v.t. Voila! □

Et spændende resultat, som giver anledning til en række kommentarer:

Ad (ii): Analyserer vi beviset, finder man frem til, at den væsentlige egenskab, vi benyttede om X's topologi, er at for hvert $x \in X$ findes tælleligt mange åbne omegne af x: $N_1(x), N_2(x), \ldots$ således at det for *enhver* åben omegn $N(x)$ findes et n, så $N_n(x) \subseteq N(x)$. Overvej! Den nævnte egenskab—der udtrykkes ved at sige, at X opfylder *første tællelighedsaksiom*—er faktisk en hel del svagere end metriserbarhedsforudsætningen, der optræder i sætningen.

En anden vigtig kommentar er at vi i beviset faktisk udnyttede udvalgsaksiomet! Hvordan skulle vi ellers vælge følgen $(x_n)_{n\geq 1}$? Ganske vist er det en svag variant af udvalgsaksiomet—aksiomet om tælleligt udvalg—vi har brug for, men det er interessant, at såfremt vi helt fjerner udvalgsaksiomet fra ZFC, findes der modeller for de tilbageblevne aksiomer, så udsagnet i (ii) er galt, selv for $X = Y = \mathbb{R}$ i sædvanlig topologi! Dette er dog ganske dybt.

Ad (iii): Selvom vi altså kan svække forudsætningen om X i (ii) en del, kan vi altså ikke helt droppe en ekstra forudsætning. Kombineres (ii) og (iii) kan vi som en ekstra gevinst notere, at det anførte eksempel $\big(X = (X, \mathcal{G}_1)\big)$ er et helt konkret eksempel på en topologi, der *ikke* er metriserbar – topologien opfylder ikke engang første tællelighedsaksiom. Det lidt "mystiske" rum $(X, \mathcal{G}_1)$ er måske ikke det mest interessante eksempel på et ikke-metriserbart topologisk rum. Men der findes andre mere "naturlige" eksempler på topologiske ikke-metriserbare rum. Sådanne eksempler peger på nødvendigheden af at arbejde i en mere generel ramme for topologiske overvejelser end den, teorien for metriske (eller metriserbare) rum giver os. F.eks. skal jeg nævne, at "topologien for konvergens fra højre i $\mathbb{R}$" er et sådant eksempel (Tag $(\mathbb{R}, \mathcal{G})$ med $G \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \forall x \in G \exists \varepsilon > 0 : [x, x+\varepsilon[\subseteq G)$. *Udfordring*: Vis det! (*Vejledning*: Notér først, at *hvis* $\mathcal{G}$ er induceret af metrikken d, så gælder $\forall x \forall N(x) \exists q \in \mathbb{Q} \exists n : x \in B(q, 1/n) \subseteq N(x)$. Se så, for hvert $x \in \mathbb{R}$ på $N(x) = [x, \infty[$. Så er der noget galt, da der kun er $\aleph_0$ mange $B(q, 1/n) \ldots$).

Nu jeg er igang, kan jeg ikke lade være med at nævne et interessant eksempel på en topologi, hvor metrikker kommer til kort. Hvad jeg tænker på er, at punktvis konvergens "normalt" ikke kan behandles via metrik. Et konkret resultat: Der findes ingen metrik på rummet $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ af reelle funktioner af en reel variabel, så konvergens af f_n mod f (i metrikken) betyder, at

$f_n(x) \to f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Derimod findes en topologi med denne egenskab. (*Udfordring:* Vis det!—ikke helt let).

Vi kan fortsætte betragtningerne omkring sætningen. Måske kunne vi i bar stædighed forsøge at klamre os til vor tese om at kontinuitet er det samme som bevarelse af konvergens. Vi har ganske vist set, at dette ikke er rigtigt med de begreber vi har indført, men vi kunne jo få den tanke, at det er begreberne, der er noget galt med. Og det er en frugtbar tanke! Det viser sig, at ved at generalisere konvergensbegrebet, kan vi opretholde vor tese. Tænker vi på det under beviset for (iii) anførte eksempel $(X, \mathcal{G}_1)$, kan vi måske også fornemme, at der er noget "galt" med vores konvergensbegreb: Ved hjælp af en "lille" følge $(x_n)_{n\geq 1}$ kan vi slet ikke "arbejde os ud til" punktet ∞ (uden allerede at være der, altså uden at $x_n = \infty$ f.v.t.). Men måske kunne det gå, hvis vi så på en generalisation af konvergensbegrebet, hvor indeksmængden $\mathbb{N}$, der hører til en følge, tillades at være mere generel ("større").

Definition 4.4. Ved en *mængde med retning* forstås en præordnet mængde $D = (D, \leq)$, således at enhver endelig delmængde af D har en øvre grænse. Ved en *generaliseret følge med værdier i en mængde X* forstås en afbildning af en mængde med retning ind i X.

Ofte noteres en generaliseret følge $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$, hvor D er den underliggende mængde med retning. Såfremt $X = (X, \mathcal{G})$ er et topologisk rum, udvides konvergensbegrebet fra sædvanlig til generaliserede følger ved at definere, at $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ *konvergerer mod x* (og vi skriver $x_\alpha \to x$ eller $x_\alpha \to x$ (langs D) eller $\lim\limits_{D} x_\alpha = x$) såfremt $\forall N(x) : x_\alpha \in N(x)$ f.v.t. eller, udførligt skrevet, såfremt $\forall N(x) \exists \alpha_0 \in D \forall \alpha \geq \alpha_0 : x_\alpha \in N(x)$.

Den væsentlige egenskab for en mængde med retning kommer ud på at enhver delmængde med to elementer har en øvre grænse, altså følgende egenskab: $\forall \alpha \in D \forall \beta \in D \exists \gamma \in D : \alpha \leq \gamma \wedge \beta \leq \gamma$.

Eksempel 4.5. $\mathbb{N}$ i naturlig ordning er en mængde med retning. For en vilkårlig mængde D er D med den *diffuse ordning* (dvs. $\alpha \leq \beta$ for alle $\alpha \in D$ og alle $\beta \in D$) en mængde med retning. For de, der kender Riemannintegralet, kan vi pege på at mængden af intervalinddelinger af et fast interval $[a, b]$, hvor vi også har udpeget punkter i intervallerne i intervalinddelinger, er en mængde med retning, når vi ordner efter finhed. Herved kan Riemann integrabilitet defineres via konvergens af den generaliserede følge, man får ved at betragte middelsummerne hørende til en intervalinddeling med udmærkede punkter. □

Eksempel 4.6. Som et mere generisk og topologisk interessant eksempel ser vi på et topologisk rum $X = (X, \mathcal{G})$ og et fast punkt $x \in X$. Hertil kan vi knytte en ganske bestemt mængde med retning D. Som elementer i D tager vi par $(N(x), x')$, hvor $N(x)$ er en åben omegn af x og hvor $x' \in N(x)$. Er $\alpha = (N_1(x), x')$ og $\beta = (N_2(x), x'')$ to elementer i D, defineres: $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow N_2(x) \subseteq N_1(x)$. Hvis vi betragter den generaliserede følge $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$, hvor $x_\alpha = x'$ for $\alpha = (N(x), x')$ så vil $x_\alpha \to x$. □

Vi kan nu bevise, at med vor generaliserede konvergensbegreb, kan vi opretholde vores tese:

Sætning 4.7. *Lad $X = (X, \mathcal{G}_X)$ og $Y = (Y, \mathcal{G}_Y)$ være to topologiske rum, og lad $f : X \to Y$ være en given afbildning. Da gælder, at f er kontinuert hvis og kun hvis f bevarer konvergens i den forstand, at vi for enhver konvergent generaliseret følge i $X : x_\alpha \to x$, kan slutte, at $f(x_\alpha) \to f(x)$.*

Bevis. "kun hvis": Vi antager, at f er kontinuert. Lad $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ være en konvergent generaliseret følge på X: $x_\alpha \to x$. Lad $N\big(f(x)\big)$ være en åben omegn af $f(x)$. Så er $f^{-1}\big(N(f(x))\big)$ en åben omegn af x. Derfor vil $x_\alpha \in f^{-1}\big(N(f(x))\big)$ f.v.t., dvs. $f(x_\alpha) \in N(f(x))$ f.v.t. Da $N(f(x))$ var en vilkårlig omegn af $f(x)$, følger heraf at $f(x_\alpha) \to f(x)$.

"hvis": Som i forrige sætning fører vi beviset ved kontraposition. Antag derfor at f *ikke* er kontinuert. Bestem $G \in \mathcal{G}_Y$ og $x \in f^{-1}(G)$, således at for enhver åben omegn $N(x)$ af x gælder $N(x)\backslash f^{-1}(G) \neq \emptyset$ (hvis $\forall x \in f^{-1}(G) \exists N(x) : N(x) \subseteq f^{-1}(G)$, må $f^{-1}(G)$ være åben). Sæt nu $D = \{N(x) \mid N(x)$ åben omegn af $x\}$ og definer "$\leq$" på D ved $N_1(x) \leq N_2(x) \Leftrightarrow N_2(x) \subseteq N_1(x)$. Så er $D = (D, \leq)$ en mængde med retning. Brug nu udvalgsaksiomet til at bestemme en generaliseret følge $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ på X, således at det for alle $\alpha = N(x)$ i D gælder, at $x_\alpha \in N(x)\backslash f^{-1}(G)$. Så vil $x_\alpha \to x$ (overvej!), og (men!) $f(x_\alpha) \nrightarrow f(x)$ (thi $\forall \alpha \in D : f(x_\alpha) \notin G$ og G *er* en åben omegn for $f(x)$). Afbildningen f bevarer altså *ikke* konvergens for generaliserde følger (men kunne godt tænkes at bevare konvergens for sædvanlige følger, som vi før så et eksempel på). □

Sætningen peger måske også på følgende definition for kontinuitet i et punkt: $f : X \to Y$ er kontinuert i x såfremt vi af $x_\alpha \to x$ kan slutte $f(x_\alpha) \to f(x)$. Man indser, at dette er ensbetydende med følgende: $\forall N(f(x)) \exists N(x) : f\big(N(x)\big) \subseteq N\big(f(x)\big)$. Overvej! Egenskaben her generaliserer ε, δ-definitionen.

Opgave 1. Antag, at $f : X \to Y$ er en homeomorfi (altså en topologisk isomorfi) af det topologiske rum $X = (X, \mathcal{G}_X)$ på det topologiske rum $Y = (Y, \mathcal{G}_Y)$. Vis, at så er $f(\mathcal{G}_X) = \mathcal{G}_Y$. Vis evt. det tilsvarende resultat for Borelisomorfier.

Opgave 2. Vælg en teori! Vis, at "isomorfi inden for den valgte teori $\mathcal{T}$" er en ækvivalensrelation i den forstand, at følgende gælder:

(a) $X \cong X$ (i $\mathcal{T}$) for alle objekter X i $\mathcal{T}$,

(b) $X \cong Y$ (i $\mathcal{T}$) $\Rightarrow Y \cong X$ (i $\mathcal{T}$),

(c) $X \cong Y$ (i $\mathcal{T}$) $\wedge\ Y \cong Z$ (i $\mathcal{T}$) $\Rightarrow X \cong Z$ (i $\mathcal{T}$).

Opgave 3. Vis, at $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ og $\mathbb{R}$ er homeomorfe (begge rum udstyret med den sædvanlige topologi—for $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$'s vedkommende vil det sige sportopologien nedarvet fra $\mathbb{R}$, se opg. 26 i NM.) *Vejledning*: Se f.eks. på Arctan afbildningen.

Opgave 4. Bevis, at mens vi ikke kan kende forskel på $\mathbb{R}$ og på $[0, \infty[$, når vi kun tager de svage mængdeteoretiske briller på, så *kan* vi kende forskel på disse rum, både med vore topologiske briller og med vore ordensteoretiske briller. (Præcisér først opgaven: Hvilke topologier og hvilke ordninger har vi mon i tankerne?)

Opgave 5. Vis, at $[0, \infty[$ og $[0, 1[$ såvel mængdeteoretisk som topologisk som ordensteoretisk er ens. (Igen, præcisér først, hvad præcis der sigtes til!)

Opgave 6. Bevis, at for en endelig mængde X, er to velordninger på X "ens" (ordensisomorfe!), mens denne egenskab ikke gælder for nogen uendelig mængde.

Bemærkning. For endelige mængder er "kardinalitet" dermed en fuldstændig invariant i teorien for velordnede mængder. I det endelige tilfælde er der ikke forskel på ordinal- og kardinaltal.

Opgave 7. Lad $X = (X, \leq)$ være en total ordnet mængde og antag, at der findes en delmængde X_0 af X så $\text{card}(X_0) = \aleph_0$ og så X_0 er *tæt* i X, dvs. $\forall x \forall x' : x < x' \Rightarrow \exists a \in X_0 : x < a < x'$. Bevis, at så må $\text{card}(X) \leq 2^{\aleph_0}$.

Mere udfordring er der i at vise, at såfremt vi yderligere antager, at X hverken har et mindste eller et største element og—mere væsentlig—at X er fuldstændig, så er X ordensisomorf med $\mathbb{R}$!

Vejledning: Lad $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$ og $X_0 = \{x_1, x_2, \dots\}$ (ingen gentagelser). Definer $\theta : \mathbb{Q} \to X_0$, så $\theta(r_1) = x_1$ og så, for alle $n \geq 2$, $\theta(r_n)$ er det første x_k i *det* af de n intervaller, som $\theta(r_1), \dots, \theta(r_{n-1})$ bestemmer, som svarer til det interval blandt de n intervaller, som $r_1, \dots, r_{n-1}$ bestemmer, der indeholder r_n. Vis, at $\theta : \mathbb{Q} \to X_0$ er en ordenstro bijektion og udvid θ på natulig vis til en ordensisomorfi af $\mathbb{R}$ på X.

Bemærkning. Noterer vi om $(\mathbb{R}, \leq)$, at $\mathbb{R}$ er totalt ordnet uden første og sidste element, at $\mathbb{R}$ er fuldstændigt og at $\mathbb{R}$ indeholder en numerabelt tæt delmængde, har vi altså (i princippet) sagt *alt*, der overhovedet kan siges om $\mathbb{R}$, rent ordensteoretisk.

Opgave 8. Notér om $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, \leq)$ (sædvanlig ordning), at $\mathbb{Q}$ er numerabel uden første og sidste element og at $\mathbb{Q}$ er *tæt* ordnet (dvs. $\forall q_1 \forall q_2 : q_1 < q_2 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : q_1 < q < q_2$). Vis, at disse egenskaber giver en fuldstændig ordensteoretisk karakterisering af $\mathbb{Q}$. *Vejledning*: Gå frem på samme vis som antydet i vejledningen til opgave 7.

Opgave 9. Lad $X = (X, \mathcal{G})$ være et topologisk rum og se på følgende egenskab: "Der findes disjunkte ikke-tomme åbne mængder med en foreningsmængde med endeligt komplement". Vis, at der herved vitterlig er defineret en topologisk egenskab. Vis at $\mathbb{R}$ *har* denne egenskab, mens $\mathbb{R}^2$ *ikke* har denne egenskab og konkludér, at $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^2$ ikke er topologisk isomorfe (dvs. $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^2$ er ikke homeomorfe).

Bemærkning. Se også Opgave 10, der giver en lidt mere vidtrækkende måde at behandle problemet om $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^2$'s homeomorfi på (men det centrale er og bliver $\mathbb{R}$'s fuldstændighed!).

Opgave 10. Et topologisk rum X kaldes *sammenhængende* såfremt der *ikke* findes en klassedeling af X i to åbne mængder: $\neg(\exists G_1 \in \mathcal{G}(X) \exists G_2 \in \mathcal{G}(X) : G \neq \emptyset \wedge G_2 \neq \emptyset \wedge G_1 \cap G_2 = \emptyset \wedge G_1 \cup G_2 = X)$. Vis, at "sammenhæng" er en topologisk egenskab.

Vis følgende hovedsætning om $[0, 1]$ og om $\mathbb{R}$: Disse rum *er* sammenhængende.

Det topologiske rum X kaldes *kurvesammenhængende*, hvis der for alle $x \in X$ og alle $x' \in X$ findes en *kontinuert kurve* fra x til x', dvs. en kontinuert afbildning $f : [0, 1] \to X$, så $f(0) = x$ og $f(1) = x'$. Bevis, at X er sammenhængende såfremt X er kurvesammenhængende.

Vis (igen), at $\mathbb{R}$ ikke er homeomorf med $\mathbb{R}^2$. *Vejledning*: Se på, hvad der sker med sammenhængen når der fjernes punkter fra hhv. $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^2$.

Aksiomatisk mængdelære

1 Indledning

Hvorfor aksiomatisere? Af nysgerrighed. For at vinde erkendelse. For at gøre os klart, hvilke principper vi anvender i matematikken. Sådan kunne en mulig begrundelse lyde. Men der er en anden: Det er pinedød nødvendigt! Erfaringen har lært os, at den “naive” omgang med matematikken ikke altid er sikker nok. Vores intuition snyder os af og til. På mængdeteoriens område er Russells paradoks et fremragende, uhyre enkelt og helt uafviseligt eksempel som tvinger os til at stoppe op og bede om et ordentligt grundlag.

Her er nogle ideelle krav til en aksiomatisk mængdelære:

1. Konsistens!
2. Righoldigt grundlag for *al* matematik!
3. Kun “oplagt sande” aksiomer! (“naturlighed”)
4. Fuld frihed!
5. Letter udviklingen af matematikken!
6. Æstetisk tiltalende, smuk!
7. Fuldstændighed!
8. Giver fuld sikkerhed!

Ad 1: Konsistens. Et aksiomssystem er *konsistent*, hvis det ikke er muligt at udlede en modstrid. Mere præcist: Teorien, eller aksiomssystemet, T er konsistent, hvis det ikke er muligt for noget udsagn P at udlede både P og $\neg P$ ud fra T ved brug af logikkens slutningsergler. At en teori er konsistent kommer ud på, at der findes en model for teorien, dvs. de indgående objekter kan tillægges en konkret fortolkning (interpretation), således at de sammenhænge, teoriens aksiomer kræver der er mellem objekterne, faktisk er tilfredsstillet.

Her kommer vi ud for vor første skuffelse: Det er principielt umuligt at opstille et aksiomssytem for mængdelæren, der kan bevises at være konsistent når, vel og mærke, vi kræver, at systemet skal være tilstrækkelig righoldigt til at udlede sædvanlig aritmetik for de naturlige tal!

Vi må leve med denne skavank og finde os i, at det aksiomssystem, vi vil opstille, ikke kan vides at være konsistent. Det er dybest set en trossag, at systemet er konsistent! Vi kan blive styrket i troen, når vi hører, at trods intens forskning i hele dette århundrede, har man hidtil ikke kunne udlede en modstrid af systemet.

Måske kan vi lettere affinde os med situationen når vi betænker, at vi ønsker at opstile et fundament for al matematik. Man kunne have klaret problemet ved at bygge på konsistens—som så måtte postuleres – af en endnu mere grundlæggende teori som en konsekvens heraf. Men netop når vi søger grundlaget for al matematik, er dette ikke rimeligt. Og når vi tænker på denne måde, er det lige ved at være "klart", at vi ikke kan vise konsistens af vort grundlag. Det ville betyde, at vi så at sige kunne hale os selv op ved håret.

Ad 2: Righoldighed—grundlag for al matematik. Her bliver vi ikke skuffet. Ved hjælp af logikkens begrebsapparat og slutningsregler kan man i princippet udlede al matematik ud fra mængdelærens aksiomer. Strengt taget skal der her tages visse forbehold, men påstanden er rigtig i den pragmatiske forstand, at al gængs matematik kan føres tilbage til det grundlag, vi er ved at opstille.

Vi kan således sige, at al matematik kan føres tilbage til to grundpiller: Logikken, der fortæller os, hvordan vi ræsonnerer, og mængdelæren (den aksiomatiske!), der giver os noget at ræsonnere om.

Ad 3: Kun "oplagt sande" aksiomer. Måske netop fordi vi i sagens natur ikke kan bevise konsistensen af mængdelærens aksiomer, og dermed heller ikke pege på en model for mængdelæren, bliver det særlig vigtigt, at vi kun accepterer "uskyldige" aksiomer, der kan godkendes af "alle", altså aksiomer, der er "sande" set ud fra et almenmenneskelig forstandssynspunkt. Sagt på en anden måde, aksiomerne skal være "naturlige".

Det er lidt af en smagssag, om man synes dette krav til naturlighed bliver indfriet. Selv synes jeg det!

Ad 4: Fuld frihed. Det er jo netop det, vi har indset, at man ikke kan opnå. Det har Russells paradoks lært os. I aksiomerne er der altså indbygget forbehold, som skal sørge for, at vi ikke havner i paradoksernes suppedas. Når det er sagt, skal det understreges, at forbeholdene er så beskedne og de muligheder aksiomerne giver os i hænde så mange, at vi stort set har fuld frihed til at gebærde os som vi vil. Denne frihed er naturligvis med til at sikre os, at krav 2 om righoldighed indfries.

Ad 5: Letter udvikling af matematikken. Hvis man tror, at blot man har gjort sig grundlaget klart, så har man en maskine, der automatisk producerer grydeklare teorier og teoremer, må man tro om igen. Mennesket tænker nu ikke engang i mekanistiske formelle strukturer, men ser på intuition, hensigt og skønhed. Det er rigtigt, at computere overtager visse opgaver, men den "rigtige" levende matematik skabes af mennesker af kød og blod. Det har I allerede set masser af eksempler på i øvelsestimerne, f.eks. selv i opgaver, der forholdsvis let kunne behandles helt formelt, foretrække vi at bruge vores sædvanlige sprog og give udtryk for vores intuition, forestillinger og hensigt som det primære hjælpemiddel til at styre vores tankegang. Og for langt de fleste dagligdags matematiske overvejelser ville det enten være en uoverkommelig opgave at gennemføre betragtningerne helt formalistisk eller også ville det kraftigt hæmme forståelsen. Det væsentlige er den principielle mulighed for at arbejde helt formalistisk.

Spørgsmålet melder sig om hvordan man nu kan vide, i en given sitution, at alt kan formaliseres, når man ikke kunne drømme om de facto at gøre det. Et godt spørgsmål. Jeg tror, svaret dels er, at et kendskab til grundlaget (som opnået gennem et kursus som dette!) giver en et godt blik for, hvad man kan tillade sig og hvad der vil gå ud over de rammer, grundlaget sætter, og dels er svaret, at vi i meget stor udstrækning bygger på en matematisk tradition, vi har tillært os gennem ren og skær indoktrinering fra læreside og fra det matematiske etablishment som taler sit overbevisende sprog til os gennem bøger og artikler. At der er noget om indoktrineringssynspunktet, vil man kunne erkende ved at sætte sig ind i, hvordan tidligere generationers matematikere tænkte.

Med andre ord, vi er en del af en fagtradition. Nok er vi nået langt og må siges at ræsonnere sikrere og at være nået langt dybere med enklere, mere elegante betragtninger end tidligere generationer, men om nogen slutsten er der næppe tale. Det hele vil se helt anderledes ud om 50 år. Vær vis på det!

Ad 6: Æstetisk tiltalende, smuk. Det er jo noget subjektivt. Lad mig nøjes med at sige, at jeg finder den aksiomatiske mængdelære æstetisk tiltalende, og finder det landskab, grundlagsforskningen har åbnet for os fascinerende, til tider smuk!

Ad 7: Fuldstændighed. En teori er *fuldstændig*, hvis det for ethvert udsagn P, der kan formuleres i teorien gælder, at enten kan udsagnet bevises, eller også kan negationen $\urcorner P$ bevises. Vi siger også, at ethvert udsagn kan *afgøres*. Det er et naturligt ideelt krav at stille til den aksiomatiske mængdelære, at den skal være fuldstændig. Vi kunne (med Hilbert, der i 1900 formulerede disse tanker i det, vi nu henviser til som Hilberts program) ideelt set forestille os, at opstille et fuldstændigt aksiomssystem for mængdelæren og dermed (det kræver nogen overvejelse!) en maskine, der til ethvert udsagn inden for endelig tid leverer et bevis enten for udsagnet eller for dets negation.

Imidlertid har grundlagsforskerne bevist, at dette byder på en principiel forhindring. Ethvert aksiomssystem, der er så righoldigt som det, vi søger at opbygge, må nødvendigvis være ufuldstændigt. Der må altså nødvendigvis findes et udsagn P i teorien så hverken P eller $\urcorner P$ kan udledes af teorien. Et sådant udsagn siges at være *uafhængig* af teorien. Bemærk:

Sætning 1.1. *P er uafhængig af teorien T, hvis og kun hvis såvel $T + P$ som $T + \urcorner P$ er konsistente teorier.*

Bevis. Bør først bemærke, at $T + P$ står for teorien der opstår ved til T's aksiomer at tilføje gyldigheden af P som aksiom. Tilsvarende for $T + \urcorner P$.

Bevis for "hvis": Klart! Hvis man f.eks. havde $T \vdash P$ (P kan sluttes ud fra T), kunne man ud fra $T + \urcorner P$ både slutte P og $\urcorner P$, og havde dermed en modstrid. Så ville $T + \urcorner P$ ikke være konsistent.

Bevis for "kun hvis": Antag altså, at P er uafhængig af T. Specielt er så T konsistent (thi ellers kunne man af T slutte endda både P og $\urcorner P$.

Men også $T + \urcorner P$ må være konsistent. Thi var $T + \urcorner P$ inkonsistent, kunne man ud fra $T + \urcorner P$ udlede hvad som helst, således også P, og så ville slutningen anført her være korrekt, hvorfor man ud fra T ved et indirekte bevis ville kunne slutte P. Dette strider mod at P er uafhængig af T. Alt i alt: $T + \urcorner P$ er konsistent. Tilsvarende ses, at $T + P$ er konsistent. □

$$\begin{array}{c} T \\ \urcorner P \\ \hline P \end{array}$$

Antag at P er uafhængig af T. Da $T + P$ er konsistent, findes en model, kald den M_P for $T + P$. Da $T + \urcorner P$ er konsistent, findes en model, lad os kalde den $M_{\neg P}$ for $T + \urcorner P$. Arbejder man i M_P, er P altså sand, mens P er falsk, når man arbejder i $M_{\neg P}$. Og både M_P og $M_{\neg P}$ er modeller for T. Vi kan altså ikke alene på basis af T afgøre, om P er sand eller falsk. Vi siger også, at P er *uafgørlig*.

En anden måde at belyse forholdene på når P er uafhængig af T er følgende. Da T er konsistent, findes en model for T. Kald den M. I denne er P enten sand eller falsk. Antag f.eks. at P er sand. Da P er uafhængig af T, findes en anden model for T, hvori P er falsk. Det kan ikke være modellen M. Men det kan tænkes, at man ud fra modellen M kan foretage visse modifikationer, der ikke er mere drastiske, end at den modificerede model, der opstår, stadig kan bruges som model for T, og samtidig har modifikationen ført til at P er falsk i den nye model.

Ad. 8: Fuld sikkerhed: Ethvert resultat, enhver sætning, vi har udledt fra den aksiomatiske mængdelære, kan vi være helt trygge ved. Det er netop et af vore formål, at opnå dette. Men meget strengt taget kan vi kun vise sætninger af typen: "*Hvis* den aksiomatiske mængdelære er konsistent, så gælder den og den sætning (og ikke dens negation)". Af grunde vi har nævnt tidligere, er det helt urimeligt med så forsigtig en formulering. Har vi indset, at en sætning P er i overensstemmelse med den aksiomatiske mængdelære, ja så kan vi roligt hævde "P *er* sand"—og vi har langt større sikkerhed, end hvis P blot er bevist på (sædvanligt!) rent naivt grundlag.

Altså: Det, vi kan bevise, har vi fuld sikkerhed for! Noget andet er, at der—som vi så ovenfor—er sætninger, vi ikke kan afgøre.

Som det er fremgået af diskussionen, er de opstillede krav til den aksiomatiske mængdelære ikke uafhængige af hinanden, og helt entydige svar får vi kun på nogle af de stillede spørgsmål. Og til tider får vi negative svar.

KRAV	Kan opfyldes (*er* opfyldt)
Konsistens	nej—kan vi ikke vide, trossag
Righoldighed	ja—al kendt matematik kan udledes, i princippet
Kun "naturlige aksiomer"	ja— det synes jeg, men døm selv!
Fuld frihed	ja—når bare vi passer lidt på
Lettelse	nej—"daglig" matematik er ret uberørt af mængdelæren
Smuk	ja—det synes jeg, døm selv!
Fuldstændig	nej—en umulighed!
Giver fuld sikkerhed	ja—med mindre hele grundlaget braser

Ovenstående skema resumerer diskussionen. Det mest spændende er naturligvis de tre "nej'er". Så, hvis læseren holder dertil, vil jeg anføre endnu nogle kommentarer. Der er dog intet at tilføje til det første nej. Derimod peger de to sidste nej'er frem mod en ny udvikling af matematikken.

Vedrørende "nej til lettelse" er sagen jo den, at det er uhensigtsmæssigt og uoverkommeligt at arbejde i en rent formel ramme. Men der sker en udvikling. Der arbejdes med at formalisere visse dele af matematikken. Her spiller datalogi og computere ind. Som eksempler på disse værktøjers anvendelse nævnes talbehandlingsopgaver, metoder til eftervisning af algoritmers eller edb-programmers korrekthed og symbolmanipulation i bred almindelighed (her kan vi mere specifikt tænke på Computer Algebrasystemer som *Maple*, *Mathematica*, *Axiom* og hvad de nu alle hedder). Det er vist oplagt for enhver matematiker, at der sker en kraftig ændring af de værktøjer, matematikere betjener sig af til daglig. En langt større grad af formalisering fører til at de nye værktøjer langsomt graver sig ind på matematikernes traditionelle domæne. Dette gør ingenlunde matematikerne arbejsløse—tværtimod. En række opgaver bliver "trivialiseret" (talbehandling, differentiation, ubestemt integration og mange, mange andre), og tillader matematikerne at kaste sig over nye opgaver, at indvinde nyt land.

Det er min tro, at trods en forudselig og meget kraftig formalisering af matematikken, vil matematikerne altid arbejde med problemer, hvor deres intuition, smag og fagopfattelse er de primære drivkrafter. Formaliseringen (den implementerede formalisering) vil altid stå for indvundet land og som værktøjer i den videre forskning—der altså ikke trives i en spændetrøje af formalisme.

I og for sig er udviklingen, der foregår, intet andet end hvad vi har været vidne til i flere hundrede (tusinde, faktisk!) år. Tænk på “regneværktøjer”: Tabeller (den lille, den store), logaritmetabeller, regnestokken, den elektroniske regnemaskine, lommeregnere.

Mon ikke vi allerede om 10–20 år har set en så kraftig formalisering af matematikken, at også uddanelsen til matematiker vil være (total) ændret en række steder? Diskret matematik, algebraisering, kombinatorik, algoritmer og beregnelighed er aspekter og discipliner, der vil træde i forgrunden. Matematisk analyse og dele af topologien samt flere områder, der traditionelt opfattes som immune over for formaliseringstendenserne, vil nok blive erobret bid for bid.

Det sidste “nej” i oversigten er det også værd at opholde sig lidt ved. En række spørgsmål er, som påpeget, uafgørlige. Samtidig med at dette afspejler en ufuldstændighed, altså en kvalitet, vi umiddelbart opfatter som negativ, åbner det også for en rigdom af nye muligheder. F.eks. er det meningsfyldt at udarbejde matematik i en ramme, hvor kontinuumshypotesen er falsk.

Måske vil senere tiders matematikere kunne afklare kontinuumshypotesen i den forstand, at nye “indlysende sande” aksiomer kan føjes til den nugældende aksiomatiske mængdelære, således at kontinuumshypotesen kan afgøres i det nye system (sker det, vil jeg vædde på at kontinuumshypotesen viser sig at være falsk). Men ligegyldigt, hvor mange sætninger det eventuelt vil lykkes senere generationer at afklare på denne måde, vil der altid være uafgørlige sætninger og, kan vi med sindsro tilføje, interessante sætninger, der ikke kan afgøres. Matematikken vil aldrig blive færdigudviklet.

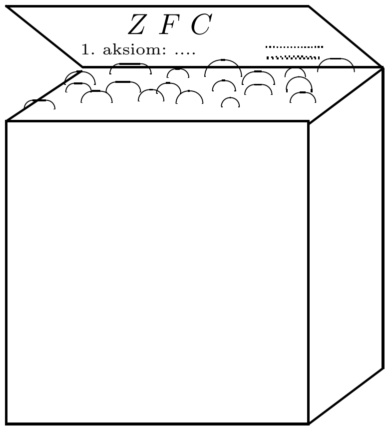
2 ZFC

De aksiomer, vi skal opstille for mængdelæren hedde *Zermelo-Fraenkels aksiomssystem med udvalgsaksiomet* kort ZFC. Dette er nok også det mest populære valg. Der havde været andre muligheder, og en af dem, *von Neuman-Gödel-Bernays* systemet (NGB), vil jeg omtale senere. ⟨gør jeg kun i forelæsningerne⟩

Et hovedsynspunkt ved opstillingen af ZFC er, at *alt er mængder, og alle sammenhænge kan udtrykkes ved tilhørerrlationen.* Der vil derfor kun være én slags objekter i ZFC, mængder. Det er ingenlunde oplagt, at en tilfredsstillende aksiomatisering kan opnås ved kun at have begrebet “mængde” til rådighed. F.eks. når vi arbejder i $\mathbb{R}$, accepterer vi en række delmængder af $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+, \mathbb{Z}, [0,1]$, osv.), mens vi tænker på tallet 17 f.eks. på en helt anden måde, nemlig som et element i $\mathbb{R} : 17 \in \mathbb{R}$. Vi ville aldrig sige: Se på mængden 17. Denne er element i $\mathbb{R}$. Sådan vil vi ikke sige til daglig eller i den naive mængdelære. Men i ZFC er alt mængder, også tallet 17. Hvis vi ikke havde anlagt synspunktet, at alt er mængder, kunne vi let være havnet i et kompliceret system, hvor der var mængder og elementer af en række forskellige typer alt efter hvilke mængder, elementerne var elementer i. Men en sådan kompliceret opbygning behøves altså ikke.

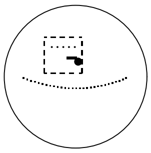
Den anden ingrediens i ZFC, tilhørerrelationen, virker på de fleste umiddelbart tiltalende og problemfri.

2.1 Kramkisten

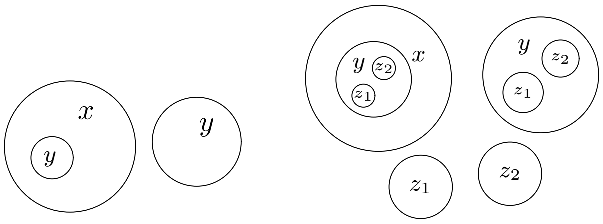


Før vi går ombord i aksiomerne vil jeg introducere et begreb, hvis hovedformål—helt på lige fod med Hilberts Hotel og Jessens Balsal – er det ene, at lette tilegnelsen og beherskelsen af ZFC. Altså et rent pædagogisk trick. Meningen er, at vi skal have noget næsten konkret, håndgribeligt, at tænke på i stedet for et sæt af aksiomer skrevet i den formelle logiks tegnsprog. Der er ikke noget galt i at knytte an til noget håndgribeligt. Vores tro er (vil være) at ZFC er konsistent. Så findes en model og dermed fortolkninger af disse indgående begreber. Vi vil indføre en *kramkiste* eller *rodekasse* som indeholder alle de objekter, ZFC udtaler sig om. Kramkisten indeholder altså alle mængder.

Når vi åbner låget til den, ser vi, at der på indersiden af låget med store bogstaver er skrevet ZFC. Og nedenunder er opregnet alle aksiomerne. Til sidst er der en højtidelig forsikring om, at kramkisten er efterprøvet og gyldigheden af alle aksiomer testet. Certifikat og stempler og alt det der.



Kramkisten er fuld af kugler—det er vores mængder. Hver mængde (altså kugle) har en dør. Der er også dørskilt. På en af dem står "$\emptyset$", som tegn på at her bor den tomme mængde, en anden viser, at det drejer sig om $\mathbb{N}$ osv. Åbner man døren på en mængde og går ind i den, opdager man, at dér finder man andre mængder—det er den første mængdes elementer.



Disse elementer er altså selv mængder, dvs. de findes selv i rodekassen som mængder. Hvis altså x er en mængde og $y \in x$, ligger y både inde i x og ude i rodekassen (jf. den ubehjælpsomme 2-dimensionale tegning). Og går vi videre ind i y finder vi måske de to elementer z_1 og z_2 og har i rodekassen mængderne x, y, z_1 og z_2 med y inden i x ($y \in x$) og såvel z_1 som z_2 inden i y ($z_1 \in y \wedge z_2 \in y$).

2.2 Mængdelærens udsagn

Her tænker vi på udsagn i vid betydning, også dækkende prædikater (åbne udsagn). Og prædikaterne kan have én eller flere fri variable og i øvrigt være opbygget v. hj. af én eller flere variable.

Selvom det ikke ville være så svært ganske nøje at gøre rede for, hvordan mængdelærens udsagn er bygget op, skal vi ikke gøre det, men blot henvise til, at de regler, vi kender så godt vedrørende brug af konnektiver ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$) og kvantorer ($\forall, \exists$), anvendes præcis som der i logikken er gjort rede for med blot to typer af udsagn som primitive udsagn ("byggesten"). De to typer udsagn er dels $x \in y$ (eller $x_1 \in x_2, A \in x, A \in B, \mathcal{E} \in x, \mathcal{E} \in \mathcal{D}, \ldots$ alt efter valg af variabelbetegnelse), dels $x = y$ (eller $x_1 = x_2$, osv.). Her er betydningen af

$x \in y$ klar, det er den basale tilhørerrelation (her "x tilhører y"). Og $x = y$ bruges til at betegne identitet (her at x og y er identiske).

Det skal understreges, at alle variable betegner mængder og at al kvantisering i vor teori er over mængder. Vedrørende identitet skal siges, at enhver teori med tilhørende objekter, således også vores (ZFC), har et tilknyttet identitetsbegreb, der sikrer, at man kan tale om at to objekter, der er givet forskellige navne faktisk er ét og samme objekt, altså identiske.

Måske bør vi også understrege, at vores basisudsagn $x \in y$ og $x = y$ virkelig er udsagn, dvs. for enhver mængde x og enhver mængde y gælder enten $x \in y$ eller $\neg(x \in y)$ (som også skrives $x \notin y$) og ikke begge disse udsagn. Tilsvarende, for hvert x og y, gælder enten $x = y$ eller $\neg(x = y)$ (for hvilket vi også skriver $x \neq y$) og ikke begge disse udsagn.

3 Aksiomerne

I og for sig er det om enhver teori underforstået, at der findes mindst ét objekt i teorien. Selvom det sådan set er underforstået—og i øvrigt fremgår af senere aksiomer—medtager vi det her som

Aksiom 0 (Mængdeeksistens) *Der findes en mængde.*

I vores formelle logistiske notation kan dette skrives:

Aksiom 0 $\exists x : x = x$

I rodekasseterminologien siger dette aksiom, at rodekassen ikke er tom. Mere interessant og uhyre vigtig er det første egentlige aksiom. Først den bløde intuitive formulering:

Aksiom 1 (Ekstensionalitet). *En mængde er bestemt ved sine elementer, dvs. to mængder, der indeholder de samme elementer, er identiske.*

Mere formelt:

Aksiom 1. $\forall x \forall y \big[\big(\forall z \ \ (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \big) \Rightarrow x = y \big].$

Allerede for dette aksiom kan vi får en fornemmelse af at den rent verbale udformning er nemmere at forstå end den formelle, og at den formelle udformning egentlig ikke tilfører noget udover netop dette at vise, at formalisering er mulig.

Aksiomet er klart et "naturligt" aksiom som harmonerer med vores forestillinger om mængder.

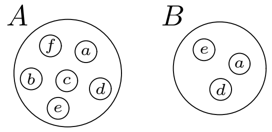
Aksiom 2 vender vi senere tilbage til (det er i en vis forstand overflødigt). Derimod er det næste aksiom centralt:

Aksiom 3 (Komprehensionsaksiomet). *For ethvert prædikat $P(x)$ og enhver mængde A findes mængden af de elementer i A, der har egenskaben P, dvs. der findes en mængde B, således at $x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x)$.*

Hvis f.eks. A indeholder mængderne a, b, c, d, e og f, og hvis blandt disse det netop er a, d og e, der opfylder egenskaben udtrykt ved prædikatet P, så skal der i henhold til aksiomet et eller andet sted i vor rodekasse findes en mængde B, der netop indeholder mængderne a, d og e.

Komprehensionsaksiomet viser altså, at vi inden for en mængde A kan markere de elementer, der har en bestemt egenskab og så sammenfatte disse til en mængde. Igen har vi med et "oplagt sandt" aksiom at gøre, men alligevel snyder vor intuition os, thi denne frihed til at "markere mængder med en vis egenskab og samle sammen til en mængde" virker "oplagt tilladelig" på de fleste, selv uden et krav om, at markeringen skal ske inden for en på forhånd opgiven mængde A. Men her ved vi, at så stor en frihed kan vi umuligt få—uden at føres til en modstrid. Det har Russell lært os med sit berømte paradoks (som jeg siden vender tilbage til).

Komprehensionsaksiomet viser, hvordan vi i ZFC kommer uden om vanskeligheden omkring Russells paradoks. Blot vi "holder os på måtten" og arbejder inden for en fast mængde A (vores "måtte"), har vi frihed som ønsket til at markere og samle sammen.



Aksiom 3 er et *aksiomsskema*, idet det faktisk indeholder uendelig mange aksiomer, ét for hvert prædikat $P(x)$. Det kan mere formelt formuleres:

Aksiom 3. *For hvert prædikat $P(x)$ med fri variabel x gælder*

$$\forall A \exists B \forall x \big(x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x)\big).$$

Faktisk tillader vi, at prædikatet P indeholder flere frie variable. Dette fører dog ikke til noget nyt, idet ekstra variable kan opfattes som parametre.

I forbindelse med komprehensionsaksiomet indfører vi en nyttig (og kendt!) notation, nemlig $\{x \in A \mid P(x)\}$ for den mængde, der i aksiomet er kaldt B. At dette er en tilladelig definition følger af ekstensionalitetsaksiomet. Antag nemlig, at mængderne B_1 og B_2 opfylder betingelserne $x \in B_1 \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x)$ og $x \in B_2 \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x)$. Så gælder åbenbart $x \in B_1 \Leftrightarrow x \in B_2$, hvorfor $B_1 = B_2$ ifølge ekstensionalitetsaksiomet.

Jeg burde før, i forbindelse med ekstensionalitetsaksiomet have indført delmængdebegrebet. For x og y mængder defineres $x \subseteq y$ som en bekvem forkortelse for følgende udsagn: $\forall z \big(z \in x \Rightarrow z \in y\big)$. Så kan ekstensionalitetsaksiomet formuleres: $\forall x \forall y \ \big(x \subseteq y \wedge y \subseteq x \Rightarrow x = y\big)$.

3.1 Den tomme mængde, fællesmængde og differensmængde

Komprehensionsaksiomet kan bruges til at definere den tomme mængde: Lad A være en mængde (en sådan findes ifølge Aksiom 0). Lad $P(x)$ være udsagnet $x \neq x$. Så findes mængden $B = \{x \in A \mid x \neq x\}$. Det ses let, at for denne mængde gælder $\forall y : y \notin B$. P.gr. af ektensionalitet kan der kun findes én mængde med denne egenskab. Den fundne mængde kaldes den *tomme mængde* og betegnes $\emptyset$. Den er altså karakteriseret ved ikke at have nogen elementer. Den ligger i rodekassen og er blot en skal—går vi ind i mængden, finder vi intet derinde, ikke én eneste mængde.

Komprehensionsaksiomet kan også bruges til at vise eksistens af fællesmængde. Lad os blot gå lidt langsomt frem og først vise:

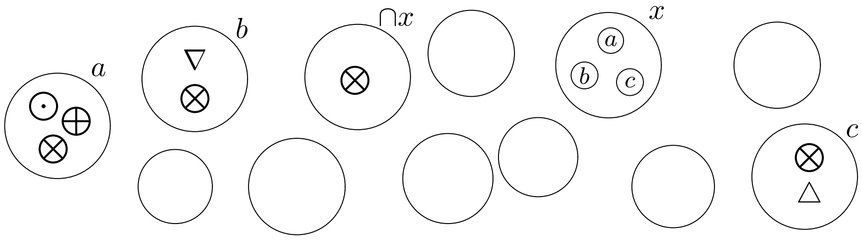
Sætning 3.1. *For enhver mængde A og enhver mængde B findes to entydigt bestemte mængder—lad os blot med det samme benævne dem $A \cap B$ og $A \backslash B$—karakteriseret ved egenskaberne:*

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B, \tag{3.1.1}$$

$$x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B. \tag{3.1.2}$$

Bevis. Lad $P(x)$ være prædikatet $x \in B$ og $Q(x)$ prædikatet $x \notin B$. Så findes $\{x \in A \mid P(x)\}$ og $\{x \in A \mid Q(x)\}$, hvilket netop vil sige, at der findes mængder $A \cap B$ og $A \backslash B$ i vor rodekasse, så (3.1.1) og (3.1.2) gælder. Det var eksistensen. Entydigheden følger ved ekstensionalitet. □

Vedrørende fællesmængde kan vi gå meget videre og vise eksistens af fællesmængde af en vilkårlig ikke-tom familie af mængder. Vi husker, at en familie af mængder er et "system" eller en "samling" af mængder. Men det er en mængde også! Det er jo "samlingen" af sine elementer. Med andre ord, en familie af mængder er i og for sig intet nyt begreb, men blot en mængde. Vi vil derfor—elegant men uvant første gang, man ser det—definere $\cap x$, *fællesmængden over* x, for en vilkårlig ikke-tom mængde x.



Meningen fremgår af et eksempel i rodekasseterminologi. Se på mængden x. Lad os sige, den indeholder elementerne a, b og c. Vi noterer os nu, hvilke elementer i disse tre mængder, der er fælles for a, b og c (dvs. element i såvel a som b som c). Er situationen som antydet på figuren, er det kun mængden markeret $\otimes$, der er fælles. Vi opsøger nu i rodekassen en mængde, vi betegner den $\cap x$, der består af alle omtalte fælles elementer. Da der i eksemplet kun var ét fælles element, $\otimes$, er $\cap x$ en mængde, der netop indeholder dette element.

Lad os nu indføre $\cap x$ præcist:

Sætning 3.2. *Til enhver ikke-tom mængde x (altså $x \neq \emptyset$) findes en entydigt bestemt mængde, vi betegner med $\cap x$, med egenskaben*

$$y \in \cap x \Leftrightarrow \forall z \in x : y \in z.$$

Bevis. Givet $x \neq \emptyset$. Lad $P(y)$ være prædikatet $P(y) : \forall z \in x : y \in z$, eller mere formelt $\forall z \ (z \in x \Rightarrow y \in z)$. Da $x \neq \emptyset$ findes en mængde a, så $a \in x$. Brug nu komprehensionsaksiomet og se på $\{y \in a \mid P(y)\}$. Betegn denne mængde $\cap x$. Det er klart, at den har den angivne egenskab (overvej!). Ved ekstensionalitet indses, at der kun findes én mængde med denne egenskab. □

Grunden til at vi kunne udnytte komprehension til at definere fællesmængde var, at for det relevante prædikat $P(y)$ fandtes en mængde a, således at implikationen $P(y) \Rightarrow y \in a$ galdt. I sådanne tilfælde kan vi bruge notationen $\{y \mid P(y)\}$ uden risiko for misforståelse. Mængden er karakteriseret ved

$$\forall y \ \big(y \in \{y \mid P(y)\} \Leftrightarrow P(y)\big)$$

og bestemmes ved komprehension og ekstensionalitet ved

$$\{y \mid P(y)\} = \{y \in a \mid P(y)\}.$$

3.2 Foreningsmængde

Det er naturligt også at se på foreningsmængden her. Men selv hvis vi blot vil definere foreningsmængden $A \cup B$ af to mængder kommer vi i vanskeligheder. Komprehension kan ikke udnyttes, thi vi kan ikke uden videre finde en mængde, der sikrer, at vi "holder os på måtten". Hvis vi vidste, at der fandtes en mængde X, så $A \subseteq X$ og $B \subseteq X$, kunne vi f.eks. definere $A \cup B$ ved

$$A \cup B = X \backslash \big((X \backslash A) \cap (X \backslash B) \big)$$

og let eftervise, at $A \cup B$ har den egenskab, vi tilstræber, nemlig:

$$\forall x \; \big(x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \big).$$

(Overvej!) $\big[$En anden mulighed er at udnytte komprehension og se på $\{y \in X \mid P(y)\}$, hvor $P(y)$ er prædikatet $\exists z \in x : y \in z\big]$. Ved ekstensionalitet finder vi så, at $A \cup B$ er entydigt bestemt ved $(*)$.

Ganske tilsvarende, hvis vi søger at definere $\cup x$ helt generelt, kommer vi i vanskeligheder. Såfremt vi ved, at der findes en mængde X, så $y \in x \Rightarrow y \subseteq X$, er der ingen problemer, så kan vi definere $\cup x$ ved

$$\cup x = \{ y \in X \mid \exists z \, (z \in x \wedge y \in z) \}$$

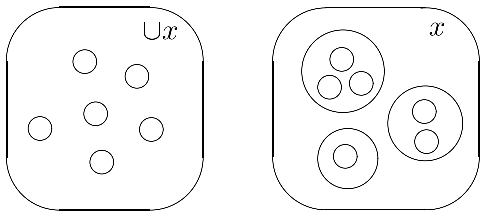
(komprehension og ekstensionalitet). Hermed fås den ønskede egenskab: $y \in \cup x \Leftrightarrow \exists z \, (z \in x \wedge y \in z)$ eller, kortere skrevet med sædvanlig stenografi: $y \in \cup x \Leftrightarrow \exists z \in x : y \in z$.

Men ingen af de hidtil indførte aksiomer sikrer eksistens af en mængde X som ovenfor, så vi kan "holde os på måtten" og bruge komprehension. Da vi naturligvis vil kunne arbejde med vilkårlige foreningsmængder, introducerer vi endnu et aksiom (idet vi lige venter lidt med Aksiom 4):

Aksiom 5 (Sumaksiomet). *For enhver mængde x findes en mængde s, så*

$$\forall y \; \big(y \in s \Leftrightarrow \exists z \in x : y \in z \big).$$

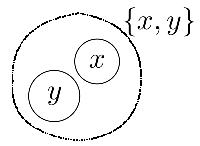
Ved ekstensionalitet ses, at mængden s er entydigt bestemt. Den hedder *foreningsmængden over x* og betegnes $\cup x$.



Det er uhyre let at illustrere, hvad foreningsmængde er ved brug af vor rodekasse. Lad os se på en mængde x i rodekassen og tænke os, at vi en dag har lukket en uartig dreng indenfor. Her kan man se alle de mængder, x består af (på figuren er der 3). Den uartige dreng—undskyld kønsdiskriminationen, men det er nu engang altid drenge, der er uartige—keder sig efterhånden bravt og som tidsfordriv render han nu rundt og balrer alle mængdeskallerne omkring mængderne i x (de 3 mængder i vort figureksempel). Heldigvis opdages drengen i tide, før han skal forgribe sig på de nye mængder, der er opstået. Han vises bort—og tilbage står foreningsmængden $\cup x$! (Lidt mere præcist: Ifølge sumaksiomet skal der et eller andet sted i rodekassen findes en mængde, der netop indeholder de mængder, der bliver tilbage efter at den uartige dreng har hærget!). På figuren ser det ud som om $\cup x$ indeholder 6 mængder. Der kan godt være færre, idet nogle af dem kan være identiske.

3.3 Ordnede par

Vi har nu defineret forenings-, fælles- og differensmængder. Af andre vigtige begreber fra den naive mængdelære vi simpelthen *må* have til rådighed, peges på afbildninger og relationer. Da disse begreber defineres via produktmængder, må vi se at skaffe os produktmængder. Og da en produktmængde er en mængde af ordnede par, må vi skaffe os ordnede par. Det viser sig, at blot vi kan skaffe os par (*uordnede* par), kan vi, ved et lille trick, også skaffe os *ordnede* par.



Er x og y mængder, skal parret x og y være den mængde, der opstår ved at bygge en mængdeskal uden omkring x og y. Det er klart, hvordan vi kan udtrykke dette aksiomatisk—og måske også temmelig klart, at vi ikke med de hidtil indførte værktøjer har midler til rådighed, der sikrer os, at sådanne par findes i rodekassen.

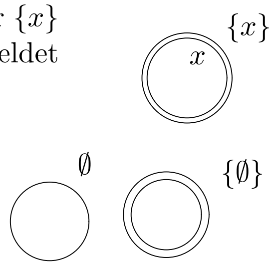
Aksiom 4 (Paraksiomet). *For alle x og alle y findes en mængde, der netop har x og y som elementer:*

$$\forall x \forall y \exists z \forall w \big(w \in z \Leftrightarrow w = x \vee w = y\big).$$

Ved ekstensionalitet ses som sædvanlig, at mængden z er entydigt bestemt ud fra x og y. Vi bruger notationen $\{x,y\}$ for denne mængde og kalder den *parret* (evt. det *uordnede par*) *bestående af x og y*. Til enhver mængde x kan vi se på parret $\{x,x\}$. Denne mængde hedder *singleton* x og betegnes $\{x\}$. For alle y har vi

$$y \in \{x\} \Leftrightarrow y = x.$$

Bemærk, at mens x kan have ligeså mange elementer, det skal være, har $\{x\}$ altid præcis ét element—nemlig x. Figuren viser specielt x og $\{x\}$ i tilfældet $x = \emptyset$. Disse mængder blandes let sammen.



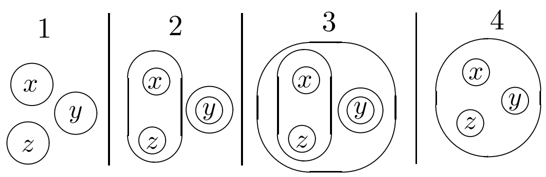
Af vigtige egenskaber for pardannelse nævner vi kun én, nemlig den oplagte egenskab

$$\{x,y\} = \{y,x\}.$$

Vi kan nu danne tripler $\{x,y,z\}$, quadrupler $\{x,y,z,w\}$ osv. Lad os antyde et bevis herfor (dog ikke bevis for "osv."!). Givet mængder x, y, z. Det er klart, hvad $\{x,y,z\}$ skal betyde, nemlig en mængde t (t for "tripel"), så

$$w \in t \Leftrightarrow w = x \vee w = y \vee w = z.$$

I stedet for at skrive et præcist formelt bevis ned, "tegner" jeg et bevis:



Øvelse 3.1. Bevis (følg anvisningen på tegningen!):

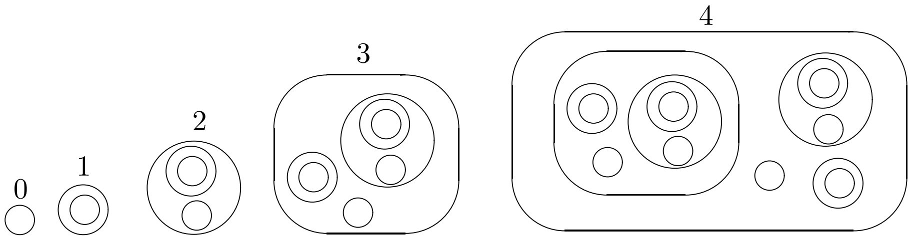
$$\forall x \forall y \forall z \exists w \forall a \big(a \in w \Leftrightarrow a = x \vee a = y \vee a = z\big),$$

og vis herved eksistensen for alle x, y, z af $\{x, y, z\}$. Generalisér til $\{x, y, z, w\}$.

Med par til rådighed kan vi sikre os, at rodekassen indeholder nogle helt bestemte mængder med hhv. ingen, ét, to, tre, fire og fem elementer. Og vi kunne have fortsat, hvis vi gad. De mængder, jeg tænker på, vil vi bruge som model for de naturlige tal 0, 1, 2, 3, 4 og 5, ja faktisk vil vi sige, at disse mængder *er* de nævnte naturlige tal.

Først defineres 0. Det skal være en mængde med ingen elementer, dvs. det *må* være den tomme mængde. Altså: $0 = \emptyset$. Med andre ord, "0" er blot endnu et navn til den tomme mængde. Kært barn har mange navne! Vi definerer nu mængderne 1, 2, 3, 4 og 5 ved

$$\begin{aligned}
1 &= \{0\} &&= \{\emptyset\},\\
2 &= \{0,1\} &&= \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\},\\
3 &= \{0,1,2\} &&= \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \}\}\Big\},\\
4 &= \{0,1,2,3\} &&= \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\Big\},\\
5 &= \{0,1,2,3,4\} &&= \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},\\
& && \qquad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\Big\}.
\end{aligned}$$



Det virker måske mærkeligt at definere 0, 1, 2, 3, 4 og 5 på denne måde. F.eks. har vi $3 \in 5$, og det ser lidt uvant ud. Sagen er den, at vi sådan set er helt frit stillet, når vi vælger modeller for 0, 1, 2, 3, 4 og 5 i vor rodekasse. Blot skal vi vælge seks forskellige mængder. Og at de valgte mængder er forskellige er klart. F.eks. er $3 \neq 5$, da vi let kan pege på en mængde x, så $x \in 5$ men $x \notin 3$. F.eks. kunne vi som x bruge $x = 3$ eller $x = 4$.

Det er klart, at med definitionerne af 0, 1, 2, 3, 4 og 5 har vi slet ikke indfriet de forventninger, vi har til disse objekter. Forventningerne går ud på, at "+", "·" og "≤" kan defineres, så de sædvanlige regler gælder. F.eks forlanger vi om "+", at $2 + 2 = 4$ og $2 + 3 = 5$, mens vi om gange forlanger $0 \cdot 3 = 0$, $1 \cdot 4 = 4$, $2 \cdot 2 = 4$ m.v., og om ordningen forlanger vi f.eks. $0 \leq 0$, $2 \leq 4$ og $2 \leq 5$. Og så forventer vi naturligvis, at vi ikke stopper ved 5, men går videre og definerer alle de naturlige tal og også mængden af naturlige tal. Vi skal ikke gå videre her, men blot hævde, at de definitioner, vi valgte af 0, 1, 2, 3, 4 og 5 peger frem mod et fornuftigt generelt princip, der gør det forholdsvis let at indfri forventningerne—dog skal vi gennem nogle flere aksiomer, før vi har frihed nok til at gennemføre programmet.

Øvelse 3.2. Lad os, for denne øvelse, vedtage at skrive $x \leq y$ for $x \subseteq y$, og $x < y$ for $\big(x \subseteq y \wedge \neg(x = y)\big)$. Vis, at såfremt både x og y er en af mængderne 0, 1, 2, 3, 4 eller 5, så betyder $x \leq y$ og $x < y$ dét, man forventer. Vis også, at for sådanne x og y er $x < y$ ækvivalent med $x \in y$.

Vi har tidligere stillet i udsigt, at pardannelse kan bruges til at definere ordnet par.

Definition 3.3. Lad x og y være mængder. Ved det *ordnede par* af x og y, for hvilket vi bruger notationen (x, y), forstås mængden $(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$.

Vi kan også opfatte (x, y) som en bekvem notation (forkortelse) for mængden $\big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$. Definitionen virker nok lidt overraskende. Men hvordan skulle man ellers afspejle den naive definition ("... det ordnede par af x og y er parret (x, y), hvor x er det første element og y er andet element i parret")? Der er ikke nogen oplagt måde at gøre det på, så vi sikrer os, at (x, y) er et objekt i vort ZFC univers, altså en mængde, vi finder i vor rodekasse. Thi hvad menes med første, og hvad med andet? Definitionen kan netop betragtes som en smart måde at indføre disse begreber på uden at måtte indføre helt nye strukturer i ZFC.

Det væsentlige resultat om ordnede par er følgende:

Sætning 3.4. *Der gælder:* $\forall x \forall y \forall z \forall w \big((x, y) = (z, w) \Leftrightarrow x = z \wedge y = w\big)$.

Øvelse 3.3. (Måske ikke helt let!) Vis det!

Øvelse 3.4. Definer *ordnede tripler* ved $(x, y, z) = \big((x, y), z\big)$ og bevis den basale egenskab for disse (hvad mon det er for en?).

Bemærkning 3.5. Den energiske læser kan også definere ordnede quadrupler og ordnede kvintupler osv.—men "osv." skal tages med forbehold. Først når de naturlige tal er defineret og deres egenskaber etableret, kan vi generelt definere ordnede n-tupler for vilkårlige naturlige tal.

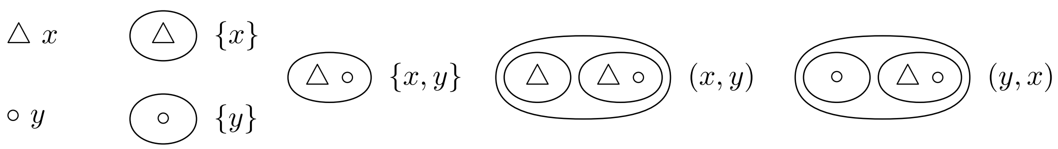


Illustration af de ordnede par (x, y) og (y, x)

3.4 Relationer, afbildninger

Hvordan skal vi nu gå videre? Naturligt—efter det tidligere sagte – havde været at indføre produktmængder og dernæst afbildninger og relationer efter opskriften i den naive mængdelære. Vi går imidlertid en anden vej og definerer—uden at introducere yderligere aksiomer – relationer af afbildninger.

Definition 3.6. En mængde R siges at være en *binær relation* (ofte blot kaldet en relation) såfremt alle elementer i R er ordnede par, altså såfremt

$$\forall z \big(z \in R \Rightarrow \exists x \exists y : z = (x, y)\big).$$

Sætning 3.7. *Lad R være en relation. Så findes mængder* $\mathrm{Dm}(R)$, *definitionsmængden af R, og* $\mathrm{Vm}(R)$, *værdimængden af R, så*

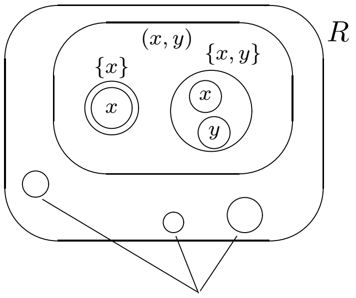
$$\mathrm{Dm}(R) = \{x \mid \exists y : (x, y) \in R\},$$
$$\mathrm{Vm}(R) = \{y \mid \exists x : (x, y) \in R\}.$$

Bevis. Lad os eftervise eksistensen af $\mathrm{Dm}(R)$. I henhold til diskussionen s. 122 er det nok at finde en eller anden mængde X, så $P(x) \Rightarrow x \in X$, hvor $P(x)$ er prædikatet $\exists y : (x, y) \in R$. Vi leder altså efter en mængde X så følgende implikation gælder:

$$\big(\exists y : \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\} \in R\big) \Rightarrow x \in X.$$

Efter nogen overvejelse, ser man, at vi som X kan bruge $X = \cup(\cup R)$! Altså $X = \cup A$ med $A = \cup R$. Faktisk er det ikke så svært, hvis vi tænker på den uartige dreng fra s. 122!

Lad os "tegne" beviset (altså bevisførelse ved kramkistologi!). Vi interesserer os for en mængde X. Vi antager, der findes y, så $(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\} \in R$. Se på figuren (der svarer til tilfældet $x \neq y$). Slipper vi den uartige dreng løs i R og lader ham nedbryde alle mængdeskaller for elementer i R, fremstår $\cup R$. Lader vi drengen husere lidt længere, så han også balrer alle mængdeskaller for de nye elementer (elementerne i $\cup R$), opstår $\cup(\cup R)$. Vi ser nu, at ved drengens "dobbelte" hærgen opstår såvel mængden x som mængden y.



Evt. andre elementer i R end (x, y)

Vi har dermed vist, at $x \in \cup(\cup R)$, præcis som ønsket. Hermed er eksistensen af $\mathrm{Dm}(R)$ vist. Da vi ovenfor også fandt $y \in \cup(\cup R)$, kan et lignende ræsonnement gennemføres til at vise, at $\mathrm{Vm}(R)$ er veldefineret. □

ØVELSE 3.5. Nedskriv mere formelt beviset ovenfor (uden henvisning til en tegning—men gerne *vejledt* af en tegning).

Når vi først har klaret at definere $\mathrm{Dm}(R)$ og $\mathrm{Vm}(R)$, er det let at definere billede og invers billede:

Definition 3.8. For en vilkårlig mængde A defineres, for en given relation R, *billedet af A under R* ved

$$R(A) = \{y \in \mathrm{Vm}(R) \mid \exists a \in A : (a, y) \in R\},$$

og *urbilledet* $R^{-1}(B)$ (også kaldes det *inverse billede*) defineres ved

$$R^{-1}(B) = \{x \in \mathrm{Dm}(R) \mid \exists b \in B : (x, b) \in R\}.$$

Selvom det sådan set er muligt at udvikle relationsbegrebet videre med de aksiomer, vi har til rådighed, skal vi vente lidt, indtil vi har produktmængder til rådighed. Dog bemærkes, at afbildningsbegrebet godt kan indføres nu. Vi definerer blot:

Definition 3.9. En *afbildning* er en relation f, således at

$$\forall x \forall y \forall y' \big((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'\big).$$

I den naive mængdelære har vi set på potensmængdeoperationen. Det er ret klart, at de indtil nu indførte aksiomer ikke er stærke nok til at sikre, at vi for hver mængde x kan snakke om potensmængden $\mathcal{P}(x)$ (diskutér selv!). Der er ingen vej udenom, vi må "ofre" et selvstændigt aksiom på denne sag:

Aksiom 8 (Potensmængdeaksiomet). *For hver mængde x findes en mængde, betegnet $\mathcal{P}(x)$ og kaldet potensmængden af x, som består af alle delmængder af x. Mere formelt (og præcist):*

$$\forall x \exists y \forall z \,(z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x).$$

Potensmængden $\mathcal{P}(x)$ er mængden y, der optræder her. At den er entydigt bestemt, ses let (ekstensionalitet!). Det er værd at gøre opmærksom på, at aksiomet ikke fortæller, for en given (kompliceret!) mængde x, hvad præcis en delmængde af x er eller, sagt på en anden måde, hvilke samlinger af elementer i x, der er med i rodekassen som delmængder af x. Aksiomet siger derimod, at alle de delmængder af x, der faktisk *er* med i rodekassen, kan samles til et hele, så de udgør en mængde i rodekassen—potensmængden. Det er måske derfor ikke så mærkeligt, at man kan tænke sig to rodekasser af mængder, der hver for sig opfylder ZFC og som begge indeholder en bestemt mængde x, defineret uafhængigt af hvilken model for ZFC, vi betragter (tænk på $x = \mathbb{N}_0$!), men således, at $\mathcal{P}(x)$ i de to rodekasser "ser" ganske forkellige ud. Det er netop denne situation, der indtræffer, når vi ser på *kontinuumshypotesen*, CH (enhver delmængde af $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ er enten tællelig eller ækvipotent med $\mathcal{P}(\mathbb{N})$). Her findes—under den sædvanlige forudsætning om, at ZFC selv er et konsistent aksiomssystem—to rodekasser med mængder, så ZFC er opfyldt i begge og så CH gælder i den ene, men ikke i den anden rodekasse. CH er altså uafhængig af ZFC.

3.5 Produktmængde

Vi kan nu let vise, at $X \times Y$ eksisterer for alle mængder X og Y:

Sætning 3.10. $\forall X \forall Y \exists Z \forall t \left(t \in Z \Leftrightarrow \exists x \exists y \left(t = (x, y) \wedge x \in X \wedge y \in Y\right)\right)$.

Bevis. Med sædvanlig notation går beviset ud på at vise, at for X og Y mængder, er

$$\begin{aligned} & \{t \mid \exists x \exists y \left(t = (x, y) \wedge x \in X \wedge y \in Y\right)\} \\ = \; & \{t \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(X \cup Y)\big) \mid \exists x \exists y \left(t = (x, y) \wedge x \in X \wedge y \in Y\right)\}. \end{aligned}$$

Antag $x \in X \wedge y \in Y \wedge t = (x, y)$. Så vil $\{x\} \in \mathcal{P}(X \cup Y)$ og $\{x, y\} \in \mathcal{P}(X \cup Y)$, hvorfor $\big\{\{x\}, \{x, y\}\big\} \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$, altså $t \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(X \cup Y)\big)$. Dette viser det ønskede. □

Mængden Z, vi hermed har defineret, hedder *produktmængden* af X og Y og betegnes $X \times Y$. Vi kan kort skrive

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Idet vi således har vist eksistensen af produktmængder, ses let, at for enhver mængde x er *tilhørerrelationen* $\in_x$ på x og *identiteten* id_x på x veldefinerede relationer ved

$$\begin{aligned} \in_x &= \{(a, b) \mid a \in x \wedge b \in x \wedge a \in b\}, \\ \mathrm{id}_x &= \{(a, b) \mid a \in x \wedge b \in x \wedge a = b\}. \end{aligned}$$

Af disse er id_x altid en afbildning.

Vi skal ikke gå videre med udviklingen i ZFC af yderligere begreber og egenskaber vedrørende relationer og afbildninger, men blot påstå, at dette kan gøres, så alle resultater fra den naive mængdelære etableres.[1] Dette er egentlig også klart på nuværende tidspunkt, hvor vi nøje har gjort rede for, hvordan de fundamentale begreber indføres og eksistens af de tilhørende objekter eftervises. Så snart dette er gjort, kan vi fortsætte med at ræsonnere som vi er vant til inden for den naive mængdelæres forestillingsverden.

Øvelse 3.6. Definer, for vilkårlige mængder X og Y, en mængde, X^Y, der opfører sig som vi er vant til (dvs. X^Y er mængden af afbildninger af Y ind i X).

Øvelse 3.7. Vi har tidligere på elegant vis (?!) defineret vilkårlig fællesmængde og vilkårlig foreningsmængde $\cap x$ og $\cup x$ (med $x \neq \emptyset$ for $\cap x$). Da x her opfattes som samlingen af sine elementer, vi kan skrive $x = (y)_{y \in x}$, kunne vi også have brugt notationen $\cap_{y \in x} y$ og $\cup_{y \in x} y$, som læseren evt. foretrækker. Giv nu i samme ånd en fornuftig definition af vilkårlige mængdeprodukter $\prod x = \prod_{y \in x} y$.

Før vi forlader potensmængdeaksiomet, nævner vi, at man kan vise, at hvis man fjerner dette aksiom fra ZFC og erstatter det med aksiomet "enhver mængde er tællelig", så fås et konsistent aksiomssystem. (Som sædvanlig må man her gå ud fra konsistensen af ZFC). Da der, som vi skal se, findes en uendelig mængde i ZFC, og da Cantors resultat $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ gælder i ZFC, illustrerer dette dybtliggende konsistensresultat, at der virkelig sker noget ved at medtage potensmængdeaksiomet i ZFC. Uden dette kunne man altså risikere at få en mængdelære, hvor alle mængder er "små", nemlig tællelige. Og hvad skulle der så blive af de reelle tal? Dem måtte man så undvære—eller erstatte med noget andet. Disse bemærkninger tjener til at motivere, at det kraftige potensmængdeaksiom medtages i vort aksiomssystem.

3.6 Substitutionsaksiomet

Lad os dernæst se på endnu et aksiom, *substitutionsaksiomet*. Det er et aksiom, der først ret sent kom med i mængdelærens aksiomer. Grunden hertil er, at det er så "naturligt", at man let kan komme til at anvende det uden egentlig at bemærke det. Man er dog blevet klar over, at aksiomet er vigtigt og ikke kan undværes. Ganske som for komprehensionsaksiomet drejer det sig om et aksiomsskema, altså i princippet uendelig mange aksiomer, hvert aksiom svarende til et valg af et prædikat af en særlig type.

Aksiom 6 (Substitutionsaksiomet). *For ethvert prædikat $P(x, y)$ i de to frie variable x og y som har den egenskab, at der til hvert x højst findes én mængde y, så $P(x, y)$, findes, til enhver mængde A, en mængde B, så $y \in B \Leftrightarrow \exists x \in A : P(x, y)$.*

Mere formelt udtrykt:

Hvis $P(x, y)$ opfylder

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 \big(P(x, y_1) \wedge P(x, y_2) \Rightarrow y_1 = y_2 \big),$$

så gælder

$$\forall A \exists B \forall y \big(y \in B \Leftrightarrow \exists x \, (x \in A \wedge P(x, y)) \big).$$

[1] Se dog nedenstående to øvelser.

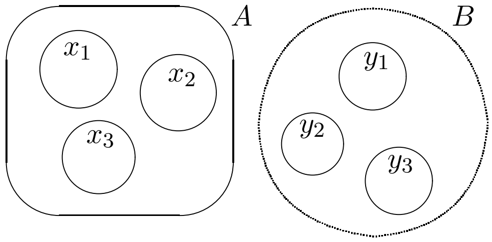
Den mængde B, hvis eksistens aksiomet udtaler sig om (givet mængden A), er entydigt bestemt (ektensionalitet!) og kan betegnes $\{y \mid \exists x : \big(x \in A \wedge P(x,y)\big)\}$ eller $\{y \mid \exists x \in A : P(x,y)\}$.

Substitutionsaksiomet minder noget om komprehensionsaksiomet. Vi kan da også vise, at det faktisk drejer sig om et stærkere aksiom. Med andre ord, komprehensionsaksiomet er overflødigt! At det alligevel medtages i ZFC skyldes dels historiske grunde, dels at det—som vi har set—er et særdeles nyttigt specialtilfælde af substitutionsaksiomet.

Lad os nu vise, hvordan komprehensionsaksiomet kan fås som et specialtilfælde af substitutionsaksiomet. Hertil ses på et prædikat $P(x)$ i den fri variabel x og en mængde A. Vi vil vise eksistensen af $\{x \in A \mid P(x)\}$ ved at bruge substitutionsaksiomet. Dette er let: Vi ser blot på prædikatet $Q(x,y) : P(x) \wedge x = y$ og finder for mængden A, at der findes B, så $y \in B \Leftrightarrow \exists x \in A : Q(x,y)$, dvs. $y \in B \Leftrightarrow y \in A \wedge P(y)$. Dermed er $B = \{y \in A \mid P(y)\}$, som ønsket.

Øvelse 3.8. Tit ser man en udformning af substitutionsaksiomet, der er lidt svagere end den form, vi valgte, idet man om $P(x,y)$ forlanger, at der for alle x findes præcis én mængde y, så $P(x,y)$ gælder. Vis, hvorledes vores form kan udledes af den formelt set svagere form.

Ganske som for komprehensionsaksiomet tillader vi, at $P(x,y)$ i substitutionsaksiomet indeholder yderligere frie variable. Disse er så at betragte som parametre. Vi hævdede, at substitutionsaksiomet er et "naturligt", altså "oplagt sandt" aksiom. Lad os tænke på det tilfælde, hvor $P(x,y)$ opfylder $\forall x \exists! y : P(x,y)$ (svarende til den svage form af aksiomet antydet i øvelsen ovenfor).[2]



Det, aksiomet sikrer os er, at når vi ser på en mængde A i rodekassen, så kan vi i stedet for hvert element $x \in A$ (på figuren er der tre elementer x_1, x_2 og x_3) "substituere", altså erstatte, x med det y, der opfylder $P(x,y)$, således at forstå, at der et eller andet sted i rodekassen findes en mængde, der netop består af de y'er vi har substitueret med. Aksiomet er meget naturligt—det vil læseren sikkert medgive! F.eks. får vi ikke nogen "større" mængde B ud af det end den, vi startede med. (Derfor er forudsætningen om, at der til hvert x findes *højst* et y, så $P(x,y)$, den naturlige forudsætning).

$P(x_1, y_1)$
$P(x_2, y_2)$
$P(x_3, y_3)$

At substitutionsaksiomet er effektivt stærkere end komprehensionsaksiomet er måske overraskende. Men sådan er det i henhold til mere dybtgående undersøgelser.

En og anden kunne måske tro, at substitutionsaksiomet er trivielt ud fra følgende betragtning: Lad $P(x,y)$ være et prædikat af den omhandlende art—altså: $\forall x \forall y_1 \forall y_2 : P(x,y_1) \wedge P(x,y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$—og lad A være en vilkårlig mængde. Se på afbildningen f, der til hvert $x \in A$, for hvilket der findes y så $P(x,y)$, knytter den entydigt bestemte mængde y så $P(x,y)$. Så er det klart, at værdimængden for f er den søgte mængde (B), idet $y \in \mathrm{Vm}(f) \Leftrightarrow \exists x : (x,y) \in f \Leftrightarrow \exists x \in A : P(x,y)$. Sandt nok—såfremt f findes i vor rodekasse! Humlen er blot, at det behøver f ikke. Det er netop det, substitutionsaksiomet skal sikre.

Øvelse 3.9. Med henvisning til diskussionen ovenfor skal man vise, at der findes en mængde

[2] Jeg kan ikke huske, om vi før er stødt på "$\exists!$". Det betyder "der eksisterer et entydigt bestemt …". Således er $\exists! x : Q(x)$ stenografi for $\big(\exists x : Q(x)\big) \wedge \big(\forall x_1 \forall x_2\, (Q(x_1) \wedge Q(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)\big)$.

B med egenskaben nævnt i aksiomet, hvis og kun hvis afbildningen $f = \{(x, y) \mid x \in A \wedge P(x, y)\}$ findes, og i bekræftende fald er $B = \mathrm{Vm}(f)$.

ØVELSE 3.10. Vi har før vist eksistens af produktmængden $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$ ved at udnytte potensmængdeaksiomet. Vis, at eksistensen af $X \times Y$ også kan klares, hvis man ikke har potensmængdeaksiomet til rådighed, men i stedet udnytter substitutionsaksiomet (og evt. andre af de indførte aksiomer).

Vejledning: Brug først substitutionsaksiomet til at definere $X \times \{y\}$. Brug så substitutionsaksiomet endnu en gang til at danne $\{X \times \{y\} \mid y \in Y\}$. Udnyt til sidst—ja, hvilket aksiom tror I?

ØVELSE 3.11. Vis ved udnyttelse af aksiomerne 0, 1, 6 og 8 (mængdeeksistens, ekstensionalitet, substitutionsaksiomet og potensmængdeaksiomet), at paraksiomet er overflødigt, idet det kan udledes af de nævnte aksiomer.

Vejledning: Idéen er at udnytte substitutionsaksiomet. Først opsøges to mængder a og b så $\{a, b\}$ eksisterer. Til givne mængder x_0 og y_0 (eventuelt identiske) ses så på tilknytningen $a \curvearrowright x_0$, $b \curvearrowright y_0$ (og f.eks. $x \curvearrowright x$ for andre mængder), og i stedet for a og b substitueres så x_0 og y_0.

Bemærkning 3.11. Denne øvelse viser altså, at paraksiomet er overflødigt i ZFC. På trods af det, er det bekvemt at medtage, bl.a. fordi det letter en trinvis opbygning af mængdelærens begreber.

Vi venter til senere med at vise mere centrale anvendelser af substitutionsaksiomet end antydet i ovenstående.

4 Ota Solgryn mængder

Vi vælger at se på et totalt unødvendigt aksiom nu. Aksiomet kan helt undværes, men med aksiomet sikrer vi os, at alle mængder i vor rodekasse har en simpel opbygning, hvilket især giver lettelser, når vi senere skal til at indføre ordinaltallene. Aksiomet er altså godt nok. Det er harmløst og giver nogle lettelser. Det kan dermed anses for at være et teknisk aksiom. Det kan derimod næppe siges at være "naturligt", "oplagt sandt".

Først lidt om *Ota Solgryn mængder* (undskyld min private poppede betegnelse). Jeg skal nok prøve at fremskaffe et billede af en Ota Solgryn pakke. Mon ikke mange har set sådan én? Den fascinerede mig som barn. på pakken kommer en rask frisk dreng (det er lige til at få kvalme af!) løbende med en Ota Solgryn pakke—og på denne pakke kommer en rask sund dreng (den samme?) løbende med en Ota Solgryn pakke osv. Med denne baggrund kalder vi en mængde x for en *Ota Solgryn mængde*, såfremt x indeholder sig selv som element: $x \in x$.

Russels paradoks kan formuleres som et paradoks om Ota Solgryn mængder. Lad os nu tænke os, at vi markerer alle mængder i vores rodekasse som *ikke* er Ota Solgryn mængder. Det har vores tanke ikke svært ved at acceptere, og vi har heller ikke svært ved at tænke på alle disse ikke-Ota Solgryn mængder som et hele. Derfor—følgende Cantors fine definition: "Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen"—er det naturligt, at alle ikke-Ota Solgryn mængder kan sammenfattes til en mængde, altså at der et eller andet sted i vor rodekasse ligger en mængde R (R

for “Russell”), så $x \in R \Leftrightarrow x$ er ikke en Ota Solgryn mængde. Accepteres denne tankegang, opstår Russells paradoks, idet der ikke kan findes en mængde R så $\forall x : x \in R \Leftrightarrow x \notin x$.

I vores mængdelære, altså i ZFC, findes ingen Ota Solgryn mængder. Det forhindres af følgende aksiom:

Aksiom 2 (Funderings- eller Regularitetsaksiomet). $\forall x \left(x = \emptyset \vee \exists y \,(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)\right)$.

Skrevet lidt mere overskueligt:

$$\forall x \neq \emptyset \exists y \in x : y \cap x = \emptyset.$$

Og skrevet lidt mere detaljeret:

$$\forall x \neq \emptyset \exists y \in x \forall z \in x : z \notin y.$$

En mængde y med den angivne egenskab ($y \in x \wedge y \cap x = \emptyset$) kaldes et *fundament* for x. Iflg. funderingsaksiomet har enhver ikke-tom mængde altså et fundament.

Det følger let af funderingsaksiomet, at der ikke findes Ota Solgryn mængder. Vi har altså:

$$\forall x : x \notin x.$$

(Anvend fundering på den ikke-tomme mængde $\{x\}$). Så i ZFC er Russells “mængde”R, “mængden”af alle mængder. Den findes altså ikke i rodekassen. I øvrigt understreges, at funderingsaksiomet egentlig ikke har noget med Rusells paradoks at gøre. Således kan man uden funderingsaksiomet vise, at “mængden” af alle mængder *ikke* findes i vor rodekasse:

ØVELSE 4.1. Vis, uden at anvende funderingsaksiomet, at der ikke findes en mængde V, så $\forall x : x \in V$.

Vi kan nu vise på naivt grundlag:

Sætning 4.1. *Der gælder:*

(i) For ethvert naturligt tal n og for erhvert sæt $x_1, \dots, x_n$ af n mængder, findes $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ så, for alle $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \notin x_{i_0}$.

(ii) Der findes ingen cirkulær “tilhører-kæde”, dvs. vi kan ikke have $x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n$ med $x_1 = x_n$.

(iii) Der findes ingen uendelig nedstigende “tilhører-kæde”, dvs. $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \cdots$ er umulig.

Bevis. (i): Vælg x_{i_0} som et fundament for $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
(ii):—Thi i så fald ville $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_2, x_3, \dots, x_n\}$ ikke have noget fundament.
(iii):—Thi i så fald ville $\{x_1, x_2, \dots\}$ ikke have noget fundament. □

Det “naive”i ovenstående ligger i, at vi påberåber os kendskab til de naturlige tal, før vi har indført dem.

ØVELSE 4.2. Vis, at 1, 2, 3, 4 og 5 defineret tidligere alle har et fundament. (Påpeg evt. en egenskab, der er fælles for disse mængder, som sikrer, at et fundament findes—selv uden funderingsaksiomet.)

ØVELSE 4.3. Bevis, at $\forall x : \{x\} \neq x$. Bevis også, at $\forall x \forall y\,(x \in y \Rightarrow y \notin x)$ og at $\forall x \forall y\,(x \in y \Rightarrow x \neq y)$.

ØVELSE 4.4. Undersøg, hvad betingelsen er for at en mængde af formen (x, y) har to fundamenter. Bemærk, at for enhver mængde x findes præcis to mængder y, for hvilke (x, y) kun har ét fundament.

5 Ordinaltal

Vi er nu nået til et hovedpunkt i vor udvikling af mængdelæren. Ordinaltallene skal indføres. Disse "tal" er helt specielle mængder, hvis betydning allerede burde være fremgået af omtalen i den naive mængdelære. Ordinaltallene bruges til at "optælle" elementerne i en mængde med. De bruges til en lang række konstruktioner, hyppigt af objekter (mængder), der opfører sig ejendommeligt, mængder med patologiske egenskaber. Men de bruges også til noget fundamentalt og ganske jordnært. Ved hjælp af ordinaltallene kan vi indføre de naturlige tal.

Til at indføre de naturlige tal behøves kun ganske "få" af ordinaltallene, og de naturlige tal kan sådan set indføres uden at inddrage vilkårlige ordinaltal. Jeg har alligevel valgt en fremstilling, hvor vi først ser på vilkårlige ordinaltal og udleder deres fundamentale egenskaber. Det er det mest systematiske, og desuden er de hovedegenskaber, vi skal se på (induktion og rekursion) også fundamentale for de naturlige tal. Forhåbentlig har den vidtløftige—men upræcise—behandling af ordinaltallene i den naive mængdelære givet læseren en god forberedelse til det, der nu kommer.

Definition 5.1. Et *ordinaltal* er en mængde α, der opfylder følgende to krav:

(i) Tilhørerrelationen er total på α, dvs. $\forall x \forall y\,(x \in \alpha \wedge y \in \alpha \Rightarrow x \in y \vee y \in x \vee x = y)$.

(ii) Mængden α er transitiv, dvs. $\forall x \forall y\,(y \in x \wedge x \in \alpha \Rightarrow y \in \alpha)$.

Bemærkning 5.2. Når vi i (i) taler om at tilhørerrelationen er total på α, ville det egentlig være mere korrekt at tale om relationen "tilhører eller lig med". Egenskaben (ii) kan kort udtrykkes: $x \in \alpha \Rightarrow x \subseteq \alpha$.

ØVELSE 5.1. Vis, at hvis α er et ordinaltal, så er også $\alpha \cup \{\alpha\}$ et ordinaltal. Vis, at 0, 1, 2, 3, 4 og 5 (se s. 124) er ordinaltal.

Sætning 5.3 (Nogle basale egenskaber om ordinaltal). *Der gælder:*

(i) *α ordinaltal, $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta$ ordinaltal.*

(ii) *α ordinaltal $\Rightarrow \alpha \cup \{\alpha\}$ ordinaltal.*

(iii) *A mængde af ordinaltal $\Rightarrow \cup A$ ordinaltal.*

(iv) *A ikke-tom mængde af ordinaltal $\Rightarrow \cap A$ ordinaltal.*

(v) *For α og β ordinaltal gælder biimplikationen $\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.*

(vi) *For α og β ordinaltal gælder præcis ét af følgende udsagn: $\alpha = \beta, \alpha \in \beta, \beta \in \alpha$.*

(vii) *Lad α være et ordinaltal. Defineres, for $x \in \alpha$ og $y \in \alpha, x \leq y$ ved $x \subseteq y$, er "$\leq$" en velordning på mængden α. I denne ordning gælder $x < y \Leftrightarrow x \in y$, og for ethvert $x \in \alpha$ er $V(x) = x$ (husk: $V(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \mid y < x\}$).*

(viii) *A mængde af ordinaltal så $x \in a$ for et $a \in A$ medfører $x \in A$. Så er A et ordinaltal.*

Der findes ingen mængde indeholdene alle ordinaltal (se senere øvelse). Vi indfører alligevel en betegnelse for samlingen af alle ordinaltal, nemlig $\mathbb{ON}$ og kalder $\mathbb{ON}$ *ordinalrækken.* Det er der intet galt i. Blot må vi passe på ikke at ræsonnere ud fra en—forkert—forudsætning om at $\mathbb{ON}$ er en mængde. Vi tillader os—måske lidt risikabelt, synes læseren—at anvende notation som $x \in \mathbb{ON}$ og $A \subseteq \mathbb{ON}$. Dette er at betragte som rene forkortelser og betyder henholdsvis "x er et ordinaltal" og "A er en mængde, og hvert element i A er et ordinaltal".

Nu til beviset for sætningen.

Bevis. Vi fører beviset i følgende skridt (egenskaben (ii) tænkes vist i øvelse 5.1):

(a) $\alpha \in \mathbb{ON} \wedge \beta \in \alpha \Rightarrow \beta \in \mathbb{ON}$.
(b) $A \subseteq \mathbb{ON} \wedge A \neq \emptyset \Rightarrow \cap A \in \mathbb{ON}$.
(c) $\alpha \in \mathbb{ON} \wedge \beta \in \mathbb{ON} \Rightarrow (\beta \subseteq \alpha \Leftrightarrow \beta \in \alpha \vee \beta = \alpha)$.
(d) $\alpha \in \mathbb{ON} \Rightarrow (\alpha, \leq)$ velordning [$(\alpha, \leq)$ her anvendt som i naiv mængdelære].
(e) $\alpha \in \mathbb{ON} \wedge \beta \in \mathbb{ON} \Rightarrow$ præcis ét af udsagnene $\alpha = \beta, \alpha \in \beta$ og $\beta \in \alpha$ sandt.
(f) $A \subseteq \mathbb{ON} \Rightarrow \cup A \in \mathbb{ON}$ (husk: A mængde forudsat når vi skriver $A \subseteq \mathbb{ON}$!).

Bevis for (a): Lad $x \in \beta \wedge y \in \beta \wedge x \neq y$. Da α er transitiv vil $x \in \alpha \wedge y \in \alpha$. Da "$\in$" er total på α og $x \neq y$, vil enten $x \in y$ eller $y \in x$. Dette viser, at "$\in$" er total på β. For at vise, at β er transitiv, antag $x \in y \in \beta$ (stenografi for $x \in y \wedge y \in \beta$). Af mulighederne $x = \beta, \beta \in x$ og $x \in \beta$ (og der er kun disse muligheder, da "$\in$" er total på α og da $x \in \alpha$ og $\beta \in \alpha$), kan de to første udelukkes (bemærk, at funderingsaksiomet udnyttes her). Så må $x \in \beta$. Hermed er det vist, at β er transitiv. Alt i alt ses, at $\beta \in \mathbb{ON}$. □

Bevis for (b): Vi har $\cap A = \{x \mid \forall \alpha \in A : x \in \alpha\}$. Antag, at $x \in \cap A$ og $y \in \cap A$. Vælg $\alpha \in A$ ($A \neq \emptyset$). Så vil $x \in \alpha \vee y \in \alpha$ og da $\alpha \in \mathbb{ON}$, sluttes at enten må $x = y$ eller $x \in y$ eller $y \in x$ gælde. Dermed er "$\in$" total på $\cap A$. Beviset for at $\cap A$ er transitiv er ligeså enkelt og overlades til læseren. □

Bevis for (c): "$\Leftarrow$" i "$\Leftrightarrow$" er let at eftervise og overlades til læseren. Lad os nu vise den modsatte implikation. Vi antager altså at α og β er ordinaltal og at $\beta \subseteq \alpha$. Hvis $\beta = \alpha$ har vi vist det ønskede. Lad os derfor nu antage at $\beta \neq \alpha$. Så er β en ægte delmængde af α og dermed er $\alpha \backslash \beta \neq \emptyset$. Lad x være et fundament for $\alpha \backslash \beta$. Vi kan afslutte beviset ved at vise, at $\beta = x$ (thi da $x \in \alpha$ vil β så $\in \alpha$).

Først vises $x \subseteq \beta$: Hvis $y \in x \backslash \beta$, vil $y \in \alpha \backslash \beta$, hvilket vil være en modstrid med $x \cap (\alpha \backslash \beta) = \emptyset$. Vi må derfor have, at $x \backslash \beta = \emptyset$, m.a.o. $x \subseteq \beta$.

Dernæst vises $\beta \subseteq x$: Antag $y \in \beta$. Af de mulige alternativer $y = x, x \in y$ og $y \in x$ kan de to første let udelukkes (burde måske først have bemærket, at da $\beta \subseteq \alpha$ vil $y \in \alpha$, så da både x og y tilhører ordinaltallet α, må én af de tre nævnte alternativer indtræffe). Der er så kun det sidste alternativ $y \in x$ tilbage. Dermed er implikationen $y \in \beta \Rightarrow y \in x$ bevist, og $\beta \subseteq x$ følger som ønsket. □

Bevis for (d): For $x \in \alpha$ og $y \in \alpha$ er $x \leq y$ som sagt defineret ved $x \subseteq y$. Klart, at "$\leq$" er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv (altså, kort skrevet, $x \leq x, x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ og $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$)—thi dette gælder altid for "$\subseteq$". For at vise, at "$\leq$" er en velordning af α, mangler vi at eftervise den centrale velordningsegenskab. at enhver ikke-tom delmængde har et første element. Lad derfor $x \subseteq \alpha$ være ikke-tom. Lad y være et fundament for x. Så vil $y \in x$. For at vise at y er det første element i x, ses på et vilkårligt element $z \in x$. Da $y \cap x = \emptyset$, må $\neg(z \in y)$. Så må $(y \in z) \vee (y = z)$. Da både y og z er ordinaltal (overvej!), følger det af (c) (den lette del), at $y \subseteq z$, altså $y \leq z$. Hermed har vi vist $\forall z\,(z \in x \Rightarrow y \leq z)$ som ønsket. □

Bevis for (e): Vi sætter $\gamma = \alpha \cap \beta$. Så vil $\gamma \in \mathbb{ON}$. Da $\gamma \subseteq \alpha$ ses af (c) (den svære del), at $(\gamma \in \alpha) \vee (\gamma = \alpha)$. Af $\gamma \subseteq \beta$ følger tilsvarende, at $(\gamma \in \beta) \vee (\gamma = \beta)$. Vi kan ikke både have $\gamma \in \alpha$ og $\gamma \in \beta$, thi så vil $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$! Vi kan slutte, at $(\gamma = \alpha) \vee (\gamma = \beta)$, altså $(\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$. Anvend igen (c) og slut $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta) \vee (\beta \in \alpha \vee \beta = \alpha)$, m.a.o. $(\alpha = \beta) \vee (\alpha \in \beta) \vee (\beta \in \alpha)$. Klart, at kun ét af de tre deludsagn, der her optræder, kan gælde. □

Bevis for (f): Lad $A \subseteq \mathbb{ON}$ og sæt $x = \cup A$. Så er $x = \{y \mid \exists \alpha \in A : y \in \alpha\}$. For at vise, at "$\in$" er total på x, antages $y \in x$ og $z \in x$. Bestem $\alpha \in A$ og $\beta \in A$, så $y \in \alpha$ og $z \in \beta$. Af (e) ses, at enten vil $\alpha = \beta, \alpha \in \beta$ eller $\beta \in \alpha$. I alle tilfælde findes et ordinaltal (enten α eller β) som indeholder både z og y. Da "$\in$" er total på ethvert ordinaltal, sluttes at $(z = y) \vee (z \in y) \vee (y \in z)$ som ønsket. For at vise at x er transitiv, antages $y \in z \in x$. Bestem $\alpha \in A$ så $z \in \alpha$. Så vil $y \in z \in \alpha$, hvoraf $y \in \alpha$ sluttes. Da $y \in \alpha \in A$ ses nu, at $y \in \cap A = x$, som ønsket. □

□

I beviset udnyttede vi flere gange på væsentlig måde funderingsaksiomet. Dette virker måske lidt mærkeligt, når man husker vores tidligere bemærkning om, at funderingsaksiomet sådan set kan undværes. Sagen er den, at uden funderingsaksiomet må ordinaltal defineres lidt anderledes (man må så sørge for, at de er "velfunderede"). Det bliver mere besværligt uden at føre til noget nyt. Derfor insisterer vi—som alle da også er enige om i dag—på at medtage det bekvemme funderingsaksiom i ZFC.

Øvelse 5.2. Vis, at der ikke eksisterer en mængde, der indeholder alle ordinaltal.

Vejledning: Fandtes sådan en mængde, ville $\mathbb{ON}$ være en mængde. Og så ville $\mathbb{ON}$ selv være et ordinaltal.

Bemærkning 5.4. Det paradoks, man føres til ved at antage, at $\mathbb{ON}$ er en mængde, er et af de klassiske paradokser i mængdelæren, på lige fod med Russells paradoks. Det blev opstillet omkring århundredeskiftet og går under navnet Burali-Forti paradokset.

Ordningen, vi indførte i sætningen, er strengt taget en ordning indført på α for α et fast ordinaltal. Men faktisk kan vi betragte "$\leq$" som indført på hele $\mathbb{ON}$, dog må vi have øje for, at $\mathbb{ON}$ ikke er en mængde. Så $(\mathbb{ON}, \leq)$ er ikke en ordnet mængde—$\mathbb{ON}$ er ikke engang en mængde. Alligevel er det bekvemt at tale om en række begreber som om $(\mathbb{ON}, \leq)$ er en ordning. Det giver normalt ikke anledning til misforståelser eller fejl. Eksempler på det fleksible i denne praksis illustreres i nedennævnte sætning, hvor vi ser på, hvad det er for nogle "nye" ordinaltal vi finder i (ii), (iii) og (iv) i Sætning 5.3.

Sætning 5.5. *(i) Lad $\alpha \in \mathbb{ON}$. Da er $\alpha \cup \{\alpha\}$ det mindste ordinaltal, der er større end α.*

(ii) Lad A være en mængde af ordinaltal. Så er $\cup A = \sup A$, dvs. $\cup A$ er det mindste ordinaltal, som er $\geq$ ethvert ordinaltal i mængden A.

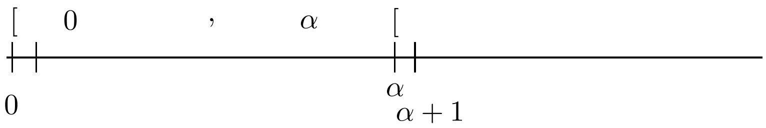
(iii) Lad A være en ikke-tom mængde af ordinaltal. Så er $\cap A = \min A$, dvs. $\cap A$ er det første ordinaltal i A.

Bevis. (i): Sæt $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$. Så er $\alpha \subseteq \beta$ og $\alpha \neq \beta$, hvorfor $a < \beta$. Antag, at også ordinaltallet γ er større end α: $\alpha < \gamma$. Så vil $\alpha \subseteq \gamma$ og $\alpha \in \gamma$. Da $\alpha \in \gamma$, vil $\{\alpha\} \subseteq \gamma$. Så må $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \gamma$, altså $\beta \subseteq \gamma$ eller $\beta \leq \gamma$, som ønsket.
(ii): Sæt $\beta = \cup A$. det er klart, at $\forall \alpha \in A : \alpha \subseteq \beta$ og dermed gælder $\forall \alpha \in A : \alpha \leq \beta$. Antag nu at også ordinaltallet γ har denne egenskab, altså at der gælder $\forall \alpha \in A : \alpha \leq \gamma$. Så vil $\forall \alpha \in A : \alpha \subseteq \gamma$, hvorfor $\cup A \subseteq \gamma$, dvs. $\beta \subseteq \gamma$ eller $\beta \leq \gamma$, som ønsket.
(iii): Lad $\alpha_0 \in A$ og sæt $A_0 = \{\alpha \in A \mid \alpha \leq \alpha_0\} = \{\alpha \in A \mid \alpha \subseteq \alpha_0\}$. Så er $\cap A = \cap A_0$. Da $A_0 \subseteq \alpha_0 \cup \{\alpha_0\}$ følger af (i) og af (vii) i Sætning 5.3, at A_0 har et første element, lad os sige γ. Det ses nu let, at $\cap A_0 = \gamma$. $\square$

5.1 0, efterfølgerordinaltal og grænseordinaltal

Ordinaltallene inddeles i tre kategorier. Den første indeholder blot det ene ordinaltal 0, som indtager en særstatus: Det er det første af alle ordinaltal: $0 \leq \alpha$ for ethvert ordinaltal α. Næste kategori indeholder alle såkaldte *efterfølgerordinaltal* (eller blot efterfølgere), dvs. ordinaltal på formen $\beta \cup \{\beta\}$ med $\beta \in \mathbb{ON}$. Hvis α er en efterfølger, lad os sige $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, skrives også $\alpha = \beta + 1$. Den sidste kategori indeholder alle *grænseordinaltallene*, altså alle ordinaltal, der er forskellige fra 0 og som ikke kan skrives på formen $\beta \cup \{\beta\}$ for noget ordinaltal β.

For mængder af ordinaltal anvendes tit "naturlig" notation ved brug af intervaller, således skrives hyppigt $[0, \alpha[$ for mængden af ordinaltal β med $0 \leq \beta < \alpha$ og $[0, \alpha]$



Ordinalrækken $\mathbb{ON}$

for $\{\beta \mid 0 \leq \beta \leq \alpha\}$. Bemærk, at $[0, \alpha[= V(\alpha) = \alpha$ og $[0, \alpha] = [0, \alpha[\cup \{\alpha\} = \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$. Når vi tænker på α som en velordnet mængde, er det tit mere suggestivt at bruge notationen $[0, \alpha[$ i stedet for α.

5.2 Induktionsprincippet

Da $[0, \alpha[$ er en velordnet mængde gælder induktionsprincippet, se s. 29 i NM. Lad os blot anføre det eksplicit:

Sætning 5.6 (Induktion over α). *Lad $[0, \alpha[= \alpha \in \mathbb{ON}$. Hvis x er en delmængde af $[0, \alpha[$ således at*

$$\forall \beta < \alpha \, ([0, \beta[\subseteq x \Rightarrow \beta \in x),$$

så er $x = [0, \alpha[$.

Øvelse 5.3. Bevis dette! Formulér og bevis også induktionsprincippet for $[0, \alpha[$ men i versionen (anden udgave) svarende til sætning 5.2 s. 59 i NM.

Vi ved fra vor naive diskussion, at det meget vel kan tænkes, at man ikke kan skelne to forskellige ordinaltal fra hinanden, hvis man kun bruger "mængdeteoretiske briller". Men med "ordensteoretiske briller" kan dette altid lade sig gøre.

Sætning 5.7. *Lad* $\alpha = [0, \alpha[$ *og* $\beta = [0, \beta[$ *være ordinaltal. Hvis* $\alpha \neq \beta$*, er* $[0, \alpha[$ *og* $[0, \beta[$ ikke *ordensisomorfe. Hvis* $[0, \alpha[$ *og* $[0, \beta[$ er *ordensisomorfe, er* $\alpha = \beta$ *og den eneste ordensisomorfi er identiteten.*[3]

Bevis. Første påstand følger af sidste. Antag $\phi : [0, \alpha[\to [0, \beta[$ er en ordensisomorfi. Definer $A \subseteq [0, \alpha[$ ved $A = \{x \mid x < \alpha \wedge x < \beta \wedge \phi(x) = x\}$. Ved induktion ses, at $A = [0, \alpha[$. Så må $[0, \alpha[\subseteq [0, \beta[$. Tilsvarende må $[0, \beta[\subseteq [0, \alpha[$. Dermed er $[0, \alpha[= [0, \beta[$ (altså $\alpha = \beta$). Af induktionsresultatet ses nu at $\phi = \mathrm{id}_{[0,\alpha[}$ □

5.3 Rekursion

Lad os se på rekursion over et ordinaltal. Ved en *transfinit følge* forstås blot en afbildning defineret på et ordinaltal. Vi anvender tit "sædvanlig" følgenotation. Er f defineret på $\alpha = [0, \alpha[$ den afbildning, der er på tale, skriver vi tit $(f(x))_{x<\alpha}$ for denne transfinite følge. (Betegnelsen er lidt misvisende, idet α kunne være endelig).

En transfinit følge med værdier i X er en transfinit følge $(f(x))_{x<\alpha}$ med $f(x) \in X$ for alle $x < \alpha$, m.a.o. det er et element i X^α. Vi siger også, at en sådan transfinit følge har *længde* α. For god ordens skyld påpeges, at der kun er én transfinit følge af længde 0, nemlig den tomme følge $\emptyset$ (der er meget lidt transfinit over den!). Dette svarer til vedtægten $X^0 = \{\emptyset\}$. Med $X^{(\alpha)}$ betegner vi mængden af transfinite følger med værdier i X af længde α, altså:

$$X^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} X^\beta$$

—at denne mængde er veldefineret ses f.eks. ved substitution (udnyt den entydigt bestemte tilordning $\beta \curvearrowright X^\beta$) og efterfølgende anvendelse af sumaksiomet.

Sætning 5.8 (Rekursion over α). *Lad* α *være et ordinaltal og* Y *en mængde. Lad* $\Phi : Y^{(\alpha)} \to Y$ *være en vilkårlig afbildning (der til hver transfinit følge* $(f(x))_{x<\beta}$ *med værdier i* Y *og med* $\beta < \alpha$ *knytter et element* $\Phi\big((f(x))_{x<\beta}\big) \in Y$*). Da findes en entydigt bestemt transfinit følge* $f \in Y^\alpha$*, således at*

$$f(\beta) = \Phi\big((f(x))_{x<\beta}\big) \quad \textit{for alle } \beta < \alpha. \tag{$*$}$$

Bevis. (Sammenlign med beviset for Sætning 8.3 i NM). Ved induktion over α vises let, at en eventuel løsning $f \in Y^\alpha$ til $(*)$ er entydigt bestemt. Lad os kalde g en partiel løsning, hvis der findes $\beta < \alpha$, så $g \in Y^\beta$ og $g(\gamma) = \Phi\big((g(x))_{x<\gamma}\big)$ for hvert $\gamma < \beta$. Hvis $g \in Y^\beta$ og $h \in Y^\gamma$ med $\beta < \gamma$ er to sådanne partielle løsninger, så må $h(x) = g(x)$ for alle $x < \beta$. Denne entydighedsegenskab bevises helt som i første ræsonnement.

[3] I noterne *"Matematiske Teorier"* ses på isomorfibegrebet. Lad $(X, \leq)$ og $(Y, \leq)$ være ordnede mængder. Afbildningen $\phi : X \to Y$ er en *ordensisomorfi* hvis 1) ϕ er bijektiv, hvis 2) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \leq \phi(x_2)$ og hvis 3) $y_1 \leq y_2 \Rightarrow \phi^{-1}(y_1) \leq \phi^{-1}(y_2)$. Det ses let, at 1) $\wedge$ 2) $\Leftrightarrow$ 1) $\wedge$ 3) $\Leftrightarrow$ 1) $\wedge$ 2) $\wedge$ 3).

Vi viser dernæst, at der findes partielle løsninger $g \in Y^\beta$ for ethvert $\beta < \alpha$. Hertil ses på mængden $A = \{\beta < \alpha |$ der findes partiel løsning $g \in Y^\beta\}$. Lad $\beta < \alpha$ være vilkårlig og antag at $[0, \beta[\subseteq A$. Hvis $\beta = 0$ eller hvis β er en efterfølger ses let, at så må $\beta \in A$. Lad os måske gøre det. Antag først $\beta = 0$. Sæt $g = \emptyset$. Så vil $g \in Y^\beta$ med $\beta = 0$. Betingelsen $g(\gamma) = \Phi\big((g(x))_{x<\gamma} \big)$ for $\gamma < \beta$ er her tom, da der ikke findes γ med $\gamma < \beta$. Antag dernæst β er en efterfølger, lad os sige $\beta = \delta + 1$. Definer $g \in Y^\beta$ ved $g(\gamma) = h(\gamma)$ for $\gamma < \delta$, og $g(\delta) = \Phi\big((g(x))_{x<\delta} \big)$, hvor $h \in Y^\delta$ er en partiel løsning. Så vil $g \in Y^\beta$ være en partiel løsning, så $\beta \in A$.

Lad os dernæst antage, at β er et grænseordinaltal (vi antager stadig $[0, \beta[\subseteq A$ og ønsker at vise $\beta \in A$). Vi definerer nu et prædikat $P(x, y)$ i to variable ved at $P(x, y)$ skal være sand når:

enten	(x ikke er et ordinaltal mindre end β) og ($y = x$)
eller	$(x < \beta) \wedge \exists\gamma\exists g : (x < \gamma < \beta) \wedge (g \in Y^\gamma) \wedge (g$ er partiel løsning$)$ $\wedge\ (y = g(x))$.

—m.a.o. idéen er til x at knytte en partiel løsnings værdi i x. Bemærk, at når $x < \beta$ findes altid γ med $x < \gamma < \beta$, thi β er et grænseordinaltal. Til et sådant γ findes (da $[0, \beta[\subseteq A$ er antaget) altid en partiel løsning, og til sådan en knytter vi altså y-værdien $g(x)$. P.gr. af entydighedsegenskaben for de partielle løsninger vil denne y-værdi være entydigt bestemt ud fra x $(< \beta)$.

Nu anvendes substitutionsaksiomet til at bestemme en afbildning $g_0 \in Y^\beta$, så $y = g_0(x) \Leftrightarrow x < \beta \wedge P(x, y)$. For den fundne transfinite følge $g_0 \in Y^\beta$ gælder at for hvert $x < \beta$ kan vi bestemme $x < \gamma < \beta$ og indse, at g_0's restriktion til $[0, \gamma[$ er en partiel løsning. Derfor er $g_0(x) = \Phi\big((g_0(\xi))_{\xi<x} \big)$, dvs. g_0 er en partiel løsning. Dermed har vi (meget detaljeret!) vist, at $\beta \in A$ også i tilfældet, hvor β er et grænseordinaltal. Ved induktion fås så $A = [0, \alpha[$.
Den sidste del af beviset er let: Der findes nu partielle løsninger for hvert $\beta < \alpha$. Ja, men så kan vi jo anvende præcis samme ræsonnement som ovenfor til at slutte, at der findes $g \in Y^\beta$ så $g(\beta) = \Phi\big((g(x))_{x<\beta} \big)$ for alle $\beta < \alpha$. Det var præcis det, vi skulle vise. □

Rekursionssætningen kan virke noget kompliceret. I virkeligheden giver den sjældent anledning til problemer ved anvendelserne. Den bruges til at konstruere entydigt bestemte objekter knyttet til ordinaltal. Det væsentlige er, at det er helt klart, for ethvert ordinaltal β, vi vil betragte (i sætningen var det β'er < end et givet α) hvordan konstruktionen skal fortsætte ($f(\beta)$ fastlægges) *såfremt* man kender resultatet af konstruktionen for alle foregående ordinaltal. Der skal altså være givet en opskrift på "hvordan man kommer videre". Lidt suggestivt kan vi sige, at sætningen viser følgende: *Blot vi ved, hvordan vi kommer videre, er det sikkert, at man kommer til vejs ende!*

Når man skal vise "hvordan man kommer videre", er det ofte (men ikke altid) nødvendigt eller bekvemt at skelne mellem de tre muligheder:

1. Vi er faktisk slet ikke startet endnu (dvs. $\beta = 0$ og $f(x)$ kendes for alle $x < \beta$, dvs. $f(x)$ kendes ikke for noget x!)
2. Vi skal bare ét trin videre (dvs. β er et efterfølgerordinaltal: $\beta = S(\beta_0)$[4] og $f(x)$ er kendt for alle $x < \beta$, specielt for $x = \beta_0$—hvilket hyppigt er nok til at fortælle, hvordan $f(\beta)$ fastlægges).

[4]Har vist ikke før indført notationen $S(x)$ for $x \cup \{x\}$, *efterfølgeren* af mængden x ("S" for "successor"). Notationen kan bruges for alle mængder. Bruges dog især om $\mathbb{ON}$.

3. Vi skal ud til et grænseordinaltal β ud fra kendskab til, hvad der er sket for alle $\gamma < \beta$.

5.4 Variant af rekursionssætningen

Lad os formulere en nyttig variant af rekursionssætningen. Den eneste forskel er, at der ikke på forhånd behøver være givet nogen mængde Y. Denne tilsyneladende lille udvidelse er faktisk ofte nyttig, hvad vi straks efter sætningen skal se nogle eksempler på.

Sætning 5.9 (Transfinit rekursion over α, variant). *Lad α være et ordinaltal. Antag, at der til hvert $\beta < \alpha$ og til hver transfinit følge f af længde β på entydig måde er knyttet en mængde $\Phi(f)$. Så findes en entydig bestemt transfinit følge f af længde α, således at $f(\beta) = \Phi\big((f(x))_{x<\beta} \big)$ for hvert $\beta < \alpha$.*

Vi bør måske først præcisere forudsætningen i sætningen. Den kommer ud på, at der er givet et prædikat $P(f, y)$ i to variable, således at følgende tre betingelser er opfyldt:

(1) $\forall f \forall y \left(P(f, y) \Rightarrow \exists\beta\exists Y : \beta \in \mathbb{ON} \wedge \beta < \alpha \wedge f \in Y^\beta \right)$,

(2) $\forall f \left(\exists\beta\exists Y : \beta \in \mathbb{ON} \wedge \beta < \alpha \wedge f \in Y^\beta \Rightarrow \exists y : P(f, y) \right)$,

(3) $\forall f \forall y_1 \forall y_2\, P(f, y_1) \wedge P(f, y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$.

Vi skriver så $y = \Phi(f)$ i stedet for $P(f, y)$. Bemærk, at Φ i sætningen *ikke* er en afbildning (den ville i så fald være defineret på "mængden af alle transfinite følger af længde strengt mindre end α" som er alt for stor til at være en mængde. Derimod er det objekt, f, hvis eksistens sætningen sikrer, en vaskeægte mængde, der findes et eller andet sted i vor rodekasse. Konklusionen i sætningen (på nær entydigheden) kan mere formelt skrives

$$\exists f \exists Y \left(f \in Y^\alpha \wedge \forall \beta < \alpha : P((f(x))_{x<\beta}, f(\beta)) \right).$$

Til den der kan lide det formelle kan sætningen formuleres sådledes:

Lad α være et ordinaltal og P et prædikat i to variable. Antag, at:

(i) $\forall f \ \left(\exists y : P(f, y) \Leftrightarrow \exists \beta < \alpha \exists Y : f \in Y^\beta \right)$,

(ii) $\forall f \forall y_1 \forall y_2 : P(f, y_1) \wedge P(f, y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2$.

Da gælder:

$$\exists f \exists Y \left[f \in Y^\alpha \wedge \forall \beta < \alpha : P(f_{|\beta}, f(\beta)) \right]$$

—og f er entydigt bestemt, altså:

$$\exists! f : f \text{ er en afbildning} \wedge \mathrm{Dm}(f) = [0, \alpha[\wedge \beta < \alpha : P\big((f(x))_{x<\beta}, f(\beta) \big).$$

(Her er $f_{|\beta}$ betegnelsen for f's restriktion til $\beta = [0, \beta[$).

Det er vist klart, at den mere løse formulering i sætningen er nok så suggestivt og at foretrække frem for ovenstående formelle udformning. Den helt formelle formulering kan dog evt. være en støtte under beviset. Hvad beviset angår, foregår det helt efter recepten fra beviset for Sætning 5.8. Vi skal passe en anelse mere på, da vi ikke på forhånd har en mængde Y til at "styre efter". Den interesserede læser opfordres til selv at gå detaljerne efter.

6 Anvendelser

Og nu langt om længe nogle vigtige anvendelser:

Sætning/Definition 6.1 (Sum, produkt og potens i $\mathbb{ON}$). *For hvert par α, β af ordinaltal defineres entydigt bestemte ordinaltal $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$ og α^β ved følgende rekursionsforskrifter:*

$$\begin{array}{lllll}
\textit{Sum } \alpha+\beta: & \alpha+0 & = \alpha & \textit{for } \beta=0, \\
& \alpha+S(\beta_0) & = S(\alpha+\beta_0) & \textit{for } \beta=S(\beta_0), \\
& \alpha+\beta & = \sup\limits_{\gamma<\beta}(\alpha+\gamma) & \textit{for } \beta \textit{ grænseordinaltal.} \\
\textit{Produkt } \alpha\cdot\beta: & \alpha\cdot 0 & = 0 & \textit{for } \beta=0, \\
& \alpha\cdot S(\beta_0) & = \alpha\cdot\beta_0+\alpha & \textit{for } \beta=S(\beta_0), \\
& \alpha\cdot\beta & = \sup\limits_{\gamma<\beta}(\alpha\cdot\gamma) & \textit{for } \beta \textit{ grænseordinaltal.} \\
\textit{Potens } \alpha^\beta: & \alpha^0 & = 1\ (=S(0)) & \textit{for } \beta=0, \\
& \alpha^{S(\beta_0)} & = \alpha^{\beta_0}\cdot\alpha & \textit{for } \beta=S(\beta_0), \\
& \alpha^\beta & = \sup\limits_{\gamma<\beta}(\alpha^\gamma) & \textit{for } \beta \textit{ grænseordinaltal.}
\end{array}$$

Bevis og diskussion: Vi nøjes med at se på sum af ordinaltal. Produkt og potens behandles helt tilsvarende. Den givne "opskrift" peger på rekursion i β for hvert fast α. Derfor betegner α i det følgende et vilkårligt, men fastholdt ordinaltal. Opskriften viser jo ganske tydeligt, "hvordan man kommer videre" i hvert af de tre tilfælde: $\beta=0$, β en efterfølger, β grænseordinaltal. I henhold til de intuitive bemærkninger ovenfor er det dermed sikret, at der til hvert β på entydig måde kan knyttes et ordinialtal, betegnet $\alpha+\beta$, så de tre krav fra opskriften kommer til at gælde (for alle β). Sådan tænker den øvede også—han kan altså ved et kort blik på "opskriften" se, at herved er $\alpha+\beta$ defineret på helt klar, entydig vis.

Men der er jo et problem, idet vi ikke umiddelbart kan benytte rekursionssætningen. Hertil kræves, at vi laver rekursion over et fast ordinaltal, så sætningen kan aldrig direkte føre til konstruktion af objekter knyttet til *ethvert* ordinaltal. Der skal dog kun en smule teknik til for at klare dette problem. Uden besvær får vi til et givet ordinaltal ε defineret $\alpha+\beta$ for alle $\beta<\varepsilon$. Hertil anvendes Sætning 5.9—bemærk i øvrigt, at varianten her er langt bedre end den oprindelige version af sætningen, Sætning 5.8. Vi skal så blot bemærke, at såfremt $\alpha+\beta$ defineres for alle $\beta<$ et eller andet ordinaltal, lad os sige δ, så stemmer de to "$(\alpha+\beta)$-definitioner" overens for alle $\beta<\min(\varepsilon,\delta)$. Hertil udnyttes entydighedsudsagnet i rekursionssætningen.

Hermed har vi detaljeret godtgjort—hvad der på forhånd virkede "klart"–at de tre krav til summen $\alpha+\beta$ entydigt fastlægger summen af to vilkårlige ordinaltal. Produkt og potens behandles som sagt efter samme recept. □

Beviset ovenfor og beviset for Sætning 5.9 peger frem mod endnu en nyttig variant om transfinit rekursion:

Sætning 6.2 (Transfinit rekursion over $\mathbb{ON}$!). [5] *Antag, at der til hvert ordinaltal α og*

[5] Man kan også lave induktion over $\mathbb{ON}$: Er $P(x)$ et prædikat, kan man af

$$\forall\alpha\in\mathbb{ON}\ \big((\forall\beta<\alpha : P(\beta))\Rightarrow P(\alpha)\big)$$

slutte, at $\forall\alpha\in\mathbb{ON} : P(\alpha)$. (Vises let!).

hver transfinit følge f med $\mathrm{Dm}(f) = [0, \alpha[$ *på entydig måde er knyttet en mængde* $\Phi(f)$*. [Kortere: Antag $f \curvearrowright \Phi(f)$ er givet for hver transfinit følge f]. Så findes en entydig bestemt tilordning $\alpha \curvearrowright f(\alpha)$, der til ethvert ordinaltal α knytter en mængde $f(\alpha)$, således at $\forall \alpha \in \mathbb{ON} : f(\alpha) = \Phi\big((f(x))_{x<\alpha}\big)$.*

Bemærkning 6.3. Tilordningen $\alpha \curvearrowright f(\alpha)$, hvor $\alpha \in \mathbb{ON}$ er *ingen* afbildning. Derimod definerer denne tilordning ved restriktion en afbildning $(f(x))_{x<\alpha}$ for ethvert $\alpha \in \mathbb{ON}$.

Det overlades læseren at formulere resultatet helt formelt (á la den formelle formulering af Sætning 5.9), og beviset overlades også til den energiske læser.

I stedet for at fordybe os i beviset, viser vi endnu en anvendelse. Her defineres mængder af mængder af en vis kompleksitet, kaldet rang:

Definition 6.4. Definer, for hvert $\alpha \in \mathbb{ON}$, mængder U_α ved

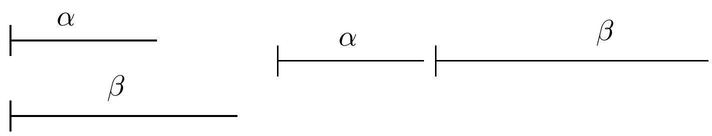
$$\begin{aligned} U_0 &= \emptyset, \\ U_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(U_\alpha), \\ U_\alpha &= \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta \quad \text{for } \alpha \text{ et grænseordinaltal.} \end{aligned}$$

En mængde x siges at være af *rang* $< \alpha$, hvis $x \in U_\alpha$. Og x har rang α, hvis $x \in U_{\alpha+1} \backslash U_\alpha$.

Øvelse 6.1. Bestem alle mængder af rang 0, af rang 1 og af rang 2 og notér, om der blandt disse mængder findes mængder, der ikke er ordinaltal.

I Anton Jensens notat *Lidt generelt om aksiomatiske teorier* er der givet en anden definition af mængder af rang $< \alpha$. Dér er U_α'erne defineret rekursivt ved $U_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(U_\beta)$. Vis at de to definitioner faktisk fører til de samme mængder.

Øvelse 6.2. Sum og produkt (faktisk også, men mere kompliceret og "unaturligt", potens) af ordinaltal kan defineres mere direkte konstruktivt.



Lad α og β være ordinaltal og lad x være den disjunkte sum af α og $\beta : x = (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$. Definer "$\leq$" på x ved – løst sagt—at se på sædvanlig ordning i $\alpha \times \{0\}$ og i $\beta \times \{1\}$ og ved at vedtage, at ethvert element i $\alpha \times \{0\}$ går forud ethvert element i $\beta \times \{1\}$, jf. figuren.
Vis, at $(x, \leq)$ herved bliver en velordnet mængde. Vis, at der findes et entydigt bestemt ordinaltal γ, så $(x, \leq)$ er ordensisomorf med $(\gamma, \leq)$, og at dette ordinaltal netop er $\gamma = \alpha + \beta$.
Se dernæst på $y = \beta \times \alpha$ og indfør "$\leq$" på y ved *leksikografisk ordning* (tænk på $(b, a) \in y$ som et ord med to bogstaver, det første fra β og det andet fra α, og orden nu alle sådanne ord præcis som var det ordene i et leksikon). Vis, at $(y, \leq)$ herved bliver en velordnet mængde, og at der findes et entydigt bestemt ordinaltal γ, så $(y, \leq)$ er ordensisomorf med $(\gamma, \leq)$. Vis også, at dette ordinaltal netop er $\gamma = \alpha \cdot \beta$.

Øvelse 6.3. Der gælder en masse regneregler for regning med ordinaltal. Vi vil ikke (her eller i hovedteksten) gennemgå det systematisk. Som en øvelse skal man bevise følgende to generelle regler:

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + \gamma) &= (\alpha + \beta) + \gamma \quad \text{(associativ regel)} \\ \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad \text{(distributiv regel)} \end{aligned}$$

Vejledning: Dette kan gøres ved at udnytte resultatet i øvelsen ovenfor. Opgaven bedes imidlertid løst direkte under udnyttelse af de rekursive definitioner, vi gav på sum og produkt. I begge tilfælde er induktion over γ en farbar vej (se evt fodnoten s. 139).

Advarsel: Hverken sum eller produkt er kommutativ. Eksempler, der viser dette kræver uendelige ordinaltal og anføres i øvelse 7.2.

7 Naturlige tal, og mængden af naturlige tal

Definition 7.1. Vi siger, at x er et *naturligt tal eller* 0, og vi skriver (foreløbig rent symbolsk) $x \in \mathbb{N}_0$, såfremt x er et ordinaltal, der opfylder betingelsen

$$\forall y \left(y \leq x \Rightarrow y = 0 \vee \exists z : y = S(z)\right).$$

At $x \in \mathbb{N}_0$ betyder altså, at $x \in \mathbb{ON}$ og at x selv såvel som enhver forgænger er en efterfølger eller evt. 0. Bemærk, at $x \in \mathbb{N}_0 \wedge x' \leq x \Rightarrow x' \in \mathbb{N}_0$ og at $x \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow S(x) \in \mathbb{N}_0$.

Vi skriver, igen rent symbolsk, $x \in \mathbb{N}$ for $x \in \mathbb{N}_0 \wedge x \neq 0$. Hvis $x \in \mathbb{N}$, kaldes x et *naturligt tal.*

Definition 7.2. En mængde x er *endelig*, hvis $x = \emptyset$ eller hvis x er ækvipotent med et naturligt tal.

Mere elegant kunne vi have defineret: x er endelig $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : |x| = |n|$.

Uden flere aksiomer end de, vi har set indtil nu, kan man risikere, at der kun er endelige mængder i vor rodekasse! Vil vi videre, må vi simpelthen forudsætte, at der er en uendelig mængde i vor rodekasse. Dette gøres lettest som følger:

Aksiom 7 (Uendelighedsaksiomet). *Der findes en* induktiv mængde*, dvs. en mængde x, så:* $0 \in x \wedge \forall y\, (y \in x \Rightarrow S(y) \in x)$.

Med uendelighedsaksiomet til rådighed kan vi endelig definere mængden af de naturlige tal.

Sætning 7.3. *Der findes en mængde ω, således at $n \in \omega \Leftrightarrow n$ er et naturligt tal eller 0. M.a.o.: $\omega = \{n | n$ er et naturligt tal eller $0\}$.*

Bevis. Umiddelbart ser det let ud: Vi tager blot en induktiv mængde x – og sådan en findes ifølge uendelighedsaksiomet—og så bruger vi komprehension til at definere $\omega : \omega = \{n \in x | n$ er et naturligt tal eller $0\}$. Så har vi også, at $n \in \omega \Rightarrow n$ er et naturligt tal eller 0. Men den modsatte implikation er ikke oplagt. Problemet er altså at vise, at

$$n \text{ er et naturligt tal eller } 0 \;\Rightarrow n \in x. \qquad (*)$$

Dette ville jo være let, hvis vi kunne lave induktion over de naturlige tal—men så står vi og mangler *mængden* af naturlige tal. Vi må derfor sno os lidt og gennemfører et lidt akavet ræsonnement—som kun bruges denne ene gang, thi siden kan vi lave rigtig induktion.

Lad altså n være et naturligt tal eller 0 og antag, med henblik på et indirekte bevis for $(*)$, at $n \notin x$. Så er $n \neq 0$. Derfor findes n' så $n = S(n')$. Så kan n' heller ikke tilhøre x, altså må $n' \in n \backslash x$. Hermed har vi set, at $n \backslash x \neq \emptyset$, og dette udnytter vi til at se nærmere på det første element, lad os kalde det m, i mængden $n \backslash x$. Samme ræsonnement som ovenfor viser, at der findes m', så $m = S(m')$ og $m' \notin x$. Men så vil m' være et mindre element end m i $n \backslash x$, hvilket er umuligt. Vi er nået til en modstrid og må konkludere, at $n \in x$. Hermed er $(*)$ vist, og vi er færdige. $\square$

Vi indfører nu $\mathbb{N}_0$ og $\mathbb{N}$ som betegnelser for rigtige mængder—før var det blot symboler—nemlig $\mathbb{N}_0 = \omega$ (kært barn har mange navne) og $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \backslash \{0\}$.

Sætning 7.4. *ω er et ordinaltal og kan karakteriseres som det første grænseordinaltal.*

Bevis. Udnyt (viii) i Sætning 5.3 til at slutte, at $\omega \in \mathbb{ON}$. Det er klart, at ω ikke er et naturligt tal (eller 0), thi så ville $\omega \in \omega$. Vi kan heller ikke have, at ω er en efterfølger, thi hvis $\omega = x \cup \{x\}$, vil $x \in \omega$ og så vil $\omega = S(x) \in \omega$. Så ω er et grænseordinaltal. Det er klart det mindste grænseordinaltal. $\square$

Det er et filosofisk spørgsmål, om elementerne i ω er de *rigtige*, de *virkelige* naturlige tal (hvad det så end skulle betyde). Det væsentlige er, at de "opfører sig som de skal", hvilket vil sige, at de opfylder de aksiomer, som Peano opstillede i 1891 og som man har accepteret som indeholdende alt væsentlig om de naturlige tal.

Sætning 7.5 (Peanos aksiomer). *Der gælder:*

(1) $0 \in \omega \wedge \forall n \in \omega : 0 \neq S(n)$,
(2) $\forall n \in \omega : S(n) \in \omega$,
(3) $\forall n \in \omega \forall m \in \omega : n \neq m \Rightarrow S(n) \neq S(m)$,
(4) $\forall x \subseteq \omega \left[\left(0 \in x \wedge \forall n \in x : S(n) \in x \right) \Rightarrow x = \omega \right]$.

Bevis. (1), (2) og (3) er nemme. For (4), antag at $x \neq \omega$ og lad α være det første element i $\omega \backslash x$. Dette element kan hverken være 0 eller en efterfølger (thi er $\alpha = S(\beta)$, må $\beta \in x$ og så vil $S(\beta) = \alpha \in x$). Så må α være et grænseordinaltal $< \omega$. Dette er umuligt! Vi konkluderer, at $x = \omega$. $\square$

Resultatet er vigtigt, måske specielt i historisk lys, idet man tidligere alene ud fra Peanos aksiomer har indført al velkendt struktur på ω (ordning, sum, produkt, potens) og eftervist alle de basale egenskaber. Der skal dog straks rejses en kraftig kritik mod denne fremgangsmåde. Problemet er, at forsøget på en aksiomatisering af egenskaber for de naturlige tal ved en focusering på efterfølgerrelationen ($n \curvearrowright S(n)$), og det var præcis det, der var sigtet med Peanos aksiomer, må betragtes som mindre vellykket, når man i det essentielle fjerde aksiom, induktionsaksiomet, var nødt til at inddrage begrebet "en delmængde af ω". Det ser tilforladeligt ud, men vi ved – på basis af hele udviklingen i slutningen af forrige og begyndelsen af dette århundrede—at det er det slet ikke. Derfor er vores aksiomatisering ved ZFC, hvor der mere klart er fokuseret på de primitive begreber (mængder og "tilhører"), og hvor vi har kunnet definere de naturlige tal og bevise Peanos aksiomer, langt mere dybtgående end den, Peano gennemførte. Men, som sagt, vi har også en lang udvikling at læne os op ad. Og i øvrigt blev denne udvikling, med understregning af aksiomatiseringens betydning, netop påbegyndt af Peano—som dermed på arimetikkens område gik i Euklids fodspor, der jo havde aksiomatiseret geometrien et par tusinde år tidligere.

(Det historiske er meget spændende (og fremviser navne som Peano, Frege, Russell, Zermelo m.fl.) og jeg bør—assisteret af vor ekspert Jesper Lützen—ved lejlighed få mere med herom).

Med det gjorte forarbejde, er det for os en smal sag at introducere al væsentlig struktur på ω (alias $\mathbb{N}_0$) og eftervise alle væsentlige egenskaber. Ja, vi har faktisk allerede gjort det! Ordningen på ω har vi, da ω er et ordinaltal. Så vi ved, at $(\omega, \leq)$ er en velordning. Og sum, produkt og potens for naturlige tal er for os bare et specialtilfælde af disse operationer på $\mathbb{ON}$. Selvfølgelig er der noget at vise, men alt er ganske let, og vi overlader til læseren at se nærmere herpå! Dog, en enkelt lille øvelse herom er på sin plads:

Øvelse 7.1. Bevis, at $n \in \omega \wedge m \in \omega \Rightarrow n + m \in \omega \wedge n \cdot m \in \omega \wedge n^m \in \omega$. Vis også de to kommutative love $n \in \omega \Rightarrow n + m = m + n$ og $n \in \omega \Rightarrow n \cdot m = m \cdot n$.

Øvelse 7.2. Vis, at de sædvanlige kommutative love for regning med naturlige tal ikke gælder for regning med vilkårlige ordinaltal. Heller ikke implikationerne $a+b = a'+b \Rightarrow a = a'$ og $a \cdot b = a' \cdot b \Rightarrow a = a'$ gælder for vilkårlige ordinaltal. Og vi har heller ikke generelt, at $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (men den anden distributive lov $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ gælder generelt, se øvelse 6.3).

Vejledning: Se på $1 + \omega$ og $2 \cdot \omega$.

Øvelse 7.3. Vis, at for ethvert $\alpha \in \mathbb{ON}$ findes entydigt bestemte β og n, så β er et grænseordinaltal eller 0, $n \in \omega$, $\alpha = \beta + n$.

Bemærkning 7.6. Herved kan $\mathbb{ON}$ deles op i *lige* ordinaltal (n lige) og *ulige* ordinaltal.

8 De kære mængder: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

$\mathbb{N}$ og $\mathbb{N}_0$ har vi set på. Resten er let!!

Definition 8.1. Mængden $\mathbb{Z}$ af *hele tal* er kvotientmængden $\omega \times \omega / R$, hvor R er ækvivalensrelationen på $\omega \times \omega$ givet ved $(n, m)R(n', m') \Leftrightarrow n + m' = n' + m$.

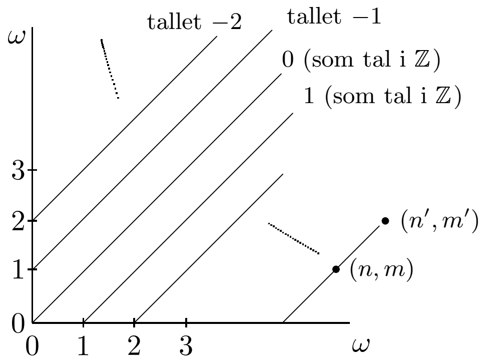
Definition 8.2. Mængden $\mathbb{Q}$ af *rationale tal* er kvotientmængden $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})/S$, hvor S er ækvivalensrelationen på $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ givet ved $(n, m)S(n', m') \Leftrightarrow n \cdot m' = n' \cdot m$.

Definition 8.3. Mængden $\mathbb{R}$ af *reelle tal* er følgende mængde i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{Q}))$: $\mathbb{R} = \{x \subseteq \mathbb{Q} \mid x \neq \emptyset \wedge x \neq \mathbb{Q} \wedge x$ har ikke noget største element $\wedge (s \in \mathbb{Q} \wedge t \in x \wedge s < t \Rightarrow s \in x)\}$.

Definition 8.4. Mængden $\mathbb{C}$ af *komplekse tal* er mængden $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Der er dog en række kommentarer at knytte hertil. Først bemærkes, at det er let at vise, at det drejer sig om ganske bestemte, veldefinerede mængder i vor rodekasse. Dette ses let for $\mathbb{Z}$'s vedkommende. For $\mathbb{Q}$'s vedkommende er det også let, når man først har indset, hvad S er, og hertil kræves, at man har defineret $n \cdot m$ for hele tal n og m. Tilsvarende kræver definitionen af $\mathbb{R}$, at man har defineret ordningen på de rationale tal.

Nu først lidt om $\mathbb{Z}$. Denne mængde er let at visualisere.



(Af de tegnede linier skal sådan set kun gitterpunkterne medregnes, altså kun punkterne i $\omega \times \omega$)

Og idéen ser vi let: Vi tænker på $(n, m) \in \omega \times \omega$ som $n - m$ (ganske vist endnu ikke defineret—men vi ved jo, hvad vi er ude efter!). Så må vi *identificere* (n, m) med ethvert (n', m') for hvilket $n - m = n' - m'$, dvs. for hvilket $n + m' = n' + m$. Og, voila!, her har vi en veldefineret egenskab, udtrykt ved ting vi kender i forvejen (sum af naturlige tal (eller 0)). Dette leder os til ækvivalensrelationen R (at det virkelig *er* en ækvivalensrelation checkes let efter).

Elementerne i $\mathbb{Z}$ er altså ækvivalensklasser. Disse er nemme at visualisere, se figuren.

Nærliggende spørgsmål: Hvor blev $\mathbb{N}_0$ af? Det var jo meningen at *udvide* $\mathbb{N}_0$ til $\mathbb{Z}$, dvs. vores hensigt var at tilføje de negative hele tal, men bibeholde, hvad vi havde, tallene i $\mathbb{N}_0$. Men det er faktisk ikke hensigtsmæssigt. Den grundliggende betragtning er den—husk her på diskussionen omkring Peanos aksiomer og, hvad jeg før har sagt om isomorfibegrebet—at bare vi i $\mathbb{Z}$ kan finde en mængde, vi kan bruge som *model* for $\mathbb{N}_0$, er vi glade. Og det kan vi! Som 0 bruger vi ækvivalensklassen indeholdende $(0, 0)$, som 1 bruger vi ækvivalensklassen indeholdende $(1, 0)$ osv. Og for den nye model af $\mathbb{N}_0$ kan vi indføre struktur på helt oplagt vis, f.eks. kan vi definere

ækvivalensklassen, der indeholder $(5, 0)$ (nye 5)
$+$ ækvivalensklassen, der indeholder $(7, 0)$ (nye 7)
$=$ ækvivalensklassen, der indeholder $(5 + 7, 0)$
altså
$=$ ækvivalensklassen, der indeholder $(12, 0)$ (nye 12)

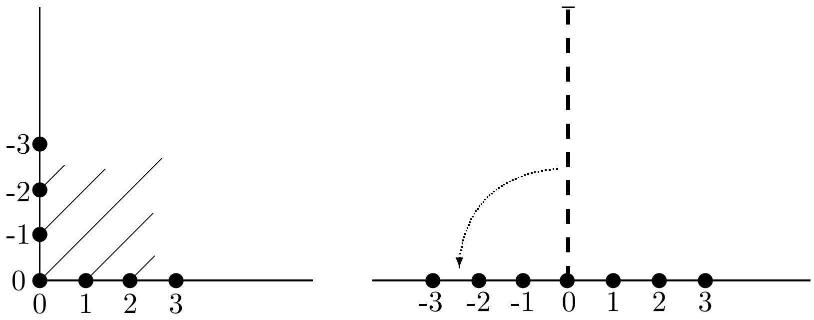
Indføres på denne måde struktur i den nye model for $\mathbb{N}_0$, får vi alle sædvanlige egnskaber opfyldt. Vi kan sige, at afbildningen $n \curvearrowright$ ækvivalensklassen, der indeholder $(n, 0)$ definerer en isomorfi (ordens- og algebraisk isomorfi) af vor gamle model på den nye model.

Så de gamle naturlige tal "sidder" ind i $\mathbb{Z}$. Men i $\mathbb{Z}$ kan vi gøre mere. Vi kan definere sum af vilkårlige elementer i $\mathbb{Z}$ på oplagt vis, nemlig ved

ækvivalensklassen, der indeholder (n, m)
$+$ ækvivalensklassen, der indeholder (n', m')
$=$ ækvivalensklassen, der indeholder $(n + n', m + m')$

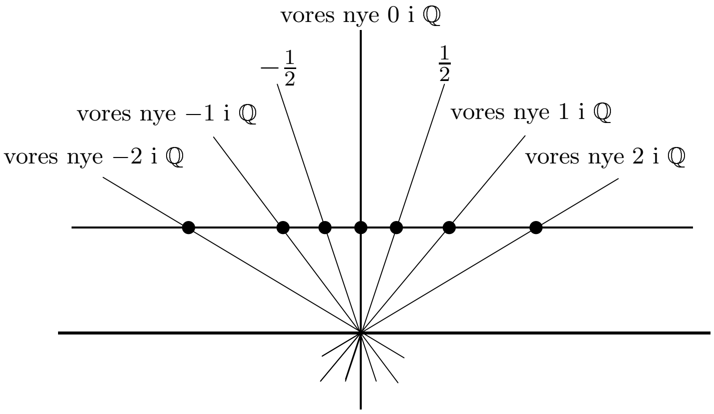
Så opnår vi, at subtraktion altid er mulig (enhver ligning af formen $a + x = b$ har en løsning). Med en smule arbejde (der gennemføres på Mat 2AL) opnår man at indføre al den vante struktur på $\mathbb{Z}$ og at vise alle de kendte egenskaber.

Lige endnu en ting om $\mathbb{Z}$: Man kan i stedet for en hel ækvivalensklasse vælge at lade denne *repræsentere* ved et bestemt element i ækvivalensklassen.



Her kan vi som repræsenterende elementer vælge elementerne på "koordinatakserne" (de har enten formen $(n,0)$ med $n \in \omega$ eller $(0,m)$ med $m \in \omega \setminus \{0\}$). Ved at "lægge den lodrette akse ned" fås det tilvante visuelle billede af $\mathbb{Z}$.

Idéen ved konstruktionen af $\mathbb{Q}$ er "den samme". Vi ser på punkter $(n,m) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ og tænker på disse punkter som brøken $\frac{n}{m}$. Dette fører os til at betragte ækvivalensrelationen S og definere $\mathbb{Q}$ som mængden af ækvivalensklasser.

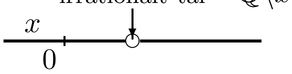


(Igen: Egentlig skal kun gitterpunkterne med på figuren)

Figuren illustrerer ækvivalensklasserne og viser et fornuftigt (?) valg af "repræsentanter" (opnået ved skæring med linien $\{(n,m) \mid m = 1\}$—hvilket dog kun giver gitterpunkter for linier, der repræsenterer hele tal).

Faktisk hjælper en figur som ovenstående næppe meget på forståelsen. Man må hellere regne det hele igennem algebraisk. Igen kommer det på Mat 2AL.

Når man har indført ordning og algebraisk struktur på $\mathbb{Q}$—samt gjort rede for, hvordan $\mathbb{Z}$ er indlejret i $\mathbb{Q}$—kan man gå videre og indføre $\mathbb{R}$.



Tanken, der ligger bag den givne definition, er den, at et reelt tal enten er et rationalt tal eller et "hul" i de rationale tal. I begge tilfælde bestemmer tallet en "venstre mængde" og en "højre mængde". Vi taler også om et snit, eller et *Dedekindsnit* efter ophavsmanden til denne idé.

Lad os slutte med disse antydninger. Som sagt, flere detaljer samt flere konstruktioner af algebraisk interessante strukturer følger på Mat 2AL.

9 ZFC—en oversigt

Aksiom 0: (*Mængdeeksistens). Der findes en mængde* $(\exists x : x = x)$.

Aksiom 1: *(Ekstensionalitet). En mængde er bestemt ved sine elementer.* Formelt: $\forall x \forall y : (\forall z : z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$. Lidt mindre formelt: *Hvis man om to mængder x og y ved, at en vilkårlig mængde z tilhører x, hvis og kun hvis den tilhører y, så er $x = y$.*

Aksiom 2: [6] *(Funderings- eller regularitetsaksiomet). Hvis $x \neq \emptyset$ findes $y \in x$, så $x \cap y = \emptyset$, dvs. for alle $z \in x$ gælder $z \notin y$.*

Aksiom 3: [7] *(Komprehensionsaksiomet). For ethvert åbent udsagn $P(x)$ og enhver mængde A, findes en mængde y af de $x \in A$, der har egenskaben $P(x)$, dvs. vi har $x \in Y \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x)$. Notation: $\{x \in A | P(x)\}$.*

Aksiom 4: *(Paraksiomet). For alle x og alle y findes en mængde, der som elementer netop har x og y. Formelt:*

$$\forall x \forall y \exists z \forall w : w \in z \Leftrightarrow w = x \vee w = y.$$

Notation: $\{x, y\}$.

Aksiom 5: [8] *(Sumaksiomet). For enhver mængde A kan vi danne foreningsmængden af alle mængder, der er elementer i A. Formelt:*

$$\forall A \exists x \forall y (y \in x \Leftrightarrow \exists a \in A : y \in a).$$

Notation: $\cup A$ eller $\cup_{a \in A} a$.

Aksiom 6: *(Substitutionsaksiomet). Lad $P(x, y)$ være en egenskab om x og y, således, at der til hver mængde x højst findes én mængde y, så $P(x, y)$. Da findes til hver mængde A en mængde B, så $y \in B \Leftrightarrow \exists x \in A : P(x, y)$.*

Aksion 7: *(Uendelighedsaksiomet). Der findes en induktiv mængde, dvs. en mængde x så $0 \in x$ og så $y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x$ (her er $0 = \emptyset$).*

Aksiom 8: *(Potensmængdeaksiomet). For hver mængde x findes en mængde $\mathcal{P}(x)$, så det for alle y gælder, at $y \in \mathcal{P}(x) \Leftrightarrow y \subseteq x$.*

Aksiom 9: *(Udvalgsaksiomet). For enhver mængde A, hvis elementer er ikke-tomme mængder, findes en udvalgsfunktion, dvs. en afbildning φ med A som definitionsmængde, så $\varphi(x) \in x$ for alle $x \in A$.*

[6] Et bekvemt teknisk aksiom, der i en vis forstand ikke er nødvendigt.

[7] Det giver normalt ikke problemer, at anvende dette vigtige aksiom, men strengt taget bør det præciseres, hvilke åbne udsagn, det drejer sig om. De grundlæggende udsagn er $x \in y$ og $x = y$. På dem kan de logiske konnektiver $\urcorner$(non), $\wedge$ (konjunktion) og $\vee$ (disjunktion) anvendes, samt logisk kvantisering v.hj. af $\forall$ (alkvantoren) og $\exists$ (eksistenskvantoren). Herved fremkommer åbne udsagn med en række *variable.* I aksiomet skal det forudsættes, at x er en *fri* variabel, dvs. ikke bundet til alkvantorer eller eksistenskvantorer. Bemærk, at aksiomet er et aksiomsskema med uendeligt mange aksiomer, ét for hvert åbent udsagn af den betragtede type.

[8] Vi kan skrive $\cup A = \{y | P(y)\}$, hvor $P(y)$ er det åbne udsagn $\exists a \in A : y \in a$. Bemærk, at eksistensen ikke er sikret af komprehensionsaksiomet.

Udfordring – Øvelser og Lærestykker

Resumé

Nedenfor nogle "Øvelser og Lærestykker" (ØL'er), der forsøger at give et lille indtryk af anvendelserne af mængdelæren, specielt forhold, hvor udvalgsaksiomet eller kontinuumshypotesen spiller ind.

Af typiske temaer nævnes: Undersøge særlige delmængder af $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^n$, se på kardinaltal, specielt store kardinaltal, se på muligheder for at knytte en "vægt" eller et "mål" til enhver delmængde af en given mængde.

ØL 1 (Topologisk forberedelse). Vi så i UES, Øvelse 4.8, at i $\mathbb{R}^n$ findes en numerabel mængde $K_1, K_2 \ldots$ af åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$ (de rationale terninger), således at $\forall G_{\text{åben}} \subseteq \mathbb{R}^n \forall x \in G \exists n : x \in K_n \subseteq G$. (Øvelse 4.8 nævner kun tilfældet $n = 2$, men nemt at generalisere!)

(i) Udnyt denne egenskab til at vise, at for enhver familie $(G_i)_{i \in I}$ af åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$ findes en numerabel delfamilie $(G_i)_{i \in I_0}$ (I_0 opfylder altså $|I_0| \leq \aleph_0$) med samme foreningsmængde som den oprindelige familie:

$$\bigcup_{i \in I_0} G_i = \bigcup_{i \in I} G_i.$$

Vejledning: For nogle K'er findes et i, så $K \subseteq G_i$. Udnyt dette!

Man udtrykker denne egenskab ved at sige, at $\mathbb{R}^n$ er et *Lindelöf rum* (evt. et *hereditært Lindelöf rum*)

(ii) Gælder en tilsvarende egenskab for de lukkede delmængder af $\mathbb{R}^n$?

Lad $\alpha \in \mathbb{ON}$, $\alpha \neq 0$. Så er $\alpha = [0, \alpha[$. En delmængde G af $[0, \alpha[$ kaldes *åben*, hvis der for ethvert $\beta \in G$ *enten* findes $0 \leq \gamma < \delta < \alpha$ så $\beta \in]\gamma, \delta[\subseteq G$ *eller* der findes $0 \leq \gamma < \alpha$ så $\beta \in]\gamma, \alpha[\subseteq G$ *eller* der findes $0 \leq \delta < \alpha$ så $\beta \in [0, \delta[\subseteq G$.

(iii) Vis, at hvert interval $[0, \beta[$ er en åben delmængde af $[0, \alpha[$, idet $\beta < \alpha$ antages.

(iv) Vis, at de åbne delmængder af $[0, \omega_1[$ *ikke* har Lindelöf-egenskaben, idet der findes en familie af åbne delmængder, så enhver numerabel delfamilie har mindre foreningsmængde end hele familien.

Vejledning: Se på intervallerne $[0, \beta[$ for $\beta < \omega_1$.

ØL 2 (Mere topologisk forberedelse). Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Et punkt $x \in A$ hedder et *kondensationspunkt* for A såfremt $G \cap A$ er overtællelig for enhver åben mængde G, der indeholder x.

(i) Vis, at man kan fjerne en tællelig delmængde $A_0 \subseteq A$, således at ethvert punkt i den resterende mængde $A \backslash A_0$ er et kondensationspunkt for denne.

(ii) Vis også, at såfremt A er lukket (dvs. $\mathbb{R}^n \backslash A$ er åben), kan man opnå, at $A \backslash A_0$ bliver lukket.

Vejledning: Se på familien af åbne mængder G med $|G \cap A| \leq \aleph_0$ og udnyt Lindelöf-egenskaben.

Bemærkning. Resultatet hedder Cantor-Bendixons lemma.

ØL 3 (– og mere topologisk forberedelse). I Cantors oprindelige bevis for $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ udnyttes en vigtig "fuldstændighedsegenskab", som bl.a. gælder for ethvert Euklidisk rum. Øvelsen går ud på at vise denne egenskab, præcist: Bevis, at hvis $(F_n)_{n\geq 1}$ er en følge af delmængder af $\mathbb{R}^n$, således at:

(a) F_n er lukket og $\neq \emptyset$ for alle $n \geq 1$,

(b) $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$,

(c) $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ for $n \to \infty$,

så er $\bigcap_{n\geq 1} F_n$ en singleton. Her betegner $\operatorname{diam}(A)$ diameteren af A, dvs. $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x \in A, y \in A\}$, hvor $d(x,y)$ er den sædvanlige euklidiske afstand mellem x og y.

Vejledning: Vælg $(x_n)_{n\geq 1}$, så $x_n \in F_n$ for alle $n \geq 1$. Vis, at (x_n) er en Cauchyfølge.

Diskutér evt. forudsætningerne (vis f.eks., at (ii) og (iii) er vigtige ved at konstruere passende eksempler; vis også, at sætningen er gal, hvis man i stedet for at arbejde i et Euklidisk rum arbejder i $\mathbb{Q}$.

Bemærkning. I vil sikkert også mene, at sætningen er gal, hvis man arbejder i $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, de irrationale tal. Imidlertid kan man finde en anden metrik end den sædvanlige på $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, således at sætningen bliver sand og således at konvergens i den nye metrik bliver præcis det samme som konvergens i den gamle. Man kan ikke "redde" forholdene i $\mathbb{Q}$ på samme måde. Så i en vis forstand er $\mathbb{Q}$ et grimmere "rum" end $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$).

ØL 4. Her kommer så et fint resultat, der er ét blandt mange af typen "kontinuumshypotesen gælder for alle *konkrete* mængder, vi kan finde på at studere". Vi skal se, at "kontinuumshypotesen gælder for alle lukkede delmængder af $\mathbb{R}^n$", mere præcist skal vi se følgende:

$$F \subseteq \mathbb{R}^n, F \text{ lukket } \Rightarrow |F| \leq \aleph_0 \vee |F| = 2^{\aleph_0}. \tag{$*$}$$

Lad $F \subseteq \mathbb{R}^n$ være lukket og overtællelig. Vi kan gerne antage, at F udelukkende består af kondensationspunkter (se ØL 2). Konstruer $F(0)$ og $F(1)$ så

(a) $F(0) \cup F(1) \subseteq F$,

(b) $F(0) \cap F(1) = \emptyset$,

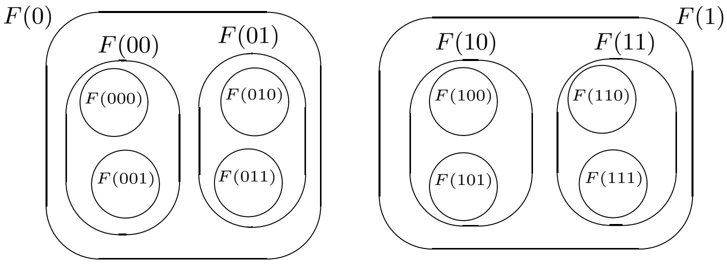
(c) $F(0)$ og $F(1)$ er lukkede, overtællelige og indeholder kun kondensationspunkter,

(d) $\operatorname{diam}(F(0)) \leq 1$, $\operatorname{diam}(F(1)) \leq 1$.

[Måske klarere at droppe (a) og så i (c) se på $F(0) \cap F$ og $F(1) \cap F$ i stedet].

Se nu på hver af mængderne $F(0)$ og $F(1)$ på samme måde og bestem mængder $F(00), F(01), F(10), F(11)$. Sørg for at disse mængder har diameter højst 1/2. Fortsæt! For hver følge $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) \in 2^{\mathbb{N}}$, definerer $F(\varepsilon_1) \cap F(\varepsilon_1\varepsilon_2) \cap \cdots$ så et punkt (ØL 3). Konkludér, at F indeholder en mængde med kardinalitet $|2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$. Hermed er $(*)$ vist. Smart, ikke? Nedenfor en figur, der evt. kan være til hjælp.

Bevisteknikken kan udbygges og varierer på mange måder; herved kan en lang række spændende resultater bevises om forskellige typer delmængder af $\mathbb{R}^n$ og andre såkaldte topologiske rum. (Se artikler, bøger om deskriptiv mængdelære).



Som et typisk eksempel på en mængde, der kan tænkes fremkommet ved en konstruktion ud fra mængder $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ á la ovenstående bevis, peges på *Cantor-mængden* $C \subseteq \mathbb{R}$, som Jesper sikkert har vist jer $\big($ellers kort beskrivelse: Start med $F(\emptyset) = [0, 1]$. Kendes intervallet $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, deles dette i tre lige store lukkede intervaller; det "venstre" af disse er $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, 0)$, det midterste smides væk og det "højre" er $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, 1)$. Så er $C = \bigcup_{\varepsilon \in 2^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k=1}^{\infty} F(\varepsilon_1 \dots, \varepsilon_k)\big)$.

Cantor-mængden er et eksempel på en *perfekt mængde*, dvs. en lukket mængde uden isolerede punkter (x er *isoleret punkt* i A, hvis der findes G åben, så $G \cap A = \{x\}$) [Nogle forlanger $F \neq \emptyset$ i definitionen af en perfekt mængde]. Desuden er Cantor-mængden over-tællelig, så $|C| = 2^{\aleph_0}$.

Vis, at der generelt gælder:

$$F \text{ en perfekt ikke-tom delmængde af } \mathbb{R}^n \Rightarrow |F| = 2^{\aleph_0}. \qquad (\dagger)$$

Vejledning: Bevismetoden fra før kan anvendes.

ØL 5 (Mere om perfekte mængder). Fra Jespers forelæsninger ved vi, at Cantors studie over, hvordan perfekte mængder kan forekomme, var meget vigtig for Cantors trinvise udvikling af ordinaltallenes teori. Jeg skal tilstå, at jeg ikke finder disse sager i dag så forfærdelig spændende, men det er dog nok værd at gøre opmærksom på et par forhold.

Lad $F \subseteq \mathbb{R}^n$ være en lukket mængde.

Vis, at $F^* = \{x \in F \mid x \text{ er et kondensationspunkt for } F\}$ (se ØL 2) kan karakteriseres som den største perfekte delmængde af F (Obs: F^* kan være tom). *Vejledning*: Udnyt ØL 4, (2).

F^* kaldes den *perfekte kerne* af F. Hvis $F^* = \emptyset$, kaldes F *sporadisk* (ikke helt sikker på dansk terminologi [der er måske ingen fast]; på engelsk bruges ordet "*scattered*").

Her er endnu en anden måde at få F^* frem på, og faktisk den måde, der svarer til Cantors overvejelser. Brug transfinit rekursion til at konstruere en familie $(F_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{ON}}$ (vi skal straks se, at vi kan begrænse os til at se på en begrænset mængde α'er), således at

(a) $F_0 = F$ (den givne lukkede mængde),

(b) $F_{\alpha+1} = F_\alpha \setminus \{x \mid x \text{ isoleret punkt i } F_\alpha\}$,

(c) $F_\alpha = \bigcap\{F_\beta \mid \beta < \alpha\}$, hvis α er et grænseordinaltal.

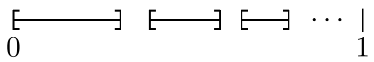
Vis, at F_α er konstant fra et vist trin; faktisk gælder $F_\alpha = F^*$, den perfekte kerne af F, for α tilstrækkelig stor. Sætter vi perfind(F), det *perfekte indeks* af F, lig med det første ordinaltal, så $F_\alpha = F^*$, så gælder perfind$(F) < \omega_1$.

Vejledning: Nemmest er nok at udnytte ovenstående karakterisering af F^* (via kondensationspunkter), hvoraf fremgår, at $F \setminus F^*$ er numerabel.

Vis, at for hvert ordinaltal $0 \leq \alpha < \omega_1$ findes en sporadisk mængde $F \subseteq \mathbb{R}$ med $\operatorname{perfind}(F) = \alpha$.

Vejledning (uden garanti for at den metode, jeg skitserer, er den smarteste): Konstruér ved transfinit rekursion $(F_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ så $\operatorname{perfind}(F_\alpha) = \alpha$ for alle $\alpha < \omega_1$. Begynd med $F_0 = \emptyset$. Sørg for at alle $F_\alpha \subseteq [0, 1]$.

For hvert $\alpha < \omega$, vælg nummerering $\beta_\alpha(n)$, $n \in \mathbb{N}$ af $[0, \alpha[$. Lad I_n, $n \geq 1$ være parvis disjunkte lukkede intervaller indeholdt i $[0, 1[$ á la følgende:



$F_{\alpha+1}$ konstrueres ud fra F_α ved at klemme F_α sammen, så vi finder en "kopi" $F_{\alpha n}$ af F_α i I_n; så sættes $F_{\alpha+1} = \bigcup_n F_{\alpha n} \cup \{1\}$. Er α et grænseordinaltal, lader vi $F_{\alpha n}$ være en kopi af $F_{\beta_\alpha(n)}$ i intervallet I_n og sætter $F_\alpha = \bigcup_n F_{\alpha n}$. (Vil I kontrollere eller se andre metoder etc. kan I kigge efter hos Cantors eller i Hausdorffs klassiske *"Mengenlehre"*, evt. i en af Kuratowskis bøger—dér finder I garanteret detaljerede redegørelser (har ikke kilderne ved hånden lige her)).

ØL 6 (Borelmængder, Baire-hierarkiet). I ØL 4 så vi på lukkede delmængder af $\mathbb{R}^n$. Vi kender også de åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$. Vi skal her se på en generel metode til at skaffe os mere komplicerede typer af delmængder. Vi arbejder i en generel mængde X og tænker os, at der i X er givet en *brolægning* $\mathcal{E}$, som vi tænker på som brolægningen af "særligt pæne" mængder. Ud fra denne vil vi danne mere omfattende brolægninger af mere komplicerede—men dog ikke helt vilde—mængder. Vores enkle tanke er den, at vi vil se på mængder, vi kan få ud fra $\mathcal{E}$ ved at danne numerable fællesmængder og numerable foreningsmængder. Er $\mathcal{D}$ en vilkårlig brolægning, betegner vi med $\mathcal{D}_\sigma$, henholdsvis $\mathcal{D}_\delta$, brolægningen af alle mængder, der fremkommer som en foreningsmængde, henholdsvis en fællesmængde, af numerabelt mange mængder i $\mathcal{D}$.

Definer nu ved transfinit rekursion brolægningen $\mathcal{E}_\alpha$ for $\alpha < \omega_1$, således at

(a) $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$,
(b) $\mathcal{E}_{\alpha+1} = (\mathcal{E}_\alpha)_\delta$, hvis α er lige,
(c) $\mathcal{E}_{\alpha+1} = (\mathcal{E}_\alpha)_\sigma$, hvis α er ulige,
(d) $\mathcal{E}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{E}_\beta$, hvis α er et grænseordinaltal.

[α lige, dvs. $\alpha = \lambda + n$, hvor $\lambda = 0$ eller λ er et grænseordinaltal, og n er lige; tilsvarende for α ulige].

(i) Bevis, at $\mathcal{E}_{\omega_1} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{E}_\alpha$ er lukket under numerabel forenings- og fællesmængdedannelse (dvs. $(\mathcal{E}_{\omega_1})_\sigma = (\mathcal{E}_{\omega_1})_\delta = \mathcal{E}_{\omega_1}$), og at $\mathcal{E}_{\omega_1}$ kan karakteriseres som den mindste brolægning med denne egenskab som indeholder $\mathcal{E}$.

(ii) Bevis, at såfremt $|\mathcal{E}| = 2^{\aleph_0}$, så vil $|\mathcal{E}_{\omega_1}| = 2^{\aleph_0}$.

(iii) Bevis, at såfremt enhver mængde af formen $X \backslash E$ med $E \in \mathcal{E}$ kan skrives på formen $X \backslash E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$, med $E_n \in \mathcal{E}$ for alle $n \geq 1$, så vil $\mathcal{E}_{\omega_1}$ også være lukket under komplementdannelse, dvs. $B \in \mathcal{E}_{\omega_1} \Rightarrow X \backslash B \in \mathcal{E}_{\omega_1}$.

(iv) Vis, at (ii) og (iii) finder anvendelse, hvis $X = \mathbb{R}^n$ og $\mathcal{E}$ er brolægningen af åbne mængder.

Bemærkning. I dette tilfælde betegnes $\mathcal{E}_{\omega_1}$ med $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, og mængderne i $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ kaldes *Borelmængder*. Man kan vise, at der hele tiden kommer nye mængder til, når vi danner $\mathcal{E}_\alpha$'erne (med $\alpha < \omega_1$). Brolægningerne $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ kaldes *Baire-hierarkiet*. Vi bemærker også, at der i en vis forstand (se tidligere øvelser) er "ganske få" Borel-delmængder i $\mathbb{R}^n$. Alligevel er enhver konkret delmængde af $\mathbb{R}^n$, der "naturligt" vil falde én ind at se på, en Borelmængde. Det er dog muligt eksplicit at pege på delmængder af $\mathbb{R}^n$, der ikke er Borelmængder (prøv!—jeg giver kaffe og wienerbrød til den, der kan—uden at slå efter i litteraturen om deskriptiv mængdelære (og selv dér er det måske ikke så let at finde)). I tilknytning til ØL 4, skal det nævnes, at kontinuumshypotesen gælder for Borelmængder i $\mathbb{R}^n$ ($B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \wedge |B| > \aleph_0 \Rightarrow |B| = 2^{\aleph_0}$—idet B så vil indeholde en perfekt ikke-tom mængde); dette er dog langt fra trivielt!

ØL 7 ("Konstruktion" af mystiske delmængder af $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^n$). Ved hjælp af AC (udvalgsaksiomet) kan man konstruere mange mystiske mængder. Lad mig her nævne to konstruktioner, der er nemme og bygger lidt på samme idé.

(i) Vis, at der findes en graf G i enhedskvadratet $[0,1] \times [0,1]$ (dvs. en mængde af formen $G = \{(x, f(x)) \mid x \in [0,1]\}$, hvor $f : [0,1] \to [0,1]$ er en funktion), således at G møder enhver Borel-delmængde B af $[0,1] \times [0,1]$ så $\forall x \in [0,1] \exists y \in [0,1] : (x,y) \in B$ (altså $G \cap B \neq \emptyset$ for enhver sådan mængde B).

Vejledning: Lad $\alpha \to x_\alpha;\ \alpha < 2^{\aleph_0}$ være en bijektion af $[0, 2^{\aleph_0}[$ på $[0,1]$ og $\alpha \to B_\alpha;\ \alpha < 2^{\aleph_0}$ være en bijektion af $[0, 2^{\aleph_0}[$ på mængden af Borelmængder af den omtalte type. Se på $G = \{(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$, hvor y_α er et passende valgt punkt, så $(x_\alpha, y_\alpha) \in B_\alpha$.

(ii) Vis, at der findes en *Bernstein delmængde* B af $\mathbb{R}^n$, dvs. en delmængde B så $B \cap F \neq \emptyset$ og $(\mathbb{R}^n \backslash B) \cap F \neq \emptyset$ for enhver perfekt ikke-tom delmængde F af $\mathbb{R}^n$.

Vejledning: Vælg "nummerering" $(F_\alpha)_{\alpha < 2^{\aleph_0}}$ af de ikke-tomme perfekte delmængder af $\mathbb{R}^n$. Man får også brug for en "nummerering" $(x_\alpha)_{\alpha < 2^{\aleph_0}}$ af punkterne i $\mathbb{R}^n$. Konstruér nu ved transfinit rekursion to transfinite følger, $(y_\alpha)_{\alpha < 2^{\aleph_0}}$ og $(z_\alpha)_{\alpha < 2^{\aleph_0}}$, så $\forall \alpha < 2^{\aleph_0} : y_\alpha \neq z_\alpha$, $\forall \alpha < \beta < 2^{\aleph_0} : y_\alpha \neq y_\beta \wedge z_\alpha \neq z_\beta$, $\forall \alpha < 2^{\aleph_0} : \{y_\alpha, z_\alpha\} \subseteq F_\alpha$. Sæt $B = \{y_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$.

Bemærkning. Man kan bruge eksistensen af Bernstein mængder til at vise umuligheden af at definere et såkaldt mål (se Mat 3MI!) på alle delmængder af $\mathbb{R}^n$, med mindre målet er "trivielt". Mere interessant fra et mængdeteoretisk synspunkt er, at man kan vise at *Banach-Mazur* spillet på en Bernstein mængde i $\mathbb{R}^n$ ikke er *"determineret"*, dvs. at ingen af de to spillere, der deltager i spillet har en vindende strategi. Her er en antydning af spillet: Spiller I spiller på B, spiller II på $\mathbb{R}^n \backslash B$. Begge spillere har et reservoir af spillejetons af vilkårlig størrelse (det er bare cirkelskiver). Spiller I lægger jetons et sted i $\mathbb{R}^2$, bestemt ved mængden J_1. Spiller II må så lægge en jetons, men er bundet af kravet $J_2 \subseteq J_1$. Spiller I lægger så en jetons $J_3 \subseteq J_2$ osv. Spiller I vinder, hvis $\cap J_n$ indeholder et punkt i B, ellers vinder spiller II. Hvis f.eks. B er numerabel, har spiller II en vindende strategi (ses let!). Man kan vise (hundesvært), at hvis $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, er spillet determineret. Det viser sig, at man kan afgøre interessante egenskaber for strukturen af visse delmængder af $\mathbb{R}^n$ ved at tilføje et aksiom til mængdelæren om at Banach-Mazur spillet er determineret for visse mængder, der er lidt mere komplicerede end Borelmængderne (nemlig mængder, der kan fås ved at projicere en Borelmængde i $\mathbb{R}^m$ ned på $\mathbb{R}^n$ $(n < m)$).

ØL 8 (Målteoriens nødvendighed). Det er naturligt at søge efter en afbildning $A \mapsto \lambda(A)$, der til enhver delmængde af $\mathbb{R}$ knytter et tal $\lambda(A)$, der kan opfattes som "længden" af A. Ideelt set kan vi stille følgende krav til afbildningen λ:

(a) λ er defineret for alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$,

(b) $0 \leq \lambda(A) \leq \infty$ for alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$,

(c) $\lambda([a,b]) = b - a$ for alle intervaller $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$,

(d) λ er translationsinvariant, dvs $\lambda(A+t) = \lambda(A)$ for alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ og alle $t \in \mathbb{R}$ (hvor $A+t = \{x \mid \exists a \in A : x = a+t\}$),

(e) λ er *tælleligt additiv*, dvs for enhver følge $(A_n)_{n\geq 1}$ af parvis disjunkte delmængder af $\mathbb{R}$ gælder, at $\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

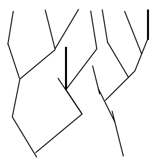
Det er interessant, at disse krav *ikke* kan opfyldes! Vis det!

Vejledning: Definer en ækvivalensrelation $\equiv$ i $\mathbb{R}$ ved $x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Lad $(E_i)_{i\in I}$ være de tilhørende ækvivalensklasser. Vælg (obs: udvalgsaksiomet!) for hvert $i \in I$ et punkt $x_i \in E_i \cap [0,1]$. Sæt $A = \{x_i \mid i \in I\}$. Lad $(q_n)_{n\geq 1}$ være en nummerering af $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Udnyt nu, at $[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(A + q_n) \subseteq [-1,2]$ samt antagelsen om at en afbildning λ med egenskaberne (a)–(e) findes, til at udlede en modstrid. Denne smarte idé skyldes Vitali.

Bemærkning. I en lang række undersøgelser har man brug for at arbejde med en funktion, der har egenskaber, der ligger tæt op ad (a)–(e) som muligt. Dette fører til den såkaldte *målteori*. Dér vælger man at renoncere på kravet (a) om at λ skal være defineret på *alle* delmængder af $\mathbb{R}$. Det viser sig, at man kan finde en fornuftig funktion λ, der er defineret på alle Borelmængderne af $\mathbb{R}$. Dette fører til det såkaldte *Lebesguemål*.

Vores bevis for målteoriens nødvendighed (dvs. for umuligheden af (a)-(e)) udnyttede udvalgsaksiomet. Dette er en principiel nødvendighed, idet man kan vise, at der findes en model af ZF (*ikke* af ZFC!), hvor en afbildning λ med egenskaberne (a)-(e) faktisk findes! Grunden til at man (normalt) ikke arbejder i denne model er, at man har brug for udvalgsaksiomet i mange undersøgelser.

ØL 9 (Zorns lemma). De tre vigtigste generelle værktøjer til at påvise eksistens af objekter, hvor man ikke har konstruktive, algoritmiske metoder til rådighed, er udvalgsaksiomet, velordningssætningen kombineret med transfinit rekursion og så *Zorns lemma*, som vi nu skal se på.



Udgangspunktet er en præ-ordnet mængde $(X, \leq)$ (dvs. $x \leq x$, $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ gælder) som yderligere antages at være *induktiv ordnet*, dvs. enhver totalt ordnet delmængde har en øvre grænse ($X_0 \subseteq X$ opfylder betingelsen: $\forall a \in X_0 \forall b \in X_0 : a \leq b \vee b \leq a$ medfører, at der findes $x \in X$ (obs: ikke nødvendigvis $x \in X_0$) så $a \leq x$ for alle $a \in X_0$). Zorns lemma siger så, at X indeholder et maksimalt element (altså et element $x^* \in X$ således at $\forall x : x^* \leq x \Rightarrow x \leq x^*$). Bevis dette!

Vejledning: Egentlig ganske let! Vi kravler bare op ad en gren i X (se figuren), og hertil bruger vi en opskrivning af X's elementer i en transfinit følge $(x_\alpha)_{\alpha<\theta}$ til at styre vores opstigning mod et maksimalt element. Flere detaljer: Konstruér $(X_\alpha)_{\alpha<\theta}$, en transfinit følge af delmængder af X, så $X_0 = \{x_0\}$, $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta \cup \{x_\alpha\}$, hvis $(x \in X_\beta \wedge \beta < \alpha) \Rightarrow x \leq x_\alpha$ og $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ ellers. Se på x^*, en øvre grænse for $\bigcup_{\alpha<\theta} X_\alpha$.

Giv et bevis for sætningen om at ethvert vektorrum har en basis ved hjælp af Zorns lemma. (*Vejledning*: Se på en maksimal lineært uafhængig delmængde).

ØL 10 (Ultrafiltre). Ved mængdeteoretiske undersøgelser bruges ofte kombinatoriske metoder. Vi skal se et vigtigt eksempel herpå. Lad X være en mængde. Vi kan da spørge, om det er muligt at dele X's delmængder op i to typer: "små" og "store". Med andre ord, vi søger en klassedeling $\mathcal{P}(X) = \mathcal{I} \cup \mathcal{U}$ i to klasser: $\mathcal{I}$ (de "små" mængder) og $\mathcal{U}$ (de "store mængder"). Bogstav I er valgt for "ideal", U for "ultrafilter". Lad os fokusere på $\mathcal{U}$. De krav vi stiller til

$\mathcal{U}$ er:

(a)	$\emptyset \notin \mathcal{U} \wedge X \in \mathcal{U}$	($\emptyset$ er "lille", X"stor"),
(b)	$U \in \mathcal{U} \wedge U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{U}$	(U "stor", $V \supseteq U \Rightarrow V$ "stor"),
(c)	$U_1 \in \mathcal{U} \wedge U_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$	(U_1, U_2 "store" $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ "stor" eller, og måske mere intuitivt, V_1, V_2 "små" $\Rightarrow V_1 \cup V_2$ "lille"),
(d)	$A \cup B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in \mathcal{U} \vee B \in \mathcal{U}$	($A \cup B$ "stor" $\Rightarrow A$ eller B "stor").

Et ultrafilter er *fikseret* (eller *trivielt*), hvis og kun hvis det indeholder en singleton ($\exists x \in X : \{x\} \in \mathcal{U}$).

(i) Vis, at et ultrafilter er fikseret, hvis og kun hvis det indeholder en endelig mængde. Vis, at i så fald er $\mathcal{U}$ af formen $\mathcal{U} = \mathcal{U}_x = \{U \subseteq X \mid x \in U\}$.

(ii) Et 0–1 *endeligt additivt sandsynlighedsmål* på X er en funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$, således at $\mu(X) = 1$, og det for alle delmængder A og B af X gælder, at $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Vis, at der er en naturlig bijektion mellem ultrafiltrene på X og de endeligt additive 0–1 mål på X.

Vejledning: Til $\mathcal{U}$ se på $\mu_{\mathcal{U}}(A) = \left\{\begin{smallmatrix} 0 & A \notin \mathcal{U}, \\ 1 & A \in \mathcal{U}. \end{smallmatrix}\right.$; til μ, se på $\mathcal{U}_\mu = \{A \mid \mu(A) = 1\}$. Hvilke mål svarer ved denne bijektion til de fikserede ultrafiltre?

(iii) Vis, at såfremt X er uendelig, findes et ikke-fikseret ultrafilter på X.

Vejledning: Lad $\mathcal{F}$ (Frechet-filtret (filterbasen)) være mængden af de delmængder F af X, som har et endeligt komplement, altså $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid X \backslash F \text{ er endelig}\}$. Bemærk, at $\mathcal{F}$ har den *endelige fællesmængdeegenskab*, dvs. $n \in \mathbb{N},\ F_k \in \mathcal{F}$ for alle $k \leq n \Rightarrow \bigcap_{k \leq n} F_k \neq \emptyset$. Vælg nu $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$, så $\mathcal{U}$ også har denne egenskab og så $\mathcal{U}$ er "størst mulig"(maksimal) (anvend Zorns lemma!).

Bemærkning. Man kan godt opgive at lede efter konstruktive metoder til at finde et ikke-fikseret ultrafilter. Resultatet kræver udvalgsaksiomet.

ØL 11 (Ultrafiltre på $\mathbb{N}$). Vis, at der findes kontinuum mange ikke-fikserede ultrafiltre $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha < 2^{\aleph_0}}$ på $\mathbb{N}$, og vis, at man kan opnå, at der findes mængder U_α; $\alpha < 2^{\aleph_0}$ så $U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$; $\alpha < 2^{\aleph_0}$ og således at $U_\alpha \cap U_\beta$ er endelig for alle $0 \leq \alpha < \beta < 2^{\aleph_0}$.

Vejledning: Anvend resultatet af øvelse UES 4.22.

Bemærkning. Man kan selvfølgelig ikke finde flere end $2^{\aleph_0}$-mange ultrafiltre på $\mathbb{N}$ med den anførte egenskab. Men det er naturligt at spørge, hvor mange (ikke-fikserede) ultrafiltre på $\mathbb{N}$ der er i det hele taget findes. der kan højst være $2^{2^{\aleph_0}}$-mange (klart!). Og så mange findes der faktisk! Udfordring: Prøv at vise det (ikke let!)

Vejledning: Konstruér en familie $\mathcal{A}$ af kontinuum-mange uendelige delmængder af $\mathbb{N}$, som er "uafhængig" i den forstand, at for ethvert sæt $A_1, A_2, \ldots, A_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, hvor A_i'erne er forskellige mængder fra familien $\mathcal{A}$ og ε_i'erne alle enten er 0 eller 1 gælder, at $A_1^{\varepsilon_1} \cap \cdots \cap A_n^{\varepsilon_n}$ er uendelig, hvor $A^0 = \mathbb{N} \backslash A$ og $A^1 = A$. For hver afbildning $\varepsilon : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ bestemmes så et ultrafilter $\mathcal{U}_\varepsilon$, der indeholder mængder af formen $A_1^{\varepsilon(A_1)} \cap \cdots \cap A_n^{\varepsilon(A_n)}$, hvor $A_1, \ldots, A_n$ er endeligt mange forskellige mængder fra $\mathcal{A}$. Selv med denne vejledning tror jeg det er svært at komme igennem.

Man kan tænke på de ikke-fikserede ultrafiltre som måder at specificere på, hvordan man kan "gå mod uendelig" i mængde $\mathbb{N}$. Tilføjer man til $\mathbb{N}$ de ikke-fikserede ultrafiltre, får man i en vis forstand et smukt afsluttet område at arbejde indenfor, den såkaldte *Čech-Stone* *kompaktifikation* af $\mathbb{N}$ (notation: $\beta\mathbb{N}$). Dette være sagt mest for at I kan nikke genkendende hertil senere (Mat 3).

ØL 12 (0–1 målelige kardinaltal). Lad κ være et kardinaltal. Der er forskellige måder at give udtryk for at κ er et stort kardinaltal. Én af dem er at forlange, at der skal findes et ultrafilter på $\kappa = [0, \kappa[$ med særlige egenskaber. Vi skal se på følgende egenskaber:

(a) $\mathcal{U}$ er et ikke-fikseret ultrafilter på κ,

(b) $\mathcal{U}$ er lukket over for tællelig fællesmængdedannelse ($U_n \in \mathcal{U}$ for alle $n < \omega \Rightarrow \bigcap_{n<\omega} U_n \in \mathcal{U}$).

Vi skal sige, at κ er et 0–1 *måleligt kardinaltal*, såfremt der findes et ultrafilter på κ med disse egenskaber (dette er *ikke* helt den definition, der normalt bruges; da spørgsmålet om eksistens af målelige kardinaltal er det samme for vores lidt enklere definition, har vi valgt at simplificere). Et 0–1 måleligt kardinaltal må være meget stort. Faktisk er det ikke mig bekendt afklaret, om eksistensen af disse er konsistent med ZFC (muligvis—jeg tror det—gælder det, at dette ikke kan vises af principielle grunde). Det er ganske ejendommeligt, at såfremt der findes et måleligt kardinaltal har dette indflydelse på, hvilke delmængder af $\mathbb{N}$, der findes. Her skal vi blot bede læseren om at vise to enkle forhold:

(i) Vis, at der er en naturlig bijektion (den samme som i ØL 9) mellem ultrafiltre på κ med egenskaberne (a) og (b) og *ikke-trivielle* 0–1 *tælleligt additive mål på* κ, dvs. afbildninger $\mu : \mathcal{P}(\kappa) \to \{0, 1\}$, så

1. $\mu(\kappa) = 1$,
2. $\forall x \in \kappa : \mu(\{x\}) = 0$,
3. for enhver følge $(A_n)_{n\geq 1}$ af parvis disjunkte delmængder af κ gælder $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

(ii) Vis, at $2^{\aleph_0}$ *ikke* er et 0–1 måleligt kardinaltal.

Vejledning: Er μ et mål defineret på $\mathcal{P}(2^{\aleph_0})$ med de antydede egenskaber, vælges først $\varepsilon(0) \in \{0, 1\}$ således at $\mu\big(\{f \in 2^{\aleph_0} \mid f(0) = \varepsilon(0)\}\big) = 1$, dernæst $\varepsilon(1) \in \{0, 1\}$ så $\mu\big(\{f \in 2^{\aleph_0} \mid f(1) = \varepsilon(1)\}\big) = 1$ osv. Se nu på $\mu(\{\varepsilon\})$, hvor ε er den konstruerede funktion i $2^{\aleph_0}$.

ØL 13 (Reelt måleligt kardinaltal). Det mål, der optræder i definitionen af 0–1 målelige kardinaltal, måtte kun antage de to værdier 0 og 1. Måske bliver det nemmere at finde kardinaltal, hvor denne betingelse svækkes. Kardinaltallet κ kaldes *reelt måleligt*, hvis der findes $\mu : \mathcal{P}(\kappa) \to [0, 1]$ (obs.: intervallet [0,1], ikke mængden indeholdende 0 og 1), så

1. $\mu(\kappa) = 1$,
2. μ er tælleligt additiv, dvs. for enhver følge $(A_n)_{n\geq 1}$ af parvis disjunkte delmængder af κ gælder $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Formålet med denne øvelse er at vise, at $\aleph_1$ *ikke* er reelt målelig. Dette resultat af S. Ulam er blot det første i en serie, som fortæller at også reelt målelige kardinaltal er uhyggeligt store.

(i) En *Ulam matrix* er en matrix $(A_{\alpha n})_{\alpha<\aleph_1, n<\aleph_0}$ af delmængder $A_{\alpha n}$ af $\aleph_1$ således at:

(a) Mængderne i hver søjle er parvis disjunkte,

(b) Hver række udfylder $\aleph_1$ på nær en tællelig mængde, dvs. $\forall \alpha < \aleph_1 : |\aleph_1 \setminus \bigcup_{n<\aleph_0} A_{\alpha n}| \leq \aleph_0$.

	søjle 0	søjle 1	søjle 2		søjle n	
række 0	A_{00}	A_{01}	A_{02}	$\cdots$	A_{0n}	$\cdots$
række 1	A_{10}	A_{11}	A_{12}	$\cdots$	A_{1n}	$\cdots$
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
række α	$A_{\alpha 0}$	$A_{\alpha 1}$	$A_{\alpha 2}$	$\cdots$	$A_{\alpha n}$	$\cdots$
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Vis, at der findes en Ulam matrix.

Vejledning: Vælg for hvert $\beta < \aleph_1$ en bijektion $f_\beta : [0, \aleph_0[\to [0, \beta[$. Definer $A_{\alpha n}$ ved $\xi \in A_{\alpha n} \Leftrightarrow f_\xi(n) = \alpha$.

(ii) Udnyt (i) til at vise, at $\aleph_1$ ikke er reelt målelig.

Vejledning: Indirekte. Antag et μ findes. For hvert $\alpha < \aleph_1$ findes et $n_\alpha < \aleph_0$ så $\mu(A_{\alpha n(\alpha)}) > 0$. Så findes n, så $\mu(A_{\alpha n}) > 0$ for mere end tælleligt mange α. Modstrid!

ØL 14 (Kofinalitet, regulære kardinaltal, svagt uopnåelige kardinaltal). Begrebet kofinalitet kan defineres for en vilkårlig ordnet mængde $(X, \leq)$: *Kofinaliteten* af X, $\mathrm{cf}(X)$, er det mindste kardinaltal σ, således at der findes en ubegrænset mængde $X_0 \subseteq X$ af kardinalitet σ (X_0 ubegrænset vil sige, at $\forall x \in X \exists x_0 \in X_0 : x \leq x_0$). Vi skal kun bruge begrebet for kardinalitat.

(i) Vis, at $\aleph_0$ og $\aleph_1$ har sig selv som kofinalitet: $\mathrm{cf}(\aleph_0) = \aleph_0$, $\mathrm{cf}(\aleph_1) = \aleph_1$.

Et kardinaltal κ, der opfylder $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ kaldes *regulært*. Et regulært grænsekardinaltal, altså et regulært kardinaltal af formen $\aleph_\alpha$ med α et grænseordinaltal, siges at være *svagt uopnåelig*. Man kan ikke bevise, at der findes svagt uopnåelige kardinaltal i ZFC. Det er konsistent, at der ikke gør. Det er også konsistent, at der gør – f.eks. kan $2^{\aleph_0}$ være svagt uopnåelig!

(ii) Generalisér det andet resultat i (i) og vis, at ethvert uendeligt efterfølger-kardinaltal (ét af formen $\aleph_{\alpha+1}$) er regulært.

(iii) Vis, at der findes vilkårligt store kardinaltal, som ikke er regulære (de hedder også *singulære* kardinaltal).

(iv) Vis, at hvis κ er svagt uopnåelig, så er κ på formen $\aleph_\alpha$ for et α med $\aleph_\alpha = \alpha$.

Vejledning: $\{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\}$ er kofinal i $\aleph_\alpha$.

(v) Egenskaben i (iv) ($\aleph_\alpha = \alpha$) viser, at svagt uopnåelige kardinaltal må være ganske store. Imidlertid er egenskaben $\aleph_\alpha = \alpha$ langt fra nok til at sikre, at $\aleph_\alpha$ er svagt uopnåelig. Der findes faktisk vilkårlig store kardinaltal med egenskaben $\aleph_\alpha = \alpha$. Vis, at det første kardinaltal med denne egenskab kan konstrueres som følger: Ved sædvanlig transfinit rekursion defineres en følge $(\sigma_n)_{n<\omega}$ af uendelige kardinaltal ud fra kravene: $\sigma_0 = \aleph_0$, $\sigma_{n+1} = \aleph_{\sigma_n}$. Sættes $\kappa = \sup_{n<\omega} \sigma_n$, er κ det ønskede kardinaltal.

Bemærkning. Tænker vi på "den lange linie" (ordinaltallene visualiseret—så godt det nu kan lade sig gøre), ligger det fundne kardinaltal egentlig pænt langt ude! Det er tankevækkende, at det er konsistent, at kontinuet $2^{\aleph_0}$ ligger endnu længere ude! Dét havde Cantor næppe forestillet sig: Han hældede jo til den anskuelse, at $2^{\aleph_0}$ var et (vi vil sige) lille bitte kardinaltal: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

ØL 15. (En sætning af König—kan betragtes som en generalisation af Cantors diagonalræsonnement).

Vis, at hvis κ er et uendeligt kardinaltal og hvis $\lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa)$, så er $\kappa < \kappa^\lambda$.

Vejledning: Lad $f : \lambda \to \kappa$ afbilde λ på en kofinal delmængde af κ. Lad $G : \kappa \to \kappa^\lambda$ (her er κ^λ mængden af afbildninger $\lambda \to \kappa$) være vilkårlig. Defineres $h : \lambda \to \kappa$, således at $h(\alpha)$ er første element i $\kappa \backslash \{(G(\beta))\,(\alpha) \mid \beta < f(\alpha)\}$, så vil h *ikke* tilhøre værdimængden for G (h er "bænkevarmer").

ØL 16 (Potensopløftning under GCH). Addition og multiplikation af kardinaltal, hvoraf et er uendelig, er let. Hvis den generaliserede kontinuumshypotese (GCH) gælder (altså $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ for alle ordinaltal α), er også potensopløftning let. Der gælder nemlig, for kardinaltal κ og λ med $\lambda \geq 2$ og mindst en af dem uendelig, at:

(a) $\kappa^\lambda = \lambda^+$, hvis $\kappa \geq \lambda$ ($\lambda^+ = \lambda$'s efterfølger),

(b) $\kappa^\lambda = \kappa^+$, hvis $\kappa > \lambda$ og $\lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa)$,

(c) $\kappa^\lambda = \kappa$, hvis $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$.

Vis det! *Vejledning*: Udnyt bl.a. ØL 15.

Litteraturhenvisninger

I afsnittene UES, JBHH, MNNM findes nogle henvisninger. Her nævnes følgende blandt mange mulige:

[1] Barwise (editor), *Handbook of Mathematical Logic North-Holland*, 1977.
Ambitiøst samleværk med masser af artikler på højt niveau.

[2] Brandt og Nissen , *Q.E.D.-introduktion til matematisk bevis*, Abacus, 1996.
Har til dels samme sigte som afsnittene BML og NM, men med mere vægt på logik. Sidste afsnit er en fin introduktion til fuldstændighed, uafgørlighed m.v.

[3] Burris, *Logic for Mathematics and Computer Science*, Prentice-Hall, 1998.

[4] Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, 1966.
Et klassisk værk på højst niveau.

[5] Crossley, it What is Mathematical Logic, Oxford University Press, 1972.
En overkommelig introduktion, appetitvækker til videregående matematisk logik.

[6] Ebbinghaus, Flum og Thomas, *Mathematical logic*, Springer, 1994.
Måske den lærebog, I bør kaste jer over, hvis I er blevet grebet af matematisk logik. Stringent.

[7] Fenchel og Gutmann Madsen, *Mængder, Afbildninger, Relationer*, KU, Matematisk Institut, 1964-65.
Dette notesæt forfølger samme mål som de to førstnævnte fra mit forord. Nogenlunde samme niveau som BML og NM. Genoptryk foreligger muligvis stadig.

[8] Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton University Press, 1940.
En klassiker. Ikke så vanskelig endda.

[9] Halmos, *Naive Set Theory*, D. van Nostrand, 1960.
Også en klassiker, men på det introducerende niveau.

[10] Hrbacek og Jech, *Introduction to set theory*, Marcel Dekker, 1984.
Stringent mængdelære uden for megen fordybelse i logikken.

[11] Kunen, *Set Theory – An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, 1980.
En spændende, meget præcis, koncentreret og elegant bog på højt niveau. Fører læseren frem til forcing uden at anvende mere end det absolut nødvendige fra logik.

[12] Machover, *Set theory, logic and their limitations*, Cambridge University Press, 1996.
Nyere fremstilling på højt niveau. Spændende at læse i, men tilegnelse kræver tid. Megen tid.

[13] Schumacher, *Chapter zero, fundamental notions of abstract mathematics*, Addison-Wesley, 1996.
Indføring på nogenlunde samme niveau som BML og NM.

Indeks