

NOTER TIL MATEMATIK A, 1984/85

Mogens Esrom Larsen

FORORD.

Kurset Matematik A gennemgår klassisk analyse og algebra med det formål at berede vejen for fysikkens og kemiens begrebsapparat. De væsentlige matematiske begreber og resultater er samlet i Kapitel I, der kan siges at udgøre kursets pensum. De øvrige seks kapitler skal på hver sin måde lette tilegnelsen af dette pensum. I Kapitel II gennemgås fortrinsvis simple eksempler, der kendes i forvejen, til belysning af de nye synspunkter i Kapitel I. I Kapitel III gennemgås de vigtige eksempler på problemer, som hjælpemidlerne i Kapitel I sætter os i stand til at løse langt lettere end uden. I Kapitel IV vises eksempler på anvendelser af teorien på områder uden for matematikken, fortrinsvis fra fysik og kemi. Kapitel V viser eksempler på problemer og deres løsning, som svarer til de problemer, det forventes, at de studerende magter.

I Kapitel VI fremstilles den underliggende matematik, dvs. kapitlet indeholder beviser (eller henvisninger til beviser) for resultaterne i Kapitel I. Kapitlet er tænkt fortrinsvis til senere brug. Har man behov for en modificeret sætning, kan man overveje, om beviset kan bringes til at dække tilfældet. Men kapitlet tjener naturligvis også til at overbevise den student, der måtte tvivle på en anført påstand.

Kapitel VII er en samling opgaver, der ligner dem fra Kapitel V, blot ikke er løst i noterne.

Kapitlerne I - V gennemgås i forelæsningerne, mens Kapitel VII er grundlaget for øvelserne. Kapitel VI er til selvstudium.

Inden for hver kapitel er emnerne delt på paragraffer, således at tilsvarende §-nr. i forskellige kapitler refererer til samme emne. Ved tilegnelsen af stoffet læses paragrafferne i nummerorden, og inden for hver § læses kapitlerne simultant. Ved tilbageblik på kurset tjener Kapitel I som kompendium og Kapitel IV til underholdning.

Til eksamen opgives Kapitel I; - resten er til hjælp.

God fornøjelse!

KAPITEL I

DEFINITIONER OG SÆTNINGER

*Det, der i sig selv kan bevises og
vides, kan antages som Trosgenstand
ogsaa af dem, der ikke forstaar Beviset.*

Thomas Aquinas.

§1. Vektorregning i planen og komplekse tal.

På en ret linie, ℓ , vælges to forskellige punkter, O og E . Vi fastlægger længden af liniestykket OE til 1 og vi tillægger punkterne talværdierne 0 og 1 hhv. Ved multiplikation og deling af liniestykket findes punkter svarende til alle rationale tal. Punkterne på halvlinien OE svarer til positive tal, og punkterne på den anden side af O svarer til negative tal.

Vi gør nu to analoge antagelser om punkterne på en linie og om de reelle tal.

- 1L) Til enhver (ikke tom) punktmængde findes et mindste liniestykke, som indeholder den.
- 2L) Ethvert punkt er endepunkt for et sådant mindste liniestykke, som indeholder en mængde af konstruerbare punkter.
- 1R) Til enhver (ikke tom) talmængde findes et mindste interval, som indeholder den.
- 2R) Ethvert reelt tal er endepunkt for et sådant mindste interval, som indeholder en mængde af rationale tal.

Ved hjælp af disse antagelser kan vi udvide korrespondancen mellem de rationale tal og visse konstruerbare punkter til en bijektiv korrespondance mellem de reelle tal og mængden af punkter på linien. Herefter betegnes linien som "tallinien" og ord som "punkt og tal" og "liniestykke og interval" bruges i flæng.

I en plan vælges to forskellige punkter O og E . Gennem dem går en ret linie, ℓ , som vi identificerer med de reelle tal som beskrevet ovenfor med O og E svarende til 0 og 1 hhv.

Lad nu m være den rette linie gennem O , som er vinkelret på ℓ . Cirklen med centrum i O gennem E skærer m i to punkter, det ene betegnes I . Vi identificerer nu punkterne på linien m med de reelle tal, således at O og I svarer til 0 og 1 hhv.

Fra et punkt P i planen nedfældes den vinkelrette på hver af de to linier ℓ og m . De derved fundne punkter på ℓ og m kaldes *projektionerne* af P på ℓ og m og de tilsvarende reelle tal kaldes *koordinaterne* til punktet P . De nævnes med projektionen på ℓ først. Herved er opnået en bijektiv korrespondance mel-

lem planens punkter og mængden af reelle talpar

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} .$$

Til et punkt P svarer en linie gennem O og P og på denne linie liniestykket OP . Mængden af punkter i planen står også i en bijektiv korrespondance med mængden af liniestykker med O som venstre endepunkt.

Vi definerer nu 5 vigtige regneoperationer for punkter, liniestykker og talpar.

- 1) Multiplikation med en skalar. (Ved en "skalar" forstås et reelt tal.)

Lad P være et punkt med koordinaterne (x,y) og $\lambda \in \mathbb{R}$ skalaren.

Punktet λP er det punkt, der har koordinaterne $(\lambda x, \lambda y)$.

Sætning I,1,1. Punktet P ligger på linie med O og P og liniestykkerne forholder sig som λ , $O\lambda P : OP = \lambda$.

- 2) Sum.

Lad P_1 og P_2 være to punkter med koordinater (x_1, y_1) og (x_2, y_2) hhv.

Punktet $P_1 + P_2$ er det punkt, der har koordinaterne $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Sætning I,1,2. Linierne OP_1 og $P_2(P_1 + P_2)$ er parallelle, og linierne OP_2 og $P_1(P_1 + P_2)$ er parallelle. Liniestykket $O(P_1 + P_2)$ er diagonal i det af O, P_1, P_2 og $P_1 + P_2$ udspændte parallellogram.

Vektorrum.

Organiseret med dette produkt og denne sum kaldes mængden af punkter eller liniestykker eller talpar et *vektorrum*, og punktet $\sim$ liniestykket $\sim$ talparret kaldes en *vektor*.

3) Indre produkt eller skalarprodukt.

Lad v_1 og v_2 være to vektorer med koordinater (x_1, y_1) og (x_2, y_2) hhv.

Det reelle tal ("skalaren") $x_1x_2 + y_1y_2$ kaldes det indre produkt af vektorerne v_1 og v_2 og betegnes

$$v_1 \cdot v_2 = (v_1, v_2) = x_1x_2 + y_1y_2 .$$

Sætning I,1,3. Det indre produkt af en vektor med sig selv er kvadratet på vektorens længde (som liniestykke).

$$|v|^2 = v \cdot v$$

Sætning I,1,4. Det indre produkt af to vektorer er længden af den ene gange længden af den anden gange cosinus til vinklen mellem dem.

$$v_1 \cdot v_2 = |v_1| |v_2| \cos \varphi .$$

Corollar I,1,5. Det indre produkt af to vektorer er 0, hvis og kun hvis de står vinkelret på hinanden.

Corollar I,1,6. Projektionen af en vektor v på en vektor af længde 1 ("enhedsvektor") e fås som

$$(v \cdot e)e .$$

Corollar I,1,7. Vektoren $v - (v \cdot e)e$, hvor e er en enhedsvektor, står vinkelret på e .

4) Ydre produkt eller arealprodukt (eller determinant).

Lad v_1 og v_2 være to vektorer med koordinater hhv. (x_1, y_1) og (x_2, y_2) .

Det reelle tal $x_1y_2 - x_2y_1$ kaldes det ydre produkt af vektorerne v_1 og v_2 og skrives

$$[v_1, v_2] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 .$$

Sætning I,1,8. Det ydre produkt af vektorerne v_1 og v_2 er arealet af det af de to vektorer udspændte parallellogram (regnet med fortegn) og lig med længden af den ene vektor gange længden af den anden gange sinus til vinklen mellem dem.

Corollar I,1,9. Det ydre produkt af to vektorer er 0, hvis og kun hvis de er proportionale.

5) Det komplekse produkt.

Lad v_1 og v_2 være to vektorer med koordinater hhv. (x_1, y_1) og (x_2, y_2) .

Det komplekse produkt $v_1 v_2$ af de to vektorer er vektoren, hvis koordinaten er

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) .$$

Sætning I,1,10. Det komplekse produkt af to vektorer v_1 og v_2 er en vektor, hvis længde er produktet af længderne af v_1 og v_2 , og hvis vinkel med linien ℓ er summen af vinklerne med ℓ for v_1 og v_2 .

Komplekse tal.

Organiseret med det komplekse produkt kaldes vektorerne i planen for *de komplekse tal*. Vi opfatter vektorerne på linien ℓ som de reelle tal, der således ses som indlejret blandt de komplekse tal. Vi betegner vektoren $OI = (0, 1)$ som *den imaginære enhed* og skriver $i = (0, 1)$ for den. Herefter foretrækker vi skrivemåden

$$x + iy = (x, y) .$$

En vektor $v = x + iy = (x, y)$ har et spejlbillede i ℓ -aksen, det betegnes den *konjugerede* og skrives

$$\bar{v} = x - iy = (x, -y) .$$

Koordinaterne til $x + iy$ kaldes *realdelen* (x) og *imaginærdelen* (y) .

Vigtige formler er

$$v + \bar{v} = 2x , \quad v - \bar{v} = i2y$$

og

$$v\bar{v} = (x+iy)(x-iy) = (x^2+y^2) = v \cdot v = |v|^2 ,$$

altså, en vektors længde fås som

$$|v| = \sqrt{v\bar{v}} .$$

Når en vektor opfattes som et komplekst tal, kaldes længden for *modulus* og vinklen med ℓ kaldes *argumentet*.

Vi skriver

$$v = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

hvor r er modulus:

$$r = |v| = \sqrt{v\bar{v}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

og φ er argumentet

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} , \quad \text{hvis } x \neq 0$$

$$\operatorname{cot} \varphi = \frac{x}{y} , \quad \text{hvis } y \neq 0 .$$

Vektoren $e_\varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$ er enhedsvektoren, der danner vinklen φ med ℓ .

Det komplekse produkt er da

$$vu = (r e_\varphi)(s e_\psi) = (rs)e_{\varphi+\psi} .$$

Mængden af komplekse tal betegnes $\mathbb{C}$.

Regneregler for vektorprodukter.

$$v \cdot u = u \cdot v, \quad vu = uv \quad \text{men} \quad [v, u] = -[u, v] .$$

$$(v_1 + v_2) \cdot u = v_1 \cdot u + v_2 \cdot u$$

$$(v_1 + v_2)u = v_1u + v_2u$$

$$[v_1 + v_2, u] = [v_1, u] + [v_2, u]$$

For et reelt tal λ gælder

$$(\lambda v) \cdot u = \lambda (v \cdot u)$$

$$(\lambda v)u = \lambda (vu)$$

$$[\lambda v, u] = \lambda [v, u] .$$

For det komplekse produkt gælder yderligere

$$\overline{vu} = \bar{v} \bar{u}$$

$$v(uw) = (vu)w .$$

Endelig gælder sammenhængen

$$\bar{v}u = v \cdot u + i[v, u]$$

$$2v \cdot u = \bar{v}u + v\bar{u}$$

$$2i[v, u] = \bar{v}u - v\bar{u} .$$

§2. Vektorregning i rummet.

I rummet har vi ingen passer eller lineal, og vi kan kun tegne plane projekter af vore forestillinger. Vi må tænke os til punkterne i stedet for at konstruere dem. Men vi kan regne med vektorer lige så bekvemt som i planen.

Grundlæggende forestillinger om "rummets geometri" (*stereometri*).

Vi har punkter, linier og planer. Et punkt kan tilhøre en linie eller en plan, og en linie kan ligge i en plan.

Vi antager følgende krav opfyldt:

- 1) Gennem to forskellige punkter går en og kun én ret linie.
- 2) En ret linie, der har to forskellige punkter fælles med en plan, ligger helt i planen.
- 3) Gennem en linie og et punkt, der ikke ligger på linien, går en og kun én plan.
- 4) Givet en plan og et punkt uden for planen. Gennem punktet går en og kun én plan, der ikke har noget punkt fælles med den givne.

To linier kaldes *parallelle*, hvis der findes en plan, som indeholder dem begge, og hvori de er parallelle.

Vi definerer *vinklen* mellem to vilkårlige linier som vinklen mellem to skærende linier, der hver er parallelle med én af de givne.

Sætning I,2,1. Til en plan og et punkt findes en og kun én linie gennem punktet, der er vinkelret på enhver linie i planen.

Den i Sætning I,2,1 nævnte linie kaldes en *normal* til planen i/fra det pågældende punkt.

Vi definerer *vinklen* mellem en linie og en plan som komplementvinklen til vinklen mellem linien og planens normal.

Vi definerer *vinklen* mellem to planer som vinklen mellem deres normaler.

Vektorregning i rummet.

Vi vælger et punkt O og en plan π gennem O . I planen indføres koordinatsystemet fra §1, med linierne ℓ og m og punkterne E og I . Den omløbsretning af cirklen med radius 1, der passerer E og I i denne rækkefølge betegnes den *positive* omløbsretning.

I O findes en linie n , der er normal til planen π . På linien n findes to punkter i afstanden 1 fra O . Fra det ene af disse punkter ses cirkelns positive omløbsretning som værende mod uret. Dette punkt kalder vi J og lader vi svare til 1 ved identifikationen af n med de reelle tal.

De tre enhedsvektorer

$$e_1 = OE, \quad e_2 = OI, \quad e_3 = OJ$$

kaldes en *sædvanlig* eller *højreorienteret* basis. Et vilkårligt punkt P kan nu tilskrives 3 koordinater som følger:

Gennem P findes én normal til π , denne skærer π i et punkt P' , hvis koordinater er (x,y) i det koordinatsystem, vi har valgt for π .

Normalen n og P udspænder en plan, i hvilken P kan projiceres på n i punktet P'' svarende til det reelle tal z .

Herefter har P koordinaterne (x,y,z) .

Vi har nu opnået en bijektiv korrespondance mellem rummets punkter og mængden af reelle taltripler

$$\{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}.$$

Til et punkt P svarer en linie gennem O og P og på denne linie liniestykket OP . Mængden af punkter i rummet står også i bijektiv korrespondance med mængden af liniestykker med O som venstre endepunkt.

Vi definerer nu 5 vigtige regneoperationer for punkter, liniestykker og taltripler:

- 1) Multiplikation med en skalar. (Ved en "skalar" forstås et reelt tal.)

Lad P være et punkt med koordinaterne (x,y,z) og $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleren.

Punktet λP er det punkt, der har koordinaterne $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Sætning I,2,2. Punktet λP ligger på linie med O og P og liniestykkerne forholder sig som λ , $O\lambda P:OP = \lambda$.

2) Sum.

Lad P_1 og P_2 være to punkter med koordinater (x_1, y_1, z_1) og (x_2, y_2, z_2) hhv.

Punktet $P_1 + P_2$ er det punkt, der har koordinaterne $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Sætning I,2,3. Linierne OP_1 og $P_2(P_1 + P_2)$ er parallelle og linierne OP_2 og $P_1(P_1 + P_2)$ er parallelle. Liniestykket $O(P_1 + P_2)$ er diagonal i det af O, P_1, P_2 og $P_1 + P_2$ udspændte parallelogram.

Vektorrum.

Organiseret med dette produkt og denne sum kaldes mængden af punkter eller liniestykker eller taltripler et *vektorrum*, og punktet $\sim$ liniestykket $\sim$ taltripleet kaldes en *vektor*.

3) Indre produkt eller skalarprodukt.

Lad v_1 og v_2 være to vektorer med koordinater (x_1, y_1, z_1) og (x_2, y_2, z_2) hhv.

Det reelle tal ("skalaren") $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ kaldes det indre produkt af vektorerne v_1 og v_2 og betegnes

$$v_1 \cdot v_2 = (v_1, v_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Sætning I,2,4. Det indre produkt af en vektor med sig selv er kadratet på vektorens længde (som liniestykke).

$$|v|^2 = v \cdot v$$

Sætning I,2,5. Det indre produkt af to vektorer er længden af den ene gange længden af den anden gange cosinus til vinklen med dem.

$$v_1 \cdot v_2 = |v_1| |v_2| \cos \varphi.$$

Corollar I,2,6. Det indre produkt af to vektorer er 0, hvis og kun hvis de står vinkelret på hinanden.

Corollar I,2,7. Projektionen af en vektor v på en vektor af længde 1 ("enhedsvektor") e fås som

$$(v \cdot e)e.$$

Corollar I,2,8. Vektoren $v - (v \cdot e)e$, hvor e er en enhedsvektor, står vinkelret på e og ligger i den af v og e udspændte plan.

4) Vektorproduktet eller krydsproduktet.

Lad v_1 og v_2 være to vektorer med koordinater hhv.

(x_1, y_1, z_1) og (x_2, y_2, z_2) .

Vektoren v , der har koordinaterne

$$\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

kaldes vektorproduktet eller krydsproduktet af v_1 og v_2 og skrives

$$v_1 \times v_2 = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Sætning I,2,9. Krydsproduktet af to vektorer står vinkelret på dem begge. Krydsproduktets længde er lig med arealet af det af vektorerne udspændte parallellogram. Hvis krydsproduktet ikke er 0, er retningen sådan, at fra krydsproduktet ses vektorerne v_1 og v_2 i denne rækkefølge ved positivt omløb.

Corollar I,2,10. Krydsproduktet af to vektorer er 0, hvis og kun hvis de er proportionale.

5) Rumproduktet.

Givet 3 vektorer v_1, v_2 og v_3 med koordinater hhv.
 (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) og (x_3, y_3, z_3) . Det reelle tal

$$x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - z_1 y_2 x_3 - z_2 y_3 x_1 - z_3 y_1 x_2$$

kaldes rumproduktet af de tre vektorer og skrives

$$[v_1, v_2, v_3] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} .$$

Det sidste udtryk kaldes *determinanten* af *matricen*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} .$$

Sætning I,2,11. Rumproduktet af 3 vektorer er rumfanget af det af vektorerne udspændte parallellepipedum regnet med fortegn, således at rumfanget af terningen $[e_1, e_2, e_3]$ er positivt.

Regneregler for vektorprodukter.

$$v \cdot u = u \cdot v \quad , \quad \text{men} \quad v \times u = -u \times v \quad \text{og}$$

$$[v_1, v_2, v_3] = [v_2, v_3, v_1] = [v_3, v_1, v_2]$$

$$= -[v_2, v_1, v_3] = -[v_3, v_2, v_1] = -[v_1, v_3, v_2] .$$

$$(v_1 + v_2) \cdot u = v_1 \cdot u + v_2 \cdot u$$

$$(v_1 + v_2) \times u = v_1 \times u + v_2 \times u$$

$$[v_1 + u_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] + [u_1, v_2, v_3] .$$

For et reelt tal λ gælder

$$(\lambda v) \cdot u = \lambda(v \cdot u)$$

$$(\lambda v) \times u = \lambda(v \times u)$$

$$[\lambda v_1, v_2, v_3] = \lambda[v_1, v_2, v_3] \cdot$$

Krydsproduktet er ikke associativt, men

$$(v \times u) \times w + v(u \cdot w) = v \times (u \times w) + (v \cdot u)w = (v \cdot w)u \cdot$$

Endelig gælder sammenhængen

$$[v_1, v_2, v_3] = v_1 \cdot (v_2 \times v_3) = (v_1 \times v_2) \cdot v_3 \cdot$$

§3. Polynomier og rationale funktioner.

Ved et *polynomium* $p(x)$ forstås et udtryk af formen

$$(1) \quad p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{v=0}^n a_v x^v,$$

hvor $a_0, a_1, \dots, a_n$ er tal, der oftest er reelle, men som godt kan være komplekse, og som kaldes polynomiets *koefficienter*. Størrelsen x kaldes den *variable*. Indsættes for x et reelt tal α eller et komplekst tal $\alpha + i\beta$, kan polynomiet forstås som en forskrift til beregning af en værdi

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0$$

eller

$$p(\alpha + i\beta) = a_n (\alpha + i\beta)^n + a_{n-1} (\alpha + i\beta)^{n-1} + \dots + a_1 (\alpha + i\beta) + a_0,$$

Hvis $a_n \neq 0$, siges polynomiet at have *grad* n . Hvis alle koefficienter er 0, $a_n = a_{n-1} = \dots = a_0 = 0$, kaldes polynomiet *0-polynomiet* og graden defineres som $-\infty$ ("minus uendelig").

To polynomier regnes for *ens*, når de har samme grad, og tilsvarende koefficienter stemmer overens. Vi skriver $p = q$ eller $p(x) \equiv q(x)$.

Udtrykket

$$p(x) = q(x)$$

er derimod en ligning, der kan tilfredsstilles af visse værdier af x , men måske ikke af alle.

Det er klart, at uanset værdien af α gælder

$$p = q \Rightarrow p(\alpha) = q(\alpha).$$

Et tal α , der tilfredsstiller ligningen

$$p(\alpha) = 0,$$

kaldes en *rod* i polynomiet og benævnes eventuelt som *reel* eller *kompleks*.

Regning med polynomier.

Sum og differens af to polynomier dannes ved sum og differens af tilsvarende koefficienter.

Produktet af to polynomier

$$p(x) = \sum_{v=0}^n a_v x^v \quad \text{og} \quad q(x) = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} x^{\mu}$$

er polynomiet

$$pq(x) = \sum_{v=0}^{n+m} c_v x^v,$$

hvor

$$c_v = \sum_{\mu=0}^v a_{v-\mu} b_{\mu}.$$

Sætning I.3.1. Har polynomierne p og q grader henholdsvis n og m , og er $n \geq m$, så gælder

$$\text{grad}(p \pm q) \leq n$$

$$\text{grad}(pq) = n + m.$$

Corollar I.3.2. Hvis $pq = 0$, så er $p = 0$ eller $q = 0$.

Sætning I.3.3. Hvis α er et tal, så gælder

$$(p \pm q)(\alpha) = p(\alpha) \pm q(\alpha),$$

$$(pq)(\alpha) = p(\alpha)q(\alpha).$$

Hvis der til to polynomier $p(x)$ og $q(x)$ findes et polynomium $d(x)$, så

$$p = qd,$$

siges q at gå op i p , eller være divisor i p , og vi skriver

$$q \mid p.$$

Om et polynomium går op i et andet afgøres ved division med rest, som er nul, når divisionen går op. Euklids algoritme siger:

Sætning I.3.4. Hvis p og q er polynomier af grad n og m henholdsvis, og $n \geq m$, så findes et og kun et par af polynomier d og r , hvor d har grad $n-m$ og r har grad $< m$, så

$$p = dq + r.$$

Sætning I.3.5. Hvis α er en rod i polynomiet $p(x)$, så er polynomiet $x-\alpha$ divisor i p :

$$p(\alpha) = 0 \Rightarrow (x-\alpha) \mid p.$$

Hvis α er en rod i $p(x)$ og m er et tal, så $(x-\alpha)^m \mid p$, men $(x-\alpha)^{m+1} \nmid p$, kaldes m rodens *multiplicitet*.

Sætning I.3.6. Er $p(x)$ et polynomium af grad n , og er $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ samtlige komplekse rødder med multipliciteterne $m_1, \dots, m_k$ henholdsvis, så gælder

$$m_1 + \dots + m_k = n.$$

Denne sætning kaldes *algebraens fundamental sætning*.

Corollar I.3.7. Er $p(x)$ et polynomium af formen

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, så findes komplekse tal $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ og hele tal $m_1, \dots, m_k$, så

$$p(x) \equiv (x-\alpha_1)^{m_1} \dots (x-\alpha_k)^{m_k}.$$

Sætning I.3.8. Hvis $\alpha + i\beta$ er en kompleks rod i et polynomium $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ med reelle koefficienter, så er også den konjugerede $\alpha - i\beta$ rod i $p(x)$:

$$p(\alpha + i\beta) = 0 \Rightarrow p(\alpha - i\beta) = 0.$$

Corollar I.3.9. Hvis $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ er et polynomium med reelle koefficienter, så kan p skrives som et produkt af polynomier af højst 2. grad.

Sætning I.3.10. Hvis to polynomier af grad $\leq n$ antager samme værdi for $n+1$ forskellige værdier af den variable, så er polynomierne identiske.

Rationale funktioner og stambrøker.

En kvotient mellem to polynomier kaldes en *rational funktion*.

Funktionen

$$x \rightarrow \frac{p(x)}{q(x)}$$

er defineret for de værdier af x , hvor $q(x) \neq 0$.

En rational funktion af formen

$$\frac{a}{(x-\alpha)^m}$$

kaldes en *stambrøk*.

Sætning I.3.11. En rational funktion, hvor nævneren har opspaltningen

$$q(x) \equiv (x-\alpha_1)^{m_1} \dots (x-\alpha_k)^{m_k},$$

og hvor tælleren har lavere grad end nævneren, kan skrives som en sum af stambrøker

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\beta_{11}}{x-\alpha_1} + \dots + \frac{\beta_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \dots + \frac{\beta_{km_k}}{(x-\alpha_k)^{m_k}}.$$

Binomialformlen.

Vi definerer for $n \geq 0$ funktionen n udråbstegn også kaldet n fakultet som

$$0! = 1$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n \quad \text{for } n \geq 1.$$

Vi definerer *binomialkoefficienten* for $n \geq 1$ og $n \geq m \geq 0$ som

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Sætning I,3,12. Der gælder *binomialformlen*

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m y^{n-m}.$$

I kombinatorik fortolkes $\binom{n}{m}$ som antallet af måder, hvorpå m elementer kan udtages af en mængde med n elementer.

Sætning I,3,13. $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}.$

Sætning I,3,14. Der gælder *Pascals formel* for $1 \leq m \leq n$

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}.$$

§4. Følger og rækker.

Ved en *følge* forstås en funktion af de naturlige tal.

Hvis funktionens billeder er reelle eller komplekse tal, kaldes følgen en *talfølge*. Hvis funktionens billeder er vektorer i planen eller rummet, kaldes følgen en *punktfølge*.

En følge kaldes *begrænset*, hvis der findes en kugle, som indeholder alle følgens punkter.

En følge

$$n \rightarrow a_n$$

skrives ofte

$$(a_n)_{n \geq 1}.$$

En følge (a_n) af reelle tal kaldes en *voksende (tal-)følge*, hvis det for alle naturlige tal, n , gælder, at

$$a_n \leq a_{n+1}.$$

Tilsvarende kaldes en følge (a_n) af reelle tal *aftagende*, hvis det for alle naturlige tal, n , gælder, at

$$a_n \geq a_{n+1}.$$

En følge af reelle tal kaldes *monoton*, hvis den enten er voksende eller er aftagende.

Hvis ulighederne ovenfor alle er skarpe $(<, >)$, markeres det ved at kalde følgen *strengt* monoton.

Lad nu (n_p) være en strengt voksende følge af naturlige tal. Vi kan da definere en følge ved

$$b_p = a_{n_p}.$$

Følgen (b_p) kaldes en *delfølge* af følgen (a_n) .

Et punkt a kaldes et *grænsepunkt* for følgen (a_n) , hvis enhver kugle med centrum i a indeholder alle følgens punkter fra et trin, (der afhænger af kuglens radius).

Vi skriver da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ og } a_n \rightarrow a \text{ for } n \rightarrow \infty.$$

I dette tilfælde kaldes følgen *konvergent*, ellers *divergent*.

Et punkt a kaldes et *fortætningspunkt* for følgen (a_n) , hvis enhver kugle med centrum i a indeholder punkter fra følgen med vilkårligt stort index.

Sætning I.4.1. Ethvert grænsepunkt er et fortætningspunkt.

Sætning I.4.2. Ethvert fortætningspunkt er grænsepunkt for en delfølge.

Sætning I.4.3. Enhver begrænset følge har et fortætningspunkt.

Sætning I.4.4. En begrænset følge med kun ét fortætningspunkt er konvergent med fortætningspunktet som grænsepunkt.

Sætning I.4.5. En konvergent følge er begrænset og har kun grænsepunkt som fortætningspunkt.

Regning med følger.

Til to følger af (komplekse) tal, (a_n) og (b_n) , kan vi danne sum, differens, produkt og, hvis alle tal i den ene følge er ulig nul, kvotient

$$(a_n \pm b_n), (a_n b_n), \left(\frac{a_n}{b_n} \right).$$

Til to punktfølger af vektorer i rummet, (v_n) og (u_n) , kan vi danne sum, differens, $\times$ -produkt, indre produkt, (som bliver en talfølge)

$$(v_n \pm u_n), (v_n \times u_n), (v_n \cdot u_n).$$

Til en følge af reelle tal, (λ_n) , og en punktfølge af vektorer, (v_n) , kan vi danne produktet

$$(\lambda_n v_n).$$

Sætning I.4.6. Sum, (differens, produkt) af to konvergente følger er konvergent med summen, (differensen, produktet) af grænseværdierne som grænseværdi.

Sætning I.4.7. Hvis $(a_n) \rightarrow a$ for $n \rightarrow \infty$ og $(b_n) \rightarrow b$ for $n \rightarrow \infty$ er to konvergente følger af komplekse tal, og hvis $b_n \neq 0$ for alle n , og hvis $b \neq 0$, så gælder

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \right) \rightarrow \left(\frac{a}{b} \right) \text{ for } n \rightarrow \infty.$$

Sætning I.4.8. Hvis én punktfølge er begrænset og en anden følge er konvergent med grænsepunkt 0, så vil produktet af følgerne være konvergent med grænsepunkt 0.

Rækker.

Givet en følge af tal eller vektorer (startende med a_0):

$$(a_n)_{n \geq 0}.$$

Vi danner en ny følge ved forskriften

$$s_n = \sum_{v=0}^n a_v$$

eller rekursivt

$$s_0 = a_0$$

$$s_n = s_{n-1} + a_n.$$

Følgen (s_n) benævnes som *afsnitsfølgen* for rækken

$$\sum a_n.$$

Hvis afsnitsfølgen (s_n) er konvergent med grænsepunktet s , siges rækken at være *konvergent* med *sum* s , og vi skriver

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Sætning I.4.9. Hvis rækken $\sum a_n$ er konvergent, så er ledfølgen (a_n) konvergent med grænsepunkt 0 .

Sætning I.4.10. Hvis en række af positive reelle tal har begrænset afsnitsfølge, så er rækken konvergent.

Sætning I.4.11. Hvis rækken $\sum |a_n|$ er konvergent, så er også rækken $\sum a_n$ konvergent, og

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Sætning I.4.12. Givet en følge af vektorer (v_n) og en konvergent række af positive reelle tal, $\sum a_n$. Hvis $|v_n| \leq a_n$ for alle n , så er rækken $\sum v_n$ konvergent, og $\left| \sum_{n=0}^{\infty} v_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

En følge (a_n) kaldes en *fundamentalfølge*, hvis der til ethvert positivt tal $\varepsilon > 0$ findes et trin $N \in \mathbb{N}$, så det for ethvert par af indices $n, m > N$ fra dette trin gælder, at

$$|a_n - a_m| < \varepsilon .$$

I formelsprog:

(a_n) er en *fundamentalfølge*, hvis og kun hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N: |a_n - a_m| < \varepsilon .$$

Sætning I,4,13. En følge er konvergent, hvis og kun hvis den er en fundamentalfølge.

Denne sætning kaldes *det almindelige konvergensprincip*. Sætningen er så vigtig, at vi formulerer den specielt for rækker.

Sætning I,4,14. En række $\sum a_n$ er konvergent, hvis og kun hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N}: \left| \sum_{v=n}^{n+p} a_v \right| < \varepsilon .$$

En følge (a_n) kaldes en *fundamentalfølge*, hvis der til ethvert positivt tal $\varepsilon > 0$ findes et trin $N \in \mathbb{N}$, så det for ethvert par af indices $n, m > N$ fra dette trin gælder, at

$$|a_n - a_m| < \varepsilon .$$

I formelsprog:

(a_n) er en *fundamentalfølge*, hvis og kun hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N: |a_n - a_m| < \varepsilon .$$

Sætning I,4,13. En følge er konvergent, hvis og kun hvis den er en fundamentalfølge.

Denne sætning kaldes *det almindelige konvergensprincip*. Sætningen er så vigtig, at vi formulerer den specielt for rækker.

Sætning I,4,14. En række $\sum a_n$ er konvergent, hvis og kun hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N}: \left| \sum_{v=n}^{n+p} a_v \right| < \varepsilon .$$

En uendelig række $\sum a_n$ kaldes *absolut konvergent*, hvis rækken af numeriske værdier $\sum |a_n|$ er konvergent.

Det almindelige konvergensprincip for absolut konvergens bliver så:

Sætning I,4,15. En række $\sum a_n$ er absolut konvergent, hvis og kun hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \forall p: \sum_{v=n}^p |a_v| < \varepsilon .$$

I dette tilfælde gælder endda, at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n: \sum_{v=n}^{\infty} |a_v| \leq \varepsilon .$$

Produkt af rækker.

Lad $\sum a_n$ og $\sum b_n$ være uendelige rækker. Ved *produktrækken* af $\sum a_n$ og $\sum b_n$ forstås rækken $\sum c_n$, defineret ved

$$c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}.$$

Sætning I,4,16. Lad $\sum a_n$ og $\sum b_n$ være absolut konvergente rækker med sum hhv. A og B. Så er produktrækken absolut konvergent med sum AB. Altså

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^n a_p b_{n-p} \right) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q \right).$$

§5. Kontinuitet.

De følgende betragtninger gælder for linien, planen og rummet, men hver for sig. Vi refererer derfor til "rummet" $\mathbb{R}^n$, hvor n er fast valgt.

Ved en kugle i $\mathbb{R}^n$ med centrum $a \in \mathbb{R}^n$ og radius $r > 0$ forstås mængden

$$K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < r\}.$$

En mængde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kaldes åben, hvis ethvert punkt $x \in D$ er centrum for en kugle $K(x, r)$, der er indeholdt i D , altså $K(x, r) \subseteq D$.

$$D \text{ åben} \Leftrightarrow \forall x \in D \exists r > 0 : K(x, r) \subseteq D.$$

En mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kaldes afsluttet, hvis komplementmængden, $\mathbb{R}^n \setminus A$ er åben.

$$A \text{ afsluttet} \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A \text{ er åben.}$$

En mængde $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kaldes kompakt, hvis den er afsluttet og begrænset.

$$K \text{ kompakt} \Leftrightarrow (K \text{ afsluttet} \wedge K \text{ begrænset}).$$

Sætning I,5,1. En vilkårlig foreningsmængde af åbne mængder er åben.

Sætning I,5,2. En vilkårlig fællesmængde af afsluttede mængder er afsluttet.

Lad M være en vilkårlig mængde. Det indre $\overset{\circ}{M}$ af M er foreningsmængden af alle åbne mængder, der er indeholdt i M .

$$\overset{\circ}{M} = \bigcup \{D \subseteq M \mid D \text{ åben}\}.$$

Afslutningen $\bar{M}$ af M er fællesmængden af alle afsluttede mængder, der indeholder M .

$$\bar{M} = \cap \{A \supseteq M \mid A \text{ afsluttet} \} .$$

Sætning I,5,3. Det indre $\overset{\circ}{M}$ af en mængde M er den største åbne mængde, der er indeholdt i M .

Sætning I,5,4. Afslutningen $\bar{M}$ af en mængde M er den mindste afsluttede mængde, der indeholder M .

Sætning I,5,5. En mængde A er afsluttet, hvis og kun hvis det for enhver konvergent følge $(a_n) \rightarrow a$ for $n \rightarrow \infty$ gælder, at hvis alle punkterne i følgen tilhører A , altså $a_n \in A$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så vil også grænseværdien tilhøre A , altså $a \in A$.

Sætning I,5,6. En mængde K er kompakt, hvis og kun hvis det for enhver følge (a_n) , hvis punkter tilhører K , altså $a_n \in K$ for alle n , gælder, at følgen har et fortætningspunkt i K , altså der findes $a \in K$ og en delfølge $(a_{n_p}) \rightarrow a$ for $p \rightarrow \infty$.

Ved randen ∂M af en mængde M forstås forskellen mellem afslutningen og det indre,

$$\partial M = \bar{M} \setminus \overset{\circ}{M} .$$

Sætning I,5,7. Et punkt $x \in \mathbb{R}^n$ er et randpunkt for M , hvis og kun hvis enhver kugle med centrum i x indeholder punkter fra M og punkter ikke fra M .

$$x \in \partial M \Leftrightarrow \forall r > 0 : K(x, r) \cap M \neq \emptyset \neq K(x, r) \setminus M .$$

Givet en mængde $M \subseteq \mathbb{R}^n$ og et rum $\mathbb{R}^m$, hvor n og m kan være forskellige.

En funktion

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

kaldes kontinuert i punktet $a \in M$, hvis (og kun hvis) der for

ethvert positivt tal ε findes et positivt tal δ , så det for ethvert $x \in M$ gælder, at er x nærmere ved a end δ , altså $|x-a| < \delta$, så er (også) $f(x)$ nærmere ved $f(a)$ end ε , altså $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

f kontinuert i $a \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon .$$

Sætning I,5,8. En funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ er kontinuert i punktet $a \in M$, hvis og kun hvis der til enhver kugle med centrum i $f(a)$, altså $K(f(a), \varepsilon)$, findes en kugle med centrum i a , nemlig $K(a, \delta)$, så den sidste afbildes ved f ind i den første, altså $f(K(a, \delta)) \subseteq K(f(a), \varepsilon)$.

En funktion

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

kaldes kontinuert i M , hvis (og kun hvis) den er kontinuert i hvert punkt $a \in M$.

Sætning I,5,9. En funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ af en åben mængde M er kontinuert i M , hvis og kun hvis det for enhver åben mængde $N \subseteq \mathbb{R}^m$ gælder, at originalmængden $f^{-1}(N) = \{x \in M | f(x) \in N\}$ er åben i $\mathbb{R}^n$.

Sætning I,5,10. En funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ af en afsluttet mængde M er kontinuert i M , hvis og kun hvis det for enhver afsluttet mængde $N \subseteq \mathbb{R}^m$ gælder, at originalmængden $f^{-1}(N) = \{x \in M | f(x) \in N\}$ er afsluttet i $\mathbb{R}^n$.

Sætning I,5,11. Hvis en funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ er kontinuert i M , så gælder for enhver kompakt delmængde, $K \subseteq M$, at billedet $f(K)$ er kompakt.

Sætning I,5,12. En funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ er kontinuert i punktet $a \in M$, hvis og kun hvis det for enhver følge $(a_n) \rightarrow a$ med grænseværdi a af punkter fra M , altså $a_n \in M$ for alle n , gælder, at følgen $(f(a_n))$ er konvergent med grænsepunkt $f(a)$.

f kontinuert i $a \Leftrightarrow$

$\forall (a_n) \rightarrow a : (f(a_n)) \rightarrow f(a) .$

Eller vi kan sige

f kontinuert $\Leftrightarrow$

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

Sætning I,5,12. En funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ er kontinuert i punktet $a \in M$, hvis og kun hvis det for enhver følge $(a_n) \rightarrow a$ med grænseværdi a af punkter fra M , altså $a_n \in M$ for alle n , gælder, at følgen $(f(a_n))$ er konvergent med grænsepunkt $f(a)$.

f kontinuert i $a \Leftrightarrow$

$$\forall (a_n) \rightarrow a : (f(a_n)) \rightarrow f(a) .$$

Eller vi kan sige

f kontinuert $\Leftrightarrow$

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

Sætning I,5,13. Lad $M \subseteq \mathbb{R}^m$ og $N \subseteq \mathbb{R}^n$. Antag, at funktionen

$$f: M \rightarrow N$$

er kontinuert i punktet $a \in M$, og at funktionen

$$g: N \rightarrow \mathbb{R}^p$$

er kontinuert i punktet $b = f(a) \in N$. Da er den sammensatte funktion $h = g \circ f$ defineret ved

$$h(x) = g(f(x)) \quad \text{for } x \in M$$

kontinuert i a .

Corollar I,5,14. Lad $M \subseteq \mathbb{R}^m$ og $N \subseteq \mathbb{R}^n$. Antag, at funktionerne $f: M \rightarrow N$ og $g: N \rightarrow \mathbb{R}^p$ er kontinuerte. Da er den sammensatte funktion $h = g \circ f$ kontinuert.

Corollar I,5,15. Lad $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Antag, at funktionerne

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: M \rightarrow \mathbb{R}$$

Mat A, 1984/85

I,5,5.

er kontinuerte. De er sum, differens, produkt og kvotient (hvor denne er defineret) af f og g kontinuerte.

er kontinuerte. De er sum, differens, produkt og kvotient (hvor denne er defineret) af f og g kontinuerte.

Grænseværdi for en funktion.

Lad $M \subseteq \mathbb{R}^m$ være en mængde og $a \notin M$ et punkt, så $a \in \bar{M}$, og lad $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en funktion. Funktionen f siges at have *grænseværdi* $g \in \mathbb{R}^n$ i a , hvis funktionen $\hat{f}: M \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ defineret ved

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in M \\ g & \text{for } x = a, \end{cases}$$

er kontinuert i a , og vi skriver

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g.$$

Sætning I,5,16. Hvis grænseværdien eksisterer, er den entydig bestemt ved f og a .

§6. Differential- og integralregning i én reel variabel.

Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval, som indeholder 0 som indre punkt, $0 \in \overset{\circ}{I}$. Lad $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ være en funktion. Hvis

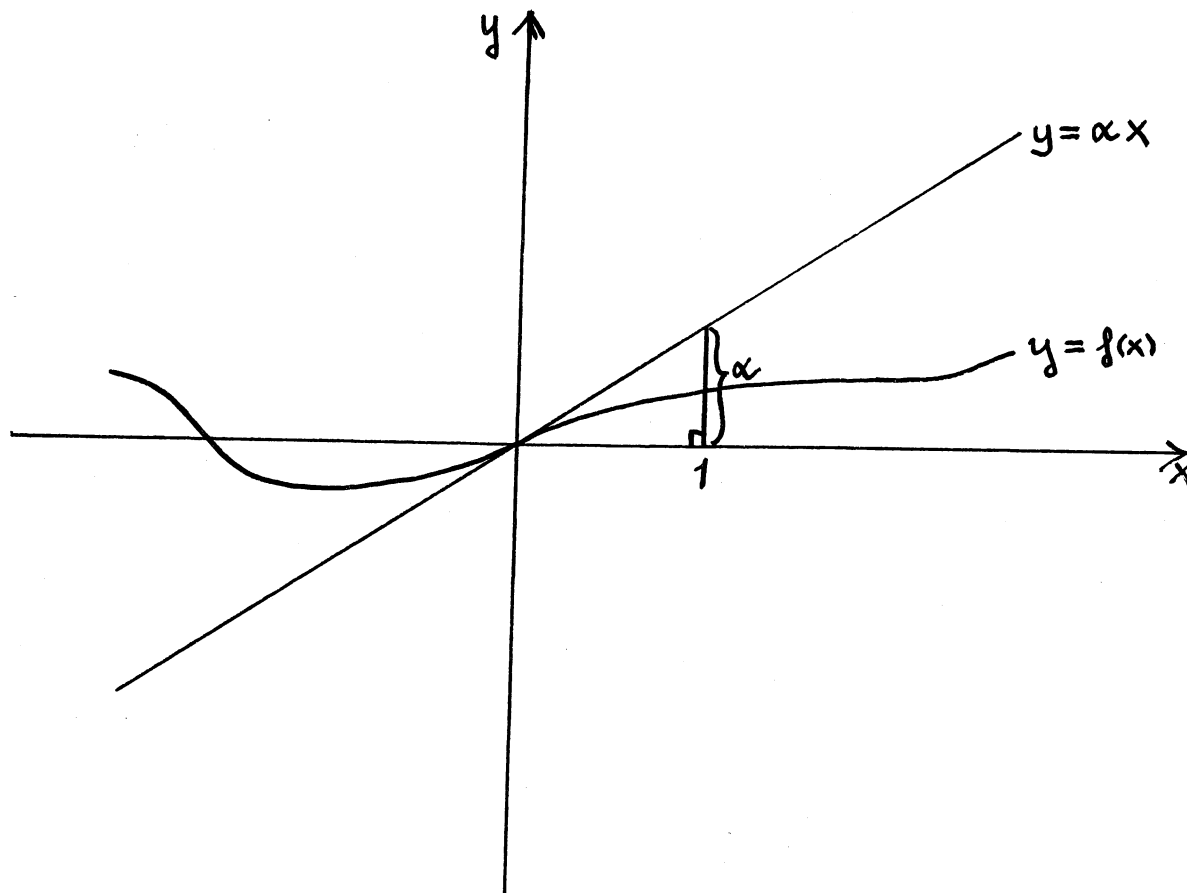
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

eksisterer, siger vi, at f er *differentiabel* i 0 med denne grænseværdi som *differentialkvotient*, der betegnes

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Sætning I,6,1. Hvis en funktion f er differentiabel (i 0), så er den kontinuert (i 0).

Sætning I,6,2. Hvis en funktion f er differentiabel i 0 med differentialkvotient $\alpha = f'(0)$, så er den rette linie $y = \alpha x$ tangent til funktionen i $(0,0)$.



Lad nu $I \subseteq \mathbb{R}$ være et vilkårligt interval, og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en funktion, og lad $a \in \overset{\circ}{I}$ være et indre punkt af intervallet.

Vi sætter $b = f(a)$ og indfører nye koordinater, der traditionelt betegnes (dx, dy) , ved forskydning af nulpunktet til (a, b) .

$$dy = y - b$$

$$dx = x - a$$

("d" står for "differens".) Vi definerer intervallet

$$I - a = \{dx \mid dx + a \in I\},$$

og betragter funktionen

$$\hat{f}: I - a \rightarrow \mathbb{R}$$

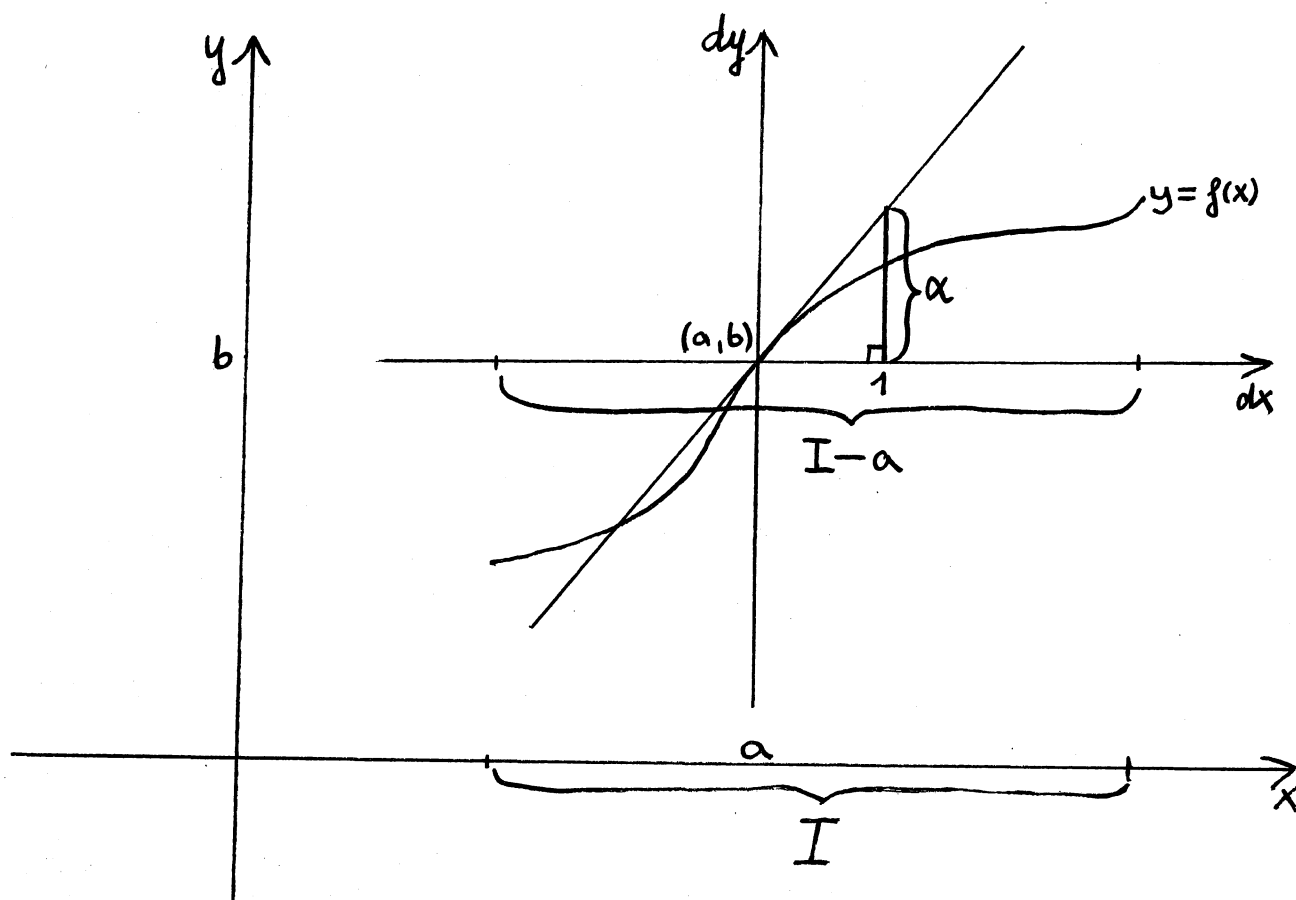
defineret ved

$$\hat{f}(dx) = f(a+dx) - f(a).$$

Hvis funktionen

$$dy = \hat{f}(dx)$$

er differentiabel i 0 med differentialkvotient $\alpha = \hat{f}'(0)$, siger vi, at f er differentiabel i a med differentialkvotient $f'(a) = \alpha$.



I koordinatsystemet (dx, dy) har tangenten ligningen

$$dy = \alpha dx ,$$

som i de "gamle" koordinater (x, y) bliver

$$y - b = \alpha(x - a)$$

eller

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) .$$

En funktion kaldes *differentiabel* i et interval I , hvis den er differentiabel i alle indre punkter af I . I så fald definerer differentialkvotienten en funktion

$$f': \overset{\circ}{I} \rightarrow \mathbb{R}$$

ved

$$f'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} .$$

Differentialkvotienten kaldes også den *afledede* funktion. Hvis den afledede er differentiabel, siger vi, at funktionen selv er *to gange differentiabel*, etc. Vi taler om *n gange differentiabel*, og, hvis det er tilfældet for ethvert $n \in \mathbb{N}$, siger vi, at funktionen er *vilkårlig ofte differentiabel*.

Hvis den (n 'te) afledede er kontinuert, siger vi, at funktionen er (n gange) *kontinuert differentiabel*. (Hvis den er vilkårlig ofte differentiabel, er alle afledede kontinuerte ifølge Sætning I,6,1.)

Vi skriver det også

$$f \in C^n(I) ,$$

$$f \in C^\infty(I) ,$$

idet mængderne skal betyde mængden af n gange kontinuert hhv. vilkårlig ofte differentiable funktioner af I .

Funktionen af to variable

$$df: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

defineret ved

$$df(x, dx) = f'(x)dx ,$$

kaldes *differentialet* af f . Vi skal formulere alle regnereglerne

både i afledede og differentialer, fordi differentialerne er de mest bekvemme at arbejde med i flere variable.

Lad i det følgende f og g være differentiable funktioner på samme interval, I , og lad evt. $g \neq 0$ på hele I , eller, lad $g: J \rightarrow I$ i stedet for. Lad $\lambda \in \mathbb{R}$ være et tal.

REGNEREGLER.

Afledede

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(\lambda f)' = \lambda (f')$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

Sum og differens.

Multiplikation med tal.

Produkt.

Kvotient.

Substitution.

Differentialer

$$d(f \pm g) = df \pm dg$$

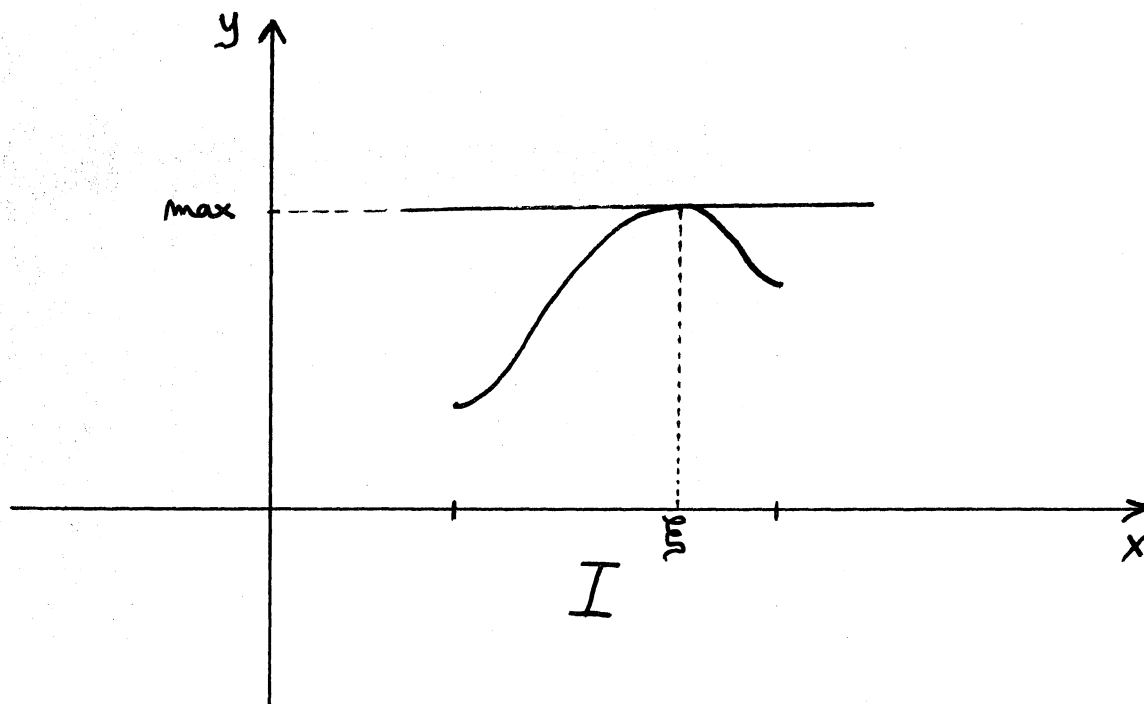
$$d(\lambda f) = \lambda df$$

$$d(fg) = gdf + fdg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df}{g} - \frac{fdg}{g^2}$$

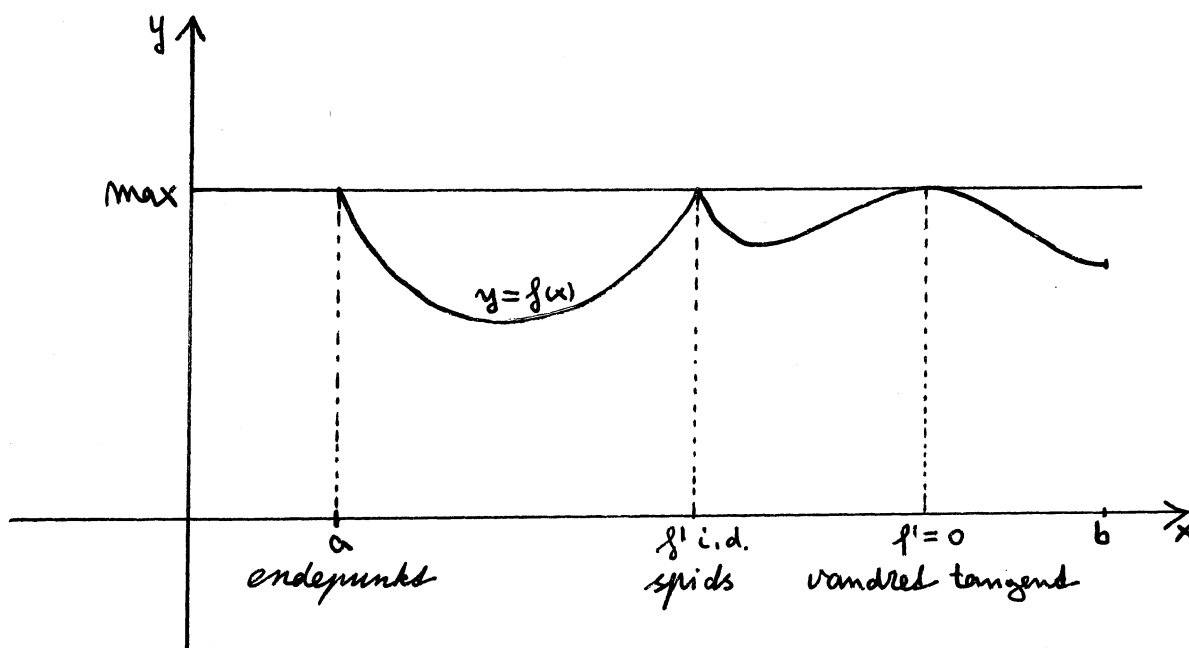
$$d(f(g)) = f'(g)dg$$

Sætning I,6,3. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et kompakt interval og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en funktion. Hvis f antager sit maksimum (minimum) i et indre punkt af intervallet, $\xi \in \overset{\circ}{I}$, hvor f er differentiable, så er $f'(\xi) = 0$.



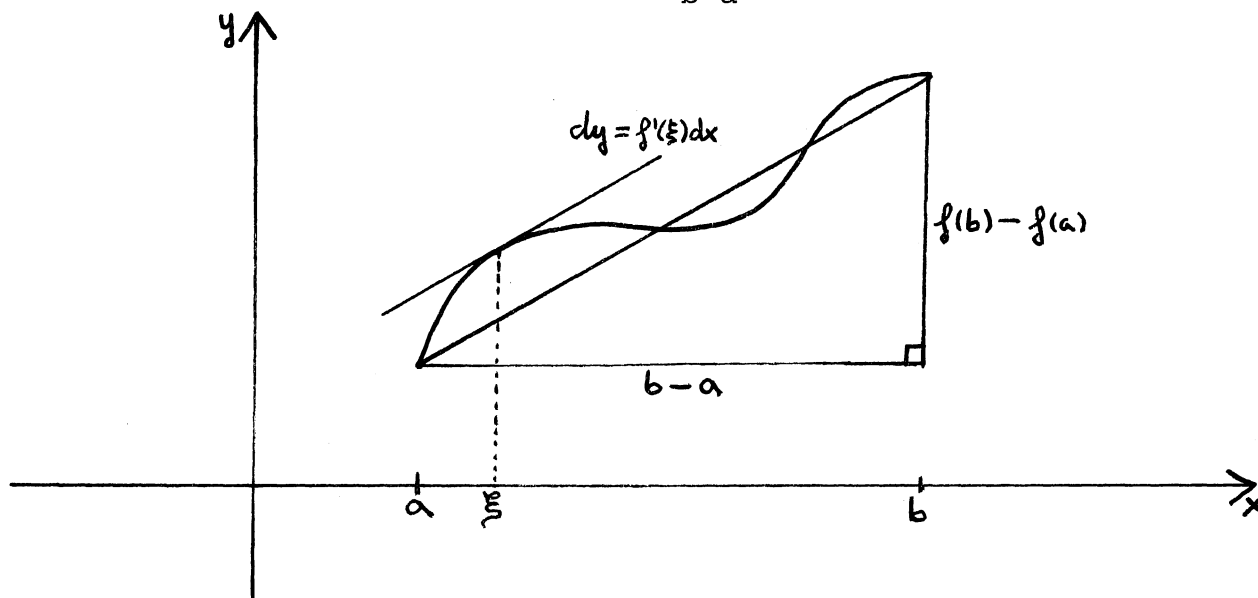
Corollar I,6,4. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et kompakt interval, og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Da vil f antage sit maksimum (minimum) i et punkt ξ , som er ét af tre

- 1) Endepunkt for intervallet.
- 2) Punkt, hvor $f'(\xi) = 0$.
- 3) Punkt, hvor $f'(\xi)$ ikke er defineret.



Sætning I,6,5. (Middelværdisætningen). Lad $I = [a, b]$ være et kompakt interval ($a < b$) og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en differentiabel og kontinuert funktion. Da findes et indre punkt $\xi \in I$, hvori

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Dvs. at tangenten i punktet ξ er parallel med den rette linie mellem endepunkterne $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$.

Corollar I,6,6. Lad I være et åbent interval og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en differentiabel funktion. Så er billedet af I ved f' et interval. Altså

$$f'(I) = \{y \mid \exists x: y = f'(x)\}$$

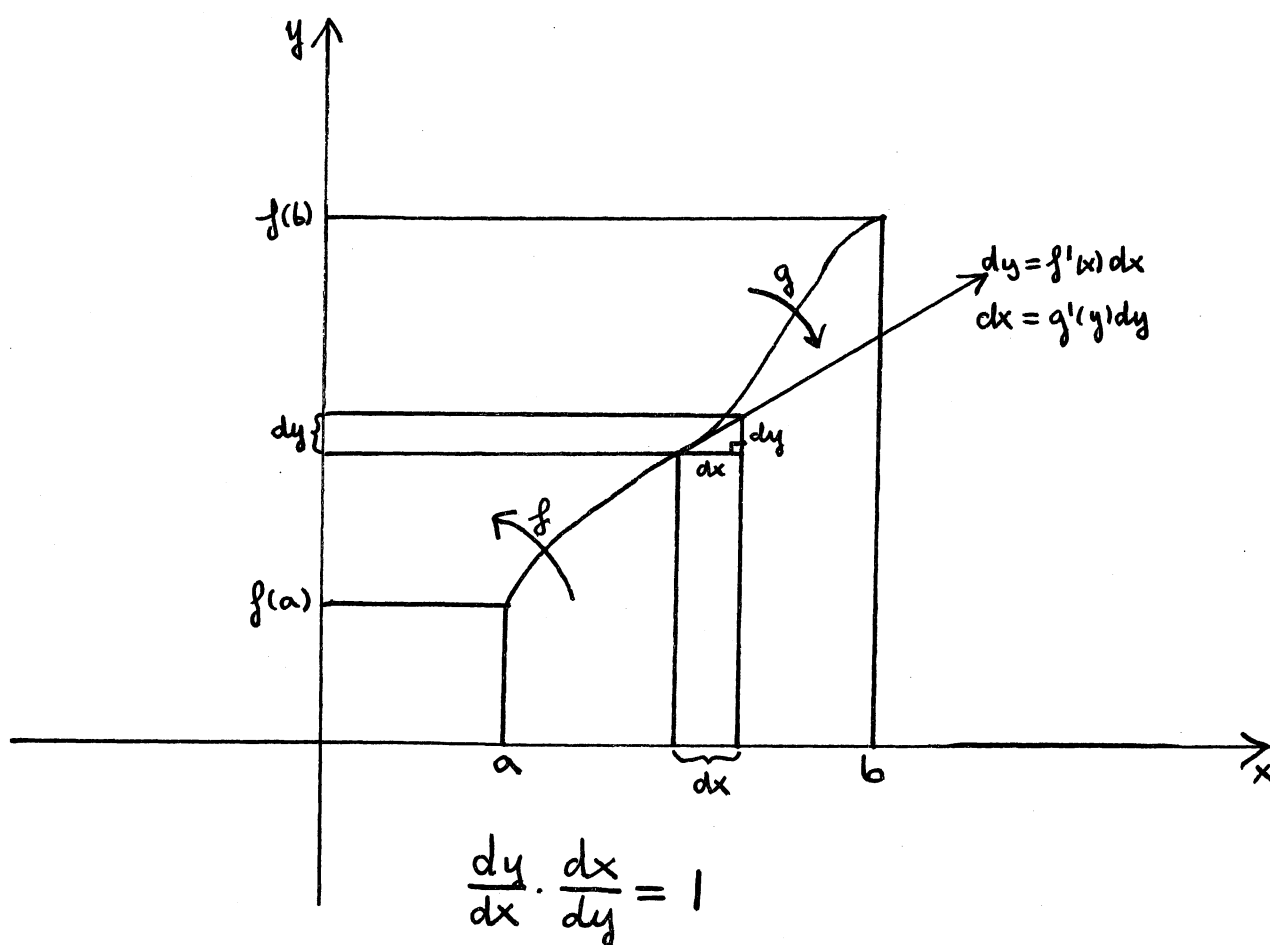
er et interval.

Corollar I,6,7. Lad I være et åbent interval og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en differentiabel funktion. Hvis $f'(x) = 0$ for ethvert $x \in I$, så er funktionen konstant. Altså

$$f'(x) \equiv 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv k.$$

Sætning I,6,8. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en differentiabel funktion. Hvis f' er positiv på intervallet $[a,b]$, $(a,b \in I, a < b)$, så er f voksende på dette interval, og f har en omvendt funktion $g: [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$, som er differentiabel med positiv differentialkvotient, der opfylder, at i ethvert $x \in [a,b]$ gælder

$$f'(x) \cdot g'(f(x)) = 1.$$



Stamfunktioner.

Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en vilkårlig funktion. En differentiabel funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ med f som afledet funktion, altså

$$F' = f,$$

kaldes en stamfunktion til f .

Corollar I,6,9. Hvis F og G er stamfunktioner til samme funktion f , så er $F - G$ konstant.

Sætning I,6,10. Enhver kontinuert funktion har en stamfunktion.

Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval og $a, b \in I$.

Lad $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Ved *inte. gralet* af f fra a til b forstås $F(b) - F(a)$, hvor F er en stamfunktion til f . Vi skriver det

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a).$$

Hvis $F(a) = 0$, kan vi skrive med t for x og x for b :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Benævnelsen, *det ubestemte integral*, skrevet

$$\int f(x) dx,$$

bruges om mængden af stamfunktioner til f . Siger vi, at to funktioner er *ækvivalente*, og skriver $F \sim G$, når deres differens er konstant, betegner

$$\int f(x) dx,$$

en ækvivalensklasse af funktioner.

Til regneregler for afledede og differentialer modsvarer et sæt regneregler for stamfunktioner og integraler. Lad nu f og g være kontinuerte funktioner af et interval I , evt. $g: J \rightarrow I$ og differentiabel, og lad $\lambda \in \mathbb{R}$ være et tal.

REGNEREGLER

Stamfunktioner

Integraler

Sum (og differens)

$$\int (f(x) + g(x)) dx \sim \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Multiplikation med konstant

$$\int \lambda f(x) dx \sim \lambda \int f(x) dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Delvis integration

$$F(x) \sim \int f(x) dx \Rightarrow$$

$$F(x) \sim \int f(x) dx \Rightarrow$$

$$\int f(x) g(x) dx \sim F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = F(b) g(b) - F(a) g(a)$$

eller skrevet

$$- \int_a^b F(x) g'(x) dx .$$

$$\int g dF \sim F g - \int F dg$$

Substitution

$$\int f(x) dx \circ g(t) \sim \int f(g(t)) g'(t) dt$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx$$

Bemærk: $x = g(t)$

$$dx = g'(t) dt$$

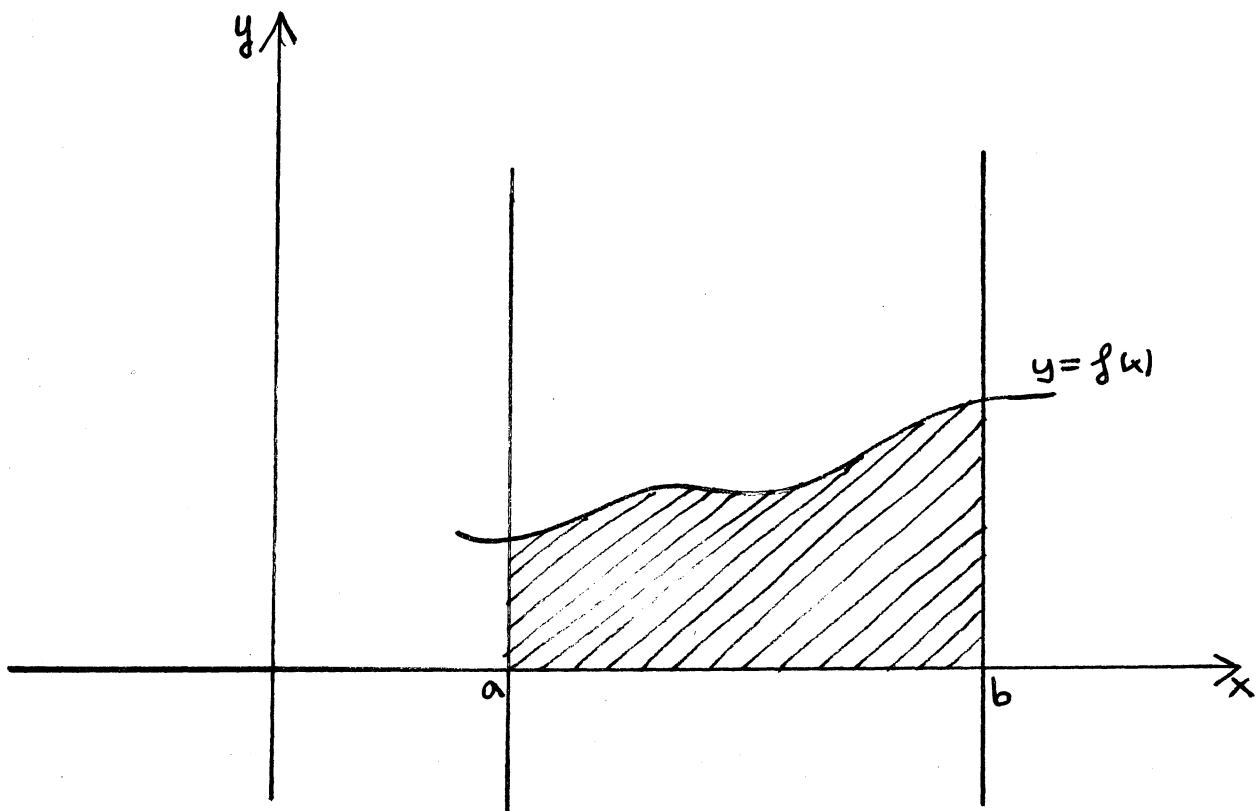
For integralet gælder indskudsreglen

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Sætning I, 6, 11. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuert, positiv funktion. Da er for $a, b \in I$, $a < b$,

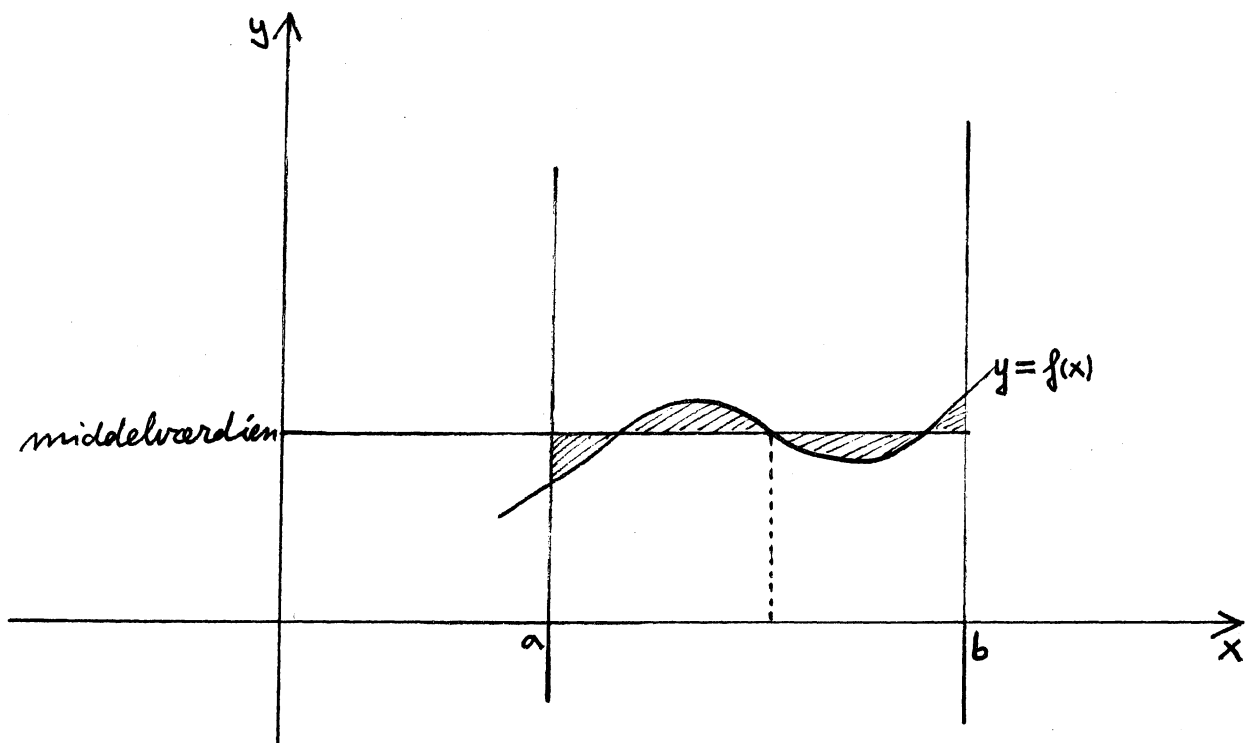
$$\int_a^b f(x) dx$$

arealet af figuren omkranset af x-aksen, linierne $x = a$ og $x = b$, og funktionens graf $\{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$.



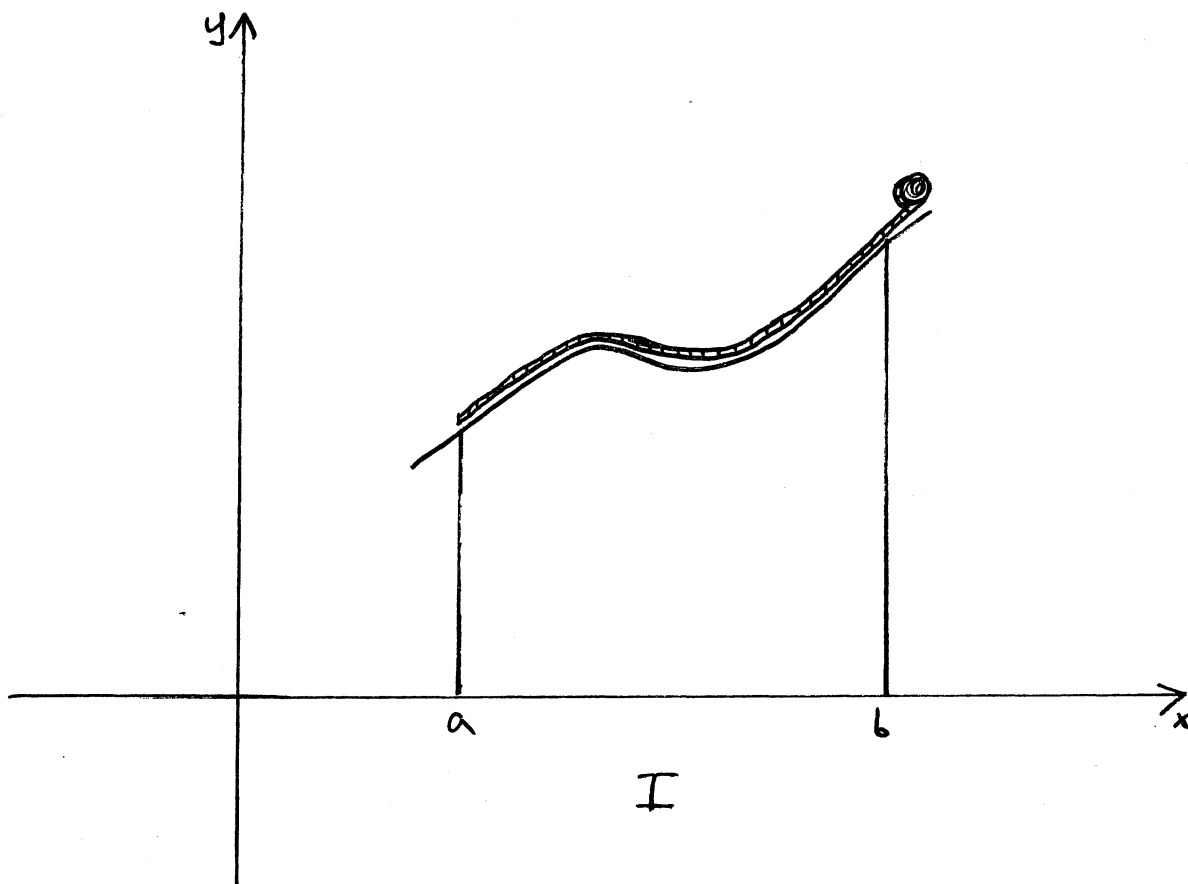
Sætning I,6,12. (Middelværdisætningen.) Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. For $a, b \in I$, $a < b$ findes $\xi \in]a, b[$, så

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi) .$$



Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuert differentiabel funktion, $f \in C^1(I)$. Ved *buelængden* af kurven $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ fra a til b forstås

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx .$$



Komplekse funktioner af én reel variabel.

Lad $f = g + ih$ være en funktion af et interval I ind i $\mathbb{C}$, hvor g og h afbildes ind i $\mathbb{R}$.

Med

$$f' = g' + ih'$$

og

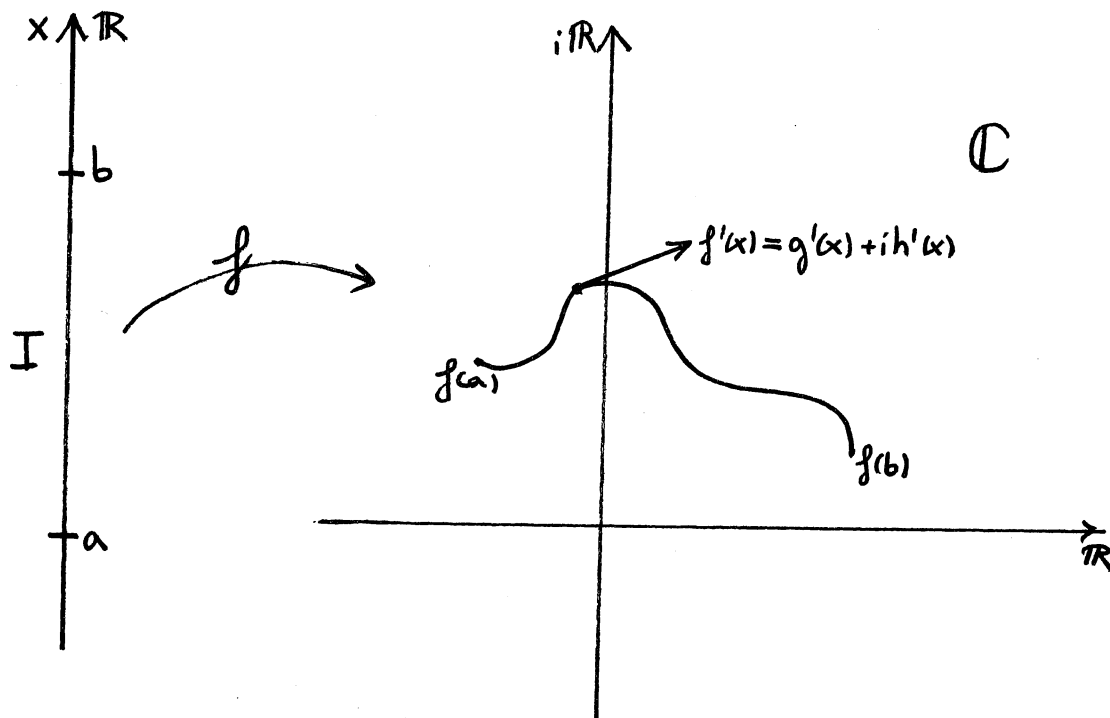
$$\int f(x) \, dx = \int g(x) \, dx + i \int h(x) \, dx ,$$

gælder alle ovenstående regneregler og sætninger, men buelængden bliver nu

$$\int_a^b \sqrt{f'(x) \overline{f'(x)}} \, dx = \int_a^b \sqrt{g'(x)^2 + h'(x)^2} \, dx .$$

Fortolket som længden af kurven i $\mathbb{C}$

$$\{f(x) \in \mathbb{C} \mid x \in [a, b]\}.$$



Taylor's formel og l'Hôpitals regel.

Sætning I, 6, 13. Lad $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ være en $n+1$ gange kontinuert differentiable funktion af et åbent interval. Da er for $a, x \in I$

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(a)}{v!} (x-a)^v + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt.$$

Formlen i Sætning I, 6, 13 kaldes *Taylor's formel*. Integralet til sidst i formlen kaldes *Lagrange's restled*.

Middelværdisætningen siger, at restleddet er

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) (x-\xi)^n (x-a)$$

hvor ξ ligger mellem a og x .

Da $f^{(n+1)}(\xi)$ er begrænset, $f^{(n+1)}$ er kontinuert på det kompakte interval $[a-\delta, a+\delta]$, hvor vi kun betragter $x \in [a-\delta, a+\delta]$, og $|x-\xi| \leq |x-a|$, kan restleddet vurderes ved

$$|R_n(x)| \leq K \cdot |x-a|^{n+1}$$

for alle $x \in [a-\delta, a+\delta]$.

Lad nu $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ være en vilkårlig ofte differentiabel funktion af et åbent interval. Den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

kaldes den til f hørende *Taylorrække*.

Sætning I,6,14. Den til en vilkårlig ofte differentiabel funktion hørende Taylorrække er konvergent med funktionens værdi som grænseværdi, hvis og kun hvis restledsfølgen i Taylors formel konvergerer mod 0.

Da

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(a)}{v!} (x-a)^v + R_n(x) ,$$

vil

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n ,$$

hvis og kun hvis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 .$$

Sætning I,6,15. (l'Hôpitals regel). Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval og $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ to differentiable funktioner. Hvis $f(a) = g(a) = 0$ og $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ er defineret for $x \neq a$, men har en grænseværdi i a , så gælder, at $\frac{f(x)}{g(x)}$ også har en grænseværdi a , og den er den samme:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

P.S. Funktionerne behøver ikke at være differentiable i a , blot de er kontinuerte i a .

L'Hôpitals regel kan skærpes i to retninger. Vi kan lade $f(x)$ og $g(x)$ gå mod ∞ , og vi kan lade $x \rightarrow \infty$, og begge dele på én gang!

Sætning I,6,16. (L'Hôpitals regel for viderekomne.) Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval og $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ være to differentiable funktioner med $g(x) \neq 0$ for alle $x \in I$, samt $g'(x) \neq 0$ for alle $x \in I$. Lad $I =]a, b[$, hvor evt. $a = -\infty$ eller $b = +\infty$.
Lad

$$c \in \{-\infty, 0, \infty\}.$$

Antag, at $f(x) \rightarrow c$ og $g(x) \rightarrow c$ for $x \rightarrow a$ (eller b), samt at

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow k \text{ for } x \rightarrow a \text{ (eller } b),$$

hvor k kan være $+\infty$ eller $-\infty$. Da gælder:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow k \text{ for } x \rightarrow a \text{ (eller } b).$$

§7. Differentialligninger af første orden.

Givet en kontinuert funktion af $\mathbb{R}^2$ (eller en delmængde heraf) ind i $\mathbb{R}$. En ligning af formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

kaldes en *differentialligning*, og en funktion af $I \subseteq \mathbb{R}$

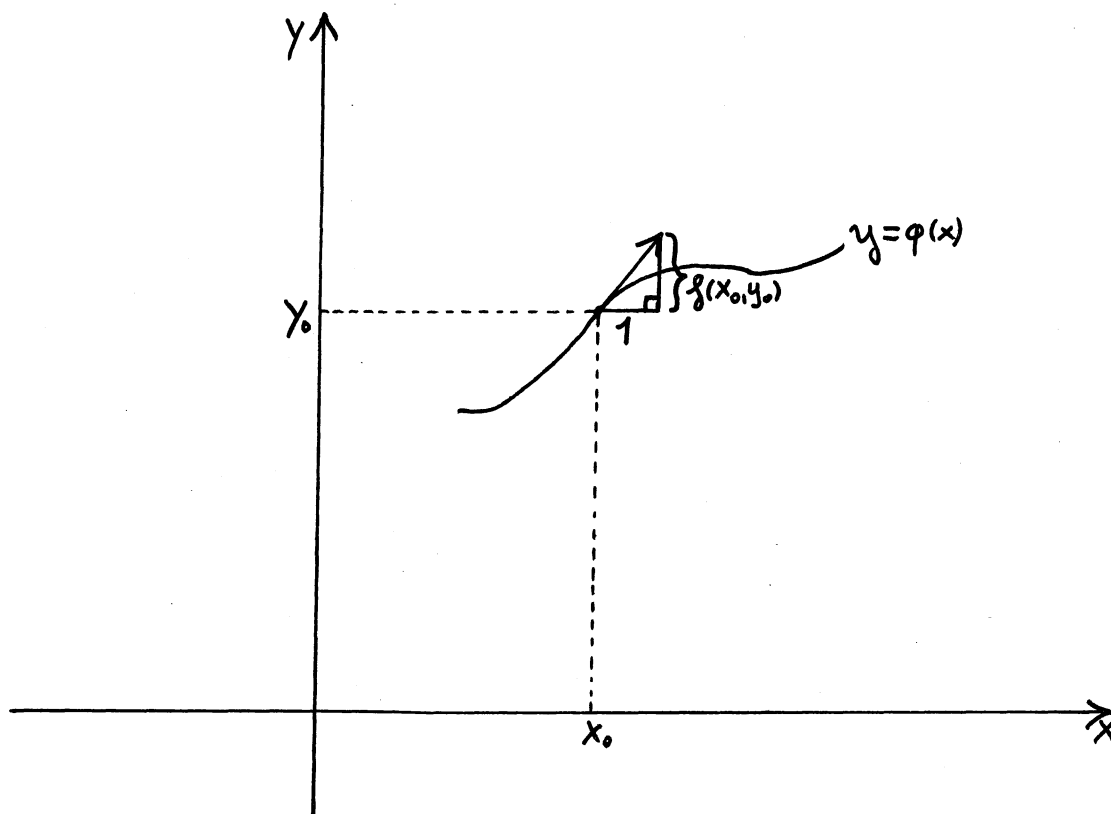
$$y = \varphi(x), \quad x \in I$$

kaldes en *løsning*, hvis f er defineret på

$$\{(x, \varphi(x)) \mid x \in I\}$$

og φ er differentiabel med differentialkvotient

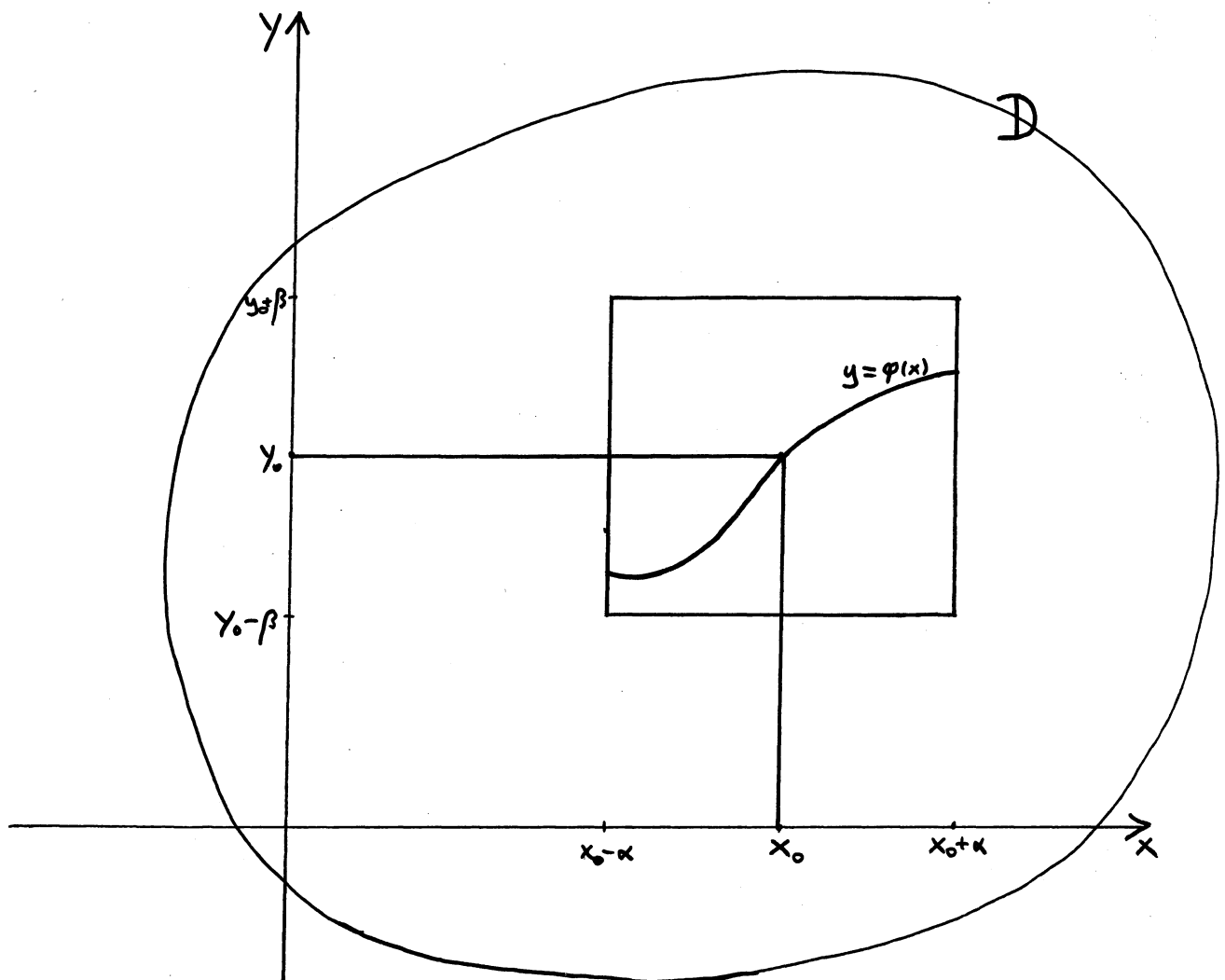
$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{for } x \in I.$$



Sætning I,7,1. (*Eksistenssætningen*). Givet en åben mængde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ og en kontinuert funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Til ethvert punkt $(x_0, y_0) \in D$

findes en omegn $U_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-x_0| < \alpha \wedge |y-y_0| < \beta\} \subseteq D$
 og en differentiabel funktion $\varphi:]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\rightarrow \mathbb{R}$ som opfylder
 $|\varphi(x)-y_0| < \beta$ for alle $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ og

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{for alle } x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[.$$



Sætning I,7,2. (Entydighedssætningen). Hvis yderligere funktionen f er differentiabel med hensyn til y for hvert fast x og dens afledede $f'_y(x,y)$ er kontinuert i D , så vil løsningen φ være entydig bestemt ved (x_0, y_0) på intervallet $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$.

Autonome differentiaalligninger.

Hvis funktionen f ovenfor ikke afhænger af x , kaldes differentiaalligningen autonom. Den har altså formen

$$(A) \quad \frac{dy}{dx} = f(y) .$$

Sætning I,7,3. Hvis $y = \varphi(x)$ er en løsning til den autonome ligning (A), så er også enhver funktion af formen

$$x \rightarrow \varphi(x+c) ,$$

hvor c er en konstant, løsning til (A).

Et nulpunkt for f , altså en værdi α , hvor $f(\alpha) = 0$, giver anledning til den konstante løsning $y = \alpha$ eller $\varphi(x) = \alpha$. En sådan konstant løsning kaldes *singulær*.

I et interval uden nulpunkter har f konstant fortegn. En løsning i et sådant interval er derfor monoton. Sådanne løsninger kaldes *regulære*.

I et sådant interval findes den regulære løsning således: Antag $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ er en regulær løsning, der da er monoton. Den har derfor en invers, $\psi: J \rightarrow I$, hvor $J = \varphi(I)$, som er differentiabel med differentialkvotient i $y = \varphi(x)$

$$\psi'(y) = \frac{1}{\varphi'(x)} = \frac{1}{f(\varphi(x))} = \frac{1}{f(y)} \quad \text{for } y \in J .$$

Funktionen ψ er altså en stamfunktion til $\frac{1}{f(y)}$.

$$\psi(y) \sim \int \frac{dy}{f(y)} .$$

Løsningerne må derfor være:

$$\varphi(x) = \left(\int \frac{dy}{f(y)} + c \right)^{-1} .$$

Lineære differentiaalligninger.

Hvis funktionen f ovenfor har formen

$$(L) \quad f(x, y) = a(x)y + b(x)$$

kaldes den tilsvarende differentiaalligning

$$(LD) \quad \frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$$

en *lineær differentiaalligning*. Vi skriver den om til formen

$$\frac{dy}{dx} - a(x)y = b(x)$$

idet venstre side er det *lineære led*. Vi vil nu indføre operatorbetegnelsen. Lad D^n for $n \geq 0$ betegne *differentialoperatoren* at differentiere n gange:

$$D^n: \varphi \in C^n(I) \rightarrow \varphi^{(n)} \in C^0(I) .$$

Operatoren D^n er *lineær*, dvs.

- 1) for $\lambda \in \mathbb{R}$ gælder: $D^n(\lambda\varphi) = \lambda D^n\varphi$
- 2) $D^n(\varphi+\psi) = D^n\varphi + D^n\psi$.

Vi kan skrive differentiaalligningen om til en operatorform:

$$\Phi(\varphi) = b$$

hvor $\Phi(\varphi) = D^1\varphi - a D^0\varphi = \varphi' - a\varphi$ evt. blot $\Phi = D^1 - a D^0$.

Vi kan opfatte situationen som

$$\Phi: C^1(I) \rightarrow C^0(I) ,$$

bestem $\varphi \in C^1(I)$, så $\Phi(\varphi) = b \in C^0(I)$.

Den homogene ligning.

Tilfældet, hvor $b = 0$, kaldes den *homogene ligning*. Den har egenskaben, at er φ og ψ løsninger, så er også $\lambda\varphi$ og $\varphi + \psi$ løsninger. Thi

$$\Phi(\lambda\varphi) = \lambda\Phi(\varphi) = 0$$

og $\Phi(\varphi+\psi) = \Phi(\varphi) + \Phi(\psi) = 0 + 0 = 0$.

Hvis φ er en løsning til

$$\Phi(\varphi) = 0$$

som i et punkt x ikke er nul, $\varphi(x) \neq 0$, så er φ aldrig nul ifølge entydighedssætningen, da $\varphi \equiv 0$ er en løsning.

Men så må

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = a ,$$

altså
$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int a(x) dx$$

eller
$$\ln|\varphi(x)| = \int a(x) dx + c$$

eller
$$|\varphi(x)| = e^{\int a(x) dx + c} = e^c e^{\int a(x) dx}$$

eller bedre endnu

$$\varphi(x) = \lambda e^{\int a(x) dx} , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Dette er løsningen til den homogene ligning.

Den inhomogene ligning.

Ligningen

(IH)
$$\Phi(\varphi) = b$$

har en vigtig egenskab. Hvis φ og ψ er to løsninger, så vil $\varphi - \psi$ løse den homogene ligning. Thi

$$\Phi(\varphi - \psi) = \Phi(\varphi) - \Phi(\psi) = b - b = 0 .$$

Omvendt gælder, at hvis φ løser (IH) og ψ løser den tilsvarende homogene ligning, så vil $\varphi + \psi$ løse (IH). Thi

$$\Phi(\varphi) = b \wedge \Phi(\psi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Phi(\varphi + \psi) = \Phi(\varphi) + \Phi(\psi) = b + 0 = b .$$

Sætning I,7,4. Samtlige løsninger til den lineære differentiaalligning $\frac{dy}{dx} - a(x)y = b(x)$ fås ved til én løsning at addere samtlige løsninger til den homogene ligning $\frac{dy}{dx} - a(x)y = 0$.

For at finde én løsning til (IH) gør vi prøve med funktionen $\psi\varphi$, hvor φ er en løsning til den homogene, dvs. $\varphi' - a\varphi = 0$. Vi får

$$\Phi(\psi\varphi) = b$$

udregnet $\psi'\varphi + \psi\varphi' - a\psi\varphi = b$

eller $\psi'\varphi + \psi(\varphi' - a\varphi) = b$

som, da φ løser den homogene, er

$$\psi'\varphi = b$$

$$\psi' = \frac{b}{\varphi}.$$

Funktionen ψ er altså en stamfunktion til $\frac{b}{\varphi}$:

$$\psi(x) = \int \frac{b(x)}{\varphi(x)} dx = \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx.$$

En løsning til (IH) er derfor

$$\varphi\psi = e^{\int a(x) dx} \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx.$$

Bemærkning. Ovenstående løsninger fungerer også, når a og b antager komplekse værdier.

Adskillige differentialligninger.

En form, der omfatter de autonome og de lineære, er den, hvor de variable kan adskilles. Det kan gøres, hvis funktionen $f(x,y)$ kan skrives som et produkt af funktioner af hhv. x og y .

Hvis

$$f(x,y) = g(y)h(x) ,$$

siger vi, at *de variable kan adskilles*, og vi skriver ligningen

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

på formen

$$\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = h(x) .$$

På denne form kan ligningen løses, idet en løsning $y = \varphi(x)$ må tilfredsstille

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = h(x)$$

som kan integreres ved substitution

$$\int \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} dx = \int h(x) dx$$

altså

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx .$$

Det giver en ligning af formen

$$G(y) = H(x)$$

som løsningen $y = \varphi(x)$ må tilfredsstille

$$G(\varphi(x)) = H(x) .$$

§8. Integraler i $\mathbb{R}^n$.

Lad $A \subseteq \mathbb{R}$ være en vilkårlig ikke tom mængde af reelle tal. Ifølge I,1,1R findes et mindste interval, der indeholder A . Det kan være $]a,b[$ eller $[a,b[$ eller $]a,b]$ eller $[a,b]$, hvor a og b er reelle tal eller evt. ∞ eller $-\infty$. I alle tilfælde benævnes a som *infimum* og b som *supremum* for mængden A . Vi skriver

$$a = \inf A$$

$$b = \sup A.$$

Mængden A kaldes *opad begrænset*, hvis $\sup A < \infty$ ($\sup A \in \mathbb{R}$), og *nedad begrænset*, hvis $\inf A > -\infty$ ($\inf A \in \mathbb{R}$).

Sætning I,8,1. En reel talmængde $A \subseteq \mathbb{R}$ er begrænset, hvis og kun hvis den er både opad og nedad begrænset.

Lad $M \subseteq \mathbb{R}^n$ og $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ og $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ funktioner af M ind i $\mathbb{R}$. Ved *supremum* af f på M forstås

$$\sup_M f = \sup \{f(x) \mid x \in M\}$$

og tilsvarende defineres *infimum* af f på M som

$$\inf_M f = \inf \{f(x) \mid x \in M\}.$$

Sætning I,8,2. For alle $x \in M$ er

$$\inf_M f \leq f(x) \leq \sup_M f.$$

Vi siger, at f er *mindre end eller lig* med g på M , hvis $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in M$, og skriver

$$f \leq g \text{ på } M.$$

Sætning I,8,3. $f \leq g$ på $M \Leftrightarrow \inf_M (g-f) \geq 0$.

Ved et *interval* i $\mathbb{R}^n$ forstås en mængde af formen

$$I = \{v = (x_1, \dots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ for } i = 1, \dots, n\} .$$

Ved en *intervalinddeling* af intervallet I forstås en endelig mængde af intervaller $\{I_j \mid j = 1, \dots, k\}$, så

$$I = \cup \{I_j \mid j = 1, \dots, k\}$$

$$I_i \cap I_j = \partial I_i \cap \partial I_j \quad \text{for } i \neq j .$$

Med andre ord, tilsammen udgør de små intervaller netop det store, og to forskellige små intervaller må kun have randpunkter fælles.

Ved *målet* af et interval forstås produktet af sidernes længder,

$$m(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) .$$

Sætning I,8,4. Lad $\{I_j \mid j = 1, \dots, k\}$ være en intervalinddeling af intervallet I . Da er

$$m(I) = \sum_{j=1}^k m(I_j) .$$

Vi skal definere integralet af en funktion, så generelt som muligt, ikke fordi vi ønsker at integrere mystiske funktioner, men for at få rådighed over de stærkeste og dermed bekvemmeste sætninger. Vi går frem ved successivt at inddrage flere funktioner under definitionsområdet for integralet.

a) Konstante funktioner.

Givet et interval I og en konstant funktion

$$k: I \rightarrow \mathbb{R}$$

defineret ved $k(x) = a$ for alle $x \in I$.

Vi definerer *integralet af k over I* som

$$\int_I k(x) dx = a \cdot m(I) .$$

b) Trappefunktioner.

Givet et interval I og en intervalinddeling $\{I_j \mid j = 1, \dots, k\}$,

En funktion

$$t: I \rightarrow \mathbb{R}$$

som er konstant i det indre af hvert I_j , altså

$$t(x) = a_j \text{ for } x \in I_j,$$

kaldes en *trappefunktion* på I .

Vi definerer *integralet af t over I* som

$$\int_I t(x) dx = \sum_{j=1}^k a_j m(I_j).$$

c) Riemann integrable funktioner.

Givet et interval I og en begrænset funktion

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Da findes trappefunktioner s og t på I , så

$$s \leq f \leq t.$$

Vi definerer nu det *øvre* og det *nedre Riemann integral* af f som henholdsvis

$$\bar{R}(f) = \inf \left\{ \int_I t(x) dx \mid f \leq t, t \text{ trappefunktion på } I \right\},$$

$$\underline{R}(f) = \sup \left\{ \int_I s(x) dx \mid s \leq f, s \text{ trappefunktion på } I \right\}.$$

Funktionen f kaldes *Riemann integrabel*, hvis det øvre og det nedre Riemann integral af f har samme værdi, og denne fælles værdi kaldes *integralet af f over I* .

$$\int_I f(x) dx = \bar{R}(f) = \underline{R}(f).$$

Sætning I,8,5. Enhver kontinuert funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ er Riemann integrabel.

Hermed burde vi være tilfredse, men vi ønsker at gå endnu et skridt videre for at få rådighed over sætninger, der ikke gælder for Riemann integralet.

d) Lebesgue integrable funktioner.

Lad $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ være en vilkårlig funktion.

Lad (t_m) være en voksende følge af trappefunktioner,
 $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots$. Da gælder for hvert $x \in \mathbb{R}^n$, at

$$(t_m(x)) \rightarrow \sup\{t_k(x) \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ for } m \rightarrow \infty,$$

hvor supremum kan være $+\infty$.

Hvis $\sup_m t_m(x) \geq f(x)$ for alle x , skriver vi $t_m \nearrow f$.

Den tilsvarende talfølge af integraler

$$(S(t_m))$$

hvor $S(t_m) = \int_{I_m} t_m(x) dx$, idet I_m er det til t_m hørende definitionsinterval, er da voksende,

$$S(t_1) \leq S(t_2) \leq S(t_3) \leq \dots$$

Derfor vil $(S(t_m)) \rightarrow \sup\{S(t_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ for $m \rightarrow \infty$, hvor supremum kan være $+\infty$.

Vi definerer nu *det øvre* og *det nedre Lebesgue integral* som hhv.

$$\bar{L}(f) = \inf\{\sup_m S(t_m) \mid (t_m) \nearrow f(x)\},$$

$$\underline{L}(f) = \sup\{\inf_m S(t_m) \mid (t_m) \searrow f(x)\}.$$

Med andre ord, vi betragter samtlige følger af trappefunktioner, der punktvis konvergerer mod en værdi større end f 's eller divergerer mod uendelig. For hver sådan følge ser vi på grænseværdien for den tilsvarende følge af integraler. Blandt disse tager vi det mindste (infimum), og kalder det *det øvre Lebesgue integral*.

Funktionen f kaldes *Lebesgue integrabel*, hvis det øvre og det nedre Lebesgue integral stemmer overens og er endelige, og denne fælles værdi benævnes *(Lebesgue) integralet af f* og betegnes

$$\int f(x) dx = \bar{L}(f) = \underline{L}(f).$$

Sætning I,8,6. Givet et interval I og en Riemann integrabel funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Defineres

$$f(x) = 0 \quad \text{for } x \notin I,$$

da er den således udvidede funktion

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Lebesgue integrabel med samme integral,

$$\int f(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

Først for Lebesgue integralet gælder den oplagte sammenhæng med stamfunktioner.

Sætning I,8,7. Givet et afsluttet interval $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ og en differentiabel funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ med begrænset differentialkvotient $f(x) = F'(x)$. Da er $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrabel, og

$$\int_I f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Denne sætning bliver ugyldig, hvis "Lebesgue" erstattes af "Riemann".

Givet en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ved den *karakteristiske funktion* for mængden A forstås funktionen

$$1_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

defineret ved

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in A, \\ 0 & \text{for } x \notin A. \end{cases}$$

En delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kaldes *målelig*, hvis dens karakteristiske funktion 1_A er integrabel, og da sættes *målet* lig med integralet af denne funktion,

$$m(A) = \int 1_A(x) dx.$$

Integralet af en funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ over en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ defineres som

$$\int_A f(x) dx = \int 1_A(x) f(x) dx .$$

Regneregler for integraler.

Lad i det følgende $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ og $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ være integrable funktioner.

Sætning I,8,8. Sum og differens af integrable funktioner er integrable med sum og differens som integral.

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx .$$

Corollar I,8,9. Er $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ to disjunkte mængder, $A \cap B = \emptyset$, som f kan integreres over, så gælder

$$\int_{A \cup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx .$$

Sætning I,8,10. Ganges en integrabel funktion med et tal, bliver produktet integrabelt og integralet bliver ganget med tallet. Er $\lambda \in \mathbb{R}$, så gælder

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx .$$

Sætning I,8,11. Integralet bevarer uligheder.

$$f \leq g \Rightarrow \int f(x) dx \leq \int g(x) dx .$$

Sætning I,8,12. Hvis f er integrabel, så er også $|f|$ integrabel og

$$\left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f(x)| dx .$$

Sætning I,8,13. Hvis f og g er integrable og mængden $A = \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ har mål nul,

$$m(A) = 0 ,$$

så har f og g samme integral

$$\int f(x) dx = \int g(x) dx .$$

I dette tilfælde siges f og g at stemme overens *næsten overalt*. Vendingen "næsten overalt" bruges næsten overalt i betydningen "uden for en *nulmængde*", dvs. en mængde med mål nul.

De følgende sætninger gælder for Lebesgue integralet, men ikke for Riemann-integralet.

Sætning I,8,14, om monoton konvergens. Lad (f_m) være en voksende følge af integrable funktioner, $f_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, og antag, at følgen af integraler, $(\int f_m(x) dx)$ er begrænset. Da er funktionen

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$$

defineret næsten overalt (dvs. $= \infty$ højst i en nulmængde), integrabel og

$$\int f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m(x) dx .$$

Altså, ved *monoton* konvergens af funktionsfølgen gælder

$$\boxed{\int \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m(x) dx} .$$

Sætning I,8,15, om majoriseret konvergens. Lad (f_m) være en (punktvis) konvergent følge af integrable funktioner med grænsefunktion $f = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m$. Hvis der findes en integrabel funktion

(majoranten) h , så

$$|f_m| \leq h \text{ for alle } m \in \mathbb{N},$$

så er f integrabel og $\int f(x)dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m(x)dx$.

Altså, ved majoriseret konvergens af funktionsfølgen gælder, idet $0 \leq h$ og $\int h(x)dx < \infty$, at

$$\forall m: |f_m| \leq h \Rightarrow \int \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m(x)dx.$$

Endelig gælder følgende vigtige "spaltningssætning" for integralet.

Fubinis sætning I,8,16. Lad p, q og n være naturlige tal, så $p+q = n$. Lad os skrive

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

idet vi skriver

$$x = (y, z), \text{ hvor } y \in \mathbb{R}^p, z \in \mathbb{R}^q.$$

Hvis $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ er integrabel, så er funktionerne

$$f_y: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$$

defineret ved $f_y(z) = f(y, z)$

for næsten alle y integrable, og funktionen

$$s: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

defineret næsten overalt ved

$$s(y) = \int f_y(z) dz$$

er integrabel, og der gælder formlen

$$\int f(x) dx = \int s(y) dy = \int \left(\int f(y,z) dz \right) dy .$$

Corollar I,8,17. Endvidere ...

$$= \int \left(\int f(y,z) dy \right) dz .$$

Til slut et par bemærkninger om målelige mængder.

Sætning I,8,18. En begrænset åben mængde er målelig.

Sætning I,8,19. En kompakt mængde er målelig.

§9. Vektorrum og lineære funktioner.

Ved et abstrakt *vektorrum* forstås en - ikke tom - mængde V af punkter, der kaldes *vektorer*, med en addition $(v, u) \rightarrow v + u$ og en multiplikation med et tal, der kaldes en *skalar*, $(\lambda, v) \rightarrow \lambda v$, hvor λ er et tal, således at de sædvanlige regneregler gælder, dvs.

$$v + (u + w) = (v + u) + w$$

$$v + u = u + v$$

$$\exists 0 \in V: v + 0 = v \quad (0 \text{ kaldes nulvektoren})$$

$$\exists -v \in V: v + (-v) = 0 \quad (\text{vi skriver } v - v = 0)$$

$$1 \cdot v = v$$

$$(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v)$$

$$(\lambda \mu)v = \lambda(\mu v)$$

$$\lambda(v + u) = (\lambda v) + (\lambda u) .$$

Eftersom produktet er defineret for reelle eller komplekse tal kaldes vektorrummet *reelt* eller *komplekst*, og vi siger *over de reelle (komplekse) tal*.

Ved en *linearkombination* af et sæt af vektorer $v_1, \dots, v_n$ forstås en vektor af formen

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n ,$$

hvor λ_i er tal.

Vektorerne kaldes *lineært uafhængige*, hvis den eneste linearkombination, der fremstiller 0-vektoren, er den, hvor alle koefficienterne (o: tallene) er 0.

Tilsvarende kaldes vektorerne *lineært afhængige*, hvis der findes en linearkombination, der fremstiller 0-vektoren, uden at alle koefficienter er 0. En sådan fremstilling af 0-vektoren kaldes en *lineær afhængighed* eller *relation* mellem vektorerne.

En ikke tom delmængde U af et vektorrum V kaldes et *underrum*, hvis den selv udgør et vektorrum.

Sætning I,9,1. En delmængde U af et vektorrum V er et underrum, hvis og kun hvis $U \neq \emptyset$ og det for alle $u, v \in U$ og alle tal λ gælder, at

$$u + v \in U, \quad \lambda u \in U.$$

Sætning I,9,2. Fællesmængden af (to) underrum er et underrum.

Sætning I,9,3. Givet $M \subseteq V$ en mængde af vektorer. Det mindste underrum, der indeholder M , er fællesmængden af alle underrum, der indeholder M , og består af samtlige linearkombinationer af vektorer fra M .

Det i Sætning I,9,3 omtalte mindste underrum siges at være *frembragt* af M , og betegnes $V(M)$. Det underrum, der frembringes af to andre i forening, $V(U_1 \cup U_2)$, kaldes *summen* af underrummene og skrives også $U_1 + U_2$. Hvis to underrum kun har $\{0\}$ fælles, kaldes de *disjunkte*, og i dette tilfælde benævnes deres sum "*direkte*" og betegnes $U_1 \oplus U_2$.

En mængde af lineært uafhængige vektorer, B , der frembringer hele vektorrummet, V , altså $V(B) = V$, kaldes en *basis*.

Sætning I,9,4. Lad M være en mængde af lineært uafhængige vektorer. Da er M en basis for $V(M)$.

Givet en mængde af vektorer, M . Ved *rangen* af M forstås det største antal lineært uafhængige vektorer, der kan udtages af M . (Rangen kan være ∞ .)

Rangen af et underrum kaldes *dimensionen* af underrummet.

Sætning I,9,5. Har vektorrummet V endelig dimension n , så er ethvert sæt af n lineært uafhængige vektorer fra V en basis for V , og omvendt.

Sætning I,9,6. (*Grassmanns udskiftningssætning*). Lad V være et vektorrum af dimension n med basis B . Et sæt af m lineært uafhængige vektorer kan suppleres til en basis med $n-m$ af vektorerne fra B .

Sætning I,9,7. Lad U_1 og U_2 være underrum af samme vektorrum. Da gælder dimensionsformlen

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) .$$

Lad nu U og V være vektorrum over de samme tal. En funktion

$$f: U \rightarrow V$$

kaldes *lineær*, hvis

$$f(u+v) = f(u) + f(v) ,$$

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) .$$

Sætning I,9,8. Lad $f: U \rightarrow V$ være en lineær funktion af et vektorrum ind i et andet. Da er mængderne

$$f(U) \subseteq V \quad \text{og} \quad f^{-1}(0) \subseteq U$$

underrum af henholdsvis V og U .

De i sætningen nævnte rum kaldes hhv. *billedrummet* og *kernen* for funktionen f .

Sætning I,9,9. Lad $f: U \rightarrow V$ være en lineær funktion og U være endelig-dimensional. Da gælder

$$\dim(f(U)) + \dim(f^{-1}(0)) = \dim U .$$

Summen af dimensionerne af kerne og billede er lig rummets dimension.

Sætning I,9,10. Lad $f: U \rightarrow V$ være en lineær funktion. Funktionen f er injektiv, hvis og kun hvis kernen er $\{0\}$.

Sætning I,9,11. Lad $f: U \rightarrow V$ være en lineær funktion ind i et endelig dimensionalt vektorrum V . Funktionen f er surjektiv, hvis og kun hvis

$$\dim f(U) = \dim V.$$

Corollar I,9,12. Lad $f: U \rightarrow V$ være en lineær funktion af et vektorrum U ind i et vektorrum V , hvor U og V har samme endelige dimension. Da er f bijektiv, hvis og kun hvis kernen for f er $\{0\}$.

Sætning I,9,13. Lad $f: U \rightarrow V$ være en lineær bijektiv funktion. Da har f en invers $f^{-1}: V \rightarrow U$, som er lineær (og bijektiv).

En lineær bijektiv funktion kaldes også en *isomorfi*.

Sætning I,9,14. Lad U, V og W være vektorrum over samme tal. Er nu $f: U \rightarrow V$ og $g: V \rightarrow W$ lineære, så er $g \circ f: U \rightarrow W$ lineær.

Koordinater i endelig dimensionale vektorrum.

Sætning I,9,15. Lad V være et n -dimensionalt vektorrum og $e_1, \dots, e_n$ en basis for V . Til enhver vektor $v \in V$ findes netop ét talsæt $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, så

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Det i Sætning I,9,15 nævnte talsæt kaldes *koordinaterne* til v med hensyn til basen $e_1, \dots, e_n$.

Sætning I,9,16. Lad V være et n -dimensionalt vektorrum og $e_1, \dots, e_n$ en basis for V . Funktionen

$$k: V \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

der afbildes $(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ er en isomorfi.

Lad nu U og V være vektorrum af dimension m og n henholdsvis med baser $u_1, \dots, u_m$ og $v_1, \dots, v_n$. En lineær funktion

$$f: U \rightarrow V$$

kan beskrives i baserne ved funktionen

$$k_V \circ f \circ k_U^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Sætter vi

$$f(u_i) = a_{1i} v_1 + \dots + a_{ni} v_n \quad \text{for } i = 1, \dots, m,$$

kan koordinatafbildningen beskrives som

$$y_j = a_{j1} x_1 + \dots + a_{jm} x_m \quad \text{for } j = 1, \dots, n.$$

Dette skrives

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

eller kompakt

$$\underline{y} = \underline{A} \underline{x}.$$

Talskemaerne kaldes *matricer* (en *matrix*). *Matrixproduktet* defineres generelt således. Er $\underline{A} = (a_{ji})_{n \times m}$ og $\underline{B} = (b_{ik})_{m \times p}$ matricer, så er $\underline{A} \underline{B}$ matricen

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ji} b_{ik} \right)_{n \times p}.$$

Delskemaerne

$$(a_{j1} \dots a_{jm}) \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

kaldes hhv. *j'te række* og *i'te søjle* i matricen $\underline{\underline{A}}$. Produktet dannes ved at sætte elementet j,k til "produktet" af j 'te række fra $\underline{\underline{A}}$ med k 'te søjle fra $\underline{\underline{B}}$.

Sætning I,9,17. Lad nu $f: U \rightarrow V$ og $g: V \rightarrow W$ være lineære funktioner af endelig dimensionale vektorrum med tilhørende matricer $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ hhv. Da har den lineære funktion $g \circ f: U \rightarrow W$ matricen

$$\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}.$$

Er $y = f(x)$ og $z = g(y)$ skrevet som

$$\underline{y}_i = \underline{\underline{A}} \underline{x}_i \quad \text{og} \quad \underline{z}_i = \underline{\underline{B}} \underline{y}_i$$

gælder altså (simpelthen)

$$\underline{z}_i = \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{A}} \underline{x}_i) = (\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}) \underline{x}_i.$$

Ved den *transponerede* af en matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n \times m}$ forstås den "spejlvendte" matrix $\underline{\underline{A}}' = (a'_{ij})_{m \times n}$, hvor

$$a'_{ij} = a_{ji}.$$

Ved den *konjugerede* af en matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n \times m}$ forstås den matrix, hvor alle elementer er de tilsvarende konjugerede til $\underline{\underline{A}}$'s, altså

$$\overline{\underline{\underline{A}}} = (\overline{a}_{ij})_{n \times m}.$$

Der gælder følgende regneregler

$$\overline{(\underline{\underline{A}}')} = (\overline{\underline{\underline{A}}})'$$

$$(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{B}}' \underline{\underline{A}}'$$

$$\overline{\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}} = \overline{\underline{\underline{A}}} \overline{\underline{\underline{B}}}.$$

Sætning I,9,18. Lad $f: U \rightarrow V$ være en lineær funktion, som i et koordinatsystem er beskrevet som $\underline{y}_i = \underline{A} \underline{x}_i$. Da er rangen af f det samme som antallet af uafhængige blandt $f(u_1), \dots, f(u_n)$, hvor $u_1, \dots, u_n$ er en basis for U , og det samme som antallet af uafhængige søjler i matricen $\underline{A}$, og det samme som antallet af uafhængige rækker i matricen $\underline{A}$.

Vi kan derfor definere *rangen* af en matrix som antallet af uafhængige rækker eller søjler i matricen.

Lad U være et vektorrum med to baser, $u_1, \dots, u_n$ og $e_1, \dots, e_n$. En vektor $u \in U$ kan da udtrykkes i koordinater på to måder

$$u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n = \hat{x}_1 e_1 + \dots + \hat{x}_n e_n.$$

Dette giver en funktion $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ som bliver en isomorfi

$$(x_1, \dots, x_n) = s(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n).$$

Til s hører en matrix $\underline{S}$, hvis søjler er koordinatsættene til e_j med hensyn til basen $u_1, \dots, u_n$.

$$e_j = s_{1j} u_1 + \dots + s_{nj} u_n = 0e_1 + \dots + 1 \cdot e_j + \dots + 0e_n$$

$$\underline{x}_i = \underline{S} \hat{\underline{x}}_i.$$

Nu kan vi også udtrykke u_i i basen $e_1, \dots, e_n$ og danne funktionen

$$\hat{\underline{x}}_i = \underline{T} \underline{x}_i.$$

Der må gælde, at

$$\hat{\underline{x}}_i = \underline{T}(\underline{S} \hat{\underline{x}}_i) = (\underline{T} \underline{S}) \hat{\underline{x}}_i$$

og

$$\underline{x}_i = \underline{S}(\underline{T} \underline{x}_i) = (\underline{S} \underline{T}) \underline{x}_i.$$

Derfor må

$$\underline{S} \underline{T} = \underline{T} \underline{S} = \underline{E},$$

hvor $\underline{E}$ er matricen med 1 i *diagonalen* og 0 ellers:

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

som kaldes *enhedsmatricen*. Vi skriver derfor $\underline{T} = \underline{S}^{-1}$ og kalder $\underline{T}$ den *inverse matrix* til $\underline{S}$.

Sætning I,9,19. Enhver kvadratisk $n \times n$ -matrix af rang n har en invers.

En sådan matrix kaldes *regulær*, andre kvadratiske matricer kaldes *singulære*.

Lad nu $f: U \rightarrow V$ være en lineær funktion af rang r . Vi vælger en basis $u_1, \dots, u_n$ for U , så $u_{r+1}, \dots, u_n$ er en basis for kernen $f^{-1}(0)$ for f (Sætning I,9,6 og I,9,9). Vi supplerer $f(u_1), \dots, f(u_r)$ til en basis for V (Sætning I,9,6). I disse baser bliver matricen for f

$$(*) \quad \begin{pmatrix} \underline{E}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}$$

en matrix med r ettaller i "diagonalen" og ellers 0.

Sætning I,9,20. Lad $\underline{A}$ være en $n \times m$ matrix af rang r . Da findes regulære $n \times n$ og $m \times m$ matricer $\underline{S}$ og $\underline{T}$, så $\underline{S} \underline{A} \underline{T}$ har formen $(*)$.

Sætning I,9,21. En lineær funktion af et vektorrum ind i et andet har kun én egenskab, der er invariant overfor koordinattransformation, rangen.

§10. Determinanter.

Lad der være givet en lineær funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Da vil enhedsvektorerne afbildes i n vektorer, som evt. udspænder et parallelepipedum i $\mathbb{R}^n$. Disse n vektorer er netop søjlerne i den til f hørende matrix $\underline{A}$.

Sætning I, 10, 1. Der findes én og kun én volumenfunktion $\det(\underline{A})$ med værdier i $\mathbb{R}$ som opfylder følgende krav:

- 1) Søjlerne i $\underline{A}$ lineært afhængige $\Leftrightarrow \det \underline{A} = 0$
- 2) Hvis $\hat{\underline{A}}$ er dannet ud fra $\underline{A}$ ved ombytning af to søjler, så gælder

$$\det \hat{\underline{A}} = -\det \underline{A}.$$

- 3) Hvis $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ er søjlerne i $\underline{A}$, så er $\det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ en lineær funktion af hvert $\underline{a}_j$.

- 4) Enhedsterningen har volumen 1,

$$\det \underline{E} = 1.$$

Lad $\underline{A}$ være en matrix og a_{ij} det (i,j) 'te element. Vi stryger nu i 'te række og j 'te søjle i $\underline{A}$ og rykker de tilbagestående elementer sammen til en $(n-1) \times (n-1)$ -matrix. Denne kaldes *det (i,j) 'te komplement* og betegnes $\underline{A}^{(i,j)}$. Der gælder nu følgende reduktionsformel

Sætning I, 10, 2.

$$\det \underline{A} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \underline{A}^{(i,j)}, \quad j \text{ fast.}$$

Denne formel kaldes *udvikling af determinanten efter j 'te søjle*.

Permutationen.

En bijektiv funktion af $\{1, \dots, n\}$ på sig selv kaldes en *permutation* af tallene fra 1 til n . Mængden af permutationer af $\{1, \dots, n\}$ betegnes S_n og benævnes *den symmetriske gruppe*. Er p og q to permutationer, vil den sammensatte $p \circ q$ være en permutation.

Sætning I,10,3. Der findes én og kun én fortegnsfunktion

$\sigma: S_n \rightarrow \{-1, 1\}$, som opfylder

$$\sigma(p \circ q) = \sigma(p) \sigma(q)$$

$$\sigma((1, 2) \rightarrow (2, 1)) = -1$$

Ved hjælp af denne kan determinanten udtrykkes i formlen:

Sætning I,10,4.

$$\det A = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \cdots a_{np(n)}.$$

Denne formel tillader os at definere determinanten for en matrix med komplekse elementer, selv om volumenfortolkningen her bliver noget søgt. Sætning I,10,2 gælder uændret i det komplekse tilfælde.

Sætning I,10,5. $\det \underline{A}' = \det \underline{A}$.

Corollar I,10,6. I sætningerne I,10,1 og I,10,2 kan søjler erstattes af rækker.

Sætning I,10,7.

$$\det(\underline{A} \ \underline{B}) = \det \underline{A} \det \underline{B}.$$

Corollar I,10,8.

$$\det(\underline{A}^{-1}) = (\det \underline{A})^{-1}.$$

§11. Egenverdier og egenvektorer.

Lad V være et vektorrum og $f: V \rightarrow V$ en lineær funktion af vektorrummet *ind i sig selv*.

Ved en *egenverdi* og en tilhørende *egenvektor* for f forstås et tal λ og en vektor $e \in V$, $e \neq 0$, som opfylder

$$f(e) = \lambda e .$$

Sætning I,11,1. En vektor $e \neq 0$ er egenvektor for f hørende til en egenverdi λ , hvis og kun hvis e tilhører kernen for

$$x \in V \rightarrow f(x) - \lambda x \in V .$$

Corollar I,11,2. Et tal λ er egenverdi for f , hvis og kun hvis

$$\dim \text{Ker}(x \rightarrow f(x) - \lambda x) \geq 1 .$$

Den i Corollar I,11,2 nævnte kerne kaldes *egenrummet* for egenverdien λ , og dets dimension kaldes *egenverdipliciteten* for egenverdien λ .

Sætning I,11,3. Summen af egenverdipliciteterne for de forskellige egenverdier er højst vektorrummets dimension.

Corollar I,11,4. Hvis vektorrummet har endelig dimension n og summen af egenverdipliciteterne er lig med n , så kan vi vælge en basis for vektorrummet af *lutter* egenvektorer, hvorved funktionen beskrives af en diagonalmatrix med egenverdierne i diagonalen, hver så mange gange som egenverdipliciteten angiver.

Lad nu V være et n -dimensionalt vektorrum over de komplekse tal, evt. $V = \mathbb{C}^n$, og lad $f: V \rightarrow V$ være givet ved $n \times n$ -matricen $\underline{A}$; dvs. $y = f(x) \Leftrightarrow \underline{y} = \underline{A} \underline{x}$. Vi kalder det egenverdier og egenvektorer for f eller for $\underline{A}$ i flæng.

Corollar I, 11, 4 siger, at under de nævnte forudsætninger findes en basis af egenvektorer, altså en koordinattransformation givet ved den regulære matrix $\underline{S}$

$$\underline{x} = \underline{S} \underline{\hat{x}} \quad \text{og} \quad \underline{\hat{x}} = \underline{S}^{-1} \underline{x}$$

så funktionen i de ny koordinater får udseendet

$$\underline{\hat{y}} = \underline{S}^{-1} \underline{y} = \underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{x} = \underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S} \underline{\hat{x}}$$

med matricen

$$\underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \underline{\Lambda}$$

hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ er egenverdierne for $\underline{A}$.

Vi siger, i dette tilfælde, at $\underline{A}$ er *regulær ækvivalent* med en diagonalmatrix.

Bemærk omformningen

$$\underline{A} \underline{S} = \underline{S} \underline{\Lambda}.$$

En søjle på hver side er hhv:

$$\underline{A} \underline{s}_j = \underline{s}_j \lambda_j$$

hvor $\underline{s}_j$ er j 'te søjle i $\underline{S}$ og λ_j den j 'te egenverdi. Der står at læse, at søjlerne i $\underline{S}$ netop er (koordinaterne til) egenvektorerne for $\underline{A}$.

Et tal λ er egenverdi, hvis kernen for

$$\underline{x} \rightarrow \underline{A} \underline{x} - \lambda \underline{x}$$

har dimension ≥ 1 . Nu kan funktionen skrives

$$\underline{y} = (\underline{A} - \lambda \underline{E}) \underline{x}$$

som har kerne større end 0, netop når matricen er singular, dvs. netop når

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0 \quad .$$

Polynomiet $\det(x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})$ kaldes det *karakteristiske* polynomium for matricen $\underline{\underline{A}}$ og har åbenbart grad n .

Sætning I,11,5. Et tal λ er egenværdi for en matrix $\underline{\underline{A}}$, hvis og kun hvis λ er rod i det karakteristiske polynomium for $\underline{\underline{A}}$.

En egenværdi for $\underline{\underline{A}}$ har en *multiplicitet* som rod i det karakteristiske polynomium. Ifølge algebraens fundamentalsætning (I,3,6) er summen af egenværdiernes rod-multipliciteter netop n .

Sætning I,11,6. For enhver egenværdi for en matrix gælder, at egenværdimultipliciteten er mindre end eller lig med rodmultipliciteten.

Selv om det ikke altid er muligt at finde en basis af egenvektorer, kan man dog næsten diagonalisere enhver matrix.

Sætning I,11,7. Enhver matrix $\underline{\underline{A}}$ er regulær ækvivalent med en matrix af formen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & 1 & \lambda_1 & & & 0 \\ & & 1 & \cdot & & \\ & & & \cdot & & 0 \\ 0 & & & & \lambda_1 & \\ & & & & 0 & \lambda_2 \\ & 0 & & & & 1 & \lambda_2 \\ & & & & & & 1 & \cdot \\ & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

hvor λ_j er egenverdi for $\underline{A}$, og 1-tallene i bidiagonalen kun kan forekomme, hvor egenverdien over og til højre for 1-tallet er den samme.

Den i Sætning I,11,7 viste form kaldes *Jordans normalform*, og er det nærmeste til en diagonalform, vi med sikkerhed kan opnå.

§12. Ortogonalsystemer.

Lad V være et vektorrum over de reelle eller de komplekse tal. Ved et *indre produkt* i V forstås en funktion $\cdot: (u,v) \in V \times V \rightarrow u \cdot v \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ med følgende egenskaber 1), ..., 4):

	over de reelle tal	over de komplekse tal
1)	$u \cdot v = v \cdot u$	$u \cdot v = \overline{v \cdot u}$
2)	$\lambda(u \cdot v) = (\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v)$	$\lambda(u \cdot v) = (\lambda u) \cdot v = u \cdot (\overline{\lambda} v)$
3)	$(u_1 + u_2) \cdot v = (u_1 \cdot v) + (u_2 \cdot v)$	$(u_1 + u_2) \cdot v = (u_1 \cdot v) + (u_2 \cdot v)$
4)	$v \cdot v > 0$ for $v \neq 0$	$v \cdot v$ reel, positiv for $v \neq 0$.

Et indre produkt i et vektorrum tillader os at tænke ret geometrisk. Vi indfører også en geometrisk sprogbrug.

To vektorer u og v siges at *stå vinkelret på hinanden* eller at være *ortogonale*, hvis $u \cdot v = 0$. Vi skriver så også $u \perp v$.

Vi definerer en vektors *længde* eller *norm* som

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}.$$

Denne norm har de sædvanlige egenskaber, vi venter af længden.

Sætning I,12,1. Normen $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ har egenskaberne 1) - 3):

- 1) $v \neq 0 \Leftrightarrow \|v\| > 0$
- 2) $\|\lambda v\| = \|\lambda\| \cdot \|v\|$
- 3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Egenskaben 3) kaldes *trekantsuligheden*. Ved *afstanden* mellem to vektorer u og v forstås $\|u-v\|$.

Mellem indre produkt og norm gælder *Cauchy-Schwartz' ulighed*:

Sætning I,12,2.

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|.$$

"=" netop når u og v er lineært afhængige.

I analogi med sædvanlig geometri gælder den *Pythagoræiske* læresætning:

Sætning I,12,3. Hvis $u \cdot v = 0$, så

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

(og for reelle vektorrum også omvendt).

Givet to vektorer v og $u \neq 0$. Ved en *projektion* af v på u forstås en vektor, proportional med u , altså αu , som opfylder $(v - \alpha u) \perp u$.

Givet en vektor v og et underrum $U \subseteq V$. Ved en *projektion* af v på U forstås en vektor $u \in U$ for hvilken $v - u$ er ortogonal på enhver vektor fra U .

Sætning I,12,4. Givet to vektorer v og $u \neq 0$. Projektionen af v på u er entydig bestemt som

$$p(v) = (v \cdot u) \frac{u}{\|u\|^2}$$

og $p(v)$ er den nærmeste vektor ved v i underrummet frembragt af u .

For at generalisere sætningen til vilkårlige underrum må vi indføre en bekvem basis.

Givet et vektorrum V og et underrum U . Ved en *ortonormal basis* for U forstås en basis $e_1, e_2, \dots$ med egenskaberne

$$e_i \cdot e_j = 0 \quad \text{for } i \neq j \quad (\text{ortogonalitet})$$

$$\|e_i\| = 1 \quad \text{for alle } i \quad (\text{normering}).$$

Sætning I,12,5. Givet en vektor v og et endelig dimensionalt underrum U med en ortonormal basis $e_1, \dots, e_m$. Projektionen af v på U er entydig bestemt som

$$p(v) = \sum_{j=1}^m (v \cdot e_j) e_j ,$$

og $p(v)$ er den nærmeste vektor ved v i underrummet U .

Corollar I, 12, 6. Er U et m -dimensionalt underrum med en ortonormal basis $e_1, \dots, e_m$, og er U_1 et $(m+1)$ -dimensionalt underrum med basis $e_1, \dots, e_m, \hat{e}_{m+1}$, dvs. $U \subseteq U_1$, så vil $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}$ være en ortonormal basis for U_1 , hvor e_{m+1} er

$$e_{m+1} = \frac{\hat{e}_{m+1} - p(\hat{e}_{m+1})}{\|\hat{e}_{m+1} - p(\hat{e}_{m+1})\|} .$$

Sætning I, 12, 7. Ethvert endelig-dimensionalt vektorrum har en ortonormal basis.

Den i Corollar I, 12, 6 viste fremgangsmåde til fremstilling af en ortonormal basis kaldes *Gram-Schmidts ortogonalisering*.

Sætning I, 12, 8. Lad V være et vektorrum af dimension n med en ortonormal basis $e_1, \dots, e_n$. Lad vektorerne v og u i V have koordinaterne $(x_1, \dots, x_n)$ og $(y_1, \dots, y_n)$. Da er

$$v \cdot u = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n .$$

Ortogonale og unitære matricer.

Ved en koordinattransformation

$$\underline{x} = \underline{S} \hat{\underline{x}}$$

fortolkes søjlerne $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$ i $\underline{S}$ som basisvektorer for koordinaterne $\hat{\underline{x}}$, således som basisvektorerne skrives i $\underline{x}$ -koordinater.

Hvis søjlerne i $\underline{S}$ udgør en ortonormal basis, så kaldes $\underline{S}$ *ortogonal*, hvis den er reel, og *unitær*, hvis den er kompleks.

Sådanne matricer har den behagelige egenskab, at deres inverse er umiddelbart til at skrive op.

Sætning I,12,9. En reel $n \times n$ -matrix $\underline{S}$ er ortogonal, hvis og kun hvis dens transponerede er dens inverse:

$$\underline{S}^{-1} = \underline{S}' .$$

Sætning I,12,10. En (kompleks) $n \times n$ -matrix $\underline{S}$ er unitær, hvis og kun hvis dens transponerede konjugeret er dens inverse:

$$\underline{S}^{-1} = \overline{\underline{S}}' .$$

Corollar I,12,11. En matrix er ortogonal eller unitær, hvis og kun hvis rækkerne udgør et ortonormalsystem.

Vi kaldte matricerne $\underline{A}$ og $\underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S}$ regulær-ækvivalente. Hvis $\underline{S}$ kan vælges ortogonal, kaldes de *ortogonalækvivalente*, og hvis $\underline{S}$ kan vælges unitær, kaldes de *unitærekvivalente*.

Symmetriske, Hermite'ske og normale matricer.

Lad nu $\underline{A}$ være en $n \times n$ -matrix, der beskriver en lineær funktion af et n -dimensional vektorrum ind i sig selv.

En sådan matrix kaldes *normal*, hvis vektorrummet har en ortonormal basis af egenvektorer for $\underline{A}$. Dette begreb er langt mere restriktivt for reelle end for komplekse matricer. Det skyldes, at reelle matricer som regel må finde sig i at have komplekse egenverdier.

Sætning I, 12, 12. En reel $n \times n$ -matrix $\underline{A}$ er normal, hvis og kun hvis den er symmetrisk:

$$\underline{A} = \underline{A}' \Leftrightarrow \exists \underline{S}: \underline{S}'\underline{S} = \underline{E} \wedge \underline{S}'\underline{A}\underline{S} = \underline{\Lambda}.$$

Her betegner $\underline{\Lambda}$ diagonalmatricen med $\underline{A}$'s (reelle) egenverdier i diagonalen. Altså er $\underline{A}$ ortogonalækvivalent med en reel diagonalmatrix.

Vi definerer den *adjungerede* matrix $\underline{A}^*$ til en matrix $\underline{A}$ som den transponerede konjugeret, altså

$$\underline{A}^* = \overline{\underline{A}}'.$$

En (kompleks) matrix kaldes Hermite'sk, hvis den er sin egen adjungerede: $\underline{A} = \underline{A}^*$.

Sætning I, 12, 13. En kompleks $n \times n$ -matrix $\underline{A}$ er normal og har luttet reelle egenverdier, hvis og kun hvis den er Hermite'sk:

$$\underline{A} = \underline{A}^* \Leftrightarrow \exists \underline{S}: \underline{S}^*\underline{S} = \underline{E} \wedge \underline{S}^*\underline{A}\underline{S} = \underline{\Lambda}.$$

Her betegner $\underline{\Lambda}$ den reelle diagonalmatrix med $\underline{A}$'s egenverdier i diagonalen. Altså er $\underline{A}$ unitær ækvivalent med en reel diagonalmatrix.

Sætning I, 12, 14. En (kompleks) $n \times n$ -matrix $\underline{A}$ er normal, hvis og kun hvis den kommuterer med sin adjungerede:

$$\underline{A}^*\underline{A} = \underline{A}\underline{A}^* \Leftrightarrow \exists \underline{S}: \underline{S}^*\underline{S} = \underline{E} \wedge \underline{S}^*\underline{A}\underline{S} = \underline{\Lambda}.$$

Her betegner $\underline{\Lambda}$ den (komplekse) diagonalmatrix, der har $\underline{A}$'s egenverdier i diagonalen. Altså er $\underline{A}$ unitærækvivalent med en diagonalmatrix.

Bemærkning. Hvis en reel, men ikke symmetrisk, matrix er normal, så har den komplekse egenverdier, der ikke er reelle.

Kvadratiske former.

En funktion af et reelt vektorrum ind i de reelle tal af form i koordinater $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x}' \underline{B} \underline{x} ,$$

hvor $\underline{B}$ er en reel $n \times n$ -matrix, kaldes en *kvadratisk form*. Nu er

$$\underline{x}' \underline{B} \underline{x} = \underline{x}' \underline{B}' \underline{x}$$

så den samme funktion kan skrives

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x}' \underline{A} \underline{x} ,$$

hvor $\underline{A} = \frac{1}{2}(\underline{B} + \underline{B}')$ er reel og symmetrisk.

Ifølge Sætning I,12,12 er $\underline{A}$ normal, så der findes en koordinattransformation

$$\underline{x} = \underline{S} \underline{x}$$

hvor $\underline{S}$ er ortogonal og $\underline{S}' \underline{A} \underline{S} = \underline{\Lambda}$ er diagonal (og reel).

I de nye koordinater får formen udseendet

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x}' \underline{S}' \underline{A} \underline{S} \underline{x} = \underline{x}' \underline{\Lambda} \underline{x} = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 .$$

Sætning I,12,15. Til enhver kvadratisk form

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x}' \underline{B} \underline{x} ,$$

hvor $\underline{B}$ er en reel matrix, findes en koordinattransformation, så den kvadratiske form i de ny koordinater får udseendet

$$\underline{x} \rightarrow \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 .$$

Koefficienterne er egenverdierne for matricen $\frac{1}{2}(\underline{B} + \underline{B}')$.

§13. Differential- og integralregning i flere reelle variable.A. Differentialregning.

Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åben mængde og

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

en funktion. Lad $x \in \Omega$ være et punkt og $r > 0$ være så lille, at $K(x,r) \subseteq \Omega$. Lad $dx \in \mathbb{R}^n$ være en vektor med $\|dx\| \leq r$. (Vi kunne sige, $dx \in K(0,r)$.)

Hvis vi kan skrive

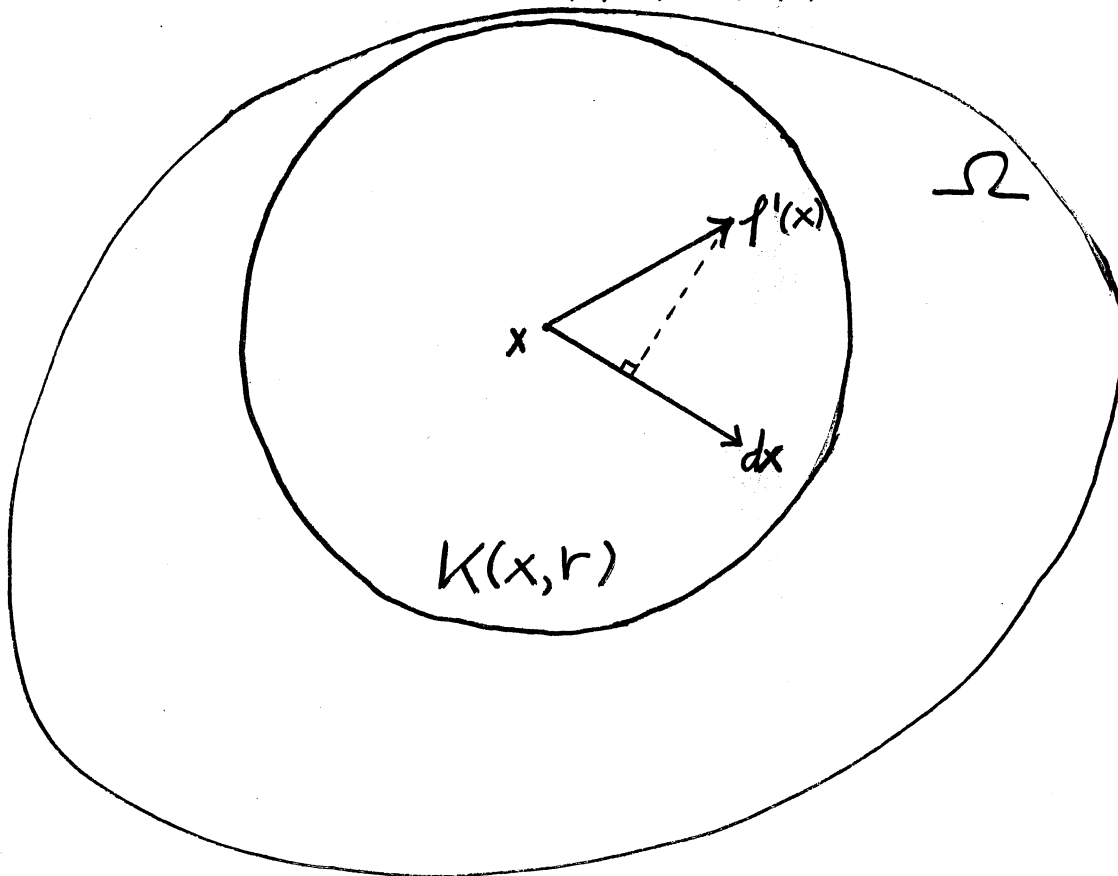
$$f(x+dx) = f(x) + f'(x) \cdot dx + \varepsilon(dx) \cdot \|dx\|, \quad \|dx\| \leq r$$

hvor $f'(x) \in \mathbb{R}^n$ er en vektor, og $\varepsilon(dx)$ er en funktion med

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \varepsilon(dx) = 0,$$

altså kontinuert og 0 i 0, så siger vi, at f er *differentiabel* i x med *differentialet*

$$df(x, dx) = f'(x) \cdot dx.$$



Hvis f er differentiabel i hvert punkt af Ω , siger vi, at f er *differentiabel* i Ω med differentialet

$$df(x, dx) = \nabla f \cdot dx .$$

Vektoren ∇f kaldes *gradienten* af f og er

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_m} \right) .$$

Komponenterne i ∇f kaldes de *partielle afledede* af f . Disse kan evt. udregnes også i tilfælde, hvor f ikke er differentiabel. Vi kan betragte funktionen

$$g(x_1) = f(x_1, \dots, x_n)$$

som en funktion af x_1 med $x_2, \dots, x_n$ fastholdt. Er nu g differentiabel, gælder

$$g'(x_1) = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1}$$

Sætning I,13,1. Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ være åben og $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ en funktion. Hvis de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n)$$

eksisterer og er kontinuerte i Ω , så er f differentiabel med differentialet

$$df(x, dx) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n ,$$

hvor $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$.

Sætning I,13,2. For differentialer gælder regnereglerne

$$d(f \pm g) = df \pm dg$$

$$d(fg) = f dg + g df$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2} .$$

Vi definerer nu rekursivt:

$f \in C^1(\Omega)$, hvis alle partielle afledede, $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ er kontinuerte, altså $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^0(\Omega)$ for $j = 1, \dots, n$.

Rekursionen:

$f \in C^k(\Omega)$, hvis alle $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^{k-1}(\Omega)$ ($j = 1, \dots, n$).

Sætning I,13,3. Hvis $f \in C^2(\Omega)$, så er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{for alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Corollar I,13,4. Hvis $f \in C^k(\Omega)$, vil de blandede afledede ikke afhænge af differentiationernes rækkefølge.

Vi definerer nu *differentialet af m'te orden*

$$d^m f(x, dx) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} \dots dx_{i_m}.$$

Corollar I,13,4 siger nu, at hvis der er gentagelse blandt $(i_1, \dots, i_m)$, kan disse led slås sammen. I stedet for n^m led kan vi nøjes med så mange måder, som m kan skrives som en sum af n tal (≥ 0):

$$m = p_1 + \dots + p_n,$$

hvor p_1 er antallet af dx_1 'er, ..., p_n er antallet af dx_n 'er.

Corollar I,13,5. Differentialet af m'te orden er

$$d^m f(x, dx) = \sum_{|p|=m} \frac{m!}{p!} \dots \frac{\partial^m f(x)}{(\partial x)^p} \cdot (dx)^p,$$

hvor $|p| = p_1 + \dots + p_n$, $p! = p_1! \dots p_n!$, $\frac{\partial^m f}{(\partial x)^p} = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}$
og $(dx)^p = dx_1^{p_1} \dots dx_n^{p_n}$.

Sætning I, 13, 6. (Taylors formel). Hvis $f \in C^k$, så

$$\begin{aligned} f(x+dx) &= \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} d^m f(x, dx) + \frac{1}{k!} d^k f(x+\theta dx, dx) \\ &= \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} d^m f(x, dx) + \varepsilon(dx) \|dx\|^k \end{aligned}$$

hvor $\varepsilon(dx) \rightarrow 0$ for $dx \rightarrow 0$.

Lad nu $f \in C^2(\Omega)$. Taylors formel skrives

$$f(x+dx) = f(x) + \nabla f \cdot dx + \frac{1}{2} \underline{dx}' \underline{H}_f \underline{dx} + \varepsilon(dx) \|dx\|^2,$$

hvor matricen $\underline{H}_f$ kaldes *Hessian* og er

$$\underline{H}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Sætning I, 13, 3 siger, at $\underline{H}_f$ er symmetrisk.

B. Extrema

Vi siger, at f har *lokalt maksimum* i et punkt x , hvis der findes et $r > 0$, så $f(x+dx) \leq f(x)$ for alle dx med $\|dx\| < r$. Tilsvarende defineres *lokalt minimum*.

Sætning I, 13, 7. Hvis $f \in C^2$ har lokalt maksimum (min) i et punkt x , så er $\nabla f(x) = 0$ og $\underline{H}_f(x)$ har ingen positive (neg) egenverdier.

Sætning I,13,8. Hvis $f \in C^2$ og $\nabla f(x) = 0$ og $\underline{H}_f(x)$ har lutter negative (pos) egenverdier, så er x lokalt maksimum (min) for f .

C. Kædereglen.

Lad nu funktionen være ind i $\mathbb{R}^m$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Vi kan skrive $f = (f_1, \dots, f_m)$. Vi siger, at f er differentiable, når $f_1, \dots, f_m$ er differentiable, og

$$df = (df_1, \dots, df_m).$$

Udførligt

$$\begin{aligned} df(x, dx) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n \\ &+ \vdots \\ &\frac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n. \end{aligned}$$

Eller kort

$$\begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

eller kortere

$$\underline{df} = \underline{Df} \underline{dx}.$$

Hvor $\underline{Df}$ kaldes *funktionalmatricen* for f i x .

Sætning I,13,9. Lad nu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Psi \subseteq \mathbb{R}^m$ være åbne, og

$f: \Omega \rightarrow \Psi$, $g: \Psi \rightarrow \mathbb{R}^p$ være differentiable funktioner. Da gælder

regnereglen: $g \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ er differentiablel med

$$\underline{D}(g \circ f) = \underline{D}g \underline{D}f ,$$

hvor produktet er det sædvanlige matrixprodukt

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k} (f) \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad \text{for } i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n .$$

Regnereglen kaldes *kædereglen*.

Reglen kan også formuleres for differentialer:

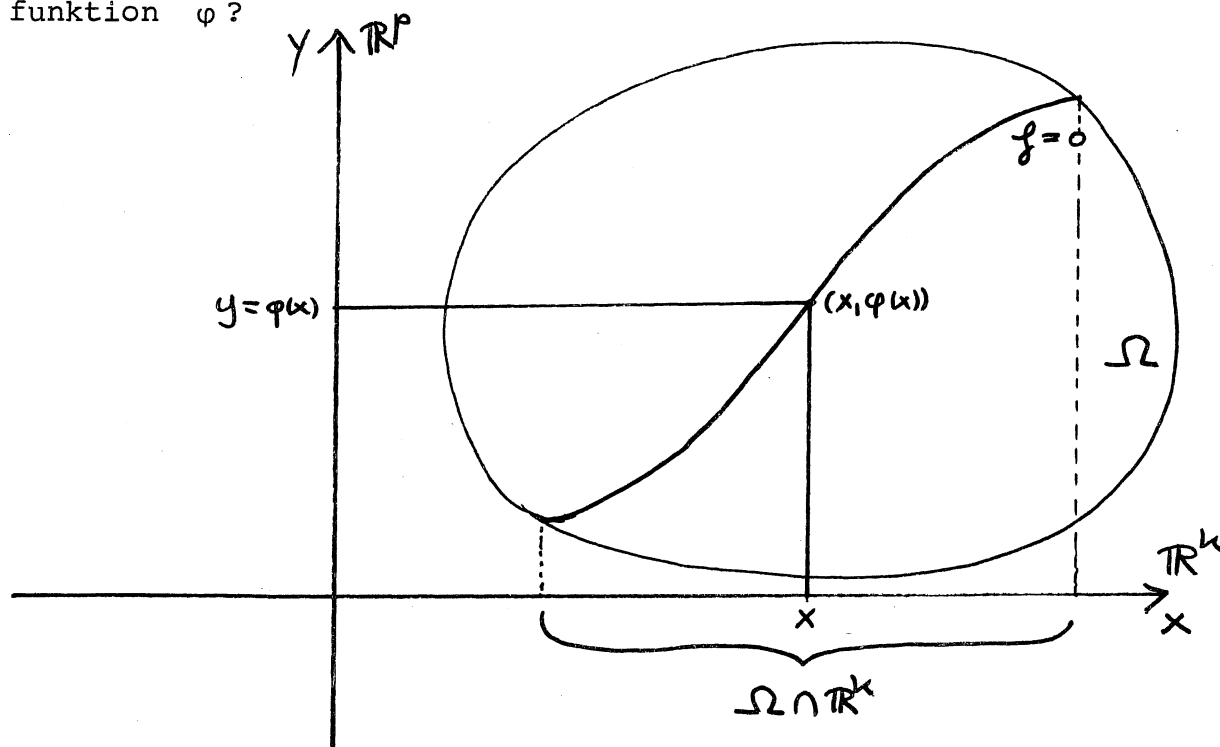
$$\underline{d}(g \circ f) = \underline{D}g \underline{d}f .$$

D. Implicit given funktion.

Lad nu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+p}$ og $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ en C^1 -funktion. Vi betragter med $x \in \mathbb{R}^k$ og $y \in \mathbb{R}^p$ mængden

$$F = \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = 0\} .$$

Problem: Findes en funktion $\varphi: \Omega \cap \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$, så $F = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in \Omega \cap \mathbb{R}^k\}$; med andre ord, er F graf for en funktion φ ?



Løsningen φ siges at være *implicit givet* ved f .

Sætning I, 13, 10. Hvis $p \times p$ -matricen i punktet (x, y)

$$\underline{D}_y f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)_{i,j},$$

er regulær, så findes en omegn $U \times V$ om (x_0, y_0) og en C^1 -funktion $\varphi: U \rightarrow V$, som opfylder $y_0 = \varphi(x_0)$ og $f(x, \varphi(x)) = 0$ for $x \in U$ og

$$\underline{D}\varphi = -(\underline{D}_y f)^{-1} \underline{D}_x f,$$

hvor $\underline{D}_x f$ er $p \times k$ -matricen

$$\underline{D}_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

E. Omvendt funktion.

Lad nu $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Da er funktionalmatricen $\underline{D}f$ kvadratisk. Dens determinant kaldes *Jacobi-determinanten* for funktionen. Den betegnes $\mathcal{J}f$.

$$\boxed{\mathcal{J}f = \det \underline{D}f}.$$

Sætning I, 13, 11. Lad $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en C^1 -funktion. Hvis $\mathcal{J}f(x_0) \neq 0$, så findes en åben omegn $U \subseteq \Omega$ af x_0 , så $\mathcal{J}f(x) \neq 0$ for alle $x \in U$, og så $V = f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ er en åben omegn om $y_0 = f(x_0)$, og der findes en C^1 -funktion $g: V \rightarrow U$, så $f(g(y)) = y$ for alle $y \in V$ og $g(f(x)) = x$ for alle $x \in U$, og der gælder

$$\underline{D}g(y) = (\underline{D}f(g(y)))^{-1}.$$

Funktionen g er en omvendt funktion til f , og sætningen siger, at er $Jf \neq 0$, så vil den omvendte findes, være differentiabel og funktionalmatricen er den inverse til f' 's.

En sådan funktion f med omvendt g opfattes som et differentiablet koordinatskift. Jf angiver intuitivt koordinattransformationens lokale arealforhold.

F. Extrema under bibetingelser.

Lad nu $f_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ og $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ være C^1 -funktioner. Vi siger, at f_0 har *lokalt maksimum* i x_0 under bibetingelsen $f(x) = c$, hvor $c \in \mathbb{R}^p$, hvis $f(x_0) = c$ og for alle x med $\|x - x_0\| < r$ gælder,

$$f(x) = c \Rightarrow f_0(x) \leq f_0(x_0).$$

Tilsvarende defineres *lokalt minimum under bibetingelse*.

Sætning I,13,12. Lad $f_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ og $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ være C^1 -funktioner. Hvis funktionen f_0 har et ekstremum i punktet x_0 under bibetingelsen $f(x) = c$, da gælder, at funktionalmatricen for

$$(f_0, f): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$$

i punktet x_0 har rang $\leq p$, altså

$$\text{rang } D(f_0, f)(x_0) \leq p.$$

G. Substitution i integraler.

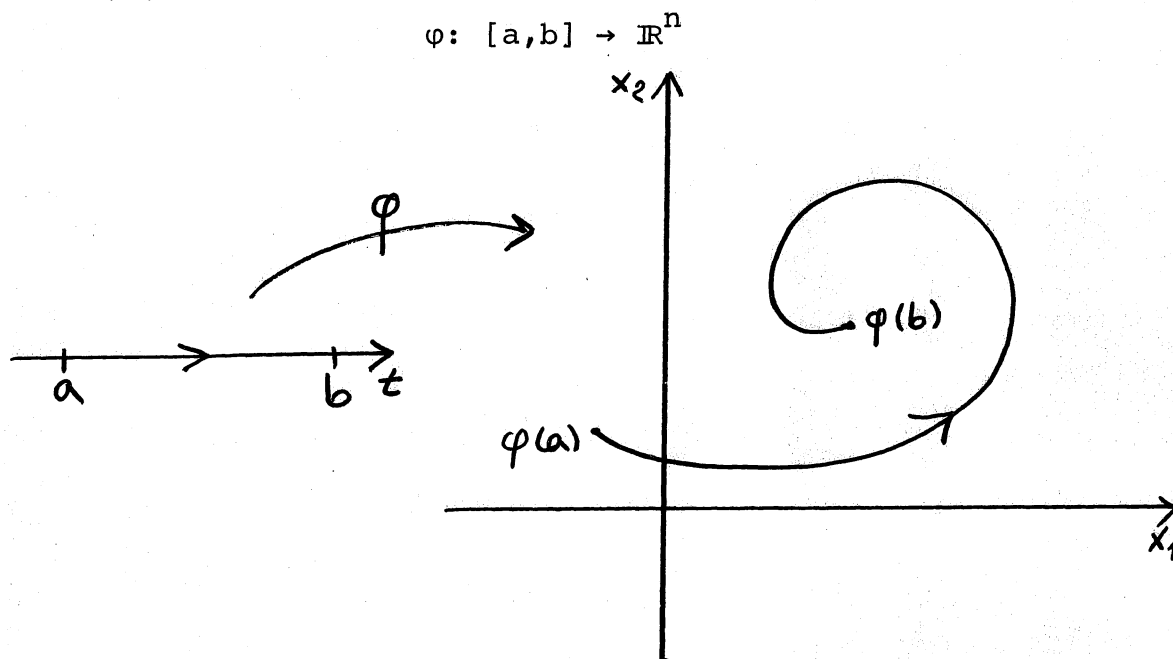
Vi er nu i stand til at formulere generalisationen af sætningen om substitution side I,6,9 til flere variable. Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $B \subseteq \mathbb{R}^n$ være åbne og lad $\varphi: B \rightarrow A$ være en bijektiv C^1 -funktion med $J\varphi(y) \neq 0$ for alle $y \in B$. Vi kalder en sådan φ en *koordinattransformation*.

Sætning I,13,13. Lad $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ være integrabel. Er $\mathcal{D} \subseteq A$ (åben) og $\varphi: A \rightarrow B$ en koordinattransformation, og $E = \varphi^{-1}(\mathcal{D})$, så gælder

$$\int_{\mathcal{D}} f(x) dx = \int_E f(\varphi(y)) |J\varphi(y)| dy \quad .$$

§14. Kurve- og fladeintegraler af differentialformer.1. Kurver og flader.

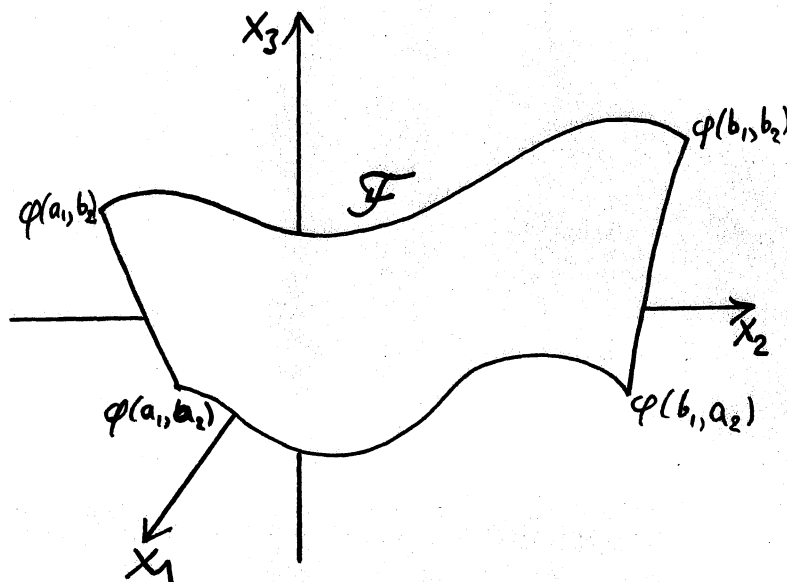
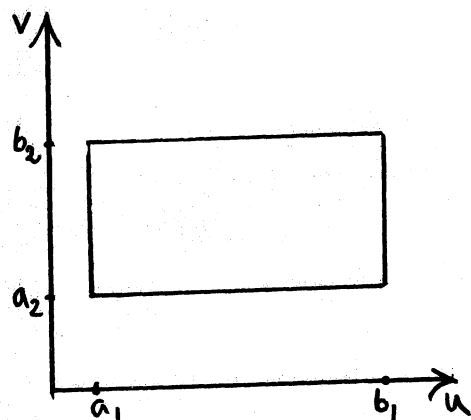
Ved en differentiabel kurve K med en parameterfremstilling φ forstås en C^2 -funktion φ af et interval $[a, b]$ ind i $\mathbb{R}^n$, ($n = 2, 3, \dots$).



Hvis φ er vilkårlig ofte differentiabel, kaldes kurven "glat".

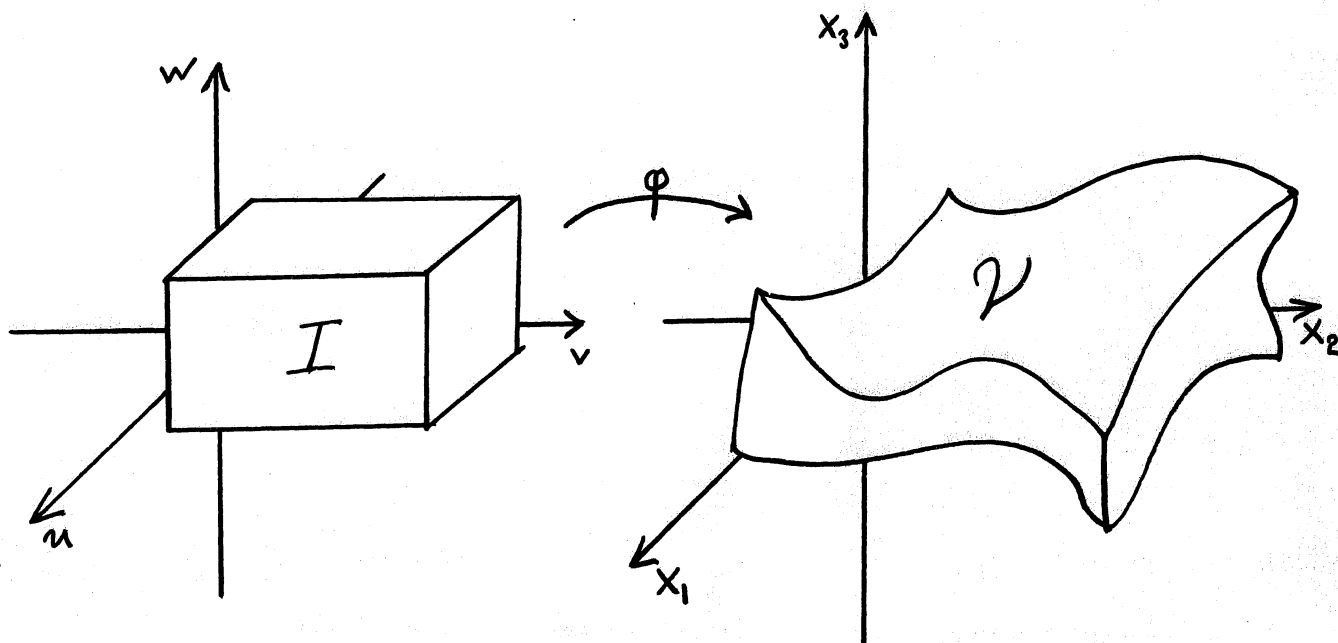
Tilsvarende defineres en differentiabel (glat) flade F med en parameterfremstilling φ som en C^2 - (C^∞ -) funktion φ af et interval $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ind i $\mathbb{R}^n$, ($n = 3, \dots$).

$$\varphi: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$



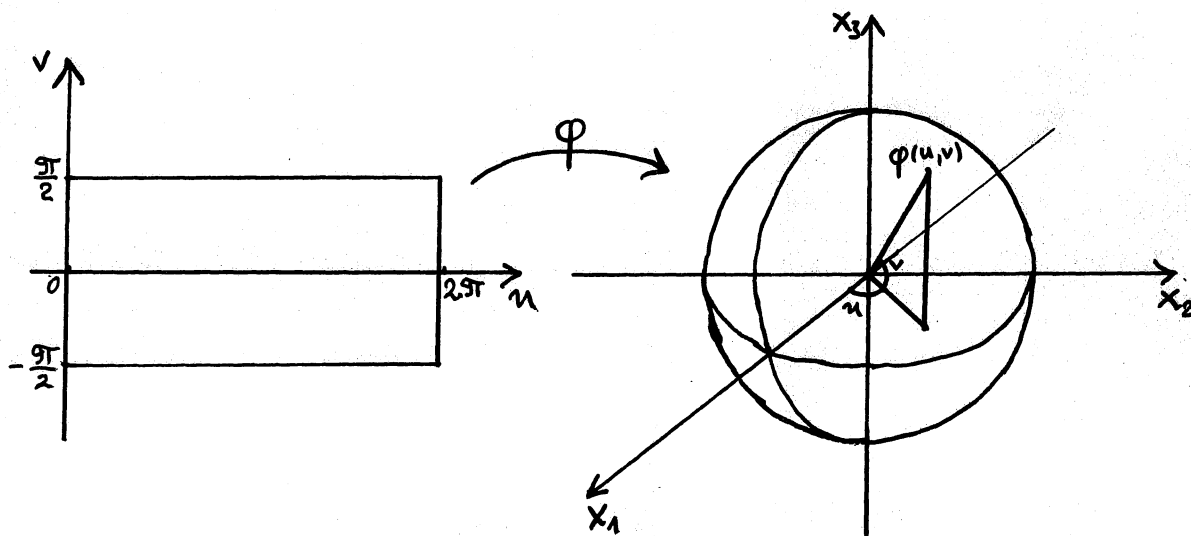
Fladebegrebet generaliseres til en p -flade, hvor $p \geq 0$, ved at forlange intervallet i $\mathbb{R}^p$. En kurve er på denne måde en "1-flade", og et punkt er en "0-flade".

Man kan udmærket betragte en 3-flade i $\mathbb{R}^3$, :



Et eksempel er fladen (kuglefladen)

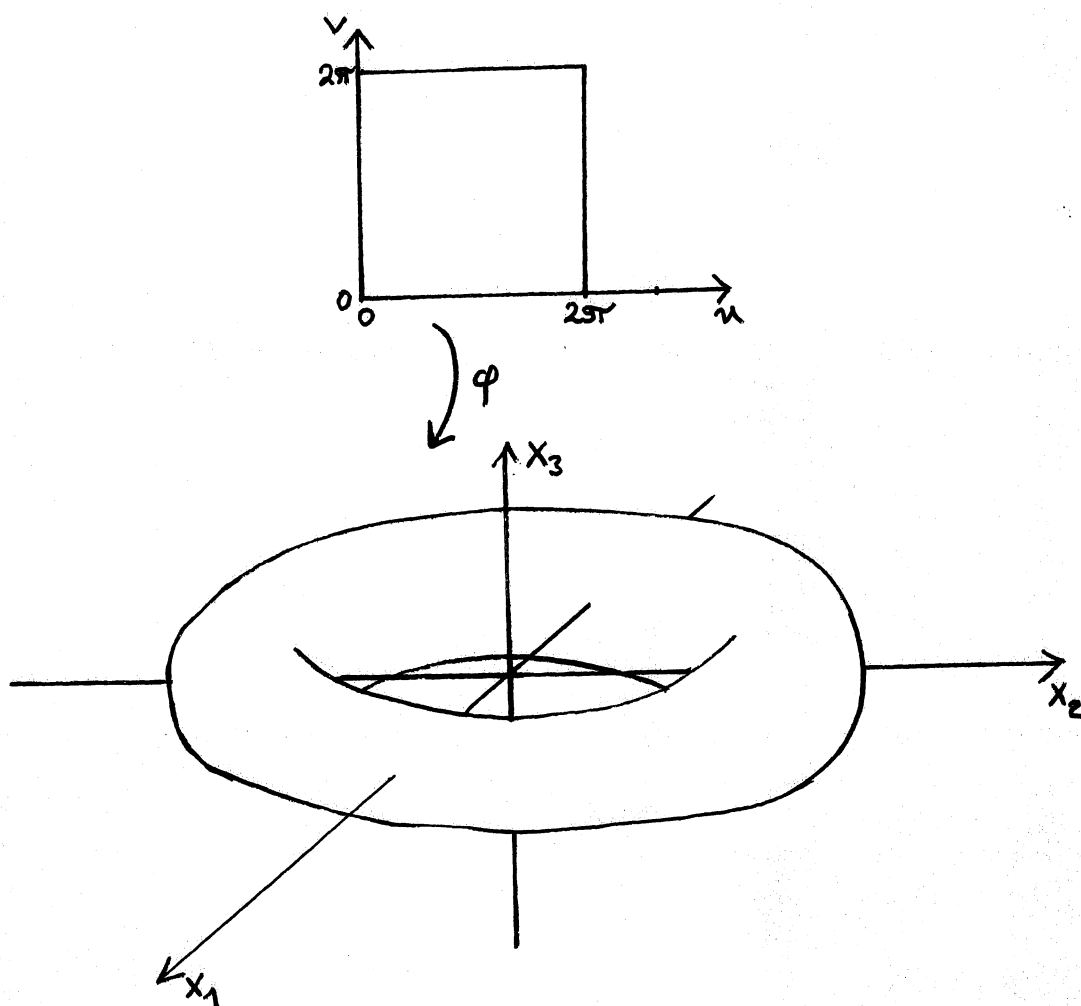
$$\phi: (u, v) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \in \mathbb{R}^3$$



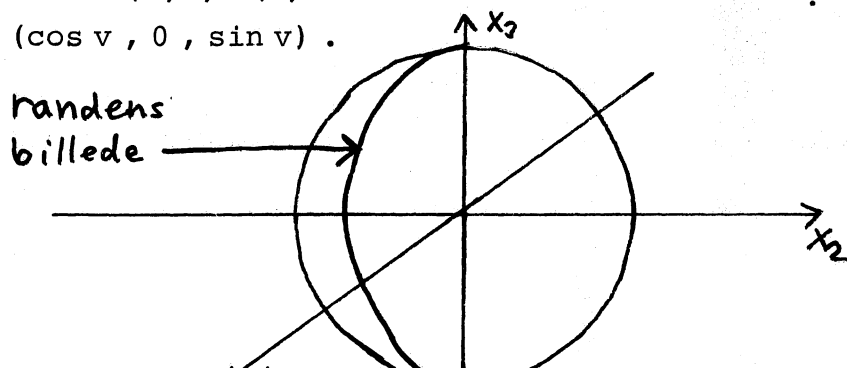
Et andet eksempel er en badering (vi kalder den "torus")

$$\varphi: (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow$$

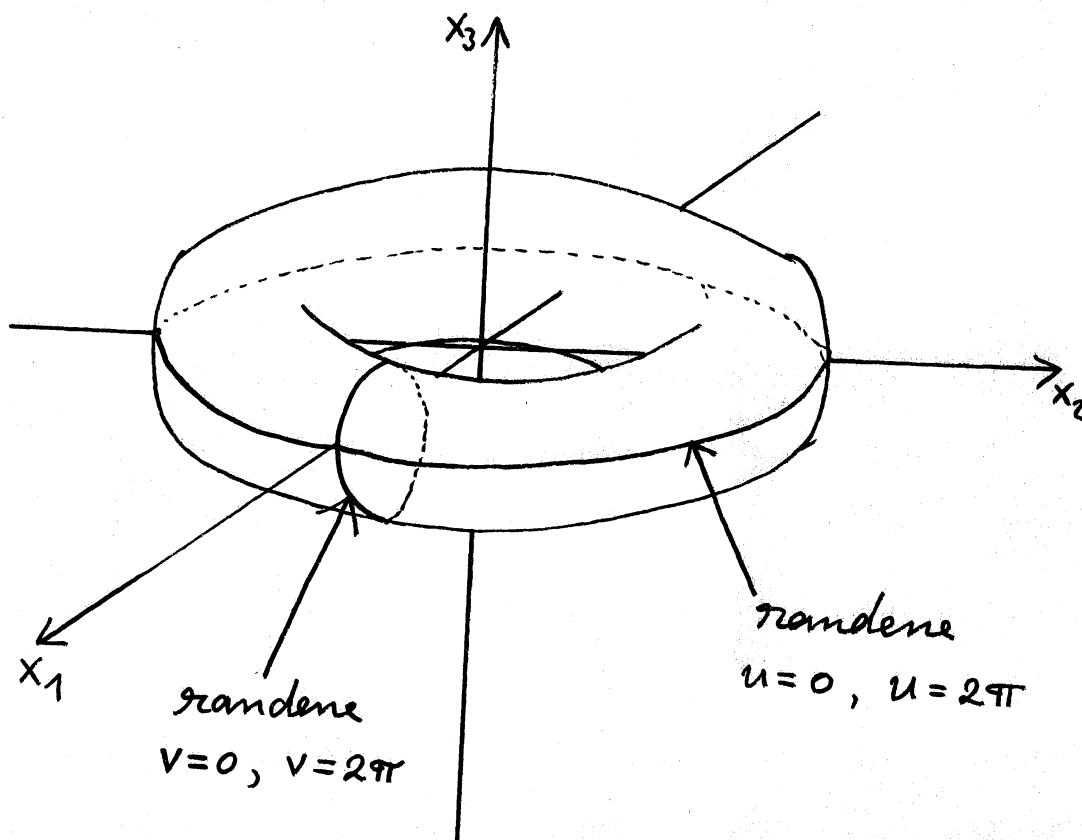
$$(\cos v(2 + \cos u), \sin v(2 + \cos u), \sin u) \in \mathbb{R}^3$$



Disse eksempler viser flader uden rand. Men intervallerne har alle en rand. Hvor bliver randen af? I kugletilfældet afbildes de vandrette rande, $v = \frac{\pi}{2}$, og $v = -\frac{\pi}{2}$, i hhv. "nordpol" $(0, 0, 1)$ og "sydbol" $(0, 0, -1)$, mens de lodrette afbildes i den samme kurve: $v \rightarrow (\cos v, 0, \sin v)$.

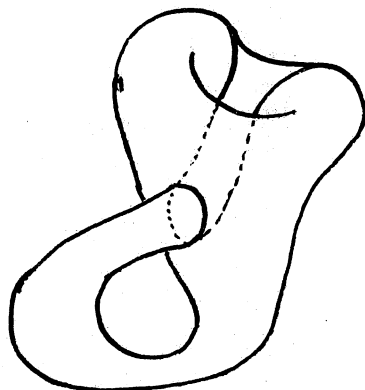


På torus afbildes de lodrette i den samme cirkel og de vandrette i den samme cirkel:



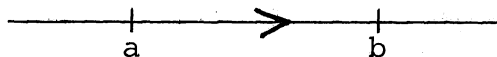
Randene kunne forsvinde ved at falde sammen eller ved at reduceres til et enkelt punkt.

Da vi er interesserede i at beskrive kuglefladen med den anførte parameterfremstilling, må vi tillade randsammenfald. Men i det indre af intervallet er sammenfald ikke så interessant. F.eks. denne selv-gennemskærende



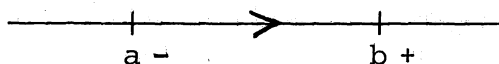
"Klein flaske", der er uden yderside og inderside.

En måde at komme om ved problemet er at indføre en orientering af flader. Først vil vi orientere intervallerne. Et interval i $\mathbb{R}$ fra a til b har dermed en gennemløbsretning, nemlig fra a til b :

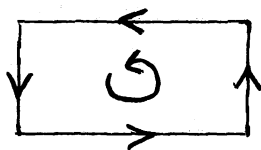


Den modsatte orientering er gennemløbsretningen fra b til a .

I tilfældet fra a til b vil vi endvidere orientere endepunkterne med $+$ for b og $-$ for a .

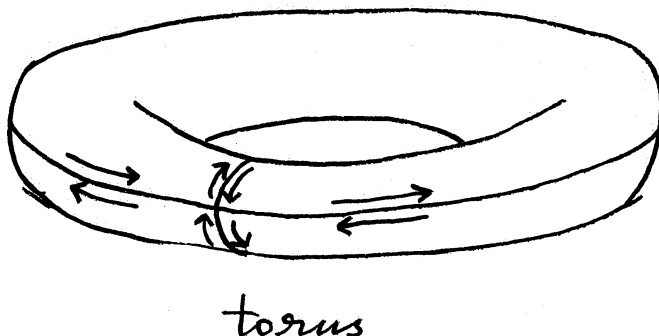
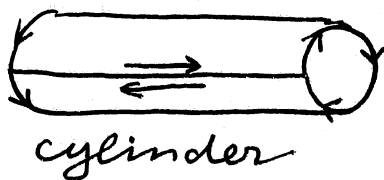


Dernæst orienterer vi et rektangel ved et omløb ad randen:

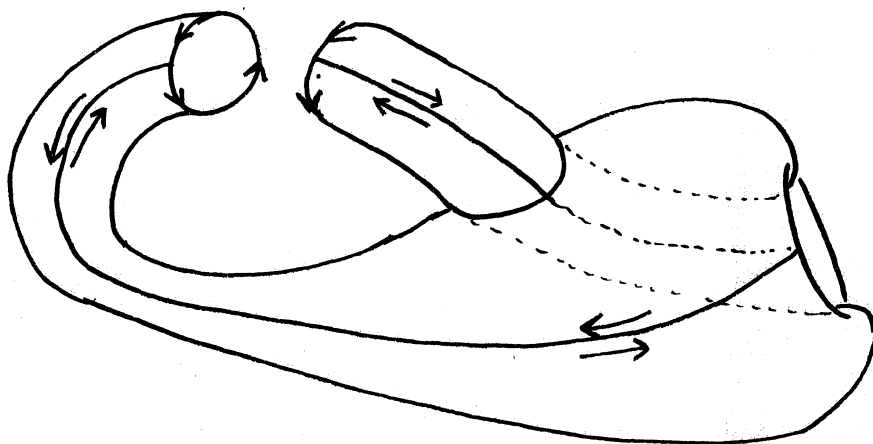


Ved et omløb langs randen i pilenes retning har vi det indre af rektanglet på venstre side.

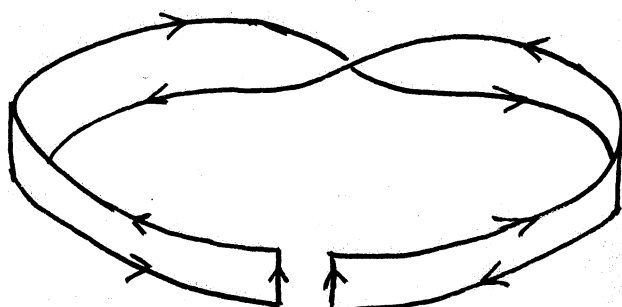
Afbildes det orienterede rektangel på en torus, bliver de modstående sider limet sammen på den måde, at pilene på siderne går i modsat retning:



Men ved afbildningen på Kleins flaske passer retningerne sammen:

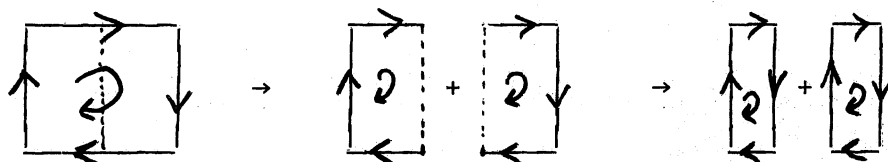


Vi siger, at Klein flasken ikke kan orienteres. Simplere end Klein flasken er Möbius' bånd, det vil sige overfladen af Klein flasken med kun den "umulige" sammenlimning, altså et snoet bælte:

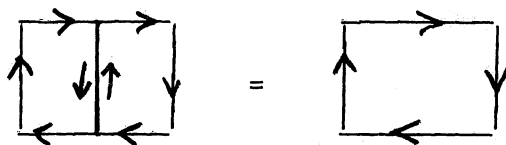


Möbius' bånd

Ved deling af et rektangel i to rektangler ses, at de to nye sider naturligt får modsat orientering:

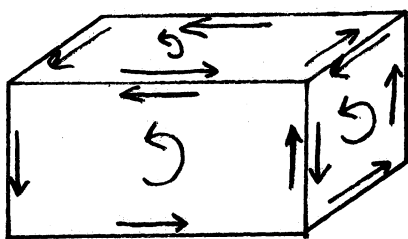


Vi indfører derfor den regel, at ved sammenfald af to modsat orienterede sider hæver de hinanden



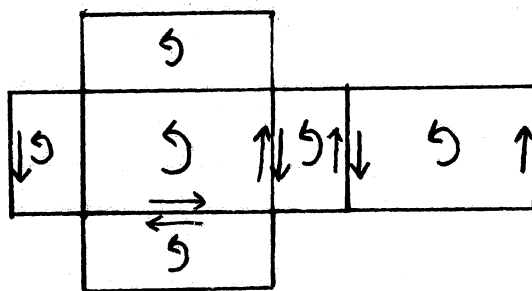
Derved bliver sfæren og torus til flader uden rand.

Vi orienterer tilsvarende en kasse:



Hvert rektangel på siderne orienteres således, at kanterne får de modsatte orienteringer, som kræves, for at de kan hæve hinanden.

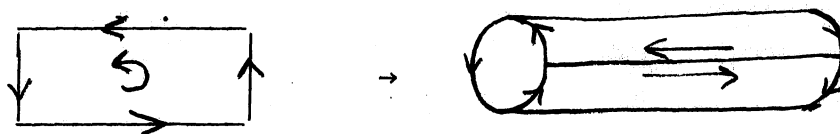
Kassens overflade er derfor uden rand; alle kanter er med 2 gange, men modsat orienteret:



kasse foldet ud.

Vi definerer nu en *kæde* af kurver eller flader som et sæt af kurvestykker eller fladestykker med orientering, hvor sammenfaldende dele med modsat orientering hæver hinanden.

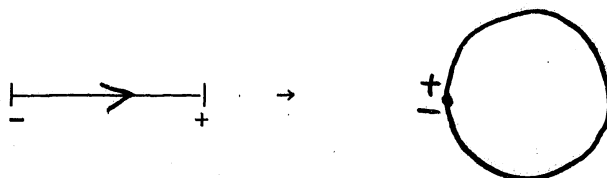
F.eks. er randen af rektanglet en kæde af 4 kurver, hvis endepunkter parvis hæver hinanden: F.eks. en cylinder



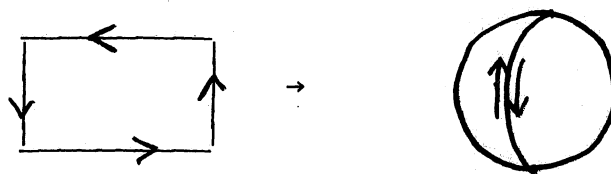
Ikke alene er de 4 hjørner forsvundet, men også de to af siderne. Cylinderens rand består af de to tilbageværende kurver (cirkler).

Hvis en kurve eller flade er uden rand, kaldes den *lukket*.

Eks. cirkel

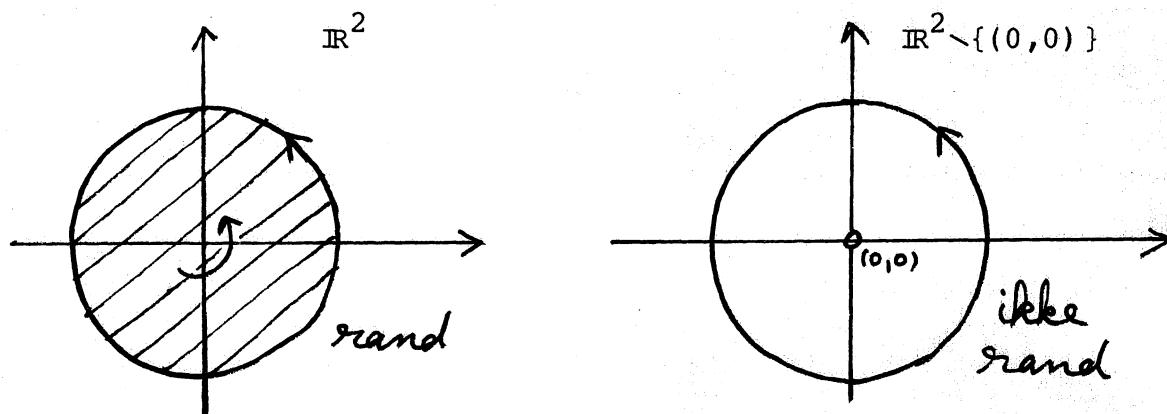


Eks. sfære

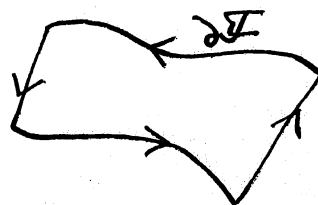
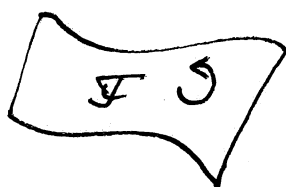


Hvis en flade har en rand, så er denne rand lukket.

Spørgsmålet om, hvornår en lukket kurve eller flade er en rand, er emnet for den algebraiske topologi. Det drejer sig om, hvorvidt rummet har huller. I planen er en lukket kurve uden selvgennemskæring rand af et område, men i en hullet plan som f.eks. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gælder det ikke:



Vi definerer nu ∂ som den funktion, der til en flade F lader svare dens rand, som er en kæde af flader af lavere dimension, med den nedarvede orientering.



Sætning I,14,1.

$$\partial \partial = \emptyset .$$

2. Differentialformer og kurveintegraler.

Differentialet af en funktion $f(x,y)$ er et udtryk

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy ,$$

hvor $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ er funktioner af $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$.

Det er naturligt at spørge om, hvorvidt et tilsvarende udtryk

$$(*) \quad P(x,y)dx + Q(x,y)dy ,$$

hvor P og Q er funktioner af $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$, er differential af en funktion $f(x,y)$.

Et udtryk af formen $(*)$ kaldes en differentialform. Hvis der findes en funktion f med $(*)$ som differential, kaldes $(*)$ et totalt differential.

Sætning I,13,3 siger, at hvis $(*)$ er et totalt differential, så må, forudsat f er C^2 ,

$$(*) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} .$$

Hvis det på den anden side gælder, at P og Q er kontinuert differentiable, og opfylder de $(*)$, og er de definerede overalt, så kan vi sætte

$$f(x,y) = \int_{x_0}^x P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x,s)ds .$$

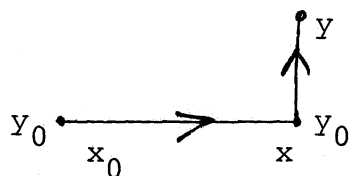
Da er ifølge Sætning I,8,15 (se side IV,8,1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= P(x,y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x,s)ds \\ &= P(x,y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial P}{\partial y}(x,s)ds \\ &= P(x,y_0) + P(x,y) - P(x,y_0) = P(x,y) \end{aligned}$$

og umiddelbart

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) .$$

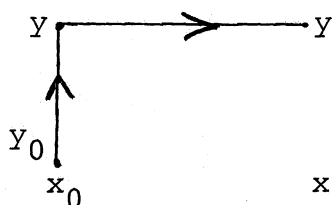
Bemærk, at ved definitionen af f har vi kun udnyttet P og Q på kurven



Vi kunne lige så godt have defineret

$$g(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, s) ds + \int_{x_0}^x P(t, y) dt ,$$

altså integralet langs kurven

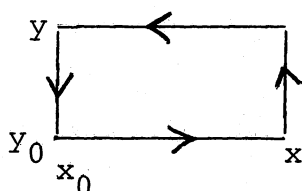


Det viser sig, at $f(x, y) \equiv g(x, y)$, når P og Q er definerede (og C^1) overalt (inden i rektanglet)!!

Vi udtrykker dette forhold ved at sige, at

$$\int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, s) ds + \int_x^{x_0} P(t, y) dt + \int_y^{y_0} Q(x_0, s) ds = 0 ,$$

altså at integralet langs kurven

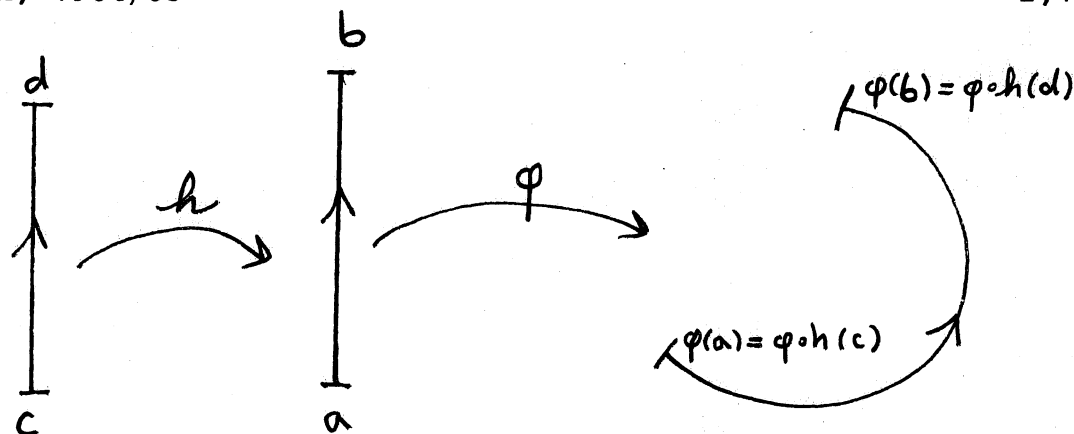


er $= 0$.

Lad nu $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ være en differentiabel kurve. Vi definerer nu *kurveintegralet* af *differentialformen* (*) ved

$$\oint_{\varphi} (*) = \int_a^b (P(\varphi(t)) \frac{d\varphi_x}{dt} + Q(\varphi(t)) \frac{d\varphi_y}{dt}) dt .$$

Bemærkning 1. Kurveintegralet afhænger ikke af den valgte parameterfremstilling, kun af dens retning. Lad nemlig $t = h(s)$ være en orienteringsbevarende funktion, $h: [c, d] \rightarrow [a, b]$, dvs. $h' > 0$, så er $\varphi \circ h: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ en parameterfremstilling af den samme kurve:



Kurveintegralet er per definition

$$\begin{aligned}
 \oint_{\varphi \circ h} (*) &= \int_c^d \left(P(\varphi(h(s))) \frac{d(\varphi(h(s)))}{ds} + Q(\varphi(h(s))) \frac{d(\varphi(h(s)))}{ds} \right) ds \\
 &= \int_c^d \left(P(\varphi(h(s))) \frac{d\varphi_x(h)}{dt} + Q(\varphi(h(s))) \frac{d\varphi_y(h)}{dt} \right) h'(s) ds \\
 &= \int_{h(c)}^{h(d)} \left(P(\varphi(t)) \frac{d\varphi_x}{dt} + Q(\varphi(t)) \frac{d\varphi_y}{dt} \right) dt = \oint_{\varphi} (*).
 \end{aligned}$$

Bemærkning 2. Kurveintegralet af et todelt differential er givet ved værdierne i endepunkterne.

$$\oint_{\varphi} (*) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) \frac{d\varphi_x}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) \frac{d\varphi_y}{dt} \right) dt =$$

ifølge kædereglens (I, 13, 9)

$$= \int_a^b \frac{d(f \circ \varphi)}{dt} dt = \left[f \circ \varphi \right]_a^b = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)).$$

Bemærkning 3. (Fortsættelse af Bemærkning 2.) Hvis kurven er lukket, så er integralet 0. Thi da er $\varphi(b) = \varphi(a)$. Altså:

Integralet af et totalt differential langs en lukket kurve er 0.

Der gælder omvendt:

Sætning I,14,2. En $\omega = Pdx + Qdy$ en differentialform, så

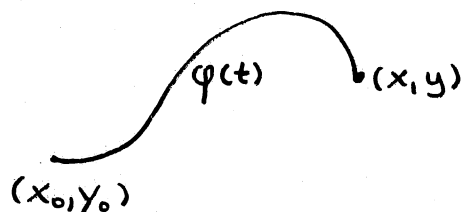
$$\oint_{\varphi} \omega = 0$$

for enhver lukket kurve φ , så er ω et totalt differential.

Bevis. Vi vælger et punkt (x_0, y_0) og definerer i (x, y) funktionen

$$f(x, y) = \int_{\varphi} \omega$$

hvor $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ er en kurve, så $\varphi(0) = (x_0, y_0)$ og $\varphi(1) = (x, y)$. (Betingelsen sikrer, at $f(x, y)$ er uafhængig af valget af kurve, φ).



Da er $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx, y) - f(x, y)}{dx}$, hvor

$$f(x+dx, y) - f(x, y) = \int_{\psi} \omega = \int_0^1 (P(x+tdx, y) dx) dt,$$

hvor $\psi(t) = (x+tdx, y)$ for $t \in [0, 1]$. Altså er

$$\begin{aligned} \frac{f(x+dx, y) - f(x, y)}{dx} &= \int_0^1 P(x+tdx, y) dt \\ &= P(x+t_0 dx, y) \text{ for et } t_0 \in]0, 1[. \end{aligned}$$

Da P er kontinuert, fås

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{dx \rightarrow 0} P(x+t_0 dx, y) = P(x, y).$$

□

Et grimt eksempel:

$$\omega = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Denne form er ikke defineret overalt, nemlig ikke i $(0, 0)$. Selvfølgelig opfylder den ikke, sikrer det os ikke, at den er et totalt differential.

$$(x) \quad \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

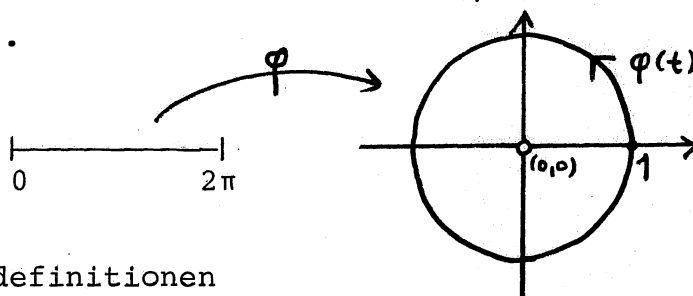
Hvis den var et totalt differential, så skulle

$$\oint_{\varphi} \omega = 0$$

for enhver lukket kurve φ . Lad os sætte

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

den lukkede kurve = enhedscirklen. Bemærk, at kurven løber rundt om hullet $(0,0)$.



Vi finder efter definitionen

$$\oint_{\varphi} \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{-\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t \right) dt = -2\pi.$$

Altså kan ω ikke være et totalt differential.

3. Anvendelser på differentiaalligninger.

En differentiaalligning af formen

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

siges at have en løsning $y = \varphi(x)$, hvis

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0.$$

Med andre ord, ligningen identificeres for $Q(x,y) \neq 0$ med den sædvanlige ligning

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}}.$$

Hvis differentialformen

$$\omega = Pdx + Qdy$$

er et totalt differential, altså

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy ,$$

så vil ligningen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy = 0$$

betyde for løsningen, $y = \varphi(x)$, at

$$\frac{df(x, \varphi(x))}{dx} = \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial y} \varphi'(x) = 0$$

altså, at

$$\boxed{f(x, \varphi(x)) = K} \quad (K \text{ konstant}) .$$

Med andre ord, $y = \varphi(x)$ er bestemt implicit ved relationen

$$f(x, y) = K .$$

Eksempel.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} .$$

Løsningen fås ved at løse f.eks.

$$\frac{1}{x} dx - \frac{1}{y^2} dy = 0 .$$

Nu er $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$ og $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-1}{y^2} \right) = 0$, så for $(x, y) \neq (0, 0)$ er formen måske et totalt differential af en funktion

$$f(x, y) = g(x) + h(y) .$$

Vi finder, at

$$f(x, y) = \ln|x| + \frac{1}{y} \quad \text{for } (x, y) \neq (0, 0)$$

dur. Altså er løsningen $y = \varphi(x)$ givet implicit af ligningen

$$\ln|x| + \frac{1}{y} = k .$$

Denne ligning omskrives umiddelbart til

$$y = \frac{1}{k - \ln|x|} \quad \text{for } |x| \neq e^k$$

Prøve:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(k - \ln|x|)^2} \cdot \left(-\frac{1}{|x|}\right) \cdot \frac{x}{|x|} = \frac{y^2}{x}.$$

Eksempel. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ eller evt.

$$(x-y)dx + (x+y)dy = 0.$$

Nu er

$$\frac{\partial(x-y)}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial(x+y)}{\partial x} = 1,$$

så vi har ikke et totalt differential. Men ligningen kan erstattes af

$$\frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy = 0.$$

Denne form er det totale differential af

$$\log\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} \quad \text{for } x \neq 0$$

så ligningen

$$\log\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = k$$

bestemmes implicit løsninger til den oprindelige differentialligning.

Men her er der ikke totalt differential i hele området; kurveintegralet langs enhedscirklen er 2π .

4. Greens sætning.

Lad der være givet et rektangel R i planen og en differentialform, som ikke nødvendigvis er et totalt differential.

$$(*) \quad \omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Det er ikke givet, at $(*)$ er opfyldt. Vi kan derfor betragte afvigelsen fra $(*)$ som funktionen

$$f(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) .$$

Altså, (*) betyder nu, at $f \equiv 0$.

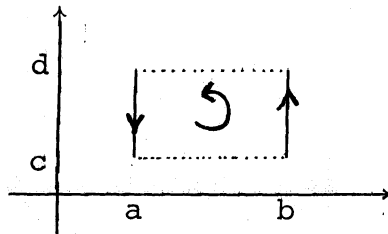
Lad φ være en parameterfremstilling af rektanglet. Sætning 14.2 generaliseres til Greens sætning:

$$\int_{\varphi} \omega = \int_R f(x, y) dx dy .$$

(Hvor R og φ har tilsvarende orientering.)

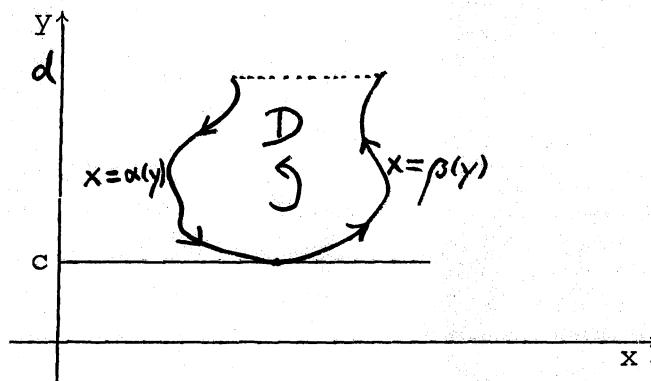
Bevis. Lad $R = [a, b] \times [c, d]$.

$$\begin{aligned} \int_R \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d \left[Q(x, y) \right]_a^b dy \\ &= \int_c^d Q(b, y) dy - \int_c^d Q(a, y) dy = \oint_{\varphi} Q(x, y) dy \end{aligned}$$



□

Greens sætning generaliseres uden videre til et vilkårligt område. Thi et område kan deles i stykker af formen



som kan beskrives ved

$$D = \{(x, y) \mid \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \wedge c \leq y \leq d\} .$$

Regnestykket bliver så det samme, med a og b erstattet af $\alpha(y)$ og $\beta(y)$.

Vi har derfor Greens sætning:

Sætning I.14.3. Lad D være et område i planen med orientering, og lad ∂D være den tilsvarende orienterede rand. Lad endvidere $\omega = Pdx + Qdy$ være en kontinuert differentialform på $\bar{D}$. Da gælder

$$\oint_{\partial D} \omega = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy .$$

Eksempel. Arealet af et område D er jo

$$\int_D 1 dx dy .$$

Nu søger vi en form ω med 1 som partiel afledet. F.eks. vil $\omega = xdy$, $\omega = -ydx$ eller

$$\omega = \frac{1}{2} x dy - \frac{1}{2} y dx$$

kunne bruges. Greens sætning siger nu, at

$$\text{Areal}(D) = \int_D 1 dx dy = \oint_{\partial D} \omega = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (-ydx + xdy) = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx .$$

Er D enhedscirklen, fås altså

$$\pi = \oint_{\partial D} x dy = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi = 0 + \pi$$

eller

$$\pi = \frac{1}{2} \int_D (-ydx + xdy) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 d\varphi .$$

5. Differentialer af differentialformer.

I Greens sætning indgik processen:

$$Pdx + Qdy \rightarrow \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy .$$

Denne proces er et eksempel på den relevante differentiation af differentialformen.

I $\mathbb{R}^n$ indføres følgende basisformer af grad $0, \dots, n$.

grad	form	antal
0	1	1
1	$dx_1, \dots, dx_n$	n
2	$dx_1 \wedge dx_2, dx_1 \wedge dx_3, \dots, dx_{n-1} \wedge dx_n$	$\binom{n}{2}$
3	$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \dots$	$\binom{n}{3}$
$\vdots$		
n	$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n$	1

I dimension $n = 2$ fås altså basisformerne:

$$1, dx, dy, dx \wedge dy .$$

I dimension $n = 3$ fås følgende 8 ($= 2^3$):

$$1; dx, dy, dz; dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy; dx \wedge dy \wedge dz .$$

For disse former indføres regneoperationen

$\wedge$

med følgende spilleregler (formerne siges at *alternere*)

$$(1) \quad dx \wedge dx = 0$$

$$(2) \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx .$$

(Bemærk, at $(2) \Rightarrow (1)$.) Produktet $\wedge$ kaldes det ydre produkt (af formerne).

Ved en differentialform af grad p forstås en sum af udtryk af form en differentiabel funktion gange en basisform af grad p :

$$f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} .$$

F.eks. i planen af grad 1 :

$$Pdx + Qdy$$

eller i rummet af grad 2 :

$$Ldy \wedge dz + Mdz \wedge dx + Ndx \wedge dy .$$

Vi definerer nu en differentiation d af en form

$$fb = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

som

$$d(fb) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge b = (df) \wedge b .$$

I Greens sætning optræder netop

$$\begin{aligned} d(Pdx + Qdy) &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy , \end{aligned}$$

under anvendelse af (1) og (2). Vi kan derfor formulere Greens sætning som formelen:

Greens sætning:

$$\oint_{\partial D} \omega = \int_D d\omega .$$

Differentiation af former opfylder

Sætning I, 14, 4.

$$dd = 0 .$$

Bevis:

$$d(d(fb)) = d((df) \wedge b) = (d(df)) \wedge b$$

og

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1 \wedge dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} dx_n \wedge dx_1 \\ &\quad + \dots \\ &\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} dx_1 \wedge dx_n + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n \wedge dx_n . \end{aligned}$$

Nu er $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ og $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. Altså er $d(df) = 0$.
□

Bemærk, at er $\omega = df$, så gælder:

$$\oint_{\partial D} df = \int_D d(df) = 0.$$

I §13 havde vi formelen I, 13, 13 med

$$E = \varphi^{-1}(D);$$

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_E f(u, v) |J\varphi(u, v)| du dv$$

hvor $\varphi: (u, v) \rightarrow (x, y) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$ og

$$J\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

er Jacobi-determinanten.

Ved regning med $\wedge$ -produktet fås simpelthen

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} du \wedge du + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} du \wedge dv + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} dv \wedge du + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} dv \wedge dv \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \wedge dv = J\varphi du \wedge dv \end{aligned}$$

ifølge (1) og (2) anvendt på du og dv .

Vi definerer endvidere $\wedge$ -produktet af to former

$$\omega = f(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$\pi = g(x) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}$$

som $(p+q)$ -formen

$$\omega \wedge \pi = f(x) g(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}.$$

Da gælder regnereglen

I.14.5

$$d(\omega \wedge \pi) = d\omega \wedge \pi + (-1)^p \omega \wedge d\pi .$$

Thi,

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \pi) &= d(fg) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \\ &= (df)g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} + (fdg) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \\ &= (df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \wedge (g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}) + \\ &\quad \sum_{k=1}^n f(x) \frac{\partial g}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \\ &= (d\omega) \wedge \pi + (-1)^p \sum_{k=1}^n f(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge \frac{\partial g}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \\ &\quad \dots \wedge dx_{j_q} \\ &= (d\omega) \wedge \pi + (-1)^p \omega \wedge (d\pi) . \end{aligned}$$

6. Fladeintegraler af differentialformer.Er der givet en flade F af dimension p ved

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad I \subseteq \mathbb{R}^p$$

og en differentialform af grad p

$$\omega = f_{1\dots p} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p + \dots + f_{n-p+1\dots n} dx_{n-p+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

defineres integralet af formen ω over fladen F ved

$$\int_F \omega = \int_I \left(f_{1\dots p}(\varphi(y)) d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_p + \dots + \dots \right) .$$

F.eks. kurveintegralet

$$\oint_K (Pdx + Qdy) = \int_I \left(P(\varphi(t)) \varphi_1'(t) + Q(\varphi(t)) \varphi_2'(t) \right) dt ,$$

idet $d\varphi_1 = \varphi_1'(t)dt$ og $d\varphi_2 = \varphi_2'(t)dt$.

F.eks. koordinattransformationen

$$\int_F f(x,y) dx \wedge dy = \int_I f(x(u,v), y(u,v)) J(x,y) du \wedge dv .$$

For fladeintegraler gælder analogt til Greens sætning følgende hovedsætning, som benævnes efter Newton, Leibniz, Gauss, Green, Ostrogradskij, Stokes, Poincaré, og evt. de Rham:

$$\boxed{\int_F d\omega = \int_{\partial F} \omega} .$$

Til at bevise hovedsætningen bruges følgende

Lemma I, 14, 6.

I.14.6.

$$\boxed{d(\omega \circ \varphi) = (d\omega) \circ \varphi} .$$

Bevis: Hvis ω er en 0-form, så er $\omega = f(x)$. Altså

$$\begin{aligned} d(\omega \circ \varphi) &= d(f(\varphi(u))) \\ &= \nabla f \underline{D}\varphi du \quad \text{ifølge kædereglene s.I, 13, 5-6.} \end{aligned}$$

Men

$$d\omega = df = \nabla f dx ,$$

og pr. definition er $(\nabla f dx) \circ \varphi$ netop

$$(d\omega) \circ \varphi = \nabla f \circ \varphi d\varphi = \nabla f \underline{D}\varphi du .$$

Hvis formelen gælder for former af lavere grad, ω og π , så gælder den for $\omega \wedge \pi$. Thi ifølge regnereglen side I, 14, 21 er

$$\begin{aligned} (d(\omega \wedge \pi)) \circ \varphi &= (d\omega \wedge \pi + (-1)^P \omega \wedge d\pi) \circ \varphi \\ &= ((d\omega) \circ \varphi) \wedge (\pi \circ \varphi) + (-1)^P (\omega \circ \varphi) \wedge (d\pi \circ \varphi) \\ &= (d(\omega \circ \varphi)) \wedge (\pi \circ \varphi) + (-1)^P (\omega \circ \varphi) \wedge (d(\pi \circ \varphi)) \\ &= d((\omega \circ \varphi) \wedge (\pi \circ \varphi)) = d((\omega \wedge \pi) \circ \varphi) . \end{aligned}$$

Det er nu nok at vise formelen for formen dx_1 . Men $(d(dx_1)) \circ \varphi = 0 \circ \varphi = 0$ og $d((dx_1) \circ \varphi) = d(d\varphi_1) = 0$. □

Sætning I, 14, 7. Hovedsætningen.

$$\boxed{\int_F d\omega = \int_{\partial F} \omega} .$$

Bevis: Da der findes et p-interval, I , så

$$\int_F d\omega = \int_I (d\omega) \cdot \varphi \quad \text{og} \quad \int_{\partial F} \omega = \int_{\partial I} \omega \cdot \varphi ,$$

og da ifølge Lemma I, 14, 6 $(d\omega) \cdot \varphi = d(\omega \cdot \varphi)$, er det nok at vise formelen for intervallet.

Vi kan da antage, at formerne er hhv:

$$\omega = f(x_1, \dots, x_p) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_p \quad \text{og}$$

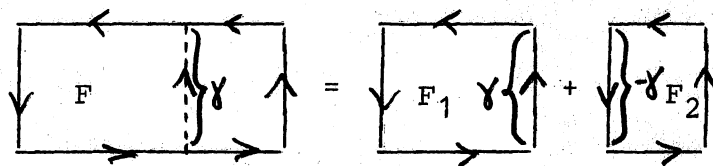
$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1, \dots, x_p) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p .$$

Da er integralet af ω over de sider af intervallet, der er parallelle med x_1 -aksen lig 0. Altså er med $I = [a, b] \times J$

$$\begin{aligned} \int_{\partial I} \omega &= \int_J f(b, x_2, \dots, x_p) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_p - \int_J f(a, x_2, \dots, x_p) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_p \\ &= \int_J (f(b, x) - f(a, x)) dx = \int_J \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_1} (\xi, x) d\xi \wedge dx = \int_I d\omega . \end{aligned}$$

Læg mærke til harmonien mellem hovedsætningen og konventionen om ophævelse af modsat orienterede sammenfaldende dele af randen.

Er f.eks. $\omega = Pdx + Qdy$ og $F = F_1 + F_2$:



så er jo åbenbart

$$\int_F d\omega = \int_{F_1} d\omega + \int_{F_2} d\omega$$

og derfor

$$\int_{\partial F} \omega = \int_{\partial F_1} \omega + \int_{\partial F_2} \omega ,$$

men det gælder da kun når det for delelinien γ gælder, at

$$\int_{\gamma} \omega + \int_{-\gamma} \omega = 0 ,$$

hvad der imidlertid er klart efter definitionen.

Anvendes hovedsætningen på formel I,14,5, fås

$$\int_{\partial F} \omega \wedge \pi = \int_F d(\omega \wedge \pi) = \int_F d\omega \wedge \pi + (-1)^p \int_F \omega \wedge d\pi .$$

Det viser, at der gælder generalisationen af reglen om delvis integration, i denne form kaldet Greens formler:

Sætning I,14,8. Greens formler: For en p-form ω gælder:

$$\int_F (d\omega) \wedge \pi = \int_{\partial F} \omega \wedge \pi - (-1)^p \int_F \omega \wedge d\pi .$$

Lad os som et eksempel beregne rumfanget af en ellipsoide

$$E = \left\{ (x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} .$$

Ifølge hovedsætningen er

$$\text{Rmf}(E) = \int_E dx \wedge dy \wedge dz = \int_{\partial E} z dx \wedge dy .$$

Nu er ∂E beskrevet af (φ, θ) , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$:

$$x = a \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = b \sin \varphi \cos \theta$$

$$z = c \sin \theta .$$

Vi finder

$$dx = -a \sin \varphi \cos \theta d\varphi - a \cos \varphi \sin \theta d\theta$$

$$dy = b \cos \varphi \cos \theta d\varphi - b \sin \varphi \sin \theta d\theta$$

hvoraf

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= ab \sin^2 \varphi \cos \theta \sin \theta d\varphi \wedge d\theta - \\ &\quad ab \cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta d\theta \wedge d\varphi \\ &= ab \cos \theta \sin \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi \wedge d\theta \\ &= ab \cos \theta \sin \theta d\varphi \wedge d\theta . \end{aligned}$$

Indsættes i integralet, fås med $R = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}\int_{\partial E} z dx \wedge dy &= \int_R abc \cos \theta \sin^2 \theta d\varphi d\theta \\ &= abc \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^2 \theta d\varphi d\theta \\ &= 2\pi abc \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{4\pi}{3} abc.\end{aligned}$$

Rumfanget eller evt. arealet af en vilkårlig p -flade i et n -dimensionalt rum kan findes af nedenstående formel. Lad F være p -fladen defineret ved for $I \subseteq \mathbb{R}^p$

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Vi har funktionalmatricen for $x_1(u_1, \dots, u_p), \dots, x_n(u_1, \dots, u_p)$

$$\underline{\underline{D}}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_p} \end{pmatrix}$$

som er en $n \times p$ -matrix, jvf. side I, 13, 5.

Vi definerer nu de $\binom{n}{p}$ Jacobi-underdeterminanter som determinanterne af matricerne, bestående af p af rækkerne fra $\underline{\underline{D}}\varphi$:

$$J_{i_1 \dots i_p} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{i_p}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_{i_p}}{\partial u_p} \end{pmatrix}$$

for ethvert sæt $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$.

Volumenet af F er nu

$$\begin{aligned}
 V(F) &= \int_F \sqrt{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p})^2} \\
 &= \int_I \sqrt{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} J_{i_1 \dots i_p}^2} du_1 \wedge \dots \wedge du_p .
 \end{aligned}$$

For en kurve K givet ved $x_1(t), \dots, x_n(t)$; $t \in I$ får vi længden

$$L(K) = \int_K \sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2} = \int_I \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2} dt .$$

For et flade F i $\mathbb{R}^3$ får vi arealet, idet $(x, y, z) = f(u, v)$:

$$\begin{aligned}
 A(F) &= \int_F \sqrt{(dy \wedge dz)^2 + (dz \wedge dx)^2 + (dx \wedge dy)^2} \\
 &= \int_I \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}\right)^2} du dv \\
 &= \int_I \|f_u \times f_v\| du dv , \quad \text{hvor jo}
 \end{aligned}$$

$$f_u \times f_v = \begin{pmatrix} \left| \begin{matrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{matrix} \right|, & \left| \begin{matrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{matrix} \right|, & \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right| \end{pmatrix} .$$

Jvf. side III, 13, 8.

F.eks. overfladen af ellipsoiden. Vi fortsætter fra eksemplet ovenfor med at finde

$$\begin{aligned}
 dz &= c \cos \theta d\theta , \\
 dz \wedge dx &= ac \sin \varphi \cos^2 \theta d\varphi \wedge d\theta , \\
 dy \wedge dz &= bc \cos \varphi \cos^2 \theta d\varphi \wedge d\theta .
 \end{aligned}$$

Herefter fås arealet

$$\begin{aligned}
 A(E) &= \int_E \sqrt{(dy \wedge dz)^2 + (dz \wedge dx)^2 + (dx \wedge dy)^2} \\
 &= \int_R \sqrt{b^2 c^2 \cos^2 \varphi \cos^4 \theta + a^2 c^2 \sin^2 \varphi \cos^4 \theta + a^2 b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta} d\varphi \wedge d\theta .
 \end{aligned}$$

Dette integral kan ikke udregnes i almindelighed. Men for omdrejningsellipsoiden går det. Vi sætter derfor $a = b$ og finder

$$\begin{aligned}
 &= \int_R \sqrt{a^2 c^2 \cos^4 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + a^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \, d\varphi d\theta \\
 &= 2\pi \int_{-(\pi/2)}^{\pi/2} a \cos \theta \sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \\
 &= 4\pi a \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \quad (x = \sin \theta) \\
 &= 4\pi a \int_0^1 \sqrt{c^2 + (a^2 - c^2)x^2} \, dx \\
 &= 4\pi a c \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1\right)x^2} \, dx .
 \end{aligned}$$

Nu går det forskelligt eftersom $a > c$, $a = c$, $a < c$. $a = c$ er en kugleflade, så det ser bort fra.

$a > c$. Vi substituerer

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1} \cdot x = \alpha x \\
 &= \frac{4\pi a c}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1}} \int_0^\alpha \sqrt{1 + y^2} \, dy .
 \end{aligned}$$

Vi substituerer $y = \sinh u$; $\beta = \operatorname{arsinh} \alpha$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4\pi a c}{\alpha} \int_0^\beta \cosh^2 u \, du = \frac{4\pi a c}{\alpha} \int_0^\beta \frac{\cosh 2u + 1}{2} \, du \\
 &= \frac{4\pi a c}{\alpha} \left(\frac{\sinh 2\beta}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \\
 &= \frac{\pi a c}{\alpha} \cdot 2 \sinh \beta \sqrt{1 + \sinh^2 \beta} + \frac{2\pi a c}{\alpha} \cdot \beta \\
 &= 2\pi a c \sqrt{1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1} + \frac{2\pi a c}{\alpha} \cdot \beta \\
 &= 2\pi a^2 + \frac{2\pi a c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \cdot \operatorname{arsinh} \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1} .
 \end{aligned}$$

(Formlen for overfladen af en diskos.)

$a < c$. Vi substituerer

$$y = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2} \cdot x = \alpha \cdot x \quad (\alpha < 1)$$

$$A(E) = \frac{4\pi ac}{\alpha} \int_0^\alpha \sqrt{1 - y^2} \, dy.$$

Vi substituerer $y = \sin u$; $\beta = \arcsin \alpha$

$$= \frac{4\pi ac}{\alpha} \int_0^\beta \cos^2 u \, du = \frac{4\pi ac}{\alpha} \cdot \int_0^\beta \frac{\cos 2u + 1}{2} \, du$$

$$= \frac{4\pi ac}{\alpha} \cdot \left(\frac{\sin 2\beta}{4} + \frac{\beta}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi ac}{\alpha} \cdot 2 \sin \beta \sqrt{1 - \sin^2 \beta} + \frac{2\pi ac}{\alpha} \cdot \beta$$

$$= 2\pi ac \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2\right)} + \frac{2\pi ac}{\alpha} \cdot \beta$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{2\pi ac^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \cdot \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2}.$$

(Formlen for overfladen af en cigar.)

7. Eksakte og lukkede differentialformer.

For at bruge hovedsætningen på et problem som beregningen af

$$\int_F \omega$$

er det nærliggende at se efter to løsninger:

1) Find G , så $\partial G = F$, thi så er

$$\int_F \omega = \int_G d\omega.$$

2) Find π , så $d\pi = \omega$, thi så er

$$\int_F \omega = \int_{\partial F} \pi.$$

I afsnit 1 fandt vi den nødvendige betingelse for 1) at $\partial F = \partial\partial G = \emptyset$. (Sætning I,14,1.)

Analogt fandt vi i afsnit 5 den nødvendige betingelse for 2), at $d\omega = 0$. (Sætning I,14,4.)

Vi definerer følgende begreber:

En form ω kaldes *lukket*, hvis $d\omega = 0$.

En form ω kaldes *eksakt*, hvis der findes en form π , så $\omega = d\pi$.

Sætning I,14,4. Enhver eksakt form er lukket.

Spørgsmålet er, hvornår en lukket form er eksakt.

Svaret afhænger - ligesom svaret på det tilsvarende spørgsmål for fladerne - af det område, hvorpå formen betragtes.

Hovedresultatet er, at på et "pænt" område er enhver lukket form også eksakt. Et "pænt" område er uden huller, jvf. eksemplet i afsnit 3.

Sætning I,14,9. (Poincaré's lemma): På et interval I er enhver lukket p -form ω , hvor $p \geq 1$, tillige eksakt.

Bevis: Lad

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

og lad $x_0 \in I$ være et punkt, $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$. Vi betragter

nu de led, hvor dx_1 forekommer, typisk

$$f_{1i_2 \dots i_p} dx_1 \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Vi danner funktionerne for hver af dem

$$g_{1i_2 \dots i_p}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{x_{01}}^{x_1} f_{1i_2 \dots i_p}(t, x_2, \dots, x_p) dt.$$

Da er

$$\frac{\partial g_{1i_2 \dots i_p}}{\partial x_1} = f_{1i_2 \dots i_p}.$$

Derfor vil

$$d(g_{1i_2 \dots i_p} dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = f_{1i_2 \dots i_p} dx_1 \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} + \dots$$

flere led, der ikke indeholder dx_1 .

Vi definerer nu formen

$$\pi_1 = \sum_{1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} g_{1i_2 \dots i_p} dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Da vil formen

$$\omega_1 = \omega - d\pi_1$$

kun indeholde led uden dx_1 . Samtidig gælder stadig, at

$$d\omega_1 = d\omega - dd\pi_1 = 0.$$

Vi kan nu skrive formen ω_1 på formen

$$\omega_1 = \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1 \dots i_p}^1 dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Heraf findes, at $d\omega_1$ indeholder led af formen

$$\frac{\partial f_{i_1 \dots i_p}^1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Da $d\omega_1 = 0$, men dx_1 ikke forekommer blandt $dx_{i_1}, \dots, dx_{i_p}$, må koefficienten være $= 0$. Det vil sige, at

$$f_{i_1 \dots i_p}^1 \text{ er uafhængig af } x_1.$$

Vi kan derfor finde en form π_2 , så

$$\omega_2 = \omega_1 - d\pi_2,$$

hvor ω_2 er lukket og uafhængig af x_2 . Vi fortsætter sådan og ender med

$$\omega_{k-p+1} = \sum_{k-p+1 < i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1 \dots i_p}^{k-p+1} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = 0,$$

da der må være gentagelser blandt $dx_{i_1}, \dots, dx_{i_p}$. Altså er

$$\omega = d\pi_1 + d\pi_2 + \dots + d\pi_{k-p+1} = d(\pi),$$

hvor $\pi = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_{k-p+1}$.

Lad os f.eks. betragte formen i $\mathbb{R}^3$

$$\omega = z^3 dy \wedge dz + y dx \wedge dz + \left(\frac{1}{y} + z\right) dx \wedge dy$$

som opfylder $d\omega = 0$. Vi integrerer de to udtryk, der indeholder dx :

$$\int y dx = yx \quad \text{og} \quad \int \left(\frac{1}{y} + z\right) dx = x\left(\frac{1}{y} + z\right).$$

Så dannes formen

$$\pi_1 = y \cdot x dz + x\left(\frac{1}{y} + z\right) dy.$$

Nu er

$$\begin{aligned} d\pi_1 &= x dy \wedge dz + y dx \wedge dz + \left(\frac{1}{y} + z\right) dx \wedge dy + x dz \wedge dy \\ &= y dx \wedge dz + \left(\frac{1}{y} + z\right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

da $dy \wedge dz = -dz \wedge dy$.

Altså er

$$\omega_1 = \omega - d\pi_1 = z^3 dy \wedge dz.$$

Vi finder $\int z^3 dy = z^3 y$, så vi får

$$\omega_1 = d\pi_2, \quad \text{hvor} \quad \pi_2 = z^3 y dz.$$

Men så er

$$\begin{aligned} \omega &= d(\pi_1 + \pi_2) = d\left(z^3 y dz + x\left(\frac{1}{y} + z\right) dy + y x dz\right) \\ &= d\left(x\left(\frac{1}{y} + z\right) dy + y(z^3 + x) dz\right). \end{aligned}$$

Lad nu F være en halvkugle med centrum i $(0, 2, 1)$, radius 1 og defineret ved, at $x \geq 0$. Så er randen ∂F en cirkel C med centrum i $(2, 1)$ i (y, z) -planen og radius 1.

$$\int_F \omega = \int_C (\pi_1 + \pi_2) = \int_C x \left(\frac{1}{y} + z \right) dy + y(z^3 + x) dz = \int_C yz^3 dz.$$

Med C er rand af cirkelskiven D , så vi får videre

$$\int_F \omega = \int_D z^3 dy \wedge dz.$$

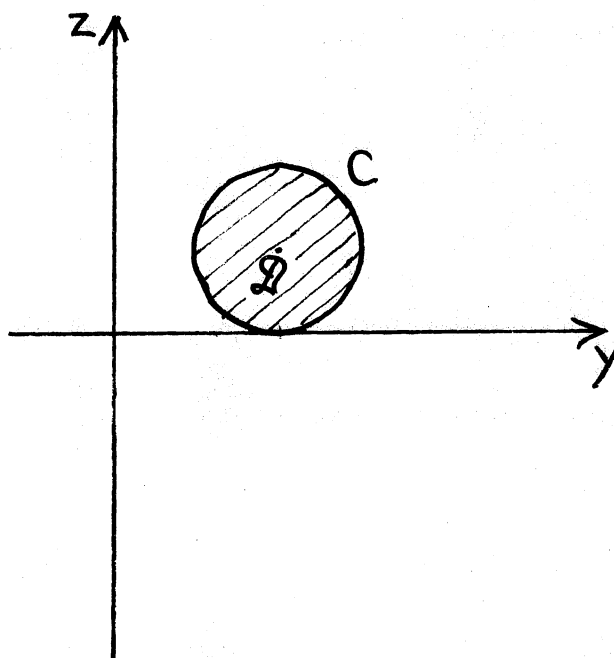
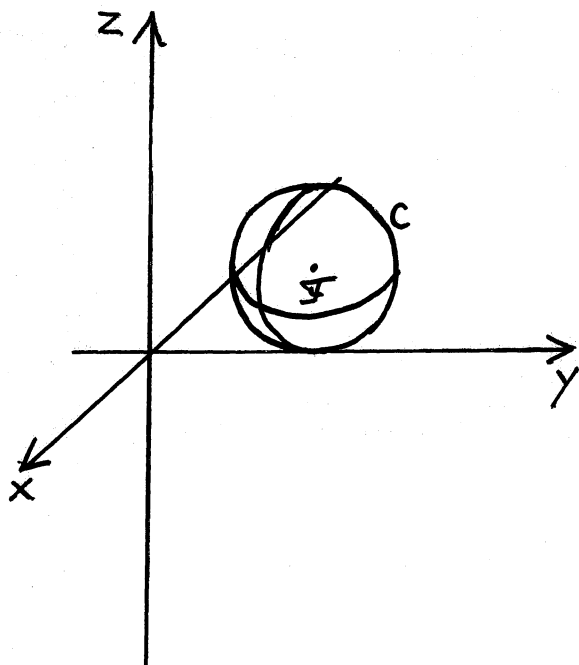
Skifter vi til polære koordinater,

$$z = 1 + r \cos \theta,$$

$$y = 2 + r \sin \theta,$$

med Jacobi-determinanten r , får vi videre

$$\begin{aligned} \int_F \omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r \cos \theta)^3 r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r + 3r^2 \cos \theta + 3r^3 \cos^2 \theta + r^4 \cos^3 \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos \theta + \frac{3}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{5} \cos^3 \theta \right) d\theta \\ &= \pi + 0 + \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + 0 = \pi + \frac{3}{4} \pi = \frac{7}{4} \pi. \end{aligned}$$



KAPITEL II

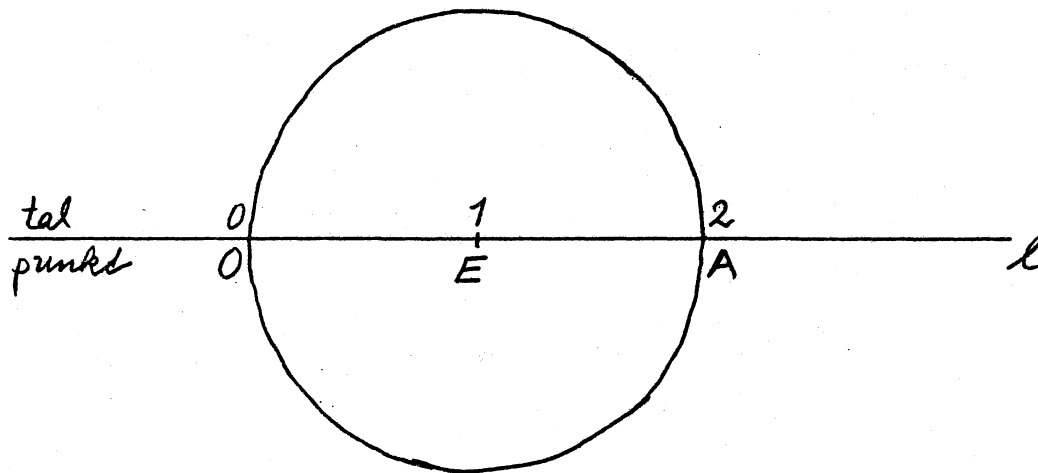
TRIVIELLE EKSEMPLER

*Den, som undersøger, og som efter ærlig
Undersøgelse antager en Vildfarelse i
Stedet for en Sandhed, har bedre gjort
sin Pligt end den, der antager Bekendelsen
af Sandheden uden at have undersøgt, om
den er rigtig eller ikke.*

John Locke.

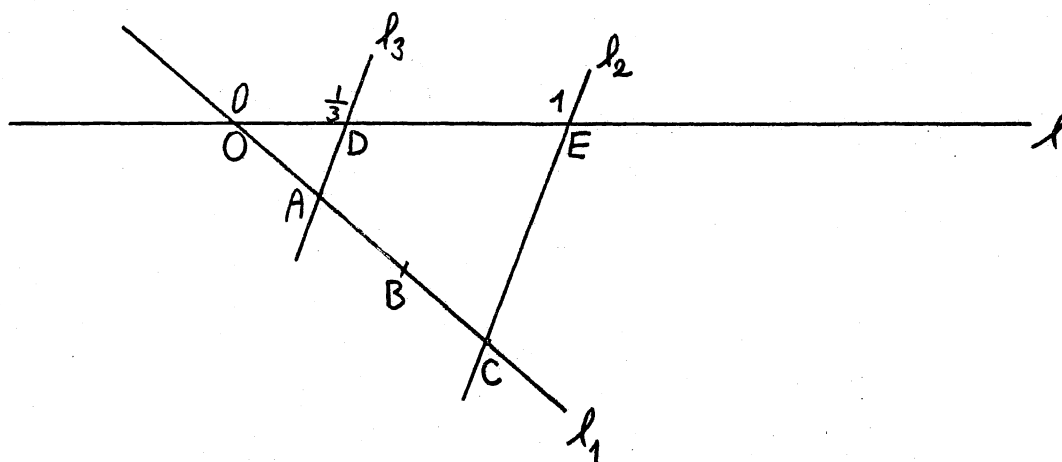
§1. Vektorregning i planen og komplekse tal.

Et liniestykke multipliceres med passereren:



Cirklen med centrum i E gennem O skærer linien l i O og A, hvor A svarer til talværdien 2.

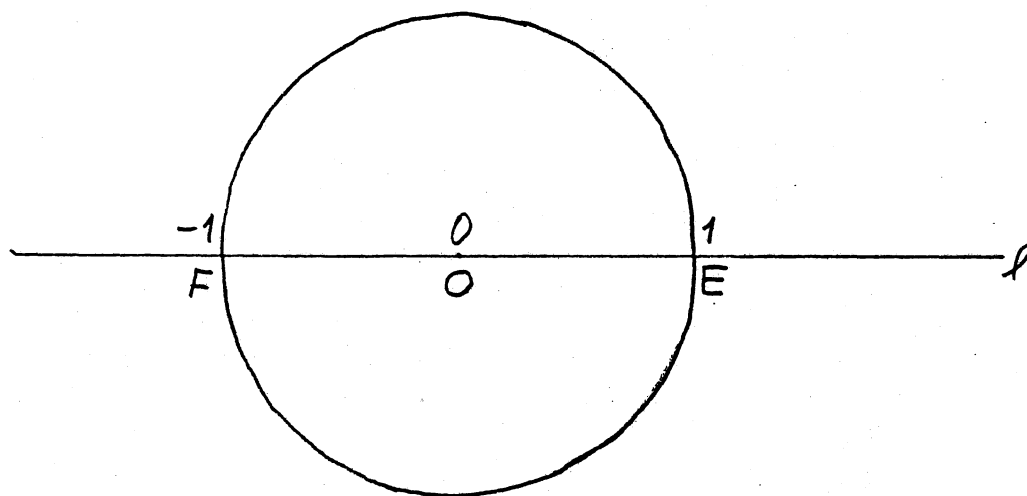
Et liniestykke deles ved parallelle linier:



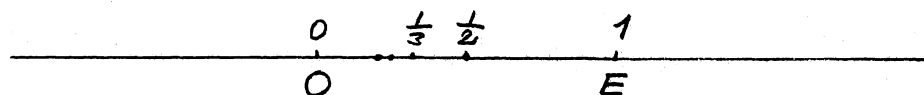
Linien l_1 er vilkårlig. Punktet A på l_1 er ikke O. Punktet B afsættes, så OA og AB er lige lange og $O \neq B$. Punktet C afsættes, så AB og BC er lige lange og $A \neq C$. Linien l_2 går gennem E og C. Linien l_3 går gennem A og er parallel med l_2 . Linien l_3 skærer l i punktet D.

Liniestykket OD er en trediedel af liniestykket OE. Punktet D svarer til tallet $\frac{1}{3}$.

Punktet F svarende til tallet -1 findes ved at tegne cirklen med centrum i O gennem E .

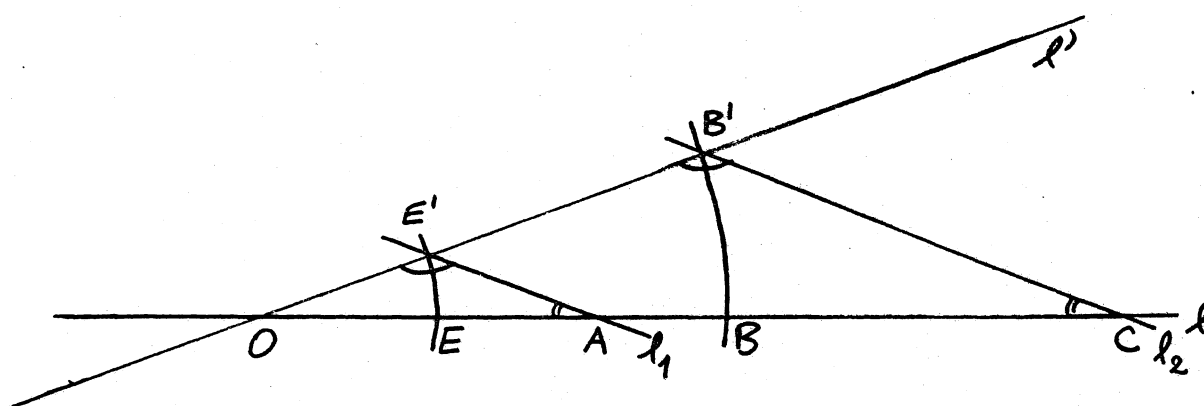


Liniestykket, der indeholder alle punkterne, der svarer til de rationale tal $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, er OE .



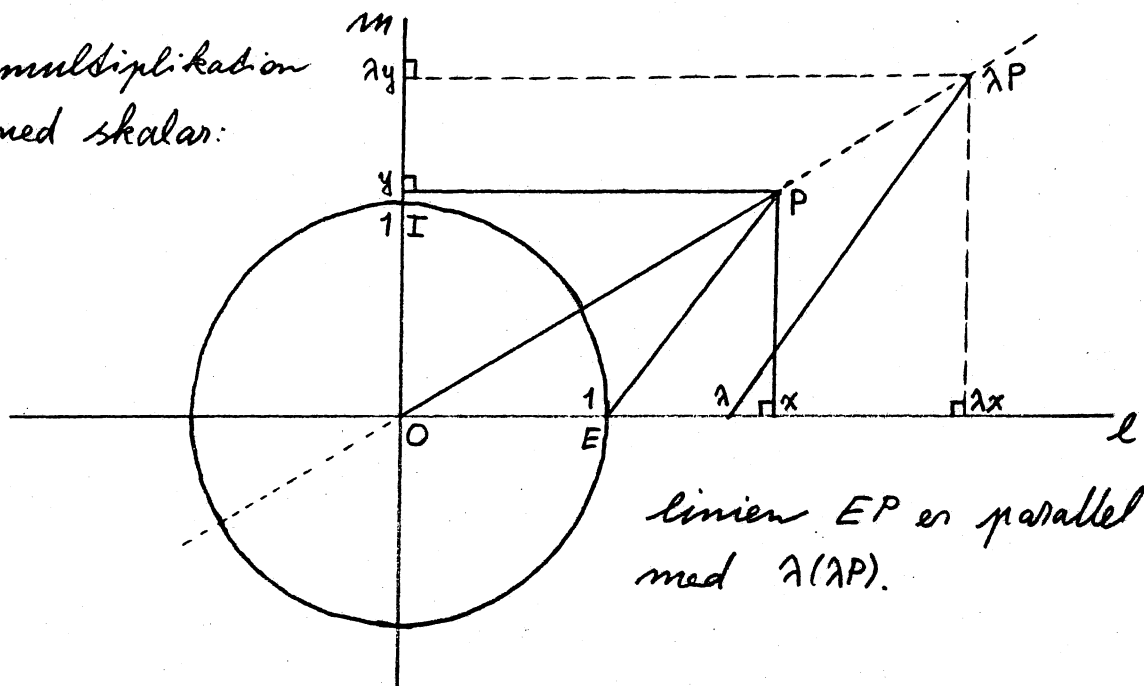
Intervaller, der indeholder alle tallene $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, er $[0, 1]$.

Produktet af to liniestykker kan konstrueres:

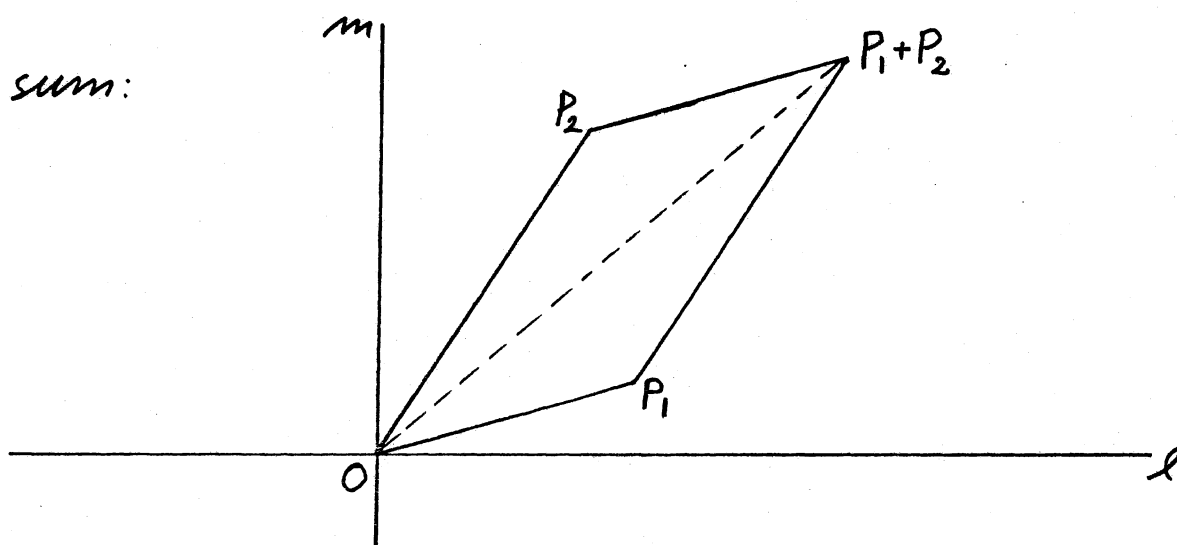


Linien l' er vilkårlig, men forskellig fra l , gennem O . Cirkler med centrum i O gennem E og B skærer l' i hhv. E' og B' . Linien l_1 gennem E' og A tegnes. Linien l_2 gennem B' er parallel med l_1 og skærer l i C . Punktet C svarer til produktet af A og B .

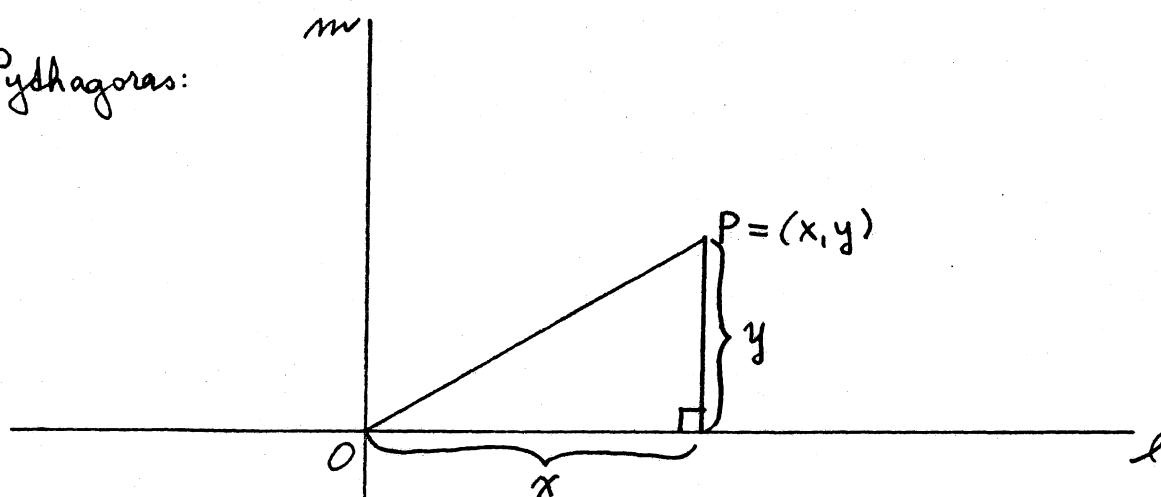
multiplikation
med skalar:



sum:



Pythagoras:



$$|OP|^2 = x^2 + y^2 = OP \cdot OP.$$

Det komplekse produkt af to vektorer på linien ℓ . Lad $v_1 = (x_1, 0)$ og $v_2 = (x_2, 0)$. Definitionen giver

$$v_1 v_2 = (x_1 x_2 - 0 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0) = (x_1 x_2, 0).$$

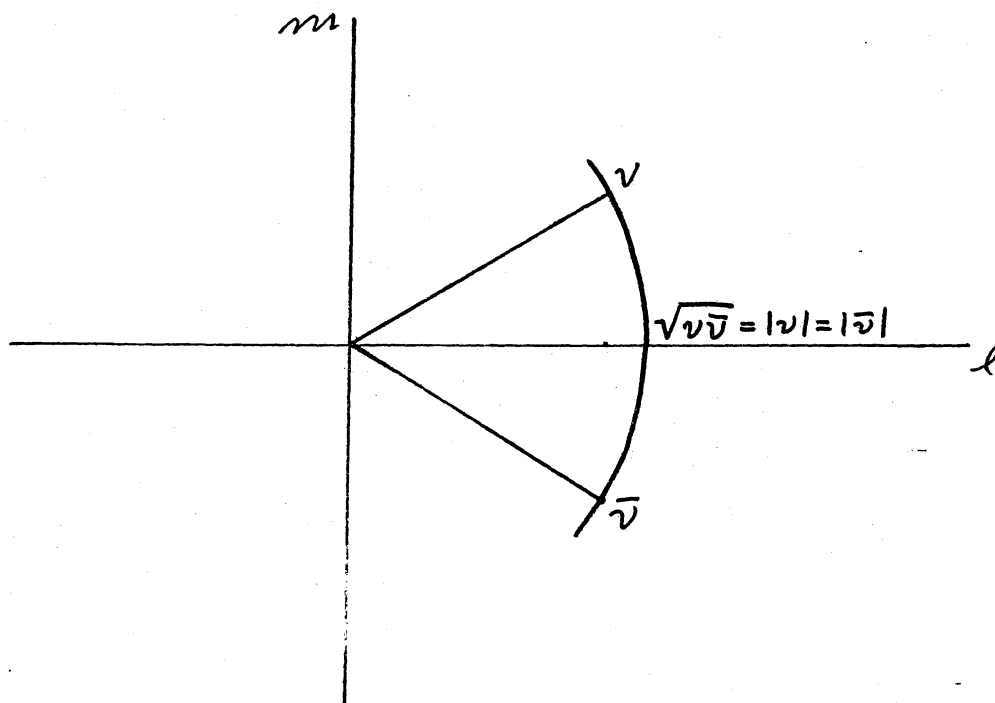
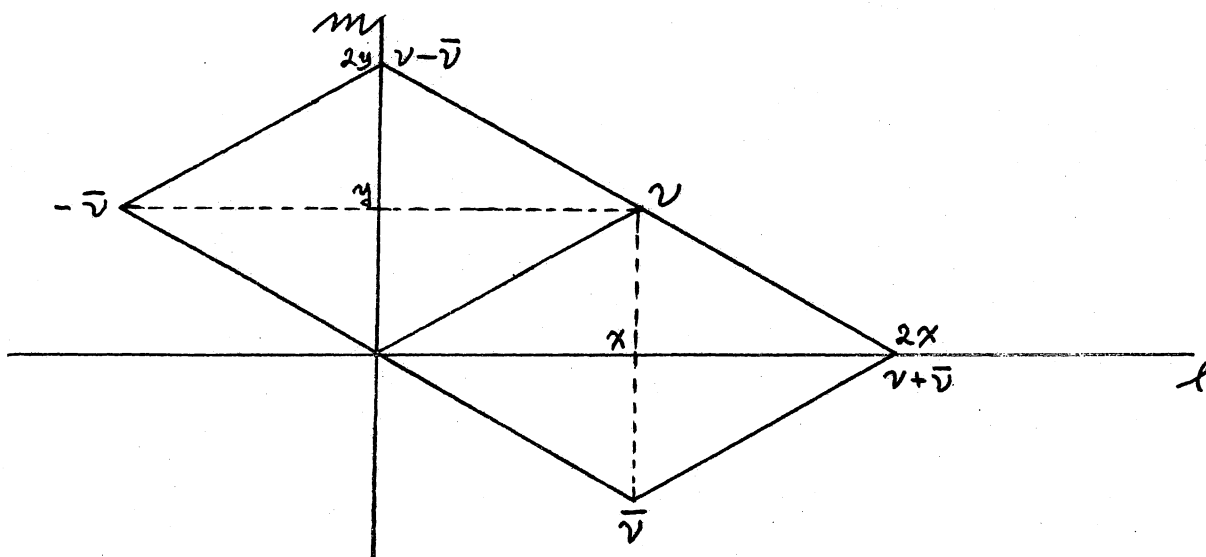
Det komplekse produkt kan derfor opfattes som en generalisation af det reelle produkt for de reelle tal på linien ℓ .

Det komplekse produkt af vektoren $0I$ med sig selv.

$$(0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0).$$

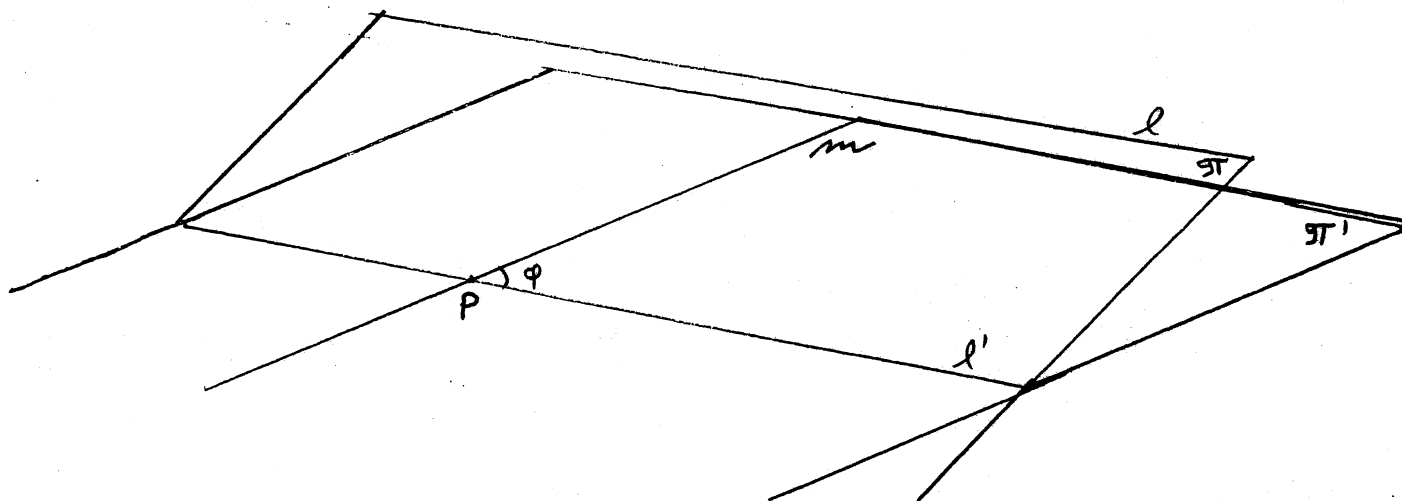
Denne vektor løser ligningen $z^2 = -1$, som ikke har nogen reel løsning.

Konjugering, real- og imaginærdel:



§2. Vektorregning i rummet.

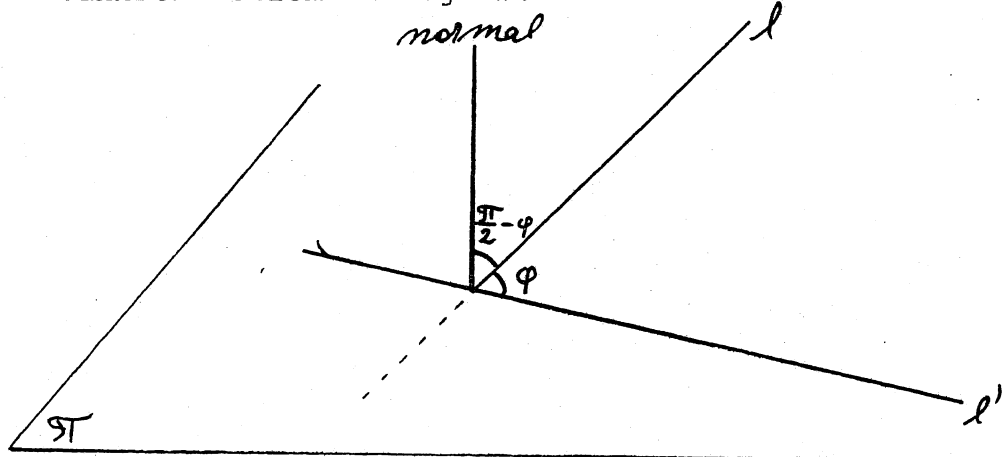
Vinklen mellem l og m :



Planen π indeholder l og skærer m i P . Linien l' gennem P er parallel med l .

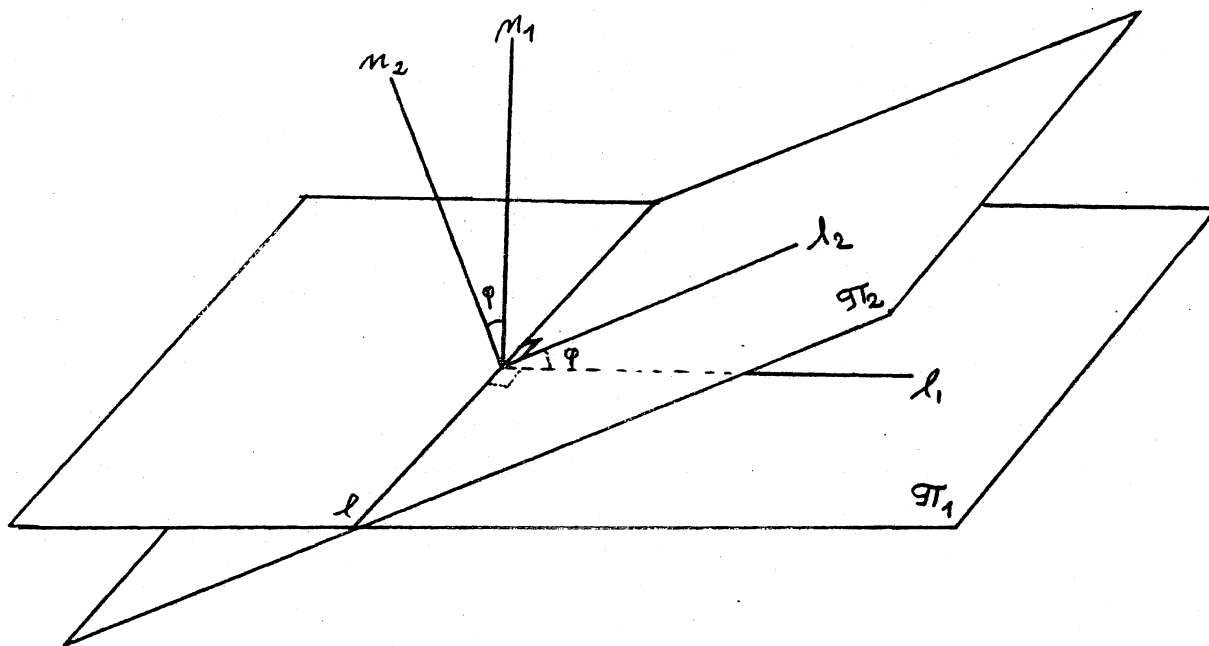
Vinklen φ mellem l' og m findes i deres udspændte plan π' .

Vinklen mellem l og π :



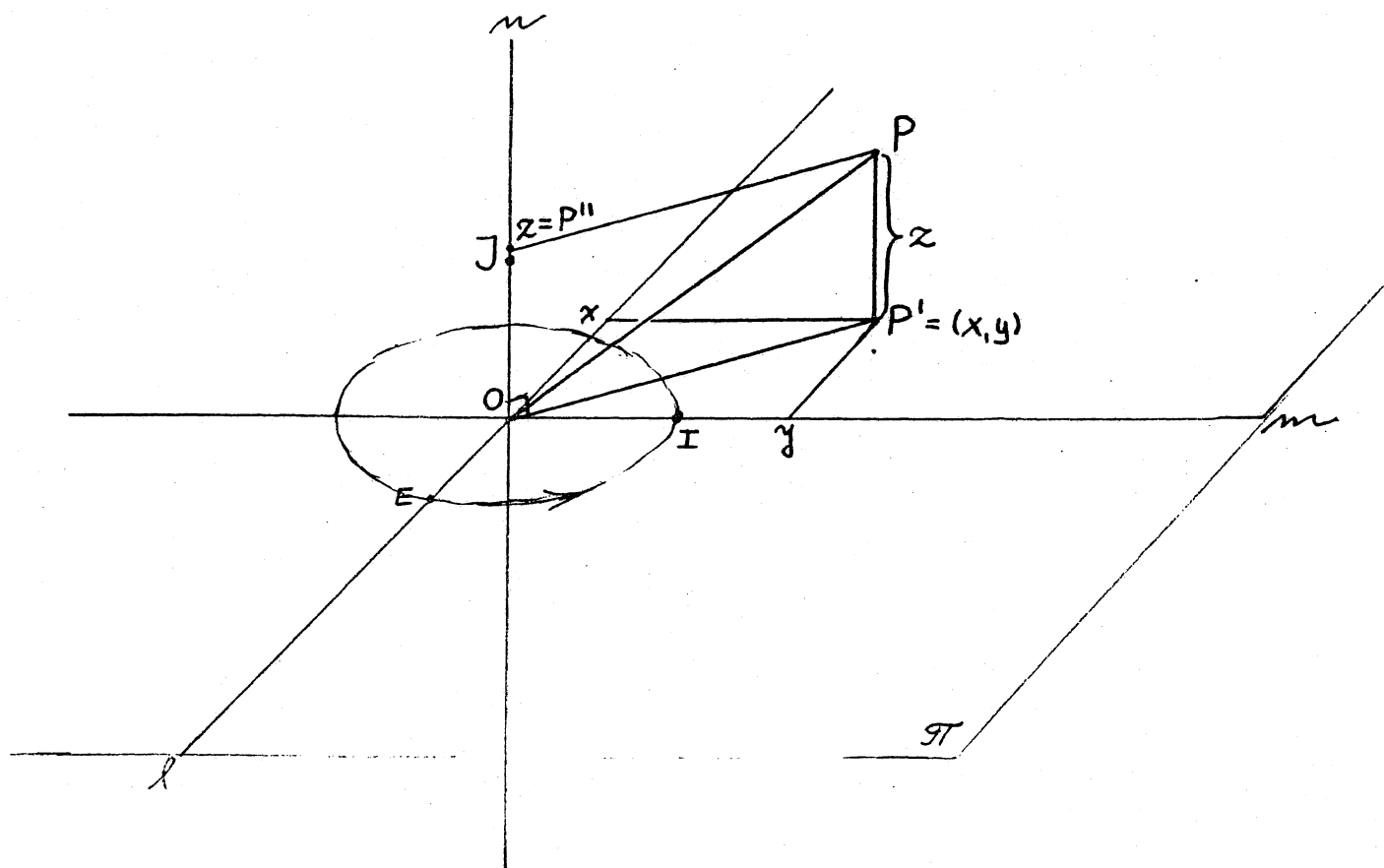
Vinklen φ er den mindste vinkel mellem l og en linie i planen. Linien l' er skæringslinje mellem planen π og den plan, der indeholder l og normalen.

Vinklen mellem π_1 og π_2 :



Vinklen φ er vinklen mellem normalerne n_1 og n_2 , men også vinklen mellem linierne l_1 og l_2 , der står vinkelret på planernes skæringslinje l .

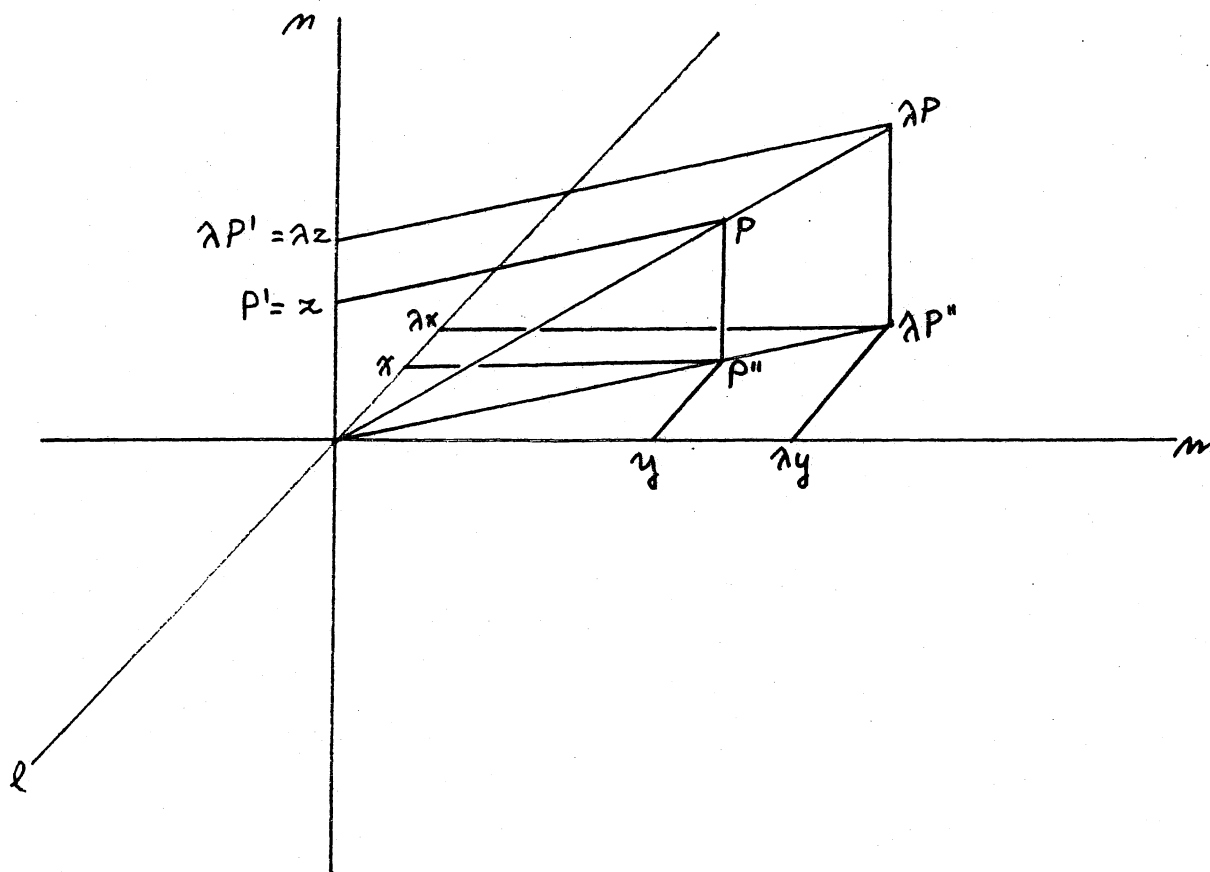
Koordinater:



Pythagoras i planen (n, P) på trekanten $OP'P$ gives os

$$|OP|^2 = |OP'|^2 + |P'P|^2 = (x^2 + y^2) + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Multiplikation med en skalar.



Vektorproduktet

$$e_1 \times e_2 = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = e_3.$$

Regnereglerne siger nu:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) &= (x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3) \times (x_2 e_1 + y_2 e_2 + z_2 e_3) \\ &= x_1 x_2 e_1 \times e_1 + x_1 y_2 e_1 \times e_2 + x_1 z_2 e_1 \times e_3 + y_1 x_2 e_2 \times e_1 + y_1 y_2 e_2 \times e_2 \\ &\quad + y_1 z_2 e_2 \times e_3 + z_1 x_2 e_3 \times e_1 + z_1 y_2 e_3 \times e_2 + z_1 z_2 e_3 \times e_3 \\ &= x_1 x_2 0 + x_1 y_2 e_3 - x_1 z_2 e_2 - y_1 x_2 e_3 + y_1 y_2 0 + y_1 z_2 e_1 + z_1 x_2 e_2 \\ &\quad + z_1 y_2 e_1 - z_1 z_2 0 \end{aligned}$$

$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2) e_1 + (z_1 x_2 - x_1 z_2) e_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2) e_3$$

$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot$$

Rumproduktet af terninger er

$$[e_1, e_2, e_3] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot$$

Men også $(e_1 \times e_2) \cdot e_3 = e_3 \cdot e_3 = 1 \cdot$

§3. Polynomier og rationale funktioner.

Sumtegnet $\sum$ kaldet "sigma".

Typiske regninger

$$x \sum_{v=0}^n x^v = \sum_{v=0}^n x^{v+1} = \sum_{v=1}^{n+1} x^v$$

$$\begin{aligned} (x-1) \sum_{v=0}^n x^v &= x \sum_{v=0}^n x^v - 1 \sum_{v=0}^n x^v = \sum_{v=1}^{n+1} x^v - \sum_{v=0}^n x^v = \\ &= x^{n+1} + \sum_{v=1}^n x^v - \sum_{v=1}^n x^v - x^0 = x^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Hvis x forbydes værdien 1, får vi formelen

$$(1) \quad \sum_{v=0}^n x^v = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Det komplekse tal $(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n})$ er rod i polynomiet $x^n - 1$, fordi

$$\left(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n} \right)^n = \left(\cos n \cdot \frac{2\pi}{n}, \sin n \cdot \frac{2\pi}{n} \right) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0).$$

Det er også rod i polynomiet

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = \sum_{v=0}^{n-1} x^v;$$

thi ved hjælp af formel (1) fås

$$\sum_{v=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n} \right)^v = \frac{\left(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n} \right)^n - 1}{\left(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n} \right) - 1} = \frac{0}{\left(\cos \frac{2\pi}{n} - 1, \sin \frac{2\pi}{n} \right)} = 0.$$

Formel (1) siger, at

$$(x-1) \mid (x^{n+1} - 1).$$

Sammenlign Sætning I.3.5.

Et polynomium af 2. grad med reelle koefficienter

$$(2) \quad x^2 + ax + b$$

har rødderne

$$-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

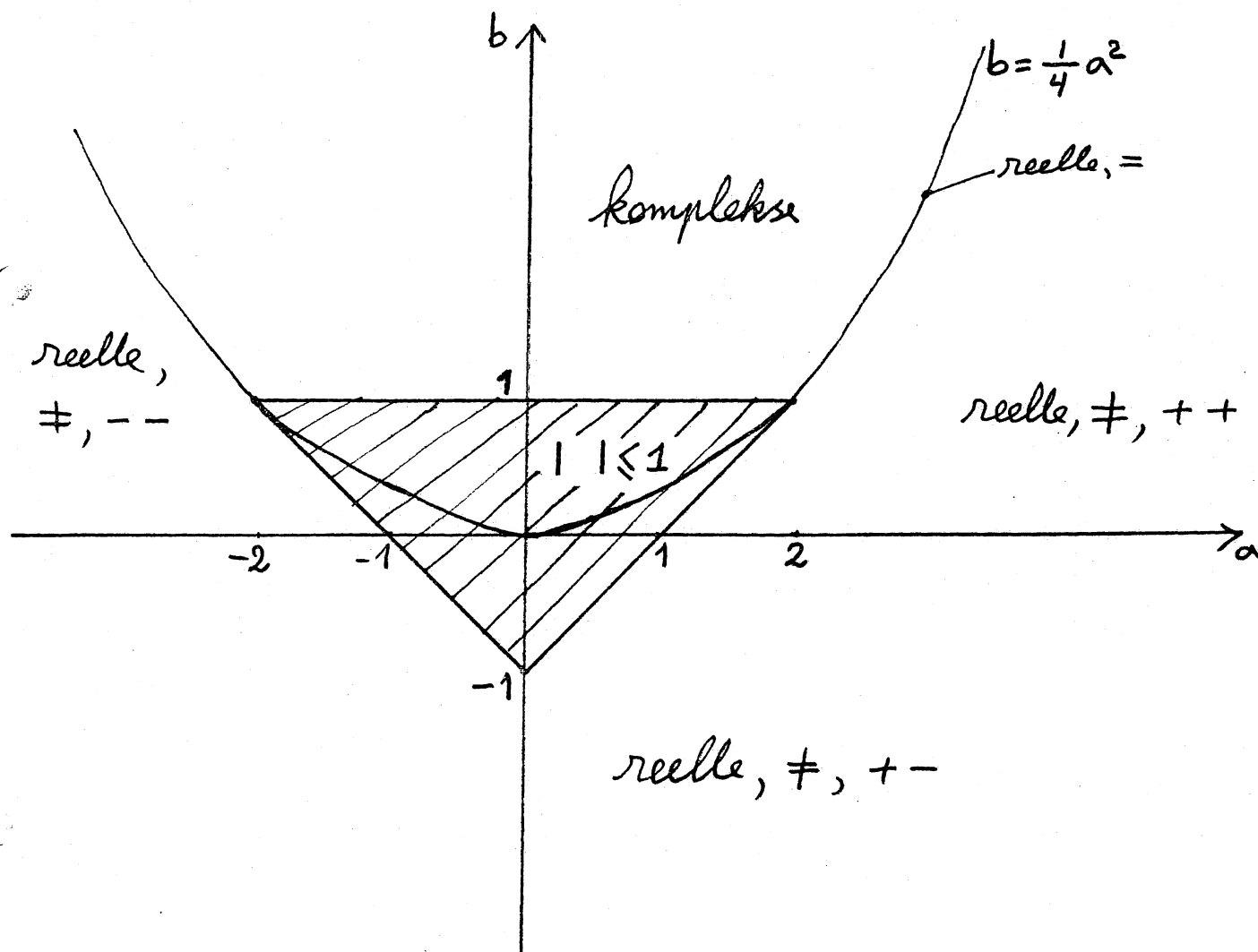
Hvis diskriminanten er negativ, forstås herved

$$-\frac{a}{2} \pm i \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Bemærk, at rødderne er konjugerede i dette tilfælde, og at røddernes længde som vektorer er

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)} = \sqrt{b}.$$

Rødderne i (2) afhænger således af koefficienterne a og b :



Formlen

$$\frac{\alpha - \beta}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \beta}$$

er det simpleste eksempel på opspaltning i stambrøker.

§4. Følger og rækker.

De naturlige tal er prototypen på en følge

$$1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$$

Denne følge, (n) , er ikke begrænset og har intet fortætningspunkt.

En uendelig decimalbrøk repræsenterer et reelt tal

$$a = 0.1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 0\ 1\ 2\ \dots$$

Vi tolker det som, at følgen

$$0.1, 0.12, 0.123, \dots, 0.123\dots d_n, \dots$$

af endelig decimalbrøker konvergerer mod tallet a .

Talfølgen $((-1)^n)$,

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

er begrænset; thi 1 og -1 ligger i en kugle om 0 med radius 2 f.eks.

Følgen har to fortætningspunkter, 1 og -1 . Thi enhver "kugle" med centrum i 1 og radius r ,

$$]1-r, 1+r[,$$

indeholder alle tal fra følgen med lige index, og sådanne findes i enhver størrelse.

En delfølge kunne defineres ved

$$n_p = 2p,$$

$$b_p = a_{n_p} = a_{2p} = (-1)^{2p} = 1,$$

følgen (b_p) konvergerer mod 1 , da $b_p = 1$ for alle p .

En talfølge som

$$0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$$

evt.

$$\left(\frac{1}{4} n (1 + (-1)^n) \right)$$

har kun ét fortætningspunkt, nemlig 0. Men følgen er ikke konvergent, den er ubegrænset.

Følgen $\left(\frac{1}{n}\right)$ er konvergent mod grænsepunktet 0,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Thi en kugle om 0 med radius r .

$$]-r, r[,$$

indeholder alle tal af formen $\frac{1}{n}$, når blot

$$n > \frac{1}{r},$$

hvilket altså er det nævnte "visse trin".

Følgen $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ konvergerer mod 0 ifølge Sætning I.4.8.

Følgen (2^{-n}) konvergerer mod 0. Thi

$$0 < 2^{-n} < \frac{1}{n} < r$$

fra et vist trin, $(n > \frac{1}{r})$, hvorfor $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0$.

Rækken $\sum \frac{1}{n}$ er divergent, selv om ledfølgen konvergerer mod

0.

Thi

$$\sum_{n=p+1}^{2p} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}.$$

Så

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= \sum_{v=1}^{2^n} \frac{1}{v} = \sum_{v=1}^2 \frac{1}{v} + \sum_{v=3}^4 \frac{1}{v} \\ &+ \sum_{v=5}^8 \frac{1}{v} + \dots + \sum_{v=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{v} \geq \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Afsnitsfølgen er altså ubegrænset.

Kvotientrækken $\sum x^n$, x et komplekst tal. Af formel II.3.1 fås

$$S_n = \sum_{v=0}^n x^v = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Hvis $|x| < 1$, så vil $|x|^{n+1} \leq |x|^{n+1} \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$. Altså må

$$S_n \rightarrow \frac{1}{1-x}.$$

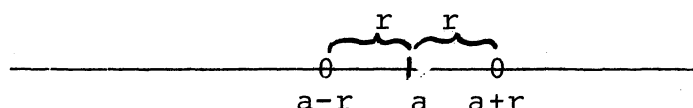
Vi skriver

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{for } |x| < 1.$$

§5. Kontinuitet.

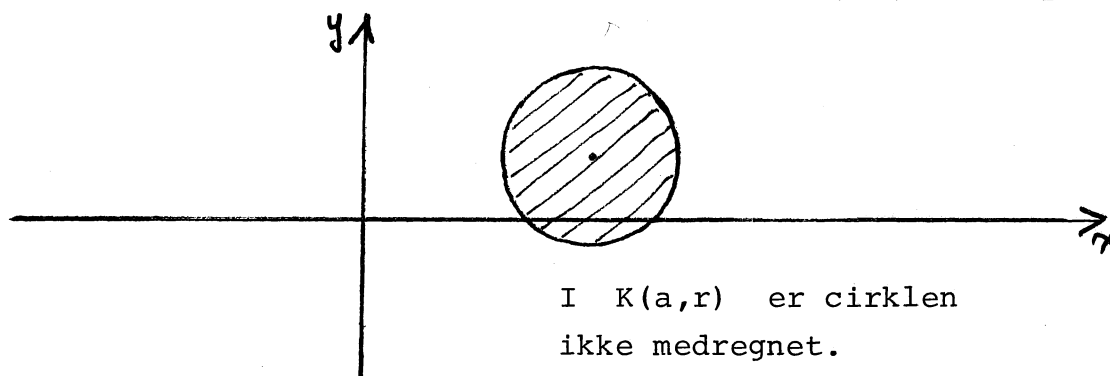
En kugle på den reelle akse, $\mathbb{R}$, er et åbent, symmetrisk interval.

$$K(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\} =]a-r, a+r[$$

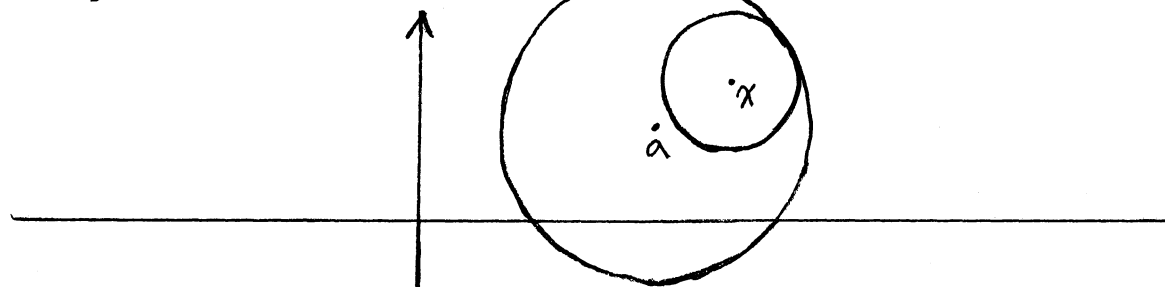


En kugle i planen $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{C}$ er en åben cirkelskive

$$K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x-a| < r\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\},$$



En kugle er altid åben:

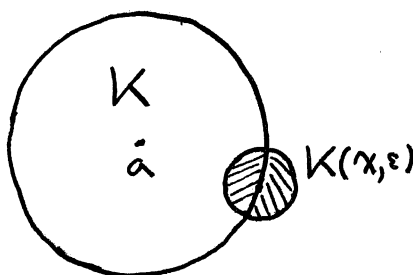


Hvis $x \in K(a, r)$, så vil $K(x, r-|a-x|) \subseteq K(a, r)$.

En kugles rand er enten to punkter, en cirkel eller en kugleflade. Afslutningen af kuglen fås ved tilføjelse af randen.

$$\overline{K(a, r)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| \leq r\}.$$

En kugle med centrum på randen af $K(a, r)$ indeholder punkter fra $K(a, r)$ og udefra.



Lad os betragte funktionen, som er kontinuert for $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Af det begrænsede interval $]0,1[$ er billedet det ubegrænsede interval $]1,\infty[$. Af det afsluttede interval $[1,\infty[$ er billedet $]0,1]$, der ikke er afsluttet, idet randpunktet 0 mangler. Derimod er billedet af et begrænset, afsluttet interval, $[a,b]$, et begrænset, afsluttet interval, $[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$. Jvf. sætning I,5,11.

Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x,y) = x + y$$

er kontinuert. Sætning I,5,12 siger, at dette er det samme som sætning I,4,6.

§6. Differential- og integralregning i én reel variabel.

Funktionen $y = \alpha x$ er differentiabel i 0 med differentialkvotient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha = \alpha .$$

I et andet punkt

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\alpha(x+dx) - \alpha x}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\alpha dx}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \alpha = \alpha .$$

En ret linie er overalt tangent til sig selv.

Funktionen $y = x^2$

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x \cdot x' + x' \cdot x = x \cdot 1 + 1 \cdot x = 2x .$$

Antag, at $(x^n)' = n x^{n-1}$. Da gælder, at

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = x^n + x \cdot n x^{n-1} = (n+1)x^n .$$

Da antagelsen gjaldt for $n = 0, 1, 2$, gælder den for 3 etc. for alle n .

For negativ eksponent har vi

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1} ,$$

altså samme formel.

Sæt

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \text{for } x > 0 .$$

Det er den omvendte funktion af

$$x = y^n ,$$

som har differentialkvotient

$$\frac{dx}{dy} = n y^{n-1} .$$

Altså (I,6,8) gælder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n y^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{(n-1)/n} = \frac{1}{n} x^{(1/n)-1} .$$

Vi har for rationelt $\alpha \in \mathbb{Q}$, at

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} .$$

Formlen gælder for $\alpha \in \mathbb{R}$ også irrational, som vi skal se i Kap. III, §6.

Vi kan finde stamfunktioner til rationale funktioner ved at finde den af stambrøkerne og polynomierne.

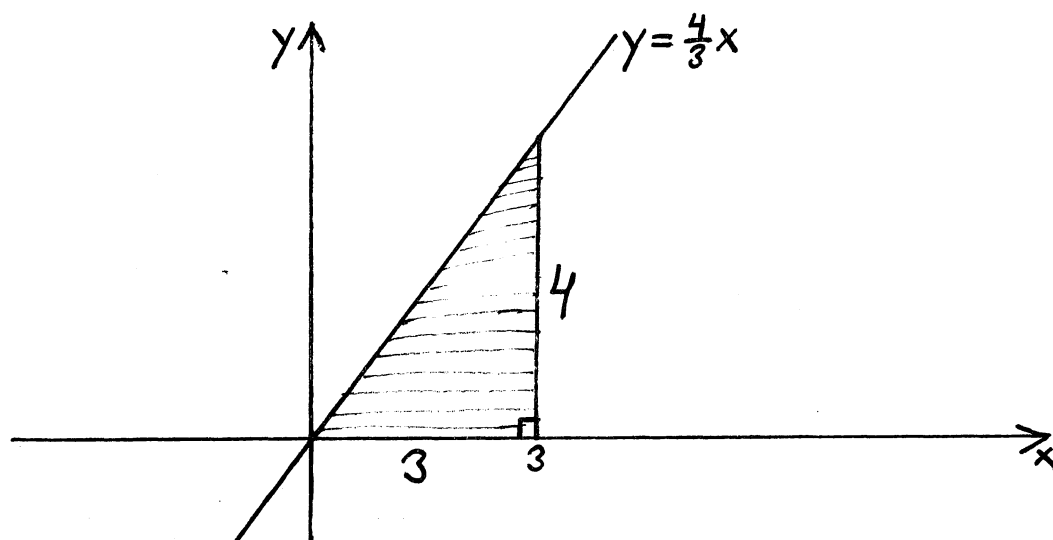
$$\boxed{\int x^\alpha dx \sim \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}} , \text{ for } \alpha \neq -1 .$$

Men altså

$$\int \frac{1}{x} dx \sim ?$$

fås ikke på denne måde.

Arealet af en retvinklet trekant med kateder 3 og 4 fås ved integration af hypotenusen:



$y = \frac{4}{3}x$ fra 0 til 3. Arealet er

$$\int_0^3 \frac{4}{3}x dx = \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{4 \cdot 9}{6} = \underline{\underline{6}} .$$

Længden af hypotesen fås som

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{25}{9}} dx = \left[\frac{5}{3} \cdot x \right]_0^3 = \underline{\underline{5}} .$$

Vi ser, at $5^2 = 3^2 + 4^2$, så længden passer med den sædvanlige!

Lad $f(x) = a + bx + cx^2$. Taylorrækken i 0 bliver:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \frac{a}{0!} \cdot x^0 + \frac{b}{1!} x^1 + \frac{2c}{2!} x^2 + 0x^3 + \dots = a + bx + cx^2 = f(x) .$$

§7. Differentialligninger af første orden.

Den simpleste ligning med ikke triviel løsning er

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = y .$$

Løsningen findes som

$$\varphi(x) = \left(\int \frac{dy}{y} + c \right)^{-1} = (\ln y + c)^{-1} = e^c e^x .$$

En anden enkel ligning er

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = y^2 .$$

Løsningen findes som (for $y > 0$)

$$\varphi(x) = \left(\int \frac{dy}{y^2} + c \right)^{-1} = \left(-\frac{1}{y} + c \right)^{-1} = \frac{1}{c-x} \quad \text{for } x < c .$$

Bemærk, at $\varphi(x) \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow c$. Man siger, at (2) er ligningen for en explosion.

Ligningen (1) kan skrives som den homogene ligning

$$(1) \quad (D^1 - D^0)\varphi = 0 .$$

Løsningen findes som

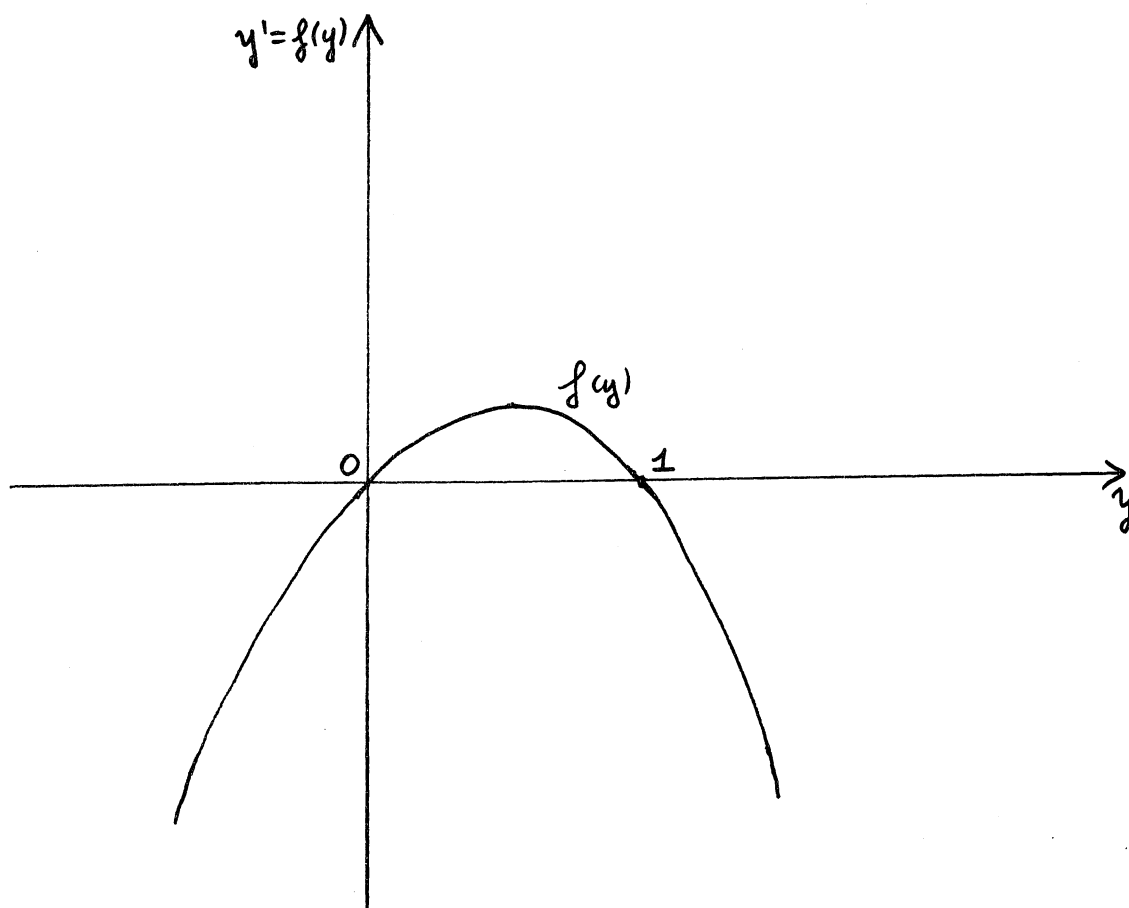
$$\lambda e^{\int dx} = \lambda e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Den autonome ligning af formen

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

giver anledning til følgende sammenhæng mellem billedet af funktionen f og forløbet af løsningerne $\varphi(x)$.

Lad f se ud som f.eks. $f(y) = y - y^2$.

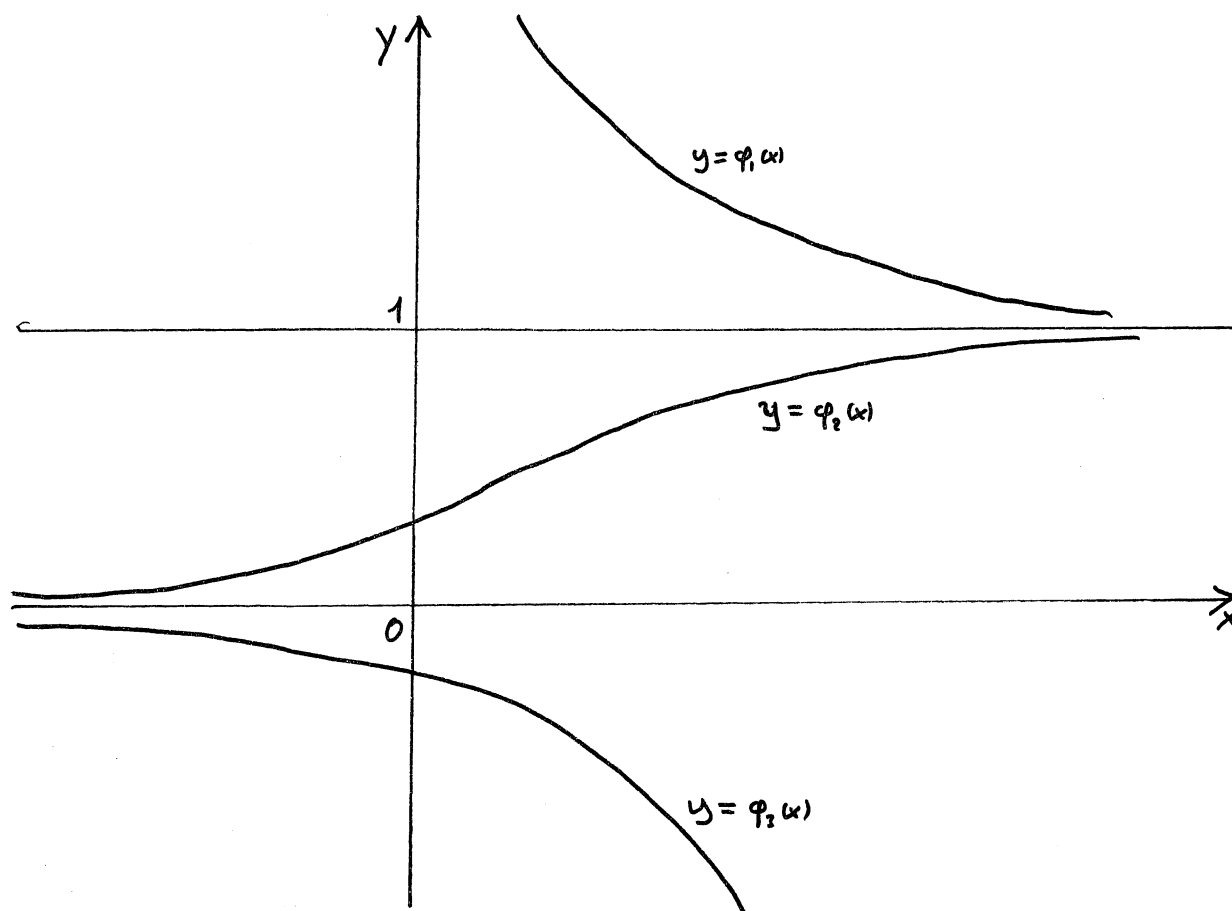


Nulpunkterne $y = 0$ og $y = 1$ giver anledning til konstante løsninger

$$\varphi(x) \equiv 0 \quad , \quad \varphi(x) \equiv 1 \quad .$$

Mellem nulpunkterne er alle løsninger voksende, fordi $y' = f(y) > 0$, og uden for intervallet $[0,1]$ er alle løsninger aftagende, fordi $y' = f(y) < 0$.

Det giver følgende typiske udseende:



Bemærk, at løsningen $\varphi = 0$ frastøder andre løsninger, mens løsningen $\varphi = 1$ tiltrækker dem. Det hænger sammen med, at $f(y)$ vokser gennem 0 og aftager gennem 1.

Løsningen findes ved beregningen

$$\int \frac{dy}{y-y^2} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = \ln|y| + \ln|1-y| + c.$$

Vi finder derfor løsningerne (samt forskydninger)

$$y = \varphi_1(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} \quad \text{for } y > 1, \quad x > 0$$

som typisk, og $\varphi_1(x+c)$ som samtlige;

$$y = \varphi_2(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad \text{for } 0 < y < 1, \quad x \text{ vilkårlig}$$

som typisk, og $\varphi_2(x+c)$ som samtlige;

$$y = \varphi_3(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} \quad \text{for } y < 0, \quad x < 0$$

som typisk, og $\varphi_3(x+c)$ som samtlige.

Ligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

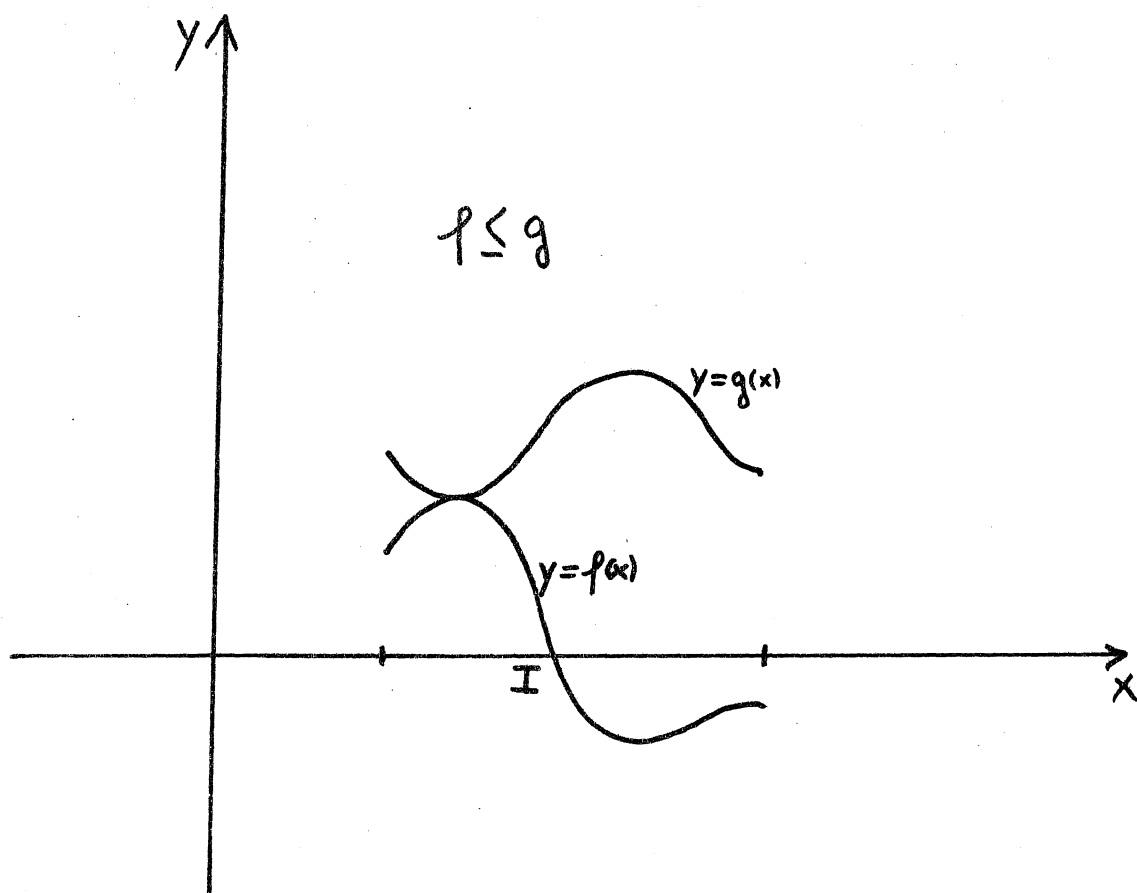
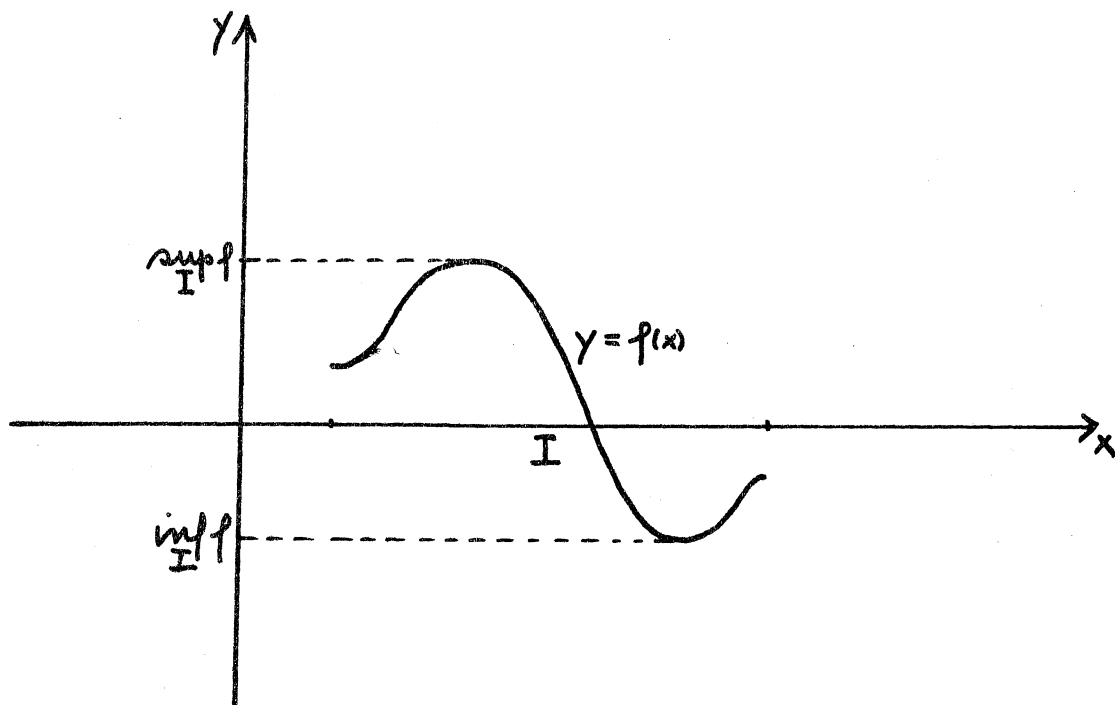
løses ved adskillelse af de variable

$$y \frac{dy}{dx} = x$$

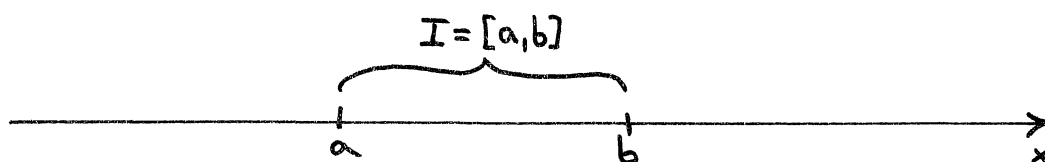
$$\int y \, dy = \int x \, dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

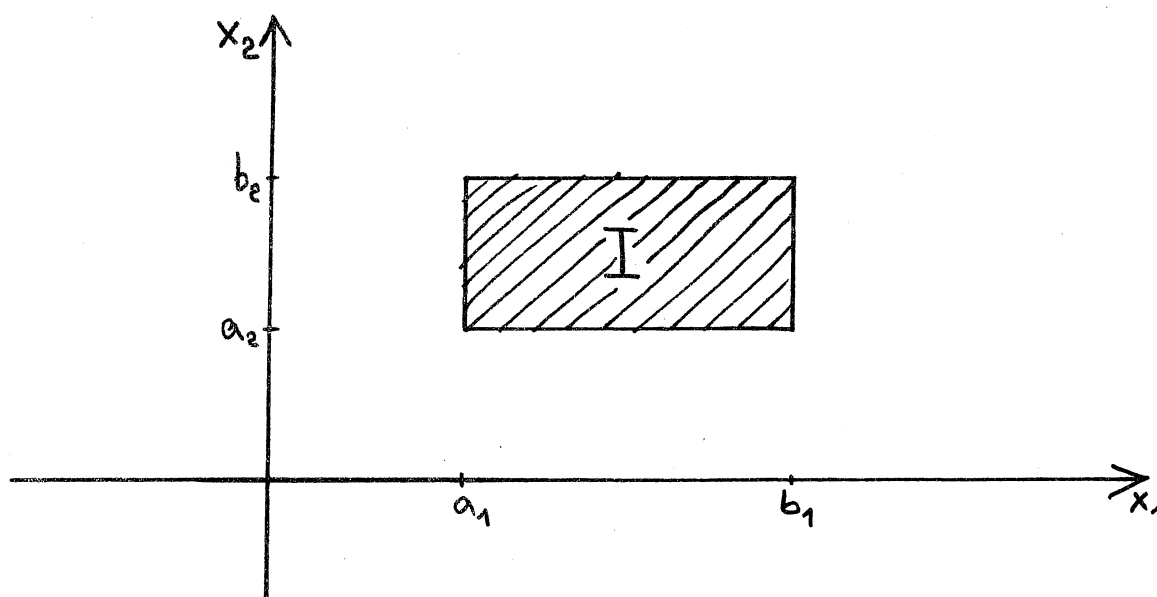
$$y = \sqrt{x^2 + 2c} .$$

§8. Integraler i $\mathbb{R}^n$.

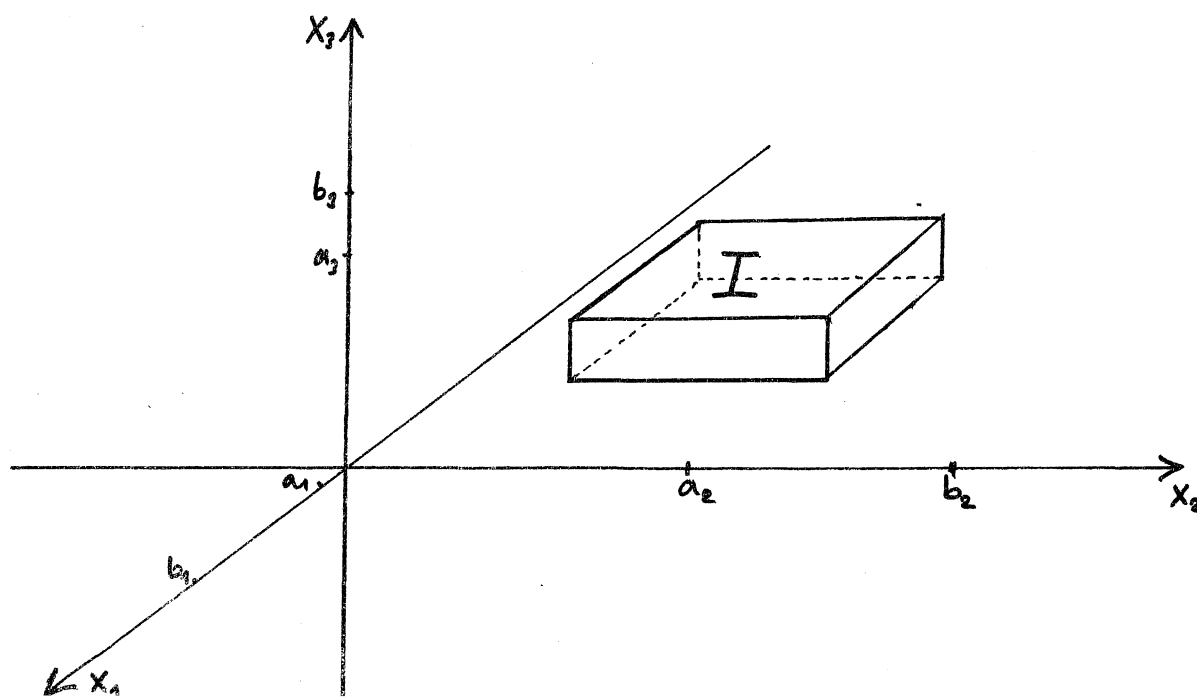
Interval på $\mathbb{R}$



Interval i $\mathbb{R}^2$ er et afsluttet rektangel

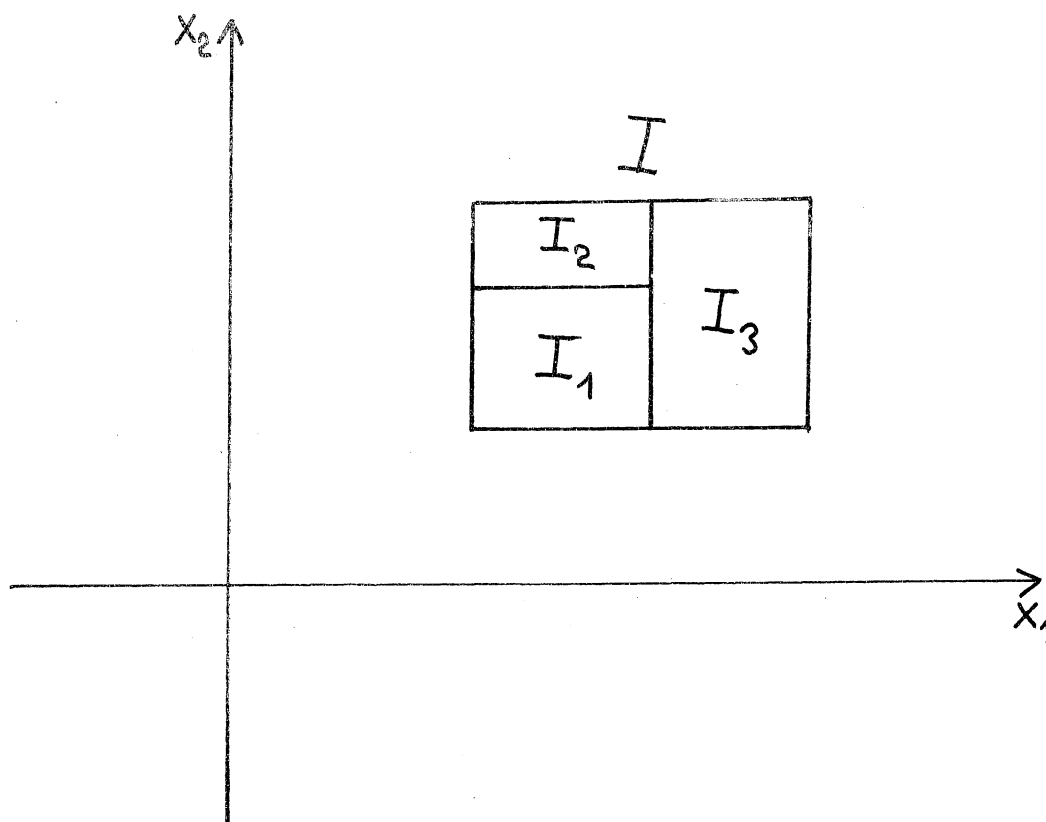


Interval i $\mathbb{R}^3$ er en afsluttet kasse

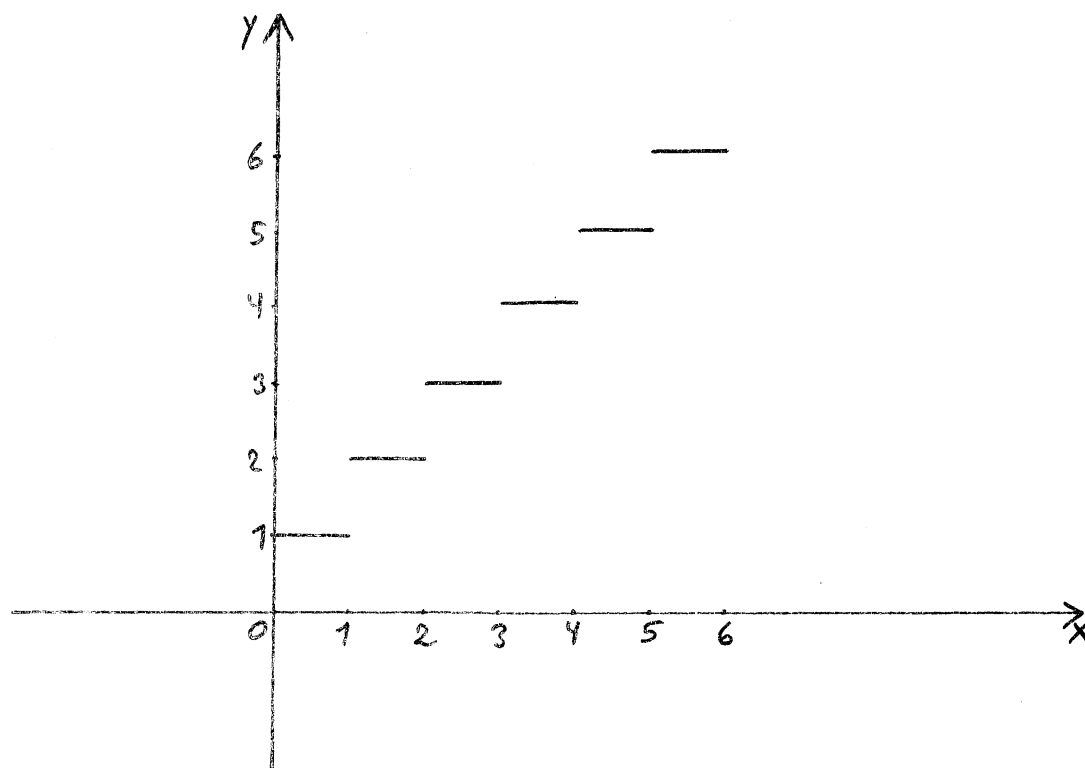


Målet er en fællesbetegnelse for "længde", $b - a$, "areal", $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ og "rumfang", $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$.

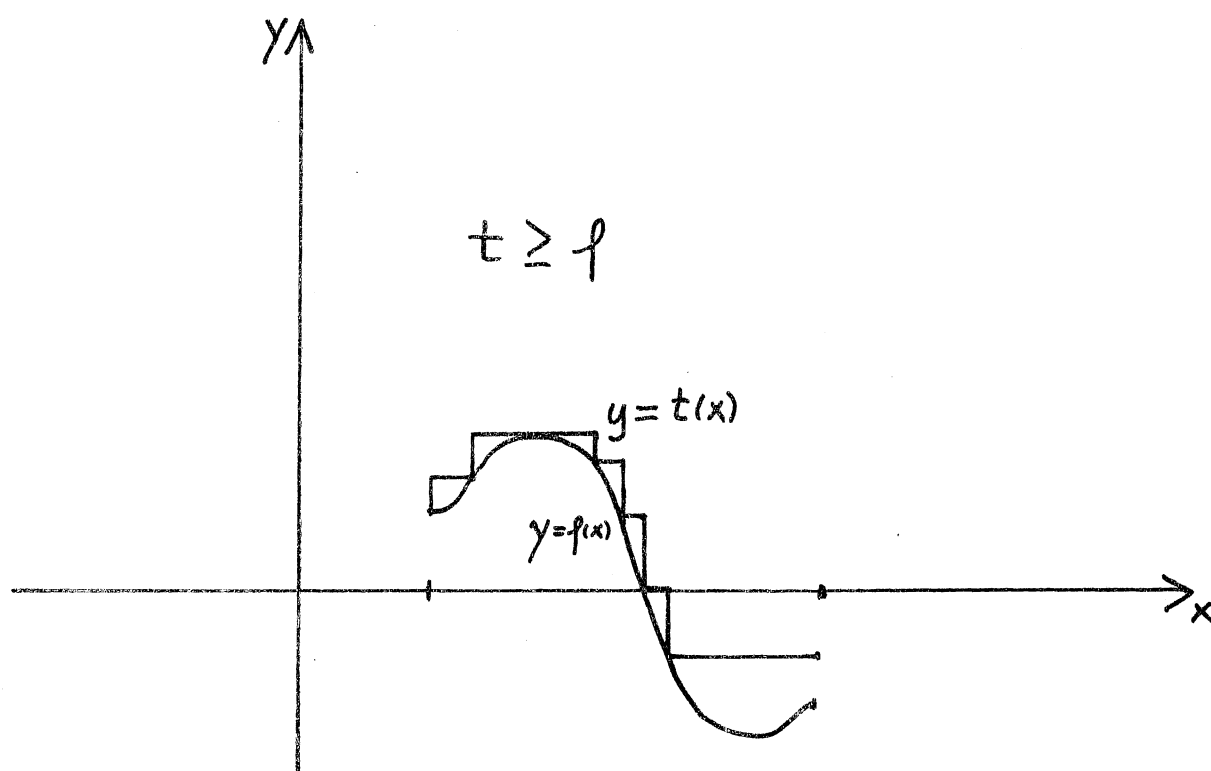
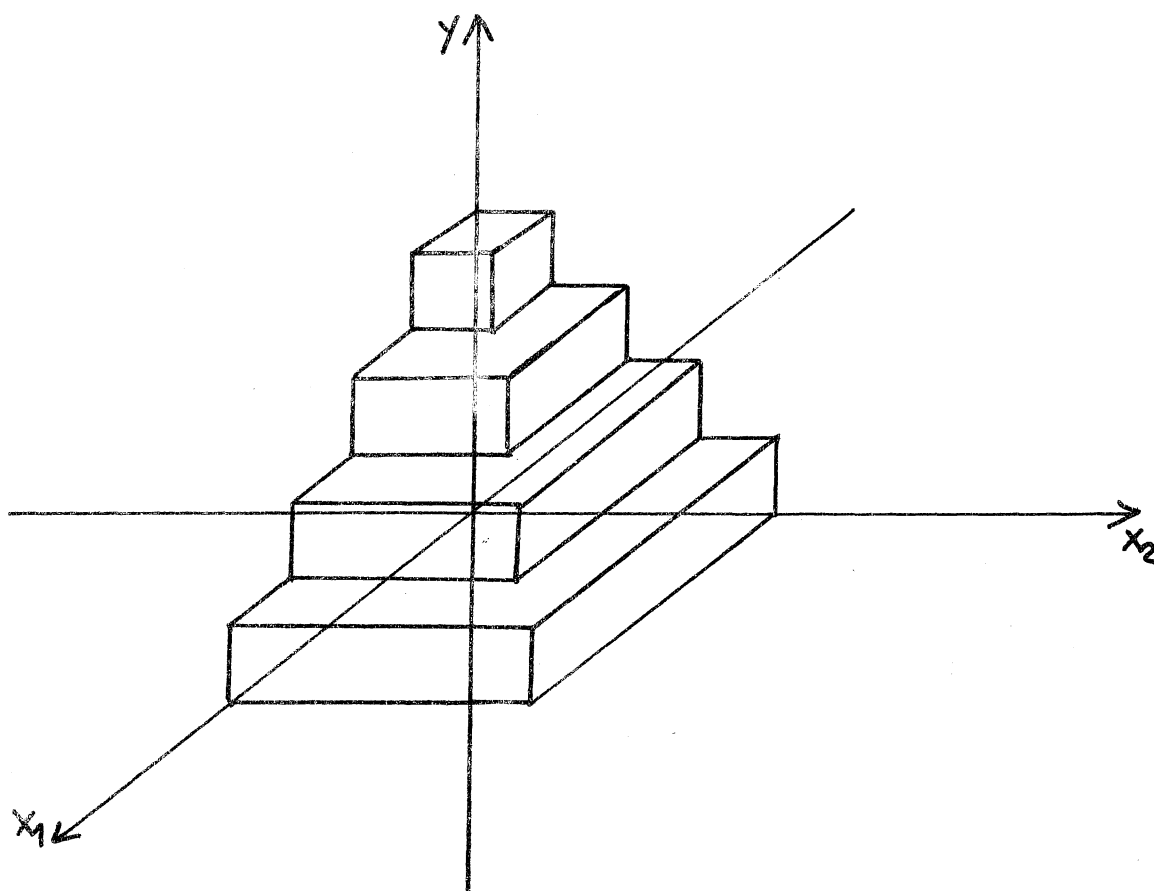
En intervaldeling er f.eks. i $\mathbb{R}^2$



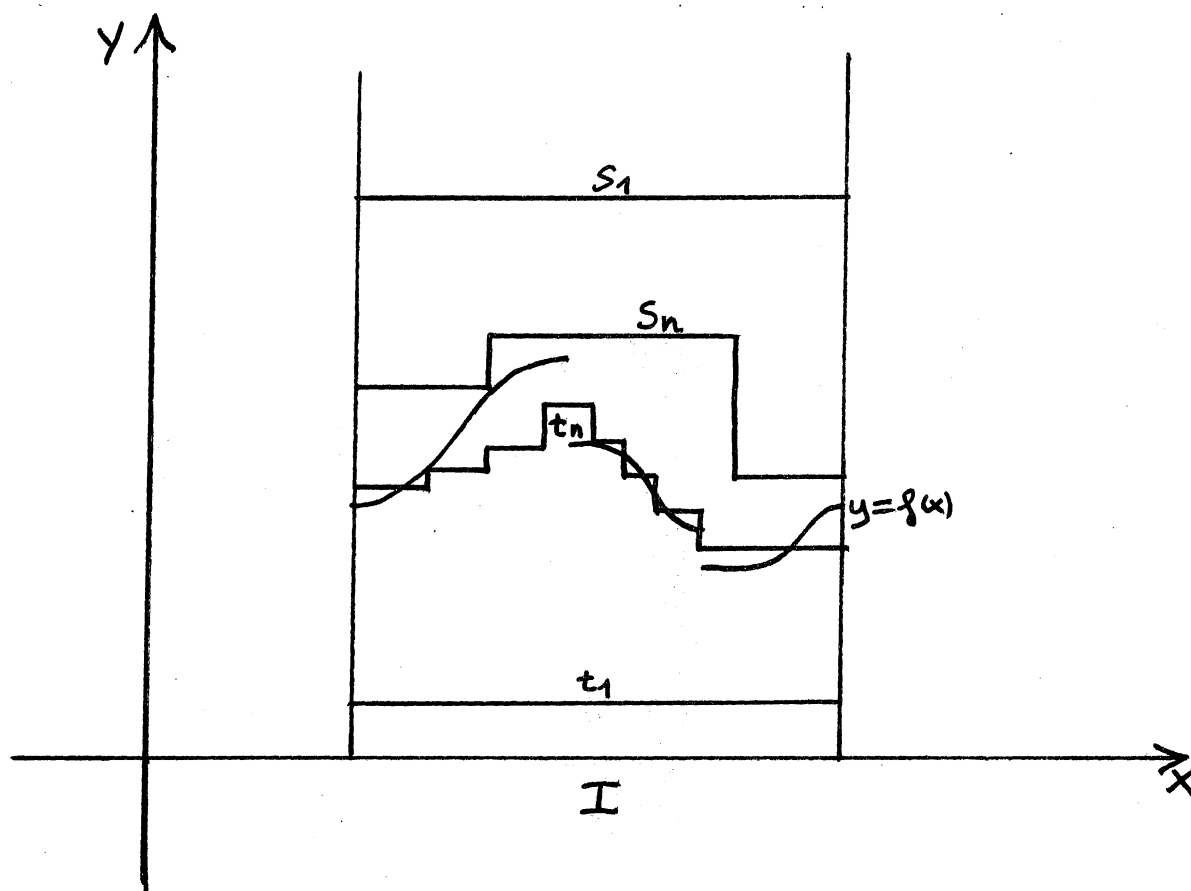
En trappefunktion af $I \subseteq \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$.



En "virkelig" trappefunktion af $I \subseteq \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$:



Ved Lebesgue integralets definition må man tænke sig, at er $t_n \nearrow f$ og $s_n \searrow f$, kan det meget vel forekomme, at $t_n < s_n$. F.eks.



F.eks. funktionen $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi kan ordne de rationale tal mellem 0 og 1 i en følge, f.eks.

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \dots$$

idet vi for $p+q = m$ ordner $\frac{p}{q}$ efter princippet $\frac{1}{m-1}, \frac{2}{m-2}, \dots$.
Følgen betegnes (r_n) .

Vi definerer nu en følge af trappefunktioner som

$$t_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = r_1, r_2, \dots, r_n \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Så vil $t_n \nearrow f$. Samtidig er $\int_0^1 t_n(x) dx = 0$. Altså gælder

$$\overline{L}(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t_n(x) dx = 0.$$

Da $0 \leq f$, må

$$0 \leq \underline{R}(f) \leq \underline{L}(f) \leq \overline{L}(f) = 0.$$

Altså er f Lebesgue integrabel med $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Men $\overline{R}(f) = 1$, da $f \leq t$ trappefunktion fører til, at i $\overset{\circ}{I}_j$ findes et rationalt tal, så

$$t(x) \geq 1 \quad \text{for } x \in \overset{\circ}{I}_j.$$

Så f er ikke Riemann integrabel.

§9. Vektorrum og lineære funktioner.

Planen, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$ og rummet, $\mathbb{R}^3$ er standardeksempler på vektorrum over de reelle tal.

Tilsvarende er $\mathbb{C}^n$ et vektorrum over de komplekse tal.

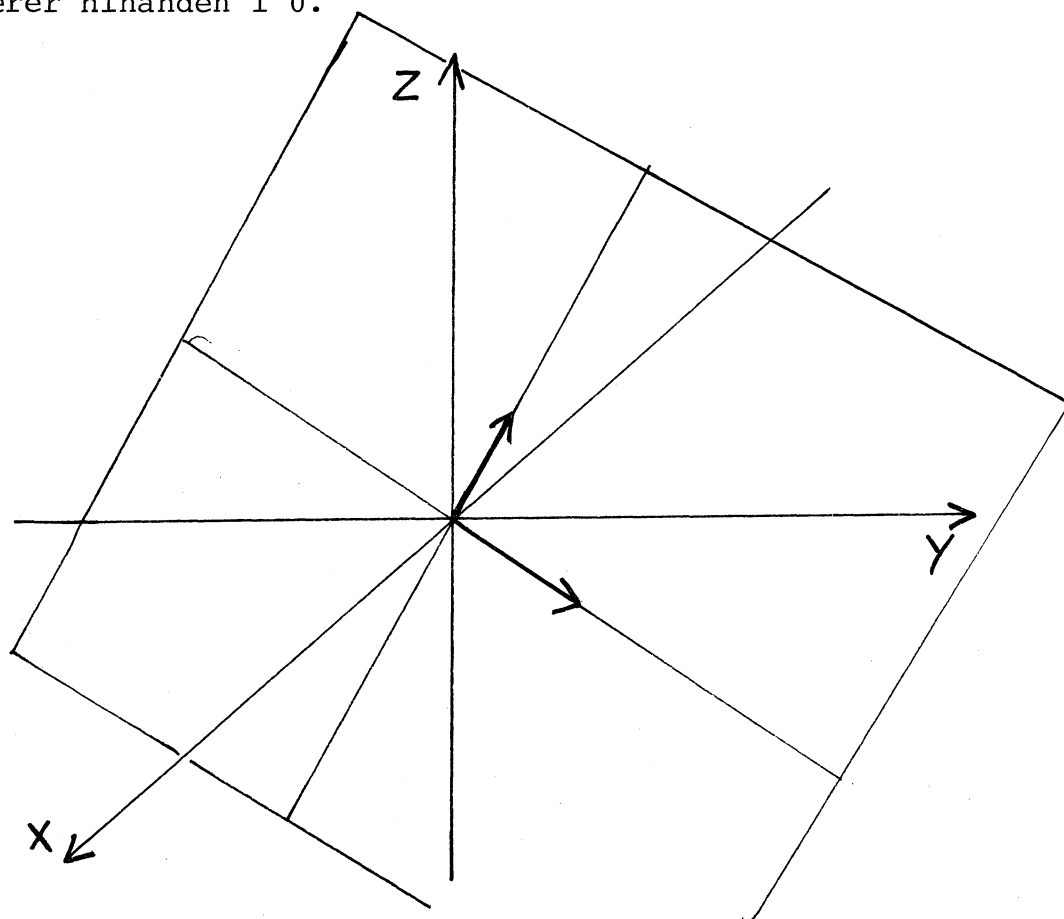
Også $C^2([a,b])$, rummet af 2 gange kontinuert differentiable funktioner, er et vektorrum over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ som man vil.

En differentialoperator $\Phi = (D^2 - \alpha D^1 + \beta D^0)$ er en lineær funktion

$$\Phi: C^2([a,b]) \rightarrow C^0([a,b]),$$

hvis kerne er et 2-dimensionalt underrum.

I $\mathbb{R}^3$ frembringer 2 ikke proportionale vektorer en plan, dvs. et 2-dimensionalt underrum, som er direkte sum af de to, som kun skærer hinanden i 0.



Spørgsmålet om løsning af et lineært ligningssystem

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + x_3 a_{13} = b_1$$

$$x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23} = b_2$$

$$x_1 a_{31} + x_2 a_{32} + x_3 a_{33} = b_3$$

kan nu formuleres; tilhører $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ billedet ved funktionen $\underline{x} \mapsto \underline{A}\underline{x}$, af $\mathbb{R}^3$ ind i $\mathbb{R}^3$? Hvis rangen af matricen $\underline{A}$ er mindre end 3, er der mulighed for, at problemet er uløseligt.

Hvis rangen af $\underline{A}$ er mindre end 3, findes en linearkombination mellem søjlerne, dvs.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

eller bedre

$$\underline{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{hvor} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En linearkombination mellem søjlerne er blot et element i kernen for funktionen. Og har kernen dimension 0, så er rangen af $\underline{A}$ netop 3.

Også mængden af integrable funktioner er et vektorrum, og integralet er en lineær funktion ind i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

§10. Determinanter.

I 2 og 3 dimensioner kender vi determinanten fra §§ 1 og 2. F.eks.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb .$$

Udvikling efter en søjle i 3 dimensioner er jo netop formen

$$\det(a_1 \ b_1 \ c_1) = a \cdot bxc$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - a_2 \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} + a_3 \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} .$$

Der er 6 permutationer af 3 elementer:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\sigma: \quad +1 \quad \quad +1 \quad \quad +1 \quad \quad -1 \quad \quad -1 \quad \quad -1$$

Derfor er

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} .$$

§11. Egenverdier og egenvektorer.

Operatoren $D^2: C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I)$ har egenvektorer $\sin$ og $\cos$ svarende til egenværdien -1 og $\sinh$ og $\cosh$ svarende til egenværdien 1 .

Funktionen $\sin \lambda x$ er egenvektor svarende til egenværdien $-\lambda^2$ og $\sinh \lambda x$ svarende til λ^2 .

Lad $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være lineær og givet ved matricen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium er

$$\begin{aligned} \det \left(x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &= \det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} \\ &= (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc. \end{aligned}$$

Konstantleddet er (naturligvis) $\det \underline{A}$.

Egenværdierne er

$$\frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}.$$

Egenværdierne er ens, hvis $\sqrt{\dots} = 0$. Det er tilfældet for matricerne

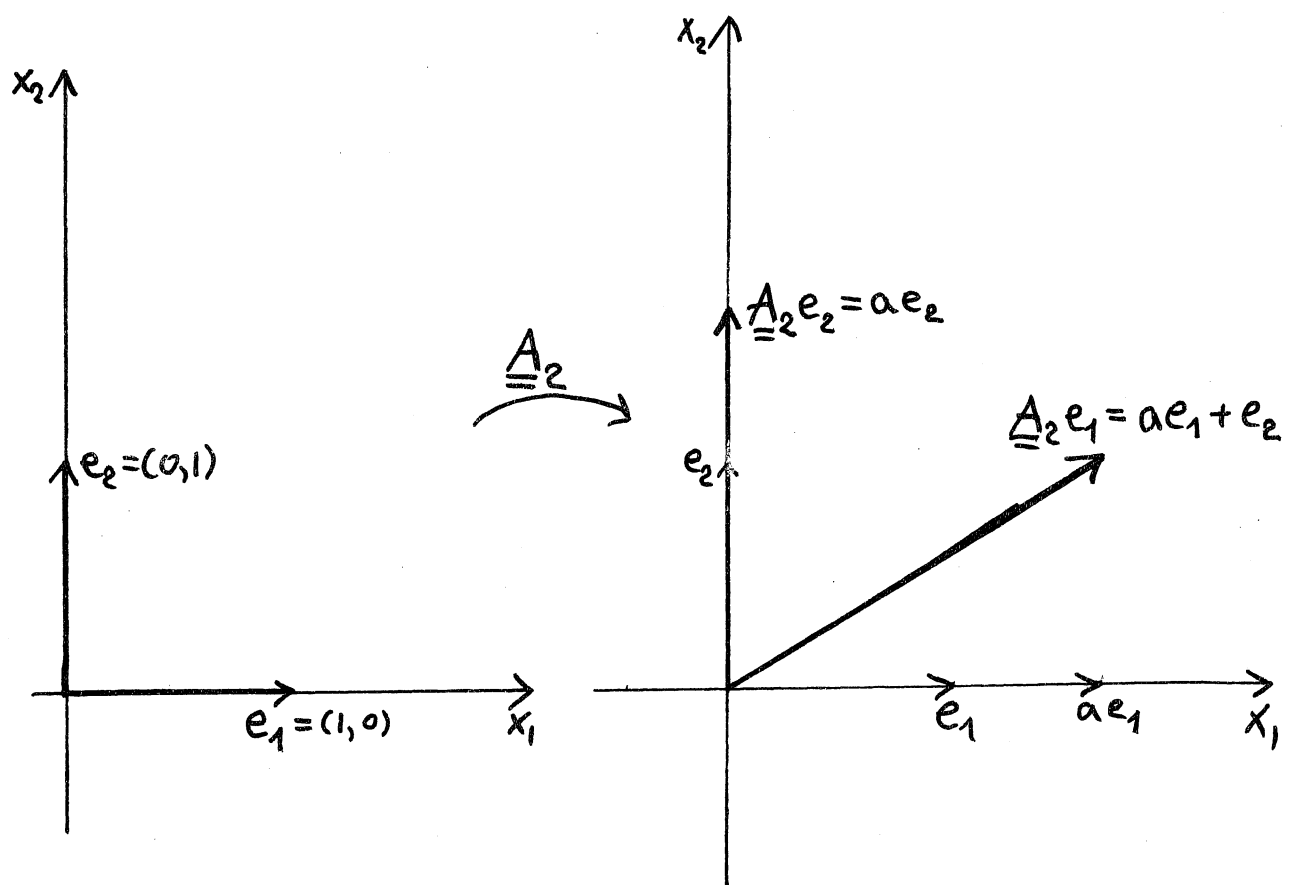
$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

Egenrummene er i de to tilfælde:

$$\ker(\underline{A}_1 - a\underline{E}) = \ker \underline{0} = \mathbb{R}^2$$

$$\ker(\underline{A}_2 - a\underline{E}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

I andet tilfælde er rodmultipliciteten 2 mens egenværdimultipliciteten er 1. Det er sådan ud:



§12. Ortogonalsystemer.

Det indre produkt i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ fra §§1 og 2 opfylder åbenbart betingelserne 1), ..., 4).

I $\mathbb{C}^1$ som vektorrum over $\mathbb{C}$ er det indre produkt $z \cdot w = z \bar{w}$. Bemærk, at normen bliver

$$\|z\| = \sqrt{z \bar{z}} = |z|$$

den sædvanlige længde fra §1.

Sætning I,12,3 generaliserer Corollar I,2,7.

I §§1 - 2 definerede vi det indre produkt i koordinaterne. Vi viste så, at dette indre produkt var uafhængigt af drejning af koordinatsystem.

Her er det indre produkt det givne. Vi kan så vælge baser, - ortonormalbaser -, hvori det indre produkt får det sædvanlige koordinatudtryk. (Sætning I,12,7.)

Vi havde Sætning I,2,5:

$$v_1 \cdot v_2 = |v_1| |v_2| \cos \varphi.$$

Cauchy-Schwartz' ulighed, Sætning I,12,2 siger blot, at $|\cos \varphi| \leq 1$ og $= 1$ når v_1 og v_2 er proportionale.

I $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ er standardbaserne $(1,0)$, $(0,1)$ hhv. $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ eksempler på ortonormalbaser.

Men i $\mathbb{R}^2$ er enhver basis af formen

$$(\cos \alpha, \sin \alpha), \quad (-\sin \alpha, \cos \alpha)$$

hvor $\alpha \in \mathbb{R}$ er vilkårlig, en ortonormal basis.

Så matricen

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

er ortogonal. I $\mathbb{R}^2$ er der ikke andre ortogonale matricer.

Fordelen ved at benytte en ortonormal basis frem for en tilfældig er, at det indre produkt lader sig udtrykke i koordinaterne, som vi er vant til det.

Lad e_1, e_2, e_3 være en ortonormal basis for vektorrummet V , og lad $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ og $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ være to vektorer i V . Så er

$$\begin{aligned}
 u \cdot v &= (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \cdot (y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3) \\
 &= x_1 y_1 e_1 \cdot e_1 + x_1 y_2 e_1 \cdot e_2 + x_1 y_3 e_1 \cdot e_3 \\
 &\quad + x_2 y_1 e_2 \cdot e_1 + x_2 y_2 e_2 \cdot e_2 + x_2 y_3 e_2 \cdot e_3 \\
 &\quad + x_3 y_1 e_3 \cdot e_1 + x_3 y_2 e_3 \cdot e_2 + x_3 y_3 e_3 \cdot e_3 \\
 &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3
 \end{aligned}$$

fordi $e_i \cdot e_j = 0$ for $i \neq j$ og $e_i \cdot e_i = 1$ for alle i .

I V,11, eks. 3 så vi, at

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Matricen $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ er normal, da

$$\underline{B}^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\underline{B},$$

så $\underline{B}^* \underline{B} = \underline{B} \underline{B}^* = -\underline{B}^2$.

Den er ikke Hermite'sk.

Altså er den unitærækvivalent med en diagonalmatrix med ikke reelle elementer i diagonalen.

Den unitære transformationsmatrix er

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{S}$$

med

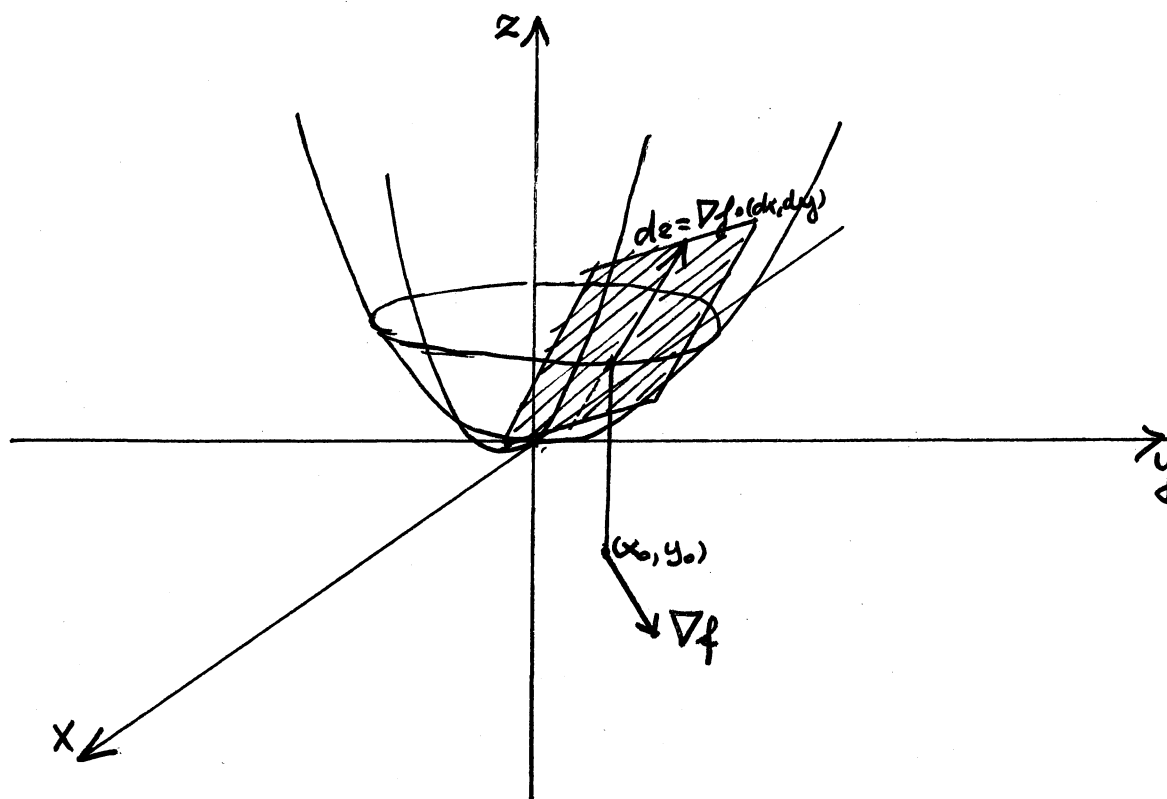
$$\underline{U}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \underline{S}^{-1}.$$

I $\mathbb{R}^3$ betragtes underrummet $U = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ frembragt af $(1, 1, 1)$. Det ortogonale komplement $U^\perp$ er planen med ligningen $x + y + z = 0$. En basis for $U^\perp$ er $(1, -1, 0)$, $(1, 0, -1)$. En ortonormal basis for $U^\perp$ kan være

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0) \quad \text{og} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0) \times \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2).$$

§13. Differential- og integralregning i flere reelle variable.

1. Funktionen $z = f(x,y) = x^2 + 2y^2$ af $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$. Grafen er en elliptisk paraboloid:



Gradienten i (x_0, y_0) er

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = (2x_0, 4y_0) .$$

Differentialet er $dz = \nabla f \cdot (dx, dy) = 2x_0 dx + 4y_0 dy$, (tangent)ligningen for tangentplaner i de lokale koordinater (dx, dy, dz) .

Taylor's formel ud fra $(0,0)$, hvor $f(0,0) = 0$:

$$z = \frac{1}{2} (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2y^2$$

idet $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

I $(0,0)$ er et minimum; egenverdierne 2 og 4 er positive.

2. Funktionen $g(x_1, x_2, y) = x_1^2 - 2x_2^2 - y$ har

$$\underline{D}_y g = (-1) \neq 0$$

og derfor regulær. Altså findes en funktion

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

som opfylder $g(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = 0$.

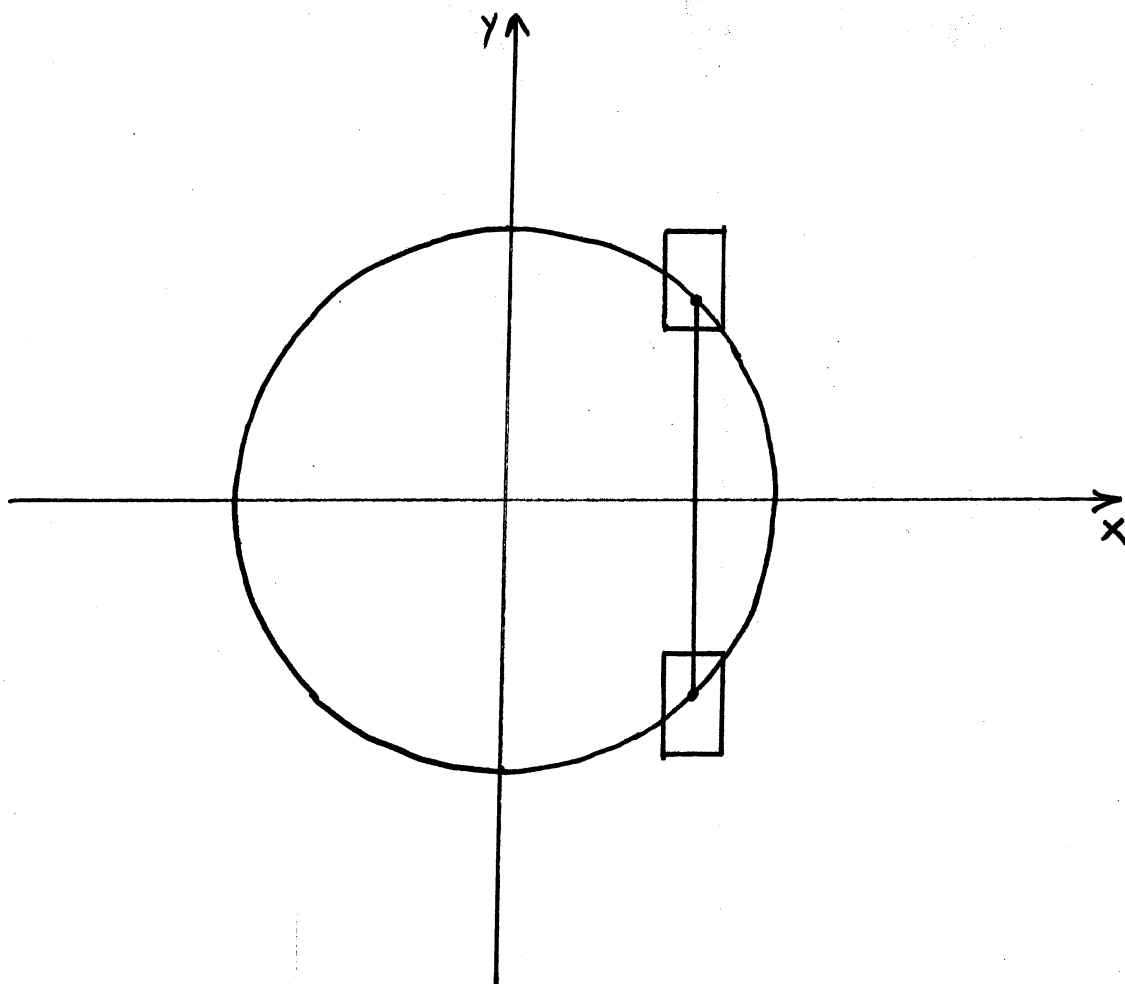
Og

$$\underline{D}f = -(\underline{D}_y g)^{-1} \underline{D}_x g = -\left(\frac{1}{-1}\right) \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix}.$$

3. Funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Vi betragter $C = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$

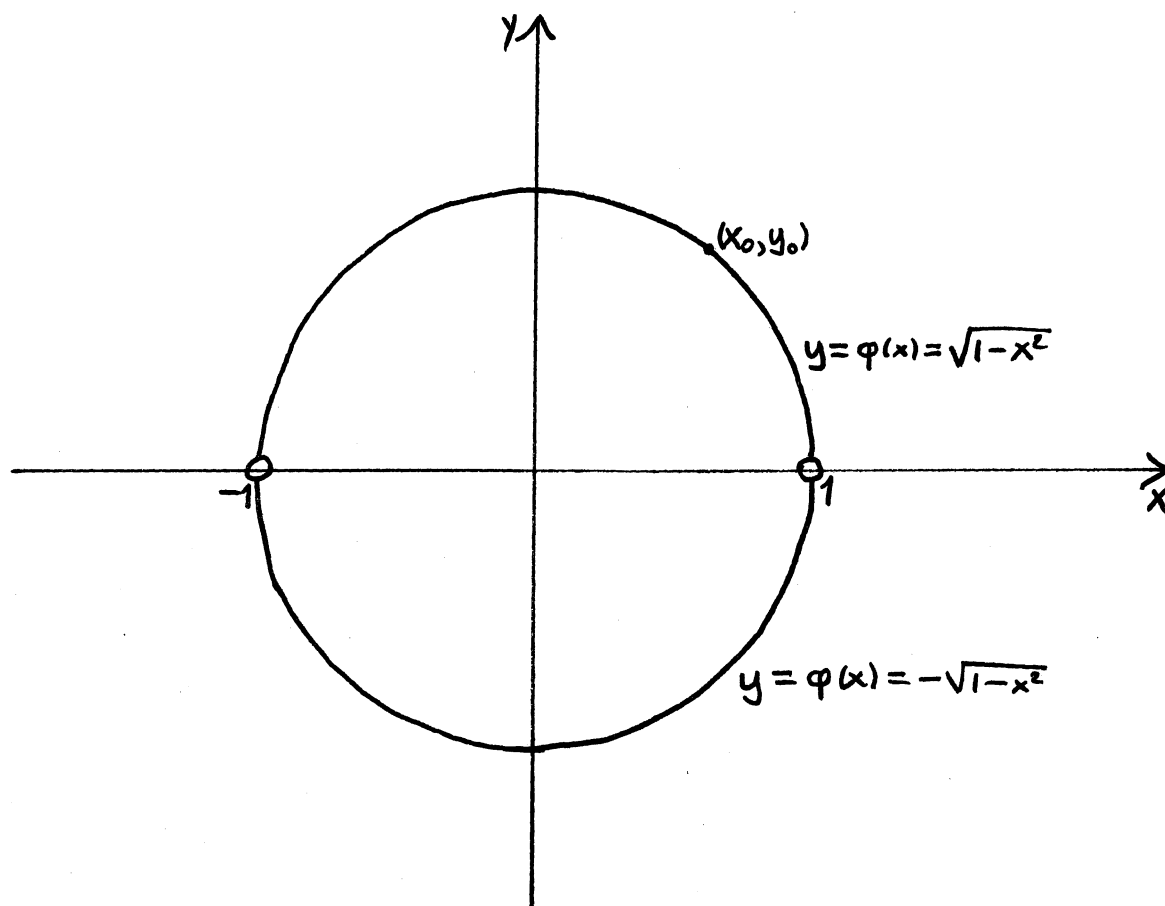


Om et punkt (x_0, y_0) , hvor $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, dvs. hvor

$$y_0 \neq 0$$

findes en funktion $y = \varphi(x)$, som opfylder

$$f(x, \varphi(x)) = 0.$$



4. Lad $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ være lineær givet ved matricen $\underline{\underline{A}}$; dvs.
 $y = f(x)$ betyder

$$\underline{y} = \underline{\underline{A}} \underline{x}$$

Da er $Jf = \det \underline{\underline{A}}$.

Er $\underline{\underline{A}}$ regulær, findes f 's inverse $\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{y}$ med Jacobi-determinant

$$Jf^{-1} = \det \underline{\underline{A}}^{-1}.$$

KAPITEL III

VIGTIGE EKSEMPLER

*Ikke den Sandhed, i hvis Besiddelse et
Menneske er, men den oprigtige Møje, han
har anvendt for at komme efter Sandheden,
udgør Menneskets Værd.*

Gotthold Ephraim Lessing.

§1. Vektorregning i planen og komplekse tal.Den rette linie.

Sætning I,1,1 siger, at for en vektor v er

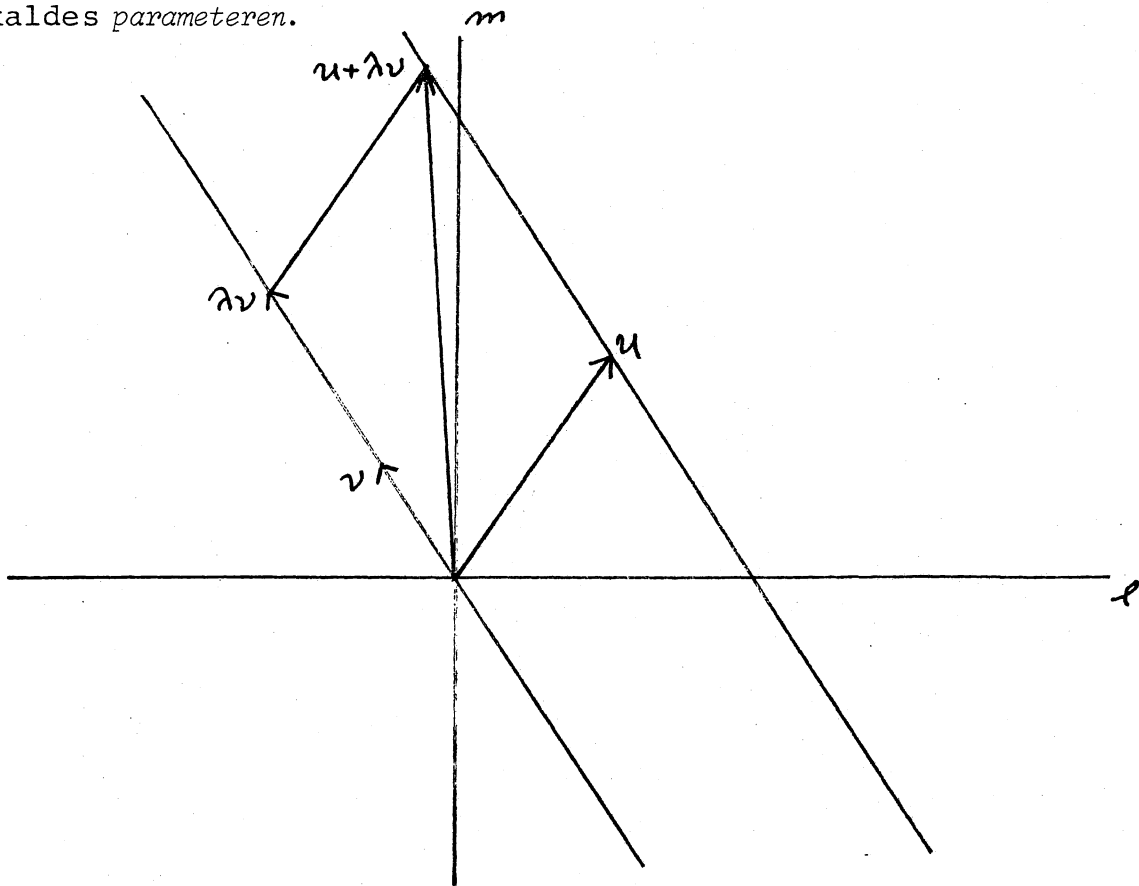
$$\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

en ret linie gennem 0.

Sætning I,1,2 tilføjer, at for yderligere en vektor u er

$$\{u + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

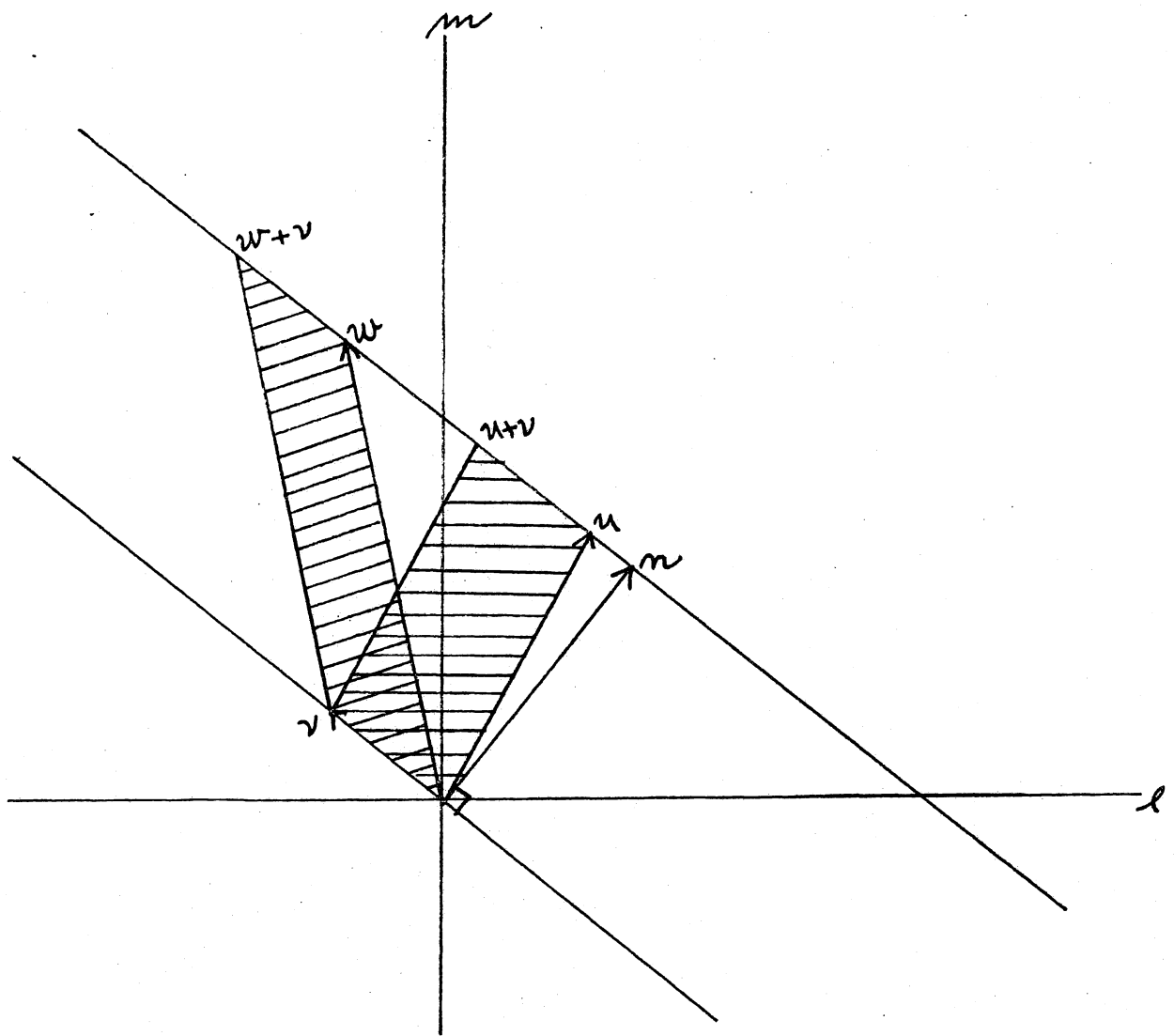
en ret linie parallel med den førstnævnte. En sådan fremstilling af en ret linie kaldes *parameterfremstilling*, og den variable kaldes *parameteren*.



Den rette linie kan gives ved en karakteristik eller ligning.
Er w en vektor på linien

$$\{u + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

vil parallellogrammet udspændt af w og v have sit areal uafhængigt af w .



Thi arealet er $|v| \cdot |n|$, hvor n er højden i parallellogrammet. (Vektoren n står altså vinkelret på v .) Vi kan karakterisere linien som

$$\{w \mid [w, v] = [u, v]\}.$$

I koordinater med $w = (x, y)$ og $v = (a, b)$, $u = (c, d)$ fås ligningen

$$\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}$$

$$bx - ay = cb - ad.$$

Men vi kan også karakterisere linien ved at $w - u$ er vinkelret på v . Altså

$$(w - u) \cdot v = 0.$$

Eller

$$w \cdot v = u \cdot v.$$

Denne ligning afhænger ikke af længden af n , så det er nok at finde en vektor, der er vinkelret på v .

Med det komplekse produkt løses problemet af iv , da i har vinkel $\frac{\pi}{2}$ med 1 .

$$iv = (0,1)(a,b) = (0 \cdot a - 1 \cdot b, 0 \cdot b + 1 \cdot a) = (-b, a).$$

Altså fås koordinatfremstillingen

$$(x,y) \cdot (-b,a) = (c,d) \cdot (-b,a)$$

$$-bx + ay = -bc + ad.$$

Parameterfremstillingen

$$w = u + \lambda v$$

kan skrives i koordinater som

$$x = c + \lambda a$$

$$y = d + \lambda b.$$

Elimineres λ af ligningen, fås

$$bx - ay = bc - ad.$$

Cirklen.

En cirkel med centrum i 0 og radius 1 har parameterfremstillingen

$$\{e_\varphi \mid \varphi \text{ en vinkel}\},$$

hvor e_φ er den enhedsvektor, der danner vinklen φ med 1 eller $0E$. I koordinater fås den velkendte fremstilling

$$\{(\cos \varphi, \sin \varphi) \mid \varphi \text{ en vinkel}\}.$$

En vilkårlig cirkel med centrum i c og radius $r \in \mathbb{R}$ fås som

$$\{c + re_\varphi \mid \varphi \text{ en vinkel}\}.$$

En cirkel karakteriseres ved, at afstanden til centrum er konstant. En cirkel med centrum i 0 har ligningen

$$v \cdot v = r^2$$

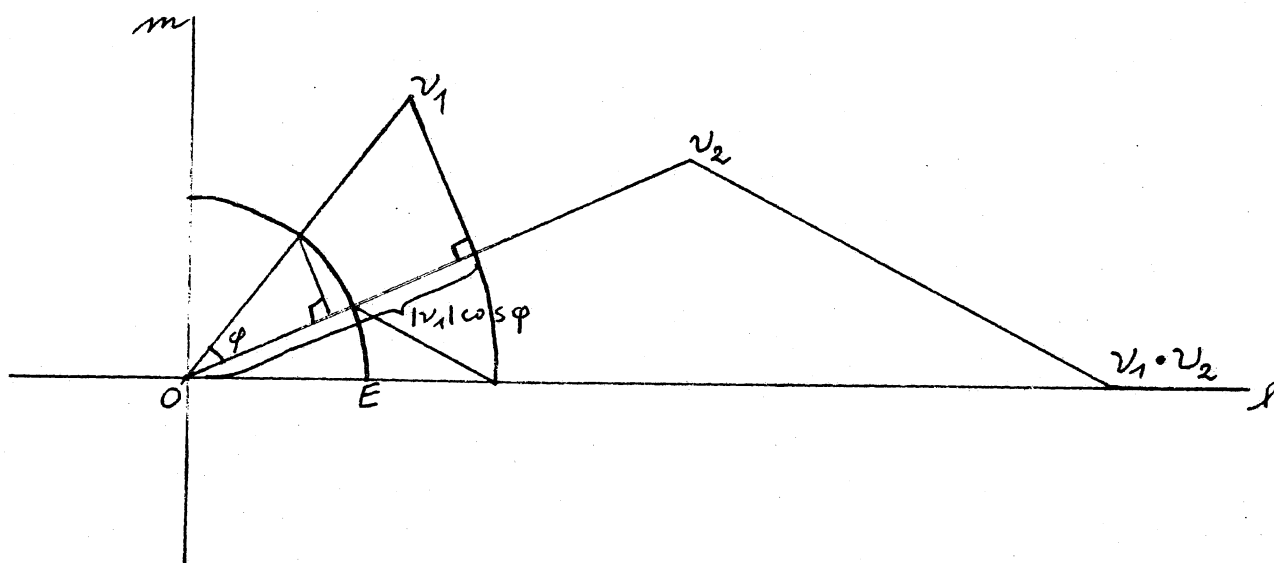
eller komplekst

$$v\bar{v} = r^2$$

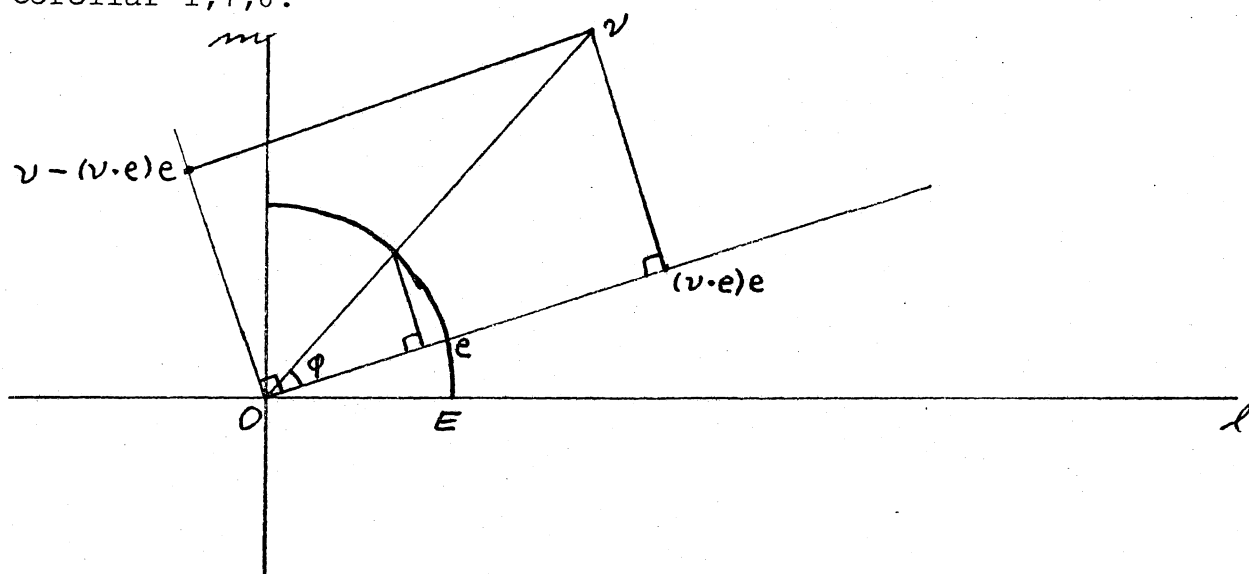
eller i koordinater

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$

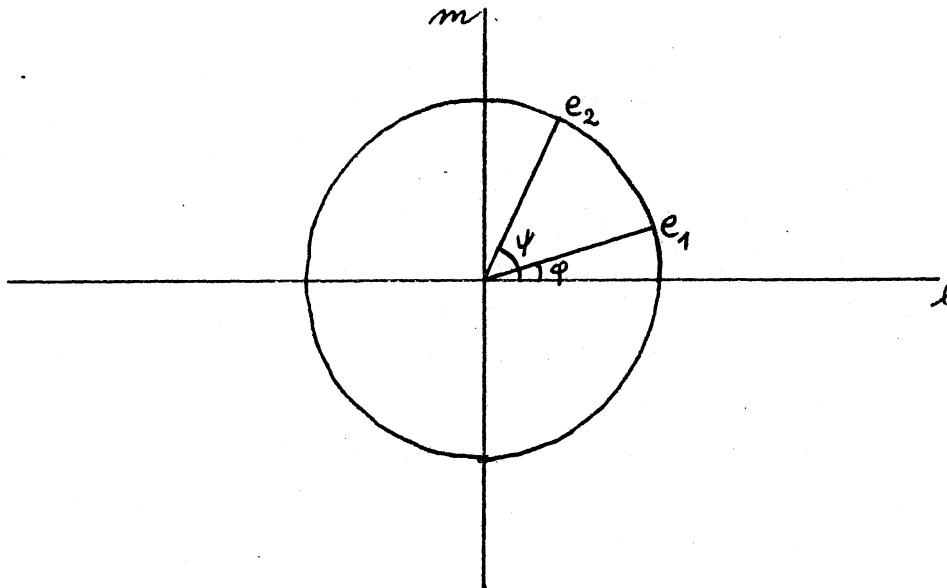
Sætning I, 1, 4:



Corollar I, 1, 6:



Indre og ydre produkt af enhedsvektorerne $e_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi)$
og $e_2 = (\cos \psi, \sin \psi)$.



Da de begge har længde 1 fås ifølge Sætning I,1,4

$$e_1 \cdot e_2 = \cos(\psi - \varphi) .$$

Ifølge koordinatformlen fås

$$e_1 \cdot e_2 = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi .$$

Tilsvarende fås ifølge Sætning I,1,8

$$[e_1, e_2] = \sin(\psi - \varphi) .$$

Ifølge koordinatformlen fås

$$[e_1, e_2] = \cos \varphi \sin \psi - \cos \psi \sin \varphi .$$

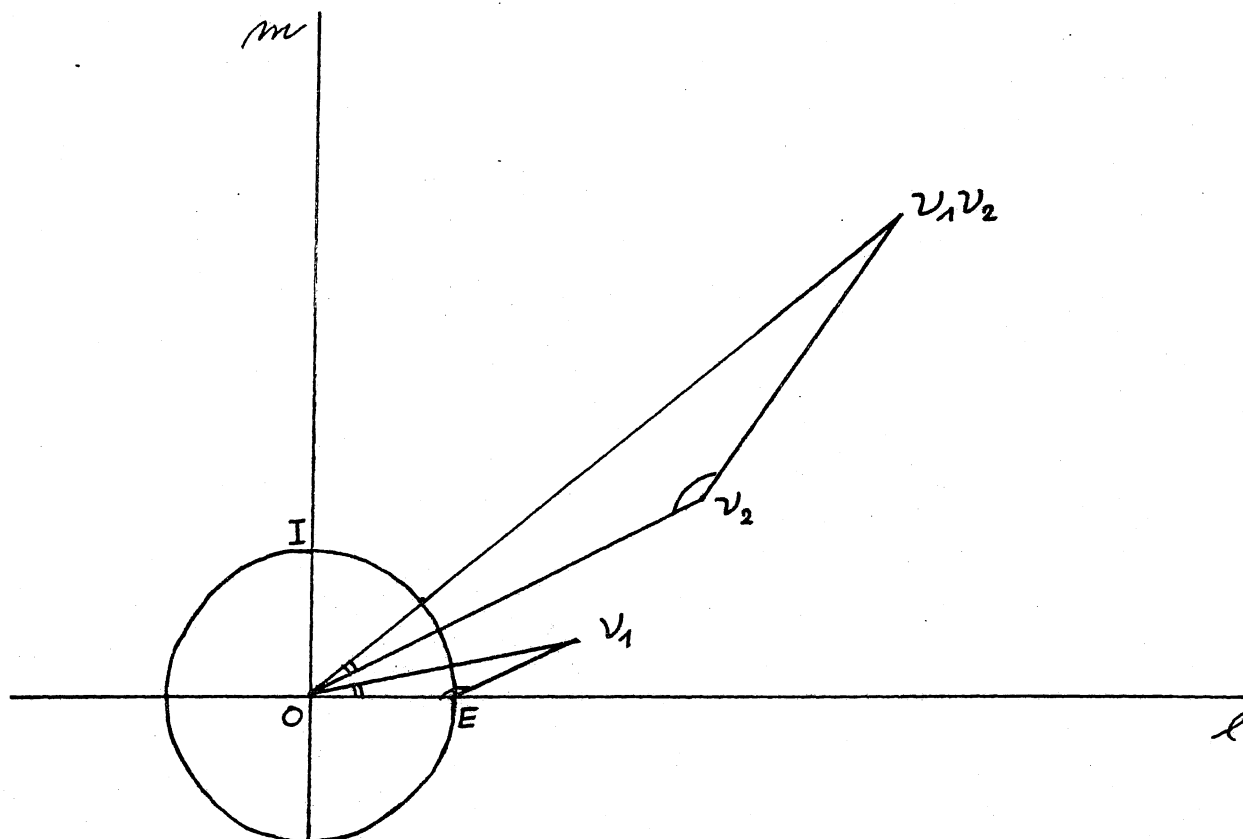
Det komplekse produkt af de to enhedsvektorer er en enhedsvektor med vinkelen $\varphi + \psi$ med l ifølge Sætning I,1,10.

$$e_1 e_2 = (\cos(\varphi + \psi), \sin(\varphi + \psi)) .$$

Ifølge koordinatformlerne fås

$$e_1 e_2 = (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi, \cos \varphi \sin \psi + \cos \psi \sin \varphi) .$$

Det komplekse produkt af to vilkårlige vektorer dannes ved hjælp af ensvinklede trekanter:



Division med komplekstal.

Da $v\bar{v}$ er et reelt tal, kan vi danne det komplekse tal

$$\frac{1}{v\bar{v}} \bar{v} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right).$$

Ganger vi det med v , får vi

$$\frac{1}{v\bar{v}} \bar{v}v = \frac{\bar{v}v}{v\bar{v}} = 1$$

eller

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) (x, y) = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}, \frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{-xy}{x^2+y^2} \right) = (1, 0)$$

Vi ser, at et komplekst tal bortset fra 0 har et inverst; vi kan *dividere* med komplekse tal.

Af regnestykket

$$(v\bar{v})(u\bar{u}) = (vu)(\bar{v}\bar{u})$$

fås følgende formel

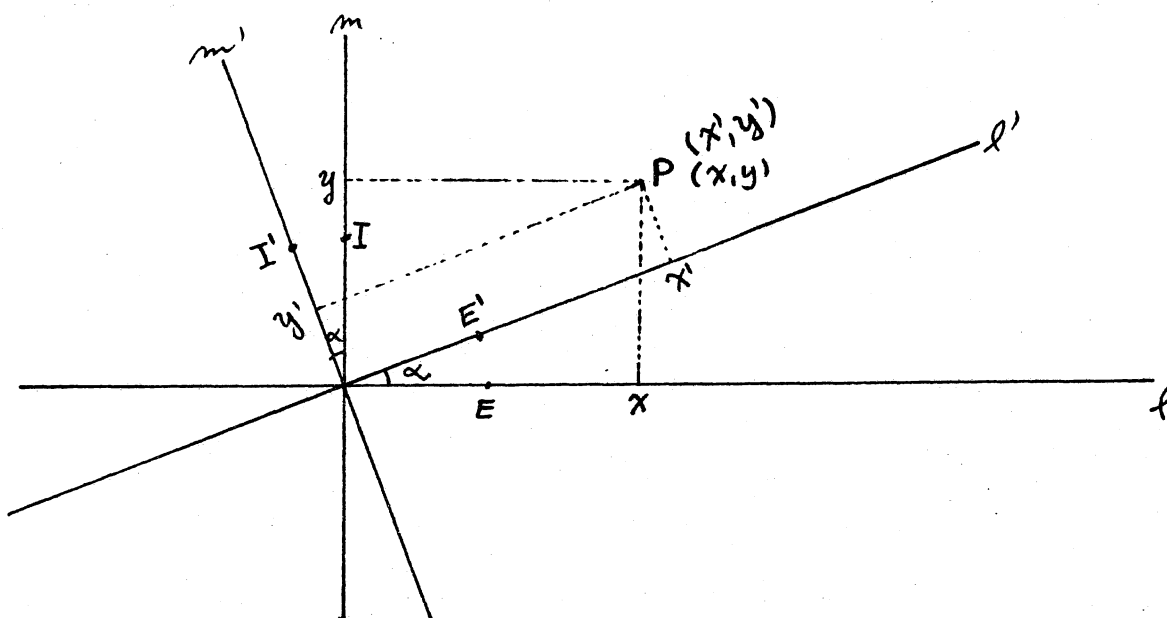
$$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) = (x_1x_2-y_1y_2)^2 + (x_1y_2+x_2y_1)^2.$$

Koordinatskift.

Drejning af koordinatsystemet. Ved at dreje begge vektorer $OE = (1,0)$ og $OI = (0,1)$ samme vinkel α , fås to vektorer OE' og OI' , der frembringer to linier, ℓ' og m' . Et vilkårlig punkt P i planen har koordinaterne (x,y) i det oprindelige koordinatsystem. Det samme punkt har også et koordinatsæt (x',y') med reference til koordinatsystemet OE', OI' .

Omregning fra det ene system til det andet opnås ved drejning af vinkelen α eller $-\alpha$, altså ved kompleks multiplikation med hhv.

$$(\cos \alpha, \sin \alpha) \quad \text{og} \quad (\cos \alpha, -\sin \alpha):$$



$$(x', y') = (x, y) (\cos \alpha, -\sin \alpha) = (x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

$$(x, y) = (x', y') (\cos \alpha, \sin \alpha) = (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)$$

Bemærk, at E' har koordinaterne $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ i koordinatsystemet OE, OI .

Parallelforskydning af koordinatsystemet. Et punkt O' med koordinater (a,b) vælges som nyt nulpunkt. Som nye koordinataksler vælges linierne

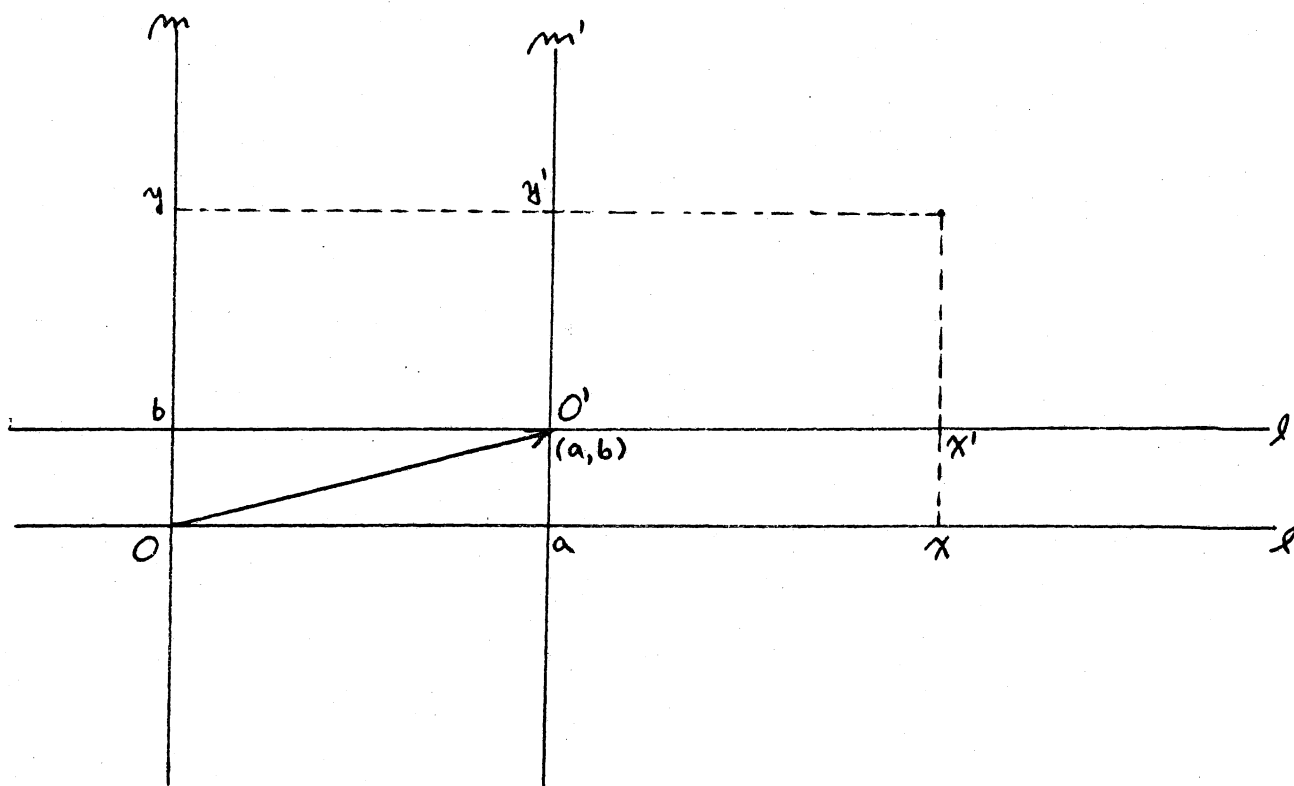
$$\ell' = \{(a,b) + t(1,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$m' = \{(a,b) + t(0,1) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

der er parallelle og ensrettede med ℓ og m .

Et punkt P med koordinaterne (x,y) i det oprindelige koordinatsystem har også koordinater i det nye system, (x',y') .

Omregning fra det ene system til det andet opnås ved addition eller subtraktion af vektorer $OO' = (a,b)$.



$$(x', y') = (x, y) - (a, b) = (x - a, y - b) ,$$

$$(x, y) = (x', y') + (a, b) = (x' + a, y' + b) .$$

§2. Vektorregning i rummet.Den rette linie.

En ret linie fås ved parameterfremstillingen

$$\{u + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} ,$$

hvor u og v er vektorer i rummet. Men nogen fremstilling ved en ligning som i planen findes ikke.

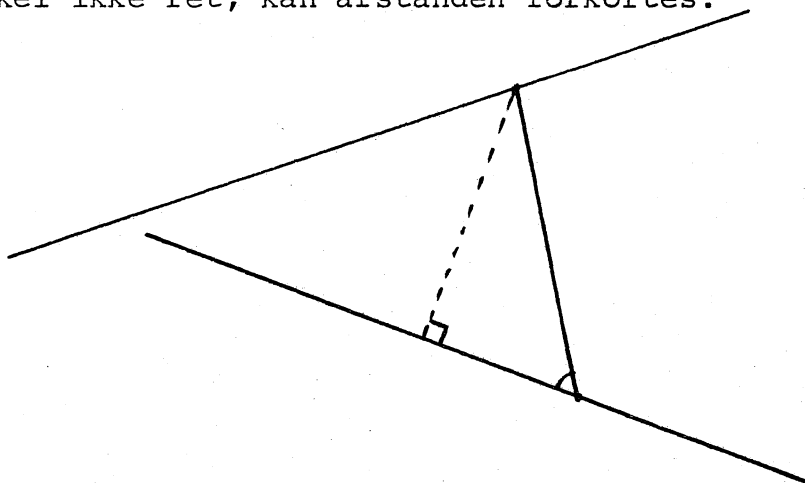
Vinklen mellem to rette linier findes af det indre produkt. Er

$$\{u_1 + \lambda v_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

en anden ret linie, danner da vinkelen φ , hvor

$$v \cdot v_1 = |v||v_1| \cos \varphi .$$

Afstanden mellem to linier, der ikke skærer hinanden må antages langs en linie, der står vinkelret på dem begge. Thi er den ene vinkel ikke ret, kan afstanden forkortes:



Hvis de to linier ikke er parallelle, findes en linie vinkelret på dem begge ved hjælp af krydsproduktet:

$$\{\lambda(v \times v_1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

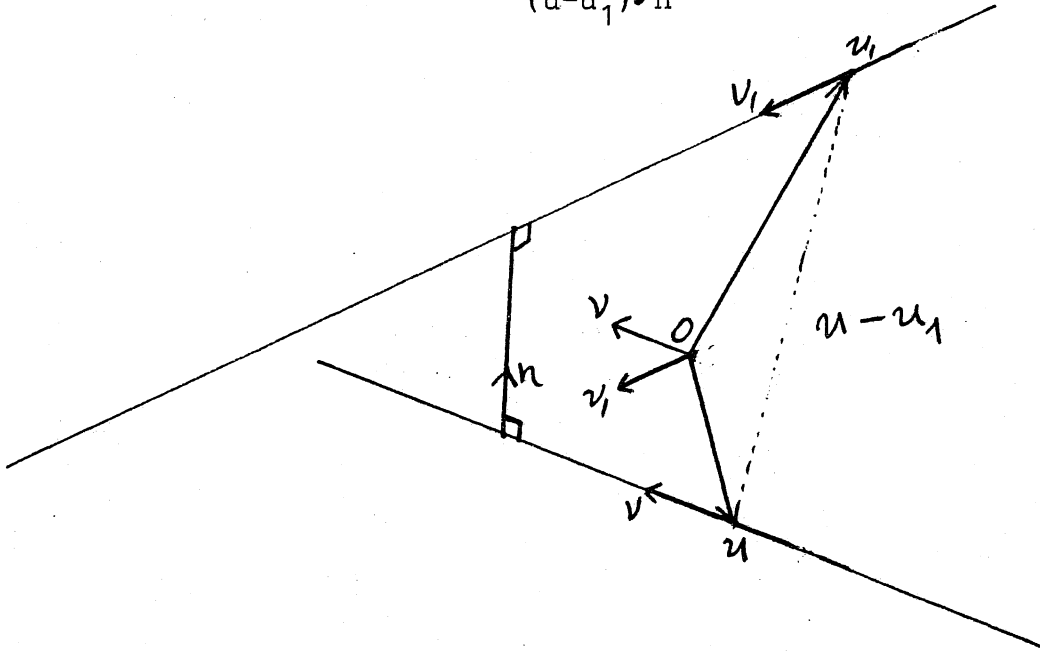
er en sådan linie.

Længden af vektoren mellem linierne finder vi ved at projicere en vilkårlig forbindelsesvektor på den vinkelrette. Dertil normeres den vinkelrette:

$$n = \frac{v \times v_1}{|v \times v_1|}.$$

En forbindelsesvektor er f.eks. $u - u_1$, så længden er

$$(u - u_1) \cdot n$$

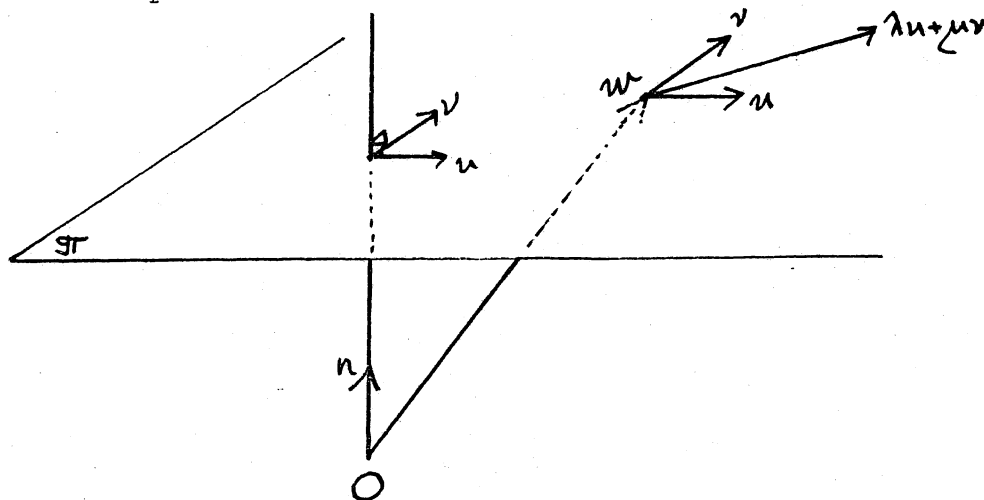


Planen.

En plan kan parameterfremstilles ved to parametre. Hvis u og v ikke er proportionale, vil

$$\{w + \lambda u + \mu v \mid \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R}\}$$

fremstille en plan:



En plan kan karakteriseres analogt til liniens ligning i planen. Enhver linie i planen står vinkelret på planens normal. Planens normal findes som

$$n = v \times u .$$

En vektor m i planen opfylder, at

$$m = w + \lambda u + \mu v$$

så
$$m \cdot n = w \cdot n + \lambda u \cdot n + \mu v \cdot n = w \cdot n ,$$

da n er vinkelret på såvel u som v .

Planen kan karakteriseres

$$\{m \mid m \cdot n = w \cdot n\} .$$

Eller i koordinater

$$\{(x, y, z) \mid ax + by + cz = k\} ,$$

hvor $n = (a, b, c)$ og $w \cdot n = k$.

En anden karakteristik er den, at parallellepipedet udspændt af v, u og m har konstant areal, nemlig $m \cdot (v \times u) = w \cdot (v \times u)$. Benyttes rumproduktet fås altså

$$\begin{vmatrix} x & v_1 & u_1 \\ y & v_2 & u_2 \\ z & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 & v_1 & u_1 \\ w_2 & v_2 & u_2 \\ w_3 & v_3 & u_3 \end{vmatrix}$$

eller som nogen foretrækker det

$$\begin{vmatrix} (x-w_1) & v_1 & u_1 \\ (y-w_2) & v_2 & u_2 \\ (z-w_3) & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

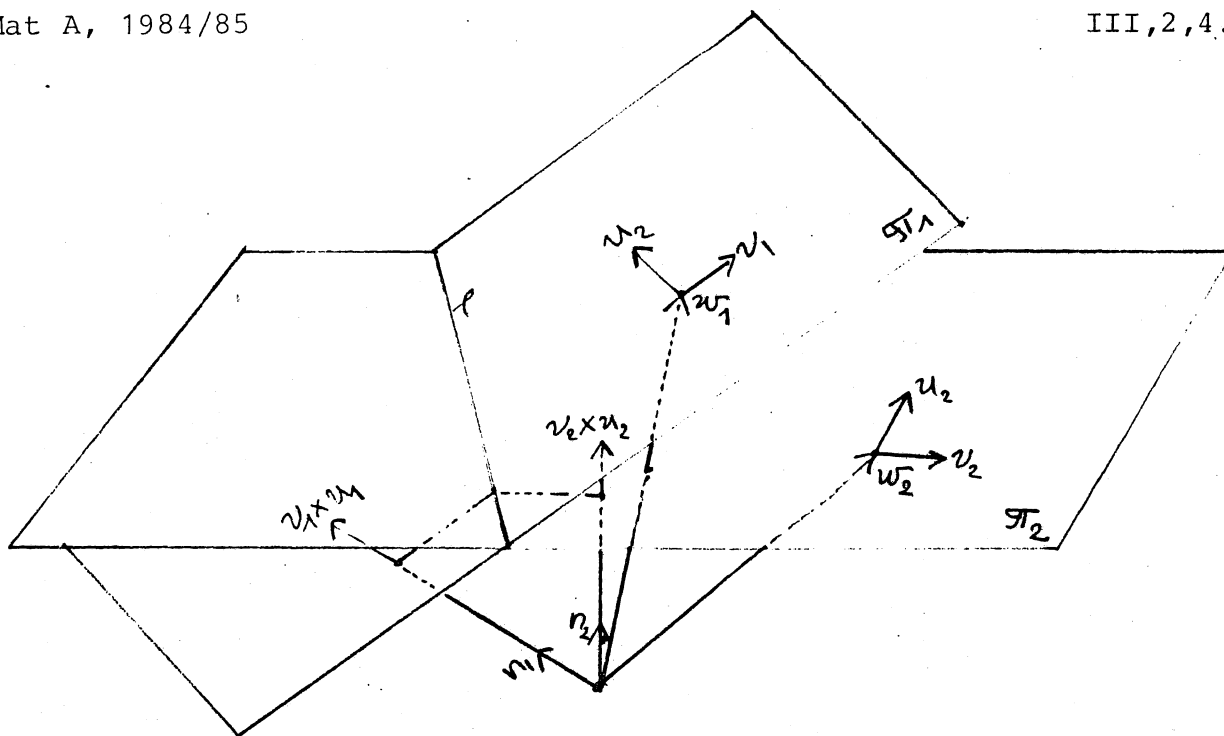
hvor $v = (v_1, v_2, v_3)$ osv.

Skæringslinien mellem to planer.

To planer er givet som

$$\pi_1 = \{w_1 + \lambda v_1 + \mu u_1 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

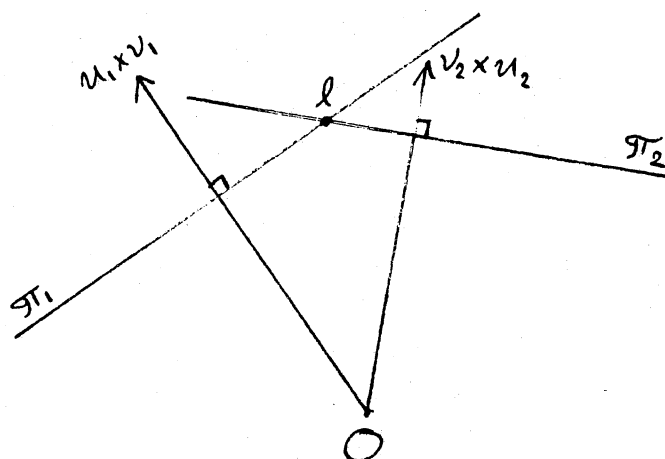
$$\pi_2 = \{w_2 + \lambda v_2 + \mu u_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$



Linien ℓ er vinkelret på begge planers normaler, så retnin-
gen af ℓ er givet ved

$$(v_1 \times u_1) \times (v_2 \times u_2) .$$

I planen udspændt af normalerne $v_1 \times u_1$ og $v_2 \times u_2$ vil planer-
ne π_1 og π_2 udskære to rette linier, der skærer hinanden i ℓ :



Vektoren $z = \alpha(v_1 \times u_1) + \beta(v_2 \times u_2)$ må opfylde, at

$$z \cdot (v_1 \times u_1) = w_1 \cdot (v_1 \times u_1)$$

og

$$z \cdot (v_2 \times u_2) = w_2 \cdot (v_2 \times u_2) .$$

Altså findes

$$\alpha |v_1 \times u_1|^2 + \beta (v_1 \times u_1) \cdot (v_2 \times u_2) = w_1 \cdot (v_1 \times u_1)$$

$$\alpha (v_2 \times u_2) \cdot (v_1 \times u_1) + \beta |v_2 \times u_2|^2 = w_2 \cdot (v_2 \times u_2)$$

hvoraf

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} w_1 \cdot (v_1 \times u_1) & (v_1 \times u_1) \cdot (v_2 \times u_2) \\ w_2 \cdot (v_2 \times u_2) & (v_2 \times u_2) \cdot (v_2 \times u_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (v_1 \times u_1) \cdot (v_1 \times u_1) & (v_1 \times u_1) \cdot (v_2 \times u_2) \\ (v_1 \times u_1) \cdot (v_2 \times u_2) & (v_2 \times u_2) \cdot (v_2 \times u_2) \end{vmatrix}}$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} (v_1 \times u_1) \cdot (v_1 \times u_1) & w_1 \cdot (v_1 \times u_1) \\ (v_2 \times u_2) \cdot (v_1 \times u_1) & w_2 \cdot (v_2 \times u_2) \end{vmatrix}}{|v_1 \times u_1|^2 |v_2 \times u_2|^2 - ((v_1 \times u_1) \cdot (v_2 \times u_2))^2}$$

Herefter er ℓ givet som

$$\{z + \lambda (v_1 \times u_1) \times (v_2 \times u_2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Kuglen og kuglefladen.

Mængden

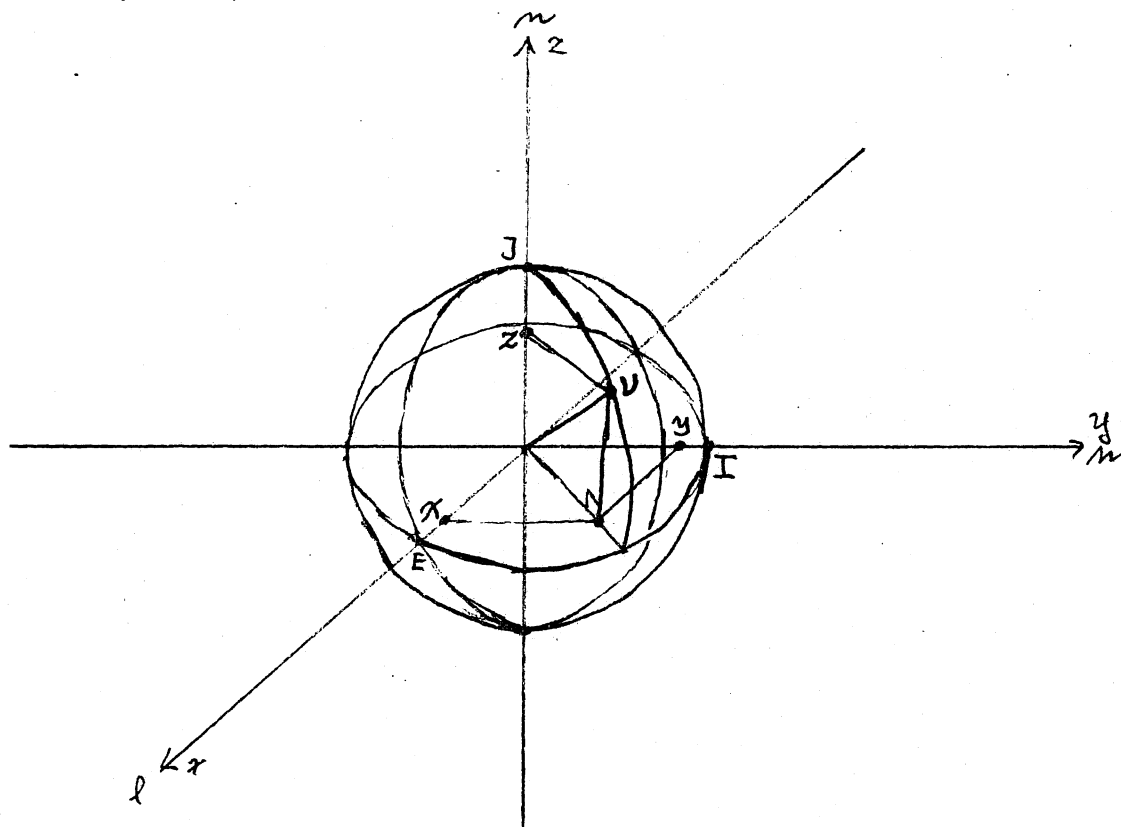
$$\{v \mid v \cdot v = r^2\},$$

hvor $r \in \mathbb{R}$ er et positivt tal, er en *kugleflade* af en kugle med centrum i 0 og radius r .

Skrives $v = (x, y, z)$, bliver koordinatkarakteristikken

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

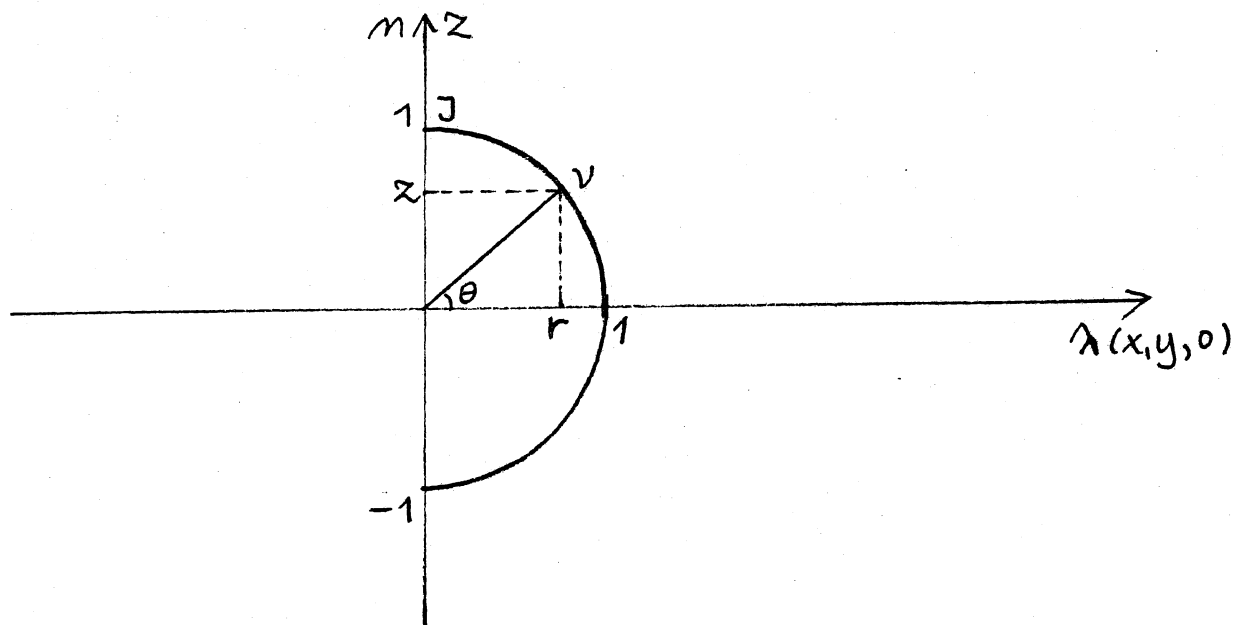
Projiceret v på koordinataksene (i tilfældet $r = 1$ for overskuelighedens skyld) fås x, y og z :



Vi deler projektionen i to, idet vi sætter

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad .$$

Herefter betragter vi to planer; planen π udspændt af z -aksen n og vektor v (eller $(x,y,0)$), og planen σ udspændt af l og m ((x,y) -planen). I planen π får vi

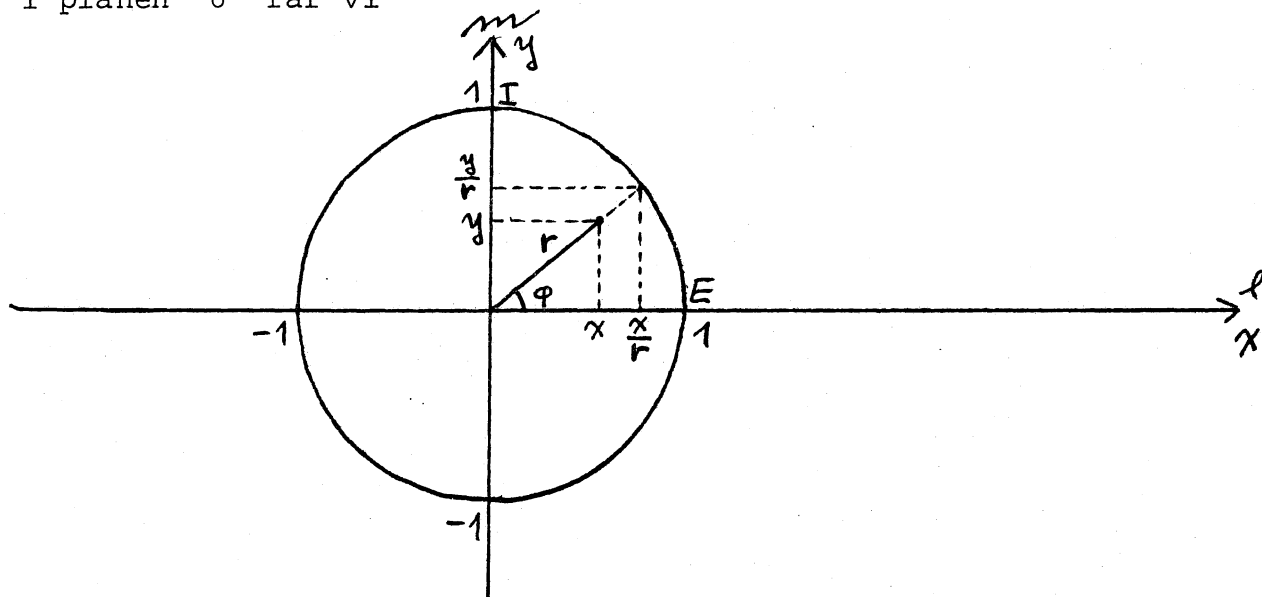


(da $r > 0$). Vi kan fastsætte vinkelen $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, således at:

$$z = \sin \theta$$

$$r = \cos \theta$$

I planen σ får vi



Her er vinkelen φ vilkårlig ($\varphi \in [0, 2\pi[$) . Vi får

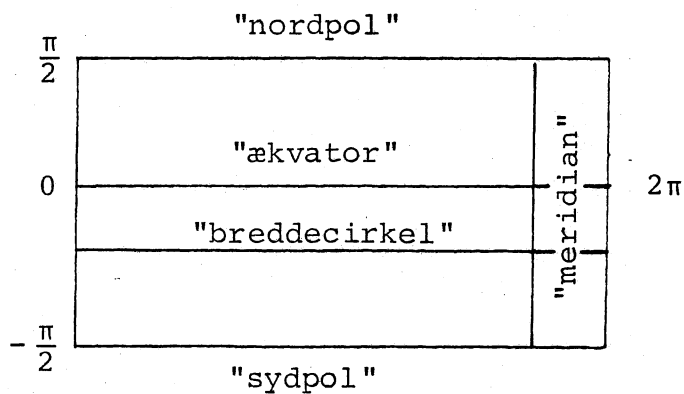
$$\frac{x}{r} = \cos \varphi$$

$$\frac{y}{r} = \sin \varphi$$

Vi kan danne en parameterfremstilling af kuglefladen som

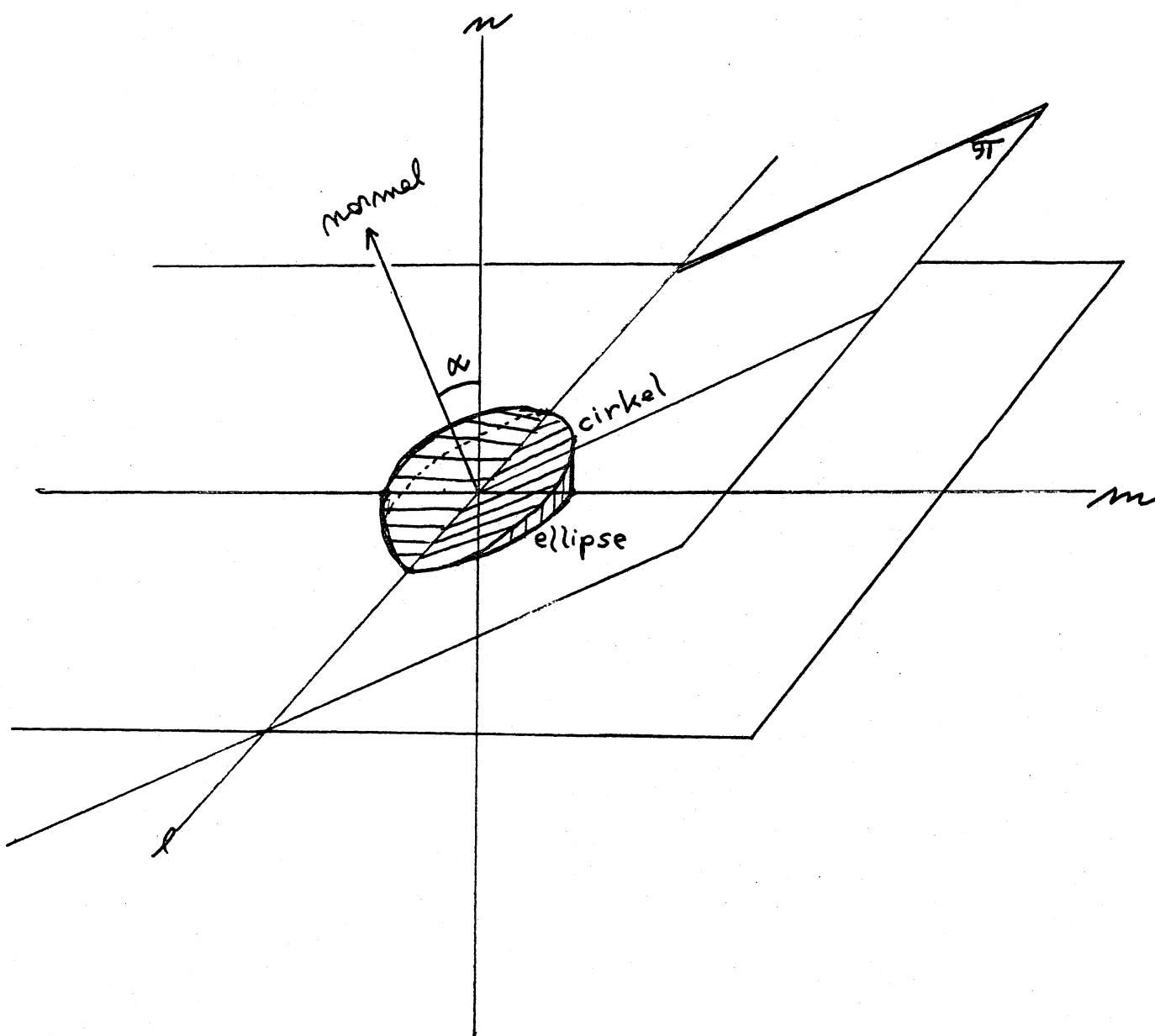
$$\{(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta) \mid \varphi \in [0, 2\pi[\wedge \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$$

Paramterrummet er et rektangel

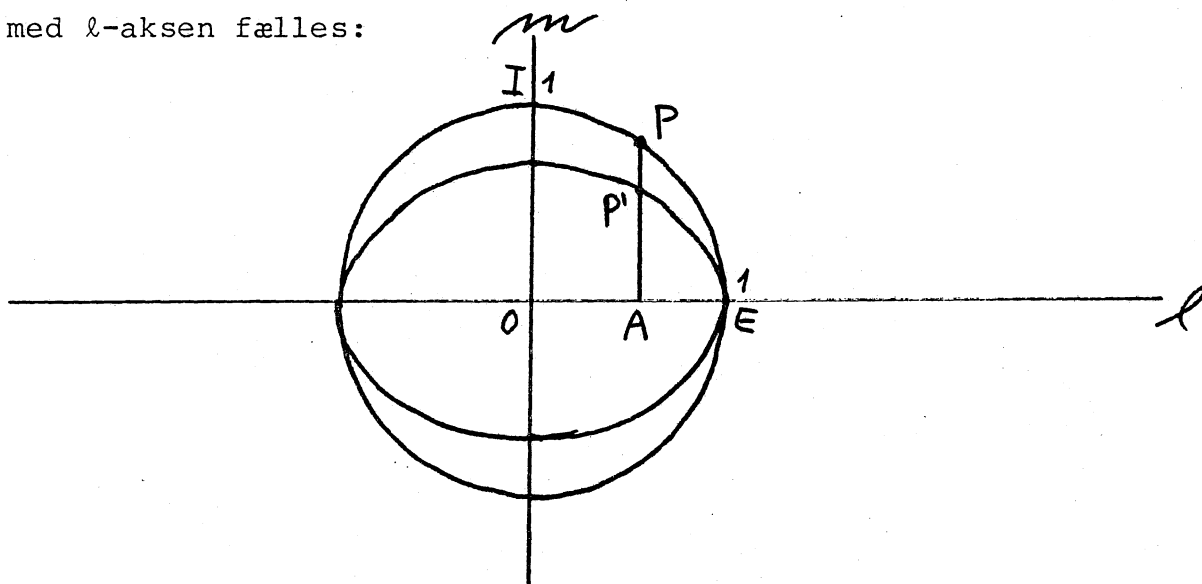


Ellipsen.

Lad os betragte to planer, der skærer hinanden under en vinkel, der ikke er ret. F.eks. planen udspændt af ℓ og m , og en plan gennem ℓ .

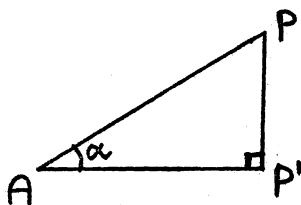


En cirkel i planen π med centrum i 0 og radius 1 projiceres i en kurve (ellipse) i ℓ - m -planen. Vi tegner begge i samme plan med ℓ -aksen fælles:



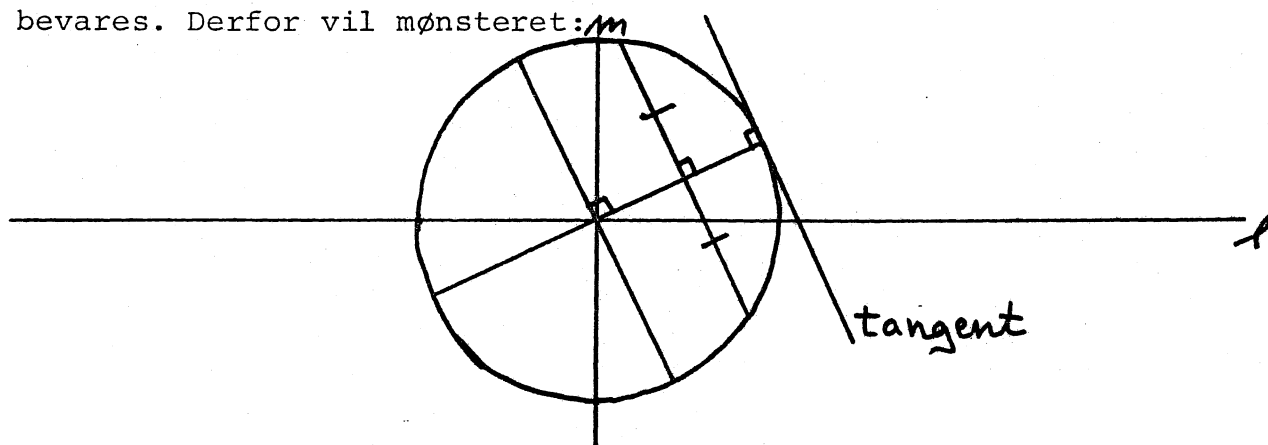
Punktet P projiceres i P' så $AP' : AP = \cos \alpha$.

Snit:

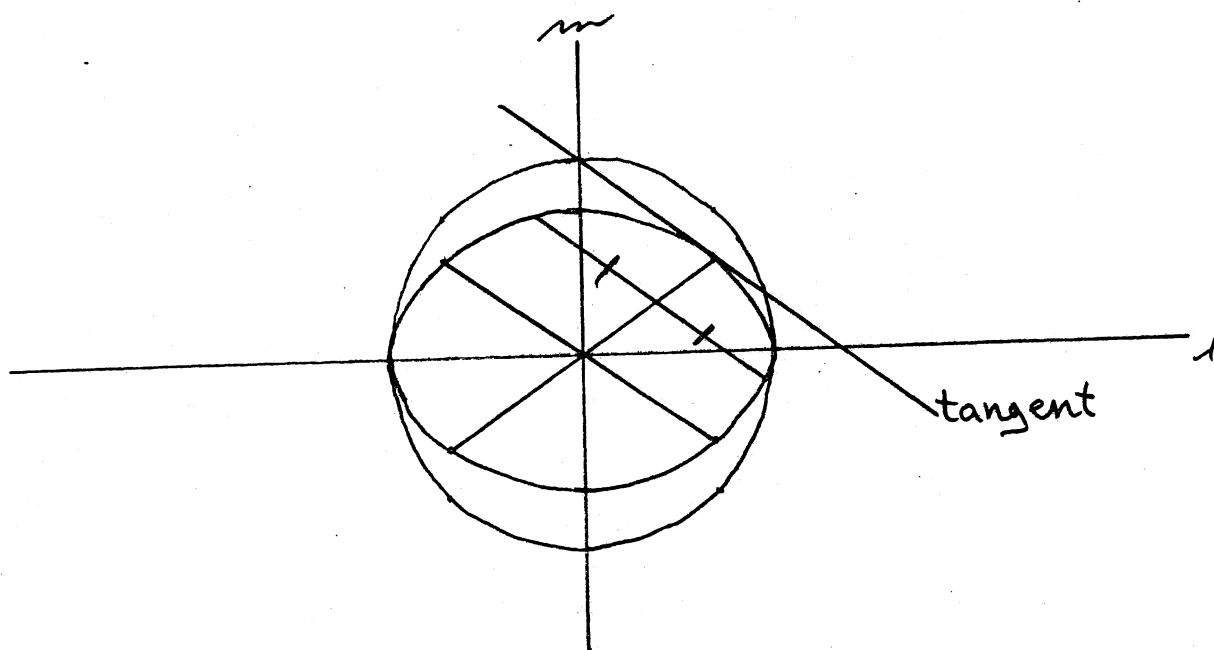


Vi sætter $b = \cos \alpha$.

Ved projektioner vil parallellitet, midtpunkter og tangenter bevares. Derfor vil mønsteret:



to vinkelrette diametre, en tangent og en halveret korde, gå over i et tilsvarende mønster: kun den rette vinkel går tabt.



sådanne diametre kaldes *konjugerede*.

Cirkelns parameterfremstilling

$$\{(\cos \varphi, \sin \varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi[\}$$

overføres til

$$\{(\cos \varphi, b \sin \varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi[\}$$

hvorfor punkterne må tilfredsstille ligningen

$$x^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Bestem tangenten i punktet (x_0, y_0) på ellipsen. Det tilsvarende punkt på cirklen er $(x_0, \frac{y_0}{b})$. Den herpå vinkelrette vektor er $(x_0, \frac{y_0}{b})i = (-\frac{y_0}{b}, x_0)$. Denne projiceres på ellipsen i punktet $(-\frac{y_0}{b}, b x_0)$, som altså angiver tangentens retning. Vinkelret herpå er $(-\frac{y_0}{b}, b x_0)i = (-b x_0, -\frac{y_0}{b})$. Tangentens ligning er altså

$$(x, y) \cdot (-b x_0, -\frac{y_0}{b}) = (x_0, y_0) \cdot (-b x_0, -\frac{y_0}{b})$$

$$-b x x_0 - \frac{y y_0}{b} = -b x_0^2 - \frac{y_0^2}{b}$$

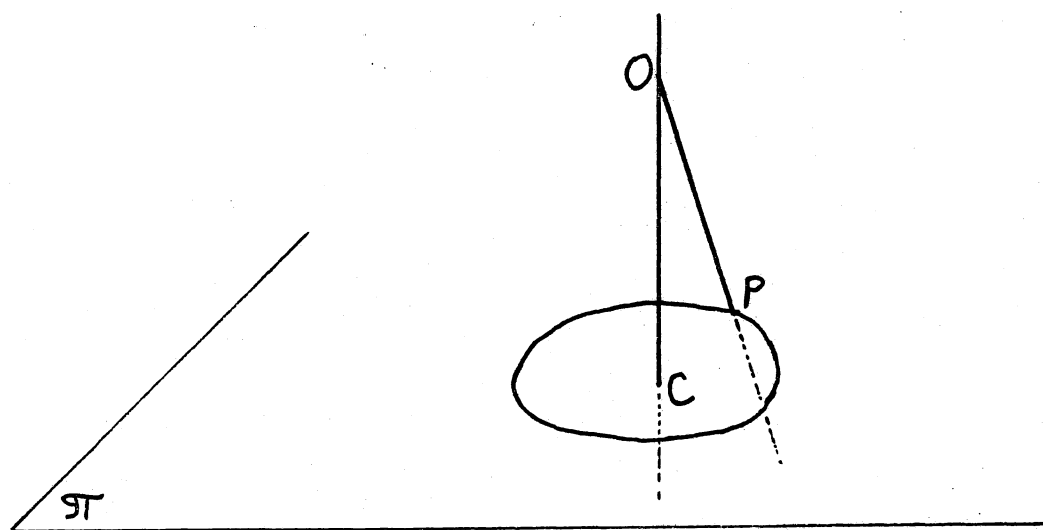
$$x x_0 + \frac{y y_0}{b^2} = x_0^2 + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Tangentens ligning er altså

$$x x_0 + \frac{y y_0}{b^2} = 1 .$$

Keglesnit.

Givet en plan og en cirkel i planen med centrum i C . Vælg et punkt O på normalen til planen i C , så $O \neq C$. Mængden af linier gennem O og et punkt P på cirklen danner en *kegle* med topunkt i O .

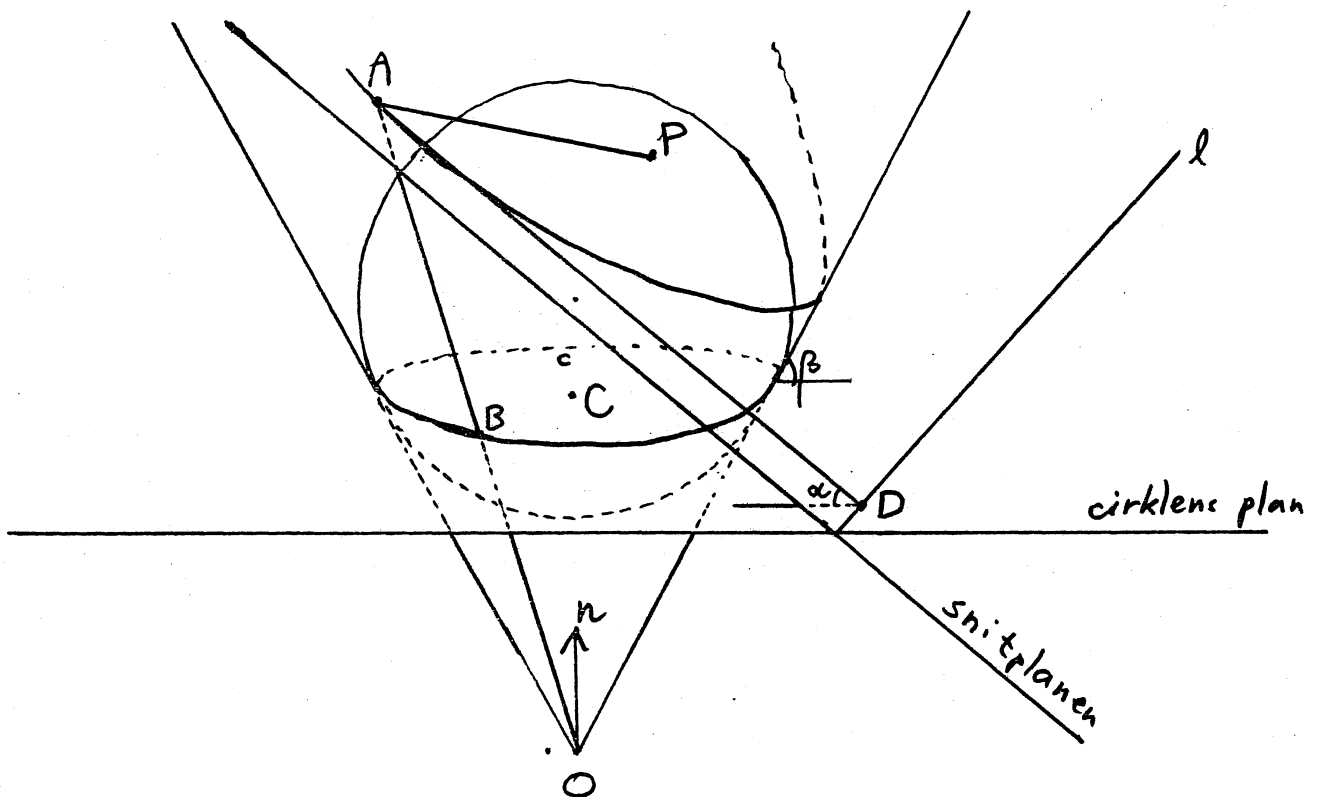


Planen skærer keglen i den givne cirkel, og enhver plan parallel med den givne skærer keglen i en cirkel (eller punktet O).

En anden plan skærer keglen i en kurve, som kaldes et *keglesnit*. Vi skal undersøge disse nærmere.

Vi tænker os en kugle med centrum på normalen og tangerende en (og dermed alle) keglefrembringere. Blandt sådanne kugler tænker vi os én, der tangerer snitplanen, så kuglen ligger på samme side af snitplanen som O .

Kuglen tangerer snitplanen i punktet P og rører keglen i cirklen c , som ligger i en plan, der skærer snitplanen i en linie ℓ . Fra et punkt A på keglesnittet tegnes AP og frembringeren AO , som tangerer kuglen i B . Nu er AP og AB to tangenter fra A til kuglen og derfor lige lange. Alle frembringere danner samme vinkel med cirkelns plan, lad os sige β . Punktet A har



afstanden til cirkulens plan $|AB|\sin \beta = AB \cdot n$, hvor n er enhedsvektor i retningen OC . Altså er denne afstand også $|AP|\sin \beta$.

Fra punktet A projiceres på linien l til punktet D . Nu er AD 's vinkel med cirkulens plan det samme som vinklen mellem cirkulens plan og snitplanen, lad os kalde denne vinkel α . Så er A 's afstand til cirkulens plan også $|AD|\sin \alpha = AD \cdot n$.

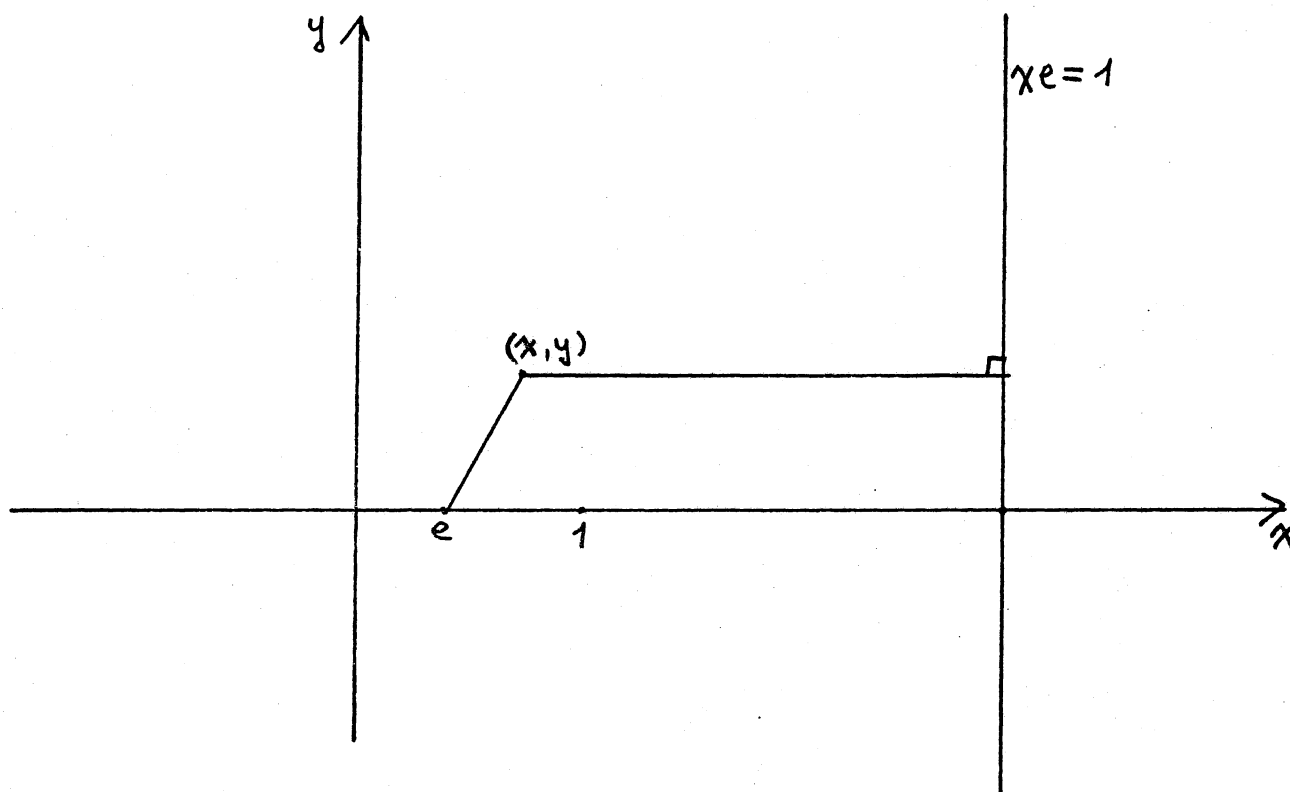
Følgelig er $\frac{|AP|}{|AD|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ (konstant).

Hvis vinkelen $\alpha < \beta$, bliver keglesnittet en lukket kurve. Hvis $\alpha = \beta$ bliver snitplanen parallel med den mødstående frembringer og keglesnittet bliver åbent. Hvis $\alpha > \beta$ bliver keglesnittet åbent og todelt; der kommer et snit i keglens nedre net.

Vi skriver gerne $e = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

Analyse af keglesnit:

1) Ellipsen. Lad $e < 1$ og betragt punktet $(e, 0)$ og linien $xe = 1$.



Punktet (x, y) tilfredsstiller, at

$$\frac{\sqrt{(x-e)^2 + y^2}}{\frac{1}{e} - x} = e$$

omregnes til:

$$(x-e)^2 + y^2 = (1-xe)^2$$

$$x^2 + e^2 - 2xe + y^2 = 1 + x^2e^2 - 2xe$$

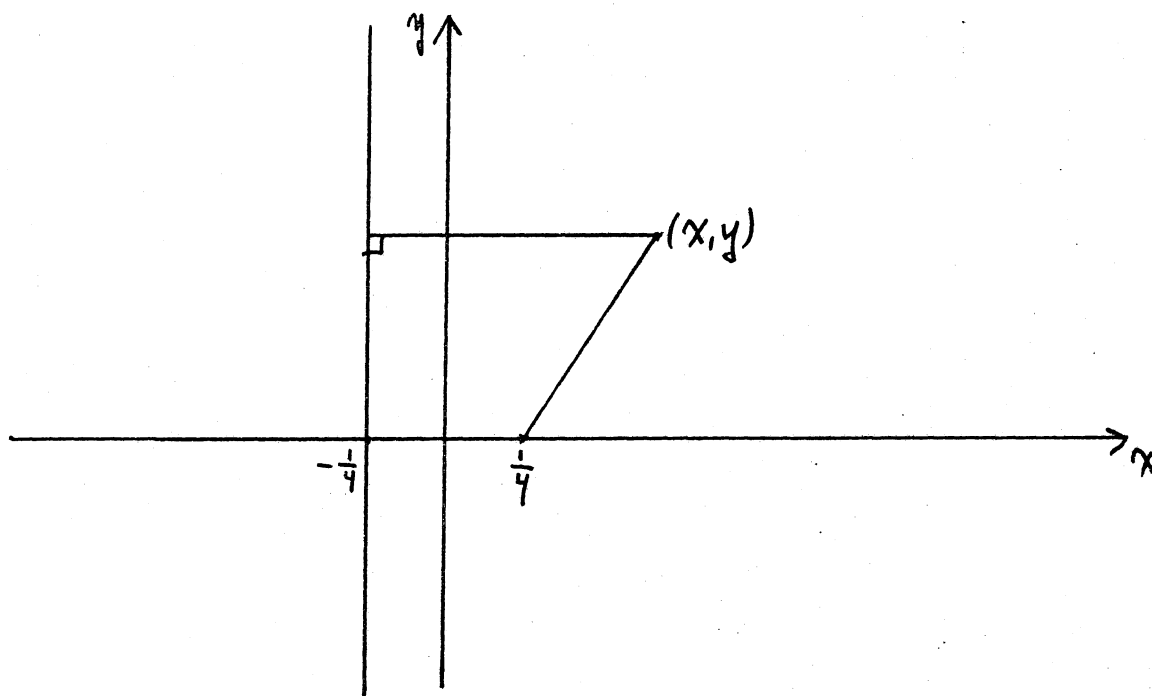
$$(1-e^2)x^2 + y^2 = 1 - e^2$$

$$x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = 1$$

En ellipse med $b = \sqrt{1-e^2}$.

2) Parablen. Lad $e = 1$.

Betragt punktet $(\frac{1}{4}, 0)$ og linien $4x = -1$.



Punktet (x, y) tilfredsstiller, at

$$\frac{\sqrt{(x - \frac{1}{4})^2 + y^2}}{x + \frac{1}{4}} = 1$$

omregnes til

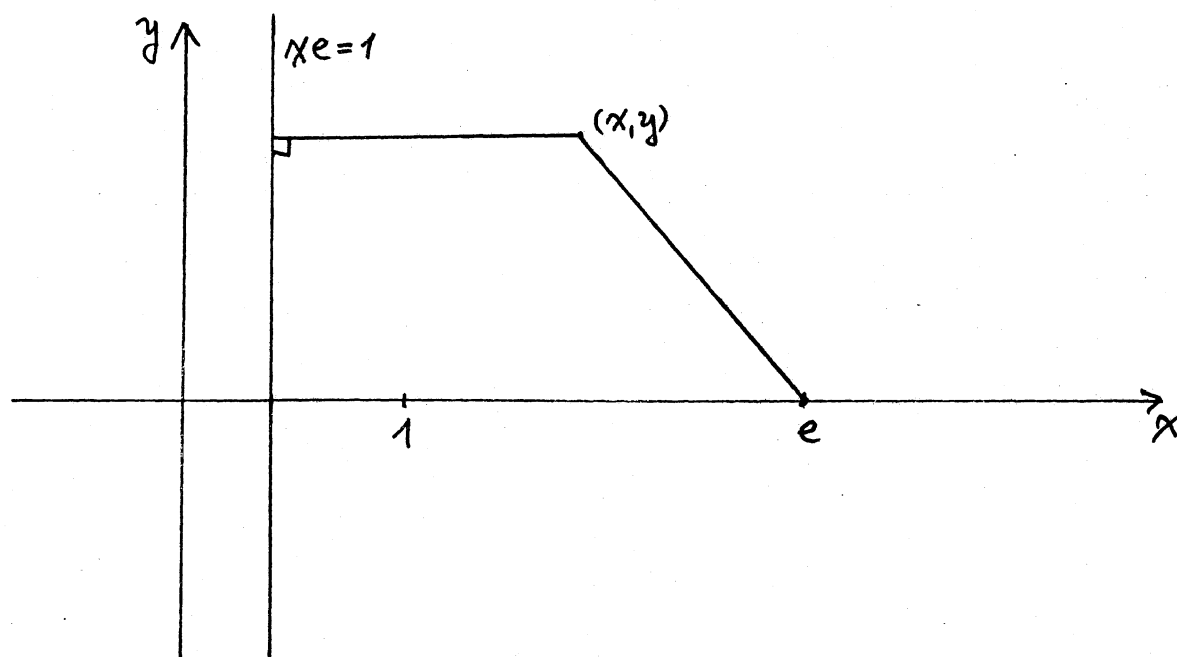
$$(x - \frac{1}{4})^2 + y^2 = (x + \frac{1}{4})^2$$

$$x^2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + y^2 = x^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}x$$

$$y^2 = x.$$

3) Hyperblen. Lad $e > 1$.

Betragt punktet $(e, 0)$ og linien $(xe = 1)$.



Punktet (x, y) tilfredsstiller, at

$$\frac{\sqrt{(x-e)^2 + y^2}}{x - \frac{1}{e}} = e$$

omregnes til

$$(x-e)^2 + y^2 = (ex-1)^2$$

$$x^2 + e^2 - 2ex + y^2 = e^2x^2 + 1 - 2ex$$

$$(e^2-1)x^2 - y^2 = e^2 - 1$$

$$x^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = 1$$

En hyperpel, der for $e = \sqrt{2}$ bliver den sædvanlige.

Lad os betragte

$$\{(x, y) \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}.$$

Hvis $a = b = c = 0$, fås en ret linie (eller hele planen). Lad os derfor se på tilfældet, hvor a, b, c ikke alle tre er 0.

Vi begynder med at dreje koordinatsystemet med den hensigt, at fjerne leddet " bxy ". Ifølge formlerne indsættes

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

Vi finder

$$\begin{aligned} & a(x'^2 \cos^2 \alpha + y'^2 \sin^2 \alpha - 2x'y' \cos \alpha \sin \alpha) \\ & + b(x'^2 \cos \alpha \sin \alpha - y'^2 \cos \alpha \sin \alpha + x'y'(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)) \\ & + c(x'^2 \sin^2 \alpha + y'^2 \cos^2 \alpha + 2x'y' \sin \alpha \cos \alpha) \\ & + dx' \cos \alpha - dy' \sin \alpha + ex' \sin \alpha + ey' \cos \alpha + f = 0. \end{aligned}$$

Det blandede led bliver her:

$$(-2a \cos \alpha \sin \alpha + b(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2c \sin \alpha \cos \alpha)x'y'$$

det samme som

$$(-a \sin 2\alpha + b \cos 2\alpha + c \sin 2\alpha)x'y'$$

som er 0, når α er valgt, så

$$(c-a) \sin 2\alpha + b \cos 2\alpha = 0.$$

Da hele processen er overflødig for $b = 0$, siger vi

$$\cot 2\alpha = \frac{a-c}{b},$$

hvoraf α bestemmes.

Efter denne transformation fås formen

$$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$$

hvor

$$a' = a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha \sin \alpha + c \sin^2 \alpha$$

$$c' = a \sin^2 \alpha - b \cos \alpha \sin \alpha + c \cos^2 \alpha$$

$$d' = d \cos \alpha + e \sin \alpha$$

$$e' = -d \sin \alpha + e \cos \alpha$$

$$f' = f.$$

Bemærk invarianterne:

$$a' + c' = a + c$$

$$\begin{aligned} a'c' &= a^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \\ &+ ab \cos \alpha \sin \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + cb \cos \alpha \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &+ ac(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) \end{aligned}$$

for at komme videre i regningen erindres, at α opfyldte

$$0 = -2a \cos \alpha \sin \alpha + b(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2c \sin \alpha \cos \alpha$$

som kvadreret giver ligningen

$$\begin{aligned} 0 &= 4a^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + b^2(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - 2\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha) \\ &+ 4c^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - 4ab \cos \alpha \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &+ 4bc \cos \alpha \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 8ac \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Deles ligningen med 4 og trækkes resultatet fra ovenstående, fås

$$\begin{aligned} a'c' &= -b^2 \frac{1}{4}(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha) \\ &\quad + ac(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha) \\ &= \left(ac - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right) (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{a'c' = ac - \left(\frac{b}{2} \right)^2}$$

Polynomiet $(x-a')(x-c')$ er altså

$$x^2 - (a+c)x + ac - \left(\frac{b}{2} \right)^2,$$

som har rødder a' og c' , der derfor er

$$\left. \begin{matrix} a' \\ c' \end{matrix} \right\} = \frac{a+c \pm \sqrt{a^2+c^2+2ac-4ac+b^2}}{2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}.$$

Vi skelner nu mellem tre tilfælde.

1) *Elliptisk tilfælde.*

a' og c' har samme fortegn, kriterium $ac - \left(\frac{b}{2} \right)^2 > 0$. Vi foretager en parallelforskydning af koordinatsystemet med det formål at slippe af med d' og e' . Vi forskyder med vektoren (β, γ) , de nye koordinater (x'', y'') opfylder:

$$x' = x'' + \beta, \quad y' = y'' + \gamma$$

Ligningen i nye koordinater findes

$$a'(x''+\beta)^2 + c'(y''+\gamma)^2 + d'(x''+\beta) + e'(y''+\gamma) + f' = 0$$

$$\begin{aligned} a'x''^2 + c'y''^2 + (2\beta a' + d')x'' + (2\gamma c' + e')y'' \\ + \beta^2 a' + \gamma^2 c' + d'\beta + e'\gamma + f' = 0. \end{aligned}$$

Hvis vi vælger $\beta = -\frac{d'}{2a'}$ og $\gamma = -\frac{e'}{2c'}$, fås formen

$$a'x''^2 + c'y''^2 = f'',$$

hvor

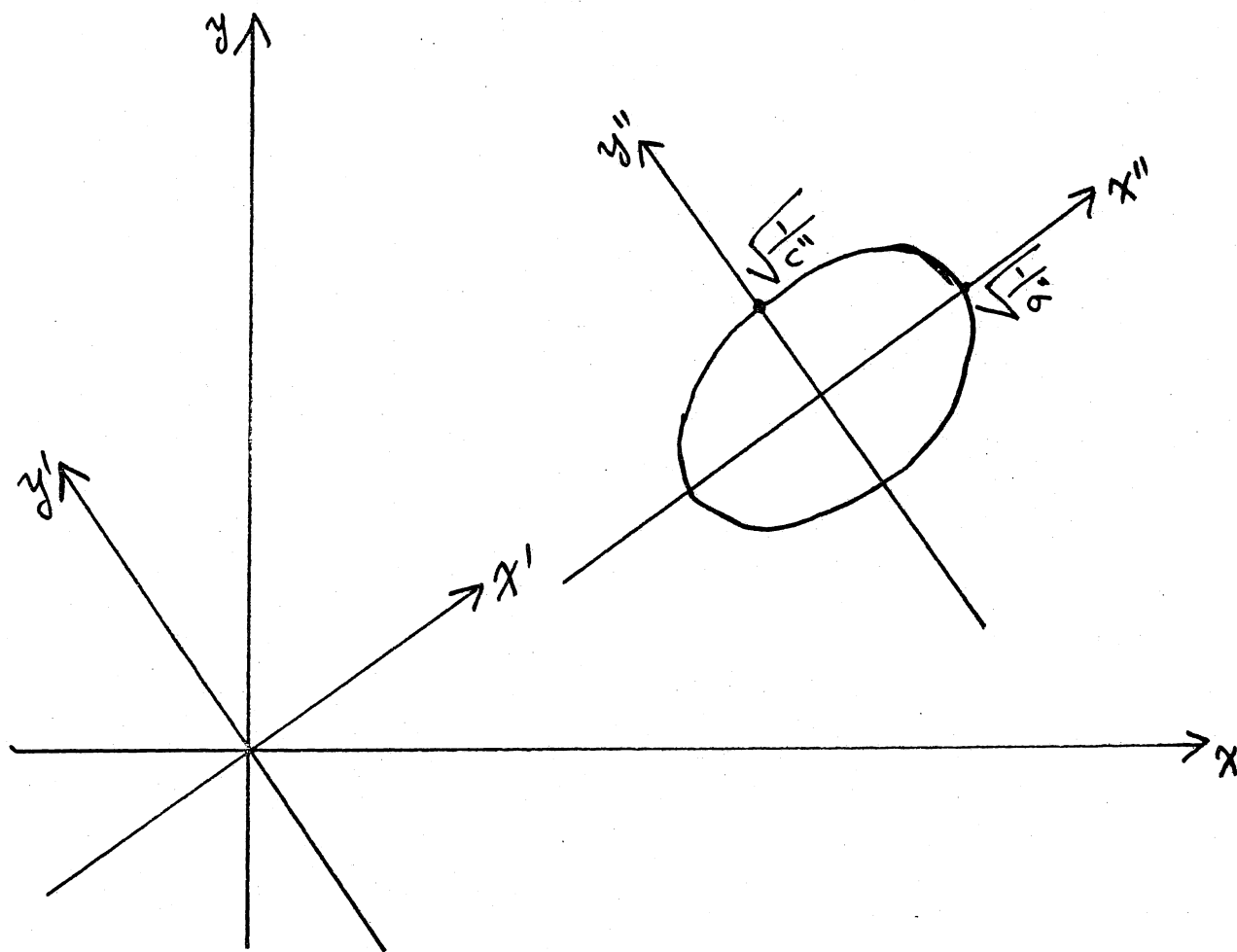
$$f'' = -f' - \frac{d'^2}{4a'} - \frac{e'^2}{4c'} + \frac{d'^2}{2a'} + \frac{e'^2}{2c'} = \frac{d'^2}{4a'} + \frac{e'^2}{4c'} - f'.$$

Hvis $f'' = 0$, så vil kun $(x'', y'') = (0, 0)$ tilfredsstille ligningen. Hvis $f'' \neq 0$, får vi formen

$$a''x''^2 + c''y''^2 = 1,$$

hvor $a'' = \frac{a'}{f''}$, $c'' = \frac{c'}{f''}$.

Er nu a'' og c'' negative, så er der ingen løsninger. Er derimod a'' og c'' positive, har vi ligningen for en ellipse.



2) Parabolsk tilfælde.

En af a' og c' er 0. Kriterium $ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$. Lad os sige, at $c' = 0$.

Vi foretager en parallelforskydning af koordinatsystemet med det formål at slippe af med d' og f' . Vi forskyder med vektoren (β, γ) , de nye koordinater (x'', y'') opfylder:

$$x' = x'' + \beta, \quad y' = y'' + \gamma.$$

Ligningen i nye koordinater findes:

$$a'(x''+\beta)^2 + d'(x''+\beta) + e'(y''+\gamma) + f' = 0$$

$$a'x''^2 + (2\beta a' + d')x'' + e'y'' + \beta^2 a' + d'\beta + e'\gamma + f' = 0.$$

Hvis vi vælger

$$\beta = -\frac{d'}{2a'}$$

og

$$\gamma = -\frac{f' + \beta^2 a' + \beta d'}{e'},$$

fås formen

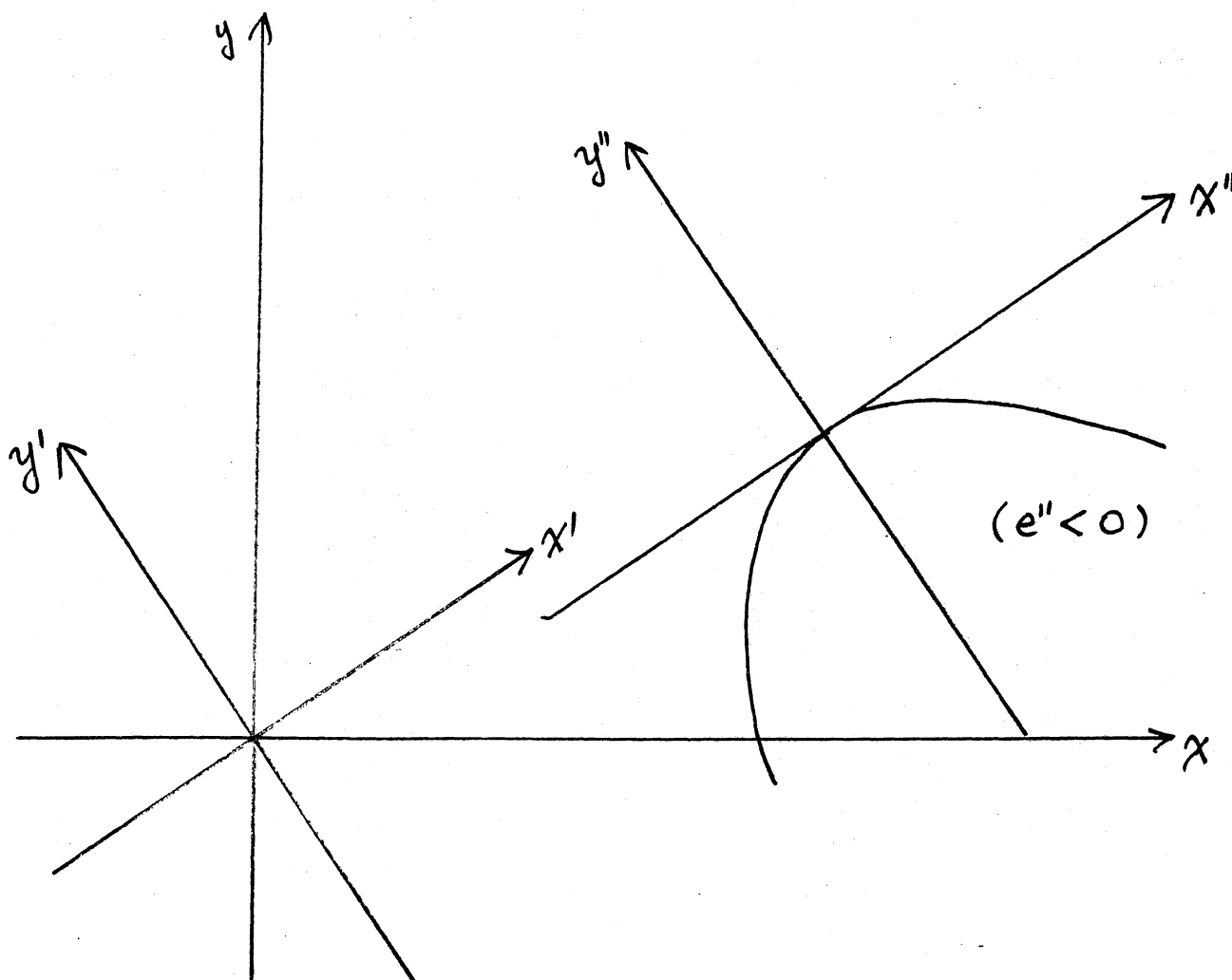
$$a'x''^2 + e'y'' = 0$$

eller

$$x''^2 = e''y'',$$

hvor $e'' = -\frac{e'}{a'}$.

Hvis $e'' = 0$, fås linien $x'' = 0$ (y'' -aksen). Ellers fås ligningen for en parabel.

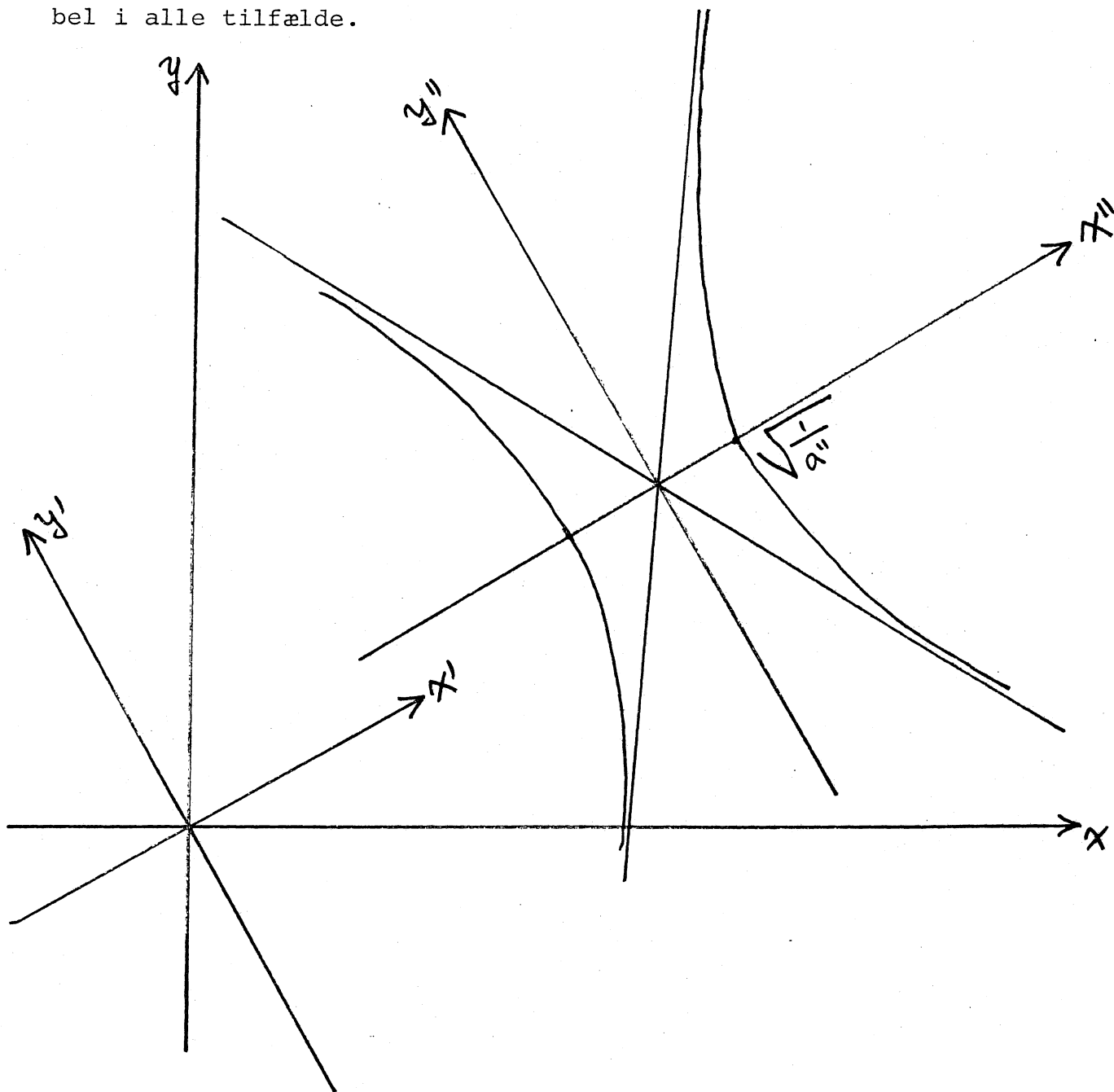


3) Hyperbolsk tilfælde.

a' og c' har modsat fortegn. Kriterium $ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 < 0$. Vi foretager en parallelforskydning som i det elliptiske tilfælde til formen

$$a''x''^2 + c''y''^2 = 1,$$

hvor a'' og c'' har modsat fortegn. Vi har ligningen for en hyperbel i alle tilfælde.



§3. Polynomier og rationale funktioner.Euklids algoritme.

Lad p være et polynomium af grad ≥ 1 , og lad α være et vilkårligt komplekst tal. Da har polynomiet

$$x - \alpha$$

grad 1. Euklids algoritme siger nu, at der findes polynomier d og r , hvoraf r har grad ≤ 0 , så

$$p(x) = (x - \alpha)d(x) + r.$$

Polynomiet r er en konstant, som eventuelt er 0 (hvorved polynomiets grad bliver $-\infty$).

Heraf ses, at α er rod i p , altså

$$p(\alpha) = 0,$$

hvis og kun hvis

$$r = 0.$$

I dette tilfælde var altså

$$p(x) = (x - \alpha)d(x).$$

Interpolation.

Lad der være givet $n+1$ forskellige tal

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

og hertil foreskrevet $n+1$ værdier

$$y_0, y_1, \dots, y_n.$$

Ifølge Sætning I.3.10 findes højst ét polynomium $p(x)$ af grad $\leq n$, som antager de foreskrevne værdier i de foreskrevne punkter,

$$p(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Vi skal vise, at vi kan finde et sådant polynomium.

Matematisk angrebsvinkel.

Opgaven var lettere at løse, hvis

$$y_0 = 1, \quad y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0.$$

Thi i dette tilfælde havde polynomiet de n rødder $x_1, \dots, x_n$. Men så var det ifølge Sætning I.3.6 og Sætning I.3.4 af formen

$$k(x-x_1) \dots (x-x_n).$$

Vælger vi k passende, nemlig så

$$k(x_0-x_1) \dots (x_0-x_n) = 1,$$

løser polynomiet opgaven.

Vi definerer Lagrange polynomiet

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{j-1})(x-x_{j+1}) \dots (x-x_n)}{(x_j-x_0) \dots (x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1}) \dots (x_j-x_n)},$$

som åbenbart er 1 i x_j og 0 i de andre x_i er.

Polynomiet

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

løser den oprindelige opgave.

Morale: At løse opgaven under simplere betingelser førte dog til målet!

§4. Følger og rækker.

En funktion $f(x)$ af tallene, planen eller rummet ind i sig selv kaldes en *kontraktion*, hvis der findes et tal k , $0 < k < 1$, så

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

for alle x og y .

Sætning III.4.1. En kontraktion har netop ét fixpunkt, dvs. et punkt x^* , der opfylder

$$f(x^*) = x^* .$$

En talfølge dannes ud fra et startpunkt x_0 ved definitionerne

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

En sådan talfølge siges at være dannet ved *iteration* af funktionen.

Sætning III.4.2. En talfølge, der er dannet ved iteration af en kontraktion, er konvergent med fixpunktet som grænseværdi.

Eksempel. Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

er en kontraktion for $x > 1$, thi

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{y}{2} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{x-y}{2} + \frac{y-x}{xy} \right| \\ &= |x-y| \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right| \leq \frac{1}{2} |x-y| . \end{aligned}$$

Fixpunktet for f findes af

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} .$$

Talfølgen

$$x_0 = 2$$

$$x_n = \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

konvergerer mod $\sqrt{2}$:

$$x_1 = 1.5$$

$$x_2 = 1.417$$

$$x_3 = 1.414216$$

$$x_4 = 1.414213562 \dots$$

En uendelig decimalbrøk

$$0.d_1d_2d_3 \dots d_n \dots$$

kan tænkes som rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n},$$

hvor decimalerne opfylder $0 \leq d_n < 10$.

Leddene tilfredsstiller uligheden

$$\frac{d_n}{10^n} \leq \frac{10}{10^n} = \frac{1}{10^{n-1}}.$$

Da rækken nedenfor er konvergent med sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9},$$

er decimalbrøken ifølge Sætning I.4.12 konvergent med sum højst $\frac{10}{9}$.

En uendelig decimalbrøk

$$0.d_1d_2d_3 \cdots d_n \cdots$$

kan tænkes som rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n},$$

hvor decimalerne opfylder $0 \leq d_n < 10$.

Leddene tilfredsstiller uligheden

$$\frac{d_n}{10^n} \leq \frac{10}{10^n} = \frac{1}{10^{n-1}}.$$

Da rækken nedenfor er konvergent med sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9},$$

er decimalbrøken ifølge Sætning I.4.12 konvergent med sum højst $\frac{10}{9}$.

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ er konvergent.

Der gælder endda, at for $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z \neq 1$, er rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

konvergent. (For $z = 1$ er rækken divergent.)

Mere generelt gælder følgende

Sætning III, 4, 3. Hvis $\{a_n\}$ er en række med begrænset afsnitsfølge, og (b_n) er en aftagende følge af positive tal med grænseværdi 0, så er rækken

$$\sum a_n b_n$$

konvergent.

Bevis: Lad os betegne afsnitsfølgen, der er begrænset,

$$s_n = \sum_{v=0}^n a_v.$$

Nu er $a_n = s_n - s_{n-1}$ for $n \geq 1$. Et udsnit af rækken $\sum a_n b_n$ er derfor

$$\begin{aligned} \sum_{v=n}^{n+p} a_v b_v &= \sum_{v=n}^{n+p} (s_v - s_{v-1}) b_v = \sum_{v=n}^{n+p} s_v b_v - \sum_{v=n}^{n+p} s_{v-1} b_v \\ &= \sum_{v=n}^{n+p} s_v b_v - \sum_{v=n-1}^{n+p-1} s_v b_{v+1} \\ &= s_{n+p} b_{n+p} + \sum_{v=n}^{n+p-1} s_v b_v - \sum_{v=n}^{n+p-1} s_v b_{v+1} - s_{n-1} b_n \\ &= s_{n+p} b_{n+p} + \sum_{v=n}^{n+p-1} s_v (b_v - b_{v+1}) - s_{n-1} b_n. \end{aligned}$$

Da der findes K , så $|s_n| \leq K$ for alle n , får vi heraf vurderingen:

$$\left| \sum_{v=n}^{n+p} a_v b_v \right| \leq K \cdot |b_{n+p}| + \sum_{v=n}^{n+p-1} K \cdot |b_v - b_{v+1}| + K \cdot |b_n|.$$

Da $b_n > 0$ og $b_n > b_{n+1}$ for alle n , kan vi stryge $||$ og få

$$\begin{aligned} \left| \sum_{v=n}^{n+p} a_v b_v \right| &\leq K \cdot b_{n+p} + K \sum_{v=n}^{n+p-1} (b_v - b_{v+1}) + K b_n \\ &= K(b_{n+p} + b_n - b_{n+p} + b_n) = 2K b_n. \end{aligned}$$

Da $b_n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, kan vi til ethvert $\varepsilon > 0$ finde et N , så for alle $n \geq N$ gælder

$$2K b_n < \varepsilon.$$

Ifølge det almindelige konvergensprincip er altså $\sum a_n b_n$ konvergent. $\square$

I eksemplet ovenfor er

$$a_n = z^n \quad \text{og} \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Afsnitsfølgen er

$$s_n = \sum_{v=0}^n z^v = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

hvoraf for $|z| = 1$, $z \neq 1$ vi finder

$$|s_n| = \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|}.$$

Sætning I, 4, 12 har to vigtige specialtilfælde for talrækker, nemlig

Kvotientkriteriet: Givet en række af (komplekse) tal, $\sum a_n$. Hvis der findes et reelt tal k , $0 < k < 1$, så for alle n gælder uligheden

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < k,$$

så er rækken konvergent.

Rodkriteriet: Givet en række af (komplekse) tal, $\sum a_n$. Hvis der findes et reelt tal k , $0 < k < 1$, så for alle n gælder uligheden

$$\sqrt[n]{|a_n|} < k,$$

så er rækken konvergent.

Bevis: Af ulighederne $|a_{n+1}| < k|a_n|$ følger, at

$$|a_n| < k^n |a_0|,$$

og af $\sqrt[n]{|a_n|} < k$ følger $|a_n| < k^n$. Da $\sum k^n$ er konvergent for $0 < k < 1$, fås de ønskede konvergenser af Sætning I, 4, 12. $\square$

§5. Kontinuitet.

Begreberne åben og afsluttet er relative begreber, der handler om forholdet mellem en mængde og det rum, den ligger i. En ret linie er åben som delmængde af $\mathbb{R}$ (den er $\mathbb{R}$), men afsluttet og ikke åben som delmængde af $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$.

Begrebet kompakt er derimod absolut, hvilket fremgår af sætning I,5,6, der kun refererer til indre egenskaber.

En kompakt delmængde af den reelle akse, $K \subseteq \mathbb{R}$, er indeholdt i et minimalt interval, jvf. side I,1,1 egenskaber 1L) og 1R). Da K er begrænset, må dette minimale interval være begrænset. Altså

$$K \subseteq [a, b] ,$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Da intervallet er minimalt, må enhver kugle $K(b, \frac{1}{n})$ indeholde punkter fra K . Vi vælger $a_n \in K \cap K(b, \frac{1}{n})$ og får derved en følge (a_n) af punkter fra K . Da $a_n \in K(b, \frac{1}{n})$ for alle n , må $(a_n) \rightarrow b$ for $n \rightarrow \infty$. Ifølge sætning I,5,5 må $b \in K$. Konklusion: b er det største tal i K

$$b = \max K \in K .$$

Tilsvarende gælder

$$a = \min K \in K .$$

En kompakt mængde fra $\mathbb{R}$ indeholder et største og et mindste element (tal).

Lad nu $K \subseteq \mathbb{R}^n$ være en vilkårlig kompakt mængde, og $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Ifølge sætning I,5,11 er $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Ifølge ovenstående er $\max f(K) \in f(K)$. Konklusion: En kontinuert reel funktion af en kompakt mængde antager en største og en mindste værdi.

Lad nu $M \subseteq \mathbb{R}^n$ være vilkårlig og $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ en funktion. Vi kan da definere koordinatfunktionerne ved projektionerne af $\mathbb{R}^2$ på de to akser:

$$p_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$p_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow y \in \mathbb{R} .$$

Sætter vi $f_1 = p_1 \circ f$ og $f_2 = p_2 \circ f$, så gælder

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)) \text{ for } a \in M .$$

Da gælder:

f kontinuert i $a \Leftrightarrow f_1$ og f_2 kontinuerte i a .

Bevis: $\Rightarrow$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da findes $\delta > 0$, så

$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$. Nu gælder $|f_1(x)-f_1(a)| \leq |f(x)-f(a)|$, altså også

$$|f_1(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Men så er f_1 kontinuert.

$\Leftarrow$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da findes $\delta_1 > 0$ og $\delta_2 > 0$, så

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x)-f_1(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{ og } |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x)-f_2(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} .$$

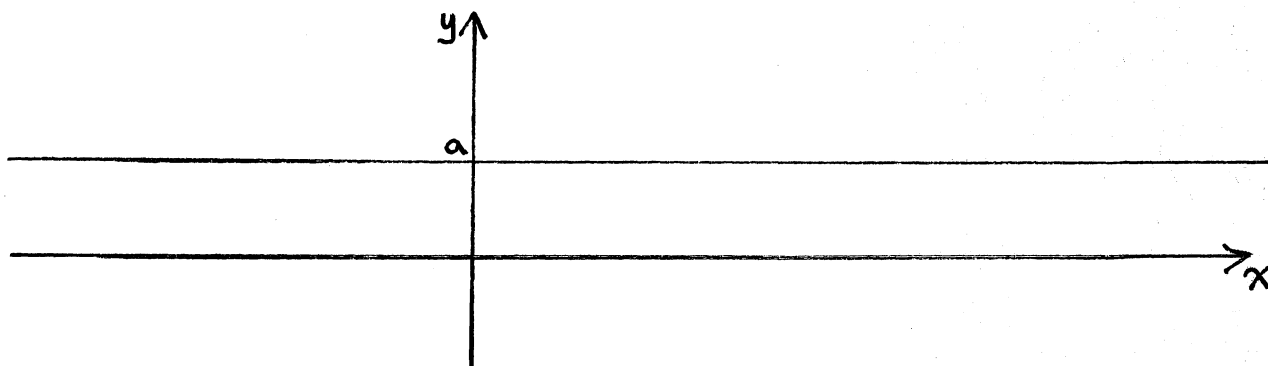
Hvis vi vælger $\delta > 0$, så at $\delta < \delta_1$ og $\delta < \delta_2$, så vil

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon . \text{ Men så er } f \text{ kontinuert. } \square$$

Lad nu $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være en funktion, Vi definerer en funktion

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ved } f_a(x) = f(x, a) .$$

Det er restriktionen af f til linien $y = a$.



Hvis f er kontinuert, så er også f_a kontinuert, thi er $|x_0 - x| < \delta$, så er også $|(x_0, a) - (x, a)| < \delta$. Men selv om alle mulige funktioner

$$f_a(x) = f(x, a)$$

$$f^b(y) = f(b, y)$$

er kontinuerte, kan vi ikke vide, at f selv er kontinuert!!

Eksempel. Vi definerer

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{for } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{for } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Denne funktion er kontinuert overalt uden for $(0, 0)$, og $f_0(x) = f(x, 0) = 0$ er kontinuert ligesom $f^0(y) = f(0, y) = 0$.

Men vælger vi $0 < x = y < \delta$, så er jo

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

For $\varepsilon = \frac{1}{4}$, vil intet δ være lille nok. □

Hvis f er kontinuert, så er også f_a kontinuert, thi er $|x_0 - x| < \delta$, så er også $|(x_0, a) - (x, a)| < \delta$. Men selv om alle mulige funktioner

$$f_a(x) = f(x, a)$$

$$f^b(y) = f(b, y)$$

er kontinuerter, kan vi ikke vide, at f selv er kontinuert!!

Eksempel. Vi definerer

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{for } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{for } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Denne funktion er kontinuert overalt uden for $(0, 0)$, og

$f_0(x) = f(x, 0) = 0$ er kontinuert ligesom $f^0(y) = f(0, y) = 0$.

Men vælger vi $0 < x = y < \delta$, så er jo

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

For $\varepsilon = \frac{1}{4}$, vil intet δ være lille nok. □

Eksponentialfunktionen.

Lad a være et reelt tal større end 1, altså $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

For et naturligt tal, $n \in \mathbb{N}$, defineres

$$a^n = \overbrace{a \cdots a}^n.$$

Sætter vi videre

$$a^0 = 1$$

og

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

gælder regnereglen

$$a^{n+m} = a^n a^m$$

for alle hele tal $n, m \in \mathbb{Z}$.

Den kontinuerte funktion $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = x^q \quad \text{for } x > 0 ,$$

hvor q er et naturligt tal, $q \in \mathbb{N}$, antager værdien a netop én gang. (Vi kan løse ligningen $x^q = a$ som vi løser $x^2 = 2$ i IV,5.)

Løsningen betegnes $a^{1/q}$ og opfylder

$$(a^{1/q})^q = a .$$

Vi definerer nu

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p \quad \text{for } p \text{ hel.}$$

Vi har således defineret funktionen

$$a^x \quad \text{for } x \in \mathbb{Q}$$

for alle rationale tal x , så den opfylder

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

og

$$(a^x)^y = a^{xy} .$$

Hvis $x < y$, så er

$$a^y = (a^{y-x}) a^x ,$$

hvor

$$1 < a^{y-x} .$$

Funktionen er altså voksende.

Vi ønsker at definere a^x for ethvert reelt $x \in \mathbb{R}$. Lad nu x være et fast reelt tal. Vi betragter

$$M = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq x\}$$

alle rationale tal op til (og evt. med) x .

Funktionsværdien er

$$a^M = \{a^r \mid r \in M\} .$$

Lad $K > x$ være et helt tal. Så vil

$$0 < a^r < a^K \quad \text{for alle } r \in M .$$

Mængden a^M er altså begrænset.

Det mindste interval, der indeholder a^M , er $]0, h]$ eller $]0, h[$. I første tilfælde er

$$h = a^x.$$

I andet tilfælde definerer vi

$$a^x = h.$$

Vi har nu defineret en funktion, a^x for alle $x \in \mathbb{R}$.

Denne funktion er kontinuert.

Lad x være et tal og $\varepsilon > 0$ være givet. Vi betragter a^x .
Lad N være det mindste hele tal større end $a^{x+1} = aa^x$.

Vi betragter to rationale tal, hvor $q \geq 1$,

$$\frac{p}{q} < x < \frac{p+1}{q}.$$

Da gælder for alle $y \in [\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}]$, at

$$a^{p/q} \leq a^y < a^{(p+1)/q} = a^{p/q} a^{1/q}$$

Altså gælder

$$|a^x - a^y| < a^{p/q} (a^{1/q} - 1) < N(a^{1/q} - 1) < \varepsilon,$$

hvis blot q er stor ifølge V, 4 eks. 6. Vælges $\delta < x - \frac{p}{q}$ og $\delta < \frac{p+1}{q} - x$, vil $|x - y| < \delta$ sikre, at $|a^x - a^y| < \varepsilon$.

For alle reelle tal x og y gælder

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Thi da formlerne gælder for rationale tal, vælger vi to følger $(x_n) \rightarrow x$ og $(y_n) \rightarrow y$ af rationale tal. Vi får da f.eks.

$$a^{x_n + y_n} \rightarrow a^{x+y} \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

$$\| a^{x_n} a^{y_n} \rightarrow a^x a^y \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

hvormed formlerne følger.

Lad nu $f(x)$ være en kontinuert funktion af de reelle tal ind i sig selv, således at

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$, (og så $f(x) \neq 0$). Da findes $a \in \mathbb{R}_+$, så

$$f(x) = a^x.$$

Da

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2,$$

må

$$f(x) \geq 0 \text{ for alle } x.$$

Antag, der findes x_0 så $f(x_0) = 0$. Så er for et vilkårligt x

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0.$$

Dvs.

$$f(x) \equiv 0.$$

Altså må $f(x) > 0$ for alle x .

Vi sætter

$$a = f(1).$$

Da gælder

$$a = f\left(\frac{q}{q}\right) = \left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q,$$

så

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = a^{1/q}$$

og

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^p = a^{p/q}.$$

Da

$$f(x) = a^x \text{ for alle } x \in \mathbb{Q},$$

ses ved grænseovergang, at

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^x$$

blot $x_n \in \mathbb{Q}$ og $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Konklusion:

Sætning III,5,1. For ethvert positivt reelt tal $a \in \mathbb{R}$ findes en og kun én kontinuert funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

som opfylder funktionalligningen

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$ og antager værdien a i punktet 1

$$f(1) = a ,$$

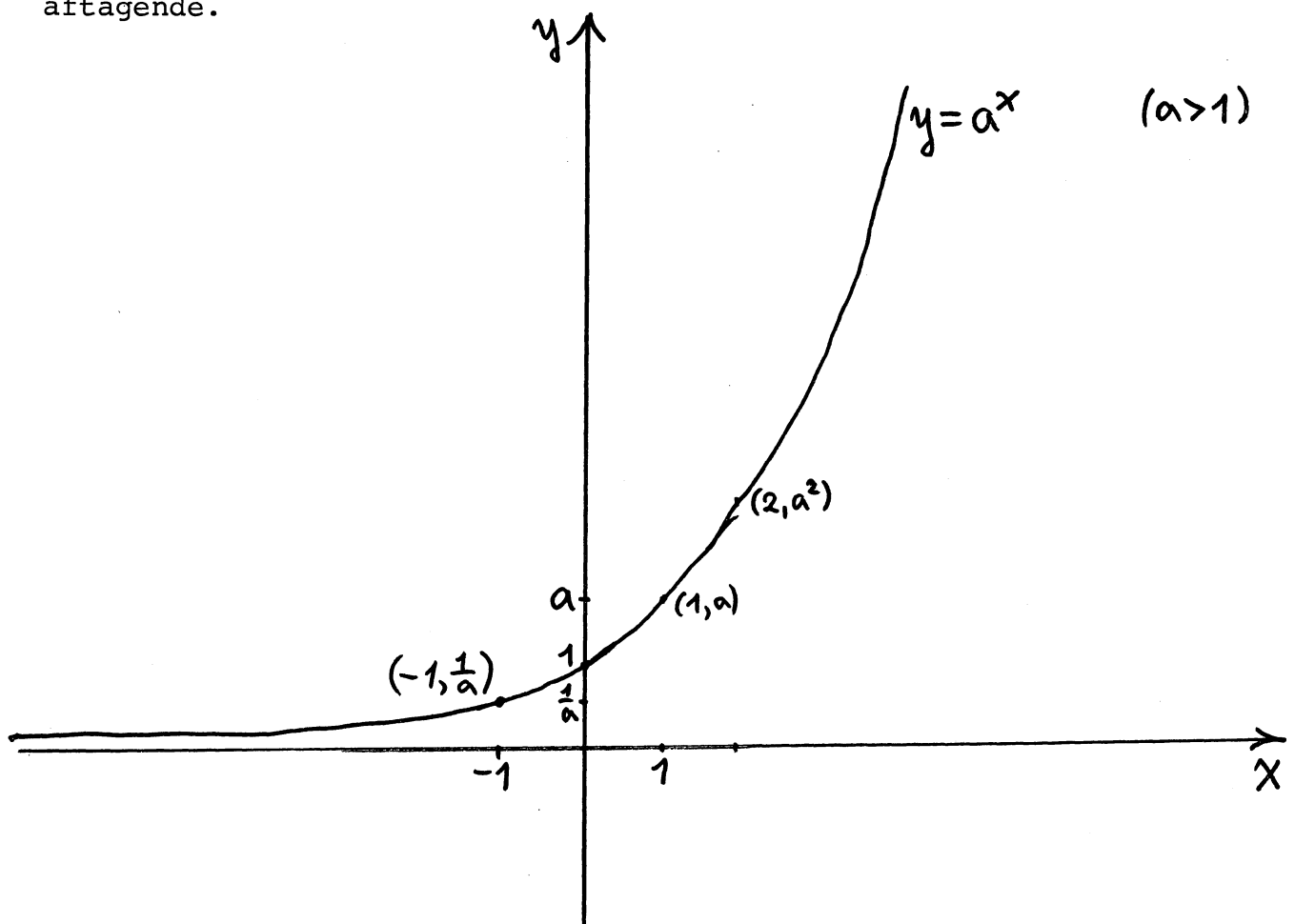
nemlig eksponentialfunktionen

$$f(x) = a^x .$$

Denne funktion er den vigtigste funktion overhovedet. For $a = 1$ er funktionen konstant,

$$f(x) = 1^x = 1 ,$$

for $a > 1$ er funktionen voksende og for $0 < a < 1$ er funktionen aftagende.



Funktionsfølger.

En funktion af de naturlige tal ind i mængden af funktioner $F_M = \{f \mid f: M \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ kaldes en *følge* af funktioner. Vi skriver

$$(f_n), \quad f_n: M \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En følge af funktioner siges at være *punktvise konvergent* mod funktionen

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

hvis det for hvert punkt $x \in M$ gælder, at punktfølgen $(f_n(x))$ konvergerer mod $f(x)$. Funktionen $f(x)$ kaldes *grænsefunktionen*, og vi skriver

$$f_n \rightarrow f \quad \text{for } n \rightarrow \infty \quad \text{på } M.$$

Altså

$$f_n \rightarrow f \quad \text{for } n \rightarrow \infty \quad \text{på } M \Leftrightarrow \forall x \in M: f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

Selv om alle funktionerne $f_n: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ er kontinuerte og følgen (f_n) er konvergent med grænsefunktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$, behøver f ikke at være kontinuert.

Eksempel. Sæt $M = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ og

$$f_n(x) = x^n \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da vil $f_n(x) \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, hvis $x < 1$, men

$$f_n(1) \rightarrow 1 \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

Altså

$$f_n \rightarrow f \quad \text{for } n \rightarrow \infty,$$

hvor $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1 & \text{for } x = 1. \end{cases}$$

Denne funktion f er åbenbart ikke kontinuert.

§6. Differential- og integralregning i én reel variabel.Eksponentialfunktion og logaritme.

Sætning I, 6, 10 siger, at der findes en stamfunktion til $\frac{1}{x}$ på intervallet $]0, \infty[$. Denne stamfunktion har positiv differentialkvotient, så den er voksende ifølge Sætning I, 6, 8 og har en omvendt.

Blandt stamfunktionerne til $\frac{1}{x}$ udtager vi den, der er 0 i 1, og kalder den *den naturlige logaritme*, og benævner den $\ln$.

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \text{for } x > 0.$$

Vi har $\ln x' = \frac{1}{x} > 0$, så $\ln x$ er voksende. Den omvendte til $\ln x$ kalder vi $f(y)$, og vi har altså

$$f'(y) = \frac{1}{\ln'(f(y))} = \frac{1}{\frac{1}{f(y)}} = f(y).$$

Nu er

$$\ln x_1 x_2 = \int_1^{x_1 x_2} \frac{1}{t} dt.$$

Substituerer vi heri $t = x_1 s$, $dt = x_1 ds$ fås af regnereglerne for substitution

$$\ln x_1 x_2 = \int_{\frac{1}{x_1}}^{\frac{x_2}{x_1}} \frac{1}{\frac{1}{x_1} s} \cdot \frac{1}{x_1} ds = \int_{\frac{1}{x_1}}^{\frac{x_2}{x_1}} \frac{1}{s} ds.$$

Ifølge indskudsreglen kan vi skrive

$$\ln x_1 x_2 = \int_{\frac{1}{x_1}}^1 \frac{1}{s} ds + \int_1^{\frac{x_2}{x_1}} \frac{1}{s} ds = \int_{\frac{1}{x_1}}^1 \frac{1}{s} ds + \ln x_2.$$

I det første integral substituerer vi nu

$$s = \frac{1}{r}, \quad ds = -\frac{1}{r^2} dr$$

og får

$$\int_{\frac{1}{x_1}}^1 \frac{1}{s} ds = \int_{x_1}^1 r \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) dr = -\int_{x_1}^1 \frac{1}{r} dr = \int_1^{x_1} \frac{1}{r} dr = \ln x_1.$$

Med andre ord, vi har fundet formelen

$$\ln x_1 x_2 = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Bruger vi formelen på $f(y_1)$ og $f(y_2)$, får vi

$$\ln(f(y_1)f(y_2)) = \ln f(y_1) + \ln f(y_2)$$

eller
$$\ln(f(y_1)f(y_2)) = y_1 + y_2 .$$

Tager vi f heraf, får vi

$$f(y_1+y_2) = f(\ln(f(y_1)f(y_2))) = f(y_1)f(y_2) .$$

Men vi har set, Sætning III,5,1, at så er f en eksponentialfunktion; der findes altså et tal $e > 1$, (da f er voksende), så

$$f(x) = e^x .$$

Samtidig er f differentiabel, så denne eksponentialfunktion er differentiabel, og der gælder

$$(e^x)' = e^x .$$

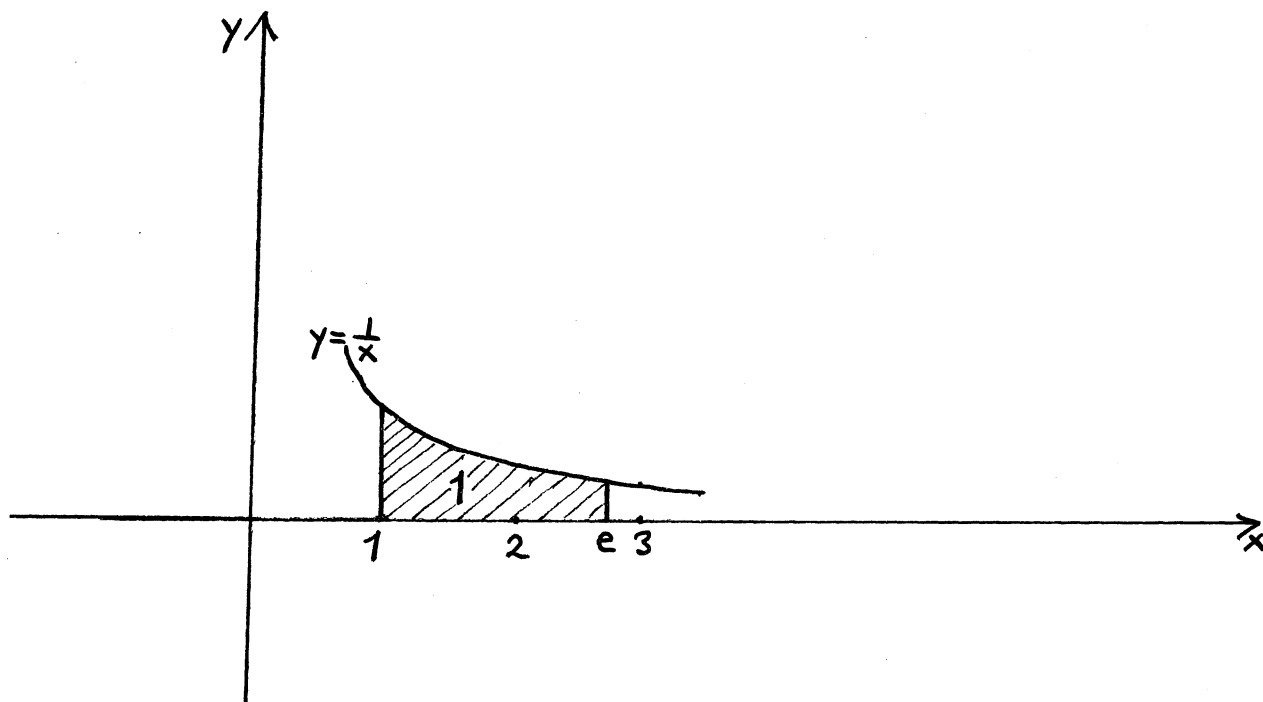
Heraf følger, at e^x er vilkårlig ofte differentiabel!

Da $e^{\ln x} = x$ og $\ln(e^x) = x$, er f.eks.

$$\ln e = 1 ,$$

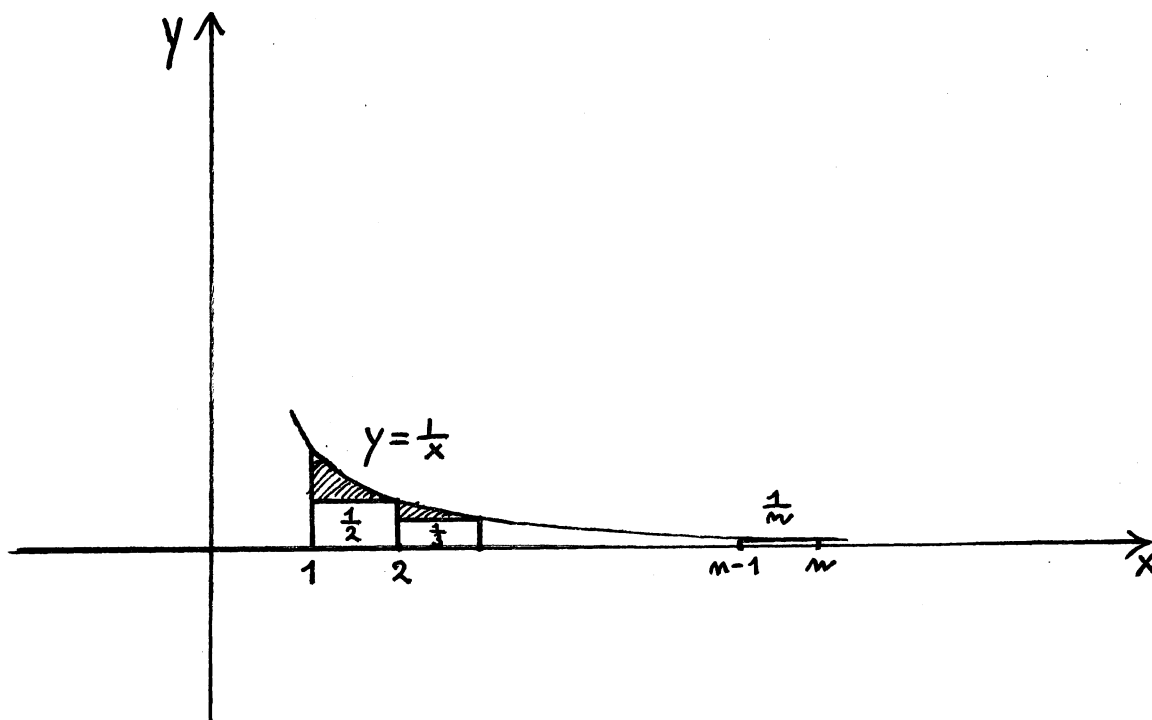
altså e opfylder, at

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1 .$$



Betragter vi arealet $\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n$, ser vi at

$$\ln n \geq \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}$$



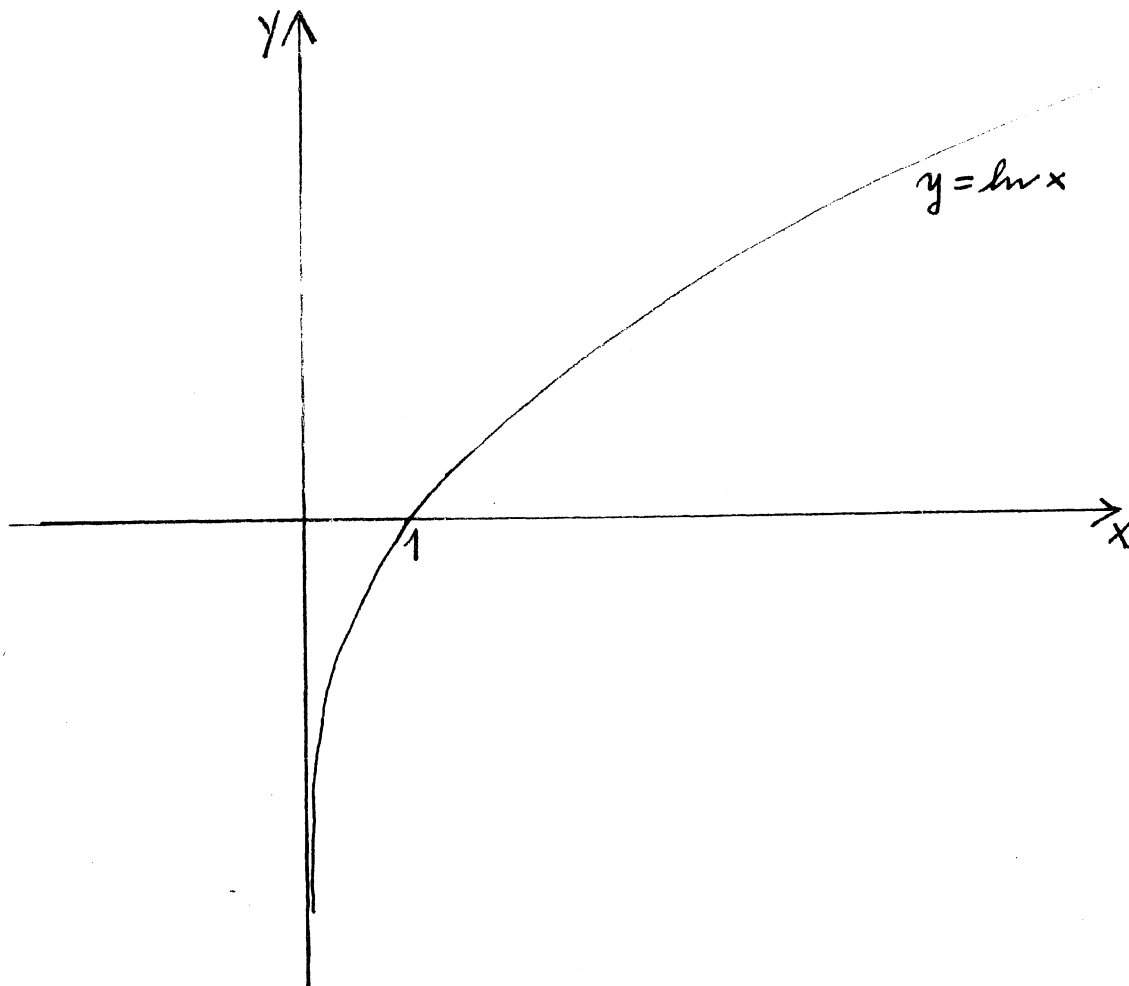
Nu har vi set, at $\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \rightarrow \infty$ for $n \rightarrow \infty$, så vi slutter, at $\ln n \rightarrow \infty$ for $n \rightarrow \infty$.

Da $\ln \frac{1}{n} = \ln 1 - \ln n = -\ln n$, ser vi, at

$\ln x \rightarrow -\infty$	for $x \rightarrow 0$
$\ln x \rightarrow +\infty$	for $x \rightarrow \infty$

Heraf følger, at

$e^x \rightarrow \infty$	for $x \rightarrow \infty$
$e^x \rightarrow 0$	for $x \rightarrow -\infty$



Talfølgen $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Vi tager logaritmen,

$$\ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

skriver fikst om til

$$x \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln 1}{\frac{x}{n}}$$

Da $\frac{x}{n} \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, må vi få

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\ln(1+dx) - \ln 1}{dx} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Med andre ord

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = x.$$

Da eksponentialfunktionen er kontinuert, følger heraf

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = e^x.$$

Specielt er

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Vi er nu i stand til at differentiere

$$x^\alpha \text{ for } x > 0$$

for $\alpha \in \mathbb{R}$ vilkårlig. Vi skriver

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

og differentierer den sammensatte funktion

$$(x^\alpha)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Taylorrækken for e^x er den simplest mulige. Da $(e^x)' = e^x$ fås rækken

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Denne Taylorrække konvergerer mod funktionsværdien for hvert $x \in \mathbb{R}$. Thi Taylors formel er

$$e^x = \sum_{v=0}^n \frac{1}{v!} x^v + \frac{1}{n!} \int_0^x e^t (x-t)^n dt.$$

Restleddet er

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x e^t (x-t)^n dt,$$

som kan vurderes således

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \frac{1}{n!} \int_0^{|x|} e^{|x|} (|x|-t)^n dt = \frac{e^{|x|}}{n!} \left[\frac{(|x|-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{|x|} \\ &= \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

For et fastholdt x , vil n fra et trin N overstige $2|x|$, så vi får for $n > N$

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|} |x|^N}{N} \cdot \frac{|x|}{N+1} \cdot \frac{|x|}{N+2} \cdots \frac{|x|}{n} \leq \frac{e^{|x|} |x|^N}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}.$$

Heraf følger, at $R_n(x) \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

Vi kan altså skrive

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Heraf følger, at $e^x \geq \frac{1}{n!} x^n$ for $x > 0$. Kvotienten

$$\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{x}{(n+1)!}$$

som divergerer mod ∞ for $x \rightarrow \infty$. Konklusion

$$\begin{array}{l} \frac{e^x}{x^n} \rightarrow \infty \quad \text{for } x \rightarrow \infty \\ \frac{x^n}{e^x} \rightarrow 0 \quad \text{for } x \rightarrow \infty \end{array}.$$

og

Betrægter vi $(-x)^n e^{-x}$ for $x > 0$, fås

$$|(-x)^n e^{-x}| = \frac{x^n}{e^x} \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty,$$

altså

$$x^n e^x \rightarrow 0 \quad \text{for } x \rightarrow -\infty.$$

For logaritmen fås tilsvarende grænseværdier:

$$\frac{x^n}{\ln x} = \frac{(e^{\ln x})^n}{\ln x} = \frac{e^{ny}}{y} \rightarrow \infty \quad \text{for } y = \ln x \rightarrow \infty$$

dvs. $x \rightarrow \infty$.

Altså

$$\begin{array}{l} \frac{x^n}{\ln x} \rightarrow \infty \quad \text{for } x \rightarrow \infty \\ \frac{\ln x}{x^n} \rightarrow 0 \quad \text{for } x \rightarrow \infty \end{array}.$$

og

Tilsvarende for $x \rightarrow 0$:

$$x^n \ln x = y e^{ny} \rightarrow 0 \quad \text{for } y = \ln x \rightarrow -\infty \quad \text{dvs. } x \rightarrow 0.$$

Altså

$$x^n \ln x \rightarrow 0 \quad \text{for } x \rightarrow 0.$$

Vi siger, at eksponentialfunktionen går mod ∞ hurtigere end noget polynomium, og at logaritmen går med ∞ langsommere end noget polynomium.

Taylorrækken for logaritmen er

$$\ln(1+x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

thi

$$\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\ln''(1+x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\ln'''(1+x) = 2 \frac{1}{(1+x)^3}$$

$\vdots$

$$\ln^{(n)}(1+x) = (-1)^{n+1} (n-1)! (1+x)^{-n}.$$

Rækken er divergent for $x = -1$, se side II, 4, 2. Restleddet i Taylors formel er

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x (-1)^n n! (1+t)^{-n-1} (x-t)^n dt \\ &= (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt. \end{aligned}$$

Vi substituerer $t = xs$, $dt = xds$, og får

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^1 \frac{(x-xs)^n}{(1+xs)^{n+1}} \cdot xds = (-1)^n x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{(1+xs)^{n+1}} ds.$$

Vi deler vurderingen af restleddet i 2.

1) $x \geq 0$.

Da er $1 + xs \geq 1$, så vi har

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{(1+xs)^{n+1}} ds \right| \leq \int_0^1 (1-s)^n ds = - \frac{(1-s)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Vi har derfor vurderingen

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty, \quad \text{blot } x \leq 1.$$

2) $-1 < x < 0$.

Da er $1 + xs \geq 1 - s$, hvorfor

$$0 \leq \frac{1-s}{1+xs} \leq 1 \quad \text{og} \quad 0 \leq \left(\frac{1-s}{1+xs} \right)^n \leq 1.$$

Vi har derfor vurderingen

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{(1+xs)^{n+1}} ds \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xs} ds \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x} ds = \frac{1}{1+x}.$$

For restleddet gælder vurderingen altså

$$|R_n(x)| \leq |x|^{n+1} \cdot \frac{1}{1+x} \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

Konklusion:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{for } -1 < x \leq 1.$$

Specielt har vi fundet ($x = 1$) rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

(Sammenlign side III,4,3.)

Taylorrækken har den behagelige egenskab, at man umiddelbart kan indsætte komplekse tal i udtrykket. Sætning I,4,12 siger, at rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

er konvergent for alle $z \in \mathbb{C}$. (Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ er konvergent for $|z| \leq 1$, $z \neq -1$, se side III, 4, 3.)

Vi definerer den *komplekse eksponentialfunktion*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Ifølge Sætning I, 4, 16 er for $x, y \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^x e^y &= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{y^q}{q!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!} \frac{y^{n-p}}{(n-p)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} x^p y^{n-p} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = e^{x+y}. \end{aligned}$$

Specielt gælder for $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, at

$$e^z = e^x e^{iy}.$$

Vi kan derfor nøjes med at se på e^{iy} , $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iy)^n = \sum_{n \text{ lige}} \frac{1}{n!} (iy)^n + \sum_{n \text{ ulige}} \frac{1}{n!} (iy)^n \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} y^{2p} + i \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q+1)!} y^{2q+1}. \end{aligned}$$

To reelle rækker, konvergente mod reelle funktioner af y . Lad os kalde dem hhv. $c(y)$ og $s(y)$.

Det ses, at $c(-y) = c(y)$ og $s(-y) = -s(y)$. Så

$$e^{-iy} = c(-y) + is(-y) = c(y) - is(y) = \overline{e^{iy}}.$$

Altså gælder

$$e^{iy} \overline{e^{iy}} = e^{iy} e^{-iy} = e^{i(y-y)} = e^{i0} = c(0) + is(0) = 1 + i0 = 1.$$

Konklusion

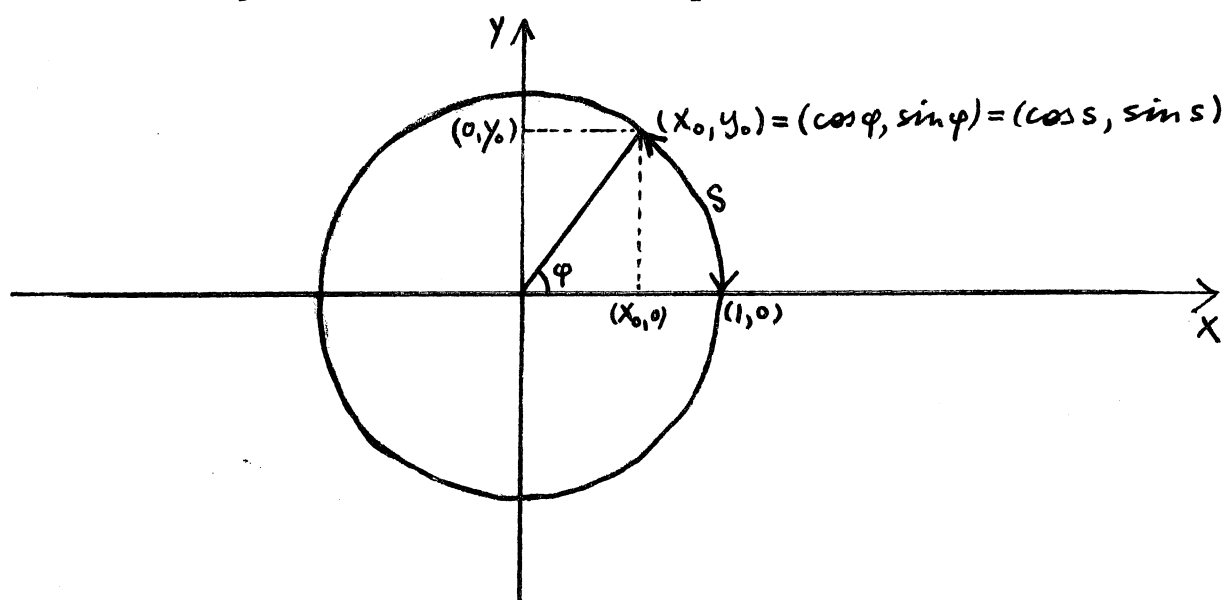
$$|e^{iy}| = 1.$$

Vi skal nedenfor se, at c og s er gamle bekendte;

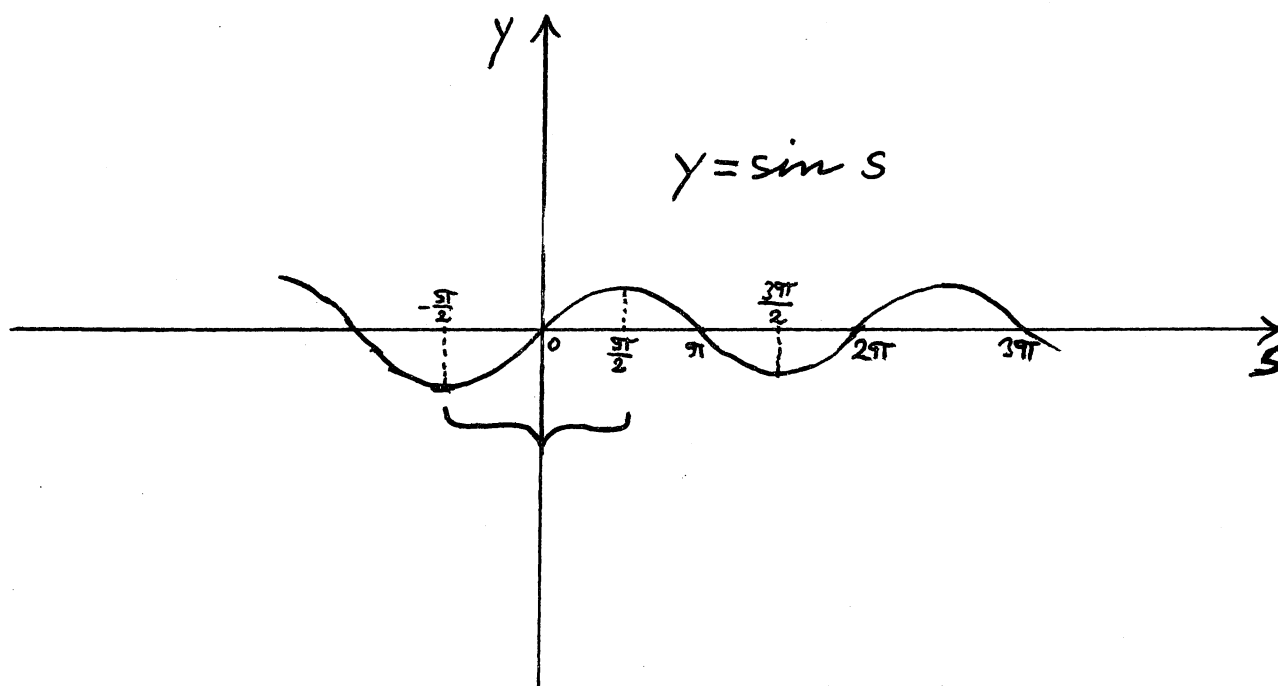
$$c(y) = \cos y \quad \text{og} \quad s(y) = \sin y.$$

Trigonometriske funktioner og arcusfunktioner.

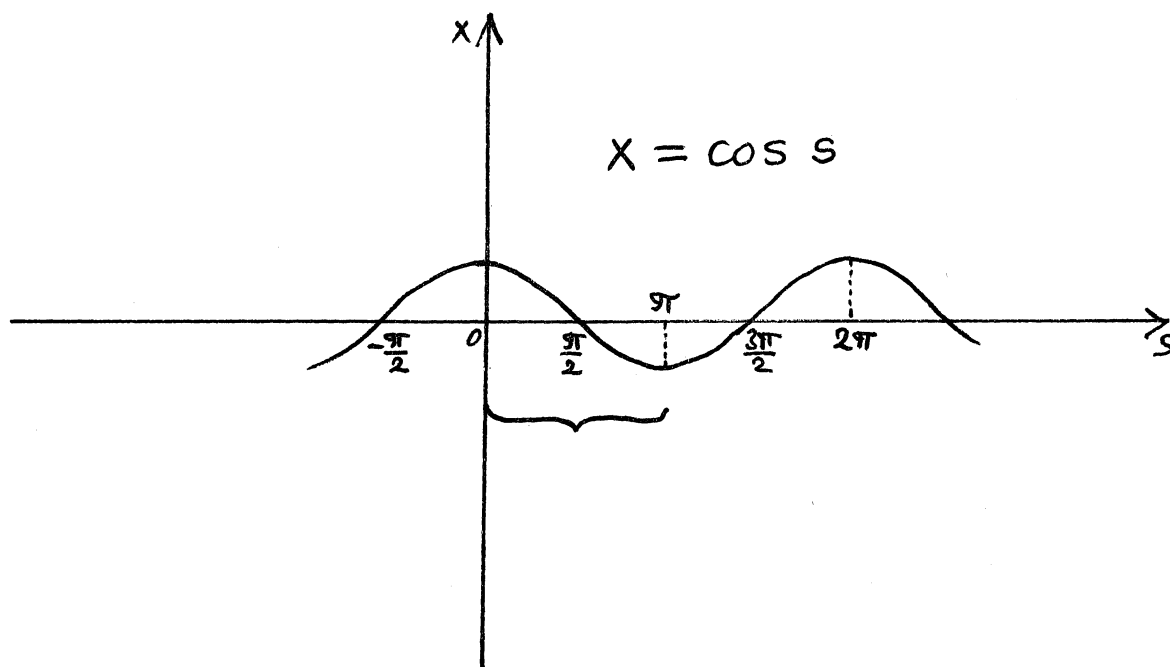
Vi betragter enhedscirklen $x^2 + y^2 = 1$.



Funktionen $y = \sin s$ er voksende for $-\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2}$, aftagende for $\frac{\pi}{2} < s < \frac{3\pi}{2}$, og periodisk med period 2π :



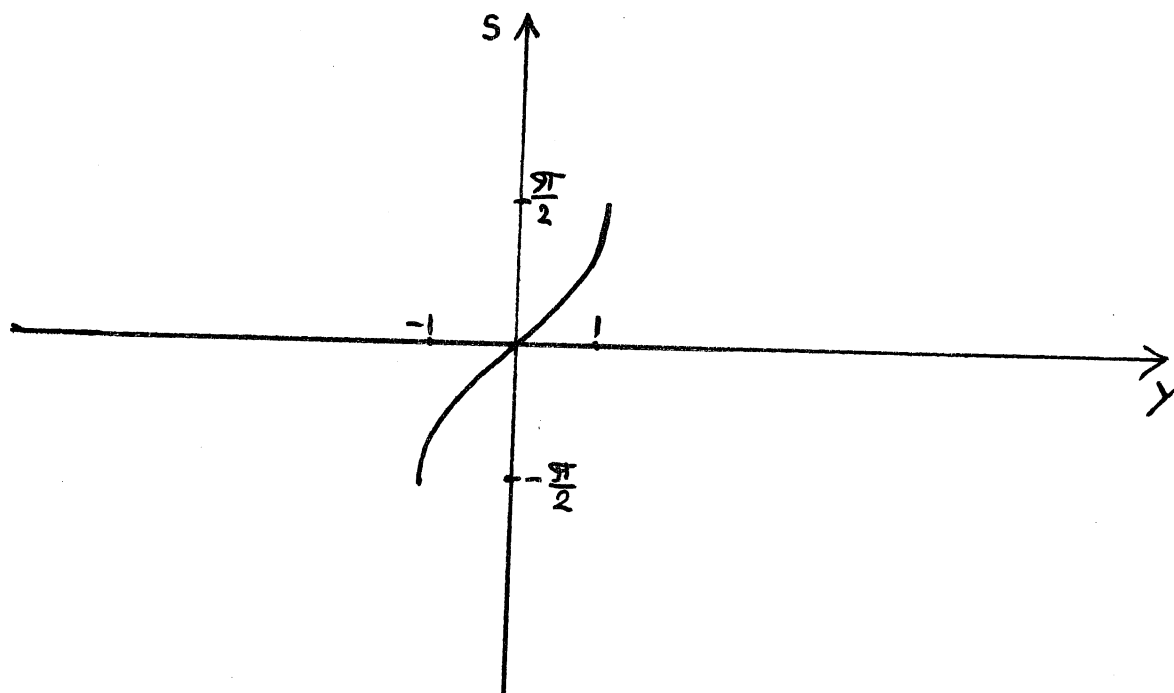
Funktionen $x = \cos s$ er aftagende for $0 < s < \pi$, voksende for $\pi < s < 2\pi$, og periodisk med periode 2π . Desuden er $\cos s = \sin(s - \frac{\pi}{2})$.



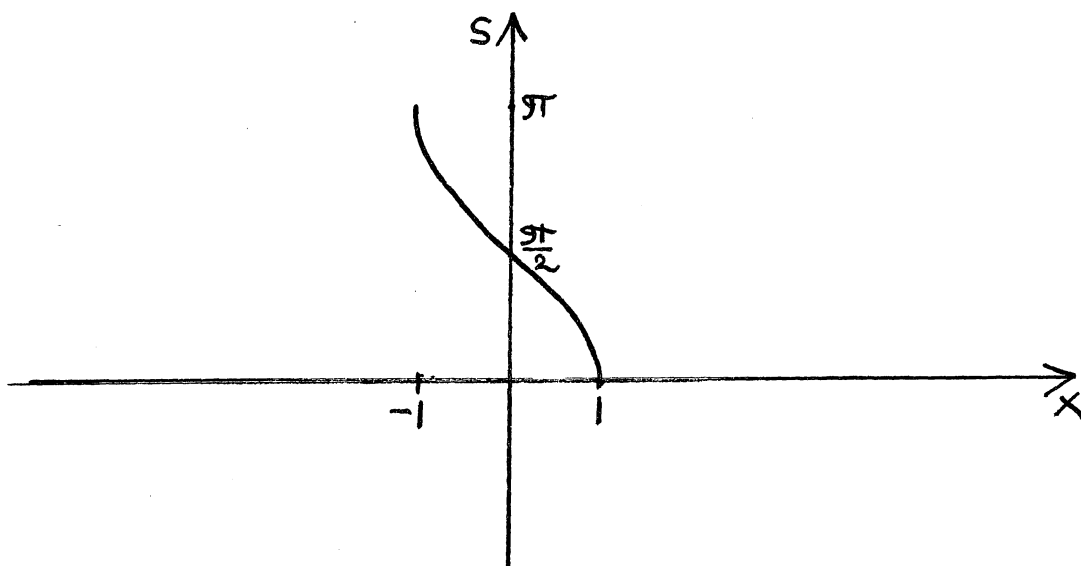
På et monotoninterval har de en omvendt, der kaldes en *arcusfunktion*. Vi vælger monotonintervallerne $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ for sinus og $[0, \pi]$ for cosinus.

De omvendte ser så således ud:

$$s = \arcsin y \quad \text{for} \quad -1 \leq y \leq 1.$$



$$s = \arccos x \quad \text{for } -1 \leq x \leq 1$$



Nu er s jo buelængden på cirklen, som har funktionsfremstillingen

$$x = \sqrt{1-y^2} \quad \text{for } -1 \leq y \leq 1 \quad \text{og} \quad -\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Så buelængden bliver

$$s = \arcsin y_0 = \int_0^{y_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy,$$

idet $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}(1-y^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2y) = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$

Heraf ses, at $\arcsin y$ er differentiabel med afledet

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{for } -1 < y < 1.$$

Den omvendte har altså differentialkvotient

$$\sin' s = \sqrt{1-\sin^2 s} = \cos s \quad \text{for } -\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2}.$$

Men man kunne også sætte

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{for } -1 \leq x \leq 1 \quad \text{og} \quad 0 \leq s \leq \pi.$$

Buelængden bliver da

$$s = \arccos x_0 = \int_{x_0}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_0}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

Heraf ses, at $\arccos$ er differentiable med afledet

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{for } -1 < x < 1 .$$

Den omvendte har altså differentialkvotient

$$\cos' s = -\sqrt{1-\cos^2 s} = -\sin s \quad \text{for } 0 < s < \pi .$$

Ønsker vi at bestemme $\cos' 0$, kan vi bruge l'Hôpitals regel. Funktionerne $\cos s - 1$ og s er begge 0 i 0 og differentiable for $s \neq 0$ og kontinuerte i 0. Så er

$$\cos' 0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\cos s - 1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin s}{1} = \sin 0 = 0 .$$

Når vi differentierer $\cos$ og $\sin$ får vi en periode på 4. Taylorrækken for $\cos$ er derfor, idet

$$\cos' 0 = -\sin 0 = 0$$

$$\cos'' 0 = -\cos 0 = -1$$

$$\cos''' 0 = \sin 0 = 0$$

$$\cos^{(4)} 0 = \cos 0 = 1$$

$$\cos s \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} s^{2n} = c(s) = \operatorname{Re}(e^{is}) .$$

Taylors formel har restleddet

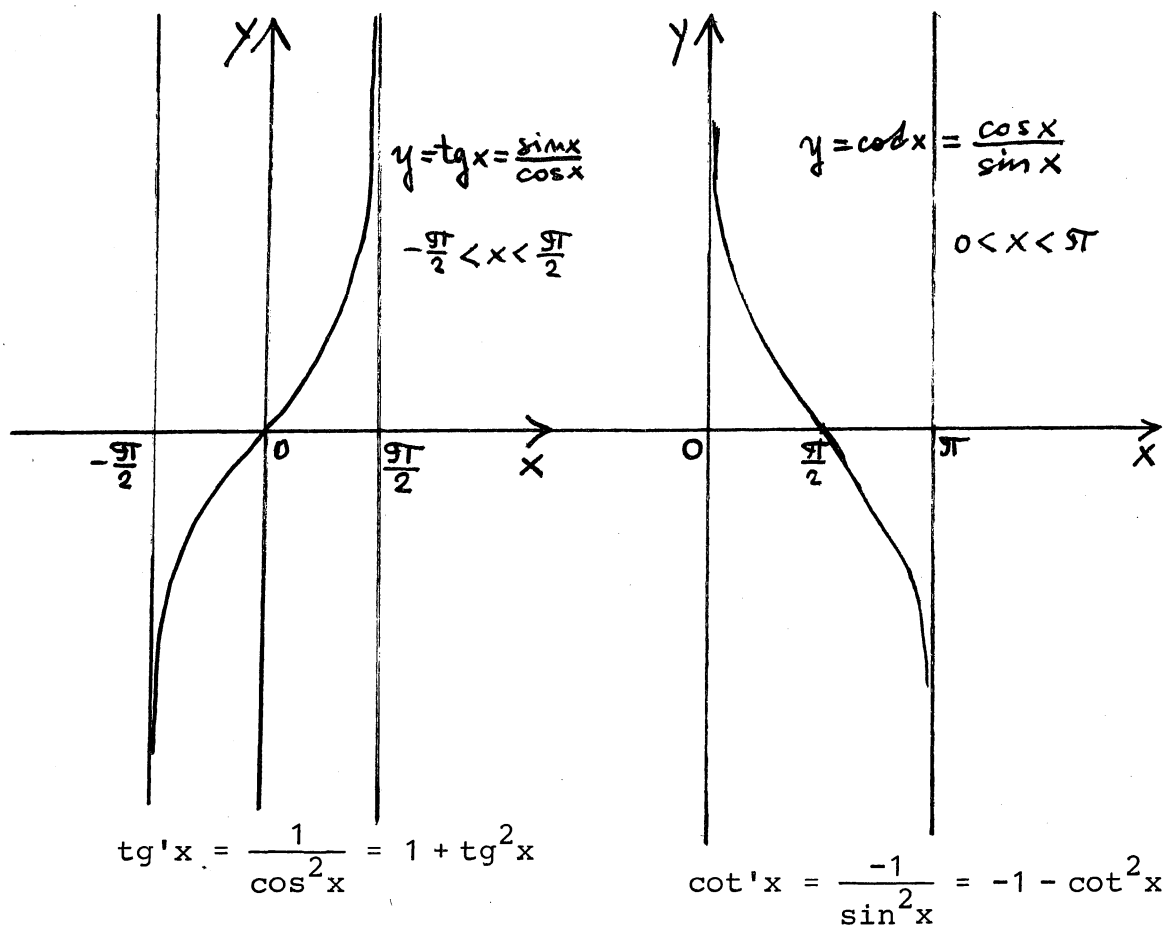
$$R_n(s) = \frac{1}{n!} \int_0^s \cos^{(n+1)}(t) (s-t)^n dt .$$

Nu er $\cos^{(n+1)}(t)$ på nær fortegnet $\cos$ eller $\sin$, derfor er

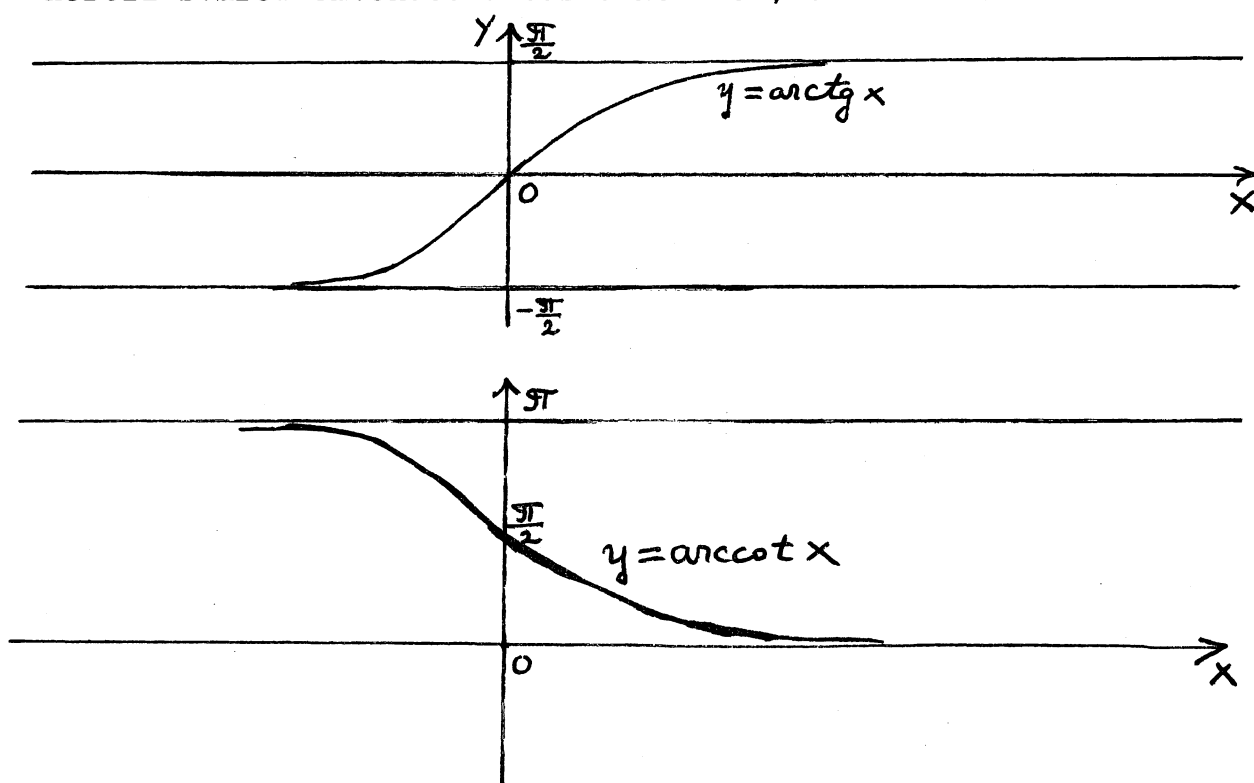
$$|\cos^{(n+1)}(t)| \leq 1 \quad \text{for alle } t .$$

Altså gælder

Også tangens og cotangens har monotoniintervaller,



Hertil svarer omvendte arcusfunktioner, som defineres for alle x :



For $y = \operatorname{arctg} x$ er $x = \operatorname{tgy}$, så

$$\frac{dx}{dy} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

Altså
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Og af $y = \operatorname{arccot} x$, $x = \cot y$, $\frac{dx}{dy} = -1 - \cot^2 y = -1 - x^2$ fås

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arctg}' x + \operatorname{arccot}' x = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Altså er funktionen konstant

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccot} x = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Det vigtigste er, at vi har fået en stamfunktion til

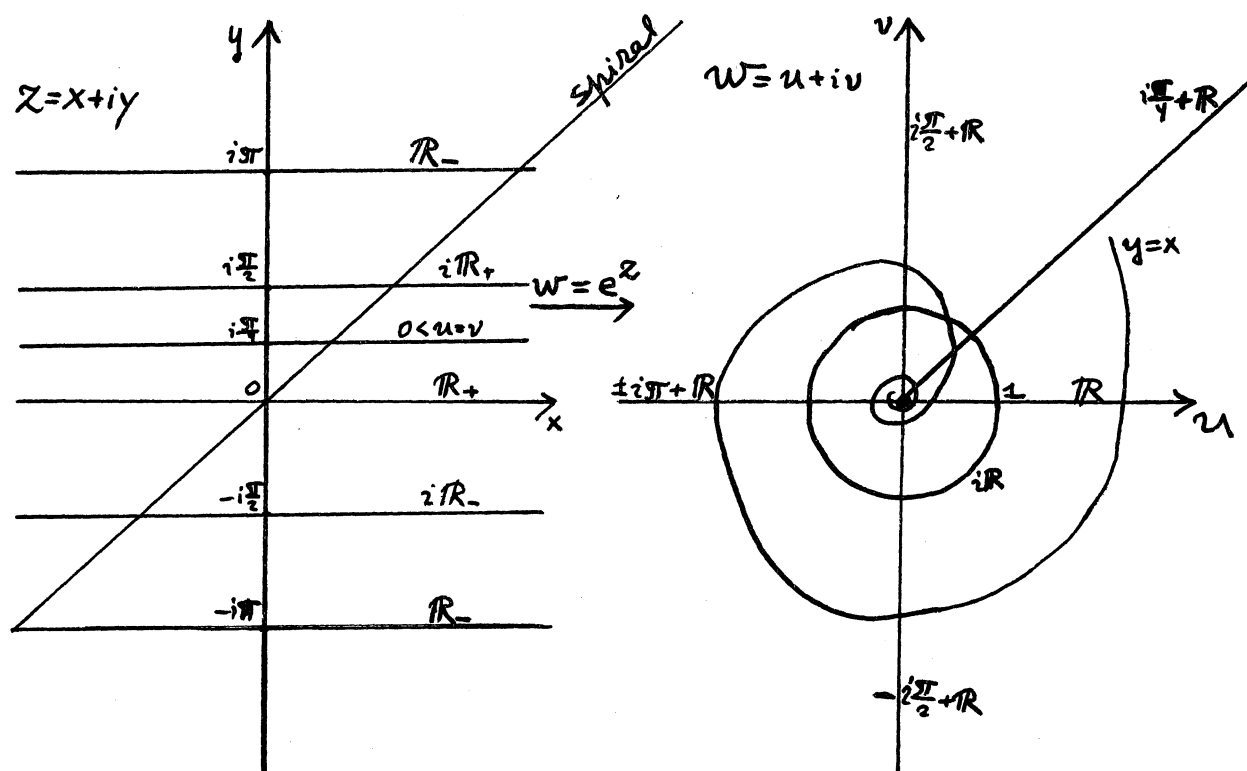
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx \sim \operatorname{arctg} x \sim -\operatorname{arccot} x.$$

Vi kan nu nærmere beskrive eksponentialfunktionen

$$e^z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Funktionen antager alle værdier, undtagen 0. Enhver strimmel af formen $\{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}, y \in [a, a+2\pi[\}$ afbildes bijektivt på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{R}$ afbildes på $\mathbb{R}_+$, så $-\infty$ svarer til 0, mens en linie parallel med $\mathbb{R}$, f.eks. $\{x + ia \mid x \in \mathbb{R}\}$ afbildes i en halvlinje ud fra 0. Specielt afbildes $\mathbb{R} + i\pi = \{x + i\pi \mid x \in \mathbb{R}\}$ på $\mathbb{R}_-$. En linie $a + i\mathbb{R}$ afbildes på en cirkel med radius e^a .



Vi kan definere en omvendt funktion, som kan vælges kontinuert, når vi ser bort fra f.eks. $\mathbb{R}_-$. Den kaldes *den komplekse logaritme*, $\ln w$, og er defineret ved

$$z = \ln_{\mathbb{C}} w, \text{ hvis } w = e^z \text{ og } z = x + iy, \quad |y| < \pi.$$

Vi kan løse ligningen for $w \neq 0$, $w \notin \mathbb{R}_-$

$$w = u + iv = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Ved

$$e^x = |w| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

så

$$x = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$$

og

$$e^{iy} = \frac{w}{|w|} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} + i \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

altså

$$\cos y = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\sin y = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Men lettere, da $v = 0 \Rightarrow u \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow y = 0$, at ellers er

$$\cot y = \frac{u}{v}$$

så
$$y = \frac{v}{|v|} \operatorname{arccot} \frac{u}{v} .$$

Man ser dog tit den anden løsning

$$\operatorname{tg} y = \frac{v}{u} \quad \text{for } u \neq 0$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{v}{u} \quad \text{for } u > 0$$

men
$$y = \operatorname{arctg} \frac{v}{u} + \pi \quad \text{for } u < 0 \text{ og } v > 0$$

og
$$y = \operatorname{arctg} \frac{v}{u} - \pi \quad \text{for } u < 0 \text{ og } v < 0 .$$

Konklusioner: Den komplekse logaritme er

$$\ln_{\mathbb{C}}(u+iv) = \ln_{\mathbb{R}} \sqrt{u^2+v^2} + i \frac{v}{|v|} \operatorname{arccot} \frac{u}{v}$$

og
$$\ln_{\mathbb{C}}(u+iv) = \ln_{\mathbb{R}} \sqrt{u^2+v^2} + i \operatorname{arctg} \frac{v}{u} (\pm i\pi) .$$

For $v = 0$ har vi forlangt $u > 0$, så

$$\ln_{\mathbb{C}} u = \ln_{\mathbb{R}} \sqrt{u^2} = \ln_{\mathbb{R}} |u| = \ln_{\mathbb{R}} u .$$

Vi kan derfor stryge $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$, vi skriver blot

$$\ln w = \ln_{\mathbb{C}} w \quad \text{for } w \in \mathbb{C} \setminus \{x+i0 \mid x \leq 0\} .$$

De hyperbolske funktioner og areafunktionerne.

De trigonometriske funktioner $\cos$ og $\sin$ gav en parameterfremstilling af cirklen med buelængden som parameter. Vi kunne ønske os en analog parameterfremstilling af hyperblen $x^2 - y^2 = 1$ med en passende parameter. Vi ønsker to pæne funktioner,

$$x = \cosh t, \quad y = \sinh t$$

som for $t \in \mathbb{R}$ gennemløber alle talpar, der opfylder

$$x^2 - y^2 = 1 .$$

Inspireret af Eulers formler foreslås

$$\begin{aligned}\cosh t &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ \sinh t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2}\end{aligned}$$

som viser sig at opfylde ligningen:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t} + 2 - e^{2t} - e^{-2t} + 2) = 1.$$

Disse funktioner er overordentlig analoge til $\cos$ og $\sin$.

F.eks.

$$\begin{aligned}\cosh^2 t + \sinh^2 t &= \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t} + 2 + e^{2t} + e^{-2t} - 2) \\ &= \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \cosh 2t\end{aligned}$$

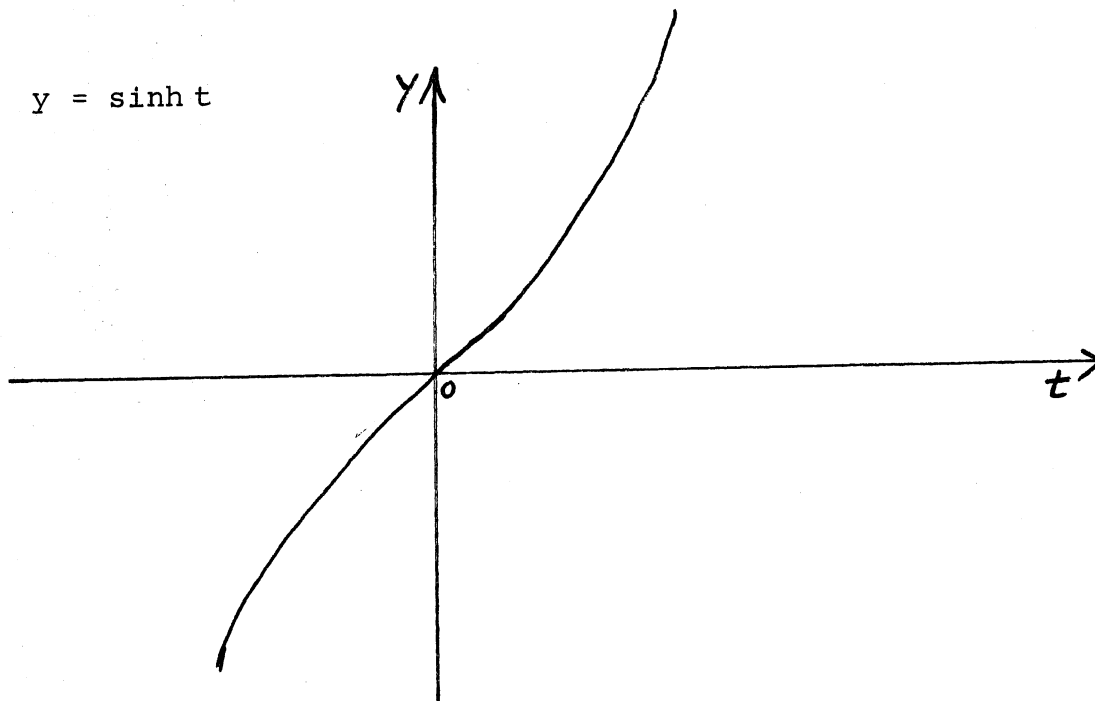
og $2 \cosh t \sinh t = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t}) = \sinh 2t$

og $\cosh' t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$

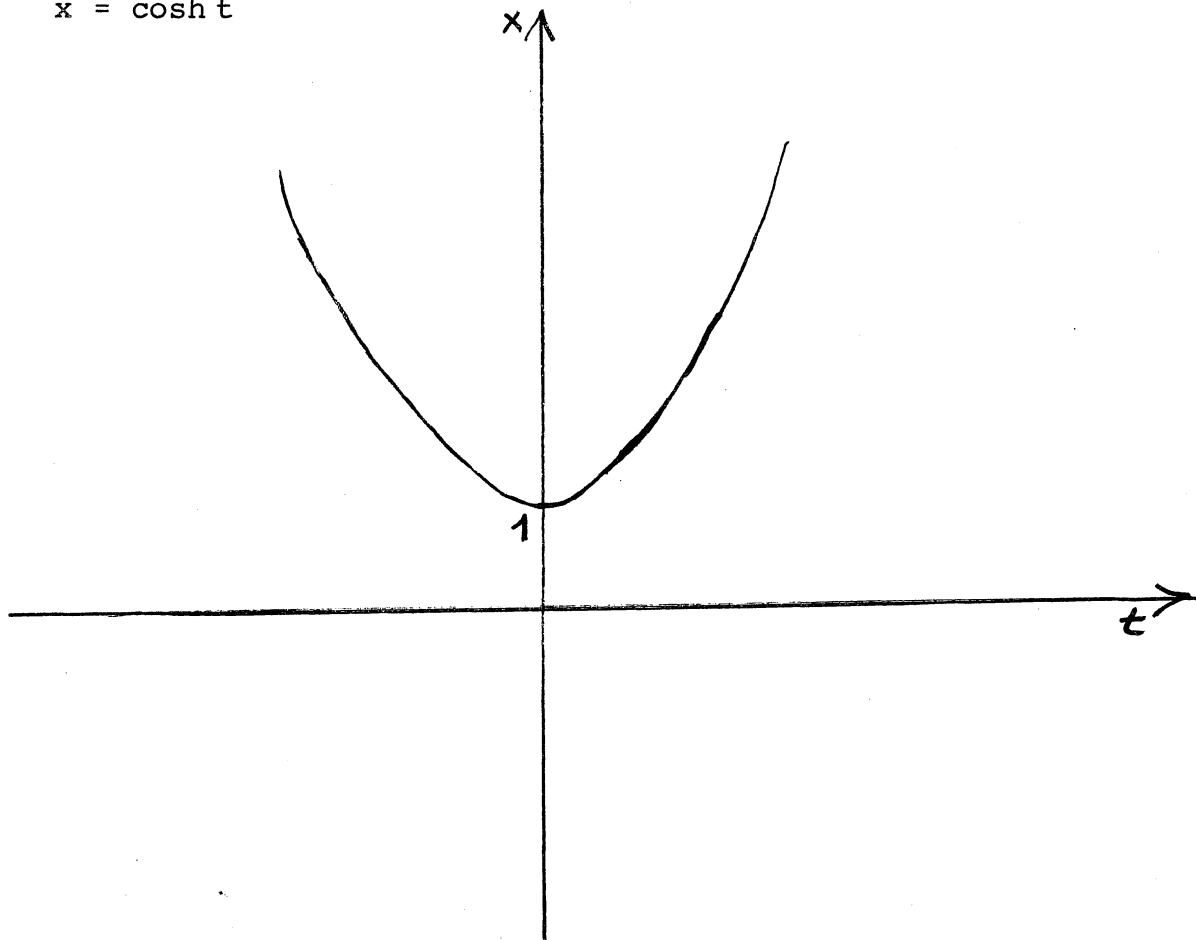
$$\sinh' t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t.$$

De ser således ud:

$$y = \sinh t$$

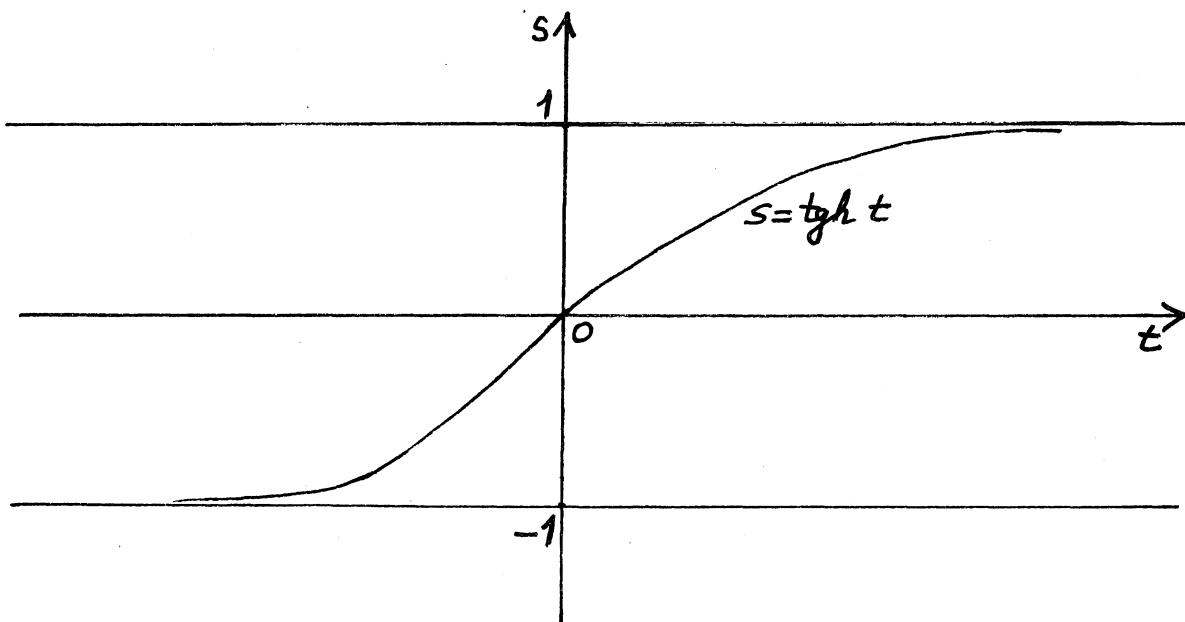


$$x = \cosh t$$



Man indfører også

$$s = \tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}$$



Vi kan differentiere

$$\frac{ds}{dt} = \text{tgh}'t = \frac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\cosh^2 t} = 1 - \text{tgh}^2 t = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Også disse funktioner har omvendte, som kaldes *areafunktioner*.

Vi definerer

$$t = \text{arsinh } y \Leftrightarrow y = \sinh t \quad \text{for alle } y \text{ og } t$$

$$t = \text{arcosh } x \Leftrightarrow x = \cosh t \quad \text{for } t \geq 0 \text{ og } x \geq 1.$$

$$t = \text{artgh } s \Leftrightarrow s = \text{tgh } t \quad \text{for } -1 < s < 1.$$

Ligningen

$$y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

løses sammen med

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

idet

$$x + y = e^t$$

$$x - y = e^{-t}$$

så

$$t = \ln(x+y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Altså

$$\text{arsinh } y = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \quad \text{for alle } y$$

$$\text{arcosh } y = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad \text{for } x > 1.$$

Ligningen

$$s = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}$$

skrives om til

$$s + se^{-2t} = 1 - e^{-2t}$$

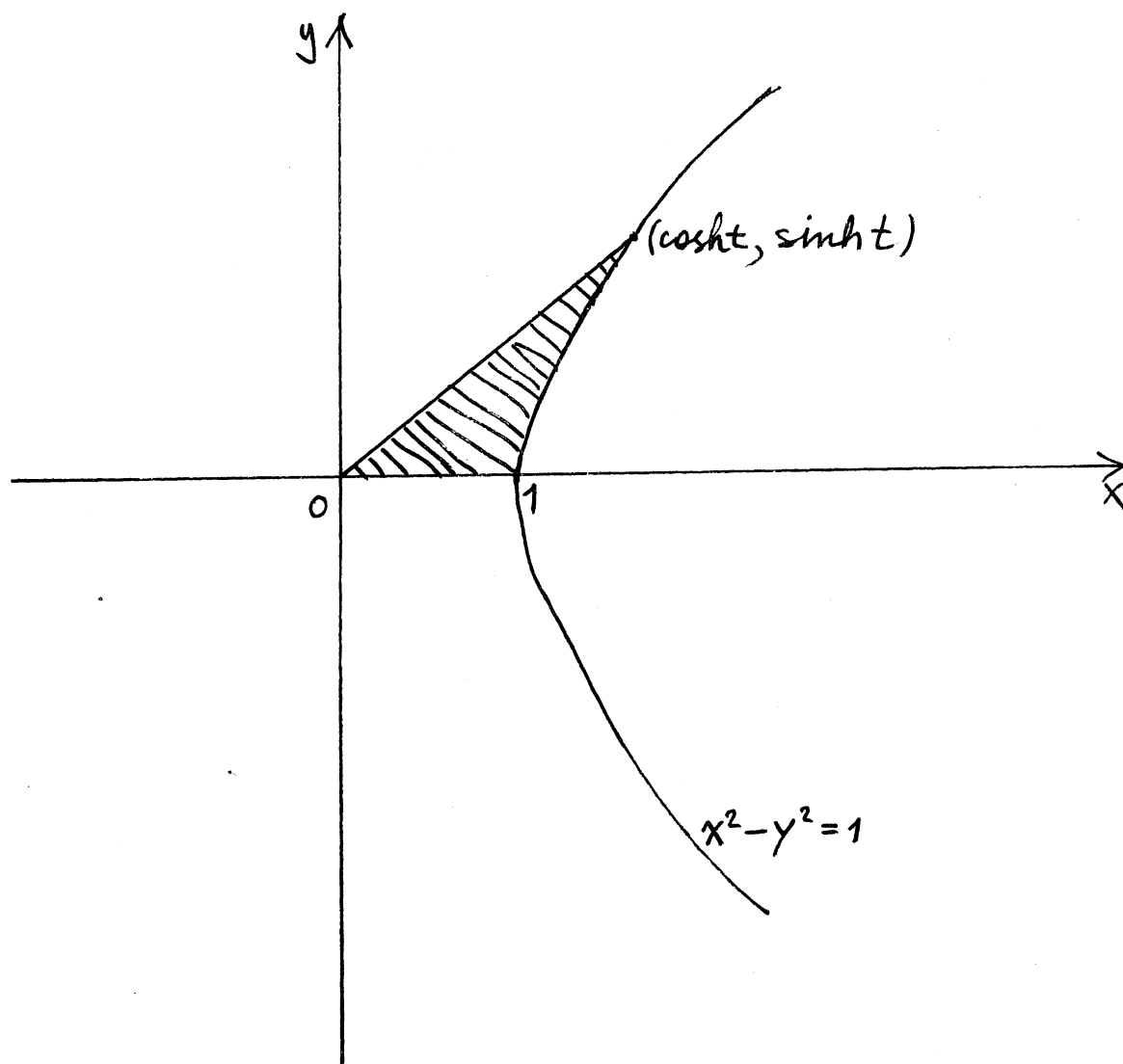
$$e^{-2t} = \frac{1-s}{1+s}$$

$$t = -\frac{1}{2} \ln \frac{1-s}{1+s} = \ln \sqrt{\frac{1+s}{1-s}}.$$

Altså

$$\text{artgh } s = \ln \sqrt{\frac{1+s}{1-s}} \quad \text{for } -1 < s < 1.$$

Funktionerne kaldes area-funktioner, fordi arealet af figuren nedenfor er $\frac{1}{2}t$.



§7. Differentialligninger af første orden.

Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = iy$$

løses som homogen ligning af

$$\lambda e^{\int i dx} = \lambda e^{ix}.$$

Et par af differentialligningerne af formen

$$(1) \quad (D^1 - aD^0)\varphi = \psi,$$

hvor ψ løser ligningen

$$(2) \quad (D^1 - bD^0)\psi = c,$$

løses sukcessivt. Først findes samtlige løsninger ψ til (2), derefter for hver af dem samtlige løsninger til (1).

Man har så fundet løsningerne φ til ligningen af anden orden

$$(3) \quad (D^1 - bD^0)((D^1 - aD^0)\varphi) = c$$

eller

$$(4) \quad (D^2 - (a+b)D^1 + (ab - a')D^0)\varphi = c.$$

Vi kan altså med hjælpemidlerne til første ordens ligninger løse anden ordens ligninger på formen (3).

Har vi f.eks. en anden ordens ligning med konstante koefficienter, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$

$$(5) \quad (D^2 - \alpha D^1 + \beta D^0)\varphi = c(x)$$

kan ligningen (5) skrives på formen (4) med konstanter a og b (hvorved $a' = 0$), som opfylder

$$a + b = \alpha, \quad ab = \beta.$$

Med andre ord, a og b er rødderne i 2. gradspolynomiet

$$(6) \quad x^2 - \alpha x + \beta.$$

Bemærk, at polynomiet (6) er dannet af ligningen (5) ved substitution af " x " for " D ". Et sådant polynomium kaldes et

karakterpolynomium af differentiaalligningen.

Vi kan altså i dette tilfælde uden videre spalte operatoren på formen (3) med $a, b \in \mathbb{C}$. Herefter fås løsningen som først

$$\psi(x) = e^{bx} \int c(x) e^{-bx} dx + \lambda e^{bx}$$

siden

$$\varphi(x) = e^{ax} \int \psi(x) e^{-ax} dx + \mu e^{ax}.$$

Nu er

$$\begin{aligned} \int \psi(x) e^{-ax} dx &= \int e^{bx} e^{-ax} \int c(x) e^{-bx} dx + \lambda \int e^{bx} e^{-ax} dx \\ &= \int e^{(b-a)x} \int c(x) e^{-bx} dx + \lambda \frac{1}{b-a} e^{(b-a)x} \\ &= \frac{e^{(b-a)x}}{b-a} \int c(x) e^{-bx} dx - \frac{1}{b-a} \int e^{(b-a)x} c(x) e^{-bx} dx \\ &\quad + \frac{\lambda}{b-a} e^{(b-a)x} \\ &= \frac{e^{(b-a)x}}{b-a} \int c(x) e^{-bx} dx - \frac{1}{b-a} \int c(x) e^{-ax} dx + \frac{\lambda}{b-a} e^{(b-a)x}. \end{aligned}$$

Derfor findes

$$\varphi(x) = \frac{e^{bx}}{b-a} \int c(x) e^{-bx} dx - \frac{e^{ax}}{b-a} \int c(x) e^{-ax} dx + \frac{\lambda}{b-a} e^{bx} + \mu e^{ax}.$$

Vi finder altså, at den homogene ligning har løsning på formen

$$\lambda e^{bx} + \mu e^{ax}$$

når $a \neq b$. Den inhomogene har en løsning

$$\frac{e^{bx}}{b-a} \int c(x) e^{-bx} dx + \frac{e^{ax}}{a-b} \int c(x) e^{-ax} dx$$

når $a \neq b$.

Hvis $a = b$, finder vi tilsvarende

$$\begin{aligned}
 \int \psi(x) e^{-ax} dx &= \int e^{ax} e^{-ax} \int c(x) e^{-ax} dx + \lambda \int e^{ax} e^{-ax} dx \\
 &= \int \left(\int c(x) e^{-ax} dx \right) dx + \lambda x \\
 &= x \int c(x) e^{-ax} dx - \int x c(x) e^{-ax} dx + \lambda x .
 \end{aligned}$$

Så løsningen bliver

$$\varphi(x) = x e^{ax} \int c(x) e^{-ax} dx - e^{ax} \int c(x) x e^{-ax} dx + \lambda x e^{ax} + \mu e^{ax} .$$

Den homogene ligning har i dette tilfælde løsningen

$$\lambda x e^{ax} + \mu e^{ax} .$$

Den inhomogene har en løsning

$$x e^{ax} \int c(x) e^{-ax} dx - e^{ax} \int c(x) x e^{-ax} dx .$$

Betragt ligningen

$$(D^2 + D^0)\varphi = \sin x .$$

Karakterpolynomiet er

$$x^2 + 1 ,$$

som har rødderne i og $-i$. Den homogene ligning har derfor løsningerne

$$e^{ix} \text{ og } e^{-ix} .$$

Ønsker vi reelle løsninger, kan vi jo danne kombinationen

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

og

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} .$$

Den inhomogene har løsningen

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{ix}}{2i} \int \sin x e^{-ix} dx - \frac{e^{-ix}}{2i} \int \sin x e^{ix} dx \\
&= \frac{e^{ix}}{2i} \int \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} e^{-ix} dx - \frac{e^{-ix}}{2i} \int \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} e^{ix} dx \\
&= \frac{e^{ix}}{-4} \int (1 - e^{-i2x}) dx + \frac{e^{-ix}}{4} \int (e^{i2x} - 1) dx \\
&= -\frac{xe^{ix}}{4} + \frac{e^{ix}}{4} \cdot \frac{e^{-i2x}}{-2i} + \frac{e^{-ix}}{4} \cdot \frac{e^{i2x}}{2i} - \frac{xe^{-ix}}{4} \\
&= \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{2} x \cos x .
\end{aligned}$$

Men da $\sin x$ løser den homogene, kan vi nøjes med

$$-\frac{1}{2} x \cos x .$$

En prøve viser, at det passer.

Man kan dog også gætte sig frem med lidt øvelse.

Hvis operatoren i (5) har variable koefficienter

$$(5) \quad (D^2 - \alpha D^1 + \beta D^0) \varphi = c(x) ,$$

hvor $\alpha(x)$ og $\beta(x)$ er kontinuerte funktioner, så har ligningen

(6) ikke nogen effektiv løsningsmetode. De to ligninger

$$a + b = \alpha$$

$$ab - a' = \beta$$

giver jo ligningen i a

$$(7) \quad a' = -a^2 + \alpha a - \beta$$

som ikke uden videre kan løses.

Men sæt, at vi har fundet - evt. gættet - én løsning til den tilsvarende homogene ligning, altså $\varphi(x) \neq 0$ så

$$\varphi'' - \alpha \varphi' + \beta \varphi = 0 .$$

Så kan vi løse (6) fuldstændig.

Tricket kaldes *de arbitrære konstanter variationsmetode* og består i at gøre prøve med funktion

$$\varphi\psi,$$

hvor ψ repræsenterer den "arbitrære konstant", der er "varieret" til en funktion. Vi finder ved prøven

$$(\varphi\psi)'' - \alpha(\varphi\psi)' + \beta(\varphi\psi) = c$$

udregnet

$$\varphi''\psi + 2\varphi'\psi' + \varphi\psi'' - \alpha\varphi'\psi - \alpha\varphi\psi' + \beta\varphi\psi = c$$

ordnet efter ψ

$$\varphi\psi'' + (2\varphi' - \alpha\varphi)\psi' + (\varphi'' - \alpha\varphi' + \beta\varphi)\psi = c.$$

Men her er koefficienter til ψ åbenbart 0, så

$$(8) \quad \varphi\psi'' + (2\varphi' - \alpha\varphi)\psi' = c.$$

Funktionen ψ' må altså løse ligningen

$$(9) \quad (D^1 + (2\frac{\varphi'}{\varphi} - \alpha)D^0)\psi' = \frac{c}{\varphi}.$$

Denne ligning løses ved kendte formler, og løsning integreres og ganges med φ .

Bemærk, at operatoren spaltes i

$$(D^1 - (\alpha - \frac{\varphi'}{\varphi})D^0) \circ (D^1 - \frac{\varphi'}{\varphi}D^0)$$

idet vi umiddelbart finder

$$\begin{aligned} D^2 - \alpha D^1 + \left(\alpha \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} - \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2 - \frac{\varphi\varphi'' - \varphi'^2}{\varphi^2} \right) D^0 &= D^2 - \alpha D^1 + \left(\alpha \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\varphi''}{\varphi} \right) D^0 \\ &= D^2 - \alpha D^1 + \beta D^0 \end{aligned}$$

idet jo $\varphi'' - \alpha\varphi' + \beta\varphi = 0$.

§8. Integraler i $\mathbb{R}^n$.

1.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx .$$

Vi definerer

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ 0 & 0 \leq x < \frac{1}{n} \end{cases} .$$

Da vil $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ for alle $x \in]0,1]$, og følgen er voksende.

Altså er ifølge Sætning I, 8, 14

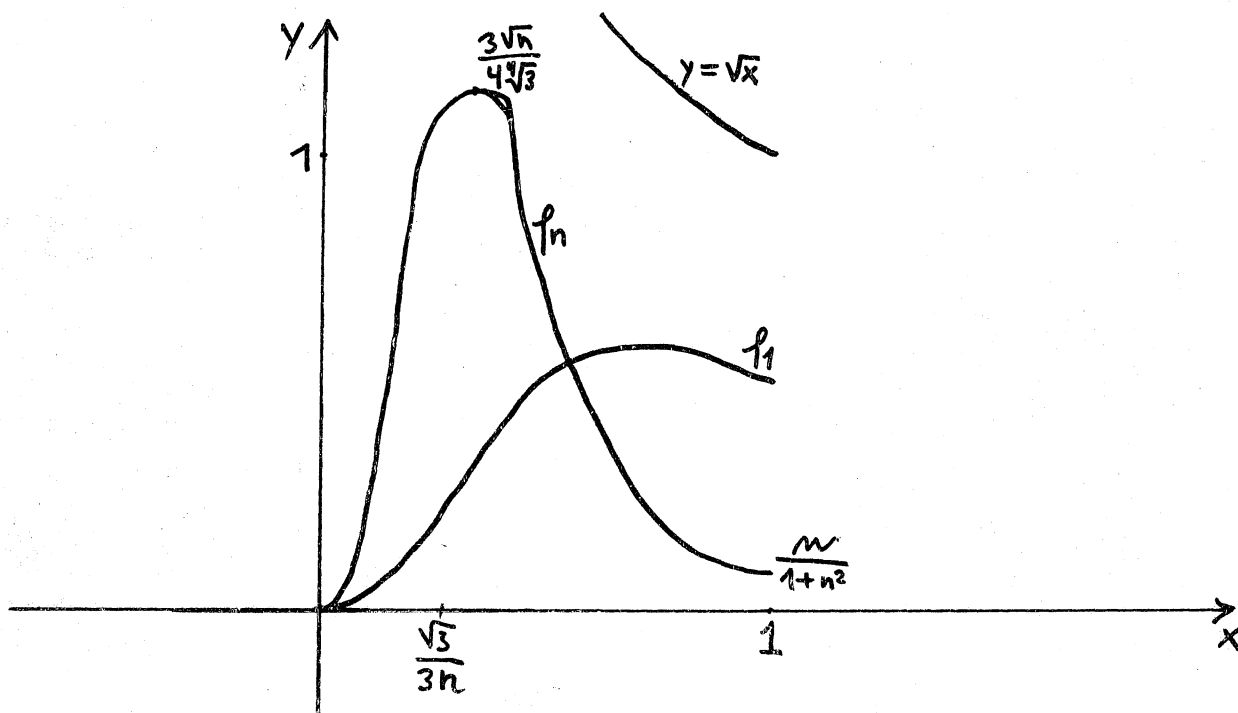
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_{1/n}^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - 2\sqrt{\frac{1}{n}}) = 2 . \end{aligned}$$

2.

Følgen

$$\left(\int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} dx \right) .$$

Funktionerne ser således ud:



Funktionsfølgen er ubegrænset, da toppunktet $\frac{3\sqrt{n}}{4\sqrt{3}} \rightarrow \infty$ for $n \rightarrow \infty$, men funktionsfølgen er majoriseret af $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, fordi

$$\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1.$$

(Det er $2nx \leq 1+n^2x^2$, og det er jo

$$n^2x^2 - 2nx + 1 = (nx-1)^2 \geq 0).$$

Sætningen om majoriseret konvergens, I, 8, 15, siger nu, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

3. Vi har jo

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{for } |x| < 1.$$

Betragter vi $x > 0$, så er grænseovergangen jo monoton. Altså fås af Sætning I, 8, 14 at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x)$$

hvor jo

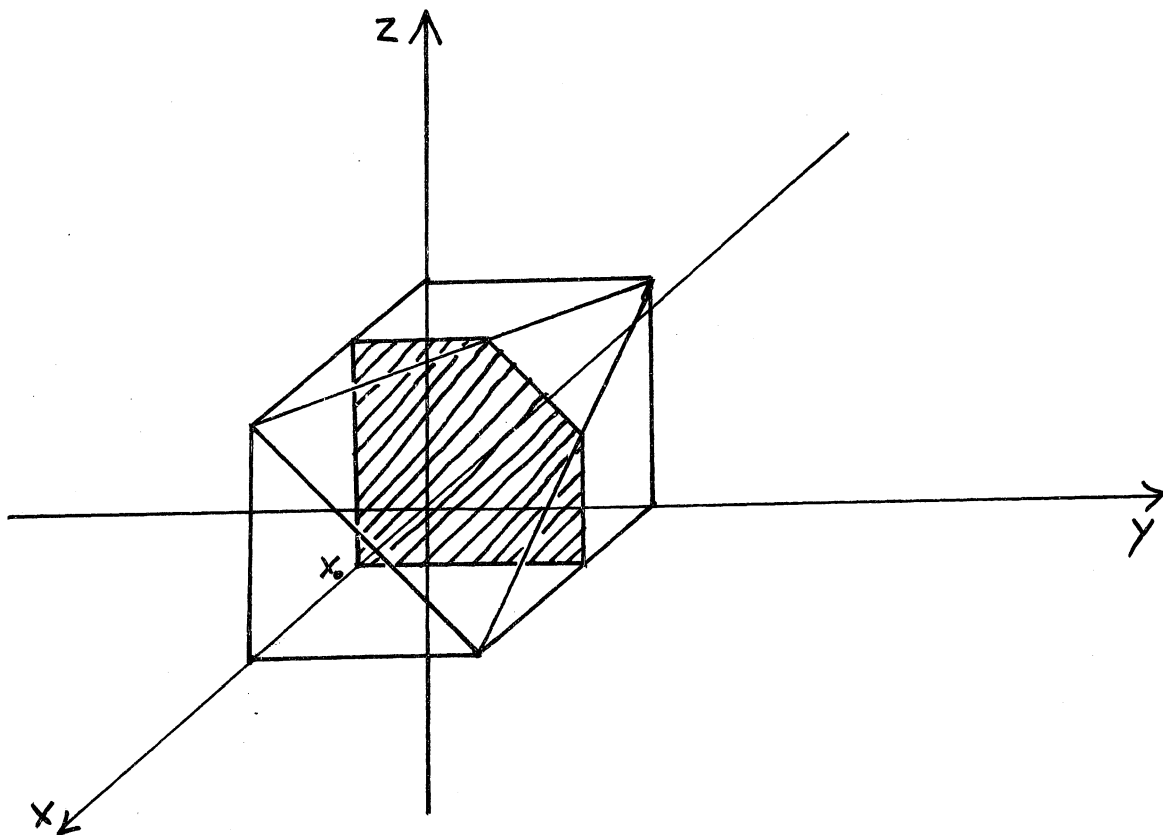
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-x)^n.$$

For $x < 0$ benyttes sætningen om majoriseret konvergens, idet ovenstående med $|x|$ majoriserer.

Vi slap for restledsvurderingen!

4. Lad F være en klods dannet af en terning ved afskæring af et hjørne ved et snit gennem de 3 nabohjørner

$$F = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1 \wedge x+y+z \leq 2\}$$

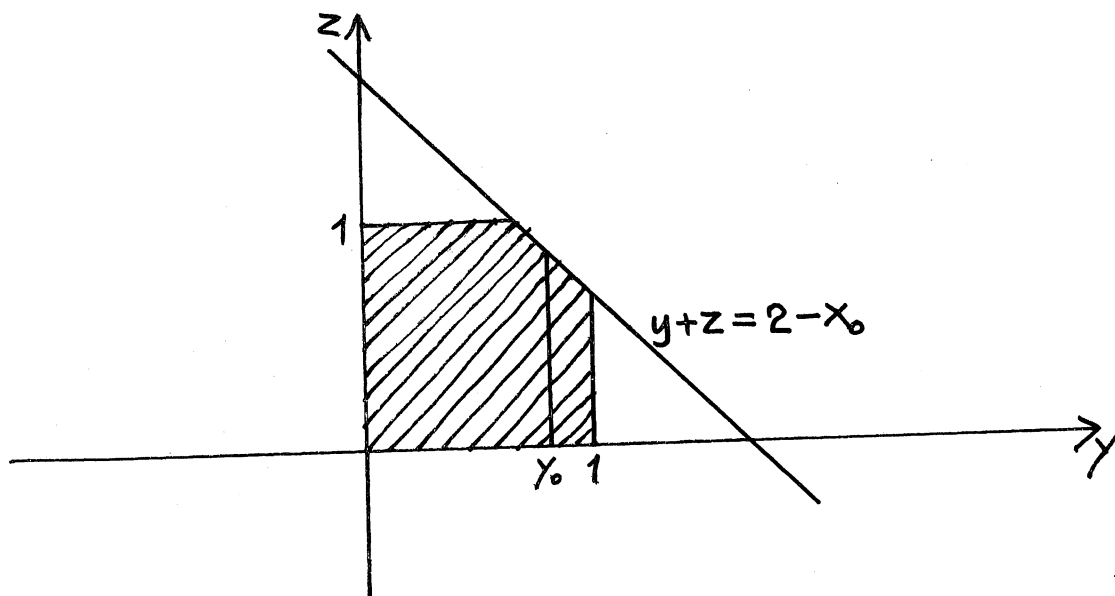


Lad $f(x, y, z)$ være en kontinuert funktion defineret på F . Udregn

$$\int_F f(x, y, z) dx dy dz .$$

Vi skal anvende Fubinis Sætning I, 8, 16.

For et fast valgt x_0 danner planen $x = x_0$ et snit i F :



Snitlinien er $y + z = 2 - x_0$.

Uden for denne figur, er $f = 0$. Vi betegner figuren F_{x_0} .
 I F_{x_0} danner linien $y = y_0$ et snit af højde enten 1
 eller $2 - x_0 - y_0$, den mindste af de to, skrevet

$$1 \wedge (2 - x_0 - y_0) .$$

Vi kan derfor skrive integralet som

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1 \wedge 2-s-t} f(s, t, z) dz dt ds .$$

Er specielt $f(s, t, z) = s^2$, fås

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1 \wedge 2-s-t} s^2 dz dt ds &= \int_0^1 s^2 \int_0^1 (1 \wedge 2-s-t) dt ds \\ &= \int_0^1 s^2 \left(\int_0^{1-s} 1 dt + \int_{1-s}^1 (2-s-t) dt \right) ds \\ &= \int_0^1 s^2 \left(1-s + \left[-\frac{(2-s-t)^2}{2} \right]_{1-s}^1 \right) ds \\ &= \int_0^1 \left(s^2(1-s) + s^2 \left(-\frac{(1-s)^2}{2} + \frac{1}{2} \right) \right) ds \\ &= \int_0^1 \left(s^2 - s^3 + \frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{2} + s^3 \right) ds \\ &= \int_0^1 \left(s^2 - \frac{s^4}{2} \right) ds = \left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \underline{\underline{\frac{7}{30}}} . \end{aligned}$$

Er derimod $f(s, t, z) = st$, fås

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1 \wedge 2-s-t} st dz dt ds &= \int_0^1 s \int_0^1 t (1 \wedge 2-s-t) dt ds \\ &= \int_0^1 s \left(\int_0^{1-s} t dt + \int_{1-s}^1 t (2-s-t) dt \right) ds = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 s \left(\frac{(1-s)^2}{2} + (2-s) \left(\frac{1}{2} - \frac{(1-s)^2}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{(1-s)^3}{3} \right) \right) ds$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{2} + \frac{s^4}{6} \right) ds = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{30} = \underline{\underline{\frac{19}{120}}} \quad .$$

§9. Vektorrum og lineære funktioner.

Mængden af konvergente (tal)følger er et vektorrum, og $\lim_{n \rightarrow \infty}$ er en lineær funktion.

Mængden af konvergente rækker er et underrum af kernen for $\lim_{n \rightarrow \infty}$, og Σ er en lineær funktion.

Mængden af polynomier er et ∞ -dimensionalt vektorrum P , og mængden af polynomier af grad $\leq n$ er et $(n+1)$ -dimensionalt under-
rum P_n med en basis bestående af $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Lad a være et tal. Funktionen $p(x) \rightarrow p(a)$ er en lineær funktion af P_n ind i $\mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Er $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ forskellige tal, så er

$$f: p(x) \rightarrow (p(a_0), \dots, p(a_n))$$

en lineær funktion $f: P_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. I basen ovenfor beskrives f med matricen

$$\underline{V}_n = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Vi har set i Kap. III, §3, at f er surjektiv, idet interpolation netop er konstruktion af en invers til f . Dvs. at rangen af matricen $\underline{V}_n$ er $n+1$, når $a_0, a_1, \dots, a_n$ er forskellige.

Lagrange-polynomierne er en anden basis for P_n , nemlig $f^{-1}((0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))$. Matricen $\underline{V}_n$ er derfor koordinat-transformationsmatricen mellem de to baser. Er et polynomium $p(x)$ givet som $\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ med koordinaterne $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i basen $(1, x, \dots, x^n)$, så vil polynomiet i Lagrange-polynomierne få koordinaterne

$$\underline{V}_n \underline{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} p(a_0) \\ \vdots \\ p(a_n) \end{pmatrix}.$$

altså blive

$$p(a_0)L_0(x) + \dots + p(a_n)L_n(x)$$

som ventet.

Lad et vektorrum V være direkte sum af to underrum U_1 og U_2 . Dvs. $V = U_1 \oplus U_2$, hvor jo $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Da kan enhver vektor $v \in V$ på entydig måde skrives

$$v = u_1 + u_2, \quad \text{hvor } u_1 \in U_1, u_2 \in U_2.$$

Thi, er

$$v = u_1 + u_2 = \hat{u}_1 + \hat{u}_2, \quad \text{hvor } u_1, \hat{u}_1 \in U_1, u_2, \hat{u}_2 \in U_2,$$

så gælder

$$u_1 - \hat{u}_1 = \hat{u}_2 - u_2 \in U_1 \cap U_2 = \{0\}.$$

I $\mathbb{R}^3$ så vi, at vi kunne løse ethvert ligningssystem

$$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \underline{x}_1 = \underline{y}_1$$

i $\underline{x}_1$, når blot rumproduktet

$$[a, b, c] = a \cdot b \times c \neq 0.$$

For at finde den inverse matrix skal vi løse de tre ligningssystemer

$$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \underline{x}_i = \underline{e}_i, \quad \underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{1. tal på i'te plads.}$$

Af

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = e_1$$

fås

$$a \cdot b \times c \cdot x_1 + 0 + 0 = e_1 \cdot b \times c = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Med andre ord:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{[a,b,c]} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_3 & a_3 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Man kan gange sammen og se, at det passer.

Lad os finde den inverse til

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 \\ 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Vi bestemmer først rumproduktet. Lad nu $p(x)$ være polynomiet

$$p(x) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ a_1^2 \\ a_2^2 \end{pmatrix} \right],$$

som åbenbart er et polynomium af x af 2. grad. Altså, da p har nulpunkterne a_1 og a_2 , må

$$p(x) = \alpha(x-a_1)(x-a_2).$$

Sættes $x = 0$, fås for $a_1 \neq 0 \neq a_2$, at

$$p(0) = a_1 a_2^2 - a_2 a_1^2 = \alpha a_1 a_2,$$

altså

$$\alpha = a_2 - a_1$$

og derfor

$$p(a_0) = (a_2 - a_1)(a_0 - a_1)(a_0 - a_2).$$

Formlen for den inverse giver direkte

$$\underline{V}_3^{-1} = \frac{1}{(a_2 - a_1)(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} \begin{pmatrix} a_1 a_2 (a_2 - a_1) & -a_0 a_2 (a_2 - a_0) & a_0 a_1 (a_1 - a_0) \\ -(a_1 + a_2)(a_2 - a_1) & (a_0 + a_2)(a_2 - a_0) & -(a_0 + a_1)(a_1 - a_0) \\ a_0 - a_1 & -(a_2 - a_0) & a_1 - a_0 \end{pmatrix}$$

Det vil sige, at er der givet tre punkter, (a_0, b_0) , (a_1, b_1) og (a_2, b_2) , og søger vi et polynomium af højst 2. grad gennem dem, kan løsningen

$$b_0 L_0(x) + b_1 L_1(x) + b_2 L_2(x)$$

transformeres til basen $1, x, x^2$ ved $\underline{V}_3^{-1}$, altså polynomiet er

$$(1 \ x \ x^2) \underline{V}_3^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

I §IV, 6 bestemte vi et polynomium gennem $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$, $(1, f(1))$. Vi fandt

$$f(0) + x \frac{f(1) - f(-1)}{2} + x^2 \left(\frac{f(1) + f(-1)}{2} - f(0) \right).$$

Med $a_0 = -1$, $a_1 = 0$ og $a_2 = 1$ fås

$$\underline{V}_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hvoraft polynomiet fås

$$(1 \ x \ x^2) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} = (1 \ x \ x^2) \begin{pmatrix} f(0) \\ \frac{f(1) - f(-1)}{2} \\ \frac{f(1) + f(-1)}{2} - f(0) \end{pmatrix}$$

$$= f(0) + \frac{f(1) - f(-1)}{2} x + \left(\frac{f(1) + f(-1)}{2} - f(0) \right) x^2.$$

§10. Determinanter.Invers matrix.

Formlen i Sætning I,10,2 er næsten nok:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det \underline{\underline{A}}^{(i,j)} = \det \underline{\underline{A}}.$$

Definerer vi en matrix $\underline{\underline{B}}$ ved

$$b_{ji} = (-1)^{i+j} \det \underline{\underline{A}}^{(i,j)},$$

gælder for diagonalen i produktet $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$, at

$$c_{jj} = \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \det \underline{\underline{A}}^{(i,j)} a_{ij} = \det \underline{\underline{A}}.$$

Men hvad nu med c_{jk} , hvor $j \neq k$? Nu er

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \det \underline{\underline{A}}^{(i,j)} a_{ik}.$$

Det er derminanten af den matrix $\hat{\underline{\underline{A}}}$, som fremgår af $\underline{\underline{A}}$ ved udskiftning af j 'te søjle med k 'te søjle. Altså

$$\hat{a}_{ij} = a_{ik} \text{ for } i = 1, \dots, n.$$

Men en matrix med to ens søjler har determinant lig 0. (Thi ved ombytning af disse to søjler skal determinanten skifte fortegn, men samtidig være uændret, når de ombyttede søjler er ens. Nu er 0 jo det eneste tal, der ikke ændres ved fortegnsskift.)

I alt har vi

$$\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}} = (\det \underline{\underline{A}}) \underline{\underline{E}}.$$

Altså er

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \cdot \underline{\underline{B}}.$$

Sammenlign formelen for den inverse side III,9,3.

Løsning af ligninger med Cramers formler.

Lad os betegne søjlerne i matricen $\underline{A}$ som vektorerne $a_1, \dots, a_n$ i $\mathbb{R}^n$. En løsning til ligningerne

$$\underline{A} \underline{x}_i = \underline{b}_i$$

er $\underline{b}$ som en linearkombination af de n søjler:

$$\underline{b} = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n.$$

Lad os nu betragte matricen $\hat{\underline{A}}^{ib}$ defineret ved at i 'te søjle er erstattet af $\underline{b}$. Så er

$$\hat{\underline{A}}^{ib} = x_1 \hat{\underline{A}}^{ia_1} + \dots + x_i \hat{\underline{A}}^{ia_i} + \dots + x_n \hat{\underline{A}}^{ia_n}.$$

Lineariteten af determinanten som funktion af en søjle siger nu, at

$$\det \hat{\underline{A}}^{ib} = x_1 \det \hat{\underline{A}}^{ia_1} + \dots + x_i \det \hat{\underline{A}}^{ia_i} + \dots + x_n \det \hat{\underline{A}}^{ia_n}.$$

Men dels er $\hat{\underline{A}}^{ia_i} = \underline{A}$ og $\det \hat{\underline{A}}^{ia_j} = 0$ for $i \neq j$, fordi to søjler er ens, så der står at læse:

$$\det \hat{\underline{A}}^{ib} = x_i \det \underline{A}.$$

Om man vil,

$$x_i = \frac{\det \hat{\underline{A}}^{ib}}{\det \underline{A}}.$$

i det tilfælde, hvor $\det \underline{A} \neq 0$.

Dette udtryk for løsningen kaldes *Cramers formler*.

Sammenlign løsningen af to ligninger med to ubekendte

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

som

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

§11. Egenvektorer og egenverdier.

1) Regulærækvivalente matricer har samme egenverdier. Thi er $\underline{S}$ regulær og $\underline{A}$ matricen, så er

$$\begin{aligned}\det(\underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S} - \lambda \underline{E}) &= \det(\underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S} - \lambda \underline{S}^{-1} \underline{E} \underline{S}) \\ &= \det(\underline{S}^{-1} (\underline{A} - \lambda \underline{E}) \underline{S}) \\ &= \det \underline{S}^{-1} \cdot \det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) \det \underline{S} = \det(\underline{A} - \lambda \underline{E}).\end{aligned}$$

2) En matrix er regulær ækvivalent med sin transponerede. Thi, definer matricen $\underline{\Delta}$ ved

$$\underline{\Delta} = (\delta_{ij}) , \text{ hvor } \delta_{ij} = 1 \text{ for } i+j = n+1 , 0 \text{ ellers.}$$

$$\underline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\Delta}$ er regulær og $\underline{\Delta}^2 = \underline{E}$, da $\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{i(n+1-k)}$ som er 1 for $i = k$ og 0 ellers.

F.eks. gælder

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} .$$

For Jordans normalform $\underline{\Lambda}$ gælder, at

$$\underline{\Lambda}' = \begin{pmatrix} \underline{\Lambda}'_1 & \underline{0} & \dots & 0 \\ \underline{0} & \underline{\Lambda}'_2 & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \underline{\Lambda}'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\Lambda}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\Lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\Lambda}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\Lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\Lambda}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\Lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \underline{0} & & & \end{pmatrix}$$

Af $\underline{\Lambda} = \underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S}$ følger $\underline{\Lambda}' = \underline{S}' \underline{A}' \underline{S}'^{-1}$, så

$$A' = \underline{S}'^{-1} \underline{A}' \underline{S}' = \underline{S}'^{-1} \underline{A} \underline{A} \underline{S}' = (\underline{S}'^{-1} \underline{A} \underline{S}'^{-1}) \underline{A} (\underline{S} \underline{A} \underline{S}') .$$

Nu er $(\underline{S} \underline{A} \underline{S}')^{-1} = \underline{S}'^{-1} \underline{A}^{-1} \underline{S}^{-1} = \underline{S}'^{-1} \underline{A} \underline{S}^{-1}$, så hermed er set, at $\underline{A}'$ er regulærækvivalent med $\underline{A}$.

3) Lad $p(x)$ være et polynomium, $p(x) = x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \dots + \alpha_0$. Vi kan danne matricen $p(\underline{A}) = \underline{A}^m + \alpha_{m-1}\underline{A}^{m-1} + \dots + \alpha_1\underline{A} + \alpha_0\underline{E}$. Er λ egenværdi for $\underline{A}$ med egenvektor e , så er $p(\lambda)$ egenværdi for $p(\underline{A})$ med egenvektor e . Thi

$$\begin{aligned} p(\underline{A})e &= \underline{A}^m e + \alpha_{m-1}\underline{A}^{m-1}e + \dots + \alpha_1\underline{A}e + \alpha_0e \\ &= \lambda^m e + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1}e + \dots + \alpha_1\lambda e + \alpha_0e = p(\lambda) e . \end{aligned}$$

(Er λ egenværdi for $\underline{A}$, så er 0 egenværdi for $\underline{A} - \lambda\underline{E}$.) Er specielt $p(x) = \det(x\underline{E} - \underline{A})$, så er samtlige egenvektorer for $\underline{A}$ tilhørende egenvektorer for $p(\underline{A})$ svarende til egenværdien $p(\lambda) = 0$. Hvis $\underline{A}$ er regulærækvivalent med en diagonalmatrix, så findes en basis af egenvektorer for $\underline{A}$. Denne basis er tillige basis for kernen for $p(\underline{A})$, som derfor er hele rummet. Altså er $p(\underline{A}) = \underline{0}$. Dette gælder også i almindelighed, men er sværere at vise.

4) Lad $\underline{A}$ være en $n \times n$ -matrix med den egenskab, at samtlige egenværdier er numerisk mindre end 1. Altså $\det(\underline{A} - \lambda\underline{E}) = 0 \Rightarrow |\lambda| < 1$.

Da gælder

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \underline{A}^m = \underline{0} .$$

Vi kan transformere $\underline{A}$ til Jordans normalform

$$\underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S} = \underline{\Lambda} + \underline{\Psi} ,$$

hvor $\underline{\Lambda}$ er en diagonalmatrix og $\underline{\Psi}$ er "resten" dvs. har evt. visse 1'taller i bidiagonalen.

Nu er

$$\underline{S}^{-1} \underline{A}^m \underline{S} = (\underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S})^m = (\underline{\Lambda} + \underline{\Psi})^m$$

$$\text{så } \lim_{m \rightarrow \infty} \underline{A}^m = \underline{0} \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} (\underline{\Lambda} + \underline{\Psi})^m = \underline{0} .$$

Der gælder i dette specielt tilfælde formelen

$$\underline{\Lambda} \underline{\Psi} = \underline{\Psi} \underline{\Lambda} .$$

Det betyder, at vi kan skrive

$$(\underline{\Lambda} + \underline{\Psi})^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \underline{\Psi}^j \underline{\Lambda}^{m-j}.$$

Nu gælder følgende

$$a) \quad \underline{\Psi}^n = \underline{0}$$

$$b) \quad \underline{\Lambda}^{m-j} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{m-j} & & 0 \\ & \lambda_2^{m-j} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Vi kan derfor skrive for $m \geq n$

$$(\underline{\Lambda} + \underline{\Psi})^m = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{m}{j} \underline{\Psi}^j \underline{\Lambda}^{m-j}.$$

Det enkelte af de n led har formen

$$\underline{\Psi}^j \frac{m(m-1)\dots(m-j+1)}{j!} \underline{\Lambda}^{m-j}.$$

Her er $\frac{1}{j!} \underline{\Psi}^j$ en fast faktor, $P_j(m) = m(m-1)\dots(m-j+1)$ et polynomium i m af grad j , og hvert led i $\underline{\Lambda}^{m-j}$ er en eksponentialfunktion (eller 0)

$$|\lambda_i|^{m-j} = e^{(m-j) \ln |\lambda_i|}, \text{ hvis } \lambda_i \neq 0.$$

Produktet

$$|P_j(m) \lambda_i^{m-j}| \leq |P_j(m)| |\lambda_i|^{m-j} \rightarrow 0 \text{ for } n \rightarrow \infty$$

når $|\lambda_i| < 1$, da eksponentialfunktionen går hurtigere mod 0 end et polynomium kan gå mod ∞ . (Jvf. side III, 6, 6.)

Det var jo det!

§12. Ortogonalsystemer.

Sætning I,12,14 var præcis, hvad vi benyttede i undersøgelsen af keglesnit i III,2,15 - 20.

Polynomiet

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

kan skrives f.eks.

$$(xy) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Men vi kan jo erstatte matricen med

$$\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

så polynomiet skrives

$$(xy) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nu er matricen reel og symmetrisk; der findes derfor en ortogonal transformationsmatrix

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

så

$$\underline{\underline{S}}^* \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

hvor λ_1 og λ_2 er egenverdierne for

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}.$$

λ_1 og λ_2 er altså rødder i polynomiet

$$\det \begin{pmatrix} x-a & -\frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} & x-c \end{pmatrix} = x^2 - (a+c)x + ac - \frac{b^2}{4}.$$

Egenverdierne er altså

$$\frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac + b^2}}{2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{2} .$$

Jvf. side III, 2, 17.

Kvadriker eller keglesnitsflader.

Vi betragter en punktmængde i $\mathbb{R}^3$ af formen

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{x}' \underline{A} \underline{x} + b \cdot x + c = 0\}$$

hvor $\underline{A}$ er en symmetrisk, reel 3×3 -matrix, $b \in \mathbb{R}^3$ og $c \in \mathbb{R}$.

Ved en koordinattransformation med en ortogonal matrix $\underline{S}$,

$$\underline{x} = \underline{S} \hat{\underline{x}}$$

kan vi beskrive samme mængde i et nyt retvinklet koordinatsystem, hvis basis er søjlerne i $\underline{S}$, som

$$\hat{K} = \{\hat{\underline{x}} \in \mathbb{R}^3 \mid \hat{\underline{x}}' (\underline{S}' \underline{A} \underline{S}) \hat{\underline{x}} + \underline{b}' \underline{S} \hat{\underline{x}} + c = 0\} .$$

Vælges $\underline{S}$ i henhold til Sætning I, 12, 2, og sætter vi $\hat{\underline{b}}' = \underline{b}' \underline{S}$, får vi formen

$$\hat{K} = \{\hat{\underline{x}} \in \mathbb{R}^3 \mid \hat{\underline{x}}' \hat{\underline{A}} \hat{\underline{x}} + \hat{b} \cdot \hat{\underline{x}} + c = 0\}$$

hvor $\hat{\underline{x}}' \hat{\underline{A}} \hat{\underline{x}} = \hat{x}_1^2 \lambda_1 + \hat{x}_2^2 \lambda_2 + \hat{x}_3^2 \lambda_3$.

Vi ordner nu $\hat{K}$ efter fortegnene for $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Samtidig dropper vi $\hat{\underline{A}}$.

Vi skriver ligningen som

$$\lambda_1 x_1^2 + b_1 x_1 + \lambda_2 x_2^2 + b_2 x_2 + \lambda_3 x_3^2 + b_3 x_3 + c = 0 .$$

Hvis $\lambda_1 \neq 0$, kan vi forskyde koordinatsystemets origo til $-\frac{b_1}{2\lambda_1}$; altså med $x_1 = \hat{x}_1 - \frac{b_1}{2\lambda_1}$, hvorved

$$\lambda_1 x_1^2 + b_1 x_1 = \lambda_1 \left(\hat{x}_1^2 - \frac{b_1}{\lambda_1} \hat{x}_1 + \left(\frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 \right) + b_1 \left(\hat{x}_1 - \frac{b_1}{2\lambda_1} \right) = \lambda_1 \hat{x}_1^2 + \frac{b_1^2}{2\lambda_1} .$$

Vi kan altså antage, at $\lambda_i b_i = 0$ for $i = 1, 2, 3$.

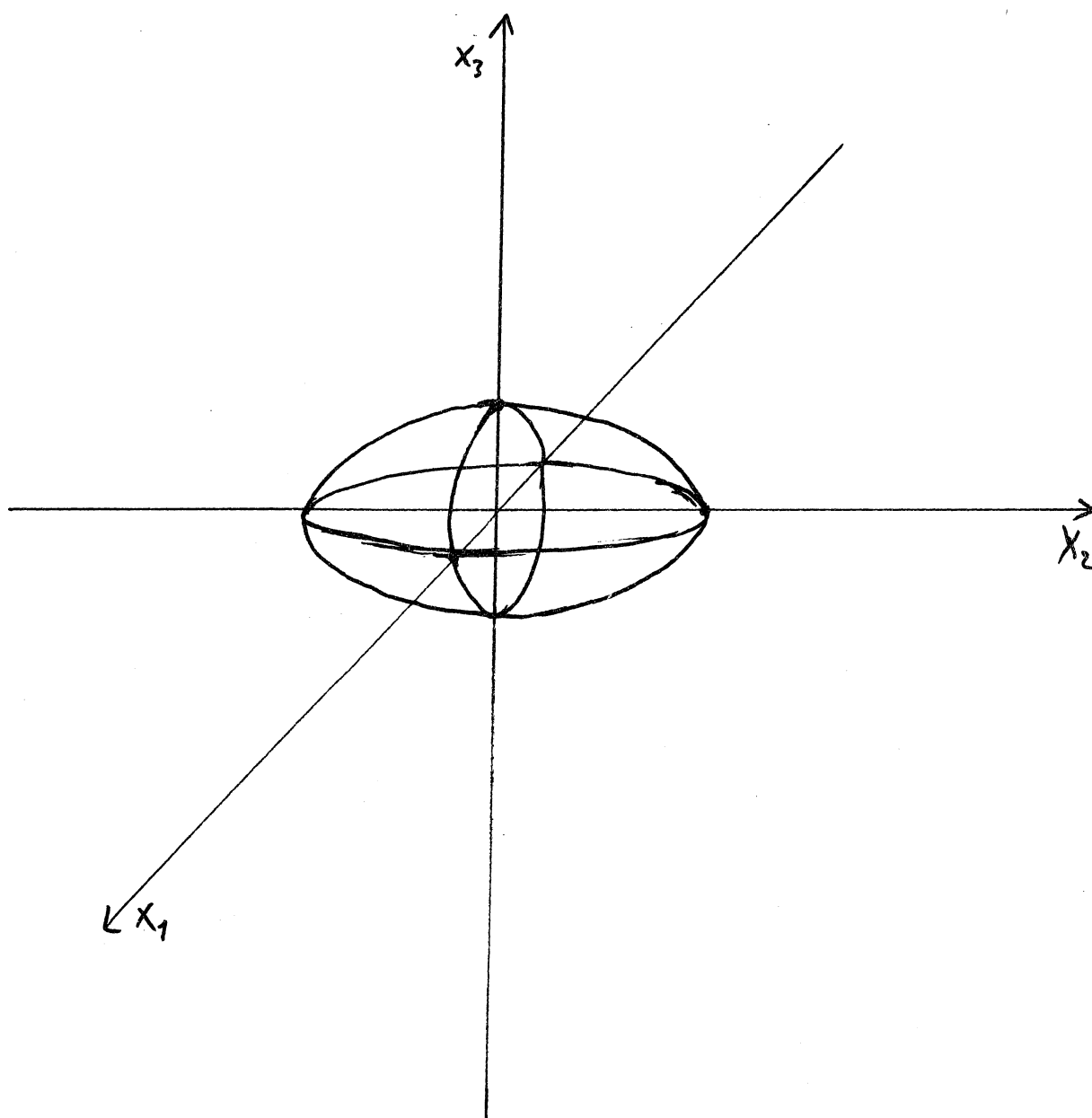
Vi skelner nu mellem adskillige tilfælde.

1) Alle $\lambda_i \neq 0$. Ligningens form

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = -c .$$

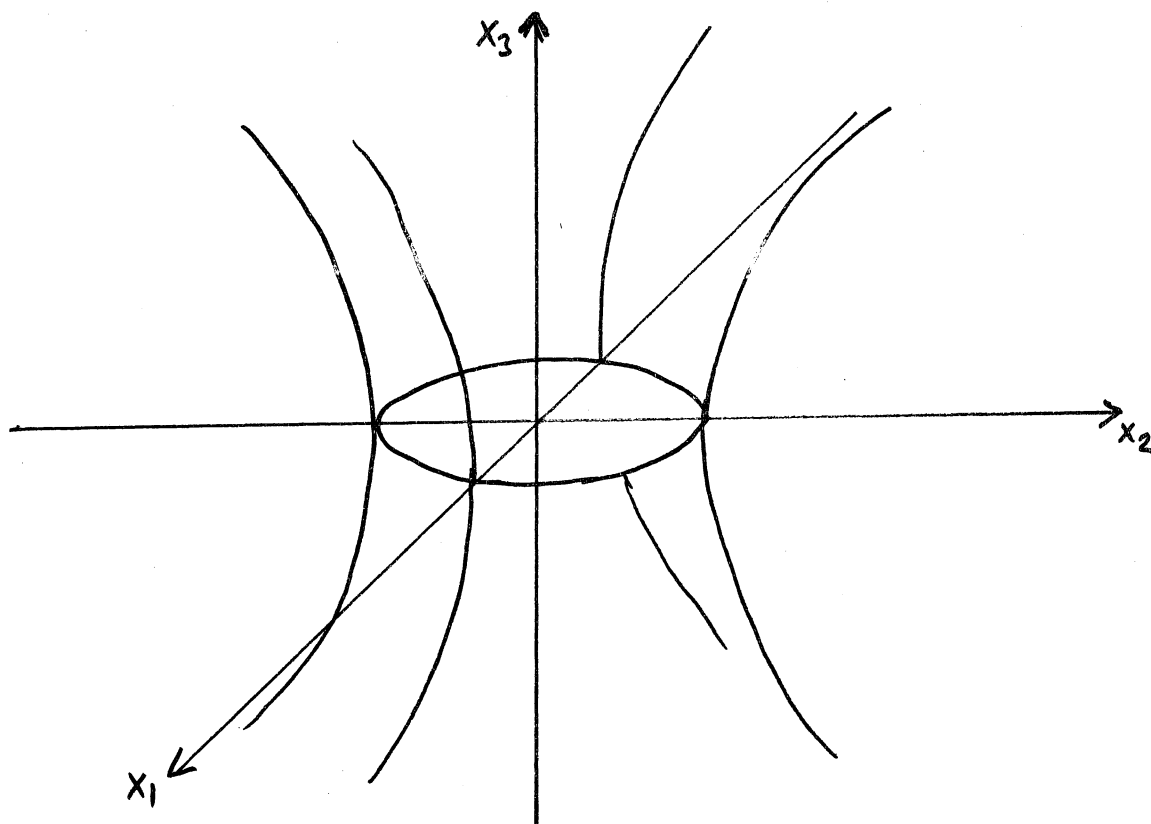
1a) Ellipsoide. λ_i samme fortegn, c modsat, $c \neq 0$.

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 .$$



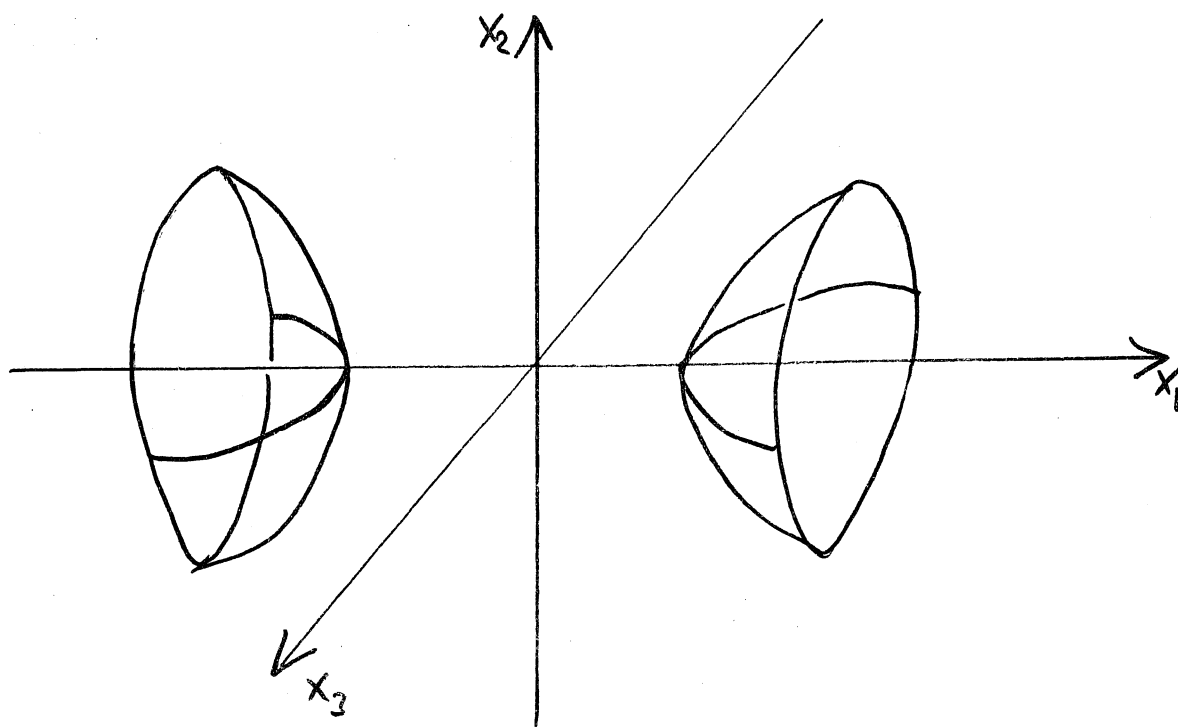
1b) Hyperboloide med 1 net:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1.$$



1c) Hyperboloide med 2 net:

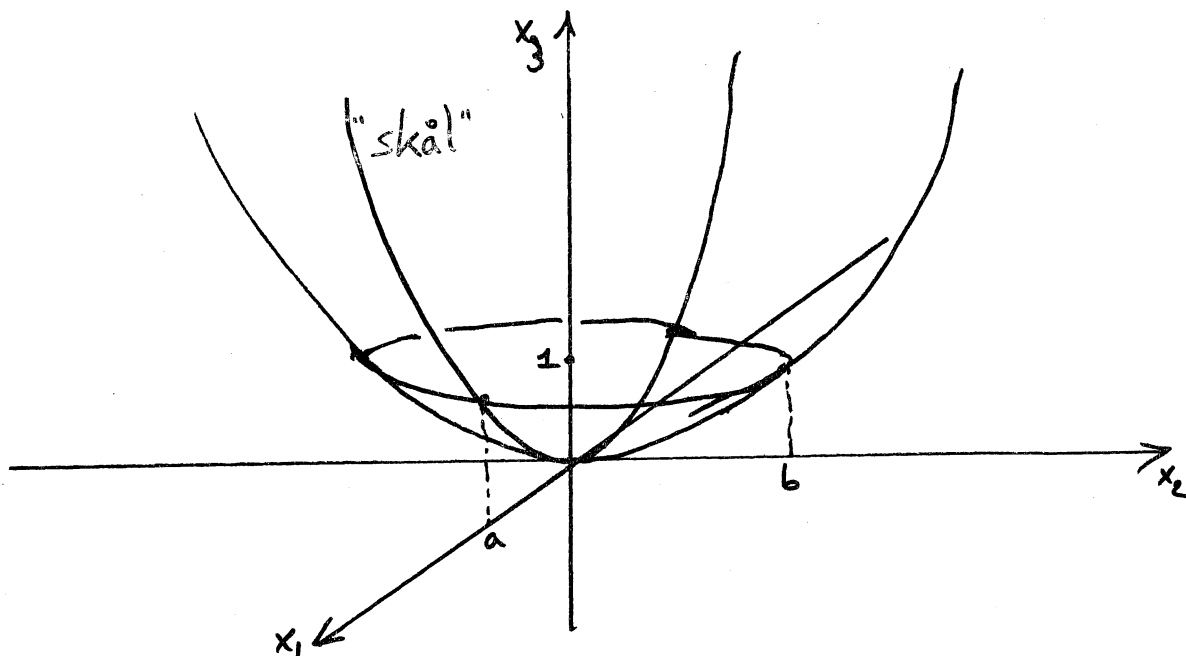
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1.$$



2) $\lambda_3 = 0$, λ_1, λ_2 ikke 0.

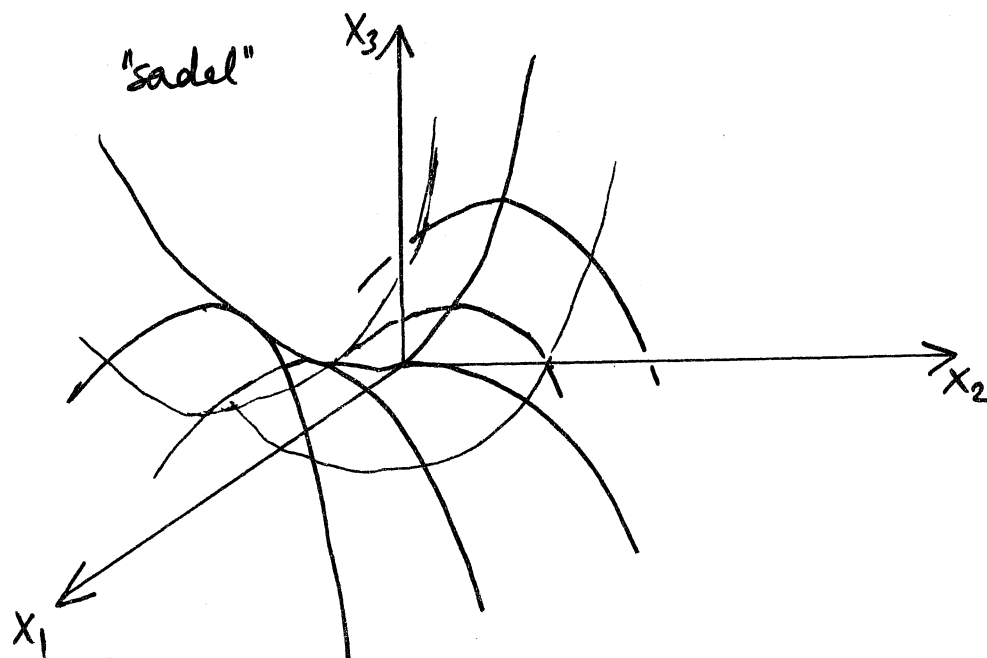
2a) Elliptisk paraboloid. $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $b_3 \neq 0$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - x_3 = 0.$$



2b) Hyperbolsk paraboloid. $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, $b_3 \neq 0$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3 = 0.$$



3) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$. ($b_2 \cdot b_3 \neq 0$)

$$\lambda_1 x_1^2 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0.$$

Koordinattransformationen

$$y = \frac{-1}{\lambda_1} (b_2 x_2 + b_3 x_3)$$

$$z = \frac{-1}{\lambda_1} (b_2 x_2 - b_3 x_3)$$

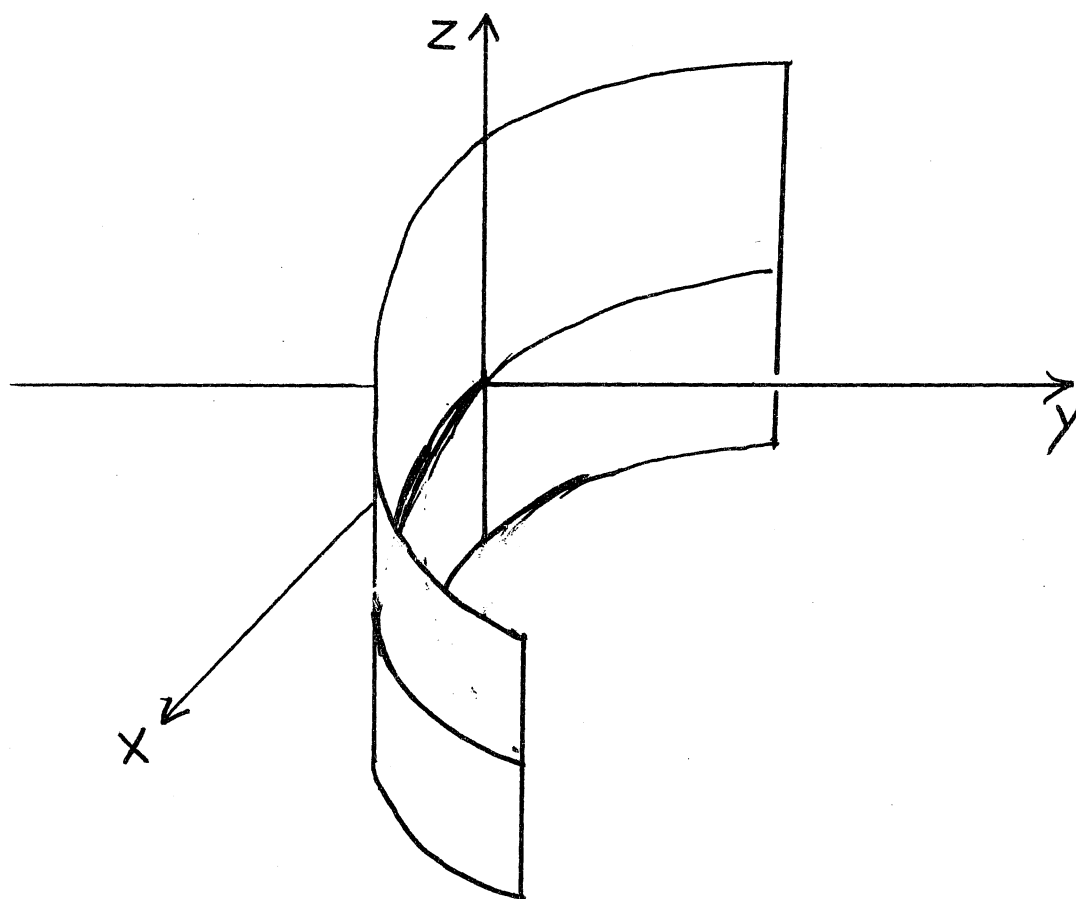
giver formen

$$\lambda_1 x_1^2 - \lambda_1 y = 0$$

eller

$$x^2 = y.$$

Parabolisk cylinder:



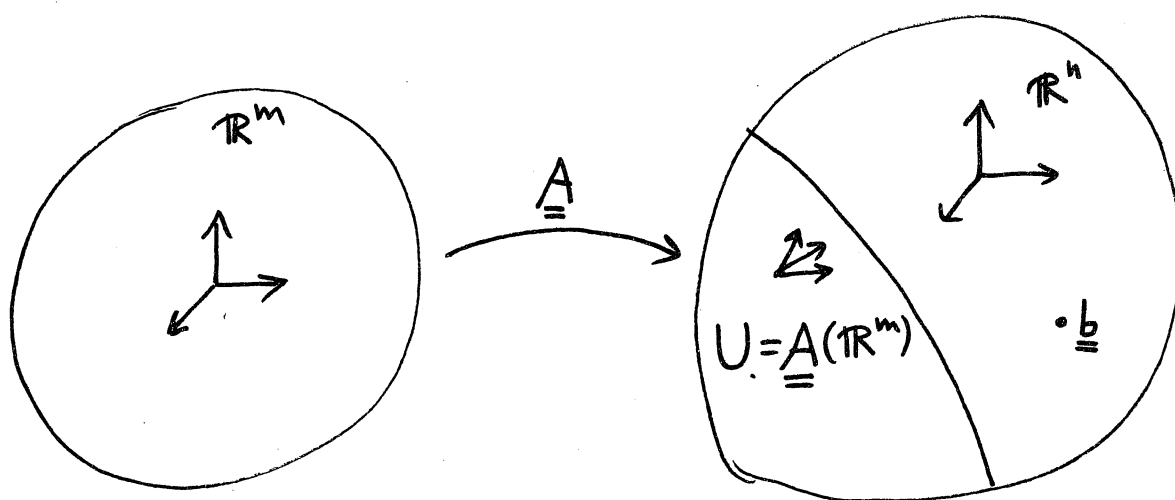
De øvrige tilfælde er alle simplere.

Overbestemte ligningssystemer.

Et sæt af lineære ligninger med flere ligninger end ubekendte kan ikke altid løses. Vi kan opfatte

$$(*) \quad \underline{A} \underline{x} = \underline{b} ,$$

hvor $\underline{A}$ er en $n \times m$ -matrix med $n > m$, $\underline{x}$ er en $m \times 1$ -(søjle)-matrix og $\underline{b}$ en $n \times 1$ -(søjle)-matrix, som en funktion af $\mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}^n$. Søjlerne i $\underline{A}$ er billederne af standardbasen i $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$. De frembringer et underrum U i $\mathbb{R}^n$ af dimension $\leq m$.



Hvis $\underline{b} \in U$, har problemet en løsning.

Hvis $\underline{b} \notin U$, kan vi spørge, hvad så? Svaret er, at vi dog kan finde den "bedste" ikke-løsning, dvs. den nærmeste vektor i U til $\underline{b}$. Med andre ord, vi søger projektionen af $\underline{b}$ på U .

Hvis søjlerne i $\underline{A}$ er ortonormale, kan vi "bare" bruge Sætning I, 12, 8. Er det ikke tilfældet, kan vi evt. søge en ortonormal basis for U .

Vi kan også angribe minimumsproblemet direkte. (Lad os for nemheds skyld antage, at U har dimension m , altså at rangen af $\underline{A}$ er m .)

Vi skal bestemme $\underline{x}$, så

$$\|\underline{A} \underline{x} - \underline{b}\|$$

bliver mindst mulig. Det er den præcis når kvadratet på normen er mindst

$$\begin{aligned}\|\underline{A}\underline{x} - \underline{b}\|^2 &= (\underline{A}\underline{x} - \underline{b}) \cdot (\underline{A}\underline{x} - \underline{b}) = (\underline{A}\underline{x} - \underline{b})' (\underline{A}\underline{x} - \underline{b}) \\ &= (\underline{x}'\underline{A}' - \underline{b}') (\underline{A}\underline{x} - \underline{b}) = \underline{x}'\underline{A}'\underline{A}\underline{x} - \underline{b}'\underline{A}\underline{x} - \underline{x}'\underline{A}'\underline{b} + \underline{b}'\underline{b}.\end{aligned}$$

Det er en kvadratisk form, som har et minimum, hvis matricen $\underline{A}'\underline{A}$ har positive egenverdier. Bemærk, at da $\underline{b}'\underline{A}\underline{x}$ er en 1×1 -matrix, så er $\underline{b}'\underline{A}\underline{x} = \underline{x}'\underline{A}'\underline{b}$.

Nu gælder, at $\underline{A}'\underline{A}$ er (reel og) symmetrisk, så $\underline{A}'\underline{A}$ er ortogonalækvivalent med en reel diagonalmatrix. Der findes altså $\underline{S}$ ortogonal, så

$$\underline{S}'\underline{A}'\underline{A}\underline{S} = \underline{\Lambda}.$$

Ved koordinattransformationen

$$\underline{x} = \underline{S}\hat{\underline{x}}$$

fås udtrykket for $\lambda_1 \hat{x}_1^2 + \dots + \lambda_m \hat{x}_m^2 =$

$$\hat{\underline{x}}'\underline{\Lambda}\hat{\underline{x}} = \hat{\underline{x}}'\underline{S}'\underline{A}'\underline{A}\underline{S}\hat{\underline{x}} = \|\underline{A}\underline{S}\hat{\underline{x}}\|^2 \geq 0.$$

Altså må $\lambda_i \geq 0$ for alle i . Da $\underline{A}$ har rang m , er $\underline{A}\underline{S}\hat{\underline{x}}$ kun $\underline{0}$, når $\hat{\underline{x}} = \underline{0}$, hvorfor $\lambda_i > 0$ for alle i .

Vi kan så skrive formen

$$\hat{\underline{x}}'\underline{\Lambda}\hat{\underline{x}} - 2\hat{\underline{x}}'\hat{\underline{b}} + c$$

hvor $\hat{\underline{b}} = \underline{S}'\underline{A}'\underline{b}$ og $c = \underline{b}'\underline{b}$.

Ved koordinat-forskydning til

$$\hat{x}_i = y_i + \frac{b_i}{\lambda_i} \quad \text{for } i = 1, \dots, m$$

fås formen

$$\sum_{i=1}^m \left(\left(y_i + \frac{b_i}{\lambda_i} \right)^2 \lambda_i - 2 \left(y_i + \frac{b_i}{\lambda_i} \right) b_i \right) + c = \sum_{i=1}^m y_i^2 \lambda_i - \sum_{i=1}^m \frac{b_i^2}{\lambda_i} + c$$

som har minimum for $\underline{y} = \underline{0}$.

Altså for $\hat{x}_i = \frac{b_i}{\lambda_i}$ for $i = 1, \dots, m$, eller

$$\underline{\Lambda}\hat{\underline{x}} = \hat{\underline{b}} = \underline{S}'\underline{A}'\underline{b}$$

hvor

$$\underline{\Lambda} = \underline{S}'\underline{A}'\underline{A}\underline{S},$$

så $\underline{S}' \underline{A}' \underline{A} \underline{S} \hat{\underline{x}} = \underline{S}' \underline{A}' \underline{b}$.

Da $\underline{x} = \underline{S} \hat{\underline{x}}$ og $\underline{S}'$ er regulær, er det det samme som

$$\underline{A}' \underline{A} \underline{x} = \underline{A}' \underline{b}$$

Konklusion: Ved at gange ligningen (*) igennem med $\underline{A}'$ fås en ligning til bestemmelse af den bedste approksimation!

§13. Differential- og integralregning i flere reelle variable.

1. Lad der være givet C^1 -funktionerne af $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \psi: I \rightarrow \mathbb{R} .$$

Lad nu $f(x, t)$ være differentiabel i x og integrabel i t .
Sæt

$$g(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt .$$

Problem: $g'(x) = ?$

Vi definerer nu funktionerne

$$G: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{og} \quad H: I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

ved

$$G(x) = (x, \varphi(x), \psi(x)) \quad \text{og} \quad H(x, y, z) = \int_y^z f(x, t) dt .$$

Da er

$$\underline{\underline{D}} G = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix}$$

og

$$\underline{\underline{D}} H = \left(\int_y^z \frac{\partial f}{\partial x} dt - f(x, y) + f(x, z) \right) .$$

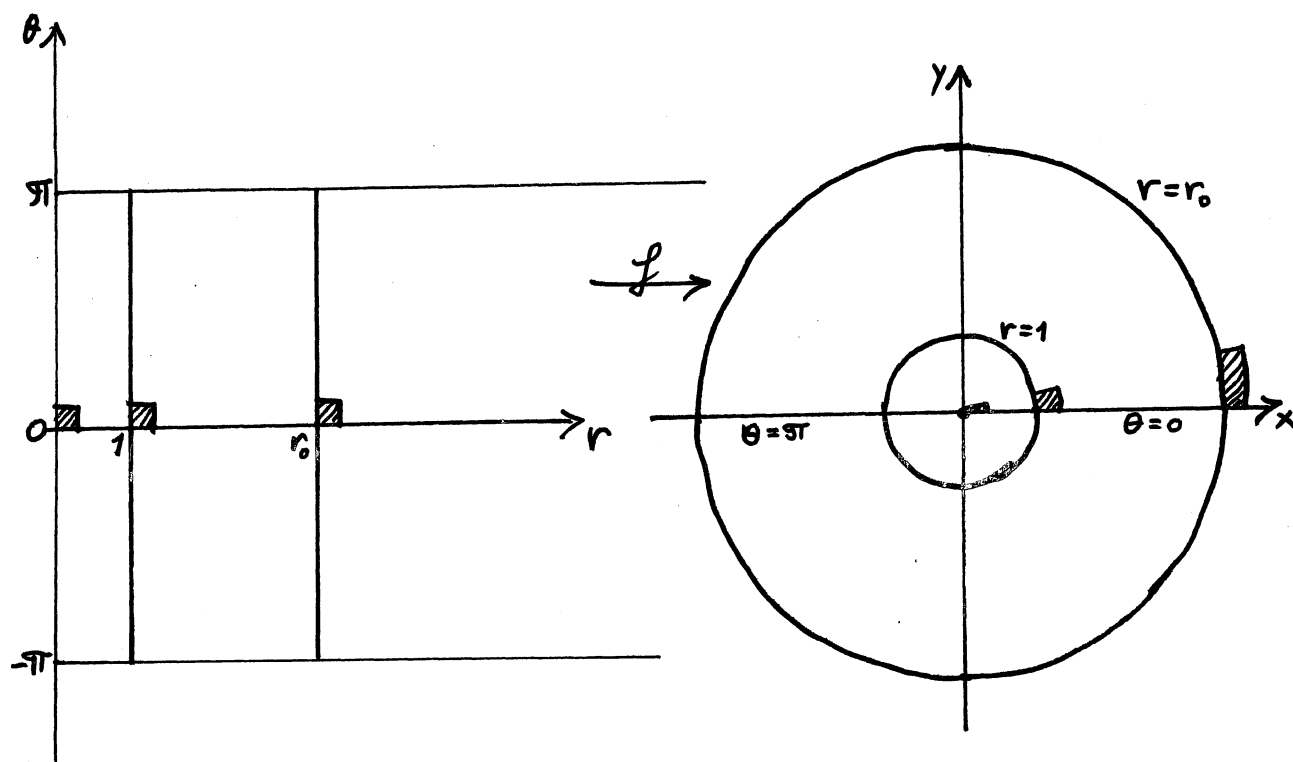
Kædereglen siger nu, at for $g = H \circ G$ er

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\underline{\underline{D}} H)(G)(\underline{\underline{D}} G) \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt - f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + f(x, \psi(x))\psi'(x) . \end{aligned}$$

2. Lad $f: (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi] \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$. Da er f en C^1 -funktion med

$$\underline{\underline{D}} f = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

og Jacobi-determinant $Jf = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$. Matricen $\underline{\underline{D}} f$ er altså regulær, da vi har forudsat $r > 0$.



At arealforholdet lokalt er som r fremgår af de skraverede kvadrater med billeder.

Funktionen f har en invers, $g = f^{-1}$. Den findes ved løsning af ligningerne

$$r \cos \theta = x$$

$$r \sin \theta = y$$

hvoraf $\cot \theta = \frac{x}{y}$ altså $\theta = \frac{y}{|y|} \arccot \frac{x}{|y|}$

og $r^2 = x^2 + y^2$, altså $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Det ses, at med

$$f^{-1}(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \frac{y}{|y|} \arccot \frac{x}{|y|} \right)$$

defineres den inverse til f , differentiabel for $y \neq 0$ med

$$Df^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}$$

der ses at være $(\underline{D} f)^{-1}$.
 Ønsker vi at beregne $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$, substituerer vi med f til

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi]} e^{-r^2} r dr d\theta$$

som med Fubinis sætning er

$$\int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi e^{-r^2} r d\theta dr = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \pi.$$

På den anden side er integralet

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy dx = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Konklusion:

$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

Jvf. $\Gamma(\frac{1}{2})$ side IV,8,4.

3. En kugles rumfang er med

$$K = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

givet som

$$\int_K 1 dx dy dz.$$

I III,2,5-7 beskrev vi kuglen som

$$x = r \cos \theta \cos \varphi$$

$$y = r \cos \theta \sin \varphi$$

$$z = r \sin \theta$$

hvor $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Vi finder Jacobi determinanten

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \\ -r \cos \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & 0 \\ -r \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= r^2 (\cos^3 \theta \cos^2 \varphi + \cos \theta \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos \theta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^3 \theta \sin^2 \varphi)$$

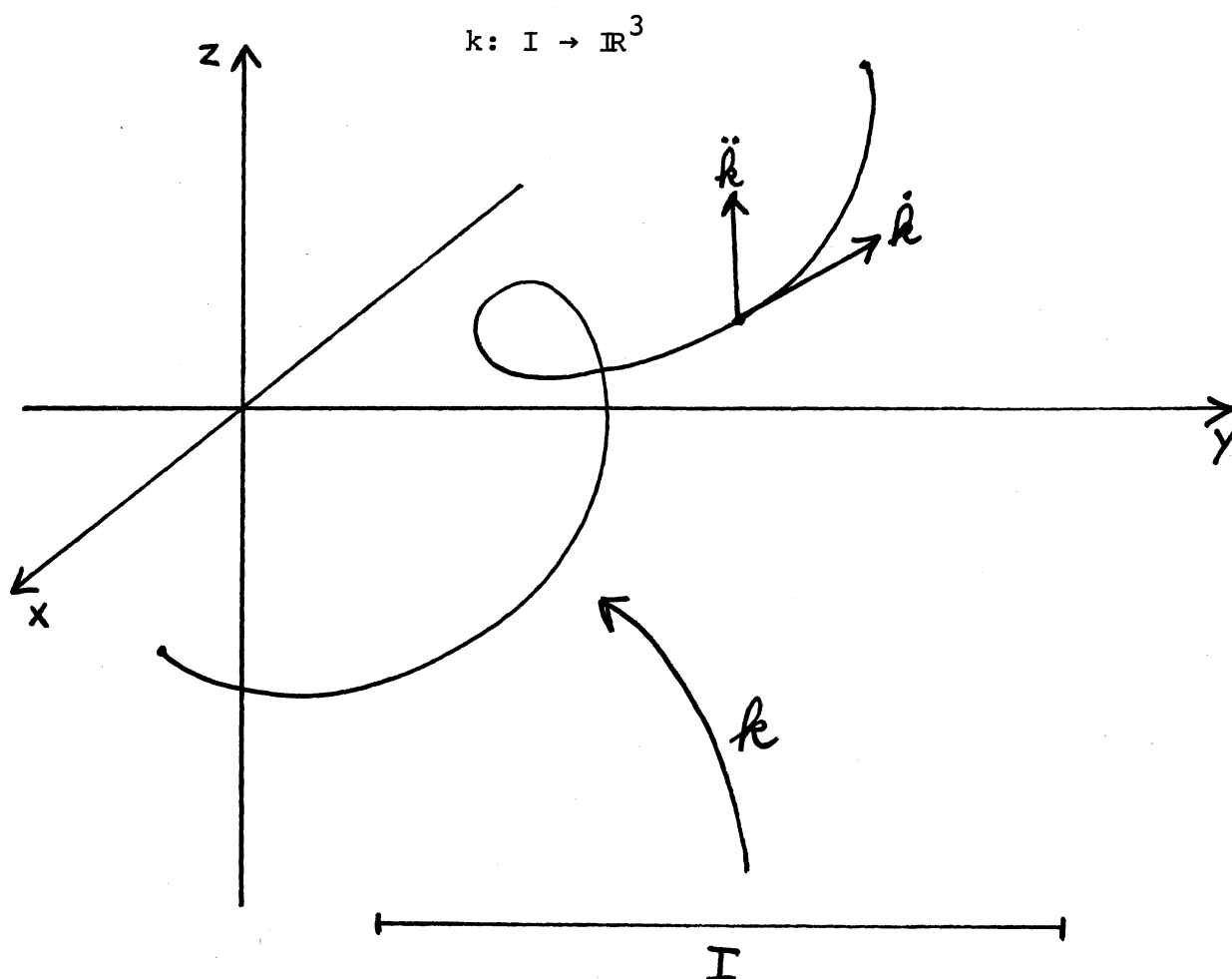
$$= r^2 (\cos^3 \theta + \cos \theta \sin^2 \theta) = r^2 \cos \theta .$$

Kuglens rumfang er derfor

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}} .$$

4. Kurver.

En C^2 -funktion af et interval I ind i $\mathbb{R}^3$ kaldes en *kurve*.



Vi tænker på I som et tidsinterval og betegner den variable som $t \in I$. Kurven beskriver et punkts rute, f.eks. en flues bevægelser.

Vektoren

$$\dot{\mathbf{k}} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

kaldes *hastigheden* og vektoren

$$\ddot{\mathbf{k}} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

kaldes *accelerationen*.

Hastigheden har tangentretningen for kurven, mens accelerationen kan være i alle retninger.

Kurvens længde er

$$\int_I \|\dot{\mathbf{k}}(t)\| dt.$$

Sættes

$$s = \varphi(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{k}}(\tau)\| d\tau,$$

har vi $\varphi'(t) = \|\dot{\mathbf{k}}(t)\|$ og derfor for den omvendte $t = \psi(s) = \varphi^{-1}(s)$, at

$$\psi'(s) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{k}}(\psi(s))\|}.$$

Vi kan ændre parametriseringen af kurven til *buenlængden* s ved at betragte

$$\mathbf{h}(s) = \mathbf{k}(\psi(s)).$$

For den gælder, at

$$\dot{\mathbf{h}}(s) = \dot{\mathbf{k}}(\psi(s)) \cdot \psi'(s)$$

og

$$\|\dot{\mathbf{h}}(s)\| = \|\dot{\mathbf{k}}(\psi(s))\| \cdot \frac{1}{\|\dot{\mathbf{k}}(\psi(s))\|} = 1.$$

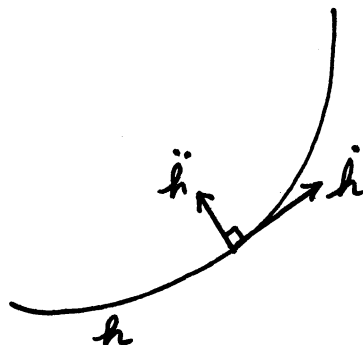
Altså

$$\dot{\mathbf{h}} \cdot \dot{\mathbf{h}} = 1.$$

Med denne parametrisering gælder derfor

$$2\ddot{h} \cdot \dot{h} = 0 ,$$

altså at accelerationen altid er vinkelret på hastigheden.



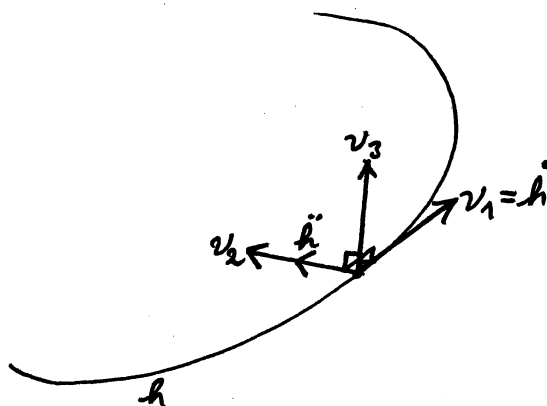
Hvis $\ddot{h} \neq 0$, kan vi sætte

$$v_1(s) = \dot{h}(s) \quad \text{tangent}$$

$$v_2(s) = \frac{\ddot{h}(s)}{\|\ddot{h}(s)\|} \quad \text{normal}$$

$$v_3(s) = v_1(s) \times v_2(s) \quad \text{binormal}$$

Da er (v_1, v_2, v_3) et ortonormalsystem, der kaldes kurvens ledsagende treben:



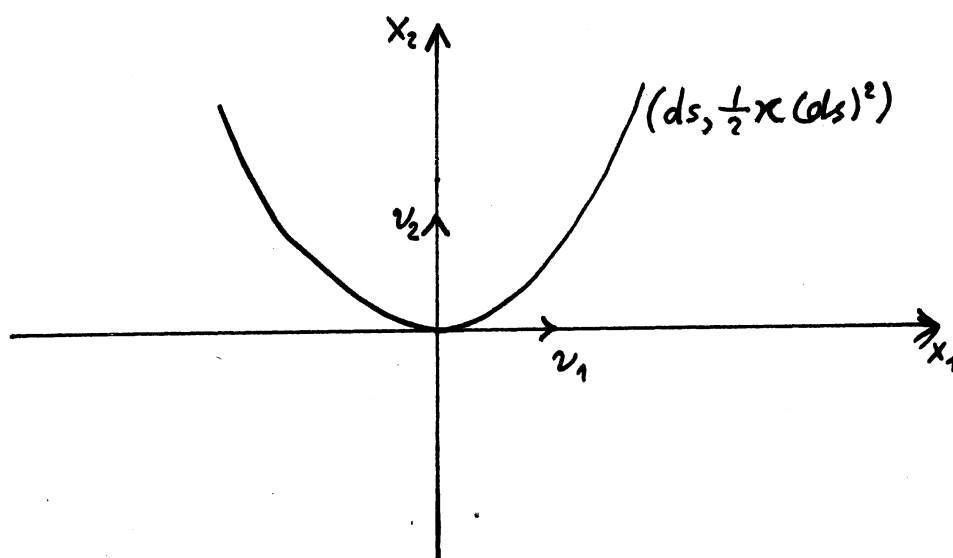
Størrelsen $\kappa(s) = \|\ddot{h}(s)\|$ kaldes kurvens *krumning*. Vi har altså

$$\ddot{h} = \kappa v_2 .$$

Taylor's formel giver os

$$\begin{aligned} h(s+dx) - h(s) &= \dot{h}(s) \cdot ds + \frac{1}{2} \ddot{h}(s) (ds)^2 + \varepsilon(ds) ds^2 \\ &= v_1 ds + \frac{1}{2} \kappa v_2 (ds)^2 + \varepsilon(ds) ds \quad . \end{aligned}$$

Funktionen $ds \rightarrow v_1 ds + \frac{1}{2} \kappa v_2 (ds)^2$ har billedet i (v_1, v_2) -planen $(ds, \frac{1}{2} \kappa (ds)^2)$ eller som parablen $x_2 = \frac{1}{2} \kappa x_1^2$.



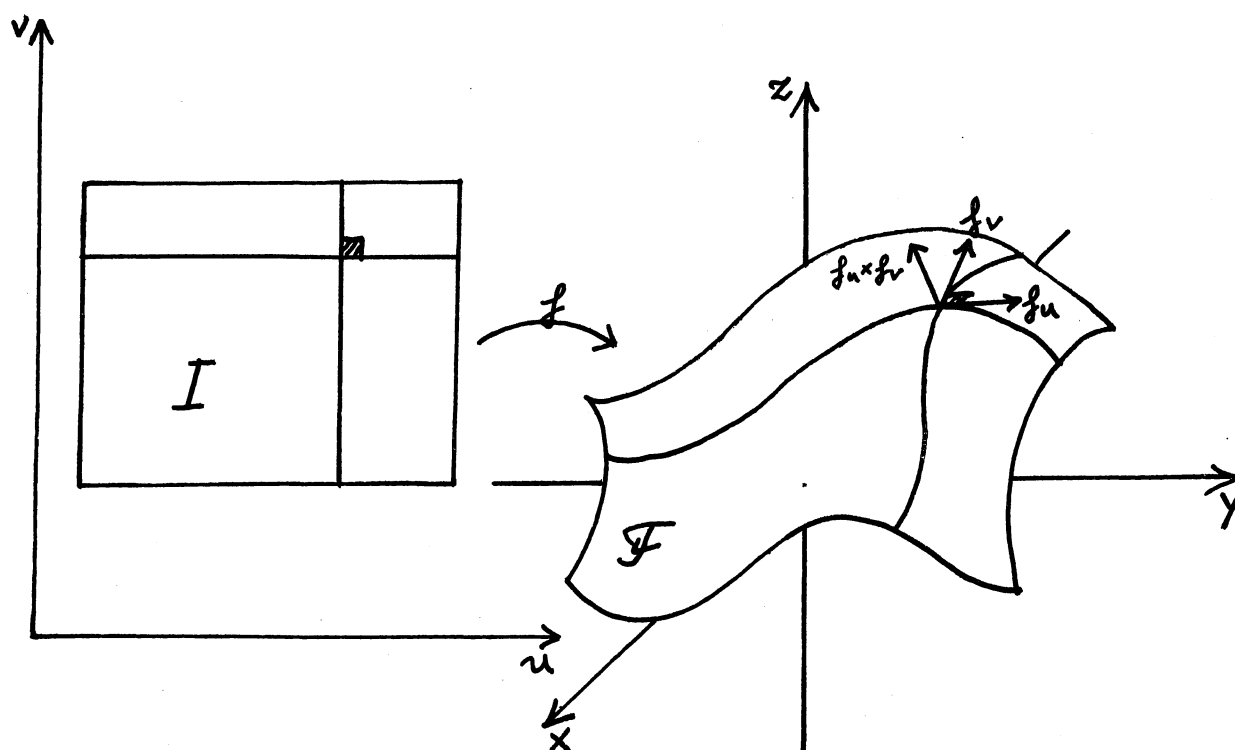
Man tolker (v_1, v_2) -planen som kurvens approximerende tangentplan og parablen som dens projektions approximerende parabel i tangentplanen.

5. Flader.

Lad $I \subseteq \mathbb{R}^2$ være et interval og

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

en C^2 -funktion.



Billedet ved f kaldes en differentiabel flade i $\mathbb{R}^3$.

$f_u = \frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$ og $f_v = \frac{\partial f}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$ er tangenter til fladen og frembringer, hvis de er uafhængige, tangentplanen til fladen.

Et lokalt rektangel $du dv$ approximeres i $F = f(I)$ ved $\|f_u \times f_v\|$. Derfor defineres *arealet* af fladen F ved

$$\int_I \|f_u \times f_v\| du dv.$$

Kuglefladen kan parametriseres ved

$$f(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

med $(\theta, \varphi) \in I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$ (se III, 2, 5 - 7). Kuglefladens areal er derfor:

$$f_\theta = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

$$f_\varphi = (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\begin{aligned}
 f_\theta \times f_\varphi &= \left(\begin{vmatrix} -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos \varphi \\ 0 & -\cos \theta \sin \varphi \end{vmatrix}, \right. \\
 &\quad \left. \begin{vmatrix} -\sin \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{vmatrix} \right) \\
 &= (-\cos^2 \theta \cos \varphi, -\cos^2 \theta \sin \varphi, -\cos \theta \sin \theta)
 \end{aligned}$$

$$\|f_\theta \times f_\varphi\| = \sqrt{\cos^4 \theta \cos^2 \varphi + \cos^4 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \cos \theta.$$

Arealet er derfor

$$\int_I \cos \theta \, d\theta \, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\varphi \, d\theta = 2\pi \cdot 2 = \underline{\underline{4\pi}}.$$

§14. Kurve- og fladeintegraler af differentialformer.

Rummet $\mathbb{R}^3$ bruges i fysik som model for det rum, vi lever i. De fire typer af differentialformer opfattes som hhv. funktioner af $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, nemlig 0-former og 3-former, og som vektorfelter på $\mathbb{R}^3$ nemlig 1-former og 2-former.

Lader vi for kortheds skyld $C = C^2[\mathbb{R}^3, \mathbb{R}]$ betegne mængden af differentiable funktioner af tre reelle variable ind i de reelle tal, så identificeres

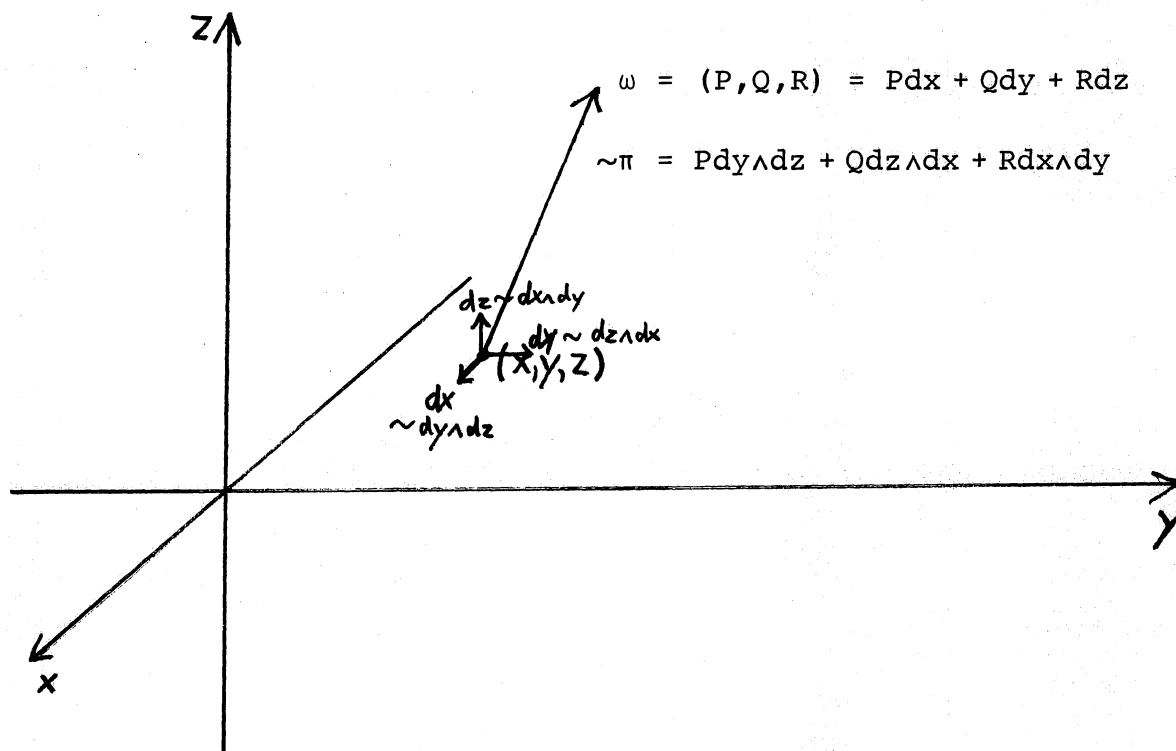
$$C = C_0, \text{ mængden af 0-former}$$

$$C = C_3, \quad - \quad - \quad 3\text{-former}$$

$$C^3 = C_1, \quad - \quad - \quad 1\text{-former}$$

$$C^3 = C_2, \quad - \quad - \quad 2\text{-former,}$$

idet vi opfatter basis i C_1 , dx, dy, dz som lokale koordinater til feltvektoren i punktet, og tilsvarende basis i C_2 , $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ som de samme lokale koordinater.



Funktionen d har i fysikken 3 navne efter sit definitionsrum og sit dispositionsrum:

$$\begin{array}{ccccccc}
 c_0 & \xrightarrow{\quad d \quad} & c_1 & \xrightarrow{\quad d \quad} & c_2 & \xrightarrow{\quad d \quad} & c_3 \\
 & \nabla & & \text{rot} & & \text{div} & \\
 & \text{"gradient"} & & \text{"rotation"} & & \text{"divergens"} &
 \end{array}$$

Sætning I, 14, 4 ($dd = 0$) har derfor to former i fysik:

- 1) Rotationen af et gradientfelt er nul.
- 2) Divergensen af et rotationsfelt er nul.

Poincaré's lemma (I, 14, 9) siger, at i et interval er ethvert rotationsfrit vektorfelt et gradientfelt, og ethvert divergensfrit vektorfelt er et rotationsfelt.

Med brug af identifikationen $dx \leftrightarrow dy \wedge dz$ etc. taler man i fysikken om divergensen af et gradientfelt. Vi starter altså med en funktion f og får:

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &\xrightarrow{\nabla} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \xrightarrow{\text{"id"}} \\
 &\frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dy \xrightarrow{\text{div}} \\
 &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz \wedge dx \wedge dy \\
 &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dx \wedge dy \wedge dz \xrightarrow{\text{"id"}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} .
 \end{aligned}$$

Operatoren kaldes *Laplace* operatoren og skrives

$$\Delta = \text{div} \circ \nabla = \text{div} \circ \text{grad}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} .$$

En funktion f , der opfylder

$$\Delta f = 0$$

kaldes *harmonisk*. Spørger vi, hvilke harmoniske funktioner, der findes, som er 0 på randen af en flade, bliver svaret, "kun 0".

Thi vi betragter formen

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dy .$$

Da er

$$\Delta f = d\omega .$$

Tillige betragtes $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$. Det ses, at

$$df \wedge \omega = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right) dx \wedge dy \wedge dz .$$

Nu bruger vi Greens formel I, 14, 8 (hvor $p = 1$) :

$$\int_F df \wedge \omega = \int_{\partial F} f \wedge \omega + \int_F f \wedge d\omega = 0 + 0 ,$$

da $f = 0$ på ∂F og $d\omega = 0$ på F . Men da

$$g = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \geq 0 ,$$

kan vi af $\int_F g dx \wedge dy \wedge dz = 0$ slutte at $g = 0$ på F . Altså er

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ overalt, så f er konstant. Da $f = 0$ på ∂F , er denne konstant åbenbart $= 0$.

Heraf følger, at i det indre af et område er en harmonisk funktion entydig bestemt ved sine værdier på randen. (Thi $f - g$ er harmonisk og $= 0$ på randen.)

KAPITEL IV

MOTIVERENDE EKSEMPLER

*Die Mathematiker sind eine Art Franzosen:
redet man zu ihnen, so Übersetzen sie es
in ihre Sprache, und dann ist es alsobald
etwas Anderes.*

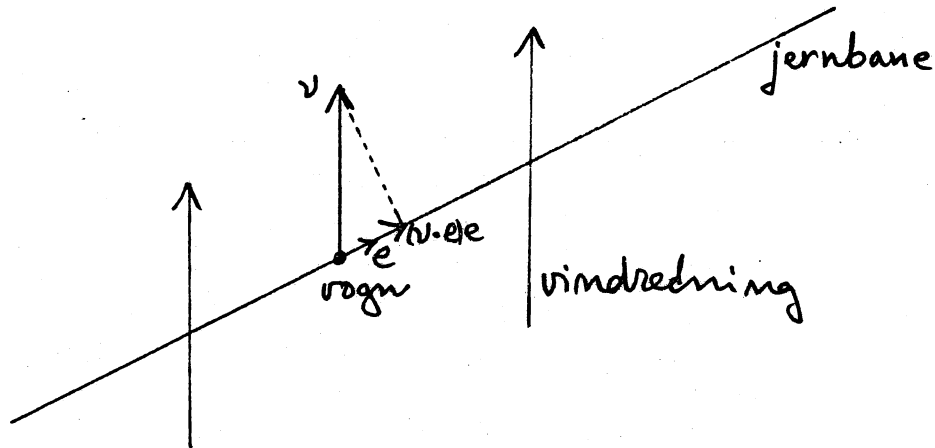
Johann Wolfgang von Goethe.

*Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die
Grenzen meiner Welt.*

Ludwig Wittgenstein.

§1. Vektorregning i planen og komplekse tal.

En partikel i fast bane påvirkes af et kraftfelt. F.eks. en vogn på skinner i blæsevejr:



Vindens retning og styrke angives som en vektor v . Vognen må bevæge sig i jernbanens retning, angivet ved en enhedsvektor e . Vindens bidrag til bevægelsen er da vektoren

$$(v \cdot e)e.$$

Man opløser så eventuelt vektoren v i summen:

$$v = ((v \cdot e)e) + (v - (v \cdot e)e).$$

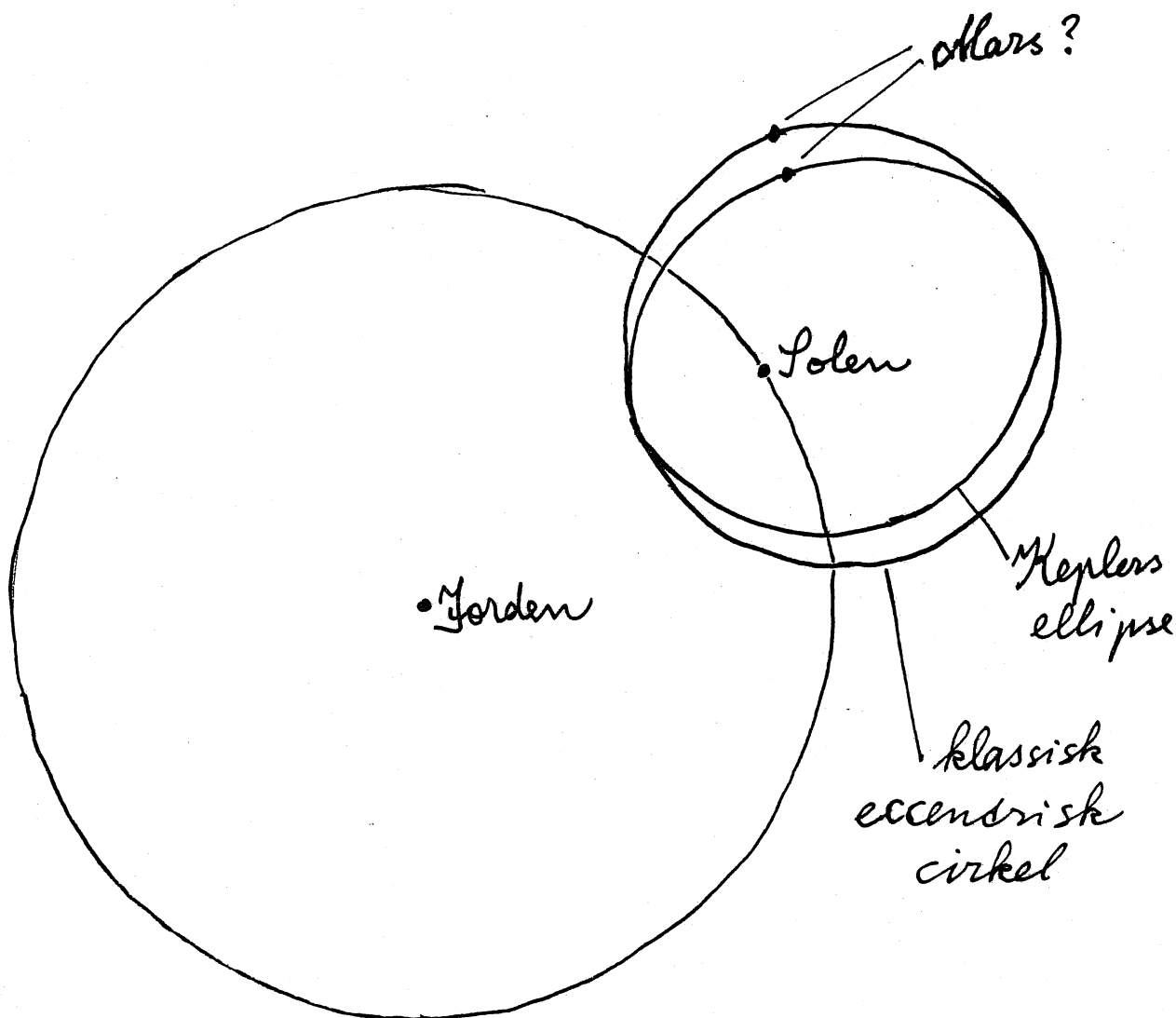
Bemærk, at de to vektorer i summen står vinkelret på hinanden.

§2. Vektorregning i rummet.

Den første anvendelse af keglesnit blev gjort af J. Kepler (1571-1630) i 1619.

I oldtiden forklarede Eudoxes og Hipparch (3. årh. f.v.t.) og Appollonios (2. årh. f.v.t.) planeterens vagabondering frem og tilbage mellem fixstjernerne ved den model, at solen bevægede sig i en cirkel med jorden i centrum, og planeterne bevægede sig i cirkler med solen et stykke fra centrum (den såkaldte excentricitet).

Nu havde Tyge Brahe (1546-1601) foretaget 12 observationer af Mars, som Kepler ikke kunne få til at passe på en cirkel, ligesom hans egen observation i 1613 ikke gjorde det bedre. Nu fik han den heldige idé at forsøge at erstatte cirklen med en ellipse, og at erstatte excentriciteten med en placering af solen i brændpunktet. Til gengæld måtte Kepler opgive de jævne hastigheder.



Kasteparablen.

Lad os se på et kanonskud. Ved selve skuddet får kanonkuglen en hastighed, som kan beskrives ved en vektor v . Hvis kuglen ikke påvirkes yderligere, vil dens bevægelse kunne beskrives med tidsparameteren t som

$$tv, \quad t \geq 0.$$

Nu påvirkes kuglen af den lodrette tyngdekraft, som vil få kuglen til at bevæge sig nedad med en hastighed, der vokser med en konstant acceleration. Hvis n er vektoren "ned", beskrives bevægelsen som

$$\frac{1}{2}gt^2n, \quad t \geq 0,$$

hvor g er tyngdeaccelerationen.

Den samlede bevægelse beskrives som kurven med parameterfremstillingen

$$\left\{ tv + \frac{1}{2}gt^2n \mid t \geq 0 \right\}.$$

Lad os indføre et koordinatsystem i planen udspændt af n og v . (Vi ser bort fra lodrette skud). Lad y -aksen have retningen $-n$, og lad x -aksen være vinkelret på y -aksen. Herved bliver parameterfremstillingen, idet $v = (\alpha, \beta)$

$$\left\{ (\alpha t, \beta t - \frac{1}{2}gt^2) \mid t \geq 0 \right\}.$$

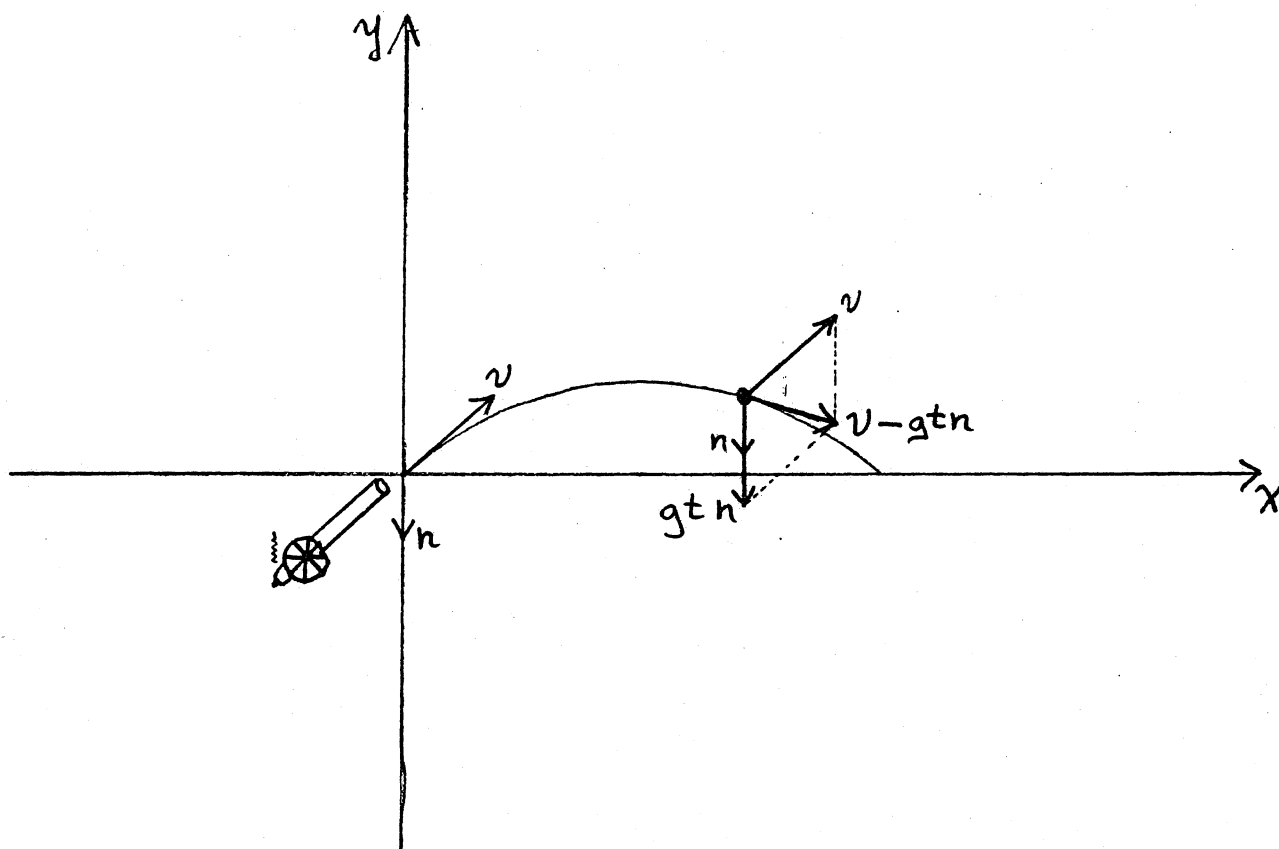
Vi ændrer nu parameteren til $x = \alpha t$, og får

$$\left\{ \left(x, \frac{\beta}{\alpha}x - \frac{1}{2}\frac{g}{\alpha^2}x^2 \right) \mid x \geq 0 \right\}.$$

Med andre ord, funktionen

$$y = ax - bx^2,$$

som er en parabel med toppen opad:



Bemærk, at kuglen under løbet kun påvirkes af en kraft i nedadgående retning, altså ikke i sin bevægelsesretning. Kuglen ændrer kun hastighed i nedadgående retning.

§3. Polynomier og rationale funktioner.Rentesregning.

Man tænker sig, at man betaler et fast beløb a årligt n gange til en fast årlig rente r . Spørgsmålet er nu, hvilken kapital man råder over på tidspunktet for den sidste indbetaling.

Svar. Indbetalingen j år før sidste betaling forrentes j gange med rentetilskrivning på r gange kapitalen. Denne indbetaling er derfor vokset til

$$a(1+r)^j.$$

Af disse størrelser var i alt n , så rådighedssummen ved slutningen er

$$\sum_{j=0}^{n-1} a(1+r)^j.$$

Formel II.3.1 med $x = 1+r$ siger nu

$$\sum_{j=0}^{n-1} a(1+r)^j = a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Havde vi afdraget på en gæld oprettet året før første indbetaling, skulle vi have opnået en kapital, der svarede til gældens værdi på samme tidspunkt. Gælden A blev forrentet n gange, så den er vokset til

$$A(1+r)^n.$$

Vi har ligningen

$$A(1+r)^n = a \frac{(1+r)^n - 1}{r},$$

som normalt omskrives til

$$A = a \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$$

som kaldes *annuitetsformlen* og benyttes f.eks. til bestemmelse af ydelsen a på lånet A til renten r med løbetiden n (år).

Sandsynlighedsregning.

Er p en sandsynlighed, dvs. $0 \leq p \leq 1$, så siger binomialformlen, at

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} = 1.$$

Dette fortolkes på den måde, at hvis sandsynligheden for et godt udfald af et forsøg er p , og man gentager forsøget n gange, så er sandsynligheden for netop m gode udfald størrelsen

$$\binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

Sandsynligheden for mindst m gode udfald er

$$\sum_{v=m}^n \binom{n}{v} p^v (1-p)^{n-v}.$$

Slår vi 6 gange med en terning, og er sandsynligheden for at få en sekser $p = \frac{1}{6}$ hver gang, så er sandsynligheden for at få netop én sekser

$$\binom{6}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{6-1} = \frac{5^5}{6^5} \approx 0.40$$

Sandsynligheden for at få mindst én sekser er

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^6 \binom{6}{v} \left(\frac{1}{6}\right)^v \left(\frac{5}{6}\right)^{6-v} &= 1 - \sum_{v=0}^0 \binom{6}{v} \left(\frac{1}{6}\right)^v \left(\frac{5}{6}\right)^{6-v} \\ &= 1 - 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.67. \end{aligned}$$

§4. Følger og rækker.

Sandsynlighedsregning.

En mand sidder og rafler med en terning og har endnu ikke fået en sekser. Han begynder at spekulere på, om han nogensinde får en sekser. Det er jo tænkeligt, at han aldrig vil få en sekser, men er det sandsynligt ?

Lad os tænke os, at sandsynligheden for at få en sekser i et kast er $\frac{1}{6}$.

Så er sandsynligheden for at få den første sekser i første kast også $\frac{1}{6}$.

Sandsynligheden for at få den første sekser i andet kast er nu produktet af sandsynlighederne for ikke at få en sekser i første kast og at få en sekser i andet kast, altså

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Tilsvarende er sandsynligheden for at få den første sekser i n-te kast

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}.$$

Nu kan vi sige, at sandsynligheden for at få en sekser nogensinde er summen af sandsynlighederne for at få en sekser i første, andet, tredje, osv. kast:

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{6} + \dots$$

Vi kan altså finde sandsynligheden for nogensinde at få en sekser som

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{6}.$$

Denne sum er beregnet på side II.4.3 til

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1.$$

Selv om det er muligt eller tænkeligt, at man aldrig får en sekser, er det altså helt usandsynligt.

§5. Kontinuitet.

Lad os beregne $\sqrt{2}$.

Den kontinuerte funktion

$$f(x) = x^2 - 2$$

har nulpunkterne $\sqrt{2}$ og $-\sqrt{2}$. Vi betragter nu intervallet $[1, 2]$. Vi finder, at $f(1) = -1$ og $f(2) = 2$. Vi beregner værdien af f i intervallets midtpunkt $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0.25$. Da denne værdi er positiv, betragter vi intervallet $[1, 1.5]$.

Ved at gentage denne proces, får vi to talfølger, en voksende startende med 1, hvori f antager negative værdier, og en aftagende startende med 2, hvori f antager positive værdier. Da afstanden mellem dem bestandig halveres, og da tallene fra den voksende altid er mindre end tallene fra den aftagende, må de begge konvergere mod samme værdi α .

$f(v_n)$	v_n	a_n	$f(a_n)$
-1	1	2	2
		1.5	0.25
-0.4375	1.25		
-0.109375	1.375		
		1.4375	0.06640625
-0.02246...	1.40625		
		1.421875	0.0217285...
-0.000427...	1.4140625		
		1.41796875	0.010635...
		1.41601563	0.005100...
		1.41503906	0.0023355...
		1.41455078	0.0009539...
		1.41430664	0.0002633...
-0.000082...	1.4141846		
		1.41424561	0.0000906...
		1.41421509	0.0000043...
-0.000039...	1.4141998		
-0.000017...	1.4142075		
-0.000006...	1.4142113		
-0.000001...	1.4142132		
		1.4142141	0.0000016...
		1.4142137	0.0000003
-0.0000004	1.4142134		
-0.0...	1.4142135		
		1.4142136	0.0...

Da talfølgerne konvergerer mod samme værdi α , må begge funktionsværdifølgerne $(f(v_n))$ og $(f(a_n))$ konvergere mod samme værdi, nemlig $f(\alpha)$. Men da alle tallene $f(v_n) \leq 0$ og alle tallene $f(a_n) \geq 0$, følger, at $f(\alpha) \leq 0$ og $f(\alpha) \geq 0$. Derfor er $f(\alpha) = 0$.

Altså er $\alpha = \sqrt{2}$.

Af tabellen følger, at

$$1.4142135 < \sqrt{2} < 1.4142136.$$

§6. Differential- og integralregning i én reel variabel.Bestemmelse af nulpunkter, Newtons metode.

Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en differentiabel funktion som antager både positive og negative værdier og derfor også 0. Vi søger en løsning på ligningen

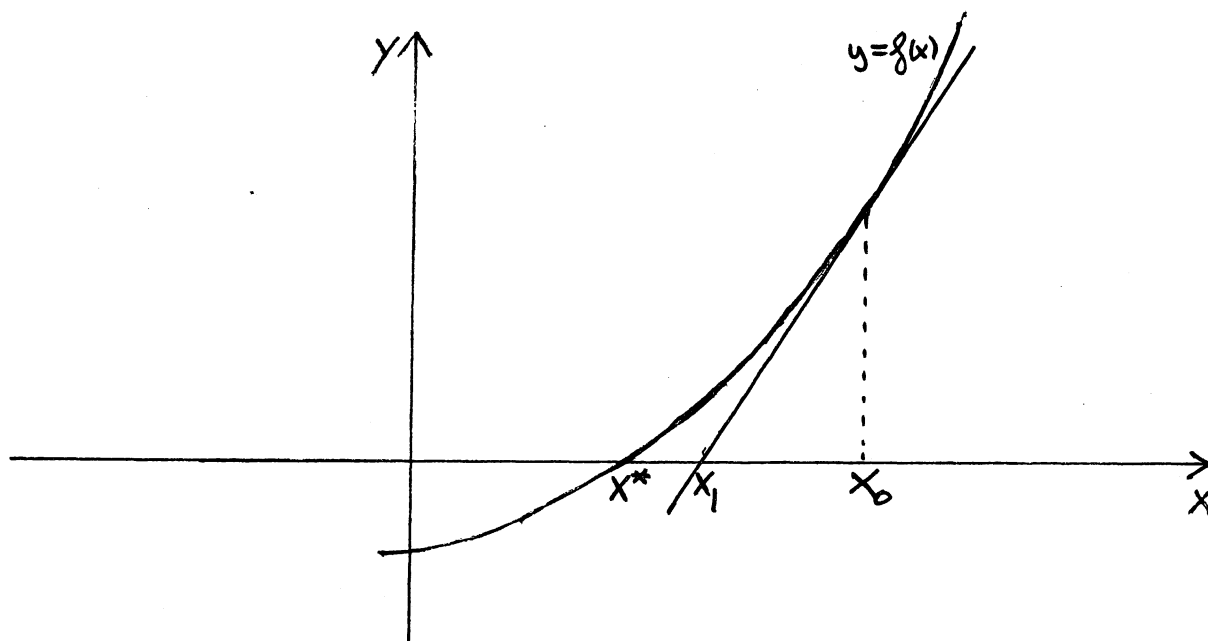
$$f(x) = 0 .$$

Hvis f er kontinuert differentiabel og det er så heldigt, at i nulpunktet x^* gælder, at

$$f'(x^*) \neq 0 ,$$

så findes en omegn om x^* hvor $f'(x) \neq 0$.

Vi tager et punkt x_0 i omegnen og skærer den ikke vandrette tangent med x-aksen:



Tangenten har ligningen

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) ,$$

så den skærer x-aksen i

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} .$$

Vi kan jo iterere processen, vi finder evt. en talfølge (x_n) defineret successivt ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Hvis talfølgen konvergerer mod en grænseværdi x^* , så må, da f og f' er kontinuerte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}.$$

Men samtidig er $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$, så

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$$

hvorfor $f(x^*) = 0$.

Med andre ord, følgen må enten konvergere mod et nulpunkt eller divergere.

Følgen er dannet ved iteration af funktionen

$$x \rightarrow g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Differentialregningens middelværdisætning I,6,5 siger, at hvis g er differentiabel, så er

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

eller $|g(b) - g(a)| = |g'(\xi)| \cdot |b - a|$.

Hvis derfor $|g'(\xi)| \leq k < 1$ i en omegn af nulpunktet, så er g en kontraktion og den itererede følge konvergent!

Nu er

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Hvis altså blot f'' er begrænset i omegnen af x^* og $f'(x^*) \neq 0$, så findes en omegn om x^* , så for alle x i omegnen, vil

$$|f(x)| \leq k \cdot \frac{(\min |f'|)^2}{\max |f''|}.$$

I denne omegn vil $|g'(x)| \leq k < 1$, og følgen derfor konvergere (mod x^*).

Bestemmelse af pH med Newtons metode.

Af reaktionsligningerne

$$C_{OH^-} = -[H^+] + [A^-] + [OH^-]$$

$$K_S = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]}$$

$$C = [HA] + [A^-]$$

$$K_V = [H^+] \cdot [OH^-]$$

findes ved elimination af de andre koncentrationer, at $x = [H^+]$ må opfylde

$$\frac{C \cdot x}{K_S + x} = \frac{1}{K_S} (x(x + C_{OH^-}) - K_V) .$$

Med andre ord, x er rod i polynomiet

$$x^3 + x^2(C_{OH^-} + K_S) + x((C_{OH^-} - C)K_S - K_V) - K_S K_V$$

I et eksempel med propionsyre ved 25° C er

$$C_{OH^-} = 9,0909 \cdot 10^{-4} \quad \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

$$K_S = 1,34 \cdot 10^{-5} \quad \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

$$C = 9,0909 \cdot 10^{-4} \quad \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

$$K_V = 1 \cdot 10^{-14} \quad \left(\frac{\text{mol}}{\text{l}}\right)^2$$

Trediegradsligningen bliver derfor

$$x^3 + x^2 \cdot 9,2249 \cdot 10^{-4} - x \cdot 10^{-14} - 1,34 \cdot 10^{-19} = 0 .$$

Vi sætter nu $x = 10^{-6}y$ og får

$$y^3 \cdot 10^{-18} + y^2 \cdot 9,2249 \cdot 10^{-16} - y \cdot 10^{-20} - 1,34 \cdot 10^{-19} = 0 .$$

Forlænges med 10^{18} , fås ligningen

$$y^3 + 922,49 y^2 - 0,01 \cdot y - 0,134 = 0 .$$

Differentialkvotienten af polynomiet er

$$p'(y) = 3y^2 + 1822.99 y - 0.01 .$$

Vi itererer nu $y - \frac{p(y)}{p'(y)}$, idet vi begynder med $y_0 = 0.01$

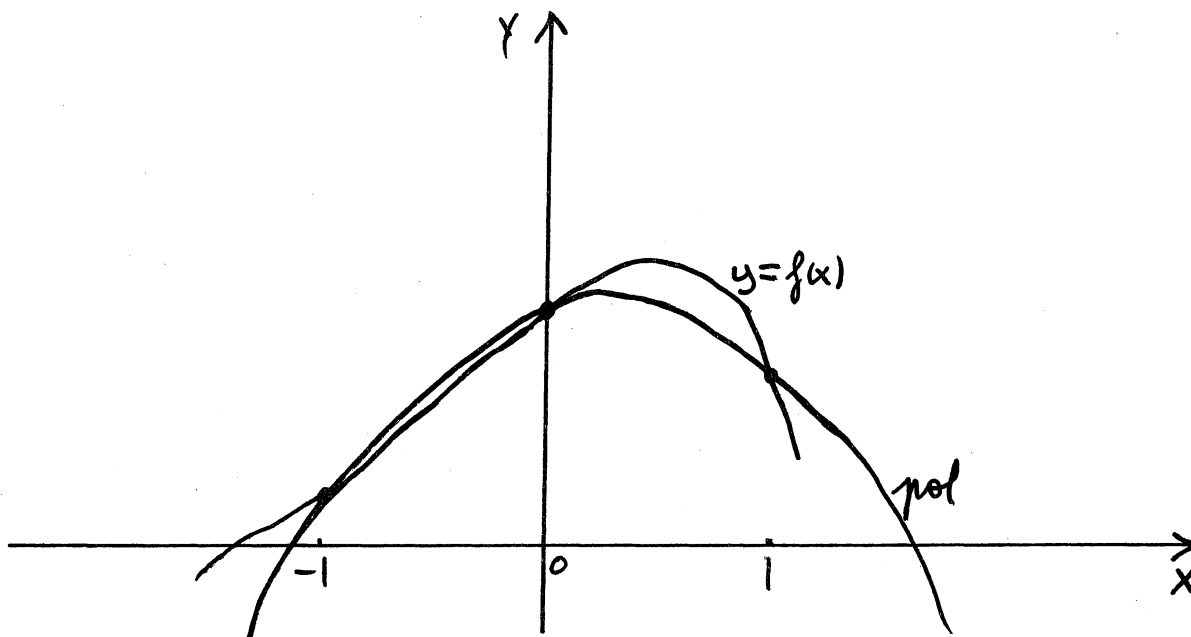
n	y_n	x_n	$-\log x_n$
0	0.01	$1 \cdot 10^{-8}$	8
1	0.012	$1.2 \cdot 10^{-8}$	-7.91
2	0.01206	$1.206 \cdot 10^{-8}$	-7.92

Integration ved interpolation.

Hvis en funktion ikke umiddelbart lader sig integrere ved stamfunktionsbestemmelse, kan man approximere funktionen over et interval med f.eks. et polynomium, som så integreres i stedet for.

Lad os se på en funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Vi kan interpolere os frem til et polynomium af 2. grad, som stemmer overens med f i punkterne $-1, 0, 1$:

$$\begin{aligned} & f(-1) \cdot \frac{x(x-1)}{(-1)(-2)} + f(0) \frac{(x+1)(x-1)}{1(-1)} + f(1) \frac{(x+1)x}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{2} f(-1) (x^2 - x) - f(0) (x^2 - 1) + \frac{1}{2} f(1) (x^2 + x) \\ &= x^2 \left(\frac{f(1) + f(-1)}{2} - f(0) \right) + x \left(\frac{f(1) - f(-1)}{2} \right) + f(0) \end{aligned}$$



Integralet af polynomiet bliver

$$\begin{aligned} & \left(\frac{f(1) + f(-1)}{2} - f(0) \right) \frac{x^3}{3} + \left(\frac{f(1) - f(-1)}{2} \right) \frac{x^2}{2} + f(0)x \Big]_{-1}^1 \\ &= \frac{f(1) + f(-1)}{3} - \frac{2f(0)}{3} + 2f(0) = \frac{4(f(0)) + f(1) + f(-1)}{3} . \end{aligned}$$

For et vilkårligt interval $[a, b]$, må vi korrigere med forholdet mellem intervalllængderne, $\frac{b-a}{2}$. Sætter vi $c = \frac{a+b}{2}$, (midtpunktet), bliver integralapproximationsformlen:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{1}{6}(b-a) (f(a) + 4f(c) + f(b)) .$$

Denne formel kaldes *Simpsons formel* eller *Keplers tønderregel* (1608). Man kan vise, at fejlen på integralet kan skrives

$$- \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) , \text{ for et } \xi \in [a, b] .$$

Eksempel:

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big]_0^\pi = 2 .$$

Formlen giver $\frac{1}{6}\pi \cdot 4 \sin \frac{\pi}{2} = 2.09$. Fejlvurderingen siger, da $\sin^{(4)} = \sin$, og $0 \leq \sin \xi \leq 1$, at fejlen er (sand værdi - approximation)

$$- \frac{\pi^5}{2880} \cdot \sin \xi ,$$

altså fejlen er negativ og numerisk mindre end

$$0.11 .$$

Naturligvis opnås meget bedre resultater over intervaller, der er mindre end 1. F.eks.

$$\int_0^{\pi/4} \sin x dx = -\cos x \Big]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.292893 .$$

Nu er $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, så formelen giver

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(0 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0.292933 .$$

Fejlen er -0.00004 ; og vurderingen giver her

$$-\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{2880} \leq \text{fejlen} \leq 0 .$$

Altså $-0.0001 \leq \text{fejlen} \leq 0$.

§7. Differentialligninger af første orden.Beskrivelse af radioaktivt henfald.

Givet en masse m_0 af et radioaktivt stof til tiden 0. Idet vi forestiller os, at massen af stof til tiden t , beskrevet ved funktionen $g(t)$, aftager ved henfald med hastigheden

$$-k \cdot g(t)$$

hvor k er en karakteristisk konstant, må funktionen g løse begyndelsesproblemet

$$\frac{dg}{dt} = -k g(t)$$

(*)

$$g(0) = m.$$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen er

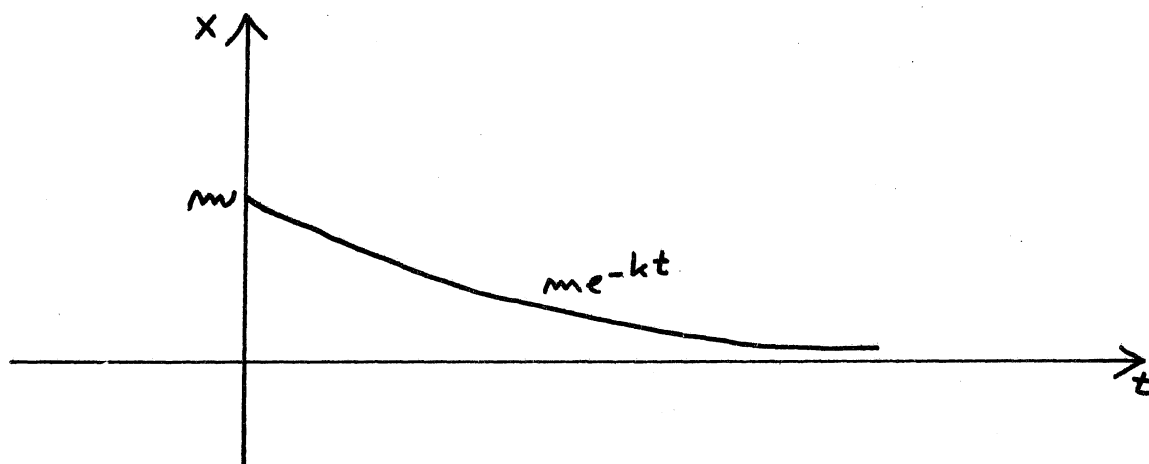
$$g(t) = \lambda e^{-kt}$$

som for $t = 0$ skal opfylde

$$g(0) = \lambda = m.$$

Altså er ligningen

$$g(t) = m e^{-kt}$$



Halveringstiden er nu den tid t_h , hvor massen er halveret, dvs.

$$\frac{1}{2} m = m e^{-k t_h}$$

altså

$$t_h = \frac{\ln 2}{k}.$$

Beskrivelse af logistisk vækst.

En population $N(t)$ formerer sig proportionalt med antallet af individer, men dør af overbefolkning proportionalt med kvadratet herpå, nemlig proportionalt med antallet af møder. Populationen må derfor vokse som løsning til ligninger

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2,$$

hvor a og b er positive tal. Med en lille positiv startpopulation vokser løsningen mod den singulære løsning

$$N(t) = \frac{a}{b}.$$

Jvf. §II, 7.

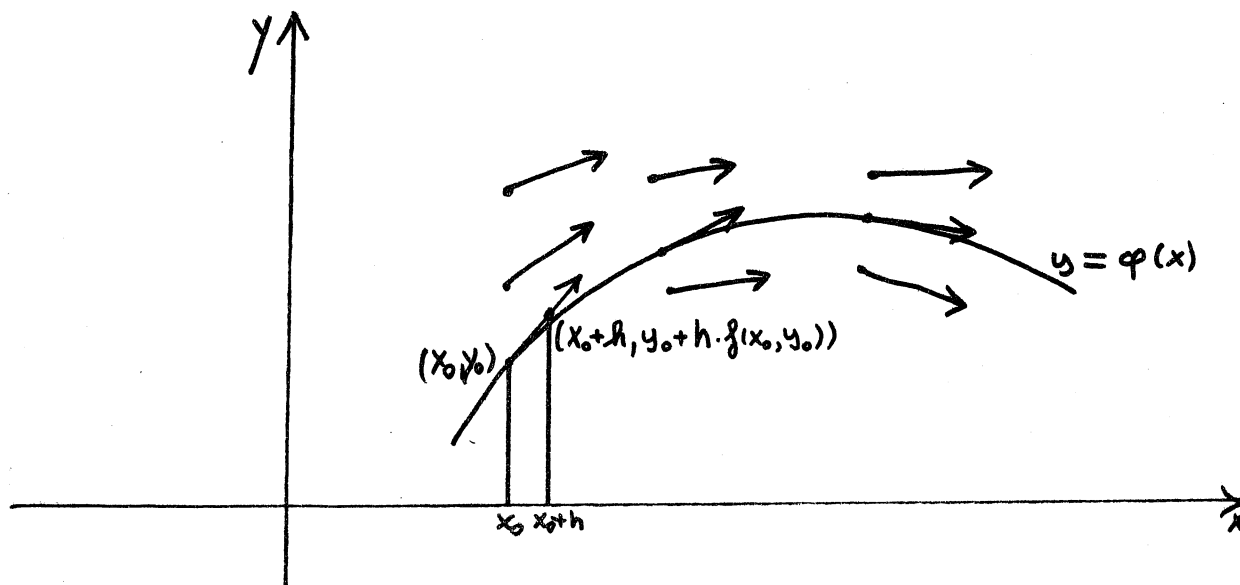
Numerisk løsning af differentialligning.

Ligningen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

fortolkes således: Funktionen $f(x, y)$ foreskriver en tangenthældning i hvert punkt af (x, y) -planen. En løsning $y = \varphi(x)$ til ligningen har i hvert af sine punkter en tangent med den foreskrevne retning.

Står vi i et punkt (x_0, y_0) , angiver $f(x_0, y_0)$ ca. i hvilken retning vi skal finde $(x+h, \varphi(x+h))$. Man kunne sige, det er ca. $(x+h, y_0 + h \cdot f(x_0, y_0))$.



Med denne formel kan man sukcessivt finde approksimationen til løsningen $y = \varphi(x)$ ved

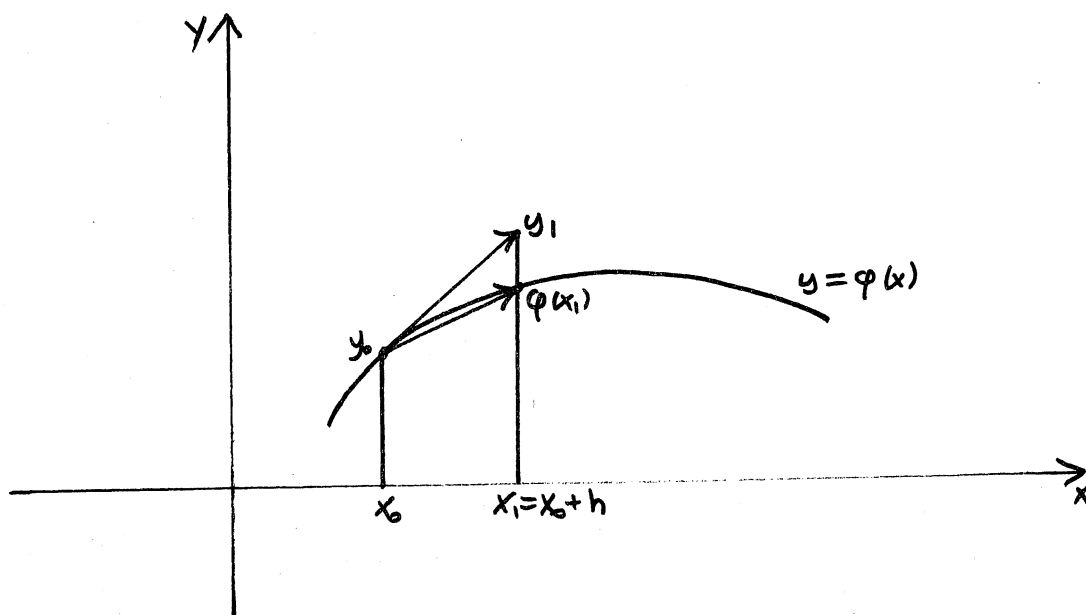
$$y_1 = y_0 + h f_0$$

$$\vdots$$

$$y_{j+1} = y_j + h f_j$$

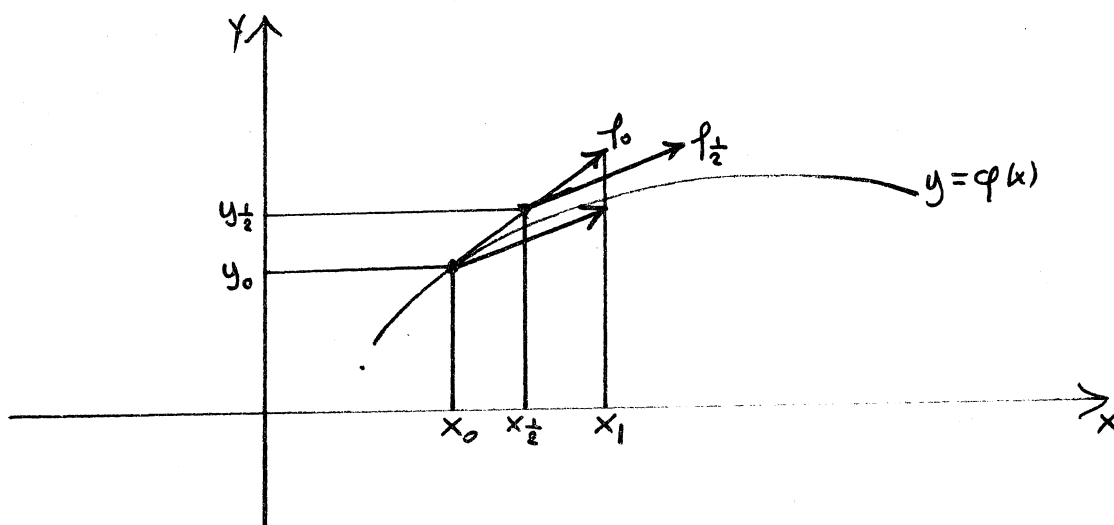
hvor $f_j = f(x_j, y_j)$.

Denne fremgangsmåde kaldes *Eulers metode*, og er lige primitiv nok. At benytte f 's værdi i venstre endepunkt er nemt, men misvisende.



I stedet for $f_0 = f(x_0, y_0)$ kunne man tænke på

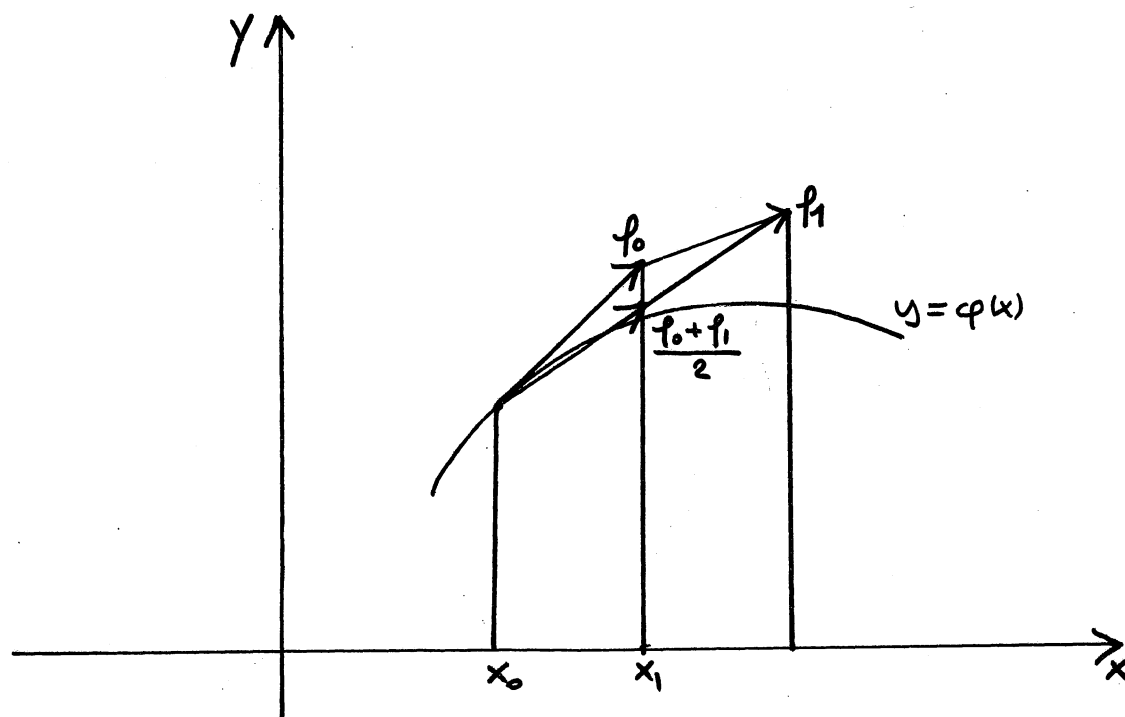
$$f_{\frac{1}{2}} = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f_0\right)$$



Dette kaldes den *forbedrede Euler metode*.

Man kunne også tage et gennemsnit af tangenthældningerne i (x_0, y_0) og $(x_1, y_0 + hf_0)$. Altså

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f_0 + f_1) ; \quad f_1 = f(x_1, y_0 + hf_0) .$$



Dette kaldes den *forbedrede Euler-Cauchy metode*.

I praksis bruges helst en endnu mere kompliceret forskrift, den såkaldte *Runge-Kutta metode*, hvor man sætter

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f_j ,$$

$$f_j = \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$$

$$k_0 = f(x_j, y_j)$$

$$k_1 = f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} k_0)$$

$$k_2 = f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} k_1)$$

$$k_3 = f(x_j + h, y_j + h k_2) .$$

Har man programmerbar lommeregner el. lign., er det ingen sag at udføre.

§8. Integraler i $\mathbb{R}^n$.

Lad $I \subseteq \mathbb{R}^n$ og $J \subseteq \mathbb{R}$ være intervaller. Lad endvidere

$$f(x,y) \text{ for } x \in J, y \in I$$

være en reel funktion.

Hvis $f(x, \cdot): I \rightarrow \mathbb{R}$ for hvert fast $x \in J$ er Lebesgue integrabel, kan vi definere

$$g(x) = \int_I f(x,y) dy.$$

Hvis nu yderligere $f(\cdot, y): J \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert for hvert fast $y \in I$ og der findes en Lebesgue integrabel funktion

$$F: I \rightarrow \mathbb{R}$$

så

$$|f(x,y)| \leq F(y) \text{ for alle } (x,y) \in J \times I,$$

så er også g kontinuert.

Thi, lad $x_n \rightarrow x^*$, for $n \rightarrow \infty$. Så er

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f(x_n, y) dy = (\text{Sætning I, 8, 15}) \\ &= \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y) dy = \int_I f(x^*, y) dy = g(x^*). \end{aligned}$$

Antager vi yderligere, at $f(\cdot, y): J \rightarrow \mathbb{R}$ er differentiabel for hvert fast y , og at der findes en Lebesgue integrabel funktion $F: J \rightarrow \mathbb{R}$, så

$$|f'_x(x,y)| \leq F(x) \text{ for alle } (x,y) \in J \times I,$$

så er også g differentiabel, med differentialkvotient

$$g'(x) = \int_I f'_x(x,y) dy.$$

Thi, lad os betragte

$$\begin{aligned}\frac{g(x+dx) - g(x)}{dx} &= \frac{1}{dx} \left(\int_I (f(x+dx, y) dy - \int_I f(x, y) dy) \right) \\ &= \int_I \frac{f(x+dx, y) - f(x, y)}{dx} dy .\end{aligned}$$

Nu er

$$\left| \frac{f(x+dx, y) - f(x, y)}{dx} \right| = |f'_x(x+\xi dx, y)| \leq F(x)$$

for et $\xi \in [0, 1]$. Derfor kan Sætning I, 8, 15 bruges.

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{g(x+dx) - g(x)}{dx} = \int_I \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx, y) - f(x, y)}{dx} dy = \int_I f'_x(x, y) dy .$$

Gamma-funktionen.

Vi definerer

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy \quad \text{for } x > 0 .$$

For $x \in [a, b]$ og $y \in [0, \infty[$ har vi vurderingen

$$y^{x-1} e^{-y} \leq (y^{a-1} + y^{b-1}) e^{-y} .$$

Funktionen $\Gamma(x)$ er derfor kontinuert blot funktionerne

$$f(x, y) = y^{x-1} e^{-y}$$

er kontinuerte i x og integrable i y . Nu er $f(x, \cdot)$ kontinuert og positiv, så $f(x, \cdot)$ er integrabel, blot integralet er endeligt.

På intervallet $]0, 1]$ fås

$$y^{x-1} e^{-y} \leq y^{x-1} ,$$

og derfor

$$\int_0^1 y^{x-1} e^{-y} dy \leq \int_0^1 y^{x-1} dy = \left[\frac{y^x}{x} \right]_0^1 = \frac{1}{x} < \infty .$$

På intervallet $[1, \infty[$ fås

$$y^{x-1} e^{-y} \leq y^{x-1} e^{-(y/2)} \cdot e^{-(y/2)} \leq K \cdot e^{-(y/2)} ,$$

da $y^{x-1} e^{-(y/2)} \rightarrow 0$ for $y \rightarrow \infty$; og derfor

$$\int_1^\infty y^{x-1} e^{-y} dy \leq K \int_1^\infty e^{-(y/2)} dy = 2K e^{-\frac{1}{2}} < \infty.$$

Nu er $f(x, y)$ differentiabel i x med differentialkvotient

$$f'_x(x, y) = y^{x-1} \cdot \ln y \cdot e^{-y}.$$

Funktionen

$$y^{x-1} \ln y e^{-y}$$

er integrabel på $[1, \infty[$ som ovenfor. På $]0, 1]$ fås for $a > 0$

$$\begin{aligned} \int_c^1 y^{x-1} \ln y dy &= \left[\frac{y^x}{x} \ln y \right]_c^1 - \int_c^1 \frac{y^x}{x} \cdot \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{c^x}{x} \ln c - \left(\frac{1}{x} - \frac{c^x}{x} \right). \end{aligned}$$

Da $x > 0$, har vi $c^x \ln c \rightarrow 0$ for $c \rightarrow 0$. Altså er differentialkvotienterne integrable med fælles vurdering for $a \leq x \leq b$. Derfor er $\Gamma(x)$ differentiabel med differentialkvotient

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \ln y \cdot y^{x-1} e^{-y} dy.$$

Det ses let, at

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

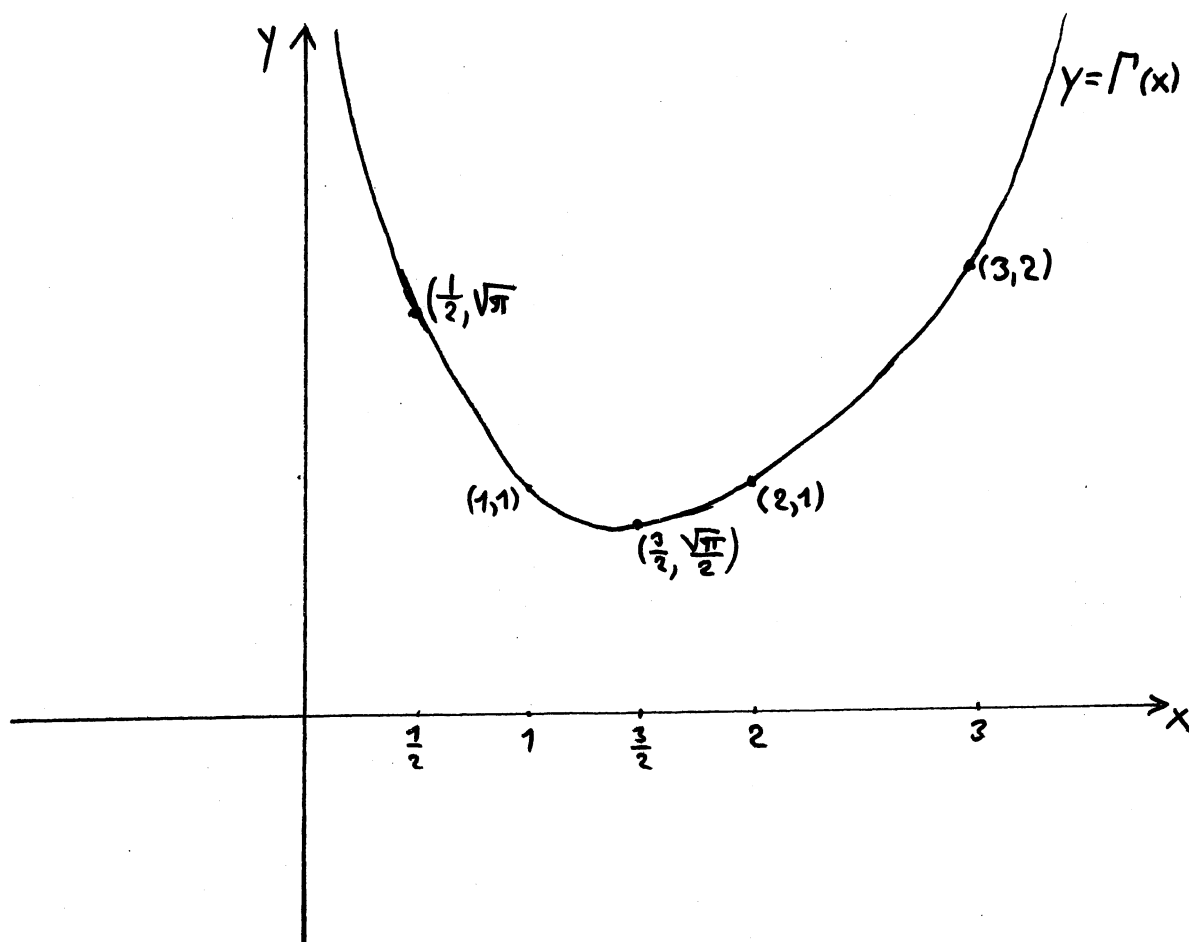
For alle x gælder formelen

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

For hele tal gælder specielt

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Funktionen ser således ud:



$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} dy = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Vi skal senere regne ud, at det er $= \sqrt{\pi}$.

~~Gamma~~-funktionen opfylder tillige ligningen

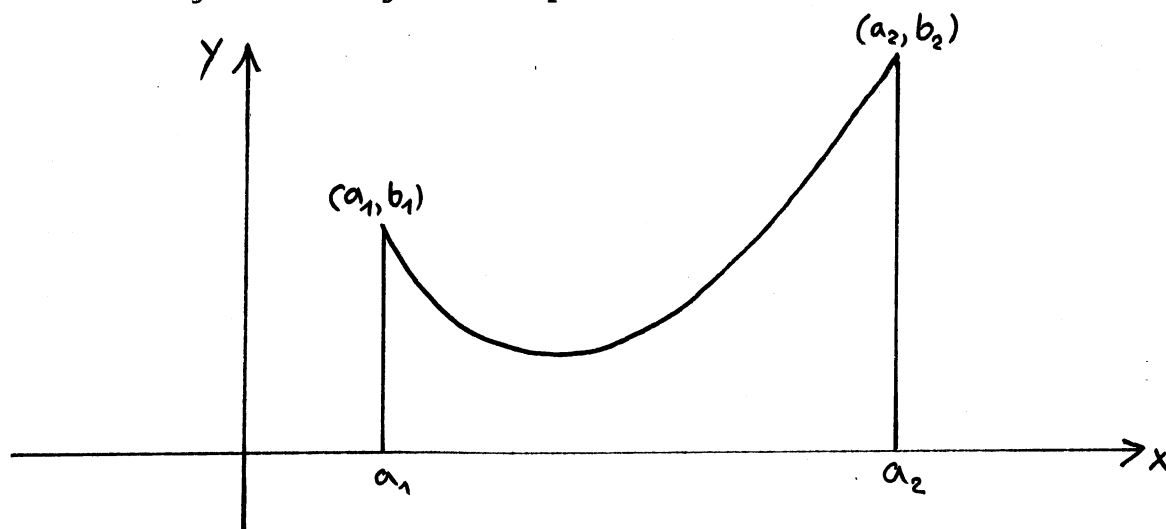
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \text{for } 0 < x < 1$$

og

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} \Gamma(x).$$

Kædelinien.

En tung kæde hænger i to punkter.



Hvilken kurve beskriver kæden?

Lad os antage, at kæden er længere end afstanden mellem ophængningspunkterne. Vi beskriver kæden som en funktion

$$y = f(x)$$

som opfylder

$$b_1 = f(a_1) \quad , \quad b_2 = f(a_2)$$

samt at længden af kurver er foreskrevet, dvs.

$$\int_{a_1}^{b_1} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = L$$

hvor $L > \sqrt{(b_1 - b_2)^2 + (a_2 - a_1)^2}$.

Tyngdepunktet for en kurve har ordinat gennemsnittet af ordinatorne langs kurven

$$\frac{1}{L} \int_I y \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{L} \int_{a_1}^{a_2} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Vi forestiller os, at kæden er i ligevægt, sådan at tyngdepunktet ligger lavest muligt.

Analyse. Vi tænker os nu, at f løser opgaven at have lavest tyngdepunkt.

Lad nu $g(x)$ være en funktion, så

$$g(a_1) = g(a_2) = 0$$

og lad ε være et numerisk lille tal. Funktionen

$$f(x) + \varepsilon g(x)$$

er nu en perturbation af løsningen, som har tyngdepunkt

$$y_\varepsilon = \frac{1}{L} \int_{a_1}^{a_2} (f(x) + \varepsilon g(x)) \sqrt{1 + (f'(x) + \varepsilon g'(x))^2} dx.$$

Denne funktion af ε er differentiabel med differentialkvotient

$$\frac{dy_\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{1}{L} \int_{a_1}^{a_2} \left(g(x) \sqrt{1 + (f'(x) + \varepsilon g'(x))^2} + \frac{(f(x) + \varepsilon g(x)) (f'(x) + \varepsilon g'(x)) g'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x) + \varepsilon g'(x))^2}} \right) dx.$$

Da nu tyngdepunktet lå minimalt for $\varepsilon = 0$, så må denne differentialkvotient være 0 for $\varepsilon = 0$.

$$\int_{a_1}^{a_2} \left(g(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} + \frac{f(x) f'(x) g'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right) dx = 0.$$

Delvis integration af andet led giver

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} \frac{f(x) f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \cdot g'(x) dx &= \left[\frac{f(x) f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \cdot g(x) \right]_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{f f'}{\sqrt{1 + (f')^2}} \right) g(x) dx \\ &= - \int_{a_1}^{a_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{f f'}{\sqrt{1 + (f')^2}} \right) g(x) dx \end{aligned}$$

da $g(a_1) = g(a_2) = 0$.

Vi får derfor ligningen

$$\int_{a_1}^{a_2} \left(\sqrt{1 + (f')^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{f f'}{\sqrt{1 + (f')^2}} \right) \right) g(x) dx = 0.$$

Skal denne ligning være opfyldt for alle mulige perturbationer, så må

$$(*) \quad \sqrt{1 + f'(x)^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x) f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right) = 0.$$

Kædelinien må tilfredsstille differentialligningen (*).

Denne ligning løses lidt tricky. Vi ganger med $f'(x)$ og får

$$f'(x) \sqrt{1+f'(x)^2} - f'(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \right) = 0.$$

Vi tager nu en stamfunktion hertil

$$\int \sqrt{1+(f')^2} f' dx - \int f' \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \right) dx = c \text{ konstant.}$$

Delvis integration af integralerne giver

$$f\sqrt{1+(f')^2} - \int f \cdot \frac{f'f''}{\sqrt{1+(f')^2}} dx - f' \frac{ff'}{\sqrt{1+(f')^2}} + \int f'' \frac{ff'}{\sqrt{1+(f')^2}} dx = c$$

eller

$$f\sqrt{1+(f')^2} - f \frac{(f')^2}{\sqrt{1+(f')^2}} = c$$

eller

$$\frac{f}{\sqrt{1+(f')^2}} = c.$$

Vi kan jo skrive

$$f'(x) = \pm \sqrt{\frac{f(x)^2}{c^2} - 1}.$$

Så løsningen er den omvendte af

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}} dy = \int \frac{c}{\sqrt{y^2 - c^2}} dy.$$

Substitueres $y = c \cosh t$, fås

$$\int \frac{c^2 \sinh t dt}{\sqrt{c^2 (\cosh^2 t - 1)}} = c \int dt = ct + d.$$

Vi har altså

$$x = c \operatorname{arccosh} \frac{y}{c} + d$$

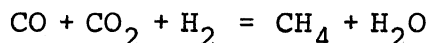
hvoraf

$$y = c \cosh \frac{x-d}{c}.$$

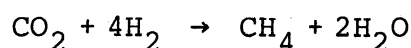
Konklusion: $\cosh$ er den kurve, en kæde tegner!

§9. Vektorrum og lineære funktioner.Kemisk ligevægt.

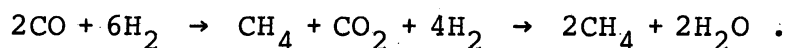
En kemisk ligning som f.eks.



fortolkes som at noget kulilte plus noget kultveilte plus noget brint kan give methan plus vand. Ligningen siger ikke, hvor meget. Ligningen ovenfor kan realiseres som forskellige reaktioner, f.eks.



Disse tre er ikke væsentlig forskellige. Af 3'die og 2'den reaktion fås den første:



Spørgsmålet er, for et givet sæt af kemiske forbindelser, hvor mange væsentlig forskellige reaktioner kan vi håbe, der er mulighed for? De mulige er dem, hvor antallet af atomer går op. Vi søger et sæt af tal, $x_1, \dots, x_5$, så

$$x_1\text{CO} + x_2\text{CO}_2 + x_3\text{H}_2 + x_4\text{CH}_4 + x_5\text{H}_2\text{O} = 0 \quad (\text{nul})$$

i den forstand, at der ikke er brint, ilt eller kul i overskud.

Vi kan fortolke situationen som en lineær funktion af et vektorrum ind i et andet. Hver gang vi har et talsæt $(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5$ giver molekylformlerne en vis mængde af hver af grundstofferne, $y_1\text{H}, y_2\text{C}, y_3\text{O}$, altså $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

Muligheden for en reaktion forekommer netop når $(y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 0)$. Med andre ord, vi søger kernen for den lineære funktion!

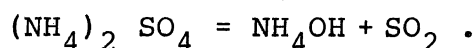
Funktionen beskrives ved en matrix, hvis søjler er billederne af standardbasen i $\mathbb{R}^5$. Altså

$$\underline{y}_i = \underline{A} \underline{x}_i, \quad \text{hvor}$$

$$\underline{A} = \begin{array}{ccccc} & \text{CO} & \text{CO}_2 & \text{H}_2 & \text{CH}_4 & \text{H}_2\text{O} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \text{H} \\ \text{C} \\ \text{O} \end{array} \end{array} .$$

Spørgsmålet er, hvad er rangen af $\underline{A}$, og find en basis for kernen for $\underline{A}$. I dette tilfælde er rangen åbenbart 3, så kernen har dimension $5 - 3 = 2$. (Sætning I, 9, 9.) Vi kender allerede en basis, nemlig $(0, 1, 4, -1, -2)$ og $(2, -1, 2, -1, 0)$ som åbenbart tilhører kernen og er uafhængige.

Et andet eksempel er ligningen

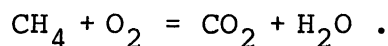


Vi skriver matricen op for $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

$$\begin{array}{ccc} (\text{NH}_4)_2 \text{SO}_4 & \text{NH}_4\text{OH} & \text{SO}_2 \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \text{N} \\ \text{H} \\ \text{S} \\ \text{O} \end{array} \end{array} .$$

Denne matrix har rang 3, så kernen er $0 \in \mathbb{R}^3$. Det betyder, at *ingen* reaktion er mulig mellem netop disse tre stoffer.

Endnu et simpelt eksempel er ligningen



Matricen for $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er

$$\underline{A} = \begin{array}{cccc} & \text{CH}_4 & \text{O}_2 & \text{CO}_2 & \text{H}_2\text{O} \\ \left(\begin{array}{cccc} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \text{H} \\ \text{C} \\ \text{O} \end{array} \end{array} .$$

En systematisk bestemmelse af kernen består i at løse ligningerne $\underline{A} \underline{x} = \underline{0}$.

$$(1) \quad 4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 0$$

$$(2) \quad 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 0$$

$$(3) \quad 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 0 .$$

Vi ganger (2) med 4 og trækker fra (1):

$$(1)' \quad 0x_1 + 0x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0$$

$$(2) \quad 1x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 0$$

$$(3) \quad 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 0 .$$

Nu ganger vi (2) med 4 og lægger (1)' til, og vi ganger (3) med 2 og lægger (1)' til:

$$(1)' \quad -4x_3 + 2x_4 = 0$$

$$(2)' \quad 4x_1 + 2x_4 = 0$$

$$(3)' \quad 4x_2 + 4x_4 = 0 .$$

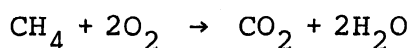
Vi kan forkorte med 2, 2 og 4 til

$$-2x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_4 = 0 .$$

Disse ligninger viser, at vi kan vælge x_4 frit, men så er x_1 , x_2 og x_3 bundet. Kernen har derfor dimension 1, og en basis vektor fås ved f.eks. at sætte $x_4 = 2$. Så er $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ og $x_3 = 1$. Vi kan altså håbe på en reaktion af formen



og dermed proportionale.

Et kompliceret eksempel er følgende ligning: Vi ved, at bradykinin ($\text{C}_{50}\text{H}_{73}\text{N}_{15}\text{O}_{11}$) kun indeholder amino-syrerne arginin ($\text{C}_6\text{H}_{14}\text{N}_4\text{O}_2$), glycin ($\text{C}_2\text{H}_5\text{NO}_2$), phenylalamin ($\text{C}_9\text{H}_{11}\text{NO}_2$), prolin ($\text{C}_5\text{H}_9\text{NO}_2$) og serin ($\text{C}_3\text{H}_7\text{NO}_3$). Spørgsmålet er, en bradykinin kan spaltes i disse aminosyrer ved hydrolyse (tilsætning af vand, H_2O).

Vi har 7 stoffer (vand inclusive) og 4 grundstoffer. Funktionen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ har derfor en kerne af dimension ≥ 3 . Spørgsmålet er, om der i kernen findes et talsæt, så højst vandmængden har samme fortegn som bradykinin-mængden.

Matricen for f er

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Arg} & \text{Gly} & \text{Phe} & \text{Pro} & \text{Se} & \text{Bra} & \text{Van} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 6 & 2 & 9 & 5 & 3 & 50 & 0 \\ 14 & 5 & 11 & 9 & 7 & 73 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 11 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \text{C} \\ \text{H} \\ \text{N} \\ \text{O} \end{array} \end{array}$$

Når vi skal finde kernen, forsøger vi at udtrykke den med bradykinin og vand blandt parametrene.

På samme måde som ovenfor omskrives ligningerne til

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 10 & 3 & -39 & 9 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & -1 & 163 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 19 & -1 \end{array} \right) \underline{x}_1 = \underline{0}_1 .$$

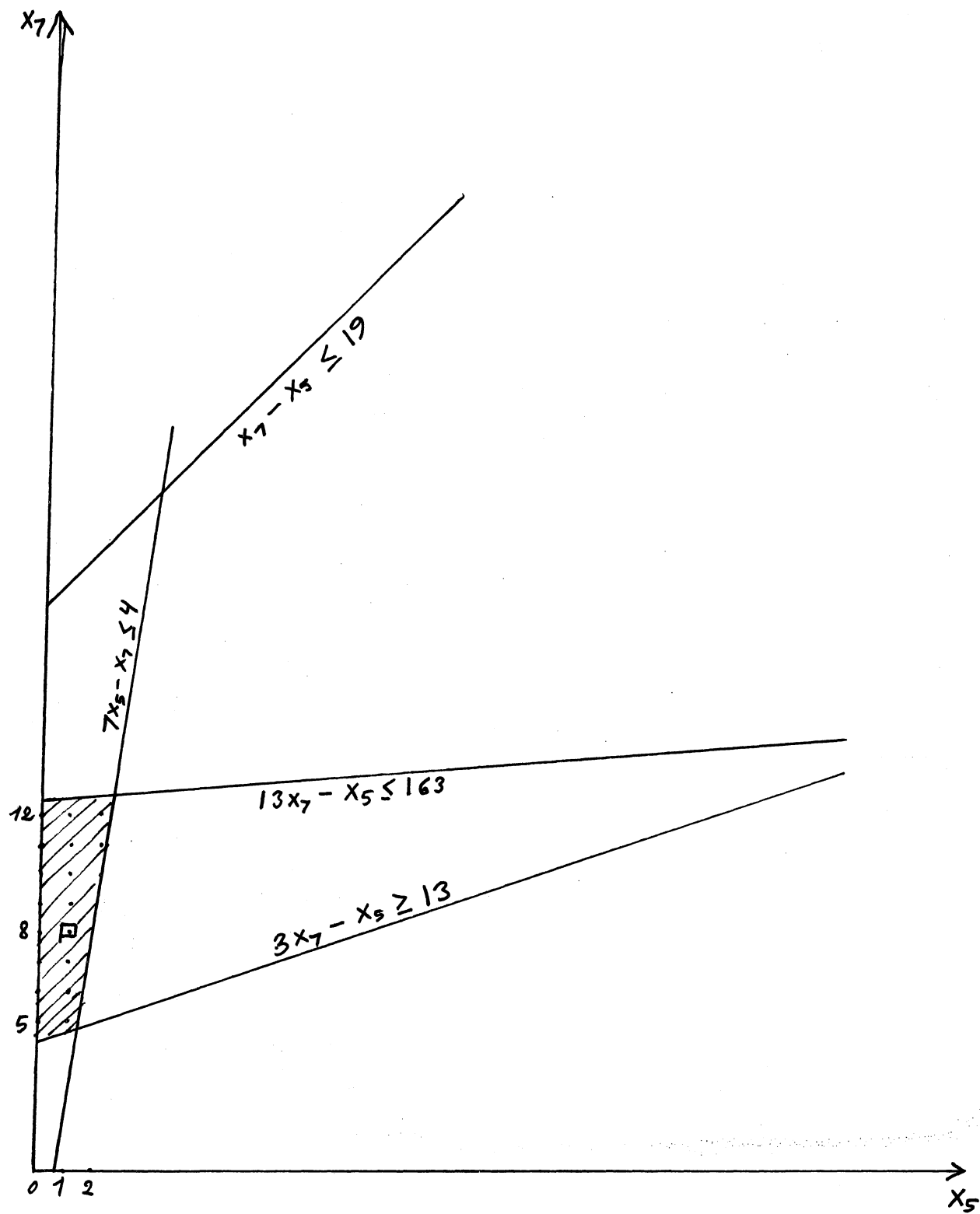
Nu er vi kun interesseret i løsninger, hvor $x_1, \dots, x_5$ er positive (eller 0), $x_6 = -1$ og $x_7 \leq 0$. Skifter vi fortegn på x_6 og x_7 , er vi kun interesseret i positive løsninger til ligningerne:

$$\begin{aligned} 10x_4 &= -3x_5 - 39 + 9x_7 \\ 30x_3 &= x_5 + 163 - 13x_7 \\ 5x_2 &= -7x_5 + 4 - x_7 \\ 6x_1 &= x_5 + 19 - x_7 . \end{aligned}$$

At alle variable skal være positive, betyder, at vi skal søge (x_5, x_7) i første kvadrant, så de 4 uligheder er opfyldt:

$$\begin{aligned} -3x_5 + 9x_7 &\geq 39 \\ -x_5 + 13x_7 &\leq 163 \\ 7x_5 - x_7 &\leq 4 \\ -x_5 + x_7 &\leq 19 \end{aligned}$$

Vi skal søge løsningen i den skraverede firkant.

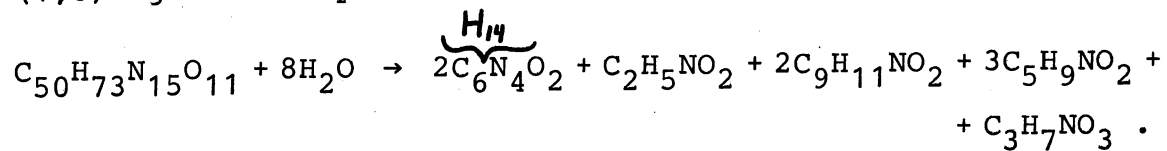


En pæn løsning vil være heltallig og opfylde, at x_1 er hel,
dvs.

$$6x_1 = x_5 - x_7 + 19 .$$

Altså må 6 gå op i $x_7 - x_5 - 1$. Det efterlader os løsningerne
(x_5, x_7) enten (0,7) eller (1,8) .

(1,8) giver den pæne reaktionsligning:



§10. Determinanter.

Hvis to funktioner ikke er proportionale, må deres kvotient ikke være konstant. Lad funktionerne være φ, ψ ; så er de ikke proportionale, hvis

$$\frac{\varphi}{\psi} \neq \alpha \quad (\text{konstant}).$$

Så er

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)' \neq 0.$$

Nu er

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)' = \frac{\psi\varphi' - \varphi\psi'}{\psi^2} = \frac{1}{\psi^2} \begin{vmatrix} \psi & \psi' \\ \varphi & \varphi' \end{vmatrix}.$$

Determinanten $W = \begin{vmatrix} \psi & \psi' \\ \varphi & \varphi' \end{vmatrix}$ kaldes *Wronski-determinanten*.

Bemærk,

$$W' = \begin{vmatrix} \psi & \psi'' \\ \varphi & \varphi'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \psi' & \psi' \\ \varphi' & \varphi' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi & \psi'' \\ \varphi & \varphi'' \end{vmatrix}.$$

Hvis φ og ψ er lineært uafhængige løsninger til differentialligningen

$$(D^2 - \alpha D^1 + \beta D^0)\varphi = 0,$$

hvor α og β er funktioner, så vil $W(\varphi, \psi)$ løse

$$(D^1 - \alpha D^0)W = 0.$$

Thi

$$\begin{aligned} W' - \alpha W &= \begin{vmatrix} \alpha & \alpha'' \\ \psi & \psi'' \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} \varphi & \varphi' \\ \psi & \psi' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \varphi & (\varphi'' - \alpha\varphi') \\ \psi & (\psi'' - \alpha\psi') \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi & -\beta\varphi \\ \psi & -\beta\psi \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Heraf følger, at $W \neq 0$ overalt, altså at φ og ψ er overalt lineært uafhængige.

Samtidig ses, at W kan findes uafhængigt af kendskabet til φ og ψ . Der gælder simpelthen

$$W(x) = e^{\int \alpha(x) dx} .$$

Har vi gættet en løsning φ , findes ψ af ligningen

$$\begin{vmatrix} \varphi & \varphi' \\ \psi & \psi' \end{vmatrix} = W$$

nemlig

$$\psi' - \frac{\varphi'}{\varphi} \psi = \frac{W}{\varphi} ,$$

som løses uden videre. Den homogene løses af φ , så den heterogene løses af (se side I,7,6):

$$\psi = \varphi \int \frac{W}{\varphi^2} .$$

§11. Egenverdier og egenvektorer.

Lad $x = x(t)$ og $y = y(t)$ være differentiable funktioner.
Et system af koblede differentialligninger

$$Dx = ax + by$$

$$Dy = cx + dy$$

hvor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ er konstanter, kan skrives som

$$(*) \quad D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Ved en koordinattransformation med en matrix med konstante koefficienter, $\underline{S}$, fås

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{S} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

som kan differentieres middelbart til

$$D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{S} D \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} .$$

Indsættes i (*) fås

$$\underline{S} D \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underline{S} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} .$$

Da $\underline{S}$ er regulær, findes $\underline{S}^{-1}$; den ganger vi med.

$$D \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} .$$

Nu siger Sætning I,11,6, at vi kan finde $\underline{S}$, så matricen $\underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S}$ får Jordans normalform:

Enten $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} .$

Men $\lambda \in \mathbb{C}$. Men egenverdierne er rødder i polynomiet

$$\det \left(x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)$$

som har reelle koefficienter, $\left(1, -(a+d), \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right)$. Hvis derfor λ_1 og λ_2 ikke er reelle, så er $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

Et sådant system har altså en standardform, enten

$$(1) \quad \begin{aligned} Dx &= a'x \\ Dy &= d'y \end{aligned} \quad a', d' \in \mathbb{R}$$

eller

$$(2) \quad \begin{aligned} Dx &= (\alpha + i\beta)x \\ Dy &= (\alpha - i\beta)y \end{aligned} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$$

eller

$$(3) \quad \begin{aligned} Dx &= \lambda x \\ Dy &= x + \lambda y \end{aligned} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(Men i et koordinatsystem, hvis basis ikke er sædvanlig, dvs. vinkelret og orienteret.)

På disse former løses ligningerne uden videre.

$$(1) \quad x = ke^{a't}, \quad y = he^{d't}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= ke^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) \\ y &= he^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t) \end{aligned}$$

eller de reelle løsninger

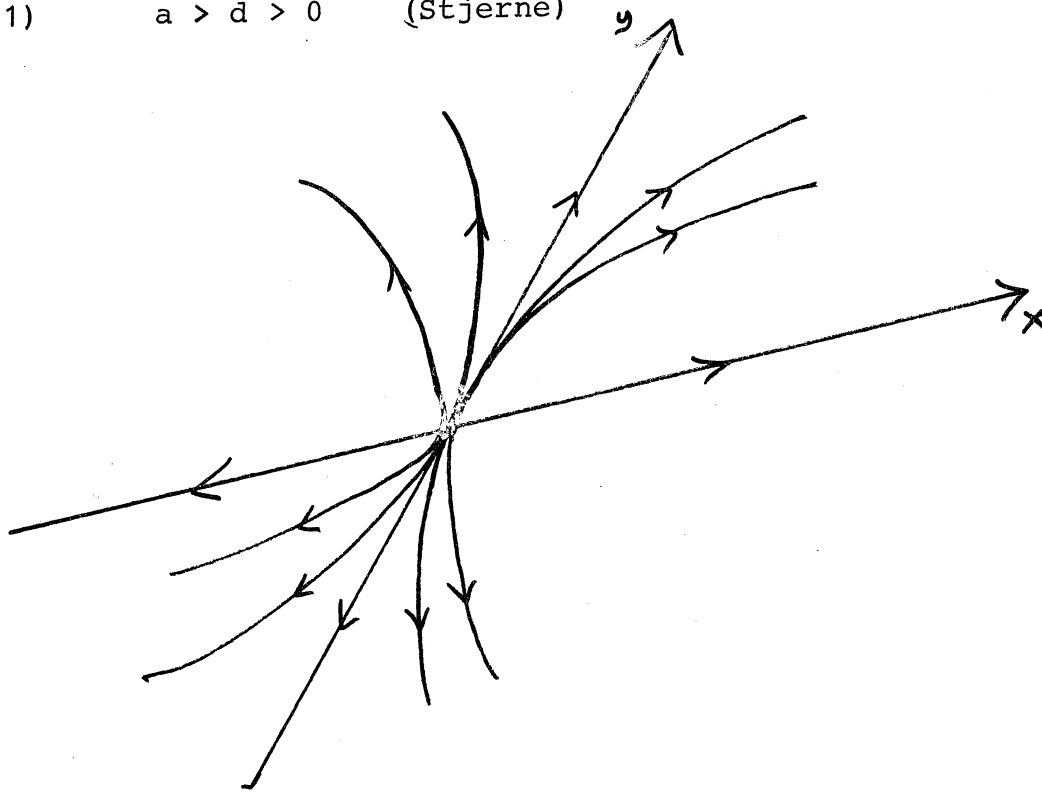
$$x + y = pe^{\alpha t} \cos \beta t$$

$$x - y = qe^{\alpha t} \sin \beta t$$

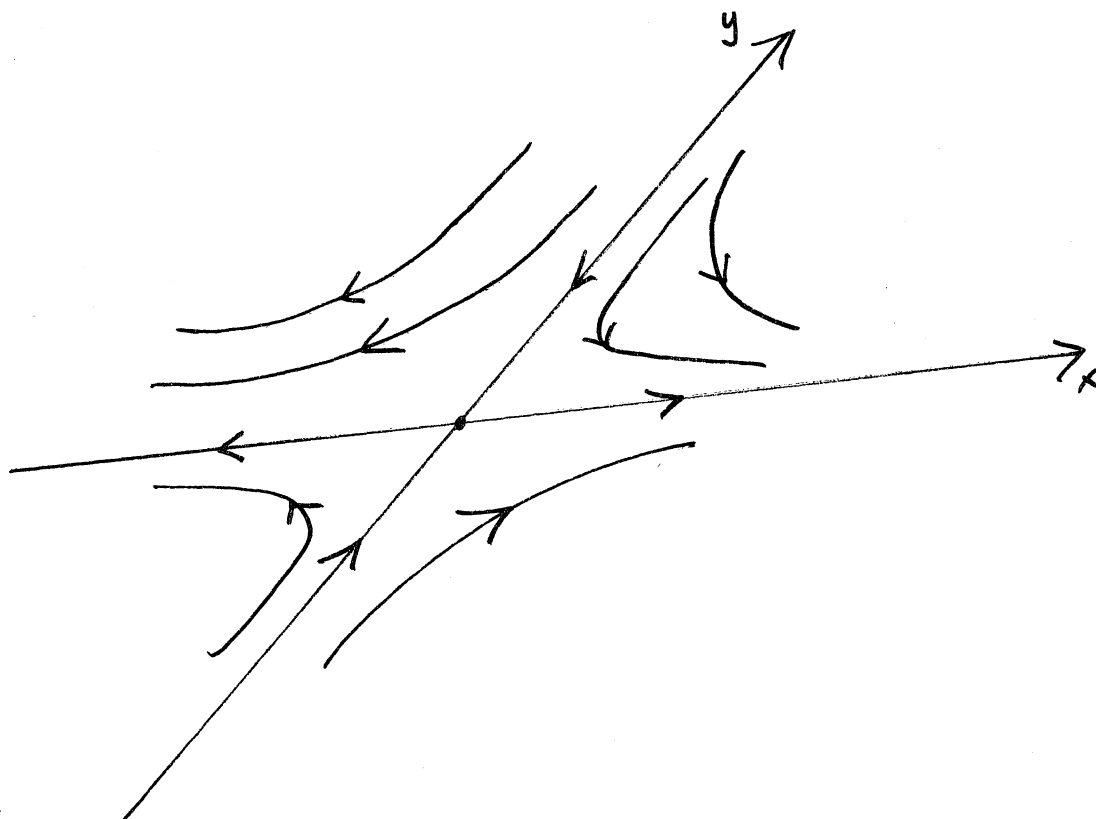
$$(3) \quad x = ke^{\lambda t}, \quad y = kte^{\lambda t} + he^{\lambda t}$$

I omegnen af den singulære løsning $(x(t), y(t)) \neq (0, 0)$ fås følgende billeder:

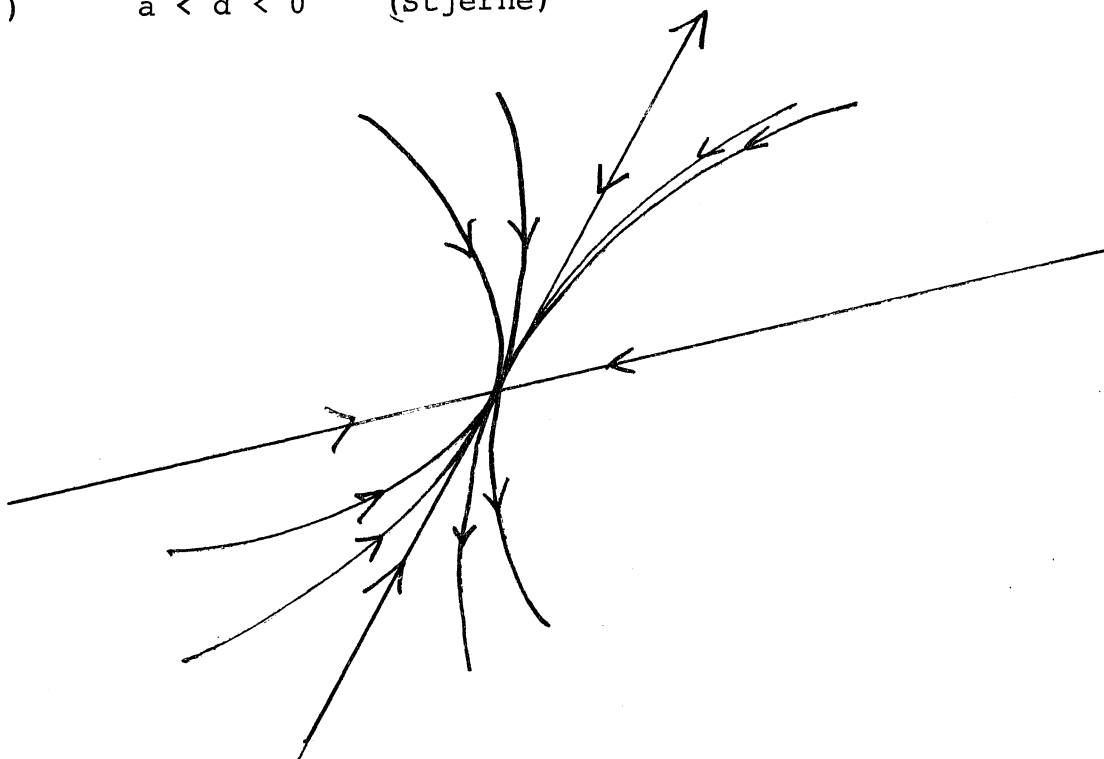
(1) $a > d > 0$ (Stjerne)



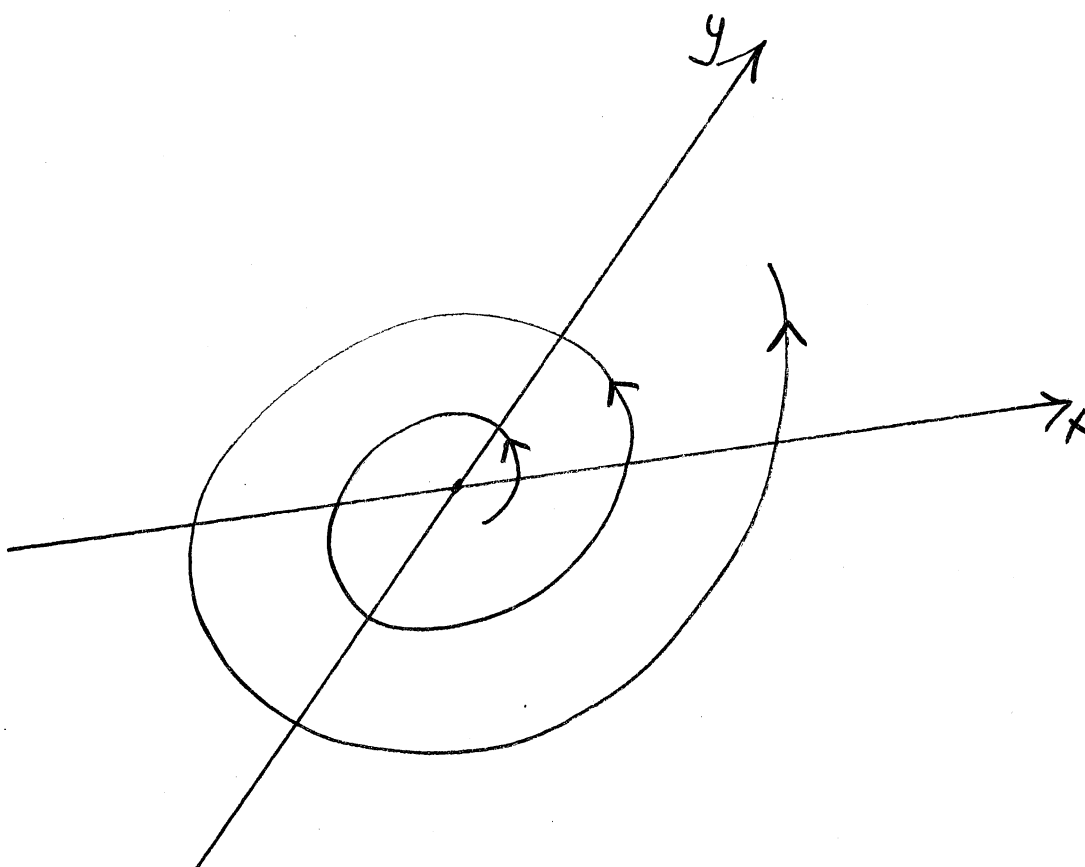
(1) $a > 0 > d$ (Sadel)



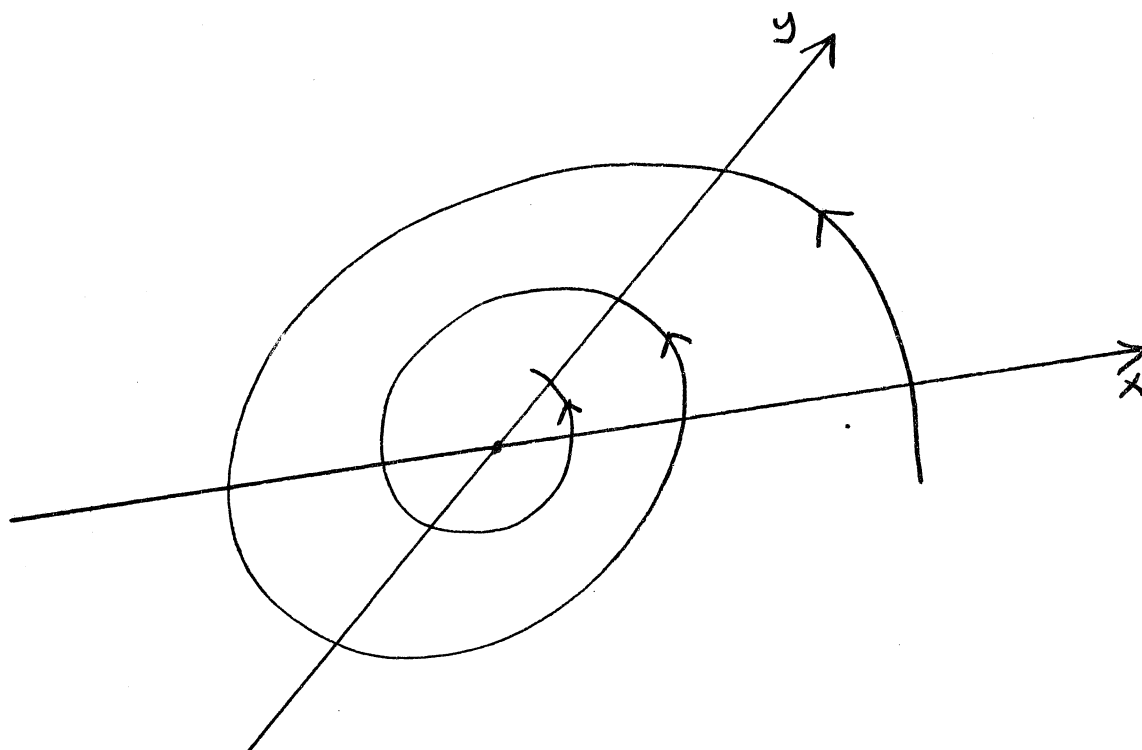
(1) $a < d < 0$ (Stjerne)



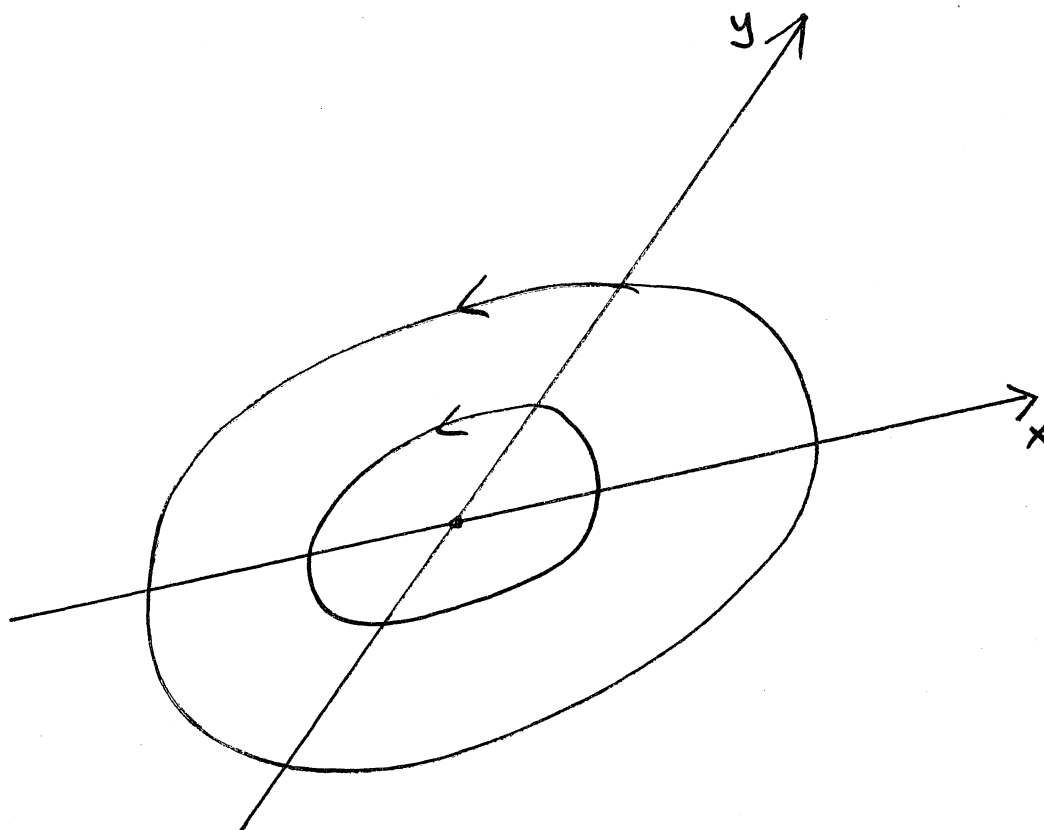
(2) $\alpha > 0$ [$\beta < 0$] (Spiral)



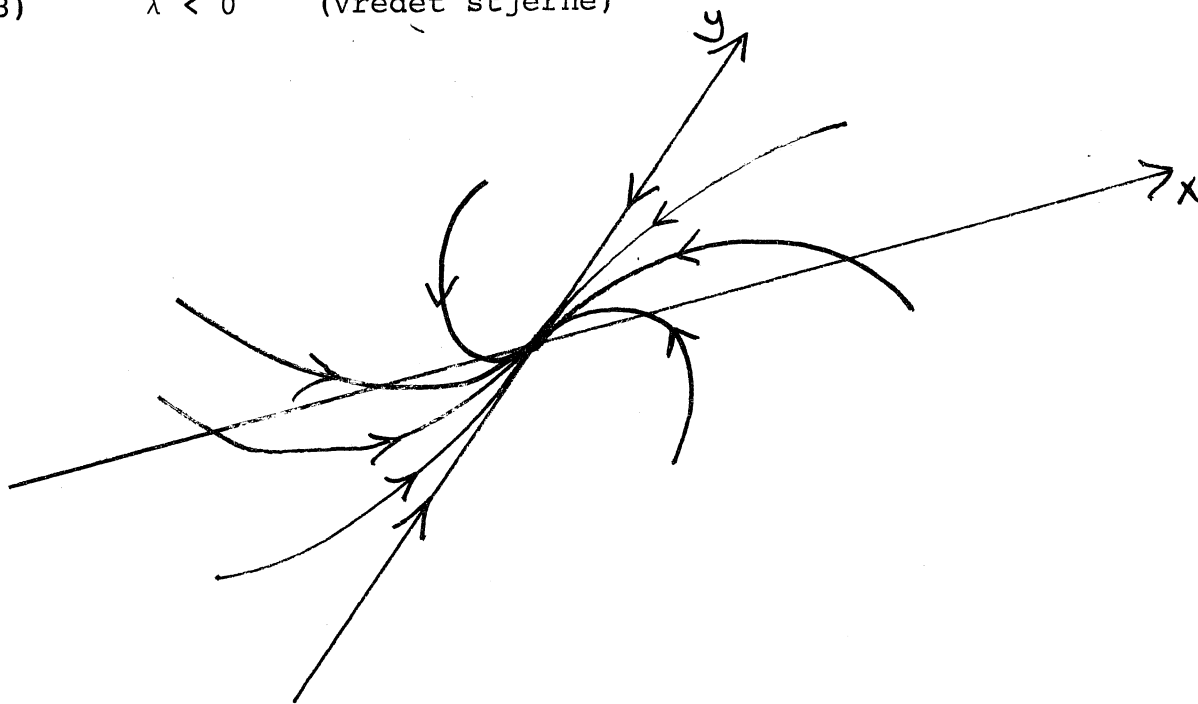
(2) $\alpha < 0$ $[\beta < 0]$ (Spiral)



(2) $\alpha = 0$ $[\beta < 0]$ (Ellipser)



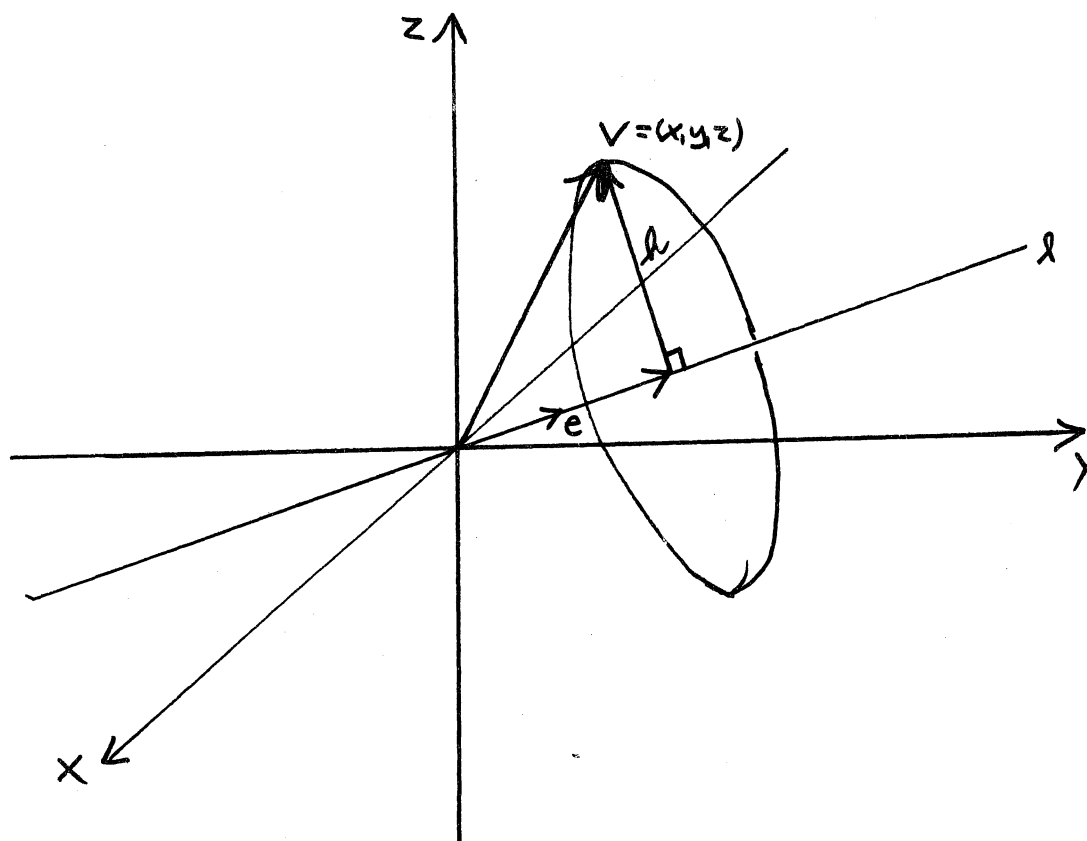
(3) $\lambda < 0$ (Vredet stjerne)



Bemærk, at singulariteten virker tiltrækkende på løsningerne, når samtlige egenverdier har negativ realdel, men frastødende, når samtlige egenverdier har positiv realdel.

§12. Ortogonalsystemer.Inertimoment.

I et sædvanligt koordinatsystem i rummet drejes et punkt med koordinater $v = (x, y, z)$ om en linie, der frembringes af enhedsvektoren $e = (\alpha, \beta, \gamma)$ [$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$].



Afstanden fra v til projektionen på linien l er længden af $h = v - (v \cdot e)e = e \times (v \times e)$, (jvf. side I,2,6). Da $e \perp (v \times e)$, er længden af h :

$$|h| = |v \times e|.$$

Momentet er proportionalt med afstandens kvadrat, altså

$$\begin{aligned} |v \times e|^2 &= (v \times e) \cdot (v \times e) = \begin{vmatrix} y & z \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2 \\ &= \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2(\alpha\beta xy + \alpha\gamma xz + \beta\gamma yz) = \end{aligned}$$

$$= (\alpha \ \beta \ \gamma) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} .$$

Med andre ord, momentet af punktet om en linie fås som denne kvadratiske form (2'den grads homogent polynomium) i liniens frembringerkoordinater.

Momentet af et legeme F fås nu simpelthen ved integration af de 9 matrix-funktioner over F .

Lad nu F være en terning $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ fraskåret en pyramide ved et plant snit gennem $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ og $(1,1,0)$. Se side III, 8, 3.

Denne figur er symmetrisk i x, y og z , så vi finder kun 2 forskellige integraler,

$$\iiint_F (y^2 + z^2) dx dy dz$$

og

$$\iiint_F (-xy) dx dy dz .$$

Nu er på grund af symmetrien

$$\iiint_F (y^2 + z^2) dx dy dz = 2 \iiint_F y^2 dx dy dz .$$

I §III, 8 udregnede vi

$$\iiint_F y^2 dx dy dz = \frac{7}{30}$$

og

$$\iiint_F xy dx dy dz = \frac{19}{120} .$$

Så den kvadratiske form bliver

$$(\alpha \ \beta \ \gamma) \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & -\frac{19}{120} & -\frac{19}{120} \\ -\frac{19}{120} & \frac{7}{15} & -\frac{19}{120} \\ -\frac{19}{120} & -\frac{19}{120} & \frac{7}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} .$$

Matricen kaldes *inertimatricen* i de valgte koordinater. Ved at vælge andre koordinater kan vi opnå, at inertimatricen antager diagonalform. Sådanne koordinaters basisvektorer kaldes i fysikken *de principale retninger* fra punktet 0 for kloden F .

Side V, 11, 1-2 fandt vi egenverdierne $\frac{18}{120} = \frac{3}{20}$ og $\frac{75}{120} = \frac{5}{8}$ med multipliciteten hhv. 1 og 2.

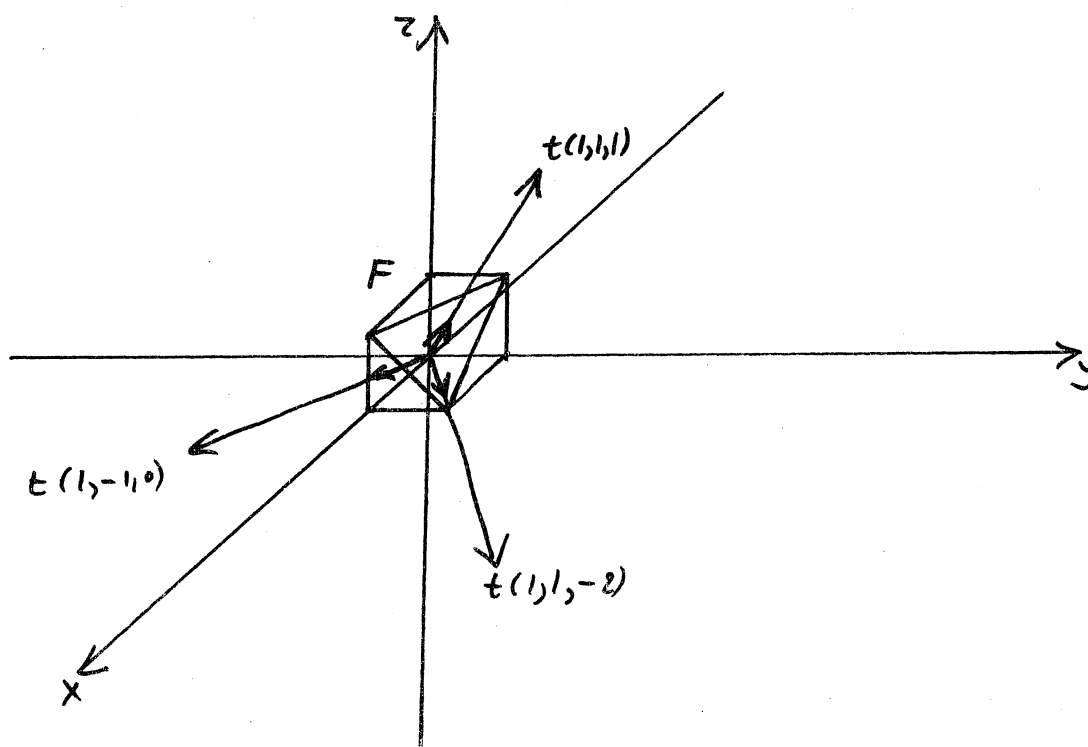
Egenvektoren til $\frac{3}{20}$, $(1, 1, 1)$ normeres til $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. I egenrummet til $\frac{5}{8}$, der var udspændt af $(1, -1, 0)$ og $(1, 0, -1)$, vælger vi en ortonormal basis. F.eks. $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ og, da den sidste er ortogonal på begge de andre, f.eks.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right). \end{aligned}$$

I disse koordinater får inertimatricen formen

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{20} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

Principale retninger for F



Regressionsanalyse.

Vi tænker os, at vi har foretaget en række observationer af en relation, dvs. par $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, hvor x_i kan være tidspunkt og y_i tilsvarende temperatur f.eks.

Vi tænker os, at vi har en teori eller idé om, at disse observationer skal følge en bestemt sammenhæng $y = f(x)$, hvor f skal være af en bestemt form, f.eks. lineær eller løsning til en differentialligning eller lignende.

Vi skal så svare på 2 spørgsmål:

- 1) Hvilken funktion af den givne art passer bedst med observationerne?
- 2) Passer observationerne godt nok med funktionen, til at vi vil tro på teorien?

At svare på spørgsmål 1) kaldes regression. At svare på spørgsmål 2) er opgaven for den matematiske statistik.

Som et eksempel skal vi se på lineær regression. Vi spørger, hvilken retlinet funktion

$$y = \alpha x + q$$

passer bedst med observationerne?

Vi må først fortolke "passer bedst". Vi tænker os, at de to målestørrelser x_i og y_i har forskellig status, således at x_i er målt praktisk taget uden usikkerhed (f.eks. aflæsning af ur), mens y_i har en vis afvigelse fra de sande værdier.

Det er da tradition at måle afvigelsen på y -værdierne som sammenligning af

$$(y_1, \dots, y_n) \text{ med } (\alpha x_1 + q, \dots, \alpha x_n + q) .$$

Et oplagt mål for afvigelsen er normen (l_2 kvadrat), altså

$$g(\alpha, q) = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + q - y_i)^2 = \|\alpha \underline{x} + q \underline{1} - \underline{y}\|^2 ,$$

hvor $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{1} = (1, \dots, 1)$ og $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

Opgaven er at bestemme α og q , så $g(\alpha, q)$ bliver mindst mulig.

Nu er

$$\begin{aligned}
 g(\alpha, q) &= (\alpha x + q\underline{1} - y) \cdot (\alpha x + q\underline{1} - y) \\
 &= \alpha^2 x \cdot x + q^2 \underline{1} \cdot \underline{1} + y \cdot y + 2\alpha q x \cdot \underline{1} - 2\alpha x \cdot y - 2q \underline{1} \cdot y .
 \end{aligned}$$

Denne kvadratiske funktion har et minimum i (α, q) , hvis egenverdierne for matricen

$$\begin{pmatrix} x \cdot x & x \cdot \underline{1} \\ x \cdot \underline{1} & \underline{1} \cdot \underline{1} \end{pmatrix}$$

er positive. Nu er egenverdierne sum jo $x \cdot x + \underline{1} \cdot \underline{1} > 0$ og deres produkt er determinanten $(x \cdot x)(\underline{1} \cdot \underline{1}) - (x \cdot \underline{1})^2$, som er positiv, fordi Sætning I, 12, 2 siger, at

$$|x \cdot \underline{1}| \leq \|x\| \|\underline{1}\| .$$

Konklusion: Der findes et par (α_0, q_0) , så $q(\alpha_0, q_0) \leq g(\alpha, q)$ for alle $(\alpha, q) \in \mathbb{R}^2$.

For at finde (α_0, q_0) er det nok at bemærke, at differentialkvotienterne $g'_\alpha(\alpha_0, q_0)$ og $g'_q(\alpha_0, q_0)$ begge må være 0. Vi skal altså blot løse ligningerne

$$2\alpha(x \cdot x) + 2q(x \cdot \underline{1}) - 2x \cdot y = 0$$

$$2q(\underline{1} \cdot \underline{1}) + 2\alpha(x \cdot \underline{1}) - 2\underline{1} \cdot y = 0$$

eller

$$\alpha(x \cdot x) + q(x \cdot \underline{1}) = x \cdot y$$

$$\alpha(x \cdot \underline{1}) + q(\underline{1} \cdot \underline{1}) = \underline{1} \cdot y$$

som har løsningerne

$$\alpha_0 = \frac{\begin{vmatrix} x \cdot y & x \cdot \underline{1} \\ \underline{1} \cdot y & \underline{1} \cdot \underline{1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x \cdot x & x \cdot \underline{1} \\ x \cdot \underline{1} & \underline{1} \cdot \underline{1} \end{vmatrix}} = \frac{(x \cdot y)(\underline{1} \cdot \underline{1}) - (\underline{1} \cdot y)(x \cdot \underline{1})}{(x \cdot x)(\underline{1} \cdot \underline{1}) - (x \cdot \underline{1})^2}$$

$$q_0 = \frac{\begin{vmatrix} x \cdot x & x \cdot y \\ x \cdot \underline{1} & \underline{1} \cdot y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x \cdot x & x \cdot \underline{1} \\ x \cdot \underline{1} & \underline{1} \cdot \underline{1} \end{vmatrix}} = \frac{(x \cdot x)(\underline{1} \cdot y) - (x \cdot y)(x \cdot \underline{1})}{(x \cdot x)(\underline{1} \cdot \underline{1}) - (x \cdot \underline{1})^2} .$$

Nu er jo $1 \cdot 1 = \sum_{i=1}^n 1 \cdot 1 = n$. Vi sætter $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x \cdot 1}{1 \cdot 1}$, det er gennemsnittet af x 'erne, og tilsvarende $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{y \cdot 1}{1 \cdot 1}$.

Så er

$$\alpha_0 = \frac{(x \cdot y) - n \bar{x} \bar{y}}{x \cdot x - n (\bar{x})^2} \quad q_0 = \frac{(x \cdot x) \bar{y} - (x \cdot y) \bar{x}}{x \cdot x - n (\bar{x})^2}.$$

Linien er altså

$$y = \alpha_0 x + q_0.$$

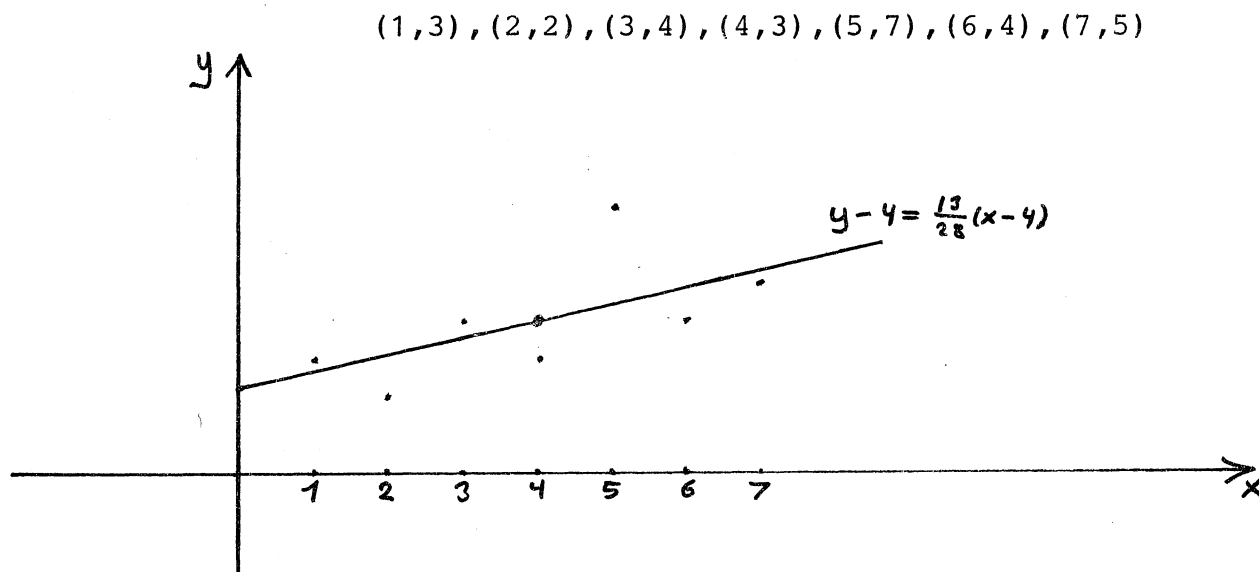
Imidlertid kan liniens ligning simplificeres. Vi finder funktionsværdien i $\bar{x}$:

$$\alpha_0 \bar{x} + q_0 = \frac{(x \cdot y) \bar{x} - n (\bar{x})^2 \bar{y}}{x \cdot x - n (\bar{x})^2} + \frac{(x \cdot x) \bar{y} - \bar{x} (x \cdot y)}{x \cdot x - n (\bar{x})^2} = \frac{(x \cdot x - n (\bar{x})^2) \bar{y}}{x \cdot x - n (\bar{x})^2} = \bar{y}.$$

Punktet $(\bar{x}, \bar{y})$ ligger altså på linien. Den kan derfor skrives på formen

$$y - \bar{y} = \alpha_0 (x - \bar{x}), \quad \alpha_0 = \dots$$

Et taleksempel:



Vi finder

$$\bar{x} = \frac{1}{7} (1 + 2 + \dots + 7) = 4,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{7} (3 + 2 + 4 + 3 + 7 + 4 + 5) = 4.$$

Linien går gennem (4, 4).

$$\alpha_0 = \frac{x \cdot y - n \bar{x} \bar{y}}{x \cdot x - n (\bar{x})^2} = \frac{125 - 7 \cdot 4 \cdot 4}{140 - 7 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{13}{28}.$$

§13. Differential- og integralregning i flere reelle variable.Pendulet.

Et pendul er et lod ophængt i en snor. Vi kan antage, at loddet svinger frit, altså at loddet bevæger sig på en kugleflade med radius r , hvor r er snorens længde. Evt. kan bevægelsen begrænses til en lodret plan, så loddet bevæger sig på en cirkel med radius r . Vi vil formulere os generelt, så begge situationer er omfattet af formuleringen.

Lad loddets masse være m og tyngdeaccelerationsvektoren G , som tænkes uafhængig af loddets plads på kuglefladen. F.eks. kan G være $(0, -g)$ eller $(0, 0, -g)$, hvor g er tyngdeaccelerationen ved jordoverfladen. Loddet bliver så påvirket af to kræfter. 1) Tyngdekraften, som er mG . 2) Snoretrækket, som netop er stort nok til at holde loddet på kuglefladen.

Lad koordinatsystemet have nulpunkt i kuglens centrum. Da er loddets position givet ved en vektor, s , som opfylder $|s| = r$. Loddets opførsel er givet ved en funktion $s(t)$ af tiden t . Lad os kalde loddets hastighed $v = \frac{ds}{dt}$ og acceleration $a = \frac{dv}{dt}$. At loddet bliver på kuglefladen kan udtrykkes ved, at hastigheden altid er tangent til kuglen. Altså at til enhver tid gælder

$$v \cdot s = 0.$$

Ved differentiation af denne ligning fås et bånd på accelerationen

$$(*) \quad a \cdot s + v \cdot v = 0.$$

Loddet påvirkes af en kraft, $K = ma$, så

$$a = \frac{1}{m} K.$$

K er summen af de to ovennævnte kræfter, tyngdekraften mG og snoretrækket $-xs$, hvor $x \geq 0$ er ukendt. Altså gælder

$$(**) \quad a = \frac{1}{m} (mG - xs).$$

Da a må opfylde $(*)$, kan vi heraf finde x .

$$\frac{1}{m} (mG - xs) \cdot s + v \cdot v = 0;$$

$$G \cdot s - xs \cdot s + v \cdot v = 0.$$

Da $s \cdot s = |s|^2 = r^2$, får vi for x :

$$x = \frac{m}{r^2} (G \cdot s + v \cdot v) s.$$

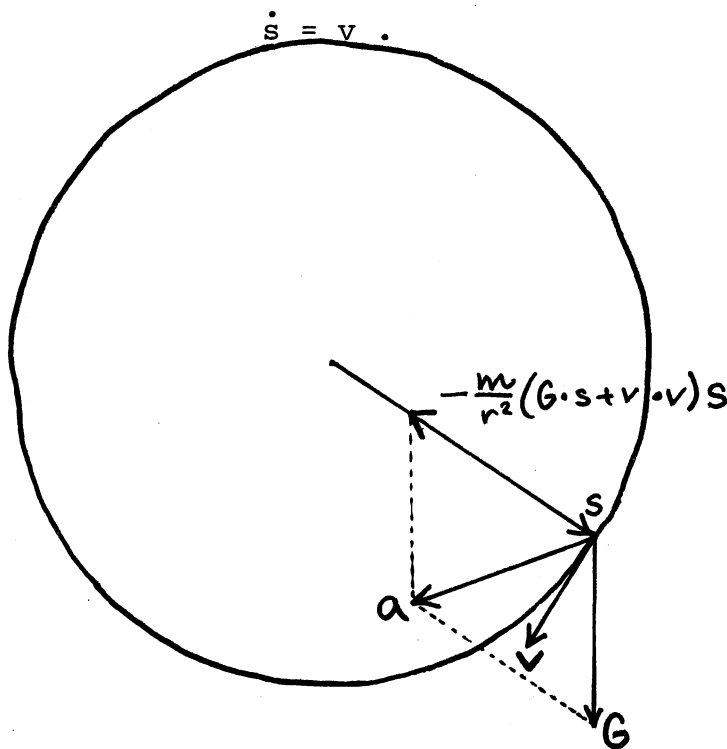
Indsættes x i (**), fås pendulets differentialligning

$$a = G - \frac{m}{r^2} (G \cdot s + v \cdot v) s$$

eller skrevet som et system af ligninger

$$\dot{v} = G - \frac{m}{r^2} (G \cdot s + v \cdot v) s,$$

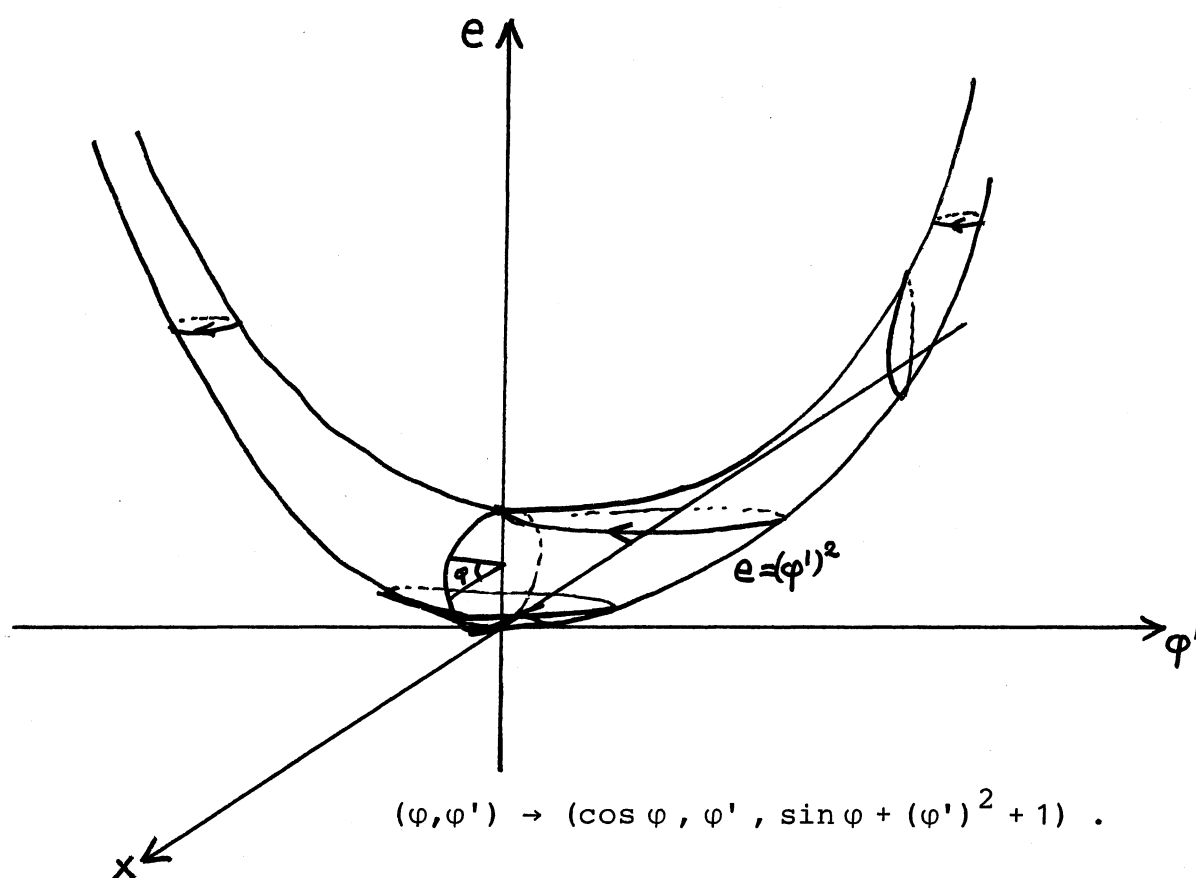
(***)



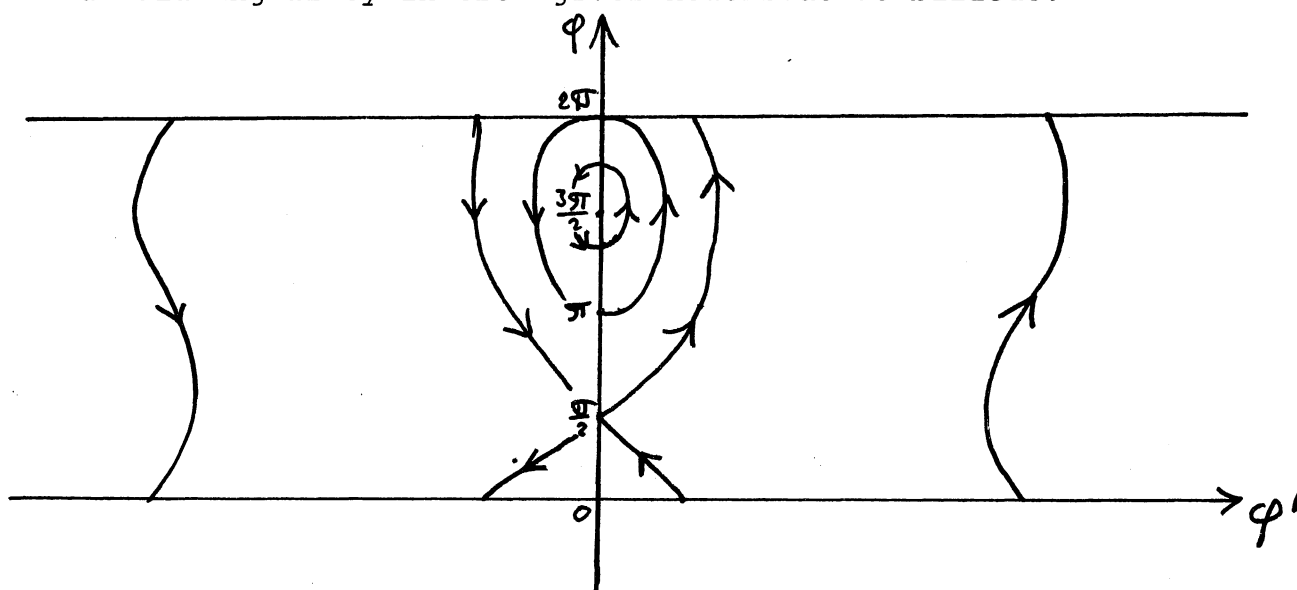
Mængden $\{(s, v) \mid v = \dot{s} \text{ og } s \text{ beskriver et penduls placering}\}$ kaldes faserummet, og hver løsning til (***) giver en kurve i faserummet med tiden som parameter.

I det 2-dimensionale tilfælde må s ligge på en cirkel, så vi kan opfatte s som beskrevet ved vinkelen φ , $s = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Da $v = \dot{s} = r\varphi'(-\sin \varphi, \cos \varphi)$, er v beskrevet ved φ og φ' , og $\varphi' = \frac{1}{r}|v|$ er entydig bestemt ved v . Vi kan derfor erstatte faserummet med parameterrummet $\{(\varphi, \varphi') \mid 0 \leq \varphi < 2\pi \wedge \varphi' \in \mathbb{R}\}$, der er en uendelig cylinder, når φ er en vinkel.

Nu er energien i positionen (φ, φ') summen af den potentielle energi og bevægelsesenergien. Den potentielle er eksempelvis i passende koordinater lig med højden over bundstillingen, $1 + \sin \varphi$, mens den kinetiske på samme måde er lig med $(\varphi')^2$. Lad os derfor placere cylinderen i rummet med koordinater (x, φ', e) , hvor e er energien. Vi placerer nu cylinderen, så $(x, e) = (\cos \varphi, 1 + \sin \varphi + (\varphi')^2)$. Herved beskriver e energien. Da de enkelte løsningskurver til (***) har konstant energi, må de afbildes i skæringskurverne mellem cylinderen og planerne $e = k$.



En udfoldning af cylinderen giver nedenstående billede.



Af ligningen $\varphi' = \frac{1}{r} |v|$,

fås ved kvadrering $(\varphi')^2 = \frac{1}{r^2} v \cdot v$,

og ved differentiering heraf

$$2 \varphi' \varphi'' = \frac{2}{r^2} a \cdot v .$$

Indsættes a fra (**) fås, idet $s \cdot v = 0$

$$\varphi' \varphi'' = \frac{1}{r^2} (G - \frac{x}{m} s) \cdot v = \frac{1}{r^2} G \cdot v .$$

Er nu $G = (0, -g)$ og $v = r \varphi' (-\sin \varphi, \cos \varphi)$, fås altså

$$(+) \quad \varphi' \varphi'' = \frac{1}{r^2} (0, -g) \cdot r \varphi' (-\sin \varphi, \cos \varphi) = -\varphi' \frac{g}{r} \cos \varphi ,$$

hvoraf enten $\varphi' = 0$ eller $\varphi'' = -\frac{g}{r} \cos \varphi$.

Ved direkte at integrere (+) fås

$$\frac{1}{2} (\varphi')^2 = \int \varphi' \varphi'' dt = -\frac{g}{r} \int (\cos \varphi) \varphi' dt = -\frac{g}{r} \sin \varphi + k ,$$

hvor k afhænger af (s_0, v_0) . Altså er $e = \frac{1}{2} \varphi'^2 + \frac{g}{r} \sin \varphi + \frac{g}{r} = k$
og

$$\varphi' = \sqrt{2k - \frac{2g}{r} \sin \varphi} .$$

Heraf findes t som funktion af φ :

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{2k - \frac{2g}{r} \sin \varphi}} ,$$

så

$$t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2k - \frac{2g}{r} \sin \varphi}} .$$

Denne formel kan bruges til at beregne svingningstiden for et givet udsving. Bemærk, at ved det maximale udsving er $\varphi' = 0$, altså nævneren i integranden nul.

Integralet er et såkaldt *elliptisk integral af første slags* og kan ikke yderligere reduceres med elementære hjælpemidler. Tabel over

funktionen findes f.eks. i Milton Abramowitz, Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York 1965, p. 613-615. En kortere udgave findes i B. O. Peirce, *A short Table of Integrals*, Fourth Ed. Ginn and Company, Boston 1957, p.134.

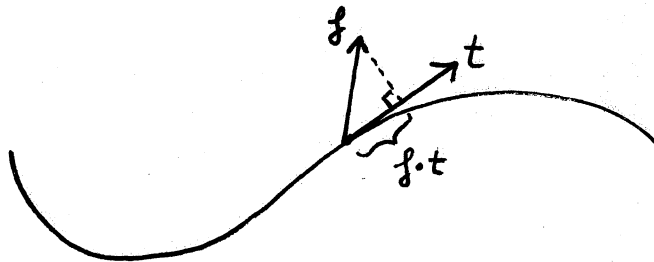
§14. Kurve- og fladeintegraler af differentialformer.Strøm langs vej.

Lad der være givet et vektorfelt f i $\mathbb{R}^3$ samt en kurve $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Vi skal nu definere vektorfeltets *strøm langs kurven*. I et punkt af kurven findes tangenten

$$t = \frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|} .$$

Påvirkningen af feltet f i punktet fås som projektionen af f på tangenten: ($\|t\| = 1$):



Har kurven længde ℓ og vælger vi den kanoniske parameterfremstilling $\psi(s)$ med $\|\psi'(s)\| = 1$, defineres *strømmen* som

$$\int_0^\ell (f \cdot \nabla\psi) ds .$$

Nu er det jo

$$\begin{aligned} &= \int_0^\ell (f_x \psi'_x + f_y \psi'_y + f_z \psi'_z) ds \\ &= \int_K \omega , \quad \text{hvor} \quad \omega = f_x dx + f_y dy + f_z dz . \end{aligned}$$

Hvis feltet er et kraftfelt, kaldes strømmen langs kurven for feltets *arbejde* på en partikel, der bevæger sig ad kurven. Kraftfeltet kaldes *konservativt*, hvis dette arbejde kun afhænger af kurvens endepunkter, altså er uafhængigt af den valgte bane.

Hvis feltet er konservativt, så gælder åbenbart, at arbejdet eller strømmen langs en lukket kurve er $= 0$. Ser vi specielt på en kurve, der er rand af en flade, så siger hovedsætningen, at

integralet af feltets rotation over fladen også er $= 0$. Da dette gælder for enhver begrænset flade, må feltets rotation selv være $= 0$.

$$d\omega = 0.$$

Poincaré's lemma siger nu, at feltet må være et gradientfelt, altså at der findes en funktion (skalarfelt, 0-form) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, så

$$d\varphi = \omega$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_x ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_y ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_z .$$

Funktionen φ kaldes *potential* af kraftfeltet, og kraftfeltet kaldes et *potentialfelt*, når der findes et potential.

F.eks. et tyngdefelt fra en "sol" i $(0,0,0)$:

$$f = -\frac{(x,y,z)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} ;$$

den tilsvarende 1-form (med $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) er

$$\omega = -\frac{x}{r^3} dx - \frac{y}{r^3} dy - \frac{z}{r^3} dz .$$

Vi finder rotationen

$$\text{rot } f = d\omega$$

$$= 3 \frac{xy}{r^5} dy \wedge dx + 3 \frac{yx}{r^5} dx \wedge dy + (2 \text{ analoge par}) = 0 .$$

Altså er tyngdefeltet konservativt. Vi søger

$$-\int \frac{x}{r^3} dx .$$

Vi substituerer $v = x^2 + y^2 + z^2$, $dv = 2x dx$:

$$= -\frac{1}{2} \int v^{-(3/2)} dv = v^{-1/2} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} .$$

Det ses, at

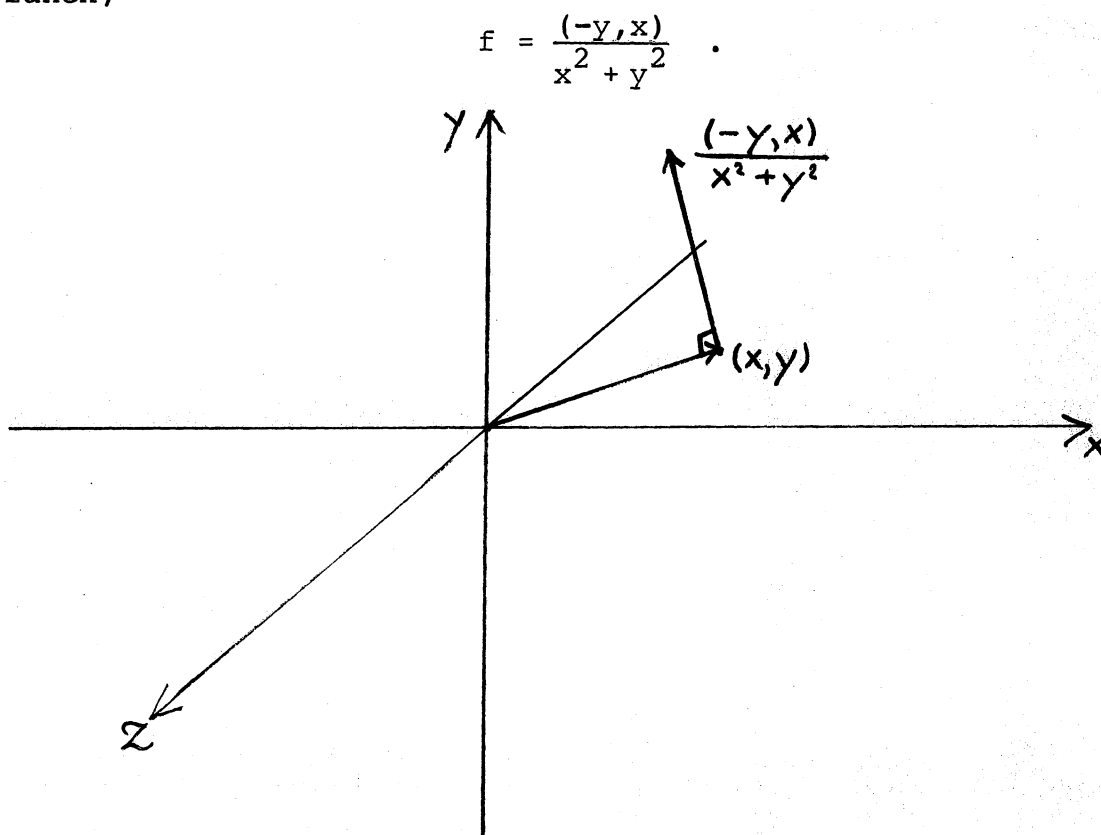
$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

er potentialet af tyngdefeltet; $d\phi = \omega$.

Solen udfører altså intet arbejde på Jorden, når denne gennemløber et årsomløb.

I almindelighed kaldes strømmen af et felt langs en lukket kurve for feltets *cirkulation* langs kurven. Et felt er altså konservativt, hvis og kun hvis dets cirkulation langs enhver lukket kurve er nul.

En elektrisk strøm ad z -aksen skaber et magnetfelt i (x,y) -planen,



Den tilsvarende 1-form ω er

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Men her er

$$d\omega = 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy,$$

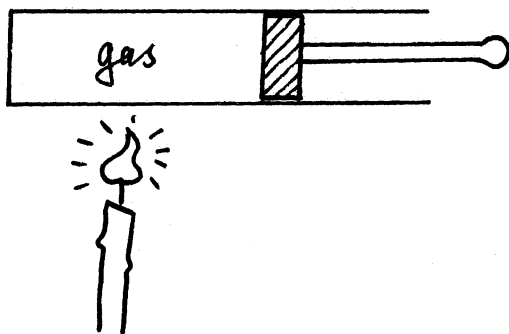
så formen er ikke lukket eller eksakt. Cirkulationen langs en cirkel med radius r og positiv omløbsretning er

$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \sin \theta}{r^2} (-r \sin \theta) + \frac{r \cos \theta}{r^2} r \cos \theta \right) d\theta = 2\pi.$$

Bemærk, at cirkulationen ikke afhænger af radius r .

Termodynamik.

Vi betragter en gas i en tube (cylinder) med et stempel og en mulighed for opvarmning, altså mulighed for tilførelse og udslip af varme.



Gassens tilstand beskrives ved de tre målinger, rumfang, V , temperatur, T , og tryk, p . Boyle-Mariottes lov siger, at f.eks. gælder

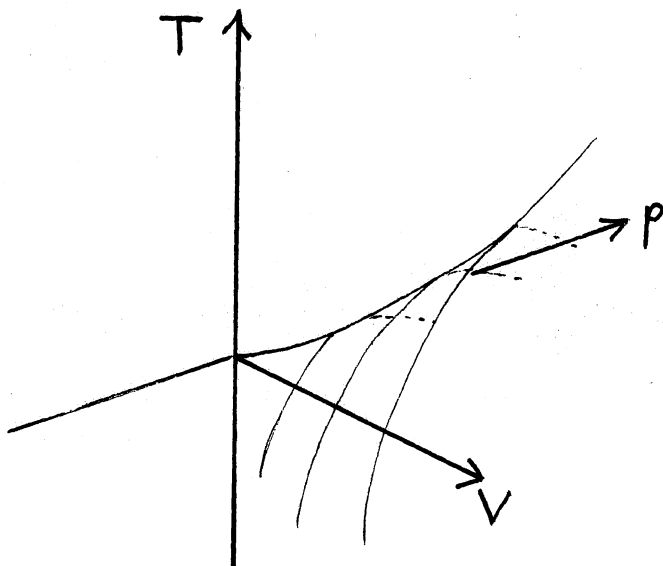
$$(B-M) \quad T = p \cdot V$$

(i passende måleenheder og med passende gasmængde).

Dvs. at tilstanden af gassen kan beskrives som et punkt på en flade i $\mathbb{R}^3$, nemlig fladen bestemt af ligningen (B-M) :

$$T = p \cdot V = (p \cdot V) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ V \end{pmatrix}$$

og matricen har egenverdierne $\pm \frac{1}{2}$, så fladen er en hyperbelsk paraboloid, se side III,12,5 (sadden):



En parameterfremstilling af fladen kan let fås af (B-M), f.eks. kan vi vælge (T, V) som parametrene og får fladefremstillingen $(T, V) \rightarrow (T, \frac{T}{V}, V)$.

Vi disponerer over stemplet, der direkte bestemmer V , og over opvarmningen, hvormed vi kan tilføje varme i portioner, som vi kan betegne ΔQ .

Trykkes stemplet ind, så rumfanget ændres med en størrelse dV , så må vi udføre et arbejde, proportionalt med trykket, p . Arbejdet er $-pdV$.

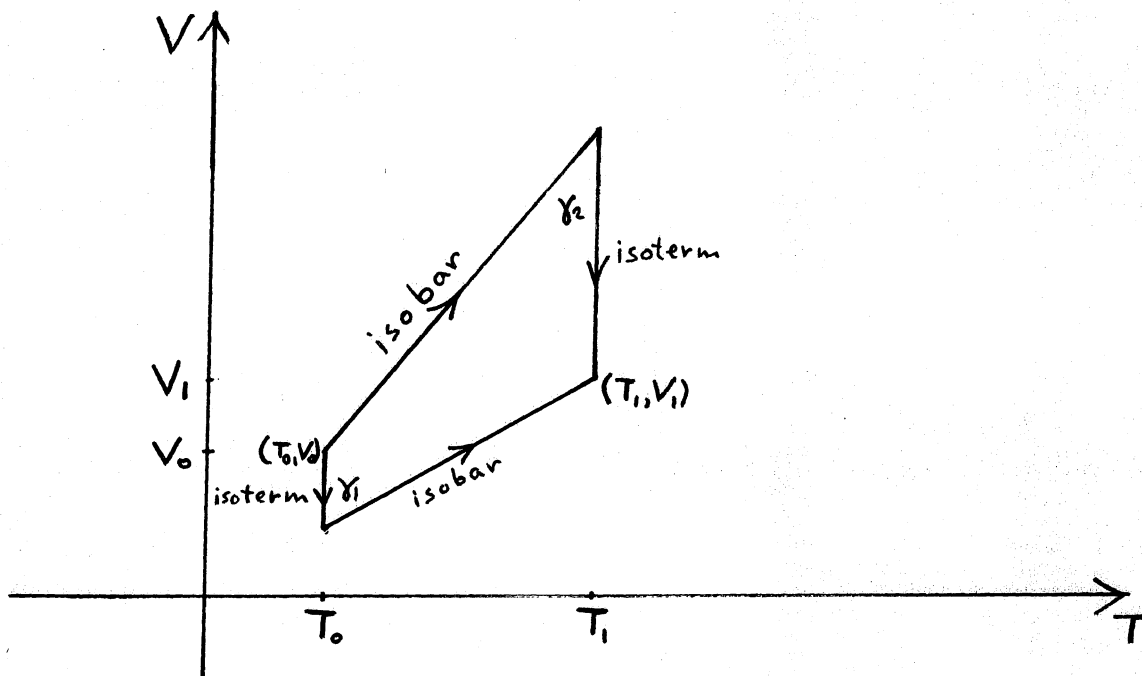
Ændres hele systemet fra en position (T_0, V_0) til en position (T_1, V_1) ad en given kurve, γ , bliver det derved nødvendige arbejde

$$W_\gamma = \int_\gamma (-pdV).$$

Dette arbejde afhænger af vejen γ ; - differentialformen

$$-pdV = -\frac{T}{V} dV$$

er ikke eksakt. Lad os betragte to veje:



Den ene vej, γ_1 , følger en isotherm; dvs. rumfanget presses ned under konstant temperatur; og derefter en isobar, dvs. temperatur og rumfang ændres simultant i et fast forhold, hvorved trykket holdes konstant.

Arbejdet er hhv.

$$\begin{aligned}
 W_{\gamma_1} &= - \int_{\gamma_1} p dV = - \int_{V_0}^{(T_0 V_1)/T_1} \frac{T_0}{V} dV - \int_{(T_0 V_1)/T_1}^{V_1} \frac{\frac{T_1}{V_1} V}{V} dV \\
 &= -T_0 \ln \left(\frac{T_0 V_1}{T_1} - \ln V_0 \right) - \frac{T_1}{V_1} \left(V_1 - \frac{T_0 V_1}{T_1} \right) \\
 &= -T_0 \ln \left(\frac{T_0}{V_0} \frac{V_1}{T_1} \right) - T_1 + T_0 \\
 &= -T_0 \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) - T_1 + T_0 .
 \end{aligned}$$

$$W_{\gamma_2} = -T_1 \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) - T_1 + T_0 .$$

Hvis $p_1 > p_0$ og $T_1 > T_0$ som på figuren, ses det, at

$$W_{\gamma_2} > W_{\gamma_1} .$$

Med andre ord, det er billigere at presse gassen sammen mens den er kold.

Vi indfører nu energien af systemet. Der findes en funktion $E(T, p, V)$, som beskriver gassens energi i den foreskrevne tilstand. Ved hjælp af (B-M) kan vi også definere energien som funktion af parametrene (T, V) :

$$U(T, V) = E(T, \frac{T}{V}, V) .$$

En ideel gas er en gas, hvis energi er konstant på isotermerne, dvs. hvis energi er uafhængig af rumfanget. Altså $\frac{\partial U}{\partial V} = 0$. Endvidere anses energien for at være proportional med T , når T måles i absolut temperatur (i passende enheder):

$$U = T .$$

Samtidig anses en energiændring $dU = dT$ for at være summen af det udførte arbejde og den tilførte varme:

$$dU = \Delta Q - p dV .$$

Ved ændringen (dT, dV) må varmeændringen altså være bestemt af differentialformen

$$\omega = dT + \frac{T}{V} dV.$$

Denne form er ikke eksakt.

Det er derimod

$$\frac{\omega}{T} = \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = d(\ln T + \ln V) = d \ln(TV).$$

Skalarfeltet eller funktionen

$$S = \ln(TV)$$

kaldes *entropien*.

At energien er et eksakt differential, dT , betyder, at for en vej γ fra (T_0, V_0) til (T_1, V_1) gælder

$$Q_\gamma = \int_\gamma \omega = \int_\gamma dT + \int_\gamma \frac{T}{V} dV = T_1 - T_0 - W_\gamma.$$

Altså at $T_1 - T_0 = Q_\gamma + W_\gamma$.

Hvis $T_1 > T_0$, siger ligningen, at temperaturen kun kan stige, hvis vi tilfører varme eller arbejde.

Hvis $T_1 = T_0$, står der

$$Q_\gamma = -W_\gamma.$$

Vi kan vælge mellem at lave arbejde om til varme og det modsatte. Uden arbejde - ingen varme!

Hvis systemet er isoleret så varme aldrig tilføres eller udslippes, altså $\Delta Q = 0$, så er

$$\omega = 0$$

altså også

$$\frac{\omega}{T} = 0$$

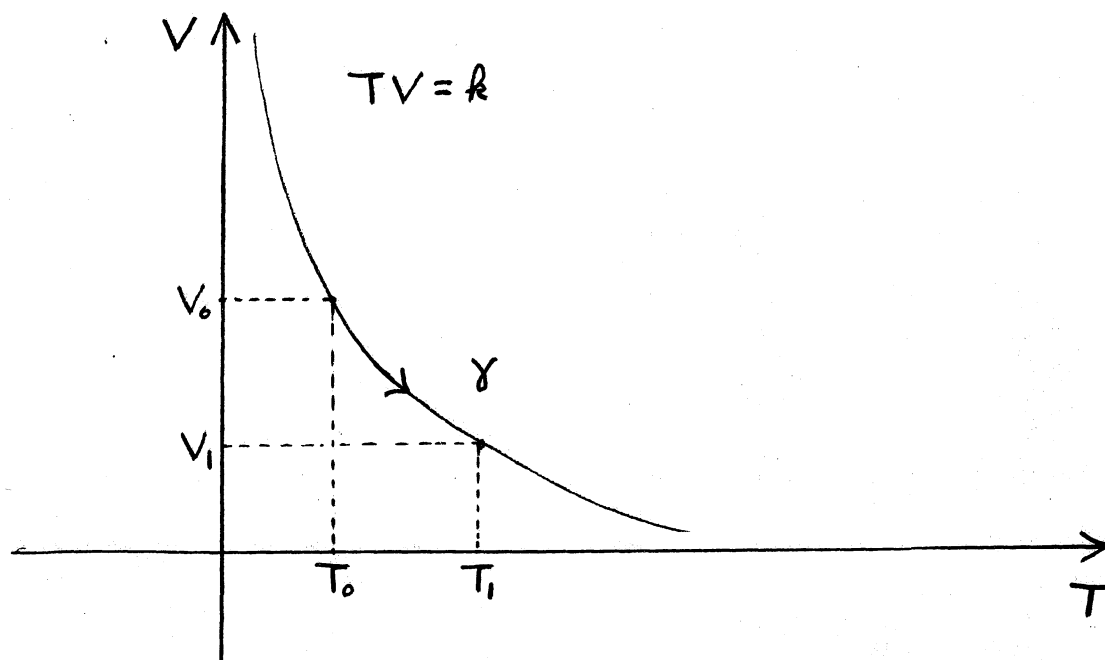
og derfor

$$S = \ln(TV) = \text{konstant}$$

eller

$$TV = \text{konstant}.$$

Dvs. vi må holde os til kurver af formen $TV = k$:



Arbejdet bliver nu

$$W_\gamma = - \int_\gamma \frac{T}{V} dV = - \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V^2} dV = k \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0} \right) = T_1 - T_0 .$$

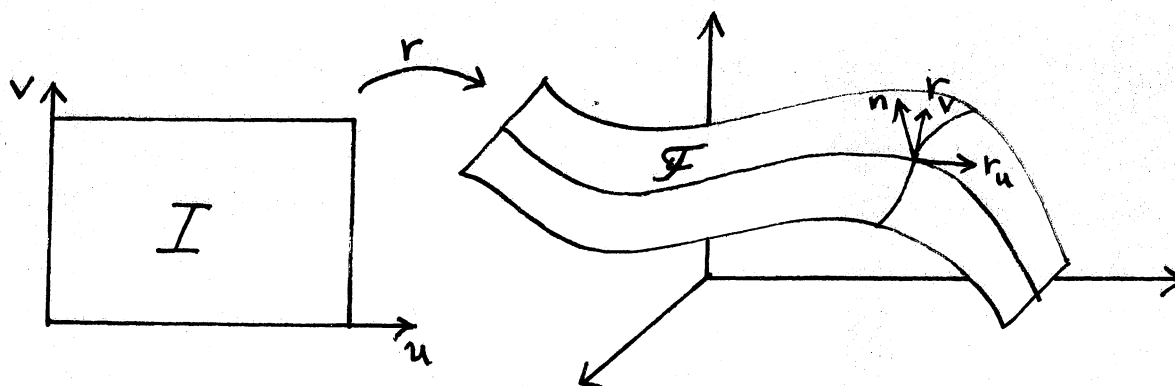
Uden arbejde - ingen temperaturstigning!

Strøm gennem flade.

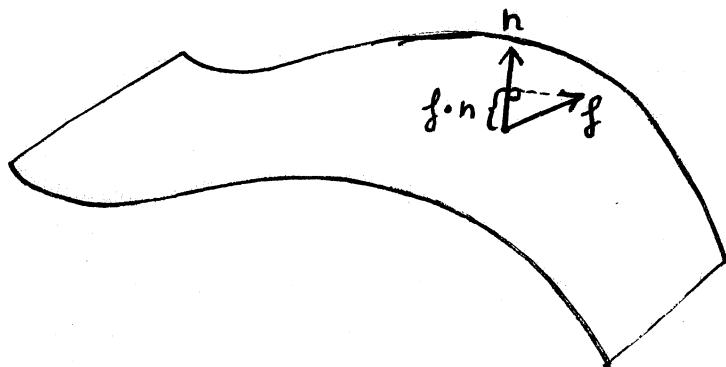
Vi har et vektorfelt f i $\mathbb{R}^3$ samt en flade $F: r: (u,v) \rightarrow r(u,v) \in \mathbb{R}^3$, hvor $(u,v) \in I$, et interval.

Vi skal nu definere vektorfeltets *strøm gennem fladen*. I et punkt på fladen findes normalen som

$$n = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$



Strømmen i punktet fås som projektionen af feltvektoren f på fladenormalen n , altså som $f \cdot n$



Den samlede strøm gennem fladen F defineres som

$$\int_F (f \cdot n) ds ,$$

hvor ds står for fladearealet.

Dette integral kan også opfattes som integralet af en 2-form over fladen, nemlig formen

$$\omega = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$$

hvor $f = (f_1, f_2, f_3)$. Thi

$$\begin{aligned} \int_F \omega &= \int_I \left(f_1 \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + f_2 \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) + f_3 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right) du \wedge dv \\ &= \int_I f \cdot (r_u \times r_v) du \wedge dv , \end{aligned}$$

som jo kan tolkes som (idet $ds = \|r_u \times r_v\| du \wedge dv$)

$$\int_F \frac{f \cdot (r_u \times r_v)}{\|r_u \times r_v\|} \cdot \|r_u \times r_v\| du \wedge dv = \int_F f \cdot n ds .$$

Er f specielt et *rotationsfelt*, dvs. der findes et felt g med tilsvarende 1-form

$$\eta = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz$$

så, f er feltet svarende til 2-formen

$$d\pi = \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy ,$$

så gælder jo

$$\int_{\partial F} \pi = \int_F d\pi .$$

Altså: Cirkulationen af et felt f langs randen af fladen F er lig med strømmen af feltets rotation $\text{rot } f$ gennem fladen F .

Er fladen F selv rand af et legeme V , så siger hovedsætningen, at med $\omega = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$ er

$$\int_F \omega = \int_V d\omega = \int_V \text{div } f .$$

Altså: Strømmen af et felt gennem randen af et legeme er lig med integralet af feltets divergens over legemet.

Eksempel. Tyngdefeltets strøm gennem en kugleflade med radius R . Feltet giver 2-formen

$$\omega = -\frac{1}{r^3} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) .$$

Kuglefladen har parameterfremstillingen

$$x = R \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = R \sin \varphi \cos \theta$$

$$z = R \sin \theta$$

hvor $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ og $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Derfor er

$$\int_S \omega = \int_I (-\cos \theta) d\varphi \wedge d\theta = -2\pi \cdot 2 = \underline{\underline{-4\pi}} .$$

Strømmen gennem kuglefladen er rettet mod centrum og af størrelse $\frac{1}{r^2}$. Den samlede strøm gennem en kugleflade med arealet $4\pi r^2$ er 4π , uafhængig af kuglens radius.

KAPITEL V

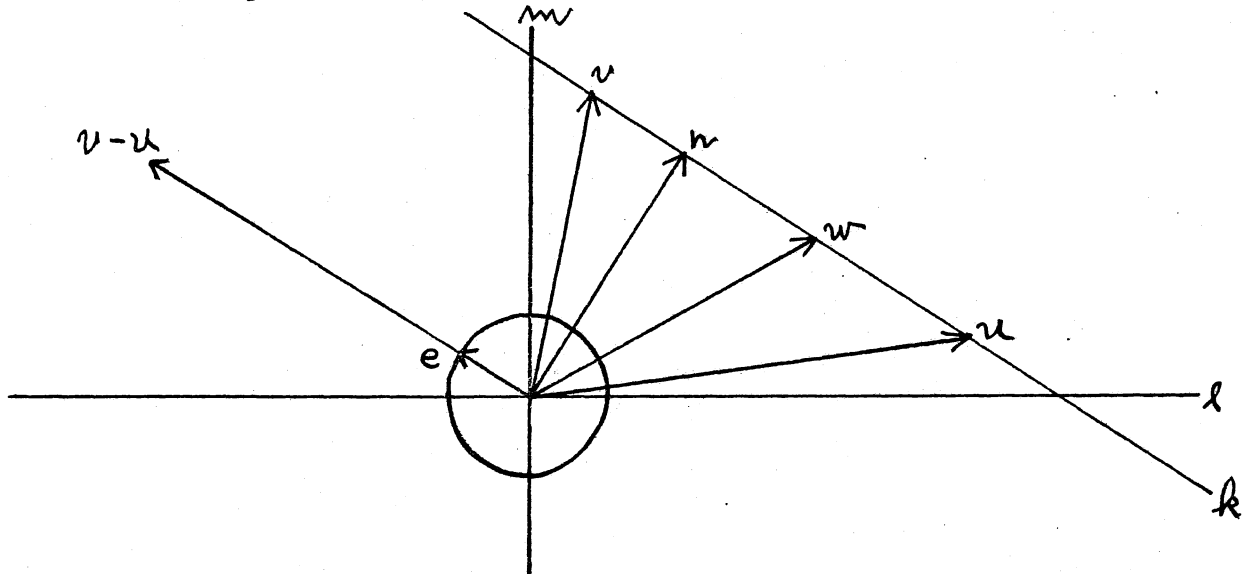
EKSEMPLER TIL EFTERFØLGELSE

*Mathematiken kan med rette betegnes som
den Videnskab, hvor man aldrig veed hvad
man taler om.*

Viggo Brøndal.

§1. Vektorregning i planen og komplekse tal.

Bestem en ret linie gennem punkterne $(11,2)$ og $(3,8)$. Lad $u = (11,2)$ og $v = (3,8)$.



En vilkårlig vektor w på linien k må have samme projektion på vektoren n , der er vinkelret på k , som u og v . Har vi fundet n , kan vi beskrive k på formen

$$\{w \mid w \cdot n = v \cdot n\}.$$

Vektoren $v - u$ er parallel med k . Nu er

$$v - u = (-8, 6).$$

Den tilsvarende enhedsvektor er $e = \frac{v-u}{|v-u|} = \frac{(-8, 6)}{\sqrt{64+36}} = \left(\frac{-8}{10}, \frac{6}{10} \right) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right).$

En vektor vinkelret på e er f.eks.

$$\begin{aligned} v - (v \cdot e)e &= (3, 8) - \left(3 \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) + 8 \cdot \frac{3}{5} \right) \cdot \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \\ &= (3, 8) - \left(\frac{12}{5} \right) \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \\ &= (3, 8) - \left(-\frac{48}{25}, \frac{36}{25} \right) = \left(\frac{123}{25}, \frac{164}{25} \right) = \frac{41}{25} (3, 4). \end{aligned}$$

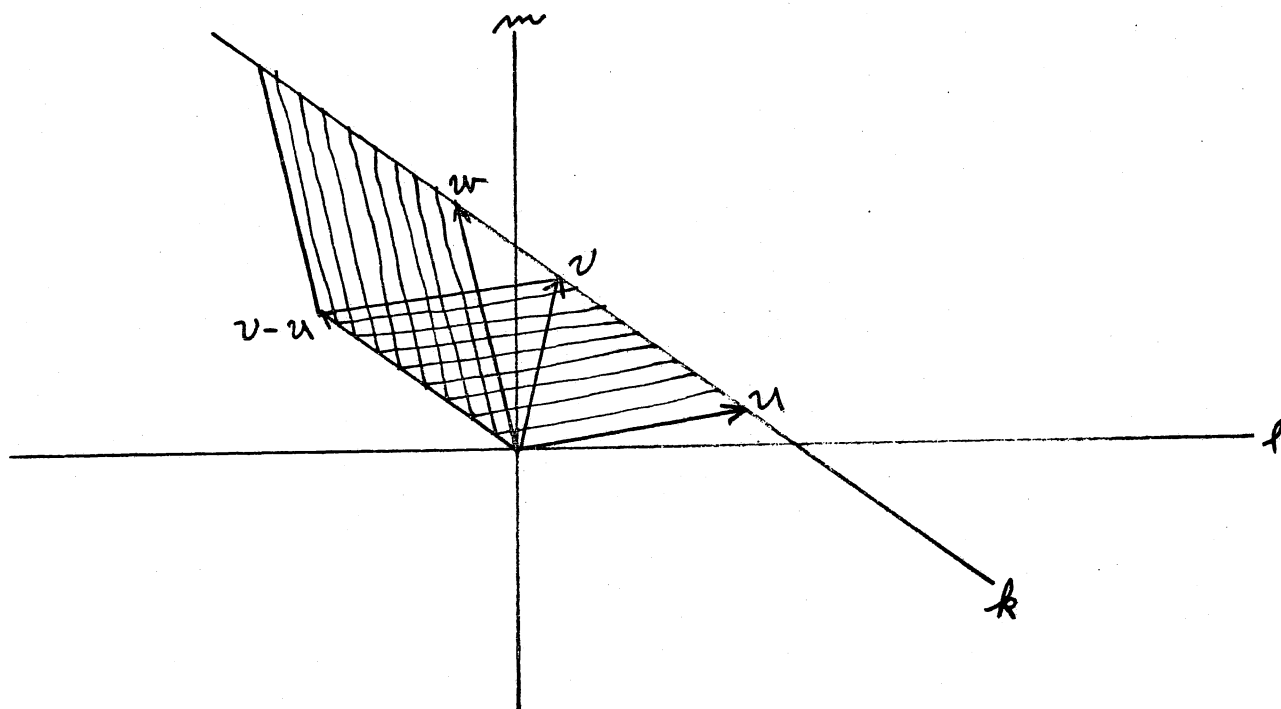
Vi bruger $(3, 4)$ som w . Altså, da $v \cdot n = 41$,

$$k = \{w \mid w \cdot (3, 4) = 41\}$$

eller i koordinater

$$k = \{(x,y) \mid 3x + 4y = 41\} .$$

Anden løsning. Karakteristisk for vektoren w er, at arealet af parallelogrammet udspændt af $v-u$ og w er det samme som arealet af parallelogrammet udspændt af $v-u$ og u .



Med andre ord: $k = \{w \mid [w, v-u] = [u, v-u]\} .$

$$k = \{w \mid [w, (-8, 6)] = [(11, 2), (-8, 6)]\}$$

$$k = \{w \mid [w, (-8, 6)] = 82\}$$

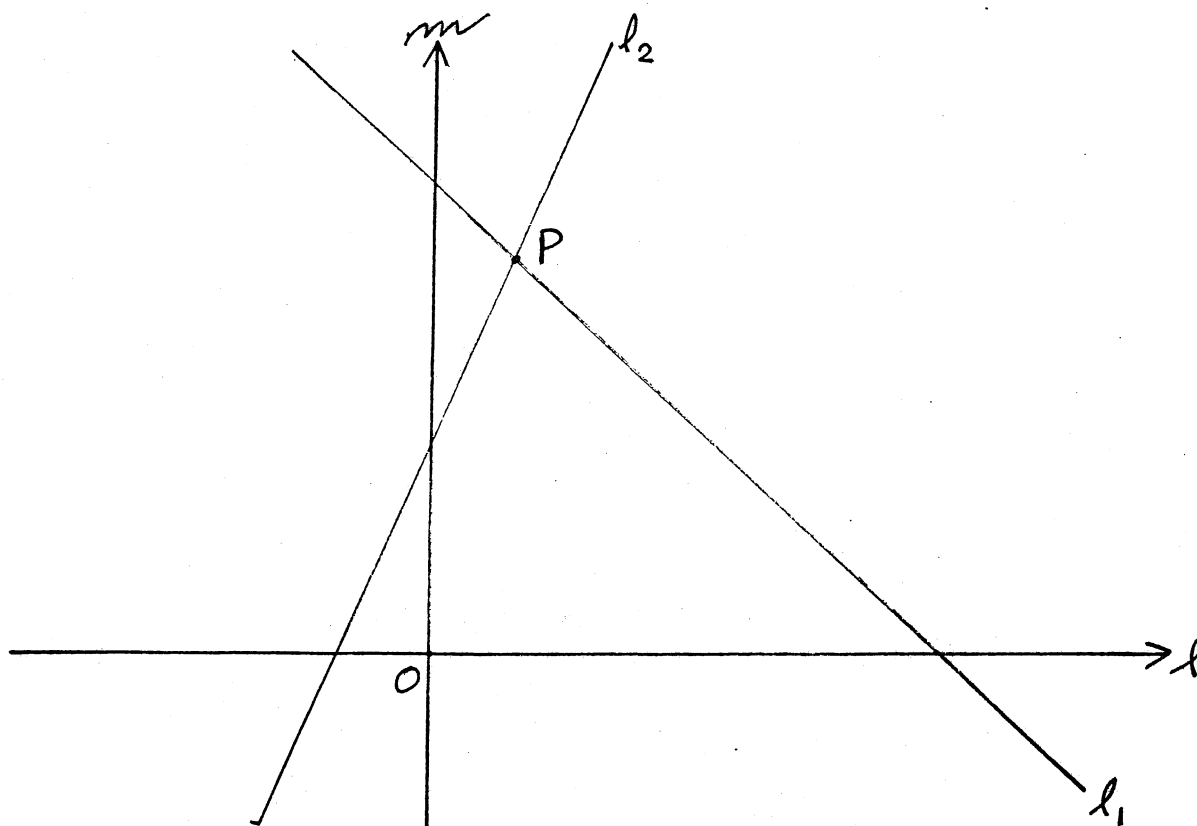
eller i koordinater

$$k = \{(x,y) \mid \begin{vmatrix} x & -8 \\ y & 6 \end{vmatrix} = 82\} = \{(x,y) \mid 6x + 8y = 82\} .$$

Bestem skæringspunktet mellem 2 rette linier. F.eks. givet som

$$l_1 \quad 3x + 4y = 41$$

og $l_2 \quad 5x - 2y = -10$



Koordinaterne til P findes ved løsning af ligningerne.

Analyse: Hvis der findes en løsning (x,y) , må løsningen også tilfredsstille ligningen $l_1 + 2l_2$:

$$13x = 21.$$

En løsning må derfor have $x = \frac{21}{13}$.

Da løsningen skal tilfredsstille l_2 , må

$$5 \cdot \frac{21}{13} - 2y = -10;$$

den eneste mulighed for y er da $y = \frac{235}{26}$.

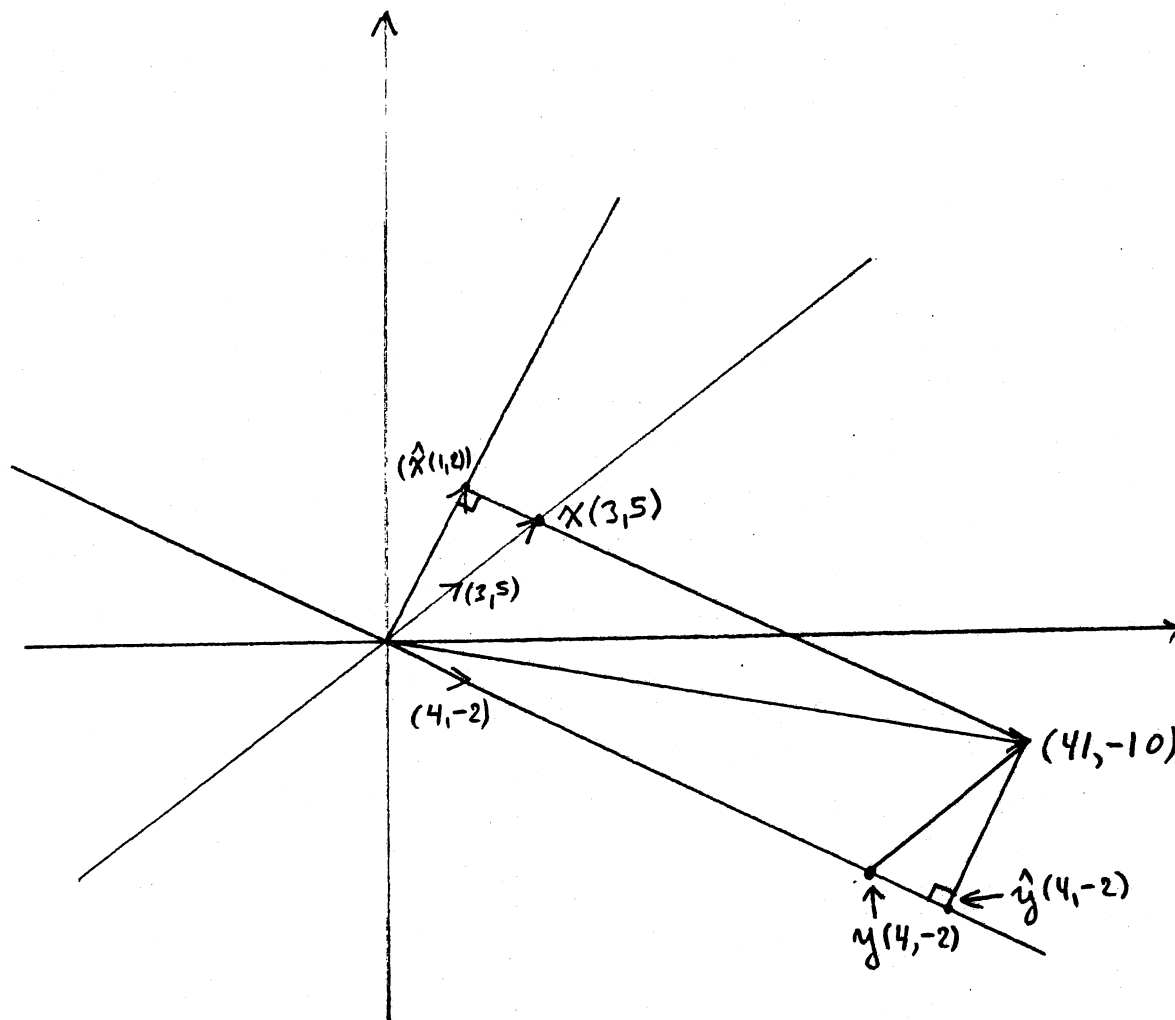
Syntese: Forslaget passer i l_2 . Indsat i l_1 fås

$$3 \cdot \frac{21}{13} + 4 \cdot \frac{235}{26} = \frac{1066}{26} = 41.$$

Altså løser $P = \left(\frac{21}{13}, \frac{235}{26}\right)$ opgaven.

En helt anden fortolkning af opgaven.

Vi søger reelle tal x og y , så vektoren $(41, -10)$ bliver skrevet som linearkombinationen $x(3, 5) + y(4, -2)$.



Vi søger et parallellogram udspændt af $x(3,5)$ og $y(4,-2)$ med diagonalen $(41,-10)$.

Vi skriver først $(41,-10)$ som en sum af $\hat{y}(4,-2)$ og $\hat{x}(1,2)$, fordi $(1,2)$ er vinkelret på $(4,-2)$.

Disse projektioner findes ved det indre produkt.

Analyse: Antag

$$\hat{x}(1,2) + \hat{y}(4,-2) = (41,-10).$$

Dan indre produkt med $(4,-2)$:

$$\hat{x} \cdot 0 + \hat{y}(16+4) = 164 + 20$$

$$\hat{y} = \frac{184}{20} = \frac{46}{5}.$$

Dan indre produkt med $(1,2)$:

$$\hat{x}(1+4) + \hat{y} \cdot 0 = 41 - 20$$

$$\hat{x} = \frac{21}{5}.$$

Vektoren $\frac{21}{5}(1,2) + \frac{46}{5}(4,-2) = (41,-10)$. Tilbage er opgaven at skrive

$$(1,2) = x'(3,5) + y'(4,-2) .$$

Indre produkt med $(1,2)$ giver os

$$5 = x'(3+10)$$

$$x' = \frac{5}{13} .$$

Nu er $(1,2) - \frac{5}{13}(3,5) = (\frac{-2}{13}, \frac{1}{13}) = (-\frac{1}{26})(4,-2)$ så

$$y' = -\frac{1}{26} .$$

Vi finder altså

$$\begin{aligned}(41,-10) &= \frac{46}{5}(4,-2) + \frac{21}{5}(\frac{5}{13}(3,5) - \frac{1}{26}(4,-2)) \\ &= \frac{21}{13}(3,5) + \frac{46 \cdot 26 - 21}{5 \cdot 26}(4,-2) \\ &= \frac{21}{13}(3,5) + \frac{235}{26}(4,-2) .\end{aligned}$$

Bestem vinkelen mellem de rette linier ℓ_1 og ℓ_2 . Vinkelen mellem linierne er den samme som mellem deres normaler, $(3,4)$ og $(5,-2)$.

Formlen for det indre produkt siger

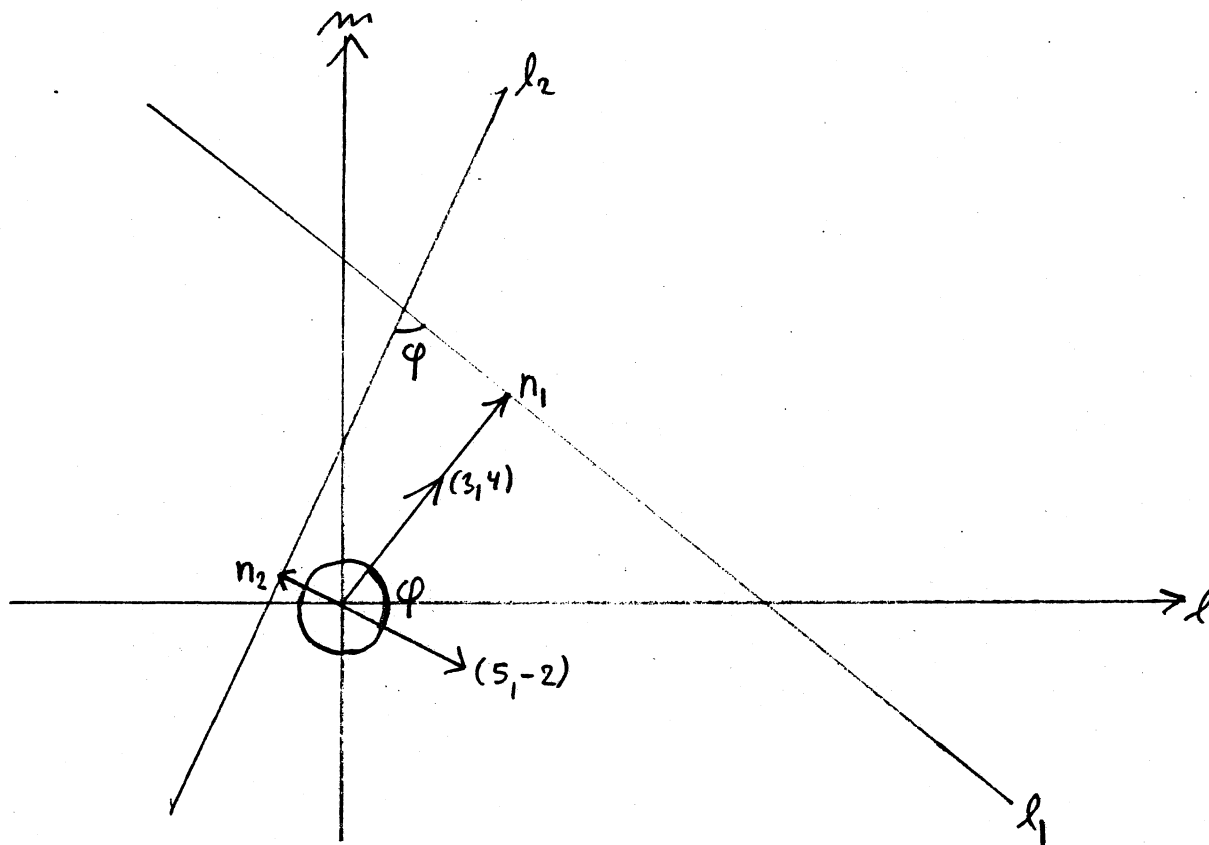
$$(3,4) \cdot (5,-2) = |(3,4)| \cdot |(5,-2)| \cos \varphi$$

hvoraf

$$15 - 8 = \sqrt{9+16} \cdot \sqrt{25+4} \cdot \cos \varphi$$

altså

$$\cos \varphi = \frac{7}{5\sqrt{29}} .$$



Man kan lige så godt anvende det ydre produkt:

$$[(5, -2), (3, 4)] = |(5, -2)| \cdot |(3, 4)| \cdot \sin \varphi$$

hvoraf

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \sqrt{29} \cdot 5 \cdot \sin \varphi$$

altså

$$\sin \varphi = \frac{26}{5\sqrt{29}} .$$

Kvadratroden af et komplekst tal.

Hvad er

$$\sqrt{12+5i} \quad ?$$

Første løsning. Vi søger et komplekst tal, $v = x + iy$, så

$$v^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 12 + 5i .$$

Med andre ord:

$$x^2 - y^2 = 12$$

$$2xy = 5 .$$

Men så er x^2 og $-y^2$ rødder i 2. gradsligningen

$$z^2 - 12z - \frac{25}{4} = 0 .$$

Altså

$$\left. \begin{matrix} x^2 \\ y^2 \end{matrix} \right\} = \frac{12 \pm \sqrt{144+25}}{2} = \left\{ \begin{matrix} \frac{25}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right. .$$

Dvs. $x^2 = \frac{25}{2}$, $y^2 = \frac{1}{2}$.

Da $2xy = 5$, må x og y have samme fortegn. Vi finder derfor løsningerne:

$$(x,y) = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

og

$$(x,y) = \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) .$$

Prøven viser, at de løser opgaven.

Anden løsning. Længden af vektoren er

$$\sqrt{(12+5i)(12-5i)} = \sqrt{144+25} = 13 .$$

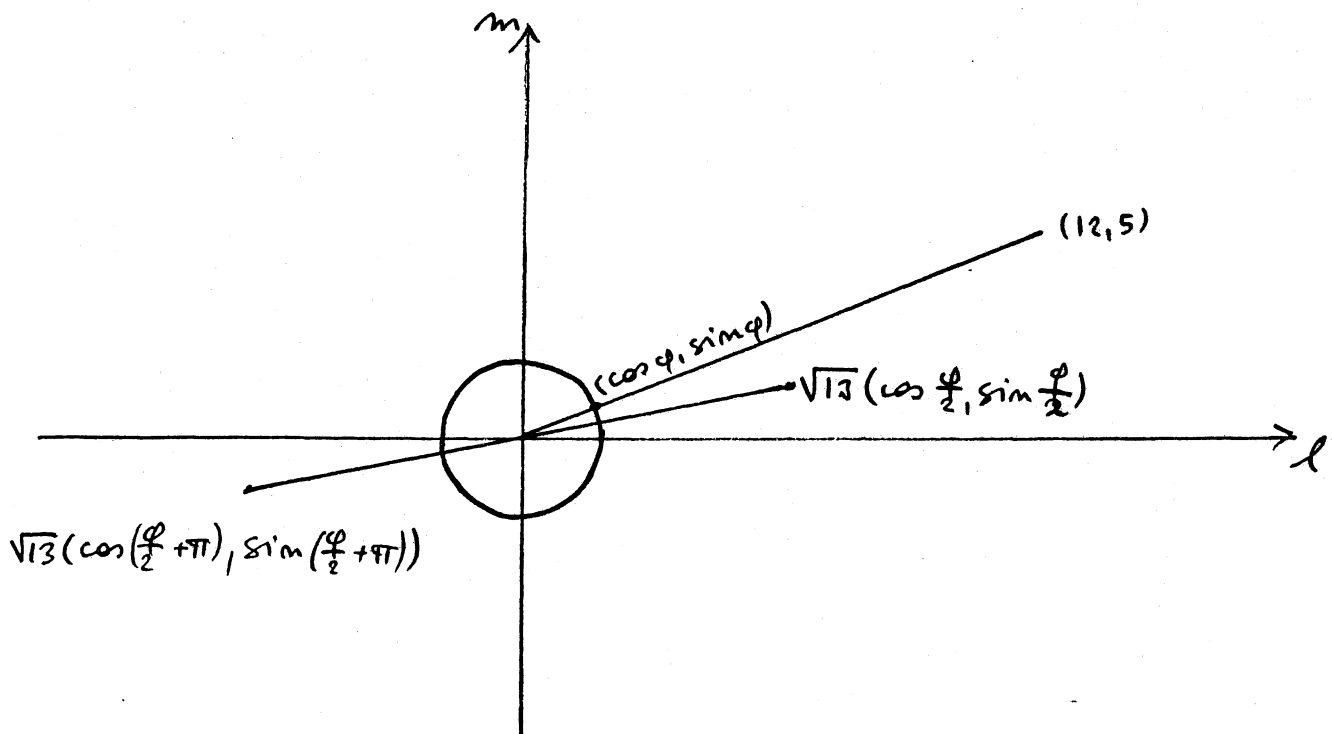
Vi skriver nu

$$(12+5i) = 13(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

hvor φ er den vinkel, der har

$$\cos \varphi = \frac{12}{13}$$

$$\sin \varphi = \frac{5}{13}$$



Løsningen er et komplekst tal med længde r og vinkel ψ , så

$$r^2 = 13$$

$$2\psi = \varphi.$$

Altså er $r = \sqrt{13}$ og af $\cos \varphi = \cos 2\psi = 2 \cos^2 \psi - 1 = 1 - 2 \sin^2 \psi$ findes

$$\cos^2 \psi = \frac{1 + \cos \varphi}{2} = \frac{1 + \frac{12}{13}}{2} = \frac{25}{26}$$

$$\sin^2 \psi = \frac{1 - \cos \varphi}{2} = \frac{1 - \frac{12}{13}}{2} = \frac{1}{26}.$$

Af

$$\frac{5}{13} = \sin \varphi = \sin 2\psi = 2 \sin \psi \cos \psi$$

ses, at $\sin \psi$ og $\cos \psi$ har samme fortegn. Vi finder altså løsningerne

$$(\cos \psi, \sin \psi) = \left(\frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}} \right)$$

og

$$(\cos \psi, \sin \psi) = \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}} \right).$$

Løsningen på opgaven findes ved multiplikation med $r = \sqrt{13}$.

$$(x, y) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{og} \quad (x, y) = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Find rødderne i 2. gradsligningen

$$(1+i)z^2 + 12z + (11-35i) = 0.$$

Løsning. Vi vil af med koefficienten til z^2 . Først ganger vi med $\overline{(1+i)} = 1-i$.

$$2z^2 + (12-12i)z + (-24-46i) = 0.$$

Nu dividerer vi med 2.

$$z^2 + (6-6i)z + (-12-23i) = 0.$$

Vi skriver nu de første to led i et kvadrat:

$$z^2 + 2 \cdot (3-3i)z + (3-3i)^2 - (3-3i)^2 - (12+23i) = 0$$

$$(z+(3-3i))^2 = (3-3i)^2 + (12+23i)$$

$$(z+(3-3i))^2 = 9 - 9 - 18i + 12 + 23i$$

$$(z+(3-3i))^2 = 12 + 5i .$$

Ifølge ovenstående opgave finder vi to løsninger

$$z = -3 + 3i + \frac{5\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

og

$$z = -3 + 3i - \frac{5\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Ved indsættelse ses, om de passer.

§2. Vektorregning i rummet.

1. Givet tre planer

$$\pi = \{ (x, y, z) \mid 3x + 2y - 6z = 7 \}$$

$$\rho = \{ (x, y, z) \mid 3x - 12y + 4z = 13 \}$$

$$\sigma = \{ (x, y, z) \mid -11x - 2y + 10z = 15 \}$$

og en ret linie

$$\ell = \{ (6, 6, 7) + \lambda (2, 2, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} .$$

a) Bestem skæringslinien mellem planerne π og ρ .

Normaler til planerne π og ρ er hhv. $(3, 2, -6)$ og $(3, -12, 4)$. Planernes skæringslinje er vinkelret på begge normaler og derfor parallel med normalernes x-produkt.

$$\begin{aligned} (3, 2, -6) \times (3, -12, 4) &= \left(\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -12 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-64, -30, -42) . \end{aligned}$$

Et enkelt punkt på skæringslinjen kunne findes ved at sætte f.eks. $z = 0$ og løse planernes ligninger i x og y :

$$3x + 2y = 7$$

$$3x - 12y = 13$$

hvoraf

$$14y = -6$$

altså

$$\underline{y = -\frac{3}{7}}$$

og

$$3x = 7 - 2y = 7 + \frac{6}{7} = \frac{55}{7}$$

$$\underline{x = \frac{55}{21}} .$$

Et punkt på linien er altså

$$\left(\frac{55}{21}, -\frac{3}{7}, 0 \right) .$$

Linien er derfor

$$\left\{ \left(\frac{55}{21}, -\frac{3}{7}, 0 \right) + \lambda(-64, -30, -42) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Bestem vinklen mellem planerne π og ρ .

Det er det samme som vinklen mellem normalerne. Normalerne har længderne

$$\sqrt{(3, 2, -6) \cdot (3, 2, -6)} = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7,$$

$$\sqrt{(3, -12, 4) \cdot (3, -12, 4)} = \sqrt{9+144+16} = \sqrt{169} = 13.$$

De normerede normaler er altså

$$n_1 = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{6}{7} \right) \quad \text{og} \quad n_2 = \left(\frac{3}{13}, -\frac{12}{13}, \frac{4}{13} \right).$$

Vinklen φ findes af formlen

$$n_1 \cdot n_2 = |n_1| |n_2| \cos \varphi = \cos \varphi,$$

hvoraf

$$\cos \varphi = \frac{9}{91} - \frac{24}{91} - \frac{24}{91} = -\frac{39}{91} = -\frac{3}{7}.$$

Da vi kun er interesseret i vinkler op til $\frac{\pi}{2}$, stryger vi fortegnet og angiver vinklen som

$$\varphi = 1.127885283 \quad (= 64^{\circ}, 623\dots).$$

c) Bestem afstanden fra $(0, 0, 0)$ til hver af planerne π og ρ .

Vi skriver ligningen for planen π på formen

$$\pi = \{v \mid v \cdot n_1 = k\}.$$

Denne form opnås ved division med normalens længde i den oprindelige ligning.

$$\pi = \{v \mid v \cdot \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{6}{7} \right) = 1\}.$$

Skæringspunktet mellem normalen og planen findes som vektor λn_1 , der opfylder

$$(\lambda n_1) \cdot n_1 = k ,$$

altså $\lambda = k ,$

da $n_1 \cdot n_1 = 1 .$

Afstanden fra 0 til λn_1 er netop λ , altså k . I vores tilfælde er $k = 1$, dvs. afstanden er 1.

Planen ρ skrives som

$$\rho = \{v \mid v \cdot (\frac{3}{13}, -\frac{12}{13}, \frac{4}{13}) = 1\} ,$$

det ses som ovenfor at afstanden er 1.

d) Bestem afstanden mellem linierne ℓ og skæringslinier fra a).

Vi finder en enhedsvektor vinkelret på begge linier. En vinkelret er x-produktet af de to retningsvektorer

$$(2, 2, 1) \times (-64, -30, -42)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -30 & -42 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -42 & -64 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -64 & -30 \end{vmatrix} \right) = (-54, 20, 68) .$$

Længden af denne er $\sqrt{7940} = 2\sqrt{1985}$. En enhedsvektor er altså

$$e = \left(-\frac{27}{\sqrt{1985}}, \frac{10}{\sqrt{1985}}, \frac{34}{\sqrt{1985}} \right) .$$

En tilfældig vektor fra et punkt på den ene linie, f.eks. $(6, 6, 7)$, til et punkt på den anden, f.eks. $(\frac{55}{21}, -\frac{3}{7}, 0)$, er

$$u = (\frac{55}{21} - 6, -\frac{3}{7} - 6, 0 - 7) = (-\frac{71}{21}, -\frac{45}{7}, -7) .$$

Afstanden mellem linierne findes som længden af projektionen af denne vektor u på enhedsvektoren e . Projektionen er

$$(e \cdot u)e ,$$

hvis længde er

$$|e \cdot u| .$$

Nu er

$$\begin{aligned} e \cdot u &= \frac{1}{\sqrt{1985}} (-27, 10, 34) \cdot \frac{1}{21} (-71, -135, -147) \\ &= \frac{-4431}{21 \cdot \sqrt{1985}} = -\frac{211}{\sqrt{1985}} . \end{aligned}$$

Afstanden er altså

$$\frac{211}{\sqrt{1985}} .$$

e) Bestem skæringspunkterne mellem linien ℓ og planen π og ρ .

Koordinaterne til et skæringspunkt må have formen $(6+2\lambda, 6+2\lambda, 7+\lambda)$ og tilfredsstille ligningen for π eller ρ .

For π ligningen

$$3(6+2\lambda) + 2(6+2\lambda) - 6(7+\lambda) = 7$$

hvoraf

$$4\lambda = 7 - 18 - 12 + 42 = 19$$

$$\lambda = \frac{19}{4}$$

punktet bliver

$$\left(6 + \frac{19}{2}, 6 + \frac{19}{2}, 7 + \frac{19}{4}\right) = \left(\frac{31}{2}, \frac{31}{2}, \frac{47}{4}\right) .$$

For ρ ligningen

$$3(6+2\lambda) - 12(6+2\lambda) + 4(7+\lambda) = 13$$

$$-14\lambda = 13 - 18 + 72 - 28 = 39$$

$$\lambda = -\frac{39}{14}$$

punktet bliver

$$\left(6 - \frac{39}{7}, 6 - \frac{39}{7}, 7 - \frac{39}{14}\right) = \left(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{59}{14}\right) .$$

f) Bestem skæringspunktet mellem de tre planer π , ρ og σ .

1) Punktet bestemmes ved løsning af de tre ligninger

$$3x + 2y - 6z = 7$$

$$3x - 12y + 4z = 13$$

$$-11x - 2y + 10z = 15 .$$

Først elimineres x af anden og tredje ligning ved subtraktion af første hhv. addition af $\frac{11}{3}$ gange første ligning:

$$3x + 2y - 6z = 7$$

$$0x - 14y + 10z = 6$$

$$0x + \frac{16}{3}y - 12z = \frac{122}{3}$$

pænere skrevet

$$3x + 2y - 6z = 7$$

$$-7y + 5z = 3$$

$$8y - 18z = 61 .$$

Dernæst elimineres y af første og tredje ligning:

$$21x - 32z = 55$$

$$-7y + 5z = 3$$

$$-86z = 451 .$$

Til sidst elimineres z af første og anden ligning

$$43x = -231$$

$$-86y = 359$$

$$-86z = 451 .$$

Heraf fås ligningen

$$x = -\frac{231}{43}$$

$$y = -\frac{359}{86}$$

$$z = -\frac{451}{86} .$$

Nu havde vi ligningen for skæringslinien mellem π og ρ ,

$$\left\{ \left(\frac{55}{21}, -\frac{3}{7}, 0 \right) + \lambda (-64, -30, -42) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vi kan derfor også bestemme skæringspunktet mellem de tre planer ved at skære linien med den tredje plan, σ ,

$$\sigma = \{v \mid v \cdot (-11, -2, 10) = 15\}.$$

Vi finder, at λ skal opfylde

$$\left(\frac{55}{21}, -\frac{3}{7}, 0 \right) \cdot (-11, -2, 10) + \lambda (-64, -30, -42) \cdot (-11, -2, 10) = 15$$

$$\lambda = \frac{15 - \left(-\frac{605}{21} + \frac{6}{7} \right)}{704 + 60 - 420} = \frac{902}{21 \cdot 344} = \frac{451}{3612}.$$

Skæringspunktet har koordinaterne

$$x = \frac{55}{21} - \frac{451}{3612} \cdot 64 = \frac{55 \cdot 43 - 16 \cdot 451}{21 \cdot 43} = -\frac{231}{43}$$

$$y = -\frac{3}{7} - \frac{451}{3612} \cdot 30 = -\frac{3 \cdot 258 + 451 \cdot 15}{21 \cdot 86} = -\frac{359}{86}$$

$$z = -\frac{451}{3612} \cdot 42 = -\frac{451}{86}.$$

Nu havde vi ligningen for skæringslinien mellem π og ρ ,

$$\left\{ \left(\frac{55}{21}, -\frac{3}{7}, 0 \right) + \lambda(-64, -30, -42) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vi kan derfor også bestemme skæringspunktet mellem de tre planer ved at skære linien med den tredje plan, σ ,

$$\sigma = \{v \mid v \cdot (-11, -2, 10) = 15\}.$$

Vi finder, at λ skal opfylde

$$\left(\frac{55}{21}, -\frac{3}{7}, 0 \right) \cdot (-11, -2, 10) + \lambda(-64, -30, -42) \cdot (-11, -2, 10) = 15$$

$$\lambda = \frac{15 - \left(-\frac{605}{21} + \frac{6}{7} \right)}{704 + 60 - 420} = \frac{902}{21 \cdot 344} = \frac{451}{3612}.$$

Skæringspunktet har koordinaterne

$$x = \frac{55}{21} - \frac{451}{3612} \cdot 64 = \frac{55 \cdot 43 - 16 \cdot 451}{21 \cdot 43} = -\frac{231}{43}$$

$$y = -\frac{3}{7} - \frac{451}{3612} \cdot 30 = -\frac{3 \cdot 258 + 451 \cdot 15}{21 \cdot 86} = -\frac{359}{86}$$

$$z = -\frac{451}{3612} \cdot 42 = -\frac{451}{86}.$$

2) Problemet opfattes som det at fremstille vektoren $v = (7, 13, 15)$ som en linearkombination af de tre vektorer

$$a = (3, 3, -11), \quad b = (2, -12, -2), \quad c = (-6, 4, 10).$$

Altså, vi søger reelle tal x, y og z som opfylder

$$(*) \quad xa + yb + zc = v.$$

Hvis vi danner det indre produkt med en vektor, der er vinkelret på b og c , så vil disse led forsvinde. En sådan vektor er f.eks. $b \times c$. Vi får

$$xa \cdot (b \times c) + yb \cdot (b \times c) + zc \cdot (b \times c) = v \cdot (b \times c)$$

det samme som

$$xa \cdot (b \times c) = v \cdot (b \times c),$$

hvoraf x umiddelbart findes.

Her er

$$b \times c = \left(\begin{vmatrix} -12 & -2 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 10 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -12 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-112, -8, -64),$$

som er proportional med $(14, 1, 2)$. Altså fås

$$x(3, 3, -11) \cdot (14, 1, 8) = (7, 13, 15) \cdot (14, 1, 8)$$

det samme som

$$x(-43) = 231,$$

hvoraf

$$x = \frac{231}{-43}.$$

På tilsvarende måde findes y og z :

$$y = \frac{v \cdot (a \times c)}{b \cdot (a \times c)} = \frac{(7, 13, 15) \cdot (74, 36, 30)}{(2, -12, -2) \cdot (74, 36, 30)} = \frac{1436}{-344} = \frac{-359}{86}$$

$$z = \frac{v \cdot (a \times b)}{c \cdot (a \times b)} = \frac{(7, 13, 15) \cdot (-138, -16, -42)}{(-6, 4, 10) \cdot (-138, -16, -42)} = \frac{-1804}{344} = \frac{-451}{86}.$$

Bemærk, at vi kan slippe med at udregne nævneren én gang, hvis vi benytter regnereglerne fra I, 2, 5 - 6:

$$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c = b \cdot (c \times a) = 344,$$

nemlig rumfanget af parallellepipedet udspændt af a , b og c ,

$$[a, b, c].$$

§3. Polynomier og rationale funktioner.

Opgave 1. Bestem rødderne i polynomiet

$$(*) \quad x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

1. Man kan gætte roden $x = -1$ og skrive

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^4 + x^2 + 1).$$

Herefter ses, at er x^2 rod i polynomiet

$$z^2 + z + 1,$$

så er x rod i $(*)$,

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vi skal blot finde

$$x^2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

og

$$x^2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

For $x = \alpha + i\beta$ findes $x^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta$, α^2 og $-\beta^2$ er altså rødder i

$$w^2 + \frac{1}{2}w - \frac{3}{16},$$

dvs.

$$\left. \begin{matrix} \alpha^2 \\ -\beta^2 \end{matrix} \right\} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm 1}{2} = \left\{ \begin{matrix} -\frac{3}{4} \\ +\frac{1}{4} \end{matrix} \right.$$

Altså $\alpha^2 = \frac{1}{4}$ og $\beta^2 = \frac{3}{4}$, hvoraf, da α og β har samme fortegn

$$x = \alpha + i\beta = \pm \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Den anden ligning er konjugeret af den første, så dens løsninger må være de konjugerede

$$\pm \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

2. Polynomiet (*) ganges med $(x-1)$. Herved fås

$$x^6 - 1,$$

hvis rødder fås af

$$x^6 = 1.$$

Indsættes $x = (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ses, at x er rod, hvis

$$x^6 = (\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) = 1 = \cos 2p\pi + i \sin 2p\pi.$$

Altså præcis når

$$\varphi = \frac{2p\pi}{6}, \quad p = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Løsningerne er altså (foruden $\varphi = 0, x = 1$)

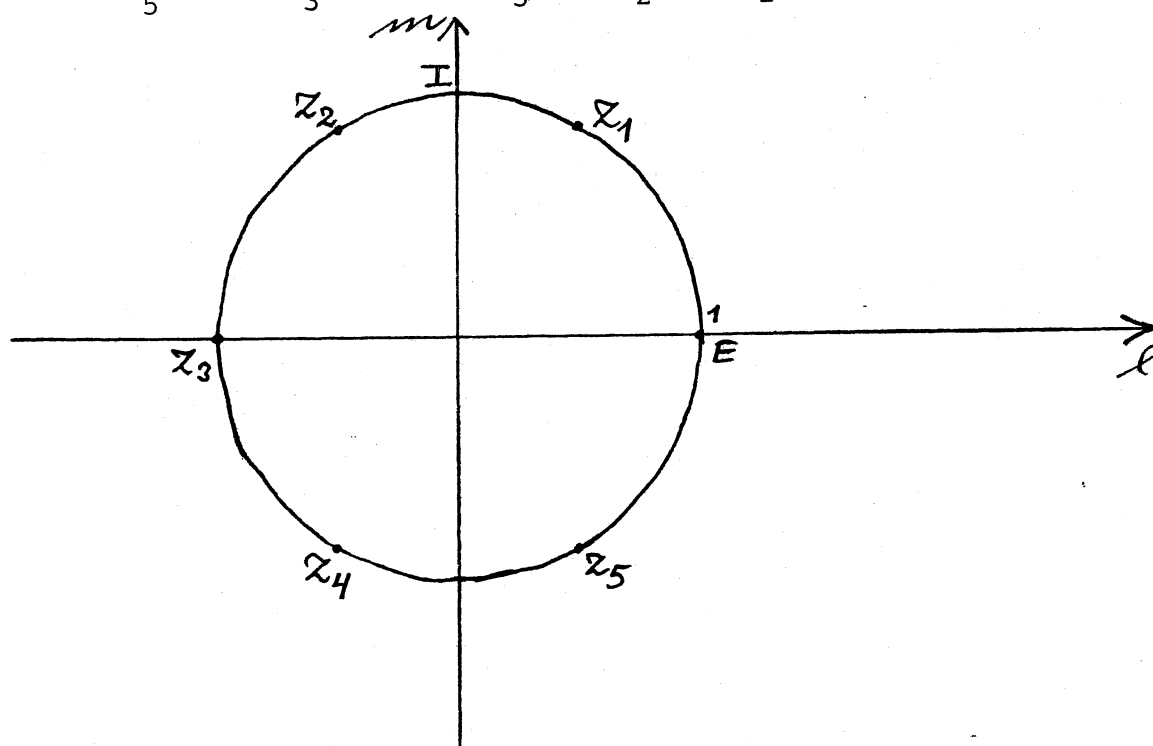
$$z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$z_4 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_5 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = +\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Opgave 2. Spalt i stambrøker den rationale funktion

$$f(x) = \frac{9x^2 + 4x + 4}{4x^3 + 5x^2 + 2x - 6}.$$

Først må vi finde nævnerens rødder. Lad os gætte på, at der er en rational rod, skrevet som den uforkortelige brøk $\frac{p}{q}$, hvor $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. I så fald gælder

$$4\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 5\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{q}\right) - 6 = 0.$$

Vi ganger med q^3 og finder, at

$$4p^3 + 5p^2q + 2pq^2 - 6q^3 = 0.$$

Da p og q er primiske, må p gå op i 6 og q gå op i 4. Det giver følgende muligheder for p og q hhv.

$$p: \pm(1, 2, 3, 6)$$

$$q: \pm(1, 2, 4).$$

Brøken må være en af følgende:

$$\frac{p}{q}: \pm \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 6 \right).$$

Ved at gøre prøve med disse 16 forslag, findes roden

$$\frac{p}{q} = \frac{3}{4}.$$

Nævneren er ifølge Sætning I.3.5, delelig med polynomiet $x - \frac{3}{4}$ (og derfor også med $(4x - 3)$).

Ved hjælp af Euklids algoritme, Sætning I.3.4, findes kvotienten:

$$\begin{array}{r} 4x - 3 \overline{) 4x^3 + 5x^2 + 2x - 6} \quad [x^2 + 2x + 2 \\ \underline{4x^3 - 3x^2} \\ 8x^2 \\ \underline{8x^2 - 6x} \\ 8x - 6 \\ \underline{8x - 6} \\ 0 \end{array}$$

Vi har derfor opspaltningen af nævneren

$$4x^3 + 5x^2 + 2x - 6 = (4x - 3)(x^2 + 2x + 2).$$

Sidste faktor har rødderne

$$-1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i.$$

Denne faktor spaltes i

$$(x + 1 + i)(x + 1 - i).$$

Ifølge Sætning I.3.11, kan vi altså finde (komplekse) tal α, β, γ , så

$$f(x) = \frac{\alpha}{4x-3} + \frac{\beta}{x+1+i} + \frac{\gamma}{x+1-i}.$$

Disse tællere findes på følgende måde: Vi forlænger med $4x-3$:

$$\frac{9x^2+4x-4}{x^2+2x+2} = \alpha + (4x-3)\left(\frac{\beta}{x+1+i} + \frac{\gamma}{x+1-i}\right).$$

Herefter indsættes $x = \frac{3}{4}$ i ligningen:

$$\frac{9\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{4}\right) - 4}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 2} = \alpha + 0,$$

hvoraf $\alpha = 1$.

Nu forlænges med $x+1+i$:

$$\frac{9x^2+4x-4}{(4x-3)(x+1-i)} = (x+1+i)\left(\frac{\alpha}{4x-3} + \frac{\gamma}{x+1-i}\right) + \beta.$$

Indsættes heri $x = -1-i$ fås:

$$\frac{9(-1-i)^2 + 4(-1-i) - 4}{(4(-1-i)-3)(-1-i+1-i)} = 0 + \beta,$$

hvoraf $\beta = 1$.

Ved konjugering ses, at $\gamma = \bar{\beta} = 1$.

Opspaltningen er altså

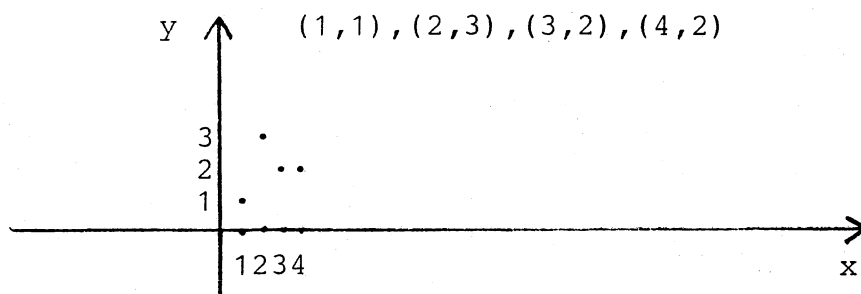
$$\frac{9x^2 + 4x - 4}{4x^3 + 5x^2 + 2x - 6} = \frac{1}{4x-3} + \frac{1}{x+1+i} + \frac{1}{x+1-i}.$$

Slås de to sidste sammen til én, fås

$$\frac{x+1-i}{(x+1+i)(x+1-i)} + \frac{x+1+i}{(x+1+i)(x+1-i)} = \frac{2x+2}{x^2+2x+2};$$

det er det simpleste uden brug af komplekse tal.

Opgave 3. Bestem det polynomium af 3'die grad, som går gennem følgende punkter:



Vi bestemmer de fire Lagrange polynomier:

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} = \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} = \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{6}.$$

Herefter er løsningen

$$1 \cdot L_0 + 3 \cdot L_1 + 2 \cdot L_2 + 2 \cdot L_3 =$$

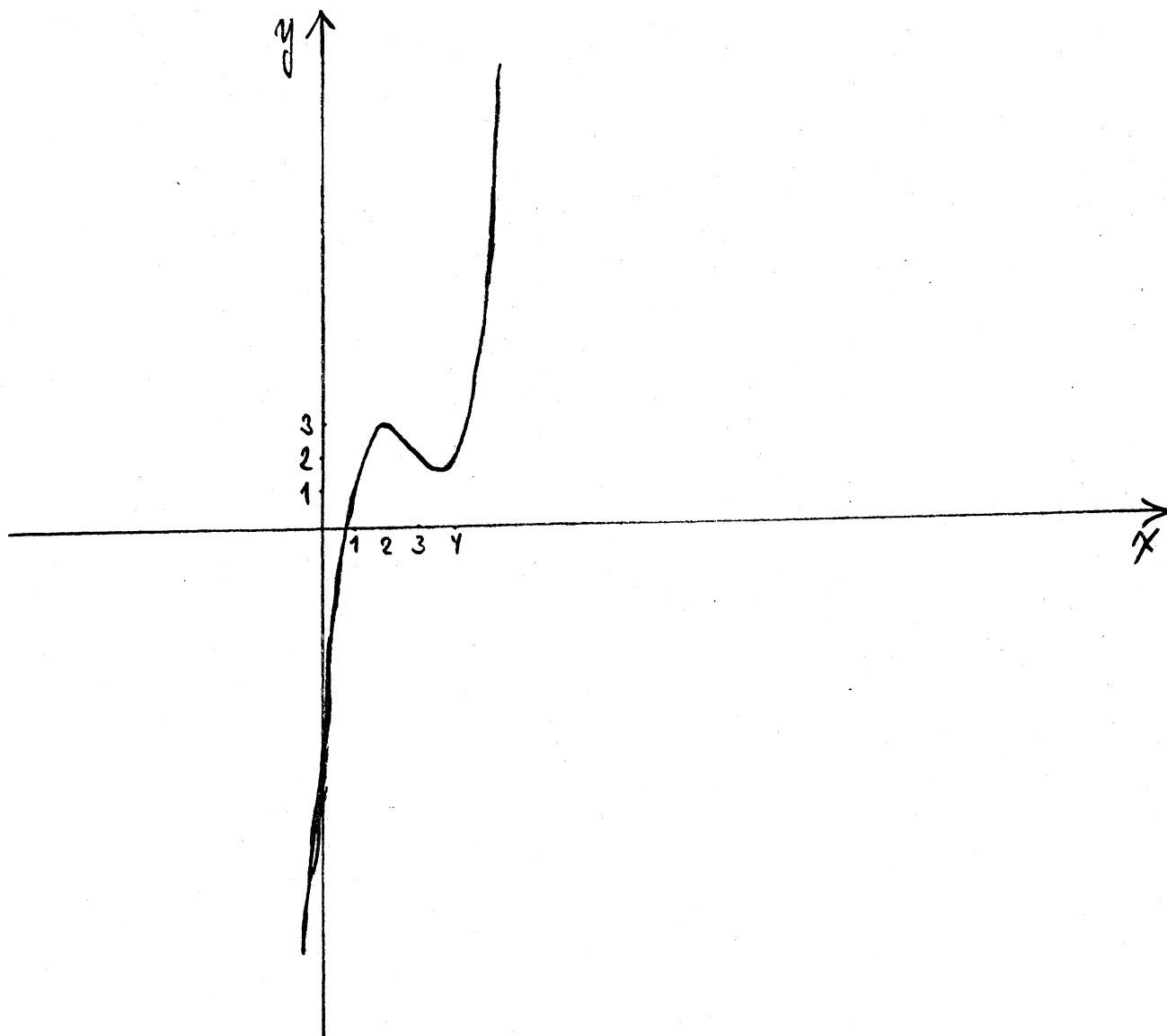
$$x^3 \cdot \left(-\frac{1}{6} + \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{3} \right)$$

$$+ x^2 \cdot \left(\frac{3}{2} - 12 + 7 - 2 \right)$$

$$+ x \cdot \left(-\frac{13}{3} + \frac{57}{2} - 14 + \frac{11}{3} \right)$$

$$+ 1 \cdot (4 - 18 + 8 - 2) =$$

$$\frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + \frac{83}{6}x - 8$$



§4. Følger og rækker.

1. Lad os bestemme grænseværdien for den periodiske decimalbrøk

$$0.123123123\dots$$

periodens længde er 3.

Talfølgen $0.1, 0.12, 0.123, \dots$ er konvergent. Så er delfølgen $0.123, 0.123123, \dots$ konvergent med samme grænseværdi. Delfølgen er afsnitsfølge for rækken

$$\begin{aligned} \frac{123}{1000} + \frac{123}{1000^2} + \dots &= 123 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 1000^{-n} \\ &= \frac{123}{1000} \cdot \frac{1}{1 - 1000^{-1}} = \frac{123}{999} = \underline{\underline{\frac{41}{333}}}. \end{aligned}$$

2. En talfølge (a_n) defineres ved

$$a_n = \frac{7n^2 + 6n - 1}{2n^2 - 3n + 8}.$$

Er talfølgen konvergent?

Vi skriver leddene om til

$$a_n = \frac{7 + \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{8}{n^2}}.$$

Herpå kan vi anvende regnereglerne, idet $(\frac{1}{n}) \rightarrow 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{7 + 0 - 0}{2 - 0 + 0} = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}.$$

Altså er følgen konvergent.

3. Er rækken $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergent?

Bemærk, at kvotientkriteriet ikke hjælper,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{n^2 + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 1 \quad \text{for } n \rightarrow \infty,$$

hvorfor intet tal $k < 1$ kan klare ærterne. Betragt uligheden for $n > 2$:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} .$$

Spaltning i stambrøker af højre side giver

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} .$$

Altså gælder regnestykket

$$\begin{aligned} \sum_{v=2}^n \frac{1}{v(v-1)} &= \sum_{v=2}^n \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v} \right) = \sum_{v=2}^n \frac{1}{v-1} - \sum_{v=2}^n \frac{1}{v} \\ &= \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} - \sum_{v=2}^n \frac{1}{v} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n} . \end{aligned}$$

Vi konstaterer, at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1 - 0 = 1 .$$

Ifølge Sætning I,4,12 er $\sum_n \frac{1}{n^2}$ konvergent med sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + 1 = 2 .$$

4. Er rækken $\sum \frac{1}{n!}$ konvergent?

(Husk $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.)

Kvotientkriteriet betragter

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} < 1 ,$$

for $n \geq 1$. Altså er rækken konvergent med sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 .$$

5. Er rækken $\sum \frac{x^n}{n!}$ konvergent for alle $x \in \mathbb{C}$?

Kvotientkriteriet betragter

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n! |x|^{n+1}}{|x|^n (n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} < \frac{1}{2} < 1 ,$$

for $n > 1 + 2|x|$. Altså er rækken konvergent, da de første ca. $1 + 2x$ led er uden betydning (en endelig sum).

for $n > 1 + 2|x|$. Altså er rækken konvergent, da de første ca. $1 + 2x$ led er uden betydning (en endelig sum).

6. Lad $a > 0$; vis, at $(\sqrt[n]{a}) \rightarrow 1$ for $n \rightarrow \infty$. Følgen

$$(\sqrt[n]{a})$$

er monoton; for $a > 1$ er den aftagende. Det gælder, at $\sqrt[n]{a} > 1$ for alle n . Følgen er altså begrænset. Den har et fortætningspunkt, som må være grænsepunkt, når følgen er monoton. Dvs.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = b \geq 1.$$

Tillige gælder, at $\sqrt[n]{a} \geq b$ for alle n , fordi følgen er monoton. Hvis nu $b > 1$, så vil (b^n) være voksende og divergent (gå mod ∞). Altså vil

$$b^n > a$$

fra et vist trin. Men dvs. $b > \sqrt[n]{a}$. Konklusion: $b = 1$.

(Hvis nogen tvivler på, at $b^n \rightarrow \infty$ for $n \rightarrow \infty$, kan man ræsonnere således:

Da $b > 1$ vil $c = b - 1 > 0$. Nu er

$$b^n = (1 + c)^n = 1 + nc + \dots,$$

hvor ... står for lutter positive led. Altså gælder

$$b^n > nc \rightarrow \infty \text{ for } n \rightarrow \infty.)$$

§5. Kontinuitet.

Undersøg om funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er kontinuert.

Uden for $(0,0)$ er f sammensat af regneoperationer og derfor kontinuert.

I $(0,0)$ må en særlig undersøgelse udføres.

Vi skal vise, at for $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$, så

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon.$$

Nu er

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3 - y^3|}{|x^2 + y^2|} \leq \frac{|x^3| + |y^3|}{x^2 + y^2} \leq 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

fordi $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Altså er

$$|f(x,y)| \leq 2\delta \quad \text{for } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta.$$

Sætter vi $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, ser vi, at f er kontinuert i $(0,0)$.

§6. Differential- og integralregning i én reel variabel.

Opgave 1. Lad D være den kompakte enhedscirkelskive,
 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ og $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ være defineret ved

$$f(x,y) = 6x^2y + 3x^2 - 2y .$$

Bestem maksimum og minimum for f .

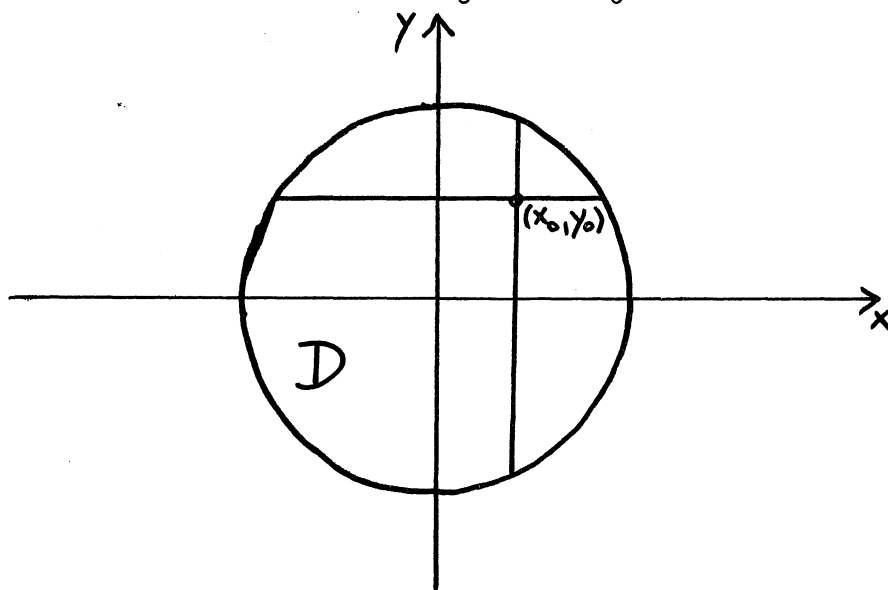
Løsning. Da D er kompakt og f er kontinuert, findes punkter i D , hvor f antager sit maksimum. Er sådan et punkt (x_0, y_0) , så må funktionerne

$$f_{y_0} : x \rightarrow f(x, y_0)$$

og

$$f_{x_0} : y \rightarrow f(x_0, y)$$

antage deres maksima i hhv. x_0 og y_0 .



Hvis (x_0, y_0) er et indre punkt, så må derfor differentialkvotienten af f_{y_0} og f_{x_0} være 0 i x_0 og y_0 hhv.

$$f'_{y_0}(x_0) = 12x_0y_0 + 6x_0 = 6x_0(2y_0 + 1)$$

$$f_{x_0}(y_0) = 6x_0^2 - 2 .$$

De er begge 0 i punkterne $(x_0, y_0) = (\pm\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{1}{2})$, der ligger i D

med funktionsværdi $6 \cdot \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Men vi mangler at undersøge funktionens værdier på randen af D , altså på $C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Da $x^2 = 1 - y^2$, kan vi på C fremstille f som

$$g(y) = 6(1 - y^2)y + 3(1 - y^2) - 2y \quad \text{for} \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Altså $g(y) = -6y^3 - 3y^2 + 4y + 3$.

I de indre punkter, $y \in]-1, 1[$, vil $g'(y) = 0$ i et eventuelt maksimum eller minimum.

$$g'(y) = -18y^2 - 6y + 4,$$

hvis nulpunkter er

$$y_0 = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 288}}{-36} = \frac{1 \pm 3}{-6} = \begin{cases} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Tilsvarende værdier er $x_0 = \pm \sqrt{1 - y_0^2} = \begin{cases} \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}.$

Funktionsværdierne er

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = -6 \cdot \frac{1}{27} - 3 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 3 = \frac{34}{9}$$

og

$$g\left(-\frac{2}{3}\right) = -6 \cdot \left(-\frac{8}{27}\right) - 3 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 = \frac{7}{9}.$$

Endelig må vi undersøge intervallets endepunkter -1 og 1 :

$$g(-1) = 6 - 3 - 4 + 3 = 2$$

$$g(1) = -6 - 3 + 4 + 3 = -2.$$

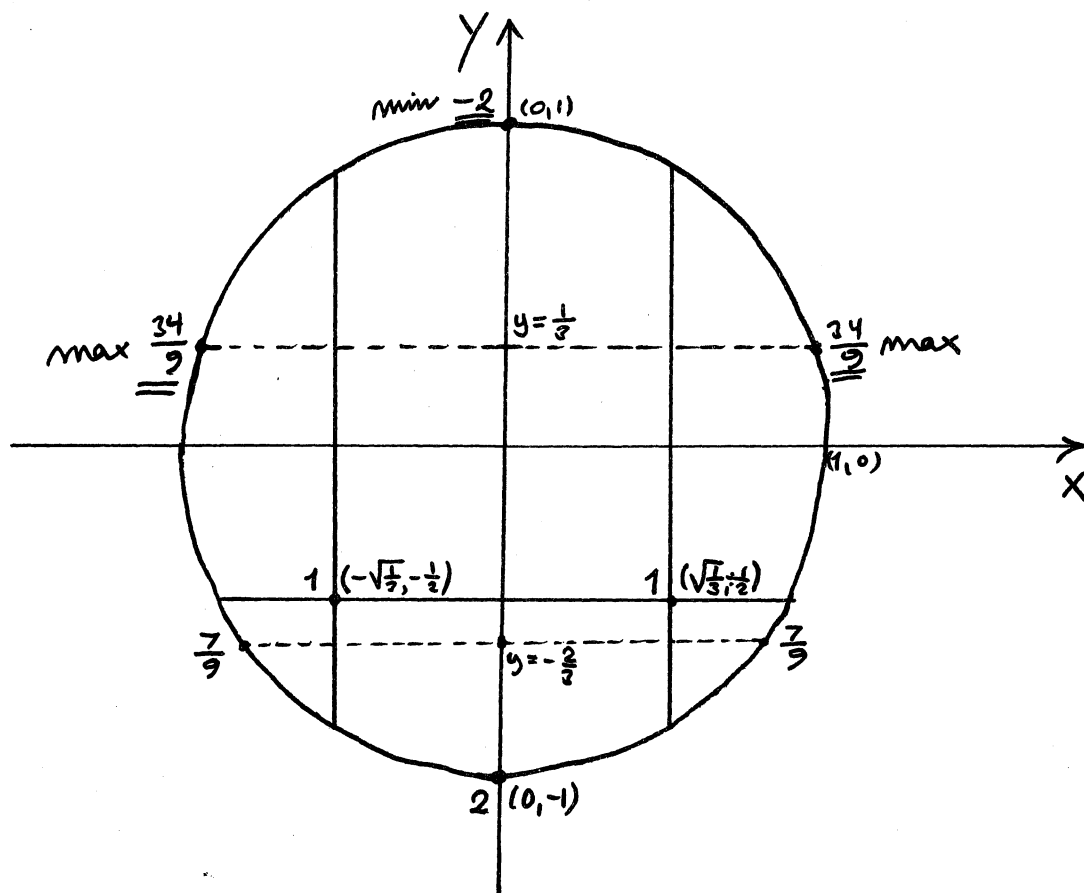
Sammenligning af de fem værdier viser, at maksimum er $\frac{34}{9}$, som antages i punkterne

$$(x,y) = \left(\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

mens minimum er -2 , som antages i punktet

$$(x,y) = (0,1).$$

Kandidaterne:



Opgave 2. Bestem differentialkvotient og stamfunktion til

$$f(x) = \frac{9x^2 + 4x - 4}{4x^3 + 5x^2 + 2x - 6}.$$

a) Formlen for differentiation af en brøk giver

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x^3 + 5x^2 + 2x - 6)(18x + 4) - (9x^2 + 4x - 4)(12x^2 + 10x + 2)}{(4x^3 + 5x^2 + 2x - 6)^2} \\ &= \frac{-36x^4 - 32x^3 + 46x^2 - 68x - 16}{16x^6 + 40x^5 + 41x^4 - 28x^3 - 56x^2 - 24x + 36}. \end{aligned}$$

b) Lettere er at spalte i stambrøker (p. V.3.5)

$$f(x) = \frac{1}{4x-3} + \frac{1}{x+1+i} + \frac{1}{x+1-i}$$

hvoraf

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\frac{4}{(4x-3)^2} - \frac{1}{(x+1+i)^2} - \frac{1}{(x+1-i)^2} \\
 &= -\frac{4}{(4x-3)^2} - \frac{(x+1)^2 - 1 - 2i(x+1) + (x+1)^2 - 1 + 2i(x+1)}{((x+1)^2 + 1)^2} \\
 &= -\frac{4}{(4x-3)^2} - \frac{2x^2 + 4x}{(x^2 + 2x + 2)^2} .
 \end{aligned}$$

c) For at finde en stamfunktion er opspaltningen i stambrøker obligatorisk.

$$\begin{aligned}
 \int f(x) dx &\sim \frac{1}{4} \ln(4x-3) + \ln(x+1+i) + \ln(x+1-i) \\
 &= \ln \sqrt[4]{4x-3} + \ln((x+1)^2 + 1) = \ln \left(\sqrt[4]{4x-3} \cdot (x^2 + 2x + 2) \right) .
 \end{aligned}$$

Opgave 3. Bestem en stamfunktion til $\arctg$.

Vi benytter delvis integration på produktet $1 \cdot \arctg$, hvor 1 er differentialkvotient af x .

$$\int 1 \cdot \arctg x dx = x \arctg x - \int x \frac{1}{x^2+1} dx .$$

Nu substituerer vi $s = x^2 + 1$, $ds = 2x dx$ i integralet og får

$$\int \frac{1}{x^2+1} x dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2} \ln s = \ln \sqrt{s} .$$

Stamfunktionen er altså (ved tilbagesubstitution)

$$x \arctg x - \ln \sqrt{1+x^2} .$$

Opgave 4. Bestem en stamfunktion til $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(x) = \frac{1}{x+i} .$$

Vi skriver funktionen som sum af real- og imaginærdel;

$$f(x) = \frac{1}{x+i} = \frac{x-i}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - i \frac{1}{x^2+1}$$

Herefter findes stamfunktionen som

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int \frac{x dx}{x^2+1} - i \int \frac{dx}{x^2+1} = \ln \sqrt{x^2+1} + i \operatorname{arccot} x \\ &= \ln(x+i) \quad \text{for } x > 0.\end{aligned}$$

Opgave 5. Bestem Taylorrækken fra 0 af funktionen

$$f(x) = (1+x)^\alpha.$$

Først skrives

$$f(x) = e^{\alpha \cdot \ln(1+x)}.$$

Så findes de afledede:

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha}{1+x} = (1+x)^{\alpha-1} \cdot \alpha \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Taylorrækken er derfor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

hvor $\binom{\alpha}{n}$ defineres som

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!}.$$

Konvergens ses af restleddet

$$\begin{aligned}R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x \alpha \dots (\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n} (x-t)^n dt \\ &= \frac{\alpha \dots (\alpha-n)}{n!} \int_0^x (1+t)^\alpha \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n dt.\end{aligned}$$

Nu er $\left| \frac{x-t}{1+t} \right| \leq |x|$ for $|t| \leq |x| < 1$, så vi har

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \left| \binom{\alpha}{n} \right| \left| \int_0^x (1+t)^\alpha \cdot |x|^n dt \right| \\ &\leq \left| \binom{\alpha}{n} \right| \cdot |x|^n \frac{1 + |x|^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} . \end{aligned}$$

Da den uendelige række for $|x| < k < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \binom{\alpha}{n} \right| |x|^n$$

er konvergent ifølge kvotientkriteriet, p. III,4,5, idet kvotienten er

$$\left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| \cdot |x| < k$$

for $n \geq N$, så må ledfølgen og med den $R_n(x)$ gå mod 0.

Vi har altså

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{for } |x| < 1 .$$

Denne række kaldes binomialrækken.

For $\alpha = \frac{1}{2}$ omskrives rækken til

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^{2n-1}} \cdot \binom{2n-2}{n-1} x^n \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \dots \end{aligned}$$

§7. Differentialligninger af første orden.Opgave 1. Løs differentialligningen

$$(D^2 + 2D^1 + D^0)\varphi = e^{-x}.$$

Karakterpolynomiet er

$$(x^2 + 2x + 1) = (x+1)^2.$$

Den homogene har derfor løsningerne

$$e^{-x}, \quad xe^{-x}.$$

Vi gætter på en løsning til den inhomogene af formen

$$x^2 e^{-x}.$$

Vi finder

$$(D^2 + 2D^1 + D^0)x^2 e^{-x} = 2e^{-x}.$$

En løsning er derfor

$$\frac{1}{2}x^2 e^{-x}.$$

Den fuldstændige løsning er altså

$$\frac{1}{2}x^2 e^{-x} + \lambda e^{-x} + \mu x e^{-x}.$$

Opgave 2. Løs differentialligningen for $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$(D^2 + 2\operatorname{tg} x D^1 - D^0)\varphi = \sin x.$$

Vi gætter en løsning til den homogene ligning, nemlig

$$\varphi(x) = \sin x.$$

Herefter indsættes løsningsforslaget $\psi \sin x$, og vi får

$$\psi'' \sin x + 2(\operatorname{tg} x \sin x + \cos x)\psi' = \sin x$$

eller

$$\psi'' + 2(\operatorname{tg} x + \cot x)\psi' = 1.$$

Den tilsvarende homogene ligning løses af

$$e^{-2\int(\operatorname{tg}x+\cot x)dx} = e^{-2(-\ln \cos x + \ln \sin x)} = \cot^2 x .$$

Ligningen selv løses af

$$\begin{aligned}\psi' &= \cot^2 x \int \operatorname{tg}^2 x dx = \cot^2 x \int (\operatorname{tg}^2 x + 1 - 1) dx \\ &= \cot^2 x (\operatorname{tg} x - x) = \cot x - x \cot^2 x .\end{aligned}$$

Den fuldstændige løsning er derfor

$$\psi' = \cot x - x \cot^2 x + \lambda \cot^2 x .$$

Af denne ligning findes

$$\begin{aligned}\psi &= \int \cot x dx - \int x \cot^2 x dx + \lambda \int \cot^2 x dx \\ &= \int \cot x dx + x(\cot x + x) - \int (\cot x + x) dx + \lambda \int (\cot^2 x + 1 - 1) dx \\ &= \int \cot x dx + x \cot x + \frac{x^2}{2} - \int \cot x dx - \frac{x^2}{2} + \lambda(-\cot x - x) + \mu \\ &= x \cot x + \frac{x^2}{2} + \lambda(\cot x + x) + \mu .\end{aligned}$$

Løsningen til den oprindelige ligning fås nu ved at gange med $\sin x$, altså

$$\psi \sin x = x \cos x + \frac{x^2}{2} \sin x + \lambda(\cos x + x \sin x) + \mu \sin x .$$

§8. Integraler i $\mathbb{R}^n$.

1. $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} dx dy .$

Lad $f_n(x,y)$ være defineret som

$$f_n(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{for } 0 \leq x,y \leq n \\ 0 & \text{ellers .} \end{cases}$$

Da vil $f_n(x,y) \nearrow e^{-x-y}$ for $n \rightarrow \infty$.

Nu er

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty f_n(x,y) dx dy &= \int_0^n \int_0^n e^{-x-y} dx dy \\ &= \int_0^n e^{-y} \int_0^n e^{-x} dx dy = \int_0^n e^{-y} \cdot (1-e^{-n}) dy = (1-e^{-n}) (1-e^{-n}) . \end{aligned}$$

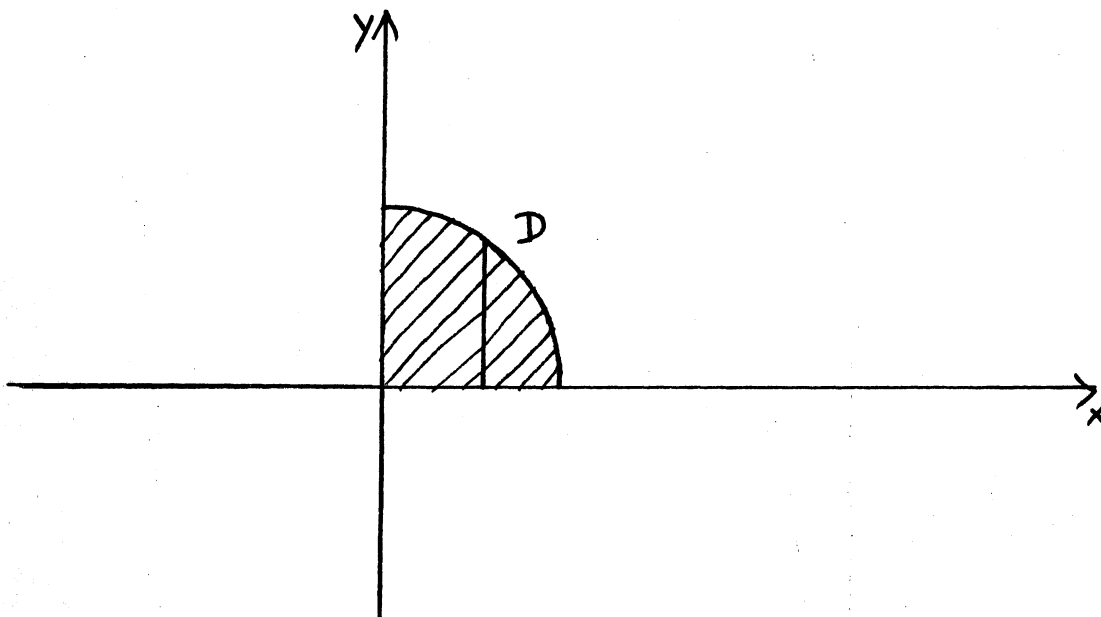
Da følgen

$$(1-e^{-n}) (1-e^{-n}) \rightarrow 1 \quad \text{for } n \rightarrow \infty ,$$

må ifølge Sætning I,8,14

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} dx dy = 1 .$$

2. $I = \int_D x dx dy$, hvor $D = \{(x,y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2+y^2 \leq 1\}$.



$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \, dx = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-u} \, du \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{-(1-u)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} .
 \end{aligned}$$

3. $I = \int_D 1 \, dx \, dy$, hvor D er området ovenfor.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 \cdot dy \, dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 \varphi} \cos \varphi \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} \, d\varphi = \left[\frac{\sin 2}{4} + \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}} .
 \end{aligned}$$

Resultatet fortolkes som arealet af en kvart cirkel med radius 1.

§9. Vektorrum og lineære funktioner.

1. Bestem den inverse matrix til

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi finder rumproduktet til

$$2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 3 = 5.$$

Efter formen^l er nu

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Løs ligningen

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ved, at $\underline{\underline{A}}$ har rang 3 (rumproduktet $\neq 0$), så der er netop én løsning. Vi finder den ved at gange ligningen fra venstre med $\underline{\underline{A}}^{-1}$:

$$\begin{aligned}\underline{x}_i &= \underline{A}^{-1}(\underline{A} \underline{x}_i) = \underline{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

2. Bestem rangen af matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 3 & -5 & 7 \end{pmatrix} .$$

Da $\underline{A}$ er en 3×4 -matrix, er rangen højst 3. Hvis rangen er 3, findes 3 uafhængige søjler. Er rangen derimod 2, må to af søjlerne kunne fremstilles som linearkombination af de øvrige 2. Nu er ingen af søjlerne proportionale, så hvilke som helst to søjler skulle kunne frembringe de andre.

Lad os tænke os, at tredje søjle fremstilles som kombination af første og anden. Dvs. vi har x_1 og x_2 , så

$$\begin{aligned}(1) \quad x_1 + 3x_2 &= 5 \\ (2) \quad 2x_1 + 4x_2 &= 6 \\ (3) \quad -x_1 + 3x_2 &= -5 .\end{aligned}$$

Af (1) og (3) fås uden videre

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 0$$

som ikke passer i (2). Altså er rangen større end 2, og derfor 3.

§10. Determinanten.

1. Differentialligningen fra §V,7:

$$(D^2 + 2 \operatorname{tg} x D^1 - D^0) = 0 .$$

Wronski-determinanten er løsning til

$$(D^1 + 2 \operatorname{tg} x D^0)W = 0$$

altså
$$W(x) = e^{-\int 2 \operatorname{tg} x dx} = e^{2 \ln \cos x} = \cos^2 x .$$

Derfor er en anden løsning end $\varphi(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sin x \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \sin x \int (\cot^2 x + 1 - 1) dx \\ &= \sin x (-\cot x - x) = -x \sin x - \cos x . \end{aligned}$$

2. Udregn (Vandermonde) determinanten

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} .$$

For fast x_2, x_3, x_4 er V_4 et 3'die grads polynomium i x_1 med rødderne x_2, x_3, x_4 idet disse giver afhængige rækker. Altså er

$$V_4 = \alpha (x_1 - x_2) (x_1 - x_3) (x_1 - x_4) .$$

Sættes $x_1 = 0$, står her

$$\alpha (-x_2) (-x_3) (-x_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} .$$

Ligningen forkortes med x_2, x_3, x_4 til

$$-\alpha = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix} = (x_4 - x_3)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)$$

(se side III,9,3).

Altså er

$$V_4 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4) \cdot$$

3. Udregn determinanten.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot$$

Determinanten ændres ikke af, at vi til en række (søjle) lægger en linearkombination af de øvrige rækker (søjler). (Vi tilføjer jo 0'er.)

Vi kan derfor fratrække 2 × fjerde række i tredje række og 5 × første række i anden.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & -18 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot$$

Vi trækker nu 3 × første række fra fjerde og sætter faktoren (-6) uden for anden række

$$D = (-6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \end{vmatrix} \cdot$$

Vi sætter faktoren (-4) uden for fjerde række og trækker $3 \times$ anden række fra tredje.

$$D = 24 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} .$$

Til sidst trækker vi anden række fra fjerde

$$D = 24 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} .$$

Kun den identiske permutation giver et produkt uden 0'er. Af de 24 ($= 4!$) produkter i determinantformlen, er de 23 lig med 0. Altså

$$D = 24 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 24 .$$

§11. Egenverdier og egenvektorer.

1) Bestem egenverdier og egenvektorer for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 56 & -19 & -19 \\ -19 & 56 & -19 \\ -19 & -19 & 56 \end{pmatrix}$$

Det karakteristiske polynomium er

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x-56 & 19 & 19 \\ 19 & x-56 & 19 \\ 19 & 19 & x-56 \end{pmatrix} &= (x-56)^3 + 2 \cdot 19^3 - 3 \cdot 19^2 (x-56) \\ &= x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 56 + 3 \cdot x \cdot 56^2 - 56^3 + 2 \cdot 19^3 - 3 \cdot 19^2 x + 3 \cdot 19^2 \cdot 56 \\ &= x^3 - 168x^2 + 8325x - 101250 . \end{aligned}$$

Nu er matricen jo så symmetrisk, at vi gætter på, at $(1,1,1)$ er en egenvektor.

$$\begin{pmatrix} 56 & -19 & -19 \\ -19 & 56 & -19 \\ -19 & -19 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} = 18 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Det er den med egenverdi 18. Altså må $x-18$ gå op i det karakteristiske polynomium:

$$x^3 - 168x^2 + 8325x - 101250 = (x-18)(x^2 - 150x + 5625) .$$

De andre egenverdier er altså ens $= 75$. Egenrummet hørende til 75 er

$$\text{Ker}(\underline{A} - 75\underline{E}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 \end{pmatrix} .$$

En basis for kernen er $(1, -1, 0)$, $(1, 0, -1)$.

- 2) Bestem koordinattransformationen, der giver funktionen $\underline{A}$ på Jordans normalform.

Dvs. find en regulær matrix $\underline{S}$, så

$$\underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{pmatrix} .$$

Da vi finder en basis af egenvektorer, bliver Jordans normalform uden 1-taller i bidiagonalen.

Nu er $\underline{S}$ jo matricen, med egenvektorerne til søjler:

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Den inverse fås af formlerne side III,9,3 - III,10,1:

$$\underline{S}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

- 3) Bestem egenverdier og egenvektorer til

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Det karakteristiske polynomium er

$$\det(x\underline{E} - \underline{B}) = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1 ,$$

som har rødderne $\pm i$.

Egenvektorerne er altså kernerne til

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} .$$

Vi skal blot løse ligningerne

$$xi + y = 0 \quad \text{og} \quad -xi + y = 0$$

for $(x,y) \in \mathbb{C}^2$. Sættes $x = 1$, fås y hhv. $-i$ og i .
Egenvektorerne er altså:

til egenværdien	hører egenvektor
i	$(1, -i)$
$-i$	$(1, i)$

Jordans normalform er altså

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Transformationsmatricen er

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

med invers

$$S^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

4) Løs differentialligningen

$$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6D^0)\varphi = 0.$$

Vi sætter $\varphi = x$, $\varphi' = y$ og $\varphi'' = z$. Så kan vi skrive ligningen som et system:

$$z' = 6z - 11y + 6x$$

$$y' = z$$

$$x' = y.$$

Eller på matrixformen

$$D \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}.$$

Lad os transformere ligningen til diagonalform. Egenverdierne er rødder i polynomiet i ξ

$$\begin{aligned}
 p(\xi) &= \det \begin{pmatrix} \xi-6 & 11 & -6 \\ -1 & \xi & 0 \\ 0 & -1 & \xi \end{pmatrix} \\
 &= \xi^2(\xi-6) - 6 + 11\xi = \xi^3 - 6\xi^2 + 11\xi - 6 .
 \end{aligned}$$

Vi gætter roden 1 og finder

$$\xi^3 - 6\xi^2 + 11\xi - 6 = (\xi-1)(\xi^2 - 5\xi + 6)$$

de andre rødder er 2 og 3.

Diagonalformen er altså

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

For at løse ligningen, må vi finde transformationsmatricen S .

Dens søjler er de tre egenvektorer. Vi finder

$$\begin{aligned}
 1: \quad \ker \begin{pmatrix} 5 & -11 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \quad \text{basis: } (1,1,1) \\
 2: \quad \ker \begin{pmatrix} 4 & -11 & 6 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \quad \text{basis: } (4,2,1) \\
 3: \quad \ker \begin{pmatrix} 3 & -11 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} & \quad \text{basis: } (9,3,1) .
 \end{aligned}$$

Transformationsmatricen er

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Transformationen er

$$\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{y} \\ \hat{x} \end{pmatrix} .$$

Nu er

$$\begin{aligned} D\hat{z} &= \hat{z} & \hat{z} &= \alpha e^t \\ D\hat{y} &= 2\hat{y} & \hat{y} &= \beta e^{2t} \\ D\hat{x} &= 3\hat{x} & \hat{x} &= \gamma e^{3t} \end{aligned}$$

så

$$\varphi(t) = x = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = \alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{3t}.$$

Nu er

$$y = x' = \hat{z} + 2\hat{y} + 3\hat{x} = \alpha e^t + 2\beta e^{2t} + 3\gamma e^{3t}$$

og

$$z = y' = \hat{z} + 4\hat{y} + 9\hat{x} = \alpha e^t + 4\beta e^{2t} + 9\gamma e^{3t}$$

egentlig overflødige.

5) Bestem egenverdier og egenvektorer for

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 0 \\ 10 & 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium er

$$p(x) = \det(x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Egenverdierne er altså 1, 2, 3 og 4.

For at bestemme en egenvektor, bemærker vi, at

$$p(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{0}};$$

specielt gælder, at $p(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{0}}$ for hvert $a \in \mathbb{R}^4$.

Vi skriver ligningen for egenverdi 1 således

$$p(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{a}} = (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}})(\underline{\underline{A}}^3 - 9\underline{\underline{A}}^2 + 26\underline{\underline{A}} - 24\underline{\underline{E}})\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{0}}.$$

Det ses, at hvis

$$\underline{\underline{e}}_1 = (\underline{\underline{A}}^3 - 9\underline{\underline{A}}^2 + 26\underline{\underline{A}} - 24\underline{\underline{E}})\underline{\underline{a}} \neq \underline{\underline{0}},$$

så er $\underline{\underline{e}}_1$ en egenvektor, hørende til egenverdien 1.

Vi regner:

$$\underline{\underline{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{Aa}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A^2a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 62 \\ 151 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A^3a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 35 \\ 284 \\ 1183 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 35 \\ 284 \\ 1183 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 62 \\ 151 \end{pmatrix} + 26 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} - 24 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 30 \\ -66 \\ 84 \end{pmatrix},$$

altså f.eks. $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \\ -14 \end{pmatrix}$ er en egenvektor hørende til 1.

Nu er det lettere. Vi har tilsvarende

$$p(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{a}} = (\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{E}})(\underline{\underline{A}}^3 - 8\underline{\underline{A}}^2 + 19\underline{\underline{A}} - 12\underline{\underline{E}})\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 35 \\ 284 \\ 1183 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 62 \\ 151 \end{pmatrix} + 19 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -60 \\ 165 \end{pmatrix}.$$

Altså f.eks. er $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -12 \\ 33 \end{pmatrix}$ en egenvektor hørende til 2.

Og for 3 har vi

$$p(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{a}} = (\underline{\underline{A}} - 3\underline{\underline{E}})(\underline{\underline{A}}^3 - 7\underline{\underline{A}}^2 + 14\underline{\underline{A}} - 8\underline{\underline{E}})\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{0}},$$

så

$$\underline{\underline{e}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 35 \\ 284 \\ 1183 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 62 \\ 151 \end{pmatrix} + 14 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -38 \\ 266 \end{pmatrix}.$$

Altså er f.eks. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ en egenvektor hørende til 3.

Endelig for 4 (kunne vi gætte), men alligevel:

$$p(\underline{A})\underline{a} = (\underline{A} - 4\underline{E})(\underline{A}^3 - 6\underline{A}^2 + 11\underline{A} - 6\underline{E})\underline{a} = \underline{0}$$

$$\underline{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 35 \\ 284 \\ 1183 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 62 \\ 151 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 387 \end{pmatrix}.$$

Altså er f.eks. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er egenvektor hørende til 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 0 \\ 10 & 9 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 11 & -12 & 1 & 0 \\ -14 & 33 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 11 & -12 & 1 & 0 \\ -14 & 33 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

§12. Ortogonalsystemer.

1) Undersøg, om funktionen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

har et minimum i $(0,0,0)$.

Vi kan skrive f på formen

$$f(x) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Et minimum er uafhængigt af koordinatsystemet i $\mathbb{R}^3$. Vi bruger Sætning I,12,2 til at transformere udtrykket til formen

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= (\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \hat{x}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \hat{x}_1^2 + \lambda_2 \hat{x}_2^2 + \lambda_3 \hat{x}_3^2, \end{aligned}$$

som har minimum i 0, hvis λ_i alle er positive. Det er derfor nok at bestemme λ_i ('s fortegn). Lad os udregne λ_i . Vi finder det karakteristiske polynomium

$$\begin{aligned} p(x) &= \det \begin{pmatrix} (x-7) & 3 & 1 \\ 3 & (x-5) & 2 \\ 1 & 2 & (x-3) \end{pmatrix} \\ &= (x-7)(x-5)(x-3) + 12 - 4(x-7) - (x-5) - 9(x-3) \\ &= x^3 - 15x^2 + x(71 - 14) - 105 + 12 + 28 + 5 + 27 \\ &= x^3 - 15x^2 + 57x - 33. \end{aligned}$$

Med Newton kan man bestemme roden

$$\alpha = 0.7028584301 \dots$$

Polynomiers division giver

$$x^3 - 15x^2 + 57x - 33 = (x - \alpha)(x^2 - 14.29714157x + 46.95113352).$$

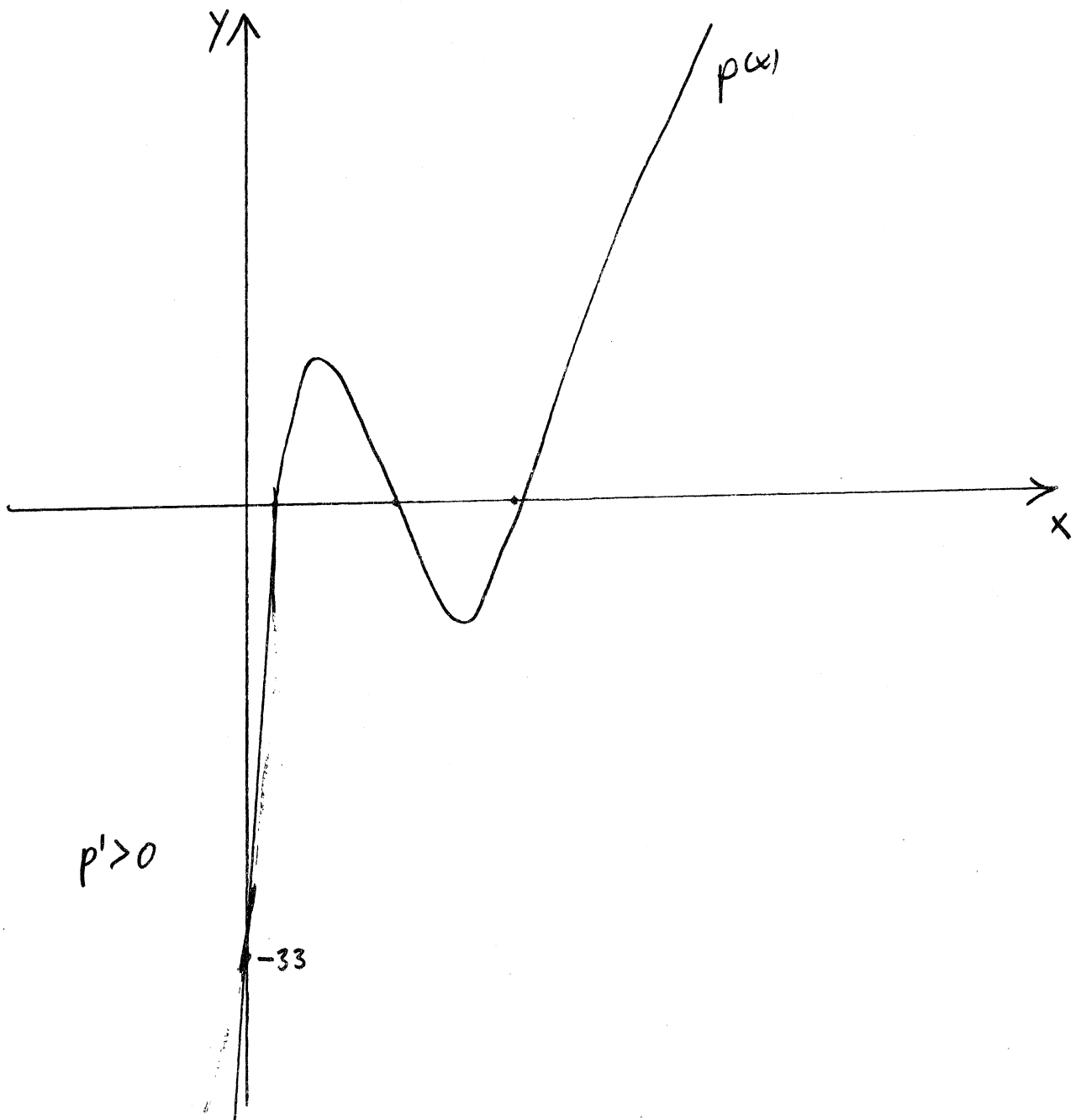
De sidste rødder er derfor

$$\beta = 5.111137476$$

$$\gamma = 9.185954094 .$$

I dette tilfælde er det nu ikke nødvendigt at beregne rødderne explicit. Vi ser, at $p(0) = -33$. Da $p'(x) = 3(x^2 - 10x + 19) > 0$ for $x < 0$, må $p(x) \leq -33$ for $x \leq 0$. Altså har $p(x)$ kun positive rødder. (Vi ved jo, at rødderne er reelle, fra Sætning I,12,4.)

Konklusion: Funktionen f har et minimum i $0 \in \mathbb{R}^3$.



2) Løs ligningerne, dvs. bestem bedste approksimation.

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ -5 & 11 & -2 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi ganger med den transponerede fra venstre og får systemet:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 3 \\ 12 & 4 & 11 & 8 \\ 1 & 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 12 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ -5 & 11 & -2 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 3 \\ 12 & 4 & 11 & 8 \\ 1 & 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

altså

$$\begin{pmatrix} 59 & 29 & 32 \\ 29 & 345 & 10 \\ 32 & 10 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 85 \\ 5 \end{pmatrix}$$

determinaten er 732650. Cramers formler giver løsningerne

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 29 & 32 \\ 85 & 345 & 10 \\ 5 & 10 & 55 \end{vmatrix}}{732650} = -\frac{30000}{732650} = -\frac{600}{14653}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 59 & 7 & 32 \\ 29 & 85 & 10 \\ 32 & 5 & 55 \end{vmatrix}}{732650} = \frac{181550}{732650} = \frac{3631}{14653}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 59 & 29 & 7 \\ 29 & 345 & 85 \\ 32 & 10 & 5 \end{vmatrix}}{732650} = \frac{51050}{732650} = \frac{1021}{14653}.$$

Som altså er koordinaterne til projektionen af $(1,2,3,4)$ på underrummet i $\mathbb{R}^4$ udspændt af de tre søjler i koordinaterne hørende til basen bestående af de tre søjler.

I $\mathbb{R}^4$ har projektionen så koordinaterne

$$x \underline{s}_1 + y \underline{s}_2 + z \underline{s}_3 = \frac{1}{14653} (42193, 19871, 40899, 26227)$$

$$\approx (2.879478605, 1.356104552, 2.791169044, 1.789872381) .$$

Dette er det nærmeste vi kan komme til vektoren $(1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$.
Afstanden er

$$2.979146796 .$$

3) Bestem ortogonaltransformationen af

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 59 & 29 & 32 \\ 29 & 345 & 10 \\ 32 & 10 & 55 \end{pmatrix}$$

til en diagonalmatrix.

Egenverdierne er rødder i

$$p(x) = \det(x \underline{E} - \underline{A}) = x^3 - 459x^2 + 40610x - 732650 .$$

Med Newton fås rødderne

$$24.42548931$$

$$86.06817746$$

$$348.5063332 .$$

Egenvektorerne fås ved at løse ligningsystemerne

$$\begin{pmatrix} 59 - \lambda & 29 & 32 \\ 29 & 345 - \lambda & 10 \\ 32 & 10 & 55 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

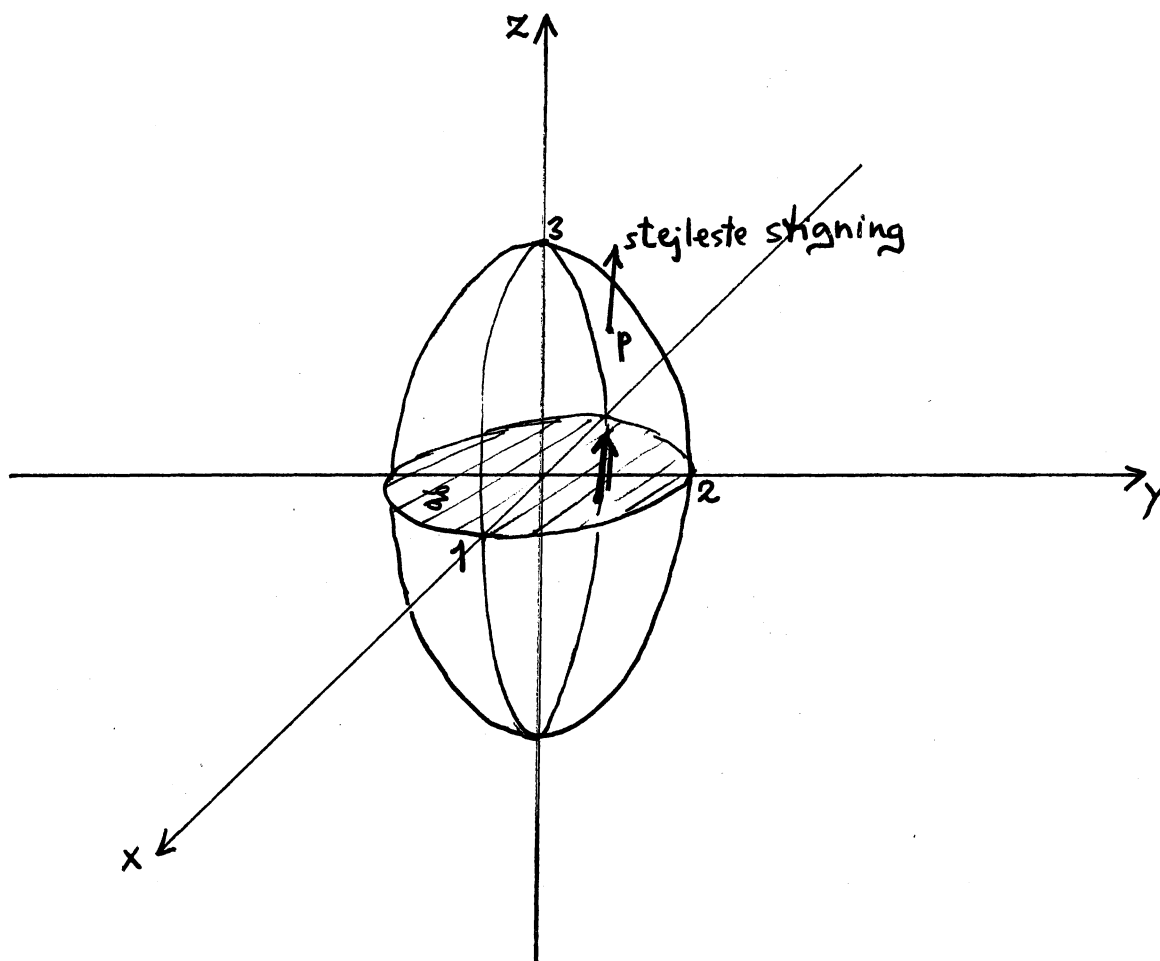
for hver af de tre værdier af λ . Man finder den ortogonale matrix

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} -0.6968666912 & 0.7095434635 & 0.1045221897 \\ 0.0407076108 & -0.1063702028 & 0.9934929644 \\ 0.7160444855 & 0.6965870035 & 0.0452420321 \end{pmatrix} .$$

§13. Differential- og integralregning i flere reelle variable.

1. Lad os betragte en ellipsoide:

$$(*) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$



Vi kan opfatte fladen som

$$F = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$$

for funktionen

$$F(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0.$$

I omegnen af punktet $p = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2)$ kan f.eks. z gives implicit ved $F = 0$ som en funktion

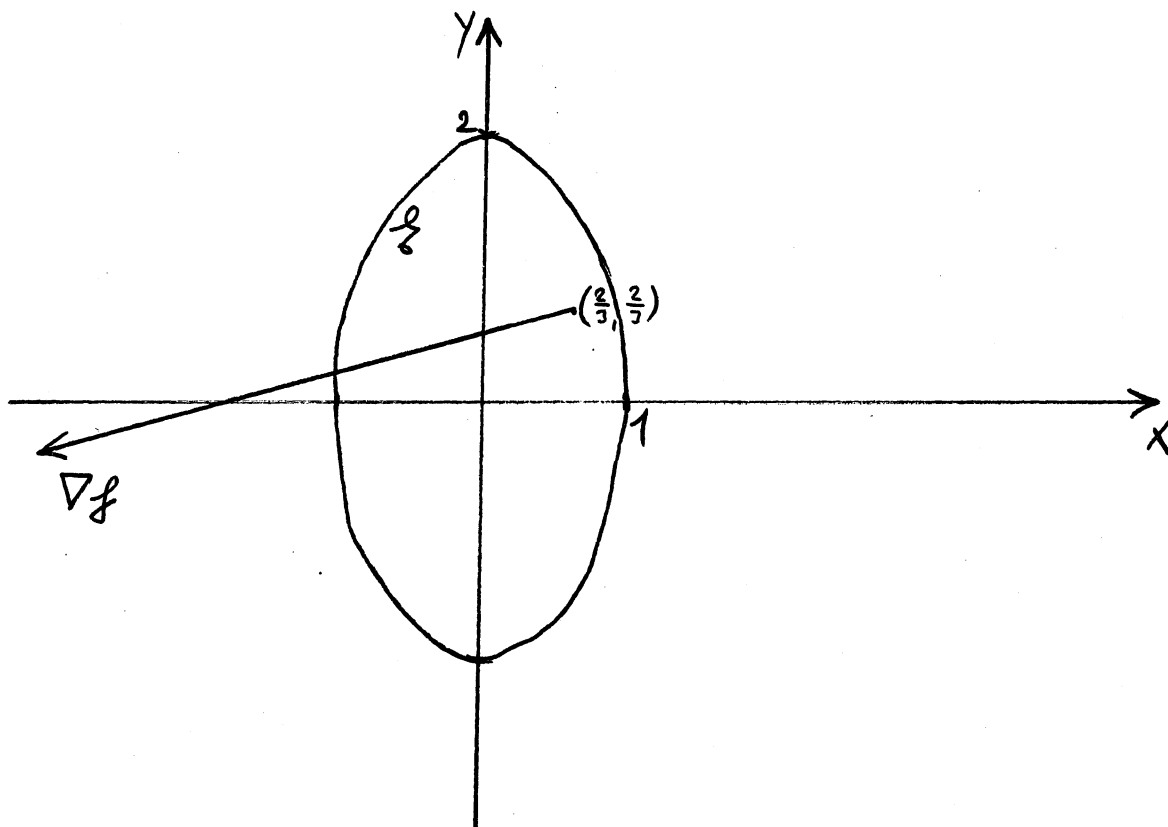
$$z = f(x, y),$$

hvor $(x, y) \in E = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$; nemlig som

$$z = 3\sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{4}}.$$

Gradienten af f i punktet $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ bestemmes ved hjælp af Sætning I,13,10 som

$$\begin{aligned} \underline{D}f &= (-\underline{D}_z F)^{-1} \underline{D}_{x,y} F = -\left(\frac{2z}{9}\right)_{z=2}^{-1} \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}_{x=y=\frac{2}{3}} \\ &= -\frac{9}{4} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$



Tangentvektoren til F i punktet p over retningen ∇f har den stejleste stigning fra punktet $p = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2)$.

Fladen $F_+ = \{(x,y,z) \mid F(x,y,z) = 0 \wedge z \geq 0\}$ kan fås som billede af ellipsen E ved funktionen

$$\tilde{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^3$$

givet som

$$\tilde{f}(x,y) = (x,y,f(x,y)) .$$

I punktet $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ har F_+ tangentvektoren

$$\tilde{f}_x\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(1, 0, f_x\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = (1, 0, -3)$$

$$\tilde{f}_y\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(0, 1, f_y\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \left(0, 1, -\frac{3}{4}\right).$$

Tangentplanen er altså

$$\left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2\right) + t(1, 0, -3) + s\left(0, 1, -\frac{3}{4}\right) \mid s, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

For $t = -3\tau$ og $s = -\frac{3}{4}\tau$ fås en parameterfremstilling for den stejleste tangent,

$$\left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2\right) + \left(-3, -\frac{3}{4}, \frac{153}{16}\right)\tau \mid \tau \in \mathbb{R}\right\}.$$

Skal vi bestemme det punkt på F , hvor funktionen

$$g(x, y, z) = 3x + 4y - z$$

antager sin største værdi, (som findes, da F er kompakt), benytter vi Sætning I, 13, 12.

Vi skal søge blandt de punkter på F , hvor

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2x & \frac{y}{2} & \frac{2z}{9} \end{pmatrix} \leq 1.$$

Dvs. at $\frac{2x}{3} = \frac{y}{8} = -\frac{2z}{9}.$

F.eks. må

$$x = -\frac{z}{3} \quad \text{og} \quad y = -\frac{16z}{9}.$$

Da punktet skal ligge på F , kan vi indsætte (x, y, z) i (*):

$$\frac{z^2}{9} + \frac{16^2 z^2}{4 \cdot 9^2} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Altså

$$z^2 = \frac{81}{82}$$

$$z = \pm \frac{9}{\sqrt{82}}$$

$$x = \pm \frac{3}{\sqrt{82}}$$

$$y = \pm \frac{16}{\sqrt{82}}.$$

Vi finder, at

$$g\left(\frac{3}{\sqrt{82}}, \frac{16}{\sqrt{82}}, -\frac{9}{\sqrt{82}}\right) = \frac{9 + 64 + 9}{\sqrt{82}} = \sqrt{82}$$

og $g\left(-, -, +\right) = -\sqrt{82}.$

Det ene punkt er maksimum, det andet minimum.

At bestemme det punkt på F , der er længst væk fra et givet punkt, f.eks. $(30, 7, 8\frac{2}{9})$, er mere besværligt. Vi skal maksimere funktionen

$$h(x, y, z) = (x-30)^2 + (y-7)^2 + (z-8\frac{2}{9})^2$$

under bibetingelsen (*). Sætning I, 13, 12 siger, at vi skal søge løsningen blandt de punkter på F , hvor

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 2(x-30) & 2(y-7) & 2(z-8\frac{2}{9}) \\ 2x & y & \frac{2z}{9} \end{pmatrix} \leq 1.$$

Ligningerne

$$\frac{2x-60}{2x} = \frac{4y-28}{y} = \frac{18z-148}{2z}$$

ser uskyldige ud. Sættes $\xi = \frac{1}{z}$, fås

$$x = \frac{15}{37\xi - 4}$$

$$y = \frac{28}{74\xi - 5}.$$

Indsat i (*) fås ligningen

$$k(\xi) = \frac{15^2}{(37\xi-4)^2} + \frac{14^2}{(74\xi-5)^2} + \frac{1}{9\xi^2} - 1 = 0.$$

Vi ser, at

$$k'(\xi) = -\frac{2 \cdot 15}{(37\xi-4)^3} - \frac{2 \cdot 14^2}{(74\xi-5)^3} - \frac{2}{9\xi^3}.$$

Da vi kun interesserer os for $|z| \leq 3$, kan vi kun interessere os for $|\xi| \geq \frac{1}{3}$. For $\xi > \frac{1}{3}$ er $k'(\xi) < 0$ og for $\xi < -\frac{1}{3}$ er $k'(\xi) > 0$. Der er derfor højst 2 brugelige nulpunkter for k .

Med Newton finder vi nulpunkterne

$$\xi = -\frac{1}{2}$$

$$\xi = 0.629 \dots$$

Det giver punkterne på F : $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -2)$ og $(1.590, 0.778, 0.674)$.
Vi finder afstandene $\sqrt{h}$ til hhv. $33\frac{2}{9}$ og 30.625.

Det første punkt løser altså opgaven.

Tangentplanen i $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -2)$ har frembringerne $(1, 0, -3)$ og $(0, 1, -\frac{3}{4})$. Vektoren fra punktet til det givne skal være normal til fladen F og altså til tangentplanen. Normalen er

$$(30 + \frac{2}{3}, 7 + \frac{2}{3}, 8\frac{2}{9} + 2) = (\frac{92}{3}, \frac{23}{3}, \frac{92}{9})$$

proportional med $(12, 3, 4)$, som ses at være ortogonal på planen.

Ellipsoiden kan fremstilles på parameterformen

$$(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r \cos \theta \cos \varphi, 2r \cos \theta \sin \varphi, 3r \sin \theta)$$

hvor $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Jacobideterminanten bliver

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & 2 \cos \theta \sin \varphi & 3 \sin \theta \\ -r \cos \theta \sin \varphi & +2r \cos \theta \cos \varphi & 0 \\ -r \sin \theta \cos \varphi & -2r \sin \theta \sin \varphi & 3r \cos \theta \end{vmatrix} = 6 J \text{ (kugle)} \\ &= 6r^2 \cos \theta \end{aligned}$$

Ellipsoidens rumfang er altså (III,13,stk.3.)

$$\underline{\underline{8\pi}}.$$

§14. Kurve- og fladeintegraler af differentialformer.

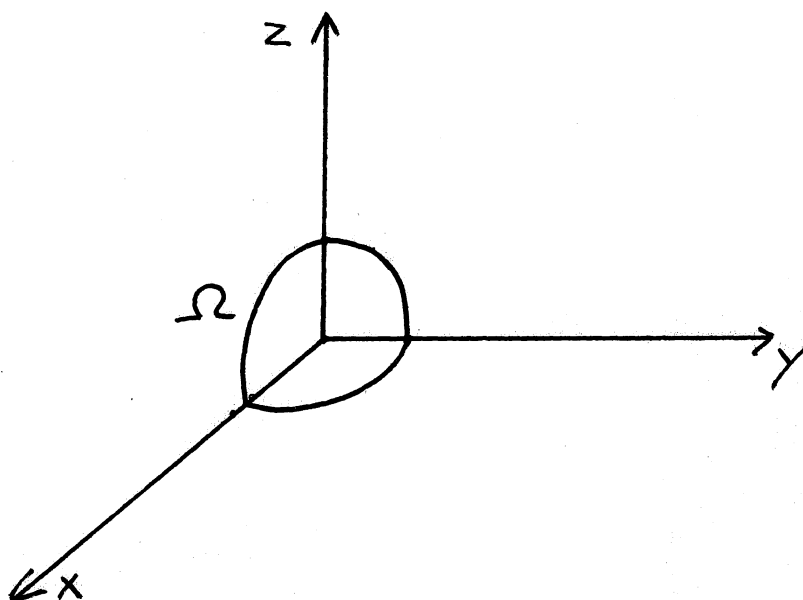
1. Lad os som et eksempel regne en eksamensopgave fra 1982.
Det er givet en flade S som randen af området

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}.$$

Desuden er der givet et vektorfelt

$$\omega = 3x^2y \, dy \wedge dz + 3xy^2 \, dz \wedge dx + 3xyz \, dx \wedge dy.$$

I opgaven udbedes strømmen af vektorfeltet ud gennem fladen.



Ω kan parameterfremstilles som

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \theta \\ y &= r \sin \varphi \cos \theta \\ z &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}.$$

Vi kan beregne strømmen direkte. Vi betragter hver af fladerne (der er 4) for sig. På fladerne, hvor $x = 0$ eller $y = 0$, er $\omega = 0$, så der er ingen strøm. På fladen $z = 0$ er $\omega = 3x^2y \, dy \wedge dz + 3xy^2 \, dz \wedge dx$, men her er $dz = 0$, så $\omega = 0$ alligevel. Tilbage er blot kuglefladen.

På kuglefladen er $r = 1$. Vi får først

$$dx = -\sin \varphi \cos \theta d\varphi - \cos \varphi \sin \theta d\theta ,$$

$$dy = \cos \varphi \cos \theta d\varphi - \sin \varphi \sin \theta d\theta ,$$

$$dz = \cos \theta d\theta .$$

Dernæst findes

$$dy \wedge dz = \cos \varphi \cos^2 \theta d\varphi \wedge d\theta$$

$$dz \wedge dx = \sin \varphi \cos^2 \theta d\varphi \wedge d\theta$$

$$dx \wedge dy = \cos \theta \sin \theta d\varphi \wedge d\theta .$$

Altså er strømmen pr. definition (idet $I = [0, \frac{\pi}{2}]^2$):

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= 3 \int_I \left(\cos^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \theta \cos \varphi \cos^2 \theta \right. \\ &\quad + \cos \varphi \cos \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \varphi \cos^2 \theta \\ &\quad \left. + \cos \varphi \cos \theta \sin \varphi \cos \theta \sin \theta \cos \theta \sin \theta \right) d\varphi \wedge d\theta \\ &= 3 \int_I ((\cos^3 \varphi \sin \varphi + \sin^3 \varphi \cos \varphi) \cos^5 \theta + \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \theta \sin^2 \theta) d\varphi \wedge d\theta \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 (1-x^2) dx = \underline{\underline{1}} . \end{aligned}$$

Man vi kunne slippe billigere med hjælp af hovedsætningen
(med $K = [0, 1] \times I$):

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_{\Omega} d\omega = \int_{\Omega} 15xy \, dx \wedge dy \wedge dz \\ &= 15 \int_K r \cos \varphi \cos \theta \, r \sin \varphi \cos \theta \, r^2 \cos \theta \, dr \wedge d\varphi \wedge d\theta \\ &= 15 \int_0^1 r^4 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \\ &= 15 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (1-x^2) dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{1}} . \end{aligned}$$

2. Et andet eksempel fra eksamen i 1982.

Lad S betegne fladen, der er rand af området Ω , hvor

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq 1\}.$$

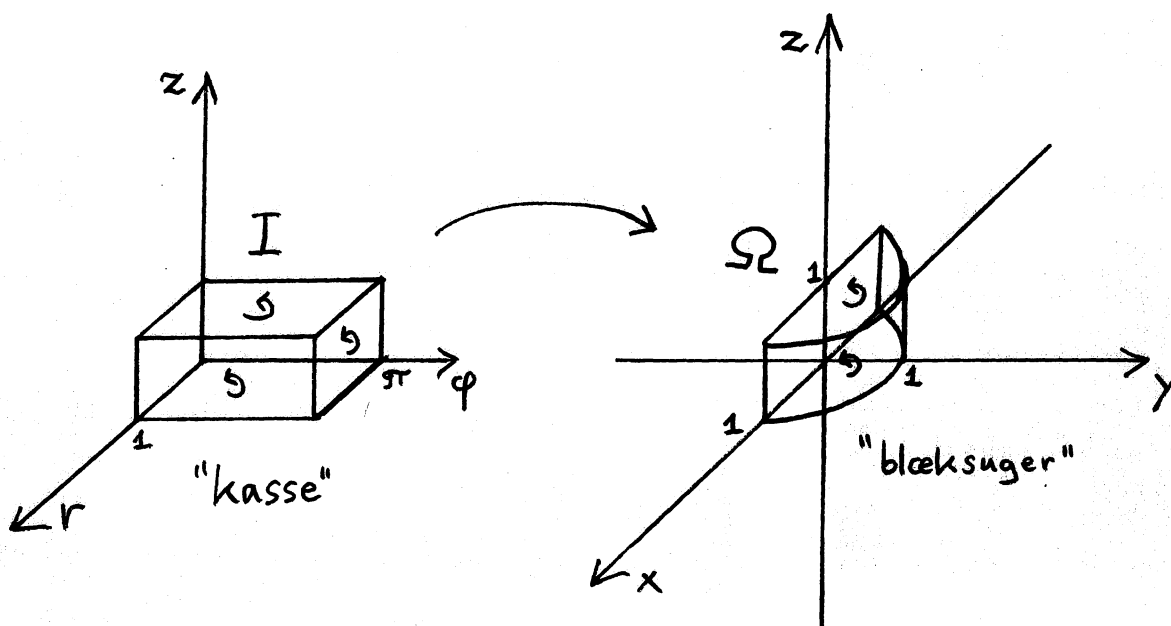
Lad ω være differentialformen

$$\omega = xyz \, dy \wedge dz + (xyz)^2 \, dz \wedge dx + dx \wedge dy.$$

Beregn strømmen af ω gennem S .

Vi giver Ω en parameterfremstilling:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq \varphi \leq \pi \\ 0 &\leq z \leq 1 \end{aligned}$$



Vi kan beregne strømmen direkte. Nu er S delt i 4 flader, svarende til hhv. $r = 1$, $y = 0$, $z = 0$ og $z = 1$. (Blæksugers trækpapir, håndtagsside og de to sider).

På siderne $z = 0$ og $z = 1$ er $dz = 0$, så formen reduceres til

$$\omega = dx \wedge dy.$$

Da denne form er den samme på de to sider, og siderne har modsat orientering, må de to integraler gå ud mod hinanden.

På siden $y = 0$ er $dy = 0$, så formen reduceres til

$$\omega = (x \cdot 0 \cdot y)^2 dz \wedge dx = 0.$$

Dette integral er altså $= 0$.

Tilbage er trækpapisiden, $r = 1$. Parameterfremstillingen er heraf

$$\left. \begin{array}{l} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq z \leq 1. \end{array}$$

De tre former er hhv.

$$dy \wedge dz = \cos \varphi d\varphi \wedge dz$$

$$dz \wedge dx = \sin \varphi d\varphi \wedge dz$$

$$dx \wedge dy = 0.$$

Formen ω transformeres til

$$\cos \varphi \sin \varphi z \cos \varphi d\varphi \wedge dz + (\cos \varphi \sin \varphi z)^2 \sin \varphi d\varphi \wedge dz.$$

Integralet over fladen er derfor

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_0^1 z dz \cdot \int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi + \int_0^1 z^2 dz \cdot \int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx + \frac{1}{3} \cdot \int_{-1}^1 x^2 (1-x^2) dx = \underline{\underline{\frac{19}{45}}}. \end{aligned}$$

Også denne opgave kan løses med brug af hovedsætningen

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_\Omega d\omega = \int_\Omega (yz + 2x^2 yz^2) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \int_I (r \sin z + 2r^2 \cos^2 \varphi r \sin \varphi z^2) r dr \wedge d\varphi \wedge dz \\ &= \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 z dz + 2 \int_0^1 r^4 dr \cdot \int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 z^2 dz \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{19}{45}}}. \end{aligned}$$

KAPITEL VI

BEVISER

*Der Satz der Mathematik drückt keinen
Gedanken aus.*

Ludwig Wittgenstein.

*Fordi man ophører at tænke, er det ikke
sagt, at man er begyndt at forstaa.*

Harald Høffding.

§1. Vektorregning i planen og komplekse tal.

Sætning I,1,1. Se figuren side II,1,3, øverst.

Sætning I,1,2. Se figuren side II,1,3, midten.

Vi kan definere det indre produkt af to vektorer som

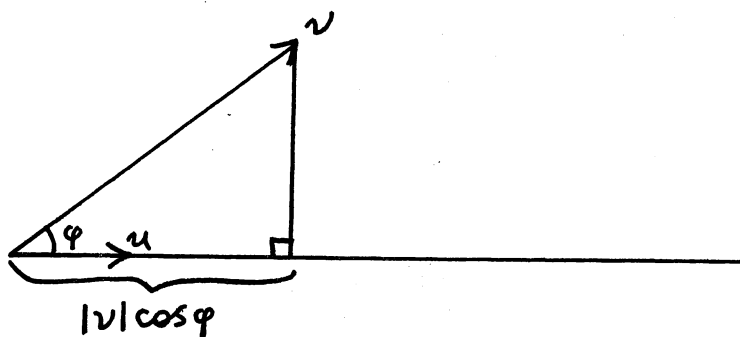
$$v_1 \cdot v_2 = |v_1| |v_2| \cos \varphi ,$$

hvor φ er vinkelen mellem v_1 og v_2 ; se figur side III,1,4.
Vi vil da vise følgende

Lemma VI,1,1. Det indre produkt adlyder regnereglen

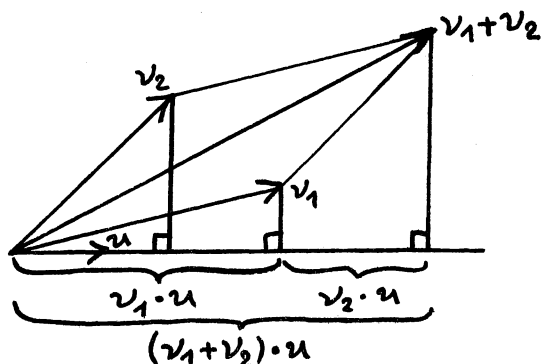
$$(v_1 + v_2) \cdot u = v_1 \cdot u + v_2 \cdot u .$$

Bevis: Vi kan indskrænke os til tilfældet $|u| = 1$. Da er for en vilkårlig vektor v , det indre produkt med u lig med længden af projektioner på u .



Men ifølge Sætning I,1,2 er derfor

$$(v_1 + v_2) \cdot u = v_1 \cdot u + v_2 \cdot u$$

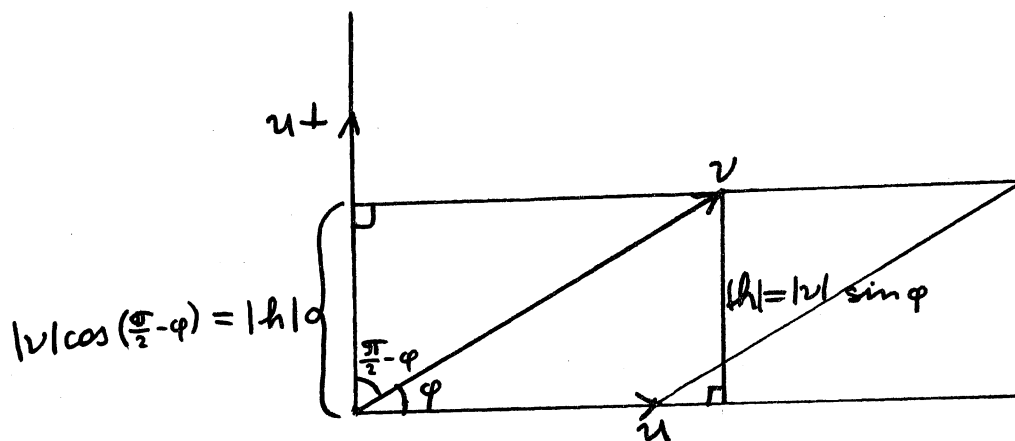


Lad nu e_1 og e_2 være en basis med $e_1 \perp e_2$. Så er jo $|e_1| = |e_2| = 1$ og $e_1 \cdot e_2 = 0$. Lemma VI, 1, 1 giver regnestykket

$$\begin{aligned} & (x_1 e_1 + x_2 e_2) \cdot (y_1 e_1 + y_2 e_2) \\ &= x_1 y_1 e_1 \cdot e_1 + x_1 y_2 e_1 \cdot e_2 + x_2 y_1 e_2 \cdot e_1 + x_2 y_2 e_2 \cdot e_2 \\ &= x_1 y_1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 + x_1 y_2 \cdot 0 + x_2 y_1 \cdot 0 + x_2 y_2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = x_1 y_1 + x_2 y_2. \end{aligned}$$

Hermed er Sætning I, 1, 4 bevist. $\square$

Sætning I, 1, 8. Arealet af parallellogrammet er højde gange grundlinje. Højden er enten $|v| \sin \varphi$ eller projektionen af v på $u^\perp$, hvor $u^\perp$ har koordinaterne $(-x_2, x_1)$, hvis $u = (x_1, x_2)$:



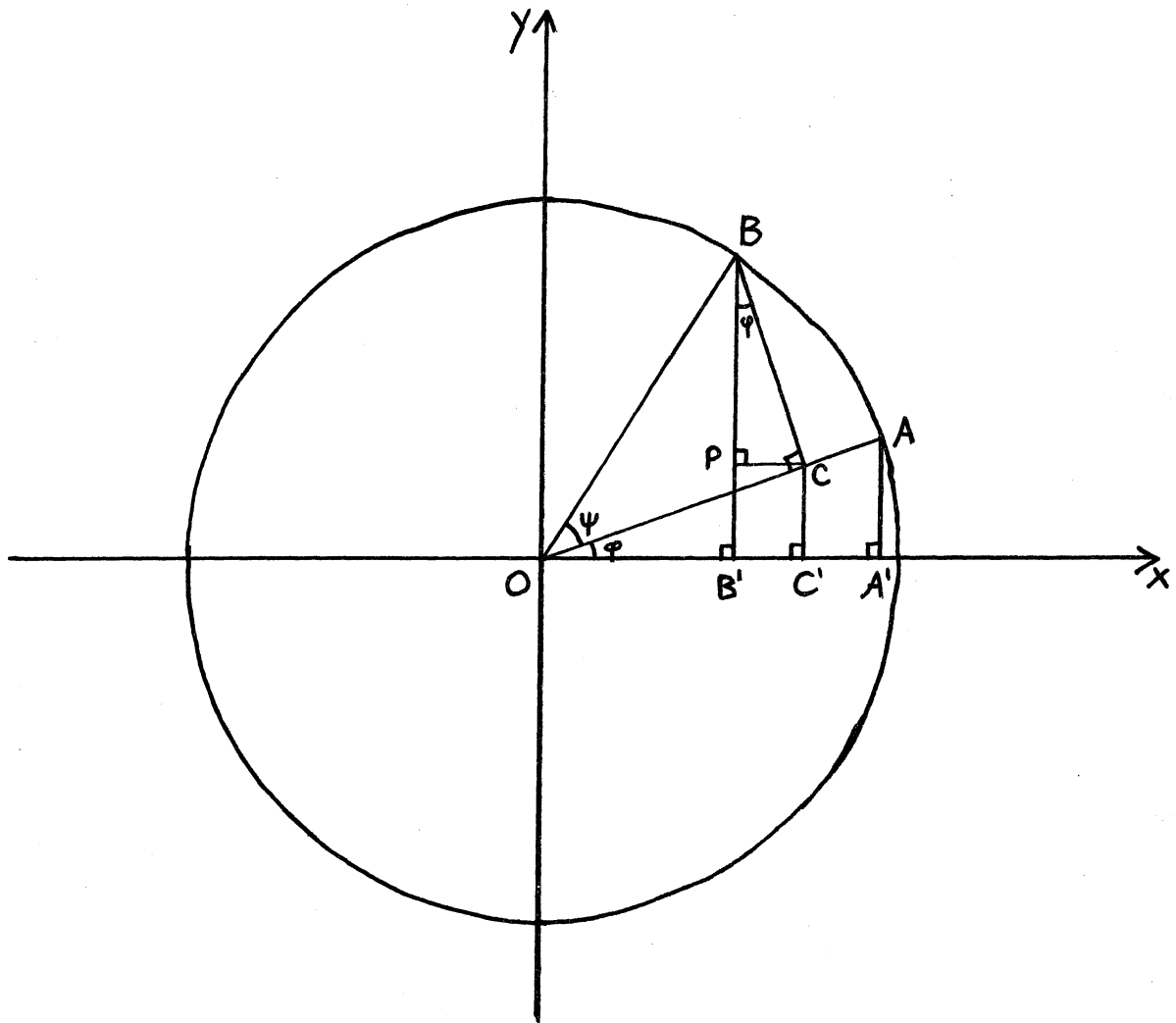
Nu er arealet altså

$$|u| \cdot |h| = |u| \cdot (v \cdot u^\perp) \frac{1}{|u^\perp|} = v \cdot u^\perp = -y_1 x_2 + y_2 x_1. \quad \square$$

Sætning I, 1, 10. Regningen nedenfor kan jo kontrolleres.

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2).$$

At vinklen bliver summen af de to, følger af additionsformlerne for $\cos$ og $\sin$. (Se side III, 1, 5.) F.eks. for $\cos(\psi + \varphi)$:



$OA' = \cos \varphi$ og $OC = \cos \psi$. Vi søger $OB' = \cos(\varphi + \psi)$. Nu er $OB' = OC' - B'C'$. $OC' = OC \cos \varphi = \cos \psi \cos \varphi$ af $\triangle OCC'$. Vi betragter $\triangle BCP$, hvor CP er parallel med x-aksen. I denne trekant er

$$PC = B'C', \quad BC = \sin \psi, \quad \angle PBC = \varphi.$$

Altså er $B'C' = BC \cdot \sin \varphi = \sin \psi \sin \varphi$. Dvs.

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi.$$

□

(De øvrige udledes af f.eks. $\cos \varphi = \sin(\frac{\pi}{2} + \varphi)$ etc.)

§2. Vektorregning i rummet.

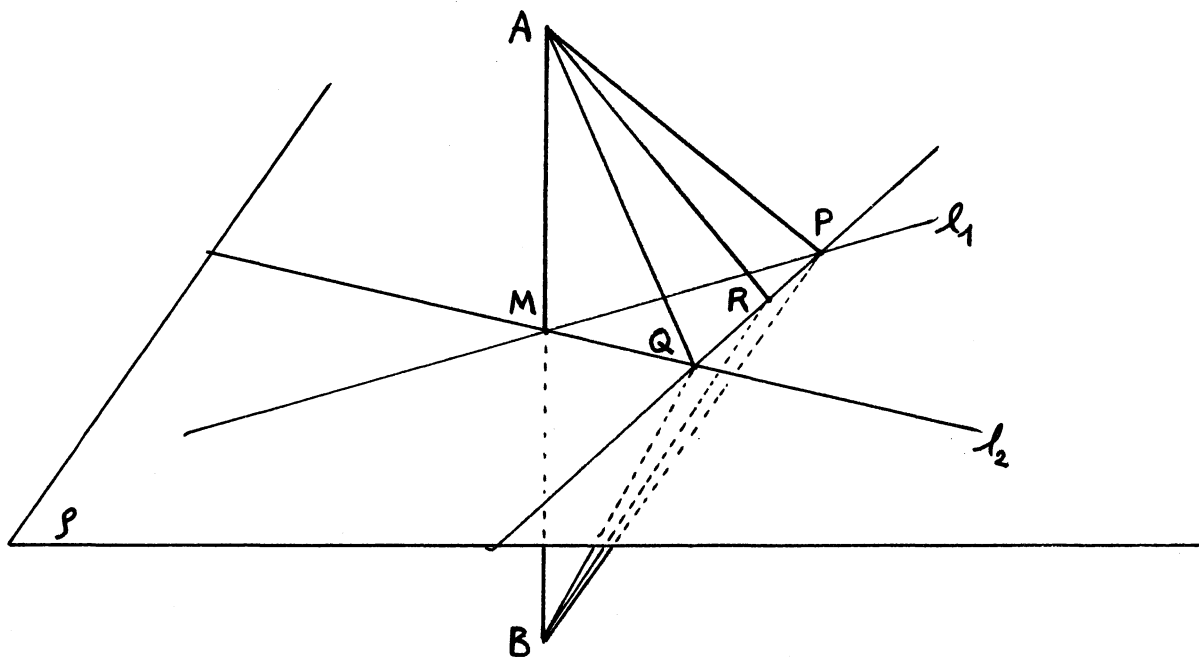
Vi skal bruge

Lemma VI,2,1. Givet to punkter $A \neq B$. Da er

$$\pi = \{P \mid |AP| = |BP|\}$$

en plan, og linien AB er vinkelret på enhver linie i π .

Bevis: Lad M være midtpunktet på AB mellem A og B . Da vil $M \in \pi$. I enhver plan, der indeholder linien AB , vil midtnormalen til AB være en linie i π . To forskellige af disse linier ℓ_1 og ℓ_2 bestemmer en plan, ρ . Vi skal vise, at $\pi = \rho$.



1) $\rho \subseteq \pi$. Lad $R \in \rho$ være vilkårlig. En linie gennem R vælges, så den skærer ℓ_1 og ℓ_2 . Skæringspunkterne kaldes hhv. P og Q . Da $AQ = BQ$ og $AP = BP$, er $\triangle AQP \cong \triangle BQP$. Men så er $AR = BR$, altså $R \in \pi$.

2) $\pi \subseteq \rho$. Lad $S \in \pi$. Linierne AS og BS kan ikke begge være parallelle med ρ . Lad os sige, at AS skærer ρ i T .

Da vil $AS = BS$ og $AT = BT$. Men så vil S ligge på MT , så S er skæringen mellem AT og MT : $S = T$. Altså $S \in \rho$.

Lad nu ℓ være en vilkårlig linie i $\pi = \rho$. Da er der en med ℓ parallel linie m gennem M . Et punkt på m , $P \neq M$, ligger lige langt fra A og B . Linien m er altså midtnormal i $\triangle ABP$. Altså $m \perp AB$. □

Lemma VI,2,2. En linie ℓ står vinkelret på enhver linie i en plan π , hvis den står vinkelret på to skærende linier i π .

Bevis: Lad ℓ være vinkelret på m og n , hvor m og n skærer hinanden i et punkt M . I planen gennem ℓ og M findes en linie gennem M parallel med ℓ . Vi kan derfor antage, at ℓ går gennem M . På ℓ vælges to punkter A og B , så $AM = BM$. Da vil planen π i Lemma VI,2,1 indeholde m og n og enhver linie i π er vinkelret på ℓ . □

Sætning I,2,1. Vi vælger to på hinanden vinkelrette linier ℓ og m i planen π . I planen $P\ell$ nedfældes den vinkelrette fra P på ℓ til punktet Q . Vi kan antage, at m går gennem Q . I planen Pm nedfældes den vinkelrette fra P på m i punktet R . Nu er $PR \perp m$. Da $\ell \perp m$ og $\ell \perp PQ$, vil $\ell \perp PR$ ifølge Lemma VI,2,2, fordi PR ligger i planen mP . Men så er $PR \perp m$ og $PR \perp \ell$, altså PR er vinkelret på enhver linie i planen π ifølge Lemma VI,2,2. Hvis to linier ℓ og m gennem P er vinkelrette på enhver linie i planen π , vil ℓ og m skære π i hhv. Q og R . Da er QR vinkelret på såvel ℓ som m . $\triangle PQR$ har to rette vinkler. Modstrid. □

Sætning I,2,2. Se figur side II,2,3. □

Sætning I,2,5. Vi definerer

$$v_1 \cdot v_2 = |v_1| |v_2| \cos \varphi$$

hvor φ er vinklen mellem v_1 og v_2 .

Da $|v_1| \cos \varphi$ er længden af projektionen af v_1 på v_2 , får vi af beviset for Sætning I,2,3, at

$$(v_1 + v_2) \cdot \frac{u}{|u|} = v_1 \cdot \frac{u}{|u|} + v_2 \cdot \frac{u}{|u|}.$$

Men med $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ fås

$$\begin{aligned} & (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \cdot (y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3) \\ &= x_1 y_1 e_1 \cdot e_1 + x_1 y_2 e_1 \cdot e_2 + x_1 y_3 e_1 \cdot e_3 \\ &+ x_2 y_1 e_2 \cdot e_1 + x_2 y_2 e_2 \cdot e_2 + x_2 y_3 e_2 \cdot e_3 \\ &+ x_3 y_1 e_3 \cdot e_1 + x_3 y_2 e_3 \cdot e_2 + x_3 y_3 e_3 \cdot e_3 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \end{aligned}$$

Hermed er Sætning I,2,5 bevist. □

Sætning I,2,4. Se figur side II,2,2 nederst. Pythagoras to gange, først på $\triangle OPP'$, så på $\triangle OYP'$. □

Sætning I,2,9. Vi definerer krydsproduktet

$$u \times v$$

som den vektor, hvis længde er arealet af parallelogrammet, udspændt af u og v , og hvis retning i tilfældet, hvor u og v udspænder et parallelogram og dermed en plan, er vinkelret på denne plan og sådan, at $u, v, u \times v$ er højreorienteret, dvs. u og v mødes i denne orden ved positivt omløb set fra $u \times v$, hvor altså v mødes før $-v$.

Da er åbenbart

$$u \times v = -v \times u ,$$

og

$$(\lambda u) \times v = \lambda (u \times v) .$$

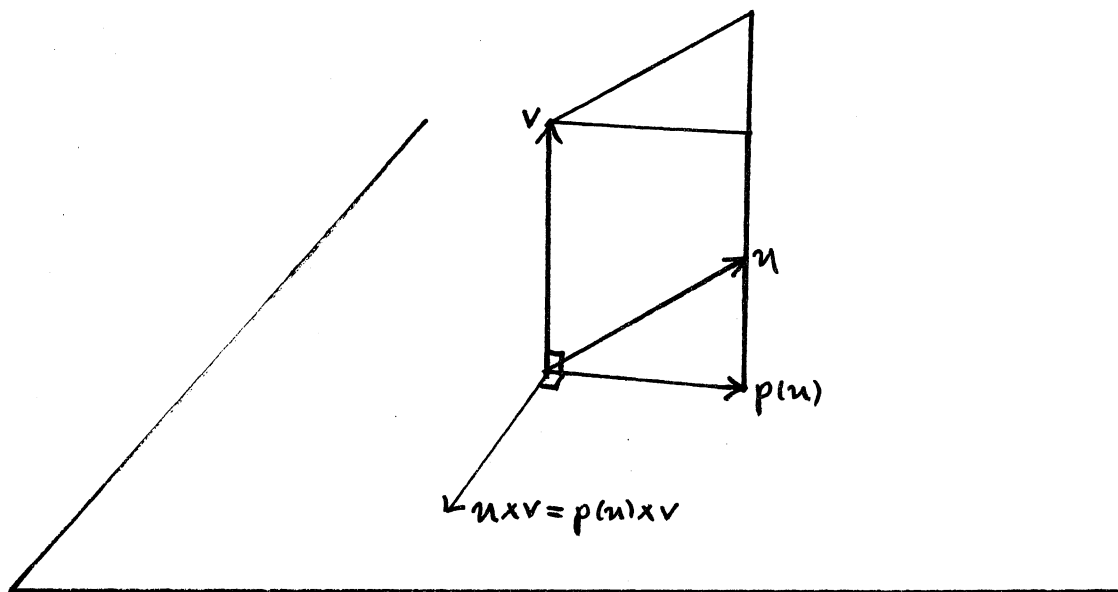
Lemma VI,2,3. $(u+w) \times v = u \times v + w \times v$.

Bevis: Alle tre vektorer ligger i planen

$$\{x \mid x \cdot v = 0\} .$$

Vi projicerer u, w og $u+w$ på denne plan. Parallelogrammet projiceres i et parallelogram, $p(u), p(w), p(u+w) = p(u) + p(w)$. Og der gælder

$$u \times v = p(u) \times v .$$

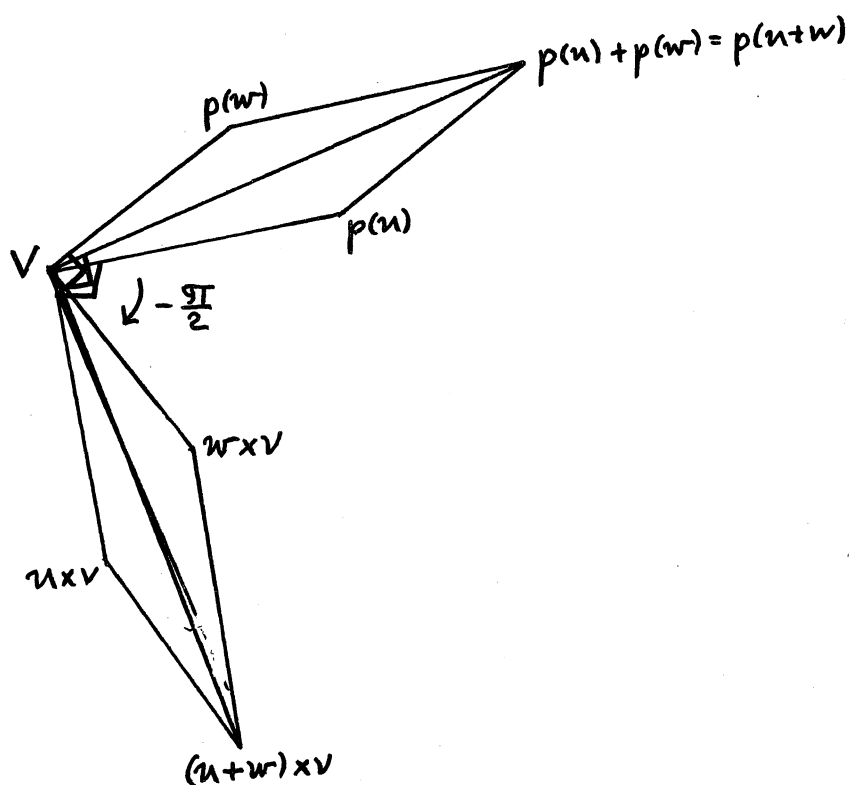


Det ses, at er $|v| = 1$, så fås $u \times v$ ved drejning af $p(u)$ vinklen $-\frac{\pi}{2}$.

Drejning af parallelogrammet $p(u), p(w), p(u+w)$ vinklen $-\frac{\pi}{2}$ giver, at vektorerne

$$u \times v , \quad w \times v , \quad (u+w) \times v$$

ligger i et prallellogram:

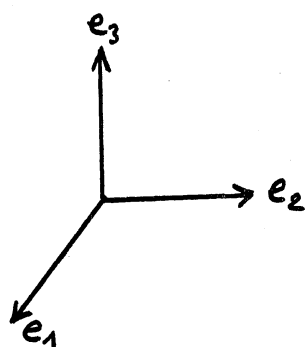


Altså er $(u+w) \times v = (u \times v) + (w \times v)$.

□

Men da basen e_1, e_2, e_3 består af på hinanden vinkelrette enhedsvektorer i et højre orienteret system, må

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2.$$



For $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ og $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ gælder derfor regnestykket:

$$\begin{aligned}
uxv &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \times (y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) \\
(\text{lemma}) &= x_1y_1e_1 \times e_1 + x_1y_2e_1 \times e_2 + x_1y_3e_1 \times e_3 \\
&\quad + x_2y_1e_2 \times e_1 + x_2y_2e_2 \times e_2 + x_2y_3e_2 \times e_3 \\
&\quad + x_3y_1e_3 \times e_1 + x_3y_2e_3 \times e_2 + x_3y_3e_3 \times e_3 \\
(\text{ovenstående}) &= x_1y_1^0 + x_1y_2e_3 + x_1y_3(-e_2) \\
&\quad + x_2y_1(-e_3) + x_2y_2^0 + x_2y_3e_1 \\
&\quad + x_3y_1e_2 + x_3y_2(-e_1) + x_3y_3^0 \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3 .
\end{aligned}$$

Hermed er Sætning I,2,9 bevist. □

Sætning I,2,11. At a, b, c udspænder et parallellepipedum med positivt volumen betyder, at a ligger på samme side af planen udspændt af b og c som $b \times c$. Volument fås nu som arealet af parallellogrammet b, c gange højde over b, c -planen, dvs. a 's projektion på $b \times c$. Rumfanget er altså

$$\left(a \cdot \frac{b \times c}{|b \times c|} \right) |b \times c| = a \cdot b \times c .$$
□

§3. Polynomier og rationale funktioner.Sætning I,3,4. Eksistensen følger ved regning, se side V,3,3.

Entydighed

$$p = d_1 q + r_1 = d_2 q + r_2$$

$$\Rightarrow q(d_1 - d_2) = r_2 - r_1 .$$

Da q har grad m og $r_2 - r_1$ har grad $< m$, må $d_1 - d_2$ have grad < 0 ; $\therefore$

$$d_1 = d_2 \quad \text{og} \quad r_1 = r_2 .$$

□

Sætning I,3,5. Sætning I,3,4 siger, at

$$p(x) = (x - \alpha)d(x) + r(x) ,$$

hvor r har grad ≤ 0 ; dvs. $r(x) = r$ konstant. Indsættes $x = \alpha$, fås

$$0 = p(\alpha) = (\alpha - \alpha)d(\alpha) + r = r .$$

□

Sætning I,3,6. Skal ikke bevises her. Der henvises til Mogens Esrom Larsen, *Komplekse tal og funktioner*, Gyldendal, København 1973. (Kapitel 2.)

Sætning I,3,8.

$$p(\bar{z}) = \bar{a}_n \bar{z}^n + \dots + \bar{a}_0 = \overline{p(z)} = \bar{0} = 0 .$$

□

Sætning I,3,9. Differensen har grad $\leq n$ og $n+1$ rødder, altså er differensen $\equiv 0$.

□

Sætning I,3,11. Betragt for α rod med multiplicitet m :

$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{\beta}{(x-\alpha)^m}$. Denne rationale funktion er

$$\frac{p(x) - \beta \hat{q}(x)}{q(x)},$$

hvor $q(x) = (x-\alpha)^m \hat{q}(x)$ og $\hat{q}(\alpha) \neq 0$.

Vi deler tælleren med $(x-\alpha)$

$$p(x) - \beta \hat{q}(x) = (x-\alpha)d(x) + r,$$

hvor $r \in \mathbb{C}$ er konstant. Nu er $r = p(\alpha) - \beta \hat{q}(\alpha)$. Vi kan vælge

$$\beta = \frac{p(\alpha)}{\hat{q}(\alpha)},$$

hvorved $r = 0$. I så fald er

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{\beta}{(x-\alpha)^m} = \frac{(x-\alpha)d(x)}{(x-\alpha)^m \hat{q}(x)} = \frac{d(x)}{(x-\alpha)^{m-1} \hat{q}(x)},$$

hvor $d(x)$ har grad mindre end $(\text{grad } q(x)) - 1$.

Ved gentagelse fås opspaltningen. □

Sætning I,3,14. Direkte regning:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} &= \frac{n! \cdot (n-m+1)}{m!(n-m+1)!} + \frac{n!m}{m!(n-m+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1-m+m)}{m!(n-m+1)!} = \binom{n+1}{m}. \end{aligned} \quad \square$$

Sætning I,3,13. Følger af I,3,14, når det bemærkes, at

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

og $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. Da er $\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0} = 2$ etc. □

Sætning I, 3, 12.

$$\begin{aligned}
x + y &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} y \\
(x+y)^2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} xy + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} y^2 \\
&\vdots \\
(x+y)(x+y)^n &= x \sum_{n=0}^n \binom{n}{m} x^m y^{n-m} + y \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m y^{n-m} \\
&= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^{m+1} y^{n-m} + \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m y^{n-m+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} x^{m+1} y^{n-m} + \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} x^m y^{n-m+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{m=1}^n \binom{n}{m-1} x^m y^{n-m+1} + \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} x^m y^{n-m+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{m=1}^n \left[\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} \right] x^m y^{n+1-m} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{m=1}^n \binom{n+1}{m} x^m y^{n+1-m} + y^{n+1} \\
&= \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} x^m y^{n+1-m} .
\end{aligned}$$

Induktion. $\square$

§4. Følger og rækker.Sætning I,4,1. Triviel.

Sætning I,4,2. Lad a være fortætningspunkt for følgen (a_n) . Kuglen med radius $\frac{1}{m}$ indeholder et element fra følgen

$$b_m = a_{n_m}.$$

I kuglen med radius $\frac{1}{m+1}$ findes a_n med vilkårligt stort index. Vi vælger et med

$$n_{m+1} = n > n_m.$$

Altså vil

$$b_{m+1} = a_{n_{m+1}}$$

ligge i kuglen, og $n_{m+1} > n_m$.

Følgen (b_m) konvergerer mod a , fordi $\frac{1}{m} \rightarrow 0$ for $m \rightarrow \infty$.

Funktionen

$$m \rightarrow n_m$$

er (strengt) voksende, så (b_m) er en delfølge af (a_n) . $\square$

Sætning I,4,3. Lad (a_n) være en følge af reelle tal, $a_n \in \mathbb{R}$.

Da vil der findes $b, c \in \mathbb{R}$, så $b \leq a_n \leq c$ for alle n .

Lad $m = \frac{a+b}{2}$ være midtpunktet. Da vil $[b, m]$ eller $[m, c]$ indeholde uendelig mange elementer fra talfølgen. Et interval, der gør det, vælges og kaldes $[b_1, c_1]$. Ved gentagelse fås to følger, (b_n) og (c_n) . Følgen (b_n) er voksende og følgen (c_n) er aftagende, og $b_n < c_m$ for alle n og m .

Nu findes et mindste interval, $[b, \beta]$, eller $[b, \beta[$, der indeholder følgen (b_n) . Da alle

$$b_n \in [b, c_m] , \quad \text{for } m \text{ vilkårlig, må}$$

$$\beta \leq c_m \quad \text{for alle } m .$$

Samtidig er $b_n \leq \beta$ for alle n .

Vi vil vise, at β er fortætningspunkt for (a_n) . Lad nu $r > 0$ være et tal, vi skal vise, at der er uendelig mange elementer fra (a_n) i intervallet $]\beta-r, \beta+r[$.

Nu er

$$c_n - b_n = \frac{c-b}{2^n} ,$$

så for

$$n > \frac{\ln \frac{c-b}{r}}{\ln 2}$$

er

$$c_n - b_n < r .$$

Men så er

$$\beta - r < b_n \leq \beta \leq c_n < \beta + r$$

og i intervallet $[b_n, c_n]$ er der uendelig mange elementer fra (a_n) .

Lad nu (a_n) være en punktfølge, f.eks.

$$a_n = (x_n, y_n) .$$

Vi udtager en delfølge $\hat{x}_p = x_{n_p}$, der konvergerer mod fortætningspunktet x_0 . Vi betragter nu $(\hat{x}_p, \hat{y}_p)$ med $\hat{y}_p = y_{n_p}$, som delfølge af (a_n) . Da $(\hat{y}_p)$ er begrænset, kan vi udtage en konvergent delfølge $\hat{y}_q = y_{p_q}$ med grænseværdi y_0 , fortætningspunkt for $(\hat{y}_p)$ og dermed for (y_n) . Vi sætter $\hat{x}_q = \hat{x}_{p_q}$. Følgen $(\hat{x}_q)$ konvergerer mod x_0 . Følgen

$$(\hat{x}_q, \hat{y}_q) \text{ konvergerer mod } (x_0, y_0) .$$

Altså er (x_0, y_0) fortætningspunkt for (a_n) .

□

Sætning I,4,4. Lad a være fortætningspunktet. Hvis der er uendelig mange elementer fra følgen uden for en kugle $K(a,r)$, så findes en delfølge af elementer uden for kuglen. Da delfølgen er begrænset, har den et fortætningspunkt, der jo også er fortætningspunkt for følgen. Men dette er udelukket. Altså må alle på nær endelig mange tilhøre kuglen. Men da kuglen var vilkårlig, betyder det konvergens mod a . □

Sætning I,4,5. Triviel. □

Sætning I,4,6-7. Lad $(a_n) \rightarrow a$ og $(b_n) \rightarrow b$. Da er

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - ab_n + ab_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b).$$

Nu findes til $\varepsilon > 0$ et N så $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$ og $|b_n| < |b| + \varepsilon$ for $n > N$. Altså

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b| \leq (|a| + |b| + \varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

Etc. □

Sætning I,4,8. Lad $(a_n) \rightarrow 0$ og $|b_n| < K$ for alle n . For $\varepsilon > 0$ findes N , så

$$|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{K} \text{ for } n > N.$$

Så er

$$|a_n b_n| \leq |a_n| \cdot K \leq \varepsilon \text{ for } n > N. \quad \square$$

Sætning I,4,9. Til $\varepsilon > 0$ findes N , så for $n > N$ er

$$|s - \sum_{v=0}^n a_v| < \varepsilon.$$

Da er

$$|a_n| = \left| \sum_{v=0}^n a_v - \sum_{v=0}^{n-1} a_v \right| = \left| \sum_{v=0}^n a_v - s + s - \sum_{v=0}^{n-1} a_v \right|$$

$$\leq \left| \sum_{v=0}^n a_v - s \right| + \left| s - \sum_{v=0}^{n-1} a_v \right| < 2\varepsilon \quad \text{for } n > N+1. \quad \square$$

Sætning I,4,10. Afsnitsfølgen er voksende. □

Sætning I,4,11.

$$\left| \sum_{v=n}^{n+p} a_v \right| \leq \sum_{v=n}^{n+p} |a_v| < \varepsilon \quad \text{for } n > N \text{ og alle } p.$$

Ifølge Sætning I,4,14 er rækken konvergent. □

Sætning I,4,12 følger umiddelbart af I,4,11. □

Sætning I,4,13. En konvergent følge er en fundamentalfølge, thi

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < 2\varepsilon.$$

En fundamentalfølge er konvergent.

En fundamentalfølge er begrænset, da der findes N , så

$$|a_n - a_N| < 1 \quad \text{for alle } n > N.$$

Altså har følgen et fortætningspunkt, a , (I,4,3). Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Vi finder N , så

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for } n, m > N.$$

Der findes $n_0 > N$, så $|a_{n_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Altså gælder

$$|a_m - a| = |a_m - a_{n_0} + a_{n_0} - a| \leq |a_m - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| < \varepsilon$$

for $m > n$. Dvs. $(a_n) \rightarrow a$ for $n \rightarrow \infty$. □

Sætning I, 4, 14. Følger umiddelbart af Sætning I, 4, 13 anvendt på afsnitsfølgen. $\square$

Sætning I, 4, 15. Følger umiddelbart af I, 4, 14. $\square$

Sætning I, 4, 16. Der gælder

$$\sum_{p=0}^n |a_p| \sum_{q=0}^n |b_q| \leq \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^m |a_p| |b_{m-p}| \leq \sum_{p=0}^{2n} |a_p| \sum_{q=0}^{2n} |b_q| ,$$

hvorfor

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^m |a_p| |b_{m-p}| = \sum_{p=0}^{\infty} |a_p| \sum_{q=0}^{\infty} |b_q| .$$

Endvidere er

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=0}^{2n} a_p \sum_{q=0}^{2n} b_q - \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^m a_p b_{m-p} \right| &= \left| \sum_{\substack{p+q \geq n \\ p, q \leq 2n}} a_p b_q \right| \\ &\leq \sum |a_p b_q| \leq \sum_{p=n}^{2n} |a_p| \sum_{q=0}^{2n} |b_q| + \sum_{p=0}^{2n} |a_p| \sum_{q=n}^{2n} |b_q| \leq A \cdot \varepsilon + B \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

for n stor. $\square$

§5. Kontinuitet.

Sætning I,5,1. Et punkt i foreningsmængden tilhører en af mængderne. I denne findes en kugle med centrum i punktet. Kuglen ligger i en af mængderne og dermed i foreningsmængden. $\square$

Sætning I,5,2. Fællesmængden er komplementærmængde til komplementærmængdernes foreningsmængde, som er åben ifølge Sætning I,5,1.

Sætning I,5,3. Lad $A \subseteq M$ være åben. Da optræder A blandt $\{D \subseteq M \mid D \text{ åben}\}$. Derfor er $A \subseteq \dot{M}$, deres foreningsmængde. På den anden side er $\dot{M}$ åben ifølge Sætning I,5,1; og at $\dot{M} \subseteq M$, er åbenbart. $\square$

Sætning I,5,4. Da $\bar{M}$ er fællesmængde af afsluttede mængder, er $\bar{M}$ afsluttet ifølge Sætning I,5,2. At $\bar{M} \subseteq M$, er åbenbart. Hvis $B \subseteq M$ og er afsluttet, optræder B blandt $\{A \subseteq M \mid A \text{ afsluttet}\}$. Derfor må $B \subseteq \bar{M}$, deres fællesmængde. $\square$

Sætning I,5,5. "Hvis". Vi skal vise, at CA er åben. Lad $a \in CA$. Hvis det for ethvert n gælder, at der findes et $a_n \in A$, så $a_n \in K(a, \frac{1}{n})$, så vil følgen (a_n) konvergere mod a . Men så skal $a \in A$ i modstrid med $a \in CA$. Derfor findes et n , så $K(a, \frac{1}{n}) \cap A = \emptyset$. Altså er CA åben og dermed A afsluttet.

"Kun hvis". Lad nu $(a_n) \rightarrow a$ for $n \rightarrow \infty$ og $a_n \in A$. Hvis $a \notin A$, så findes $\varepsilon > 0$ med $K(a, \varepsilon) \subseteq CA$, fordi A er afsluttet. Men så vil $a_n \notin K(a, \varepsilon)$ for noget n , i modstrid med $(a_n) \rightarrow a$ for $n \rightarrow \infty$. Altså må $a \in A$. $\square$

Sætning I,5,6. "Hvis." Hvis $(a_n) \rightarrow a$ for $n \rightarrow \infty$ og $a_n \in K$ for alle n , så skal (a_n) have et fortætningspunkt i K . Men (a_n) har ikke andre fortætningspunkter end a . Altså vil $a \in K$, så K er afsluttet ifølge Sætning I,5,5. Hvis K ikke er begrænset, findes $a_n \in K$, så $a_n \notin K(a,n)$ for hvert n . $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er da en følge uden fortætningspunkt. Altså er K begrænset og dermed kompakt.

"Kun hvis." Lad K være kompakt og (a_n) en følge med $a_n \in K$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Ifølge Sætning I,4,3 har (a_n) et fortætningspunkt a . Vi skal vise, at $a \in K$. Ifølge Sætning I,4,2 har (a_n) en delfølge, der konvergerer mod a . Da delfølgens elementer tilhører K og K er afsluttet, må $a \in K$ ifølge Sætning I,5,5. □

Sætning I,5,7. "Hvis." Da enhver kugle $K(x,r)$ indeholder punkter fra M , kan x ikke tilhøre $\bar{M}$, der er åben. Og da enhver kugle $K(x,r)$ indeholder punkter uden for M , kan $x \notin \overset{\circ}{M} \subseteq M$, da $\overset{\circ}{M}$ er åben. Men $\{x \mid x \notin \overset{\circ}{M} \wedge x \notin \bar{M}\} = \bar{M} \setminus \overset{\circ}{M} = \partial M$.

"Kun hvis." Lad $x \in \partial M$. Da $x \notin \overset{\circ}{M}$, må enhver kugle $K(x,r)$ indeholde punkter fra $\bar{M}$. Hvis $K(x,r) \subseteq M$, er $K(x,r)$ jo åben, så $\overset{\circ}{M} \cup K(x,r) \subseteq M$ og åben, altså $\overset{\circ}{M} \cup K(x,r) = \overset{\circ}{M}$ ifølge Sætning I,5,3. Men dvs. $K(x,r) \subseteq \overset{\circ}{M}$ i modstrid med $x \notin \overset{\circ}{M}$. Altså indeholder $K(x,r)$ punkter fra $\bar{M}$. Da $x \in \bar{M}$, vil $K(x,r)$ indeholde punkter fra M . Thi, hvis $K(x,r) \subseteq \bar{M}$, så vil $\bar{K}(x,r) \supseteq M$ og være afsluttet. Derfor vil $\bar{K}(x,r) \cap \bar{M} \supseteq M$ og være afsluttet. Altså er $\bar{K}(x,r) \cap \bar{M} = \bar{M}$ ifølge Sætning I,5,4. Men dvs. $\bar{K}(x,r) \supseteq \bar{M}$, det samme som $K(x,r) \subseteq \bar{M}$, i modstrid med $x \in \bar{M}$. Altså indeholder $K(x,r)$ punkter fra M . □

Sætning I,5,8.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M: |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M: x \in K(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in K(f(a), \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(K(a, \delta)) \subseteq K(f(a), \varepsilon) .$$

□

Sætning I,5,9. "Hvis." Da $K(f(a), \varepsilon)$ er åben, må $f^{-1}(K(f(a), \varepsilon))$ være åben, og $a \in f^{-1}(K(f(a), \varepsilon))$, fordi $f(a) \in K(f(a), \varepsilon)$.
 Altså findes $\delta > 0$, så $K(a, \delta) \subseteq f^{-1}(K(f(a), \varepsilon))$. Det er det samme som, at

$$f(K(a, \delta)) \subseteq K(f(a), \varepsilon) .$$

Altså er f kontinuert i a ifølge Sætning I,5,8.

"Kun hvis." Lad N være åben, og lad $a \in f^{-1}(N)$. Da vil $f(a) \in N$. Der findes $\varepsilon > 0$, så $K(f(a), \varepsilon) \subseteq N$. Når f er kontinuert, findes ifølge Sætning I,5,8 $\delta > 0$, så $f(K(a, \delta)) \subseteq K(f(a), \varepsilon)$. Men så er

$$K(a, \delta) \subseteq f^{-1}(K(f(a), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(N) .$$

Da $a \in f^{-1}(N)$ var vilkårlig, er $f^{-1}(N)$ åben ifølge definitionen.

□

Sætning I,5,10. "Hvis." Lad $a \in M$ og lad $\varepsilon > 0$. Da er $f(M) \setminus K(f(a), \varepsilon) = f(M) \cap (K(f(a), \varepsilon)^c)$ afsluttet. Altså er $f^{-1}(f(M) \setminus K(f(a), \varepsilon))$ afsluttet. Men da $a \notin f^{-1}(f(M) \setminus K(f(a), \varepsilon)) = M \setminus f^{-1}(K(f(a), \varepsilon))$, findes $\delta > 0$, så $K(a, \delta) \cap (M \setminus f^{-1}(K(f(a), \varepsilon))) = \emptyset$. Dvs.

$$K(a, \delta) \cap M \cap (f^{-1}(K(f(a), \varepsilon))^c) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow K(a, \delta) \cap M \subseteq f^{-1}(K(f(a), \varepsilon)) .$$

Men så er f kontinuert ifølge Sætning I,5,8.

"Kun hvis." Lad N være afsluttet og f kontinuert. Vi vil vise, at $\overline{f^{-1}(N)}$ er afsluttet. Lad derfor $a \in \overline{f^{-1}(N)}$. Da $f^{-1}(N) \subseteq M$ og M er afsluttet, vil $\overline{f^{-1}(N)} \subseteq M$ ifølge Sætning I, 5, 4. Altså $a \in M$. Hvis $f(a) \notin N$, så findes $\varepsilon > 0$, så $K(f(a), \varepsilon) \cap N = \emptyset$. Da f er kontinuert, findes (ifølge Sætning I, 5, 8) $\delta > 0$, så

$$f(K(a, \delta) \cap M) \subseteq K(f(a), \varepsilon).$$

Men ifølge Sætning I, 5, 7 er $K(a, \delta) \cap f^{-1}(N) \neq \emptyset$. Lad $x \in K(a, \delta) \cap f^{-1}(N)$. Da vil $f(x) \in K(f(a), \varepsilon)$ og $f(x) \in N$ i modstrid med $K(f(a), \varepsilon) \cap N = \emptyset$. Altså må antagelsen $f(a) \notin N$ være forkert. Men er $f(a) \in N$, så er $a \in f^{-1}(N)$. Dvs. $\overline{f^{-1}(N)} = f^{-1}(N)$ og dermed afsluttet. $\square$

Sætning I, 5, 11. Lad K være kompakt og $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuert. Vi skal vise, at $f(K)$ er kompakt. Lad nu (y_n) være en følge $y_n \in f(K)$. Til hvert y_n vælges et $x_n \in K$, så $f(x_n) = y_n$. Betragt følgen (x_n) . Da K er kompakt, findes en konvergent delfølge $(x_{n_p}) \rightarrow x_0 \in K$ for $p \rightarrow \infty$. Følgen (y_{n_p}) vil da konvergere mod $f(x_0)$ ifølge Sætning I, 5, 12. Men da $f(x_0) \in f(K)$, er $f(K)$ kompakt ifølge Sætning I, 5, 6. $\square$

Sætning I, 5, 12. "Hvis." Lad $a \in M$. Antag, at f ikke er kontinuert i a . Da gælder

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in M: |x-a| < \delta \wedge |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon.$$

Til $\delta = \frac{1}{n}$ findes x_n , så $x_n \in K(a, \frac{1}{n})$ og $f(x_n) \notin K(f(a), \varepsilon)$. Følgen $(x_n) \rightarrow a$ for $n \rightarrow \infty$, men $(f(x_n))$ konvergerer ikke mod $f(a)$. Antagelsen, at f ikke var kontinuert i a , førte til en modstrid med egenskaben i sætningen. Funktionen f må derfor være kontinuert i a .

"Kun hvis." Lad $(a_n) \rightarrow a$ for $n \rightarrow \infty$ og f være kontinuert i a . Vi skal vise, at $(f(a_n)) \rightarrow f(a)$ for $n \rightarrow \infty$. Lad $\varepsilon > 0$. Da findes $\delta > 0$ så

$$f(K(a, \delta)) \subseteq K(f(a), \varepsilon) .$$

Til δ findes et N , så

$$n > N \Rightarrow a_n \in K(a, \delta) .$$

Men så gælder jo også $f(a_n) \in K(f(a), \varepsilon)$. Men det var, hvad vi skulle vise. □

Sætning I,5,13. Da der til $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$, så

$$g(K(f(a), \delta)) \subseteq K(g(f(a)), \varepsilon)$$

og der til $\delta > 0$ findes $\eta > 0$, så

$$f(K(a, \eta)) \subseteq K(f(a), \delta) ,$$

må $h(K(a, \eta)) = g(f(K(a, \eta))) \subseteq g(K(f(a), \delta)) \subseteq K(h(a), \varepsilon)$. Men så er h kontinuert ifølge Sætning I,5,8. □

Sætning I,5,16. Lad $(x_n) \rightarrow a$ og $x_n \neq a$ for alle n . Da $\hat{f}$ er kontinuert, må ifølge Sætning I,5,12

$$g = \hat{f}(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) ,$$

som kun afhænger af f og a . □

§6. Differential- og integralregning i én reel variabel.

Sætning I,6,1. Til $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$, så

$$|x| < \delta \Rightarrow \left| f'(0) - \frac{f(x)}{x} \right| < \varepsilon .$$

Men så er

$$|xf'(0) - f(x)| < \varepsilon |x|$$

altså

$$|f(x)| < |x|(|f'(0)| + \varepsilon) .$$

Men så er f kontinuert i 0. □

Sætning I,6,2. Lad $y = \beta x$ være en vilkårlig linie gennem $(0,0)$.

Nu er

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \alpha & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

kontinuert i 0. Vi kan jo skrive

$$f(x) = \alpha x + xg(x)$$

Betragter vi forskellen mellem linien $y = \beta x$ og kurver $y = f(x)$, ser vi, at der er

$$\Delta_\beta = \beta x - \alpha x - xg(x) = x(\beta - \alpha) - xg(x)$$

specielt for $\alpha = \beta$ er den

$$\Delta_\alpha = -xg(x) .$$

Da $g(x)$ er kontinuert i 0 og $g(0) = 0$, kan vi vælge $\delta > 0$, så $|g(x)| < \frac{|\beta - \alpha|}{2}$ for $|x| < \delta$, når $\beta \neq \alpha$. Dvs.

$$|\Delta_\alpha| = |xg(x)| < |x| \cdot \frac{|\beta - \alpha|}{2}$$

$$\text{mens } |\Delta_\beta| = |x(\beta - \alpha) - xg(x)| \geq |x||\beta - \alpha| - |x| \left| \frac{\beta - \alpha}{2} \right| = |x| \frac{|\beta - \alpha|}{2} .$$

Vi ser, at $|\Delta_\alpha| < |\Delta_\beta|$ for $|x| < \delta$.

Linien $y = \alpha x$ er den bedste approximation til kurven $y = f(x)$ i omegnen af 0. Derfor er denne linie tangent α : "rørende kurven".

□

Regneregler. Lad os sige f og g differentiable i x , α :

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx + \varepsilon(dx)dx ; g(x+dx) = g(x) + g'(x)dx + \eta(dx)dx$$

hvor $\varepsilon(dx)$ og $\eta(dx)$ er kontinuerte og 0 i 0. Da er

$$f(x+dx) \pm g(x+dx) = f(x) \pm g(x) + (f'(x) \pm g'(x))dx + (\varepsilon(dx) \pm \eta(dx))dx$$

hvor $\varepsilon(dx) \pm \eta(dx)$ er kontinuert og 0 i 0. Og

$$\lambda f(x+dx) = \lambda f(x) + \lambda f'(x)dx + \lambda \varepsilon(dx)dx$$

hvor $\lambda \varepsilon(dx)$ er kontinuert og 0 i 0. Og

$$f(x+dx)g(x+dx) = f(x)g(x) + f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx +$$

$$(f'(x)g'(x)dx + (f(x) + f'(x)dx)\eta(dx) + (g(x) + g'(x)dx)\varepsilon(dx))dx ,$$

hvor funktionen i (...) er kontinuert og 0 i 0, (som funktion af dx).

$$f(g(x+dx)) = f(g(x) + g'(x)dx + \eta(x)dx)$$

$$= f(g(x)) + f'(g(x))dy + \varepsilon(g'(x)dx + \eta(x)dx)dy$$

$$= f(g(x)) + f'(g(x))(g(x+dx) - g(x)) + \varepsilon(dy)dy$$

$$= f(g(x)) + f'(g(x))(g'(x)dx + \eta(dx)dx) + \varepsilon(dy)dy$$

$$= f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)dx + (f'(g(x))\eta(dx) +$$

$$+ \varepsilon(dy)(g'(x) + \eta(dx))dx .$$

Da

$$\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - dx}{(x+dx)x} = -\frac{dx}{(x+dx)x}$$

sammenlignes med $-\frac{dx}{x^2}$;

$$-\frac{dx}{d^2} + \frac{dx}{(x+dx)x} = \frac{xdx - (x+dx)dx}{x^2(x+dx)} = \frac{(dx)^2}{x^2(x+dx)}.$$

Altså fås

$$\frac{1}{x+dx} = \frac{1}{x} - \frac{dx}{x^2} + \frac{dx}{x^2(x+dx)}$$

hvor $\varepsilon(dx) = \frac{dx}{x^2(x+dx)}$ er kontinuert og 0 i 0.

Altså er $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$. Men så må

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{1}{g^2} \cdot g'$$

og derfor

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \left(\frac{1}{g}\right) + f \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

Sætning I, 6, 3. Da $f(\xi)$ er maksimal, gælder for dx , at $f(\xi+dx) \leq f(\xi)$.

Altså gælder for $dx > 0$, at

$$f'(\xi) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(\xi+dx) - f(\xi)}{dx} \leq 0$$

og for $dx < 0$, at

$$f'(\xi) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(\xi+dx) - f(\xi)}{dx} \geq 0$$

Men så må $f'(\xi) = 0$.

□

Sætning I, 6, 5. I tilfældet $f(a) = f(b) = 0$ er der to muligheder.

1) $f \equiv 0$. Så er $f'(x) = 0$ for $a < x < b$. 2) $f(x) \neq 0$ for mindst ét $x \in]a, b[$. Nu er $f([a, b])$ kompakt ifølge Sætning I, 5, 11. Specielt er $f([a, b])$ begrænset. Altså findes et mindste interval (α, β) , der indeholder $f([a, b])$, hvor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nu gælder, at $[\beta - \frac{1}{n}, \beta]$ indeholder et punkt $y_n \in f([a, b])$. Lad os for hvert $n \in \mathbb{N}$ vælge $x_n \in [a, b]$, så $y_n = f(x_n)$. Følgen

(x_n) har ifølge Sætning I,5,6 en konvergent delfølge $(x_{n_p}) \rightarrow x_0 \in [a,b]$ for $p \rightarrow \infty$. Men da f er kontinuert, må følgen $(f(x_{n_p}))$ gå mod $f(x_0)$ for $p \rightarrow \infty$. Men $f(x_{n_p}) = y_{n_p}$ og $(y_{n_p}) \rightarrow \beta$ for $p \rightarrow \infty$. Så $\beta = f(x_0)$.

Funktionen f antager sin største og sin mindste værdi i intervallet. Når f ikke er identisk $\equiv 0$, må én af extremerne være i et indre punkt, ξ . I dette punkt, er $f'(\xi) = 0$ ifølge Sætning I,6,3.

I det almindelige tilfælde betragtes

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a).$$

Da er g differentiabel i $]a,b[$ og kontinuert $[a,b]$, og $g(a) = g(b) = 0$. Derfor findes ifølge ovenstående $\xi \in]a,b[$, hvor $g'(\xi) = 0$. Dvs. at

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Sætning I,6,10 bliver bevist i §8, se side VI,8,4.

Regnereglerne følger regnereglerne for differentiation.

Sætning I,6,11 bliver nærmere belyst i §8.

Sætning I,6,12. Lad $F(x)$ være en stamfunktion til $f(x)$; dvs. $f(x) = F'(x)$. Ifølge Sætning I,6,5 findes $\xi \in]a,b[$, så

$$f(\xi) = F'(\xi) = \frac{1}{b-a} (F(b) - F(a)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

Sætning I,6,13. En stamfunktion til 1 er $-(x-t)$, så

$$f(x) - f(a) = \int_a^x 1 \cdot f'(t) dt =$$

$$= \left[-(x-t) f'(t) \right]_a^x + \int_a^x (x-t) f''(t) dt = f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t) dt .$$

Altså

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t) dt .$$

Tilsvarende gælder i almindelighed

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \\ &= \frac{1}{n!} \left[-f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^x + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+2)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt . \end{aligned}$$

Ved successiv delvis integration får formelen. □

Sætning I,6,14. Triviel. □

Sætning I,6,15. Lad $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ være defineret

$$\varphi(x) = f(b)g(x) - g(b)f(x) .$$

Da er φ differentiabel i $]a,b[$ og kontinuert $[a,b]$, samt $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Ifølge Sætning I,6,5 findes $\xi \in]a,b[$, så

$$0 = \varphi'(\xi) = f(b)g'(\xi) - g(b)f'(\xi) .$$

Med andre ord:

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

Når $b \rightarrow a$ må $\xi \in]a,b[$ følge med. Hvis $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \alpha$ for $x \rightarrow a$, så må $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \alpha$ for $x \rightarrow a$. □

Sætning I,6,16. Tilfældet $f(x) \rightarrow \infty$ og $g(x) \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow b$.
 Da må $g'(x) > 0$ for et x , og da $g'(x) \neq 0$ for alle x , må
 $g'(x) > 0$ for alle $x \in I$. (Ifølge Corollar I,6,6.) Lad nu
 $k' < k$. Da vil

$$k' < \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ for } x \text{ nær } b.$$

Dvs. $g'(x)k' < f'(x)$, eller $f'(x) - k'g'(x) > 0$. Funktionen
 $f(x) - k'g(x)$ er altså voksende (ifølge Sætning I,6,5.) Nu vil
 $\varepsilon g(x) \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow b$ for $\varepsilon > 0$. Altså må

$$f(x) - k'g(x) + \varepsilon g(x) \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow b,$$

så for x nær b gælder

$$f(x) - k'g(x) + \varepsilon g(x) > 0$$

eller

$$k' - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Altså må $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow k$ for $x \rightarrow b$.

Tilfældet $f(x) \rightarrow 0$ og $g(x) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$. Da vil $f\left(\frac{1}{t}\right) \rightarrow 0$
 for $t \rightarrow 0$ og $g\left(\frac{1}{t}\right) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow 0$. Nu er

$$\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'} = \frac{-t^{-2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-t^{-2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \rightarrow k$$

for $t \rightarrow 0$, så ifølge Sætning I,6,15 gælder

$$\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \rightarrow k \text{ for } t \rightarrow 0.$$

□

§7. Differentialligninger af første orden.

Sætning I,7,1-2. Under forudsætning af, at $f'_y(x,y)$ er kontinuert i D viser vi både eksistens og entydighed. I en kompakt delmængde af D kan vi antage, at $|f'_y(x,y)| \leq K$ og $|f(x,y)| \leq K$ for alle (x,y) i delmængden.

Lad nu $(x_0, y_0) \in D$ og lad (x_0, y_0) være et indre punkt i den kompakte delmængde. Lad endvidere intervallet

$$[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$$

være en delmængde heraf, med $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha < \frac{\beta}{K}$.

Vi definerer

$$S_\alpha = \{\varphi: [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \rightarrow [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \mid \varphi \text{ kontinuert}\}.$$

Vi sætter for $\varphi \in S_\alpha$

$$\|\varphi\| = \max\{|\varphi(t)| \mid t \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]\}.$$

Da gælder

$$\|\varphi\| \geq 0 \quad \text{og} \quad = 0 \quad \text{kun for} \quad \varphi \equiv 0.$$

$$\|\lambda\varphi\| = |\lambda| \cdot \|\varphi\| \quad \text{for} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|.$$

Vi taler derfor om *afstanden* mellem to funktioner φ og ψ fra S_α , defineret som

$$\|\varphi - \psi\|.$$

Vi definerer nu en operator eller funktion

$$\Phi: S_\alpha \rightarrow S_\alpha$$

ved

$$\Phi(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt.$$

En løsning til differentialligningen

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

med

$$\varphi(x_0) = y_0$$

er netop et fixpunkt for Φ ;

$$\Phi(\varphi) = \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt .$$

Vi kan vælge α så lille, at Φ bliver en kontraktion. Thi

$$\Phi(\varphi) - \Phi(\psi) = \int_{x_0}^x (f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))) dt ,$$

så

$$\begin{aligned} \|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)\| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))| dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f_y(t, \xi(t))| \cdot |\varphi(t) - \psi(t)| dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x K \|\varphi - \psi\| dt \right| \\ &= K |x - x_0| \|\varphi - \psi\| \leq \alpha K \|\varphi - \psi\| . \end{aligned}$$

Vi vælger $\alpha < \frac{1}{K}$; så er $\alpha K = k < 1$ og

$$\|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)\| \leq k \|\varphi - \psi\| .$$

Entydighed.

Hvis φ og ψ er to løsninger, så gælder i intervallet $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, at de er fixpunkter for Φ . Altså

$$\|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)\| = \|\varphi - \psi\| \leq k \|\varphi - \psi\| .$$

Men så må $\|\varphi - \psi\| = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \psi(x)$ for alle $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Eksistens.

Lad $\varphi_0 \in S_\alpha$ være vilkårlig. Betragt følgen

$$\varphi_n = \Phi(\varphi_{n-1}) = \Phi^n(\varphi_0) .$$

Der gælder

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_{n+p}\| &\leq k^n \|\varphi_0 - \varphi_p\| = k^n \|\varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_1 - \dots - \varphi_p\| \\ &\leq k^n (\|\varphi_0 - \varphi_1\| + \|\varphi_1 - \varphi_2\| + \dots + \|\varphi_{p-1} - \varphi_p\|) \\ &\leq k^n (\|\varphi_0 - \varphi_1\| + k \cdot \|\varphi_0 - \varphi_1\| + \dots + k^{p-1} \|\varphi_0 - \varphi_1\|) \\ &= k^n \cdot \frac{1-k^p}{1-k} \cdot \|\varphi_0 - \varphi_1\| \leq k^n \cdot \frac{\|\varphi_0 - \varphi_1\|}{1-k} = k^n \cdot L . \end{aligned}$$

Specielt gælder for alle x i intervallet, at

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n+p}(x)| \leq \|\varphi_n - \varphi_{n+p}\| \leq k^n \cdot L .$$

Da $(k^n) \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, er $\varphi_n(x)$ en fundamentalfølge. Ifølge Sætning I,4,13 er den konvergent. Vi definerer en funktion $\varphi(x)$ ved

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \quad \text{for } x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] .$$

Vi skal vise, at $\varphi \in S_\alpha$; 3: at φ er kontinuert. Lad $\varepsilon > 0$ være givet og $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ et punkt. Først vælges n , så $k^n L < \frac{\varepsilon}{3}$.

Da gælder for alle t , og alle p , at

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n+p}(t)| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Vi lader $p \rightarrow \infty$, og får, at

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{for alle } t .$$

Nu findes $\delta > 0$, så

$$|x-t| < \delta \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Så gælder

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(t)| &\leq |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - \varphi_n(t)| + |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Altså er φ kontinuert, $\varphi \in S_\alpha$.

Men da vi for ethvert $\varepsilon > 0$ har for n stor nok

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad \text{for alle } t,$$

så gælder åbenbart

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq \varepsilon$$

for n stor nok. Da gælder

$$\begin{aligned} \|\Phi(\varphi) - \varphi\| &\leq \|\Phi(\varphi) - \varphi_{n+1}\| + \|\varphi_{n+1} - \varphi\| \leq \|\Phi(\varphi) - \Phi(\varphi_n)\| + \|\varphi_{n+1} - \varphi\| \\ &\leq k\|\varphi - \varphi_n\| + \|\varphi_{n+1} - \varphi\| \leq k \cdot \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

altså

$$\Phi(\varphi) = \varphi.$$

Men så er φ den søgte løsning. □

Sætning I,7,3. Defineres $\psi(x) = \varphi(x+c)$, gælder jo $\psi'(x) = \varphi'(x+c)$, så

$$\psi'(x) = \varphi'(x+c) = f(\varphi(x+c)) = f(\psi(x)). \quad \square$$

§8. Integraler i $\mathbb{R}^n$.Sætning I,8,1-3. Trivielle. □Sætning I,8,4. Lad

$$I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] .$$

Er nu $I_1 = [a_1, c] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ og $I_2 = [c, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ er $\{I_1, I_2\}$ en intervalinddeling af I . Nu er

$$\begin{aligned} m(I) &= (b_1 - a_1) \prod_{j>1} (b_j - a_j) \\ &= (b_1 - c) \prod_{j>1} (b_j - a_j) + (c - a_1) \prod_{j>1} (b_j - a_j) \\ &= m(I_1) + m(I_2) . \end{aligned}$$

Enhver intervalinddeling kan fås ved sukcessiv to-delning. □Lemma VI,8,1. Lad K være en kompakt mængde og $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Da gælder

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in K: \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

Bemærkning: En funktion, der opfylder (*) i et vilkårligt område K , kaldes *ligeligt* eller *uniformt* kontinuert i K . Lemma siger, at er K kompakt, så er enhver kontinuert funktion tillige ligeligt kontinuert.Bevis: Når K er kompakt, så er også $K \times K$ kompakt. Da funktionen

$$(x, y) \in K \times K \rightarrow |f(x) - f(y)| \in \mathbb{R}$$

er kontinuert, så er for et vilkårligt $\varepsilon > 0$

$$M_\varepsilon = \{(x,y) \in K \times K \mid |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon\}$$

afsluttet og dermed kompakt. Nu er funktionen

$$d: (x,y) \in K \times K \rightarrow |x-y| \in \mathbb{R}$$

kontinuert, så mængden

$$d(M_\varepsilon)$$

er kompakt. Altså må $\min d(M_\varepsilon) \in M_\varepsilon$. Men så er $\delta = \min d(M_\varepsilon) > 0$.
(Thi $\delta = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow |f(x)-f(y)| = 0 \geq \varepsilon$.)

Men så gælder, at er

$$|x-y| < \delta,$$

så vil $(x,y) \notin M_\varepsilon$, og så må $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. □

Lemma VI,8,2. For enhver funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ gælder

$$\underline{R}(f) \leq \overline{R}(f).$$

Bevis: Lad s, t være trappefunktioner, så

$$s \leq f \leq t.$$

Da er det muligt at ændre intervaldelingerne for s og t til den samme finere inddeling, uden at ændre integralerne ifølge Sætning I,8,4. Når s og t har samme intervaldeling, er det oplagt, at

$$\int_I s(x) dx \leq \int_I t(x) dx.$$

For s fast, følger at

$$\int_I s(x) dx \leq \inf \left\{ \int_I t(x) dx \mid t \geq f \right\} = \overline{R}(f).$$

Når dette gælder for et vilkårligt $s \leq f$, så må

$$\underline{R}(f) = \sup \left\{ \int_I s(x) dx \mid s \leq f \right\} \leq \overline{R}(f). \quad \square$$

Sætning I,8,5. Vi skal vise, at $\overline{R}(f) = \underline{R}(f)$. Efter Lemma VI,8,2, gælder $\underline{R}(f) \leq \overline{R}(f)$, så det er nok at vise, at $\overline{R}(f) \leq \underline{R}(f)$. Lad

$\varepsilon > 0$ være vilkårlig. Vi viser, at $\overline{R}(f) - \underline{R}(f) < \varepsilon$. Heraf følger, at $\overline{R}(f) - \underline{R}(f) \leq 0$.

Ifølge Lemma VI,8,1 findes $\delta > 0$, så $|x, y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Vi kan inddele I i så små intervaller, $I = \bigcup_j I_j$, at siderne i I_j er mindre end $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$. For to vilkårlige punkter $x, y \in I_j$ er da $\|x - y\| \leq \sqrt{(\delta^2/n) \cdot n} = \delta$.

Vi definerer nu to trappefunktioner $s \leq f \leq t$, som følger

$$s(x) = \min\{f(y) \mid y \in I_j\} \quad \text{for } x \in \overset{\circ}{I}_j$$

$$t(x) = \max\{f(y) \mid y \in I_j\} \quad \text{for } x \in \overset{\circ}{I}_j$$

$$s(x) = \min\{f(y) \mid y \in I\} \quad \text{for } x \notin \bigcup_j \overset{\circ}{I}_j$$

$$t(x) = \max\{f(y) \mid y \in I\} \quad \text{for } y \notin \bigcup_j \overset{\circ}{I}_j.$$

Da gælder

$$s \leq f \leq t.$$

Men

$$\begin{aligned} \int_I t(x) dx - \int_I s(x) dx &= \sum_j (t(x_j) - s(x_j)) m(I_j) \\ &\leq \sum_j \varepsilon m(I_j) = \varepsilon m(I), \end{aligned}$$

hvor $x_j \in \overset{\circ}{I}_j$. Altså gælder

$$\overline{R}(f) - \underline{R}(f) \leq \int_I t(x) dx - \int_I s(x) dx \leq \varepsilon m(I). \quad \square$$

Sætning I,8,6. Ulighederne $\underline{R}(f) \leq \underline{L}(f)$ og $\overline{L}(f) \leq \overline{R}(f)$ er oplagte.

Men uligheden

$$\underline{L}(f) \leq \overline{L}(f)$$

er vanskelig at vise. Denne ulighed samt Sætning I,8,7;12;14-19 skal ikke vises her. Der henvises til Christian Berg, *Noter til matematik 2, Matematisk Analyse*, KUMI 1984/85.

Sætning I,8;8,10,11,13 er trivielle. □

Sætning I, 6, 10. Lad $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ være kontinuert. Vi definerer en funktion

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{for } x \in [a,b].$$

Vi skal vise, at F er differentiabel med $F' = f$.

$$F(x + dx) - F(x) = \int_x^{x+dx} f(t) dt$$

Da f er kontinuert, må f antage alle værdier mellem $\inf \{f(\xi) \mid \xi \in [x, x+dx]\}$ og $\sup \{f(\xi) \mid \xi \in [x, x+dx]\}$. Ifølge definitionen på Riemann integralet er

$$dx \inf \leq \int_x^{x+dx} f(t) dt \leq dx \sup.$$

Altså findes $\xi \in [x, x+dx]$ så

$$\int_x^{x+dx} f(t) dt = f(\xi) dx.$$

Lader vi $dx \rightarrow 0$ i udtrykket

$$\frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} = f(\xi),$$

får vi, at F er differentiabel med $F'(x) = f(x)$. $\square$

§9. Vektorrum og lineære funktioner.

Sætning I,9,1. De to egenskaber sikrer, at vi bliver i delmængden ved kompositionerne. Alle andre vektorrumsegenskaber nedarves. $\square$

Sætning I,9,2. Lad U_j være underrum i V for $j \in J$. Sæt $U = \bigcap \{U_j \mid j \in J\}$. Da $0 \in U_j$ for hvert j , vil $0 \in U$, så $U \neq \emptyset$.

Hvis λ er et tal og $u, v \in U$, så vil for hvert j , $u, v \in U_j$ og derfor, når U_j er et underrum, $u+v \in U_j$ og $\lambda u \in U_j$. Men så vil

$$u+v \in U \text{ og } \lambda u \in U,$$

fordi $U = \bigcap_j U_j$. Sætning I,9,1 siger nu, at U er et underrum. $\square$

Sætning I,9,3. Lad $V(M) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid v_j \in M, \lambda_j \text{ tal}\}$. Da er $V(M)$ et underrum; thi med $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in V(M)$ vil $\lambda(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_m) v_m \in V(M)$ og med $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in V(M)$ og $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m \in V(M)$, (λ_j, μ_i kan jo være $= 0$), vil

$$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) + (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m) = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_m + \mu_m) v_m \in V(M).$$

Ifølge Sætning I,9,1 er $V(M)$ et vektorrum. Lad nu U være fællesmængden af de vektorrum, der indeholder M . Da $M \subseteq V(M)$, må $U \subseteq V(M)$. Men når $M \subseteq U$, må enhver vektor af formen

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m, \text{ hvor } v_j \in M \text{ og } \lambda_j \text{ er et tal}$$

tilhøre U . Altså $V(M) \subseteq U$.

Konklusion: $V(M) = U$. $\square$

Bemærk, $V(\emptyset) = \{0\}$, 0-rummet.

Sætning I, 9, 4. Følger umiddelbart af Sætning I, 9, 3.

Sætning I, 9, 5. Lad $e_1, \dots, e_n$ være n lineært uafhængige vektorer fra V , og lad v være en vilkårlig vektor. Da V har dimension n , er vektorerne $v, e_1, \dots, e_n$ lineært afhængige. Der findes derfor tal $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ ikke alle 0, så

$$\lambda v + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0.$$

Nu kan $\lambda = 0$ ikke forekomme, når $e_1, \dots, e_n$ er lineært uafhængige. Men så står der jo, at v er frembragt af $e_1, \dots, e_n$, nemlig som

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} e_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} e_n.$$

Altså er $e_1, \dots, e_n$ en basis.

At enhver basis er et maksimalsæt følger af udskiftningssætningen, se nedenfor. □

Sætning I, 9, 6. Lad nu $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ være en basis for V og lad $\{e_1, \dots, e_m\}$ være m lineære uafhængige vektorer, og $m \leq n$. Da $b_1, \dots, b_n$ er en basis, kan e_1 fremstilles som

$$e_1 = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n.$$

Da $e_1 \neq 0$, må mindst ét tal være ulig nul, f.eks. λ_1 . Altså er

$$b_1 = \frac{1}{\lambda_1} e_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} b_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} b_n.$$

Men så frembringer $e_1, b_2, \dots, b_n$ det samme som $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Sættet $e_1, b_2, \dots, b_n$ er lineært uafhængigt; thi er

$$\mu_1 e_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n = 0$$

så er

$$\mu_1 \lambda_1 b_1 + (\mu_2 + \mu_1 \lambda_2) b_2 + \dots + (\mu_n + \mu_1 \lambda_n) b_n = 0$$

Da $b_1, \dots, b_n$ er lineært uafhængigt, er alle koefficienter 0, altså

$$\begin{aligned}\mu_1 \lambda_1 &= 0 \\ \mu_2 + \mu_1 \lambda_2 &= 0 \\ &\vdots \\ \mu_n + \mu_1 \lambda_n &= 0.\end{aligned}$$

Da $\lambda_1 \neq 0$, må $\mu_1 = 0$, og derfor $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$. Dvs. $e_1, b_2, \dots, b_n$ er en basis for V .

Lad nu

$$e_1, \dots, e_{j-1}, b_{j-1}, \dots, b_n$$

være en basis for V . Vi skriver nu

$$e_j = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{j-1} e_{j-1} + \lambda_j b_j + \dots + \lambda_n b_n.$$

Nu kan $\lambda_j, \dots, \lambda_n$ ikke alle være 0, da $e_1, \dots, e_j$ er lineært uafhængige. F.eks. er $\lambda_j \neq 0$, og så er

$$b_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} e_1 - \dots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} e_{j-1} + \frac{1}{\lambda_j} e_j - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_j} b_n.$$

Altså frembringer $e_1, \dots, e_j, b_{j+1}, \dots, b_n$ rummet V . At sættet er lineært uafhængigt, ses nøjagtig som ovenfor med e_1 . Altså er sættet en basis.

For $j = m$ fås sætningen. □

Sætning I,9,5 (fortsat). Er nu $e_1, \dots, e_n$ og $f_1, \dots, f_m$ to baser af ulige længde, f.eks. $m < n$, udskiftes m vektorer i $e_1, \dots, e_n$ med $f_1, \dots, f_m$. Sættet $f_1, \dots, f_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ er lineært uafhængigt i modstrid med, at $f_1, \dots, f_m$ skulle frembringe hele vektorrummet herunder e_n . □

Sætning I, 9, 7. Vi har baser $e_1, \dots, e_p$ og $f_1, \dots, f_q$ for U_1 og U_2 hhv. Lad nu $g_1, \dots, g_m$ være en basis for $U_1 \cap U_2$. Sætning I, 9, 6 siger nu, at vi kan erstatte såvel $e_1, \dots, e_m$ som $f_1, \dots, f_m$ med $g_1, \dots, g_m$ (efter omnummerering). Sættet $g_1, \dots, g_m, e_{m+1}, \dots, e_p, f_{m+1}, \dots, f_q$ frembringer $U_1 + U_2$. Det er lineært uafhængigt, thi er

$$\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m + \mu_1 e_{m+1} + \dots + \nu_1 f_{m+1} + \dots = 0, \dots$$

så er $\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m + \mu_1 e_{m+1} + \dots = -\nu_1 f_{m+1} - \dots \in U_1 \cap U_2$

da venstre side tilhører U_1 og højre side tilhører U_2 . Men så kan $-\nu_1 f_{m+1} - \dots$ skrives som en kombination af $g_1, \dots, g_m$, som $\pi_1 g_1 + \dots + \pi_m g_m$. Indsættes og ordnes, fås relationen

$$(\lambda_1 - \pi_1)g_1 + \dots + (\lambda_m - \pi_m)g_m + \mu_1 e_{m+1} + \dots = 0,$$

som er en relation i U_1 mellem de uafhængige basisvektorer, så

$$\lambda_1 - \pi_1 = \dots = \lambda_m - \pi_m = \mu_1 = \dots = 0.$$

Altså er $\nu_1 f_{m+1} + \dots = 0$, så da $f_{m+1}, \dots, f_q$ er lineært uafhængige, er også $\nu_1 = \dots = 0$.

Konklusion, dimension af $U_1 + U_2$ er $p + q - m$. □

Sætning I, 9, 8. 1) $f(U)$. Er $v \in f(U)$, så findes $u \in U$ med $v = f(u)$. Da er $\lambda v = \lambda f(u) = f(\lambda u) \in f(U)$. Hvis tillige $v' \in f(U)$, så findes $u' \in U$ med $v' = f(u')$. Da er $v + v' = f(u) + f(u') = f(u + u') \in f(U)$. Ifølge Sætning I, 9, 1 er $f(U)$ et underrum.

2) $f^{-1}(0)$. Lad $u, v \in f^{-1}(0)$. Da vil $f(u+v) = f(u) + f(v) = 0 + 0 = 0$, og $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda 0 = 0$, så $u+v$ og λu ligger i kernen. Ifølge Sætning I, 9, 1 er $f^{-1}(0)$ et underrum. □

Sætning I,9,9. Lad $u_1, \dots, u_n$ være en basis for U . Vi kan udskifte $u_1, \dots, u_q$ med $v_1, \dots, v_q$ en basis for $f^{-1}(0)$. Nu er $f(u_{q+1}), \dots, f(u_n)$ en basis for $f(U)$. Thi, er $\lambda_1 f(u_{q+1}) + \dots + \lambda_{n-q} f(u_n) = 0$, så er

$$f(\lambda_1 u_{q+1} + \dots + \lambda_{n-q} u_n) = 0,$$

altså $\lambda_1 u_{q+1} + \dots + \lambda_{n-q} u_n \in f^{-1}(0)$,

så $\lambda_1 u_{q+1} + \dots + \lambda_{n-q} u_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q$

Men da $v_1, \dots, v_q, u_{q+1}, \dots, u_n$ er lineært uafhængige, er $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-q} = \mu_1 = \dots = \mu_q = 0$. Altså er $f(u_{q+1}), \dots, f(u_n)$ lineært uafhængige. På den anden side frembringer de $f(U)$. Thi er $v \in f(U)$, findes $u \in U$, så $v = f(u)$. Nu er $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_q v_q + \lambda_{q+1} u_{q+1} + \dots + \lambda_n u_n$, så

$$\begin{aligned} f(u) &= \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_q f(v_q) + \lambda_{q+1} f(u_{q+1}) + \dots + \lambda_n f(u_n) \\ &= \lambda_{q+1} f(u_{q+1}) + \dots + \lambda_n f(u_n), \end{aligned}$$

da $f(v_1) = \dots = f(v_q) = 0$.

Men så er $\dim f(U) = n - q$. □

Sætning I,9,10. Hvis f er injektiv, må $f^{-1}(0)$ bestå af én vektor. Altså er $f^{-1}(0) = \{0\}$. Omvendt, er $f^{-1}(0) = \{0\}$, og er $f(u) = f(v)$, så er $f(u-v) = f(u) - f(v) = 0$, altså $u-v \in \ker f = \{0\}$, og derfor $u = v$. □

Sætning I,9,11. Hvis $f(U) = V$, er $\dim f(U) = \dim V$. Lad nu $\dim f(U) = \dim V$. Da $f(U)$ er et underrum, indeholder den en basis, der er et maksimalsæt i V og derfor en basis for V . Et underrum, der er frembragt af en basis for V , må være V selv. □

Corollar I,9,12. Følger af I,9;9,10,11.

Sætning I,9,13. Når f er bijektiv, findes f^{-1} . Vi skal vise, at f^{-1} er lineær. Er $v_1, v_2 \in V$, findes $u_1, u_2 \in U$, så $v_1 = f(u_1)$ og $v_2 = f(u_2)$. Nu er

$$v_1 + v_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2),$$

hvorfor $f^{-1}(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2)$.

Og $\lambda v_1 = \lambda f(u_1) = f(\lambda u_1)$,

så $f^{-1}(\lambda v_1) = \lambda u_1 = \lambda f^{-1}(v_1)$. □

Sætning I,9,14.

$$g(f(u_1 + u_2)) = g(f(u_1) + f(u_2)) = g(f(u_1)) + g(f(u_2)).$$

$$g(f(\lambda u)) = g(\lambda f(u)) = \lambda g(f(u)).$$
 □

Sætning I,9,15. Definitionen af basis. □

Sætning I,9,16. Kernen for k er

$$\{x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mid x_1 = \dots = x_n = 0\} = \{0\}.$$

Sætningen følger nu af Corollar I,9,12. □

Sætning I,9,17. Det (j,k) 'te element i matricen for $g \circ f$ er jo den j 'te koordinat i $g \circ f(u_k)$. Nu er $f(u_k) = a_{1k} v_1 + \dots + a_{nk} v_n$, så

$$\begin{aligned}
g(f(u_k)) &= a_{1k}g(v_1) + \dots + a_{nk}g(v_n) \\
&= a_{1k}(b_{11}w_1 + \dots + b_{p1}w_p) \\
&\quad + \dots \\
&\quad a_{nk}(b_{1n}w_1 + \dots + b_{pn}w_p) \\
&= \dots + (b_{j1}a_{1k} + \dots + b_{jn}a_{nk})w_j + \dots
\end{aligned}$$

Matricen er altså $\underline{B} \underline{A}$. □

Sætning I, 9, 18. Da V er isomorf med $\mathbb{R}^n$, er billederne $f(U)$ og $\underline{A} U$ i hhv. V og $\mathbb{R}^n$ isomorfe og har samme rang. Da koordinattransformationerne $\underline{S} \underline{A} \underline{T}$ hverken ændrer række- eller søjlerang, og de er ens i $\begin{pmatrix} \underline{E} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}$, er de ens i $\underline{A}$. □

Sætning I, 9, 19. Har $\underline{A}$ rang n , er funktionen bijektiv og har en invers. □

Sætning I, 9, 20. □

Sætning I, 9, 21. □

§10. Determinanter.

Sætning I,10,3. Der henvises til Mogens Esrom Larsen, *Gruppeteori*, Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck, København 1982, Kapitel 2 §1.

Sætning I,10,4. Vi definerer determinanten ved formlen her:

$$(*) \quad \det \underline{A} = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \cdots a_{np(n)} .$$

Sætning I,10,5. Er p en permutation af n elementer, så er også p^{-1} , og da $\sigma(p)\sigma(p^{-1}) = \sigma(\text{id}) = +1$, gælder $\sigma(p) = \sigma(p^{-1})$.

Derfor er

$$\begin{aligned} \det \underline{A}' &= \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{p(1)1} \cdots a_{p(n)n} \\ &= \sum_{p^{-1} \in S_n} \sigma(p^{-1}) a_{1p^{-1}(1)} \cdots a_{np^{-1}(n)} = \det \underline{A} . \quad \square \end{aligned}$$

Sætning I,10,1. Eksistens. Vi skal vise, at den ved (*) definerede funktion har egenskaberne 1), ..., 4).

4). Kun den identiske permutation giver et produkt uden 0'er, og dette produkt er 1.

2). Lad t ombytte i og j (hvor $i \neq j$). Da er

$$\begin{aligned} \det \hat{\underline{A}} &= \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{p(1)1} \cdots a_{p(i)j} \cdots a_{p(j)i} \cdots a_{p(n)n} \\ &= \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{p(1)1} \cdots a_{p(t(j))j} \cdots a_{p(t(i))i} \cdots a_{p(n)n} \\ &= \sum_{p \in S_n} -\sigma(p \circ t) a_{p(t(1))1} \cdots a_{p(t(n))n} = -\det \underline{A} , \end{aligned}$$

idet $\sigma(p \circ t) = \sigma(p)\sigma(t) = -\sigma(p)$ og med p vil $p \circ t$ gennem-

løbe hele S_n .

3). Efter 2) er det nok at se på første søjle:

$$\underline{a}_1 = \lambda \underline{b} + \underline{c}.$$

Så er

$$\begin{aligned} \det \underline{A} &= \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{p(1)1} \cdots a_{p(n)n} \\ &= \sum_{p \in S_n} \sigma(p) (\lambda b_{p(1)} + c_{p(1)}) a_{p(2)2} \cdots a_{p(n)n} \\ &= \lambda \sum_{p \in S_n} \sigma(p) b_{p(1)} a_{p(2)2} \cdots a_{p(n)n} + \sum_{p \in S_n} \sigma(p) c_{p(1)} a_{p(2)2} \cdots a_{p(n)n} \\ &= \lambda \det \underline{B} + \det \underline{C}, \end{aligned}$$

hvor $\underline{B}, \underline{C}$ fremgår af $\underline{A}$ ved substitution af $\underline{b}, \underline{c}$ for $\underline{a}_1$.

1.) a) Hvis to søjler er ens, så er determinanten 0. Thi ombytning af søjlerne lader matricen - og dermed determinanten - uændret, men skal ifølge 2) skifte fortegnet. Kun 0 er uændret efter fortegnsskift.

b) Lad en afhængighed være

$$\underline{a}_1 = \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \underline{a}_n.$$

Ifølge 3) gælder regnestykket, hvor $\underline{A}^i$ fremgår af $\underline{A}$ ved substitution af $\underline{a}_i$ for $\underline{a}_1$,

$$\det \underline{A} = \lambda_2 \det \underline{A}^2 + \dots + \lambda_n \det \underline{A}^n = 0 + \dots + 0 = 0.$$

Omvendt, hvis $\underline{A}$ er regulær, så har $\underline{A}$ en invers $\underline{A}^{-1}$.

Ifølge Sætning I, 10, 7 er

$$\det(\underline{A}) \det(\underline{A}^{-1}) = \det \underline{E} = 1.$$

Altså er ingen af determinanterne 0.

Entydighed og Sætning I, 10, 7.

Vi beviser Sætning I, 10, 7 ud fra egenskaberne 1), ..., 4) i Sætning I, 10, 1, idet vi ser bort fra ovenstående bemærkning, at $\det \underline{A} = 0 \Rightarrow$ søjlerne lineært afhængige. Entydigheden vises samtidig.

Vi betragter $\underline{B} \underline{A}$ for vilkårlige kvadratiske matricer, hvor $\underline{B}$ kan være $\underline{E}$. Vi tænker os en funktion $\det$ med egenskaberne 1), ..., 4).

Enhver søjle i $\underline{C} = \underline{B} \underline{A}$ er en kombination af søjlerne fra $\underline{B}$, $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$, nemlig

$$\underline{c}_j = a_{1j}\underline{b}_1 + \dots + a_{nj}\underline{b}_n.$$

Af 3) følger, at

$$\det \underline{C} = \sum_{v_1=1}^n \dots \sum_{v_n=1}^n a_{v_1 1} \dots a_{v_n n} \det(\underline{b}_{v_1} \dots \underline{b}_{v_n}).$$

Nu følger af 2), at $\det(\underline{b}_{v_1} \dots \underline{b}_{v_n})$ højst er ulig 0, når $v_1, \dots, v_n$ er parvis forskellige. Nu er $(v_1, \dots, v_n)$ så en permutation af tallene $(1, \dots, n)$, så vi finder

$$\det \underline{C} = \sum_{p \in S_n} a_{p(1)1} \dots a_{p(n)n} \det(\underline{b}_{p(1)} \dots \underline{b}_{p(n)}).$$

Ved sukcessiv anvendelse af 2) under brug af Sætning I, 10, 3 fås

$$\begin{aligned} \det \underline{C} &= \sum_{p \in S_n} a_{p(1)1} \dots a_{p(n)n} \sigma(p) \det \underline{B} \\ &= \det \underline{B} \cdot \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{p(1)1} \dots a_{p(n)n}. \end{aligned}$$

Sætter vi nu $\underline{B} = \underline{E}$, bliver $\underline{C} = \underline{A}$ og der står, at $\det \underline{A}$ er givet ved udtrykket (*).

Ellers står der jo

$$\det \underline{\underline{C}} = \det \underline{\underline{B}} \det \underline{\underline{A}} ,$$

hvilket er Sætning I,10,7. □

Sætning I,10,2. Følger umiddelbart af 3), idet

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{nj} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$
□

§11. Egenverdier og egenvektorer.

Sætningerne 1 - 5 er trivielle.

Sætning I,11,6. Er λ en egenverdi med egenverdiplicitet m , så har kernen for $\underline{A} - \lambda \underline{E}$ dimension m . Lad nu $e_1, \dots, e_m$ være en basis for denne kerne. Vi supplerer denne basis på vilkårlig måde til en basis for $\mathbb{Q}^n$, $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$. Transformerer matricen $\underline{A}$ til $\underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S}$ ved matricen

$$\underline{S} = (\underline{e}_1 \cdots \underline{e}_n)$$

forbliver det karakteristiske polynomium uændret:

$$\begin{aligned} \det(x\underline{E} - \underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S}) &= \det(\underline{S}^{-1} (x\underline{E} - \underline{A}) \underline{S}) \\ &= \det \underline{S}^{-1} \det(x\underline{E} - \underline{A}) \det \underline{S} = \det(x\underline{E} - \underline{A}). \end{aligned}$$

Men matricen bliver:

$$\underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda & \cdots & 0 \\ a_{m+1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Udvikles determinanten efter de første m rækker, fås

$$\det(x\underline{E} - \underline{A}) = (x - \lambda)^m \det \hat{\underline{A}},$$

hvor

$$\hat{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Altså er λ 's rodmultiplicitet mindst m .

□

§12. Ortogonalsystemer.Sætning I, 12, 1.

1) følger af 4) for det indre produkt.

2) følger af 2) for det indre produkt:

$$\|\lambda v\| = \sqrt{(\lambda v \cdot \lambda v)} = \sqrt{\lambda \overline{\lambda} (v \cdot v)} = |\lambda| \sqrt{v \cdot v} = |\lambda| \|v\| .$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \|u+v\|^2 &= (u+v) \cdot (u+v) = u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + u \cdot v + \overline{u \cdot v} \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

ifølge Sætning I, 12, 2. □

Sætning I, 12, 2. Vi har ifølge 1) ovenfor

$$0 \leq \|(v \cdot v)u - (u \cdot v)v\| ,$$

og ifølge 1) og 2),

$$0 = \|(v \cdot v)u - (u \cdot v)v\| \Rightarrow (v \cdot v)u = (u \cdot v)v .$$

I almindelighed gælder regningen

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|(v \cdot v)u - (u \cdot v)v\|^2 = ((v \cdot v)u - (u \cdot v)v) \cdot ((v \cdot v)u - (u \cdot v)v) \\ &= (v \cdot v)^2 (u \cdot u) - (v \cdot v) \overline{(u \cdot v)} (u \cdot v) - (u \cdot v) \overline{(v \cdot v)} (v \cdot u) + (u \cdot v) \overline{(u \cdot v)} (v \cdot v) \\ &= (v \cdot v) (\|v\|^2 \|u\|^2 - |u \cdot v|^2) . \end{aligned}$$

Heraf følger uligheden. □

Sætning I, 12, 3.

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2 &= (u-v) \cdot (u-v) = u \cdot u - v \cdot u - u \cdot v + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 - 0 - 0 + \|v\|^2 . \end{aligned} \quad \square$$

Hvis $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, så er

$$v \cdot u + u \cdot v = 0.$$

Er nu vektorrummet reelt, så er $v \cdot u = u \cdot v = 0$. □

Sætning I, 12, 4. Vi viser først, at $(v-p(v)) \perp u$. Det følger af

$$(v-p(v)) \cdot u = v \cdot u - (v \cdot u) \frac{u \cdot u}{\|u\|^2} = 0.$$

Lad nu $w \neq p(v)$ tilhøre underrummet frembragt af u . Da vil

$$w = p(v) + \alpha u,$$

hvor $\alpha \neq 0$. Da er

$$v - w = (v - p(v)) - \alpha u,$$

hvor $(v-p(v)) \perp \alpha u$. Da gælder, for det første:

$$(v-w) \cdot u = (v-p(v)) \cdot u - \alpha u \cdot u = -\alpha u \cdot u \neq 0,$$

og for det andet: (ifølge Sætning I, 12, 3):

$$\begin{aligned} \|v-w\|^2 &= \|v-p(v)\|^2 + |\alpha|^2 \|u\|^2 \\ &> \|v-p(v)\|^2. \end{aligned}$$
□

Sætning I, 12, 5. Vi viser først, at $(v-p(v)) \perp U$. Lad $u \in U$ være vilkårlig. Da skrives u i basen $e_1, \dots, e_m$ som

$$u = u_1 e_1 + \dots + u_m e_m.$$

Da $w \cdot u = \overline{u_1} (w \cdot e_1) + \dots + \overline{u_m} (w \cdot e_m)$,

er det nok at vise, at $(v-p(v)) \cdot e_k = 0$ for k vilkårlig

$$(v-p(v)) \cdot e_k = v \cdot e_k - \sum_{j=1}^m (v \cdot e_j) e_j \cdot e_k = v \cdot e_k - v \cdot e_k = 0,$$

da $e_j \cdot e_k = 0$ for $j \neq k$ og $e_k \cdot e_k = 1$.

Lad nu w være vilkårlig i U , $w \neq p(v)$. Da er

$$w = p(v) + u, \text{ hvor } u \neq 0, u \in U.$$

Så er

$$v - w = v - p(v) - u,$$

hvor $(v - p(v)) \perp u$. Da gælder for det første, at

$$(v - w) \cdot u = (v - p(v)) \cdot u - u \cdot u = -u \cdot u \neq 0,$$

så $v - w$ er ikke ortogonal på U .

Og for det andet er ifølge Sætning I,12,3:

$$\|v - w\|^2 = \|v - p(v)\|^2 + \|u\|^2 > \|v - p(v)\|^2. \quad \square$$

Sætning I,12,7. Er $e_1, \dots, e_n$ en basis for vektorrummet V , defineres følgen af underrum $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n$ med baserne hhv. $(e_1), (e_1, e_2), \dots, (e_1, \dots, e_n)$. Nu sætter

$$\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}.$$

Da er $\hat{e}_1$ en ortonormal basis for U_1 .

Nu tillader Corollar I,12,6 os at udskifte e_2 med $\hat{e}_2$, så $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ bliver en ortonormal basis for U_2 . Etc. til $U_n = V$. $\square$

Sætning I,12,8.

$$\begin{aligned} & (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \cdot (y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) \\ &= x_1 \bar{y}_1 e_1 \cdot e_1 + x_1 \bar{y}_2 e_1 \cdot e_2 + \dots + x_1 \bar{y}_n e_1 \cdot e_n \\ &+ x_2 \bar{y}_1 e_2 \cdot e_1 + x_2 \bar{y}_2 e_2 \cdot e_2 + \dots + x_2 \bar{y}_n e_2 \cdot e_n \\ &\vdots \\ &+ x_n \bar{y}_1 e_n \cdot e_1 + x_n \bar{y}_2 e_n \cdot e_2 + \dots + x_n \bar{y}_n e_n \cdot e_n \\ &= x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n. \end{aligned} \quad \square$$

Sætning I, 12, 9 - 10. En række i $\underline{S}'$ er en søjle $\underline{S}$. Netop når søjlerne i $\underline{S}$ er et ortonormalsystem, bliver produktet af to søjler, hvoraf den ene eventuel skal konjugeres, 0, hvis de er forskellige, og 1, hvis de er ens.

$$\underline{S}'\underline{S} = \underline{E} \quad \text{eller} \quad \overline{\underline{S}}'\underline{S} = \underline{E} . \quad \square$$

Sætning I, 12, 12. Hvis $\underline{A}$ er normal, findes $\underline{S}$ ortonormal, så $\underline{S}'\underline{A}\underline{S} = \underline{\Lambda}$. Så er $\underline{A} = \underline{S}\underline{\Lambda}\underline{S}'$, som er symmetrisk, da $\underline{A}' = \underline{S}\underline{\Lambda}'\underline{S}' = \underline{S}\underline{\Lambda}\underline{S}' = \underline{A}$. Hvis $\underline{A}$ er reel og symmetrisk, og $\lambda \in \mathbb{C}$ en egenværdi med tilhørende egenvektor $\underline{z} \in \mathbb{C}^n$, så er

$$\underline{A}\underline{z} = \lambda \underline{z} .$$

Transponering og konjugering lader $\underline{A}$ urørt:

$$\overline{\underline{z}}'\underline{A} = \overline{\lambda} \overline{\underline{z}}' .$$

Altså er

$$\lambda \|\underline{z}\|^2 = \lambda \overline{\underline{z}}' \underline{z} = \overline{\underline{z}}' \underline{A} \underline{z} = \overline{\lambda} \overline{\underline{z}}' \underline{z} = \overline{\lambda} \|\underline{z}\|^2 ,$$

hvorved

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \|\underline{z}\|^2 = 0 .$$

Da $\underline{z} \neq 0$ (egenvektor), må $\lambda = \overline{\lambda}$ d: reel. Altså er alle $\underline{A}$'s egenværdier reelle.

At summen af egenværdimultipliciteterne er n , kan ses ved induktion efter n . Dette udelades. Men egenvektorer hørende til forskellige egenværdier er automatisk ortogonale. Thi er $\lambda \neq \mu$ egenværdier, og er $\underline{u}$ og $\underline{v}$ tilsvarende egenvektorer, så er

$$\underline{u}' \underline{A} \underline{v} = \underline{u}' \mu \underline{v} = \mu \underline{u}' \underline{v} = \mu (\underline{u} \cdot \underline{v})$$

men den transponerede er jo den samme:

$$= \underline{v}' \underline{A}' \underline{u} = \underline{v}' \underline{A} \underline{u} = \underline{v}' \lambda \underline{u} = \lambda (\underline{v} \cdot \underline{u}) .$$

Altså er, da $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er reelle vektorer,

$$(\mu - \nu)(u \cdot v) = 0.$$

Når $\lambda \neq \mu$, må $u \cdot v = 0$.

I de enkelte egenrum benyttes Gram-Schmidt. □

Sætning I, 12, 13. Hvis $\underline{A}$ er normal, findes $\underline{S}$ unitær, så $\underline{S}^* \underline{A} \underline{S} = \underline{\Lambda}$. Hvis $\underline{\Lambda}$ tillige er reel, så fås

$$\underline{A}^* = (\underline{S} \underline{\Lambda} \underline{S}^*)^* = \underline{S} \underline{\Lambda}^* \underline{S}^* = \underline{S} \underline{\Lambda} \underline{S}^* = \underline{A}.$$

Altså er $\underline{A}$ Hermite'sk.

Hvis $\underline{A}$ er Hermite'sk, har $\underline{A}$ luttet reelle egenverdier. Thi som ovenfor er $\lambda \in \mathbb{C}$ egenverdi og $z \in \mathbb{C}^n$ egenvektor, så er

$$\underline{A} \underline{z} = \lambda \underline{z}$$

$$\underline{z}^* \underline{A} = \bar{\lambda} \underline{z}^*$$

$$\lambda \|\underline{z}\|^2 = \lambda \underline{z}^* \underline{z} = \underline{z}^* \underline{A} \underline{z} = \bar{\lambda} \underline{z}^* \underline{z} = \bar{\lambda} \|\underline{z}\|^2,$$

hvoraf $\lambda = \bar{\lambda}$, altså reel.

Også her er egenvektorer hørende til forskellige egenverdier ortogonale. Lad $\lambda \neq \mu$ være egenverdier og u og v tilhørende egenvektorer i $\mathbb{C}^n$. Da er

$$(\underline{u}^* \underline{A} \underline{v})^* = \underline{v}^* \underline{A} \underline{u}.$$

Nu er

$$\underline{u}^* \underline{A} \underline{v} = \underline{u}^* \mu \underline{v} = \mu \underline{u}^* \underline{v} = \mu (v \cdot u)$$

og

$$\underline{v}^* \underline{A} \underline{u} = \underline{v}^* \lambda \underline{u} = \lambda \underline{v}^* \underline{u} = \lambda (u \cdot v).$$

Altså er

$$\mu (v \cdot u) = \overline{\lambda (u \cdot v)} = \lambda (v \cdot u)$$

så da $\mu \neq \lambda$, fås $v \cdot u = 0$. □

Sætning I, 12, 14. Hvis $\underline{A}$ er normal, findes $\underline{S}$ unitær, så

$\underline{S}^* \underline{A} \underline{S} = \underline{\Lambda}$, hvor $\underline{\Lambda}$ er en kompleks diagonalmatrix. Altså er

$\underline{A} = \underline{S} \underline{\Lambda} \underline{S}^*$ og $\underline{A}^* = \underline{S} \underline{\Lambda}^* \underline{S}^*$. Derfor er

$$\underline{A} \underline{A}^* = \underline{S} \underline{\Lambda} \underline{S}^* \underline{S} \underline{\Lambda}^* \underline{S}^* = \underline{S} \underline{\Lambda} \underline{\Lambda}^* \underline{S}^* = \underline{S} \underline{\Lambda}^* \underline{\Lambda} \underline{S}^* = \underline{S} \underline{\Lambda}^* \underline{S}^* \underline{S} \underline{\Lambda} \underline{S}^* = \underline{A}^* \underline{A}.$$

Antag nu, at $\underline{A} \underline{A}^* = \underline{A}^* \underline{A}$.

Vi viser først, at $\underline{A}$ og $\underline{A}^*$ har samme egenvektorer hørende til konjugerede egenverdier. Regnestykket

$$\begin{aligned} \|\underline{A} \underline{u} - \lambda \underline{u}\|^2 &= (\underline{A} \underline{u} - \lambda \underline{u}) \cdot (\underline{A} \underline{u} - \lambda \underline{u}) = (\underline{u}^* \underline{A}^* - \bar{\lambda} \underline{u}^*) (\underline{A} \underline{u} - \lambda \underline{u}) \\ &= \underline{u}^* \underline{A}^* \underline{A} \underline{u} - \bar{\lambda} \underline{u}^* \underline{A} \underline{u} - \lambda \underline{u}^* \underline{A}^* \underline{u} + \bar{\lambda} \lambda \underline{u}^* \underline{u} \\ &= \underline{u}^* \underline{A} \underline{A}^* \underline{u} - \lambda \underline{u}^* \underline{A}^* \underline{u} - \bar{\lambda} \underline{u}^* \underline{A} \underline{u} + \lambda \bar{\lambda} \underline{u}^* \underline{u} \\ &= (\underline{u}^* \underline{A} - \lambda \underline{u}^*) (\underline{A}^* \underline{u} - \bar{\lambda} \underline{u}) \\ &= (\underline{A}^* \underline{u} - \bar{\lambda} \underline{u}) \cdot (\underline{A}^* \underline{u} - \bar{\lambda} \underline{u}) = \|\underline{A}^* \underline{u} - \bar{\lambda} \underline{u}\|^2 \end{aligned}$$

viser, at er λ egenverdi for $\underline{A}$, $\bar{\lambda}$: $\|\underline{A} \underline{u} - \lambda \underline{u}\| = 0$, så er $\bar{\lambda}$ egenverdi for $\underline{A}^*$ med samme egenrum.

Nu kan vi vise, at er $\lambda \neq \mu$ egenverdier for $\underline{A}$ med egenvektorer hhv. $\underline{u}$ og $\underline{v}$, så er $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$. Thi

$$\lambda \underline{u} \cdot \underline{v} = (\underline{A} \underline{u}) \cdot \underline{v} = \underline{v}^* \underline{A} \underline{u} = \overline{\underline{u}^* \underline{A}^* \underline{v}} = \overline{\underline{u}^* \mu \underline{v}} = \mu \underline{u} \cdot \underline{v}.$$

Altså er $(\lambda - \mu)(\underline{u} \cdot \underline{v}) = 0$, så da $\lambda \neq \mu$, må $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.

At der i alt findes n egenvektorer for $\underline{A}$ vises også her ved induktion efter n . Dette udelades. □

§13. Differential- og integralregning i flere reelle variable.

Sætning I, 13, 1. Lad $f(x, y)$ være en reel funktion og $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ kontinuerte. Vi skal vise, at f er differentiabel i et vilkårligt punkt. Vi kan skrive

$$f(x+dx, y+dy) - f(x, y) = f(x+dx, y+dy) - f(x+dx, y) + f(x+dx, y) - f(x, y) .$$

Middelværdisætningen i én variabel siger nu, at det er

$$= f_y(x+dx, y+\eta dy) dy + f_x(x+\xi dx, y) dx$$

hvor $0 \leq \xi, \eta \leq 1$. Da f_y og f_x er kontinuerte vil $\varepsilon(dx, dy) =$

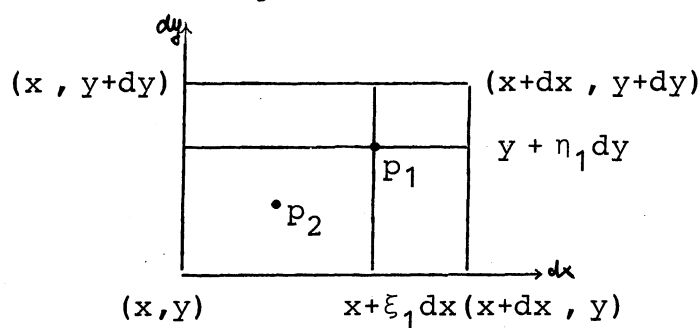
$$\left(f_x(x+\xi dx, y) - f_x(x, y), f_y(x+dx, y+\eta dy) - f_y(x, y) \right)$$

opfylde $\varepsilon(dx, dy) \rightarrow (0, 0)$ for $(dx, dy) \rightarrow (0, 0)$.

Altså får vi formen

$$= f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy + \varepsilon(dx, dy) \cdot (dx, dy) . \quad \square$$

Sætning I, 13, 3. I et rektangel



betragtes funktionen

$$f(x, y) - f(x, y+dy) - f(x+dx, y) + f(x+dx, y+dy) .$$

Middelværdisætningen siger, at det er

$$= (f_y(x, y+\eta_1 dy)) - f_y(x+dx, y+\eta_1 dy) dy$$

og igen,

$$= f_{yx}(x+\xi_1 dx, y+\eta_1 dy) dy dx .$$

Ombyttes rækkefølgen fås tilsvarende

$$= f_{xy}(x+\xi_2 dx, y+\eta_2 dy) dx dy .$$

Altså, i rektanglet findes to (forskellige) punkter

$$p_1 = (x+\xi_1 dx, y+\eta_1 dy) \quad \text{og} \quad p_2 = (x+\xi_2 dx, y+\eta_2 dy) , \quad \text{så}$$

$$f_{yx}(p_1) = f_{xy}(p_2) .$$

Lad nu $(dx, dy) \rightarrow (0, 0)$; så vil, når f_{xy} og f_{yx} er kontinuerlige, deres fælles værdi gå mod såvel

$$f_{yx}(x, y) \quad \text{som} \quad f_{xy}(x, y) .$$

□

Sætning I, 13, 6. Vi betragter funktionen

$$g(\xi) = f(x+\xi dx)$$

for fast x og dx . Taylors formel for g siger, at

$$g(\theta) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} g^{(m)}(0) + \frac{1}{k!} g^{(k)}(\theta) ,$$

hvor $0 < \theta < 1$.

Nu følger af Sætning I, 13, 9, at

$$g'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi) dx_n$$

$$g''(\xi) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) dx_i dx_j$$

etc. Sættes $\xi = 0$, fås

$$g'(0) = df(x, dx)$$

$$g''(0) = d^2 f(x, dx) .$$

□

Sætning I, 13, 7. At $\nabla f(x) = 0$ er oplagt. Antag f har maksimum i x , og at $\underline{H}_f$ har en positiv egenværdi. Ved koordinatskift fås af Taylors formel

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{1}{2} \lambda_1 dx_1^2 + \dots + \varepsilon(dx) \|dx\|^2$$

hvor $\lambda_1 > 0$. Sættes $dx = (dx_1, 0, \dots, 0)$, står der

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{1}{2} \lambda_1 dx_1^2 + \varepsilon(dx) (dx_1)^2$$

hvis vi ser på $|dx_1| < \delta$, så er $|\varepsilon(dx)| < \frac{1}{4} \lambda_1$. Derfor er $f(x+dx) \geq f(x) + \frac{1}{4} \lambda_1 dx_1^2 > f(x)$ for $dx_1 \neq 0$. Altså er x ikke et maksimum.

Sætning I, 13, 8. Antag $\underline{H}_f(x)$ har luttet negative egenværdier. Efter koordinatskift til egenvektorerne for $\underline{H}_f(x)$ som basis, får Taylors formel udseendet:

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{1}{2} (\lambda_1 dx_1^2 + \dots + \lambda_n dx_n^2) + \varepsilon(dx) \|dx\|^2,$$

hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alle er negative. For $\|dx\| < \delta$ er $|\varepsilon(dx)| < \frac{1}{4} \min_{i=1, \dots, n} (-\lambda_i)$. Der er

$$f(x+dx) \leq f(x) + \frac{1}{4} (\lambda_1 dx_1^2 + \dots + \lambda_n dx_n^2) \leq f(x).$$

Altså har f maksimum i x . □

Sætning I, 13, 9. Vi har

$$\underline{f}(x+dx) = \underline{f}(x) + \underline{D}f(x) \underline{dx} + \underline{\varepsilon}_1(dx) \|dx\|$$

$$\underline{g}(y+dy) = \underline{g}(y) + \underline{D}g(y) \underline{dy} + \underline{\varepsilon}_2(dy) \|dy\|.$$

Nu er

$$\begin{aligned}
\underline{g} \circ f(x+dx) &= \underline{g}(\underline{f}(x+dx)) = \underline{g}(\underline{f}(x) + \underline{Df}(x)\underline{dx} + \underline{\varepsilon}_1(dx)\|dx\|) \\
&= \underline{g}(\underline{f}(x)) + \underline{Dg}(f(x)) (\underline{Df}(x)\underline{dx} + \underline{\varepsilon}_1(dx)\|dx\|) \\
&\quad + \varepsilon_2(\underline{Df}(x)\underline{dx} + \underline{\varepsilon}_1(dx)\|dx\|) \| \dots \| \\
&= \underline{g} \circ f(x) + \underline{Dg}(f(x))\underline{Df}(x)\underline{dx} + \varepsilon(dx)\|dx\| ,
\end{aligned}$$

hvor $\varepsilon(dx) = \underline{Dg}(f(x)) \underline{\varepsilon}_1(dx) + \varepsilon_2(\underline{Df}(x)\underline{dx} + \underline{\varepsilon}_1(dx)\|dx\|) \cdot$

$$\left\| \frac{\underline{Df}(x) \cdot \underline{dx}}{\|dx\|} + \underline{\varepsilon}_1(dx) \right\| ,$$

som opfylder $\varepsilon(dx) \rightarrow 0$ for $dx \rightarrow 0$, fordi

$$\left\| \frac{\underline{Df}(x) \cdot \underline{dx}}{\|dx\|} \right\| \text{ er begrænset.}$$

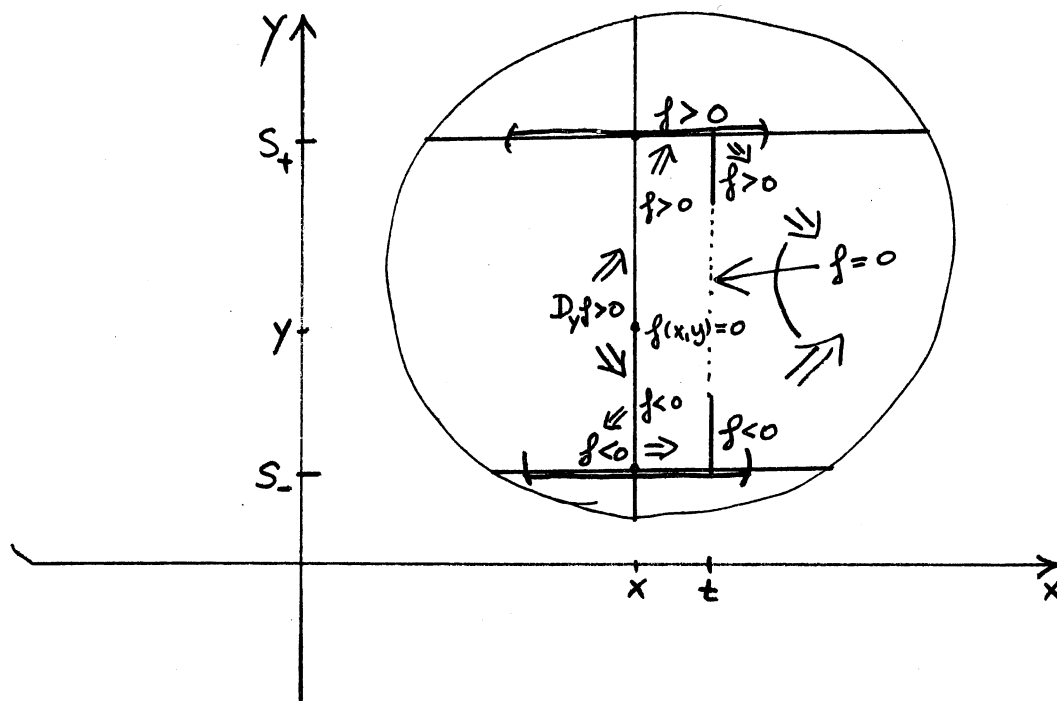
Sætning I,13,10. Da *det* er kontinuert, vil der findes en omegn om (x,y) , hvor $\det \underline{D_y}f \neq 0$, altså hvor $\underline{D_y}f$ er regulær.

Vi skal vise, at i denne omegn er der for hvert x højst ét y , så $f(x,y) = 0$. Lad derfor y^1 og y^2 være valgt, så $f(x,y^1) = f(x,y^2) = 0$. Ifølge middelværdisætningen findes θ_i mellem y_i^1 og y_i^2 , så $\sum_{i=1}^p \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(x, \theta_i)(y_i^2 - y_i^1) = 0$. Eller bedre:

$$\underline{D_y}f(x, \theta)(\underline{y}^2 - \underline{y}^1) = 0 .$$

Da $\underline{D_y}f$ er regulær i (x, θ) , må $\underline{y}^2 - \underline{y}^1 = 0$.

At vi kan vælge omegnen så lille, at der til hvert x findes et y , vises ved induktion efter p . For $p = 1$ er f.eks. $D_y f(x,y) > 0$. Da $f(x,y) = 0$, er $f(x,s)$ negativ for $s < y$ og positiv for $s > y$. For fast s gælder det samme i omegnen:



Men så er $f(t, s^-) < 0$ og $f(t, s^+) > 0$. Altså findes y , $s^- < y < s^+$, hvor $f(t, y) = 0$.

Herved er $y = g(x)$, så $f(x, g(x)) = 0$. Altså er $f(x, y) = 0$ og $f(x+dx, g(x+dx)) = 0$. Nu er $g(x+dx) = y + \Delta g$, hvor $\Delta g = g(x+dx) - g(x)$. Middelværdisætningen giver nu (som ovenfor), at der findes ξ, η , så

$$0 = \underline{D}_x f(\xi, \eta) \cdot \underline{dx} + D_y f(\xi, \eta) \Delta g$$

hvorfor

$$\begin{aligned} \Delta g &= -D_y f(\xi, \eta)^{-1} \underline{D}_x f(\xi, \eta) \underline{dx} \\ &= -D_y f(x, y)^{-1} \underline{D}_x f(x, y) \underline{dx} + \varepsilon(dx) \|dx\|, \end{aligned}$$

da $D_y f$ og $\underline{D}_x f$ er kontinuerte og $D_y f(\xi, \eta) \neq 0$.

Induktionsskridtet fra $p-1$ til p går således. Vi kan antage, at

$$f_1, f: (x, y_1, y) \rightarrow \mathbb{R}^p$$

så

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \neq 0 \quad \text{og} \quad \underline{D}f_y \text{ regulær.}$$

Vi har altså $y_1 = \varphi(x, y)$ C^1 -funktion, så

$$\underline{D}_Y \varphi = - \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right)^{-1} \underline{D}_Y f_1 .$$

Nu betragtes

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, \varphi(x, y), y) .$$

Da er

$$\underline{D}_Y \tilde{f} = \underline{D}_Y f + \underline{D}_{Y_1} f \cdot \underline{D}_Y \varphi = \underline{D}_Y f - \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right)^{-1} \underline{D}_{Y_1} f \underline{D}_Y f_1 .$$

Det er en søjle-række operation på matricen

$$\underline{D}_{Y_1, Y} (f_1, f) ,$$

$$\text{hvorfor } \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \det \underline{D}_Y \tilde{f} = \det \underline{D}_{Y_1, Y} (f_1, f) \neq 0 .$$

Men så findes en C^1 -funktion $y = \psi(x)$, så

$$f(x, \varphi(x, \psi(x)), \psi(x)) = 0$$

funktionen

$$x \rightarrow (\varphi(x, \psi(x)), \psi(x)) \text{ løser problemet. } \square$$

Sætning I, 13, 11. Vi anvender Sætning I, 13, 10 på funktionen

$$F(x, y) = y - f(x) .$$

Da $\underline{D}_x f \neq 0$ findes $g(y)$, så $x = g(y)$ tilfredsstiller

$$F(g(y), y) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$y - f(g(y)) = 0 . \quad \square$$

Sætning I, 13, 12. Antag, at $f_0(x_0) = a$ og $f(x_0) = c$ og

$$\text{rang } \underline{D}_x (f_0, f)(x_0) = p + 1 .$$

Da kan vi udvælge $p + 1$ af x 'erne, så for de øvrige fastholdt,

$$\underline{D}_x^\wedge (f_0, f)(x_0)$$

er $(p+1) \times (p+1)$ og regulær. Så har (f_0, f) en invers ifølge Sætning I, 13, 11. Altså er billedet af en omegn åben i $\mathbb{R}^{p+2}$. Da billedet indeholder

(a,c)

vil det indeholde punkter såvel (s,c) som (t,c) , hvor $s > a > t$.
□

Sætning I,13,13. Følger af, at $|J\phi(y)|$ udtrykker volumenforholdet.
□

KAPITEL VII

ØVELSER

*En Elev, af hvem man aldrig forlanger
Noget, som han ikke kan gøre, gør aldrig
det, som han kan gøre!*

John Stuart Mill.

§1. Vektorregning i planen og komplekse tal.

1. Givet tre vektorer i planen,

$$v = (13, 2), v_1 = (1, 2), v_2 = (-1, 2).$$

- a) Udtryk
- v
- som linearkombinationen af
- v_1
- og
- v_2
- . Dvs. bestem reelle tal
- λ_1
- og
- λ_2
- , så

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2.$$

- b) Bestem vinklen mellem v og v_2 .
- c) Bestem arealet af det af v_1 og v_2 udspændte parallelogram.
- d) Bestem de komplekse produkter

$$v_1 v_2, v v_1 \text{ og } v v_2.$$

- e) Bestem længden af vektorerne v , v_1 og v_2 .
- f) Bestem vinklen mellem ℓ og v .
- g) Bestem en ligning for linien

$$\{v + \lambda v_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- h) Udtryk de komplekse kvotienter $\frac{v_1}{v}$ og $\frac{v_2}{v}$ på formen (a, b) eller $a + ib$.
- i) Bestem punktmængden af komplekse tal

$$\{z \mid z v_2 - \bar{z} \bar{v}_2 = 48i\}.$$

- j) Bestem tangenterne til cirklen

$$\{z \mid |z| = 2\}$$

gennem punktet $v = (13, 2)$.

- k) Bestem skæringspunktet mellem linien fra (g) og linien $\{\lambda v_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. Bestem punktmængden af komplekse tal

$$\left\{ z \mid \frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} = 0 \right\} .$$

3. Vis formelen for komplekse tal z_1 og z_2 :

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 .$$

Giv en geometrisk fortolkning.

4. Beskriv punktmængden af komplekse tal

$$\{ z \mid |z+1| = 2|z| \} .$$

5. Vis, at højderne i en trekant skærer hinanden i et og samme punkt.

§2. Vektorregning i rummet.

1. Bevis Corollar I.2.8 ved hjælp af Corollar I.2.6, samt regnereglerne side I.2.5.

2. Givet fire vektorer

$$n = (-1, 8, 4), v = (2, -3, 6), n_1 = (3, -2, 6),$$

$$v_1 = (4, 8, -1).$$

a) Bestem afstanden mellem linierne

$$\ell = \{n + \lambda n_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

og $m = \{v + \lambda v_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$

b) Bestem vinklen mellem linierne ℓ og m .

c) Bestem længden af vektorerne n, v, n_1 og v_1 .

d) Bestem skæringslinien mellem planerne

$$\pi = \{\lambda n + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$\rho = \{\lambda n_1 + \mu v_1 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

e) Angiv en ligning for hver af planerne π og ρ .

f) Bestem skæringspunktet for planen

$$\pi_1 = \{n + \lambda n_1 + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

og linien m .

g) Bestem vinklen mellem planerne π og ρ .

h) Bestem vinklen mellem planen π_1 og linien m .

i) Bestem rumfanget af det af n, v og v_1 udspændte parallel-epipedum.

j) Bestem skæringspunktet mellem π, ρ og π_1 .

3. Givet tre vektorer

$$a = (4, 7, 4), b = (1, 4, -8), c = (-8, 4, 1).$$

Vis, at disse tre vektorer er parvis vinkelrette på hinanden.

Vis, at $e_1 = \frac{a}{|a|}$, $e_2 = \frac{b}{|b|}$, $e_3 = \frac{c}{|c|}$ er en højreorienteret basis for rummet.

Bestem koordinaterne til $(5, -1, 3)$ med hensyn til basen (e_1, e_2, e_3) .

4. Givet punkterne

$$A = (1, 1, 1), B = (4, 5, 3), C = (-1, -10, -1), D = (8, 2, 2).$$

Linierne ℓ og m er bestemt ved, at ℓ går gennem A og B , og at m går gennem C og D .

Bestem afstanden fra ℓ til m .

Angiv en ligning for planen gennem $0 = (0, 0, 0)$ parallel med såvel ℓ som m .

5. Givet punktet $A = (-1, 6, 0)$ og planerne

$$\pi = \{(x, y, z) \mid 8x - y + 4z = 0\}$$

$$\rho = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y + 6z = 0\}.$$

Angiv ligningen for en plan gennem A , der er vinkelret på såvel π som ρ .

6. Givet punkterne $A = (3, 1, 0)$, $B = (1, \frac{1}{2}, 1)$, $C = (-1, 1, 4)$.

For hvilke værdier af $a \in \mathbb{R}$ vil punktet

$$P_a = (2a, a^2, a^3)$$

ligge i planen gennem A , B og C ?

7. Givet punkterne $A = (0,0,0)$, $B = (-1,-2,2)$, $C = (1,-3,4)$.
Bestem vinklerne i ΔABC .

8. Givet tre vektorer $a = (2,0,0)$, $b = (0,-1,0)$ og $c = (1,2,3)$.
a) Bestem en vektor $v \neq 0$, så $v \cdot a = v \cdot b = 0$.
b) Udtryk c som linearkombination af a, b og v .
c) Find afstanden fra punktet $C = (1,2,3)$ til planen π gennem $O = (0,0,0)$ udspændt af a og b .
d) Find projektionen af punktet C på planen π .

9. Bestem typen af keglesnittet

$$\{(x,y) \mid xy = 1\}.$$

10. Bestem punktmængderne i den (komplekse) plan

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + \bar{z}^2 = 2\},$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 - \bar{z}^2 = 2i\},$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 - \bar{z}^2 = 2\},$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 - \bar{z}^2 = 0\}.$$

11. Vis, at keglesnittet

$$\{(x,y) \mid 7x^2 + 3y^2 - 4xy + 5x - 4y = 0\}$$

er en ellipse, og bestem største og mindste diameter.

12. (Eksamen 1984). I $\mathbb{R}^3$ er der givet tre punkter med koordinaterne

$$A = (8,4,-1), \quad B = (-1,5,3), \quad C = (6,0,5).$$

Bestem en ligning for planen π gennem de tre punkter.

Beregn volumenet af tetraædret T udspændt af $O = (0,0,0)$ og de tre punkter A, B og C .

13. (Eksamen 1985). I rummet er givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Desuden er der givet tre vektorer med koordinater hhv.

$$a = (5, -4, 2) , \quad u = (1, -2, 1) , \quad v = (2, -1, -1) .$$

Bestem koordinaterne til den retvinklede projektion af $(0, 0, 0)$ på planen

$$\{a + su + tv \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\} .$$

14. (Eksamen 1985). I rummet er givet et sædvanligt koordinatsystem. Desuden er der givet to planer og en linie som hhv.

$$\pi = \{(x, y, z) \mid 4x - 3y - z = 0\}$$

$$\rho = \{(x, y, z) \mid 3y + z = 8\}$$

$$\ell = \{(1, 9, 7) + t(2, -1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} .$$

Bestem afstanden fra linien ℓ til skæringslinien mellem planerne π og ρ .

15. (Eksamen 1985). Givet en plan π og et punkt P ved

$$\pi = \{(x, y, z) \mid 6x + 3y + 2z = 14\}$$

$$P = (-14, 56, -28) .$$

Bestem afstanden fra P til π .

§3. Polynomier og rationale funktioner.

1. Givet et polynomium

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 6 .$$

Skriv polynomiet som et produkt af førstegradspolynomier.

2. Givet polynomiet

$$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 .$$

Find samtlige rødder.

3. Givet følgende tabel:

n	0	1	2
x_n	1	i	-i
y_n	0	1+i	1-i

Bestem det polynomium af højst 2. grad, som antager værdierne y_n i punkterne x_n , $n = 0, 1, 2$.

4. Givet den rationale funktion

$$\frac{3x^2 - 10x + 9}{x^3 - 5x^2 + 9x - 6} .$$

Spalt funktionen i en sum af stambrøker.

5. Skriv på sædvanlig form polynomiet

$$(1+x)^7 .$$

6. Vis, at for alle
- $n \geq 1$
- gælder for alle
- $m \leq n$

$$\binom{n}{m} \leq 2^n .$$

7. Vis, at for alle
- $m \in \mathbb{N}$
- gælder

$$\binom{2m}{m} \geq \frac{2^{2m}}{2m+1} \quad \text{og} \quad \binom{2m-1}{m} \geq \frac{2^{2m-1}}{2m} .$$

8. (Eksamen 1984). Løs ligningen for $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 + (6+8i)z - 7 = 0.$$

9. (Eksamen 1985). Løs ligningen for $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 - iz - 1 + i = 0.$$

§4. Følger og rækker.

1. Bestem det reelle tal, givet ved decimalbrøken

$$0.7121212 \dots$$

med periode 2.

2. Givet et reelt tal som decimalbrøk

$$a = 0.d_1d_2d_3 \dots$$

Vis, at $a \leq 1$.

3. Lad
- $x \geq 0$
- og
- $y = f(x) = \sqrt{2+x}$
- en funktion.

Vis, at f er en kontraktion.

Find grænseværdien for følgen

$$a_0 = 0$$

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

4. Bevis, at
- $(\sqrt[n]{n}) \rightarrow 1$
- for
- $n \rightarrow \infty$
- .

5. Givet rækken

$$\sum (\sqrt[n]{n} - 1)^n.$$

Er denne række konvergent?

6. Vis, at for
- $0 < p < n$
- gælder

$$\sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} \prod_{r=0}^{k-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right) < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Slut heraf, at talfølgen $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ er konvergent.

$$\left(\prod_{r=0}^k \left(1 - \frac{r}{n}\right) = (1-0)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{n}\right) \right)$$

7. Find grænseværdien for talfølgen (a_n) , hvor

$$a_n = \frac{n^2}{2n^2 - 1} - \frac{n^2}{2^n(2n^2 + 1)}.$$

8. Vis, at talfølgen (a_n) er divergent, hvor

$$a_n = \frac{2n^2 - 4n + 3}{3n}.$$

9. Find grænseværdien af brøken for $n \rightarrow \infty$

$$\frac{3\sqrt{n} + 1}{4\sqrt{n} - 5}.$$

10. Bestem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n + 1}{7n^2 - 2n + 5}.$$

11. Vis, at rækken er konvergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-n}.$$

§5. Kontinuitet.

1. En delmængde af $\mathbb{R}^2$ er defineret ved

$$D = \{(x,y) \mid a_1 \leq x \leq a_2 \wedge b_1 < y < b_2\}.$$

Bestem det indre af D , afslutningen af D , randen af D , og hvorvidt D er åben eller afsluttet.

2. Er mængden $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ kompakt?
3. Er mængden $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ kompakt?
4. Vis Sætning I,5,12.
5. Vis Sætning I,5,13.
6. Givet en funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Vis, at f er kontinuert på enhver ret linie.

Vis, at f ikke er kontinuert i $(0,0)$.

7. Givet en funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, hvor $M \subseteq \mathbb{R}^m$.
Vis, at hvis f er kontinuert i et punkt $a \in M$, så er funktionen $|f|: M \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved

$$|f(x)| = \sqrt{f(x) \cdot f(x)} \quad \text{for } x \in M$$

kontinuert i a .

8. En funktion defineres ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Undersøg, om f er kontinuert i $(0,0)$.

9. For hvert $n \in \mathbb{N}$ defineres en funktion

$$f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

ved:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x & \text{for } \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

- Tegn $f_n(x)$ for $n = 1, 2, 3$.
- Vis, at f_n er kontinuert for ethvert n .
- Vis, at funktionsfølgen (f_n) er punktvis konvergent med 0-funktionen.
- Vis, at arealet af figurerne

$$F_n = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq f_n(x)\}$$

er det samme for alle værdier af n .

10. (Eksamen 1985). Givet en funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ defineret ved

$$f(z) = \begin{cases} \frac{3+i-(2-i)z}{2i-(1+i)z} - \frac{i}{2}z & \text{for } z \neq 1+i \\ 0 & \text{for } z = 1+i \end{cases}$$

- Undersøg, om f er kontinuert overalt i $\mathbb{C}$.
- Bestem nulpunkterne for f , altså $\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$.

§6. Differential- og integralregning i én reel variabel.

1. Differentier funktionen

$$f(x) = \frac{3x^2 - 10x + 9}{x^3 - 5x^2 + 9x - 6} .$$

2. Find en stamfunktion til funktionen
- $f(x)$
- fra opgave 1.

3. Lad
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- være en overalt positiv og kontinuert differentiable funktion. Find en stamfunktion til

$$\frac{f'(x)}{f(x)} .$$

4. Find for
- $x > 0$

$$\int \ln x \, dx .$$

5. Find Taylorrækken for
- $|x| < 1$
- for funktionen

$$\frac{1}{1+x^2} .$$

6. Find Taylorrækken for funktionen
- $\operatorname{arctg} x$
- og vis, at den er konvergent for
- $|x| < 1$
- . (Evt.
- $|x| \leq 1$
-).

7. Find Taylorrækkerne for funktionerne

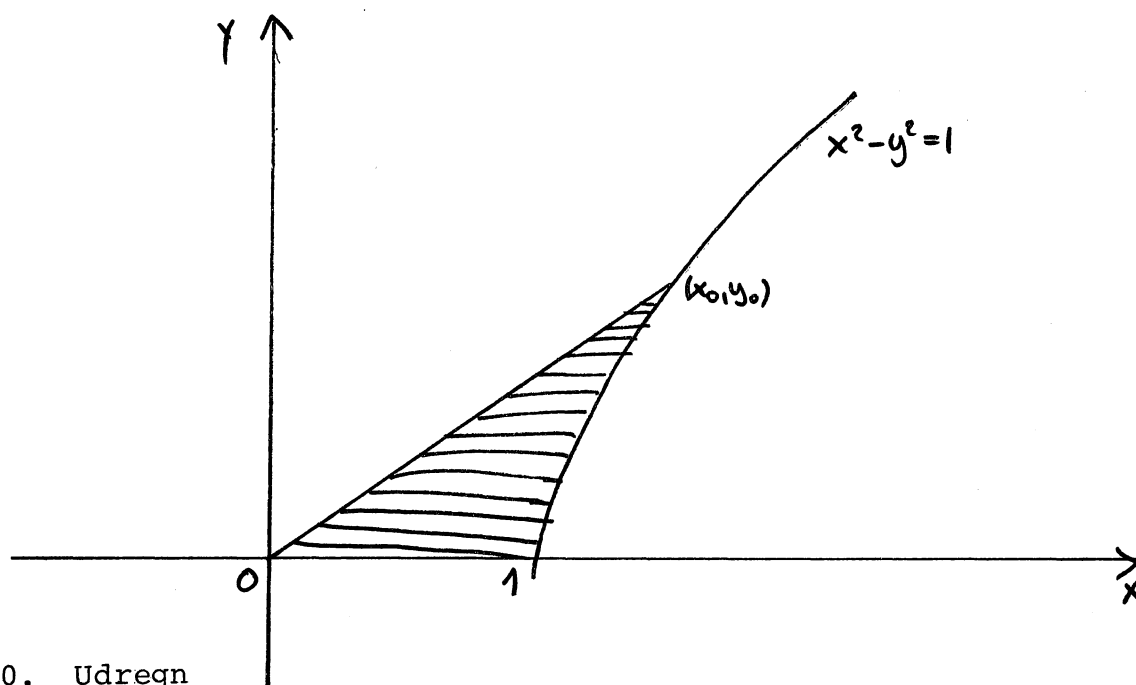
$$\cosh x \quad \text{og} \quad \sinh x .$$

8. Find Taylorrækken for funktionen
- $\operatorname{artgh} x$
- .

9. Bestem arealet af figuren

$$\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq y_0 \wedge \frac{x_0}{y_0} y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}$$

$$\text{idet } x_0^2 - y_0^2 = 1 \quad \text{og} \quad 0 < y_0, \quad 1 < x_0 .$$



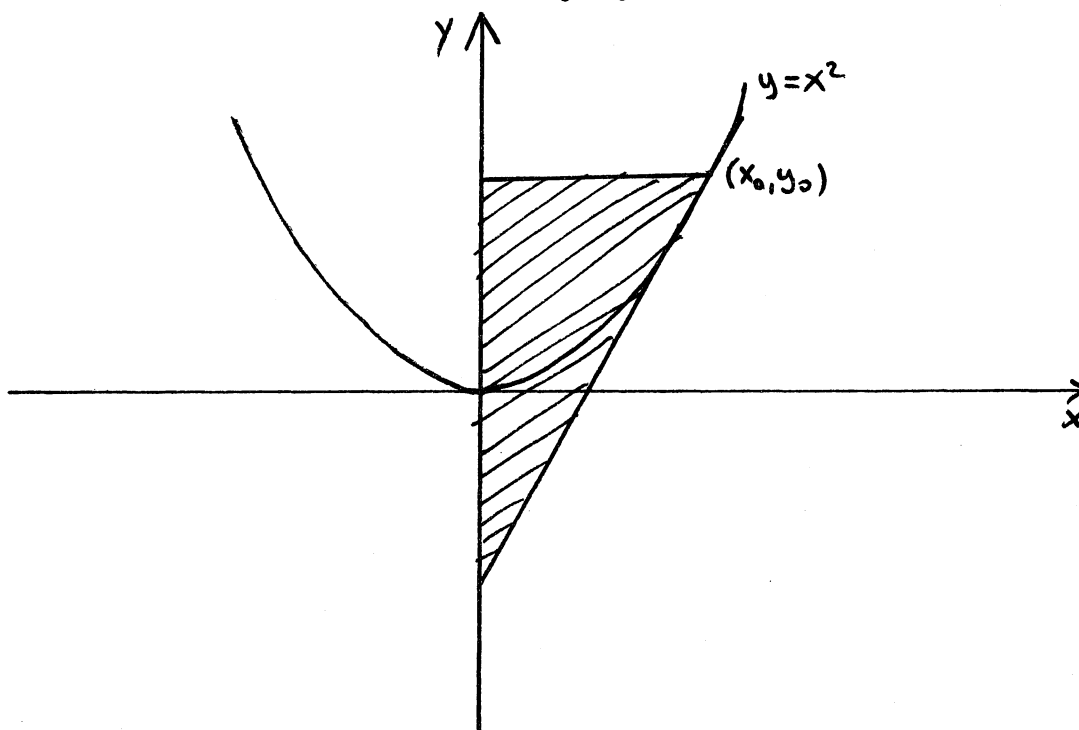
10. Udregn

$$(1+x)^6$$

ved hjælp af Taylors formel.

11. Givet en ellipse med ligningen $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ og et punkt (x_0, y_0) på denne. Bestem tangenten til ellipsen i punktet (x_0, y_0) .

12. Givet parablen med ligning $y = x^2$. Lad (x_0, y_0) være et punkt på parablen. Bestem arealet af trekanten, der afgrænses af y-aksen, tangenten i (x_0, y_0) og linien $y = y_0$.



13. Undersøg, om følgende grænseværdier findes og i bekræftende fald størrelsen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x}$$

14. Bestem

$$\sum_{v=1}^n vx^v .$$

Vink. Divider med x og integrer kvotienten.

15. Undersøg grænseværdien i udtrykket fra opgave 14 for $x \rightarrow 1$.
Vis derved formelen

$$\sum_{v=1}^n v = \frac{n(n+1)}{2}$$

16. Vis at funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

er differentiabel for alle x .

Vis, at f' ikke er kontinuert i 0 .

17. Find stamfunktioner til

$$\frac{1}{\sin x} \quad \text{og} \quad \frac{1}{\sin^2 x} .$$

18. Find en stamfunktion til

$$\arcsin x .$$

19. Undersøg, for hvilke $x \in \mathbb{R}$ funktionen

$$\arcsin(\sin x)$$

er differentiabel.

20. Undersøg om funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = \cosh x + \cos x - \frac{1}{12}x^4$$

har minimum for $x = 0$.

21. (Eksamen 1984). En funktion $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 - \cos x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Undersøg, om f er kontinuert i 0 .

22. (Eksamen 1985). Givet en funktion $f:]0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = \frac{1 - \cos(\sin x)}{\operatorname{tg}^2 x} .$$

Undersøg, om funktionen har en grænseværdi i 0, og bestem i bekræftende fald denne grænseværdi.

23. (Eksamen 1985). Bestem

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(\cosh x)}{\sin^2 x} .$$

24. Bestem for
- $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x)}{\ln x} .$$

25. Udregn

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx .$$

26. Udregn

$$\int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x)^2 \, dx .$$

27. Udregn

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx .$$

28. Bestem en tilnærmelse til buelængden af en sinussvingning, $\{(x, \sin x) \mid 0 \leq x \leq \pi\}$, ved hjælp af Keplers tønderregel, (side IV,6,5).

29. Løs ligningen for
- $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = 2 .$$

§7. Differentialligninger af første orden.

1. Løs differentialligningerne

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 17y + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 + 2}{6y}$$

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

2. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

3. Løs differentialligningerne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{1+x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2}.$$

4. Løs differentialligningerne

$$\frac{dy}{dx} = e^{-2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^y.$$

5. Antag $y = \varphi(x)$ tilfredsstiller ligningen

$$y^2 - x^3y - 1 = 0.$$

Angiv en differentialligning $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, som φ må løse.

6. Løs differentialligningerne

$$(D^1 - \frac{\cos x}{1 + \sin x} D^0) \varphi = \cos x$$

$$(D^1 + \frac{1}{x} D^0) \varphi = -2x^2 .$$

7. Løs differentialligningen

$$(D^1 + \cos x D^0) \varphi = \sin x \cos x .$$

8. Løs differentialligningerne

$$(D^2 + D^1 - 56D^0) \varphi = 0$$

$$(D^2 + 2D^1 + D^0) \varphi = 0$$

$$(D^2 + 4D^1 + 5D^0) \varphi = 0 .$$

9. Løs differentialligningen

$$(D^2 - (2+2i)D^1 + 2i D^0) \varphi = 0 .$$

Har ligningen reelle løsninger?

10. Løs differentialligningen

$$(D^2 + D^0) \varphi = \sin(wx)$$

hvor w er en konstant.

11. Løs differentialligningen

$$(x^2 D^2 - 5x D^1 + 9D^0) \varphi = 0 .$$

Vink. Gæt på $\varphi(x) = x^\alpha$.

12. Løs differentialligningen

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^3} .$$

13. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -e^x y^2$$

14. Løs differentialligningerne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{xy-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x+1} .$$

15. Løs differentialligningerne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{16x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} .$$

16. (Eksamen 1984). Bestem løsningsmængden til differentialligningen

$$(D^2 + 7D^1 + 12D^0)\varphi = 170 \sin x .$$

17. (Eksamen 1985). Bestem løsningsmængden til differentialligningen

$$(D^2 - 4D^1 + 4D^0)\varphi = 6xe^{2x} .$$

18. (Eksamen 1985). Løs differentialligningen for $x > 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 3y^2}{x^2}$$

på formen $y = \varphi(x)$, og bestem den løsning, for hvilken

$$\varphi(1) = 1 .$$

Vink. Indfør funktionen $z = \frac{y}{x}$, $\varphi: \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ og betragt ligningen i $z = \psi(x)$ og x .

19. (Eksamen 1985). Løs differentialligningen

$$(D^2 - (2\operatorname{tgh}x)D^1 + D^0)\varphi = 0 .$$

20. (Eksamen 1985). Løs differentialligningen for $y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2(y^2+1)}{y}.$$

21. (Eksamen 1984). Løs differentialligningen for $x > 0$ og $y \geq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2 + x}.$$

22. Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, der opfylder, at

$$f(y) > 0 \quad \text{for alle } y \in \mathbb{R},$$

$$f(y) \rightarrow 0 \quad \text{for } y \rightarrow \infty.$$

Vis, at for to vilkårlige løsninger φ og ψ til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

gælder, at $\varphi(x) \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow \infty$ samt, at

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \rightarrow 0 \quad \text{for } x \rightarrow \infty.$$

Vink. Af Sætning I,7,2 og Sætning I,7,3 følger, at der findes en konstant $c \in \mathbb{R}$, så

$$\psi(x) = \varphi(x+c).$$

Man kan så benytte Sætning I,6,5.

23. Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, der opfylder, at

$$f(y) > 0 \quad \text{for alle } y \in \mathbb{R},$$

$$\frac{f(y)}{y} \rightarrow 0 \quad \text{for } y \rightarrow \infty \quad (y > 0).$$

Vis, at for to vilkårlige løsninger φ og ψ til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

gælder, at for $\psi(x) > 0$ gælder

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \rightarrow 1 \quad \text{for } x \rightarrow \infty.$$

Vink. Se først på $|\psi(x) - \varphi(x)|$ som i opgave 22.

24. Brug opgave 23 på $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \quad (y > 0).$

§8. Integraler i $\mathbb{R}^n$.

1. Lad R være rektanglet

$$R = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 5 \wedge 0 \leq y \leq 2\} ,$$

og lad $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ være defineret som

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 4x - 5}{y^2 + 2y + 2} .$$

Udregn

$$\int_R f(x,y) dx dy .$$

2. Lad B være kvadratet

$$B = \{(x,y) \mid 0 \leq x,y \leq 1\} .$$

Udregn

$$\int_B \frac{x}{1+xy} dx dy .$$

3. Lad B være kvadratet

$$B = \{(x,y) \mid -1 \leq x,y \leq 1\} .$$

Udregn

$$\int_B (e^{x+y} + \cos \frac{\pi}{2} x + \sin \frac{\pi}{2} y + x^2 + y^2) dx dy .$$

4. Lad B være rektanglet

$$B = \{(x,y) \mid -\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} \wedge -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\} .$$

Udregn

$$\int_B \cos(x+y) dx dy .$$

5. Vis formelen for $a > 0$ og f integrabel

$$\int_0^a \int_0^x f(x,y) dy dx = \int_0^a \int_y^a f(x,y) dx dy .$$

6. Lad B være kvadratet

$$B = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq \pi\}.$$

Udregn

$$\int_B |\cos(x, y)| dx dy.$$

7. Lad B og D være hhv.

$$B = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 2 \wedge xy \geq 2\}$$

$$D = \{(x, y) \mid x, y \geq 1 \wedge xy \leq 2\}.$$

Udregn

$$\int_B \frac{1}{xy} dx dy \quad \text{og} \quad \int_D \frac{1}{xy} dx dy.$$

8. Lad B være mængden af punkter i 1. kvadrant, der er afgrænset af kurverne $y = x^2$ og $x = y^4$.

Udregn

$$\int_B (\sqrt{x} - y^2) dx dy.$$

9. Vis formlerne for Γ -funktioner (se Kap. IV, §8)

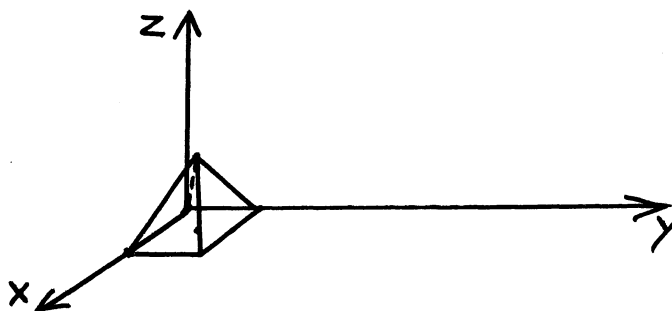
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

10. Beregn arealet af en ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

11. Beregn rumfanget af en pyramide:

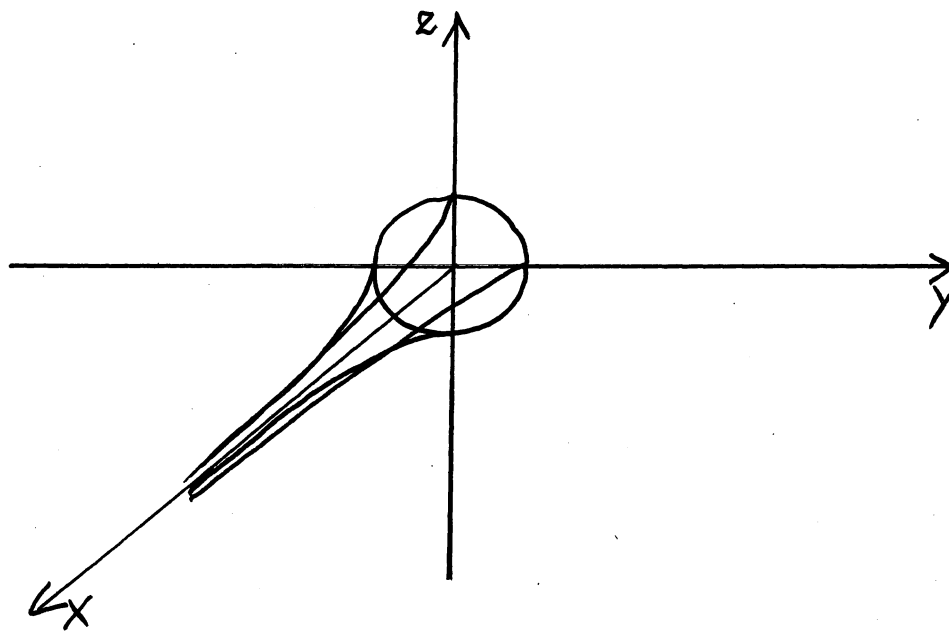


$$\{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq \min\{2x, 2y, 2(x-1), 2(y-1)\}\}.$$

12. En uendelig trompet er givet som

$$T = \left\{ (x, y, z) \mid x \geq 0 \wedge y^2 + z^2 \leq \left(\frac{1}{1+x} \right)^2 \right\}.$$

Bestem rumfanget af T .



§9. Vektorrum og lineære funktioner.

1. Vi kan definere

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \wedge u_2 \in U_2\}.$$

Vis, at $U_1 + U_2 = V(U_1 \cup U_2)$.

2. Lad e_1, e_2, e_3 være en basis for $\mathbb{R}^3$. Bestem de værdier af $a \in \mathbb{R}$, for hvilke den ved

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & a \\ 1 & a & 1 \\ -1 & -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

givne funktion $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er bijektiv, og bestem i disse tilfælde den inverse matrix.

3. Bestem den inverse matrix til

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

og løs derved ligningssystemet

$$\underline{\underline{B}} \underline{\underline{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Udregn matrixprodukterne $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}$ og $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$, hvor

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ og } \underline{\underline{B}} = (b_1 \dots b_n).$$

5. Ved

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, -x_1, x_1 + x_2)$$

defineres en lineær funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 .$$

Bestem billede og kerne.

Løs ligningssystemet

$$2x_1 + x_2 = b_1$$

$$-x_1 = b_2$$

$$x_1 + x_2 = b_3$$

for de sæt (b_1, b_2, b_3) , for hvilket systemet har løsninger.

6. En lineær funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

defineres ved

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3 , x_1 + x_3) .$$

Bestem billede og kerne.

Løs ligningssystemet

$$2x_1 - x_2 + x_3 = b_1$$

$$x_1 + x_3 = b_2$$

for et vilkårligt punkt $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$.

7. For hvilke $t \in \mathbb{R}$ er følgende sæt lineært afhængige

$$(1, t) , (t, 1) \quad \text{i } \mathbb{R}^2$$

$$(1, t, 0) , (t, 0, 1) , (0, 1, t) \quad \text{i } \mathbb{R}^3$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{||} \quad \text{i } \mathbb{C}^3 .$$

8. Lad e_1 og e_2 være to ulige lange vektorer i planen, så de danner en spids vinkel.

Beskriv de lineære funktioner, der defineres ved

$$\text{a) } f(e_1) = e_1 , \quad f(e_2) = -e_2 .$$

$$\text{b) } f(e_1) = e_2 , \quad f(e_2) = e_1 .$$

$$c) \quad f(e_1) = e_1 - e_2, \quad f(e_2) = e_2 - e_1.$$

Bestem billede og kerne.

9. (Eksamen 1984). Betragt matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestem $\underline{\underline{A}}^{-1}$.

10. (Eksamen 1983). Bestem den inverse til matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lad nu (e_1, e_2, e_3) og $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ være baser for et 3-dimensionalt vektorrum V , således at

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ \hat{e}_2 &= -e_1 + 2e_3 \\ \hat{e}_3 &= e_2 + 2e_3. \end{aligned}$$

En vektor $v \in V$ har koordinaterne $(-2, 20, 51)$ i basen (e_1, e_2, e_3) . Bestem v 's koordinater i basen $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$.

11. (Eksamen 1983). Bestem de værdier af a for hvilke ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + \quad + ax_3 &= 1 \\ ax_1 + 2x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

har netop én løsning. Løs ligningssystemet for disse værdier af a .

12. (Eksamen 1982). Bestem rangen af matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & -4 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

13. (Eksamen 1982). Begrund, at matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

har en invers matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$, og find $\underline{\underline{A}}^{-1}$.

14. (Eksamen 1981). Betragt det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} (a-1)x_1 &= 1 \\ 2x_1 + (a-2)x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 2 \\ x_1 &+ 2x_4 = 0 \\ 2x_1 &+ 3x_3 + x_4 = 0. \end{aligned}$$

For hvilke værdier af $a \in \mathbb{R}$ har ligningssystemet

- $\alpha)$ netop én løsning?
- $\beta)$ ingen løsninger?
- $\gamma)$ uendelig mange løsninger?

(Bemærk: Ligningssystemet forlanges ikke løst.)

§10. Determinanten.

1. Udregn determinanterne

$$\begin{vmatrix} -5 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & -7 \\ -1 & -4 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Udregn determinanten af

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} & & & c_1 \\ 0 & & & \\ & c_2 & & \\ & & c_3 & 0 \\ c_4 & & & \end{pmatrix}$$

Udregn $\underline{\underline{C}}^{-1}$ for de værdier af $(c_1, \dots, c_4)$ for hvilke $\underline{\underline{C}}^{-1}$ findes.

3. Bestem Wronski-determinanten (def. i IV,10) for $(\cos x, \sin x)$.

4. Find den inverse til

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Lad en matrix have nuller under diagonalen

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Vis, at hvis $\underline{\underline{M}}$ har en invers, så har den inverse også nuller under diagonalen.

Bestem diagonalen i den inverse.

6. Udregn determinanten

$$\begin{vmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

7. Wronski-determinanten af $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ er

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' & \varphi_1'' \\ \varphi_2 & \varphi_2' & \varphi_2'' \\ \varphi_3 & \varphi_3' & \varphi_3'' \end{vmatrix} .$$

Vis, at hvis $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ er lineært afhængige, så er $W = 0$.

Vis, at hvis φ_j løser differentialligningen

$$\varphi''' + \alpha\varphi'' + \beta\varphi' + \gamma\varphi = 0 ,$$

så vil W løse differentialligningen

$$W' + \alpha W = 0 .$$

8. Givet to matricer

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Udregn matricen $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$.

b) Bestem $\det(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})$.

9. (Eksamen 1983). Givet matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beregn $\det \underline{\underline{A}}$. Begrund, at $\underline{\underline{A}}$ har en invers matrix, og find $\underline{\underline{A}}^{-1}$.

Lad (e_1, e_2, e_3) og $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ være baser i et 3-dimensionalt vektorrum V , således at

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= 3e_1 + e_2 + e_3 \\ \hat{e}_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ \hat{e}_3 &= 2e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Find koordinatsættet $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ til vektoren

$$u = 30e_1 + 24e_2 + 29e_3$$

med hensyn til basen $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$.

10. (Eksamen 1981). Lad der være givet en 3×3 -matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Find den inverse matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ og determinanten af $\underline{\underline{A}}$.

§11. Egenverdier og egenvektorer.

1. Find egenverdier og egenvektorer for matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} .$$

2. Lad $\underline{A}$ være regulær. Vis, at $\underline{A}$ og $\underline{A}^{-1}$ har samme egenvektorer. Vis, at er λ egenværdi for $\underline{A}$, så er $\frac{1}{\lambda}$ egenværdi for $\underline{A}^{-1}$. Hvorfor er $\lambda \neq 0$?
3. Find en basis for $\mathbb{R}^2$ bestående af egenvektorer for den lineære funktion bestemt af matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} ,$$

hvor $t \in \mathbb{R}$ er fast valgt.

Bestem funktionens matrix med koordinater i den fundne basis.

4. Lad $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ være givet ved

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

hvor $\theta \in [0, 2\pi[$ er fast valgt.

Bestem en basis for $\mathbb{C}^2$ af egenvektorer for f , b_1 og b_2 , sådan valgt, at

$$|b_1| = |b_2| = 1 .$$

Find matricen for f i de ny koordinater (i basen b_1, b_2).

5. Givet matricen $\underline{\underline{A}}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Find egenverdier og egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$.

6. Givet en vilkårlig matrix $\underline{\underline{A}}$. Vi definerer *sporet* af $\underline{\underline{A}}$ som summen af diagonalelementerne:

$$\text{sp } \underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^n a_{jj}.$$

Vis, at $\text{sp } \underline{\underline{A}}$ er invariant overfor regulærækvivalens. Dvs., at for enhver regulær matrix $\underline{\underline{S}}$ gælder, at

$$\text{sp}(\underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{S}}) = \text{sp}(\underline{\underline{A}}).$$

Vink. Find sporet som koefficient i det karakteristiske polynomium.

7. Lad $\underline{\underline{A}}$ være en vilkårlig matrix. Sporet er defineret i opgave 6. Bestem

$$\text{sp}(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}').$$

8. (Eksamen 1984).

Givet en matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestem egenverdierne og egenvektorerne for $\underline{\underline{A}}$.

9. (Eksamen 1985). Givet en matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Find egenverdier og egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$.

§12. Ortogonalsystemer.

1. Afgør for hver af følgende matricer hvilke af egenskaberne normal, Hermite'sk, symmetrisk, unitær, ortogonal den besidder.

$$(a) \begin{pmatrix} i & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(e) \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

$$(f) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

2. Bestem typen af keglesnittet

$$x^2 + y^2 + 4xy = 1 .$$

3. I $\mathbb{R}^4$ er en basis

$$e_1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$e_2 = (1, 1, 0, 0)$$

$$e_3 = (1, 1, 1, 0)$$

$$e_4 = (1, 1, 1, 1) .$$

Bestem en ortonormal basis ved udskiftning af e_2, e_3 og e_4 i denne rækkefølge.

4. I $\mathbb{R}^3$ udspænder en plan π af $a_1 = (1, 1, 1)$ og $a_2 = (1, 0, 1)$. Bestem projektionen af $(1, 2, 3)$ på π .

5. Bestem egenverdier og egenrum for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} .$$

(opgaven fortsætter)

Bestem keglesnitsfladen

$$\underline{x}' \underline{A} \underline{x} = 1 .$$

6. Givet matricerne

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} .$$

Bestem ortogonale matricer $\underline{S}$ og $\underline{T}$, så

$$\underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S} \quad \text{og} \quad \underline{T}^{-1} \underline{B} \underline{T}$$

bliver diagonalmatricer.

7. (Eksamen 1984).

Givet matricen

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Vis, at samtlige egenverdier er positive.

8. (Eksamen 1985). Givet en matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 10 \\ 7 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

- a) Vis, at vektoren $(1,1,1)$ er en egenvektor for $\underline{A}$.
- b) Find samtlige egenverdier for $\underline{A}$.

§13. Differential- og integralregning i flere reelle variable.

1. Undersøg om følgende funktioner er differentiable i $(0,0)$:

$$(a) \quad f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(b) \quad f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$$

$$(c) \quad f(x,y) = \sqrt{x^2} |y|$$

2. Lad

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Vis, at h er kontinuert i $\mathbb{R}^2$.

(b) Vis, at h er differentiable for $(x,y) \neq (0,0)$ og beregn gradienten.

(c) Vis, at h har partielle afledede i $(0,0)$, men at h ikke er differentiable i $(0,0)$.

3. For hver af følgende funktioner skal man beregne gradienten ∇f og skitsere f 's niveau kurver, dvs. $\{(x,y) \mid f(x,y) = c\}$ hvor c er en konstant ("niveauet"):

$$(a) \quad f(x,y) = x + y$$

$$(c) \quad f(x,y) = \frac{x}{y}$$

$$(b) \quad f(x,y) = xy$$

$$(d) \quad f(x,y) = x^2 + 4y^2.$$

4. Bestem en funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, for hvilken

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad f(0,0) = 5.$$

5. Findes der en differentiable funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, således at

$$\nabla f(x,y) = (-y, x) \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2?$$

6. Givet funktionen

$$f(x,y) = \arctg(x + 3xy).$$

Find gradienten ∇f og differentialet i punkterne $(0,0)$ og $(0,1)$.

7. Lad $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\varphi(t) = t^2, \quad \psi(t) = \frac{3t}{1+t} \quad \text{for } t \neq -1.$$

Lad $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$.

Find $g'(t)$.

8. Lad $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$. Find de punkter, (x,y) , hvor $\nabla f(x,y) = 0$.

9. Hvilke trekanter indskrevet i en given cirkel har størst areal?

10. Bestem (lokale) maxima og minima for følgende funktioner:

(a) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x$

(b) $f(x,y) = \frac{x^3 - 3x}{y^2 + 1}$

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

11. Bestem (lokale) maxima og minima for funktionen

$$f(x,y) = e^{xy} - \frac{e}{4}(x+y)^2.$$

12. Vis, at funktionen

$$f(x,y) = e^x(e^x - y^3 + 3y)$$

har ét lokalt minimum, som ikke er funktionens mindste værdi.

13. Lad

$$f(x,y,z) = x^2 - 4y^2 + 2yz - xz - xy + 2x.$$

Beregn ∇f . Undersøg om f har et lokalt ekstremum.

14. Undersøg om funktionen

$$f(x,y) = \sinh x + \sinh y + \sinh(x+y)$$

har ekstremum i (1,1).

15. Bestem eventuelle extrema for funktionen

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - x - y.$$

Bestem yderligere eventuelle extrema for f under bibetingelsen

$$x^2 + y^2 = 1.$$

16. Bestem størsteværdien af funktionen

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

på området

$$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

17. Find et minimum for funktionen

$$f(x,y) = x^3 + 6xy + y^2.$$

18. Find størsteværdien af

$$f(x,y,z) = x - 2y + 2z$$

under bibetingelsen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

19. Givet funktionen

$$z = f(x,y) = xy(4-x-y).$$

Find største og mindste værdi i punktmængden

$$M = \{(x,y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x+y \leq 6\}.$$

Find eventuelle punkter, hvor tangentplanen til f er parallel med planen

$$z = 4y.$$

20. Beregn det andet Taylorpolynomium for funktionen

$$f(x,y) = x^y$$

ud fra punktet $(1,0)$.

21. Find det andet Taylorpolynomium for funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{3-x^2-y^2} + 2 \arcsin(x^2-y^2)$$

ud fra punktet $(1,1)$.

22. Lad

$$F(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 - 1.$$

Vis, at $F(x,y) = 0$ i omegnen af $(1,0)$ bestemmer y implicit som en funktion af x , $y = \varphi(x)$, og beregn

$$\varphi'(1), \quad \varphi''(1).$$

23. Ligningen

$$\cosh x \sinh y = \frac{5}{4}$$

fastlægger implicit y som funktion af x .

Bestem ved implicit differentiation det andet Taylorpolynomium i punktet $x = \ln 3$ for denne funktion.

24. Om funktionen $y = g(x)$ vides, at $g(0) = 1$, og at i omegnen af 0 gælder ligningen

$$y^2(x+y) = y - x.$$

Bestem det andet Taylorpolynomium for g i punktet 0.

25. En funktion $z = f(x,y)$ tilfredsstiller for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ligningen

$$(1+y^2)e^{z+1} + z - 2exy = 0.$$

Desuden er $f(0,0) = -1$.

Vis, at $\nabla f(0,0) = 0$.

Undersøg, om $(0,0)$ er et ekstremum.

26. Lad $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ og $g(t) = (t, \ln t)$. Find df og $d(f \circ g)$. Beregn kurvelængden af

$$f \circ g([1, 2]) .$$

27. En kurve er givet som

$$K = \{(x, y, z) \mid 4x^2 + y^2 + z^2 + 4yz = 4 \wedge y^2 + z^2 = 4\} .$$

Bestem de punkter på K , der er tættest ved $(0, 0, 0)$.

28. Udregn i et vilkårligt punkt i $\mathbb{R}^2$ Jacobi determinanten for funktionen

$$f(x, y) = (e^x \cos y + e^{-x} \sin y, -e^x \sin y + e^{-x} \cos y) .$$

29. Udregn Jacobi determinanten af funktionen

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(y+2x)) .$$

30. Vis, at funktionen

$$f(x) = \int_0^x t \sin(x-t) e^t dt$$

opfylder

$$f''(x) + f(x) = x e^x .$$

31. Differentier

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos^2 t + x \sin^2 t) dt$$

for $x > 0$.

32. Funktionen

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}} dt$$

er differentiabel for $|x| < 1$.

Find $f(0)$, $f'(0)$ og $f''(0)$.

33. For
- $x > 0$
- defineres

$$g(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin xt}{t} dt .$$

Find $g'(x)$.

34. For
- $x > 1$
- defineres

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} e^{t^2 x^2} dt .$$

Find $g'(x)$.

35. Lad
- f
- være
- $C^\infty(\mathbb{R})$
- , og antag

$$f(t) = 0 \quad \text{for } t \leq 0$$

og

$$f(t) = 0 \quad \text{for } a \leq t .$$

Vi definerer den Laplace-transformerede af f som

$$L(f) = g(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad \left(= \int_0^a e^{-st} f(t) dt \right) .$$

Vis, at $L(f') = sg(s)$.Vis, at $L(-tf(t)) = g'(s)$.

36. Substituer polære koordinater i

$$\int_{\Omega} f(x,y) dx dy ,$$

når Ω er området

$$(a) \quad \Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \wedge x \geq 0\}$$

$$(b) \quad \Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq ax\}$$

$$(c) \quad \Omega = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1-x\} .$$

37. Udregn

$$\int_1^2 \left(\int_x^{2x} (x+y) dy \right) dx$$

direkte og ved substitutionen

$$(u,v) \rightarrow (x,y) = (u,uv) .$$

38. Lad $B \subseteq \mathbb{R}^2$ være

$$B = \{(x,y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x+y \leq 1\} .$$

Vis, at

$$\int_B e^{y/(x+y)} dx dy = \frac{e-1}{2} .$$

Vink. Benyt evt. substitutionen

$$y = x+y, \quad v = y .$$

39. Lad B betegne den punktmængde i 1. kvadrant, der er begrænset af kurverne $xy = 1$ og $xy = 2$ samt af linierne $y = x$ og $y = 4x$.

Tegn B og udregn integralet

$$\int_B x^2 y^2 dx dy .$$

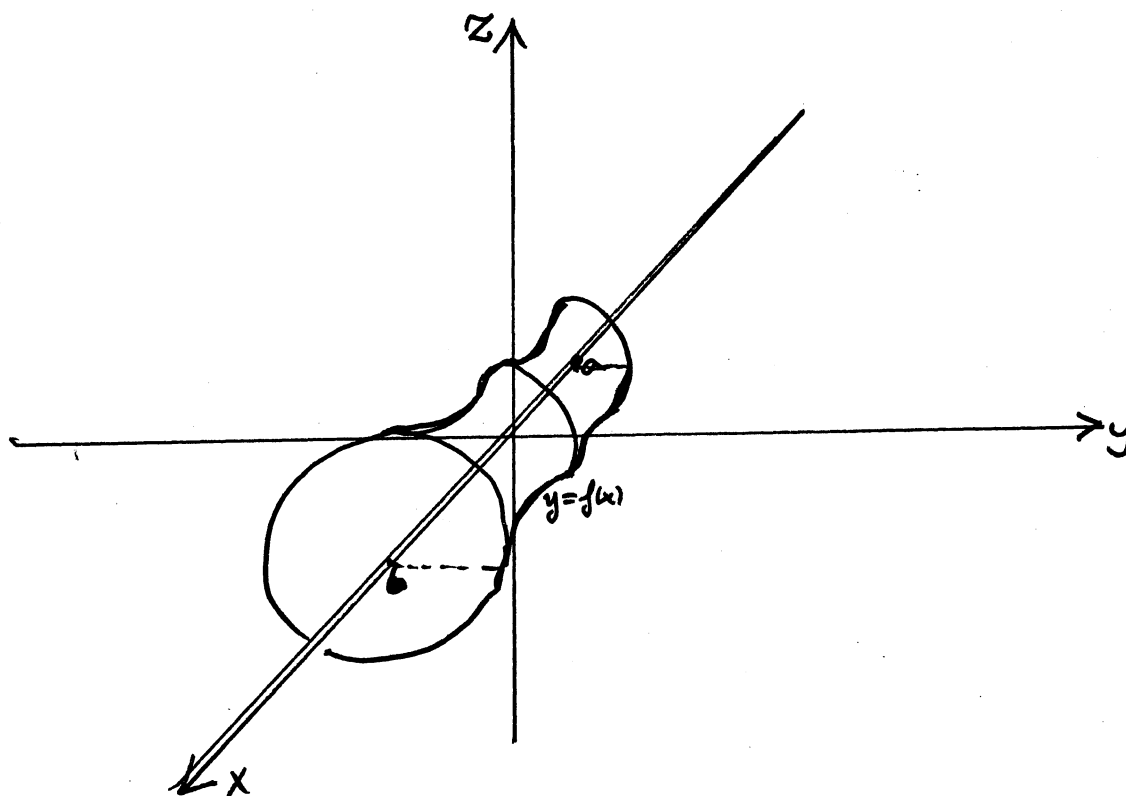
Vink. Benyt substitutionen $u = xy$ og $v = \frac{y}{x}$.

40. Bestem rumfanget af

$$Q = \{(x,y,z) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq xy\}$$

$$R = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq 16 \wedge 0 \leq z \leq y+2x+20\} .$$

41. Lad $y = f(x)$ for $a \leq x \leq b$ være en positiv C^1 -funktion. Drej grafen $\{(x, f(x)) \mid a \leq x \leq b\}$ om x -aksen 360° . Herved fremkommer en flade, F .



$$(F = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = f(x)^2 \wedge a \leq x \leq b\} .)$$

Vis, at arealet af F er

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

42. (Eksamen 1984.) Find maxima og minima for funktionen

$$p(x, y) = 7 + 6x + 2y + 13x^2 + 10xy + 2y^2 .$$

43. (Eksamen 1984.) Lad $D \subseteq \mathbb{R}^2$ være

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x + y^2 \leq 2\} .$$

En funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2) + \cos\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) .$$

Bestem de punkter $(x, y) \in D$, hvor f antager sin største og sin mindste værdi.

44. (Eksamen 1985). Givet en delmængde $D \subseteq \mathbb{R}^2$, defineret ved

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Endvidere givet en funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x,y) = (x+2y)^3.$$

Bestem de punkter i D , hvor f antager sin største og sin mindste værdi, samt disse værdier.

45. (Eksamen 1985). Givet $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ved

$$f(x,y) = 24 + 3x + 12y - 11x^2 + 4xy - 2y^2 + x^3.$$

Bestem eventuelle lokale extrema for f .

46. (Eksamen 1985). Givet en funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Undersøg, om f er differentiabel eller kontinuert differentiabel i $(0,0)$.

47. (Eksamen 1985). Givet en delmængde $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ defineret ved

$$\Delta = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}.$$

Udregn

$$\int_{\Delta} \frac{x^2 y^2}{1 + 2x^2 y + xy^2} dx dy.$$

Benyt evt. substitutionen $u = x^2 y$, $v = xy^2$. Det kan være en hjælp at tegne billedet af Δ i (u,v) -planen.

48. (Eksamen 1985). Givet et område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ved

$$D = \{(x,y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Udregn

$$\int_D (x^4 + y^4 + 2x^2 y^2) dx dy.$$

§14. Kurve- og fladeintegraler af differentialformer.

1. Bestem differentialerne (divergens og rotation) af følgende differentialformer (vektorfelter)

$$(a) \quad (x^2 + yz) dy \wedge dz + (y^2 + xz) dz \wedge dx + (z^2 + xy) dx \wedge dy$$

$$\text{hhv.} \quad (x^2 + yz) dx + (y^2 + xz) dy + (z^2 + xy) dz .$$

$$(b) \quad (x + \arctg y) dy \wedge dz + (3x - z) dz \wedge dx + 2^{yz} dx \wedge dy$$

$$\text{hhv.} \quad (x + \arctg y) dx + (3x - z) dy + 2^{yz} dz .$$

$$(c) \quad \log(1+xz) dy \wedge dz + (y + \arcsin x) dz \wedge dx + (z - 2x) dx \wedge dy$$

$$\text{hhv.} \quad \log(1+xz) dx + (y + \arcsin x) dy + (z - 2x) dz .$$

2. Hvilke former i opgave 1 er lukkede hhv. eksakte? Find stamformer til de eksakte blandt formerne.

3. I $\mathbb{R}^2$ er 1-formen ω defineret ved

$$\omega = (x+y)dx + (y-x)dy .$$

Beregn kurveintegralet

$$\int_k \omega$$

når k er kurven

$$(a) \quad \text{liniestykket fra } (0,0) \text{ til } (1,2) ,$$

$$(b) \quad \text{parabelbuen } y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1 ,$$

$$(c) \quad \text{halvcirklen } x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0 ,$$

$$(d) \quad \text{randen af trekanten med hjørnerne } (1,0) , (2,0) , (2,1) .$$

P.S. Fortegnet afhænger af gennemløbsretningen.

4. Beregn cirkulationen af

$$\omega = -ydx + xdy$$

langs enhedscirklen i positiv omløbsretning.

5. Givet 1-formen

$$\omega = (x+y)dx + (x-y^2)dy .$$

Vis, at formen er eksakt og find potentialet. Beregn for enhver kurve k fra $(1,0)$ til $(0,1)$

$$\int_k \omega .$$

6. Lad
- $x+y > 0$
- . Vis, at 1-formen

$$\omega = \frac{y}{(x+y)^2} dx - \frac{x}{(x+y)^2} dy$$

er eksakt og bestem potentialet.

7. Bestem tallet
- a
- således, at der findes en funktion
- $f(x,y)$
- med

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ax^2y + y^2 - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2xy - 1 .$$

8. Lad
- k
- være cirklen
- $x^2 + y^2 - 2x = 0$
- . Beregn

$$\int_k (x+y)dx + (y-x)dy$$

direkte og med brug af hovedsætningen.

9. Beregn for en lukket kurve
- k

$$\int_k y^2 dx + x dy ,$$

hvor k er

- (a) randen af kvadratet med hjørner $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$,
- (b) cirklen med centrum $(0,0)$ og radius 2,
- (c) randen af kvadratet med hjørner $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$.

10. Lad F betegne fladen $2x + 2y + 2z = 6$, der afskæres af koordinatplanerne. Beregn strømmen gennem fladen bort fra $(0,0,0)$ af vektorfeltet

$$\omega = xy \, dy \wedge dz - x^2 \, dz \wedge dx + (x+z) \, dx \wedge dy.$$

11. Lad F betegne delfladen af cylinderen $x^2 + y^2 = 16$, der afskæres af $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=5$ og har alle koordinater positive. Beregn strømmen ud fra cylinderen gennem fladen af feltet

$$\omega = z \, dy \wedge dz + x \, dz \wedge dx - 3y^2 z \, dx \wedge dy.$$

12. Lad F betegne fladen $z = xy$ i $\mathbb{R}^3$. Lad k være kurven, som cylinderen $x^2 + y^2 = 1$ afskærer på F . Lad endvidere g være vektorfeltet

$$g(x,y,z) = (x+y, x-y, y^2+z).$$

Find strømmen af g gennem den del af F , som afskæres af k . Find cirkulationen af g langs k .

13. Lad F være randen af

$$A = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge z \geq 0\},$$

og lad ω være 2-formen

$$\omega = (x^2 + y^2) \, dy \wedge dz + (y^2 + z^2) \, dz \wedge dx + (x^2 + z^2) \, dx \wedge dy.$$

Beregn strømmen af feltet gennem fladen

$$\int_F \omega.$$

14. Lad F være kuglefladen med centrum i $(3,-1,2)$ og radius 3, og lad ω være formen

$$\omega = (2x + 3\sqrt{y^2 + z^2}) \, dy \wedge dz - (\cosh(xz) + y) \, dz \wedge dx + (y^2 + 2z) \, dx \wedge dy.$$

Find strømmen af ω gennem F ,

$$\int_F \omega.$$

15. Lad F være randen af området, der begrænses af fladen

$$z = 4 - y^2$$

og planerne $x = 0$, $x = 3$, $z = 0$,

og lad ω være formen

$$\omega = (\cos z - x) dy \wedge dz - xy dz \wedge dx + (e^y + 3z) dx \wedge dy.$$

Find strømmen af ω gennem F :

$$\int_F \omega.$$

16. (Eksamen 1981.) Lad S være den lukkede flade, der begrænser området

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge z \geq 0\}.$$

Lad ω være formen

$$\omega = (2xy - xy^3z) dy \wedge dz + (xyz - y^2) dz \wedge dx + \left(1 - \frac{xz^2}{2}\right) dx \wedge dy.$$

Beregn strømmen af ω ud gennem S :

$$\int_S \omega.$$

17. (Eksamen 1983.) Lad k være liniestykket fra $(0,0)$ til $(\pi, 2\pi)$ i planen $\mathbb{R}^2$. Lad ω være formen

$$\omega = (\sin y + 2xy^3) dx + (x \cos y + 3x^2y^2 + 1) dy.$$

Beregn kurveintegralet

$$\int_k \omega.$$

18. (Eksamen 1984.) En halv omdrejningsellipsoide F er givet ved parameterfremstillingen

$$(x, y, z) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \theta)$$

$$(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}].$$

En differentialform ω har fremstillingen

$$\omega = 3dy \wedge dz + 4dz \wedge dx + 2dx \wedge dy.$$

Bestem

$$\int_F \omega.$$

19. (Eksamen 1985.) En flade F er defineret ved

$$F = \{(x, y, z) \mid 2x + 3y + 6z = 6 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}.$$

En form ω er givet som

$$\omega = e^{z-y} dz \wedge dx + e^{z-y} dx \wedge dy.$$

Bestem strømmen af ω gennem F ,

$$\int_F \omega.$$

20. (Eksamen 1983.) Lad k betegne kurven i $\mathbb{R}^2$ givet ved parameterfremstillingen

$$\left. \begin{aligned} x &= \sin t \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned} \right\} t \in [0, \pi].$$

Det oplyses, at k er en lukket kurve uden selvgennemskæringer. Lad Ω betegne det begrænsede område af planen, der har k som rand. Lad ω betegne differentialformen

$$\omega = -ydx + xdy.$$

1) Beregn

$$\int_k \omega.$$

2) Bestem arealet af Ω .

STIKORDSREGISTER FOR §§ 1-13.

A

absolut konvergent	I,4,5
acceleration	III,13,5
additionsformlerne for <i>cos</i> og <i>sin</i>	VI,1,2
adjungeret (matrix)	I,12,5
adskillelige (diff.-lign.)	I,7,6
afhængige (vektorer, lineært)	I,9,1
afledet funktion	I,6,3; I,13,2
afslutning	I,5,1
afsluttet	I,5,1
afsnitsfølge	I,4,4
afstand	I,12,1
aftagende	I,4,1
algebraens fundamentalsætning	I,3,3
annuitetsformlen	IV,3,1
Apollonios	IV,2,1
arbitrære konstanter variation	III,7,5
arcusfunktioner	III,6,10 ff
areafunktioner	III,6,18
areal	III,13,8
arealprodukt	I,1,3
argument	I,1,5
autonom	I,7,3

B

basis	I,2,2; I,9,2
begrænset	I,4,1; I,8,1
bibetingelse	I,13,8
billedrum	I,9,3
binomialformlen	I,3,5
binomialkoefficient	I,3,5
binomialrækken	V,6,6
Brahe, Thyge	IV,2,1
buelængde	I,6,11

C

Cauchy-Schwartz' ulighed	I,12,1
cirkel	III,1,3
Cramers formler	III,10,2
cylinder	III,12,6

D

delfølge	I,4,1
determinant	I,1,3; I,2,5; I,10,1
diagonal	I,9,8
differentiabel	I,6,1-3; I,13,1
differential	I,6,3; I,13,1
differentialkvotient	I,6,1-2
differentialligning	I,7,1
differentialoperator	I,7,4
dimension	I,9,2
direkte (sum)	I,9,2
disjunkte (underrum)	I,9,2
divergent	I,4,2
division (kompleks)	III,1,6
divisor	I,3,2
drejning af koordinatsystem	III,1,7

E

egenrum	I,11,1
egenvektor	I,11,1
egenværdi	I,11,1
egenværdimultiplicitet	I,11,1
eksistenssætningen	I,7,1; VI,7,3
eksponentialfunktionen	III,5,3; III,6,9
ekstremum	I,13,4-8
ellipse	III,2,8-12-17
ellipsoide	III,12,3
elliptisk integral	IV,13,4
enhedsmatrix	I,9,8

enhedsvektor	I,1,3; I,2,4
entydighedssætningen	I,7,2; VI,7,2
Eudoxos	IV,2,1
Eulers formler	III,6,14
Eulers metode	IV,7,3
Euklids algoritme	I,3,3; III,3,1

F

fakultet	I,3,5
flade	III,13,8
fortætningspunkt	I,4,2
Fubinis sætning	I,8,8
fundamentalfølge	I,4,5
funktionalmatrix	I,13,5
funktionsfølge	III,5,8
følge	I,4,1

G

gammafunktionen	IV,8,2
grad	I,3,1
gradient	I,13,2
Gram-Schmidts ortogonalisering	I,12,3
Grassmanns udskiftningssætning	I,9,3
gruppeteori	VI,10,1
grænsefunktion	III,5,8
grænsepunkt	I,4,2
grænseværdi	I,5,5
gå op i	I,3,2

H

hastighed	III,13,5
henfald	IV,7,1
Hermite'sk (matrix)	I,12,5
Hessian	I,13,4

Hipparch	IV,2,1
homogen	I,7,4
l'Hôpitals regel	I,6,12-13
hydrolyse	IV,9,3
hyperbel	III,2,14-20
hyperboloide	III,12,4
hyperbolske funktioner	III,6,18
højreorienteret basis	I,2,2
I	
imaginær (del)	I,1,4-5; II,1,4
implicit	I,13,6
indre	I,5,1
indre produkt	I,1,3; VI,1,1; I,2,3; VI,2,4; I,12,1
inertimatrix	IV,12,3
inertimoment	IV,12,1
infimum	I,8,1
inhomogen	I,7,5
integral	I,6,8; IV,6,4; I,8,1-2
interpolation	III,3,1
interval	I,1,1; I,8,2; II,8,2
intervalinddeling	I,8,2; II,8,3
invers	I,9,8; III,10,1
isomorfi	I,9,4
iteration	III,4,1
J	
Jacobi-determinant	I,13,7
Jordans normalform	I,11,4
K	
karakteristisk funktion	I,8,5
karakteristisk polynomium	I,11,3
karakterpolynomium	III,7,2

kasteparablen	IV,2,2
kegle (snit)	III,2,11
keglesnitsflade	III,12,2
kemisk ligevægt	IV,9,1
Kepler, Johannes	IV,2,1
Keplers tønderregel	IV,6,5
kerne	I,9,3
koefficient	I,3,1
kompakt	I,5,1
komplekst produkt	I,1,4
komplekst tal	I,1,4
komplement	I,10,1
konjugeret	I,1,5; II,1,4; III,2,10
kontinuert	I,5,2-4
kontraktion	III,4,1
konvergen sprincip	I,4,5
konvergent	I,4,2-5; III,5,8
koordinat	I,1,1; I,2,2; II,2,2; I,9,4
koordinatskift	III,1,7
krumning	III,13,6
krydsprodukt	I,2,4; VI,2,4
kugle	III,2,5; I,5,1
kugleflade	III,2,5;
kurve	III,13,4
kvadratisk form	I,12,6
kvadratrods (af komplekst tal)	V,1,6
kvadrik	III,12,2
kvotientkriteriet	III,4,5
kædelinien	IV,8,5
kædereglene	I,13,5
L	
Lagrange polynomium	III,3,2
Lagranges restled	I,6,12
Laplace transformation	VII,13,6
Lebesgue integrabel	I,8,4

ligelig kontinuert	VI,8,1
ligevægt, kemisk	IV,9,1
linearkombination	I,9,1
lineær	I,7,4; I,9,1
linie	III,1,1; II,2,1
liniestykke	I,1,1
logaritme	III,6,1-17
logistisk vækst	IV,7,2
længde	I,12,1
M	
majoriseret konvergens	I,8,7
maksimum	I,13,4-8
matrix	I,2,5; I,9,5
matrixprodukt	I,9,5
middelværdisætningen	I,6,5-10
minimum	I,13,4-8
modulus	I,1,5
monoton	I,4,1
monoton konvergens	I,8,7
multiplicitet	I,3,3
multiplikation med skalar	I,1,2; II,1,3; I,2,2
mål	I,8,5
målelig	I,8,5
N	
naturlig logaritme	III,6,1
nedad begrænset	I,8,1
nedre Lebesgue integral	I,8,4
nedre Riemann integral	I,8,3
Newtons metode	IV,6,1
norm	I,12,1
normal (matrix)	I,12,4
nulmængde	I,8,7
nulpunkt	IV,6,1

nulvektor	I,9,1
numerisk integration	IV,6,4
numerisk løsning af diff.-lign.	IV,7,2
næsten overalt	I,8,7

O

omvendt (funktion)	I,13,7
opad begrænset	I,8,1
operator	I,7,4
ortogonal	I,12,1-3-4
ortogonalsystem	I,12,1
ortonormal (basis)	I,12,2
overbestemt	III,12,7

P

parabel	III,2,13-18
paraboloider	III,12,5
parallelforskydning af koordinatsystem	III,1,7
parallelle linier	I,2,1
parameter	III,1,1
partiell afledet	I,13,2
Pascals formel	I,3,5
pendul	IV,13,1
permutation	I,10,2
plan	III,2,2
polynomium	I,3,1
polære koordinater	III,13,1
positiv omløbsretning	I,2,2
principalretning	IV,12,3
produkt af rækker	I,4,6
projektion	I,1,1; I,12,2
punkt	I,1,1
punktfølge	I,4,1
Pythagoras	II,1,3; I,12,2

R

rand	I,5,2
rang	I,9,2-8
rational funktion	I,3,4
realdel	I,15; II,1,4
regneregler for differentiation	I,6,4
- - integration	I,6,9; I,8,6
- - vektorer	I,1,6; I,2,5; I,9,1
regning med følger	I,4,2
regressionsanalyse	IV,12,4
regulær	I,7,3; I,9,8; I,11,2
relation, lineær	I,9,1
rentesregning	IV,3,1
Riemann integrabel	I,8,3
rod	I,3,1
rodkriteriet	III,4,5
rodmultiplicitet	I,11,3
rumprodukt	I,2,5
Runge-Kutta	IV,7,4
række	I,4,3-4; I,9,6

S

sandsynlighedsregning	IV,3,2; IV,4,1
Simpsons formel	IV,6,5
singulær	I,7,3; I,9,8
skalar	I,1,2; I,2,2; I,9,1
skalarprodukt	I,1,3; I,2,3; I,12,1
skæringslinie mellem to planer	III,2,3
stambrøk	I,3,4
stamfunktion	I,6,7
stereometri	I,2,1
strengt	I,4,1
substitution	I,13,8
sum af underrum	I,9,2
- - vektorer	I,1,2; II,1,3; I,2,3
- - rækker	I,4,4

sumtegn Σ	II,3,1
supremum	I,8,1
symmetrisk gruppe	I,10,2
symmetrisk matrix	I,12,4
sædvanlig basis	I,2,2
søjle	I,9,6
T	
tal	I,1,1
talfølge	I,4,1
tallinien	I,1,1
tangent	III,2,9; I,6,1
Taylors formel	I,6,12; I,13,4
Taylorrække	I,6,13
transponeret (matrix)	I,9,6
trappefunktion	I,8,3; II,8,3-4
treben	III,13,6
trekantsuligheden	I,12,1
trigonometriske funktioner	III,6,10
U	
uafhængige, lineært	I,9,1
udråbstegn	I,3,5
udskiftningssætningen	I,9,3
udvikling (af determinant)	I,10,1
underrum	I,9,1
uniformt kontinuert	VI,8,1
unitær (matrix)	I,12,3-4
unitærækvivalent	I,12,4
V	
variabel	I,3,1
vektor	I,1,2; I,2,3; I,9,1
vektorprodukt	I,2,4

vektorrum	I,1,2; I,2,3; I,9,1
vinkel	I,2,1; II,2,1
vinkelret	I,12,1
voksende	I,4,1

W

Wronski-determinanten	IV,10,1

Y

ydre produkt	I,1,3

Æ

ækvivalent	I,11,2; I,12,4

Ø

øvre Lebesgue integral	I,8,4

øvre Riemann integral	I,8,3

A

åben	I,5,1

SYMBOLER

¢	I,1,5
.	I,1,3; I,2,3; I,12,1
[,]	I,1,4
—	I,1,5
	I,1,5
x	I,2,4
Σ	II,3,1
pH	IV,6,3
inf	I,8,1; II,8,1
sup	I,8,1; II,8,1
≤	I,8,1; II,8,1
!	I,12,1