KØBENHAVNS UNIVERSITETS MATEMATISKE INSTITUT

Børge Jessen

Forelæsninger over næsten periodiske funktioner

Forårssemestret 1977

142 sider

Indhold Side

Indledning.

Teorien for næsten periodiske funktioner er grundlagt af Harald Bohr i 1923 og står i nær forbindelse med hans tidligere arbejder over Dirichlet rækker og den Riemannske zetafunktion. Den har givet anledning til en omfattende litteratur. Bohrs samlede værker er udgivet af Dansk Matematisk Forening. De indeholder mange oversigtsartikler, der kan anbefales til orientering. Der findes en række bøger om emnet:

H. Bohr, Fastperiodische Funktionen. 1932.
(Samlede værker C 28).
A.S. Besicovitch, Almost periodic functions. 1932.
J. Favard, Fonctions presque-périodiques. 1933.
S. Cinquini, Funzioni quasi-periodiche. 1948-49.
W. Maak, Fastperiodische Funktionen. 1950
C. Corduneanu, Almost periodic functions. 1968.
A.M. Fink, Almost Periodic Differential Equations. 1974.

Dette kursus knytter sig nær til fremstillingen i Bohrs bog, som dog vil blive udvidet på væsentlige punkter.

Kapitel 1. Periodiske funktioner.

Fourierrækker af periodiske funktioner af en variabel.

1. Vektorrummet af kontinuerte funktioner af en variabel med perioden 2π. Vi vil betragte kontinuerte komplekse funktioner $f = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ af en reel variabel x, som er periodiske med en given periode, lad os sige med perioden 2π. Dette medfører, at

$$f(x + n2\pi) = f(x) \quad \text{for ethvert } n \in \mathbb{Z}.$$

Mængden $\mathcal{P}$ af disse funktioner er åbenbart et vektorrum over $\mathbb{C}$ (et underrum af rummet af alle komplekse funktioner på $\mathbb{R}$), d.v.s. når $f \in \mathcal{P}$ og $a \in \mathbb{C}$, gælder $af \in \mathcal{P}$, og når $f, g \in \mathcal{P}$, gælder $f + g \in \mathcal{P}$.

Ved middelværdien af en funktion $f \in \mathcal{P}$ vil vi forstå tallet

$$M\{f\} = M\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx.$$

Ved det indre produkt af to funktioner $f, g \in \mathcal{P}$ vil vi forstå tallet

$$(f, g) = M\{f\,\overline{g}\} = M\{f(x)\,\overline{g(x)}\}.$$

Der gælder reglerne

$$(g, f) = \overline{(f, g)}$$

$$(af, g) = a(f, g), \quad (f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$$

$$(f, ag) = \overline{a}(f, g), \quad (f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2).$$

Udtrykket

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{M\{f(x)\,\overline{f(x)}\}} = \sqrt{M\{|f(x)|^2\}} \ (\geq 0)$$

kaldes normen af f. Den er 0, hvis og kun hvis $f = 0$ (nulfunktionen). Der gælder $\|af\| = |a|\,\|f\|$. En funktion med normen 1 kaldes normal. Hvis $f \neq 0$, er funktionen $f/\|f\|$ normal.

Normen $\|f-g\| = \|g-f\|$ af differensen $f-g$ kaldes afstanden mellem funktionerne f og g. Den er 0, hvis og kun hvis $f=g$.

Den her indførte norm og afstand kaldes middelkvadrat normen og middel kvadrat afstanden for at skelne dem fra andre lignende begreber.

2. To funktioner f og g fra $\mathcal{P}$ kaldes ortogonale, og vi skriver $f \perp g$, hvis $(f,g)=0$ [og altså også $(g,f)=0$]. Af $f \perp g$ følger $af \perp bg$, og af $f \perp g$ og $f \perp h$ følger $f \perp ag+bh$ for vilkårlige $a, b \in \mathbb{C}$.

For to funktioner $f, g \in \mathcal{P}$ har vi

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = (f,f)+(g,g)+(f,g)+(g,f) \\ &= \|f\|^2+\|g\|^2+(f,g)+\overline{(f,g)} \\ &= \|f\|^2+\|g\|^2+2\Re(f,g), \end{aligned} \tag{1}$$

hvoraf Pythagoras' sætning

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2+\|g\|^2, \text{ hvis } f \perp g,$$

eller $\|f-g\|^2 = \|f-h\|^2+\|h-g\|^2$, hvis $f-h \perp h-g$.

For n parvis ortogonale funktioner fås ved gentagen anvendelse af Pythagoras' sætning

$$\|f_1+\cdots+f_n\|^2 = \|f_1\|^2+\|f_2+\cdots+f_n\|^2 = \cdots = \|f_1\|^2+\cdots+\|f_n\|^2.$$

Hvis vi i (1) lader f og g være normale funktioner, ser vi at $-\Re(f,g) \leq 1$. Hvis vi erstatter f med $-af$, hvor $|a|=1$, finder vi $\Re a(f,g) \leq 1$, hvilket for en passende værdi af a giver $|(f,g)| \leq 1$. Altså gælder for vilkårlige funktioner $f, g \in \mathcal{P}$ Cauchy-Schwarz' ulighed

$$|(f,g)| \leq \|f\|\,\|g\|; \tag{2}$$

thi denne ulighed er triviel, når $f=0$ eller $g=0$; og når $f \neq 0$ og $g \neq 0$, er den ensgyldig med uligheden $|(f/\|f\|, g/\|g\|)| \leq 1$.

Af (1) og (2) slutter vi, at

$$\|f+g\|^2 \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|(f,g)| \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\|g\|,$$

hvoraf *trekant uligheden*

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

eller

$$\|f-g\| \leq \|f-h\| + \|h-g\|.$$

Normen opfylder altså de betingelser man stiller til en norm i et vektorrum over $\mathbb{C}$, og rummet $\mathcal{P}$ er altså med denne norm et *normeret vektorrum* og med den indførte afstand et *metrisk rum*.

En følge af funktioner $f_1, f_2, \dots$ i $\mathcal{P}$ siges at *konvergere i middel kvadrat* mod funktionen $f \in \mathcal{P}$ hvis $\|f - f_n\| \to 0$ for $n \to \infty$.

3. Normale ortogonale systemer. Et endeligt eller uendeligt system af funktioner i $\mathcal{P}$ kaldes et normalt ortogonalt system (eller kort et ortonormalt system), hvis det består af normale, parvis ortogonale funktioner.

En ren svingning $e_\lambda = e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tilhører $\mathcal{P}$ hvis og kun hvis frekvensen λ er et helt tal. Thi $e^{i\lambda(x+2\pi)} = e^{i\lambda x} \cdot e^{i\lambda 2\pi}$, og $e^{i\lambda 2\pi} = 1$, hvis og kun hvis $\lambda \in \mathbb{Z}$. De rene svingninger

$$e_n = e_n(x) = e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

udgør et normalt ortogonalt system i $\mathcal{P}$. Thi for ethvert n gælder

$$\|e_n\|^2 = \mathcal{M}\{|e^{inx}|^2\} = \mathcal{M}\{1\} = 1,$$

og for $n \neq p$ gælder

$$(e_n, e_p) = \mathcal{M}\{e^{inx} e^{-ipx}\} = \mathcal{M}\{e^{i(n-p)x}\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(n-p)x}}{i(n-p)}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Dette system kaldes <u>det trigonometriske system</u>. Som vi senere skal se har dette system den vigtige egenskab, ikke at være ægte del af noget større normalt ortogonalt system.

<u>Bemærkning</u>. En simpel beregning viser, at hvis et par af funktioner φ og ψ i et normalt ortogonalt system erstattes med

$$\frac{\varphi+\psi}{\sqrt{2}} \text{ og } \frac{\varphi-\psi}{i\sqrt{2}} \qquad \text{eller med } \frac{\varphi+i\psi}{\sqrt{2}} \text{ og } \frac{\varphi-i\psi}{\sqrt{2}},$$

da vil det nye system også være et normalt ortogonalt system. Substitutionen kan også udføres samtidig for et endeligt eller uendeligt antal af par af funktioner i systemet. Ved at anvende den første substitution på hvert af parrene e^{inx}, e^{-inx} $(n \in \mathbb{N})$ i det trigonometriske system fås det normale ortogonale system

$$1, \sqrt{2}\cos x, \sqrt{2}\sin x, \dots, \sqrt{2}\cos nx, \sqrt{2}\sin nx, \dots.$$

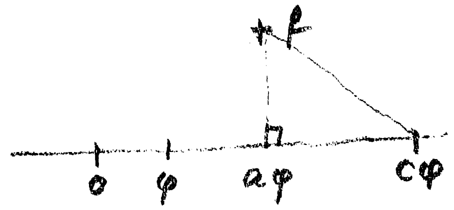
Omvendt fører den anden substitution fra dette system tilbage til det trigonometriske system.

4. <u>Fourier konstanter</u>. <u>Deres minimalegenskab.</u>

Lad φ være en vilkårlig normal funktion i $\mathcal{P}$ og f en vilkårlig funktion i $\mathcal{P}$. Det indre produkt $a = (f, \varphi)$ kaldes <u>Fourier konstanten</u> for f med hensyn til φ. Af

$$(f - a\varphi, \varphi) = (f, \varphi) - a(\varphi, \varphi) = a - a = 0$$

ses, at $f - a\varphi$ er ortogonal på φ og dermed også på $c\varphi$ for ethvert c (se anskuelsesfiguren). For ethvert



c er altså funktionerne $f-a\varphi$ og $(a-c)\varphi$ ortogonale, og ifølge Pythagoras' sætning gælder altså

(3) $$\|f-c\varphi\|^2=\|f-a\varphi\|^2+|a-c|^2.$$

Denne formel viser, at $\|f-c\varphi\|^2$, betragtet som funktion af c, er minimal for $c=a$ og kun for denne værdi af c. For minimet finder vi, ved i (3) at sætte $c=0$, værdien

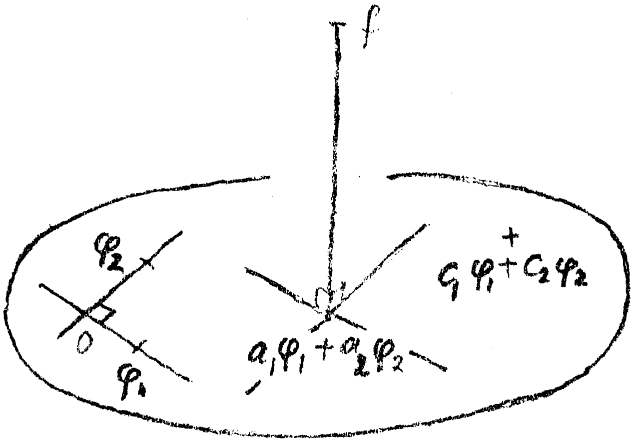
$$\|f-a\varphi\|^2=\|f\|^2-|a|^2.$$

<u>Bemærkning</u>. Denne formel viser, at $|a|\leq\|f\|$, altså $|(f,\varphi)|\leq\|f\|$, hvoraf Cauchy-Schwarz' ulighed $|(f,g)|\leq\|f\|\,\|g\|$ følger, idet den (for $g\neq 0$) er ensgyldig med uligheden $|(f,g/\|g\|)|\leq\|f\|$.

<u>5</u>. Lad nu $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ være et vilkårligt endeligt normalt ortogonalt system i $\mathfrak{P}$, og lad f være en vilkårlig funktion i $\mathfrak{P}$. Lad $a_p=(f,\varphi_p)$ betegne Fourier konstanten for f med hensyn til φ_p. Da er funktionen $f-\sum_1^n a_p\varphi_p$ ortogonal på hver af funktionerne $\varphi_1,\dots,\varphi_n$; thi

$$\Big(f-\sum_1^n a_p\varphi_p,\varphi_q\Big)=(f,\varphi_q)-\sum_1^n a_p(\varphi_p,\varphi_q)=a_q-a_q=0.$$

For vilkårlige tal c_p er således de $n+1$ funktioner $f-\sum_1^n a_p\varphi_p$, $(a_1-c_1)\varphi_1,\dots,(a_n-c_n)\varphi_n$ parvis ortogonale (se anskuelsesfiguren) og vi finder ved brug af udvidelsen af Pythagoras' sætning formlen



(4) $$\Big\| f-\sum_1^n c_p\varphi_p\Big\|^2=\Big\| f-\sum_1^n a_p\varphi_p\Big\|^2+\sum_1^n |a_p-c_p|^2.$$

Denne formel viser, at $\| f-\sum_1^n c_p\varphi_p\|^2$ er minimal, når koefficienterne c_p er lig med de tilsvarende Fourier konstanter a_p, og kun for disse værdier. For minimet finder vi, ved i (4) at sætte $c_p=0$ for alle p, værdien
$$\Big\| f-\sum_1^n a_p\varphi_p\Big\|^2=\|f\|^2-\sum_1^n|a_p|^2.$$

6. Fourier rækker. Vi går nu over til at betragte det vigtigste af alle normale ortogonale systemer, nemlig det trigonometriske system bestående af funktionerne
$$e^{inx},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Fourier konstanten

(5) $$a_n=\mathcal{M}\{f(x)e^{-inx}\}$$

af en funktion $f=f(x)$ fra $\mathcal{P}$ med hensyn til e^{inx} kaldes den n^{te} Fourier konstant af f, og den trigonometriske række
$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$
med disse tal a_n som koefficienter kaldes Fourier rækken for f. Vi udtrykker dette ved at skrive
$$f(x)\sim\sum a_n e^{inx}.$$

Med $\sum^*\ldots$ vil vi betegne en sum udstrakt over et endeligt antal af de i betragtning kommende indices.

Et trigonometrisk polynomium $s(x) = \sum^* c_n e^{inx}$ er, som man let ser, sin egen Fourierrække, d.v.s. Fourierrækken fås ved at tilføje nulled.

7. Af slutresultatet i § 5 følger:

Sætning 1. For enhver endelig mængde af rene svingninger e^{inx} giver den tilsvarende delsum $\sum^* a_n e^{inx}$ af Fourierrækken blandt alle linearkombinationer $\sum^* c_n e^{inx}$ af disse svingninger den bedste middel kvadrat approksimation til funktionen $f(x)$, d.v.s.

$$M\{|f(x) - \sum^* a_n e^{inx}|^2\} \leqslant M\{|f(x) - \sum^* c_n e^{inx}|^2\}$$

for vilkårlige c_n, og lighedstegnet gælder kun, når $c_n = a_n$ for alle i summen optrædende n.

Værdien af dette minimum er bestemt ved formlen

$$M\{|f(x) - \sum^* a_n e^{inx}|^2\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum^* |a_n|^2.$$

Af formlen for minimet fremgår uligheden

$$\sum^* |a_n|^2 \leqslant M\{|f(x)|^2\}.$$

Følgelig er den uendelige række $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2$ konvergent, og dens sum er $\leqslant M\{|f(x)|^2\}$. Som vi senere skal se, gælder her lighedstegnet, d.v.s. for enhver funktion $f(x)$ fra $\mathfrak{P}$ gælder formlen

$$M\{|f(x)|^2\} = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2.$$

8. Regning med Fourierrækker. Vi vil vise, at simple operationer med funktioner fra $\mathfrak{P}$ afspejler sig i tilsvarende operationer med deres Fourierrækker.

Af $f(x) \sim \sum a_n e^{inx}$ følger:

1 $$k f(x) \sim \sum k a_n e^{inx} \qquad (k \in \mathbb{C});$$

Thi $M\{k f(x) e^{-inx}\} = k M\{f(x) e^{-inx}\} = k a_n.$

② $e^{imx} f(x) \sim \sum a_n e^{i(n+m)x}$ d: $\sum a_{n-m} e^{inx}$ $(m \in \mathbb{Z})$;

Thi $M\{e^{imx} f(x) e^{-inx}\} = M\{f(x) e^{-i(n-m)x}\} = a_{n-m}.$

③ $f(x+k) \sim \sum a_n e^{in(x+k)}$ d: $\sum a_n e^{ink} e^{inx}$ $(k \in \mathbb{R})$;

Thi $M\{f(x+k) e^{-inx}\} = e^{ink} M\{f(x+k) e^{-in(x+k)}\}$,

og altså, idet vi sætter $x+k=y$,

$$= e^{ink} M\{f(y) e^{-iny}\} = e^{ink} a_n.$$

④ $f(-x) \sim \sum a_n e^{-inx}$ d: $\sum a_{-n} e^{inx}$;

Thi $M\{f(-x) e^{-inx}\} = M\{f(y) e^{iny}\} = a_{-n}.$

⑤ $\overline{f(x)} \sim \sum \overline{a_n}\, e^{-inx}$ d: $\sum \overline{a_{-n}}\, e^{inx}$;

Thi $M\{\overline{f(x)}\, e^{-inx}\} = \overline{M\{f(x) e^{inx}\}} = \overline{a_{-n}}.$

Ved at kombinere ④ og ⑤ får vi

⑥ $$\overline{f(-x)} \sim \sum \overline{a_n}\, e^{inx}.$$

Af $f(x) \sim \sum a_n e^{inx}$ og $g(x) \sim \sum b_n e^{inx}$ følger

⑦ $$f(x) \pm g(x) \sim \sum (a_n \pm b_n) e^{inx};$$

Thi $M\{(f(x) \pm g(x)) e^{-inx}\} = M\{f(x) e^{-inx}\} \pm M\{g(x) e^{-inx}\} = a_n \pm b_n.$

⑧ $f(x) g(x) \sim \sum c_n e^{inx}$, hvor $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_q a_{n-q} b_q.$

Denne multiplikationssætning ligger dybere end de foregående sætninger, og vi kan først bevise den senere. Her bemærkes blot, at den uendelige række, der bestemmer c_n, er absolut konvergent som følge af uligheden $|a_p b_q| \leq \frac{1}{2}|a_p|^2 + \frac{1}{2}|b_q|^2$ og konvergensen af rækkerne $\sum |a_p|^2$ og $\sum |b_q|^2$.

9. En vigtig operation med funktioner i $\mathcal{P}$ er dannelsen af foldningen

$$h(x) = M\{f(x-y) g(y)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y) g(y)\, dy.$$

Denne funktion h er naturligvis igen en funktion i $\mathfrak{P}$. Vi vil vise, at

$$\text{(9)} \qquad h(x) = \underset{y}{\mathcal{M}}\{f(x-y)\,g(y)\} \sim \sum a_n b_n e^{inx}.$$

Dette fremgår umiddelbart ved en ombytning af to integrationer. Vi finder nemlig

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{h(x)e^{-inx}\} &= \underset{x}{\mathcal{M}}\{\underset{y}{\mathcal{M}}\{f(x-y)g(y)\}\,e^{-inx}\} \\
&= \underset{y}{\mathcal{M}}\{g(y)\,\underset{x}{\mathcal{M}}\{f(x-y)\,e^{-inx}\}\} \\
&= \underset{y}{\mathcal{M}}\{g(y)\,a_n e^{-iny}\} \\
&= a_n\,\underset{y}{\mathcal{M}}\{g(y)\,e^{-iny}\} = a_n b_n .
\end{aligned}$$

Foldning af to funktioner medfører således multiplikation af deres Fourier konstanter.

Formel (9) frembyder en interessant analogi med formel (8), som viser, at multiplikation af to funktioner medfører foldning af deres Fourier konstanter, thi således kan vi betegne dannelsen af tallene $c_n = \sum_q a_{n-q} b_q$.

Ved at kombinere (9) med (6) får vi varianten

$$\text{(10)} \qquad \underset{y}{\mathcal{M}}\{f(x-y)\,\overline{g(-y)}\} = \underset{y}{\mathcal{M}}\{f(x+y)\,\overline{g(y)}\} \sim \sum a_n \bar{b}_n e^{inx}.$$

Hvis specielt $g = f$, får vi

$$\text{(11)} \qquad \underset{y}{\mathcal{M}}\{f(x+y)\,\overline{f(y)}\} \sim \sum |a_n|^2 e^{inx}.$$

I det specielle tilfælde, hvor $g(x)$ er et trigonometrisk polynomium $\sum^* b_n e^{inx}$, får vi for foldningen formlen

$$\text{(12)} \qquad h(x) = \underset{y}{\mathcal{M}}\{f(x-y)g(y)\} = \sum^* a_n b_n e^{inx}.$$

Thi

$$\begin{aligned}
h(x) &= \underset{y}{\mathcal{M}}\{f(x-y) \textstyle\sum^* b_n e^{iny}\} \\
&= \textstyle\sum^* \underset{y}{\mathcal{M}}\{f(x-y)\,e^{-in(x-y)}\}\, b_n e^{inx} \\
&= \textstyle\sum^* \underset{z}{\mathcal{M}}\{f(z)\,e^{-inz}\}\, b_n e^{inx} = \textstyle\sum^* a_n b_n e^{inx}.
\end{aligned}$$

10. Hvis en følge af funktioner $f_m(x) \sim \sum a_{m,n} e^{inx}$ fra P er uniformt konvergent med grænsefunktionen $f(x)$, da fås Fourierrækken for f ud fra Fourierrækkerne for funktionerne f_m ved formel grænseovergang, d.v.s., hvis $f(x) \sim \sum a_n e^{inx}$, gælder for ethvert n, at $a_{m,n} \to a_n$ for $m \to \infty$. Endda gælder $a_{m,n} \to a_n$ for $m \to \infty$ uniformt i n. Thi

$$|a_n - a_{m,n}| = |M\{(f(x) - f_m(x))\, e^{-inx}\}|$$
$$\leq M\{|f(x) - f_m(x)|\} \leq \sup_x |f(x) - f_m(x)|,$$

og den sidste størrelse $\sup_x |f(x) - f_m(x)|$ er uafhængig af n og konvergerer mod 0 for $m \to \infty$.

Med henblik på senere anvendelse fremhæver vi følgende specialtilfælde:

Sætning 2. Enhver absolut konvergent trigonometrisk række $\sum c_n e^{inx}$ er Fourierrække for sin sumfunktion $s(x)$.

Bevis. Den absolute konvergens betyder, at rækken $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|$ er konvergent. Idet denne række er majorantrække for rækken $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, vil følgen af delsummer $f_m(x) = \sum_{-m}^{m} c_n e^{inx}$ konvergere uniformt mod $s(x)$. Hver delsum er imidlertid et trigonometrisk polynomium og har derfor som bemærket i § 6 sig selv som Fourierrække, d.v.s. $f_m(x) \sim \sum a_{m,n} e^{inx}$, hvor $a_{m,n} = c_n$ for $|n| \leq m$ og $a_{m,n} = 0$ for $|n| > m$. Der gælder altså $a_{m,n} \to c_n$ for ethvert n, og grænsefunktionen $s(x)$ har derfor Fourierrækken $\sum c_n e^{inx}$.

Entydighedssætningen og Parsevals formel.

11. Entydighedssætningen. Ved det mere indgående studium af forbindelsen mellem funktioner i $\mathcal{P}$ og deres Fourier rækker melder sig det spørgsmål, om en funktion er entydigt bestemt ved sin Fourier række. At dette er tilfældet, er indholdet af entydighedssætningen:

Sætning 1. Hvis to funktioner f og g fra $\mathcal{P}$ har samme Fourier række, er de identiske, d.v.s., af $f(x) \sim \sum a_n e^{inx}$ og $g(x) \sim \sum a_n e^{inx}$ følger $f = g$.

Denne sætning er ensgyldig med følgende:

Sætning 2. Hvis alle Fourier konstanter for en funktion $f \in \mathcal{P}$ er 0, d.v.s. hvis $f(x) \sim \sum 0 e^{inx}$, da er $f = 0$.

At sætning 2 følger af sætning 1 er klart, da funktionen 0 har Fourier rækken $\sum 0 e^{inx}$. Omvendt følger sætning 1 af sætning 2, idet $f(x) \sim \sum a_n e^{inx}$ og $g(x) \sim \sum a_n e^{inx}$ medfører $f(x) - g(x) \sim \sum 0 e^{inx}$.

Endnu en form af entydighedssætningen er følgende:

Sætning 3. Det normale ortogonale system e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, er ikke ægte delmængde af noget normalt ortogonalt system i $\mathcal{P}$.

Sætning 3 følger af sætning 2, ifølge hvilken en funktion f, der er ortogonal på alle funktionerne e^{inx}, må være funktionen 0. Omvendt følger sætning 2 af sætning 3, thi var $f(x) \sim \sum 0 e^{inx}$ for en funktion $f \neq 0$, ville systemet e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, sammen med den normale funktion $f/\|f\|$ være et normalt ortogonalt system.

12. Bevis for entydighedssætningen. Følgende bevis for entydighedssætningen skyldes Lebesgue. Vi kunde have udeladt dette bevis, da sætningen er indeholdt i Fejérs sætning, som bliver bevist senere.

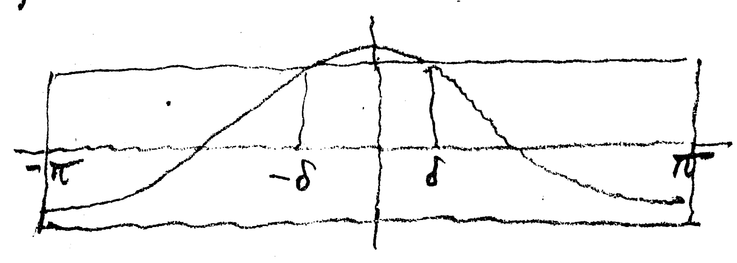
Vi beviser sætningen i dens anden form. Det er tilstrækkeligt at betragte det tilfælde, hvor f er reel. Thi af $f(x) \sim \sum 0 e^{inx}$ følger $\overline{f(x)} \sim \sum 0 e^{inx}$ og dermed $\Re f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}) \sim \sum 0 e^{inx}$ og $\Im f(x) = -\frac{1}{2} i (f(x) - \overline{f(x)}) \sim \sum 0 e^{inx}$.

Beviset er indirekte. Vi antager altså, at $f(k) \neq 0$ for et eller andet k. Vi kan antage, at $f(0) \neq 0$, og endda, at $f(0) > 0$. Thi af $f(x) \sim \sum 0 e^{inx}$ følger $f(x+k) \sim \sum 0 e^{inx}$ og $-f(x+k) \sim \sum 0 e^{inx}$.

Af kontinuiteten af f og $f(0) > 0$ følger eksistensen af et interval $\{x \mid |x| \leq \delta < \pi\}$, i hvilket $f(x) \geq c$ for et vist $c > 0$. Vi sætter $\sup_x |f(x)| = K$.
Beviset beror nu på konstruktion af trigonometriske polynomier, der kun antager reelle værdier, og som fremhæver punktet 0. Hertil betragter vi funktionen

$$\psi(x) = \cos x + (1 - \cos\delta) = \tfrac{1}{2} e^{ix} + \tfrac{1}{2} e^{-ix} + (1 - \cos\delta).$$

Denne funktion har følgende egenskaber (se figuren):



(i) $\psi(-\delta) = \psi(\delta) = 1$

(ii) $|\psi(x)| < 1$ for $\delta < |x| \leq \pi$

(iii) $\psi(x) > 1$ for $|x| < \delta$

(iv) $\psi(x) \geq q$ for $|x| \leq \frac{1}{2}\delta$ for et vist $q > 1$.

For et vilkårligt $N \in \mathbb{N}$ er $\psi(x)^N$ et reelt trigonometrisk polynomium. Vi betragter middelværdien

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\psi(x)^N\,dx.$$

Da f er ortogonal på alle funktionerne e^{inx}, er denne middelværdi $= 0$. På den anden side har vi

$$2\pi\mathcal{M} = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{-\frac{1}{2}\delta} + \int_{-\frac{1}{2}\delta}^{\frac{1}{2}\delta} + \int_{\frac{1}{2}\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} f(x)\,\psi(x)^N\,dx$$

$$\geq -(\pi-\delta)K + 0 + \delta c g^N + 0 - (\pi-\delta)K,$$

hvor højre side er > 0 for alle tilstrækkeligt store N.

13. Parsevals formel. Af entydighedssætningen i forbindelse med sætning 2 i §10 følger, at hvis Fourier rækken for en funktion $f \in \mathfrak{P}$ er absolut konvergent, da er f rækkens sumfunktion.

Thi lad $f(x) \sim \sum a_n e^{inx}$, og antag at rækken $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|$ er konvergent. Lad $s(x)$ betegne sumfunktionen for rækken $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$. Da gælder ifølge sætning 2 i §10, at $s(x) \sim \sum a_n e^{inx}$. De to funktioner f og s har altså samme Fourier række, og er derfor ifølge entydighedssætningen den samme funktion.

Som en vigtig anvendelse heraf betragter vi foldningen af to funktioner $f(x) \sim \sum a_n e^{inx}$ og $g(x) \sim \sum b_n e^{inx}$. Ifølge formel (9) i §9 har foldningen Fourierrækken $\sum a_n b_n e^{inx}$. Da rækkerne $\sum |a_n|^2$ og $\sum |b_n|^2$ er konvergente, og $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}|a_n|^2 + \frac{1}{2}|b_n|^2$, er rækken $\sum |a_n b_n|$ konvergent. Følgelig er foldningen af f og g sumfunktion for sin Fourier række, d.v.s. der gælder for alle $x \in \mathbb{R}$ formlen

$$\text{(9a)} \qquad \mathcal{M}_y\{f(x-y)\,g(y)\} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n b_n e^{inx}.$$

Svarende til formlerne (10) og (11) i § 9 får vi analogt

(10a) $$\underset{y}{M}\{f(x+y)\overline{g(y)}\} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n} e^{inx}$$

og

(11a) $$\underset{y}{M}\{f(x+y)\overline{f(y)}\} = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 e^{inx}.$$

Ved i de sidste to formler at sætte $x=0$ (og dagefter skrive x i stedet for y) får vi følgende fundamentale sætning:

Sætning 4. For to vilkårlige funktioner $f(x) \sim \sum a_n e^{inx}$ og $g(x) \sim \sum b_n e^{inx}$ i $\mathfrak{P}$ gælder formlen

(1) $$M\{f(x)\overline{g(x)}\} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Specielt gælder for enhver funktion $f(x) \sim \sum a_n e^{inx}$ i $\mathfrak{P}$ formlen

(2) $$M\{|f(x)|^2\} = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2.$$

Formlen (1), eller specialtilfældet (2), kaldes Parseval's formel.

Hvis vi i Parsevals formel (1) erstatter $g(x)$ med funktionen $\overline{g(x)}\, e^{inx} \sim \sum_p \overline{b_{n-p}}\, e^{ipx}$, får vi formlen

$$M\{f(x)\, g(x)\, e^{-inx}\} = \sum_p a_p b_{n-p},$$

hvor rækken til højre er absolut konvergent. Det er netop multiplikationssætningen (8) i § 8, ifølge hvilken den n^{te} Fourier konstant for produktet $f(x)g(x)$ er lig med $\sum_{p+q=n} a_p b_q$.

14. Ifølge sætning 1 i § 7 er differensen

$$M\{|f(x)|^2\} - \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

lig med infimum af mængden af tal

$$M\{|f(x) - \sum^* c_n e^{inx}|^2\}.$$

Specialtilfældet (2) af Parsevals formel er derfor ensgyldigt med følgende sætning.

Sætning 5. Enhver funktion $f \in \mathcal{P}$ kan approksimeres vilkårlig godt i middel kvadrat med trigonometriske polynomier

$$s(x) = \sum{}^{*} c_n e^{inx},$$

d.v.s. til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et trigonometrisk polynomium s, således at

$$\mathcal{M}\{|f(x) - s(x)|^2\} \leq \varepsilon$$

Mere præcist gælder:

Sætning 6. Hvis leddene i Fourier rækken for en funktion $f \in \mathcal{P}$ ordnes som led i en sædvanlig uendelig række $\sum_1^\infty \dots$, konvergerer denne afsnit i middel kvadrat mod f, d.v.s. hvis $f(x) \sim \sum a_n e^{inx}$, og $n_1, n_2, \dots$ er $\mathbb{Z}$ ordnet som en talfølge, gælder

$$\mathcal{M}\{|f(x) - (a_{n_1} e^{in_1 x} + \dots + a_{n_m} e^{in_m x})|^2\} \to 0 \text{ for } m \to \infty.$$

Thi ifølge sætning 1 i § 7 gælder

$$\mathcal{M}\{|f(x) - (a_{n_1} e^{in_1 x} + \dots + a_{n_m} e^{in_m x})|^2\} =$$

$$\mathcal{M}\{|f(x)|^2\} - (|a_{n_1}|^2 + \dots + |a_{n_m}|^2),$$

og højre side konvergerer mod 0 for $m \to \infty$.

15. Hilbert rum. En simpel formulering af nogle af de foregående resultater opnås ved at betragte Hilbert rummet $\mathcal{H}$ bestående af alle følger $a = (a_n) = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ af komplekse tal, eller om man vil alle komplekse funktioner på $\mathbb{Z}$, for hvilke rækken $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2$ er konvergent. Dette er et

vektorrum over $\mathbb{C}$ (et underrum af rummet af alle komplekse funktioner på $\mathbb{Z}$), thi når $a=(a_n)\in\mathcal{H}$ og $k\in\mathbb{C}$, gælder $ka=(ka_n)\in\mathcal{H}$, og når $a=(a_n)\in\mathcal{H}$ og $b=(b_n)\in\mathcal{H}$, gælder $a+b=(a_n+b_n)\in\mathcal{H}$, idet $|a_n+b_n|^2\leq 2|a_n|^2+2|b_n|^2$.

Ved det indre produkt af to elementer $a=(a_n)$ og $b=(b_n)$ af $\mathcal{H}$ forstås tallet

$$(a,b)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n\bar{b}_n.$$

Udtrykket

$$\|a\|=\sqrt{(a,a)}=\sqrt{\sum|a_n|^2}\quad(\geq 0)$$

kaldes *normen* af $a=(a_n)$, og normen $\|a-b\|$ af differensen $a-b=(a_n-b_n)$ kaldes *afstanden* mellem $a=(a_n)$ og $b=(b_n)$.

Til en vilkårlig funktion $f\in\mathcal{P}$ er der gennem Fourier rækken $\sum a_n e^{inx}$ for f tilordnet et element $a=(a_n)$ af $\mathcal{H}$. Entydighedssætningen udsiger, at den således bestemte afbildning af $\mathcal{P}$ ind i $\mathcal{H}$ er *injektiv*. Formlerne 1 og 7 i §8 viser, at når $f=f(x)$ svarer til $a=(a_n)$, svarer kf til ka for ethvert $k\in\mathbb{C}$, og når $f=f(x)$ svarer til $a=(a_n)$ og $g=g(x)$ svarer til $b=(b_n)$, svarer $f+g$ til $a+b$. Afbildningen er altså *lineær*. Endelig viser Parsevals ligning, at

(3) $$(f,g)=(a,b)$$

og specielt

(4) $$\|f\|=\|a\|,$$

altså at afbildningen *bevarer det indre produkt og normen*. Dermed gælder også $\|f-g\|=\|a-b\|$, d.v.s. afbildningen er *isometrisk*.

Kort udtrykt: Den ved Fourier rækken bestemte afbildning af $\mathcal{P}$ ind i $\mathcal{H}$ er en *injektiv homomorfi*.

<u>Bemærkninger</u>. 1. Den generelle form (3) af Parsevals ligning følger af specialtilfældet (4). Det indre produkt af to funktioner i $\mathfrak{P}$ kan nemlig udtrykkes ved normer, idet der gælder formlen

$$(f,g) = \frac{1}{4}\{\|f+g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - \|f-g\|^2 - i\|f-ig\|^2\}.$$

Thi ifølge formel (1) i §2 er

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\Re(f,g)$$

og altså

$$\|f+ig\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\Im(f,g)$$

$$\|f-g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\Re(f,g)$$

$$\|f-ig\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\Im(f,g).$$

På ganske tilsvarende måde udtrykkes det indre produkt af to elementer af $\mathcal{H}$ ved formlen

$$(a,b) = \frac{1}{4}\{\|a+b\|^2 + i\|a+ib\|^2 - \|a-b\|^2 - i\|a-ib\|^2\}.$$

Ved at anvende (4) på funktionerne $f+g$, $f+ig$, $f-g$, $f-ig$, der svarer til elementerne $a+b$, $a+ib$, $a-b$, $a-ib$, får vi (3).

2. Entydighedssætningen følger af specialtilfældet $\|f\| = \|a\|$ af Parsevals ligning. Thi at alle Fourier konstanter af f er 0, vil jo sige, at $a=0$. Ligningen viser altså, at $\|f\|=0$, hvoraf $f=0$.

3. Ligesom vi udledte multiplikationssætningen af Parsevals ligning, kan vi udlede Parsevals ligning af multiplikationssætningen. Thi når $f(x) \sim \sum a_n e^{inx}$ og $g(x) \sim \sum b_n e^{inx}$, viser multiplikationssætningen, at

$$\mathcal{M}\{f(x)g(x)\} = \sum a_p b_{-p}.$$

Når $g(x)$ erstattes med $\overline{g(x)} \sim \sum \bar{b}_{-n} e^{inx}$, fremkommer Parsevals ligning.

Fourier rækkens summabilitet. Fejérs og Weierstrass' sætninger. Divergente Fourier rækker.

16. Fejérs sætning. Vi har set, at Fourier rækken $\sum a_n e^{inx}$ for en funktion $f(x)$ i $\mathfrak{P}$ entydigt bestemmer funktionen. Det er derfor naturligt at spørge efter en metode til ud fra Fourier rækken at beregne funktionen. Konvergensen i middel kvadrat kan ikke opfattes som en løsning af dette problem, da den vedrører funktionen som helhed og ikke dens enkelte værdier. Ved behandlingen af problemet vil det være nødvendigt at vælge en bestemt orden af Fourier rækkens led (hvad der hidtil ikke var nødvendigt). Vi vælger den „naturlige" orden

$$a_0 + (a_1 e^{ix} + a_{-1} e^{-ix}) + \dots + (a_n e^{inx} + a_{-n} e^{-inx}) + \dots,$$

hvor led med modsatte indices er forenet til et led. Ved det n^{te} afsnit af rækken forstår vi derfor summen

$$U_n(x) = \sum_{p=-n}^{n} a_p e^{ipx}.$$

Det spørgsmål, som først frembyder sig, er om rækken er konvergent. Dette spørgsmål blev først strengt behandlet af Dirichlet, som viste, at rækken under visse indskrænkende antagelser om funktionen $f(x)$ for ethvert x er konvergent med summen $f(x)$. Men metoden svigter i almindelighed, idet der, som først vist af du Bois-Reymond, findes funktioner i $\mathfrak{P}$, for hvilke Fourier rækken (med den naturlige orden af leddene) er divergent for visse værdier af x. Bevis herfor vil blive givet senere. Hvis man betragter summabilitet i stedet for konvergens, får man imidlertid, som vist af Fejér, en fuldstændig løsning af problemet.

17. Vi omtaler kort definitionen af summabilitet (hvormed her menes Cesàro summabilitet af første orden). Lad $\sum_0^\infty u_n$ være en uendelig række med komplekse led og lad $U_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$ betegne dens n^{te} afsnit. Lad os betragte den n^{te} middelsum

$$S_n = \frac{U_0+U_1+\dots+U_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}(n+1-p)\,u_p = \sum_{p=0}^{n}\left(1-\frac{p}{n+1}\right)u_p .$$

Rækken kaldes summabel med summen U, hvis $S_n \to U$ for $n \to \infty$.

Bemærkning. Hvis rækken er konvergent med summen U, er den også summabel med summen U. På den anden side findes der summable rækker, der ikke er konvergente, f.eks. rækken $\sum_0^\infty (-1)^n = 1-1+1-1+\cdots$.

18. Vi kan nu formulere Fejérs sætning:

Sætning 1. For enhver funktion $f = f(x)$ fra $\mathcal{P}$ er Fourier rækken

$$f(x) \sim a_0 + (a_1 e^{ix} + \underline{a}_1 e^{-ix}) + \dots + (a_n e^{inx} + \underline{a}_n e^{-inx}) + \dots$$

summabel, og endda uniformt summabel, med summen $f(x)$, d.v.s. den n^{te} middelsum

$$S_n(x) = \frac{U_0(x)+U_1(x)+\dots+U_n(x)}{n+1} = \sum_{p=-n}^{n}\left(1-\frac{|p|}{n+1}\right)a_p e^{ipx}$$

konvergerer for $n \to \infty$ uniformt på $\mathbb{R}$ mod $f(x)$.

Ved brug af formel (12) i §9 ser vi, at funktionerne $U_n(x)$ og $S_n(x)$ er foldningerne af $f(x)$ med de trigonometriske polynomier

$$D_n(x) = \sum_{p=-n}^{n} e^{ipx} \quad \text{og} \quad K_n(x) = \sum_{p=-n}^{n}\left(1-\frac{|p|}{n+1}\right)e^{ipx},$$

d.v.s.

$$U_n(x) = \underset{y}{M}\{f(x-y)D_n(y)\} \quad \text{og} \quad S_n(x) = \underset{y}{M}\{f(x-y)K_n(y)\}.$$

Disse trigonometriske polynomier $D_n(x)$ og $K_n(x)$ kaldes henholdsvis Dirichlet kernen og Fejér kernen. Man ser, at $D_n(x)$ og $K_n(x)$ er henholdsvis det n^{te} afsnit og den n^{te} middelsum for den trigonometriske række $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{inx}$. Ved simple omregninger finder vi

$$D_n(x) = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x} = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{2\sin^2\frac{1}{2}x}$$

og videre

$$K_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_n(x)}{n+1} = \frac{1}{n+1}\,\frac{1-\cos(n+1)x}{2\sin^2\frac{1}{2}x} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2.$$

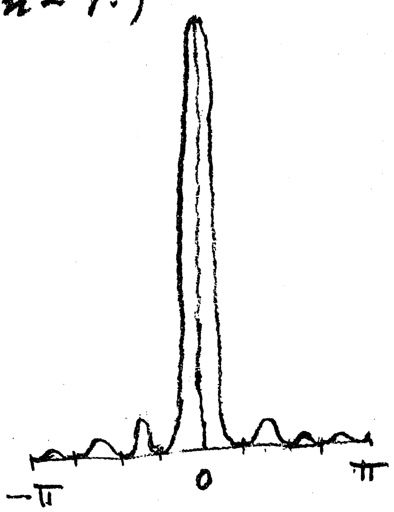
Beviset for Fejérs satning beror på følgende egenskaber ved Fejér kernen $K_n(x)$:

(a) $M\{K_n(x)\} = 1$

(b) $K_n(x) \geq 0$

(c) $K_n(x) \leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\delta}$ for $\delta \leq |x| \leq \pi$ for ethvert $\delta \in]0,\pi[$.

Egenskaben (a) følger af, at $K_n(x)$ er et trigonometrisk polynomium med konstant leddet 1. Egenskaberne (b) og (c) følger af det sidste udtryk for $K_n(x)$. Hvad (c) angår, er det eneste det kommer an på, at $\frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\delta}$ for fast δ konvergerer mod 0 for $n \to \infty$. [Figuren viser $K_n(x)$ for $n = 7$.)



Da f er kontinuert og periodisk, er f begrænset og uniformt kontinuert. Sæt

$$\sup_x |f(x)| = C \quad \text{og} \quad \sup_{\substack{x,z \\ |x-z|\leq\delta}} |f(x)-f(z)| = \omega(\delta).$$

Da gælder $\omega(\delta)\to 0$ for $\delta\to 0$.

For ethvert $x\in\mathbb{R}$ og ethvert $n\in\mathbb{N}$ finder vi ved brug af (a)

$$f(x)-S_n(x) = \underset{y}{M}\{f(x)K_n(y)\} - \underset{y}{M}\{f(x-y)K_n(y)\}$$
$$= \underset{y}{M}\{[f(x)-f(x-y)]\,K_n(y)\},$$

og altså ved brug af (b)

$$|f(x)-S_n(x)| \leq \underset{y}{M}\{|f(x)-f(x-y)|\,K_n(y)\}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x-y)|\,K_n(y)\,dy.$$

For et vilkårligt $\delta\in\,]0,\pi[$ fås derfor ved brug af (a), (b), (c)

$$|f(x)-S_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\cdots\right]$$
$$\leq \omega(\delta)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(y)\,dy + \frac{1}{2\pi}\,2C\,\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\delta}\,2(\pi-\delta)$$
$$\leq \omega(\delta)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\,dy + 2C\,\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\delta}$$
$$= \omega(\delta) + 2C\,\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\delta}.$$

Det sidste udtryk er uafhængigt af x. Vi finder altså

$$\sup_x |f(x)-S_n(x)| \leq \omega(\delta) + 2C\,\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\delta}.$$

For et givet $\varepsilon>0$ kan vi nu først vælge $\delta\in\,]0,\pi[$ således, at $\omega(\delta)\leq\frac{1}{2}\varepsilon$, og dernæst $n_0\in\mathbb{N}$ således, at $2C\,\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\delta}\leq\frac{1}{2}\varepsilon$ for $n\geq n_0$. Vi har da

$$\sup_x |f(x)-S_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for } n\geq n_0.$$

Hermed er Fejérs sætning bevist.

Entydighedssætningen er en umiddelbar følge af Fejérs sætning; thi hvis $f(x)$ og $g(x)$ har samme Fourier række, og $S_n(x)$ betegner den n^{te} middelsum for denne række, konvergerer $S_n(x)$ både mod $f(x)$ og mod $g(x)$, og de to funktioner er altså identiske.

19. Weierstrass' sætning. Fejérs sætning indeholder følgende klassiske sætning af Weierstrass:

Sætning 2. Enhver funktion $f \in \mathcal{P}$ kan approksimeres uniformt med vilkårlig nøjagtighed med trigonometriske polynomier

$$s(x) = \sum{}^* c_n e^{inx},$$

d.v.s. til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et trigonometrisk polynomium s, således at

$$\sup_x |f(x) - s(x)| \leq \varepsilon.$$

Denne sætning indeholder sætning 5 i § 14 om approksimation i middelkvadrat. Thi af uligheden $\sup_x |f(x) - s(x)| \leq \varepsilon$ følger $M\{|f(x) - s(x)|^2\} \leq \varepsilon^2$.

I sin formulering har Weierstrass' sætning intet med Fourier rækker at gøre, og der findes beviser, som ikke gør brug af Fourier rækken.

Den omvendte sætning til Weierstrass' sætning er indlysende: Hvis en funktion $f = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kan approksimeres uniformt med vilkårlig nøjagtighed med trigonometriske polynomier $s(x) = \sum{}^* c_n e^{inx}$, er den en kontinuert funktion med perioden 2π.

20. I vektorrummet $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ af alle funktioner $f = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definerer vi den uniforme

norm af en funktion f som tallet

$$\|f\|_U = \sup_x |f(x)|,$$

og den *uniforme afstand* mellem to funktioner f og g som tallet $\|f-g\|_U$. Da vi ikke på forhånd vil udelukke ubegrænsede funktioner fra vore betragtninger, må vi affinde os med, at normen kan være ∞. For de begreber, vi er interesseret i, er dette uden betydning. Afslutningen af en delmængde $\mathfrak{A}$ af $\mathbb{F}[\mathbb{R},\mathbb{C}]$ i den uniforme metrik vil blive betegnet $Cl_U\mathfrak{A}$.

Med brug af denne betegnelse kan vi sammenfatte Weierstrass' sætning og dens omvendte sætning i følgende sætning, der også kaldes Weierstrass' sætning:

Sætning 3. *Afslutningen i den uniforme metrik af mængden af trigonometriske polynomier*

$$s(x) = \sum{}^{*} a_n e^{inx}$$

er identisk med mængden af kontinuerte funktioner med perioden 2π. I symboler

$$\mathfrak{P} = Cl_U\{s(x)\}.$$

Funktionsmængden $\mathfrak{P}$, som vi oprindelig karakteriserede *deskriptivt* som mængden af kontinuerte funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med perioden 2π, kan altså også karakteriseres *konstruktivt* som afslutningen i den uniforme metrik af mængden $\{s(x)\}$ af trigonometriske polynomier $s(x)$.

21. Eksistens af divergente Fourier rækker. Vi vil vise, at der for ethvert $x_0 \in \mathbb{R}$ findes en funktion $f \in \mathfrak{P}$, hvis Fourier rækken er divergent i punktet x_0. Vi vil endda vise mere: For ethvert $x_0 \in R$ findes en funktion $f \in \mathcal{P}$, for hvilken afsnittene i Fourier rækken i punktet x_0 danner en ubegrænset talfølge.

Ifølge § 18 er afsnittene bestemt ved formlen

$$U_n(x_0) = \mathcal{M}\{f(x_0-y)D_n(y)\}.$$

Når f gennemløber $\mathcal{P}$, vil den ved $g(y) = f(x_0-y)$ bestemte funktion g gennemløbe $\mathcal{P}$. Resultatet vil derfor være en konsekvens af følgende to sætninger:

Sætning A. Lad G_n, $n \in \mathbb{N}$, være en følge af funktioner i $\mathcal{P}$, og betragt for ethvert $n \in \mathbb{N}$ den funktion $L_n : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$, der er bestemt ved

$$L_n(f) = \mathcal{M}\{f(x)\, G_n(x)\}.$$

Hvis det for ethvert $f \in \mathcal{P}$ gælder, at talfølgen $L_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, er begrænset, da er talfølgen $\mathcal{M}\{|G_n(x)|\}$, $n \in \mathbb{N}$, begrænset.

Sætning B. Talfølgen $\mathcal{M}\{|D_n(x)|\}$, $n \in \mathbb{N}$, er ikke begrænset.

22. For at bevise sætning A (der er et specialtilfælde af den såkaldte Banach-Steinhaus'ske sætning) betragter vi vektorrummet $\mathcal{P}$ med den uniforme metrik. Med denne metrik er $\mathcal{P}$ et fuldstændigt metrisk rum. For ethvert $G \in \mathcal{P}$ er den funktion $L : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$, der bestemmes ved

$$L(f) = \mathcal{M}\{f(x)\, G(x)\}$$

åbenbart lineær. Desuden er den kontinuert; thi for ethvert $f \in \mathcal{P}$ gælder

$$|\mathcal{L}(f)| \leq \mathcal{M}\{|f(x)||\mathcal{G}(x)|\} \leq \|f\|_U \mathcal{M}\{|\mathcal{G}(x)|\},$$

og for to funktioner $f_1, f_2 \in \mathcal{P}$ gælder altså

$$|\mathcal{L}(f_1) - \mathcal{L}(f_2)| \leq \|f_1 - f_2\|_U \mathcal{M}\{|\mathcal{G}(x)|\}.$$

Specielt gælder for ethvert $f \in \mathcal{P}$ med $\|f\|_U \leq 1$, at $|\mathcal{L}(f)| \leq \mathcal{M}\{|\mathcal{G}(x)|\}$. Vi vil vise, at der endda gælder

$$\sup\{|\mathcal{L}(f)| \mid f \in \mathcal{P}, \|f\|_U \leq 1\} = \mathcal{M}\{|\mathcal{G}(x)|\}.$$

Hvis $\mathcal{G}$ ikke antager værdien 0, fremgår dette ved at betragte funktionen $f(x) = \overline{\mathcal{G}(x)}/|\mathcal{G}(x)|$, for hvilken $\|f\|_U = 1$ og $\mathcal{L}(f) = \mathcal{M}\{|\mathcal{G}(x)|\}$. Hvis $\mathcal{G}$ antager værdien 0, fremgår det ved for et vilkårligt $\delta \in \mathbb{R}_+$ at betragte funktionen $f(x) = \overline{\mathcal{G}(x)}/(|\mathcal{G}(x)| + \delta)$, for hvilken $\|f\|_U < 1$ og

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{M}\left\{\frac{|\mathcal{G}(x)|^2}{|\mathcal{G}(x)|+\delta}\right\} > \mathcal{M}\left\{\frac{|\mathcal{G}(x)|^2 - \delta^2}{|\mathcal{G}(x)|+\delta}\right\}$$

$$= \mathcal{M}\{|\mathcal{G}(x)| - \delta\} = \mathcal{M}\{|\mathcal{G}(x)|\} - \delta.$$

Efter disse forberedelser går vi nu til beviset for sætning A.

For ethvert $p \in \mathbb{N}$ betragter vi mængden

$$\mathcal{A}_p = \{f \in \mathcal{P} \mid \sup_n |\mathcal{L}_n(f)| \leq p\}.$$

Da $\mathcal{A}_p$ er fællesmængden for mængderne

$$\{f \in \mathcal{P} \mid |\mathcal{L}_n(f)| \leq p\},\ n \in \mathbb{N},$$

som hver for sig er afsluttet (da $\mathcal{L}_n$ er kontinuert), er også $\mathcal{A}_p$ afsluttet. Endvidere gælder $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots$, og da det er forudsat, at $\sup_n |\mathcal{L}_n(f)| < +\infty$ for ethvert $f \in \mathcal{P}$, gælder

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots = \mathcal{P}.$$

Heraf slutter vi (efter Baire), at der må findes et p, for hvilket $\mathfrak{A}_p$ indeholder en kugle $B(f_0, \rho_0) = \{ f \in \mathcal{P} \mid \|f - f_0\|_U \leq \rho_0 \}$. Thi hvis ingen af mængderne $\mathfrak{A}_p$ indeholdt en kugle, kommer vi på følgende måde til en modstrid:

Da $\mathfrak{A}_1$ ikke indeholder en kugle, gælder $\mathfrak{A}_1 \subset \mathcal{P}$. Der findes altså et $f_1 \in \mathcal{P} \setminus \mathfrak{A}_1$, og dermed, da $\mathfrak{A}_1$ er afsluttet, en kugle $B(f_1, \rho_1)$, der er disjunkt med $\mathfrak{A}_1$. Da $\mathfrak{A}_2$ ikke indeholder kuglen $B(f_1, \frac{1}{2}\rho_1)$, findes et $f_2 \in B(f_1, \frac{1}{2}\rho_1)$, som ikke tilhører $\mathfrak{A}_2$, og dermed, da $\mathfrak{A}_2$ er afsluttet, en kugle $B(f_2, \rho_2)$, der er disjunkt med $\mathfrak{A}_2$. Vi kan vælge denne sådan, at $\rho_2 \leq \frac{1}{2}\rho_1$; da er $B(f_2, \rho_2)$ indeholdt i $B(f_1, \rho_1)$. Ved at fortsætte på denne måde ser vi, at der findes en følge af kugler $B(f_p, \rho_p)$ med $\rho_{p+1} \leq \frac{1}{2}\rho_p$, således at $B(f_p, \rho_p)$ er disjunkt med $\mathfrak{A}_p$, og hver kugle indeholder den efterfølgende. Der må gælde $\rho_p \to 0$ for $p \to \infty$. Da $f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots$ tilhører $B(f_p, \rho_p)$, gælder $\|f_p - f_q\|_U \leq \rho_p$ for $q > p$. Følgen $f_1, f_2, \ldots$ er derfor en fundamentalfølge, og konvergerer altså (da rummet er fuldstændigt) mod et $f \in \mathcal{P}$, som må tilhøre enhver af kuglerne $B(f_p, \rho_p)$. Altså tilhører f ingen af mængderne $\mathfrak{A}_p$, i strid med at disses foreningsmængde er $\mathcal{P}$.

Der findes altså et p, lad sige p_0, således at $\mathfrak{A}_{p_0}$ indeholder en kugle $B(f_0, \rho_0)$. For alle f i denne kugle gælder altså $|L_n(f)| \leq p_0$ for ethvert n. For ethvert $h \in \mathcal{P}$, for hvilket $\|h\|_U \leq 1$, tilhører både $f_0+\rho_0 h$ og $f_0-\rho_0 h$ kuglen $B(f_0;\rho_0)$. Der gælder altså for ethvert n

$$|\mathcal{L}_n(f_0+\rho_0 h)|\leq p_0 \quad \text{og} \quad |\mathcal{L}_n(f_0-\rho_0 h)|\leq p_0$$

og altså $$|\mathcal{L}_n(f_0+\rho_0 h)-\mathcal{L}_n(f_0-\rho_0 h)|\leq 2p_0,$$

hvoraf (da $\mathcal{L}_n$ er lineær) $|2\rho_0\mathcal{L}_n(h)|\leq 2p_0$, altså $|\mathcal{L}_n(h)|\leq \frac{p_0}{\rho_0}$. For ethvert n gælder altså

$$\mathcal{M}\{|G_n(x)|\}=\sup\{|\mathcal{L}_n(h)|\mid h\in\mathcal{P}, \|h\|_U\leq 1\}\leq\frac{p_0}{\rho_0}.$$

<u>23</u>. Beviset for sætning B er let. Vi har

$$\mathcal{M}\{|D_n(x)|\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{|\sin\frac{1}{2}x|}dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{\sin\frac{1}{2}x}dx.$$

For positive x gælder $\sin\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}x$. Altså fås

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{|D_n(x)|\}&>\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{\frac{1}{2}x}dx\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin y|}{y}dy\\ &>\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi}\frac{|\sin y|}{\nu\pi}dy\\ &=\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{2}{\nu\pi}=\frac{4}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Ubegrænsetheden af talfølgen $\mathcal{M}\{|D_n(x)|\}$, $n\in\mathbb{N}$, følger således af divergensen af den harmoniske række

Bemærkninger om diskontinuerte funktioner. Funktioner med vilkårlig periode.

24. Grunden til, at vi hidtil kun har betragtet mængden $\mathcal{P}$ af kontinuerte funktioner med perioden 2π, er den, at vi fra begyndelsen har haft Weierstrass' sætning for øje, som karakteriserer netop denne funktionsmængde.

Teorien for Fourier rækker kan imidlertid udvides til mere omfattende funktionsmængder. Vi får brug for et enkelt resultat vedrørende stykkevis kontinuerte funktioner. En funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kaldes stykkevis kontinuert, hvis den i ethvert begrænset interval kun har et endeligt antal diskontinuitetspunkter, og i ethvert diskontinuitetspunkt har en grænseværdi fra venstre og en grænseværdi fra højre.

Lad $\mathcal{P}^*$ betegne mængden af stykkevis kontinuerte funktioner med perioden 2π. Den er ligesom $\mathcal{P}$ et vektorrum over $\mathbb{C}$. Ligesom i $\mathcal{P}$ indfører vi i $\mathcal{P}^*$ indre produkt, norm, og afstand. Man bemærker, at normen $\|f\|$ for en funktion $f \in \mathcal{P}^*$ er 0, hvis og kun hvis $f(x)$ er 0 undtagen i de eventuelle diskontinuitetspunkter, og følgelig at afstanden $\|f-g\|$ mellem to funktioner f og g fra $\mathcal{P}^*$ er 0, hvis og kun hvis de stemmer overens i ethvert punkt, hvor de begge er kontinuerte. Bortset fra de små forandringer, der fremgår heraf, gælder alt i §§ 2–5 uforandret for $\mathcal{P}^*$. Idet Fourierrækken for en funktion $f \in \mathcal{P}^*$ ligesom før defineres ved

$$f(x) \sim \sum a_n e^{inx}, \quad \text{hvor} \quad a_n = M\{f(x)e^{-inx}\},$$

gælder atter sætning 1 i § 7. Vi vil vise, at der også
i dette tilfælde gælder Parsevals formel

$$M\{|f(x)|^2\} = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2.$$

I følge den lige nævnte sætning er dette ensbetydende med, at enhver funktion $f \in \mathcal{P}^*$ kan approksimeres vilkårligt godt i middel kvadrat med trigonometriske polynomier, altså med at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et trigonometrisk polynomium s, for hvilket $\|f - s\| < \varepsilon$. Da dette vides at gælde for funktioner i $\mathcal{P}$, er det tilstrækkeligt at vise, at enhver funktion $f \in \mathcal{P}^*$ kan approksimeres vilkårligt godt i middel kvadrat med funktioner fra $\mathcal{P}$. Dette indses således.

Sæt $\sup_x |f(x)| = C$, og antag, at f i et periodeinterval har k diskontinuitetspunkter. Lad $\delta > 0$ være valgt mindre end den korteste afstand mellem to diskontinuitetspunkter. Betegn nu med g den funktion i $\mathcal{P}$, der fremgår af f ved for hvert diskontinuitetspunkt x_0 at erstatte f i intervallet $[x_0 - \frac{1}{2}\delta, x_0 + \frac{1}{2}\delta]$ med den lineære funktion, der i endepunkterne stemmer overens med f. Da gælder åbenbart $\|f - g\|^2 \leq \frac{1}{2\pi} k (2C)^2 \delta$.

<u>25.</u> Ved den simple transformation $\frac{2\pi}{p} x = x'$ kan vi gå over fra funktioner med perioden 2π til funktioner med en vilkårlig periode $p > 0$.

Middelværdien defineres her ved

$$M\{f(x)\} = \frac{1}{p} \int_a^{a+p} f(x)\,dx.$$

I stedet for de rene svingninger e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, får vi nu funktionerne

$$e^{in\frac{2\pi}{p}x}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

For en vilkårlig stykkevis kontinuert funktion f med perioden p har vi Fourierrækken

$$f(x) \sim \sum a_n e^{in\frac{2\pi}{p}x}, \text{ hvor } a_n = \mathcal{M}\{f(x)e^{-in\frac{2\pi}{p}x}\}.$$

Der gælder atter Parsevals formel

$$\mathcal{M}\{|f(x)|^2\} = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2,$$

eller udførligt skrevet

$$\int_a^{a+p} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{p} \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \int_a^{a+p} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{p}x} dx \right|^2.$$

Med henblik på senere anvendelse formulerer vi dette resultat lidt anderledes:

<u>Sætning</u>. <u>Lad</u> $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ <u>være en vilkårlig stykkevis kontinuert funktion, der er 0 uden for et interval af længden p, og betragt dens Fourier transformerede, d.v.s. funktionen</u> $\hat{f}(\lambda): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ <u>bestemt ved</u>

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

<u>Da gælder</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{p} \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}\left(n\frac{2\pi}{p}\right)\right|^2.$$

Integralerne er naturligvis i realiteten integraler over et begrænset interval, men vi har valgt at skrive dem som integraler over $\mathbb{R}$ for at give formlen det simplest mulige udseende.

26. Fourier rækker for kontinuerte funktioner af m variable med perioden 2π i hver variabel. Vi benytter den vektorielle skrivemåde $x=(x_1,\dots,x_m)$ for punkter i $\mathbb{R}^m$. Det indre produkt af to vektorer $x=(x_1,\dots,x_m)$ og $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ defineres ved $(\lambda,x)=\lambda_1x_1+\dots+\lambda_mx_m$.

Med $\mathcal{P}_m$ betegner vi mængden af kontinuerte funktioner $f=f(x)=f(x_1,\dots,x_m):\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$, som har perioden 2π efter hver variabel (for faste værdier af de øvrige variable). Dette medfører, at

$$f(x_1+n_1 2\pi,\dots,x_m+n_m 2\pi)=f(x_1,\dots,x_m)$$

for vilkårlige $n_1,\dots,n_m\in\mathbb{Z}$.

For en sådan funktion definerer vi middelværdien ved

$$\mathcal{M}\{f\}=\mathcal{M}\{f(x)\}=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}f(x_1,\dots,x_m)\,dx_1\cdots dx_m$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{a_1}^{a_1+2\pi}\cdots\int_{a_m}^{a_m+2\pi}f(x_1,\dots,x_m)\,dx_1\cdots dx_m.$$

Dette kan også skrives

$$\mathcal{M}\{f(x)\}=\mathcal{M}_{x_m}\cdots\mathcal{M}_{x_1}\{f(x_1,\dots,x_m)\}.$$

Hvis f er et produkt $f_1(x_1)\cdots f_m(x_m)$ af kontinuerte funktioner $f(x_1),\dots,f_m(x_m)$ af hver af de variable med perioden 2π, gælder

$$\mathcal{M}\{f(x)\}=\mathcal{M}_{x_1}\{f_1(x_1)\}\cdots\mathcal{M}_{x_m}\{f_m(x_m)\}.$$

Mængden $\mathcal{P}_m$ er åbenbart et vektorrum over $\mathbb{C}$. Nøjagtigt som i $\mathcal{P}$ definerer vi i $\mathcal{P}_m$ det indre produkt ved $(f,g)=\mathcal{M}\{f\bar{g}\}$, normen ved

$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{M\{|f|^2\}}$, afstanden ved $\|f-g\|$, o.s.v.

En ren svingning $e^{i(\lambda,x)} = e^{i(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m)}$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, tilhører $\mathcal{P}_m$, hvis og kun hvis $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}^m$. De rene svingninger

$$e^{i(n,x)} = e^{i(n_1 x_1 + \cdots + n_m x_m)}, \quad n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$$

udgør et normalt ortogonalt system i $\mathcal{P}_m$. Thi for ethvert $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$ gælder

$$M\{|e^{i(n,x)}|^2\} = M\{1\} = 1,$$

og for $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$, $p = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{Z}^m$ og $n \neq p$ gælder

$$M\{e^{i(n,x)} e^{-i(p,x)}\} = M\{e^{i(n_1-p_1)x_1} \cdots e^{i(n_m-p_m)x_m}\}$$
$$= \underset{x_1}{M}\{e^{i(n_1-p_1)x_1}\} \cdots \underset{x_m}{M}\{e^{i(n_m-p_m)x_m}\} = 0,$$

idet mindst en af faktorerne på højre side er 0.

Fourierkonstanterne for en funktion $f \in \mathcal{P}_m$ defineres ved

$$a_n = a_{n_1, \ldots, n_m} = M\{f(x) e^{-i(n,x)}\},$$

og med disse som koefficienter dannes Fourierrækken

$$f(x) \sim \sum a_n e^{i(n,x)}$$

eller

$$f(x_1, \ldots, x_m) \sim \sum a_{n_1, \ldots, n_m} e^{i(n_1 x_1 + \cdots + n_m x_m)}.$$

De tidligere resultater vedrørende funktioner af en variabel kan alle generaliseres til funktioner af m variable. Vi vil indskrænke os til at udføre dette for Fejérs sætning og Weierstrass' sætning.

27. Fejérs sætning for funktioner af m variable.

Ud fra Fourier rækkens afsnit

$$U_n(x) = \sum_{p_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{p_m=-n_m}^{n_m} a_p e^{i(p,x)}, \quad n_1 \geq 0, \ldots, n_m \geq 0,$$

danner vi middelsummerne

$$S_n(x) = \frac{1}{(n_1+1)\cdots(n_m+1)} \sum_{p_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{p_m=0}^{n_m} U_p(x)$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)\cdots(n_m+1)} \sum_{p_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{p_m=-n_m}^{n_m} (n_1+1-|p_1|)\cdots(n_m+1-|p_m|) a_p e^{i(p,x)}$$

$$= \sum_{p_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{p_m=-n_m}^{n_m} \left(1-\frac{|p_1|}{n_1+1}\right)\cdots\left(1-\frac{|p_m|}{n_m+1}\right) a_p e^{i(p,x)}.$$

Vi vil bevise følgende analogon til Fejérs sætning.

Sætning 1. For enhver funktion $f = f(x) \in \mathfrak{P}_m$ konvergerer middelsummen $S_n(x)$ uniformt mod $f(x)$ for $n_1 \to \infty, \ldots, n_m \to \infty$.

For at godtgøre dette bemærker vi, at der svarende til formel (12) i §9 gælder, at når $f(x) \sim \sum a_n e^{i(n,x)}$ og $g(x) = \sum^* b_n e^{i(n,x)}$, gælder

$$\underset{y}{M}\{f(x-y)\,g(y)\} = \sum^* a_n b_n e^{i(n,x)}.$$

Thi

$$\underset{y}{M}\{f(x-y) \textstyle\sum^* b_n e^{i(n,y)}\}$$

$$= \sum^* \underset{y}{M}\{f(x-y)\, e^{-i(n,x-y)}\} b_n e^{i(n,x)}$$

$$= \sum^* \underset{z}{M}\{f(z)\, e^{-i(n,z)}\} b_n e^{i(n,x)} = \sum^* a_n b_n e^{i(n,x)}.$$

Følgelig gælder

$$S_n(x) = \underset{y}{M}\Big\{f(x-y)\sum_{p_1=-n_1}^{n_1}\cdots\sum_{p_m=-n_m}^{n_m}\Big(1-\frac{|p_1|}{n_1+1}\Big)\cdots\Big(1-\frac{|p_m|}{n_m+1}\Big)e^{i(p,y)}\Big\}$$

$$= \underset{y}{M}\Big\{f(x-y)\sum_{p_1=-n_1}^{n_1}\Big(1-\frac{|p_1|}{n_1+1}\Big)e^{ip_1y_1}\cdots\sum_{p_m=-n_m}^{n_m}\Big(1-\frac{|p_m|}{n_m+1}\Big)e^{ip_my_m}\Big\}.$$

I dette udtryk er summerne

$$K_{n_j}(y_j) = \sum_{p_j=-n_j}^{n_j}\Big(1-\frac{|p_j|}{n_j+1}\Big)e^{ip_jy_j}$$

de sædvanlige Fejér kerner i en variabel. Ved at sætte

$$K_n(y) = K_{n_1}(y_1)\cdots K_{n_m}(y_m)$$

får vi altså

$$S_n(x) = \underset{y}{M}\{f(x-y)\,K_n(y)\}.$$

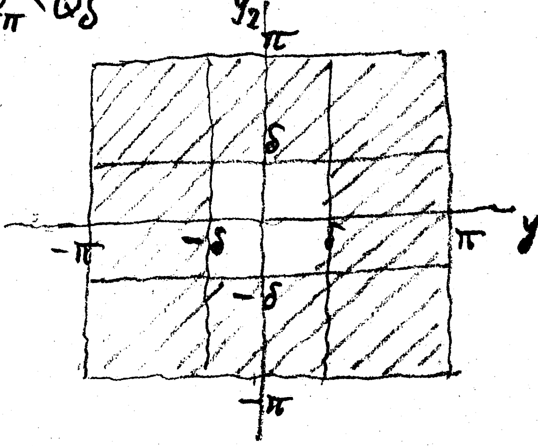
Beviset beror nu på følgende egenskaber ved kernen $K_n(y)$:

(a) $M\{K_n(y)\} = 1$.

(b) $K_n(y) \geq 0$

(c) Lad Q_π (se figuren) betegne mængden $[-\pi,\pi]^m$, og lad Q_δ for $\delta \in]0,\pi[$ betegne mængden $[-\delta,\delta]^m$. Da gælder for ethvert fast δ, at

$$\rho_n(\delta) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{Q_\pi \setminus Q_\delta} K_n(y)\,dy_1\cdots dy_m \to 0 \text{ for } n_1\to\infty,\dots,n_m\to\infty.$$



Egenskaberne (a) og (b) følger umiddelbart af de tilsvarende egenskaber ved Fejér kernerne $K_{n_j}(y_j)$ i en variabel. For at godtgøre egenskaben (c) bemærker vi, at for ethvert $y \in Q_\pi \setminus Q_\delta$ gælder $\delta \leq |y_j| \leq \pi$ for mindst et $j \in \{1, \dots, m\}$, og følgelig

$$K_n(y) \leq \frac{1}{n_1+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\delta} K_{n_2}(y_2) \cdots K_{n_m}(y_m)$$

$$+ \cdots$$

$$+ K_{n_1}(y_1) \cdots K_{n_{m-1}}(y_{m-1}) \frac{1}{n_m+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\delta}.$$

Altså er $\rho_n(\delta)$ højst lig $\frac{1}{(2\pi)^m}$ gange integralet over $Q_\pi \setminus Q_\delta$ af funktionen på højre side, og så meget mere er $\rho_n(\delta)$ altså højst lig $\frac{1}{(2\pi)^m}$ gange integralet over hele Q_π af funktionen på højre side. Dette viser at

$$\rho_n(\delta) \leq \left(\frac{1}{n_1+1} + \cdots + \frac{1}{n_m+1}\right) \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\delta},$$

hvoraf (c) følger.

Beviset for sætning 1 forløber nu således: Af udtrykket for $\sigma_n(x)$ følger ved brug af (a)

$$f(x) - \sigma_n(x) = \underset{y}{M}\{[f(x) - f(x-y)] K_n(y)\},$$

hvoraf ved brug af (b)

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \leq \underset{y}{M}\{|f(x) - f(x-y)| K_n(y)\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m}\left[\int_{Q_\delta} + \int_{Q_\pi \setminus Q_\delta}\right] |f(x) - f(x-y)| K_n(y)\, dy_1 \cdots dy_m$$

for ethvert $\delta \in]0, \pi[$. Sæt nu

$$\sup_x |f(x)| = C \quad \text{og} \quad \sup_{\substack{x,z \\ |x_1 - z_1| \leq \delta \\ \cdots \\ |x_m - z_m| \leq \delta}} |f(x) - f(z)| = \omega(\delta);$$

da gælder $\omega(\delta)\to 0$ for $\delta\to 0$. Ved brug af (a) og (b) fås

$$|f(x)-S_n(x)| \leq \omega(\delta)\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{Q_\delta} K_n(y)\,dy_1\cdots dy_m + 2C\,\varrho_n(\delta)$$

$$\leq \omega(\delta) + 2C\,\varrho_n(\delta).$$

For et givet $\varepsilon>0$ kan vi nu først vælge $\delta\in\,]0,\pi[$ således, at $\omega(\delta)\leq\frac{1}{2}\varepsilon$; dernæst kan vi under brug af (c) vælge $n_{10},\dots,n_{m0}\in\mathbb{N}$ således, at $2C\,\varrho_n(\delta)\leq\frac{1}{2}\varepsilon$ når $n_1\geq n_{10},\dots,n_m\geq n_{m0}$. Vi har da

$$\sup_x|f(x)-S_n(x)|\leq\varepsilon \quad \text{for } n_1\geq n_{10},\dots,n_m\geq n_{m0},$$

hvormed sætningen er bevist.

28. Weierstrass' sætning for funktioner af m variable. Sætning 1 indeholder følgende analogon til Weierstrass' sætning:

Sætning 2. Enhver funktion $f\in\mathcal{P}_m$ kan approksimeres uniformt med vilkårlig nøjagtighed med trigonometriske polynomier

$$s(x)=\sum{}^{*} c_n e^{i(n,x)} = \sum{}^{*} c_{n_1,\dots,n_m} e^{i(n_1x_1+\cdots+n_mx_m)},$$

d.v.s. til ethvert $\varepsilon>0$ findes et trigonometrisk polynomium s, således at

$$\sup_x|f(x)-s(x)|\leq\varepsilon.$$

Den omvendte sætning er indlysende. Idet vi indfører den uniforme metrik i $\mathbb{F}(\mathbb{R}^m,\mathbb{C})$ ligesom for funktioner af en variabel og for en delmængde $\mathfrak{A}$ af $\mathbb{F}(\mathbb{R}^m,\mathbb{C})$ betegner afslutningen i den uniforme metrik med $Cl_U\mathfrak{A}$, får vi følgende hovedsætning:

Sætning 3. Afslutningen i den uniforme metrik af mængden af trigonometriske polynomier $s(x) = \sum^* c_n e^{i(n,x)}$, $\mathbb{R}^m$ er identisk med mængden af kontinuerte funktioner i $\mathbb{R}^m$ med perioden 2π efter hver variabel. I symboler

$$\mathcal{P}_m = Cl_U\{s(x)\}.$$

Kapitel 2. Næstenperiodiske funktioner. Elementær teori.

Definition af en næsten periodisk funktion.

29. Problemstillingen. Vi vender nu tilbage til betragtning af funktioner $f = f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ af en variabel. Vi betragter mængden af alle trigonometriske polynomier

$$s(x) = \sum^* c_\lambda e^{i\lambda x}$$

med vilkårlige komplekse koefficienter og vilkårlige reelle frekvenser λ. Vi danner afslutningen $Cl_U\{s(x)\}$ i den uniforme metrik af denne mængde. Teoriens hovedresultat er, at den således konstruktivt karakteriserede funktionsmængde også kan karakteriseres deskriptivt, nemlig som mængden af næsten periodiske funktioner.

Teorien for næsten periodiske funktioner har en interessant forløber i den af Bohl udviklede teori for „i udvidet forstand periodiske" funktioner, i hvilken talen for givne positive tal $p_1, \dots, p_m$ er om afslutningen i den uniforme metrik af mængden af trigonometriske polynomier, i hvilke frekvenserne λ tilhører mængden

$$\left\{ n_1 \frac{2\pi}{p_1} + \cdots + n_m \frac{2\pi}{p_m} \;\middle|\; n_1 \in \mathbb{Z}, \ldots, n_m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De i teorien for næsten periodiske funktioner fundamentale begreber „forskydningstal" og „relativt tæt mængde" optræder allerede hos Bohl. Det bemærkes, at Bohr ved udarbejdelsen af sin teori var ubekendt med Bohls undersøgelser.

En væsentlig forskel mellem Bohrs teori og de tidligere er, at frekvenserne λ nu tages fra den <u>ikke numerable</u> mængde $\mathbb{R}$, medens frekvenserne i tilfælde af periodiske eller „i udvidet forstand periodiske" funktioner tilhører en numerabel mængde.

<u>30. Forskydningstal</u>. Lad $f = f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en vilkårlig funktion i $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Et tal $\tau \in \mathbb{R}$ kaldes et <u>forskydningstal</u> eller en <u>næsten periode</u> hørende til et givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, hvis

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

[Bemærkning. For givet $\tau \in \mathbb{R}$ kan vi betragte den (åbenbart bijektive) afbildning $U(\tau)$ af $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ på sig selv, som til funktionen $f(x)$ lader svare den forskudte funktion $f(x+\tau)$, altså den afbildning der bestemmes ved at $(U(\tau)f)(x) = f(x+\tau)$. At tallet τ er et forskydningstal hørende til ε udtrykkes da ved at $\| U(\tau) f - f \|_0 \leq \varepsilon$. Det ville imidlertid være noget tyngende for fremstillingen at benytte denne skrivemåde.]

Forskydningstal for funktionen f hørende til ε vil blive betegnet $\tau(\varepsilon)$ eller $\tau_f(\varepsilon)$, og mængden af alle forskydningstal for en given funktion f hørende til et givet ε vil blive betegnet $\{\tau(\varepsilon)\}$ eller $\{\tau_f(\varepsilon)\}$.

Tallet 0 er åbenbart forskydningstal for enhver funktion f hørende til ethvert ε. For en given funktion er et tal τ et $\tau(\varepsilon)$ for ethvert ε, hvis og kun hvis τ er en periode for f. Et forskydningstal for f hørende til ε er også forskydningstal hørende til ethvert $\varepsilon_1 > \varepsilon$. Samtidig med τ er også $-\tau$ et forskydningstal hørende til ε. Endvidere gælder $\tau(\varepsilon_1)+\tau(\varepsilon_2)=\tau(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$ og $\tau(\varepsilon_1)-\tau(\varepsilon_2)=\tau(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$; hermed menes, at hvis τ_1 er et forskydningstal for f hørende til ε_1, og τ_2 er et forskydningstal for f hørende til ε_2, da er hvert af tallene $\tau_1+\tau_2$ og $\tau_1-\tau_2$ et forskydningstal for f hørende til $\varepsilon_1+\varepsilon_2$. Dette er klart; thi af $|f(x+\tau_1)-f(x)|\leq\varepsilon_1$ og $|f(x+\tau_2)-f(x)|\leq\varepsilon_2$ for alle x følger

$$|f(x+\tau_1\pm\tau_2)-f(x)| \leq |f(x+\tau_1\pm\tau_2)-f(x+\tau_1)|+|f(x+\tau_1)-f(x)|$$
$$\leq \varepsilon_2+\varepsilon_1 \quad \text{for alle } x.$$

Endvidere bemærkes, at funktionerne $f(x)$ og $f(x+a)$ for ethvert $a\in\mathbb{R}$ har de samme forskydningstal $\tau(\varepsilon)$ for ethvert ε.

<u>31</u>. Lad f være en funktion i $Cl_U\{s(x)\}$. For at finde forskydningstal for f hørende til et givet $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ vælger vi et trigonometrisk polynomium

$$s(x)=c_1e^{i\lambda_1x}+\dots+c_me^{i\lambda_mx},$$

for hvilket
$$|f(x)-s(x)|\leq\tfrac{1}{3}\varepsilon \quad \text{for alle } x\in\mathbb{R}.$$

Ethvert forskydningstal for s hørende til $\frac{1}{3}\varepsilon$ vil da være et forskydningstal for f hørende til ε, idet

$$|f(x+\tau)-f(x)|\leq|f(x+\tau)-s(x+\tau)|+|s(x+\tau)-s(x)|+|s(x)-f(x)|.$$

Nu gælder

$$s(x+\tau)-s(x)=c_1e^{i\lambda_1x}(e^{i\lambda_1\tau}-1)+\dots+c_me^{i\lambda_mx}(e^{i\lambda_m\tau}-1),$$

og følgelig

$$|s(x+\tau)-s(x)| \leq |c_1||e^{i\lambda_1\tau}-1| + \dots + |c_m||e^{i\lambda_m\tau}-1| \text{ for alle } x\in\mathbb{R}_+ .$$

Udtrykket på højre side er uafhængigt af x og er åbenbart $\leq \frac{1}{3}\varepsilon$, hvis alle tallene $e^{i\lambda_1\tau},\dots,e^{i\lambda_m\tau}$ er tilstrækkeligt nær ved 1.

Med skrivemåden $|a|\leq\delta \mod 2\pi$, hvor $a\in\mathbb{R}$ og $\delta\in]0,\pi[$ mener vi, at der findes et $n\in\mathbb{Z}$, således at $|a-n2\pi|\leq\delta$. Det kommer ud på et med, at der gælder $|e^{ia}-1|\leq 2\sin\frac{1}{2}\delta$. Af det ovenstående ses da:

<u>Hvis</u> f <u>tilhører</u> $Cl_U\{s(x)\}$, <u>da findes for ethvert</u> $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ <u>reelle tal</u> $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ <u>og et</u> $\delta\in]0,\pi[$, <u>således at enhver løsning til ulighederne</u>

$$\left.\begin{array}{c} |\lambda_1\tau|\leq\delta \\ \dots \\ |\lambda_m\tau|\leq\delta \end{array}\right\} \mod 2\pi$$

<u>er et forskydningstal for</u> f <u>hørende til</u> ε.

<u>32</u>. Man kan forholdsvis let se, at det omvendte også er rigtigt, så at altså den anførte egenskab karakteriserer funktionerne i $Cl_U\{s(x)\}$. Dette er imidlertid ikke den vi har for øje. For at nå til denne må vi benytte en sætning vedrørende løsningsmængden til et sæt uligheder af den angivne art.

For at kunne formulere denne kortfattet indfører vi begrebet en relativ tæt mængde. En delmængde af $\mathbb{R}$ kaldes <u>relativt tæt</u>, hvis der findes et tal $l\in\mathbb{R}_+$, således at ethvert interval $[a,a+l]$ af længden l indeholder mindst et tal i mængden.

Som et simpelt eksempel på en relativ tæt mængde nævnes mængden $\{np\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$ af hele multipla af et tal $p>0$. Mængden $\{\pm n^2\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$ er ikke relativt tæt.

Vi vil bevise følgende sætning af Bohl, genfundet af Weinberg:

Sætning. For vilkårlige reelle tal $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ og et vilkårligt $\delta \in]0, \pi[$ er mængden $[\lambda_1, \dots, \lambda_m; \delta]$ af løsninger til ulighederne

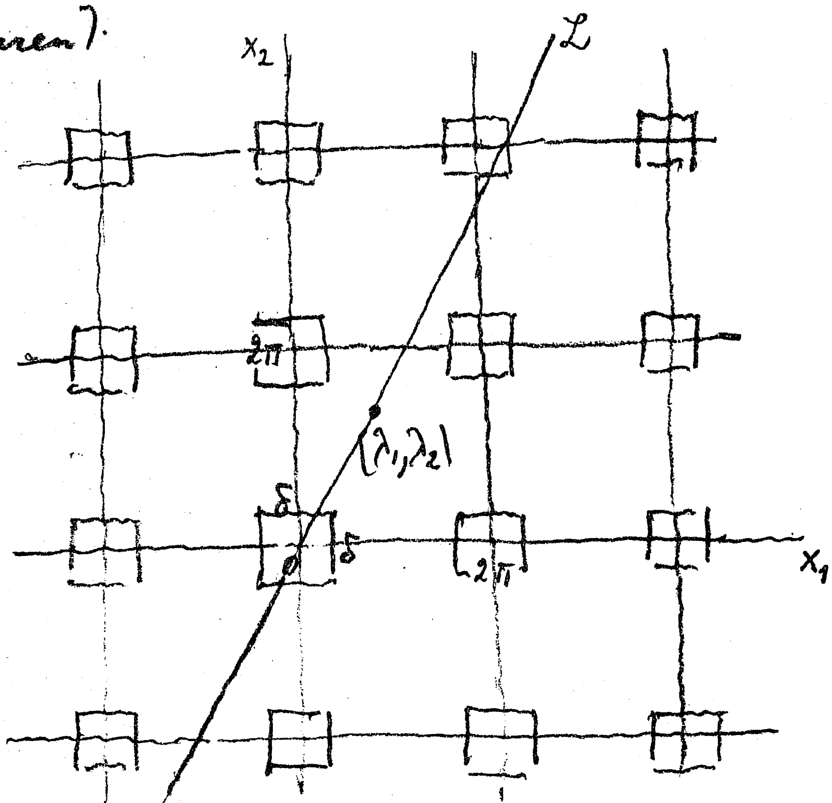
$$\left.\begin{array}{c} |\lambda_1 \tau| \leq \delta \\ \cdots \\ |\lambda_m \tau| \leq \delta \end{array}\right\} \text{mod } 2\pi$$

en relativt tæt mængde.

Bevis. Vi betragter i $\mathbb{R}^m$ den rette linie L med parameterfremstillingen

$$x = (x_1, \dots, x_m) = (\lambda_1 \tau, \dots, \lambda_m \tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Et punkt $x = (x_1, \dots, x_m)$ af $\mathbb{R}^m$ siges mod 2π at tilhøre en delmængde D af $\mathbb{R}^m$, hvis der findes tal $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$, således at punktet $(x_1 + n_1 2\pi, \dots, x_m + n_m 2\pi)$ tilhører D. Under brug af denne udtryksmåde ser vi, at et tal τ tilhører løsningsmængden $[\lambda_1, \dots, \lambda_m; \delta]$, hvis og kun hvis det tilsvarende punkt $(\lambda_1 \tau, \dots, \lambda_m \tau)$ på linien L mod 2π tilhører terningen $[-\delta, \delta]^m$ (se figuren).



Vi vælger et tal $N \in \mathbb{N}$ således, at $\frac{2\pi}{N} \leq \delta$, og deler terningen $[0, 2\pi]^m$ i de N^m celler

$$\left[(k_1-1)\frac{2\pi}{N}, k_1\frac{2\pi}{N}\right] \times \cdots \times \left[(k_m-1)\frac{2\pi}{N}, k_m\frac{2\pi}{N}\right],$$

hvor hvert k_i gennemløber $\{1, \dots, N\}$. Lad $C_1, \dots, C_q$ betegne de af disse celler, som mod 2π indeholder punkter af linien L, og lad $\tau_1, \dots, \tau_q$ betegne bestemte værdier af τ, således valgt, at $(\lambda_1\tau_j, \dots, \lambda_m\tau_j)$ mod 2π tilhører C_j.

Betragt nu et vilkårligt $t \in \mathbb{R}$. Punktet $(\lambda_1 t, \dots, \lambda_m t)$ vil da mod 2π tilhøre en af cellerne $C_1, \dots, C_q$. Lad os sige, at det tilhører C_j. Det ligger da mod 2π i samme celle som $(\lambda_1\tau_j, \dots, \lambda_m\tau_j)$, hvoraf følger (idet $\frac{2\pi}{N} \leq \delta$), at

$$\left.\begin{array}{l} |\lambda_1 t - \lambda_1\tau_j| \leq \delta \\ \dots \\ |\lambda_m t - \lambda_m\tau_j| \leq \delta \end{array}\right\} \text{mod } 2\pi,$$

hvilket betyder at $t - \tau_j$ tilhører $[\lambda_1, \dots, \lambda_m; \delta]$.
Hvis vi sætter

$$\tau' = \min\{\tau_1, \dots, \tau_q\} \text{ og } \tau'' = \max\{\tau_1, \dots, \tau_q\},$$

gælder altså, at ethvert interval $[t-\tau'', t-\tau']$ indeholder mindst et tal i $[\lambda_1, \dots, \lambda_m; \delta]$. Men det er det samme som at sige, at ethvert interval $[a, a+l]$ af længden $l = \tau'' - \tau'$ indeholder mindst et tal i $[\lambda_1, \dots, \lambda_m; \delta]$.

33. Vi indfører nu følgende

Definition. En funktion $f = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kaldes næsten periodisk, hvis den er kontinuert, og det for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælder, at mængden af forskydningstal for f hørende til ε er relativt tæt.

Anderledes sagt:

Funktionen f kaldes næstenperiodisk, hvis den er kontinuert, og der for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et tal $l \in \mathbb{R}_+$ således, at ethvert interval $[a, a+l]$ indeholder mindst et forskydningstal for f hørende til ε.

Et sådant tal l vil blive betegnet $l(\varepsilon)$ eller $l_f(\varepsilon)$.

Mængden af næstenperiodiske funktioner vil blive betegnet NP. Af det ovenstående fremgår, at enhver funktion i $Cl_U\{s(x)\}$ er næsten periodisk. Teoriens hovedresultat er, at også det omvendte gælder, altså at næsten periodiciteten netop er den ønskede deskriptive karakterisering af funktionsmængden $Cl_U\{s(x)\}$.
I symboler

$$NP = Cl_U\{\textstyle\sum^* c_\lambda e^{i\lambda x}\}.$$

I den følgende fremstilling vil vi ikke styre direkte mod dette hovedresultat, men vil udvikle teorien i forskellige retninger før vi beviser det. Beviset vil blive baseret på en teori for Fourier rækker for næsten periodiske funktioner. Senere vil vi også give et bevis for hovedsætningen uafhængigt af teorien for Fourier rækker.

En kontinuert funktion f med perioden $p > 0$ er naturligvis næsten periodisk, og vi kan for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ som længde $l(\varepsilon)$ benytte tallet p. Omvendt gælder, at hvis f er næstenperiodisk, og vi for alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan benytte samme tal l som længde $l(\varepsilon)$, da er f periodisk. Thi vi kan da i intervallet $[l, 2l]$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$ finde et forskydningstal τ_n hørende til $\frac{1}{n}$. Talfølgen τ_n, $n \in \mathbb{N}$, vil have et fortætningspunkt $\tau \in [l, 2l]$, og det ses let, at τ vil være en periode for f.

To simple egenskaber ved næsten periodiske funktioner.

34. Forbemærkning. Teorien for næsten periodiske funktioner vil blive udviklet i nær analogi med teorien for periodiske funktioner. Der er dog visse sætninger, der er trivielle for periodiske funktioner, men som ikke er indlysende for næsten periodiske funktioner. Vi begynder med at vise to sådanne sætninger, ifølge hvilke enhver næsten periodisk funktion er begrænset og uniformt kontinuert. De tilsvarende sætninger for periodiske funktioner er trivielle, idet vi i studiet af sådanne funktioner kan indskrænke os til betragtning af et begrænset interval. For næsten periodiske funktioner beror beviset på en lignende bemærkning:

Lad f være næstenperiodisk, og betragt for et givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ et tilsvarende $l = l(\varepsilon)$. Betragt nu et vilkårligt interval af denne længde, for eksempel intervallet $[0, l]$. Da er det muligt for ethvert $x_0 \in \mathbb{R}$ at finde et forskydningstal $\tau = \tau(\varepsilon)$ for f, således at x_0 ved forskydningen τ føres over i et punkt $x_0 + \tau$ af dette interval $[0, l]$. Thi betingelsen $x_0 + \tau \in [0, l]$ er jo ensbetydende med betingelsen $\tau \in [-x_0, -x_0 + l]$. Ved at benytte denne bemærkning er det muligt i beviserne for de to sætninger at reducere betragtningerne til et begrænset interval.

35. Begrænsethed. Vi beviser først:

Sætning 1. *Enhver næsten periodisk funktion f er begrænset.*

Bevis. Svarende til $\varepsilon = 1$ betragter vi en længde $l = l(1)$. I det afsluttede interval $[0, l]$ er f begrænset, lad os sige $|f(x)| \leq C$ for alle $x \in [0, l]$. For ethvert $x \in \mathbb{R}$ må da gælde $|f(x)| \leq C+1$. Thi der findes et $\tau = \tau(1)$ således, at $x+\tau \in [0, l]$, og af $|f(x+\tau)| \leq C$ og $|f(x+\tau) - f(x)| \leq 1$ følger $|f(x)| \leq C+1$.

Værdimængden $f(\mathbb{R})$ for en næstenperiodisk funktion f er altså en begrænset punktmængde i $\mathbb{C}$. Vi bemærker, at værdimængden ikke nødvendigvis er afsluttet. Betragt for eksempel den reelle funktion f, der bestemmes ved

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{1}{2^n} \sin \frac{x}{5^n} = \sin x + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{5} + \frac{1}{4} \sin \frac{x}{25} + \cdots .$$

Rækken har den konvergente majorantrække $\sum_0^\infty \frac{1}{2^n}$ med sum 2, og leddene er kontinuerte. Sumfunktionen er altså kontinuert, og der gælder $|f(x)| \leq 2$ for alle x. Funktionen er næsten periodisk. Thi rækkens n^{te} afsnit $f_n(x) = \sum_0^n \frac{1}{2^k} \sin \frac{x}{5^k}$ har perioden $5^n 2\pi$, og for alle x gælder $|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$; vælger vi for et givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tallet n så stort, at $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}\varepsilon$, vil mængden $\{\tau(\varepsilon)\}$ af forskydningstal for f hørende til ε altså indeholde alle hele multipla af $5^n 2\pi$, og vil følgelig være relativt tæt. Vi vil nu bestemme værdimængden for f. Ved at se på graferne for rækkens led konstaterer man let, at f i intervallet $[-5^n \frac{\pi}{2}, 5^n \frac{\pi}{2}]$ har sin mindste værdi i venstre endepunkt og sin største værdi i højre endepunkt. Disse værdier er $-a_n$ og a_n, hvor

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \sin \frac{\pi}{10} + \frac{1}{2^{n+2}} \sin \frac{\pi}{50} + \cdots .$$

Værdimængden i $[-5^n \frac{\pi}{2}, 5^n \frac{\pi}{2}]$ er derfor intervallet $[-a_n, a_n]$. Men af udtrykket for a_n ses, at

$$2 - \frac{1}{2^n} < a_n < 2.$$

Følgelig gælder $f(\mathbb{R}) = \bigcup [-a_n, a_n] =]-2, 2[$. Værdimængden $f(\mathbb{R})$ er altså ikke afsluttet.

47

36. Uniform kontinuitet. Vi beviser dernæst:

Sætning 2. Enhver næstenperiodisk funktion f er uniformt kontinuert.

Bevis. For et givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ betragter vi en længde $l = l(\frac{1}{3}\varepsilon)$. På intervallet $[-1, l+1]$ er funktionen uniformt kontinuert. Der findes altså et $\delta \in]0,1]$ således, at $|f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ for vilkårlige $x, y \in [-1, l+1]$, for hvilke $|x-y| \leq \delta$. Betragt nu et vilkårligt par af tal $x, y \in \mathbb{R}$, for hvilket $|x-y| \leq \delta$. Betragt et $\tau = \tau(\frac{1}{3}\varepsilon)$, for hvilket $x+\tau \in [0, l]$. Da gælder $y+\tau \in [-1, l+1]$. Følgelig gælder $|f(x+\tau)-f(y+\tau)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$. Desuden gælder $|f(x+\tau)-f(x)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ og $|f(y+\tau)-f(y)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$. Heraf følger, at $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

Den uniforme kontinuitet af en funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kan ved hjælp af begrebet forskydningstal udtrykkes således: For ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$ således, at ethvert tal i intervallet $[-\delta, \delta]$ er et til ε hørende forskydningstal for f. Af sætning 2 fremgår da følgende karakterisering af næstenperiodiske funktioner, i hvilken kontinuiteten ikke eksplicit nævnes: En funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er næsten periodisk, hvis og kun hvis det for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælder, at mængden $\{\tau(\varepsilon)\}$ af forskydningstal for f hørende til ε er relativt tæt og indeholder et interval $[-\delta, \delta]$.

Corollar. Når f er næstenperiodisk, vil der for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $L \in \mathbb{R}_+$ og et $\Delta \in \mathbb{R}_+$, således at ethvert interval $[a, a+L]$ af længden L indeholder et helt interval $[b, b+\Delta]$ af længden Δ, hvis tal alle er forskydningstal for f hørende til ε, og altså specielt et $\tau(\varepsilon)$, som er et helt multiplum af Δ.

Bevis. Betragt en længde $l = l(\frac{1}{2}\varepsilon)$, og lad $\delta \in R_+$ være valgt således, at ethvert τ i $[-\delta, \delta]$ er et $\tau(\frac{1}{2}\varepsilon)$. Da vil tallene $\mathcal{L} = l + 2\delta$ og $\Delta = 2\delta$ opfylde betingelserne. Thi ethvert interval af længden l indeholder et $\tau(\frac{1}{2}\varepsilon)$, og ethvert tal $\tau(\frac{1}{2}\varepsilon) + \eta$, hvor $\eta \in [-\delta, \delta]$, er et $\tau(\varepsilon)$, da η er et $\tau(\frac{1}{2}\varepsilon)$.

Bevarelse af næstenperiodiciteten ved simple operationer.

37. Operationer med een funktion. Når $f(x)$ er næsten periodisk, er også $kf(x)$, $f(x)+k$ [hvor k er et vilkårligt komplekst tal], $\overline{f(x)}$, $|f(x)|$, $\mathcal{R}f(x)$, $\mathcal{J}f(x)$ næsten periodiske. Thi ethvert $\tau(\varepsilon/|k|)$ for $f(x)$ er et $\tau(\varepsilon)$ for $kf(x)$ [for $k \neq 0$], og ethvert $\tau(\varepsilon)$ for $f(x)$ er også et $\tau(\varepsilon)$ for $f(x)+k$, $\overline{f(x)}$, $|f(x)|$, $\mathcal{R}f(x)$, $\mathcal{J}f(x)$.

Endvidere er $f(x)^2$ næstenperiodisk. Dette følger af sætning 1 i §35. Thi $|f(x)| \leq C$ for alle x medfører

$$|f(x+\tau)^2 - f(x)^2| = |f(x+\tau) + f(x)||f(x+\tau) - f(x)| \leq 2C|f(x+\tau) - f(x)|,$$

så at ethvert $\tau(\varepsilon/2C)$ for $f(x)$ er et $\tau(\varepsilon)$ for $f(x)^2$ [for $C \neq 0$]. Følgelig er også $|f(x)|^2$ næstenperiodisk.

Antag nu, at $f(x)$ ikke antager værdien 0. Vi kan da betragte $1/f(x)$. En nødvendig betingelse for, at $1/f(x)$ er næstenperiodisk er, at $1/f(x)$ er begrænset, altså at 0 ikke er fortætningspunkt for værdisættet for f. Denne betingelse er også tilstrækkelig. Thi antag, at der findes et $\gamma > 0$, så at $|f(x)| \geq \gamma$ for alle x. Vi har da

$$\left|\frac{1}{f(x+\tau)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \frac{|f(x+\tau) - f(x)|}{|f(x+\tau)||f(x)|} \leq \frac{|f(x+\tau) - f(x)|}{\gamma^2},$$

så at ethvert $\tau(\gamma^2\varepsilon)$ for $f(x)$ er et $\tau(\varepsilon)$ for $1/f(x)$.

De foregående sætninger er alle indeholdt i følgende

Sætning 1. Hvis $f(x)$ er næsten periodisk, og $\varphi: A \to \mathbb{C}$ er en kontinuert funktion på en mængde $A \subseteq \mathbb{C}$, der indeholder afslutningen $\overline{f(\mathbb{R})}$ af værdimængden for f, da er også $\varphi(f(x))$ næsten periodisk.

De foran betragtede tilfælde fremkommer for $\varphi(z) = kz,\ z+k,\ \bar{z},\ |z|,\ \Re z,\ \Im z,\ z^2,\ |z|^2$, og $1/z\ (z \neq 0)$.

Bevis. Da $\overline{f(\mathbb{R})}$ er kompakt, er φ uniformt kontinuert på $\overline{f(\mathbb{R})}$, og altså også på $f(\mathbb{R})$. Til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes altså et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så at $|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq \varepsilon$ for vilkårlige $z_1, z_2 \in f(\mathbb{R})$, for hvilke $|z_1 - z_2| \leq \delta$. Følgelig gælder

$$|\varphi(f(x+\tau)) - \varphi(f(x))| \leq \varepsilon, \text{ når } |f(x+\tau) - f(x)| \leq \delta.$$

Dette viser, at ethvert $\tau(\delta)$ for $f(x)$ er et $\tau(\varepsilon)$ for $\varphi(f(x))$.

Nogle eksempler på operationer med een funktion, der ikke falder ind under sætning 1, bør nævnes: Hvis $f(x)$ er næstenperiodisk, er også $f(x+k)$ og $f(kx)$ [hvor k er et vilkårligt reelt tal] næsten periodiske. Beviserne er indlysende.

38. Operationer med mere end een funktion. Her er sagen ikke triviel. Lad os til indledning betragte summen af to næsten periodiske funktioner f og g. Af

$$|[f(x+\tau) + g(x+\tau)] - [f(x) + g(x)]| \leq |f(x+\tau) - f(x)| + |g(x+\tau) - g(x)|$$

slutter vi, at ethvert fælles $\tau(\frac{1}{2}\varepsilon)$ for f og g vil være et $\tau(\varepsilon)$ for $f+g$. Udtrykt i symboler: For ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælder

$$\{\tau_{f+g}(\varepsilon)\} \supseteq \{\tau_f(\tfrac{1}{2}\varepsilon)\} \cap \{\tau_g(\tfrac{1}{2}\varepsilon)\}.$$

Nu er fællesmængden af to relativt tætte mængder ikke nødvendigvis relativt tæt [betragt for eksempel mængden af de lige og mængden af de ulige hele tal]. Det er derfor ikke evident, at mængden $\{\tau_{f+g}(\varepsilon)\}$ er relativt tæt. Vi vil imidlertid bevise følgende vigtige

<u>Sætning 2.</u> <u>For vilkårlige næsten periodiske funktioner</u> $f_1, \dots, f_m$ <u>og et vilkårligt</u> $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ <u>er mængden</u>

$$\{\tau_{f_1}(\varepsilon)\} \cap \cdots \cap \{\tau_{f_m}(\varepsilon)\}$$

<u>af fælles forskydningstal for</u> $f_1, \dots, f_m$ <u>hørende til</u> ε <u>relativt tæt.</u>

Bemærkning. I det specielle tilfælde, hvor funktionerne er rene svingninger $e^{i\lambda_1 x}, \dots, e^{i\lambda_m x}$, er denne sætning ensgyldig med den Bohl-Wennberg'ske sætning i § 32. Thi i dette tilfælde er mængden af fælles forskydningstal hørende til et givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ enten hele $\mathbb{R}$ (nemlig hvis $\varepsilon \geq 2$) eller mængden $[\lambda_1, \dots, \lambda_m; \delta]$, hvor $\delta \in]0, \pi[$ er bestemt ved at $\varepsilon = 2 \sin \frac{1}{2}\delta$. Det er derfor ikke mærkeligt, at beviset for sætning 2 har træk fælles med beviset for den Bohl-Wennberg'ske sætning.

Bevis. Idet vi anvender corollaret til sætning 2 i § 36, vælger vi for hver af funktionerne f_j tal L_j og Δ_j svarende til $\frac{1}{2}\varepsilon$. Vi sætter

$$L = \max\{L_1, \dots, L_m\} \quad \text{og} \quad \Delta = \min\{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}.$$

For hver af funktionerne f_j gælder da, at ethvert interval $[a, a+L]$ indeholder et interval $[b, b+\Delta]$ bestående af forskydningstal $\tau_{f_j}(\frac{1}{2}\varepsilon)$, og altså specielt et $\tau_{f_j}(\frac{1}{2}\varepsilon)$, der er et helt multiplum af Δ.

I hvert interval $[a, a+L]$ vælger vi et sæt

$$(\tau_{f_1}, \dots, \tau_{f_m}) = (n_1\Delta, \dots, n_m\Delta)$$

af sådanne forskydningstal. Konfigurationerne

$(\tau_{f_1}, \dots, \tau_{f_m}) = (n_1\Delta, \dots, n_m\Delta)$ og $(\tau'_{f_1}, \dots, \tau'_{f_m}) = (n'_1\Delta, \dots, n'_m\Delta)$

hørende til to intervaller $[a, a+L]$ og $[a', a'+L]$ kaldes kongruente, hvis den ene fås af den anden ved forskydning, altså hvis $\tau_{f_1}-\tau'_{f_1} = \dots = \tau_{f_m}-\tau'_{f_m}$, eller, hvad der kommer ud på det samme, hvis $n_1-n_2=n_1'-n_2', \dots, n_1-n_m=n_1'-n_m'$. Da der kun er et endeligt antal muligheder for hver differens n_i-n_j, må der findes et endeligt antal intervaller $[a^1, a^1+L], \dots, [a^Q, a^Q+L]$, således at konfigurationen hørende til et vilkårligt interval $[a, a+L]$ er kongruent med konfigurationen hørende til et af disse intervaller. Konfigurationerne hørende til intervallerne $[a^1, a^1+L], \dots, [a^Q, a^Q+L]$ betegnes

$$(\tau^1_{f_1}, \dots, \tau^1_{f_m}), \dots, (\tau^Q_{f_1}, \dots, \tau^Q_{f_m}).$$

Sæt $M = \max\{|\tau^1_{f_1}|, \dots, |\tau^Q_{f_1}|\}$. Vi vil vise, at ethvert interval $[a, a+L+2M]$ indeholder et fælles forskydningstal for $f_1, \dots, f_m$ hørende til ε.

Lad $(\tau_{f_1}, \dots, \tau_{f_m})$ være den konfiguration, der hører til intervallet $[a+M, a+L+M]$. Der vil findes et $q \in \{1, \dots, Q\}$, således at $(\tau_{f_1}, \dots, \tau_{f_m})$ er kongruent med konfigurationen $(\tau^q_{f_1}, \dots, \tau^q_{f_m})$. Tallet

$$\tau = \tau_{f_1} - \tau^q_{f_1} = \dots = \tau_{f_m} - \tau^q_{f_m}$$

må da tilhøre intervallet $[a, a+L+2M]$ (idet τ_{f_1} tilhører $[a+M, a+L+M]$ og $|\tau^q_{f_1}| \le M$). Desuden er τ et $\tau_{f_j}(\varepsilon)$ for hvert $j \in \{1, \dots, m\}$, idet det er differens mellem τ_{f_j} og $\tau^q_{f_j}$, som hver for sig er et $\tau_{f_j}(\tfrac{1}{2}\varepsilon)$.

39. Ved hjælp af sætning 2 kan vi nu vise

Sætning 3. Hvis $f_1(x), \dots, f_m(x)$ er næsten periodiske og $\varphi : A \to \mathbb{C}$ er en kontinuert funktion på en mængde $A \subseteq \mathbb{C}^m$, der indeholder afslutningen af mængden $\{(f_1(x), \dots, f_m(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$, da er også $\varphi(f_1(x), \dots, f_m(x))$ næsten periodisk.

Bevis. Da afslutningen $\bar{A}$ af mængden $A = \{(f_1(x),\dots,f_m(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ er kompakt, er φ uniformt kontinuert på $\bar{A}$ og altså også på A. Til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes altså et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så at $|\varphi(z_1,\dots,z_m) - \varphi(z_1',\dots,z_m')| \leq \varepsilon$ for vilkårlige punkter $(z_1,\dots,z_m)$ og $(z_1',\dots,z_m')$ i A, for hvilke $|z_1 - z_1'| \leq \delta, \dots, |z_m - z_m'| \leq \delta$. Ethvert fælles $\tau(\delta)$ for $f_1(x),\dots,f_m(x)$ er derfor et $\tau(\varepsilon)$ for $\varphi(f_1(x),\dots,f_m(x))$.

Af sætning 3 for $m = 2$ og $\varphi(z_1,z_2) = z_1 + z_2$ eller $\varphi(z_1,z_2) = z_1 z_2$ slutter vi, at *sum* og *produkt* af to næsten periodiske funktioner er næsten periodiske. Endvidere slutter vi af sætning 3, at hvis $\varphi(z_1,\dots,z_m)$ er et polynomium, og $f_1(x),\dots,f_m(x)$ er næsten periodiske, så er $\varphi(f_1(x),\dots,f_m(x))$ næsten periodisk.

Specielt finder vi, at summen af m kontinuerte *periodiske* funktioner (med vilkårlige perioder) er næsten periodisk. Heri er indeholdt (hvad vi også ved fra § 33), at ethvert trigonometrisk polynomium $s(x) = \sum^{*} c_\lambda e^{i\lambda x}$ er næsten periodisk.

Af sætningen vedrørende summen følger, at en funktion $f(x)$ er næsten periodisk, hvis $\Re f(x)$ og $\Im f(x)$ er næsten periodiske (det omvendte, som er trivielt, blev vist i § 37).

Med henblik på senere anvendelse nævner vi følgende specialtilfælde af sætning 3. Hvis $f_1(x),\dots,f_m(x)$ er *reelle* næsten periodiske funktioner, da er funktionen $f(x) = \max\{f_1(x),\dots,f_m(x)\}$ næsten periodisk. Thi funktionen $\varphi(z_1,\dots,z_m) = \max\{z_1,\dots,z_m\} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ er kontinuert. For to reelle talsæt $(z_1,\dots,z_m)$ og $(z_1',\dots,z_m')$, for hvilke $|z_1 - z_1'| \leq \varepsilon, \dots, |z_m - z_m'| \leq \varepsilon$, gælder nemlig $|\varphi(z_1,\dots,z_m) - \varphi(z_1',\dots,z_m')| \leq \varepsilon$.

40. Uniform konvergens. Vi viser slutteligt

Sætning 4. *Grænsefunktionen $f(x)$ for en uniformt konvergent følge af næsten periodiske funktioner $f_1(x), f_2(x), \ldots$ er næstenperiodisk.*

Anderledes udtrykt:

I funktionsrummet $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ med den uniforme metrik er mængden NP en afsluttet mængde.

Bevis. For et givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vælger vi et $n \in \mathbb{N}$, således at $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Da er ethvert $\tau(\frac{1}{3}\varepsilon)$ for $f_n(x)$ et $\tau(\varepsilon)$ for $f(x)$, idet

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leq |f(x+\tau) - f_n(x+\tau)| + |f_n(x+\tau) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$$
$$\leq \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

En anden karakterisering af næstenperiodiske funktioner.

41. En sætning om metriske rum. Lad (M, dist) være et metrisk rum. Vi tillader os en lille afvigelse fra den gængse definition, idet vi om funktionen dist blot forlanger, at den er en afbildning af $M \times M$ ind i $[0, +\infty]$, der opfylder de sædvanlige betingelser, nemlig at $\mathrm{dist}(f,g) = 0$, hvis og kun hvis $f = g$, at $\mathrm{dist}(f,g) = \mathrm{dist}(g,f)$, og at $\mathrm{dist}(f,g) \leq \mathrm{dist}(f,h) + \mathrm{dist}(h,g)$. Afvigelsen fra det gængse består altså blot i, at afstande kan være $+\infty$.

Ved kuglen $B(f,\rho)$ med centrum $f \in M$ og radius $\rho \in \mathbb{R}_+$ forstås mængden $B(f,\rho) = \{g \in M \mid \mathrm{dist}(f,g) \leq \rho\}$.

En mængde $A \subseteq M$ kaldes *betinget kompakt*, hvis enhver følge $f_1, f_2, \ldots$ af elementer fra A har en delfølge $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$ (hvor $n_1 < n_2 < \ldots$), der er en fundamentalfølge.

En mængde $A \subseteq M$ kaldes <u>totalt begrænset</u>,
hvis den for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan dækkes med et ende-
ligt antal kugler $B(f_1,\varepsilon), \dots, B(f_n,\varepsilon)$ med radius ε,
d.v.s. hvis der for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et endeligt
antal elementer $f_1, \dots, f_n$ af M, således at ethvert ele-
ment af A har en afstand $\leq \varepsilon$ fra mindst et af elem.
Elementerne $f_1, \dots, f_n$ siges da at udgøre et sæt af
ε-<u>approksimanter</u> for A. Udelader vi de af ele-
menterne f_i, for hvilke kuglen $B(f_i,\varepsilon)$ er disjunkt
med A, og vælger vi for hvert af de øvrige f_i et ele-
ment g_i af A, der tilhører kuglen $B(f_i,\varepsilon)$, får vi
et sæt 2ε-approksimanter for A. Vi ser altså, at
for en totalt begrænset mængde A kan ε-approksi-
manterne for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vælges i A.

<u>Sætning. En delmængde A af et metrisk rum
er betinget kompakt, hvis og kun hvis den er totalt
begrænset.</u>

Bevis. (1) Betinget kompakthed medfører
total begrænsethed. Beviset er indirekte. Antag, at
A ikke er totalt begrænset. Da findes et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, så-
ledes at A ikke kan dækkes af et endeligt antal kugler
med radius ε. Vælg et $f_1 \in A$. Da A ikke er dækket
af $B(f_1,\varepsilon)$, kan vi vælge et $f_2 \in A$, således at
$dist(f_1,f_2) > \varepsilon$. Da A ikke er dækket af $B(f_1,\varepsilon)$ og
$B(f_2,\varepsilon)$, kan vi vælge et $f_3 \in A$, således at
$dist(f_1,f_3) > \varepsilon$ og $dist(f_2,f_3) > \varepsilon$. Ved at fortsætte
på denne måde får vi en følge $f_1, f_2, \dots$ af ele-
menter af A, således at $dist(f_n,f_p) > \varepsilon$, når $n \neq p$.
Denne følge har ingen delfølge, der er en fundamen-
talfølge. Altså er A ikke betinget kompakt.

(3) Total begrænsethed medfører betinget kompakthed. Antag at A er totalt begrænset og betragt en følge $f_1, f_2, \dots$ af elementer fra A. Vi skal vise, at den har en delfølge, der er en fundamentalfølge.

Vi begynder med at dække A med endeligt mange kugler med radius 1. Mindst en af disse kugler må indeholde f_n for uendeligt mange værdier af n. Der findes altså en delfølge af $f_1, f_2, \dots$, hvis elementer har indbyrdes afstande ≤ 2. En sådan delfølge betegnes $f_{11}, f_{12}, \dots$. Nu dækkes A med endeligt mange kugler med radius $\frac{1}{2}$. Mindst en af disse må indeholde f_{1n} for uendeligt mange n. Der findes altså en delfølge af $f_{11}, f_{12}, \dots$, hvis elementer har indbyrdes afstande ≤ 1. En sådan delfølge betegnes $f_{21}, f_{22}, \dots$. Således fortsættes, idet vi som radius efterhånden vælger $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$. Diagonalfølgen $f_{11}, f_{22}, \dots$ for de efterhånden dannede delfølger vil da have den egenskab, at dens elementer fra det $n$te at regne har indbyrdes afstande $\leq \frac{2}{n}$. Den er altså en fundamentalfølge.

Vi vil anvende sætningen i det tilfælde, hvor $(M, dist)$ er $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ med den uniforme metrik.

42. Bochners karakterisering af næstenperiodiske funktioner. Det drejer sig om følgende

Sætning 1. En funktion $f = f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er næstenperiodisk, hvis og kun hvis den er kontinuert og mængden $\{f(x+a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ af dens forskudte funktioner er betinget kompakt.

Da $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ med den uniforme metrik er et fuldstændigt metrisk rum, kommer sætningen ud på at med følgende:

En funktion $f = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er næsten periodisk, hvis og kun hvis den er kontinuert, og enhver følge af forskudte $f(x+a_1), f(x+a_2), \dots$ har en delfølge, der er uniformt konvergent.

Ifølge sætningen i §41 er sætning 1 ensbetydende med

__Sætning 2.__ __En funktion__ $f = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ __er næsten periodisk, hvis og kun hvis den er kontinuert, og mængden__ $\{f(x+a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ __af dens forskudte funktioner er totalt begrænset.__

Bevis. (1) Næsten periodicitet af $f(x)$ medfører total begrænsethed af mængden $\{f(x+a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet, og lad $l = l(\frac{1}{2}\varepsilon)$ og $\delta = \delta(\frac{1}{2}\varepsilon)$ være valgt i henhold til definitionen for næsten periodicitet og den uniforme kontinuitet. Da findes for ethvert $a \in \mathbb{R}$ et $\tau = \tau(\frac{1}{2}\varepsilon)$, således at $a + \tau \in [0, l]$. For et sådant τ gælder

$$|f(x+a) - f(x+a+\tau)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Der findes altså til ethvert $a \in \mathbb{R}$ et $b \in [0, l]$, således at

$$|f(x+a) - f(x+b)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Lad $b_1, \dots, b_n$ være tal i $[0, l]$, således at ethvert $b \in [0, l]$ har en afstand $\leq \delta$ fra mindst et af disse tal $b_1, \dots, b_n$. For ethvert $b \in [0, l]$ har vi da

$$|f(x+b) - f(x+b_j)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}$$

for mindst et $j \in \{1, \dots, n\}$.

Altså findes for ethvert $a \in \mathbb{R}$ mindst et $j \in \{1, \dots, n\}$ således at

$$|f(x+a) - f(x+b_j)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R},$$

hvilket betyder at funktionerne $f(x+b_1), \dots, f(x+b_n)$ er et sæt ε-approksimanter for mængden $\{f(x+a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(2) Kontinuitet af $f(x)$ og total begrænsethed af mængden $\{f(x+a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ medfører næstenperiodicitet.

Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet, og lad $f(x+a_1), \dots, f(x+a_n)$
være et sæt ε-approksimanter for $\{f(x+a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
[vi kan jo, som ovenfor bemærket, for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vælge
et sæt ε-approksimanter hhv. hørende mængden]. Vi kan
antage, at $a_1 < \dots < a_n$. For ethvert $a \in \mathbb{R}$ findes da et
$j \in \{1, \dots, n\}$, således at

$$|f(x+a) - f(x+a_j)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R},$$

hvad der kommer ud på et med, at

$$|f(x+a-a_j) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ er således mindst et af tallene
$a-a_1, \dots, a-a_n$ et $\tau(\varepsilon)$. Ethvert interval af længden $l =$
$a_n - a_1$ indeholder derfor et $\tau(\varepsilon)$.

<u>43</u>. Ved hjælp af de foregående sætninger kan vi
give nye og yderst simple beviser for næsten-periodici-
teten af en sum af to næsten-periodiske funktioner
$f(x)$ og $g(x)$.

Ved brug af betinget kompakthed former beviset
sig således: Lad $f(x+a_n)+g(x+a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, være en følge
af funktioner fra mængden $\{f(x+a)+g(x+a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Af
følgen $f(x+a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, udtager vi en uniformt konvergent
delfølge $f(x+a_{m_1}), f(x+a_{m_2}), \dots$. Dernæst udtager vi af
følgen $g(x+a_{m_1}), g(x+a_{m_2}), \dots$ en uniformt konvergent del-
følge $g(x+a_{m_1}), g(x+a_{m_2}), \dots$. Da er delfølgen
$f(x+a_{m_p})+g(x+a_{m_p})$, $p \in \mathbb{N}$, af den oprindelige følge uni-
formt konvergent, og mængden $\{f(x+a)+g(x+a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ er
altså betinget kompakt.

Ved brug af total begrænsethed er beviset lige
så simpelt. Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet, og lad $f_1, \dots, f_n$
og $g_1, \dots, g_m$ være et sæt $\frac{1}{2}\varepsilon$-approksimanter hen-
holdsvis for mængden $\{f(x+a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ og mængden
$\{g(x+a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Da vil de $n \cdot m$ funktioner $f_i + g_j$
udgøre et sæt ε-approksimanter for mængden

$\{f(x+a)+g(x+a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, som følgelig er totalt begrænset.

Den almene sætning 3 i § 39 kan bevises på lignende måde.

<u>Forskydningsfunktioner</u>. <u>Majoriserbare mængder, ensartethedsmængder, og betinget kompakte mængder af næstenperiodiske funktioner.</u>

<u>44. Forskydningsfunktioner.</u> Lad $f = f(x), \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en funktion, for hvilken afstanden $\sup_x |f(x+\tau) - f(x)|$ i den uniforme metrik fra funktionen til enhver af dens forskudte er endelig. Funktionen

$$e(\tau) = e_f(\tau) = \sup_x |f(x+\tau) - f(x)| \; : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$$

kaldes efter Bochner <u>forskydningsfunktionen</u> for f. En tilstrækkelig betingelse for, at en funktion har en forskydningsfunktion, er at funktionen er begrænset, men denne betingelse er ikke nødvendig. Vi vil især interessere os for forskydningsfunktioner for næsten periodiske funktioner, men det vil være hensigtsmæssigt først at betragte begrebet i almindelighed.

<u>Eksempler.</u> (i) Funktionen $f(x) = x$ har forskydningsfunktionen $e(\tau) = |\tau|$.

(ii) Funktionen $f(x) = e^{ix}$ har forskydningsfunktionen

$$e(\tau) = \sup_x |e^{i(x+\tau)} - e^{ix}| = \sup_x |e^{ix}||e^{i\tau} - 1| = 2|\sin \tfrac{1}{2}\tau|.$$

(iii) Funktionen $f(x) = e^{ix^2}$ har forskydningsfunktionen

$$e(\tau) = \sup_x |e^{i(x+\tau)^2} - e^{ix^2}| = \sup_x |e^{i(2x\tau+\tau^2)} - 1| = \begin{cases} 0 & \text{for } \tau = 0 \\ 2 & \text{for } \tau \neq 0. \end{cases}$$

Dette eksempel viser, at en kontinuert funktion kan have en diskontinuert forskydningsfunktion.

For en funktion $f(x)$, der har en forskydningsfunktion, bestemmes mængden af forskydningstal hørende til et vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ved formlen

$$\{\tau_f(\varepsilon)\} = \{\tau \in \mathbb{R} \mid e_f(\tau) \leq \varepsilon\}.$$

Sætning 1. Forskydningsfunktionen $e(\tau) = e_f(\tau)$ for en funktion $f(x)$ opfylder betingelserne

$$(a)\quad e(0) = 0, \quad e(\tau) \geqslant 0$$
$$(b)\quad e(-\tau) = e(\tau)$$
$$(c)\quad e(\tau_1+\tau_2) \leqslant e(\tau_1) + e(\tau_2).$$

Omvendt er enhver funktion, der opfylder disse betingelser, en forskydningsfunktion; for eksempel er den sin egen forskydningsfunktion.

Bevis. Betingelserne (a) og (b) er indlysende, og (c) følger af, at

$$|f(x+\tau_1+\tau_2) - f(x)| \leqslant |f(x+\tau_1+\tau_2) - f(x+\tau_2)| + |f(x+\tau_2) - f(x)|$$
$$\leqslant e(\tau_1) + e(\tau_2) \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

[Det kan bemærkes, at (b) og (c) blot på en anden måde udtrykker, at hvis τ er et $\tau(\varepsilon)$, så er også $-\tau$ et $\tau(\varepsilon)$, og at summen af et $\tau(\varepsilon_1)$ og et $\tau(\varepsilon_2)$ er et $\tau(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$.]

Lad omvendt $e(\tau)$ være en funktion, der opfylder (a), (b), (c). Af (c) følger

$$-e(-\tau) \leqslant e(x+\tau) - e(x) \leqslant e(\tau),$$

hvoraf ved brug af (b)

$$|e(x+\tau) - e(x)| \leqslant e(\tau).$$

Ifølge (a) gælder lighedstegnet for $x=0$. Altså gælder

$$\sup_x |e(x+\tau) - e(x)| = e(\tau),$$

hvilket viser, at $e(\tau)$ er sin egen forskydningsfunktion.

Af sætning 1 fremgår specielt, at en funktion $f(x)$, der har en forskydningsfunktion $e(\tau)$, har samme forskydningsfunktion som denne. For ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælder derfor

$$\{\tau_f(\varepsilon)\} = \{\tau_e(\varepsilon)\} = \{\tau \in \mathbb{R} \mid e(\tau) \leqslant \varepsilon\}.$$

Ved at sammenholde dette med en bemærkning i §36, hvorefter en funktion $f(x)$ er næsten periodisk, hvis og kun hvis for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mængden $\{\tau_f(\varepsilon)\}$ er relativt tæt og indeholder et interval $[-\delta, \delta]$, får vi følgende

<u>Sætning 2.</u> <u>Forskydningsfunktionen $e(\tau) = e_f(\tau)$ for en funktion $f(x)$ er næsten periodisk, hvis og kun hvis funktionen $f(x)$ er næstenperiodisk.</u>

<u>En forskydningsfunktion $e(\tau)$ er næstenperiodisk, hvis og kun hvis for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mængden $\{\tau \in \mathbb{R} \mid e(\tau) \leq \varepsilon\}$ er relativt tæt og indeholder et interval $[-\delta, \delta]$.</u>

<u>45.</u> <u>Majorisering.</u> Lad $f(x)$ og $g(x)$ være to næsten periodiske funktioner. Vi siger, at f <u>majoriserer</u> g, hvis det for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælder, at ethvert $\tau_f(\varepsilon)$ også er et $\tau_g(\varepsilon)$. Dette er åbenbart ensbetydende med, at der gælder

$$e_g(\tau) \leq e_f(\tau) \quad \text{for alle } \tau \in \mathbb{R}.$$

Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er forskydningsfunktioner, betyder det simpelthen, at $g(x) \leq f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$, idet en forskydningsfunktion er sin egen forskydningsfunktion.

Eksempler: Enhver næstenperiodisk funktion $f(x)$ majoriserer $|f(x)|$, $\Re f(x)$, $\Im f(x)$, samt $k f(x)$, hvis $|k| \leq 1$.

To næstenperiodiske funktioner $f(x)$ og $g(x)$ majoriserer hinanden, hvis og kun hvis de for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ har nøjagtigt de samme forskydningstal $\tau(\varepsilon)$, hvilket er ensbetydende med, at de har samme forskydningsfunktion.

Eksempler: Funktionerne $f(x)$ <u>og</u> $f(x+a)$ for et vilkårligt $a \in \mathbb{R}$, funktionerne $f(x)$ og $\overline{f(x)}$, funktionerne $f(x)$ og $e_f(x)$ majoriserer hinanden.

En mængde $\mathfrak{F}$ af næstenperiodiske funktioner kaldes <u>majoriserbar</u>, hvis der findes en næstenperiodisk funktion $h(x)$, som majoriserer alle funktionerne i $\mathfrak{F}$, d.v.s. hvis $e_f(\tau) \leq e_h(\tau)$ for alle $\tau \in \mathbb{R}$ og alle $f \in \mathfrak{F}$. En sådan funktion $h(x)$ kaldes en <u>majorant</u> for $\mathfrak{F}$. Da $h(x)$ og $e_h(x)$ majoriserer hinanden, er $e_h(x)$ også en majorant for $\mathfrak{F}$. En næstenperiodisk forskydnings funktion, der majoriserer $\mathfrak{F}$, kaldes en <u>forskydnings-majorant</u> for $\mathfrak{F}$.

<u>Sætning 3</u>. <u>Ethvert endeligt</u> <u>sæt af næstenperiodiske funktioner</u> $f_1(x), \dots, f_m(x)$ <u>er en majoriserbar mængde</u>.

Bevis. Funktionen

$$e(\tau) = e_{f_1}(\tau) + \dots + e_{f_m}(\tau)$$

tilfredsstiller åbenbart Betingelserne (a), (b), (c) i sætning 1, da hvert $e_{f_j}(\tau)$ tilfredsstiller disse Betingelser. Den er altså en forskydningsfunktion. Desuden er den næstenperiodisk. Da den er $\geqslant$ hvert $e_{f_j}(\tau)$, er den en forskydningsmajorant for sættet $f_1(x), \dots, f_m(x)$.

Lad os betragte alle forskydningsmajoranter for sættet $f_1(x), \dots, f_m(x)$. For at en næstenperiodisk forskydningsfunktion $e(\tau)$ skal være majorant for sættet, er det nødvendigt og tilstrækkeligt, at den er $\geqslant$ hver af funktionerne $e_{f_j}(\tau)$, d.v.s. at den er $\geqslant$ funktionen

$$v(\tau) = \max\{e_{f_1}(\tau), \dots, e_{f_m}(\tau)\}.$$

Vi vil vise, at denne funktion selv er en næstenperiodisk forskydningsfunktion. At $v(\tau)$ er næstenperiodisk fremgår af § 39. Vi må vise, at $v(\tau)$ er en forskydningsfunktion, altså at $v(\tau)$ opfylder Betingelserne (a), (b), (c) i sætning 1. Betingelserne (a) og (b) er åbenbart opfyldt. Betingelsen (c) fremgår af, at vi af

$$e_{f_j}(\tau_1+\tau_2) \leq e_{f_j}(\tau_1) + e_{f_j}(\tau_2) \quad \text{for } j \in \{1, \dots, m\}$$

slutter

$$e_{f_j}(\tau_1+\tau_2) \leq v(\tau_1) + v(\tau_2) \quad \text{for } j \in \{1, \dots, m\},$$

hvoraf

$$v(\tau_1+\tau_2) \leq v(\tau_1) + v(\tau_2).$$

Funktionen $v(\tau)$ kaldes den <u>mindste forskydnings-majorant</u> for sættet $f_1(x), \dots, f_m(x)$. Af udlighet for $v(\tau)$ følger, at der for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælder

$$\{\tau \in \mathbb{R} \mid v(\tau) \leq \varepsilon\} = \{\tau \in \mathbb{R} \mid e_{f_1}(\tau) \leq \varepsilon\} \cap \dots \cap \{\tau \in \mathbb{R} \mid e_{f_m}(\tau) \leq \varepsilon\}.$$

Vi har hermed vist følgende skærpelse af sætning 2 i §38:

<u>Sætning 4.</u> For vilkårlige næstenperiodiske funktioner $f_1(x), \dots, f_m(x)$ eksisterer der en næstenperiodisk funktion $v(x)$, for hvilken der for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælder

$$\{\tau_v(\varepsilon)\} = \{\tau_{f_1}(\varepsilon)\} \cap \dots \cap \{\tau_{f_m}(\varepsilon)\},$$

d.v.s. mængden af fælles forskydningstal for $f_1(x), \dots, f_m(x)$ hørende til ε er nøjagtigt mængden af forskydningstal for $v(x)$ hørende til ε.

Den netop anvendte slutningsmåde kan anvendes på en vilkårlig majoriserbar mængde $\mathfrak{F}$. Vi når

<u>Sætning 5.</u> Enhver majoriserbar mængde $\mathfrak{F}$ af næstenperiodiske funktioner har en mindste forskydningsmajorant $v(\tau)$. Denne forskydningsmajorant er bestemt ved

$$v(\tau) = \sup\{e_f(\tau) \mid f \in \mathfrak{F}\}.$$

For ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ er mængden af fælles forskydningstal $\tau(\varepsilon)$ for alle $f \in \mathfrak{F}$ identisk med mængden af forskydningstal $\tau(\varepsilon)$ for funktionen v.

Bevis. Hvis h er en majorant for $\mathfrak{F}$, gælder $e_f(\tau) \le e_h(\tau)$ for alle $\tau \in \mathbb{R}$ og alle $f \in \mathfrak{F}$. Altså gælder $\sup\{e_f(\tau) \mid f \in \mathfrak{F}\} \le e_h(\tau)$ for alle $\tau \in \mathbb{R}$.

Funktionen $v(\tau)$ er en forskydningsfunktion. Thi den opfylder åbenbart betingelserne (a), (b) i sætning 1, og betingelsen (c) følger af at

$$e_f(\tau_1 + \tau_2) \le e_f(\tau_1) + e_f(\tau_2) \quad \text{for ethvert } f \in \mathfrak{F},$$

hvoraf

$$e_f(\tau_1 + \tau_2) \le v(\tau_1) + v(\tau_2) \quad \text{for ethvert } f \in \mathfrak{F},$$

hvoraf

$$v(\tau_1 + \tau_2) \le v(\tau_1) + v(\tau_2).$$

Da $v(\tau) \le e_h(\tau)$, gælder for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ at

$$\{\tau \in \mathbb{R} \mid v(\tau) \le \varepsilon\} \supseteq \{\tau \in \mathbb{R} \mid e_h(\tau) \le \varepsilon\}.$$ Heraf følger,

at for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mængden $\{\tau \in \mathbb{R} \mid v(\tau) \leq \varepsilon\}$ er relativt tæt og indeholder et interval $[-\delta, \delta]$.

Ifølge sætning 2 er $v(\tau)$ således næsten periodisk. Den er en majorant for $\mathcal{F}$, idet $v(\tau) \geq e_f(\tau)$ for ethvert $f \in \mathcal{F}$, og den er åbenbart den mindste forskydningsmajorant.

Sætningens sidste udsagn er en konsekvens af udtrykket for $v(\tau)$. Af dette udtryk fremgår nemlig, at der for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælder

$$\{\tau \in \mathbb{R} \mid v(\tau) \leq \varepsilon\} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \{\tau \in \mathbb{R} \mid e_f(\tau) \leq \varepsilon\}.$$

46. Et vigtigt eksempel på en majoriserbar mængde er mængden $\mathcal{F} = \{f(x+a)g(x+b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$, hvor f og g er givne næsten periodiske funktioner. Uligheden

$$|f(x+\tau+a)g(x+\tau+b) - f(x+a)g(x+b)| \leq$$
$$|f(x+\tau+a) - f(x+a)||g(x+\tau+b)| + |f(x+a)||g(x+\tau+b) - g(x+b)|$$

medfører nemlig, at forskydningsfunktionen for enhver af funktionerne i $\mathcal{F}$ er $\leq$ funktionen

$$e(\tau) = C_g e_f(\tau) + C_f e_g(\tau),$$

hvor $C_f = \sup_x |f(x)|$ og $C_g = \sup_x |g(x)|$. Denne funktion $e(\tau)$ er næsten periodisk og tilfredsstiller betingelserne (a), (b), (c) i sætning 1. Den er derfor en forskydningsmajorant for $\mathcal{F}$.

Specielt er mængden $\mathcal{F} = \{f(x-y)g(y) \mid x \in \mathbb{R}\}$, hvor vi har betegnet den variable i funktionerne med y, en majoriserbar mængde.

47. Ensartet begrænsethed, ensartet uniform kontinuitet, ensartet næsten periodicitet. Lad os betragte en mængde $\mathcal{F}$ af næsten periodiske funktioner.

Funktionerne i $\mathcal{F}$ siges at være ensartet begrænsede, hvis der findes et C, så at $|f(x)| \leq C$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og alle $f \in \mathcal{F}$.

Funktionerne i $\mathcal{F}$ siges at være <u>ensartet uniformt kontinuerte</u>, hvis der for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$ så at $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$, for hvilke $|x-y| \leq \delta$, og alle $f \in \mathcal{F}$.

Funktionerne i $\mathcal{F}$ siges at være <u>ensartet næsten periodiske</u>, hvis der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en relativt tæt mængde af fælles forskydningstal $\tau(\varepsilon)$ for alle $f \in \mathcal{F}$.

<u>Sætning 6.</u> <u>En mængde $\mathcal{F}$ af næsten periodiske funktioner er majoriserbar, hvis og kun hvis funktionerne i $\mathcal{F}$ er ensartet næsten periodiske og ensartet uniformt kontinuerte.</u>

Bevis. De to ensartethedsbetingelser tilsammen betyder, at for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mængden af fælles forskydningstal $\tau(\varepsilon)$ for alle $f \in \mathcal{F}$ er relativt tæt og indeholder et interval $[-\delta, \delta]$. At denne betingelse er opfyldt, hvis $\mathcal{F}$ er majoriserbar, er evident, da forskydningstallene $\tau_h(\varepsilon)$ for en majorant h for $\mathcal{F}$ er fælles forskydningstal $\tau(\varepsilon)$ for alle $f \in \mathcal{F}$.

Antag omvendt, at de to ensartethedsbetingelser er opfyldt. Vi bemærker først, at talmængden $\{e_f(\tau) \mid f \in \mathcal{F}\}$ må være begrænset for ethvert τ. Thi vælg i henhold til den ensartede uniforme kontinuitet til $\varepsilon = 1$ et $\delta \in \mathbb{R}_+$; da gælder $e_f(\tau) \leq 1$ for alle $\tau \in [-\delta, \delta]$ og alle $f \in \mathcal{F}$. Heraf følger ved gentagen brug af betingelsen (c) i sætning 1, at $e_f(\tau) \leq n$ for alle $\tau \in [-n\delta, n\delta]$ og alle $f \in \mathcal{F}$ (for ethvert $n \in \mathbb{N}$). Vi betragter nu funktionen

$$e(\tau) = \sup\{e_f(\tau) \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Ved den i beviset for sætning 5 anvendte betragtning ses, at $e(\tau)$ er en forskydningsfunktion. Og for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælder, at mængden $\{\tau \in \mathbb{R} \mid e(\tau) \leq \varepsilon\}$ er relativt tæt og indeholder et interval $[-\delta, \delta]$. Thi mængden $\{\tau \in \mathbb{R} \mid e(\tau) \leq \varepsilon\}$ er jo netop mængden af fælles $\tau(\varepsilon)$ for alle $f \in \mathcal{F}$. Ifølge sætning 2 er $e(\tau)$ altså næsten-periodisk, og da $e(\tau) \geq e_f(\tau)$ for alle $f \in \mathcal{F}$, er $e(\tau)$ en forskydningsmajorant for $\mathcal{F}$.

48. Vi vil nu give en karakterisering af de betin-
get kompakte, eller hvad der ifølge § 41 kommer ud
på det samme, de totalt begrænsede mængder af næsten
periodiske funktioner.

Sætning 7. En mængde $\mathfrak{F}$ af næsten periodiske
funktioner er betinget kompakt, hvis og kun hvis
funktionerne i $\mathfrak{F}$ er ensartet begrænsede,
ensartet uniformt kontinuerte, og ensartet næsten
periodiske.

(Sætningen er et analogon til en sætning af Ascoli
og Arzelà om mængder af kontinuerte funktioner på et af-
sluttet interval.)

Bevis. (1) Total begrænsethed af $\mathfrak{F}$ medfører
de tre ensartethedsbetingelser. For et givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ betrag-
ter vi et sæt $f_1, \dots, f_n$ af $\frac{1}{3}\varepsilon$-approksimanter for $\mathfrak{F}$
tilhørende $\mathfrak{F}$. Mængden af fælles forskydningstal $\tau(\varepsilon)$
for alle $f \in \mathfrak{F}$ må indeholde mængden af fælles $\tau(\frac{1}{3}\varepsilon)$
for $f_1, \dots, f_m$. Den er altså relativt tæt og indeholder et
interval $[-\delta, \delta]$. Hermed er den ensartede næsten periodi-
citet og den ensartede uniforme kontinuitet godtgjort.
Den ensartede begrænsethed følger af, at der for ethvert $f \in \mathfrak{F}$
må gælde

$$\sup_x |f(x)| \leq \tfrac{1}{3}\varepsilon + \max\{\sup_x |f_1(x)|, \dots, \sup_x |f_m(x)|\}.$$

(2) De tre ensartethedsbetingelser tilsammen
medfører total begrænsethed af $\mathfrak{F}$.

For et givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ betragtes et $l \in \mathbb{R}_+$, så at
ethvert interval $[a, a+l]$ indeholder et fælles $\tau(\frac{1}{5}\varepsilon)$
for alle $f \in \mathfrak{F}$, og et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så at $[-\delta, \delta]$ består af
fælles $\tau(\frac{1}{5}\varepsilon)$ for alle $f \in \mathfrak{F}$. Lad $x_1, \dots, x_m$ være
punkter i $[0, l]$ valgt således, at ethvert punkt i
$[0, l]$ har en afstand $\leq \delta$ fra et af dem. Da gæl-
der, at to funktioner f og g fra $\mathfrak{F}$ vil opfylde betin-

gelsen $\quad |f(x)-g(x)| \leq \varepsilon$ for alle $x \in \mathbb{R}$,

hvis de opfylder betingelserne

$$|f(x_1)-g(x_1)| \leq \tfrac{1}{5}\varepsilon, \quad \dots, \quad |f(x_m)-g(x_m)| \leq \tfrac{1}{5}\varepsilon.$$

Thi for ethvert $x \in \mathbb{R}$ findes et fælles $\tau(\frac{1}{5}\varepsilon)$, for hvilket $x+\tau \in [0,l]$, og punktet $x+\tau$ har en afstand $\leq \delta$ fra mindst et af punkterne $x_1, \dots, x_m$.

Betragt nu for hvert $f \in \mathcal{F}$ punktet

$$z_f = (f(x_1), \dots, f(x_m)) \in \mathbb{C}^m.$$

Punktmængden $A = \{z_f \mid f \in \mathcal{F}\}$ er en begrænset mængde i $\mathbb{C}^m$. Vi kan derfor finde et endeligt antal funktioner $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$, således at ethvert punkt $z_f \in A$ i alle koordinater afviger numerisk højst $\frac{1}{5}\varepsilon$ fra et af punkterne $z_{f_1}, \dots, z_{f_n}$. Det betyder, at der for ethvert $f \in \mathcal{F}$ findes et $j \in \{1, \dots, n\}$, således at

$$|f(x_1)-f_j(x_1)| \leq \tfrac{1}{5}\varepsilon, \quad \dots, \quad |f(x_m)-f_j(x_m)| \leq \tfrac{1}{5}\varepsilon.$$

Følgelig er sættet $f_1, \dots, f_n$ et sæt ε-approksimanter for $\mathcal{F}$.

Kapitel 3. Fourierrækker for næsten periodiske funktioner. Hovedsætninger.

Middelværdier af næsten periodiske funktioner.

49. Middelværdisætningen. Fra den foregående mere deskriptive del af teorien for næsten periodiske funktioner vender vi os nu til teoriens analytiske del. Nøglen hertil er eksistensen af middelværdier for næsten periodiske funktioner.

Sætning 1. For enhver næstenperiodisk funktion $f = f(x)$ konvergerer middelværdien

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

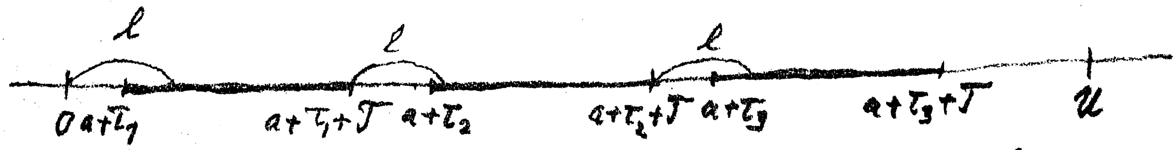
over intervallet $[a, a+T]$ for $T \to \infty$ uniformt i a

med en konstant. Denne konstant kaldes middelværdien for f og betegnes $M\{f\}$ eller $M\{f(x)\}$.

Bevis. Vi begynder med at udlede en vurdering for differensen

$$\frac{1}{U}\int_0^U f(x)\,dx - \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

for vilkårlige $a \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $U \in \mathbb{R}_+$.



For et vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ betragter vi en længde $l = l(\frac{1}{2}\varepsilon)$ for f. Vi vælger nu et forskydningstal $\tau_1 = \tau(\frac{1}{2}\varepsilon)$, således at $a+\tau_1 \in [0,l]$, og betragter intervallet $[a+\tau_1, a+\tau_1+T]$; dernæst vælger vi et forskydningstal $\tau_2 = \tau(\frac{1}{2}\varepsilon)$, således at $a+\tau_2 \in [a+\tau_1+T, a+\tau_1+T+l]$, og betragter intervallet $[a+\tau_2, a+\tau_2+T]$; og således videre (se figuren). Lad $n (\geq 0)$ være antallet af intervaller $[a+\tau_m, a+\tau_m+T]$ indeholdt i $[0,U]$. Da gælder

$$nT \leq U \leq (n+1)(l+T) = nT + nl + (l+T).$$

For ethvert m gælder

$$\int_{a+\tau_m}^{a+\tau_m+T} f(x)\,dx - \int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^{a+T} (f(x+\tau_m) - f(x))\,dx,$$

hvoraf

$$\left| \int_{a+\tau_m}^{a+\tau_m+T} - \int_a^{a+T} \right| \leq T\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Idet vi sætter $\sup_x |f(x)| = C$, får vi derfor

$$\left| \int_0^U - n\int_a^{a+T} \right| \leq nT\tfrac{1}{2}\varepsilon + (U-nT)C.$$

I stedet for $n\int_a^{a+T}$ kan vi skrive $nT\frac{1}{T}\int_a^{a+T}$, som er $= U\frac{1}{T}\int_a^{a+T} - (U-nT)\frac{1}{T}\int_a^{a+T}$. Da $\left|\frac{1}{T}\int_a^{a+T}\right| \leq C$, ser vi, at

$$\left| \int_0^U - U\frac{1}{T}\int_a^{a+T} \right| \leq nT\tfrac{1}{2}\varepsilon + 2(U-nT)C,$$

hvoraf
$$\left| \frac{1}{U}\int_0^U - \frac{1}{T}\int_a^{a+T} \right| \leq \frac{nT\frac{1}{2}\varepsilon}{U} + \frac{2nlC}{U} + \frac{2(l+T)C}{U}$$

(1)
$$\leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \frac{2lC}{T} + \frac{2(l+T)C}{U}.$$

Ved at anvende (1) for $a=0$ og to værdier af T fås

$$\left| \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} \right| \leq \varepsilon + \frac{2lC}{T_1} + \frac{2lC}{T_2} + \frac{2(l+T_1)C}{U} + \frac{2(l+T_2)C}{U}.$$

Her er venstre side uafhængig af U. Ved at lade $U \to \infty$ får vi

$$\left| \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} \right| \leq \varepsilon + \frac{2lC}{T_1} + \frac{2lC}{T_2}.$$

Vælges $T_0 \geq \dfrac{4lC}{\varepsilon}$, gælder altså

$$\left| \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} \right| \leq 2\varepsilon, \text{ når } T_1 \geq T_0 \text{ og } T_2 \geq T_0.$$

I kraft af det almindelige konvergensprincip eksisterer følgelig grænseværdien

$$M = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx.$$

Ved nu i (1) at lade $U \to \infty$ finder vi

$$\left| M - \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \frac{2lC}{T},$$

og altså

$$\left| M - \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\,dx \right| \leq \varepsilon \text{ for alle } a \in \mathbb{R}, \text{ når } T \geq T_0.$$

Hermed er sætningen bevist, og vi har samtidig fundet en vurdering af differensen mellem $M\{f(x)\}$ og middelværdien over et vilkårligt interval $[a, a+T]$, nemlig

(2)
$$\left| M\{f(x)\} - \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \frac{2l(\frac{1}{2}\varepsilon)\,C}{T}.$$

50. I vurderingen (2) kan vi opnå en lille forbedring, idet vi på højre side kan erstatte $C = \sup_x |f(x)|$ med $\sup_x |f(x) - f(0)|$. Ved i (2) at erstatte $f(x)$ med $f(x) - f(0)$ sker nemlig ingen ændring af venstre side [idet der åbenbart gælder $M\{f(x) - f(0)\} = M\{f(x)\} - f(0)$ og $\frac{1}{T}\int_a^{a+T}(f(x) - f(0))dx = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx - f(0)$], og på højre kan vi benytte samme $l(\frac{1}{2}\varepsilon)$ som før [idet $f(x)$ og $f(x) - f(0)$ for ethvert ε har de samme forskydningstal]. Vi benytter dette til at vise

Sætning 2. For funktionerne i en majoriserbar mængde $\mathfrak{F}$ af næsten periodiske funktioner eksisterer middelværdierne uniformt, d.v.s. for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $T_0 \in \mathbb{R}_+$, således at

$$\left| M\{f(x)\} - \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx \right| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } a \in \mathbb{R} \text{ og alle } f \in \mathfrak{F}, \text{ når } T \geq T_0$$

Bevis. Lad $e(x)$ være en forskydningsmajorant for $\mathfrak{F}$. Da gælder $\sup_x |f(x) - f(0)| \leq \sup_x e(x)$ for alle $f \in \mathfrak{F}$. Vi kan derfor i (2) for alle $f \in \mathfrak{F}$ erstatte C med $\sup_x e(x)$. Endvidere kan vi for alle $f \in \mathfrak{F}$ som $l(\frac{1}{2}\varepsilon)$ benytte et $l(\frac{1}{2}\varepsilon)$ hørende til $e(x)$.

Bemærkning. For en kontinuert funktion $f = f(x)$ med perioden $p > 0$ er middelværdien i henhold til sætning 1 naturligvis lig med den tidligere definerede middelværdi $\frac{1}{p}\int_0^p f(x)dx$. Thi for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\frac{1}{np}\int_0^{np} f(x)dx = \frac{1}{np}\left[\int_0^p + \int_p^{2p} + \cdots + \int_{(n-1)p}^{np} f(x)dx\right] = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)dx,$$

hvoraf $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{np}\int_0^{np} f(x)dx = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)dx$.

51. Regler for middelværdier. For middelværdier af næsten periodiske funktioner gælder en række simple regler:

Middelværdien af en reel funktion er reel. Endvidere gælder $|M\{f(x)\}| \leq M\{|f(x)|\}$, altså specielt $|M\{f(x)\}| \leq C$, hvis $|f(x)| \leq C$ for alle x. Af regneregler nævnes:

$$M\{\overline{f(x)}\} = \overline{M\{f(x)\}}$$

$$M\{f(x+k)\} = M\{f(x)\} \quad \text{for ethvert } k \in \mathbb{R}.$$

$$M\{k f(x)\} = k\, M\{f(x)\}$$

$$M\{f(kx)\} = M\{f(x)\} \quad \text{for ethvert } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$M\{f(x) + g(x)\} = M\{f(x)\} + M\{g(x)\}.$$

$$M\{f(x)\} = \lim M\{f_n(x)\},$$ hvis følgen $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, konvergerer uniformt mod $f(x)$. [Dette fremgår af, at $|M\{f(x)\} - M\{f_n(x)\}| = |M\{f(x) - f_n(x)\}| \leq \sup_x |f(x) - f_n(x)|$.]

Sætning 3. Hvis den næsten periodiske funktion f *er reel*, *og* $f(x) \geq 0$ for alle x, *da gælder* $M\{f(x)\} \geq 0$, *og der gælder* $M\{f(x)\} = 0$, *hvis og kun hvis* $f(x) = 0$ for alle x.

Bevis. Det er klart, at $M\{f(x)\} \geq 0$, og at $M\{f(x)\} = 0$, hvis f er nulfunktionen. Det drejer sig om at vise, at $M\{f(x)\} > 0$, hvis f ikke er nulfunktionen.

Antag $f(x_0) = \alpha > 0$, og vælg L og Δ i henhold til corollaret til sætning 2 i § 36 svarende til $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha$. For ethvert $\tau = \tau(\frac{1}{2}\alpha)$ må gælde $f(x_0 + \tau) \geq \frac{1}{2}\alpha$. Ethvert interval af længden L må derfor indeholde et interval af længden Δ, i hvilket $f(x) \geq \frac{1}{2}\alpha$. Idet $f(x) \geq 0$ for alle x, slutter vi heraf, at

$$\int_0^{mL} f(x)\,dx \geq \frac{1}{2}\alpha m \Delta \quad \text{for ethvert } m \in \mathbb{N},$$

hvoraf

$$M\{f(x)\} = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{mL} \int_0^{mL} f(x)\,dx \geq \frac{1}{2}\alpha \frac{\Delta}{L}.$$

52. Foldning.

Ved brug af middelværdisætningen kan vi indføre *foldningen*

$$h(x) = M_y\{f(x-y)\,g(y)\}$$

71 af to næsten periodiske funktioner $f(x)$ og $g(x)$. Middelværdien eksisterer, da $F_x(y) = f(x-y)\,g(y)$ for fast x er en næsten periodisk funktion af y. Vi vil vise

<u>Sætning 4.</u> Foldningen $h(x)$ <u>af to næsten periodiske funktioner $f(x)$ og $g(x)$</u> er en næsten periodisk funktion. <u>Dens middelværdi</u> er produktet af middelværdierne af $f(x)$ og $g(x)$:

$$\mathcal{M}\{h(x)\} = \mathcal{M}\{f(x)\}\,\mathcal{M}\{g(x)\}.$$

Bevis. (i) Næstenperiodiciteten af $h(x)$ følger af vurderingen

$$|h(x+\tau)-h(x)| = \left|\mathcal{M}_y\{[f(x+\tau-y)-f(x-y)]\,g(y)\}\right|$$

$$\leq \mathcal{M}_y\{|f(x+\tau-y)-f(x-y)|\,|g(y)|\} \leq e_f(\tau)\,C_g,$$

hvor $e_f(\tau)$ er forskydningsfunktionen for f, og $C_g = \sup_x |g(x)|$. Ifølge denne vurdering er ethvert $\tau(\varepsilon)$ for f et $\tau(\varepsilon C_g)$ for h. For ethvert $\eta \in \mathbb{R}_+$ gælder derfor, at mængden $\{\tau_h(\eta)\}$ er relativt tæt og indeholder et interval $[-\delta, \delta]$.

(ii) Ud fra definitionen af $h(x)$ fås ved formel regning

$$\mathcal{M}\{h(x)\} = \mathcal{M}_x\{\mathcal{M}_y\{f(x-y)\,g(y)\}\} = \mathcal{M}_y\{\mathcal{M}_x\{f(x-y)\,g(y)\}\}$$

$$= \mathcal{M}_y\{\mathcal{M}_x\{f(x-y)\}\,g(y)\} = \mathcal{M}_y\{\mathcal{M}_x\{f(x)\}\,g(y)\}$$

$$= \mathcal{M}_x\{f(x)\}\,\mathcal{M}_y\{g(y)\}.$$

Ved denne regning har vi imidlertid ombyttet de to operatorer $\mathcal{M}_x$ og $\mathcal{M}_y$, hvilket ikke uden videre er tilladt. For at nå det ønskede resultat må vi gå mere forsigtigt frem. Som påpeget i § 46 er mængden $\{F_x(y) = f(x-y)\,g(y) \mid x \in \mathbb{R}\}$ majoriserbar. Dette medfører ifølge sætning 2, at

$$h_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x-y)\,g(y)\,dy$$

for $T \to \infty$ konvergerer uniformt i x mod $h(x)$.

For ethvert T er funktionen $h_T(x)$ næsten periodisk. Dette fremgår af vurderingen

$$|h_T(x+\tau)-h_T(x)| = \left|\frac{1}{T}\int_0^T [f(x+\tau-y)-f(x-y)]\,g(y)\,dy\right|$$
$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(x+\tau-y)-f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \leq \varepsilon_f(\tau)\,C_g.$$

Altså gælder
$$M\{h(x)\} = \lim_{T\to\infty} M\{h_T(x)\}.$$

For ethvert U gælder
$$\frac{1}{U}\int_0^U h_T(x)\,dx = \frac{1}{U}\int_0^U\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x-y)g(y)\,dy\right)dx$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{U}\int_0^U f(x-y)g(y)\,dx\right)dy$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{U}\int_0^U f(x-y)\,dx\right)g(y)\,dy$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{U}\int_{-y}^{-y+U} f(x)\,dx\right)g(y)\,dy.$$

Denne regning svarer til den ovenfor udførte formelle regning, men her er ombytningen af de to operationer tilladt. I det sidste udtryk konvergerer $\frac{1}{U}\int_{-y}^{-y+U} f(x)\,dx$ uniformt i y mod $M\{f(x)\}$ for $U\to\infty$. Heraf følger, da $g(y)$ er begrænset, at $\left(\frac{1}{U}\int_{-y}^{-y+U} f(x)\,dx\right)g(y)$ konvergerer uniformt i y mod $M\{f(x)\}\,g(y)$ for $U\to\infty$. Specielt er konvergensen uniform i intervallet $[0,T]$. Vi får derfor
$$M\{h_T(x)\} = \lim_{U\to\infty}\frac{1}{U}\int_0^U h_T(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T M\{f(x)\}\,g(y)\,dy = M\{f(x)\}\,\frac{1}{T}\int_0^T g(y)\,dy,$$
hvoraf for $T\to\infty$ det ønskede resultat
$$M\{h(x)\} = \lim_{T\to\infty} M\{h_T(x)\} = M\{f(x)\}\,M\{g(y)\}.$$

Fourierrækker for næsten periodiske funktioner.

53. Vektorrummet af næsten periodiske funktioner.

Mængden $\mathcal{NP}$ af næsten periodiske funktioner er et vektorrum over $\mathbb{C}$. De betragtninger, der førte os til Fourier rækker for kontinuerte funktioner af en variabel med perioden 2π, kan anvendes også for næsten periodiske funktioner. Der er dog visse betydningsfulde forskelle, som vi må vise særlig opmærksomhed.

Ved det *indre produkt* af to funktioner $f, g \in N^{\mathfrak{P}}$ vil vi forstå tallet

$$(f,g) = M\{f\bar{g}\} = M\{f(x)\overline{g(x)}\}.$$

Der gælder reglerne

$$(g,f) = \overline{(f,g)}$$

$$(af,g) = a(f,g), \quad (f_1+f_2,g) = (f_1,g)+(f_2,g)$$

$$(f,ag) = \bar{a}(f,g), \quad (f,g_1+g_2) = (f,g_1)+(f,g_2).$$

Udtrykket

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{M\{f(x)\overline{f(x)}\}} = \sqrt{M\{|f(x)|^2\}} \quad (\geq 0)$$

kaldes *normen* af f. Den er 0, hvis og kun hvis $f=0$ (nulfunktionen). Dette fremgår af sætning 3 i § 51. Der gælder $\|af\| = |a|\,\|f\|$. En funktion med normen 1 kaldes *normal*. Hvis $f \neq 0$, er funktionen $f/\|f\|$ normal.

Normen $\|f-g\| = \|g-f\|$ af differensen $f-g$ kaldes *afstanden* mellem funktionerne f og g. Den er 0, hvis og kun hvis $f=g$.

Den indførte norm og afstand kaldes *middelkvadratnormen* og *middelkvadratafstanden* for at skelne dem fra andre lignende begreber.

54. To funktioner f og g fra $N^{\mathfrak{P}}$ kaldes *ortogonale*, og vi skriver $f \perp g$, hvis $(f,g)=0$ [og altså også $(g,f)=0$]. Af $f \perp g$ følger $af \perp bg$, og af $f \perp g$ og $f \perp h$ følger $f \perp ag+bh$ for vilkårlige $a, b \in \mathbb{C}$.

For to funktioner $f, g \in N^{\mathfrak{P}}$ finder vi

$$(1) \quad \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g),$$

hvoraf Pythagoras' sætning

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2, \text{ hvis } f \perp g.$$

Vi har igen Cauchy-Schwarz' ulighed

$$(2) \qquad |(f,g)| \leq \|f\| \, \|g\|.$$

Af (1) og (2) følger trekant uligheden

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

eller

$$\|f-g\| \leq \|f-h\| + \|h-g\|.$$

En følge af funktioner $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{N}\mathcal{P}$ siges at konvergere i middel kvadrat mod funktionen $f \in \mathcal{N}\mathcal{P}$, hvis $\|f - f_n\| \to 0$ for $n \to \infty$.

55. Normale ortogonale systemer. Et endeligt eller uendeligt system af funktioner i $\mathcal{N}\mathcal{P}$ kaldes et normalt ortogonalt system, hvis det består af normale, parvis ortogonale funktioner.

Systemet af rene svingninger

$$e_\lambda = e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

er et normalt ortogonalt system. Thi for ethvert λ gælder

$$\|e_\lambda\|^2 = \mathcal{M}\{|e^{i\lambda x}|^2\} = \mathcal{M}\{1\} = 1,$$

og for $\lambda \neq \mu$ gælder

$$(e_\lambda, e_\mu) = \mathcal{M}\{e^{i\lambda x} e^{-i\mu x}\} = \mathcal{M}\{e^{i(\lambda-\mu)x}\} = 0.$$

Dette system kaldes det trigonometriske system. I modsætning til de tidligere betragtede normale ortogonale systemer er det ikke numerabelt.

Bemærkning. Nøjagtigt som i $\mathcal{P}$ fører en simpel substitution til et normalt ortogonalt system bestående af reelle funktioner, nemlig systemet

$$1, \quad \sqrt{2}\cos\lambda x, \quad \sqrt{2}\sin\lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

56. Fourier konstanter. Deres minimalegenskab. Lad φ være en vilkårlig normal funktion i $N\mathfrak{P}$ og f en vilkårlig funktion i $N\mathfrak{P}$. Det indre produkt $a=(f,\varphi)$ kaldes Fourier konstanten for f med hensyn til φ.

Lad $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ være et vilkårligt endeligt normalt ortogonalt system i $N\mathfrak{P}$. Lad $a_p=(f,\varphi_p)$ betegne Fourier konstanten for f med hensyn til φ_p. Da gælder for vilkårlige koefficienter c_p formlen

$$\|f-\sum_1^n c_p\varphi_p\|^2=\|f-\sum_1^n a_p\varphi_p\|^2+\sum_1^n|c_p-a_p|^2.$$

Beviset er nøjagtigt som for $\mathfrak{P}$. Denne formel viser, at $\|f-\sum_1^n c_p\varphi_p\|$ er minimal, når koefficienterne c_p er lig med de tilsvarende Fourier konstanter a_p, og kun for disse værdier. Værdien af minimet er bestemt ved

$$\|f-\sum_1^n a_p\varphi_p\|^2=\|f\|^2-\sum_1^n|a_p|^2.$$

57. Fourier rækker. For en vilkårlig næsten periodisk funktion $f(x)$ kaldes Fourier konstanten

$$a_\lambda=M\{f(x)e^{-i\lambda x}\},\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

for $f(x)$ med hensyn til $e^{i\lambda x}$ den λ^{te} Fourier konstant for $f(x)$.

Af afgørende betydning for teorien er følgende sætning, som vil blive bevist senere:

Sætning 1. Fourier konstanten a_λ er 0 for alle λ med undtagelse af en endelig eller numerabel mængde.

På grund af denne sætning kan vi kalde udtrykket

$$\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$$

en række, skønt der er ikke numerabelt mange led. Vi kalder denne række, som blot er at betragte som mængden af sine led, Fourier rækken for $f(x)$ og skriver

$$f(x)\sim\sum a_\lambda e^{i\lambda x}.$$

58. Af § 56 følger umiddelbart

Sætning 2. For ethvert endeligt antal af rene svingninger giver den tilsvarende delsum $\sum^* a_\lambda e^{i\lambda x}$ af Fourierrækken blandt alle linearkombinationer $\sum^* c_\lambda e^{i\lambda x}$ af disse svingninger den bedste middel kvadrat approximation til funktionen $f(x)$, d.v.s.

$$M\{|f(x)-\sum^* a_\lambda e^{i\lambda x}|^2\} \leq M\{|f(x)-\sum^* c_\lambda e^{i\lambda x}|^2\}$$

for vilkårlige c_λ, og lighedstegnet gælder kun, når $c_\lambda = a_\lambda$ for alle i summen optrædende λ.

Værdien af dette minimum er bestemt ved formlen

$$M\{|f(x)-\sum^* a_\lambda e^{i\lambda x}|^2\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum^* |a_\lambda|^2.$$

Af den sidste formel følger uligheden

(3) $$\sum^* |a_\lambda|^2 \leq M\{|f(x)|^2\}.$$

Ved hjælp af denne ulighed kan vi let bevise sætning 1. Sæt til afkortning $M\{|f(x)|^2\} = C$. For et hvert $d \in \mathbb{R}_+$ kan der kun findes et endeligt antal værdier af λ, for hvilke $|a_\lambda| \geq \delta$, nemlig højst C/d^2. Betragt nu først de λ, for hvilke $|a_\lambda| \geq 1$, dernæst de λ for hvilke $1 > |a_\lambda| \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} > |a_\lambda| \geq \frac{1}{3}$, o.s.v. Hver af disse mængder er endelig, og deres foreningsmængde er mængden af de λ, for hvilke $|a_\lambda| > 0$, d.v.s. for hvilke $a_\lambda \neq 0$. Denne mængde er altså endelig eller numerabel.

De værdier af λ, for hvilke $a_\lambda \neq 0$, kaldes Fourier frekvenserne for funktionen $f(x)$. Hvis S er en delmængde af $\mathbb{R}$, der indeholder Fourier frekvenserne for $f(x)$, vil vi også benytte skrivemåden

$$f(x) \sim \sum_S a_\lambda e^{i\lambda x}.$$

Ved at skrive Fourier rækken således, udtrykker vi altså, at $a_\lambda = 0$ for alle $\lambda \notin S$.

Hvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ er en følge af parvis forskellige reelle tal, der indeholder Fourier frekvenserne for $f(x)$, skriver vi også Fourierrækken som en sædvanlig række

$$f(x) \sim \sum_1^\infty a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}.$$

Uligheden (3) giver $\sum_1^N |a_{\lambda_n}|^2 \leq M\{|f(x)|^2\}$ for alle N. Dette medfører, at rækken $\sum_1^\infty |a_{\lambda_n}|^2$ er konvergent, og at dens sum er $\leq M\{|f(x)|^2\}$. Summen er åbenbart uafhængig af valget af følgen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Vi betegner den kort $\sum |a_\lambda|^2$. Det vil senere blive vist, at der for enhver næstenperiodisk funktion $f(x)$ gælder Parsevals formel

$$M\{|f(x)|^2\} = \sum |a_\lambda|^2.$$

Generelt vil vi for givne tal $c_\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$, tillægge summen $\sum c_\lambda$ en mening, hvis $c_\lambda = 0$ for alle λ med undtagelse af en endelig eller numerabel mængde, og det for en følge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ af indbyrdes forskellige reelle tal, der indeholder de λ, for hvilke $c_\lambda \neq 0$, gælder, at rækken $\sum c_{\lambda_n}$ er absolut konvergent. Når dette gælder for een sådan følge, gælder det for alle, og rækkesummen $\sum c_{\lambda_n}$ er uafhængig af valget af følgen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Det er denne sum, vi betegner $\sum c_\lambda$.

<u>Bemærkning</u>. Hvis funktionen $f(x)$ tilhører $\mathcal{P}$, er dens Fourier række i henhold til kapitel 1, altså rækken $\sum a_n e^{inx}$, hvor $a_n = M\{f(x) e^{-inx}\}$, også Fourierrækken for $f(x)$ betragtet som næstenperiodisk funktion. For at indse det må vi godtgøre, at $a_\lambda = 0$ for ethvert $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Dette fremgår måske lettest af, at der af $a_\lambda = M\{f(x) e^{-i\lambda x}\}$ følger

$$a_\lambda = M\{f(x+2\pi) e^{-i\lambda(x+2\pi)}\} = M\{f(x) e^{-i\lambda x}\} e^{-i\lambda 2\pi} = a_\lambda e^{-i\lambda 2\pi}.$$

Et trigonometrisk polynomium $s(x) = \sum^* c_\lambda e^{i\lambda x}$ er, som man let ser, sin egen Fourier række, d.v.s. Fourier rækken fås ved at tilføje nulled.

59. Regning med Fourier rækker. Vi vil vise, at simple operationer med næstenperiodiske funktioner afspejler sig i tilsvarende operationer med deres Fourier rækker.

Af $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ følger:

(1) $$k f(x) \sim \sum k a_\lambda e^{i\lambda x} \qquad (k \in \mathbb{C});$$

Thi $M\{k f(x) e^{-i\lambda x}\} = k M\{f(x) e^{-i\lambda x}\} = k a_\lambda$.

(2) $$e^{i\mu x} f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i(\lambda+\mu)x}, \text{ ɔ: } \sum a_{\lambda-\mu} e^{i\lambda x};$$

Thi $M\{e^{i\mu x} f(x) e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x) e^{-i(\lambda-\mu)x}\} = a_{\lambda-\mu}$.

(3) $$f(x+k) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda(x+k)}, \text{ ɔ: } \sum a_\lambda e^{i\lambda k} e^{i\lambda x} \qquad (k \in \mathbb{R});$$

Thi $M\{f(x+k) e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x+k) e^{-i\lambda(x+k)}\} e^{i\lambda k} = a_\lambda e^{i\lambda k}$.

(4) $$f(kx) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda k x}, \text{ ɔ: } \sum a_{\lambda/k} e^{i\lambda x} \qquad (k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

specielt

(4a) $$f(-x) \sim \sum a_{-\lambda} e^{i\lambda x};$$

Thi $M\{f(kx) e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x) e^{-i(\lambda/k)x}\} = a_{\lambda/k}$.

(5) $$\overline{f(x)} \sim \sum \overline{a_\lambda} e^{-i\lambda x}, \text{ ɔ: } \sum \overline{a_{-\lambda}} e^{i\lambda x};$$

Thi $M\{\overline{f(x)} e^{-i\lambda x}\} = \overline{M\{f(x) e^{i\lambda x}\}} = \overline{a_{-\lambda}}$.

Ved at kombinere (4a) og (5) får vi

(6) $$\overline{f(-x)} \sim \sum \overline{a_\lambda} e^{i\lambda x}.$$

Af $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ og $g(x) \sim \sum b_\lambda e^{i\lambda x}$ følger

(7) $$f(x) \pm g(x) \sim \sum (a_\lambda \pm b_\lambda) e^{i\lambda x};$$

Thi $M\{(f(x) \pm g(x)) e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x) e^{-i\lambda x}\} \pm M\{g(x) e^{-i\lambda x}\} = a_\lambda \pm b_\lambda$.

(8) $$f(x) g(x) \sim \sum c_\lambda e^{i\lambda x}, \text{ hvor } c_\lambda = \sum_{\mu+\nu=\lambda} a_\mu b_\nu = \sum_\nu a_{\lambda-\nu} b_\nu.$$

Denne multiplikationssætning ligger dybere end de foregående sætninger, og vi kan først bevise den senere. Her bemærkes blot, at udtrykket, der bestemmer c_λ, har mening som følge af uligheden $|a_\mu b_\nu| \le \frac{1}{2}|a_\mu|^2 + \frac{1}{2}|b_\nu|^2$, idet udtrykkene $\sum |a_\mu|^2$ og $\sum |b_\nu|^2$ har mening.

60. For foldningen af $f(x)$ og $g(x)$ har vi den betydningsfulde formel

(9) $$h(x) = \underset{y}{M}\{f(x-y)g(y)\} \sim \sum a_\lambda b_\lambda e^{i\lambda x}.$$

Thi
$$h(x)e^{-i\lambda x} = \underset{y}{M}\{f(x-y)e^{-i\lambda(x-y)}g(y)e^{-i\lambda y}\}$$
er simpelthen foldningen af $f(x)e^{-i\lambda x}$ og $g(x)e^{-i\lambda x}$. Ifølge sætning 4 i § 52 gælder derfor
$$M\{h(x)e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}\,M\{g(x)e^{-i\lambda x}\} = a_\lambda b_\lambda.$$
Foldning af to funktioner medfører således multiplikation af deres Fourier konstanter.

Ved at kombinere (9) og (6) får vi varianten

(10) $$\underset{y}{M}\{f(x-y)\overline{g(-y)}\} = \underset{y}{M}\{f(x+y)\overline{g(y)}\} \sim \sum a_\lambda \overline{b_\lambda} e^{i\lambda x}.$$

Hvis specielt $g = f$, får vi

(11) $$\underset{y}{M}\{f(x+y)\overline{f(y)}\} \sim \sum |a_\lambda|^2 e^{i\lambda x}.$$

I det specielle tilfælde, hvor $g(x)$ er et trigonometrisk polynomium $\sum^* b_\lambda e^{i\lambda x}$, får vi for foldningen formlen

(12) $$h(x) = \underset{y}{M}\{f(x-y)g(y)\} = \sum^* a_\lambda b_\lambda e^{i\lambda x}.$$

Thi
$$\begin{aligned} h(x) &= \underset{y}{M}\{f(x-y)\textstyle\sum^* b_\lambda e^{i\lambda y}\} \\ &= \textstyle\sum^* \underset{y}{M}\{f(x-y)e^{-i\lambda(x-y)}\}\,b_\lambda e^{i\lambda x} \\ &= \textstyle\sum^* \underset{z}{M}\{f(z)e^{-i\lambda z}\}\,b_\lambda e^{i\lambda x} = \sum^* a_\lambda b_\lambda e^{i\lambda x}. \end{aligned}$$

<u>61.</u> Hvis en følge af næsten periodiske funktioner $f_m(x) \sim \sum a_{m,\lambda} e^{i\lambda x}$ er uniformt konvergent med grænsefunktionen $f(x)$, da fås Fourierrækken for f ud fra Fourierrækkerne for funktionerne f_m ved formel grænseovergang, d.v.s., hvis $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$, gælder for ethvert λ, at $a_{m,\lambda} \to a_\lambda$ for $m \to \infty$. Endda gælder $a_{m,\lambda} \to a_\lambda$ for $m \to \infty$ uniformt i λ. Thi
$$|a_\lambda - a_{m,\lambda}| = |M\{(f(x) - f_m(x))e^{-i\lambda x}\}|$$
$$\leq M\{|f(x) - f_m(x)|\} \leq \sup_x |f(x) - f_m(x)|,$$
og den sidste størrelse $\sup_x |f(x) - f_m(x)|$ er uafhængig af λ

og konvergerer mod 0 for $n \to \infty$.

Med henblik på senere anvendelse fremhæve vi følgende specialtilfælde.

Sætning 3. Hvis $c_\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$, er tal, for hvilke summen $\sum c_\lambda$ har mening, er rækken $\sum c_\lambda e^{i\lambda x}$ Fourier række for sin sumfunktion $s(x)$.

Bevis. Når $\sum c_\lambda$ har mening, har også $\sum c_\lambda e^{i\lambda x}$ mening for ethvert x og bestemmer altså en funktion $s(x)$. Lad $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ være en følge af indbyrdes forskellige reelle tal, der indeholder de λ, for hvilke $c_\lambda \neq 0$. Da rækken $\sum c_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}$ har den konvergente majorant række $\sum |c_{\lambda_n}|$, konvergerer $s_m(x) = c_{\lambda_1} e^{i\lambda_1 x} + \cdots + c_{\lambda_m} e^{i\lambda_m x}$ uniformt mod sumfunktionen $s(x)$ for $m \to \infty$. Men et trigonometrisk polynomium er som bemærket i § 58 sin egen Fourier række, d.v.s. $s_m(x) \sim \sum a_{m,\lambda} e^{i\lambda x}$, hvor $a_{m,\lambda_j} = c_{\lambda_j}$ for $j \in \{1, \ldots, m\}$ og $a_{m,\lambda} = 0$ for $\lambda \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Der gælder altså $a_{m,\lambda} \to c_\lambda$ for ethvert $\lambda \in \mathbb{R}$, og grænsefunktionen $s(x)$ har derfor Fourier rækken $\sum c_\lambda e^{i\lambda x}$.

Af sætning 3 følger, at der for enhver numerabel mængde af reelle tal λ_n findes en næsten periodisk funktion med netop disse tal som Fourier frekvenser, for eksempel funktionen $f(x) = \sum \frac{1}{2^n} e^{i\lambda_n x}$.

Entydighedssætningen. Parsevals formel.

62. Entydighedsætningen. For næsten periodiske funktioner gælder samme fundamentale entydighedssætning som for periodiske funktioner.

Sætning 1. Hvis to næsten periodiske funktioner f og g har samme Fourier række, er de identiske, d.v.s. af $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ og $g(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ følger $f = g$.

Denne sætning er ensgyldig med følgende

Sætning 2. Hvis alle Fourier konstanter for en næsten periodisk funktion f er 0, d.v.s. hvis $f(x) \sim \sum 0 e^{i\lambda x}$, da er $f = 0$.

At sætning 2 følger af sætning 1, er klart, da funktionen 0 har Fourierrækken $\sum 0 e^{i\lambda x}$. Omvendt følger sætning 1 af sætning 2, idet $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ og $g(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ medfører $f(x)-g(x) \sim \sum 0 e^{i\lambda x}$.

Endnu en form af entydighedssætningen er følgende

Sætning 3. Det normale ortogonale system $e^{i\lambda x}$, $\lambda \in R$, er ikke ægte delmængde af noget normalt ortogonalt system i NP.

Sætning 3 følger af sætning 2, ifølge hvilken en funktion $f \in NP$, der er ortogonal på alle funktionerne $e^{i\lambda x}$, må være funktionen 0. Omvendt følger sætning 2 af sætning 3; thi var $f(x) \sim \sum 0 e^{i\lambda x}$ for en funktion $f \neq 0$, ville systemet $e^{i\lambda x}$, $\lambda \in R$, sammen med den normale funktion $f/\|f\|$ være et normalt ortogonalt system i NP.

63. Indledende bemærkninger om beviset for entydighedssætningen. Der kendes intet bevis for entydighedssætningen af lignende simpelhed som Lebesgues bevis eller beviset ud fra Fejérs sætning i tilfælde af periodiske funktioner.

I Bohrs oprindelige fremstilling af teorien fremkom sætningen som corollar til Parsevals formel

$$M\{|f(x)|^2\} = \sum |a_\lambda|^2,$$

som blev vist direkte. Thi hvis $f(x) \sim \sum 0 e^{i\lambda x}$, viser denne formel, at $M\{|f(x)|^2\} = 0$, hvilket ifølge sætning 3 i § 51 medfører, at $f = 0$. Her vil vi bevise entydighedssætningen og udlede Parsevals formel af den ved hjælp af foldning (som for periodiske funktioner).

Ideen i det oprindelige bevis for Parsevals formel var for ethvert $T > 0$ at betragte den stykkevis kontinuerte funktion med perioden T, der på intervallet $[0, T[$ stemmer overens med $f(x)$. Ved på den at anvende Parsevals formel fås

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_{T,n}|^2, \quad \text{hvor} \quad a_{T,n} = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx.$$

For $T \to \infty$ konvergerer $\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx$ mod $M\{|f(x)|^2\}$. Ved

en ydeist kompliceret bevisførelse lykkedes det at godtgøre,
at $\sum_{-\infty}^{\infty}|a_{T,n}|^2 \to \sum|\mu_\lambda|^2$ for $T \to \infty$. Beviset bliver ikke væ-
sentligt simplere, hvis man nøjes med at betragte tilfældet
$f(x) \sim \sum 0\, e^{i\lambda x}$, altså nøjes med at bevise entydighedssætningen.
Et helt andet bevis blev givet af Weyl ved brug af
en metode fra integralligningernes teori. Her spiller fold-
ningen en afgørende rolle. Vi vil senere behandle dette
bevis, som giver en dybere indsigt i teorien end noget andet.
Det i det følgende gengivne bevis skyldes de la Vallée
Poussin; dog er slutningen lidt enklere end i den oprinde-
lige version. Ligesom Bohrs oprindelige bevis bygger det
på anvendelse af Parsevals formel for stykkevis kontinu-
erte periodiske funktioner; desuden indgår foldning.

64. Forberedelser. For en given næstenperiodisk
funktion $f(x)$ sætter vi for $T>0$

$$a_T(\lambda) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx .$$

Lemma 1. *Til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\Lambda \in \mathbb{R}_+$, så at*

$$|a_T(\lambda)| \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad |\lambda| > \Lambda \quad \text{og} \quad T \geq 1 .$$

Bevis. Det eneste vi får brug for er, at f er begrænset
og uniformt kontinuert. Vi sætter

$$\sup_x |f(x)| = C \quad \text{og} \quad \sup_{\substack{x,y \\ |x-y|\leq\delta}} |f(x)-f(y)| = \omega(\delta).$$

For $\lambda \neq 0$ har $e^{-i\lambda x}$ perioden $\frac{2\pi}{|\lambda|}$. Da integralet af $e^{-i\lambda x}$ over
et interval af længden $\frac{2\pi}{|\lambda|}$ er 0, gælder for ethvert sådant
interval $[a, a+\frac{2\pi}{|\lambda|}]$

$$\left|\int_a^{a+\frac{2\pi}{|\lambda|}} f(x)\, e^{-i\lambda x}\right| = \left|\int_a^{a+\frac{2\pi}{|\lambda|}} (f(x)-f(a))\, e^{-i\lambda x}\, dx\right|$$

$$\leq \int_a^{a+\frac{2\pi}{|\lambda|}} |f(x)-f(a)|\, dx \leq \omega\left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)\frac{2\pi}{|\lambda|} .$$

Betragt nu et $T>0$. Da findes et $n \in \mathbb{N}_0$, så at $T = n\frac{2\pi}{|\lambda|} + \alpha$,
hvor $0 \leq \alpha < \frac{2\pi}{|\lambda|}$. Vi har da

$$\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}dx = \int_0^{\frac{2\pi}{|\lambda|}} + \int_{\frac{2\pi}{|\lambda|}}^{\frac{2\cdot 2\pi}{|\lambda|}} + \cdots + \int_{(n-1)\frac{2\pi}{|\lambda|}}^{n\frac{2\pi}{|\lambda|}} + \int_{n\frac{2\pi}{|\lambda|}}^{T} f(x)e^{-i\lambda x}dx,$$

og får altså

$$\left|\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}dx\right| \leq n\,\omega\left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)\frac{2\pi}{|\lambda|} + C\alpha \leq T\omega\left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right) + C\frac{2\pi}{|\lambda|}.$$

For $T \geq 1$ fås derfor

$$|a_T(\lambda)| = \left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\right| \leq \omega\left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right) + C\frac{2\pi}{|\lambda|}.$$

Heraf følger påstanden. Thi da $\omega(\delta)\to 0$ for $\delta \to 0$, kan vi vælge $\Lambda \in \mathbb{R}_+$, så at

$$\omega\left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right) + C\frac{2\pi}{|\lambda|} \leq \varepsilon \quad \text{for } |\lambda| > \Lambda.$$

Lemma 2. For ethvert $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, der ikke er Fourier frekvens for $f(x)$, og ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$ og et $T_0 \in \mathbb{R}_+$, så at

$$|a_T(\lambda)| \leq \varepsilon \quad \text{for } |\lambda - \lambda_0| < \delta \text{ og } T \geq T_0.$$

Bevis. Antagelsen er, at $M\{f(x)e^{-i\lambda_0 x}\} = 0$. Påstandens righed for et vilkårligt λ_0 følger af dens righed for $\lambda_0 = 0$ ved betragtning af $f(x)e^{-i\lambda_0 x}$ i stedet for $f(x)$. Vi antager nu, at $\lambda_0 = 0$.

Antagelsen er da, at $M\{f(x)\} = 0$, og vi skal vise, at der for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$ og et $T_0 \in \mathbb{R}_+$, så at

$$|a_T(\lambda)| \leq \varepsilon \quad \text{for } |\lambda| < \delta \text{ og } T \geq T_0.$$

I denne formulering har lemma 2 stor lighed med lemma 1. Der drejede det sig om "hurtige" svingninger $e^{-i\lambda x}$ (nemlig med store $|\lambda|$) og beviset udnyttede, at $f(x)$ kun varierede lidt i en periode. Nu drejer det sig om "langsomme" svingninger $e^{-i\lambda x}$ (nemlig med små $|\lambda|$), og beviset vil bero på, at faktoren $e^{-i\lambda x}$ ændrer sig for langsomt til at ødelægge den udligning i svingningerne af $f(x)$, som er sikret gennem antagelsen $M\{f(x)\} = 0$.

Som følge af antagelsen $M\{f(x)\} = 0$ kan vi vælge $T_0 \in \mathbb{R}_+$ således, at

$$\left|\frac{1}{\mathcal{H}}\int_a^{a+\mathcal{H}} f(x)\,dx\right| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{for } \mathcal{H} \geq T_0 \text{ og alle } a.$$

Vi sætter atter $\sup_x |f(x)| = C$ og bemærker, at $|e^{-i\lambda x} - e^{-i\lambda a}| \leq |\lambda|\,|x-a|$. Da fås for $T_0 \leq \mathcal{H} < 2T_0$ og alle a

$$\left|\frac{1}{\mathcal{H}}\int_a^{a+\mathcal{H}} f(x)e^{-i\lambda x}dx\right| = \left|\frac{1}{\mathcal{H}}\int_a^{a+\mathcal{H}} f(x)e^{-i\lambda a}dx + \frac{1}{\mathcal{H}}\int_a^{a+\mathcal{H}} f(x)(e^{-i\lambda x} - e^{-i\lambda a})dx\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{\mathcal{H}}\int_a^{a+\mathcal{H}} f(x)\,dx\right| + \frac{1}{\mathcal{H}}\int_a^{a+\mathcal{H}} |f(x)|\,|\lambda|\,|x-a|\,dx \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + C|\lambda|2T_0.$$

Vælges $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4CT_0}$, gælder altså

$$\left|\frac{1}{\mathcal{H}}\int_a^{a+\mathcal{H}} f(x)e^{-i\lambda x}dx\right| \leq \varepsilon \quad \text{for } T_0 \leq \mathcal{H} < 2T_0,\ |\lambda| < \delta, \text{ og alle } a.$$

Beviset kan nu afsluttes i få ord. For et vilkårligt $T \geq T_0$ findes et $n \in \mathbb{N}$, så at $\frac{1}{n}T = \mathcal{H}$ tilhører intervallet $[T_0, 2T_0[$ (for $T \in [2^k T_0, 2^{k+1}T_0[$ kan benyttes $n = 2^k$). Da er $a_T(\lambda)$ middeltallet af de n størrelser

$$\frac{1}{\mathcal{H}}\int_{(\nu-1)\mathcal{H}}^{\nu\mathcal{H}} f(x)e^{-i\lambda x}dx, \qquad \nu \in \{1, \dots, n\},$$

som alle er numerisk $\leq \varepsilon$ når $|\lambda| < \delta$. For $T \geq T_0$ og $|\lambda| < \delta$ gælder derfor $|a_T(\lambda)| \leq \varepsilon$.

65. Ved hjælp af lemma 1 og lemma 2 beviser vi nu følgende hovedlemma.

Lemma 3. Lad $f(x)$ være en næstenperiodisk funktion med Fourierrækken $f(x) \sim \sum 0\, e^{i\lambda x}$. Da gælder

$$a_T(\lambda) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}dx \longrightarrow 0 \quad \text{for } T \to \infty$$

uniformt i λ, d.v.s. for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $T_0 \in \mathbb{R}_+$, så at
$$|a_T(\lambda)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ når } T \geq T_0.$$

Bevis. Ifølge lemma 1 kan vi vælge $\Lambda \in \mathbb{R}_+$ således, at $|a_T(\lambda)| \leq \varepsilon$ for $|\lambda| > \Lambda$, når $T \geq 1$. Ifølge lemma 2 kan vi dernæst for ethvert $\lambda_0 \in [-\Lambda, \Lambda]$ vælge et $\delta_{\lambda_0} \in \mathbb{R}_+$ og et $T_{\lambda_0} \in \mathbb{R}_+$ således, at $|a_T(\lambda)| \leq \varepsilon$ for alle $\lambda \in]\lambda_0 - \delta_{\lambda_0}, \lambda_0 + \delta_{\lambda_0}[$, når $T \geq T_{\lambda_0}$.

Ifølge Borels overdækningssætning vil et endeligt antal af intervallerne $J_{\lambda_0} =]\lambda_0 - \delta_{\lambda_0}, \lambda_0 + \delta_{\lambda_0}[$ overdække intervallet $[-\Lambda, \Lambda]$. Lad os sige, at $[-\Lambda,\Lambda]$ overdækkes af intervallerne $J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_n}$. Da vil tallet

$$T_0 = \max\{1, T_{\lambda_1}, \dots, T_{\lambda_n}\}$$

have den forlangte egenskab. Thi for et vilkårligt $\lambda \in \mathbb{R}$ vil enten gælde $|\lambda| > \Lambda$, eller λ vil tilhøre et af intervallerne $J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_n}$, og i begge tilfælde gælder $|a_T(\lambda)| \leq \varepsilon$, når $T \geq T_0$.

66. <u>Bevis for entydighedssætningen</u>. Vi beviser sætningen i dens anden form. Vi antager altså, at $f(x)$ er en næstenperiodisk funktion med Fourier rækken $f(x) \sim \sum 0\, e^{i\lambda x}$, og skal vise, at $f = 0$.

Vi betragter foldningen af $f(x)$ og $\overline{f(-x)}$, altså funktionen

$$h(x) = \underset{y}{M}\{f(x+y)\overline{f(y)}\},$$

og desuden for ethvert $T \in \mathbb{R}_+$ funktionen

$$h_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x+y)\overline{f(y)}\,dy.$$

Ifølge beviset for sætning 4 i § 52 gælder, at $h_T(x)$ er næstenperiodisk, og at $h_T(x)$ for $T \to \infty$ konvergerer uniformt mod $h(x)$. Heraf følger ved brug af uligheden

$$\big|\,|h(x)|^2 - |h_T(x)|^2\big| \leq |h(x) - h_T(x)|\,|h(x) + h_T(x)|,$$

at $|h_T(x)|^2$ konvergerer uniformt mod $|h(x)|^2$ for $T \to \infty$, hvoraf følger, at

$$M\{|h_T(x)|^2\} \to M\{|h(x)|^2\} \quad \text{for } T \to \infty.$$

Som foran sættes

$$a_T(\lambda) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\,dx.$$

Vi skal benytte sætningen i § 25.

Lad $F_T(x)$ betegne den stykkevis kontinuerte funktion, der er $= f(x)$ på intervallet $[0,T]$ og $= 0$

dette er forskellen på de [illegible] og Bohr'[illegible] vektor.

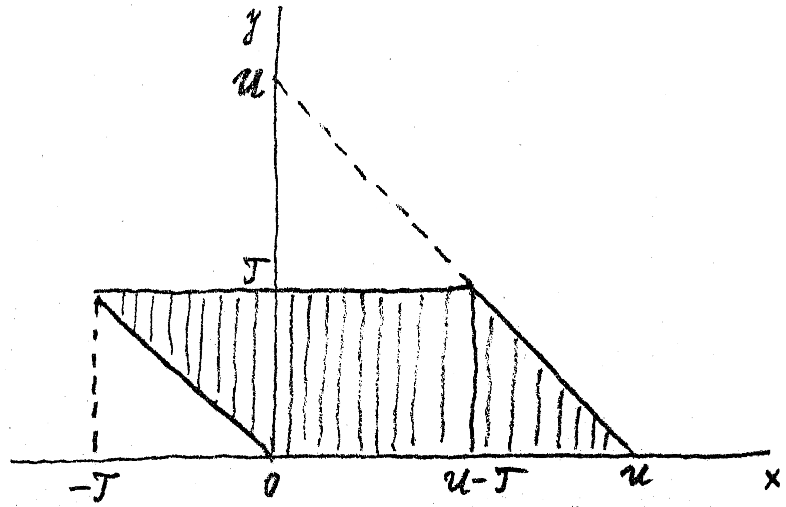
uden for dette interval. Dens Fourier transformerede er

$$\widehat{\mathcal{F}}_T(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_T(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_0^T f(x) e^{-i\lambda x} dx = T a_T(\lambda).$$

Betragt for $U > T$ funktionen

$$\mathcal{G}_{T,U}(x) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_U(x+y)\overline{\mathcal{F}_T(y)}\, dy. = \frac{1}{T}\,\mathcal{F}_U * \overline{\tilde{\mathcal{F}}}_T(x).$$

Funktionen $\mathcal{F}_U(x+y)\overline{\mathcal{F}_T(y)}$ er $=0$ uden for den på figuren viste mængde. og er i denne $= f(x+y)\overline{f(y)}$. Heraf ses, at $\mathcal{G}_{T,U}(x)$ er



$=0$ uden for intervallet $[-T, U]$, og at $\mathcal{G}_{T,U}(x)$ i intervallet $[0, U-T]$ er $= h_T(x)$. Den Fouriertransformerede af $\mathcal{G}_{T,U}(x)$ er

$$\widehat{\mathcal{G}}_{T,U}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_U(x+y)\overline{\mathcal{F}_T(y)}\,dy\right)e^{-i\lambda x}dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_U(x+y)e^{-i\lambda(x+y)}dx\right)\overline{\mathcal{F}_T(y)e^{-i\lambda y}}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_U(z)e^{-i\lambda z}dz\cdot\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\mathcal{F}_T(y)e^{-i\lambda y}}\,dy = \widehat{\mathcal{F}}_U(\lambda)\cdot\overline{a_T(\lambda)}.$$

[Integralerne er naturligvis i realiteten integraler over begrænsede intervaller.]

Lad nu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet, og lad T_0 være valgt i henhold til lemma 3. Da gælder for $U > T \geq T_0$, at

$$\left|\widehat{\mathcal{G}}_{T,U}(\lambda)\right| \leq \left|\widehat{\mathcal{F}}_U(\lambda)\right|\cdot\varepsilon.$$

Ifølge sætningen i § 25 gælder for ethvert $p \geq U+T$, at

bedre bevis næste side.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}_U(x)|^2dx = \frac{1}{p}\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\mathcal{F}}_U\left(n\frac{2\pi}{p}\right)\right|^2$$

og

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{G}_{T,U}(x)|^2dx = \frac{1}{p}\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\mathcal{G}}_{T,U}\left(n\frac{2\pi}{p}\right)\right|^2.$$

For $U > T \geq T_0$ må altså gælde

$$\int_0^{U-T} |h_T(x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}_{T,U}(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} |F_U(x)|^2 dx = \varepsilon^2 \int_0^U |f(x)|^2 dx,$$

og følgelig

$$\frac{U-T}{U} \cdot \frac{1}{U-T} \int_0^{U-T} |h_T(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2 \frac{1}{U} \int_0^U |f(x)|^2 dx .$$

For $U \to \infty$ fås heraf

$$M\{|h_T(x)|^2\} \leq \varepsilon^2 M\{|f(x)|^2\}.$$

For $T \to \infty$ fås heraf

$$M\{|h(x)|^2\} \leq \varepsilon^2 M\{|f(x)|^2\}.$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ var vilkårligt valgt, følger heraf, at $M\{|h(x)|^2\} = 0$. Altså gælder $h(x) = 0$ for alle x. Specielt gælder $h(0) = M\{|f(x)|^2\} = 0$, hvoraf $f(x) = 0$ for alle x.

<u>Bemærkning</u>. Som et eksempel på anvendelse af entydighedssætningen nævner vi, at hvis en næsten periodisk funktion $f(x)$ kun har heltallige Fourier frekvenser, altså hvis Fourier rækken kan skrives $\sum_{\mathbb{Z}} a_\lambda e^{i\lambda x}$, da har $f(x)$ perioden 2π. Thi da har $f(x+2\pi)$ ifølge formel ③ i § 59 også Fourierrækken $\sum_{\mathbb{Z}} a_\lambda e^{i\lambda x}$, og $f(x)$ og $f(x+2\pi)$ er altså samme funktion.

<u>67. Parsevals formel</u>. Vi går nu frem ganske som for periodiske funktioner. Af entydighedssætningen i forbindelse med sætning 3 i § 61 følger, at hvis Fourier konstanterne for en næsten periodisk funktion $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ har den egenskab, at $\sum a_\lambda$ har mening, er funktionen rækkens sumfunktion. Thi rækkens sumfunktion $s(x)$ har ifølge sætning 3 i § 61 Fourierrækken $\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$. De to funktioner f og s har altså samme Fourier række og er altså ifølge entydighedssætningen den samme funktion.

Som en vigtig anvendelse heraf betragter vi foldningen af to funktioner $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ og $g(x) \sim \sum b_\lambda e^{i\lambda x}$.

Ifølge formel (9) i § 60 har foldningen Fourierrækken $\sum a_\lambda b_\lambda e^{i\lambda x}$. Da $|a_\lambda b_\lambda| \leq \frac{1}{2}|a_\lambda|^2 + \frac{1}{2}|b_\lambda|^2$, og $\sum |a_\lambda|^2$ og $\sum |b_\lambda|^2$ har mening, har også $\sum a_\lambda b_\lambda$ mening. Følgelig er foldningen af f og g sumfunktion for sin Fourierrække, d.v.s. der gælder for alle $x \in \mathbb{R}$ formlen

$$\text{(9a)} \qquad \underset{y}{M}\{f(x-y)g(y)\} = \sum a_\lambda b_\lambda e^{i\lambda x}.$$

Svarende til formlerne (10) og (11) får vi analogt

$$\text{(10a)} \qquad \underset{y}{M}\{f(x+y)\overline{g(y)}\} = \sum a_\lambda \overline{b_\lambda} e^{i\lambda x}$$

og

$$\text{(11a)} \qquad \underset{y}{M}\{f(x+y)\overline{f(y)}\} = \sum |a_\lambda|^2 e^{i\lambda x}.$$

Ved i de to sidste formler at sætte $x = 0$ får vi

<u>Sætning 4. For to vilkårlige næstenperiodiske funktioner $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ og $g(x) \sim \sum b_\lambda e^{i\lambda x}$ gælder formlen</u>

$$(1) \qquad M\{f(x)\overline{g(x)}\} = \sum a_\lambda \overline{b_\lambda}.$$

<u>Specielt gælder for enhver næstenperiodisk funktion $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ formlen</u>

$$(2) \qquad M\{|f(x)|^2\} = \sum |a_\lambda|^2.$$

Formlen (1) eller specialtilfældet (2) kaldes <u>Parsevals formel.</u>

Hvis vi i Parsevals formel (1) erstatter $g(x)$ med funktionen $\overline{g(x)}\, e^{i\lambda x} \sim \sum_\mu \overline{b_{\lambda-\mu}}\, e^{i\mu x}$, får vi formlen

$$(3) \qquad M\{f(x)g(x)\, e^{-i\lambda x}\} = \sum_\mu a_\mu b_{\lambda-\mu}.$$

Det er netop multiplikationssætningen (8) i § 59, ifølge hvilken den λ^{te} Fourierkonstant for produktet $f(x)g(x)$ er $\sum_{\mu+\nu=\lambda} a_\mu b_\nu$.

<u>Bemærkning.</u> Omvendt følger Parsevals formel af multiplikationssætningen. Thi vælges $\lambda = 0$ i (3), og erstattes $g(x)$ med $\overline{g(x)} \sim \sum_\mu \overline{b_{-\mu}}\, e^{i\mu x}$ fås (1).

68. Ifølge sætning 2 i § 58 er differensen
$$\mathcal{M}\{|f(x)|^2\} - \sum |a_\lambda|^2$$
lig med infimum af mængden af tal
$$\mathcal{M}\{|f(x) - \sum^* c_\lambda e^{i\lambda x}|^2\}.$$
Specialtilfældet (2) af Parsevals formel er derfor ensbetydende med følgende sætning:

Sætning 5. Enhver næstenperiodisk funktion $f(x)$ kan approksimeres vilkårlig godt i middel kvadrat med trigonometriske polynomier
$$s(x) = \sum^* c_\lambda e^{i\lambda x},$$
d.v.s. til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et trigonometrisk polynomium $s(x)$, således at
$$\mathcal{M}\{|f(x) - s(x)|^2\} \leq \varepsilon.$$

Mere præcist gælder:

Sætning 6. Lad $f(x) \sim \sum_1^\infty a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}$ være en næstenperiodisk funktion. Da konvergerer afsnittet $s_n(x) = a_{\lambda_1} e^{i\lambda_1 x} + \dots + a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}$ i middel kvadrat mod $f(x)$ for $n \to \infty$.

Thi ifølge Parsevals formel gælder
$$\mathcal{M}\{|f(x) - s_n(x)|^2\} = \sum_{p=n+1}^{\infty} |a_{\lambda_p}|^2.$$

69. Hilbert rum af kontinuerligt mange dimensioner. Idet vi går frem som for periodiske funktioner, opnår vi en simpel formulering af nogle af de foregående resultater ved at indføre (hyper) Hilbert rummet $\mathcal{H}_R$ bestående af alle komplekse funktioner $a = (a_\lambda)$ på R, for hvilke $\sum |a_\lambda|^2$ har mening. Dette er et vektorrum over $\mathbb{C}$, thi når $a = (a_\lambda) \in \mathcal{H}_R$ og $k \in \mathbb{C}$, gælder $ka = (ka_\lambda) \in \mathcal{H}_R$, og når $a = (a_\lambda) \in \mathcal{H}_R$ og $b = (b_\lambda) \in \mathcal{H}_R$, gælder $a + b = (a_\lambda + b_\lambda) \in \mathcal{H}_R$, idet $|a_\lambda + b_\lambda|^2 \leq 2|a_\lambda|^2 + 2|b_\lambda|^2$.

Ved det indre produkt af to elementer $a = (a_\lambda)$ og $b = (b_\lambda)$ af $\mathcal{H}_R$ forstås tallet
$$(a, b) = \sum a_\lambda \bar{b}_\lambda.$$

[Summen har mening, da $|a_\lambda \bar{b}_\lambda| \leq \frac{1}{2}|a_\lambda|^2 + \frac{1}{2}|b_\lambda|^2$.] Udtrykket

$$\|a\| = \sqrt{(a,a)} = \sqrt{\sum |a_\lambda|^2} \quad (\geq 0)$$

kaldes normen af $a = (a_\lambda)$, og normen $\|a-b\|$ af differensen $a-b = (a_\lambda - b_\lambda)$ kaldes afstanden mellem $a = (a_\lambda)$ og $b = (b_\lambda)$.

Til en vilkårlig næstenperiodisk funktion f er der gennem Fourierrækken $\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ for f tilordnet et element $a = (a_\lambda)$ af $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. Entydighedssætningen udsiger, at den således bestemte afbildning af $N\mathcal{P}$ ind i $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ er injektiv. Formlerne ① og ⑦ i § 59 viser, at når f svarer til a, svarer kf til ka for ethvert $k \in \mathbb{C}$, og når f svarer til a og g svarer til b, svarer $f+g$ til $a+b$. Afbildningen er altså lineær. Endelig viser Parsevals formel, at

$$(f,g) = (a,b)$$

og specielt

$$\|f\| = \|a\|,$$

altså at afbildningen bevarer det indre produkt og normen. Dermed gælder også $\|f-g\| = \|a-b\|$, d.v.s. afbildningen er isometrisk.

Kort udtrykt: Den ved Fourierrækken bestemte afbildning af $N\mathcal{P}$ ind i $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ er en injektiv homomorfi.

Bemærkning. Den generelle form af Parsevals formel følger af specialtilfældet, idet der gælder

$$(f,g) = \tfrac{1}{4}\{\|f+g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - \|f-g\|^2 - i\|f-ig\|^2\}$$

og

$$(a,b) = \tfrac{1}{4}\{\|a+b\|^2 + i\|a+ib\|^2 - \|a-b\|^2 - i\|a-ib\|^2\}.$$

Approksimationssætningen. Summationssætningen.

70. Approksimationssætningen. Vi vender os nu til den fundamentale sætning om uniform approksimation, som blev formuleret allerede i § 33.

11

<u>Sætning 1. Enhver næsten periodisk funktion f(x) kan approksimeres uniformt med vilkårlig nøjagtighed med trigonometriske polynomier</u>

$$s(x) = \sum{}^{*} c_\lambda e^{i\lambda x},$$

d.v.s. til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et trigonometrisk polynomium $s(x)$, således at

$$\sup_x |f(x) - s(x)| \leq \varepsilon.$$

Den omvendte sætning, at enhver funktion, der kan approksimeres uniformt med vilkårlig nøjagtighed med trigonometriske polynomier, er næstenperiodisk, er allerede vist i § 33. Tilsammen udgør de to sætninger teoriens hovedsætning:

<u>Sætning 2. Afslutningen i den uniforme metrik af mængden af trigonometriske polynomier</u>

$$s(x) = \sum{}^{*} c_\lambda e^{i\lambda x}$$

<u>er identisk med mængden af næstenperiodiske funktioner.</u>
<u>I symboler</u>

$$\mathcal{NP} = Cl_U\{s(x)\}.$$

I teorien for periodiske funktioner fremkom approksimationssætningen (Weierstrass' sætning) som en umiddelbar konsekvens af Fejérs summationssætning. Vi vil senere give et analogon til Fejérs sætning, hvoraf approksimationssætningen følger, men vil først vise, hvordan sætning 1 på simpel måde kan vises.

Bevis. Ifølge formel (9a) i §67, som blev udledt ved brug af entydighedssætningen, er foldningen $h(x)$ af to næstenperiodiske funktioner $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ og $g(x) \sim \sum b_\lambda e^{i\lambda x}$ sumfunktion for sin Fourierrække:

$$h(x) = M_y\{f(x-y)g(y)\} = \sum a_\lambda b_\lambda e^{i\lambda x}.$$

Altså eksisterer for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ en endelig delsum

$$s(x) = \sum{}^{*} a_\lambda b_\lambda e^{i\lambda x},$$

således at

$$\sup_x |h(x) - s(x)| \leq \varepsilon.$$

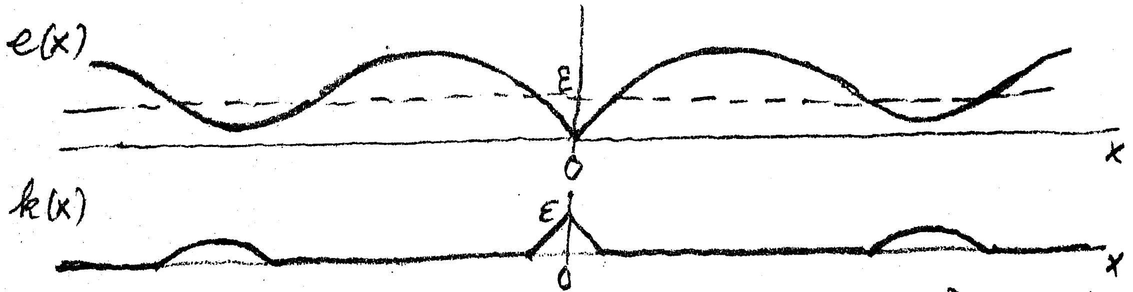
[Lad $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ være en følge, der indeholder Fourier frekvenserne for f og g, og vælg m så stor, at $\sum_{m+1}^{\infty} |a_{\lambda_n} b_{\lambda_n}| \leq \varepsilon$; da opfylder $s(x) = \sum_{1}^{m} a_{\lambda_n} b_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}$ kravet.]

Det er derfor tilstrækkeligt at vise, at $f(x)$ kan approksimeres uniformt med vilkårlig nøjagtighed med foldninger $k(x)$, d.v.s. at der for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $g(x)$, så at

$$(1) \qquad |f(x) - \mathcal{M}_y\{f(x-y)g(y)\}| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } x.$$

Hertil danner vi (se figuren) ud fra forskydningsfunktionen $e(x)$ for $f(x)$ funktionen

$$k(x) = \max\{\varepsilon - e(x), 0\}.$$



Ifølge sætning 1 i §37 [anvendt på funktionen $\varphi(y) = \max\{\varepsilon - y, 0\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$] er $k(x)$ næstenperiodisk. Endvidere gælder $k(x) \geq 0$ for alle x, og $k(x) > 0$ præcis for de x, der er forskydningstal for $f(x)$ hørende til tal $< \varepsilon$. Specielt gælder $k(0) = \varepsilon$. Altså gælder $\mathcal{M}\{k(x)\} > 0$. Den næsten periodiske funktion

$$g(x) = \frac{k(x)}{\mathcal{M}\{k(x)\}}$$

opfylder derfor betingelserne

(a) $\mathcal{M}\{g(x)\} = 1$

(b) $g(x) \geq 0$

(c) Når $g(y) > 0$, er $\sup_x |f(x) - f(x-y)| < \varepsilon$.

For denne funktion $g(x)$ er betingelsen (1) opfyldt, idet

$$|f(x) - \mathcal{M}_y\{f(x-y)g(y)\}| = |\mathcal{M}_y\{[f(x) - f(x-y)]\, g(y)\}|$$

$$\leq \mathcal{M}_y\{|f(x) - f(x-y)|\, g(y)\} \leq \mathcal{M}_y\{\varepsilon\, g(y)\} = \varepsilon \quad \text{for alle } x.$$

Ovenstående bevis skyldes Wiener, men ideen er klassisk; et lignende bevis blev givet af Weyl. Bohrs oprindelige meget komplicerede bevis byggede på Parsevals formel og på betragtning af funktioner af flere (endelig eller uendelig mange) variable.

71. De approksimerende trigonometriske polynomier $s(x) = \sum^* a_\lambda b_\lambda e^{i\lambda x}$, vi kom til i det foregående bevis, har den bemærkelsesværdige egenskab, at deres frekvenser (d.v.s. de λ, for hvilke $a_\lambda b_\lambda \neq 0$) er Fourier frekvenser for $f(x)$.

Heraf fremgår, at hvis S er en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}$, da er mængden af næsten periodiske funktioner med frekvenser fra S indeholdt i afslutningen i den uniforme metrik af mængden af trigonometriske polynomier med frekvenser fra S.

Det omvendte gælder også; thi hvis en følge af trigonometriske polynomier konvergerer uniformt mod en funktion $f(x)$, fremkommer dennes Fourier række jo ud fra polynomierne ved formel grænseovergang; hvis polynomierne kun har frekvenser fra S, vil det samme altså gælde $f(x)$.

Vi har altså følgende skærpelse af sætning 2.

Sætning 3. For enhver delmængde S af $\mathbb{R}$ er mængden af næsten periodiske funktioner med Fourier frekvenser fra S identisk med afslutningen i den uniforme metrik af mængden af trigonometriske polynomier med frekvenser fra S.

72. Summationssætningen. Beviset for sætning 1 giver ikke mulighed for alene ud fra Fourier rækken for en næsten periodisk funktion at danne en følge af trigonometriske polynomier, der konvergerer uniformt mod funktionen. Dette opnås ved Bochners summationssætning, der er analog til Fejérs sætning.

Vi betragter $\mathbb{R}$ som vektorrum over $\mathbb{Q}$, altså $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q})$. Enhver numerabel delmængde af $\mathbb{R}$ er delmængde af et underrum af $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q})$ med numerabel basis $\beta_1, \beta_2, \ldots$, d.v.s. en mængde af formen

$$S = \operatorname{span}\{\beta_1, \beta_2, \ldots\},$$

hvor $\beta_1, \beta_2, \ldots$ er lineært uafhængige [d.v.s. en lineærkombination $\rho_1\beta_1+\cdots+\rho_n\beta_n$ med rationale koefficienter $\rho_1,\dots,\rho_n$ er kun 0, når alle koefficienterne er 0]. Mængden S består af alle tal af formen $\lambda=\rho_1\beta_1+\rho_2\beta_2+\cdots$, hvor $\rho_1,\rho_2,\dots\in\mathbb{Q}$ og $\rho_n=0$ fra et vist trin, og ethvert $\lambda\in S$ har kun een sådan fremstilling.

Der findes mange varianter af summationssætningen. Vi vælger følgende:

Sætning 4. Lad S være et underrum af $(\mathbb{R},+,\mathbb{Q})$ med numerabel basis $\beta_1,\beta_2,\cdots$. Betragt for hvert $n\in\mathbb{N}$ den endelige delmængde S_n af S, der består af alle tal λ af formen

$$\lambda=\frac{\nu_1}{n!}\beta_1+\cdots+\frac{\nu_n}{n!}\beta_n, \text{ hvor hvert } \nu_i\in\mathbb{Z}\cap]-n!n,n!n[,$$

og sæt for ethvert sådant λ

$$k_{n,\lambda}=\left(1-\frac{|\nu_1|}{n!n}\right)\cdots\left(1-\frac{|\nu_n|}{n!n}\right).$$

Sæt endvidere $k_{n,\lambda}=0$ for $\lambda\in S\setminus S_n$.

For enhver næsten periodisk funktion $f(x)\sim\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ med Fourier frekvenser fra S, d.v.s. hvis Fourierrække kan skrives

$$f(x)\sim\sum_S a_\lambda e^{i\lambda x},$$

gælder da, at følgen af trigonometriske polynomier

$$s_n(x)=\sum_{S_n}k_{n,\lambda}a_\lambda e^{i\lambda x}=\sum_S k_{n,\lambda}a_\lambda e^{i\lambda x}\quad,\ n\in\mathbb{N},$$

konvergerer uniformt mod $f(x)$.

Vi giver her et bevis, der bygger på entydighedssætningen. I Bohrs bog er beviset ført ved brug af Parsevals formel. Begge versioner går tilbage til Bochner.

Bevis. (1) For ethvert $\lambda\in S$ gælder $k_{n,\lambda}\to 1$ for $n\to\infty$. Fourierrækken (d.v.s. udtrykket) for $s_n(x)$ konvergerer altså for $n\to\infty$ formelt mod Fourierrækken for $f(x)$.

Vi betragter et bestemt $\lambda\in S$. Da gælder

$$\lambda=\rho_1\beta_1+\cdots+\rho_q\beta_q\ ,\ \text{hvor } \rho_1,\dots,\rho_q\in\mathbb{Q},$$

altså for $n\geq q$

$$\lambda=\frac{\rho_1 n!}{n!}\beta_1+\cdots+\frac{\rho_q n!}{n!}\beta_q+\frac{0}{n!}\beta_{q+1}+\cdots+\frac{0}{n!}\beta_n.$$

For alle $n \geq q$ fra et vist trin er tællerne $\rho_1 n!, \dots, \rho_q n!$ hele og numerisk $< n!\,n$. Fra dette trin gælder $\lambda \in S_n$ og

$$k_{n,\lambda} = \left(1 - \frac{|\rho_1|}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{|\rho_q|}{n}\right),$$

hvoraf påstanden følger.

(2) Ifølge formel (12) i §60 er $s_n(x)$ foldningen af $f(x)$ med det trigonometriske polynomium $B_n(x) = \sum_{S_n} k_{n,\lambda} e^{i\lambda x}$; vi har altså

$$s_n(x) = M\{f(x-y) B_n(y)\},$$

hvor

$$B_n(x) = \sum \left(1 - \frac{|\nu_1|}{n!\,n}\right) \cdots \left(1 - \frac{|\nu_n|}{n!\,n}\right) e^{i\left(\frac{\nu_1}{n!}\beta_1 + \dots + \frac{\nu_n}{n!}\beta_n\right)x},$$

summationen er over alle sæt $\nu_1, \dots, \nu_n$, hvor hvert ν_i gennemløber $\mathbb{Z} \cap]-n!\,n, n!\,n[$. Man ser, at $B_n(x)$ kan udtrykkes ved hjælp af Fejér kerner, idet

$$B_n(x) = \left(\sum_{-n!\,n+1}^{n!\,n-1} \left(1 - \frac{|\nu_1|}{n!\,n}\right) e^{i \frac{\nu_1}{n!}\beta_1 x} \right) \cdots \left(\sum_{-n!\,n+1}^{n!\,n-1} \left(1 - \frac{|\nu_n|}{n!\,n}\right) e^{i \frac{\nu_n}{n!}\beta_n x} \right)$$

$$= K_{n!\,n-1}\left(\frac{\beta_1}{n!}x\right) \cdots K_{n!\,n-1}\left(\frac{\beta_n}{n!}x\right).$$

Polynomierne $B_n(x)$ kaldes Bochner–Fejér kerner. Man ser, at de er reelle og ≥ 0. Desuden har hvert $B_n(x)$ middelværdien 1 [idet konstantleddet $k_{n,0}$ i $B_n(x)$ er $= 1$].

(3) I kraft af (1) og (2) ser vi, at beviset vil være fuldendt, når vi har vist følgende:

Lemma 1. Lad $f_n(x) \sim \sum a_{n,\lambda} e^{i\lambda x}$, $n \in \mathbb{N}$, være en følge af næsten periodiske funktioner tilhørende en betinget kompakt mængde $\mathfrak{F}$, og antag, at følgen af Fourierrækker konvergerer formelt mod Fourierrækken for en næsten periodisk funktion $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ [d.v.s. $a_{n,\lambda} \to a_\lambda$ for $n \to \infty$ for ethvert λ]. Da konvergerer følgen $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, uniformt mod $f(x)$.

Lemma 2. Lad $f(x)$ være en næsten periodisk funktion. Da er mængden $\mathfrak{F}$ af foldninger

$$h(x) = M\{f(x-y) g(y)\},$$

hvor $g(x)$ gennemløber mængden af reelle, ikke negative næstenperiodiske funktioner med middelværdi 1, en betinget kompakt mængde.

(4) For at bevise Lemma 1 går vi således frem: Hvis følgen $f_n(x), n \in \mathbb{N}$, ikke konvergerede uniformt mod $f(x)$, måtte findes et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ og en delfølge $f_{p_1}(x), f_{p_2}(x), \dots$ således at

$$\sup_x |f_{p_n}(x) - f(x)| > \varepsilon \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Denne følge $f_{p_n}(x), n \in \mathbb{N}$, måtte, da funktionerne tilhører den betinget kompakte mængde $\mathfrak{F}$, have en uniformt konvergent delfølge $f_{q_n}(x), n \in \mathbb{N}$. Dennes grænsefunktion måtte ifølge § 61 have Fourier rækken $\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$, altså samme Fourier række som $f(x)$, og måtte altså ifølge entydighedssætningen være $f(x)$. Men dette strider mod, at

$$\sup_x |f_{q_n}(x) - f(x)| > \varepsilon \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

(5) For at bevise Lemma 2 benytter vi sætning 6 i § 47 og sætning 7 i § 48, som siger, at en mængde $\mathfrak{F}$ er betinget kompakt, hvis og kun hvis den er majoriserbar, og funktionerne i $\mathfrak{F}$ er ensartet begrænsede.

Idet vi sætter $\sup_x |f(x)| = C$ følger den ensartede begrænsethed af, at

$$|h(x)| \leq M_y\{|f(x-y)|\, g(y)\} \leq M_y\{C g(y)\} = C \quad \text{for alle } x.$$

Idet vi betegner forskydningsfunktionen for $f(x)$ med $e(\tau)$, følger majoriserbarheden af, at

$$|h(x+\tau) - h(x)| = |M_y\{(f(x+\tau-y) - f(x-y))\, g(y)\}|$$

$$\leq M_y\{|f(x+\tau-y) - f(x-y)|\, g(y)\} \leq M_y\{e(\tau) g(y)\} = e(\tau).$$

Funktionen $e(\tau)$ er altså forskydningsmajorant for mængden $\mathfrak{F}$.

<u>Bemærkning.</u> Lemma 1 kan skærpes til følgende: Lad $f_n(x) \sim \sum a_{n,\lambda} e^{i\lambda x}, n \in \mathbb{N}$, være en følge af næstenperiodiske funktioner tilhørende en betinget kompakt mængde

f, og antag at følgen af Fourierrækker konvergerer formelt mod en trigonometrisk række $\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ [d.v.s. $a_{n,\lambda} \to a_\lambda$ for $n \to \infty$ for ethvert λ]. Da er følgen $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, uniformt konvergent, og for grænsefunktionen $f(x)$ gælder, at $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$.

73. Vi har udledt summationssætningen af entydighedssætningen, men bemærker, at både den og approksimationssætningen naturligvis er indeholdt i summationssætningen.

Da approksimationssætningen er at opfatte som teoriens egentlige hovedsætning, er der grund til at nævne, at man ud fra den umiddelbart får den specielle form af Parsevals formel. Thi denne formel er jo ensgyldig med, at enhver næsten periodisk funktion kan approksimeres vilkårligt godt i middelkvadrat med trigonometriske polynomier, hvilket naturligvis følger af, at den kan approksimeres vilkårlig godt uniformt med trigonometriske polynomier.

Bohl funktioner. Kroneckers sætning.

74. Næsten periodiske funktioner med tilknytning til periodiske funktioner af flere variable. Vi vil undersøge mængden af næstenperiodiske funktioner, hvis Fourierfrekvenser tilhører en mængde af særligt simpel type, nemlig en undergruppe S af $(\mathbb{R},+)$ med endelig basis $\beta_1,\dots,\beta_m$, d.v.s. en mængde af formen

$$S = \{n_1\beta_1+\dots+n_m\beta_m \mid n_1\in\mathbb{Z},\dots,n_m\in\mathbb{Z}\},$$

hvor $\beta_1,\dots,\beta_m$ er lineært uafhængige [d.v.s. en linearkombination med rationale, eller om man vil med hele koefficienter, er kun 0, når alle koefficienterne er 0]. Idet vi benytter den vektorielle skrivemåde $n = (n_1,\dots,n_m)$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_m)$, har vi

$$S = \{(n,\beta) \mid n\in\mathbb{Z}^m\}.$$

[Vi antager $m \geq 2$. For $m = 1$ ~~drejer~~ det sig jo blot om funktioner med perioden $\overline{\beta_1}$.]

Vi tager udgangspunktet i §§26–27, hvor vi for en kontinuert funktion $f(x) = f(x_1, \cdots, x_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ med perioden 2π efter hver variabel betragtede Fourierrækken

$$f(x) \sim \sum a_n e^{i(n,x)}, \quad \text{hvor } a_n = \mathcal{M}\{f(x) e^{-i(n,x)}\},$$

og dens middelsummer

$$S_n(x) = \sum_{p_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{p_m=-n_m}^{n_m} \left(1 - \frac{|p_1|}{n_1+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|p_m|}{n_m+1}\right) a_p e^{i(p,x)},$$

og viste, at $S_n(x)$ for $n_1 \to \infty, \cdots, n_m \to \infty$ konvergerer uniformt mod $f(x)$.

Ved restriktion til linien $\{x = \beta t = (\beta_1 t, \cdots, \beta_m t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ses, at

$$S_n(\beta t) = \sum_{p_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{p_m=-n_m}^{n_m} \left(1 - \frac{|p_1|}{n_1+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|p_m|}{n_m+1}\right) a_p e^{i(p,\beta)t}$$

for $n_1 \to \infty, \cdots, n_m \to \infty$ konvergerer uniformt mod funktionen $f(\beta t) = f(\beta_1 t, \cdots, \beta_m t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, som altså er næsten periodisk og har Fourierrækken

$$f(\beta t) \sim \sum a_n e^{i(n,\beta)t}$$

med frekvenser fra S.

I dette tilfælde har vi således en meget simpel summationssætning, svarende helt til Fejérs sætning. Det er dette simple tilfælde, der har dannet forbillede for summationssætningen i §72.

<u>75. Indskud</u>. <u>Kroneckers sætning</u>. Af det foregående slutter vi ved betragtning af konstantleddene, at der gælder

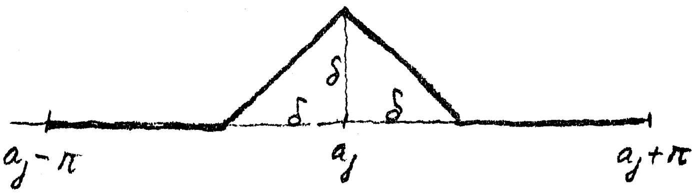
$$(1) \qquad \mathcal{M}_t\{f(\beta t)\} = \mathcal{M}_x\{f(x)\}.$$

Denne formel vil vi benytte til at bevise et specialtilfælde af en sætning af Kronecker af aritmetisk karakter, som spiller en rolle i det følgende:

<u>Sætning 1.</u> Når $\beta_1, \cdots, \beta_m$ <u>er lineært uafhængige</u>, er <u>linien</u> $\{x = \beta t = (\beta_1 t, \cdots, \beta_m t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ mod 2π <u>overalt tæt</u> i $\mathbb{R}^m$,

d.v.s. mængden $\{(\beta_1 t - n_1 2\pi, \dots, \beta_m t - n_m 2\pi) \mid t\in\mathbb{R}, n_1\in\mathbb{Z},\dots,n_m\in\mathbb{Z}\}$ er overalt tæt i $\mathbb{R}^m$.

Bevis. Lad $(a_1,\dots,a_m)$ være et vilkårligt punkt i $\mathbb{R}^m$, og lad $\delta\in\,]0,\pi[$ være givet. Lad $\varphi_j(x_j)$ for $j\in\{1,\dots,m\}$ være den funktion med perioden 2π, der i intervallet $[a_j-\delta,a_j+\delta]$ er $=\delta-|x_j-a_j|$, og i intervallerne $[a_j-\pi,a_j-\delta]$ og $[a_j+\delta,a_j+\pi]$ er $=0$ (se figuren), og anvend (1) på funktionen



$f(x)=\varphi_1(x_1)\cdots\varphi_m(x_m)$. Da er højre side i (1) positiv, altså også venstre side. Da $f(\beta t)\geq 0$ for alle t, slutter vi, at der må findes værdier af t, for hvilke $f(\beta t)>0$, d.v.s. for hvilke

$$\left.\begin{array}{l}|\beta_1 t-a_1|<\delta\\ \quad\dots\\ |\beta_m t-a_m|<\delta\end{array}\right\}\text{ mod }2\pi.$$

Af sætning 1 følger

Sætning 2. Når $\beta_1,\dots,\beta_m$ er lineært uafhængige, er for enhver kontinuert funktion $f(x)=f(x_1,\dots,x_m):\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$ med perioden 2π efter hver variabel værdimængden $f(\mathbb{R}^m)$ afslutningen af værdimængden $\{f(\beta t)\mid t\in\mathbb{R}\}$. Specielt gælder altså

$$\sup_t|f(\beta t)|=\max_x|f(x)|.$$

76. Fortsættelse. Lad nu $g(t)$ være en vilkårlig næsten periodisk funktion med Fourier frekvenser fra S, altså med en Fourier række af formen

$$g(t)\sim\sum a_{(n,\beta)}e^{i(n,\beta)t}.$$

Betragt en følge af trigonometriske polynomier

$$T_k(t)=\sum{}^{*} c_{k,(n,\beta)}e^{i(n,\beta)t},\qquad k\in\mathbb{N},$$

der konvergerer uniformt mod $g(t)$, og dan de tilsvarende trigonometriske polynomier

$$S_k(x)=\sum{}^{*} c_{k,(n,\beta)}e^{i(n,x)},\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Da gælder
$$T_k(t) = \mathcal{S}_k(\beta t).$$
For vilkårlige $k \in \mathbb{N}$ og $l \in \mathbb{N}$ gælder ifølge sætning 2
$$\sup_t |T_k(t) - T_l(t)| = \sup_x |S_k(x) - S_l(x)|.$$
Af det almindelige konvergensprincip (for uniform konvergens) slutter vi derfor, at $S_k(x)$ for $k \to \infty$ konvergerer uniformt mod en grænsefunktion $f(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, der åbenbart er kontinuert og har perioden 2π efter hver variabel, og for hvilken der gælder
$$g(t) = f(\beta t).$$
Dens Fourier række bliver naturligvis
$$f(x) \sim \sum a_{(n,\beta)} e^{i(n,x)}.$$

Der findes altså ikke andre næsten periodiske funktioner med Fourier eksponenter fra S end de i § 74 fundne.

Vi har således følgende sætning:

Sætning 3. Lad S være en undergruppe af $(\mathbb{R},+)$ med endelig basis $\beta_1, \dots, \beta_m$. De næsten periodiske funktioner med Fourier frekvenser fra S er da funktionerne af formen
$$g(t) = f(\beta t) = f(\beta_1 t, \dots, \beta_m t),$$
hvor $f(x) = f(x_1, \dots, x_m): \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ er kontinuert og har perioden 2π efter hver variabel.

Hvert $g(t)$ fremkommer kun af eet $f(x)$. Fourier rækken for $g(t)$ fås af Fourier rækken for $f(x)$ ved for x at indsætte βt.

Den til en funktion $g(t)$ svarende funktion $f(x)$ kaldes den rumlige udvidelse af $g(t)$.

77. Karakterisering ved forskydningstal. Betragt et $g(t)$ og dets tilsvarende $f(x)$ i henhold til sætning 3. Ifølge den uniforme kontinuitet findes til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ et $\delta \in]0,\pi[$, således at $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, når

$|x_1 - y_1| \leq \delta, \ldots, |x_m - y_m| \leq \delta$. Ved brug af periodiciteten af $f(x)$ ses da, at der gælder $|g(t+\tau) - g(t)| \leq \varepsilon$ for alle t, d.v.s. $|f(\beta t + \beta\tau) - f(\beta t)| \leq \varepsilon$ for alle t, hvis τ er løsning til ulighederne

$$(2) \qquad \left.\begin{array}{l} |\beta_1 \tau| \leq \delta \\ \quad\cdots \\ |\beta_m \tau| \leq \delta \end{array}\right\} \text{mod. } 2\pi .$$

Enhver løsning til disse uligheder er altså et forskydningstal for $g(t)$ hørende til ε.

Antag nu omvendt om en funktion $g(t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, at der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta \in]0, \pi[$, således at enhver løsning til ulighederne (2) er et $\tau(\varepsilon)$ for $g(t)$. Vi vil vise, at da findes der en kontinuert funktion $f(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ med perioden 2π efter hver variabel, så at $g(t) = f(\beta t)$. I mængden

$$M = \{(\beta_1 t - n_1 2\pi, \ldots, \beta_m t - n_m 2\pi) \mid t \in \mathbb{R}, n_1 \in \mathbb{Z}, \ldots, n_m \in \mathbb{Z}\}$$

definerer vi $f(x)$ ved

$$f(\beta_1 t - n_1 2\pi, \ldots, \beta_m t - n_m 2\pi) = g(t).$$

Dette er lovligt, da fremstillingen af punkterne i M på den angivne form åbenbart er entydig. Mængden M er periodisk med perioden 2π efter hver variabel, og det er funktionen $f(x)$ [foreløbig kun defineret på M] også. Forudsætningen om $g(t)$ er ensbetydende med, at $f(x)$ [på M] er uniformt kontinuert. Da M er overalt tæt i $\mathbb{R}^m$, sikrer dette, at $f(x)$ kan udvides til en kontinuert funktion på hele $\mathbb{R}^m$. Denne udvidelse har åbenbart perioden 2π efter hver variabel.

Idet vi ved en Bohr funktion svarende til $\beta_1, \ldots, \beta_m$, eller med Bohrs benævnelse "en i udvidet forstand periodisk funktion med perioderne $\frac{2\pi}{|\beta_1|}, \ldots, \frac{2\pi}{|\beta_m|}$", forstår en funktion $g(t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, for hvilken der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta \in]0, \pi[$, således at enhver løsning τ til ulighederne (2) er et til ε hørende forskydningstal for

$g(t)$, gælder altså:

Sætning 4. Lad S være en undergruppe af $(\mathbb{R},+)$ med endelig basis $\beta_1,\dots,\beta_m$. De næsten periodiske funktioner med Fourier frekvenser fra S er da netop Bohr funktionerne svarende til $\beta_1,\dots,\beta_m$.

Bemærkning. Da vi i §29 nævnte Bohrs teori gjorde vi ikke den indskrænkende antagelse, at tallene $\frac{2\pi}{\beta_1},\dots,\frac{2\pi}{\beta_m}$ skulde være lineært uafhængige. Faktisk opererede Bohr oprindeligt uden denne antagelse, som dog er naturlig, da fremstillingen af tallene i S på formen $n_1\beta_1+\dots+n_m\beta_m$ ellers ikke er entydig. Reelt gør det dog ingen forskel, idet en vilkårlig endeligt frembragt undergruppe af $(\mathbb{R},+)$, d.v.s. enhver mængde af formen $S=\{n_1\gamma_1+\dots+n_m\gamma_m \mid n_1\in\mathbb{Z},\dots,n_m\in\mathbb{Z}\}$ har en endelig basis. Dette er et specielt tilfælde af den såkaldte basissætning for abelske grupper.

78. Et eksempel på anvendelse af Kroneckers sætning. Lad os betragte værdimængden $g(\mathbb{R})$ af et trigonometrisk polynomium

$$g(t)=a_1e^{i\beta_1 t}+\dots+a_me^{i\beta_m t}$$

med lineært uafhængige frekvenser $\beta_1,\dots,\beta_m$ [f.eks. $g(t)=e^{it}+e^{i\sqrt{2}t}$ eller $g(t)=e^{i(\log 2)t}+\frac{1}{2}e^{i(\log 3)t}+\frac{1}{3}e^{i(\log 5)t}$].
Ifølge sætning 2 gælder $\overline{g(\mathbb{R})}=f(\mathbb{R}^m)$, hvor

$$f(x)=a_1e^{ix_1}+\dots+a_me^{ix_m}.$$

Man ser, at $f(\mathbb{R}^m)$ er mængden af punkter i $\mathbb{C}$, der er sum af m vektorer af længderne $|a_1|,\dots,|a_m|$ med vilkårlige retninger. Heraf følger, at $f(\mathbb{R}^m)$ går over i sig selv ved enhver drejning om 0. Da $f(\mathbb{R}^m)$ er kompakt og sammenhængende, følger heraf, at $f(\mathbb{R}^m)$ enten er en afsluttet cirkelskive $\{z \mid |z|\le r\}$ eller en afsluttet cirkelring $\{z \mid 0<\rho\le|z|\le r\}$. En nærmere undersøgelse viser, at det første tilfælde indtræffer, når intet af tallene $|a_1|,\dots,|a_m|$ overstiger summen af de øvrige, og at man da har

$$r = \sum_1^m |a_j|,$$

medens det andet tilfælde indtræffer, når et af tallene $|a_1|,\dots,|a_m|$, lad os sige $|a_s|$, overstiger summen af de øvrige, og at man da har

$$\rho = 2|a_s| - \sum_1^m |a_j|, \qquad r = \sum_1^m |a_j|.$$

79. Weyls skærpelse af Kroneckers sætning. Den analytiske metode vi i § 75 benyttede til bevis for Kroneckers sætning, skyldes Weyl, som anvendte den på en række problemer. Hvad specielt angår Kroneckers sætning viste Weyl følgende skærpelse:

Lad $[a_1,b_1],\dots,[a_m,b_m]$ være intervaller af længder $< 2\pi$, og betegn for et vilkårligt interval $[a,a+T]$ på t-aksen med $m(a,T)$ den samlede længde af de delintervaller af $[a,a+T]$, hvori punktet $\beta t = (\beta_1 t,\dots,\beta_m t)$ mod. 2π tilhører mængden $J = [a_1,b_1]\times\dots\times[a_m,b_m]$. Da gælder

$$\frac{m(a,T)}{T} \to \frac{(b_1-a_1)\cdots(b_m-a_m)}{(2\pi)^m} \quad \text{for } T\to\infty$$

uniformt i a. Anderledes udtrykt (idet t opfattes som tiden): Den gennemsnitlige opholdstid for punktet βt mod 2π i mængden J eksisterer og er proportional med voluminet af J.

Man udtrykker det også ved at sige, at punkterne på linien $\{x=\beta t \mid t\in\mathbb{R}\}$ er ligeligt fordelt (gleichverteilt) mod. 2π.

Beviset føres ud fra (1) ved at betragte den funktion $\varphi(x):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ med perioden 2π efter hver variabel, der er $=1$, når $x\in J$ mod. 2π, og ellers er $=0$, og 'klemme' den mellem to kontinuerte funktioner med perioden 2π i hver variabel, hvis differens har en lille middelværdi.

Lineære transformationer. Unitære transformationer.

80. Lineære transformationer. Egenværdier. Egenvektorer. Lad $\mathcal{S}$ være et vektorrum over $\mathbb{C}$. Ved den senere anvendelse af de i det følgende omtalte begreber og resultater vil $\mathcal{S}$ være $N\mathcal{P}$ eller et underrum af $N\mathcal{P}$. Ved en lineær transformation i $\mathcal{S}$ forstås en afbildning $T: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, der opfylder betingelserne

$$Tkf = kTf \quad \text{og} \quad T(f_1 + f_2) = Tf_1 + Tf_2.$$

Et underrum $\mathcal{S}'$ af $\mathcal{S}$ kaldes invariant ved T, hvis $T(\mathcal{S}') \subseteq \mathcal{S}'$. Restriktionen af T til $\mathcal{S}'$ er da en lineær transformation i $\mathcal{S}'$. Et tal α kaldes en egenværdi for T, hvis ligningen

$$Tf = \alpha f$$

har en løsning $f \neq 0$. En sådan løsning kaldes en egenvektor for T hørende til α. Sammen med den trivielle løsning 0 udgør egenvektorerne hørende til α et underrum $\mathcal{S}_\alpha$, som åbenbart er invariant ved T. Restriktionen af T til $\mathcal{S}_\alpha$ er simpelthen multiplikation med α. At sige, at f er egenvektor for T, er det samme som at sige, at det en-dimensionale underrum udspændt af f (d.v.s. underrummet bestående af alle kf) er invariant ved T. Hvis T_1 og T_2 er to lineære transformationer i $\mathcal{S}$, er den sammensatte afbildning T_1T_2, der defineres ved $T_1T_2 f = T_1(T_2 f)$, også en lineær transformation i $\mathcal{S}$. Hvis $T_1T_2 = T_2T_1$, siges T_1 og T_2 at kommutere.

81. Antag nu, at $\mathcal{S}$ er af endelig dimension m, og lad $e_1, \dots, e_m$ være en basis for $\mathcal{S}$. En lineær transformation T i $\mathcal{S}$ er da bestemt ved billederne

$$Te_k = \sum_{j=1}^{m} t_{jk} e_j$$

af basisvektorerne. En vilkårlig vektor $f = \sum_{k=1}^{m} x_k e_k$ vil have billedet $Tf = \sum_{k=1}^{m} x_k Te_k = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j$, hvor y_j'erne er er bestemt ved $y_j = \sum_{k=1}^{m} t_{jk} x_k$, d.v.s

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1m} \\ \vdots & & \\ t_{m1} & \cdots & t_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Matricen $[t_{jk}]$ kaldes matricen for T svarende til basis $e_1, \dots, e_m$. Transformationen er bijektiv, hvis og kun hvis vektorerne $Te_1, \dots, Te_m$ er lineært uafhængige.

Matrixfremstillingen viser, at enhver lineær transformation i et rum af endelig dimension har mindst en egenværdi. Thi ligningen $Tf = \alpha f$ antager formen

$$\begin{pmatrix} t_{11}-\alpha & \cdots & t_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mm}-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Egenværdierne for T er derfor de tal α, for hvilke determinanten for dette lineære homogene ligningssystem er 0. Da determinanten er et polynomium $(-1)^m \alpha^m + c_1 \alpha^{m-1} + \dots + c_m$, følger eksistensen af en egenværdi af algebraens fundamentalsætning.

82. Unitære transformationer. Antag nu, at vort vektorrum $\mathcal{S}$ af endelig dimension m er et rum med indre produkt, som tilfældet vil være, når $\mathcal{S}$ er et underrum af $\Lambda\mathcal{G}$. Ved en unitær transformation i $\mathcal{S}$ forstås en lineær transformation U, der bevarer det indre produkt, d.v.s. som opfylder betingelsen

$$(Uf, Ug) = (f, g).$$

Den bevarer da også normen: $\|Uf\| = \|f\|$. Heraf ses, at der for enhver egenværdi α for U må gælde $|\alpha| = 1$. En unitær transformation fører en normal ortogonal basis $e_1, \dots, e_n$ over i en normal ortogonal basis og er derfor bijektiv. De unitære transformationer danner åbenbart en gruppe.

Lad α og β være to forskellige egenværdier for en unitær transformation U, og lad f og g være tilsvarende egenvektorer. Af

$$(f, g) = (Uf, Ug) = (\alpha f, \beta g) = \alpha\bar{\beta}(f, g)$$

følger, da $\alpha\bar{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \neq 1$, at $(f,g)=0$. Hvis $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ er samtlige egenværdier for U, og $\mathfrak{S}_j$ er underrummet bestående af alle løsninger til ligningen $Uf = \alpha_j f$, er underrummene $\mathfrak{S}_1,\dots,\mathfrak{S}_p$ altså parvis ortogonale. Vi vil vise, at de udspænder $\mathfrak{S}$. Hvis ikke, så lad $\mathfrak{S}_*$ bestå af alle vektorer, der er ortogonale på alle $\mathfrak{S}_j$. Da er $\mathfrak{S}_*$ et underrum af $\mathfrak{S}$. Da transformationen U fører ortogonale vektorer over i ortogonale vektorer og fører hvert $\mathfrak{S}_j$ over i sig selv, må billedet Uf_* af en vektor i $\mathfrak{S}_*$ også være ortogonal på alle $\mathfrak{S}_j$ og må altså tilhøre $\mathfrak{S}_*$. Underrummet $\mathfrak{S}_*$ er altså invariant ved U. Restriktionen af U til $\mathfrak{S}_*$ må have en egenværdi α. Men dette er umuligt, da vi af $Uf=\alpha f$ for et $f\neq 0$ slutter, at α er et af tallene α_j, og at f tilhører det tilsvarende $\mathfrak{S}_j$.

Lad os i hvert $\mathfrak{S}_j$ vælge en normal ortogonal basis. Tilsammen vil de udgøre en normal ortogonal basis $e_1,\dots,e_m$ for $\mathfrak{S}$. Idet vi sætter $Ue_k = c_k e_k$ (hvor hvert c_k er et af tallene α_j) ser vi, at transformationen U svarende til basis $e_1,\dots,e_m$ er bestemt ved digonalmatricen

$$\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c_m \end{pmatrix}.$$

Resultatet kan også udtrykkes således: For enhver unitær transformation i $\mathfrak{S}$ findes m parvis ortogonale en-dimensionale underrum $\mathfrak{R}_1,\dots,\mathfrak{R}_m$, der hver for sig er invariant ved U.

83. Frobenius' sætning. Vi vil nu bevise følgende sætning, som (vistnok) skyldes Frobenius:

Sætning. *Hvis en mængde af unitære transformationer i $\mathfrak{S}$ har den egenskab, at hvilkesomhelst to transformationer i mængden kommuterer,* da findes der m parvis ortogonale en-dimensionale underrum

$\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_m$, der hver for sig er invariant ved alle transformationerne i mængden.

Anderledes udtrykt: Der findes en normal ortogonal basis $e_1, \dots, e_m$ i $\mathfrak{S}$, hvis vektorer er egenvektorer for alle transformationerne i mængden. Svarende til en sådan basis fremstilles alle transformationerne i mængden ved diagonalmatricer.

Beviset er ved induktion efter dimensionstallet m. For $m = 1$ er påstanden triviel. Antag at den er sand for rum af dimension $< m$; vi skal da vise, at den er sand for dimension m.

Hvis hver transformation i mængden kun har een egenværdi, er påstanden indlysende. Hvis ikke, så lad U være en transformation i mængden med mere end een egenværdi. Lad $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ være egenværdierne for U, og lad $\mathfrak{S}_1$ være underrummet bestående af alle løsninger til ligningen $Uf = \alpha_1 f$. Lad nu V være en vilkårlig transformation i mængden. Da U og V kommuterer, ser vi, at der for ethvert f_1 i underrummet $\mathfrak{S}_1$ må gælde

$$UVf_1 = VUf_1 = V\alpha_1 f_1 = \alpha_1 Vf_1.$$

Altså er også Vf_1 en løsning til ligningen $Uf = \alpha_1 f$. Følgelig er hvert af underrummene $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_p$ invariant ved samtlige transformationer i mængden. Restriktionerne til $\mathfrak{S}_1$ er unitære transformationer i $\mathfrak{S}_1$, og hvilkesomhelst to af dem kommuterer. Ved at anvende induktionsantagelsen på hvert af rummene $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_p$ når vi det ønskede resultat.

Bemærkning. I det foranstående afsnit har vi måttet forudsætte en række resultater indenfor den lineære algebra kendt (dimension, ortogonale underrum, etc.). Hele afsnittet kunde måske have været forudsat kendt. Det er medtaget, fordi det for det følgende er nødvendigt at have de omhandlede begreber og resultater på rede hånd.

84. Foldningens kommutativitet og associativitet.

Foldning spiller en afgørende rolle i Weyls metode. For foldningen $g(x)$ af to næsten periodiske funktioner $f_1(x) \sim \sum a_{1\lambda} e^{i\lambda x}$ og $f_2(x) \sim \sum a_{2\lambda} e^{i\lambda x}$ benytter vi den korte betegnelse $g = f_1 * f_2$, altså

$$g(x) = f_1 * f_2(x) = \underset{y}{M}\{f_1(x-y) f_2(y)\} \sim \sum a_{1\lambda} a_{2\lambda} e^{i\lambda x}.$$

Vi vil vise, at foldningen er <u>kommutativ</u> og <u>associativ</u>, d.v.s. at

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1 \quad \text{og} \quad (f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3).$$

Dette er umiddelbart klart, hvis vi antager entydighedssætningen. Thi $f_1 * f_2$ og $f_2 * f_1$ har begge Fourier rækken $\sum a_{1\lambda} a_{2\lambda} e^{i\lambda x}$, og hvis $f_3(x) \sim \sum a_{3\lambda} e^{i\lambda x}$, har $(f_1 * f_2) * f_3$ og $f_1 * (f_2 * f_3)$ begge Fourier rækken $\sum a_{1\lambda} a_{2\lambda} a_{3\lambda} e^{i\lambda x}$. Nu har vi imidlertid ikke entydighedssætningen til rådighed og må derfor direkte bevise de to egenskaber. For at bevise kommutativiteten udfører vi i udtrykket for $f_1 * f_2(x)$ substitutionen $y = x - u$ og får

$$f_1 * f_2(x) = \underset{u}{M}\{f_1(x-(x-u)) f_2(x-u)\}$$
$$= \underset{u}{M}\{f_1(u) f_2(x-u)\} = f_2 * f_1(x).$$

For at bevise associativiteten integrerer vi for et fast x funktionen $f_1(x-y) f_2(y-z) f_3(z)$ over rektanglet $[0, Y] \times [0, Z]$ i yz-planen og får

$$\frac{1}{Z}\int_0^Z \left(\frac{1}{Y}\int_0^Y f_1(x-y) f_2(y-z)\, dy\right) f_3(z)\, dz$$
$$= \frac{1}{Y}\int_0^Y f_1(x-y)\left(\frac{1}{Z}\int_0^Z f_2(y-z) f_3(z)\, dz\right) dy.$$

Af §46 og sætning 2 i §50 følger, at

$$\frac{1}{Y}\int_0^Y f_1(x-y)\,f_2(y-z)\,dy$$

for $Y\to\infty$ konvergerer uniformt i z mod $\underset{y}{M}\{f_1(x-y)f_2(y-z)\}$ $= \underset{u}{M}\{f_1(x-z-u)f_2(u)\} = f_1 * f_2(x-z)$. Fra § 52 ved vi, at

$$\frac{1}{Z}\int_0^Z f_2(y-z)\,f_3(z)\,dz$$

er næstenperiodisk i y og for $Z\to\infty$ konvergerer uniformt i y mod $\underset{z}{M}\{f_2(y-z)f_3(z)\} = f_2 * f_3(y)$. For $Y\to\infty$ får vi derfor

$$\frac{1}{Z}\int_0^Z f_1 * f_2(x-z)\,f_3(z)\,dz = \underset{y}{M}\Big\{f_1(x-y)\frac{1}{Z}\int_0^Z f_2(y-z)f_3(z)\,dz\Big\},$$

og deraf for $Z\to\infty$

$$\underset{z}{M}\{f_1 * f_2(x-z)f_3(z)\} = \underset{y}{M}\{f_1(x-y)\,f_2 * f_3(y)\}.$$

Som følge af associativiteten er foldningen $f_1 * \cdots * f_n$ af n funktioner uafhængig af den rækkefølge, hvori operationerne udføres, og denne behøver derfor ikke at angives. Som følge af kommutativiteten ændres resultatet ikke ved permutation af funktionerne. Foldningen $f * \cdots * f$ (hvor f optræder n gange) betegnes f^{*n}.

85. Det er klart, at $(kf_1) * f_2 = k(f_1 * f_2)$ og at $(f_1+f_2) * f_3 = f_1 * f_3 + f_2 * f_3$. Hvis $f_{1n}(x)$ og $f_{2n}(x)$ konvergerer uniformt mod henholdsvis $f_1(x)$ og $f_2(x)$, konvergerer $f_{1n} * f_{2n}(x)$ uniformt mod $f_1 * f_2(x)$. Thi

$$f_1 * f_2(x) - f_{1n} * f_{2n}(x) = (f_1 - f_{1n}) * f_2(x) + f_{1n} * (f_2 - f_{2n})(x).$$

Antages $|f_1(x)|\le C$ og $|f_2(x)|\le C$ for alle x, og $|f_1(x)-f_{1n}(x)|\le\varepsilon$ og $|f_2(x)-f_{2n}(x)|\le\varepsilon$ for alle x når $n\ge n_0$, gælder altså for alle x når $n\ge n_0$

$$|f_1 * f_2(x) - f_{1n} * f_{2n}(x)| \le \varepsilon C + (C+\varepsilon)\varepsilon = \varepsilon(2C+\varepsilon),$$

hvoraf påstanden.

Af Cauchy-Schwarz' ulighed følger, at der for ethvert x gælder

$$|f_1 * f_2(x)| \le \sqrt{\underset{y}{M}\{|f_1(x-y)|^2\}}\,\sqrt{\underset{y}{M}\{|f_2(y)|^2\}} = \|f_1\|\,\|f_2\|.$$

Altså gælder
$$\|f_1 * f_2\|_U \leq \|f_1\| \, \|f_2\|$$
og så meget mere
$$\|f_1 * f_2\| \leq \|f_1\| \, \|f_2\|.$$

86. Adjungeret funktion. For en vilkårlig næstenperiodisk funktion $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ kaldes funktionen $\overline{f(-x)} \sim \sum \overline{a_\lambda} e^{i\lambda x}$ den adjungerede til $f(x)$. Vi indfører betegnelsen $f'(x) = \overline{f(-x)}$ for den adjungerede funktion. Vi har
$$f_1 * f_2'(x) = \underset{y}{M}\{f_1(x+y)\,\overline{f_2(y)}\} \sim \sum a_{1\lambda}\overline{a_{2\lambda}}\, e^{i\lambda x}.$$
For $x=0$ får vi det indre produkt af f_1 og f_2:
$$f_1 * f_2'(0) = (f_1, f_2).$$
Specielt har vi
$$f * f'(x) = \underset{y}{M}\{f(x+y)\overline{f(y)}\} \sim \sum |a_\lambda|^2 e^{i\lambda x}$$
og
$$f * f'(0) = \|f\|^2.$$

Hvis $f = f'$, kaldes funktionen f selvadjungeret. Antages entydighedssætningen, ser vi, at dette gælder når og kun når $a_\lambda = \overline{a_\lambda}$ for alle λ, altså når og kun når a_λ er reel for alle λ. Der gælder
$$(f')' = f; \quad \text{thi } (f')'(x) = \overline{f'(-x)} = \overline{\overline{f(-(-x))}} = f(x).$$
Endvidere
$$(f_1 * f_2)' = f_1' * f_2';$$
thi
$$(f_1 * f_2)'(x) = \overline{(f_1 * f_2)(-x)} = \overline{\underset{y}{M}\{f_1(-x-y)f_2(y)\}}$$
$$= \underset{y}{M}\{\overline{f_1(-x-y)}\;\overline{f_2(y)}\} = \underset{y}{M}\{f_1'(x+y)f_2'(-y)\} = f_1' * f_2'(x).$$
Specielt gælder $(f * f')' = f' * f = f * f'$, d.v.s. $f * f'$ er selvadjungeret. Antages entydighedssætningen, er dette klart, idet $f * f'(x) \sim \sum |a_\lambda|^2 e^{i\lambda x}$.

Bevis for entydighedssætningen

87. Forklaring af Weyls metode. Entydighedssætningen kan formuleres således: Lad $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ være en næstenperiodisk funktion, der ikke er nulfunktionen; da indeholder Fourierrækken for $f(x)$

mindst et led med fra 0 forskellig koefficient.

Ifølge formel (12) i §60 gælder for ethvert λ

$$\underset{y}{M}\{f(x-y)e^{i\lambda y}\} = a_\lambda e^{i\lambda x}.$$

Dette fører os til at betragte 'middelværdiligningen'

$$\underset{y}{M}\{f(x-y)\varphi(y)\} = \alpha\varphi(x) \quad \text{eller} \quad f*\varphi = \alpha\varphi.$$

Dette er en ligning af typen $T\varphi = \alpha\varphi$, hvor T er den lineære transformation $\varphi \mapsto f*\varphi$ i rummet NP. Vi ser, at enhver ren svingning $e^{i\lambda x}$ er egenfunktion (egenvektor) for denne transformation hørende til egenværdien a_λ. Entydighedssætningens udsagn er derfor ensbetydende med, at der er mindst en fra 0 forskellig egenværdi, for hvilken der blandt de tilhørende egenfunktioner findes en ren svingning.

På basis af entydighedssætningen kan vi uden vanskelighed gøre fuldstændigt rede for egenværdier og egenfunktioner for transformationen $\varphi \mapsto f*\varphi$. Dette kan tjene som vejviser ved selve beviset.

Lad $\varphi(x) \sim \sum b_\lambda e^{i\lambda x}$ være en vilkårlig næsten periodisk funktion. Idet

$$f*\varphi(x) \sim \sum a_\lambda b_\lambda e^{i\lambda x} \quad \text{og} \quad \alpha\varphi(x) \sim \sum \alpha b_\lambda e^{i\lambda x},$$

ser vi, når vi benytter entydighedssætningen, at φ er løsning til ligningen $f*\varphi = \alpha\varphi$, hvis og kun hvis

$$a_\lambda b_\lambda = \alpha b_\lambda \quad \text{for alle } \lambda.$$

Heraf fremgår:

(i) Hvis α ikke er Fourierkonstant for f, har ligningen $f*\varphi = \alpha\varphi$ til løsning kun de funktioner $\varphi(x) \sim \sum b_\lambda e^{i\lambda x}$, for hvilke $b_\lambda = 0$ for alle λ, d.v.s. ifølge entydighedssætningen kun nulfunktionen.

(ii) Hvis α er Fourierkonstant for f, har ligningen $f*\varphi = \alpha\varphi$ til løsning de og kun de funktioner $\varphi(x) \sim \sum b_\lambda e^{i\lambda x}$, hvis Fourierrække kan skrives

$$\varphi(x) \sim \sum_{\{\lambda \mid a_\lambda = \alpha\}} b_\lambda e^{i\lambda x}.$$

Egenværdierne for transformationen $\varphi \mapsto f*\varphi$ er altså præcis Fourier konstanterne for f. For $\alpha = 0$ udgør løsningerne til ligningen $f*\varphi = \alpha\varphi$ et uendelig dimensionalt underrum af $N\mathcal{P}$, idet mængden $\{\lambda \mid a_\lambda = 0\}$ jo består af hele $\mathbb{R}$ pånær en endelig eller numerabel mængde. For et $\alpha \neq 0$ består mængden $\{\lambda \mid a_\lambda = \alpha\}$ af et endeligt antal tal, lad os sige $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Løsningerne til ligningen $f*\varphi = \alpha\varphi$ er da de og kun de funktioner φ, hvis Fourier række har formen $b_{\lambda_1} e^{i\lambda_1 x} + \dots + b_{\lambda_m} e^{i\lambda_m x}$, d.v.s. ifølge entydighedssætningen funktionerne

$$\varphi(x) = b_{\lambda_1} e^{i\lambda_1 x} + \dots + b_{\lambda_m} e^{i\lambda_m x}.$$

Løsningerne til ligningen $f*\varphi = \alpha\varphi$ udgør altså i dette tilfælde det m-dimensionale underrum af $N\mathcal{P}$, der udspændes af de rene svingninger $e^{i\lambda_1 x}, \dots, e^{i\lambda_m x}$.

88. Det foregående finder specielt anvendelse på funktionen $f*f'(x) \sim \sum |a_\lambda|^2 e^{i\lambda x}$. At vise, at Fourier rækken for $f(x)$ indeholder mindst et led med fra 0 forskellig koefficient, er ensbetydende med at vise, at Fourier rækken for $f*f'(x)$ indeholder mindst et led med fra 0 forskellig koefficient.

Lad os atter se hvad vi kan slutte ud fra entydighedssætningen. Lad $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ være Fourier frekvenserne for f ordnet således, at vi, når vi sætter $\gamma_j = |a_{\lambda_j}|^2$, har $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots$. Lad os antage, at

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_{g_1} > \gamma_{g_1+1} = \dots = \gamma_{g_2} > \dots .$$

De fra 0 forskellige egenværdier for transformationen $\varphi \mapsto f*f'*\varphi$ er da tallene $\gamma_1, \gamma_{g_1+1}, \dots$, og løsningerne til ligningen $f*f'*\varphi = \gamma_{g_j+1}\varphi$ udgør det underrum af $N\mathcal{P}$, der udspændes af de rene svingninger $e^{i\lambda_{g_j+1}x}, \dots, e^{i\lambda_{g_{j+1}}x}$.

Som følge af entydighedssætningen gælder

$$f*f'(x) = \gamma_1 e^{i\lambda_1 x} + \gamma_2 e^{i\lambda_2 x} + \dots$$

(med $=$ i stedet for $\sim$). Ved gentagen foldning fås

$$(f*f')^{*n}(x) = \gamma_1^n e^{i\lambda_1 x} + \gamma_2^n e^{i\lambda_2 x} + \dots ,$$

hvoraf

$$\Gamma_n = (f*f')^{*n}(0) = \gamma_1^n + \gamma_2^n + \dots = \gamma_1^n \left[1 + \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^n + \dots\right].$$

110

I den i parentesen optrædende sum er de første g_1 led $= 1$, medens de følgende led konvergerer aftagende mod 0 for $n \to \infty$. Heraf slutter man, at

$$\frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n} \to \gamma_1 \quad \text{og} \quad \frac{\Gamma_n}{\gamma_1^n} \to g_1 .$$

Endvidere slutter man af udtrykket for $(f * f')^{*n}(x)$, at

$$\frac{(f * f')^{*n}(x)}{\gamma_1^n} \to e^{i\lambda_1 x} + \dots + e^{i\lambda_{g_1} x} = \psi_1(x)$$

uniformt i x for $n \to \infty$. På denne måde er vi således blevet ført til den største egenværdi γ_1 for transformationen $\varphi \mapsto f * f' * \varphi$, til dens 'multiplicitet' g_1, og til en til γ_1 hørende egenfunktion $\psi_1(x)$.

Det til frekvenserne $\lambda_1, \dots, \lambda_{g_1}$ hørende afsnit $a_{\lambda_1} e^{i\lambda_1 x} + \dots + a_{\lambda_{g_1}} e^{i\lambda_{g_1} x}$ af Fourierrækken for $f(x)$ er simpelthen foldningen $f * \psi_1(x)$. Hvis vi danner differensen $f_1(x) = f(x) - f * \psi_1(x)$, finder vi $f_1 * f_1'(x) = f * f'(x) - \gamma_1 \psi_1(x)$. Ved at fortsætte på samme måde med denne funktion føres vi til γ_2, g_2, og funktionen $\psi_2(x) = e^{i\lambda_{g_1+1} x} + \dots + e^{i\lambda_{g_2} x}$. Ved gentagelse af processen får vi successivt bestemt alle fra 0 forskellige led i Fourierrækkerne for $f(x)$ og $f * f'(x)$.

<u>89</u>. Weyls metode går ud på en direkte udledelse af de i det foregående på basis af entydighedssætningen fundne resultater. Den er en tilpasning af en klassisk metode af Erhard Schmidt fra integralligningernes teori, suppleret med et gruppeteoretisk ræsonnement. Den fører ikke blot til entydighedssætningen men til en konstruktion af Fourierrækkerne for $f(x)$ og $f * f'(x)$ i deres helhed. Da vi tidligere har set, hvorledes alle teoriens hovedresultater kan udledes af entydighedssætningen, vil vi her indskrænke os til at anvende metoden til et bevis for entydighedssætningen. Hertil er det nok at vise følgende to sætninger.

Sætning 1. Lad f være en næsten periodisk funktion, som ikke er nulfunktionen. Da har transformationen $\varphi \mapsto f*f'*\varphi$ en fra 0 forskellig egenværdi γ.

Sætning 2. Lad f være en næsten periodisk funktion, som ikke er nulfunktionen, og lad α være en fra 0 forskellig egenværdi for transformationen $\varphi \mapsto f*\varphi$. Da er underrummet $\mathcal{S}$ af NP bestående af alle løsninger til ligningen $f*\varphi = \alpha\varphi$ endelig dimensionalt, og det har en basis bestående af rene svingninger.

90. Bevis for sætning 1. I beviset benyttes uafladeligt de i §§ 84-86 udledte regler vedrørende foldning.

I følge disse kan $(f*f')^{*n}$ skrives

$$(f*f')^{*n} = (f*f'*\cdots(n))*(f*f'*\cdots*(n))',$$

hvor vi ved at skrive $\cdots(n)$ angiver, at hver parentes er foldning af n funktioner, skiftevis f og f'. [For lige n ender parenteserne altså med f', for ulige n med f.]

Heraf fås

$$(1) \qquad \begin{aligned} \Gamma_n &= (f*f')^{*n}(0) = (f'*f)^{*n}(0) \\ &= \|f*f'*\cdots(n)\|^2 = \|f'*f*\cdots(n)\|^2. \end{aligned}$$

For $n>1$ har vi endvidere

$$(f*f')^{*n} = (f*f'*\cdots(n-1))*(f*f'*\cdots(n+1))'.$$

Heraf følger ved brug af (1)

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Gamma_n^2 &\leq \|f*f'*\cdots(n-1)\|^2 \, \|f*f'*\cdots(n+1)\|^2 \\ &= \Gamma_{n-1}\Gamma_{n+1}. \end{aligned}$$

Desuden finder vi, idet enten

$$f*f'*\cdots(n+m) = (f*f'*\cdots(n))*(f*f'*\cdots(m))$$

eller

$$f*f'*\cdots(n+m) = (f*f'*\cdots(n))*(f'*f*\cdots(m))$$

[nemlig det første, hvis n er lige, så at første parentes ender med f', og det andet, hvis n er ulige, så at første parentes ender med f'], at enten

$$\|f*f'*\cdots(n+m)\| \leq \|f*f'*\cdots(n)\|\,\|f*f'*\cdots(m)\|$$

eller

$$\|f*f'*\cdots(n+m)\| \leq \|f*f'*\cdots(n)\|\,\|f'*f*\cdots(m)\|,$$

hvoraf ved kvadrering under brug af (1) i begge tilfælde fås

$$(3) \qquad \Gamma_{n+m} \leq \Gamma_n \Gamma_m .$$

Nu er $\Gamma_1 = \|f\|^2 > 0$, idet f ikke er nulfunktionen. Endvidere er $\Gamma_2 = \|f*f'\|^2 > 0$, idet $(f*f')(0) = \|f\|^2$ viser, at $f*f'$ ikke er nulfunktionen. Af (2) sluttes derfor successivt, at

$$\Gamma_n > 0 \text{ for alle } n.$$

Af (2) og (3) følger

$$\frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n-1}} \leq \frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n} \leq \Gamma_1 .$$

Talfølgen $\frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n}$ er altså ikke-aftagende og begrænset, og følgelig konvergent med en grænseværdi $\gamma \leq \Gamma_1$, d.v.s.

$$\frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n} \to \gamma \text{ for } n \to \infty; \qquad 0 < \gamma \leq \Gamma_1 .$$

Idet talfølgen er ikke-aftagende, gælder $\frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n} \leq \gamma$ for alle n, d.v.s.

$$\frac{\Gamma_{n+1}}{\gamma^{n+1}} \leq \frac{\Gamma_n}{\gamma^n} .$$

Talfølgen $\frac{\Gamma_n}{\gamma^n}$ er altså ikke-voksende, og er følgelig konvergent med en grænseværdi $g \geq 0$. Af (3) slutter vi, at

$$\Gamma_n \geq \frac{\Gamma_{n+m}}{\Gamma_m} = \frac{\Gamma_{n+m}}{\Gamma_{n+m-1}} \cdot \frac{\Gamma_{n+m-1}}{\Gamma_{n+m-2}} \cdots \frac{\Gamma_{m+1}}{\Gamma_m},$$

hvoraf for $m \to \infty$ <u>for fast</u> n følger

$$\Gamma_n \geq \gamma \cdot \gamma \cdots \gamma = \gamma^n .$$

For ethvert n gælder altså $\frac{\Gamma_n}{\gamma^n} \geq 1$. Følgelig er grænseværdien $g \geq 1$, d.v.s.

$$\frac{\Gamma_n}{\gamma^n} \to g \geq 1 \text{ for } n \to \infty .$$

Vi vil nu bevise, at funktionsfølgen $\frac{(f*f')^{*n}}{\gamma^n}$ for $n \to \infty$ konvergerer uniformt mod en grænsefunktion φ.

Først vil vi vise, at følgen er en fundamentalfølge med hensyn til middel kvadrat normen. Hertil benyttes, at vi (da funktionerne i følgen er selvadjungerede, og deres differenser derfor også er selvadjungerede) har

$$\left\| \frac{(f*f')^{*n}}{\gamma^n} - \frac{(f*f')^{*m}}{\gamma^m} \right\|^2$$

$$= \left(\frac{(f*f')^{*n}}{\gamma^n} - \frac{(f*f')^{*m}}{\gamma^m} \right) * \left(\frac{(f*f')^{*n}}{\gamma^n} - \frac{(f*f')^{*m}}{\gamma^m} \right)(0)$$

$$= \left(\frac{(f*f')^{*2n}}{\gamma^{2n}} - 2\,\frac{(f*f')^{*(n+m)}}{\gamma^{n+m}} + \frac{(f*f')^{*2m}}{\gamma^{2m}} \right)(0)$$

$$= \frac{\Gamma_{2n}}{\gamma^{2n}} - 2\,\frac{\Gamma_{n+m}}{\gamma^{n+m}} + \frac{\Gamma_{2m}}{\gamma^{2m}},$$

hvor højre side $\to g - 2g + g = 0$, når $n \to \infty$ og $m \to \infty$. Til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vi altså finde et n_0, så at højre side er $\leq \varepsilon$, når $n \geq n_0$ og $m \geq n_0$. Vi kan nu let gå over til den uniforme norm, idet vi for $n \geq 2$ og $m \geq 2$ har

$$\left\| \frac{(f*f')^{*n}}{\gamma^n} - \frac{(f*f')^{*m}}{\gamma^m} \right\|_U$$

$$= \left\| \frac{f*f'}{\gamma} * \left(\frac{(f*f')^{*(n-1)}}{\gamma^{n-1}} - \frac{(f*f')^{*(m-1)}}{\gamma^{m-1}} \right) \right\|_U$$

$$\leq \left\| \frac{f*f'}{\gamma} \right\| \left\| \frac{(f*f')^{*(n-1)}}{\gamma^{n-1}} - \frac{(f*f')^{*(m-1)}}{\gamma^{m-1}} \right\|,$$

hvor højre side efter det lige beviste $\to 0$, når $n \to \infty$ og $m \to \infty$. Til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vi altså finde et n_0, så at

$$\left\| \frac{(f*f')^{*n}}{\gamma^n} - \frac{(f*f')^{*m}}{\gamma^m} \right\|_U \leq \varepsilon,$$

når $n \geq n_0$ og $m \geq n_0$. Heraf følger (efter det almindelige konvergensprincip for uniform konvergens), at funktionsfølgen $\frac{(f*f')^{*n}}{\gamma^n}$ er uniformt konvergent:

$$\frac{(f*f')^{*n}(x)}{\gamma^n} \to \psi(x) \text{ for } n \to \infty, \text{ uniformt i } x.$$

For $x = 0$ finder vi $\frac{\Gamma_n}{\gamma^n} \to \psi(0)$. Altså gælder $\psi(0) = g$, hvoraf ses (idet $g \geq 1$), at ψ <u>ikke er nulfunktionen</u>. Af

$$(f*f')*\frac{(f*f')^{*n}}{\gamma^n} = \gamma\,\frac{(f*f')^{*(n+1)}}{\gamma^{n+1}}$$

slutter vi for $n\to\infty$, at

$$(f*f')*\psi = \gamma\psi.$$

Altså er tallet $\gamma>0$ en egenværdi for transformationen $\varphi\mapsto f*f'*\varphi$, og ψ er en til γ hørende egenfunktion.

91. Bevis for sætning 2. Da α er forudsat at være egenværdi for transformationen $\varphi\mapsto f*\varphi$, består $\mathcal{S}$ ikke af 0 alene. Lad $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ være et endeligt normalt ortogonalt system tilhørende $\mathcal{S}$. Da gælder for ethvert $\nu\in\{1,\dots,n\}$

$$\underset{y}{M}\{\overline{f(x-y)}\,\overline{\varphi_\nu(y)}\} = \overline{\alpha}\,\overline{\varphi_\nu(x)}.$$

Lad os for et fast x sætte $\overline{f(x-y)}=g(y)$. Da viser ligningen, at g med hensyn til φ_ν har Fourier konstanten $(g,\varphi_\nu)=\overline{\alpha}\,\overline{\varphi_\nu(x)}$. Ifølge § 56 gælder derfor

$$\sum_1^n|\overline{\alpha}\,\overline{\varphi_\nu(x)}|^2=\sum_1^n|(g,\varphi_\nu)|^2\leq\|g\|^2=\|f\|^2.$$

Tages heri middelværdi efter x fås (idet alle $\varphi_\nu(x)$ er normale)

$$n|\alpha|^2\leq\|f\|^2,\quad\text{hvoraf}\quad n\leq\frac{\|f\|^2}{|\alpha|^2}.$$

Heraf fremgår, at $\mathcal{S}$ er endelig dimensionalt. Vi betegner dimensionen af $\mathcal{S}$ med m.

Vi mangler at vise, at $\mathcal{S}$ har en basis bestående af rene svingninger $e^{i\lambda_1x},\dots,e^{i\lambda_mx}$. Beviset herfor beror på endnu en egenskab ved $\mathcal{S}$, nemlig at $\mathcal{S}$ er invariant overfor forskydninger. Hermed menes, at $\mathcal{S}$ for ethvert $h\in R$ er invariant ved den, åbenbart lineære, transformation i $N\mathcal{P}$, der til enhver næsten periodisk funktion $\varphi(x)$ lader svare funktionen $\varphi(x+h)$. At dette er tilfældet ses således:

Lad $\varphi(x)$ være en vilkårlig funktion i $\mathcal{S}$, altså

$$\underset{y}{M}\{f(x-y)\,\varphi(y)\}=\alpha\varphi(x).$$

Da gælder

$$\underset{y}{M}\{f(x+h-y)\,\varphi(y)\}=\alpha\varphi(x+h),$$

altså (idet y erstattes med $y+h$)

$$\mathcal{M}\{f(x-y)\,\varphi(y+h)\} = \alpha\,\varphi(x+h),$$

hvilket viser, at også $\varphi(x+h)$ tilhører $\mathcal{S}$.

[Bemærk, at beviset beror på, at 'kernen' $f(x-y)$ i 'middelværdiligningen' $\mathcal{M}\{f(x-y)\varphi(y)\} = \alpha\varphi(x)$ kun beror på differensen $x-y$ af de to variable x og y.]

Beviset for sætning 2 vil derfor være fuldendt, hvis vi viser:

Ethvert underrum $\mathcal{S}$ af $\mathcal{NP}$ af endelig dimension m, som er invariant over for forskydninger, har en basis bestående af rene svingninger $e^{i\lambda_1 x}, \ldots, e^{i\lambda_m x}$.

[Bemærk, at det omvendte udsagn er indlysende: Ethvert endelig dimensionalt underrum af $\mathcal{NP}$, der har en basis bestående af rene svingninger, er invariant over for forskydninger.]

Lad $U(h)$ betegne den lineære transformation i $\mathcal{S}$, der fører et vilkårligt element $\varphi(x)$ af $\mathcal{S}$ over i $\varphi(x+h)$. Vi kan skrive

$$\varphi(x+h) = U(h)\,\varphi(x).$$

Transformationen $U(h)$ er unitær; thi det indre produkt af to funktioner $\varphi(x)$ og $\psi(x)$ er lig med det indre produkt af $\varphi(x+h)$ og $\psi(x+h)$. Endvidere gælder

$$U(h_1+h_2) = U(h_1)\,U(h_2).$$

Thi for ethvert $\varphi(x)$ i $\mathcal{S}$ har vi $\varphi(x+h_1+h_2) = U(h_1)\,\varphi(x+h_2) = U(h_1)\,U(h_2)\,\varphi(x)$. Afbildningen $h \mapsto U(h)$ er altså en homomorfi af gruppen $(\mathbb{R},+)$ ind i gruppen af unitære transformationer i $\mathcal{S}$, en såkaldt unitær representation af gruppen $(\mathbb{R},+)$. Da $(\mathbb{R},+)$ er kommutativ, slutter vi, at

$$U(h_1)\,U(h_2) = U(h_2)\,U(h_1),$$

d.v.s. hvilkesomhelst to af transformationerne $U(h)$ kommuterer.

Ifølge Frobenius' sætning (§83) eksisterer der da m parvis ortogonale en-dimensionale underrum $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_m$ af $\mathcal{S}$, der hver for sig er invariant ved alle transformationerne $U(h)$. Men det betyder blot, at hvert af disse underrum er invariant over for forskydninger.

Vor opgave er således reduceret til at vise:

<u>Ethvert en-dimensionalt underrum</u> $\mathfrak{R}$ <u>af</u> AP, som er in-
<u>variant over for forskydninger,</u> <u>indeholder</u> en ren svingning $e^{i\lambda x}$.

Lad φ være et normalt element i $\mathfrak{R}$. For ethvert h gælder

$$(4) \qquad \varphi(x+h) = c(h)\varphi(x)$$

for en vis konstant $c(h)$. Da funktionerne $\varphi(x)$ og $\varphi(x+h)$ begge
har normen 1, må gælde $|c(h)| = 1$. Da $\varphi(x+h_1+h_2) =$
$c(h_1)\varphi(x+h_2) = c(h_1)c(h_2)\varphi(x)$, må gælde $c(h_1+h_2) = c(h_1)\,c(h_2)$.
Af (4) ses, at $\varphi(h) = \varphi(0)\,c(h)$. Der må altså gælde $|\varphi(0)| = 1$,
og $c(h)$ er selv et normalt element i $\mathfrak{R}$. Beviset vil derfor
være afsluttet, hvis vi viser:

<u>Enhver kontinuert funktion</u> $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, der opfylder
betingelserne (a) $|\psi(x)| = 1$ <u>og</u> (b) $\psi(x_1+x_2) = \psi(x_1)\cdot\psi(x_2)$, <u>er en ren</u>
<u>svingning</u> $e^{i\lambda x}$.

Bemærk, at det omvendte udsagn er indlysende. En
funktion $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, der opfylder (a) og (b), d.v.s. en homomorfi
af $(\mathbb{R}, +)$ ind i $(\mathbb{U}, \cdot)$, hvor $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, kaldes en
karakter på $(\mathbb{R}, +)$. De kontinuerte karakterer på $(\mathbb{R}, +)$
er altså netop de rene svingninger $e^{i\lambda x}$.

Bevis. Af $\psi(0) = \psi(0)^2$ og $|\psi(0)| = 1$ følger $\psi(0) = 1$.
Lad $x_0 \in \mathbb{R}_+$ være valgt således, at $|\psi(x) - 1| \leq \sqrt{2}$ for
$|x| \leq x_0$. For ethvert x, for hvilket $|x| \leq x_0$, findes da et
entydigt bestemt $\theta \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, for hvilket $\psi(x) = e^{i\theta}$.
Idet $\psi(\frac{1}{2}x)^2 = \psi(x)$, må da gælde $\psi(\frac{1}{2}x) = e^{i\frac{1}{2}\theta}$ eller
$\psi(\frac{1}{2}x) = -e^{i\frac{1}{2}\theta}$, men den sidste mulighed må forkastes,
da $|-e^{i\frac{1}{2}\theta} - 1| > \sqrt{2}$. Altså gælder $\psi(\frac{1}{2}x) = e^{i\frac{1}{2}\theta}$. Lad
specielt $\psi(x_0) = e^{i\theta_0}$, hvor $\theta_0 \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Da fås suc-
cessivt $\psi(\frac{1}{2}x_0) = e^{i\frac{1}{2}\theta_0}$, $\psi(\frac{1}{2^2}x_0) = e^{i\frac{1}{2^2}\theta_0}$, og alment
$\psi(\frac{1}{2^n}x_0) = e^{i\frac{1}{2^n}\theta_0}$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$. Da $\psi(kx) = \psi(x)^k$ for
ethvert $k \in \mathbb{N}$, og $\psi(-x) = \frac{1}{\psi(x)}$, gælder altså, når vi
sætter $\lambda = \frac{\theta_0}{x_0}$, at

$$\psi(x) = e^{i\lambda x} \quad \text{for alle } x = \frac{k}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Da ψ er kontinuert, følger heraf, at $\psi(x) = e^{i\lambda x}$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

92. Et andet bevis for sætning 1.

I stedet for som i §90 at konstruere en fra 0 forskellig egenværdi for transformationen $\varphi \mapsto f*f'*\varphi$ kan man vise eksistensen af en sådan ved brug af den (fra Hilbert stammende) direkte metode i variationsregningen. Et sådant bevis blev først givet af Hammerstein. Følgende særligt simple bevis er hentet fra F. Riesz' og Sz. Nagy's bog om funktionalanalyse.

Vi betragter funktionen

$$\varphi \mapsto \|f*\varphi\|^2 : \mathcal{NP} \to [0,+\infty[.$$

Vi har

$$\|f*\varphi\|^2 \leq \|f\|^2\|\varphi\|^2, \qquad \|f*f'\|^2 > 0.$$

Heraf følger, at funktionen $\frac{\|f*\varphi\|^2}{\|\varphi\|^2} : \mathcal{NP}\setminus\{0\} \to [0,+\infty[$ har et endeligt, positivt supremum γ. Idet $\frac{\|f*\varphi\|^2}{\|\varphi\|^2} = \frac{\|f*k\varphi\|^2}{\|k\varphi\|^2}$, er γ lig med supremum af $\|f*\varphi\|^2$ på enhedssfæren $\mathfrak{B} = \{\varphi \mid \|\varphi\| = 1\}$ i $\mathcal{NP}$. Vi kan også karakterisere γ som det mindste tal med den egenskab, at

$$\|f*\varphi\|^2 \leq \gamma\|\varphi\|^2 \quad \text{for alle } \varphi.$$

[Ved brug af entydighedssætningen ses let, at γ er den største af koefficienterne $|a_\lambda|^2$ i Fourierrækken $f*f'(x) \sim \sum |a_\lambda|^2 e^{i\lambda x}$, og at der gælder $\|f*\varphi\|^2 = \gamma\|\varphi\|^2$ for de og kun de funktioner φ, der er linearkombinationer af de rene svingninger $e^{i\lambda x}$, for hvilke $|a_\lambda|^2 = \gamma$.]

Vi vil vise, at γ er egenværdi for transformationen $\varphi \mapsto f*f'*\varphi$. Idet

$$\|f*\varphi\|^2 = f*\varphi*f'*\varphi'(0) = f*f'*\varphi*\varphi'(0) = (f*f'*\varphi, \varphi)$$

og

$$\|f*f'*\varphi\|^2 \leq \gamma\|f'*\varphi\|^2 = \gamma\|f*\varphi'\|^2 \leq \gamma^2\|\varphi'\|^2 = \gamma^2\|\varphi\|^2,$$

har vi for ethvert $\varphi \in \mathfrak{B}$

$$\|f*f'*\varphi - \gamma\varphi\|^2 = \|f*f'*\varphi\|^2 + \|\gamma\varphi\|^2 - 2\gamma\,\Re(f*f'*\varphi, \varphi)$$

$$\leq \gamma^2 + \gamma^2 - 2\gamma\|f*\varphi\|^2 = 2\gamma(\gamma - \|f*\varphi\|^2).$$

Hvis vi vidste, at der findes et $\varphi \in \mathfrak{B}$, for hvilket $\|f*\varphi\|^2 = \gamma$, var vi færdige, thi for et sådant φ måtte i følge den fundne ulighed gælde $f*f'*\varphi - \gamma\varphi = 0$. Vi må gå anderledes frem.

Vi vælger en følge $\varphi_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, så at $\|f*\varphi_n\|^2 \to \gamma$ for $n \to \infty$. Da gælder

$$\|f*f'*\varphi_n - \gamma\varphi_n\| \to 0 \quad \text{for } n \to \infty.$$

Vi sætter $\psi_n = f*f'*\varphi_n$. Ifølge trekantuligheden gælder $|\,\|\psi_n\| - \|\gamma\varphi_n\|\,| \leq \|\psi_n - \gamma\varphi_n\|$. Heraf ses, at $\|\psi_n\| \to \gamma$ for $n \to \infty$. Idet

$$\|(f*f')*(f*f'*\varphi_n - \gamma\varphi_n)\|_U \leq \|f*f'\|\,\|f*f'*\varphi_n - \gamma\varphi_n\|,$$

ser vi, at der for følgen ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, gælder

$$(5) \qquad \|f*f'*\psi_n - \gamma\psi_n\|_U \to 0 \quad \text{for } n \to \infty.$$

Nu gælder imidlertid, at mængden $\mathcal{F} = \{f*f'*\varphi \mid \varphi \in \mathcal{B}\}$ [i modsætning til $\mathcal{B}$ selv] er betinget kompakt. Thi for ethvert $\varphi \in \mathcal{B}$ gælder

$$\|f*f'*\varphi\|_U \leq \|f*f'\|\,\|\varphi\| = \|f*f'\|.$$

Funktionerne i $\mathcal{F}$ er derfor ensartet begrænsede. Desuden er $\mathcal{F}$ majoriserbar. Thi sættes til afkortning $f*f' = g$, og betegnes forskydningsfunktionen for g med $e(\tau)$, har vi for ethvert $\varphi \in \mathcal{B}$ og for alle x og τ

$$|g*\varphi(x+\tau) - g*\varphi(x)| = |\underset{y}{M}\{[g(x+\tau-y) - g(x-y)]\varphi(y)\}|$$

$$\leq \underset{y}{M}\{|g(x+\tau-y) - g(x-y)|\,|\varphi(y)|\} \leq e(\tau)\|\varphi\| = e(\tau).$$

Funktionsfølgen ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, har altså en uniformt konvergent delfølge $\psi_{n_1}, \psi_{n_2}, \dots$, lad os sige med grænsefunktion ψ. Da $\|\psi_n\| \to \gamma$ for $n \to \infty$, kan ψ ikke være nulfunktionen. Af (5), anvendt på funktionerne ψ_{n_p}, følger [idet $\gamma\psi_{n_p}$ konvergerer uniformt mod $\gamma\psi$, og $f*f'*\psi_{n_p}$ konvergerer uniformt mod $f*f'*\psi$], at der må gælde

$$f*f'*\psi - \gamma\psi = 0.$$

Altså er tallet $\gamma > 0$ en egenværdi for transformationen $\varphi \mapsto f*f'*\varphi$, og ψ en til γ hørende egenfunktion.

Specielle typer af Fourierrækker.

93. Indledende bemærkninger. Fourier rækken for en næsten periodisk funktion $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ siges at være absolut konvergent, hvis $\sum a_\lambda$ har mening, hvilket kommer ud på det samme som at $\sum |a_\lambda|$ har mening. I så fald er funktionen som vist i § 67 rækkens sumfunktion, altså $f(x) = \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$. Er $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ en følge af indbyrdes forskellige tal, der indeholder Fourier frekvenserne for $f(x)$, så at Fourier rækken kan skrives $f(x) \sim \sum_{p=1}^{\infty} a_{\lambda_p} e^{i\lambda_p x}$, betyder den absolute konvergens, at rækken $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{\lambda_p}|$ er konvergent. Vi vil vise, at Fourier rækker af visse typer er absolut konvergente. Beviserne føres ved hjælp af summationssætningen. Vi kan nøje os med følgende konsekvens af denne sætning.

For enhver følge $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ af indbyrdes forskellige reelle tal findes konstanter k_{n,λ_p} $(n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N})$, der opfylder

(a) $0 \leq k_{n,\lambda_p} \leq 1$,

(b) for ethvert n gælder $k_{n,\lambda_p} = 0$ for alle p fra et vist trin,

(c) for ethvert p gælder $k_{n,\lambda_p} \to 1$ for $n \to \infty$,

således at når $f(x) \sim \sum_{p=1}^{\infty} a_{\lambda_p} e^{i\lambda_p x}$, konvergerer følgen af trigonometriske polynomier $s_n(x) = \sum_{p=1}^{\infty} k_{n,\lambda_p} a_{\lambda_p} e^{i\lambda_p x}$ uniformt mod $f(x)$.

94. Fourier rækker med reelle ikke-negative koefficienter, eller med koefficienter i et vinkelrum. Vi viser først:

Sætning 1. Lad $f(x) \sim \sum_{p=1}^{\infty} a_{\lambda_p} e^{i\lambda_p x}$ være en næsten periodisk funktion, for hvilken a_{λ_p} er reel og ≥ 0 for alle p. Da er Fourierrækken absolut konvergent.

Bevis. For ethvert $q \in \mathbb{N}$ gælder
$$\sum_{p=1}^{q} k_{n,\lambda_p} a_{\lambda_p} \leq \sum_{p=1}^{\infty} k_{n,\lambda_p} a_{\lambda_p} = s_n(0).$$
For $n \to \infty$ fås heraf (idet $s_n(0) \to f(0)$)
$$\sum_{p=1}^{q} a_{\lambda_p} \leq f(0).$$
Heraf følger konvergensen af rækken $\sum_{p=1}^{\infty} a_{\lambda_p}$ og uligheden $\sum_{p=1}^{\infty} a_{\lambda_p} \leq f(0)$. [Da det af sætningen følger, at $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{\lambda_p} e^{i\lambda_p x}$, må naturligvis gælde $\sum_{p=1}^{\infty} a_{\lambda_p} = f(0)$.]

Sætningen kan skærpes til følgende:

Sætning 2. Lad $f(x) \sim \sum_{p=1}^{\infty} a_{\lambda_p} e^{i\lambda_p x}$ være en næsten periodisk funktion, for hvilken alle a_{λ_p} tilhører et vinkelrum $\{z = re^{i\theta} \mid r \geq 0, |\theta| \leq \theta_0 < \frac{1}{2}\pi\}$. Da er Fourier rækken absolut konvergent.

Bevis. For ethvert $z = re^{i\theta}$ i vinkelrummet gælder
$$\Re z = |z| \cos\theta \geq |z| \cos\theta_0, \text{ altså } |z| \leq \frac{1}{\cos\theta_0} \Re z.$$
For ethvert $q \in \mathbb{N}$ gælder derfor
$$\sum_{p=1}^{q} k_{n,\lambda_p} |a_{\lambda_p}| \leq \frac{1}{\cos\theta_0} \sum_{p=1}^{q} k_{n,\lambda_p} \Re a_{\lambda_p}$$
$$\leq \frac{1}{\cos\theta_0} \sum_{p=1}^{\infty} k_{n,\lambda_p} \Re a_{\lambda_p} = \frac{1}{\cos\theta_0} \Re s_n(0).$$
For $n \to \infty$ fås heraf (idet $\Re s_n(0) \to \Re f(0)$)
$$\sum_{p=1}^{q} |a_{\lambda_p}| \leq \frac{1}{\cos\theta_0} \Re f(0).$$
Heraf følger konvergensen af rækken $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{\lambda_p}|$ og uligheden $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{\lambda_p}| \leq \frac{1}{\cos\theta_0} \Re f(0)$.

95. Fourier rækker med lineært uafhængige frekvenser.

Vi vil vise:

Sætning 3. Hvis $f(x) \sim \sum_{p=1}^{\infty} a_{\lambda_p} e^{i\lambda_p x}$ er en næsten periodisk funktion, og $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ er lineært uafhængige,

er fourierrækken absolut konvergent, og der gælder
$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{\lambda_p}| = \|f\|_U.$$
Bevis. Da $s_n(x)$ konvergerer uniformt med $f(x)$, gælder $\|s_n\|_U \to \|f\|_U$. Ifølge § 78 gælder
$$\sum_{p=1}^{\infty} k_{n,\lambda_p} |a_{\lambda_p}| = \|s_n\|_U.$$
For ethvert $q \in \mathbb{N}$ gælder følgelig
$$\sum_{p=1}^{q} k_{n,\lambda_p} |a_{\lambda_p}| \leq \|s_n\|_U.$$
For $n \to \infty$ fås heraf
$$\sum_{p=1}^{q} |a_{\lambda_p}| \leq \|f\|_U.$$
Heraf følger konvergensen af rækken $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{\lambda_p}|$ og uligheden $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{\lambda_p}| \leq \|f\|_U$. Her må lighedstegnet gælde. Thi af det allerede viste fremgår, at $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{\lambda_p} e^{i\lambda_p x}$, og heraf følger $|f(x)| \leq \sum_{p=1}^{\infty} |a_{\lambda_p}|$ for alle x, altså $\|f\|_U \leq \sum_{p=1}^{\infty} |a_{\lambda_p}|$.

Bemærkning. Vedrørende værdimængden $f(\mathbb{R})$ finder man i analogi med det i § 78 anførte, at $\overline{f(\mathbb{R})}$ enten er en afsluttet cirkelskive $\{z \mid |z| \leq r\}$ eller en afsluttet cirkelring $\{z \mid 0 < \rho \leq |z| \leq r\}$. Her er
$$r = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{\lambda_p}|.$$
Ringtilfældet indtræffer, når og kun når et af leddene $|a_{\lambda_p}|$, lad os sige $|a_{\lambda_s}|$, overstiger summen af de øvrige $|a_{\lambda_p}|$. I så fald er
$$\rho = 2|a_{\lambda_s}| - \sum_{p=1}^{\infty} |a_{\lambda_p}|.$$

Man når til disse resultater ved sammen med $f(x)$ at betragte den ved
$$F(x_1, x_2, \dots) = a_{\lambda_1} e^{ix_1} + a_{\lambda_2} e^{ix_2} + \cdots$$
definerede funktion af uendelig mange reelle variable.

125

Integration og differentiation.

96. Integration. Lad $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ være en næsten periodisk funktion. Da forskellige stamfunktioner til $f(x)$ har konstant differens, kan vi nøjes med at betragte en af dem

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + F(0),$$

hvor $F(0)$ er vilkårligt valgt.

Sætning 1. Hvis stamfunktionen $F(x)$ til en næsten periodisk funktion $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ er næsten periodisk, gælder $a_0 = M\{f(x)\} = 0$, og Fourierrækken for $F(x)$ er

$$F(x) \sim C + \sum_{\lambda \neq 0} \frac{a_\lambda}{i\lambda} e^{i\lambda x}, \qquad C = M\{F(x)\}.$$

Bevis. (1) Da $F(x)$ er næsten periodisk, er $F(x)$ begrænset, og der gælder altså

$$a_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{F(T)-F(0)}{T} = 0.$$

(2) For $\lambda \neq 0$ fås ved partiel integration

$$M\{F(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(x)e^{-i\lambda x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\left(\left[\frac{1}{T}F(x)\frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda}\right]_0^T + \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\frac{e^{-i\lambda x}}{i\lambda}\,dx\right)$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(\frac{F(T)}{T}\frac{e^{-i\lambda T}}{-i\lambda} - \frac{F(0)}{T}\frac{1}{-i\lambda} + \frac{1}{i\lambda}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right) = 0 + \frac{a_\lambda}{i\lambda}.$$

97. Betingelsen $a_0 = 0$ er ikke tilstrækkelig til at sikre, at stamfunktionen $F(x)$ til den næsten periodiske funktion $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ er næsten periodisk.

Betragt for eksempel funktionen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{2^n} e^{i\frac{1}{2^n}x}$. Rækken er absolut konvergent. Altså er $f(x)$ næsten periodisk, og $f(x) \sim \sum \frac{i}{2^n} e^{i\frac{1}{2^n}x}$. For denne funktion er $a_0 = 0$. Hvis stamfunktionen $F(x)$ var næsten periodisk, måtte gælde $F(x) \sim C + \sum e^{i\frac{1}{2^n}x}$, hvilket er umuligt ifølge Parsevals formel.

Bemærkning. For en periodisk funktion $f(x)$, lad os sige med perioden p, er betingelsen $a_0 = 0$ tilstrækkelig til

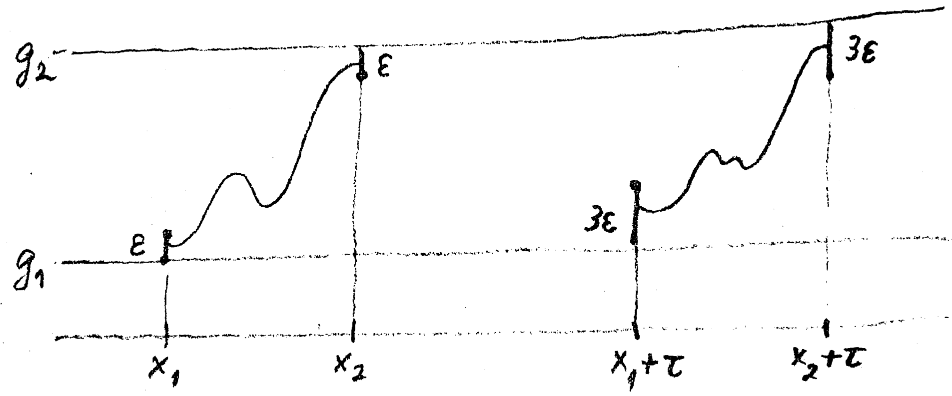
at sikre, at stamfunktionen $F(x)$ er periodisk med perioden p. Thi betingelsen $M\{f(x)\}=0$ betyder jo, at der for ethvert x gælder
$$F(x+p)-F(x)=\int_x^{x+p} f(t)\,dt=0.$$

<u>Sætning 2.</u> Hvis stamfunktionen $F(x)$ <u>til en næsten periodisk funktion $f(x)$ er begrænset</u>, <u>er den næsten periodisk.</u>

Den analoge sætning for Bohl funktioner blev vist af Bohl. Hans bevis er anvendeligt også for den almene sætning.

Bevis. ① Af gyldigheden for reelle funktioner følger gyldigheden for komplekse funktioner.

② Antag at $f(x)$ er en reel næsten periodisk funktion og at stamfunktionen $F(x)$ er begrænset. Vi tænker os $F(0)$ valgt reel, så at $F(x)$ også er reel, og sætter
$$g_1=\inf_x F(x), \quad g_2=\sup_x F(x).$$
Hvis $g_1=g_2$, er $F(x)$ konstant og altså næsten periodisk. Vi antager derfor, at $g_1<g_2$. Vi vil vise, at $F(x)$ er næsten periodisk, ved at vise, at der til ethvert $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ findes et $\delta\in\mathbb{R}_+$, således at ethvert $\tau_f(\delta)$ er et $\tau_F(4\varepsilon)$. Vi kan nøjes med at betragte værdier $\varepsilon<\frac{1}{3}(g_2-g_1)$.



Vælg x_1 og x_2, så at $F(x_1)\leq g_1+\varepsilon$ og $F(x_2)\geq g_2-\varepsilon$, og betragt for et vilkårligt $\tau=\tau_f\left(\frac{\varepsilon}{|x_2-x_1|}\right)$ punkterne $x_1+\tau$ og $x_2+\tau$. Vi har
$$F(x_2+\tau)-F(x_1+\tau)=\int_{x_1+\tau}^{x_2+\tau} f(t)\,dt=\int_{x_1}^{x_2} f(t+\tau)\,dt$$
$$F(x_2)-F(x_1)\qquad=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\,,$$

altså

$$\big(F(x_2+\tau)-F(x_1+\tau)\big)-\big(F(x_2)-F(x_1)\big)=\int_{x_1}^{x_2}\big(f(t+\tau)-f(t)\big)\,dt \geq -\varepsilon,$$

hvoraf
$$F(x_2+\tau)-F(x_1+\tau)\geq(g_2-g_1-2\varepsilon)-\varepsilon=g_2-g_1-3\varepsilon.$$

Da $F(x_1+\tau)\geq g_1$ og $F(x_2+\tau)\leq g_2$, følger heraf, at $F(x_1+\tau)\leq g_1+3\varepsilon$ og $F(x_2+\tau)\geq g_2-3\varepsilon$.

I ethvert interval af længden $l=l_f\left(\frac{\varepsilon}{|x_2-x_1|}\right)$ findes mindst et $\tau_f\left(\frac{\varepsilon}{|x_2-x_1|}\right)$. For ethvert interval $[a,a+L]$ af længden $L=l+|x_2-x_1|$ kan vi derfor finde et $\tau=\tau_f\left(\frac{\varepsilon}{|x_2-x_1|}\right)$ således at både $x_1+\tau$ og $x_2+\tau$ tilhører $[a,a+L]$. (Vi skal blot vælge $\tau\in[a-x_0,a+l-x_0]$, hvor x_0 er det mindste af tallene x_1 og x_2.) Vi har altså vist:

<u>Der findes en længde</u> L, <u>således at der i ethvert interval</u> $[a,a+L]$ <u>findes mindst et punkt</u> z_1, <u>hvori</u> $F(z_1)\leq g_1+3\varepsilon$, <u>og mindst et punkt</u> z_2, <u>hvori</u> $F(z_2)\geq g_2-3\varepsilon$.

③ Vi vil nu vise, at ethvert $\tau_f\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)$ er et $\tau_F(4\varepsilon)$.

Betragt et vilkårligt x og et vilkårligt $\tau=\tau_f\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)$ og vælg $a_1,a_2\in[0,L]$ således at

(1) $\quad F(x+a_1)\leq g_1+3\varepsilon \quad$ og $\quad F(x+a_2)\geq g_2-3\varepsilon.$

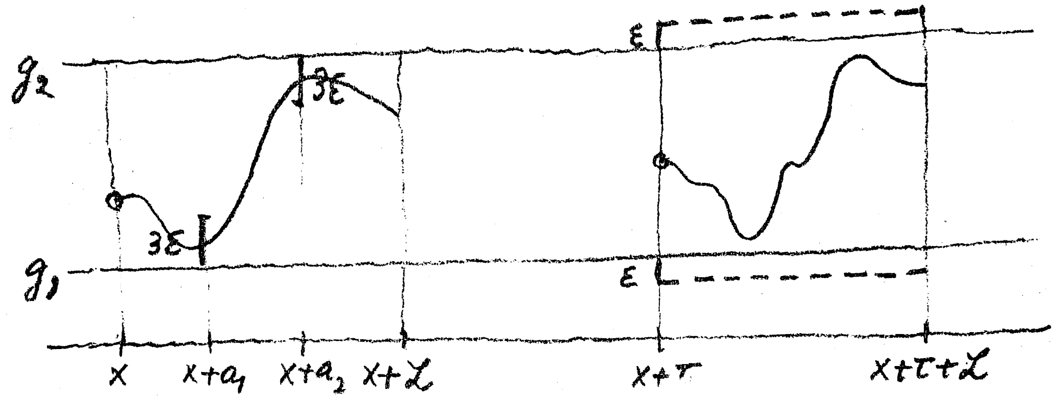
For ethvert $y\in[0,L]$ har vi

$$F(x+\tau+y)-F(x+\tau)=\int_x^{x+y}f(t+\tau)\,dt$$
$$F(x+y)\;-F(x)\;=\int_x^{x+y}f(t)\,dt,$$

altså
$$\big(F(x+\tau+y)-F(x+\tau)\big)-\big(F(x+y)-F(x)\big)=\int_x^{x+y}\big(f(t+\tau)-f(t)\big)\,dt$$

hvoraf

(2) $\quad -\varepsilon\leq\big(F(x+\tau+y)-F(x+\tau)\big)-\big(F(x+y)-F(x)\big)\leq\varepsilon.$



… en geometrisk betragtning [illegible]
kaster grafen for F i intervallet $[x, x+L]$ parallelforskydningen $(\tau, F(x+\tau)-F(x))$, får vi en graf, der ligger mellem graferne for $F-\varepsilon$ og $F+\varepsilon$ i intervallet $[x+\tau, x+\tau+L]$. Så meget mere ligger den forskudte graf altså mellem graferne for $g_1-\varepsilon$ og $g_2+\varepsilon$. På grund af (1) kan forskydningen i lodret retning $F(x+\tau)-F(x)$ numerisk højst være 4ε, d.v.s. vi har som påstået

$$(3) \qquad |F(x+\tau)-F(x)| \leq 4\varepsilon .$$

Ved regning med uligheder er ræsonnementet følgende: Ulighederne (2) giver

$$F(x+\tau)-F(x) \geq F(x+\tau+y)-F(x+y)-\varepsilon$$

$$F(x+\tau)-F(x) \leq F(x+\tau+y)-F(x+y)+\varepsilon .$$

Ved i den første af disse at vælge $y=a_1$, og i den anden at vælge $y=a_2$, får vi

$$F(x+\tau)-F(x) \geq g_1-(g_1+3\varepsilon)-\varepsilon = -4\varepsilon$$

$$F(x+\tau)-F(x) \leq g_2-(g_2-3\varepsilon)+\varepsilon = 4\varepsilon .$$

Disse uligheder tilsammen giver (3).

Uden bevis nævner vi følgende dybere liggende sætning af Favard:

<u>Sætning 3</u>. <u>En tilstrækkelig betingelse for at stamfunktionen</u> $F(x)$ <u>til en næsten periodisk funktion</u> $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ <u>er næsten periodisk, er at der findes et</u> $\alpha \in R_+$, <u>således at</u> $a_\lambda = 0$ <u>for alle</u> $\lambda \in [-\alpha, \alpha]$.

<u>98</u>. <u>Differentiation</u>. Lad $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$ være en differentiabel næsten periodisk funktion. Heraf følger ikke, at $f'(x)$ er næsten periodisk. Der findes jo endda differentiable periodiske funktioner, hvis afledede ikke er kontinuerte. Selv om vi forlanger, at $f'(x)$ er kontinuert, kan vi imidlertid ikke være sikre på, at $f'(x)$ er næsten periodisk. Dette fremgår af følgende eksempel:

Lad $f_1(x)$ være periodisk med perioden 2, og lad den i intervallet $[0,2]$ være $=0$ undtagen i intervallet

$]1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}[$, hvor den er $= 1+\cos 2\pi(x-1)$.

Lad $f_2(x)$ være periodisk med perioden 4, og lad den i intervallet $[0,4]$ være $=0$ undtagen i intervallet $]2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4}[$, hvor den er $=\frac{1}{2}[1+\cos 4\pi(x-2)]$.

...

Lad $f_n(x)$ være periodisk med perioden 2^n, og lad den i intervallet $[0,2^n]$ være $=0$ undtagen i intervallet $]2^{n-1}-\frac{1}{2^n}, 2^{n-1}+\frac{1}{2^n}[$, hvor den er $=\frac{1}{2^{n-1}}[1+\cos 2^n\pi(x-2^{n-1})]$.

...

Da er $f(x)=\sum_1^\infty f_n(x)$ næsten periodisk. Man ser, at mængderne $\{x \mid f_n(x) \neq 0\}$ er disjunkte, og at $f(x)$ er differentiabel med kontinuert afledet $f'(x)=\sum_1^\infty f_n'(x)$. I intervallet $]2^{n-1}-\frac{1}{2^n}, 2^{n-1}+\frac{1}{2^n}[$ fås $f'(x)=-2\pi \sin 2^n\pi(x-2^{n-1})$. Specielt gælder

$$|f'(2^{n-1}+\tfrac{1}{2^{n+1}})-f'(2^{n-1}-\tfrac{1}{2^{n+1}})|=4\pi.$$

Altså er $f'(x)$ ikke uniformt kontinuert og følgelig ikke næsten periodisk.

<u>Sætning 4.</u> <u>Hvis den afledede $f'(x)$ af en differentiabel næsten periodisk funktion $f(x)$ er uniformt kontinuert, er den næsten periodisk.</u>

Bevis. Til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så at $|f'(y)-f'(x)| \leq \varepsilon$, når $|y-x| \leq \delta$. For $0<|h| \leq \delta$ og alle x gælder da

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f'(y)-f'(x))\,dy\right| \leq \varepsilon.$$

Altså konvergerer $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ for $h \to 0$ uniformt mod $f'(x)$. Da $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ er næsten periodisk, må også $f'(x)$ være det.

Bemærkning. Hvis $f(x) \sim \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$, har vi $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \sim \sum \frac{e^{i\lambda h}-1}{h} a_\lambda e^{i\lambda x}$, og får altså (idet $\frac{e^{i\lambda h}-1}{h} \to i\lambda$ for $h \to 0$), at $f'(x) \sim \sum i\lambda a_\lambda e^{i\lambda x}$, hvilket også kan aflæses af sætning 1.

99. En elementær sætning. Vi vil i det følgende give en variant af et direkte Bevis for approksimationssætningen, som skyldes Bogoljubov. Den oprindelige version af beviset kan læses i Maaks bog. Den eneste egenskab ved næstenperiodiske funktioner (ud over definitionen), der benyttes i beviset, er den uniforme kontinuitet. Beviset bygger på teorien for periodiske funktioner.

For vilkårlige reelle tal $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ og et vilkårligt $\delta \in]0,\pi[$ vil vi som i §32 med $[\lambda_1, \dots, \lambda_m; \delta]$ betegne løsningsmængden til ulighederne

$$\left.\begin{array}{c} |\lambda_1 \tau| \leq \delta \\ \dots \\ |\lambda_m \tau| \leq \delta \end{array}\right\} \text{mod } 2\pi .$$

Vi begynder med at vise følgende elementære sætning, som vi også får brug for i en anden forbindelse.

Sætning 1. Givet en funktion $f(t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ og et tal $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Antag at mængden $\{\tau(\varepsilon)\}$ af forskydningstal for $f(t)$ hørende til ε indeholder en mængde $[\lambda_1, \dots, \lambda_m; \delta]$. Da findes et trigonometrisk polynomium $s(t) = \sum^* c_\lambda e^{i\lambda t}$ med frekvenser fra mængden $\{n_1\lambda_1 + \dots + n_m\lambda_m \mid n_1 \in \mathbb{Z}, \dots, n_m \in \mathbb{Z}\}$, så at $|f(t) - s(t)| \leq 2\varepsilon$ for alle t.

Bevis. Vi imiterer Bohrs metode. I $\mathbb{R}^m$ betragter vi den rette linie med parameterfremstillingen

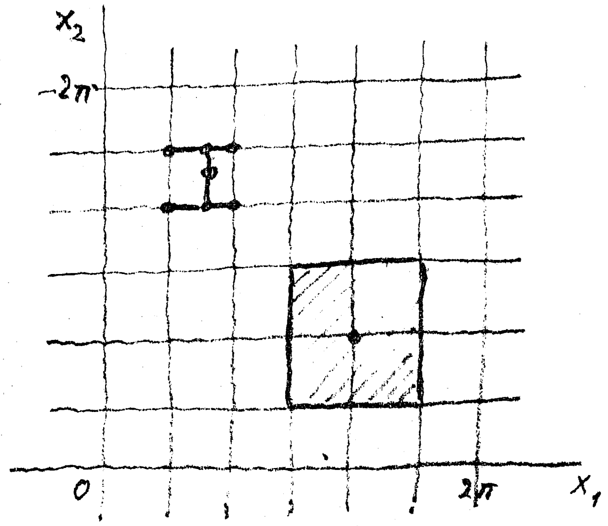
$$(x_1, \dots, x_m) = (\lambda_1 t, \dots, \lambda_m t), \text{ eller kort } x = \lambda t.$$

Vi vil konstruere en kontinuert funktion $F(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ med perioden 2π efter hver variabel, således at

$$(1) \qquad |f(t) - F(\lambda t)| \leq \varepsilon \text{ for alle } t.$$

Er vi først så vidt, kan beviset afsluttes i få ord. Vi vælger ifølge Weierstrass' sætning for funktioner af flere variable et trigonometrisk polynomium $S(x) = \sum^* c_{n_1, \dots, n_m} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_m x_m)}$, således at $|F(x) - S(x)| \leq \varepsilon$ for alle $x \in \mathbb{R}^m$. For det trigonometriske polynomium $s(t) = S(\lambda t) = \sum^* c_{n_1, \dots, n_m} e^{i(n_1\lambda_1 + \dots + n_m\lambda_m)t}$ gælder da $|f(t) - s(t)| \leq 2\varepsilon$ for alle t.

For at konstruere $F(x)$ vælger vi $N \in \mathbb{N}$ så stor, at $\frac{4\pi}{N} \leq \delta$, og deler $\mathbb{R}^m$ i terninger med kantlængde $\frac{2\pi}{N}$ ved planerne $x_j = k_j \frac{2\pi}{N}$, $k_j \in \mathbb{Z}$. De således bestemte (afsluttede) terninger vil vi kalde 'småterninger'. Vi betragter også gitteret bestående af alle punkter $(k_1 \frac{2\pi}{N}, \dots, k_m \frac{2\pi}{N})$, hvor $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$. Hver småterning har som hjørner 2^m gitterpunkter. Hvert gitterpunkt er hjørne i 2^m småterninger, som tilsammen udgør en 'storterning' med kantlængden $\frac{4\pi}{N}$ og med gitterpunktet som midtpunkt (se figuren).



Vi definerer nu først $F(x)$ på gitteret. Hvis linien $x = \lambda t$ mod. 2π indeholder et punkt af den til gitterpunktet x_0 hørende storterning, vælger vi et sådant punkt λt_0 og sætter $F(x_0) = f(t_0)$. For gitterpunkter, som er ækvivalente mod. 2π, benytter vi samme t_0. Hvis den til et gitterpunkt x_0 hørende storterning ikke mod. 2π indeholder noget punkt af linien $x = \lambda t$, sætter vi $F(x_0) = 0$. Den således på gitteret definerede funktion $F(x)$ har åbenbart perioden 2π efter hver variabel. Den udvides nu til en kontinuert funktion $F(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ med perioden 2π efter hver variabel ved interpolation, idet vi går således frem: Først interpoleres lineært efter x_1 for faste $x_2 = k_2 \frac{2\pi}{N}, \dots, x_m = k_m \frac{2\pi}{N}$; derefter interpoleres lineært efter x_2 for faste x_1 (vilkårlig), $x_3 = k_3 \frac{2\pi}{N}, \dots, x_m = k_m \frac{2\pi}{N}$, o.s.v.; tilsidst interpoleres lineært efter x_m for faste $x_1, \dots, x_{m-1}$ (vilkårlige). (Se figuren, hvor skridtene er angivet for en enkelt småterning.)

Vi vil vise, at denne funktion opfylder (1).

For et vilkårligt t ligger λt i (mindst) en småterning Q. For hvert af dennes hjørner x_0 gælder $F(x_0) = f(t_0)$ for et t_0, for hvilket λt_0 mod. 2π tilhører storterningen med x_0 som midtpunkt. Denne storterning indeholder Q. Altså er koordinatdifferenserne for punkterne λt og λt_0 alle mod. 2π numerisk højst $\frac{4\pi}{N}$, hvoraf følger (da $\frac{4\pi}{N} \leq \delta$), at $t - t_0$ tilhører mængden $[\lambda_1, \cdots, \lambda_m; \delta]$. Følgelig er $t - t_0$ et forskydningstal for $f(t)$ hørende til ε. Der gælder altså $|f(t) - F(x_0)| \leq \varepsilon$. Værdierne af $F(x)$ i de 2^m hjørner af Q tilhører altså cirkelskiven i $\mathbb{C}$ med centrum $f(t)$ og radius ε. Det samme må da gælde om værdimængden for $F(x)$ i Q, specielt om $F(\lambda t)$.

100. Bevis for approksimationssætningen. På grund af sætning 1 er det nok at vise

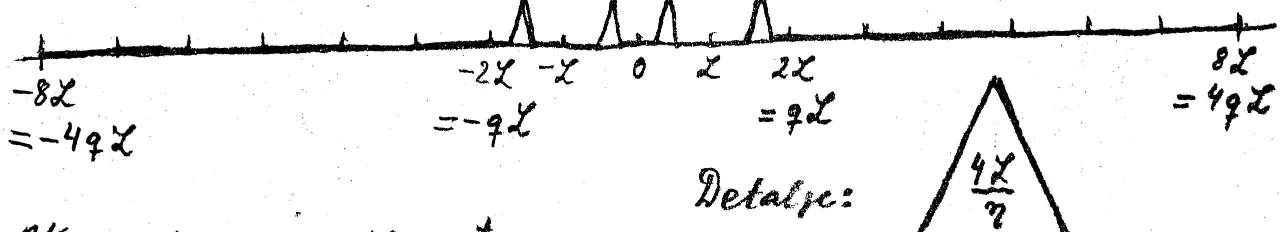
Sætning 2. Lad $f(t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en næsten periodisk funktion, og lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Da indeholder mængden $\{\tau_f(\varepsilon)\}$ en mængde $[\lambda_1, \cdots, \lambda_m; \delta]$.

Bevis. Betragt en længde $l = l_f(\frac{1}{9}\varepsilon)$, og vælg $\eta \in]0, \frac{l}{8}[$, så at ethvert $\tau \in [-\eta, \eta]$ er et $\tau_f(\frac{1}{9}\varepsilon)$. Sæt $L = l + 2\eta$, og lad p betegne et helt tal, der opfylder betingelsen

$$p \geqslant \left(\frac{8L}{3\eta}\right)^2.$$

I ethvert interval af længden L findes et interval af længden 2η tilhørende $\{\tau_f(\frac{2}{9}\varepsilon)\}$ (jfr. § 36). For et vilkårligt $q \in \mathbb{N}$ konstruerer vi en funktion $F(t)$ med perioden $8qL$ således: I hvert af de $2q$ intervaller af længden L, hvori intervallet $[-qL, qL]$ kan deles, vælger vi et interval $[a-\eta, a+\eta]$ tilhørende $\{\tau_f(\frac{2}{9}\varepsilon)\}$, og sætter i dette $F(t) = \frac{4L}{\eta} - \frac{4L}{\eta^2}|t-a|$. Iøvrigt sættes $F(t) = 0$ i $[-4qL, 4qL]$. (Se figuren, hvor $q = 2$.)

$F(t)$ (for $q = 2$)



Ved udregning ses, at

$$\mathcal{M}\{\mathcal{F}(t)\} = 1, \qquad \mathcal{M}\{\mathcal{F}(t)^2\} = \frac{8\mathcal{L}}{3\eta}.$$

Vi betragter Fourier rækken
$$\mathcal{F}(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \, e^{i\frac{2\pi}{8q\mathcal{L}}kt}.$$
Da $\mathcal{F}(t) \geq 0$ for alle t, ses af formlen for Fourier konstanterne og af Parsevals formel, at
$$|a_k| \leq a_0 = 1 \text{ for alle } k, \text{ og } \sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{8\mathcal{L}}{3\eta}.$$
Vi danner foldningerne
$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{M}_u\{\mathcal{F}(t+u)\mathcal{F}(u)\} = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2 e^{i\frac{2\pi}{8q\mathcal{L}}kt}$$
og
$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{M}_u\{\mathcal{G}(t+u)\mathcal{G}(u)\} = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^4 e^{i\frac{2\pi}{8q\mathcal{L}}kt}.$$
[Da funktionerne er reelle, har vi undladt konjugering af den anden faktor i middelværdierne.]

Der gælder åbenbart $\mathcal{G}(t) > 0$ for et $t \in \mathbb{R}$, hvis og kun hvis der findes et u, for hvilket begge faktorer $\mathcal{F}(t+u)$ og $\mathcal{F}(u)$ er >0, d.v.s. hvis og kun hvis t er $\equiv$ mod. $8q\mathcal{L}$ med en differens $\tau_1 - \tau_2$ af to tal i mængden $A = \{t \in [-q\mathcal{L}, q\mathcal{L}] \mid \mathcal{F}(t) > 0\}$. Da $\mathcal{G}(t) \geq 0$ for alle t, ses analogt, at $\mathcal{H}(t) > 0$ for et $t \in \mathbb{R}$, hvis og kun hvis der findes et u, for hvilket både $\mathcal{G}(t+u)$ og $\mathcal{G}(u)$ er >0, altså hvis og kun hvis x er $\equiv$ mod. $8q\mathcal{L}$ med en differens $(\tau_1 - \tau_2) - (\tau_3 - \tau_4)$, hvor $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in A$. Da enhver sådan differens tilhører $]-4q\mathcal{L}, 4q\mathcal{L}[$ og er et $\tau_f(\frac{8}{9}\varepsilon)$, og da kongruens mod. $8q\mathcal{L}$ af tal i $]-4q\mathcal{L}, 4q\mathcal{L}[$ er ensbetydende med lighed, slutter vi:

<u>Ethvert tal</u> $t \in]-4q\mathcal{L}, 4q\mathcal{L}[$, <u>for hvilket</u> $\mathcal{H}(t) > 0$, <u>er et</u> $\tau_f(\frac{8}{9}\varepsilon)$.

Lad $k_1, k_2, \dots$ være $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ordnet således, at
$$1 = a_0 \geq |a_{k_1}| \geq |a_{k_2}| \geq \cdots.$$
For ethvert $l \in \mathbb{N}$ gælder da
$$l\,|a_{k_l}|^2 < \sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{8\mathcal{L}}{3\eta},$$
hvoraf
$$|a_{k_l}|^4 < \left(\frac{8\mathcal{L}}{3\eta}\right)^2 \frac{1}{l^2} \leq p\frac{1}{l^2} < p\cdot\left(\frac{1}{l-1} - \frac{1}{l}\right).$$
Da $\mathcal{H}(t)$ er reell, gælder

$$\mathcal{H}(t) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} |a_{k_l}|^4 \cos \frac{2\pi}{8q\mathcal{L}} k_l t \, .$$

For ethvert t, der opfylder betingelserne $\cos \frac{2\pi}{8q\mathcal{L}} k_l t \geq 0$ for $l \in \{1, \cdots, p\}$, gælder derfor

$$\mathcal{H}(t) > 1 + 0 - \sum_{l=p+1}^{\infty} p \cdot \left(\frac{1}{l-1} - \frac{1}{l}\right) = 1 - p \cdot \frac{1}{p} = 0 .$$

Hermed er godtgjort:

For ethvert $q \in \mathbb{N}$ findes p reelle tal $\mu_1^{(q)}, \cdots, \mu_p^{(q)}$, således at ethvert tal $t \in]-4q\mathcal{L}, 4q\mathcal{L}[$, der opfylder betingelserne $\cos \mu_l^{(q)} t \geq 0$ for $l \in \{1, \cdots, p\}$, er et $\tau_f(\frac{8}{q}\varepsilon)$.

For et helt tal t er uligheden $\cos \mu t \geq 0$ ensbetydende med uligheden $\cos(\mu - n 2\pi) t \geq 0$ for et vilkårligt $n \in \mathbb{Z}$. Hvis vi holder os til hele tal t, kan vi derfor erstatte tallene $\mu_1^{(q)}, \cdots, \mu_p^{(q)}$ med de mod. 2π kongruente tal $\lambda_1^{(q)}, \cdots, \lambda_p^{(q)}$ i intervallet $[0, 2\pi[$ og får således:

For ethvert $q \in \mathbb{N}$ findes p tal $\lambda_1^{(q)}, \cdots, \lambda_p^{(q)} \in [0, 2\pi[$, således at ethvert helt tal $t \in]-4q\mathcal{L}, 4q\mathcal{L}[$, der opfylder betingelserne $\cos \lambda_l^{(q)} t \geq 0$ for $l \in \{1, \cdots, p\}$, er et $\tau_f(\frac{8}{q}\varepsilon)$.

Der vil findes en følge $q_1 < q_2 < \cdots$ således, at hver af følgerne $\lambda_l^{(q_1)}, \lambda_l^{(q_2)}, \cdots$, $l \in \{1, \cdots, p\}$, er konvergent. Lad $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ være grænseværdierne. De vil tilhøre $[0, 2\pi]$. Ethvert helt tal t, der tilfredsstiller ulighederne $\cos \lambda_l t > 0$ for $l \in \{1, \cdots, p\}$, vil da være et $\tau_f(\frac{8}{q}\varepsilon)$, idet det for et tilstrækkeligt stort $q = q_s$ vil tilhøre intervallet $]-4q\mathcal{L}, 4q\mathcal{L}[$ og vil tilfredsstille ulighederne $\cos \lambda_l^{(q)} t \geq 0$ for $l \in \{1, \cdots, p\}$. Vi har altså:

Der findes tal $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in [0, 2\pi]$, således at ethvert helt tal t, der tilfredsstiller ulighederne $\cos \lambda_l t > 0$ for $l \in \{1, \cdots, p\}$, er et $\tau_f(\frac{8}{q}\varepsilon)$.

Lad os nu betragte mængden $[\lambda_1, \cdots, \lambda_p, 2\pi; 2\pi\eta]$, altså løsningsmængden til ulighederne

$$\left.\begin{array}{l} |\lambda_1 \tau| \leq 2\pi\eta \\ \cdots \\ |\lambda_p \tau| \leq 2\pi\eta \\ |2\pi \tau| \leq 2\pi\eta \end{array}\right\} \text{mod. } 2\pi .$$

Enhver løsning τ har ifølge den sidste ulighed formen $\tau = t + \rho$, hvor $t \in \mathbb{Z}$ og $\rho \in [-\eta, \eta]$. Heraf følger, at $|\lambda_\ell \rho| \leq 2\pi\eta$ for $\ell \in \{1, \dots, p\}$. Det hele tal t må derfor tilfredsstille ulighederne

$$\left.\begin{array}{l} |\lambda_1 t| \leq 4\pi\eta \\ \dots \\ |\lambda_p t| \leq 4\pi\eta \end{array}\right\} \text{mod. } 2\pi$$

og må altså, da $4\pi\eta < \frac{1}{2}\pi$, være et $\tau_f(\frac{8}{9}\varepsilon)$. Da $\rho \in [-\eta, \eta]$, er ρ et $\tau(\frac{1}{9}\varepsilon)$. Altså er $\tau = t + \rho$ et $\tau_f(\varepsilon)$.

Mængden $[\lambda_1, \dots, \lambda_p, 2\pi; 2\pi\eta]$ er altså indeholdt i mængden $\{\tau_f(\varepsilon)\}$.

Sammenhængen mellem forskydningstal og Fourier frekvenser.

101. Mængderne $\{\tau_f(\varepsilon)\}$ og $[\lambda_1, \dots, \lambda_m; \delta]$, hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ er Fourier frekvenser for f. Om disse gælder:

Sætning 1. Lad f være en næsten periodisk funktion. Da indeholder enhver mængde $\{\tau_f(\varepsilon)\}$ en mængde $[\lambda_1, \dots, \lambda_m; \delta]$, hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ er Fourier frekvenser for f, og enhver mængde $[\lambda_1, \dots, \lambda_m; \delta]$, hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ er Fourier frekvenser for f, indeholder en mængde $\{\tau_f(\varepsilon)\}$.

Hvis f er nulfunktionen, er sætningen, som den står, uden mening. Vi vil i dette tilfælde med ordene 'en mængde $[\lambda_1, \dots, \lambda_m; \delta]$, hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ er Fourier frekvenser for f' mene 'mængden $\mathbb{R}$'. Da er sætningen rigtig for nulfunktionen. Når f ikke er nulfunktionen, er beviset som følger:

(1) Betragt en mængde $\{\tau_f(\varepsilon)\}$. Ifølge sætning 3 i § 71 findes et trigonometrisk polynomium $s(x) = \sum_1^m c_\lambda e^{i\lambda_n x}$ med frekvenser blandt Fourier frekvenserne for f, så at $|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ for alle x. Mængden $\{\tau_f(\varepsilon)\}$ indeholder mængden $\{\tau_s(\frac{1}{3}\varepsilon)\}$, og denne mængde indeholder mængden

$[\lambda_1,\dots,\lambda_m;\delta]$, når δ er tilstrækkeligt lille, jfr. §31.

(2) Betragt en mængde $[\lambda_1,\dots,\lambda_m;\delta]$, hvor $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ er Fourier frekvenser for f. For ethvert τ har vi

$$f(x+\tau)-f(x) \sim \sum a_\lambda (e^{i\lambda\tau}-1)e^{i\lambda x}.$$

For ethvert $\tau=\tau_f(\varepsilon)$ gælder derfor

$$|a_\lambda||e^{i\lambda\tau}-1| = |M\{[f(x+\tau)-f(x)]e^{-i\lambda x}\}| \leq \varepsilon \text{ for alle } \lambda.$$

For $\varepsilon \leq \min\{|a_{\lambda_1}|,\dots,|a_{\lambda_m}|\}|e^{i\delta}-1|$ vil mængden $\{\tau_f(\varepsilon)\}$ altså være indeholdt i mængden $[\lambda_1,\dots,\lambda_m;\delta]$.

102. Hovedresultater. Ved en talmodul vil vi forstå en undergruppe af $(\mathbb{R},+)$. Ved modulen M_f for en næstenperiodisk funktion f forstås den mindste talmodul, der indeholder Fourier frekvenserne for f, altså mængden af alle tal af formen $n_1\lambda_1+\dots+n_m\lambda_m$, hvor $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ er Fourier frekvenser for f, og $n_1,\dots,n_m$ er hele tal. Hvis f er nulfunktionen består M_f af 0 alene.

Sætning 2. Lad f og g være næstenperiodiske funktioner. Da gælder $M_g \subseteq M_f$, hvis og kun hvis enhver mængde $\{\tau_g(\eta)\}$ indeholder en mængde $\{\tau_f(\varepsilon)\}$, altså hvis og kun hvis der til ethvert $\eta\in\mathbb{R}_+$ findes et $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$, således at ethvert $\tau_f(\varepsilon)$ er et $\tau_g(\eta)$.

Bevis. (1) Antag, at $M_g\subseteq M_f$, og betragt en mængde $\{\tau_g(\eta)\}$. Ifølge sætning 1 indeholder $\{\tau_g(\eta)\}$ en mængde $[\mu_1,\dots,\mu_n;\rho]$, hvor $\mu_1,\dots,\mu_n$ er Fourier frekvenser for g, og altså tilhører M_f. Tallene $\mu_1,\dots,\mu_n$ er altså linearkombinationer med hele koefficienter af visse Fourier frekvenser $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ for f. Mængden $[\mu_1,\dots,\mu_n;\rho]$ vil derfor indeholde $[\lambda_1,\dots,\lambda_m;\delta]$ for et tilstrækkeligt lille δ. Ifølge sætning 1 indeholder denne mængde $[\lambda_1,\dots,\lambda_m;\delta]$ en mængde $\{\tau_f(\varepsilon)\}$. Altså har vi alt i alt set, at mængden $\{\tau_g(\eta)\}$ indeholder en mængde $\{\tau_f(\varepsilon)\}$.

(2) Antag, at enhver mængde $\{\tau_g(\eta)\}$ indeholder en mængde $\{\tau_f(\varepsilon)\}$. Betragt et vilkårligt η. Da $\{\tau_g(\eta)\}$ indeholder en mængde $\{\tau_f(\varepsilon)\}$, indeholder $\{\tau_g(\eta)\}$ ifølge sætning 1 også en mængde $[\lambda_1, \dots, \lambda_m; \delta]$, hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ er Fourier frekvenser for f. Ifølge sætning 1 i §99 findes da et trigonometrisk polynomium $s(x) = \sum^* c_\lambda e^{i\lambda x}$ med frekvenser fra mængden $\{n_1\lambda_1 + \cdots + n_m\lambda_m \mid n_1 \in \mathbb{Z}, \dots, n_m \in \mathbb{Z}\}$, så at $|g(x) - s(x)| \leq 2\eta$ for alle x. Altså kan $g(x)$ approksimeres uniformt med vilkårlig nøjagtighed med trigonometriske polynomier med frekvenser fra M_f. Deraf følger, at Fourier frekvenserne for g må tilhøre M_f. Følgelig gælder $M_g \subseteq M_f$.

Corollar. To næsten periodiske funktioner f og g har samme modul, hvis og kun hvis enhver mængde $\{\tau_f(\varepsilon)\}$ indeholder en mængde $\{\tau_g(\eta)\}$ og omvendt.

Hvis vi i sætning 2 lader g være en ren svingning $e^{i\lambda x}$, er relationen $M_g \subseteq M_f$ ensbetydende med, at $\lambda \in M_f$, og mængden $\{\tau_g(\eta)\}$ er (for $\eta < 2$) lig med mængden af de τ, for hvilke $|\lambda\tau| \leq \delta$ mod. 2π, hvor δ er det tal i $]0, \pi[$, for hvilket $2\sin\frac{1}{2}\delta = \eta$. Vi får derfor følgende sætning:

Sætning 3. Lad f være en næsten periodisk funktion og λ et reelt tal. Da gælder $\lambda \in M_f$, hvis og kun hvis der til ethvert $\eta \in \mathbb{R}_+$ findes et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, således at ethvert $\tau_f(\varepsilon)$ er et $\tau(\eta)$ for $e^{i\lambda x}$, eller ensgyldigt hermed, hvis og kun hvis der til ethvert $\delta \in]0, \pi[$ findes et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, således at ethvert $\tau_f(\varepsilon)$ tilfredsstiller betingelsen

$$|\lambda\tau| \leq \delta \mod 2\pi.$$

Betingelsen i sætning 2 er specielt opfyldt, hvis g er majoriseret af f, idet dette jo betyder, at enhver mængde $\{\tau_g(\eta)\}$ indeholder mængden $\{\tau_f(\eta)\}$. To funktioner, der majoriserer hinanden (for eksempel en funktion og dens forskydningsfunktion) har således samme modul.

Argumentvariation. Middelbevægelse.

103. Perturbationer af de store planeter. Det problem, vi i det følgende skal diskutere, har sin oprindelse i Lagranges behandling af de store planeters perturbationer. Til angivelse af den elliptiske bane for en planet benyttes visse parametre, de såkaldte baneelementer. På grund af de andre planeters indflydelse ændrer banen sig langsomt i tidens løb. Baneelementerne er derfor funktioner af tiden t. Hvis man med $\rho(t)$ og $\varphi(t)$ betegner enten ekscentriciteten og perihellængden eller tangens til inklinationen og længden af den opstigende knude, finder man ud fra differentialligningerne for bevægelsen, at disse funktioner i første tilnærmelse er bestemt ved en relation af formen

$$\rho(t)e^{i\varphi(t)} = F(t) = a_1 e^{i\lambda_1 t} + \cdots + a_n e^{i\lambda_n t},$$

hvor $F(t)$ er et trigonometrisk polynomium med komplekse fra 0 forskellige koefficienter og indbyrdes forskellige frekvenser. Antallet n af led er antallet af planeter. Studiet af variationen af perihellængden og længden af den opstigende knude fører altså til studiet af argumentet for et trigonometrisk polynomium.

Som vist af Lagrange indeholder det omhandlede trigonometriske polynomium i de fleste tilfælde et overvejende led, d.v.s. et led, hvis numeriske værdi overstiger summen af de numeriske værdier af de øvrige led. Dette medfører, at $F(t)$ ikke kommer vilkårligt tæt til 0, d.v.s. $F(t)$ opfylder relationen

$$\inf |F(t)| = k > 0.$$

Da argumentet for $F(t)$ for ethvert t afviger mindre end $\frac{1}{2}\pi$ fra argumentet for det overvejende led, finder man, at

$$\varphi(t) = ct + \psi(t),$$

hvor c er frekvensen af det overvejende led, og $\psi(t)$ er begrænset, nærmere bestemt $|\psi(t) - \gamma| < \frac{1}{2}\pi$, hvor γ er argumentet for det overvejende led. Konstanten c

kaldes sekularkonstanten eller middelbevægelsen. Lagrange stillede problemet at undersøge argumentet også i tilfælde, hvor der ikke er noget overvejende led.

<u>104.</u> <u>Argumentvariation for en næsten periodisk funktion.</u> Det var nærliggende at generalisere Lagranges problem til det tilfælde, hvor $F(t)$ er en vilkårlig næsten periodisk funktion. Det var Wintner, der først henledte opmærksomheden på forbindelsen mellem næsten periodiske funktioner og astronomiske problemer. Som bekræftelse på en formodning af Wintner viste Bohr følgende sætning.

<u>Sætning.</u> <u>Lad</u> $F(t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ <u>være en næsten periodisk funktion, der opfylder betingelsen</u>

$$\inf |F(t)| = k > 0,$$

<u>og lad</u> $\varphi(t)$ <u>være en kontinuert argumentfunktion for</u> $F(t)$. <u>Da gælder</u>

$$\varphi(t) = ct + \psi(t),$$

<u>hvor</u> c <u>er en konstant, og</u> $\psi(t)$ <u>er en næsten periodisk funktion. Endvidere gælder</u>

$$c \in M_F \text{ og } M_\psi \subseteq M_F,$$

<u>d.v.s. såvel</u> c <u>som Fourier frekvenserne for</u> $\psi(t)$ <u>tilhører modulen for</u> $F(t)$.

Konstanten c kaldes <u>sekularkonstanten</u> eller <u>middelbevægelsen</u> for $F(t)$.

Bevis. Vælg $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}\pi[$, og sæt $\delta = k \sin\varepsilon$. Vælg $\eta \in \mathbb{R}_+$, så at $|F(t) - F(u)| \leq \delta$, når $|t-u| \leq \eta$. Da gælder

$$|\varphi(t) - \varphi(u)| \leq \varepsilon \quad \text{når } |t-u| \leq \eta.$$

Funktionen $\varphi(t)$ er altså uniformt kontinuert. Heraf følger, at der til ethvert $\tau \in \mathbb{R}_+$ findes et K_τ, så at

$$(1) \qquad |\varphi(t) - \varphi(u)| \leq K_\tau \quad \text{når } |t-u| \leq \tau.$$

For ethvert $\tau = \tau_F(\delta)$ afviger $\varphi(t+\tau) - \varphi(t)$ højst med ε fra et helt multiplum af 2π. Da $\varphi(t+\tau) - \varphi(t)$ er kontinuert, må dette multiplum være uafhængigt af t. Til ethvert $\tau = \tau_F(\delta)$ findes altså et $n_\tau \in \mathbb{Z}$, så at

(2) $\quad |\varphi(t+\tau)-\varphi(t)-n_\tau 2\pi| \leq \varepsilon$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

Samtidig med τ er også $-\tau$ et $\tau_F(\delta)$, og man ser, at $n_{-\tau} = -n_\tau$.

Betragt nu et $\tau = \tau_F(\delta) > 0$. Vælg $T > 0$, og betragt det $h \in \mathbb{N}_0$, for hvilket

$$h\tau \leq T < (h+1)\tau, \quad \text{altså} \quad h \leq \frac{T}{\tau} < h+1.$$

Vi har da ifølge (2) og (1)

$$|\varphi(\tau)-\varphi(0) \quad - n_\tau 2\pi| \leq \varepsilon$$
$$|\varphi(2\tau)-\varphi(\tau) \quad - n_\tau 2\pi| \leq \varepsilon$$
$$\dots$$
$$|\varphi(h\tau)-\varphi((h-1)\tau) - n_\tau 2\pi| \leq \varepsilon$$
$$|\varphi(T)-\varphi(h\tau)| \qquad \leq K_\tau,$$

hvoraf
$$|\varphi(T)-\varphi(0) - h n_\tau 2\pi| \leq h\varepsilon + K_\tau \leq T\frac{\varepsilon}{\tau} + K_\tau.$$

Da
$$\left|T\frac{n_\tau 2\pi}{\tau} - h n_\tau 2\pi\right| \leq |n_\tau| 2\pi,$$

fås
$$\left|\varphi(T)-\varphi(0) - T\frac{n_\tau 2\pi}{\tau}\right| \leq T\frac{\varepsilon}{\tau} + K_\tau + |n_\tau| 2\pi,$$

hvoraf

(3) $$\left|\frac{\varphi(T)-\varphi(0)}{T} - \frac{n_\tau 2\pi}{\tau}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{K_\tau + |n_\tau| 2\pi}{T}.$$

Da vi kan vælge ét $\tau = \tau_F(\delta) > 1$, ses af (3), at der til det givne $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}\pi[$ findes et $T_0 \in \mathbb{R}_+$, så at

$$\left|\frac{\varphi(T)-\varphi(0)}{T} - \frac{\varphi(U)-\varphi(0)}{U}\right| \leq 3\varepsilon \quad \text{for } T \geq T_0,\ U \geq T_0.$$

Der findes altså et $c \in \mathbb{R}$, så at

$$\frac{\varphi(T)-\varphi(0)}{T} \to c \quad \text{for } T \to \infty.$$

Af (3) fås for $T \to \infty$

$$\left|c - \frac{n_\tau 2\pi}{\tau}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\tau},$$

hvoraf

(4) $$|c\tau - n_\tau 2\pi| \leq \varepsilon.$$

Da $n_{-\tau} = -n_\tau$, vil (4) også gælde for ethvert $\tau = \tau_F(\delta) < 0$.
For ethvert $\tau = \tau_F(\delta)$ gælder altså

$$|c\tau| \leq \varepsilon \quad \text{mod } 2\pi,$$

hvilket ifølge sætning 3 i § 102 viser, at $c \in M_F$.

Af (2) og (4) ses, at

$$|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)-c\tau| \leq 2\varepsilon \text{ for alle } t\in\mathbb{R}.$$

Sættes $\varphi(t)-ct=\psi(t)$, følger heraf

$$|\psi(t+\tau)-\psi(t)| \leq 2\varepsilon \text{ for alle } t\in\mathbb{R}.$$

Ethvert $\tau_F(\delta)$ er altså et $\tau_\psi(2\varepsilon)$. Følgelig er $\psi(t)$ næsten periodisk, og ifølge sætning 2 i § 102 gælder $M_\psi \subseteq M_F$.

105. En næsten periodisk funktion $F(t):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ kan opfattes som en bevægelse i den komplekse plan (idet t er tiden). Antages denne at forløbe i en cirkelring $D=\{z\in\mathbb{C} \mid 0<r\leq|z|\leq R\}$, har vi ifølge den beviste sætning fremstillingen

$$F(t)=|F(t)|\,e^{i(ct+\psi(t))},$$

hvor $c\in\mathbb{R}$, og $\psi(t)$ er næsten periodisk. Endvidere er $|F(t)|$ næsten periodisk. Antages $r\leq 1\leq R$, bestemmes for ethvert $\theta\in[0,1]$ ved

$$F_\theta(t)=|F(t)|^\theta\,e^{i(ct+\theta\psi(t))}$$

en næsten periodisk bevægelse i D. Man ser, at

$$F_1(t)=F(t) \quad \text{og} \quad F_0(t)=e^{ict}.$$

Endvidere ses, at $F_\theta(t)$ afhænger uniformt kontinuert af θ, d.v.s. for ethvert $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ findes et $\delta\in\mathbb{R}_+$, så at $\sup_t|F_{\theta_1}(t)-F_{\theta_2}(t)|\leq\varepsilon$ for vilkårlige $\theta_1,\theta_2\in[0,1]$, for hvilke $|\theta_1-\theta_2|\leq\delta$. Man kan udtrykke dette ved at sige, at $F(t)$ er homotop i D med den periodiske bevægelse e^{ict}.

Forelæsningerne afsluttedes med en omtale af von Neumanns teori for næsten periodiske funktioner i grupper, dog kun for abelske grupper, for hvilke der opnås en direkte almindeliggørelse af Bohrs teori. [For vilkårlige grupper fås en almindeliggørelse af den Frobenius-Schur-Weylske teori for gruppe fremstillinger.]

Litteratur.

Gennem registeret og noterne til Bohrs samlede værker og gennem de i indledningen nævnte bøger finder man let frem til den originale litteratur. Her blot et udvalg:

H. Bohr, Zur Theorie der fast periodischen Funktionen. I, II. Acta Math 45 (1924), 46 (1925). (Samlede værker C3, C7.)

S. Bochner, Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I. Math. Ann. 96 (1927).

H. Weyl, Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen. Math. Ann 97 (1927).

C. de la Vallée-Poussin, Sur les fonctions presque périodiques de H. Bohr. Ann. Soc. Sci Bruxelles A 47 (1927), 48 (1928).

N. Wiener, The spectrum of an arbitrary function. Proc. London Math. Soc. (2) 27 (1928).

S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale. 1932 § 21.

J. von Neumann, Almost periodic functions in groups. I. Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934).

N. Bogolioùboff, Sur quelques propriétés arithmétiques des presque périodes. Acad. Sci. RSS Ukraine. Ann. Chaire Phys. Math 4 (1939).

Nogle specielle henvisninger:

Analytiske beviser for Kroneckers sætning: Bohrs værker D1, D2, D4, D5, D6, D7, D8, D9. Et simpelt geometrisk bevis fås ud fra en sætning af M. Riesz om vektormoduler, Congr. Internat. des Math. Oslo 1938, II. Weyls skærpelse af Kroneckers sætning findes i Math. Ann. 77 (1916).

Integration af næstenperiodiske funktioner og differentialligninger: Bohrs værker C17, C36 samt Favards og Finks bøger.

Argumentvariation, middelbevægelse m.v.: Bohrs værker C50.

Bøger om Fourierrækker for periodiske funktioner:

A. Zygmund, Trigonometric series. I–II. 1959.

G. H. Hardy & W. W. Rogosinski, Fourier series. 1956.

W. Rogosinski, Fouriersche Reihen. 1930.