Københavns Universitets Matematiske Institut

M A T E M A T I K 2

1965 - 66

Børge Jessen

Forelæsninger

over

M Å L - O G I N T E G R A L T E O R I

Omfatter:

Indhold.Litteratur.Rettelser.	4	sider	mrk.	Mat 2,1965-66 MI Indh 1-4
Tekst *)	134	-	-	Mat 2,1962-63 MI 1-134
Opgaver	22	-	-	Mat 2,1965-66 MI Opg 1-94

*) + Tilloeg 5 sider 1967-68

Une généralisation faite non pour le vain plaisir de généraliser, mais pour résoudre des problèmes antérieurement posés, est toujours une généralisation féconde.

LEBESGUE

Indhold

		Tekst side
Kap. 1.	Indledning.	
§1.	Weierstrass' approksimationssætning	1
§2.	Newtons og Lagranges interpolationsformler	5
§3.	En kontinuert funktion af en reel variabel, som ikke er differentiabel i noget punkt	7
§4.	Peanos kurve.	9
Kap. 2.	Mål- og integralbegrebet.	
§1.	Trappemængder og trappefunktioner	13
§2.	Riemann integralet	22
§3.	Riemann målet	30
§4.	Fundamentale hjælpesætninger	32
§5.	Lebesgue integralet	34
§6.	Grænseovergang med Lebesgue integralet	40
§7.	Lebesgue målet	48
§8.	Multipelt integral	58
§9.	Lebesgue målelige funktioner	62
§10.	En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for Riemann integrabilitet	70
§11.	Lebesgue integrabilitet og Lebesgue målelighed i en punktmængde	74
§12.	Differentiation og integration	77
§13.	Osgoods kurve	81
§14.	Funktioner med komplekse værdier	84
Kap. 3.	Normerede funktionsrum.	
§1.	Normerede lineære rum	86
§2.	De normerede funktionsrum $L_p(R^k)$	98

Kap. 4. Fourierrækker.
§1. Definitioner 110
§2. Summabilitet 114
§3. Konvergens 122
§4. Divergens 126
§5. Klassen L_2 129

Opgaver nr. 1-94.

Litteratur

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II 3,2. Artiklerne II C 9 a b c, II C 10, II C 11.

S. Saks. Theory of the integral. 2. ed. Warszáwa-Lwów 1937. Heri udførlig bibliografi.

P. R. Halmos. Measure theory. Toronto, New York, London 1950.

G. H. Hardy & W. W. Rogosinski. Fourier series. Cambridge 1950.

A. Zygmund. Trigonometric series. 2. ed. I-II. Cambridge 1959. Heri udførlig bibliografi.

G. H. Hardy, J. E. Littlewood & G. Pólya. Inequalities. 2. ed. Cambridge 1952.

Rettelser og tilføjelser

Tekst side

1 l. 10 f.o. Bernštein : skal være: Bernštейn.

19 l. 7 f.o. $(z_1, \dots, z_m)$-rummet : skal være: $(z_1, \dots, z_m)$-rummet med $h(0, \dots, 0) = 0$

32 I beviset må k erstattes med et andet bogstav.

34 §4 : skal være : §5

38 l. 11 f.n. og $\underline{I}(f)$: skal være : og $\underline{I}(-f)$

52 l. 2 f.n. punkte, er : skal være : punkte, er $A = \bigcup A_n$ Lebesgue målelig, hvis og kun hvis $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < +\infty$. I bekræftende fald er

53 l. 13 f.o. og dermed : skal være : og dermed, at A er Lebesgue målelig, hvis og kun hvis $\lim m(B_p) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < +\infty$, og at i bekræftende fald

l. 2 f.n. $\leqslant B$: skal være : $\leqslant m(B)$

55 l. 12 f.n. Tilføj : Da $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, fås $0 = \underline{I}(-|f|) \leqslant \underline{I}(f) \leqslant \overline{I}(f) \leqslant I(|f|) = 0$. Altså er f Lebesgue integrabel.

59 l. 3 f.n. højre : skal være : højre side

69 l. 10 f.n. $1_{U \setminus A}$: skal være : $1_{U \cap A}$

71 l. 6 f.o. målelig : skal være : åben

l. 10 f.n. funktion f : skal være : funktion $\mathfrak{L}$

72 l. 4-2 f.n. understreges.

73 l. 4 f.o. f : skal være : $\overline{f}$

l. 12 f.n. $\lim f_n = \tilde{f}$: skal være : $\lim f_n \leqslant \tilde{f}$

77 l. 11 f.n. for midtpunktet : skal være : før midtpunktet

92 l. 13 f.o. $(N+1)^{\frac{1}{7}} \to 0$: skal være : $(N+1)^{\frac{1}{9}} \to 1$

103 l. 13 f.o. At A_i er Lebesgue målelig, fremgår af følgende sætning: Hvis $h \geqslant 0$ er Lebesgue integrabel og $a > 0$, er $B = \{x \mid h(x) > a\}$ Lebesgue målelig. Denne sætning kan bevises således: For enhver Lebesgue

målelig mængde A er $B \cap A = \{x \in A \mid h(x) > a\}$ Lebesgue målelig, og da $a_{B\cap A} \leqslant h$, er a $m(B \cap A) \leqslant I(h)$. For ethvert n er følgelig $m(B \cap W_n) \leqslant \frac{1}{a} I(h)$. Da $B \cap W_1 \subseteq B \cap W_2 \subseteq \ldots$ og $B = \bigcup B \cap W_n$, slutter vi, at B er Lebesgue målelig og $m(B) = \lim m(B \cap W_n) \leqslant \frac{1}{a} I(h)$.

107 l. 9 f.o. $\|f - g\| < \varepsilon$: skal være: $\|f-g\|_p < \varepsilon$

111 l. 6 f.o. $\mathcal{L}_\infty$ af : skal være: $\mathcal{L}_\infty$ af målelige

l. 10–11 f.o. $|f|^q \leqslant 1 + |f|^p$: skal være: $|f|^p \leqslant 1 + |f|^q$

116 l. 11 f.n. $c_\nu e^{i\nu t}$: skal være: $c_\nu e^{i\nu x}$

l. 8 f.n. $\sin(n+\frac{1}{2})t$: skal være: $\sin \frac{n+1}{2} t$

l. 4 f.n. $1 + \sum_{\nu=1}^{n}$: skal være $1 + 2\sum_{\nu=1}^{n}$

117 l. 13 f.n. $\sin(n+\frac{1}{2})t$: skal være: $\sin \frac{n+1}{2} t$

133 l. 11 f.n. $\longrightarrow 0$ udgår.

Kap. 1. Indledning.

§1. Weierstrass approksimationssætning.

(K. Weierstrass 1815–1897; sætningen er fra 1885.)
Hvis $f(x)$ er en kontinuert funktion i det afsluttede interval $[a,b]$ og $\varepsilon > 0$, da findes et polynomium $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, for hvilket

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{for alle } x \in [a,b].$$

Der findes forskellige beviser for denne fundamentale sætning. Det følgende bevis skyldes S. N. Bernštein. Vi går frem i en række skridt.

(a) Det er nok at bevise sætningen for intervallet $[0,1]$. Thi antages sætningen bevist for dette interval, får vi den for et vilkårligt interval $[a,b]$ på følgende måde: Når $f(x)$ er kontinuert i $[a,b]$, er der ved $g(\xi) = f(a+(b-a)\xi)$ defineret en kontinuert funktion i $[0,1]$. Til et givet $\varepsilon > 0$ findes da ifølge antagelse et polynomium $q(\xi) = b_0 + b_1\xi + \cdots + b_n\xi^n$, for hvilket

$$|g(\xi) - q(\xi)| \leqslant \varepsilon \quad \text{for alle } \xi \in [0,1].$$

Da er $\left| g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - q\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| \leqslant \varepsilon$ for alle $x \in [a,b]$.

Her er $g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = f(x)$ og $q\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = b_0 + b_1\frac{x-a}{b-a} + \cdots + b_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n$ er et polynomium $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Vi har altså

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{for alle } x \in [a,b].$$

(b) Vi antager nu, at intervallet er $[0,1]$. For et vilkårligt helt positivt n dannes polynomiet

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}.$$

Vi vil vise: Til $\varepsilon > 0$ findes et nummer $n_0 = n_0(\varepsilon)$, såle-

des at der for ethvert $n \geqslant n_0$ gælder

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \varepsilon \text{ for alle } x \in [0,1].$$

© Ifølge binomialformulen er

$$1 = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} \text{ for alle } x,$$

altså

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f(x) \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} \text{ for alle } x \in [0,1].$$

Heraf fås

$$f(x) - p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\tfrac{\nu}{n}\right)\right) \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu},$$

og følgelig, da $\binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} \geqslant 0$ for $\nu = 0, 1, \cdots, n$ og alle $x \in [0,1]$,

$$(*) \quad |f(x) - p_n(x)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} \left|f(x) - f\left(\tfrac{\nu}{n}\right)\right| \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}.$$

(d) For givet n og x deles summen i $(*)$ i to, idet vi vælger et $\delta > 0$ og i den første sum tager de led, for hvilke $|x - \frac{\nu}{n}| < \delta$, og i den anden sum de, for hvilke $|x - \frac{\nu}{n}| \geqslant \delta$. Vi får da

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \sum_{\substack{\nu=0 \\ |x-\frac{\nu}{n}|<\delta}}^{n} \cdots + \sum_{\substack{\nu=0 \\ |x-\frac{\nu}{n}|\geqslant\delta}}^{n} \cdots = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

hvor $\cdots$ betegner $\left|f(x) - f\left(\tfrac{\nu}{n}\right)\right| \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$.

Vi sætter

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| = M \quad \text{og} \quad \sup_{\substack{0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1 \\ |x_1 - x_2| < \delta}} |f(x_1) - f(x_2)| = \omega(\delta).$$

Da $f(x)$ er kontinuert i det afsluttede interval $[0,1]$, er $f(x)$ begrænset og ligeledes kontinuert. Altså gælder $M < +\infty$ og $\omega(\delta) \to 0$ for $\delta \to 0$. Vi finder

$$\Sigma_1 \leqslant \omega(\delta) \sum_{\substack{\nu=0 \\ |x-\frac{\nu}{n}|<\delta}}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} \leqslant \omega(\delta) \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = \omega(\delta);$$

$$\Sigma_2 \leqslant 2M \sum_{\substack{\nu=0 \\ |x-\frac{\nu}{n}| \geqslant \delta}}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}.$$

ⓔ Det afgørende punkt i beviset er vurderingen af summen på højre side i den sidste ulighed. Hertil går vi ud fra binomialformlen

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu y^{n-\nu} = (x+y)^n.$$

Ved differentiation efter x og påfølgende multiplikation med x fås

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu \binom{n}{\nu} x^\nu y^{n-\nu} = nx(x+y)^{n-1}.$$

Gentages processen fås

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu^2 \binom{n}{\nu} x^\nu y^{n-\nu} = nx(x+y)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}.$$

Sættes $y = 1-x$ fås

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = 1$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu^2 \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx + n(n-1)x^2.$$

Af disse ligninger kan vi danne et udtryk for $\sum_{\nu=0}^{n} (x-\frac{\nu}{n})^2 \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$. Idet $(x-\frac{\nu}{n})^2 = x^2 - 2\frac{x}{n}\nu + \frac{1}{n^2}\nu^2$, fås dette ved at gange ligningerne med henh. x^2, $-2\frac{x}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ og lægge sammen. På højre side kommer da $x^2 - 2\frac{x}{n} nx + \frac{1}{n^2}(nx + n(n-1)x^2) = \frac{x(1-x)}{n}$. Vi har altså ligningen

$$\sum_{\nu=0}^{n} (x-\frac{\nu}{n})^2 \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

For ethvert x er højre side $\leqslant \frac{1}{4n}$ (idet polynomiet har sin største værdi for $x = \frac{1}{2}$). For ethvert $x \in [0,1]$ er alle leddene i summen på venstre side

$\geqslant 0$. Vi borthaster de led, for hvilke $|x-\frac{\nu}{n}|<\delta$ og erstatter i de øvrige led $(x-\frac{\nu}{n})^2$ med δ^2. Da fås <u>Čebyševs ulighed</u>

$$\sum_{\substack{\nu=0 \\ |x-\frac{\nu}{n}|\geqslant\delta}}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\leqslant\frac{1}{4n\delta^2}\quad\text{for alle } x\in[0,1].$$

⑦ Ved sammenfatning finder vi således

$$|f(x)-p_n(x)|\leqslant\omega(\delta)+\frac{M}{2n\delta^2}\quad\text{for alle } x\in[0,1].$$

Til det givne $\varepsilon>0$ vælges nu først $\delta=\delta(\varepsilon)$, således at $\omega(\delta)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Derefter bestemmes $n_0=n_0(\varepsilon)$, således at $\frac{M}{2n_0\delta(\varepsilon)^2}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ $\left(\text{d: } n_0\geqslant\frac{M}{\varepsilon\,\delta(\varepsilon)^2}\right)$. Da gælder for ethvert $n\geqslant n_0$, at

$$|f(x)-p_n(x)|\leqslant\varepsilon\quad\text{for alle } x\in[0,1],$$

hvormed Weierstrass' sætning er bevist.

<u>Bemærkninger</u>. 1. Af Čebyševs ulighed følger specielt, at der for fast $x\in[0,1]$ og fast $\delta>0$ gælder

$$(**)\qquad\sum_{\substack{\nu=0 \\ |x-\frac{\nu}{n}|\geqslant\delta}}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\longrightarrow 0\quad\text{for } n\to\infty.$$

Betragtes et spil, som der er sandsynligheden x for at vinde, og spilles spillet n gange uafhængigt af hinanden, udtrykker $\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}$ sandsynligheden for at vinde netop ν af spillene, og udtrykket på venstre side i $(**)$ er derfor sandsynligheden for, at antallet af vundne spil divideret med n afviger mindst δ fra sandsynligheden x. Grænseligningen $(**)$, hvorefter denne sandsynlighed $\to 0$ for $n\to\infty$, er først bevist af Jacob Bernoulli (Ars conjectandi' 1713). Den kaldes "de store tals lov" og er begyndelsen til den videregående sandsynlighedsregning.

2. Weierstrass' approksimationssætning kan også formuleres således: Hvis $f(x)$ er en kontinuert funktion i det afsluttede interval $[a,b]$, da findes en

følge af polynomier $p_1(x), p_2(x), \cdots$, som konvergerer ligeligt mod $f(x)$ i $[a,b]$. — Omvendt gælder: Hvis en funktion $f(x)$ i $[a,b]$ er grænsefunktion for en ligelig konvergent følge af polynomier $p_1(x), p_2(x), \cdots$, da er $f(x)$ kontinuert. Eller anderledes udtrykt: Hvis en funktion $f(x)$ i $[a,b]$ har den egenskab, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et polynomium $p(x)$, således at $|f(x) - p(x)| \leqq \varepsilon$ for alle $x \in [a,b]$, da er $f(x)$ kontinuert.

3. For et givet afsluttet interval $[a,b]$ betegner vi med $B([a,b])$ klassen af alle begrænsede funktioner i $[a,b]$, med $C([a,b])$ klassen af alle kontinuerte funktioner i $[a,b]$, og med $P([a,b])$ klassen af alle polynomier betragtet i $[a,b]$. Da gælder $B([a,b]) \supset C([a,b]) \supset P([a,b])$. Vi sætter for $f \in B([a,b])$, $g \in B([a,b])$

$$dist(f,g) = \sup_{a \leqq x \leqq b} |f(x) - g(x)|.$$

$B([a,b])$ er et metrisk rum for denne afstandsdefinition. Weierstrass' sætning og dens triviélle omvendte sætning (jfr. bemærkning 2) kan nu under et udtrykkes således: I det metriske rum $B([a,b])$ er $C([a,b])$ afslutningen af mængden $P([a,b])$.

§2. Newtons og Lagranges interpolationsformler.

Sætning: For givne (indbyrdes forskellige) absisser $x_0, x_1, \cdots, x_n$ og givne ordinater $y_0, y_1, \cdots, y_n$ findes et og kun et polynomium $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ af højst n^{te} grad, som i punkterne $x_0, x_1, \cdots, x_n$ antager værdierne $y_0, y_1, \cdots, y_n$.

Der kan ikke findes to forskellige sådanne polynomier; thi deres differens vilde da et polynomium af højst n^{te} grad med de $n+1$ nulpunkter $x_0, x_1, \cdots, x_n$, i strid med, at et egentligt polynomium har højst

så mange nulpunkter som graden angiver. — Eksistensen af et polynomium af den angivne art vises ved, at man opskriver et; vi angiver to måder.

I Newtons interpolationsformel skrives

$$p(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}).$$

Koefficienterne $c_0, c_1, \cdots, c_n$ bestemmes successivt, således at ligningerne $p(x_0)=y_0$, $p(x_1)=y_1$, $\cdots$, $p(x_n)=y_n$ bliver opfyldt. Man finder

$$c_0=y_0,\quad c_1=\frac{y_1-c_0}{x_1-x_0},\quad c_2=\frac{y_2-[c_0+c_1(x_2-x_0)]}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},\quad \cdots,$$

$$c_n=\frac{y_n-[c_0+c_1(x_n-x_0)+\cdots+c_{n-1}(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-2})]}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

I Lagranges interpolationsformel skrives

$$p(x) = y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + \cdots + y_n p_n(x),$$

hvor polynomierne $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ er bestemt ved, at $p_j(x)$ i x_j skal have værdien 1 og i resten af punkterne $x_0, x_1, \cdots, x_n$ værdien 0. Dette opnås for

$$p_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)},$$

$$p_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$\cdots$$

$$p_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

Bemærkning. Lad $f(x)$ være en kontinuert funktion i et lukket interval $[a,b]$. For et givet n kan vi betragte det polynomium $p_n(x)$ af højst n^{te} grad, der i de $n+1$ punkter $a, a+h, a+2h, \cdots, b-h, b$, hvor $h=\frac{b-a}{n}$, antager samme værdier som $f(x)$. Man kunde tro, at følgen $p_1(x), p_2(x), \cdots$ vilde konvergere ligelig mod $f(x)$, men dette er ikke altid tilfældet.

§3. En kontinuert funktion af en reel variabel, som ikke er differentiabel i noget punkt.

Det er let at angive en kontinuert funktion af en reel variabel, som ikke er differentiabel i eet punkt, f.eks. $f(x) = |x|$ eller $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$.

Det første eksempel på en funktion, som ikke er differentiabel i noget punkt, er givet af Weierstraas (1861). Følgende, noget simplere, eksempel skyldes B. L. van der Waerden.

Vi betragter funktionerne (se figur):

$f_1(x) = |x|$ for $|x| \leqslant 1$, periodisk med perioden 2

$f_2(x) = |x|$ for $|x| \leqslant \frac{1}{4}$, periodisk med perioden $\frac{2}{4}$

...

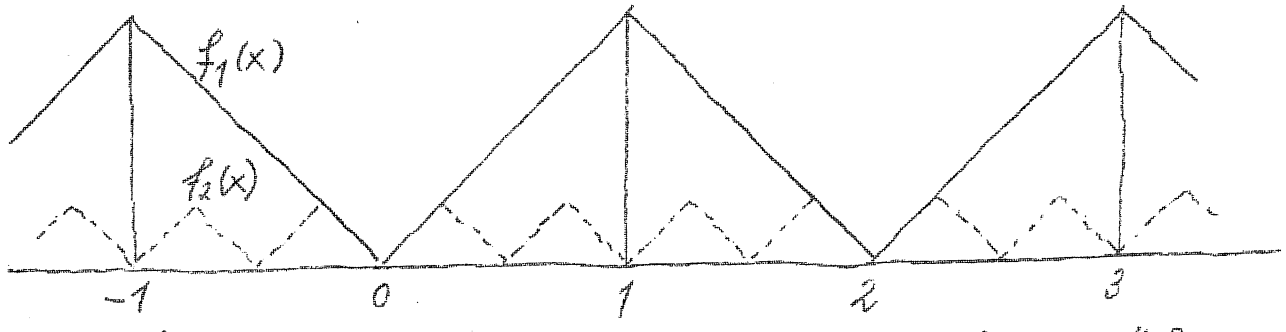
$f_n(x) = |x|$ for $|x| \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}$, periodisk med perioden $\frac{2}{4^{n-1}}$

...

Hver funktion er defineret og kontinuert for $-\infty < x < +\infty$. For ethvert n er $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}$ for alle x. Den vendelige række $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$ har således den konvergente majorantrække $1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}} + \cdots$. Den er følgelig ligelig konvergent, og dens sum

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

er en kontinuert funktion. Vi vil vise, at $f(x)$ ikke er differentiabel i noget punkt.



Lad x_0 være et givet punkt. Ved et „halvtag" for $f_n(x)$ mener vi et stykke af det geometriske billede af $f_n(x)$ fra knæk til knæk, det venstre knækpunkt

medregnet, det høpre ikke. Punktet x_0 ligger da under et bestemt halvtag for hver af funktionerne $f_1(x), f_2(x), \cdots$. Disses hældningskoefficienter er alle $+1$ eller -1, og de er bestemt som den høpre afledede i x_0 af funktionerne $f_1(x), f_2(x), \cdots$, betegnet $D^+f_1(x_0), D^+f_2(x_0), \cdots$.

Vi bestemmer nu:

(1) x_1 under samme halvtag for $f_1(x)$ som x_0, således at $|x_1 - x_0| = \frac{2}{4}$ $(= \frac{1}{4}$ af perioden for $f_1(x))$. Dette er muligt på een måde; vi har $x_1 = x_0 + \frac{2}{4}$, hvis x_0 ligger til venstre for midten af halvtaget, ellers $x_1 = x_0 - \frac{2}{4}$.

(2) x_2 under samme halvtag for $f_2(x)$ som x_0, således at $|x_2 - x_0| = \frac{2}{4^2}$ $(= \frac{1}{4}$ af perioden for $f_2(x))$. Dette er ligeledes muligt på een måde.

$\cdots$

(n) x_n under samme halvtag for $f_n(x)$ som x_0, således at $|x_n - x_0| = \frac{2}{4^n}$ $(= \frac{1}{4}$ af perioden for $f_n(x))$. Dette er atter muligt på een måde.

$\cdots$

Vi har $x_n \to x_0$ og vil nu vise, at følgen af differenskvotienter $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ ikke har nogen grænseværdi for $n \to \infty$, hvormed vil være vist, at $f(x)$ ikke er differentiabel i punktet x_0. Vi har

$$f(x_n) = f_1(x_n) + f_2(x_n) + \cdots + f_n(x_n) + f_{n+1}(x_n) + \cdots$$
$$f(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + f_{n+1}(x_0) + \cdots,$$

altså

$$(*)\quad \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{f_1(x_n) - f_1(x_0)}{x_n - x_0} + \frac{f_2(x_n) - f_2(x_0)}{x_n - x_0} + \cdots + \frac{f_n(x_n) - f_n(x_0)}{x_n - x_0} + \frac{f_{n+1}(x_n) - f_{n+1}(x_0)}{x_n - x_0} + \cdots.$$

Da x_n ligger under samme halvtag for $f_n(x)$ som x_0, ligger x_n også under samme halvtag for hver af funktionerne $f_1(x), \cdots, f_{n-1}(x)$ som x_0. Heraf ses, at hvert

af leddene

$$\frac{f_1(x_n)-f_1(x_0)}{x_n-x_0},\ \frac{f_2(x_n)-f_2(x_0)}{x_n-x_0},\ \ldots,\ \frac{f_n(x_n)-f_n(x_0)}{x_n-x_0}$$

er lig med hældningskoefficienten for det halvtag af den pågældende funktion, under hvilket x_0 ligger. Disse led er altså $= D^+f_1(x_0), D^+f_2(x_0), \ldots, D^+f_n(x_0)$. De følgende led i rækken (*)

$$\frac{f_{n+1}(x_n)-f_{n+1}(x_0)}{x_n-x_0},\ \frac{f_{n+2}(x_n)-f_{n+2}(x_0)}{x_n-x_0},\ \ldots$$

er alle $=0$, thi $|x_n-x_0|$ er $=\frac{1}{4}$ af perioden for $f_n(x)$, altså $=$ perioden for $f_{n+1}(x)$, $=4$ gange perioden for $f_{n+2}(x)$, $\ldots$. Vi finder således

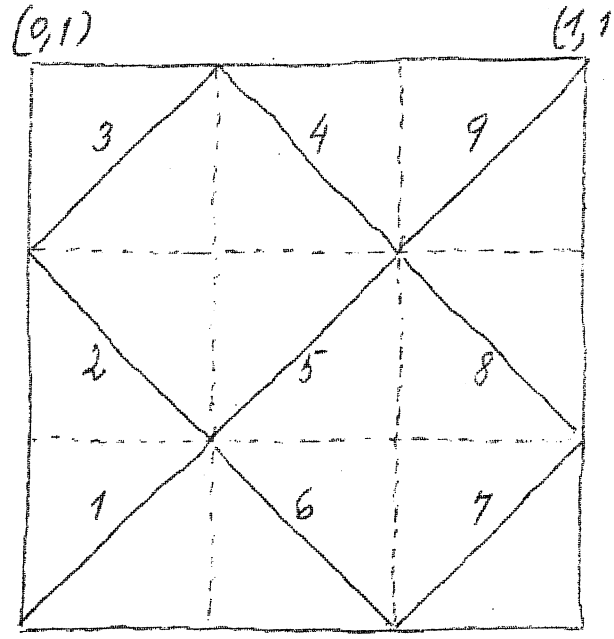
$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = D^+f_1(x_0)+D^+f_2(x_0)+\cdots+D^+f_n(x_0),$$

d.v.s. $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ er det n^{te} afsnit i den uendelige række $D^+f_1(x_0)+D^+f_2(x_0)+\cdots$, hvis led alle er $+1$ eller -1. Følgen af differenskvotienter $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ har derfor ingen grænseværdi for $n\to\infty$

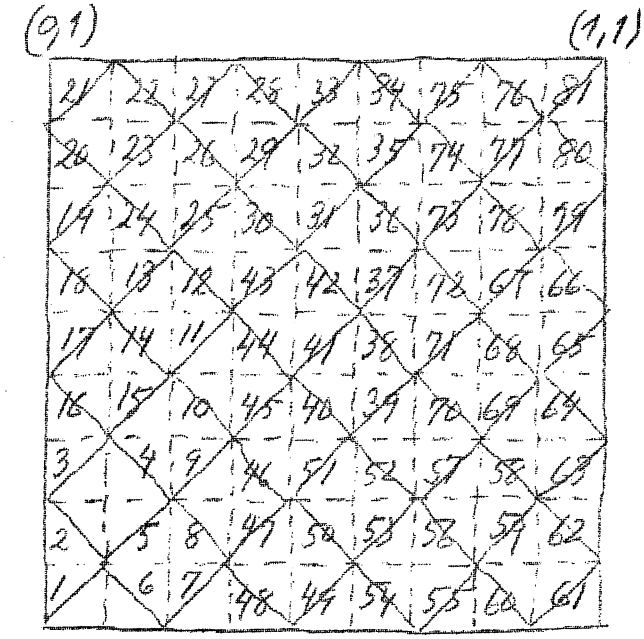
§4. Peanos kurve.

(G. Peano 1858 – 1932; kurven er fra 1890.) <u>En kontinuert kurve</u> $(x,y)=(f(t),g(t))$, $0\leqslant t\leqslant 1$, <u>som forløber i kvadratet</u> $\{(x,y)\mid x\in[0,1], y\in[0,1]\}$ <u>og indeholder ethvert punkt af dette kvadrat.</u>

Kvadratet deles i 9 kvadrater med side $\frac{1}{3}$ og vi danner den kontinuerte kurve $(x,y)=(f_1(t),g_1(t))$, $0\leqslant t\leqslant 1$, som består af de på figur 1 viste diagonaler i de 9 kvadrater i den ved nummereringen bestemte rækkefølge, gennemløbet med konstant hastighed. Til $t=0$ og $t=1$ svarer $(x,y)=(0,0)$ og $(x,y)=(1,1)$ og knækpunkterne svarer til $t=\frac{1}{9},\frac{2}{9},\ldots,\frac{8}{9}$.



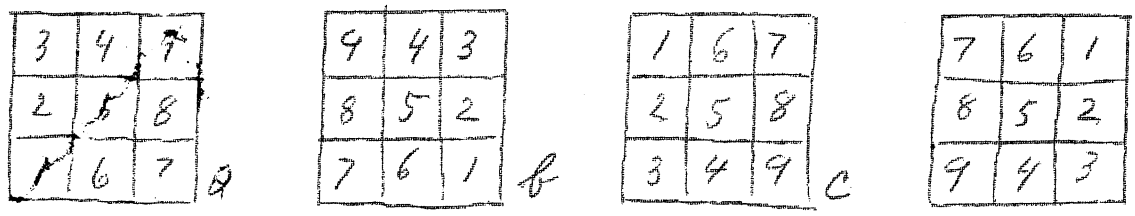
figur 1



figur 2

Hvert af de 9 kvadrater med side $\frac{1}{3}$ deles nu i 9 kvadrater med side $\frac{1}{3^2}$, og vi danner den kontinuerte kurve $(x,y) = (f_2(t), g_2(t))$, $0 \leq t \leq 1$, som består af de på figur 2 viste diagonaler i de 81 kvadrater i den ved nummerordenen bestemte rækkefølge, gennemløbet med konstant hastighed. Til $t = 0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \ldots, \frac{8}{9}, 1$ svarer de samme punkter som på den forrige kurve, og knækpunkterne svarer til $t = \frac{1}{81}, \frac{2}{81}, \ldots, \frac{80}{81}$.

Idet vi fortsætter således, fås i det n^{te} skridt en kurve $(x,y) = (f_n(t), g_n(t))$, $0 \leq t \leq 1$, sammensat af diagonaler i de 9^n kvadrater med side $\frac{1}{3^n}$, hvori det givne kvadrat kan deles, gennemløbet med konstant hastighed. Til $t = 0, \frac{1}{9^{n-1}}, \frac{2}{9^{n-1}}, \ldots, \frac{9^{n-1}}{9^{n-1}}, 1$ svarer de samme punkter som på den forrige kurve, og knækpunkterne svarer til $t = \frac{1}{9^n}, \frac{2}{9^n}, \ldots, \frac{9^n - 1}{9^n}$. Diagonalerne i de 9 kvadrater af n^{te} deling, som udgør et af kvadraterne i den $(n-1)^{te}$ deling, gennemløbes i den rækkefølge, som er vist på figur 3 a, b, c, d, beroende på, hvilke modstående hjørner, der skal forbindes.



figur 3

Til et interval $\frac{k-1}{9^n} \leq t \leq \frac{k}{9^n}$, hvor k er hel og $1 \leq k \leq 9^n$, svarer på den n^{te} kurve en diagonal i et af de 9^n kvadrater med side $\frac{1}{3^n}$, og på enhver af de følgende kurver $(x,y) = (f_m(t), g_m(t))$, $m > n$, en polygon, der forløber i dette kvadrat. Heraf ses, at for $m > n$ er

$|f_m(t) - f_n(t)| \leq \frac{1}{3^n}$, $|g_m(t) - g_n(t)| \leq \frac{1}{3^n}$ for alle $t \in [0,1]$.

Til ethvert $\varepsilon > 0$ kan vi finde et $n_0 = n_0(\varepsilon)$, således at $\frac{1}{3^{n_0}} \leq \varepsilon$. Vi ser da, at

$|f_m(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon$, $|g_m(t) - g_n(t)| \leq \varepsilon$ for alle $t \in [0,1]$,

når blot $m > n \geq n_0$. Heraf følger, at funktionsfølgerne $f_1(t), f_2(t), \ldots$ og $g_1(t), g_2(t), \ldots$ er ligeligt konvergente i intervallet $0 \leq t \leq 1$. Vi betegner deres grænsefunktioner med $f(t)$ og $g(t)$. Disse er da kontinuerte funktioner og bestemmer altså en kontinuert kurve $(x,y) = (f(t), g(t))$, $0 \leq t \leq 1$. Dette er Peanos kurve.

Idet $0 \leq f_n(t) \leq 1$, $0 \leq g_n(t) \leq 1$ for alle $t \in [0,1]$ og alle n, har vi $0 \leq f(t) \leq 1$, $0 \leq g(t) \leq 1$ for alle $t \in [0,1]$. Peanos kurve forløber altså i kvadratet $\{(x,y) \mid x \in [0,1], y \in [0,1]\}$.

For $t = \frac{k}{9^n}$, hvor k er hel og $0 \leq k \leq 9^n$ gælder $(f_n(t), g_n(t)) = (f_{n+1}(t), g_{n+1}(t)) = \ldots$ og altså $(f(t), g(t)) = (f_n(t), g_n(t))$. Til $t = 0$ og $t = 1$ svarer altså på Peanos kurve punkterne $(0,0)$ og $(1,1)$ og Peanos kurve indeholder knækpunkterne for enhver af kurverne $(x,y) = (f_n(t), g_n(t))$, nemlig svarende til samme

parameterværdier. Heraf følger, at Peanos kurve indeholder ethvert punkt (x_0, y_0) af kvadratet $\{(x,y) \mid x \in [0,1],\ y \in [0,1]\}$. Thi mængden af punkter på en kontinuert kurve med afsluttet parameterinterval er kompakt (altså afsluttet og begrænset). Nu kan vi for enhver omegn af (x_0, y_0) finde et nummer n, således at denne omegn indeholder et af de 9^n kvadrater med side $\frac{1}{3^n}$ fra den n^{te} deling. Endepunkterne for den ene af dettes diagonaler er knækpunkter for den n^{te} kurve (eller (0,0) eller (1,1)) og er altså punkter af Peanos kurve tilhørende den givne omegn. Punktet (x_0, y_0) må da også tilhøre Peanos kurve.

Kap. 2. Mål- og integralbegrebet.

Vi vil betragte reelle funktioner af en eller flere reelle variable, altså funktioner defineret på $\grave{R}$ eller $\grave{R}^k = \grave{R} \times \cdots \times \grave{R}$ (k „faktorer" $\grave{R}$, hvor $k > 1$). I stedet for $\grave{R}$ skrives også $\grave{R}^1$. Funktioner, som kun er defineret på en delmængde af $\grave{R}$ eller $\grave{R}^k$, vil blive behandlet, idet vi udvider dem til funktioner defineret på $\grave{R}$ eller $\grave{R}^k$ med værdien 0 uden for den oprindelige definitionsmængde. Foreløbig betragtes kun endelige funktioner, senere vil også funktioner, der kan antage værdierne $+\infty$ og $-\infty$, blive tillagt. Vi benytter den gængse geometriske sprogbrug, idet vi taler om $\grave{R} = \grave{R}^1$ som tallinien, om $\grave{R}^2$ som talplanen, og almindeligt om $\grave{R}^k$ ($k \geqslant 1$) som det k-dimensionale talrum, om dets elementer $x = (x_1, \cdots, x_k)$ som punkter, etc. Det understreges imidlertid, at teorien kun bygger på de reelle tal. Vi vil vælge en sprogbrug, der er ens for alle $k \geqslant 1$. I eksempler antages i reglen $k = 1$ eller $k = 2$.

§ 1. Trappemængder og trappefunktioner.

Intervaller og deres mål.

For $k = 1$, hvor talen er om x-aksen $\grave{R}$, vil vi benytte alle fire intervaltyper

afsluttet interval	$J = [a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,	$a \leqslant b$,
halvåbent interval	$J = [a, b[= \{x \mid a \leqslant x < b\}$,	$a < b$,
— —	$J =]a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$,	$a < b$,
åbent interval	$J =]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$,	$a < b$.

Bemærk, at et afsluttet interval kan bestå af et enkelt punkt. Tallene a og b kaldes intervallets endepunkter (de kan altså for et afsluttet interval falde sammen). Tallet $b - a$ kaldes intervallets <u>længde</u> eller <u>mål</u> og betegnes $m(J)$:

$$m(J) = b - a.$$

For $k>1$ betegnes som et interval i R^k en mængde af formen

$$J = J_1 \times \cdots \times J_k = \{x=(x_1,\cdots,x_k) \mid x_1 \in J_1, \cdots, x_k \in J_k\},$$

eller kort

$$J = \{x \mid x_\nu \in J_\nu\},$$

hvor hvert J_ν er et interval på x_ν-aksen. Svarende hertil at hvert J_ν kan være af de 4 ovennævnte typer, kan J være af 4^k typer. Intervallet er afsluttet, hvis og kun hvis hvert J_ν er afsluttet, og åbent, hvis og kun hvis hvert J_ν er åbent. Længderne af intervallerne J_ν kaldes kantlængderne af J og deres produkt kaldes intervallets mål og betegnes $m(J)$. Hvis J_ν har endepunkterne a_ν og b_ν er altså

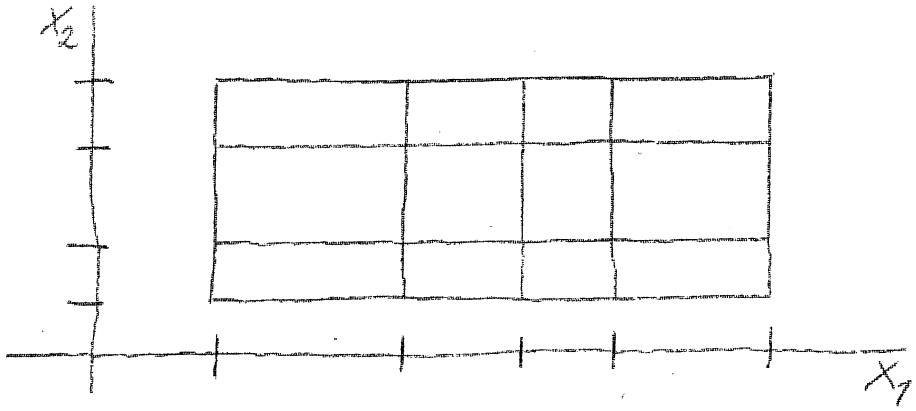
$$m(J) = (b_1-a_1)\cdots(b_k-a_k).$$

M. Det havde været mere systematisk at betegne målet af et interval i R^k med $m_k(J)$. Vi kunde da have skrevet $m_k(J) = m_1(J_1)\cdots m_1(J_k)$. Da vi imidlertid i almindelighed kun betragter eet k, vil vi ikke komplicere betegnelserne på denne måde.

Bemærkning.

Lad der for $k=1$ være givet et endeligt antal intervaller J på R. Lad $x_0, x_1, \cdots, x_n$ være samtlige endepunkter for intervallerne J ordnet således, at $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Vi betragter de $n+1$ intervaller $[x_\nu, x_\nu]$, $\nu = 0, \cdots, n$, og de n intervaller $]x_{\nu-1}, x_\nu[$, $\nu = 1, \cdots, n$. Disse $2n+1$ disjunkte intervaller betegner vi som intervallerne J. Da er hvert af de givne intervaller J foreningsmængden af visse af disse intervaller J, og for hvert J er målet $m(J)$ summen af målene $m(J)$ af de J, hvoraf J er sammensat.

Lad der dernæst for $k>1$ være givet et endeligt antal intervaller $\mathfrak{I} = \{x \mid x_j \in \mathfrak{I}_j\}$ i $\mathbb{R}^k$. For ethvert j bestemmer vi på den lige omtalte måde et endeligt antal disjunkte intervaller $\mathfrak{I}_j$ på x_j-aksen, således at hvert $\mathfrak{I}_j$ er foreningsmængden af visse $\mathfrak{J}_j$, og vi betragter dernæst alle intervaller $\mathfrak{J} = \{x \mid x_j \in \mathfrak{J}_j\}$, som fås ved at man for hvert j benytter et af disse $\mathfrak{J}_j$. (Se figur, hvor $k=2$. Intervallerne $\mathfrak{J}$ er dels åbne intervaller, dels akseparallele liniestykker uden endepunkter, og dels punkter.) Da er hvert af de givne



intervaller $\mathfrak{I}$ åbenbart foreningsmængden af visse af disse intervaller $\mathfrak{J}$, og for hvert $\mathfrak{I}$ er målet $m(\mathfrak{I})$ summen af målene $m(\mathfrak{J})$ af de $\mathfrak{J}$, hvoraf $\mathfrak{I}$ er sammensat (ifølge sætningen om, at et produkt, hvis faktorer er summer, er summen af alle produkter, hvis faktorer er een addend fra hver sum).

Trappemængder og deres mål.

En punktmængde F i $\mathbb{R}^k$, som er foreningsmængde af et endeligt antal disjunkte intervaller, vil vi kalde en <u>trappemængde</u>, og summen af intervallernes mål kaldes trappemængdens <u>mål</u> og betegnes $m(F)$.

Bortset fra de tilfælde, hvor F består af et endeligt antal punkter, kan en trappemængde F på mange

måder fremstilles som foreningsmængde af endelig mange disjunkte intervaller. For at godtgøre, at der ved ovenstående virkelig er defineret et mål $m(F)$ for mængden F, må vi derfor vise, at hvis den samme mængde F på to forskellige måder er fremstillet som foreningsmængde af endelig mange disjunkte intervaller, er summen af disses mål i begge tilfælde det samme tal. Dette fremgår af den foranstående bemærkning, idet vi lader intervallerne J være samtlige intervaller, der forekommer i de to fremstillinger; da vil F også være foreningsmængden af visse af intervallerne J, og delingen af F i disse intervaller J er en videredeling af hver af de givne delinger. Summen af målene af intervallerne i hver af disse delinger er altså lig med summen af alle $m(J)$ svarende til de J, hvoraf F består, og de to summer er altså ligestore.

Den tomme mængde $\emptyset$ er foreningsmængden af ingen intervaller; den er altså en trappemængde, og $m(\emptyset)=0$.

Hvis F og G er trappemængder, da er også $F \cup G$, $F \cap G$, $F \setminus G$ trappemængder. Er specielt F og G disjunkte, gælder

$$m(F \cup G) = m(F) + m(G).$$

Vi betragter for hver af mængderne F og G en fremstilling af mængden som foreningsmængde af endelig mange disjunkte intervaller. Idet vi lader alle de heri optrædende intervaller være intervallerne J i den foranstående bemærkning, får vi et endeligt antal disjunkte intervaller J, således at hver af mængderne F og G er foreningsmængden af visse af disse intervaller J. Heraf følger imidlertid, at også hver af mængderne $F \cup G$, $F \cap G$, $F \setminus G$ er foreningsmængden af

visse J. Altså er de trappemængder. Den anførte relation følger umiddelbart af måletos definition.

Mængdelegemer og additive mængdefunktioner.

Et system γ af delmængder af en given mængde E kaldes et mængdelegeme, såfremt

$$A \in \gamma \text{ og } B \in \gamma \Rightarrow A \cup B \in \gamma,\ A \cap B \in \gamma,\ A \setminus B \in \gamma.$$

For et vilkårligt endeligt antal mængder $A_1, \dots, A_n$ tilhørende et mængdelegeme γ gælder naturligvis, at $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \gamma$ og $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \gamma$. Ethvert mængdelegeme indeholder den tomme mængde $\emptyset$.

En funktion $\varphi = \varphi(A)$ defineret på et mængdesystem γ kaldes en mængdefunktion. Foreløbig betragtes kun endelige reelle mængdefunktioner. Senere vil også værdierne $+\infty$ og $-\infty$ blive tilladt.

En endelig mængdefunktion φ defineret på et mængdelegeme γ kaldes additiv, hvis

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

for vilkårlige disjunkte mængder $A \in \gamma$, $B \in \gamma$. Da gælder $\varphi(\emptyset) = 0$, og $\varphi(A \setminus B) = \varphi(A) - \varphi(B)$, når $A \supseteq B$, og for vilkårlige mængder $A \in \gamma$, $B \in \gamma$ gælder

$$\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B).$$

Endvidere gælder for vilkårlige disjunkte mængder $A_1 \in \gamma, \dots, A_n \in \gamma$, at $\varphi(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \varphi(A_1) + \dots + \varphi(A_n)$. Hvis φ er ikke negativ (d: $\varphi(A) \geqslant 0$ for alle $A \in \gamma$) gælder $\varphi(A) \geqslant \varphi(B)$, når $A \supseteq B$. I dette tilfælde gælder for vilkårlige (ikke nødvendigvis disjunkte) mængder $A_1 \in \gamma, \dots, A_n \in \gamma$, at

$$\varphi(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leqslant \varphi(A_1) + \dots + \varphi(A_n).$$

Thi sættes $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, $\dots$, $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$, er $B_1, \dots, B_n$ disjunkte mængder tilhørende γ, og $A_1 \cup \dots \cup A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$; endvidere er $B_1 \subseteq A_1, \dots, B_n \subseteq A_n$. Altså er

$$\varphi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \varphi(B_1) + \cdots + \varphi(B_n) \leqslant \varphi(A_1) + \cdots + \varphi(A_n).$$

På grundlag af de her indførte begreber kan vi om trappemængder og deres mål udsige følgende:

Systemet af trappemængder F i R^k er et mængdelegeme og målet $m = m(F)$ er en additiv, ikke negativ mængdefunktion på dette legeme.

Trappefunktioner og deres integraler.

En funktion $f = f(x)$ defineret på R^k kaldes en trappefunktion, hvis den er 0 uden for en trappemængde F, og F kan deles i et endeligt antal disjunkte trappemængder $F_1, \ldots, F_n$, i hvilke f er konstant. Betegnes værdierne af f i disse mængder med $a_1, \ldots, a_n$, kaldes summen $a_1 m(F_1) + \cdots + a_n m(F_n)$ trappefunktionens integral og betegnes $I(f)$:

$$I(f) = a_1 m(F_1) + \cdots + a_n m(F_n).$$

Funktionen 0 er en trappefunktion, og $I(0) = 0$.

For en given trappefunktion f kan vi på mange måder vælge disjunkte trappemængder, i hvilke funktionen er konstant, og uden for hvis foreningsmængde funktionen er 0. For at godtgøre, at der ved ovenstående virkelig er defineret et integral $I(f)$ for funktionen f, må vi vise, at den omhandlede sum bliver den samme i alle tilfælde. Kortil bemærkes, at vi ifølge bemærkningen foran for to sådanne valg kan finde et endeligt antal disjunkte intervaller J — lad os benævne dem $J_1, \ldots, J_\ell$ — således at enhver af de optrædende trappemængder er foreningsmængden af visse af disse intervaller. I hvert af disse intervaller er f konstant, og betegnes værdierne i intervallerne med $b_1, \ldots, b_\ell$ er den til hvert af de givne valg svarende sum lig med $b_1 m(J_1) + \cdots + b_\ell m(J_\ell)$.

For et vilkårligt endeligt antal trappefunktioner $f_1, \cdots, f_m$ kan vi finde et endeligt antal disjunkte intervaller, således at hver af trappefunktionerne er konstant i hvert af intervallerne og 0 uden for deres foreningsmængde. Heraf følger, at hvis $h(z_1, \cdots, z_m)$ er en aldeles vilkårlig funktion defineret på $(z_1, \cdots, z_m)$-rummet, da er $h(f_1, \cdots, f_m)$ (d: den funktion, som for hvert $x \in \mathbb{R}^k$ har værdien $h(f_1(x), \cdots, f_m(x))$) også en trappefunktion.

Med henblik på det følgende fremhæves følgende umiddelbare konsekvenser af definitionerne og af den foregående bemærkning:

Hvis f er en trappefunktion, da er af, hvor a er et vilkårligt reelt tal, også en trappefunktion. Hvis f og g er trappefunktioner, da er også $f+g$, $f \vee g$, $f \wedge g$ trappefunktioner. For integralet af trappefunktioner gælder

$$I(af) = a\,I(f)$$
$$I(f+g) = I(f) + I(g)$$
$$I(f) \geqslant 0 \text{ hvis } f \geqslant 0.$$

NB. Når a og b er to reelle tal, betegner $a \vee b$ det største af tallene a og b og $a \wedge b$ det mindste af tallene a og b, altså

$$a \vee b = \max\{a, b\} = \sup\{a, b\}$$
$$a \wedge b = \min\{a, b\} = \inf\{a, b\}.$$

Er f og g to funktioner defineret på samme mængde ξ betegner $f \vee g$ og $f \wedge g$ naturligvis de to funktioner, hvis værdi for ethvert $x \in \xi$ er henholdsvis $f(x) \vee g(x)$ og $f(x) \wedge g(x)$, altså, hvis vi sætter $h(z_1, z_2) = z_1 \vee z_2$ og $k(z_1, z_2) = z_1 \wedge z_2$, de to funktioner $h(f, g)$ og $k(f, g)$.

For vilkårlige reelle tal er

$a \vee b = b \vee a$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $a \wedge b = b \wedge a$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

Udtrykkene $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ og $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ får mening, når man ved parenteser angiver, i hvilken rækkefølge operationerne skal udføres. Man ser, at resultatet bliver det samme uanset hvorledes dette gøres, nemlig

$$a_1 \vee \cdots \vee a_n = \max\{a_1, \cdots, a_n\} = \sup\{a_1, \cdots, a_n\}$$
$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = \min\{a_1, \cdots, a_n\} = \inf\{a_1, \cdots, a_n\}.$$

For en talfølge $a_1, a_2, \cdots$ sættes

$$a_1 \vee a_2 \vee \cdots = \sup\{a_1, a_2, \cdots\}$$
$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots = \inf\{a_1, a_2, \cdots\}.$$

Lineære funktionsrum. Funktionsgitre. Lineære funktionaler.

En klasse K af reelle funktioner defineret på en vilkårlig mængde E kaldes et lineært funktionsrum, hvis

$$f \in K \text{ og } a \in R \Rightarrow af \in K$$
$$f \in K \text{ og } g \in K \Rightarrow f+g \in K.$$

Et lineært funktionsrum vil altså sige et underrum i vektorrummet af alle reelle funktioner defineret på mængden.

Når K er et lineært funktionsrum, gælder $0 \in K$, $f \in K \Rightarrow -f \in K$, $f \in K$ og $g \in K \Rightarrow f-g \in K$.

En klasse K af reelle funktioner defineret på en mængde E kaldes et funktionsgitter, hvis

$$f \in K \text{ og } g \in K \Rightarrow f \vee g \in K \text{ og } f \wedge g \in K.$$

Et lineært funktionsrum K er et funktionsgitter, hvis og kun hvis $f \in K \Rightarrow |f| \in K$. Nødvendigheden ses af, at $|f| = f \vee (-f)$ og tilstrækkeligheden af at $f \vee g = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$, $f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$.

En funktion $\Phi = \Phi(f)$ defineret på en funktionsklasse K bestående af funktioner defineret på en mængde E kaldes en funktional. Foreløbig betragtes kun endelige reelle funktionaler. Senere vil også værdierne $+\infty$ og $-\infty$ blive tilladt.

En funktional Φ defineret på et lineært funktionsrum K kaldes en <u>lineær funktional</u> (eller en lineær form), hvis

$$\Phi(af) = a\Phi(f)$$

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

Da gælder $\Phi(0) = 0$, $\Phi(-f) = -\Phi(f)$, $\Phi(f-g) = \Phi(f) - \Phi(g)$. Funktionalen Φ kaldes <u>ikke negativ</u>, såfremt

$$\Phi(f) \geqslant 0 \quad \text{når} \quad f \geqslant 0$$

(strengt taget burde man sige: ikke negativ for ikke negative f). Da gælder $\Phi(f) \geqslant \Phi(g)$ når $f \geqslant g$.

Lad Φ være en lineær funktional på et lineært funktionsrum K, som tillige er et funktionsgitter. For $f \in K$, $g \in K$ gælder da

$$\Phi(f) + \Phi(g) = \Phi(f \vee g) + \Phi(f \wedge g),$$

idet $f + g = f \vee g + f \wedge g$, så at der på begge sider står $\Phi(f+g)$. Forudsættes yderligere, at Φ er ikke negativ, gælder

$$|\Phi(f)| \leqslant \Phi(|f|);$$

thi $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, altså $-\Phi(|f|) = \Phi(-|f|) \leqslant \Phi(f) \leqslant \Phi(|f|)$.

På grundlag af disse definitioner kan de ovenfor fremhævede egenskaber ved trappefunktioner og deres integraler udtrykkes på følgende måde:

<u>Klassen af trappefunktioner f på R^k er et lineært funktionsrum og også et funktionsgitter, og integralet $I = I(f)$ er en lineær, ikke negativ funktional på dette funktionsrum.</u>

<u>Mål- og integralteoriens problemstilling.</u>

Systemet af trappemængder i R^k og den på dette definerede mængdefunktion $m = m(T)$, og klassen af trappefunktioner på R^k og den på denne definerede funktional $I = I(f)$ udgør den elementære basis for mål- og integralteorien i R^k. Dette mængdesystem

og denne funktionsklasse er naturligvis utilstrækkelig for analysens behov. Teoriens videre udvikling går ud på at udvide målbegrebet og integralbegrebet til mere omfattende mængdesystemer og funktionsklasser.

Begyndelsen til den moderne udvikling blev givet ved Riemanns integralbegreb (B. Riemann 1826-66, definitionen er fra 1854), som fremkom ved en præcisering af den klassiske integraldefinition. Nøje sammenhørende hermed er det målbegreb, som vi vil betegne som Riemann målet, selv om det først er indført senere (af Peano og Jordan).

Efter en kort omtale af disse begreber skal vi betragte Lebesgues mål- og integralbegreb (H. Lebesgue 1875-1941; teorien er grundlagt 1902), som udmærker sig dels ved at omfatte langt flere mængder og funktioner og dels ved at der her gælder simple sætninger ikke blot vedrørende elementære operationer med mængder og funktioner men også vedrørende grænseovergang.

§2. Riemann integralet.

Øvre og nedre Riemann integral. Riemann integrable funktioner.

For en vilkårlig funktion $f = f(x)$ på R^k betegner vi som funktionens støtte afslutningen af punktmængden $\{x \mid f(x) \neq 0\}$. At sige, at funktionen har begrænset støtte, er ensbetydende med at sige, at funktionen er 0 uden for et vist interval. I Riemanns integralteori betragtes udelukkende begrænsede funktioner med begrænset støtte, eller, hvad der kommer ud på det samme, funktioner f, for hvilke der findes trappefunktioner $\underline{f}$ og $\overline{f}$, således at $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$. Klassen af disse funktioner er åbenbart et lineært funktionsrum og også et funktionsgitter.

For en sådan funktion f gælder for vilkårlige trappefunktioner $\underline{f}$ og $\overline{f}$, for hvilke $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$, uligheden $I(\underline{f}) \leqslant I(\overline{f})$. Mængden af alle $I(\overline{f})$ er derfor nedad begrænset. Dens nedre grænse $\overline{R}(f)$ kaldes det øvre Riemann integral af f. Tilsvarende er mængden af alle $I(\underline{f})$ opad begrænset. Dens øvre grænse $\underline{R}(f)$ kaldes det nedre Riemann integral af f. I formler:

$$\overline{R}(f) = \inf I(\overline{f}), \qquad \underline{R}(f) = \sup I(\underline{f}).$$

Vi har

$$-\infty < \underline{R}(f) \leqslant \overline{R}(f) < +\infty.$$

Er f specielt en trappefunktion, gælder åbenbart $\overline{R}(f) = I(f)$, $\underline{R}(f) = I(f)$. Vi opnår altså en udvidelse af integralbegrebet for trappefunktioner gennem følgende definition:

Når $\underline{R}(f) = \overline{R}(f)$, kaldes funktionen f Riemann integrabel og dens fælles værdi kaldes funktionens integral og betegnes $I(f)$:

$$I(f) = \underline{R}(f) = \overline{R}(f).$$

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en funktion f er Riemann integrabel, er, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes trappefunktioner $\underline{f}$ og $\overline{f}$, for hvilke $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$ og $I(\overline{f} - \underline{f}) < \varepsilon$.

Hvis f er 0 uden for trappemængden T, kan vi naturligvis ved bestemmelsen af $\overline{R}(f)$ og $\underline{R}(f)$ nøjes med at tage trappefunktioner $\underline{f}$ og $\overline{f}$ i betragtning, for hvilke $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$, og som er 0 uden for T.

Enhver kontinuert funktion f med begrænset støtte er Riemann integrabel.

Lad T være et afsluttet interval, som indeholder mængden $\{x \mid f(x) \neq 0\}$. I følge sætningen om ligelig kontinuitet findes til ethvert $\varepsilon > 0$ et $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, således at $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ for vilkårlige punkter $x =$

$(x_1,\cdots,x_k)\in J$ og $y=(y_1,\cdots,y_k)\in J$, for hvilke $|x_1-y_1|<\delta$, $\cdots$, $|x_k-y_k|<\delta$. Vi deler J i disjunkte intervaller $J_1,\cdots,J_n$, således at alle kantlængder i disse er $<\delta$, og vælger punkter $x_1\in J_1,\cdots,x_n\in J_n$. Vi betragter nu de to trappefunktioner $\overline{f}$ og $\underline{f}$, der defineres ved

$$\left.\begin{matrix}\overline{f}(x)\\ \underline{f}(x)\end{matrix}\right\}=\begin{cases}0 \text{ for } x\notin J\\ f(x_\nu)\pm\varepsilon \text{ for } x\in J_\nu,\quad \nu=1,\cdots,n,\end{cases}$$

hvor plustegnet refererer til $\overline{f}$ og minustegnet til $\underline{f}$. Da er $\underline{f}\leqslant f\leqslant\overline{f}$ og $\overline{f}(x)-\underline{f}(x)=2\varepsilon$ for $x\in J$ og $=0$ for $x\notin J$. Altså er $I(\overline{f}-\underline{f})=2\varepsilon\, m(J)$, hvormed sætningen er bevist.

Dirichlets funktion.

For $k=1$ betragter vi Dirichlets funktion f hørende til intervallet $[-1,1]$, d.v.s. den ved

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ for } |x|>1\\ 0 \text{ for } |x|\leqslant 1,\quad x \text{ irrational}\\ 1 \text{ for } |x|\leqslant 1,\quad x \text{ rational}\end{cases}$$

definerede funktion. Funktionen er begrænset og har begrænset støtte. Den er diskontinuert i ethvert punkt $x\in[-1,1]$, men kontinuert i alle andre punkter. Ud fra definitionerne finder man let

$$\overline{R}(f)=2,\qquad \underline{R}(f)=0.$$

Funktionen er altså ikke Riemann integrabel.

En diskontinuert Riemann integrabel funktion.

For $k=1$ betragtes funktionen f defineret ved

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{når } |x|\leqslant 1 \text{ og } x \text{ er en uforkortelig}\\ & \text{brøk med nævner } q,\ q=1,2,3,\cdots\\ 0 & \text{for alle andre } x\end{cases}$$

Funktionen er begrænset og har begrænset støtte. Den er diskontinuert i ethvert rationalt punkt i $[-1,1]$, men kontinuert i alle andre punkter. For ethvert helt tal

$q_0 \geq 1$ er $0 \leq f \leq \overline{f}_{q_0}$, hvor $\overline{f}_{q_0}$ er den ved

$$\overline{f}_{q_0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{når } |x| \leq 1 \text{ og } x \text{ er en uforkortelig brøk med} \\ & \text{nævner } q \leq q_0 \\ \frac{1}{q_0} & \text{for alle andre } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{for } |x| > 1 \end{cases}$$

definerede trappefunktion. Nu er $I(\overline{f}_{q_0}) = \frac{2}{q_0}$. Vi finder altså $0 \leq \underline{R}(f) \leq \overline{R}(f) \leq \frac{2}{q_0}$. Da q_0 er et vilkårligt heet tal ≥ 1 fås $\underline{R}(f) = \overline{R}(f) = 0$. Funktionen f er således Riemann integrabel med integralet $I(f) = 0$.

Sætninger om Riemann integralet

Vi betragter ndelukkede begrænsede funktioner med begrænset støtte.

Hvis $f \leq g$, er $\overline{R}(f) \leq \overline{R}(g)$ og $\underline{R}(f) \leq \underline{R}(g)$. Heraf: Hvis f og g er Riemann integrable og $f \leq g$, er $I(f) \leq I(g)$. Specielt: Hvis f er Riemann integrabel og $f \geq 0$, er $I(f) \geq 0$.

Hvis f er givet, og $\underline{f}$ og $\overline{f}$ er trappefunktioner, således at $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$, gælder $-\overline{f} \leq -f \leq -\underline{f}$, og omvendt. Heraf ses, at

$$\boxed{\underline{R}(-f) = -\overline{R}(f), \quad \overline{R}(-f) = -\underline{R}(f).}$$

For $a > 0$ følger af $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$, at $a\underline{f} \leq af \leq a\overline{f}$, og omvendt. Heraf ses at

$$\boxed{\underline{R}(af) = a\underline{R}(f), \quad \overline{R}(af) = a\overline{R}(f) \quad (a > 0).}$$

Heraf atlæres: Når f er Riemann integrabel, er af Riemann integrabel for ethvert reelt tal a, og $I(af) = aI(f)$.

Lad dernæst f og g være givne og lad $\underline{f}, \overline{f}, \underline{g}, \overline{g}$ være trappefunktioner, således at $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$ og $\underline{g} \leq g \leq \overline{g}$. Da gælder

$$\underline{f} + \underline{g} \leq f + g \leq \overline{f} + \overline{g}$$

$$\underline{f} \vee \underline{g} \leq f \vee g \leq \overline{f} \vee \overline{g}, \quad \underline{f} \wedge \underline{g} \leq f \wedge g \leq \overline{f} \wedge \overline{g}.$$

Heraf følger

$$\underline{I}(f)+\underline{I}(g)=I(\underline{f}+\underline{g})\leqslant \underline{R}(f+g)\leqslant \overline{R}(f+g)\leqslant \overline{I}(\overline{f}+\overline{g})=\overline{I}(\overline{f})+\overline{I}(\overline{g})$$

og

$$\underline{I}(\underline{f})+\underline{I}(\underline{g})=I(\underline{f}\vee\underline{g})+I(\underline{f}\wedge\underline{g})\leqslant \underline{R}(f\vee g)+\underline{R}(f\wedge g)$$

$$\leqslant \overline{R}(f\vee g)+\overline{R}(f\wedge g)\leqslant \overline{I}(\overline{f}\vee\overline{g})+\overline{I}(\overline{f}\wedge\overline{g})=\overline{I}(\overline{f})+\overline{I}(\overline{g}).$$

Følgelig er

$$\underline{R}(f)+\underline{R}(g)\leqslant \underline{R}(f+g)\leqslant \overline{R}(f+g)\leqslant \overline{R}(f)+\overline{R}(g).$$

$$\underline{R}(f)+\underline{R}(g)\leqslant \underline{R}(f\vee g)+\underline{R}(f\wedge g)\leqslant \overline{R}(f\vee g)+\overline{R}(f\wedge g)\leqslant \overline{R}(f)+\overline{R}(g).$$

Heraf aflæses: *Når f og g er Riemann integrable, da er også $f+g$, $f\vee g$, $f\wedge g$ Riemann integrable, og* $I(f+g)=I(f)+I(g)=I(f\vee g)+I(f\wedge g)$.

Om Riemann integralet er hermed vist:

Klassen af Riemann integrable funktioner f på R^k er et lineært funktionsrum og også et funktionsgitter, og integralet $I=I(f)$ er en lineær, ikke negativ funktional på dette funktionsrum.

En konsekvens heraf er: *Med f er også $|f|$ Riemann integrabel, og* $|I(f)|\leqslant I(|f|)$.

Ligelig konvergens.

Hvis en følge af Riemann integrable funktioner $f_1, f_2, \ldots$ alle er 0 uden for en trappemængde F, og hvis følgen er ligelig konvergent, da er grænsefunktionen $f=\lim f_n$ Riemann integrabel, og talfølgen $I(f_1), I(f_2), \ldots$ er konvergent med grænseværdien $I(f)$.

Bevis: Grænsefunktionen f er åbenbart 0 uden for F. For ethvert $\varepsilon>0$ findes et $N=N(\varepsilon)$, således at $|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon$ for $n\geqslant N$ og alle x. Følgelig er $f_n-\varepsilon\cdot 1_F\leqslant f\leqslant f_n+\varepsilon\cdot 1_F$ for $n\geqslant N$. Altså er f begrænset og

$$I(f_n)-\varepsilon\, m(F)\leqslant \underline{R}(f)\leqslant \overline{R}(f)\leqslant I(f_n)+\varepsilon\, m(F) \text{ for } n\geqslant N.$$

Heraf ses, at $\overline{R}(f)-\underline{R}(f)\leqslant 2\varepsilon\, m(F)$ for ethvert $\varepsilon>0$. Altså er $\underline{R}(f)=\overline{R}(f)$, d.v.s. f er Riemann integrabel.

Ulighederne antager derfor formen

$I(f_n) - \varepsilon m(F) \leqslant I(f) \leqslant I(f_n) + \varepsilon m(F)$ for $n \geqslant N$,

eller $|I(f) - I(f_n)| \leqslant \varepsilon m(F)$. Altså konvergerer følgen $I(f_1), I(f_2), \ldots$ mod $I(f)$. (*)

Mangler ved Riemann integralet knytter sig (bl.a.) til konvergens, der ikke er ligelig. Det er let at angive eksempler på konvergente følger $f_1, f_2, \ldots$ af Riemann integrable funktioner, hvis grænsefunktion f ikke er Riemann integrabel, simpelthen fordi den ikke er begrænset eller ikke har begrænset støtte. Dette er naturligvis ikke at betragte som en mangel ved Riemann integralet. Men selv om alle funktionerne f_n er 0 uden for en trappemængde F og funktionerne er ensartet begrænsede, d.v.s. der findes et tal M, så at $|f_n(x)| \leqslant M$ for alle n og alle x, behøver grænsefunktionen f (der i dette tilfælde åbenbart er begrænset og har begrænset støtte) ikke at være Riemann integrabel.

Lad f.eks. f være Dirichlets funktion hørende til intervallet $[-1,1]$. Lad $x_1, x_2, \ldots$ være samtlige rationale tal i $[-1,1]$ ordnet som en følge, og lad f_n være den funktion, der er 1 i punkterne $x_1, \ldots, x_n$ og 0 for alle andre x. Da er f_n en trappefunktion, altså Riemann integrabel; alle f_n er 0 uden for $[-1,1]$, og $|f_n(x)| \leqslant 1$ for alle n og alle x. Og følgen $f_1, f_2, \ldots$ konvergerer (endda monotont) mod f, der ikke er Riemann integrabel.

(*) Når $\mathcal{E}$ er en given mængde, betegner vi for en vilkårlig delmængde A af $\mathcal{E}$ med 1_A den karakteristiske funktion af A, defineret ved

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{for } x \in \mathcal{E} \setminus A. \end{cases}$$

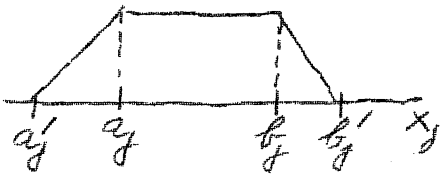
Ved brug af denne betegnelse for delmængder af $\dot{R}^k$ skal man naturligvis vælge $\mathcal{E} = \dot{R}^k$.

Approksimation med kontinuerte funktioner med begrænset støtte..

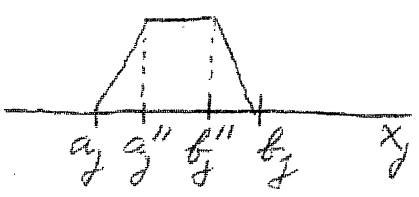
For enhver trappefunktion f og ethvert $\varepsilon > 0$ findes en kontinuert funktion $\bar{g} \geqslant f$ med begrænset støtte, for hvilken $I(\bar{g}) < I(f) + \varepsilon$, og en kontinuert funktion $\underline{g} \leqslant f$ med begrænset støtte, for hvilken $I(\underline{g}) > I(f) - \varepsilon$.

Bevis: Vi antager først, at $f = 1_J$, hvor J er et interval $J = \{x \mid x_j \in J_j\}$.

Lad J_j have endepunkterne a_j og b_j. For hvert j vælger vi tal $a_j' < a_j$ og $b_j' > b_j$ og betragter på x_j-aksen den funktion h_j, der (se figur) er $= 1$ i $[a_j, b_j]$, $= 0$ for $x_j \leqslant a_j'$ og $x_j \geqslant b_j'$ og er lineær i $[a_j', a_j]$ og $[b_j, b_j']$. Defineres nu $\bar{g}$ ved $\bar{g}(x) = h_1(x_1) \cdots h_k(x_k)$, er $\bar{g}$ kontinuert med begrænset støtte, og $f \leqslant \bar{g} \leqslant 1_{J'}$, hvor J' er intervallet $\{x \mid x_j \in [a_j', b_j']\}$. For passende valg af tallene a_j', b_j' opnås derfor $I(\bar{g}) < I(f) + \varepsilon$.



Hvis $a_j = b_j$ for mindst et j, vælger vi $\underline{g} = 0$. Ellers vælger vi for hvert j tal a_j'' og b_j'', således at $a_j < a_j'' < b_j'' < b_j$, og betragter (se figur) på x_j-aksen den funktion $\underline{h}_j$, der er $= 1$ i $[a_j'', b_j'']$, $= 0$ for $x \leqslant a_j$ og $x \geqslant b_j$ og er lineær i $[a_j, a_j'']$ og $[b_j'', b_j]$. Defineres nu $\underline{g}$ ved $\underline{g}(x) = \underline{h}_1(x_1) \cdots \underline{h}_k(x_k)$, er $\underline{g}$ kontinuert med begrænset støtte, og $1_{J''} \leqslant \underline{g} \leqslant f$, hvor J'' er intervallet $\{x \mid x_j \in [a_j'', b_j'']\}$. For passende valg af tallene a_j'', b_j'' opnås derfor $I(\underline{g}) > I(f) - \varepsilon$.



En vilkårlig trappefunktion kan skrives på formen $f = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$, hvor funktionerne $f_1, \cdots, f_n$ er af den foran betragtede art. Af det foregående

fremgår, at vi kan finde kontinuerte funktioner $\underline{g}_1, \overline{g}_1, \ldots, \underline{g}_n, \overline{g}_n$ med begrænset støtte, for hvilke $\underline{g}_\nu \leqslant a_\nu f_\nu \leqslant \overline{g}_\nu$ og $I(\overline{g}_\nu) < I(a_\nu f_\nu) + \frac{\varepsilon}{n}$, $I(\underline{g}_\nu) > I(a_\nu f_\nu) - \frac{\varepsilon}{n}$. Sættes nu $\overline{g} = \overline{g}_1 + \cdots + \overline{g}_n$ og $\underline{g} = \underline{g}_1 + \cdots + \underline{g}_n$, er $\overline{g}$ og $\underline{g}$ kontinuerte funktioner med begrænset støtte, for hvilke $I(\overline{g}) < I(f) + \varepsilon$ og $I(\underline{g}) > I(f) - \varepsilon$.

Af denne sætning følger:

For en vilkårlig begrænset funktion f med begrænset støtte gælder

$$\overline{R}(f) = \inf I(\overline{g}), \qquad \underline{R}(f) = \sup I(\underline{g}),$$

hvor nedre og øvre grænse tages over alle kontinuerte funktioner $\overline{g}$ og $\underline{g}$ med begrænset støtte, for hvilke $\underline{g} \leqslant f \leqslant \overline{g}$.

En funktion f er derfor Riemann integrabel, hvis og kun hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes kontinuerte funktioner $\underline{g}$ og $\overline{g}$ med begrænset støtte, for hvilke $\underline{g} \leqslant f \leqslant \overline{g}$ og $I(\overline{g} - \underline{g}) < \varepsilon$.

Riemann integrabilitet i en punktmængde.

Vi har hidtil betragtet funktioner defineret på hele $\grave{R}^k$. En funktion f, der ikke nødvendigvis er defineret på hele $\grave{R}^k$, kaldes Riemann integrabel i (eller over) en punktmængde A tilhørende funktionens definitionsmængde, såfremt den i hele $\grave{R}^k$ definerede funktion f_A, der bestemmes ved

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{for } x \notin A \end{cases}$$

er Riemann integrabel. I så fald kaldes $I(f_A)$ integralet af f over A og betegnes også (f. eks.)

$$\int_A f(x)\, m(d\grave{R}^k).$$

§3. Riemann målet.

Ydre og indre Riemann mål. Riemann målelige punktmængder.

Vi betragter *begrænsede* punktmængder i R^k. De udgør åbenbart et mængdelegeme. Lad A være en begrænset punktmængde. Da findes trappemængder $\underline{F}$ og $\overline{F}$, således at $\underline{F} \subseteq A \subseteq \overline{F}$ (f. eks. $\emptyset$ og J, hvor J er et interval, der indeholder A). For vilkårlige sådanne mængder gælder $m(\underline{F}) \leqslant m(\overline{F})$. Nedre grænse for mængden af alle $m(\overline{F})$ kaldes det *ydre Riemann mål* af A og betegnes $r_y(A)$. Øvre grænse for mængden af alle $m(\underline{F})$ kaldes det *indre Riemann mål* af A og betegnes $r_i(A)$. I formler:

$$r_y(A) = \inf m(\overline{F}), \qquad r_i(A) = \sup m(\underline{F}).$$

Vi har

$$0 \leqslant r_i(A) \leqslant r_y(A) < +\infty.$$

Er A specielt en trappemængde, gælder åbenbart $r_y(A) = m(A)$, $r_i(A) = m(A)$. Vi opnår altså en udvidelse af målbegrebet for trappemængder gennem følgende definition:

Når $r_i(A) = r_y(A)$, kaldes mængden A *Riemann målelig*, og den fælles værdi kaldes mængdens *mål* og betegnes $m(A)$:

$$m(A) = r_i(A) = r_y(A).$$

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en mængde A er Riemann målelig, er, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes trappemængder $\underline{F}$ og $\overline{F}$, for hvilke $\underline{F} \subseteq A \subseteq \overline{F}$ og $m(\overline{F} \setminus \underline{F}) < \varepsilon$.

For enhver begrænset punktmængde A gælder

$$r_i(A) = \underline{R}(1_A), \qquad r_y(A) = \overline{R}(1_A).$$

Mængden A er altså Riemann målelig, hvis og kun hvis funktionen 1_A er Riemann integrabel, og i

så fald er

$$m(A) = I(1_A).$$

I kraft af denne sætning henføres teorien for Riemann målet til teorien for Riemann integralet.

Vi beviser først, at $r_y(A) = \overline{R}(1_A)$. 1) For enhver trappemængde $\overline{F} \supseteq A$ er $1_{\overline{F}}$ en trappefunktion, og $1_{\overline{F}} \geqslant 1_A$. Altså er $m(\overline{F}) = I(1_{\overline{F}}) \geqslant \overline{R}(1_A)$, hvoraf $r_y(A) \geqslant \overline{R}(1_A)$. 2) For enhver trappefunktion $\overline{f} \geqslant 1_A$ er $\overline{F} = \{x \mid \overline{f}(x) \geqslant 1\}$ en trappemængde, og $\overline{F} \supseteq A$. Endvidere er $\overline{f} \geqslant 1_{\overline{F}}$. Altså er $I(\overline{f}) \geqslant I(1_{\overline{F}}) = m(\overline{F}) \geqslant r_y(A)$. Følgelig er $\overline{R}(1_A) \geqslant r_y(A)$.

Vi beviser dernæst, at $r_i(A) = \underline{R}(1_A)$. 1) For enhver trappemængde $\underline{F} \subseteq A$ er $1_{\underline{F}}$ en trappefunktion, og $1_{\underline{F}} \leqslant 1_A$. Altså er $m(\underline{F}) = I(1_{\underline{F}}) \leqslant \underline{R}(1_A)$, hvoraf $r_i(A) \leqslant \underline{R}(1_A)$. 2) For enhver trappefunktion $\underline{f} \leqslant 1_A$ er $\underline{F} = \{x \mid \underline{f}(x) > 0\}$ en trappemængde, og $\underline{F} \subseteq A$. Endvidere er $\underline{f} \leqslant 1_{\underline{F}}$. Altså er $I(\underline{f}) \leqslant I(1_{\underline{F}}) = m(\underline{F}) \leqslant r_i(A)$. Følgelig er $\underline{R}(1_A) \leqslant r_i(A)$.

For vilkårlige mængder A og B gælder

$$1_{A \cup B} = 1_A \vee 1_B, \quad 1_{A \cap B} = 1_A \wedge 1_B, \quad 1_{A \setminus B} = (1_A - 1_B) \vee 0.$$

Er A og B disjunkte, gælder

$$1_{A \cup B} = 1_A + 1_B.$$

Af egenskaberne ved Riemann integralet følger derfor straks:

Systemet af Riemann målelige punktmængder A i R^k er et mængdelegeme, og Riemann målet $m = m(A)$ er en additiv, ikke negativ mængdefunktion på dette legeme.

For $k = 1$ kan som eksempel på en begrænset, ikke Riemann målelig punktmængde nævnes mængden af rationale tal i intervallet $[-1, 1]$.

(Thi hvis x tilhører $F_n \setminus H_n$ er der et G_ν med $\nu \leqslant n$, som x ikke tilhører, og da x må tilhøre F_ν, er x i $F_\nu \setminus G_\nu$.) Heraf følger, at

$$m(F_n \setminus H_n) \leqslant m(F_1 \setminus G_1) + \cdots + m(F_n \setminus G_n) \leqslant k \cdot 2^{-1} + \cdots + k 2^{-n} < k.$$

Da $m(F_n) \geqslant k$, følger heraf at H_n ikke er $\emptyset$. Lad x_n være et punkt af H_n. Punktfølgen $x_1, x_2, \ldots$ er begrænset (idet alle punkterne tilhører F_1). Den har da en konvergent delfølge $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$, hvis grænsepunkt betegnes x. Da $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots$, vil punktfølgen $x_n, x_{n+1}, \ldots$ tilhøre H_n, altså også G_n. Men G_n består af et endeligt antal afsluttede intervaller. Følgelig må grænsepunktet x for følgen $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ tilhøre G_n, og altså også F_n. Punktet x er altså et fælles punkt for trappemængderne $F_1, F_2, \ldots$; altså er $\bigcap F_n \neq \emptyset$.

<u>Hvis en dalende følge $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots$ af trappefunktioner på $\mathbb{R}^k$ har grænsefunktionen 0, gælder</u> $\lim I(f_n) = 0$.

Vi har åbenbart $f_n \geqslant 0$ for alle n. Da $I(f_1) \geqslant I(f_2) \geqslant \cdots \geqslant 0$, eksisterer $\lim I(f_n)$ og er $\geqslant 0$.

Lad F være en trappemængde, uden for hvilken f_1 er 0, og lad $M = \max_{x \in \mathbb{R}^k} f_1(x)$. Vi vælger et tal $\varepsilon > 0$ og betragter mængderne $F_n = \{x \mid f_n(x) \geqslant \varepsilon\}$. Disse er åbenbart trappemængder, og vi har $F \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ og $\bigcap F_n = \emptyset$. Ifølge den foregående sætning gælder altså $\lim m(F_n) = 0$. Nu er for ethvert n

$$0 \leqslant f_n \leqslant \varepsilon \cdot 1_{F \setminus F_n} + M \cdot 1_{F_n}.$$

Følgelig er

$$0 \leqslant I(f_n) \leqslant \varepsilon\, m(F \setminus F_n) + M\, m(F_n)$$
$$= \varepsilon\, m(F) + (M-\varepsilon)\, m(F_n),$$

og altså

$$0 \leqslant \lim I(f_n) \leqslant \varepsilon\, m(F).$$

Da ε var et vilkårligt tal >0, viser dette at $\lim I(f_n) = 0$.

§ 4. Lebesgue integralet.

Medens vi ved behandlingen af Riemann integralet i $\grave{R}^k$ på forhånd måtte indskrænke os til betragtning af begrænsede funktioner på $\grave{R}^k$ med begrænset støtte, idet det øvre og nedre Riemann integral kun kunde defineres for disse funktioner, vil vi ved behandlingen af Lebesgue integralet i $\grave{R}^k$ lege vilkårlige reelle funktioner f på $\grave{R}^k$ i betragtning, og vi vil endda tillade funktionerne at antage værdierne $+\infty$ og $-\infty$. De funktioner f vi betragter, er altså afbildninger af $\grave{R}^k$ ind i $\grave{R}^*$, hvor $\grave{R}^*$ er mængden af reelle tal udvidet med $+\infty$ og $-\infty$. En funktion, som ikke antager disse værdier, kaldes endelig. Fordelen ved at operere med $\grave{R}^*$ er, at en vilkårlig delmængde af $\grave{R}^*$ har en øvre grænse eller supremum (= mindste overtal) og en nedre grænse eller infimum (= største undertal), medens disse begreber for delmængder af $\grave{R}$ kun er defineret for henholdsvis opad begrænsede og nedad begrænsede mængder. Det understreges, at begrebet trappefunktion ikke ændres (for trappefunktioner tillades vedblivende kun endelige værdier).

Definitioner.

Lad $f = f(x)$ være en vilkårlig reel funktion på R^k med endelige eller uendelige værdier.

For en følge $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \dots$ af trappefunktioner vil vi skrive $\overline{f}_n \uparrow \geqslant f$ eller $f \leqslant \overline{f}_n \uparrow$, såfremt følgen er stigende, d.v.s. $\overline{f}_1 \leqslant \overline{f}_2 \leqslant \dots$, og $\lim \overline{f}_n \geqslant f$. Sådanne følger findes; f.eks. kan vi sætte $\overline{f}_n = n \cdot 1_{W_n}$ (*). Idet $I(\overline{f}_1) \leqslant I(\overline{f}_2) \leqslant \dots$, eksisterer grænseværdien $\lim I(\overline{f}_n)$; evt. er den $+\infty$. Nedre grænse for mængden af disse grænseværdier $\lim I(\overline{f}_n)$ for alle følger af trappefunktioner $\overline{f}_n \uparrow \geqslant f$ kaldes det øvre Lebesgue integral af f og betegnes $\overline{I}(f)$; altså:

$$\overline{I}(f) = \inf \lim I(\overline{f}_n).$$

$\overline{I}(f)$ kan eventuelt være $+\infty$ eller $-\infty$.

For en følge $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots$ af trappefunktioner vil vi skrive $\underline{f}_n \downarrow \leqslant f$ eller $f \geqslant \underline{f}_n \downarrow$, såfremt følgen er dalende, d.v.s. $\underline{f}_1 \geqslant \underline{f}_2 \geqslant \dots$, og $\lim \underline{f}_n \leqslant f$. Sådanne følger findes; f.eks. kan vi sætte $\underline{f}_n = -n \cdot 1_{W_n}$. Idet $I(\underline{f}_1) \geqslant I(\underline{f}_2) \geqslant \dots$, eksisterer grænseværdien $\lim I(\underline{f}_n)$; evt. er den $-\infty$. Øvre grænse for mængden af disse grænseværdier $\lim I(\underline{f}_n)$ for alle følger af trappefunktioner $\underline{f}_n \downarrow \leqslant f$ kaldes det nedre Lebesgue integral af f og betegnes $\underline{I}(f)$; altså:

$$\underline{I}(f) = \sup \lim I(\underline{f}_n).$$

$\underline{I}(f)$ kan evt. være $+\infty$ eller $-\infty$.

Vi vil bevise, at man for enhver funktion f har $\underline{I}(f) \leqslant \overline{I}(f)$. Det gælder om at vise, at vi for to vilkårlige følger af trappefunktioner $\overline{f}_n \uparrow \geqslant f$ og

(*) Vi benytter den faste betegnelse W_n for intervallet $\{x \mid |x_j| \leqslant n\} = [-n, n] \times \dots \times [-n, n]$.

$\underline{f_n} \downarrow \leqslant f$ har $\lim I(\underline{f_n}) \leqslant \lim I(\overline{f_n})$.

Hertil betragtes følgen af trappefunktioner $g_n = (\underline{f_n} - \overline{f_n}) \vee 0$. Idet $g_1 \geqslant g_2 \geqslant \cdots$ og $\lim g_n = 0$, fås af hjælpesætningen ovenfor, at $\lim I(g_n) = 0$.

Da vi nu for alle n har $\underline{f_n} - \overline{f_n} \leqslant g_n$, d. v. s. $\underline{f_n} \leqslant \overline{f_n} + g_n$ og dermed $I(\underline{f_n}) \leqslant I(\overline{f_n}) + I(g_n)$, har vi som ønsket $\lim I(\underline{f_n}) \leqslant \lim I(\overline{f_n})$.

Vi har altså for enhver funktion f

$$-\infty \leqslant \underline{I}(f) \leqslant \overline{I}(f) \leqslant +\infty.$$

Hvis f er en begrænset funktion med begrænset støtte, gælder

$$\underline{R}(f) \leqslant \underline{I}(f) \leqslant \overline{I}(f) \leqslant \overline{R}(f).$$

Thi for vilkårlige trappefunktioner $\overline{f}$ og $\underline{f}$, for hvilke $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$, kan vi benytte følgen $\overline{f}, \overline{f}, \ldots$ som følge $\overline{f_n}$ og følgen $\underline{f}, \underline{f}, \ldots$ som følge $\underline{f_n}$, hvoraf ses, at $I(\overline{f})$ kan forekomme som $\lim I(\overline{f_n})$ og $I(\underline{f})$ som $\lim I(\underline{f_n})$. Heraf ses, at hvis f er Riemann integrabel, er $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = I(f)$. Vi opnår altså en udvidelse af Riemanns integralbegreb gennem følgende definition:

<u>Når $-\infty < \underline{I}(f) = \overline{I}(f) < +\infty$, kaldes funktionen f Lebesgue integrabel, og den fælles værdi af $\underline{I}(f)$ og $\overline{I}(f)$ kaldes funktionens integral og betegnes $I(f)$.</u>

Vi vil senere hekskrive visse (men ikke alle) funktioner f, for hvilke $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = +\infty$, integralet $+\infty$, og visse (men ikke alle) funktioner f, for hvilke $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = -\infty$, integralet $-\infty$. Sådanne funktioner vil dog ikke blive kaldt integrable i egentlig forstand (vi vil sige, at de er integrable i udvidet forstand).

Enhver funktion f, som har værdien 0 uden for en endelig eller numerabel punktmængde A, er Lebesgue integrabel med integralet $I(f)=0$.

1) Lad os først antage A endelig. Hvis f kun antager endelige værdier, er f en trappefunktion, og af definitionen af integralet for en sådan ses, at $I(f)=0$. Hvis f ikke kun antager endelige værdier, sætter vi $\overline{f}_n = n \cdot 1_A$ og $\underline{f}_n = -n \cdot 1_A$. Da er f_n og $\underline{f}_n$ trappefunktioner og $\overline{f}_n \downarrow \geqslant f$ og $\underline{f}_n \uparrow \leqslant f$. Følgelig er $\overline{I}(f) \leqslant \lim I(\overline{f}_n) = 0$ og $\underline{I}(f) \geqslant \lim I(\underline{f}_n) = 0$. Af $0 \leqslant \underline{I}(f) \leqslant \overline{I}(f) \leqslant 0$ følger påstanden.

2) Lad os dernæst antage A numererbar. Lad A bestå af punkterne $x_1, x_2, \ldots$ og lad A_n være trappemængden bestående af de n punkter $x_1, \ldots, x_n$. Sættes nu $\overline{f}_n = n \cdot 1_{A_n}$ og $\underline{f}_n = -n \cdot 1_{A_n}$, er $\overline{f}_n$ og $\underline{f}_n$ trappefunktioner, og $\overline{f}_n \downarrow \geqslant f$ og $\underline{f}_n \uparrow \leqslant f$. Følgelig er $\overline{I}(f) \leqslant \lim I(\overline{f}_n) = 0$ og $\underline{I}(f) \geqslant \lim I(\underline{f}_n) = 0$. Af $0 \leqslant \underline{I}(f) \leqslant \overline{I}(f) \leqslant 0$ følger påstanden.

For eksempel ses, at Dirichlets funktion hørende til intervallet $[-1,1]$ (se side 24) er Lebesgue integrabel med integralet 0. Der findes altså begrænsede funktioner med begrænset støtte, som er Lebesgue integrable men ikke Riemann integrable.

Definition af de elementære regneoperationer i $\overline{R}^*$.

Vi definerer $a+b$ som $+\infty$, hvis en af addenderne er $+\infty$ og den anden endelig, eller hvis begge addender er $+\infty$, og som $-\infty$, hvis en af addenderne er $-\infty$ og den anden endelig, eller hvis begge addender er $-\infty$. Endelig defineres $+\infty+(-\infty)$ og $-\infty+(+\infty)$ som 0.

Vi definerer $a \cdot b$ som $+\infty$, hvis en eller begge fak-

toner uendelig og enten begge faktorer er >0 eller begge faktorer er <0. Vi definerer $a\cdot b$ som $+\infty$, hvis en eller begge faktorer er uendelig og en af dem er >0 og en af dem er <0. Endelig defineres $(+\infty)\cdot 0$, $0\cdot(+\infty)$, $(-\infty)\cdot 0$ og $0\cdot(-\infty)$ som 0.

$a-b$ defineres som $a+(-b)$, idet vi sætter $-(+\infty)=-\infty$ og $-(-\infty)=+\infty$. $\frac{a}{b}$ defineres som $a\cdot\frac{1}{b}$, idet vi sætter $\frac{1}{+\infty}=0$, $\frac{1}{-\infty}=0$.

En sum $a_1+\cdots+a_n$ defineres ved successiv udførelse af additionerne (idet man først danner a_1+a_2, så $(a_1+a_2)+a_3$, o.s.v.). En uendelig række $a_1+a_2+\cdots$ tilskrives summen $\lim(a_1+\cdots+a_n)$, såfremt dette udtryk har mening.

Elementære sætninger om Lebesgue integralet.

Vi betragter vilkårlige reelle funktioner på $\bar{R}^k$ med endelige eller uendelige værdier.

Hvis f er en sådan funktion og $\underline{f_n}\downarrow \leqslant f \leqslant \overline{f_n}\uparrow$, gælder $-\overline{f_n}\downarrow \leqslant -f \leqslant -\underline{f_n}\uparrow$, og omvendt. Heraf ses, at

$$\boxed{\overline{\underline{I}}(-f)=-\underline{I}(f) \text{ og } \underline{\overline{I}}(f)=-\overline{I}(f).}$$

For et endeligt $a>0$ følger af $\underline{f_n}\downarrow \leqslant f \leqslant \overline{f_n}\uparrow$, at $a\underline{f_n}\downarrow \leqslant af \leqslant a\overline{f_n}\uparrow$, og omvendt. Heraf ses, at

$$\boxed{\underline{I}(af)=a\underline{I}(f),\ \overline{I}(af)=a\overline{I}(f),\quad a\in\bar{R},\ a>0}.$$

Heraf aflæses: <u>Når f er Lebesgue integrabel, gælder det samme om af for ethvert $a\in\bar{R}$, og</u> $I(af)=aI(f)$.

Hvis $f\leqslant g$, er $\overline{I}(f)\leqslant\overline{I}(g)$ og $\underline{I}(f)\leqslant\underline{I}(g)$. Heraf: Hvis f og g er Lebesgue integrable og $f\leqslant g$, er $I(f)\leqslant I(g)$. Specielt: <u>Hvis f er Lebesgue integrabel og $f\geqslant 0$, er</u> $I(f)\geqslant 0$.

Lad f og g være givne funktioner med endelige øvre og nedre Lebesgue integraler. I så fald findes følger af trappefunktioner $f_n \uparrow \geqslant f$, $\underline{f}_n \downarrow \leqslant f$, $\bar{g}_n \uparrow \geqslant g$, $\underline{g}_n \downarrow \leqslant g$, for hvilke grænseværdierne af $I(\bar{f}_n)$, $I(\underline{f}_n)$, $I(\bar{g}_n)$, $I(\underline{g}_n)$ er endelige, og det er ved bestemmelsen af $\bar{I}(f)$, $\underline{I}(f)$, $\bar{I}(g)$, $\underline{I}(g)$ tilstrækkeligt at tage sådanne følger i betragtning.

For vilkårlige følger af den anførte art gælder nu

$$(\underline{f}_n + \underline{g}_n)\downarrow \leqslant f+g \leqslant (\bar{f}_n + \bar{g}_n)\uparrow$$

$$(\underline{f}_n \vee \underline{g}_n)\downarrow \leqslant f \vee g \leqslant (\bar{f}_n \vee \bar{g}_n)\uparrow, \quad (\underline{f}_n \wedge \underline{g}_n)\downarrow \leqslant f \wedge g \leqslant (\bar{f}_n \wedge \bar{g}_n)\uparrow.$$

Heraf fås følgende relationer, i hvilke som følge af de gjorte antagelser alle optrædende tal er endelige:

$$\lim I(\underline{f}_n) + \lim I(\underline{g}_n) = \lim I(\underline{f}_n + \underline{g}_n) \leqslant \underline{I}(f+g) \leqslant$$
$$\leqslant \bar{I}(f+g) \leqslant \lim I(\bar{f}_n + \bar{g}_n) = \lim I(\bar{f}_n) + \lim I(\bar{g}_n)$$

og

$$\lim I(\underline{f}_n) + \lim I(\underline{g}_n) = \lim I(\underline{f}_n \vee \underline{g}_n) + \lim I(\underline{f}_n \wedge \underline{g}_n) \leqslant$$
$$\leqslant \underline{I}(f \vee g) + \underline{I}(f \wedge g) \leqslant \bar{I}(f \vee g) + \bar{I}(f \wedge g)$$
$$\leqslant \lim I(\bar{f}_n \vee \bar{g}_n) + \lim I(\bar{f}_n \wedge \bar{g}_n) = \lim I(\bar{f}_n) + \lim I(\bar{g}_n).$$

Følgelig er

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{I}(f) + \underline{I}(g) \leqslant \underline{I}(f+g) \leqslant \bar{I}(f+g) \leqslant \bar{I}(f) + \bar{I}(g), \\ &\underline{I}(f) + \underline{I}(g) \leqslant \underline{I}(f \vee g) + \underline{I}(f \wedge g) \leqslant \bar{I}(f \vee g) + \bar{I}(f \wedge g) \leqslant \bar{I}(f) + \bar{I}(g). \end{aligned}}$$

Heraf aflæses: Når f og g er Lebesgue integrable, gælder det samme om $f+g$, $f \vee g$ og $f \wedge g$, og $I(f+g) = I(f) + I(g) = I(f \vee g) + I(f \wedge g)$.

Hermed er specielt vist:

Klassen af endelige Lebesgue integrable funktioner f på R^k er et lineært funktionsrum og et funktionsgitter, og integralet $I = I(f)$ er en lineær, ikke negativ funktional på dette funktionsrum.

Klassen af samtlige Lebesgue integrable funktioner (med endelige eller uendelige værdier) er intet lineært funktionsrum. [Dette ses f.eks. ved betragtning af funktionerne $f = (+\infty)\cdot 1_A$, $g = (+\infty)\cdot 1_A$, $h = (-\infty)\cdot 1_A$, hvor A er en mængde bestående af ét punkt. Disse er Lebesgue integrable, men $(f+g)+h$ og $f+(g+h)$ er ikke samme funktion.] Klassen er et funktionsgitter. Vi kan for denne klasse ikke sammenfatte de udledte egenskaber ved funktionalen $I = I(f)$ ved brug af glosene „lineær og ikke negativ", idet vi kun vil tale om lineære funktionaler i forbindelse med lineære funktionsrum. For klassen af samtlige Lebesgue integrable funktioner (med endelige eller uendelige værdier) må vi derfor henholde os til de nøjagtige formuleringer af resultaterne ovenfor og kan ikke henvise til almindelige resultater om lineære funktionaler.

Specielt bemærkes: Når f er Lebesgue integrabel, gælder det samme om $|f|$, og $|I(f)| \leqslant I(|f|)$. Thi $|f| = f \vee (-f)$ og $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. Endvidere: En funktion f er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis $f \vee 0$ og $f \wedge 0$ begge er Lebesgue integrable, og i så fald er $I(f) = I(f \vee 0) + I(f \wedge 0)$.

§6. Grænseovergang med Lebesgue integralet

Vi betragter vilkårlige reelle funktioner på $\bar{R}^k$ med endelige eller uendelige værdier.

Monoton grænseovergang.

Lad $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots$ være en stigende funktionsfølge. Da eksisterer grænsefunktionen $f = \lim f_n$, og da $f_n \leqslant f$ for alle n har vi $\overline{I}(f_1) \leqslant \overline{I}(f_2) \leqslant \cdots \leqslant \overline{I}(f)$. Altså eksisterer $\lim \overline{I}(f_n)$ og er $\leqslant \overline{I}(f)$.

Vi vil nu bevise følgende nøglesætning:

Hvis blot $\overline{I}(f_1) > -\infty$, gælder $\lim \overline{I}(f_n) = \overline{I}(f)$.

Vi antager altså $\overline{I}(f_1) > -\infty$. Da vi ved, at $\lim \overline{I}(f_n) \leqslant \overline{I}(f)$, er det nok at bevise at $\overline{I}(f) \leqslant \lim \overline{I}(f_n)$. Hvis $\lim \overline{I}(f_n) = +\infty$, er dette indlysende. Vi antager derfor i det følgende, at $\lim \overline{I}(f_n) < +\infty$.

Til afkortning sættes

$$\overline{I}(f_n) = a_n, \quad \lim \overline{I}(f_n) = a.$$

Vi har da

$$-\infty < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots, \quad \lim a_n = a < +\infty.$$

Vi vælger et endeligt positivt tal ε og skriver det som sum af en konvergent række med positive led:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots.$$

Vi vælger dernæst følger af trappefunktioner $\overline{f}_{1p} \uparrow \geqslant f_1$, $\overline{f}_{2p} \uparrow \geqslant f_2, \cdots$ således at $\lim_p I(\overline{f}_{1p}) \leqslant a_1 + \varepsilon_1$, $\lim_p I(\overline{f}_{2p}) \leqslant a_2 + \varepsilon_2, \ldots$. Vi har således følgende skema:

$$\overline{f}_{11} \leqslant \overline{f}_{12} \leqslant \overline{f}_{13} \leqslant \cdots, \quad \lim_p \overline{f}_{1p} \geqslant f_1, \quad \lim_p I(\overline{f}_{1p}) \leqslant a_1 + \varepsilon_1$$

$$\overline{f}_{21} \leqslant \overline{f}_{22} \leqslant \overline{f}_{23} \leqslant \cdots, \quad \lim_p \overline{f}_{2p} \geqslant f_2, \quad \lim_p I(\overline{f}_{2p}) \leqslant a_2 + \varepsilon_2$$

$$\overline{f}_{31} \leqslant \overline{f}_{32} \leqslant \overline{f}_{33} \leqslant \cdots, \quad \lim_p \overline{f}_{3p} \geqslant f_3, \quad \lim_p I(\overline{f}_{3p}) \leqslant a_3 + \varepsilon_3$$

$\cdots$

Vi vil nu successivt ændre funktionerne i anden, tredje, $\cdots$ række i dette skema, således at vi når til et nyt skema, hvor vi også i hver søjle har en stigende funktionsfølge. Vi begynder med at ændre anden række.

For ethvert p gælder

$$\overline{f}_{1p} \vee \overline{f}_{2p} + \overline{f}_{1p} \wedge \overline{f}_{2p} = \overline{f}_{1p} + \overline{f}_{2p}$$

og altså

$$I(\bar{f}_{1p} \vee \bar{f}_{2p}) + I(\bar{f}_{1p} \wedge \bar{f}_{2p}) = I(\bar{f}_{1p}) + I(\bar{f}_{2p}).$$

Vi har åbenbart $\bar{f}_{1p} \vee \bar{f}_{2p} \uparrow \geqslant f_1 \vee f_2 = f_2$ og $\bar{f}_{1p} \wedge \bar{f}_{2p} \uparrow \geqslant f_1 \wedge f_2 = f_1$. Af det sidste følger, at $\lim_p I(\bar{f}_{1p} \wedge \bar{f}_{2p}) \geqslant a_1$. Ved grænseovergang fås derfor

$$\lim_p I(\bar{f}_{1p} \vee \bar{f}_{2p}) + a_1 \leqslant a_1 + \varepsilon_1 + a_2 + \varepsilon_2,$$

eller $\lim_p I(\bar{f}_{1p} \vee \bar{f}_{2p}) \leqslant a_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. I stedet for anden række i skemaet kan vi altså skrive:

$$\bar{f}_{11} \vee \bar{f}_{21} \leqslant \bar{f}_{12} \vee \bar{f}_{22} \leqslant \bar{f}_{13} \vee \bar{f}_{23} \leqslant \cdots, \quad \lim_p \bar{f}_{1p} \vee \bar{f}_{2p} \geqslant f_2, \quad \lim_p I(\bar{f}_{1p} \vee \bar{f}_{2p}) \leqslant a_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Vi har altså ved forandringen blot „sat ε_1 over styr".

Nu gør vi det samme med denne nye anden række og skemaets tredje række, hvorved tredje række erstattes med

$$\bar{f}_{11} \vee \bar{f}_{21} \vee \bar{f}_{31} \leqslant \bar{f}_{12} \vee \bar{f}_{22} \vee \bar{f}_{32} \leqslant \bar{f}_{13} \vee \bar{f}_{23} \vee \bar{f}_{33} \leqslant \cdots, \quad \lim_p \bar{f}_{1p} \vee \bar{f}_{2p} \vee \bar{f}_{3p} \geqslant f_3,$$
$$\lim_p I(\bar{f}_{1p} \vee \bar{f}_{2p} \vee \bar{f}_{3p}) \leqslant a_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Idet vi fortsætter således, får vi, idet vi omdøber de i skemaet optrædende funktioner, følgende skema:

$$\begin{array}{ccccccc}
\bar{g}_{11} & \leqslant & \bar{g}_{12} & \leqslant & \bar{g}_{13} & \leqslant \cdots, & \lim_p \bar{g}_{1p} \geqslant f_1, \quad \lim_p I(\bar{g}_{1p}) \leqslant a_1 + \varepsilon_1 \\
\wedge & & \wedge & & \wedge & & \\
\bar{g}_{21} & \leqslant & \bar{g}_{22} & \leqslant & \bar{g}_{23} & \leqslant \cdots, & \lim_p \bar{g}_{2p} \geqslant f_2, \quad \lim_p I(\bar{g}_{2p}) \leqslant a_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\
\wedge & & \wedge & & \wedge & & \\
\bar{g}_{31} & \leqslant & \bar{g}_{32} & \leqslant & \bar{g}_{33} & \leqslant \cdots, & \lim_p \bar{g}_{3p} \geqslant f_3, \quad \lim_p I(\bar{g}_{3p}) \leqslant a_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\
\wedge & & \wedge & & \wedge & & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & &
\end{array}$$

hvor vi også i hver søjle har en stigende funktionsfølge.

Vi betragter nu den i diagonalen stående følge af trappefunktioner $\bar{g}_{11}, \bar{g}_{22}, \bar{g}_{33}, \cdots$. For denne gælder åbenbart $\bar{g}_{11} \leqslant \bar{g}_{22} \leqslant \bar{g}_{33} \leqslant \cdots$, og for ethvert q finder vi $\lim_n \bar{g}_{nn} \geqslant f_q$. Følgelig er $\lim_n \bar{g}_{nn} \geqslant f$,

hvoraf følger $\overline{I}(f) \leqslant \lim_n I(\bar{g}_{nn})$. For ethvert n er imidlertid $I(\bar{g}_{nn}) \leqslant a_n + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n < a + \varepsilon$. Vi finder derfor $\overline{I}(f) \leqslant a + \varepsilon$.

Følgelig er $\overline{I}(f) \leqslant a$, og beviset er fuldført.

Lad nu specielt $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots$ være en stigende følge af Lebesgue integrable funktioner og lad $f = \lim f_n$. Da er betingelsen $\overline{I}(f_1) > -\infty$ opfyldt, og vi har altså $\overline{I}(f) = \lim \overline{I}(f_n) = \lim I(f_n)$. Da vi for ethvert n har $f_n \leqslant f$, og dermed $I(f_n) = \underline{I}(f_n) \leqslant \underline{I}(f)$, har vi også $\lim I(f_n) \leqslant \underline{I}(f)$. Vi har altså

$$-\infty < \lim I(f_n) \leqslant \underline{I}(f) \leqslant \overline{I}(f) = \lim I(f_n)$$

og følgelig

$$\overline{I}(f) = \underline{I}(f) = \lim I(f_n) > -\infty.$$

Heraf følger:

<u>Grænsefunktionen $f = \lim f_n$ for en stigende følge $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots$ af Lebesgue integrable funktioner er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis $\lim I(f_n) < +\infty$. I bekræftende fald er $I(f) = \lim I(f_n)$.</u>

Denne sætning har naturligvis et modstykke:

<u>Grænsefunktionen $f = \lim f_n$ for en dalende følge $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots$ af Lebesgue integrable funktioner er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis $\lim I(f_n) > -\infty$. I bekræftende fald er $I(f) = \lim I(f_n)$.</u>

Sætningen kan fås ved at anvende den forrige på den stigende funktionsfølge $-f_1 \leqslant -f_2 \leqslant \cdots$.

Øvelse. Gennemfør beviset i analogi med beviset for den forrige sætning.

Talfølger i $\bar{R}^*$.

Lad $x_1, x_2, \cdots$ eller $\{x_n\}$ være en følge af tal i $\bar{R}^*$. Sammen med denne betragter vi talfølgen x_1, $x_1 \vee x_2, \cdots$ eller $\{x_1 \vee \cdots \vee x_n\}$. Disse to talfølger har

samme øvre grænse:

$$\sup\{x_n\} = \sup\{x_1 \vee \cdots \vee x_n\}.$$

Thi ethvert overtal for talfølgen $\{x_n\}$ er også et overtal for talfølgen $\{x_1 \vee \cdots \vee x_n\}$ og omvendt. Og øvre grænse for en talmængde er jo det mindste overtal for mængden. Da talfølgen $\{x_1 \vee \cdots \vee x_n\}$ er stigende, har den en grænseværdi $\lim(x_1 \vee \cdots \vee x_n)$, og denne er netop $\sup\{x_1 \vee \cdots \vee x_n\}$. Vi har altså

$$\sup\{x_n\} = \lim(x_1 \vee \cdots \vee x_n).$$

Analogt kan vi sammen med talfølgen $x_1, x_2, \cdots$ eller $\{x_n\}$ betragte talfølgen $x_1, x_1 \wedge x_2, \cdots$ eller $\{x_1 \wedge \cdots \wedge x_n\}$. Disse to talfølger har samme nedre grænse:

$$\inf\{x_n\} = \inf\{x_1 \wedge \cdots \wedge x_n\}.$$

Thi ethvert undertal for talfølgen $\{x_n\}$ er også et undertal for talfølgen $\{x_1 \wedge \cdots \wedge x_n\}$ og omvendt. Og nedre grænse for en talmængde er jo det største undertal for mængden. Da talfølgen $\{x_1 \wedge \cdots \wedge x_n\}$ er dalende, har den en grænseværdi $\lim(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)$, og denne er netop $\inf\{x_1 \wedge \cdots \wedge x_n\}$. Vi har altså

$$\inf\{x_n\} = \lim(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n).$$

Sammen med talfølgen $\{x_n\}$ betragter vi nu de to talfølger $\{y_n\}$ og $\{z_n\}$ definerede ved

$$y_1 = \inf\{x_1, x_2, \cdots\} \qquad z_1 = \sup\{x_1, x_2, \cdots\}$$
$$y_2 = \inf\{x_2, x_3, \cdots\} \qquad z_2 = \sup\{x_2, x_3, \cdots\}$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} \qquad z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

For disse gælder

$$y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots \leqq y_n \leqq \cdots \leqq \cdots \leqq z_n \leqq \cdots \leqq z_2 \leqq z_1.$$

Altså eksisterer grænseværdierne $\lim y_n$ og $\lim z_n$ og vi har

$$\lim y_n \leqq \lim z_n.$$

Disse to tal kaldes limes inferior og limes superior for talfølgen $\{x_n\}$ og betegnes $\liminf x_n$ og $\limsup x_n$:

$$\liminf x_n = \lim y_n, \quad \limsup x_n = \lim z_n.$$

Da ifølge det foranstående

$$y_n = \lim_p (x_n \wedge \cdots \wedge x_{n+p-1}), \quad z_n = \lim_p (x_n \vee \cdots \vee x_{n+p-1}),$$

ser vi, at

$$\liminf x_n = \lim_n \lim_p (x_n \wedge \cdots \wedge x_{n+p-1}),$$

$$\limsup x_n = \lim_n \lim_p (x_n \vee \cdots \vee x_{n+p-1}).$$

Bestemmelsen af $\liminf x_n$ og $\limsup x_n$ sker altså ved to grænseovergange. Ved $\liminf x_n$ dannes først for hvert n grænseværdien efter p for en aftagende talfølge, hvorved fås en stigende talfølge $\{y_n\}$, hvis grænseværdi er $\liminf x_n$. Ved $\limsup x_n$ dannes først for hvert n grænseværdien efter p for en stigende talfølge, hvorved fås en aftagende talfølge $\{z_n\}$, hvis grænseværdi er $\limsup x_n$.

Talfølgen $\{x_n\}$ er konvergent i $\bar{R}^*$, hvis og kun hvis $\liminf x_n = \limsup x_n$, og vi har da

$$\lim x_n = \liminf x_n = \limsup x_n.$$

Bemærk. Hvis alle $x_n \in \bar{R}$, betegnes konvergens i $\bar{R}^*$ med grænseværdi $+\infty$ eller $-\infty$ ofte som divergens mod $+\infty$ eller $-\infty$.

Sætninger om $\liminf$ og $\limsup$ for funktionsfølger.

En funktionsfølge $f_1, f_2, \cdots$ siges at have funktionen h som minorant, hvis $f_n \geq h$ for alle n. Følgen siges at have funktionen h som majorant, hvis $f_n \leq h$ for alle n.

Lad $f_1, f_2, \cdots$ være en følge af Lebesgue integrable funktioner, som har en Lebesgue integrabel minorant h, og for hvilken $\liminf I(f_n) < +\infty$.

Da er også funktionen $\liminf f_n$ Lebesgue integrabel, og

$$I(\liminf f_n) \leqslant \liminf I(f_n).$$

I følge det foranstående har vi

$\liminf f_n = \lim g_n$, hvor $g_n = \lim_p (f_n \wedge \cdots \wedge f_{n+p-1})$. For ethvert fast n er følgen af funktioner $f_n \wedge \cdots \wedge f_{n+p-1}$, $p = 1, 2, \cdots$ en dalende følge af Lebesgue integrable funktioner, og da alle funktionerne i følgen er $\geqslant h$ har vi for hvert p

$$I(f_n \wedge \cdots \wedge f_{n+p-1}) \geqslant I(h).$$

Af sætningen om monoton konvergens (med dalende funktionsfølge) sluttes derfor, at funktionen g_n er Lebesgue integrabel, og at

$$I(g_n) = \lim_p I(f_n \wedge \cdots \wedge f_{n+p-1}).$$

Nu er følgen $g_1, g_2, \cdots$ en stigende følge. Af sætningen om monoton konvergens (med stigende funktionsfølge) slutter vi derfor, at $\liminf f_n = \lim g_n$ er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis $\lim I(g_n) < +\infty$, og at vi i så fald har

$$I(\liminf f_n) = \lim I(g_n) = \lim_n \lim_p I(f_n \wedge \cdots \wedge f_{n+p-1}).$$

Da funktionen $f_n \wedge \cdots \wedge f_{n+p-1}$ er $\leqslant$ hver af funktionerne $f_n, \cdots, f_{n+p-1}$, må $I(f_n \wedge \cdots \wedge f_{n+p-1})$ være $\leqslant$ hvert af tallene $I(f_n), \cdots, I(f_{n+p-1})$, d. v. s.

$$I(f_n \wedge \cdots \wedge f_{n+p-1}) \leqslant I(f_n) \wedge \cdots \wedge I(f_{n+p-1}).$$

Vi har derfor

$$\lim_n \lim_p I(f_n \wedge \cdots \wedge f_{n+p-1}) \leqslant \lim_n \lim_p (I(f_n) \wedge \cdots \wedge I(f_{n+p-1})),$$

men her er højre side netop $\liminf I(f_n)$, som vi har forudsat $< +\infty$. Altså er $\liminf f_n$ Lebesgue integrabel, og $I(\liminf f_n) \leqslant \liminf I(f_n)$.

Sætningen har naturligvis et modstykke:

Lad $f_1, f_2, \cdots$ være en følge af Lebesgue integrable funktioner, som har en Lebesgue integrabel

majorant h, og for hvilken $\limsup I(f_n) > -\infty$. Da er også funktionen $\limsup f_n$ Lebesgue integrabel, og

$$I(\limsup f_n) \geqslant \limsup I(f_n).$$

Denne sætning fås ved at anvende den forrige på funktionsfølgen $-f_1, -f_2, \ldots$.

Øvelse. Gennemfør beviset i analogi med beviset for den forrige sætning.

Et ofte benyttet specialtilfælde af den første sætning kaldes Fatous lemma:

Lad $f_1, f_2, \ldots$ være en konvergent følge af ikke negative Lebesgue integrable funktioner, for hvilken $\liminf I(f_n) < +\infty$. Da er $\lim f_n$ Lebesgue integrabel, og

$$I(\lim f_n) \leqslant \liminf I(f_n).$$

Absolut majoriseret konvergens.

Vi vil nu bevise den hyppigst anvendte sætning om grænseovergang med Lebesgue integralet.

En funktionsfølge $f_1, f_2, \ldots$ siges at have funktionen h ($\geqslant 0$) som absolut majorant, hvis $|f_n| \leqslant h$ for alle n (altså hvis følgen har h som majorant og $-h$ som minorant).

Lad $f_1, f_2, \ldots$ være en konvergent følge af Lebesgue integrable funktioner, som har en Lebesgue integrabel absolut majorant h. Da er grænsefunktionen $\lim f_n$ Lebesgue integrabel og talfølgen $I(f_1), I(f_2), \ldots$ er konvergent med grænseværdien $I(\lim f_n)$:

$$I(\lim f_n) = \lim I(f_n).$$

Funktionsfølgen $f_1, f_2, \ldots$ har den Lebesgue integrable minorant $-h$ og den Lebesgue integrable majorant h. Af sætningerne om $\liminf$ og $\limsup$

ses da, at både $\liminf f_n$ og $\limsup f_n$ er Lebesgue integrabel og at

$$I(\liminf f_n) \leqslant \liminf I(f_n) \leqslant \limsup I(f_n) \leqslant I(\limsup f_n).$$

Imidlertid er følgen forudsat konvergent. Funktionerne $\liminf f_n$ og $\limsup f_n$ er altså den samme funktion, funktionen $\lim f_n$. Altså er $\lim f_n$ Lebesgue integrabel, og

$$I(\lim f_n) = \liminf I(f_n) = \limsup I(f_n),$$

hvormed sætningen er bevist.

§7. Lebesgue målet.

Ydre og indre Lebesgue mål. Lebesgue målelige punktmængder.

Lad A være en vilkårlig punktmængde i R^k. Vi betragter alle stigende følger af trappemængder $\overline{F}_1 \subseteq \overline{F}_2 \subseteq \dots$, således at $\bigcup \overline{F}_n \supseteq A$. Sådanne følger findes, f.eks. $W_1, W_2, \dots$. For enhver sådan følge gælder $m(\overline{F}_1) \leqslant m(\overline{F}_2) \leqslant \dots$. Altså eksisterer grænseværdien $\lim m(\overline{F}_n)$. Eventuelt er den $+\infty$. Disse grænseværdier danner en mængde af tal $\geqslant 0$ (eventuelt består mængden af $+\infty$ alene). Nedre grænse for denne talmængde kaldes det ydre Lebesgue mål af A og betegnes $m_y(A)$. Altså:

$$m_y(A) = \inf \lim m(\overline{F}_n).$$

Vi betragter dernæst alle dalende følger af trappemængder $\underline{F}_1 \supseteq \underline{F}_2 \supseteq \dots$, således at $\bigcap \underline{F}_n \subseteq A$. Sådanne følger findes, f.eks. $\emptyset, \emptyset, \dots$. For enhver sådan følge gælder $m(\underline{F}_1) \geqslant m(\underline{F}_2) \geqslant \dots \geqslant 0$. Altså eksisterer grænseværdien $\lim m(\underline{F}_n)$ og er $\geqslant 0$. Den er naturligvis endelig. Disse grænseværdier danner en mængde

af tal $\geqslant 0$. Øvre grænse for denne talmængde kaldes det indre Lebesgue mål af A og betegnes $m_i(A)$. Altså:

$$m_i(A) = \sup \lim m(\underline{F}_n).$$

Vi vil bevise, at man for enhver punktmængde A har $m_i(A) \leqslant m_y(A)$. Det gælder om at bevise, at vi for vilkårlige følger af trappemængder $\overline{F}_n$ og $\underline{F}_n$ af den omtalte art har $\lim m(\underline{F}_n) \leqslant \lim m(\overline{F}_n)$.

Hertil betragtes følgen af trappemængder $G_n = \underline{F}_n \setminus \overline{F}_n$. Idet $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots$ og $\bigcap G_n = \emptyset$, fås af hjælpesætningen ovenfor (side 32), at $\lim m(G_n) = 0$.

Da vi nu for alle n har $\underline{F}_n \subseteq \overline{F}_n \cup G_n$ og dermed $m(\underline{F}_n) \leqslant m(\overline{F}_n) + m(G_n)$, har vi som ønsket $\lim m(\underline{F}_n) \leqslant \lim m(\overline{F}_n)$.

Vi har altså for enhver punktmængde A

$$0 \leqslant m_i(A) \leqslant m_y(A) \leqslant +\infty.$$

Hvis A er en begrænset punktmængde, gælder

$$r_i(A) \leqslant m_i(A) \leqslant m_y(A) \leqslant r_y(A).$$

Thi for vilkårlige trappemængder $\underline{F}$ og $\overline{F}$, for hvilke $\underline{F} \subseteq A \subseteq \overline{F}$, kan vi benytte følgen $\overline{F}, \overline{F}, \ldots$ som følge $\overline{F}_n$ og følgen $\underline{F}, \underline{F}, \ldots$ som følge $\underline{F}_n$, hvoraf ses, at $m(\overline{F})$ kan forekomme som $\lim m(\overline{F}_n)$ og $m(\underline{F})$ som $\lim m(\underline{F}_n)$. Heraf ses, at hvis A er Riemann målelig, er $m_i(A) = m_y(A) = m(A)$. Vi opnår altså en udvidelse af Riemanns målbegreb gennem følgende definition:

Når $m_i(A) = m_y(A) < +\infty$, kaldes mængden A Lebesgue målelig, og den fælles værdi af $m_i(A)$ og $m_y(A)$ kaldes mængdens mål og betegnes $m(A)$.

Vi vil senere hilskrive visse (men ikke alle) mængder A, for hvilke $m_i(A) = m_y(A) = +\infty$, målet $+\infty$. Sådanne mængder vil dog ikke blive kaldt målelige i egentlig forstand (vi vil kalde dem målelige i udvidet

forstand).

Enhver endelig eller numerabel punktmængde A er Lebesgue målelig med målet $m(A) = 0$.

Hvis A er endelig, er A en trappemængde, og udsagnet er indlysende. Hvis A er numererbar og består af punkterne $x_1, x_2, \dots$, sætter vi $\overline{F}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Da er $\overline{F}_1 \subseteq \overline{F}_2 \subseteq \dots$ en stigende følge af trappemængder, og $\bigcup \overline{F}_n \supseteq A$ (nemlig $\bigcup \overline{F}_n = A$). Altså er $m_y(A) \leqslant \lim m(\overline{F}_n) = 0$. Da $0 \leqslant m_i(A) \leqslant m_y(A)$, må så også gælde $m_i(A) = 0$.

For eksempel ses, at mængden af rationale tal i intervallet $[-1, 1]$ (jfr. side 31) er Lebesgue målelig med målet 0. *Der findes altså begrænsede punktmængder, der er Lebesgue målelige men ikke Riemann målelige.*

Af ovenstående sætning følger specielt den kendte sætning, at et interval med positivt mål ikke er en numererbar mængde.

For enhver punktmængde A gælder

$$m_i(A) = \underline{I}(1_A), \quad m_y(A) = \overline{I}(1_A).$$

Mængden A er altså Lebesgue målelig, hvis og kun hvis funktionen 1_A *er Lebesgue integrabel, og i så fald er*

$$m(A) = I(1_A).$$

I kraft af denne sætning henføres teorien for Lebesgue målet til teorien for Lebesgue integralet.

Vi beviser først, at $m_y(A) = \overline{I}(1_A)$. 1) For enhver følge af trappemængder $\overline{F}_1 \subseteq \overline{F}_2 \subseteq \dots$, således at $\bigcup \overline{F}_n \supseteq A$, er $1_{\overline{F}_1}, 1_{\overline{F}_2}, \dots$ en følge af trappefunktioner, således at $1_{\overline{F}_n} \uparrow \geqslant 1_A$. Altså er $\lim m(\overline{F}_n) = \lim I(1_{\overline{F}_n}) \geqslant \overline{I}(1_A)$, hvoraf $m_y(A) \geqslant \overline{I}(1_A)$.
2) For enhver følge af trappefunktioner f_n, således

at $\overline{f_n}\uparrow \geqslant 1_A$, er for ethvert $a \in]0,1[$ følgen af punktmængder $\overline{F}_p = \{x \mid \overline{f_p}(x) > a\}$ en følge af trappemængder, således at $\overline{F}_1 \subseteq \overline{F}_2 \subseteq \cdots$ og $\cup \overline{F}_p \supseteq A$. For ethvert fast p gælder $\overline{f_n}\uparrow \geqslant a \cdot 1_{\overline{F}_p}$. Altså er $\lim_n I(\overline{f_n}) \geqslant I(a \cdot 1_{\overline{F}_p}) = a\, m(\overline{F}_p)$, og følgelig er $\lim_n I(\overline{f_n}) \geqslant a \lim_p m(\overline{F}_p) \geqslant a\, m_y(A)$. Da a var vilkårlig i intervallet $]0,1[$, følger heraf $\lim I(\overline{f_n}) \geqslant m_y(A)$, hvoraf $\overline{I}(1_A) \geqslant m_y(A)$.

Vi beviser dernæst, at $m_i(A) = \underline{I}(1_A)$. 1) For enhver følge af trappemængder $\underline{F}_1 \supseteq \underline{F}_2 \supseteq \ldots$, således at $\bigcap \underline{F}_n \subseteq A$, er $1_{\underline{F}_1}, 1_{\underline{F}_2}, \ldots$ en følge af trappefunktioner, således at $1_{\underline{F}_n}\downarrow \leqslant 1_A$. Altså er $\lim m(\underline{F}_n) = \lim I(1_{\underline{F}_n}) \leqslant \underline{I}(1_A)$, hvoraf $m_i(A) \leqslant \underline{I}(1_A)$. 2) For enhver følge af trappefunktioner $\underline{f}_n$, således at $\underline{f}_n \downarrow \leqslant 1_A$, er for ethvert $a \in]0,1[$ følgen af punktmængder $\underline{F}_p = \{x \mid \underline{f}_p(x) > a\}$ en følge af trappemængder, således at $\underline{F}_1 \supseteq \underline{F}_2 \supseteq \cdots$ og $\bigcap \underline{F}_p \subseteq A$. For ethvert fast p gælder $\underline{f}_n \downarrow \leqslant a \cdot 1_F + 1_{\underline{F}_p}$, hvor F er trappemængden $\{x \mid f_1(x) > 0\}$. Altså er $\lim_n I(\underline{f}_n) \leqslant a\, m(F) + m(\underline{F}_p)$, og følgelig $\lim_n I(\underline{f}_n) \leqslant a\, m(F) + \lim_p m(\underline{F}_p) \leqslant a\, m(F) + m_i(A)$. Da a var vilkårlig i intervallet $]0,1[$, følger heraf $\lim_n I(\underline{f}_n) \leqslant m_i(A)$, hvoraf $\underline{I}(1_A) \leqslant m_i(A)$.

For vilkårlige mængder A og B gælder

$$1_{A \cup B} = 1_A \vee 1_B, \quad 1_{A \cap B} = 1_A \wedge 1_B, \quad 1_{A \setminus B} = (1_A - 1_B) \vee 0.$$

Er A og B disjunkte, gælder

$$1_{A\cup B} = 1_A + 1_B.$$

Af egenskaberne ved Lebesgue integralet følger derfor straks:

Systemet af Lebesgue målelige punktmængder A i R^k er et mængdelegeme, og Lebesgue målet $m = m(A)$ er en additiv, ikke negativ mængdefunktion på dette legeme.

For en vilkårlig stigende følge af mængder $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ gælder

$$1_{A_1} \leqslant 1_{A_2} \leqslant \cdots \quad \text{og} \quad 1_{\cup A_n} = \lim 1_{A_n},$$

og for en vilkårlig dalende følge af mængder $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ gælder

$$1_{A_1} \geqslant 1_{A_2} \geqslant \cdots \quad \text{og} \quad 1_{\cap A_n} = \lim 1_{A_n}.$$

Af sætningerne om ~~monoton~~ grænseovergang for Lebesgue integralet (side 43) fås derfor:

For en stigende følge af Lebesgue målelige mængder $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ er $A = \cup A_n$ Lebesgue målelig hvis og kun hvis $\lim m(A_n) < +\infty$. I bekræftende fald er $m(A) = \lim m(A_n)$.

For en dalende følge af Lebesgue målelige mængder $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ er $A = \cap A_n$ Lebesgue målelig, og $m(A) = \lim m(A_n)$.

Vi fremhæver endvidere følgende sætning:

For en vilkårlig følge af Lebesgue målelige mængder $A_1, A_2, \cdots$, for hvilken $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < +\infty$, er mængden $A = \cup A_n$ Lebesgue målelig, og

$$m(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Hvis mængderne $A_1, A_2, \cdots$ specielt er parvis disjunkte, er

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Sættes nemlig

$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_1 \cup A_2$$
$$\cdots$$
$$B_p = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p$$
$$\cdots$$

har vi $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$, alle B_p er Lebesgue målelige, og $A = \bigcup B_p$. Endvidere er $m(B_p) \leqslant \sum_{n=1}^{p} m(A_n)$ og følgelig $\lim m(B_p) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. Altså er A Lebesgue målelig, og

$$m(A) = \lim m(B_p) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

For parvis disjunkte A_n har vi endvidere $m(B_p) = \sum_{n=1}^{p} m(A_n)$ og dermed

$$m(A) = \lim m(B_p) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

<u>Hvis A er en åben punktmængde og B er Lebesgue målelig, da er $A \cap B$ Lebesgue målelig.</u>

Vi kan antage $A \neq \emptyset$. Til ethvert $x \in A$ kan vi finde et åbent interval $J = J_1 \times \cdots \times J_k$, som er indeholdt i A og indeholder x, og hvor hvert J_j har rationale endepunkter. Altså er A foreningsmængde af sådanne intervaller, men da der af sådanne kun findes numererbart mange, er A foreningsmængde af endelig eller numerbart mange åbne intervaller. Hvis A er foreningsmængde af endelig mange åbne intervaller, er A en trappemængde, og $A \cap B$ er følgelig Lebesgue målelig. Hvis A er foreningsmængde af numererbart mange åbne intervaller $J^1, J^2, \ldots$, sætter vi $A_n = J^1 \cup \cdots \cup J^n$. Da er $A_1 \cap B \subseteq A_2 \cap B \subseteq \cdots$, $A \cap B = \bigcup (A_n \cap B)$, og mængderne $A_n \cap B$ er Lebesgue målelige. Endvidere $A_n \cap B \subseteq B$ og altså $m(A_n \cap B) \leqslant B$ for alle n, hvoraf $\lim m(A_n \cap B) \leqslant m(B)$. Følgelig er $A \cap B$ Lebesgue målelig.

Hvis A er en afsluttet punktmængde og B er Lebesgue målelig; da er $A \cap B$ Lebesgue målelig.

Thi $A \cap B = B \setminus [(\mathbb{R}^k \setminus A) \cap B]$, og da $\mathbb{R}^k \setminus A$ er åben, er $(\mathbb{R} \setminus A) \cap B$ Lebesgue målelig.

Specielt finder vi: Alle begrænsede åbne mængder og alle begrænsede afsluttede mængder er Lebesgue målelige. Thi er A en åben eller afsluttet begrænset mængde og vælges for B et interval, der indeholder A, er $A = A \cap B$.

Nulmængder.

En Lebesgue målelig mængde med målet 0 kaldes en nulmængde. Man ser, at en mængde A er en nulmængde, hvis og kun hvis $m_y(A) = 0$. Thi dette er åbenbart en nødvendig betingelse; og den er også tilstrækkelig, idet $0 \leqslant m_i(A) \leqslant m_y(A) = 0$ medfører, at $m_i(A) = 0$.

Hvis A og B er nulmængder, så er også $A \cup B$, $A \cap B$ og $A \setminus B$ nulmængder.

Hvis $A_1, A_2, \ldots$ alle er nulmængder, så er også $\bigcup A_n$ og $\bigcap A_n$ nulmængder.

Dette er umiddelbare konsekvenser af sætningerne ovenfor.

Hvis $A \subseteq B$, og B er en nulmængde, så er også A en nulmængde.

Thi $0 \leqslant m_y(A) \leqslant m_y(B) = 0$. Altså er $m_i(A) = 0$.

Når $A \subseteq B \subseteq C$, A og C er Lebesgue målelige og $m(A) = m(C)$, da er også B Lebesgue målelig (og $m(B) = m(A) = m(C)$).

Thi idet $B \setminus A \subseteq C - A$, ses af den foregående sætning, at $B \setminus A$ er en nulmængde, og sætningen følger af, at $B = A \cup (B \setminus A)$.

Som eksempler på nulmængder kan nævnes den

tomme mængde samt alle endelige eller numererbare mængder.

Nulfunktioner.

En funktion f kaldes en nulfunktion, hvis mængden $\{x \mid f(x) \neq 0\} = \{x \mid |f(x)| > 0\}$ er en nulmængde, altså hvis funktionen har værdien 0 pånær i en nulmængde.

En funktion f er en nulfunktion, hvis og kun hvis den er Lebesgue integrabel og $I(|f|) = 0$.

1) Antag, at f er en nulfunktion. Da er $N = \{x \mid |f(x)| > 0\}$ en nulmængde. Altså er $n \cdot 1_N$ Lebesgue integrabel med integralet $I(n \cdot 1_N) = n\, I(1_N) = 0$ for ethvert n. Endvidere er $1_N \leq 2 \cdot 1_N \leq \dots$. Altså er funktionen $\lim n \cdot 1_N = +\infty \cdot 1_N$ også Lebesgue integrabel, og $I(+\infty \cdot 1_N) = 0$. Da $0 \leq |f| \leq +\infty \cdot 1_N$, finder vi, at

$$0 \leq \underline{I}(|f|) \leq \overline{I}(|f|) \leq I(+\infty \cdot 1_N) = 0.$$

Følgelig er $\underline{I}(|f|) = \overline{I}(|f|) = 0$, d.v.s. $|f|$ er Lebesgue integrabel og $I(|f|) = 0$.

2) Antag f Lebesgue integrabel og $I(|f|) = 0$. Da er også $n|f|$ Lebesgue integrabel og $I(n|f|) = 0$ for ethvert n. Endvidere er $|f| \leq 2|f| \leq \dots$. Altså er funktionen $\lim n|f| = +\infty \cdot |f|$ Lebesgue integrabel og $I(+\infty \cdot |f|) = 0$. Sættes $N = \{x \mid |f(x)| > 0\}$, er imidlertid $0 \leq 1_N \leq +\infty \cdot |f|$. Altså er

$$0 \leq m_y(N) = \overline{I}(1_N) \leq I(+\infty \cdot |f|) = 0.$$

Følgelig er $m_y(N) = 0$, d.v.s. N er en nulmængde.

Ækvivalente funktioner.

Funktionen f siges at være ækvivalent med funktionen g, $f \sim g$, hvis mængden $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$

er en nulmængde, d.v.s. hvis funktionen $f-g$ er en nulfunktion.

Om et udsagn med en variabel $\Phi(x)$, hvor der for variabelbogstavet x kan indsættes vilkårlige punkter fra $\grave{R}^k$, siger man, at

$\Phi(x)$ er sandt <u>for næsten alle</u> $x \in \grave{R}^k$

eller

$\Phi(x)$ gælder <u>næsten overalt</u> i $\grave{R}^k$,

hvis $\{x \mid \text{non } \Phi(x)\}$ er en nulmængde. For „næsten overalt" ser man forkortelserne p.p. (presque partout) og a.e. (almost everywhere).

Med denne sprogbrug ser ækvivalensdefinitionen således ud:

$f \sim g$, <u>hvis</u> $f(x) = g(x)$ <u>næsten overalt</u>.

Det er klart, at den indførte relation er refleksiv og symmetrisk. At den også er transitiv følger af, at man for tre vilkårlige funktioner f, g og h har

$$\{x \mid f(x) \neq h(x)\} \subseteq \{x \mid f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \mid g(x) \neq h(x)\},$$

i forbindelse med sætninger om nulmængder. Det er altså virkelig en ækvivalensrelation, således at den modsvares af en klassedeling af mængden af alle funktioner på $\grave{R}^k$.

<u>Når</u> $f \sim g$, <u>da er enten begge funktioner Lebesgue integrable eller ingen af dem Lebesgue integrable. I første tilfælde er</u> $I(f) = I(g)$.

Thi sættes: $N = \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$, er f_N og g_N nulfunktioner; altså er de Lebesgue integrable med integralet 0. Antages nu f.eks., at f er Lebesgue integrabel, ses af $g = (f - f_N) + g_N$, at også g er Lebesgue integrabel og at $I(g) = I(f)$.

Dette resultat kan tolkes derhen, at det er muligt at opfatte Lebesgue integralet som defineret for ækvi-

valensklasser, ikke blot for de enkelte funktioner. Bemærk endvidere, at simple operationer som f. eks. sum og produkt anvendt på ækvivalente funktioner igen giver ækvivalente funktioner. Har man for en funktionsfølge $f_1, f_2, \cdots$ og en funktion f

$$f(x) = \lim f_n(x) \text{ for næsten alle } x,$$

vil det samme gælde, efter at man har erstattet hver funktion med en ækvivalent. I de fleste tilfælde har man derfor lidt sagt ingen grund til at skelne mellem ækvivalente funktioner.

Det er da også muligt at indføre <u>funktioner, som kun er defineret næsten overalt i R^k</u>; vilkårlige udvidelser til hele R^k vil jo tilhøre samme ækvivalensklasse. Specielt: <u>en funktion f defineret næsten overalt i R^k siges at være Lebesgue integrabel, hvis man ved at udvide den til hele R^k får en Lebesgue integrabel funktion</u>; i bekræftende fald sættes $I(f)$ = udvidelsens integral.

<u>Enhver Lebesgue integrabel funktion f er ækvivalent med en endelig funktion.</u>

Det gælder om at bevise, at mængden $N = \{x \mid |f(x)| = +\infty\}$ er en nulmængde. For ethvert n er $\frac{1}{n}|f|$ Lebesgue integrabel, og $I(\frac{1}{n}|f|) = \frac{1}{n} I(|f|)$. Endvidere er $|f| \geqslant \frac{1}{2}|f| \geqslant \cdots$ og $\lim \frac{1}{n}|f| = +\infty \cdot 1_N$. Altså er $+\infty \cdot 1_N$ Lebesgue integrabel og $I(+\infty \cdot 1_N) = 0$. Nu er

$$0 \leqslant m_y(N) = \overline{I}(1_N) \leqslant I(+\infty \cdot 1_N) = 0.$$

Altså er $m_y(N) = 0$.

Sammenholdt med den foranstående bemærkning viser den sidste sætning, at det ikke vilde have betydet nogen væsentlig indskrænkning i teorien for Lebesgue integralet, om vi helt igennem havde begrænset os til at betragte endelige funktioner. Vi har tilladt

endelige værdier, fordi det i mange ræsonnementer er fordelagtigt. Hvis vi havde indskrænket os til betragtning af endelige funktioner, måtte fremstillingen på mange punkter have været formet anderledes og mere indviklet.

§8. Multipelt integral.

Lad os antage $k > 1$ og lad koordinaterne $x_1, \cdots, x_k$ være delt i to klasser indeholdende henholdsvis p og q af dem, hvor $k = p + q$. Da den rækkefølge, hvori vi nævner koordinaterne, er uden betydning, kan vi for simpelheds skyld antage, at den første klasse består af $x_1, \cdots, x_p$, som vi også vil benævne $y_1, \cdots, y_p$, og den anden af $x_{p+1}, \cdots, x_k$, som vi også vil benævne $z_1, \cdots, z_q$. Foruden $\hat{R}^k = \hat{R}^{p+q}$ med $x = (x_1, \cdots, x_k)$ som variabelt punkt, kan vi da betragte de to rum $\hat{R}^p$ med $y = (y_1, \cdots, y_p)$ som variabelt punkt og $\hat{R}^q$ med $z = (z_1, \cdots, z_q)$ som variabelt punkt. Vi kan skrive

$$\hat{R}^k = \hat{R}^p \times \hat{R}^q, \quad x = (y, z).$$

Idet vi således nu på en gang har forskellige dimensionstal i brug, vil vi betegne Lebesgue målet med en indeks, idet dog $m = m(A)$ som hidtil vil blive benyttet som betegnelse for målet af mængder i $\hat{R}^k$, medens $m_p = m_p(A)$ og $m_q = m_q(A)$ vil blive benyttet som betegnelse for målet af mængder i $\hat{R}^p$ og $\hat{R}^q$.

For øvre og nedre Lebesgue integral og for integral af funktioner i $\hat{R}^k$ vil vi som hidtil benytte betegnelserne $\overline{I}$, $\underline{I}$ og I, medens vi for øvre og nedre Lebesgue integral og for integral af funktioner i $\hat{R}^p$ (d.v.s. funktioner af y) og $\hat{R}^q$ (d.v.s. funktioner af z) vil benytte betegnelserne $\overline{I}_y$, $\underline{I}_y$, I_y og $\overline{I}_z$, $\underline{I}_z$, I_z.

Ethvert interval J i $\grave{R}^k = \grave{R}^p \times \grave{R}^q$ kan skrives på formen

$$J = Y \times Z,$$

hvor Y er et interval i $\grave{R}^p$ og Z et interval i $\grave{R}^q$, og vi har åbenbart

$$m(J) = m_p(Y)\, m_q(Z).$$

Betegner $f = f(x) = f(y,z)$ en trappefunktion i $\grave{R}^k$, er $f(y,z)$ for fastholdt y en trappefunktion af z (d.v.s. i $\grave{R}^q$); dennes integral $I_z(f(y,z)) = g(y)$ er åbenbart en trappefunktion af y (d.v.s. i $\grave{R}^p$), og der gælder

$$I(f) = I_y(I_z(f(y,z))).$$

(Dette følger let af bemærkningen side 13-14.)

Lad nu $f = f(x) = f(y,z)$ være en vilkårlig reel funktion på $\grave{R}^k$ med endelige eller uendelige værdier. For en vilkårlig følge af trappefunktioner $\overline{f_n} = \overline{f_n}(x) = \overline{f_n}(y,z)$, for hvilken $\overline{f_n} \uparrow \geqslant f$, vil $\overline{f_n}(y,z)$ for hvert fastholdt y være en følge af trappefunktioner af z, for hvilken $\overline{f_n}(y,z) \uparrow \geqslant f(y,z)$, og vi har derfor

$$\overline{I}_z(f(y,z)) \leqslant \lim I_z(\overline{f_n}(y,z)).$$

Funktionerne $\overline{g_n}(y) = I_z(\overline{f_n}(y,z))$ danner en stigende følge af trappefunktioner af y; den angivne ulighed viser, at $\overline{g_n}(y) \uparrow \geqslant g(y) = \overline{I}_z(f(y,z))$. Følgelig er

$$\overline{I}_y(g(y)) \leqslant \lim I_y(\overline{g_n}(y)).$$

Da $I_y(\overline{g_n}(y)) = I_y(I_z(\overline{f_n}(y,z))) = I(\overline{f_n})$, ser vi, at

$$\overline{I}_y(\overline{I}_z(f(y,z))) \leqslant \lim I(\overline{f_n}).$$

Da dette gælder for enhver følge af trappefunktioner, for hvilken $\overline{f_n} \uparrow \geqslant f$, ser vi ved at erstatte højre med $\inf \lim I(\overline{f_n})$, hvor infimum skal tages over alle sådanne følger, at

$$\overline{I}_y(\overline{I}_z(f(y,z))) \leqslant \overline{I}(f).$$

På ganske samme måde (eller ved at erstatte f med $-f$) fås

$$\underline{I}(f) \leqslant \underline{I}_y(\underline{I}_z(f(y,z))).$$

Vi har følgelig ulighederne

$$\underline{I}(f) \leqslant \underline{I}_y(\underline{I}_z(f(y,z))) \leqslant \left\{ \begin{matrix} \underline{I}_y(\overline{I}_z(f(y,z))) \\ \overline{I}_y(\underline{I}_z(f(y,z))) \end{matrix} \right\} \leqslant \overline{I}_y(\overline{I}_z(f(y,z))) \leqslant \overline{I}(f).$$

Lad os nu antage, at f er Lebesgue integrabel. Af disse uligheder aflæses da både

$$I(f) = \underline{I}_y(\underline{I}_z(f(y,z))) = \overline{I}_y(\underline{I}_z(f(y,z)))$$

og

$$I(f) = \underline{I}_y(\overline{I}_z(f(y,z))) = \overline{I}_y(\overline{I}_z(f(y,z))).$$

Altså er begge funktioner $\underline{I}_z(f(y,z))$ og $\overline{I}_z(f(y,z))$ Lebesgue integrable funktioner af y, og vi har

$$I(f) = I_y(\underline{I}_z(f(y,z))) = I_y(\overline{I}_z(f(y,z))).$$

Funktionen $\overline{I}_z(f(y,z)) - \underline{I}_z(f(y,z))$ er derfor en Lebesgue integrabel funktion af y med integralet 0, og da den er $\geqslant 0$ for alle y må den være en nulfunktion i y (jfr. side 55). Punktmængden

$$N_0 = \{y \mid \underline{I}_z(f(y,z)) \neq \overline{I}_z(f(y,z))\}$$

er altså en nulmængde i R^p. Da $\underline{I}_z(f(y,z))$ er en Lebesgue integrabel funktion af y er endvidere (jfr. side 57) punktmængden

$$N_1 = \{y \mid |\overline{I}_z(f(y,z))| = +\infty\}$$

en nulmængde i R^p. Altså er

$$-\infty < \underline{I}_z(f(y,z)) = \overline{I}_z(f(y,z)) < +\infty,$$

d.v.s. $f(y,z)$ er en Lebesgue integrabel funktion af z, for <u>næsten alle</u> y (nemlig for alle $y \notin N_0 \cup N_1$), den næsten overalt i R^p definerede funktion $I_z(f(y,z))$

er en Lebesgue integrabel funktion af y (jfr. side 57) og

$$I(f) = I_y(I_z(f(y,z))).$$

Vi har hermed bevist Lebesgue-Fubinis sætning om fremstilling af et Lebesgue integral som dobbeltintegral:

Når $f = f(x) = f(y,z)$ er en Lebesgue integrabel funktion af x, er $f(y,z)$ for næsten alle y en Lebesgue integrabel funktion af z, dens integral $I_z(f(y,z))$ er en (næsten overalt defineret) Lebesgue integrabel funktion af y, og vi har

$$I(f) = I_y(I_z(f(y,z))).$$

I det specielle tilfælde, hvor f er den karakteristiske funktion af en målelig punktmængde A i $\bar{R}^k$, er $f(y,z)$ for fastholdt y den karakteristiske funktion af mængden $\{z \mid (y,z) \in A\}$ i $\bar{R}^q$. Sætningen antager da formen:

Når A er en Lebesgue målelig mængde i $\bar{R}^k$, er mængden $\{z \mid (y,z) \in A\}$ for næsten alle y i $\bar{R}^p$ en målelig mængde i $\bar{R}^q$, dens mål $m_q(\{z \mid (y,z) \in A\})$ er en (næsten overalt defineret) Lebesgue integrabel funktion af y, og vi har

$$m(A) = I_y(m_q(\{z \mid (y,z) \in A\})).$$

For $k=2$ og $k=3$ indeholder denne sætning klassiske sætninger om beregning af arealer og volumener ved „opdeling i striber" eller „opdeling i skiver".

Ved gentagen anvendelse giver Lebesgue-Fubinis sætning følgende sætning om multipelt integral.

Når $f = f(x) = f(x_1, \cdots, x_k)$ er en Lebesgue integrabel funktion af mere end en variabel, er

$$I(f) = I_{x_1}\left(I_{x_2}\left(\cdots I_{x_k}(f(x_1,x_2,\cdots,x_k))\cdots\right)\right),$$

hvor hver af de „indre" integrationer kan udføres for næsten alle punkter i rummet bestemt ved de resterende variable.

§ 9. Lebesgue målelige funktioner.

Vi har i det foregående vist, at visse operationer udført med Lebesgue integrable funktioner fører til Lebesgue integrable funktioner. Men allerede for en så enkel operation som multiplikation gælder dette ikke. Det er derfor vigtigt, at klassen af Lebesgue integrable funktioner på simpel måde kan udvides til en klasse af funktioner, der er således beskaffen, at alle sædvanlige operationer anvendt på funktioner af denne klasse fører til funktioner af klassen.

Vi begynder med at bevise:

Hvis f er en Lebesgue integrabel funktion på $\hat{R}$, da er mængden

$$\{x \in A \mid f(x) > a\}$$

Lebesgue målelig for enhver Lebesgue målelig mængde A og ethvert $a \in \hat{R}$.

Bevis. For ethvert n er funktionen

$$g_n = [n\cdot(f - a\cdot 1_A) \vee 0] \wedge 1_A$$

Lebesgue integrabel. Man ser, at $0 \leqq g_1 \leqq g_2 \leqq \cdots$ og $\lim g_n = 1_B$, hvor $B = \{x \in A \mid f(x) > a\}$. Specielt er $g_n \leqq 1_A$ for alle n. Altså er $\lim I(g_n) \leqq I(1_A) = m(A)$. Af sætningen om monoton grænseovergang sluttes derfor, at 1_B er Lebesgue integrabel. Altså er B Lebesgue målelig.

Vi indfører nu følgende definition:

En reel funktion f på $\bar{R}^k$ med endelige eller uendelige værdier kaldes Lebesgue målelig, hvis hver af mængderne

$$\{x \in A \mid f(x) > a\}$$
$$\{x \in A \mid f(x) \geqslant a\}$$
$$\{x \in A \mid f(x) < a\}$$
$$\{x \in A \mid f(x) \leqslant a\}$$

er Lebesgue målelig for enhver Lebesgue målelig mængde A og ethvert $a \in \bar{R}$.

Det bemærkes, at enhver af de fire betingelser er tilstrækkelig. Dette fremgår af at

$$\{x \in A \mid f(x) \geqslant a\} = \bigcap_n \{x \in A \mid f(x) > a - \tfrac{1}{n}\}$$
$$\{x \in A \mid f(x) < a\} = A \setminus \{x \in A \mid f(x) \geqslant a\}$$
$$\{x \in A \mid f(x) \leqslant a\} = \bigcap_n \{x \in A \mid f(x) < a + \tfrac{1}{n}\}$$
$$\{x \in A \mid f(x) > a\} = A \setminus \{x \in A \mid f(x) \leqslant a\}.$$

Øvelse: Vis, at det endda er nok at betragte rationale a.

Bemærk, at hvis f er Lebesgue målelig, er mængden

$$\{x \in A \mid f(x) = a\}$$

Lebesgue målelig for enhver Lebesgue målelig mængde A og ethvert $a \in \bar{R}^*$. Thi hvis $a \in \bar{R}$ er

$$\{x \in A \mid f(x) = a\} = \{x \in A \mid f(x) \geqslant a\} \cap \{x \in A \mid f(x) \leqslant a\},$$

og endvidere er

$$\{x \in A \mid f(x) = +\infty\} = \bigcap_n \{x \in A \mid f(x) > n\} \qquad (a = +\infty)$$
$$\{x \in A \mid f(x) = -\infty\} = \bigcap_n \{x \in A \mid f(x) < -n\} \qquad (a = -\infty).$$

Vort resultat ovenfor kan nu udtrykkes:

Enhver Lebesgue integrabel funktion er også Lebesgue målelig.

Det anvendte gælder ikke. Betragt f. eks. funktionen, som i hele $\bar{R}^k$ har værdien 1.

Sætninger om klassen af Lebesgue målelige funktioner.

Når f er Lebesgue målelig, da også kf for ethvert $k \in \bar{R}^*$; f^2; $|f|$; $|f|^p$ for ethvert $p \in \bar{R}$, $p>0$; $\frac{1}{f}$; den sidste forudsat at $f(x) \neq 0$ for alle $x \in \bar{R}^k$.

[Ved $(+\infty)^p$ for $p \in \bar{R}$, $p>0$ forstås naturligvis $+\infty$.]

Thi eksempelvis er

$$\{x \in A \mid f(x)^2 > a\} = \begin{cases} \{x \in A \mid f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in A \mid f(x) < -\sqrt{a}\} & \text{for } a \geq 0 \\ A & \text{for } a < 0. \end{cases}$$

$$\{x \in A \mid \frac{1}{f(x)} > a\} = \begin{cases} \{x \in A \mid f(x) < \frac{1}{a}\} \cap \{x \in A \mid f(x) > 0\} & \text{for } a > 0 \\ \{x \in A \mid f(x) > 0\} & \text{for } a = 0 \\ \{x \in A \mid f(x) < \frac{1}{a}\} \cup \{x \in A \mid f(x) > 0\} & \text{for } a < 0. \end{cases}$$

Når f og g er Lebesgue målelige, da også $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$, den sidste forudsat at $g(x) \neq 0$ for alle $x \in \bar{R}^k$.

Bevis. At $f+g$ er Lebesgue målelig ses i det tilfælde, hvor $f(x)$ og $g(x)$ ikke for noget x er uendelige med modsat fortegn, af at

$$\{x \in A \mid f(x)+g(x) > a\} = \bigcup \{x \in A \mid f(x) > r_1\} \cap \{x \in A \mid g(x) > r_2\},$$

hvor foreningsmængden tages over alle rationale r_1 og r_2 med $r_1 + r_2 > a$. Formelens rigtighed beror på, at der for vilkårlige tal $a \in \bar{R}$, $b \in \bar{R}^*$, $c \in \bar{R}^*$, hvor b og c ikke er uendelige med modsat fortegn, gælder $b+c > a$ $\Longleftrightarrow$ der findes rationale $r_1 < b$ og $r_2 < c$ med $r_1 + r_2 > a$.

Hvis der findes punkter x, for hvilke $f(x)$ og $g(x)$ er uendelige med modsat fortegn, skal man for $a<0$ under tegnet $\cup$ hæfte de to mængder

$$\{x \in A \mid f(x) = +\infty\} \cap \{x \in A \mid g(x) = -\infty\}$$

og

$$\{x \in A \mid f(x) = -\infty\} \cap \{x \in A \mid g(x) = +\infty\}.$$

For at vise, at fg er Lebesgue måleligt betragtes

$f_1 = f \vee 0$, $f_2 = f \wedge 0$, $g_1 = g \vee 0$, $g_2 = g \wedge 0$.

(Hver af disse funktioner er åbenbart Lebesgue måleligt.)

Da er $$fg = f_1 g_1 + f_1 g_2 + f_2 g_1 + f_2 g_2 .$$

(I et punkt x, hvor $f(x)g(x) = 0$, er alle fire led 0, og i et punkt, hvor $f(x)g(x) \neq 0$, er de tre led 0 og det fjerde $= f(x)g(x)$.) Det er derfor nok at vise, at hver af de fire funktioner $f_1 g_1$, $f_1 \cdot (-g_2)$, $(-f_2) \cdot g_1$, $(-f_2) \cdot (-g_2)$ er Lebesgue måleligt. Det vil atter sige, at det er nok at vise, at fg er Lebesgue måleligt, når f og g er Lebesgue måleligt og ikke negative. Det ses af, at

$$\{x \in A \mid f(x)g(x) > a\} = \begin{cases} A & \text{for } a < 0 \\ \bigcup \{x \in A \mid f(x) > r_1\} \cap \{x \in A \mid g(x) > r_2\} & \text{for } a \geqslant 0, \end{cases}$$

hvor foreningsmængden tages over alle positive rationale r_1 og r_2 med $r_1 r_2 > a$.

Målelighedeen af $f - g$ og $\frac{f}{g}$ følger af, at $f - g = f + (-g)$ og $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$.

Når f og g er Lebesgue måleligt, da også $f \vee g$ og $f \wedge g$.

Thi $$\{x \in A \mid f(x) \vee g(x) > a\} = \{x \in A \mid f(x) > a\} \cup \{x \in A \mid g(x) > a\}$$

og $$\{x \in A \mid f(x) \wedge g(x) > a\} = \{x \in A \mid f(x) > a\} \cap \{x \in A \mid g(x) > a\}.$$

For enhver følge $f_1, f_2, \ldots$ af Lebesgue måleligt funktioner er også $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\lim_n \sup f_n$ og $\lim_n \inf f_n$ Lebesgue måleligt.

Thi $$\{x \in A \mid \sup_n f_n(x) > a\} = \bigcup_n \{x \in A \mid f_n(x) > a\}$$

og $$\{x \in A \mid \inf_n f_n(x) \geqslant a\} = \bigcap_n \{x \in A \mid f_n(x) \geqslant a\}$$

og $\lim_n \sup f_n = \inf_n g_n$, hvor $g_n = \sup_{p \geqslant n} f_p$, medens $\lim_n \inf f_n = \sup_n h_n$, hvor $h_n = \inf_{p \geqslant n} f_p$.

For enhver følge $f_1, f_2, \ldots$ af Lebesgue målelige funktioner, der er konvergent i hele $\mathbb{R}^k$, er også $\lim_n f_n$ Lebesgue målelig.

Thi $\lim_n f_n = \lim_n \sup f_n$.

Når $f \sim g$, d.v.s. $f(x) = g(x)$ for næsten alle x, da er enten begge funktioner Lebesgue målelige eller ingen af dem Lebesgue målelige.

Thi $\{x \in A \mid f(x) > a\}$ og $\{x \in A \mid g(x) > a\}$ er samtidig Lebesgue målelige, idet f.eks. den sidste mængde fås af den første ved at fjerne $\{x \in A \mid f(x) > a, g(x) \leqslant a\}$ og tilføje $\{x \in A \mid g(x) > a \mid f(x) \leqslant a\}$. Som delmængder af nulmængden $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ er jo disse mængder Lebesgue målelige.

Også begrebet Lebesgue målelighed kan således opfattes som knyttet til ækvivalensklasser, ikke blot til de enkelte funktioner. Vi kan endvidere indskrænke funktioner, som kun er defineret næsten overalt i $\mathbb{R}^k$. En sådan kaldes Lebesgue målelig, hvis en (vilkårlig) udvidelse til hele $\mathbb{R}^k$ er Lebesgue målelig.

Vi vil nu beskæftige os med spørgsmålet om, hvilke Lebesgue målelige funktioner der er Lebesgue integrable. Vi beviser først:

En Lebesgue målelig funktion f er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis der findes Lebesgue integrable funktioner $\underline{g}$ og $\overline{g}$, således at $\underline{g} \leqslant f \leqslant \overline{g}$.

1) Hvis f er Lebesgue integrabel, er betingelsen opfyldt for $\underline{g} = f$, $\overline{g} = f$.

2) Hvis $\underline{g} \leqslant f \leqslant \overline{g}$, hvor $\underline{g}$ og $\overline{g}$ er Lebesgue integrable, sætter vi $h = |\underline{g}| \vee |\overline{g}|$. Da er også h Lebesgue integrabel, og $|f| \leqslant h$.

For ethvert n betragter vi nu mængderne

$$A_{n,\nu} = \{x \in W_n \mid f(x) \geqslant \frac{\nu}{n}\}, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n^2$$

$$A_{n,-\nu} = \{x \in W_n \mid f(x) \leqslant -\frac{\nu}{n}\}, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n^2.$$

Disse er alle målelige, og funktionen

$$f_n = \sum_{\nu=1}^{n^2} \frac{1}{n} \cdot 1_{A_{n,\nu}} + \sum_{\nu=1}^{n^2} \left(-\frac{1}{n}\right) \cdot 1_{A_{n,-\nu}}$$

er derfor integrabel. Dennes værdier er karakteriseret således:

For ethvert $x \notin W_n$ er $f_n(x) = 0$.

For ethvert $x \in W_n$, for hvilket $-\frac{1}{n} < f(x) < \frac{1}{n}$, er $f_n(x) = 0$.

For ethvert $x \in W_n$, for hvilket $\frac{\nu}{n} \leqslant f(x) < \frac{\nu+1}{n}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n^2 - 1)$, er $f_n(x) = \frac{\nu}{n}$.

For ethvert $x \in W_n$, for hvilket $f(x) \geqslant n$, er $f_n(x) = n$.

For ethvert $x \in W_n$, for hvilket $-\frac{\nu+1}{n} < f(x) \leqslant -\frac{\nu}{n}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n^2 - 1)$, er $f_n(x) = -\frac{\nu}{n}$.

For ethvert $x \in W_n$, for hvilket $f(x) \leqslant -n$, er $f_n(x) = -n$.

Heraf følger, at funktionsfølgen $f_1, f_2, \cdots$ er konvergent i hele R^R med grænsefunktionen f. Da $|f_n| \leqslant |f|$ for alle n, har følgen den integrable funktion h som absolut majorant. Af sætningen om absolut majoriseret konvergens (side 47) fremgår derfor, at f er Lebesgue integrabel.

Vi beviser dernæst:

Hvis f er Lebesgue målelig og $\underline{I}(f) > -\infty$, da er enten f Lebesgue integrabel eller $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = +\infty$.

Bevis. Da $\underline{I}(f) > -\infty$ kan vi vælge en følge af trappefunktioner $\underline{f_n} \downarrow \leqslant f$ således at $\lim \underline{I}(\underline{f_n}) > -\infty$. Vi sætter $g = \lim \underline{f_n}$. Ifølge sætningen om monoton grænseovergang (side 43) er g Le-

besque integrabel. Endvidere er $g \leqslant f$. Vi sætter nu $f_n = f \wedge (n \cdot 1_{W_n})$. Da er f_n Lebesgue målelig og $g \wedge 0 \leqslant f_n \leqslant n \cdot 1_{W_n}$. Da begge funktionerne $g \wedge 0$ og $n \cdot 1_{W_n}$ er Lebesgue integrable, følger af den foregående sætning, at f_n er Lebesgue integrabel. Imidlertid er $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots$ og $\lim f_n = f$. Hvis nu $\lim I(f_n) < +\infty$, er f Lebesgue integrabel ifølge sætningen om monoton grænseovergang (side 43). Hvis $\lim I(f_n) = +\infty$ er (idet $\underline{I}(f) \geqslant I(f_n)$ for alle n) $\underline{I}(f) = +\infty$ og altså også $\overline{I}(f) = +\infty$.

Ved anvendelse af sætningen på $-f$ fås følgende modstykke:

Hvis f er Lebesgue målelig og $\overline{I}(f) < +\infty$, da er enten f Lebesgue integrabel eller $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = -\infty$.

De to sidste sætninger kan sammenfattes på følgende måde:

For en Lebesgue målelig funktion f består kun fire muligheder:

1. Funktionen er Lebesgue integrabel.
2. $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = +\infty$.
3. $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = -\infty$.
4. $\underline{I}(f) = -\infty$, $\overline{I}(f) = +\infty$.

Funktioner med uendeligt integral.

En Lebesgue målelig funktion f, for hvilken $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = +\infty$, tilskrives integralet $I(f) = +\infty$, og en Lebesgue målelig funktion f, for hvilken $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = -\infty$, tilskrives integralet $I(f) = -\infty$. Sådanne

funktioner kaldes dog ikke Lebesgue integrable. Vi kan sige, at de er Lebesgue integrable i udvidet forstand. Ikke-målelige funktioner, for hvilke $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = +\infty$ eller $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = -\infty$, tilskrives ikke noget integral.

Bemærk: Enhver ikke-negativ målelig funktion er enten Lebesgue integrabel eller tilskrives integralet $I(f) = +\infty$. Thi da $\underline{I}(f) \geq 0$ er de to sidste af de ovennævnte fire muligheder udelukkede.

Punktmængder med endeligt mål.

En punktmængde U tilskrives målet $m(U) = +\infty$ såfremt den opfylder følgende to betingelser:

1. For enhver Lebesgue målelig mængde A er $U \cap A$ Lebesgue målelig.
2. $m_i(U) = m_y(U) = +\infty$.

Sådanne mængder kaldes dog ikke Lebesgue målelige. Vi kan sige, at de er Lebesgue målelige i udvidet forstand.

Mængden U tilskrives målet $m(U) = +\infty$, hvis og kun hvis funktionen 1_U tilskrives integralet $I(1_U) = +\infty$.

Bevis. 1) Hvis $I(1_U) = +\infty$, er 1_U målelig. Altså er $1_U \wedge 1_A = 1_{U \cap A}$ målelig for enhver målelig mængde A, og da $0 \leq 1_{U \cap A} \leq 1_A$ ses, at $1_{U \cap A}$ er integrabel. Følgelig er $U \cap A$ målelig. Endvidere er $m_i(U) = \underline{I}(1_U) = +\infty$, $m_y(U) = \overline{I}(1_U) = +\infty$ (jfr. side 50).

2) Hvis $m(U) = +\infty$, er 1_U målelig. Thi for enhver målelig mængde A og ethvert $a \in \mathbb{R}$ er $\{x \in A \mid 1_U(x) > a\}$ enten $\emptyset$, $U \cap A$ eller A. Endvidere er $\underline{I}(1_U) = m_i(U) = +\infty$, $\overline{I}(1_U) = m_y(U) = +\infty$. (jfr. side 50).

§10. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for Riemann integrabilitet.

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at en begrænset funktion f på $\dot{R}^k$ med begrænset støtte er Riemann integrabel, er, at f er kontinuert næsten overalt, altså at mængden af diskontinuitetspunkter for f er en nulmængde.

Bemærk, at der allerede i selve betingelsen indgår et begreb fra Lebesgues teori, ligesom det følgende bevis benytter Lebesgue integralet.

Halvkontinuert funktion (R. Baire 1899).

En reel funktion f på $\dot{R}^k$ med endelige eller uendelige værdier kaldes $\begin{cases}\text{opad}\\ \text{nedad}\end{cases}$ halvkontinuert i et punkt x_0, hvis mængden $\begin{cases}\{x \mid f(x) < a\}\\ \{x \mid f(x) > a\}\end{cases}$ for ethvert $\begin{cases}a > f(x_0)\\ a < f(x_0)\end{cases}$ har x_0 som indre punkt. (Specielt, hvis $f(x_0) = \begin{cases}+\infty\\ -\infty\end{cases}$.)

Man ser, at nødvendigt og tilstrækkeligt for, at f er kontinuert i x_0 er, at f er både opad og nedad halvkontinuert i x_0.

Eksempler. Tegn en funktion f på $\dot{R}$, der i et givet punkt x_0 har en grænseværdi $f(x_0-)$ fra venstre og en grænseværdi $f(x_0+)$ fra højre. Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at f er opad halvkontinuert i x_0 er, at $f(x_0) \geqslant f(x_0-) \vee f(x_0+)$. — Dirichlets funktion svarende til intervallet $[-1, 1]$ (side 24) er opad halvkontinuert i x_0, når $|x_0| > 1$ eller x_0 er rational, og nedad halvkontinuert i x_0, når $|x_0| > 1$ eller x_0 er irrational.

Funktionen f kaldes $\begin{cases}\text{opad}\\ \text{nedad}\end{cases}$ halvkontinuert i en mængde A, hvis den er $\begin{cases}\text{opad}\\ \text{nedad}\end{cases}$ halvkontinuert i ethvert $x_0 \in A$.

Man ser, at nødvendigt og tilstrækkeligt for, at f er $\begin{cases}\text{opad}\\ \text{nedad}\end{cases}$ halvkontinuert i $\dot{R}^k$, er, at mængden $\begin{cases}\{x \mid f(x) < a\}\\ \{x \mid f(x) > a\}\end{cases}$

er åben for ethvert $a \in \bar{R}$.

Heraf følger: Enhver halvkontinuert funktion f i $\bar{R}^k$ er Lebesgue målelig. Thi lad os f. eks. antage, at f er opad halvkontinuert. For enhver mængde A og ethvert $a \in \bar{R}$ er $\{x \in A \mid f(x) < a\} = A \cap \{x \mid f(x) < a\}$. Altså er $\{x \in A \mid f(x) < a\}$ fællesmængden for A og en målelig mængde, og følgelig målelig, når A er målelig (side 53).

Idet f er $\begin{cases} \text{opad} \\ \text{nedad} \end{cases}$ halvkontinuert (i et punkt x_0 eller i en mængde A) er $-f$ $\begin{cases} \text{nedad} \\ \text{opad} \end{cases}$ halvkontinuert (i x_0 eller i A).

Øvre og nedre limesfunktion.

Lad f være en reel funktion på $\bar{R}^k$ med endelige eller uendelige værdier. For et vilkårligt punkt x betragter vi en vilkårlig åben mængde A, der indeholder x, og danner $\sup_{y \in A} f(y)$. Den ved

$$\tilde{f}(x) = \inf_{A} \sup_{y \in A} f(y)$$

definerede funktion $\tilde{f}$, hvor infimum for hvert x skal tages over alle åbne mængder A, der indeholder x, kaldes den øvre limesfunktion for f. Tilsvarende kaldes den ved

$$\underline{f}(x) = \sup_{A} \inf_{y \in A} f(y)$$

definerede funktion $\underline{f}$, hvor supremum for hvert x skal tages over alle åbne mængder A, der indeholder x, den nedre limesfunktion for f.

Lad $J(x,h)$ for ethvert $x = (x_1, \cdots, x_k)$ og ethvert $h > 0$ betegne intervallet $]x_1 - h, x_1 + h[\times \cdots \times]x_k - h, x_k + h[$. Man efterviser let, at

$$\tilde{f}(x) = \lim_{h \to 0} \sup_{y \in J(x,h)} f(y) \quad \text{og} \quad \underline{f}(x) = \lim_{h \to 0} \inf_{y \in J(x,h)} f(y),$$

hvilket kort kan skrives

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y \to x} \sup f(y) \quad \text{og} \quad \underline{f}(x) = \lim_{y \to x} \inf f(y).$$

Dette forklarer benævnelsen: limesfunktion.

Det er klart, at

$$\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}.$$

Funktionen f er $\begin{cases} \text{opad} \\ \text{nedad} \end{cases}$ halvkontinuert i x, hvis og kun hvis $\begin{cases} f(x) = \overline{f}(x) \\ f(x) = \underline{f}(x) \end{cases}$. Altså er f kontinuert i x, hvis og kun hvis $\underline{f}(x) = \overline{f}(x)$, d.v.s.

mængden af diskontinuitetspunkter for f er $\{x \mid \underline{f}(x) < \overline{f}(x)\}$.

Differensen $\overline{f}(x) - \underline{f}(x)$ kaldes oscillationen af f i punktet x.

Den øvre limesfunktion af $\overline{f}$ er $\overline{f}$ selv. Thi for enhver åben mængde A gælder $\sup_{y \in A} \overline{f}(y) = \sup_{y \in A} f(y)$.

[Nemlig $\sup_{y \in A} \overline{f}(y) \geqslant \sup_{y \in A} f(y)$, idet $\overline{f} \geqslant f$, og $\sup_{y \in A} \overline{f}(y) \leqslant \sup_{y \in A} f(y)$, idet $\overline{f}(y) \leqslant \sup_{z \in A} f(z)$ for ethvert $y \in A$, ifølge definitionen af $\overline{f}$.]. Med andre ord: $\overline{f}$ er opad halvkontinuert i R^k. Yderligere gælder: Er g opad halvkontinuert i R^k og $g \geqslant f$, da er $g \geqslant \overline{f}$. Thi af $g \geqslant f$ følger $\overline{g} \geqslant \overline{f}$, og da g er opad halvkontinuert, er $g = \overline{g}$. Vi siger derfor, at $\overline{f}$ er den mindste opad halvkontinuerte majorant for f.

Tilsvarende fås: $\underline{f}$ er nedad halvkontinuert i R^k. Er g nedad halvkontinuert i R^k og $g \leqslant f$, da er $g \leqslant \underline{f}$. Vi siger derfor, at $\underline{f}$ er den største nedad halvkontinuerte minorant for f.

Lad nu specielt f være en begrænset funktion med begrænset støtte. Da er også $\overline{f}$ og $\underline{f}$ begrænsede funktioner med begrænset støtte. Da de er Lebesgue målelige, er de også Lebesgue integrable. Vi vil bevise:

Det øvre og nedre Riemann integral af en begrænset funktion f med begrænset støtte er lig med Lebesgue integralet af den øvre og nedre limesfunktion for f:

$$\underline{R}(f) = I(\underline{f}), \qquad \overline{R}(f) = I(\overline{f}).$$

Bevis. Det er nok at vise, at $\overline{R}(f) = \underline{I}(f)$.

1) For en vilkårlig trappefunktion $\overline{f} \geqslant f$ er $\overline{f}(x) \geqslant \tilde{f}(x)$ i ethvert punkt x, der er indre punkt af et konstansinterval for f, altså for næsten alle x. Følgelig er $\underline{I}(\overline{f}) \geqslant \underline{I}(\tilde{f})$. Ifølge definitionen af $\overline{R}(f)$ er da også $\overline{R}(f) \geqslant \underline{I}(\tilde{f})$.

2) For at vise, at $\overline{R}(f) \leqslant \underline{I}(\tilde{f})$, betragter vi et interval J, uden for hvilket $f(x) = 0$, og foretager en følge af delinger af J, således at følgende gælder:

a) ved hver deling er J inddelt i endelig mange disjunkte intervaller;

b) den $(n+1)$te deling er for hvert n en videredeling af den $n$te deling;

c) kantlængderne i samtlige delintervaller i den $n$te deling er $< \frac{1}{n}$.

For ethvert n betragter vi nu den trappefunktion f_n, som er $=0$ uden for J, og som i hvert af delintervallerne af den $n$te deling er lig med supremum af $f(x)$ i det pågældende interval.

En simpel overvejelse viser, at $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots$ og $\lim f_n = \tilde{f}$. Ifølge definitionen af nedre Lebesgue integral er derfor $\lim \underline{I}(f_n) \leqslant \underline{I}(\tilde{f})$. Da $\tilde{f}$ er Lebesgue integrabel, er følgelig $\lim I(f_n) \leqslant I(\tilde{f})$. [Tvivlsomt er $\lim I(f_n) = I(\tilde{f})$, men for beviset er det umpdvendigt at gøre brug heraf.] På den anden side er $\overline{R}(f) \leqslant I(f_n)$ for alle n og dermed $\overline{R}(f) \leqslant \lim I(f_n)$. Følgelig er $\overline{R}(f) \leqslant I(\tilde{f})$.

Rigtigheden af sætningen i paragraffens begyndelse indses nu, når man erindrer, at Riemann integrabilitet af en begrænset funktion f med begrænset støtte er defineret ved $\underline{R}(f) = \overline{R}(f)$, samt bemærker, at $I(f) = I(\tilde{f})$ hvis og kun hvis $\{x \mid f(x) < \tilde{f}(x)\}$ er en nulmængde.

I det specielle tilfælde, hvor f er den karakteristiske funktion af en punktmængde A, er $\overline{f}$ den karakteristiske funktion af afslutningen $\overline{A}$ af A, og $\underline{f}$ er den karakteristiske funktion af det indre $\mathring{A}$ af A. Dette følger umiddelbart af definitionen af disse begreber. Af sammenhængen mellem mål og integral (side 30 og 50) fås derfor:

Det ydre og indre Riemann mål af en begrænset punktmængde A i $\hat{R}^k$ er lig med Lebesgue målet af A's afslutning $\overline{A}$ og af A's indre $\mathring{A}$:

$$r_i(A) = m(\mathring{A}), \quad r_y(A) = m(\overline{A}).$$

Følgelig er forskellen $r_y(A) - r_i(A)$ lig med Lebesgue målet af A's rand $\overline{A} \setminus \mathring{A}$:

$$r_y(A) - r_i(A) = m(\overline{A} \setminus \mathring{A}).$$

Mængden er således Riemann målelig, hvis og kun hvis dens rand er en nulmængde.

§11. Lebesgue integrabilitet og Lebesgue målelighed i en punktmængde.

Vi har hidtil betragtet funktioner defineret på hele $\hat{R}^k$. En funktion f, der ikke nødvendigvis er defineret på hele $\hat{R}^k$, kaldes Lebesgue integrabel i (eller over) en punktmængde A tilhørende funktionens definitionsmængde, såfremt den i hele $\hat{R}^k$ definerede funktion f_A, der bestemmes ved

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{for } x \notin A, \end{cases}$$

er Lebesgue integrabel. I så fald kaldes $I(f_A)$ integralet af f over A og betegnes (f. eks.)

$$\int_A f(x)\, m(d\hat{R}^k).$$

Tilsvarende kaldes f Lebesgue målelig i A, såfremt f_A er Lebesgue målelig.

I praksis har kun det hilfalde interesse, hvor A er målelig eller evt. har målet $+\infty$.

De grundlæggende sætninger om Lebesgue integrable og Lebesgue målelige funktioner overføres umiddelbart til det tilfælde, hvor talen er om funktioner defineret i en fast mængde $\mathcal{E}$, som er henholdsvis integrable eller målelige i $\mathcal{E}$.

Af særlig interesse for anvendelserne er følgende sætninger:

Hvis f er integrabel over en mængde $\mathcal{E}$, da også over enhver målelig delmængde A af $\mathcal{E}$.

Thi $f_A = f_{\mathcal{E}} \cdot 1_A$ er målelig og har den integrable numeriske majorant $|f_{\mathcal{E}}|$.

Hvis f er integrabel over en mængde $\mathcal{E}$, og A og B er disjunkte målelige delmængder af $\mathcal{E}$, da er

$$\int_{A\cup B} f(x)\, m(dR^k) = \int_A f(x)\, m(dR^k) + \int_B f(x)\, m(dR^k).$$

Thi $f_{A\cup B} = f_A + f_B$.

Hvis f er integrabel over en mængde $\mathcal{E}$, og $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ er en stigende følge af målelige delmængder af $\mathcal{E}$, da er

$$\int_{\bigcup A_n} f(x)\, m(dR^k) = \lim \int_{A_n} f(x)\, m(dR^k).$$

Thi $f_{\bigcup A_n} = \lim f_{A_n}$, og følgen $f_{A_1}, f_{A_2}, \dots$ har den integrable numeriske majorant $|f_A|$.

Vi nævner endvidere:

Hvis f er målelig i $\mathcal{E}$, da også i enhver målelig delmængde A af $\mathcal{E}$.

I tilfældet $k=1$ benytter vi for Lebesgue integralet over et interval med endepunkterne a og b den sædvanlige betegnelse $\int_a^b f(x)\,dx$.

Det volder ikke vanskelighed, at man benytter samme betegnelse, uanset hvilken af de fire intervaltyper, talen er

om, idet de jo kun adskiller sig ved nulmængder. Som sædvanlig defineres for $b<a$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Med disse betegnelser har man <u>indskudsreglen</u>

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Det <u>ubestemte Lebesgue integral</u> af en funktion f, der er Lebesgue integrabel i $\mathcal{E}$, hvor $\mathcal{E}$ betegner et interval eller evt. en halvlinie eller hele $\bar{R}$, defineres ved

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \text{konstant},$$

hvor a betegner et punkt af $\mathcal{E}$ (i kraft af indskudsreglen ligegyldigt hvilket).

<u>$F(x)$ er en kontinuert funktion</u>. Thi lad $x_n \to x_0$. Differensen $F(x_0) - F(x_n)$ er $\pm$ integralet $I(f_{A_n})$, hvor A_n er det åbne interval med endepunkterne x_n og x_0 (plus, hvis $x_n < x_0$, og minus, hvis $x_n > x_0$). Følgen af funktioner f_{A_n} konvergerer mod 0 og har den integrable numeriske majorant $|f_{\mathcal{E}}|$. Følgelig gælder $\lim I(f_{A_n}) = 0$.

Sluttelig anføres et par formler, der bekvemt kan udtrykkes ved hjælp af integralregnet:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x-k)\,dx \;;\quad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx.$$

Formlernes rigtighed sluttes af, at de gælder for trappefunktioner.

Vi vil ikke her systematisk behandle generalisationer af alle integralregningens kendte regler til Lebesgue integrable funktioner. I de tilfælde, hvor vi i det følgende får brug for sådanne generalisationer, vil vi bevise dem.

§ 12. Differentiation og integration.

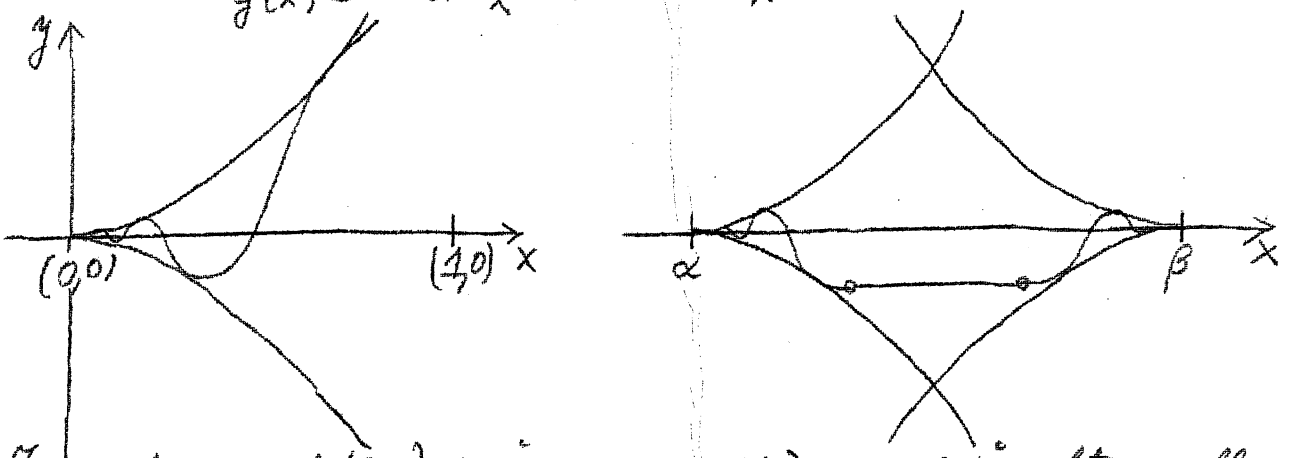
Volterras eksempel (V. Volterra 1881).

For funktionen g defineret på den positive halvakse $\{x \mid x>0\}$ ved

$$g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$$

har vi

$$g'(x) = -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}.$$



I nærheden af $(0,0)$ svinger $y=g(x)$ uendelig ofte mellem de to parabler $y=x^2$ og $y=-x^2$; vilkårlig tæt ved 0 har g maxima og minima. Af udtrykket for g' fremgår, at der vilkårlig tæt ved 0 findes punkter x, hvor $g'(x)=1$, såvel som punkter x, hvor $g'(x)=-1$. Idet $\left|\sin\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{x}$ for alle $x>0$, ses at $|g'(x)|<3$ for alle $x>0$.

Med $g_{\alpha\beta}$ betegner vi den funktion på $]\alpha,\beta[$, der fås ud fra funktionen g forskudt stykket α, idet $g_{\alpha\beta}$ følger denne forskudte funktion fra α til det sidste ekstremumspunkt $\alpha+k$ før midtpunktet $\frac{\alpha+\beta}{2}$, derpå fastholder ekstremumsværdien til $\beta-k$, hvorefter definitionen fuldendes ved at vi forlanger symmetri om $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Altså:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^2\sin\frac{1}{x-\alpha} & \text{for } \alpha<x\leqq\alpha+k \\ k^2\sin\frac{1}{k} & \text{for } \alpha+k\leqq x\leqq\beta-k \\ (\beta-x)^2\sin\frac{1}{\beta-x} & \text{for } \beta-k\leqq x<\beta. \end{cases}$$

Da det ikke fremgår af betegnelserne, bemærkes, at k afhænger af intervallængden $\beta-\alpha$.

Funktionen $g_{\alpha\beta}$ er differentiabel og $g'_{\alpha\beta}$ kontinuert i hele $]\alpha,\beta[$, men vilkårlig tæt ved α og β findes punkt-

ter x, hvor $g'_{\alpha\beta}(x) = 1$, såvel som punkter x, hvor $g'_{\alpha\beta}(x) = -1$. For alle x i $]\alpha,\beta[$ gælder $|g'_{\alpha\beta}(x)| < 3$.

Symmetrisk om midtpunktet i et afsluttet interval $[a,b]$ tænkes nu valgt et åbent delinterval $]\alpha_1,\beta_1[$, symmetrisk om midtpunkterne i hvert af de to resterende afsluttede intervaller $[a,\alpha_1]$ og $[\beta_1,b]$ tænkes valgt åbne delintervaller $]\alpha_2,\beta_2[$ og $]\alpha_3,\beta_3[$, i næste skridt tænkes på tilsvarende måde valgt fire åbne intervaller, o.s.v. Figuren viser de første af intervallerne $]\alpha_1,\beta_1[$, $]\alpha_2,\beta_2[$, $\cdots$, $]\alpha_n,\beta_n[$, $\cdots$.



Idet vi med Z betegner mængden

$$Z = [a,b] \setminus \big( ]\alpha_1,\beta_1[\cup]\alpha_2,\beta_2[\cup \cdots \cup]\alpha_n,\beta_n[\cup \cdots \big),$$

vil vi undersøge den funktion f på $[a,b]$, der defineres ved

$$f(x) = \begin{cases} g_{\alpha_n\beta_n}(x) & \text{for } \alpha_n < x < \beta_n,\ n = 1,2,\cdots \\ 0 & \text{for } x \in Z. \end{cases}$$

Man kan danne sig en forestilling om det geometriske billede af f ved at indføre billedet af $g_{\alpha_1\beta_1}$ (med tilhørende parabelbuer) i stedet for det punkterede stykke $]\alpha_1,\beta_1[$ på figuren, o.s.v.

Det er klart, at f er differentiabel i hvert $x \in]\alpha_n,\beta_n[$, $n = 1,2,\cdots$. I et vilkårligt $x \in Z$ er f differentiabel med $f'(x) = 0$. Dette ses af

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| = \left|\frac{f(x+h)}{h}\right| \leqslant |h|,$$

hvor vurderingen fremkommer således: 1) Hvis $x+h \in Z$ er $f(x+h) = 0$. 2) Hvis $x+h \notin Z$, er $x+h \in]\alpha_n,\beta_n[$ for et vist n, d.v.s. $x \leqslant \alpha_n < x+h < \beta_n$, idet vi eksempelvis tænker os $h > 0$; følgelig er

$$|f(x+h)| = |g_{\alpha_n\beta_n}(x+h)| \leqslant (x+h-\alpha_n)^2 \leqslant h^2.$$

Funktionen f er således differentiabel i hele $[a,b]$. Differentialkvotienten f' er begrænset, nemlig $|f'(x)|<3$ for alle $x\in[a,b]$.

Det er klart, at f' er kontinuert for ethvert $x\in]\alpha_n,\beta_n[$, $n=1,2,\dots$. Betragter vi derimod et vilkårligt $x\in Z$, findes for ethvert $\delta>0$ et intervalendepunkt α_n eller β_n, hvis afstand fra x er mindre end δ, — afstanden fra x til et af punkterne α_1 og β_1 er jo mindre end $\frac{1}{2}(b-a)$, afstanden fra x til et af punkterne $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3,\beta_3$ er mindre end $\frac{1}{4}(b-a)$, o.s.v. —, og i $]\alpha_m,\beta_m[$ findes jo vilkårlig tæt ved α_n og β_n, specielt inden for afstanden δ fra x, punkter t, hvor $f'(t)=1$, såvel som punkter t, hvor $f'(t)=-1$.

Mængden af diskontinuitetspunkter for f' er derfor Z. Nu er

$$m(Z)=(b-a)-\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n).$$

Ved at disponere således, at $\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)<(b-a)$, opnår vi, at $m(Z)>0$. Ifølge §10 vil f' da ikke være Riemann integrabel.

Volterras eksempel viser således, at en funktion kan være differentiabel i et interval med en begrænset differentialkvotient, uden at denne er Riemann integrabel. Denne mangel har Lebesgue integralet ikke.

Sætning.

Når en funktion f er differentiabel i et afsluttet interval $[a,b]$ med en begrænset differentialkvotient f', da er f' Lebesgue integrabel og

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a).$$

Det kan oplyses, at man ved at slette forudsætningen om, at f' skal være begrænset, får en ukorrekt sætning. Et eksempel:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{for } -1\le x\le 0\\ x^2\sin\frac{1}{x^2} & \text{for } 0<x\le 1.\end{cases}$$

Bevis for sætningen. Idet f tænkes udvidet således at det geometriske billede suppleres ud over $(b, f(b))$ med tangenten i dette punkt, vil differenskvotienten

$$g_h(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

for fasthodt $h>0$ være en kontinuert (endda differentiabel) funktion af x på $[a,b]$. Vælger vi en følge af positive tal $h_1, h_2, \cdots$ med $\lim h_n = 0$, vil funktionsfølgen $g_{h_1}, g_{h_2}, \cdots$ være konvergent i $[a,b]$ med f' som grænsefunktion. At f' er forudsat begrænset, sikrer nu, at vi kan anvende Lebesgues sætning om majoriseret konvergens (side 47). I følge differentialregningens middelværdisætning har vi jo, at der for ethvert $x \in [a,b]$ og ethvert $h>0$ findes et θ i $]0,1[$ for hvilket $g_h(x) = f'(x+\theta h)$; da $|f'(t)| \leqslant C$ for $a \leqslant t \leqslant b$ og dermed for $a \leqslant t < \infty$, er således også $|g_{h_n}| \leqslant C$ for alle n. Vi har derfor:

f' er Lebesgue integrabel og $\int_a^b f'(x)\,dx = \lim \int_a^b g_{h_n}(x)\,dx$.

Beviset fuldføres nu ved følgende regning:

$$\int_a^b g_h(x)\,dx = \int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,dx = \frac{1}{h}\int_{a+h}^{b+h} f(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx \longrightarrow f(b)-f(a) \quad \text{for } h \to 0;$$

(ved grænseovergangen her benyttes kontinuiteten af den udvidede funktion f i a og b).

<u>Tilfølgelse</u>. Ved anvendelse af sætningen på et delinterval $[a,x]$ fås

$$f(x) = \int_a^x f'(t)\,dt + f(a),$$

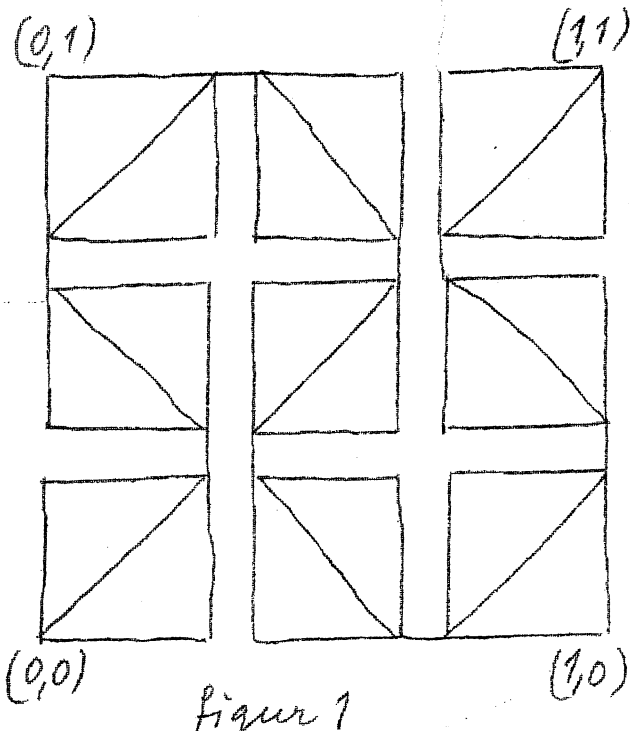
d.v.s. under de anførte forudsætninger er f <u>et ubestemt integral af</u> f'.

§13. Osgoods kurve.

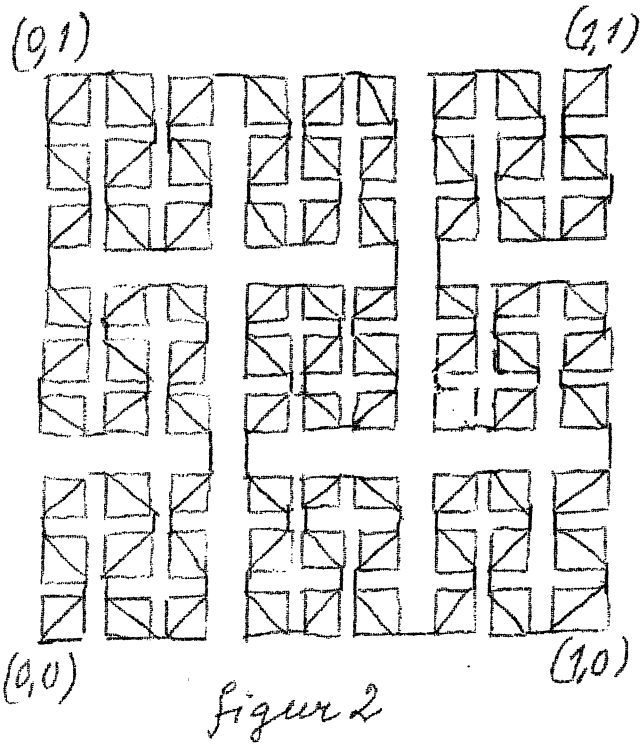
En kontinuert kurve $(x,y)=(f(t),g(t))$, $0\leqslant t\leqslant 1$, uden multiple punkter, der udgør en punktmængde i planen med positivt mål.

For enhver kontinuert kurve $(x,y)=(f(t),g(t))$, $0\leqslant t\leqslant 1$, er punktmængden $K=\{(f(t),g(t)) \mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$ en afsluttet begrænset punktmængde i planen, altså målelig. Peanos kurve (side 9) viser, at målet $m(K)$ kan være positivt. Peanos kurve har imidlertid multiple punkter, d.v.s. punkter, der optræder for mere end en parameterværdi. Kurver uden multiple punkter, for hvilke $m(K)>0$, kan fås ved en simpel ændring af Peanos konstruktion. Følgende eksempel skyldes W. F. Osgood (1903).

Af kvadratet $A=[0,1]\times[0,1]$ udskæres fire strimler, således at der resterer 9 kvadrater. Med A_1 betegner vi den på figur 1 viste afsluttede trappemængde bestående af de 9 afsluttede kvadrater og forbindende liniestykker. Vi vælger strimlerne således, at $m(A_1)>\frac{1}{2}$. Vi danner den kontinuerte kurve $(x,y)=(f_1(t),g_1(t))$,



figur 1



figur 2

$0 \leqslant t \leqslant 1$, bestående af de viste diagonaler og de forbindende liniestykker, gennemløbet således at $t=0$ og $t=1$ svarer hi $(x,y)=(0,0)$ og $(x,y)=(1,1)$ og $t=\frac{1}{17}, \frac{2}{17}, \cdots, \frac{16}{17}$ hi knækpunkterne, og således at hvert liniestykke gennemløbes med konstant hastighed.

Af hvert af de 9 kvadrater udskærer vi nu fire striber, således at der resterer 81 kvadrater. Med A_2 betegner vi den på figur 2 viste afsluttede trappemængde bestående af de 81 afsluttede kvadrater og forbindende liniestykker, dels dem, der oprådde i A_1, dels nye. Vi vælger strimlerne således, at $m(A_2) > \frac{1}{2}$. Vi danner nu den kontinuerte kurve $(x,y)=(f_2(t), g_2(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, bestående af de viste diagonaler og de forbindende liniestykker, gennemløbet således, at $t=0$ og $t=1$ svarer hi $(0,0)$ og $(1,1)$ og $t=\frac{1}{289}, \frac{2}{289}, \cdots, \frac{16}{289}, \frac{1}{17}, \frac{2}{17}, \frac{35}{289}, \frac{36}{289}, \cdots, \frac{50}{289}, \frac{3}{17}, \frac{4}{17}, \frac{69}{289}, \cdots, \frac{288}{289}$ hi knækpunkterne, og således at hvert liniestykke gennemløbes med konstant hastighed.

Idet vi fortsætter således, fås i det n^{te} skridt en mængde A_n med $m(A_n) > \frac{1}{2}$ og en kurve $(x,y)=(f_n(t), g_n(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, sammensat af diagonaler i 9^n kvadrater og forbindende liniestykker, hvert gennemløbet med konstant hastighed. Tre $t=0$ og $t=1$ svarer $(0,0)$ og $(1,1)$, og i de parameterintervaller, der svarer hi de forbindende liniestykker for den $(n-1)^{te}$ kurve, er $(f_{n-1}(t), g_{n-1}(t)) = (f_n(t), g_n(t))$.

Idet kvadraterne i A_n har kantlængde $< \frac{1}{3^n}$, ses, at for $m > n$ er

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \frac{1}{3^n}, \quad |g_m(t) - g_n(t)| < \frac{1}{3^n} \quad \text{for alle } t \in [0,1].$$

Funktionsfølgerne $f_1(t), f_2(t), \cdots$ og $g_1(t), g_2(t), \cdots$ er derfor ligeligt konvergente i intervallet $0 \leqslant t \leqslant 1$. Vi betegner deres grænsefunktioner med $f(t)$ og $g(t)$. Disse er da kontinuerte funktioner og bestemmer altså en kontinuert kurve $(x,y)=(f(t), g(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Dette er Osgoods kurve.

For $t_1 \neq t_2$ er $(f(t_1), g(t_1)) \neq (f(t_2), g(t_2))$. Thi vælges n således, at $\frac{2}{1/n} < |t_2 - t_1|$, vil $(f(t_1), g(t_1))$ og $(f(t_2), g(t_2))$ enten ligge i disjunkte kvadrater af mængden A_n eller et af dem i et kvadrat af A_n, det andet på et forbindende liniestykke af A_n, eller begge på forbindende liniestykker af A_n (evt. på samme). I alle tre tilfælde må gælde $(f(t_1), g(t_1)) \neq (f(t_2), g(t_2))$.

Punktmængden $K = \{(f(t), g(t)) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ bliver $= \bigcap A_n$. Thi for ethvert n er $K \subseteq A_n$. Altså er $K \subseteq \bigcap A_n$. Og hvis $(x_0, y_0) \in \bigcap A_n$, vil (x_0, y_0) enten for et vist n tilhøre et forbindende liniestykke af A_n og altså tilhøre K eller for ethvert n tilhøre et kvadrat af A_n. I sidste tilfælde kan vi for enhver omegn af (x_0, y_0) finde et nummer n, således at det kvadrat af A_n, der indeholder (x_0, y_0), tilhører denne omegn. Vi ser da, at omegnen indeholder punkter af K. Da K er afsluttet, følger heraf, at (x_0, y_0) tilhører K.

Følgelig er $m(K) = \lim m(A_n)$ (jfr. side 52), og da alle $m(A_n) > \frac{1}{2}$, ser vi, at $m(K) \geqslant \frac{1}{2}$.

Bemærkning. Føjer vi til Osgoods kurve liniestykkerne fra (1,1) til (2,1), fra (2,1) til (2,−1), fra (2,−1) til (0,−1), og fra (0,−1) til (0,0) fås en lukket kontinuert kurve uden multiple punkter (en Jordankurve). En sådan deler planen i to sammenhængende åbne mængder (d. v. s. dens komplementærmængde består af to sammenhængende åbne mængder), en begrænset og en ubegrænset, der begge har kurven til rand (Jordans sætning). En på denne måde bestemt begrænset sammenhængende åben punktmængde (et Jordanområde) er således ikke nødvendigvis Riemann målelig.

§ 14. Funktioner med komplekse værdier.

En funktion $f = f(x) = f'(x) + i f''(x)$ på R^k med komplekse værdier (f' og f'' er reelle funktioner med endelige værdier) kaldes Lebesgue integrabel, hvis f' og f'' er Lebesgue integrable, og vi sætter da

$$I(f) = I(f') + i I(f'').$$

Den kaldes Lebesgue måleleg, hvis f' og f'' er Lebesgue målelige.

De fleste af de tidligere sætninger kan umiddelbart overføres til komplekse funktioner. Undtaget er naturligvis sætninger om sup, inf, lim sup, lim inf, som udtrykkeligt er knyttet til det reelle. Vi nøjes med at give nogle prøver, idet det ikke må overlades læseren i påkommende tilfælde at gå efter, om et for reelle funktioner udledt resultat også gælder for komplekse.

Hvis $f = f' + i f''$ er Lebesgue integrabel, er også den konjugerede funktion $\bar{f} = f' - i f''$ Lebesgue integrabel og

$$I(\bar{f}) = \overline{I(f)}.$$

Dette er indlysende.

Hvis $f = f' + i f''$ er Lebesgue integrabel, og $a = a' + i a''$ er et vilkårligt komplekst tal, er af Lebesgue integrabel og

$$I(af) = a I(f).$$

Thi $af = (a'f' - a''f'') + i(a'f'' + a''f')$, altså er af Lebesgue integrabel og $I(af) = I(a'f' - a''f'') + i I(a'f'' + a''f')$
$= a' I(f') - a'' I(f'') + i(a' I(f'') + a'' I(f')) = (a' + ia'')(I(f') + i I(f'')).$

Hvis $f = f' + i f''$ er Lebesgue integrabel, er også $|f|$ Lebesgue integrabel og

$$|I(f)| \leqslant I(|f|).$$

Her klarer vi os ikke med at „skille reelt og imaginært". Vi benytter følgende Kunstgreb.

$|f| = (f'^2 + f''^2)^{\frac{1}{2}}$ er sikkert Lebesgue måleleg, og har den integrable absolutte majorant $|f'| + |f''|$. Altså er $|f|$ Lebesgue integrabel (jfr. side 66). Hvis $I(f) = 0$, er åbenbart $|I(f)| \leqslant I(|f|)$. Hvis $I(f) \neq 0$, vælger vi et kompleks tal a med $|a| = 1$ således, at $aI(f)$ er reelt og > 0. Da er $|I(f)| = aI(f) = I(af)$. Sættes $af = g' + ig''$, er $I(af) = I(g') + iI(g'') = I(g')$, idet tallet er reelt. Da $g' \leqslant |af| = |f|$, finder vi $|I(f)| = I(g') \leqslant I(|f|)$.

Hvis $f = f' + if''$ og $g = g' + ig''$ er Lebesgue integrable, er $f+g$ Lebesgue integrabel, og

$$I(f+g) = I(f) + I(g).$$

Thi $f+g = (f'+g') + i(f''+g'')$.

For en konvergent følge af Lebesgue integrable funktioner $f_n = f_n' + if_n''$, som har en Lebesgue integrabel absolut majorant $h \geqslant 0$ (d.v.s. $|f_n| \leqslant h$ for alle n) er også grænsefunktionen $f = f' + if''$ Lebesgue integrabel og

$$I(f) = \lim I(f_n).$$

Thi h er også absolut majorant for hver af følgerne f_n' og f_n''.

Ved anvendelse af de sædvanlige regneoperationer, inklusive grænseovergang, på komplekse Lebesgue måleleje funktioner, fås atter Lebesgue måleleje funktioner.

En funktion $f = f' + if''$ er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis den er Lebesgue måleleg og har en Lebesgue integrabel absolut majorant $h \geqslant 0$ (d.v.s. $|f| \leqslant h$).

Betingelserne er nødvendige ifølge det foregående. Og de er tilstrækkelige, idet $|f| \leqslant h$ medfører $|f'| \leqslant h$ og $|f''| \leqslant h$.

Kap. 3. Normerede funktionsrum.

§ 1. Normerede lineære rum.

Ved en norm i et vektorrum eller lineært rum (det sidste navn bruges især, når elementerne er funktioner) forstås en reel funktion $f \to \|f\|$ defineret på hele rummet, for hvilken der gælder

1) $\|f\| \geqslant 0$, $\|f\| = 0 \iff f = 0$

2) $\|cf\| = |c| \, \|f\|$

3) $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

I betingelsen 2) refererer c til reelle eller komplekse tal, alt-ersom rummet er et vektorrum over det reelle eller det kom-plekse tallegeme (andre hlfalde vil vi ikke betragte). Af en norm udspringer en metrik ved definitionen

$$\text{dist}(f,g) = \|f-g\|;$$

man verificerer umiddelbart $\|f-g\| \geqslant 0$, $\|f-g\| = 0 \iff f=g$; $\|g-f\| = \|f-g\|$; $\|f-g\| \leqslant \|f-h\| + \|h-g\|$.

Et lineært rum, hvori der er valgt en norm, kaldes normeret. Et normeret lineært rum tænker man sig altid forsynet med det af normen udspringende af-standsbegreb; det er således også et metrisk rum.

$\mathcal{L}(R^k)$.

Klassen $\mathcal{L} = \mathcal{L}(R^k)$ af endelige reelle Lebesgue inte-grable funktioner på R^k er et lineært funktionsrum over de reelle tals legeme (jfr. side 39). For $f \in \mathcal{L}(R^k)$ sætter vi

$$\|f\|_1 = I(|f|) = \int_{R^k} |f(x)| \, m(dR^k).$$

Vi har $\|cf\|_1 = |c| \, \|f\|$ og $\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$; thi $I(|cf|) = |c| \, I(|f|)$ følger af $|cf| = |c| \, |f|$, og $I(|f+g|) \leqslant I(|f|) + I(|g|)$ følger af $|f+g| \leqslant |f| + |g|$.

Endvidere gælder

$$\|f\|_1 \geqslant 0, \quad \|f\|_1 = 0 \iff f \sim 0;$$

thi af $|f| \geqslant 0$ følger $I(|f|) \geqslant 0$ samt (jfr. side 55) $I(|f|) = 0$, hvis og kun hvis $f(x) = 0$ for næsten alle x.

Så længe vi tænker os $\|f\|_1$ knyttet til den enkelte funktion f, er betingelsen 1) således ikke ganske opfyldt. Da $\|g\|_1 = \|f\|_1$ når $g \sim f$, kan vi imidlertid opfatte $\|f\|_1$ som knyttet til klassen af funktioner ækvivalente med f (side 55–58), og herved afhjælpes manglen. Strengt taget er det altså det lineære rum af ækvivalensklasser, vi har normeret; vi vil dog omtale $\|f\|_1$ som 1-normen af funktionen f, blot erindre, at ækvivalente funktioner regnes for „lige gode"; herefter er der iøvrigt intet i vejen for også at medtage Lebesgue integrable funktioner, der kan antage uendelige værdier, idet enhver sådan jo er ækvivalent med en endelig funktion (side 57). Tilsvarende vil vi omtale

$$\|f-g\|_1 = I(|f-g|) = \int_{R^k} |f(x)-g(x)|\, m(dR^k)$$

som afstanden mellem funktionerne f og g, skønt vi strengt taget burde tale om afstand mellem ækvivalensklasser. Mærk: $\|f-g\|_1 = 0 \iff f \sim g$.

Ovenstående gælder uforandret, når vi i stedet for reelle funktioner betragter komplekse funktioner. Klassen $\mathcal{L} = \mathcal{L}(R^k)$ (vi benytter den samme betegnelse) er da et lineært rum over det komplekse tallegeme.

Betragtes kun (reelle, resp. komplekse) funktioner på en mængde A, som er Lebesgue integrable over A, fås et normeret lineært rum $\mathcal{L}(A)$, idet vi sætter

$$\|f\|_1 = I(|f_A|) = \int_A |f(x)|\, m(dR^k).$$

Idet vi kan identificere en funktion f på A med sin udvidelse f_A til R^k, ser man at $\mathcal{L}(A)$ kan opfattes som et underrum af $\mathcal{L}(R^k)$.

Inden vi nærmere studerer $\mathcal{L} = \mathcal{L}(R^k)$ samt nogle andre funktionsrum af lignende karakter, vil vi betragte nogle simplere eksempler på normerede vektorrum.

p-normen i det n-dimensionale talrum R^n, resp. C^n.

Ved definitionerne

$$ax = (ax_1, \cdots, ax_n), \quad x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

organiseres mængden R^n, resp. C^n, af alle reelle, resp. komplekse talsæt $x = (x_1, \cdots, x_n)$ som et vektorrum over R, resp. C.

For alle $x \in R^n$, resp. C^n, og alle $p > 0$ sætter vi

$$\|x\|_p = \left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Det er klart, at der gælder

$$\|x\|_p \geqslant 0, \quad \|x\|_p = 0 \iff x = \underline{0} \quad \text{og} \quad \|ax\|_p = |a| \, \|x\|_p,$$

medens vi senere skal se, at (Minkowskis ulighed)

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p, \quad \underline{\text{når } p \geqslant 1}.$$

For et mekårligt fasthold $p \geqslant 1$ er funktionen $x \to \|x\|_p$ således en norm i R^n, resp. C^n; den kaldes p-normen.

Bemærkning. For $p < q$ gælder $\|x\|_p \geqslant \|x\|_q$. Thi hvis $x = \underline{0}$, er dette indlysende, og hvis $x \neq \underline{0}$, har vi med $a = \|x\|_p$, at $\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^p = a^p$, hvoraf $\frac{|x_\nu|}{a} \leqslant 1$ for alle $\nu = 1, \cdots, n$. Heraf fås $\left(\frac{|x_\nu|}{a}\right)^q \leqslant \left(\frac{|x_\nu|}{a}\right)^p$, hvoraf ved summation $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{|x_\nu|^q}{a^q} \leqslant 1$, d.v.s. $\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^q \leqslant a^q$, eller $\|x\|_q \leqslant a = \|x\|_p$.

For fastholdt x er $\|x\|_p$ således en aftagende funktion af p (iøvrigt strengt aftagende, når blot to af koordinaterne $x_1, \cdots, x_n$ er $\neq 0$). Der gælder

$$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\};$$

thi sætter vi $m = \max |x_\nu|$, har vi $m^p \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^p \leqslant n m^p$, og dermed $m \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}} m$, hvor $n^{\frac{1}{p}} \to 1$ for $p \to \infty$.

Det er da naturligt at fastsætte

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p ;$$

man verificerer uden vanskelighed at $\|x\|_\infty$ er en norm i $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$.

Indre produkt. For to talsæt $x=(x_1,\cdots,x_n)$ og $y=(y_1,\cdots,y_n)$ i $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$, defineres det indre produkt (x,y) ved

$$(x,y) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu , \quad \text{resp} \quad (x,y) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \overline{y_\nu} .$$

Man bemærker, at 2-normen (den euklidiske eller pythagoræiske norm) i begge tilfælde udspringer af det indre produkt, idet

$$\|x\|_2 = (x,x)^{\frac{1}{2}} .$$

Hölders ulighed (O. Hölder 1889).

$$\boxed{|(x,y)| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_q , \text{ når } p>1, q>1, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.}$$

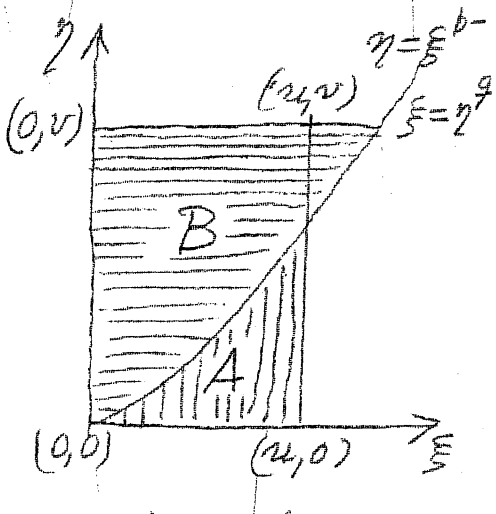
Hölders ulighed omfatter, svarende til $p=q=2$, Cauchy-Schwarz' ulighed

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|_2 \, \|y\|_2 .$$

Beviset for Hölders ulighed bygger vi på uligheden

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \quad \text{for } u\geqslant 0, v\geqslant 0,$$

hvor $p>1$, $q>1$ opfylder betingelsen $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, d.v.s. $(p-1)(q-1)=1$. Vi får denne ved at betragte kurven $\eta = \xi^{p-1}$ eller $\xi = \eta^{q-1}$ (se figuren). Man ser da at $uv \leqslant A+B = \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$ (samt at betingelsen for lighedstegn er, at (u,v) er på kurven, d.v.s. $u^p = v^q$).



Ved at anvende denne ulighed i hver koordinat får vi

$$|(x,y)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu||y_\nu| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{|x_\nu|^p}{p} + \frac{|y_\nu|^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\|x\|_p^{\,p} + \frac{1}{q}\|y\|_q^{\,q} .$$

Hölders ulighed fås nu i tilfældet $x \neq \underline{0}$ og $y \neq \underline{0}$ ved benyttelse af dette resultat på de normerede talsæt:

$$\frac{|(x,y)|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \left|\left(\frac{x}{\|x\|_p}, \frac{y}{\|y\|_q}\right)\right| \leqslant \frac{1}{p}\left\|\frac{x}{\|x\|_p}\right\|_p^p + \frac{1}{q}\left\|\frac{y}{\|y\|_q}\right\|_q^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

For $x = \underline{0}$ eller $y = \underline{0}$ er begge sider 0 i Hölders ulighed.

Som grænsetilfælde af Hölders ulighed har man

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

Minkowskis ulighed (H. Minkowski 1896).

$$\boxed{\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p, \text{ når } p \geqslant 1.}$$

I tilfældet $p = 1$ har vi

$$\|x+y\|_1 = \sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu| \leqslant \sum_{\nu=1}^n |x_\nu| + \sum_{\nu=1}^n |y_\nu| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

For $p > 1$ begynder vi beviset således:

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu|^p = \sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu|\,|x_\nu + y_\nu|^{p-1}$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^n |x_\nu|\,|x_\nu + y_\nu|^{p-1} + \sum_{\nu=1}^n |y_\nu|\,|x_\nu + y_\nu|^{p-1}.$$

Hölders ulighed bruges nu i anvendelse. Vi får, idet $q = \frac{p}{p-1}$,

$$\|x+y\|_p^p \leqslant \|x\|_p \left(\sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \|y\|_p \left(\sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu|^{(p-1)\frac{q}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

d. v. s.

$$\|x+y\|_p^p \leqslant \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \|x+y\|_p^{p-1};$$

for $x+y \neq \underline{0}$ sluttes heraf Minkowskis ulighed, og for $x+y = \underline{0}$ er denne ulighed jo klar.

Med beviset for Minkowskis ulighed har vi fuldført påvisningen af, at $\|x\|_p$ for fastholdt $p \geqslant 1$ er en norm i $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$. Som tidligere bemærket, er også $\|x\|_\infty$ en norm. Specielt har man som grænsetilfælde af Minkowskis ulighed $\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Derimod kan det oplyses, at $\|x\|_p$ for fastholdt $p < 1$ ikke er en norm.

De normerede talfølgerum l_p.

Ved definitionerne

$$ax = (ax_1, ax_2, \cdots), \quad x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots)$$

organiseres mængden af alle reelle, resp. komplekse, talfølger $x = (x_1, x_2, \cdots)$ som et vektorrum over $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$.

For et vilkårligt $p \geqslant 1$ betegner vi med l_p mængden af reelle, resp. komplekse talfølger $x = (x_1, x_2, \cdots)$, for hvilke rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ er konvergent (vi benytter den samme betegnelse i begge tilfælde), altså

$$l_p = \left\{ x \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\},$$

og vi sætter for $x \in l_p$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

For ethvert $p \geqslant 1$ er l_p et underrum i vektorrummet af alle reelle, resp. komplekse, talfølger, og $\|x\|_p$ er en norm på l_p.

Bevis. Det er klart, at $x \in l_p$ medfører $ax \in l_p$ for ethvert $a \in \mathbb{R}$, resp. $a \in \mathbb{C}$, medens $x \in l_p$, $y \in l_p$ medfører $x+y \in l_p$, idet $|x_n+y_n| \leqslant |x_n|+|y_n| \leqslant (2|x_n|) \vee (2|y_n|)$ og følgelig $|x_n+y_n|^p \leqslant (2|x_n|)^p \vee (2|y_n|)^p \leqslant 2^p(|x_n|^p+|y_n|^p)$.

Normbetingelserne $\|x\|_p \geqslant 0$, $\|x\|_p = 0 \iff x = \underline{0}$ og $\|ax\|_p = |a|\,\|x\|_p$ er indlysende, og når $x \in l_p$ og $y \in l_p$ får vi for ethvert n ved benyttelse af Minkowskis ulighed

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu+y_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p,$$

og følgelig er

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu+y_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Bemærkning. Når $p < q$ gælder $l_p \subset l_q$, og for $x \in l_p$ er $\|x\|_p \geqslant \|x\|_q$. Thi når $x \in l_p$ har vi for ethvert n

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|_p.$$

Altså er $l_p \subseteq l_q$ og $\|x\|_p \geq \|x\|_q$. At l_p er en ægte del af l_q ses af, at $x = (1, \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}, \cdots, \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}, \cdots)$ tilhører l_q men ikke l_p.

Når $x \in l_p$ eksisterer $\|x\|_q$ altså for alle $q \geq p$ og er en aftagende funktion af q. Vi vil vise, at

$$\lim_{q \to \infty} \|x\|_q = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots\}.$$

(Eksistensen af højre side er klar, da konvergensen af $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ medfører, at $|x_n| \to 0$.) Sætter vi $m = \max_n |x_n|$, er påstanden klar for $m = 0$ (da er $x = \underline{0}$). Hvis $m > 0$, vælger vi N så stor, at $\sum_{N+1}^{\infty} |x_n|^p \leq m^p$. For $q > p$ gælder da $\left(\sum_{N+1}^{\infty} |x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{N+1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{N+1}{p}} \leq m$. Følgelig er $m^q \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q = \sum_{1}^{N} |x_n|^q + \sum_{N+1}^{\infty} |x_n|^q \leq N m^q + m^q$, og dermed $m \leq \|x\|_q \leq (N+1)^{\frac{1}{q}} m$, hvoraf $\|x\|_q \to m$, idet $(N+1)^{\frac{1}{q}} \to 0$.

Vi definerer l_∞ som mængden af begrænsede reelle, resp. komplekse, talfølger, altså

$$l_\infty = \{x \mid \sup |x_n| < +\infty\},$$

og sætter for $x \in l_\infty$

$$\|x\|_\infty = \sup |x_n|.$$

Vi har da, at $l_p \subset l_\infty$ for alle p, og for $x \in l_p$ er $\|x\|_p \geq \|x\|_\infty$ og $\lim_{q \to \infty} \|x\|_q = \|x\|_\infty$. Man verificerer let, at l_∞ er et underrum i vektorrummet af alle reelle, resp. komplekse, talfølger, og at $\|x\|_\infty$ er en norm i l_∞.

<u>Indre produkt for talfølger</u>. For to talfølger $x = (x_1, x_2, \cdots)$ og $y = (y_1, y_2, \cdots)$ med reelle, resp. komplekse, elementer defineres det indre produkt (x, y) ved

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots, \text{ resp. } (x, y) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots,$$

når den pågældende række er <u>absolut konvergent</u>.

Når $x \in l_p$ og $y \in l_q$, hvor $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, eksisterer (x, y) og

$$|(x, y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Bevis. Eksistensen af (x,y) følger straks af, at $|x_n \bar{y}_n| \leqslant \frac{|x_n|^p}{p} + \frac{|y_n|^q}{q}$ for ethvert n. Og for ethvert n er ifølge Höldersulighed

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu y_\nu| \leqslant \Big(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|x\|_p \|y\|_q,$$

altså er

$$|(x,y)| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q .$$

Man verificerer let, at (x,y) også eksisterer, når $x \in l_1$ og $y \in l_\infty$, og at man da har

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|_1 \|y\|_\infty .$$

Uligheden $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$ for $x \in l_p, y \in l_p$ og $|(x,y)| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$ for $x \in l_p, y \in l_q$ kaldes Minkowskis ulighed og Höldersulighed for rækker.

Hilbert rummet l_2.

For $p=2$ fås det reelle, resp. komplekse Hilbert rum l_2. For $x \in l_2$ og $y \in l_2$ eksisterer det indre produkt (x,y). Man bemærker, at normen $\|x\|_2$ i l_2 udspringer af det indre produkt, idet

$$\|x\|_2 = (x,x)^{\frac{1}{2}}.$$

Höldersulighed går her over i Cauchy-Schwarz' ulighed

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|_2 \|y\|_2 .$$

Bemærkning. For teorien for talfølgerummene l_p er det naturligvis uden betydning, at vi netop har betragtet talfølger $x = (x_1, x_2, \ldots)$, d.v.s. har nummereret koordinaterne for rummets vektorer ved tallene $1, 2, \ldots$. I stedet kunde vi have benyttet en vilkårlig numererbar mængde. Da vi kun har opereret med absolut konvergente rækker, bliver

resultatet det samme, ligegyldig hvordan dennes elementer nummereres.

Banach rum.

Fra eksemplerne vender vi tilbage til de almene begreber.

I et normeret lineært rum har vi som navnt en metrik

$$dist(f,g) = \|f-g\|.$$

I overensstemmelse med sædvanlige definitioner i et metrisk rum siger vi, at en følge $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ konvergerer mod f, hvis

$$\|f - f_n\| \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty,$$

medens $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ kaldes en fundamentalfølge, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et N, så

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geqslant N,\ m \geqslant N.$$

Enhver konvergent følge er en fundamentalfølge. Thi hvis $\|f - f_n\| \to 0$ for $n \to \infty$, findes til ethvert $\varepsilon > 0$ et N, så $\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $n \geqslant N$, og for $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ gælder da $\|f_n - f_m\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Hvis omvendt enhver fundamentalfølge er konvergent, kaldes det normerede lineære rum et Banach rum, eller man siger, at det er fuldstændigt.

Det n-dimensionale talrum R^n, resp. C^n, er med normen $\|x\|_p$ et Banach rum for ethvert $p \geqslant 1$ samt for $p = \infty$.

For følger $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, \cdots$, gælder nemlig:

Nødvendigt (og tilstrækkeligt) for at følgen $x^{(m)}$, $m = 1,2,\dots$, er en fundamentalfølge i p-norm i R^n, resp. C^n, er at hver af de n koordinatfølger $x_\nu^{(m)}$, $m=1,2,\dots$, er en fundamentalfølge i R, resp. C. (Nødvendigt og) tilstrækkeligt for, at følgen $x^{(m)}$, $m=1,2,\dots$, konvergerer i p-norm mod $x=(x_1,\dots,x_n)$, er, at i hver koordinat $x_\nu^{(m)} \to x_\nu$ for $m\to\infty$.

Rigtigheden heraf indses ved hjælp af følgende vurderinger gældende for vilkårlige x og $y \in R^n$, resp. C^n:

$$\left.\begin{matrix} |x_1-y_1| \\ \vdots \\ |x_n-y_n| \end{matrix}\right\} \leqslant \|x-y\|_p \leqslant |x_1-y_1|+\dots+|x_n-y_n|.$$

Er nu $x^{(m)}$, $m=1,2,\dots$, en fundamentalfølge i p-norm i R^n, resp. C^n, da er hver koordinatfølge en fundamentalfølge i R, resp. C, og dermed konvergent; følgelig er $x^{(m)}$, $m=1,2,\dots$, konvergent i p-norm.

Man bemærker iøvrigt, at begreberne fundamentalfølge og konvergens i p-norm i R^n, resp. C^n, ikke afhænger af, hvilket p man betragter. Dette ses også direkte af

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\,\|x\|_\infty .$$

Talfølgerummet l_p med norm $\|x\|_p$ er et Banach rum for ethvert $p \geqslant 1$ samt for $p=\infty$.

Beviset fra R^n, resp. C^n, kan ikke direkte kopieres, idet konvergens i hver koordinat, $x_\nu^{(m)} \to x_\nu$ for $m\to\infty$, nok er nødvendigt, men ikke tilstrækkeligt for, at $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots) \in l_p$ konvergerer i p-norm mod $x=(x_1,x_2,\dots)\in l_p$.

For eksempel konvergerer følgen $x^{(1)}=(1,0,0,0,\cdots)$, $x^{(2)}=(0,1,0,0,\cdots)$, $x^{(3)}=(0,0,1,0,\cdots)$, $\cdots$ i hver koordinat, men ikke i p-norm.

Beviset forløber således: Er $x^{(m)}=(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots)$, $m=1,2,\cdots$, en fundamentalfølge i l_p, slutter vi som i tilfældet $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$, at hver koordinatfølge er en fundamentalfølge i $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$, og dermed konvergent, $x_\nu^{(m)} \to x_\nu$ for $m \to \infty$. Sæt $x=(x_1, x_2, \cdots)$ virkelig hører l_p, og at $x^{(m)}$ konvergerer i p-norm mod x, ses, når $1 \leqslant p < \infty$, på følgende måde:

Til et vilkårligt $\varepsilon > 0$ tænkes valgt et N så

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p < \varepsilon \quad \text{for } n \geqslant N,\ m \geqslant N.$$

For $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, s vilkårlig, er da

$$\sum_{\nu=1}^{s} |x_\nu^{(n)} - x_\nu^{(m)}|^p \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu^{(n)} - x_\nu^{(m)}|^p = \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p^p < \varepsilon^p.$$

Ved at lade $n \to \infty$ for fasthold $m \geqslant N$ og s får vi heraf

$$\sum_{\nu=1}^{s} |x_\nu - x_\nu^{(m)}|^p \leqslant \varepsilon^p, \qquad m \geqslant N,\ s \geqslant 1,$$

og heraf slutter vi først, at $\sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu - x_\nu^{(m)}|^p \leqslant \varepsilon^p$, altså $x - x^{(m)} \in l_p$ og dermed $x = x^{(m)} + (x - x^{(m)}) \in l_p$, og videre

$$\|x - x^{(m)}\| \leqslant \varepsilon, \qquad m \geqslant N.$$

Hermed er imidlertid vist, at $\|x - x^{(m)}\| \to 0$ for $m \to \infty$.

I tilfældet $p = \infty$ er beviset simplere. Uligheden $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_\infty < \varepsilon$ for $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ giver $|x_\nu^{(n)} - x_\nu^{(m)}| < \varepsilon$ for $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ og alle ν, hvoraf $|x_\nu - x_\nu^{(m)}| \leqslant \varepsilon$ for $m \geqslant N$ og alle ν. Heraf ses, at $x - x^{(m)} \in l_\infty$ og dermed $x = x^{(m)} + (x - x^{(m)}) \in l_\infty$, og at $\|x - x^{(m)}\|_\infty \leqslant \varepsilon$ for $m \geqslant N$, hvormed er vist, at $\|x - x^{(m)}\|_\infty \to 0$ for $m \to \infty$.

Eksempler på funktionsrum.

Klassen $C([a,b])$ af reelle kontinuerte funktioner af en reel variabel på et afsluttet interval $[a,b]$ (jfr. side 5) er et lineært rum. En vigtig norm i $C([a,b])$ er „den ligelige norm" defineret ved

$$\|f\|_u = \|f\|_\infty = \sup_{a\le x\le b} |f(x)|.$$

Man efterviser let, at $\|f\|_u$ virkelig er en norm. Den tilsvarende afstand er den tidligere betragtede (side 5). Det tilsvarende konvergensbegreb er ligelig konvergens.

Øvelse. Vis, at $C([a,b])$ med normen $\|f\|_u$ er et Banach rum.

En anden vigtig norm i $C([a,b])$ er p-normen defineret ved

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad 1\le p<\infty.$$

Man efterviser let, at dette virkelig er en norm. Specielt fås uligheden $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$, idet man approksimerer integralerne med summer og anvender Minkowskis ulighed på dem. (Det er dog ikke nødvendigt at gennemføre denne betragtning, da vi nedenfor vil møde funktionsrummene $L_p([a,b])$, der har $C([a,b])$ med norm $\|f\|_p$ som underrum.)

Øvelse. Vis, at $C([a,b])$ med norm $\|f\|_p$ ikke for noget p, $1\le p<\infty$, er et Banach rum.

(Vink. Betragt for et givet $x_0 \in]a,b[$ og en given talfølge $(a<)x_1<x_2<\cdots$, $x_n \to x_0$, følgen af funktioner f_n defineret ved

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } a\le x\le x_n \\ \dfrac{x-x_n}{x_0-x_n} & \text{for } x_n\le x\le x_0 \\ 1 & \text{for } x_0\le x\le b. \end{cases}$$

Vis, at det er en fundamentalfølge i p-norm, og at der ikke findes nogen funktion $f\in C([a,b])$, så at $\|f-f_n\|_p \to 0$ for $n\to\infty$.)

Det foregående gælder uforandret, hvis vi lader $C([a,b])$ betegne klassen af komplekse kontinuerte funktioner på $[a,b]$.

Øvelse. Vis, at der for ethvert $f \in C([a,b])$ gælder $\|f\|_p \to \|f\|_u$ for $p \to \infty$.

Teorien for normerede lineære rum skyldes især D. Hilbert ($p=2$), F. Riesz (velkårligt $p \geqslant 1$), og S. Banach.

§2. De normerede funktionsrum $\mathcal{L}_p(\dot{R}^k)$.

Som foran vist (side 86) defineres ved

$$\|f\|_1 = I(|f|) = \int_{\dot{R}^k} |f(x)|\, m(d\dot{R}^k)$$

en norm i det lineære funktionsrum $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{R}^k)$ af endelige (reelle, resp. komplekse) Lebesgue integrable funktioner på $\dot{R}^k$ (når ækvivalente funktioner identificeres). Den tilhørende metrik er

$$dist(f,g) = \|f-g\| = I(|f-g|).$$

En følge $f_1, f_2, \ldots$ af funktioner i $\mathcal{L}$, der i denne metrik konvergerer mod $f \in \mathcal{L}$, for hvilken altså

$$\|f - f_n\|_1 = \int_{\dot{R}^k} |f(x) - f_n(x)|\, m(d\dot{R}^k) \to 0 \quad \text{for } n \to \infty,$$

siges også at <u>konvergere</u> (stærkt) <u>mod</u> f <u>i</u> $\mathcal{L}$.

Det understreges, at vi her står over for et helt andet begreb end konvergens næsten overalt: En følge af funktioner i $\mathcal{L}$ kan konvergere stærkt uden at konvergere i noget punkt, og den kan konvergere i hvert punkt mod en funktion i $\mathcal{L}$ uden at konvergere stærkt. Som eksempler anføres (i tilfældet $k=1$) følgerne

$1_{[-1,1)}, 1_{[-2,-1]}, 1_{[-1,0]}, 1_{[0,1]}, 1_{[1,2]}, 1_{[-3,-2\frac{1}{2}]}, 1_{[-2\frac{1}{2},-2]}, \ldots, 1_{[2\frac{1}{2},3]}, 1_{[-4,-3\frac{3}{4}]}, \ldots, 1_{[3\frac{3}{4},4]}, \ldots$

og

$1_{]0,1]}, 2^2 1_{]0,\frac{1}{2}]}, \ldots, n^2 1_{]0,\frac{1}{n}]}, \ldots$.

Hovedsætning.

Funktionsrummet $\mathcal{L} = \mathcal{L}(R^k)$ er med norm $\|f\|_1$, et Banach rum.

Vi vil ikke bevise denne sætning særskilt, da den er indeholdt i en sætning om rummene $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(R^k)$, $1 \leq p < \infty$, som vi nu skal indføre.

Lad $M = M(R^k)$ betegne mængden af alle endelige reelle, resp. komplekse, funktioner på R^k, der er Lebesgue målelige. Det er et lineært funktionsrum over R, resp. C. (Vi behandler de to tilfælde under ét under brug af samme betegnelser i de to tilfælde.)

Med $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(R^k)$ for $1 \leq p < +\infty$ betegner vi klassen af funktioner $f \in M$, for hvilke $|f|^p$ er Lebesgue integrabel, altså

$$\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(R^k) = \{ f \in M \mid I(|f|^p) < +\infty \},$$

og vi sætter for $f \in \mathcal{L}_p$

$$\|f\|_p = \left[I(|f|^p) \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_{R^k} |f(x)|^p m(dR^k) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

For ethvert $p \geq 1$ er $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(R^k)$ et lineært funktionsrum over R, resp. C, og $\|f\|_p$ er en norm på $\mathcal{L}_p$ (når ækvivalente funktioner betragtes som den samme).

Tilfældet $p = 1$ er allerede behandlet. Thi at f er målelig og $|f|$ integrabel er ensbetydende med, at f er integrabel. Altså er $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$.

Det er klart, at $f \in \mathcal{L}_p \Rightarrow af \in \mathcal{L}_p$, medens $f \in \mathcal{L}_p$, $g \in \mathcal{L}_p \Rightarrow f+g \in \mathcal{L}_p$ indses, når man benytter $|f+g|^p \leqslant (|f|+|g|)^p \leqslant (2|f|)^p + (2|g|)^p$ i forbindelse med sætningen om, at en Lebesgue måleliq funktion er integrabel, hvis den har en Lebesgue integrabel absolut majorant (jfr. side 85).

Endvidere gælder åbenbart

$$\|f\|_p \geqslant 0, \quad \|f\|_p = 0 \iff f \sim 0$$

og

$$\|af\|_p = |a| \, \|f\|_p .$$

Tor dernæst at bevise

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p ,$$

Minkowskis ulighed for Lebesgue integraler, går vi frem i analogi med behandlingen af den tilsvarende ulighed for summer.

<u>Hölders ulighed for Lebesgue integraler.</u>

<u>Når</u> $f \in \mathcal{L}_p$ <u>og</u> $g \in \mathcal{L}_q$, <u>hvor</u> $p > 1$, $q > 1$ <u>og</u> $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, <u>da er</u> fg <u>integrabel og</u>

$$|I(fg)| \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q .$$

Beviset bygger ligesom det tidligere for summer (side 89) på uligheden

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \qquad u \geqslant 0, \; v \geqslant 0 .$$

Ved at anvende denne ulighed for hvert $x \in \bar{R}^k$ får vi

$$|fg| = |f||g| \leqslant \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} ,$$

hvoraf vi slutter, at $|fg|$ er integrabel ($|fg|$ er nemlig måleliq, og uligheden viser, at $|fg|$ har en integrabel absolut majorant). Vi får endvidere

$$|I(fg)| \leqslant I(|fg|) \leqslant \frac{I(|f|^p)}{p} + \frac{I(|g|^q)}{q} = \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q .$$

Hölders ulighed fremgår nu i tilfældet $f \neq 0$ og

$g \neq 0$ ved anvendelse af dette resultat på de normerede funktioner:

$$\frac{|I(fg)|}{\|f\|_p \, \|g\|_q} = \left|I\left(\frac{f}{\|f\|_p}\,\frac{g}{\|g\|_q}\right)\right| \leqslant \frac{1}{p}\left\|\frac{f}{\|f\|_p}\right\|_p^p + \frac{1}{q}\left\|\frac{g}{\|g\|_q}\right\|_q^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

For $f \sim 0$ eller $g \sim 0$ er begge sider 0 i Hölders ulighed.

Af særlig interesse er tilfældet $p = q = 2$. Vi får her

Cauchy-Schwarz' ulighed for Lebesgue integraler:

Når $f \in \mathcal{L}_2(R^k)$ og $g \in \mathcal{L}_2(R^k)$, er fg integrabel og

$$|I(fg)| \leqslant \|f\|_2 \, \|g\|_2 .$$

Integralet $I(fg)$ af produktet af to funktioner kaldes det indre produkt af f og g og betegnes (f,g).

Minkowskis ulighed for Lebesgue integraler.

For $f \in \mathcal{L}_p(R^k)$ og $g \in \mathcal{L}_p(R^k)$, $p \geqslant 1$, gælder

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p .$$

For $p = 1$ er uligheden bevist tidligere (side 86). For $p > 1$ begynder vi beviset således:

$$\|f+g\|_p^p = I(|f+g|^p) = I(|f+g|\,|f+g|^{p-1})$$
$$\leqslant I(|f|\,|f+g|^{p-1}) + I(|g|\,|f+g|^{p-1});$$

her må vi dog godtgøre, at $|f|\,|f+g|^{p-1}$ og $|g|\,|f+g|^{p-1}$ er integrable; dette følger af, at $|f| \in \mathcal{L}_p$ og $|g| \in \mathcal{L}_p$, medens $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}_q$, hvor $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ (altså $q = \frac{p}{p-1}$). Ved anvendelse af Hölders ulighed får vi videre

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f\|_p \left[I(|f+g|^{(p-1)q})\right]^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p \left[I(|f+g|^{(p-1)q})\right]^{\frac{1}{q}},$$

d.v.s.

$$\|f+g\|_p^p \leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\|f+g\|_p^{p-1};$$

for $\|f+g\|_p \neq 0$ sluttes heraf Minkowskis ulighed, og for $\|f+g\|_p = 0$ er jo Minkowskis ulighed klar.

Bemærk. Medens vi for talfølgerummene fandt

$$p_1 < p_2 \Rightarrow l_{p_1} \subset l_{p_2},$$

gælder her intet tilsvarende. For $p_1 \neq p_2$ er ingen af klasserne $\mathcal{L}_{p_1}$ og $\mathcal{L}_{p_2}$ delmængde af den anden. For eksempel vil for $k=1$ funktionen $\left(\frac{1}{x}\right)_{[1,+\infty[}$ tilhøre $\mathcal{L}_2$, men ikke $\mathcal{L}_1$, og funktionen $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)_{]0,1]}$ vil tilhøre $\mathcal{L}_1$, men ikke $\mathcal{L}_2$.

Den til normen $\|f\|_p$ i $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\dot{R}^1)$, $p \geqslant 1$, hørende metrik er

$$\text{dist}(f,g) = \|f-g\|_p = \left[I(|f-g|^p)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

En følge $f_1, f_2, \ldots$ af funktioner i $\mathcal{L}_p$, der i denne metrik konvergerer mod $f \in \mathcal{L}_p$, for hvilken altså

$$\|f-f_n\|_p = \left[I(|f-f_n|^p)\right]^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad \text{for } n \to \infty,$$

d. v. s.

$$I(|f-f_n|^p) = \int_{\dot{R}^k} |f(x)-f_n(x)|^p m(dR^k) \to 0 \quad \text{for } n \to \infty,$$

siges at <u>konvergere (stærkt) mod f i klassen $\mathcal{L}_p$</u>.

<u>Hovedsætning.</u>

<u>Funktionsrummet $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\dot{R}^k)$ er med norm $\|f\|_p$ et Banach rum for ethvert $p \geqslant 1$.</u>

Sætningen er (for funktioner af een variabel på et interval og $p=2$) først bevist (uafhængigt af hinanden) af F. Riesz og E. Fischer (1907). Da almindeliggørelsen er ret selvfølgelig, er det rimeligt at kalde sætningen (og ikke blot det nævnte specialtilfælde) <u>Riesz - Fischers sætning</u>.

Bevis (efter H. Weyl). Vi antager, at $f_1, f_2, \ldots$ er en fundamentalfølge i $\mathcal{L}_p$, og skal vise, at følgen er konvergent i $\mathcal{L}_p$.

Til afkortning sættes $\varepsilon_i = \frac{1}{2^i}$ og $\delta_i = \left(\frac{1}{2^i}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{2^i}$.

Da $f_1, f_2, \ldots$ er en fundamentalfølge, kan vi vælge numre $N_1 < N_2 < \ldots < N_i < \ldots$ således, at

$$\|f_n - f_m\|_p < \delta_i \quad \text{for} \quad n, m \geqslant N_i .$$

Vi vil begynde med at bevise, at den udtyndede følge $f_{N_1}, f_{N_2}, \ldots$ er konvergent næsten overalt.

Vi har specielt

$$\|f_{N_{i+1}} - f_{N_i}\|_p < \delta_i ,$$

altså

$$I(|f_{N_{i+1}} - f_{N_i}|^p) < \delta_i{}^p .$$

Nu betragtes mængderne

$$A_i = \{x \mid |f_{N_{i+1}}(x) - f_{N_i}(x)|^p > \varepsilon_i^p\}$$

$$= \{x \mid |f_{N_{i+1}}(x) - f_{N_i}(x)| > \varepsilon_i\}.$$

For hvert i er A_i Lebesgue målelig, og idet $\varepsilon_i^p A_i \leqslant |f_{N_{i+1}} - f_{N_i}|^p$, er $\varepsilon_i{}^p m(A_i) \leqslant I(|f_{N_{i+1}} - f_{N_i}|^p)$, altså

$$m(A_i) < \frac{\delta_i{}^p}{\varepsilon_i{}^p} = \left(\frac{\delta_i}{\varepsilon_i}\right)^p = \frac{1}{2^i} .$$

Følgelig er rækken $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$

konvergent. Sættes

$$B_i = A_i \cup A_{i+1} \cup \ldots ,$$

er B_i Lebesgue målelig, og vi har

$$m(B_i) < \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{i-1}} .$$

For ethvert $x \notin A_i$ gælder

$$|f_{N_{i+1}}(x) - f_{N_i}(x)| \leqslant \varepsilon_i = \frac{1}{2^i} .$$

Altså er leddene i rækken

$$(*) \quad |f_{N_1}(x)| + |f_{N_2}(x) - f_{N_1}(x)| + \ldots + |f_{N_j}(x) - f_{N_{j-1}}(x)| + \ldots$$

for ethvert $x \notin B_i$ fra leddet $|f_{N_{i+1}}(x) - f_{N_i}(x)|$ at regne

$\leqslant$ leddene med samme nummer i den konvergente række

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{i-1}} + \cdots ,$$

hvoraf følger, at rækken (*) er konvergent for ethvert $x \notin B_i$.

Nu gælder

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots .$$

Vi sætter $$D = B_1 \cap B_2 \cap \cdots .$$

Da er D målelig og for ethvert i gælder $D \subseteq B_i$. Altså er $m(D) < \frac{1}{2^{i-1}}$ for alle i, og følgelig $m(D) = 0$. Til ethvert $x \notin D$ findes et nummer i, således at $x \notin B_i$. Altså er rækken (*) konvergent for ethvert $x \notin D$.

Rækken

$$f_{N_1}(x) + (f_{N_2}(x) - f_{N_1}(x)) + \cdots + (f_{N_j}(x) - f_{N_{j-1}}(x)) + \cdots$$

er da ligeledes konvergent for ethvert $x \notin D$. Dennes afsnit er netop

$$f_{N_1}(x),\ f_{N_2}(x),\ \cdots,\ f_{N_j}(x),\ \cdots .$$

Altså er funktionsfølgen $f_{N_1}, f_{N_2}, \cdots$ konvergent i $\mathbb{R}^k \setminus D$. Vi betragter nu den funktion f på $\mathbb{R}^k$, der defineres ved

$$f(x) = \begin{cases} \lim f_{N_j}(x) & \text{for } x \notin D \\ 0 & \text{for } x \in D. \end{cases}$$

Da gælder altså $f_{N_j}(x) \to f(x)$ for $j \to \infty$ på nær i en nulmængde.

Funktionen f er åbenbart målelig. Vi betragter nu for et fast i uligheden

$$\|f_n - f_m\|_p < \delta_i \qquad \text{for } n, m \geqslant N_i .$$

Heraf fås specielt

$$I(|f_{N_j} - f_m|^p) < \delta_i^p \qquad \text{for } j \geqslant i,\ m \geqslant N_i .$$

Vi holder m fast ($\geqslant N_i$) og lader j gennemløbe tal-

lene $i, i+1, \ldots$. Vi ser da, at funktionsfølgen

$$|f_{N_i} - f_m|^p, |f_{N_{i+1}} - f_m|^p, \ldots$$

opfylder betingelserne i Fatous lemma (side 47). Vi slutter derfor, at grænsefunktionen $|f - f_m|^p$ er Lebesgue integrabel, og at

$$I(|f - f_m|^p) \leqslant \delta_i^p \qquad \text{for } m \geqslant N_i.$$

Følgelig gælder $f - f_m \in \mathcal{L}_p$ og altså også $f = f_m + (f - f_m) \in \mathcal{L}_p$, og vi har

$$\|f - f_m\|_p \leqslant \delta_i \qquad \text{for } m \geqslant N_i.$$

Da $\delta_i \to 0$ for $i \to \infty$ viser dette, at $\|f - f_m\| \to 0$ for $m \to \infty$. Den givne følge $f_1, f_2, \ldots$ konvergerer altså i $\mathcal{L}_p$ mod f.

Approksimationssætninger.

For et vilkårligt $p \geqslant 1$ er hvert af følgende underrum overalt tæt i $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(R^k)$:

1) klassen af begrænsede målelige funktioner med begrænset støtte;

2) klassen af trappefunktioner;

3) klassen af kontinuerte funktioner med begrænset støtte.

Vi bemærker, at disse klasser åbenbart hører $\mathcal{L}_p$ for ethvert $p \geqslant 1$.

Vi betragter først det reelle $\mathcal{L}_p$.

1) Vi skal vise, at hvis $f \in \mathcal{L}_p$ og $\varepsilon > 0$, da findes en begrænset målelig funktion g med begrænset støtte, således at $\|f - g\|_p < \varepsilon$. — For et vilkårligt helt $n > 0$ betragtes funktionen $f_n = (f \wedge n w_n) \vee (-n w_n)$. Den er åbenbart en begræn-

set målelig funktion med begrænset støtte og tilhører derfor $\mathcal{L}_p$. For ethvert n er $|f-f_n|^p \leqslant |f|^p$, og da $f(x)-f_n(x) \to 0$ for $n \to \infty$ for alle x følger af sætningen om absolut majoriseret konvergens (side 47), at $I(|f-f_n|^p) \to 0$. Vi kan altså vælge n således, at $\|f-f_n\|_p < \varepsilon$.

2) Vi skal dernæst vise, at hvis $f \in \mathcal{L}_p$ og $\varepsilon > 0$, da findes en trappefunktion g, således at $\|f-g\|_p < \varepsilon$. I følge 1) og trekantuligheden er det tilstrækkeligt at vise dette i det tilfælde, hvor f er en begrænset målelig funktion med begrænset støtte. Da gælder $f \in \mathcal{L}$. Vi betragter nu en følge af trappefunktioner $\overline{f_n} \uparrow \geqslant f$, således at $\lim I(\overline{f_n}) < I(f) + \delta$, hvor $\delta > 0$ vil blive angivet senere, og ser på funktionen $h = \lim \overline{f_n}$. Vi har $h \geqslant f$ og $h \in \mathcal{L}$, og $I(h) = \lim I(\overline{f_n})$, altså $I(f) \leqslant I(h) < I(f) + \delta$. For ethvert n er $\overline{f_n} \leqslant h$, og vi kan vælge n således, at $I(h) - \delta < I(\overline{f_n}) \leqslant I(h)$. Da gælder

$$|f-\overline{f_n}| \leqslant |f-h| + |h-\overline{f_n}| = (h-f) + (h-\overline{f_n}),$$

og

$$I(|f-\overline{f_n}|) \leqslant I(h-f) + I(h-\overline{f_n}) < 2\delta.$$

Vi benytter nu, at f er begrænset, f. eks. $|f(x)| \leqslant a$ for alle x. Vi sætter da $g = (\overline{f_n} \wedge a) \vee (-a)$. Dette er også en trappefunktion, og der gælder åbenbart $|f-g| \leqslant |f-\overline{f_n}|$. Altså er $I(|f-g|) < 2\delta$. Da $|f-g|^p \leqslant |f-g|(2a)^{p-1}$, følger heraf $I(|f-g|^p) < 2\delta(2a)^{p-1}$, hvoraf $\|f-g\|_p < [2\delta(2a)^{p-1}]^{\frac{1}{p}}$. Tænker vi os, at δ var valgt således, at $[2\delta(2a)^{p-1}]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$, har vi altså $\|f-g\|_p < \varepsilon$.

3) Vi skal endelig vise, at hvis $f \in \mathcal{L}_p$ og $\varepsilon > 0$, da findes en kontinuert funktion g med begrænset støtte, således at $\|f-g\|_p < \varepsilon$. — I følge 2) og trekantuligheden er det tilstrækkeligt at vise dette i det

tilfælde, hvor f er en trappefunktion. Vi vælger (jfr. side 28) en kontinuert funktion $g \geqslant f$ med begrænset støtte, således at $I(g-f) < \delta$, hvor δ vil blive angivet senere. Antages $|f(x)| \leqslant a$ for alle x, kan vi antage, at $g(x) \leqslant a$ for alle x, idet vi ellers erstatter g med $g \wedge a$. [Da $g \geqslant f$, har vi åbenbart $g(x) \geqslant -a$ for alle x.] Da er $(g-f)^p \leqslant (g-f)(2a)^{p-1}$, altså $\|g-f\|_p < [\delta(2a)^{p-1}]^{\frac{1}{p}}$. Tænker vi os, at δ var valgt således at $[\delta(2a)^{p-1}]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$, har vi altså $\|f-g\| < \varepsilon$.

Vi betragter dernæst det <u>komplekse</u> $\mathcal{L}_p$.

Hvis $f = f' + if'' \in \mathcal{L}_p$, gælder $f' \in \mathcal{L}_p$ og $f'' \in \mathcal{L}_p$. Thi f' og f'' er målelige, og $|f'| \leqslant |f|$, $|f''| \leqslant |f|$. De ønskede approksimationer af f opnås nu ved at anvende de foregående resultater på f' og f'' og derefter benytte trekantuligheden, hvorefter vi for $g = g' + ig'' \in \mathcal{L}_p$ har $\|f-g\|_p \leqslant \|f'-g'\|_p + \|f''-g''\|_p$.

Af ovenstående følger det overraskende resultat:
<u>For ethvert $p \geqslant 1$ har $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$ en numerabel overalt tæt delmængde.</u>

Thi klassen af trappefunktioner har (i p-normen for ethvert $p \geqslant 1$) som overalt tæt delmængde klassen af trappefunktioner, som kun antager rationale værdier og hver værdi $\neq 0$ i foreningen af et endeligt antal disjunkte intervaller $J_1 \times \cdots \times J_k$, hvor $J_1, \ldots, J_k$ har rationale endepunkter. Denne mængde er numerabel.

$\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^k)$.

For en reel funktion f på $\mathbb{R}^k$ siges tallet M at være et <u>essentielt overtal</u>, hvis $f(x) \leqslant M$ for næsten alle x, d. v. s. hvis $\{x \mid f(x) > M\}$ er en nulmængde.

$+\infty$ er naturligvis et essentielt overtal. Blandt de essentielle overtal findes et mindste (det kan eventuelt være $+\infty$ eller $-\infty$); dette kaldes det essentielle supremum for f og betegnes

$$\operatorname*{ess.sup}_{x \in \hat{R}^k} f(x);$$

eksistensen indses ved, at man efterviser, at nedre grænse for mængden af essentielle overtal for f selv er et essentielt overtal (øvelse; benyt sætningen, at foreningen af numererbart mange nulmængder er en nulmængde). — På analog måde defineres begreberne essentielt undertal og essentielt infimum.

En reel eller kompleks funktion f på $\hat{R}^k$ siges at være <u>essentielt begrænset</u>, såfremt $\operatorname{ess.sup}|f(x)| < +\infty$, og vi sætter

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess.sup}_{x \in \hat{R}^k} |f(x)|.$$

Bemærk, at denne størrelse også kan opfattes som knyttet til klassen af funktioner ækvivalente med f. Når $f \sim g$, har $|f|$ og $|g|$ nemlig de samme essentielle overtal.

Med $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(\hat{R}^k)$ betegner vi mængden af Lebesgue målelige (reelle, resp. komplekse) essentielt begrænsede funktioner på $\hat{R}^k$. Man verificerer uden vanskelighed:

<u>$\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(\hat{R}^k)$ er et lineært funktionsrum over $\hat{R}$, resp. $\hat{C}$, og $\|f\|_\infty$ er en norm på $\mathcal{L}_\infty$</u> (når ækvivalente funktioner betragtes som den samme). <u>$\mathcal{L}_\infty$ er et Banach rum.</u>

Man ser let: <u>Når $f \in \mathcal{L}$ og $g \in \mathcal{L}_\infty$, da er $fg \in \mathcal{L}$ og</u>

$$|I(fg)| \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_\infty.$$

Betragtes kun (reelle, resp. komplekse) funktioner på en mængde A, fås for ethvert p, $1 \leqslant p < +\infty$, et normeret lineært rum $\mathcal{L}_p(A)$ bestående af de funktioner, som er Lebesgue målelige i A og for hvilke $|f|^p$ er Lebesgue integrabel over A, og med norm

$$\|f\|_p = \left[I(|f_A|^p)\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_A |f(x)|^p m(dR^k)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Idet vi kan identificere en funktion f på A med sin udvidelse f_A til R^k, ser man, at $\mathcal{L}_p(A)$ kan opfattes som et underrum af $\mathcal{L}_p(R^k)$ bestående af de funktioner, der er 0 uden for A.

<u>For ethvert A er $\mathcal{L}_p(A)$ et Banach rum.</u>

Thi er $f_1, f_2, \ldots$ en fundamentalfølge i $\mathcal{L}_p(A)$, er $f_{1A}, f_{2A}, \ldots$ en fundamentalfølge i $\mathcal{L}_p(R^k)$, altså konvergent i $\mathcal{L}_p(R^k)$ med en grænsefunktion g, som ifølge beviset for, at $\mathcal{L}_p(R^k)$ er et Banach rum, er defineret som grænsefunktion ved sædvanlig konvergens for en delfølge af $f_{1A}, f_{2A}, \ldots$ uden for en vis nulmængde D, og som 0 i denne mængde. Dette g er altså 0 uden for A, og kan altså betegnes f_A, hvor f er en funktion på A, som vil tilhøre $\mathcal{L}_p(A)$, og vil være grænsefunktion for følgen $f_1, f_2, \ldots$ i $\mathcal{L}_p(A)$.

Analogt kan man betragte $\mathcal{L}_\infty(A)$ for en vilkårlig mængde A.

I praksis har kun det tilfælde interesse, hvor A er målelig eller evt. har målet $+\infty$.

Kap. 4. Fourierrækker.

§ 1. Definitioner.

I sine undersøgelser over varmeteori gjorde Fourier den skelsættende opdagelse, at „enhver" reel funktion $f(x)$ på $]-\infty, +\infty[$ med perioden 2π kan fremstilles ved en trigonometrisk række

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

hvor

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \left.\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\} nx\, dx .$$

(J.J. Fourier, 1768-1830; teorien er offentliggjort 1822.) Det første strenge bevis er givet af Dirichlet (1837), som betragtede funktioner, der stykkevis er kontinuerte og monotone. Vi vil her behandle teorien for funktioner, der er Lebesgue integrable i ethvert interval (hertil er nok, at de er integrable over et periodeinterval $[a, a+2\pi[$). Det vil være hensigtsmæssigt at betragte komplekse funktioner, og forinden ovenstående skrivemåde for en trigonometrisk række at benytte skrivemåden

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \text{eller} \quad c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right).$$

Med L vil vi i det følgende betegne klassen af komplekse funktioner $f(x)$ med perioden 2π, som er Lebesgue integrable i ethvert interval. Ved middelværdien af en sådan funktion forstås integralet over et periodeinterval divideret med 2π:

$$M\{f\} = M\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\, dx .$$

(Det er åbenbart ligegyldigt, hvilket periodeinterval vi benytter.). Med L_p for $p \geq 1$ vil vi betegne klassen af komplekse funktioner $f(x)$ med perioden 2π, som er

Lebesgue måleligе, og for hvilke $|f|^p$ er Lebesgue integrabel i ethvert interval. Da er $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$. I $\mathcal{L}_p$ indføres normen

$$\|f\|_p = \left[M\{|f(x)|^p\}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Da er $\mathcal{L}_p$ et normeret lineært rum. Vi betragter også klassen $\mathcal{L}_\infty$ af essentielt begrænsede periodiske funktioner med perioden 2π, med norm

$$\|f\|_\infty = \text{ess. sup } |f(x)|.$$

For $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ gælder $\mathcal{L}^p \supseteq \mathcal{L}^q$. For $q = \infty$ er dette indlysende, og for $q < \infty$ følger det af, at $|f|^q \leqslant 1 + |f|^p$, idet 1 er integrabel over ethvert interval. [Iøvrigt er $\mathcal{L}^p \supset \mathcal{L}^q$, idet man let kan nævne en funktion $f \in \mathcal{L}^p \setminus \mathcal{L}^q$.] Vi skal her foruden $\mathcal{L}_1$ især betragte klassen $\mathcal{L}_2$.

Hvis $f \in \mathcal{L}$, $g \in \mathcal{L}$, er $f\bar{g}$ sikkert måleligt. Hvis $f\bar{g} \in \mathcal{L}$, beregnes middelværdien

$$(f,g) = M\{f(x)\,\overline{g(x)}\}$$

som det <u>indre produkt</u> af f og g. Man har $(g,f) = \overline{(f,g)}$. Hvis $(f,g) = 0$ siges f at være <u>ortogonal</u> på g, i tegn $f \perp g$. Da er også $(g,f) = 0$, altså $g \perp f$, og vi kan derfor også sige, at f og g er indbyrdes ortogonale.

For $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$, hvor $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vil $f\bar{g} \in \mathcal{L}$, og det indre produkt vil henfødestille

$$|(f,g)| \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q .$$

[Dette følger straks af Hölders ulighed for integraler, idet faktorerne $\frac{1}{2\pi}$ i middelværdierne går ud.] Det samme gælder, hvis $p = 1$, $q = \infty$.

Specielt eksisterer (f,g) for vilkårlige $f \in \mathcal{L}^2$, $g \in \mathcal{L}^2$, og

$$|(f,g)| \leqslant \|f\|_2 \, \|g\|_2 .$$

Normen i $\mathcal{L}_2$ udspringer af det indre produkt, idet

$$\|f\|_2 = \left[(f,f)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En funktion $f \in \mathcal{L}^2$ kaldes <u>normeret</u>, hvis $\|f\|_2 = 1$. En mængde af funktioner i $\mathcal{L}_2$ bestående af normerede parvis ortogonale funktioner kaldes et <u>normeret ortogonalsystem</u> i $\mathcal{L}_2$.

Fundamentalt for teorien for trigonometriske rækker er, at systemet af funktioner

$$\{e^{inx} \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

er et normeret ortogonalsystem, det trigonometriske ortogonalsystem. Dette ses straks af, at

$$\|e^{inx}\|_2^2 = M\{|e^{inx}|^2\} = M\{1\} = 1 \quad \text{for alle } n$$

og

$$(e^{inx}, e^{imx}) = M\{e^{inx}\,\overline{e^{imx}}\} = M\{e^{i(n-m)x}\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{for } n \neq m$$

Øvelse. Erstattes i et normeret ortogonalsystem et eller flere par af funktioner φ og ψ fra systemet med parret $\frac{\varphi+\psi}{\sqrt{2}}$, $\frac{\varphi-\psi}{\sqrt{2}}$ fremkommer et nyt normeret ortogonalsystem. Anvendes denne bemærkning på det trigonometriske system ses, at systemet

$$\{1, \sqrt{2}\cos x, \sqrt{2}\sin x, \cdots, \sqrt{2}\cos nx, \sqrt{2}\sin nx, \cdots\}$$

er et normeret ortogonalsystem (det reelle trigonometriske ortogonalsystem). Dette kan naturligvis også vises direkte.

<u>Heuristisk betragtning.</u>

Lad f være en vilkårlig funktion i $\mathcal{L}$ og lad os antage, at f (i en eller anden betydning — ikke nødvendigvis ved punktvis konvergens) er „fremstillet" ved en trigonometrisk række:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

(eller, som man siger, er „opløst" i rene svingninger)

Ved multiplikation med e^{inx} for et fast n og påfølgende middelværdidannelse fås da (under antagelse af, at denne kan foretages ledvis på højre side)

$$M\{f(x)e^{-inx}\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m M\{e^{imx}e^{-inx}\} = c_n.$$

Dette fører til følgende:

Definition.

For enhver funktion $f \in \mathcal{L}$ betegnes den trigonometriske række $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, hvis koefficienter c_n er bestemt ved

$$c_n = (f(x), e^{inx}) = M\{f(x)e^{-inx}\} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

som Fourierrækken for f. Vi udtrykker dette ved at skrive

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Denne formel er altså blot en anden skrivemåde for de vendelige mange formler til bestemmelse af tallene c_n.

Skrevet på sædvanlig rækkeform lyder rækken

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}),$$

idet vi på den angivne måde (bortset fra konstantleddet c_0) samler leddene parvis. Det $n$te afsnit i rækken betegnes $s_n(x)$, altså

$$s_n(x) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(c_\nu e^{i\nu x} + c_{-\nu}e^{-i\nu x}) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}.$$

Ved brug af formlerne $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ og $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$ fås for det $n$te led ($n = 1, 2, \ldots$) udtrykket

$$c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} = (c_n + c_{-n})\cos nx + i(c_n - c_{-n})\sin nx$$
$$= a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

hvor

$$a_n = (c_n + c_{-n}) = M\{f(x)e^{-inx}\} + M\{f(x)e^{inx}\} = 2M\{f(x)\cos nx\}$$
$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i[M\{f(x)e^{-inx}\} - M\{f(x)e^{inx}\}] = 2M\{f(x)\sin nx\}.$$

Idet vi sætter $a_0 = 2c_0 = 2M\{f(x)\}$, antager rækken altså formen

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

hvor

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = 2M\left\{f(x)\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} nx\right\} = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} nx\,dx \qquad \begin{matrix} n=0,1,2,\cdots \\ n=1,2,\cdots. \end{matrix}$$

Denne skrivemåde vil man især benytte for reelle funktioner.

§2. Summabilitet.

Selv for kontinuerte funktioner er Fourierrækken i almindelighed ikke konvergent, og konvergensteorien for Fourierrækker er i det hele taget kompliceret. Som vist af Fejér (1900) får man en mere tilfredsstillende teori ved at benytte summabilitet. (L. Fejér, 1880-1959).

Ved en summabilitetsmetode forstås en metode til at tilskrive uendelige rækker $u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$ en sum s (altså simpelthen en funktion $s=s(u_0,u_1,\cdots,u_n,\cdots)$ defineret på en mængde i talfølgerummet). Konvergens er en sådan metode. Vi skal her kun betragte den (efter konvergens) simpleste summabilitetsmetode.

Lad $u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$ være en uendelig række med komplekse led. Vi betragter afsnittene

$$s_n = u_0+u_1+\cdots+u_n$$

og danner det n^{te} afsnitsmiddeltal

$$\sigma_n = \frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}.$$

Hvis $\sigma_n \to s$ for $n\to\infty$, kaldes den givne række <u>summabel med summen</u> s.

Sætning. <u>Hvis rækken er konvergent med summen</u> s, <u>er den også summabel med samme sum.</u>

Bevis. Vi skal vise:

$$s_n \to s \quad \Rightarrow \quad \sigma_n \to s.$$

Til et givet $\varepsilon > 0$ vælges et N således at $|s - s_n| < \varepsilon$ for $n > N$. For $n > N$ har vi

$$\sigma_n - s = \frac{(s_0 - s) + (s_1 - s) + \cdots + (s_n - s)}{n+1}$$

$$= \frac{(s_0 - s) + \cdots + (s_N - s)}{n+1} + \frac{(s_{N+1} - s) + \cdots + (s_n - s)}{n+1},$$

altså

$$|\sigma_n - s| \leqslant \frac{|(s_0 - s) + \cdots + (s_N - s)|}{n+1} + \frac{|s_{N+1} - s| + \cdots + |s_n - s|}{n+1}$$

$$< \frac{C}{n+1} + \frac{(n-N)\varepsilon}{n+1} < \frac{C}{n+1} + \varepsilon.$$

Vælges $N_1 \geqslant N$ så stor, at $\frac{C}{n+1} < \varepsilon$ for $n > N_1$, gælder altså $|\sigma_n - s| < 2\varepsilon$ for $n > N_1$.

Den omvendte sætning gælder <u>ikke</u>. For eksempel er rækken $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ (hvor $u_n = (-1)^n$) divergent. Dens afsnit s_n er 1 for lige n og 0 for ulige n. Følgelig er $\sigma_n = \frac{1}{2}$ for ulige n, medens σ_n for et lige n er $= \frac{\frac{1}{2}n + 1}{n+1}$. Følgelig gælder $\sigma_n \to \frac{1}{2}$ for $n \to \infty$. Rækken er altså summabel med summen $s = \frac{1}{2}$.

<u>Bemærkning.</u> Idet

$$s_0 = u_0$$
$$s_1 = u_0 + u_1$$
$$s_2 = u_0 + u_1 + u_2$$
$$\cdots$$
$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

får man for det n^{te} afsnitsmiddeltal σ_n udtrykket

$$\sigma_n = \frac{(n+1)u_0 + n u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) u_\nu.$$

<u>Formler for Fourierrækkens afsnit og afsnitsmiddel.</u>

Lad $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, altså $c_n = M\{f(x) e^{-inx}\}$.

I udtrykket for c_n kan vi udføre substitutionen

$x = u - t$ (med t som den nye integrationsvariable). Herved fås $c_n = \mathop{\mathcal{M}}_{t}\{f(u-t)e^{int}\}e^{-inu}$, hvoraf ved multiplikation med e^{inu} og erstatning af u med x

$$c_n e^{inx} = \mathop{\mathcal{M}}_{t}\{f(x-t)e^{int}\}.$$

Af dette udtryk for Fourierrækkens n^{te} led ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) fås straks for dens n^{te} afsnit $s_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) udtrykket

$$s_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x} = \mathop{\mathcal{M}}_{t}\{f(x-t)\mathfrak{D}_n(t)\},$$

hvor

$$\mathfrak{D}_n(t) = \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu t} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}}$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t} = \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{2(\sin\frac{1}{2}t)^2}$$

kaldes Dirichlets kerne. For det n^{te} afsnitsmiddel

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1} = \sum_{\nu=-n}^{n}\left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right)c_\nu e^{i\nu x}$$

fås

$$\sigma_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n}\left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right)c_\nu e^{i\nu t} = \mathop{\mathcal{M}}_{t}\{f(x-t)K_n(t)\},$$

hvor

$$K_n(t) = \sum_{\nu=-n}^{n}\left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right)e^{i\nu t} = \frac{\mathfrak{D}_0(t) + \cdots + \mathfrak{D}_n(t)}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1-\cos(n+1)t}{2(\sin\frac{1}{2}t)^2} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2$$

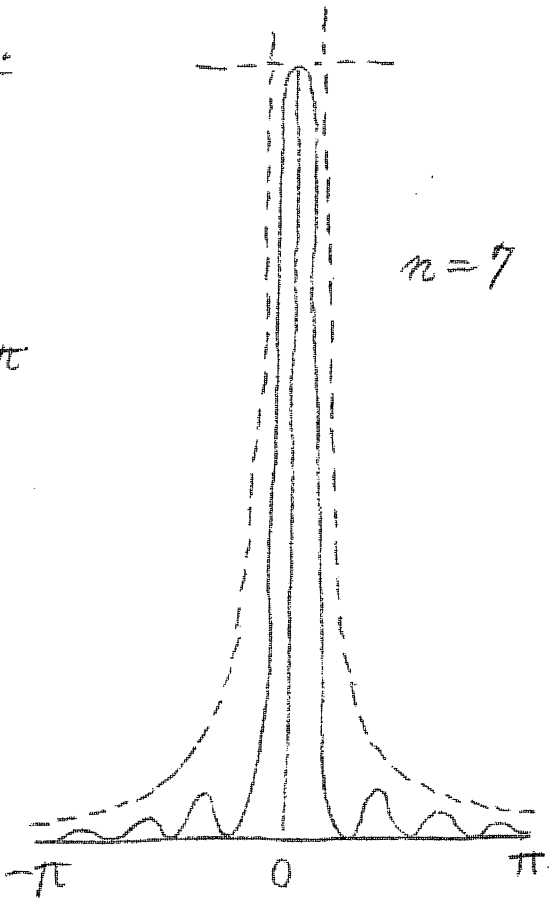
kaldes Fejérs kerne. Man bemærker, at begge kerner er reelle funktioner med perioden 2π. Skrevet som trigonometriske polynomier på reel form er

$$\mathfrak{D}_n(t) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu t, \qquad K_n(t) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)\cos\nu t.$$

Fejérs kerne har væsentligt simplere egenskaber end Dirichlets kerne, hvilket forklarer, at summabilitetsteorien for Fourierrækker er simplere end

konvergensteorien. Vi får brug for følgende:

Egenskaber ved Fejérs kerne.



(a) $K_n(t) = K_n(-t)$ for alle t

(b) $K_n(t) \geqslant 0$ for alle t

(c) $K_n(t) \leqslant K_n(0) = n+1$ for alle t

(d) $K_n(t) \leqslant \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi^2}{t^2}$ for $0 < |t| \leqslant \pi$

(e) $M\{K_n(t)\} = 1$.

(a) er klar. (b) ses af de to sidste udtryk for $K_n(t)$. (c) og (e) ses af det første udtryk for $K_n(t)$. (d) ses af det sidste udtryk for $K_n(t)$, idet det benyttes, at $|\sin(n+\frac{1}{2})t| \leqslant 1$ og at $\sin\frac{1}{2}t \geqslant \frac{t}{\pi}$ for $0 \leqslant t \leqslant \pi$ (benyt at $\sin\frac{1}{2}t$ er konkav i $0 \leqslant t \leqslant \pi$).

Vi vil nu bevise Fejérs sætninger:

Sætning 1. *I ethvert kontinuitetspunkt x for funktionen f er Fourierrækken summabel med summen $f(x)$.*

Bevis. Vi finder (idet de benyttede egenskaber ved kernen markeres)

$$|S_n(x) - f(x)| \underset{(e)}{=} \left| M_t\{f(x-t)K_n(t)\} - M_t\{f(x)K_n(t)\} \right|$$

$$= \left| M_t\{(f(x-t) - f(x))K_n(t)\} \right| \underset{(b)}{\leqslant} M_t\{|f(x-t) - f(x)|\,K_n(t)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\,K_n(t)\,dt.$$

Til et givet $\varepsilon > 0$ vælges $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ således, at

$|f(x-t)-f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ for $|t|<\delta$. Vi får da ved opdeling af integralet, at dette er

$$\underset{\text{(b)(d)}}{\leqslant} \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2}\varepsilon K_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} |f(x-t)-f(x)| \cdot \frac{1}{(n+1)}\frac{\pi^2}{\delta^2}\,dt$$

$$\underset{\text{(g)}}{\leqslant} \frac{1}{2}\varepsilon \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt + \frac{\pi^2}{(n+1)\delta^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)-f(x)|\,dt$$

$$\underset{\text{(e)}}{=} \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{\pi^2 C}{(n+1)\delta^2}, \quad \text{hvor } C = \max_t\{|f(x-t)-f(x)|\}.$$

Vælges N så stor, at $\frac{\pi^2 C}{(N+1)\delta^2} < \frac{1}{2}\varepsilon$, har vi altså

$$|S_n(x)-f(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geqslant N,$$

hvormed sætningen er bevist.

Sætning 2. *Hvis funktionen f er kontinuert for alle x, er Fourierrækken ligeligt summabel med sum $f(x)$, d.v.s. $S_n(x)$ konvergerer ligeligt mod $f(x)$ for $n\to\infty$.*

Bevis. Da f er kontinuert for alle x og periodisk, er f ligelig kontinuert, og vi kan derfor i ovenstående bevis for et vilkårligt $\varepsilon>0$ benytte samme $\delta=\delta(\varepsilon)$ for alle x. Endvidere er $f(x)$ begrænset, f. eks. $|f(x)|\leqslant M$ for alle x, og den i ovenstående bevis optrædende middelværdi C er da $\leqslant 2M$ for alle x. Vi får derfor

$$|S_n(x)-f(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon + \frac{2\pi^2 M}{(n+1)\delta^2} \quad \text{for alle } x.$$

Vælges N så stor, at $\frac{2\pi^2 M}{(N+1)\delta^2} < \frac{1}{2}\varepsilon$ ses, at

$$|S_n(x)-f(x)| < \varepsilon \text{ for alle } x, \text{ når } n \geqslant N,$$

hvormed sætningen er bevist.

Sætning 3. *I ethvert punkt x, hvor funktionen f har grænseværdier $f(x+0)$ og $f(x-0)$ fra højre og*

venstre, er Fourierrækken summabel med summen $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$.

Bevis. Af ② følger, at

$$S_n(x) = \underset{t}{M}\{f(x-t)K_n(t)\} = \underset{t}{M}\{f(x+t)K_n(t)\}.$$

Altså er $S_n(x)$ = middeltallet af disse to udtryk, d.v.s.

$$S_n(x) = \underset{t}{M}\left\{\frac{1}{2}(f(x-t)+f(x+t))K_n(t)\right\}.$$

Indføres den ved

$$g(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(u)+f(2x-u)) & \text{for } u \neq x+p2\pi \\ \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) & \text{for } u = x+p2\pi \end{cases} \quad (p \text{ hel})$$

bestemte funktion $g \in \mathcal{L}$, ses at

$$S_n(x) = \underset{t}{M}\{g(x-t)K_n(t)\},$$

d.v.s. $S_n(x)$ er simpelthen det n^{te} afsnitsmiddel for Fourierrækken for g i punktet x. Funktionen g er imidlertid kontinuert i x. Altså gælder

$$S_n(x) \to g(x) = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) \quad \text{for } n \to \infty.$$

Sætning 2 kan også formuleres således: Når f er kontinuert for alle x, gælder

$$\|f - S_n\|_u \to 0 \quad \text{for } n \to \infty.$$

Heraf følger Weierstrass' approksimationssætning for trigonometrisk approksimation: Afslutningen i B af klassen af trigonometriske polynomier $\sum_{\nu=-n}^{n} k_\nu e^{i\nu x}$ svarende til den ved normen $\|f\|_u$ bestemte metrik er klassen af kontinuerte funktioner med perioden 2π. Her betegner B klassen af alle begrænsede funktioner på $]-\infty,+\infty[$, og $\|f\|_u$ er den ligelige norm

$$\|f\|_u = \sup|f(x)|.$$

Vi vil nu bevise en lignende sætning for klassen $\mathcal{L}$.

For ethvert $f \in \mathcal{L}$ er Fourierrækken (stærkt) summabel i $\mathcal{L}$, d.v.s.

$$\|f - \mathcal{S}_n\|_1 \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

Bevis. Ved beviset skal vi samtidig betragte forskellige funktioner f. Det er derfor praktisk at betegne det $n$te afsnitsmiddel af Fourierrækken for f med $\mathcal{S}_n(f)$ (og dets værdier med $\mathcal{S}_n(f,x)$), altså

$$\mathcal{S}_n(f,x) = \underset{t}{M}\{f(x-t)\,K_n(t)\}.$$

For et fast n er $f \xrightarrow{t} \mathcal{S}_n(f)$ en afbildning af $\mathcal{L}$ ind i sig selv [igvrigt ind i klassen af trigonometriske polynomier $\sum_{\nu=-n}^{n} k_\nu e^{i\nu x}$]. Afbildningen er åbenbart lineær:

$$\mathcal{S}_n(cf) = c\,\mathcal{S}_n(f), \qquad \mathcal{S}_n(f+g) = \mathcal{S}_n(f) + \mathcal{S}_n(g).$$

Vi vil vise, at afbildningen er en kontraktion, d.v.s. at

$$\|\mathcal{S}_n(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1.$$

Heråd bemærker vi, at som følge af (R)

$$|\mathcal{S}_n(f,x)| = \left|\underset{t}{M}\{f(x-t)\,K_n(t)\}\right| \leqslant \underset{t}{M}\{|f(x-t)|\,K_n(t)\} = \mathcal{S}_n(|f|,x),$$

altså

$$\|\mathcal{S}_n(f)\|_1 \leqslant M\{\mathcal{S}_n(|f|)\}.$$

Og $M\{\mathcal{S}_n(|f|)\}$ er simpelthen det konstante led i det trigonometriske polynomium $\mathcal{S}_n(|f|)$, som er lig med det konstante led i Fourierrækken for $|f|$, altså lig med $M\{|f|\} = \|f\|_1$.

Vi betragter nu en bestemt funktion $f \in \mathcal{L}$. Ved anvendelse af approksimationssætningerne (side 105) på $f_{[0,2\pi[}$ ses let, at der til et givet $\varepsilon > 0$ findes en kontinuert funktion g med perioden 2π, således at

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

Da $\mathcal{S}_n(f-g) = \mathcal{S}_n(f) - \mathcal{S}_n(g)$, følger heraf

$$\|\mathcal{S}_n(f) - \mathcal{S}_n(g)\|_1 < \varepsilon.$$

Da $S_n(g,x)$ konvergerer ligeligt mod $g(x)$, gælder åbenbart $\|S_n(g)-g\|_1 \to 0$ for $n\to\infty$. Vi kan altså til det givne ε finde et N, så at

$$\|g-S_n(g)\|_1 < \varepsilon \quad \text{for } n>N.$$

Da

$$\|f-S_n(f)\|_1 \leqslant \|f-g\|_1 + \|g-S_n(g)\|_1 + \|S_n(g)-S_n(f)\|_1,$$

følger, at

$$\|f-S_n(f)\|_1 < 3\varepsilon \quad \text{for } n>N,$$

hvormed sætningen er bevist. [Princippet for løsevægt: Den „vilde" løse f er fanget ved hjælp af den „tamme" løse g.]

Af denne sætning følger en fundamentalsætning: Entydighedssætningen. To funktioner $f\in L$ og $g\in L$ har samme Fourierrække, hvis og kun hvis $f\sim g$.

Bevis. Det er klart, at hvis $f\sim g$, da har f og g samme Fourierrække. Antag nu, at f og g har samme Fourierrække. Da gælder $S_n(f)=S_n(g)$ for alle n. Af $\|f-S_n(f)\|_1\to 0$ og $\|g-S_n(f)\|_1\to 0$ for $n\to\infty$ følger da, at $\|f-g\|_1=0$, altså $f\sim g$.

Uden bevis nævner vi følgende sætning af Lebesgue (Fejér-Lebesgues sætning): For ethvert $f\in L$ er Fourierrækken summabel næsten overalt med summen $f(x)$, d.v.s. $S_n(x)\to f(x)$ for næsten alle x.

Sætningen om (stærk) summabilitet i L kan generaliseres til L_p for $1<p<+\infty$ (men ikke til L_∞).

For ethvert $f\in L_p$, $1<p<\infty$, er Fourierrækken (stærkt) summabel i L_p, d.v.s.

$$\|f-S_n\|_p \to 0 \quad \text{for } n\to\infty.$$

Bevis. Beviset beror på, at afbildningen $f\to S_n(f)$ opfattet som en afbildning af L_p ind i sig selv er

en kontraktion, d. v. s.

$$\|\mathcal{S}_n(f)\|_p \leqslant \|f\|_p .$$

For at indse det benyttes Hölders ulighed, som (idet $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) giver

$$|\mathcal{S}_n(f,x)| = \left|\mathop{M}_t\{f(x-t)\,K_n(t)^{\frac{1}{p}}\,K_n(t)^{\frac{1}{q}}\}\right|$$

$$\leqslant \left[\mathop{M}_t\{|f(x-t)|^p\,K_n(t)\}\right]^{\frac{1}{p}}\left[M\{K_n(t)\}\right]^{\frac{1}{q}},$$

altså

$$|\mathcal{S}_n(f,x)|^p \leqslant \mathcal{S}_n(|f|^p,x),$$

hvoraf

$$\|\mathcal{S}_n(f)\|_p{}^p \leqslant M\{\mathcal{S}_n(|f|^p)\} = M\{|f|^p\} = \|f\|_p{}^p .$$

Resten af beviset er som i tilfældet $p=1$.

§3. Konvergens.

Som foran nævnt er konvergensteorien for Fourierrækker kompliceret. Et enkelt hovedresultat kan dog fås på simpel måde ud fra summabilitetsteorien. Kartil får vi brug for følgende sætning:

Hardys sætning (G. H. Hardy 1877-1947, sætningen er fra 1909). Hvis rækken $u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$ er summabel med sum s og talfølgen $\{n\,u_n\}$ er begrænset, da er rækken konvergent med sum s.

Bevis. Sætningen beror på, at afsnittene s_n på grund af leddenes lidenhed ændrer sig så langsomt, at hvis s_n for et stort n var kendeligt forskellig fra s samtidig med, at $\mathcal{S}_n$ var nær s, måtte $\mathcal{S}_{n+p}$ for et passende p være kendeligt forskelligt fra s. Et bevis efter denne retningslinie viedes bliver indirekte. Vi foretrækker at udnytte samme tankegang i et direkte bevis.

Vi skal vise:

$$\mathcal{S}_n \to s \quad \text{og} \quad \sup|n\,u_n| = k < +\infty \quad \Rightarrow \quad s_n \to s.$$

Til et givet $\varepsilon>0$ findes et N, så at $|\mathcal{S}_n - s| < \varepsilon$ for $n \geqslant N$.

Vi vælger $n > N$. For $p \geqslant 1$ gælder

$$(n+p)\sigma_{n+p-1} - n\sigma_{n-1} = s_n + s_{n+1} + \cdots + s_{n+p-1},$$

altså

$$(n+p)(\sigma_{n+p-1} - s) - n(\sigma_{n-1} - s) = p(s_n - s) + A,$$

hvor A betegner summen

$$\begin{aligned}(s_{n+1} - s_n) + \cdots + (s_{n+p-1} - s_n) = {} & u_{n+1} \\ & + u_{n+1} + u_{n+2} \\ & + \cdots \\ & + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}.\end{aligned}$$

De her optrædende u_ν er alle numerisk $\leqslant \frac{k}{n}$ og deres antal er $\frac{p(p-1)}{2}$. Følgelig er $|A| \leqslant \frac{p(p-1)}{2} \cdot \frac{k}{n}$.

Da $|\sigma_{n+p-1} - s| < \varepsilon$ og $|\sigma_{n-1} - s| < \varepsilon$, finder vi

$$p|s_n - s| < \frac{p(p-1)}{2} \cdot \frac{k}{n} + (n+p)\varepsilon + n\varepsilon$$

eller

$$|s_n - s| < \frac{p-1}{2} \cdot \frac{k}{n} + \left(\frac{2n}{p} + 1\right)\varepsilon.$$

<u>Her kan vi frit råde over</u> p. Man ser, at p trækker i modsat retning i de to led. Vi kan imidlertid vælge p således, at begge led bliver små. Herfor benyttes for p det hele tal, for hvilket

$$2n\sqrt{\varepsilon} < p \leqslant 2n\sqrt{\varepsilon} + 1.$$

Da fås

$$|s_n - s| < \frac{2n\sqrt{\varepsilon}}{2} \cdot \frac{k}{n} + \left(\frac{2n}{2n\sqrt{\varepsilon}} + 1\right)\varepsilon$$

$$= (k+1)\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon.$$

Til et givet $\delta > 0$ kan vi vælge ε så at $(k+1)\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon < \delta$. For et til dette ε svarende N gælder da $|s_n - s| < \delta$ for $n > N$.

<u>Funktioner af begrænset variation.</u>

En kompleks funktion f på et interval $[a, b]$ kaldes som bekendt af begrænset variation på $[a, b]$, hvis

der findes et tal $K < +\infty$, således at der for vilkårlige $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ gælder

$$\sum_{j=1}^{p} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leqslant K.$$

En sådan funktion er åbenbart begrænset. Hvis $f = f' + i f''$, hvor f' og f'' er reelle, vil f være af begrænset variation på $[a,b]$, hvis og kun hvis f' og f'' er det. En reel funktion er af begrænset variation, hvis og kun hvis den er differens mellem to monotont voksende funktioner. Da enhver monoton funktion på $[a,b]$ åbenbart er integrabel (endda Riemann integrabel), ses, at enhver funktion f af begrænset variation er integrabel. Endvidere ses, at for en funktion af begrænset variation på $[a,b]$ eksisterer grænseværdierne $f(x+0)$ og $f(x-0)$ henholdsvis for alle $x \in [a,b[$ og alle $x \in]a,b]$, thi dette er rigtigt for monotone funktioner.

Vi vil betragte komplekse funktioner med perioden 2π, der er af begrænset variation på ethvert interval $[a,b]$. (Herfra er naturligvis tilstrækkeligt, at det gælder for et periodeinterval $[a, a+2\pi]$.) Vi vil vise:

<u>Fourierrækken for en funktion f med perioden 2π, der er af begrænset variation på ethvert interval, er konvergent for ethvert x med summen</u>

$$\frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right)$$

Heri er indeholdt Dirichlets resultat (side 110), idet en reel funktion, der stykkevis er kontinuert og monoton, er af begrænset variation.

Bevis. Af Fejérs sidste sætning vides, at Fourierrækken for ethvert x er summabel med summen $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$. Ifølge Hardys sætning er det derfor tilstrækkeligt at vise, at talfølgen

$$\{n(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})\}$$

er begrænset for ethvert x. Vi viser dette ved at vise, at talmængden

$$\{ nc_n \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}$$

er begrænset.

Ifølge forudsætning er f af begrænset variation på $[0, 2\pi]$. Der findes altså et $K < +\infty$, så at

$$\sum_{j=1}^{p} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leqslant K,$$

når $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_p = 2\pi$. For $n \neq 0$ omskriver vi c_n (eller rettere $2\pi c_n$) således:

$$2\pi c_n = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \int_0^{h} + \int_h^{2h} + \dots \int_{2\pi-h}^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

idet vi for h benytter <u>halvperioden</u> $\frac{\pi}{|n|}$ for e^{-inx}. Herved fås

$$2\pi c_n = \int_0^h [f(x) e^{-inx} + f(x+h) e^{-in(x+h)} + \dots + f(x+(2n-1)h) e^{-in(x+(2n-1)h)}] dx$$

$$= \int_0^h [f(x) - f(x+h) + f(x+2h) - \dots - f(x+(2n-1)h)] e^{-inx} dx,$$

hvoraf

$$2\pi |c_n| \leqslant \int_0^h [|f(x) - f(x+h)| + \dots + |f(x+(2n-2)h) - f(x+(2n-1)h)|] dx.$$

Her er integranden $\leqslant K$ for alle x i $[0, h]$. Følgelig er

$$2\pi |c_n| \leqslant Kh = K \frac{\pi}{|n|}$$

og altså

$$(*) \qquad |nc_n| \leqslant \frac{K}{2},$$

hvormed sætningen er bevist.

<u>Tilføjelse</u>. Sættes $\sup |f(x)| = A$ har vi for alle x

$$|\mathcal{S}_n(x)| = |\mathop{M}_t \{ f(x-t) K_n(t) \}| \leqslant \mathop{M}_t \{ |f(x-t)| K_n(t) \} \leqslant \mathop{M}_t \{ A K_n(t) \} = A.$$

Nu er

$$s_n(x) - \mathcal{S}_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x} - \sum_{-n}^{n} \left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right) c_\nu e^{i\nu x} = \frac{1}{n+1} \sum_{-n}^{n} |\nu| c_\nu e^{i\nu x},$$

altså ifølge $(*)$

$$|s_n(x) - \mathcal{S}_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{-n}^{n} |\nu c_\nu| \leqslant \frac{1}{n+1} 2n \frac{K}{2} < K,$$

og man har derfor

$|s_n(x)| \leqslant A + K$ for alle n og x.

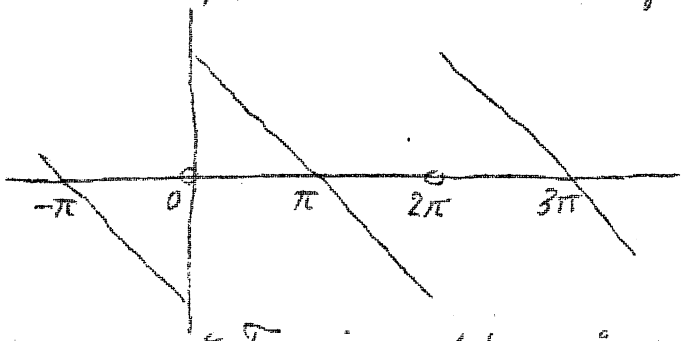
Afsnittene $s_n(x)$ i Fourierrækken for en funktion, der er af begrænset variation i ethvert interval, er således ensartet begrænsede.

§4. Divergens.

Et eksempel på en kontinuert funktion med perioden 2π, hvis Fourierrække er divergent i visse punkter, er først angivet af du Bois-Reymond (1876). Vi vil her gengive et eksempel af Fejér (1911).

Vi begynder med at udregne Fourierrækken for den (diskontinuerte) funktion f, der bestemmes ved

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{for } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$



Da funktionen er reel, udregner vi Fourierrækken i reel form:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \quad \text{for alle } n \geqslant 0, \text{ da } f \text{ er ulige}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}dx = \frac{2}{n}$$

for alle $n \geqslant 1$,

altså

$$f(x) \sim \sum_1^\infty \frac{2\sin nx}{n}.$$

Da funktionen er af begrænset variation på $[0, 2\pi]$ og $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, gælder også

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{2\sin nx}{n}.$$

Af tilfældet ovenfor ses, at afsnittene

$$s_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2\sin \nu x}{\nu}$$

er ensartet begrænsede. Der findes altså et $C < +\infty$ ($C = \pi + 2$ kan bruges), så at

$$|s_n(x)| \leqslant C \quad \text{for alle } n \text{ og } x.$$

Vi danner nu

$$f_{p,n}(x) = \sin px \; s_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2 \sin px \sin \nu x}{\nu}$$

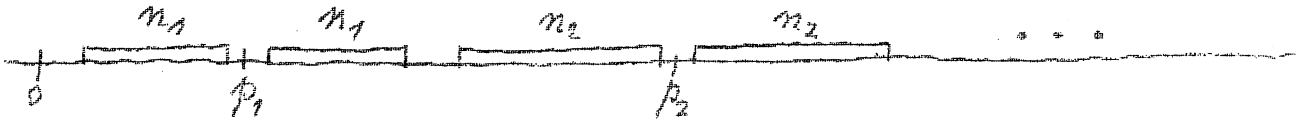
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos(p-\nu)x - \cos(p+\nu)x}{\nu}$$

$$= \frac{\cos(p-n)x}{n} + \cdots + \frac{\cos(p-1)x}{1} - \frac{\cos(p+1)x}{1} - \cdots - \frac{\cos(p+n)x}{n}$$

Dette trigonometriske polynomium er altså for alle p, n og x numerisk $\leqslant C$, men deler vi det på midten, vil første del for sig være $= \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{1}$ for $x = 0$, en størrelse, der $\to \infty$ for $n \to \infty$. Herpå baseres Fejérs konstruktion.

Vi vælger tal $p_1, n_1, p_2, n_2, \cdots, p_k, n_k, \cdots$ så at

$$0 < p_1 - n_1, \; p_1 + n_1 < p_2 - n_2, \; \cdots, \; p_{k-1} + n_{k-1} < p_k - n_k, \cdots$$



og danner

$$f(x) = f_{p_1,n_1}(x) + \frac{1}{2} f_{p_2,n_2}(x) + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} f_{p_k,n_k}(x) + \cdots;$$

eller udførligt skrevet

$$f(x) = \left(\frac{\cos(p_1-n_1)x}{n_1} + \cdots + \frac{\cos(p_1-1)x}{1} - \frac{\cos(p_1+1)x}{1} - \cdots - \frac{\cos(p_1+n_1)x}{n_1} \right)$$

$$+ \left(\frac{\cos(p_2-n_2)x}{2n_2} + \cdots + \frac{\cos(p_2-1)x}{2 \cdot 1} - \frac{\cos(p_2+1)x}{2 \cdot 1} - \cdots - \frac{\cos(p_2+n_2)x}{2n_2} \right)$$

$$+ \cdots$$

$$+ \left(\frac{\cos(p_k-n_k)x}{2^{k-1} n_k} + \cdots + \frac{\cos(p_k-1)x}{2^{k-1} \cdot 1} - \frac{\cos(p_k+1)x}{2^{k-1} \cdot 1} - \cdots - \frac{\cos(p_k+n_k)x}{2^{k-1} \cdot n_k} \right)$$

$$+ \cdots$$

(Betingelserne $0 < p_1 - n_1, \; p_1 + n_1 < p_2 - n_2, \cdots, \; p_{k-1} + n_{k-1} < p_k - n_k, \cdots$ tjener til at holde ledgrupperne ude fra hinanden).

Rækken er med de anførte parenteser ligelig konvergent, idet den har den konvergente majorantrække

$$C + \frac{C}{2} + \cdots + \frac{C}{2^{k-1}} + \cdots.$$

Den fremstiller altså en kontinuert funktion med periodem 2π. Dennes Fourierrække (skrevet på reel form) fås ved at hæve parenteserne og sætte nulled til. Thi ved multiplikation med $\cos nx$ eller $\sin nx$ fås atter en ligelig konvergent række

$$f(x)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} f_{p_k, n_k}(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx ;$$

altså er

$$\left.\begin{matrix}a_n\\ b_n\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2^{k-1}} f_{p_k, n_k}(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx\,dx ,$$

og heraf ses, at alle $b_n = 0$, og at $a_n = 0$, undtagen hvis $\cos nx$ forekommer i et af leddene $\frac{1}{2^{k-1}} f_{p_k, n_k}(x)$, i hvilket tilfælde a_n er koefficienten til $\cos nx$ i dette led.

Vi vil nu vise, at vi kan opnå, at Fourierrækken for $f(x)$ er divergent for $x = 0$. Hertil er det nok, at rækken er divergent for $x = 0$, når man sætter parenteser midt i hv. af de ovenstående parenteser. Gør vi det, bliver det $(2k-1)$te led for $x = 0$ lig med

$$\frac{1}{2^{k-1}\cdot n_k} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}\cdot 1} = \frac{1}{2^{k-1}}\left(\frac{1}{n_k} + \cdots + \frac{1}{1}\right).$$

Vælger vi altså først n_k'erne således, at

$$\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n_k} > 2^{k-1},$$

og dernæst p_k'erne således, at ovenstående uligheder (der tjener til at holde ledgrupperne ude fra hinanden) bliver opfyldt, bliver Fourierrækken divergent for $x = 0$.

Uden bevis nævner vi, at A. Kolmogorov (f. 1903) har konstrueret en funktion $f \in \mathcal{L}$, hvis Fourierrække er divergent for alle x. Om der findes kontinuerte funktioner med denne egenskab vides ikke.

§ 5. Klassen L_2.

For klassen L_2 fås særligt simple og afrundede resultater. Dette hænger sammen med et resultat om endelige normerede ortogonalsystemer, som det er bekvemt at give en geometrisk ikledning.

For funktioner i L_2 gælder åbenbart

$$(g,f)=\overline{(f,g)}, \quad (af,g)=a(f,g), \quad (f,ag)=\bar{a}(f,g)$$

$$(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g), \quad (f,g_1+g_2)=(f,g_1)+(f,g_2).$$

Almindeligt gælder

$$(a_1f_1+\cdots+a_nf_n, b_1g_1+\cdots+b_mg_m)=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}a_\nu\bar{b}_\mu(f_\nu,g_\mu).$$

Pythagoras' sætning. Når $f\perp g$, er

$$\|f+g\|_2^2=\|f\|_2^2+\|g\|_2^2.$$

Thi $\|f+g\|_2^2=(f+g,f+g)=\|f\|_2^2+\|g\|_2^2+(f,g)+(g,f)$, hvor $(f,g)=0$ og altså også $(g,f)=0$.

Analogt ses: Når $f_1,\cdots,f_n$ er parvis ortogonale, gælder

$$\|f_1+\cdots+f_n\|_2^2=\|f_1\|_2^2+\cdots+\|f_n\|_2^2.$$

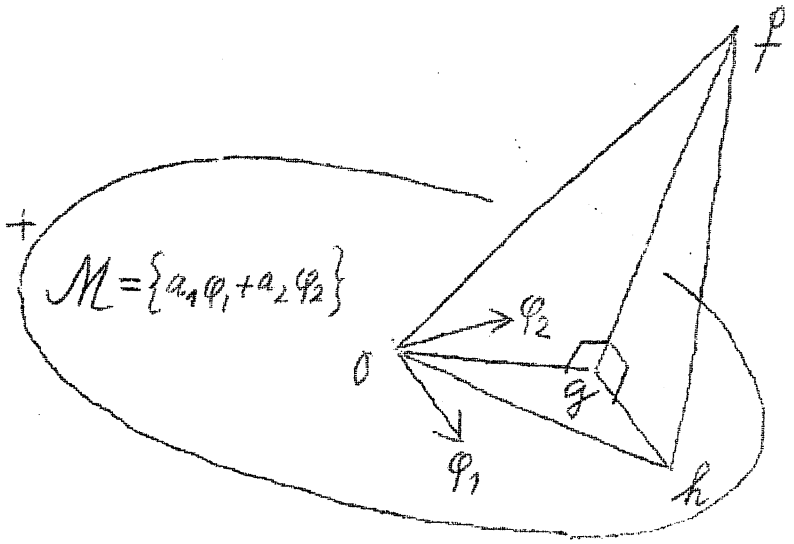
Thi $\|f_1+\cdots+f_n\|_2^2=(f_1+\cdots+f_n,f_1+\cdots+f_n)=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}(f_\nu,f_\mu)$, hvor $(f_\nu,f_\mu)=\|f_\nu\|_2^2$, når $\nu=\mu$, og $(f_\nu,f_\mu)=0$, når $\nu\neq\mu$.

Projektion på endelig dimensionalt underrum. Lad $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ være normerede, parvis ortogonale funktioner i L_2. Vi betragter underrummet M bestående af alle funktioner $g=a_1\varphi_1+\cdots+a_m\varphi_m$ (med vilkårlige komplekse koefficienter). For en sådan funktion gælder ifølge det foranstående

$$\|g\|_2^2=|a_1|^2+\cdots+|a_m|^2.$$

En funktion $h\in L_2$ siges at være ortogonal på M,

i tegn $h \perp M$, hvis den er ortogonal på alle $g \in M$. Herfor er åbenbart nødvendigt, at $h \perp \varphi_1, \dots, h \perp \varphi_m$. Men dette er også tilstrækkeligt. Thi af $(h, \varphi_1) = 0, \dots, (h, \varphi_m) = 0$ følger $(h, a_1\varphi_1 + \dots + a_m\varphi_m) = \overline{a_1}(h, \varphi_1) + \dots + \overline{a_m}(h, \varphi_m) = 0$ for vilkårlige $a_1, \dots, a_m$. Vi vil nu vise:



<u>For ethvert</u> $f \in \mathcal{L}_2$ <u>findes en og kun een funktion</u> $g = a_1\varphi_1 + \dots + a_m\varphi_m \in M$, <u>således at</u> $f - g \perp M$, nemlig den, der bestemmes ved

$$a_1 = (f, \varphi_1), \dots, a_m = (f, \varphi_m).$$

Thi nødvendigt og tilstrækkeligt for, at $f - g \perp M$, er, som foran vist, at $f - g \perp \varphi_1, \dots, f - g \perp \varphi_m$. Men $(f - g, \varphi_\mu) = (f, \varphi_\mu) - (g, \varphi_\mu) = (f, \varphi_\mu) - a_\mu$. Betingelsen $f - g \perp M$ er altså opfyldt når og kun når vi vælger $a_\mu = (f, \varphi_\mu)$, $\mu = 1, \dots, m$.

Dette g kaldes <u>projektionen af</u> f <u>på</u> M.

For ethvert $h = b_1\varphi_1 + \dots + b_m\varphi_m \in M$ gælder $g - h \perp M$. Altså er $f - g \perp g - h$, og ifølge Pythagoras' sætning gælder altså

$$\|f - h\|_2^2 = \|f - g\|_2^2 + \|g - h\|_2^2.$$

Da $g - h = (a_1 - b_1)\varphi_1 + \dots + (a_m - b_m)\varphi_m$, fås

$$\|f - h\|_2^2 = \|f - g\|_2^2 + \sum_{\mu=1}^{m} |a_\mu - b_\mu|^2.$$

Heraf følger:

Projektionen $g = a_1\varphi_1 + \cdots + a_m\varphi_m$ af f på M har den egenskab, at afstanden $\|f-g\|_2$ fra f til g er mindre end afstanden fra f til enhver anden funktion $h \in M$. Projektionen g er med andre ord den til f nærmeste funktion i M.

For afstanden $\|f-g\|_2$ får vi et simpelt udtryk, idet vi benytter, at $f-g \perp g$, og anvender Pythagoras' sætning. Da fås

$$\|f\|_2^2 = \|f-g\|_2^2 + \|g\|_2^2$$

eller

$$\|f-g\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{\mu=1}^{m} |a_\mu|^2.$$

Lad nu f være en vilkårlig funktion fra L_2 med Fourierrækken

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Idet koefficienten c_n til e^{inx} netop er det indre produkt af $f(x)$ med funktionen e^{inx}, finder vi ved at anvende det foranstående på det normerede ortogonalsystem bestående af funktionerne $e^{i\mu x}$, $\mu = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$, følgende fundamentale egenskab ved Fourierrækkens afsnit (H. Toepler, 1876):

For ethvert n har afsnittet $s_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}$ en mindre afstand fra f end ethvert andet trigonometrisk polynomium $t_n(x) = \sum_{-n}^{n} d_\nu e^{i\nu x}$ (med samme n). Nærmere bestemt gælder for ethvert $t_n(x) = \sum_{-n}^{n} d_\nu e^{i\nu x}$, at

$$\|f-t_n\|_2^2 = \|f-s_n\|_2^2 + \sum_{-n}^{n} |c_\nu - d_\nu|^2.$$

Endvidere er

$$\|f-s_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{-n}^{n} |c_\nu|^2.$$

Vælger vi specielt for $t_n(x)$ det n^{te} afsnits middel $\mathcal{S}_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_\nu \left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right) e^{i\nu x}$, gælder altså

$$\|f-s_n\|_2 \leq \|f-\mathcal{S}_n\|_2.$$

Nu ved vi imidlertid (side 121), at $\|f - s_n\|_2 \to 0$ for $n \to \infty$. Vi slutter altså, at $\|f - s_n\|_2 \to 0$. Heraf følger atter, i kraft af udtrykket for $\|f - s_n\|_2^2$, at $\sum_{-n}^{n} |c_\nu|^2 \to \|f\|_2^2$. Hermed er vist:

For ethvert $f \in \mathcal{L}_2$ er Fourierrækken (stærkt) konvergent i $\mathcal{L}_2$ med summen f, d.v.s.

$$\|f - s_n\|_2 \to 0 \quad \text{for } n \to \infty.$$

Endvidere er rækken $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ konvergent, og der gælder Parsevals ligning

$$\|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Vi vil nu bevise følgende omvending:

Enhver trigonometrisk række

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

for hvilken rækken

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

er konvergent, er Fourierrække for en funktion $f \in \mathcal{L}_2$ (og naturligvis ifølge entydighedssætningen bortset fra ækvivalens kun for een funktion).

Som det vil fremgå af beviset, hænger sætningen nøje sammen med Riesz-Fischers sætning (side 102) og kaldes derfor også Riesz-Fischers sætning.

Bevis. Vi betragter afsnittene

$$s_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}.$$

For $m > n$ gælder

$$s_m(x) - s_n(x) = \sum_{\nu=-m}^{-(n+1)} + \sum_{\nu=(n+1)}^{m} c_\nu e^{i\nu x},$$

altså

$$\|s_m - s_n\|_2^2 = \sum_{\nu=-m}^{-(n+1)} + \sum_{\nu=(n+1)}^{m} |c_\nu|^2.$$

Til et givet $\varepsilon > 0$ kan vi vælge N således, at

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 - \sum_{-N}^{N} |c_n|^2 < \varepsilon^2.$$

Da gælder $\|s_m - s_n\|_2 < \varepsilon$ for $m > n \geqslant N$.

Følgen $s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ er altså en fundamental følge i $\mathcal{L}_2$. Ifølge Riesz-Fischers sætning findes altså en funktion $f \in \mathcal{L}_2$, således at

$$\|f - s_n\|_2 \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Vi vil vise, at

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

For ethvert ν og ethvert n er

$$(f(x), e^{i\nu x}) - (s_n(x), e^{i\nu x}) = (f(x) - s_n(x), e^{i\nu x}),$$

altså

$$|(f(x), e^{i\nu x}) - (s_n(x), e^{i\nu x})| = |(f(x) - s_n(x), e^{i\nu x})|$$
$$\leqslant \|f - s_n\|_2 \cdot 1.$$

Følgelig gælder for ethvert ν

$$(s_n(x), e^{i\nu x}) \to (f(x), e^{i\nu x}) \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Men for $n \geqslant |\nu|$ gælder $(s_n(x), e^{i\nu x}) = c_\nu$. Altså er $(f(x), e^{i\nu x}) = c_\nu$.

Sammen med $\mathcal{L}_2$ betragter vi Hilbert rummet l_2 af alle komplekse talfølger

$$(\cdots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \cdots) \quad \text{med} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$$

(jfr. Danmarksruten side 93-94). Af ovenstående fremgår: Den ved Fourierrækken

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \text{ d.v.s. ved } c_n = M\{f(x) e^{-inx}\},$$

bestemte afbildning

$$f \to T(f) = (\cdots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \cdots)$$

er en bijektiv afbildning af $\mathcal{L}_2$ på l_2. Afbildningen er åbenbart lineær, d. v. s.

$$T(af) = a\,T(f), \qquad T(f+g) = T(f) + T(g),$$

og ifølge Parsevals ligning er den isometrisk, d. v. s.

$$\|f\|_2 = \|T(f)\|_2.$$

Mere almindeligt gælder, at det indre produkt af to vilkårlige funktioner i $\mathcal{L}_2$ er lig med det indre produkt af deres billeder i l_2. Thi hvis

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{inx},$$

gælder, idet vi sætter $s_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}$,

$$(f,g) - (s_n,g) = (f - s_n, g),$$

altså $$|(f,g) - (s_n,g)| \leqslant \|f - s_n\|_2 \, \|g\|_2,$$

hvoraf $$(s_n,g) \to (f,g) \quad \text{for } n \to \infty.$$

Men $(s_n,g) = \left(\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}, g(x)\right) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \left(e^{i\nu x}, g(x)\right) =$
$\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \overline{(g(x), e^{i\nu x})} = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \bar{d}_\nu$. Altså er

$$(f,g) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \bar{d}_n = (Tf, Tg).$$

Vi udtrykker dette kort ved at sige, at den ved Fourierrækken bestemmes en isometrisk afbildning af $\mathcal{L}_2$ på l_2.

Tillæg til Kap. 4, § 3.

Funktioner af begrænset variation.

For en kompleks funktion $f(x)$ på et interval $[a,b]$ og en deling $D: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ af $[a,b]$ kaldes

$$V_D = V_D(f) = \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})|$$

variationen af f svarende til D. Funktionen kaldes af begrænset variation, hvis

$$V = V(f) = \sup_D V_D(f) < +\infty.$$

Er $f = f' + if''$, hvor f' og f'' er reelle, gælder for ethvert D

$$\left.\begin{matrix} V_D(f') \\ V_D(f'') \end{matrix}\right\} \leqslant V_D(f) \leqslant V_D(f') + V_D(f'').$$

Heraf ses, at f er af begrænset variation, hvis og kun hvis f' og f'' er af begrænset variation.

De komplekse funktioner på $[a,b]$, der er af begrænset variation, udgør et vektorrum over $\mathbb{C}$. Thi for enhver funktion f og ethvert $a \in \mathbb{C}$ gælder for ethvert D

$$V_D(af) = |a|\, V_D(f),$$

og for to funktioner f og g gælder for ethvert D

$$V_D(f+g) \leqslant V_D(f) + V_D(g).$$

Endvidere gælder: Hvis f er af begrænset variation er også $|f|$ af begrænset variation. Thi for enhver deling D gælder

$$V_D(|f|) \leqslant V_D(f).$$

Specielt ses: De reelle funktioner på $[a,b]$, der er af begrænset variation, udgør et vektorrum over $\mathbb{R}$, og dette vektorrum er også et gitter.

En reel monoton funktion på $[a,b]$ er af begrænset variation. Thi hvis f er monotont voksende, gælder for ethvert D

$$V_D(f) = f(b) - f(a),$$

og hvis f er monotont aftagende gælder for ethvert D

$$V_D(f) = -(f(b) - f(a)).$$

Heraf ses: Enhver reel funktion på $[a,b]$, der er differens af to monotont voksende funktioner (eller, hvad der kommer ud på det samme, er sum af en monotont voksende og en monotont aftagende funktion) er af begrænset variation. Vi vil vise, at også det omvendte gælder.

Lad altså f være en reel funktion på $[a,b]$, der er af begrænset variation. For enhver deling D af $[a,b]$ kaldes

$$P_D = \sum_{\nu=1}^{n} [\,[f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})) \vee 0\,]$$

og

$$N_D = -\sum_{\nu=1}^{n} [\,(f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})) \wedge 0\,]$$

den positive og negative variation af f svarende til D [bemærk, at begge er $\geqslant 0$; ordet „negativ" må ikke misforstås].

Der gælder

$$V_D = P_D + N_D$$

$$f(b) - f(a) = P_D - N_D,$$

altså

$$P_D = \tfrac{1}{2}(V_D + f(b) - f(a))$$

$$N_D = \tfrac{1}{2}(V_D - (f(b) - f(a))),$$

og følgelig

$$P = \sup_D P_D = \tfrac{1}{2}(V + f(b) - f(a))$$

$$N = \sup_D N_D = \tfrac{1}{2}(V - (f(b) - f(a))),$$

hvoraf

$$\boxed{\begin{aligned} V &= P + N \\ f(b) - f(a) &= P - N \end{aligned}} \qquad (*)$$

Når f er af begrænset variation på $[a,b]$ er restriktionen af f til et delinterval $[a',b']$ af $[a,b]$ naturligvis også af begrænset variation. Thi enhver deling D' af $[a',b']$ giver anledning til en deling D af $[a,b]$, der fås ved til punkterne i D' at føje a (hvis $a < a'$) og b (hvis $b > b'$). Der gælder åbenbart $V_{D'} \leqslant V_D$ (hvor $V_{D'}$ naturligvis refe-

rører til restriktionen af f til $[a';b']$. Altså er

$$V' = \sup_{\mathfrak{D}'} V_{\mathfrak{D}'} \leqslant V.$$

Analogt gælder $P_{\mathfrak{D}'} \leqslant P_{\mathfrak{D}}$ og $N_{\mathfrak{D}'} \leqslant N_{\mathfrak{D}}$. Altså er

$$P' = \sup_{\mathfrak{D}'} P_{\mathfrak{D}'} \leqslant P$$

$$N' = \sup_{\mathfrak{D}'} N_{\mathfrak{D}'} \leqslant N.$$

Lad os nu med $V(x)$, $P(x)$, $N(x)$ betegne størrelserne V, P, N hørende til restriktionen af f til $[a,x]$. Da viser formlerne (*), at

(**)
$$\boxed{\begin{aligned} V(x) &= P(x) + N(x) \\ f(x) - f(a) &= P(x) - N(x) \end{aligned}}.$$

Betragtes et delinterval $[a,x']$ af $[a,x]$, viser ulighederne $V' \leqslant V$, $P' \leqslant P$, $N' \leqslant N$, at

$$\boxed{V(x') \leqslant V(x), \quad P(x') \leqslant P(x), \quad N(x') \leqslant N(x)}.$$

Funktionerne $V(x)$, $P(x)$, $N(x)$ er altså monotont voksende. [For $x=a$ har de åbenbart værdien 0.] Den anden af formlerne (**) viser, at

$$f(x) = (f(a) + P(x)) - N(x),$$

hvormed er godtgjort, at f er differens af to monotont voksende funktioner.

Sammenfattende har vi altså:

De reelle funktioner på et interval $[a,b]$, der er af begrænset variation, er nøjagtigt de funktioner, der er differens af to monotont voksende funktioner. De komplekse funktioner på et interval $[a,b]$, der er af begrænset variation, er nøjagtigt de funktioner, hvis reelle og imaginære koordinatfunktioner er af begrænset variation.

For en monotont voksende funktion $f(x)$ på et interval $[a,b]$ eksisterer grænseværdien $f(x-0)$ for ethvert $x \in]a,b]$ (og er $= \sup_{y\in[a,x[} f(y)$) og grænseværdien $f(x+0)$ for ethvert $x \in [a,b[$ (og er $= \inf_{y\in]x,b]} f(y)$). Heraf følger, at for en funktion $f(x)$ på $[a,b]$, der er af begrænset funktion, eksisterer grænseværdien $f(x-0)$ for ethvert $x \in]a,b]$ og grænseværdien $f(x+0)$ for ethvert $x \in [a,b[$.

Enhver monotont voksende funktion $f(x)$ på et interval $[a,b]$ er Riemann integrabel. Thi for enhver deling $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ er de to trappefunktioner (på $[a,b]$), der defineres ved

$$\underline{f}(x) = \begin{cases} f(x_{\nu-1}) & \text{for } x \in [x_{\nu-1}, x_\nu[, \ \nu = 1,\dots,n, \\ f(b) & \text{for } x = b \end{cases}$$

og

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x_\nu) & \text{for } x \in]x_{\nu-1}, x_\nu], \ \nu = 1,\dots,n, \\ f(a) & \text{for } x = a \end{cases}$$

henholdsvis $\leqslant f$ og $\geqslant f$, og differensen mellem deres integraler er

$$\sum_{\nu=1}^{n} (f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}))(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

som er $\leqslant (f(b)-f(a))\varepsilon$, hvis delingen vælges således, at længden af alle deleintervaller er $\leqslant \varepsilon$. Heraf følger, at enhver funktion på $[a,b]$, der er af begrænset variation, er Riemann integrabel.

Lad os nu betragte en kompleks funktion $f(x)$ på et begrænset eller ubegrænset interval J, evt. hele $\mathbb{R}$. Hvis restriktionen af f til et interval $[a,b] \subseteq J$ er af begrænset variation, siger vi, at f er af begrænset variation på $[a,b]$. Af det foranstående fremgår, at hvis

f er af begrænset funktion på $[a,b]$, da også på ethvert delinterval $[a',b']$ af $[a,b]$. Vi bemærker yderligere: Hvis f er af begrænset variation på $[a,c]$ og $[c,b]$, da også på $[a,b]$. Thi er $\mathfrak{D}$ en deling af $[a,b]$, og betegner vi med $\mathfrak{D}^*$ den deling, der fås ved at hilføje delepunktet c (hvis det ikke allerede er med), består $\mathfrak{D}^*$ af en deling $\mathfrak{D}_1$ af $[a,c]$ og en deling $\mathfrak{D}_2$ af $[c,b]$, og der gælder åbenbart

$$V_{\mathfrak{D}} \leqslant V_{\mathfrak{D}^*} = V_{\mathfrak{D}_1} + V_{\mathfrak{D}_2},$$

hvoraf ses, at $\sup_{\mathfrak{D}} V_{\mathfrak{D}} < +\infty$. Specielt ser vi: En periodisk funktion på $\mathbb{R}$ med perioden 2π er af begrænset variation på ethvert interval $[a,b]$, hvis (og naturligvis kun hvis) den er af begrænset variation på et periodeinterval $[a, a+2\pi]$.

En reel funktion på et interval $[a,b]$ er åbenbart af begrænset variation, hvis der findes en deling $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$, således, at funktionen er monoton og begrænset på hvert af intervallerne $]a,x_1[$, $]x_1,x_2[$, $\ldots$, $]x_{n-1},b[$. Man kan imidlertid let angive funktioner af begrænset variation, der ikke er af denne simple type.

Mat 2, 1965–66 MI Opg. 1–2

1. Bevis Weierstrass' approksimationssætning for funktioner af to variable: Hvis $f(x,y)$ er kontinuert i det afsluttede rektangel $R=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$ og $\varepsilon>0$, da findes et polynomium $p(x,y)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m}c_{\nu\mu}x^{\nu}y^{\mu}$, for hvilket

$$|f(x,y)-p(x,y)|\leqslant\varepsilon \text{ for alle } (x,y)\in R.$$

Vink. Vis først, at gyldigheden for et vilkårligt rektangel følger af gyldigheden for kvadratet $R=\{(x,y)\mid x\in[0,1],\ y\in[0,1]\}$. Vis dernæst, at når $f(x,y)$ er kontinuert i dette kvadrat, og

$$p_{n,m}(x,y)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m}f\left(\frac{\nu}{n},\frac{\mu}{m}\right)\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}\binom{m}{\mu}y^{\mu}(1-y)^{m-\mu},$$

da findes til $\varepsilon>0$ tal n_0 og m_0 således, at når $n\geqslant n_0$ og $m\geqslant m_0$ er $|f(x,y)-p_{n,m}(x,y)|\leqslant\varepsilon$ for alle $(x,y)\in R$.

[Vis ved hjælp af Čebyševs ulighed, at når

$$\sup_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=M \quad\text{og}\quad \sup_{\substack{(x_1,y_1)\in R,\ (x_2,y_2)\in R\\ |x_1-x_2|<\delta,\ |y_1-y_2|<\delta}}|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=\omega(\delta),$$

gælder

$$|f(x,y)-p_{n,m}(x,y)|\leqslant\omega(\delta)+\frac{M}{2n\delta^2}+\frac{M}{2m\delta^2} \text{ for alle } (x,y)\in R,$$

og vælg først δ og dernæst n_0 og m_0.]

2. Vis, at hvis $f(x)$ er kontinuert i $[0,1]$ og har en kontinuert differentialkvotient $f'(x)$, vil, idet

$$p_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu},$$

følgen af polynomier $p_n'(x)$ konvergere ligeligt mod $f'(x)$ i $[0,1]$.

Vink. Vis, at

$$p_n'(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{f\left(\frac{\nu+1}{n}\right)-f\left(\frac{\nu}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\binom{n-1}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-1-\nu},$$

og vurder differensen mellem $p_n'(x)$ og

$$q_{n-1}(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1}f'\left(\frac{\nu}{n-1}\right)\binom{n-1}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-1-\nu}.$$

3. Vis ved udregning af udtrykket på venstre side, at

$$\sum_{\nu=0}^{n} (x-\tfrac{\nu}{n})^4 \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} < \frac{1}{4n^2} \quad \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Vis herved, at (for $\delta > 0$)

$$\sum_{|x-\frac{\nu}{n}| \geqslant \delta} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} < \frac{1}{4n^2\delta^4} \quad \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Vis herved „den stærke form af de store tals lov": Spilles et spil, som der er sandsynligheden x for at vinde, gentagne gange uafhængigt af hinanden, og betegner $\nu(n)$ antallet af vundne spil blandt de n første spil, da vil sandsynligheden for, at samtlige forhold $\frac{\nu(n)}{n}, \frac{\nu(n+1)}{n+1}, \ldots, \frac{\nu(n+p)}{n+p}$ afviger mindre end δ fra x, være nær 1, når blot n er stor (ligegyldigt hvor stor p er).

Vink. Udtrykket er et polynomium i x af grad 4, som er 0 både for $x=0$ og $x=1$. Det har derfor $x(1-x)$ som divisor.

4. Bevis Weierstrass' sætning for trigonometrisk approksimation: Hvis $f(t)$ er kontinuert i $]-\infty, +\infty[$ og har perioden 2π, da findes for ethvert $\varepsilon > 0$ et trigonometrisk polynomium

$$p_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t),$$

for hvilket $|f(t) - p_n(t)| \leqslant \varepsilon$ for alle t.

Vink. Betragt den i hele xy-planen ved

$$F(r\cos t, r\sin t) = r\, f(t) \qquad (r \geqslant 0,\ -\infty < t < +\infty)$$

definerede funktion $F(x,y)$. Anvend Weierstrass' sætning på denne i kvadratet $\{(x,y) \mid x \in [-1,1], y \in [-1,1]\}$, jfr. opg. 1, og sæt $(x,y) = (\cos t, \sin t)$. Benyt dernæst formlerne for omskrivning af et produkt af to trigonometriske funktioner til en sum eller differens af to sådanne.

5. Vis, at en funktion $f(x)$ på $]-\infty,+\infty[$ er kontinuert, hvis og kun hvis der findes en følge $\{p_n(x)\}$ af polynomier, der konvergerer ligeligt mod $f(x)$ i ethvert interval $[a,b]$.

6. I det K betegner klassen af alle funktioner på $]-\infty,+\infty[$, sættes for $f\in K$, $g\in K$

$$\text{dist}(f,g) = \|f-g\|, \text{ hvor } \|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{|f(x)| \wedge \frac{1}{x^2+1}\right\}.$$

Vis, at K med denne afstandsdefinition er et metrisk rum. Vis, at når $f\in K$ og $f_n\in K$, $n=1,2,\ldots$, gælder $\text{dist}(f,f_n)\to 0$, hvis og kun hvis $f_n(x)$ konvergerer ligeligt mod $f(x)$ i ethvert interval $[a,b]$.

[Sætningen i opg. 5 kan derfor udtrykkes således: I det metriske rum (K,dist) er klassen af alle kontinuerte funktioner afslutningen af klassen af alle polynomier.]

7. Vis, at der i klassen K af alle funktioner på $]-\infty,+\infty[$ ikke findes nogen afstandsdefinition $\text{dist}(f,g)$, således at 1) (K,dist) er et metrisk rum; 2) $\text{dist}(f,f_n)\to 0$ hvis og kun hvis $f_n(x)\to f(x)$ for alle x.
Vink. Har intet med det gennemgåede stof at gøre.

8*. Vis, at der i klassen C af alle kontinuerte funktioner på $]-\infty,+\infty[$ ikke findes nogen afstandsdefinition $\text{dist}(f,g)$, således at 1) (C,dist) er et metrisk rum; 2) $\text{dist}(f,f_n)\to 0$ hvis og kun hvis $f_n(x)\to f(x)$ for alle x.

9. Om en kontinuert funktion $\varphi(x)$ på $[a,b]$ vides, at

$$\int_a^b x^n \varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{for alle hele } n\geq 0.$$

Vis, at $\varphi(x)=0$ for alle $x\in[a,b]$.
Vink. Vis, at $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ for enhver kontinuert funktion $f(x)$ på $[a,b]$.

Mat 2, 1965-66 MI Opg. 10-13

10. Vis, at hvis $\varphi(t)$ og $\psi(t)$ er kontinuerte funktioner på et interval $[\alpha, \beta]$, for hvilke

$$\int_\alpha^\beta (\varphi(t))^n dt = \int_\alpha^\beta (\psi(t))^n dt \text{ for alle hele } n \geq 0,$$

da gælder

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,dt = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\,dt$$

for enhver kontinuert funktion $f(x)$ på $]-\infty, +\infty[$. Vis herved, at φ og ψ har samme værdimængde.

Eksempel: Om en kontinuert funktion $\varphi(t)$ på $[0,1]$ vides, at

$$\int_0^1 (\varphi(t))^n dt = \frac{1}{n+1} \text{ for alle hele } n \geq 0.$$

Find værdimængden for φ.

11.* En funktion $f(x)$ på $]-\infty, +\infty[$ siges at have et lokalt minimum i punktet x_0, hvis der findes et $\varepsilon > 0$, således at $f(x) \geq f(x_0)$ for alle $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Vis, at hvis $f(x)$ har et lokalt minimum i ethvert punkt x_0, er værdimængden for f enten endelig eller numerabel. Angiv en funktion $f(x)$ med numerabel værdimængde, som har lokalt minimum i ethvert punkt x_0.
Vink. Har intet med det gennemgåede stof at gøre.

12. Find såvel ved Newtons som ved Lagranges interpolationsformel det polynomium af højst 3. grad, som for $x = -1, 0, 2, 3$ antager værdierne $y = 2, -1, 3, 1$.

13. Vis, at hvis et polynomium $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ for heltallige værdier af x antager heltallige værdier, er koefficienterne $a_0, a_1, \ldots, a_n$ rationale tal. Giv nogle eksempler på polynomier af denne art, hvis koefficienter ikke alle er hele tal.

14. Betragt Peanos kurve $(x,y)=(f(t),g(t))$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

1) Gør rede for, at mængden af kurvepunkter svarende til et interval $\frac{k-1}{9^n}\leqslant t\leqslant\frac{k}{9^n}$, hvor k er et helt tal, for hvilket $1\leqslant k\leqslant 9^n$, er et afsluttet kvadrat med side $\frac{1}{3^n}$.

2) Vis, at der findes en og kun en parameterværdi, for hvilken a) $(f(t),g(t))=(0,1)$ b) $(f(t),g(t))=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ c) $(f(t),g(t))=(1,0)$, og find disse parameterværdier.

3) Vis, at der findes netop fire parameterværdier, for hvilke $(f(t),g(t))=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, og find disse.

15. Konstruer en kontinuert kurve $(x,y,z)=(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))$, $0\leqslant t\leqslant 1$, i xyz-rummet, der tilhører terningen $\{(x,y,z)\mid x\in[0,1],\ y\in[0,1],\ z\in[0,1]\}$ og indeholder ethvert punkt af den.

16. Konstruer en kontinuert kurve $(x,y)=(f(t),g(t))$, $-\infty<t<+\infty$, der indeholder ethvert punkt i xy-planen.

17. Et punkt (x_0,y_0) kaldes et multipelt punkt af en kontinuert kurve $(x,y)=(f(t),g(t))$, $a\leqslant t\leqslant b$, hvis $(f(t),g(t))=(x_0,y_0)$ for mindst to værdier af t. Vis, at hvis en kontinuert kurve indeholder alle punkter af et rektangel $R=\{(x,y)\mid x\in[x_1,x_2],\ y\in[y_1,y_2]\}$, da har kurven et multipelt punkt i R [og følgelig også i ethvert delrektangel af R, d.v.s. de multiple punkter ligger overalt tæt i R].

18. Betragt Peanos kurve $(x,y)=(f(t),g(t))$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

Vis, at det om enhver af funktionerne $f(t)$ og $g(t)$ gælder, at den hverken er differentiabel fra højre eller fra venstre i noget punkt af intervallet $0\leqslant t\leqslant 1$.

19. Betragt Peanos kurve $(x,y) = (f(t), g(t))$, $0 \leq t \leq 1$.

Vis, at der for enhver kontinuert funktion $H(x,y)$ i kvadratet $\{(x,y) \mid x \in [0,1], y \in [0,1]\}$ gælder

$$\int_0^1 \int_0^1 H(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 H(f(t), g(t))\,dt.$$

Eksempel: $\int_0^1 f(t)^n g(t)^m dt = \frac{1}{(n+1)(m+1)}$

for alle hele $n \geq 0$ og $m \geq 0$.

20. Vis, at hvis to kontinuerte kurver $(x,y) = (\varphi_1(t), \psi_1(t))$ og $(x,y) = (\varphi_2(t), \psi_2(t))$ med samme parameterinterval $a \leq t \leq b$ opfylder betingelsen

$$\int_a^b \varphi_1(t)^n \psi_1(t)^m dt = \int_a^b \varphi_2(t)^n \psi_2(t)^m dt$$

for alle hele $n \geq 0$ og $m \geq 0$, da indeholder de to kurver de samme punkter.

Vink. Vis først ved hjælp af Weierstrass' approksimationssætning for funktioner af to variable, jfr. opg. 1, at hvis $H(x,y)$ er kontinuert i et aflukket rektangel, der indeholder de to kurver, er

$$\int_a^b H(\varphi_1(t), \psi_1(t))\,dt = \int_a^b H(\varphi_2(t), \psi_2(t))\,dt.$$

21*. Vis, at hvis en kontinuert kurve $(x,y) = (\varphi(t), \psi(t))$, $0 \leq t \leq 1$, opfylder betingelsen

$$\int_0^1 \varphi(t)^n \psi(t)^m dt = \frac{1}{(n+1)(m+1)}$$

for alle hele $n \geq 0$ og $m \geq 0$, da tilhører den kvadratet $\{(x,y) \mid x \in [0,1], y \in [0,1]\}$ og indeholder ethvert punkt af dette, og ingen af funktionerne φ og ψ er differentiabel hverken fra højre eller venstre i noget punkt af intervallet $0 \leq t \leq 1$.

22. Idet $ og £ betegner hver et af tegnene +, ·, ∨, ∧, skal man undersøge, om relationen

$$(a \,\$\, b) \,£\, c = (a £ c) \,\$\, (b £ c)$$

er gyldig for alle reelle talsæt (a,b,c). Undersøg alle 16 tilfælde og marker resultatet i en tabel med dobbelt indgang.

23. Lad U være en åben punktmængde i $\dot{R}^k$, der indeholder punktet x_0. Vis, at klassen af funktioner på U, der er kontinuerte i x_0, er et funktionsgitter. Gælder det også, hvis U ikke er åben?

24. Nævn et lineært funktionsrum, der (bortset fra funktionen 0) ikke indeholder nogen ikke negativ funktion.

25. En funktion $f(x)$ på et interval $[a,b]$ siges at være af begrænset variation, hvis der findes et tal K, således at der for vilkårlige punkter $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ gælder

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| \leqslant K.$$

Vis, at klassen af funktioner, der er af begrænset variation på $[a,b]$, er et lineært funktionsrum og også et funktionsgitter.

26. Vis, at udtrykket

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} [\cos(\pi m! x)]^{2n} \right\},$$

hvor n og m gennemløber $\dot{N}$, har mening for ethvert $x \in \dot{R}$, og find dets værdi.

27*. Vis, at hvis $\dot{R} = A \cup B$, er mindst en af mængderne A og B equipotent med $\dot{R}$.
Vink. Har intet med det gennemgåede stof at gøre.

28. I det f og g er begrænsede funktioner på $\dot{R}^k$ med begrænset støtte, skal man vise, at

$$\underline{R}(f)+\underline{R}(g) \leqslant \underline{R}(f\vee g)+\underline{R}(f\wedge g) \leqslant$$

$$\leqslant \underline{R}(f+g) \leqslant \left\{\begin{matrix}\underline{R}(f)+\overline{R}(g)\\ \overline{R}(f)+\underline{R}(g)\end{matrix}\right\} \leqslant \overline{R}(f+g) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{R}(f\vee g)+\overline{R}(f\wedge g) \leqslant \overline{R}(f)+\overline{R}(g).$$

29. Vis, at hvis f er en begrænset funktion med begrænset støtte, og g er Riemann integrabel, gælder

$$\underline{R}(f)+\underline{I}(g) = \underline{R}(f\vee g)+\underline{R}(f\wedge g) = \underline{R}(f+g)$$

$$\overline{R}(f)+I(g) = \overline{R}(f\vee g)+\overline{R}(f\wedge g) = \overline{R}(f+g).$$

Vink. Benyt opg. 28.

30. Vis, at hvis f og g er begrænsede funktioner med begrænset støtte, og $f+g$ er Riemann integrabel, gælder

$$I(f+g) = \overline{R}(f)+\underline{R}(g).$$

Vink. Benyt opg. 28.

31. I det h er en begrænset funktion på $\dot{R}^k$ med begrænset støtte, skal man vise, at

$$\overline{R}(h) = \overline{R}(h\vee 0)-\underline{R}((-h)\vee 0)$$

$$\underline{R}(h) = \underline{R}(h\vee 0)-\overline{R}((-h)\vee 0).$$

Vink. Benyt opg. 29.

32. I det h er en begrænset funktion på $\dot{R}^k$ med begrænset støtte, skal man vise, at h er Riemann integrabel, hvis og kun hvis $h\vee 0$ og $(-h)\vee 0$ er Riemann integrable, og at der i så fald gælder

$$I(h) = I(h\vee 0)-I((-h)\vee 0).$$

33. Angiv en Riemann integrabel funktion på $\dot{R}^k$, hvis værdimængde er mængden af rationale tal i $[0,1]$.

34. (a) Angiv en ligelig konvergent følge af Riemann integrable funktioner f_n på $\dot{R}$, hvis grænsefunktion f er Riemann integrabel, og for hvilken talfølgen $I(f_1), I(f_2), \ldots$ ikke er konvergent.

(b) Angiv en ligelig konvergent følge af Riemann integrable funktioner f_n på $\dot{R}$, hvis grænsefunktion f ikke er Riemann integrabel, og for hvilken talfølgen $I(f_1), I(f_2), \ldots$ er konvergent.

(c) Angiv en konvergent, men ikke ligelig konvergent følge af Riemann integrable funktioner f_n, hvis grænsefunktion f er Riemann integrabel, og for hvilken talfølgen $I(f_1), I(f_2), \ldots$ er konvergent med grænseværdien $I(f)$.

35. Vis, at en funktion f på $\dot{R}^k$ er Riemann integrabel, hvis og kun hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes kontinuerte funktioner g og $h \geq 0$ med begrænset støtte, således at $|f-g| \leq h$ og $I(h) < \varepsilon$.

36. Vis, at hvis f er Riemann integrabel over to mængder A og B, er f også Riemann integrabel over $A \cup B$, $A \cap B$ og $A \setminus B$, og at der, når A og B er disjunkte, gælder

$$\int_{A\cup B} f(x)\, m(d\dot{R}^k) = \int_A f(x)\, m(d\dot{R}^k) + \int_B f(x)\, m(d\dot{R}^k).$$

37. Idet A og B er begrænsede punktmængder i $\dot{R}^k$, skal man vise, at

$$r_i(A) + r_i(B) \leq r_i(A\cup B) + r_i(A\cap B) \leq$$
$$\leq \left\{\begin{matrix} r_i(A) + r_j(B) \\ r_j(A) + r_i(B) \end{matrix}\right\} \leq$$
$$\leq r_j(A\cup B) + r_j(A\cap B) \leq r_j(A) + r_j(B).$$

Vink. Anvend opg. 28.

38. Idet A og B er begrænsede punktmængder i $\grave{R}^k$, skal man vise, at

$$r_i(A) - r_y(B) \leqslant r_i(A \setminus B) - r_y(B \setminus A) \leqslant$$
$$\leqslant r_y(A \setminus B) - r_i(B \setminus A) \leqslant r_y(A) - r_i(B).$$

Vink. Anvend opg. 28 for $f = 1_A$ og $g = -1_B$ samt opg. 31.

39. Vis, at hvis A og B er disjunkte begrænsede punktmængder i $\grave{R}^k$, for hvilke $A \cup B$ er Riemann målelig, gælder $m(A \cup B) = r_i(A) + r_y(B)$.

Vink. Benyt opg. 37.

40.* Vis, at en begrænset funktion f på $\grave{R}^k$ med begrænset støtte er Riemann integrabel, hvis og kun hvis der for enhver begrænset funktion g med begrænset støtte gælder $\overline{R}(g) = \overline{R}((g-f) \vee 0) + \overline{R}(f \wedge g)$.

41.* Vis, at en begrænset punktmængde A i $\grave{R}^k$ er Riemann målelig, hvis og kun hvis der for enhver begrænset punktmængde B gælder

$$r_y(B) = r_y(B \setminus A) + r_y(A \cap B).$$

42. I $\grave{R}$ betragtes mængden A af tal x, der fremstilles ved decimalbrøken

$$x = 0,c_1 a_2 \cdots a_n \cdots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots,$$

hvor alle decimaler a_n er 5 eller 7. Vis, at A er Riemann målelig og find dens mål. Vis også, at A er afsluttet.

Samme opgave, når decimalerne er 0 eller 1. Vis, at de to mængder er ligedannede.

Vink. Betragt mængderne $A_1 = [\frac{5}{10}, \frac{6}{10}] \cup [\frac{7}{10}, \frac{8}{10}]$, $A_2 = [\frac{55}{100}, \frac{56}{100}] \cup [\frac{57}{100}, \frac{58}{100}] \cup [\frac{75}{100}, \frac{76}{100}] \cup [\frac{77}{100}, \frac{78}{100}]$, ...

43. I $\grave{R}$ betragtes mængden B af tal x, der fremstilles ved decimalbrøker

$$x = 0,a_1a_2\cdots a_n\cdots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots,$$

hvor ingen af decimalerne er 9. Vis, at B er Riemann målelig og find dens mål. Vis også, at B er afsluttet.
Vink. Se vinket til opg. 42.

44. For et givet k betragtes rummene $\grave{R}^k$ og $\grave{R}^{k+1}$. Punkterne i $\grave{R}^k$ betegnes $x=(x_1,\cdots,x_k)$, og punkterne i $\grave{R}^{k+1}$ betegnes $z=(x,y)=(x_1,\cdots,x_k,y)$. Med r_y^*, r_i^*, m^* betegnes det ydre og indre Riemann mål og Riemann målet i $\grave{R}^{k+1}$.

Vis, at for en begrænset, ikke negativ funktion $f = f(x_1,\cdots,x_k)$ på $\grave{R}^k$ med begrænset støtte er

$$\overline{R}(f) = r_y^*(A) \quad \text{og} \quad \underline{R}(f) = r_i^*(A),$$

hvor A betegner ordinatmængden for f i $\grave{R}^{k+1}$, d.v.s. punktmængden

$$A = \{z=(x,y) \mid 0 \le y < f(x)\}.$$

Vis herved, at f er Riemann integrabel, hvis og kun hvis A er Riemann målelig, og at man i så fald har

$$\underline{I}(f) = m^*(A).$$

45.* Vis, at hvis $\grave{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, er mindst en af mængderne A_n equipotent med $\grave{R}$.
Vink. Generalisation af opg. 27.

46.* Vis, at hvis foreningsmængden for en følge af afsluttede punktmængder på $\grave{R}$ indeholder et interval af positiv længde, da indeholder mindst en af mængderne et sådant interval.
Vink. Før beviset indirekte.

47.* Vis, at den Dirichletske funktion f på $\dot{R}$, defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \text{ rational} \\ 0 & \text{for } x \text{ irrational} \end{cases}$$

ikke er grænsefunktion for en konvergent følge af kontinuerte funktioner.

Vink. For beviset indirekte og betragt, under den antagelse, at f er grænsefunktion for en konvergent følge af kontinuerte funktioner f_n, mængderne

$$B_n = \{x \mid f_n(x) \geqslant \tfrac{1}{2}\} \cap \{x \mid f_{n+1}(x) \geqslant \tfrac{1}{2}\} \cap \cdots$$

og

$$C_n = \{x \mid f_n(x) \leqslant \tfrac{1}{2}\} \cap \{x \mid f_{n+1}(x) \leqslant \tfrac{1}{2}\} \cap \cdots$$

og anvend sætningen i opg. 46.

48.* Vis, at hvis en funktion f på $\dot{R}$ har lokalt minimum i ethvert punkt x_0, da indeholder ethvert interval på $\dot{R}$ af positiv længde et delinterval af positiv længde, hvori f er konstant.

Vink. Benyt opg. 11 og opg. 46.

49. Idet $a \in \dot{R}$, $b \in \dot{R}$, $n \in \dot{N}$ og $M \in \dot{R}$ er givne tal, for hvilke $a < b$ og $M > 0$, skal man angive et tal $\Phi = \Phi(a, b, n, M)$ med den egenskab, at hvis et polynomium $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ i $[a, b]$ opfylder betingelsen $|p(x)| \leqslant M$, da er $|a_\nu| \leqslant \Phi$ for $\nu = 0, 1, \ldots, n$.

50. Idet $f = f(x)$ er en vilkårlig begrænset funktion på $[a, b]$ og $n \in \dot{N}$, skal man vise, at der i mængden $\mathcal{P}_n$ af polynomier $p = p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ findes mindst et polynomium $p_0 = p_0(x)$, således at

$$\operatorname{dist}(f, p) \geqslant \operatorname{dist}(f, p_0) \quad \text{for alle } p \in \mathcal{P}_n,$$

hvor

$$\operatorname{dist}(f, g) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|.$$

Vink. Benyt opg. 49.

51. Efterprøv for hver af regnereglerne

$$a+b=b+a \qquad (a+b)+c=a+(b+c)$$
$$ab=ba \qquad (ab)c=a(bc)$$
$$(a+b)c=ac+bc$$

om den gælder i $\bar{R}^*$.

52. Find $\underline{I}(f)$ og $\overline{I}(f)$ for den funktion f på $\bar{R}$, der defineres ved

$$f(x)=\begin{cases} +\infty & \text{for } x\in]0,1[\\ 0 & \text{for alle andre } x. \end{cases}$$

53. Find $\underline{I}(f)$ og $\overline{I}(f)$ for den funktion f på $\bar{R}$, der defineres ved

$$f(x)=\begin{cases} +\infty & \text{for } x\in]0,1[\\ -\infty & \text{for } x\in]-1,0[\\ 0 & \text{for alle andre } x. \end{cases}$$

54. Vis, at enhver funktion $f=f(x_1,x_2)$ på $\bar{R}^2$, hvis værdi er 0 for ethvert punkt (x_1,x_2) med $x_2\neq 0$, er Lebesgue integrabel med integralet $I(f)=0$.

55. Ved opdagelsen af Mars viste det sig, at Mars-beboerne kun kender de rationale tal – af dem kaldet Mars-tal. Intervaller havde de indført (med de samme betegnelser vi benytter, men naturligvis kun med brug af Mars-tal), ligeledes trappemængder og disses mål og trappefunktioner og disses integral. Vis at sætningen: „Hvis en dalende følge $\{f_n\}$ af trappefunktioner har grænsefunktionen 0, da konvergerer talfølgen $\{I(f_n)\}$ mod 0" ikke gælder på Mars. Kan Mars-beboerne indføre et integral med Lebesgue integralets egenskaber?

56. Formuler og bevis for Lebesgue teorien sætninger svarende til de i opg. 28–32, 37–41, 44 for Riemann teorien givne sætninger.

57. Lad $J_1, J_2, \ldots$ være en følge af disjunkte intervaller i $\grave{R}^k$ og $a_1, a_2, \ldots$ en følge af reelle tal. Vis, at den ved

$$f(x) = \begin{cases} a_n & \text{for } x \in J_n, \ n = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{for } x \in \grave{R}^k \setminus \bigcup J_n \end{cases}$$

definerede funktion f er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis rækken $\sum_1^\infty |a_n| m(J_n)$ er konvergent, og at man i så fald har $I(f) = \sum_1^\infty a_n m(J_n)$.

58. $\grave{Q}$ betegner mængden af rationale tal. Vis, at der ved $x_1 \sim x_2$, når $x_1 - x_2 \in \grave{Q}$, er defineret en ækvivalensrelation i $\grave{R}$. Lad M være en mængde bestående af netop ét tal tilhørende hver ækvivalensklasse, valgt i $[-1,1]$, og lad M_r for et vilkårligt $r \in \grave{Q}$ betegne mængden $\{x+r \mid x \in M\}$. Vis, at mængderne M_r er parvis disjunkte og har foreningen $\grave{R}$. Vis, at M ikke er Lebesgue målelig.
Vink. Benyt, at mængderne M_r er parvis kongruente, og at $[-3,3]$ indeholder numererbart mange af dem.

59. Vis, at hvis A er Lebesgue målelig, da findes for ethvert $\varepsilon > 0$ en åben mængde $B \supseteq A$ og en afsluttet mængde $C \subseteq A$, således at

$$m(B \setminus A) < \varepsilon, \qquad m(A \setminus C) < \varepsilon.$$

Vink. Betragt en følge af trappemængder $\overline{F}_1 \subseteq \overline{F}_2 \subseteq \ldots$ med $\bigcup \overline{F}_n \supseteq A$, således at $\lim m(\overline{F}_n) < m(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Vælg dernæst åbne trappemængder $F_n^* \supseteq \overline{F}_n$, således at $m(F_n^*) < m(\overline{F}_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, og sæt $B = \bigcup F_n^*$. — Analogt for sætningens anden halvdel.

60. Vis, at en begrænset mængde A er Lebesgue målelig, hvis og kun hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes en begrænset åben mængde $B \supseteq A$ og en afsluttet mængde $C \subseteq A$, således at

$$m(B \setminus C) < \varepsilon.$$

Vink. Benyt opg. 59.

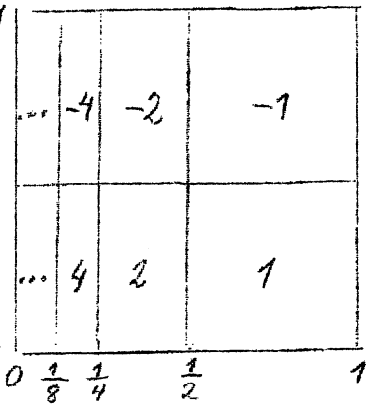
61. I det længden l af en kontinuert kurve $(x,y)=(f(t),g(t))$, $\alpha\leq t\leq\beta$, defineres som $l=\sup l_D$, hvor l_D er længden af den til en vilkårlig inddeling D af parameterintervallet svarende indskrevne polygon, skal man vise, at mængden

$$K=\{(f(t),g(t)) \mid \alpha\leq t\leq\beta\}$$

af kurvens punkter er en nulmængde, hvis $l<+\infty$. Vis endvidere ved et eksempel, at den omvendte sætning ikke gælder.

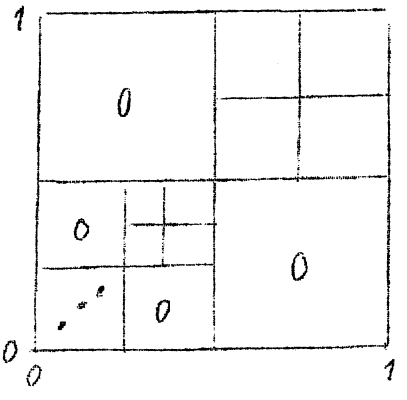
62. En funktion $f=f(x,y)$ på $\mathbb{R}^2$ er, se fig., defineret ved, at

$$f(x,y)=\begin{cases} 2^n & \text{for } x\in\left]\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right], y\in\left[0,\frac{1}{2}\right[, n\in\mathbb{N}_0 \\ -2^n & \text{for } x\in\left]\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right], y\in\left[\frac{1}{2},1\right], n\in\mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{ellers.}\end{cases}$$



Vis, at $I_y(I_x(f(x,y)))$ ikke eksisterer, medens $I_x(I_y(f(x,y)))$ eksisterer.

63. Konstruer en funktion $f=f(x,y)$ på $\mathbb{R}^2$, for hvilken $I_y(I_x(f(x,y)))$ og $I_x(I_y(f(x,y)))$ begge eksisterer og er ligestore, men som ikke er Lebesgue integrabel.



Vink. Vælg $f(x,y)=0$ uden for enhedskvadratet, og vælg værdierne i enhedskvadratet ved udfyldning af fig.

64. Konstruer en funktion $f=f(x,y)$ på $\mathbb{R}^2$, for hvilken $I_y(I_x(f(x,y)))$ og $I_x(I_y(f(x,y)))$ begge eksisterer og har forskellig værdi.

65. Find $m_k(\{x \mid x_1^2+\cdots+x_k^2<r^2\})$.

Vink. Det søgte mål er $=C_k r^k$, hvor C_k kun afhænger af k. Find C_k ved induktion.

66. I det B er en begrænset afsluttet mængde i underrummet $\tilde{R}^{k-1} = \{x \mid x_k = 0\}$ af $\tilde{R}^k$, betragtes „keglen" A med „toppunkt" $t = (0, \cdots, 0, a)$ og „basis" B, bestemt som foreningsmængden af alle liniestykker xt, hvor $x \in B$. Vis, at

$$m_k(A) = \frac{1}{k}|a| m_{k-1}(B).$$

67. Vis, at der for ethvert normeret lineært rum gælder, at

$$\|f - f_n\| \to 0 \text{ for } n \to \infty \Rightarrow \|f_n\| \to \|f\| \text{ for } n \to \infty$$

(d: $\|f\|$ er en kontinuert funktion på rummet).

68. Find en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at der gælder lighedstegn i Hölders ulighed. Samme opgave for Minkowskis ulighed.

69. Vis, at vektorrummet af alle reelle, resp. komplekse, talfølger $x = (x_1, x_2, \cdots)$ ikke kan normeres på en sådan måde, at konvergens i norm er ensbetydende med koordinatvis konvergens, d: at der ikke findes nogen norm $\|x\|$, således at, når $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots)$,

$\|x - x^{(m)}\| \to 0$ for $m \to \infty \Leftrightarrow x_i^{(m)} \to x_i$ for $m \to \infty$ og alle i.

70. Vis, at det reelle, resp. komplekse, talfølgerum med afstandsdefinitionen

$$\text{dist}(x, y) = \sup_i \left(|x_i - y_i| \wedge \frac{1}{i} \right)$$

er et metrisk rum. Vis, at konvergens i denne metrik er ensbetydende med koordinatvis konvergens (jfr. opg. 69). Vis, at en mængde i rummet er prækompakt, hvis og kun hvis den er delmængde af en mængde af formen

$$\{x \mid |x_i| \leq M_i, \ i = 1, 2, \cdots\},$$

hvor alle $M_i < +\infty$.

71.* Vis, at der eksisterer en uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, hvis led tilhører $\mathcal{L}(\dot{R}^k)$, med den egenskab, at man for enhver funktion $f \in \mathcal{L}(\dot{R}^k)$ kan sætte parenteser i rækken på en sådan måde (d.v.s. kan vælge indices $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ således), at den derved fremkomne række

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left(f_{n_{q-1}+1}(x) + \cdots + f_{n_q}(x) \right)$$

konvergerer (stærkt) mod f i $\mathcal{L}(\dot{R}^k)$ (d.v.s. dens afsnit konvergerer stærkt mod f).

72. Et afsluttet kvadrat A_0 med side 1 inddeles i 9 kvadrater med side $\frac{1}{3}$ og af disse udelades det midterste åbne kvadrat. Restmængden kaldes A_1. Hvert af de 8 kvadrater, der udgør A_1, deles i 25 kvadrater med side $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}$ og af disse udelades det midterste åbne kvadrat. Restmængden kaldes A_2. Således fortsættes, idet man i det $n$te skridt deler hvert af de i det forrige skridt tilovers blevne kvadrater i $(2n+1)^2$ kvadrater med side $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdots\frac{1}{2n+1}$ og udelader det midterste åbne kvadrat. Restmængden efter $n$te skridt kaldes A_n. Vis, at fællesmængden $A = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$ er en afsluttet punktmængde uden indre punkter, og at dens mål $m(A)$ er $= \frac{\pi}{4}$.

73.* Vis, at hvis en målelig funktion f på $\dot{R}$ har vilkårligt små perioder (d: der findes en følge af tal $p_n \neq 0$ med $p_n \to 0$, således at $f(x+p_n) = f(x)$ for alle $x \in \dot{R}$ og alle n), da er $f(x)$ konstant næsten overalt (d: der findes et tal a, således at $\{x \mid f(x) \neq a\}$ er en nulmængde).
Vink. Betragt først det tilfælde, hvor f er begrænset. Behandl det tilfælde, hvor f er ubegrænset, ved at betragte funktionen $\varphi \circ f$, hvor φ er den funktion på $\dot{R}^*$, der defineres ved, at $\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}$ for $x \in \dot{R}$, $\varphi(+\infty) = 1$, og $\varphi(-\infty) = -1$.

74. Under brug af decimalbrøker (betegnet $^{10}0,\ldots$) og dualbrøker (betegnet $^{2}0,\ldots$) defineres en funktion $f: [0,1] \to [0,1]$ således: Hvis

$$x = {}^{10}0, a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} a_{n+2} \cdots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots;$$

hvor $a_n = 2$, $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ alle er 0 eller 1, sættes

$$f(x) = {}^{2}0, a_{n+1} a_{n+2} \cdots = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n+2}}{2^2} + \cdots.$$

Ellers sættes $f(x) = 0$. Vis, at der for ethvert interval $[\alpha, \beta] \subseteq [0,1]$ med $\alpha < \beta$ gælder $f([\alpha,\beta]) = [0,1]$. Vis endvidere, at f er en nulfunktion.

75. Vis, at mængden af trappefunktioner <u>ikke</u> er overalt tæt i $\mathcal{L}_\infty(\dot{R}^k)$.

76. Vis, at $\mathcal{L}_\infty(\dot{R}^k)$ <u>ikke</u> indeholder nogen numererbar overalt tæt delmængde.

77. I det $f \in \mathcal{L}_p(\dot{R}^k)$, hvor $1 \leqslant p < +\infty$, og f_h betegner den ved $f_h(x) = f(x+h)$ bestemte funktion ($h \in \dot{R}^k$), skal man vise, at

$$\| f - f_h \|_p \to 0 \quad \text{for } h \to 0.$$

Vink. Bevis først udsagnet for en trappefunktion og approksimer dernæst en vilkårlig funktion $f \in \mathcal{L}_p(\dot{R}^k)$ med en trappefunktion.

78. Vis, at når $f \in \mathcal{L}_p(\dot{R}^k)$, $g \in \mathcal{L}_q(\dot{R}^k)$, hvor $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ er den ved

$$h(x) = I_t(f(x-t)\, g(t))$$

definerede funktion h en kontinuert funktion på $\dot{R}^k$.
Vink. Benyt opg. 77 og Hölders ulighed.

79. Vis, at hvis $f \in \mathcal{L}$ har Fourierrækken $\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, da gælder $a_n = 0$ for alle n, hvis f er ulige, og $b_n = 0$ for alle n, hvis f er lige.

80. Idet $f_k(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} e^{inx}$ og $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er funktioner i $\mathcal{L}$, og $\|f - f_k\|_1 \to 0$ for $k \to \infty$, skal man vise, at $c_n^{(k)} \to c_n$ for $k \to \infty$ for alle n og endda ligeligt i n.

81. Find Fourierrækken for den ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{for } 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi}{4} & \text{for } \pi < x < 2\pi \\ 0 & \text{for } x = 0 \text{ og } x = \pi \end{cases}$$

bestemte funktion med perioden 2π. Udled herved formlen $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$.

82. Udled formlen

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{4k^2 - 1}.$$

Indsæt $x = \frac{\pi}{2}$.

83. Fremstil $\cos x$ i intervallet $0 < x < \pi$ ved en rækkeudvikling af formen

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

84. Find Fourierrækken for den ved

$$f(x) = \begin{cases} \pi \sin \alpha x & \text{for } 0 < x < 2\pi \\ \frac{1}{2}\pi \sin 2\alpha\pi & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

bestemte funktion med perioden 2π (hvor α er et ikke helt tal). Udled herved ved at sætte $x = \pi$

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha - n} + \frac{1}{\alpha + n} \right)$$

og ved at sætte $x = 0$

$$\pi \cot \alpha\pi = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha - n} + \frac{1}{\alpha + n} \right).$$

(Partialbrøksfremstillingerne for funktionerne $\frac{1}{\sin}$ og cot; tallet α kan være reelt eller komplekst, blot ikke helt.)

85. Den periodiske funktion f med perioden 2π, der bestemmes ved

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{for } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{for } x = 0, \end{cases}$$

har Fourierrækken

$$f(x) \sim \sum_1^\infty \frac{2 \sin nx}{n}.$$

Vis, at grænseværdien for $s_n(\frac{\pi}{n})$ for $n \to \infty$ eksisterer og er $> \pi$. (Gibbs' fænomen.)

86. For en funktion f på $\mathbb{R}$ med perioden 1 defineres Fourierrækken ved

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i 2\pi k x} \quad \text{eller} \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k x + b_k \sin 2\pi k x),$$

hvor

$$c_k = \int_0^1 f(x) e^{-i 2\pi k x} dx, \qquad \left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\} = 2 \int_0^1 f(x) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} 2\pi k x \, dx,$$

altså som Fourierrækken for den ved $g(y) = f(\frac{y}{2\pi})$ definerede funktion med perioden 2π, når der i denne for y skrives $2\pi x$.

De <u>Bernoulliske polynomier</u> $B_n(x)$ og de <u>Bernoulliske tal</u> B_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ defineres ved, at $B_0(x) = B_0 = 1$, og for $n > 0$

$$B_n(x) = n \int_0^x B_{n-1}(\xi) d\xi + B_n,$$

hvor B_n vælges således, at $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$. Bestem $B_n(x)$ for $n = 1, 2, 3, 4$. Vis, at den periodiske funktion $\overline{B}_n(x)$ med perioden 1, som i $[0, 1[$ stemmer overens med $B_n(x)$, for $n \geq 1$ har Fourierrækken

$$\overline{B}_n(x) \sim \frac{n!}{(2\pi)^n} \cdot \frac{-1}{i^n} \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{i 2\pi k x}}{k^n} \quad \text{eller} \quad \overline{B}_n(x) \sim \begin{cases} \frac{n!}{(2\pi)^n} (-1)^{\frac{n+2}{2}} 2 \sum_1^\infty \frac{\cos 2\pi k x}{k^n} \\ \frac{n!}{(2\pi)^n} (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2 \sum_1^\infty \frac{\sin 2\pi k x}{k^n}, \end{cases}$$

eftersom n er lige eller ulige [$\sum'$ betegner, at $k = 0$ skal overspringes]. Vis, at rækkerne er konvergente med summen $\overline{B}_n(x)$ undtagen for $n = 1$ og x hel. Find herved udtryk for B_n for $n \geq 2$. [For ulige $n \geq 2$ fås $B_n = 0$.]

87. Vis, at når $f \in \mathcal{L}$ har Fourierrækken $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, gælder $c_n \to 0$ for $|n| \to \infty$.
Vink. Benyt approksimation med trappefunktioner.

88. Idet $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ og $g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ er funktioner i $\mathcal{L}_2$, skal man finde koefficienterne i Fourierrækken for fg.

89. Idet $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ og $g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ er funktioner i $\mathcal{L}_2$, skal man finde Fourierrækken for funktionen

$$h(x) = \mathop{\mathcal{M}}_{t} \{ f(x-t)\, g(t) \},$$

og vise, at den er absolut konvergent med summen $h(x)$.

90. <u>Cirklens isoperimetriske egenskab.</u> En „pæn" lukket kurve i den komplekse z-plan tænkes bestemt ved $z = f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, hvor $f(t)$ er stykkevis kontinuert differentiabel. Kurven antages uden dobbeltpunkter, og den ved parameterfremstillingen bestemte omløbsretning antages at være planens positive omløbsretning. Kurvens længde og det af den begrænsede areal er da

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} |f'(t)|\, dt \quad \text{og} \quad A = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} f(t)\, \overline{f'(t)}\, dt.$$

Vis, at $A \leqslant \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}$, og at lighedstegnet gælder, når og kun når kurven er en cirkel.
Vink. Vis, at hvis $f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, gælder $f'(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} inc_n e^{int}$.
Antag dernæst, at parameterfremstillingen er valgt således, at $|f'(t)|$ er konstant (altså $= \frac{\mathcal{L}}{2\pi}$), og følgelig $\frac{\mathcal{L}^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt$. Vis, at da er $\frac{\mathcal{L}^2}{4\pi} - A = \pi \sum_{-\infty}^{\infty} (n^2 - n)\, |c_n|^2$, og uddrag heraf det ønskede. (A. Hurwitz.)

91. Vis, at ethvert normeret ortogonalsystem i $\mathcal{L}_2$ er endeligt eller numererbart.

92. Et normeret ortogonalsystem i $\mathcal{L}_2$ kaldes fuldstændigt, hvis det ikke er ægte delmængde af et normeret ortogonalsystem. Vis, at et fuldstændigt, normeret ortogonalsystem er numererbart.

93. Hvis $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ er et fuldstændigt, normeret ortogonalsystem i $\mathcal{L}_2$, kaldes for en vilkårlig funktion $f \in \mathcal{L}_2$ rækken

$$f(x) \sim \sum_1^\infty a_n \varphi_n(x), \quad \text{hvor} \quad a_n = (f, \varphi_n),$$

udviklingen for f i systemet. Vis, at en række $\sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$ er udviklingen af en funktion $f \in \mathcal{L}_2$, og da kun af een funktion, hvis og kun hvis rækken $\sum_1^\infty |a_n|^2$ er konvergent, og at man i så fald har $\|f - s_n\|_2 \to 0$ for $n \to \infty$, hvor $s_n(x) = \sum_1^n a_\nu \varphi_\nu(x)$, og

$$\|f\|_2^2 = \sum_1^\infty |a_n|^2.$$

Vis også, at man for to funktioner $f \in \mathcal{L}_2$ og $g \in \mathcal{L}_2$ med udviklingerne $f(x) \sim \sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$ og $g(x) \sim \sum_1^\infty b_n \varphi_n(x)$ har

$$(f, g) = \sum_1^\infty a_n \overline{b_n}.$$

94. Idet $D_n(t) = \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu t} = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}$ er Dirichlets kerne, har man

$$\pi = \int_0^\pi D_n(t)\,dt = \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t}\,dt + \int_0^\pi \left[\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{\frac{1}{2}t}\right] \sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt.$$

Vis herved, at $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \dfrac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\pi.$

Vis, at dette medfører, at

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\pi, \qquad \int_0^\infty \dots = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \dots .$$

Vink. Anvend opg. 87 på den ved $g(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$ for $0 < t \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $g(t) = 0$ for $\frac{1}{2}\pi < t \leqslant 2\pi$ definerede funktion med perioden 2π.