Indhold

	Side
Kap. 1. Funktioner af flere reelle variable.	
§1. Differentiable funktioner	1-13
§2. Minimum og maksimum	1-6
§3. En fixpunktsætning	1-3
§4. Implicit givne funktioner	1-10
§5. Omvendt afbildning	1-4
§6. Transformation af integraler	1-13
§7. Minimum og maksimum under bibetingelser	1-6
§8. Differentialformer af første grad	1-17
§9. Alternerende differentialformer	1-15
§10. Differential- og integralregningens hovedsætning for funktioner af flere variable	1-14
§11. Nogle transformationsgrupper	1-6
§12. C^1-p-celler i $\dot{R}^k$	1-12
§13. C^1-p-cellekomplekser i $\dot{R}^k$	1-11
§14. Skalarfelter og vektorfelter	1-8
Kap. 2. Funktioner af en kompleks variabel	
§1. Argumentfunktion. Argumentvariation	1-3
§2. Algebraens fundamentalsætning	1-3
§3. Polynomier af tredie grad	1-4
§4. Holomorfe funktioner	1-8
§5. Homografier	1-11
§6. Potens og rod	1-3
§7. Eksponentialfunktion og logaritme	1-4
§8. Trigonometriske funktioner og deres omvendte funktioner	1-7
§9. Stamfunktion. Cauchys integralsætning	1-7
§10. Cauchys integralformler	1-9

§11. Grænseovergang med holomorfe funktioner 1–2
§12. Harmoniske funktioner 1–2
§13. Potensrækker 1–2
§14. Fremstilling af en vilkårlig holomorf funktion ved potensrække 1–3
§15. Nulpunkter for holomorfe funktioner. Identitetssætningen. Afbildning af en omegn af et nulpunkt for den afledede. Maksimumsprincippet 1–5
§16. Analytisk fortsættelse 1–4
§17. Meromorfe funktioner 1–7
§18. Cauchys residuesætning 1–10
§19. Laurents sætning 1–4
§20. Isolerede randpunkter. Punktet ∞ 1–4
Kap. 4. Differentialligninger
§1. Eksistens- og entydighedssætning for sædvanlige differentialligningssystemer af første orden 1–10
§2. Løsningens afhængighed af begyndelsesværdi og af ligningens højre side 1–3
§3. Løsning ved successive approksimationer 1–3
§4. Differentialligningssystemer af højere orden 1–15
§5. Lineære differentialligningssystemer af første orden 1–8
§6. En lineær differentialligning af k^{te} orden 1–3
§7. Lineære homogene differentialligningssystemer af første orden med konstante koefficienter 1–4
§8. En lineær homogen differentialligning af k^{te} orden med konstante koefficienter 1–2
§9. Jordans normalform 1–6

Mat 2, 1967-68 MA Indh. 3

Kap. 5. Variationsregning.

§ 1. Indledning 1-3
§ 2. Det simpleste problem 1-15
§ 3. Problem med bibetingelser 1-7

Opgaver nr. 101-139, 201-294, 401-416, 501-512.

Litteratur

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. II 1, 2. Artiklerne II A 2, II A 4ab, II A 8, II B 1.

A. F. Andersen, Harald Bohr, Richard Petersen. Lærebog i matematisk analyse III, IV. København 1947, 1949.

J. Favard. Cours d'Analyse de l'École Polytechnique I-III. Paris 1960-63.

W. Maak. Differential- und Integralrechnung. Göttingen 1960.

W. H. Fleming. Functions of several variables. Reading, Massachusetts - Palo Alto - London - Dallas - Atlanta 1965.

Harley Flanders. Differential Forms with Applications to the Physical Sciences. New York - London 1963.

A. Hurwitz & R. Courant. Funktionentheorie. 2. Aufl. Berlin 1925.

C. Carathéodory. Funktionentheorie I-II. Basel 1950.

S. Saks & A. Zygmund. Analytic functions. Warszawa - Wrocław 1952.

L. Ahlfors. Complex analysis. New York - Toronto - London 1953.

H. Cartan. Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Paris 1961.

E. Hille. Analytic function theory I, II. Boston - New York - Chicago - Atlanta - Dallas - Palo Alto - Toronto - London 1959, 1962.

E. A. Coddington. An introduction to ordinary differential equations. Englewood Cliffs, N. J. 1961.

E. A. Coddington & N. Levinson. Theory of ordinary differential equations. New York - Toronto - London 1955.

E. Kamke. Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930.

E. Kamke. Differentialgleichungen I. Leipzig 1942.

W. Hurewicz. Lectures on ordinary differential equations. New York 1958.

G. Grüss. Variationsrechnung. 2. Aufl. Heidelberg 1955.

Handbook of Mathematical Functions. With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. U.S. Department of Commerce. National Bureau of Standards. 1964.

Rettelser og tilføjelser

Tekst side

1,04.03 l.3 f.o. en : skal være: en kontinuert

1.08.01 l.7 f.o. er : skal være: er reelle eller komplekse

1.09.01 l.7 f.o. reelle: skal være: reelle eller komplekse

1,09.07 l.5 f.n. reelle: skal være: reelle eller komplekse

1.10.03 l.14 f.o. $(-1)^{p+\delta}$: skal være: $(-1)^{i+\delta}$

1.14.07 l.3 f.n. Tilføj: Den kaldes også Riemanns sætning

1.14.08 l.10 f.o. Udelad: Den kaldes også Riemanns sætning

2.09.02 l.2 f.n. enhver : skal være: enhver lukket

2.18.08 l.8 f.o. $(m+\frac{1}{2})^2+y^2$: skal være $(m+\frac{1}{2})^2\pi^2+y^2$

$(n+\frac{1}{2})^2+y^2$: skal være $(n+\frac{1}{2})^2\pi^2+y^2$

l.9 f.o. $\frac{\pi}{m+\frac{1}{2}}+\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}$: skal være: $\frac{1}{m+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$

2.19.04 l.10 f.o. $\int_{K(r)}\frac{dz}{(z-z_0)^{n-q-1}}$: skal være: $\int_{K(r)}(z-z_0)^{n-q-1}dz$

4.04.15 l.1 f.n. Udelad - Vi vil udføre dette i § 10.

5.02.04 l.2 f.n. $\varphi'(\varepsilon)$: skal være: $\varphi'(0)$

5.02.06 l.1 f.n. yy'': skal være: $2yy''$

5.03.03 l.6 f.o. uafhængige : skal være: afhængige

Det græske alfabet.

Alfa	A	α
Beta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ε
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Theta	Θ	θ ϑ
Jota	I	ι
Kappa	K	κ
Lamda	Λ	λ
My	M	μ
Ny	N	ν
Ksi	Ξ	ξ
Omikron	O	o
Pi	Π	π
Rho	P	ρ
Sigma	Σ	σ ς
Tau	T	τ
Ypsilon	Υ	υ
Fi	Φ	φ
Khi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	Ω	ω

Sammen med a b c d
benyttes ofte α β γ δ

Sammen med x y z
benyttes ofte ξ η ζ

Kap. 1. Funktioner af flere reelle variable.

§1. Differentiable funktioner.

Vi vil betragte rummene $\dot{R}^k$ for vilkårlige dimensionstal $k \in \dot{N}$. Vi benytter betegnelsen $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_k)$, $\underline{x}_0 = (x_{01}, \cdots, x_{0k})$, etc. for vektorer eller punkter i $\dot{R}^k$, $\|\cdot\|$ for den ved $\|\underline{x}\| = \max\{|x_1|, \cdots, |x_k|\}$ definerede norm, der bestemmer topologien i $\dot{R}^k$, og $\underline{0} = (0, \cdots, 0)$ for nulvektoren eller begyndelsespunktet. Det vil således ofte kun af sammenhængen fremgå, hvilket dimensionstal betegnelserne refererer til. Foruden betegnelsen $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ benyttes også $\underline{x}$ og $\underline{x}_1$, når talsættet betragtes som en række- eller søjlematrix. For alle dimensionstal benyttes $\underline{\underline{E}}$ som betegnelse for den kvadratiske enhedsmatrix. Ved samtidig betragtning af flere rum vil vi i reglen benytte et bestemt bogstav evt. i forbindelse med indices til betegnelse af punkterne i hvert rum (f.eks. $\underline{x}$ for $\dot{R}^k$, $\underline{y}$ for $\dot{R}^l$, $\underline{z}$ for $\dot{R}^m$, etc.).

Vi vil først betragte reelle funktioner

$$f = f(\underline{x}) = f(x_1, \cdots, x_k) : A \to \dot{R},$$

hvor A er en mængde i $\dot{R}^k$, som skal være en åben mængde eller et afsluttet interval med positive kantlængder.

En funktion $f: A \to \dot{R}$ kaldes <u>differentiabel</u> i et punkt $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_k) \in A$, hvis funktionstilvæksten

$$\Delta f = f(\underline{x} + \Delta\underline{x}) - f(\underline{x}),$$

hvor tilvæksten $\Delta\underline{x} = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_k)$ er valgt således, at $\underline{x} + \Delta\underline{x} = (x_1 + \Delta x_1, \cdots, x_k + \Delta x_k) \in A$, er <u>tilnærmelsesvis lineær</u>, d.v.s. hvis der findes tal $a_1, \cdots, a_k \in \dot{R}$ således, at

$$\Delta f = a_1 \Delta x_1 + \cdots + a_k \Delta x_k + \varepsilon(\Delta\underline{x}) \|\Delta\underline{x}\|,$$

hvor $\varepsilon(\Delta\underline{x}) \to 0$ for $\Delta\underline{x} \to \underline{0}$. Dette medfører, at f er kontinuert i $\underline{x}$. Nærmere bestemt: Vælges $\rho > 0$ således, at $|\varepsilon(\Delta\underline{x})| \leqslant 1$ for $\|\Delta\underline{x}\| \leqslant \rho$, og sættes $K = |a_1| + \cdots + |a_k| + 1$, gælder $|\Delta f| \leqslant K \|\Delta\underline{x}\|$ for $\|\Delta\underline{x}\| \leqslant \rho$. Vælges alle Δx_j påner eet lig med 0, ses, at differentiabiliteten af f i $\underline{x}$ medfører, at f i $\underline{x}$ har de <u>partielle afledede</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_k} = a_k$$

[bogstavet ∂ læses som d]. Andre betegnelser for de partielle afledede er

$$f'_{x_1}, \cdots, f'_{x_k} \quad \text{eller} \quad D_1 f, \cdots, D_k f.$$

Linearformen

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_j}\Delta x_j$$

kaldes <u>differentialet</u> af f i $\underline{x}$ svarende til tilvæksten $\Delta\underline{x} = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_k)$, som i denne forbindelse kan være vilkårlig. Hver af funktionerne x_j, $j = 1, \cdots, k$, er åbenbart differentiabel i ethvert punkt $\underline{x}$ med differentialet $dx_j = \Delta x_j$ [idet tilvæksten simpelthen er Δx_j]. I stedet for $\Delta\underline{x} = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_k)$ skrives derfor også $d\underline{x} = (dx_1, \cdots, dx_k)$ [betegnelsen $d\underline{x}$ får dog først sin forklaring nedenfor efter indførelsen af begrebet differential af en vektorfunktion]. Differentialet df for en i $\underline{x}$ differentiabel funktion f kan derfor skrives

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j .$$

En konstant funktion $f = c$ er åbenbart differentiabel i ethvert punkt $\underline{x}$ med differentialet $df = 0$. Hvis f er differentiabel i $\underline{x}$, er cf differentiabel i $\underline{x}$ med differentialet $d(cf) = c\,df$. Hvis f og g er differentiable i $\underline{x}$, er $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ (den sidste forsåvidt $g(\underline{x}) \neq 0$) differentiable i $\underline{x}$ med differentialerne

$$d(f+g) = df + dg \quad , \quad d(f-g) = df - dg$$
$$d(fg) = (df)g + f(dg), \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(df)g - f(dg)}{g^2}.$$

Vi udelader beviserne, der er analoge med beviserne for de tilsvarende udsagn for funktioner af en variabel.

Funktionen f kaldes differentiabel i A, hvis den er differentiabel i ethvert punkt af A. Dette medfører, at f tilhører klassen $C(A)$ eller $C^0(A)$ af kontinuerte funktioner på A. For en i A differentiabel funktion f er differentialet df en funktion af $(\underline{x}, d\underline{x}) = (x_1, \cdots, x_k, dx_1, \cdots, dx_k)$, defineret på $A \times \vec{R}^k$, og betegnes derfor også $df(\underline{x}, d\underline{x})$. Klassen af differentiable funktioner i A er (ligesom klassen af differentiable funktioner af en variabel på et interval) ingen særlig interessant funktionsklasse (selvom man nok kan udlede visse sætninger om den). En afrundet og fyldig teori fås, når man indskrænker sig til klassen $C^1(A)$ af kontinuert differentiable funktioner på A, d.v.s. de differentiable funktioner $f: A \to \vec{R}$, for hvilke differentialet df er en kontinuert funktion på $A \times \vec{R}^k$. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en funktion $f: A \to \vec{R}$ tilhører $C^1(A)$, er, at f har kontinuerte partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ i A. Nødvendigheden af betingelsen er indlysende. For at vise dens tilstrækkelighed antager vi, at f har kontinuerte partielle afledede, og betragter et punkt $\underline{x} \in A$ og en tilvækst $\Delta\underline{x}$, således at $\underline{x} + \Delta\underline{x} \in A$. Når $\|\Delta\underline{x}\|$ er tilstrækkelig lille, vil da samtlige punkter $\underline{x}_j = (x_1 + \Delta x_1, \cdots, x_j + \Delta x_j, x_{j+1}, \cdots, x_k)$, $j = 0, 1, \cdots, k$, tilhøre A. Vi har $\underline{x}_0 = \underline{x}$ og $\underline{x}_k = \underline{x} + \Delta\underline{x}$. Ved anvendelse af middelværdisætningen for funktioner af en variabel fås da

$$\Delta f = f(\underline{x}+\Delta\underline{x}) - f(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{k} [f(\underline{x}_j) - f(\underline{x}_{j-1})] = \sum_{j=1}^{k} f'_{x_j}(\underline{x}_j^*)\,\Delta x_j,$$

hvor $\underline{x}_j^*$ betegner et punkt på liniestykket, der forbinder $\underline{x}_{j-1}$ og $\underline{x}_j$. For $\Delta\underline{x} \to \underline{0}$ gælder $\underline{x}_j^* \to \underline{x}$ for ethvert $j = 1, \dots, k$. Da hver af funktionerne f'_{x_j} er forudsat kontinuert i A, har vi altså $f'_{x_j}(\underline{x}_j^*) = f'_{x_j}(\underline{x}) + \varepsilon_j(\Delta\underline{x})$, hvor $\varepsilon_j(\Delta\underline{x}) \to 0$ for $\Delta\underline{x} \to \underline{0}$. Sættes nu $\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j(\Delta\underline{x})\Delta x_j = \varepsilon(\Delta\underline{x})\|\Delta\underline{x}\|$, er $|\varepsilon(\Delta\underline{x})| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |\varepsilon_j(\Delta\underline{x})|$. Vi har altså

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{k} f'_{x_j}(\underline{x})\,\Delta x_j + \varepsilon(\Delta\underline{x})\|\Delta\underline{x}\|,$$

hvor $\varepsilon(\Delta\underline{x}) \to 0$ for $\Delta\underline{x} \to \underline{0}$. Følgelig er f differentiabel i $\underline{x}$ med differentialet $\sum_{j=1}^{k} f'_{x_j}(\underline{x})\,dx_j$. Dette er en kontinuert funktion på $A \times \mathbb{R}^k$; følgelig tilhører f klassen $C^1(A)$.

Ud fra $C^1(A)$ definerer vi klassen $C^2(A)$ af <u>to gange kontinuert differentiable</u> funktioner $f: A \to \mathbb{R}$ som klassen af de funktioner $f \in C^1(A)$, for hvilke differentialet df for vilkårlige faste værdier af $dx_1, \dots, dx_k$ er en kontinuert differentiabel funktion på A. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse herfor er åbenbart, at $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ tilhører $C^1(A)$, hvilket ifølge det foranstående resultat er ensbetydende med, at f i A har kontinuerte partielle afledede af anden orden. Disse betegnes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}} \quad \text{eller} \quad f''_{x_{j_1}x_{j_2}} \quad \text{eller} \quad D_{j_2}D_{j_1}f.$$

For faste $dx_1, \dots, dx_k$ bliver differentialet af df

$$d^2f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)dx_1 + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)dx_k,$$

altså, idet vi i $d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right), \dots, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ benytter de samme tilvækster $dx_1, \dots, dx_k$ som i df

$$d^2f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_k}dx_k\right)dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_k}dx_k\right)dx_k$$

eller

$$d^2f = \sum_{j_1=1}^{k} \sum_{j_2=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} dx_{j_1} dx_{j_2}.$$

Det vil blive vist i § 8, at der for enhver funktion $f \in C^2(A)$ for vilkårlige j_1 og j_2 gælder

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}.$$

Ved induktion defineres klassen $C^n(A)$ af n gange kontinuert differentiable funktioner $f: A \to R'$ som klassen af funktioner $f \in C^{n-1}(A)$, for hvilke det $(n-1)^{te}$ differential $d^{n-1}f$ for vilkårlige værdier af $dx_1, \ldots, dx_k$ er en kontinuert differentiabel funktion på A. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse herfor er, at f i A har kontinuerte partielle afledede af n^{te} orden. Disse betegnes

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_n}} \quad \text{eller} \quad f^{(n)}_{x_{j_1} \cdots x_{j_n}} \quad \text{eller} \quad D_{j_n} \cdots D_{j_1} f.$$

Det n^{te} differential $d^n f = d(d^{n-1}f)$ bliver

$$d^n f = \sum_{j_1=1}^{k} \cdots \sum_{j_n=1}^{k} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_n}} dx_{j_1} \cdots dx_{j_n}.$$

Det fremgår af det foranstående, at rækkefølgen af de n differentiationer for enhver funktion $f \in C^n(A)$ er ligegyldig. Sædvanligvis benytter man derfor den skrivemåde, der svarer til, at $j_1 \leqq j_2 \leqq \cdots \leqq j_n$. Tænker vi os, at $n = n_1 + \cdots + n_k$ (hvert $n_j \geqq 0$), betegnes den partielle afledede af n^{te} orden, der fås ved at differentiere n_1 gange efter $x_1, \ldots$, n_k gange efter x_k, også med

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \cdots \partial x_k^{n_k}} \quad \text{eller} \quad f^{(n)}_{x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}} \quad \text{eller} \quad D_k^{n_k} \cdots D_1^{n_1} f.$$

Da antallet af talsæt $(j_1, \ldots, j_n)$, i hvilke n_1 af tallene er $1, \ldots$, n_k af tallene er k, er lig med $\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$, kan udtrykket for $d^n f$ også skrives

$$d^n f = \sum \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \cdots \partial x_k^{n_k}} dx_1^{n_1} \cdots dx_k^{n_k},$$

hvor der skal summeres over alle talsæt $(n_1, \cdots, n_k)$ med $n_1 + \cdots + n_k = n$ (alle $n_j \geq 0$). For ethvert n er $d^n f$ en funktion af $(\underline{x}, d\underline{x})$ på $A \times \grave{R}^k$ og skrives derfor også $d^n f(\underline{x}, d\underline{x})$.

Med $C^\infty(A)$ betegnes fællesmængden af alle klasserne $C^n(A)$.

Man ser, at hvis f og g tilhører $C^n(A)$, resp. $C^\infty(A)$, vil $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ (den sidste forsåvidt $g(\underline{x}) \neq 0$ for alle $\underline{x} \in A$) ligeledes tilhøre $C^n(A)$, resp. $C^\infty(A)$.

Foruden $\grave{R}^k$ med $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ som variabelt punkt betragter vi nu $\grave{R}^l$ med $\underline{y} = (y_1, \cdots, y_l)$ som variabelt punkt. Vi kan da betragte <u>vektorfunktioner</u>

$$\underline{f} = (f_1, \cdots, f_l) : A \to \grave{R}^l,$$

hvor A som foran er en åben mængde eller et afsluttet interval i $\grave{R}^k$. Vektorfunktionen $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ er ensbetydende med de l reelle funktioner $y_1 = f_1(\underline{x}) = f_1(x_1, \cdots, x_k), \cdots, y_l = f_l(\underline{x}) = f_l(x_1, \cdots, x_k)$.

Vektorfunktionen $\underline{f}$ kaldes differentiabel i et punkt $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_k) \in A$, hvis funktionstilvæksten

$$\Delta \underline{f} = \underline{f}(\underline{x} + \Delta\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x})$$

er tilnærmelsesvis lineær, d.v.s. hvis der findes vektorer $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_k \in \grave{R}^l$, således at

$$\Delta \underline{f} = \underline{a}_1 \Delta x_1 + \cdots + \underline{a}_k \Delta x_k + \underline{\varepsilon}(\Delta\underline{x}) \| \Delta \underline{x} \|,$$

hvor $\underline{\varepsilon}(\Delta\underline{x}) = (\varepsilon_1(\Delta\underline{x}), \cdots, \varepsilon_l(\Delta\underline{x})) \to \underline{0}$ for $\Delta\underline{x} \to \underline{0}$ (det første $\underline{0}$ er i $\grave{R}^l$, det andet i $\grave{R}^k$). Dette er ensbetydende med, at hver af funktionerne $f_1, \cdots, f_l$ er differentiabel i $\underline{x}$. Det medfører, at $\underline{f}$ i $\underline{x}$ har de partielle afledede

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_1} = \underline{a}_1, \cdots, \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_k} = \underline{a}_k.$$

Disse er bestemt ved

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1}\right), \dots, \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k}\right).$$

Linearformen (den lineære afbildning)

$$d\underline{f} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_k}\Delta x_k$$

$$= \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_k} dx_k$$

kaldes differentialet af $\underline{f}$ i $\underline{x}$. Vi har

$$d\underline{f} = (df_1, \dots, df_\ell).$$

[Ligningen $d\underline{x} = (dx_1, \dots, dx_k)$ er det specialtilfælde, der fremkommer, når man vælger $\ell = k$ og betragter funktionen $\underline{x}$.]

De foranstående ligninger sammenfattes bekvemt i matrixligningen

$$\begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_k \end{pmatrix}$$

eller

$$d\underline{f} = \underline{\underline{D}}\underline{f}\; d\underline{x},$$

hvor

$$\underline{\underline{D}}\underline{f} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

kaldes <u>funktionalmatricen</u> for $\underline{f}$ i $\underline{x}$. Bemærk, at matricen er en $\ell \times k$ matrix med $i = 1, \dots, \ell$ som rækkeindex og $j = 1, \dots, k$ som søjleindex, og at søjlerne er $\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_k}$. Funktionalmatricen kan betragtes som den naturlige generalisation af begrebet differentialkvotient, og den betegnes derfor også $\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}$ [eller ligefrem $\frac{d\underline{f}}{d\underline{x}}$] eller

$\frac{\partial(f_1,\dots,f_\ell)}{\partial(x_1,\dots,x_k)}$. Hvis $\ell = k$, betegnes determinanten $\det \underline{\underline{D}}\,\underline{f} = \det \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \det \frac{\partial(f_1,\dots,f_k)}{\partial(x_1,\dots,x_k)}$ som <u>funktionaldeterminanten</u> eller <u>Jacobi determinanten</u> for $\underline{f}$ i $\underline{x}$, efter C. G. J. Jacobi (1804-1851). Bemærk, at man også ofte ser $\frac{\partial(f_1,\dots,f_k)}{\partial(x_1,\dots,x_k)}$ benyttet som betegnelse for funktionaldeterminanten.

Funktionalmatricens betydning viser sig bl.a. ved sammensætning af vektorfunktioner. Lad os betragte tre rum $\grave{R}^k$, $\grave{R}^\ell$, $\grave{R}^m$ med henh. $\underline{x} = (x_1,\dots,x_k)$, $\underline{y} = (y_1,\dots,y_\ell)$, $\underline{z} = (z_1,\dots,z_m)$ som variabelt punkt. Lad A være en åben mængde eller et afsluttet interval i $\grave{R}^k$ og B en åben mængde eller et afsluttet interval i $\grave{R}^\ell$, og lad $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x}) : A \to B$ og $\underline{z} = \underline{g}(\underline{y}) : B \to \grave{R}^m$ være vektorfunktioner. Da gælder: <u>Hvis $\underline{f}$ er differentiabel i et punkt $\underline{x} \in A$, og $\underline{g}$ er differentiabel i det tilsvarende punkt $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ i B, da er funktionen $\underline{g} \circ \underline{f} : A \to \grave{R}^m$ differentiabel i $\underline{x}$, og dens funktionalmatrix er bestemt ved</u>

$$(*) \qquad \underline{\underline{D}}(\underline{g} \circ \underline{f})(\underline{x}) = \underline{\underline{D}}\,\underline{g}(\underline{y})\,\underline{\underline{D}}\,\underline{f}(\underline{x}).$$

Dette er ensbetydende med at sige, at man finder differentialet $\underline{\underline{D}}(\underline{g} \circ \underline{f})\,d\underline{x}$ af $\underline{g} \circ \underline{f}$ i $\underline{x}$ ved i differentialet $\underline{\underline{D}}\,\underline{g}\,d\underline{y}$ af $\underline{g}$ i $\underline{y}$ for $d\underline{y}$ at indsætte differentialet $\underline{\underline{D}}\,\underline{f}\,d\underline{x}$ af $\underline{f}$ i $\underline{x}$.

Resultatet kan også udtrykkes ved at sige, at man får $d(\underline{g} \circ \underline{f})$ af $dg = \frac{\partial g}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_\ell} dy_\ell$ ved for $d\underline{y} = (dy_1,\dots,dy_\ell)$ at indsætte $d\underline{f} = (df_1,\dots,df_\ell)$.

Beviset fremgår direkte af definitionerne. For sammenhørende tilvækster $\Delta\underline{x}$ og $\Delta\underline{y} = \underline{f}(\underline{x}+\Delta\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x})$ og $\Delta\underline{z} = \underline{g}(\underline{y}+\Delta\underline{y}) - \underline{g}(\underline{y})$ har vi

$$\Delta \underline{y} = \underline{\underline{D}}\underline{f}\,\Delta \underline{x} + \underline{\varepsilon}(\Delta \underline{x})\|\Delta \underline{x}\|$$

og

$$\Delta \underline{z} = \underline{\underline{D}}\underline{g}\,\Delta \underline{y} + \underline{\delta}(\Delta \underline{y})\|\Delta \underline{y}\|,$$

hvor $\underline{\varepsilon}(\Delta \underline{x}) \to \underline{0}$ og $\underline{\delta}(\Delta \underline{y}) \to \underline{0}$, når $\Delta \underline{x} \to \underline{0}$ og dermed $\Delta \underline{y} \to \underline{0}$. Vælges $\rho > 0$ således, at $\|\underline{\varepsilon}(\Delta \underline{x})\| \leqslant 1$ for $\|\Delta \underline{x}\| \leqslant \rho$, og sættes $K = \left\|\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_1}\right\| + \cdots + \left\|\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_k}\right\| + 1$, ses [idet det erindres, at $\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_k}$ er søjlerne i $\underline{\underline{D}}\underline{f}$], at $\|\Delta \underline{y}\| \leqslant K\|\Delta \underline{x}\|$ for $\|\Delta \underline{x}\| \leqslant \rho$. Restledet $\underline{\delta}(\Delta \underline{y})\|\Delta \underline{y}\|$ i den anden ligning kan derfor også skrives som $\underline{\eta}(\Delta \underline{x})\|\Delta \underline{x}\|$, hvor $\underline{\eta}(\Delta \underline{x}) \to \underline{0}$, når $\Delta \underline{x} \to \underline{0}$. Indsætning giver derfor

$$\Delta \underline{z} = \underline{\underline{D}}\underline{g}\,\underline{\underline{D}}\underline{f}\,\Delta \underline{x} + \left(\underline{\underline{D}}\underline{g}\,\underline{\varepsilon}(\Delta \underline{x}) + \underline{\eta}(\Delta \underline{x})\right)\|\Delta \underline{x}\|,$$

hvoraf det ønskede resultat, idet åbenbart

$$\underline{\underline{D}}\underline{g}\,\underline{\varepsilon}(\Delta \underline{x}) + \underline{\eta}(\Delta \underline{x}) \to \underline{0}, \text{ når } \Delta \underline{x} \to \underline{0}.$$

Skrives $\underline{y}$ i stedet for $\underline{f}$ og $\underline{z}$ i stedet for såvel $\underline{g}$ som $\underline{g} \circ \underline{f}$, kan formlen (*) også skrives

$$\frac{\partial \underline{z}}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{z}}{\partial \underline{y}}\,\frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{x}} \quad \text{eller} \quad \frac{\partial(z_1, \ldots, z_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)} = \frac{\partial(z_1, \ldots, z_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_\ell)}\,\frac{\partial(y_1, \ldots, y_\ell)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)}$$

eller udførligt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_m}{\partial y_\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_\ell}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_\ell}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

$m \times k$ $\qquad$ $m \times \ell$ $\qquad$ $\ell \times k$

Udregnes matrixproduktet, ses, at formlen er ensbetydende med formlerne

$$\frac{\partial z_h}{\partial x_j} = \frac{\partial z_h}{\partial y_1}\,\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial z_h}{\partial y_\ell}\,\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j},$$

hvor de afledede $\frac{\partial z_h}{\partial y_i}$ skal tages i $\underline{y}$ og de afledede $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ i $\underline{x}$. Man udtrykker dette ved at sige, at man finder enhver af de partielle afledede $\frac{\partial z_h}{\partial x_j}$ ved at differentiere igennem $y_1, \ldots, y_l$. For fast j kan de til $h = 1, \ldots, m$ svarende formler sammenfattes i vektorformulen

$$\frac{\partial \underline{z}}{\partial x_j} = \frac{\partial \underline{z}}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial \underline{z}}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} .$$

Begrebet n gange kontinuert differentiabel funktion udvides umiddelbart til vektorfunktioner. Vi udstrækker betegnelserne $C(A)$ eller $C^0(A)$, $C^n(A)$ og $C^\infty(A)$ til også at omfatte vektorfunktioner $\underline{f}: A \to \dot{R}^l$ for ethvert l. Betegnelserne for partielle afledede og for differentialer af højere orden overføres ligeledes uden videre.

Af de ovenstående formler ses, at $\underline{f} \in C^1(A)$ og $\underline{g} \in C^1(B)$ medfører $\underline{g} \circ \underline{f} \in C^1(A)$, og ved gentagen anvendelse af formlerne ses, at $\underline{f} \in C^n(A)$ og $\underline{g} \in C^n(B)$ medfører $\underline{g} \circ \underline{f} \in C^n(A)$. Af $\underline{f} \in C^\infty(A)$ og $\underline{g} \in C^\infty(B)$ følger derfor $\underline{g} \circ \underline{f} \in C^\infty(A)$. Formlen (*) kan også skrives

$$\underline{\underline{D}}(\underline{g} \circ \underline{f}) = [(\underline{\underline{D}}\, \underline{g}) \circ \underline{f}]\, \underline{\underline{D}}\, \underline{f} .$$

Lad $f: A \to \dot{R}$ være en reel funktion tilhørende $C^n(A)$, og lad $\underline{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0k})$ og $\underline{x}_0 + \Delta\underline{x} = (x_{01} + \Delta x_1, \ldots, x_{0k} + \Delta x_k)$ være punkter af A, således at det forbindende liniestykke $\{\underline{x}_0 + t\,\Delta\underline{x} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ tilhører A. Ved sammensætning af funktionen $y = f(\underline{x})$ med funktionen $\underline{x} = \underline{x}_0 + t\,\Delta\underline{x}$, som åbenbart tilhører ... $C^\infty([0,1])$, fås funktionen

$$y = h(t) = f(\underline{x}_0 + t\Delta\underline{x}),$$

som altså tilhører $C^n([0,1])$. Ved at differentiere igennem $x_1, \dots, x_k$ fås

$$h'(t) = \sum_{j=1}^{k} f'_{x_j}(\underline{x}_0 + t\Delta\underline{x})\,\Delta x_j$$

$$h''(t) = \sum_{j_1=1}^{k}\sum_{j_2=1}^{k} f''_{x_{j_1}x_{j_2}}(\underline{x}_0 + t\Delta\underline{x})\,\Delta x_{j_1}\Delta x_{j_2}$$

$$\dots$$

$$h^{(n)}(t) = \sum_{j_1=1}^{k}\cdots\sum_{j_n=1}^{k} f^{(n)}_{x_{j_1}\cdots x_{j_n}}(\underline{x}_0 + t\Delta\underline{x})\,\Delta x_{j_1}\cdots\Delta x_{j_n}.$$

Ved anvendelse af Taylors formel med Lagranges restled på h fås

$$h(1) = h(0) + \frac{1}{1!}h'(0) + \frac{1}{2!}h''(0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}h^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!}h^{(n)}(\theta)$$

for et eller andet $\theta \in]0,1[$. Indsættes udtrykkene, fås heraf <u>Taylors formel med restled</u> for en funktion $f \in C^n(A)$

$$f(\underline{x}_0 + \Delta\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \frac{1}{1!}df(\underline{x}_0, \Delta\underline{x}) + \frac{1}{2!}d^2f(\underline{x}_0, \Delta\underline{x}) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(\underline{x}_0, \Delta\underline{x}) + \frac{1}{n!}d^nf(\underline{x}_0 + \theta\Delta\underline{x}, \Delta\underline{x}).$$

Af kontinuiteten af de partielle afledede af f af n^{te} orden følger, at

$$\frac{1}{n!}d^nf(\underline{x}_0 + \theta\Delta\underline{x}, \Delta\underline{x}) = \frac{1}{n!}d^nf(\underline{x}_0, \Delta\underline{x}) + \varepsilon(\Delta\underline{x})\|\Delta\underline{x}\|^n,$$

hvor $\varepsilon(\Delta\underline{x}) \to 0$ for $\Delta\underline{x} \to \underline{0}$. Dette giver <u>Taylors grænseformel</u> for en funktion $f \in C^n(A)$

$$f(\underline{x}_0, \Delta\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \frac{1}{1!}df(\underline{x}_0, \Delta\underline{x}) + \dots + \frac{1}{n!}d^nf(\underline{x}_0, \Delta\underline{x}) + \varepsilon(\Delta\underline{x})\|\Delta\underline{x}\|^n.$$

Bemærk, at Taylors formel med restled ikke uden videre kan overføres til vektorfunktioner $\underline{f} = (f_1, \dots, f_e) \in C^n(A)$. Man kan opskrive formlen for hver af koordinatfunktionerne f_i, men får i almindelighed for-

skelligt θ i restleddet for de forskellige koordinatfunktioner. Derimod kan Taylors grænseformel umiddelbart overføres til vektorfunktioner.

For en funktion $f = f(\underline{x}) = f(x_1, \cdots, x_k) : A \to \dot{R}$ kan vi i rummet $\dot{R}^{k+1} = \dot{R}^k \times \dot{R}$ med $(\underline{x}, y) = (x_1, \cdots, x_k, y)$ som variabelt punkt betragte punktmængden

$$\{(\underline{x}, y) \mid y = f(\underline{x}), \underline{x} \in A\}.$$

Den kaldes det <u>geometriske billede</u> af f og er en <u>hyperflade</u> i $\dot{R}^{k+1}$. To sådanne hyperflader, svarende til funktioner f og φ, for hvilke $f(\underline{x}_0) = \varphi(\underline{x}_0)$ for et punkt $\underline{x}_0 \in A$, siges at have <u>røring af n^{te} orden</u> i $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$, hvis

$$f(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}) + \varepsilon(\underline{x} - \underline{x}_0) \| \underline{x} - \underline{x}_0 \|^n,$$

hvor $\varepsilon(\underline{x} - \underline{x}_0) \to 0$ for $\underline{x} \to \underline{x}_0$. Røring af første orden kaldes også blot <u>røring</u> og røring af n^{te} orden for $n \geq 2$ <u>oskulation</u>. Taylors grænseformel for en funktion $f \in C^n(A)$ kan da, idet vi sætter $\Delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_0$, udtrykkes ved at sige, at det geometriske billede af f i $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$ har røring af n^{te} orden med det geometriske billede af funktionen

$$\varphi(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \frac{1}{1!} \sum_{j=1}^{k} f'_{x_j}(\underline{x}_0)(x_j - x_{0j}) +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^{k} \cdots \sum_{j_n=1}^{k} f^{(n)}_{x_{j_1} \cdots x_{j_n}}(\underline{x}_0)(x_{j_1} - x_{0j_1}) \cdots (x_{j_n} - x_{0j_n}),$$

som er et polynomium i $x_1, \cdots, x_k$ af højst n^{te} grad. Dette er, som man let kan vise [se nedenfor], det eneste polynomium af højst n^{te} grad, hvis geometriske billede i $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$ har røring af n^{te} orden med det geometriske billede af f.

For $n=1$ fås <u>hyperplanen</u> med ligningen

$$y = f(\underline{x}_0) + f'_{x_1}(\underline{x}_0)(x_1-x_{01}) + \cdots + f'_{x_k}(\underline{x}_0)(x_k-x_{0k}),$$

som kaldes <u>tangenthyperplanen</u> i $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$ for det geometriske billede af f. For $n=2$ fås <u>kvadriken</u> med ligningen

$$y = f(\underline{x}_0) + \sum_{j=1}^{k} f'_{x_j}(\underline{x}_0)(x_j-x_{0j}) + \sum_{j_1=1}^{k}\sum_{j_2=1}^{k} f''_{x_{j_1}x_{j_2}}(\underline{x}_0)(x_{j_1}-x_{0j_1})(x_{j_2}-x_{0j_2}).$$

Denne kvadrik er en <u>paraboloide</u> og kaldes den <u>osku-lerende paraboloide</u> for det geometriske billede af f i $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$. Eventuelt udarter den til en cylinder.

[At polynomiet $\varphi(\underline{x})$ er det eneste polynomium af højst n^{te} grad, for hvilket $f(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}) + \varepsilon(\underline{x}-\underline{x}_0)\|\underline{x}-\underline{x}_0\|^n$, hvor $\varepsilon(\underline{x}-\underline{x}_0)\to 0$ for $\underline{x}\to\underline{x}_0$, kan indses således. Hvis $\varphi_1(\underline{x})$ og $\varphi_2(\underline{x})$ er to sådanne polynomier, må gælde $\varphi_1(\underline{x})-\varphi_2(\underline{x}) = \varepsilon(\underline{x}-\underline{x}_0)\|\underline{x}-\underline{x}_0\|^n$, hvor $\varepsilon(\underline{x}-\underline{x}_0)\to 0$ for $\underline{x}\to\underline{x}_0$. Sættes $\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{\xi}$, ser man, at det gælder om at bevise, at hvis et polynomium $\psi(\underline{\xi})$ af højst n^{te} grad opfylder betingelsen $\psi(\underline{\xi}) = \varepsilon(\underline{\xi})\|\underline{\xi}\|^n$, hvor $\varepsilon(\underline{\xi})\to 0$ for $\underline{\xi}\to\underline{0}$, da er ψ identisk 0. Herfor betragter vi under den antagelse, at ψ ikke er identisk 0, et punkt $\underline{\xi}_0$, for hvilket $\psi(\underline{\xi}_0)\neq 0$, og danner funktionen $h(t) = \psi(t\underline{\xi}_0)$, som åbenbart er et polynomium af højst n^{te} grad og ikke identisk 0 (idet $h(1)\neq 0$), altså af formen $h(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, hvor ikke alle koefficienterne er 0. Betegner a_m den første koefficient, der er $\neq 0$, slutter vi, at $\frac{h(t)}{t^m} \to a_m \neq 0$ for $t\to 0$, altså $\left|\frac{h(t)}{t^n}\right| \to \infty$, hvis $n>m$, og $\frac{h(t)}{t^n} \to a_n$, hvis $n=m$, i strid med, at ifølge forudsætning $\frac{h(t)}{t^n}\to 0$ for $t\to 0$.]

§2. Minimum og maksimum.

En funktion $f = f(\underline{x}) = f(x_1, \cdots, x_k) : A \to \dot{R}$ defineret på en mængde A i $\dot{R}^k$ siges at have lokalt minimum, resp. lokalt maksimum, i punktet $\underline{x}_0 \in A$, såfremt der findes et $\rho > 0$, således at $f(\underline{x}) \geqslant f(\underline{x}_0)$, resp. $f(\underline{x}) \leqslant f(\underline{x}_0)$, for alle $\underline{x} \in A$, for hvilke $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \rho$. Funktionen siges at have globalt minimum, resp. globalt maksimum, i punktet $\underline{x}_0 \in A$, såfremt $f(\underline{x}) \geqslant f(\underline{x}_0)$, resp. $f(\underline{x}) \leqslant f(\underline{x}_0)$, for alle $\underline{x} \in A$. Som fælles betegnelse for minimum og maksimum benyttes ekstremum.

Sætning 1. Hvis A er åben, og $f \in C'(A)$, og f har lokalt ekstremum i punktet $\underline{x}_0 \in A$, gælder i $\underline{x}_0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0.$$

Bevis. For et vilkårligt $j = 1, \cdots, k$ betragtes den ved $g_j(x_j) = f(x_{01}, \cdots, x_{0j-1}, x_j, x_{0j+1}, \cdots, x_{0k})$ bestemte funktion i omegnen af x_{0j}. Denne funktion af en variabel er differentiabel i x_{0j} med differentialkvotienten $g_j'(x_{0j}) = f_{x_j}'(\underline{x}_0)$, og den har lokalt ekstremum i x_{0j}. Altså er $f_{x_j}'(\underline{x}_0) = 0$.

Betingelsen $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = (0, \cdots, 0)$ er ensbetydende med, at differentialet $df = df(\underline{x}_0, d\underline{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$ er 0 for alle $d\underline{x} = (dx_1, \cdots, dx_k)$. Et punkt $\underline{x}_0$ med denne egenskab kaldes et stationært punkt for f. Sætning 1 kan derfor også udtrykkes således: En nødvendig betingelse for, at f har lokalt ekstremum i $\underline{x}_0$, er, at $\underline{x}_0$ er et stationært punkt for f. At punktet $\underline{x}_0$ er et stationært punkt for f er ensbetydende med, at tangentplanen for det geometriske billede af f i $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$ er parallel med underrummet $\{(\underline{x}, y) \mid y = 0\}$ af $\dot{R}^k \times \dot{R}$.

Eks. 1. En anskuelig geometrisk tydning fås for $k=2$, når man tænker sig x_1x_2-planen vandret og y-aksen lodret, således at det geometriske billede for f kan beskrives som et landskab, i hvilket højdeforholdene angives ved niveaukurver eller koter.

For $A = R^2$ har hver af funktionerne

$$f_1(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2, \quad f_2(\underline{x}) = -x_1^2 - x_2^2, \quad f_3(\underline{x}) = x_1^2 - x_2^2$$

det ene stationære punkt $(0,0)$. Dette er lokalt (endda globalt) minimumspunkt for f_1, lokalt (endda globalt) maksimumspunkt for f_2, men hverken minimumspunkt eller maksimumspunkt for f_3. De geometriske billeder er [idet vi tænker på sædvanlige retvinklede koordinater] for f_1 og f_2 omdrejningsparaboloider og for f_3 en hyperbolsk paraboloide. For f_1 og f_2 er niveaukurverne cirkler, henh. for $y>0$ og $y<0$, for f_3 er de for $y \neq 0$ ligesidede hyperbler, for $y=0$ linieparret $x_2 = \pm x_1$.

Sætning 2. Hvis A er åben, og $f \in C^2(A)$, og $\underline{x}_0 \in A$ er et stationært punkt for f, betragtes den kvadratiske form

$$\underline{\xi} - \underline{\underline{M}}\,\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_k \end{pmatrix},$$

hvor de afledede i matricen $\underline{\underline{M}} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ skal tages i $\underline{x}_0$. Da gælder:

(1) Hvis formen er positiv definit (d.v.s. er >0 for alle $\underline{\xi} \neq \underline{0}$) har f lokalt minimum i $\underline{x}_0$.

(2) Hvis formen er negativ definit (d.v.s. er <0 for alle $\underline{\xi} \neq \underline{0}$) har f lokalt maksimum i $\underline{x}_0$.

(3) Hvis formen er indefinit (d.v.s. både antager

positive og negative værdier) har f hverken lokalt minimum eller lokalt maksimum i $\underline{x}_0$.

(4) Hvis formen uden at være identisk 0 er positiv semi-definit (d.v.s. er $\geqslant 0$ for alle $\underline{\xi}$ og >0 for nogle $\underline{\xi}$), har f i hvert fald ikke lokalt maksimum i $\underline{x}_0$.

(5) Hvis formen uden at være identisk 0 er negativ semi-definit (d.v.s. er $\leqslant 0$ for alle $\underline{\xi}$ og <0 for nogle $\underline{\xi}$), har f i hvert fald ikke lokalt minimum i $\underline{x}_0$.

Bevis. Matricen $\underline{\underline{M}}$ er symmetrisk, og den kvadratiske form $\underline{\xi}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\xi}$ er simpelthen det andet differentiale d^2f for f i $\underline{x}_0$ svarende til tilvæksten $d\underline{x}=\underline{\xi}$. I følge Taylors grænseformel har vi altså (idet $df=0$)

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \tfrac{1}{2}\,\underline{\xi}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\xi} + \varepsilon(\underline{\xi})\|\underline{\xi}\|^2, \qquad \underline{\xi}=\underline{x}-\underline{x}_0,$$

hvor $\varepsilon(\underline{\xi})\to 0$ for $\underline{\xi}\to\underline{0}$.

(1) Formen antages positiv definit. Lad c betegne dens infimum på mængden $\{\underline{\xi} \mid \|\underline{\xi}\|=1\}$. Da denne mængde er kompakt, og da formen er en kontinuert funktion, der er >0 for $\underline{\xi}\neq\underline{0}$, er $c>0$. Da vi for ethvert $\lambda\in\mathbb{R}$ har $\lambda\underline{\xi}\,\underline{\underline{M}}\,\lambda\underline{\xi} = \lambda^2\,\underline{\xi}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\xi}$, er

$$\underline{\xi}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\xi} \geqslant c\|\underline{\xi}\|^2 \quad \text{for alle } \underline{\xi}.$$

Vi finder således

$$f(\underline{x}) \geqslant f(\underline{x}_0) + \tfrac{1}{2}c\|\underline{x}-\underline{x}_0\|^2 + \varepsilon(\underline{x}-\underline{x}_0)\|\underline{x}-\underline{x}_0\|^2.$$

Bestemmes nu en omegn $S=\{\underline{x} \mid \|\underline{x}-\underline{x}_0\|<\rho\}\subseteq A$ af $\underline{x}_0$ således, at $|\varepsilon(\underline{x}-\underline{x}_0)| \leqslant \frac{1}{4}c$ for alle $\underline{x}\in S$, har vi

$$f(\underline{x}) \geqslant f(\underline{x}_0) + \tfrac{1}{2}c\|\underline{x}-\underline{x}_0\|^2 - \tfrac{1}{4}c\|\underline{x}-\underline{x}_0\|^2$$
$$= f(\underline{x}_0) + \tfrac{1}{4}c\|\underline{x}-\underline{x}_0\|^2 > f(\underline{x}_0) \text{ for alle } \underline{x}\in S\setminus\{\underline{x}_0\}.$$

Altså har f lokalt minimum i $\underline{x}_0$.

(2) Formen antages negativ definit. På analog måde

som under (1), eller ved at betragte $-f$ i stedet for f, ses, at f har lokalt maksimum i $\underline{x}_0$.

(3) Formen antages indefinit. Da antager formen på mængden $\{\underline{\xi} \mid \|\underline{\xi}\| = 1\}$ såvel positive som negative værdier.

Lad først $\underline{\xi}_0$ være en vektor med $\|\underline{\xi}_0\| = 1$, for hvilken formen har en positiv værdi c. For enhver vektor $\underline{\xi}$ af formen $\underline{\xi} = \lambda \underline{\xi}_0$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ gælder da $\underline{\xi}\, \underline{M}\, \underline{\xi} = c\|\underline{\xi}\|^2$. Bestemmes nu en omegn $S = \{\underline{x} \mid \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \varrho\} \subseteq A$ af $\underline{x}_0$, således at $|\varepsilon(\underline{x} - \underline{x}_0)\| \leqslant \frac{1}{4}c$ for alle $\underline{x} \in S$, ser man som under (1), at $f(\underline{x}) > f(\underline{x}_0)$ for alle $\underline{x} \in S \setminus \{\underline{x}_0\}$ af formen $\underline{x} = \underline{x}_0 + \lambda \underline{\xi}_0$. I enhver omegn af $\underline{x}_0$ antager f derfor værdier $> f(\underline{x}_0)$. Følgelig har f ikke lokalt maksimum i $\underline{x}_0$.

Ved at vælge en vektor $\underline{\xi}_0$ med $\|\underline{\xi}_0\| = 1$, for hvilken formen har en negativ værdi, ser man på analog måde, at f i enhver omegn af $\underline{x}_0$ antager værdier $< f(\underline{x}_0)$. Følgelig har f ikke lokalt minimum i $\underline{x}_0$.

(4) Formen antages positiv semi-definit, men ikke identisk 0. Ved at vælge en vektor $\underline{\xi}_0$ med $\|\underline{\xi}_0\| = 1$, for hvilken formen har en positiv værdi, ser vi som under (3), at f i enhver omegn af $\underline{x}_0$ antager værdier $> f(\underline{x}_0)$. Følgelig har f ikke lokalt maksimum i $\underline{x}_0$.

(5) Formen antages negativ semi-definit, men ikke identisk 0. På analog måde som under (4), eller ved at betragte $-f$ i stedet for f, ses, at f ikke har lokalt minimum i $\underline{x}_0$.

Eks. 2. For $k = 2$ og $A = \mathbb{R}^2$ betragtes funktionerne

$$f_1(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2, \quad f_2(\underline{x}) = -x_1^2 - x_2^2, \quad f_3(\underline{x}) = x_1^2 - x_2^2,$$

$$f_4(\underline{x}) = x_1^2,\quad f_5(\underline{x}) = x_1^2 - x_2^4,\quad f_6(\underline{x}) = -x_1^2,\quad f_7(\underline{x}) = -x_1^2 + x_1^4,$$
$$f_8(\underline{x}) = x_1^4 + x_2^4,\quad f_9(\underline{x}) = -x_1^4 - x_2^4,\quad f_{10}(\underline{x}) = x_1^4 - x_2^4.$$

For dem alle er $(0,0)$ stationært punkt. Tilfældene (1)(2)(3) i sætning 2 illustreres af henh. f_1, f_2, f_3. Tilfældet (4) illustreres af både f_4 og f_5; af disse har f_4 lokalt minimum i $(0,0)$, men f_5 ikke. Analogt illustreres tilfældet (5) af både f_6 og f_7; af disse har f_6 lokalt maksimum i $(0,0)$, men f_7 ikke. Endelig viser f_8, f_9, f_{10}, at når den kvadratiske form er identisk 0, kan funktionen have lokalt minimum eller lokalt maksimum eller hverken lokalt minimum eller lokalt maksimum.

For anvendelsen af sætning 2 bliver det af betydning at kunne afgøre, om en given kvadratisk form

$$\underline{x}_0 \underline{\underline{A}} \underline{x}_1 = (x_{1,0}, \dots, x_{k,0}) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

med symmetrisk matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ er (1) positiv definit, (2) negativ definit, (3) indefinit, (4) positiv semi-definit, (5) negativ semi-definit.

Sætning 3. De fem muligheder indtræffer, eftersom ligningen

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

har (1) lutter positive rødder, (2) lutter negative rødder, (3) både positive og negative rødder, (4) både positive rødder og roden 0, men ingen negative rødder, (5) både negative rødder og roden 0, men ingen positive rødder.

Bevis. Ligningen er en algebraisk ligning af graden k

og har altså k (ikke nødvendigvis forskellige) rødder $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, der som bekendt alle er reelle. Som bekendt kan formen ved en passende ortogonal substitution

$$\underline{\underline{x}}_1 = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{y}}_1 \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{y}}\,\underline{\underline{T}}^*$$

overføres i formen

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2,$$

d.v.s. substitutionen kan vælges således, at

$$\underline{\underline{T}}^* \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Heraf fremgår sætningen umiddelbart.

Eks. 3. For $k=2$ benyttes ofte betegnelserne

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = q, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = r, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = s, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = t.$$

Vi ser: Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at et punkt er stationært, er at $p=0$, $q=0$. I et sådant punkt betragtes den kvadratiske form

$$(\xi_1, \xi_2)\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = r\xi_1^2 + 2s\xi_1\xi_2 + t\xi_2^2,$$

og vi danner ligningen $\det\begin{pmatrix} r-\lambda & s \\ s & t-\lambda \end{pmatrix} = 0$ eller $\lambda^2 - (r+t)\lambda + rt - s^2 = 0$. Idet rødderne er λ_1 og λ_2, gælder altså $\lambda_1 + \lambda_2 = r+t$, $\lambda_1\lambda_2 = rt - s^2$. Heraf fremgår følgende tabel:

(1) $rt-s^2>0$, $r+t>0$.	Lokalt minimum.
(2) $rt-s^2>0$, $r+t<0$.	Lokalt maksimum.
(3) $rt-s^2<0$.	Hverken lokalt minimum eller lokalt maksimum.
(4) $rt-s^2=0$, $r+t>0$.	Ikke lokalt maksimum.
(5) $rt-s^2=0$, $r+t<0$.	Ikke lokalt minimum.

§3. En fixpunktsætning.

Lad $(\mathcal{S}, dist)$ være et metrisk rum.

En afbildning $T: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ siges at have punktet $z \in \mathcal{S}$ som fixpunkt, såfremt $Tz = z$.

Afbildningen T kaldes en kontraktion, såfremt der findes et tal C, hvor $0 \leq C < 1$, for hvilket der for vilkårlige punkter $x \in \mathcal{S}$, $y \in \mathcal{S}$ gælder

$$dist(Tx, Ty) \leq C\, dist(x, y).$$

Sætning. Hvis rummet $(\mathcal{S}, dist)$ er fuldstændigt, d.v.s. enhver fundamentalfølge er konvergent, og afbildningen $T: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ er en kontraktion, da har T netop eet fixpunkt $z \in \mathcal{S}$.

Bevis. (1) Afbildningen har højst et fixpunkt. Thi hvis z_1 og z_2 $(z_1 \neq z_2)$ begge var fixpunkter, var $0 < dist(z_1, z_2) = dist(Tz_1, Tz_2) \leq C\, dist(z_1, z_2)$, i strid med at $C < 1$.

(2) Hvis z er et fixpunkt, kan vi let se, hvorledes z må kunne bestemmes. For et vilkårligt $y \in \mathcal{S}$ finder vi nemlig uligheden

$$dist(Ty, z) = dist(Ty, Tz) \leq C\, dist(y, z).$$

Vælger vi nu et vilkårligt udgangspunkt $x \in \mathcal{S}$, får vi ved at anvende denne ulighed successivt på $y = x$, $y = Tx$, $y = T^2x = T(Tx)$, etc., at

$$dist(Tx, z) \leq C\, dist(x, z)$$
$$dist(T^2x, z) \leq C\, dist(Tx, z)$$
$$\cdots$$
$$dist(T^n x, z) \leq C\, dist(T^{n-1}x, z).$$

Heraf ses, at

$$dist(T^n x, z) \leq C^n\, dist(x, z),$$

hvoraf, da $C<1$,

$$dist(T^n x, z) \to 0 \quad \text{for } n \to \infty.$$

Punktfølgen $x, Tx, T^2x, \dots, T^nx, \dots$ konvergerer altså mod fixpunktet z.

(3) Endnu har vi ikke benyttet, at rummet er fuldstændigt. For nu under denne antagelse at vise, at der er et fixpunkt, vælger vi et vilkårligt $x \in S$ og betragter punktfølgen $x, Tx, \dots, T^nx, \dots$. Vi vil bevise, at denne er en fundamentalfølge. Herfor benytter vi kontraktionsegenskaben, som giver

$$\begin{aligned} dist(T^{n+1}x, T^nx) &\leqslant C\, dist(T^nx, T^{n-1}x) \\ &\leqslant C^2 dist(T^{n-1}x, T^{n-2}x) \\ &\dots \\ &\leqslant C^n dist(Tx, x). \end{aligned}$$

Heraf fås ved brug af trekantuligheden

$$\begin{aligned} dist(T^{n+m}x, T^nx) &\leqslant \sum_{\mu=0}^{m-1} dist(T^{n+\mu+1}x, T^{n+\mu}x) \\ &\leqslant \sum_{\mu=0}^{m-1} C^{n+\mu}\, dist(Tx, x) \\ &\leqslant \frac{C^n}{1-C}\, dist(Tx, x). \end{aligned}$$

For ethvert $\varepsilon > 0$ findes et n_0, således at $\frac{C^n}{1-C} dist(Tx, x) < \varepsilon$ for $n \geqslant n_0$. Vi har altså

$$dist(T^{n+m}, T^nx) < \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geqslant n_0,\ m > 0.$$

Følgen $x, Tx, \dots, T^nx, \dots$ er altså en fundamentalfølge. Den er derfor konvergent. Lad z betegne dens grænsepunkt. Vi vil vise, at z er et fixpunkt.

Idet $y_n \to y$, ses af $dist(Ty_n, Ty) \leqslant C\, dist(y_n, y)$, at $Ty_n \to Ty$. Af $T^nx \to z$ følger derfor $T(T^nx) \to Tz$, altså $T^{n+1}x \to Tz$. Men vi har også $T^{n+1}x \to z$. Altså er $Tz = z$.

Den benyttede fremgangsmåde til bestemmelse af et fixpunkt kaldes iterationsmetoden eller de successive approksimationers metode. Som et redskab til bevis af eksistens- og entydighedssætningen er denne (i princippet gamle) metode udviklet af E. Picard (1856-1941) i 1890 for studiet af differentialligninger (jfr. kap. 4); den er anvendelig for mange andre ligningstyper.

Eks. Løsning af en ligning $f(x)=0$ ved iteration.

Lad $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ være en differentiabel funktion med positiv, til nævnelsesvis konstant differentialkvotient. Lad os f.eks. antage, at der findes et $m>0$ således at $|f'(x)-m| \leqslant \frac{1}{10}m$ for alle $x\in[a,b]$. Sættes $T(x)=x-\frac{1}{m}f(x)$, er ligningen $f(x)=0$ ensbetydende med ligningen $T(x)=x$. Nu er T differentiabel og $|T'(x)|=|1-\frac{1}{m}f'(x)|\leqslant\frac{1}{10}$ for alle $x\in[a,b]$. For vilkårlige $x_1,x_2\in[a,b]$ gælder derfor $|T(x_1)-T(x_2)|\leqslant\frac{1}{10}|x_1-x_2|$. Antages bl.a., at der for et eller andet $x\in[a,b]$ gælder $T(x)\in[a+\frac{1}{10}(b-a),\,b-\frac{1}{10}(b-a)]$, vil T følgelig afbilde $[a,b]$ ind i $[a,b]$. Fixpunktsætningen kan da anvendes og viser, at der findes netop ét $z\in[a,b]$, for hvilket $f(z)=0$. Dette kan findes ud fra et vilkårligt $x_0\in[a,b]$, idet man sætter $x_1=Tx_0$, $x_2=Tx_1$, $\ldots$, $x_n=Tx_{n-1},\ldots$. Da vil $x_n\to z$ for $n\to\infty$. Af bevisføreren ovenfor fremgår, at der vil gælde $|z-x_n|\leqslant\frac{1}{10^n}|z-x_0|\leqslant\frac{1}{10^n}(b-a)$ for alle n.

Funktionen $f(x)=x^3-2$ har (som man let konstaterer) de forlangte egenskaber i intervallet $[1.25,\,1.30]$ for $m=5$. Talfølgen bestemt ved $x_0=1.25$, $x_n=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^3-2}{5}$ konvergerer altså mod $\sqrt[3]{2}$, og der gælder $|\sqrt[3]{2}-x_n|\leqslant 5\cdot 10^{-(n+2)}$ for alle n.

§ 4. Implicit givne funktioner.

Vi betragter rummene $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{R}^p$ med henh. $\underline{x}=(x_1,\dots,x_k)$ og $\underline{y}=(y_1,\dots,y_p)$ som variabelt punkt, og danner $\mathbb{R}^{k+p}=\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^p$ med $(\underline{x},\underline{y})=(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_p)$ som variabelt punkt.

I en åben mængde A i $\mathbb{R}^{k+p}$ betragtes nu en vektorfunktion

$$\underline{f}=\underline{f}(\underline{x},\underline{y})=(f_1(\underline{x},\underline{y}),\dots,f_p(\underline{x},\underline{y})):A\to\mathbb{R}^p,$$

og vi betragter løsningsmængden

$$F=\{(\underline{x},\underline{y})\in A\mid \underline{f}(\underline{x},\underline{y})=\underline{0}\}$$

for ligningen $\underline{f}(\underline{x},\underline{y})=\underline{0}$ (hvor $\underline{0}$ står for nulvektoren i $\mathbb{R}^p$), eller, hvad der kommer ud på det samme, for ligningssystemet

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_p)=0\\ \dots\\ f_p(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_p)=0. \end{cases}$$

Vi vil antage, at F ikke er tom.

Hvis vi nu antager, at $\underline{f}\in C^1(A)$, er $\underline{f}$ i en omegn af ethvert punkt $(\underline{x},\underline{y})\in F$ tilnærmelsesvis lig med sit differential $d\underline{f}$, d.v.s. ligningssystemet er for punkter $(\underline{x}+\Delta\underline{x},\underline{y}+\Delta\underline{y})=(x_1+\Delta x_1,\dots,x_k+\Delta x_k,y_1+\Delta y_1,\dots,y_p+\Delta y_p)$ i omegnen af $(\underline{x},\underline{y})$ tilnærmelsesvis det lineære ligningssystem

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Delta x_1+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\Delta x_k+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\Delta y_1+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial y_p}\Delta y_p=0\\ \dots\\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}\Delta x_1+\dots+\frac{\partial f_p}{\partial x_k}\Delta x_k+\frac{\partial f_p}{\partial y_1}\Delta y_1+\dots+\frac{\partial f_p}{\partial y_p}\Delta y_p=0, \end{cases}$$

hvor de partielle afledede skal tages i $(\underline{x},\underline{y})$. Dette ligningssystem skrives kort

$$\underline{\underline{D}}_{\underline{x}}\underline{f}\;\Delta\underline{x}+\underline{\underline{D}}_{\underline{y}}\underline{f}\;\Delta\underline{y}=\underline{0},$$

idet vi med $\underline{\underline{D}}_{\underline{x}}\underline{f}$ og $\underline{\underline{D}}_{\underline{y}}\underline{f}$ betegner funktionalmatricerne af $\underline{f}$ efter $\underline{x}$ og $\underline{y}$, d.v.s. matricerne

$$\underline{\underline{D}}_{\underline{x}}\underline{f} = \frac{\partial(f_1,\dots,f_p)}{\partial(x_1,\dots,x_k)} \text{ og } \underline{\underline{D}}_{\underline{y}}\underline{f} = \frac{\partial(f_1,\dots,f_p)}{\partial(y_1,\dots,y_p)},$$

der tilsammen udgør funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}\underline{f}$.

Det ligger da nær at formode, at hvis matricen $\underline{\underline{D}}_{\underline{y}}\underline{f}$ er regulær i $(\underline{x},\underline{y})$, vil løsningsmængden F i en omegn af $(\underline{x},\underline{y})$ tilnærmelsesvis være bestemt ved de lineære funktioner, der fås ved at løse det lineære ligningssystem efter $\Delta y_1,\dots,\Delta y_p$. Nærmere bestemt: Man vil formode, at for ethvert punkt $(\underline{x}_0,\underline{y}_0)\in F$, i hvilket den nævnte betingelse er opfyldt, vil F i en omegn $\Xi\times H$ af $(\underline{x}_0,\underline{y}_0)$ [hvor Ξ er en omegn af $\underline{x}_0$ i $\mathbb{R}^k$ og H en omegn af $\underline{y}_0$ i $\mathbb{R}^p$] være bestemt ved en vektorfunktion

$$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}) = (g_1(\underline{x}),\dots,g_p(\underline{x})) : \Xi \to H,$$

eller, hvad der kommer ud på det samme, ved et ligningssystem

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1,\dots,x_k) \\ \dots \\ y_p = g_p(x_1,\dots,x_k), \end{cases}$$

hvor $\underline{g}\in\mathcal{C}^1(\Xi)$, og hvor differentialet $d\underline{g}=(dg_1,\dots,dg_p)$ for ethvert $\underline{x}\in\Xi$ er bestemt ved det lineære ligningssystem

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial x_k}dx_k+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}dg_1+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial y_p}dg_p=0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f_p}{\partial x_k}dx_k+\frac{\partial f_p}{\partial y_1}dg_1+\dots+\frac{\partial f_p}{\partial y_p}dg_p=0, \end{cases}$$

eller

$$\underline{\underline{D}}_{\underline{x}}\underline{f}\; d\underline{x} + \underline{\underline{D}}_{\underline{y}}\underline{f}\; d\underline{g} = \underline{0},$$

hvor de partielle afledede skal tages i $(\underline{x},\underline{g}(\underline{x}))$. Vi vil vise noget mere:

Hovedsætning. Lad A være en åben mængde i $\vec{R}^{k+p}$ og

$$\underline{f} = \underline{f}(\underline{x},\underline{y}) = (f_1(\underline{x},\underline{y}), \cdots, f_p(\underline{x},\underline{y})) : A \to \vec{R}^p$$

en vektorfunktion med kontinuerte partielle afledede efter $y_1, \cdots, y_p$. Lad $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ være et punkt af mængden

$$F = \{ (\underline{x},\underline{y}) \in A \mid \underline{f}(\underline{x},\underline{y}) = \underline{0} \},$$

hvori funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}_{\underline{y}} \underline{f} = \frac{\partial(f_1, \cdots, f_p)}{\partial(y_1, \cdots, y_p)}$ er regulær, d.v.s. for hvilket funktionaldeterminanten $\det \underline{\underline{D}}_{\underline{y}} \underline{f}(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ er $\neq 0$, og lad

$$\{(\underline{x},\underline{y}) \mid \|\underline{x}-\underline{x}_0\| < a^*, \|\underline{y}-\underline{y}_0\| < b^*\} \subseteq A$$

være en omegn af $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$, hvori $\underline{\underline{D}}_{\underline{y}} \underline{f}$ er regulær [en sådan findes, da det $\underline{\underline{D}}_{\underline{y}} \underline{f}(\underline{x},\underline{y})$ er kontinuert].

Da eksisterer omegne

$$\Xi = \{\underline{x} \mid \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \leqslant a < a^*\} \text{ og } H = \{\underline{y} \mid \|\underline{y}-\underline{y}_0\| \leqslant b < b^*\}$$

af $\underline{x}_0$ og $\underline{y}_0$, samt en kontinuert vektorfunktion

$$\underline{g} = \underline{g}(\underline{x}) = (g_1(\underline{x}), \cdots, g_p(\underline{x})) : \Xi \to H,$$

således at

$$F \cap (\Xi \times H) = \{(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x})) \mid \underline{x} \in \Xi\},$$

d.v.s. mængden af løsninger $(\underline{x},\underline{y})$ til ligningen $\underline{f}(\underline{x},\underline{y}) = \underline{0}$ i $\Xi \times H$ er netop mængden af punkter $(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x}))$, $\underline{x} \in \Xi$.

Hvis $\underline{f}$ også har kontinuerte partielle afledede efter $x_1, \cdots, x_k$, altså hvis $\underline{f} \in C^1(A)$, gælder $\underline{g} \in C^1(\Xi)$, og differentialet af $\underline{g}$ vil være bestemt ved ligningen

$$\underline{\underline{D}}_{\underline{x}} \underline{f}(\underline{x},\underline{y})\, d\underline{x} + \underline{\underline{D}}_{\underline{y}} \underline{f}(\underline{x},\underline{y})\, d\underline{y} = \underline{0}$$

(hvor $\underline{y}$ står for $\underline{g}(\underline{x})$), d.v.s.

$$d\underline{y} = -(\underline{\underline{D}}_{\underline{y}} \underline{f}(\underline{x},\underline{y}))^{-1} \underline{\underline{D}}_{\underline{x}} \underline{f}(\underline{x},\underline{y})\, d\underline{x}$$

eller

$$\underline{\underline{D}}\, \underline{g}(\underline{x}) = -(\underline{\underline{D}}_{\underline{y}} \underline{f}(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x})))^{-1} \underline{\underline{D}}_{\underline{x}} \underline{f}(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x})).$$

Ved $\underline{y} = \underline{g}(\underline{x})$ og $\underline{f}(\underline{x},\underline{y}) = \underline{0}$ bestemmes altså i omegnen $\equiv x H$ samme mængde af punkter $(\underline{x},\underline{y})$. Ved ligningen $\underline{y} = \underline{g}(\underline{x})$ eller ligningerne $y_1 = g_1(\underline{x}), \ldots, y_p = g_p(\underline{x})$ fremstilles disse punkter ved hjælp af <u>eksplicit</u> givne funktioner af $\underline{x}$. Man siger, at disse funktioner $\underline{g}(\underline{x})$ eller $g_1(\underline{x}), \ldots, g_p(\underline{x})$ er <u>implicit</u> bestemt ved ligningen $\underline{f}(\underline{x},\underline{y}) = \underline{0}$ eller ligningerne $f_1(\underline{x},\underline{y}) = 0, \ldots, f_p(\underline{x},\underline{y}) = 0$.

Implicit givne funktioner har man betragtet fra differentialregningens begyndelse, men ovenstående sætning er først formuleret i slutningen af 19. årh. bl.a. af Lipschitz (1880) og Peano (1884). Det her givne bevis skyldes Goursat (1903).

<u>Bevis</u>. (1) Idet vi til afkortning sætter

$$\left(\underline{\underline{D}}_{\underline{y}} \underline{f}(x_0, y_0)\right)^{-1} = \underline{\underline{\Gamma}} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p1} & \cdots & \gamma_{pp} \end{pmatrix},$$

betragter vi den ved matrixligningen

$$\underline{\underline{T}}_1(\underline{x},\underline{y}) = \underline{y} - \underline{\underline{\Gamma}}\, \underline{f}(\underline{x},\underline{y})$$

bestemte vektorfunktion

$$\underline{T}(\underline{x},\underline{y}) = \left(T_1(\underline{x},\underline{y}), \ldots, T_p(\underline{x},\underline{y})\right) : A \to \mathbb{R}^p.$$

Da gælder åbenbart $\underline{f}(\underline{x},\underline{y}) = \underline{0}$, hvis og kun hvis $\underline{T}(\underline{x},\underline{y}) = \underline{y}$. Specielt er $\underline{T}(x_0, y_0) = y_0$. Udførligt skrevet har vi

$$\begin{pmatrix} T_1(\underline{x},\underline{y}) \\ \vdots \\ T_p(\underline{x},\underline{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p1} & \cdots & \gamma_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(\underline{x},\underline{y}) \\ \vdots \\ f_p(\underline{x},\underline{y}) \end{pmatrix}.$$

Funktionen $\underline{T}(\underline{x},\underline{y})$ har åbenbart kontinuert partielle afledede efter $y_1, \ldots, y_p$, og vi har

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial T_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial T_p}{\partial y_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p1} & \cdots & \gamma_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}$$

eller kort

$$\underline{\underline{D}}_y \underline{T} = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{\Gamma}}\, \underline{\underline{D}}_y \underline{f}.$$

Heraf ses, at $\underline{\underline{D}}_y \underline{T}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \underline{\underline{0}}$, d.v.s. alle $\frac{\partial T_r}{\partial y_s}$, $r = 1, \ldots, p$, $s = 1, \ldots, p$, er 0 i $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$.

Vi bestemmer nu omegnene $\Xi = \{\underline{x} \mid \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \leq a < a^*\}$ og $H = \{\underline{y} \mid \|\underline{y} - \underline{y}_0\| \leq b < b^*\}$ således, at

$$(\alpha) \qquad \sup_{(\underline{x}, \underline{y}) \in \Xi \times H} \left| \frac{\partial T_r}{\partial y_s} \right| \leq \frac{1}{2p} \quad \text{for alle } r, s$$

og

$$(\beta) \qquad \sup_{\underline{x} \in \Xi} \|\underline{T}(\underline{x}, \underline{y}_0) - \underline{y}_0\| \leq \frac{1}{2} b.$$

[Først vælges et a og et b, således at (α) er opfyldt, og dernæst erstattes a om fornødent med et mindre a, således at også (β) er opfyldt.]

Af (α) følger, at der for alle $\underline{x} \in \Xi$, $\underline{y} \in H$, $\underline{y}^* \in H$ gælder

$$(\gamma) \qquad \|\underline{T}(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{T}(\underline{x}, \underline{y}^*)\| \leq \frac{1}{2} \|\underline{y} - \underline{y}^*\|;$$

thi for hvert r haves

$$T_r(\underline{x}, \underline{y}) - T_r(\underline{x}, \underline{y}^*) = \frac{\partial T_r}{\partial y_1}(y_1 - y_1^*) + \cdots + \frac{\partial T_r}{\partial y_p}(y_p - y_p^*),$$

hvor de afledede $\frac{\partial T_r}{\partial y_s}$ er taget i et punkt af liniestykket fra $(\underline{x}, \underline{y})$ til $(\underline{x}, \underline{y}^*)$ [almindeligvis ikke det samme for alle r], og heraf følger

$$|T_r(\underline{x}, \underline{y}) - T_r(\underline{x}, \underline{y}^*)| \leq p \frac{1}{2p} \|\underline{y} - \underline{y}^*\| = \frac{1}{2} \|\underline{y} - \underline{y}^*\|.$$

Af (γ) følger specielt, når vi vælger $\underline{y}^* = \underline{y}_0$, at

$$\|\underline{T}(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{T}(\underline{x}, \underline{y}_0)\| \leq \frac{1}{2} b$$

for alle $(\underline{x},\underline{y}) \in \Xi \times H$, og sammenholdes dette med (β), ses, at

(δ) $\quad \underline{T}(\underline{x},\underline{y}) \in H$ for alle $(\underline{x},\underline{y}) \in \Xi \times H$.

Af (γ) og (δ) aflæses, at for ethvert fast $\underline{x} \in \Xi$ bestemmer $\underline{T}(\underline{x},\underline{y})$ en afbildning af H ind i sig selv, og denne er en kontraktion. Som afsluttet delmængde af $\bar{R}^p$ er H et fuldstændigt metrisk rum. Ifølge fixpunktsætningen i §3 har afbildningen altså netop eet fixpunkt. For ethvert $\underline{x} \in \Xi$ findes altså et og kun eet $\underline{y} \in H$, for hvilket $\underline{T}(\underline{x},\underline{y}) = \underline{y}$, d.v.s. for hvilket $\underline{f}(\underline{x},\underline{y}) = \underline{0}$. Dette punkt $\underline{y}$ betegner vi $\underline{g}(\underline{x})$. Det bestemmes ved iterationsmetoden, idet vi f.eks. begynder med $\underline{y}_0$ og successivt bestemmer

$$\underline{y}_1(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x},\underline{y}_0),\ \underline{y}_2(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x},\underline{y}_1(\underline{x})),\ \cdots,\ \underline{y}_n(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x},\underline{y}_{n-1}(\underline{x})),\ \cdots.$$

Da gælder for ethvert $\underline{x} \in \Xi$, at $\underline{y}_n(\underline{x}) \to \underline{g}(\underline{x})$. Nærmere bestemt har vi ifølge beviset i §3 (punkt (2))

$$\|\underline{y}_n(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x})\| \leqslant \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^n \|\underline{y}_0 - \underline{g}(\underline{x})\| \leqslant \left(\tfrac{1}{2}\right)^n b.$$

Heraf ses, at $\underline{y}_n(\underline{x})$ konvergerer ligeligt i Ξ mod $\underline{g}(\underline{x})$. Nu ses imidlertid straks af udtrykket for $\underline{T}(\underline{x},\underline{y})$, at alle funktionerne $\underline{y}_1(\underline{x}), \underline{y}_2(\underline{x}), \cdots, \underline{y}_n(\underline{x}), \cdots$ er kontinuerte i Ξ. Følgelig er også $\underline{g}(\underline{x})$ kontinuert i Ξ.

(2) Vi forudsætter nu, at $\underline{f}$ også har kontinuerte partielle afledede efter $x_1, \cdots, x_k$, altså at $\underline{f} \in \mathcal{C}'(A)$, og skal da vise, at $\underline{g} \in \mathcal{C}'(\Xi)$, og at differentialet af $\underline{g}$ bestemmes ved den i sætningen angivne formel.

Hertil betragtes to punkter $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ og $\underline{x} + \Delta\underline{x} = (x_1 + \Delta x_1, \cdots, x_k + \Delta x_k)$ i Ξ; differensen $\Delta\underline{g} = \underline{g}(\underline{x} + \Delta\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x})$ skrives $(\Delta g_1, \cdots, \Delta g_p)$. Punkterne $(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x}))$ og $(\underline{x} + \Delta\underline{x}, \underline{g}(\underline{x} + \Delta\underline{x}))$ tilhører begge F. Vi har altså for hvert $r = 1, \cdots, p$

$$f_r(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x})) = 0 \quad \text{og} \quad f_r(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x}) + \Delta\underline{g}) = 0$$

og derfor ifølge Taylors formel

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f_r}{\partial x_k}\Delta x_k + \frac{\partial f_r}{\partial y_1}\Delta g_1 + \cdots + \frac{\partial f_r}{\partial y_p}\Delta g_p = 0,$$

hvor de partielle afledede er taget i et punkt af liniestykket fra $(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x}))$ til $(\underline{x}+\Delta\underline{x}, \underline{g}(\underline{x})+\Delta\underline{g})$ [normalt ikke det samme for alle r]. I det således fremkomne ligningssystem

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_k}\Delta x_k + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\Delta g_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_p}\Delta g_p = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f_p}{\partial x_k}\Delta x_k + \frac{\partial f_p}{\partial y_1}\Delta g_1 + \cdots + \frac{\partial f_p}{\partial y_p}\Delta g_p = 0 \end{cases}$$

er de afledede normalt taget i forskellige punkter i de forskellige ligninger. For $\Delta\underline{x} \to \underline{0}$ konvergerer koefficientmatricen mod funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}\,\underline{f}$ taget i punktet $(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x}))$, der udgøres af de to matricer $\underline{\underline{D}}_{\underline{x}}\underline{f}$ og $\underline{\underline{D}}_{\underline{y}}\underline{f}$ taget i $(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x}))$. Da den sidste er regulær, må den matrix, der udgøres af koefficienterne hi $\Delta g_1, \ldots, \Delta g_p$ i ligningssystemet, være regulær for alle tilstrækkelig små $\|\Delta\underline{x}\|$. Ved løsning af ligningssystemet fås derfor

$$\begin{pmatrix} \Delta g_1 \\ \vdots \\ \Delta g_p \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_k \end{pmatrix}.$$

For $\Delta\underline{x} \to \underline{0}$ konvergerer produktet af de to matricer, der indeholder de partielle afledede, mod $(\underline{\underline{D}}_{\underline{y}}\underline{f})^{-1}\,\underline{\underline{D}}_{\underline{x}}\underline{f}$ taget i $(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x}))$. Produktet kan altså skrives på formen $(\underline{\underline{D}}_{\underline{y}}\underline{f})^{-1}\,\underline{\underline{D}}_{\underline{x}}\underline{f} + \underline{\underline{\varepsilon}}(\Delta\underline{x})$, hvor $\underline{\underline{\varepsilon}}(\Delta\underline{x})$ er en $p \times k$ matrix, der konvergerer mod $\underline{\underline{0}}$ for $\Delta\underline{x} \to \underline{0}$. Ligningen kan derfor skrives

$$\Delta\underline{g} = -(\underline{\underline{D}}_{\underline{y}}\underline{f})^{-1}\,\underline{\underline{D}}_{\underline{x}}\underline{f}\,\Delta\underline{x} + \underline{\underline{\varepsilon}}(\Delta\underline{x})\,\Delta\underline{x}.$$

Heraf ses, at $\underline{g}$ er differentiabel i $\underline{x}$ med funktional-

matricen $\underline{\underline{D}}\,\underline{g}(\underline{x}) = -\left(\underline{\underline{D}}_{\underline{y}}\,\underline{f}(\underline{x},\underline{g}(\underline{x}))\right)^{-1}\underline{\underline{D}}_{\underline{x}}\,\underline{f}(\underline{x},\underline{g}(\underline{x}))$. Altså gælder $\underline{g}\in C'(\underline{\underline{=}})$, og $d\underline{g}$ er bestemt på den i sætningen angivne måde.

Tilføjelse. Af ligningen $\underline{\underline{D}}\,\underline{g}(\underline{x}) = -(\underline{\underline{D}}_{\underline{y}}\,\underline{f}(\underline{x},\underline{y}))^{-1}\underline{\underline{D}}_{\underline{x}}\,\underline{f}(\underline{x},\underline{y})$ (hvor $\underline{y}=\underline{g}(\underline{x})$) eller

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_k} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

ses, idet man tænker sig højre side udregnet, så at hvert $\frac{\partial g_\varkappa}{\partial x_\lambda}$ fremtræder som en brøk, at hvis $\underline{f}\in C^n(A)$, gælder $\underline{g}\in C^n(\underline{\underline{=}})$.

Ligningen kan også skrives $\underline{\underline{D}}_{\underline{x}}\,\underline{f}(\underline{x},\underline{y}) + \underline{\underline{D}}_{\underline{y}}\,\underline{f}(\underline{x},\underline{y})\,\underline{\underline{D}}\,\underline{g}(\underline{x}) = \underline{\underline{0}}$ (hvor $\underline{y}=\underline{g}(\underline{x})$) eller

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_k} \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}.$$

De heri sammenfattede pk ligninger er simpelthen de ligninger, man får ved at differentiere hver af ligningerne $f_\varrho(\underline{x},\underline{y})=0$ (hvor $\underline{y}=\underline{g}(\underline{x})$) efter hver af de variable x_λ, idet man differentierer gennem $y_1,\cdots,y_p$. Man kalder dette implicit differentiation.

Hvis $\underline{f}\in C^n(A)$, får man lettest de højere afledede af $\underline{g}$ ved fortsat implicit differentiation og løsning af de derved fremkomne ligninger.

Eks. 1. Venstre side i ligningen

$$f(x,y,z) = 2x^3y + xz^3 + yz^2 - 1 = 0$$

er en vilkårligt ofte differentiabel funktion på R^3, og ligningen har løsningen $(x,y,z)=(1,0,1)$. I dette

er $\frac{\partial f}{\partial z} = 3 \neq 0$. Der findes derfor en omegn $\{(x,y,z) \mid |x-1| \leqslant a, |y| \leqslant a, |z-1| \leqslant b\}$ af punktet $(1,0,1)$, således at løsningsmængden til ligningen i denne omegn har formen $\{(x,y,g(x,y)) \mid |x-1| \leqslant a, |y| \leqslant a\}$, hvor g er en vilkårligt ofte differentiabel funktion på $\{(x,y) \mid |x-1| \leqslant a, |y| \leqslant a\}$. Vi vil finde Taylors grænseformel for denne funktion svarende til punktet $(x,y)=(1,0)$, idet leddene af 2. grad medtages.

Ved implicit differentiation [d.v.s. ved differentiation af ligningen $f(x,y,g(x,y))=0$] fås, idet z står for $g(x,y)$,

$$\begin{cases} 6x^2y + z^3 + (3xz^2+2yz)\,z'_x = 0 \\ 2x^3 + z^2 + (3xz^2+2yz)\,z'_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12xy + 6z^2 z'_x + (6xz+2y)\,z'^2_x + (3xz^2+2yz)\,z''_{x^2} = 0 \\ 6x^2 + 2z\,z'_x + 3z^2 z'_y + (6xz+2y)\,z'_x z'_y + (3xz^2+2yz)\,z''_{xy} = 0 \\ 4z\,z'_y + (6xz+2y)\,z'^2_y + (3xz^2+2yz)\,z''_{y^2} = 0, \end{cases}$$

altså i $(1,0,1)$

$$\begin{cases} 1 + 3z'_x = 0 \\ 3 + 3z'_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6z'_x + 6z'^2_x + 3z''_{x^2} = 0 \\ 6 + 2z'_x + 3z'_y + 6z'_x z'_y + 3z''_{xy} = 0 \\ 4z'_y + 6z'^2_y + 3z''_{y^2} = 0, \end{cases}$$

hvoraf

$z'_x = -\frac{1}{3}$
$z'_y = -1$
$z''_{x^2} = \frac{4}{9}$
$z''_{xy} = -\frac{13}{9}$
$z''_{y^2} = -\frac{2}{3}$.

Formlen lyder derfor

$$z = g(x,y) = 1 - \tfrac{1}{3}(x-1) - y + \tfrac{2}{9}(x-1)^2 - \tfrac{13}{9}(x-1)y - \tfrac{1}{3}y^2 + \varepsilon\cdot[(x-1)^2+y^2],$$ hvor $\varepsilon \to 0$ for $(x,y)\to(1,0)$.

Ved samme metode kan man finde Taylors grænseformel svarende til en vilkårlig grad.

Eks. 2. Venstre siderne i ligningerne

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 2x^3y + xz^3 + yz^2 - 1 = 0 \\ g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 \qquad\quad = 0 \end{cases}$$

er vilkårligt ofte differentiable funktioner på R^3, og ligningssystemet har løsningen $(x,y,z)=(1,0,1)$. I dette punkt er $\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ regulær. Der findes derfor en omegn $\{(x,y,z) \mid |x-1|\leqslant a, |y|\leqslant b, |z-1|\leqslant b\}$ af $(1,0,1)$, i hvilken løsningsmængden har formen $\{(x,\psi(x),\chi(x)) \mid |x-1|\leqslant a\}$, hvor ψ og χ er vilkårligt ofte differentiable funktioner på $\{x \mid |x-1|\leqslant a\}$. Vi vil opstille Taylors grænseformel for disse funktioner svarende til punktet $x=1$, idet leddene af 2. grad medtages.

Ved implicit differentiation [d.v.s. ved differentiation af ligningerne $f(x,\psi(x),\chi(x))=0$ og $g(x,\psi(x),\chi(x))=0$] fås, idet y og z står for $\psi(x)$ og $\chi(x)$,

$$\begin{cases} 6x^2y + z^3 + (2x^3+z^2)y' + (3xz^2+2yz)z' = 0 \\ x + y\,y' + z\,z' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12xy + 12x^2y' + 6z^2z' + 4z\,y'z' + (6xz+2y)z'^2 \\ \qquad + (2x^3+z^2)y'' + (3xz^2+2yz)z'' = 0 \\ 1 + y'^2 + z'^2 + y\,y'' + z\,z'' = 0, \end{cases}$$

altså i $(1,0,1)$

$$\begin{cases} 1 + 3y' + 3z' = 0 \\ 1 + z' = 0 \\ 12y' + 6z' + 4y'z' + 6z'^2 + 3y'' + 3z'' = 0 \\ 1 + y'^2 + z'^2 + z'' = 0, \end{cases}$$

hvoraf

$y' = \frac{2}{3}$

$z' = -1$

$y'' = \frac{2}{3}$

$z'' = -\frac{22}{9}$.

Formlerne lyder derfor

$$y = \psi(x) = \tfrac{2}{3}(x-1) + \tfrac{1}{3}(x-1)^2 + \delta\cdot(x-1)^2 \quad \text{og}$$

$$z = \chi(x) = 1 - (x-1) - \tfrac{11}{9}(x-1)^2 + \eta(x-1)^2,$$

hvor $\delta \to 0$ og $\eta \to 0$ for $x \to 1$.

§5. Omvendt afbildning.

I stedet for at sige, at en funktion $f: A \to \dot{R}$ eller en vektorfunktion $\underline{f}: A \to \dot{R}^l$ på en mængde A i $\dot{R}^k$ tilhører klassen $C^n(A)$, resp. $C^\infty(A)$, vil vi ofte kort sige, at den er C^n, resp. C^∞, og vil tale om den som en C^n-funktion eller C^n-afbildning, resp. C^∞-funktion eller C^∞-afbildning.

Vi vil nu betragte en C^1-afbildning af en åben mængde i $\dot{R}^k$ ind i $\dot{R}^k$. Det er hensigtsmæssigt i denne forbindelse at operere med to „eksemplarer" af $\dot{R}^k$ med henh. $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k)$ og $\underline{y} = (y_1, \dots, y_k)$ som variabelt punkt. Idet Y er en åben mængde i $\underline{y}$-rummet $\dot{R}^k$, betragter vi en C^1-afbildning

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{y}): \quad Y \to \dot{R}^k$$

af Y ind i $\underline{x}$-rummet $\dot{R}^k$. Uafhængigt skrevet bestemmes afbildningen ved et ligningssystem

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_k) \\ \dots \\ x_k = \varphi_k(y_1, \dots, y_k). \end{cases}$$

Da $\underline{\varphi} \in C^1(Y)$, er $\underline{\varphi}$ i en omegn af ethvert punkt $\underline{y} \in Y$ tilnærmelsesvis bestemt ved $\underline{\varphi}(\underline{y}) + d\underline{\varphi}(\underline{y}, d\underline{y})$, d.v.s. $\Delta\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{y} + \Delta\underline{y}) - \underline{\varphi}(\underline{y})$ er i en omegn af $\underline{y}$ tilnærmelsesvis bestemt ved

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \Delta y_1 + \dots + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_k} \Delta y_k \\ \dots \\ \Delta x_k = \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial y_1} \Delta y_1 + \dots + \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial y_k} \Delta y_k, \end{cases}$$

hvor de partielle afledede skal tages i $\underline{y}$, eller kort ved

$$\Delta\underline{x} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{y})\,\Delta\underline{y}.$$

Det ligger da nær at formode, at hvis funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}$ er regulær i et punkt $\underline{y}_0$, vil $\underline{\varphi}$ afbilde en omegn Ω af $\underline{y}_0$ bijektivt på en omegn Ξ af $\underline{x}_0 = \underline{\varphi}(\underline{y}_0)$,

og den i Ξ definerede omvendte afbildning

$$\underline{y} = \underline{\Psi}(\underline{x}) : \Xi \to \Omega,$$

der naturligt skrevet bestemmes ved et ligningssystem

$$\begin{cases} y_1 = \psi_1(x_1, \cdots, x_k) \\ \cdots \\ y_k = \psi_k(x_1, \cdots, x_k), \end{cases}$$

vil være en C^1-afbildning af Ξ på Ω, hvis funktionalmatrix $\underline{\underline{D}}\,\underline{\Psi}(\underline{x})$ i et vilkårligt punkt $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{y})$, $\underline{y} \in \Omega$, er den reciproke matrix til $\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{y})$.

Rigtigheden af denne formodning i nedenstående præcise formulering fremgår af hovedsætningen om implicit givne funktioner, idet man bemærker, at ligningen $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{y})$ er ensbetydende med ligningen

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x} - \underline{\varphi}(\underline{y}) = \underline{0}.$$

Funktionen $\underline{f}$ er en vektorfunktion $\underline{f} : A \to \mathbb{R}^k$ på den åbne mængde $A = \mathbb{R}^k \times Y$ i $\mathbb{R}^{2k}$ og tilhører åbenbart klassen $C^1(A)$. Endvidere er

$$\underline{\underline{D}}_{\underline{x}}\,\underline{f}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{\underline{E}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{D}}_{\underline{y}}\,\underline{f}(\underline{x}, \underline{y}) = -\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{y}).$$

Anvendelse af hovedsætningen (med $p = k$) giver derfor:

<u>Sætning.</u> <u>Lad</u> Y <u>være en åben mængde i</u> $\mathbb{R}^k$ <u>og lad</u>

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{y}) = (\varphi_1(\underline{y}), \cdots, \varphi_k(\underline{y})) : Y \to \mathbb{R}^k$$

<u>være en</u> C^1<u>-afbildning af</u> Y <u>ind i</u> $\mathbb{R}^k$. <u>Lad</u> $\underline{y}_0 \in Y$ <u>være et punkt, hvori funktionalmatricen</u> $\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi} = \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)}{\partial(y_1, \cdots, y_k)}$ <u>er regulær</u>, d.v.s. for hvilket funktionaldeterminanten $\det \underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{y}_0)$ er $\neq 0$, <u>og lad</u>

$$\{\underline{y} \mid \|\underline{y} - \underline{y}_0\| < \delta^*\} \subseteq Y$$

<u>være en omegn af</u> $\underline{y}_0$, <u>hvori</u> $\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}$ <u>er regulær</u> [en sådan findes, da $\det \underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{y})$ er kontinuert].

<u>Da eksisterer omegne</u>

$\Xi = \{\underline{x} \mid \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \leqslant a\}$ og $H = \{\underline{y} \mid \|\underline{y}-\underline{y}_0\| \leqslant b < b^*\}$ af $\underline{x}_0$ og $\underline{y}_0$, samt en C^1-afbildning

$$\underline{y} = \underline{\Psi}(\underline{x}) = (\Psi_1(\underline{x}), \ldots, \Psi_k(\underline{x})) : \Xi \to H$$

af Ξ ind i H, således at mængden af punkter af formen $(\underline{\varphi}(\underline{y}), \underline{y})$ i $\Xi \times H$ er identisk med mængden af punkter af formen $(\underline{x}, \underline{\Psi}(\underline{x}))$, $\underline{x} \in \Xi$. Med andre ord: For ethvert $\underline{x} \in \Xi$ findes et og kun et $\underline{y} \in H$, nemlig $\underline{y} = \underline{\Psi}(\underline{x})$, for hvilket $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{y})$. Restriktionen af $\underline{\varphi}$ til mængden $\Omega = \{\underline{y} \in H \mid \underline{\varphi}(\underline{y}) \in \Xi\}$, der åbenbart er en omegn af $\underline{y}_0$, er altså en bijektiv afbildning af Ω på omegnen Ξ af $\underline{x}_0$, og dens omvendte afbildning er $\underline{\Psi}$, der altså er en bijektiv afbildning af Ξ på Ω. Funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}\,\underline{\Psi} = \frac{\partial(\Psi_1, \ldots, \Psi_k)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)}$ er bestemt ved

$$\underline{\underline{D}}\,\underline{\Psi}(\underline{x}) = \left(\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{y})\right)^{-1} \quad (\text{hvor } \underline{y} = \underline{\Psi}(\underline{x})).$$

Tilføjelse. Hvis $\underline{\varphi} \in C^n(Y)$, gælder $\underline{\Psi} \in C^n(\Xi)$. Dette fremgår af tilføjelsen til hovedsætningen om implicit givne funktioner.

Corollar. Hvis $\underline{\varphi} : Y \to \mathbb{R}^k$ er en C^1-afbildning, og $\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{y})$ er regulær for ethvert $\underline{y} \in Y$, er billedet $X = \underline{\varphi}(Y)$ en åben mængde i x-rummet $\mathbb{R}^k$. Thi ethvert $\underline{x}_0 \in X$ er jo af formen $\underline{x}_0 = \underline{\varphi}(\underline{y}_0)$, hvor $\underline{y}_0 \in Y$; ifølge sætningen findes derfor en omegn Ξ af $\underline{x}_0$, som er indeholdt i X. — Af særlig interesse er det tilfælde, hvor $\underline{\varphi} : Y \to \mathbb{R}^k$ er injektiv, d.v.s. hvor $\underline{\varphi} : Y \to X$ er en bijektiv afbildning af den åbne mængde Y i $\mathbb{R}^k$ på en åben mængde X i $\mathbb{R}^k$. Den omvendte afbildning $\underline{\varphi}^{-1} : X \to Y$ er da ifølge sætningen en C^1-afbildning

af X på Y, og ligningen til bestemmelse af funktionalmatricen for den omvendte afbildning kan skrives

$$\underline{\underline{D}}\,\Phi^{-1} = (\underline{\underline{D}}\,\Phi)^{-1} \circ \Phi^{-1}.$$

Eks. Idet vi for $k=2$ i stedet for (x_1, x_2) skriver (x, y) og i stedet for (y_1, y_2) skriver (ξ, η), bestemmes ved

$$\begin{cases} x = \xi^2 + \eta^2 \\ y = \xi^2 - \eta^2 \end{cases}$$

en C^∞-afbildning af (ξ, η)-planen ind i (x, y)-planen. Man ser let, at billedmængden af (ξ, η)-planen er mængden $\{(x, y) \mid x \geqslant 0, |y| \leqslant x\}$. Funktionalmatricen er

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{bmatrix} 2\xi & 2\eta \\ 2\xi & -2\eta \end{bmatrix}$$

med determinanten $-8\xi\eta$. Funktionalmatricen er altså regulær uden for ξ-aksen og η-aksen. Hver af de fire åbne kvadranter, der fås når man af (ξ, η)-planen udelader ξ-aksen og η-aksen, afbildes bijektivt på mængden $\{(x, y) \mid x > 0, |y| < x\}$, og den omvendte afbildning er bestemt ved

$$\begin{cases} \xi = \pm\sqrt{\frac{x+y}{2}} \\ \eta = \pm\sqrt{\frac{x-y}{2}} \end{cases}$$

med den ved kvadranten givne kombination af fortegnene. Betragtes f. eks. fortegnskombinationen $+, +$, er funktionalmatricen for denne afbildning

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\sqrt{\frac{x+y}{2}}} & \frac{1}{4\sqrt{\frac{x+y}{2}}} \\ \frac{1}{4\sqrt{\frac{x-y}{2}}} & -\frac{1}{4\sqrt{\frac{x-y}{2}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\xi} & \frac{1}{4\xi} \\ \frac{1}{4\eta} & -\frac{1}{4\eta} \end{bmatrix}.$$

Man konstaterer, at $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

§6. Transformation af integraler.

Lad $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{y}) : Y \to X$ være en bijektiv C^1-afbildning af en åben mængde Y i $\grave{R}^k$ på en mængde X i $\grave{R}^k$, hvis funktionalmatrix $\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{y})$ er regulær for ethvert $\underline{y} \in Y$. Da er ifølge §5 mængden X også åben, og den omvendte afbildning $\underline{y} = \underline{\varphi}^{-1}(\underline{x}) : X \to Y$ er en bijektiv C^1-afbildning af X på Y med den for alle $\underline{x} \in X$ regulære funktionalmatrix $\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}^{-1}(\underline{x}) = (\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{y}))^{-1}$ (hvor $\underline{y} = \underline{\varphi}^{-1}(\underline{x})$).

Til enhver funktion $f = f(\underline{x}) : X \to \grave{R}$ på X svarer i Y funktionen $f \circ \underline{\varphi} = (f \circ \underline{\varphi})(\underline{y}) = f(\underline{\varphi}(\underline{y})) : Y \to \grave{R}$, og enhver funktion på Y svarer på denne måde til netop en funktion på X. Det er klart, at hvis f er kontinuert, er $f \circ \underline{\varphi}$ kontinuert, og omvendt.

Sætning. *En funktion $f : X \to \grave{R}$ er Lebesgue integrabel over X, hvis og kun hvis funktionen $(f \circ \varphi)\,|\det \underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}|$ er Lebesgue integrabel over Y, og der gælder da*

$$\int_X f(\underline{x})\, m_k(d\grave{R}^k) = \int_Y (f \circ \underline{\varphi})(\underline{y})\, |\det \underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{y})|\, m_k(d\grave{R}^k).$$

Heuristisk bevis. For hvert $\underline{y} \in Y$ er afbildningen i en omegn af $\underline{y}$ omtrent bestemt ved den lineære afbildning $d\underline{x} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{y})\, d\underline{y}$. Et „uendelig lille" interval $J = [y_1, y_1 + dy_1] \times \cdots \times [y_k, y_k + dy_k]$ med „hjørnet" $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ og kantlangderne $dy_1, \ldots, dy_k$ afbildes derfor ved $\underline{\varphi}$ på det „uendelig lille" parallelepipedum $\mathfrak{J}$ bestemt ved „hjørnet" $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{y})$ og vektorerne $\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial y_1} dy_1, \ldots, \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial y_k} dy_k$, hvis mål er

$$m_k(\mathfrak{J}) = |\det \underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{y})|\, dy_1 \cdots dy_k = |\det \underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{y})|\, m_k(J).$$

Heraf fremgår formlen, idet integralerne tydes som summer af „uendelig mange uendelig små" størrelser.

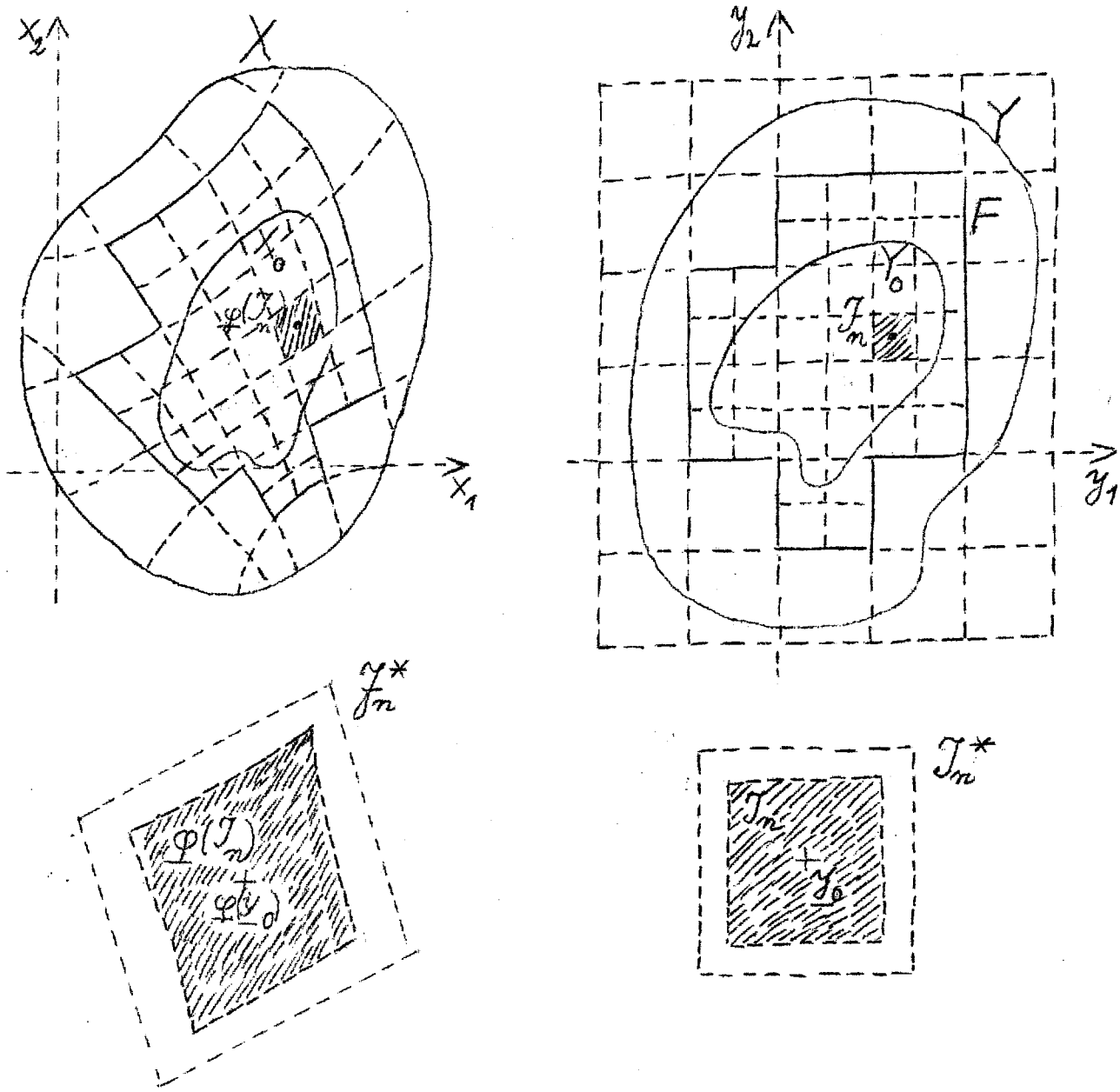
Omformningen af dette heuristiske bevis til et virkeligt bevis er et teknisk anliggende. Udførelsen i enkeltheder kan varieres på mangfoldige måder. Helt simpel kan en sådan bevisførelse ikke blive.

Bevis. ① Det vil være tilstrækkeligt at vise, at hvis f er Lebesgue integrabel over X, er $(f\circ\varphi)\,|\det \underline{D}\,\varphi|$ Lebesgue integrabel over Y med det samme integral. Thi ved anvendelse af dette på den omvendte afbildning $y = \varphi^{-1}(x)$ ses, at hvis $g = (f\circ\varphi)\,|\det \underline{D}\,\varphi|$ er Lebesgue integrabel over Y, er $(g\circ\varphi^{-1})\,|\det \underline{D}\,\varphi^{-1}|$ Lebesgue integrabel over X (med samme integral); men $(g\circ\varphi^{-1})\,|\det \underline{D}\,\varphi^{-1}| = f\,|(\det \underline{D}\,\varphi)\circ\varphi^{-1}|\,|\det \underline{D}\,\varphi^{-1}| = f$, idet $\det \underline{D}\,\varphi(y)\ \det \underline{D}\,\varphi^{-1}(x) = 1$ (når $y = \varphi^{-1}(x)$).

② Vi betragter først det tilfælde, hvor f er en ikke negativ kontinuert funktion, der er 0 uden for en kompakt delmængde X_0 af X. Da er $f\circ\varphi$ en ikke negativ kontinuert funktion, der er 0 uden for den kompakte delmængde $Y_0 = \varphi^{-1}(X_0)$ af Y. Integralernes eksistens er i dette tilfælde klar.

For et vilkårligt $n \in \mathbb{N}$ betragter vi samtlige intervaller $J_n = \{y \mid \|y - y_0\| \leqslant 2^{-n}\}$, hvis midtpunkt y_0 har formen $(n_1 2^{-n}, \ldots, n_k 2^{-n})$, hvor $n_1, \ldots, n_k$ er vilkårlige hele tal. De udgør en inddeling af $\mathbb{R}^k$ i afsluttede intervaller uden fælles indre punkter. Inddelingen hørende til $n+1$ er en videreinddeling af inddelingen hørende til n. For et tilstrækkeligt stort n_0 vil foreningsmængden F af de intervaller J_{n_0},

der indeholder punkter af Y_0, være en afsluttet trappemængde indeholdt i Y. For $n \geq n_0$ vil de i F indeholdte intervaller J_n udgøre en inddeling af F. Vi vil undersøge billedet $\varphi(J_n)$ af et sådant interval J_n.



For et $y = y_0 + \Delta y \in J_n$ har vi, idet vi sætter $\Delta\varphi = \varphi(y_0+\Delta y) - \varphi(y_0)$, ifølge Taylors formel anvendt på de enkelte koordinatfunktioner $\Delta\varphi = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right] \Delta y$, hvor de afledede $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}$ i hver række i matricen er taget i et punkt af liniestykket fra y_0 til y. Vi vil hellere udtrykke $\Delta\varphi$ ved hjælp af $D\varphi(y_0)$. Vi får da

$$\Delta \underline{\varphi} = \underline{\underline{D}}\varphi(y_0)\,\Delta^* \underline{y}, \text{ hvor } \Delta^* \underline{y} = \left(\underline{\underline{D}}\varphi(y_0)\right)^{-1}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right)\Delta \underline{y}.$$

Lad os nu for vilkårlige punkter $y_0, y_1, \cdots, y_k \in F$ med $\underline{\underline{M}}(y_0, y_1, \cdots, y_k)$ betegne matricen $\left(\underline{\underline{D}}\varphi(y_0)\right)^{-1}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right)$, hvor $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}$ er taget i y_i, $i = 1, \cdots, k$. Elementerne i $\underline{\underline{M}}$ er kontinuerte funktioner på $F^{k+1} = F \times F \times \cdots \times F$, som er en kompakt mængde i $R^{k(k+1)}$, og $\underline{\underline{M}}(y_0, y_0, \cdots, y_0) = \underline{\underline{E}}$ for ethvert $y_0 \in F$. Til et givet $\varepsilon > 0$ findes derfor (ifølge ligelig kontinuitet) et $\delta > 0$, således at alle elementer i $\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{E}}$ er numerisk $\leqslant \varepsilon$, når blot $\|y_1 - y_0\| \leqslant \delta, \cdots, \|y_k - y_0\| \leqslant \delta$.

Anvendes dette på et af de før betragtede intervaller J_n, ses, at hvis $2^{-n} \leqslant \delta$, er $\Delta^* \underline{y} = \Delta \underline{y} + [\varepsilon_{ij}]\,\Delta \underline{y}$, hvor alle $|\varepsilon_{ij}| \leqslant \varepsilon$, hvilket viser, at $\|\Delta^* y\| \leqslant (1 + k\varepsilon)\|\Delta y\| \leqslant (1 + k\varepsilon)2^{-n}$. Heraf fremgår, at billedet $\varphi(J_n)$ er indeholdt i parallelepipedet J_n^* bestående af alle punkter $\underline{\varphi}(y_0) + \underline{\underline{D}}\varphi(y_0)\,\Delta^* \underline{y}$, hvor $\|\Delta^* y\| \leqslant (1 + k\varepsilon)2^{-n}$, altså i billedet ved afbildningen $\underline{x} = \underline{\varphi}(y_0) + \underline{\underline{D}}\varphi(y_0)(\underline{y} - \underline{y}_0)$ af det med J_n i forholdet $1 + k\varepsilon$ homotetiske interval $J_n^* = \{y \mid \|y - y_0\| \leqslant (1 + k\varepsilon)2^{-n}\}$. Dette har målet $m_k(J_n^*) = (1 + k\varepsilon)^k m_k(J_n)$, og vi har følgelig

$$m_k(J_n^*) = (1 + k\varepsilon)^k \,|\det \underline{\underline{D}}\varphi(y_0)|\, m_k(J_n).$$

For det givne ε tænker vi os nu (ifølge ligelig kontinuitet) valget af δ truffet således, at der gælder $|f \circ \varphi(y) - f \circ \varphi(y_0)| \leqslant \varepsilon$ for vilkårlige $y_0, y \in F$, for hvilke $\|y - y_0\| \leqslant \delta$. Når $2^{-n} \leqslant \delta$, gælder da i hvert J_n, at $f \circ \varphi(y) \leqslant f \circ \varphi(y_0) + \varepsilon$. Følgelig er $f \circ \varphi \leqslant \sum (f \circ \varphi(y_0) + \varepsilon)\, 1_{J_n}$,

hvor der (for fast n) skal summeres over alle intervaller $J_n \subseteq F$. Heraf følger, at $f \leqslant \sum (f\circ\varphi(y_0)+\varepsilon)\, 1_{J_n}\circ\varphi^{-1} \leqslant \sum (f\circ\varphi(y_0)+\varepsilon)\, 1_{J_n^*}$. Følgelig er

$$\int_X f(x)\, m_k(d\dot{R}^k) \leqslant \sum (f\circ\varphi(y_0)+\varepsilon)\, m_k(J_n^*)$$
$$= (1+k\varepsilon)^k \sum (f\circ\varphi(y_0)+\varepsilon)\,|\det \underline{\underline{D}}\varphi(y_0)|\, m_k(J_n).$$

For $n\to\infty$ følger heraf

$$\int_X f(x)\, m_k(d\dot{R}^k) \leqslant (1+k\varepsilon)^k \int_F (f\circ\varphi(y)+\varepsilon)\,|\det \underline{\underline{D}}\varphi(y)|\, m_k(d\dot{R}^k).$$

For $\varepsilon\to 0$ følger heraf

$$\int_X f(x)\, m_k(d\dot{R}^k) \leqslant \int_Y f\circ\varphi(y)\,|\det \underline{\underline{D}}\varphi(y)|\, m_k(d\dot{R}^k).$$

Anvendes dette resultat på den omvendte afbildning $y=\varphi^{-1}(x)$ og på funktionen $g=(f\circ\varphi)\,|\det \underline{\underline{D}}\varphi| : Y\to\dot{R}$, fås, idet $(g\circ\varphi^{-1})\,|\det \underline{\underline{D}}\varphi^{-1}| = f$ (jfr. ①), den modsatte ulighed. Altså er de to integraler ligestore.

③ Med $\mathcal{L}$ betegner vi nu klassen af alle Lebesgue integrable funktioner $h : \dot{R}^k \to \dot{R}$ og med $\mathcal{K}$ klassen af de funktioner $h\in\mathcal{L}$, hvis restriktion f til X har den egenskab, at $(f\circ\varphi)\,|\det \underline{\underline{D}}\varphi|$ er Lebesgue integrabel over Y, og at integralformulen gælder. Vi vil vise, at $\mathcal{K}=\mathcal{L}$. Hermed vil beviset for sætningen være fuldført.

Hvis en funktion $h\in\mathcal{L}$ er grænsefunktion for en stigende eller dalende følge (h_p) af funktioner $h_p\in\mathcal{K}$, gælder også $h\in\mathcal{K}$. Dette følger af sætningen om monoton grænseovergang med Lebesgue integralet.

Lad nu J være et vilkårligt åbent interval i $\dot{R}^k$. Med $d=d(x)$ betegner vi funktionen $\operatorname{dist}(x, \dot{R}^k\setminus(J\cap X))$. Som bekendt er d en kontinuert funktion, der er positiv i $J\cap X$ og 0 uden for $J\cap X$. Vi betragter end-

videre for et vilkårligt $p \in \mathbb{N}$ funktionen $h_p = g_p \circ d$, hvor $g_p : [0, +\infty[\to [0,1]$ er den ved $g_p(t) = [(pt-1) \vee 0] \wedge 1$ definerede kontinuerte funktion. Da er h_p en kontinuert ikke negativ funktion på $\mathbb{R}^k$, der er 0 uden for den kompakte delmængde $\{\underline{x} \mid d(\underline{x}) \geqslant \frac{1}{p}\}$ af X. Ifølge ② gælder derfor $h_p \in K$. Da følgen (h_p) konvergerer stigende mod $1_{J \cap X}$, slutter vi at $1_{J \cap X} \in K$. Følgelig gælder også $1_J \in K$.

For et vilkårligt interval J i $\mathbb{R}^k$ findes en dalende følge af åbne intervaller J_p i $\mathbb{R}^k$, således at $\bigcap J_p = J$. Følgen (1_{J_p}) konvergerer dalende mod 1_J. Altså gælder $1_J \in K$.

Heraf fremgår, at K indeholder enhver trappefunktion.

For enhver funktion $h \in \mathcal{L}$ findes, som man let viser ud fra Lebesgue integralets definition og fundamentale egenskaber, funktioner $h_1 \in \mathcal{L}$, resp. $h_2 \in \mathcal{L}$, der er grænsefunktion for en stigende, resp. dalende, følge af funktioner $\in \mathcal{L}$, der hver for sig er grænsefunktion for en dalende, resp. stigende, følge af trappefunktioner, således at $h_1 \leqslant h \leqslant h_2$ og $h_2 - h_1$ er en nulfunktion. For h_1 og h_2 må gælde $h_1 \in K$ og $h_2 \in K$. Betegnes restriktionerne af h, h_1, h_2 til X med f, f_1, f_2 har vi $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$ og følgelig

$$g_1 = (f_1 \circ \varphi)\,|\det \underline{D}\,\varphi| \leqslant (f \circ \varphi)\,|\det \underline{D}\,\varphi| \leqslant (f_2 \circ \varphi)\,|\det \underline{D}\,\varphi| = g_2.$$

Her er g_1 og g_2 Lebesgue integrable over Y_2 og deres integraler er lig med integralerne af f_1 og f_2 over X, altså lig med integralet af f over X. Det samme gælder da om $(f \circ \varphi)\,|\det \underline{D}\,\varphi|$. Følgelig gælder $h \in K$.

Hermed er beviset fuldført.

Med brug af betegnelsen $dx_1 \cdots dx_k$ og $dy_1 \cdots dy_k$ for målelementerne $m_k(dR^k)$ i de to integraler skrives transformationsformelen

$$\int_X f(\underline{x})\, dx_1 \cdots dx_k = \int_Y f(\varphi(\underline{y}))\, |\det \underline{D}\, \varphi(\underline{y})|\, dy_1 \cdots dy_k,$$

eller man nøjes med at skrive

$$dx_1 \cdots dx_k = |\det \underline{D}\, \varphi(\underline{y})|\, dy_1 \cdots dy_k.$$

Forholdet $|\det \underline{D}\, \varphi(\underline{y})|$ mellem de to målelementer kaldes <u>målforholdet</u> for afbildningen φ i punktet $\underline{y}$ (for $k=2$ arealforholdet, for $k=3$ volumenforholdet).

<u>Polære koordinater i planen</u>. Idet vi for $k=2$ i stedet for (x_1, x_2) skriver (x,y) og i stedet for (y_1, y_2) skriver (r,θ), bestemmes ved

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

en C^∞-afbildning af (r,θ)-planen på (x,y)-planen. Funktionalmatricen er

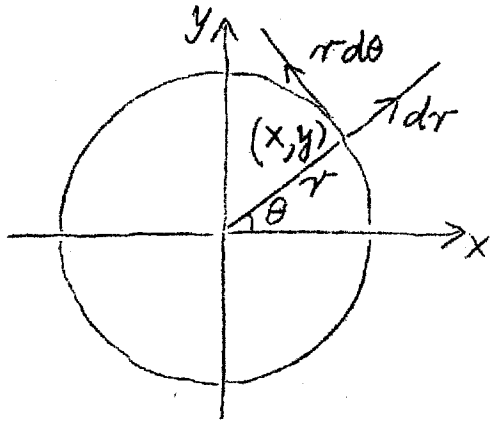
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

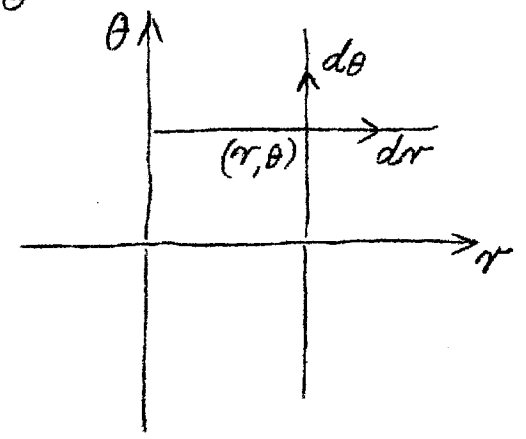
med determinanten

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$$

Betragtes x og y som sædvanlige retvinklede koordinater, og orienteres planen på sædvanlig måde, så at y-aksen er positiv normal til x-aksen, bliver r og θ polære koordinater. I denne sammenhæng opererer man dog normalt kun med halvplanen $\{(r,\theta) \mid r \geq 0\}$. Funktionalmatricen er regulær i halvplanen $\{(r,\theta) \mid r > 0\}$, der afbildes på den udprikkede plan $\{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$. Søjlerne $\frac{\partial(x,y)}{\partial r}$ og $\frac{\partial(x,y)}{\partial \theta}$ i funktional-

matricen er enhedsvektoren $(\cos\theta, \sin\theta)$ langs radiusvektor og vektoren $(-r\sin\theta, r\cos\theta)$ af længden r langs dennes positive normal. Målet af det af disse bestemte rektangel er netop funktionaldeterminanten r. Ved den ved differentialet bestemte afbildning føres et interval $[r, r+dr] \times [\theta, \theta+d\theta]$ over i rektanglet bestemt af vektorerne $\frac{\partial(x,y)}{\partial r} dr$ og $\frac{\partial(x,y)}{\partial \theta} d\theta$, hvis mål er $r\,dr\,d\theta$.





Integraltransformationsformulen bliver

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_B f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

Her skal A og B være åbne mængder i den udprikkede plan $\{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ og i halvplanen $\{(r,\theta) \mid r>0\}$, for hvilke afbildningen $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) : B \to A$ er bijektiv. Dette betyder, at der ikke i B må være to punkter (r,θ_1) og (r,θ_2) med samme r og $\theta_1 \equiv \theta_2 \bmod 2\pi$. For eksempel kan man vælge A i en opskåret plan $\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid r>0, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$ og B som den tilsvarende mængde i halvstrimlen $\{(r,\theta) \mid r>0, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$. Skal man udregne et integral over en mængde A, der ikke ligger i en opskåret plan, kan man foretage en opskæring. Herved mister man en nulmængde, hvilket er uden betydning.

For eksempel kan A være en sektor $\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid r>0, \theta_0 < \theta < \theta_1\}$ og f den karakteristiske funktion for en delmængde $S = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0 < r < h(\theta), \theta_0 < \theta < \theta_1\}$, hvor h er

en ikke negativ funktion på $]\theta_0,\theta_1[$. Sætningen viser da, at S er Lebesgue målelig, hvis og kun hvis funktionen r er Lebesgue integrabel over mængden $\{(r,\theta)\mid 0<r<h(\theta),\theta_0<\theta<\theta_1\}$, og idet integralet udregnes ved Lebesgue-Fubinis sætning fås

$$m_2(S)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\left(\int_0^{h(\theta)} r\,dr\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}h(\theta)^2\,d\theta.$$

Man kan let vise, at Lebesgue integrabiliteten af r over mængden $\{(r,\theta)\mid 0<r<h(\theta),\theta_0<\theta<\theta_1\}$ er ensbetydende med Lebesgue integrabiliteten af $h(\theta)^2$ over $]\theta_0,\theta_1[$.

Polære koordinater i rummet. Idet vi for $k=3$ i stedet for (x_1,x_2,x_3) skriver (x,y,z) og i stedet for (y_1,y_2,y_3) skriver (r,φ,θ), bestemmes ved

$$\begin{cases} x= r\sin\varphi\cos\theta \\ y= r\sin\varphi\sin\theta \\ z= r\cos\varphi \end{cases}$$

en C^∞-afbildning af (r,φ,θ)-rummet på (x,y,z)-rummet. Funktionalmatricen er

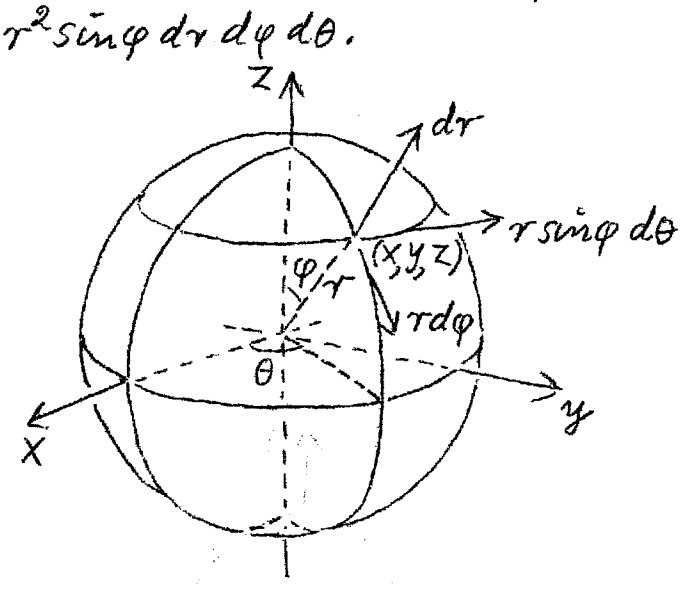
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=\begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

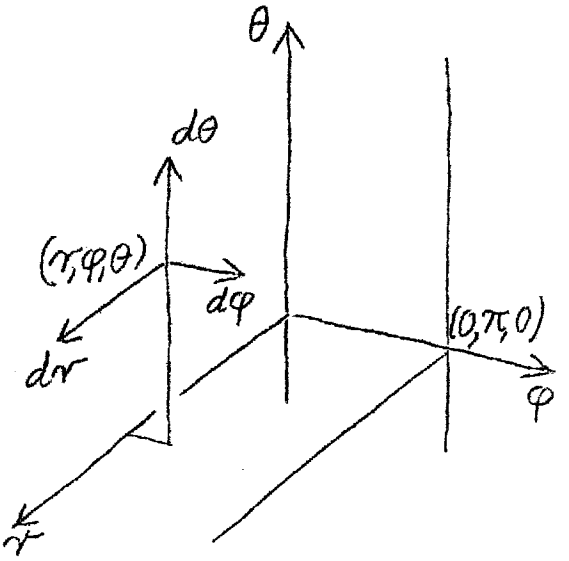
med determinanten

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi.$$

Betragtes x,y,z som sædvanlige retvinklede koordinater, og orienteres (x,y)-planen, så at y-aksen er positiv normal til x-aksen, bliver r,φ,θ polære koordinater. I denne sammenhæng opererer man dog normalt kun med halvstrimlen $\{(r,\varphi,\theta)\mid r\geqslant 0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$. Til fast r svarer kuglefladen med centrum $(0,0,0)$ og radius r, til fast φ omdrejningskeglen bestemt af alle halvlinier ud fra $(0,0,0)$, der danner vinklen φ med den positive z-akse, og

Til fast θ den halvplan begrænset af z-aksen, hvis spor i (x,y)-planen danner vinklen θ med x-aksen. Man ser, at θ og $\frac{\pi}{2}-\varphi$ for fast r svarer til geografisk længde og bredde på kuglen. Funktionalmatricen er regulær i halvstrimlen $\{(r,\varphi,\theta) \mid r>0, 0<\varphi<\pi\}$, der afbildes på $\{(x,y,z) \mid (x,y)\neq(0,0)\}$ (d.v.s. (x,y,z)-rummet eksklusive z-aksen). Søjlerne $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial r}$, $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial \theta}$ i funktionalmatricen er enhedsvektoren langs radiusvektor, en vektor af længden r langs tangenten til længdecirklen (orienteret svarende til voksende φ) og en vektor af længden $r\sin\varphi$ langs tangenten til breddecirklen (orienteret svarende til voksende θ). Disse vektorer er ortogonale, og målet af det af dem bestemte retvinklede parallelepipedum er netop funktionaldeterminanten $r^2\sin\varphi$. Ved den ved differentialet bestemte afbildning føres et interval $[r,r+dr]\times[\varphi,\varphi+d\varphi]\times[\theta,\theta+d\theta]$ over i det retvinklede parallelepipedum bestemt af vektorerne $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial r}dr$, $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial \varphi}d\varphi$, $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial \theta}d\theta$, hvis mål er $r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$.





Integraltransformationsformulen bliver

$$\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_B f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

Her skal A og B være åbne mængder i $\{(x,y,z) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ og $\{(r,\varphi,\theta) \mid r>0, 0<\varphi<\pi\}$, for hvilke afbildningen $(x,y,z) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$ er bijektiv. Dette betyder, at der ikke i B må være to punkter (r,φ,θ_1) og (r,φ,θ_2) med samme r og φ og $\theta_1 \equiv \theta_2 \bmod 2\pi$.

Semipolære koordinater i rummet. I forbindelse med sædvanlige retvinklede koordinater x,y,z defineres semipolære koordinater ved afbildningen

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

af (r,θ,z)-rummet på (x,y,z)-rummet. Det betyder blot, at vi i (x,y)-planen indfører polære koordinater r,θ. Den tredje koordinat betegnes bekvemt med samme bogstav z i begge rum. Integraltransformationsformlen er her

$$\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_B f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

med bemærkninger vedrørende mængderne A og B analoge med bemærkningerne i de foregående tilfælde.

Statiske momenter. Tyngdepunkter. Idet vi benytter sædvanlige retvinklede koordinater x,y, resp. x,y,z, i planen, resp. rummet, betragter vi en for simpelheds skyld begrænset Lebesgue målelig mængde A med positivt mål og på denne en massefordeling bestemt ved en ikke negativ for simpelhed skyld begrænset Lebesgue målelig funktion ϱ, hvis værdi i et punkt af A kaldes massetætheden i punktet. Ved massen forstås da integralet

$$m = \int_A \varrho(x,y)\,dx\,dy, \quad \text{resp.} \quad m = \int_A \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

For $\rho = 1$ er massen simpelthen målet af A.

Er $\alpha x + \beta y + p = 0$, resp. $\alpha x + \beta y + \gamma z + p = 0$, ligningen på normalform for en linie l, resp. en plan π [så at $\alpha x + \beta y + p$, resp. $\alpha x + \beta y + \gamma z + p$, er den med fortegn regnede afstand fra linien l til punktet (x,y), resp. fra planen π til punktet (x,y,z)], forstås ved det <u>statiske moment</u> med hensyn til linien, resp. planen, integralet

$$S = \int_A (\alpha x + \beta y + p)\, \rho(x,y)\, dx\, dy, \quad \text{resp.}$$

$$S = \int_A (\alpha x + \beta y + \gamma z + p)\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Idet vi antager $m > 0$, defineres <u>tyngdepunktet</u> (ξ, η), resp. (ξ, η, ζ), ved

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{S_x}{m}, \frac{S_y}{m}\right), \quad \text{resp.} \quad (\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{S_x}{m}, \frac{S_y}{m}, \frac{S_z}{m}\right),$$

hvor de statiske momenter er taget med hensyn til koordinatakserne, resp. koordinatplanerne, og index angiver normalen til den pågældende koordinatakse, resp. koordinatplan. Man ser, at der for en vilkårlig linie l, resp. plan π, gælder

$$S = m(\alpha\xi + \beta\eta + p), \quad \text{resp.} \quad S = m(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + p).$$

I tilfælde, hvor der foreligger rotationssymmetri, anvendes ved udregning af masser, statiske momenter og tyngdepunkter ofte med fordel polære eller semipolære koordinater.

<u>Eks. 1.</u> Vi betragter en mængde A i rummet, fremkommet ved drejning af en i halvplanen $\{(x,y,z) \mid x > 0, y = 0\}$ beliggende begrænset mængde C. Vi antager, at C, opfattet som mængde i (x,z)-planen er målelig. Idet vi nu benytter semipolære koordinater, kan vi i (r,θ,z)-rummet betragte C som liggende i (r,z)-planen. Da er mæng-

den A, opskåret langs den ved $\theta = 0$ bestemte halvplan, billede af mængden $C \times]0, 2\pi[$ i (r, θ, z)-rummet, som er målelig. Heraf sluttes, at A er målelig, og vi får

$$m_3(A) = \int_{C\times]0,2\pi[} r\,dr\,d\theta\,dz = 2\pi \int_C r\,dr\,dz.$$

Men $\int_C r\,dr\,dz$ er det statiske moment af C, betragtet med massetæthed $\rho = 1$, med hensyn til z-aksen, altså $= m_2(C)\,\xi$, når tyngdepunktet af C har r-koordinaten ξ. Vi får altså

$$m_3(A) = m_2(C)\,2\pi\xi,$$

hvormed er vist: Målet (volumenet) af den af mængden C ved drejning om z-aksen beskrevne mængde A er lig med målet (arealet) af C multipliceret med længden $2\pi\xi$ af den af tyngdepunktet for C ved drejningen beskrevne cirkel. (Guldins regel.)

Eks. 2. For en halvkugleskal

$$A = \{(x,y,z) \mid 0 \le a < \sqrt{x^2+y^2+z^2} < b,\ z > 0\}$$

med massetæthed $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ søges det statiske moment

$$S = \int_A z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

med hensyn til (x,y)-planen. Vi benytter polære koordinater. Da er A, opskåret langs den ved $\theta = 0$ bestemte halvplan, billede af mængden

$$B = \{(r,\varphi,\theta) \mid a < r < b,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{2},\ 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Følgelig er

$$S = \int_B r\cos\varphi \cdot r \cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_a^b r^4\cos\varphi\sin\varphi\,dr\right)d\varphi\right)d\theta = \pi\frac{b^5-a^5}{5}.$$

§7. Minimum og maksimum under bibetingelser.

På en mængde A i $\dot{R}^k$ tænkes givet $p+1$ funktioner $f_0, f_1, \ldots, f_p : A \to \dot{R}$. For givne tal $c_1, \ldots, c_p \in \dot{R}$ betragtes mængden

$$F = \{\underline{x} \in A \mid f_1(\underline{x}) = c_1, \ldots, f_p(\underline{x}) = c_p\}.$$

Vi siger om funktionen f_0, at den har *lokalt minimum*, resp. *lokalt maksimum*, i et punkt $\underline{x}_0 \in F$ *under bibetingelserne* $f_1 = c_1, \ldots, f_p = c_p$, såfremt restriktionen af f_0 til F har lokalt minimum, resp. lokalt maksimum, i $\underline{x}_0$. Analogt siges f_0 at have *globalt minimum*, resp. globalt *maksimum*, i et punkt $\underline{x}_0 \in F$ *under bibetingelserne* $f_1 = c_1, \ldots, f_p = c_p$, såfremt restriktionen af f_0 til F har globalt minimum, resp. globalt maksimum, i $\underline{x}_0$.

Som tidligere benyttes ekstremum som fælles betegnelse for minimum og maksimum. Et ekstremum under bibetingelser kaldes også et *betinget ekstremum*.

Sætning 1. *Hvis A er åben og funktionerne $f_0, f_1, \ldots, f_p$ tilhører $C^1(A)$, og f_0 har lokalt ekstremum i punktet $\underline{x}_0 \in F$ under bibetingelserne $f_1 = c_1, \ldots, f_p = c_p$, gælder i $\underline{x}_0$*

$$\operatorname{rang} \frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)} \leqslant p.$$

Bemærkning. Hvis $p = 0$ (så der ingen bibetingelser er), består funktionalmatricen $\frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)}$ af den ene række $\frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_0}{\partial x_k}$. At dens rang er $\leqslant 0$ betyder, at dens rang er $= 0$, altså at alle dens elementer

er 0. Sætningen er derfor i dette tilfælde simpelthen sætning 1 i §2.

Bevis. Da matricen har $p+1$ rækker, er dens rang i hvert fald $\leqslant p+1$. Det gælder om at vise, at den ikke kan være $p+1$.

Antaget, at rangen var $p+1$, måtte, da matricen har k søjler, gælde $k \geqslant p+1$, og der måtte findes en regulær delmatrix bestående af $p+1$ søjler. Ved om nødvendigt at omordne koordinatnumrene kan vi opnå, at det er matricen

$$\frac{\partial(f_0, f_1, \cdots, f_p)}{\partial(x_1, \cdots, x_{p+1})}.$$

For et vilkårligt $a>0$, for hvilket $\{\underline{x} \mid \|\underline{x}-\underline{x}_0\|<a\} \subseteq A$, betragter vi nu den ved

$$\begin{cases} y_0 = f_0(x_1, \cdots, x_{p+1}, x_{0p+2}, \cdots, x_{0k}) \\ y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_{p+1}, x_{0p+2}, \cdots, x_{0k}) \\ \cdots \\ y_p = f_p(x_1, \cdots, x_{p+1}, x_{0p+2}, \cdots, x_{0k}) \end{cases}$$

bestemte afbildning af mængden

$$B = \{(x_1, \cdots, x_{p+1}) \mid |x_1 - x_{01}|<a, \cdots, |x_{p+1} - x_{0p+1}|<a\}$$

i $(x_1, \cdots, x_{p+1})$-rummet ind i $(y_0, y_1, \cdots, y_p)$-rummet. Ved denne afbildning afbildes punktet $(x_{01}, \cdots, x_{0p+1})$ i punktet $(f_0(\underline{x}_0), c_1, \cdots, c_p)$. Da rummene har samme dimensionstal (nemlig $p+1$) og afbildningens funktionalmatrix i $(x_{01}, \cdots, x_{0p+1})$ er regulær, må ifølge sætningen om omvendt afbildning (§5) billedet af B indeholde en omegn af punktet $(f_0(\underline{x}_0), c_1, \cdots, c_p)$. Dette medfører, at der i B må findes såvel punkter $(x_1, \cdots, x_{p+1})$, for hvilke bille-

det $(y_0, y_1, \cdots, y_p)$ opfylder betingelserne

$$y_0 < f_0(\underline{x}_0),\ y_1 = c_1, \cdots, y_p = c_p,$$

som punkter $(x_1, \cdots, x_{p+1})$, for hvilke billedet $(y_0, y_1, \cdots, y_p)$ opfylder betingelserne

$$y_0 > f_0(\underline{x}_0),\ y_1 = c_1, \cdots, y_p = c_p.$$

Altså findes i $\{\underline{x} \mid \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < a\}$ såvel punkter $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_k)$, for hvilke

$$f_0(\underline{x}) < f_0(\underline{x}_0),\ f_1(\underline{x}) = c_1, \cdots, f_p(\underline{x}) = c_p,$$

som punkter $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_k)$, for hvilke

$$f_0(\underline{x}) > f_0(\underline{x}_0),\ f_1(\underline{x}) = c_1, \cdots, f_p(\underline{x}) = c_p$$

[nemlig i begge tilfælde punkter $\underline{x}$, for hvilke $x_{p+2} = x_{0\,p+2}, \cdots, x_k = x_{0k}$]. Anderledes sagt: Der findes i $\{\underline{x} \mid \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < a\}$ såvel punkter $\underline{x} \in F$, for hvilke $f_0(\underline{x}) < f_0(\underline{x}_0)$, som punkter $\underline{x} \in F$, for hvilke $f_0(\underline{x}) > f_0(\underline{x}_0)$. Restriktionen af f_0 til F har altså hverken lokalt minimum eller lokalt maksimum i $\underline{x}_0$. Hermed er vi nået til en modstrid.

Sætning 2. Hvis A er åben og funktionerne $f_0, f_1, \cdots, f_p$ tilhører $C^1(A)$, og f_0 har lokalt ekstremum i punktet $\underline{x}_0 \in F$ under bibetingelserne $f_1 = c_1, \cdots, f_p = c_p$, findes et talsæt $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p) \neq (0, 0, \cdots, 0)$, således at $\underline{x}_0$ er et stationært punkt for funktionen

$$f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p.$$

Bevis. Dette er blot en anden formulering af sætning 1. Thi betingelsen rang $\frac{\partial(f_0, f_1, \cdots, f_p)}{\partial(x_1, \cdots, x_k)} \leqslant p$ er ensbetydende med, at rækkerne i matricen er et lineært afhængigt system af vektorer, altså ensbety-

dende med eksistensen af et talsæt $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0,0,\ldots,0)$, således at der for hvert $j = 1, \ldots, k$ gælder

$$\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_j} = 0.$$

Dette er imidlertid ensbetydende med, at der for funktionen $f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p$ gælder

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0,$$

altså med, at $\underline{x}_0$ er et stationært punkt for f.

Ved anvendelsen af sætning 2 går man frem på den måde, at man opskriver ligningssystemet

$$\begin{cases} \lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_j} = 0 & j = 1, \ldots, k \\ f_i(\underline{x}) = c_i & i = 1, \ldots, p \end{cases}$$

og søger samtlige løsninger $(x_1, \ldots, x_k, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ til dette system af $k+p$ ligninger. Alle lokale ekstremumspunkter $\underline{x}_0 \in F$ for f_0 under bibetingelserne $f_1 = c_1, \ldots, f_p = c_p$ findes da blandt de punkter $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, der sammen med et sæt $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0,0,\ldots,0)$ danner en løsning $(x_1, \ldots, x_k, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ til systemet. Hjælpestørrelserne $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ kaldes <u>Lagrangeske multiplikatorer</u>.

<u>Eks.</u> I det $A = \dot{R}^k$, vælger vi for f_0 en kvadratisk form

$$f_0 = \underline{x}\, \underline{\underline{A}}\, \underline{x}' = [x_1 \cdots x_k] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

med symmetrisk matrix $\underline{\underline{A}} = [a_{ij}]$ og for f_1 den kvadratiske form

$$f_1 = \underline{x}\, \underline{x}' = x_1^2 + \cdots + x_k^2.$$

Som bibetingelse vælges $f_1 = 1$. Idet mængden $F_1 = \{\underline{x} \mid f_1(\underline{x}) = 1\}$ er kompakt, findes mindst et punkt [og på grund af symmetrien om $\underline{0}$ så naturligvis mindst to punkter], hvori f_0 har globalt maksimum under bibetingelsen $f_1 = 1$. I et sådant punkt $\underline{b_1} \in F_1$ må matricen

$$\frac{\partial(f_0, f_1)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \\ 2x_1 & \dots & 2x_k \end{pmatrix}$$

have rang $\leqslant 1$. Anden række $2\underline{b_1}$ er ikke nulrækken. Altså må første række have formen $\lambda_1 2\underline{b_1}$. Ved udregning fås [under brug af $\underline{\underline{A}}$'s symmetri], at $\frac{\partial f_0}{\partial x_j} = 2(a_{1j}x_1 + \dots + a_{kj}x_k)$, d.v.s.

$$\frac{\partial f_0}{\partial(x_1, \dots, x_k)} = 2\underline{x}\,\underline{\underline{A}}.$$

Altså gælder $\underline{b_1}\,\underline{\underline{A}} = \lambda_1 \underline{b_1}$ [der også kan skrives $\underline{\underline{A}}\,\underline{b_1} = \lambda_1 \underline{b_1}$], og maksimumsværdien for f_0 under bibetingelsen $f_1 = 1$ er $\underline{b_1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{b_1} = \lambda_1 \underline{b_1}\,\underline{b_1} = \lambda_1$.

Vi sætter nu

$$f_2 = \underline{b_1}\,\underline{x_1} = b_{11}x_1 + \dots + b_{1k}x_k$$

og vælger som bibetingelser $f_1 = 1$ og $f_2 = 0$. Idet mængden $F_2 = \{\underline{x} \mid f_1(\underline{x}) = 1,\ f_2(\underline{x}) = 0\}$ er kompakt, findes mindst et punkt [og på grund af symmetrien om $\underline{0}$ så naturligvis mindst to punkter], hvori f_0 har globalt maksimum under bibetingelserne $f_1 = 1$, $f_2 = 0$. I et sådant punkt $\underline{b_2}$ må matricen

$$\frac{\partial(f_0, f_1, f_2)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \\ 2x_1 & \dots & 2x_k \\ b_{11} & \dots & b_{1k} \end{pmatrix}$$

have rang $\leqslant 2$. Anden og tredje række $2\underline{\underline{b_2}}$ og $\underline{\underline{b_1}}$ er lineært uafhængige. Altså må første række have formen $\lambda_2 2\underline{\underline{b_2}} + \mu\underline{\underline{b_1}}$, d.v.s. $\underline{\underline{b_2}}\,\underline{\underline{A}} = \lambda_2\underline{\underline{b_2}} + \frac{1}{2}\mu\underline{\underline{b_1}}$. Følgelig er $\underline{\underline{b_2}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{b_1}} = \lambda_2\underline{\underline{b_2}}\,\underline{\underline{b_1}} + \frac{1}{2}\mu\underline{\underline{b_1}}\,\underline{\underline{b_1}} = \frac{1}{2}\mu$. Men $\underline{\underline{b_2}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{b_1}} = \underline{\underline{b_1}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{b_2}} = \lambda_1\underline{\underline{b_1}}\,\underline{\underline{b_2}} = 0$. Altså er $\mu = 0$. Vi har altså $\underline{\underline{b_2}}\,\underline{\underline{A}} = \lambda_2\underline{\underline{b_2}}$ [der også kan skrives $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{b_2}} = \lambda_2\underline{\underline{b_2}}$], og maksimumsværdien for f_0 under bibetingelserne $f_1 = 1$, $f_2 = 0$ er $\underline{\underline{b_2}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{b_2}} = \lambda_2\underline{\underline{b_2}}\,\underline{\underline{b_2}} = \lambda_2$.

Da $F_2 \subset F_1$, gælder åbenbart $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$.

Fortsættes på denne måde, fås i k skridt hovedsætningen om kvadratiske former eller om symmetriske matricer, at der findes et normeret ortogonalsystem af k vektorer $\underline{\underline{b_1}}, \ldots, \underline{\underline{b_k}}$ og tal $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k$, således at

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{b_1}} = \lambda_1\underline{\underline{b_1}}, \quad \ldots, \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{b_k}} = \lambda_k\underline{\underline{b_k}}.$$

Vælges $\underline{\underline{b_1}}, \ldots, \underline{\underline{b_k}}$ som basis, idet man sætter

$$\underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1k} & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{y}},$$

får f_0 i de nye koordinater fremstillingen

$$f_0 = \underline{\underline{y}}\,\underline{\underline{B}}^*\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{y}} = (y_1 \cdots y_k)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2.$$

§8. Differentialformer af første grad.

Lad A være en mængde i $\mathbb{R}^k$. Vi antager, at A er en åben mængde eller et afsluttet interval med positive kantlængder. Ved en differentialform i A af første grad forstås et udtryk af formen

$$\omega = f_1(\underline{x})\,dx_1 + \cdots + f_k(\underline{x})\,dx_k,$$

hvor $f_1, \ldots, f_k$ er funktioner på A. Sættes $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_k)$, kan ω også skrives

$$\omega = \underline{\underline{f}}(\underline{x})\,d\underline{\underline{x}}_1.$$

Differentialformen kaldes en C^n-form, $n = 0, 1, 2, \ldots$, resp. en C^∞-form, eller blot C^n, resp. C^∞, hvis $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_k)$ er C^n, resp. C^∞.

Et eksempel på en differentialform af første grad er differentialet

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_k}\,dx_k = (\underline{\underline{D}}g)\,d\underline{\underline{x}}_1$$

af en differentiabel funktion g på A. En differentialform af denne type kaldes <u>eksakt</u>. En eksakt C^n-form, resp. C^∞-form, er således differentialet af en C^{n+1}-funktion, resp. en C^∞-funktion.

For $k = 1$ er en differentialform af første grad simpelthen et udtryk $\omega = f(x)\,dx$, hvor f er en funktion på en mængde A, der er en åben mængde eller et afsluttet interval på $\mathbb{R}$. I dette tilfælde er enhver C^0-form eksakt. Dette udtrykker blot på en anden måde, at enhver C^0-funktion på A har en stamfunktion. Hvis $\omega = dg$, altså hvis g er en C^1-funktion på A, for hvilken $g'(x) = f(x)$ for alle $x \in A$, gælder for et vilkårligt delinterval $[a, b]$ af A

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b)-g(a) \quad \text{eller} \quad \int_a^b dg = g(b)-g(a).$$

Dette er hovedsætningen i differential- og integralregningen for funktioner af en variabel.

For $k>1$ gælder ikke, at enhver C^0-form ω er differentialet af en C^1-funktion. Vi vil imidlertid vise, at differential- og integralregningens hovedsætning kan generaliseres til tilfældet $k>1$. Karakteriseringen af de eksakte C^0-former hænger nøje sammen med denne generalisation. Det fundamentale hjælpemiddel er begrebet kurveintegral.

Den forestilling, der knytter sig til ordet kurve, kan præciseres på forskellige måder. For det nærværende formål er følgende præcisering hensigtsmæssig.

Kurvebegrebet. Lad $\underline{\Phi}$ betegne mængden af alle C^0-afbildninger

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_k(t)) : [a,b] \to A$$

af et interval $[a,b]$ ind i A. Ved en C^0-kurve K i A vil vi forstå en funktion

$$K : \underline{\Phi} \to \dot{Z},$$

der kun er $\neq 0$ i en endelig (evt. tom) delmængde af $\underline{\Phi}$. Man ser, at C^0-kurverne med addition som komposition danner en kommutativ gruppe. Thi når $K : \underline{\Phi} \to \dot{Z}$ og $L : \underline{\Phi} \to \dot{Z}$ er C^0-kurver, er $K+L$ det også, og når K er en C^0-kurve er $-K$ det også. Det neutrale element er $K=0$. For en given afbildning $\underline{\varphi} : [a,b] \to A$ i $\underline{\Phi}$ kan vi betragte den kurve $K : \underline{\Phi} \to \dot{Z}$, der er bestemt ved, at $K(\underline{\varphi}) = 1$, medens $K(\underline{\psi}) = 0$ for alle $\underline{\psi} \in \underline{\Phi}$, for hvilke $\underline{\psi} \neq \underline{\varphi}$. Med en friere udtryksmåde siger vi, at K er bestemt ved afbildningen $\underline{\varphi} : [a,b] \to A$ eller ved pa-

rameterfremstillingen $\underline{x} = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, og kalder $\varphi(a)$ begyndelsespunktet og $\varphi(b)$ slutpunktet for K. Kurven må naturligvis ikke forveksles med punktmængden $\varphi([a,b])$. For en vilkårlig kurve $K: \underline{\Phi} \to \dot{Z}$ siger vi, hvis $K(\varphi)$ er $\neq 0$ for afbildningerne $\underline{\varphi}_\nu : [a_\nu, b_\nu] \to A$, $\nu = 1, \cdots, n$, og kun for disse, og $K(\varphi_\nu) = h_\nu$, at K består af de ved afbildningerne $\underline{\varphi}_\nu : [a_\nu, b_\nu] \to A$ eller parameterfremstillingerne $\underline{x} = \varphi_\nu(t)$, $a_\nu \leqslant t \leqslant b_\nu$, bestemte kurver K_ν regnet med multiplicititeterne h_ν. Vi har da

$$K = h_1 K_1 + \cdots + h_n K_n.$$

En C^0-kurve K kaldes en C^n-kurve, $n \geqslant 1$, resp. en C^∞-kurve, hvis ethvert $\varphi \in \underline{\Phi}$, for hvilket $K(\varphi) \neq 0$, er C^n, resp. C^∞. Man ser, at C^n-kurverne for givet n, resp. C^∞-kurverne, udgør en undergruppe i gruppen af alle C^0-kurver.

Den ovenstående præcisering af kurvebegrebet er valgt med henblik på, at man skal kunne regne med kurver. Additionen modsvarer, hvad man normalt tænker på som sammensætning, men det er hensigtsmæssigt for at kunne regne frit ikke at binde sig til sammensætning i sædvanlig forstand, hvor talen er om en række af kurver, hvor slutpunktet af hver er begyndelsespunktet for den næste. Vi skal senere diskutere et andet mere geometrisk kurvebegreb.

I analogi med ovenstående er det hensigtsmæssigt, for også at kunne regne med punkter, at betragte funktioner $P: A \to \dot{Z}$, der kun er $\neq 0$ i en endelig (evt. tom) delmængde af A. Disse udgør ligeledes med addition som komposition en gruppe. Hvis $P \neq 0$ for punkterne $\underline{x}_\mu$, $\mu = 1, \cdots, m$, og kun for disse, og $P(\underline{x}_\mu) = k_\mu$, siger

vi, at P består af punkterne x_μ regnet med multiplicïteterne k_μ.

Ved <u>randen</u> ∂K af en C^0-kurve K bestemt ved afbildningerne $\varphi_\nu : [a_\nu, b_\nu] \to A$ regnet med multiplicïteterne h_ν, forstår vi den funktion $P : A \to \mathbb{Z}$, hvis værdi for ethvert $x \in A$ er summen af multiplicïteterne af de φ_ν, for hvilke $\varphi_\nu(b_\nu) = x$, minus summen af multiplicïteterne af de φ_ν, for hvilke $\varphi_\nu(a_\nu) = x$. For $K = 0$ er $\partial K = 0$. Man ser, at

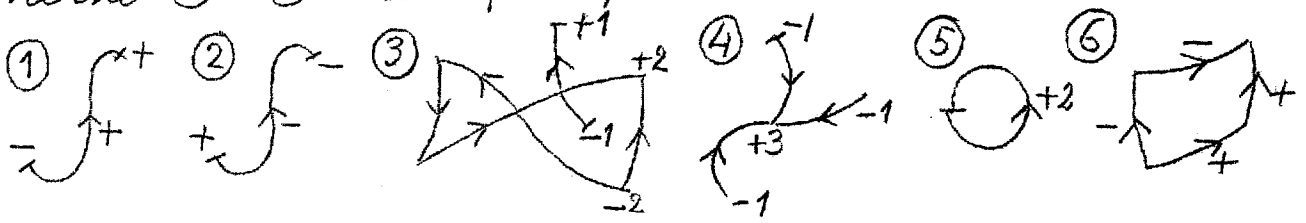
$$\partial(K + L) = \partial K + \partial L, \qquad \partial(-K) = -\partial K.$$

En C^0-kurve K kaldes <u>lukket</u>, hvis $\partial K = 0$.

Den ved en afbildning $\varphi : [a, b] \to A$ bestemte kurve K er således lukket, hvis $\varphi(a) = \varphi(b)$; ellers består dens rand ∂K af begyndelsespunktet $\varphi(a)$ regnet med multiplicïtet -1 og slutpunktet $\varphi(b)$ regnet med multiplicïtet $+1$.

Det betragtede kurvebegreb kan ikke på fyldestgørende måde illustreres ved hjælp af figurer. Alligevel tillader man sig naturligvis som støtte ved resonnementer at benytte figurer. En kurve K angives da ved et antal buer svarende til de enkelte afbildninger φ_ν, forsynet med pile til angivelse af den ved voksende t bestemte gennemløbsretning og med tal til angivelse af multiplicïteterne h_ν. Analogt angives randen ∂K ved, at punkterne forsynes med tal til angivelse af deres multiplicïteter. Multiplicïteterne $+1$ og -1 kan angives ved $+$ og $-$. Hvis alle buer har multiplicïtet $+1$, kan man undlade multiplicïtetsangivelsen for buerne. Figurerne

①–④ viser eksempler på ikke lukkede kurver, figurerne ⑤–⑥ eksempler på lukkede kurver.



Ved et med x_i-aksen parallelt (og ensrettet) <u>liniestykke</u> vil vi forstå den ved en parameterfremstilling

$$\underline{x} = (c_1, \cdots, c_{i-1}, t, c_{i+1}, \cdots, c_k), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

bestemte kurve. Hvis begyndelsespunktet og slutpunktet betegnes $\underline{x}_0$ og $\underline{x}_1$, vil vi betegne liniestykket $\mathcal{L}(\underline{x}_0, \underline{x}_1)$. Enhver kurve bestående af akseparallelle liniestykker (med vilkårlige multiplicieteter) vil vi kalde en <u>akseparallel polygon</u>.

<u>Ved integralet $\int_K \omega$ af en $\mathcal{C}^0$-differentialform</u>

$$\omega = \underline{\underline{f}}(\underline{x})\, d\underline{x}_1$$

<u>i A langs en $\mathcal{C}^1$-kurve K i A bestående af de ved afbildningerne $\varphi_\nu : [a_\nu, b_\nu] \to A$, $\nu = 1, \cdots, n$, bestemte kurver regnet med multiplicieteterne h_ν forstås sammen</u>

$$\int_K \omega = \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \int_{a_\nu}^{b_\nu} (\underline{\underline{f}} \circ \underline{\varphi}_\nu(t))\, \underline{\varphi}_\nu'(t)\, dt.$$

For hver optrædende afbildning $\varphi : [a, b] \to A$ skal man altså indsætte φ i ω. Herved fås en $\mathcal{C}^0$-differentialform

$$(\underline{\underline{f}} \circ \underline{\varphi}(t))\, \underline{\varphi}'(t)\, dt$$

eller udførligt skrevet

$$[f_1(\varphi(t))\, \varphi_1'(t) + \cdots + f_k(\varphi(t))\, \varphi_k'(t)]\, dt.$$

Vi danner integralet af funktionen $(\underline{\underline{f}} \circ \underline{\varphi}(t))\, \underline{\varphi}'(t)$ over $[a, b]$, eller om man vil, integralet af differentialet

$(\underline{f} \circ \underline{\varphi}(t))\, \underline{\varphi}_\nu'(t)\,dt$ fra a til b. Summen af de med de respektive multiplicititeter h_ν multiplicerede integraler svarende til de optrædende afbildninger $\underline{\varphi}_\nu : [a_\nu, b_\nu] \to A$ er da integralet af ω langs K. For $K = 0$ er integralet 0 [idet en tom sum betyder 0].

Man ser umiddelbart, at der gælder

$$\int_{K+L} \omega = \int_K \omega + \int_L \omega \quad \text{og} \quad \int_{-K} \omega = -\int_K \omega.$$

For et akseparallelt liniestykke K givet ved parameterfremstillingen $\underline{x} = (c_1, \cdots, c_{i-1}, t, c_{i+1}, \cdots, c_k)$, $a \le t \le b$, fås

$$\int_K \omega = \int_a^b f_i(c_1, \cdots, c_{i-1}, t, c_{i+1}, \cdots, c_k)\,dt.$$

I analogi med dette integralbegreb er det hensigtsmæssigt for enhver funktion g på A og enhver funktion $P : A \to \dot{Z}$, der kun er $\neq 0$ i en endelig (evt. tom) delmængde af A, at definere integralet $\int_P g$ af g langs P som

$$\int_P g = \sum_{\mu=1}^{m} k_\mu\, g(\underline{x}_\mu),$$

hvis P består af punkterne $\underline{x}_\mu$ regnet med multiplicititeterne k_μ.

<u>Sætning 1.</u> <u>For differentialet</u> dg <u>af en</u> C^1<u>-funktion</u> g <u>i</u> A <u>gælder for enhver</u> C^1<u>-kurve</u> K <u>i</u> A

$$\int_K dg = \int_{\partial K} g.$$

<u>Bevis.</u> Hvis K er bestemt ved afbildningen $\underline{x} = \underline{\varphi}(t) : [a, b] \to A$, udregnes $\int_K dg$ ved at vi indsætter $\underline{\varphi}$ i $dg = (\underline{D}g)\,d\underline{x}$. Herved fås $[(\underline{D}g) \circ \underline{\varphi}]\ \underline{\varphi}'\,dt = d(g \circ \underline{\varphi})$. Følgelig er

$$\int_K \omega = \int_a^b d(g \circ \varphi) = g \circ \varphi(b) - g \circ \varphi(a),$$

hvilket netop er den ønskede formel i dette tilfælde.

Heraf fremgår formlen for en vilkårlig C^1-kurve K, idet man multiplicerer de til de optrædende afbildninger φ_ν svarende formler med de respektive multiplicititeter h_ν og adderer.

I tilfældet $k=1$ er et liniestykke i A ensbetydende med et delinterval $[a,b]$ af A, og sætning 1 udtrykker i dette tilfælde differential- og integralregningens hovedsætning. Sætning 1 er således en generalisation af denne sætning.

Sammenhæng. For to forskellige punkter $\underline{x}, \underline{y} \in A$ siger vi, at $\underline{x}$ kan forbindes med $\underline{y}$ ved en kurve i A, hvis der findes en C^0-kurve K i A, for hvilken ∂K består af $\underline{x}$ regnet med multiplicitet -1 og $\underline{y}$ regnet med multiplicitet $+1$. Ethvert punkt i A siges at være forbundet med sig selv ved kurven $K=0$. Relationen $\underline{x} \sim \underline{y}$, der udtrykker, at $\underline{x}$ kan forbindes med $\underline{y}$ ved en C^0-kurve i A, er åbenbart en ækvivalensrelation i A og bestemmer altså en klassedeling af A. Hvis der kun er en ækvivalensklasse, kaldes A kurvesammenhængende. Hvis der er flere ækvivalensklasser, er disse åbenbart hver for sig kurvesammenhængende. De kaldes de kurvesammenhængende komponenter af A. Her er A en vilkårlig mængde i $\mathbb{R}^k$.

Et afsluttet interval A er åbenbart kurvesammenhængende, idet to vilkårlige punkter $\underline{x}, \underline{y} \in A$ kan forbindes i A f. eks. ved en akseparallel polygon.

For en åben mængde A er de kurvesammenhængende komponenter også åbne. Thi for ethvert $x \in A$ findes en intervalomegn, der er indeholdt i A, og dennes punkter vil alle være ækvivalente med x. Heraf ses, at hvis A er sammenhængende i topologisk forstand, er A også kurvesammenhængende.

Hvis omvendt A er kurvesammenhængende, er A også sammenhængende i topologisk forstand; dette gælder generelt og ikke blot for mængder, der enten er åbne eller et afsluttet interval. I modsat fald kunde A deles i to disjunkte mængder B og C, der begge er åbne relativt til A. Lad x og y være valgt henholdsvis i B og C, og lad K være en C^0-kurve i A, der forbinder x med y. Hvis K er bestemt ved afbildningerne $\varphi_\nu : [a_\nu, b_\nu] \to A$ med multiplicitetterne h_ν, må de for mindst et ν gælde, at $\varphi_\nu(a_\nu)$ og $\varphi_\nu(b_\nu)$ falder i hver sin af mængderne B og C [ellers måtte nemlig den samlede multiplicitet af de til hver af mængderne hørende punkter være 0]. Da φ_ν er kontinuert, og B og C er åbne relativt til A, er de to mængder $\{ t \in [a_\nu, b_\nu] \mid \varphi_\nu(t) \in B \}$ og $\{ t \in [a_\nu, b_\nu] \mid \varphi_\nu(t) \in C \}$ hver for sig åben relativt til $[a_\nu, b_\nu]$. De er disjunkte og ikke tomme, og deres forening er $[a_\nu, b_\nu]$. Men dette er umuligt.

På grund af det foranstående kan vi i det følgende, hvor der stedse kun er tale om mængder A, der er åbne eller et afsluttet interval, nøjes med at benytte ordet sammenhængende uden tilføjelse.

Hvis A er åben og sammenhængende, kan, ligesom hvis A er et afsluttet interval, to vilkårlige punkter

$\underline{x}, \underline{y} \in A$ forbindes i A ved en akseparallel polygon. For at indse dette betragter vi relationen $\underline{x} \approx \underline{y}$, der udtrykker, at $\underline{x}$ kan forbindes med $\underline{y}$ ved en aksparallel polygon i A. Dette er også en ækvivalensrelation i A. Som ovenfor ses, at ækvivalensklasserne er åbne. Da A er forudsat sammenhængende, kan der altså kun være en ækvivalensklasse.

Sætning 2. En C^0-differentialform

$$\omega = \underline{f}(\underline{x})\, d\underline{x}$$

i A er eksakt, hvis og kun hvis

$$\int_K \omega = 0$$

for enhver lukket C^1-kurve K i A. Samtlige C^1-funktioner g på A, for hvilke $dg = \omega$, fås da ved at man i hver sammenhængende komponent A_0 af A vælger et punkt $\underline{x}_0$ og værdien $g(\underline{x}_0)$. Da er for ethvert $\underline{x} \in A_0$

$$g(\underline{x}) = g(\underline{x}_0) + \int_{K(\underline{x}_0, \underline{x})} \omega ,$$

hvor $K(\underline{x}_0, \underline{x})$ er en vilkårlig C^1-kurve i A, der forbinder $\underline{x}_0$ med $\underline{x}$.

Bevis. ① Hvis ω er eksakt, altså $\omega = dg$ for en C^1-funktion g på A, gælder ifølge sætning 1 for enhver lukket C^1-kurve K i A

$$\int_K \omega = \int_K dg = \int_{\partial K} g = 0.$$

② Hvis $\int_K \omega = 0$ for enhver lukket C^1-kurve K i A, vil der for to vilkårlige C^1-kurver K_1 og K_2 i A med samme rand gælde $\int_{K_1} \omega = \int_{K_2} \omega$. Thi af $\partial K_1 = \partial K_2$ følger jo $\partial(K_1 - K_2) = 0$, d.v.s. $K_1 - K_2$ er luk-

ket, og vi har altså $\int_{K_1-K_2} \omega = 0$, d.v.s. $\int_{K_1} \omega = \int_{K_2} \omega$.

Idet vi nu i en sammenhængende komponent A_0 af A vælger et punkt $\underline{x}_0$ og værdien $g(\underline{x}_0)$, er der altså ved fastsættelsen $g(\underline{x}) = g(\underline{x}_0) + \int_{K(\underline{x}_0,\underline{x})} \omega$ defineret en funktion g på A_0. Thi integralet er jo ifølge det anførte det samme for alle kurver $K(\underline{x}_0,\underline{x})$ i A, der forbinder $\underline{x}_0$ med $\underline{x}$, idet sådanne kurver har samme rand. Vi betragter nu et med x_i-aksen parallelt liniestykke $\mathcal{L}(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$ i A_0. Lad det være bestemt ved parameterfremstillingen

$$\underline{x} = (c_1, \cdots, c_{i-1}, t, c_{i+1}, \cdots, c_k),\ a \leq t \leq b.$$

Hvis nu $K(\underline{x}_0,\underline{x}_1)$ er valgt, kan vi som $K(\underline{x}_0,\underline{x}_2)$ benytte $K(\underline{x}_0,\underline{x}_1) + \mathcal{L}(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$, hvoraf ses, at

$$g(\underline{x}_2) - g(\underline{x}_1) = \int_{\mathcal{L}(\underline{x}_1,\underline{x}_2)} \omega = \int_a^b f_i(c_1, \cdots, c_{i-1}, t, c_{i+1}, \cdots, c_k)\, dt.$$

Heraf ses umiddelbart, at g i ethvert punkt $\underline{x}$ af A_0 har den partielle afledede $\frac{\partial g}{\partial x_i} = f_i(\underline{x})$. Idet vi udfører dette i hver sammenhængende komponent af A, får vi altså en C^1-funktion g på A, for hvilken $dg = \omega$.

At vi på denne måde får samtlige C^1-funktioner g på A, for hvilke $dg = \omega$, følger af sætning 1, som viser, at der for enhver sådan funktion g og enhver C^1-kurve $K(\underline{x}_0,\underline{x})$, der forbinder et punkt $\underline{x}_0$ med et punkt $\underline{x}$, må gælde

$$\int_{K(\underline{x}_0,\underline{x})} \omega = \int_{K(\underline{x}_0,\underline{x})} dg = \int_{\partial K(\underline{x}_0,\underline{x})} g = g(\underline{x}) - g(\underline{x}_0).$$

Tilføjelse. En C^0-differentialform ω i A er eksakt, hvis blot dens integral langs enhver lukket akseparallel polygon K i A er 0, og bestemmelsen af de C^1-funktioner g på A, for hvilke $dg = \omega$, kan da ske alene ved brug af akseparallelle polygoner $K(\underline{x}_0, \underline{x})$.

Dette fremgår af, at vi i anden del af beviset for sætning 2 kan nøjes med at betragte akseparallelle polygoner.

Ækvivalente kurver. To C^1-kurver K og L i A kaldes ækvivalente, og vi skriver $K \sim L$, hvis det for enhver C^0-differentialform ω i A gælder, at

$$\int_K \omega = \int_L \omega .$$

Dette er åbenbart en ækvivalensrelation, og den definerer altså en klassedeling i gruppen $\mathcal{G}$ af alle C^1-kurver i A. Mængden $\mathcal{G}_0$ af de med 0 ækvivalente kurver, altså mængden af C^1-kurver K, for hvilke

$$\int_K \omega = 0$$

for enhver C^0-differentialform ω i A, er åbenbart en undergruppe i $\mathcal{G}$. To C^1-kurver K og L er ækvivalente, hvis og kun hvis $K - L \in \mathcal{G}_0$. Ækvivalensklasserne er derfor simpelthen sideklasserne i $\mathcal{G}$ modulo $\mathcal{G}_0$, eller om man vil elementerne i faktorgruppen $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$.

Hvis $K \sim L$, gælder $\partial K = \partial L$, d.v.s. ækvivalente kurver har samme rand. Thi af sætning 1 ses, at hvis $K \sim L$, gælder

$$\int_{\partial K} g = \int_{\partial L} g$$

for enhver C^1-funktion g på A. Heraf følger let, at hvis et punkt $\underline{x} \in A$ forekommer i ∂K, forekommer

det også i ∂L og med samme multiplicitet, og omvendt. [Man betragter blot en C^1-funktion g, der i $\underline{x}$ har værdien 1, og som er $=0$ uden for en tilstrækkeligt lille omegn af $\underline{x}$.]

I den nærværende teori er ækvivalente C^1-kurver derfor at betragte som lige gode, og man kunde gå et skridt videre i abstraktion ved ligefrem at betegne ikke som hidtil de enkelte elementer i $\mathcal{G}$ men ækvivalensklasserne, altså elementerne i faktorgruppen $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$, som C^1-kurver. For ikke unødigt at komplicere udtryksmåden vil vi dog blive stående ved den hidtidige definition.

Som eksempler på ækvivalens nævnes følgende:

Lad K være den ved en C^1-afbildning $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$: $[a,b] \to A$ bestemte kurve. Betragtes nu en C^1-afbildning $t = \alpha(u)$: $[c,d] \to [a,b]$, fås ved sammensætning en C^1-afbildning $\underline{x} = \underline{\psi}(u) = \underline{\varphi} \circ \alpha(u)$: $[c,d] \to A$, der bestemmer en kurve L. Der gælder nu: Hvis $\alpha(c) = a$ og $\alpha(d) = b$, er $K \sim L$. Thi for enhver C^0-differentialform $\omega = \underline{\underline{f}}(\underline{x})\, d\underline{x}$ gælder jo da

$$\int_K \omega = \int_a^b \left(\underline{\underline{f}} \circ \underline{\varphi}(t)\right) \underline{\varphi}'(t)\, dt$$

$$= \int_c^d \left(\underline{\underline{f}} \circ \underline{\varphi} \circ \alpha(u)\right)\left(\underline{\varphi}' \circ \alpha(u)\right) \alpha'(u)\, du$$

$$= \int_c^d \left(\underline{\underline{f}} \circ \underline{\psi}(u)\right) \underline{\psi}'(u)\, du = \int_L \omega .$$

Hvis derimod $\alpha(c) = b$ og $\alpha(d) = a$, er $K \sim -L$. Thi i overstående udregning skal vi da ombytte grænserne c og d og finder derfor

$$\int_K \omega = -\int_L \omega = \int_{-L} \omega .$$

Er K bestemt ved C^1-afbildningen $\underline{\varphi}:[a,b]\to A$, og er $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, gælder $K\sim K_1+\cdots+K_n$, hvor K_ν er den ved restriktionen af $\underline{\varphi}$ til intervallet $[t_{\nu-1},t_\nu]$ bestemte kurve. Thi for enhver C^0-differentialform $\omega=\underline{f}(\underline{x})\,d\underline{x}$ gælder jo

$$\int_K \omega=\int_a^b(\underline{f}\circ\underline{\varphi}(t))\,\underline{\varphi}'(t)\,dt=\sum_{\nu=1}^{n}\int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu}(\underline{f}\circ\underline{\varphi}(t))\,\underline{\varphi}'(t)\,dt=\int_{K_1+\cdots+K_n}\omega\,.$$

For en vilkårlig C^1-kurve K bestemt ved et antal med multipliciteter regnede afbildninger kan man ved brug af det foranstående danne mangfoldige med K ækvivalente kurver.

Vi har hidtil kun betragtet C^0-differentialformer. For C^1-differentialformer kan man angive en yderst simpel nødvendig betingelse for, at en form er eksakt. Under en indskrænkende antagelse vedrørende A er denne betingelse også tilstrækkelig.

Som forberedelse vil vi i tilfældet $k=2$ udlede en formel, hvis fundamentale karakter vil fremgå af den generalisation til vilkårligt k, der vil blive givet i §10, og af den anvendelse, vi skal gøre heraf.

Vi betragter i tilfældet $k=2$ en C^1-differentialform

$$\omega=f_1(\underline{x})\,dx_1+f_2(\underline{x})\,dx_2$$

i en mængde A, der som altid er åben eller et afsluttet interval. Lad $Q=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ være et afsluttet interval i A. Vi betragter den lukkede kurve

$$K=-K_{10}+K_{11}+K_{20}-K_{21}\,,$$

hvor $K_{10},K_{11},K_{20},K_{21}$ er siderne i Q, d.v.s. de akse-

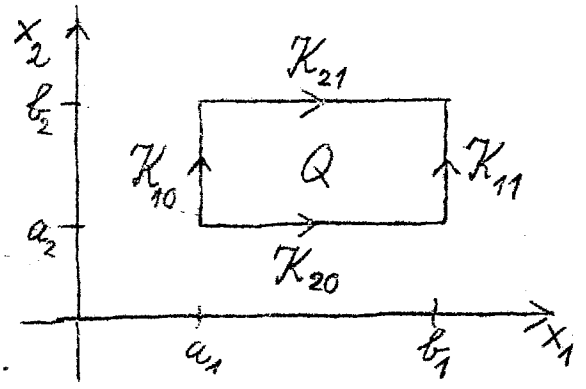
parallelle liniestykker, der bestemmes ved parameterfremstillingerne

$\mathcal{K}_{10}$: $\underline{x} = (a_1, t_2)$, $a_2 \leqslant t_2 \leqslant b_2$

$\mathcal{K}_{11}$: $\underline{x} = (b_1, t_2)$, $a_2 \leqslant t_2 \leqslant b_2$

$\mathcal{K}_{20}$: $\underline{x} = (t_1, a_2)$, $a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1$

$\mathcal{K}_{21}$: $\underline{x} = (t_1, b_2)$, $a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1$.



Vi finder

$$\int_{\mathcal{K}} \omega = -\int_{a_2}^{b_2} f_2(a_1, t_2)\,dt_2 + \int_{a_2}^{b_2} f_2(b_1, t_2)\,dt_2 + \int_{a_1}^{b_1} f_1(t_1, a_2)\,dt_1 - \int_{a_1}^{b_1} f_1(t_1, b_2)\,dt_1 .$$

Nu gælder

$$-f_2(a_1, t_2) + f_2(b_1, t_2) = \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(t_1, t_2)\,dt_1$$

$$f_1(t_1, a_2) - f_1(t_1, b_2) = -\int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(t_1, t_2)\,dt_2 .$$

Altså fås

$$\int_{\mathcal{K}} \omega = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,dt_1 \right) dt_2 - \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,dt_2 \right) dt_1$$

eller

$$\boxed{\int_{\mathcal{K}} \omega = \int_{Q} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 .}$$

Lad os nu specielt antage, at ω er differentialet

$$\omega = dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}\,dx_2$$

af en C^2-funktion g på A. Da er $\int_{\mathcal{K}} \omega = 0$, og vi slutter altså, at

$$\int_{Q} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = 0.$$

En kontinuert funktion på A, hvis integral over ethvert i A indeholdt interval Q er 0, må imidlertid være 0.

Vi slutter altså, at der i ethvert punkt $\underline{x} \in A$ må gælde

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Hermed har vi godtgjort den i §1 nævnte regel om ligegyldigheden af differentiationernes rækkefølge, idet denne for C^2-funktioner af k variable fremgår af gyldigheden for C^2-funktioner af to variable (man tillægger alle variable påtænker de to, man vil betragte, konstante værdier).

Vi slutter endvidere, at hvis der for den betragtede C^1-form ω for alle $\underline{x} \in A$ gælder

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2},$$

da gælder for ethvert interval Q, at $\int_K \omega = 0$, d.v.s.

$$(\not{*}) \qquad \int_{K_{20}+K_{11}} \omega = \int_{K_{10}+K_{21}} \omega .$$

Vi vender nu atter tilbage til et vilkårligt k.

Sætning 3. En nødvendig betingelse for, at en C^1-differentialform

$$\omega = \underline{f}(\underline{x})\,d\underline{x} = f_1(\underline{x})dx_1 + \cdots + f_k(\underline{x})dx_k$$

i A er eksakt, er, at der for vilkårlige $i, j \in \{1, \cdots, k\}$ gælder

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Hvis A er et afsluttet interval, er denne betingelse også tilstrækkelig.

Bevis. ① Hvis ω er eksakt, altså $\omega = dg$ for en C^2-funktion g på A, har vi $\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_k}\right) = (f_1, \cdots, f_k)$,

altså $$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Betingelsen udtrykker derfor blot reglen om, at differentiationernes rækkefølge er ligegyldig.

② Hvis A er et afsluttet interval $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$, betragter vi for et vilkårligt punkt $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_k) \in A$ vektorerne $\underline{p}_i = (x_i - a_i)\,\underline{e}_i$, hvor $\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_k$ er enhedsvektorerne $(1,0,\cdots,0), \cdots, (0,\cdots,0,1)$. Sættes $\underline{x}_0 = (a_1, \cdots, a_k)$, har vi $\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{p}_1 + \cdots + \underline{p}_k$. Svarende til en vilkårlig permutation $(i_1, \cdots, i_k)$ af talsættet $(1, \cdots, k)$ betragter vi nu punkterne

$$\underline{x}_0,\ \underline{x}_1 = \underline{x}_0 + \underline{p}_{i_1},\ \cdots,\ \underline{x}_{k-1} = \underline{x}_{k-2} + \underline{p}_{i_{k-1}},\ \underline{x}_k = \underline{x}_{k-1} + \underline{p}_{i_k} = \underline{x}$$

og danner den akseparallelle polygon

$$K = \mathcal{L}(\underline{x}_0, \underline{x}_1) + \cdots + \mathcal{L}(\underline{x}_{k-1}, \underline{x}_k).$$

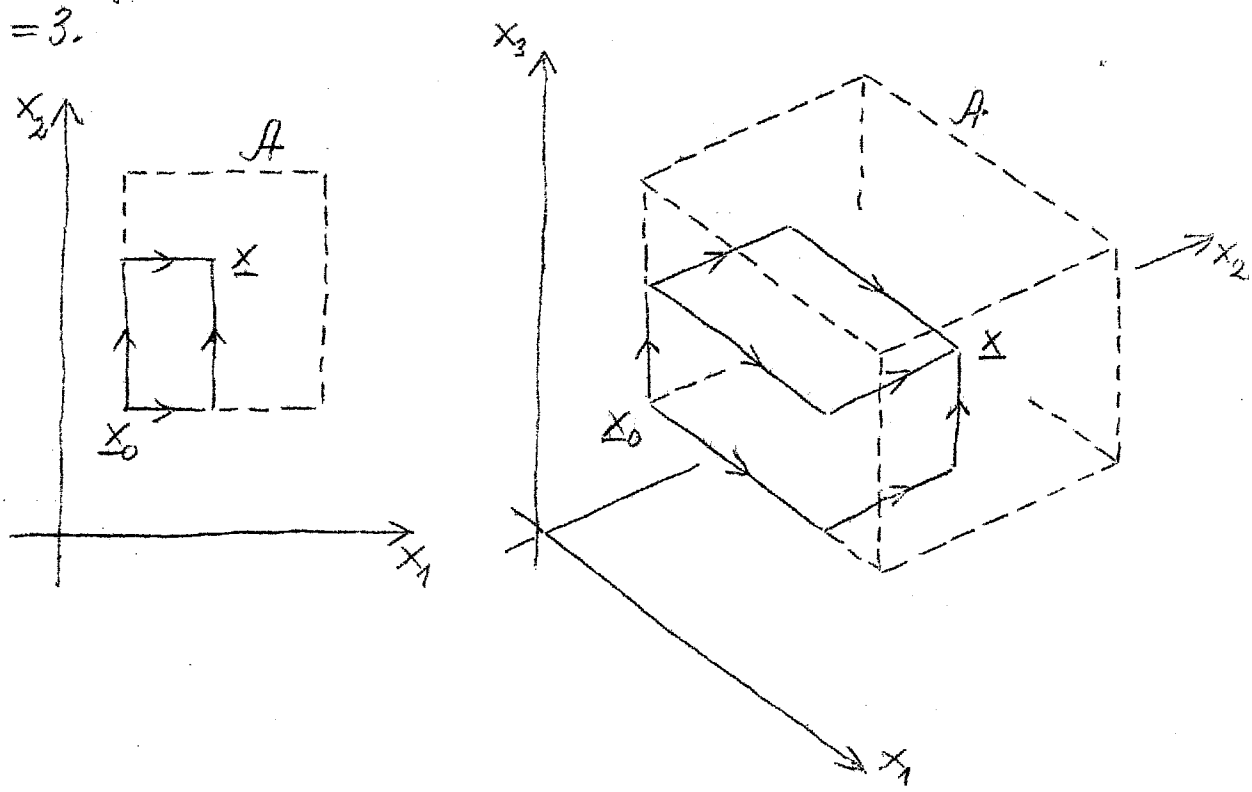
Idet vi nu antager, at ω opfylder betingelserne $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, kan vi indse, at integralet

$$g(\underline{x}) = \int_K \omega$$

er uafhængigt af permutationen og altså definerer en funktion g på A. Man kan nemlig komme fra enhver permutation til enhver anden ved successiv ombytning af <u>naboer</u>. En sådan ombytning af to naboer i permutationen $(i_1, \cdots, i_k)$ betyder, at to på hinanden følgende led $\mathcal{L}(\underline{x}_j, \underline{x}_{j+1})$ og $\mathcal{L}(\underline{x}_{j+1}, \underline{x}_{j+2})$ i K udskiftes med to led $\mathcal{L}(\underline{x}_j, \underline{x}^*_{j+1})$ og $\mathcal{L}(\underline{x}^*_{j+1}, \underline{x}_{j+2})$, hvor $\underline{x}^*_{j+1} = \underline{x}_j + \underline{x}_{j+2} - \underline{x}_{j+1}$. At integralet ikke ændres ved denne udskiftning følger af (*), idet man anvender denne relation i den to-dimensionale plan gennem de fire punkter.

Af udtrykket for $g(\underline{x})$ ses imidlertid, at g har de partielle afledede $\frac{\partial g}{\partial x_j} = f_j(\underline{x})$, idet vi for ethvert j kan vælge permutationen således, at det sidste liniestykke $L(\underline{x}_{k-1}, \underline{x})$ er parallelt med x_j-aksen.

Figurerne illustrerer ræsonnementet for $k=2$ og $k=3$.



Af sætning 3 fremgår, at hvis A er åben, og C^1-formen ω opfylder betingelserne $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, findes der til hvert punkt af A en omegn, hvori ω er eksakt. Vi udtrykker dette ved at sige, at ω er <u>lokalt</u> eksakt.

§ 9. Alternerende differentialformer.

Lad A være en mængde i $\dot{R}^k$; vi antager, at A er en åben mængde eller et afsluttet interval med positive kantlængder. For et vilkårligt helt tal $p \geq 0$ vil vi betragte udtryk af formen

$$(*) \qquad \sum_{\nu=1}^{m} f_\nu(\underline{x})\, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}},$$

hvor $f_1, \ldots, f_m$ er reelle funktioner på A, og alle indices $i_{1\nu}, \ldots, i_{p\nu}$ tilhører talmængden $\{1, \ldots, k\}$. Hvert led er altså produktet af en funktion på A og p faktorer skrevet i en bestemt rækkefølge, hvor hver faktor er et af differentialerne $dx_1, \ldots, dx_k$. For et tomt udtryk skrives 0. Funktionerne f_ν kaldes udtrykkets <u>koefficientfunktioner</u>. Umiddelbart vil man opfatte et sådant udtryk som en på $A \times \dot{R}^k$ defineret funktion af $(\underline{x}, d\underline{x}) = (x_1, \ldots, x_k, dx_1, \ldots, dx_k)$. Denne opfattelse foreligger, når man betragter det p^{te} differential

$$d^p f = \sum_{i_1=1}^{k} \cdots \sum_{i_p=1}^{k} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}\, dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}$$

af en C^p-funktion f på A, idet vi jo her (når leddene opskrives i en eller anden rækkefølge) netop har et udtryk af den omhandlede art. Vi vil imidlertid nu lægge en helt anden opfattelse til grund.

Et udtryk (*) kaldes <u>ækvivalent</u> med et udtryk af samme form (med samme p)

$$(**) \qquad \sum_{\mu=1}^{m} g_\mu(\underline{x})\, dx_{j_{1\mu}} \cdots dx_{j_{p\mu}},$$

såfremt man kan komme fra (*) til (**) ved gentagen anvendelse af følgende operationer:

(1) Ændring af leddenes rækkefølge.

(2) Tilføjelse eller udeladelse af led med koefficientfunktion 0.

(3) Samling af et antal led med samme differentialprodukt $dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}$ til eet led ved addition af de tilsvarende koefficientfunktioner, eller omvendt spaltning af et led i flere svarende til, at koefficientfunktionen skrives som en sum af et antal funktioner.

(4) Erstatning af et led $f\,dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}$ med leddet $f\,dx_{i_{x(1)}} \cdots dx_{i_{x(p)}}$, hvor x er en vilkårlig <u>lige</u> permutation af talsættet $\{1,\cdots,p\}$, eller med $-f\,dx_{i_{x(1)}} \cdots dx_{i_{x(p)}}$, hvor x er en vilkårlig <u>ulige</u> permutation af talsættet $\{1,\cdots,p\}$.

Operationerne (1)-(3) kan ikke overraske. Det er operationen (4), som naturligvis kun har interesse, når $p \geq 2$, der rummer kernen i sagen.

Man efterviser umiddelbart, at den indførte relation virkelig er en ækvivalensrelation. Den definerer altså en klassedeling i mængden af udtryk (*). En klasse ω ved denne deling kaldes en <u>alternerende differentialform af graden</u> p i mængden A. I stedet for at sige, at et udtryk (*) tilhører en bestemt klasse ω, vil vi kort sige, at differentialformen ω er fremstillet ved udtrykket, og vi skriver simpelthen

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}}.$$

Ved alle betragtninger, der baseres på denne skrivemåde, må man naturligvis overbevise sig om, at det er ligegyldigt, hvilken repræsentant for ækvivalensklassen man benytter.

Ved hjælp af operationerne (1)–(4) kan vi for enhver alternerende differentialform nå til et særligt simpelt udtryk, som vi vil kalde formens normalfremstilling.

Hertil bemærker vi først: Et led $f\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_p}$, hvori samme differential forekommer mere end een gang, d.v.s. tallene $i_1,\ldots,i_p$ ikke er indbyrdes forskellige, kan slettes. Thi leddet kan spaltes i de to led $\frac{1}{2}f\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_p}$ og $\frac{1}{2}f\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_p}$. Lad os antage, at $i_r = i_s$, hvor $r \neq s$. På det enes af leddene $\frac{1}{2}f\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_p}$ anvender vi nu permutationen $\varkappa$, som består i ombytning af r og s. Det er en ulige permutation. Leddet erstattes altså af leddet $-\frac{1}{2}f\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_p}$, hvor differentialerne er de samme som før, da $i_r = i_s$. Ved forening med det andet led fås $0\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_p}$, der kan slettes.

Heraf ses, at enhver alternerende differentialform ω af grad $> k$ fremstilles ved 0, og vi siger kort, at den er 0. Dette er her normalfremstillingen. For en alternerende differentialform ω af grad p, hvor $0 \leqq p \leqq k$, kan vi ved anvendelse af operationerne (1)–(4) altid nå til en, og åbenbart (på nær leddenes rækkefølge) kun een, fremstilling

$$\omega = \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq k} f_{i_1 \ldots i_p}\, dx_{i_1} \cdots dx_{i_p},$$

hvor der summeres over de $\binom{k}{p}$ talsæt $i_1,\ldots,i_p$, for hvilke $1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq k$. [Antallet er $\binom{k}{p}$, thi dette er antallet af delmængder af $\{1,\ldots,k\}$ med p elementer, og hver sådan delmængde kan ordnes voksende på een måde.] Denne fremstilling er her normalfremstillingen.

For $p=0$ (hvor talen er om udtryk, i hvilke der ikke forekommer differentialer) lyder normalfremstillingen

$$\omega = f,$$

hvor f er en funktion på A, og vi identificerer simpelthen ω med denne funktion. For $p=1$ lyder normalfremstillingen

$$\omega = f_1\,dx_1 + \cdots + f_k\,dx_k.$$

For $p=k$ lyder normalfremstillingen

$$\omega = f_{1\ldots k}\,dx_1 \ldots dx_k,$$

og differentialformen bestemmes altså ligesom i tilfældet $p=0$ ved en funktion på A, men kan naturligvis ikke identificeres med funktionen.

Eks. 1. For $k=3$ har vi således følgende typer:

$p=0$ $\quad \omega = f$

$p=1$ $\quad \omega = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3$

$p=2$ $\quad \omega = f_{23}\,dx_2\,dx_3 + f_{13}\,dx_1\,dx_3 + f_{12}\,dx_1\,dx_2$

$p=3$ $\quad \omega = f_{123}\,dx_1\,dx_2\,dx_3$

$p>3$ $\quad \omega = 0.$

For $p=1$ har vi skrevet leddene i rækkefølge efter index og for $p=2$ i rækkefølge efter den manglende index.

Addition af differentialformer. For to alternerende differentialformer

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\,dx_{i_{1\nu}} \ldots dx_{i_{p\nu}} \quad \text{og} \quad \pi = \sum_{\mu=1}^{m} g_\mu\,dx_{j_{1\mu}} \ldots dx_{j_{p\mu}}$$

af samme grad p defineres summen $\omega+\pi$ som

$$\omega+\pi = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\,dx_{i_{1\nu}} \ldots dx_{i_{p\nu}} + \sum_{\mu=1}^{m} g_\mu\,dx_{j_{1\mu}} \ldots dx_{j_{p\mu}},$$

altså som den differentialform af graden p, der fremstilles ved den formelt dannede sum af en fremstil-

ling for ω og en fremstilling for π.

Dette er virkelig en definition, idet resultatet åbenbart er den samme differentialform uafhængigt af, hvilke fremstillinger for ω og π man benytter.

Additionen er åbenbart kommutativ og associativ:

$$\omega+\pi = \pi+\omega \quad \text{og} \quad (\omega+\pi)+\rho = \omega+(\pi+\rho).$$

Det bemærkes, at skrivemåden

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{m} f_\nu \, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}}$$

for en differentialform er i overensstemmelse med den nu indførte addition, idet ω virkelig er summen af de n differentialformer, der har fremstillingerne

$$\omega_\nu = f_\nu \, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}}, \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

<u>Multiplikation af differentialformer</u>. For to differentialformer

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu \, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}} \quad \text{og} \quad \pi = \sum_{\mu=1}^{m} g_\mu \, dx_{j_{1\mu}} \cdots dx_{j_{q\mu}}$$

af grader p og q (der kan være ens eller forskellige) defineres produktet $\omega\pi$ som

$$\omega\pi = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} f_\nu g_\mu \, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}} \, dx_{j_{1\mu}} \cdots dx_{j_{q\mu}},$$

altså som den differentialform af graden $p+q$, der fremstilles ved det formelt dannede produkt af en fremstilling for ω og en fremstilling for π. Den formelle multiplikation består i, at man opskriver summen af alle produkter af et led i fremstillingen for ω og et led i fremstillingen for π, idet man i hvert sådant produkt multiplicerer koefficientfunktionerne og skriver de optrædende differentialer <u>i den rækkefølge, hvori de forekommer</u>, først dem fra leddet

i ω, så dem fra leddet i π.

Dette er virkelig en definition. Thi resultatet ændres ikke, hvis vi på valgte fremstillinger for ω eller π anvender en af operationerne (1)–(4). For (1)–(3) er dette åbenbart, og for (4) følger det af, at en permutation x af $\{1,\cdots,p\}$ eller λ af $\{1,\cdots,q\}$ giver anledning til en permutation $\{x(1),\cdots,x(p),\ p+1,\cdots,p+q\}$ eller $\{1,\cdots,p,\ p+\lambda(1),\cdots,p+\lambda(q)\}$ af talsættet $\{1,\cdots,p+q\}$, som er lige eller ulige, eftersom x eller λ er lige eller ulige.

Multiplikationen er åbenbart distributiv med hensyn til additionen:

$$(\omega_1+\omega_2)\pi = \omega_1\pi + \omega_2\pi \quad \text{og} \quad \omega(\pi_1+\pi_2) = \omega\pi_1 + \omega\pi_2.$$

Endvidere er den associativ:

$$(\omega\pi)\varrho = \omega(\pi\varrho).$$

Det bemærkes, at skrivemåden

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}}$$

for en differentialform er i overensstemmelse med den nu indførte multiplikation, idet

$$\omega_\nu = f_\nu\, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}}$$

virkelig er produktet af de $p+1$ differentialformer

$$f_\nu,\ dx_{i_{1\nu}},\ \cdots,\ dx_{i_{p\nu}}$$

taget i denne rækkefølge.

Multiplikationen er <u>ikke kommutativ</u>. Vi vil vise, at der gælder

$$\pi\omega = (-1)^{pq}\omega\pi.$$

Faktorerne kan altså ombyttes, hvis blot en af dem er af lige grad. Hvis derimod begge er af ulige grad,

gælder $\pi\omega = -\omega\pi$. For at indse dette bemærkes, at

$$\pi\omega = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} g_\mu f_\nu \, dx_{j_{1\mu}} \cdots dx_{j_{q\mu}} \, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}}.$$

Overgangen fra rækkefølgen $dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}} \, dx_{j_{1\mu}} \cdots dx_{j_{q\mu}}$ til rækkefølgen $dx_{j_{1\mu}} \cdots dx_{j_{q\mu}} \, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}}$ i det $(\nu,\mu)^{\text{te}}$ led bestemmes ved permutationen $\{p+1, \ldots, p+q, 1, \ldots, p\}$ af talsættet $\{1, \ldots, p, p+1, \ldots, p+q\}$, hvis fortegn åbenbart er $(-1)^{pq}$ [antallet af inversioner er pq].

<u>Eks. 2.</u> For $k=3$ fås

$$(f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3)(g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3)$$
$$= \det\begin{bmatrix} f_2 & f_3 \\ g_2 & g_3 \end{bmatrix} dx_2 dx_3 + \det\begin{bmatrix} f_1 & f_3 \\ g_1 & g_3 \end{bmatrix} dx_1 dx_3 + \det\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix} dx_1 dx_2$$

$$(f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3)(g_{23} dx_2 dx_3 + g_{13} dx_1 dx_3 + g_{12} dx_1 dx_2)$$
$$= (f_1 g_{23} - f_2 g_{13} + f_3 g_{12}) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$(f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3)(g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3)(h_1 dx_1 + h_2 dx_2 + h_3 dx_3)$$
$$= \det\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Man bemærker, at det i de hidtidige betragtninger ingen rolle har spillet, at koefficienterne i de betragtede udtryk er funktioner, og at udtrykkene indeholder differentialerne $dx_1, \ldots, dx_k$. Vi kunde lige så godt have opereret med udtryk af formen

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \, \xi_{i_{1\nu}} \cdots \xi_{i_{p\nu}},$$

hvori $c_1, \ldots, c_n$ er reelle tal, og alle indices $i_{1\nu}, \ldots, i_{p\nu}$ tilhører talmængden $\{1, \ldots, k\}$, så at talen er om udtryk indeholdende bogstaverne $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Talen er da om den af H. Grassmann (1809-1877), omend i anden ikledning, udviklede teori for alternerende algebraiske former.

Differentiation af differentialformer. En alternerende differentialform ω kaldes C^n, $n \geq 0$, resp. C^∞, i A, hvis den har en fremstilling

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{m} f_\nu \, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}},$$

i hvilken koefficientfunktionerne f_ν er C^n, resp. C^∞. Kun sådanne fremstillinger af ω vil de blive taget i betragtning. Blandt disse findes formens normalfremstilling.

For en C^1-differentialform

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{m} f_\nu \, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}}$$

af graden p definerer vi differentialet $d\omega$ som

$$d\omega = \sum_{\nu=1}^{m} df_\nu \, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}},$$

altså som den differentialform af graden $p+1$, der fremkommer, når i en fremstilling for ω hver koefficientfunktion f_ν erstattes med sit differential

$$df_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} dx_k$$

[betragtet som differentialform af graden 1], altså formen

$$d\omega = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} dx_i \, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}}.$$

Dette er virkelig en definition. Thi som man umiddelbart efterprøver, ændres resultatet ikke, hvis man på den valgte fremstilling for ω anvender operationerne (1)–(4).

Bemærk, at hvis ω er C^n, $n \geq 1$, resp. C^∞, vil $d\omega$ være C^{n-1}, resp. C^∞.

En differentialform ω af graden 0, altså en funktion f, er i henhold til definitionen C^1, hvis og kun hvis f er C^1, og vi har da

$$d\omega = df,$$

d.v.s. differentialet af f, når f opfattes som differentialform af graden 0, fremstilles netop ved udtrykket df. Specielt fremstilles differentialerne af funktionerne $x_1, \ldots, x_k$, idet disse opfattes som differentialformer af graden 0, ved $dx_1, \ldots, dx_k$. Skrivemåden

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{m} f_\nu \, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}}$$

for en differentialform er således i overensstemmelse med den nu indførte differentiation. Lighedstegnet, der hidtil blot har stået som angivelse af, at udtrykket er en af fremstillingerne for ω, er nu blevet et virkeligt lighedstegn.

Eks. 3. For $k=3$ fås:

for $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$

$$d\omega = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 + \text{de to analoge udtryk}$$

$$= \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right) dx_2 dx_3 + \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_3 + \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2$$

for $\omega = f_{23} dx_2 dx_3 + f_{13} dx_1 dx_3 + f_{12} dx_1 dx_2$

$$d\omega = \left(\frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_2 dx_3 + \text{de to analoge udtryk}$$

$$= \left(\frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Bemærkning. Udviklingsgangen i det foregående er et eksempel på en i matematikken ofte benyttet fremgangsmåde. Et yderst simpelt eksempel er indførelsen af de rationale tal ud fra de hele tal. Her begynder man med at betragte udtryk $\frac{a}{b}$, hvor a og b er hele tal og $b \neq 0$. I mængden af disse udtryk indføres en ækvivalensrelation, idet man siger, at $\frac{a}{b}$ er ækvivalent med $\frac{c}{d}$, hvis $\frac{c}{d}$ kan fås ud fra $\frac{a}{b}$ ved gentagen anvendelse af operationerne forlæng-

ning (d: multiplikation af begge tal med samme tal $\neq 0$) og forkortning (d: division af begge tal med en fælles divisor). Et rationalt tal ϱ defineres nu som en ækvivalensklasse, men i stedet for at sige, at udtrykket $\frac{a}{b}$ tilhører ækvivalensklassen ϱ, siger vi også, at det rationale tal ϱ fremstilles ved udtrykket $\frac{a}{b}$, og vi skriver

$$(\Delta) \qquad \varrho = \frac{a}{b}.$$

For rationale tal defineres nu addition og multiplikation, idet man, når ϱ og σ er rationale tal med fremstillingerne $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$, definerer $\varrho + \sigma$ og $\varrho\,\sigma$ som de rationale tal, der har fremstillingerne $\frac{ad+bc}{bd}$ og $\frac{ac}{bd}$. For at vise, at dette virkelig er definitioner, må man godtgøre, at resultatet er uafhængigt af, hvilke fremstillinger for ϱ og σ man benytter. Herefter viser man, at mængden af rationale tal med disse kompositioner er et legeme. Det rationale tal ϱ, der har fremstillingen $\frac{a}{1}$, identificeres med det hele tal a. Endelig godtgør man, at det rationale tal ρ, der har fremstillingen $\frac{a}{b}$, er løsning til ligningen $b\varrho = a$ (hvor a og b står for de rationale tal, som vi har identificeret med a og b). Lighedstegnet i (Δ) bliver herved et virkeligt lighedstegn. Vedrørende den detaillerede fremstilling af ovenstående henvises til algebraen. Vil man forebygge de misforståelser, der kan følge af at tale om udtryk $\frac{a}{b}$, kan man i stedet for tale om talpar (a, b). Den ovenstående indførelse af alternerende differentialformer kan på tilsvarende måde gennemføres ved, at man i stedet for udtryk taler om funktionssæt.

Når de alternerende differentialformer ω og π er C^1 og af samme grad, er $\omega+\pi$ åbenbart også C^1, og der gælder

$$d(\omega+\pi) = d\omega + d\pi.$$

For differentiation af et produkt lyder reglen:

Når ω og π er C^1 og af graderne p og q, da er $\omega\pi$ også C^1, og

$$d(\omega\pi) = (d\omega)\pi + (-1)^p \omega(d\pi).$$

Bevis. Det er klart ifølge definitionen af produktet $\omega\pi$, at $\omega\pi$ er C^1. Ved beviset for formlen er det tilstrækkeligt at betragte det tilfælde, hvor ω og π hver fremstilles ved eet led; thi af gyldigheden i dette tilfælde følger straks gyldigheden for former, der fremstilles ved summer af flere led. Lad altså

$$\omega = f\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_p} \quad \text{og} \quad \pi = g\,dx_{j_1}\cdots dx_{j_q}.$$

Da er

$$\omega\pi = fg\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_p}\,dx_{j_1}\cdots dx_{j_q}$$

og følgelig

$$\begin{aligned} d(\omega\pi) &= \big((df)g + f(dg)\big)\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_p}\,dx_{j_1}\cdots dx_{j_q} \\ &= (df)g\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_p}\,dx_{j_1}\cdots dx_{j_q} \\ &\quad + f(dg)\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_p}\,dx_{j_1}\cdots dx_{j_q}. \end{aligned}$$

Her kan vi i første led flytte faktoren g hen mellem dx_{i_p} og dx_{j_1}. I det andet led vil vi på tilsvarende måde flytte dg hen mellem dx_{i_p} og dx_{j_1}. Dette er imidlertid en ombytning af differentialformen dg af graden 1 og differentialformen $dx_{i_1}\cdots dx_{i_p}$ af graden p, og flytningen kræver derfor tilføjelse af en faktor $(-1)^{1\cdot p} = (-1)^p$. Herefter står der det ønskede resultat.

Vi vil nu bevise en mærkelig sætning:
Hvis ω er C^2 [og dw følgelig C^1] gælder

$$d(d\omega) = 0.$$

Bevis. Det er tilstrækkeligt at betragte det tilfælde, hvor ω kan fremstilles ved eet led

$$\omega = f\, dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}.$$

Vi har da

$$d\omega = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\, dx_{i_1} \cdots dx_{i_p},$$

og følgelig

$$d(d\omega) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j\, dx_i\, dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}.$$

Her kan led med $i=j$ slettes, de samme differential optræder mindst to gange, og leddene med $i \neq j$ hæver parvis hinanden, idet to $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, og differentialerne dx_i og dx_j har modsat rækkefølge i de to led.

Indførelse af nye variable. Foruden rummet R^k med $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ som variabelt punkt vil vi nu betragte et rum R^l med $\underline{y} = (y_1, \cdots, y_l)$ som variabelt punkt. Lad B være en mængde i R^l, der enten er åben eller et afsluttet interval, og lad

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{y})$$

eller i koordinater

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \cdots, y_l) \\ \cdots \\ x_k = \varphi_k(y_1, \cdots, y_l) \end{cases}$$

være en C^1-afbildning af B ind i A. Er nu

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\underline{x})\, dx_{i_{1\nu}} \cdots dx_{i_{p\nu}}$$

en differentialform af graden p i A, definerer vi

den af ω ved indsætning af $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{y})$ bestemte differentialform $\omega \circ \underline{\varphi}$ i B ved

$$\omega \circ \underline{\varphi} = \sum_{\nu=1}^{n} (f_\nu \circ \underline{\varphi})(\underline{y})\, d\varphi_{i_{1\nu}} \cdots d\varphi_{i_{p\nu}},$$

altså som den differentialform af graden p i B, der fremkommer, når man i koefficientfunktionerne f_ν erstatter $\underline{x}$ med $\underline{\varphi}(\underline{y})$, og erstatter differentialerne $dx_1, \ldots, dx_k$ med differentialformerne

$$d\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_l} dy_l$$

$$\cdots$$

$$d\varphi_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_l} dy_l.$$

Dette er virkelig en definition, thi ved anvendelse af operationerne (1)-(4) på den valgte fremstilling for ω ændres resultatet ikke. Dette er indlysende for operationerne (1)-(3). For (4) ses det af, at hvis vi i et led $f(\underline{x})\, dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}$ foretager en permutation af $dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_p}$, udføres samtidig i det ved indsætningen dannede udtryk $(f \circ \underline{\varphi})(\underline{y})\, d\varphi_{i_1} \cdots d\varphi_{i_p}$ den tilsvarende permutation af $d\varphi_{i_1}, \ldots, d\varphi_{i_p}$. Nu kan permutationen af $dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_p}$ udføres i et antal skridt, hvor hvert skridt består i ombytning af to <u>naboer</u> ledsaget af fortegnsskifte. De tilsvarende skridt anvendt på $d\varphi_{i_1}, \ldots, d\varphi_{i_p}$ er hver for sig en ombytning af to differentialformer af graden 1, hvilket netop bevirker et fortegnsskifte. Følgelig ændres resultatet ikke ved anvendelse af operationen (4) på det valgte udtryk for ω.

Man ser umiddelbart, at der for to differential-

formen ω og π af samme grad i A gælder

$$(\omega+\pi)\circ\varphi = \omega\circ\varphi + \pi\circ\varphi,$$

og at der for to vilkårlige differentialformer ω og π i A gælder

$$(\omega\pi)\circ\varphi = (\omega\circ\varphi)(\pi\circ\varphi).$$

Af fundamental betydning for det senere er følgende sætning:

Når differentialformen ω er C^1, og afbildningen φ er C^2, vil $\omega\circ\varphi$ være C^1, og der gælder

$$d(\omega\circ\varphi) = (d\omega)\circ\varphi.$$

Det gør altså ingen forskel, om vi først i ω indfører de nye variable og derefter danner differentialet af den herved fremkomne form $\omega\circ\varphi$ i B, eller om vi først danner differentialet af ω i A og derefter i $d\omega$ indfører de nye variable.

Bevis. Hvis $p=0$, så at ω er en C^1-funktion f, er $\omega\circ\varphi$ simpelthen funktionen $f\circ\varphi$ i B, som er C^1, når blot φ er C^1. Formlen $d(\omega\circ\varphi)=(d\omega)\circ\varphi$ er her simpelthen formlen $d(f\circ\varphi)=(df)\circ\varphi$.

Hvis $p\geqslant 1$, bliver $\omega\circ\varphi$ ikke nødvendigvis C^1, såfremt vi blot forudsætter, at $\varphi\in C^1$. Thi udregning af $\omega\circ\varphi$ fører til led af formen $g\,dy_{j_1}\dots dy_{j_p}$, hvor koefficientfunktionerne g dannes som produkt af en af funktionerne $f_\nu\circ\varphi$ og p af funktionerne $\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}$, af hvilke de sidste blot vides at være C^0. Forudsætter vi imidlertid, at φ er C^2, altså at funktionerne $\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}$ er C^1, bliver $\omega\circ\varphi$ åbenbart C^1.

For dernæst under denne antagelse at bevise gyldigheden af formlen $d(\omega\circ\varphi)=(d\omega)\circ\varphi$ for alle

C^1-former ω bemærker vi, at hvis denne formel gælder for to former ω og π af samme grad, gælder den åbenbart også for $\omega+\pi$. Endvidere, at hvis den gælder for to former ω og π gælder den også for $\omega\pi$. Thi vi har jo, hvis ω har graden p, at

$$d(\omega\pi) = (d\omega)\pi + (-1)^p \omega(d\pi)$$

og følgelig

$$(\#) \quad (d(\omega\pi))\circ\varphi = ((d\omega)\circ\varphi)(\pi\circ\varphi) + (-1)^p(\omega\circ\varphi)((d\pi)\circ\varphi).$$

På den anden side, da $(\omega\pi)\circ\varphi = (\omega\circ\varphi)(\pi\circ\varphi)$, og $\omega\circ\varphi$ også har graden p, har vi

$$(*) \quad d((\omega\pi)\circ\varphi) = (d(\omega\circ\varphi))(\pi\circ\varphi) + (-1)^p(\omega\circ\varphi)(d(\pi\circ\varphi)).$$

Nu har vi antaget, at formlen er gyldig for ω og π, altså at

$$d(\omega\circ\varphi) = (d\omega)\circ\varphi \quad \text{og} \quad d(\pi\circ\varphi) = (d\pi)\circ\varphi.$$

Indsættes dette i højre side af $(*)$, fås netop højre side i $(\#)$, og vi har altså

$$d((\omega\pi)\circ\varphi) = (d(\omega\pi))\circ\varphi.$$

Da enhver C^1-form ω kan dannes som sum af produkter af C^1-funktioner f (= C^1-former af graden 0) og de specielle former $dx_1, \ldots, dx_k$ ved brug af multiplikation og addition, er det ifølge det foranstående tilstrækkeligt til fuldendelse af beviset at eftervise rigtigheden af formlen $d(\omega\circ\varphi) = (d\omega)\circ\varphi$ for de specielle former $dx_1, \ldots, dx_k$. Hvis $\omega = dx_i$ (hvor i er et af tallene $1, \ldots, k$), har vi $\omega\circ\varphi = d\varphi_i$ og altså $d(\omega\circ\varphi) = d(d\varphi_i) = 0$. På den anden side er $d\omega = d(dx_i) = 0$ og altså $(d\omega)\circ\varphi = 0$. Reglen gælder altså i dette tilfælde.

§10. Differential- og integralregningens hovedsætning for funktioner af flere variable.

Den i §8 givne behandling af differentialformer af første grad ved hjælp af begrebet kurveintegral kan generaliseres til alternerende differentialformer af vilkårlig grad. Det afgørende hjælpemiddel er begrebet fladeintegral. Vi vælger en præcisering af fladebegrebet svarende til den i §8 givne præcisering af kurvebegrebet.

Fladebegrebet. Lad A være en mængde i $\grave{R}^k$; vi antager, at A er en åben mængde eller et afsluttet interval med positive kantlængder. Lad Φ_p for et vilkårligt helt $p>0$ betegne mængden af alle C^0-afbildninger

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t}) = (\varphi_1(\underline{t}), \dots, \varphi_k(\underline{t})) : Q \to A$$

af et afsluttet interval

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$$

i $\grave{R}^p$ ind i A. Ved en p-dimensional C^0-flade eller kort en C^0-p-flade F i A vil vi forstå en funktion

$$F : \Phi_p \to \grave{Z},$$

der kun er $\neq 0$ i en endelig (evt. tom) delmængde af Φ_p. Man ser, at C^0-p-fladerne med addition som komposition danner en kommutativ gruppe. For en bestemt afbildning $\underline{\varphi} : Q \to A$ kan vi betragte den C^0-p-flade $F : \Phi_p \to A$, der er bestemt ved, at $F(\underline{\varphi}) = 1$, medens $F(\underline{\psi}) = 0$ for alle $\underline{\psi} \in \Phi_p$, for hvilke $\underline{\psi} \neq \underline{\varphi}$. Vi siger, at F er bestemt ved afbildningen $\underline{\varphi} : Q \to A$ eller ved parameterfremstillingen $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t})$, $\underline{t} \in Q$. Naturligvis må F ikke forveksles med punktmængden $\underline{\varphi}(Q)$.

For en vilkårlig C^0-p-flade $F: \Phi_p \to \dot{Z}$ siger vi, hvis $F(\varphi) \neq 0$ for afbildningerne $\varphi_\nu: Q_\nu \to A$, $\nu = 1, \cdots, n$, og kun for disse, og $F(\varphi_\nu) = h_\nu$, at F består af de ved afbildningerne $\varphi_\nu: Q_\nu \to A$ eller parameterfremstillingerne $\underline{x} = \varphi_\nu(\underline{t})$, $\underline{t} \in Q_\nu$ bestemte flader F_ν regnet med multipliciteterne h_ν. Vi har da

$$F = h_1 F_1 + \cdots + h_n F_n.$$

En C^0-p-flade F kaldes en C^n-p-flade, $n \geq 1$, resp. en C^∞-p-flade, eller udførligt en p-dimensional C^n-flade, resp. C^∞-flade, hvis ethvert $\varphi \in \Phi_p$, for hvilket $F(\varphi) \neq 0$, er C^n, resp. C^∞. Man ser, at C^n-p-fladerne, resp. C^∞-p-fladerne, udgør en undergruppe i gruppen af alle C^0-p-flader.

For $p = 1$ er mængden Φ_p den i § 8 betragtede mængde af alle C^0-afbildninger $\underline{x} = \varphi(t): [a, b] \to A$. En C^0-1-flade er derfor det samme som en C^0-kurve. Tilsvarende er en C^n-1-flade, resp. C^∞-1-flade det samme som en C^n-kurve, resp. C^∞-kurve.

Det er hensigtsmæssigt også at operere med begrebet en 0-flade. Dette begreb fremkommer, idet vi sætter $\Phi_0 = A$. Man ser, at 0-fladerne i A netop er de i § 8 betragtede funktioner $P: A \to \dot{Z}$, der kun er $\neq 0$ i en endelig (evt. tom) delmængde af A. Tilføjelserne C^0-, C^n-, C^∞- er her uden indhold, men for ikke at skulle gøre undtagelser ved formuleringen af sætninger vil vi fastsætte, at en C^0-p-flade, C^n-p-flade, C^∞-p-flade for $p = 0$ simpelthen skal betyde en 0-flade.

Vi vil nu definere randen ∂F af en C°-p-flade og betragter først for $p \geqslant 1$ det tilfælde, hvor F er bestemt ved en afbildning $\varphi : Q \to A$. For et vilkårligt $i = 1, \dots, p$ betegner vi med Q_i intervallet $[a_1, b_1] \times \cdots \times \not{[a_i, b_i]} \times \cdots \times [a_p, b_p]$ i R^{p-1} med $(t_1, \dots, \not{t_i}, \dots, t_p)$ som variabelt punkt. Overstregningerne betyder, at $[a_i, b_i]$, resp. t_i, er strøget. Idet vi i φ sætter $t_i = a_i$ og $t_i = b_i$, fås to afbildninger hørende $\bar{\Phi}_{p-1}$:

$$\underline{\varphi} = \varphi_{i0}(t_1, \dots, \not{t_i}, \dots, t_p) = \varphi(t_1, \dots, a_i, \dots, t_p) : Q_i \to A$$

$$\underline{\varphi} = \varphi_{i1}(t_1, \dots, \not{t_i}, \dots, t_p) = \varphi(t_1, \dots, b_i, \dots, t_p) : Q_i \to A.$$

De herved bestemte C°-$(p-1)$-flader betegnes F_{i0} og F_{i1}. Ved randen ∂F af F forstås nu C°-$(p-1)$-fladen

$$\partial F = -F_{10} + F_{11} + F_{20} - F_{21} - \cdots + (-1)^p F_{p0} + (-1)^{p+1} F_{p1}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{\delta=0}^{1} (-1)^{i+\delta} F_{i\delta}.$$

For $p = 1$, hvor talen er om en C°-kurve F bestemt ved en afbildning $\varphi : [a, b] \to A$, skal ovenstående forstås således, at vi skal lade F_{10} og F_{11} betegne punkterne $\varphi(a)$ og $\varphi(b)$ og sætte $\partial F = -F_{10} + F_{11}$. For en vilkårlig C°-p-flade F bestående af de ved afbildningerne $\varphi_\nu : Q_\nu \to A$, $\nu = 1, \dots, n$, bestemte flader F_ν regnet med multiplicitetterne h_ν, defineres randen ∂F som C°-$(p-1)$-fladen

$$\partial F = h_1 \partial F_1 + \cdots + h_n \partial F_n.$$

Man ser, at definitionen for $p = 1$ stemmer overens med den i § 8 givne definition af en C°-kurves rand.

Det er hensigtsmæssigt også at definere randen ∂F af en 0-flade $F : A \to Z$. Herved vil vi forstå

summen af de fra 0 forskellige værdier $F(\underline{x})$. Randen er altså i dette tilfælde et helt tal.

Man ser, at der for vilkårlige C^0-p-flader gælder

$$\partial(F+G) = \partial F + \partial G, \qquad \partial(-F) = -\partial F.$$

En C^0-p-flade kaldes <u>lukket</u>, hvis $\partial F = 0$.

Vi vil nu bevise en markelig sætning:

<u>For enhver C^0-p-flade F gælder</u>

$$\partial(\partial F) = 0,$$

<u>d.v.s. randen af en C^0-p-flade er en lukket C^0-$(p-1)$-flade.</u>

Bevis. Det er tilstrækkeligt at betragte det tilfælde, hvor F er bestemt ved en C^0-afbildning $\Phi : Q \to A$. Med brug af de ovenstående betegnelser har vi da i tilfældet $p = 1$

$$\partial(\partial F) = \partial(-F_{10}) + \partial(F_{11}) = -1 + 1 = 0.$$

I tilfældet $p \geq 2$ har vi

$$\partial(\partial F) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\delta=0}^{1} (-1)^{i+\delta} \partial F_{i\delta}.$$

For at finde $\partial F_{i\delta}$ skal vi for hvert $j \neq i$ danne de to afbildninger $\Phi_{ij\delta 0}$ og $\Phi_{ij\delta 1}$, der fås ved i $\Phi_{i\delta}$ at sætte $t_j = a_j$ og $t_j = b_j$. Disse er afbildninger af det interval Q_{ij} i $\mathbb{R}^{p-2}$, der fås ved i $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ at stryge både $[a_i, b_i]$ og $[a_j, b_j]$, ind i A. Det variable punkt fås af $(t_1, \cdots, t_p)$ ved at stryge t_i og t_j. Idet de tilsvarende C^0-$(p-2)$-flader betegnes $F_{ij\delta 0}$ og $F_{ij\delta 1}$, fås

$$\partial F_{i\delta} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \sum_{\varepsilon=0}^{1} \operatorname{sign}(i-j)(-1)^{j+\varepsilon} F_{ij\delta\varepsilon}.$$

Thi t_j har i $(t_1, \cdots, \not{t_i}, \cdots, t_p)$ den j^{te} plads, hvis $j < i$, men den $(j-1)^{\text{te}}$ plads, hvis $j > i$, og $F_{ij\delta\varepsilon}$

skal derfor figurere i summen med fortegnet $(-1)^{\delta+\varepsilon}$, hvis $j<i$, men med fortegnet $(-1)^{\delta-1+\varepsilon}$, hvis $j>i$. Dette har vi opnået ved at indføre fortegnet $\operatorname{sign}(i-j)$ for differensen $i-j$ i det j^{te} led. Vi får derfor

$$\partial(\partial F)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{\delta=0}^{1}\sum_{j=1}^{p}\sum_{\varepsilon=0}^{1}\operatorname{sign}(i-j)(-1)^{i+\delta+j+\varepsilon}F_{i\delta j\varepsilon}.$$

Nu er imidlertid $F_{i\delta j\varepsilon}=F_{j\varepsilon i\delta}$. Leddene i summen hæver derfor parvis hinanden, og vi finder $\partial(\partial F)=0$.

Hvis F er en C^n-p-flade, resp. en C^∞-p-flade, er ∂F åbenbart en C^n-$(p-1)$-flade, resp. en C^∞-$(p-1)$-flade.

For ethvert interval $Q=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]$ bestemmes ved den identiske afbildning $\Psi(\underline{t})=\underline{t}: Q\to\grave{R}^p$ en C^∞-p-flade i $\grave{R}^p$, som vi også betegner Q. For en vilkårlig C^0-funktion f på Q betegnes integralet

$$\int_Q f\,dt_1\cdots dt_p$$

af f over mængden Q og så som integralet af C^0-differentialformen $f\,dt_1\cdots dt_p$ langs fladen Q. For differentialformer og flader i en mængde A i $\grave{R}^k$ definerer vi nu:

<u>Ved integralet</u> $\int_F\omega$ <u>af en</u> C^0-<u>differentialform</u> ω <u>af grad</u> p <u>i</u> A <u>langs en</u> p-<u>dimensional</u> C^1-<u>flade</u> F <u>i</u> A <u>bestående af de ved afbildningerne</u> $\Psi_\nu: Q_\nu\to A$, $\nu=1,\dots,n$, <u>bestemte flader regnet med multipliciteterne</u> h_ν <u>forstås summen</u>

$$\int_F\omega=\sum_{\nu=1}^{n}h_\nu\int_{Q_\nu}\omega\circ\Psi_\nu.$$

For hver optrædende afbildning $\Psi: Q\to A$ skal man altså indsætte Ψ i ω. Herved fås en C^0-differentialform i Q af grad p, altså en form $\omega\circ\Psi=f\,dt_1\cdots dt_p$. Vi danner integralet af denne langs fladen Q, der ifølge det ovenstående er integralet af f over mængden Q. Summen af

de med de respektive multipliciteter h_ν multiplicerede integraler svarende til de optrædende afbildninger $\Psi_\nu : Q_\nu \to A$ er da integralet af ω langs F.

For $p=0$ og $p=1$ fås de i §8 indførte begreber, idet man for $p=0$ skal forstå definitionen således.

Man ser umiddelbart, at der gælder

$$\int_{F+G} \omega = \int_F \omega + \int_G \omega \quad \text{og} \quad \int_{-F} \omega = -\int_F \omega .$$

For $p>k$ findes kun den ene differentialform $\omega = 0$. Altså er i dette tilfælde $\int_F \omega = 0$ for enhver C^1-p-flade. Det er derfor uden interesse at betragte C^1-p-flader for $p>k$, og vi antager i det følgende stedse, at $0 \leqslant p \leqslant k$.

For ethvert interval $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ i $\grave{R}^p$ er randen ∂Q af Q, idet Q betragtes som den ved den identiske afbildning $\Psi(\underline{t}) = \underline{t} : Q \to \grave{R}^p$ bestemte C^∞-p-flade i $\grave{R}^p$, bestemt ved

$$\partial Q = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\delta=0}^{1} (-1)^{i+\delta} Q_{i\delta},$$

hvor Q_{i0} og Q_{i1} er de to ved $t_i = a_i$ og $t_i = b_i$ bestemte sideflader i Q, betragtet som C^∞-$(p-1)$-flader, altså de to flader, der bestemmes ved afbildningerne $\Psi_{i0}(t_1, \cdots, \not{t_i}, \cdots, t_p) = (t_1, \cdots, a_i, \cdots, t_p)$ og $\Psi_{i1}(t_1, \cdots, \not{t_i}, \cdots, t_p) = (t_1, \cdots, b_i, \cdots, t_p)$ af $Q_i = [a_1, b_1] \times \cdots \times \not{[a_i, b_i]} \times \cdots \times [a_p, b_p]$ ind i $\grave{R}^p$.

Vi betragter nu en C^1-differentialform ω i Q af grad $p-1$. En sådan kan skrives

$$\omega = \sum_{i=1}^{p} f_{1 \cdots \not{i} \cdots p} \, dt_1 \cdots \not{dt_i} \cdots dt_p ,$$

hvor koefficienterne $f_{1 \cdots \not{i} \cdots p}$ er C^1-funktioner på Q.

For dens differential fås

$$d\omega = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_{1\cdots\check{\imath}\cdots p}}{\partial t_i}\, dt_1 \cdots dt_p .$$

Vi vil udregne integralet

$$\int_{\partial Q} \omega = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\delta=0}^{1} (-1)^{i+\delta} \int_{Q_{i\delta}} \omega .$$

For $p=2$ er denne udregning udført i §8. Vi går frem på samme måde. For at finde $\int_{Q_{i0}} \omega$ og $\int_{Q_{i1}} \omega$ skal vi indsætte Ψ_{i0} og Ψ_{i1} i ω. Det vil simpelthen sige, at vi i ω skal sætte $t_i = a_i$ og $t_i = b_i$. Herved falder alle led, der indeholder dt_i, bort. Vi skal derefter integrere over Q_i. Vi får

$$\sum_{\delta=0}^{1} (-1)^{i+\delta} \int_{Q_{i\delta}} \omega = (-1)^{i-1} \left[\int_{Q_{i1}} \omega - \int_{Q_{i0}} \omega \right]$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{Q_i} \left[f_{1\cdots\check{\imath}\cdots p}(t_1, \cdots, b_i, \cdots, t_p) - f_{1\cdots\check{\imath}\cdots p}(t_1, \cdots, a_i, \cdots, t_p) \right] dt_1 \cdots \check{dt_i} \cdots dt_p$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{Q_i} \left(\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f_{1\cdots\check{\imath}\cdots p}}{\partial t_i}\, dt_i \right) dt_1 \cdots \check{dt_i} \cdots dt_p$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{Q} \frac{\partial f_{1\cdots\check{\imath}\cdots p}}{\partial t_i}\, dt_1 \cdots dt_p .$$

Ved addition af disse formler for $i = 1, \cdots, p$ fås

$$\int_{\partial Q} \omega = \int_{Q} d\omega .$$

For $p=2$ er dette den i §8 udledte formel, idet vi for $\omega = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2$ har $d\omega = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$.

Idet vi nu atter vender tilbage til betragtning af differentialformer og flader i en mængde A i $\mathbb{R}^k$, vil vi på grundlag af den fundne formel udlede en almen sætning, der kan opfattes som <u>hovedsætningen i dif-</u>

Differential- og integralregningen for funktioner af flere variable.

Hovedsætning. *For enhver C^1-differentialform ω i A af grad $p-1$ og enhver p-dimensional C^1-flade F i A gælder*

$$\int_F d\omega = \int_{\partial F} \omega .$$

Bemærk, at $d\omega$ er en C^0-differentialform i A af grad p, og at ∂F er en $(p-1)$-dimensional C^1-flade i A, så at grad og dimension i hvert af de to integraler stemmer overens.

For $p=1$ er hovedsætningen sætning 1 i §8.

Bevis. ① Det er tilstrækkeligt at betragte det tilfælde, hvor F er bestemt ved en C^1-afbildning $\varphi: Q \to A$ af et interval $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ i $\mathbb{R}^p$ ind i A. Ifølge definitionen af fladeintegral har vi

$$\int_F d\omega = \int_Q (d\omega) \circ \varphi \quad \text{og} \quad \int_{\partial F} \omega = \int_{\partial Q} \omega \circ \varphi .$$

Den første af disse formler er direkte indeholdt i definitionen. Den anden fremgår af, at vi med de ovenstående betegnelser for hvert $i = 1, \ldots, p$ og $\delta = 0, 1$ har

$$\int_{F_{i\delta}} \omega = \int_{Q_i} \omega \circ \varphi_{i\delta} = \int_{Q_{i\delta}} \omega \circ \varphi .$$

Hvis vi nu antager, at φ er en C^2-afbildning, er ifølge §9 differentialformen $\omega \circ \varphi$ en C^1-form og $d(\omega \circ \varphi) = (d\omega) \circ \varphi$. Hvad vi skal vise er da, at

$$\int_Q d(\omega \circ \varphi) = \int_{\partial Q} \omega \circ \varphi .$$

Dette er netop det ovenfor fundne resultat anvendt på C^1-formen $\omega \circ \varphi$ i intervallet Q.

② Det er beklageligt, at det foregående bevis ikke fungerer, når $\varphi: Q \to A$ blot er en C^1-afbildning. Vi er her i en situation, der ofte foreligger i differentialgeometrien, nemlig at det „naturlige" bevis for en sætning forudsætter brug af afledede af højere orden end dem, der nødvendigt indgår i sætningen. I det foreliggende tilfælde optrådte de anden afledede af φ ganske vist ikke synligt i beviset, men antagelsen, at φ er en C^2-afbildning, var nødvendig, idet vi uden den ikke kan slutte, at $\omega \circ \varphi$ er en C^1-form med differentialet $(d\omega) \circ \varphi$.

I sådanne tilfælde vælger man ofte at give afkald på at formulere sætningen i dens almindeligste form. I det foreliggende tilfælde kunde vi have nøjedes med at formulere sætningen for C^2-p-flader og vilde da med ① have bevist sætningen. Sætningens rigtighed for C^1-p-flader kan imidlertid godtgøres, idet man approksimerer en vilkårlig C^1-afbildning $\varphi: Q \to A$ med C^2-afbildninger.

Af Bernsteins bevis for Weierstrass' approksimationssætning for funktioner af p variable kan man uddrage, at der for enhver C^1-afbildning $\varphi: Q \to A$ findes en følge af afbildninger $\varphi_n: Q \to A$, hvis koordinatfunktioner er <u>polynomier</u> i $t_1, \ldots, t_p$, således at φ_n og de partielle afledede $\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_p}$ konvergerer ligeligt mod φ og de partielle afledede $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_p}$. Da hvert φ_n er C^2 (nemlig endda C^∞), gælder for den ved φ_n bestemte flade F_n formlen

$$\int_{F_n} d\omega = \int_{\partial F_n} \omega .$$

Af definitionen af fladeintegral ses let, at der, når F betegner den ved Φ bestemte flade, for $n \to \infty$ gælder

$$\int_{F_n} d\omega \to \int_F d\omega \quad \text{og} \quad \int_{\partial F_n} \omega \to \int_{\partial F} \omega .$$

Følgelig gælder den ønskede formel for F.

Ækvivalente flader. To C^1-p-flader F og G i A kaldes ækvivalente, og vi skriver $F \sim G$, hvis det for enhver C^∞-differentialform ω af grad p i A gælder, at

$$\int_F \omega = \int_G \omega .$$

Dette er åbenbart en ækvivalensrelation i gruppen af alle C^1-p-flader i A. For $p=1$ er det den i §8 omtalte ækvivalens af kurver.

Hvis $F \sim G$, gælder $\partial F \sim \partial G$, d.v.s. ækvivalente C^1-p-flader har ækvivalente rande. Thi af hovedsætningen følger, at

$$\int_{\partial F} \omega = \int_{\partial G} \omega$$

for enhver C^1-differentialform ω af grad $p-1$ i A. Heraf kan man slutte, at det samme gælder for enhver C^∞-differentialform ω af grad $p-1$, idet man approksimerer koefficientfunktionerne i normalformen for ω med C^1-funktioner. Hvis A er et afsluttet interval, kan man herbit benytte Weierstrass' approksimationssætning for funktioner af k variable. Hvis A er åben, kan man, idet man ved udregning af integralerne kun har brug for koefficientfunktionerne i en kompakt delmængde af A, foretage en „glatning" derved, at man for et tilstrækkeligt lille a erstatter værdien af hver koefficientfunktion i ethvert punkt x, for hvilket in-

tervallet $\{y \mid \|y-x\| \leq a\}$ tilhører A, med dens middelværdi over dette interval.

I tilfældet $p=2$ fører hovedsætningen til en komplettering af sætning 3 i §8. Thi for en C^1-differentialform af første grad

$$\omega = f_1(x)\,dx_1 + \cdots + f_k(x)\,dx_k$$

er

$$d\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i\,dx_j .$$

Betingelsen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ for alle $i,j \in \{1,\cdots,k\}$ udtrykker altså simpelthen, at $d\omega = 0$. Af denne betingelse følger derfor, at

$$\int_{\partial F} \omega = 0$$

for enhver C^1-2-flade F i A. Sammenholdes dette med sætning 2 i §8 finder vi:

Hvis A har den egenskab, at enhver lukket C^1-kurve i A er ækvivalent med randen af en C^1-2-flade i A, er betingelsen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ for alle $i,j \in \{1,\cdots,k\}$ tilstrækkelig til at sikre, at ω er eksakt.

Hovedsætningen indeholder som specialtilfælde klassiske sætninger om omskrivning af et integral over begrænsningen af en figur til et integral over figuren selv knyttet til navnene Gauss (1813, 1840), Green (1828), Ostrogradskij (1831, 1838), Riemann (1850), Stokes (1854). I sin almindelige form findes sætningen hos Poincaré (1899). Den kaldes ofte den generaliserede Stokes' sætning.

En summarisk behandling af de klassiske sæt-

ninger ud fra hovedsætningen vil blive givet i § 14.

Teorien for alternerende differentialformer er især udviklet af É. Cartan (1869-1951). Den er af fundamental betydning for differentialgeometrien.

Eksakte og lukkede differentialformer. I den videregående teori for alternerende differentialformer indskrænker man sig i almindelighed til betragtning af C^∞-former. En C^∞-form af grad $p \geq 1$ i A kaldes eksakt, hvis der findes en C^∞-form π af grad $p-1$, for hvilken $d\pi = \omega$. En C^∞-form ω kaldes lukket, såfremt $d\omega = 0$ (jfr. definitionen af en lukket flade). Svarende til sætning 3 i § 8 vil vi vise følgende sætning.

En nødvendig betingelse for, at en C^∞-form ω i A af grad $p \geq 1$ er eksakt, er, at den er lukket. Hvis A er et interval, er denne betingelse også tilstrækkelig.

Bevis. ① Hvis ω er eksakt, altså $\omega = d\pi$ for en C^∞-form π af grad $p-1$, er $d\omega = d(d\pi) = 0$ ifølge den i § 9 bevist sætning, at der for enhver C^2-form π gælder $d(d\pi) = 0$.

② Antag nu, at ω er lukket, og at A er et interval. Lad $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0k})$ være et punkt af A. Vi betragter normalfremstillingen

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq k} f_{i_1 \dots i_p} \, dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}$$

og danner ud fra koefficienterne $f_{1 i_2 \dots i_p}$ til de led, der indeholder dx_1, funktionerne

$$g_{1i_2\cdots i_p}(\underline{x}) = \int_{x_{01}}^{x_1} f_{1i_2\cdots i_p}(t_1, x_2, \cdots, x_k)\, dt_1 .$$

Da er

$$\pi_1 = \sum_{1<i_2<\cdots<i_p\leqslant k} g_{1i_2\cdots i_p}\, dx_{i_2}\cdots dx_{i_p}$$

en C^∞-form i A af grad $p-1$, og da $\dfrac{\partial g_{1i_2\cdots i_p}}{\partial x_1} = f_{1i_2\cdots i_p}$, vil $d\pi_1$ indeholde leddene $f_{1i_2\cdots i_p}\, dx_1 dx_{i_2}\cdots dx_{i_p}$ og iøvrigt kun led, i hvilke dx_1 ikke forekommer. Differensen $\omega_1 = \omega - d\pi_1$ har derfor (idet nulled udelades) en normalfremstilling af formen

$$\omega_1 = \omega - d\pi_1 = \sum_{1<i_1<\cdots<i_p\leqslant k} f^1_{i_1\cdots i_p}\, dx_{i_1}\cdots dx_{i_p} .$$

Da $d(d\pi_1) = 0$, har vi $d\omega_1 = d\omega = 0$. Formen ω_1 er altså også lukket. I normalfremstillingen for $d\omega_1$ figurerer imidlertid leddene $\dfrac{\partial f^1_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_1} dx_1 dx_{i_1}\cdots dx_{i_p}$. Disses koefficienter må altså være 0, d.v.s. funktionerne $f^1_{i_1\cdots i_p}$ er alle uafhængige af x_1.

På ω_1 anvender vi nu den samme fremgangsmåde, idet vi ud fra koefficienterne $f^1_{2i_2\cdots i_p}$ til de led, der indeholder dx_2, danner funktionerne

$$g_{2i_2\cdots i_p}(\underline{x}) = \int_{x_{02}}^{x_2} f^1_{2i_2\cdots i_p}(*, t_2, x_3, \cdots, x_k)\, dt_2$$

og med disse som koefficienter formen

$$\pi_2 = \sum_{2<i_2<\cdots<i_p\leqslant k} g_{2i_2\cdots i_p}\, dx_{i_2}\cdots dx_{i_p} .$$

Da er $\omega_2 = \omega_1 - d\pi_2$ en lukket form med en normalfremstilling af formen

$$\omega_2 = \omega_1 - d\pi_2 = \sum_{2<i_1<\cdots<i_p\leqslant k} f^2_{i_1\cdots i_p}\, dx_{i_1}\cdots dx_{i_p} ,$$

i hvilken koefficienterne er uafhængige af x_1 og x_2.

Fortsættes således, når vi efter $k-p+1$ skridt har en form

$$\omega_{k-p+1} = \omega_{k-p} - d\pi_{k-p+1} = \sum_{k-p+1<i_1<\cdots<i_p\leqslant k} f^{k-p+1}_{i_1\cdots i_p}\, dx_{i_1}\cdots dx_{i_p}.$$

En sådan form er 0, idet der ikke kan placeres p forskellige indices i intervallet $k-p+1 < i \leqslant k$. Følgelig er

$$\omega = d\pi_1 + d\pi_2 + \cdots + d\pi_{k-p+1} = d(\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_{k-p+1}).$$

Man bemærker, at beviset er gyldigt både for begrænsede og ubegrænsede intervaller (f.ehs. for $A = \dot{R}^k$).

Af sætningen fremgår, at hvis A er en vilkårlig åben mængde, er enhver lukket C^∞-form ω i A lokalt eksakt, d.v.s. til ethvert punkt af A findes en omegn, hvori ω er eksakt. Spørgsmålet om, under hvilke betingelser man kan slutte, at ω er eksakt, hænger sammen med dybtliggende topologiske problemer, som blev løst af de Rham (1931).

§11. Nogle transformationsgrupper.

Ved siden af det i §8 og §10 indførte algebraisk betonede kurve- og fladebegreb er det hensigtsmæssigt at indføre et geometrisk betonet kurve- og fladebegreb. For dette begreb antager hovedsætningen en for anvendelserne mere bekvem form.

Da kurvebegrebet indgår under begrebet p-dimensional flade for $p=1$, kan vi se bort fra en særskilt behandling af kurvebegrebet. Det bemærkes dog, at det ved en direkte behandling af kurvebegrebet vilde være muligt ved simple midler at behandle ikke blot C^1-kurver, men også C^0-kurver, medens en behandling af C^0-flader fordrer dybtliggende topologiske hjælpemidler. Disse kan undværes i en diskussion af C^1-flader, og da vi i forbindelse med hovedsætningen kun er interesseret i C^1-flader, indskrænker vi os til at behandle sådanne.

Som en forberedelse vil vi diskutere nogle transformationsgrupper.

I rummet $\mathbb{R}^p$ med $\underline{t}=(t_1,\dots,t_p)$ som variabelt punkt betragter vi det afsluttede enhedsinterval $[0,1]\times\cdots\times[0,1]$. Idet vi til afkortning sætter $J=[0,1]$, kan enhedsintervallet i $\mathbb{R}^p$ skrives J^p. Ved et <u>randinterval i J^p af dimension</u> $p-q$ $(1\leqslant q\leqslant p)$ vil vi forstå en delmængde af J^p bestemt ved, at q af koordinaterne $t_1,\dots,t_p$ hver for sig tillægges en af værdierne 0 eller 1. Det $(p-q)$-dimensionale randinterval, der for vilkårlige indbyrdes forskellige $i_1,\dots,i_q\in\{1,\dots,p\}$ og vilkårlige $\delta_1,\dots,\delta_q\in\{0,1\}$ bestemmes ved, at vi sætter $t_{i_1}=\delta_1,\dots,t_{i_q}=\delta_q$, vil vi betegne $J^p_{i_1\delta_1\dots i_q\delta_q}$. Man

ser, at antallet af $(p-q)$-dimensionale randintervaller er $\binom{p}{q}2^q$. Samtlige randintervaller bestemmes ud fra de $2p$ $(p-1)$-dimensionale randintervaller $J^p_{i\delta}$, $i \in \{1,\dots,p\}$, $\delta \in \{0,1\}$, idet der gælder

$$J^p_{i_1\delta_1\cdots i_q\delta_q} = J^p_{i_1\delta_1} \cap \cdots \cap J^p_{i_q\delta_q}.$$

To $(p-1)$-dimensionale randintervaller $J^p_{i\delta}$ og $J^p_{j\varepsilon}$ er disjunkte, hvis og kun hvis $i=j$ og $\delta \neq \varepsilon$; to sådanne $(p-1)$-dimensionale randintervaller kaldes modstående. Hvis $i \neq j$, er fællesmængden $J^p_{i\varepsilon} \cap J^p_{j\varepsilon}$ det $(p-2)$-dimensionale randinterval $J^p_{i\delta j\varepsilon}$; to sådanne $(p-1)$-dimensionale randintervaller kaldes hosliggende.

Transformationsgrupperne Γ_p og Γ_p^+. Med Γ_p betegner vi mængden af bijektive C^1-afbildninger $\underline{\alpha}$ af J^p på sig selv, for hvilke funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}(\underline{t})$ er regulær for ethvert $\underline{t} \in J^p$. Funktionaldeterminanten $\det \underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}(\underline{t})$ er da enten positiv for alle $\underline{t} \in J^p$ eller negativ for alle $\underline{t} \in J^p$. Med Γ_p^+ betegner vi mængden af afbildninger $\underline{\alpha} \in \Gamma_p$, for hvilke funktionaldeterminanten $\det \underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}$ er positiv for alle $\underline{t} \in J^p$, og med Γ_p^- mængden af afbildninger $\underline{\alpha} \in \Gamma_p$, for hvilke funktionaldeterminanten $\det \underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}$ er negativ for alle $\underline{t} \in J^p$.

(1) Γ_p er en transformationsgruppe.

Det er klart, at hvis $\underline{\alpha}$ og $\underline{\beta}$ tilhører Γ_p, vil også $\underline{\beta} \circ \underline{\alpha}$ tilhøre Γ_p. Thi $\underline{\beta} \circ \underline{\alpha}$ er en bijektiv C^1-afbildning af J^p på sig selv, og da $\underline{\underline{D}}(\underline{\beta} \circ \underline{\alpha}) = [(\underline{\underline{D}}\,\underline{\beta}) \circ \underline{\alpha}]\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}$, hvor $(\underline{\underline{D}}\,\underline{\beta}) \circ \underline{\alpha}$ og $\underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}$ er regulære for ethvert $\underline{t} \in J^p$, er $\underline{\underline{D}}(\underline{\beta} \circ \underline{\alpha})$ også regulær for ethvert $\underline{t} \in J^p$.

Vi mangler at vise, at hvis $\underline{\alpha} \in \Gamma_p$, vil også $\underline{\alpha}^{-1}$ tilhøre Γ_p. Dette er ikke en følge af resultaterne i

§5 vedrørende omvendt afbildning, som vedrørte afbildning af åbne mængder, og beviset kræver en direkte betragtning.

Afbildningen $\underline{\alpha}^{-1}$ er som omvendt afbildning af en kontinuert afbildning af en kompakt mængde ligeledes kontinuert. Lad $\underline{t}$ og $\underline{t}+\Delta\underline{t}$ være punkter af J^p og $\underline{u}$ og $\underline{u}+\Delta\underline{u}$ deres billeder ved $\underline{\alpha}$. For $\Delta\underline{t}\to\underline{0}$ gælder da $\Delta\underline{u}\to\underline{0}$ og omvendt. Ifølge Taylors formel har vi

$$\begin{pmatrix}\Delta u_1\\ \vdots\\ \Delta u_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\alpha_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\alpha_1}{\partial t_p}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\alpha_p}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\alpha_p}{\partial t_p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta t_1\\ \vdots\\ \Delta t_p\end{pmatrix},$$

hvor i hver række i matricen $\left[\frac{\partial\alpha_i}{\partial t_j}\right]$ de afledede er taget i et vist punkt $\underline{t}+\theta_i\Delta\underline{t}$, $\theta_i\in]0,1[$. For $\Delta\underline{t}\to\underline{0}$ konvergerer matricen mod den regulære matrix $\underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}(\underline{t})$. Følgelig er matricen regulær, når $\|\Delta\underline{t}\|$ er tilstrækkelig lille, og vi har da

$$\begin{pmatrix}\Delta t_1\\ \vdots\\ \Delta t_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\alpha_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\alpha_1}{\partial t_p}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\alpha_p}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\alpha_p}{\partial t_p}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\Delta u_1\\ \vdots\\ \Delta u_p\end{pmatrix},$$

hvor matricen $\left[\frac{\partial\alpha_i}{\partial t_j}\right]^{-1}$ for $\Delta\underline{t}\to\underline{0}$, d.v.s. for $\Delta\underline{u}\to\underline{0}$, konvergerer mod $(\underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}(\underline{t}))^{-1}$. Dette viser, at $\underline{\alpha}^{-1}$ er en C^1-afbildning med den regulære funktionalmatrix $\underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}^{-1}(\underline{u})=(\underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}(\underline{t}))^{-1}$.

(2) Γ_p^+ er en normal undergruppe i Γ_p med index 2.

Af $\det\underline{\underline{D}}(\underline{\beta}\circ\underline{\alpha})=[(\det\underline{\underline{D}}\,\underline{\beta})\circ\underline{\alpha}]\det\underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}$ følger, at $\underline{\beta}\circ\underline{\alpha}\in\Gamma_p^+$, hvis $\underline{\alpha}$ og $\underline{\beta}$ begge hilhører Γ_p^+ eller begge hilhører Γ_p^-, medens $\underline{\beta}\circ\underline{\alpha}\in\Gamma_p^-$, hvis enten $\underline{\alpha}\in\Gamma_p^+$ og $\underline{\beta}\in\Gamma_p^-$ eller $\underline{\alpha}\in\Gamma_p^-$ og $\underline{\beta}\in\Gamma_p^+$. Af $\det\underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}^{-1}=$

$(\det \underline{D}\underline{\alpha})^{-1} \circ \underline{\alpha}^{-1}$ følger, at $\underline{\alpha} \in \Gamma_p^+$ medfører $\underline{\alpha}^{-1} \in \Gamma_p^+$. Heraf fremgår, at Γ_p^+ er en undergruppe af Γ_p, og at der for ethvert $\underline{\beta} \in \Gamma_p^-$ gælder

$$\{\underline{\beta} \circ \underline{\alpha} \mid \underline{\alpha} \in \Gamma_p^+\} = \{\underline{\alpha} \circ \underline{\beta} \mid \underline{\alpha} \in \Gamma_p^+\} = \Gamma_p^-.$$

Dette viser, at Γ_p^+ er normal og har index 2. De to sideklasser er Γ_p^+ og Γ_p^-.

(3) Ved ethvert $\underline{\alpha} \in \Gamma_p$ afbildes det indre af $\mathcal{J}^p$ på det indre af $\mathcal{J}^p$ og randen af $\mathcal{J}^p$ følgelig på randen af $\mathcal{J}^p$.

Ifølge §5 afbildes det indre af $\mathcal{J}^p$ ved $\underline{\alpha}$ på en åben mængde, altså på en delmængde af det indre af $\mathcal{J}^p$. Da det samme gælder for $\underline{\alpha}^{-1}$, må det indre af $\mathcal{J}^p$ ved $\underline{\alpha}$ afbildes på det indre af $\mathcal{J}^p$.

(4) For ethvert $\underline{\alpha} \in \Gamma_p$ findes en permutation $\varkappa$ af $\{1, \dots, p\}$ og for hvert $i \in \{1, \dots, p\}$ en permutation $\varkappa_i$ af $\{0,1\}$, således at hvert randinterval $\mathcal{J}^p_{i,\delta_1 \dots i_q \delta_q}$ ved $\underline{\alpha}$ afbildes på randintervallet $\mathcal{J}^p_{\varkappa(i_1)\varkappa_{i_1}(\delta_1)\dots\varkappa(i_q)\varkappa_{i_q}(\delta_q)}$.

Det er tilstrækkeligt at vise, at der findes permutationer $\varkappa$ og $\varkappa_i$ således, at ethvert randinterval $\mathcal{J}^p_{i\delta}$ ved $\underline{\alpha}$ afbildes på $\mathcal{J}^p_{\varkappa(i)\varkappa_i(\delta)}$.

[Der findes $p!$ mulige permutationer $\varkappa$ og 2 mulige permutationer $\varkappa_i$ for hvert i. Det giver ialt $p!2^p$ muligheder, der alle kan forekomme. Et givet sæt $\varkappa, \varkappa_1, \dots, \varkappa_p$ fås f. eks. ved for $\underline{\alpha}$ at benytte den afbildning, der bestemmes ved $\alpha_{\varkappa(i)}(\underline{t}) = t_i$, hvis $\varkappa_i$ er den identiske permutation af $\{0,1\}$, og $\alpha_{\varkappa(i)}(\underline{t}) = 1 - t_i$, hvis $\varkappa_i$ er den permutation af $\{0,1\}$, der består i ombytning af 0 og 1 $(i = 1, \dots, p)$.]

Lad os forgivet $i \in \{1,\dots,p\}$ og $\delta \in \{0,1\}$ betragte funktionerne $f_j(t_1,\dots,\overset{i}{\cancel{t}},\dots,t_p) = \alpha_j(t_1,\dots,\delta,\dots,t_p)$, $j \in \{1,\dots,p\}$, på det åbne enhedsinterval $A =]0,1[\times \cdots \times]0,1[$ i R^{p-1}. I ethvert punkt $(t_1,\dots,\overset{i}{\cancel{t}},\dots,t_p) \in A$ har ifølge (3) mindst en af funktionerne f_j enten værdien 0 eller værdien 1. Punktet er da et ekstremumspunkt for f_j, og følgelig er $\frac{\partial f_j}{\partial t_k} = 0$ i punktet for alle $k \neq i$, d.v.s. i punktet $(t_1,\dots,\delta,\dots,t_p)$ er $\frac{\partial \alpha_j}{\partial t_k} = 0$ for alle $k \neq i$. Dette kan kun indtræffe for <u>ét</u> j [idet ellers matricen $\underline{D}\underline{\alpha}$ i $(t_1,\dots,\delta,\dots,t_p)$ havde to lineært afhængige rækker]. Betegnes med $A_{j\varepsilon}$ for $j \in \{1,\dots,p\}$, $\varepsilon \in \{0,1\}$ mængden af punkter i A, for hvilke $f_j(t_1,\dots,\overset{i}{\cancel{t}},\dots,t_p) = \varepsilon$, er mængderne $A_{j\varepsilon}$ således disjunkte mængder med A som foreningsmængde. Da hver af dem er afsluttet relativt til A, slutter vi, at en af dem er A, medens de øvrige er tomme. Lad dette $A_{j\varepsilon}$ være $A_{l\eta}$. Da må $J^p_{i\delta}$ ved $\underline{\alpha}$ afbildes ind i $J^p_{l\eta}$. Anvendes dette på $\underline{\alpha}^{-1}$, ses, at $J^p_{l\eta}$ ved $\underline{\alpha}^{-1}$ afbildes ind i et $J^p_{m\varrho}$, der indeholder $J^p_{i\delta}$ og altså må være $J^p_{i\delta}$. Følgelig afbildes $J^p_{i\delta}$ ved $\underline{\alpha}$ på $J^p_{l\eta}$. To modstående randintervaller J^p_{i0} og J^p_{i1} må afbildes på to disjunkte randintervaller, altså på to modstående. Heraf fremgår påstanden.

(5) I det $\underline{\alpha} \in \Gamma_p$ afbilder $J^p_{i\delta}$ på $J^p_{\varkappa(i)\varkappa_i(\delta)}$, vil der ved $(u_1,\dots,u_p) = (\alpha_1(t_1,\dots,t_p),\dots,\alpha_p(t_1,\dots,t_p))$ gennem indsætning af $t_i = \delta$ være bestemt en bijektiv C^1-afbildning $\underline{\alpha}_{i\delta}$ af J^{p-1} med $(t_1,\dots,\overset{i}{\cancel{t}},\dots,t_p)$ som variabelt punkt på J^{p-1} med $(u_1,\dots,\overset{\varkappa(i)}{\cancel{u}},\dots,u_p)$ som variabelt punkt.

<u>Afbildningen $\underline{\alpha}_{i\delta}$ tilhører gruppen Γ_{p-1}, og det</u>

konstante fortegn for funktionaldeterminanten $\det \underline{\underline{D}}\underline{\alpha}_{i\delta}$ *er bestemt ud fra det konstante fortegn for det* $\underline{\underline{D}}\underline{\alpha}$ *ved formulen*

$$\operatorname{sign} \det \underline{\underline{D}}\underline{\alpha}_{i\delta} = (-1)^{i+\delta+\varkappa(i)+\varkappa_i(\delta)} \operatorname{sign} \det \underline{\underline{D}}\underline{\alpha}.$$

Funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}\underline{\alpha}_{i\delta}$ i et vilkårligt punkt $(t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_p)$ af T^{p-1} er den matrix, der fås af

$$\underline{\underline{D}}\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \alpha_p}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \alpha_p}{\partial t_p} \end{pmatrix}$$

i punktet $(t_1, \cdots, \delta, \cdots, t_p)$ ved at stryge i^{te} søjle og $\varkappa(i)^{te}$ række. Da $\alpha_{\varkappa(i)}(t_1, \cdots, t_p)$ er konstant i $T^p_{i\delta}$, er alle elementer i $\varkappa(i)^{te}$ række med søjlenummer $\neq i$ lig med 0. Da matricen er regulær, må dette element $\frac{\partial \alpha_{\varkappa(i)}}{\partial t_i}$ være $\neq 0$. Udregnes determinanten ved opløsning efter $\varkappa(i)^{te}$ række, fås

$$\det \underline{\underline{D}}\underline{\alpha} = (-1)^{i+\varkappa(i)} \frac{\partial \alpha_{\varkappa(i)}}{\partial t_i} \det \underline{\underline{D}}\underline{\alpha}_{i\delta}.$$

Heraf ses, at $\det \underline{\underline{D}}\underline{\alpha}_{i\delta} \neq 0$. Altså er $\underline{\underline{D}}\underline{\alpha}_{i\delta}$ regulær, d.v.s. $\underline{\alpha}_{i\delta} \in T_{p-1}$. Den påståede forlegnsregel fremgår nu af, at

$$\operatorname{sign} \frac{\partial \alpha_{\varkappa(i)}}{\partial t_i} = (-1)^{\delta+\varkappa_i(\delta)}.$$

Dette fremgår af, at $\alpha_{\varkappa(i)}$, betragtet som funktion af t_i for givet $(t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_p)$, for $t_i = \delta$ har værdien $\varkappa_i(\delta)$, idet man betragter de fire muligheder $(\delta, \varkappa_i(\delta)) = (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$.

§ 12. C^1-p-celler i $\dot{R}^k$.

For fastholdt k betegner vi med $\mathfrak{Q}_p$ for et vilkårligt $p>0$ mængden af injektive C^1-afbildninger $\underline{x}=\underline{\varphi}(\underline{t})$: $\mathcal{J}^p \to \dot{R}^k$ af enhedsintervallet $\mathcal{J}^p=[0,1]\times\cdots\times[0,1]$ i $\dot{R}^p$ ind i $\dot{R}^k$, for hvilke funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}$ for ethvert $\underline{t}\in\mathcal{J}^p$ har rangen p. Da $\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}$ er en $k\times p$ matrix og altså højst har rangen k, er $\mathfrak{Q}_p$ tom, hvis $p>k$. Vi antager derfor i det følgende stedse, at $1\leqslant p\leqslant k$.

Hvis $\underline{\varphi}\in\mathfrak{Q}_p$, og $\underline{\alpha}$ er en afbildning i gruppen Γ_p, vil den sammensatte afbildning $\underline{\psi}=\underline{\varphi}\circ\underline{\alpha}$ ligeledes tilhøre $\mathfrak{Q}_p$. Thi $\underline{\psi}$ er åbenbart en injektiv C^1-afbildning af $\mathcal{J}^p$ ind i $\dot{R}^k$, og vi har $\underline{\underline{D}}\,\underline{\psi}=[(\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi})\circ\underline{\alpha}]\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}$, hvor $(\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi})\circ\underline{\alpha}$ har rangen p og $\underline{\underline{D}}\,\underline{\alpha}$ er en regulær $p\times p$ matrix, hvilket medfører, at $\underline{\underline{D}}\,\underline{\psi}$ har rangen p.

[Ved matrixmultiplikation gælder om rangen, at når $\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$, er rangen af $\underline{\underline{C}}$ højst lig den mindste af rangene for $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$. Dette følger let af, at rangen for en matrix er dimensionen af billedrummet ved den tilsvarende lineære afbildning. Hvis $\underline{\underline{B}}$ er kvadratisk og regulær, har vi tillige $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}^{-1}$ og slutter derfor, at $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{C}}$ har samme rang.]

En afbildning $\varphi\in\mathfrak{Q}_p$ kaldes <u>ækvivalent</u> med en afbildning $\underline{\psi}\in\mathfrak{Q}_p$ <u>modulo</u> Γ_p, hvis der findes en afbildning $\underline{\alpha}\in\Gamma_p$, således at $\underline{\psi}=\underline{\varphi}\circ\underline{\alpha}$. Dette er åbenbart en ækvivalensrelation i $\mathfrak{Q}_p$.

<u>For to afbildninger</u> $\underline{\varphi}\in\mathfrak{Q}_p$ $(1\leqslant p\leqslant k)$ <u>og</u> $\underline{\psi}\in\mathfrak{Q}_q$ $(1\leqslant q\leqslant k)$ <u>er billederne</u> $\underline{\varphi}(\mathcal{J}^p)$ <u>og</u> $\underline{\psi}(\mathcal{J}^q)$ <u>samme</u>

mængde F i R^k, hvis og kun hvis $q=p$ og φ er ækvivalent med ψ modulo Γ_p.

Bevis. (1) Det er klart, at hvis $q=p$ og φ er ækvivalent med ψ modulo Γ_p, er $\varphi(J^p)=\psi(J^p)$.

(2) Lad os nu antage, at $\varphi(J^p)=\psi(J^q)=F$. Afbildningen $\varphi^{-1}: F\to J^p$ er som omvendt afbildning af en kontinuert afbildning af en kompakt mængde ligeledes kontinuert. Den bijektive afbildning $\alpha=\varphi^{-1}\circ\psi: J^q\to J^p$ er derfor sikkert kontinuert. For nu først at vise, at α er C^1, betragter vi punkter u og $u+\Delta u$ i J^q og deres tilsvarende t og $t+\Delta t$ i J^p og x og $x+\Delta x$ i F. For $\Delta t\to 0$ gælder $\Delta u\to 0$ og omvendt. Ifølge Taylors formel har vi

$$\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \vdots\\ \Delta x_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}&\cdots&\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_p}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial t_1}&\cdots&\frac{\partial\varphi_k}{\partial t_p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta t_1\\ \vdots\\ \Delta t_p\end{pmatrix}\quad\text{og}\quad\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \vdots\\ \Delta x_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial u_1}&\cdots&\frac{\partial\psi_1}{\partial u_q}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial\psi_k}{\partial u_1}&\cdots&\frac{\partial\psi_k}{\partial u_q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta u_1\\ \vdots\\ \Delta u_q\end{pmatrix},$$

hvor i hver række i matricen $\left[\frac{\partial\varphi_h}{\partial t_i}\right]$ de afledede er taget i et punkt $t+\theta_h\Delta t$, $\theta_h\in]0,1[$, og i hver række i matricen $\left[\frac{\partial\psi_h}{\partial u_j}\right]$ de afledede er taget i et punkt $u+\eta_h\Delta u$, $\eta_h\in]0,1[$. For $\Delta t\to 0$ konvergerer de to matricer mod $D\varphi(t)$ og $D\psi(u)$. Da $D\varphi(t)$ har rangen p for ethvert $t\in J^p$, vil der til ethvert punkt $t_0\in J^p$ findes en omegn $T=\{t\mid\|t-t_0\|<a\}$ og rækkenumre $h_1,\dots,h_p$, således at de tilsvarende rækker i matricen $\left[\frac{\partial\varphi_h}{\partial t_i}\right]$ er lineært uafhængige uanset i hvilke punkter af T, de afledede tages. Vælges u og $u+\Delta u$ i den tilsvarende omegn $U=\alpha^{-1}(T)$ af $u_0=\alpha^{-1}(t_0)$, får vi, idet vi kun gør brug af de i ovenstående

matrixligninger indeholdte udtryk for $\Delta x_{h_1}, \dots, \Delta x_{h_p}$

$$\begin{pmatrix} \Delta t_1 \\ \vdots \\ \Delta t_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{h_1}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{h_1}}{\partial t_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{h_p}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{h_p}}{\partial t_p} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_{h_1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{h_1}}{\partial u_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_{h_p}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{h_p}}{\partial u_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_q \end{pmatrix}.$$

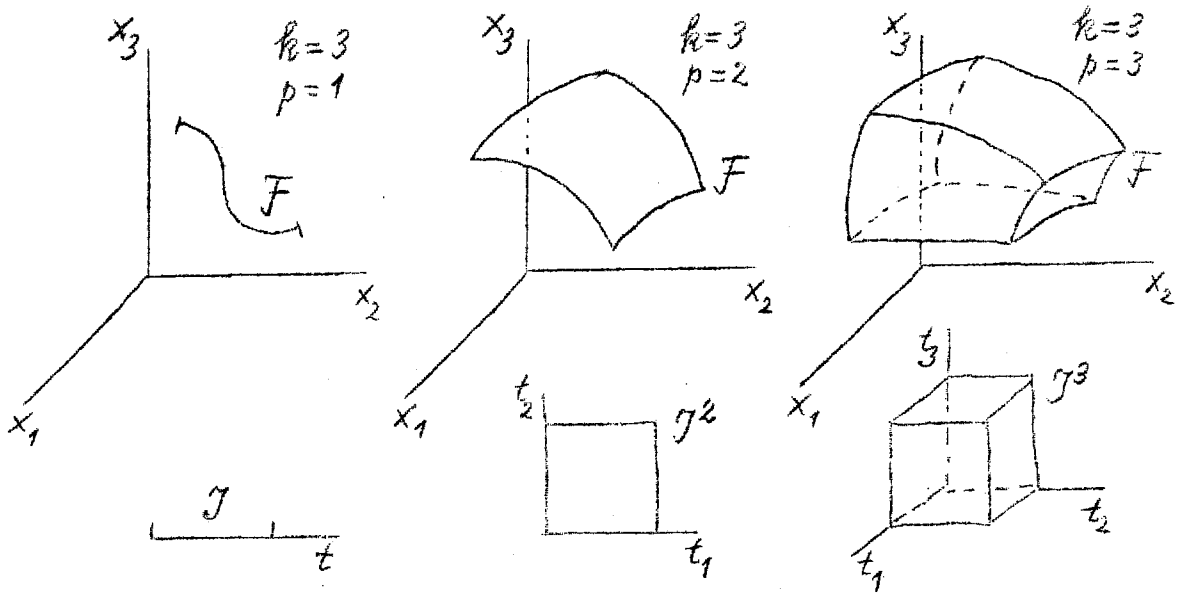
Her konvergerer for $\Delta \underline{u} \to \underline{0}$ de optrædende afledede mod værdierne af disse afledede i $\underline{t}$, resp. $\underline{u}$, og produktet af de to matricer altså mod $p \times q$ matricen

$$\frac{\partial(\varphi_{h_1}, \dots, \varphi_{h_p})}{\partial(t_1, \dots, t_p)}^{-1} \quad \frac{\partial(\psi_{h_1}, \dots, \psi_{h_p})}{\partial(u_1, \dots, u_q)}.$$

Dette viser, at $\underline{\alpha}$ i punktet $\underline{u}$ er differentiabel med denne matrix som funktionalmatrix. Da elementerne i denne matrix er kontinuerte funktioner på U, er $\underline{\alpha}$ en C^1-afbildning af $\mathcal{J}^q$ på $\mathcal{J}^p$.

Ved bogstavombytning ses, at $\underline{\alpha}^{-1} = \underline{\psi}^{-1} \circ \underline{\varphi}$ er en C^1-afbildning af $\mathcal{J}^p$ på $\mathcal{J}^q$. Da $\underline{\alpha}^{-1} \circ \underline{\alpha}$ er den identiske afbildning af $\mathcal{J}^q$ på sig selv, hvis funktionalmatrix er $q \times q$ enhedsmatricen $\underline{\underline{E}}$, har vi $[(\underline{\underline{D}}\, \underline{\alpha}^{-1}) \circ \underline{\alpha}]\, \underline{\underline{D}}\, \underline{\alpha} = \underline{\underline{E}}$. Altså har $\underline{\underline{D}}\, \underline{\alpha}$ for ethvert $\underline{u} \in \mathcal{J}^q$ mindst rangen q. Da $\underline{\underline{D}}\, \underline{\alpha}$ er en $p \times q$ matrix, medfører dette, at $p \geq q$, og at $\underline{\underline{D}}\, \underline{\alpha}$ for ethvert $\underline{u} \in \mathcal{J}^q$ har rangen q. Ved bogstavombytning ses, at $q \geq p$. Altså er $q = p$, og $\underline{\underline{D}}\, \underline{\alpha}$ er en $p \times p$ matrix af rang p for ethvert $\underline{u} \in \mathcal{J}^p$. Altså hilhører $\underline{\alpha}$ gruppen Γ_p.

I tilknytning til denne sætning definerer vi nu en C^1-p-<u>celle</u> F <u>i</u> $\bar{R}^k$ som <u>en punktmængde</u> F <u>i</u> $\bar{R}^k$, <u>der er billede af</u> $\mathcal{J}^p$ <u>ved en afbildning</u> $\varphi \in \mathfrak{G}_p$. Sætningen viser da, at en punktmængde F i $\bar{R}^k$



er C^1-p-celle for højst et p, og at for enhver C^1-p-celle F i $\dot{R}^k$ samtlige afbildninger $\varphi \in \Omega_p$, for hvilke $F = \varphi(J^p)$, udgør en ækvivalensklasse i Ω_p modulo Γ_p. Hver sådan afbildning φ siges at bestemme en tilladt parameterfremstilling $\underline{x} = \varphi(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^p$, af C^1-p-cellen F.

En C^1-0-celle i $\dot{R}^k$ defineres simpelthen som en mængde bestående af eet punkt. Tilføjelsen C^1- er naturligvis her uden indhold.

Enhver C^1-p-celle F i $\dot{R}^k$ er en kompakt punktmængde, altså specielt Lebesgue målelig.

For enhver tilladt parameterfremstilling $\underline{x} = \varphi(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^p$, af en C^1-p-celle F i $\dot{R}^k$ er billedet af ethvert $(p-q)$-dimensionalt randinterval af J^p en C^1-$(p-q)$-celle.

For to tilladte parameterfremstillinger $\underline{x} = \varphi(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^p$, og $\underline{x} = \psi(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^p$, af samme C^1-p-celle F findes en permutation $\varkappa$ af $\{1, \dots, p\}$ og for hvert $i \in \{1, \dots, p\}$ en permutation $\varkappa_i$ af $\{0, 1\}$, således at $\psi(J^p_{i_1\delta_1 \dots i_q\delta_q}) = \varphi(J^p_{\varkappa(i_1)\varkappa_{i_1}(\delta_1) \cdots \varkappa(i_q)\varkappa_{i_q}(\delta_q)})$.

Bevis. Den ved indsætning af $t_{i_1} = \delta_1, \dots, t_{i_q} = \delta_q$ i $\underline{\varphi}(\underline{t})$ bestemte afbildning $\underline{\varphi}_{i_1 \delta_1 \dots i_q \delta_q}$ af J^{p-q} tilhører åbenbart $\mathfrak{L}_{p-q}$, og $\underline{\varphi}(J^p_{i_1 \delta_1 \dots i_q \delta_q}) = \underline{\varphi}_{i_1 \delta_1 \dots i_q \delta_q}(J^{p-q})$. Dermed er sætningens første del godtgjort. Sætningens anden del fremgår af (4) i § 11, idet $\Psi = \underline{\varphi} \circ \underline{\alpha}$, hvor $\underline{\alpha} \in \Gamma_p$.

De omhandlede C^1-$(p-q)$-celler, der ifølge sætningen er de samme for alle tilladte parameterfremstillinger, kaldes $(p-q)$-<u>randcellerne</u> for F. To disjunkte $(p-1)$-randceller kaldes modstående, to ikke disjunkte hosliggende.

<u>Enhver</u> C^1-p-<u>celle</u> F <u>i</u> $\dot{R}^k$ <u>med</u> $p < k$ <u>har målet</u> 0.

Bevis. Lad $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^p$, være en tilladt parameterfremstilling for F. Vi sætter

$$\max_{\substack{h=1,\dots,k \\ i=1,\dots,p}} \left\{ \sup_{\underline{t} \in J^p} \left| \frac{\partial \varphi_h}{\partial t_i} \right| \right\} = C.$$

For vilkårlige punkter $\underline{t}_0$ og $\underline{t}_1$ i J^p gælder ifølge Taylors formel

$$\varphi_h(\underline{t}_1) - \varphi_h(\underline{t}_0) = \frac{\partial \varphi_h}{\partial t_1}(t_{11} - t_{01}) + \dots + \frac{\partial \varphi_h}{\partial t_p}(t_{1p} - t_{0p}),$$

hvor de afledede skal tages i et punkt $\underline{t}_0 + \theta(\underline{t}_1 - \underline{t}_0)$, $\theta \in]0,1[$. Følgelig er

$$\| \underline{\varphi}(\underline{t}_1) - \underline{\varphi}(\underline{t}_0) \| \leqslant pC \| \underline{t}_1 - \underline{t}_0 \|.$$

For et vilkårligt n betragter vi nu de n^p intervaller $[(k_1 - 1)n^{-1}, k_1 n^{-1}] \times \dots \times [(k_p - 1)n^{-1}, k_p n^{-1}]$, hvor $k_1, \dots, k_p \in \{1, \dots, n\}$. For to punkter $\underline{t}_0$ og $\underline{t}_1$ i samme interval gælder da $\| \underline{\varphi}(\underline{t}_1) - \underline{\varphi}(\underline{t}_0) \| \leqslant pC n^{-1}$. Billedet af hvert interval ved $\underline{\varphi}$ er derfor indeholdt i et inter-

val i $\grave{R}^k$, hvis kantlængder alle er $\leqslant pCn^{-1}$. Følgelig kan F overdækkes af n^p sådanne intervaller. For målet $m(F)$ gælder derfor

$$m(F) \leqslant n^p (pCn^{-1})^k = (pC)^k n^{p-k}.$$

Da $p<k$, konvergerer højre side for $n \to \infty$ mod 0. Følgelig er $m(F)=0$.

Heraf fremgår specielt, at en C^1-p-celle med $p<k$ ikke kan have indre punkter. Dens rand i mængdeteoretisk betydning er derfor mængden selv.

<u>For en C^1-k-celle F i $\grave{R}^k$ er randen i mængdeteoretisk betydning foreningsmængden af dens $2k$ $(k-1)$-randceller.</u>

Bevis. For en tilladt parameterfremstilling $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^k$, af F er $\underline{D}\,\underline{\varphi}$ en $k \times k$ matrix af rang k, altså regulær for alle $\underline{t} \in J^k$. Ifølge § 5 afbildes derfor det indre af J^k ved $\underline{\varphi}$ på en åben mængde, altså på en delmængde af det indre af F. Vi skal vise, at det indre af J^k afbilder på det indre af F. Da vil randen af F i mængdeteoretisk betydning være billedet ved $\underline{\varphi}$ af randen af J^k, altså foreningsmængden af de $2k$ $(k-1)$-randceller.

Afbildningen $\underline{\varphi}^{-1}: F \to J^k$ er sikkert kontinuert. Lad $\underline{t}$ og $\underline{t}+\Delta\underline{t}$ være punkter af J^k og $\underline{x}$ og $\underline{x}+\Delta\underline{x}$ de tilsvarende i F. For $\Delta\underline{t} \to \underline{0}$ gælder da $\Delta\underline{x} \to \underline{0}$ og omvendt. Ifølge Taylors formel er

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_1 \\ \vdots \\ \Delta t_k \end{pmatrix},$$

hvor i hver række af matricen $\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i}\right]$ de afledede er taget i et punkt $\underline{t} + \theta_k \Delta \underline{t}$, $\theta_k \in]0,1[$. For $\Delta \underline{t} \to \underline{0}$ konvergerer matricen mod den regulære matrix $\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{t})$. Følgelig er matricen regulær, når $\|\Delta \underline{t}\|$ er tilstrækkelig lille, og vi har da

$$\begin{pmatrix} \Delta t_1 \\ \vdots \\ \Delta t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_k} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_k \end{pmatrix},$$

hvor matricen $\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i}\right]^{-1}$ for $\Delta \underline{t} \to \underline{0}$, d. v. s. for $\Delta \underline{x} \to \underline{0}$, konvergerer mod $(\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{t}))^{-1}$. Hvis $\underline{x}$ er et indre punkt af F viser dette, at $\underline{\varphi}^{-1}$ er differentiabel i $\underline{x}$ med funktionalmatricen $(\underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{t}))^{-1}$. Afbildningen $\underline{\varphi}^{-1}$ er altså C^1 i det indre af F med regulær funktionalmatrix og afbilder altså det indre af F på en åben mængde, altså på en delmængde af det indre af J^k. Dermed er godtgjort, at $\underline{\varphi}$ afbilder det indre af J^k på det indre af F.

Af de to foregående sætninger fremgår, at randen i mængdeteoretisk betydning af enhver C^1-p-celle i $\grave{R}^k$ har målet 0. Enhver C^1-p-celle er således Riemann målelig.

<u>For enhver kontinuert funktion $f: F \to \grave{R}$ på en C^1-k-celle F i $\grave{R}^k$ gælder, når $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^k$, er en tilladt parameterfremstilling for F, at</u>

$$\int_F f(\underline{x})\, dx_1 \cdots dx_k = \int_{J^k} f \circ \underline{\varphi}(\underline{t}) \left|\det \underline{\underline{D}}\,\underline{\varphi}(\underline{t})\right| dt_1 \cdots dt_k.$$

Bevis. Da randen af F i mængdeteoretisk betydning har målet 0, kan vi i integralet over F se

bort fra den, og formlen fremgår derfor af integraltransformationsformlen i §6, idet man anvender den på det indre af F og J^k.

Vi vil nu i mængden $\mathfrak{A}_p$ for et vilkårligt $p \in \{1, \cdots, k\}$ indføre en anden ækvivalensrelation end ækvivalens modulo Γ_p. En afbildning $\varphi \in \mathfrak{A}_p$ kaldes ækvivalent med en afbildning $\psi \in \mathfrak{A}_p$ <u>modulo</u> Γ_p^+, hvis der findes en afbildning $\underline{\alpha} \in \Gamma_p^+$, således at $\psi = \varphi \circ \underline{\alpha}$. Dette er åbenbart også en ækvivalensrelation i $\mathfrak{A}_p$. Enhver ækvivalensklasse modulo Γ_p består af netop to ækvivalensklasser modulo Γ_p^+. Dette betyder, at for hver C^1-p-celle F i R^k vil mængden af de afbildninger $\varphi \in \mathfrak{A}_p$, for hvilke $\varphi(J^p) = F$, bestå af to ækvivalensklasser modulo Γ_p^+. To sådanne afbildninger φ og ψ hører til samme klasse, hvis $\psi = \varphi \circ \underline{\alpha}$, hvor $\underline{\alpha} \in \Gamma_p^+$, og til forskellig klasse, hvis $\psi = \varphi \circ \underline{\alpha}$, hvor $\underline{\alpha} \in \Gamma_p^-$. Vi siger, at hver af disse klasser bestemmer en <u>orientering</u> af F. Vælger vi en bestemt af de to klasser, således at vi nøjes med at betragte parameterfremstillinger $\underline{x} = \varphi(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^p$, hvor φ tilhører denne klasse, siger vi, at F derved er blevet en <u>orienteret</u> C^1-p-<u>celle</u> $\vec{F}$. Den ved den anden klasse bestemte orienterede C^1-p-celle betegnes da $-\vec{F}$. De to orienteringer kaldes modsatte.

Ved en tilladt parameterfremstilling $\underline{x} = \varphi(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^p$, for en orienteret C^1-p-celle $\vec{F}$ forstås naturligvis en parameterfremstilling fra den klasse, der bestemmer orienteringen.

For en C^1-p-celle F med $p < k$ har man intet grundlag for at foretrække den ene orientering for den anden. For en C^1-k-celle kan vi gøre det. Thi for en afbildning $\varphi \in \mathfrak{A}_k$ er funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}\,\varphi$ jo en $k \times k$ matrix af rang k, altså en regulær matrix. Funktionaldeterminanten $\det \underline{\underline{D}}\,\varphi$ har derfor konstant fortegn. For to afbildninger $\varphi \in \mathfrak{A}_k$ og $\Psi \in \mathfrak{A}_k$, der bestemmer samme C^1-k-celle F, har determinanten samme eller modsat fortegn, efterson φ er ækvivalent med Ψ modulo Γ_k^+ eller ikke. [Thi $\Psi = \varphi \circ \alpha$ medfører $\det \underline{\underline{D}}\,\Psi = [(\det \underline{\underline{D}}\,\varphi) \circ \alpha] \det \underline{\underline{D}}\,\alpha$.] De to klasser, der bestemmer orienteringerne af F, er derfor karakteriseret gennem fortegnet af $\det \underline{\underline{D}}\,\varphi$. Vi siger, at F er <u>positivt orienteret</u> ved klassen af afbildninger, for hvilke $\det \underline{\underline{D}}\,\varphi$ er positiv, og <u>negativt orienteret</u> ved klassen af afbildninger, for hvilke $\det \underline{\underline{D}}\,\varphi$ er negativ, og knytter betegnelserne F^+ og F^- til den positivt og negativt orienterede C^1-k-celle F. Betegnelsen $\vec{F}$ kan benyttes både for den positivt og for den negativt orienterede celle.

Ved en orienteret C^1-0-celle vil vi simpelthen forstå en punktmængde F bestående af eet punkt $\underline{x}$ forsynet med et fortegn. En orienteret C^1-0-celle skrives F^+ eller F^- eller blot $\underline{x}^+$ eller $\underline{x}^-$. Betegnelsen $\vec{F}$ kan benyttes både for den ved fortegnet + og for den ved fortegnet − orienterede celle.

Vi vil nu fastsætte en vedtægt, hvorefter <u>en orientering af en C^1-p-celle F med $p \geq 1$ inducerer en bestemt orientering i hver af dens $(p-1)$-rand-</u>

eller. Vedtægten har den egenskab, at den modsatte orientering af F inducerer den modsatte orientering af hver $(p-1)$-randcelle. Vi går således frem:

For en vilkårlig tilladt parameterfremstilling $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^p$, af F betragtes afbildningerne $\varphi_{i\delta}$. Idet vi betegner de ved disse bestemte orienterede C^1-$(p-1)$-celler med $\vec{F}_{i\delta}$, betragter vi sættet

$$(\#) \quad -\vec{F}_{10},\ \vec{F}_{11},\ \vec{F}_{20},\ -\vec{F}_{21},\ \dots,\ (-1)^p \vec{F}_{p0},\ (-1)^{p+1} \vec{F}_{p1}.$$

For en anden tilladt parameterfremstilling $\underline{x} = \underline{\psi}(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^p$, af F betragtes analogt afbildningerne $\psi_{i\delta}$. De ved disse bestemte orienterede C^1-$(p-1)$-celler betegnes $\vec{G}_{i\delta}$, og vi betragter sættet

$$(*) \quad -\vec{G}_{10},\ \vec{G}_{11},\ \vec{G}_{20},\ -\vec{G}_{21},\ \dots,\ (-1)^p \vec{G}_{p0},\ (-1)^{p+1} \vec{G}_{p1}.$$

Vi vil vise, at $(\#)$ og $(*)$ på nær rækkefølgen er samme sæt, hvis φ og ψ bestemmer samme orientering af F, og modsatte sæt, hvis φ og ψ bestemmer modsatte orienteringer af F.

Vedtægten består nu deri, at vi for en orienteret C^1-p-celle $\vec{F}$ orienterer $(p-1)$-randcellerne på basis af den angivne fortegnskonvention ud fra de tilladte parameterfremstillinger for $\vec{F}$, der efter det anførte alle giver samme resultat. Anvendt på den modsat orienterede celle $-\vec{F}$ giver vedtægten efter det anførte de modsatte orienteringer af $(p-1)$-randcellerne.

Vi har $\underline{\psi} = \underline{\varphi} \circ \underline{\alpha}$, hvor $\underline{\alpha} \in \Gamma_p$. Til $\underline{\alpha}$ hører en permutation π af $\{1, \dots, p\}$ og for hvert $i \in \{1, \dots, p\}$

en permutation x_i af $\{0,1\}$, således at $\underline{\alpha}(J^p_{i\delta}) = J^p_{x(i)\,x_i(\delta)}$ og følgelig $\mathcal{G}_{i\delta} = \mathcal{F}_{x(i)\,x_i(\delta)}$. Nu er $\Psi_{i\delta} = \mathcal{L}_{x(i)\,x_i(\delta)} \circ \underline{\alpha}_{i\delta}$ og følgelig

$$\vec{\mathcal{G}}_{i\delta} = \text{sign det } \underline{D}\underline{\alpha}_{i\delta}\, \vec{\mathcal{F}}_{x(i)\,x_i(\delta)},$$

hvoraf under brug af (5) i § 11

$$(-1)^{i+\delta}\vec{\mathcal{G}}_{i\delta} = \text{sign det } \underline{D}\underline{\alpha}\,(-1)^{x(i)+x_i(\delta)}\vec{\mathcal{F}}_{x(i)\,x_i(\delta)}.$$

Dette viser, at cellen optræder i (※) med samme eller modsat orientering som i (#), eftersom $\underline{\alpha} \in \Gamma^+_p$ eller $\underline{\alpha} \in \Gamma^-_p$, hvilket er det, vi skulde vise.

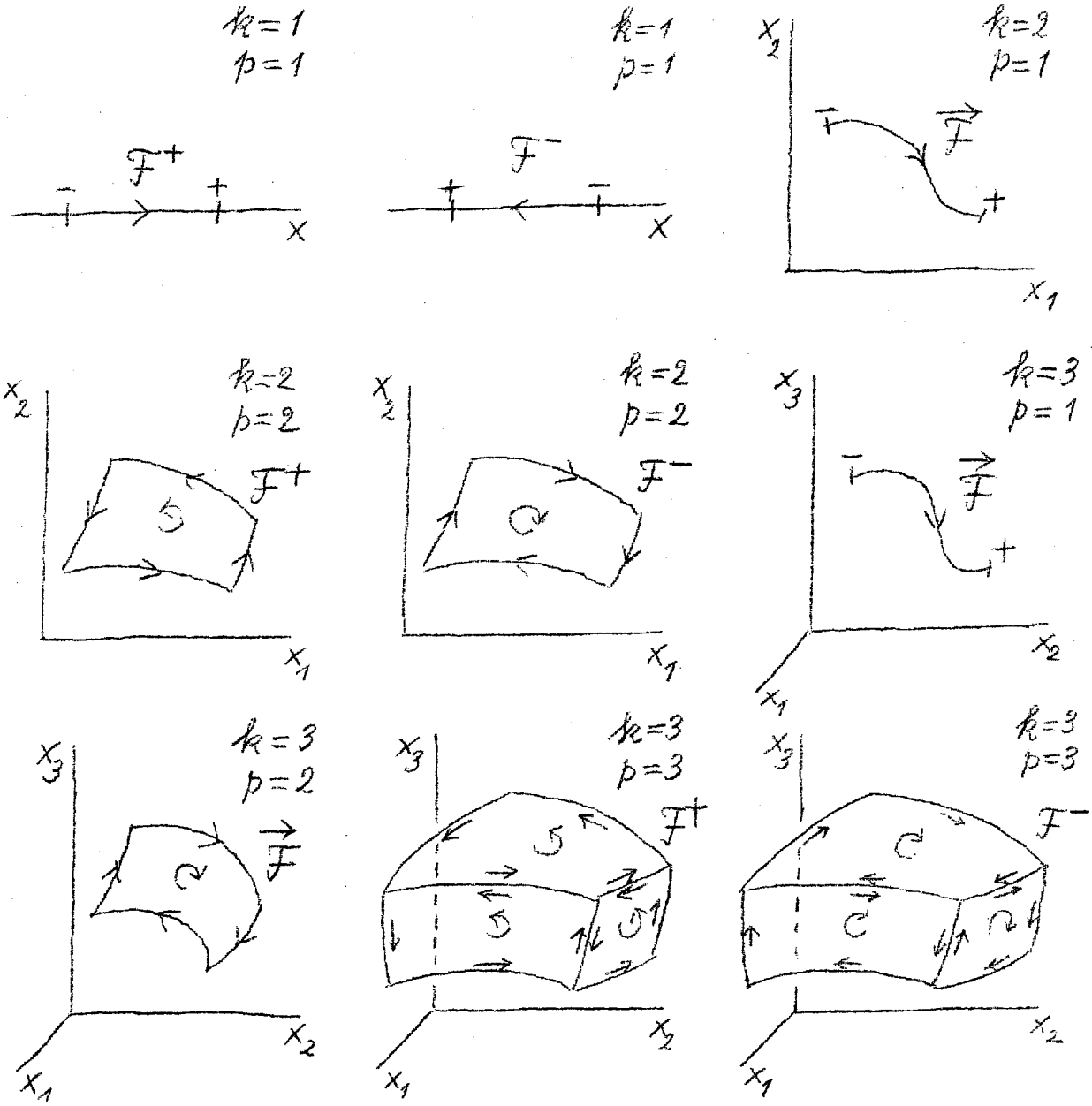
For $p=1$ skal ovenstående opfattes således, at når en C^1-1-celle $\mathcal{F}$ er orienteret ved en parameterfremstilling $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$, $t \in [0,1]$, skal de orienterede randceller i $\vec{\mathcal{F}}$ være $\underline{\varphi}(0)^-$ og $\underline{\varphi}(1)^+$. At to parameterfremstillinger for $\mathcal{F}$ giver samme eller modsat orientering af randcellerne, eftersom de bestemmer samme eller modsat orientering af $\mathcal{F}$, er i dette tilfælde indlysende.

<u>I en orienteret C^1-p-celle $\vec{\mathcal{F}}$ med $p \geqslant 2$ vil orienteringerne af de to $(p-1)$-randceller, der indeholder en vilkårlig $(p-2)$-randcelle, inducere modsatte orienteringer af denne.</u>

Bevis. Lad $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^p$, være en tilladt parameterfremstilling for $\vec{\mathcal{F}}$, og lad os betragte $(p-2)$-randcellen $\mathcal{F}_{i\delta j\varepsilon}$ bestemt ved den afbildning $\mathcal{L}_{i\delta j\varepsilon}$, der fås af φ ved at sætte $t_i = \delta$ og $t_j = \varepsilon$. Med den ved denne afbildning bestemte orientering betegn-

nes ellers $\vec{F}_{i\delta j\varepsilon}$. Som orienteret randcelle i $(-1)^{i+\delta}\vec{F}_{i\delta}$ vil den optræde som $(-1)^{i+\delta}(-1)^{j+\varepsilon}\,\mathrm{sign}(i-j)\,\vec{F}_{i\delta j\varepsilon}$ [idet j i sættet $(1,\dots,\not{j},\dots,p)$ har j^{te} plads, hvis $j<i$, men $(j-1)^{te}$ plads, hvis $j>i$]. Som orienteret randcelle i $(-1)^{j+\varepsilon}\vec{F}_{j\varepsilon}$ vil den optræde som $(-1)^{j+\varepsilon}(-1)^{i+\delta}\,\mathrm{sign}(j-i)\,\vec{F}_{i\delta j\varepsilon}$ [idet i i sættet $(1,\dots,\not{i},\dots,p)$ har i^{te} plads, hvis $i<j$, men $(i-1)^{te}$ plads, hvis $i>j$]. Den optræder altså med modsat orientering i de to tilfælde.

På figurer angives orientering ved pile som følger:



§13. C^1-p-<u>cellekompleksen i</u> $\grave{R}^k$.

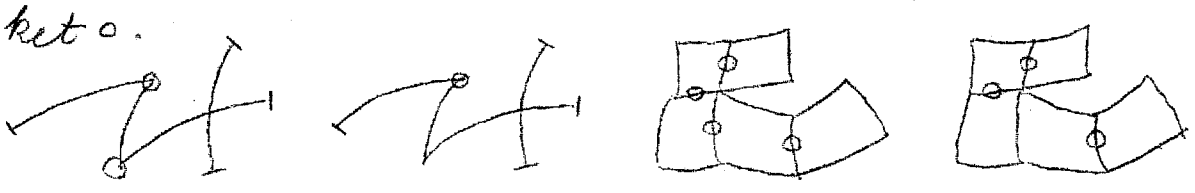
Ud fra begrebet celle kan vi nu indføre det geometrisk betonede kurve- og fladebegreb. For at undgå sammenblanding med det i §8 og §10 indførte algebraisk betonede kurve- og fladebegreb vælger vi en særlig benævnelse.

Ved et C^1-p-<u>cellekompleks</u> F i $\grave{R}^k$ vil vi forstå en endelig mængde af C^1-p-celler $F_1, \dots, F_n$ i forbindelse med en sammenføjningsforskrift. Samme celle må gerne forekomme flere gange i mængden. Ved en sammenføjningsforskrift menes følgende. Man skal betragte alle tilfælde, i hvilke to celler F_i og F_j $(i \neq j)$ har en $(p-1)$-randcelle G fælles. Blandt disse skal nogle tilfælde (evt. alle, evt. ingen) være udvalgt, hvilket udtrykkes ved at sige, at F_i og F_j er sammenføjede langs G. Enhver celle i mængden må langs hver af sine $(p-1)$-randceller være sammenføjet med højst een celle i mængden.

Et C^1-p-cellekompleks kan bestå af ingen celler; vi skriver da $F = 0$.

Et C^1-0-cellekompleks er simpelthen en endelig mængde af punkter $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ (i hvilken samme punkt kan forekomme flere gange); her kommer sammenføjning ikke på tale.

<u>Eks. 1</u>. Figurerne viser nogle C^1-1- og C^1-2-cellekomplekser. Sammenføjning er angivet ved, at de C^1-0-, resp. C^1-1-, celler, langs hvilke sammenføjning er sket, er mærket $\circ$.



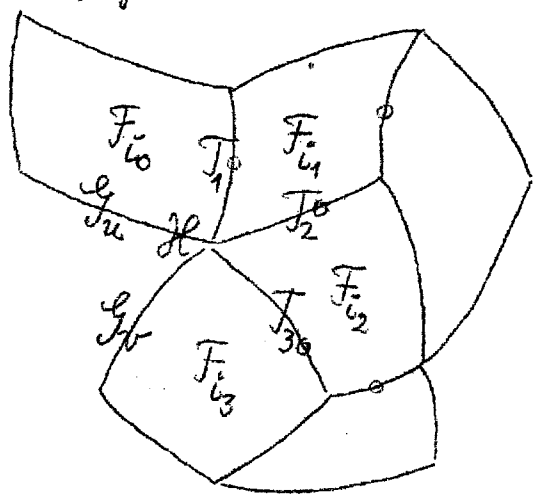
Vi vil nu definere <u>randen</u> ∂F af et C^1-p-cellekompleks F. Vi benytter samme betegnelse som tidligere, men det drejer sig naturligvis nu om et nyt begreb.

For $p=0$, hvor F er en mængde af (ikke nødvendigvis indbyrdes forskellige) punkter $x_1, \dots, x_n$, skal ∂F være tallet 0, hvis n er lige, og tallet 1, hvis n er ulige.

For $p=1$, hvor F er en mængde af C^1-1-celler $F_1, \dots, F_n$ med en sammenføjningsforskrift, skal ∂F være mængden af de 0-randceller af disse, i hvilke de ikke er sammenføjede. Et punkt $\underline{x}$ vil derfor figurere i ∂F så ofte, som det er 0-randcelle for en celle F_i uden at denne i $\underline{x}$ er sammenføjet med en celle F_j. Man ser, at antallet af punkter i ∂F er $2n-2h$, hvis h er antallet af sammenføjninger. Følgelig er $\partial(\partial F)=0$.

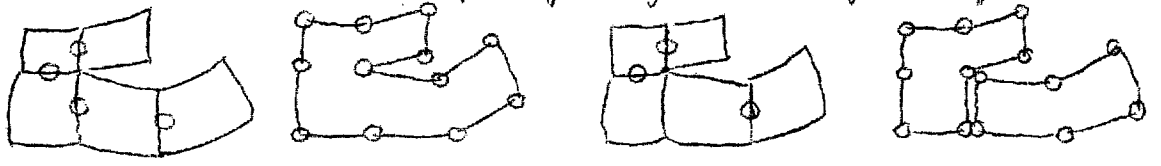
For $p>1$ går vi således frem. Idet F består af C^1-p-cellerne $F_1, \dots, F_n$, betragter vi for hver celle F_i de af dens $2p$ $(p-1)$-randceller, langs hvilke den ikke er sammenføjet med en celle F_j. Herved fås en endelig mængde af C^1-$(p-1)$-celler $G_1, \dots, G_m$. Antallet er $m = n\cdot 2p - 2h$, hvis der er h sammenføjninger i F. For C^1-$(p-1)$-cellerne $G_1, \dots, G_m$ fastsættes nu følgende sammenføjningsforskrift. To celler G_u og G_v $(u \neq v)$, der har en fælles $(p-2)$-randcelle H, skal sammenføjes langs H, hvis og kun hvis der findes indbyrdes forskellige numre $i_0, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$, således at $F_{i_0}, \dots, F_{i_r}$ alle har H som $(p-2)$-randcelle og som $(p-1)$-randceller, der indeholder H har G_u og J_1, J_1 og J_2, $\dots$, J_{r-1} og J_r, J_r og G_v, hvor F_{i_0} og F_{i_1} er sammenføjede langs J_1, $\dots$, $F_{i_{r-1}}$ og F_{i_r} er sammenføjede langs J_r. [For $r=0$ menes hermed blot, at G_u og G_v hidrører fra samme F_i.]

Jfr. figuren, der viser tilfældet $p=2$. Denne forskrift tilfredsstiller det ovenfor stillede krav, idet simpelthen hvert $\mathcal{G}_u$ langs hver af sine $(p-2)$-randceller H i henhold til denne forskrift er sammenføjet med netop et $\mathcal{G}_v$, nemlig det, der fås ved i den celle F_{i_0}, hvortil $\mathcal{G}_u$ hører, at opsøge den til $\mathcal{G}_u$ langs H hosliggende $(p-1)$-randcelle J_1, dernæst, hvis F_{i_0} langs J_1 er sammenføjet med en celle F_{i_1}, at opsøge den til J_1 langs H hosliggende $(p-1)$-randcelle J_2 i F_{i_1}, og således videre, indtil man (hvad der må indtræffe) når en celle F_{i_r}, der er sammenføjet med den forrige celle $F_{i_{r-1}}$ langs J_r, men langs den til J_r langs H hosliggende $(p-1)$-randcelle ikke er sammenføjet med nogen celle F_i. Denne $(p-1)$-randcelle er da $\mathcal{G}_v$. [Hvis F_{i_0} ikke langs J_1 er sammenføjet med en celle, er $\mathcal{G}_v = J_1$.] Ved randen af F forstår vi nu mængden af C^1-$(p-1)$-celler $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_m$ med den angivne sammenføjningsforskrift. Randen ∂F er således et C^1-$(p-1)$-cellekompleks, og der gælder $\partial(\partial F) = 0$.

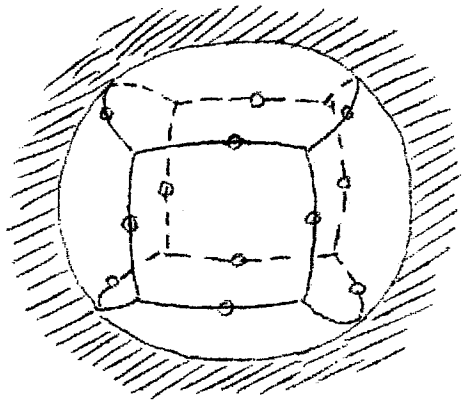


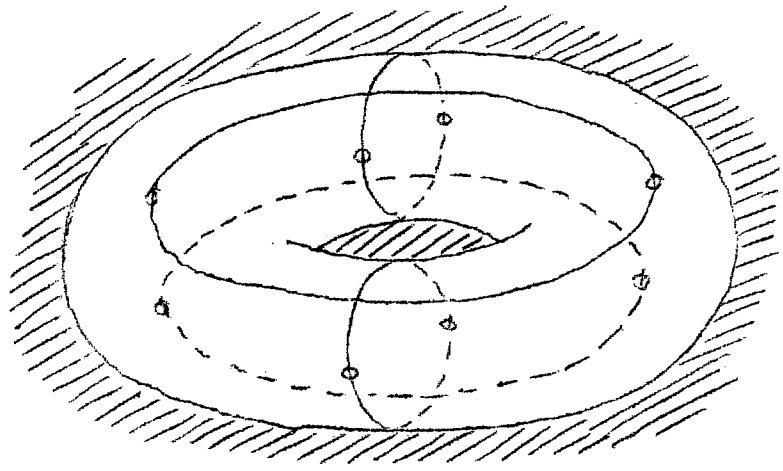
Et C^1-p-cellekompleks F kaldes <u>lukket</u>, hvis $\partial F = 0$. Af det ovenstående fremgår, at <u>for ethvert</u> C^1-p-<u>cellekompleks</u> F <u>med</u> $p \geq 1$ <u>er randen</u> ∂F <u>lukket</u>.

<u>Eks. 2.</u> Figurerne viser nogle C^1-2-cellekomplekserne fra eks. 1 og ved siden af deres rand. For det andet er den to gange optrædende C^1-1-celle for tydelighedens skyld tegnet dobbelt.



Eks. 3. Figurerne viser lukkede C^1-2-cellekomplekser i $\grave{R}^3$ dannet ved inddeling af en kugleflade og en ringflade (torus); cellerne er sammenføjet langs alle fælles 1-randceller.

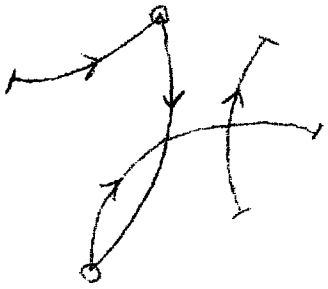


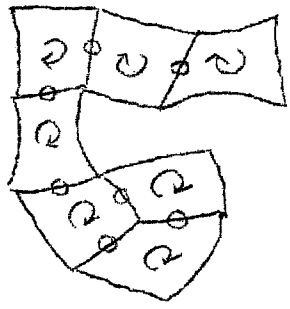


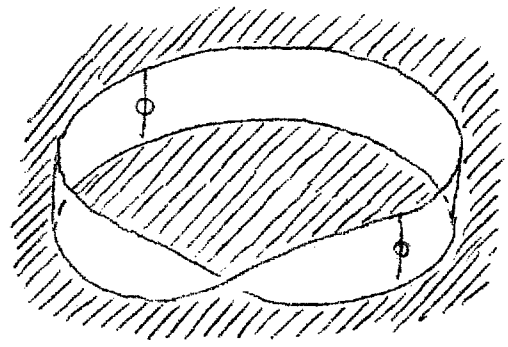
Et C^1-p-cellekompleks F i $\grave{R}^k$ kaldes orienterbart, hvis det er muligt at vælge orienteringer for dets celler $F_1, \ldots, F_n$ på en sådan måde, at for ethvert par af celler F_i og F_j $(i \neq j)$, der er sammenføjede langs en fælles $(p-1)$-randcelle G, er de ved orienteringerne af F_i og F_j inducerede orienteringer af G modsatte. Svarende til de således orienterede celler $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_n$ taler vi om et orienteret C^1-p-cellekompleks $\vec{F}$. De modsatte orienteringer af $F_1, \ldots, F_n$ bestemmer ligeledes en orientering af F. Det således orienterede C^1-p-cellekompleks betegnes $-\vec{F}$.

Ethvert C^1-0-cellekompleks er orienterbart. Det orienteres ved, at man orienterer hvert af dets punkter. Man overbeviser sig let om, at også ethvert C^1-1-cellekompleks er orienterbart.

Eks. 4. Figurerne viser nogle orienterede C^1-1- og C^1-2-cellekomplekser, samt et ikke orienterbart C^1-2-cellekompleks i $\grave{R}^3$ bestående af to C^1-2-celler sammenføjet til et Möbius bånd; dette cellekompleks





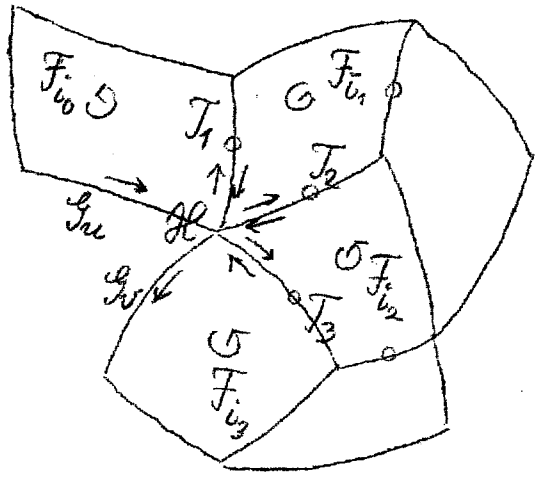


er ikke orienterbart, idet orienteringer af de to C^1-2-celler, der inducerer modsatte orienteringer i den ene af de fælles 1-randceller, vil inducere samme orientering i den anden.

Vi vil nu vise, at <u>en orientering af et C^1-p-cellekompleks</u> F med $p \geq 1$ <u>inducerer en orientering af dets rand</u> ∂F. Hermed menes, at når vi for hver af de C^1-$(p-1)$-celler, der udgør ∂F, vælger den orientering, der induceres i den af den celle i F, hvortil den hører, er dermed ∂F orienteret. Den således orienterede rand for et orienteret C^1-p-cellekompleks $\vec{F}$ betegnes $\partial \vec{F}$.

Bevis. For $p = 1$ er udsagnet trivielt.

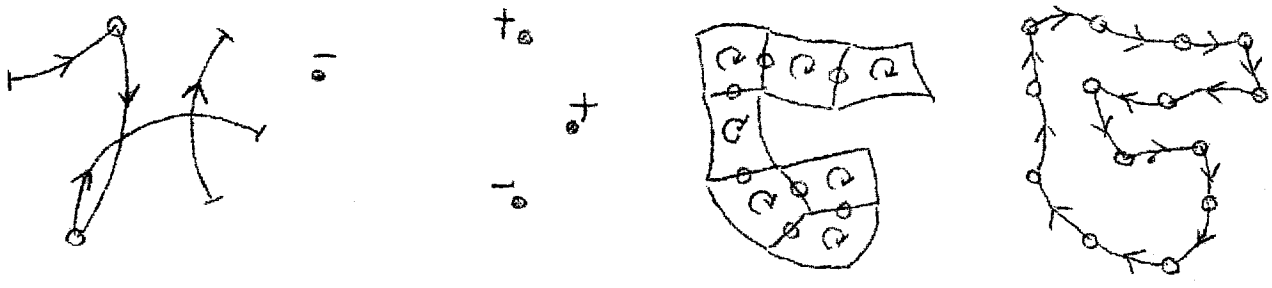
For $p > 1$ fremgår påstanden (idet vi benytter samme betegnelser som ovenfor ved indførelsen af randen) af,



at når $F_{i_0}, \ldots, F_{i_r}$ er orienteret således, at orienteringerne af F_{i_0} og F_{i_1} inducerer modsatte orienteringer af $J_1, \ldots$, orienteringerne af $F_{i_{r-1}}$ og F_{i_r} inducerer modsatte orienteringer af J_r, da vil de af orienteringerne af F_{i_0} og F_{i_r} inducerede orienteringer af G_u og G_v inducere modsatte orienteringer af H.

Dette er en simpel følge af sætningen i § 12 om en orienteret C^1-p-celle, hvorefter de af orienteringen inducerede orienteringer af to hosliggende $(p-1)$-randceller inducerer modsatte orienteringer af disses fælles $(p-2)$-randcelle. Ved successivt at anvende denne sætning på $F_{i_0}, \ldots, F_{i_\nu}$ ser man nemlig, at T_1 som orienteret randcelle i F_{i_0} inducerer modsat orientering af H som G_u; følgelig vil T_1 som orienteret randcelle i F_{i_1} inducere samme orientering af H som G_u; idet man går således videre, ser man, at T_ν som orienteret randcelle i F_{i_ν} inducerer samme orientering af H som G_u; følgelig inducerer G_v modsat orientering af H som G_u. [Hvis F_{i_0} ikke langs T_1 er sammenføjet med en anden celle, er $G_v = T_1$, og vi er færdige i første skridt.]

Eks. 5. Figurerne viser påny de orienterede C^1-1- og C^1-2-cellekomplekser fra eks. 4 og ved siden af deres orienterede rande.



Lad nu som tidligere A være en mængde i $\dot{R}^k$, der enten er åben eller et afsluttet interval. Lad ω være en C^0-differentialform i A af grad p og F en (forlobig uorienteret) C^1-p-celle i A. For to tilladte parameterfremstillinger $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^p$, og $\underline{x} = \underline{\psi}(\underline{u})$, $\underline{u} \in J^p$, af F vil vi sammenligne de to integraler

$$\int_{J^p} \omega \circ \underline{\varphi} \quad \text{og} \quad \int_{J^p} \omega \circ \underline{\psi}.$$

Vi har $\underline{\Psi} = \underline{\varphi} \circ \underline{\alpha}$, hvor $\underline{\alpha} \in \Gamma_p$. Antages

$$\omega \circ \underline{\varphi} = h(\underline{t})\, dt_1 \cdots dt_p,$$

fås ved indsætning af $\underline{t} = \underline{\alpha}(\underline{u})$

$$\omega \circ \underline{\Psi} = h \circ \underline{\alpha}(\underline{u}) \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_p} du_p \right) \cdots \left(\frac{\partial \alpha_p}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial \alpha_p}{\partial u_p} du_p \right)$$

$$= h \circ \underline{\alpha}(u) \sum_{i_1=1}^{p} \cdots \sum_{i_p=1}^{p} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_{i_1}} \cdots \frac{\partial \alpha_p}{\partial u_{i_p}} du_{i_1} \cdots du_{i_p}.$$

Her falder alle led bort, i hvilke $i_1, \ldots, i_p$ ikke er indbyrdes forskellige, og hvert led, i hvilket $i_1, \ldots, i_p$ er indbyrdes forskellige, omskrives ved permutation af differentialerne til

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial u_{i_1}} \cdots \frac{\partial \alpha_p}{\partial u_{i_p}} du_1 \cdots du_p \quad \text{eller} \quad -\frac{\partial \alpha_1}{\partial u_{i_1}} \cdots \frac{\partial \alpha_p}{\partial u_{i_p}} du_1 \cdots du_p,$$

eftersom permutationen $i_1, \ldots, i_p$ er lige eller ulige. Følgelig gælder

$$\omega \circ \underline{\Psi} = h \circ \underline{\alpha}(\underline{u}) \det \underline{D}\underline{\alpha}(\underline{u})\, du_1 \cdots du_p.$$

Af integraltransformationsformlen i § 6 ses derfor, at

$$\int_{J^p} \omega \circ \underline{\varphi} = \int_{J^p} \omega \circ \underline{\Psi} \quad \text{eller} \quad \int_{J^p} \omega \circ \underline{\varphi} = -\int_{J^p} \omega \circ \underline{\Psi},$$

eftersom $\underline{\alpha} \in \Gamma_p^+$ eller $\underline{\alpha} \in \Gamma_p^-$, d.v.s. eftersom $\underline{\varphi}$ og $\underline{\Psi}$ tilhører samme ækvivalensklasse modulo Γ_p^+ eller ikke.

Vi definerer nu <u>integralet</u> $\int_{\vec{F}} \omega$ <u>af en</u> C^0<u>-differentialform</u> ω <u>af grad</u> p <u>i</u> A <u>langs en orienteret</u> C^1<u>-p-celle</u> $\vec{F}$ <u>i</u> A som

$$\int_{\vec{F}} \omega = \int_{J^p} \omega \circ \underline{\varphi},$$

hvor $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t})$, $\underline{t} \in J^p$, er en tilladt parameterfremstilling for $\vec{F}$. Dette er virkelig en definition, idet alle tilladte parameterfremstillinger efter det anførte giver samme resultat. For den modsat orienterede C^1-p-celle

$-\vec{\mathcal{F}}$ finder vi efter det anførte $\int_{-\vec{\mathcal{F}}} \omega = -\int_{\vec{\mathcal{F}}} \omega$. Ved integralet af ω langs et orienteret $\mathcal{C}^1$-p-cellekompleks $\vec{\mathcal{F}}$ bestående af de orienterede $\mathcal{C}^1$-p-celler $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ forstås summen

$$\int_{\vec{\mathcal{F}}} \omega = \int_{\vec{F}_1} \omega + \cdots + \int_{\vec{F}_n} \omega.$$

For det modsat orienterede $\mathcal{C}^1$-p-cellekompleks $-\vec{\mathcal{F}}$ gælder da $\int_{-\vec{\mathcal{F}}} \omega = -\int_{\vec{\mathcal{F}}} \omega$.

Tilfældet $p=k$ giver anledning til en særlig bemærkning. I dette tilfælde har ω formen

$$\omega = f(\underline{x})\, dx_1 \cdots dx_k,$$

hvor f er en kontinuert funktion på A. Indsættes heri en tilladt parameterfremstilling $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t}), \underline{t} \in J_k^*$, for en orienteret $\mathcal{C}^1$-k-celle $\vec{F}$ i A, fås ved en udregning som den ovenstående

$$\omega \circ \underline{\varphi} = f \circ \underline{\varphi}(\underline{t}) \det \underline{\underline{D}}\, \underline{\varphi}(\underline{t})\, dt_1 \cdots dt_k.$$

Vi har altså

$$\int_{\vec{F}} \omega = \int_{J_k} f \circ \underline{\varphi}(\underline{t}) \det \underline{\underline{D}}\, \underline{\varphi}(\underline{t})\, dt_1 \cdots dt_k.$$

Sammenholdes dette med den i § 12 udledte formel

$$\int_F f(\underline{x})\, dx_1 \cdots dx_k = \int_{J_k} f \circ \underline{\varphi}(\underline{t}) \left| \det \underline{\underline{D}}\, \underline{\varphi}(\underline{t}) \right| dt_1 \cdots dt_k,$$

ses at der gælder

$$\int_{F^+} \omega = \int_F f(\underline{x})\, dx_1 \cdots dx_k \quad \text{og} \quad \int_{F^-} \omega = -\int_F f(\underline{x})\, dx_1 \cdots dx_k.$$

Brugen af betegnelsen $\int_F f(\underline{x})\, dx_1 \cdots dx_k$ som betegnelse for integralet af en funktion f over en punktmængde F i $\dot{R}^k$ er hermed, i det tilfælde, hvor f er en kontinuert funktion på A og F en $\mathcal{C}^1$-k-celle i A, bragt i

forbindelse med brugen af betegnelsen $\int_{\vec{F}} f(\underline{x})\,dx_1 \cdots dx_k$ for integralet af differentialformen $\omega = f\,dx_1 \cdots dx_k$ langs den orienterede celle $\vec{F}$, idet man ser, at de to betegnelser betyder samme tal, når $\vec{F}$ betegner den positivt orienterede celle F^+, men modsatte tal, når $\vec{F}$ betegner den negativt orienterede celle F^-.

For C^1-p-cellekomplekser antager differential- og integralregningens hovedsætning følgende form:

Hovedsætning. For enhver C^1-differentialform ω i A af grad $p-1$ og ethvert orienteret C^1-p-cellekompleks $\vec{F}$ i A gælder

$$\int_{\vec{F}} d\omega = \int_{\partial \vec{F}} \omega .$$

Bevis. Det er tilstrækkeligt at betragte det tilfælde, hvor $\vec{F}$ er en orienteret C^1-p-celle. Thi af gyldigheden af formulen i dette tilfælde fremgår dens gyldighed for et cellekompleks $\vec{F}$ bestående af de orienterede C^1-p-celler $\vec{F}_1, \cdots, \vec{F}_m$ ved at man adderer de til disse svarende formler, idet derved på højre side bidragene fra de $(p-1)$-randceller, langs hvilke der er sket sammenføjning, går ud.

Hvis $\vec{F}$ er en orienteret C^1-p-celle, og $\underline{x} = \varphi(\underline{t}), \underline{t} \in J^p$, er en tilladt parameterfremstilling for $\vec{F}$, er formelens venstre side lig med det, vi i § 10 har betegnet som integralet af $d\omega$ langs den ved denne parameterfremstilling bestemte p-dimensionale flade. Endvidere er den i § 12 givne orienteringsvedtægt for $(p-1)$-randcellerne i $\vec{F}$ sådan, at formelens højre side netop er lig med det, der i § 10 optræder som integralet af ω langs randen af

denne flade. Formlen er derfor blot et specialtilfælde af den i §10 bevisste formel udtrykt med ændrede betegnelser.

Bemærkning. Det har været hensigtsmæssigt i teorien for C^1-p-celler stedse at operere med afbildninger af det faste interval $\mathcal{J}^p$. Det ses imidlertid, at ved enhver injektiv C^1-afbildning $\varphi: Q \to \mathbb{R}^k$ af et afsluttet interval $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ i $\mathbb{R}^p$ med positive kantlængder, for hvilken funktionalmatricen $\underline{D}\varphi(\underline{t})$ for alle $\underline{t} \in Q$ har rangen p, er billedet $F = \varphi(Q)$ en C^1-p-celle. Thi betragtes den ved $\underline{t} = \underline{\varphi}(\underline{u}) = (a_1 + (b_1 - a_1)u_1, \cdots, a_p + (b_p - a_p)u_p)$ bestemte afbildning $\underline{\varphi}: \mathcal{J}^p \to Q$, fås $\varphi \circ \underline{\varphi} \in \mathfrak{Q}_p$ og $\varphi(Q) = \varphi \circ \underline{\varphi}(\mathcal{J}^p)$. Afbildningen $\varphi \circ \underline{\varphi}: \mathcal{J}^p \to \mathbb{R}^k$ bestemmer en orientering af F, og vi siger naturligvis, at også afbildningen $\varphi: Q \to \mathbb{R}^k$ bestemmer denne orientering, og at $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t})$, $\underline{t} \in Q$, er en tilladt parameterfremstilling for den således orienterede C^1-p-celle $\vec{F}$. Af transformationsformlen for integraler fremgår let, at

$$\int_{\vec{F}} \omega = \int_Q \omega \circ \varphi .$$

Integralet af en C^0-differentialform ω af grad p langs en orienteret C^1-p-celle $\vec{F}$ er således for enhver tilladt parameterfremstilling $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t})$, $\underline{t} \in Q$, af $\vec{F}$ det samme som integralet af ω langs den ved denne parameterfremstilling bestemte p-dimensionale flade i henhold til definitionen i §10.

Eks. 6. For et orienteret C^1-k-cellekompleks $\vec{F}$ i $\mathbb{R}^k$ finder vi, idet hver af differentialformerne af grad $k-1$: $\omega = (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k$ har differentialet

$d\omega = dx_1 \cdots dx_k$, at

$$\int_{\vec{F}} dx_1 \cdots dx_k = \int_{\partial \vec{F}} (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \cdots \not{dx_i} \cdots dx_k .$$

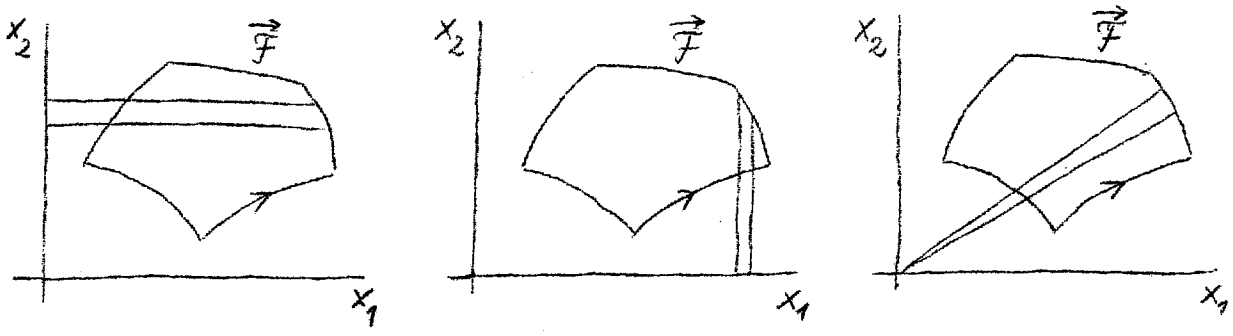
Hvis $\vec{F}$ består af de orienterede C^1 k-celler $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_n$, er venstre side simpelthen summen af målene af $F_1, \ldots, F_n$, idet disse regnes positivt for de positivt orienterede celler og negativt for de negativt orienterede celler. Denne sum kalder vi naturligvis det med forlegn regnede mål af $\vec{F}$ og betegner den $m(\vec{F})$. Ved at tage middeltallet af de k udtryk for $m(\vec{F})$ får vi udtrykket

$$m(\vec{F}) = \frac{1}{k} \int_{\partial \vec{F}} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \cdots \not{dx_i} \cdots dx_k .$$

For $k = 2$ fås

$$m(\vec{F}) = \int_{\partial \vec{F}} x_1 \, dx_2 = \int_{\partial \vec{F}} -x_2 \, dx_1 = \frac{1}{2} \int_{\partial \vec{F}} x_1 \, dx_2 - x_2 \, dx_1 .$$

Figurerne antyder den simple heuristiske begrundelse af disse formler for et C^1 2-cellekompleks $\vec{F}$ bestående af positivt orienterede celler, idet celledelingen for simpleheds skyld ikke er vist.



§ 14. Skalarfelter og vektorfelter.

For $k=2$ og $k=3$ giver hovedsætningen vigtige sætninger fra vektoranalysen. Vi vil give en summarisk behandling af disse anvendelser, idet vi med hensyn til begreberne integral af en funktion over en kurve eller flade (med hensyn til buelængden eller fladearealet) vil afstå fra en nærmere behandling og lade formlerne tale for sig selv.

$\underline{k=3.}$ Vi benytter sædvanlige retvinklede koordinater svarende til et højreskruet koordinatsystem. Vi har for $0 \leqslant p \leqslant 3$ følgende typer af differentialformer:

$p=0 \qquad \omega = f$

$p=1 \qquad \omega = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3$

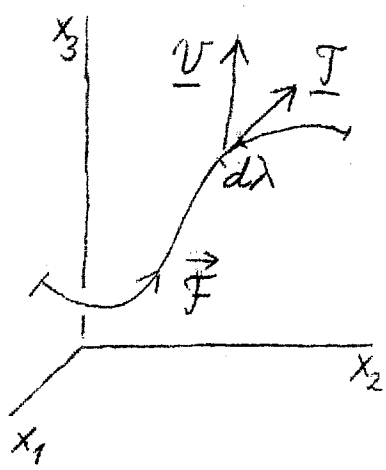
$p=2 \qquad \omega = f_{23}\,dx_2\,dx_3 + f_{31}\,dx_3\,dx_1 + f_{12}\,dx_1\,dx_2$

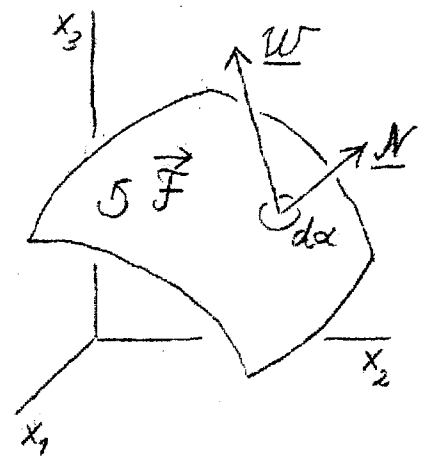
$p=3 \qquad \omega = f_{123}\,dx_1\,dx_2\,dx_3.$

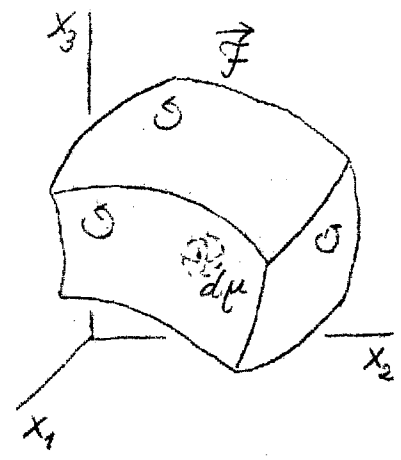
For $p=2$ har vi i stedet for normalformen skrevet den form, der svarer til cyklisk rækkefølge af differentialerne, idet vi i stedet for $f_{13}\,dx_1\,dx_3$ har skrevet $f_{31}\,dx_3\,dx_1$ [det svarer til, at vi har sat $f_{13} = -f_{31}$]. Såvel for $p=0$ som for $p=3$ er differentialformen ensgyldig med et skalarfelt (en funktion) i den betragtede mængde A i rummet, nemlig henholdsvis f og f_{123}. Såvel for $p=1$ som for $p=2$ er differentialformen ensgyldig med et vektorfelt i A, med feltvektor henholdsvis

$$\underline{V} = (f_1, f_2, f_3) \quad \text{og} \quad \underline{W} = (f_{23}, f_{31}, f_{12}).$$

Integralet $\int\limits_{\vec{F}} \omega$ af ω langs en orienteret C^1-p-celle $\vec{F}$ antager følgende betydning.







$\underline{p=1}$. Hvis $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$, $t \in [0,1]$, er en tilladt parameterfremstilling for $\vec{F}$, har vi

$$\omega \circ \underline{\varphi} = (f_1 \varphi_1' + f_2 \varphi_2' + f_3 \varphi_3')\,dt = \underline{V} \cdot \underline{\varphi}'\,dt,$$

hvor $\cdot$ betegner skalarproduktet. Betegner $\underline{T}$ enhedsvektoren på den orienterede tangent til $\vec{F}$ og $d\lambda$ buelementet, er $\underline{\varphi}'\,dt = \underline{T}\,d\lambda$. [Den ved $\underline{\varphi}'$ bestemte orientering af tangenten er den samme for alle tilladte parameterfremstillinger.] Integralet $\int_{\vec{F}} \omega$ skrives derfor også

$$\int_{\vec{F}} \omega = \int_{\vec{F}} \underline{V} \cdot \underline{T}\,d\lambda.$$

$\underline{p=2}$. Hvis $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t})$, $\underline{t} \in [0,1] \times [0,1]$, er en tilladt parameterfremstilling for $\vec{F}$, har vi

$$\omega \circ \underline{\varphi} = f_{23}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}dt_2\right)\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2}dt_2\right) + \text{de to analoge udtryk}$$

$$= \left[f_{23}\,\det\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} \end{bmatrix} + \text{de to analoge udtryk}\right] dt_1\,dt_2$$

$$= \underline{W} \cdot \left(\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial t_2}\right) dt_1\,dt_2,$$

hvor $\times$ betegner vektorproduktet. Betegner $\underline{N}$ enhedsvektoren på den orienterede normal til $\vec{F}$ og $d\alpha$ overfladeelementet, er $\left(\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial t_2}\right) dt_1\,dt_2 = \underline{N}\,d\alpha$. [Den ved $\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial t_2}$ bestemte orientering af normalen er den samme for alle tilladte parameterfremstillinger.] Integralet $\int_{\vec{F}} \omega$

skrives derfor også

$$\int_{\vec{F}} \omega = \int_{\vec{F}} \underline{W} \cdot \underline{N}\, d\alpha.$$

$\underline{p=3}$. I dette tilfælde har vi udført den nødvendige udregning i §13 og fundet, at $\int_{\vec{F}} \omega$ er det med fortegnet + eller − forsynede integral af f_{123} over F, eftersom $\vec{F}$ er den positivt eller negativt orienterede celle. Betegner vi med henblik på analogi med de foranstående formler med dp volumenelementet i F regnet positivt eller negativt, eftersom $\vec{F}$ er den positivt eller negativt orienterede celle, kan integralet $\int_{\vec{F}} \omega$ i begge tilfælde skrives

$$\int_{\vec{F}} \omega = \int_{\vec{F}} f_{123}\, dp.$$

Tilsvarende skrivemåde for $\int_{\vec{F}} \omega$ til de ovenfor angivne anvendes naturligvis, når $\vec{F}$ er et orienteret C^1-p-cellekompleks.

Hovedsætningen giver nu følgende resultater:

$\underline{k=3,\ p=1}$. Her er $\omega = f$, altså

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3.$$

Idet ω svarer til skalarfeltet f, svarer $d\omega$ altså til dettes gradientfelt

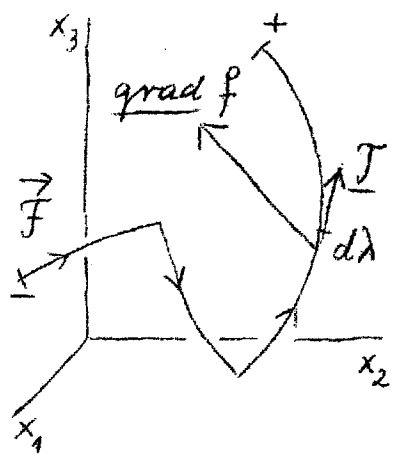
$$\underline{\text{grad}}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right).$$

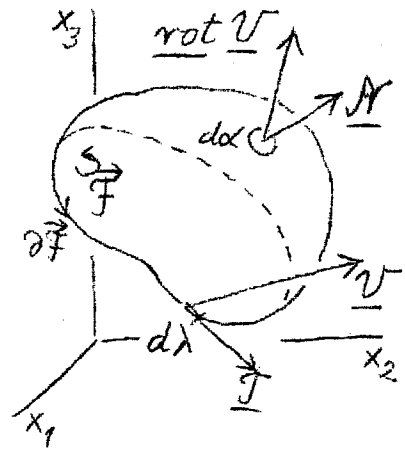
Vi får for ethvert orienteret C^1-1-cellekompleks $\vec{F}$

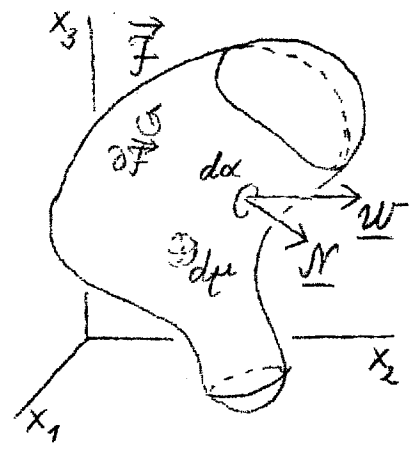
$$\boxed{\int_{\vec{F}} \underline{\text{grad}}\, f \cdot \underline{T}\, d\lambda = \int_{\partial \vec{F}} f}.$$

$\underline{k=3,\ p=2}$. Her er $\omega = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + f_3\, dx_3$, altså

$$d\omega = \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right) dx_2 dx_3 + \left(-\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) dx_3 dx_1 + \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2.$$







Idet ω svarer til vektorfeltet $\underline{V} = (f_1, f_2, f_3)$, svarer $d\omega$ altså til dettes rotationsfelt

$$\underline{\text{rot}}\ \underline{V} = \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}, -\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}, -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right).$$

Vi får for ethvert orienteret C^1-2-cellekompleks $\vec{F}$

$$\boxed{\int_{\vec{F}} \underline{\text{rot}}\ \underline{V} \cdot \underline{N}\, d\alpha = \int_{\partial\vec{F}} \underline{V} \cdot \underline{J}\, d\lambda},$$

hvor $\underline{N}$ er enhedsvektoren på den orienterede normal til $\vec{F}$, og T er enhedsvektoren på den orienterede tangent til $\partial\vec{F}$. Dette er Stokes' sætning:

$k=3$, $p=3$. Her er $\omega = f_{23}\, dx_2 dx_3 + f_{31}\, dx_3 dx_1 + f_{12}\, dx_1 dx_2$, altså

$$d\omega = \left(\frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Idet ω svarer til vektorfeltet $\underline{W} = (f_{23}, f_{31}, f_{12})$, svarer $d\omega$ altså til dettes divergensfelt

$$\text{div}\ \underline{W} = \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3}.$$

Vi får for ethvert orienteret C^1-3-cellekompleks $\vec{F}$

$$\boxed{\int_{\vec{F}} \text{div}\ \underline{W}\, d\mu = \int_{\partial\vec{F}} \underline{W} \cdot \underline{N}\, d\alpha},$$

hvor $\underline{N}$ er enhedsvektoren på den orienterede normal til $\partial\vec{F}$. Dette er Gauss' eller Ostrogradskijs sætning.

Sætningen, at enhver eksakt differentialform er lukket (d.v.s. sætningen $d(dw)=0$) giver følgende resultater: For et vilkårligt skalarfelt f gælder

$$\underline{\text{rot}}\ \underline{\text{grad}}\ f = \underline{0},$$

og for et vilkårligt vektorfelt $\underline{V}$ gælder

$$\text{div}\ \underline{\text{rot}}\ \underline{V} = 0.$$

Anderledes udtrykt: Ethvert gradientfelt er rotationsfrit og ethvert rotationsfelt er divergensfrit.

Sætningen, at enhver lukket differentialform i et interval (specielt i hele rummet) er eksakt, viser: Ethvert rotationsfrit vektorfelt i et interval er et gradientfelt, og ethvert divergensfrit vektorfelt i et interval er et rotationsfelt.

$k=2$. Resultaterne i dette tilfælde kan opfattes som specialtilfælde af resultaterne i tilfældet $k=3$. Det har dog interesse at formulere dem som selvstændige resultater. Selv om udførelsen til en vis grad er en gentagelse af det ovenstående, vil vi derfor gennemføre den i enkelthederne. Vi benytter sædvanlige retvinklede koordinater og benytter som omløbsretning ved vinkelmåling den, ved hvilken drejningen fra x_1-aksen til x_2-aksen er $+\frac{1}{2}\pi$. Vi har for $0 \le p \le 2$ følgende typer af differentialformer:

$p=0$ $\quad \omega = f$

$p=1$ $\quad \omega = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2$

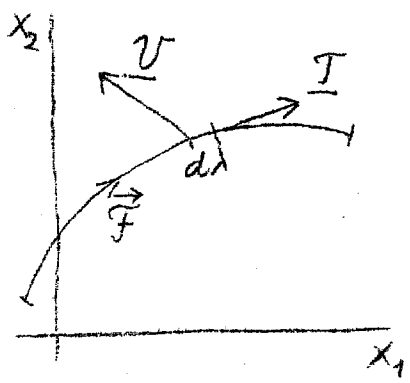
$p=2$ $\quad \omega = f_{12}\,dx_1\,dx_2.$

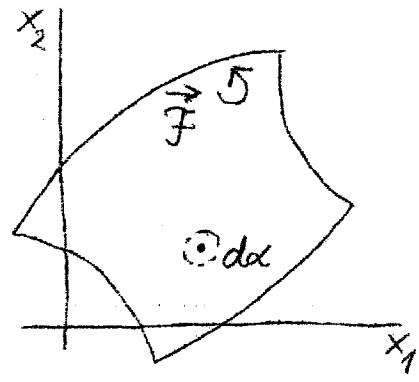
For $p=0$ og $p=2$ er differentialformen ensgyldig med et skalarfelt i den betragtede område. I tilfælden nem-

lig henholdsvis f og f_{12}. For $p=1$ er differentialformen ensgyldig med vektorfeltet med feltvektor

$$\underline{V} = (f_1, f_2).$$

Integralet $\int_{\vec{F}} \omega$ af ω langs en orienteret C^1-p-celle $\vec{F}$ antager følgende betydning.





$\underline{p=1}$. Hvis $\underline{x} = \underline{\varphi}(t), t \in [0,1]$, er en tilladt parameterfremstilling for $\vec{F}$, har vi

$$\omega \circ \underline{\varphi} = (f_1 \varphi_1' + f_2 \varphi_2')dt = \underline{V} \cdot \underline{\varphi}' dt,$$

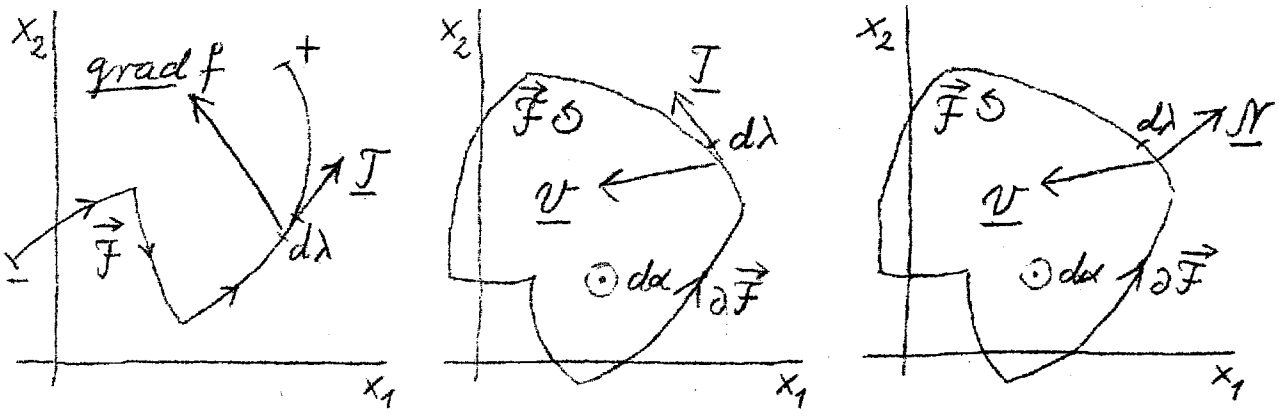
hvor $\cdot$ betegner skalarproduktet. Betegner $\underline{T}$ enhedsvektoren på den orienterede tangent til $\vec{F}$ og $d\lambda$ buelementet, er $\underline{\varphi}' dt = \underline{T} d\lambda$. Integralet $\int_{\vec{F}} \omega$ skrives derfor også

$$\int_{\vec{F}} \omega = \int_{\vec{F}} \underline{V} \cdot \underline{T} \, d\lambda.$$

$\underline{p=2}$. I dette tilfælde har vi udført den nødvendige udregning i §13 og fundet, at $\int_{\vec{F}} \omega$ er det med fortegnet + eller − forsynede integral af f_{12} over F, eftersom $\vec{F}$ er den positivt eller negativt orienterede celle. Betegner vi med $d\alpha$ arealelementet i F regnet positivt eller negativt, eftersom $\vec{F}$ er den positivt eller negativt orienterede celle, kan integralet $\int_{\vec{F}} \omega$ i begge tilfælde skrives

$$\int_{\vec{F}} \omega = \int_{\vec{F}} f_{12} \, d\alpha.$$

Tilsvarende skrivemåde for $\int_{\vec{F}} \omega$ til de ovenfor angivne anvendes naturligvis, når $\vec{F}$ er et orienteret C^1-p-cellekompleks.



Hovedsætningen giver nu følgende resultater:

$\underline{k=2,\ p=1}$. Her er $\omega = f$, altså

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2.$$

Idet ω svarer til skalarfeltet f, svarer $d\omega$ altså til dettes gradientfelt

$$\underline{\text{grad}}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right).$$

Vi får for ethvert orienteret C^1-1-cellekompleks $\vec{F}$

$$\boxed{\int_{\vec{F}} \underline{\text{grad}}\, f \cdot \underline{J}\, d\lambda = \int_{\partial\vec{F}} f}.$$

$\underline{k=2,\ p=2}$. Her er $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$, altså

$$d\omega = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2.$$

Idet ω svarer til vektorfeltet $\underline{v} = (f_1, f_2)$, svarer $d\omega$ altså til dettes rotationsfelt

$$\text{rot}\, \underline{v} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1},$$

som her er et skalarfelt. Vi får for ethvert orienteret C^1-2-cellekompleks $\vec{F}$

$$\boxed{\int_{\vec{F}} \text{rot}\, \underline{v}\, d\alpha = \int_{\partial\vec{F}} \underline{v} \cdot \underline{J}\, d\lambda},$$

hvor $\underline{J}$ er enhedsvektoren på den orienterede tangent til $\partial\vec{F}$. Dette er Stokes' sætning for planen.

En anden form af samme sætning fås ved at anvende den på vektorfeltet $\hat{\underline{v}} = (-f_2, f_1)$, hvis feltvektor

i et vilkårligt punkt fremgår af $\underline{V}$ ved en drejning $+\frac{1}{2}\pi$. Det til $\underline{\hat{V}}$ svarende rotationsfelt rot $\underline{\hat{V}} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ er da divergensfeltet

$$\operatorname{div} \underline{V} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

for det givne vektorfelt $\underline{V} = (f_1, f_2)$. Produktet $\underline{\hat{V}} \cdot \underline{I}$ bliver lig med $\underline{V} \cdot \underline{N}$, hvor $\underline{N}$ er enhedsvektoren på den orienterede normal til $\partial \vec{F}$, der fås ved at underkaste den orienterede tangent en drejning $-\frac{1}{2}\pi$. Formlen bliver da

$$\boxed{\int_{\vec{F}} \operatorname{div} \underline{V}\, d\alpha = \int_{\partial \vec{F}} \underline{V} \cdot \underline{N}\, d\lambda}.$$

Dette er Gauss' eller Ostrogradskijs sætning i planen. Den kaldes også Riemanns sætning.

Vælges i tilfældet $k=3$, $p=3$ for $\underline{W}$ det ud fra to skalarfelter f og g bestemte vektorfelt

$$\underline{W} = f \operatorname{grad} g = \left(f \frac{\partial g}{\partial x_1}, f \frac{\partial g}{\partial x_2}, f \frac{\partial g}{\partial x_3}\right),$$

bliver

$$\operatorname{div} \underline{W} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_3} + f\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2}\right)$$

$$= \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g + f \Delta g,$$

hvor $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ er Laplaces differentialoperator. Vi får derfor for ethvert orienteret C^1-3-cellekompleks $\vec{F}$

$$\boxed{\int_{\vec{F}} \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g\, d\mu + \int_{\vec{F}} f \Delta g\, d\mu = \int_{\partial \vec{F}} f \operatorname{grad} g \cdot \underline{N}\, d\alpha}.$$

Ved ombytning af f og g og subtraktion fås heraf

$$\boxed{\int_{\vec{F}} (f \Delta g - g \Delta f)\, d\mu = \int_{\partial \vec{F}} (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) \cdot \underline{N}\, d\alpha}.$$

Dette er Greens sætninger.

101. Find de stationære punkter for funktionen

$$z = f(x,y) = \log(1+x^2+y^2) - \tfrac{1}{2}x^2 - y^2$$

og afgør, om de er lokale, resp. globale ekstremumspunkter.

102. Angiv på en figur de mængder, hvori funktionen

$$z = f(x,y) = (7x-2y+1)(2x+5y-22)(5x-7y-16)$$

er positiv, nul, og negativ, og vis herved, at $f(x,y)$ har mindst et lokalt maksimumspunkt.

Vis dernæst, at $f(x,y)$ har netop et lokalt ekstremumspunkt (x_0,y_0), og find punktet.

Vink. Sæt $7x-2y+1=z_1$, $2x+5y-22=z_2$, $5x-7y-16=z_3$, og benyt, at

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 7z_2z_3 + 2z_1z_3 + 5z_1z_2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2z_2z_3 + 5z_1z_3 - 7z_1z_2.$$

103. Find globalt minimum og maksimum for

$$z = f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y).$$

Vink. Benyt, at f er periodisk med perioden 2π såvel i x som i y, og betragt intervallet $[-\pi,\pi]^2$.

104. Find globalt minimum og maksimum for

$$z = \cos x + \cos y + \cos(x+y).$$

105. Find globalt minimum og maksimum for

$$z = \det\begin{pmatrix} x & x & 1 \\ 1 & y+1 & -x-y \\ 1 & y+2 & 0 \end{pmatrix}$$

i $[-1,1]^2$.

106. Konstruer en funktion $f \in C^\infty(\grave{R}^2)$ uden lokale ekstrema, men med mindst et stationært punkt, for hvilken

$$\forall x \in \grave{R}: \quad f(x,y) \to -\infty \text{ for } |y| \to \infty$$
$$\forall y \in \grave{R}: \quad f(x,y) \to -\infty \text{ for } |x| \to \infty.$$

107. Konstruer en funktion $f \in C^\infty(\grave{R}^2)$ uden stationære punkter, for hvilken

$$\forall x \in \grave{R}: \quad f(x,y) \to -\infty \text{ for } |y| \to \infty$$
$$\forall y \in \grave{R}: \quad f(x,y) \to -\infty \text{ for } |x| \to \infty.$$

108. Afgør, om følgende udsagn er sandt:

„Hvis $f: \grave{R}^2 \to \grave{R}$ er kontinuert, og det for vilkårligt $(a,b) \in \grave{R}^2$ gælder, at $\varphi(t) = f(at, bt)$ har lokalt minimum i $t=0$, da har f lokalt minimum i $(0,0)$."

109. I planen er givet en trekant $A_1A_2A_3$, hvis vinkler alle er $< 120°$. I det P betegner et vilkårligt punkt i planen, betragtes funktionen

$$z = f(P) = A_1P + A_2P + A_3P.$$

Vis, at f har globalt minimum i eet punkt P_0, nemlig det punkt i trekantens indre, for hvilket vektorerne $\overrightarrow{P_0A_1}, \overrightarrow{P_0A_2}, \overrightarrow{P_0A_3}$ danner vinkler på $120°$.

Vink. (a) Slut ud fra kontinuitet m.v., at f har globalt minimum i mindst et punkt. (b) Indfør retvinklede koordinater, og vis herved, at f i planen eksklusive A_1, A_2, A_3 har det ene stationære punkt P_0. (c) Vis, at $f(P_0)$ er mindre end $f(A_1), f(A_2), f(A_3)$; [benyt f.eks., at i en trekant HIJ, hvori vinklen ved I er $120°$, er $HJ > \frac{1}{2}HI + IJ$].

110*. Vis, at den kvadratiske form $\underline{x} \cdot \underline{\underline{A}}\, \underline{x}$ med den symmetriske matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

er positiv definit, hvis og kun hvis de k determinanter

$$\det(a_{11}),\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \ldots,\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

alle er positive, og negativ definit, hvis og kun hvis disse determinanter er skiftevis negative og positive (d.v.s. den første negativ, den anden positiv, o.s.v.).

111. Undersøg, om funktionen

$$f(x,y,z) = \exp(x^2+y^2-z^2) + 2\cos(y-z) + 2(x+z)^2$$

har lokalt ekstremum i $(0,0,0)$.

112. Lad $f(x,y) \in C^2(A)$, og lad $(x_0,y_0) \in A$ være et punkt, hvori $f(x_0,y_0)=0$ og $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. Der findes da en omegn $\{(x,y) \mid |x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant b\} \subset A$ og en funktion $y = g(x) \in C^2([x_0-a, x_0+a])$ med værdier tilhørende $[y_0-b, y_0+b]$, således at samtlige løsninger til ligningen $f(x,y)=0$ i den nævnte omegn er bestemt ved $y = g(x)$, $|x-x_0| \leqslant a$. Vis, at

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

og

$$g''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} + 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

113. En kvadrik i $\mathbb{R}^2$ er givet ved en ligning

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0.$$

Det antages, at (x_0,y_0) er et punkt af kvadriken, og at det er et regulært punkt, d.v.s.

$$(ax_0+by_0+d,\ bx_0+cy_0+e)\neq(0,0).$$

Vis, at kvadriken i en omegn af (x_0,y_0) kan fremstilles enten ved en ligning $y=\varphi(x)$ eller ved en ligning $x=\psi(y)$ [i almindelighed på begge måder], hvor funktionerne er C^∞, og at tangenten i (x_0,y_0) har ligningen

$$axx_0+b(xy_0+x_0y)+cyy_0+d(x+x_0)+e(y+y_0)+f=0.$$

114. Vis, at ligningen

$$2\exp(x+y+z)-\sin(x+2y+z)+x^2+3y^2-2=0$$

i en omegn af $(0,0,0)$ bestemmer z implicit som en funktion af (x,y) med kontinuerte partielle afledede af vilkårlig orden. Beregn koefficienterne i Taylors grenseformel for denne funktion i punktet $(x,y)=(0,0)$, idet leddene af 2. grad medtages.

115. Vis, at ligningerne

$$f(x,y,z)=x^3+3xy^2-z^3-6xy-z=0$$
$$g(x,y,z)=x^3y+z^4-x^2-3yz=2$$

begge tilfredsstilles af $(x,y,z)=(2,1,1)$, og at de hver for sig i en omegn af dette punkt bestemmer en flade, der kan fremstilles ved en ligning $z=\varphi(x,y)$, hvor φ er C^∞. Find tangentplanerne til de to flader i punktet. Vis, at de to ligninger tilsammen i en omegn af punktet bestemmer en kurve, der kan fremstilles ved et ligningspar $y=\psi(x)$, $z=\chi(x)$, hvor ψ og χ er C^∞. Find kurvens tangent i punktet.

116. Lad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 betegne volumen, tryk, temperatur, energi, entropi af et termodynamisk system. En tilstand af systemet identificeres med talsættet $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Mængden F af tilstande antages bestemt ved tre tilstandsligninger

$$f_1(\underline{x}) = 0, \quad f_2(\underline{x}) = 0, \quad f_3(\underline{x}) = 0,$$

hvor f_1, f_2, f_3 er C^1-funktioner i en vis åben mængde i $\mathbb{R}^5$. Det antages, at alle funktionalmatricer $\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_k, x_\ell, x_m)}$ er regulære i ethvert punkt $\underline{x}_0$ af F. Vælges to af de variable x_i, x_j, vil da i en omegn af ethvert punkt $\underline{x}_0$ af F de øvrige variable x_k, x_ℓ, x_m være bestemt som C^1-funktioner af x_i, x_j. Man siger, at systemet har to frihedsgrader. Sættes f. eks. $x_k = g(x_i, x_j)$, $x_\ell = h(x_i, x_j)$, betegnes de partielle afledede $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ og $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ med $\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i}\right)_{x_j}$ og $\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i}$, og funktionalmatricen $\frac{\partial(g,h)}{\partial(x_i,x_j)}$ betegnes $\frac{\partial(x_k,x_\ell)}{\partial(x_i,x_j)}$.

Vis, at værdierne af de partielle afledede i ethvert punkt $\underline{x}_0 \in F$ tilfredsstiller følgende ligninger, hvor i, j, k, ℓ, m står for vilkårlige forskellige indices:

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i}\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right)_{x_i} = 1$$

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i}\left(\frac{\partial x_\ell}{\partial x_k}\right)_{x_i} = \left(\frac{\partial x_\ell}{\partial x_j}\right)_{x_i}$$

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i}\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)_{x_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\right)_{x_j} = -1$$

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i}\right)_{x_\ell}\left(\frac{\partial x_\ell}{\partial x_j}\right)_{x_i} = \det\frac{\partial(x_k,x_\ell)}{\partial(x_i,x_j)}$$

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_\ell}\right)_{x_m}\det\frac{\partial(x_\ell,x_m)}{\partial(x_i,x_j)} = \det\frac{\partial(x_k,x_m)}{\partial(x_i,x_j)}.$$

117. (a) Omskriv integralet

$$I(r) = \int_{S(r)} \exp(-(x^2+y^2))\,dx\,dy, \quad S(r) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq r^2\},$$

under brug af polære koordinater, og vis herved, at

$$I(r) \longrightarrow \pi \quad \text{for} \quad r \to \infty.$$

(b) Vis, at der for integralet

$$J(r) = \int_{K(r)} \exp(-(x^2+y^2))\,dx\,dy, \quad K(r) = \{(x,y) \mid |x| \leq r, |y| \leq r\},$$

gælder $I(r) \leq J(r) \leq I(r\sqrt{2})$, og at følgelig

$$J(r) \to \pi \quad \text{for} \quad r \to \infty.$$

(c) Vis herved, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}.$$

118. Udregn integralet

$$I = \int_A (x-y)^2 \sin^2(x+y)\,dx\,dy,$$

hvor A er parallelogrammet med hjørner $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$, ved at anvende en passende lineær afbildning.

119. Find integralet

$$I = \int_A \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy,$$

hvor A er ellipsen $\left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$.

Vink. Anvend transformationen $(x,y) = (a\xi, b\eta)$, og udregn det fremkomne integral ved brug af polære koordinater i (ξ, η)-planen.

120. Vis, at der ved

$$x = \xi + \eta$$
$$y = -\xi^2 + \eta$$

bestemmes en bijektiv afbildning af $\{(\xi,\eta) \mid \xi > -\frac{1}{2}\}$ på $\{(x,y) \mid y < x + \frac{1}{4}\}$. Find det $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$. Skitser billedet S af trekanten $T = \{(\xi,\eta) \mid \xi > 0, \eta > 0, \xi + \eta < 2\}$.

Find arealet (målet) af S direkte og ved at udtrykke det som integralet af det $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$ over T.

Find endvidere integralet

$$I = \int_S \frac{1}{(x-y+1)^2}\,dx\,dy$$

ved at udtrykke det som et integral over T.

121. Find integralet

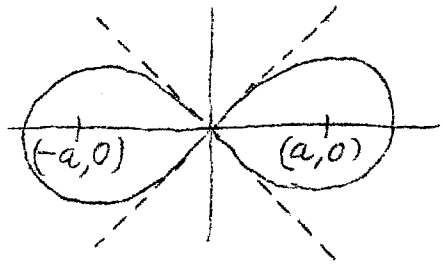
$$I = \int_A \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz,$$

hvor A er ellipsoiden $\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\}$.
Vink. Anvend transformationen $(x,y,z) = (a\xi, b\eta, c\zeta)$, og udregn det fremkomne integral ved brug af polære koordinater i (ξ,η,ζ)-rummet.

122. Find arealet af lemniskaten

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,\sqrt{(x+a)^2+y^2} = a^2.$$

Vink. Benyt polære koordinater.



123. Find tyngdepunktet af et kugleafsnit

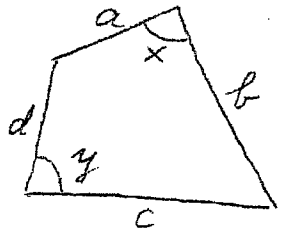
$$\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,\ (-r <)\ h \leq x \leq r\}$$

med konstant massetæthed.

Mat 2, 1967–68 MA Opg. 124–127

124. Lebesguemålet er indført for mængder i talrummet $\mathbb{R}^k$. For at anvende definitionen på en mængde A i et euklidisk rum af k dimensioner må man først vælge et koordinatsystem, d: et begyndelsespunkt og k normerede parvis ortogonale basisvektorer. Vis, at målelighedeu af A og målets værdi ikke afhænger af valget af koordinatsystemet. Vis også, at hvis A er målelig, er enhver med A kongruent mængde målelig med samme mål.

125. En konveks firkant med sider a, b, c, d antages forsynet med hængsler i vinkelspidserne. Den antages i en stilling med maksimalt areal. Vis, at den er indskrivelig.



Vink. Udtryk arealet som funktion af vinklerne x og y, og opskriv den betingelse, disse må opfylde.

126. I planen betragtes en afsluttet trekantskive $A_1A_2A_3$. Højderne fra A_1, A_2, A_3 betegnes h_1, h_2, h_3, og for et vilkårligt punkt P af trekantskiven betegnes med x_1, x_2, x_3 afstandene til linierne A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Vis, at der gælder:

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Vis herved, at produktet $x_1x_2x_3$ er størst, når P er medianernes skæringspunkt.

127. For et egentligt eller udartet retvinklet parallelepipedum med kantlængder $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ betragtes

overfladen $S = 2yz + 2xz + 2xy$

volumenet $V = xyz$.

Hvilke værdier kan V antage for et givet $S > 0$?

128. For givne ikke negative tal $x_1, \dots, x_k$ og givne vægte $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (positive tal med sum 1) betegnes

$$G = x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k} \quad \text{og} \quad A = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k$$

henholdsvis som det geometriske og det aritmetiske middeltal af $x_1, \dots, x_k$ med vægtene $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Bevis, at der gælder uligheden

$$G \leqslant A,$$

og at lighedstegnet gælder, når og kun når tallene $x_1, \dots, x_k$ er ligestore.

Vink. For givne vægte og givet $A_0 \geqslant 0$ søges globalt maksimum af G under bibetingelsen $A = A_0$.

129. For givne positive tal $x_1, \dots, x_k$ og givne vægte $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (positive tal med sum 1) betegnes for et vilkårligt $p \in \mathbb{R}$

$$M_p = \begin{cases} (\alpha_1 x_1^p + \cdots + \alpha_k x_k^p)^{\frac{1}{p}} & \text{for } p \neq 0 \\ x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k} & \text{for } p = 0 \end{cases}$$

som den p^{te} potensmiddelværdi af $x_1, \dots, x_k$ med vægtene $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Bevis, at der for $p < q$ gælder uligheden

$$M_p \leqslant M_q,$$

og at lighedstegnet gælder, når og kun når tallene $x_1, \dots, x_k$ er ligestore. Vis endvidere, at M_p er en kontinuert funktion af p, og at

$$\lim_{p \to +\infty} M_p = \max\{x_1, \dots, x_k\}, \quad \lim_{p \to -\infty} M_p = \min\{x_1, \dots, x_k\}.$$

Vink. Ved beviset for, at M_p er kontinuert i punktet $p = 0$, benyttes for $p \neq 0$ omskrivningen

$$\log M_p = \frac{1}{p} \log\left(1 + \alpha_1(x_1^p - 1) + \cdots + \alpha_k(x_k^p - 1)\right).$$

130. $p = (p_1, \cdots, p_n)$ betegner en sandsynlighedsvektor, d.v.s. $p_\nu \geqslant 0$, $\nu = 1, \cdots, n$, og $\sum p_\nu = 1$. Vi definerer entropien af p ved

$$H(p) = -\sum p_\nu \log p_\nu ,$$

hvor funktionen $x \log x$ er defineret ved kontinuitet for $x = 0$, d.v.s. $0 \log 0 = 0$. [Denne størrelse kan man opfatte som et mål for den usikkerhed, der hersker om udfaldet af et forsøg med n mulige udfald, hvor det ν^{te} udfald har sandsynligheden p_ν.] Bevis, at

$$H(p) \leqslant H\left(\tfrac{1}{n}, \cdots, \tfrac{1}{n}\right) = \log n .$$

[Usikkerheden er størst, når de mulige udfald er lige sandsynlige.]

Vink. (1) Vis, at H har et globalt maksimum i $A = \{ p \mid p_\nu \geqslant 0, \nu = 1, \cdots, n, \text{ og } \sum p_\nu = 1 \}$. (2) Vis gyldigheden for $n = 1$. (3) Vis under antagelse af gyldigheden for $n-1$, at det globale maksimum må antages i $A \cap \{ p \mid p_\nu > 0, \nu = 1, \cdots, n \}$, og anvend derefter sætningen om ekstremum med bibetingelser.

131. Bevis Hadamards determinantvurdering

$$\left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \right| \leqslant \sqrt{a_{11}^2 + \cdots + a_{k1}^2} \cdots \sqrt{a_{1k}^2 + \cdots + a_{kk}^2} ,$$

og afgør, hvornår lighedstegnet gælder.

Vink. Søg globalt minimum og maksimum af determinanten (opfattet som funktion af de k^2 variable a_{ij}) under bibetingelserne

$$a_{11}^2 + \cdots + a_{k1}^2 = c_1$$
$$\cdots$$
$$a_{1k}^2 + \cdots + a_{kk}^2 = c_k ,$$

hvor $c_1, \cdots, c_k$ er givne ikke negative tal.

132. Udregn kurveintegralet

$$\int_K (x+2y)\,dx + (y-2x)\,dy,$$

idet K er ellipsen $(x,y)=(4\cos t, 3\sin t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

133. Udregn kurveintegralet

$$\int_K (x^2-y^2)\,dx - (x+y)\,dy,$$

dels når K er ellipsebuen $(x,y)=(a\cos t, b\sin t)$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\pi$, dels når K er dennes korde $(x,y)=(a-at, bt)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

134. Vis, at differentialformen

$$\omega = \left(\frac{-2x}{2-x^2-2y^2} + \frac{-x}{\sqrt{2-x^2-2y^2}}\right)dx + \left(\frac{-4y}{2-x^2-2y^2} + \frac{-2y}{\sqrt{2-x^2-2y^2}}\right)dy$$

er eksakt i mængden $\{(x,y) \mid x^2+2y^2<2\}$, og find den funktion på mængden, som har formen til differential og i punktet $(1,0)$ har værdien 0.

135. Vis, at differentialformen

$$\omega = \frac{x}{(x-y)^2}\,dx - \frac{x^2}{y(x-y)^2}\,dy$$

er eksakt i ethvert af de ved linierne $x=y$ og $y=0$ bestemte vinkelrum.

Find for hvert af disse vinkelrum samtlige funktioner i vinkelrummet, der har formen til differential.

136. Vis, at differentialformen

$$\omega = 2xz\exp(x^2+y^2)\,dx + 2yz\exp(x^2+y^2)\,dy + \exp(x^2+y^2)\,dz$$

er eksakt, og find en funktion, der har den til differential.

137. Lad $\mathcal{L}(x,y)$ og $\mathcal{M}(x,y)$ være to funktioner på mængden $\{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ med kontinuerte partielle afledede, der opfylder betingelsen $\mathcal{L}'_y(x,y) = \mathcal{M}'_x(x,y)$. Idet $K(r)$ betegner cirklen $(x,y) = (r\cos t, r\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, skal det vises, at kurveintegralet

$$\int_{K(r)} \mathcal{L}(x,y)\,dx + \mathcal{M}(x,y)\,dy$$

er uafhængigt af r.

138. Vis, at differentialformen

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

er lokalt eksakt i mængden $A = \{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$.

Find dens integral langs en vilkårlig cirkelbue $(x,y) = (r\cos t, r\sin t)$, $a \leq t \leq b$. Er ω eksakt i A?

Vis, at formen er eksakt i mængden $B = \{(x,y) = (r\cos t, r\sin t) \mid r > 0, -\pi < t < \pi\}$, og angiv en funktion i denne mængde, der har den til differential.

139. Vis, at differentialformen

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{x_1^2 + \cdots + x_k^2}\,dx_j$$

er eksakt i mængden $\mathbb{R}^k \setminus \{(0,\cdots,0)\}$, og angiv en funktion i denne mængde, der har den til differential.

Kap. 2. Funktioner af en kompleks variabel.

§1. Argumentfunktion. Argumentvariation.

Ethvert $z = x+iy \in \mathbb{C}$ kan ved brug af polære koordinater på uendelig mange måder skrives på formen $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, hvor r og θ er reelle og $r \geq 0$. I alle disse fremstillinger har r værdien $|z|$, som ofte kaldes tallets modulus. Ethvert af de brugbare θ kaldes et argument for z og betegnes $\arg z$. Betegnelsen $\arg z$ står altså ikke for eet tal, men for mange. Er $z=0$, står $\arg z$ for ethvert reelt tal. Er $z \neq 0$ og er θ en af værdierne for $\arg z$, vil samtlige værdier for $\arg z$ være bestemt ved $\theta + p2\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. Den ved $-\pi \leqslant \arg z < \pi$ bestemte værdi af argumentet kaldes ofte dets hovedværdi. Det er åbenbart en kontinuert funktion på $\mathbb{C} \setminus \{z \mid z \text{ reel} \leqslant 0\}$. Tilsvarende er for ethvert reelt α den på mængden $\mathbb{C} \setminus \{z = re^{i\alpha} \mid r \geqslant 0\}$ ved $\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$ bestemte argumentværdi en kontinuert funktion.

Er $f: M \to \mathbb{C}$ en vilkårlig kompleks funktion på en mængde M, betegner vi med $\arg f$ enhver funktion på M, hvis værdi for ethvert $t \in M$ er en af værdierne af $\arg f(t)$.

Sætning 1. *Lad $f: [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være en kontinuert fra 0 forskellig kompleks funktion på et interval $[a,b]$. Da har f en kontinuert argumentfunktion $\arg f$.*

Bevis. Hvis der findes et α, så at $f(t) \in \mathbb{C} \setminus \{z = re^{i\alpha} \mid r \geqslant 0\}$ for alle $t \in [a,b]$, er den ved $\alpha < \arg f(t) < \alpha + 2\pi$ bestemte argumentfunktion kontinuert.

Hvis intet sådant α findes, betragter vi $m = \inf_{t\in[a,b]} |f(t)|$. I følge kontinuiteten af f er $m>0$, og der findes et $\delta>0$, således at $|f(t')-f(t'')|<m$, når $t',t''\in[a,b]$ og $|t'-t''|<\delta$. Vi vælger delepunkter $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, således at $|t_j-t_{j-1}|<\delta$ for $j=1,\dots,n$. For hvert af intervallerne $[t_{j-1},t_j]$ findes da et α_j, således at $f(t)\in \hat{C}\setminus\{z=re^{i\alpha_j}\mid r\geqslant 0\}$ for alle $t\in[t_{j-1},t_j]$, og følgelig en kontinuert argumentfunktion $\arg f$ på $[t_{j-1},t_j]$. Disse argumentfunktioner kan åbenbart vælges således, at vi for hvert $j=1,\dots,n-1$ har samme værdi af $\arg f(t_j)$ i de to intervaller $[t_{j-1},t_j]$ og $[t_j,t_{j+1}]$. Tilsammen giver disse funktioner da det ønskede.

Ud fra en kontinuert argumentfunktion $\theta=\arg f$ får vi samtlige ved addition af hele multipla af 2π. Thi når θ er en kontinuert argumentfunktion, er $\theta+p2\pi$, $p\in\mathbb{Z}$, det også, og når θ og θ_1 er kontinuerte argumentfunktioner, er $\theta_1-\theta$ en kontinuert funktion på $[a,b]$, hvis værdi for ethvert $t\in[a,b]$ er et helt multiplum af 2π, men en sådan funktion må være konstant [da værdimængden af en kontinuert reel funktion på et interval er et interval].

En kontinuert argumentfunktion $\arg f$ kaldes ofte en <u>kontinuert gren</u> af argumentet for f.

Af det ovenstående fremgår, at differensen

$$\arg f(b) - \arg f(a)$$

har samme værdi for <u>alle</u> kontinuerte argumentfunktioner $\arg f$. Denne differens kaldes <u>argumentvariationen af f på</u> $[a,b]$, eller argumentvariationen for den kontinuerte kurve $z=f(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, i $\hat{C}\setminus\{0\}$.

Er specielt $f(a)=f(b)$, er værdierne $\arg f(a)$ og $\arg f(b)$ to værdier af argumentet for et fra 0 forskelligt komplekst tal. Argumentvariationen er derfor et helt multiplum af 2π:

$$\arg f(b) - \arg f(a) = n\,2\pi.$$

Den kontinuerte kurve $z=f(t)$, $a\leq t\leq b$, er i dette tilfælde en lukket kurve. Tallet n kaldes funktionens, eller kurvens, omløbstal om 0.

Sætning 2. Er $f:[a,b]\to \dot{C}\setminus\{0\}$ og $g:[a,b]\to \dot{C}\setminus\{0\}$ kontinuerte fra 0 forskellige komplekse funktioner, for hvilke $f(a)=f(b)$, $g(a)=g(b)$, og gælder

$$|g(t)-f(t)| < |f(t)| \quad \text{for alle } t\in[a,b],$$

da har f og g samme omløbstal om 0.

Bevis. Vi skriver $g(t)=f(t)h(t)$, altså $h(t)=\frac{g(t)}{f(t)}$. Da er

$$|h(t)-1| = \frac{|g(t)-f(t)|}{|f(t)|} < 1 \quad \text{for alle } t\in[a,b].$$

Hovedværdien af $\arg h(t)$ bestemmer derfor en kontinuert argumentfunktion $\arg h$. Vælges en kontinuert argumentfunktion $\arg f$, vil $\arg f + \arg h$ være en kontinuert argumentfunktion $\arg g$. Da $\arg h(a) = \arg h(b)$, slutter vi, at

$$\arg g(b) - \arg g(a) = \arg f(b) - \arg f(a).$$

Specialtilfælde. Antagelsen $|g(t)-f(t)|<|f(t)|$ for alle $t\in[a,b]$ er specielt opfyldt, hvis $|f(t)|\geq m$ og $|g(t)-f(t)|\leq \mu < m$ for alle $t\in[a,b]$. Når en mand går n gange rundt om hesten på Kgs. Nytorv med en hund i en tilstrækkelig kort snor, og hunden efter mandens n omløb er tilbage i udgangsstillingen, vil hunden også have foretaget n omløb.

§2. Algebraens fundamentalsætning.

Ethvert polynomium $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ med komplekse koefficienter af grad $\geqslant 1$ har en rod, dvs. der findes et komplekst tal z, for hvilket $P(z) = 0$.

Det første bevisforsøg skyldes d'Alembert (1746), og sætningen kaldes ofte d'Alemberts sætning. En række beviser blev givet af Gauss (det første 1799). Der kendes mange ret forskellige beviser.

Bevis. Vi antager, at graden er n, altså $a_n \neq 0$. Beviset føres indirekte. Vi antager altså, at $P(z) \neq 0$ for alle $z \in \mathbb{C}$.

For ethvert $r \geqslant 0$ betragtes funktionen $f_r(t) = P(re^{it})$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Idet f_r er kontinuert og $\neq 0$, og $f_r(0) = f_r(2\pi)$, har f_r et omløbstal om 0; vi betegner dette omløbstal $n(r)$.

For ethvert $R > 0$ er ifølge kontinuiteten af P

$$\inf_{|z| \leqslant R} |P(z)| = m > 0,$$

og der findes et $\delta > 0$, så at

$$|P(z_2) - P(z_1)| < m, \text{ når } |z_1| \leqslant R, |z_2| \leqslant R, |z_2 - z_1| < \delta.$$

Vælger vi r_1 og r_2 i $[0, R]$ således, at $|r_2 - r_1| < \delta$, gælder altså

$$|f_{r_2}(t) - f_{r_1}(t)| < |f_{r_1}(t)| \quad \text{for alle } t \in [0, 2\pi].$$

Af sætning 2 i §1 fremgår derfor, at $n(r_1) = n(r_2)$. Funktionen $n(r)$ er derfor konstant i $[0, R]$, og følgelig, da $R > 0$ var vilkårlig, konstant i $[0, +\infty[$.

For $r = 0$ er $f_r(t)$ konstant $= P(0)$ for alle $t \in [0, 2\pi]$. Følgelig er $n(0) = 0$. Vi har altså $n(r) = 0$ for alle r.

Nu betragter vi

$$P(z) - a_n z^n = Q(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}.$$

For $|z| = r$ har vi

$$|a_n z^n| = |a_n| r^n, \quad |Q(z)| \leqslant |a_0| + |a_1| r + \cdots + |a_{n-1}| r^{n-1}.$$

Da $a_n \neq 0$, kan vi vælge et $r > 0$, således at

$$|a_0| + |a_1| r + \cdots + |a_{n-1}| r^{n-1} < |a_n| r^n.$$

Da gælder for $|z| = r$, at

$$|P(z) - a_n z^n| < |a_m z^n|.$$

Altså gælder

$$|f_r(t) - a_n r^n e^{int}| < |a_n r^n e^{int}| \text{ for alle } t \in [0, 2\pi].$$

Af sætning 2 i § 1 fremgår derfor, at funktionerne $f_r(t)$ og $g_r(t) = a_n r^n e^{int}$ har samme omløbstal om 0. Men sættes $a_n = |a_n| e^{i\alpha_n}$, ses, at g_r har den kontinuerte argumentfunktion $\alpha_n + nt$. Dens argumentvariation er derfor $n 2\pi$, d.v.s. omløbstallet for g_r er n. For det betragtede r gælder altså $n(r) = n$, hvormed vi er nået til en modstrid.

Af den beviste sætning fremgår som bekendt følgende sætning, der omvendt indeholder den beviste sætning og også ofte kaldes algebraens fundamentalsætning:

<u>Ethvert polynomium</u> $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ <u>af grad</u> $n \geqslant 1$ <u>kan på en og, bortset fra førstegradsfaktorernes rækkefølge, kun på en måde skrives på formen</u>

$$P(z) = a_n (z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

Polynomiet har til rødder tallene $z_1, \ldots, z_n$ og ikke andre; de kaldes også rødderne i ligningen $P(z) = 0$. Tallene $z_1, \ldots, z_n$ behøver ikke at være indbyrdes for-

skellige. Antallet af gange en rod optræder blandt tallene $z_1, \ldots, z_n$ kaldes rodens multiplicitet.

Ved polynomiets diskriminant forstås (for $n > 1$) størrelsen

$$D = a_n^{2n-2} (z_1 - z_2)^2 (z_1 - z_3)^2 \cdot \ldots \cdot (z_1 - z_n)^2 \cdot (z_2 - z_3)^2 \cdot \ldots \cdot (z_2 - z_n)^2 \cdot \ldots \cdot (z_{n-1} - z_n)^2.$$

Man ser, at tallene $z_1, \ldots, z_n$ er forskellige, hvis og kun hvis $D \neq 0$.

Tilfældet $n = 1$. Polynomiet $P(z) = a_1 z + a_0$, $a_1 \neq 0$, omskrives til $P(z) = a_1 (z + \frac{a_0}{a_1})$. Det har den ene rod $z = -\frac{a_0}{a_1}$.

Tilfældet $n = 2$. Polynomiet $P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, $a_2 \neq 0$, omskrives til

$$P(z) = a_2 \left[(z + \frac{a_1}{2a_2})^2 - \frac{a_1^2 - 4a_0 a_2}{(2a_2)^2} \right].$$

Betegnes med $\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}$ den ene af de to kvadratrødder [hvis $a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0$ naturligvis tallet 0], omskrives polynomiet videre til

$$P(z) = a_2 (z - z_1)(z - z_2), \text{ hvor } \left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}.$$

Polynomiet har altså de to rødder z_1 og z_2. Diskriminanten er

$$D = a_2^2 (z_1 - z_2)^2 = a_1^2 - 4a_0 a_2.$$

Man har

$$z_1 + z_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \quad z_1 z_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

§3. Polynomier af tredie grad.

Et polynomium af tredie grad

$$P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0, \quad a_3 \neq 0,$$

omskrives, idet man sætter $z = w + a$, til

$$P(z) = a_3(w+a)^3 + a_2(w+a)^2 + a_1(w+a) + a_0$$
$$= a_3w^3 + (3a_3a + a_2)w^2 + \cdots.$$

Vælges $a = -\frac{a_2}{3a_3}$, fås altså

$$P(z) = a_3(w^3 + pw + q) = a_3Q(w),$$

hvor p og q let udregnes. Hvis $Q(w)$ har rødderne w_1, w_2, w_3, altså fremstillingen $Q(w) = (w-w_1)(w-w_2)(w-w_3)$, vil $P(z)$ have fremstillingen

$$P(z) = a_3(z-w_1-a)(z-w_2-a)(z-w_3-a),$$

og $P(z)$ har altså rødderne $z_1 = w_1 + a$, $z_2 = w_2 + a$, $z_3 = w_3 + a$.

Det er følgelig tilstrækkeligt at betragte et polynomium

$$P(z) = z^3 + pz + q.$$

Vi antager i det følgende $p \neq 0$ og $q \neq 0$, idet bestemmelsen af rødderne ellers er triviel. Sættes $z = u + v$, fås

$$P(z) = u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q.$$

Nu kan vi for ethvert z vælge u og v således, at

$$\begin{cases} u + v = z \\ uv = -\frac{p}{3}. \end{cases}$$

Disse ligninger betyder blot, at u og v er rødderne i andengradspolynomiet $y^2 - zy - \frac{p}{3}$. For et sådant valg af u og v fås altså

$$P(z) = u^3 + v^3 + q,$$

og betingelsen for, at $z = u + v$ er rod i $P(z)$ er altså, at $u^3 + v^3 = -q$. To tal u og v, der opfylder ligningerne

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3}, \end{cases}$$

opfylder også ligningerne

$$u^3+v^3=-q,$$
$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27},$$

d.v.s. u^3 og v^3 er rødderne i polynomiet $y^2+qy-\frac{p^3}{27}$. Vi må altså have

$$\left.\begin{matrix}u^3\\v^3\end{matrix}\right\}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\quad\text{eller}\quad\left.\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right\}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Her står $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ for den ene af de to kvadratrødder. På grund af symmetrien i u og v ligger der ingen indskrænkning i at knytte u^3 til plustegnet og v^3 til minustegnet.

For u fås altså tre værdier, nemlig, hvis u_0 er en af værdierne, tallene u_0, εu_0, $\varepsilon^2 u_0$, hvor $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ og $\varepsilon^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ [$1,\varepsilon,\varepsilon^2$ er rødderne i y^3-1]. Tilsvarende fås for v tre værdier, nemlig, hvis v_0 er en af værdierne, tallene v_0, εv_0, $\varepsilon^2 v_0$. Af kombinationerne kan vi benytte de og kun de, for hvilke $uv=-\frac{p}{3}$. Af sådanne er der tre. Hvis u_0, v_0 er en af dise, er de to andre $\varepsilon u_0, \varepsilon^2 v_0$ og $\varepsilon^2 u_0, \varepsilon v_0$. Hermed er vist:

Et tal z er rod i polynomiet $P(z)=z^3+pz+q$, hvis og kun hvis det har formen

$$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

hvor de to kubikrødder er valgt således, at deres produkt er $-\frac{p}{3}$. Betegner u_0, v_0 en brugbar kombination, bestemmes samtlige brugbare kombinationer ved

$$u_0, v_0;\qquad \varepsilon u_0, \varepsilon^2 v_0;\qquad \varepsilon^2 u_0, \varepsilon v_0.$$

Ved udregning finder man, at

$$P(z)=(z-(u_0+v_0))(z-(\varepsilon u_0+\varepsilon^2 v_0))(z-(\varepsilon^2 u_0+\varepsilon v_0)).$$

De tre tal

$$z_1=u_0+v_0,\quad z_2=\varepsilon u_0+\varepsilon^2 v_0,\quad z_3=\varepsilon^2 u_0+\varepsilon v_0$$

er altså de tre rødder i $P(z)$ ikke blot, når de er ind-

byrdes forskellige, men i alle tilfælde (evt. multiple rødder er ved løsningsformlen fundet så ofte, som multiplicitetten angiver). Ved udregning finder man diskriminanten

$$D = (z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2(z_2-z_3)^2 = -27q^2 - 4p^3.$$

Diskussion i tilfælde af reelle p og q.

1) $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, d.v.s. $D = 0$. Da må gælde $p < 0$. Som u_0 og v_0 kan da benyttes den reelle værdi af $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, og vi finder enkeltroden $z_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ og dobbeltroden $z_2 = z_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$.

2) $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, d.v.s. $D < 0$. Tallene $-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ er da reelle, og som u_0, v_0 kan benyttes de reelle kubikrødder. Vi finder den ene reelle rod $z_1 = u_0 + v_0$ og de to konjugeret komplekse rødder

$$\left.\begin{matrix} z_2 \\ z_3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 v_0 \\ \varepsilon^2 u_0 + \varepsilon v_0 \end{matrix}\right\} = -\frac{u_0+v_0}{2} \pm i\sqrt{3}\,\frac{u_0-v_0}{2}.$$

3) $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, d.v.s. $D > 0$. Da må gælde $p < 0$. Tallene $-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ er her konjugeret komplekse, og vi har

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

hvor $\varphi \in]0,\pi[$ og $\cos\varphi = \dfrac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$.

En brugbar kombination u_0, v_0 er

$$\left.\begin{matrix} u_0 \\ v_0 \end{matrix}\right\} = \sqrt{-\tfrac{p}{3}}\,(\cos\tfrac{\varphi}{3} \pm i\sin\tfrac{\varphi}{3}).$$

De andre brugbare kombinationer er

$$\left.\begin{matrix} \varepsilon u_0 \\ \varepsilon^2 v_0 \end{matrix}\right\} = \sqrt{-\tfrac{p}{3}}\,(\cos\tfrac{\varphi+2\pi}{3} \pm i\sin\tfrac{\varphi+2\pi}{3})$$

og

$$\left.\begin{matrix} \varepsilon^2 u_0 \\ \varepsilon v_0 \end{matrix}\right\} = \sqrt{-\tfrac{p}{3}}\,(\cos\tfrac{\varphi+4\pi}{3} \pm i\sin\tfrac{\varphi+4\pi}{3}),$$

og vi finder de tre reelle rødder

$$z_1 = 2\sqrt{-\tfrac{p}{3}}\cos\tfrac{\varphi}{3},\quad z_2 = 2\sqrt{-\tfrac{p}{3}}\cos\tfrac{\varphi+2\pi}{3},\quad z_3 = 2\sqrt{-\tfrac{p}{3}}\cos\tfrac{\varphi+4\pi}{3}.$$

Løsningen af tredjegradsligningen blev fundet i begyndelsen af det 16. årh. af del Ferro, genfundet af Tartaglia, og offentliggjort af Cardano (Ars magna 1545), efter hvem løsningsformlen ofte benævnes. Bemærkelsesværdigt er, at løsningsformlen i tilfælde af reelle p og q og $D > 0$ giver de tre reelle rødder som summer af komplekse tal, som man dengang ikke beherskede; derfor betegnelsen casus irreducibilis i dette tilfælde. Den trigonometriske form af rødderne i dette tilfælde blev fundet af Viète i slutningen af det 16. årh. ud fra formlen $\cos 3v = 4\cos^3 v - 3\cos v$.

§4. Holomorfe funktioner.

Lad A være en åben, sammenhængende mængde i $\dot{\mathbb{C}}$. En funktion $w = f(z): A \to \dot{\mathbb{C}}$ kaldes differentiabel i et punkt $z \in A$, hvis forholdet $\frac{\Delta f}{\Delta z}$, hvor Δf betegner tilvæksten $\Delta f = f(z+\Delta z) - f(z)$ svarende til et punkt $z + \Delta z \in A$, har en grænseværdi for $\Delta z \to 0$ ($\Delta z \neq 0$), altså såfremt

$$\Delta f = c\Delta z + \varepsilon(\Delta z)\Delta z,$$

hvor $\varepsilon(\Delta z) \to 0$ for $\Delta z \to 0$. Når dette er tilfældet, kaldes $c\Delta z$ differentialet af f i punktet z og betegnes df eller $df(z)$. Den identiske funktion $h: \dot{\mathbb{C}} \to \dot{\mathbb{C}}$, defineret ved $h(z) = z$, er åbenbart differentiabel i ethvert punkt $z \in \dot{\mathbb{C}}$, og idet $\Delta h = \Delta z$, har vi $dh = \Delta z$, altså $dz = \Delta z$, således at vi i stedet for $df = c\Delta z$ kan skrive

$$df(z) = c\,dz \quad \text{eller (når } dz \neq 0) \quad \frac{df}{dz} = c.$$

Tallet c kaldes derfor differentialkvotienten for f i z. Den betegnes også $f'(z)$ eller $Df(z)$ og kaldes også den afledede af f i z. Det er klart, at hvis f er differentiabel i z, er f også kontinuert i z.

Definition. Funktionen $f: A \to \dot{\mathbb{C}}$ kaldes holomorf i A, hvis den er differentiabel i ethvert punkt af A, og differentialkvotienten f' er kontinuert i A.

I stedet for holomorf benyttes benævnelserne regulær, regulær analytisk, eller blot analytisk, den sidste har dog også en videre anvendelse.

Bemærkning. Vi vil senere se, at kravet om, at

f' skal være kontinuert, er overflødigt, idet denne betingelse af sig selv vil være opfyldt, når f er differentiabel i ethvert punkt af A. Det giver dog en lettelse i fremstillingen forelobig at medtage dette krav.

Skrives $z = x+iy$, bliver $f(z) = f(x+iy)$ en funktion af (x,y) på en mængde i $\mathbb{R}^2$, som vi naturligvis også kalder A. Skrives $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$, bliver differentiabiliteten af f i z med differentialkvotienten c udtrykt ved ligningen

$$\Delta f = c\,\Delta x + ic\,\Delta y + \eta(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

hvor $\eta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ for $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, som udtrykkes, at f opfattet som funktion af (x,y) er differentiabel med differentialet

$$df = c\,dx + ic\,dy = c(dx+i\,dy),$$

altså med de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x} = c$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = ic$. Vi har altså

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Skrives $w = u+iv$, bliver $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ en afbildning af A ind i $\mathbb{R}^2$. Differentiabiliteten af f i et punkt z med differentialkvotienten $c = a+ib$ bliver, idet $(a+ib)(dx+i\,dy) = (a\,dx - b\,dy) + i(b\,dx + a\,dy)$, ensbetydende med, at funktionerne u og v er differentiable i (x,y) med differentialerne

$$du = a\,dx - b\,dy, \qquad dv = b\,dx + a\,dy.$$

At f er holomorf i A er derfor ensbetydende med, at (1) <u>funktionerne u og v tilhører $C^1(A)$</u> og (2) <u>de partielle afledede tilfredsstiller Cauchy-Riemanns differentialligninger</u>

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Set fra den reelle analyses synspunkt er en holomorf funktion således noget meget specielt, idet den svarer til et funktionspar af meget speciel art. Det afgørende er imidlertid, at vi netop ikke identificerer $\hat{C}$ med $\hat{R}^2$, men udnytter, at $\hat{C}$ er fremkommet af $\hat{R}^2$ ved at indføre multiplikationen. Teorien træder derfor også klarest frem, når man så vidt muligt undgår overgangen til reelle variable. Vi vil dog ikke her gennemføre dette synspunkt, idet vi i mange tilfælde kommer let til resultaterne ved at benytte resultater fra den reelle analyse.

Sætning 1. Enhver konstant funktion f i A er holomorf med den afledede $f'=0$. Hvis omvendt en funktion f i A er holomorf med den afledede $f'=0$, er f en konstant.

Bevis. Sætningens første del er klar, da $\Delta f = f(z+\Delta z)-f(z)$ altid er 0. Anden del følger af, at f må være konstant på ethvert akseparallelt liniestykke, da både $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, idet man benytter, at to vilkårlige punkter af A kan forbindes med en akseparallel polygon.

Sætning 2. Hvis f og g er holomorfe i A, er $f+g$, $f-g$, fg, og $\frac{f}{g}$ (det sidste forudsat, at $g(z)\neq 0$ for alle $z\in A$) holomorfe funktioner i A, og der gælder

$$(f+g)' = f'+g', \qquad (f-g)' = f'-g',$$
$$(fg)' = f'g+fg', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

Bevis. At funktionerne er differentiable med de anførte afledede vises nøjagtigt som for funktioner af en reel variabel. At de afledede er kontinuerte ses af udtrykkene.

Af denne sætning følger (idet enhver konstant funktion og funktionen z er holomorfe i $\dot{C}$) at ethvert polynomium, eller med andre ord enhver hel rational funktion, $P(z)$ er en holomorf funktion i $\dot{C}$, og at enhver rational funktion $\frac{P(z)}{Q(z)}$ (hvor P og Q er polynomier) er en holomorf funktion i mængden $\{z \mid Q(z) \neq 0\}$.

Ved induktion efter n vises umiddelbart, at man har $(z^n)' = n z^{n-1}$ for alle $n \in \dot{N}$, så at differentialkvotienten for et polynomium udregnes efter den sædvanlige regel. Heraf følger $(z^{-n})' = \left(\frac{1}{z^n}\right)' = \frac{-n z^{n-1}}{z^{2n}} = -n z^{-n-1}$ for $z \neq 0$ og alle $n \in \dot{N}$, altså atter den sædvanlige regel.

Sætning 3. Hvis $f: A \to B \subseteq \dot{C}$ og $g: B \to \dot{C}$ er holomorfe funktioner, er også $g \circ f: A \to \dot{C}$ holomorf, og

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'.$$

Bevis. Beviset forløber på samme måde som for funktioner af en reel variabel. For vilkårlige punkter $z \in A$ og $z + \Delta z \in A$ sættes $f(z) = w$ og $f(z + \Delta z) = w + \Delta w$. Da er

$$\begin{aligned} \Delta(g \circ f) &= g \circ f(z + \Delta z) - g \circ f(z) = g(w + \Delta w) - g(w) \\ &= [g'(w) + \varepsilon(\Delta w)]\, \Delta w, \end{aligned}$$

hvoraf (for $\Delta z \neq 0$)

$$\frac{\Delta(g \circ f)}{\Delta z} = [g'(w) + \varepsilon(\Delta w)] \frac{\Delta w}{\Delta z} \to g'(w) f'(z).$$

Altså er $g \circ f$ differentiabel med den afledede $(g' \circ f) f'$. Af udtrykket følger, at den afledede er kontinuert.

Sætning 4. Hvis $f: A \to \dot{C}$ er holomorf og $z_0 \in A$ er et punkt, hvori $f'(z_0) \neq 0$, da findes en åben sammenhængende delmængde A_0 af A med følgende egenskaber: (1) $z_0 \in A_0$ og $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in A_0$, (2) A_0 afbildes ved

f bijektivt på en åben, sammenhængende mængde B_0, (3) den omvendte afbildning $g = f^{-1} : B_0 \to A_0$ er holomorf i B_0, og dens afledede er

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

Bevis. Her benytter vi med fordel overgang til reelle variable. Idet vi sætter $z = x+iy$, $w = u+iv$, er afbildningen $w = f(z)$ bestemt ved funktioner $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ fra $C^1(A)$. Sættes $f'(z) = a(x,y) + i\,b(x,y)$, er funktionalmatricen

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Funktionaldeterminanten er altså $a^2+b^2 = |f'(z)|^2$, som er forskellig fra 0 for $z = z_0$. Af Kap. 1, §5 fremgår derfor, at der findes en åben omegn $A_0 \subseteq A$ af z_0, som naturligvis kan vælges sammenhængende, i hvilken $f'(z) \neq 0$, og som ved f afbildes bijektivt, og følgelig på en åben mængde B_0, der ligeledes må være sammenhængende, således at den omvendte afbildning $z = g(w) : B_0 \to A_0$ bliver bestemt ved funktioner $x(u,v)$, $y(u,v) \in C^1(B_0)$ med funktionalmatricen

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

hvilket viser, at $x(u,v)$ og $y(u,v)$ tilfredsstiller Cauchy-Riemanns differentialligninger og at $g'(w) = \frac{1}{a^2+b^2}(a-ib)$ $= \frac{1}{f'(z)}$.

Bemærkning. Af sætning 4 følger, at hvis f er holomorf i A og afbilder A bijektivt på en mængde B, og $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in A$, da er B åben, og naturligvis også sammenhængende, og den omvendte funktion $g = f^{-1}$

er holomorf i B og har den afledede $g' = \frac{1}{f' \circ g}$. Vi skal senere se, at betingelsen $f'(z) \neq 0$ er overflødig, idet den er en følge af, at afbildningen er bijektiv.

Sætning 5. Hvis $f: A \to \dot{C}$ er holomorf, og $\varphi: J \to A$ er en kompleks funktion på et interval J i $\dot{R}$ tilhørende $C^1(J)$, vil $f \circ \varphi: J \to \dot{C}$ tilhøre $C^1(J)$ og

$$(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi)\varphi'.$$

Beviset forløber som beviset for sætning 4.

Konform afbildning. Lad $w = f(z): A \to \dot{C}$ være en holomorf funktion, for hvilken $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in A$. Lad z_0 være et punkt af A. Vi sætter $f(z_0) = w_0$ og $f'(z_0) = \varrho e^{i\alpha}$ [altså $|f'(z_0)| = \varrho$, $\arg f'(z_0) = \alpha$]. Ifølge sætning 4 afbildes en omegn af z_0 ved f bijektivt på en omegn af w_0. Idet $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ for små $|\Delta z|$ omtrent er lig med differentialet $df = f'(z_0)\Delta z$, er afbildningen i en lille omegn af z_0 omtrent den ved

$$w - w_0 = f'(z_0)(z - z_0) = \varrho e^{i\alpha}(z - z_0)$$

bestemte afbildning. Denne er simpelthen den ligedannethed, ved hvilken z_0 går over i w_0, og enhver vektor $z - z_0$ ud fra z_0 går over i den vektor $w - w_0$ ud fra w_0, der fremkommer af vektoren $z - z_0$ ved at multiplicere dens længde med ϱ og dreje den vinklen α. Man udtrykker denne egenskab ved afbildningen f ved at sige, at den er konform, eller en ligedannethed i det små. Tallet $\varrho = |f'(z_0)|$ kaldes afbildningens strækningsforhold i z_0, og tallet $\alpha = \arg f'(z_0)$ afbildningens drejningsvinkel i z_0.

Den nøjagtige betydning af strækningsforholdet og drejningsvinklen får vi, når vi bemærker, at $w = f(z)$

ikke netop er bestemt ved ovenstående ligning, men at der for $z \to z_0$ gælder

$$\frac{w-w_0}{z-z_0} \to f'(z_0) = \varrho e^{i\alpha}$$

eller

$$\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|} \to \varrho \quad \text{og} \quad \arg(w-w_0) - \arg(z-z_0) \to \alpha.$$

[Den anden ligning skal forstås således, at man kan vælge sammenhørende værdier af argumenterne, således at ligningen bliver opfyldt.] Man ser altså, at strækningsforholdet er grænseværdi for $z \to z_0$ for forholdet $\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}$, og at drejningsvinklen er grænseværdi for differensen $\arg(w-w_0) - \arg(z-z_0)$. Tænker man sig, at z konvergerer mod z_0 langs en kurve, som i z_0 har en halvtangent bestemt ved vektoren $e^{i\Theta}$, altså at $\arg(z-z_0)$ [ved passende valg af argumentet] konvergerer mod Θ, ser man, at $\arg(w-w_0)$ [ved passende valg af argumentet] vil konvergere mod $\Theta+\alpha$. Altså konvergerer w mod w_0 langs en kurve, som i w_0 har den ved $e^{i(\Theta+\alpha)}$ bestemte halvtangent. Denne vektor $e^{i(\Theta+\alpha)}$ er netop fremgået af $e^{i\Theta}$ ved drejningen α. To sådanne kurver udgående fra z_0 afbildes altså i to sådanne kurver udgående fra w_0, således at vinklen mellem halvtangenterne bevares. Man udtrykker dette ved at sige, at afbildningen er <u>vinkeltro</u> (med bevarelse af orienteringen).

Ved diskussionen af den ved en holomorf funktion $f: A \to \mathbb{C}$ bestemte afbildning søger man at bestemme værdimængden $B = f(A)$. Af særlige punkter søger man dem, hvori $f'(z) = 0$. Afbildningen af en omegn af et sådant punkt vil blive undersøgt senere. Undertiden kan også fixpunkter (punkter, for hvilke $f(z) = z$) have

interesse. Man søger at afgøre, om f er en bijektiv afbildning. Hvis ikke søger man at inddele A i mængder, der afbildes bijektivt. Afbildningen beskrives ofte fordelagtigt ved, at man i A finder to ortogonale kurvesystemer, der hver for sig udfylder A, og hvis billeder man kan undersøge; disse bliver ligeledes ortogonale, når bortses fra punkter, hvori $f'(z)=0$. Ved at tegne tilstrækkeligt tætliggende kurver i de to systemer og disses billeder i B får man overblik over afbildningen. Eksempelvis vil et fint kvadratnet i A afbildes i et net i B, hvis masker tilnærmelsesvis er kvadrater.

Den almene teori for funktioner af en kompleks variabel er grundlagt af Cauchy (fra omkring 1825) og videreført af Riemann, Weierstrass og mange andre. Den her fremstillede centrale del af teorien er næsten udelukkende Cauchys værk.

§5. Homografier.

Ved en homografi (eller en homografisk transformation) forstås en afbildning bestemt ved en funktion

$$w = f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

hvor $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ og matricen $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ er regulær (d.v.s. talparrene (α, β) og (γ, δ) er lineært uafhængige). To talsæt $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ og $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ bestemmer samme funktion, hvis og kun hvis de er proportionale.

1. Hvis $\gamma = 0$ drejer det sig om en funktion

$$w = f(z) = az + b,$$

hvor $a \neq 0$. Hvis $a = 1$ og $b = 0$ er dette den identiske afbildning. Hvis $a = 1$ og $b \neq 0$ er det den ved b bestemte parallelforskydning, som ikke har noget fixpunkt. Hvis $a \neq 1$, har afbildningen det ved ligningen $z_0 = az_0 + b$ bestemte fixpunkt $z_0 = \frac{b}{1-a}$. Ligningen $w = az + b$ antager ved subtraktion af $z_0 = az_0 + b$ formen

$$w - z_0 = a(z - z_0),$$

og sættes $a = \varrho e^{i\alpha}$ [altså $\varrho = |a|$ og $\alpha = \arg a$] ser man, at afbildningen er den ligedannethed, der beskrives ved, at z_0 går over i sig selv, og at enhver vektor $z - z_0$ går over i den vektor $w - z_0$, der fås ved at multiplicere vektoren med ϱ og dreje den vinklen α. Vi siger, at afbildningen er sammensat af en homotheti ud fra z_0 i forholdet ϱ og en drejning om z_0 med drejningsvinklen α [rækkefølgen af de to transformationer er ligegyldig]. Er a reel og > 0, falder drejningen bort; er $|a| = 1$, falder homothetien bort. Er a reel og < 0, kan vi vælge $\alpha = \pi$, og drejningen er ensbetydende med en spejling i z_0.

I alle tilfælde er f en bijektiv afbildning af $\dot{C}$ på $\dot{C}$. Den omvendte afbildning bestemmes ved

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}.$$

Den er altså en homografi af samme type.

2. Hvis $\gamma \neq 0$, er funktionen kun defineret for $z \neq -\frac{\delta}{\gamma}$. Ved løsning efter z fås for $w \neq \frac{\alpha}{\gamma}$

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-\delta w + \beta}{\gamma w - \alpha}.$$

Ved $w = f(z)$ afbildes $\dot{C} \setminus \{-\frac{\delta}{\gamma}\}$ altså bijektivt på $\dot{C} \setminus \{\frac{\alpha}{\gamma}\}$, og den omvendte afbildning $z = f^{-1}(w)$ er en homografi af samme type. Man tager sig for undtagelsespunkterne ved at udvide $\dot{C}$ med et „uendelig fjernt" punkt ∞ til $\dot{C}^*$, idet man sætter

$$f(-\tfrac{\delta}{\gamma}) = \infty \quad \text{og} \quad f(\infty) = \tfrac{\alpha}{\gamma}.$$

Herved bliver f en bijektiv afbildning af $\dot{C}^*$ på $\dot{C}^*$. For den omvendte afbildning betyder udvidelsen, at man har

$$f^{-1}(\tfrac{\alpha}{\gamma}) = \infty \quad \text{og} \quad f^{-1}(\infty) = -\tfrac{\delta}{\gamma}.$$

3. Den udvidede plan anskueliggør man sig ved, at man anbringer en kugleflade S med diameter 1 på $\dot{C}$ med sydpolen i $z=0$ og projicerer $\dot{C}$ på S fra nordpolen. Ved denne stereografiske projektion afbildes $\dot{C}$ bijektivt på $S \setminus \{\text{nordpolen}\}$, og man fastsætter nu nordpolen som billede af ∞. Som topologi i $\dot{C}^*$ benyttes den, der defineres ved topologien i S [bestemt ved, at S som punktmængde i rummet er et metrisk rum], d.v.s. som åbne mængde i $\dot{C}^*$ tages de åbne mængder i $\dot{C}$ og alle mængder $A \cup \{\infty\}$, hvor A er en åben mængde i $\dot{C}$ med begrænset komplementermængde. Man ser, at $\dot{C}^*$ i denne topologi er kompakt [idet S er kompakt i sin topologi]. Man betegner ofte S som Riemanns kugle.

At kuglen netop placeres med sydpolen i $z=0$ og at dens diameter vælges til 1 er naturligvis underordnet. Herved opnås, at enhedscirklen $\{z \mid |z|=1\}$ afbildes i kuglens ækvator.

4. Indførelsen af ∞ giver anledning til, at vi også i tilfældet $\gamma=0$, altså for en funktion $w=f(z)=az+b$ med $a\neq 0$ går over til $\dot{C}^*$, idet vi fastsætter $f(\infty)=\infty$. Herved bliver f en bijektiv afbildning af $\dot{C}^*$ på $\dot{C}^*$. For den omvendte afbildning $z=f^{-1}(w)=\frac{1}{a}w-\frac{b}{a}$ betyder udvidelsen, at $f^{-1}(\infty)=\infty$. Herefter må det ovenfor gjorte udsagn vedrørende fixpunkter modificeres, idet vi nu i tilfældet $a=1$, $b\neq 0$ (parallelforskydningen) får det ene fixpunkt ∞, og i tilfældet $a\neq 1$ (ligedannetheden) får de to fixpunkter $z_0=\frac{b}{1-a}$ og ∞.

Bemærk, at formelparret

$$w=f(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\quad,\quad z=f^{-1}(w)=\frac{-\delta w+\beta}{\gamma w-\alpha}$$

også gælder, når $\gamma=0$. Vi har blot ovenfor i dette tilfælde sat $\frac{\alpha}{\delta}=a$, $\frac{\beta}{\delta}=b$ [eller, hvad der kommer ud på det samme, valgt $\delta=1$].

Efter den foretagne udvidelse kan vi formulere følgende

<u>Sætning 1. Enhver homografi er en bijektiv, kontinuert afbildning af $\dot{C}^*$ på $\dot{C}^*$.</u>

I det følgende vil vi stadig operere med udvidelserne til $\dot{C}^*$, men vi vil, for ikke at besværliggøre fremstillingen unødigt, i regningerne se bort fra punktet ∞ og i reglen udelade de trivielle fortolkninger, som er nødvendige for dette punkts vedkommende. Vi kan tillade os dette, idet der i de regninger, vi kommer til at udføre, altid kun vil være et endeligt antal punkter, for hvilke de ikke har mening, og resultaterne ud-

strækkes på grund af afbildningernes bijektivitet og kontinuitet umiddelbart til også at omfatte disse punkter.

Sætning 2. Homografierne udgør en transformationsgruppe i $\dot{C}^*$.

Bevis. Vi har allerede vist, at den omvendte afbildning til en homografi er en homografi. Det drejer sig derfor om at vise, at når f og g er homografier, er også $f \circ g$ en homografi. Dette ses af, at vi ved sammensætning af

$$w = f(z) = \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} \quad \text{og} \quad z = g(t) = \frac{\alpha_2 t + \beta_2}{\gamma_2 t + \delta_2}$$

får

$$w = f \circ g(t) = \frac{\alpha_3 t + \beta_3}{\gamma_3 t + \delta_3}, \text{ hvor } \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \gamma_3 & \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix}.$$

Som foran bemærket bestemmer to regulære matricer $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{bmatrix}$ samme homografi, hvis og kun hvis talsættene $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ og $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ er proportionale, d. v. s. hvis og kun hvis

$$\begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \text{ hvor } c \neq 0.$$

Man ser derfor af formlen for $f \circ g$, at gruppen af homografier er isomorf med faktorgruppen G/H, hvor G er gruppen af alle regulære matricer $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ (med multiplikation som komposition), og H er den normale undergruppe bestående af alle matricer $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $c \neq 0$.

Sætning 3. Enhver homografi $w = f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, som ikke er den identiske afbildning, har et eller to fixpunkter i $\dot{C}^*$.

Bevis. Hvis $\gamma = 0$, altså $f(z) = az + b$, har f som foran bemærket intet eller et fixpunkt i $\dot{C}$, eftersom $a = 1$ eller $a \neq 1$, og derudover fixpunktet ∞.

Hvis $\gamma \neq 0$, har f ikke ∞ til fixpunkt, og fixpunk-

terne i $\dot{C}$ bestemmes ved $z = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, eller

$$\gamma z^2 + (\delta-\alpha)z - \beta = 0;$$

der er altså et eller to, eftersom diskriminanten $(\delta-\alpha)^2+4\beta\gamma$ er $=0$ eller $\neq 0$.

I det videre studium af homografierne spiller begrebet dobbeltforhold en afgørende rolle. Ved dobbeltforholdet af fire tal $z, z_1, z_2, z_3 \in \dot{C}^*$, af hvilke z_1, z_2, z_3 er indbyrdes forskellige, forstås tallet

$$[z\, z_1\, z_2\, z_3] = \frac{\frac{z-z_2}{z-z_3}}{\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}},$$

hvis z_1, z_2, z_3 alle er $\neq \infty$; hvis henholdsvis z_1, z_2, z_3 er ∞, skal udtrykket på højre side (naturligvis) erstattes med henholdsvis

$$\frac{z-z_2}{z-z_3}, \qquad \frac{z_1-z_3}{z-z_3}, \qquad \frac{z-z_2}{z_1-z_2}.$$

Man ser, at $w = f(z) = [z\, z_1\, z_2\, z_3]$ i alle tilfælde er en homografi, og at $f(z_1)=1$, $f(z_2)=0$, $f(z_3)=\infty$.

Sætning 4. Til tre indbyrdes forskellige punkter $z_1, z_2, z_3 \in \dot{C}^*$ og tre indbyrdes forskellige punkter $w_1, w_2, w_3 \in \dot{C}^*$ findes en og kun en homografi $w = f(z)$, der afbilder z_1, z_2, z_3 i w_1, w_2, w_3, d. v. s. for hvilken

$$f(z_1) = w_1, \qquad f(z_2) = w_2, \qquad f(z_3) = w_3.$$

Bevis. Vi danner de ved dobbeltforholdene bestemte homografier

$$t = g(z) = [z\, z_1\, z_2\, z_3] \quad \text{og} \quad t = h(w) = [w\, w_1\, w_2\, w_3].$$

Da fører g punkterne $z = z_1, z_2, z_3$ over i $t = 1, 0, \infty$, og h^{-1} fører punkterne $t = 1, 0, \infty$ over i $w = w_1, w_2, w_3$. Altså fører $w = h^{-1} \circ g$ punkterne $z = z_1, z_2, z_3$ over i punkterne $w = w_1, w_2, w_3$.

Hvis to homografier f_1 og f_2 begge fører z_1, z_2, z_3 over i w_1, w_2, w_3, vil $f_2^{-1} \circ f_1$ have de tre fixpunkter z_1, z_2, z_3 og vil altså ifølge sætning 3 være den identiske afbildning. Altså er $f_1 = f_2$.

Sætning 5. Enhver homografi er dobbeltforholdstro, d. v. s. hvis den fører z_0, z_1, z_2, z_3 (hvor z_1, z_2, z_3 er indbyrdes forskellige) over i w_0, w_1, w_2, w_3 (hvor følgelig w_1, w_2, w_3 er indbyrdes forskellige), gælder

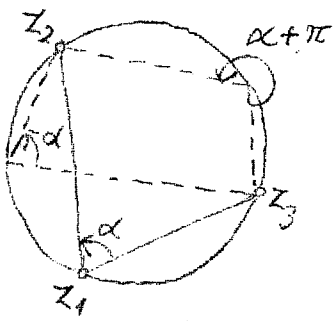
$$[z_0\, z_1\, z_2\, z_3] = [w_0\, w_1\, w_2\, w_3].$$

Bevis. Når z_1, z_2, z_3 går over i w_1, w_2, w_3, er ifølge beviset for sætning 4 sammenhørende punkter z og w netop bestemt ved, at $g(z) = [z\, z_1\, z_2\, z_3]$ og $h(w) = [w\, w_1\, w_2\, w_3]$ har samme værdi t.

Ved en almindelig cirkel i $\hat{\mathbb{C}}^*$ forstås en sædvanlig cirkel i $\mathbb{C}$ eller en ret linie i $\mathbb{C}$ udvidet med punktet ∞. Man ser, at der gennem tre indbyrdes forskellige punkter $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}^*$ går en og kun en almindelig cirkel. Vi vil vise, at denne cirkel er mængden af punkter z, for hvilke værdien af dobbeltforholdet $[z\, z_1\, z_2\, z_3]$ er et reelt tal eller ∞. Dette er ensbetydende med at sige, at cirklen ved den ved dobbeltforholdet bestemte homografi $w = f(z) = [z\, z_1\, z_2\, z_3]$ afbildes på den reelle akse udvidet med ∞.

Vi betragter først det tilfælde, hvor cirklen er en sædvanlig cirkel (se figur). For $z = z_2, z_3$ har $[z\, z_1\, z_2\, z_3]$ værdierne $0, \infty$. Vi skal altså vise, at cirklen eksklusive punkterne z_2, z_3 er mængden af de punkter z, for hvilke $[z\, z_1\, z_2\, z_3] \in \hat{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, d. v. s. for hvilke

$$\frac{z - z_2}{z - z_3} = k\, \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}, \text{ hvor } k \in \hat{\mathbb{R}} \setminus \{0\}.$$



Tallet $\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ har argumentet $\alpha \neq 0, \pi$. De søgte punkter er da de punkter $z \neq z_2, z_3$, for hvilke $\frac{z-z_2}{z-z_3}$ har enten argumentet α eller argumentet $\alpha+\pi$. Punktet ∞ hører ikke til disse. Ifølge sætningen om synsvinkelbuer udgør de første den bue $z_2 z_3$ af cirklen, der indeholder z_1, de andre den bue $z_2 z_3$ af cirklen, der ikke indeholder z_1. Ved også at betragte $\left|\frac{z-z_2}{z-z_3}\right|$ ser man, at når z gennemløber cirklen fra z_3 til z_3 i den ved $z_3 z_2 z_1 z_3$ bestemte retning, vil $[z z_1 z_2 z_3]$ gennemløbe den reelle akse i positiv retning.

Vi betragter dernæst det tilfælde, hvor cirklen er en ret linie udvidet med ∞. Hvis $z_1, z_2, z_3 \neq \infty$, har $\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ argumentet 0 eller π. Det gælder derfor om at søge de punkter $z \neq z_2, z_3$, for hvilke $\frac{z-z_2}{z-z_3}$ har argumentet 0 eller π. Disse udgør netop linien eksklusive punkterne z_2, z_3. Man ser, at når z gennemløber linien fra z_3 gennem ∞ til z_3 i den ved $z_3 z_2 z_1 z_3$ bestemte retning, vil $[z z_1 z_2 z_3]$ gennemløbe den reelle akse i positiv retning.

De tilfælde, hvor cirklen er en ret linie udvidet med ∞, og henholdsvis z_1, z_2, z_3 er ∞, behandles på tilsvarende måde.

<u>Sætning 6. Enhver homografi er cirkeltro, d.v.s. billedet af enhver almindelig cirkel er en almindelig cirkel.</u>

Bevis. Lad z_1, z_2, z_3 være indbyrdes forskellige punkter på den almindelige cirkel og w_1, w_2, w_3 deres billeder. Det til et punkt z svarende punkt w er da ifølge sætning 5 bestemt ved, at $[z z_1 z_2 z_3] = [w w_1 w_2 w_3]$. Da cirklen består af de punkter z, for hvilke $[z z_1 z_2 z_3]$ er reel eller ∞, består dens billede af de punkter w, for hvilke $[w w_1 w_2 w_3]$ er reel eller ∞. Billedet er altså netop den almindelige cirkel gennem w_1, w_2, w_3.

Sætning 7. Enhver homografi $w = f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ er vinkeltro (med bevarelse af orienteringen).

I denne forbindelse må vi naturligvis se bort fra punktet ∞, d.v.s. vi må for $\gamma = 0$ nøjes med at betragte f som en afbildning af $\hat{C}$ på $\hat{C}$, for $\gamma \neq 0$ som en afbildning af $\hat{C} \setminus \{-\frac{\delta}{\gamma}\}$ på $\hat{C} \setminus \{\frac{\alpha}{\gamma}\}$.

Bevis. Funktionen f er holomorf, og dens afledede er $f'(z) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2}$, som er $\neq 0$.

Bemærkning. Ved overgang til Riemanns kugle kan man også betragte vinkler mellem kurver ud fra ∞, og det viser sig, at vinkeltroskaben (med bevarelse af orienteringen) også gælder, når z eller w er ∞.

Det nærmere studium af den ved en homografi bestemte afbildning knyttes bekvemt til fixpunkterne.

A. En homografi $w = f(z)$ med to fixpunkter z_0 og z_1.

Hvis et af fixpunkterne, f.eks. z_1, er ∞, er afbildningen af typen $w = f(z) = az + b$, $a \neq 1$, og bestemmes også ved $w - z_0 = a(z - z_0)$. Den er da en ligedannethed.

Hvis begge fixpunkter er $\neq \infty$, indfører vi som hjælpefunktion homografien

$$t = h(z) = \frac{z - z_0}{z - z_1}.$$

For denne gælder $h(z_0) = 0$, $h(z_1) = \infty$ og altså $h^{-1}(0) = z_0$, $h^{-1}(\infty) = z_1$. Betragter vi nu for et givet z foruden $t = h(z)$ det til $w = f(z)$ svarende punkt

$$s = h(w) = \frac{w - z_0}{w - z_1},$$

ser vi, at s og t er forbundet ved

$$s = h \circ f \circ h^{-1}(t) = f^*(t).$$

For denne homografi $f^* = h \circ f \circ h^{-1}$ gælder $f^*(0) = 0$, $f^*(\infty) = \infty$.

Den har altså de to fixpunkter 0 og ∞ og åbenbart ikke andre og er derfor af formen $s = f^*(t) = at$, $a \neq 1$. Afbildningen $w = f(z)$ er derfor bestemt ved, at

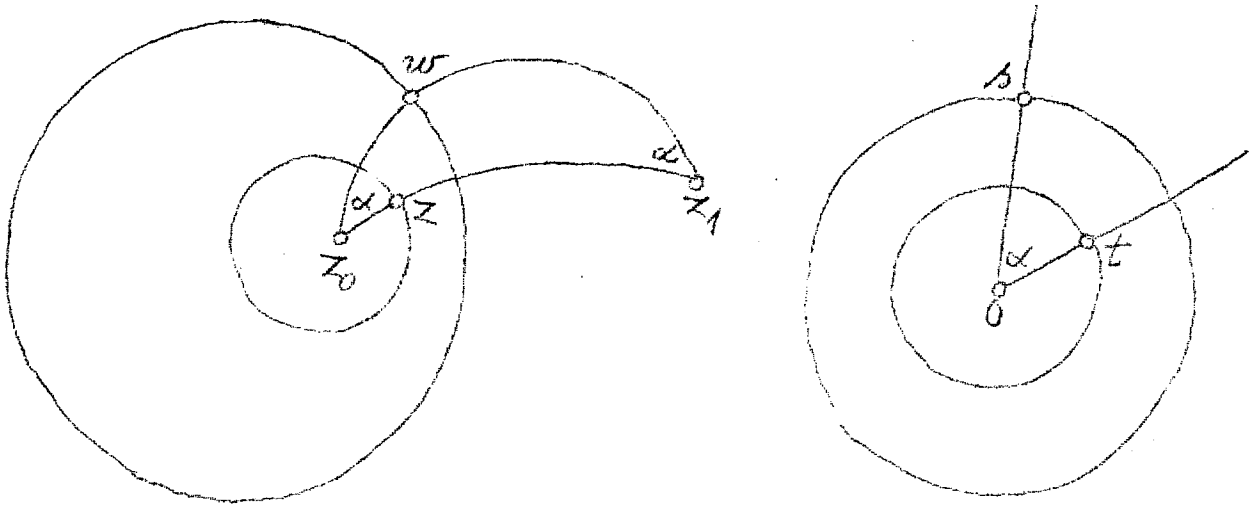
$$\frac{w - z_0}{w - z_1} = a \frac{z - z_0}{z - z_1}.$$

Sættes $a = \varrho e^{i\alpha}$, er afbildningen $s = f^*(t) = at$ sammensat af den ved ϱ bestemte homotati med fra 0 og den ved α bestemte drejning om 0. Bestemmes t ved

$$|t| = k, \quad \arg t = \theta,$$

er s altså bestemt ved

$$|s| = \varrho k, \quad \arg s = \theta + \alpha.$$



Ved afbildningen $z = h^{-1}(t)$ går den ved $|t| = k$ bestemte cirkel over i den ved $\left|\frac{z - z_0}{z - z_1}\right| = k$ bestemte forholdscirkel hørende til z_0 og z_1, og den ved $\arg t = \theta$ bestemte halvlinie går over i den ved $\arg \frac{z - z_0}{z - z_1} = \theta$ bestemte synsvinkelbue hørende til z_0 og z_1. Vinkeltroskaben viser, at forholdscirklerne og synsvinkelbuerne skærer hinanden ortogonalt. Tilsvarende går ved afbildningen $w = h^{-1}(s)$ den ved $|s| = \varrho k$ bestemte cirkel over i den ved $\left|\frac{w - z_0}{w - z_1}\right| = \varrho k$ bestemte forholdscirkel, og den ved $\arg s = \theta + \alpha$ bestemte halvlinie går over i den ved $\arg \frac{w - z_0}{w - z_1}$ bestemte synsvinkelbue. Vinkeltroskaben viser, at denne i z_0 og z_1 danner vinklen α med den forrige.

Afbildningen $w = f(z)$ kan derfor beskrives ved hjælp af forholdscirklerne og synsvinkelbuerne hørende til fixpunkterne z_0 og z_1. Man kan kort sige, at den fremkommer ved at undersøge ligedannetheden $s = f^*(t) = at$ transformationen h^{-1}. Formelmæssigt udtrykkes det sagte ved at

$$\left|\frac{w-z_0}{w-z_1}\right| = \varrho \left|\frac{z-z_0}{z-z_1}\right|, \quad \arg\frac{w-z_0}{w-z_1} = \arg\frac{z-z_0}{z-z_1} + \alpha.$$

Hvis $|a| = 1$, går hver forholdscirkel over i sig selv; afbildningen kaldes <u>elliptisk</u>. Hvis a er reel og > 0, går hver synsvinkelbue over i sig selv, og hvis a er reel og < 0, går hver synsvinkelbue over i den modsatte synsvinkelbue (den, der sammen med buen udgør en cirkel); afbildningen kaldes <u>hyperbolsk</u>. I alle andre tilfælde kaldes afbildningen <u>loxodromisk</u>.

Disse benævnelser benyttes også for afbildninger $w = f(z) = az + b$, $a \neq 1$.

B. <u>Homografi</u> $w = f(z)$ <u>med et fixpunkt</u> z_0.

Hvis $z_0 = \infty$, er afbildningen af typen $w = z + b$, $b \neq 0$, altså en parallelforskydning.

Hvis $z_0 \neq \infty$, indfører vi som hjælpefunktion homografien

$$t = h(z) = \frac{1}{z - z_0}.$$

For denne gælder $h(z_0) = \infty$ og altså $h^{-1}(\infty) = z_0$. Betragtes nu for et givet z foruden $t = h(z)$ det til $w = f(z)$ svarende punkt

$$s = h(w) = \frac{1}{w - z_0},$$

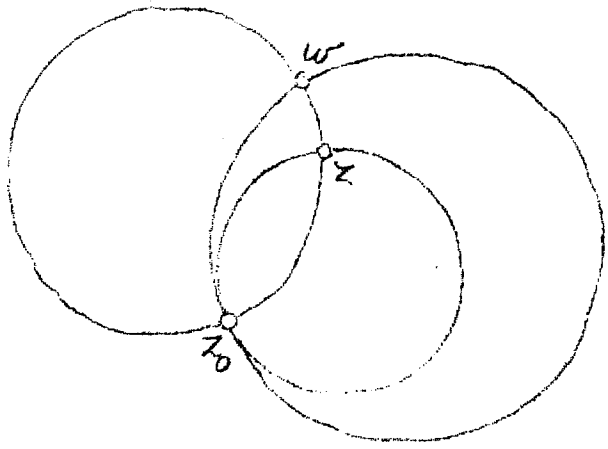
ser vi, at s og t er forbundet ved

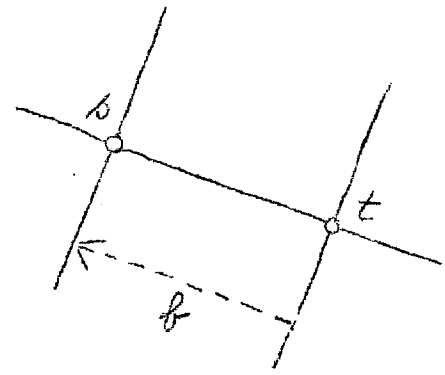
$$s = h \circ f \circ h^{-1}(t) = f^*(t).$$

For denne homografi $f^* = h \circ f \circ h^{-1}$ gælder $f^*(\infty) = \infty$. Den har altså fixpunktet ∞ og åbenbart ikke andre

og er derfor af formen $s = f^*(t) = t + b$, $b \neq 0$. Afbildningen $w = f(z)$ er derfor bestemt ved, at

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + b.$$





Afbildningen $s = f^*(t) = t + b$ kan beskrives ved hjælp af to liniesystemer, nemlig dels de med b parallelle linier, som hver afbildes i sig selv, dels de på disse ortogonale linier, af hvilke hver afbildes i den, der fås ved at forskyde den b. Hvert af disse liniesystemer afbildes ved h^{-1} i et system af cirkler gennem z_0, som parvis kun har z_0 fælles, altså et system af cirkler med samme tangent i z_0; på grund af vinkeltroskaben vil disse cirkelsystemers tangenter i z_0 være ortogonale. Ved $w = f(z)$ afbildes hver cirkel i det ene system i sig selv, medens hver cirkel i det andet system afbildes i en anden cirkel i dette system. Afbildningen kaldes <u>parabolsk</u>.

Denne benævnelse benyttes også for en parallelforskydning $w = f(z) = z + b$, $b \neq 0$.

Homografierne er først studeret af Möbius (1853) under betegnelsen „Kreisverwandtschaften" og kaldes også Möbius transformationer. Fundamentale afsnit af geometrien mødes her med funktionsteorien.

§6. Potens og rod.

En diskussion af den ved et vilkårligt polynomium $w = P(z)$ eller en vilkårlig rational funktion $w = \frac{P(z)}{Q(z)}$ bestemte afbildning ville blive ret kompliceret. Vi indskranker os lib som et eksempel at diskutere den ved

$$w = f(z) = z^n \quad (n \geqslant 2)$$

bestemte afbildning $f: \dot{C} \to \dot{C}$. Da funktionen er holomorf og $f'(z) = n z^{n-1} \neq 0$ for $z \neq 0$, er afbildningen vinkelbro i ethvert punkt $z \neq 0$.

Vi indfører polære koordinater, idet vi skriver

$$z = |z| e^{i \arg z}, \qquad w = |w| e^{i \arg w}.$$

Da fås $z^n = |z|^n e^{i n \arg z}$, og afbildningen bestemmes altså ved at

$$|w| = |z|^n, \qquad \arg w = n \arg z.$$

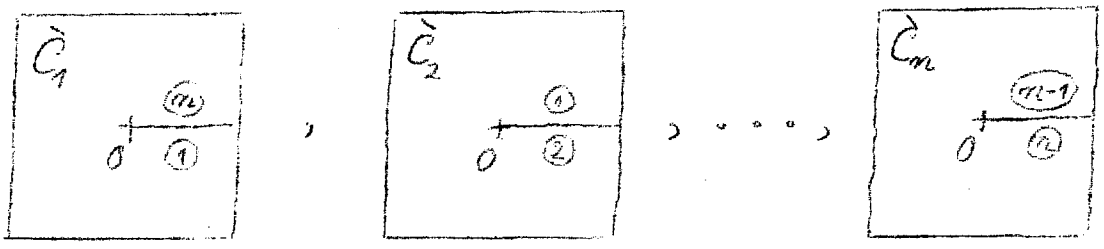
Man ser, at enhver cirkel $\{z \mid |z| = r\}$ ved afbildningen går over i cirklen $\{w \mid |w| = r^n\}$, og at enhver halvlinie $\{z \mid \arg z = \theta\}$ ved afbildningen går over i halvlinien $\{w \mid \arg w = n\theta\}$. Afbildningen er således ikke vinkelbro i $z = 0$; vinkler mellem kurver udgående fra $z = 0$ bliver multipliceret med n. Hvert af vinkelrummene

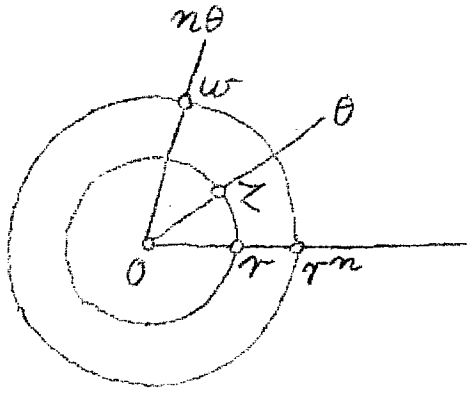
$$B_k = \{z \mid \tfrac{k-1}{n} \leqslant \arg z < \tfrac{k}{n}\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

afbildes bijektivt på $\dot{C}$; de begrænsende halvlinier $\{z \mid \arg z = \tfrac{k-1}{n}\}$ afbildes alle i halvlinien $\{w \mid \arg w = 0\}$.

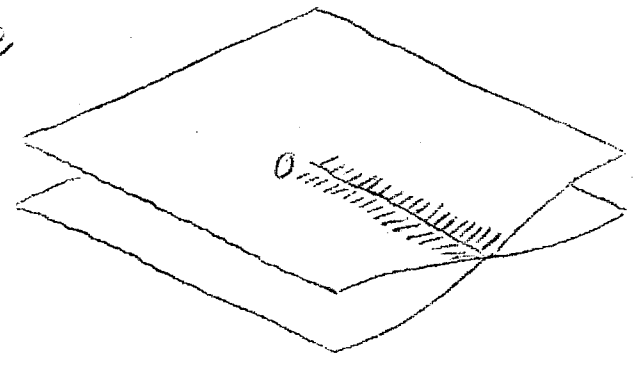
For ethvert w betegnes de n rødder i ligningen $z^n = w$ alle med $\sqrt[n]{w}$; for $w = 0$ er de alle 0, for $w \neq 0$ er de alle $\neq 0$, og der ligger en i hvert af vinkelrummene B_k. Hver af afbildningerne $w = f(z) = z^n : B_k \to \dot{C}$ er således bijektiv og dens omvendte $z = g_k(w) : \dot{C} \to B_k$ kan

betegnes som en gren af $\sqrt[n]{w}$. Funktionen $\sqrt[n]{w}$ er således flerbydig. Man kommer ud over denne flerbydighed ved at indføre Riemanns flade for $\sqrt[n]{w}$. Herfra tænker man sig n eksemplarer af $\hat{C}$ opfattet som w-plan, opskåret langs $\{w \mid \arg w = 0\}$. Disse eksemplarer $\hat{C}_k$, $k = 1, \dots, n$, skal svare til vinkelrummene B_k i z-planen. Nu tænker vi os disse opskårne planer $\hat{C}_k$ sammenklæbet således, at den under snittet i $\hat{C}_1$ liggende del sammenklæbes med den over snittet i $\hat{C}_2$ liggende del, den under snittet i $\hat{C}_2$ liggende del sammenklæbes med den over snittet i $\hat{C}_3$ liggende del, etc., og endelig den under snittet i $\hat{C}_n$ liggende del sammenklæbes med den over snittet i $\hat{C}_1$ liggende del. Der fremkommer herved en n-bladet flade med 0 som forgreningspunkt. Man siger, at forgreningspunktet er af n^{te} orden. Man kan forestille sig $\hat{C}_2$ liggende ovenpå $\hat{C}_1$, ..., $\hat{C}_n$ ovenpå $\hat{C}_{n-1}$. For at komme fra $\hat{C}_n$ hid $\hat{C}_1$ må man lade fladen skære gennem sig selv. Det må dog understreges, at denne selvgennemskæring naturligvis er en fiktion, idet bladene





$n = 2$



alle er eksemplarer af $\dot{C}$. Det afgørende er, at der over hvert punkt af $\dot{C}$ (borset fra 0) ligger n punkter af fladen. Omkredser man 0, kommer man for hvert omløb ind i et nyt blad, og først efter n omløb er man tilbage, hvor man begyndte. Afbildningen $w = f(z) = z^n$ ses nu at være en bijektiv afbildning af $\dot{C}$ på den konstruerede flade, og $z = g(w) = \sqrt[n]{w}$ er derfor <u>på fladen</u> en entydig funktion. De n værdier $g_k(w)$ af $\sqrt[n]{w}$ for et givet $w \neq 0$ er simpelthen værdierne af $g(w) = \sqrt[n]{w}$ i de n punkter af fladen, der ligger over punktet w.

Den her beskrevne fremgangsmåde kan anvendes for vilkårlige holomorfe funktioner $f: A \to \dot{C}$, som ikke bestemmer en bijektiv afbildning, idet man kan inddele A i stykker, der hver for sig afbildes bijektivt, og derefter kan tænke sig disses billeder sammenklæbet.

Man udvider funktionen $w = f(z) = z^n$ til $\dot{C}^*$, idet man sætter $f(\infty) = \infty$. Tilsvarende udvides $z = g(w) = \sqrt[n]{w}$, ved at man sætter $g(\infty) = \infty$. Ved $w = z^n$ bestemmes da en bijektiv afbildning af Riemanns kugle S på den n-bladede flade, der fås ved at man tænker sig n eksemplarer af S opskåret langs den til $\arg w = 0$ svarende meridian, og sammenklæber disse på tilsvarende måde som beskrevet foran. Man ser, at fladen får både 0 og ∞ som forgreningspunkt af n^{te} orden.

§7. Eksponentialfunktion og logaritme.

Eksponentialfunktionen $w = \exp z : \dot{C} \to \dot{C}$ er defineret ved

$$\exp z = \exp(x+iy) = e^x e^{iy}, \quad \text{idet } e^{iy} = (\cos y + i \sin y).$$

Man bemærker, at $\exp z \neq 0$ for alle z, og at $\exp z$ har perioden $2\pi i$ (d.v.s. $\exp(z+2\pi i) = \exp z$ for alle z). Opfattet som funktion af (x,y) tilhører den $C^1(R^2)$, og idet

$$\frac{\partial \exp z}{\partial x} = e^x e^{iy}, \quad \frac{\partial \exp z}{\partial y} = i e^x e^{iy}, \text{ altså } \frac{\partial \exp z}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial \exp z}{\partial y} = \exp z,$$

er $\exp z$ holomorf og har den afledede

$$\frac{d \exp z}{dz} = \exp z.$$

Da som bemærket $\exp z \neq 0$ for alle z, ser man, at den ved $w = \exp z$ bestemte afbildning er vinkeltro i ethvert punkt z.

Afbildningen $w = \exp z$ beskrives bekvemmest ved brug af retvinklede koordinater i z-planen og polære koordinater i w-planen. Idet $z = x+iy$, er $w = \exp z$ bestemt ved, at

$$|w| = e^x, \quad \arg w = y.$$

Man ser, at billedet af $\dot{C}$ er $\dot{C} \setminus \{0\}$. En linie $\{z \mid x = x_0\}$ afbildes i cirklen $\{w \mid |w| = e^{x_0}\}$, og en linie $\{z \mid y = y_0\}$ afbildes i halvlinien $\{w \neq 0 \mid \arg w = y_0\}$. Hver strimmel

$$B_p = \{z \mid (2p-1)\pi \leq y < (2p+1)\pi\}, \quad p \in \dot{Z},$$

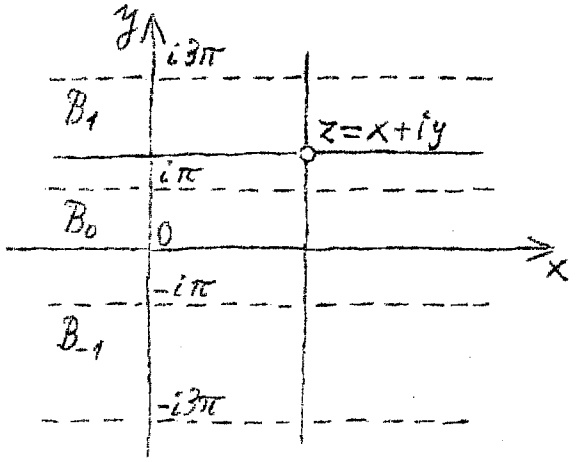
afbildes bijektivt på $\dot{C} \setminus \{0\}$. De begrænsende linier $\{z \mid y = (2p-1)\pi\}$ afbildes alle på halvlinien $\{w \mid w \text{ reel} < 0\}$.

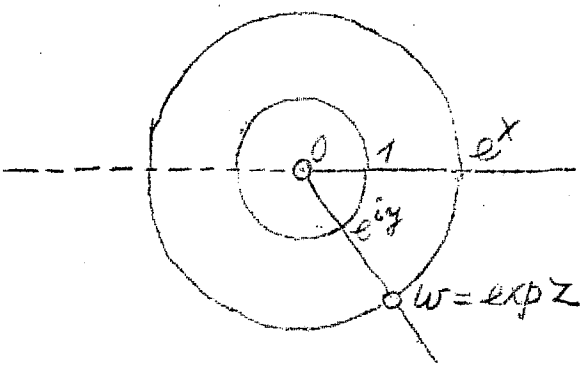
For ethvert $w \neq 0$ har ligningen $\exp z = w$ således uendelig mange løsninger $z = x+iy$ bestemt ved

$$x = \log|w|, \quad y = \arg w,$$

nemlig netop en i hver strimmel B_p. Enhver af disse løsninger betegnes med $\log w$. Vi har altså

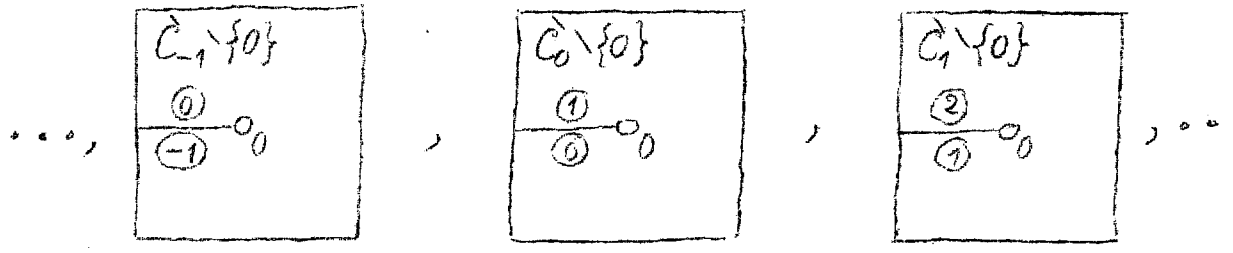
$$\log w = \log|w| + i \arg w.$$





Den værdi af $\log w$, der svarer til hovedværdien $\arg w$, altså den værdi, der tilhører strimlen B_0, kaldes ofte hovedværdien af $\log w$. For et positivt reelt tal r betyder $\log r$ herefter uendelig mange værdier. Hovedværdien er $\log r$ i den sædvanlige betydning, og de øvrige fås ved addition af hele multipla af $i2\pi$. Når vi taler om $\log r$ for et positivt reelt tal r, vil vi, med mindre andet fremgår af sammenhængen, altid forstå $\log r$ i sædvanlig betydning.

Man anskueliggør sig den flertydige funktion $z = \log w$, idet man tænker sig uendelig mange eksemplarer $\hat{\mathbb{C}}_p \setminus \{0\}$, $p \in \mathbb{Z}$, af $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, alle opskåret langs $\{w \mid w \text{ reel} < 0\}$, og danner den Riemann flade, der fås ved at sammenklæbe disse således, at for hvert $p \in \mathbb{Z}$ den over snittet liggende del af $\hat{\mathbb{C}}_p \setminus \{0\}$ sammenklæbes med den under snittet liggen-



de del af $\hat{\mathbb{C}}_{p+1} \setminus \{0\}$. Ved $w = \exp z$ bestemmes da en bijektiv afbildning af $\hat{\mathbb{C}}$ på denne uendelig bladede flade, idet vi lader det p^{te} blad $\hat{\mathbb{C}}_p \setminus \{0\}$ svare til strimlen B_p. Funktionen $z = \log w$ bliver da en entydig funktion på fladen, idet den i det punkt af det p^{te} blad $\hat{\mathbb{C}}_p \setminus \{0\}$, der ligger over w, har den af værdierne $\log w$, der tilhører strim-

len Bp. Fladen kaldes Riemanns fladen for logw.

Det må understreges, at 0 ikke tilhører fladen. Alligevel siger man undertiden, at fladen i 0 har et forgreningspunkt af uendelig høj orden.

Bemærk. Da exp z ikke har nogen grænseværdi for $z \to \infty$ (den antager jo i enhver mængde $\{z \mid |z| > R\}$ enhver værdi $\neq 0$) udvider man ikke funktionen exp z til $\hat{C}$.

Lad $z_0 = x_0 + iy_0$ være et vilkårligt punkt og $w_0 = \exp z_0$. En omegn $A_0 = \{z \mid |x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta \leq \pi\}$ afbildes da ved $w = \exp z$ bijektivt på omegnen $B_0 = \{w \mid e^{x_0-\alpha} < |w| < e^{x_0+\alpha}, |\arg w - y_0| < \beta\}$. Den omvendte funktion til $w = \exp z : A_0 \to B_0$ betegnes naturligvis $z = \log w : B_0 \to A_0$. Dens værdi er for hvert $w \in B_0$ den værdi af log w, for hvilken $|\arg w - y_0| < \beta$. Af §4, sætning 4 følger, at denne funktion $z = \log w : B_0 \to A_0$ er holomorf, og at dens afledede er

$$\frac{d \log w}{dw} = \frac{1}{\exp z} = \frac{1}{w}.$$

Hvis en kontinuert funktion i en åben sammenhængende mængde $B \subseteq \hat{C} - \{0\}$ som værdi z i hvert punkt $w \in B$ har en af værdierne af log w, kaldes funktionen en kontinuert gren af $z = \log w$ i B. Samtlige kontinuerte grene af log w i B fås da ved til den betragtede at lægge hele multipla af $i2\pi$. Af det foregående fremgår, at enhver kontinuert gren af log w er holomorf med den afledede $\frac{1}{w}$. Billedet af B ved en kontinuert gren af $z = \log w$ må være en åben sammenhængende mængde A i $\hat{C}$ med den egenskab, at der ikke i A findes to punkter z_1 og z_2, således at $z_2 - z_1 = ip2\pi$, $p \in \hat{Z}$. Går man omvendt ud fra en sådan mængde A og betegner man med B dens billede ved afbildningen $w = \exp z$, vil den omvendte funktion $z = \log w : B \to A$ være en kontinuert gren af log w i B.

Mange vigtige funktioner dannes ved sammensætning af funktionerne exp og log med andre funktioner. For eksempel vil, hvis f er holomorf i en mængde A, også $\exp f$ være holomorf i A. Dens afledede er $(\exp f)' = (\exp f)\, f'$. Ved sammensætning af funktioner med log må flertydigheden tages i betragtning. Er f holomorf i en mængde A, som ved f afbildes ind i en mængde, i hvilken der findes en kontinuert gren af log, vil $\log f$ være holomorf i A. Dens afledede er $(\log f)' = \frac{f'}{f}$.

Funktionerne $\exp z$ og $\log z$ tilfredsstiller i $\hat{C}$, resp. $\hat{C}\setminus\{0\}$ (ligesom i R, resp. R_+) ligningerne

$$\exp(z_1+z_2) = \exp z_1 \exp z_2, \qquad \log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2.$$

Den sidste skal naturligvis forstås således, at når $\log z_1$ og $\log z_2$ er valgt, vil $\log z_1 + \log z_2$ være en af værdierne af $\log(z_1 z_2)$. Ud fra exp og log definerer man potens $z_1^{z_2}$ med vilkårligt grundtal $z_1 \neq 0$ og vilkårlig eksponent z_2 som

$$z_1^{z_2} = \exp(z_2 \log z_1).$$

I almindelighed giver dette uendelig mange værdier svarende til de uendelig mange værdier af $\log z_1$. Undertiden fås dog kun endelig mange værdier (for $z_2 = \frac{1}{n}$ således værdierne $\sqrt[n]{z_1}$). For e^z fås efter denne definition de uendelig mange værdier $\exp(z \log e) = \exp(z(1 + i\,p\,2\pi))$. Når vi i det følgende benytter skrivemåden e^z, skal den altid stå for den til $p=0$ svarende værdi, altså blot som en kort skrivemåde for $\exp z$.

§8. Trigonometriske funktioner og deres omvendte funktioner.

De trigonometriske funktioner defineres i $\mathbb{C}$ ved

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{cot} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Ud fra disse formler verificerer man let, at de velkendte trigonometriske formler gælder uden forandring i $\mathbb{C}$. Eksempelvis er

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,\quad \sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Funktionerne cos og sin er periodiske med perioden 2π; funktionerne tg og cot er periodiske med perioden π. Endvidere gælder $\cos(z+\pi) = -\cos z$, $\sin(z+\pi) = -\sin z$.

Analogt defineres de hyperbolske funktioner i $\mathbb{C}$ ved

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\quad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z},\quad \operatorname{coth} z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Man ser, at

$$\cosh z = \cos\frac{z}{i},\quad \sinh z = i\sin\frac{z}{i},\quad \operatorname{tgh} z = i\operatorname{tg}\frac{z}{i},\quad \operatorname{coth} z = \frac{1}{i}\operatorname{cot}\frac{z}{i}.$$

Et særskilt studium af disse funktioner er derfor overflødigt.

De trigonometriske funktioner er holomorfe i de mængder, hvori de er defineret. Det er for cos og sin hele $\mathbb{C}$, for tg mængden $\mathbb{C}\setminus\{z \mid \cos z = 0\} = \mathbb{C}\setminus\{\frac{1}{2}\pi + p\pi,\ p\in\mathbb{Z}\}$, for cot mængden $\mathbb{C}\setminus\{z \mid \sin z = 0\} = \mathbb{C}\setminus\{p\pi \mid p\in\mathbb{Z}\}$. De afledede bestemmes ved

$$(\cos z)' = -\sin z,\quad (\sin z)' = \cos z,\quad (\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z},\quad (\operatorname{cot} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

De omvendte funktioner betegnes arccos, arcsin, arctg, arccot. De er flertydige funktioner.

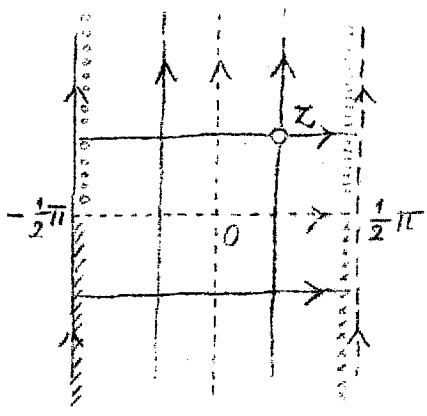
Ved det nærmere studium kan vi på grund af relationerne $\cos z = \sin(\frac{1}{2}\pi - z)$ og $\operatorname{cot} z = \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - z)$ indskrænke os til at betragte sin og tg og deres omvendte.

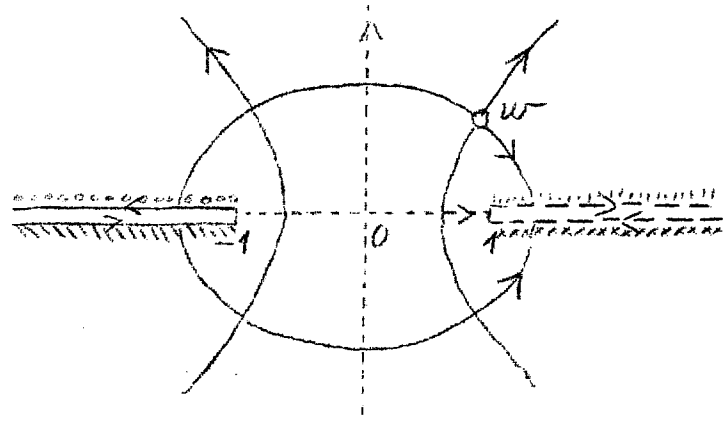
A. Diskussion af sin og arcsin.

Ved udregning fås

$$w = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$
$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = u + iv.$$

Vi begynder med at betragte strimlen $\{z \mid -\frac{1}{2}\pi \leqslant x < \frac{1}{2}\pi\}$.





Til randlinien $\{z \mid x = -\frac{1}{2}\pi\}$ svarer den ved $w = -\cosh y$, $-\infty < y < +\infty$, bestemte kurve, d.e. halvlinien $\{w \mid w \text{ reel} \leqslant -1\}$ gennemløbet to gange. Analogt svarer til den ikke medregnede randlinie $\{z \mid x = \frac{1}{2}\pi\}$ den ved $w = \cosh y$, $-\infty < y < +\infty$, bestemte kurve, d.e. halvlinien $\{w \mid w \text{ reel} \geqslant 1\}$ gennemløbet to gange. Til liniestykket $\{z \mid -\frac{1}{2}\pi \leqslant x < \frac{1}{2}\pi,\ y = 0\}$ svarer liniestykket $\{w \mid w \text{ reel}, -1 \leqslant w < 1\}$ og til midtlinien $\{z \mid x = 0\}$ svarer v-aksen $\{w \mid u = 0\}$.

Til et liniestykke $z = x + iy_0$, $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x < \frac{1}{2}\pi$, hvor $y_0 \neq 0$, svarer kurven med parameterfremstillingen

$$\left.\begin{aligned} u &= \sin x \cosh y_0 \\ v &= \cos x \sinh y_0 \end{aligned}\right\} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

For $y_0 > 0$ er det en halvellipse med halvakser $\cosh y_0$ og $\sinh y_0$ og for $y_0 < 0$ en halvellipse med halvakser $\cosh y_0$ og $|\sinh y_0|$, venstre men ikke højre endepunkt medregnet. For modsatte værdier af y_0 udgør de ellipsen med ligningen

$$\frac{u^2}{(\cosh y_0)^2} + \frac{v^2}{(\sinh y_0)^2} = 1$$

påner højre toppunkt. Da $(\cosh y_0)^2 - (\sinh y_0)^2 = 1$, ser

man, at alle disse ellipser har brandpunkterne $(u,v)=(\pm 1,0)$.

Til en linie $z = x_0 + iy$, $-\infty < y < +\infty$, hvor $-\frac{1}{2}\pi < x_0 < \frac{1}{2}\pi$ og $x_0 \neq 0$, svarer kurven med parameterfremstillingen

$$\left.\begin{aligned} u &= \sin x_0 \cosh y \\ v &= \cos x_0 \sinh y \end{aligned}\right\} \quad -\infty < y < +\infty.$$

For $x_0 > 0$ er det højre gren af en hyperbel med halvakser $\sin x_0$ og $\cos x_0$ og for $x_0 < 0$ er det venstre gren af en hyperbel med halvakser $|\sin x_0|$ og $\cos x_0$. For modsatte værdier af x_0 udgør de hyperblen med ligningen

$$\frac{u^2}{(\sin x_0)^2} - \frac{v^2}{(\cos x_0)^2} = 1.$$

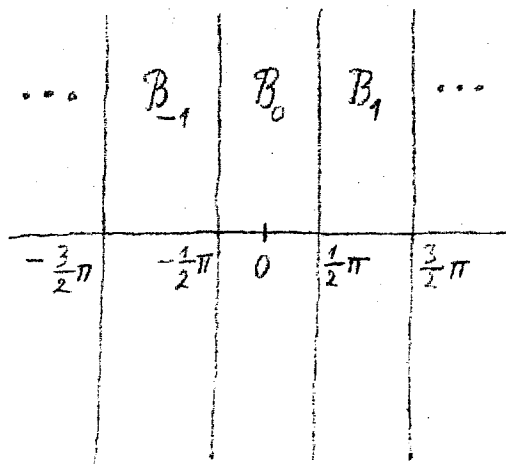
Da $(\sin x_0)^2 + (\cos x_0)^2 = 1$, har alle disse hyperbler brandpunkterne $(u,v) = (\pm 1, 0)$.

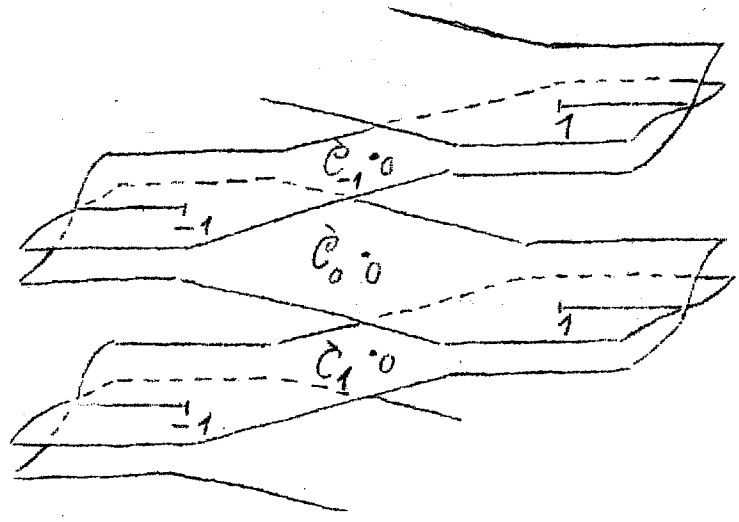
Man ser, at samtlige ellipser og hyperbler med disse brandpunkter $w = \pm 1$ kommer med. Man konstaterer endvidere, at sammenhørende gennemløbsretninger for liniestykkerne, resp. linierne, i z-planen og kurverne i w-planen er som vist på figuren. Da afbildningen er vinkeltro i ethvert punkt z, i hvilket $(\sin z)' = \cos z \neq 0$, altså i ethvert punkt, for hvilket $w = \sin z \neq \pm 1$, ser man, at kurvesystemerne i w-planen er ortogonale, når bortses fra punkterne $w = \pm 1$.

For dernæst at få overblik over afbildningen i dens helhed inddeler vi $\mathbb{C}$ i strimlerne

$$B_p = \{ z \mid -\tfrac{1}{2}\pi + p\pi \leqslant x < \tfrac{1}{2}\pi + p\pi \}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

For lige p afbildes B_p ligesom den ovenfor betragtede strimmel B_0, idet der jo for lige p gælder $\sin z = \sin(z - p\pi)$. For ulige p gælder $\sin z = -\sin(z - p\pi)$, og afbildningen er tilsvarende, idet vi blot i w-planen skal spejle i punktet $w = 0$, hvorved de to opskæringer kommer til at bytte rolle. Vi kommer derfor til en Riemann flade





ved til hver strimmel B_p at tage et eksemplar $\dot{C}_p$ af $\dot{C}$ opskåret langs halvlinierne $\{w \mid w \text{ reel} \leqslant -1\}$ og $\{w \mid w \text{ reel} \geqslant 1\}$ og så sammenklæbe disse i overensstemmelse med den måde, hvorpå randene svarer til strimlernes rande. Figuren viser resultatet. Den fremkomne flade er Riemanns flade for $\arcsin w$. Den har uendelig mange forgreningspunkter, alle af anden orden, liggende over punkterne $w=-1$ og $w=1$.

Ved løsning af ligningen $w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ fås

$$z = \arcsin w = \frac{1}{i} \log\left(\sqrt{1-w^2} + iw\right).$$

Ved for hvert w at tage begge værdier af kvadratroden og derefter alle værdier af logaritmen i betragtning, får man samtlige værdier af $\arcsin w$.

B. Diskussion af tg og arctg.

Afbildningen

$$w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

fås ved sammensætning af de tre afbildninger

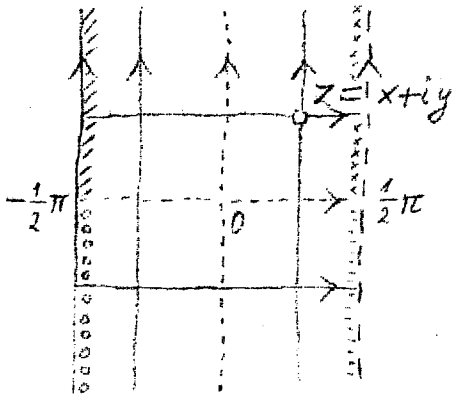
$$t = 2iz, \qquad s = \exp t, \qquad w = \frac{1}{i} \frac{s-1}{s+1},$$

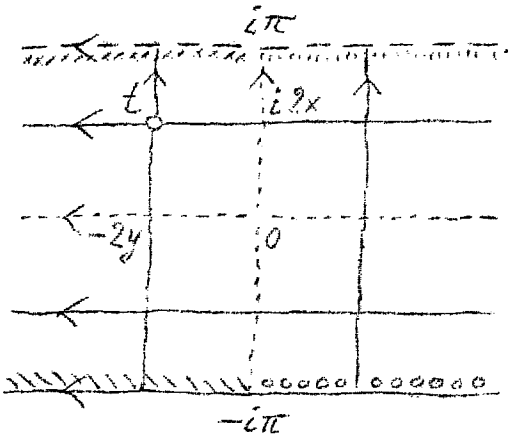
altså en homografi, en afbildning ved eksponentialfunktionen, og endnu en homografi.

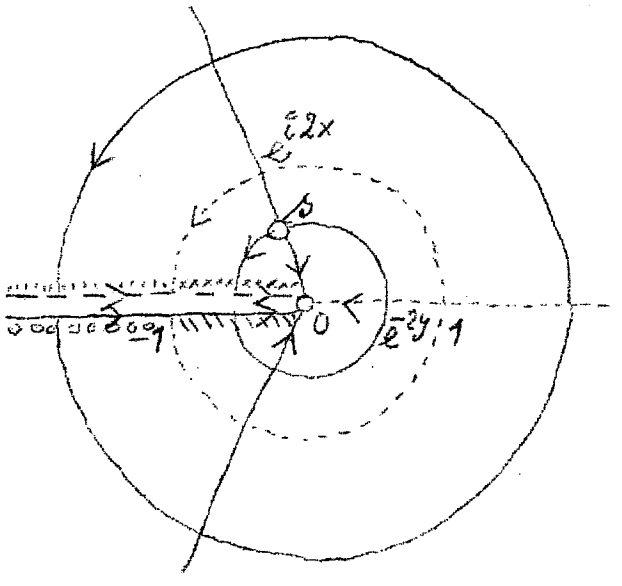
Som følge heraf sætter vi for $z = \frac{1}{2}\pi + p\pi$, $p \in \dot{Z}$, hvor $\operatorname{tg} z$ ikke på forhånd var defineret, $\operatorname{tg} z = \infty$, idet et sådant z jo går over i $t = i(2p+1)\pi$, dette atter i $s = -1$, og dette i $w = \infty$. Derimod defineres $\operatorname{tg} z$ ikke for $z = \infty$.

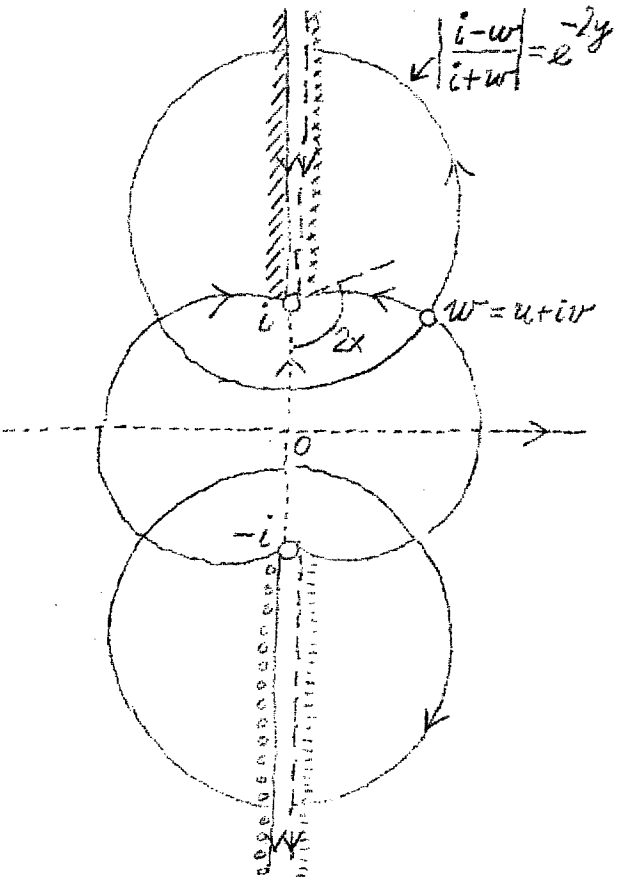
Bemærk, at den omvendte homografi hi $w = \frac{1}{i}\frac{s-1}{s+1}$ er $s = \frac{i-w}{i+w}$.

Vi begynder med at betragte strimlen $\{z \mid -\frac{1}{2}\pi \leq x < \frac{1}{2}\pi\}$. Denne afbildes ved $t = 2iz$ på strimlen $\{t \mid -\pi \leq \operatorname{Im} t < \pi\}$,









denne atter ved $s = \exp t$ på $\dot{C} \setminus \{0\}$ opskåret langs $\{s \mid s \text{ reel} < 0\}$, og denne atter på $\dot{C}^* \setminus \{-i, i\}$ opskåret langs $\{w \mid u = 0, v < -1\}$ og $\{w \mid u = 0, v > 1\}$. Randenes tilordning er vist på figurerne.

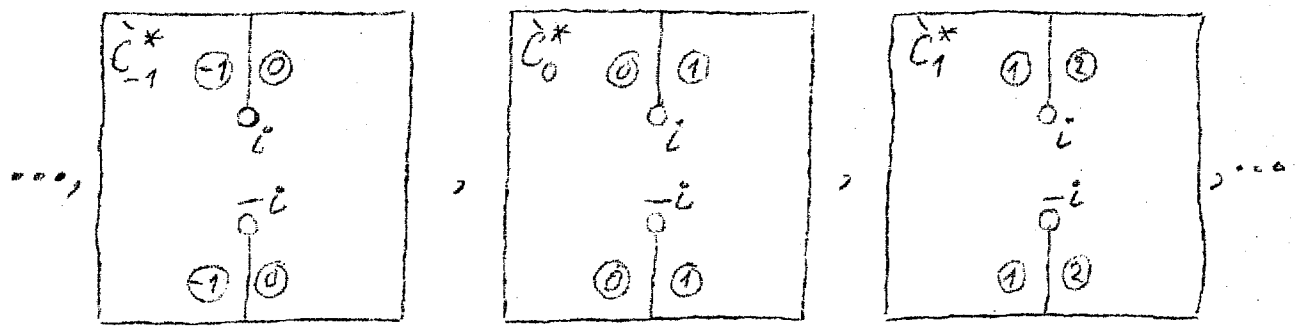
Et liniestykke $\{z \mid -\frac{1}{2}\pi \leqslant x < \frac{1}{2}\pi, y = y_0\}$ går over i liniestykket $\{t \mid \mathrm{Re}\, t = -2y_0, -\pi \leqslant \mathrm{Im}\, t < \pi\}$, dette atter i cirklen $\{s \mid |s| = e^{-2y_0}\}$, og denne atter i den ved $\left|\frac{i-w}{i+w}\right| = e^{-2y_0}$ bestemte forholdscirkel hørende til i og $-i$. En linie $\{z \mid x = x_0\}$, $-\frac{1}{2}\pi < x_0 < \frac{1}{2}\pi$, går over i linien $\{t \mid \mathrm{Im}\, t = 2x_0\}$, denne atter i halvlinien $\{s \neq 0 \mid \arg s = 2x_0\}$, og denne atter i den synskvinkelbue hørende til i og $-i$, der danner vinklen $2x_0$ med liniestykket fra $-i$ til i (der svarer til $\{z \mid x = 0\}$). På figurerne er vist billederne svarende til $y_0 = 0$ og til to modsatte værdier af y_0, samt til $x_0 = 0$ og til to modsatte værdier af x_0, og sammenhørende gennemløbsretninger er angivet.

Fordernæst at få overblik over afbildningen i dens helhed inddeler vi $\dot{C}$ i strimlerne

$$B_p = \{z \mid -\tfrac{1}{2}\pi + p\pi \leqslant x < \tfrac{1}{2}\pi + p\pi\}, \quad p \in \dot{Z}.$$

Da $\mathrm{tg}\, z$ har perioden π, afbildes disse alle ligesom den allerede betragtede strimmel B_0. Vi kommer derfor til Riemann fladen for $\mathrm{arctg}\, w$ ved for hver strimmel B_p at tage et eksemplar $\dot{C}_p^* \setminus \{-i, i\}$ af $\dot{C}^* \setminus \{-i, i\}$ opskåret langs $\{w \mid u = 0, v < -1\}$ og $\{w \mid u = 0, v > 1\}$ og sammenklæbe disse i overensstemmelse med den måde, hvorpå randene svarer til strimlernes rande. Det betyder, at for hvert p de til højre for opskæringerne liggende dele af $\dot{C}_p \setminus \{-i, i\}$

skal sammenklæbes med de venstre for opskæringerne liggende dele af $\dot{C}^*_{p+1} \setminus \{-i, i\}$. Fladen anskues bedst



ved at man går over til Riemanns kugle. Her går snitkene sammen til den halve storcirkel gennem de til $w = -i$ og $w = i$ svarende punkter, der indeholder nordpolen, og fladen bliver den flade, der fås ved at man tager eksemplarer S_p, $p \in \dot{Z}$, af kuglen opskåret langs denne halve storcirkel og sammenklæber dem efter samme princip, som blev benyttet ved dannelsen af Riemann fladen for logaritmen (hvor snittet gik fra 0 til ∞, altså på kuglen fra sydpol til nordpol).

Ved anvendelse af de betragtede tre afbildninger får vi

$$z = \frac{1}{2i} t, \qquad t = \log s, \qquad s = \frac{i-w}{i+w}.$$

Heraf fås som løsning til ligningen $w = \operatorname{tg} z$

$$z = \operatorname{arctg} w = \frac{1}{2i} \log \frac{i-w}{i+w}.$$

Ved for hvert $w \in \dot{C}^* \setminus \{-i, i\}$ at tage alle værdier af logaritmen i betragtning får man samtlige værdier af $\operatorname{arctg} w$.

§9. Stamfunktion. Cauchys integralsætning.

Lad A være en åben, sammenhængende mængde i $\dot{\mathbb{C}}$ og lad $f: A \to \dot{\mathbb{C}}$ være en kontinuert funktion. Funktionen f siges at have funktionen $g: A \to \dot{\mathbb{C}}$ til stamfunktion, hvis g er holomorf og har f til afledet, altså hvis

$$g'(z) = f(z) \qquad \text{eller} \qquad dg = f(z)\,dz.$$

Hvis f har g til stamfunktion, har f også enhver funktion $g+k$, hvor k er en konstant, til stamfunktion, og f vil ikke have andre stamfunktioner end disse. Thi for ethvert $k \in \dot{\mathbb{C}}$ gælder jo $(g+k)' = g' = f$, og hvis g_1 er en stamfunktion til f, gælder $(g_1 - g)' = f - f = 0$, og altså er $g_1 - g$ en konstant.

At f har g til stamfunktion er ensbetydende med, at g opfattet som funktion af (x,y) er en C^1-funktion med differentialet $dg = f(z)\,dx + i f(z)\,dy$. Det nærmere studium af spørgsmålet om stamfunktioner knyttes derved til den i kap 1, §8 fremstillede teori for differentialformer af første grad.

For en vilkårlig kontinuert funktion $f: A \to \dot{\mathbb{C}}$ betegnes integralet af C^0-differentialformen

$$\omega = f(z)\,dz = f(z)\,dx + i f(z)\,dy$$

langs en C^1-kurve K i A som <u>integralet af</u> $f(z)dz$ <u>langs</u> K og skrives

$$\int_K f(z)\,dz.$$

Hvis K består af de ved afbildningerne $z = \varphi_\nu(t) : [a_\nu, b_\nu] \to \mathbb{R}$, $\nu = 1, \ldots, n$, bestemte kurver regnet med multiplicitetstallene k_ν, er

$$\int_K f(z)\,dz = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \int_{a_\nu}^{b_\nu} (f \circ \varphi_\nu(t))\, \varphi_\nu'(t)\,dt.$$

Thi indsætning af en C^1-afbildning $z=\varphi(t)=\varphi(t)+i\chi(t)$: $[a,b]\to A$ i ω giver jo netop $[(f\circ\varphi(t))\varphi'(t)+i(f\circ\varphi(t))\chi'(t)]\,dt = (f\circ\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

For <u>længden</u> $\lambda(K)$ af kurven K har vi udtrykket

$$\lambda(K)=\sum_{\nu=1}^{n}|h_\nu|\int_{a_\nu}^{b_\nu}|\varphi_\nu'(t)|\,dt.$$

Sættes $\sup_{z\in K}|f(z)|=M$ [hvor naturligvis i denne sammenhæng K står for mængden af kurvens punkter], ser man, at

$$\left|\int_K f(z)\,dz\right|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}|h_\nu|\int_{a_\nu}^{b_\nu}M\,|\varphi_\nu'(t)|\,dt = M\,\lambda(K).$$

Vi har således den vigtige vurdering

$$\left|\int_K f(z)\,dz\right|\leqslant \sup_{z\in K}|f(z)|\cdot\lambda(K).$$

Af sætningerne 1 og 2 i kap 1, § 8 uddrager vi nu umiddelbart følgende sætninger:

<u>Sætning 1.</u> <u>For enhver holomorf funktion</u> $g: A\to\mathbb{C}$ <u>og enhver</u> C^1<u>-kurve</u> K <u>i</u> A <u>gælder</u>

$$\int_K dg=\int_{\partial K} g.$$

Anderledes sagt: Hvis den kontinuerte funktion $f: A\to\mathbb{C}$ har stamfunktionen g, gælder for enhver C^1-kurve K i A

$$\int_K f(z)\,dz=\sum_{\mu=1}^{m}k_\mu\,g(z_\mu),$$

hvor z_μ, $\mu=1,\dots,m$, betegner randpunkterne for K og k_μ deres multipliciteter.

<u>Sætning 2.</u> <u>En kontinuert funktion</u> $f: A\to\mathbb{C}$ <u>har en stamfunktion, hvis og kun hvis</u>

$$\int_K f(z)\,dz=0$$

<u>for enhver</u> C^1<u>-kurve</u> K <u>i</u> A. <u>Samtlige stamfunktioner</u> g <u>for</u> f <u>fås da ved at man vælger et punkt</u> $z_0\in A$ <u>og vær-</u>

<u>dien</u> $g(z_0)$. <u>Da er for ethvert</u> $z \in A$

$$g(z) = g(z_0) + \int_{K(z_0,z)} f(z)\,dz,$$

<u>hvor</u> $K(z_0,z)$ <u>er en vilkårlig</u> C^1<u>-kurve i</u> A, <u>der forbinder</u> z_0 <u>med</u> z.

Af sætning 3 i kap. 1, §8 har vi kun anledning til at anvende sidste del. Af denne fremgår, at hvis $f: A \to \mathbb{C}$ opfattet som funktion af (x,y) er en C^1-funktion og opfylder betingelsen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (if)}{\partial x}, \quad \text{d.v.s.} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y},$$

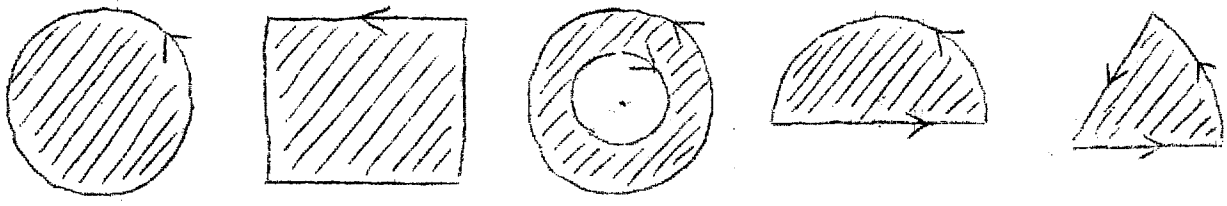
da har f lokalt en stamfunktion, d.v.s. til ethvert punkt $z_0 \in A$ findes en omegn, hvori f har en stamfunktion. De funktioner $f: A \to \mathbb{C}$, der opfylder disse betingelser, er imidlertid netop de holomorfe funktioner. Vi får derfor følgende fundamentale sætning:

<u>Sætning 3. Enhver holomorf funktion</u> $f: A \to \mathbb{C}$ <u>har lokalt en stamfunktion.</u>

Nærmere bestemt viser sætning 3 i kap. 1, §8, at hvis B er det indre af et afsluttet delinterval af A, da har f en stamfunktion i B. Ved betragtning af beviset ses let, at det samme gælder under væsentlig almindeligere antagelser om B, f.eks. hvis B er en vilkårlig åben konveks delmængde af A. For vort formål er det unødvendigt at gå ind på karakteriseringen af de mængder A, for hvilke det gælder, at enhver holomorf funktion i A har en stamfunktion i A (de enkeltsammenhængende mængder). For sådanne mængder A gælder ifølge det foregående <u>Cauchys integralsætning</u>, at for enhver holomorf funktion $f: A \to \mathbb{C}$ er integralet af $f(z)dz$ langs enhver lukket C^1-kurve i A lig med 0. Vi foretrækker at gi-

ve Cauchys integralsætning en anden formulering, hvori den kommer til at vedrøre holomorfe funktioner på en vilkårlig åben, sammenhængende mængde. En almen behandling af denne formulering kunde gennemføres under brug af det i kap. 1, §§ 10-13 behandlede fladebegreb (i tilfældet $k=2, p=2$), men dette vilde være at skyde over målet, idet vi ved anvendelserne altid kun kommer til at betragte yderst simple mængder.

For en vilkårlig åben, sammenhængende mængde A i $\mathbb{C}$ betegner vi som en <u>simpel figur</u> F i A en kompakt delmængde af A begrænset af et endeligt antal simple kurver. Eksempler på simple figurer er en afsluttet cirkelskive, et afsluttet rektangel, en afsluttet cirkel-

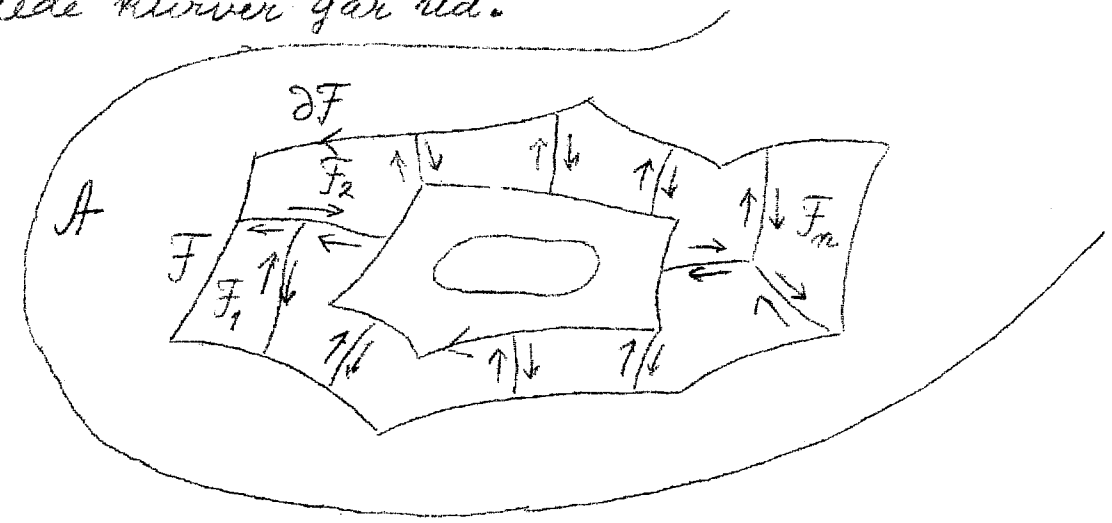


ring, en afsluttet halvcirkelskive, et afsluttet cirkeludsnit. Vi kan se bort fra en eksakt afgrænsning af begrebet, idet der ved anvendelserne altid kun er tale om figurer af disse eller lignende typer, som umiddelbart kan overskues. Idet vi, hvor intet andet siges, orienterer en simpel figur F i overensstemmelse med den positive orientering i planen, betegner vi med ∂F dens orienterede rand. Herved skal den ydre rand (hvis figuren består af flere dele de ydre rande) orienteres i overensstemmelse med planens positive omløb, de eventuelle indre rande i overensstemmelse med planens negative omløb. Ved integration langs randen må man naturligvis vælge parameterfremstillinger for de enkelte stykker af randen.

Cauchys integralsætning. For enhver holomorf funktion $f: A \to \mathbb{C}$ gælder for enhver simpel figur $F \subset A$, at

$$\int_{\partial F} f(z)\,dz = 0.$$

Bevis. For hvert $z_0 \in F$ findes ifølge sætning 3 en åben omegn, f. eks. et åbent interval, hvori f har en stamfunktion. Da F er kompakt, kan F dækkes af et endeligt antal af disse omegne. Følgelig kan F deles i et endeligt antal simple figurer $F_1, \ldots, F_n$, der hver for sig ligger i en sådan omegn. For hvert $j = 1, \ldots, n$ gælder derfor, at integralet af $f(z)dz$ langs ∂F_j er 0. Integralet af $f(z)dz$ langs ∂F er imidlertid summen af alle disse integraler, idet bidragene fra de ved delingen benyttede kurver går ud.



Vigtigt eksempel. Ved K betegner cirklen $\{z \mid |z| = r\}$ med positivt omløb har man for heltalligt n

$$\int_K z^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{for } n = -1. \end{cases}$$

Thi benyttes parameterfremstillingen $z = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, fås $\int_K z^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int}\, ri\, e^{it}\,dt = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{for } n = -1. \end{cases}$

Resultatet for $n \neq -1$ følger også straks af sætning 1,

idet funktionen z^n har stamfunktionen $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ (for $n \geq 0$ i $\mathbb{C}$, for $n \leq -2$ i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$). Resultatet for $n=-1$ følger ligeledes af sætning 1, idet z^{-1} i en opskåret plan $\{z \neq 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi\}$ til stamfunktion har den ved $\log z = \log|z| + i\arg z$, $\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$, bestemte gren af logaritmen. Heraf følger, at integralet af $z^{-1}dz$ langs en cirkelbue $z = re^{it}$, $\beta \leq t \leq \gamma < \beta + 2\pi$ er $i(\gamma - \beta)$. Idet man deler K i to buer, får man, at integralet af $z^{-1}dz$ langs K er $i2\pi$. Funktionen z^{-1} har ingen stamfunktion i hele $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Betragter man Riemanns floden for logaritmen, kan man sige, at z^{-1} på denne har stamfunktionen $\log z$.

Anvendelse af Cauchys integralsætning til udregning af integraler. Som eksempel på en sådan anvendelse vil vi for $y \in \mathbb{R}$ bestemme integralet

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-ixy}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-ixy}\, dx.$$

Det forudsættes bekendt, at

$$I(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = 1.$$

Nu betragtes den i hele $\mathbb{C}$ holomorfe funktion

$$f(z) = \exp(-\tfrac{1}{2}z^2) = \exp(-\tfrac{1}{2}(x+iy)^2) = e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - ixy}.$$

For et vilkårligt $y \neq 0$ betragtes rektanglet med hjørnerne $\pm a$, $\pm a + iy$, hvis rand betegnes K. For at kunne behandle tilfældene $y > 0$ og $y < 0$ under et vælger vi på K den positive omløbsretning, hvis $y > 0$, og den negative omløbsretning, hvis $y < 0$. Vi får da, idet $\int_K f(z)dz = 0$,

$$\int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{1}{2}y^2} e^{-ixy}\, dx + \int_{K_1} f(z)dz + \int_{K_2} f(z)dz = 0,$$

hvor K_1 og K_2 betegner de lodrette sider (med de gennemløbsretninger, der svarer til gennemløbsretningen af K). På disse er

$$|f(z)| \leqslant e^{-\frac{1}{2}a^2} e^{\frac{1}{2}y^2},$$

og længderne $\lambda(K_1)$ og $\lambda(K_2)$ er $= |y|$. Følgelig gælder

$$\left.\begin{matrix} \left|\int_{K_1} f(z)\,dz\right| \\ \left|\int_{K_2} f(z)\,dz\right| \end{matrix}\right\} \leqslant e^{-\frac{1}{2}a^2} e^{\frac{1}{2}y^2} |y|,$$

hvoraf ses, at integralerne $\int_{K_1} f(z)\,dz$ og $\int_{K_2} f(z)\,dz$ går mod 0 for $a \to +\infty$. Vi får altså

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{1}{2}y^2} e^{-ixy}\,dx = 1$$

eller

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-ixy}\,dx = e^{-\frac{1}{2}y^2}.$$

§10. Cauchys integralformler.

Lad A være en åben, sammenhængende mængde i $\hat{\mathbb{C}}$.

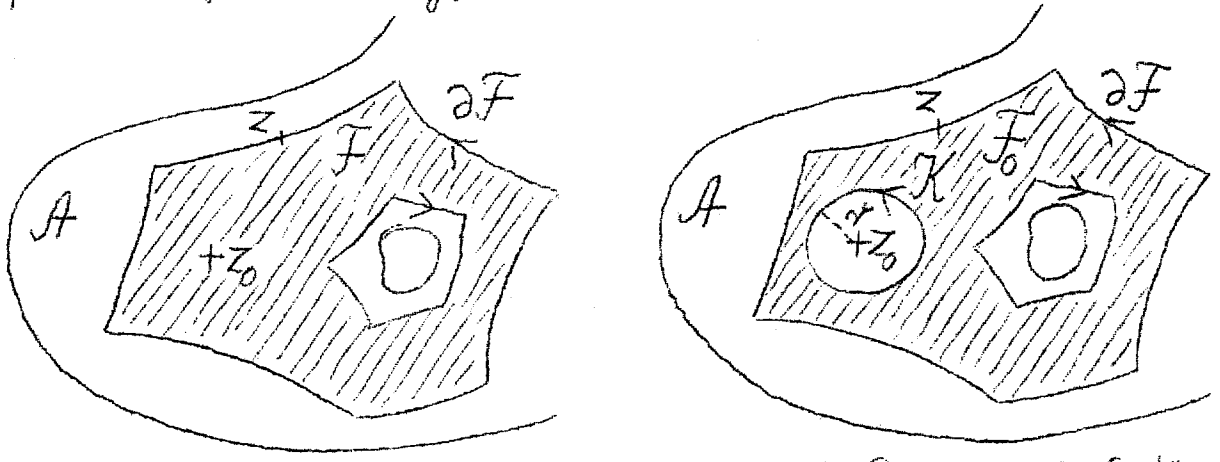
Sætning 1. *For enhver holomorf funktion $f: A \to \hat{\mathbb{C}}$ og enhver simpel figur F i A er værdien af f i ethvert indre punkt z_0 af F bestemt ud fra værdierne af f på ∂F ved formlen*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Bevis. På $A \setminus \{z_0\}$ betragter vi den ved

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

definerede funktion g, der åbenbart er holomorf. Lad r være



et positivt tal mindre end $\operatorname{dist}(\partial F, z_0)$. Da er $F_0 = F \setminus \{z \mid |z - z_0| \le r\}$ en simpel figur i $A \setminus \{z_0\}$, og vi har $\partial F_0 = \partial F - K$, hvor K betegner cirklen $\{z \mid |z - z_0| = r\}$ med positivt omløb. Ifølge Cauchys integralsætning anvendt på g gælder derfor

$$\int_{\partial F} g(z)\, dz - \int_K g(z)\, dz = 0$$

eller

$$\int_{\partial F} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_K \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

På K er, når r er „lille", værdierne af f „omtrent" lig med $f(z_0)$. Vi omskriver derfor det sidste integral til

$$\int_K \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz + \int_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz.$$

Her er ifølge det i §9 behandlede vigtige eksempel

$$\int_K \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = f(z_0)\int_K \frac{dz}{z-z_0} = f(z_0)\,2\pi i.$$

For det andet led fås

$$\left|\int_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \leqslant \sup_{z\in K}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|\cdot\lambda(K)$$
$$= \frac{1}{r}\sup_{z\in K}|f(z)-f(z_0)|\,2\pi r$$
$$= 2\pi \sup_{z\in K}|f(z)-f(z_0)|.$$

Sammenfattende fås derfor

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F}\frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\right| \leqslant \sup_{z\in K}|f(z)-f(z_0)|.$$

Her er venstre side uafhængig af r, medens højre side går mod 0 for $r\to 0$. Altså er venstre side 0, hvormed sætningen er bevist.

Sætning 2. Hvis en kontinuert funktion $f: A\to\mathbb{C}$ har den egenskab, at for enhver simpel figur F i A er værdien af f i ethvert indre punkt z_0 af F bestemt ud fra værdierne af f på ∂F ved formulen

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F}\frac{f(z)}{z-z_0}dz,$$

da er f vilkårligt ofte differentiabel i A, og for de afledede $f', f'', \ldots$ gælder, at for enhver simpel figur F i A er værdien af den p^{te} afledede $f^{(p)}$ i ethvert indre punkt z_0 af F bestemt ved formulen

$$f^{(p)}(z_0) = \frac{p!}{2\pi i}\int_{\partial F}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{p+1}}dz.$$

Bevis. Da ethvert punkt af A er indre punkt af en simpel figur F i A, er det nok for en given simpel figur F at vise, at f er vilkårligt ofte differentiabel i det indre af F, og at værdierne af de afledede i et indre punkt z_0 af F er bestemt ved den anførte formel.

Vi fører beviset ved induktion. Det drejer sig da om at bevise, at den for et vilkårligt helt $p \geq 1$ ved

$$g(z_0) = \int_{\partial F} \frac{f(z)}{(z-z_0)^p}\, dz$$

bestemte funktion i det indre af F er differentiabel med den afledede

$$g'(z_0) = p \int_{\partial F} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{p+1}}\, dz.$$

Denne formel for $g'(z_0)$ er netop den, der fremgår af formlen for $g(z_0)$ ved differentiation efter z_0, idet differentiationen udføres under integraltegnet. Vi kunde basere beviset på en almen sætning om differentiation af et integral efter en i den integrerede funktion optrædende parameter, men foretrækker at gennemføre de i det forliggende hjælpede nødvendige betragtninger.

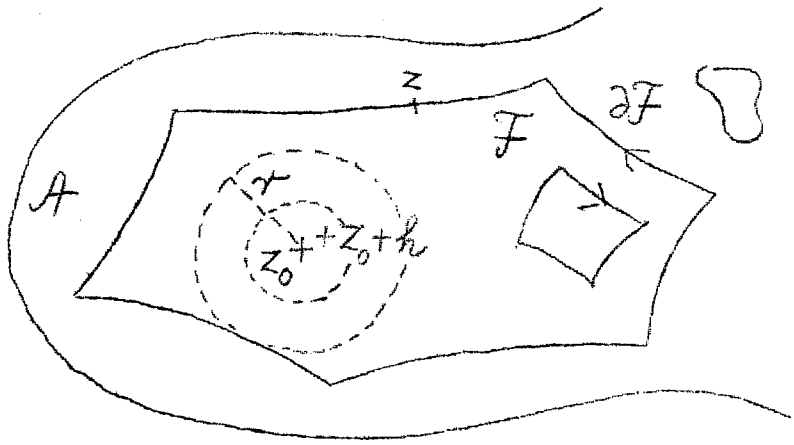
Lad $r = \operatorname{dist}(\partial F, z_0)$. Da er for ethvert h med $|h| \leq \frac{1}{2}r$ punktet $z_0 + h$ et indre punkt af F, og $\operatorname{dist}(\partial F, z_0+h) \geq \frac{1}{2}r$. Vi danner nu differensen

$$D = \frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{h} - p \int_{\partial F} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{p+1}} dz,$$

om hvilken det gælder om at vise, at den går mod 0 for $h \to 0$. Ved omregning fås

$$D = \int_{\partial F} f(z) \left[\frac{\frac{1}{(z-(z_0+h))^p} - \frac{1}{(z-z_0)^p}}{h} - \frac{p}{(z-z_0)^{p+1}} \right] dz.$$

Sættes til afkortning $z - z_0 = a$ og $z - (z_0+h) = b$, er $h = a - b$, og vi finder



$$\left[\dots\right] = \frac{\frac{1}{b^p} - \frac{1}{a^p}}{a-b} - \frac{p}{a^{p+1}} = \frac{1}{a^{p+1}b^p}\left(\frac{a(a^p-b^p)}{a-b} - pb^p\right)$$

$$= \frac{1}{a^{p+1}b^p}\left(a(a^{p-1}+a^{p-2}b+\dots+ab^{p-2}+b^{p-1}) - pb^p\right)$$

$$= \frac{1}{a^{p+1}b^p}\left((a^p-b^p)+(a^{p-1}-b^{p-1})b+\dots+(a^2-b^2)b^{p-2}+(a-b)b^{p-1}\right)$$

$$= \frac{a-b}{a^{p+1}b^p}\Big((a^{p-1}+a^{p-2}b+\dots+ab^{p-2}+b^{p-1})+$$
$$+(a^{p-2}+a^{p-3}b+\dots+ab^{p-3}+b^{p-2})b+$$
$$+\dots+(a+b)b^{p-2}+b^{p-1}\Big).$$

For ethvert $z\in\partial F$ gælder $|a| = |z-z_0| \geqslant r$ og $|b| = |z-(z_0+h)| \geqslant \frac{1}{2}r$. Betegnes diameteren af F med d gælder desuden $|a|\leqslant d$ og $|b|\leqslant d$. Følgelig gælder

$$\left|\left[\dots\right]\right| \leqslant \frac{|h|}{r^{p+1}\left(\frac{1}{2}r\right)^p} d^{p-1}(p+(p-1)+\dots+2+1) = C|h|,$$

hvor C betegner konstanten $\dfrac{2^{p-1}d^{p-1}p(p+1)}{r^{2p+1}}$. Sættes endelig $\sup\limits_{z\in\partial F}|f(z)| = M$, ser vi, at der for ethvert h med $|h|\leqslant\frac{1}{2}r$ gælder

$$|\mathfrak{D}| \leqslant MC|h|\lambda(\partial F).$$

Heraf fremgår imidlertid, at $\mathfrak{D}\to 0$ for $h\to 0$.

Ved at sammenholde sætningerne 1 og 2 finder vi

følgende

Hovedsætning. De holomorfe funktioner $f: A \to \mathbb{C}$ er netop de kontinuerte funktioner $f: A \to \mathbb{C}$, for hvilke for enhver simpel figur F i A værdien af f i ethvert indre punkt z af F er bestemt ved formelen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Enhver holomorf funktion $f: A \to \mathbb{C}$ er vilkårligt ofte differentiabel, og dens afledede $f', f'', \ldots$, der således også er holomorfe, er bestemt ved, at for enhver simpel figur F i A er værdien af den p^{te} afledede $f^{(p)}$ i ethvert indre punkt z af F bestemt ved formelen

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\partial F} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta.$$

Formlerne til fremstilling af værdien af en holomorf funktion og dens afledede i et indre punkt af en simpel figur ved hjælp af funktionens værdier på randen kaldes Cauchys integralformler. Funktionen $\frac{1}{\zeta - z}$ kaldes Cauchys kerne.

I denne hovedsætning fremtræder en egendommelig forskel mellem teorien for funktioner af en kompleks variabel og teorien for funktioner af en reel variabel, idet en C^1-funktion af en reel variabel jo i almindelighed ikke er en C^∞-funktion.

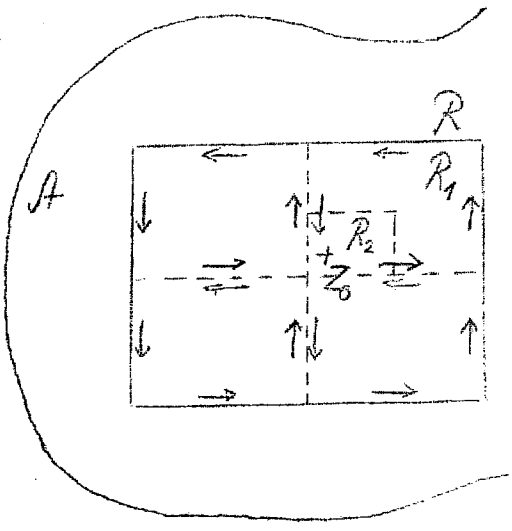
Af sætningen følger, at hvis en kontinuert funktion $f: A \to \mathbb{C}$ lokalt har en stamfunktion, da er f holomorf; thi da er f jo i en omegn af ethvert punkt af A den afledede af en holomorf funktion.

I tilslutning hertil kan vi nu bevise den i §4 nævnte sætning, at hvis en funktion $f: A \to \mathbb{C}$ blot er differentiabel i ethvert punkt af A, da er f holomorf. Differentiabiliteten medfører altså, at f' er kontinuert. Dette resultat, der skyldes Goursat (1899), understreger yderligere forskellen mellem teorien for funktioner af en kompleks variabel og teorien for funktioner af en reel variabel.

Vi fører beviset ved at vise, at f lokalt har en stamfunktion.

Hertil beviser vi først, at der for ethvert i A indeholdt afsluttet rektangel R gælder

$$I = \int_{\partial R} f(z)\,dz = 0.$$



Vi deler R i fire kongruente afsluttede rektangler $R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}$ ved halvering af kanterne. Da er

$$I = \int_{\partial R_{11}} + \int_{\partial R_{12}} + \int_{\partial R_{13}} + \int_{\partial R_{14}}.$$

For (mindst) et af rektanglerne R_{1j}, som vi blot vil betegne R_1, må da gælde

$$|I| \leqslant 4\,|I_1|, \quad \text{hvor} \quad I_1 = \int_{\partial R_1} f(z)\,dz.$$

Nu deles R_1 på tilsvarende måde i fire kongruente afsluttede rektangler $R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}$. For (mindst) et af dem, som vi blot vil betegne R_2, må gælde

$$|I_1| \leqslant 4\,|I_2|, \quad \text{hvor} \quad I_2 = \int_{\partial R_2} f(z)\,dz.$$

På denne måde får vi en følge af afsluttede rektangler $R, R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$, hvor hvert er fremkommet som et af fire ved delingen af det foregående, og vi har for et-

hvert n

$$|I| \leq 4^n |I_n|, \quad \text{hvor} \quad I_n = \int_{\partial R_n} f(z)dz.$$

Rektanglerne R_n har et fælles punkt z_0. Da f er differentiabel i ethvert punkt af A, altså specielt i z_0, har vi

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + g(z)$$
$$= a + bz + g(z),$$

hvor det om $g(z)$ gælder, at $g(z) = \varepsilon(z-z_0)(z-z_0)$, hvor $\varepsilon(z-z_0) \to 0$ for $z \to z_0$. Funktionen $g(z)$ er åbenbart kontinuert (som differens mellem $f(z)$ og $a+bz$). Vi har nu for hvert n

$$I_n = \int_{\partial R_n} f(z)dz = \int_{\partial R_n} (a+bz)dz + \int_{\partial R_n} g(z)dz.$$

Men $a+bz$ har stamfunktionen $az + \frac{1}{2}bz^2$. Følgelig er $\int_{\partial R_n} (a+bz)dz = 0$. Vi har derfor

$$|I_n| = \left| \int_{\partial R_n} g(z)dz \right| \leq \sup_{z \in \partial R_n} |g(z)| \cdot \lambda(\partial R_n).$$

Her er $\lambda(\partial R_n) = \frac{1}{2^n}\lambda(R)$. Da $g(z) = \varepsilon(z-z_0)(z-z_0)$, og $|z-z_0| < \lambda(\partial R_n)$ for ethvert $z \in \partial R_n$, ser man at

$$\sup_{z \in \partial R_n} |g(z)| \leq \sup_{z \in \partial R_n} |\varepsilon(z-z_0)| \cdot \lambda(\partial R_n).$$

Sammenfattende har vi da

$$|I| \leq 4^n |I_n| \leq 4^n \sup_{z \in \partial R_n} |\varepsilon(z-z_0)| \cdot \left(\lambda(\partial R_n)\right)^2$$
$$= 4^n \sup_{z \in \partial R_n} |\varepsilon(z-z_0)| \left(\frac{1}{2^n}\lambda(\partial R)\right)^2 = \sup_{z \in \partial R_n} |\varepsilon(z-z_0)| \cdot \left(\lambda(\partial R)\right)^2.$$

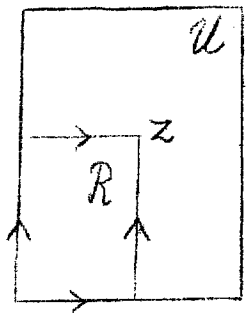
Men $\varepsilon(z-z_0) \to 0$ for $z \to z_0$. Følgelig gælder

$$\sup_{z \in \partial R_n} |\varepsilon(z-z_0)| \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

Af den fundne ulighed følger derfor, at $I = 0$.

For et vilkårligt i A indeholdt rektangel $U = \{z \mid a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2\}$ anvender vi for et vilkårligt $z = x+iy$ i det indre af U det fundne resultat på rekt-

anglet $R = \{\zeta = \xi + i\eta \mid a_1 \leq \xi \leq x,\ b_1 \leq \eta \leq y\}$.



Vi ser da, at de to udtryk

$$g(z) = \int_{b_1}^{y} f(a_1 + i\eta)\, i\, d\eta + \int_{a_1}^{x} f(\xi + iy)\, d\xi$$

og

$$g(z) = \int_{a_1}^{x} f(\xi + ib_1)\, d\xi + \int_{b_1}^{y} f(x + i\eta)\, i\, d\eta$$

bestemmer samme funktion g i det indre af U. Af disse udtryk ses, at g har de partielle afledede

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = if.$$

Heraf fremgår, idet f er kontinuert, at g er holomorf i det indre af U og har den afledede f. Altså er g stamfunktion for f i det indre af U. Følgelig er f holomorf i det indre af U og altså i A.

<u>Liouvilles sætning.</u> <u>Enhver begrænset, holomorf funktion på $\hat{\mathbb{C}}$ er konstant.</u>

Bevis. Lad $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ være holomorf og begrænset, f.eks. $|f(z)| \leq M$ for alle $z \in \hat{\mathbb{C}}$. For et vilkårligt $z \in \hat{\mathbb{C}}$ bestemmer vi $f'(z)$ efter Cauchys integralformel, idet vi for F vælger cirkelskiven $F = \{\zeta \mid |\zeta - z| \leq r\}$. Vi får da

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2}\, \lambda(\partial F) = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2}\, 2\pi r = \frac{M}{r}.$$

Da radius r kan vælges fri, følger heraf, at $f'(z) = 0$. Altså er f konstant,

<u>Algebraens fundamentalsætning.</u> <u>Ethvert polynomium af grad ≥ 1 har en rod.</u>

Bevis. For et polynomium $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, af grad $n \geq 1$ gælder for $z \neq 0$

$$|P(z)| \geqslant |a_n||z|^n - |a_0| - \cdots - |a_{n-1}||z|^{n-1}$$
$$= |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_0|}{|z|^n} - \cdots - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \right)$$

og følgelig $P(z) \to \infty$ for $z \to \infty$. Var nu $P(z) \neq 0$ for alle z, var $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ en holomorf funktion på $\hat{C}$, for hvilken $f(z) \to 0$, altså en begrænset, holomorf funktion på $\hat{C}$. Ifølge Liouvilles sætning var f altså konstant; følgelig var P konstant, i strid med, at $P(z) \to \infty$ for $z \to \infty$.

§11. Grænseovergang med holomorfe funktioner.

Lad A være en åben, sammenhængende mængde i $\hat{\mathbb{C}}$.

Sætning. *Hvis en følge af holomorfe funktioner $f_n: A \to \hat{\mathbb{C}}$ konvergerer ligeligt på enhver kompakt delmængde af A, er grænsefunktionen $f: A \to \hat{\mathbb{C}}$ ligeledes holomorf, og for ethvert p konvergerer følgen af de p^{te} afledede $f_n^{(p)}$ ligeligt på enhver kompakt delmængde af A mod den p^{te} afledede $f^{(p)}$.*

Bevis. Grænsefunktionen f er åbenbart kontinuert. For enhver simpel figur F i A og ethvert indre punkt z af F er for ethvert n

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Sættes $\operatorname{dist}(\partial F, z) = r$, gælder

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial F} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \cdot \frac{1}{r} \cdot \lambda(\partial F).$$

Da ∂F er kompakt, gælder

$$\sup_{\zeta \in \partial F} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Følgelig konvergerer $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ mod $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$, og vi slutter, at

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

I følge hovedsætningen i § 10 er f altså holomorf.

Lad nu B være en vilkårlig kompakt delmængde af A. For ethvert $z \in B$ vælger vi en i A indeholdt afsluttet cirkelskive $S(z) = \{\zeta \mid |\zeta - z| \leqslant r\}$ med centrum

i z. De tilsvarende åbne cirkelskiver $T(z)=\{\zeta \mid |\zeta-z|<\frac{1}{2}r\}$ overdækker B. Følgelig overdækkes B af et endeligt antal af disse cirkelskiver $T(z)$. Lad de tilsvarende cirkelskiver $S(z)$ være skiverne $S(z_q)=\{\zeta \mid |\zeta-z_q|\leqslant r_q\}$, $q=1,\dots,Q$. Deres foreningsmængde F er en simpel figur i A, og da B er indeholdt i foreningsmængden af skiverne $T(z_q)=\{\zeta \mid |\zeta-z_q|<\frac{1}{2}r_q\}$, gælder $\operatorname{dist}(\partial F, B)\geqslant k$, hvor $k=\frac{1}{2}\min\{r_1,\dots,r_Q\}$. For ethvert p og ethvert $z\in B$ gælder derfor for alle n

$$|f_n^{(p)}(z)-f^{(p)}(z)| = \left|\frac{p!}{2\pi i}\int_{\partial F}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}d\zeta-\frac{p!}{2\pi i}\int_{\partial F}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{p!}{2\pi i}\int_{\partial F}\frac{f_n(\zeta)-f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}d\zeta\right| \leqslant \frac{p!}{2\pi}\sup_{\zeta\in\partial F}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\cdot\frac{1}{k^{p+1}}\cdot\lambda(\partial F),$$

hvoraf ses, at $f_n^{(p)}$ konvergerer ligeligt mod $f^{(p)}$ på B.

Sætningen er ensbetydelig med følgende sætning om rækker: Hvis en uendelig række $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, hvis led er holomorfe funktioner på A, er ligeligt konvergent på enhver kompakt delmængde af A, er dens sum $f(z)$ ligeledes holomorf, og for ethvert p er den p gange ledvis differentierede række $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}(z)$ ligeligt konvergent på enhver kompakt delmængde af A og har som sum den p^{te} afledede $f^{(p)}(z)$.

§12. Harmoniske funktioner.

Når $f: A \to \mathbb{C}$ er holomorf, tilhører $f(z) = f(x+iy)$ opfattet som funktion af (x,y) klassen $\mathcal{C}^1(A)$, og vi har

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Efter nu at have set, at f' også er holomorf, slutter vi, at $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ opfattet som funktioner af (x,y) tilhører klassen $\mathcal{C}^1(A)$. Altså tilhører f opfattet som funktion af (x,y) klassen $\mathcal{C}^2(A)$, og vi finder

$$f''(z) = \frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f'}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{i}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ved fortsættelse af ræsonnementet ses, at f opfattet som funktion af (x,y) tilhører $\mathcal{C}^n(A)$ for ethvert n, altså at f tilhører $\mathcal{C}^\infty(A)$. Af de opskrevne ligninger følger specielt, at

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Differentialoperatoren $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ kaldes <u>Laplaces operator</u>, og en funktion $f: A \to \mathbb{C}$ i klassen $\mathcal{C}^2(A)$, der tilfredsstiller ligningen $\Delta f = 0$, kaldes en <u>harmonisk funktion</u>. Vi har altså:

<u>Enhver holomorf funktion</u> $f: A \to \mathbb{C}$ <u>er en harmonisk funktion.</u>

Skrives $f = u + iv$, ser man, at også funktionerne u og v tilhører $\mathcal{C}^\infty(A)$, og idet

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \Delta u + i\Delta v,$$

ser man, at også u og v er harmoniske funktioner.

Er omvendt u og v reelle harmoniske funktioner på A, er $f = u + iv$ åbenbart en harmonisk funktion på A, men f er i almindelighed ikke holomorf. Hertil kræves jo yderligere, at

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vi kan imidlertid vise, at hvis u er en reel harmonisk funktion, da er u lokalt reddet af en holomorf funktion f, som er entydig bestemt på nær en additiv rent imaginær konstant, d.v.s. da findes der til ethvert punkt en omegn og deri en reel harmonisk funktion v, som er entydig bestemt på nær en additiv konstant, således at f $u+iv$ er en holomorf funktion i denne omegn. Thi betingelsen for, at en funktion v sammen med det givne u giver en holomorf funktion $f=u+iv$, er at v er en C^1-funktion, der opfylder betingelserne $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, altså en C^1-funktion med differentialet

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

og da u er harmonisk, er den her optrædende differentialform $\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = h\,dx + g\,dy$ en C^1-form, der opfylder betingelsen $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ og altså ifølge kap 1, § 8, sætning 3 er lokalt eksakt.

En sådan harmonisk funktion v kaldes konjugeret til u.

Af ovenstående sluttes, at enhver reel harmonisk funktion på A må tilhøre $C^\infty(A)$. Det samme må da gælde om enhver kompleks harmonisk funktion på A.

§13. Potensrækker.

En uendelig række

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

kaldes en potensrække i $z-z_0$. Vi betragter tallet

$$(0 \leqslant) \qquad \lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad (\leqslant +\infty).$$

Potensrækken er absolut konvergent for ethvert z, for hvilket $\lambda|z-z_0|<1$, og divergent for ethvert z, for hvilket $\lambda|z-z_0|>1$.

Anderledes udtrykt: Hvis $0<\lambda<+\infty$, er potensrækken absolut konvergent for alle z inden for cirklen $\{z \mid |z-z_0| = \frac{1}{\lambda}\}$ og divergent for alle z uden for denne cirkel. Hvis $\lambda=0$, er potensrækken absolut konvergent for alle z. Hvis $\lambda=+\infty$, er potensrækken absolut konvergent for $z=z_0$ og divergent for alle $z\neq z_0$.

Tallet $(0\leqslant)\ \rho = \frac{1}{\lambda}\ (\leqslant +\infty)$ kaldes konvergensradius, medens cirklen $\{z \mid |z-z_0|=\rho\}$ i tilfældet $0<\rho<+\infty$ kaldes konvergenscirklen. Sidstnævnte benævnelse benyttes også for cirkelskiven $\{z \mid |z-z_0|<\rho\}$ når $\rho>0$, i tilfældet $\rho=+\infty$ altså om hele $\mathbb{C}$.

Bevis. 1) Hvis $\lambda|z-z_0|<1$, har vi $\limsup \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|}<1$. Der findes altså et positivt tal $k<1$, således at $\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|}\leqslant k$ for alle n fra et vist trin, altså $|a_n(z-z_0)^n|\leqslant k^n$ fra dette trin. Rækken er derfor absolut konvergent for et sådant z.

2) Hvis $\lambda|z-z_0|>1$, har vi $\limsup \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|}>1$ og følgelig $|a_n(z-z_0)^n|>1$ for uendelig mange n. Rækken er derfor divergent for et sådant z.

Hvis $\rho>0$, er potensrækken ligeligt konvergent i enhver kompakt delmængde af konvergenscirklen $A=\{z \mid |z-z_0|<\rho\}$, og dens sum

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

er derfor en i A holomorf funktion, hvis afledede $f', f'', \ldots$ fremstilles ved de leddelvis differentierede rækker, d.v.s. for ethvert p er

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)\,a_n(z-z_0)^{n-p},$$

og disse rækker er ligeledes ligeligt konvergente i enhver kompakt delmængde af A.

Bevis. Betegner B en kompakt delmængde af A, antager $|z-z_0|$ i B sit supremum, lad os sige i punktet $z_1 \in B$. Da er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z_1-z_0)^n|$ en konvergent majorantrække for potensrækken i B. Altså er potensrækken ligeligt konvergent i B.

Specielt finder vi for $z=z_0$, at $f^{(p)}(z_0) = p!\,a_p$ (gældende for $p \geq 0$, idet $f^{(0)}$ betegner f). Heraf følger:

Potensrækken er funktionens Taylorrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$$

og der gælder altså for alle $z \in A = \{z \mid |z-z_0| < \rho\}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Det bemærkes, at en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ og den ved ledvis differentiation dannede række $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ har samme konvergensradius. Thi rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ har samme konvergensradius som rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^n$, og da $\sqrt[n]{n} \to 1$ for $n \to \infty$, gælder $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

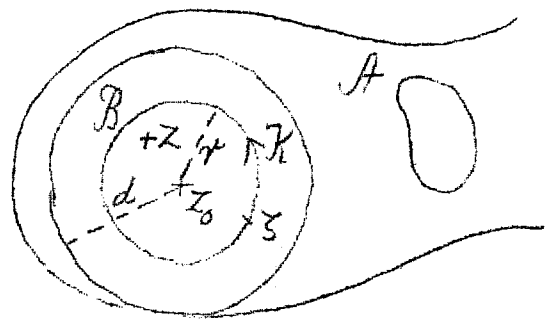
En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ og den ved ledvis integration dannede række $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n(z-z_0)^{n+1}$ har ligeledes samme konvergensradius ρ. Er $\rho > 0$, og betegnes de ved de to rækker i konvergenscirklen $A = \{z \mid |z-z_0| < \rho\}$ fremstillede funktioner med $f(z)$ og $g(z)$, er g en stamfunktion for f i A.

Vigtigt eksempel. Potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ har konvergensradius 1 og fremstiller i $\{z \mid |z|<1\}$ funktionen $\frac{1}{1-z}$. For ethvert n gælder

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \cdots + z^n + \frac{z^{n+1}}{1-z}.$$

§14. Fremstilling af en vilkårlig holomorf funktion ved potensrække.

Lad A være en åben, sammenhængende mængde i $\hat{C}$ og z_0 et punkt af A. Vi betragter alle åbne cirkelskiver $\{z \mid |z-z_0|<r\}$ med centrum z_0, som tilhører A. Foreningsmængden af disse er selv en åben cirkelskive $B = \{z \mid |z-z_0|<d\}$ med centrum z_0. Vi kalder den *den største åbne cirkelskive i A med centrum z_0*. Hvis $A = \hat{C}$, er naturligvis $d = +\infty$, altså $B = \hat{C}$; hvis $A \neq \hat{C}$, er $d = \operatorname{dist}(z_0, \hat{C} \setminus A)$.



Hovedsætning. *Hvis $f: A \to \hat{C}$ er holomorf og $z_0 \in A$, er Taylorrækken for f svarende til punktet z_0 konvergent i (mindst) den største åbne cirkelskive $B = \{z \mid |z-z_0|<d\}$ i A med centrum z_0 og fremstiller i denne funktionen f, d. v. s. for ethvert $z \in B$ gælder*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Af denne sætning sammen med det i §13 viste fremgår:

Klassen af holomorfe funktioner på en åben cirkelskive med centrum z_0 er identisk med klassen af funktioner på cirkelskiven, der kan fremstilles ved en potensrække i $z-z_0$.

Bevis. Beviset beror på Cauchys integralformler.

Vi betragter et fast $z \in B$ og vælger i B en cirkel K med centrum z_0 og radius r, hvor $|z-z_0|<r<d$. Da gælder

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

For ethvert ζ på K og ethvert n har vi

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1 - \dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left(1 + \frac{z-z_0}{\zeta - z_0} + \cdots + \left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^n + \frac{\left(\dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}}\right)$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{1}{(\zeta - z_0)^2}(z-z_0) + \cdots + \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n + R_n(\zeta),$$

hvor vi for restleddet har vurderingen

$$|R_n(\zeta)| = \left|\frac{(z-z_0)^{n+1}}{(\zeta - z_0)^{n+1}(\zeta - z)}\right| \leqslant \frac{|z-z_0|^{n+1}}{r^{n+1}}\,\frac{1}{r - |z-z_0|}.$$

Altså fås

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\,d\zeta\,(z-z_0) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta\,(z-z_0)^n + \frac{1}{2\pi i}\int_K f(\zeta)\,R_n(\zeta)\,d\zeta$$

$$= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \frac{1}{2\pi i}\int_K f(\zeta)\,R_n(\zeta)\,d\zeta.$$

Idet vi sætter $\sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)| = M$, har vi for restleddet vurderingen

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_K f(\zeta)\,R_n(\zeta)\,d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\,M\,\frac{|z-z_0|^{n+1}}{r^{n+1}}\,\frac{1}{r - |z-z_0|}\,2\pi r,$$

hvoraf ses (idet $\dfrac{|z-z_0|}{r} < 1$), at restleddet går mod 0 for $n \to \infty$. Hermed er sætningen bevist.

Elementære funktioner. For funktionerne $\exp z$, $\cos z$, $\sin z$, $\log(1+z)$ m.fl. kender vi fra den reelle analyse Taylorrækkerne svarende til $z_0 = 0$. De tre førstnævnte funktioner er holomorfe på $\mathbb{C}$, og vi finder derfor for alle $z \in \mathbb{C}$

$$\exp z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

Den sidstnævnte funktion er, idet vi benytter hoved-

værdien af logaritmen, holomorf i $A = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z \text{ reel} \leqslant -1\}$. Den største cirkelskive i A med centrum 0 er derfor skiven $\{z \mid |z| < 1\}$, og i denne har vi

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \cdots .$$

Hele funktioner. En holomorf funktion $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ kaldes en hel funktion. I følge det foregående er klassen af hele funktioner identisk med klassen af funktioner på $\hat{\mathbb{C}}$, der kan fremstilles ved en for alle z konvergent potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Hertil hører klassen af polynomier eller hele rationale funktioner $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. En hel funktion, der ikke er et polynomium, kaldes en hel transcendent funktion. For en vilkårlig hel funktion $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ defineres maksimumsmodulen $M(r)$ som

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|, \qquad 0 \leqslant r < +\infty .$$

Sætning. En hel funktion f er et polynomium af grad $\leqslant n$, hvis og kun hvis maksimumsmodulen tilfredsstiller betingelsen

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{M(r)}{r^n} < +\infty .$$

Bevis. 1) Hvis $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, har vi for alle $r \geqslant 0$ uligheden $M(r) \leqslant |a_0| + |a_1| r + \cdots + |a_n| r^n$, hvoraf

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{M(r)}{r^n} \leqslant |a_n| < +\infty .$$

2) Hvis $\limsup_{r \to +\infty} \frac{M(r)}{r^n} < +\infty$, har vi, idet, når K for $r > 0$ betegner cirklen $\{z \mid |z| = r\}$,

$$|f^{(q)}(0)| = \left| \frac{q!}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta^{q+1}} d\zeta \right| \leqslant \frac{q!}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{q+1}} 2\pi r = q! \frac{M(r)}{r^n} \frac{1}{r^{q-n}} ,$$

at $f^{(q)}(0) = 0$ for $q > n$; thi højre side går da mod 0 for $r \to +\infty$. Følgelig er $f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.

§15. Nulpunkter for holomorfe funktioner. Identitetssætningen. Afbildning af en omegn af et nulpunkt for den afledede. Maksimumsprincipet.

Lad A være en åben, sammenhængende mængde i $\mathbb{C}$ og $f: A \to \mathbb{C}$ en holomorf funktion. Lad os betragte mængden

$$\mathcal{E} = \{ z \in A \mid f(z)=0, f'(z)=0, f''(z)=0, \dots \}$$

af punkter $z \in A$, i hvilke såvel f som samtlige afledede $f^{(n)}$ har værdien 0. Hvis $z_0 \in \mathcal{E}$, består Taylorrækken for f svarende til z_0 af lutter nuller. Da Taylorrækken fremstiller f i en omegn af z_0, ses, at $f(z)=0$ for ethvert z i denne omegn, som derfor må hilhøre $\mathcal{E}$. Mængden $\mathcal{E}$ er altså en åben mængde. På den anden side er $A \setminus \mathcal{E}$ også åben, idet funktionerne $f, f', f'', \dots$ er kontinuerte. Heraf følger, at $\mathcal{E}$ er enten A eller $\emptyset$. At $\mathcal{E} = A$, er ensbetydende med, at f er konstanten 0. Vi har altså vist:

Hvis $f: A \to \mathbb{C}$ er holomorf og ikke konstanten 0, da er for ethvert punkt $z \in A$ tallene $f(z), f'(z), f''(z), \dots$ ikke alle 0.

Hvis z_0 er et nulpunkt for f, altså $f(z_0)=0$, kan tallene $f'(z_0), f''(z_0), \dots$ således ikke alle være 0. Det mindste n, for hvilket $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, kaldes nulpunktets orden (eller multiplicitet). Idet vi sætter $\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} = a_p$, har vi altså i en omegn af z_0

$$f(z) = a_n (z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \dots$$
$$= (z-z_0)^n \left(a_n + a_{n+1}(z-z_0) + \dots \right) = (z-z_0)^n g(z),$$

hvor g er holomorf og $g(z_0) = a_n \neq 0$. Da g er kontinuert, må der findes en (eventuelt mindre) omegn af z_0, hvori $g(z) \neq 0$. For ethvert $z \neq z_0$ i denne omegn er således $f(z) \neq 0$. Hermed er vist:

Ethvert nulpunkt z_0 for en holomorf funktion $f: A \to \dot{C}$, der ikke er konstanten 0, er isoleret, d.v.s. der findes en omegn af z_0, således at z_0 er det eneste nulpunkt for f i denne omegn.

Nulpunktsmængden $N = \{z \mid f(z) = 0\}$ for en holomorf funktion $f: A \to \dot{C}$ er åbenbart en relativt til A afsluttet punktmængde. Denne mængde kan altså ikke have noget fortætningspunkt i A, medmindre f er konstanten 0. [Derimod kan den godt have fortætningspunkter på randen af A. Således er funktionen $\sin \frac{1}{z}$ holomorf på $\dot{C} \setminus \{0\}$ og har nulpunkterne $\frac{1}{p\pi}$, $p \in \dot{Z} \setminus \{0\}$.] Ved at anvende dette resultat på differensen af to holomorfe funktioner får vi:

Identitetssætningen. Hvis $f: A \to \dot{C}$ og $g: A \to \dot{C}$ er to holomorfe funktioner på samme mængde A, og mængden $\{z \mid f(z) = g(z)\}$ har et fortætningspunkt i A, da er f og g identiske.

Vi ser endvidere, at nulpunktsmængden N for en holomorf funktion $f: A \to \dot{C}$, der ikke er konstanten 0, må være endelig eller numererbar. Thi for hvert punkt $z \in N$ kan vi vælge et punkt $c = a + ib$ med rationale a og b, som har mindre afstand fra z end fra noget andet punkt af N. For forskellige $z \in N$ fås altså forskellige c, og mængden af punkter $a + ib$ med rationale a og b er jo numererbar.

I en kompakt delmængde B af A kan f kun have et endeligt antal nulpunkter. Thi en uendelig delmængde af en kompakt mængde B har jo et fortætningspunkt tilhørende B.

Hvis $f: A \to \mathbb{C}$ er holomorf og ikke konstant, da er for ethvert punkt $z \in A$ tallene $f'(z), f''(z), \ldots$ ikke alle 0. Thi hvis disse tal alle var 0 for $z = z_0$, vilde for den ved $\varphi(z) = f(z) - f(z_0)$ bestemte funktion φ gælde, at tallene $\varphi(z_0), \varphi'(z_0), \varphi''(z_0), \ldots$ alle var 0, og følgelig var φ konstanten 0. For et punkt z_0, for hvilket $f'(z_0) \neq 0$, har vi i §4, sætning 4 vist, at der findes en omegn af z_0, der ved f afbildes bijektivt på en omegn af $f(z_0)$, og vi har vist, at afbildningen er vinkeltro i z_0. Vi kan nu også undersøge afbildningen $w = f(z)$ i omegnen af et punkt z_0, hvori $f'(z_0) = 0$.

Vi sætter $w_0 = f(z_0)$ og betragter det mindste n, for hvilket $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. I en omegn af z_0 har vi da

$$w = f(z) = w_0 + a_n (z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots$$

$$= w_0 + (z - z_0)^n g(z),$$

hvor

$$g(z) = a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \cdots$$

er holomorf og $g(z_0) = a_n \neq 0$. Vi vælger en cirkelskive $D = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ i den pågældende omegn, i hvilken $|g(z) - a_n| < |a_n|$. Nu betegnes med b_0 et bestemt af tallene $\sqrt[n]{a_n}$ og med $h(z)$ den gren af $\sqrt[n]{g(z)}$ i D, der i z_0 har værdien b_0 [d.v.s. $h(z)$ er for ethvert $z \in D$ den af værdierne $\sqrt[n]{g(z)}$, for hvilken $\arg b_0 - \frac{\pi}{n} < \arg h(z) < \arg b_0 + \frac{\pi}{n}$]. Da er h holomorf i D og fremstilles altså ved en potensrække

$$h(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots, \qquad b_0 \neq 0.$$

Sættes endelig

$$k(z) = (z - z_0) h(z) = b_0(z - z_0) + b_1(z - z_0)^2 + \cdots,$$

har vi for funktionen f i D fremstillingen

$$w = f(z) = w_0 + k(z)^n.$$

Afbildningen $w = f(z) : D \to \dot{C}$ fås altså ved sammensætning af de tre afbildninger

$$t = k(z), \qquad s = t^n, \qquad w = w_0 + s.$$

Da $k'(z_0) = b_0 \neq 0$, afbildes ved $t = k(z)$ en vis omegn $A_0 \subseteq D$ af z_0 bijektivt på en omegn T_0 af $k(z_0) = 0$. Vi kan antage A_0 valgt således, at T_0 er en cirkelskive $\{t \mid |t| < \alpha\}$. [Ellers erstatter vi T_0 med en i T_0 indeholdt cirkelskive og A_0 med dennes originalmængde ved afbildningen $t = k(z)$.] Ved $s = t^n$ afbildes denne cirkelskive T_0 bijektivt på den n-bladede cirkelskive $S_0 = \{s \mid |s| < \alpha^n\}$ med forgrenингspunkt i 0. Ved $w = w_0 + s$ afbildes endelig denne bijektivt på den n-bladede cirkelskive $B_0 = \{w \mid |w - w_0| < \alpha^n\}$ med forgrenингspunkt i w_0.

Hermed er vist:

Hvis $f : A \to \dot{C}$ er holomorf og ikke konstant, og $z_0 \in A$ er et punkt, hvori $f'(z_0) = 0$, da vil, idet n er det mindste tal, for hvilket $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, en vis omegn A_0 af z_0 ved $w = f(z)$ afbildes bijektivt på en n-bladet cirkelskive $B_0 = \{w \mid |w - w_0| < \beta\}$ med forgrenингspunkt i $w_0 = f(z_0)$.

Til ethvert $w \in B_0 \setminus \{w_0\}$ svarer altså n indbyrdes forskellige punkter z i A_0, for hvilke $f(z) = w$.

Afbildningen $t = k(z)$ er vinkeltro i z_0, men ved afbildningen $s = t^n$ går kurver ud fra punktet $t = 0$ med halvtangenter i 0 over i kurver ud fra punktet $s = 0$ med halvtangenter, hvis vinkel er n gange så stor; ved afbildningen $w = w_0 + s$ bevares vinklerne. Afbildningen $w = f(z)$ er således ikke vinkeltro i z_0; vinkler mellem kurver ud fra z_0 bliver multipliceret med n.

Vi kan nu bevise følgende sætning:

Hvis $f: A \to \mathbb{C}$ er holomorf og ikke konstant, er billedet $f(O)$ af en vilkårlig åben delmængde O af A en åben mængde.

Bevis. Hvis $w_0 \in f(O)$, findes et $z_0 \in O$, for hvilket $f(z_0) = w_0$. Hvis nu $f'(z_0) \neq 0$, vil ifølge §4, sætning 4 en vis omegn af z_0 tilhørende O ved f afbildes bijektivt på en omegn af w_0. Hvis $f'(z_0) = 0$, vil ifølge den foranstående sætning en vis omegn af z_0 tilhørende O ved f afbildes på en omegn af w_0, men ikke bijektivt. I begge tilfælde har vi, at $f(O)$ indeholder en omegn af w_0.

Maksimumsprincippet. Hvis $f: A \to \mathbb{C}$ er holomorf, og F er en kompakt delmængde af A, da antager $|f(z)|$ værdien

$$M = \sup_{z \in F} |f(z)|$$

i (mindst) et punkt på randen af F, medens $|f(z)|$ ikke antager værdien M i noget indre punkt af F, med mindre f er en konstant.

Bevis. Da F er kompakt, antager $|f(z)|$ værdien M i (mindst) et punkt af F. Ifølge den foregående sætning kan et sådant punkt ikke være et indre punkt af F, med mindre f er konstant.

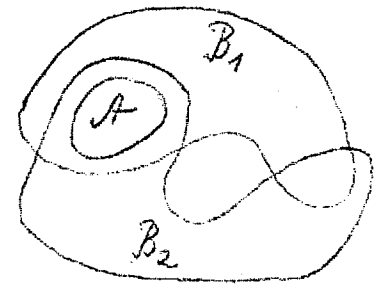
§16. Analytisk fortsættelse.

Lad A og B, hvor $A \subset B$, være to åbne, sammenhængende mængder i $\dot{C}$, og lad $f: A \to \dot{C}$ være en holomorf funktion. Hvis der findes en holomorf funktion $g: B \to \dot{C}$, hvis restriktion til A er f, kaldes g en analytisk fortsættelse af f i mængden B. Af identitetssætningen følger:

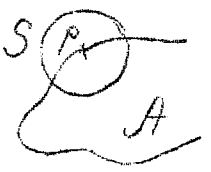
Hvis der findes en analytisk fortsættelse af f i mængden B, da kun een.

Thi to funktioner $g_1: B \to \dot{C}$ og $g_2: B \to \dot{C}$, der begge er en analytisk fortsættelse af f i B, tilfredsstiller to betingelsen $g_1(z) = g_2(z)$ for alle $z \in A$ og er følgelig identiske.

Følgende situation kan foreligge: Man har en holomorf funktion $f: A \to \dot{C}$, der kan fortsættes analytisk såvel i en åben sammenhængende mængde $B_1 \supset A$ som i en åben sammenhængende mængde $B_2 \supset A$. Lad fortsættelserne være g_1 og g_2. Hvis $B_1 \cap B_2$ er sammenhængende, må g_1 og g_2 da stemme overens i $B_1 \cap B_2$, og ved $g(z) = g_1(z)$ for $z \in B_1$, $g(z) = g_2(z)$ for $z \in B_2$ vil der være defineret en holomorf funktion $g: B_1 \cup B_2 \to \dot{C}$, der er en analytisk fortsættelse af f i mængden $B_1 \cup B_2$. Hvis derimod $B_1 \cap B_2$ ikke er sammenhængende (jfr. figur), vil g_1 og g_2 ikke nødvendigvis stemme overens i hele $B_1 \cap B_2$. Ved forskellige analytiske fortsættelser kan man derfor føres til flertydige funktioner. De tidligere betragtede flertydige funktioner leverer eksempler herpå. Denne situation behandles rationelt ved indførelse af en Riemann flade, på hvilken fortsættelsen er entydig.

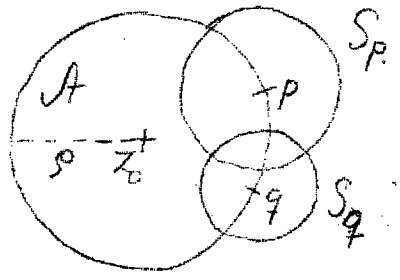


Lad $A \subset \dot{C}$ være en åben, sammenhængende mængde og $f: A \to \dot{C}$ en holomorf funktion. Et randpunkt p af A kaldes et regulært punkt for f, hvis der findes en cirkelskive S med centrum p, således at f kan fortsættes analytisk i mængden $A \cup S$. I modsat fald kaldes p et singulært punkt for f.



Lad potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ have konvergensradius ρ, $0 < \rho < +\infty$. Da har den ved potensrækken i cirkelskiven $A = \{z \mid |z-z_0| < \rho\}$ frembragte funktion f mindst et singulært punkt på randen af A.

Bevis. I modsat fald fandtes for ethvert p med $|p-z_0| = \rho$ en cirkelskive S_p med centrum p, således at f kunde fortsættes analytisk i $A \cup S_p$. Lad f_p betegne fortsættelsen. For to vilkårlige punkter p og q med $|p-z_0| = \rho$ og $|q-z_0| = \rho$ måtte disse fortsættelser f_p og f_q



stemme overens i $S_p \cap S_q$. Idet man nu bemærker, at cirklen $\{z \mid |z-z_0| = \rho\}$ kan overdækkes med et endeligt antal af cirkelskiverne S_p, ser man, at der måtte findes en cirkelskive $B = \{z \mid |z-z_0| < \sigma\}$ med $\sigma > \rho$, således at f kunde fortsættes analytisk i B. Følgelig måtte potensrækken være konvergent i B i strid med antagelsen.

Lad $f:]a,b[\to \dot{C}$ være en vilkårligt ofte differentiabel funktion på et (begrænset eller ubegrænset) interval på den reelle akse. For ethvert $x_0 \in]a,b[$ kan man da betragte funktionens Taylorrække svarende hi

punktet x_0. Af de tidligere resultater fremgår:

Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at Taylorrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

i et interval $]x_0-h, x_0+h[\subseteq]a,b[$ er konvergent med summen $f(x)$, er at der i cirkelskiven $\{z \mid |z-x_0|<h\}$ findes en holomorf funktion, som i intervallet $]x_0-h, x_0+h[$ på den reelle akse stemmer overens med $f(x)$.

Der kan kun findes een sådan funktion i cirkelskiven. Betegner vi også den med f, har vi for alle z i cirkelskiven

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z-x_0)^n.$$

Hvis dette indtræffer for ethvert $x_0 \in]a,b[$, vil forenigsmængden af de pågældende cirkelskiver $\{z \mid |z-x_0|<h\}$ være en åben sammenhængende mængde A i $\mathbb{C}$, der indeholder intervallet $]a,b[$ på den reelle akse. Da de funktioner, vi får i to af cirkelskiverne, må stemme overens i disses fællesmængde, ser vi, at der må findes en holomorf funktion på A, der på hele intervallet $]a,b[$ på den reelle akse stemmer overens med $f(x)$. Der kan kun findes een sådan funktion. Denne funktion holder vi naturligvis også f.

Specielt har vi, at de funktioner $f: \dot{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$, der kan udvides til holomorfe funktioner på $\mathbb{C}$, netop er de vilkårligt ofte differentiable funktioner på $\dot{\mathbb{R}}$, der for et eller andet x_0, og da for ethvert x_0, på hele $\dot{\mathbb{R}}$ fremstilles ved deres Taylorrække. Eksempler herpå er funktionerne $\exp x$, $\cos x$, $\sin x$.

Vi får nu også forklaringen på, at visse vilkårligt ofte differentiable funktioner $f: \dot{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ nok i et vist interval omkring et punkt x_0, men ikke i hele $\dot{\mathbb{R}}$, frem-

stilles ved Taylorrækken. For eksempel fremstilles funktionen $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ i intervallet $]-1,1[$, men ikke i noget større interval ved sin Taylorrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 - x^2 + x^4 - \dots .$$

Forklaringen er den, at $\frac{1}{1+x^2}$ kan udvides til den holomorfe funktion $\frac{1}{1+z^2}$ på mængden $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$, medens der ikke findes nogen holomorf udvidelse til en cirkelskive $\{z \mid |z| < \alpha\}$, hvor $\alpha > 1$. [En sådan måtte jo i $\{z \mid |z| < 1\}$ stemme overens med $\frac{1}{1+z^2}$, og $\frac{1}{1+z^2} \to \infty$ for $z \to i$ og $z \to -i$.]

Ved omtalen i §8 af de trigonometriske funktioner i $\mathbb{C}$ har vi bemærket, at de velkendte trigonometriske formler gælder uden forandring i $\mathbb{C}$. Resultater af denne art fremgår af identitetssætningen uden regning alene ved brug af funktionernes holomorfi. Som eksempel vil vi godtgøre formlen

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

for komplekse z_1 og z_2 ud fra dens gyldighed for reelle z_1 og z_2. Hertil bemærker vi, at for fastholdt reelt z_2 står på de to sider af lighedstegnet holomorfe funktioner af z_1 på $\mathbb{C}$; disse stemmer overens for alle reelle z_1; altså stemmer de også overens for alle komplekse z_1. For fastholdt komplekst z_1 står nu på de to sider af lighedstegnet holomorfe funktioner af z_2 på $\mathbb{C}$; disse stemmer ifølge det lige viste overens for alle reelle z_2; altså stemmer de også overens for alle komplekse z_2.

§17. Meromorfe funktioner.

Lad A være en åben, sammenhængende mængde i $\hat{\mathbb{C}}$. Ved en meromorf funktion på A forstås en funktion af formen $f = \frac{g}{h}$, hvor g og h er holomorfe funktioner på A, af hvilke h ikke er konstanten 0. Hvis h ikke har nulpunkter, er f en holomorf funktion på A, og enhver holomorf funktion f på A er åbenbart meromorf, idet den jo kan skrives på formen $f = \frac{f}{1}$. Hvis h har nulpunkter, er f kun direkte defineret ved udtrykket $\frac{g}{h}$ på mængden $A \setminus N$, hvor N er nulpunktsmængden for h. Vi vil imidlertid på følgende måde tillægge f en værdi også i punkterne af N.

Hvis g er konstanten 0, skal $f = \frac{g}{h}$ naturligvis betyde funktionen 0 på A, d.v.s. vi tillægger f værdien 0 også i nulpunkterne for h.

Hvis g ikke er konstanten 0, og z_0 er et nulpunkt for h, vælger vi en omegn $B = \{z \mid |z - z_0| < \varrho\} \subseteq A$, hvori h kun har det ene nulpunkt z_0. I denne omegn fremstilles g og h ved potensrækker

$$g(z) = b_0(z-z_0)^p + b_1(z-z_0)^{p+1} + \cdots, \qquad p \geq 0,\ b_0 \neq 0,$$

$$h(z) = c_0(z-z_0)^q + c_1(z-z_0)^{q+1} + \cdots, \qquad q > 0,\ c_0 \neq 0.$$

Altså fremstilles f i $B \setminus \{z_0\}$ ved

$$f(z) = (z-z_0)^{p-q} \, \frac{b_0 + b_1(z-z_0) + \cdots}{c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots}.$$

Den her optrædende brøk bestemmer en i B holomorf funktion, som altså i B fremstilles ved en potensrække

$$\frac{b_0 + b_1(z-z_0) + \cdots}{c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots} = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots, \qquad a_0 = \frac{b_0}{c_0} \neq 0.$$

Vi skelner nu mellem tre tilfælde:

1. Hvis $p=q$, altså hvis z_0 er nulpunkt for g af samme orden som for h, sætter vi $f(z_0)=a_0$. Efter denne udvidelse er f holomorf i B og fremstilles i B ved potensrækken

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots , \qquad a_0 \neq 0.$$

2. Hvis $p>q$, altså hvis z_0 er nulpunkt for g af højere orden end for h, sætter vi $f(z_0)=0$. Efter denne udvidelse er f holomorf i B, og, idet vi sætter $p-q=n$, fremstilles f i B ved potensrækken

$$f(z) = a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1} + \cdots , \qquad a_0 \neq 0.$$

Altså har f i z_0 et nulpunkt af ordenen $n=p-q$.

3. Hvis $p<q$, altså hvis z_0 enten ikke er nulpunkt for g eller er nulpunkt for g af lavere orden end for h, gælder $f(z)\to\infty$ for $z\to z_0$, og vi sætter $f(z_0)=\infty$. Idet vi sætter $q-p=n$, fremstilles f i $B\setminus\{z_0\}$ ved rækken

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z-z_0} + a_n + a_{n+1}(z-z_0) + \cdots , \qquad a_0 \neq 0.$$

Vi siger, at f <u>har en pol i</u> z_0 <u>af ordenen</u> n. Funktionen

$$\frac{a_0}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z-z_0}$$

kaldes <u>den principale del</u> af f hørende til polen z_0, og koefficienten a_{n-1} til $\frac{1}{z-z_0}$ kaldes <u>residuet</u> for f i z_0 og betegnes $\operatorname{Res}(f,z_0)$. For et vilkårligt $r\in]0,\rho[$ finder vi, idet $K(r)$ betegner cirklen $\{z \mid |z-z_0|=r\}$, for residuet udtrykket

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K(r)} f(z)\,dz.$$

Med disse fastsættelser er en meromorf funktion

$f = \frac{g}{h}$ i A således blevet en funktion $f: A \to \hat{\mathbb{C}}^*$. Funktionen er holomorf i A, hvis og kun hvis den ikke antager værdien ∞. Man bemærker, at mængden af poler (som delmængde af nulpunktsmængden for h) er endelig eller numerérbar, og at enhver kompakt delmængde af A kun indeholder et endeligt antal poler. Betegnes mængden af poler for f med P, er $A \setminus P$ åbenbart en åben, sammenhængende mængde, og på denne mængde $A \setminus P$ er f holomorf.

Beregningen af residuet $\operatorname{Res}(f, z_0)$ er særligt simpel i tilfældet $p = 0$, $q = 1$, hvor z_0 ikke er nulpunkt for g og er et nulpunkt for h af første orden, så at talen er om en pol af første orden. Residuet er da tallet $a_0 = \frac{b_0}{c_0}$, og idet $b_0 = g(z_0)$ og $c_0 = h'(z_0)$ har vi altså

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

I tilfældet $p > 0$, $q = p+1$, hvor z_0 er et nulpunkt for g af orden p og nulpunkt for h af orden $p+1$, så at talen atter er om en pol af første orden, bliver residuet ligeledes $a_0 = \frac{b_0}{c_0}$, men nu er $b_0 = \frac{g^{(p)}(z_0)}{p!}$ og $c_0 = \frac{h^{(p+1)}(z_0)}{(p+1)!}$, så at vi finder

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = (p+1)\,\frac{g^{(p)}(z_0)}{h^{(p+1)}(z_0)}.$$

For en pol z_0 af orden $n = q - p \geq 2$ udføres beregningen på basis af formlen

$$b_0 + b_1(z-z_0) + \cdots = (c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots)(a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots),$$

som (efter multiplikationsreglen for potensrækker) giver

$$\begin{aligned} b_0 &= c_0 a_0 \\ b_1 &= c_1 a_0 + c_0 a_1 \\ &\cdots \\ b_k &= c_k a_0 + c_{k-1} a_1 + \cdots + c_0 a_k \\ &\cdots \end{aligned}.$$

Af disse ligninger kan man (da $c_0 \neq 0$) successivt finde

$a_0, a_1, \ldots$, eller man kan anvende Cramers sætning på de første $k+1$ ligninger og derved få et udtryk for a_k. For residuet $\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{n-1}$ fås herved

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{c_0^n} \det \begin{pmatrix} c_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \\ c_1 & c_0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_0 & b_{n-2} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

De i mængden A holomorfe funktioner udgør med punktvis addition og multiplikation som kompositionsregler en integritetsring. Nulelementet er funktionen 0 og etelementet er funktionen 1. De i A meromorfe funktioner udgør kvotientlegemet for denne ring. Heri ligger forklaringen på ordene holomorf („helformig") og meromorf („delformig"). Ved regning med meromorfe funktioner må man naturligvis altid tage særligt hensyn til nulpunkter og poler. Dette sker ved, at man som ovenfor i en omegn af et sådant punkt benytter fremstillingerne ved potensrækker. Eksempelvis kan ved addition af to meromorfe funktioner en fælles pol forsvinde, nemlig hvis de principale dele hæver hinanden; ved multiplikation af to meromorfe funktioner vil en pol for den ene kunne hæves af et nulpunkt for den anden, såfremt dettes orden er mindst lige så høj som polens orden.

For enhver meromorf funktion $f = \frac{g}{h}$ i A er den <u>afledede</u> $f' = \frac{g'h - gh'}{h^2}$ ligeledes en i A meromorf funktion (idet $g'h - gh'$ og h^2 er holomorfe i A). I et nulpunkt z_0 for h må værdien af f' naturligvis fastlægges ved den ovenstående regel. Da $f'(z_0)$ efter denne skal betyde grænseværdien af $f'(z)$ for $z \to z_0$, ser man,

at f' er holomorf i mængden $A \setminus P$, hvor P er mængden af poler for f, og at f' i $A \setminus P$ er den afledede i sædvanlig forstand, medens enhver pol for f også er pol for f'. Hvis z_0 er pol for f af ordenen n har man med de ovenfor benyttede betegnelser i mængden $B \setminus \{z_0\}$

$$f'(z) = \frac{-na_0}{(z-z_0)^{n+1}} + \cdots + \frac{-a_{n-1}}{(z-z_0)^2} + a_1 + 2a_2(z-z_0) + \cdots,$$

så at z_0 er pol for f' af ordenen $n+1$ med residuet $\operatorname{Res}(f', z_0) = 0$.

Dekomposition af rationale funktioner. En rational funktion $\frac{P(z)}{Q(z)}$ er en i $\hat{\mathbb{C}}$ meromorf funktion. Vi kan tænke os, at polynomierne P og Q ikke har noget fælles nulpunkt. Ellers forkortes brøken. Polerne er da nævnerpolynomiets nulpunkter. Der er altså kun et endeligt antal poler. Betegner z_0 et nulpunkt for Q af orden q, har vi $Q(z) = (z-z_0)^q R(z)$, hvor R er et polynomium, for hvilket $R(z_0) \neq 0$, og vi finder den principale del af $\frac{P(z)}{Q(z)}$ hørende til polen z_0 ved at skrive

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^q} \frac{P(z)}{R(z)}$$

og udregne de q første koefficienter i Taylorrækken $a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$ for $\frac{P(z)}{R(z)}$ svarende til z_0. Den principale del af $\frac{P(z)}{Q(z)}$ er da

$$\frac{a_0}{(z-z_0)^q} + \cdots + \frac{a_{q-1}}{z-z_0}.$$

Subtraheres fra $\frac{P(z)}{Q(z)}$ de principale dele hørende til alle polerne, bliver der en rational funktion uden poler tilbage, altså et polynomium. Fremstillingen af $\frac{P(z)}{Q(z)}$ som sum af de principale dele og dette polynomium kaldes dekompositionen af $\frac{P(z)}{Q(z)}$.

Forudsætningen for, at man kan udføre dekompositionen, er naturligvis, at man kender nævnerpolynomiets rødder. Ved den praktiske beregning er det i almindelighed bekvemmest at gå skridtvis frem. Med de foran benyttede betegnelser har man nemlig $a_0 = \frac{P(z_0)}{R(z_0)}$ og dermed det højeste led $\frac{a_0}{(z-z_0)^q}$ i den principale del svarende til z_0. De højeste led i de principale dele svarende til de forskellige poler kan altså umiddelbart nedskrives. Man subtraherer dem og får til rest en rational funktion. Idet denne skrives som en uforkortelig brøk $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$, har nævnerpolynomiet Q_1 til rødder kun de multiple rødder i Q, alle med multipliciteter lavere end i Q. På denne udføres det samme, og man er færdig efter et antal skridt, der højst er den største forekommende multiplicitet.

Eks. 1. Funktionen $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ er en i $\hat{\mathbb{C}}$ meromorf funktion med den ene pol $z=0$. Idet $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots$, har vi $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \cdots$. Polen er af første orden, og residuet $\operatorname{Res}(f,0)$ er 1.

Eks. 2. Funktionen $f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ er en i $\hat{\mathbb{C}}$ meromorf funktion med polerne $z_p = \frac{1}{2}\pi + p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. I hver af disse er tællerens værdi $\neq 0$, medens nævneren har et nulpunkt af første orden. Polerne er derfor af første orden. Idet $(\cos z)' = -\sin z$, finder vi $\operatorname{Res}(f, z_p) = \frac{\sin z_p}{-\sin z_p} = -1$.

Eks. 3. Funktionen $f(z) = \frac{1}{z(1-\cos z)}$ er en i $\hat{\mathbb{C}}$ meromorf funktion med polerne $z_p = p2\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. For at finde den principale del svarende til polen $z_0 = 0$ benytter vi, at $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$, og finder

$$f(z)=\frac{1}{z\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}+\cdots\right)}=\frac{1}{z^3}\,\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{z^2}{24}+\cdots}=\frac{1}{z^3}\left(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\right).$$

Polen er således af tredje orden, og til bestemmelse af koefficienterne $a_0, a_1, \ldots$ har vi ligningen

$$1=\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{z^2}{24}+\cdots\right)\left(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\right),$$

der giver

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{2}a_0 \\ 0 &= \qquad\quad \tfrac{1}{2}a_1 \\ 0 &= -\tfrac{1}{24}a_0 + \qquad \tfrac{1}{2}a_2 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Vi er kun interesseret i a_0, a_1, a_2. Vi finder $a_0=2, a_1=0, a_2=\frac{1}{6}$. Den principale del svarende til polen 0 er således $\frac{2}{z^3}+\frac{1}{6z}$, og residuet $\operatorname{Res}(f,0)$ er $\frac{1}{6}$.

Eks. 4. For at dekomponere $\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{z^4+2}{z^3-z^2-z+1}$ bemærker vi, at $Q(z)=z^3-z^2-z+1=(z-1)^2(z+1)$ har dobbeltroden $z_0=1$ og enkeltroden $z_1=-1$; disse er ikke rødder i $P(z)$. I en omegn af $z_0=1$ har vi

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{1}{(z-1)^2}\,\frac{z^4+2}{z+1}=\frac{1}{(z-1)^2}\left(\tfrac{3}{2}+a_1(z-1)+\cdots\right),$$

og i en omegn af $z_1=-1$ har vi

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{1}{z+1}\,\frac{z^4+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{z+1}\left(\tfrac{3}{4}+b_1(z+1)+\cdots\right).$$

Vi udregner nu

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{Q(z)}-\frac{\frac{3}{2}}{(z-1)^2}-\frac{\frac{3}{4}}{z+1} &= \frac{z^4+2-\frac{3}{2}(z+1)-\frac{3}{4}(z-1)^2}{(z-1)^2(z+1)} \\ &= \frac{z^4-\frac{3}{4}z^2-\frac{1}{4}}{(z-1)^2(z+1)}=\frac{z^2+\frac{1}{4}}{z-1}=\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}. \end{aligned}$$

Da

$$\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}=\frac{\frac{5}{4}}{z-1}+\frac{z^2-1}{z-1}=\frac{\frac{5}{4}}{z-1}+z+1,$$

finder vi dekompositionen

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{\frac{3}{2}}{(z-1)^2}+\frac{\frac{5}{4}}{z-1}+\frac{\frac{3}{4}}{z+1}+z+1.$$

§ 18. Cauchys residuesætning.

Lad A være en åben, sammenhængende mængde i $\hat{\mathbb{C}}$.

Cauchys residuesætning: For enhver meromorf funktion $f: A \to \hat{\mathbb{C}}^*$ og enhver simpel figur F i A, hvis rand ∂F ikke indeholder nogen pol for f, gælder, når $z_1, \ldots, z_n$ betegner de i F indeholdte poler for f, formelen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} f(z)\,dz = \operatorname{Res}(f, z_1) + \cdots + \operatorname{Res}(f, z_n).$$

Hvis figuren F ikke indeholder nogen pol for f, skal formlens højre side naturligvis læses som 0. Dette gælder specielt, når f er holomorf i A. Sætningen indeholder derfor Cauchys integralsætning.

Bevis. Idet P betegner mængden af poler for f, er f holomorf på $A \setminus P$. For hvert $\nu = 1, \ldots, n$ vælges en i det indre af F indeholdt cirkelskive $\{z \mid |z - z_\nu| \leqslant r_\nu\}$, idet radierne r_ν tages så små, at disse cirkelskiver er parvis disjunkte. Med F_0 betegner vi den simple figur, der fås af F ved at udelade de åbne cirkelskiver $\{z \mid |z - z_\nu| < r_\nu\}$. Idet vi med K_ν betegner cirklen $\{z \mid |z - z_\nu| = r_\nu\}$ med positivt omløb, gælder

$$\partial F_0 = \partial F - K_1 - \cdots - K_n.$$

Da F_0 helhører $A \setminus P$, fås ved anvendelse af Cauchys integralsætning

$$0 = \int_{\partial F_0} f(z)\,dz = \int_{\partial F} f(z)\,dz - \int_{K_1} f(z)\,dz - \cdots - \int_{K_n} f(z)\,dz,$$

hvoraf

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1} f(z)\,dz + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n} f(z)\,dz$$
$$= \operatorname{Res}(f, z_1) + \cdots + \operatorname{Res}(f, z_n).$$

For en vilkårlig meromorf funktion $f: A \to \dot{C}^*$, der ikke er konstanten 0, kaldes den i A meromorfe funktion $\frac{f'}{f}$ den logaritmiske afledede af f.

Betegner z_0 et nulpunkt for f af ordenen n, er i en omegn af z_0

$$f(z) = a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1} + \cdots, \qquad a_0 \neq 0,$$

og altså

$$f'(z) = n a_0(z-z_0)^{n-1} + (n+1)a_1(z-z_0)^n + \cdots.$$

Følgelig gælder i en omegn af z_0 eksklusive z_0

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-z_0} \frac{a_0 + \frac{n+1}{n}a_1(z-z_0)+\cdots}{a_0 + a_1(z-z_0)+\cdots} = \frac{n}{z-z_0}(1 + b_1(z-z_0)+\cdots),$$

hvoraf ses, at $\frac{f'}{f}$ i z_0 har en pol af første orden med residuet $\operatorname{Res}(\frac{f'}{f}, z_0) = n$.

Betegner z_0 en pol for f af ordenen n, findes en omegn af z_0, så at vi i denne eksklusive z_0 har

$$f(z) = a_0(z-z_0)^{-n} + a_1(z-z_0)^{-n+1} + \cdots, \qquad a_0 \neq 0,$$

og altså

$$f'(z) = -n a_0(z-z_0)^{-n-1} + (-n+1)a_1(z-z_0)^{-n} + \cdots.$$

Følgelig gælder i en omegn af z_0 eksklusive z_0

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z-z_0} \frac{a_0 + \frac{n-1}{n}a_1(z-z_0)+\cdots}{a_0 + a_1(z-z_0)+\cdots} = \frac{-n}{z-z_0}(1 + c_1(z-z_0)+\cdots),$$

hvoraf ses, at $\frac{f'}{f}$ i z_0 har en pol af første orden med residuet $\operatorname{Res}(\frac{f'}{f}, z_0) = -n$.

Et punkt, der hverken er nulpunkt eller pol for f, er naturligvis ikke pol for $\frac{f'}{f}$. Ved anvendelse af residuesætningen fås derfor følgende sætning.

For enhver meromorf funktion $f: A \to \dot{C}^*$, der ikke er konstanten 0, og enhver simpel figur F i A, hvis rand ∂F ikke indeholder noget nulpunkt eller nogen pol for f, gælder

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = S - T,$$

hvor S betegner antallet af nulpunkter og T antallet af poler for f i F. Herved skal hvert nulpunkt og hver pol tæl-

læs så ofte, som ordenen angiver.

Vi vil nu vise, at denne sætning har et yderst simpelt geometrisk indhold. For hvert punkt z^* af ∂F betragter vi punktet $f(z^*) = r^* e^{i\theta^*}$ og vælger en omegn U^* af z^*, der ved f afbildes ind i den opskårne plan $\{w = re^{i\theta} \neq 0 \mid \theta^* - \pi < \theta < \theta^* + \pi\}$. I denne omegn U^* er da ved

$$\log f(z) = \log|f(z)| + i \arg f(z)$$

med fastsættelsen $\theta^* - \pi < \arg f(z) < \theta^* + \pi$ bestemt en holomorf funktion, som er stamfunktion til $\frac{f'}{f}$ i U^*. For en bue K^* af ∂F hilhørende U^* med begyndelsespunkt a og slutpunkt b gælder derfor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K^*} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{\log|f(b)| - \log|f(a)|}{2\pi i} + \frac{\arg f(b) - \arg f(a)}{2\pi}.$$

Nu kan ∂F overdækkes med et endeligt antal sådanne omegne U^*, og følgelig kan ∂F deles i buer K^*, der hver hilhører sit U^*. Ved at addere bidragene fra de enkelte buer finder vi:

Differensen $S - T$ mellem antallet S af nulpunkter og antallet T af poler for f i F er summen af omløbstallene om 0 af de lukkede kurver i $\bar{C} \setminus \{0\}$, der beskrives af $f(z)$, når z gennemløber de lukkede kurver, hvoraf ∂F består.

Herved skal naturligvis som altid den ydre randkurve tages med positivt omløb, de eventuelle indre randkurver med negativt omløb.

Algebraens fundamentalsætning. Lad f være et polynomium $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, af grad $n \geq 1$, og lad r være valgt så stor, at

$$|a_n| r^n > |a_0| + |a_1| r + \cdots + |a_{n-1}| r^{n-1}.$$

Da er omløbstallet om 0 af billedet af cirklen $\{z \mid |z| = r\}$ som vist i §2 lig med n. Af den foranstående sætning følger derfor, at f i cirkelskiven $\{z \mid |z| < r\}$ har netop n nulpunkter.

Anvendelse af residuesætningen til udledelse af formler. Residuesætningen er et af de vigtigste hjælpemidler til udledelse af formler. Som eksempler vil vi udlede visse formler vedrørende de trigonometriske funktioner.

A. Partialbrøkfremstillingen for $\frac{1}{\sin z}$:

$$\frac{1}{\sin z} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^p}{z - p\pi}.$$

Til forståelse af denne formel bemærker vi, at $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ er meromorf i $\hat{\mathbb{C}}$ med poler i punkterne $z_p = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. Da $(\sin z)' = \cos z$, og $\cos z_p = (-1)^p$, er polerne alle af første orden, og $\operatorname{Res}(f, z_p) = (-1)^p$. Den principale del af $f(z)$ svarende til polen z_p er derfor $\frac{(-1)^p}{z - z_p} = \frac{(-1)^p}{z - p\pi}$. Den ovenstående formel kan derfor opfattes som en dekomposition af $\frac{1}{\sin z}$ analog med dekompositionen af en rationel funktion. Rækken er konvergent med summen $\frac{1}{\sin z}$ i den forstand, at afsnittet $\sum_{p=-m}^{n} \dots$ konvergerer mod $\frac{1}{\sin z}$ for ethvert $z \notin \{p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}$, når $n \to +\infty$, $m \to +\infty$. Nærmere bestemt vil vi vise: Differensen

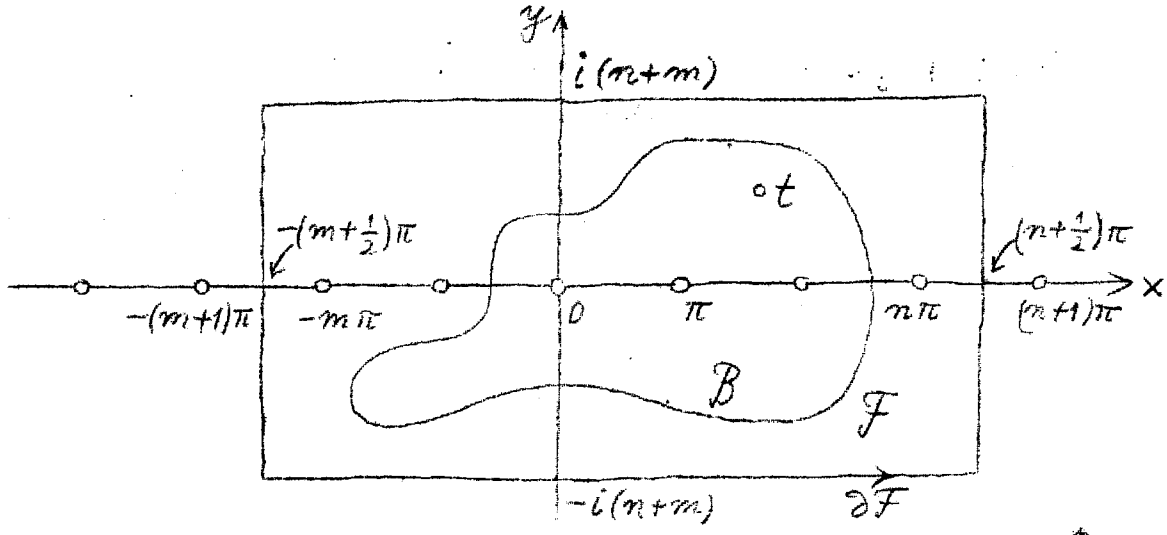
$$\frac{1}{\sin z} - \sum_{p=-m}^{n} \frac{(-1)^p}{z - p\pi}$$

konvergerer ligeligt mod 0 på enhver kompakt mængde i $\hat{\mathbb{C}}$, når $n \to +\infty$, $m \to +\infty$.

For et fast $t \notin \{p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}$ betragtes funktionen

$$g(z) = \frac{1}{(z - t)\sin z}.$$

Denne funktion er meromorf i $\hat{\mathbb{C}}$ og har poler i t og i punkterne $z_p = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. For residuerne fås



$$\mathrm{Res}(g,t)=\frac{1}{\sin t}\,,\quad \mathrm{Res}(g,p\pi)=\frac{1}{p\pi-t}\,\frac{1}{\cos p\pi}=\frac{(-1)^p}{p\pi-t}\,.$$

Nu vælges for F rektanglet

$$F=\{z=x+iy \mid -(m+\tfrac{1}{2})\pi\leqslant x\leqslant(n+\tfrac{1}{2})\pi,\ |y|\leqslant n+m\},$$

hvor $n\in\mathbb{N}$ og $m\in\mathbb{N}$ er så store, at t er indre punkt af F. Residuesætningen viser da, at

$$I_{n,m}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F}\frac{dz}{(z-t)\sin z}=\frac{1}{\sin t}+\sum_{p=-m}^{n}\frac{(-1)^p}{p\pi-t}\,.$$

Højre side er netop den funktion, blot med t i stedet for z, om hvilken vi skal vise, at den konvergerer ligeligt mod 0 på enhver kompakt mængde. Vi betragter derfor en kompakt mængde B og tænker os n og m så store, at B hlhører det indre af F. Da gælder for alle $t\in B$ og alle $z\in\partial F$

$$\left|\frac{1}{z-t}\right|\leqslant\frac{1}{\mathrm{dist}(B,\partial F)}\,.$$

For at vurdere $\left|\frac{1}{\sin z}\right|$ opad på ∂F må vi vurdere $|\sin z|$ nedad. Vi har (jfr. §8)

$$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y=u+iv.$$

Følgelig er på de lodrette sider af F

$$|\sin z|=\cosh y=\tfrac{1}{2}(e^y+e^{-y})>\tfrac{1}{2}e^{|y|}.$$

Når z er på de vandrette sider af F, er $\sin z=u+iv$ på

ellipsen med ligningen $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$, hvor $a=\cosh(n+m)$ og $b=\sinh(n+m)$. Følgelig er på disse sider

$$|\sin z| \geqslant \sinh(n+m).$$

Heraf fås, gældende for alle $t\in B$,

$$|I_{n,m}| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\operatorname{dist}(B,\partial F)}\left[2\int_{-(n+m)}^{n+m} 2e^{-|y|}dy + 2\frac{1}{\sinh(n+m)}\pi(n+m+1)\right].$$

Nu gælder for $n\to+\infty$, $m\to+\infty$, at

$$\operatorname{dist}(B,\partial F)\to+\infty,\quad \int_{-(n+m)}^{n+m} e^{-|y|}dy\to 2,\quad \frac{n+m+1}{\sinh(n+m)}\to 0.$$

Følgelig gælder $I_{n,m}\to 0$ ligeligt på B.

B. <u>Partialbrøkfremstillingen for</u> $\cot z$:

$$\cot z = \frac{1}{z}+\sum_{\substack{p=-\infty\\ p\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{1}{z-p\pi}+\frac{1}{p\pi}\right).$$

Til forståelse af denne formel bemærker vi, at $f(z)=\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}$ er meromorf i $\hat{\mathbb{C}}$ med poler i punkterne $z_p=p\pi$, $p\in\mathbb{Z}$. Polerne er alle af første orden, og $\operatorname{Res}(f,z_p)=\frac{\cos z_p}{\cos z_p}=1$. Den principale del af $f(z)$ svarende til polen z_p er derfor $\frac{1}{z-p\pi}$. I analogi med resultatet for $\frac{1}{\sin z}$ kunde man nu tænke, at rækken $\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-p\pi}$ var konvergent med summen $\cot z$ i den forstand, at $\sum_{p=-m}^{n}\frac{1}{z-p\pi}$ konvergerede mod $\cot z$ for ethvert $z\notin\{p\pi\mid p\in\mathbb{Z}\}$ for $n\to+\infty$, $m\to+\infty$. Man ser imidlertid let, at man ikke får konvergens. Ved for $p\neq 0$ at erstatte $\frac{1}{z-p\pi}$ med $\frac{1}{z-p\pi}+\frac{1}{p\pi}=\frac{z}{(z-p\pi)p\pi}$, som for for fast z går hurtigere mod 0, når $|p|\to\infty$, opnår man det ønskede. Nærmere bestemt vil vi vise: Differensen

$$\cot z-\frac{1}{z}-\sum_{\substack{p=-m\\ p\neq 0}}^{n}\left(\frac{1}{z-p\pi}+\frac{1}{p\pi}\right)$$

konvergerer <u>ligeligt</u> mod 0 på enhver kompakt mængde i $\hat{\mathbb{C}}$, når $n\to+\infty$, $m\to+\infty$.

Vælger man specielt $m=n$, hæver tillægsleddene $\frac{1}{p\pi}$ i summen hinanden, og vi får formlen $\cot z = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-p\pi}$, således at forstå, at rækken er konvergent med summen $\cot z$, når man lærer den $\frac{1}{z} + \sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-p\pi}+\frac{1}{z+p\pi}\right)$, d.v.s. som afsnit benytter $\sum_{p=-n}^{n}\frac{1}{z-p\pi}$. Nærmere bestemt: Differensen $\cot z - \sum_{p=-n}^{n}\frac{1}{z-p\pi}$ konvergerer ligeligt mod 0 på enhver kompakt delmængde af $\mathbb{C}$, når $n\to+\infty$.

I analogi med behandlingen af $\frac{1}{\sin z}$ ved hjælp af $\frac{1}{(z-t)\sin z}$ kunde man tænke sig at benytte funktionen $\frac{\cot z}{z-t}$, men her gør sig et hidtil uvarslende forhold gældende til det ovenfor anførte; man må have en nævner, der går hurtigere mod ∞. Vi betragter for fast $t\notin\{p\pi\mid p\in\mathbb{Z}\}$ funktionen

$$g(z)=\frac{\cot z}{(z-t)z}=\frac{1}{(z-t)z\,\operatorname{tg} z}.$$

Denne funktion er meromorf i $\mathbb{C}$ og har polen t (medmindre t er nulpunkt for $\cot z$, d.v.s. $t=(p+\frac12)\pi$, $p\in\mathbb{Z}$) og i punkterne $z_p=p\pi$, $p\in\mathbb{Z}$. Af polerne er $z_0=0$ af anden orden, de øvrige af første orden. For residuerne fås

$$\operatorname{Res}(g,t)=\frac{\cot t}{t}\quad(\text{hvis } t \text{ er pol; ellers er } \frac{\cot t}{t}=0),$$

$$\operatorname{Res}(g,0)=-\frac{1}{t^2},\qquad \operatorname{Res}(g,p\pi)=\frac{1}{(p\pi-t)p\pi},\ \text{når } p\neq0.$$

[Ved beregningen af $\operatorname{Res}(g,0)$ er benyttet, at vi i en omegn af 0 har $(z-t)z\operatorname{tg}z=(z-t)z(z+0z^2+\cdots)=z^2(-t+z+\cdots)$, altså $g(z)=\frac{1}{z^2}\frac{1}{-t+z+\cdots}=\frac{1}{z^2}(a_0+a_1z+\cdots)$, hvor $(-t+z+\cdots)(a_0+a_1z+\cdots)=1$, altså $-ta_0=1$, $a_0-ta_1=0$, hvilket giver $a_1=-\frac{1}{t^2}$.] Af residuesætningen fås derfor med samme valg af figuren F som ovenfor

$$J_{n,m}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F}\frac{dz}{(z-t)z\,\operatorname{tg}z}=\frac{\cot t}{t}-\frac{1}{t^2}+\sum_{\substack{p=-m\\p\neq0}}^{n}\frac{1}{(p\pi-t)p\pi}.$$

Følgelig er $tJ_{n,m}$ netop den funktion, vi skal med t i stedet for z, der skal vises at konvergere ligeligt mod 0 på enhver kompakt mængde B. Lad n og m være større end $2\sup_{t\in B}|t|$. Da tilhører B det indre af F, og for $t\in B$, $z\in\partial F$ gælder $|z-t|>\frac{1}{2}|z|$. På de vandrette sider af F er $|\operatorname{tg} z|\geqslant|\operatorname{tg} i(n+m)|=\operatorname{tgh}(n+m)\geqslant \operatorname{tgh} 2$, og på de lodrette sider af F er $|\operatorname{tg} z|\geqslant 1>\operatorname{tgh} 2$. (jfr. §8). Vi får derfor for alle $t\in B$

$$|tJ_{n,m}|\leqslant \sup_{t\in B}|t|\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{\operatorname{tgh}^2}\left[\int_{-(n+m)}^{n+m}\frac{dy}{(n+\frac{1}{2})^2+y^2}+\int_{-(n+m)}^{n+m}\frac{dy}{(n+\frac{1}{2})^2+y^2}+2\frac{\pi(n+m+1)}{(n+m)^2}\right]$$

$$\leqslant \sup_{t\in B}|t|\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{\operatorname{tgh} 2}\left[\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}+\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}+2\frac{\pi(n+m+1)}{(n+m)^2}\right].$$

Her går højre side mod 0 for $n\to+\infty$, $m\to+\infty$. Følgelig gælder $tJ_{n,m}\to 0$ ligeligt i B.

C. <u>Produktfremstillingen for</u> $\sin z$:

$$\sin z = z\prod_{\substack{p=-\infty\\ p\neq 0}}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{p\pi}\right)e^{\frac{z}{p\pi}}\right].$$

Til forståelse af denne formel bemærker vi, at $\sin z$ er en hel funktion med nulpunkterne $p\pi$, $p\in\mathbb{Z}$. Bortset fra faktorerne $e^{\frac{z}{p\pi}}$, er formlen analog med faktoropløsningen af et polynomium. Produktet er konvergent med værdien $\sin z$ i den forstand, at produktet $z\prod_{\substack{p=-m\\ p\neq 0}}^{m}\cdots$ konvergerer mod $\sin z$ for ethvert $z\in\mathbb{C}$, når $n\to+\infty$, $m\to+\infty$. Nærmere bestemt vil vi vise: Funktionen

$$f_{n,m}(z)=z\prod_{\substack{p=-m\\ p\neq 0}}^{n}\left[\left(1-\frac{z}{p\pi}\right)e^{\frac{z}{p\pi}}\right]$$

konvergerer ligeligt mod $\sin z$ på enhver kompakt mængde i $\mathbb{C}$, når $n\to+\infty$, $m\to+\infty$.

Vælger man specielt $m=n$, haver faktorerne $e^{\frac{z}{p\pi}}$

hinanden, og vi får formlen $\sin z = z\prod_{p=-\infty,\,p\neq 0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{p\pi}\right)$, således at forstå, at $z\prod_{p=-n,\,p\neq 0}^{n}\left(1-\frac{z}{p\pi}\right)$ konvergerer mod $\sin z$ for ethvert $z\in\mathbb{C}$, når $n\to+\infty$. Nærmere bestemt: Funktionen $f_{n,n}(z) = z\prod_{p=-n,\,p\neq 0}^{n}\left(1-\frac{z}{p\pi}\right) = z\prod_{p=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{p^2\pi^2}\right)$ konvergerer ligeligt mod $\sin z$ på enhver kompakt mængde i $\mathbb{C}$, når $n\to+\infty$.

Funktionen

$$g_{n,m}(z) = \frac{f_{n,m}(z)}{\sin z} = \frac{z\prod_{p=-m,\,p\neq 0}^{n}\left[\left(1-\frac{z}{p\pi}\right)e^{\frac{z}{p\pi}}\right]}{\sin z}$$

er meromorf i $\mathbb{C}$, og $g_{n,m}(0)=1$. For vilkårlige meromorfe funktioner $g_1,\dots,g_s,h_1,\dots,h_t$ har den meromorfe funktion $f=\frac{g_1\cdot\ldots\cdot g_s}{h_1\cdot\ldots\cdot h_t}$ som man let ser den logaritmiske afledede $\frac{f'}{f}=\frac{g_1'}{g_1}+\dots+\frac{g_s'}{g_s}-\frac{h_1'}{h_1}-\dots-\frac{h_t'}{h_t}$. Den logaritmiske afledede af $g_{n,m}(z)$ er derfor

$$\frac{g_{n,m}'(z)}{g_{n,m}(z)} = \frac{1}{z}+\sum_{p=-m,\,p\neq 0}^{n}\left(\frac{1}{z-p\pi}+\frac{1}{p\pi}\right)-\cot z.$$

Da højre side som foran vist konvergerer ligeligt mod 0 på enhver kompakt mængde i $\mathbb{C}$, når $n\to+\infty$, $m\to+\infty$, kan vi for givet $r>0$ og $\varepsilon>0$ finde et N, så at

$$\left|\frac{g_{n,m}'(z)}{g_{n,m}(z)}\right| < \varepsilon \quad \text{for alle } z\in\{z\mid |z|\leqslant r\},$$

når $n\geqslant N$, $m\geqslant N$. Da er $\frac{g_{n,m}'}{g_{n,m}}$ holomorf i $\{z\mid|z|<r\}$. Lad $h_{n,m}$ være den stamfunktion til $\frac{g_{n,m}'}{g_{n,m}}$ i $\{z\mid|z|<r\}$, hvis værdi i 0 er 0. Idet vi f.eks. bestemmer $h_{n,m}(z)$ som

$$h_{n,m}(z) = \int_K \frac{g_{n,m}'(\zeta)}{g_{n,m}(\zeta)}\,d\zeta,$$

hvor K er liniestykket fra 0 til z, ser vi, at

$$|h_{n,m}(z)| \leqslant \varepsilon|z| < \varepsilon r \quad \text{for alle } z\in\{z\mid|z|<r\}.$$

I en omegn U^* af et punkt z^* af $\{z\mid|z|<r\}$ kan vi betragte en gren af $\log g_{n,m}(z)$. Ved at inddele liniestyk-

ket fra 0 til z i stykker, der hver tilhører sit U^*, ser vi (idet det erindres, at $g_{n,m}(0)=1$) at $h_{n,m}(z)$ for ethvert $z\in\{z\,|\,|z|<r\}$ er en af værdierne af $\log g_{n,m}(z)$. Følgelig gælder i $\{z\,|\,|z|<r\}$

$$g_{n,m}(z)=e^{h_{n,m}(z)}=1+\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(h_{n,m}(z))^q}{q!}$$

og følgelig

$$|g_{n,m}(z)-1|\leqslant\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon r)^q}{q!}=e^{\varepsilon r}-1.$$

For $n\geqslant N$, $m\geqslant N$ gælder altså for alle $z\in\{z\,|\,|z|<r\}$

$$|f_{n,m}(z)-\sin z|\leqslant(e^{\varepsilon r}-1)\sup_{|z|\leqslant r}|\sin z|.$$

Dette viser, at $f_{n,m}(z)$ konvergerer ligeligt mod $\sin z$ på enhver kompakt mængde i $\mathbb{C}$, når $n\to+\infty$, $m\to+\infty$. Thi enhver sådan mængde er indeholdt i en cirkel $\{z\,|\,|z|<r\}$, og til $r>0$ og et givet $\delta>0$ kan vi finde et $\varepsilon>0$, således at $(e^{\varepsilon r}-1)\sup_{|z|\leqslant r}|\sin z|<\delta$.

§19. Laurents sætning.

En uendelig række af formen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

kaldes en Laurent række i $z-z_0$. Rækken spaltes i de to rækker

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{og} \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z-z_0}\right)^n,$$

altså i en potensrække i $z-z_0$ og en potensrække i $\frac{1}{z-z_0}$ uden konstantled. Den sidste, og dermed Laurent rækken, kan naturligvis kun betragtes for $z \in \dot{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$. Laurent rækken kaldes konvergent eller absolut konvergent i et punkt, resp. ligelig konvergent i en punktmængde, såfremt hver af de to rækker er konvergent eller absolut konvergent i punktet, resp. ligelig konvergent i punktmængden. Sættes

$$\lambda_1 = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{og} \quad \lambda_2 = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|},$$

og antages, at $\lambda_2 < \frac{1}{\lambda_1}$, ser man, at Laurent rækken er absolut konvergent i cirkelringen $A = \{z \mid \lambda_2 < |z-z_0| < \frac{1}{\lambda_1}\}$ og divergent i ethvert punkt z, for hvilket $|z-z_0| < \lambda_2$ eller $|z-z_0| > \frac{1}{\lambda_1}$, samt at rækken er ligelig konvergent i enhver kompakt delmængde af A. Rækken fremstiller altså i A en holomorf funktion.

Laurents sætning. Enhver holomorf funktion $f: A \to \dot{\mathbb{C}}$ på en åben cirkelring $A = \{z \mid \alpha < |z-z_0| < \beta\}$, hvor $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ kan i A på en og kun en måde fremstilles ved en Laurent række, d.v.s. funktionen har i A en og kun en fremstilling af formen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Betegner $K(r)$ for et vilkårligt $r \in]\alpha, \beta[$ cirklen

$\{z \mid |z-z_0| = r\}$, gælder for ethvert $n \in \dot{Z}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Bevis. 1) Hvis $\alpha < r_1 < r_2 < \beta$ og $n \in \dot{Z}$, følger af Cauchys integralsætning anvendt på den holomorfe funktion $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ og den simple figur $F = \{z \mid r_1 \leq |z-z_0| \leq r_2\}$, at

$$\int_{\partial F} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \int_{K(r_2)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz - \int_{K(r_1)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 0.$$

For ethvert $n \in \dot{Z}$ fås derfor for alle $r \in]\alpha, \beta[$ samme værdi

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Vi vil nu vise, at den med disse koefficienter dannede række $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ for ethvert $z \in A$ er konvergent med summen $f(z)$. Hertil vælger vi for et fast $z \in A$ to radier r_1 og r_2, således at $\alpha < r_1 < |z-z_0| < r_2 < \beta$, og betragter figuren $F = \{z \mid r_1 \leq |z-z_0| \leq r_2\}$. Da fås af Cauchys integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{K(r_1)} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta = f_1(z) + f_2(z).$$

For det første integral går vi frem nøjagtigt som ved udledelsen af potensrækkeudviklingen for en holomorf funktion, idet vi anvender omskrivningen

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \left(1 + \frac{z-z_0}{\zeta - z_0} + \cdots + \left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^n + \frac{\left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} \right)$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{1}{(\zeta - z_0)^2}(z-z_0) + \cdots + \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n + R_n(\zeta).$$

Vi får da

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K(r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{K(r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta\,(z - z_0) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{K(r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta\,(z - z_0)^n + \frac{1}{2\pi i}\int_{K(r_2)} f(\zeta) R_n(\zeta) d\zeta$$
$$= a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \frac{1}{2\pi i}\int_{K(r_2)} f(\zeta) R_n(\zeta) d\zeta,$$

hvor vi for restleddet får vurderingen

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{K(r_2)} f(\zeta) R_n(\zeta) d\zeta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sup_{|\zeta - z_0| = r_2} |f(\zeta)| \frac{\left|\frac{z - z_0}{r_2}\right|^{n+1}}{r_2 - |z - z_0|} 2\pi r_2.$$

Restleddet går altså mod 0 for $n \to +\infty$, og vi har altså

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

For det andet integral går vi frem på lignende måde, idet vi anvender omskrivningen

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0}\left(1 + \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} + \cdots + \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^{n-1} + \frac{\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}\right)$$
$$= \frac{1}{z - z_0} + (\zeta - z_0)\frac{1}{(z - z_0)^2} + \cdots + (\zeta - z_0)^{n-1}\frac{1}{(z - z_0)^n} + T_n(\zeta).$$

Vi får da

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K(r_1)} f(\zeta) d\zeta \frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_{K(r_1)} f(\zeta)(\zeta - z_0) d\zeta \frac{1}{(z - z_0)^2} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{K(r_1)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta \frac{1}{(z - z_0)^n} + \frac{1}{2\pi i}\int_{K(r_1)} f(\zeta) T_n(\zeta) d\zeta$$
$$= \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{1}{2\pi i}\int_{K(r_1)} f(\zeta) T_n(\zeta) d\zeta,$$

hvor vi for restleddet får vurderingen

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{K(r_1)} f(\zeta) T_n(\zeta) d\zeta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sup_{|\zeta - z_0| = r_1} |f(\zeta)| \frac{\left|\frac{r_1}{z - z_0}\right|^n}{|z - z_0| - r_1} 2\pi r_1.$$

Restleddet går altså mod 0 for $n \to +\infty$, og vi har altså

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n.$$

Ved at sammenholde de to resultater får vi det ønskede.

2) Hvis omvendt funktionen $f(z)$ i A er fremstillet ved en Laurentrække $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$, vil for ethvert $q \in \check{Z}$ funktionen $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{q+1}}$ i A være fremstillet ved Laurent rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n-q-1}$. Da rækken for ethvert $r \in]\alpha, \beta[$ er ligelig konvergent på $K(r)$, kan vi foretage integrationen ledvis og finder

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K(r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{q+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{1}{2\pi i} \int_{K(r)} \frac{dz}{(z-z_0)^{n-q-1}} = b_q.$$

Altså er $b_q = a_q$ for ethvert $q \in \check{Z}$.

For et fast $r \in]\alpha, \beta[$ er $f(z_0 + re^{it})$ en periodisk funktion af den reelle variable t med perioden 2π, og Laurents sætning viser, at denne funktion fremstilles ved den ligeligt konvergente trigonometriske række

$$f(z_0 + re^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{int}.$$

Formlen for a_n giver

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{r^{n+1} e^{i(n+1)t}} ire^{it} dt,$$

altså

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt.$$

Den trigonometriske række er derfor simpelthen Fourier rækken for $f(z_0 + re^{it})$.

§20. Isolerede randpunkter. Punktet ∞.

Lad $f: A \to \dot{C}$ være holomorf i en mængde A, for hvilken et punkt $z_0 \in \dot{C}$ er *isoleret randpunkt*, d.v.s. som indeholder en *udpriktet cirkelskive* $B(\beta) = \{z \mid 0 < |z-z_0| < \beta\}$ men ikke punktet z_0. I $B(\beta)$ gælder ifølge Laurents sætning

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \text{hvor } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (0 < r < \beta).$$

Vi skelner nu mellem tre tilfælde:

Tilfælde A. $a_n = 0$ *for alle negative* n. I dette tilfælde er $f(z)$ i $B(\beta)$ fremstillet ved potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. Udvider vi definitionsmængden for f til $A \cup \{z_0\}$ ved at sætte $f(z_0) = a_0$, er den således udvidede funktion holomorf i $A \cup \{z_0\}$. Vi vil altid tænke os denne udvidelse foretaget, når tilfældet A foreligger.

Sætning. *Hvis blot f er begrænset i en udpriktet cirkelskive $B(\rho) = \{z \mid 0 < |z-z_0| < \rho\}$, foreligger tilfældet A.*

Bevis. Hvis $|f(z)| \leqslant M$ for alle $z \in B(\rho)$, finder vi for ethvert $r \in]0, \rho[$ og ethvert $n \in \dot{Z}$

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K(r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^n}.$$

For $n < 0$ følger heraf, idet vi lader r gå mod 0, at $a_n = 0$.

Tilfælde B. $a_n \neq 0$ *for visse, men kun for endelig mange negative* n. Lad $a_n = 0$ for $n < -q$, men $a_{-q} \neq 0$. Da gælder i $B(\beta)$

$$f(z) = \sum_{n=-q}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \frac{a_{-q}}{(z-z_0)^q} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots.$$

Funktionen $g(z) = (z-z_0)^q f(z)$ falder derfor ind under tilfældet A og udvides ved fastsættelsen $g(z_0) = a_{-q}$

hi en holomorf funktion i $A \cup \{z_0\}$. Følgelig er $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^q}$ meromorf i $A \cup \{z_0\}$ med en pol i z_0 af orden q og udvides hi $A \cup \{z_0\}$, idet vi sætter $f(z_0) = \infty$.

Sætning. Hvis blot $f(z) \to \infty$ for $z \to z_0$, foreligger tilfældet B.

Bevis. Under antagelsen $f(z) \to \infty$ for $z \to z_0$ er $f(z) \neq 0$ og $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ er begrænset i en udprikket cirkelskive $B(\varrho) = \{z \mid 0 < |z-z_0| < \varrho\}$; endvidere gælder $h(z) \to 0$ for $z \to z_0$. Ved fastsættelsen $h(z_0) = 0$ udvides h altså hi en holomorf funktion i $B(\varrho) \cup \{z_0\}$. Hvis z_0 er nulpunkt for h af orden q, har vi i $B(\varrho) \cup \{z_0\}$ en fremstilling

$$h(z) = (z-z_0)^q (b_0 + b_1(z-z_0) + \cdots), \qquad b_0 \neq 0.$$

Heraf følger, at f i $B(\varrho)$ har en fremstilling $f(z) = \sum_{n=-q}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, hvor $a_{-q} \neq 0$.

Tilfælde C. $a_n \neq 0$ for uendelig mange negative n. I dette tilfælde gælder

Picards sætning. For enhver udprikket cirkelskive $B(\varrho) = \{z \mid 0 < |z-z_0| < \varrho\}$ i A er værdimængden $f(B(\varrho))$ enten hele $\dot{C}$ eller hele $\dot{C}$ på nær et punkt.

Denne sætning er dybtliggende. Vi nøjes med at bevise, at for enhver udprikket cirkelskive $B(\varrho)$ i A er $f(B(\varrho))$ overalt tæt i $\dot{C}$. Beviset er indirekte. I modsat fald fandtes et $\varrho > 0$, et $w_0 \in \dot{C}$ og et $\delta > 0$, så at $|f(z) - w_0| > \delta$ for alle $z \in B(\varrho)$. Følgelig var $\frac{1}{f(z)-w_0}$ holomorf og begrænset i $B(\varrho)$ og måtte altså efter den under tilfælde A beviste sætning have en grænseværdi c for $z \to z_0$. Dette er umuligt; thi var $c \neq 0$, vilde gælde $f(z) - w_0 \to \frac{1}{c}$ for $z \to z_0$, og vi var

i tilfældet A, og var $c=0$ måtte gælde $f(z)-w_0 \to \infty$, altså $f(z)\to\infty$, for $z\to z_0$, og vi var i tilfældet B.

I tilfældet C siges f at have en <u>isoleret væsentlig singularitet</u> i punktet z_0

Lad dernæst $f: A \to \dot{C}$ være holomorf i en mængde A, der – opfattet som delmængde af $\dot{C}^*$ – har <u>punktet</u> ∞ som isoleret randpunkt, d.v.s. som indeholder en omegn af ∞ eksklusive ∞. Dette er ensbetydende med, at A indeholder et cirkelydre $D(\alpha)=\{z \mid |z|>\alpha\}$. Idet $K(r)$ nu betegner cirklen $\{z \mid |z|=r\}$, gælder i $D(\alpha)$ ifølge Laurents sætning

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{hvor} \quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{K(r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \quad (r>\alpha).$$

Diskussionen af dette tilfælde henføres til det foregående, idet vi betragter den ved

$$g(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$$

definerede funktion g, der er holomorf i mængden $\{w \mid \frac{1}{w}\in A\}$, der indeholder den udpriktede cirkelskive $\{w \mid 0<|w|<\frac{1}{\alpha}\}$, i hvilken $g(w)$ fremstilles ved Laurent rækken

$$g(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n}{w^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n}w^n.$$

Vi skelner mellem tre tilfælde:

<u>Tilfælde A*</u>. $a_n=0$ <u>for alle positive</u> n. I dette tilfælde er $f(z)$ i $D(\alpha)$ fremstillet ved poten $\sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{z^n}$ i $\frac{1}{z}$. Udvider vi f til $A\cup\{\infty\}$ ved at sætte $f(\infty)=a_0$, bliver f kontinuert i $A\cup\{\infty\}$. Man siger, at denne udvidede funktion er <u>holomorf i</u> $A\cup\{\infty\}$.

Tilfælde B*. $a_n \neq 0$ for visse, men kun for endelig mange, positive n. Antages $a_n = 0$ for $n > q$, men $a_q \neq 0$, gælder i $D(\alpha)$

$$f(z) = a_q z^q + \cdots + a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \cdots,$$

og vi har $f(z) \to \infty$ for $z \to \infty$. Nærmere bestemt gælder $\frac{f(z)}{z^q} \to a_q$ for $z \to \infty$. Funktionen siges i dette tilfælde at have en pol af ordenen q i punktet ∞, og vi udvider definitionsmængden for f til $A \cup \{\infty\}$ ved fastsættelsen $f(\infty) = \infty$.

Tilfælde C*. $a_n \neq 0$ for uendelig mange positive n. I dette tilfælde gælder

Picards sætning. For ethvert cirkelydre $D(\varrho) = \{z \mid |z| > \varrho\}$ i A er værdimængden $f(D(\varrho))$ enten hele $\mathbb{C}$ eller hele $\mathbb{C}$ påner eet punkt.

I tilfældet C* siges f at have en isoleret væsentlig singularitet i punktet ∞.

Dette tilfælde foreligger specielt for enhver hel transcendent funktion. Funktionen $\exp z$ er et eksempel på en funktion, for hvilken der findes en Picard'sk undtagelsesværdi (idet $\exp z$ ikke antager værdien 0). For $\cos z$ eller $\sin z$ findes ingen Picard'sk undtagelsesværdi.

201. Vis, idet $z = x+iy$, at den ved

$$h(z) = z^{1003} + i|z|^{300\pi} + (2-3i)\sin^{37}(x+y) + 10^{25}$$

definerede funktion $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ antager værdien 0 for mindst en værdi af z.

202. Vis, at hvis $P(z)$ er et polynomium af grad ≥ 2, ligger rødderne for polynomiet $P'(z)$ i den mindste konvekse polygon, der indeholder rødderne for $P(z)$. [Polygonen kan evt. udarte.] (Gauss.)

Vink. Idet $P(z) = a(z-z_1)\cdots(z-z_n)$, finder man for $z \neq z_1, \ldots, z_n$

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-z_1} + \cdots + \frac{1}{z-z_n}.$$

Antages, at z ikke tilhører polygonen, ligger $z-z_1, \ldots, z-z_n$ i et vinkelrum $< \pi$ med toppunkt 0. Det samme gælder da $\frac{1}{z-z_1}, \ldots, \frac{1}{z-z_n}$, og heraf ses, at $P'(z) \neq 0$.

203. En kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}} = \{a_{rs}\}$ med komplekse elementer a_{rs} kaldes hermitesk, når $a_{rs} = \overline{a_{sr}}$ for alle (r,s). Vis, at for en hermitesk matrix $\underline{\underline{A}}$ af $n$te orden har polynomiet

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

kun reelle rødder.

Vink. Benyt, at hvis $\lambda \in \mathbb{C}$ er rod i polynomiet, findes der en egentlig vektor $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, for hvilken $\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 = \lambda \underline{x}_1$, og dan $\overline{\underline{x}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1$, hvor $\overline{x}$ betegner vektoren $(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$.

204. Løs ligningen $z^3+3z-4=0$ ved Cardanos formel og på anden måde.

205. Løs ligningen $z^3-6z+4=0$ ved Cardanos formel og på anden måde.

206. Fjerdegradsligningen. (1) Reducer ligningen

$$a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0, \quad a_4\neq 0,$$

til en ligning af formen

$$z^4+pz^2+qz+r=0.$$

(2) Løs en ligning af sidstnævnte form med $q\neq 0$ ved at skrive den

$$(z^2+t)^2-\left[(2t-p)z^2-qz+t^2-r\right]=0,$$

idet t vælges således, at leddet $[\dots]$ får formen $(az+b)^2$.

(3) Eksempel:

$$z^4-27z^2-14z+120=0.$$

207. Bestem samtlige holomorfe funktioner i $\dot{C}$ af formen

$$f(z)=f(x+iy)=\varphi(x)+i\psi(y).$$

208. Bestem samtlige polynomier

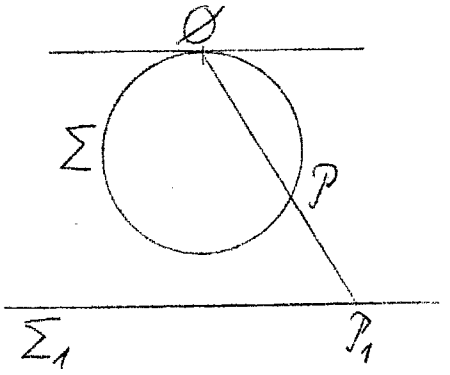
$$P(z)=P(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y),$$

for hvilke $u(x,y)$ har formen

$$u(x,y)=\varphi(x)\psi(y).$$

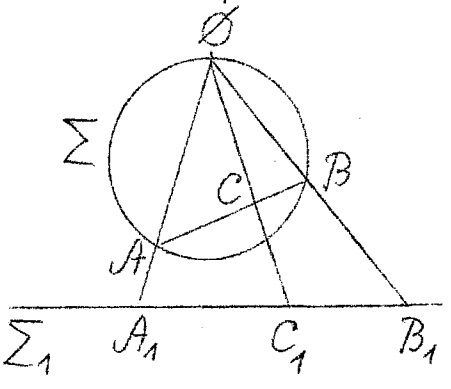
209. Vis, at når $f: A\to\dot{C}$ er holomorf i A, vil den ved $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ definerede funktion $g:\overline{A}\to\dot{C}$ på mængden $\overline{A}=\{z\mid \bar{z}\in A\}$ være holomorf i $\overline{A}$.

210. Stereografisk projektion. En kugleflade Σ projiceres fra et øjepunkt Ø på kuglen på en plan Σ_1 parallel med tangentplanen i Ø. Planen tilskrives eet uendelig fjernt punkt, der betragtes som billede af Ø.



(1) Vis, at en kurve ud fra et fra Ø forskelligt punkt P af Σ med en halvtangent i P projiceres i en kurve ud fra det tilsvarende punkt P_1 af Σ_1 med en halvtangent i P_1 og omvendt. Vis, at afbildningen er vinkeltro, d.v.s. vinklen mellem halvtangenterne til to kurver ud fra P er lig med vinklen mellem halvtangenterne til de tilsvarende kurver ud fra P_1.

(2) Vis, at afbildningen er cirkeltro, d.v.s. cirklerne på Σ svarer til de almindelige cirkler i Σ_1 (d.v.s. cirklerne og de rette linier med tilføjelse af det uendelig fjerne punkt i Σ_1).



Vink. Benyt relationen (se figur)

$$\frac{AC \cdot BC}{\emptyset C^2} = \frac{A_1C_1 \cdot B_1C_1}{\emptyset C_1^2}.$$

(3) Vis, at centrum for en egentlig cirkel i Σ_1 er billede ved projektionen fra Ø af toppunktet i den omdrejningskegle, der rører Σ langs den tilsvarende cirkel (vink., hvis denne cirkel er en storcirkel, skæringspunktet mellem Σ_1 og den på storcirklens plan vinkelrette linie gennem Ø).

(4) Den østlige halvkugle tænkes projiceret stereografisk fra midtpunktet af den vestlige halvkugle. Skitser billederne af længde- og breddecirkler.

Mat 2, 1967-68 MA Opg. 211-214

211. Bestem for afbildningen $w = f(z) = \frac{z+4}{2z-2}$ billedet af

(a) cirklen $\{z \mid |z+1| = 1\}$ og cirkelskiven $\{z \mid |z+1| \leqslant 1\}$,

(b) cirklen $\{z \mid |z-1| = 1\}$ og cirkelskiven $\{z \mid |z-1| \leqslant 1\}$,

(c) cirklen $\{z \mid |z| = 1\}$ og cirkelskiven $\{z \mid |z| \leqslant 1\}$.

212. Diskuter afbildningen $w = \frac{1}{z}$.

(1) Gør rede for beliggenheden af w for givet z.

(2) Find fixpunkterne. Tegn de tilsvarende systemer af synsvinkelcirkler og forholdscirkler og vis, at hver cirkel i disse systemer ved afbildningen går over i sig selv.

213. Vis, at en homografi er sin egen omvendte, hvis og kun hvis den enten er den identiske afbildning eller har to fixpunkter og bestemmes ved $w - z_0 = a(z - z_0)$ eller $\frac{w-z_1}{w-z_2} = a\frac{z-z_1}{z-z_2}$, hvor $a = -1$. Vis, at en homografi bestemt ved $\frac{w-z_1}{w-z_2} = (-1)\frac{z-z_1}{z-z_2}$ også bestemmes ved $(w-p)(z-p) = q^2$, hvor $p = \frac{z_1+z_2}{2}$ og $q = \frac{z_1-z_2}{2}$.

214. Vis, at en homografi afbilder halvplanen $\{z = x+iy \mid y > 0\}$ på sig selv, hvis og kun hvis den har formen $w = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, hvor $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ er reelle og $\det\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix} > 0$. Vis, at disse homografier danner en undergruppe i gruppen af alle homografier. Vis, at en sådan homografi er enten (1) den identiske afbildning, eller (2) elliptisk med to komplekst konjugerede fixpunkter, eller (3) hyperbolsk med to reelle fixpunkter (det ene evt. ∞), eller (4) parabolsk med reelt fixpunkt (evt. ∞).

215. Vis, at de homografier $w = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, for hvilke $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ er hele tal og $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, udgør en undergruppe i gruppen af alle homografier.

216. To indbyrdes forskellige punkter z_1 og z_2 i C^* kaldes symmetriske med hensyn til en almindelig cirkel c, hvis enten

(1) c er en ret linie, z_1 og z_2 er $\neq\infty$, og z_1 og z_2 er symmetriske med hensyn til c i sædvanlig forstand,

(2) c er en cirkel med centrum z_0 og radius r, z_1 og z_2 er $\neq z_0$ og ∞ og beliggende på samme halvlinie ud fra z_0, og $|z_1-z_0||z_2-z_0| = r^2$, eller

(3) c er en cirkel med centrum z_0 og radius r, og $z_1 = z_0$, $z_2 = \infty$ eller $z_1 = \infty$, $z_2 = z_0$.

Vis, at punkterne z_1 og z_2 er symmetriske med hensyn til den almindelige cirkel c, hvis og kun hvis enhver almindelig cirkel gennem z_1 og z_2 skærer c ortogonalt.

Vis herved, at hvis z_1 og z_2 er symmetriske med hensyn til den almindelige cirkel c, og $w = f(z)$ er en homografi, er $f(z_1)$ og $f(z_2)$ symmetriske med hensyn til $f(c)$.

217. Vis, at to komplekse tal z_1 og z_2, for hvilke $z_1\bar{z}_2 = -1$, på Riemanns kugle S svarer til to diametralt modsatte punkter p_1 og p_2. Vis, at synsvinkelcirklerne og forholdscirklerne hørende til z_1 og z_2 svarer til storcirklerne og lillecirklerne hørende til p_1 og p_2. Vis herved, at en elliptisk homografi $\frac{w-z_1}{w-z_2} = a\frac{z-z_1}{z-z_2}$, $|a|=1$, med fixpunkterne z_1 og z_2 svarer til en drejning af S om diameteren p_1p_2.

Vink. Benyt opg. 210.

218. Vis, at en homografi afbilder cirkelskiven $\{z \mid |z| \leqslant 1\}$ på sig selv, hvis og kun hvis den har formen $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}}$, hvor $|\beta| < |\alpha|$.

219. Ved afbildningen $w = \exp z$ afbildes en ret linie $x = x_0 + \beta y$ $(\beta \neq 0)$ i $z = x + iy$-planen i en såkaldt logaritmisk spiral $r = r_0 \exp \beta\theta$ i $w = r \exp i\theta$-planen. Vis herved, at en logaritmisk spiral skærer halvlinierne ud fra $w = 0$ under konstant vinkel.

220. Vis, at billedet af en cirkel $\{z \mid |z-1| = r < 1\}$ ved afbildningen $w = \log z$, hvor log betegner hovedværdien, er en konveks kurve med to symmetriakser. Vink. Benyt polære koordinater i z-planen og anvend sætningen om punkts potens og afbildningens vinkeltroskab.

221. Verdenshavet tænkes som en plan med sædvanlige retvinklede koordinater. Det er tæt tåge. Et navigerbart skib A, der sejler med den konstante fart a, modtager på positionen (x_0, y_0) følgende SOS melding: „Skib B på position (x_1, y_1). Alle instrumenter ødelagt. Sejler med konstant fart b efter ret linie med ukendt kurs." Idet $a > b$, skal man vise, at A kan undsætte B.

222. Find alle værdier af $\log(-1)$ og alle værdier af i^i.

223. Find alle værdier af z, der tilfredsstiller ligningen

$$\cos z + \sin z = i.$$

224. Find samtlige løsninger til hver af ligningerne

$$\operatorname{tg} z = 2i \quad \text{og} \quad \operatorname{tg} z = 1 - i.$$

225. Find $\int_K (2+3z^2+4z^3)\,dz$, idet K betegner en $\mathcal{C}^1$-kurve, der forbinder 1 med $1+i$.

226. Integrer $\exp(-z^2)\,dz$ langs randen af cirkeludsnittet $\{z \mid |z| \leqslant r,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{1}{4}\pi\}$. Find dernæst ved at foretage grænseovergangen $r \to \infty$ Fresnels integraler

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt \quad \text{og} \quad \int_0^\infty \sin(t^2)\,dt.$$

Vink. Integralet langs cirkelbuen konvergerer mod 0 for $r \to \infty$. Ved beviset herfor kan man med fordel benytte, at $\cos 2\theta$ for $\theta \in [0, \frac{1}{4}\pi]$ er $\geqslant 1 - \frac{4}{\pi}\theta$.

227. Integrer $\frac{\exp(iz)}{z}\,dz$ langs randen af figuren $\{z \mid r \leqslant |z| \leqslant R,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi\}$. Vis dernæst ved at foretage grænseovergangen $R \to \infty$, $r \to 0$, at

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\pi.$$

228. Anvend Cauchys integralsætning på

$$\int_{\partial F} z^{4n+3} e^{(i-1)z}\,dz, \quad n \in \mathbb{N},$$

hvor F er kvartcirklen $\{z = x+iy \mid |z| \leqslant r,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$. Udled herved formlen

$$\int_0^\infty x^n \exp(-\sqrt[4]{x}) \sin \sqrt[4]{x}\,dx = 0.$$

229. Find værdien af det i Cauchys integralformel for en holomorf funktion optrædende integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz,$$

når z_0 er et punkt, der ikke tilhører den figur F, langs hvis rand der integreres.

230. Find ved brug af binomialformulen integralet

$$\int_K \frac{(1+z^2)^{2n}}{z^{2n+1}}\,dz,$$

hvor $n \in \dot{N}$, og K betegner cirklen $\{z \mid |z|=1\}$ med positiv omløbsretning. Udtryk også integralet ved for K at benytte parameterfremstillingen $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, og find herved $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\,d\theta$.

231. Vis, at der for $a>0$, $b>0$ gælder

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Vink. Udregn integralet $\int_K \frac{dz}{z}$, idet K er ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, under brug af en passende parameterfremstilling.

232. Vis ved udregning af

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{dz}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}, \quad a>0,\ a\neq 1,$$

hvor K er cirklen $\{z \mid |z|=1\}$ med positiv omløbsretning, at

$$J(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\theta}\,d\theta = \begin{cases} 1 & \text{for } 0<a<1 \\ -1 & \text{for } a>1. \end{cases}$$

233. Find integralet $\int_{K(r)} \frac{dz}{z^2-4}$, hvor $K(r)$ er cirklen $\{z \mid |z|=r\}$ med positiv omløbsretning, (1) for $r=1$, (2) for $r=3$.

234. Udregn integralet $\int_K f(z)\,dz$, hvor K er cirklen $\{z \mid |z|=3\}$ med positiv omløbsretning, for hver af funktionerne

$$\frac{z^3+1}{z(z-2)}, \qquad \frac{z(z-2)}{z^3+1}, \qquad \frac{z^2-1}{z^2-4z}.$$

235. Find for et vilkårligt $n \in \dot{N}$ integralet

$$I = \int_{\partial F} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}},$$

hvor F betegner halvcirklen $\{z = x+iy \mid |z| \leq r, y \geq 0\}$, $r > 1$. Udled heraf ved at foretage grænseovergangen $r \to \infty$ formlen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}.$$

Vink. Skriv $\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ på formen $\frac{\frac{1}{(z+i)^{n+1}}}{(z-i)^{n+1}}$, og benyt Cauchys integralformel for den n^{te} afledede af en holomorf funktion.

236. Find integralet $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$.

237. Udregn integralet $\int_0^a \frac{3x}{x^3+1} dx$ ved at skrive $\frac{3x}{x^3+1}$ på formen $\frac{k}{x+1} + \frac{lx+m}{x^2-x+1}$, og find derved integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{3x}{x^3+1} dx.$$

Udregn også sidstnævnte integral ved at betragte $\int_{\partial F} \frac{3z}{z^3+1} dz$, hvor $F = \{z \mid |z| \leq r, \frac{2}{3}\pi \leq \arg z \leq \frac{4}{3}\pi\}$, $r > 1$.

238. Udregn integralet

$$\int_{\partial F} \frac{\exp z - \exp a}{z-a} dz,$$

når F er en simpel figur og $a \notin \partial F$, dels (1) når a tilhører F, dels (2) når a ikke tilhører F.

239. Bevis for reelt a formlerne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|a|}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\pi e^{-|a|}.$$

240. Vis, at integralet

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^3}, \quad \arg z = \alpha,$$

(defineret ved $\lim_{r\to\infty} \int_{K(r,\alpha)} \frac{dz}{1+z^3}$, hvor $K(r,\alpha)$ betegner liniestykket $z = te^{i\alpha}$, $0 \leq t \leq r$) har mening, når α ikke er et ulige multiplum af $\frac{1}{3}\pi$. Vis, at I_α kun antager tre forskellige værdier, og find disse.

241. Beregn integralet

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Vink. Anvend Cauchys integralformel på en passende funktion for figuren $F = \{z \mid \delta \leq |z| \leq r,\ 0 \leq \arg z \leq \pi\}$.

242. Beregn integralet

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}\,(x^2+\alpha^2)}\,dx, \quad \alpha > 0.$$

Vink. Anvend Cauchys integralformel på en passende funktion for figuren $F = \{z \mid \delta \leq |z| \leq r,\ 0 \leq \arg z \leq \pi\}$.

243. Beregn integralet

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Vink. Gå frem på lignende måde som i opg. 227.

244. Beregn integralet

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx, \quad a > 0,\ b > 0.$$

245. Beregn integralet

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)^2}\,dx, \quad a > 0,\ b > 0.$$

246. Lad K være en vilkårlig C^1-kurve i $\dot{C}$ og $\varphi: M \to \dot{C}$ en vilkårlig kontinuert funktion på den kompakte mængde, der udgøres af punkterne af K. Vis, at der ved formlen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin M,$$

bestemmes en funktion, der er holomorf i hver af de åbne sammenhængende mængder, hvori $\dot{C} \setminus M$ kan deles.

247. Givet en funktion $f: A \to \dot{C}$ på en åben sammenhængende mængde A, der indeholder punkter af den reelle akse $\dot{R}$. Det antages, at

(1) f er kontinuert i A,

(2) f er differentiabel i $A \setminus \dot{R}$.

Vis, at f er holomorf i A.

Vink. Vis, at integralet $\int_{\partial R} f(z)dz$ er 0 for ethvert akseparallet rektangel R i A.

248. Schwarz' spejlingsprincip. En funktion $f: A \to \dot{C}$ på mængden $A = \{z \mid a < x < b, 0 \leq y < c\}$ antages at opfylde følgende betingelser:

(1) f er kontinuert i A,

(2) f er holomorf i $A^\circ = \{z \mid a < x < b, 0 < y < c\}$,

(3) f er reel på $A \setminus A^\circ = \{z \mid a < x < b, y = 0\}$.

Vis, at funktionen $g: B \to \dot{C}$ på mængden $B = \{z \mid a < x < b, -c < y < c\}$, defineret ved

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{for } z \in A \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{for } z \in B \setminus A, \end{cases}$$

er holomorf i B.

Vink. Benyt opg. 209 og 247.

Mat 2, 1967-68 MA Opg. 249-255

249. Funktionen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ antages holomorf i $\dot{C}$. Vis, at hvis $u(x,y) \geqslant 0$ for alle (x,y), er f konstant.

250. Funktionen f antages holomorf i $\dot{C}$ og ikke konstant. Vis, at $f(\dot{C})$ er overalt tæt i $\dot{C}$.

251. Lad A være en åben sammenhængende mængde i $\dot{C}$ og $f(z,t)$: $A \times [a,b] \to \dot{C}$ en kontinuert funktion med den egenskab, at $f(z,t_0)$ for ethvert $t_0 \in [a,b]$ er holomorf i A. Vis, at funktionen

$$g(z) = \int_a^b f(z,t)\,dt$$

er holomorf i A, at $f'_z(z,t)$ er kontinuert i $A \times [a,b]$, og at

$$g'(z) = \int_a^b f'_z(z,t)\,dt.$$

252. Vis, at funktionen $u(x,y) = 2x - 2xy$ er harmonisk. Find den holomorfe funktion $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, for hvilken $v(0,0) = 0$.

253. Vis, at funktionen $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y$ er harmonisk og angiv dens konjugerede.

254. Vis, at funktionen $u(x,y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ er harmonisk. Find den holomorfe funktion $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, for hvilken $v(0,0) = 0$.

255. Vis, at en kompleks funktion $f(z)$ på en åben sammenhængende mængde A er holomorf i A, hvis og kun hvis begge funktionerne $f(z)$ og $z\,f(z)$ er harmoniske i A.

256. Vis, at hvis f er harmonisk i cirkelskiven $\{z \mid |z-z_0|<\alpha\}$, gælder for $0 \leqslant r < \alpha$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Vink. Vis først ved hjælp af Cauchys integralformel, at formlen gælder, når f er holomorf i cirkelskiven. Vis herved, at formlen gælder for en reel harmonisk funktion, og herved endelig, at den gælder for en kompleks harmonisk funktion.

257. Idet f antages harmonisk i en cirkelskive $\{z \mid |z| < 1+\delta\}$, hvor $\delta > 0$, og $f(0) = 1$, skal man udregne

$$\int_{\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant 1\}} f(x+iy)\,dx\,dy.$$

Vink. Benyt opg. 256.

258. <u>Poissons formel</u>. Vis, at hvis f er harmonisk i cirkelskiven $\{z \mid |z|<\alpha\}$, gælder for $0 \leqslant \rho < r < \alpha$

$$f(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r\rho}(\varphi-\theta)\, f(re^{i\theta})\,d\theta,$$

hvor $K_{r\rho}(\varphi)$ er Poissons kerne

$$K_{r\rho}(\varphi) = \frac{r^2-\rho^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi}.$$

Vink. Når f er holomorf, fremkommer formlen ved anvendelse af Cauchys integralformel på funktionen $\dfrac{(r^2-\rho^2)f(z)}{r^2-\rho e^{-i\varphi}z}$. Derefter gås frem som i opg. 256.

259. Vis, at hvis koefficienterne i potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ alle er $\neq 0$, og $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \alpha$ for $n \to \infty$, har potensrækken konvergensradius $\frac{1}{\alpha}$.

260. Find konvergensradius for følgende potensrækker:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!^2} z^n, \qquad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

Vink. Benyt opg. 259.

261. Find summen af rækken

$$1 + \frac{r\cos\theta}{1!} + \frac{r^2\cos 2\theta}{2!} + \cdots + \frac{r^n \cos n\theta}{n!} + \cdots.$$

262. Vis, at $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to \exp z$ for $n \to \infty$ ligelidt i enhver cirkelskive $\{z \mid |z| \leq r\}$.

263. Vis, at der for ethvert $R > 0$ findes et helt positivt tal N således, at polynomiet

$$P_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

ikke har noget nulpunkt i cirkelskiven $\{z \mid |z| \leq R\}$, når $n \geq N$.

264. En funktion $f(z)$ er givet i cirklen $\{z \mid |z| < \alpha\}$ ved potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Udregn integralet

$$\int_{\{z \mid |z| \leq r\}} |f(z)|^2 \, dx\, dy, \quad 0 < r < \alpha.$$

265. Vis, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$ er konvergent for ethvert $z \in \mathbb{C}$, for hvilket $|z| \neq 1$. Find et udtryk for rækkens sum, dels i $\{z \mid |z| < 1\}$, dels i $\{z \mid |z| > 1\}$.

Vink. $\frac{z}{1-z^2} = \frac{z}{1-z} - \frac{z^2}{1-z^2}$.

266. Bernoulli tallene B_n kan defineres ved formlen

$$\frac{z}{e^z-1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \cdots + \frac{B_n}{n!}z^n + \cdots, \quad |z|<2\pi.$$

Vis, at

$$B_0 = 1, \quad B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \binom{n}{2}B_2 + \cdots + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0,$$

og udled herved $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_7 = 0$, $B_8 = -\frac{1}{30}$. Vis, at $\frac{z}{e^z-1} + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}z\coth\frac{1}{2}z$, og udled herved $B_n = 0$ for ulige $n \geq 3$. Udled

$$\coth z = \frac{1}{z} + \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 + \cdots + \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n-1} + \cdots, \quad 0<|z|<\pi,$$

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 + \cdots + (-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n-1} + \cdots, \quad 0<|z|<\pi,$$

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!}z^{2n-1} + \cdots, \quad |z|<\tfrac{1}{2}\pi.$$

Vink. $\operatorname{tg} z = \cot z - 2\cot 2z$.

267. Find en strimmel $\{z = x+iy \mid |y|<\alpha\}$, hvori rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nz}{2^n}$$

er konvergent. Hvad er det største brugbare α? Vis, at rækken fremstiller en holomorf funktion i strimlen, og find et simpelt udtryk for denne.

268. Vis, at hvis $f: A \to \mathbb{C}$ er holomorf i en med hensyn til den reelle akse symmetrisk åben sammenhængende mængde A, og $f(z)$ er reel på et til A hørende interval på den reelle akse, da er $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ for ethvert $z \in A$.

Vink. Benyt opg. 209 og identitetssætningen.

269. Vis, at hvis $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ er holomorf i $\mathbb{C}$, og $u(x,y)$ er et polynomium i x og y, da er $f(z)$ et polynomium i z.

270. Vis, at når f er holomorf i cirkelskiven $\{z \mid |z| < R\}$ og ikke konstant, er funktionen

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 \leq r < R,$$

en (i streng forstand) voksende funktion (d. v. s. $M(r_1) < M(r_2)$, når $r_1 < r_2$).
Vink. Benyt maksimumsprincipet.

271. Vis, at hvis f er holomorf og $\neq 0$ i cirkelskiven $\{z \mid |z| < R\}$ og ikke konstant, er funktionen

$$m(r) = \inf_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 \leq r < R,$$

en (i streng forstand) aftagende funktion. Vis herved på ny algebraens fundamentalsætning.
Vink. Benyt opg. 270.

272. Schwarz' lemma. Vis, at hvis f er holomorf i cirkelskiven $A = \{z \mid |z| < 1\}$ og opfylder betingelserne

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| < 1 \text{ for alle } z \in A,$$

da gælder $|f(z)| \leq |z|$ for alle $z \in A$, og hvis blot $|f(z_0)| = |z_0|$ for et $z_0 \neq 0$ i A, gælder $f(z) = az$ for alle $z \in A$ for et vist a med $|a| = 1$.
Vink. Betragt den ved

$$g(z) = \begin{cases} f'(0) & \text{for } z = 0 \\ \dfrac{f(z)}{z} & \text{for } z \in A \setminus \{0\} \end{cases}$$

definerede funktion. Vis, at g er holomorf i A og anvend opg. 270.

273. Vis, at hvis f er holomorf i cirkelskiven $A = \{z \mid |z|<1\}$ og $f(0)=0$, og f afbilder A bijektivt på sig selv, da har f formen $f(z)=az$, hvor $|a|=1$.
Vink. Benyt opg. 272.

274. Lad $f: A \to \dot{C}$ være holomorf, F en simpel figur i A, og $\sup_{z\in\partial F} |f(z)| = M$. Vis ved at anvende Cauchys integralformel på f^n, $n\in\dot{N}$, at $|f(z)| \leq M$ for ethvert $z \in F$.

275. Vis, at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ har konvergensradius 1. Vis dernæst, at den ved potensrækken i cirkelskiven $\{z \mid |z|<1\}$ fremstillede funktion $f(z)$ ikke kan fortsættes analytisk.
Vink. Vis, at $f(z) \to \infty$, når z langs en radius konvergerer mod et punkt af formen $e^{ik2^{-p}2\pi}$, $p\in\dot{N}$, $k\in\dot{Z}$.

276. Find (uden at udregne rækkens koefficienter!) konvergensradius for Taylorrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

for funktionen $f(x) = \operatorname{arctg} x$ (hovedværdien) for et vilkårligt $x_0 \in \dot{R}$.

277. Betragt klassen T af funktioner $f: \dot{R} \to \dot{R}$ defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} P(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0, \end{cases}$$

hvor P er et polynomium med koefficienter i $\dot{R}$. Vis, at $T \subset C^\infty(\dot{R})$. Fremstilles en funktion $f \in T$ i en omegn af 0 ved sin Taylorrække $\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$?
Eksempel:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$ (Cauchy.)

278. Vis, at den ved $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^3 x}{n^n}$ definerede funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tilhører $C^\infty(\mathbb{R})$, og at dens Taylorrække $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ er divergent for alle $x\neq 0$.

279. Find $\lim_{z\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}z^2-\cos z}{\sin^4 z}$.

280. Find residuet for funktionen $f(z)=\frac{z^3+5}{z(z-1)^3}$ svarende til polen 1.

281. Find den principale del af $\frac{1}{\exp z-1}$ svarende til polen 0.

282. Find residuet af funktionen $\frac{\cot z\coth z}{z^3}$ i 0.

Vink. Benyt opg. 266.

283. Vis, at funktionen $f(z)=\frac{1}{\sin(z^2)}$ har een pol af anden orden og uendelig mange poler af første orden, og find residuerne.

284. Find $I=\int_K \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}\,dz$, hvor K er cirklen $\{z\mid |z|=4\}$ med positivt omløb.

285. Beregn integralet

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^4+1)(x^2+\alpha^2)^2},\qquad \alpha>0.$$

Vink. Anvend residuesætningen på funktionen $\frac{1}{(z^4+1)(z^2+\alpha^2)^2}$ og figuren $\mathcal{F}=\{z\mid |z|\le r,\ y\ge 0\}$, $r>\max\{1,\alpha\}$.

286. Beregn integralet $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{\cosh x}\,dx$.

Vink. Anvend residuesætningen på funktionen $\frac{e^{iz}}{\cosh z}$ og figuren $\mathcal{F}=\{z\mid |x|\le a,\ 0\le y\le\pi\}$.

287. Lad $f: A \to \hat{\mathbb{C}}^*$ være meromorf i A og lad F være en simpel figur i A, på hvis rand ∂F der ikke ligger nulpunkter eller poler for f. Lad g være holomorf i A. Vis, at når $a_1, \ldots, a_n$ er nulpunkterne og $b_1, \ldots, b_p$ polerne for f i F, hver skrevet så ofte, som multipliciteten angiver, gælder

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{n} g(a_j) - \sum_{k=1}^{p} g(b_k).$$

288. Lad $f: A \to \hat{\mathbb{C}}$ være en holomorf funktion. Et punkt $z \in A$ kaldes et a-punkt for f med multiplicitet n, hvis det er et nulpunkt for $f - a$ med multiplicitet n. Idet F er en simpel figur i A, skal man opskrive et udtryk for antallet N_a af a-punkter for f i F, når $f(z) \neq a$ for $z \in \partial F$. Vis, at N_a er konstant i hver af de åbne sammenhængende mængder, hvori $\hat{\mathbb{C}} \setminus f(\partial F)$ kan deles.

289. Funktionen f antages holomorf i en cirkelring $\{z \mid \alpha < |z| < \beta\}$, hvor $\alpha < \frac{1}{2}$, $\beta > 2$. På cirklen $\{z \mid |z| = \frac{1}{2}\}$ antages $|f(z)| \leq \frac{1}{2}$, og på cirklen $\{z \mid |z| = 2\}$ antages $|f(z)| \geq 2$. Vis, at f i ringen $\{z \mid \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ antager værdien 1.

Vink. Benyt opg. 288.

290. Vis, at $\int_{-m\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \sin x \sum_{p=-m}^{n-1} \frac{(-1)^p}{x + p\pi} dx$, $m, n \in \mathbb{N}$, og herved, under brug af partialbrøkfremstillingen for $\frac{1}{\sin x}$, at $\lim_{m,n \to \infty} \int_{-m\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} = \pi$. Vis herved, at

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\pi.$$

291. Udled partialbrøkfremstillingen

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-p\pi)^2}, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{-m}^{n}.$$

292. Idet en stjerne på et summationstegn betyder, at der kun skal summeres over ulige værdier af summationsindex, skal man udlede partialbrøkfremstillingen

$$\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} z = \sum_{p=-\infty}^{\infty}{}^{*} \frac{1}{p-z}, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*} = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}^{*},$$

og derved formlen

$$A(z) = z^3 \sum_{p=1}^{\infty}{}^{*} \frac{1}{p^4+z^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \frac{\sinh \frac{\pi\sqrt{2}}{2} z - \sin \frac{\pi\sqrt{2}}{2} z}{\cosh \frac{\pi\sqrt{2}}{2} z + \cos \frac{\pi\sqrt{2}}{2} z},$$

samt en lignende formel for

$$B(z) = z\left(1 - \frac{8}{\pi^2} z^4 \sum_{p=1}^{\infty}{}^{*} \frac{1}{p^2(p^4+z^4)}\right).$$

Find grænseværdierne af $A(z)$ og $B(z)$, når $z \to \infty$ langs den positive reelle akse.

293. Find Laurentrækken for funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

i (a) $\{z \mid 0<|z|<1\}$, (b) $\{z \mid 1<|z|<2\}$, (c) $\{z \mid |z|>2\}$.
Vink. Dekomponer brøken.

294. Beregn integralet

$$I = \int_K z^2 \log \frac{z+1}{z-1}\, dz,$$

hvor K er cirklen $\{z \mid |z|=2\}$ med positiv omløbsretning, og log betegner hovedværdien.
Vink. Funktionen under integraltegnet er holomorf i ringen $\{z \mid |z|>1\}$. Find dens Laurentrække.

Kap. 4. Differentialligninger.

§ 1. Eksistens- og entydighedssætning for sædvanlige differentialligningssystemer af første orden.

Differentialligningernes teori er opstået samtidig med differential- og integralregningen i slutningen af det 17. årh. Idet Newton og Leibniz indførte de fundamentale operationer differentiation og integration og erkendte deres reciprocitet, havde de samtidig løst den simpleste differentialligning $\frac{dx}{dt} = f(t)$. I løbet af det 18. årh. udviklede bl.a. Johann Bernoulli, Euler, Lagrange metoder til løsning af de mangfoldige typer af differentialligninger, som man møder i forbindelse med geometriske og fysiske problemer. En almen teori, omfattende eksistens- og entydighedssætninger for vilkårlige ligninger, blev først udviklet af Cauchy og videre udformet gennem omfattende undersøgelser i løbet af det 19. årh. bl.a. af Lipschitz, Peano, Picard.

Med V betegnes enten $\grave{R}^k$ eller $\grave{C}^k$ med normen

$$\|\underline{x}\| = \max\{|x_1|, \cdots, |x_k|\}, \qquad \underline{x} = (x_1, \cdots, x_k) \in V.$$

I rummet $\grave{R} \times V$ indfører vi den tilsvarende norm

$$\|(t, \underline{x})\| = \max\{|t|, \|\underline{x}\|\}, \qquad t \in \grave{R},\ \underline{x} \in V.$$

Lad der være givet en åben mængde Ω i $\grave{R} \times V$ og en kontinuert afbildning $\underline{f} : \Omega \to V$, altså en kontinuert funktion

$$\underline{f}(t, \underline{x}) = (f_1(t, x_1, \cdots, x_k), \cdots, f_k(t, x_1, \cdots, x_k))$$

defineret på Ω og med værdier i V. Det drejer sig om at bestemme differentiable funktioner $\underline{\varphi} : J \to V$,

hvor $J \subseteq \dot{R}$ betegner et (begrænset eller ubegrænset, åbent eller halvåbent eller afsluttet) interval, altså differentiable funktioner

$$\underline{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_k(t))$$

defineret på et interval J og med værdier i V, således at $(t, \underline{\varphi}(t)) \in \Omega$ og

$$\frac{d\underline{\varphi}(t)}{dt} = \underline{f}(t, \underline{\varphi}(t)), \qquad t \in J.$$

i koordinater

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1(t)}{dt} = f_1(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_k(t)) \\ \cdots \\ \dfrac{d\varphi_k(t)}{dt} = f_k(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_k(t)), \end{cases} \qquad t \in J.$$

Denne opgave skrives kort

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x}) \quad \text{eller} \quad \underline{x}' = \underline{f}(t, \underline{x}),$$

i koordinater

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \cdots, x_k) \\ \cdots \\ \dfrac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, \cdots, x_k) \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \cdots, x_k) \\ \cdots \\ x_k' = f_k(t, x_1, \cdots, x_k), \end{cases}$$

og man taler om en <u>sædvanlig vektordifferentialligning</u> eller et <u>sædvanligt differentialligningssystem af første orden</u>, idet ordet „sædvanlig" refererer til, at der kun er en „uafhængig variabel" t, og ordene „af første orden" refererer til, at der kun optræder afledede af første orden. Enhver funktion $\underline{\varphi}$ med de nævnte egenskaber kaldes en <u>løsning</u> eller et <u>integral</u> til vektordifferentialligningen.

For enhver løsning $\underline{\varphi}: J \to V$ er $\underline{\varphi}$ <u>kontinuert</u>. Dette følger af, at $\underline{\varphi}'(t) = \underline{f}(t, \underline{\varphi}(t))$.

Hvis $\underline{\varphi}: J \to V$ er en løsning, er restriktionen af $\underline{\varphi}$ til et vilkårligt delinterval af J naturligvis også en løsning til vektordifferentialligningen. En løsning $\underline{\varphi}: J \to V$ kaldes <u>maksimal</u>, hvis den ikke er ægte restriktion af en anden løsning, altså hvis der ikke findes nogen løsning defineret på en ægte udvidelse af J, som på J stemmer overens med $\underline{\varphi}$.

<u>Geometrisk fortolkning</u>. I rummet $\mathbb{R} \times V$ kan vektordifferentialligningen $\underline{x}' = \underline{f}(t, \underline{x})$ fortolkes på følgende måde. Ud fra hvert punkt $(t, \underline{x}) \in \Omega$ afsættes vektoren $(1, \underline{f}(t, \underline{x}))$. Herved fås et <u>vektorfelt</u> i Ω. Det drejer sig da om at bestemme de kurver i Ω, der har en parameterfremstilling af formen $(t, \varphi(t)), t \in J$, og som i hvert af deres punkter tangerer den i punktet anbragte feltvektor.

<u>Omskrivning til integralligning</u>. Hvis $\underline{\varphi}: J \to V$ er en løsning til vektordifferentialligningen og t_0 et punkt af J, i hvilket $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{x}_0$, finder vi ved integration af

$$\frac{d\underline{\varphi}(t)}{dt} = \underline{f}(t, \underline{\varphi}(t)), \quad t \in J,$$

at

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau, \underline{\varphi}(\tau))\, d\tau, \quad t \in J.$$

Hvis omvendt $\underline{\varphi}: J \to V$ for et givet punkt $(t_0, \underline{x}_0) \in \Omega$ med $t_0 \in J$ er en kontinuert funktion, for hvilken $(t, \underline{\varphi}(t)) \in \Omega$ for $t \in J$, og som tilfredsstiller denne integralligning, har man $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{x}_0$, og $\underline{\varphi}$ vil være differentiabel, da ligningens højre side er det, og vil tilfredsstille vektordifferentialligningen.

Eks. 1. Hvis $\Omega = J \times V$, hvor J er et åbent interval på $\dot{R}$, og $\underline{f}(t, \underline{x})$ er uafhængig af $\underline{x}$, drejer det sig om en ligning

$$\underline{x}' = \underline{g}(t), \quad t \in J,$$

hvor $\underline{g}(t) = (g_1(t), \cdots, g_k(t))$ er en kontinuert funktion på J, eller i koordinater om ligningssystemet

$$\begin{cases} x_1' = g_1(t) \\ \cdots \\ x_k' = g_k(t), \end{cases} \qquad t \in J.$$

Enhver løsning er da restriktion af en løsning $\underline{\varphi}: J \to V$, og samtlige sådanne løsninger er bestemt ved

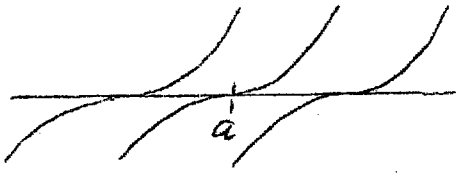
$$\underline{\varphi}(t) = \int_{t_0}^{t} \underline{g}(\tau)\, d\tau + \underline{x}_0$$

eller

$$\varphi_1(t) = \int_{t_0}^{t} g_1(\tau)\, d\tau + x_{01}, \quad \cdots, \quad \varphi_k(t) = \int_{t_0}^{t} g_k(\tau)\, d\tau + x_{0k},$$

hvor t_0 er et vilkårligt punkt i J og $\underline{x}_0 = (x_{01}, \cdots, x_{0k})$ et vilkårligt punkt i V.

Eks. 2. Vi vælger $V = \dot{R}$ og $\Omega = \dot{R} \times V = \dot{R} \times \dot{R}$ og betragter funktionerne $\varphi(t) = (t-a)^3$ på $\dot{R}$ $(a \in \dot{R})$, se figur.

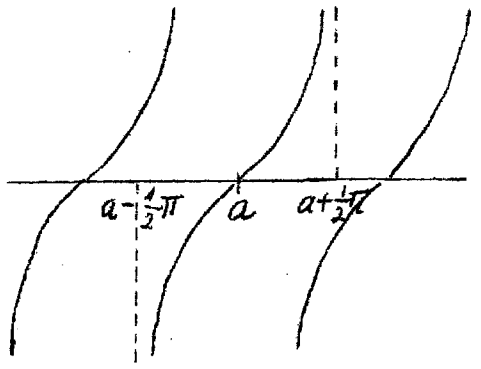


For hver af disse gælder $\varphi'(t) = 3(t-a)^2 = 3\,\varphi(t)^{\frac{2}{3}}$. Disse funktioner er altså løsninger til differentialligningen $x' = f(t,x) = 3x^{\frac{2}{3}}$, men denne har tillige som løsninger alle funktioner

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant a \\ (t-a)^3 & t \geqslant a, \end{cases} \quad \varphi(t) = \begin{cases} (t-a)^3 & t \leqslant a \\ 0 & t \geqslant a, \end{cases} \quad \varphi(t) = \begin{cases} (t-a_1)^3 & t \leqslant a_1 \\ 0 & a_1 \leqslant t \leqslant a_2 \\ (t-a_2)^3 & t \geqslant a_2, \end{cases}$$

samt $\varphi(t) = 0$. Det vil fremgå af det følgende, at differentialligningen ikke har andre løsninger end disse og deres restriktioner. Man ser, at der for ethvert punkt (t_0, x_0) findes uendelig mange løsninger $\varphi: \dot{R} \to \dot{R}$, for hvilke $\varphi(t_0) = x_0$. Man kan let danne mangfoldige eksempler af denne art ved at vælge passende kurvesystemer.

Eks. 3. Vi vælger atter $V = \grave{R}$ og $\Omega = \grave{R} \times V = \grave{R} \times \grave{R}$ og betragter nu funktionerne $\varphi(t) = tg(t-a)$, $|t-a| < \frac{1}{2}\pi$ $(a \in \grave{R})$, se figur. For hver af disse gælder



$$\varphi'(t) = \frac{1}{\cos^2(t-a)} = 1 + tg^2(t-a) = 1 + (\varphi(t))^2.$$

Disse funktioner er altså løsninger til differentialligningen $x' = f(t,x) = 1 + x^2$. Det vil fremgå af det følgende, at differentialligningen ikke har andre løsninger end disse og deres restriktioner. Bemærk, at til trods for at $\Omega = \grave{R} \times \grave{R}$, har hver løsning et begrænset definitionsinterval.

Lipschitz betingelse. En funktion $\underline{f}(t,\underline{x}) : \Omega \to V$ på en åben mængde Ω i $\grave{R} \times V$ siges i en delmængde Ξ af Ω at tilfredsstille en Lipschitz betingelse (underforstået: med hensyn til $\underline{x}$), hvis der findes et tal $C \geqslant 0$ således, at der for vilkårlige punkter $(t,\underline{x}_1) \in \Xi$ og $(t,\underline{x}_2) \in \Xi$ med samme t gælder

$$\| \underline{f}(t,\underline{x}_2) - \underline{f}(t,\underline{x}_1) \| \leqslant C \, \| \underline{x}_2 - \underline{x}_1 \|.$$

En funktion $\underline{f}(t,\underline{x}) : \Omega \to V$ på en åben mængde Ω i $\grave{R} \times V$ siges lokalt at tilfredsstille en Lipschitz betingelse, hvis der for ethvert $(t_0,\underline{x}_0) \in \Omega$ findes en omegn Ξ af $(t_0,\underline{x}_0)$, i hvilken funktionen tilfredsstiller en Lipschitz betingelse.

Hvis $\underline{f}(t,\underline{x}) = \underline{f}(t,x_1,\ldots,x_k)$ er kontinuert i Ω og har partielle afledede $\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_k}$ med hensyn til $x_1,\ldots,x_k$, der ligeledes er kontinuerte i Ω, da tilfredsstiller $\underline{f}$ lokalt en Lipschitz betingelse.

Bevis. Vi vil vise, at $\underline{f}$ tilfredsstiller en Lipschitz betingelse i enhver i Ω indeholdt mængde

$$\Xi = \{(t, \underline{x}) \mid |t - t_0| \leq a, \ \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \leq b\}.$$

Lad

$$\max_{j=1,\cdots,k} \left\{ \sup_{(t,\underline{x})\in\Xi} \left\| \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_j} \right\| \right\} = A.$$

Idet $(t, \underline{x}_1) \in \Xi$ og $(t, \underline{x}_2) \in \Xi$, vil „liniestykket" bestemt ved parameterfremstillingen $(t, \underline{x}_1 + \theta(\underline{x}_2 - \underline{x}_1))$, $\theta \in [0,1]$, være indeholdt i Ξ. Nu er

$$\frac{d\,\underline{f}(t, \underline{x}_1 + \theta(\underline{x}_2 - \underline{x}_1))}{d\theta} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_j} (x_{2j} - x_{1j}),$$

hvor de partielle afledede skal tages i $(t, \underline{x}_1 + \theta(\underline{x}_2 - \underline{x}_1))$. Altså er

$$\left\| \frac{d\,\underline{f}(t, \underline{x}_1 + \theta(\underline{x}_2 - \underline{x}_1))}{d\theta} \right\| \leq kA \|\underline{x}_2 - \underline{x}_1\|.$$

Nu bemærker vi, at der for enhver kontinuert funktion $\underline{h} : [\alpha, \beta] \to V$ gælder

$$\left\| \int_\alpha^\beta \underline{h}(\tau)\, d\tau \right\| = \max \left\{ \left| \int_\alpha^\beta h_1(\tau)\, d\tau \right|, \cdots, \left| \int_\alpha^\beta h_k(\tau)\, d\tau \right| \right\}$$

$$\leq \max \left\{ \int_\alpha^\beta |h_1(\tau)|\, d\tau, \cdots, \int_\alpha^\beta |h_k(\tau)|\, d\tau \right\} \leq \int_\alpha^\beta \|\underline{h}(\tau)\|\, d\tau.$$

Ved at benytte dette finder vi

$$\|\underline{f}(t, \underline{x}_2) - \underline{f}(t, \underline{x}_1)\| = \left\| \int_0^1 \frac{d\,\underline{f}(t, \underline{x}_1 + \theta(\underline{x}_2 - \underline{x}_1))}{d\theta}\, d\theta \right\|$$

$$\leq \int_0^1 \left\| \frac{d\,\underline{f}(t, \underline{x}_1 + \theta(\underline{x}_2 - \underline{x}_1))}{d\theta} \right\| d\theta \leq kA \|\underline{x}_2 - \underline{x}_1\|.$$

Altså tilfredsstiller $\underline{f}$ i Ξ en Lipschitz betingelse, nemlig med konstanten kA.

Hovedsætning. *Når $\underline{f}(t,\underline{x}): \Omega \to V$ er kontinuert på en åben mængde Ω i $\mathbb{R}\times V$ og lokalt tilfredsstiller en Lipschitz betingelse, da findes der for ethvert punkt $(t_0,\underline{x}_0)\in\Omega$ en og kun een maksimal løsning $\underline{\varphi}: J \to V$ til differentialligningen*

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x}),$$

for hvilken $\underline{\varphi}(t_0)=\underline{x}_0$. Enhver maksimal løsning $\underline{\varphi}: J \to V$ har et åbent definitionsinterval J, og enhver løsning til differentialligningen er restriktion af en maksimal løsning.

Cauchy viste (omkring 1825), at hvis $\underline{f}(t,\underline{x})$ har kontinuerte partielle afledede med hensyn til $x_1,\cdots,x_k$, går der gennem hvert punkt $(t_0,\underline{x}_0)$ en og kun een maksimal løsning. Lipschitz viste (1876), at det samme gælder, når blot $\underline{f}(t,\underline{x})$ lokalt opfylder en Lipschitz betingelse. Endelig viste Peano (1890), at hvis $\underline{f}(t,\underline{x})$ blot forudsættes kontinuert, går der gennem hvert punkt $(t_0,\underline{x}_0)$ mindst een maksimal løsning. Vi vil ikke her bevise denne sætning. Også i dette tilfælde har enhver maksimal løsning et åbent definitionsinterval, og enhver løsning er restriktion af en maksimal løsning.

Bevis. Beviset falder i to dele.

(1) For et vilkårligt punkt $(t_0,\underline{x}_0)\in\Omega$ vælger vi en omegn

$$\overline{\overline{\Omega}} = \{(t,\underline{x}) \mid |t-t_0| \leqslant a',\ \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \leqslant b\} \subset \Omega,$$

hvori $\underline{f}$ opfylder en Lipschitz betingelse, lad os sige med konstant C. Vi vælger endvidere et positivt tal $k<1$. Idet

$$\sup_{(t,\underline{x})\in\overline{\Xi}} \|\underline{f}(t,\underline{x})\| = M,$$

sætter vi

$$a = \min\{a', \frac{b}{M}, \frac{k}{C}\}.$$

[Her skal $\frac{b}{M}$ læses som $+\infty$, hvis $M=0$, og $\frac{k}{C}$ som $+\infty$, hvis $C=0$.]

Vi betragter nu et vilkårligt interval $J \subseteq [t_0-a, t_0+a]$, der indeholder t_0, og betegner med $\mathcal{S}$ mængden af kontinuerte funktioner

$$\underline{\varphi}: J \to \{\underline{x} \mid \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \leqslant b\}.$$

Med afstandsdefinitionen

$$\mathrm{dist}(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2) = \sup_{t\in J} \|\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_2(t)\|$$

er $\mathcal{S}$ et fuldstændigt metrisk rum. For hvert $\underline{\varphi}\in\mathcal{S}$ kan vi danne funktionen $\underline{\psi} = T\underline{\varphi}$ bestemt ved

$$\underline{\psi}(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau, \underline{\varphi}(\tau))\,d\tau, \qquad t\in J.$$

For ethvert $t\in J$ gælder

$$\|\underline{\psi}(t) - \underline{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))\,d\tau \right\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))\|\,d\tau \right|$$

$$\leqslant M|t-t_0| \leqslant Ma \leqslant b.$$

Funktionen $\underline{\psi} = T\underline{\varphi}$ tilhører altså også $\mathcal{S}$, d.v.s. T er en afbildning af det fuldstændige metriske rum $\mathcal{S}$ ind i sig selv. Denne afbildning er en kontraktion. Thi for to vilkårlige funktioner $\underline{\varphi}_1\in\mathcal{S}$ og $\underline{\varphi}_2\in\mathcal{S}$ fås, idet vi sætter $\underline{\psi}_1 = T\underline{\varphi}_1$ og $\underline{\psi}_2 = T\underline{\varphi}_2$, for ethvert $t\in J$

$$\|\underline{\psi}_1(t) - \underline{\psi}_2(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau)) - \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_2(\tau))]\,d\tau \right\|$$

$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau)) - \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_2(\tau))\|\,d\tau \right|$$

$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} C\,\|\underline{\varphi}_1(\tau) - \underline{\varphi}_2(\tau)\|\,d\tau \right|$$

$$\leqslant C \sup_{t\in J} \|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|\, a$$
$$\leqslant k\, \mathrm{dist}(\varphi_1,\varphi_2),$$

og følgelig er

$$\mathrm{dist}(\Psi_1,\Psi_2)\leqslant k\,\mathrm{dist}(\varphi_1,\varphi_2).$$

Af fixpunktsætningen fra Kap. 1, §3 fremgår derfor, at der findes en og kun een funktion $\varphi\in\mathcal{S}$, for hvilken $T\varphi=\varphi$, d.v.s. for hvilken

$$\varphi(t)=\underline{x}_0+\int_{t_0}^{t}\underline{f}(\tau,\varphi(\tau))\,d\tau\,,\quad t\in J.$$

Vi har således vist: *På ethvert interval $J\subseteq[t_0-a,t_0+a]$, for hvilket $t_0\in J$, findes der en og kun een løsning φ til differentialligningen, for hvilken $\varphi(t_0)=\underline{x}_0$ og $\|\varphi(t)-\underline{x}_0\|\leqslant b$ for alle $t\in J$.*

(2) Lad nu $\varphi_1: J_1\to V$ og $\varphi_2: J_2\to V$ være to løsninger til differentialligningen, for hvilke $t_0\in J_1\cap J_2$ og $\varphi_1(t_0)=\underline{x}_0$ og $\varphi_2(t_0)=\underline{x}_0$. Vi vil vise, at $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$ for alle $t\in J_1\cap J_2$.

Hvis $J_1\cap J_2$ kun består af t_0, er dette klart. Hvis $J_1\cap J_2$ er et interval, vælger vi, idet a og b har samme betydning som ovenfor, et $\varepsilon_0\in\,]0,a]$, således at

$$\left.\begin{aligned}\|\varphi_1(t)-\underline{x}_0\|&\leqslant b\\ \|\varphi_2(t)-\underline{x}_0\|&\leqslant b\end{aligned}\right\}\ \text{for alle } t\in J_1\cap J_2\cap[t_0-\varepsilon_0,t_0+\varepsilon_0].$$

J intervallet $J=J_1\cap J_2\cap[t_0-\varepsilon_0,t_0+\varepsilon_0]$ må da gælde $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$. For ethvert $t'\in J_1\cap J_2$, for hvilket $\varphi_1(t')=\varphi_2(t')$, findes på tilsvarende måde et $\varepsilon'>0$, således at $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$ for alle $t\in J_1\cap J_2\cap[t'-\varepsilon',t'+\varepsilon']$. Mængden

$$A=\{t\in J_1\cap J_2\mid \varphi_1(t)=\varphi_2(t)\}$$

er således en relativt åben delmængde af $J_1\cap J_2$; da φ_1 og φ_2 er kontinuerte, er A også en relativt afsluttet delmængde af $J_1\cap J_2$. Altså må A være hele $J_1\cap J_2$.

Samtlige løsninger $\varphi_0: J_0 \to V$ til differentialligningen defineret på intervaller J_0, der indeholder t_0, og for hvilke $\varphi_0(t_0) = x_0$, er således restriktioner af en og samme funktion $\varphi: J \to V$ defineret på foreningen af alle J_0. Denne er åbenbart en løsning, og efter den måde, hvorpå den er dannet, er den maksimal, og enhver løsning $\varphi_0: J_0 \to V$ med $t_0 \in J_0$ og $\varphi_0(t_0) = x_0$ er en restriktion af den. Den er åbenbart den eneste maksimale løsning gennem (t_0, x_0). Intervallet J må være åbent. Thi blandt løsningerne gennem et vilkårligt punkt $(t_1, x_1) \in \Omega$ findes jo funktioner defineret på et interval $[t_1 - a_1, t_1 + a_1]$.

Hermed er hovedsætningen bevist.

Eks. 4. For den i Eks. 2 betragtede differentialligning $x' = f(t,x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ opfylder funktionen $f(t,x)$ i hver af halvplanerne $\{(t,x) \mid x > 0\}$ og $\{(t,x) \mid x < 0\}$ lokalt en Lipschitz betingelse [idet $\frac{\partial f}{\partial x}$ eksisterer og er kontinuert i disse halvplaner]. Derimod opfylder $f(t,x)$ ikke lokalt en Lipschitz betingelse i hele planen. I halvplanen $\{(t,x) \mid x > 0\}$ må funktionerne $x = (t-a)^3$, $t > a$ $(a \in \mathbb{R})$ være samtlige maksimale løsninger, og i halvplanen $\{(t,x) \mid x < 0\}$ må funktionerne $x = (t-a)^3$, $t < a$ $(a \in \mathbb{R})$ være samtlige maksimale løsninger. Heraf sluttes let, at de i Eks. 2 angivne løsninger og deres restriktioner er samtlige løsninger til differentialligningen.

Eks. 5. For den i Eks. 3 betragtede differentialligning $x' = f(t,x) = 1 + x^2$ opfylder funktionen $f(t,x)$ i hele $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lokalt en Lipschitz betingelse. Heraf sluttes let, at de i Eks. 3 angivne løsninger og deres restriktioner er samtlige løsninger til ligningen.

§2. Løsningens afhængighed af begyndelsesværdi og af ligningens højre side.

Lad os betragte en differentialligning

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x}),$$

hvor $\underline{f}$ lokalt tilfredsstiller en Lipschitz betingelse. Ifølge hovedsætningen går der da gennem hvert punkt $(t_0, \underline{x}_0)$ af Ω en og kun een maksimal løsning $\underline{\varphi}$. Man kalder $\underline{x}_0$ begyndelsesværdien for $\underline{\varphi}$ svarende til det givne t_0. I visse forbindelser er det af betydning at vide, hvad der sker, hvis man ændrer begyndelsesværdien $\underline{x}_0$ lidt, eller ændrer ligningens højre side lidt, eller foretager begge disse ændringer samtidig. Vi vil indskrænke os til at udlede et resultat vedrørende forholdene i en omegn af $(t_0, \underline{x}_0)$ og under sådanne forudsætninger, at bevisførelsen bliver enklest mulig.

Foruden den givne ligning betragter vi en ligning

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}_1(t, \underline{x}),$$

hvor $\underline{f}_1 : \Omega_1 \to V$ lokalt tilfredsstiller en Lipschitz betingelse. Vi antager, at $(t_0, \underline{x}_0) \in \Omega \cap \Omega_1$ og vælger en omegn

$$\Xi = \{(t, \underline{x}) \mid |t - t_0| \leqslant a', \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \leqslant 2b\} \subset \Omega \cap \Omega_1,$$

hvori $\underline{f}$ og $\underline{f}_1$ hver for sig opfylder en Lipschitz betingelse, lad os sige med konstanter C og C_1. For det ovenfor benyttede tal k vælger vi $\frac{1}{2}$. Idet

$$\sup_{(t,\underline{x})\in\Xi} \|\underline{f}(t, \underline{x})\| = M \quad \text{og} \quad \sup_{(t,\underline{x})\in\Xi} \|\underline{f}_1(t, \underline{x})\| = M_1,$$

sætter vi

$$a = \min\left\{a', \frac{b}{M}, \frac{b}{M_1}, \frac{1}{2C}, \frac{1}{2C_1}\right\}.$$

Definitionsintervallet for den maksimale løsning $\underline{\varphi}$ til ligningen $\underline{x}' = \underline{f}(t,\underline{x})$ gennem $(t_0,\underline{x}_0)$ vil da ifølge beviset for hovedsætningen indeholde intervallet $[t_0-a, t_0+a]$, og der gælder $\|\underline{\varphi}(t)-\underline{x}_0\| \leqslant b$ for alle $t\in[t_0-a,t_0+a]$. Vælges et $\underline{x}_1$, så at $\|\underline{x}_1-\underline{x}_0\| \leqslant b$, vil definitionsintervallet for den maksimale løsning $\underline{\varphi}_1$ til ligningen $\underline{x}' = \underline{f}_1(t,\underline{x})$ gennem $(t_0,\underline{x}_1)$ ligeledes indeholde intervallet $[t_0-a,t_0+a]$, og vi har $\|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{x}_1\| \leqslant b$ og følgelig $\|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{x}_0\| \leqslant 2b$ for alle $t\in[t_0-a,t_0+a]$.

Som mål for ændringen af differentialligningen tager vi

$$\sup_{(t,\underline{x})\in\Xi} \|\underline{f}_1(t,\underline{x})-\underline{f}(t,\underline{x})\| = \varrho,$$

og som mål for ændringen af løsningen tager vi

$$\sup_{t\in[t_0-a,t_0+a]} \|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{\varphi}(t)\| = \varkappa.$$

For ethvert $t\in[t_0-a,t_0+a]$ finder vi

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_1(t)-\underline{\varphi}(t) &= \underline{x}_1+\int_{t_0}^{t}\underline{f}_1(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))\,d\tau-\underline{x}_0-\int_{t_0}^{t}\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))\,d\tau\\ &= \underline{x}_1-\underline{x}_0+\int_{t_0}^{t}[\underline{f}_1(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))-\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))]\,d\tau\\ &\quad+\int_{t_0}^{t}[\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))-\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))]\,d\tau,\end{aligned}$$

hvoraf

$$\begin{aligned}\|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{\varphi}(t)\| &\leqslant \|\underline{x}_1-\underline{x}_0\|+\left|\int_{t_0}^{t}\|\underline{f}_1(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))-\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))\|\,d\tau\right|\\ &\quad+\left|\int_{t_0}^{t}\|\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))-\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))\|\,d\tau\right|\\ &\leqslant \|\underline{x}_1-\underline{x}_0\|+\varrho a+\left|\int_{t_0}^{t}C\,\|\underline{\varphi}_1(\tau)-\underline{\varphi}(\tau)\|\,d\tau\right|\\ &\leqslant \|\underline{x}_1-\underline{x}_0\|+\varrho a+C\varkappa a.\end{aligned}$$

Følgelig gælder $\varkappa \leqslant \|\underline{x}_1-\underline{x}_0\|+\varrho a+Ca\varkappa$, og da $Ca\leqslant\frac{1}{2}$, giver dette $\varkappa\leqslant 2\|\underline{x}_1-\underline{x}_0\|+2a\varrho$. Vi har

altså

$$\| \underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}(t) \| \leqslant 2 \| \underline{x}_1 - \underline{x}_0 \| + 2a\varrho , \quad t \in [t_0 - a, t_0 + a].$$

Heraf ses: Når både $\| \underline{x}_1 - \underline{x}_0 \|$ og ϱ er lille, er ændringen $\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}(t)$ i løsningen lille på hele intervallet $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Hvis vi kun ændrer begyndelsesværdien, men ikke ligningen, falder leddet $2a\varrho$ i vurderingen bort. Hvis vi kun ændrer ligningen, men ikke begyndelsesværdien, falder leddet $2 \| \underline{x}_1 - \underline{x}_0 \|$ i vurderingen bort.

§3. Løsning ved successive approksimationer.

Beviset for hovedsætningen ved hjælp af fixpunktsætningen viser, at den maksimale løsning φ til differentialligningen gennem punktet $(t_0, \underline{x}_0)$ i intervallet $J = [t_0 - a, t_0 + a]$ kan bestemmes ved successive approksimationer. Idet man går ud fra en vilkårlig kontinuert funktion $\varphi_0 : J \to \{\underline{x} \mid \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \leqslant b\}$ og successivt danner $\varphi_1 = T\varphi_0$, $\varphi_2 = T\varphi_1, \cdots$, vil følgen $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots$ konvergere ligeligt mod φ på J.

I almindelighed vil denne af Picard (omkr. 1890) og andre behandlede metode kunne benyttes til bestemmelse af løsningen i et større interval. Vi vil vise dette i et særlig simpelt og vigtigt tilfælde.

Sætning. *Hvis $\underline{f}(t, \underline{x})$ er kontinuert på $J \times V$, hvor J er et begrænset eller ubegrænset åbent interval på $\mathbb{R}$, og $\underline{f}(t, \underline{x})$ i enhver mængde $J_0 \times V$, hvor J_0 er et begrænset afsluttet delinterval af J, tilfredsstiller en Lipschitz betingelse, da har enhver maksimal løsning φ til differentialligningen*

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x})$$

definitionsintervallet J, og den maksimale løsning φ gennem et vilkårligt punkt $(t_0, \underline{x}_0) \in J \times V$ kan findes ved successive approksimationer, idet man vælger en vilkårlig kontinuert funktion $\varphi_0 : J \to V$ og derefter definerer $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ ved

$$\varphi_n(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau, \varphi_{n-1}(\tau))\, d\tau, \qquad t \in J;$$

da vil $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ for $n \to \infty$, ligeligt i ethvert begrænset afsluttet delinterval J_0 af J.

Bevis. Vi kan nøjes med at betragte intervaller J_0, der indeholder t_0. Vi vælger et sådant. I mængden $J_0 \times V$ tilfredsstiller $f(t,x)$ en Lipschitz betingelse, lad os sige med konstanten C. For ethvert $n = 1,2,\ldots$ og ethvert $t \in J_0$ gælder derfor

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [f(\tau,\varphi_n(\tau)) - f(\tau,\varphi_{n-1}(\tau))]\,d\tau \right\| \\ &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau,\varphi_n(\tau)) - f(\tau,\varphi_{n-1}(\tau))\|\,d\tau \right| \qquad (*) \\ &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} C\,\|\varphi_n(\tau) - \varphi_{n-1}(\tau)\|\,d\tau \right|. \end{aligned}$$

Da φ_0 og φ_1 er kontinuerte, og J_0 er begrænset og afsluttet, findes der et tal M, således at

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| \leqslant M \quad \text{for alle } t \in J_0.$$

Af (*) fås derfor successivt, gældende for $t \in J_0$,

$$\|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} CM\,d\tau \right| = CM|t-t_0|$$

$$\|\varphi_3(t) - \varphi_2(t)\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} C\,CM|\tau-t_0|\,d\tau \right| = C^2M\frac{|t-t_0|^2}{2!}$$

$$\ldots$$

$$\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} C\,C^{n-1}M\frac{|\tau-t_0|^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau \right| = C^nM\frac{|t-t_0|^n}{n!}$$

$$\ldots$$

Nu er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} C^nM\frac{|t-t_0|^n}{n!}$ konvergent for alle t [med summen $M\exp(C|t-t_0|)$] og ligelig konvergent på ethvert begrænset interval. Til ethvert $\varepsilon > 0$ findes altså et $n_0 \in \mathbb{N}_0$, således at $\sum_{n=p}^{q-1} C^nM\frac{|t-t_0|^n}{n!} < \varepsilon$ for alle $t \in J_0$ og alle $p, q \in \mathbb{N}_0$ med $n_0 \leqslant p < q$. Følgelig gælder

$$\begin{aligned} \|\varphi_q(t) - \varphi_p(t)\| &\leqslant \|\varphi_q(t) - \varphi_{q-1}(t)\| + \cdots + \|\varphi_{p+1}(t) - \varphi_p(t)\| \\ &\leqslant C^{q-1}M\frac{|t-t_0|^{q-1}}{(q-1)!} + \cdots + C^pM\frac{|t-t_0|^p}{p!} < \varepsilon \end{aligned}$$

for alle $t \in J_0$ og alle $p, q \in \mathbb{N}_0$ med $n_0 \leqslant p < q$. Dette viser, at følgen $\varphi_n(t)$ er ligelig konvergent på J_0.

Idet vi betegner grænsefunktionen med $\varphi(t)$, har vi for ethvert $t \in J_0$

$$\| \underline{f}(t, \varphi(t)) - \underline{f}(t, \varphi_n(t)) \| \leqslant C \| \varphi(t) - \varphi_n(t) \|.$$

Følgelig konvergerer $\underline{f}(t, \varphi_n(t))$ mod $\underline{f}(t, \varphi(t))$ ligeligt på J_0. [Dette kan iøvrigt også sluttes uden brug af Lipschitz betingelsen, alene ud fra kontinuiteten af $\underline{f}$ på $J \times V_0$.] Vi får derfor

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \lim \varphi_n(t) &= \underline{x}_0 + \lim \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau, \varphi_{n-1}(t)) \, d\tau \\ &= \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau, \varphi(\tau)) \, d\tau, \end{aligned}$$

gældende for ethvert $t \in J$, idet vi blot vælger J_0 således, at $t \in J_0$.

Hermed er vist, at φ er en løsning til differentialligningen, for hvilken $\varphi(t_0) = \underline{x}_0$, og da dens definitionsinterval er J, er det åbenbart den maksimale løsning gennem $(t_0, \underline{x}_0)$.

§4. Differentialligningssystemer af højere orden.

I det $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}$, betegner vi med V_r, $r = 1, \dots, s$, enten $\mathbb{R}^{k_r}$ eller $\mathbb{C}^{k_r}$ med normen

$$\|\underline{x}_r\| = \max\{|x_{r1}|, \dots, |x_{rk_r}|\}, \quad \underline{x}_r = (x_{r1}, \dots, x_{rk_r}) \in V_r.$$

I alle V_r tænkes benyttet enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Hvor vi i det følgende opererer med $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, skal valget træffes overensstemmende hermed.

Lad der være givet en åben mængde Ω i $\mathbb{R} \times V_1 \times \dots \times V_s$ samt kontinuerte funktioner $f_1, \dots, f_s : \Omega \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, altså funktioner

$$f_r(t; \underline{x}_1; \dots; \underline{x}_s) = f_r(t; x_{11}, \dots, x_{1k_1}; \dots; x_{s1}, \dots, x_{sk_s}), \quad r = 1, \dots, s,$$

i Ω med værdier i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Det drejer sig om at bestemme funktioner $\varphi_1, \dots, \varphi_s : J \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, hvor J betegner et (begrænset eller ubegrænset, åbent eller halvåbent eller afsluttet) interval, således at φ_r er k_r gange differentiabel og der for alle $t \in J$ gælder

$$(t; \varphi_1(t), \varphi_1'(t), \dots, \varphi_1^{(k_1-1)}(t); \dots; \varphi_s(t), \varphi_s'(t), \dots, \varphi_s^{(k_s-1)}(t)) \in \Omega$$

og

$$\begin{cases} \varphi_1^{(k_1)}(t) = f_1(t; \varphi_1(t), \varphi_1'(t), \dots, \varphi_1^{(k_1-1)}(t); \dots; \varphi_s(t), \varphi_s'(t), \dots, \varphi_s^{(k_s-1)}(t)) \\ \vdots \\ \varphi_s^{(k_s)}(t) = f_s(t; \varphi_1(t), \varphi_1'(t), \dots, \varphi_1^{(k_1-1)}(t); \dots; \varphi_s(t), \varphi_s'(t), \dots, \varphi_s^{(k_s-1)}(t)). \end{cases}$$

Hvis alle tallene $k_1, \dots, k_s$ er $= 1$, er dette et sædvanligt differentialligningssystem af første orden. Hvis mindst et af tallene $k_1, \dots, k_s$ er > 1, kaldes det et <u>sædvanligt differentialligningssystem af højere orden</u>, og tallet $\max\{k_1, \dots, k_s\}$ kaldes systemets orden.

Et sæt af funktioner $\varphi_1, \dots, \varphi_s : J \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ med de nævnte egenskaber kaldes en <u>løsning</u> eller et <u>integral</u> til systemet. For enhver løsning er

$\varphi_1^{(k_1)}, \dots, \varphi_s^{(k_s)}$ kontinuerte. En løsning kaldes maksimal, hvis den ikke er ægte restriktion af en anden løsning.

Systemet skrives også kort

$$\begin{cases} \dfrac{d^{k_1}x_1}{dt^{k_1}} = f_1\left(t; x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \dots, \dfrac{d^{k_1-1}x_1}{dt^{k_1-1}}; \dots; x_s, \dfrac{dx_s}{dt}, \dots, \dfrac{d^{k_s-1}x_s}{dt^{k_s-1}}\right) \\ \dots \\ \dfrac{d^{k_s}x_s}{dt^{k_s}} = f_s\left(t; x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \dots, \dfrac{d^{k_1-1}x_1}{dt^{k_1-1}}; \dots; x_s, \dfrac{dx_s}{dt}, \dots, \dfrac{d^{k_s-1}x_s}{dt^{k_s-1}}\right). \end{cases}$$

Et sådant system er ensgyldigt med et sædvanligt differentialligningssystem af første orden, nemlig med systemet

$$\begin{cases} \begin{cases} x_{11}' = x_{12} \\ \dots \\ x_{1k_1-1}' = x_{1k_1} \\ x_{1k_1}' = f_1(t; x_{11}, \dots, x_{1k_1}; \dots; x_{s1}, \dots, x_{sk_s}) \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} x_{s1}' = x_{s2} \\ \dots \\ x_{sk_s-1}' = x_{sk_s} \\ x_{sk_s}' = f_s(t; x_{11}, \dots, x_{1k_1}; \dots; x_{s1}, \dots, x_{sk_s}). \end{cases} \end{cases}$$

Hermed menes: Hvis et sæt af funktioner $\varphi_1, \dots, \varphi_s : J \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ er en løsning til systemet af højere orden, vil sættet $\varphi_1, \varphi_1', \dots, \varphi_1^{(k_1-1)}; \dots; \varphi_s, \varphi_s', \dots, \varphi_s^{(k_s-1)}$ være en løsning til systemet af første orden, og hvis et sæt af funktioner $\varphi_{11}, \dots, \varphi_{1k_1}; \dots; \varphi_{s1}, \dots, \varphi_{sk_s} : J \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ er en løsning til systemet af første orden, vil sættet $\varphi_{11}, \dots, \varphi_{s1}$ være en løsning til systemet af højere orden. Begge dele indses umiddelbart ved indsætning.

Skrevet som en vektordifferentialligning lyder systemet af første orden

$$\frac{d(\underline{x}_1;\cdots;\underline{x}_s)}{dt} = \underline{f}(t;\underline{x}_1;\cdots;\underline{x}_s)$$

$$=(x_{12};\cdots;x_{1k_1},f_1(t;\underline{x}_1;\cdots;\underline{x}_s);\cdots;x_{s2},\cdots,x_{sk_s},f_s(t;\underline{x}_1;\cdots;\underline{x}_s)).$$

For at kunne anvende hovedsætningen i §1 må vi se efter, hvad det betyder, at funktionen $\underline{f}(t;\underline{x}_1;\cdots;\underline{x}_s)$ lokalt tilfredsstiller en Lipschitz betingelse i $\mathcal{Q}$. Betingelsen herfor ses at være, at der til ethvert punkt af $\mathcal{Q}$ findes en omegn og et C, således at der for vilkårlige punkter $(t;\underline{y}_1;\cdots;\underline{y}_s)$ og $(t;\underline{z}_1;\cdots;\underline{z}_s)$ i denne omegn med samme t gælder

$$\begin{cases} |f_1(t;\underline{y}_1;\cdots;\underline{y}_s)-f_1(t;\underline{z}_1;\cdots;\underline{z}_s)| \leqslant C\max\{\|\underline{y}_1-\underline{z}_1\|,\cdots,\|\underline{y}_s-\underline{z}_s\|\} \\ \cdots \\ |f_s(t;\underline{y}_1;\cdots;\underline{y}_s)-f_s(t;\underline{z}_1;\cdots;\underline{z}_s)| \leqslant C\max\{\|\underline{y}_1-\underline{z}_1\|,\cdots,\|\underline{y}_s-\underline{z}_s\|\}. \end{cases}$$

Under denne antagelse, som i hvert fald er opfyldt, når funktionerne $f_1,\cdots,f_s$ har partielle afledede efter de variable $x_{11},\cdots,x_{1k_1};\cdots;x_{s1},\cdots,x_{sk_s}$, der er kontinuerte i $\mathcal{Q}$, slutter vi, at der for ethvert punkt

$$(t_0;\underline{x}_{10};\cdots;\underline{x}_{s0})\in\mathcal{Q}$$

findes en og kun een maksimal løsning $\varphi_1,\cdots,\varphi_s : \mathcal{J}\to\dot{R}$ eller $\dot{C}$ til systemet af højere orden, for hvilken $t_0\in\mathcal{J}$ og

$$(\varphi_1(t_0),\cdots,\varphi_1^{(k_1-1)}(t_0))=\underline{x}_{10};\cdots;(\varphi_s(t_0),\cdots,\varphi_s^{(k_s-1)}(t_0))=\underline{x}_{s0}.$$

Endvidere slutter vi, at enhver maksimal løsning har et åbent definitionsinterval, og at enhver løsning er restriktion af en maksimal løsning.

I tilfældet $s=1$ siges det om en differentialligning af k^{te} orden

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}\right),$$

hvor $f: \mathcal{D} \to \dot{R}$ eller $\dot{C}$ er en kontinuert funktion på en åben mængde $\mathcal{D}$ i $\dot{R} \times \dot{R}^k$ eller $\dot{R} \times \dot{C}^k$. Ligningen er ensbetydende med systemet af første orden

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \cdots \\ \frac{dx_{k-1}}{dt} = x_k \\ \frac{dx_k}{dt} = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_k). \end{cases}$$

Under forudsætning af, at f har partielle afledede efter $x_1, x_2, \cdots, x_k$, der er kontinuerte i $\mathcal{D}$, findes for hvert punkt $(t_0, x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{k0}) \in \mathcal{D}$ en og kun een maksimal løsning $\varphi: J \to \dot{R}$ eller $\dot{C}$ til differentialligningen af k^{te} orden, for hvilken $t_0 \in J$ og

$$(\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \cdots, \varphi^{(k-1)}(t_0)) = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{k0}).$$

Man kalder i denne sammenhæng $(t_0, x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{k0}) = (t_0, \varphi(t_0), \varphi'(t_0), \cdots, \varphi^{(k-1)}(t_0))$ et linieelement af $(k-1)^{te}$ orden og udtrykker resultatet ved at sige, at der gennem hvert linieelement af $(k-1)^{te}$ orden går en og kun een maksimal løsning til differentialligningen af k^{te} orden.

Eks. I stedet for t og x skrives x og y; mærker skal betegne differentiation efter x, og y skal være reel. I halvplanen $\{(x,y) \mid y>0\}$ betragtes samtlige halvcirkler med centrum på x-aksen; de bestemmes ved funktionerne

$$y = \sqrt{r^2 - (x-a)^2}, \quad x \in]a-r, a+r[\qquad (a \in \dot{R}, r \in \dot{R}_+).$$

Vi søger en differentialligning med disse som løs-

ninger. Funktionerne er åbenbart vilkårligt ofte differentiable. Vi benytter med fordel implicit differentiation. Af

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2$$

får man ved at differentiere to gange

$$1 + y'^2 + yy'' = 0.$$

Funktionerne er altså løsninger til differentialligningen

$$y'' = -\frac{1+y'^2}{y},$$

og de er åbenbart maksimale løsninger. Funktionen $\frac{1+y_2^2}{y_1}$ [og naturligvis efter x, som ikke indgår, men dette er irrelevant] har kontinuerte partielle afledede efter y_1 og y_2. Der går altså gennem hvert linieelement (x_0, y_{10}, y_{20}) med $y_{10} > 0$ en og kun een maksimal løsning. Men systemet af de betragtede halvcirkler har den egenskab, at der for ethvert sæt (x_0, y_{10}, y_{20}) med $y_{10} > 0$ går en halvcirkel gennem (x_0, y_{10}), hvis tangent i (x_0, y_{10}) har hældningskoefficienten y_{20}. De givne funktioner er derfor samtlige maksimale løsninger til differentialligningen.

Newtons differentialligninger for en partikels bevægelse. I tilfældet $s=3$ med k_1, k_2, k_3 alle $=2$ og V_1, V_2, V_3 alle $= \hat{R}^2$ antager differentialligningssystemet med ændret rækkefølge af de variable i funktionerne f_i og efter tilføjelse af en faktor $m > 0$ på venstre side formen

$$\begin{cases} m x_1'' = f_1(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3') \\ m x_2'' = f_2(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3') \\ m x_3'' = f_3(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3'), \end{cases}$$

hvor f_1, f_2, f_3 er kontinuerte funktioner på en åben mængde Ω i $\hat{R}^7$. Systemet er ensgyldigt med systemet af første orden

$$\begin{cases} x_1' = y_1 \\ x_2' = y_2 \\ x_3' = y_3 \\ m y_1' = f_1(t, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \\ m y_2' = f_2(t, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \\ m y_3' = f_3(t, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3). \end{cases}$$

Sættes $(x_1, x_2, x_3) = \underline{x}$ og $(y_1, y_2, y_3) = \underline{y}$ og $(f_1, f_2, f_3) = \underline{f}$, kan systemet af anden orden skrives

$$m\underline{x}'' = \underline{f}(t, \underline{x}, \underline{x}')$$

og systemet af første orden

$$\begin{cases} \underline{x}' = \underline{y} \\ m\underline{y}' = \underline{f}(t, \underline{x}, \underline{y}). \end{cases}$$

Vi har her bevægelsesligningerne, respektive bevægelsesligningen, for en partikel med massen m, der, når den til tiden t befinder sig i punktet $\underline{x}$ med hastigheden $\underline{x}' = \underline{y}$, er påvirket af kraften $\underline{f}(t, \underline{x}, \underline{y})$. Thi ligningen $m\underline{x}'' = \underline{f}(t, \underline{x}, \underline{x}')$ udtrykker Newtons anden lov (Philosophiæ naturalis principia mathematica 1687), at kraften er massen gange accelerationen $\underline{x}''$. Løsningerne er de mulige bevægelser.

Det er herved forudsat, at man opererer i et fast koordinatsystem i det af Newton postulerede absolute rum, men ligningerne kan også anvendes for et bevæget koordinatsystem. Da er $\underline{x}'$ og $\underline{x}''$ den relative hastighed og acceleration og $\underline{f}(t, \underline{x}, \underline{x}')$ den tilsyneladende kraft, som er lig med den virkelige kraft plus den fra koordinatsystemets bevægelse hidrørende fiktive kraft, som ofte, f.eks. når man opererer i et i forhold til jorden fast system, er så lille, at man ved mange problemer kan se bort fra den.

Under antagelse af, at funktionerne f_1, f_2, f_3 har

partielle afledede efter $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, der er kontinuerte i Ω, findes for givet $(t_0, x_{10}, x_{20}, x_{30}, y_{10}, y_{20}, y_{30}) = (t_0, \underline{x}_0, \underline{y}_0) \in \Omega$ en og kun een bevægelse, ved hvilken partiklen til tiden t_0 befinder sig i punktet $\underline{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ med hastigheden $\underline{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, y_{30})$. Man kan imidlertid meget let udtænke mekaniske problemer, hvor den nævnte betingelse ikke er opfyldt, og hvor faktisk flere bevægelser er mulige. For eksempel kan man tænke sig, at $\Omega = \dot{R}^7$, og at kraften er bestemt ved $(f_1, f_2, f_3) = (m 6 x_1^{\frac{1}{3}}, 0, 0)$. For $(t_0, x_{10}, x_{20}, x_{30}, y_{10}, y_{20}, y_{30}) = (0,0,0,0,0,0,0)$ findes da foruden hvile bl.a. løsningen $(x_1, x_2, x_3) = (t^3, 0, 0)$, $t \in \dot{R}$.

For enhver løsning har vi

$$m(x_1' x_1'' + x_2' x_2'' + x_3' x_3'') = f_1 x_1' + f_2 x_2' + f_3 x_3',$$

altså, idet vi sætter $v = (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$\left[\tfrac{1}{2} m v^2\right]' = f_1 x_1' + f_2 x_2' + f_3 x_3',$$

og følgelig, hvis $[t_1, t_2]$ er et afsluttet delinterval af løsningens definitionsinterval, og v_1 og v_2 er værdierne af v for $t = t_1$ og $t = t_2$,

$$\tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} (f_1 x_1' + f_2 x_2' + f_3 x_3')\, dt.$$

Tænker vi os x_1, x_2, x_3 som sædvanlige retvinklede koordinater i rummet, er v farten i bevægelsen, og $\frac{1}{2} m v^2$ er partiklens kinetiske energi, medens integralet på højre side er det af kraften under bevægelsen udførte arbejde i tidsintervallet $[t_1, t_2]$. Dette arbejde er altså lig med ændringen i partiklens kinetiske energi.

Keplers love. Newtons gravitationslov. På grundlag af Tyge Brahes observationer fandt Kepler (Astronomia nova de motibus stellae Martis 1609, Harmonice mundi 1619) sine tre love for planeternes bevægelse, ud fra hvilke Newton (i Principia) nåede til gravitations-

lovene. Keplers love udsiger:

1. Banen for enhver planet P er en ellipse med solen S i det ene brændpunkt.

2. Det af liniestykket SP i et tidsinterval $[t_1, t_2]$ beskrevne areal er proportionalt med intervallets længde $t_2 - t_1$.

3. Forholdet $\frac{a^3}{T^2}$ mellem tredje potens af ellipsens halve storakse og anden potens af omløbstiden er det samme for alle planeter.

Foruden bevægelser på en ellipse betragtede Newton bevægelser på en parabel eller en hyperbelgren.

(a) Lad os først betragte en bevægelse af en partikel i en plan. Vi indfører sædvanlige retvinklede koordinater x, y i planen, men foretrækker at operere med den komplekse variable $z = x + iy$, som vi ved brug af polære koordinater skriver $z = re^{i\theta}$. Vi betragter en bevægelse $z = z(t)$, hvor $z(t) \neq 0$ for alle t. Når z er to gange differentiabel gælder det samme om r og θ [thi det gælder om x og y, og $r = \sqrt{x^2+y^2}$, medens θ i omegnen af ethvert punkt er $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, hvis $x \neq 0$, og $\operatorname{arccot} \frac{x}{y}$, hvis $y \neq 0$]. For hastighed og acceleration finder vi

$$z' = r' e^{i\theta} + r\theta' i e^{i\theta},$$

$$z'' = [r'' - r\theta'^2] e^{i\theta} + [2r'\theta' + r\theta''] i e^{i\theta}.$$

Disse udtryk giver opløsningen af z' og z'' i en komponent på linien Oz og en derpå vinkelret komponent. I det følgende antages $\theta' > 0$.

Idet vi vælger et udgangstidspunkt t_0, betegner vi med $A = A(t)$ det af liniestykket Oz i tidsintervallet $[t_0, t]$ beskrevne areal, såfremt $t > t_0$, og minus det i tidsintervallet $[t, t_0]$ beskrevne areal, såfremt $t < t_0$, og vi sætter $A(t_0) = 0$. Da er efter arealformlen i polære

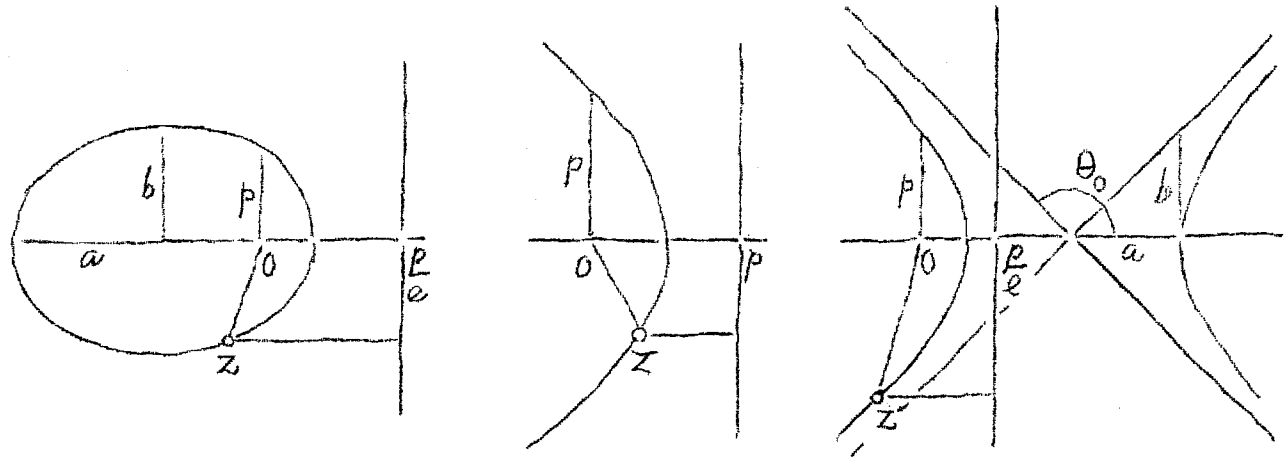
koordinater

$$A = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2} r^2 \theta' dt, \text{ altså } A' = \frac{1}{2} r^2 \theta', \quad A'' = rr'\theta' + \frac{1}{2} r^2 \theta''.$$

Det af liniestykket Oz i et tidsinterval $[t_1, t_2]$ beskrevne areal $A(t_2) - A(t_1)$ er proportionalt med $t_2 - t_1$, hvis og kun hvis arealhastigheden A' er konstant, altså $A'' = 0$ for alle t. Af udtrykket for z'' ses, at dette indtræffer, hvis og kun hvis den på Oz vinkelrette komponent af z'' er 0 for alle t, d.v.s. hvis og kun hvis accelerationen z'' for alle t ligger på linien Oz.

(b) Lad os nu antage, at bevægelsen sker på en ellipse, parabel eller hyperbelgren med O som brændpunkt; i tilfælde af en hyperbelgren skal denne vende hulheden mod O.

Vi anbringer toppunktet, for ellipsens vedkommende det til O nærmeste toppunkt, på den positive reelle akse. Med e betegner vi keglesnittets ekscentricitet og med p dets parameter, d.v.s. den på aksen gennem brændpunkterne, for parablens vedkommende aksen, vinkelrette halve korde gennem brændpunktet [ikke som det undertiden sker hele korden]. Den til brændpunktet O hørende ledelinie er da linien $\{z = x + iy \mid x = \frac{p}{e}\}$, og vi finder, at der for ethvert



punkt $z = x+iy = re^{i\theta}$ på keglesnittet, for hyperblens vedkommende på den betragtede gren, gælder ligningen $r = e\left(\frac{p}{e} - x\right) = p - er\cos\theta$, hvoraf ligningen i polære koordinater

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta},$$

hvor vi får ellipsen $(0<e<1)$, gennemløbet uendelig ofte, når θ gennemløber $\mathbb{R}$, parablen $(e=1)$, når θ gennemløber $]-\pi,\pi[$, og hyperbelgrenen $(e>1)$, når θ gennemløber $]-\theta_0,\theta_0[$, hvor θ_0 er den værdi i $]\frac{1}{2}\pi,\pi[$, for hvilken $\cos\theta_0 = -\frac{1}{e}$. For $e=0$ får vi ligningen $r=p$ for cirklen med centrum 0 og radius p, som herved kommer med i den følgende undersøgelse. *) Ud over dette får vi brug for, at p for ellipsen er bestemt ved $p = \frac{b^2}{a}$, hvor a og b er halvakserne. Samme formel gælder iføvrigt for hyperblen.

Idet bevægelsen antages at ske med konstant arealhastighed $A' = c$, har vi

$$\frac{1}{2}r^2\theta' = c,$$

og accelerationen er $z'' = (r'' - r\theta'^2)e^{i\theta}$. Ved indsætning af $\theta' = \frac{2c}{r^2}$ fås $r'' - r\theta'^2 = r'' - \frac{4c^2}{r^3}$. Af ligningen i polære koordinater fås, ligeledes under brug af $\theta' = \frac{2c}{r^2}$,

$$r' = \frac{pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\theta' = \frac{pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\frac{2c}{r^2} = \frac{2ce\sin\theta}{p},$$

hvoraf

$$r'' = \frac{2ce\cos\theta}{p}\theta' = \frac{2c\left[\frac{p}{r}-1\right]}{p}\frac{2c}{r^2} = \frac{4c^2}{r^3} - \frac{\frac{4c^2}{p}}{r^2}.$$

---

*) For et punkt på den anden hyperbelgren fås $r = e(x - \frac{p}{e}) = er\cos\theta - p$, og dermed ligningen

$$r = \frac{p}{-1+e\cos\theta},$$

hvor θ skal gennemløbe intervallet $]-(\pi-\theta_0), \pi-\theta_0[$.

Dette giver for accelerationen udtrykket

$$z'' = -\frac{k}{r^2} e^{i\theta}, \quad \text{hvor} \quad k = \frac{4c^2}{p}.$$

Accelerationen er således stedse rettet mod 0 og dens størrelse er omvendt proportional med afstandens kvadrat.

© Idet vi nu specielt betragter en bevægelse på en ellipse med halvakser a og b (evt. en cirkel), beskriver liniestykket Oz ved et helt omløb ellipsens areal πab, som altså må være lig med cT, hvor T er omløbstiden (idet c jo er den konstante arealhastighed A'). Heraf fås $c = \frac{\pi ab}{T}$, altså, idet som foran bemærket $p = \frac{b^2}{a}$,

$$k = \frac{4c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

(d) Sammenholdes det foregående med Keplers love ses, at hver planet bevæger sig, som om den var tiltrukket af solen med en kraft af størrelsen $k\frac{m}{r^2}$, hvor m er planetens masse, og k er ens for alle planeter. Herved (og af andre grunde, jfr. (e)) føres Newton gennem anvendelse af loven om aktion og reaktion til gravitationsloven, at to partikler med masser m_1 og m_2 og den indbyrdes afstand r tiltrækker hinanden med kræfter af størrelsen $\varkappa\frac{m_1 m_2}{r^2}$, hvor $\varkappa$ er en konstant.

Ifølge det foranstående er $\varkappa = \frac{k}{M} = \frac{4\pi^2 a^3}{MT^2}$, hvor M er solens masse og a og T er halve storakse og omløbstid for en vilkårlig af planeterne. Vælges jordbanens halve storakse som længdeenhed, året som tidsenhed og solens masse som massenhed, fås simpelthen $\varkappa = k = 4\pi^2$.

Det bemærkes, at Keplers love kun kan forenes med gravitationsloven, når man antager planeternes

masser ubetydelige i forhold til solens, således at man kan se bort fra planeternes tiltrækning af solen og af hinanden, og endvidere antager, at man kan behandle solen og planeterne som partikler. Hvad det sidste angår, viste Newton, at kugler, i hvilke massetætheden kun afhænger af afstanden fra centrum, virker på hinanden som varde partikler med massen i centrum.

ⓔ Historiske bemærkninger. (1) I sin udledelse anvendte Newton ikke differentialregningen [hans form af den, den såkaldte fluxionslære, havde han ikke publiceret], men direkte infinitesimalgeometriske ræsonnementer, således som allerede Archimedes havde gjort i sine geometriske og mekaniske undersøgelser, og som i den forudgående periode siden Galileis grundlæggelse af bevægelseslæren (Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze 1638) var vanligt.

(2) For en bevægelse i en cirkel med radius r og konstant fart v havde Huygens fundet, at accelerationen er rettet mod centrum og har størrelsen $\frac{v^2}{r}$. Indsættes heri $v = \frac{2\pi r}{T}$, hvor T er omløbstiden, ses, at accelerationen har størrelsen $\frac{4\pi^2 r}{T^2}$ og altså er proportional med $\frac{1}{r^2}$ for cirkelbevægelser, for hvilke Keplers tredje lov, formuleret som proportionalitet af T^2 og r^3, er gyldig. Denne simple iagttagelse var, som Newton nævner, også gjort af Wren, Hooke og Halley. Proportionaliteten af T^2 og r^3 var kendt ikke blot for planeternes bevægelser (betragtet forenklet som cirkulære) men også for jupiter månernes og saturnmånernes bevægelser (med andre værdier af proportionalitetsfaktoren). I den nævnte iagttagelse, i forbindelse med betragtning af accelerationen i månens bevægelse om jorden sammenholdt med accelerationen i det frie fald på jorden, lå allerede en stærk motivering

for opstillingen af gravitationsloven, men det afgørende argument var bestemmelsen af accelerationen i ellipsebevægelsen, hvorved også Keplers første og anden lov kom med i motiveringen (og den tredje lov i dens eksakte form). Bagefter kunde Newton som bekendt forklare mangfoldige fænomener (præcessionen, tidevandet, kometernes bevægelse o.s.v.) ved hjælp af loven. I tilslutning til det foranstående bemærkes, at værdien af størrelsen $k = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ for jupitermånerne, saturnmånerne og jordens måne umiddelbart ledte til en bestemmelse af jupiters, saturns og jordens masser målt med solens masse som enhed. At dette gav fornuftige værdier i forhold til volumenerne var naturligvis en yderligere bekræftelse af loven.

(f) Ud fra p, e, θ, c bestemmes k og r ved formlerne

$$k = \frac{4c^2}{p} \quad \text{og} \quad r = \frac{p}{1+e\cos\theta}.$$

Sættes $z' = r'e^{i\theta} + r\theta' i e^{i\theta} = \alpha e^{i\theta} + \beta i e^{i\theta}$, ses af $\frac{1}{2}r^2\theta' = c$ og $r' = \frac{2ce\sin\theta}{p}$, at α og β bestemmes ved

$$\alpha = \frac{2ce\sin\theta}{p} \quad \text{og} \quad \beta = \frac{2c}{r}.$$

Omvendt ses af disse ligninger, at p, e, θ, c kan vælges således, at k, r, α, β får foreliggende værdier. Man får

$$p = \frac{\beta^2 r^2}{k}, \qquad \begin{cases} e\cos\theta = \frac{\beta^2 r}{k} - 1 \\ e\sin\theta = \frac{\alpha\beta r}{k} \end{cases}, \qquad c = \frac{1}{2}\beta r.$$

Naturligvis er θ for $e > 0$ kun bestemt modulo 2π og kan for $e = 0$ vælges vilkårligt. Bortset herfra er løsningen entydig.

(g) Lad os nu i rummet betragte alle bevægelser $\underline{x} = \underline{x}(t)$ med konstant arealhastighed på ellipser, parabler og hyperbelgrene med brændpunkt i $\underline{0}$, hy-

perbelgrenene med hulhed mod $\underline{0}$, for hvilke konstanten k i accelerationsformlen har en given værdi. Lad $\underline{x}$ og $\underline{y}$ være to vilkårlige lineært uafhængige vektorer. Af (F) fremgår da, at der blandt de nævnte bevægelser findes en og kun een, for hvilken partiklen til et givet tidspunkt er i $\underline{x}$ med hastigheden $\underline{y}$. Thi betegnes længden af $\underline{x}$ med r, den med fortegn regnede længde af projektionen af $\underline{y}$ på den ved $\underline{x}$ bestemte linie med α, og længden af den på denne linie vinkelrette komponent af $\underline{y}$ med β, bestemmer sættet k, r, α, β et og kun eet sæt p, e, θ, c [påner den forudnævnte ubestemthed i θ]. Den af $\underline{x}$ og $\underline{y}$ udspændte plan betragtes nu som den komplekse plan, idet vi som positiv omløbsretning tager den korteste drejning fra $\underline{x}$ til $\underline{y}$ og vælger den positive reelle akse således, at vinklen fra den til $\underline{x}$ bliver θ. Da svarer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ til $re^{i\theta}$ og $\alpha e^{i\theta} + \beta i e^{i\theta}$, det søgte keglesnit fastlægges ved p og e, og bevægelsen fastlægges ved arealhastigheden c i forbindelse med, at partiklen til det givne tidspunkt t skal være i $\underline{x}$ [de forskellige brugbare θ giver samme bevægelse]. Det bemærkes, at den faktiske beregning af positionen til et vilkårligt tidspunkt fører til en ligning (Keplers ligning), hvis løsning ikke kan udtrykkes ved de sædvanlige funktionstegn.

(k) Omvendt gælder nu, at en partikel med massen m, der i afstanden r fra $\underline{0}$ tiltrækkes mod $\underline{0}$ af en kraft af størrelsen $k\frac{m}{r^2}$, hvis den til tiden t er i punktet $\underline{x}$ med hastigheden $\underline{y}$, må udføre den i (g) fundne bevægelse.

For at indse dette benytter vi, at de mulige bevæ-

gelser er løsningerne til differentialligningen

$$\underline{x}'' = -k\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3} \qquad (\underline{x} \neq \underline{0}),$$

hvor $|\underline{x}|$ betegner længden af $\underline{x}$. Funktionen på højre side hørfredsstiller lokalt en Lipschitz betingelse, idet den jo udtrykt i sædvanlige retvinklede koordinater er

$$k\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3} = \left(\frac{kx_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{kx_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{kx_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

og følgelig har kontinuerte partielle afledede efter x_1, x_2, x_3. Hovedsætningen viser derfor, at der for ethvert sæt $(t, \underline{x}, \underline{y})$ med $\underline{x} \neq 0$ findes en og kun en maksimal bevægelse, for hvilken partiklen til tiden t er i $\underline{x}$ med hastigheden $\underline{y}$. Når $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er lineært uafhængige, er den ovenfor fundne løsning åbenbart maksimal, idet dens definitionsinterval er $\mathbb{R}$. Ud over disse løsninger er der altså kun de løsninger, der svarer til, at $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er lineært afhængige.

Ligningen hører til en type af differentialligninger, for hvilke man har en simpel løsningsmetode. Ved at anvende den finder man, foruden løsninger hvor bevægelsen sker på en halvlinie ud fra $\underline{0}$, netop de ovenfor beskrevne løsninger. ~~Vi vil udføre dette i § 10.~~

§5. Lineære differentialligningssystemer af første orden.

Lad J være et begrænset eller ubegrænset åbent interval på $\mathbb{R}$ og lad $\underline{f}(t,\underline{x})$ være kontinuert på $J\times V$, hvor V er $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$. Vektordifferentialligningen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x})$$

eller differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t,x_1,\dots,x_k) \\ \dots \\ \frac{dx_k}{dt} = f_k(t,x_1,\dots,x_k) \end{cases}$$

kaldes <u>lineært</u>, hvis funktionerne $f_1,\dots,f_k$ er førstegradspolynomier i $x_1,\dots,x_k$, altså hvis systemet har formen

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1k}(t)x_k + q_1(t) \\ \dots \\ \frac{dx_k}{dt} = p_{k1}(t)x_1 + \dots + p_{kk}(t)x_k + q_k(t), \end{cases}$$

hvor funktionerne $p_{ij}(t)$ og $q_i(t)$ er kontinuerte funktioner på J med værdier fra $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, eftersom V er $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$. Hvis funktionerne $q_i(t)$ alle er 0, kaldes systemet <u>homogent</u>, ellers <u>inhomogent</u>.

<u>For et lineært differentialligningssystem af første orden opfylder funktionen $\underline{f}(t,\underline{x})$ i enhver mængde $J_0\times V$, hvor J_0 er et begrænset, afsluttet delinterval af J, en Lipschitz betingelse.</u>

Thi sættes

$$\max_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,k}} \left\{ \sup_{t\in J_0} |p_{ij}(t)| \right\} = A,$$

har vi for ethvert $t\in J_0$ og vilkårlige punkter $\underline{x}_1\in V, \underline{x}_2\in V$

for ethvert $i = 1, \cdots, k$

$$|f_i(t, \underline{x}_2) - f_i(t, \underline{x}_1)| = |p_{i1}(t)(x_{21} - x_{11}) + \cdots + p_{ik}(t)(x_{2k} - x_{1k})|$$
$$\leqslant k A \max\{|x_{21} - x_{11}|, \cdots, |x_{2k} - x_{1k}|\} = k A \|\underline{x}_2 - \underline{x}_1\|.$$

Følgelig er

$$\|\underline{f}(t, \underline{x}_2) - \underline{f}(t, \underline{x}_1)\| \leqslant k A \|\underline{x}_2 - \underline{x}_1\|.$$

Af de tidligere resultater (§ 1 og § 3) slutter vi derfor:

Sætning 1. Gennem hvert punkt $(t_0, \underline{x}_0) \in J \times V$ går en og kun een maksimal løsning. Enhver maksimal løsning har definitionsintervallet J. Enhver løsning er restriktion af en maksimal løsning. Den maksimale løsning gennem et vilkårligt punkt $(t_0, \underline{x}_0)$ kan bestemmes ved successive approksimationer.

Tilfældet $k = 1$ ($V = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). I dette tilfælde drejer det sig om en ligning

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t).$$

Man har her en færdig løsningsformel.

For den homogene ligning

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x$$

er for ethvert $(t_0, x_0) \in J \times V$ funktionen

$$x = x_0 \Phi(t), \quad \text{hvor } \Phi(t) = \exp \int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau, \quad t \in J,$$

en løsning gennem (t_0, x_0) med definitionsinterval J, og der kan følgelig ikke være andre (maksimale) løsninger.

For den inhomogene ligning bestemmes løsningen gennem (t_0, x_0) ved „de arbitrære konstanters variationsmetode": Da $\Phi(t) \neq 0$ for alle $t \in J$, og $\Phi(t_0) = 1$, vil der, når vi sætter $x = y\Phi(t)$, til en differentiabel funktion x på J, der i t_0 har værdien x_0, svare en dif-

ferentiabel funktion y på J, der i t_0 har værdien x_0, og omvendt. Differentiation og indsætning giver

$$\frac{dy}{dt}\underline{\Phi}(t) + y\frac{d\underline{\Phi}(t)}{dt} = p(t)\,y\,\underline{\Phi}(t) + q(t),$$

altså (da $\underline{\Phi}(t)$ er løsning til den homogene ligning)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q(t)}{\underline{\Phi}(t)}, \qquad y = x_0 + \int_{t_0}^{t}\frac{q(\tau)}{\underline{\Phi}(\tau)}\,d\tau, \quad t\in J,$$

hvoraf

$$x = x_0\underline{\Phi}(t) + \underline{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\frac{q(\tau)}{\underline{\Phi}(\tau)}\,d\tau, \quad t\in J.$$

Tilfældet $k>1$ ($V=\dot{R}^k$ eller $\dot{C}^k$). I dette tilfælde har man ingen færdig løsningsformel. Man kan dog opstille visse resultater. Ved formuleringen er det hensigtsmæssigt i stedet for den hidtil brugte vektorbetegnelse at benytte matricer. Vi sætter

$$\underline{\underline{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{P}}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1k}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k1}(t) & \cdots & p_{kk}(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{q}}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_k(t) \end{pmatrix}.$$

Da kan systemet skrives

$$\frac{d\underline{\underline{x}}}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{q}}(t).$$

Sætning 2. De maksimale løsninger til et lineært homogent ligningssystem

$$\frac{d\underline{\underline{x}}}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{x}}$$

bestående af k ligninger med k ubekendte funktioner danner et k-dimensionalt vektorrum (over det til grund lagte tallegeme $\dot{R}$ eller $\dot{C}$).

Bevis. Det er klart, at hvis $\underline{\underline{\varphi}}$ er en løsning, er $a\underline{\underline{\varphi}}$ en løsning ($a\in\dot{R}$ eller $\dot{C}$), og hvis $\underline{\underline{\varphi}}$ og $\underline{\underline{\psi}}$ er

løsninger, er $\underline{\varphi} + \underline{\psi}$ en løsning. Dette viser, at løsningerne udgør et underrum i vektorrummet af alle funktioner $\underline{\varphi} : J \to V$.

Lad nu $\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_k$ være k vektorer i V, der danner en basis for V, lad $t_0 \in J$, og lad $\underline{\varphi}_1, \cdots, \underline{\varphi}_k$ være de k løsninger, der bestemmes ved $\underline{\varphi}_1(t_0) = \underline{x}_1, \cdots, \underline{\varphi}_k(t_0) = \underline{x}_k$. Et vilkårligt $\underline{x}_0 \in V$ kan da på en og kun een måde skrives på formen $\underline{x}_0 = a_1 \underline{x}_1 + \cdots + a_k \underline{x}_k$. Men når $\underline{x}_0 = a_1 \underline{x}_1 + \cdots + a_k \underline{x}_k$, vil $\underline{\varphi} = a_1 \underline{\varphi}_1 + \cdots + a_k \underline{\varphi}_k$ netop være den løsning, for hvilken $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{x}_0$. Enhver løsning kan altså på en og kun een måde skrives som en linearkombination af løsningerne $\underline{\varphi}_1, \cdots, \underline{\varphi}_k$, som derfor danner en basis for det af løsningerne udgjorte vektorrum.

Fundamentalmatrix. Man ser, at et sæt af k løsninger $\underline{\varphi}_1, \cdots, \underline{\varphi}_k$ er en basis for løsningsrummet, hvis og kun hvis vektorerne $\underline{\varphi}_1(t_0), \cdots, \underline{\varphi}_k(t_0)$ for et $t_0 \in J$ er en basis for V, og at disse vektorer da for ethvert $t_0 \in J$ må være en basis for V. Den ved k løsninger $\underline{\varphi}_1, \cdots, \underline{\varphi}_k$ bestemte matrix

$$\underline{\underline{\Phi}}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{k1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{1k}(t) & \cdots & \varphi_{kk}(t) \end{pmatrix},$$

hvis søjler er $\underline{\varphi}_1, \cdots, \underline{\varphi}_k$ [så at første index løber søjleindex og anden index rækkeindex] er altså regulær for alle $t \in J$, hvis løsningerne danner en basis for løsningsrummet, ellers singulær for alle $t \in J$. I det første tilfælde kaldes $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ en fundamentalmatrix. Ud fra en fundamentalmatrix bestemmes

samtlige løsninger til det homogene ligningssystem ved

$$\underline{x}_1 = \underline{\underline{\Phi}}(t)\,\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{k1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{1k}(t) & \cdots & \varphi_{kk}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}.$$

Bemærk. Vælger man specielt $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ således, at $\underline{\underline{\Phi}}(t_0) = \underline{\underline{E}}$, d.v.s. vælger man som basis $\underline{\varphi}_{11}, \cdots, \underline{\varphi}_{k1}$ for løsningsrummet de k løsninger, for hvilke $\underline{\varphi}_{11}(t_0), \cdots, \underline{\varphi}_{k1}(t_0)$ er de k enhedsvektorer, vil $\underline{\varphi}_1 = \underline{\underline{\Phi}}(t)\,\underline{x}_{01}$ for et vilkårligt $\underline{x}_{01} \in V$ være den løsning, for hvilken $\underline{\varphi}_1(t_0) = \underline{x}_{01}$.

Sætning 3. For et vilkårligt sæt af k løsninger $\underline{\varphi}_{11}, \cdots, \underline{\varphi}_{k1}$ til det homogene ligningssystem er determinanten

$$W(t) = \det \underline{\underline{\Phi}}(t)$$

en løsning til differentialligningen

$$\frac{dW(t)}{dt} = \left[\operatorname{tr} \underline{\underline{P}}(t)\right] W(t) = \left[p_{11}(t) + \cdots + p_{kk}(t)\right] W(t),$$

og man har altså, når $t_0 \in J$,

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} \underline{\underline{P}}(\tau)\, d\tau, \qquad t \in J.$$

Bemærk. Hvis løsningerne danner en basis, altså hvis $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ er en fundamentalmatrix, er $W(t) \neq 0$ for alle $t \in J$. Ellers er $W(t) = 0$ for alle $t \in J$.

Bevis. Differentialkvotienten $W'(t)$ kan beregnes som sum af determinanterne for de k matricer, man får ved at differentiere en række i $\underline{\underline{\Phi}}(t)$. Dette følger let af, at determinanten er summen af de med visse fortegn forsynede $k!$ produkter $\varphi_{\nu_1,1}(t) \cdots \varphi_{\nu_k k}(t)$ svarende til permutationerne $(\nu_1, \cdots, \nu_k)$ af $(1, \cdots, k)$,

idet man benytter differentiationsreglen for et produkt af k funktioner. Differentieres den i^{te} række, fås matricen

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{k1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi'_{1i}(t) & \cdots & \varphi'_{ki}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{1k}(t) & \cdots & \varphi_{kk}(t) \end{pmatrix}.$$

Indføres heri de fra differentialligningssystemet hidrørende udtryk for de afledede, antager matricen formen

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{k1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{i1}(t)\varphi_{11}(t)+\cdots+p_{ik}(t)\varphi_{1k}(t) & \cdots & p_{i1}(t)\varphi_{k1}(t)+\cdots+p_{ik}(t)\varphi_{kk}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{1k}(t) & \cdots & \varphi_{kk}(t) \end{pmatrix}.$$

Dennes determinant er sum af determinanterne for de k matricer, man får ved i den i^{te} række at benytte det j^{te} led i hver sum, idet j efterhånden tillægges værdierne $1, \cdots, k$. For $j \neq i$ fås herved en matrix, i hvilken den i^{te} række er fremgået af den j^{te} række ved multiplikation med $p_{ij}(t)$, og hvis determinant følgelig er 0. For $j = i$ fås den matrix, der fremgår af $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ ved at multiplicere den i^{te} række med $p_{ii}(t)$. Dens determinant er følgelig $p_{ii}(t)\,W(t)$. Ved addition ses, at $W'(t) = [p_{11}(t)+\cdots+p_{kk}(t)]\,W(t)$, hvormed sætningen er bevist.

Som vi senere skal se kan man i tilfældet $k=2$ ved hjælp af sætning 3 let finde samtlige løsninger, hvis man blot kender een egentlig løsning.

Sætning 4. Ud fra en fundamentalmatrix $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ for det homogene ligningssystem bestemmes samtlige løsninger til det inhomogene ligningssystem

$$\frac{d\underline{x}_1}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\,\underline{x}_1 + \underline{q}_1(t),$$

idet $t_0 \in J$, ved

$$\underline{x}_1 = \underline{\underline{\Phi}}(t)\,\underline{a}_1 + \underline{\underline{\Phi}}(t)\int_{t_0}^{t} \underline{\underline{\Phi}}(\tau)^{-1}\,\underline{q}_1(\tau)\,d\tau, \qquad t \in J.$$

Bemærk. Vælger man specielt $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ således, at $\underline{\underline{\Phi}}(t_0) = \underline{\underline{E}}$, fås for $\underline{a}_1 = \underline{x}_{0_1}$ den løsning $\underline{\varphi}_1$, for hvilken $\underline{\varphi}_1(t_0) = \underline{x}_{0_1}$. For $k = 1$ fås den tidligere udledte løsningsformel.

Bevis. Vi benytter „de arbitrære konstanters variationsmetode". Da $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ er regulær for alle $t \in J$, kan enhver funktion $\underline{\varphi}_1(t) : J \to V$ på en og kun een måde skrives på formen $\underline{\varphi}(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t)\,\underline{\psi}_1(t)$, nemlig ved at sætte $\underline{\psi}_1(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t)^{-1}\,\underline{\varphi}_1(t)$. Da elementerne i $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ er differentiable, bliver $\underline{\varphi}_1(t)$ og $\underline{\psi}_1(t)$ samtidig differentiable. Betingelsen for, at $\underline{\varphi}$ er løsning til det inhomogene system er nu, at

$$\underline{\underline{\Phi}}(t)\,\frac{d\underline{\psi}_1(t)}{dt} + \frac{d\underline{\underline{\Phi}}(t)}{dt}\,\underline{\psi}_1(t) = \underline{\underline{P}}(t)\,\underline{\underline{\Phi}}(t)\,\underline{\psi}_1(t) + \underline{q}_1(t).$$

Nu er hver søjle i $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ løsning til det homogene system; altså er

$$\frac{d\underline{\underline{\Phi}}(t)}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\,\underline{\underline{\Phi}}(t).$$

Den fundne ligning antager derfor formen

$$\frac{d\underline{\psi}_1(t)}{dt} = \underline{\underline{\Phi}}(t)^{-1}\,\underline{q}_1(t).$$

Samtlige løsninger til denne ligning bestemmes ved

$$\underline{\psi}_1(t) = \underline{a}_1 + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{\Phi}}(t)^{-1}\,\underline{q}_1(\tau)\,d\tau,$$

hvoraf det ønskede resultat.

I sætning 4 er indeholdt følgende resultat, som også let kunde vises direkte:

Sætning 5. Samtlige løsninger til det inhomogene system fås ved til een løsning til systemet at addere samtlige løsninger til det homogene system.

Tilfældet $k=2$. I dette tilfælde består det homogene system af to differentialligninger, som vi kort skriver

$$\begin{cases} x_1' = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 \\ x_2' = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 . \end{cases}$$

Antages det, at (φ_1, φ_2) er en egentlig løsning til dette system, finder vi af sætning 3, at der for enhver løsning (x_1, x_2) til systemet må gælde

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & \varphi_1 \\ x_2 & \varphi_2 \end{pmatrix} = x_1\varphi_2 - x_2\varphi_1 = c\exp\int(p_{11}+p_{22})dt = cL(t),$$

hvor $\int(p_{11}+p_{22})dt$ står for en vilkårlig af stamfunktionerne til $p_{11}+p_{22}$, og c er en konstant. Antages nu f.eks. at $\varphi_1(t)\neq 0$ i J, finder man $x_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}x_1 - c\frac{L}{\varphi_1}$, og får ved indsætning i den første af differentialligningerne

$$x_1' = \left(p_{11} + p_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)x_1 - p_{12}c\frac{L}{\varphi_1},$$

altså en lineær differentialligning af første orden, for hvilken vi har en færdig løsningsformel. Enhver løsning x_1 til denne ligning vil da sammen med det tilsvarende $x_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}x_1 - c\frac{L}{\varphi_1}$ tilfredsstille den første differentialligning, og som en lille regning viser også den anden differentialligning. Hvis $\varphi_2(t)\neq 0$ i J kan man også udtrykke x_1 ved x_2 og derved få en bestemmelse af samtlige løsninger (x_1, x_2) til systemet. Hvis ingen af forudsætningerne er opfyldt, må man inddele J i intervaller, hvori den ene eller den anden forudsætning er opfyldt. Da $(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \neq (0,0)$ for alle $t\in J$, vil ethvert punkt $t\in J$ have en omegn, hvori enten $\varphi_1(t)\neq 0$ eller $\varphi_2(t)\neq 0$.

§6. En lineær differentialligning af k^{te} orden.

En differentialligning

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}\right)$$

af k^{te} orden kaldes lineær, hvis funktionen $f(t, x_1, \cdots, x_k)$ er et førstegradspolynomium i $x_1, \cdots, x_k$, altså hvis den har formen

$$\frac{d^k x}{dt^k} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt} + \cdots + p_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + q(t),$$

hvor funktionerne $p_0, p_1, \cdots, p_{k-1}$ og q er kontinuerte på et interval J på $\mathbb{R}$. Ligningen kaldes homogen, hvis funktionen $q(t)$ er 0, ellers inhomogen.

Idet ligningen er ensgyldig med det lineære differentialligningssystem af første orden

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_k}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \cdots & p_{k-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix}$$

(hvor der står nuller på de ubeskrevne pladser i den kvadratiske matrix) i den forstand, at systemets løsninger netop er alle søjler

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(k-1)}(t) \end{pmatrix},$$

hvor $\varphi(t)$ er en løsning til ligningen af k^{te} orden, slutter vi straks af resultaterne i §5:

Sætning 1. For ethvert talsæt $(t_0, x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{k0}) \in J \times V$ findes en og kun een maksimal løsning φ til den lineære differentialligning af k^{te} orden, for hvilken

$$\left(\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \cdots, \varphi^{(k-1)}(t_0)\right) = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{k0}).$$

Enhver maksimal løsning har definitionsintervallet J. Enhver løsning er restriktion af en maksimal løsning.

Sætning 2. De maksimale løsninger til den homogene ligning

$$\frac{d^k x}{dt^k} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt} + \cdots + p_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}$$

danner et k-dimensionalt vektorrum (over det til grund lagte tallegeme $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$).

Bevis. Det er klart, at løsningerne udgør et vektorrum. At det er k-dimensionalt følger af, at der til den homogene ligning af k^{te} orden svarer det homogene ligningssystem af første orden, og at den bijektive afbildning af løsningsrummet for ligningen af k^{te} orden på løsningsrummet for ligningssystemet af første orden, der består i, at vi til en løsning $\varphi(t)$ lader svare søjlen $(*)$, er en lineær afbildning, hvorfor de to rum må have samme dimension.

For et vilkårligt sæt af k løsninger $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_k(t)$ til den homogene ligning af k^{te} orden kan vi danne matricen

$$\underline{\underline{\Phi}}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_k(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_k'(t) \\ \vdots & & \\ \varphi_1^{(k-1)}(t) & \cdots & \varphi_k^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Denne er regulær for alle $t \in J$, hvis og kun hvis sættet

$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)$ er en basis for løsningsrummet for ligningen af k^{te} orden. Ellers er den singulær for alle $t \in J$.

Sætning 3. For et vilkårligt sæt af k løsninger $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ til den homogene ligning af k^{te} orden er Wronski determinanten

$$W(t) = \det \underline{\underline{\Phi}}(t)$$

en løsning til differentialligningen

$$\frac{dW(t)}{dt} = p_{k-1}(t)\, W(t),$$

og man har altså, når $t_0 \in J$,

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} p_{k-1}(\tau)\, d\tau.$$

Sætning 4. Ud fra en basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ for løsningsrummet for den homogene ligning bestemmes samtlige løsninger til den inhomogene ligning af k^{te} orden ved

$$\varphi(t) = a_1 \varphi_1(t) + \cdots + a_k \varphi_k(t) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+i} \varphi_i(t) \int_{t_0}^{t} \frac{W_i(\tau)}{W(\tau)} q(\tau)\, d\tau,$$

hvor $W_i(t)$ er determinanten for den matrix, der fremgår af $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ ved at slette k^{te} række og i^{te} søjle.

Bevis. Sætningen fremgår af sætning 4 i § 5, idet man benytter, at elementerne i sidste søjle af $\underline{\underline{\Phi}}(t)^{-1}$ er $(-1)^{k+i} \dfrac{W_i(t)}{W(t)}$.

Sætning 5. Samtlige løsninger til den inhomogene ligning af k^{te} orden fås ved til een løsning til den inhomogene ligning at lægge samtlige løsninger til den homogene ligning.

§ 7. Lineære homogene differentialligningssystemer af første orden med konstante koefficienter.

For et homogent ligningssystem

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k \\ \cdots \\ \frac{dx_k}{dt} = a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kk}x_k \end{cases} \qquad \text{eller} \quad \frac{d\underline{\underline{x}}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}$$

med konstante koefficienter a_{ij}, altså med konstant matrix $\underline{\underline{A}}$, er intervallet J hele $\mathbb{R}$.

For at bestemme den løsning $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{\varphi}}(t)$, der for en given værdi af t, for eksempel $t=0$, har en given værdi $\underline{\underline{x}}_0$, anvender vi successive approksimationer.

Vi sætter $\underline{\underline{\varphi}}_0(t) = \underline{\underline{x}}_0$ og definerer $\underline{\underline{\varphi}}_n(t)$ ved

$$\underline{\underline{\varphi}}_n(t) = \underline{\underline{x}}_0 + \int_0^t \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\varphi}}_{n-1}(\tau)\,d\tau.$$

Da vil $\underline{\underline{\varphi}}_n(t)$ konvergere ligeligt mod $\underline{\underline{\varphi}}(t)$ på ethvert begrænset interval. Vi finder

$$\underline{\underline{\varphi}}_1(t) = \underline{\underline{x}}_0 + \int_0^t \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_0\,d\tau = \underline{\underline{x}}_0 + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_0 t$$

$$\underline{\underline{\varphi}}_2(t) = \underline{\underline{x}}_0 + \int_0^t \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}}_0 + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_0\tau)\,d\tau = \underline{\underline{x}}_0 + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_0 t + \frac{1}{2}\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{x}}_0 t^2$$

$$\cdots$$

$$\underline{\underline{\varphi}}_n(t) = \underline{\underline{x}}_0 + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_0 t + \cdots + \frac{1}{n!}\underline{\underline{A}}^n\underline{\underline{x}}_0 t^n$$

$$= \left(\underline{\underline{E}} + \frac{1}{1!}\underline{\underline{A}}t + \cdots + \frac{1}{n!}\underline{\underline{A}}^n t^n\right)\underline{\underline{x}}_0.$$

Nu bemærker vi, at hvis en følge af matricer $\underline{\underline{B}}^{(n)} = [b_{ij}^{(n)}]$ har den egenskab, at følgen af vektorer $\underline{\underline{B}}^{(n)}\underline{\underline{x}}_0$ for ethvert $\underline{\underline{x}}_0$ er konvergent, er følgen af matricer konvergent. Thi vælges for $\underline{\underline{x}}_0$ den j^{te} enhedsvektor, er $\underline{\underline{B}}^{(n)}\underline{\underline{x}}_0$ jo den j^{te} søjle i $\underline{\underline{B}}^{(n)}$. Da følgen $\underline{\underline{\varphi}}_n(t)$ er konvergent for ethvert $\underline{\underline{x}}_0$ og ethvert t, slutter vi altså, at

følgen af matricer $\underline{\underline{E}} + \frac{1}{1!}\underline{\underline{A}}t + \cdots + \frac{1}{n!}\underline{\underline{A}}^n t^n$ er konvergent for ethvert t. Vælges specielt $t=1$, fås en grænsematrix, som vi naturligvis betegner

$$\exp \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}} + \frac{1}{1!}\underline{\underline{A}} + \cdots + \frac{1}{n!}\underline{\underline{A}}^n + \cdots .$$

For et vilkårligt t bliver grænsematricen da $\exp(\underline{\underline{A}}t)$, og vi finder for den søgte løsning $\underline{\varphi}(t)$ formlen

$$\underline{\varphi}(t) = [\exp(\underline{\underline{A}}t)]\,\underline{x}_0 ,$$

som for $k=1$, hvor talen er om ligningen $\frac{dx}{dt} = ax$, giver den kendte formel for løsningen $x = x_0 \exp(at)$ [bemærk, at i løsningen for $k>1$ må $\underline{x}_0$ stå efter $\exp(\underline{\underline{A}}t)$].

En anden fremgangsmåde er at foretage en koordinattransformation

$$\underline{x} = \underline{\underline{S}}\,\underline{y}, \qquad \underline{\underline{S}} \text{ regulær},$$

i rummet V. Herved erstattes ligningssystemet med systemet

$$\underline{\underline{S}}\,\frac{d\underline{y}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}\,\underline{y} \quad \text{eller} \quad \frac{d\underline{y}}{dt} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}\,\underline{y}.$$

Vi benytter nu det fundamentale resultat fra algebraen (jfr. § 9), at man i tilfældet $V = \mathbb{C}^k$ kan vælge $\underline{\underline{S}}$ således, at $\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}$ får <u>Jordans normalform</u>

$$\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \boxed{\underline{\underline{B}}_1} & & & \\ & \boxed{\underline{\underline{B}}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\underline{\underline{B}}_q} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{B}}_1, \underline{\underline{B}}_2, \ldots, \underline{\underline{B}}_q$ er kvadratiske matricer langs hoveddiagonalen, uden for hvilke der står lutter nuller, og som hver for sig er af formen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

med et tal λ i hoveddiagonalen, 1 i skrålinien lige over og ellers nuller. Samtlige tal i hoveddiagonalen i $\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}$ er samtlige rødder i polynomiet $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}})$, hver skrevet så ofte som multiplicitetet angiver, men samme rod kan forekomme i flere af matricerne $\underline{\underline{B}}_p$.

Efter en sådan transformation vil ligningerne i det nye system falde i klasser, en klasse svarende til hver af matricerne $\underline{\underline{B}}_p$. Hvis de af de variable $y_1, \cdots, y_k$, der svarer til de i et bestemt $\underline{\underline{B}}_p$ figurerende rækkenumre, betegnes $z_1, \cdots, z_\ell$, lyder den pågældende klasse af ligninger

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda z_1 + z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= \lambda z_2 + z_3 \\ &\cdots \\ \frac{dz_{\ell-1}}{dt} &= \lambda z_{\ell-1} + z_\ell \\ \frac{dz_\ell}{dt} &= \lambda z_\ell . \end{aligned}$$

Dette systems løsninger findes vel hurtigst ved at man sætter

$$z_i = u_i \exp(\lambda t), \qquad \frac{dz_i}{dt} = \left(\frac{du_i}{dt} + \lambda u_i\right)\exp(\lambda t),$$

hvorved fås systemet

$$\frac{du_1}{dt} = u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = u_3, \quad \cdots, \quad \frac{du_{\ell-1}}{dt} = u_\ell, \quad \frac{du_\ell}{dt} = 0,$$

hvis løsninger er $(u_1, u_2, \cdots, u_\ell) = (P(t), P'(t), \cdots, P^{(\ell-1)}(t))$,

hvor $P(t)$ er et vilkårligt polynomium af grad $< l$. Man får altså

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(t) \\ P'(t) \\ \vdots \\ P^{(l-1)}(t) \end{pmatrix} \exp(\lambda t).$$

Vender man tilbage til det oprindelige ligningssystem, finder man samtlige løsninger skrevet på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} P_1(t)\exp(\lambda_1 t) \\ \vdots \\ P_1^{(l_1-1)}(t)\exp(\lambda_1 t) \\ \vdots \\ P_q(t)\exp(\lambda_q t) \\ \vdots \\ P_q^{(l_q-1)}(t)\exp(\lambda_q t) \end{pmatrix},$$

hvor λ_p betegner det i matricen $\underline{\underline{B}}_p$ $(p = 1, \ldots, q)$ optrædende λ, og l_p denne matrix' orden, og $P_p(t)$ er et vilkårligt polynomium af grad $< l_p$. Talt optræder i disse polynomier k koefficienter. De k løsninger, der opnås ved at vælge alle disse koefficienter påner een $= 0$, og denne ene $= 1$, vil udgøre en basis for løsningsrummet.

Hvis $\underline{\underline{A}}$ har reelle elementer, kan Jordans normalform opnås ved et $\underline{\underline{S}}$ med reelle elementer, hvis og kun hvis polynomiet $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})$ har lutter reelle rødder, og metoden er derfor i dette tilfælde anvendelig også i $V = \mathbb{R}^k$. Ellers må man operere i $V = \mathbb{C}^k$. Herved fås alle komplekse løsninger, blandt hvilke man derefter kan udskille de reelle.

§8. En lineær homogen differentialligning af k^{te} orden med konstante koefficienter.

En homogen ligning

$$\frac{d^k x}{dt^k} + a_{k-1}\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \cdots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

med konstante koefficienter er ensbetydende med systemet

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_k}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

En simpel udregning viser, at

$$(-1)^k \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = F(\lambda).$$

[Idet søjlerne i $\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}$ betegnes $\underline{\underline{h}}_1, \underline{\underline{h}}_2, \cdots, \underline{\underline{h}}_k$, gælder $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = \det(\underline{\underline{h}}_1, \underline{\underline{h}}_2, \cdots, \underline{\underline{h}}_k) = \det(\underline{\underline{h}}_1 + \lambda\underline{\underline{h}}_2 + \cdots + \lambda^{k-1}\underline{\underline{h}}_k, \underline{\underline{h}}_2, \cdots, \underline{\underline{h}}_k)$. Opløsning efter første søjle giver resultatet.]

Idet vi opererer i $V = \mathbb{C}^k$, viser slutresultatet i §7, at enhver løsning $(x_1, \cdots, x_k) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_k(t))$ til systemet af første orden må bestå af funktioner af formen

$$R_1(t)\exp(\lambda_1 t) + \cdots + R_q(t)\exp(\lambda_q t),$$

hvor hvert $R_p(t)$ er et polynomium af grad $< l_p$. Da løsningerne til systemet er alle sæt $(\varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(k-1)}(t))$, hvor $\varphi(t)$ er en løsning til ligningen af k^{te} orden, må specielt enhver løsning til denne ligning have den nævnte form. Da imidlertid løsningsrummet for ligningen af k^{te} orden har dimension k, er dette kun muligt, når $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ er indbyrdes forskellige, og løs-

nings-rummet består af alle funktioner af den pågældende form. Matricerne $\underline{\underline{B}}_p$ i Jordans normalform må altså i dette tilfælde indeholde indbyrdes forskellige λ, og for hvert $p = 1, \ldots, q$ må l_p simpelthen være multipliciteten af λ_p som rod i polynomiet $F(\lambda)$.

Hermed er vist:

Sætning. Løsningsrummet for den lineære homogene differentialligning af k^{te} orden har som basis de k funktioner

$$\exp(\lambda_1 t),\ t\exp(\lambda_1 t),\ \ldots,\ t^{l_1-1}\exp(\lambda_1 t),$$
$$\ldots$$
$$\exp(\lambda_q t),\ t\exp(\lambda_q t),\ \ldots,\ t^{l_q-1}\exp(\lambda_q t),$$

hvor $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ er de indbyrdes forskellige rødder i polynomiet $F(\lambda)$, og $l_1, \ldots, l_q$ er disses multipliciteter.

Hvis koefficienterne $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ er reelle, og $F(\lambda)$ har lutter reelle rødder, giver sætningen også en basis for løsningsrummet svarende til at vi opererer i $V = \mathbb{R}^k$. Ellers må vi operere i $V = \mathbb{C}^k$. Ud fra de komplekse basisfunktioner er det dog let at få en basis bestående af reelle funktioner. Thi når $F(\lambda)$ har reelle koefficienter, vil de imaginære rødder falde i par af konjugerede med samme multiplicitet. Er $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ et sådant par af rødder hver med multipliciteten l, ser man, at vi i stedet for de $2l$ basisfunktioner

$$\exp(\alpha+i\beta)t,\ t\exp(\alpha+i\beta)t,\ \ldots,\ t^{l-1}\exp(\alpha+i\beta)t,$$
$$\exp(\alpha-i\beta)t,\ t\exp(\alpha-i\beta)t,\ \ldots,\ t^{l-1}\exp(\alpha-i\beta)t,$$

kan benytte de $2l$ reelle funktioner

$$\exp\alpha t\cos\beta t,\ t\exp\alpha t\cos\beta t,\ \ldots,\ t^{l-1}\exp\alpha t\cos\beta t,$$
$$\exp\alpha t\sin\beta t,\ t\exp\alpha t\sin\beta t,\ \ldots,\ t^{l-1}\exp\alpha t\sin\beta t.$$

§9. Jordans normalform.

Vi vil give et bevis for den i §7 benyttede sætning fra algebraen.

Lad V være et k-dimensionalt vektorrum over $\mathbb{C}$ og $f: V \to V$ en vilkårlig lineær afbildning af V ind i V (en endomorfi i V). Idet $\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_k$ er en vilkårlig basis for V, er, når vi sætter $\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_k\underline{e}_k$ og $\underline{x}' = f(\underline{x}) = x_1'\underline{e}_1 + \cdots + x_k'\underline{e}_k$, afbildningen bestemt ved

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{k1} \cdots a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{x}}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}},$$

hvor søjlerne i $\underline{\underline{A}}$ er koordinatsættene for $\underline{e}_1' = f(\underline{e}_1), \cdots, \underline{e}_k' = f(\underline{e}_k)$ med hensyn til basis $\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_k$. Omvendt bestemmer for given basis $\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_k$ enhver $k \times k$ matrix $\underline{\underline{A}}$ en lineær afbildning af V ind i V.

Indholdet af den anførte sætning er nu, at det for enhver lineær afbildning er muligt at vælge basis på en sådan måde, at basisvektorerne falder i klasser, hver bestående af et antal på hinanden følgende basisvektorer, således at for hver sådan klasse $\underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_\ell$ er afbildningen for et vist λ bestemt ved

$$f(\underline{b}_1) = \lambda\underline{b}_1, \quad f(\underline{b}_2) = \underline{b}_1 + \lambda\underline{b}_2, \quad \cdots, \quad f(\underline{b}_\ell) = \underline{b}_{\ell-1} + \lambda\underline{b}_\ell.$$

Thi med q klasser på henholdsvis $l_1, \cdots, l_q$ basisvektorer og med tilsvarende værdier $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ er dette ensbetydende med at sige, at matricen ved det pågældende valg af basis har Jordans normalform

$$\begin{pmatrix} \boxed{\underline{\underline{B}}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\underline{\underline{B}}_q} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{B}}_p$ $(p=1,\dots,q)$ er $l_p \times l_p$ matricen

$$\begin{pmatrix} \lambda_p & 1 & & \\ & \lambda_p & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

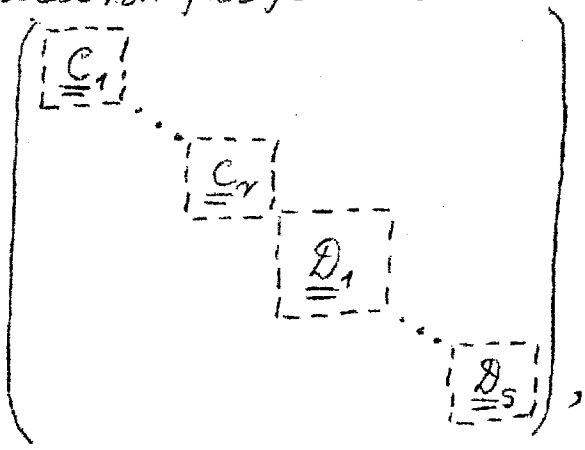
Vi fører beviset ved induktion efter dimensionstallet k. For $k=1$ er påstanden evident. Vi antager den rigtig for alle dimensionstal $<k$ og vil godtgøre den for dimensionstallet k.

Vi forudskikker den bemærkning, at hvis et vektorrum $\mathcal{L}$ ved en lineær afbildning g er afbildet på et vektorrum $\mathcal{M}$, og et underrum $\mathcal{H}$ af $\mathcal{L}$ ved restriktionen af g til $\mathcal{H}$ er afbildet bijektivt på $\mathcal{M}$, så vil, når $\mathcal{K}=\{\underline{x}\in\mathcal{L} \mid g(\underline{x})=\underline{0}\}$ er kernen for g, gælde $\mathcal{L}=\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$. Det er klart, at $\mathcal{H}\cap\mathcal{K}=\{\underline{0}\}$. Vi skal altså blot vise, at enhver vektor $\underline{x}\in\mathcal{L}$ kan skrives på formen $\underline{x}=\underline{y}+\underline{z}$, hvor $\underline{y}\in\mathcal{H}$ og $\underline{z}\in\mathcal{K}$. Herfra bemærkes, at da g afbilder $\mathcal{H}$ på $\mathcal{M}$, findes et $\underline{y}\in\mathcal{H}$, for hvilket $g(\underline{y})=g(\underline{x})$. Sættes $\underline{x}=\underline{y}+\underline{z}$, altså $\underline{z}=\underline{x}-\underline{y}$, må da gælde $g(\underline{z})=g(\underline{x})-g(\underline{y})=\underline{0}$, altså $\underline{z}\in\mathcal{K}$.

Idet vi nu begynder med en eller anden basis i V, bemærker vi, at afbildningen $f-\lambda e$, hvor e betegner den identiske afbildning, har matricen $\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}$. Vælges λ som rod i polynomiet $\det(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}})$, vil billedet $(f-\lambda e)(V)$ af V ved $f-\lambda e$, der jo er underrummet bestående af alle linearkombinationer af $(f-\lambda e)\underline{e}_1, \dots, (f-\lambda e)\underline{e}_k$, have en lavere dimension end V (dets dimension er rangen af $\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}$). Hvis matricen for $f-\lambda e$ i en eller anden basis har Jordans normalform, har matricen for f det også (idet den fås ved at addere λ til alle led i hoveddiagonalen). Det er altså nok at betragte $f-\lambda e$, eller hvad der kommer ud på det

samme: V_i kan antage, at f selv har den egenskab, at $f(V)$ er af lavere dimension end V.

Underrummet $f(V)$ afbildes åbenbart ved f ind i sig selv. Da $f(V)$ har lavere dimension end V, findes altså ifølge induktionsantagelsen en basis for $f(V)$, i hvilken restriktionen af f til $f(V)$ har Jordans normalform. Vi kan tænke os basisvektorerne ordnet således, at denne matrix får formen



hvor $\underline{\underline{C}}_1, \cdots, \underline{\underline{C}}_r$ er de delmatricer, der har 0 i hoveddiagonalen, og $\underline{\underline{D}}_1, \cdots, \underline{\underline{D}}_s$ de øvrige. De underrum, der udspændes af de til disse delmatricer svarende basisvektorer, betegnes $C_1, \cdots, C_r, D_1, \cdots, D_s$. Man bemærker, at hvert af disse underrum ved f afbildes ind i sig selv, og underrummene $D_1, \cdots, D_s$ endda på sig selv, idet determinanterne for matricerne $\underline{\underline{D}}_1, \cdots, \underline{\underline{D}}_s$ er $\neq 0$.

For en vilkårlig af matricerne $\underline{\underline{C}}_i$ betegner vi de tilsvarende basisvektorer med $\underline{c}_{i1}, \cdots, \underline{c}_{i l_i}$. Da der står 0 i hoveddiagonalen, gælder for disse

$$f(\underline{c}_{i1}) = \underline{0}, \quad f(\underline{c}_{i2}) = \underline{c}_{i1}, \cdots, f(\underline{c}_{i l_i}) = \underline{c}_{i l_i - 1}.$$

Da $\underline{c}_{i l_i} \in f(V)$, kan vi vælge en vektor $\underline{c}_{i\, l_i+1} \in V$ således, at

$$f(\underline{c}_{i\, l_i+1}) = \underline{c}_{i l_i}.$$

Vi vil vise, at basisvektorerne i $f(V)$ sammen

med vektorerne $\underline{c}_{1l_1+1}, \cdots, \underline{c}_{rl_r+1}$ udgør et lineært uafhængigt sæt af vektorer. Hertil skal vises, at hvis en linearkombination

$$\underline{x} = \gamma_1 \underline{c}_{1l_1+1} + \cdots + \gamma_r \underline{c}_{rl_r+1}$$

tilhører $f(V)$, er alle koefficienterne $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ lig med 0. Når $\underline{x}$ tilhører $f(V)$, må

$$f(\underline{x}) = \gamma_1 \underline{c}_{1l_1} + \cdots + \gamma_r \underline{c}_{rl_r}$$

tilhøre $f^2(V)$. Dette er imidlertid netop det underrum af $f(V)$, der udspændes af basisvektorerne i $f(V)$ med undtagelse af $\underline{c}_{1l_1}, \cdots, \underline{c}_{rl_r}$, og i dette underrum kan $f(\underline{x})$ kun ligge, når alle koefficienterne $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ er 0.

Ved til den valgte basis i $f(V)$ at føje vektorerne $\underline{c}_{1l_1+1}, \cdots, \underline{c}_{rl_r+1}$ fås altså et sæt af vektorer, der er basis for et vist underrum U af V, som åbenbart ved f afbildes ind i sig selv, nemlig på $f(V)$. Idet hver vektor $\underline{c}_{il_i+1}$ indskydes lige efter $\underline{c}_{il_i}$, får matricen for restriktionen af f til U ligeledes Jordans normalform, idet den bliver

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}_1^* & & & \\ & \ddots & & \\ & & \underline{\underline{C}}_r^* & \\ & & & \underline{\underline{D}}_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \underline{\underline{D}}_s \end{pmatrix},$$

hvor hvert $\underline{\underline{C}}_i^*$ fremgår af det tilsvarende $\underline{\underline{C}}_i$ ved tilføjelse af en række og en søjle efter skemaet

$$\underline{\underline{C}}_i^* = \begin{pmatrix} \boxed{\underline{\underline{C}}_i} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Lad os nu af denne basis for U udelade vektorerne $\underline{c}_{11}, \cdots, \underline{c}_{r1}$, altså den første basisvektor i hvert af underrummene $C_1, \cdots, C_r$. De tilbageblevne vektorer er da basis for et underrum W af V, der ved f afbildes bijektivt på $f(V)$ [thi hvert sæt $\underline{c}_{i2}, \cdots, \underline{c}_{i\,l_i+1}$ afbildes jo på $\underline{c}_{i1}, \cdots, \underline{c}_{i\,l_i}$; det af $\underline{c}_{i2}, \cdots, \underline{c}_{i\,l_i+1}$ udspændte underrum afbildes altså bijektivt på C_i; og hvert D_j afbildes bijektivt på sig selv]. Af forbemærkningen fremgår derfor, at $V = W \oplus K$, hvor $K = \{\underline{x} \mid f(\underline{x}) = \underline{0}\}$ er kernen for f. I dette underrum K ligger vektorerne $\underline{c}_{11}, \cdots, \underline{c}_{r1}$. Vi føjer til disse yderligere vektorer $\underline{n}_1, \cdots, \underline{n}_t$, således at vi får en basis for K. Da vil basisvektorerne for U sammen med vektorerne $\underline{n}_1, \cdots, \underline{n}_t$ være en basis for V, i hvilken matricen for f har Jordans normalform, idet den, hvis vektorerne $\underline{n}_1, \cdots, \underline{n}_t$ anbringes foran den valgte basis for U, bliver

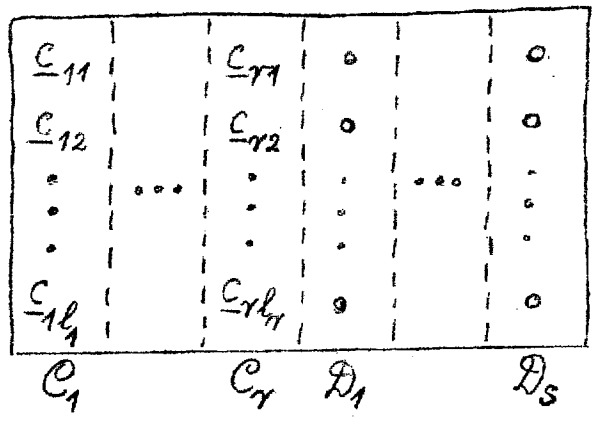
$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & & & & \\ & \boxed{0} & & & \\ & & \boxed{\underline{\underline{C}}_1^*} & & \\ & & & \boxed{\underline{\underline{C}}_r^*} & \\ & & & & \boxed{\underline{\underline{D}}_1} \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \boxed{\underline{\underline{D}}_s} \end{pmatrix}$$

begyndende i hoveddiagonalen med t matricer be-

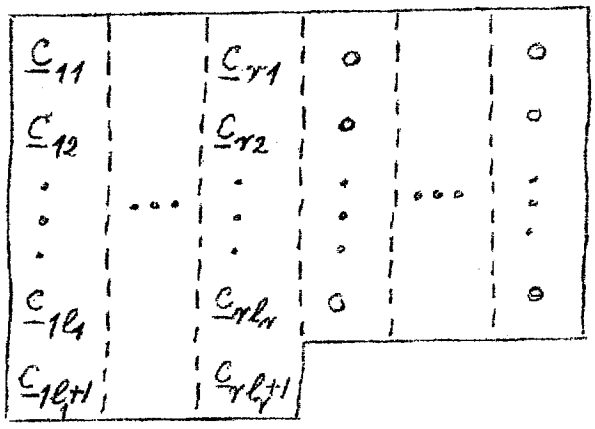
stående af 0 alene. Hermed er beviset fuldført.

Hosstående diagrammer illustrerer bevisførelsen. Indrammningerne illustrerer de vektorrum, der udspændes af de omsluttede basisvektorer [basisvektorerne i $D_1, \ldots, D_s$, som det ikke var nødvendigt at nawngive, er angivet ved prikker].

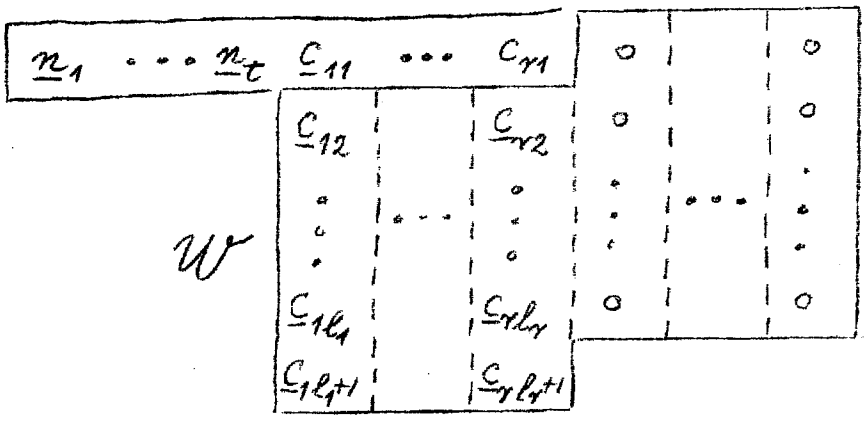
$f(V)$



U

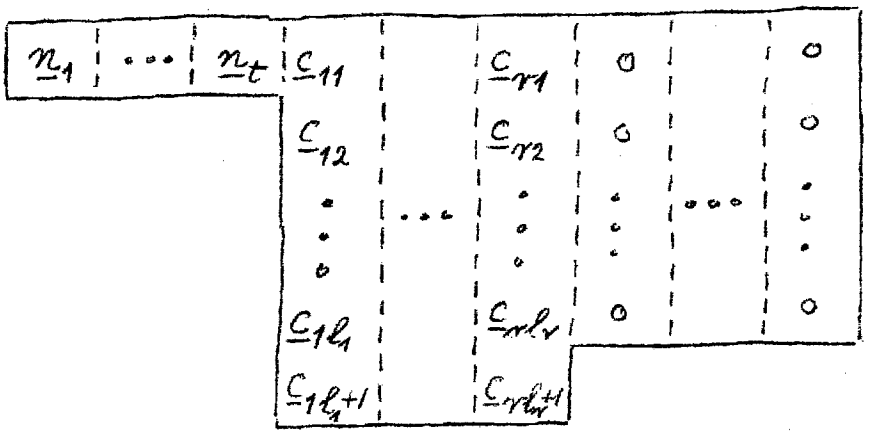


K



W

V



401. Gør rede for, at højre side af differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \qquad (t,x) \in \dot{R}^2,$$

lokalt opfylder en Lipschitzbetingelse, og find samtlige maksimale løsninger.

402. Gør rede for, at højre side af differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}, \qquad (t,x) \in \dot{R} \times]-1,1[,$$

lokalt opfylder en Lipschitzbetingelse, og find samtlige maksimale løsninger.

403. Vis, at enhver halvcirkel

$$y = b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2}, \qquad x \in]a-r, a+r[,$$

tilfredsstiller differentialligningen

$$y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}.$$

Find samtlige maksimale løsninger til denne ligning.
Vink. Differentier ligningen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ tre gange og eliminer a, b, r.

404. I det O er det ene brændpunkt af en hyperbel, bevæger en partikel P sig på den hyperbelgren, der vender hulheden bort fra O, således at det af liniestykket OP i et tidsinterval beskrevne areal er proportionalt med tidsintervallets længde. Vis, at partiklen bevæger sig, som om den var frastødt fra O med en kraft omvendt proportional med afstandens kvadrat.

405. En partikel bevæger sig i den komplekse $z = re^{i\theta}$-plan på en logaritmisk spiral $r = ae^{b\theta}$ med den konstante arealhastighed $\frac{1}{2}r^2\theta' = c$. Vis, at den bevæger sig, som om den var tiltrukket af 0 med en kraft omvendt proportional med r^3.

406. I et retvinklet koordinatsystem med begyndelsespunkt 0 bevæger en partikel P sig således, at $\overrightarrow{OP}$ stadig drejer sig i positiv retning. Bevægelsen bestemmes ved, at P's koordinater x og y er funktioner af tiden. Vis, at arealhastigheden i forhold til 0 er $\frac{1}{2}(-yx' + xy')$.

407. En partikel med massen 1 bevæger sig på ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ med konstant arealhastighed c i forhold til centrum. Vis, at den bevæger sig, som om den var tiltrukket af centrum med en kraft, der i afstanden r fra centrum har størrelsen $\frac{4c^2}{a^2b^2}r$.

Vink. Benyt opg. 406.

408. En partikel med massen 1 bevæger sig på hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ med konstant arealhastighed c i forhold til centrum. Vis, at den bevæger sig, som om den var frastødt af centrum med en kraft, der i afstanden r fra centrum har størrelsen $\frac{4c^2}{a^2b^2}r$.

Vink. Benyt opg. 406.

409. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cos t - x_2 \sin t$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 \sin t + x_2 \cos t \qquad (t, x_1, x_2) \in \dot{R}^3.$$

Vink. Betragt $z = x_1 + i x_2$.

410. Uddrag af sætningerne om en lineær differentialligning af k^{te} orden følgende resultater vedrørende tilfældet $k = 2$.

Hvis $\varphi_1(t)$ er løsning til den homogene ligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt},$$

og $\varphi_1(t) \neq 0$ for alle t i det betragtede interval, er samtlige løsninger bestemt ved

$$x = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t),$$

hvor

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)\int \frac{1}{\varphi_1(t)^2}\left(\exp\int p_1(t)\,dt\right)dt.$$

Hvis φ_1, φ_2 er en basis for løsningsrummet til den homogene ligning, er samtlige løsninger til den inhomogene ligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt} + q(t)$$

bestemt ved

$$x = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\int \frac{\varphi_2(t)}{W(t)}q(t)\,dt + \varphi_2(t)\int \frac{\varphi_1(t)}{W(t)}q(t)\,dt,$$

$$W(t) = \det\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{bmatrix}.$$

[Her står $\int \ldots dt$ overalt for en vilkårligt valgt af de uendelig mange stamfunktioner til den pågældende funktion.]

411. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 \cos t \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \cos t, \end{aligned} \qquad (t, x_1, x_2) \in \dot{R}^3.$$

412. Vis, at differentialligningen

$$\cos x \sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} + (\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x)\frac{dy}{dx} + 2y\cos^3 x = 0$$

har løsningen $y = \sin x$. Find derefter samtlige løsninger i $]0, \frac{1}{2}\pi[\times \dot{R}$. Find endelig samtlige løsninger i $]0, \frac{1}{2}\pi[\times \dot{R}$ til differentialligningen

$$\cos x \sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} + (\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x)\frac{dy}{dx} + 2y\cos^3 x = \cos^2 x \sin^3 x.$$

Vink. Benyt opg. 410.

413. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1, \end{aligned} \qquad (t, x_1, x_2) \in \dot{R}^3,$$

og opskriv den fundamentalmatrix $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ for systemet, som for $t = 0$ er enhedsmatrix. Find dernæst den løsning $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 + t^2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + t, \end{aligned} \qquad (t, x_1, x_2) \in \dot{R}^3,$$

for hvilken $(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) = (-1, 2)$.

Vink. Opgaven skal tjene til illustration af de i teksten givne metoder og bør derfor løses ved brug af disse, uanset at man i et simpelt tilfælde som dette kan nå resultaterne hurtigere ved gætning.

414. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + x_2 - 2x_3\\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 \qquad (t, x_1, x_2, x_3) \in \dot{R}^4,\\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_1 + x_2 \qquad ,\end{aligned}$$

og find den fundamentalmatrix for systemet, som for $t=0$ er enhedsmatrix.

Vink. Anvend en transformation, der fører systemet over i et system med diagonalmatrix.

415. Find den løsning til differentialligningen

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 5\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = -2e^{-t}, \qquad (t,x) \in \dot{R}^2,$$

for hvilken man for $t=0$ har $(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}) = (-1, -2, -10)$.

416. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -2\cos t, \qquad (t,x) \in \dot{R}^2,$$

og den løsning $\varphi(t)$, for hvilken $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=\pi$. Skitser det geometriske billede af φ i intervallet $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, og påvis, at det er symmetrisk om linien $t=\pi$.

Find Fourierrækken for den periodiske funktion $f(t)$ med perioden 2π, der i intervallet $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ stemmer overens med $\varphi(t)$.

Vink. Løsningerne kan findes ved brug af de i teksten givne formler. Man kan med fordel benytte, at enhver løsning også er løsning til den ligning, der fås ved at addere den to gange differentierede ligning.

417. Vis, at funktionen $f(t,x) = |x|$, $(t,x) \in \dot{R}^2$, opfylder en Lipschitz betingelse i hele $\dot{R}^2$, og find samtlige maksimale løsninger til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = |x|.$$

Samme opgave for funktionen $f(t,x) = |\sin x|$.

418. Ved en traktrice forstår grafen af en funktion $f:]a, +\infty[\to \dot{R}$, der opfylder betingelserne (1) $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ for alle $x \in]a, +\infty[$, (2) $f(x) \to 1$ for $x \to a$ fra højre, (3) for ethvert punkt P af grafen er $PN = 1$, hvor N er tangentens skæringspunkt med x-aksen. Vis, at der gennem hvert punkt af strimlen $\{(x,y) \mid 0 < y < 1\}$ går en og kun een traktrice.

For hvilken skare af kurver i strimlen gælder, at tangenten i et vilkårligt punkt P af en kurve i skaren står vinkelret på tangenten til traktricen gennem P.

Vis, at tangenterne til den halve kædelinie $y = \cosh x$, $x > 0$, skærer den til intervallet $]0, +\infty[$ hørende traktrice under ret vinkel, samt at afstanden QP fra et punkt Q af kædelinien til tangentens skæringspunkt P med traktricen er lig med buelængden fra $(0,1)$ til P på kædelinien (traktricen er kædeliniens afvikler).

419. Lad J være et begrænset eller ubegrænset åbent interval på $\dot{R}$, og lad $f(t,x): J\times\dot{R}\to\dot{R}$ være en kontinuert funktion, der lokalt opfylder en Lipschitz betingelse. Vis, at hvis $\varphi:]a,b[\to\dot{R}$ er en maksimal løsning til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),$$

og hvis $b\in J$, da gælder $\varphi(t)\to+\infty$ eller $\varphi(t)\to-\infty$ for $t\to b$ fra venstre.

420. Vis, at der for $k\times k$ matricer gælder

$\exp \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{E}}$

$\exp(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}) = (\exp\underline{\underline{A}})(\exp\underline{\underline{B}})$, når $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$

$\exp\underline{\underline{A}}$ er regulær og $(\exp\underline{\underline{A}})^{-1} = \exp(-\underline{\underline{A}})$

$\underline{\underline{S}}(\exp\underline{\underline{A}})\underline{\underline{S}}^{-1} = \exp(\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1})$, når $\underline{\underline{S}}$ er regulær.

Vis, at hvis $\underline{\underline{A}}$ er en trekantmatrix (d.v.s. alle elementer under hoveddiagonalen er 0) med diagonalelementerne $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, da er $\exp\underline{\underline{A}}$ en trekantmatrix med diagonalelementerne $e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_k}$.

Vis, at hvis $F(\lambda) = (-1)^k(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_k)$ er det karakteristiske polynomium for $\underline{\underline{A}}$, da er $G(\lambda) = (-1)^k(\lambda-e^{\lambda_1})\cdots(\lambda-e^{\lambda_k})$ det karakteristiske polynomium for $\exp\underline{\underline{A}}$.

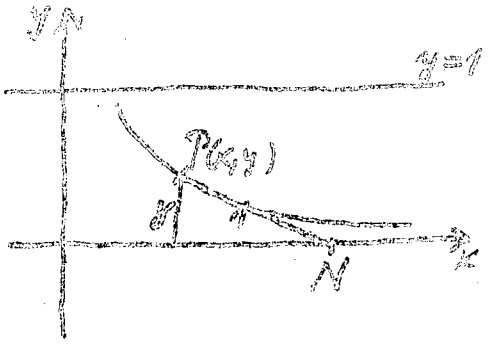
Vis, at $\det(\exp\underline{\underline{A}}) = \exp(\operatorname{tr}\underline{\underline{A}})$.

418. (1) En differentiabel funktion $y = f(x)$ opfyldes betingelserne (1) og (2), hvis og kun hvis

$$y' < 0 \text{ og } y = -\frac{x'}{\sqrt{1+y^2}},$$

d.v.s. hvis og kun hvis

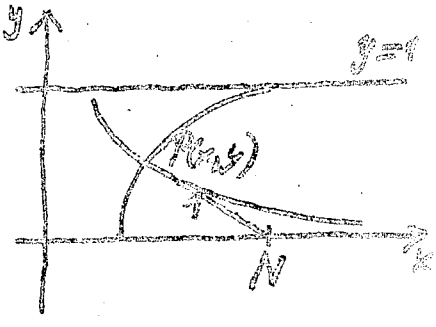
$$0 < y < 1 \text{ og } y' = -\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}.$$



Funktionen $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ har kontinuert afledet. Altså går grenen hvert punkt af strimlen $\mathbb{R} \times]0,1[$ an og kun én maksimal løsning. At enhver maksimal løsning må have et definitionsinterval af formen $]a, +\infty[$, ses ved at lade y som variabel. Da fås ligningen $\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$. Højre side er kontinuert i $]0,1]$ og forholder sig for $y \to 0$ som $-\frac{1}{y}$. Stamfunktionen bestemmes altså ved $x = a - \int_1^y \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\,dz$, som går mod $+\infty$ for $y \to 0$. Vertikalgrafen for den må derfor skære strimlen for $0 < y < 1$ en gang. Desuden, at tredimensionen hvorom må ved parallelforskydning. [Beviset af integrationen er overflødigt]

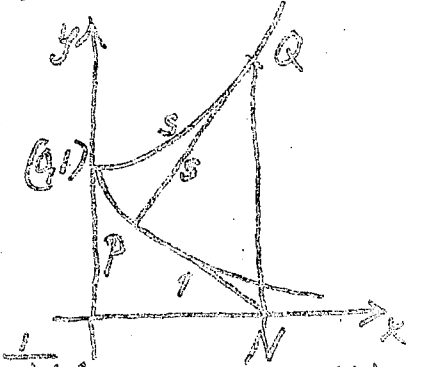
(2) Grafen for en differentiabel funktion $y = g(x)$ i strimlen $\mathbb{R} \times]0,1[$ skærer tredimensionen gennem et vilkårligt af dens punkter P under ret vinkel, hvis og kun hvis

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$



Funktionen $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ har kontinuert afledet. Altså går grenen hvert punkt af strimlen og kun én maksimal løsning. Af ligningen gennemløbes kurven, af kvartcirklerne $y = \sqrt{1-(x-a)^2}$, $a-1 < x < a$, en maksimal løsning. Det enkle ræsonnement.

(3) Enhver jævn kurve fra $(0,1)$ til $Q : (t, \cosh t)$ er $s = \int_0^t \sqrt{1+\sinh^2 t}\,dt = \sinh t$. Afsætter tyngdet $-s$ ret vinkel i Q får punktet $P : (t, \cosh t) - \sinh t \frac{(1, \sinh t)}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} = (t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t})$. Parameteren altså kurvens parameter fremstillingen $x = t - \tanh t$, $y = \frac{1}{\cosh t}$. Kurvens tangent bestemmes ved vektoren $(1 - \frac{1}{\cosh^2 t}, -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t})$, altså ved vektoren $\overrightarrow{PN} = (\tanh t, -\frac{1}{\sinh t})$, hvor N er punktet $(\xi, 0)$. Betingelsen giver $PN = 1$. Da $\sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$ ses, at vinklen QPN er ret.



419. Vi betragter

$$M = \limsup_{t \to b} \varphi(t)$$

for venstre

$$m = \liminf_{t \to b} \varphi(t).$$

for venstre

Hvis $m < M$, vælges x_0 og $r > 0$ således at

$$m < x_0 - r, \quad x_0 + r < M.$$

Man finder så $\varepsilon > 0$, således at $[b-\varepsilon, b] \subset J$, og således at ethvert interval $]b-\varepsilon, b[$ med $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ indeholder punkter t_1 og t_2 med

$$\varphi(t_1) \geq x_0 + r, \quad \varphi(t_2) \leq x_0 - r.$$

Man kan så (kontinuitetsbetragtning, middelværdisætningen) finde t_3 mellem t_1 og t_2, så at

$$|\varphi(t_3) - x_0| \leq r, \quad |\varphi'(t_3)| \geq \frac{2r}{\varepsilon}.$$

Da $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, strider det mod kontinuitetsbet. af f på $[b-\varepsilon_0, b] \times [x_0 - r, x_0 + r] \subset J \times \mathbb{R}$.

Altså er $m = M$.

At $m = M$ ikke kan være endelig, følger af eksistenssætningen.

Kap. 5. Variationsregning.

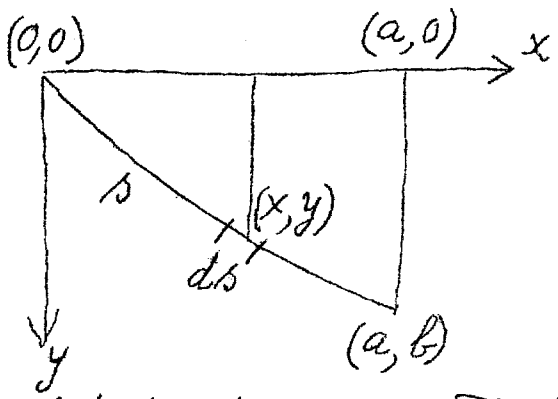
§1. Indledning.

I variationsregningen behandles ekstremumsopgaver for funktionaler (funktioner defineret på et funktionsrum).

I 1696 stillede Johann Bernoulli (1667-1748) den opgave at finde brachistochronen – kurven med mindst faldtid, jfr. nedenfor. Den blev løst af bl.a. broderen Jakob Bernoulli (1654-1705). Medens Johann Bernoullis løsning var af speciel karakter, idet den bragte problemet i forbindelse med en lysstråles vej i et medium med variabelt brydningsforhold og udnyttede Fermats princip, at lysstrålerne i et sådant medium går ad de hurtigste veje, var Jakob Bernoullis løsning af almen karakter og anvendelig på mange andre lignende opgaver. Han er dermed grundlægger af variationsregningen. Den udvikledes af bl.a. Leonhard Euler (1707-1783) og J.-L. Lagrange (1736-1813).

Eksempler på variationsopgaver.

1. Brachistochronen. På en gnidningsfri kurve $y = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, i en lodret plan ($y$-aksen positiv nedad), der forbinder punkterne $(0,0)$ og (a,b), falder en partikel med massen m med udgangsfarten v_0. Koordinaterne x og y er funktioner af tiden t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Idet s er buelængden og v farten til tiden t, har man



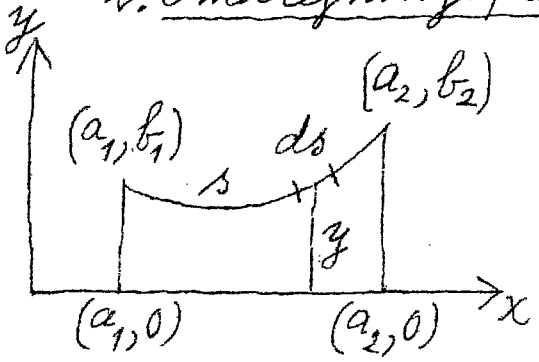
$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgy,$$

og dermed faldtiden

$$T = \int \frac{ds}{v} = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{v_0^2+2gy}}\,dx.$$

Opgaven er at vælge $y = f(x)$, $0 \leq x \leq a$, med $f(0)=0$ og $f(a)=b$ således, at T er mindst mulig.

2. <u>Omdrejningsflade med minimalt areal</u>. To

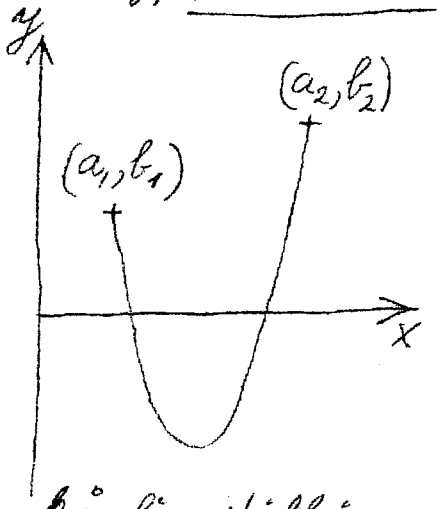


givne punkter (a_1,b_1) og (a_2,b_2) i halvplanen $y>0$ forbindes med en kurve $y=f(x)>0$. Ved omdrejning om x-aksen fås en omdrejningsflade med arealet

$$A = \int 2\pi y\,ds = 2\pi \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Opgaven er at vælge $y=f(x)>0$ med $f(a_1)=b_1$ og $f(a_2)=b_2$ således, at A er mindst mulig.

3. <u>Kædelinie</u>. En fuldstændigt bøjelig, homogen



snor af længde L ophænges i en lodret plan (y-aksen positiv opad) i punkterne (a_1,b_1) og (a_2,b_2). Opgaven er at bestemme ligevægtsstillingen, der er karakteriseret ved, at tyngdepunktet ligger lavest muligt. Idet ϱ er massen pr. længdeenhed, fås for en vilkårlig stilling $y=f(x)$ af snoren ved beregning af statisk moment med hensyn til x-aksen, at tyngdepunktets ordinat y^* er

$$y^* = \frac{1}{L\varrho}\int \varrho y\,ds = \frac{1}{L}\int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Opgaven er at vælge $y=f(x)$ således, at y^* bliver mindst mulig, d.v.s. således, at

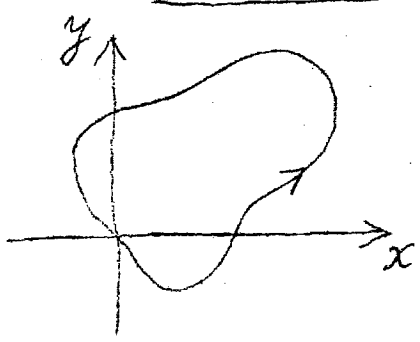
$$I = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

bliver mindst muligt, idet $y = f(x)$ skal opfylde $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, samt den yderligere betingelse

$$\int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx = L.$$

Problemet er således af en mere kompliceret art end de foregående, idet der ud over endepunktsbetingelserne optræder den sidste betingelse.

4. Det isoperimetriske problem. Blandt alle lukkede kurver i planen uden dobbeltpunkter og med given længde L søges de, der omslutter det største areal. Vi kan nøjes med at betragte kurver, der indeholder $(0,0)$. Enhver sådan kurve kan (på mange måder) bestemmes ved en parameterfremstilling $(x,y) = (f(t), g(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, hvor $(f(0), g(0)) = (0,0)$, $(f(1), g(1)) = (0,0)$. I det omløbet antages positivt, er det af kurven omsluttede areal



$$A = \frac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\int_0^1 (xy' - yx')\,dt.$$

Opgaven er at vælge $x = f(t)$ og $y = g(t)$ således, at A bliver størst muligt, idet $x = f(t)$ og $y = g(t)$ skal opfylde $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $g(0) = 0$, $g(1) = 0$, samt den yderligere betingelse

$$\int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = L.$$

5. Geodætiske kurver. På en given flade søges kurver, der er korteste forbindelse mellem to punkter.

6. Plateaus problem. For en eller flere lukkede kurver i rummet søges en flade med den eller disse kurver som rand og med mindst muligt areal.

§2. Det simpleste problem.

Lad $F(x,y,p): \Omega \to \dot{R}$ være en reel funktion defineret på en åben mængde Ω i (x,y,p)-rummet (x,y,p reelle). Vi antager, at $F \in C^2(\Omega)$, altså at F er to gange kontinuert differentiabel. Lad (a_1,b_1) og (a_2,b_2) med $a_1<a_2$ være punkter i (x,y)-planen. En tilladt funktion er en funktion $y=f(x) \in C^2([a_1,a_2])$, altså en to gange kontinuert differentiabel funktion på $[a_1,a_2]$, som opfylder randbetingelserne $f(a_1)=b_1$, $f(a_2)=b_2$, og for hvilken $(x,f(x),f'(x)) \in \Omega$ for alle $x \in [a_1,a_2]$. Vi må naturligvis antage, at Ω, (a_1,b_1), (a_2,b_2) er sådan, at der findes tilladte funktioner. Med afstandsdefinitionen

$$\operatorname{dist}(f,g) = \sup_{x\in[a_1,a_2]} |f(x)-g(x)|$$

er mængden af tilladte funktioner et metrisk rum.

I dette rum betragtes funktionalen

$$I = I(f) = \int_{a_1}^{a_2} F(x,f(x),f'(x))\,dx.$$

Vi siger, at I har lokalt minimum, resp. maksimum, for den tilladte funktion f, såfremt der findes et $\rho>0$ således, at $I(f_1) \geqslant I(f)$, resp. $I(f_1) \leqslant I(f)$, for alle tilladte funktioner f_1, for hvilke $\operatorname{dist}(f,f_1)<\rho$, og vi siger, at I har globalt minimum, resp. maksimum, for f, såfremt $I(f_1) \geqslant I(f)$, resp. $I(f_1) \leqslant I(f)$, for alle tilladte funktioner f_1. Som fælles betegnelse for minimum og maksimum benyttes ekstremum.

Vi søger tilladte funktioner f, for hvilke I har lokalt ekstremum.

Bemærk. For eksistensen af $I(f)$ havde det været nok at antage $F \in C^0(\Omega)$ og $f \in C^1([a_1, a_2])$. De ovenfor gjorte stærkere antagelser $F \in C^2(\Omega)$ og $f \in C^2([a_1, a_2])$ er betingede af den benyttede metode.

Indskud. Opgaven er analog med opgaven at bestemme lokale ekstremumspunkter for en differentiabel funktion $h(x)$ på et åbent interval. Vi har her den nødvendige betingelse $h'(x) = 0$. Denne er som bekendt ikke tilstrækkelig. For to gange differentiabelt $h(x)$ er $h'(x) = 0$ og $h''(x) > 0$ tilstrækkeligt (men ikke nødvendigt) for lokalt minimum, og $h'(x) = 0$ og $h''(x) < 0$ tilstrækkeligt (men ikke nødvendigt) for lokalt maksimum. Vi vil for variationsproblemet kun udlede en til betingelsen $h'(x) = 0$ analog nødvendig betingelse for lokalt ekstremum, men ikke gå ind på det væsentligt vanskeligere spørgsmål om tilstrækkelige betingelser.

Udledelse af nødvendig betingelse for lokalt ekstremum.

Vi antager, at I har lokalt ekstremum for den tilladte funktion f. Nu vælges en vilkårlig funktion $g \in C^2([a_1, a_2])$, for hvilken $g(a_1) = 0$ og $g(a_2) = 0$. Da Ω er åben, vil der findes en omegn af tallet 0, således at funktionen $f + \varepsilon g$ er tilladt for alle ε i denne omegn (*). I denne omegn af 0 betragtes funk-

(*) Thi kurven $(x, y, p) = (x, f(x), f'(x))$, $x \in [a_1, a_2]$, er en kompakt delmængde af Ω. Altså findes et tal $d > 0$ således, at ethvert punkt (x_1, y_1, p_1), for hvilket der for et $x \in [a_1, a_2]$ gælder $\max\{|x_1 - x|, |y_1 - f(x)|, |p_1 - f'(x)|\} < d$, vil tilhøre Ω. Sættes $\max\{\sup_{x \in [a_1, a_2]} |g(x)|, \sup_{x \in [a_1, a_2]} |g'(x)|\} = M$, ses, at $f + \varepsilon g$ er tilladt, når blot $|\varepsilon| M < d$.

tionen

$$\varphi(\varepsilon) = I(f+\varepsilon g) = \int_{a_1}^{a_2} F(x, f(x)+\varepsilon g(x), f'(x)+\varepsilon g'(x))\,dx .$$

Da har φ lokalt ekstremum for $\varepsilon = 0$. Nu er φ differentiabel med

$$\varphi'(\varepsilon) = \int_{a_1}^{a_2} \Big\{ F_y'(x, f(x)+\varepsilon g(x), f'(x)+\varepsilon g'(x))\, g(x) + F_p'(x, f(x)+\varepsilon g(x), f'(x)+\varepsilon g'(x))\, g'(x) \Big\}\,dx .$$

Altså er $\varphi'(0) = 0$, d.v.s.

$$\int_{a_1}^{a_2} \Big\{ F_y'(x, f(x), f'(x))\, g(x) + F_p'(x, f(x), f'(x))\, g'(x) \Big\}\,dx = 0.$$

Ved partiel integration fås (idet $F_p'(x, f(x), f'(x))$ er kontinuert differentiabel ifølge de gjorte forudsætninger, jfr. udregningen nedenfor)

$$\int_{a_1}^{a_2} F_p'(x, f(x), f'(x)]\, g'(x)\,dx = \Big[F_p'(x, f(x), f'(x))\, g(x) \Big]_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} \Big[\frac{d}{dx} F_p'(x, f(x), f'(x)) \Big]\, g(x)\,dx .$$

Her er første led på højre side 0, da $g(a_1)=0$, $g(a_2)=0$. Betingelsen $\varphi'(0)=0$ bliver derfor

$$\int_{a_1}^{a_2} \Big\{ F_y'(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} F_p'(x, f(x), f'(x)) \Big\}\, g(x)\,dx = 0.$$

Den i parentesen optrædende funktion

$$h(x) = F_y'(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} F_p'(x, f(x), f'(x))$$

er kontinuert ($h \in C^0([a_1, a_2])$). Ved udregning fås

$$h(x) = F_y'(x, f(x), f'(x)) - F_{xp}''(x, f(x), f'(x)) - F_{yp}''(x, f(x), f'(x))\, f'(x) - F_{pp}''(x, f(x), f'(x))\, f''(x).$$

Vi indskyder nu:

<u>Lemma.</u> Hvis en funktion $h \in C^0([a_1, a_2])$ for et helt tal $n \geq 0$ har den egenskab, at

$$\int_{a_1}^{a_2} h(x)\, g(x)\,dx = 0$$

for enhver funktion $g \in C^n([a_1, a_2])$, for hvilken $g(a_1)=0$ og $g(a_2)=0$, da er $h(x)=0$ for alle $x \in [a_1, a_2]$.

Bevis. Indirekte. Hvis der fandtes et $x \in [a_1, a_2]$, for hvilket f.eks. $h(x) > 0$, da fandtes der ifølge kontinuiteten et delinterval $]x_1, x_2[$ af $[a_1, a_2]$, hvori $h(x) > 0$. Nu vælges $g \in C^n([a_1, a_2])$ således, at $g(x) = 0$ for $x \in [a_1, x_1]$ og $x \in [x_2, a_2]$, og $g(x) > 0$ for $x \in]x_1, x_2[$. Dette er muligt, f.eks.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \in [a_1, x_1] \text{ og } x \in [x_2, a_2] \\ (x - x_1)^{n+1}(x_2 - x)^{n+1} & \text{for } x \in]x_1, x_2[. \end{cases}$$

Da er $\int_{a_1}^{a_2} h(x)\, g(x)\, dx > 0$ i strid med antagelsen.

Ved anvendelse af dette lemma fås nu som nødvendig betingelse for lokalt ekstremum, at $y = f(x)$ tilfredsstiller

Eulers differentialligning

$$\boxed{F'_y(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} F'_p(x, f(x), f'(x)) = 0}$$

eller udførligt skrevet

$$\boxed{\begin{aligned} F'_y(x, f(x), f'(x)) - F''_{xp}(x, f(x), f'(x)) - F''_{yp}(x, f(x), f'(x)) f'(x) \\ - F''_{pp}(x, f(x), f'(x)) f''(x) = 0 \end{aligned}}.$$

Kortere skrives ligningen

$$F'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y') = 0$$

eller

$$F'_y(x, y, y') - F''_{xy'}(x, y, y') - F''_{yy'}(x, y, y') y' - F''_{y'y'}(x, y, y') y'' = 0.$$

Ved denne (lidt letsindige) skrivemåde optræder y' i to forskellige betydninger, nemlig dels inden for parenteserne som afledet af funktionen $y = f(x)$, og dels som index som betegnelse for den tredje variable i funktionen F.

Udtrykket

$$\varphi'(\varepsilon) = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ F'_y(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} F'_p(x, f(x), f'(x)) \right\} g(x)\, dx,$$

som kan dannes for enhver tilladt funktion f, kaldes

variationen af I svarende til tilvækstfunktionen g og betegnes også δI eller $\delta I(f)$. Man bemærker, at δI (opfattet som funktion af g) er en lineær funktional. Variationen af I er analog til differentialet af en funktion af en eller flere variable. Løsningerne til Eulers differentialligning er de funktioner f, for hvilke $\delta I(f) = 0$ for alle $g \in C^2([a_1, a_2])$ med $g(a_1) = 0$, $g(a_2) = 0$. De kaldes derfor stationære funktioner for I. Med en uheldig benævnelse kaldes de også ekstremaler for det betragtede variationsproblem, uanset om de giver ekstremum eller ej.

Da vi ikke vil studere tilstrækkelige betingelser, kan vi i de følgende eksempler til begrundelse for, at vi virkelig løser de stillede opgaver, kun henvise til en plausibilitetsbetragtning.

Hvis funktionen $F(x,y,p)$ ikke afhænger af x, fås ved multiplikation af Eulers differentialligning med y' ligningen

$$\frac{d}{dx}\left[F(x,y,y') - F'_{y'}(x,y,y')\,y'\right] = 0.$$

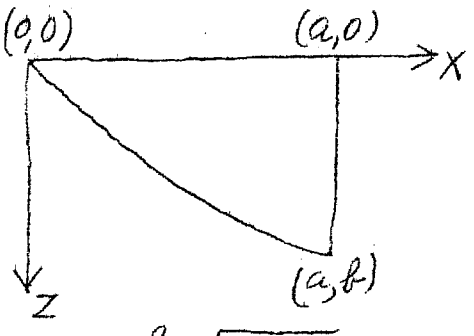
Thi når F ikke afhænger af x, er $\frac{d}{dx}F(x,y,y') = F'_y(x,y,y')\,y' + F'_{y'}(x,y,y')\,y''$, og endvidere er $\frac{d}{dx}\left[F'_{y'}(x,y,y')y'\right] = \frac{d}{dx}\left[F'_{y'}(x,y,y')\right]y' + F'_{y'}(x,y,y')\,y''$. For enhver løsning til Eulers differentialligning gælder altså

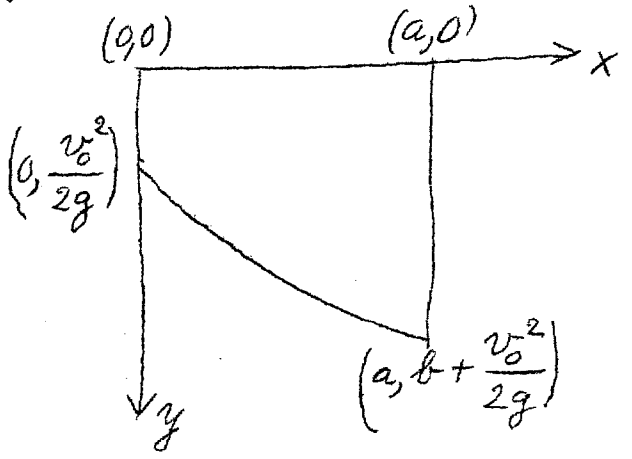
$$\boxed{F(x,y,y') - F'_{y'}(x,y,y')\,y' = \text{konst.}},$$

og enhver løsning til denne ligning, for hvilken $y' \neq 0$, vil også være en løsning til Eulers differentialligning.

Brachistochronen.

Idet vi skriver z i stedet for y, skal vi bestemme $z = z(x)$ blandt de tilladte funktioner således, at





$$J = \int_0^a \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{v_0^2+2gz}}\,dx$$ bliver minimum. Vi parallelforskyder i z-aksens retning, idet vi sætter $z = y - \frac{v_0^2}{2g}$. Opgaven er da at bestemme $y = y(x)$ blandt de tilladte funktioner, således at

$$I = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

er minimum. Randbetingelserne er nu $y(0) = \frac{v_0^2}{2g}$ og $y(a) = b + \frac{v_0^2}{2g}$. Bemærk, at begyndelsesfarten v_0 netop er den fart, der opnås ved et fald fra en udgangsstilling (i hvile) på x-aksen.

Funktionen F er altså

$$F(x,y,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}},$$

og mængden Ω er halvrummet $\Omega = \{(x,y,p) \mid y>0\}$. For at opgaven skal falde ind under teorien som udviklet ovenfor, må vi forudsætte $v_0 > 0$ og $b + \frac{v_0^2}{2g} > 0$.

Eulers differentialligning er

$$(\Delta) \qquad -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y\sqrt{y}} - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = 0,$$

som ved nogen regning omskrives til

$$1 + y'^2 + yy'' = 0,$$

en ligning, som vi ikke uden videre kan løse.

Benytter vi imidlertid, at F ikke afhænger af x, ser vi, at Eulers ligning multipliceret med y' giver

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\,y' = \text{konst.}$$

eller

$$(\ast) \qquad y(1+y'^2) = \text{konst.} = 2\alpha \quad (>0).$$

For et bestemt α må vi for enhver løsning have $0 < y \leqslant 2\alpha$. Vi søger først løsninger, for hvilke $0 < y < 2\alpha$, d.v.s. for hvilke $y' \neq 0$. For en sådan må y' have konstant fortegn (da y' er kontinuert). Vi har altså

$$(\S) \qquad \frac{dy}{dx} = y' = \sqrt{\frac{2\alpha}{y} - 1} \quad \text{eller} \quad \frac{dy}{dx} = y' = -\sqrt{\frac{2\alpha}{y} - 1}.$$

For en sådan løsning kan vi benytte y som uafhængig variabel. Vi får da, idet vi betragter den første ligning

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\alpha}{y} - 1}} = \sqrt{\frac{y}{2\alpha - y}}, \qquad x = \int \sqrt{\frac{y}{2\alpha - y}}\,dy.$$

Vi anvender substitutionen

$$y = 2\alpha \sin^2 \frac{t}{2} = \alpha(1 - \cos t), \quad 0 < t < \pi,$$

og får

$$x = \int \sqrt{\frac{2\alpha \sin^2 \frac{t}{2}}{2\alpha \cos^2 \frac{t}{2}}}\, 2\alpha \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\,dt = \int 2\alpha \sin^2 \frac{t}{2}\,dt$$

$$= \int \alpha(1 - \cos t)\,dt = \alpha(t - \sin t) + \beta.$$

Vi har altså løsningerne

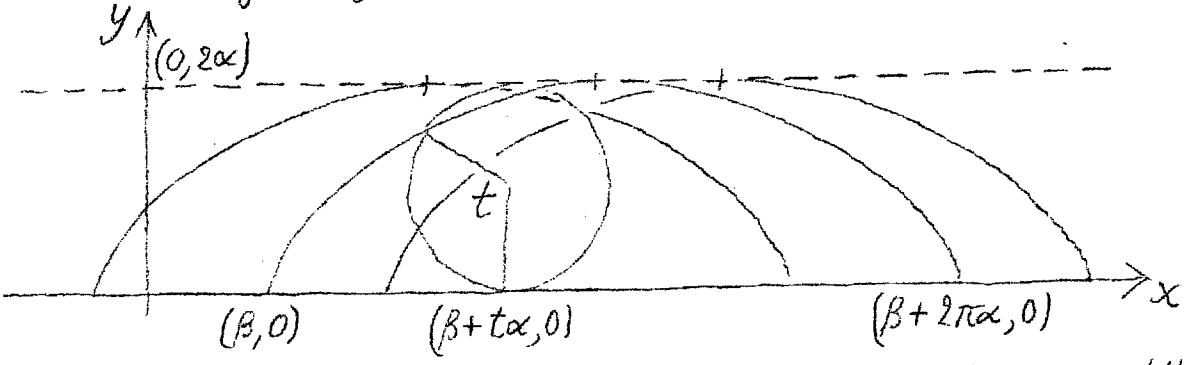
$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha(t - \sin t) + \beta \\ y &= \alpha(1 - \cos t) \end{aligned}\right\} \quad 0 < t < \pi,$$

som fremstiller alle halve cykloidebuer frembragt ved at en cirkel med radius α ruller på x-aksen, regnet fra spids til toppunkt (endepunkterne ikke medregnet). For den anden ligning får vi (på grund af symmetri) de halve cykloidebuer

regnet fra toppunkt til spids (endepunkterne ikke medregnet). Som løsninger til ligningen (✻) får vi derfor cykloidebuerne

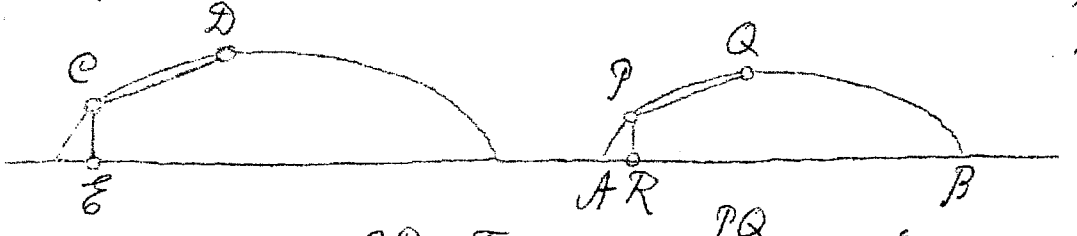
$$(\#)\qquad \left.\begin{aligned} x &= \alpha(t-\sin t)+\beta \\ y &= \alpha(1-\cos t) \end{aligned}\right\} \quad 0<t<2\pi,$$

samt linien $y=2\alpha$ og alle kurver bestående af en halvcykloide og en halvlinie på $y=2\alpha$, eller to halvcykloider og et mellemliggende stykke af linien $y=2\alpha$. Et liniestykke $y=2\alpha$, $x_1<x<x_2$ kan imidlertid (åbenbart) ikke være løsning til Eulers differentialligning (Δ). Løsningerne til Eulers differentialligning er derfor alle cykloidebuerne (#) ($0<\alpha<+\infty$, $-\infty<\beta<+\infty$), samt naturligvis alle delbuer af disse.



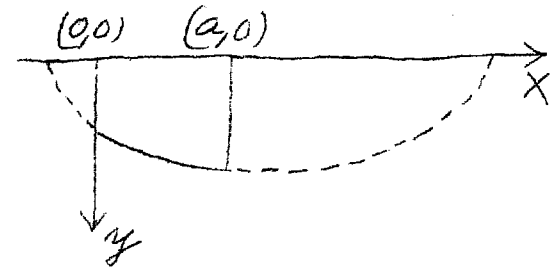
En cykloidebue (#) er konveks. Dette ses f.eks. af ligningerne (§), som viser, at y' er en monoton funktion af y på hver halvbue. Endvidere bemærkes, at cykloidebuer for forskellige α er ligedannede.

Dette viser, at der gennem to vilkårlige punkter C og D i halvplanen $y>0$ går en og kun een af cykloidebuerne (#). Det ses ved ligedannethed, idet vi for en fast cykloidebue AB skaffer en trekant PQR ligedannet med CDE ved at lade korden PQ variere parallelt med CD. Forholdet $\frac{PQ}{PR}$ varierer da monotont

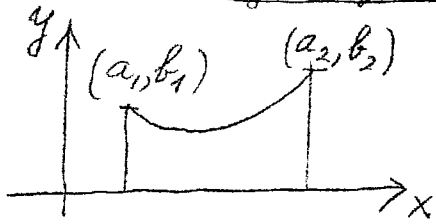


fra 0 til ∞ og har altså for netop een stilling værdien $\frac{CD}{CE}$.

Hermed er godtgjort, at der for de givne endepunkter $(0, \frac{v_0^2}{2g})$, $(a, b+\frac{v_0^2}{2g})$ er netop een stationær funktion $y = f(x)$, $0 \leqq x \leqq a$, for integralet I, d.v.s. for faldtiden T, nemlig den der bestemmes ved den någældende cykloidebue. Man kan vise, at T har ikke blot lokalt, men endda globalt minimum for denne funktion, der altså er løsningen til brachistochroneproblemet. Bemærk, at endepunktet $(a, b+\frac{v_0^2}{2g})$ kan ligge over begyndelsespunktet $(0, \frac{v_0^2}{2g})$ (udgangshastigheden er tilstrækkelig lil, at partiklen kan nå helt op til x-aksen). Man kan vise, at resultatet også har gyldighed i grænsetilfældet $v_0 = 0$, hvor man får en cykloidebue regnet fra en spids.



Omdrejningsflade med minimalt areal.



Idet (a_1, b_1) og (a_2, b_2) er givne punkter i halvplanen $\{(x,y) \mid y > 0\}$, for hvilke $a_1 < a_2$, skal vi bestemme $y = f(x) > 0$ blandt de tilladte funktioner, således at

$$I = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

er minimal. Funktionen F er altså

$$F(x,y,p) = y\sqrt{1+p^2},$$

og mængden Ω er halvrummet $\{(x,y,p) \mid y > 0\}$. [Funktionen F er vrekårligt ofte differentiabel i hele (x,y,p)-rummet. Indskrænkningen til halvrummet Ω er betinget af problemstillingen, ifølge hvilken kun funktioner $y = f(x) > 0$ skal være tilladte.]

Eulers differentialligning er

$$(\Delta) \qquad \sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx}\left[y \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0,$$

som ved nogen regning omskrives til

$$1 + y'^2 - y y'' = 0,$$

en ligning, som vi ikke uden videre kan løse.

Benytter vi imidlertid, at F ikke afhænger af x, ser vi, at Eulers ligning multipliceret med y' giver

$$y\sqrt{1+y'^2} - y \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} y' = \text{konst.}$$

eller

$$(\divideontimes) \qquad \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{konst.} = \alpha \quad (>0).$$

For et bestemt α må vi for enhver løsning have $y \geqq \alpha$. Vi søger først løsninger, for hvilke $y > \alpha$, d.v.s. for hvilke $y' \neq 0$. For en sådan må y' have konstant fortegn. Vi har altså

$$\frac{dy}{dx} = y' = \sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2} - 1} \quad \text{eller} \quad \frac{dy}{dx} = y' = -\sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2} - 1}.$$

For en sådan løsning kan vi benytte y som uafhængig variabel. Vi får da, idet vi betragter den første ligning

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2} - 1}} = \frac{\alpha}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}}, \qquad x = \int \frac{\alpha}{\sqrt{y^2-\alpha^2}}\, dy.$$

Vi anvender substitutionen $y = \alpha \cosh t$, $t > 0$, og får

$$x = \int \frac{\alpha}{\alpha \sinh t} \alpha \sinh t \, dt = \alpha t + \beta.$$

Vi har altså løsningerne

$$y = \alpha \cosh \frac{x-\beta}{\alpha}, \qquad x > \beta,$$

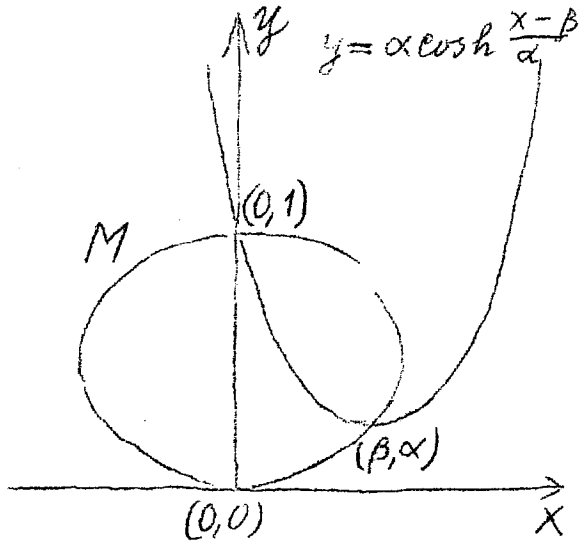
som fremstiller alle højre halvdele af kædelinier med x-aksen som ledelinie og toppunkt på linien $y = \alpha$ (toppunktet ikke medregnet). For den anden ligning får vi (på grund af symmetri) de venstre halvdele af kædelinierne (toppunktet ikke medregnet). Som løsninger til ligningen $(\divideontimes)$ får vi derfor kædelinierne

(#) $$y = \alpha \cosh \frac{x-\beta}{\alpha}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

samt linien $y = \alpha$ og alle kurver bestående af en halv kædelinie og en halvlinie på $y = \alpha$ eller to halve kædelinier og et mellemliggende stykke af linien $y = \alpha$. Et liniestykke $y = \alpha$, $x_1 < x < x_2$, vil imidlertid (åbenbart) ikke være løsning til Eulers differentialligning (Δ). Løsningerne til Eulers differentialligning er derfor alle kædelinierne (#) ($\alpha > 0$, $-\infty < \beta < +\infty$), altså alle kædelinier med x-aksen som ledelinie og beliggende over denne, samt naturligvis alle buer på disse.

Det må herefter undersøges, om der gennem de to givne punkter (a_1, b_1), (a_2, b_2) i halvplanen $\{(x,y) \mid y > 0\}$ går en kædelinie og i givet fald hvor mange. Hertil bemærkes, at alle kædelinierne er ligedannede. For at finde mængden $M_{(a,b)}$ af toppunkter (β, α) for kædelinier gennem et givet punkt (a,b), er det derfor nok at finde mængden $M = M_{(0,1)}$ af toppunkter (β, α) for kædelinier gennem $(0,1)$.

Denne mængde M er bestemt ved ligningen



$$1 = \alpha \cosh \frac{-\beta}{\alpha}$$

eller

$$e^{\frac{\beta}{\alpha}} + e^{-\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{2}{\alpha}.$$

Løsning efter β giver for højre halvdel (der er symmetri om y-aksen) ligningen

$$\beta = \alpha \log\left(1 + \sqrt{1-\alpha^2}\right) - \alpha \log \alpha \qquad (0 < \alpha \leq 1).$$

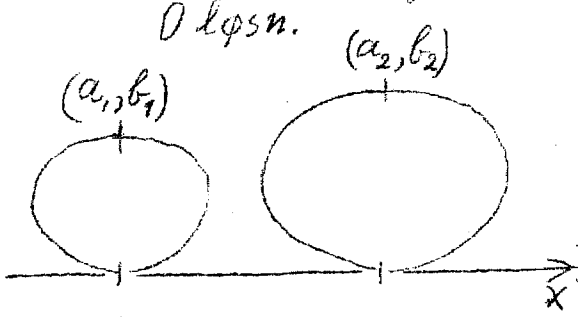
Ved differentiation fås

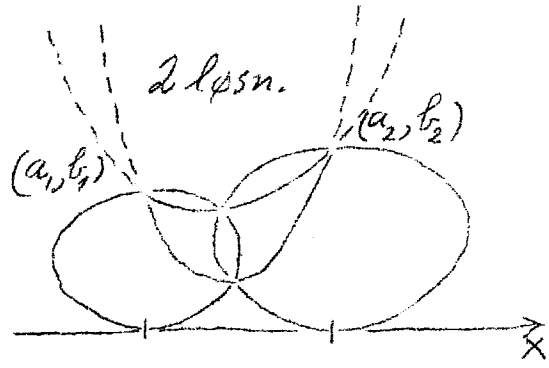
(for $0 < \alpha < 1$)

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \log\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \log\alpha, \qquad \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{-1}{\alpha(1-\alpha^2)\sqrt{1-\alpha^2}},$$

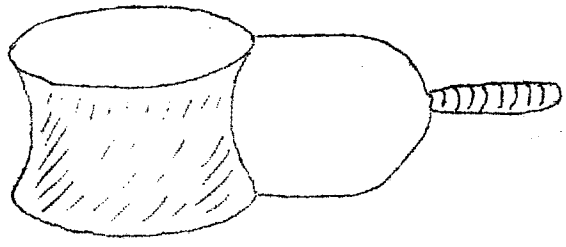
hvoraf ses, at $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} < 0$. Heraf fremgår, at M er en lukket konveks kurve (eksklusive punktet $(0,0)$).

For to punkter (a_1, b_1) og (a_2, b_2) fås to kurver $M_{(a_1,b_1)}$ og $M_{(a_2,b_2)}$ ligedannede med M. Hvis $b_1 = b_2$, er kurverne kongruente, og den ene fås af den anden ved en parallelforskydning. Hvis $b_1 \neq b_2$, fås den ene af den anden ved en homoteti ud fra skæringspunktet mellem x-aksen og linien gennem (a_1, b_1) og (a_2, b_2). I begge tilfælde slutter man (under brug af konveksiteten), at de to kurver har 0, 1 eller 2 fælles punkter. Der er altså 0, 1 eller 2 kædelinier gennem de to punkter (a_1, b_1) og (a_2, b_2).





De herved bestemte funktioner $y = f(x)$, $a_1 \leq x \leq a_2$, er de stationære funktioner for integralet I og dermed for arealet af omdrejningsfladen. Man kan vise, at når der er to løsninger, giver den øverste globalt minimum for arealet, den nederste hverken lokalt minimum eller lokalt maksimum; er der kun en løsning, giver den hverken lokalt minimum eller lokalt maksimum. Fladen med minimalt areal kan (når den findes) bestemmes eksperimentelt som sæbeskumsflade.



<u>Korteste forbindelse mellem to punkter.</u>

Det drejer sig om at søge minimum af længden

$$I = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

af kurven $y = f(x)$, $a_1 \leq x \leq a_2$. Eulers ligning er

$-\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$, som giver $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{konst.}$, altså $y' = \text{konst.} = \alpha$, hvoraf $y = \alpha x + q$. Den lineære funktion, der fremstiller liniestykket med endepunkterne (a_1, b_1) og (a_2, b_2), er således den eneste stationære funktion for I. Man kan (meget let) direkte vise, at den giver globalt minimum.

Afkald på den ene eller på begge randbetingelser.

Vi betragter det simpleste problem med den modifikation, at vi giver afkald på en af randbetingelserne, f.eks. på randbetingelsen $f(a_2) = b_2$. De tilladte funktioner er altså nu alle funktioner $y = f(x) \in C^2([a_1, a_2])$, for hvilke $(x, f(x), f'(x)) \in \mathcal{L}$ for alle $x \in [a_1, a_2]$, og som opfylder randbetingelsen $f(a_1) = b_1$. Vi siger naturligvis atter, at

$$I = I(f) = \int_{a_1}^{a_2} F(x, f(x), f'(x))\, dx$$

har lokalt minimum, resp. maksimum, for den tilladte funktion f, såfremt der findes et $\varrho > 0$, således at $I(f_1) \geqslant I(f)$, resp. $I(f_1) \leqslant I(f)$, for alle tilladte funktioner f_1, for hvilke $\text{dist}(f, f_1) < \varrho$. Ordlyden af definitionen er den samme som før, men indholdet er et andet, idet de tilladte funktioner nu er en mere omfattende mængde. Vi søger atter funktioner f, for hvilke I har lokalt ekstremum.

Vi antager, at I har lokalt ekstremum for den tilladte funktion f. Nu vælges en vilkårlig funktion $g \in C^2([a_1, a_2])$, for hvilken blot $g(a_1) = 0$ (medens $g(a_2)$ kan være $\neq 0$). Da $\mathcal{L}$ er åben, findes en omegn af tallet 0, således at funktionen $f + \varepsilon g$ er tilladt for alle ε i denne omegn. I denne omegn af 0 betragtes funktionen

$$\varphi(\varepsilon) = I(f + \varepsilon g) = \int_{a_1}^{a_2} F(x, f(x) + \varepsilon g(x), f'(x) + \varepsilon g'(x))\, dx:$$

Da er $\varphi'(0)=0$. Vi foretager den samme udregning som foran, men får nu et led hidrørende fra $g(a_2)$. Vi finder

$$\varphi'(0) = F_p'(a_2, f(a_2), f'(a_2))\, g(a_2) + \int_{a_1}^{a_2} \left\{ F_y'(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} F_p'(x, f(x), f'(x)) \right\} g(x)\, dx = 0.$$

Dette skal gælde for alle $g \in C^2([a_1, a_2])$, for hvilke $g(a_1)=0$. Det må da specielt gælde for de $g \in C^2([a_1, a_2])$, for hvilke tillige $g(a_2)=0$. Funktionen f må altså opfylde betingelsen

$$\int_{a_1}^{a_2} \left\{ F_y'(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} F_p'(x, f(x), f'(x)) \right\} g(x)\, dx = 0$$

for alle sådanne g. Men heraf følger, at $y=f(x)$ må tilfredsstille Eulers differentialligning

$$F_y'(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}'(x, y, y') = 0.$$

Betingelsen $\varphi'(0)=0$ giver derfor

$$F_p'(a_2, f(a_2), f'(a_2))\, g(a_2) = 0.$$

Da vi kan vælge g således, at $g(a_2) \neq 0$, giver dette

$$\boxed{F_p'(a_2, f(a_2), f'(a_2)) = 0}.$$

Vi ser altså, at når vi ikke selv stiller en randbetingelse $f(a_2)=b_2$ svarende til endepunktet a_2, vil problemet selv give anledning til en sådan randbetingelse, nemlig den anførte, som derfor kaldes en naturlig randbetingelse.

Vi har altså som nødvendig betingelse for lokalt ekstremum, at $y=f(x)$ tilfredsstiller Eulers differentialligning, samt den naturlige randbetingelse.

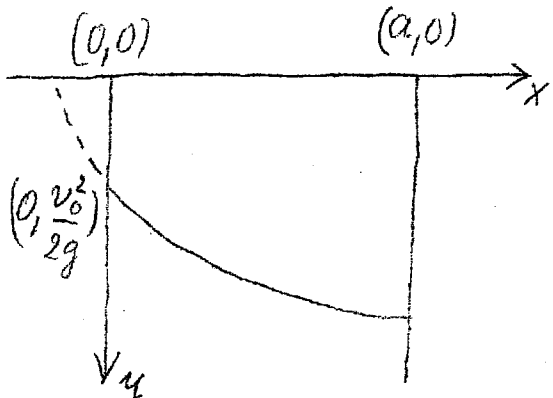
Analogt finder vi, at hvis vi giver afkald på randbetingelsen $f(a_1)=b_1$, erstattes denne af den naturlige randbetingelse

$$\boxed{F_p'(a_1, f(a_1), f'(a_1)) = 0}.$$

Giver vi afkald på begge randbetingelser $f(a_1)=b_1$ og $f(a_2)=b_2$,

får vi begge de naturlige randbetingelser.

Brachistochronen med fri faldhøjde.



Vi søger en kurve $y = f(x)$ udgående fra $(0, \frac{v_0^2}{2g})$, ad hvilken en partikel med udgangsfarten v_0 falder hurtigst muligt til et punkt af linien $x=a$ (ligegyldigt hvilket).

Idet $F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$, altså $F'_{y'}(x,y,y') = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}$,

bliver den naturlige randbetingelse

$$\frac{f'(a)}{\sqrt{f(a)}\sqrt{1+(f'(a))^2}} = 0,$$

altså $f'(a)=0$. Løsningen er altså en cykloidebue (frembragt ved rulning af en cirkel på x-aksen) gennem $(0, \frac{v_0^2}{2g})$ og med toppunkt på linien $x=a$. Man ser let, at der kun er een sådan.

§3. Problem med bibetingelser.

Lad $F_0(x,y,p), F_1(x,y,p), \cdots, F_k(x,y,p)$ være reelle funktioner defineret på en åben mængde Ω i (x,y,p)-rummet. Vi antager, at $F_0, F_1, \cdots, F_k \in C^2(\Omega)$. Lad (a_1,b_1) og (a_2,b_2) med $a_1 < a_2$ være punkter i (x,y)-planen. Tilladte funktioner skal atter være funktioner $y=f(x) \in C^2([a_1,a_2])$, der opfylder randbetingelserne $f(a_1)=b_1$, $f(a_2)=b_2$, og for hvilke $(x,f(x),f'(x)) \in \Omega$ for alle $x \in [a_1,a_2]$.

Vi siger, at

$$I_0 = I_0(f) = \int_{a_1}^{a_2} F_0(x,f(x),f'(x))\,dx$$

har lokalt minimum, resp. maksimum, for den tilladte funktion f under bibetingelserne

$$\begin{cases} I_1 = I_1(f) = \int_{a_1}^{a_2} F_1(x,f(x),f'(x))\,dx = c_1 \\ \cdots \\ I_k = I_k(f) = \int_{a_1}^{a_2} F_k(x,f(x),f'(x))\,dx = c_k, \end{cases}$$

hvor $c_1, \cdots, c_k$ er givne tal, såfremt f er en tilladt funktion, der opfylder bibetingelserne, og der findes et $\delta > 0$ således, at $I_0(f_1) \geqslant I_0(f)$, resp. $I_0(f_1) \leqslant I_0(f)$, for alle tilladte funktioner f_1, for hvilke $\operatorname{dist}(f,f_1) < \delta$, og som ligeledes opfylder bibetingelserne. Globalt minimum, resp. maksimum, under bibetingelserne defineres analogt.

Vi søger tilladte funktioner, for hvilke I_0 har lokalt ekstremum under bibetingelserne $I_1 = c_1, \cdots, I_k = c_k$.

Vi antager, at I_0 har lokalt ekstremum for den tilladte funktion f under bibetingelserne $I_1 = c_1, \cdots, I_k = c_k$. Nu vælges vilkårlige funktioner $g_0, g_1, \cdots,$

$g_k \in C^2([a_1,a_2])$, for hvilke $g_j(a_1)=0$ og $g_j(a_2)=0$, $j=0,1,\cdots,k$. Da findes en omegn af punktet $(0,0,\cdots,0)$ i $(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)$-rummet, således at $f+\varepsilon_0 g_0+\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_k g_k$ er tilladt for alle $(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)$ i denne omegn. Da har funktionen

$$\varphi_0(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)=I_0(f+\varepsilon_0 g_0+\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_k g_k)$$

lokalt ekstremum i $(0,0,\cdots,0)$ under bibetingelserne

$$\begin{cases}\varphi_1(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)=I_1(f+\varepsilon_0 g_0+\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_k g_k)=c_1\\ \cdots\\ \varphi_k(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)=I_k(f+\varepsilon_0 g_0+\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_k g_k)=c_k.\end{cases}$$

Nu er funktionerne $\varphi_i(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)$, $i=0,1,\cdots,k$, kontinuert differentiable. Følgelig er rangen af matricen

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varepsilon_j}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\varepsilon_0} & \frac{\partial\varphi_0}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_0}{\partial\varepsilon_k}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon_0} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial\varepsilon_0} & \frac{\partial\varphi_k}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial\varepsilon_k}\end{pmatrix},$$

hvor de afledede skal tages i punktet $(0,0,\cdots,0)$, højst k, d.v.s. dens søjler er lineært afhængige.

Ved beregningen af et bestemt af tallene $\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varepsilon_j}$ skal vi sætte de øvrige ε_ℓ lig 0, og beregne differentialkvotienten af $I_i(f+\varepsilon_j g_j)$ for $\varepsilon_j=0$. Dette er den samme regning, vi har udført tidligere. Vi finder

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varepsilon_j}=\int_{a_1}^{a_2}\left\{F_{iy}'(x,f(x),f'(x))-\frac{d}{dx}F_{ip}'(x,f(x),f'(x))\right\}g_j(x)\,dx.$$

Idet vi til afkortning sætter

$$h_i(x)=F_{iy}'(x,f(x),f'(x))-\frac{d}{dx}F_{ip}'(x,f(x),f'(x)),$$

har vi altså, at matricen

$$\begin{pmatrix} \int_{a_1}^{a_2} h_0(x) g_0(x)\,dx & \int_{a_1}^{a_2} h_0(x) g_1(x)\,dx & \cdots & \int_{a_1}^{a_2} h_0(x) g_k(x)\,dx \\ \int_{a_1}^{a_2} h_1(x) g_0(x)\,dx & \int_{a_1}^{a_2} h_1(x) g_1(x)\,dx & \cdots & \int_{a_1}^{a_2} h_1(x) g_k(x)\,dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_{a_1}^{a_2} h_k(x) g_0(x)\,dx & \int_{a_1}^{a_2} h_k(x) g_1(x)\,dx & \cdots & \int_{a_1}^{a_2} h_k(x) g_k(x)\,dx \end{pmatrix}$$

for vilkårlige funktioner $g_0, g_1, \cdots, g_k \in C^2([a_1, a_2])$, for hvilke $g_j(a_1) = 0$ og $g_j(a_2) = 0$, $j = 0, 1, \cdots, k$, har lineært uafhængige søjler.

Vi betragter nu mængden M bestående af alle vektorer

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{a_1}^{a_2} h_0(x)\, g(x)\,dx \\ \int_{a_1}^{a_2} h_1(x)\, g(x)\,dx \\ \vdots \\ \int_{a_1}^{a_2} h_k(x)\, g(x)\,dx \end{pmatrix},$$

hvor $g \in C^2([a_1, a_2])$ og $g(a_1) = 0$, $g(a_2) = 0$.

Denne mængde M er åbenbart et vektorrum. Ifølge det ovenstående er hvilkesomhelst $k+1$ vektorer i M lineært afhængige. Dimensionen af M er altså $\leqslant k$, hvoraf følger, at der findes et k-dimensionalt underrum af $(z_0, z_1, \cdots, z_k)$-rummet, der indeholder M. Et sådant er bestemt ved en ligning

$$\lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_k z_k = 0, \quad \text{hvor}$$

$$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k) \neq (0, 0, \cdots, 0).$$

Vi ser altså, at der må findes et talsæt $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k) \neq (0, 0, \cdots, 0)$, således at

$$\int_{a_1}^{a_2} \left(\lambda_0 h_0(x) + \lambda_1 h_1(x) + \cdots + \lambda_k h_k(x)\right) g(x)\,dx = 0$$

for alle $g \in C^2([a_1, a_2])$, for hvilke $g(a_1) = 0$ og $g(a_2) = 0$.

Ifølge det tidligere lemma gælder da

$$h(x) = \lambda_0 h_0(x) + \lambda_1 h_1(x) + \cdots + \lambda_k h_k(x) = 0$$

for alle $x \in [a_1, a_2]$. Sætter vi

$$F(x,y,p) = \lambda_0 F_0(x,y,p) + \lambda_1 F_1(x,y,p) + \cdots + \lambda_k F_k(x,y,p),$$

er

$$h(x) = F_y'(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} F_p'(x, f(x), f'(x)).$$

Ligningen $h(x) = 0$ for alle $x \in [a_1, a_2]$ er derfor simpelthen Eulers differentialligning svarende til funktionen $F(x,y,p)$. Hermed har vi bevist:

En nødvendig betingelse for, at I_0 har lokalt ekstremum for den tilladte funktion $y = f(x)$ under bibetingelserne $I_1 = c_1, \cdots, I_k = c_k$ er, at der findes et talsæt $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k) \neq (0,0,\cdots,0)$ således, at $y = f(x)$ er stationær for integralet

$$I = I(f) = \lambda_0 I_0 + \lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_k I_k = \int_{a_1}^{a_2} F(x, f(x), f'(x))\,dx,$$

hvor

$$F = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_k F_k.$$

Et sådant talsæt $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ kaldes et sæt af Lagrange'ske multiplikatorer.

Ved løsning af en ekstremumsopgave med bibetingelser søger man løsningerne til Eulers differentialligning svarende til $I(f)$ for vilkårlige $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k$. Derefter bestemmer man $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k$ og de øvrige til angivelse af løsningsfunktionerne tjenende parametre således, at bibetingelserne $I_1(f) = c_1, \cdots, I_k(f) = c_k$ og randbetingelserne $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ bliver opfyldt.

Kædelinie.

Idet (a_1, b_1) og (a_2, b_2) er givne punkter i (x,y)-planen, for hvilke $a_1 < a_2$, skal vi bestemme $y = f(x)$ blandt de tilladte funktioner således, at

$$I_0 = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

er minimum under bibetingelsen

$$I_1 = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \mathcal{L}.$$

Vi har altså $k=1$, og funktionerne F_0 og F_1 er

$$F_0(x,y,p) = y\sqrt{1+p^2} \quad \text{og} \quad F_1(x,y,p) = \sqrt{1+p^2}.$$

Mængden $\mathfrak{L}$ er hele (x,y,p)-rummet. Vi må naturligvis antage $\mathcal{L} \geqslant \sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2} = \mathcal{L}_0$.

Vi danner for $(\lambda_0,\lambda_1) \neq (0,0)$ integralet

$$I = \lambda_0 I_0 + \lambda_1 I_1 = \int_{a_1}^{a_2} (\lambda_0 y + \lambda_1)\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

For $\lambda_0 = 0$ er der (jfr. § 2, s. 12-13) kun een stationær funktion. Den bestemmer liniestykket fra (a_1,b_1) til (a_2,b_2) og tilfredsstiller kun bibetingelsen $I_1 = \mathcal{L}$, når $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$. Den er da åbenbart løsning til vort problem [idet den er den eneste tilladte funktion, der opfylder bibetingelsen]. Når $\mathcal{L} > \mathcal{L}_0$ kan vi altså antage $\lambda_0 \neq 0$ og kan da vælge $\lambda_0 = 1$. Idet vi skriver λ i stedet for λ_1, drejer det sig da om integralet

$$I = I_0 + \lambda I_1 = \int_{a_1}^{a_2} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Dette er netop integralet fra problemet om omdrejningsflade med minimalt areal, blot med $y+\lambda$ i stedet for y (vi har jo $y' = (y+\lambda)'$). Løsningerne til Eulers differentialligning er derfor bestemt ved

$$y+\lambda = \alpha \cosh\frac{x-\beta}{\alpha},$$

hvor nu både positive og negative α skal tages i betragtning. Dette er systemet af alle kædelinier med (vilkårlig) vandret ledelinie. Ved indsættelse i bibetingelsen og randbetingelserne finder man let ligninger til bestemmelse af α, β, λ. Der bliver to kurver, en med $\alpha > 0$ og en med $\alpha < 0$. Den første løser opgaven; for den anden er I_0 maksimum under bibetingelsen $I_1 = \mathcal{L}$.

Problem med bibetingelser og med afkald på randbetingelse.

Ændrer vi det foran betragtede problem derved, at vi giver afkald på randbetingelsen $f(a_2)=b_2$, finder vi som nødvendig betingelse for lokalt ekstremum, at mængden af vektorer

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'_{0p}(a_2, f(a_2), f'(a_2))\, g(a_2) + \int_{a_1}^{a_2} h_0(x)\, g(x)\,dx \\ F'_{1p}(a_2, f(a_2), f'(a_2))\, g(a_2) + \int_{a_1}^{a_2} h_1(x)\, g(x)\,dx \\ \vdots \\ F'_{kp}(a_2, f(a_2), f'(a_2))\, g(a_2) + \int_{a_1}^{a_2} h_k(x)\, g(x)\,dx \end{pmatrix},$$

hvor $g \in C^2([a_1, a_2])$ og $g(a_1)=0$,

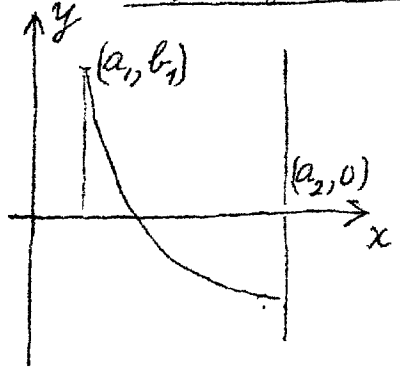
har en dimension $\leqslant k$. Dette fører til, at der må findes et talsæt $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0,0,\ldots,0)$ således, at når vi sætter

$$F = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_k F_k,$$

tilfredsstiller $y=f(x)$ Eulers differentialligning svarende til funktionen F samt den naturlige randbetingelse

$$F'_p(a_2, f(a_2), f'(a_2)) = 0.$$

Ligevægtsstilling af snor med fri ende.



En snor af længde L ophænges med det ene endepunkt i (a_1, b_1), medens det andet (f.eks. ved hjælp af en ring) kan glide på linien $x=a_2$.

Med de ved behandlingen af kædelinien benyttede betegnelser må ligevægtsstillingen $y=f(x)$ for et talpar $(\lambda_0, \lambda_1) \neq (0,0)$ være stationær for $I = \lambda_0 I_0 + \lambda_1 I_1$ med den naturlige randbetingelse

$$(\lambda_0 f(a_2) + \lambda_1) \frac{f'(a_2)}{\sqrt{1+f'(a_2)^2}} = 0.$$

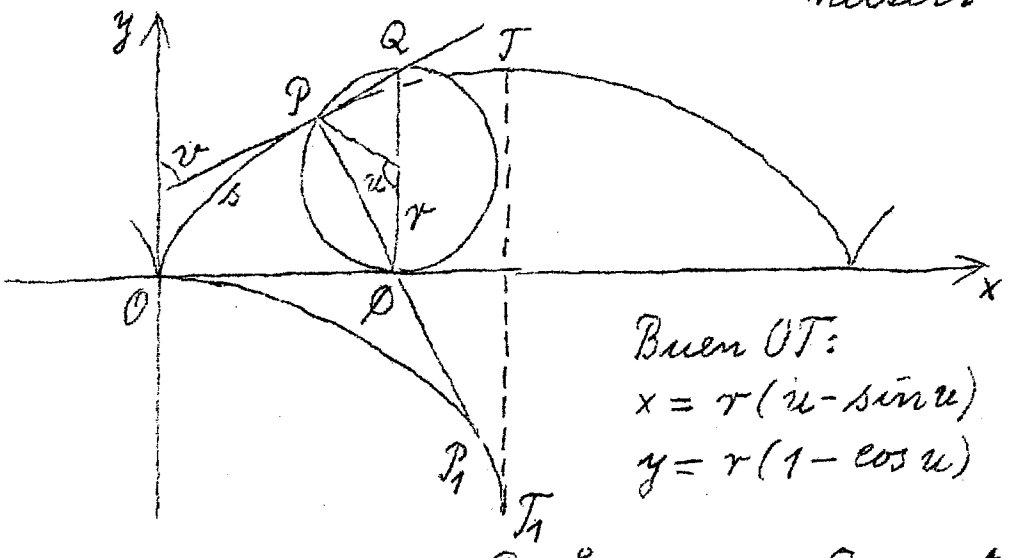
Hvis $\lambda_0 = 0$, giver dette $f'(a_2)=0$, og da løsningen i dette tilfælde er lineær, må den være konstant, altså $y=b_1$. Dette vil indtræffe, når og kun når $L = a_2 - a_1$. Hvis $\lambda_0 \neq 0$,

kan vi antage $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \lambda$. Løsningen er da en kædelinie

$$y + \lambda = \alpha \cosh \frac{x - \beta}{\alpha}.$$

Følgelig er $f(a_2) + \lambda \neq 0$, og vi må som før have $f'(a_2) = 0$. Kædelinien har altså sit toppunkt på linien $x = a_2$.

501. Opgave vedrørende cykloiden. Se fig. vedr. betegnelser.



Buen OT:

$$x = r(u - \sin u)$$
$$y = r(1 - \cos u) \qquad 0 \leq u \leq \pi.$$

a) Vis, at tangenten i P går gennem Q, og at normalen i P går gennem $Ø$.

b) Bestem buelængden s fra O til P som funktion af parameteren u.

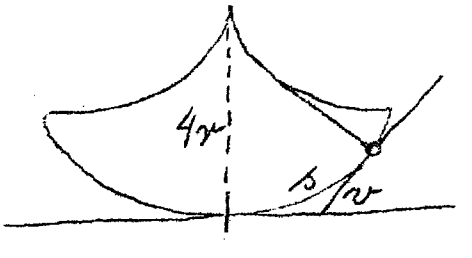
c) Vis, at det til P med hensyn til $Ø$ symmetriske punkt P_1 beskriver en cykloidebue OT_1 kongruent med OT, og at denne i P_1 har tangenten PP_1.

d) Vis, at længden af buen OP_1 på denne er lig med PP_1.

e) Udtryk s som funktion af tangentens drejningsvinkel v, og vis herved, at krumningsradius $\frac{ds}{dv}$ er lig med PP_1, d.v.s. at P_1 er krumningscentrum.

f) Find arealet af den af cykloidebuerne OT, OT_1 og linjestykket TT_1 begrænsede mængde.

g) Vis Huygens' sætning: For et cykloidependul er svingningstiden uafhængig af udsvinget.
Vink. Udtryk s som funktion af v. Opskriv herefter, at tangentialakcelerationen er kraftens projektion på tangenten (idet massen sættes til 1).



502. For vilkårlige endepunkter (a_1, b_1) og (a_2, b_2) i halvplanen $\{(x,y) \mid y>0\}$ skal man bestemme $y=f(x)$ blandt de tilladte funktioner således, at

$$I = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\, dx$$

er minimum.

503. For givet endepunkt (a_1, b_1) skal man finde $y=f(x)$ >0 i $[a_1, a_2]$ således, at den ved omdrejning om x-aksen frembragte flade har minimalt areal.

504. For givet endepunkt (a_1, b_1) skal man finde $y=f(x)$ i $[a_1, a_2]$ således, at kurvens længde er minimal.

505. Find (idet $\Omega = \{(x,y,p) \mid y>0, |p|<1\}$) samtlige løsninger til Eulers differentialligning svarende til integralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{y}\,\sqrt{1-y'^2}\, dx.$$

506. Find (idet $\Omega = \{(x,y,p) \mid |p|<1\}$) samtlige løsninger til Eulers differentialligning svarende til integralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1-y'^2}\, dx.$$

507. Find samtlige løsninger til Eulers differentialligning svarende til integralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} [xy' + (y'^2-1)^2]\, dx.$$

Vink. (1) Opskriv differentialligningen, og vis, at den giver $x + 4y'^3 - 4y' = \alpha$. (2) Vis, at denne ligning spaltes i tre ligninger $y' = \varphi_1(x)$, $x-\alpha \geqslant -\frac{8}{3\sqrt{3}}$; $y' = \varphi_2(x)$, $|x-\alpha| \leqslant \frac{8}{3\sqrt{3}}$; $y' = \varphi_3(x)$, $x-\alpha \leqslant \frac{8}{3\sqrt{3}}$ (funktionerne $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ skal ikke udregnes). (3) Vis ved at benytte y' som parameter, at integralerne til de tre ligninger bestemmes ved parameterfremstillingen $x = 4t - 4t^3 + \alpha$, $y = 2t^2 - 3t^4 + \beta$ svarende til intervallerne $t \leqslant -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $|t| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$, $t \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$. Skitser forløbet.

508. Find samtlige løsninger til Eulers differentialligning svarende til integralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} x\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

509. For givne endepunkter (a_1,b_1), (a_2,b_2) i halvplanen $\{(x,y) \mid y>0\}$ søges $y=f(x)>0$ blandt de tilladte funktioner således, at

$$I_0 = \int_{a_1}^{a_2} y^2\,dx$$

er minimum under bibetingelsen

$$I_1 = \int_{a_1}^{a_2} y\,dx = A,$$

hvor A er et givet positivt tal.
Vink. Benyt variationsregningen til at vise, at problemet kun kan have en konstant funktion til løsning, og eftervis direkte, at hvis der findes en konstant funktion, der opfylder randbetingelserne og bibetingelsen, er den en løsning.

510. Variationsproblem med to funktioner. Lad $F(t,x,y,p,q) \in C^2(\Omega)$, hvor Ω er en åben mængde i (t,x,y,p,q)-rummet. Et tilladt funktionspar (f,g) er et par af funktioner $x=f(t) \in C^2([a_1,a_2])$, $y=g(t) \in C^2([a_1,a_2])$, som for $t=a_1$ og $t=a_2$ antager foreskrevne randværdier, og for hvilke $(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) \in \Omega$ for alle $t \in [a_1,a_2]$. Vis, at hvis integralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} F(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t))\,dt$$

har lokalt ekstremum for funktionsparret (f,g), da tilfredsstiller dette de to Eulerske differentialligninger

$$F_x'(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) - \frac{d}{dt}F_p'(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) = 0$$

$$F_y'(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) - \frac{d}{dt}F_q'(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) = 0.$$

511. Variationsproblem med to funktioner og bibetingelser. Lad $F_0(t,x,y,p,q), F_1(t,x,y,p,q), \cdots, F_k(t,x,y,p,q) \in C^2(\Omega)$, hvor Ω er en åben mængde i (t,x,y,p,q)-rummet. Et tilladt funktionspar (f,g) er et par af funktioner $x=f(t) \in C^2([a_1,a_2])$, $y=g(t) \in C^2([a_1,a_2])$, som for $t=a_1$ og $t=a_2$ antager forskrevne randværdier, og for hvilke $(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) \in \Omega$ for alle $t \in [a_1,a_2]$. Vis, at hvis

$$I_0 = \int_{a_1}^{a_2} F_0(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t))\,dt$$

har lokalt ekstremum for funktionsparret (f,g) under bibetingelserne

$$I_1 = \int_{a_1}^{a_2} F_1(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t))\,dt = c_1$$

$$\cdots$$

$$I_k = \int_{a_1}^{a_2} F_k(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t))\,dt = c_k,$$

hvor $c_1,\cdots,c_k$ er givne tal, da findes der et sæt af Lagrangeske multiplikatorer $(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_k) \neq (0,0,\cdots,0)$, således at når man sætter

$$I = \lambda_0 I_0 + \lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_k I_k = \int_{a_1}^{a_2} F(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t))\,dt,$$

hvor

$$F = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_k F_k,$$

opfylder parret (f,g) de to til I hørende Eulerske differentialligninger

$$F_x' - \frac{d}{dt} F_p' = 0, \quad F_y' - \frac{d}{dt} F_q' = 0.$$

512. Det isoperimetriske problem. Søg $f \in C^2([0,1])$ og $g \in C^2([0,1])$ således, at $f(0), f(1), g(0), g(1)$ alle er 0, og $f'(t)^2 + g'(t)^2 > 0$ for alle $t \in [0,1]$, og således at

$$I_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 (xy' - yx')\,dt$$

er maksimum for parret $(x,y) = (f(t),g(t))$ under bibetingelsen

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \mathcal{L}.$$