MATEMATIK 102

INDHOLD

		Side
§ 1.	Forskelligt om de reelle tal.....	1.01-19
§ 2.	Metriske rum.....	2.01-16
§ 3.	Topologiske rum. Ækvivalens af metriker.	3.01-04
§ 4.	Talrummene.....	4.01-08
§ 5.	Kontinuerte afbildninger.....	5.01-14
§ 6.	Kompakte mængder. Uniform kontinuitet...	6.01-18
§ 7.	Uniform konvergens. Funktionsrum.....	7.01-11
§ 8.	Sammenhængende mængder.....	8.01-16
§ 9.	Polynomier.....	9.01-19
§ 10.	Ligninger af grad ≤ 4.....	10.01-11
§ 11.	Konstruktion af den regulære 17-kant....	11.01-10
§ 12.	Rationale funktioner.....	12.01-11
§ 13.	Integral af funktioner af en reel variabel.....	13.01-15
§ 14.	Differentiable funktioner af en reel variabel.....	14.01-25
§ 15.	Eksponentialfunktion, logaritmefunktion, potensfunktioner.....	15.01-18
§ 16.	De trigonometriske funktioner og deres omvendte funktioner.....	16.01-12
§ 17.	De hyperbolske funktioner og deres omvendte funktioner.....	17.01-11
§ 18.	Eksponentialfunktionen, de trigonometriske funktioner, og de hyperbolske funktioner for kompleks variabel.....	18.01-08
§ 19.	Udvidelse af integralbegrebet.....	19.01-10
§ 20.	Integration af rationale funktioner.....	20.01-07

MATEMATIK 102

INDHOLD

		Side
§ 21.	Integration af forskellige typer af funktioner	21.01-15
§ 22.	Uendelige rækker	22.01-12
§ 23.	Regning med uendelige rækker. Omordning af leddene	23.01-07
§ 24.	Uendelige rækker, hvis led er funktioner	24.01-04
§ 25.	Potensrækker	25.01-26
§ 26.	Partialbrøkrækker for cot x og $\frac{1}{\sin x}$. Potensrækker for x cot x og tan x. Bernoulli tal og Bernoulli polynomier	26.01-11
§ 27.	Uendelige produkter	27.01-08
§ 28.	Taylors formel	28.01-08
§ 29.	Konvekse og logaritmisk konvekse funktioner	29.01-10
§ 30.	Gammafunktionen	30.01-21
§ 31.	Simple typer af differentialligninger	31.01-25
§ 32.	Fourier rækker	32.01-23
§ 33.	Fourier integraler	33.01-13
§ 34.	Plane kurver	34.01-15
§ 35.	Kurvers længde	35.01-12
§ 36.	Areal af plane figurer	36.01-06
§ 37.	Kurvers krumning	37.01-16
§ 38.	Kædelinien og cykloiden	38.01-10

MATEMATIK 102

INDHOLD

		Side
§ 39.	Keplers love. Newtons gravitationslov.....	39.01-09
§ 40.	Rumkurver. Omdrejningslegemer og omdrejningsflader. Statiske momenter og tyngdepunkter.....	40.01-13
§ 43.	En fixpunktssætning.....	43.01-03
§ 47.	Differentialformer af første grad.....	47.01-22
§ 49.	Eksistens- og entydighedssætning for sædvanlige differentialligningssystemer af første orden.....	49.01-17
§ 50.	Løsning ved successive approksimationer.....	50.01-03
§ 51.	Eksistens- og entydighedssætning for sædvanlige differentialligningssystemer af højere orden.....	51.01-10
§ 52.	Lineære differentialligninger.....	52.01-15
§ 53.	Lineære, homogene differentialligninger med konstante koefficienter.....	53.01-08
§ 54.	Differentialligninger af formen $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$	54.01-15
§ 55.	Variationsregning. Det simpleste problem....	55.01-21
§ 56.	Variationsregning. Problem med bibetingelser	56.01-11

§ 1. Forskelligt om de reelle tal.

De reelle tal. De reelle tal $\mathbb{R}$ er, jvf. 101 § 7, karakteriseret ved, at det er et ordnet legeme med følgende egenskab: enhver ikke tom opad begrænset delmængde af $\mathbb{R}$ har et supremum; enhver ikke tom nedad begrænset delmængde af $\mathbb{R}$ har et infimum. De hele tal $\mathbb{Z}$ er en delring af $\mathbb{R}$ og de rationale tal $\mathbb{Q}$ er et dellegeme af $\mathbb{R}$.

Som intervaller betegnes delmængder af $\mathbb{R}$ af de fire typer:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \mid a \le x \le b\} && \text{afsluttet interval}\\
[a,b[&= \{x \mid a \le x < b\} \\
]a,b] &= \{x \mid a < x \le b\} && \text{halvåbne intervaller}\\
]a,b[&= \{x \mid a < x < b\} && \text{åbent interval.}
\end{aligned}$$

Herved er antaget $a < b$. Punktet a er venstre endepunkt og punktet b højre endepunkt for intervallet. Lejlighedsvis er det bekvemt at regne en mængde bestående af eet punkt for et afsluttet interval med sammenfaldende endepunkter. En talmængde kaldes begrænset, hvis den er delmængde af et interval. Tallet $b - a$ kaldes længden af intervallet.

Som halvlinier betegnes delmængder af $\mathbb{R}$ af de fire typer:

$$\begin{aligned}
]-\infty,a] &= \{x \mid x \le a\} && \text{afsluttet} \\
]-\infty,a[&= \{x \mid x < a\} && \text{åben} && \text{venstre halvlinie}\\
[a,+\infty[&= \{x \mid x \ge a\} && \text{afsluttet} \\
]a,+\infty[&= \{x \mid x > a\} && \text{åben} && \text{højre halvlinie}
\end{aligned}$$

Punktet a er endepunkt for halvlinien. Lejlighedsvis kaldes

også halvlinier og hele $\mathbb{R}$, der også skrives $]-\infty,+\infty[$, intervaller; intervaller i den strenge betydning må da kendetegnes som begrænsede intervaller. At en delmængde A af $\mathbb{R}$ er opad begrænset med overtal a betyder, at $A \subseteq]-\infty,a]$; at A er nedad begrænset med undertal a betyder, at $A \subseteq [a,+\infty[$.

Delmængden $\mathbb{Z}$ af $\mathbb{R}$ er hverken opad eller nedad begrænset.

Bevis. Hvis $\mathbb{Z}$ var opad begrænset, havde $\mathbb{Z}$ et mindste overtal a. Af $z \leq a$ for alle $z \in \mathbb{Z}$ følger imidlertid $z+1 \leq a$ for alle $z \in \mathbb{Z}$, altså $z \leq a-1$ for alle $z \in \mathbb{Z}$. Tallet $a-1$ var altså også et overtal for $\mathbb{Z}$. Da $a-1 < a$, er vi nået til en modstrid. Analogt ses, at $\mathbb{Z}$ ikke er nedad begrænset.

For ethvert $x \in \mathbb{R}$ findes eet tal $z \in \mathbb{Z}$, således at $x \in [z,z+1[$. Anderledes sagt: Systemet af intervaller $[z,z+1[$, $z \in \mathbb{Z}$, udgør en klassedeling af $\mathbb{R}$.

Bevis. Intervallerne $[z,z+1[$, $z \in \mathbb{Z}$, er åbenbart disjunkte. For ethvert $x \in \mathbb{R}$ findes, da $\mathbb{Z}$ ikke er nedad begrænset, et $u \in \mathbb{Z}$, så at $u \leq x$, og, da $\mathbb{Z}$ ikke er opad begrænset, et $v \in \mathbb{Z}$, så at $v > x$. Vi har altså $x \in [u,v[= \bigcup\{[z,z+1[\mid z = u,u+1,\cdots,v-1\}$. □

For et vilkårligt tal $x \in \mathbb{R}$ kaldes det tal $z \in \mathbb{Z}$, for hvilket $x \in [z,z+1[$, den hele del af x, og betegnes ofte $[x]$.

Ethvert interval af længde >1 indeholder mindst et tal $z \in \mathbb{Z}$.

Bevis. Lad intervallets endepunkter være a og b, og lad z være den hele del af $a+1$. Da gælder $z \leq a+1 < z+1$, altså $a < z < b$. □

En delmængde A af $\mathbb{R}$ kaldes tæt (eller overalt tæt) i $\mathbb{R}$, hvis der for ethvert åbent interval $]a,b[$ gælder $]a,b[\cap A \neq \emptyset$, altså hvis der i ethvert åbent interval $]a,b[$ ligger mindst et punkt af A. Da ligger der naturligvis i ethvert åbent interval $]a,b[$ uendelig mange punkter af A. Thi der findes et $x_1 \in]a,b[\cap A$, et $x_2 \in]a,x_1[\cap A$, et $x_3 \in]a,x_2[\cap A$, etc. Punkterne $x_1, x_2, \cdots$ er parvis forskellige og tilhører alle $]a,b[\cap A$.

$\mathbb{Q}$ er tæt i $\mathbb{R}$.

Bevis. Lad $]a,b[$ være et åbent interval og lad $n \in \mathbb{Z}$ være valgt således, at $n > \frac{1}{b-a}$. Da gælder naturligvis $n \in \mathbb{N}$, og længden af intervallet $]na,nb[$ er >1. Lad $z \in \mathbb{Z}$ tilhøre dette interval, altså $na < z < nb$. Da tilhører tallet $\frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$ intervallet $]a,b[$. □

De rationale tal $\mathbb{Q}$ er, jvf. 101 § 2, en numerabel mængde. Vi beviser nedenfor, at mængden $\mathbb{R}$ ikke er numerabel. Eksistensen af en numerabel delmængde af $\mathbb{R}$, der er tæt i $\mathbb{R}$, er en af de mærkeligste egenskaber ved de reelle tal. Andre eksempler på sådanne mængder end $\mathbb{Q}$ er mængden $\{ra \mid r \in \mathbb{Q}\}$, hvor a er et vilkårligt fra 0 forskelligt reelt tal, og mængden $\left\{\frac{z}{2^n} \mid n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bemærkning. I vor fremstilling forudsætter vi de reelle tal bekendt. Når vi har udført det foranstående i enkeltheder er det for at vise, hvorledes de omhandlede egenskaber kan afledes af den karakterisering af de reelle tal, som vi har sat

i spidsen. Yderligere egenskaber vil blive udledt i det følgende, men vi understreger, at vi ikke tilstræber en fuldstændig fremstilling. Velkendte egenskaber vil således ofte blive benyttet uden kommentar.

De udvidede reelle tal. I betegnelsen for halvlinier har vi anvendt de to symboler $+\infty$ og $-\infty$ "plus uendelig" og "minus uendelig"). Mængden $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ kaldes de udvidede reelle tal.

Vi udvider ordningen af $\mathbb{R}$ til en ordning af $\mathbb{R}^*$ ved at fastsætte $-\infty < a$ og $a < +\infty$ for ethvert $a \in \mathbb{R}$, og $-\infty < +\infty$. Da er $(\mathbb{R}^*, \leq)$ åbenbart en totalt ordnet mængde med $-\infty$ som første (mindste) element og $+\infty$ som sidste (største) element, og man indser let: For enhver ikke tom delmængde A af $\mathbb{R}^*$ eksisterer sup A og inf A. Der gælder åbenbart

$$(-\infty \leq) \quad \inf A \leq \sup A \quad (\leq +\infty).$$

Selv om vi kun er interesseret i at studere delmængder af $\mathbb{R}$, er det derfor en fordel at indføre $\mathbb{R}^*$, idet vi derved i undersøgelserne kan undgå den besværlige opspaltning i tilfælde svarende til, om de betragtede mængder er opad eller nedad begrænsede eller ikke. At $A \subseteq \mathbb{R}$ ikke er opad begrænset udtrykkes ved, at $\sup A = +\infty$; at $A \subseteq \mathbb{R}$ ikke er nedad begrænset udtrykkes ved, at $\inf A = -\infty$.

Som intervaller i $\mathbb{R}^*$ betegner vi naturligvis mængder af de fire typer

$$[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{afsluttet interval}$$
$$\left.\begin{aligned} [a,b[&= \{x \mid a \leq x < b\} \\ ]a,b] &= \{x \mid a < x \leq b\} \end{aligned}\right\} \quad \text{halvåbne intervaller}$$
$$]a,b[= \{x \mid a < x < b\} \quad \text{åbent interval,}$$

hvor $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, med samme tilføjelse som tidligere, at en mængde bestående af eet punkt lejlighedsvis regnes for et afsluttet interval.

Det havde været rart, om man kunne udvide kompositionerne $+$ og $\cdot$ til $\mathbb{R}^*$, således at $(\mathbb{R}^*,+,\cdot,\leq)$ blev et ordnet legeme, men dette er ikke muligt. En fornuftig udvidelse af regneoperationerne til $\mathbb{R}^*$ er følgende:

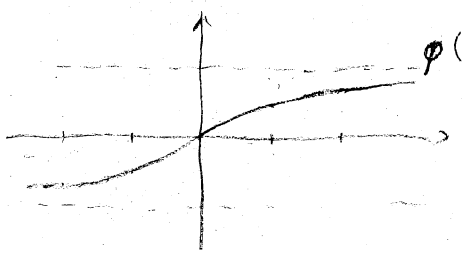
Vi definerer summen $a+b$ som $+\infty$, hvis en af addenderne er $+\infty$, og den anden endelig, og hvis begge addender er $+\infty$, og som $-\infty$, hvis en af addenderne er $-\infty$ og den anden endelig, og hvis begge addender er $-\infty$.

Vi definerer produktet $a \cdot b$ som $+\infty$, hvis en eller begge faktorer er uendelig (d.v.s. $+\infty$ eller $-\infty$) og enten begge faktorer er > 0 eller begge faktorer er < 0, og som $-\infty$, hvis en eller begge faktorer er uendelig og en af dem er > 0 og en af dem er < 0.

Differensen $a-b$ defineres som $a+(-b)$, idet vi sætter $-(-\infty) = +\infty$ og $-(+\infty) = -\infty$, og kvotienten $\frac{a}{b}$ defineres som $a \cdot \frac{1}{b}$, idet vi sætter $\frac{1}{+\infty} = 0$ og $\frac{1}{-\infty} = 0$. For $b = 0$ defineres $\frac{a}{b}$ ikke.

Med $|+\infty|$ og $|-\infty|$ menes naturligvis $+\infty$.

Man opnår et anskueligt billede af $\mathbb{R}^*$ ved at foretage den bijektive afbildning $\varphi: \mathbb{R}^* \to [-1,1]$, der defineres ved



$$\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(-\infty) = -1, \quad \varphi(+\infty) = 1.$$

Denne afbildning er åbenbart ordenstro.

Nogle simple sætninger. Vedrørende delmængder af $\mathbb{R}^*$ gælder forskellige sætninger, som man uafladeligt benytter, og som vi derfor her sammenstiller.

Hvis A og B er ikke tomme delmænger af $\mathbb{R}^*$ og $A \subseteq B$, gælder $\sup A \leq \sup B$ og $\inf A \geq \inf B$.

Bevis. Tallet $\sup B$ er et overtal for B og altså også for A. Tallet $\inf B$ er et undertal for B og altså også for A. □

Hvis A og B er ikke tomme delmængder af $\mathbb{R}^*$ og det for vilkårlige elementer $a \in A$ og $b \in B$ gælder, at $a \leq b$, da er $\sup A \leq \inf B$.

Bevis. Ifølge forudsætning er ethvert $b \in B$ et overtal for A. Da $\sup A$ er det mindste overtal for A, gælder altså $\sup A \leq b$ for ethvert $b \in B$. Det betyder, at $\sup A$ er et undertal for B. Da $\inf B$ er det største undertal for B, gælder altså $\sup A \leq \inf B$. □

Enhver ikke tom delmængde A af $\mathbb{R}^*$ med den egenskab, at $x < y < z$ og $x \in A$, $z \in A$ medfører $y \in A$, er et interval i $\mathbb{R}^*$. (Det omvendte er trivielt.)

Bevis. Sæt $a = \inf A$ og $b = \sup A$. Hvis A ikke består af eet punkt, er $a < b$, og vi har $A \subseteq [a,b]$. For ethvert $y \in]a,b[$ findes et $x \in A$, for hvilket $x < y$ (thi ellers var y et undertal for A, og a er det største undertal), og et $z \in A$, for hvilket $y < z$ (thi ellers var y et overtal for A, og b er det mindste overtal). Altså

gælder $y \in A$. Vi har altså $]a,b[\subseteq A$. Da som allerede nævnt $A \subseteq [a,b]$, må A være en af mængderne $[a,b]$, $[a,b[$ $]a,b]$, $]a,b[$. □

Hvis fællesmængden for et system af intervaller i $\mathbb{R}^*$ ikke er tom, er den et interval.

Bevis. Følger umiddelbart af den foregående sætning. □

Hvis fællesmængden for et system af afsluttede intervaller i $\mathbb{R}^*$ ikke er tom, er den et afsluttet interval.

Bevis. Ifølge den foregående sætning er fællesmængden et interval. Endepunkterne for dette må tilhøre alle intervallerne i systemet, altså også fællesmængden. □

For enhver dalende følge $[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \cdots$ af afsluttede intervaller i $\mathbb{R}^*$ er fællesmængden et afsluttet interval, nemlig intervallet $[a,b]$, hvor $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ og $b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Bevis. For $n < m$ gælder $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$. Ethvert a_p er altså $\leq$ ethvert b_q. Følgelig gælder $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = b$. Det er nu klart, at $[a,b]$ er fællesmængden for intervallerne $[a_n,b_n]$. □

Talfølger i $\mathbb{R}^*$. Ved en talfølge $(x_n \in \mathbb{R}^* \mid n \in \mathbb{N})$ i $\mathbb{R}^*$ forstås en funktion fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{R}^*$. Normalt benytter vi den korte skrivemåde $x_1, x_2, \cdots$ eller blot (x_n). Talfølgen må ikke forveksles med talmængden $\{x_n \in \mathbb{R}^* \mid n \subset \mathbb{N}\}$, som vi også kort betegner $\{x_1, x_2, \cdots\}$ eller $\{x_n\}$. Talfølgen kaldes monotont voksende eller stigende, hvis $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$, og monotont aftagende eller dalende, hvis $x_1 \geq x_2 \geq \cdots$.

En talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ kaldes <u>konvergent</u> med <u>grænseværdien</u> $x \in \mathbb{R}$, hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists n_o \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}: \; n \geq n_o \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \; ;$$

den kaldes konvergent med <u>grænseværdien</u> $+\infty$, hvis

$$\forall a \in \mathbb{R} \; \exists n_o \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}: \; n \geq n_o \Rightarrow x_n > a;$$

den kaldes konvergent med <u>grænseværdien</u> $-\infty$, hvis

$$\forall a \in \mathbb{R} \; \exists n_o \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}: \; n \geq n_o \Rightarrow x_n < a.$$

Man indser let, at en talfølge ikke kan konvergere mod flere forskellige grænseværdier. Det fremgår også indirekte af det følgende. Når grænseværdien eksisterer, betegnes den $\lim x_n$ eller $\lim_n x_n$ eller $\lim_{n\to\infty} x_n$. Man skriver også $x_n \to x$, resp. $x_n \to +\infty$ eller $x_n \to -\infty$, for $n \to \infty$. En talfølge kaldes <u>divergent</u>, hvis den ikke er konvergent.

<u>Enhver stigende talfølge</u> (x_n) <u>i</u> $\mathbb{R}^*$ <u>er konvergent med grænseværdien</u> $\sup\{x_n\}$; <u>enhver dalende talfølge</u> (x_n) <u>i</u> $\mathbb{R}^*$ <u>er konvergent med grænseværdien</u> $\inf\{x_n\}$.

<u>Bevis.</u> Vi nøjes med at bevise det første udsagn; beviset for det andet udsagn er analogt.

Sæt $x = \sup\{x_n\}$. Da er $x_n \leq x$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

(1) Antag først, at $x \in \mathbb{R}$, og lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Da er $x-\varepsilon$ intet overtal for $\{x_n\}$. Der findes altså et $n_o \in \mathbb{N}$, så at $x_{n_o} > x-\varepsilon$. Men så må for alle $n \geq n_o$ gælde $x-\varepsilon < x_n \leq x$ og altså $|x_n - x| < \varepsilon$.

(2) Antag dernæst, at $x = +\infty$ og lad $a \in \mathbb{R}$. Da er a intet overtal for $\{x_n\}$. Der findes altså et $n_o \in \mathbb{N}$, så at $x_{n_o} > a$. Men så må for alle $n \geq n_o$ gælde $x_n > a$.

(3) Antag endelig, at $x = -\infty$. Da er $x_n = -\infty$ for alle $n \in \mathbb{N}$. For ethvert $a \in \mathbb{R}$ gælder derfor $x_n < a$ for alle n. ∎

For en vilkårlig talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ danner vi to nye talfølger (y_n) og (z_n) i $\mathbb{R}^*$, idet vi sætter

$$y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}, \qquad z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}.$$

Talfølgen (y_n) er åbenbart stigende og talfølgen (z_n) er åbenbart dalende. For ethvert n gælder $y_n \leq z_n$. Følgelig gælder for $p < q$, at $y_p \leq y_q \leq z_q \leq z_p$, hvoraf ses, at ethvert element af mængden $\{y_n\}$ er $\leq$ ethvert element af mængden $\{z_n\}$. Vi skriver dette således:

$$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq \cdots \leq \cdots \leq z_n \leq \cdots \leq z_2 \leq z_1.$$

Følgerne (y_n) og (z_n) er altså konvergente og der gælder

$$\lim y_n = \sup\{y_n\} \leq \inf\{z_n\} = \lim z_n.$$

Tallet $\lim y_n$ kaldes den <u>nedre grænseværdi</u> eller <u>limes inferior</u> for talfølgen (x_n) og betegnes $\lim\inf x_n$, og tallet $\lim z_n$ kaldes den <u>øvre grænseværdi</u> eller <u>limes superior</u> for talfølgen (x_n) og betegnes $\lim\sup x_n$. Vi har altså

$$\lim\inf x_n = \lim_n(\inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}),$$

$$\lim\sup x_n = \lim_n(\sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}),$$

og der gælder

$$(-\infty \leq) \qquad \lim\inf x_n \leq \lim\sup x_n \qquad (\leq +\infty).$$

<u>En talfølge</u> (x_n) i $\mathbb{R}^*$ <u>er konvergent, hvis og kun hvis</u>

lim inf x_n = lim sup x_n, og i så fald er

$$\lim x_n = \liminf x_n = \limsup x_n.$$

Bevis. Beviset falder i tre dele.

(1) Hvis lim inf x_n = lim sup x_n = $x \in \mathbb{R}$, findes for ethvert $\varepsilon > 0$ et n_1, så at $x-\varepsilon < y_{n_1} \leq x$, og et n_2, så at $x \leq z_{n_2} < x+\varepsilon$. For $n_o = \max\{n_1, n_2\}$ gælder da $x-\varepsilon < y_{n_o} \leq x \leq z_{n_o} < x+\varepsilon$. Men for alle $n \geq n_o$ gælder $y_{n_o} \leq x_n \leq z_{n_o}$. For $n \geq n_o$ gælder altså $|x_n-x| < \varepsilon$. Altså er (x_n) konvergent med grænseværdien $\lim x_n = x$.

Hvis omvendt (x_n) er konvergent med grænseværdien $\lim x_n = x \in \mathbb{R}$, findes for ethvert $\varepsilon > 0$ et n_o, så at $|x_n-x| < \varepsilon$ for alle $n \geq n_o$. For et sådant n_o må da gælde $x-\varepsilon \leq y_n \leq z_n \leq x+\varepsilon$ for alle $n \geq n_o$, altså specielt $|y_n-x| \leq \varepsilon$ og $|z_n-x| \leq \varepsilon$ for alle $n \geq n_o$. Følgelig er $\lim y_n = x$ og $\lim z_n = x$, altså $\liminf x_n = \limsup x_n = x$.

(2) Hvis lim inf x_n = lim sup x_n = $+\infty$, findes for ethvert $a \in \mathbb{R}$ et n_o, så at $y_{n_o} > a$, og følgelig $x_n > a$ for alle $n \geq n_o$. Altså er (x_n) konvergent med grænseværdien $\lim x_n = +\infty$.

Hvis omvendt (x_n) er konvergent med grænseværdien $\lim x_n = +\infty$, findes for ethvert $a \in \mathbb{R}$ et n_o, så at $x_n > a$ for alle $n \geq n_o$. For et sådant n_o må gælde $y_n \geq a$ for alle $n \geq n_o$. Følgelig er $\lim y_n = +\infty$, altså lim inf $x_n = +\infty$, og dermed også lim sup $x_n = +\infty$.

(3) Hvis lim inf x_n = lim sup x_n = $-\infty$, findes for ethvert $a \in \mathbb{R}$ et n_o, så at $z_{n_o} < a$, og følgelig $x_n < a$ for alle $n \geq n_o$. Altså er (x_n) konvergent med grænseværdien $\lim x_n = -\infty$.

Hvis omvendt (x_n) er konvergent med grænseværdien

$\lim x_n = -\infty$, findes for ethvert $a \in \mathbb{R}$ et n_o, så at $x_n < a$ for alle $n \geq n_o$. For et sådant n_o må gælde $z_n \leq a$ for alle $n \geq n_o$. Følgelig er $\lim z_n = -\infty$, altså $\lim \sup x_n = -\infty$, og dermed også $\lim \inf x_n = -\infty$. □

Ved en <u>delfølge</u> af en talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ forstås en talfølge af formen (x_{n_p}), hvor $n_1 < n_2 < \cdots$. Man ser umiddelbart, at der for enhver delfølge (x_{n_p}) af (x_n) må gælde

$$\lim \inf x_n \leq \lim_p \inf x_{n_p} \leq \lim_p \sup x_{n_p} \leq \lim \sup x_n .$$

Specielt gælder altså for enhver konvergent delfølge af (x_n) at dens grænseværdi $\lim_p x_{n_p}$ må tilhøre intervallet $[a,b]$, hvor $a = \lim \inf x_n$ og $b = \lim \sup x_n$.

<u>For enhver talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ findes såvel en konvergent delfølge med grænseværdien $\lim \inf x_n$ som en konvergent delfølge med grænseværdien $\lim \sup x_n$</u>.

De to tal $\lim \inf x_n$ og $\lim \sup x_n$ kan altså også karakteriseres som mindste og største grænseværdi for konvergente delfølger af (x_n).

<u>Bevis</u>. Vi nøjes med at bevise det første udsagn; beviset for det andet udsagn er analogt.

(1) Hvis $a = \lim \inf x_n \in \mathbb{R}$, kan vi finde et n_1, så at $x_{n_1} < a+1$ (thi ellers var $y_1 \geq a+1$, og vi har jo $y_1 \leq a$). Vi kan dernæst finde et $n_2 > n_1$, så at $x_{n_2} < a+\frac{1}{2}$ (thi ellers var $y_{n_1+1} \geq a+\frac{1}{2}$, og vi har jo $y_{n_1+1} \leq a$). Således fortsættes, idet man successivt benytter $a+1$, $a+\frac{1}{2}$, $a+\frac{1}{3}$, $\cdots$, og man får en delfølge x_{n_p} med $\lim_p \sup x_{n_p} \leq a$. Da $\lim_p \inf x_{n_p} \geq a$, må følgen (x_{n_p}) være konvergent med grænseværdien a.

(2) Hvis $\liminf x_n = -\infty$, kan vi finde et n_1, så at $x_{n_1} < -1$, dernæst et $n_2 > n_1$, så at $x_{n_2} < -2$, og således videre, hvorved fås en konvergent delfølge (x_{n_p}) med grænseværdien $-\infty$.

(3) Hvis $\liminf x_n = +\infty$ er også $\limsup x_n = +\infty$, og følgen (x_n) er selv konvergent med grænseværdien $+\infty$. □

Talfølger i $\mathbb{R}$. Vi er kun virkeligt interesserede i talfølger i $\mathbb{R}$. Man ser imidlertid, at når vi for en sådan følge $(x_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N})$ vil gennemføre det foranstående, er vi nødt til at operere i $\mathbb{R}^*$. Når en talfølge (x_n) i $\mathbb{R}$ kaldes konvergent, mener man normalt, at den er konvergent med en grænseværdi $\lim x_n \in \mathbb{R}$, medens man, når den er konvergent med grænseværdien $\lim x_n = +\infty$ eller $\lim x_n = -\infty$, normalt vil kalde den divergent, men dog sige, at den "går mod" $+\infty$ eller $-\infty$ (eller lign.).

Talfølgen $(\sqrt[n]{n})$ er konvergent med grænseværdien

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bevis. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ er $\sqrt[n]{n} \geq 1$. For ethvert $\varepsilon > 0$ viser binomialformlen

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + \frac{n}{1}\varepsilon + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n ,$$

at

$$\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 < (1+\varepsilon)^n .$$

Når $\frac{n-1}{2}\varepsilon^2 \geq 1$, d.v.s. når $n \geq 1+\frac{2}{\varepsilon^2}$, gælder altså $n < (1+\varepsilon)^n$, d.v.s. $\sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$. Vi har altså

$$1 \leq \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq 1+\frac{2}{\varepsilon^2} . \ \square$$

Talfølgen (a^n) (hvor $a \in \mathbb{R}$) er konvergent for $-1 < a \leq 1$, divergent for alle andre a. Grænseværdien er 0 for $-1 < a < 1$, og 1 for $a = 1$. For $a > 1$ går a^n mod $+\infty$. For $a = -1$ er talfølgens øvre grænseværdi 1 og dens nedre grænseværdi -1. For $a < -1$ er dens øvre grænseværdi $+\infty$ og dens nedre grænseværdi $-\infty$.

Bevis. Vi nøjes med at vise, at $a^n \to +\infty$, når $a > 1$. Heraf følger let, at $a^n \to 0$, når $-1 < a < 1$, samt udsagnet for $a < -1$. Tilfældene $a = 1$ og $a = -1$ er trivielle.

For $a > 1$ har vi $a^n = (1+(a-1))^n > n(a-1)$, hvoraf det ønskede. ∎

Talfølgen $((1+\frac{1}{n})^n)$ er stigende og begrænset, altså konvergent.

Bevis. Ifølge binomialformlen er

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Det $(k+1)^{te}$ led i summen er

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}.$$

Man ser, at når man erstatter n med n+1 stiger det $(k+1)^{te}$ led, og desuden kommer der yderligere et (positivt) led til i binomialformlen. Altså er $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$. Man ser endvidere, at

$$(1+\frac{1}{n})^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \quad ∎$$

[Talfølgens grænseværdi er $e = 2{,}7182\cdots$. Vi kommer senere tilbage til formlen $\lim(1+\frac{1}{n})^n = e$ og den almene formel

$\lim(1+\frac{x}{n})^n = e^x$. Følgen er her kun nævnt som en øvelse.]

Decimalbrøk. Når $a_1,a_2,\cdots,a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, skrives tallet $\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$ som bekendt $0,a_1a_2\cdots a_n$, og udtrykket kaldes en endelig decimalbrøk. Tallet tilhører intervallet $[0,1]$. Ved en uendelig decimalbrøk forstås et udtryk $0,a_1a_2\cdots a_n\cdots$, hvor $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots \in \{0,1,\cdots,9\}$. Sættes $x_n = 0,a_1a_2\cdots a_n$, er talfølgen $x_1,x_2,\cdots$ stigende, og da tallene tilhører intervallet $[0,1[$ er følgen konvergent med en grænseværdi x, der tilhører intervallet $[0,1]$. Denne grænseværdi kaldes værdien af den uendelige decimalbrøk, og man skriver

$$x = 0,a_1a_2\cdots a_n\cdots .$$

Man bemærker, at $0,a_1a_2\cdots a_n = 0,a_1a_2\cdots a_n00\cdots$.

Man viser let:

Ethvert tal x i intervallet $[0,1]$ kan fremstilles ved en uendelig decimalbrøk. Et tal x i intervallet $]0,1[$, der kan fremstilles ved en endelig decimalbrøk, fremstilles ved netop to uendelige decimalbrøker. Alle andre tal i $[0,1]$ har netop een fremstilling ved en uendelig decimalbrøk.

For et tal med to uendelige decimalbrøkfremstillinger lyder disse

$$0,a_1a_2\cdots a_n00\cdots \quad \text{og} \quad 0,a_1a_2\cdots(a_n-1)99\cdots ,$$

hvor $a_n \in \{1,\cdots,9\}$.

Mægtigheden af mængden af reelle tal og af de reelle talrum. Vi afslutter omtalen af de reelle tal med at vise nogle sætninger, som ganske vist ikke skal benyttes i det følgende, men som dog naturligt hører med i en behandling af de reelle tals grundlæggende egenskaber.

Mængden $\mathbb{R}$ er ikke numerabel. Anderledes sagt: For enhver numerabel delmængde A af $\mathbb{R}$ er $\mathbb{R}\backslash A \neq \emptyset$.

Bevis. Lad $A = \{x_1, x_2, \cdots\}$. Vælg et afsluttet interval $[a_1, b_1]$, så at $x_1 \notin [a_1, b_1]$, dernæst et afsluttet interval $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$, så at $x_2 \notin [a_2, b_2]$, etc. Dette er åbenbart muligt. Fællesmængden for den dalende følge $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots$ af afsluttede intervaller er et afsluttet interval $[a, b]$. Lad $x \in [a, b]$. Da gælder åbenbart $x \neq x_1$, $x \neq x_2, \cdots$, altså $x \in \mathbb{R}\backslash A$. □

For ethvert $n \in \mathbb{N}$ er $\mathbb{R}^n$ ekvipotent med $\mathbb{R}$. Anderledes udtrykt: De reelle talrum $\mathbb{R}^n$ har alle kontinuets mægtighed.

Bevis. For $n = 1$ er intet at vise. Vi antager derfor $n > 1$. Vi går frem i en række skridt.

① Mængden $\mathbb{R}$ er foreningsmængde af de numererbart mange disjunkte mængder

$$]z-1, z], \quad z \in \mathbb{Z},$$

der hver for sig er ekvipotent med mængden $]0, 1]$. Mængden $\mathbb{R}^n$ er foreningsmængde af de numererbart mange disjunkte mængder

$$]z_1-1, z_1] \times \cdots \times]z_n-1, z_n], \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \cdots, z_n \in \mathbb{Z},$$

der hver for sig er ekvipotent med mængden $]0, 1]^n$. Det er derfor tilstrækkeligt at vise, at mængden $]0, 1]$ er ekvipotent med mængden $]0, 1]^n$.

② Vi betragter først tilfældet $n = 2$. Det gælder da om at angive en bijektiv afbildning af $]0, 1]$ på $]0, 1]^2$.

Ethvert $x \in]0, 1]$ har en uendelig decimalbrøkfremstilling

$0,a_1a_2\cdots a_q\cdots$, hvor decimalfølgen ikke ender med lutter nuller, og enhver uendelig decimalbrøk $0,a_1a_2\cdots a_q\cdots$, hvor decimalfølgen ikke ender med lutter nuller, fremstiller et tal $x \in]0,1]$.

For enhver sådan decimalbrøk opdeler vi decimalfølgen i stykker, idet eventuelle nuller tages sammen med første efterfølgende fra nul forskellige decimal. Eksempelvis skrives decimalbrøken

$$0,0\ 1\ 3\ 9\ 0\ 0\ 4\ 7\ 5\ 0\ 9\ 8\ 0\ 0\ 0\ 0\ 6\ \cdots$$

således:

$$0,\boxed{0\ 1}\boxed{3}\boxed{9}\boxed{0\ 0\ 4}\boxed{7}\boxed{5}\boxed{0\ 9}\boxed{8}\boxed{0\ 0\ 0\ 0\ 6}\cdots .$$

De mulige stykker er altså af formen $\boxed{0\cdots 0a}$, hvor der først står et antal (evt. ingen) nuller og derefter et af tallene $1,\cdots,9$. Ved decimalbrøkfremstillingen er således etableret en bijektiv afbildning

$$x \mapsto g_1,g_2,\cdots$$

af $]0,1]$ på mængden af følger af stykker.

En bijektiv afbildning af $]0,1]$ på $]0,1]^2$ etableres nu ved at man, når $x \in]0,1]$ svarer til følgen $g_1,g_2,\cdots$, som billede af x i $]0,1]^2$ vælger parret (x_1,x_2), hvor x_1 svarer til følgen $g_1,g_3,\cdots$ og x_2 til følgen $g_2,g_4,\cdots$. Eksempelvis benyttes altså som billede af punktet

$$x = 0,\boxed{0\ 1}\boxed{3}\boxed{9}\boxed{0\ 0\ 4}\boxed{7}\boxed{5}\boxed{0\ 9}\boxed{8}\boxed{0\ 0\ 0\ 6}\cdots \in]0,1]$$

punktet

$$(x_1,x_2) = (0,\boxed{0\ 1}\boxed{9}\boxed{7}\boxed{0\ 9}\boxed{0\ 0\ 0\ 6}\cdots,\ 0,\boxed{3}\boxed{0\ 0\ 4}\boxed{5}\boxed{8}\cdots) \in]0,1]^2.$$

③ For $n > 2$ er beviset analogt. Det gælder da om at angive

en bijektiv afbildning af $]0,1]$ på $]0,1]^n$. Når $x \in]0,1]$ svarer til følgen $g_1, g_2, \cdots$, benytter vi som billede af x punktet $(x_1, \cdots, x_n) \in]0,1]^n$, hvor x_i svarer til følgen $g_i, g_{i+n}, g_{i+2n}, \cdots$. □

De to sætninger: at $\mathbb{R}$ ikke er numerable, og at $\mathbb{R}^n$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$ er ekvipotent med $\mathbb{R}$, danner begyndelsen til Cantors mængdelære. Den første sætning viste, at der findes uendelige mængder af forskellig mægtighed; den anden, at rum af forskellig dimension er ekvipotente, så at dimensionen altså ikke hænger sammen med rummets mægtighed.

Bemærkning. Hvis vi i ovenstående bevis havde opereret med decimalbrøkerne selv (uden opdelingen i stykker) og til

$$x = 0,a_1a_2\cdots a_q\cdots$$

havde tilordnet

$$(x_1,x_2) \rightarrow (0,a_1a_3\cdots\ ,\ 0,a_2a_4\cdots)\ ,$$

havde vi ikke opnået en bijektiv afbildning af $]0,1]$ på $]0,1]^2$, ja, ikke engang en afbildning af $]0,1]$ ind i $]0,1]^2$. Eksempelvis ville vi for $x = 0,010101\cdots = \frac{1}{99}$ have fået $x_1 = 0,000\cdots = 0$ og $x_2 = 0,111\cdots = \frac{1}{9}$. Denne opspaltning af decimalbrøken kan dog siges at være den grundlæggende ide i beviset. Cantor reddede beviset ved en ret kompliceret betragtning. Den ovenfor benyttede ide med opdeling i stykker skyldes J. König.

Opgaver. 1. Vis at en talfølge $(x_n \in \mathbb{R}^* \mid n \in \mathbb{N})$ er konvergent med grænseværdien $x \in \mathbb{R}^*$, hvis og kun hvis enhver delfølge har en delfølge, der er konvergent med grænseværdien x.

2. Vis, at en talfølge $(x_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N})$ er begrænset, hvis

og kun hvis

$$-\infty < \liminf x_n \ , \quad \limsup x_n < +\infty.$$

3. Angiv to talfølger (a_n) og (b_n) i $\mathbb{R}$, således at $a_n < b_n$ for ethvert n og

$$\limsup a_n > \liminf b_n.$$

4. Vis, at hvis talfølgerne (a_n) og (b_n) i $\mathbb{R}$ er konvergente med grænseværdierne $a \in \mathbb{R}$ og $b \in \mathbb{R}$, er talfølgen (a_n+b_n) konvergent med grænseværdien $a+b$ og talfølgen (a_nb_n) konvergent med grænseværdien ab.

5. Vis, at der for begrænsede talfølger $(a_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N})$ og $(b_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N})$ gælder ulighederne

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n+b_n) \leq$$
$$\leq \begin{Bmatrix} \liminf a_n + \limsup b_n \\ \limsup a_n + \liminf b_n \end{Bmatrix} \leq$$
$$\leq \limsup(a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n \ .$$

6. Idet $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ er en talfølge i $\mathbb{R}$, defineres en ny talfølge $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$ i $\mathbb{R}$ ved, at man sætter

$$b_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

Vi, at hvis følgen (a_n) er konvergent med grænseværdien $a \in \mathbb{R}$, er følgen (b_n) ligeledes konvergent med grænseværdien a. Giv et eksempel på en divergent følge (a_n), for hvilken den tilsvarende følge (b_n) er konvergent.

7. Lad $(a_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N})$ være den ved

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

definerede talfølge. Vis, at talfølgen er dalende, og find dens grænseværdi.

8. Vis, at mængden A af funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indeholder en med $\mathbb{R}$ ekvipotent mængde, men ikke selv er ekvipotent med $\mathbb{R}$. (Cantor.)

Vink. Hvis delmængden B af A er ekvipotent med $\mathbb{R}$, og $x \mapsto g_x$ er en bijektiv afbildning af $\mathbb{R}$ på B vil den ved

$$f(x) = g_x(x) + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

definerede funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ikke tilhøre B.

§2. Metriske rum.

Metriske rum. Ved en metrik eller afstandsfunktion i en ikke tom mængde M forstås en afbildning dist: $M \times M \to \mathbb{R}$, for hvilken der for vilkårlige elementer af M gælder

(1) $\text{dist}(x,y) \geq 0$, og $= 0$ hvis og kun hvis $x = y$,

(2) $\text{dist}(x,y) = \text{dist}(y,x)$,

(3) $\text{dist}(x,z) \leq \text{dist}(x,y) + \text{dist}(y,z)$.

En mængde M udstyret med en metrik dist kaldes et metrisk rum, og elementerne af M kaldes punkter. Ønsker man i betegnelsen for mængden at anføre afstandsfunktionens navn, taler man om det metriske rum (M,dist).

En metrik er således en komposition, men ikke en komposition indenfor M (undtagen hvis $M = \mathbb{R}$). Funktionsværdien $\text{dist}(x,y)$ kaldes afstanden fra x til y eller, under hensyn til symmetribetingelsen (2), afstanden mellem x og y. Uligheden (3) kaldes trekantsuligheden.

En ret linie, en plan, og rummet er med den sædvanlige betydning af ordet afstand et metrisk rum. Trekantsuligheden udtrykker, at summen af to sider i en trekant mindst er lig med den tredje side, idet også udartede trekanter tages i betragtning. Man ser, at lighedstegnet i trekantsuligheden i disse tilfælde gælder, hvis og kun hvis punktet y tilhører liniestykket med endepunkterne x og z (inklusive x og z) [hvis $x = z$, menes naturligvis med liniestykket det pågældende punkt]. Anskuelsesfigurer til illustration af den almene teori tegnes i reglen, som om det drejede sig om en plan med den sædvanlige betydning af ordet afstand.

En ret linie eller en plan med den sædvanlige betydning af ordet afstand kommer ud på et med $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ med afstandsfunktionen $\mathrm{dist}(x,y) = |x-y|$. Trekantsuligheden udtrykkes da ved uligheden $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$, der, hvis vi sætter $x-y = a$ og $y-z = b$, antager formen $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Konvergente følger. Fundamentalfølger. Fuldstændighed. Det almindelige konvergensprincip. Ved en punktfølge $(x_n \in M \mid n \in \mathbb{N})$ i et metrisk rum (M,dist) forstås en funktion fra $\mathbb{N}$ til M. Normalt benytter vi den korte skrivemåde $x_1, x_2, \cdots$ eller blot (x_n). Punktfølgen må ikke forveksles med punktmængden $\{x_n \in M \mid n \in \mathbb{N}\}$, som vi også kort betegner $\{x_1, x_2, \cdots\}$ eller $\{x_n\}$.

En punktfølge (x_n) i M kaldes konvergent med grænsepunktet $x \in M$, hvis

$$(*) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: \; n \geq n_0 \Rightarrow \mathrm{dist}(x_n,x) < \varepsilon .$$

En punktfølge kan ikke konvergere mod flere forskellige punkter. Thi hvis punktfølgen (x_n) er konvergent med grænsepunktet x og også med grænsepunktet y, findes for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ et n_0, så at $\mathrm{dist}(x_n,x) < \varepsilon$ for alle $n \geq n_0$, og et n_1, så at $\mathrm{dist}(x_n,y) < \varepsilon$ for alle $n \geq n_1$. Da der for alle n gælder

$$\mathrm{dist}(x,y) \leq \mathrm{dist}(x_n,x) + \mathrm{dist}(x_n,y),$$

ser vi ved at vælge $n = \max\{n_0,n_1\}$, at $\mathrm{dist}(x,y) < 2\varepsilon$. Da ε var et vilkårligt positivt tal, følger heraf, idet $\mathrm{dist}(x,y) \geq 0$, at $\mathrm{dist}(x,y) = 0$ og altså $x = y$.

Når punktfølgen (x_n) er konvergent, betegnes dens grænsepunkt $\lim x_n$ eller $\lim_n x_n$ eller $\lim_{n\to\infty} x_n$. Man skriver også $x_n \to x$ for $n \to \infty$.

En punktfølge (x_n) i M kaldes en fundamentalfølge, hvis

$$(\S)\quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists n_o \in \mathbb{N} \forall n,m \in \mathbb{N}: n \geq n_o \wedge m \geq n_o \Rightarrow \mathrm{dist}(x_n,x_m) < \varepsilon .$$

Enhver konvergent følge er en fundamentalfølge.

Bevis. Hvis følgen (x_n) er konvergent med grænsepunktet x, findes til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ et n_o, så at $\mathrm{dist}(x_n,x) < \frac{1}{2}\varepsilon$ for alle $n \geq n_o$. For alle $n,m \geq n_o$ gælder da

$$\mathrm{dist}(x_n,x_m) \leq \mathrm{dist}(x_n,x) + \mathrm{dist}(x,x_m) < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon . \square$$

Hvis det omvendt for et metrisk rum (M,dist) gælder, at enhver fundamentalfølge er konvergent, kaldes rummet et fuldstændigt metrisk rum.

Hovedsætning om $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$. Både $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ er med afstandsfunktionen $\mathrm{dist}(x,y) = |x-y|$ fuldstændige metriske rum.

I dette tilfælde er talen om reelle eller komplekse talfølger, og betingelserne $(*)$ og $(\S)$ antager formen

$$(*')\quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists n_o \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_o \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon ,$$

$$(\S')\quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists n_o \in \mathbb{N} \forall n,m \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_o \wedge m \geq n_o \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon .$$

I stedet for grænsepunkt siger vi her grænseværdi. Indholdet af hovedsætningen er, at betingelsen $(\S')$ er ikke blot nødvendig,

men også tilstrækkelig for konvergensen af talfølgen (x_n). Man siger, at betingelsen (§') er et kriterium for konvergensen. Den kaldes Cauchy's konvergenskriterium, og hovedsætningen kaldes det almindelige konvergensprincip. Pointen i sætningen er, at medens i selve definitionen (*') af konvergens grænseværdien indgår, så indgår grænseværdien ikke i betingelsen (§').

Bevis. (1) Tilfældet $\mathbb{R}$. Lad (x_n) være en fundamentalfølge, lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, og lad n_0 være valgt i overensstemmelse med (§'). Da gælder

$$x_{n_0} - \varepsilon \leq \inf\{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \cdots\} \leq \sup\{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \cdots\} \leq x_{n_0} + \varepsilon$$

og følgelig

$$x_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf x_n \leq \limsup x_n \leq x_{n_0} + \varepsilon .$$

De to tal $\liminf x_n$ og $\limsup x_n$ er altså endelige, og deres differens $\limsup x_n - \liminf x_n$ er $\leq 2\varepsilon$. De er følgelig ligestore. Altså er talfølgen (x_n) konvergent med den fælles værdi x af $\liminf x_n$ og $\limsup x_n$ som grænseværdi.

(2) Tilfældet $\mathbb{C}$. Når (x_n) er en talfølge i $\mathbb{C}$, er $(\mathrm{Re}\, x_n)$ og $(\mathrm{Im}\, x_n)$ talfølger i $\mathbb{R}$. Man ser umiddelbart:
(a) Talfølgen (x_n) er konvergent med grænseværdien x, hvis og kun hvis talfølgerne $(\mathrm{Re}\, x_n)$ og $(\mathrm{Im}\, x_n)$ er konvergente med grænseværdierne $\mathrm{Re}\, x$ og $\mathrm{Im}\, x$.
(b) Talfølgen (x_n) er en fundamentalfølge, hvis og kun hvis begge talfølgerne $(\mathrm{Re}\, x_n)$ og $(\mathrm{Im}\, x_n)$ er fundamentalfølger. Dette beror på gyldigheden af følgende uligheder for ethvert komplekst tal z:

$$\left.\begin{matrix}|\text{Re } z| \\ |\text{Im } z|\end{matrix}\right\} \leq |z| \leq |\text{Re } z| + |\text{Im } z|.$$

Sætningen i tilfældet $\mathbb{C}$ følger derfor af sætningen i tilfældet $\mathbb{R}$.∎

Kugler. Lad (M,dist) være et metrisk rum. For ethvert punkt $a \in M$ og ethvert $r \in \mathbb{R}_+$ defineres den åbne kugle $K(a,r)$ med centrum a og radius r ved

$$K(a,r) = \{x \in M \mid \text{dist}(a,x) < r\}.$$

Det ses straks, at der for $0 < r_1 < r_2$ gælder $K(a,r_1) \subseteq K(a,r_2)$. Endvidere, at

$$b \in K(a,r) \Leftrightarrow \text{dist}(a,b) < r \Leftrightarrow a \in K(b,r).$$

I tilfældet $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ med $\text{dist}(x,y) = |x-y|$ er $K(a,r)$ henholdsvis det åbne interval $]a-r,a+r[$ og den åbne cirkelskive med centrum a og radius r (d.v.s. cirkelskiven uden rand).

Hvis $b \in K(a,r)$, altså $\text{dist}(a,b) < r$, og $0 < s \leq r - \text{dist}(a,b)$, gælder

$$K(b,s) \subseteq K(a,r);$$

thi for ethvert $x \in K(b,s)$ har vi $\text{dist}(a,x) \leq \text{dist}(a,b) + \text{dist}(b,x) < \text{dist}(a,b) + s \leq r$.

Hvis $\text{dist}(a,b) \geq r+s$, hvor $r \in \mathbb{R}_+$ og $s \in \mathbb{R}_+$, gælder

$$K(a,r) \cap K(b,s) = \emptyset;$$

thi hvis der fandtes et punkt $x \in K(a,r) \cap K(b,s)$, måtte gælde $\text{dist}(a,b) \leq \text{dist}(a,x) + \text{dist}(x,b) < r+s$.

For enhver ikke tom delmængde A af M defineres diameteren diam(A) af A ved

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\operatorname{dist}(x,y) \mid x \in A \wedge y \in A\}.$$

Der gælder $0 \leq \operatorname{diam}(A) \leq +\infty$. Hvis $\operatorname{diam}(A) < +\infty$, kaldes mængden begrænset, hvis A er begrænset findes for ethvert $a \in M$ en åben kugle $K(a,r)$, der indeholder A. Thi sættes $d = \operatorname{diam}(A)$ og vælges et punkt $x \in A$, gælder for ethvert punkt $y \in A$, at

$$\operatorname{dist}(a,y) \leq \operatorname{dist}(a,x) + \operatorname{dist}(x,y) \leq \operatorname{dist}(a,x) + d.$$

Følgelig gælder $A \subseteq K(a,r)$ for ethvert $r > \operatorname{dist}(a,x) + d$. Omvendt gælder, at enhver delmængde af en kugle er begrænset. Thi hvis $A \subseteq K(a,r)$, gælder jo for vilkårlige punkter $x,y \in A$, at

$$\operatorname{dist}(x,y) \leq \operatorname{dist}(x,a) + \operatorname{dist}(a,y) < 2r,$$

og følgelig gælder $\operatorname{diam}(A) \leq 2r$.

Åbne mængder. En delmængde G afdet metriske rum (M,dist) kaldes åben, hvis der for ethvert punkt $x \in G$ findes et tal $r \in \mathbb{R}_+$, således at $K(x,r) \subseteq G$.

Enhver åben kugle $K(a,r)$ er en åben mængde [hvilket retfærdiggør benævnelsen åben kugle], thi for ethvert $x \in K(a,r)$ gælder jo $K(x,s) \subseteq K(a,r)$, når blot $s \leq r - \operatorname{dist}(a,x)$.

Systemet af åbne delmængder af et metrisk rum (M,dist) har følgende egenskaber:

(1) Ø og M er åbne delmængder af M;

(2) Hvis $\{G_i \mid i \in I\}$ er et vilkårligt system af åbne delmængder af M, er foreningsmængden $\cup\{G_i \mid i \in I\}$ ligeledes en åben delmængde af M;

(3) Hvis $G_1, \cdots, G_n$ er endeligt mange åbne delmængder af M, er fællesmængden $G_1 \cap \cdots \cap G_n$ ligeledes en åben delmængde af M;

(4) Hvis x og y er to forskellige punkter i M, findes disjunkte åbne mængder G_1 og G_2, således at $x \in G_1$ og $y \in G_2$.

Bevis. (1) følger umiddelbart af definitionen.

(2) Lad $x \in G = \cup\{G_i \mid i \in I\}$. Da findes et $i \in I$, så at $x \in G_i$. Idet G_i er åben, findes et $r \in \mathbb{R}_+$, så at $K(x,r) \subseteq G_i$. Da $G_i \subseteq G$, gælder altså $K(x,r) \subseteq G$. Altså er G åben.

(3) Lad $x \in G = G_1 \cap \cdots \cap G_n$. Da gælder $x \in G_i$ for hvert $i = 1, \cdots, n$. Da hvert G_i er åben, findes tal $r_1, \cdots, r_n \in \mathbb{R}_+$, så at $K(x,r_i) \subseteq G_i$ for hvert $i = 1, \cdots, n$. Sættes $r = \min\{r_1, \cdots, r_n\}$, gælder altså $K(x,r) \subseteq G_i$ for hvert $i = 1, \cdots, n$ og følgelig $K(x,r) \subseteq G$. Altså er G åben.

(4) Idet $x \neq y$, er $r = \text{dist}(x,y) > 0$. De to åbne kugler $K(x,\frac{1}{2}r)$ og $K(y,\frac{1}{2}r)$ indeholder henh. x og y og er disjunkte. □

En delmængde G af M er åben, hvis og kun hvis den kan fås som foreningsmængde af et system af åbne kugler.

Bevis. (a) Hvis G er foreningsmængde af et system af åbne kugler, er G åben ifølge (2).

(b) Hvis G er åben, findes for ethvert $x \in G$ et $r_x \in \mathbb{R}_+$, så at $K(x,r_x) \subseteq G$. Der gælder åbenbart

$G = \bigcup\{K(x,r_x) \mid x \in G\}$. □

Afsluttede mængder. En delmængde F af det metriske rum $(M,dist)$ kaldes afsluttet, hvis dens komplementærmængde $M\setminus F$ er åben.

En mængde bestående af et enkelt punkt er afsluttet. Thi hvis $F = \{a\}$, gælder for ethvert punkt $x \in M\setminus F$, at $K(x,dist(a,x)) \subseteq M\setminus F$.

Ved brug af dualitetslovene slutter vi ud fra egenskaberne ved systemet af åbne delmængder af M umiddelbart følgende sætning:

Systemet af afsluttede delmængder af et metrisk rum $(M, dist)$ har følgende egenskaber:

(1) Ø og M er afsluttede delmængder af M;

(2) Hvis $\{F_i \mid i \in I\}$ er et vilkårligt system af afsluttede delmængder af M, er fællesmængden $\bigcap\{F_i \mid i \in I\}$ ligeledes en afsluttet delmængde af M;

(3) Hvis $F_1,\cdots,F_n$ er endeligt mange afsluttede delmængder af M, er foreningsmængden $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ ligeledes en afsluttet delmængde af M.

Indre, ydre, rand, og afslutning af en mængde. Lad A være en delmængde af det metriske rum $(M,dist)$ og x et vilkårligt punkt af M. Punktet x kaldes et indre punkt af A, hvis der findes et $r \in \mathbb{R}_+$, så at $K(x,r) \subseteq A$, [idet $x \in K(x,r)$, medfører dette, at $x \in A$]. Punktet x kaldes et ydre punkt for A, hvis der findes et $r \in \mathbb{R}_+$, så at

$K(x,r) \subseteq M\setminus A$, altså hvis x er et indre punkt af $M\setminus A$ [dette medfører, at $x \notin A$]. Punktet x kaldes et randpunkt for A, hvis det hverken er et indre punkt af A eller et ydre punkt for A, altså hvis der for ethvert $r \in \mathbb{R}_+$ gælder både $A \cap K(x,r) \neq \emptyset$ og $(M\setminus A) \cap K(x,r) \neq \emptyset$ [et randpunkt for A kan tilhøre A eller ikke tilhøre A].

Mængden af indre punkter af A kaldes det indre af A og betegnes A°. Mængden af ydre punkter for A kaldes det ydre af A; vi behøver ingen særskilt betegnelse for at angive denne mængde, idet det jo er mængden $(M\setminus A)^\circ$. Mængden af randpunkter for A kaldes randen af A og betegnes ∂A [bogstavet ∂ læses som d]. Man ser, at de tre mængder $A^\circ, (M\setminus A)^\circ, \partial A$ er disjunkte og at $M = A^\circ \cup (M\setminus A)^\circ \cup \partial A$. Man ser endvidere, at $A^\circ \subseteq A \subseteq A^\circ \cup \partial A$.

Det indre A° af A er en åben delmængde af A. Det er den største åbne delmængde af A, i den forstand, at hvis $G \subseteq A$ og G er åben, da er $G \subseteq A^\circ$.

Bevis. (a) Hvis $x \in A^\circ$ findes et $r \in \mathbb{R}_+$, så at $K(x,r) \subseteq A$. For ethvert $y \in K(x,r)$ gælder $K(y,s) \subseteq K(x,r)$, når blot $s \leq r\text{-dist}(x,y)$. Altså er y også et indre punkt af A. Der gælder altså $K(x,r) \subseteq A^\circ$, hvormed er vist, at A° er åben.

(b) Hvis $G \subseteq A$ og G er åben, findes for ethvert $x \in G$ et $r \in \mathbb{R}_+$, så at $K(x,r) \subseteq G$, og følgelig også $K(x,r) \subseteq A$. Ethvert $x \in G$ er altså et indre punkt af A, d.v.s. der gælder $G \subseteq A^\circ$. ∎

Sætningen kan også udtrykkes således: Det indre A° af A er foreningsmængden af samtlige åbne delmængder af A.

Mængden $M\setminus(M\setminus A)^\circ = A^\circ \cup \partial A$ er som komplementærmængde til den åbne mængde $(M\setminus A)^\circ$ en afsluttet mængde. Den kaldes afslutningen af A og betegnes $\bar{A}$. Man ser straks:

Afslutningen $\bar{A}$ af A er en afsluttet mængde, der indeholder A. Det er den mindste afsluttede mængde, der indeholder A, i den forstand, at hvis $F \supseteq A$ og F er afsluttet, da er $F \supseteq \bar{A}$.

Sætningen kan også udtrykkes således: Afslutningen $\bar{A}$ af A er fællesmængden af samtlige afsluttede mængder, der indeholder A.

Af definitionen $\bar{A} = M\setminus(M\setminus A)^\circ$ ser man, at et punkt $x \in M$ tilhører afslutningen $\bar{A}$ af A, hvis og kun hvis der for ethvert $r \in \mathbb{R}_+$ gælder $A \cap K(x,r) \neq \emptyset$.

Randen ∂A af A er en afsluttet mængde.

Bevis. Vi har $\partial A = M\setminus(A^\circ \cup (M\setminus A)^\circ)$. Mængden $A^\circ \cup (M\setminus A)^\circ$ er som foreningsmængde af åbne mængder en åben mængde. Dens komplementærmængde ∂A er derfor afsluttet. □

Afslutningen $\bar{A}$ af A består af de punkter $x \in M$, der er grænsepunkt for en konvergent punktfølge (x_n), hvis punkter alle tilhører A.

Bevis. (a) Lad x være grænsepunkt for en konvergent punktfølge (x_n), hvis punkter alle tilhører A. Da gælder $x \in \bar{A}$. Thi for ethvert $r \in \mathbb{R}_+$ findes et $n_0 \in \mathbb{N}$, så at $x_n \in K(x,r)$ for alle $n \geq n_0$, og følgelig gælder $A \cap K(x,r) \neq \emptyset$.

(b) Lad $x \in \bar{A}$. Da gælder for ethvert $r \in \mathbb{R}_+$, at $A \cap K(x,r) \neq \emptyset$. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ kan vi altså vælge et punkt x_n i $A \cap K(x,\frac{1}{n})$. Følgen (x_n) er da konvergent med grænsepunktet x, og alle dens punkter tilhører A. □

Af det foregående fremgår: Mængden A er åben, hvis og kun hvis $A = A^\circ$. Mængden A er åben, hvis og kun hvis $A \cap \partial A = \emptyset$. Mængden A er afsluttet, hvis og kun hvis $A = \bar{A}$. Mængden A er afsluttet, hvis og kun hvis $\partial A \subseteq A$.

Ved en omegn af et punkt $x \in M$ forstås en vilkårlig delmængde A af M, der har x til indre punkt, altså en vilkårlig mængde A, der indeholder en åben kugle $K(x,r)$.

En mængde A i M kaldes tæt (eller overalt tæt) i M, hvis $\bar{A} = M$, altså hvis der for ethvert $a \in M$ og ethvert $r \in \mathbb{R}_+$ gælder $A \cap K(a,r) \neq \emptyset$.

I tilfældet $\mathbb{R}$ med $\text{dist}(x,y) = |x-y|$ gælder, som man let ser, for vilkårlige a og b med $a < b$

$$[a,b]^\circ = [a,b[^\circ =]a,b]^\circ =]a,b[^\circ =]a,b[$$

$$\overline{[a,b]} = \overline{[a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{]a,b[} = [a,b]$$

$$\partial[a,b] = \partial[a,b[= \partial]a,b] = \partial]a,b[= \{a,b\}.$$

Fortætningspunkt. Isoleret punkt. Lad A være en delmængde af det metriske rum (M, dist). Et punkt $x \in M$ kaldes et fortætningspunkt for mængden A, hvis det for ethvert $r \in \mathbb{R}_+$ gælder, at mængden $A \cap K(x,r)$ indeholder uendeligt mange punkter Man ser let, at et punkt x er fortætningspunkt for mængden A, hvis og kun hvis det er grænsepunkt for en konvergent punktfølge (x_n) bestående af punkter fra $A \setminus \{x\}$. Endvidere, at $\bar{A} \setminus A$ består af netop de punkter af $M \setminus A$, der er fortætningspunkt for A, eller anderledes sagt: Afslutningen $\bar{A}$ af A fås ved til A at føje de fortætningspunkter for A, der ikke tilhører A.

Et punkt $x \in A$ kaldes et isoleret punkt af A, hvis der findes et $r \in \mathbb{R}_+$, så at $A \cap K(x,r) = \{x\}$. Man ser let, at hvis et punkt $x \in A$ ikke er et isoleret punkt af A, må det være et fortætningspunkt for A. En mængde A, hvis punkter alle er isolerede, kaldes en diskret mængde.

Lad $x_1, x_2, \cdots$ være en punktfølge i det metriske rum (M,dist). Et punkt $x \in M$ kaldes et fortætningspunkt for følgen (x_n), hvis det for ethvert $r \in \mathbb{R}_+$ gælder, at mængden $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(x,r)\}$ er uendelig. Man ser let, at x er fortætningspunkt for følgen (x_n), hvis og kun hvis der findes en delfølge (x_{n_p}), hvor $n_1 < n_2 < \cdots$, som konvergerer mod x. Ethvert fortætningspunkt for mængden $\{x_1, x_2, \cdots\}$ af følgens punkter er naturligvis også et fortætningspunkt for følgen, men det omvendte er i almindelighed ikke rigtigt, idet et punkt x, for hvilket $x_n = x$ for uendeligt mange n, vil være et fortætningspunkt for følgen, men ikke nødvendigvis for mængden af følgens punkter.

Delrum. Lad (M,dist) være et metrisk rum og M' en ikke tom delmængde af M. Restriktionen af metriken dist: $M \times M \to \mathbb{R}$ til $M' \times M'$ ses at være en metrik i M'. Den kaldes den af dist inducerede metrik i M' og betegnes ligeledes dist, og det metriske rum (M',dist) kaldes et metrisk delrum eller underrum af (M,dist). På grundlag af metriken dist er der indenfor M' defineret åbne og afsluttede mængder. Disse mængder er også delmængder af M, og kaldes åbne og afsluttede relativt til M', eller relativt åbne og afsluttede delmængder af M'.

En delmængde G' af M' er åben relativt til M', hvis og kun hvis der findes en åben delmængde G af M, således at $G' = G \cap M'$.

Bevis. (a) Hvis $G \subseteq M$ er åben, findes der til hvert $x \in G$ et $r \in \mathbb{R}_+$, så at $K(x,r) \subseteq G$. For $x \in G \cap M'$ har vi derfor

$$\{y \in M' \mid \text{dist}(x,y) < r\} = K(x,r) \cap M' \subseteq G \cap M',$$

hvilket viser, at $G \cap M'$ er relativt åben, idet den først opskrevne mængde er kuglen $K'(x,r)$ i M' med centrum x og radius r.

(b) Er omvendt $G' \subseteq M'$ relativt åben, findes til ethvert $x \in G'$ et $r_x \in \mathbb{R}_+$, så at $K'(x,r_x) \subseteq G'$, altså $K(x,r_x) \cap M' \subseteq G'$. Mængden

$$G = \bigcup \{K(x,r_x) \mid x \in G'\}$$

er en åben mængde i M, og der gælder øjensynligt $G' = G \cap M'$. □

En delmængde F' af M' er afsluttet relativt til M', hvis og kun hvis der findes en afsluttet delmængde F af M, således at $F' = F \cap M'$.

Bevis. (a). Hvis $F \subseteq M$ er afsluttet, er $G = M \setminus F$ åben. Sættes $F' = F \cap M'$ og $G' = G \cap M'$, er $F' = M' \setminus G'$. Da G' er relativt åben, er F' relativt afsluttet.

(b) Hvis omvendt $F' \subseteq M'$ er relativt afsluttet er $G' = M' \setminus F'$ relativt åben. Følgelig eksisterer en åben mængde G, så at $G' = G \cap M'$. Sættes $F = M \setminus G$, er F afsluttet, og der gælder $F' = F \cap M'$. □

Af de foregående sætninger følger let:

Enhver åben delmængde af M' er også relativt åben. Hvis M' selv er en åben mængde, er de åbne delmængder af M' de eneste relativt åbne mængder.

Enhver afsluttet delmængde af M' er også relativt afsluttet. Hvis M' selv er en afsluttet mængde, er de afsluttede delmængder af M' de eneste relativt afsluttede mængder.

Vi beviser sluttelig:

Hvis (M,dist) er et fuldstændigt metrisk rum og M' er en ikke tom afsluttet delmængde af M, er delrummet (M',dist) ligeledes fuldstændigt.

Bevis. Lad (x_n) være en fundamentalfølge i M'. Betragtet som følge i M er (x_n) da også en fundamentalfølge og derfor konvergent. Da M' er afsluttet, vil grænsepunktet x tilhøre, M', og følgen vil også i M' konvergere mod x.∎

Begyndelsen til læren om punktmængder skyldes G. Cantor. Den abstrakte teori, baseret på begrebet metrisk rum, er grundlagt af M. Fréchet (1906).

Opgaver 1. Vis, at hvis (x_n) og (y_n) er konvergente punktfølger i det metriske rum (M,dist) med grænsepunkter x og y, er talfølgen $\text{dist}(x_n,y_n)$ i $\mathbb{R}$ konvergent med grænseværdien dist(x,y).

2. Vis, at en punktfølge (x_n) i et metrisk rum (M,dist) er konvergent med grænsepunktet x, hvis og kun hvis enhver delfølge har en delfølge, der er konvergent med grænsepunktet x.

3. Idet M er en vilkårlig ikke tom mængde, defineres en funktion $\text{dist}: M \times M \to \mathbb{R}$ ved at

$$\text{dist}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = y \\ 1 & \text{for } x \neq y. \end{cases}$$

Vis, at dist er en metrik i M, og at rummet (M,dist) er et fuldstændigt metrisk rum. Vis endvidere, at enhver delmængde af (M,dist) er både åben og afsluttet.

4. I $\mathbb{C}$ med $\text{dist}(x,y) = |x-y|$ betragtes mængden $A = \{x = x_1+ix_2 \mid |x| \leq 1 \wedge x_2 > 0\}$. Find dens indre A°, dens ydre $(\mathbb{C}\setminus A)^\circ$, dens rand ∂A, og dens afslutning $\bar{A}$.

5. Idet (M_1,dist_1) og (M_2,dist_2) er metriske rum, skal man vise, at funktionen

$$\text{dist}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{\text{dist}_1(x_1,y_1), \text{dist}_2(x_2,y_2)\}$$

er en metrik i produktmængden $M = M_1 \times M_2$.

6. Lad (M,dist) være et metrisk rum og M' en delmængde af M. Vis, at hvis delrummet (M',dist) er fuldstændigt, er M' en afsluttet mængde i (M,dist).

7. Vis, at mængden F af fortætningspunkter for en punktfølge (x_n) i et metrisk rum (M,dist) er bestemt ved formlen

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}}.$$

8. Ved en pseudometrik i en ikke tom mængde M forstås en funktion $d: M \times M \to \mathbb{R}$, for hvilken der for vilkårlige elementer af M gælder

1) $d(x,y) \geq 0$, og $= 0$ hvis $x = y$,

2) $d(x,y) = d(y,x)$,

3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Lad d være en pseudometrik i mængden M.

Vis, at den ved $x \sim y$ når og kun når $d(x,y) = 0$ definerede relation i M er en ækvivalensrelation. Lad $\mathfrak{M}$ betegne kvotientmængden (mængden af ækvivalensklasser) for denne ækvivalensrelation. Vis, at når X og Y er elementer af $\mathfrak{M}$, er tallet $d(x,y)$ det samme for alle par af elementer $x,y \in M$, for hvilke $x \in X$ og $y \in Y$. Vis, at når dette tal betegnes $\text{dist}(X,Y)$, er $\text{dist}: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ en metrik i $\mathfrak{M}$.

§3. Topologiske rum. Ækvivalens af metrikker.

Topologiske rum. Mange af de til et metrisk rum knyttede begrebsdannelser er allerede fastlagt, når systemet af åbne delmængder kendes. Dette gælder begrebet afsluttet mængde, samt begreberne indre, ydre, rand, og afslutning af en mængde. Teorien for metriske rum kan derfor indordnes under en mere almen teori.

Ved en topologi i en ikke tom mængde M forstås et system T af delmængder af M med følgende egenskaber:

(1) $\emptyset$ og M tilhører systemet T;

(2) Hvis $\{G_i \mid i \in I\}$ er et vilkårligt system af mængder tilhørende T, er foreningsmængden $\bigcup\{G_i \mid i \in I\}$ ligeledes en mængde i T;

(3) Hvis $G_1, \cdots, G_n$ er endeligt mange mængder tilhørende T, er fællesmængden $G_1 \cap \cdots \cap G_n$ ligeledes en mængde i T.

En mængde M udstyret med en topologi T kaldes et topologisk rum. Ønsker man i betegnelsen for mængden at anføre topologiens navn, taler man om det topologiske rum (M,T). De til T hørende delmængder af M kaldes de åbne mængder i det topologiske rum (M,T).

For et metrisk rum (M,dist) danner systemet T af åbne delmængder af M en topologi, idet (1) (2) (3) er blandt de i §2 udledte egenskaber ved systemet af åbne mængder i (M,dist). Det topologiske rum (M,T) kaldes det underliggende topologiske rum for det metriske rum (M,dist), og topologien T siges at være induceret af metriken dist. Der findes topologiske rum, for hvilke topologien ikke induceres af nogen metrik, og sådanne rum spiller en betydningsfuld rolle i den videregående analyse.

Vi skal dog ikke her komme ind på dette spørgsmål.

Begrebet topologisk rum er indført af F. Hausdorff (1914) Dog indskrænkede Hausdorff sig til at betragte rum (M,T), hvor topologien opfylder betingelsen

(4) Hvis x og y er to forskellige punkter i M, findes disjunkte mængder G_1 og G_2 tilhørende T, således at $x \in G_1$ og $y \in G_2$.

Et sådant rum kaldes et Hausdorff rum.

For ethvert metrisk rum (M,dist) er det underliggende topologiske rum (M,T) et Hausdorff rum, idet (4) er blandt de i §2 udledte egenskaber ved systemet af åbne mængder i (M,dist).

Ækvivalens af metriker. Hvis $dist_1$ og $dist_2$ er to metriker i samme mængde M, siger vi, at $dist_1$ er ækvivalent med $dist_2$, hvis $dist_1$ og $dist_2$ inducerer samme topologi i M, altså hvis $dist_1$ og $dist_2$ giver anledning til det samme system af åbne delmængder af M. Man efterviser umiddelbart, at der her er tale om en ækvivalensrelation i mængden af alle metriker i M.

To metriker $dist_1$ og $dist_2$ i samme mængde M er ækvivalente, hvis og kun hvis der for ethvert punkt $x \in M$ gælder:

(1) Til ethvert $r_1 \in \mathbb{R}_+$ findes et $r_2 \in \mathbb{R}_+$, således at der for et vilkårligt $y \in M$ gælder $dist_2(x,y) < r_2 \Rightarrow dist_1(x,y) < r_1$,

(2) Til ethvert $s_2 \in \mathbb{R}_+$ findes et $s_1 \in \mathbb{R}_+$, således at der for et vilkårligt $y \in M$ gælder $dist_1(x,y) < s_1 \Rightarrow dist_2(x,y) < s_2$.

Betingelserne kan også udtrykkes således: Enhver $dist_1$-kugle med centrum x indeholder en $dist_2$-kugle med centrum x, og enhver $dist_2$-kugle med centrum x indeholder en $dist_1$-kugle med centrum x.

Bevis. (a) Betingelserne er tilstrækkelige. Antag betingelserne opfyldt, og lad G være dist_1-åben. For ethvert $x \in G$ findes da et $r_1 \in \mathbb{R}_+$, så at

$$\{y \in M \mid \text{dist}_1(x,y) < r_1\} \subseteq G.$$

Vælges $r_2 \in \mathbb{R}_+$ i henhold til (1), følger heraf

$$\{y \in M \mid \text{dist}_2(x,y) < r_2\} \subseteq G,$$

hvilket viser, at G også er dist_2-åben. Analogt følger af (2), at enhver dist_2-åben mængde også er dist_1-åben.

(b) Betingelserne er nødvendige. Hvis dist_1 og dist_2 inducerer samme topologi i M, må enhver åben dist_1-kugle være dist_2-åben, hvilket medfører (1), og enhver åben dist_2-kugle være dist_1-åben, hvilket medfører (2). □

Øvelse. Blandt de til et metrisk rum knyttede begrebsdannelser, der er fastlagt, når systemet af åbne delmængder kendes, er begrebet konvergens af punktfølge, idet der (som man let indser) gælder, at en punktfølge (x_n) i et metrisk rum (M,dist) konvergerer mod et punkt x, hvis og kun hvis der for enhver åben mængde G med $x \in G$ findes et $n_0 \in \mathbb{N}$, så at $x_n \in G$ for alle $n \geq n_0$.

Derimod er begreberne fundamentalfølge, fuldstændighed, og begrænsethed af en punktmængde ikke fastlagt ved metrikens ækvivalensklasse. Dette fremgår af følgende eksempel.

I $\mathbb{R}$ har vi den sædvanlige metrik

$$\text{dist}_1(x,y) = |x-y|.$$

Afbildningen $\varphi: \mathbb{R} \to]-1,1[$ bestemt ved $\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}$ er bijektiv.

En ny metrik i $\mathbb{R}$ er derfor defineret ved

$$\mathrm{dist}_2(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)| .$$

Man ser let, at de to metriker er ækvivalente. Vi betragter nu følgen $1,2,3,\cdots$. Idet

$$\mathrm{dist}_2(m,n) = \left| \frac{m}{1+m} - \frac{n}{1+n} \right| = \left| \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1+m} \right| ,$$

er den en fundamentalfølge i metriken dist_2, medens den åbenbart ikke er en fundamentalfølge i metriken dist_1. Den er ikke konvergent i metriken dist_2, da den så også skulle være det i metriken dist_1. Det metriske rum $(\mathbb{R}, \mathrm{dist}_2)$ er således ikke fuldstændigt, medes det metriske rum $(\mathbb{R},\mathrm{dist}_1)$ som tidligere vist er fuldstændigt. Endelig er $\mathbb{R}$ begrænset i metriken dist_2, men ikke i metriken dist_1.

Opgaver. 1. Lad T være systemet af alle delmængder af $\mathbb{R}$, der enten ikke indeholder 0 eller indeholder 0 og har endelig (evt. tom) komplementærmængde. Vis, at T er en topologi i $\mathbb{R}$, og at T ikke induceres af nogen metrik i $\mathbb{R}$. Vis endvidere, at $(\mathbb{R},T)$ er et Hausdorff rum.

2. Idet M er en vilkårlig ikke tom mængde, tænkes givet en funktion $d: M \times M \to \mathbb{R}^*$, der opfylder følgende betingelser:

(1) $d(x,y) \geq 0$ og $= 0$ hvis og kun hvis $x = y$,

(2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Vis, at for ethvert $a \in \mathbb{R}_+$ er

$$\mathrm{dist}_a(x,y) = \min \{a, d(x,y)\}$$

en metrik i M, og at alle disse metriker er ækvivalente.

§ 4. Talrummene.

Det k-dimensionale reelle talrum $\mathbb{R}^k$. I talrummet $\mathbb{R}^k$ af ordnede sæt $\underline{x} = (x_1,\cdots,x_k)$ af k reelle tal defineres en komposition + kaldet addition ved

$$\underline{x}+\underline{y} = (x_1,\cdots,x_k) + (y_1,\cdots,y_k) = (x_1+y_1,\cdots,x_k+y_k),$$

hvorved $\mathbb{R}^k$ øjensynligt organiseres som en kommutativ gruppe. Nulelementet er nulsættet $\underline{0} = (0,\cdots,0)$. Videre defineres en komposition $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ kaldet skalarmultiplikation ved

$$\lambda\underline{x} = \lambda(x_1,\cdots,x_k) = (\lambda x_1,\cdots,\lambda x_k).$$

Ved disse to kompositioner er $\mathbb{R}^k$ organiseret som et vektorrum over $\mathbb{R}$, jfr. 101-noterne.

Ved en norm på $\mathbb{R}^k$ forstås en afbildning $\|\cdot\|: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, for hvilken der for vilkårlige elementer af $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{R}$ gælder

(1) $\|\underline{x}\| \geq 0$, og $= 0$ hvis og kun hvis $\underline{x} = \underline{0}$,

(2) $\|\lambda\underline{x}\| = |\lambda|\,\|\underline{x}\|$,

(3) $\|\underline{x}+\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$.

Er $\|\cdot\|$ en norm på $\mathbb{R}^k$, defineres en metrik i $\mathbb{R}^k$ ved

$$\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|.$$

At $\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y}) \geq 0$, og $= 0$ når og kun når $\underline{x} = \underline{y}$, følger af (1). At $\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y}) = \mathrm{dist}(\underline{y},\underline{x})$, følger af (2), som for $\lambda = -1$ giver $\|-\underline{x}\| = \|\underline{x}\|$ og dermed $\|\underline{x}-\underline{y}\| = \|\underline{y}-\underline{x}\|$. At endelig $\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{z}) \leq \mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y}) + \mathrm{dist}(\underline{y},\underline{z})$, følger af (3), som giver $\|\underline{x}-\underline{z}\| = \|(\underline{x}-\underline{y}) + (\underline{y}-\underline{z})\| \leq \|\underline{x}-\underline{y}\| + \|\underline{y}-\underline{z}\|$.

For en åben kugle $K(\underline{x},r) = \{\underline{y} \mid \|\underline{x}-\underline{y}\| < r\}$ er ethvert punkt $\underline{z}$ med $\|\underline{x}-\underline{z}\| > r$ et ydre punkt. Thi sættes $\|\underline{x}-\underline{z}\| = d$, er kuglen $K(\underline{z},d-r)$ disjunkt med $K(\underline{x},r)$. Ethvert punkt $\underline{z}$ med $\|\underline{x}-\underline{z}\| = r$ er et randpunkt for $K(\underline{x},r)$, idet $\underline{z} \notin K(\underline{x},r)$ og

$\underline{z}$ åbenbart er grænsepunkt for den i $K(\underline{x},r)$ indeholdte punktfølge $\underline{z}_n = \underline{x} + (1-\frac{1}{n})(\underline{z}-\underline{x})$. Heraf ses, at det ydre af $K(\underline{x},r)$ er mængden $\{\underline{y} \mid \|\underline{x}-\underline{y}\| > r\}$, og at randen af $K(\underline{x},r)$ er mængden $\{\underline{y} \mid \|\underline{x}-\underline{y}\| = r\}$. Afslutningen af $K(\underline{x},r)$ er altså mængden

$$\overline{K}(\underline{x},r) = \{\underline{y} \mid \|\underline{x}-\underline{y}\| \leq r\},$$

der kaldes <u>den afsluttede kugle</u> med centrum $\underline{x}$ og radius r.

På $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ (opfattet som $\mathbb{R}^2$) er den numeriske værdi $\underline{x} \to |\underline{x}|$ normer. På $\mathbb{R}^k$ vil vi specielt betragte følgende normer:

$$\underline{x} = (x_1,\cdots,x_k) \mapsto \|\underline{x}\| = \max\{|x_1|,\cdots,|x_k|\}$$
$$\underline{x} = (x_1,\cdots,x_k) \mapsto \|\underline{x}\| = |x_1| + \cdots + |x_k|$$
$$\underline{x} = (x_1,\cdots,x_k) \mapsto \|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2} \quad .$$

Den første kaldes <u>maksimumsnormen</u>, den sidste <u>den euklidiske</u> (eller <u>pythagoræiske</u>) <u>norm</u>. Verifikationen af normbetingelserne er umiddelbar, pånær betingelsen (3) for den sidste, der kan bevises således:

Det drejer sig om uligheden

$$\sqrt{(x_1+y_1)^2+\cdots+(x_k+y_k)^2} \leq \sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2} + \sqrt{y_1^2+\cdots+y_k^2} \ ,$$

der let ses at være ensgyldig med ~~uligheden~~

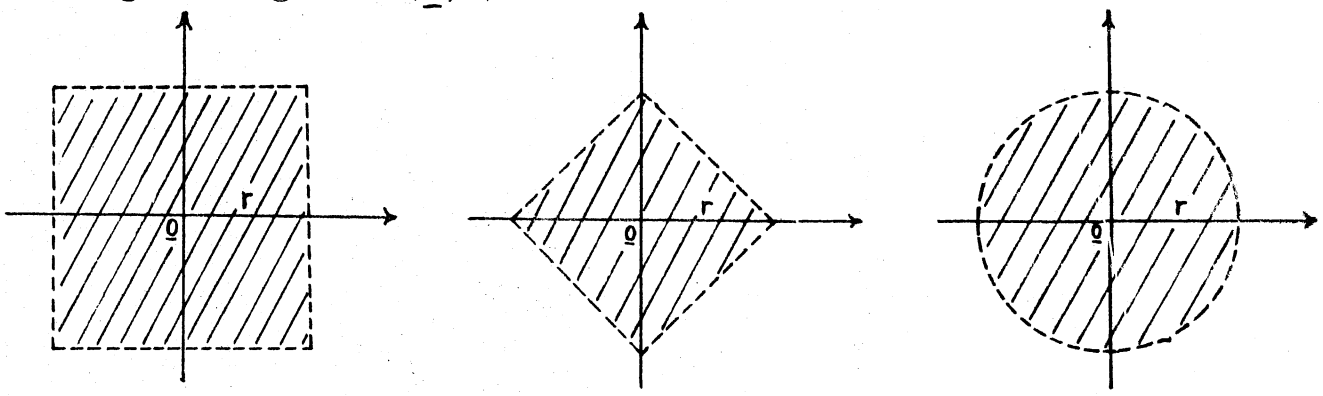
$$|x_1y_1|+\cdots+|x_ky_k| \leq \sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2}\ \sqrt{y_1^2+\cdots+y_k^2} \quad .$$

Denne følger af formlen

$$(x_1^2+\cdots+x_k^2)(y_1^2+\cdots+y_k^2) - (x_1y_1+\cdots+x_ky_k)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(x_iy_j-x_jy_i)^2,$$

i hvilken højre side øjensynligt er ≥ 0.

For $k = 1$ stemmer de tre normer overens, og den tilsvarende metrik er den tidligere betragtede metrik $\text{dist}(x,y) = |x-y|$ i $\mathbb{R}$. For $k = 2$ og $k = 3$ svarer den tredje norm til den sædvanlige afstand i planen eller rummet, når man indfører sædvanlige retvinklede koordinater og dermed afbilder planen eller rummet bijektivt på $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. I tilfælde af planen med sædvanlige retvinklede koordinater viser følgende figurer kuglen $K(\underline{0},r)$ for hver af de tre normer:



Kuglen $K(\underline{x},r)$ fås af kuglen $K(\underline{0},r)$ ved at foretage den ved $\underline{x}$ bestemte translation.

For hvert $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ gælder ulighederne

$$\max\{|x_1|,\cdots,|x_k|\} \leq \sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2}$$

$$\leq |x_1|+\cdots+|x_k| \leq k\cdot\max\{|x_1|,\cdots,|x_k|\},$$

hvor den anden ulighed ses ved kvadrering. Heraf fremgår let, at de til de tre normer hørende metriker er ækvivalente, og også, at begreberne fundamentalfølge og begrænset mængde er de samme for de tre normer.

Alment gælder, at hvilkesomhelst to normer på $\mathbb{R}^k$ bestemmer ækvivalente metriker, hvilket vi kort udtrykker ved at sige, at <u>hvilkesomhelst to normer på</u> $\mathbb{R}^k$ <u>er ækvivalente</u>. Dette er ensbetydende med, at enhver norm $\|\cdot\|^*$ bestemmer samme topologi

som maksimumsnormen $\|\cdot\|$, hvilket atter er ensbetydende med, at enhver kugle med centrum $\underline{0}$ svarende til normen $\|\cdot\|$ indeholder en kugle med centrum $\underline{0}$ svarende til normen $\|\cdot\|^*$, og omvendt. Som følge af normbetingelsen (2) er dette, som man let ser, ensbetydende med, at såvel $\frac{\|\underline{x}\|^*}{\|\underline{x}\|}$ som $\frac{\|\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|^*}$ er begrænsede på $\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$, altså ensbetydende med eksistensen af to tal $\alpha\in\mathbb{R}_+$ og $\beta\in\mathbb{R}_+$, således at der for alle $\underline{x}\in\mathbb{R}^k$ gælder

$$\alpha\|\underline{x}\| \leq \|\underline{x}\|^* \leq \beta\|\underline{x}\| .$$

Beviset herfor vil blive givet i §6. Heraf fremgår, at også begreberne fundamentalfølge og begrænset mængde er ens for normerne $\|\cdot\|$ og $\|\cdot\|^*$ og dermed for to vilkårlige normer. For de formål, vi er interesserede i, er det derfor ligegyldigt, hvilken norm vi betragter. Vi vælger at operere med maksimumsnormen, som er den, der er lettest at håndtere. Hvor intet andet siges, vil vi ved normen $\|\cdot\|$ på $\mathbb{R}^k$ forstå maksimumsnormen og tænke os $\mathbb{R}^k$ udstyret med den til denne hørende metrik.

Hovedsætning om $\mathbb{R}^k$. Talrummet $\mathbb{R}^k$ udstyret med den til maksimumsnormen hørende metrik er et fuldstændigt metrisk rum.

Bevis. En punktfølge $(\underline{x}_n \mid n\in\mathbb{N})$ i $\mathbb{R}^k$, hvor $\underline{x}_n = (x_{n1},\cdots,x_{nk})$, er øjensynligt konvergent med grænsepunktet $\underline{x} = (x_1,\cdots,x_k)$, hvis og kun hvis hver af koordinatfølgerne $(x_{nj} \mid n\in\mathbb{N})$, $j = 1,\cdots,k$, er konvergent i $\mathbb{R}$ med grænseværdien x_j. Videre er den en fundamentalfølge, hvis og kun hvis hver af koordinatfølgerne er en fundamentalfølge i $\mathbb{R}$. Påstanden følger derfor af hovedsætningen for $\mathbb{R}$.∎

Mængden $\mathbb{R}^k$ er ikke numerabel, men den har den numerable

delmængde $\mathbb{Q}^k$. Om denne gælder:

$\mathbb{Q}^k$ er tæt i $\mathbb{R}^k$.

Bevis. For ethvert $\underline{a} = (a_1,\cdots,a_k) \in \mathbb{R}^k$ og ethvert $r \in \mathbb{R}_+$ vil den åbne kugle

$$K(\underline{a},r) = \{\underline{x} = (x_1,\cdots,x_k) \mid |x_j - a_j| < r \text{ for } j = 1,\cdots,k\}$$

indeholde et punkt $\underline{y} = (y_1,\cdots,y_k) \in \mathbb{Q}^k$, idet ethvert åbent interval i $\mathbb{R}$ indeholder et rationalt tal.□

Ved et interval I i $\mathbb{R}^k$ forstås en mængde af formen $I = I_1 \times\cdots\times I_k$, hvor hvert I_j er et interval i $\mathbb{R}$. Svarende til, at hvert I_j kan være af de fire typer $[a_j,b_j]$, $[a_j,b_j[$ $]a_j,b_j]$, $]a_j,b_j[$, bliver der 4^k typer af intervaller i $\mathbb{R}^k$. Man ser let, at der for alle typerne gælder $I^\circ = I_1^\circ \times\cdots\times I_k^\circ$ og $\overline{I} = \overline{I}_1 \times\cdots\times \overline{I}_k$. Randen $\partial I = \overline{I} \setminus I^\circ$ består derfor i alle 4^k tilfælde af de punkter $\underline{x} = (x_1,\cdots,x_k) \in [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_k,b_k]$, for hvilke der for mindst et j gælder $x_j = a_j$ eller $x_j = b_j$. Specielt gælder, at $I = I_1 \times\cdots\times I_k$ er åbent, hvis og kun hvis alle intervallerne I_j er åbne, og afsluttet, hvis og kun hvis alle intervallerne I_j er afsluttede. Længderne $b_j - a_j$ af intervallerne I_j kaldes kantlængderne af I og punktet $\underline{m} = (m_1,\cdots,m_k)$, hvor $m_j = \frac{1}{2}(a_j+b_j)$, kaldes midtpunktet af I. Hvis alle kantlængderne er ligestore, kaldes intervallet en terning. Man ser, at en åben eller afsluttet kugle $K(\underline{x},r)$ eller $\overline{K}(\underline{x},r)$ hørende til maksimumsnormen er det samme som en åben eller afsluttet terning med midtpunktet $\underline{x}$ og kantlængden $2r$. Ethvert interval er åbenbart begrænset. [Tillader man også ubegrænsede intervaller I_j fås et antal typer af ubegrænsede intervaller $I = I_1 \times\cdots\times I_k$ i $\mathbb{R}^k$.]

Det k-dimensionale komplekse talrum $\mathbb{C}^k$. Talrummet $\mathbb{C}^k$ af ordnede sæt $\underline{x} = (x_1,\cdots,x_k)$ af k komplekse tal kan fortolkes som $\mathbb{R}^{2k}$ derved, at hver koordinat x_j erstattes med sin real- og imaginærdel, hvorved $\underline{x}$ bliver at fortolke som punktet $(\mathrm{Re}\, x_1, \mathrm{Im}\, x_1, \cdots, \mathrm{Re}\, x_k, \mathrm{Im}\, x_k)$ i $\mathbb{R}^{2k}$. I stedet for de før betragtede normer vil man dog oftest foretrække den på grundlag af de numeriske værdier af koordinaterne x_j definerede maksimumsnorm

$$\|\underline{x}\| = \|(x_1,\cdots,x_k)\| = \max\{|x_1|,\cdots,|x_k|\}.$$

Det eftervises let, at dette er en norm på $\mathbb{C}^k$ (opfattet som $\mathbb{R}^{2k}$).

Undertiden har man anledning til at betragte talrum $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$ af sæt $(x_1,\cdots,x_k, y_1,\cdots,y_l)$, hvor $x_1,\cdots,x_k$ er reelle og $y_1,\cdots,y_l$ er komplekse tal. Et sådant talrum kan fortolkes som $\mathbb{R}^{k+2l}$, idet de komplekse koordinater erstattes med deres real- og imaginærdel. Man benytter her oftest maksimumsnormen

$$\|(x_1,\cdots,x_k, y_1,\cdots,y_l)\| = \max\{|x_1|,\cdots,|x_k|,|y_1|,\cdots,|y_l|\}.$$

Opgaver. 1. Idet $\|\cdot\|$ betegner maksimumsnormen i $\mathbb{R}^2$, og $\underline{x} = (0,0)$, $\underline{z} = (2,3)$, skal man finde mængden af de punkter $\underline{y} = (y_1,y_2)$, for hvilke

$$\|\underline{x} - \underline{z}\| = \|\underline{x} - \underline{y}\| + \|\underline{y} - \underline{z}\|.$$

2. I mængden M af reelle talfølger $\underline{x} = (x_1,x_2,\cdots)$ defineres addition og skalarmultiplikation ved

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1,x_2,\cdots) + (y_1,y_2,\cdots) = (x_1+y_1, x_2+y_2,\cdots)$$

og

$$\lambda\underline{x} = \lambda(x_1,x_2,\cdots) = (\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots),$$

hvorved M er organiseret som et vektorrum over $\mathbb{R}$. Nulelementet er nulfølgen $\underline{0} = (0,0,\cdots)$.

Vis, at der ikke eksisterer nogen funktion $\|\cdot\|: M \to \mathbb{R}$, der opfylder normbetingelserne

$$\begin{aligned} \|\underline{x}\| &\geq 0, \quad \text{og} \quad = 0 \quad \text{hvis og kun hvis} \quad \underline{x} = 0, \\ \|\lambda\underline{x}\| &= |\lambda|\,\|\underline{x}\|, \\ \|\underline{x}+\underline{y}\| &\leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| , \end{aligned}$$

og som har den egenskab, at der for en følge $(\underline{x}_n) = ((x_{n1},x_{n2},\cdots))$ gælder $\|\underline{x}_n\| \to 0$ for $n\to\infty$, hvis og kun hvis $x_{nj} \to 0$ for $n \to \infty$ for ethvert $j \in \mathbb{N}$.

3. I mængden M af reelle talfølger $\underline{x} = (x_1,x_2,\cdots)$ defineres en funktion $\|\cdot\|: M \to \mathbb{R}$ ved

$$\|\underline{x}\| = \|(x_1,x_2,\cdots)\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \min\left\{|x_j| , \frac{1}{j}\right\}.$$

Vis, at den opfylder betingelserne

$$\begin{aligned} \|\underline{x}\| &\geq 0, \quad \text{og} \quad = 0 \quad \text{hvis og kun hvis} \quad \underline{x} = 0, \\ \|-\underline{x}\| &= \|\underline{x}\|, \\ \|\underline{x}+\underline{y}\| &\leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| , \end{aligned}$$

og at følgelig $\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x}-\underline{y}\|$ er en metrik i M.

Vis, at en punktfølge $(\underline{x}_n) = ((x_{n1},x_{n2},\cdots))$ i (M,dist) er konvergent med grænsepunktet $\underline{x} = (x_1,x_2,\cdots)$, hvis og kun hvis $x_{nj} \to x_j$ for $n\to\infty$ for ethvert $j \in \mathbb{N}$.

*4. En funktion $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ siges at have lokalt maksimum i et punkt $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$, hvis der findes et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, så at $\|\underline{x}-\underline{a}\| < \varepsilon \Rightarrow f(\underline{x}) \leq f(\underline{a})$. Vis, at det for enhver funktion $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gælder, at mængden af de værdier, den antager i sine lokale maksimumspunkter, er endelig eller numerabel.

§5. Kontinuerte afbildninger.

Kontinuitet af en afbildning i et punkt. Lad (X,dist_X) og (Y,dist_Y) være metriske rum. Åbne kugler i X og Y betegnes $K_X(x,r)$ og $K_Y(y,r)$.

En afbildning $f: X \to Y$ kaldes kontinuert i punktet $a \in X$, hvis der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at

$$f(K_X(a,\delta)) \subseteq K_Y(f(a),\varepsilon),$$

altså således at der for ethvert $x \in X$ gælder

$$\text{dist}_X(x,a) < \delta \Rightarrow \text{dist}_Y(f(x),f(a)) < \varepsilon$$

Skrevet med logiske symboler udtrykkes definitionen således:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \forall x \in X: \; \text{dist}_X(x,a) < \delta \Rightarrow \text{dist}_Y(f(x),f(a)) < \varepsilon.$$

Hvis afbildningen ikke er kontinuert i punktet a, siges den at være diskontinuert i a.

Kontinuitet kan i stedet defineres under brug af begrebet konvergent punktfølge, idet der gælder:

Afbildningen $f: X \to Y$ er kontinuert i punktet $a \in X$, hvis og kun hvis det for enhver punktfølge (x_n) i X gælder, at når (x_n) er konvergent med grænsepunktet a, er følgen $(f(x_n))$ af billedpunkter konvergent med grænsepunktet $f(a)$.

Bevis. (1) Vi antager f kontinuert i a og $x_n \to a$ for $n \to \infty$. Til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes, da f er kontinuert i a, et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så at $\text{dist}_Y(f(x),f(a)) < \varepsilon$, når $\text{dist}_X(x,a) < \delta$.

Til dette δ findes, da $x_n \to a$ for $n \to \infty$, et $n_0 \in \mathbb{N}$, så at $\text{dist}_X(x_n,a) < \delta$ for alle $n \geq n_0$. Følgelig gælder $\text{dist}_Y(f(x_n),f(a)) < \varepsilon$ for alle $n \geq n_0$. Altså gælder $f(x_n) \to f(a)$ for $n \to \infty$.

(2) Vi antager, at f ikke er kontinuert i a. Dette betyder, at der findes et $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+$, således at der for ethvert $\delta \in \mathbb{R}_+$ findes et $x \in X$ med

$$\text{dist}_X(x,a) < \delta \qquad \text{og} \qquad \text{dist}_Y(f(x),f(a)) \geq \varepsilon_0.$$

Svarende til $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ vælges punkterne $x_1, x_2, x_3, \cdots$ i henhold hertil. Herved fås en punktfølge (x_n) i X, for hvilken der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

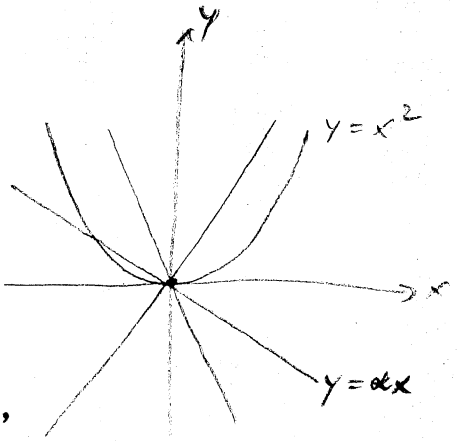
$$\text{dist}_X(x_n,a) < \frac{1}{n} \qquad \text{og} \qquad \text{dist}_Y(f(x_n),f(a)) \geq \varepsilon_0.$$

Følgen (x_n) konvergerer altså mod a, medens følgen $(f(x_n))$ af billedpunkter ikke konvergerer mod $f(a)$. □

Hvis (X,dist_X) og (Y,dist_Y) er metriske rum og X' er en delmængde af X, siges en afbildning $f: X' \to Y$ at være kontinuert i punktet $a \in X'$, hvis f, betragtet som afbildning af delrummet X' ind i Y, er kontinuert i punktet a.

Eksempel. Vi betragter den ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



definerede afbildning $f: \mathbb{R}^2 \to R$. Der gælder

$$f(x,0) = 0 \qquad \text{for alle } x,$$

$$f(0,y) = 0 \qquad \text{for alle } y,$$

og

$$f(x,\alpha x) = \frac{2\alpha x}{x^2+\alpha^2} \qquad \text{for alle } x$$

for ethvert $\alpha \neq 0$. Heraf ses, at restriktionen af f til enhver ret linie gennem $(0,0)$ er kontinuert i $(0,0)$. Imidlertid gælder der

$$f(x,x^2) = 1 \quad \text{for alle} \quad x \neq 0,$$

hvoraf ses, at afbildningen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ikke er kontinuert i punktet $(0,0)$.

Kontinuerte afbildninger. Idet (X,dist_X) og (Y,dist_Y) er metriske rum, siges en afbildning $f: X \to Y$ at være kontinuert, hvis den er kontinuert i ethvert punkt $a \in X$.

Hvis afbildningen ikke er kontinuert, siges den at være diskontinuert. En afbildning er altså diskontinuert, hvis den er diskontinuert i mindst et punkt.

En afbildning $f: X \to Y$ er kontinuert, hvis og kun hvis originalmængden $f^{-1}(G)$ af enhver åben delmængde G af Y er en åben delmængde af X.

Bevis. (1) Antag, at f er kontinuert, og lad G være en åben delmængde af Y. For ethvert punkt $a \in f^{-1}(G)$ gælder $f(a) \in G$. Da G er åben, findes et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, så at $K_Y(f(a),\varepsilon) \subseteq G$. Da f er kontinuert i a, findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så at $f(K_X(a,\delta)) \subseteq K_Y(f(a),\varepsilon)$. Følgelig gælder $K_X(a,\delta) \subseteq f^{-1}(G)$. Mængden $f^{-1}(G)$ er altså åben.

(2) Antag, at $f^{-1}(G)$ er åben for enhver åben delmængde G af Y. For ethvert punkt $a \in X$ og ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælder da, at $f^{-1}(K_Y(f(a),\varepsilon))$ er åben. Der findes altså et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så at $K_X(a,\delta) \subseteq f^{-1}(K_Y(f(a),\varepsilon))$. Følgelig er $f(K_X(a,\delta)) \subseteq K_Y(f(a),\varepsilon)$. Altså er f kontinuert i punktet a.□

En afbildning $f: X \to Y$ er kontinuert, hvis og kun hvis originalmængden $f^{-1}(F)$ af enhver afsluttet delmængde F af Y er en afsluttet delmængde af X.

Bevis. (1) Antag, at f er kontinuert, og lad F være en afsluttet delmængde af Y. Da er $G = Y\backslash F$ åben og følgelig $f^{-1}(G)$ åben. Men $f^{-1}(F) = X\backslash f^{-1}(G)$. Altså er $f^{-1}(F)$ afsluttet.

(2) Antag, at $f^{-1}(F)$ er afsluttet for enhver afsluttet delmængde F af Y. For enhver åben delmængde G af Y er $F = Y\backslash G$ afsluttet og følgelig $f^{-1}(F)$ afsluttet. Men $f^{-1}(G) = X\backslash f^{-1}(F)$. Altså er $f^{-1}(G)$ åben. Følgelig er f kontinuert.

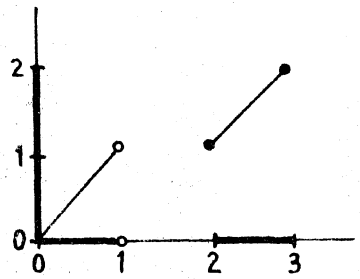
Hvis (X,dist_X), (Y,dist_Y), (Z,dist_Z) er metriske rum og $f: X \to Y$ og $g: Y \to Z$ er kontinuerte, er den sammensatte afbildning $g\circ f: X \to Z$ ligeledes kontinuert.

Bevis. For enhver delmængde C af Z er $(g\circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. Hvis C er åben, er $g^{-1}(C)$ åben og følgelig $f^{-1}(g^{-1}(C))$ åben. □

Derimod vil den omvendte afbildning til en bijektiv kontinuert afbildning i almindelighed ikke være kontinuert.

Betragt f.eks. $\mathbb{R}$ med metriken $\mathrm{dist}(x,y) = |x-y|$, lad X og Y være mængderne $[0,1[\cup [2,3]$ og $[0,2]$ betragtet som delrum af $\mathbb{R}$, og lad $f: X \to Y$ være den ved

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0,1[\\ x-1 & \text{for } x \in [2,3] \end{cases}$$



bestemte afbildning. Da er f kontinuert og bijektiv, men f^{-1} er diskontinuert i punktet 1.

Hvis (X,dist_X) og (Y,dist_Y) er metriske rum og X' er en delmængde af X, siges en afbildning $f: X' \to Y$ at være kontinuert, hvis den er en kontinuert afbildning af delrummet X' ind i Y.

Restriktionen $f|X': X' \to Y$ af en kontinuert afbildning $f: X \to Y$ er kontinuert. Thi hvis G er en åben delmængde af Y, er $f^{-1}(G)$ åben, og mængden $(f|X')^{-1}(G) = f^{-1}(G) \cap X'$ er følgelig åben relativt til X'.

Er $f: X \to Y$ en afbildning, og Y' en delmængde af Y, der indeholder $f(X)$, defineres ved $\tilde{f}(x) = f(x)$ for $x \in X$ en afbildning $\tilde{f}$ af X ind i delrummet Y'. For enhver delmængde B af Y gælder $\tilde{f}^{-1}(B \cap Y') = f^{-1}(B)$. Heraf følger, at $\tilde{f}$ er kontinuert, hvis og kun hvis f er kontinuert.

Man har undertiden anledning til at benytte følgende sætning:

<u>En afbildning</u> $f: X \to Y$ <u>er kontinuert, hvis der findes endeligt mange afsluttede delmængder</u> $F_1,\cdots,F_n$ <u>af</u> X <u>med</u> $X = F_1 \cup \cdots \cup F_n$, <u>således at hver af restriktionerne</u> $f|F_1,\cdots,f|F_n$ <u>er kontinuert</u>.

<u>Bevis</u>. Lad B være en afsluttet delmængde af Y. Da er

$$(f|F_i)^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap F_i$$

afsluttet relativt til F_i, og dermed afsluttet i X, da F_i er afsluttet. Idet

$$f^{-1}(B) = (f^{-1}(B) \cap F_1) \cup \cdots \cup (f^{-1}(B) \cap F_n),$$

ses, at $f^{-1}(B)$ er afsluttet, hvilket giver påstanden.□

Afstandsformindskende afbildninger. Isometri. Homeomorfi.

En afbildning $f: X \to Y$ af det metriske rum $(X, dist_X)$ ind i det metriske rum $(Y, dist_Y)$ kaldes afstandsformindskende (i vid betydning), hvis der for vilkårlige punkter x_1 og x_2 i X gælder

$$dist_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq dist_X(x_1, x_2).$$

En sådan afbildning er øjensynligt kontinuert. Afbildningen kaldes en isometri, hvis den er bijektiv, og der for vilkårlige punkter x_1 og x_2 i X gælder

$$dist_Y(f(x_1), f(x_2)) = dist_X(x_1, x_2).$$

Begrebet isometri er isomorfibegrebet for metriske rum. Afbildningen kaldes en homeomorfi, hvis den er bijektiv og såvel f som f^{-1} er kontinuert. En isometri er en homeomorfi, medens det omvendte i almindelighed ikke gælder.

På talrummet $\mathbb{R}^k$ defineres den j^{te} koordinatfunktion $x_j: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, k$, ved

$$\underline{x} = (x_1, \cdots, x_k) \mapsto x_j.$$

Idet der for vilkårlige $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ og $\underline{y} = (y_1, \cdots, y_k)$ i $\mathbb{R}^k$ gælder

$$|x_j - y_j| \leq \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_k - y_k|\} = \|\underline{x} - \underline{y}\|,$$

er x_j afstandsformindskende og derfor kontinuert.

Kontinuitet af regneoperationerne. De ved

$\varphi_1\colon (x_1,x_2) \mapsto x_1+x_2$, $\varphi_2\colon (x_1,x_2) \mapsto x_1-x_2$, $\varphi_3\colon (x_1,x_2) \mapsto x_1x_2$

<u>definerede afbildninger af</u> $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ <u>ind i</u> $\mathbb{R}$ <u>eller</u> $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ <u>ind i</u> $\mathbb{C}$ <u>og den ved</u> $\varphi_4\colon (x_1,x_2) \to \frac{x_1}{x_2}$ <u>definerede afbildning af</u> $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ <u>ind i</u> $\mathbb{R}$ <u>eller</u> $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ <u>ind i</u> $\mathbb{C}$ <u>er kontinuerte.</u>

<u>Bevis</u>. Idet vi i $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ benytter den ved maksimumsnormen $\|(x_1,x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ bestemte metrik, kan påstandene for $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ bevises samtidigt.

Kontinuiteten af <u>summen</u> følger af, at der for vilkårlige $\underline{a} = (a_1,a_2)$ og $\underline{x} = (x_1,x_2)$ gælder

$$|\varphi_1(\underline{x})-\varphi_1(\underline{a})| = |x_1-a_1+x_2-a_2| \le |x_1-a_1| + |x_2-a_2|$$
$$\le 2\max\{|x_1-a_1|, |x_2-a_2|\} = 2\|\underline{x}-\underline{a}\|.$$

Tilsvarende følger kontinuiteten af <u>differensen</u> af, at

$$|\varphi_2(\underline{x})-\varphi_2(\underline{a})| = |x_1-a_1-x_2+a_2| \le |x_1-a_1| + |x_2-a_2|$$
$$\le 2\max\{|x_1-a_1|, |x_2-a_2|\} = 2\|\underline{x}-\underline{a}\|.$$

Ved <u>produktet</u> har vi, idet vi sætter $\underline{x}-\underline{a} = \underline{y} = (y_1,y_2)$,

$$\varphi_3(\underline{x}) - \varphi_3(\underline{a}) = (a_1+y_1)(a_2+y_2) - a_1a_2 = a_1y_2 + y_1a_2 + y_1y_2.$$

For $\|\underline{x}-\underline{a}\| = \|y\| < \delta \le 1$ gælder altså

$$|\varphi_3(\underline{x})-\varphi_3(\underline{a})| < (|a_1|+|a_2|+1)\delta,$$

hvilket viser kontinuiteten i det vilkårlige punkt $\underline{a}$, idet vi for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vælge et $\delta \in]0,1]$, så at $(|a_1|+|a_2|+1)\delta < \varepsilon$.

Ved <u>kvotienten</u> skal kontinuiteten eftervises i et vilkårligt punkt $\underline{a} = (a_1,a_2)$, hvor $a_2 \neq 0$. Idet vi atter sætter $\underline{x}-\underline{a} = \underline{y} = (y_1,y_2)$, og nøjes med at betragte sådanne $\underline{x}$, for

hvilke $\|\underline{x}-\underline{a}\| = \|\underline{y}\| < |a_2|$, og følgelig $x_2 = a_2+y_2 \neq 0$, har vi

$$\varphi_4(\underline{x}) - \varphi_4(\underline{a}) = \frac{a_1+y_1}{a_2+y_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{(a_1+y_1)a_2-a_1(a_2+y_2)}{(a_2+y_2)a_2} = \frac{y_1a_2 - a_1y_2}{(a_2+y_2)a_2} .$$

For $\|\underline{x}-\underline{a}\| = \|\underline{y}\| < \delta \leq \frac{1}{2}|a_2|$ gælder altså

$$|\varphi_4(\underline{x})-\varphi_4(\underline{a})| < \frac{(|a_1| + |a_2|)\delta}{\frac{1}{2}|a_2|\,|a_2|}$$

hvilket viser kontinuiteten i $\underline{a}$, idet vi for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vælge et $\delta \in]0,\frac{1}{2}|a_2|]$, så at $\frac{(|a_1| + |a_2|)\delta}{\frac{1}{2}|a_2|^2} < \varepsilon$.□

<u>De ved $x \mapsto |x|$ bestemte afbildninger af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{R}$ er kontinuerte.</u>

<u>Bevis</u>. Ifølge den for $x,y \in \mathbb{R}$ eller $x,y \in \mathbb{C}$ gældende ulighed $||x|-|y|| \leq |x-y|$ er afbildningerne afstandsformindskende.□

Benyttes karakteriseringen af kontinuitet ved konvergente punktfølger, og det faktum, at en punktfølge $((x_n,y_n))$ i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{C}^2$ er konvergent med grænsepunktet (x,y), hvis og kun hvis talfølgen (x_n) er konvergent med grænseværdien x og talfølgen (y_n) er konvergent med grænseværdien y, ser vi, at kontinuiteten af regneoperationerne er ensbetydende med følgende sætning om regning med konvergente talfølger:

<u>Hvis de reelle eller komplekse talfølger (x_n) og (y_n) er konvergente med grænseværdierne x og y, er talfølgerne (x_n+y_n), (x_n-y_n), (x_ny_n) konvergente med grænseværdierne $x+y$, $x-y$, xy. Hvis y og hvert y_n er $\neq 0$, er talfølgen $\frac{x_n}{y_n}$ konvergent med grænseværdien $\frac{x}{y}$.</u>

Vi ser endvidere:

Hvis den reelle eller komplekse talfølge (x_n) er konvergent med grænseværdien x, er talfølgen $(|x_n|)$ konvergent med grænseværdien $|x|$.

Kontinuerte reelle og komplekse funktioner. Idet (M,dist) betegner et metrisk rum, kaldes en kontinuert afbildning $f: M \to \mathbb{R}$ eller $f: M \to \mathbb{C}$ en kontinuert reel eller kompleks funktion på M. Mængden af kontinuerte reelle funktioner på M betegnes $C^0(M,\mathbb{R})$ og mængden af kontinuerte komplekse funktioner $C^0(M,\mathbb{C})$. Hvis det af sammenhængen fremgår, hvilket af de to tilfælde talen er om, benyttes også den kortere betegnelse $C^0(M)$.

Mængden $C^0(M,\mathbb{C})$ af kontinuerte komplekse funktioner på det metriske rum M udgør en (kommutativ) funktionsring, der har mængden $C^0(M,\mathbb{R})$ af kontinuerte reelle funktioner som delring. Et element f i $C^0(M,\mathbb{C})$ har et reciprokt element, hvis (og naturligvis kun hvis) $f(x) \neq 0$ for alle $x \in M$.

Bevis. Problemet er at bevise, at f_1+f_2, f_1-f_2, f_1f_2, samt $\frac{f_1}{f_2}$ (hvis f_2 ikke antager værdien 0) er kontinuerte, hvis $f_1, f_2: M \to \mathbb{C}$ er kontinuerte. Dette følger af sætningen om sammensætning af kontinuerte afbildninger og sætningen om regneoperationernes kontinuitet, idet det bemærkes, at afbildningen $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ af M ind i $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ er kontinuert, hvilket ses således: For givet $a \in M$ og $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta_1 \in \mathbb{R}_+$ og et $\delta_2 \in \mathbb{R}_+$, så at

$$\text{dist}(x,a) < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - f_1(a)| < \varepsilon$$
$$\text{dist}(x,a) < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - f_2(a)| < \varepsilon .$$

Heraf følger, idet man sætter $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,

$$\text{dist}(x,a) < \delta \Rightarrow \max\{|f_1(x)-f_1(a)|, |f_2(x)-f_2(a)|\} < \varepsilon.$$

Vi bemærker endvidere, at hvis f er kontinuert, er også funktionen $|f|$, bestemt ved $x \mapsto |f(x)|$, kontinuert. For reelle funktioner følger heraf, at hvis f_1 og f_2 er kontinuerte, er også funktionerne $g_1 = \max\{f_1,f_2\}$ og $g_2 = \min\{f_1,f_2\}$ bestemt ved $x \mapsto \max\{f_1(x),f_2(x)\}$ og $x \mapsto \min\{f_1(x),f_2(x)\}$, kontinuerte. Thi for vilkårlige reelle tal k_1 og k_2 er $\max\{k_1,k_2\} = \frac{1}{2}(k_1+k_2) + \frac{1}{2}|k_1-k_2|$ og $\min\{k_1,k_2\} = \frac{1}{2}(k_1+k_2) - \frac{1}{2}|k_1-k_2|$. Følgelig er $g_1 = \frac{1}{2}(f_1+f_2) + \frac{1}{2}|f_1-f_2|$ og $g_2 = \frac{1}{2}(f_1+f_2) - \frac{1}{2}|f_1-f_2|$.

Afstand fra et punkt til en mængde. Betegner A en ikke tom delmængde af et metrisk rum (M,dist), defineres ved

$$x \mapsto \varphi(x) = \text{dist}(x,A) = \inf\{\text{dist}(x,y) \mid y \in A\}$$

en reel, ikke negativ funktion på M. For et vilkårligt $x \in M$ kaldes $\text{dist}(x,A)$ afstanden fra punktet x til mængden A. Det bør ikke give anledning til misforståelse, at vi også betegner denne afstand med dist. Man ser, at $\text{dist}(x,A) > 0$, hvis og kun hvis x er et ydre punkt for A. Følgelig gælder $\text{dist}(x,A) = 0$, hvis og kun hvis x tilhører afslutningen $\bar{A}$ af A.

Afbildningen $\varphi: M \to \mathbb{R}$ er afstandsformindskende og derfor kontinuert. For vilkårlige punkter $x_1, x_2 \in M$ og et vilkårligt punkt $y \in A$ har vi nemlig

$$\text{dist}(x_1,A) \leq \text{dist}(x_1,y) \leq \text{dist}(x_1,x_2) + \text{dist}(x_2,y),$$

hvoraf følger

$$\mathrm{dist}(x_1,A) \leq \mathrm{dist}(x_1,x_2) + \mathrm{dist}(x_2,A),$$

altså

$$\mathrm{dist}(x_1,A) - \mathrm{dist}(x_2,A) \leq \mathrm{dist}(x_1,x_2).$$

Lader vi x_1 og x_2 bytte roller, får vi herved

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = |\mathrm{dist}(x_1,A) - \mathrm{dist}(x_2,A)| \leq \mathrm{dist}(x_1,x_2).$$

Til ethvert par F_1,F_2 af disjunkte, ikke tomme, afsluttede delmængder af det metriske rum (M,dist) findes disjunkte åbne mængder G_1,G_2, så at $F_1 \subseteq G_1$ og $F_2 \subseteq G_2$.

Bevis. Lad $\varphi_1(x) = \mathrm{dist}(x,F_1)$ og $\varphi_2(x) = \mathrm{dist}(x,F_2)$. Vi betragter mængderne

$$G_1 = \{x \in M \mid \varphi_1(x) < \varphi_2(x)\}\ ,\quad G_2 = \{x \in M \mid \varphi_1(x) > \varphi_2(x)\}.$$

Mængderne er øjensynligt disjunkte, og de er åbne, idet de er originalmængderne af $\mathbb{R}_-$ og $\mathbb{R}_+$ ved den kontinuerte afbildning $\varphi_1-\varphi_2\colon M \to \mathbb{R}$. Hvis $x \in F_1$, gælder $\varphi_1(x) = 0$ og $\varphi_2(x) > 0$ [idet $x \notin \overline{F}_2 = F_2$]. Altså har vi $F_1 \subseteq G_1$. Hvis $x \in F_2$, gælder $\varphi_2(x) = 0$ og $\varphi_1(x) > 0$ [idet $x \notin \overline{F}_1 = F_1$]. Altså har vi $F_2 \subseteq G_2$.∎

Grænsepunkt for en afbildning. Lad (X,dist_X) og (Y,dist_Y) være metriske rum, lad A være en delmængde af X, og lad $f\colon A \to Y$ være en afbildning. Lad $a \in X$, og lad A' være en delmængde af A, der ikke indeholder a, og som har a til fortætningspunkt. Afbildningen $y = f(x)$ siges da at have grænse-

punktet eller grænseværdien $b \in Y$ for x gående mod a i A' og vi skriver $b = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A'}} f(x)$

eller $f(x) \to b$ for $x \to a$ i A', hvis den ved

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in A' \\ b & \text{for } x = a \end{cases}$$

definerede afbildning $\tilde{f}: A' \cup \{a\} \to Y$ er kontinuert i punktet a. Det er uden betydning, om $a \in A$ eller $a \notin A$, og hvis $a \in A$ er værdien $f(a)$ af f i punktet a uden betydning. Man ser umiddelbart, at $f(x)$ ikke kan have flere forskellige grænseværdier for $x \to a$ i A'.

Hvis $X = \mathbb{R}$, og A er et begrænset eller ubegrænset interval, kan vi for et vilkårligt $a \in \bar{A}$, for hvilket $a < \sup A$, vælge $A' = A \cap]a, +\infty[$. Grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod a i A' (hvis den eksisterer) kaldes da grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod a fra højre og betegnes $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ eller $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ eller $f(a+0)$. Analogt kan vi for ethvert $a \in \bar{A}$, for hvilket $a > \inf A$, vælge $A' = A \cap]-\infty, a[$. Grænseværdien kaldes da grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod a fra venstre og betegnes $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ eller $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ eller $f(a-0)$.

Øvelse: Hvis $X = \mathbb{R}$ eller $Y = \mathbb{R}$ (evt. begge dele), kan vi også tale om grænseværdi for $x \to +\infty$ eller $x \to -\infty$, eller om, at en grænseværdi er $+\infty$ eller $-\infty$. Disse begreber kan bringes ind under den almene definition, idet vi udvider $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^*$ og som metrik i $\mathbb{R}^*$ benytter $\operatorname{dist}(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$, hvor $\varphi: \mathbb{R}^* \to [-1,1]$ er bestemt ved, at $\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}$ for

$x \in \mathbb{R}$, og $\varphi(+\infty) = 1$, $\varphi(-\infty) = -1$.

Monotone funktioner. Lad A være et begrænset eller ubegrænset interval i $\mathbb{R}$ og $f: A \to \mathbb{R}$ en monotont voksende funktion Da gælder: For ethvert $a \in \bar{A}$, for hvilket $a < \sup A$, eksisterer grænseværdien $f(a+0)$ fra højre og er lig med $\inf\{f(x) \mid x \in A \wedge x > a\}$. Thi betegnes dette infimum med b, gælder for ethvert $b' > b$, at der findes et $x' \in A$, så at $x' > a$ og $f(x') < b'$, og for $x \in]a,x'[$ gælder da $b \leq f(x) < b'$. Analogt gælder: For ethvert $a \in \bar{A}$, for hvilket $a > \inf A$, eksisterer grænseværdien $f(a-0)$ fra venstre og er lig med $\sup\{f(x) \mid x \in A \wedge x < a\}$. For ethvert $a \in A^{\circ}$ gælder åbenbart $f(a-0) \leq f(a) \leq f(a+0)$, og f er kontinuert i a, hvis og kun hvis $f(a-0) = f(a) = f(a+0)$. Hvis f er diskontinuert i a, vil f ikke antage nogen værdi i intervallet $]f(a-0), f(a+0)[$ undtagen værdien $f(a)$, såfremt denne ikke netop er lig med $f(a-0)$ eller $f(a+0)$. Hvis A har et mindste tal a, gælder $f(a) \leq f(a+0)$, og f er kontinuert i a, hvis og kun hvis $f(a) = f(a+0)$. Hvis f er diskontinuert i a, vil f ikke antage nogen værdi i intervallet $]f(a), f(a+0)[$. Hvis A har et største tal a, gælder $f(a-0) \leq f(a)$, og f er kontinuert i a, hvis og kun hvis $f(a-0) = f(a)$. Hvis f er diskontinuert i a, vil f ikke antage nogen værdi i intervallet $]f(a-0), f(a)[$.

For en monotont aftagende funktion $f: A \to \mathbb{R}$ gælder naturligvis tilsvarende sætninger.

Opgaver. 1. Vis, at når (M,dist) er et metrisk rum og a et punkt af M, er den ved $x \mapsto \varphi(x) = \mathrm{dist}(a,x)$ bestemte funktion $\varphi: M \to \mathbb{R}$ kontinuert.

2. Lad (X,dist_X), (Y,dist_Y), (Z,dist_Z) være metriske rum og $f: X \to Y$ og $g: Y \to Z$ afbildninger. Vis, at hvis f er kontinuert i punktet $a \in X$, og g er kontinuert i punktet $f(a) \in Y$, er den sammensatte afbildning $g \circ f: X \to Z$ kontinuert i punktet a.

3. Lad (X,dist_X) og (Y,dist_Y) være metriske rum, A en delmængde af X, og $f: A \to Y$ en kontinuert afbildning, for hvilken grænsepunktet $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y)$ eksisterer for ethvert punkt $x \in \bar{A} \setminus A$.

Vis, at den ved

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in A \\ \lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y) & \text{for } x \in \bar{A} \setminus A \end{cases}$$

definerede afbildning $\tilde{f}: \bar{A} \to Y$ er kontinuert.

4. Vis, at når (M,dist) er et metrisk rum, er

$$\mathrm{Dist}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \mathrm{dist}(x_1,y_1) + \mathrm{dist}(x_2,y_2)$$

en metrik i $M \times M$. Vis, at afbildningen $\mathrm{dist}: M \times M \to \mathbb{R}$ er kontinuert i det metriske rum $(M \times M, \mathrm{Dist})$.

§6. Kompakte mængder. Uniform kontinuitet.

En af de fundamentale sætninger i analysen er følgende kendte sætning af K. Weierstrass: En kontinuert reel funktion på et begrænset, afsluttet interval i $\mathbb{R}$ har en største og en mindste værdi. Vi vil studere denne sætnings generalisation til talrummene $\mathbb{R}^k$ og de begrebsdannelser, der knytter sig dertil. I denne sammenhæng spiller følgende sætning en central rolle.

Borels overdækningssætning. For en delmængde A af $\mathbb{R}^k$ er følgende to betingelser ensgyldige:

(1) A er begrænset og afsluttet.

(2) For enhver overdækning af A med et system $\{G_i \mid i \in I\}$ af åbne delmængder af $\mathbb{R}^k$ findes et endeligt delsystem $\{G_{i_1},\cdots,G_{i_n}\}$, som overdækker A.

En overdækning af en mængde med et system af åbne mængder kaldes kort en åben overdækning, og en overdækning af en mængde med et endeligt system af mængder kaldes en endelig overdækning. Betingelsen (2) kan derfor udtrykkes ved, at enhver åben overdækning af A kan udtyndes til en endelig overdækning af A.

Sætningen er (i en mere speciel form) opstillet af E. Borel (1894), men ideen i den går længere tilbage. Borels fortjeneste er at have set, at en række fundamentale resultater på simpel måde kan udledes fra den. Sætningen kaldes ofte (med urette) Heine-Borels sætning.

Bevis. (2) $\Rightarrow$ (1). Systemet af åbne kugler $G_i = K(Q,i)$, $i \in \mathbb{N}$, overdækker $\mathbb{R}^k$, altså også A. Af forudsætningen (2) følger da, at der findes et endeligt delsystem $\{G_{i_1},\cdots,G_{i_n}\}$, der overdækker A. Da $G_1 \subset G_2 \subset \cdots$, ser man, at kuglen $G_i = K(Q,i)$, hvor $i = \max\{i_1,\cdots,i_n\}$, indeholder A.

Følgelig er A begrænset.

Lad $\underline{a} \in \mathbb{R}^k \setminus A$. Systemet af komplementærmængder $G_i = \mathbb{R}^k \setminus \overline{K}(\underline{a}, \frac{1}{i})$, $i \in \mathbb{N}$, til de afsluttede kugler $\overline{K}(\underline{a}, \frac{1}{i})$ overdækker $\mathbb{R}^k \setminus \{a\}$, altså også A. Af forudsætningen (2) følger da, at der findes et endeligt delsystem $\{G_{i_1}, \cdots, G_{i_n}\}$, der overdækker A. Da $G_1 \subset G_2 \subset \cdots$, ser man, at mængden $G_i = \mathbb{R}^k \setminus \overline{K}(\underline{a}, \frac{1}{i})$, hvor $i = \max\{i_1, \cdots, i_n\}$, indeholder A. Følgelig gælder $K(\underline{a}, \frac{1}{i}) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus A$. Altså er $\underline{a}$ et ydre punkt for A. Følgelig er A afsluttet.

(1) $\Rightarrow$ (2). Dette bevises indirekte. Vi antager altså, at A er en begrænset, afsluttet mængde og $\{G_i \mid i \in I\}$ en åben overdækning af A, der ikke kan udtyndes til en endelig overdækning af A, og skal nå til en modstrid.

Da A er begrænset, er A delmængde af et afsluttet interval

$$K^1 = [a_1^1, b_1^1] \times \cdots \times [a_k^1, b_k^1].$$

For hvert $j = 1, \cdots, k$ betragter vi de to intervaller $[a_j^1, m_j^1]$ og $[m_j^1, b_j^1]$, hvor $m_j^1 = \frac{1}{2}(a_j^1 + b_j^1)$ er midtpunktet af $[a_j^1, b_j^1]$, og vi danner de 2^k afsluttede intervaller

$$K^2 = [a_1^2, b_1^2] \times \cdots \times [a_k^2, b_k^2],$$

hvor hvert $[a_j^2, b_j^2]$ er enten $[a_j^1, m_j^1]$ eller $[m_j^1, b_j^1]$. Da er K^1 åbenbart foreningsmængden af disse 2^k intervaller K^2, og A er følgelig foreningsmængden af de 2^k mængder $A \cap K^2$. For mindst et af intervallerne K^2 må da gælde, at $A \cap K^2$ ikke kan overdækkes med et endeligt delsystem af systemet $\{G_i \mid i \in I\}$. Lad K^2 være valgt sådan. Nu gentages ræsonnementet med K^2, og således fortsættes. Herved fås en dalende følge $K^1 \supset K^2 \supset K^3 \supset \cdots$ af afsluttede intervaller

$$K^p = [a_1^p, b_1^p] \times \cdots \times [a_k^p, b_k^p] ,$$

således at det for hvert p gælder, at $A \cap K^p$ ikke kan overdækkes med et endeligt delsystem af systemet $\{G_i \mid i \in I\}$. Specielt må gælde $A \cap K^p \neq \emptyset$ for hvert p.

For hvert $j = 1, \cdots, k$ gælder $[a_j^1, b_j^1] \supset [a_j^2, b_j^2] \supset [a_j^3 b_j^3] \supset \cdots$. Fællesmængden $\bigcap_{p=1}^{\infty} [a_j^p, b_j^p]$ er derfor et afsluttet interval i $\mathbb{R}$, og da intervallængderne går mod 0 [idet hver er halvdelen af den foregående] består dette interval af eet punkt c_j. Heraf følger, at

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} K^p = \{\underline{c}\} = \{(c_1, \cdots, c_k)\}.$$

For enhver åben kugle $K(\underline{c}, r)$ med centrum $\underline{c}$ vil findes et p, så at $K^p \subset K(\underline{c}, r)$. Da $A \cap K^p \neq \emptyset$, må altså for enhver åben kugle $K(\underline{c}, r)$ gælde $A \cap K(\underline{c}, r) \neq \emptyset$. Da A er afsluttet, følger heraf, at $\underline{c} \in A$. Da $\{G_i \mid i \in I\}$ er en overdækning af A, må der findes et $i \in I$, så at $\underline{c} \in G_i$. Da G_i er åben, findes en åben kugle $K(\underline{c}, r)$, så at $K(\underline{c}, r) \subseteq G_i$, og dermed et p, så at $K^p \subset G_i$. Men så er $A \cap K^p$ overdækket af den ene mængde G_i, i strid med, at $A \cap K^p$ ikke kan overdækkes med et endeligt delsystem af systemet $\{G_i \mid i \in I\}$. □

Kompakte mængder. I tilslutning til Borels overdækningssætning definerer vi:

En delmængde K af et metrisk rum (M, dist) kaldes kompakt, hvis enhver åben overdækning af K kan udtyndes til en endelig overdækning af K.

Med brug af denne betegnelse udsiger Borels overdækningssætning simpelthen, at de kompakte delmængder af $\mathbb{R}^k$ er præcis

de begrænsede, afsluttede delmængder af $\mathbb{R}^k$.

Den første del af beviset ovenfor kan uden videre overføres til et vilkårligt metrisk rum, hvorfor der gælder: En kompakt delmængde af et metrisk rum er begrænset og afsluttet. Den anden del af beviset benytter derimod specielle egenskaber ved talrummet, og man kan let angive eksempler på metriske rum, som har begrænsede og afsluttede delmængder, der ikke er kompakte.

Betegner $\{G_i \mid i \in I\}$ en overdækning af delmængden K af M med åbne mængder, danner systemet $\{H_i \mid i \in I\}$, hvor $H_i = G_i \cap K$, en overdækning af K med relativt åbne delmængder af K. Enhver overdækning af K med relativt åbne delmængder af K kan fås på denne måde, idet jo enhver relativt åben delmængde H af K har formen $H = G \cap K$, hvor G er en åben mængde i M. Heraf følger:

En delmængde K af det metriske rum (M,dist) er kompakt, hvis og kun hvis enhver overdækning af K med relativt åbne delmængder af K kan udtyndes til en endelig overdækning af K.

Heraf fås nu let følgende

Hovedsætning. Hvis (X,dist_X) og (Y,dist_Y) er metriske rum, K er en kompakt delmængde af X, og $f: K \to Y$ en kontinuert afbildning, da er billedmængden $f(K)$ en kompakt delmængde af Y.

Bevis. Lad $\{G_i \mid i \in I\}$ være en overdækning af $f(K)$ med åbne delmængder af Y. Da f er kontinuert, er hver originalmængde $f^{-1}(G_i)$ åben relativt til K. Da systemet

$\{f^{-1}(G_i) \mid i \in I\}$ åbenbart er en overdækning af K, og K er kompakt, findes endeligt mange indices $i_1,\cdots,i_n$, således at systemet $\{f^{-1}(G_{i_1}),\cdots,f^{-1}(G_{i_n})\}$ overdækker K. Da må systemet $\{G_{i_1},\cdots,G_{i_n}\}$ overdække f(K). Altså er f(K) kompakt.□

For en ikke tom, kompakt delmængde A af $\mathbb{R}$ (altså en ikke tom, begrænset, afsluttet delmængde A af $\mathbb{R}$) må gælde sup A ∈ A og inf A ∈ A [idet sup A og inf A åbenbart ikke er ydre punkter for A]. En ikke tom, kompakt delmængde A af $\mathbb{R}$ indeholder altså et største og et mindste tal. Af hovedsætningen fremgår derfor følgende sætning, der indeholder den indledningsvis nævnte sætning af Weierstrass:

<u>En kontinuert, reel funktion på en kompakt delmængde af $\mathbb{R}^k$ har en største og en mindste værdi.</u>

Kompakthedsbegrebet har nøje forbindelse med begrebet fortætningspunkt. Vi beviser herom:

<u>Hvis</u> K <u>er en kompakt delmængde af det metriske rum</u> (M,dist), <u>og</u> A <u>er en uendelig delmængde af</u> K, <u>da har</u> A <u>et fortætningspunkt, og ethvert fortætningspunkt for</u> A <u>tilhører</u> K.

<u>Bevis.</u> Da K er afsluttet, er det klart, at ethvert fortætningspunkt for A tilhører K. Hvis A ikke havde noget fortætningspunkt (altså bestod af lutter isolerede punkter) kunne vi for hvert punkt $x \in A$ bestemme en åben kugle $K(x,r_x)$, så at $K(x,r_x) \cap A = \{x\}$, og for hvert punkt $x \in K\backslash A$ bestemme en åben kugle $K(x,r_x)$, så at $K(x,r_x) \cap A = \emptyset$. Systemet $\{K(x,r_x) \mid x \in K\}$ var da en åben overdækning af K og kunne altså udtyndes til en endelig overdækning $\{K(x_1,r_{x_1}),\cdots,K(x_n,r_{x_n})\}$.

Altså måtte gælde $A \subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$. Mængden A var altså endelig.□

Hvis K er en kompakt delmængde af det metriske rum (M,dist), da har enhver punktfølge (x_n) af punkter fra K et fortætningspunkt, og ethvert fortætningspunkt for følgen tilhører K.

Bevis. Da K er afsluttet, er det klart, at ethvert fortætningspunkt for følgen tilhører K. Hvis mængden $\{x_1, x_2, \cdots\}$ er uendelig, har den et fortætningspunkt ifølge den foregående sætning, og et sådant punkt ses let også at være et fortætningspunkt for følgen. Hvis mængden $\{x_1, x_2, \cdots\}$ er endelig, findes et punkt x, så at $x_n = x$ for uendeligt mange n, og x er da fortætningspunkt for følgen (nemlig grænsepunkt for den ved de pågældende n bestemte delfølge).□

De omvendte sætninger til de to sidste sætninger gælder også, det vil blive vist i tillægget.

Afstand mellem mængder. For ikke tomme delmængder A og B af et metrisk rum (M,dist) defineres afstanden mellem A og B ved

$$\text{dist}(A,B) = \inf \{\text{dist}(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Hvis A består af et enkelt punkt a, er dist (A,B) lig med den tidligere indførte afstand dist(a,B) fra punktet a til mængden B

For vilkårlige ikke tomme mængder A og B gælder

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf \{\operatorname{dist}(x,B) \mid x \in A\}.$$

Bevis. For vilkårlige $x \in A$ og $y \in B$ gælder nemlig

$$\operatorname{dist}(x,y) \geq \operatorname{dist}(x,B) \geq \inf \{\operatorname{dist}(x,B) \mid x \in A\},$$

hvoraf

$$\operatorname{dist}(A,B) \geq \inf \{\operatorname{dist}(x,B) \mid x \in A\}.$$

Omvendt har vi for vilkårlige $x \in A$ og $y \in B$

$$\operatorname{dist}(x,y) \geq \operatorname{dist}(A,B),$$

hvoraf

$$\operatorname{dist}(x,B) = \inf \{\operatorname{dist}(x,y) \mid y \in B\} \geq \operatorname{dist}(A,B)$$

og dermed

$$\inf \{\operatorname{dist}(x,B) \mid x \in A\} \geq \operatorname{dist}(A,B). \square$$

Hvis mængden A er kompakt, findes et punkt $a \in A$, så at $\operatorname{dist}(a,B) = \operatorname{dist}(A,B)$. Hvis også B er kompakt, findes punkter $a \in A$ og $b \in B$, så at $\operatorname{dist}(a,b) = \operatorname{dist}(A,B)$.

Bevis. Hvis A er kompakt, vil den kontinuerte funktion $x \mapsto \operatorname{dist}(x,B)$ have en mindste værdi på A. Der findes altså et punkt $a \in A$, så at

$$\operatorname{dist}(a,B) = \inf \{\operatorname{dist}(x,B) \mid x \in A\} = \operatorname{dist}(A,B).$$

Hvis også B er kompakt, vil den kontinuerte funktion $y \mapsto \operatorname{dist}(a,y)$ have en mindste værdi på B. Der findes altså et punkt $b \in B$, så at

$$\text{dist}(a,b) = \inf\{\text{dist}(a,y) \mid y \in B\} = \text{dist}(a,B) = \text{dist}(A,B).\square$$

Som en anvendelse heraf viser vi:

Hvis G er en åben mængde og K en kompakt delmængde af G, findes et tal $r \in \mathbb{R}_+$, så at $K(x,r) \subseteq G$ for alle $x \in K$.

Bevis. Hvis $G = M$, kan vi bruge ethvert $r \in \mathbb{R}_+$. Hvis $G \subset M$, er $B = M \setminus G$ en ikke tom, afsluttet mængde. For ethvert $x \notin B$ gælder altså $\text{dist}(x,B) > 0$. Som r kan vi da benytte tallet $r = \text{dist}(K,B)$, idet dette ifølge den foregående sætning er lig med $\text{dist}(a,B)$ for et punkt $a \in K$, og følgelig er > 0.$\square$

Uniform kontinuitet. Idet (X,dist_X) og (Y,dist_Y) er metriske rum, siges en afbildning $f: X \to Y$ at være uniformt kontinuert (eller ligeligt kontinuert), hvis der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at der for vilkårlige $x_1, x_2 \in X$ gælder

$$\text{dist}_X(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow \text{dist}_Y(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon.$$

Skrevet med logiske symboler udtrykkes definitionen således:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \; \forall x_1 \in X \; \forall x_2 \in X: \text{dist}_X(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow \text{dist}_Y(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon.$$

En uniformt kontinuert funktion er øjensynligt kontinuert, medens det omvendte ikke behøver at være tilfældet. F.eks. er den ved $f(x) = x^2$ definerede funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinuert, men ikke uniformt kontinuert, idet vi af $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|\,|x_1 + x_2|$ slutter, at man for ethvert $\delta \in \mathbb{R}_+$ kan finde punkter $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, så at $|x_1 - x_2| < \delta$ og $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 1$.

At afbildningen $f: X \to Y$ er kontinuert, skrives med logiske symboler således:

$$\forall x_1 \in X\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\, \exists \delta \in \mathbb{R}_+\, \forall x_2 \in X\colon \operatorname{dist}_X(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow \operatorname{dist}_Y(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon.$$

Man ser, at forskellen mellem kontinuitet og uniform kontinuitet ligger i kvantorernes rækkefølge.

Hvis X' er en delmængde af X, siges en afbildning $f\colon X' \to Y$ at være uniformt kontinuert, hvis den er en uniformt kontinuert afbildning af delrummet X' ind i Y.

Hovedsætning. Hvis $(X,\operatorname{dist}_X)$ og $(Y,\operatorname{dist}_Y)$ er metriske rum, K en kompakt delmængde af X, og $f\colon K \to Y$ en kontinuert afbildning, da er f uniformt kontinuert.

Bevis. Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet. Til ethvert $a \in K$ findes, da f er kontinuert i a, et tal $\delta_a \in \mathbb{R}_+$, så at der for ethvert $x \in K$ gælder

$$\operatorname{dist}_X(a,x) < \delta_a \Rightarrow \operatorname{dist}_Y(f(a), f(x)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Systemet af åbne kugler $\{K_X(a,\frac{1}{2}\delta_a) \mid a \in K\}$ udgør en overdækning af K. Idet K er kompakt, findes altså et endeligt antal punkter $a_1,\cdots,a_n \in K$, så at

$$K \subseteq K_X(a_1,\tfrac{1}{2}\delta_{a_1}) \cup \cdots \cup K_X(a_n,\tfrac{1}{2}\delta_{a_n}).$$

Vi sætter $\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta_{a_1},\cdots,\frac{1}{2}\delta_{a_n}\}$. Er nu x_1 og x_2 to punkter af K, for hvilke $\operatorname{dist}_X(x_1,x_2) < \delta$, vil x_1 tilhøre en af de n kugler, lad os sige $K_X(a_p,\frac{1}{2}\delta_{a_p})$. Der gælder altså $\operatorname{dist}_X(a_p,x_1) < \frac{1}{2}\delta_{a_p}$. Idet der desuden gælder $\operatorname{dist}_X(x_1,x_2) < \delta \le \frac{1}{2}\delta_{a_p}$, ser vi, at $\operatorname{dist}_X(a_p,x_2) < \delta_{a_p}$. Følgelig gælder både

$$\operatorname{dist}_Y(f(a_p), f(x_1)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ og } \operatorname{dist}_Y(f(a_p),f(x_2)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

og heraf følger $\mathrm{dist}_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. ∎

Ækvivalens af normer på talrummet $\mathbb{R}^k$. Ved brug af sætningen om, at en kontinuert reel funktion på en kompakt mængde har en mindste værdi, kan vi bevise den i §4 nævnte sætning:

Hvilkesomhelst to normer på $\mathbb{R}^k$ er ækvivalente.

Bevis. Påstanden er som vist i §4 ensbetydende med følgende: Når $\|\cdot\|$ er maksimumsnormen på $\mathbb{R}^k$ og $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ en vilkårlig norm, altså en vilkårlig funktion, der opfylder betingelserne

(1) $f(\underline{x}) \geq 0$, og $= 0$ hvis og kun hvis $\underline{x} = \underline{0}$,

(2) $f(\lambda \underline{x}) = |\lambda| f(\underline{x})$,

(3) $f(\underline{x}+\underline{y}) \leq f(\underline{x}) + f(\underline{y})$,

findes der tal $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, så at der for alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ gælder

$$\alpha \|\underline{x}\| \leq f(\underline{x}) \leq \beta \|\underline{x}\|.$$

Når vi i beviset benytter begreberne begrænset mængde, afsluttet mængde, kompakt mængde, kontinuert funktion, er disse at forstå i relation til den ved maksimumsnormen bestemte metrik i $\mathbb{R}^k$.

Lad $\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_k$ betegne enhedsvektorerne $(1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $(0,\cdots,0,1)$ i $\mathbb{R}^k$. For hvert $\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_k\underline{e}_k$ gælder da

$$f(\underline{x}) = f(x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_k\underline{e}_k) \leq |x_1|\ f(\underline{e}_1) + \cdots + |x_k|\ f(\underline{e}_k)$$

$$\leq \beta \|\underline{x}\|, \quad \text{hvor} \quad \beta = f(\underline{e}_1) + \cdots + f(\underline{e}_k) \in \mathbb{R}_+.$$

Heraf følger, at f er kontinuert, idet der for vilkårlige

$\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^k$ gælder

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}-\underline{y}+\underline{y}) \leq f(\underline{x}-\underline{y}) + f(\underline{y}),$$

altså

$$f(\underline{x}) - f(\underline{y}) \leq f(\underline{x}-\underline{y}),$$

og tilsvarende (ved ombytning af $\underline{x}$ og $\underline{y}$)

$$f(\underline{y}) - f(\underline{x}) \leq f(\underline{y}-\underline{x}) = f(\underline{x}-\underline{y}),$$

således at

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{y})| \leq f(\underline{x}-\underline{y}) \leq \beta\|\underline{x}-\underline{y}\|.$$

Nu er mængden $S = \{\underline{x} \mid \|x\| = 1\}$ afsluttet og begrænset, altså kompakt, og $\underline{0} \notin S$. Idet f er kontinuert, har dens restriktion til S en mindste værdi α, og da $f(\underline{x}) > 0$ for $\underline{x} \neq \underline{0}$, gælder $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Ethvert $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ kan skrives på formen $\underline{x} = \lambda\underline{x}_0$, hvor $\|x_0\| = 1$ og $\lambda = \|x\|$. Altså gælder

$$f(\underline{x}) = f(\lambda\underline{x}_0) = \lambda f(\underline{x}_0) \geq \|\underline{x}\|\alpha \quad \square$$

Af det beviste fremgår umiddelbart, at når mindst et af de metriske rum X og Y er et talrum er begrebet uniform kontinuitet af en afbildning $f: X' \longrightarrow Y$ af en delmængde X' af X ind i Y uafhængigt af, hvilken norm der benyttes til fastlæggelse af metriken.

Opgaver. 1. Angiv et eksempel på et metrisk rum, i hvilket der findes mængder, som er begrænsede og afsluttede uden at være kompakte.

2. Idet (M,dist) er et metrisk rum, K en kompakt delmængde af M, og F en afsluttet delmængde af K, skal man vise, at F er kompakt.

3. Idet (M,dist) er et metrisk rum og $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$ en dalende følge af ikke tomme kompakte delmængder af M, skal man vise, at fællesmængden $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ ikke er tom.

*4. Bevis Lindelöfs overdækningssætning: Idet A er en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^k$ og $\{G_i \mid i \in I\}$ et system af åbne delmængder af $\mathbb{R}^k$, der overdækker A, da findes et endeligt eller numerabelt delsystem $\{G_{i_1},\cdots,G_{i_n}\}$ eller $\{G_{i_1},G_{i_2},\cdots\}$, der overdækker A.

5. Vis, at hvis K er en ikke tom, kompakt delmængde af det metriske rum (M,dist), findes punkter $a \in K$ og $b \in K$, så at

$$\text{dist}(a,b) = \text{diam}(K).$$

6. Idet (X,dist_X) og (Y,dist_Y) er metriske rum og $f: X \to Y$ en afbildning, skal man såvel ved logiske symboler som i ord udtrykke, at f ikke er uniformt kontinuert.

7. Bevis følgende (lille) skærpelse af hovedsætningen om uniform kontinuitet: Hvis (X,dist_X) og (Y,dist_Y) er metriske rum, A en delmængde af X, og K en kompakt delmængde af A, og endelig $f: A \to Y$ en kontinuert afbildning, da findes for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at der for vilkårlige punkter $x_1 \in K$ og $x_2 \in A$ gælder

$$\text{dist}_X(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow \text{dist}_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

8. Vis, at hvis (X,dist_X) og (Y,dist_Y) er metriske rum, og $f: A \to B$ en bijektiv, kontinuert afbildning af en kompakt delmængde A af X på en kompakt delmængde B af Y, da er den omvendte afbildning $f^{-1}: B \to A$ ligeledes kontinuert.

9. Idet (X,dist_X) er et metrisk rum, (Y,dist_Y) et fuldstændigt metrisk rum, A en delmængde af X, og $f: A \to Y$ en uniformt kontinuert afbildning, skal man vise, at der findes en og kun een kontinuert ekstention $g: \overline{A} \to Y$ af f, og at denne ligeledes er uniformt kontinuert.

10. Idet (M,dist) er et metrisk rum og K en kompakt delmængde af M, skal man vise, at delrummet (K,dist) er et fuldstændigt metrisk rum.

Tillæg. Alternativ definition af begrebet kompakt mængde.

Begrebet kompakt delmængde af et metrisk rum kan defineres på en anden måde end det er sket ovenfor. Denne alternative definition spiller en betydelig rolle i den ældre literatur. Vi tager her som udgangspunkt følgende sætning.

Bolzano-Weierstrass' sætning. For en delmængde A af $\mathbb{R}^k$ er følgende to betingelser ensgyldige:

(1) A er begrænset.

(2) Enhver følge af punkter fra A har et fortætningspunkt.

B. Bolzano har (1817) som den første givet en streng behandling af kontinuitetsbegrebet (for reelle funktioner af en reel variabel). Sætningen er grundlæggende for K. Weierstrass' behandling af de kontinuerte funktioners fundamentale egenskaber.

Bevis. (2) $\Rightarrow$ (1). Antag, at (1) ikke gælder. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ kan vi da vælge et punkt $\underline{x}_n \in A \setminus K(\underline{0},n)$, altså et punkt $\underline{x}_n \in A$, for hvilket $\|\underline{x}_n\| \geq n$. Den således fundne følge $\underline{x}_n$ af punkter fra A har åbenbart intet fortætningspunkt. Altså gælder (2) ikke.

(1) $\Rightarrow$ (2). Antag, at (1) gælder, og lad $\underline{x}_n = (x_{n1},\cdots,x_{nk})$ være en følge af punkter fra A. Hver af koordinatfølgerne x_{nj}, $j = 1,\cdots,k$, er da en begrænset talfølge. Om en begrænset talfølge t_n i $\mathbb{R}$ gælder, at den har en konvergent delfølge [thi tallene lim inf t_n og lim sup t_n tilhører $\mathbb{R}$ og er (jfr. §1) grænseværdier for konvergente delfølger af følgen t_n]. Vi bestemmer nu først en følge af indices $n_1^1 < n_2^1 < \cdots$, således at talfølgen $x_{n_p^1 1}$ er konvergent, derefter en delfølge $n_1^2 < n_2^2 < \cdots$ af følgen $n_1^1, n_2^1, \cdots$, således at talfølgen $x_{n_p^2 2}$ er konvergent, og således videre. Efter k skridt har vi en følge $n_1^k < n_2^k < \cdots$, således at den til disse indices svarende delfølge $\underline{x}_{n_p^k}$ af følgen $\underline{x}_n$ er konvergent, idet enhver af dens koordinatfølger $x_{n_p^k j}$, $j = 1,\cdots,k$, er konvergent.

Alternativ definition af kompakthed. I tilslutning til Bolzano-Weierstrass' sætning definerer vi:

En delmængde K af et metrisk rum (M,dist) kaldes kompakt, hvis den er afsluttet og enhver følge af punkter fra K har et fortætningspunkt.

De kompakte delmængder af $\mathbb{R}^k$ er da netop de begrænsede og afsluttede delmængder af $\mathbb{R}^k$.

Vi kan give definitionen en lidt anden drejning, der er hensigtsmæssig ved anvendelserne:

En delmængde K af et metrisk rum (M,dist) kaldes kompakt, hvis enhver følge af punkter fra K har et fortætningspunkt i K.

At de to formuleringer kommer ud på et, ses således: Hvis K er kompakt i henhold til den første formulering, er den det også i henhold til den anden, idet K som afsluttet mængde indeholder ethvert fortætningspunkt for en følge af punkter fra K. Hvis K er kompakt i henhold til den anden formulering, er den det også i henhold til den første, idet K da for enhver konvergent følge af punkter fra K må indeholde følgens grænsepunkt (der er eneste fortætningspunkt), og altså må være afsluttet.

Vi vil nedenfor vise, at ovenstående definition af kompakthed er ensgyldig med den tidligere givne. Før vi udfører dette, vil vi vise, hvorledes beviserne for hovedsætningerne forløber på basis af ovenstående definition.

Hvis (X,dist_X) og (Y,dist_Y) er metriske rum, K en kompakt delmængde af X, og $f: K \longrightarrow Y$ en kontinuert afbildning, da er billedmængden $f(K)$ en kompakt delmængde af Y.

Bevis. Lad (y_n) være en følge af punkter fra $f(K)$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ vælges et punkt $x_n \in K$, så at $y_n = f(x_n)$. Da K er kompakt, har følgen (x_n) en konvergent delfølge (x_{n_p}) med grænsepunkt $x \in K$. Af $x_{n_p} \to x$ for $p \to \infty$ følger $f(x_{n_p}) \to f(x)$ for $p \to \infty$, da f er kontinuert. Delfølgen (y_{n_p}) af følgen (y_n) konvergerer altså mod punktet $f(x) \in f(K)$. Altså er $f(K)$ kompakt. ∎

Hvis (X,dist_X) og (Y,dist_Y) er metriske rum, K en kompakt delmængde af X, og $f: K \to Y$ en kontinuert afbildning, da er f uniformt kontinuert.

Bevis. Antag, at f ikke er uniformt kontinuert. Da findes et $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+$, således at der for ethvert $\delta \in \mathbb{R}_+$ findes punkter $x_1, x_2 \in K$, så at

$$\mathrm{dist}_X(x_1,x_2) < \delta \quad \text{og} \quad \mathrm{dist}_Y(f(x_1), f(x_2)) \geq \varepsilon_0.$$

Ved at vælge $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ fås i henhold hertil to følger x_{1n} og x_{2n} af punkter fra K, så at

$$\mathrm{dist}_X(x_{1n},x_{2n}) < \frac{1}{n} \quad \text{og} \quad \mathrm{dist}_Y(f(x_{1n}), f(x_{2n})) \geq \varepsilon_0.$$

Da K er kompakt, har følgen x_{1n} en konvergent delfølge x_{1n_p} med grænsepunkt $x \in K$. Da

$$\mathrm{dist}_X(x,x_{2n_p}) \leq \mathrm{dist}_X(x,x_{1n_p}) + \mathrm{dist}_X(x_{1n_p},x_{2n_p}) \leq \mathrm{dist}_X(x,x_{1n_p}) + \frac{1}{n_p},$$

er følgen x_{2n_p} også konvergent med grænsepunktet x. Idet f er kontinuert i x, findes altså et $p \in \mathbb{N}$, så at

$$\mathrm{dist}_Y(f(x), f(x_{1n_p})) < \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \quad \text{og} \quad \mathrm{dist}_Y(f(x), f(x_{2n_p})) < \tfrac{1}{2}\varepsilon_0.$$

For et sådant p gælder altså

$$\mathrm{dist}_Y(f(x_{1n_p}),f(x_{2n_p})) \leq \mathrm{dist}_Y(f(x_{1n_p}),f(x)) + \mathrm{dist}_Y(f(x),f(x_{2n_p})) < \varepsilon_0$$

hvormed vi er nået til en modstrid. ∎

Ensgyldighed af de to definitioner af kompakthed. Ensgyldigheden af de to definitioner kommer ud på et med følgende sætning:

For en delmængde A af et metrisk rum (M,dist) er følgende to betingelser ensgyldige:

(1) Enhver følge af punkter fra A har et fortætningspunkt i A.

(2) Enhver åben overdækning af A kan udtyndes til en endelig overdækning af A.

Bevis. (2) $\Rightarrow$ (1). Dette er bevist tidligere ved omtalen af forbindelsen mellem kompakthedsbegrebet og begrebet fortætningspunkt. For fuldstændighedens skyld beviser vi det også her, og samtidig drejer vi beviset lidt anderledes.

Antag (2) opfyldt, men ikke (1). Lad (x_n) være en følge af punkter fra A, som ikke har noget fortætningspunkt i A. For ethvert $y \in A$ findes da en åben kugle $K(y,r_y)$, således at mængden $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(y,r_y)\}$ er endelig. Systemet $\{K(y,r_y) \mid y \in A\}$ er en åben overdækning af A, og kan altså udtyndes til en endelig overdækning $\{K(y_1,r_{y_1}),\cdots,K(y_p,r_{y_p})\}$. Altså gælder

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(y_1,r_{y_1})\} \cup \cdots \cup \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(y_p,r_{y_p})\},$$

hvilket er umuligt, da mængden på højre side er endelig.

(1) $\Rightarrow$ (2). Antag (1) opfyldt og lad $\{G_i \mid i \in I\}$ være en åben overdækning af A. Det skal vises, at den kan udtyndes til en endelig overdækning. Hvis $A = \emptyset$, er sagen klar. Vi antager derfor $A \neq \emptyset$. Beviset består i to skridt.

(α) Der findes et $\rho \in \mathbb{R}_+$, således at for ethvert $x \in A$ er kuglen $K(x,\rho)$ delmængde af en af mængderne G_i.

I modsat fald fandtes for ethvert $n \in \mathbb{N}$ et punkt $x_n \in A$, så at $K(x_n,\frac{1}{n})$ ikke var delmængde af noget G_i. Ifølge (1)

har følgen (x_n) et fortætningspunkt $x \in A$. For et vist $i \in I$ gælder altså $x \in G_i$. Da G_i er åben, findes et $r \in \mathbb{R}_+$, så at $K(x,r) \subseteq G_i$. Da $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(x,\frac{1}{2}r)\}$ er uendelig, kan vi finde et n, så at $x_n \in K(x,\frac{1}{2}r)$ og $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}r$. Da gælder $K(x_n,\frac{1}{n}) \subseteq K(x,r) \subseteq G_i$, i strid med, at $K(x_n,\frac{1}{n})$ ikke er delmængde af noget G_i.

(β) Vi vælger et vilkårligt punkt $y_1 \in A$. Hvis $A \subseteq K(y_1,\rho)$, er A overdækket af en af mængderne G_i. I modsat fald vælges et punkt $y_2 \in A \setminus K(y_1,\rho)$. Hvis $A \subseteq K(y_1,\rho) \cup K(y_2,\rho)$ er A overdækket af to af mængderne G_i. Således fortsættes, og vi må ende med at få en overdækning af A med et endeligt antal af mængderne G_i. Thi hvis processen fortsatte i det uendelige, fremkom jo en følge y_n af punkter fra A, for hvilken $\text{dist}(y_n,y_m) \geq \rho$ for $n \neq m$, og en sådan følge kan åbenbart ikke have noget fortætningspunkt. □

Den alternative definition af kompakthed kommer, som man let ser, ud på et med følgende:

<u>En delmængde K af et metrisk rum (M,dist) kaldes kompakt, hvis den er afsluttet og enhver uendelig delmængde af K har et fortætningspunkt.</u>

Eller med en lidt anden drejning:

<u>En delmængde K af et metrisk rum (M,dist) kaldes kompakt, hvis enhver uendelig delmængde af K har et fortætningspunkt i K.</u>

§ 7. Uniform konvergens. Funktionsrum.

Punktvis konvergens og uniform konvergens. Idet X betegner en ikke tom mængde og (Y,dist_Y) et metrisk rum, siges en følge (f_n) af afbildninger $f_n: X \to Y$ at konvergere punktvis mod afbildningen $f: X \to Y$, hvis det for ethvert $x \in X$ gælder, at punktfølgen $(f_n(x))$ i Y konvergerer mod punktet $f(x)$, eller, skrevet med logiske symboler, hvis

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow \mathrm{dist}_Y(f_n(x),f(x)) \leq \varepsilon .$$

Følgen (f_n) siges at konvergere uniformt (eller at konvergere ligeligt) mod f, hvis der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $n_0 \in \mathbb{N}$, så at der for $n \geq n_0$ gælder $\mathrm{dist}_Y(f_n(x),f(x)) \leq \varepsilon$ for ethvert $x \in X$, altså hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in X: \mathrm{dist}_Y(f_n(x),f(x)) \leq \varepsilon .$$

En uniformt konvergent følge er øjensynligt punktvis konvergent, medens det omvendte ikke behøver at være tilfældet. For eksempel er den ved $f_n(x) = \frac{x}{n}$ definerede følge af funktioner $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ punktvis konvergent mod funktionen $f = 0$, men konvergensen er ikke uniform, idet det endda for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ og ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder, at der findes tal x, for hvilke $|f_n(x) - f(x)| = |\frac{x}{n}| > \varepsilon$. Som et andet eksempel kan nævnes den ved $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$ definerede følge af funktioner $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der konvergerer punktvis mod den funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der er $= 1$ for $x = 0$ og er $= 0$ for $x \neq 0$, men ikke konvergerer uniformt, idet der for ethvert $\varepsilon \in]0,1[$ og ethvert $n \in \mathbb{N}$ findes tal x, for hvilke $|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$.

Man ser, at forskellen mellem punktvis konvergens og uniform konvergens ligger i kvantorernes rækkefølge.

Vi kan indordne begrebet uniform konvergens under begrebet konvergens af punktfølge i et metrisk rum, idet vi indfører en metrik i mængden $\mathbb{F}(X,Y)$ af afbildninger af X ind i Y. I denne sammenhæng er det dog bekvemt at operere med en lidt ændret definition af begrebet metrik, som vi først vil omtale.

Indskud. Ved en metrik i udvidet forstand eller en afstandsfunktion i udvidet forstand i en ikke tom mængde M forstås en afbildning $\text{dist}: M\times M \to \mathbb{R}^*$, for hvilken der for vilkårlige elementer i M gælder

(1) $\text{dist}(x,y) \geq 0$, og $= 0$ hvis og kun hvis $x = y$,

(2) $\text{dist}(x,y) = \text{dist}(y,x)$,

(3) $\text{dist}(x,z) \leq \text{dist}(x,y) + \text{dist}(y,z)$.

En mængde M udstyret med en metrik i udvidet forstand kaldes et metrisk rum i udvidet forstand. Ønsker man i betegnelsen for mængden af anføre afstandsfunktionens navn, taler man om det metriske rum i udvidet forstand (M,dist).

Man ser, at den eneste forskel fra den i §2 givne definition er, at det tillades en metrik i udvidet forstand at antage værdien $+\infty$.

Så at sige alt hvad der er sagt i §2 om metriske rum kan gentages ordret for metriske rum i udvidet forstand. Specielt fremhæves begreberne konvergent punktfølge, fundamentalfølge, og fuldstændighed. En punktfølge (x_n) i M kaldes konvergent med grænsepunktet x, hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}: \; n \geq n_0 \Rightarrow \text{dist}(x_n,x) \leq \varepsilon .$$

En punktfølge (x_n) i M kaldes en fundamentalfølge, hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n,m \in \mathbb{N}: \; n \geq n_0 \wedge m \geq n_0 \Rightarrow \operatorname{dist}(x_n,x_m) \leq \varepsilon.$$

Enhver konvergent punktfølge er en fundamentalfølge. Hvis det omvendt for et metrisk rum i udvidet forstand gælder, at enhver fundamentalfølge er konvergent, kaldes rummet et fuldstændigt metrisk rum i udvidet forstand. Vi fremhæver også begreberne åben og afsluttet mængde. En mængde $A \subseteq M$ kaldes åben, hvis der for ethvert $x \in A$ findes et $r \in \mathbb{R}_+$, således at kuglen $K(x,r) = \{y \in M \mid \operatorname{dist}(x,y) < r\}$ er indeholdt i A. En mængde $A \subseteq M$ kaldes afsluttet, hvis dens komplement $M \setminus A$ er åben.

Efter dette indskud vender vi tilbage til mængden $\mathbb{F}(X,Y)$ af afbildninger af X ind i Y. For $f,g \in \mathbb{F}(X,Y)$ defineres

$$\operatorname{Dist}(f,g) = \sup\{\operatorname{dist}_Y(f(x),g(x)) \mid x \in X\}.$$

Herved er $\mathbb{F}(X,Y)$ organiseret som et metrisk rum i udvidet forstand. Det er nemlig umiddelbart, at $0 \leq \operatorname{Dist}(f,g) \leq +\infty$, og at $\operatorname{Dist}(f,g) = 0$, hvis og kun hvis $f = g$, og at $\operatorname{Dist}(f,g) = \operatorname{Dist}(g,f)$. Og for $f,g,h \in \mathbb{F}(X,Y)$ gælder (på grund af trekantsuligheden i Y) for ethvert $x \in X$, at

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_Y(f(x),h(x)) &\leq \operatorname{dist}_Y(f(x),g(x)) + \operatorname{dist}_Y(g(x),h(x)) \\ &\leq \operatorname{Dist}(f,g) + \operatorname{Dist}(g,h),\end{aligned}$$

hvoraf følger $\operatorname{Dist}(f,h) \leq \operatorname{Dist}(f,g) + \operatorname{Dist}(g,h)$.

Det følger af definitionen, at for $f,g \in \mathbb{F}(X,Y)$ og $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ er de to udsagn

$$\mathrm{Dist}(f,g) \leq \epsilon \quad \text{og} \quad \forall x \in X: \mathrm{dist}_Y(f(x),g(x)) \leq \epsilon$$

ensbetydende. Følgen (f_n) konvergerer derfor uniformt mod f, hvis og kun hvis

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists n_o \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: \ n \geq n_o \Rightarrow \mathrm{Dist}(f_n,f) \leq \epsilon ,$$

altså hvis og kun hvis (f_n) konvergerer mod f i det metriske rum i udvidet forstand $(\mathbb{F}(X,Y),\mathrm{Dist})$.

Hovedsætning. Hvis X er en ikke tom mængde og (Y,dist) er et fuldstændigt metrisk rum, da er afbildningsrummet $(\mathbb{F}(X,Y),\mathrm{Dist})$ et fuldstændigt metrisk rum i udvidet forstand.

En følge af afbildninger $f_n: X \to Y$ er en fundamentalfølge i $(\mathbb{F}(X,Y),\mathrm{Dist})$, hvis og kun hvis

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists n_o \in \mathbb{N} \ \forall n,m \in \mathbb{N}: \ n \geq n_o \wedge m \geq n_o \Rightarrow \mathrm{Dist}(f_n,f_m) \leq \epsilon ,$$

altså hvis og kun hvis

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists n_o \in \mathbb{N} \ \forall n,m \in \mathbb{N}: \ n \geq n_o \wedge m \geq n_o \Rightarrow \forall x \in X: \mathrm{dist}_Y(f_n(x),f_m(x)) \leq$$

En sådan følge kaldes også en uniform fundamentalfølge. Sætningens udsagn er, at enhver sådan følge er uniformt konvergent.

Bevis. Hertil bemærkes først, at for hvert $x \in X$ er følgen af punkter $f_n(x)$ i Y øjensynligt en fundamentalfølge i (Y,dist_Y). Idet (Y,dist_Y) er fuldstændigt, er følgen $(f_n(x))$ altså konvergent. Defineres afbildningen $f: X \to Y$ ved

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

har vi dermed, at (f_n) konvergerer punktvis mod f. Vi vil

vise, at (f_n) konvergerer uniformt mod f.

Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet, og lad $n_o \in \mathbb{N}$ være valgt således, at der for alle $n,m \geq n_o$ gælder $\mathrm{Dist}(f_n,f_m) \leq \varepsilon$. For ethvert $x \in X$ gælder da for alle $n,m \geq n_o$, at

$$\mathrm{dist}_Y(f_n(x),\, f_m(x)) \leq \varepsilon.$$

Vi betragter nu et vilkårligt $x \in X$ og et vilkårligt $n \geq n_o$. For ethvert $m \geq n_o$ gælder da

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_Y(f_n(x),\, f(x)) &\leq \mathrm{dist}_Y(f_n(x),f_m(x)) + \mathrm{dist}_Y(f_m(x),f(x)) \\ &\leq \varepsilon + \mathrm{dist}_Y(f_m(x),f(x)).\end{aligned}$$

Da $\mathrm{dist}_Y(f_m(x),f(x)) \to 0$ for $m \to +\infty$, slutter vi heraf, at

$$\mathrm{dist}_Y(f_n(x),f(x)) \leq \varepsilon.$$

For ethvert $n \geq n_o$ gælder altså $\mathrm{Dist}(f_n,f) \leq \varepsilon$. □

Kontinuitet og uniform konvergens. Vi betragter nu det tilfælde, hvor også X er et metrisk rum (X,dist_X). Da gælder:

Hvis følgen (f_n) af afbildninger $f_n\colon X \to Y$ konvergerer uniformt mod afbildningen $f\colon X \to Y$, og hver af afbildningerne f_n er kontinuert i punktet $a \in X$, da er også afbildningen f kontinuert i a.

Bevis. Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet. Da findes et $n \in \mathbb{N}$, så at der for alle $x \in X$ gælder

$$\mathrm{dist}_Y(f_n(x),f(x)) \leq \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Da f_n er kontinuert i a, findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så at der

for alle $x \in K_X(a,\delta)$ gælder

$$\mathrm{dist}_Y(f_n(a),f_n(x)) < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

For ethvert $x \in K_X(a,\delta)$ gælder da

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}_Y(f(a),f(x))\\ &\leq \mathrm{dist}_Y(f(a),f_n(a)) + \mathrm{dist}_Y(f_n(a),f_n(x)) + \mathrm{dist}_Y(f_n(x),f(x))\\ &< \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

Af denne sætning fremgår:

Hovedsætning. Hvis følgen (f_n) af afbildninger $f_n: X \to Y$ konvergerer uniformt mod afbildningen $f: X \to Y$, og hver af afbildningerne f_n er kontinuert, da er også afbildningen f kontinuert.

Mængden af kontinuerte afbildninger $f: X \to Y$ betegnes $C^0(X,Y)$. Idet det også for et metrisk rum i udvidet forstand gælder, at en punktmængde i rummet er afsluttet, hvis og kun hvis det for enhver konvergent følge af punkter fra mængden gælder, at også grænsepunktet tilhører mængden, kan den foregående sætning også udtrykkes således:

Mængden $C^0(X,Y)$ af kontinuerte afbildninger af X ind i Y udgør en afsluttet delmængde af afbildningsrummet $(\mathbb{F}(X,Y),\mathrm{Dist})$.

Ved at kombinere det beviste får vi:

Hvis (X,dist_X) er et metrisk rum og (Y,dist_Y) er et fuldstændigt metrisk rum, danner mængden $C^0(X,Y)$ af kontinuerte afbildninger af X ind i Y med metrikken

$$\mathrm{Dist}(f,g) = \sup\{\mathrm{dist}_Y(f(x),g(x)) \mid x \in X\}$$

et fuldstændigt metrisk rum i udvidet forstand.

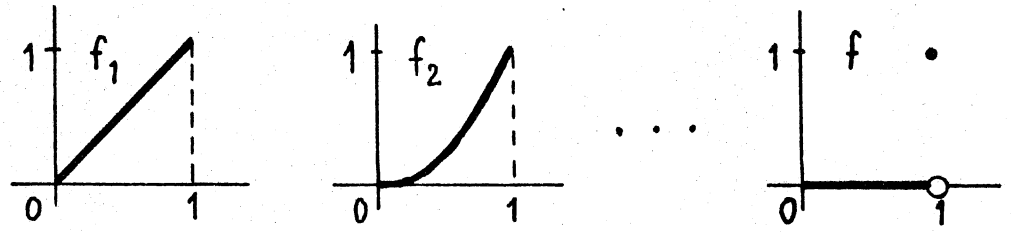
Vi kommer især til at anvende det foregående i det tilfælde, hvor X er et talrum eller en delmængde af et talrum, og Y er et talrum eller en afsluttet delmængde af et talrum.

Eksempel 1. Vi betragter først den ved

$$f_n(x) = x^n$$

bestemte følge af funktioner $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Det ses umiddelbart, at følgen er punktvis konvergent med grænsefunktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, hvor

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{for } x = 1. \end{cases}$$



Følgen er ikke uniformt konvergent, idet grænsefunktionen da skulle være kontinuert. Direkte ses det af, at der for ethvert n gælder

$$\{|f_n(x)-f(x)| \mid x \in [0,1]\} = [0,1[$$

og følgelig

$$\mathrm{Dist}(f_n,f) = \sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x \in [0,1]\} = 1.$$

Derimod er følgen for ethvert $a \in]0,1[$ uniformt konvergent på intervallet $[0,a]$. For ethvert n gælder nemlig

$$\{|f_n(x)-f(x)| \mid x \in [0,a]\} = [0,a^n]$$

og følgelig

$$\mathrm{Dist}_{[0,a]}(f_n,f) = \sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x \in [0,a]\} = a^n,$$

hvor betegnelsen $\mathrm{Dist}_{[0,a]}$ angiver, at vi kun betragter funktionerne på $[0,a]$.

Eksempel 2. Som et mere indholdsrigt eksempel betragtes den ved

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+4} + \cdots + \frac{x}{x^2+n^2}$$

bestemte følge af funktioner $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. For ethvert $x \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$ har vi

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)| = \frac{|x|}{x^2+(n+1)^2} \le \frac{|x|}{(n+1)^2} \le \frac{|x|}{n(n+1)} = \frac{|x|}{n} - \frac{|x|}{n+1}.$$

For $n,p \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$ fås hermed

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)| \le \frac{|x|}{n} - \frac{|x|}{n+p} \le \frac{|x|}{n}.$$

For $a \in \mathbb{R}_+$ gælder altså

$$|f_m(x)-f_n(x)| \le \frac{a}{n_o},$$

når $m,n \ge n_o$ og $x \in [-a,a]$, og følgelig

$$\mathrm{Dist}_{[-a,a]}(f_m,f_n) \le \frac{a}{n_o}, \quad \text{når} \quad m,n \ge n_o,$$

hvor betegnelsen $\mathrm{Dist}_{[-a,a]}$ angiver, at vi kun betragter

funktionerne på intervallet $[-a,a]$. Dette viser, at følgen (f_n) er uniform fundamentalfølge på $[-a,a]$ og dermed uniformt konvergent på $[-a,a]$. Vi slutter heraf, at følgen (f_n) er punktvis konvergent på hele $\mathbb{R}$, og at grænsefunktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuert.

Uden bevis nævner vi, at grænsefunktionen f kan udtrykkes ved hjælp af eksponentialfunktionen, idet der gælder

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\pi\frac{e^{2\pi x}+1}{e^{2\pi x}-1} - \frac{1}{x}\right] & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0, \end{cases}$$

samt at følgen ikke er uniformt konvergent på $\mathbb{R}$.

Opgaver. 1. Idet X er en ikke tom mængde, (Y, dist_Y) et metrisk rum, $f_n: X \to Y$ en følge af afbildninger, og $f: X \to Y$ en afbildning, skal man såvel ved logiske symboler som i ord udtrykke at f_n ikke konvergerer uniformt mod f.

2. Vis, at den ved

$$f_n(x) = \frac{1+x^4}{(1+x^2)(n+x^4)}$$

definerede følge af funktioner $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergerer uniformt mod funktionen 0.

3. Idet (X,dist_X) er et metrisk rum og (Y,dist_Y) et fuldstændigt metrisk rum, A en delmængde af X og $f_n: \bar{A} \to Y$ en følge af kontinuerte afbildninger, skal man vise, at hvis følgen (f_n) konvergerer uniformt på A, da konvergerer følgen også uniformt på $\bar{A}$.

4. Idet M er en vilkårlig ikke tom mængde, betegnes med $B(M,\mathbb{R})$ mængden af begrænsede funktioner $f: M \to \mathbb{R}$. [En funktion kaldes begrænset, hvis dens værdimængde er begrænset.] Med de indlysende definitioner af addition og skalarmultiplikation er $B(M,\mathbb{R})$ et vektorrum over $\mathbb{R}$. Vis, at den ved

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in M\}$$

definerede funktion $\|\cdot\|: B(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ er en norm på $B(M,\mathbb{R})$ [d.v.s. opfylder normbetingelserne]. Vis, at $B(M,\mathbb{R})$ med metriken $\text{dist}(f,g) = \|f-g\|$ er et fuldstændigt metrisk rum. Vis endvidere, at hvis M er et kompakt metrisk rum, er $C^0(M,\mathbb{R})$ en afsluttet delmængde af $(B(M,\mathbb{R}),\text{dist})$.

5. I mængden $\mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ af alle funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineres en funktion $\|\cdot\|: \mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ved

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \min\left\{|f(x)|, \frac{1}{1+x^2}\right\},$$

Vis, at den opfylder betingelserne

$$\|f\| \geq 0, \quad \text{og} \quad = 0 \quad \text{hvis og kun hvis} \quad f = 0,$$
$$\|-f\| = \|f\|,$$
$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

og at følgelig $\text{dist}(f,g) = \|f-g\|$ er en metrik i $\mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Vis, at når $f \in \mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ og $f_n \in \mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, gælder $\text{dist}(f,f_n) \to 0$ for $n \to \infty$, hvis og kun hvis følgen (f_n) konvergerer uniformt mod f på ethvert interval $[a,b]$.

*6. Vis, at der i mængden $\mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ af alle funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ikke findes nogen metrik dist, således at en følge af funktioner $f_n \in \mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ konvergerer punktvis mod en funk-

tion $f \in \mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, hvis og kun hvis $\text{dist}(f,f_n) \to 0$ for $n \to \infty$.

7. Vis, at der i mængden $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ af alle kontinuerte funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ikke findes nogen metrik dist, således at en følge af funktioner $f_n \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ konvergerer punktvis mod en funktion $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, hvis og kun hvis $\text{dist}(f,f_n) \to 0$ for $n \to \infty$.

8. Lad $a_1, a_2, \cdots$ være en følge af parvis forskellige reelle tal, og lad $g_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den ved

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq a_n \\ \frac{1}{2^n} & \text{for } x > a_n \end{cases}$$

bestemte funktion. Vis, at følgen af funktioner $f_n = g_1 + \cdots + g_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergerer uniformt mod en monotont voksende funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som er diskontinuert i ethvert af punkterne a_n og kontinuert i ethvert punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \cdots\}$. Vis endvidere, at der i hvert af punkterne a_n gælder

$$f(a_n - 0) = f(a_n) \quad \text{og} \quad f(a_n + 0) = f(a_n) + \frac{1}{2^n}.$$

Bestem endelig grænseværdierne $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ og $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Mat 102

§ 8. Sammenhængende mængder.

En kendt betydningsfuld sætning i analysen udsiger, at værdimængden for en kontinuert, reel funktion på et interval i $\mathbb{R}$ ligeledes er et interval; ordet interval er herved taget i vid betydning (indbefattende halvlinier og hele $\mathbb{R}$). Vi vil studere denne sætnings generalisation til talrummene og de begrebsdannelser, der knytter sig dertil. I denne sammenhæng spiller følgende sætning en vigtig rolle.

Karakterisering af intervaller. For en ikke tom delmængde E af $\mathbb{R}$ er følgende to betingelser ensgyldige:

(1) E er et interval i ordets vide betydning.

(2) Mængderne $\emptyset$ og E er de eneste delmængder af E, der er både åbne og afsluttede relativt til E.

Betingelsen (2) kan også udtrykkes således:

E kan ikke deles i to disjunkte, ikke tomme mængder, der begge er åbne relativt til E, eller således:

E kan ikke deles i to disjunkte, ikke tomme mængder, der begge er afsluttede relativt til E.

Bevis. (2) $\Rightarrow$ (1). Som tidligere vist er E et interval, hvis (og kun hvis) der af $x < y < z$ og $x \in E$, $z \in E$ følger $y \in E$. Antag, at E ikke er et interval, altså at (1) ikke gælder. Da findes punkter $x < y < z$, så at $x \in E$, $z \in E$, men $y \notin E$. Da er de to mængder $E \cap]-\infty, y[$ og $E \cap]y, +\infty[$ disjunkte og ikke tomme, og

deres foreningsmængde er E. Da $]-\infty,y[$ og $]y,+\infty[$ er åbne, er $E \cap]-\infty,y[$ og $E \cap]y,+\infty[$ åbne relativt til E. Altså er (2) ikke opfyldt.

(1) $\Rightarrow$ (2). Antag, at (1) gælder, men ikke (2), altså at E er et interval, som kan deles i to disjunkte, ikke tomme mængder A og B, der begge er afsluttede relativt til E. Lad $a \in A$ og $b \in B$. Vi kan antage, at $a < b$ (idet A og B kan bytte roller). Da E er et interval, gælder $[a,b] \subseteq E$. Nu er $A = E \cap A_1$, hvor A_1 er afsluttet, og $B = E \cap B_1$, hvor B_1 er afsluttet. Følgelig gælder

$$A \cap [a,b] = A_1 \cap [a,b], \qquad B \cap [a,b] = B_1 \cap [a,b].$$

De to mængder $A_2 = A \cap [a,b]$ og $B_2 = B \cap [a,b]$ er altså afsluttede; desuden er de begrænsede; de er altså kompakte. Endvidere er A_2 og B_2 ikke tomme, idet $a \in A_2$ og $b \in B_2$, og de er disjunkte og har foreningsmængden $[a,b]$. Modstriden fremkommer nu på følgende måde:

Vi betragter tallet $c = \sup A_2$. Da A_2 er afsluttet, må gælde $c \in A_2$. Da $b \notin A_2$, må gælde $c < b$. Følgelig må gælde $]c,b] \subseteq B_2$. Punktet c er altså ikke ydre punkt for B_2. Da B_2 er afsluttet, må følgelig gælde $c \in B_2$. Altså gælder $c \in A_2 \cap B_2$, i strid med, at A_2 og B_2 er disjunkte. ∎

Sammenhængende mængder. I tilslutning til den foranstående sætning definerer vi:

En ikke tom delmængde E af et metrisk rum (M,dist) kaldes sammenhængende, hvis Ø og E er de eneste delmængder af E, der er både åbne og afsluttede relativt til E.

Med brug af denne betegnelse udsiger den foranstående sætning simpelthen, at de sammenhængende delmængder af $\mathbb{R}$ er præcis intervallerne i ordets vide betydning.

Vi beviser nu følgende:

Hovedsætning. Hvis (X, dist_X) og (Y, dist_Y) er metriske rum, E en sammenhængende delmængde af X, og $f: E \to Y$ en kontinuert afbildning, da er billedmængden $f(E)$ en sammenhængende delmængde af Y.

Bevis. Lad $B \subseteq f(E)$ være såvel åben som afsluttet relativt til $f(E)$. Idet $f: E \to f(E)$ er kontinuert, er $f^{-1}(B) \subseteq E$ da såvel åben som afsluttet relativt til E. Idet E er sammenhængende, gælder altså $f^{-1}(B) = Ø$ eller $f^{-1}(B) = E$. Idet $B = f(f^{-1}(B))$, gælder altså $B = Ø$ eller $B = f(E)$, hvormed er godtgjort, at $f(E)$ er sammenhængende. □

I det specielle tilfælde, hvor X og Y begge er $\mathbb{R}$, giver hovedsætningen den indledningsvis nævnte sætning, at værdimængden for en kontinuert, reel funktion på et interval er et interval.

For monotone funktioner gælder også det omvendte: Hvis en reel funktion $f: A \to \mathbb{R}$ på et interval A i $\mathbb{R}$ er monoton, og dens værdimængde $f(A)$ er et interval, da er funktionen kontinuert. Dette fremgår umiddelbart af bemærkningerne om monotone funktioner i § 5.

Kombineres hovedsætningen med sætningen om, at billedet af en kompakt mængde ved en kontinuert afbildning er kompakt, finder vi følgende sætning:

Hvis K er en kompakt og sammenhængende delmængde af det metriske rum (M, dist), og f: K $\to \mathbb{R}$ en kontinuert, reel funktion, da er værdimængden f(K) et begrænset, afsluttet interval i $\mathbb{R}$.

Som omtalt i § 2 siges en delmængde A af et metrisk rum (M,dist) at være diskret, hvis ethvert punkt $a \in A$ er et isoleret punkt af A. En ikke tom, sammenhængende, diskret mængde A består af et enkelt punkt. Lad nemlig $a \in A$. Da findes, idet a er et isoleret punkt af A, et $r \in \mathbb{R}_+$, så at $A \cap K(a,r) = \{a\}$. Mængden $\{a\}$ er altså åben relativt til A. Idet den også er afsluttet og dermed afsluttet relativt til A, har vi alstå $A = \{a\}$. Ved kombination med hovedsætningen ovenfor får vi et hyppigt anvendt resultat: En kontinuert afbildning med sammenhængende definitionsmængde og diskret billedmængde er konstant.

Sammenhængende og kurvesammenhængende mængder i $\mathbb{R}^k$.
En kontinuert afbildning $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$: $[a,b] \to \mathbb{R}^k$ kaldes en kontinuert kurve i $\mathbb{R}^k$. Den uafhængige variable t kaldes i denne sammenhæng parameteren. Når t gennemløber parameterintervallet [a,b], siges $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$ at gennemløbe kurven. Punkterne $\underline{a} = \underline{\varphi}(a)$ og $\underline{b} = \underline{\varphi}(b)$ [som evt. kan falde sammen] kaldes kurvens endepunkter, og kurven siges at forbinde $\underline{a}$ og $\underline{b}$. Hvis mængden $\underline{\varphi}([a,b])$ af kurvens punkter tilhører en mængde E i $\mathbb{R}^k$, siges kurven at forbinde $\underline{a}$ og $\underline{b}$ indenfor E.

En ikke tom mængde E i $\mathbb{R}^k$ kaldes kurvesammenhængende, hvis hvilkesomhelst to punkter i E kan forbindes med en kontinuert kurve inden for E.

Enhver kurvesammenhængende mængde E i $\mathbb{R}^k$ er sammenhængende.

Bevis. Lad $A \neq \emptyset$ være en delmængde af E, der er såvel åben som afsluttet relativt til E. Lad $\underline{a}$ være et punkt af A. Idet E er kurvesammenhængende, findes til ethvert punkt $\underline{b}$ af E en kontinuert afbildning $\underline{\varphi}: [a,b] \to E$ med $\underline{\varphi}(a) = \underline{a}$ og $\underline{\varphi}(b) = \underline{b}$. Mængden $\underline{\varphi}^{-1}(A) \subseteq [a,b]$ er da såvel åben som afsluttet relativt til $[a,b]$. Da $a \in \underline{\varphi}^{-1}(A)$, er $\underline{\varphi}^{-1}(A) \neq \emptyset$. Følgelig må gælde $\underline{\varphi}^{-1}(A) = [a,b]$. Vi har altså $b \in \underline{\varphi}^{-1}(A)$, altså $\underline{b} = \underline{\varphi}(b) \in A$, hvormed vi har godtgjort, at $A = E$. Altså er E sammenhængende.∎

En mængde E i $\mathbb{R}^k$ kaldes konveks, hvis den med punkterne $\underline{a}$ og $\underline{b}$ indeholder liniestykket $\{(1-t)\underline{a} + t\underline{b} \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ med endepunkterne $\underline{a}$ og $\underline{b}$, Idet $\underline{x} = \underline{\varphi}(t) = (1-t)\underline{a} + t\underline{b}: [0,1] \to \mathbb{R}^k$ er en kontinuert kurve, der forbinder $\underline{a}$ og $\underline{b}$, har vi:

En ikke tom konveks mængde E i $\mathbb{R}^k$ er kurvesammenhængende og dermed sammenhængende.

Man ser umiddelbart, at ethvert interval $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ i $\mathbb{R}^k$ er en konveks mængde. Intervallet kan være begrænset eller ubegrænset og af enhver af de mulige typer.

Liniestykket med endepunkter $\underline{a}$ og $\underline{b}$ kaldes akseparallelt, hvis $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_k)$ og $\underline{b} = (b_1, \cdots, b_k)$ kun afviger i een af koordinaterne [eller er sammenfaldende]. En kontinuert kurve, der fås ved efter tur at gennemløbe endeligt mange akseparallelle liniestykker, kaldes en trappelinie.

Man ser umiddelbart, at hvilkesomhelst to punkter i et interval $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ kan forbindes med en trappelinie indenfor I.

Man kan give eksempler på mængder i $\mathbb{R}^k$, der er sammenhængende, men ikke kurvesammenhængende. For åbne mængder i $\mathbb{R}^k$ falder de to begreber dog sammen. Dette vil fremgå af følgende undersøgelse af strukturen af en åben mængde i $\mathbb{R}^k$.

Lad E være en ikke tom, åben mængde i $\mathbb{R}^k$. I mængden E defineres relationen τ, hvor $\underline{a} \tau \underline{b}$ betyder, at $\underline{a}$ og $\underline{b}$ kan forbindes med en trappelinie indenfor E. Denne relation ses at være en ækvivalensrelation, og den bestemmer altså en klassedeling $\{E_i \mid i \in I\}$ af E. Hver af mængderne E_i er kurvesammenhængende og dermed sammenhængende. Hvis nemlig $\underline{a}$ og $\underline{b}$ begge tilhører E_i, kan $\underline{a}$ og $\underline{b}$ forbindes med en trappelinie indenfor E. Ethvert punkt $\underline{c}$ af denne trappelinie må tilhøre E_i, da den del af den, der fører fra $\underline{a}$ til $\underline{c}$, er en trappelinie i E, der forbinder $\underline{a}$ og $\underline{c}$, og følgelig $\underline{a} \tau \underline{c}$. Altså kan $\underline{a}$ og $\underline{b}$ forbindes med en trappelinie inden for E_i. Hver af mængderne E_i er endvidere åben. Thi lad $\underline{a}$ være et punkt af E_i og lad $r \in \mathbb{R}_+$ være valgt således, at $K(\underline{a},r) \subseteq E$. Da ethvert punkt $\underline{x}$ af $K(\underline{a},r)$ kan forbindes med $\underline{a}$ ved en trappelinie indenfor $K(\underline{a},r) \subseteq E$, har vi $\underline{a} \tau \underline{x}$ for ethvert $\underline{x} \in K(\underline{a},r)$. Mængden E_i indeholder altså $K(\underline{a},r)$, og følgelig er den åben. Ved hjælp af

ækvivalensrelationen r har vi altså opnået en klassedeling $\{E_i \mid i \in I\}$ af den åbne mængde E i åbne sammenhængende mængder E_i. Disse mængder E_i kaldes de åbne sammenhængende komponenter af E.

Hvis E specielt er sammenhængende, kan der kun være een komponent. Thi hvis E_i er en af komponenterne, er E_i åben. Men E_i er også afsluttet relativt til E, da $E \setminus E_i$ er foreningsmængden af de øvrige komponenter og dermed åben. Da $E_i \neq \emptyset$, slutter vi, at $E_i = E$. Hermed er vist:

Enhver åben og sammenhængende mængde E i $\mathbb{R}^k$ er kurvesammenhængende. Der gælder endda, at to hvilkesomhelst punkter i E kan forbindes med en trappelinie inden for E.

Lad atter E være en vilkårlig ikke tom, åben mængde i $\mathbb{R}^k$. Vi vil vise, at klassedelingen $\{E_i \mid i \in I\}$ er den eneste klassedeling af E i åbne sammenhængende mængder. Lad altså $\{B_j \mid j \in J\}$ være en klassedeling af E i åbne sammenhængende mængder. For enhver af mængderne B_j gælder da, at hvilkesomhelst to punkter af B_j kan forbindes indenfor B_j (og så meget mere indenfor E) med en trappelinie. Heraf følger, at B_j må være delmængde af en af komponenterne E_i. Mængden B_j er åben. Men B_j er også afsluttet relativt til E_i, idet $E_i \setminus B_j = (E \setminus B_j) \cap E_i$, og $E \setminus B_j$ er åben. Da $B_j \neq \emptyset$, slutter vi, at $B_j = E_i$. Hvert B_j er altså lig med et E_i, hvoraf følger, at de to klassedelinger $\{E_i \mid i \in I\}$ og $\{B_j \mid j \in J\}$ er den samme.

Da enhver ikke tom åben mængde i $\mathbb{R}^k$ indeholder et punkt af $\mathbb{Q}^k$, og da $\mathbb{Q}^k$ er numerabel, ser vi, at systemet af åbne, sammenhængende komponenter af en åben mængde i $\mathbb{R}^k$ er endeligt eller numerabelt.

Specielt fås for $k = 1$, idet de åbne sammenhængende mængder i $\mathbb{R}$ er de åbne, begrænsede eller ubegrænsede intervaller, at man får samtlige åbne mængder i $\mathbb{R}$ ved at danne alle foreningsmængder af endeligt eller numerabelt mange parvis disjunkte åbne intervaller, og at enhver åben mængde i $\mathbb{R}$ kun har een fremstilling af denne form. Idet de afsluttede mængder i $\mathbb{R}$ er komplementærmængderne til de åbne, har vi hermed også en måde til at danne alle afsluttede mængder i $\mathbb{R}$.

Man ser, at en afsluttet mængde i $\mathbb{R}$ dannet på denne måde vil have et punkt x som isoleret punkt, hvis og kun hvis x er fælles endepunkt for to af de disjunkte åbne intervaller, der udgør komplementærmængden. Vælger man de åbne intervaller således, at intet punkt er endepunkt for to af dem, fås altså en afsluttet mængde uden isolerede punkter. En sådan mængde kaldes en perfekt mængde.

Øvelse. Cantors mængde. Et lærerigt eksempel på den foran beskrevne måde til at danne afsluttede mængder i $\mathbb{R}$ er følgende. Af intervallet $F_1 = [0,1]$, der fremkommer af $\mathbb{R}$ ved at udelade den åbne mængde $G_1 =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, udelades den midterste åbne tredjedel $G_2 =]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$. Tilbage bliver mængden $F_2 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$. Af hvert af intervallerne $[0,\frac{1}{3}]$ og $[\frac{2}{3},1]$ udelades den midterste åbne tredjedel. Der udelades altså $G_3 =]\frac{1}{9},\frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9},\frac{8}{9}[$. Tilbage bliver mængden

$F_3 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$. Af hver af intervallerne $[0,\frac{1}{9}],[\frac{2}{9},\frac{1}{3}],[\frac{2}{3},\frac{7}{9}],[\frac{8}{9},1]$ udelades nu den midterste åben tredjedel, og således videre.

Halvlinierne $]-\infty,0[$ og $]1,+\infty[$ og de efterhånden udeladte åbne intervaller udgør en åben mængde $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \cdots$, hvis komplementærmængde $F = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \cdots$ altså er en afsluttet mængde. Da intet punkt af $\mathbb{R}$ er endepunkt for to af de disjunkte åbne intervaller, hvoraf G består, har F intet isoleret punkt. Altså er F en perfekt mængde. Den kaldes Cantors mængde.

Den afgives bekvemt ved brug af <u>trialbrøker</u>, der indføres på følgende måde [jfr. omtalen af decimalbrøk i § 1]: Når $a_1,a_2,\cdots,a_n \in \{0,1,2\}$, skrives tallet $\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n}$ også $^3 0,a_1a_2\cdots a_n$, og udtrykket kaldes en endelig trialbrøk. Tallet tilhører intervallet $[0,1[$. Ved en uendelig trialbrøk forstås et udtryk $^3 0,a_1a_2\cdots a_n\cdots$, hvor $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots \in \{0,1,2\}$. Sættes $x_n = {}^3 0,a_1a_2\cdots a_n$, er talfølgen $x_1,x_2,\cdots$ stigende, og da tallene tilhører intervallet $[0,1[$ er følgen konvergent med en grænseværdi x, der tilhører intervallet $[0,1]$. Denne grænseværdi kaldes værdien af den uendelige trialbrøk, og man skriver

$$x = {}^3 0,a_1a_2\cdots a_n\cdots.$$

Man bemærker, at $^3 0,a_1a_2\cdots a_n = {}^3 0,a_1a_2\cdots a_n 00\cdots$.

Man viser let:

Ethvert tal x i intervallet $[0,1]$ kan fremstilles ved en uendelig trialbrøk. Et tal x i intervallet $]0,1[$, der kan fremstilles ved en endelig trialbrøk, fremstilles ved netop to uendelige trialbrøker. Alle andre tal i $[0,1]$ har netop een fremstilling ved en uendelig trialbrøk.

For et tal med to uendelige trialbrøkfremstillinger lyder disse $^3 0,a_1a_2\cdots a_n00\cdots$ og $^3 0,a_1a_2\cdots(a_n-1)22\cdots$, hvor $a_n \in \{1,2\}$.

Idet vi nu vender tilbage til konstruktionen af Cantors mængde, bemærker vi: Mængden $F_2 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$ består af alle tal i $[0,1]$, der kan fremstilles ved en uendelig trialbrøk $^3 0,a_1a_2\cdots a_n\cdots$, hvor $a_1 \in \{0,2\}$. Mængden $F_3 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$ består af alle tal i $[0,1]$, der kan fremstilles ved en uendelig trialbrøk $^3 0,a_1a_2\cdots a_n\cdots$, hvor $a_1,a_2 \in \{0,2\}$, og således videre. Da $F = F_2 \cap F_3 \cap \cdots$ slutter vi:

Cantors mængde F består af alle tal i $[0,1]$, der kan fremstilles ved en uendelig trialbrøk $^3 0,a_1a_2\cdots a_n\cdots$, hvor $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots \in \{0,2\}$.

Kontinuitet af omvendt funktion. Som tidligere omtalt (§ 5) er den omvendte afbildning til en bijektiv, kontinuert afbildning i almindelighed ikke kontinuert. Der gælder dog følgende specielle sætning:

Hvis A og B er intervaller i $\mathbb{R}$ og $f: A \to B$ en bijektiv kontinuert afbildning, er $f^{-1}: B \to A$ kontinuert, og f og f^{-1} er strengt monotone.

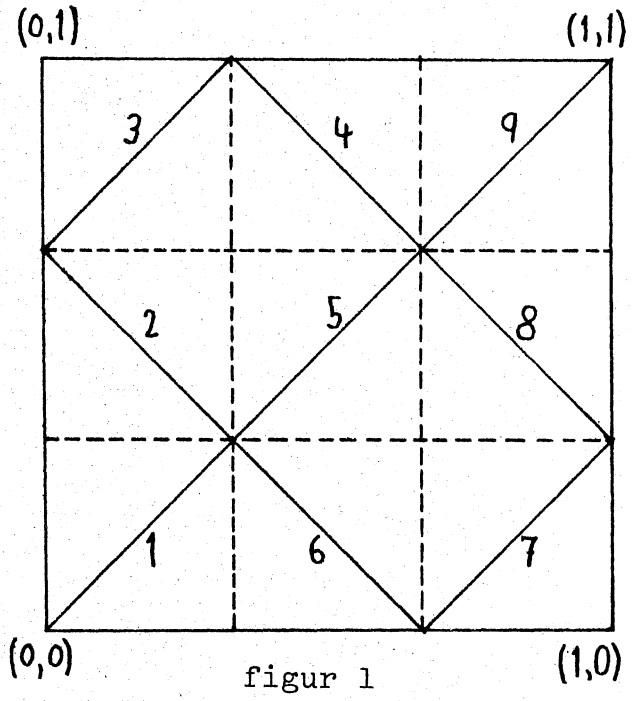
Bevis. For punkter $x < y < z$ i A er $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$ punkter i B. Punktet $f(y)$ må ligge mellem $f(x)$ og $f(z)$. Thi billederne $f([x,y])$ og $f([y,z])$ af $[x,y]$ og $[y,z]$ er afsluttede intervaller, af hvilke det første indeholder $f(x)$ og $f(y)$, det andet $f(y)$ og $f(z)$. Hvis $f(y)$ ikke lå mellem $f(x)$ og $f(z)$, måtte der altså findes et punkt $v \neq f(y)$, som tilhørte både $f([x,y])$ og $f([y,z])$. Altså måtte f antage værdien v både i et punkt af $[x,y[$ og i et punkt af $]y,z]$, hvilket er umuligt.

Heraf følger, at f er strengt monoton. Findes der nemlig punkter $a_1 < a_2$ i A, så at $f(a_1) < f(a_2)$, slutter vi først, at $f(x) < f(a_1)$ for $x < a_1$, at $f(a_1) < f(x) < f(a_2)$ for $a_1 < x < a_2$, og at $f(a_2) < f(x)$ for $a_2 < x$, og dernæst, at $f(x) < f(y)$ for $x < y < a_1$, for $a_1 < x < y < a_2$, og for $a_2 < x < y$, hvoraf følger, at f er strengt voksende. Tilsvarende sluttes, at f er strengt aftagende, hvis der findes punkter $a_1 < a_2$ i A, så at $f(a_1) > f(a_2)$. Den omvendte afbildning $f^{-1}: B \to A$ er følgelig også strengt monoton.

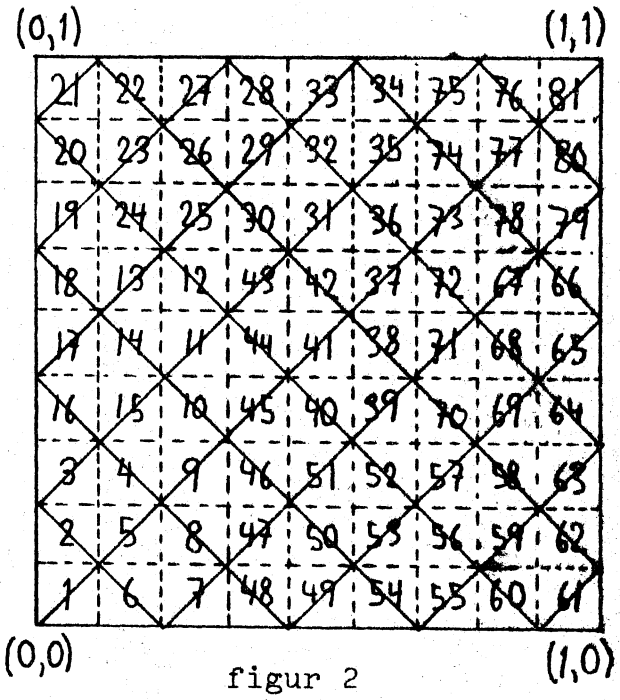
Da en monoton funktion på et interval som tidligere bemærket er kontinuert, hvis dens værdimængde er et interval, ser vi, at $f^{-1}: B \to A$ må være kontinuert.

Øvelse. Peanos kurve. Et lærerigt eksempel på en kontinuert kurve er følgende af G. Peano (1890) angivne kurve $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$: $[0,1] \to \mathbb{R}^2$, der forløber i kvadratet $[0,1]^2$ i $\mathbb{R}^2$ og indeholder ethvert punkt af dette kvadrat.

Kvadratet deles i 9 kvadrater med side $\frac{1}{3}$, og vi danner den kontinuerte kurve $\underline{x} = \underline{\varphi}_1(t): [0,1] \to \mathbb{R}^2$, der består af de på figur 1 viste diagonaler i de 9 kvadrater i den ved nummerordenen bestemte rækkefølge, gennemløbet med konstant fart. Til $t = 0$ og $t = 1$ svarer $\underline{x} = (0,0)$ og $\underline{x} = (1,1)$, og knækpunkterne svarer til $t = \frac{1}{9}, \cdots, \frac{8}{9}$.



figur 1

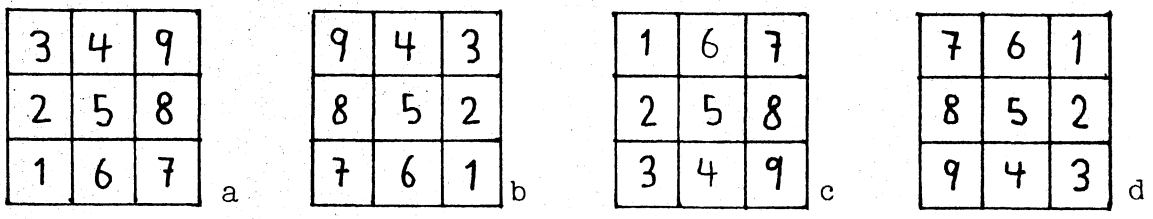


figur 2

Hvert af de 9 kvadrater med side $\frac{1}{3}$ deles nu i 9 kvadrater med side $\frac{1}{3^2}$, og vi danner den kontinuerte kurve $\underline{x} = \underline{\varphi}_2(t): [0,1] \to \mathbb{R}^2$, der består af de på figur 2 viste diagonaler i de 81 kvadrater i den ved nummerordenen bestemte rækkefølge, gennemløbet med konstant fart. Til $t = 0, \frac{1}{9}, \cdots, \frac{8}{9}, 1$ svarer de samme punkter som på den forrige kurve, og knækpunkterne svarer til $t = \frac{1}{81}, \cdots, \frac{80}{81}$.

Idet vi fortsætter således, fås i det n^{te} skridt en kontinuert kurve $\underline{x} = \underline{\varphi}_n(t): [0,1] \to \mathbb{R}^2$, sammensat af diagonaler i de 9^n kvadrater med side $\frac{1}{3^n}$, hvori det givne kvadrat kan deles, gennemløbet med konstant fart. Til $t = 0, \frac{1}{9^{n-1}}, \cdots, \frac{9^{n-1}-1}{9^{n-1}}, 1$ svarer de samme punkter som på den forrige kurve, og knækpunkterne svarer til $t = \frac{1}{9^n}, \cdots, \frac{9^n-1}{9^n}$. Diagonalerne i de 9 kvadrater af

n^{te} deling, der udgør et af kvadraterne af den $(n-1)^{te}$ deling, gennemløbes i den rækkefølge, som er vist på figur 3a, b, c, d, beroende på, hvilke modstående hjørner, der skal forbindes.



figur 3

Til et delinterval $\left[\frac{k-1}{9^n}, \frac{k}{9^n}\right]$ af parameterintervallet $[0,1]$, hvor k er hel og $1 \leqslant k \leqslant 9^n$, svarer på den n^{te} kurve en diagonal i et af de 9^n kvadrater med side $\frac{1}{3^n}$ og på enhver af de følgende kurver $\underline{x} = \underline{\varphi}_m(t): [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $m > n$, en polygon, der forløber i dette kvadrat. Heraf ses, at for $m > n$ er

$$\sup_{t \in [0,1]} \left\| \underline{\varphi}_m(t) - \underline{\varphi}_n(t) \right\| \leqslant \frac{1}{3^n}$$

Vælges til et givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tallet $n_0 \in \mathbb{N}$, således at $\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$, gælder altså for alle $n, m \geqslant n_0$

$$\sup_{t \in [0,1]} \left\| \underline{\varphi}_m(t) - \underline{\varphi}_n(t) \right\| < \varepsilon.$$

Følgen $\underline{\varphi}_n$ er altså en uniform fundamentalfølge. Da rummet $\mathbb{R}^2$ er fuldstændigt, slutter vi, at følgen $\underline{\varphi}_n$ er uniformt konvergent. Grænseafbildningen betegnes $\underline{\varphi}$. Da alle $\underline{\varphi}_n$ er kontinuerte, er $\underline{\varphi}$ ligeledes kontinuert. Den kontinuerte kurve $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ er Peanos kurve.

Da hver af kurverne $\underline{x} = \underline{\varphi}_n(t)\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ forløber i det afsluttede kvadrat $[0,1]^2$, er det klart, at også kurven $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ forløber i kvadratet $[0,1]^2$.

For $t = \frac{k}{9^n}$, hvor k er hel og $0 \leqslant k \leqslant 9^n$, gælder $\underline{\varphi}_n(t) = \underline{\varphi}_{n+1}(t) = \cdots$ og altså $\underline{\varphi}(t) = \underline{\varphi}_n(t)$. Til $t = 0$ og $t = 1$ svarer altså på Peanos kurve punkterne $(0,0)$ og $(1,1)$, og Peanos kurve indeholder knækpunkterne for enhver af kurverne $\underline{x} = \underline{\varphi}_n(t)\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, nemlig svarende til de samme parameterværdier. Heraf følger, at mængden $\underline{\varphi}([0,1])$ af punkter på Peanos kurve er $= [0,1]^2$. Thi $\varphi([0,1])$ er som billede af den kompakte mængde $[0,1]$ ved den kontinuerte afbildning $\underline{\varphi}$ en kompakt mængde, altså afsluttet, og for ethvert punkt $\underline{x}_0 \in [0,1]^2$ og ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vil der i kvadratet $\{\underline{x} \mid \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \varepsilon\}$ findes et kvadrat af den n^{te} deling, når blot n er så stor, at $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$, og to af dette kvadrats hjørner vil være knækpunkter for kurven $\underline{x} = \underline{\varphi}_n(t)\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ (eller $(0,0)$ eller $(1,1)$) og vil altså tilhøre $\underline{\varphi}([0,1])$.

Opgaver. *1. I $\mathbb{R}^2$ betragtes punktmængden

$$A = \{(x,y) \mid x = 0\} \cup \{(x, \cos \tfrac{1}{x}) \mid x > 0\}$$

Vis, at A er sammenhængende, men ikke kurvesammenhængende.

2. Vis, at når $\|\cdot\|$ er en vilkårlig norm i $\mathbb{R}^k$, har mængden $A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^k \mid \|\underline{x}\| \leqslant 1\}$ følgende egenskaber: (1) A er kompakt, (2) A er konveks, (3) $\underline{0}$ er indre punkt af A, (4) A er symmetrisk om $\underline{0}$ (d.v.s. $\underline{x} \in A \Rightarrow -\underline{x} \in A$). Vis, at der omvendt til enhver mængde A i $\mathbb{R}^k$ med disse egenskaber findes en og kun een norm $\|\cdot\|$ i $\mathbb{R}^k$ således at $A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^k \mid \|\underline{x}\| \leqslant 1\}$.

3. Betragt Peanos kurve $\underline{x} = \underline{\varphi}(t): [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

1) Gør rede for, at mængden $\underline{\varphi}\left(\left[\frac{k-1}{9^n}, \frac{k}{9^n}\right]\right)$, hvor k er et helt tal for hvilket $1 \leqslant k \leqslant 9^n$, er et afsluttet kvadrat med siden $\frac{1}{3^n}$.

2) Vis, at der findes en og kun een parameterværdi t, for hvilken a) $\underline{\varphi}(t) = (0,1)$, b) $\underline{\varphi}(t) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, c) $\underline{\varphi}(t) = (1,0)$, og find disse parameterværdier.

3) Vis, at der findes netop fire parameterværdier, for hvilke $\underline{\varphi}(t) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, og find disse.

4. Konstruer en kontinuert kurve $\underline{x} = \underline{\varphi}(t): [0,1] \to \mathbb{R}^3$, for hvilken $\underline{\varphi}([0,1]) = [0,1]^3$.

5. Vis, at hvis en afbildning $\underline{\varphi}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ er kontinuert, og mængden $\underline{\varphi}([a,b])$ har et indre punkt, da er afbildningen ikke injektiv.

Vink. Før beviset indirekte under anvendelse af sætningen i opg. 8 fra § 6.

6. Konstruer en kontinuert, surjektiv afbildning $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

*7. Vis, at en kontinuert, surjektiv afbildning $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ikke kan være bijektiv.

Vink. Vis først, at hvis en følge af afsluttede delmængder $A_1, A_2 \cdots$ af $\mathbb{R}^2$ har $\mathbb{R}^2$ til foreningsmængde, da har mindst en af mængderne A_n et indre punkt. [Før beviset indirekte.] Anvend dette på mængderne $A_n = \underline{\varphi}([-n,n])$ og benyt sætningen i opg. 5.

§9. Polynomier.

Polynomier over $\mathbb{C}$. Med $\mathbb{C}[x]$ betegner vi mængden af funktioner af en kompleks variabel x

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

der fremstilles ved et polynomium $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ med komplekse koefficienter $a_0, a_1, \cdots, a_n$. En sådan funktion er åbenbart kontinuert.

Identitetssætningen. To polynomier fremstiller samme funktion, hvis og kun hvis de er det samme polynomium, eller det ene fremgår af det andet ved tilføjelse af nulled (d.v.s. led med koefficient 0).

Bevis. At to sådanne polynomier fremstiller samme funktion er klart. At også det omvendte gælder, er ensbetydende med, at et polynomium $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, der ikke består af lutter nulled, ikke kan fremstille funktionen 0. Dette følger af, at hvis a_j er den første fra 0 forskellige koefficient, gælder

$$\frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{x^j} \to a_j \quad \text{for } x \to 0 \quad (x \neq 0). \square$$

I det følgende vil vi regne to polynomier, der kun adskiller sig ved nulled, for det samme polynomium. Da udsiger identitetssætningen, at en funktion $F \in \mathbb{C}[x]$ kun fremstilles ved eet polynomium. Der er derfor intet betænkeligt ved også at kalde funktionen selv et polynomium. Specielt regnes alle polynomier bestående af lutter nulled for det samme polynomium; det kaldes nulpolynomiet og skrives 0. Et

fra nulpolynomiet forskelligt polynomium kaldes et egentligt polynomium. Ved graden af et egentligt polynomium $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ forstås det største index j, for hvilket $a_j \neq 0$. Graden er altså et helt tal $\geqslant 0$. Polynomierne af grad 0 er konstanter $a \neq 0$. Nulpolynomiet tillægges ingen grad. Dog vil vi, når talen er om mængden af polynomier af grad $\leqslant n$, af bekvemmelighedsgrunde medregne nulpolynomiet.

Mængden $\mathbb{C}[x]$ er åbenbart en funktionsring. Dens nulelement er nulpolynomiet, og den har et etelement, nemlig polynomiet 1. Den har ingen nuldivisorer. Thi man ser umiddelbart, at når $F = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ og $G = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ er egentlige polynomier af grad n og m, er FG et egentligt polynomium af grad $n + m$ [leddet af højeste grad i FG bliver $a_nb_mx^{n+m}$]. Man kalder $\mathbb{C}[x]$ polynomringen over $\mathbb{C}$.

For et givet helt tal $n \geqslant 0$ vil vi betragte mængden af polynomier $F = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ af grad $\leqslant n$. Man ser umiddelbart, at denne mængde er et vektorrum over $\mathbb{C}$ af dimension $n + 1$. En basis for dette vektorrum udgøres af polynomierne $1, x, \cdots, x^n$. Ethvert sæt af $n + 1$ polynomier indeholdende eet polynomium af hver af graderne $0, 1, \cdots, n$ er naturligvis ligeledes en basis for vektorrummet. Ved hjælp af denne bemærkning kan vi let bevise følgende

Interpolationssætning. For givne parvis forskellige tal $x_0, x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}$ og givne tal $y_0, y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{C}$ findes et og kun eet polynomium $F \in \mathbb{C}[x]$ af grad $\leqslant n$, for hvilket

$$F(x_0) = y_0,\ F(x_1) = y_1, \cdots,\ F(x_n) = y_n.$$

Idet vi som basis for vektorrummet af polynomier F af grad $\leqslant n$ benytter polynomierne $1,\ x-x_0,\ (x-x_0)(x-x_1), \cdots (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$, fås for ethvert sådant polynomium een fremstilling

$$F(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

med koefficienter $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$, og ethvert udtryk af denne form bestemmer et polynomium af grad $\leqslant n$. Man ser nu ved successiv indsætning af $x_0, x_1, \cdots, x_n$, at betingelserne $F(x_0) = y_0,\ F(x_1) = y_1, \cdots, F(x_n) = y_n$ opfyldes for et og kun eet sæt af koefficienter $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$. Den således fundne formel kaldes Newtons Interpolationsformel.

Interpolationssætningen kan også udtrykkes således: Afbildningen $F \longmapsto (F(x_0), F(x_1), \cdots, F(x_n))$ er en bijektiv afbildning af vektorrummet af polynomier af grad $\leqslant n$ på talrummet $\mathbb{C}^{n+1}$. Dette er ligeledes et vektorrum over $\mathbb{C}$, og afbildningen er åbenbart en vektorrumsisomorfi. Denne bemærkning giver anledning til en anden bestemmelse af interpolationspolynomiet. Man ser nemlig straks, at polynomierne

$$F_o(x) = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)\cdots(x_o-x_n)},$$

$$F_1(x) = \frac{(x-x_o)\,(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)},$$

$$\cdots$$

$$F_n(x) = \frac{(x-x_o)\,(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_o)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

afbildes i enhedsvektorerne $(1,0,0,\cdots,0)$, $(0,1,0,\cdots,0),\cdots,$ $(0,0,\cdots,0,1)$ i $\mathbb{C}^{n+1}$. Interpolationspolynomiet er derfor bestemt ved

$$F(x) = y_o\,F_o(x) + y_1\,F_1(x) + \cdots + y_n\,F_n(x).$$

Denne formel kaldes Lagranges interpolationsformel. Polynomierne $F_o, F_1, \cdots, F_n$ udgør således også en basis for vektorrummet af polynomier af grad $\leqslant n$.

I interpolationssætningen er indeholdt følgende

Skærpelse af identitetssætningen. Hvis to polynomier af grad $\leqslant n$ stemmer overens i værdi for $n+1$ værdier af x, er de identiske.

Heraf følger: Hvis to polynomier stemmer overens i værdi for uendelig mange værdier af x, er de identiske.

Divisorer. Et egentligt polynomium G kaldes divisor i polynomiet F, hvis der findes et polynomium Q, således at $F = GQ$. Da $\mathbb{C}[x]$ ikke har nuldivisorer, vil po-

lynomiet Q være entydigt bestemt. Det kaldes kvotienten af F og G og betegnes $Q = \frac{F}{G}$.

For givne polynomier F og G, $G \neq 0$, afgør man, om G er divisor i F, ved hjælp af den velkendte divisionsmetode, som giver en fremstilling

$$F = GQ + R$$

hvor R enten er nulpolynomiet eller et egentligt polynomium af lavere grad end G. Der er kun een sådan fremstilling; thi hvis $F = GQ + R = GQ_1 + R_1$, hvor R og R_1 hver for sig enten er nulpolynomiet eller et polynomium af lavere grad end G, får vi $G(Q-Q_1) = R_1-R$. Var nu $Q \neq Q_1$, var $G(Q-Q_1)$ et egentligt polynomium af grad $\geq$ graden af G, medens R_1-R er nulpolynomiet eller et egentligt polynomium af grad $<$ graden af G. Altså er $Q = Q_1$ og følgelig $R = R_1$. Den anførte ligning kaldes divisionsligningen og R den principale rest af F ved division med G. Man ser nu, at G er divisor i F, hvis og kun hvis R er nulpolynomiet.

Nulpolynomiet har som divisorer samtlige egentlige polynomier. Et egentligt polynomium F af grad n har kun

divisorer af grad $\leqslant n$. som trivielle divisorer har det alle polynomier af grad 0, altså alle konstanter $a \neq 0$, og alle polynomier $a\,F$, hvor $a \neq 0$. Disse sidste kaldes de med F associerede polynomier. Blandt disse findes et og kun eet normeret polynomium, d.v.s. med 1 som koefficient til leddet af højest grad. Andre divisorer kaldes ægte. For $n = 0$ og $n = 1$ findes naturligvis kun de trivielle divisorer. Associerede polynomier har naturligvis de samme divisorer. Hvis F har G som divisor, da også de med G associerede polynomier.

Rødder. Ved en rod i et egentligt polynomium $F(x)$, eller en rod i ligningen $F(x) = 0$, forstås et tal x_0, for hvilket $F(x_0) = 0$. Vælges $G(x) = x-x_0$, antager divisionsligningen formen $F(x) = (x-x_0)Q(x) + r$, hvor r er et polynomium af grad < 1, altså en konstant. Ved at sætte $x = x_0$ ser man, at $r = F(x_0)$. Vi har altså: Tallet x_0 er rod i polynomiet F, hvis og kun hvis $x-x_0$ er divisor i F. Et polynomium af grad 0 har naturligvis ingen rod. Et polynomium af grad $n \geqslant 1$ har højst n rødder. Thi havde det flere, ville det for $n + 1$ værdier af x have sam-

me værdi som nulpolynomiet og måtte altså ifølge den skærpede identitetssætning være nulpolynomiet.

Algebraens fundamentalsætning. Ethvert polynomium $F(x)$ i $\mathbf{C}[x]$ af grad ≥ 1 har en rod, d.v.s. der findes et $x_0 \in \mathbf{C}$, så at $F(x_0) = 0$.

Det første bevisforsøg skyldes Jean le Rond d'Alembert (1746), og sætningen kaldes også d'Alemberts sætning. De første egentlige beviser skyldes C.F. Gauss (1799) og R. Argand (1815). De er dog ikke helt fuldstændige, idet de bygger på sætninger om kontinuerte funktioner, som man den gang tog for indlysende. Vi gengiver her Argands bevis (i fuldstændiggjort form).

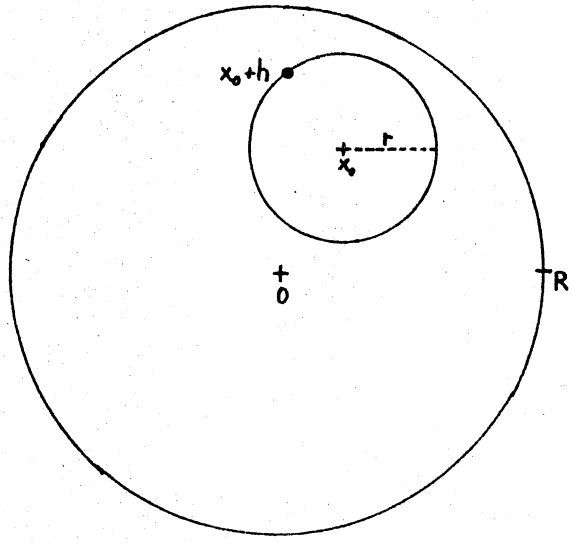
Bevis. Lad

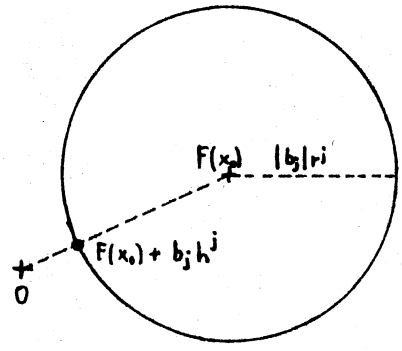
$$F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad n \geq 1, \quad a_n \neq 0.$$

Da er $F(0) = a_0$. For $|x| = R > 0$ gælder

$$\begin{aligned} |F(x)| &\geq |a_n x^n| - |a_0| - |a_1 x| - \cdots - |a_{n-1} x^{n-1}| \\ &= |a_n| R^n - |a_0| - |a_1| R - \cdots - |a_{n-1}| R^{n-1} \\ &= R^n \left(|a_n| - \frac{|a_0|}{R^n} - \frac{|a_1|}{R^{n-1}} - \cdots - \frac{|a_{n-1}|}{R} \right). \end{aligned}$$

For $R \to +\infty$ konvergerer størrelsen i parentesen mod $|a_n| > 0$ og højre side altså mod $+\infty$. Vi vælger R, så at højre side er $> |a_0|$. Restriktionen af $|F(x)|$ til den afsluttede cirkelskive $\{x \mid |x| \leq R\}$ er en kontinuert reel funktion på en kompakt delmængde af $\mathbb{C}$. Den har altså en mindste værdi, d.v.s. der findes et punkt x_0 i skiven, så at $|F(x_0)| \leqslant |F(x)|$ for ethvert punkt x i skiven. Specielt gælder $|F(x_0)| \leqslant |F(0)| = |a_0|$, hvoraf følger, da $|F(x)| > |a_0|$ for $|x| = R$, at $|x_0| < R$. Vi vil vise, at $F(x_0) = 0$. Beviset føres indirekte. Vi antager altså, at $F(x_0) \neq 0$.





Vi sætter $x = x_0 + h$ og finder

$F(x_0 + h) = b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n$, $b_0 = F(x_0) \neq 0$, $b_n = a_n \neq 0$.

Lad b_j være det første af tallene $b_1, \cdots, b_n$, der er $\neq 0$. Da er

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + b_j h^j + b_{j+1} h^{j+1} + \cdots + b_n h^n, \quad b_j \neq 0.$$

Vi betragter nu et tal $r \in \mathbf{R}_+$, om hvilket vi foreløbig blot forudsætter, at $r \leqslant R - |x_0|$ og $|b_j| r^j \leqslant |F(x_0)|$. og vi lader h gennemløbe cirklen $\{h| \ |h| = r\}$. Herved gennemløber $x = x_0 + h$ cirklen $\{x| \ |x - x_0| = r\}$, som tilhører skiven $\{x| \ |x| \leqslant R\}$. Endvidere gennemløber h^j cirklen $\{y| \ |y| = r^j\}$, og $F(x_0) + b_j h^j$ gennemløber derfor cirklen $\{y| \ |y - F(x_0)| = |b_j| r^j\}$. Det er derfor muligt at vælge et h med $|h| = r$, således at $|F(x_0) + b_j h^j| = |F(x_0)| - |b_j| r^j$. [Der findes iøvrigt j sådanne værdier af h, thi når h gennemløber cirklen $\{h| \ |h| = r\}$ een gang, vil h^j gennemløbe cirklen $\{y| \ |y| = r^j\}$ ikke een, men j gange.] Da fås

$$\begin{aligned} |F(x_0 + h)| &\leqslant |F(x_0) + b_j h^j| + |b_{j+1} h^{j+1}| + \cdots + |b_n h^n| \\ &= |F(x_0)| - |b_j| r^j + |b_{j+1}| r^{j+1} + \cdots + |b_n| r^n \\ &= |F(x_0)| - r^j(|b_j| - |b_{j+1}| r - \cdots - |b_n| r^{n-j}). \end{aligned}$$

Størrelsen i parentesen konvergerer mod $|b_j| > 0$ for $r \to 0$. Vi kan derfor vælge r i overensstemmelse med de betingelser, der foran er pålagt r, således at størrelsen i parentesen er > 0. Da fås $|F(x_0 + h)| < |F(x_0)|$, og da $|x_0 + h| \leqslant R$ er vi nået til en modstrid. ∎

Ethvert polynomium $F(x)$ i $\mathbb{C}[x]$ af grad $\geqslant 1$ kan på en og, bortset fra førstegradsfaktorernes rækkefølge, kun på een måde skrives på formen

$$(*) \qquad F(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n), \quad a \neq 0.$$

Denne sætning indeholder naturligvis algebraens fundamentalsætning. På den anden side følger den, som vi skal se, meget let af den.

Bevis. (1) Fremstillingens eksistens. Lad $F(x)$ have graden n, og lad α_1 være en rod i $F(x)$. Da er $x-\alpha_1$ divisor i $F(x)$, altså $F(x) = (x-\alpha_1)F_1(x)$, hvor $F_1(x)$ har graden $n-1$. Nu fortsættes med $F_1(x)$, og i n skridt er vi færdige.

(2) Fremstillingens entydighed. Lad

$$a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) = b(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_m),$$
$$a \neq 0, \; b \neq 0.$$

Da de to polynomier har henh. ax^n og bx^m som højeste led, er $n = m$ og $a = b$. Da α_1 er rod på venstre side, og altså også på højre side, er α_1 et af tallene β_j, f.eks. β_1. Ellers ændres rækkefølgen af tallene β_j. Ved division med $x-\alpha_1$ fås $a(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) = b(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_m)$. Efter n skridt er vi færdige.□

De n ikke nødvendigvis parvis forskellige tal $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ er åbenbart samtlige rødder i $F(x)$. Idet en rod regnes med multiplicitet bestemt ved antallet af gange, den forekommer i udtrykket $(*)$, kan vi sige, at et polynomium af grad $n \geqslant 1$ har netop n rødder. Er $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ de parvis forskellige rødder i $F(x)$ og $\nu_1, \cdots, \nu_r$ deres multipliciteter, har vi $\nu_1 + \cdots + \nu_r = n$, og fremstillingen

lyder

$$(\S) \qquad F(x) = a(x - \alpha_1)^{\nu_1} \cdots (x - \alpha_r)^{\nu_r}.$$

I stedet for at sige, at α er rod i $F(x)$ med multiplicitet ν, kan man sige, at α er ν gange rod i $F(x)$. Hvis $\nu = 1$, kaldes α en <u>simpel</u> eller <u>enkelt rod</u>, hvis $\nu > 1$ en <u>multipel rod</u>, specielt hvis $\nu = 2$ en <u>dobbelt rod</u>.

Fremstillingerne $(\divideontimes)$ og $(\S)$ kan naturligvis også benyttes for polynomier af grad 0, idet så blot førstegradsfaktorerne mangler.

<u>Bemærkning.</u> Fremstillingen $F(x) = a(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ af et egentligt polynomium som produkt af et tal $a \neq 0$ og normerede førstegradspolynomier er analog med fremstillingen $t = \varepsilon p_1 \cdots p_n$ af et fra 0 forskelligt helt tal t som produkt af et tal $\varepsilon = \pm 1$ og (positive) primtal. Sammenholdes $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{C}[x]$ har vi som analoge begreber: Tallet 0: nulpolynomiet; tal $\neq 0$: egentlige polynomier; tallene ± 1: konstanter $a \neq 0$; positive tal: normerede polynomier; primtal: normerede førstegradspolynomier.

<u>Bestemmelse af samtlige divisorer i et egentligt polynomium</u> $F(x)$. Ud fra fremstillingen $(\S)$ bestemmes divisorerne i F ved

$$G(x) = b(x - \alpha_1)^{\rho_1} \cdots (x - \alpha_r)^{\rho_r}, \quad b \neq 0, \quad \begin{matrix} 0 \leq \rho_1 \leq \nu_1 \\ \cdots \\ 0 \leq \rho_r \leq \nu_r. \end{matrix}$$

[Her skal en faktor $(x - \alpha_j)^{\rho_j}$ med $\rho_j = 0$ læses som 1.]
Thi disse polynomier er åbenbart divisorer i F, og der kan ikke være andre. Hvis nemlig $F = GQ$, skal vi ved indsætning af fremstillingerne for G og Q få fremstillingen for F.

Bestemmelse af samtlige fælles divisorer i to egentlige polynomier F_1 og F_2. Lad de fælles rødder være $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ med multipliciteter henh. $\nu_1, \cdots, \nu_t$ og $\mu_1, \cdots, \mu_t$, og lad desuden F_1 have rødderne $\beta_1, \cdots, \beta_u$ med multipliciteter $\lambda_1, \cdots, \lambda_u$ og F_2 rødderne $\gamma_1, \cdots, \gamma_v$ med multipliciteter $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_v$. Vi har da

$$F_1 = a_1(x - \alpha_1)^{\nu_1} \cdots (x - \alpha_t)^{\nu_t}(x - \beta_1)^{\lambda_1} \cdots (x - \beta_u)^{\lambda_u}$$

$$F_2 = a_2(x - \alpha_1)^{\mu_1} \cdots (x - \alpha_t)^{\mu_t}(x - \gamma_1)^{\varkappa_1} \cdots (x - \gamma_v)^{\varkappa_v},$$

og ser, at samtlige fælles divisorer i F_1 og F_2 bestemmes ved

$$G = b(x - \alpha_1)^{\rho_1} \cdots (x - \alpha_t)^{\rho_t}, \qquad b \neq 0, \quad 0 \leqslant \rho_1 \leqslant \sigma_1 = \min\{\nu_1, \mu_1\}, \cdots, \quad 0 \leqslant \rho_t \leqslant \sigma_t = \min\{\nu_t, \mu_t\}.$$

Heraf aflæses: Der findes et og kun eet normeret polynomium D med den egenskab, at samtlige fælles divisorer i F_1 og F_2 netop er samtlige divisorer i D, nemlig polynomiet

$$D = (x - \alpha_1)^{\sigma_1} \cdots (x - \alpha_t)^{\sigma_t}.$$

Dette polynomium kaldes største fælles divisor for F_1 og F_2.

Dette vigtige resultat kan også vises på en anden måde,

og vi får herved samtidig en metode til at bestemme D, uden at rødderne for F_1 og F_2 behøver at være kendt. Hertil benyttes

Euklids algoritme. Vi opskriver divisionsligningerne

$$F_1 = F_2Q_1 + F_3 \qquad \text{grad } F_3 < \text{grad } F_2$$

$$F_2 = F_3Q_2 + F_4 \qquad \text{grad } F_4 < \text{grad } F_3$$

$$\cdots$$

$$F_{m-2} = F_{m-1}Q_{m-2} + F_m \qquad \text{grad } F_m < \text{grad } F_{m-1}$$

$$F_{m-1} = F_mQ_{m-1},$$

idet processen fortsættes, indtil man når til en ligning, hvori resten er nulpolynomiet, hvilket må indtræffe. Nu ser man: Enhver fælles divisor i F_1 og F_2 er også divisor i F_3, den er altså fælles divisor i F_2 og F_3 og følgelig også divisor i F_4, og således videre. Den er altså divisor i F_m. Omvendt: Enhver divisor i F_m er også divisor i F_{m-1}, den er altså fælles divisor i F_{m-1} og F_m og følgelig også divisor i F_{m-2}, og således videre. Den er altså fælles divisor i F_1 og F_2. Det med F_m associerede normerede polynomium D har altså den egenskab, at de fælles divisorer i F_1 og F_2 netop er samtlige divisorer i D. Hvis D_1 ligeledes er et normeret polynomium, hvis divisorer netop er de fælles divisorer i F_1 og F_2, må D være divisor i D_1 og D_1 divisor i D, hvilket (da polynomierne er normerede) medfører, at $D_1 = D$.

Bemærkning. Benævnelsen Euklids algoritme for den beskrevne fremgangsmåde beror på analogien med den tilsvarende fremgangsmåde til bestemmelse af største fælles divisor for to hele tal, som findes i Euklids elementer. Ordet algoritme kommer fra Muhammed ibn Musa al Khowarazmi (o.800), idet hans tilnavn (fra Khiva) er blevet overført på et værk af ham om regnekunsten, derfra på andre værker om samme emne, og endelig på regnemetoder i det hele taget.

Polynomier over $\mathbb{R}$. Med $\mathbb{R}[x]$ betegner vi delmængden af $\mathbb{C}[x]$ bestående af alle polynomier med reelle koefficienter; den er åbenbart en delring af $\mathbb{C}[x]$. Den kaldes polynomringen over $\mathbb{R}$. Denne benævnelse benyttes også, når man indskrænker sig til at betragte polynomierne som funktioner på $\mathbb{R}$.

For et polynomium i $\mathbb{C}[x]$

$$F(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

fås for reelle x ved konjugering

$$\overline{F(x)} = \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \cdots + \overline{a_n}x^n.$$

Da to polynomier er identiske, hvis og kun hvis de stemmer overens i værdi for alle reelle x, ser vi, at polynomiet $F(x)$ til hører $\mathbb{R}[x]$, hvis og kun hvis $F(x) = \overline{F(x)}$ for alle reelle x, d.v.s. hvis og kun hvis dets værdier for reelle x er reelle.

For et polynomium i $\mathbb{R}[x]$ fås af fremstillingen

$$F(x) = a(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$$

ved konjugering, at der for reelle x må gælde

$$F(x) = a(x - \overline{\alpha_1}) \cdots (x - \overline{\alpha_n}).$$

Denne formel må da også gælde for komplekse x. Af faktoropløsningens entydighed fremgår da, at de to talsæt $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ og $\overline{\alpha_1}, \cdots, \overline{\alpha_n}$ må stemme overens pånær rækkefølgen. Idet vi først skriver de reelle og derefter de imaginære rødder, kan talsættet altså skrives

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \xi_1 + i\eta_1, \xi_1 - i\eta_1, \cdots, \xi_s + i\eta_s, \xi_s - i\eta_s.$$

For et par af konjugerede tal $\xi + i\eta$ og $\xi - i\eta$ er

$$(x - (\xi + i\eta))(x - (\xi - i\eta)) = (x - \xi)^2 + \eta^2 = x^2 - 2\xi x + \xi^2 + \eta^2.$$

Vi finder derfor:

Ethvert polynomium $F(x)$ i $\mathbb{R}[x]$ af grad ≥ 1 kan på en og, bortset fra faktorernes rækkefølge, kun på een måde skrives på formen

$$F(x) = a(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_r)(x^2 + a_1x + b_1) \cdots (x^2 + a_sx + b_s),$$

hvor $a \neq 0$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, a_1, b_1, \cdots, a_s, b_s$, er reelle, og andengradsfaktorerne har imaginære rødder.

Bemærkning. Sammenholdes $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{R}[x]$, har vi altså som det analoge til primtallene dels de normerede førstegradspolynomier $x - \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, dels de normerede andengradspolynomier $x^2 + ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ med imaginære rødder.

Polynomier af flere variable. Med $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]$ betegner vi mængden af funktioner af k komplekse variable $x_1, \cdots, x_k$

$$F: \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}, \quad (x_1, \cdots, x_k) \mapsto F(x_1, \cdots, x_k) = \sum a_{p_1 \cdots p_k} x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k},$$

der fremstilles ved et polynomium $\sum a_{p_1 \cdots p_k} x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k}$ i $x_1, \cdots, x_k$, hvor summen skal udstrækkes over et endeligt antal af parvis forskellige sæt $(p_1, \cdots, p_k)$ af hele tal $\geqslant 0$, og koefficienterne $a_{p_1 \cdots p_k}$ er komplekse tal. En sådan funktion er åbenbart kontinuert.

Identitetssætningen. To polynomier i $x_1, \cdots, x_k$ fremstiller samme funktion, hvis og kun hvis de er det samme polynomium eller kun adskiller sig ved nulled (d.v.s. led med koefficient 0).

Bevis. At to sådanne polynomier fremstiller samme funktion er klart. At også det omvendte gælder, er ensbetydende med, at et polynomium, der fremstiller funktionen 0, må bestå af lutter nulled. Vi fører beviset for $k = 2$. For vilkårligt k indses sætningen ved samme slutningsmåde under brug af induktion. Efter tilføjelse af nulled kan polynomiet skrives

$$\sum_{p_2=0}^{n_2} \sum_{p_1=0}^{n_1} a_{p_1 p_2} x_1^{p_1} x_2^{p_2} = \sum_{p_2=0}^{n_2} f_{p_2}(x_1) x_2^{p_2}, \text{ hvor}$$

$$f_{p_2}(x_1) = \sum_{p_1=0}^{n_1} a_{p_1 p_2} x_1^{p_1}$$

For fastholdt x_1 viser identitetssætningen for polynomier af en variabel, at $f_{p_2}(x_1) = 0$ for alle $p_2 = 0, \cdots, n_2$. Samme sætning viser derefter, at der for hvert $p_2 = 0, \cdots, n_2$ gælder $a_{p_1 p_2} = 0$ for alle $p_1 = 0, \cdots, n_1$. □

Idet polynomier i $x_1, \cdots, x_k$, der kun adskiller sig ved nulled, regnes for det samme polynomium, udsiger identi-

tetssætningen, at en funktion $F \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]$ kun fremstilles ved eet polynomium. Der er derfor intet betænkeligt ved at kalde funktionen selv et polynomium. Specielt regnes alle polynomier i $x_1, \cdots, x_k$ bestående af lutter nulled for det samme polynomium; det kaldes nulpolynomiet og skrives 0. Et fra nulpolynomiet forskelligt polynomium kaldes et egentligt polynomium. Ved graden af et led $ax_1^{p_k} \cdots x_k^{p_k}$ med $a \neq 0$ forstås $p_1 + \cdots + p_k$, medens p_j kaldes leddets grad efter x_j. Ved graden af et egentligt polynomium $F \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]$ forstås den højeste forekommende grad af leddene med koefficient $\neq 0$; ved graden efter x_j forstås den højeste forekommende grad efter x_j af leddene med koefficient $\neq 0$. Man ser let, at der gælder

$$\text{grad efter hvert } x_j \leqslant \text{grad} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \text{grad efter } x_j.$$

Et polynomium $F \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]$ kaldes homogent af graden n, hvor n er et ikke negativt helt tal, hvis der for ethvert $t \in \mathbb{C}$ gælder

$$F(tx_1, \cdots, tx_k) = t^n F(x_1, \cdots, x_k).$$

Man ser, at nulpolynomiet er homogent af enhver grad, medens et egentligt polynomium er homogent af graden n, hvis og kun hvis alle leddene med koefficient $\neq 0$ har graden n.

Mængden $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]$ er åbenbart en funktionsring. Dens nulelement er nulpolynomiet, og den har et etelement, nemlig polynomiet 1.

Med $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_k]$ betegner vi delmængden af $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]$

bestående af alle polynomier i $x_1, \cdots, x_k$ med reelle koefficienter. Det er åbenbart en delring af $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]$. Man indser let, at to polynomier i $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_k]$ er identiske, hvis og kun hvis de stemmer overens i værdi for alle reelle talsæt $(x_1, \cdots, x_k)$.

Opgaver. 1. Find såvel ved Newtons som ved Lagranges interpolationsformel det polynomium af grad $\leqslant 3$, som for $x = -1,0,2,3$ antager værdierne $y = 2,-1,3,1$.

Opgave 2. Gør rede for, at polynomierne

$$1, \frac{x}{1!}, \frac{x(x-1)}{2!}, \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}, \cdots, \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

er en basis for vektorrummet bestående af alle polynomier af grad $\leqslant n$. Vis, at der for et polynomium

$$F(x) = c_0 + c_1 \frac{x}{1!} + c_2 \frac{x(x-1)}{2!} + c_3 \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \cdots + c_n \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

gælder $F(x) \in \mathbb{Z}$ for alle $x \in \mathbb{Z}$, hvis og kun hvis $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{Z}$.

Opgave 3. Bestem a og b således, at $x^2 + x + 1$ er divisor i $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + ax + b$.

Opgave 4. En n^{te}-gradsligning $a_0x^n + a_1x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ antages at opfylde betingelserne $a_k = a_{n-k}$ for $k = 0, \cdots, n$. Vis, at hvis $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ [som åbenbart alle er $\neq 0$] er ligningens rødder, er $\frac{1}{\alpha_1}, \cdots, \frac{1}{\alpha_n}$ en permutation af $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.

Opgave 5. Find største fælles divisor for $x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 4$ og $x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 4x - 1$.

Opgave 6. Idet F er et normeret polynomium med reelle koefficienter af grad $n \geqslant 1$, skal man vise, at $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, hvis n er ulige, og at $F(\mathbb{R})$ er af formen $[a, +\infty[$, hvis n er lige.

Opgave 7. Vis, at de eventuelle reelle rødder i et normeret polynomium $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ med reelle koefficienter tilhører intervallet $[-1-K, 1+H]$, hvor $H = \max\{-a_1, \cdots, -a_n, 0\}$ og $K = \max\{a_1, -a_2, \cdots, (-1)^{n-1}a_n, 0\}$.

Opgave 8. Idet $F \in \mathbb{R}[x]$, skal man vise, at $F(x) \geqslant 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, hvis og kun hvis der findes polynomier $G \in \mathbb{R}[x]$ og $H \in \mathbb{R}[x]$, så at $F = G^2 + H^2$.

Vink. $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$.

Opgave 9. Find graden og graden efter hver af de variable x_1, x_2, x_3 af polynomiet

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^7 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3^5 - 6x_1 x_2 x_3^4.$$

Opgave 10. Vis, at de homogene polynomier i $x_1, \cdots, x_k$ af grad n udgør et vektorrum over $\mathbb{C}$ af dimension $\binom{n+k-1}{k-1}$.

§10. Ligninger af grad ≤ 4.

Forbemærkninger. Ligningen $x^n - 1 = 0$ har rødderne $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{n-1}$, hvor $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$. Tallene $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{n-1}$ kaldes de n^{te} enhedsrødder. Bemærk, at der for $n \geq 2$ gælder $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} = 0$.

For et vilkårligt $a \in \mathbb{C}$ vil vi med $\sqrt[n]{a}$ betegne en vilkårlig n^{te} rod af a, altså en vilkårlig af rødderne i ligningen $x^n - a = 0$. Symbolet $\sqrt[n]{a}$ kan altså betegne enhver af de n rødder, men vi vil altid, når talen er om en sådan ligning, tænke os truffet et valg, således at $\sqrt[n]{a}$ er en bestemt af rødderne. Ligningens n rødder er da $\sqrt[n]{a}$, $\varepsilon\sqrt[n]{a}$, $\varepsilon^2\sqrt[n]{a}$, $\cdots$, $\varepsilon^{n-1}\sqrt[n]{a}$. For n lige og a reel og ≥ 0 vælger man i reglen at lade $\sqrt[n]{a}$ betegne den reelle ikke negative rod, og for n ulige og a reel vælger man i reglen at lade $\sqrt[n]{a}$ betegne den reelle rod.

Bortskaffelse af leddet af næsthøjest grad. Hvis

$$F(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n),$$

gælder $a_1 = -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$, altså specielt $a_1 = 0$ hvis og kun hvis $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$. Sættes $x = y + c$, fås

$$G(y) = F(y+c) = y^n + (nc+a_1)y^{n-1} + \cdots = (y - (\alpha_1-c))\cdots(y - (\alpha_n-c)).$$

Ligningen $G(y) = 0$ har altså rødderne $\alpha_1 - c, \cdots, \alpha_n - c$. Vælges specielt $c = -\frac{a_1}{n}$, bliver koefficienten til y^{n-1} lig med 0. Dette er ensbetydende med, at rødderne i ligningen $G(y) = 0$ har summen 0. Substitutionen

$x = y - \frac{a_1}{n}$ er ensbetydende med en parallelforskydning af koordinatsystemet, hvorved det nye begyndelspunkt $y = 0$ bliver punktet $x = -\frac{a_1}{n} = \frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}$, altså tyngdepunktet for rødderne i ligningen $F(x) = 0$.

Andengradsligningen. For ligningen

$$F(x) = x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

giver substitutionen $x = y - \frac{a_1}{2}$ ligningen

$G(y) = y^2 - (\frac{a_1^2}{4} - a_2) = 0$ med rødderne $\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$ og $-\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$, hvor efter den ovenfor givne vedtægt $\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$ står for en bestemt af rødderne og $-\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$ altså for den anden. Rødderne i ligningen $F(x) = 0$ er derfor

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}\right\} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} \quad .$$

Ligningen $x^2 + a_1x + a_2 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ en ensbetydende med ligningsparret

$$\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 = -a_1\\ \alpha_1\alpha_2 = a_2\end{cases} \quad .$$

[Formlen til løsning af andengradsligningen hører til den ældste matematik, der findes, idet den i princippet var kendt af babylonerne.]

Trediegradsligningen. Løsningen skyldes S. del Ferro (1515) og N. Tartaglia (1535) og blev offentliggjort af H. Cardano (Ars magna, 1545).

For ligningen

$$F(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

giver substitutionen $x = y - \frac{a_1}{3}$ ligningen

$$G(y) = y^3 + py + q = 0 ,$$

hvor p og q let udregnes. Hvis ligningen $G(y) = 0$ har rødderne $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, har ligningen $F(x) = 0$ rødderne $\alpha_1 = -\frac{a_1}{3} + \beta_1$, $\alpha_2 = -\frac{a_1}{3} + \beta_2$, $\alpha_3 = -\frac{a_1}{3} + \beta_3$. Det er følgelig tilstrækkeligt at betragte ligningen $G(y) = 0$. Vi har $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$. Vi antager i det følgende, at $p \neq 0$ og $q \neq 0$, idet bestemmelsen af rødderne ellers er triviel.

Sættes $y = u + v$, antager ligningen formen

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 .$$

Nu kan vi for ethvert y vælge u og v således, at

$$y = u + v$$
$$-\frac{p}{3} = uv \quad .$$

Dette ligningspar betyder blot, at u og v er rødderne i andengradsligningen $z^2 - yz - \frac{p}{3} = 0$. Når $uv = -\frac{p}{3}$, antager den fundne ligning formen $u^3 + v^3 = -q$. Heraf ses, at et tal y er rod i ligningen $y^3 + py + q = 0$, hvis og kun hvis det har formen $y = u + v$, hvor u og

v tilfredsstiller ligningsparret

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases} .$$

To tal u og v, der tilfredsstiller dette ligningspar, vil også tilfredsstille ligningsparret

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases} ,$$

d.v.s. u^3 og v^3 vil være rødderne i andengradsligningen $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$. Vi må altså have

$$\left.\begin{matrix} u^3 \\ v^3 \end{matrix}\right\} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} , \quad \text{eller} \quad \left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} .$$

Her skal efter vor vedtægt $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ stå for den ene af de to kvadratrødder og $-\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ altså for den anden. Da u og v kan bytte roller, ligger der ingen indskrænkning i at knytte u^3 til plustegnet og v^3 til minustegnet. Da $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \neq 0$, er de fundne værdier $\neq 0$.

For u bliver der altså tre mulige værdier, nemlig, hvis u_0 er en af værdierne af kubikroden, tallene u_0, εu_0, $\varepsilon^2 u_0$, hvor $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ og $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ er de fra 1 forskellige tredie enhedsrødder. Tilsvarende bliver der for v tre mulige værdier, nemlig, hvis v_0 er en af værdierne af kubikroden, tallene v_0, εv_0, $\varepsilon^2 v_0$. Af de ni

kombinationer kan vi benytte dem (og kun dem), for hvilke $uv = -\frac{p}{3}$. For hver af kombinationerne er $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$, altså uv et af tallene $-\frac{p}{3}$, $\varepsilon(-\frac{p}{3})$, $\varepsilon^2(-\frac{p}{3})$.

Hvis u_0 og v_0 er valgt således, at $u_0v_0 = -\frac{p}{3}$, vil de andre brugbare kombinationer være εu_0 , $\varepsilon^2 v_0$ og $\varepsilon^2 u_0$, εv_0 . Hvis u_0 og v_0 er valgt således, at $u_0v_0 = \varepsilon(-\frac{p}{3})$, omdøber vi $\varepsilon^2 u_0$ til u_0 , og har da atter $u_0v_0 = -\frac{p}{3}$, og hvis $u_0v_0 = \varepsilon^2(-\frac{p}{3})$, omdøber vi εu_0 til u_0 , og har da atter $u_0v_0 = -\frac{p}{3}$. Der bliver altså tre brugbare kombinationer, og vi finder tre tal

$$y_1 = u_0 + v_0 \quad , \quad y_2 = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 v_0 \quad , \quad y_3 = \varepsilon^2 u_0 + \varepsilon v_0 \ .$$

Ifølge det foranstående må enhver rod i ligningen $y^3 + py + q = 0$ være et af disse tal, og ethvert af disse tal må være rod i ligningen. De tre tal y_1 , y_2 , y_3 er nu faktisk de tre rødder i ligningen (evt. multiple rødder er fundet så ofte som multipliciteten angiver). Dette er indlysende, hvis tallene er parvis forskellige eller sammenfaldende. I det tilfælde, hvor to af dem er forskellige og det tredie er lig med et af disse, følger det af, at summen af de tre tal er 0 (idet $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$) , og at røddernes sum også er 0 . Hermed er vist:

<u>Rødderne i ligningen</u> $y^3 + py + q = 0$ <u>er de tre tal, der bestemmes ved formlen</u>

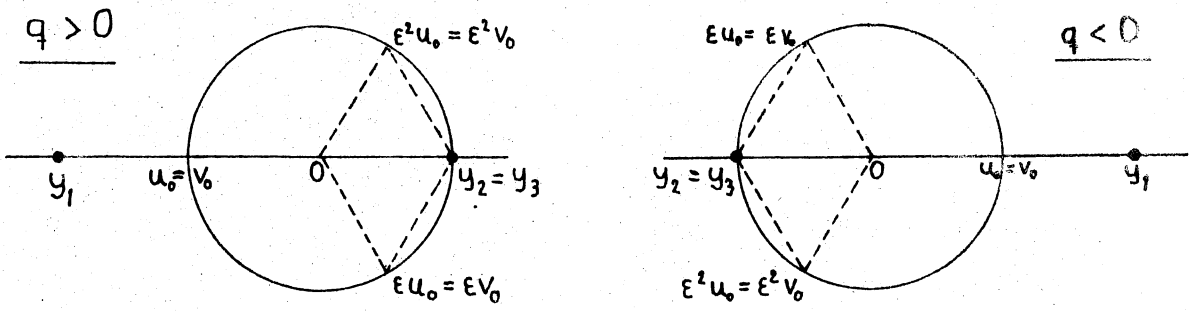
$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ ,$$

når de to kubikrødder vælges således, at deres produkt er $-\frac{p}{3}$.

Løsningsformlen kaldes ofte Cardanos formel.

Diskussion i tilfælde af reelle p og q . Når p er reel, er de brugbare kombinationer af kubikrødderne i Cardanos formel simpelthen dem, for hvilke produktet er reelt. Vi skelner mellem tre tilfælde.

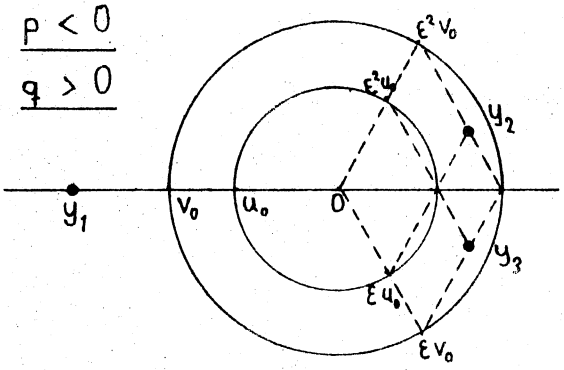
1) $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$. Da må gælde $p < 0$. Som u_0 og v_0 kan vi benytte den reelle værdi af $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, og vi finder enkeltroden $y_1 = u_0 + v_0 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ og dobbeltroden $y_2 = y_3 = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 v_0 = \varepsilon^2 u_0 + \varepsilon v_0 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$.

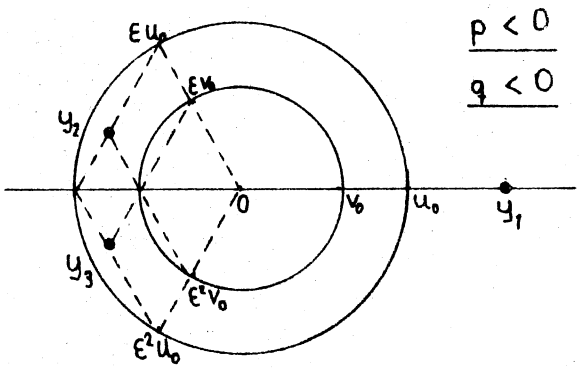


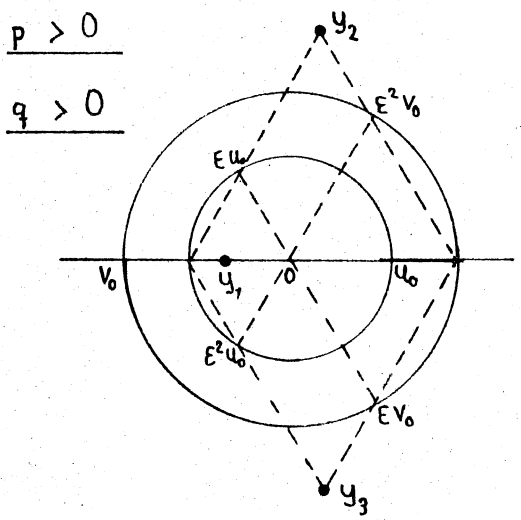
2) $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. Tallene $-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ er her reelle, og som u_0 og v_0 kan vi benytte de reelle værdier af $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ og $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. Idet $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ står for den positive værdi af kvadratroden, er $u_0 > v_0$.

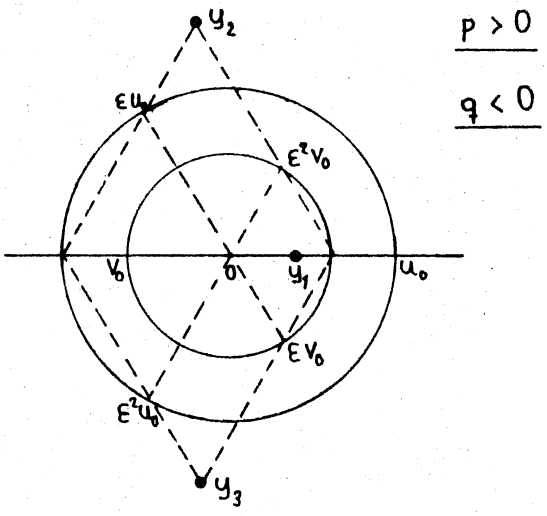
Vi finder den ene reelle rod $y_1 = u_0 + v_0$ og de to konjugerede imaginære rødder

$$\left.\begin{matrix} y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \varepsilon u_0 & + \varepsilon^2 v_0 \\ \varepsilon^2 u_0 & + \varepsilon v_0 \end{matrix}\right\} = -\frac{u_0+v_0}{2} \pm i\sqrt{3}\,\frac{u_0-v_0}{2} \quad .$$









3) $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$. Da må gælde $p < 0$. Tallene $-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ er her konjugerede imaginære og skrives $-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$, hvor $\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$ står for den positive værdi af kvadratroden. Den numeriske værdi af tallene er

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 \quad ,$$

hvor $\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$ og $\sqrt{-\frac{p}{3}}$ står for de positive værdier af kvadratrødderne. Idet vi med φ betegner den vinkel i intervallet $]0,\pi[$, for hvilken $\cos\varphi = \dfrac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$, har vi altså

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 (\cos\varphi \pm i \sin\varphi) ,$$

Som u_0 og v_0 kan vi benytte

$$\left.\begin{matrix} u_0 \\ v_0 \end{matrix}\right\} = \sqrt{-\frac{p}{3}} \ (\cos\frac{\varphi}{3} \pm i \sin\frac{\varphi}{3}) \ .$$

Da er

$$\left.\begin{matrix} \varepsilon u_0 \\ \varepsilon^2 v_0 \end{matrix}\right\} = \sqrt{-\frac{p}{3}} \ (\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} \pm i \sin\frac{\varphi+2\pi}{3})$$

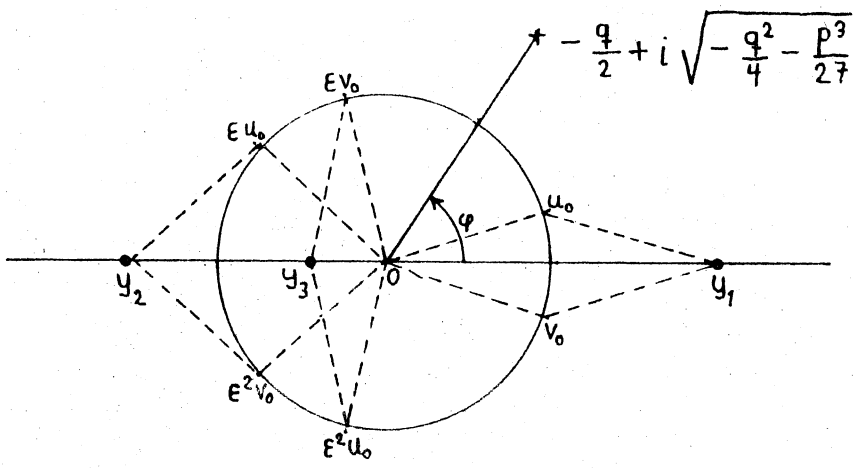
og

$$\left.\begin{matrix} \varepsilon^2 u_0 \\ \varepsilon v_0 \end{matrix}\right\} = \sqrt{-\frac{p}{3}} \ (\cos\frac{\varphi+4\pi}{3} \pm i \sin\frac{\varphi+4\pi}{3}) \ ,$$

og vi finder de tre reelle rødder

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{\varphi}{3} \ , \ y_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{\varphi+2\pi}{3} \ , \ y_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{\varphi+4\pi}{3} \ .$$

Man ser, at Cardanos formel giver rødderne som summen af komplekse tal, hvad man dengang ikke beherskede; derfor benævnelsen casus irreducibilis i dette tilfælde. Den trigonometriske form af løsningen blev fundet af F. Viète [Vieta] (1591) ud fra formlen $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.



Fjerdegradsligningen. Løsningen skyldes L. Ferrari og blev offentliggjort af Cardano (i Ars magna).

På ligningen

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

anvendes substitutionen $x = y - \frac{a_1}{4}$. Herved fås en ligning

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 .$$

Tilfældet $q = 0$ er trivielt. Vi antager derfor $q \neq 0$. Ligningen skrives

$$(y^2 + t)^2 - [(2t - p)y^2 - qy + t^2 - r] = 0 .$$

Nu kan t vælges således, at $[\cdots]$ får formen $(ay + b)^2$. Hertil kræves, at

$$R(t) = 4(2t - p)(t^2 - r) - q^2 = 0 .$$

For enhver rod t i denne trediegradsligning har vi $2t - p \neq 0$ (da $q \neq 0$), og vi får

$$[\cdots] = (ay + b)^2 \quad \text{med} \quad a = \sqrt{2t-p} \quad , \quad b = -\frac{q}{2a} .$$

Den oprindelige ligning kan da skrives

$$(y^2 + ay + (t + b))(y^2 - ay + (t - b)) = 0 ,$$

og rødderne findes som rødderne i de to andengradspolynomier.

Tilfældet, hvor koefficienterne er reelle. I dette tilfælde kan man benytte en reel værdi $t > \frac{p}{2}$. Thi $R(t)$ har da reelle koefficienter, og da $R(\frac{p}{2}) = -q^2 < 0$ og $R(t) \to +\infty$ for $t \to +\infty$, må der findes en rod i intervallet $]\frac{p}{2}, +\infty[$. Følgelig bliver $a = \sqrt{2t-p}$ reel og dermed også $b = -\frac{q}{2a}$ reel. De to andengradspolynomier får således reelle koefficienter.

Ifølge det foranstående kan rødderne i ligninger af grad ≤ 4 bestemmes ud fra koefficienterne ved formler, i hvilke kun indgår de elementære regneoperationer og roduddragning. Som vist af N.H. Abel (1826) gælder det tilsvarende ikke for ligninger af grad ≥ 5 .

Opgaver. 1. Find rødderne i ligningen $y^3 + 3y - 4 = 0$ ved Cardanos formel og på anden måde.

2. Find rødderne i ligningen $y^3 - 2y + 1 = 0$ ved Cardanos formel og på anden måde.

3. Idet $y^3 + py + q = (y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)$, skal man udtrykke størrelsen $D = (y_1-y_2)^2(y_1-y_3)^2(y_2-y_3)^2$ ved p og q .

4. Udtryk $x^3 + \frac{1}{x^3}$ og $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ved hjælp af $z = x + \frac{1}{x}$. Find herved ud fra ligningen

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

ved division med x^3 den ligning

$$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0 \quad ,$$

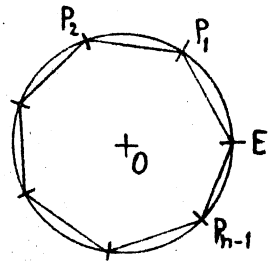
hvis rødder er $2 \cos \frac{2\pi}{7}$, $2 \cos \frac{4\pi}{7}$, $2 \cos \frac{6\pi}{7}$, og bestem rødderne ved hælp af Cardanos formel.

5. Find rødderne i ligningen

$$y^4 - 27y^2 - 14y + 120 = 0 \quad .$$

§11. Konstruktion af den regulære 17-kant.

Opgaven at konstruere den regulære n-kant vil vi præcisere således: Der er givet to punkter 0 og E i planen og et helt tal $n \geq 3$. Man skal (om muligt) med passer og lineal konstruere de øvrige vinkelspidser $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ i den i cirklen med centrum 0 og radius 0E indskrevne regulære n-kant, hvis ene vinkelspids er E.



I Euklids elementer findes konstruktionen af den regulære n-kant for $n = 3, 4, 5, 15$ og dermed (ved hjælp af vinkelhalvering) for ethvert n, der fås af disse ved multiplikation med en potens af 2. Det var vel almindeligt antaget, at konstruktionen i andre tilfælde ikke var mulig, og det vakte derfor opsigt, da C.F. Gauss (1796) viste, at man kan konstruere den regulære 17-kant. I Disquisitiones arithmeticae (1801) udviklede han sin metode.

Gauss' sætning. Den regulære n-kant kan konstrueres, hvis og kun hvis primtalopløsningen for n har formen

$$n = 2^r p_1 p_2 \cdots p_s ,$$

hvor $p_1, p_2, \cdots, p_s$ er parvis forskellige ulige primtal af formen $2^{2^h} + 1$.

Gauss beviste tilstrækkeligheden af betingelsen og angav uden bevis, at den også er nødvendig.

Tallene $F_h = 2^{2^h} + 1$ kaldes Fermat tal. For $h = 0, 1, 2, 3, 4$ får man $F_h = 3, 5, 17, 257, 65537$, der alle er primtal. Fermat formodede, at F_h er et primtal for ethvert h, men Euler viste, at $F_5 = 4294967297$ er sammensat, idet det er deleligt med 641. Man kender ikke andre Fermat primtal end de anførte. Derimod vides F_h at være sammensat for $5 \leq h \leq 16$ og for en lang række af større værdier af h.

Specielt følger af Gauss' sætning, at den regulære 9-kant ikke kan konstrueres, hvoraf følger, at vinklens tredeling med passer og lineal ikke er mulig (idet man ellers ud fra den regulære 3-kant kunne konstruere den regulære 9-kant).

Vi indskrænker os her til en omtale af konstruktionen af den regulære 17-kant.

Vælges O og E som 0 og 1 i den komplekse plan, er vinkelspidserne i den tilsvarende regulære n-kant rødderne i ligningen $x^n - 1 = 0$. Gauss' metode består i et studium af disse ligninger og er et af de første bidrag til den systematiske teori for ligninger af grad ≥ 5. Konstruktionen af den regulære 17-kant opnås på basis af en bestemmelse af rødderne i ligningen $x^{17} - 1 = 0$ ved udtryk, i hvilke kun indgår de elementære regneoperationer og kvadratrodsuddragning. Foruden 1 har ligningen $x^{17} - 1 = 0$

rødderne

$$\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4\ \varepsilon_5\ \varepsilon_6\ \varepsilon_7\ \varepsilon_8\ \varepsilon_9\ \varepsilon_{10}\ \varepsilon_{11}\ \varepsilon_{12}\ \varepsilon_{13}\ \varepsilon_{14}\ \varepsilon_{15}\ \varepsilon_{16}\ ,$$

hvor

$$\varepsilon_\nu = \cos \nu u + i \sin \nu u, \quad u = \frac{2\pi}{17} .$$

Bestemmelsen af disse tal beror nu på, at hvis man ordner dem i rækkefølgen

$$\varepsilon_1\ \varepsilon_3\ \varepsilon_9\ \varepsilon_{10}\ \varepsilon_{13}\ \varepsilon_5\ \varepsilon_{15}\ \varepsilon_{11}\ \varepsilon_{16}\ \varepsilon_{14}\ \varepsilon_8\ \varepsilon_7\ \varepsilon_4\ \varepsilon_{12}\ \varepsilon_2\ \varepsilon_6$$

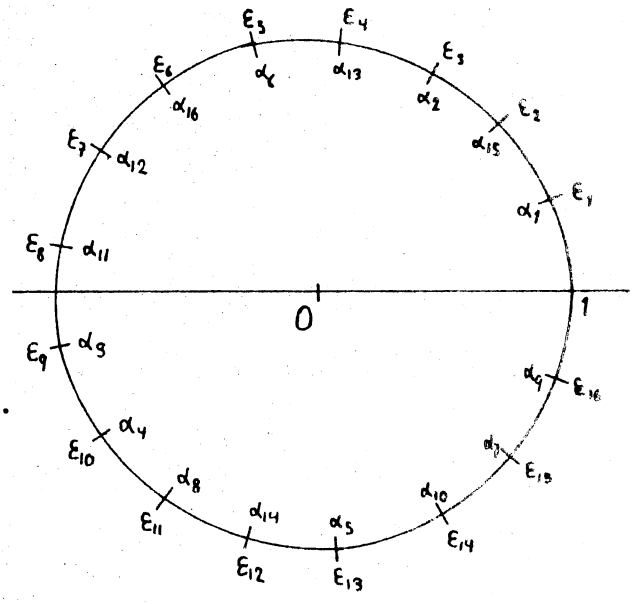
og svarende til denne rækkefølge benævner dem

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7\ \alpha_8\ \alpha_9\ \alpha_{10}\ \alpha_{11}\ \alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{14}\ \alpha_{15}\ \alpha_{16}\ ,$$

gælder

$$\alpha_1^3 = \alpha_2\ ,\ \alpha_2^3 = \alpha_3\ ,\cdots,\ \alpha_{14}^3 = \alpha_{15}\ ,\ \alpha_{15}^3 = \alpha_{16}\ ,\ \alpha_{16}^3 = \alpha_1\ .$$

I den cykliske orden, hvor α_2 er efterfølger for α_1, α_3 efterfølger for α_2 ,$\cdots$, α_{16} efterfølger for α_{15}, og α_1 er efterfølger for α_{16}, gælder altså, at hver rod er tredie potens af sin forgænger.



[At de 16 fra 1 forskellige rødder i ligningen $x^{17} - 1 = 0$ kan ordnes efter dette princip er ingen tilfældighed; for ethvert primtal p kan de $p - 1$ fra 1 forskellige rødder i ligningen $x^p - 1 = 0$ ordnes på tilsvarende måde .] Vi bemærker, at

α_1 og α_9 er konjugerede, ligeså α_2 og α_{10} ,···, α_8 og α_{16} . Man ser, at

$\alpha_1+\alpha_9 = 2\cos u$ $\alpha_2+\alpha_{10} = 2\cos 3u$ $\alpha_3+\alpha_{11} = 2\cos 8u$ $\alpha_4+\alpha_{12} = 2\cos 7u$
$\alpha_5+\alpha_{13} = 2\cos 4u$ $\alpha_6+\alpha_{14} = 2\cos 5u$ $\alpha_7+\alpha_{15} = 2\cos 2u$ $\alpha_8+\alpha_{16} = 2\cos 6u$.

Vi bemærker endelig, at da rødderne i $x^{17} - 1 = 0$ har summen 0 , gælder

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{16} = -1 .$$

Vi spalter nu summen $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{16}$ i de to summer

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11} + \alpha_{13} + \alpha_{15} =$$
$$2\cos u + 2\cos 8u + 2\cos 4u + 2\cos 2u$$

$$\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12} + \alpha_{14} + \alpha_{16} =$$
$$2\cos 3u + 2\cos 7u + 2\cos 5u + 2\cos 6u .$$

En grov vurdering viser, at $\beta_1 > \beta_2$. Vi har

$$\beta_1 + \beta_2 = -1$$

og vil nu også beregne $\beta_1\beta_2$. Det gør vi ved at beregne

$$\begin{aligned} 2\beta_1\beta_2 = {} & \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \cdots + \alpha_{15}\alpha_{16} + \alpha_{16}\alpha_1 \\ & + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_6 + \cdots + \alpha_{15}\alpha_2 + \alpha_{16}\alpha_3 \\ & + \alpha_1\alpha_6 + \alpha_2\alpha_7 + \alpha_3\alpha_8 + \cdots + \alpha_{15}\alpha_4 + \alpha_{16}\alpha_5 \\ & + \cdots \\ & + \alpha_1\alpha_{16} + \alpha_2\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2 + \cdots + \alpha_{15}\alpha_{14} + \alpha_{16}\alpha_{15} . \end{aligned}$$

Vi har fundet $2\beta_1\beta_2$ ved at multiplicere hvert led i β_1 med alle led i β_2 og hvert led i β_2 med alle led i β_1. Dette giver 128 produkter, der er opstillet således: I første søjle har vi skrevet produkterne af α_1 og leddene i β_2 begyndende med α_2 og følgende ordenen af leddene i β_2. I anden søjle har vi skrevet produkterne af α_2 og leddene i β_1 begyndende med α_3 og følgende ordenen af leddene i β_1, så at vi efter α_{15} ender med α_1. I tredie søjle har vi skrevet produkterne af α_3 og leddene i β_2 begyndende med α_4 og følgende ordenen af leddene i β_2, så at vi efter α_{16} ender med α_2, etc. På denne måde er opnået, at leddene i anden søjle er tredie-potenserne af leddene i første søjle, idet i hver række de to faktorer i anden søjle er efterfølgerne i den cykliske orden for de to faktorer i første søjle. På tilsvarende måde er leddene i tredie søjle trediepotenserne af leddene i anden søjle, etc. Dette medfører, at vi kan beregne summen af de 128 led uden faktisk at udregne leddene. Thi hvert produkt $\alpha_i\alpha_j$, der optræder i $2\beta_1\beta_2$, er selv et α_k [idet jo de eneste produkter $\alpha_i\alpha_j$, for hvilke dette ikke gælder, er dem, for hvilke de to indices har differens 8, og sådanne produkter ikke forekommer i $2\beta_1\beta_2$]. Hvis nu en række begynder f.eks. med α_{13} [dette er tilfældet for den første række], må andet led i rækken være α_{14}, etc., så at leddene i rækken er α_{13}, α_{14}, α_{15}, α_{16}, α_1, α_2, $\cdots$, α_{12}. I hver række er summen af leddene derfor -1. Vi har derfor $2\beta_1\beta_2 = -8$ og følgelig

$$\beta_1\beta_2 = -4.$$

Tallene β_1 og β_2 er derfor rødderne i polynomiet $x^2 + x - 4$, og da $\beta_1 > \beta_2$ finder vi

$$\left.\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + 4} \ .$$

Vi spalter nu β_1 i

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{13} = 2\cos u + 2\cos 4u$$
$$\gamma_3 = \alpha_3 + \alpha_7 + \alpha_{11} + \alpha_{15} = 2\cos 8u + 2\cos 2u \ .$$

Da er $\gamma_1 > \gamma_3$ og $\gamma_1 + \gamma_3 = \beta_1$. Vi ønsker at beregne $\gamma_1\gamma_3$. Idet vi går frem som foran, finder vi

$$\begin{aligned} 2\gamma_1\gamma_3 = {} & \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_5 + \cdots + \alpha_{15}\alpha_1 \\ & + \alpha_1\alpha_7 + \alpha_3\alpha_9 + \cdots + \alpha_{15}\alpha_5 \\ & + \alpha_1\alpha_{11} + \alpha_3\alpha_{13} + \cdots + \alpha_{15}\alpha_9 \\ & + \alpha_1\alpha_{15} + \alpha_3\alpha_1 + \cdots + \alpha_{15}\alpha_{13} \ . \end{aligned}$$

Her er i hver række hvert led niendepotensen af sin forgænger, og hvert af de optrædende produkter $\alpha_i\alpha_j$ er selv et α_k. Hvis nu en række begynder f.eks. med α_4 [dette er tilfældet for første række], må rækken bestå af α_4, α_6, α_8, α_{10}, α_{12}, α_{14}, α_{16}, α_2, og dens sum må være β_2. Man ser, at for hver række er leddenes sum enten β_1 eller β_2. Følgelig kan $\gamma_1\gamma_3$ udtrykkes ved hjælp af de allerede beregnede tal β_1 og β_2. Ved at udregne de første led i de fire rækker finder man, at første og fjerde række giver summen β_2 og anden og tredie række summen β_1. Vi finder

derfor $2\gamma_1\gamma_3 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = -2$. Altså er $\gamma_1\gamma_3 = -1$. Tallene γ_1 og γ_3 er derfor rødderne i polynomiet $x^2 - \beta_1 x - 1$, og da $\gamma_1 > \gamma_3$ har vi

$$\left.\begin{matrix}\gamma_1\\ \gamma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\beta_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^2 + 1}$$

På tilsvarende måde spalter vi β_2 i

$$\gamma_2 = \alpha_2 + \alpha_6 + \alpha_{10} + \alpha_{14} = 2\cos 3u + 2\cos 5u$$

$$\gamma_4 = \alpha_4 + \alpha_8 + \alpha_{12} + \alpha_{16} = 2\cos 7u + 2\cos 6u.$$

Da er $\gamma_2 > \gamma_4$ og $\gamma_2 + \gamma_4 = \beta_2$. Vi finder

$$\begin{aligned} 2\gamma_2\gamma_4 = {} & \alpha_2\alpha_4 + \alpha_4\alpha_6 + \cdots + \alpha_{16}\alpha_2 \\ & + \alpha_2\alpha_8 + \alpha_4\alpha_{10} + \cdots + \alpha_{16}\alpha_6 \\ & + \alpha_2\alpha_{12} + \alpha_4\alpha_{14} + \cdots + \alpha_{16}\alpha_{10} \\ & + \alpha_2\alpha_{16} + \alpha_4\alpha_2 + \cdots + \alpha_{16}\alpha_{14}\ , \end{aligned}$$

og ved at udregne de første led i de fire rækker finder man, at første og fjerde række giver summen β_1 og anden og tredie række summen β_2. Altså er $2\gamma_2\gamma_4 = 2\beta_2 + 2\beta_2 = -2$ og $\gamma_2\gamma_4 = -1$, så at γ_2 og γ_4 er rødderne i polynomiet $x^2 - \beta_2 x - 1$. Da $\gamma_2 > \gamma_4$ fås

$$\left.\begin{matrix}\gamma_2\\ \gamma_4\end{matrix}\right\} = \frac{\beta_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{2}\right)^2 + 1}\ .$$

Således kan vi fortsætte, og vi ser, at processen må ende med, at vi finder udtryk for alle rødderne $\alpha_1 , \alpha_2 , \cdots , \alpha_{16}$, på basis af hvilke disse kan konstrueres.

For at nå til en konstruktion af 17-kanten er det dog ikke nødvendigt at gennemføre beregningen af alle rødderne. Det er tilstrækkeligt at vi nu spalter γ_1 i

$$\delta_1 = \alpha_1 + \alpha_9 = 2 \cos u$$
$$\delta_5 = \alpha_5 + \alpha_{13} = 2 \cos 4u .$$

Da er $\delta_1 + \delta_5 = \gamma_1$, og vi finder

$$\delta_1\delta_5 = \alpha_1\alpha_5 + \alpha_5\alpha_9 + \alpha_9\alpha_{13} + \alpha_{13}\alpha_1 = \alpha_{10} + \alpha_{14} + \alpha_2 + \alpha_6 = \gamma_2 .$$

Altså er δ_1 og δ_5 rødderne i polynomiet $x^2 - \gamma_1 x + \gamma_2$, og de $\delta_1 > \delta_5$ finder vi

$$\left.\begin{matrix}\delta_1 \\ \delta_5\end{matrix}\right\} = \frac{\gamma_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^2 - \gamma_2} .$$

På grundlag af værdien for $\delta_1 = 2 \cos u = 2 \cos \frac{2\pi}{17}$ kan man konstruere $\alpha_1 = \varepsilon_1$ og dermed 17-kanten. Til selve konstruktionen benytter vi følgende formler, der blot er en let omskrivning af de ovenfor fundne

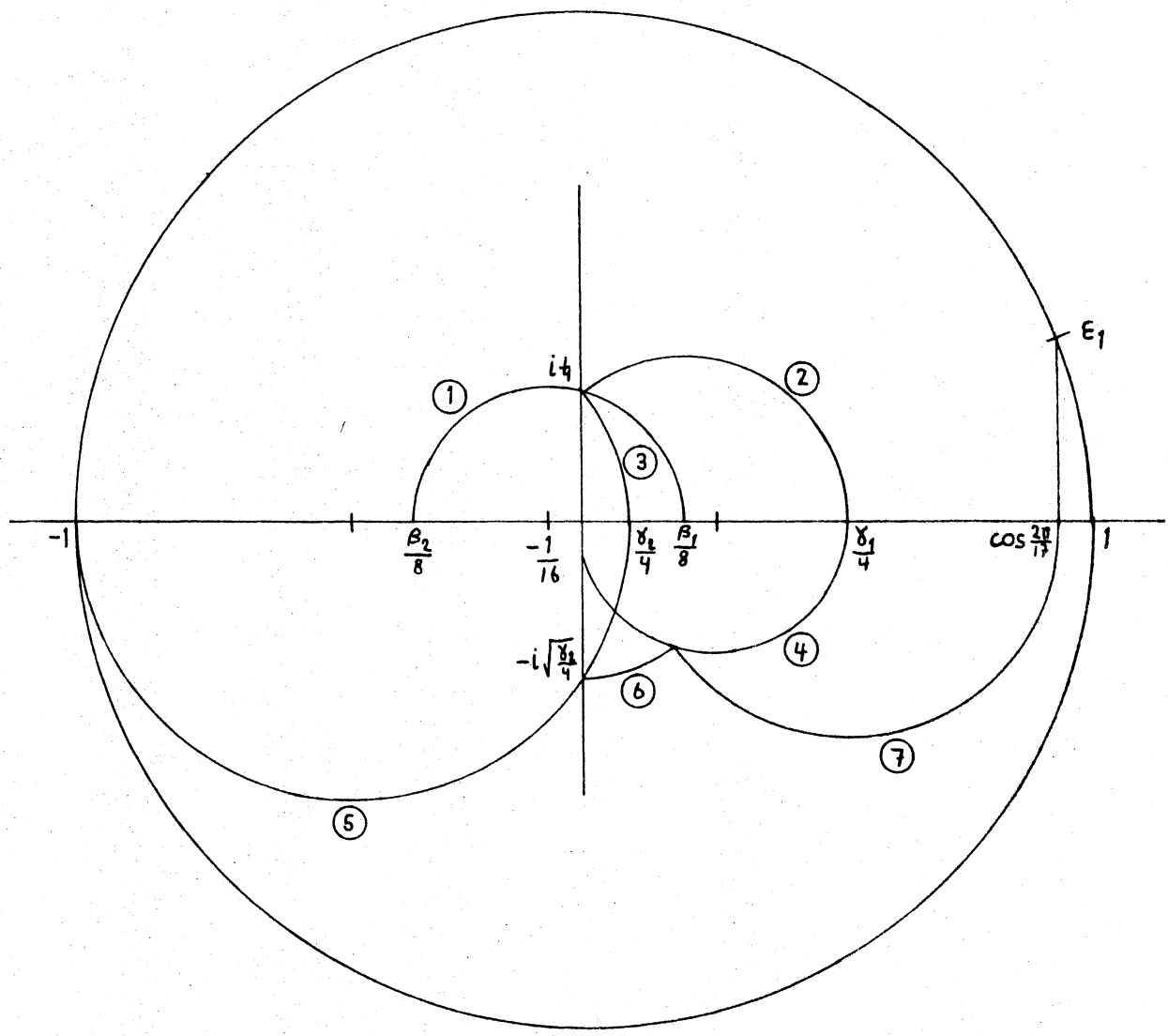
$$\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{\gamma_1}{4} + \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{4}\right)^2 - \frac{\gamma_2}{4}} ,$$

hvor

$$\frac{\gamma_1}{4} = \frac{\beta_1}{8} + \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} , \quad \frac{\gamma_2}{4} = \frac{\beta_2}{8} + \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} ,$$

hvor

$$\frac{\beta_1}{8} = -\frac{1}{16} + \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}\ ,\quad \frac{\beta_2}{8} = -\frac{1}{16} - \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}\ .$$



Ud fra ovenstående formler finder man formlen

$$\cos\frac{2\pi}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

$$+ \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\ .$$

Opgave. Behandl ligningen $x^5 - 1 = 0$ efter ovenstående metode.

§12. Rationale funktioner.

Rationale funktioner over $\mathbb{C}$. Med $\mathbb{C}(x)$ betegner vi mængden af funktioner af en kompleks variabel x af formen

$$x \mapsto f(x) = \frac{F(x)}{G(x)} \quad ,$$

hvor F og G er polynomier med komplekse koefficienter, altså tilhører $\mathbb{C}[x]$, og G er egentligt og normeret, og $F(x)$ og $G(x)$ ikke begge er 0 for noget x. Sådanne funktioner kaldes rationale funktioner. Man ser, at polynomierne fremkommer for $G = 1$. Hvis derimod G har grad ≥ 1, er f kun defineret pånær i den endelige mængde, der udgøres af rødderne for G; det er åbenbart en kontinuert funktion på denne mængde. Hvis α er rod i G, gælder $|f(x)| \to +\infty$ for $x \to \alpha$. Polynomierne kaldes hele rationale funktioner, medens rationale funktioner, der ikke er polynomier, kaldes brudne rationale funktioner.

En rational funktion f har kun een fremstilling af den angivne form, d.v.s. hvis parrene F, G og F_1, G_1 opfylder de angivne betingelser og bestemmer samme funktion f, er $F = F_1$ og $G = G_1$. Thi for ethvert x i definitionsmængden for f må gælde $F(x)\,G_1(x) = F_1(x)\,G(x)$, og denne ligning gælder følgelig for alle x. Enhver rod i G må så (da den ikke er rod i F) være rod i G_1 med mindst samme multiplicitet, og omvendt må enhver rod i G_1 (da den ikke er rod i F_1) være rod i G med mindst samme multiplicitet. Da G og G_1 er normerede, følger heraf $G = G_1$, og dermed $F = F_1$.

Hvis to rationale funktioner $f = \frac{F}{G}$ og $f_1 = \frac{F_1}{G_1}$ stemmer overens i værdi for uendelig mange værdier af x (tilhørende fællesmængden af deres definitionsmængder), er f og f_1 den samme funktion. Thi for de pågældende x må gælde $F(x)G_1(x) = F_1(x)G(x)$. Dette må så ifølge identitetssætningen gælde for alle x, og vi slutter som før, at $G = G_1$ og $F = F_1$.

Vi vil også tillade os for et vilkårligt par af polynomier P og Q i $\mathbb{C}[x]$, hvor Q er egentligt, at tale om den rationale funktion

$$x \mapsto f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} .$$

Vi mener hermed den funktion, der bestemmes ved den ved forkortning dannede brøk af den foran beskrevne art.

Denne vedtægt får betydning, idet vi definerer sum og produkt af to rationale funktioner

$$f_1 = \frac{F_1}{G_1} \qquad \text{og} \qquad f_2 = \frac{F_2}{G_2}$$

ved

$$f_1 + f_2 = \frac{F_1G_2 + F_2G_1}{G_1G_2} \quad \text{og} \quad f_1f_2 = \frac{F_1F_2}{G_1G_2} .$$

Med disse kompositioner er $\mathbb{C}(x)$, som man let efterviser, et legeme. Nulelement og etelement er funktionerne 0 og 1.

Ved en stambrøk i $\mathbb{C}(x)$ forstås en rational funktion af formen

$$\frac{d}{(x-\alpha)^{\nu}} \quad , \quad \text{hvor} \quad d,\alpha \in \mathbb{C} \quad \text{og} \quad \nu \in \mathbb{N} \ .$$

Hovedsætning. Enhver rational funktion $f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ i $\mathbb{C}(x)$ med nævner $G(x) = (x-\alpha_1)^{\nu_1} \cdots (x-\alpha_r)^{\nu_r}$, hvor $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ er parvis forskellige, kan på en og kun een måde skrives på formen

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_q x^q + \sum_{\rho=1}^{r} \left(\frac{d_{\rho 1}}{x-\alpha_\rho} + \frac{d_{\rho 2}}{(x-\alpha_\rho)^2} + \cdots + \frac{d_{\rho \nu_\rho}}{(x-\alpha_\rho)^{\nu_\rho}} \right) ,$$

d.v.s. som sum af et polynomium og stambrøker med nævnerne $x-\alpha_\rho$, $(x-\alpha_\rho)^2$, $\cdots$, $(x-\alpha_\rho)^{\nu_\rho}$, hvor $\rho = 1, \cdots, r$.

Denne fremstilling kaldes dekompositionen af f.

Bevis. (1) Fremstillingens eksistens. For $G = 1$ er sagen triviel. Vi antager nu, at graden af G er ≥ 1. Vi sætter $G_1(x) = (x-\alpha_2)^{\nu_2} \cdots (x-\alpha_r)^{\nu_r}$ og subtraherer fra f stambrøken

$$\frac{d}{(x-\alpha_1)^{\nu_1}} \quad , \quad \text{hvor} \quad d = \frac{F(\alpha_1)}{G_1(\alpha_1)} \ .$$

Resten bliver

$$f(x) - \frac{d}{(x-\alpha_1)^{\nu_1}} = \frac{F(x) - \dfrac{F(\alpha_1)}{G_1(\alpha_1)} G_1(x)}{G(x)} = \frac{F_1(x)}{G(x)} \ .$$

Her er $F_1(\alpha_1) = 0$. Altså kan $F_1(x)$ skrives på formen $F_1(x) = (x - \alpha_1)\, F_2(x)$, hvorefter $x - \alpha_1$ kan bortforkortes. Herved fås en brøk med nævneren $(x - \alpha_1)^{\nu_1 - 1}(x - \alpha_2)^{\nu_2} \cdots (x - \alpha_r)^{\nu_r}$. Denne behandles på samme måde. Efter ν_1 skridt er vi nået til en brøk med nævneren $(x - \alpha_2)^{\nu_2} \cdots (x - \alpha_r)^{\nu_r}$, der behandles på samme måde. Efter ialt $\nu_1 + \cdots + \nu_r$ skridt har vi en rest med nævner 1, altså et polynomium.

(2) Fremstillingens entydighed. Hvis f er skrevet på den angivne form må gælde

$$\frac{F(x)}{G_1(x)} = f(x)(x - \alpha_1)^{\nu_1} = d_{1\nu_1} + g(x) \quad ,$$

hvor g er en rational funktion, for hvilken $g(\alpha_1) = 0$. Der må altså gælde

$$d_{1\nu_1} = \frac{F(\alpha_1)}{G_1(\alpha_1)} \quad ,$$

d.v.s. leddet $\dfrac{d_{1\nu_1}}{(x-\alpha_1)^{\nu_1}}$ er netop det ovenfor i første skridt subtraherede led $\dfrac{d}{(x-\alpha_1)^{\nu_1}}$. Det i andet skridt subtraherede led må da på tilsvarende måde være $\dfrac{d_{1\nu_1-1}}{(x-\alpha_1)^{\nu_1-1}}$,

og således videre, indtil vi når til restpolynomiet. ∎

Ved den praktiske udførelse af dekompositionen står man sig i reglen ved at fraskille flere led ad gangen,

nemlig i hvert skridt et for hvert af de tilbageværende nulpunkter i nævneren.

Ved multiplikation af dekompositionsformlen med $G(x)$ finder man $F(x) = H(x)G(x) + R(x)$, hvor $H(x)$ er polynomiet $c_0 + c_1x + \cdots + c_qx^q$ og $R(x)$ er et polynomium af lavere grad end $G(x)$ (evt. nulpolynomiet). Ved division af F med G kan man altså straks finde H, hvorefter det kun drejer sig om at dekomponere $\frac{R(x)}{G(x)}$, hvor R er den principale rest ved divisionen.

Eksempel. For at dekomponere $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{x^4+2}{x^3-x^2-x+1}$ bemærker vi, at $G(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$ har dobbeltroden $\alpha_1 = 1$ og enkeltroden $\alpha_2 = -1$; disse er ikke rødder i $F(x) = x^4 + 2$. For $x = 1$ er $\frac{F(x)}{x+1} = \frac{3}{2}$, og for $x = -1$ er $\frac{F(x)}{(x-1)^2} = \frac{3}{4}$. Vi fraskiller derfor $\frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^2}$ og $\frac{\frac{3}{4}}{x+1}$.

Herved fås resten

$$\frac{x^4+2}{x^3-x^2-x+1} - \frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}}{x+1} = \frac{x^4+2-\frac{3}{2}(x+1)-\frac{3}{4}(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{x^4-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x^2+\frac{1}{4}}{x-1} = x + 1 + \frac{\frac{5}{4}}{x-1} .$$

Altså er

$$\frac{x^4+2}{x^3-x^2-x+1} = 1 + x + \frac{\frac{5}{4}}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{x+1} .$$

Pol. Principal del. Nævnerens nulpunkter $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, altså de punkter, hvori den rationale funktion $f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ ikke er defineret, kaldes poler for f, og det til polen α_ρ hørende bidrag

$$(*) \qquad \frac{d_{\rho 1}}{x-\alpha_\rho} + \frac{d_{\rho 2}}{(x-\alpha_\rho)^2} + \cdots + \frac{d_{\rho \nu_\rho}}{(x-\alpha_\rho)^{\nu_\rho}}$$

til dekompositionsudtrykket kaldes den principale del af f hørende til polen α_ρ. Man bemærker, at hvis man fra f subtraherer den principale del hørende til polen α_ρ, fremkommer en rational funktion, som er defineret også i α_ρ. Derimod ser man let, at hvis man fra f subtraherer en hvilkensomhelst anden sum af formen

$$(\S) \qquad \frac{d_1}{x-\alpha_\rho} + \frac{d_2}{(x-\alpha_\rho)^2} + \cdots + \frac{d_\mu}{(x-\alpha_\rho)^\mu},$$

fås en rational funktion med en pol i α_ρ. Man udtrykker dette ved at sige, at polen α_ρ for f hæves ved subtraktion af den til α_ρ hørende principale del (*), men ikke ved subtraktion af nogen anden sum af formen (§).

Man bemærker, at hvis polynomiet $c_0 + c_1 x + \cdots + c_q x^q$ er en konstant, gælder $f(x) \to c_0$ for $|x| \to +\infty$, og omvendt.

Rationale funktioner over $\mathbb{R}$. Med $\mathbb{R}(x)$ betegner vi mængden af rationale funktioner

$$x \longmapsto f(x) = \frac{F(x)}{G(x)},$$

hvor F og G tilhører $\mathbb{R}[x]$, og iøvrigt opfylder de ovenfor angivne betingelser. Man ser, at $\mathbb{R}(x)$ er et delegeme af $\mathbb{C}(x)$.

For en rational funktion i $\mathbb{R}(x)$ fås af dekompositionsformlen ved konjugering, at der for reelle x i definitionsmængden må gælde

$$f(x) = \overline{c}_o + \overline{c}_1 x + \cdots + \overline{c}_q x^q + \sum_{\rho=1}^{r}\left(\frac{\overline{d}_{\rho 1}}{x-\overline{\alpha}_\rho} + \frac{\overline{d}_{\rho 2}}{(x-\overline{\alpha}_\rho)^2} + \cdots + \frac{\overline{d}_{\rho \nu_\rho}}{(x-\overline{\alpha}_\rho)^{\nu_\rho}}\right).$$

Ifølge sætningen om, at to rationale funktioner, der stemmer overens i værdi for uendelig mange værdier af x, er den samme funktion, må denne formel gælde for alle x i definitionsmængden. Af dekompositionens entydighed fremgår da, at koefficienterne $c_o, c_1, \cdots, c_q$ må være reelle, ligeså tællerne $d_{\rho 1}, d_{\rho 2}, \cdots, d_{\rho \nu_\rho}$ i alle stambrøker hørende til reelle rødder α_ρ i $G(x)$, medens bidraget fra et par af konjugerede imaginære rødder $\xi+i\eta$ og $\xi-i\eta$ af multiplicitet μ vil have formen

$$\frac{d_1}{x-(\xi+i\eta)} + \cdots + \frac{d_\mu}{(x-(\xi+i\eta))^\mu} + \frac{\overline{d}_1}{x-(\xi-i\eta)} + \cdots + \frac{\overline{d}_\mu}{(x-(\xi-i\eta))^\mu}.$$

Ved forlængning af brøkerne til brøker med den fælles nævner $[(x-(\xi+i\eta))(x-(\xi-i\eta))]^\mu = (x^2+ax+b)^\mu$ omskrives dette bidrag til

$$(\#) \qquad \frac{T(x)}{(x^2+ax+b)^\mu},$$

hvor polynomiet $T(x)$ åbenbart har reelle værdier for reelle x og altså tilhører $\mathbb{R}[x]$. Man ser, at dets grad er $< 2\mu$. Vi vil vise, at bidraget $(\#)$ kan skrives på formen

$$(\Delta) \qquad \frac{k_1x+l_1}{x^2+ax+b} + \frac{k_2x+l_2}{(x^2+ax+b)^2} + \cdots + \frac{k_\mu x+l_\mu}{(x^2+ax+b)^\mu},$$

hvor tællerne tilhører $\mathbb{R}[x]$. Hertil dividerer vi $T(x)$ med x^2+ax+b og betegner resten (som vil være af grad ≤ 1) med $kx+l$. Vi har da

$$\frac{T(x)}{(x^2 + ax + b)^{\mu}} - \frac{kx + l}{(x^2 + ax + b)^{\mu}} = \frac{T(x) - (kx+l)}{(x^2 + ax + b)^{\mu}},$$

hvor den sidste brøk kan forkortes med $x^2 + ax + b$. Med den forkortede brøk gås frem på samme måde, og i $\mu - 1$ skridt får vi den ønskede omskrivning. Man bemærker, at omskrivningen af (#) til (Δ) kun er mulig på en måde. Thi hvis (#) har fremstillingen (Δ), ses ved multiplikation med $(x^2 + ax + b)^{\mu}$, at $T(x)$ ved division med $x^2 + ax + b$ må give resten $k_{\mu}x + l_{\mu}$, d.v.s. det sidste led i (Δ) er netop det led, vi subtraherede i første skridt. Det i andet skridt subtraherede led må på tilsvarende måde være det næstsidste led i (Δ), og således videre.

Vi har hermed vist:

Hovedsætning: Enhver rational funktion $f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ i $\mathbb{R}(x)$ med nævner $G(x) = (x - \alpha_1)^{\nu_1} \cdots (x - \alpha_s)^{\nu_s} \cdot (x^2 + a_1x + b_1)^{\mu_1} \cdots (x^2 + a_tx + b_t)^{\mu_t}$, hvor førstegradspolynomierne hører til de forskellige reelle rødder i $G(x)$ og andengradspolynomierne til de forskellige par af konjugerede imaginære rødder i $G(x)$, kan på en og kun een måde skrives på formen

$$f(x) = c_o + c_1 x + \cdots + c_q x^q + \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{d_{\sigma 1}}{x-\alpha_\sigma} + \frac{d_{\sigma 2}}{(x-\alpha_\sigma)^2} + \cdots + \frac{d_{\sigma \nu_\sigma}}{(x-\alpha_\sigma)^{\nu_\sigma}} \right)$$
$$+ \sum_{\tau=1}^{t} \left(\frac{k_{\tau 1}x + l_{\tau 1}}{x^2 + a_\tau x + b_\tau} + \frac{k_{\tau 2}x + l_{\tau 2}}{(x^2 + a_\tau x + b_\tau)^2} + \cdots + \frac{k_{\tau \mu_\tau}x + l_{\tau \mu_\tau}}{(x^2 + a_\tau x + b_\tau)^{\mu_\tau}} \right),$$

hvor alle de optrædende koefficienter er reelle.

Denne fremstilling kaldes dekompositionen af f i $\mathbb{R}(x)$. Som stambrøker i $\mathbb{R}(x)$ betegnes brøker af de to former

$$\frac{d}{(x-\alpha)^{\nu}} \quad \text{og} \quad \frac{kx+l}{(x^2+ax+b)^{\mu}}.$$

Ved den praktiske udførelse af dekompositionen står man sig i reglen ved at udnytte kendskabet til udtrykkets form.

Eksempel. For at dekomponere $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{3x}{x^3-1}$ bemærker vi, at $G(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, hvor x^2+x+1 har imaginære rødder. Da $F(x)$ er af lavere grad end $G(x)$, må vi have

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{d}{x-1} + \frac{kx+l}{x^2+x+1}.$$

Multiplikation med x^3-1 giver

$$3x = d(x^2+x+1) + (kx+l)(x-1).$$

Sættes $x = 1$, fås $d = 1$, og dermed

$$-(x-1)^2 = (kx+l)(x-1),$$

hvoraf $k = -1$, $l = 1$. Vi har altså

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

Rationale funktioner af flere variable. Med $\mathbb{C}(x_1,\cdots,x_k)$ betegner vi mængden af funktioner af k komplekse variable $x_1,\cdots,x_k$ af formen

$$(x_1,\cdots,x_k) \mapsto f(x_1,\cdots,x_k) = \frac{F(x_1,\cdots,x_k)}{G(x_1,\cdots,x_k)},$$

hvor F og G er polynomier i $x_1,\cdots,x_k$ med komplekse koefficienter, altså tilhører $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_k]$, og G er egentligt, og F og G ikke har andre fælles divisorer end konstanter $a \neq 0$, d.v.s. hvis $F = F_1D$ og $G = G_1D$, hvor F_1,G_1,D tilhører $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_k]$, er D konstant. Sådanne funktioner kaldes rationale funktioner i $x_1,\cdots,x_k$. Man ser, at polynomierne fremkommer for G = konstant. Hvis derimod G har grad ≥ 1, er f kun defineret på mængden $\{(x_1,\cdots,x_k) | G(x_1,\cdots,x_k) \neq 0\}$; det er åbenbart en kontinuert funktion på denne mængde. Polynomierne kaldes hele rationale funktioner, medens rationale funktioner, der ikke er polynomier, kaldes brudne rationale funktioner.

Man tillader sig også for et vilkårligt par af polynomier P og Q i $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_k]$, hvor Q er egentligt, at tale om den rationale funktion

$$(x_1,\cdots,x_k) \longmapsto f(x_1,\cdots,x_k) = \frac{P(x_1,\cdots,x_k)}{Q(x_1,\cdots,x_k)}.$$

Man kan vise, at brøken $\frac{P}{Q}$ på en og (bortset fra division af tæller og nævner med samme konstant $a \neq 0$) kun på een måde kan forkortes til en brøk $\frac{F}{G}$ af den foran beskrevne art, og med $f = \frac{P}{Q}$ menes naturligvis funktionen $\frac{F}{G}$.

Med de selvfølgelige definitioner af sum og produkt er $\mathbb{C}(x_1,\cdots,x_k)$ et legeme. Som dellegeme har det mængden $\mathbb{R}(x_1,\cdots,x_k)$ af rationale funktioner, der bestemmes ved brøker, i hvilke tæller og nævner har reelle koefficienter, altså tilhører $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_k]$.

Opgaver. 1. Dekomponer følgende funktioner i $\mathbb{C}(x)$:

(a) $\dfrac{x - i}{(x + i)^2}$ (b) $\dfrac{1}{x^2 + 1}$ (c) $\dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$

(d) $\dfrac{x^3-4x+9}{x^2(x-1)(x+2)}$ (e) $\dfrac{1}{x^4 - 1}$ (f) $\dfrac{1}{x^3(1 - x)}$.

2. Dekomponer følgende funktioner i $\mathbb{R}(x)$:

(a) $\dfrac{1}{x^4 - 1}$ (b) $\dfrac{1}{x^6 - 1}$ (c) $\dfrac{1}{x^8 + 1}$

(d) $\dfrac{1}{x^2(x^2-1)(x^2+1)}$ (e) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2(x^2+2)^2}$ (f) $\dfrac{2x^3}{x^4 + 4}$.

3. Dekomponer $\dfrac{5x^4 - 12x^3 + 94x^2 - 156x + 369}{(x - 1)(x^2 + 9)^2}$

såvel i $\mathbb{C}(x)$ som i $\mathbb{R}(x)$.

§ 13. Integral af funktioner af en reel variabel.

Integral af en kontinuert funktion. Lad $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ være en kompleks, kontinuert funktion på et begrænset, afsluttet interval $[a,b]$. Vi betragter en inddeling af $[a,b]$ ved delepunkter $x_1, \cdots, x_{k-1}$, hvor $a < x_1 < \cdots < x_{k-1} < b$, og sætter $x_o = a$, $x_k = b$. Ved delintervallerne forstår vi de afsluttede intervaller $[x_{j-1}, x_j]$, $j \in \{1, \cdots, k\}$. I hvert delinterval $[x_{j-1}, x_j]$ vælges et punkt ξ_j. Summen

$$S = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

kaldes den til den betragtede inddeling og de valgte punkter $\xi_1, \cdots, \xi_k$ svarende middelsum for f. Da f er kontinuert, er værdimængden for f begrænset. Sættes $\sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\} = K$, gælder for enhver middelsum, at

$$|S| \leq \sum_{j=1}^{k} |f(\xi_j)|(x_j - x_{j-1}) \leq K \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1}) = K(b-a).$$

Mængden af alle middelsummer for f er altså begrænset.

For ethvert $\delta \in \mathbb{R}_+$ betegner vi med $M(f,\delta)$ mængden af middelsummer for f dannet ud fra inddelinger, for hvilke længden af ethvert af delintervallerne er $\leq \delta$. Man ser umiddelbart, at der for $0 < \eta < \delta$ gælder $M(f,\eta) \subseteq M(f,\delta)$.

For enhver kontinuert funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ konvergerer diameteren af mængden $M(f,\delta)$ mod 0 for $\delta \to 0$.

Dette kommer ud på et med følgende:

(✱) $\quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \operatorname{diam} M(f,\delta) \leq \varepsilon.$

Bevis. Beviset beror på den uniforme kontinuitet.

Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet, og vælg $\delta \in \mathbb{R}_+$ således, at $|f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ for alle par af punkter $x', x'' \in [a,b]$ med $|x' - x''| \leq 2\delta$. Vi påstår, at der gælder $\operatorname{diam} M(f,\delta) \leq \varepsilon$, altså at der for vilkårlige $S', S'' \in M(f,\delta)$ gælder $|S' - S''| \leq \varepsilon$.

For at vise dette betegner vi med $x_1, \cdots, x_{k-1}$ samtlige delepunkter, der optræder i de to delinger, ud fra hvilke S' og S'' er dannet, og vi sætter $x_0 = a$, $x_k = b$. Hvert delinterval i den første deling er da af formen $[x_{p-1}, x_q]$, og det tilsvarende bidrag til S' har formen

$$f(\xi)(x_q - x_{p-1}),$$

hvor ξ er et vist punkt i $[x_{p-1}, x_q]$. Idet vi for $j \in \{p, \cdots, q\}$ sætter $\xi'_j = \xi$, kan bidraget også skrives

$$f(\xi'_p)(x_p - x_{p-1}) + \cdots + f(\xi'_q)(x_q - x_{q-1}).$$

På samme måde går vi frem mod S''. Herved får vi S' og S'' skrevet på formen

$$S' = \sum_{j=1}^{k} f(\xi'_j)(x_j - x_{j-1}), \qquad S'' = \sum_{j=1}^{k} f(\xi''_j)(x_j - x_{j-1}),$$

hvor for hvert $j \in \{1, \cdots, k\}$ punkterne ξ'_j og ξ''_j ikke behøver at ligge i intervallet $[x_{j-1}, x_j]$, men i hvert fald hver for sig ligger i et interval af længde $\leq \delta$, der indeholder $[x_{j-1}, x_j]$. Dette medfører, at der for hvert

$j \in \{1,\cdots,k\}$ gælder $|\xi_j' - \xi_j''| \leq 2\delta$, og følgelig $|f(\xi_j') - f(\xi_j'')| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. Altså gælder

$$|S' - S''| = \left|\sum_{j=1}^{k}(f(\xi_j') - f(\xi_j''))(x_j - x_{j-1})\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k}|f(\xi_j') - f(\xi_j'')|(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^{k}(x_j - x_{j-1}) = \varepsilon. \square$$

For enhver kontinuert funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ findes et og kun eet tal $I \in \mathbb{C}$ med følgende egenskab: For ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$ således, at

(§) $$M(f,\delta) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z - I| \leq \varepsilon\}.$$

Dette tal I kaldes integralet af f og betegnes

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Bevis. (1) At der højst findes eet tal I med den anførte egenskab, er evident.

(2) For at finde et tal I med den anførte egenskab vælger vi for hvert $n \in \mathbb{N}$ et $S_n \in M(f,\frac{1}{n})$. For et vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vælges $\delta \in \mathbb{R}_+$ i henhold til (※). For $n,m \geq \frac{1}{\delta}$ gælder da $|S_n - S_m| \leq \varepsilon$. Talfølgen $(S_n \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N})$ er altså en fundamentalfølge. Den er derfor konvergent. Dens grænseværdi betegnes I.

Lad nu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet og lad $\delta \in \mathbb{R}_+$ være valgt i henhold til (※). For ethvert $S \in M(f,\delta)$ og ethvert $n \geq \frac{1}{\delta}$ gælder da $|S - S_n| \leq \varepsilon$. Idet $|S - S_n| \to |S - I|$ for $n \to \infty$, følger heraf $|S - I| \leq \varepsilon$. Altså gælder (§). $\square$

Af det ovenstående fremgår:

Hvis $(\delta_n \in \mathbb{R}_+ \mid n \in \mathbb{N})$ er en talfølge, der konvergerer mod 0, og $S_n \in M(f,\delta_n)$, da konvergerer talfølgen $(S_n \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N})$ mod integralet; der gælder altså

$$S_n \to \int_a^b f(x)dx \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

For en konstant funktion $f(x) = c$ på $[a,b]$ er enhver middelsum lig med $c(b-a)$, og der gælder derfor

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

Eksempel. Kun i sjældne tilfælde har man anledning til at benytte en følge af middelsummer til beregning af et integral. Differentialregningen giver som regel en simplere metode. Vi vil dog ved et eksempel vise, hvordan et integral kan beregnes ved brug af middelsummer.

Vi betragter den ved $f(x) = x^2$ bestemte funktion på intervallet $[0,1]$. Vi deler $[0,1]$ ved punkterne $\frac{1}{k},\frac{2}{k},\ldots,\frac{k-1}{k}$ og benytter i hvert delinterval $\left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right]$ det højre endepunkt. Den tilsvarende middelsum er

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{j}{k}\right)^2 \frac{1}{k} = \frac{1}{k^3} \sum_{j=1}^{k} j^2$$

$$= \frac{1}{k^3}\left(\frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k^2},$$

idet man ved induktion let viser, at $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k$. Idet $S_k \in M(f,\frac{1}{k})$, slutter vi, at S_k for $k \to \infty$ konvergerer mod integralet. Af udtrykket for S_k ses, at $S_k \to \frac{1}{3}$ for $k \to \infty$. Der gælder altså

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Lad $A \subseteq \mathbb{R}$ være et vilkårligt begrænset eller ubegrænset interval af enhver af de mulige typer, og lad $f : A \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion på A. For ethvert begrænset, afsluttet delinterval $[a,b]$ af A vil vi da ved $\int_a^b f(x)dx$ forstå integralet af restriktionen $f|_{[a,b]}$ af f til $[a,b]$. Det er hensigtsmæssigt også at definere $\int_a^b f(x)dx$, når a og b er punkter af A, der ikke opfylder betingelsen $a < b$. Det sker, idet vi sætter

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad \text{når} \quad a > b,$$

$$\text{og} \quad \int_a^b f(x)dx = 0, \quad \text{når} \quad a = b.$$

Hermed er således $\int_a^b f(x)dx$ defineret for vilkårlige $a,b \in A$. Man kalder $\int_a^b f(x)dx$ integralet af f fra a til b.

For enhver kontinuert funktion $f : A \to \mathbb{C}$ gælder for vilkårlige $a,b,c \in A$ indskudsreglen

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Bevis. Når $a < b < c$, fremgår reglen af, at hvis $S_n \in M\left(f|_{[a,b]}, \frac{1}{n}\right)$ og $T_n \in M\left(f|_{[b,c]}, \frac{1}{n}\right)$, gælder $S_n + T_n \in M\left(f|_{[a,c]}, \frac{1}{n}\right)$. Af gyldigheden for $a < b < c$ følger let reglens almene gyldighed. □

Sætninger om integralet. I det følgende betragter vi komplekse, kontinuerte funktioner på et givet begrænset, afsluttet interval $[a,b]$. Mængden $C^0([a,b])$ af sådanne udgør et vektorrum over $\mathbb{C}$, som med f også indeholder $|f|$, Re f og Im f.

Der gælder følgende regneregler:

For ethvert $f \in C^0([a,b])$ og ethvert $\lambda \in \mathbb{C}$ gælder

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

For vilkårlige $f,g \in C^0([a,b])$ gælder

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Man udtrykker disse regler kort ved at sige, at den ved

$$f \mapsto \int_a^b f(x)dx$$

bestemte afbildning af $C^0([a,b])$ ind i $\mathbb{C}$ er en lineær afbildning.

Bevis. Reglerne fremgår af, at hvis $S_n \in M\left(f,\frac{1}{n}\right)$, gælder $\lambda S_n \in M\left(\lambda f,\frac{1}{n}\right)$, og hvis $U_n \in M\left(f+g,\frac{1}{n}\right)$, gælder $U_n = S_n + T_n$, hvor $S_n \in M\left(f,\frac{1}{n}\right)$ og $T_n \in M\left(g,\frac{1}{n}\right)$. □

Hvis $f \in C^0([a,b])$ er reel, er også $\int_a^b f(x)dx$ reel. For ethvert $f \in C^0([a,b])$ gælder

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)dx + i \int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)dx.$$

Bevis. Det første udsagn følger af, at enhver middelsum for en reel funktion er reel. Det andet udsagn følger af, at afbildningen $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ er lineær. □

Hvis $f \in C^0([a,b])$ er reel, og $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a,b]$, gælder

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0,$$

og der gælder $\int_a^b f(x)dx = 0$, hvis og kun hvis $f(x) = 0$ for alle $x \in [a,b]$.

Bevis. Det første udsagn følger af, at enhver middelsum for f er ≥ 0. Hvad det andet udsagn angår, gælder naturligvis $\int_a^b f(x) = 0$, hvis $f(x) = 0$ for alle $x \in [a,b]$. Hvis $f(x_o) > 0$ for et $x_o \in [a,b]$, findes ifølge kontinuiteten et delinterval $[a',b']$ af $[a,b]$ indeholdende x_o, hvori der gælder $f(x) \geq \frac{1}{2}f(x_o)$. Ved enhver inddeling af $[a,b]$ i intervaller af længde $\leq \frac{1}{3}(b' - a')$ må de af delintervallerne, der tilhører $[a',b']$, tilsammen have en længde $\geq \frac{1}{3}(b' - a')$. For ethvert $S \in M(f,\frac{1}{3}(b' - a'))$ gælder derfor $S \geq \frac{1}{2}f(x_o)\frac{1}{3}(b' - a')$, hvoraf følger, at også integralet af f er $\geq \frac{1}{2}f(x_o)\frac{1}{3}(b' - a')$. ∎.

Hvis $f,g \in C^o([a,b])$ er reelle, og $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in [a,b]$, gælder

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

og der gælder $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$, hvis og kun hvis $f(x) = g(x)$ for alle $x \in [a,b]$.

Bevis. Dette følger af, at $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$. ∎

For ethvert $f \in C^o([a,b])$ gælder

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Bevis. Hvis f er reel, følger dette af, at der gælder $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ for alle $x \in [a,b]$,

hvilket medfører $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$, altså netop den ønskede ulighed.

I alle tilfælde følger uligheden af integralets bestemmelse som grænseværdi for en følge af middelsummer, idet man bemærker, at når $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$ og $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ for $j \in \{1, \cdots, k\}$, gælder for de tilsvarende middelsummer, at

$$\left| \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \leq \sum_{j=1}^{k} |f(\xi_j)|(x_j - x_{j-1}). \blacksquare$$

Integralregningens middelværdisætning. Hvis $f \in C^0([a,b])$ er reel, findes et $\xi \in]a,b[$, så at

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

Bevis. Hvis f er konstant, gælder formlen for ethvert $\xi \in]a,b[$. Hvis f ikke er konstant, er værdimængden $f([a,b])$ et interval $[c,d]$, $(c < d)$. Idet $c \leq f(x) \leq d$ for alle $x \in [a,b]$, men hverken $f(x) = c$ for alle $x \in [a,b]$ eller $f(x) = d$ for alle $x \in [a,b]$, har vi $c(b - a) < \int_a^b f(x)dx < d(b - a)$. Der findes altså et $m \in]c,d[$, så at $\int_a^b f(x)dx = m(b - a)$. Lad $x_1 \in [a,b]$ og $x_2 \in [a,b]$ være valgt således, at $f(x_1) = c$ og $f(x_2) = d$. Da findes et ξ mellem x_1 og x_2, så at $f(\xi) = m$. $\blacksquare$

Sætningen kan ikke umiddelbart anvendes på en ikke reel funktion $f \in C^0([a,b])$. Anvendes den på Re f Im f hver for sig, får man:

Hvis $f \in C^0([a,b])$, findes et $\xi \in]a,b[$ og et $\eta \in]a,b[$, så at

$$\int_a^b f(x)dx = [\text{Re } f(\xi) + i \text{ Im } f(\eta)](b-a).$$

Integralregningens middelværdisætning anvendes ofte i følgende form:

Hvis f er reel og kontinuert på et interval $A \subseteq \mathbb{R}$, og x_o og $x_o + h$ er punkter af A, findes et $\theta \in]0,1[$, så at

$$\int_{x_o}^{x_o+h} f(x)dx = f(x_o+\theta h)h.$$

Bevis. Hvis $h > 0$, er $\int_{x_o}^{x_o+h} f(x)dx = f(\xi)h$ for et $\xi \in]x_o, x_o + h[$. Hvis $h < 0$, er $\int_{x_o}^{x_o+h} f(x)dx = -\int_{x_o+h}^{x_o} f(x)dx = -f(\xi)(-h) = f(\xi)h$ for et $\xi \in]x_o + h, x_o[$. For $h = 0$ er påstanden triviel. □

Hvis $f \in C^o([a,b])$, gælder

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|\,(b - a).$$

Bevis. Idet vi sætter $\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = K$, har vi $|f(x)| \leq K$ for alle $x \in [a,b]$. Altså gælder $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq K(b - a)$. □

Organiseres funktionsrummet $C^o([a,b])$ som et metrisk rum med metriken

$$\operatorname{dist}(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|,$$

følger det af den foranstående vurdering, at afbildningen

$$f \mapsto \int_a^b f(x)dx$$

er en kontinuert afbildning af $(C^o([a,b]), \operatorname{dist})$ ind i $\mathbb{C}$,

idet der for vilkårlige $f,g \in C^0([a,b])$ gælder

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) - g(x))dx\right| \leq \text{dist}(f,g)\,(b-a).$$

Konvergens af en følge af funktioner f_n i $C^0([a,b])$ mod en funktion f i $C^0([a,b])$ i metriken dist er den uniforme konvergens. Vi får derfor:

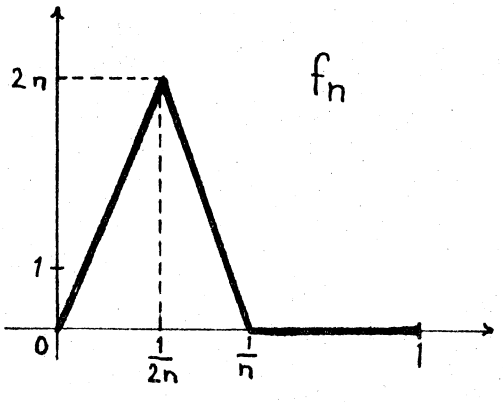
Hvis følgen f_n af kontinuerte, komplekse funktioner på det afsluttede interval $[a,b]$ konvergerer uniformt på $[a,b]$ mod funktionen f [som da ligeledes er kontinuert], gælder

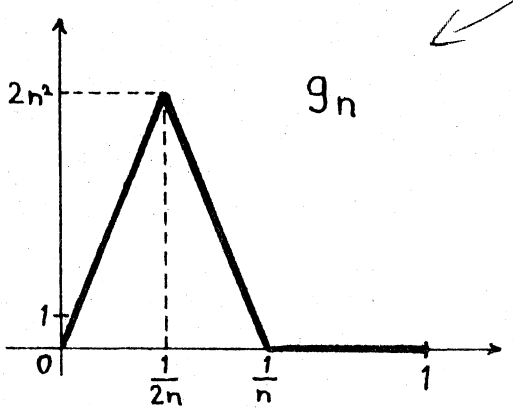
$$\int_a^b f_n(x)dx \longrightarrow \int_a^b f(x)dx \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

Dette resultat kan kort udtrykkes ved ligningen

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Bemærkning. Forudsætningen om, at konvergensen er uniform, er væsentlig. Hvis der blot gælder $f_n \to f$ punktvis, kan man ikke slutte noget om følgen $\int_a^b f_n(x)dx$. Som eksempler kan anføres de skitserede funktionsfølger f_n og g_n på intervallet $[0,1]$:

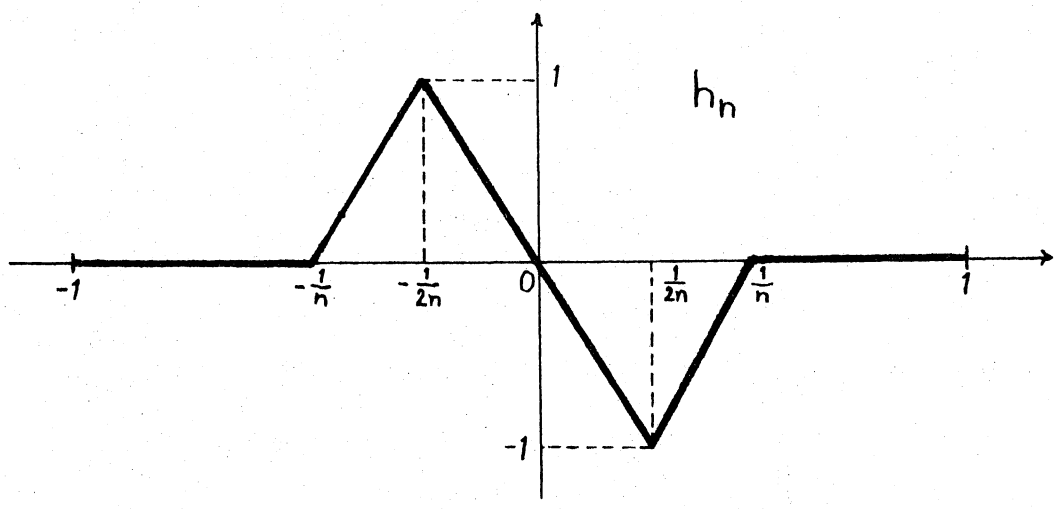




Såvel f_n som g_n konvergerer punktvis mod funktionen 0, men

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \quad \text{og} \quad \int_0^1 g_n(x)dx = n.$$

[Når vi siger, at forudsætningen om, at konvergensen er uniform, er <u>væsentlig</u>, mener vi ikke, at den er <u>nødvendig</u> for gyldigheden af ligningen $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$. Som eksempel kan anføres den skitserede funktionsfølge h_n på intervallet [1-1] :



Følgen konvergerer punktvis, men ikke uniformt, mod funktionen 0, og der gælder $\int_{-1}^1 h_n(x)dx = 0$.]

<u>Stykkevis kontinuerte funktioner</u>. En kompleks funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ på et afsluttet interval $[a,b]$ kaldes <u>stykkevis kontinuert</u>, hvis f er kontinuert i ethvert punkt $x \in [a,b]$ pånær endeligt mange punkter, og hvis f har grænseværdier fra venstre og højre, betegnet $f(x-0)$ og $f(x+0)$, i hvert af diskontinuitetspunkterne. Hvis diskontinuitetspunktet er et af intervalendepunkterne a eller b forlanges

kun grænseværdi henholdsvis fra højre og venstre.

Hvis diskontinuitetspunkterne i $]a,b[$ er $c_1 < \cdots < c_{n-1}$, kan vi, idet vi sætter $c_o = a$, $c_n = b$, for hvert af delintervallerne $[c_{p-1},c_p]$, $p \in \{1,\cdots,n\}$, betragte den funktion på $[c_{p-1},c_p]$, der i $]c_{p-1},c_p[$ stemmer overens med f, og hvis værdier i c_{p-1} og c_p er grænseværdierne af f henholdsvis fra højre og venstre. Denne funktion g_p er kontinuert. Vi definerer integralet af f som summen af integralerne af disse funktioner, altså

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{p=1}^{n} \int_{c_{p-1}}^{c_p} g_p(x)dx.$$

En funktion $f : A \to \mathbb{C}$ på et vilkårligt begrænset eller ubegrænset interval $A \subseteq \mathbb{R}$ af enhver af de mulige typer kaldes stykkevis kontinuert, hvis den i ethvert begrænset, afsluttet delinterval $[a,b]$ af A kun har et endeligt antal diskontinuitetspunkter, og der i hvert diskontinuitetspunkt eksisterer grænseværdier fra venstre og højre, eller anderledes sagt, hvis dens restriktion til ethvert begrænset, afsluttet delinterval $[a,b]$ af A er stykkevis kontinuert.

For en sådan funktion kan vi, nøjagtigt som det ovenfor blev gjort for en kontinuert funktion, for vilkårlige $a,b \in A$ definere integralet af f fra a til b. For vilkårlige $a,b,c \in A$ gælder da ligesom for kontinuerte funktioner indskudsreglen.

For integralet af stykkevis kontinuerte funktioner $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ på et interval $[a,b]$ gælder sætninger ganske svarende til de ovenfor for kontinuerte funktioner beviste sætninger. Kun på enkelte punkter må formuleringen

ændres lidt. For eksempel kan vi om en stykkevis kontinuert, ikke negativ funktion f med integralet 0 ikke slutte, at $f(x) = 0$ for <u>alle</u> $x \in [a,b]$, men kun, at $f(x) = 0$ i ethvert kontinuitetspunkt.

Fortolkningen af integralet af en reel, ikke negativ funktion f på et interval $[a,b]$ som arealet af figuren $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x), \ x \in [a,b]\}$ forudsættes bekendt.

Præciseringen af det klassiske Leibniz'ske integralbegreb i tilfælde af kontinuerte funktioner skyldes A.-L.Cauchy (1823). En udvidelse, ved hvilken flere diskontinuerte funktioner end de stykkevis kontinuerte funktioner tilskrives et integral, blev givet af B. Riemann (1854). I den moderne analyse benytter man et videregående af H. Lebesgue (1902) indført integralbegreb, ved hvilket langt flere diskontinuerte funktioner tilskrives et integral.

Opgaver. 1. Find det polynomium F af grad ≤ 4, for hvilket

$$F(k) = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 \quad \text{for} \quad k \in \{0,1,2,3,4\}$$

(for $k = 0$ skal ligningen læses $F(0) = 0$). Vis, at

$$F(k) = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 \quad \text{for alle} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Find integralet

$$I = \int_0^1 x^3 dx$$

ved at benytte, at

$$I = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{j}{k}\right)^3 \frac{1}{k}$$

2. Lad $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være en ikke negativ, kontinuert funktion, og lad M være dens største værdi. Vis, at

$$\left[\int_a^b f(x)^n dx\right]^{\frac{1}{n}} \longrightarrow M \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

3. Idet $f \in C^0([a,b])$, skal man vise, at

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx,$$

hvis og kun hvis der findes et tal $\alpha \in \mathbb{C}$ med $|\alpha| = 1$, således at $f(x) = \alpha|f(x)|$ for alle $x \in [a,b]$.

Vink. Ad "kun hvis". Når $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$, findes et tal $\alpha \in \mathbb{C}$ med $|\alpha| = 1$, således at $\int_a^b f(x)dx = \alpha\int_a^b |f(x)|dx$, altså $\int_a^b \alpha^{-1} f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$, og følgelig $\int_a^b \mathrm{Re}(\alpha^{-1} f(x))dx = \int_a^b |f(x)|dx$. Heraf kan sluttes,

at $f(x) = \alpha|f(x)|$ for alle $x \in [a,b]$.

4. Vis, at hvis $f,g \in C^0([a,b])$ er reelle, og $g(x) \geq 0$ for alle $x \in [a,b]$, findes et $\xi \in [a,b]$, så at

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

5. Vis følgende: Når det om en funktion $f \in C^0([a,b])$ gælder, at

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

for alle funktioner $g \in C^0([a,b])$, da gælder $f(x) = 0$ for alle $x \in [a,b]$.

§ 14. Differentiable funktioner af en reel variabel.

Differentiable funktioner. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$ være et begrænset eller ubegrænset interval af enhver af de mulige typer. En kompleks funktion $f : A \to \mathbb{C}$ kaldes differentiabel i et punkt $x \in A$, hvis forholdet $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, hvor Δf betegner tilvæksten $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ svarende til et punkt $x+\Delta x \in A$ bestemt ved en tilvækst Δx, har en grænseværdi c for $\Delta x \to 0$ (hvor $\Delta x \neq 0$), altså såfremt

$$\Delta f = c\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x,$$

hvor $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ for $\Delta x \to 0$. Når dette er tilfældet, kaldes $c\Delta x$ differentialet af f i punktet x og betegnes df eller $df(x)$. Den identiske funktion $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved $h(x) = x$ er åbenbart differentiabel i ethvert punkt $x \in \mathbb{R}$, og idet $\Delta h = \Delta x$, har vi $dh = \Delta x$, altså $dx = \Delta x$, således at vi i stedet for $df = c\Delta x$ kan skrive $df = cdx$ eller (når $dx \neq 0$) $\frac{df}{dx} = c$. Tallet c kaldes derfor differentialkvotienten for f i x. Den betegnes også $f'(x)$ eller $Df(x)$ og kaldes også den afledede af f i x. Vi har altså

$$df = f'(x)dx \quad \text{eller} \quad (\text{når } dx \neq 0) \quad f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Idet $\Delta f = \Delta \mathrm{Re}\, f + i\Delta \mathrm{Im}\, f$ ses, at f er differentiabel i punktet x, hvis og kun hvis $\mathrm{Re}f$ og $\mathrm{Im}f$ er differentiable i x, og at der da gælder

$$df = d\,\mathrm{Re}\, f + i\, d\,\mathrm{Im}\, f \text{ eller } f'(x) = (\mathrm{Re}\, f)'(x) + i(\mathrm{Im}\, f)'(x).$$

Det er klart, at hvis f er differentiabel i x, er f

også kontinuert i x. Indskrænker man sig til at betragte positive, resp. negative tilvækster Δx, får man begrebet differentiabilitet fra højre, resp. venstre.

En konstant funktion er åbenbart differentiabel i ethvert punkt med den afledede 0. For en reel funktion $f : A \to \mathbb{R}$ gælder, at hvis f er differentiabel i x og $f'(x) > 0$, findes et $h > 0$, så at $f(y) > f(x)$ for alle $y \in A \cap]x, x + h[$ og $f(y) < f(x)$ for alle $y \in A \cap]x-h, x[$ og hvis f er differentiabel i x og $f'(x) < 0$, findes et $h < 0$, så at $f(y) < f(x)$ for alle $y \in A \cap]x, x + h[$ og $f(y) > f(x)$ for alle $y \in A \cap]x-h, x[$.

En kompleks funktion $f: A \to \mathbb{C}$ kaldes differentiabel i A, hvis den er differentiabel i ethvert punkt af A. Dette medfører, at f tilhører klassen $C^0(A)$ af kontinuerte funktioner på A. For en i A differentiabel funktion f er den afledede f' en funktion på A. Er denne differentiabel i et punkt $x \in A$, kaldes f <u>to gange differentiabel</u> i x, og dens afledede $(f')'(x)$ eller $D(Df)(x)$ i x betegnes $f''(x)$ eller $D^2f(x)$ og kaldes den anden afledede af f i x. Dette er ensbetydende med, at differentialet df, opfattet som funktion af x for en vilkårlig fast værdi af tilvæksten dx, er differentiabel i x. For differentialet $d(df) = d^2f$, dannet med den samme værdi af tilvæksten dx, får vi $d^2f = f''(x)dx^2$, og vi har altså (når $dx \neq 0$) $f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$. Den anden afledede kaldes derfor også den anden differentialkvotient. Funktionen f kaldes to gange differentiabel i A, hvis den er to gange differen-

tiabel i ethvert punkt af A. Da er f' en funktion på A. Idet vi fortsætter således, får vi defineret, hvad det vil sige, at f er n gange differentiabel i et punkt $x \in A$, eller i A, vi få den n^{te} afledede $f^{(n)}(x)$ eller $D^n f(x)$ og det n^{te} differential $d^n f$, og vi har $d_n f = f^{(n)}(x)dx^n$ eller (når $dx \neq 0$) $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$. Den n^{te} afledede kaldes derfor også den n^{te} differentialkvotient. [Bemærk, at dx^n betyder $(dx)^n$, ikke $d(x^n)$.]

Som bekendt er den afledede f' af en differentiabel funktion f ikke nødvendigvis kontinuert. Eksempler på differentiable funktioner med diskontinuert differentialkvotient vil blive omtalt senere. Det er bemærkelsesværdigt (om end uden større praktisk betydning), at en sætning som differentialregningens middelværdisætning gælder for vilkårlige differentiable funktioner. Man må dog konstatere, at klassen af differentiable funktioner er en uinteressant funktionsklasse, ligeledes klassen af n gange differentiable funktioner. I almindelighed indskrænker man sig til at betragte funktioner med kontinuerte afledede. Med $C^n(A)$ betegnes klassen af funktioner $f : A \to \mathbb{C}$, der er n gange differentiable med en kontinuert n^{te} afledet; med $C^\infty(A)$ betegnes klassen af vilkårligt ofte differentiable funktioner $f : A \to \mathbb{C}$. En funktion kaldes en C^n- eller en C^∞-funktion, eller blot C^n eller C^∞, hvis den tilhører den pågældende klasse. Bemærk, at den afledede af en C^n-funktion ($n \geq 1$) er C^{n-1}, og at den afledede af en C^∞-funktion er C^∞.

Fortolkningen af differentialkvotienten f' af en reel funktion f som hældningskoefficient for grafens tangent forudsættes bekendt. Ligeledes, at eksistensen af en lodret tangent til grafen i et punkt x er ensbetydende med at $\frac{|\Delta f|}{|\Delta x|} \to +\infty$ for $\Delta x \to 0$.

Sætninger om differentiable funktioner. Om differentiable funktioner gælder følgende sætninger.

Hvis $f : A \to \mathbb{C}$ er differentiabel, og $\lambda \in \mathbb{C}$, er også funktionen $\lambda f : A \to \mathbb{C}$ differentiabel, og der gælder

$$(\lambda f)' = \lambda f'.$$

Hvis $f : A \to \mathbb{C}$ og $g : A \to \mathbb{C}$ er differentiable, er også funktionerne $f + g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{C}$ (den sidste forudsat at $g(x) \neq 0$ for alle $x \in A$) differentiable, og der gælder

$$(f + g)' = f' + g', \quad (f - g)' = f' - g',$$
$$(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{g} - f\frac{g'}{g^2}$$

Bevis: Sætningen fremgår af, at der for givne punkter x og $x + \Delta x$ i A for funktionstilvæksterne gælder

$$\Delta(\lambda f) = \lambda \Delta f, \quad \Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g, \quad \Delta(f - g) = \Delta f - \Delta g,$$
$$\Delta(fg) = (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x)$$
$$= (\Delta f)\, g(x) + (f(x) + \Delta f)\, \Delta g,$$

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x) + \Delta f}{g(x) + \Delta g} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(\Delta f)g(x) - f(x)\Delta g}{(g(x) + \Delta g)\, g(x)} \quad \square$$

Af sætningen følger let, at hvis funktionerne f og g er C^n, resp. C^∞, er funktionerne $f + g$, $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$ ligeledes C^n, resp. C^∞.

I sætningen er indeholdt, at differentiationen $f \mapsto f' = Df$ er en lineær afbildning af $C^n(A)$ $(n \geq 1)$ ind i $C^{n-1}(A)$, og af $C^\infty(A)$ ind i $C^\infty(A)$.

Af reglen for produktet følger ved induktion, at hvis $f_1, \cdots, f_n : A \to \mathbb{C}$ er differentiable, er produktet $f_1 \cdots f_n : A \to \mathbb{C}$ ligeledes en differentiabel funktion, og der gælder

$$(f_1 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + \cdots + f_1 \cdots f_{n-1} f_n',$$

[hvor der på højre side står de n funktioner, der fås af $f_1 \cdots f_n$ ved at differentiere en af faktorerne]. Vælges for alle faktorerne f_j den identiske funktion, ses at x^n er differentiabel med den afledede

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Altså er også $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ differentiabel på hvert af intervallerne $]-\infty, 0[$ og $]0, +\infty[$ med den afledede $(x^{-n})' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$. Reglen $(x^n)' = nx^{n-1}$ gælder altså for alle $n \in \mathbb{Z}$ (idet højre side for $n = 0$ skal læses som 0 også når $x = 0$).

Hvis $f : B \to \mathbb{C}$ er differentiabel, og $g : A \to B$ er en reel differentiabel funktion med værdier i definitionsintervallet for f, er også funktionen $f \circ g : A \to \mathbb{C}$ differentiabel, og der gælder

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)\, g'.$$

Bevis. Funktionen $f \circ g : A \to \mathbb{C}$ fås ved i $f(u)$ at sætte $u = g(x)$. Til givne punkter x og $x + \Delta x$ i A svarer punkter $u = g(x)$ og $u + \Delta u = g(x + \Delta x)$ i B. For funktionstilvæksten $\Delta(f \circ g)$ fås

$$\Delta(f \circ g) = f(u + \Delta u) - f(u) = f'(u)\Delta u + \varepsilon(\Delta u)\Delta u,$$

hvoraf (for $\Delta x \neq 0$)

$$\frac{\Delta(f \circ g)}{\Delta x} = f'(u)\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta u)\,\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

For $\Delta x \to 0$ gælder $\Delta u \to 0$ og altså $\varepsilon(\Delta u) \to 0$, og vi ser, at

$$\frac{\Delta(f \circ g)}{\Delta x} \to f'(u)g'(x) = (f' \circ g)(x)\, g'(x).\blacksquare$$

Lad $A \subseteq \mathbb{R}$ og $B \subseteq \mathbb{R}$ være intervaller og lad $f : A \to B$ være en monoton, differentiabel funktion på A med værdimængden B, for hvilken $f'(x) \neq 0$ for alle $x \in A$. (Da er f ikke konstant på noget delinterval af A, og afbildningen $f : A \to B$ er altså bijektiv). Den omvendte funktion $f^{-1} : B \to A$ er da ligeledes differentiabel, og der gælder

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

d.v.s., når $y = f(x)$, er

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Bevis: Funktionen f^{-1} er kontinuert. Lad y og $y + \Delta y$ være punkter i B, og sæt $x = f^{-1}(y)$ og $x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y)$. For $\Delta y \to 0$ gælder $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) \to 0$. Når $\Delta y \neq 0$, er $\Delta x \neq 0$. Vi ser, at

$$\frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \to \frac{1}{f'(x)} \quad \text{for} \quad \Delta y \to 0.\blacksquare$$

Differentialregningens middelværdisætning. Hvis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert på det afsluttede interval $[a,b]$ og differentiabel på det åbne interval $]a,b[$, findes et $\xi \in]a,b[$, således at

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Bevis. Vi betragter først det specialtilfælde, hvor $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Det drejer sig da om at vise, at der findes et $\xi \in]a,b[$, for hvilket $f'(\xi) = 0$. Dette følger af, at f, som man let ser, må antage sin største værdi eller sin mindste værdi i et punkt $\xi \in]a,b[$.

I det almene tilfælde følger påstanden ved, at man betragter funktionen $x \mapsto \varphi(x) = f(x) - (\alpha x + \beta)$, hvor $\alpha x + \beta$ er den lineære funktion, der for $x = a$ og $x = b$ har værdierne $f(a)$ og $f(b)$. Funktionen φ falder ind under det allerede behandlede specialtilfælde. Der findes altså et $\xi \in]a,b[$, for hvilket $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \alpha = 0$, d.v.s. $f'(\xi) = \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ∎

Sætningen kan ikke umiddelbart anvendes på en ikke reel funktion f. Anvendes den på $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ hver for sig, får man:

Hvis: $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ er kontinuert på $[a,b]$ og differentiabel på $]a,b[$, findes et $\xi \in]a,b[$ og et $\eta \in]a,b[$, så at,

$$f(b) - f(a) = [\operatorname{Re} f'(\xi) + i \operatorname{Im} f'(\eta)] (b - a).$$

Differentialregningens middelværdisætning anvendes ofte i følgende form [hvor vi har set bort fra den finesse, at

differentiabilitet i endepunkterne ikke er nødvendig]:

Hvis f er reel og differentiabel på et interval $A \subseteq \mathbb{R}$ og x_0 og $x_0 + h$ er punkter af A, findes et $\theta \in]0,1[$, så at

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta h)h.$$

Bevis. Hvis $h > 0$, er $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(\xi)h$ for et $\xi \in]x_0, x_0 + h[$. Hvis $h < 0$, er $f(x_0 + h) - f(x_0) = -[f(x_0) - f(x_0 + h)] = -f'(\xi)(-h) = f'(\xi)h$ for et $\xi \in]x_0 + h, x_0[$. Hvis $h = 0$, er påstanden triviel. ∎

Det er tidligere bemærket, at en konstant funktion $f : A \to \mathbb{C}$ er differentiabel med den afledede $f' = 0$. Af differentialregningens middelværdisætning følger, at omvendt, hvis $f : A \to \mathbb{C}$ er differentiabel med den afledede $f' = 0$, er f konstant.

Af definitionen på den afledede fremgår umiddelbart, at hvis $f : A \to \mathbb{R}$ er monotont voksende og differentiabel, er $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in A$, og hvis $f : A \to \mathbb{R}$ er monotont aftagende og differentiabel, er $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in A$. Af differentialregningens middelværdisætning fremgår, at omvendt, hvis $f : A \to \mathbb{R}$ er differentiabel og $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in A$, er f monotont voksende, og hvis $f : A \to \mathbb{R}$ er differentiabel og $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in A$, er f monotont aftagende. Anderledes sagt

En differentiabel funktion $f : A \to \mathbb{R}$ er monotont voksende, hvis og kun hvis $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in A$, og monotont aftagende, hvis og kun hvis $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in A$.

Stamfunktion. Differential- og integralregningens hovedsætning. En funktion $f : A \to \mathbb{C}$ siges at have funktionen $F : A \to \mathbb{C}$ til stamfunktion, hvis F er differentiabel med den afledede $F' = f$. Hvis F er stamfunktion til f, er enhver funktion $F + k$, hvor k er en konstant, ligeledes en stamfunktion til f, og f har ikke andre stamfunktioner end funktionerne $F + k$. Hvis nemlig $G : A \to \mathbb{C}$ er stamfunktion til f, er funktionen $G - F$ differentiabel med den afledede $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$, og $G - F$ er altså konstant. En stamfunktion til f kaldes også et ubestemt integral af f og betegnes

$$\int f(x)\,dx.$$

Dette symbol betegner altså ikke een funktion, men kan i forskellige forbindelser stå for forskellige funktioner. Et integral $\int_a^b f(x)\,dx$ kaldes et bestemt integral.

Differential- og integralregningens hovedsætning. Enhver kontinuert funktion $f : A \to \mathbb{C}$ har en stamfunktion. Betegner x_0 et punkt i A, er samtlige stamfunktioner bestemt ved formlen

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + k,$$

hvor k er en konstant. For enhver stamfunktion F til f gælder for vilkårlige punkter a og b i A formlen

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Bevis. For et vilkårligt k er den ved den angivne formel bestemte funktion F en stamfunktion til f. Thi for vilkårlige punkter x og $x + \Delta x$ i A finder vi ved brug af indskudsreglen for integraler

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{x_o}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_o}^{x} f(t)dt = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Ifølge integralregningens middelværdisætning findes altså et $\theta \in]0,1[$ og et $\eta \in]0,1[$ (der naturligvis afhænger af x og Δx), så at

$$\Delta F = [\mathrm{Re}f(x+ \theta\Delta x) + i\ \mathrm{Im}f(x+ \eta\Delta x)]\ \Delta x.$$

For $\Delta x \to 0$ gælder $\mathrm{Re}f(x+ \theta\Delta x) + i\ \mathrm{Im}f(x+ \eta\Delta x) \to f(x)$. Følgelig har $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ grænseværdien $f(x)$ for $\Delta x \to 0$ (hvor $\Delta x \neq 0$).

Da samtlige stamfunktioner for f fås af een stamfunktion ved addition af konstanter, har f ikke andre stamfunktioner end funktionerne F. For enhver stamfunktion F må derfor for vilkårlige punkter a og b i A gælde

$$F(b) - F(a) = \int_{x_o}^{b} f(x)dx - \int_{x_o}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx. \blacksquare$$

Undertiden betegner man som differential- og integralregningens hovedsætning blot følgende sætning, der er indeholdt i den forrige:

<u>For enhver funktion</u> $f \in C^1(A)$ <u>gælder for vilkårlige punkter</u> $a,b \in A$ <u>formlen</u>

$$\int_a^b df(x) = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) = [f(x)]_a^b.$$

Som følge af hovedsætningen bliver bestemmelsen af en stamfunktion til en given funktion f, eller ubestemt integration, en fundamental opgave i analysen. Medens differentiation af funktioner givet ved sammensatte udtryk er et håndværk, idet den blot kræver anvendelse af de almene differentiationsregler og kendskab til de afledede af de i udtrykkene indgående elementære funktioner, har man ikke tilsvarende regler til udførelse af enhver integration, og forholdet er endda det, at stamfunktionerne til funktioner

givet ved sammensatte udtryk indeholdende de gængse elementære funktioner ofte ikke kan udtrykkes ved hjælp af disse funktioner. Integration bliver derved en kunst. I sin simpleste form beror opgavens løsning på, at det udtryk, hvorved funktionen f er givet, er kendt som udtrykket for den afledede af en anden funktion. I mere komplicerede tilfælde betjener man sig af forskellige integrationsregler, der fås ved omskrivning af visse af differentiationsreglerne.

Således gælder reglen

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx,$$

som skal læses således: Hvis $f : A \to \mathbb{C}$ har stamfunktionen F, og $\lambda \in \mathbb{C}$, har λf stamfunktionen λF. Endvidere reglerne

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

som skal læses således: Hvis $f : A \to \mathbb{C}$ og $g : A \to \mathbb{C}$ har stamfunktionerne F og G, har $f + g$ stamfunktionen $F + G$, og $f - g$ stamfunktionen $F - G$.

Reglen for differentiation af et produkt giver formlen for delvis integration

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx,$$

som skal læses således: Hvis $f : A \to \mathbb{C}$ og $g : A \to \mathbb{C}$ er differentiable, og fg' har stamfunktionen H, har $f'g$ stamfunktionen $fg - H$. [Udtrykket "delvis integration" forklares ved, at funktionen $f'g$ skrives på formen $f'g = (f'g + fg') - fg'$, hvor den første del $f'g + fg'$ kan integreres.]

Reglen for differentiation af en sammensat funktion giver den <u>første formel for integration ved substitution</u>.

$\int (f \circ g)(x)\, g'(x)dx = (F \circ g)(x)$, hvor $F(u) = \int f(u)du$, som skal læses således: Hvis $f : B \to \mathbb{C}$ har stamfunktionen F, og $g : A \to B$ er differentiabel, har $(f \circ g)g'$ stamfunktionen $F \circ g$. Formlen skrives også således:

$$\int f(g(x))dg(x) = \int f(u)du]_{u = g(x)}.$$

Hvis $g : A \to B$ er strengt monoton, og $g(A) = B$, så at den omvendte funktion $g^{-1} : B \to A$ eksisterer, kan vi sammensætte funktionerne i formlen med funktionen g^{-1}. Herved fås den <u>anden formel for integration ved substitution</u>

$$\int f(u)du = \int f(g(x))dg(x)]_{x = g^{-1}(u)}.$$

<u>Differentiation og uniform konvergens</u>. Herom gælder følgende vigtige sætning:

<u>Hvis en følge af C^1-funktioner $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ opfylder følgende betingelser</u>:

(1) <u>der findes et $x_o \in [a,b]$, for hvilket talfølgen $(f_n(x_o))$ er konvergent</u>,

(2) <u>følgen af afledede f_n' konvergerer uniformt på $[a,b]$ mod en funktion $g : [a,b] \to \mathbb{C}$,</u>

<u>da konvergerer følgen f_n uniformt på $[a,b]$ mod en funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, som ligeledes er en C^1-funktion, og dennes afledede f' er netop funktionen g.</u>

Bevis. Da funktionerne f_n' er C^0-funktioner, er også funktionen g en C^0-funktion. Lad k betegne grænseværdien $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$, og lad $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ være den ved

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt + k$$

bestemte stamfunktion til g. Da er f en C^1-funktion og dens afledede f' er g. Lad nu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet, og lad n_0 være valgt således, at der for $n \geq n_0$ gælder både

$$|f_n(x_0) - k| < \varepsilon$$

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n'(x) - g(x)| < \varepsilon .$$

For $n \geq n_0$ gælder da for ethvert $x \in [a,b]$

$$f_n(x) - f(x) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt + f_n(x_0) - \int_{x_0}^{x} g(t)dt - k$$

$$= \int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - g(t))dt + f_n(x_0) - k,$$

altså

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \left|\int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - g(t))dt\right| + |f_n(x_0) - k|$$

$$< \varepsilon|x - x_0| + \varepsilon \leq \varepsilon(b - a + 1).$$

For $n \geq n_0$ gælder altså

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon(b - a + 1),$$

hvormed er vist, at følgen (f_n) konvergerer uniformt på $[a,b]$ mod f. ∎

Ved anvendelserne vil det i reglen være således, at man på forhånd ved, at følgen (f_n) er uniformt konvergent på $[a,b]$ (og ikke blot at følgen af funktionsværdier $f_n(x_0)$ i et bestemt punkt $x_0 \in [a,b]$ er konvergent). Vi formulerer derfor særskilt følgende svagere form

af sætningen:

Hvis en følge af C^1-funktioner $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ konvergerer uniformt på $[a,b]$, og følgen af afledede $f_n' : [a,b] \to \mathbb{C}$ ligeledes konvergerer uniformt på $[a,b]$, da er grænsefunktionen $\lim f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ en C^1-funktion og dens afledede er grænsefunktionen $\lim(f_n') : [a,b] \to \mathbb{C}$. Der gælder altså formlen

$$(\lim f_n)' = \lim(f_n').$$

Kort udtrykt: Under de gjorte antagelser er differentiation og grænseovergang ombyttelige operationer.

Bemærkning. Hvis man i stedet for uniform konvergens af følgen af afledede blot forlanger punktvis konvergens, fås en falsk sætning.

Integral som funktion af en parameter. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$ og $B \subseteq \mathbb{R}$ være intervaller. I $\mathbb{R}^2$, hvis punkter vi vil betegne (x,t), betragter vi mængden $A \times B$. Er $f : A \times B \to \mathbb{C}$ en funktion på $A \times B$, vil $f(x,t)$ for fast $t \in B$ være en funktion af x (d.v.s en funktion på A) og for fast $x \in A$ være en funktion af t (d.v.s. en funktion på B).

Hvis $f(x,t)$ for fast $t \in B$ er en differentiabel funktion af x, siges f at være differentiabel efter x, og den afledede efter x betegnes f_x' eller $D_x f$ eller $\frac{\partial f}{\partial x}$. Analogt, hvis $f(x,t)$ for fast $x \in A$ er en differentiabel funktion af t, siges f at være differentiabel efter t, og den afledede efter t betegnes f_t' eller $D_t f$ eller $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Man kalder disse afledede partielle afledede. Bogstavet ∂ læses som d. Bemærk, at når f har partielle afledede både efter x og efter t, betyder ∂f ikke det samme i de to brøker $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial t}$ (idet det jo i den første betyder $f'_x \partial x$ og i den anden $f'_t \partial t$).

Differentiable funktioner af flere variable vil blive behandlet udførligt senere. På dette sted, hvor interessen er funktioner af en variabel, er det $f(x,t)$ som funktion af x for faste t, vi er interesseret i, medens t spiller rollen af en parameter.

Hvis A er et afsluttet interval $[a,b]$, og $f(x,t)$ for fast $t \in B$ er en kontinuert funktion af x (eller blot en integrabel funktion af x) bestemmes ved integralet

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

en funktion $g : B \to \mathbb{C}$. Vi siger, at integralet efter x er en funktion af parameteren t.

Hvis f er kontinuert på $[a,b] \times B$, er integralet g en kontinuert funktion på B.

Bevis: For at bevise kontinuitet af g i punktet $t_o \in B$ er det tilstrækkeligt at betragte et interval $[c,d]$ der indeholder t_o som indre punkt. Lad $\varepsilon > 0$ være givet; da restriktionen af f til den kompakte mængde $[a,b] \times [c,d]$ er uniformt kontinuert, findes $\delta > 0$ så $|f(x_1,t_1) - f(x_2,t_2)| < \varepsilon$ for alle $t_1,t_2 \in [c,d]$ der opfylder $|t_1 - t_2| < \delta$ og alle $x_1,x_2 \in [a,b]$ der opfylder $|x_1 - x_2| < \delta$. Specielt fås $|f(x,t) - f(x,t_o)| < \varepsilon$ for alle

$t \in [c,d]$ for hvilke $|t-t_o| < \delta$, og for alle $x \in [a,b]$. Heraf fås

$$|g(t)-g(t_o)| = \left|\int_a^b f(x,t)dx - \int_a^b f(x,t_o)dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x,t)-f(x,t_o)|dx < \varepsilon(b-a) \quad . \square$$

Vedrørende differentiation gælder følgende sætning:

Hvis f er kontinuert på $[a,b]\times B$ og er differentiabel efter t med en partiel afledet f'_t, der ligeledes er kontinuert på $[a,b]\times B$, er integralet g en differentiabel funktion på B, og dens afledede er bestemt ved

$$g'(t) = \int_a^b f'_t(x,t)dx.$$

Med andre betegnelser:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx.$$

Bevis: For t_o og $t_o+\Delta t$ i B med $\Delta t \neq 0$ har vi

$$\frac{g(t_o+\Delta t)-g(t_o)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_a^b f(x,t_o+\Delta t)-f(x,t_o)\,dx$$

og da ifølge middelværdisætningen

$$f(x,t_o+\Delta t) - f(x,t_o) = \Delta t\,[\mathrm{Re}\, f'_t(x,t_o+\theta\Delta t) + i\,\mathrm{Im}\, f'_t(x,t_o+\eta\Delta t)]$$

hvor $\theta \in]0,1[$ og $\eta \in]0,1[$ (bemærk at denne ligning gælder for ethvert (fastholdt) $x \in [a,b]$, således at θ og η afhænger af t_o, Δt og x) får vi at

$$\frac{g(t_o+\Delta t) - g(t_o)}{\Delta t} = \int_a^b (\mathrm{Re}\, f'_t(x,t_o+\theta\Delta t) + i\,\mathrm{Im}\, f'_t(x,t_o+\eta\Delta t)dx,$$

således at

$$\frac{g(t_o+\Delta t) - g(t_o)}{\Delta t} - \int_a^b f'_t(x,t_o)dx$$

$$= \int_a^b (\mathrm{Re}\, f'_t(x,t_o+\theta\Delta t) - \mathrm{Re}\, f'_t(x,t_o))\,dx$$

$$+ i\int_a^b (\mathrm{Im}\, f'_t(x,t_o+\eta\Delta t) - \mathrm{Im}\, f'_t(x,t_o))dx.$$

Da f'_t forudsættes kontinuert kan vi ræsonnere ganske som i beviset for den foregående sætning: Svarende til $\varepsilon > 0$ findes et $\delta < 0$ så hvis $|\Delta t| < \delta$ vil

$$|\mathrm{Re}f'_t(x,t_o+\theta\Delta t) - \mathrm{Re}f'_t(x,t_o)| < \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in [a,b]$$

og

$$|\mathrm{Im}f'_t(x,t_o+\eta\Delta t) - \mathrm{Im}f'_t(x,t_o)| < \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in [a,b].$$

Heraf fås at

$$\left|\frac{g(t_o+\Delta t)-g(t_o)}{\Delta t} - \int_a^b f'_t(x,t_o)dx\right| < \int_a^b \varepsilon\,dx + \int_a^b \varepsilon\,dx = 2\varepsilon(b-a). \square$$

Øvelse 1. Kontinuerte funktioner, der ikke er differentiable i noget punkt. Det er let at angive kontinuerte funktioner, der ikke er differentiable i et endeligt antal punkter. Eksempler på kontinuerte funktioner, der ikke er differentiable i noget punkt, er givet af K. Weierstrass (1861). Vi vil give et simplere eksempel på funktioner af denne art, idet vi vil vise:

Idet $\underline{x} = \underline{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ er Peanos kurve, gælder om hver af funktionerne $\varphi_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ og $\varphi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, at den ikke er differentiabel fra højre i noget punkt $t \in [0,1[$, og ikke er differentiabel fra venstre i noget punkt $t \in]0,1]$.

Vi udfører beviset for, at φ_1 ikke er differentiabel fra højre i noget punkt $t \in [0,1[$. Beviset for de andre påstande er analogt.

Lad altså $t \in [0,1[$, og lad n være så stort, at $\frac{2}{9^n} < 1 - t$. Lad k være det hele tal, for hvilket $\frac{k}{9^n} \le t < \frac{k+1}{9^n}$. Da gælder $k \in \{0,1,\cdots,9^n-2\}$. Til parameterværdierne $\frac{k+1}{9^n}$ og $\frac{k+2}{9^n}$ svarer på Peanos kurve endepunkter-

ne af en diagonal i et af de ved den n^{te} deling af $[0,1]^2$ optrædende kvadrater med side $\frac{1}{3^n}$. Følgelig gælder

$$\left|\varphi_1\left(\frac{k+2}{9^n}\right) - \varphi_1\left(\frac{k+1}{9^n}\right)\right| = \frac{1}{3^n}.$$

For t_n lig med enten $\frac{k+1}{9^n}$ eller $\frac{k+2}{9^n}$ haves da

$$|\varphi_1(t_n) - \varphi_1(t)| \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}, \quad 0 < t_n - t \leq \frac{2}{9^n},$$

og følgelig

$$\left|\frac{\varphi_1(t_n) - \varphi_1(t)}{t_n - t}\right| \geq \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{9^n}} = \frac{3^n}{4}.$$

For $n \to \infty$ gælder altså $t_n \to t$ fra højre og $\left|\frac{\varphi_1(t_n) - \varphi_1(t)}{t_n - t}\right| \to +\infty$. Følgelig er φ_1 ikke differentiabel fra højre i punktet t. ∎

Øvelse 2. Differentiable funktioner med diskontinuert afledet. Opmuntret af eksistensen af kontinuerte funktioner, der ikke er differentiable i noget punkt, kunne man tænke sig, at der fandtes differentiable funktioner, hvis afledede er diskontinuert i ethvert punkt. Man kan imidlertid vise, at dette ikke er tilfældet. Som eksempel på, hvor "ubehagelig" en differentiabel funktion kan være, vil vi ved brug af en konstruktionsmetode, der skyldes V. Volterra (1884), vise:

Der findes en differentiabel funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, hvis afledede $f' : [0,1] \to \mathbb{R}$ er begrænset, men ikke integrabel.

(1) For ethvert åbent interval $]\alpha,\beta[$ vælger vi (hvad der åbenbart er muligt) en differentiabel funktion $g_{\alpha\beta} :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne

$$|g_{\alpha\beta}(x)| \leq (x-\alpha)^2, \quad |g_{\alpha\beta}(x)| \leq (x-\beta)^2, \quad |g'_{\alpha\beta}(x)| \leq 1$$

for alle $x \in]\alpha,\beta[$.

og for hvilken $g'_{\alpha\beta}(x) = 1$ for mindst et $x \in]\alpha,\beta[$ og $g'_{\alpha\beta}(x) = -1$ for mindst et $x \in]\alpha,\beta[$.

(2) Symmetrisk om midtpunktet af $[0,1]$ vælger vi et åbent interval $]\alpha_1,\beta_1[$ af længde $< \frac{1}{4}$; symmetrisk om midtpunkterne af de afsluttede restintervaller $[0,\alpha_1]$ og $[\beta_1,1]$ vælger vi åbne intervaller $]\alpha_2,\beta_2[$ og $]\alpha_3,\beta_3[$ af længde $< \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}$; symmetrisk om midtpunkterne af de afsluttede restintervaller $[0,\alpha_2],[\beta_2,\alpha_1],[\beta_1,\alpha_3],[\beta_3,1]$ vælger vi åbne intervaller $]\alpha_4,\beta_4[$, $]\alpha_5,\beta_5[$, $]\alpha_6,\beta_6[$, $]\alpha_7,\beta_7[$ af længde $< \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}$; etc. Efter n skridt har vi valgt $2^n - 1$ åbne intervaller $]\alpha_j,\beta_j[$ af samlet længde

$$< \frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} + \cdots + 2^{n-1}\,\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2},$$

og har altså 2^n afsluttede restintervaller af samlet længde $> \frac{1}{2}$; hvert restinterval har en længde $< \frac{1}{2^n}$.

Idet vi med U betegner mængden

$$U = [0,1] \setminus (]\alpha_1,\beta_1[\cup]\alpha_2,\beta_2[\cup \cdots \cup]\alpha_p,\beta_p[\cup \cdots),$$

vil vi vise, at den ved

$$f(x) = \begin{cases} g_{\alpha_p\beta_p}(x) & \text{for } x \in]\alpha_p,\beta_p[, \quad p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{for } x \in U \end{cases}$$

bestemte funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ opfylder det forlangte.

(3) Det er klart, at f er differentiabel i ethvert punkt x tilhørende et af intervallerne $]\alpha_p,\beta_p[$, og at vi i et sådant punkt har $|f'(x)| \leq 1$. Det er endvidere klart, at hvis $x_o \in U$, gælder $|f(x)| \leq (x - x_o)^2$ for alle $x \in [0,1]$; følgelig er f differentiabel i x_o,

og vi har $f'(x_o) = 0$. Funktionen f er således differentiabel med begrænset afledet.

(4) For nu at vise, at f' ikke er integrabel, betragter vi for hvert n en inddeling D_n af $[0,1]$, bestemt ved delepunkterne α_j, β_j, $1 \leq j \leq 2^n - 1$, samt yderligere delepunkter valgt i intervallerne $]\alpha_j, \beta_j[$, $1 \leq j \leq 2^n - 1$, således at finheden $\varphi(D_n)$ er $< \frac{1}{2^n}$. Da gælder $\varphi(D_n) \to 0$ for $n \to \infty$. Blandt delintervallerne ved delingen D_n findes de 2^n restintervaller efter n^{te} skridt, hvis samlede længde som ovenfor nævnt er $> \frac{1}{2}$. I hvert af disse findes såvel punkter, hvori $f'(x) = 1$, som punkter, hvori $f'(x) = -1$. Heraf følger, at vi for hvert n kan finde to middelsummer M_n' og M_n'' for f' hørende til inddelingen D_n, således at $M_n' - M_n'' > 1$. Hvis f' var integrabel, skulle for $n \to \infty$ både M_n' og M_n'' konvergere mod $\int_0^1 f'(x)dx$. Altså er f' ikke integrabel. ∎

Øvelse 3. Algebraiske og transcendente tal. Et (reelt eller komplekst) tal α kaldes algebraisk, hvis det er rod i et polynomium $x^n + r_1 x^{n-1} + \cdots + r_n$ med rationale koefficienter. Det kaldes algebraisk af grad n, hvis det er rod i et polynomium af grad n med rationale koefficienter, men ikke i noget polynomium af grad $< n$ med rationale koefficienter. Man ser, at de algebraiske tal af grad 1 er de rationale tal.

Et tal, der ikke er algebraisk, kaldes transcendent. Eksistensen af transcendente tal blev først vist af J. Liouville (1844). Vi vil omtale et af hans eksempler. Som udgangspunkt tjener følgende sætning:

Hvis α er et reelt algebraisk tal af grad n, gælder for enhver følge af rationale tal $\frac{p_j}{q_j} \neq \alpha$ (p_j og q_j hele og $q_j > 0$), som konvergerer mod α, at

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| > \frac{1}{q_j^{n+1}} \quad \text{for alle } j \text{ fra et vist trin.}$$

Bevis. (1) Vi bemærker først, at det af sætningens antagelser følger, at $q_j \to +\infty$ for $j \to +\infty$. Thi for ethvert tal $m \in \mathbb{N}$ findes i mængden af brøker $\frac{p}{q} > \alpha$ med $0 < q \leq m$ en mindste og i mængden af brøker $\frac{p}{q} < \alpha$ med $0 < q \leq m$ en største. Der findes altså et tal $\delta \in \mathbb{R}_+$ således, at det for enhver brøk $\frac{p}{q} \neq \alpha$ (med $q > 0$), for hvilken $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \delta$, gælder, at $q > m$. Følgelig gælder $q_j > m$ for alle j fra et vist trin.

(2) Da α er algebraisk af grad n, er α rod i et polynomium

$$F(x) = h_0x^n + h_1x^{n-1} + \ldots + h_n$$

med hele koefficienter ($h_0 \neq 0$). Da F kun har endeligt mange rødder, findes et interval $[\alpha - d, \alpha+d]$ på $\mathbb{R}$, hvori F ikke har nogen anden rod end α. Vi sætter

$$M = \max_{x \in [\alpha - d, \alpha+d]} \left|F'(x)\right|.$$

For enhver brøk $\frac{p}{q} \neq \alpha$ i $[\alpha - d, \alpha+d]$ fås da ved brug af middelværdisætningen

$$\left|F(\tfrac{p}{q})\right| = \left|F(\alpha) - F(\tfrac{p}{q})\right| = \left|F'(\xi)\right|\left|\alpha - \tfrac{p}{q}\right|,$$

hvor ξ ligger mellem α og $\frac{p}{q}$, altså

$$\left|F(\tfrac{p}{q})\right| \leq M\left|\alpha - \tfrac{p}{q}\right|.$$

Nu kan

$$F(\frac{p}{q}) = h_o\frac{p^n}{q^n} + h_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + h_n$$

skrives som en brøk med nævner q^n. Da $F(\frac{p}{q}) \neq 0$, gælder altså

$$\left|F(\frac{p}{q})\right| \geq \frac{1}{q^n}$$

Vi finder altså

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Mq^n}$$

og følgelig

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{n+1}} \quad \text{for} \quad q > M,$$

hvormed sætningen er bevist.∎

Vi vil nu vise:

Ethvert tal α af formen

$$\alpha = 0,a_1a_2000a_600\cdots00a_{24}00\cdots00a_{120}00\cdots,$$

hvor alle decimaler, der ikke hører til numrene $j!$ ($j \in \mathbb{N}$), er 0, medens de øvrige er > 0 (altså hver et af tallene $1,2,\cdots,9$), er transcendent.

Bevis. Sættes

$$p_j = a_1a_2000a_600\cdots00a_{24}00\cdots00a_{j!}, \quad q_j = 10^{j!},$$

gælder $\frac{p_j}{q_j} \neq \alpha$ for alle j, og $\frac{p_j}{q_j} \to \alpha$ for $j \to \infty$. Hvis α var algebraisk af grad n, måtte altså for alle j fra et vist trin gælde

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| > \frac{1}{(10^{j!})^{n+1}} .$$

Men $\alpha - \frac{p_j}{q_j}$ fremstilles ved en uendelig decimalbrøk, i hvilken den første fra 0 forskellige decimal har nummeret $(j+1)!$. Følgelig gælder

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| \leq \frac{1}{10^{(j+1)!-1}} .$$

Hvis α var algebraisk af grad n, måtte altså for alle j fra et vist trin gælde

$$\frac{1}{10^{j!(n+1)}} < \frac{1}{10^{(j+1)!-1}}, \quad \text{d.v.s.} \quad 10^{j!(j-n)-1} < 1,$$

hvilket er umuligt, da $j!(j-n)-1 \to +\infty$ for $j \to +\infty$. □

Et helt andet bevis for eksistensen af transcendente tal opnåedes ved Cantors mængdelære. Der gælder nemlig:

Mængden af algebraiske tal er numerabel.

Bevis. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er mængden af polynomier $x^n + r_1 x^{n-1} + \ldots + r_n$ med rationale koefficienter numerabel, idet den kan afbildes bijektivt på $\mathbb{Q}^n$. Hvert sådant polynomium har højst n rødder. Altså er mængden af algebraiske tal af grad $\leq n$ numerabel. Altså er også mængden af alle algebraiske tal numerabel. □

Opgaver. 1. Vis, at hvis x_o er rod i polynomiet $F(x)$ af multiplicitet ν, må x_o være rod i polynomiet $F'(x)$ af multiplicitet $\nu - 1$. (For $\nu = 1$ skal dette forstås således, at x_o ikke er rod i $F'(x)$.)

Find et polynomium $F(x)$ af grad 5, således at $F(x) + 10$ er deleligt med $(x + 2)^3$, og $F(x) - 10$ er deleligt med $(x - 2)^3$.

2. Vis, at hvis f og g er n gange differentiable, gælder

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

(Her betyder $f^{(o)}$ og $g^{(o)}$ funktionerne f og g selv.)

3. For en differentiabel funktion f, der ikke antager værdien 0, kaldes $\frac{f'}{f}$ den logaritmiske afledede af f. Vis, at den logaritmiske afledede af et produkt af to eller flere sådanne funktioner er summen af faktorernes logaritmiske afledede, og at den logaritmiske afledede af en kvotient af to sådanne funktioner er differensen mellem tællerens og nævnerens logaritmiske afledede.

4. Vis, at den afledede af $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+3}$ er negativ, når den eksisterer. Benyt dette til at vise, at ligningen $f(x) = a$ for givet a har en løsning i hvert af intervallerne $]-3,-1[$ og $]-1,0[$, og at den har en løsning i $]0,+\infty[$, hvis $a > 0$, og en løsning i $]-\infty,-3[$, hvis $a < 0$.

5. Vis, at hvis $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ er differentiabel, $f(0) = 0$, og f' er voksende, da er den ved $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ definerede funktion $g :]0,1] \to \mathbb{R}$ ligeledes voksende.

6. Vis, at hvis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert på $[a,b]$ og differentiabel på $]a,b]$, og $f'(x)$ har en grænseværdi c for $x \to a$ fra højre, da er f også differentiabel i punktet a, og der gælder $f'(a) = c$.

7. Vis, at hvis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert på $[a,b]$ og differentiabel på $]a,b]$, og $f'(x) \to +\infty$ for $x \to a$ fra højre, da er f ikke differentiabel i punktet a.

*8. Vis, at for enhver differentiabel funktion $f : A \to \mathbb{R}$ er værdimængden $f'(A)$ af den afledede et interval.

9. Find en følge af C^1-funktioner $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, der konvergerer uniformt på $[0,1]$ mod en C^1-funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, og for hvilken følgen af afledede f_n' konvergerer punktvis, men ikke mod funktionen f'.

10. Idet $F(x,y)$ er et homogent polynomium i de to variable x og y af grad n, skal man bevise Eulers identitet

$$n\,F(x,y) = x\,F_x'(x,y) + y\,F_y'(x,y).$$

§ 15. Eksponentialfunktion, logaritmefunktion, potensfunktioner.

En stor del af den elementære analyse handler om funktioner defineret ved simple regneudtryk, opbygget af konstanter, den identiske funktion, og nogle få andre funktioner: eksponentialfunktionen, logaritmefunktionen, potensfunktionerne, og de trigonometriske funktioner og deres omvendte funktioner.

Trigonometrien har sit udspring i astronomien; det trigonometriske formelapparat udvikledes i 15-hundred tallet i nær tilslutning til udviklingen af det algebraiske tegnsprog. (F. Viète). Eksponentialfunktion og logaritmefunktion indførtes i begyndelsen af 16-hundredtallet (J. Neper. J. Bürge, H. Briggs).

Logaritmefunktionen. Herved forstås i teoretisk matematisk litteratur altid den naturlige logaritmefunktion $y = \log x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, der defineres som den stamfunktion til $\frac{1}{x}$ i $\mathbb{R}_+$, der for $x = 1$ har værdien 0, altså ved betingelserne

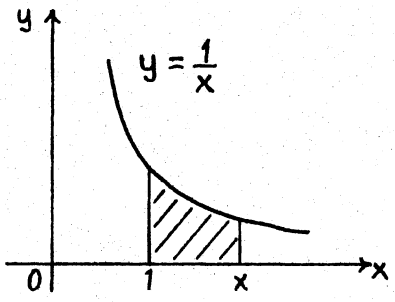
$$\boxed{\log 1 = 0, \qquad \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}}$$

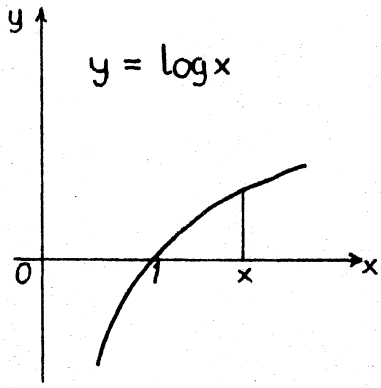
eller ved formlen

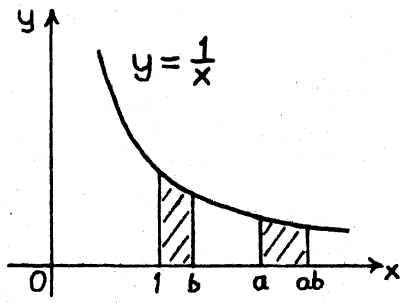
$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt .$$

[For alle $n \in \mathbb{Z}$ undtagen $n = -1$ er stamfunktionerne til x^n kendt, idet jo $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ er stamfunktion til x^n.] Da $\frac{1}{x} > 0$ for $x \in \mathbb{R}_+$, er logaritmefunktionen voksende.
For vilkårlige $a,b \in \mathbb{R}_+$ finder man

$$\log ab = \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_a^{ab} \frac{1}{x} dx.$$







Her er første led på højre side = log a. Andet led omskrives ved substitutionen $x = at$ til $\int_1^b \frac{1}{t}dt$ og er altså = log b (bemærk den simple geometriske betydning af denne omskrivning). Vi har altså

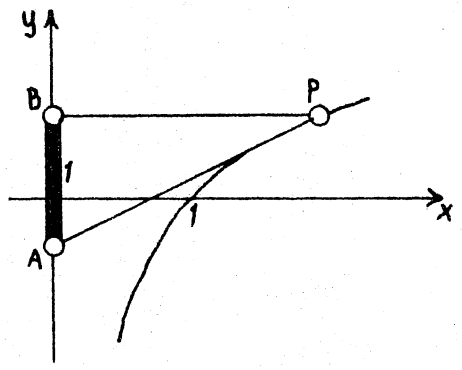
$$\boxed{\log ab = \log a + \log b}.$$

Heraf følger $\log a^n = n \log a$ for $a \in \mathbb{R}_+$ og $n \in \mathbb{Z}$. Vælges $a > 1$, er $\log a > 0$, og der gælder $n \log a \to +\infty$ for $n \to +\infty$ og $n \log a \to -\infty$ for $n \to -\infty$, hvoraf man slutter (under brug af kontinuiteten) at logaritmefunktionens værdimængde er hele $\mathbb{R}$. Da funktionen er strengt voksende, er den en bijektiv afbildning af $\mathbb{R}_+$ på $\mathbb{R}$.

Afbildningen $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ er således en isomorf afbildning af $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ på $(\mathbb{R}, +)$. Der findes altså ét $x \in \mathbb{R}_+$, for hvilket $\log x = 1$. Dette tal betegnes e. Ved siden af π er det analysens vigtigste konstant.

Ligningen $\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$ betyder geometrisk, at tangenten til kurven $y = \log x$ i punktet $(x, \log x)$ skærer

y-aksen i punktet $(0, \log(x) - 1)$, altså at det stykke AB af y-aksen, der afskæres mellem tangenten i kurvepunktet P og den vandrette linie gennem P, har den konstante længde 1.



Dette kan man benytte til at tegne kurven med stor nøjagtighed. Man benytter millimeterpapir og vælger som enhed f.eks. 100 mm. Man tegner nu først tangenten i $(1,0)$ og benytter af denne stykket i strimlen $-0{,}01 \leq y \leq 0{,}01$. Gennem dettes endepunkter tegnes linier henh. til punktet $(0,-1{,}02)$ og til punktet $(0,-0{,}98)$, og af disse benyttes stykkerne henh. i strimlen $-0{,}03 \leq y \leq -0{,}01$ og i strimlen $0{,}01 \leq y \leq 0{,}03$. Således fortsættes.

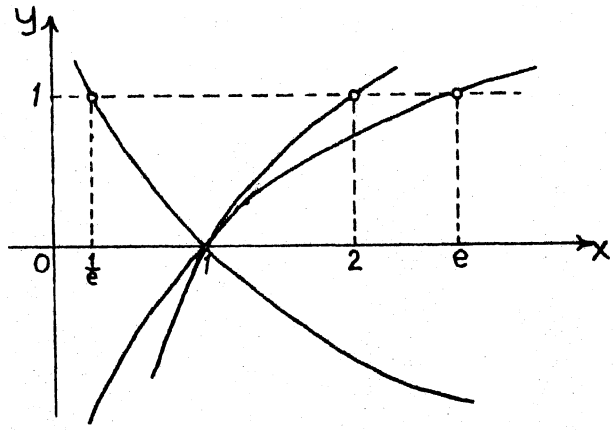
Logaritmefunktioner med vilkårligt grundtal.

Enhver funktion $k \log x$, hvor $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, er naturligvis også en isomorf afbildning af $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ på $(\mathbb{R}, +)$. Alle disse funktioner kaldes logaritmefunktioner. Man ser, at der for hvert $g \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ findes én logaritmefunktion, som for $x = g$ har værdien 1, nemlig

$$\log_g x = \frac{\log x}{\log g}.$$

Den kaldes logaritmefunktionen med grundtal g. Den er voksende eller aftagende, eftersom $g > 1$ eller $g < 1$. Vi har $\log x = \log_e x$. Man bemærker, at den naturlige logaritmefunktion er karakteriseret blandt alle logaritmefunktionerne derved, at dens afledede for $x = 1$ har værdien 1.

Figuren viser $\log_g x$ for værdierne $g = e$, $g = 2$, og $g = \frac{1}{e}$.



Eksponentialfunktionen. Herved forstås i teoretisk matematisk litteratur altid den naturlige eksponentialfunktion $y = \exp x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, der defineres som den omvendte funktion til funktionen $x = \log y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Man ser, at den er voksende og for $x = 0$ har værdien 1. Da $x = \log y$ er differentiabel med den afledede $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\exp x}$, som er $\neq 0$, er $y = \exp x$ differentiabel med den afledede $\frac{dy}{dx} = \exp x$, d.v.s funktionen har sig selv til afledet. Vi har altså

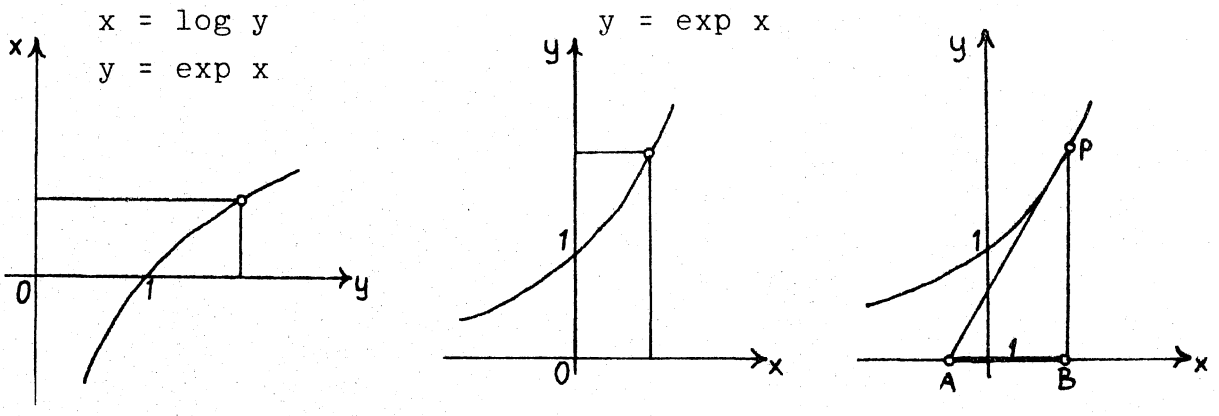
$$\boxed{\exp 0 = 1, \quad \frac{d \exp x}{dx} = \exp x}.$$

Endvidere ses: Afbildningen $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ er en isomorf afbildning af $(\mathbb{R}, +)$ på $(\mathbb{R}_+, \cdot)$. Dette betyder, at der for vilkårlige $a, b \in \mathbb{R}$ gælder

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b} \quad .$$

Heraf følger $\exp na = (\exp a)^n$ for $a \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{Z}$. Da $\exp 1 = e$, fås specielt $\exp n = e^n$. Vi har altså $\exp x = e^x$ for alle $x \in \mathbb{Z}$. Dette giver anledning til,

at man for alle $x \in \mathbb{R}$ benytter betegnelsen e^x for exp x.



Ligningen $\frac{d \exp x}{dx} = \exp x$ betyder geometrisk, at tangenten til kurven $y = \exp x$ i punktet $(x, \exp x)$ skærer x-aksen i punktet $(x-1, 0)$, altså at det stykke AB af x-aksen, der afskæres mellem tangenten i kurvepunktet P og den lodrette linie gennem P, har den konstante længde 1.

Eksponentialfunktioner med vilkårligt grundtal.

Enhver funktion $\exp kx$ hvor $k \in \mathbb{R}$, kaldes en eksponentialfunktion. For $k = 0$ er det funktionen 1.
For $k \neq 0$ er det naturligvis også en isomorf afbildning af $(\mathbb{R}, +)$ på $(\mathbb{R}_+, \cdot)$. Man ser, at

$$\frac{d \exp kx}{dx} = k \exp kx.$$

For ethvert $g \in \mathbb{R}_+$ findes een eksponentialfunktion, som for $x = 1$ har værdien g, nemlig funktionen

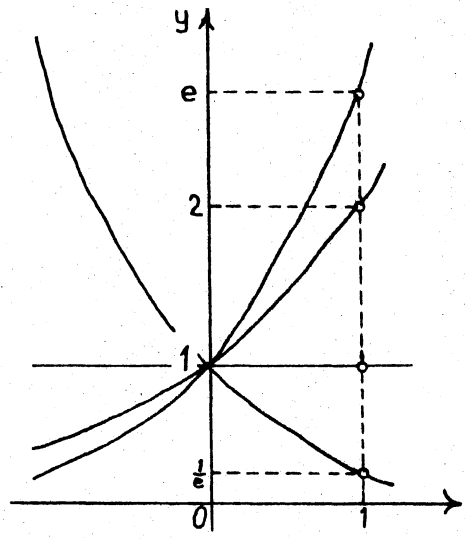
$$\exp_g x = \exp(x \log g).$$

Den kaldes eksponentialfunktionen med grundtal g.
For $g = 1$ er det funktionen 1. For $g \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ er det den omvendte funktion til logaritmefunktionen med grundtal g. Den er voksende eller aftagende, eftersom $g > 1$ eller $g < 1$. Vi har $\exp_e x = \exp x$. Man ser, at $\exp_g na = (\exp_g a)^n$ for $a \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{Z}$. Da $\exp_g 1 = g$, fås specielt $\exp_g n = g^n$. Dette giver anledning til, at man for alle $x \in \mathbb{R}$ benytter betegnelsen g^x for $\exp_g x$.
Vi har altså

$$g^x = e^{x \log g}, \quad \frac{dg^x}{dx} = \log g \cdot g^x.$$

Specielt gælder for $y = g^{\frac{1}{n}}$, at $y > 0$ og $y^n = g$. Altså er $y = \sqrt[n]{g}$. Man bemærker, at den naturlige eksponentialfunktion er karakteriseret blandt alle eksponentialfunktionerne derved, at dens afledede for $x = 0$ har værdien 1.

Figuren viser $\exp_g x = g^x$ for værdierne $g = e$, $g = 2$, $g = \frac{1}{e}$ og $g = 1$.



Karakterisering af eksponentialfunktionerne ved differentialligning. For ethvert $k \in \mathbb{R}$ er funktionen $y = f(x) = \exp kx$ den eneste differentiable funktion på $\mathbb{R}$, der opfylder betingelserne

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = k\, f(x).$$

Vi udtrykker dette ved at sige, at den er karakteriseret ved at være løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

og opfylde betingelsen $f(0) = 1$. Thi hvis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ opfylder disse betingelser, er funktionen $\varphi(x) = \frac{f(x)}{\exp kx}$ differentiabel med den afledede

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)\exp kx - f(x)\, k \exp kx}{(\exp kx)^2} = \frac{k\, f(x) - f(x)\, k}{\exp kx} = 0.$$

Altså er φ konstant, og da $\varphi(0) = 1$ er altså $f(x) = \exp kx$ for alle x.

Øvelse 1. For ethvert $x \in \mathbb{R}$ er talfølgen $((1+\frac{x}{n})^n)$ konvergent med grænseværdien $\exp x$:

$$\boxed{\exp x = \lim_{n\to\infty} (1+\tfrac{x}{n})^n}.$$

Bevis. For $x = 0$ er sagen klar. Antag $x \neq 0$. For $n > -x$ er $1+\frac{x}{n} > 0$. Sæt $y_n = \log(1+\frac{x}{n})^n$. Da gælder

$$y_n = n \log(1+\tfrac{x}{n}) = x\frac{\log(1+\frac{x}{n}) - \log 1}{\frac{x}{n}} \to x \quad \text{for} \quad n \to \infty,$$

da den afledede af log i punktet 1 er 1. Da exp er kontinuert, fås $(1+\frac{x}{n})^n = \exp y_n \to \exp x$ for $n \to \infty$. ∎

Specielt gælder altså

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty} (1+\tfrac{1}{n})^n}.$$

Skitser grafen af $(1+\frac{x}{n})^n$ for $n = 1,2,3,4$.

Øvelse 2. For ethvert $x \in \mathbb{R}_+$ er talfølgen $(n(\sqrt[n]{x}-1))$ konvergent med grænseværdien $\log x$:

$$\boxed{\log x = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)}.$$

Bevis. For $x = 1$ er sagen klar. Antag $x \neq 1$. Da er

$$n(\sqrt[n]{x} - 1) = \log x \frac{\exp(\frac{1}{n}\log x) - \exp 0}{\frac{1}{n}\log x},$$

og påstanden følger af, at den afledede af exp i punktet 0 er 1.∎

Skitser grafen af $n(\sqrt[n]{x} - 1)$ for $n = 1,2,3,4$.

Bemærk den elementære karakter af disse karakteriseringer af de betragtede funktioner.

Øvelse 3. Den simple baggrund for teorien for eksponentialfunktion og logaritmefunktion (de to ting kommer jo ud på eet) er som bekendt følgende: Vælges et tal $h \in \mathbb{R}_+$ og et tal $k \in \mathbb{R}_+$ og betragtes tabellen

x	...	$-3h$	$-2h$	$-h$	0	h	$2h$	$3h$	...
y	...	k^{-3}	k^{-2}	k^{-1}	1	k	k^2	k^3	...

ser man, at der til addition i første række svarer multiplikation i anden række. Vælges $h = \frac{1}{n}$, har man en tabel med interval $\frac{1}{n}$ for funktionen $y = a^x$, hvor $a = k^n$. For n stor og $k = 1+\frac{1}{n}$ altså praktisk talt en tabel for $y = \exp x$ eller $x = \log y$.

Potens. Gennem indførelsen af eksponentialfunktionen med vilkårligt grundtal er begrebet potens g^x med grundtal g og eksponent x defineret for alle $g \in \mathbb{R}_+$ og alle $x \in \mathbb{R}$, For vilkårlige positive g, g_1, g_2 og vilkårlige reelle x, x_0, x_1, x_2 gælder potensreglerne

1) $g^{x_1+x_2} = g^{x_1}g^{x_2}$ 2) $g^0 = 1$ 3) $g^{-x} = \frac{1}{g^x}$

4) $1^x = 1$ 5) $(g_1g_2)^x = g_1^x g_2^x$ 6) $(g^{x_0})^x = g^{x_0 x}$.

De fire første er indeholdt i det foregående. De to sidste følger af, at

$$\begin{aligned}\log (g_1g_2)^x &= x \log(g_1g_2) = x(\log g_1 + \log g_2)\\ &= x \log g_1 + x \log g_2 = \log g_1^x + \log g_2^x\\ &= \log(g_1^x g_2^x);\end{aligned}$$

$$\log (g^{x_0})^x = x \log g^{x_0} = x\, x_0 \log g = \log g^{x_0 x}.$$

Potensfunktioner. For vilkårligt $\alpha \in \mathbb{R}$ er potensfunktionen x^α nu defineret på $\mathbb{R}_+$. Vi har

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log x).$$

For $\alpha = 0$ er det funktionen 1. For $\alpha > 0$ er den voksende, og for $\alpha < 0$ er den aftagende; i begge tilfælde er værdimængden $\mathbb{R}_+$. For ethvert $\alpha \neq 0$ er afbildningen $x \mapsto x^\alpha$ en isomorf afbildning af $(\mathbb{R}_+,\cdot)$ på $(\mathbb{R}_+,\cdot)$. Den omvendte afbildning til $y = x^\alpha$ er $x = y^{\frac{1}{\alpha}}$. For ethvert α er funktionen differentiabel på $\mathbb{R}_+$ med den afledede $\exp(\alpha \log x)\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$:

$$\boxed{\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}}.$$

For positivt helt α er x^α defineret på hele $\mathbb{R}$, for $\alpha = 0$ ligeledes, idet man sætter $x^0 = 1$ for alle x, og for negativt helt α er x^α defineret på $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Som tidligere vist er x^α for helt α differentiabel på $\mathbb{R}$, resp. på $]-\infty,0[$ og $]0,+\infty[$, med den afledede $\alpha x^{\alpha-1}$ (idet $0\,x^{-1}$ for $x = 0$ skal læses som 0).

For et ikke helt, rationalt α, der kan skrives som en brøk $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) med ulige nævner, defineres x^α ligeledes på hele $\mathbb{R}$, hvis $\alpha > 0$, og på $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, hvis $\alpha < 0$, nemlig ved

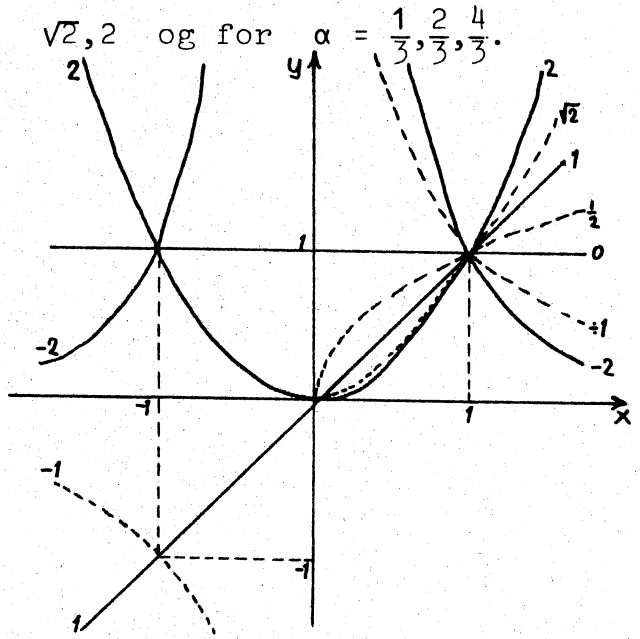
$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}\ .$$

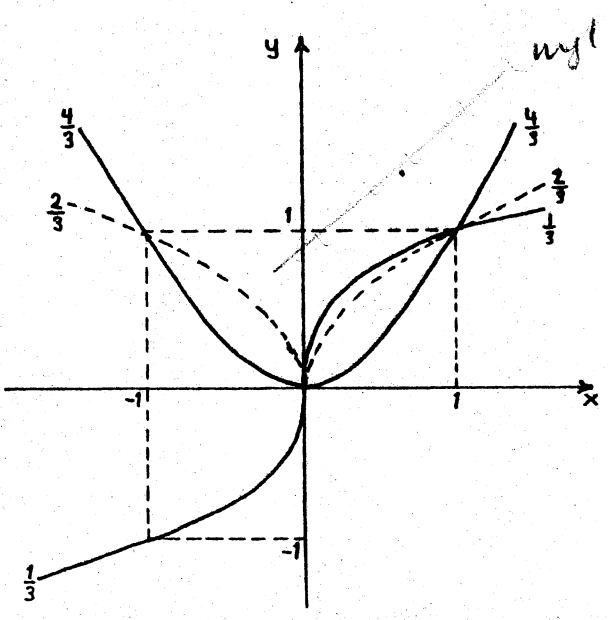
Som man let efterviser, er x^α i disse tilfælde differentiabel på $\mathbb{R}$, hvis $\alpha > 1$, og på $]-\infty,0[$ og $]0,+\infty[$, hvis $\alpha < 1$, med den afledede $\alpha x^{\alpha-1}$.

For de øvrige α, altså for rationale α, der ikke kan skrives som en brøk med ulige nævner, og for irrationale α, defineres x^α ikke for negative x, men for $\alpha > 0$ defineres 0^α som 0. Den således udvidede funktion er da differentiabel i 0 med den afledede 0, hvis $\alpha > 1$.

Sammenfattende har vi: Funktionen x^α er differentiabel med den afledede $\alpha x^{\alpha-1}$ i netop de punkter af definitionsmængden, i hvilke $\alpha x^{\alpha-1}$ er defineret.

Figurerne viser grafen af x^α for $\alpha = -2,-1,0,\frac{1}{2},1,\sqrt{2},2$ og for $\alpha = \frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}$.





Størrelsesorden. Lad f og g være funktioner defineret på en halvlinie $]a,+\infty[$, af hvilke den sidste ikke antager værdien 0. Man siger, at f er af lavere størrelsesorden end g for $x \to +\infty$, hvis $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ for $x \to +\infty$, medens man siger, at f er af højere størrelsesorden end g for $x \to +\infty$, hvis $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to +\infty$ for $x \to +\infty$. Man siger, at f er af højst samme størrelsesorden som g for $x \to +\infty$, hvis der findes et $b \geq a$ og et $k > 0$, så at $|f(x)| \leq k|g(x)|$ for $x > b$, og at f er af mindst samme størrelsesorden som g for $x \to +\infty$, hvis der findes et $b \geq a$ og et $k > 0$, så at $|f(x)| \geq k|g(x)|$ for $x > b$. Hvis f er både af mindst samme og højst samme størrelsesorden som g, siges f at være af samme størrelsesorden som g for $x \to +\infty$.

En hyppigt benyttet betegnelse for, at f er af lavere størrelsesorden end g for $x \to +\infty$ er, at man skriver $f(x) = o(g(x))$, der læses: f(x) er lille o af g(x). En tilsvarende betegnelse for, at f er af højst samme størrelsesorden som g for $x \to +\infty$, er at man skriver $f(x) = O(g(x))$, der læses: f(x) er store O af g(x).

De tilfælde, som især har interesse, er dem, hvor f(x) og g(x) begge går mod $+\infty$ for $x \to +\infty$, eller begge går mod 0 for $x \to +\infty$. I første tilfælde siger man, hvis f er af lavere størrelsesorden end g, at f går langsommere mod $+\infty$ end g, og hvis f er af højere størrelsesorden end g, at f går hurtigere mod $+\infty$ end g, medens man i andet tilfælde, hvis f er af lave-

re størrelsesorden end g, siger, at f går hurtigere mod 0 end g, og, hvis f er af højere størrelsesorden end g, siger, at f går langsommere mod 0 end g.

Denne terminologi finder analog anvendelse for funktioner defineret på en halvlinie $]-\infty,a[$, når $x \to -\infty$, og for funktioner defineret på et interval $]a,a+h[$ eller $]a-h,a[$, når $x \to a$ fra højre eller venstre.

Sikkerhed i at kunne bedømme funktioners størrelsesorden er af meget stor betydning i analysen. I tilfælde af funktioner givet ved sammensatte udtryk er det ofte således, at kun størrelsesordenen spiller en rolle, eller man er interesseret i at udskille et hovedled, der er af højere størrelsesorden end de øvrige led.

For $x \to +\infty$ gælder $\log_g x \to +\infty$ og $\exp_g x = g^x \to +\infty$ for ethvert grundtal $g > 1$, og $x^\alpha \to +\infty$ for enhver eksponent $\alpha > 0$. Vi vil undersøge, hvad man kan sige om disse funktioners størrelsesorden i forhold til hinanden.

Funktionerne $\log_g x$ for forskellige g er indbyrdes proportionale, idet vi jo for $g_1 > 1$ og $g_2 > 1$ har $\dfrac{\log_{g_1} x}{\log_{g_2} x} = \dfrac{\log g_2}{\log g_1}$ for alle $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. De er altså af samme størrelsesorden, og vi nøjes derfor med i det følgende at betragte funktionen $\log x$.

For to funktioner x^{α_1} og x^{α_2} med $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ gælder

$\frac{x^{\alpha_2}}{x^{\alpha_1}} = x^{\alpha_2-\alpha_1} \to +\infty$ for $x \to +\infty$. Altså går x^{α_2} hurtigere mod $+\infty$ end x^{α_1}, når $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$.

For to funktioner g_1^x og g_2^x med $1 < g_1 < g_2$ gælder $\frac{g_2^x}{g_1^x} = \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^x \to +\infty$ for $x \to +\infty$. Altså går g_2^x hurtigere mod $+\infty$ end g_1^x, når $g_2 > g_1 > 1$.

Logaritmefunktionen er af lavere størrelsesorden end enhver potensfunktion med positiv eksponent:

$$\boxed{\frac{\log x}{x^\alpha} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to +\infty \qquad (\alpha > 0)}.$$

Bevis. Da $\frac{1}{t} < 1$ for $t > 1$, gælder for $x > 1$, at

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt < x - 1 < x.$$

Vi vælger et tal $\beta \in]0,\alpha[$. Da er $\beta \log x = \log x^\beta < x^\beta$, altså

$$\frac{\log x}{x^\alpha} < \frac{1}{\beta x^{\alpha-\beta}}.$$

Da højre side for $x \to +\infty$ går mod 0, må venstre side (som jo er > 0) også gå mod 0 for $x \to +\infty$. ∎

Enhver eksponentialfunktion med grundtal >1 er af højere størrelsesorden end enhver potensfunktion med positiv eksponent:

$$\boxed{\frac{g^x}{x^\alpha} \to +\infty \quad \text{for} \quad x \to +\infty \qquad (g > 1, \alpha > 0)}.$$

Bevis. Vi sætter $\log g = k$. Da er $k > 0$. Sættes $g^x = y$, gås $x = \frac{\log y}{\log g} = \frac{\log y}{k}$, altså

$$\frac{g^x}{x^\alpha} = k^\alpha \frac{y}{(\log y)^\alpha} = k^\alpha \left(\frac{y^{\frac{1}{\alpha}}}{\log y} \right)^\alpha .$$

For $x \to +\infty$ gælder $y \to +\infty$, og heraf fremgår ifølge det foregående, at $\dfrac{y^{\frac{1}{\alpha}}}{\log y} \to +\infty$. ∎

Det er nu klart, at der for ethvert $g > 1$ gælder $\dfrac{g^x}{\log x} \to +\infty$ for $x \to +\infty$.

Funktionalligninger. Vi har ovenfor karakteriseret logaritmefunktionen og eksponentialfunktionen henholdsvis som stamfunktion til en vis funktion og som løsning til en vis differentialligning, og det må forekomme naturligt i en fremstilling koncentreret om differential- og integralregningen at lægge hovedvægten på disse karakteriseringer. Som vist af A.L.Cauchy (1821) kan funktionerne imidlertid også karakteriseres på en anden og i en vis forstand simplere måde. Vi begynder med at vise:

1. Funktionerne $x \mapsto \lambda x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ er kontinuerte homomorfe afbildninger af $(\mathbb{R},+)$ ind i $(\mathbb{R},+)$, og de er de eneste kontinuerte homomorfe afbildninger af $(\mathbb{R},+)$ ind i $(\mathbb{R},+)$.

Sætningen kan også udtrykkes således:

Funktionalligningen

$$\boxed{f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)}$$

har som kontinuerte løsninger $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktionerne $x \mapsto f(x) = \lambda x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ og ikke andre.

Bevis. At funktionerne $x \mapsto \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) opfylder betingelserne, er klart. Antag nu omvendt, at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opfylder betingelserne. Ved i funktionalligningen at vælge $x_2 = 0$ ses, at $f(0) = 0$. Ved dernæst at vælge $x_1 = x$, $x_2 = -x$ ses, at $f(-x) = -f(x)$. Ved induktion ses, at f opfylder ligningen $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$. Følgelig gælder $f(nx) = n f(x)$. Idet vi sætter $f(1) = \lambda$, følger heraf $f(1) = n f\left(\frac{1}{n}\right)$, altså $f\left(\frac{1}{n}\right) = \lambda\frac{1}{n}$, og dermed $f\left(\frac{m}{n}\right) = m f\left(\frac{1}{n}\right) = \lambda\frac{m}{n}$ for vilkårlige $n,m \in \mathbb{N}$. Heraf fås $f\left(-\frac{m}{n}\right) = -f\left(\frac{m}{n}\right) = \lambda \cdot \left(-\frac{m}{n}\right)$ for vilkårlige $n,m \in \mathbb{N}$. Hermed er vist, at $f(x) = \lambda x$ for alle $x \in \mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}$ er tæt i $\mathbb{R}$ fås (ved brug af kontinuiteten), at $f(x) = \lambda x$ for alle $x \in \mathbb{R}$. ∎

Funktionalligningen $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ kaldes Cauchy ligningen. Det var længe et problem, om der findes diskontinuerte løsninger $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til denne ligning. Spørgsmålet blev besvaret bekræftende af G. Hamel (1905) under brug af almene resultater fra mængdelæren.

2. Funktionerne $x \mapsto a^x$ ($a \in \mathbb{R}_+$) er kontinuerte homomorfe afbildninger af $(\mathbb{R},+)$ ind i $(\mathbb{R}_+,\cdot)$, og de er de eneste kontinuerte homomorfe afbildninger af $(\mathbb{R},+)$ ind i $(\mathbb{R}_+,\cdot)$

Sætningen kan også udtrykkes således:

Funktionalligningen

$$\boxed{f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)}$$

har som kontinuerte løsninger $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ funktionerne $x \mapsto f(x) = a^x$ ($a \in \mathbb{R}_+$) og ikke andre.

Bevis. At funktionerne $x \mapsto a^x$ ($a \in \mathbb{R}_+$) opfylder betingelserne, ved vi. Antag nu omvendt, at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ opfylder betingelserne. Da er $g = \log \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en kontinuert løsning til funktionalligningen $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$, altså af formen $g(x) = \lambda x$, d.v.s. $f = \exp \circ g$ er af formen $f(x) = e^{\lambda x} = a^x$ ($a = e^\lambda$). ∎

Bemærkning. Indskrænker man sig ikke til funktioner med positive værdier, men betragter kontinuerte løsninger $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til funktionalligningen $f(x_1 + x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$, får man foruden funktionerne a^x også løsningen 0, men så heller ikke andre løsninger. Thi vælges i funktionalligningen $x_1 = \frac{1}{2}x$ og $x_2 = \frac{1}{2}x$, ses at $f(x) = [f(\frac{1}{2}x)]^2 \geq 0$, og hvis der for et x_0 gælder $f(x_0) = 0$, må der, da $f(x) = f(x_0)\, f(x - x_0)$, gælde $f(x) = 0$ for alle x. Enhver løsning, der ikke er løsningen 0, antager altså kun positive værdier.

3. Funktionerne $x \mapsto \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$) og funktionen 0 er kontinuerte homomorfe afbildninger af $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ ind i $(\mathbb{R}, +)$, og de er de eneste kontinuerte homomorfe afbildninger af $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ ind i $(\mathbb{R}, +)$.

Sætningen kan også udtrykkes således:

Funktionalligningen

$$\boxed{f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)}$$

har som kontinuerte løsninger $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ funktionerne $x \mapsto f(x) = \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$) og 0 og ikke andre.

Bevis. At funktionerne $x \mapsto \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$) og 0 opfylder betingelserne, ved vi. Antag, at $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ opfylder betingelserne. Da er $g = f \circ \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en kontinuert løsning til funktionalligningen $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$, altså af formen $g(x) = \lambda x$, d.v.s. $f = g \circ \log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ er af formen $f(x) = \lambda \log x$. Hvis $\lambda = 0$, er f altså funktionen 0; hvis $\lambda \neq 0$, er $f(x) = \frac{\log x}{\log a} = \log_a x$ $(a = e^{\frac{1}{\lambda}})$. ∎

4. Funktionerne $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) er kontinuerte homomorfe afbildninger af $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ ind i $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, og de er de eneste kontinuerte homomorfe afbildninger af $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ ind i $(\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Sætningen kan også udtrykkes således:

Funktionalligningen

$$\boxed{f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)}$$

har som kontinuerte løsninger $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ funktionerne $x \mapsto f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) og ikke andre.

Bevis. At funktionerne $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) opfylder betingelserne, ved vi. Antag nu omvendt, at $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ opfylder betingelserne. Da er $g = \log \circ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ en kontinuert løsning til funktionalligningen $g(x_1 \cdot x_2) = g(x_1) + g(x_2)$, altså af formen $g(x) = \alpha \log x$, d.v.s. $f = \exp \circ g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ er af formen $f(x) = \exp(\alpha \log x) = x^\alpha$. ∎

Opgaver. 1. Tegn grafen for funktionen

$x \mapsto x\, e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Tegn graferne for funktionerne

$x \mapsto x \log x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, og $x \mapsto x^x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

3. Find stamfunktioner til

(1) $\log x$ (2) $(\log x)^2$ (3) $x \log x$ (4) $\dfrac{1}{x(\log x)^2}$

(5) $\dfrac{\log x}{x^2}$ (6) $x\, e^x$ (7) $x^2\, e^{-x}$ (8) $x\, e^{x^2}$

(9) $x^3\, e^{-x^2}$.

4. Idet a er et givet tal, skal man vise, at

$$(x + a)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to +\infty.$$

5. Undersøg $x^{1003}(e^{-6x} - 1003\, e^{-x^2})$ for $x \to +\infty$.

6. Vis, at $\left(\frac{1}{x}\right)^x - 1$ for $x \to 0$ fra højre er af samme størrelsesorden som $x \log x$.

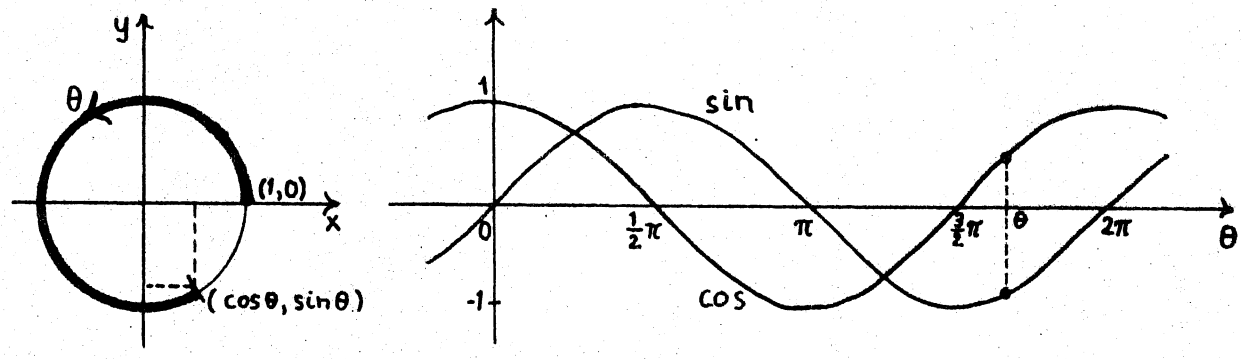
7. Vis, at funktionalligningen $f(2x) = 2 f(x)$ har andre kontinuerte løsninger $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ end funktionerne $f(x) = \lambda x$. Kan en sådan løsning være differentiabel?

8. Find alle kontinuerte funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der opfylder funktionalligningen

$$f(x_1 x_2) = f(x_1)\, f(x_2).$$

§ 16. De trigonometriske funktioner og deres omvendte funktioner.

Cosinus og sinus. Funktionerne cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er defineret ved, at $(\cos\theta, \sin\theta)$ er det punkt på cirklen $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, for hvilket den med fortegn regnede bue fra $(1,0)$ til $(\cos\theta, \sin\theta)$ er θ. De har altså perioden 2π og deres grafer har det velkendte udseende, der bl.a. viser reglerne om komplementvinkler, supplementvinkler, m.v. For $\theta = 0$ har de værdierne 1 og 0.



Funktionerne cos og sin er differentiable med de afledede -sin og cos. Thi betegnes punktet $(\cos\theta, \sin\theta)$ med P og punktet $(\cos(\theta + \Delta\theta), \sin(\theta + \Delta\theta))$ med Q, er

$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta\theta} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{k} \frac{k}{\Delta\theta}$, hvor k er længden af korden PQ regnet positiv eller negativ, eftersom $\Delta\theta$ er positiv eller negativ. For $\Delta\theta \to 0$ gælder $\frac{k}{\Delta\theta} \to 1$, og enhedsvektoren $\frac{\overrightarrow{PQ}}{k}$ på sekanten konvergerer mod den i overensstemmelse med cirklens gennemløbsretning orienterede enhedsvektor $(-\sin\theta, \cos\theta)$ på tangenten i P.

Vi har altså

$$(\bigstar)\quad \boxed{\cos 0 = 1,\ \frac{d\cos\theta}{d\theta} = -\sin\theta}\qquad \boxed{\sin 0 = 0,\ \frac{d\sin\theta}{d\theta} = \cos\theta}.$$

Undertiden er det bekvemt at skrive differentiations ligningerne således:

$$\frac{d\cos\theta}{d\theta} = \cos(\theta + \tfrac{1}{2}\pi), \qquad \frac{d\sin\theta}{d\theta} = \sin(\theta + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Desuden gælder for vilkårlige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\Delta)\quad \boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}}\ .$$

Blandt de mangfoldige opdagelser, der skyldes L.Euler (1707-1783) er sammenhængen mellem eksponentialfunktionen og de trigonometriske funktioner en af de mærkeligste. Vi når til denne, idet vi betragter $\mathbb{R}^2$ som $\mathbb{C}$, altså (x,y) som det komplekse tal $z = x + iy$, og danner funktionen

$$z = e(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

Man ser, at denne for $\theta = 0$ har værdien 1, og at den er differentiabel med den afledede $-\sin\theta + i\cos\theta = i\,e(\theta)$. I stedet for $(\bigstar)$ kan vi derfor skrive

$$e(0) = 1, \qquad \frac{d\,e(\theta)}{d\theta} = i\,e(\theta).$$

Ligningerne (Δ) sammenfattes i den ene ligning

$$e(\alpha+\beta) = e(\alpha)\cdot e(\beta).$$

Vi bemærker yderligere, at funktionen $z = f(\theta) = e(\theta)$ er den eneste differentiable funktion på $\mathbb{R}$ med værdier i $\mathbb{C}$, der opfylder betingelserne

$$f(0) = 1, \qquad f'(\theta) = i\, f(\theta).$$

Den er altså karakteriseret ved at være løsning til differentialligningen

$$\frac{dz}{d\theta} = iz$$

og opfylde betingelsen $f(0) = 1$. For at indse dette, bemærker vi først, at $e(\theta) \neq 0$ for alle θ. Hvis nu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ opfylder betingelserne, er funktionen $\varphi(\theta) = \frac{f(\theta)}{e(\theta)}$ differentiabel med den afledede

$$\varphi'(\theta) = \frac{f'(\theta)\, e(\theta) - f(\theta)\, i\, e(\theta)}{(e(\theta))^2} = \frac{i\, f(\theta) - f(\theta) i}{e(\theta)} = 0.$$

Altså er φ konstant, og da $\varphi(0) = 1$, finder vi $f(\theta) = e(\theta)$.

De samme betingelser $f(0) = 1$, $f'(x) = kf(x)$, som for $k \in \mathbb{R}$ karakteriserer funktionen $f(x) = \exp kx$, karakteriserer altså for $k = i$ funktionen $e(x)$. Som følge heraf definerer vi eksponentialfunktionen exp for rent imaginære værdier af den variable ved $\exp i\theta = e(\theta)$, altså

$$\boxed{\exp i\theta = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta}.$$

For $\theta = 0$ stemmer dette med, at $\exp 0 = 1$. Vi har da

$$\boxed{\frac{d \exp i\theta}{d\theta} = i \exp i\theta \quad \text{eller} \quad \frac{d\, e^{i\theta}}{d\theta} = i\, e^{i\theta}},$$

og for vilkårlige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gælder

$$\boxed{\exp i(\alpha+\beta) = \exp i\alpha \cdot \exp i\beta \quad \text{eller} \quad e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}}.$$

Idet $\cos(-\theta) = \cos\theta$ og $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, ses at

$$\exp(-i\theta) = e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta.$$

Vi har således Eulers formler, ved hvilke funktionerne cos og sin udtrykkes ved hjælp af eksponentialfunktionen:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

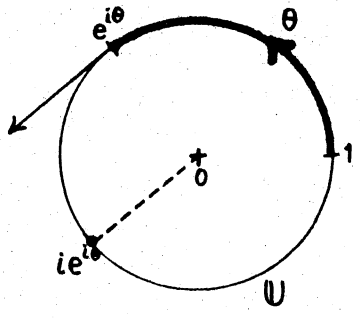
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

.

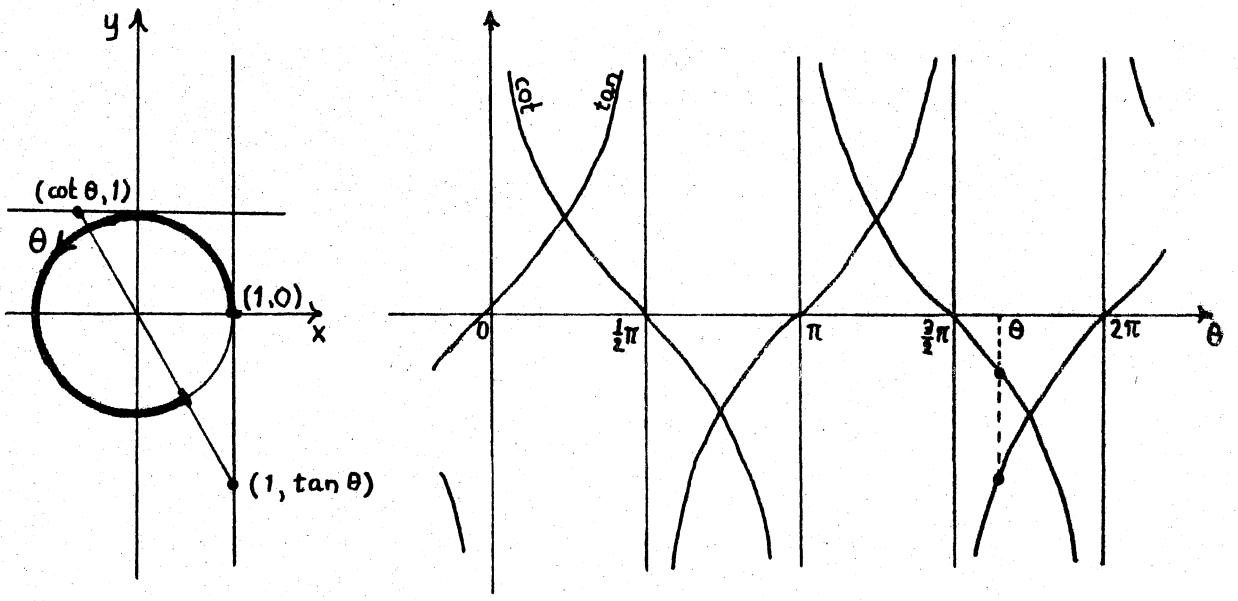
Man kan (med en vis ret) sige, at vi er kommet billigt til disse formler, idet de jo simpelthen beror på en definition. Pointen er naturligvis, at denne definition er fornuftig. Dette fremgår af den foran givne motivering. En yderligere motivering vil fremgå senere ved omtalen af potensrækker.

Man ser, at ved $\theta \longmapsto \exp i\theta$ afbildes $\mathbb{R}$ på enhedscirklen $\mathbf{U} = \{z \mid |z| = 1\}$ i $\mathbb{C}$. Med multiplikationen som komposition er $\mathbf{U}$ en gruppe [en undergruppe af $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$]. Afbildningen $\theta \longmapsto \exp i\theta$ er en surjektiv homomorf afbildning af $(\mathbb{R},+)$ på $(\mathbf{U},\cdot)$. Den er ikke bijektiv: For ethvert $z \in \mathbf{U}$ består originalmængden, hvis θ er et af dens punkter, af samtlige punkter $\theta + p2\pi$, $p \in \mathbb{Z}$.

Ligningen $\frac{de^{i\theta}}{d\theta} = i\,e^{i\theta}$ betyder kinematisk, at hastigheden af et punkt, der gennemløber cirklen $\mathbf{U}$, således at buelængden θ er tiden, er den i overensstemmelse med gennemløbsretningen orienterede enhedsvektor på tangenten.



Tangens og cotangens. Disse funktioner defineres ved $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$. Definitionsmængderne er henh. $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\pi + p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}$ og $\mathbb{R}\setminus\{p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}$. De har den velkendte geometriske betydning. De har perioden π, og deres grafer har det velkendte udseende.



Funktionerne er differentiable med de afledede

$$\boxed{\frac{d\tan\theta}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta, \quad \frac{d\cot\theta}{d\theta} = -\frac{1}{\sin^2\theta} = -(1 + \cot^2\theta)}.$$

Desuden gælder for vilkårlige α,β i de respektive definitionsmængder, når også $\alpha + \beta$ tilhører definitionmængden,

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}, \quad \cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}}.$$

Af Eulers formler fås

$$\boxed{\tan\theta = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1}, \quad \cot\theta = i\,\frac{e^{2i\theta} + 1}{e^{2i\theta} - 1}}.$$

Øvelse 1. Eulers formler giver et simpelt middel til omskrivning af trigonometriske udtryk. For eksempel finder man

$$\sin^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16}$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + \frac{3}{8}$$

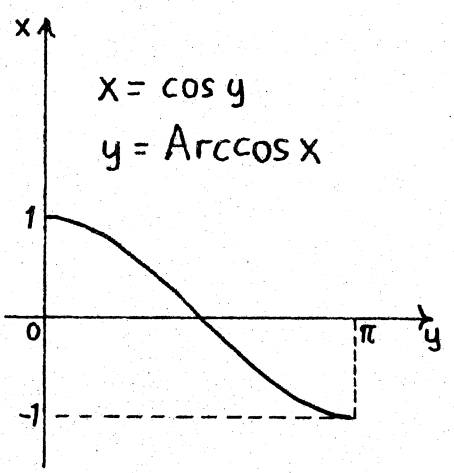
$$= \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}.$$

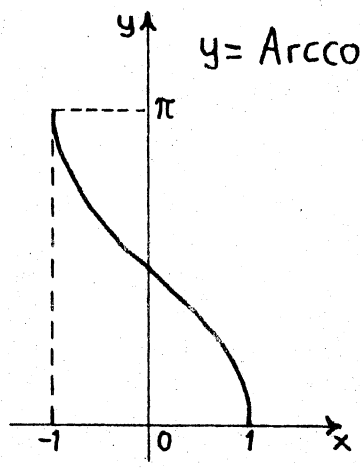
På tilsvarende måde kan ethvert produkt $\cos^n\theta \sin^m\theta$, hvor $n,m \in \mathbb{N}_0$, omskrives til en linearkombination af funktionerne 1, $\cos p\theta, \sin p\theta$ $(p \in \mathbb{N})$. Af ovenstående finder man

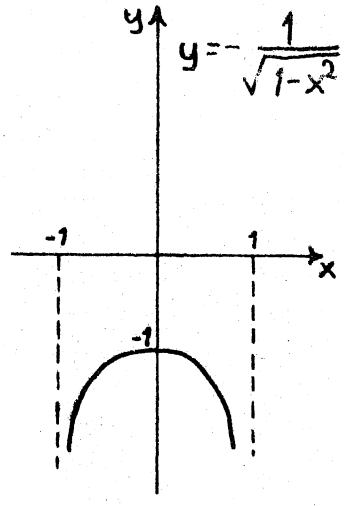
$$\int_0^\pi \sin^4\theta\, d\theta = \left[\frac{1}{32}\sin 4\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{3}{8}\theta\right]_0^\pi = \frac{3}{8}\pi.$$

De trigonometriske funktioners omvendte funktioner:

Arcus funktionerne. Restriktionen af funktionen $x \mapsto \cos y$ til intervallet $[0,\pi]$ er en bijektiv afbildning af $[0,\pi]$ på intervallet $[-1,1]$. Funktionen er aftagende og differentiabel med den afledede $\frac{dx}{dy} = -\sin y$ som er 0 i endepunkterne 0 og π, medens den er < 0 og altså $= -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}$ i intervallet $]0,\pi[$. Den omvendte funktion, der betegnes $y = \operatorname{Arccos} x$ er således en bijektiv afbildning af intervallet $[-1,1]$ på intervallet $[0,\pi]$; den er aftagende, og den er differentiabel i $]-1,1[$ med den afledede $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.



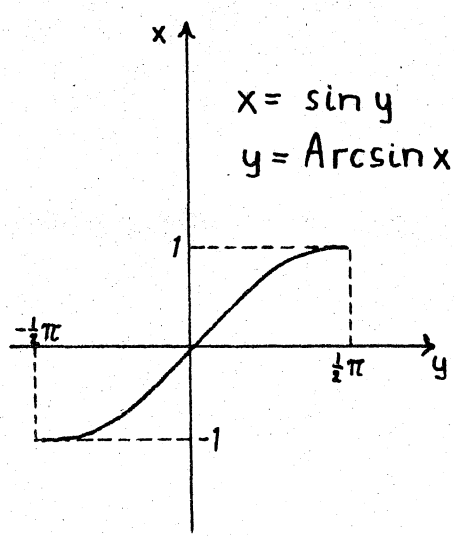


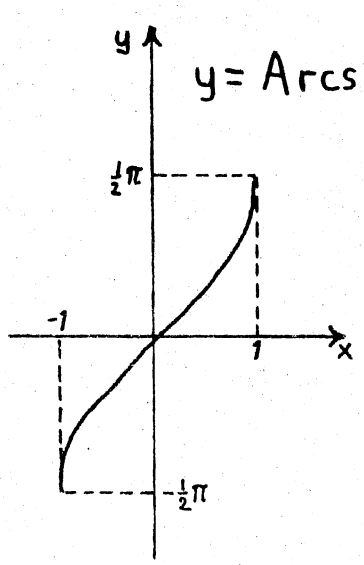


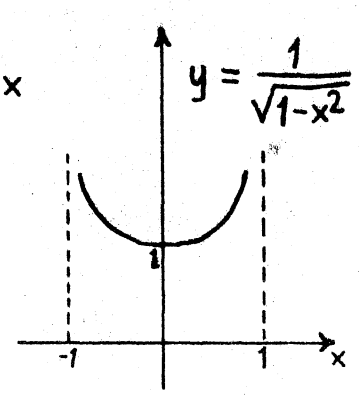
Restriktionen af funktionen

$x = \sin y$ til intervallet $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ er en bijektiv afbildning af $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ på intervallet $[-1,1]$. Funktionen er voksende og differentiabel med den afledede $\frac{dx}{dy} = \cos y$, som er 0 i endepunkterne $-\frac{1}{2}\pi$ og $\frac{1}{2}\pi$, medens den er > 0 og altså $= \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ i intervallet $]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$.

Den omvendte funktion, der betegnes $y = \operatorname{Arcsin} x$ er således en bijektiv afbildning af intervallet $[-1,1]$ på intervallet $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$; den er voksende, og den er differentiabel i $]-1,1[$ med den afledede $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

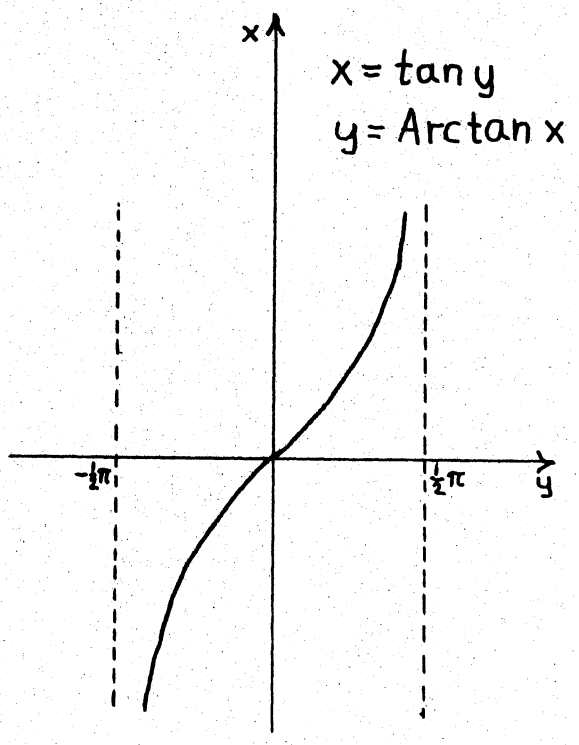


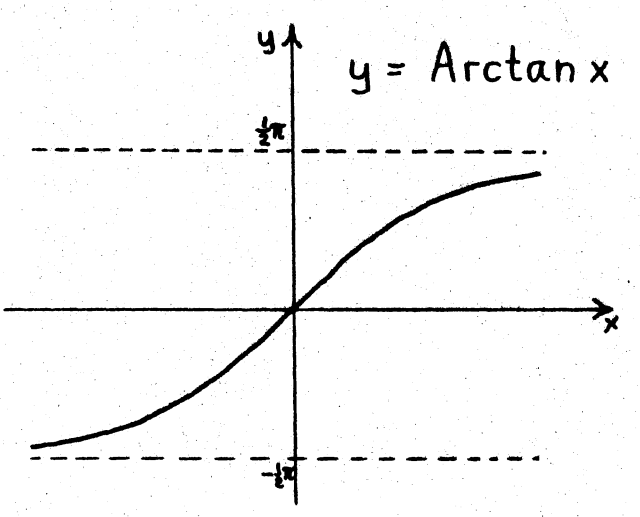


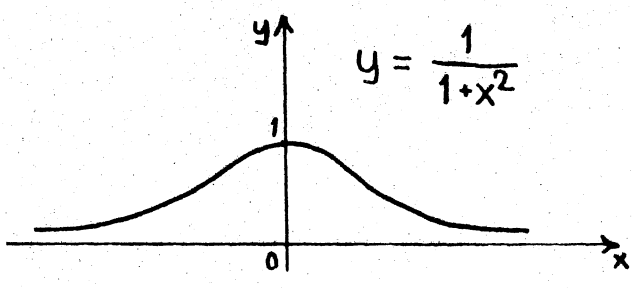


Funktionerne Arccos og Arcsin er ikke differentiable i intervalendepunkterne -1 og 1. I de hertil svarende punkter har graferne lodret tangent.

Restriktionen af funktionen $x = \tan y$ til intervallet $]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ er en bijektiv afbildning af $]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ på $\mathbb{R}$. Funktionen er voksende og differentiabel med den afledede $\frac{dx}{dy} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, som er > 0 i hele intervallet. Den omvendte funktion, der betegnes $y = \text{Arctan } x$ er således en bijektiv afbildning af $\mathbb{R}$ på intervallet $]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$; den er voksende, og den er differentiabel med den afledede $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$.



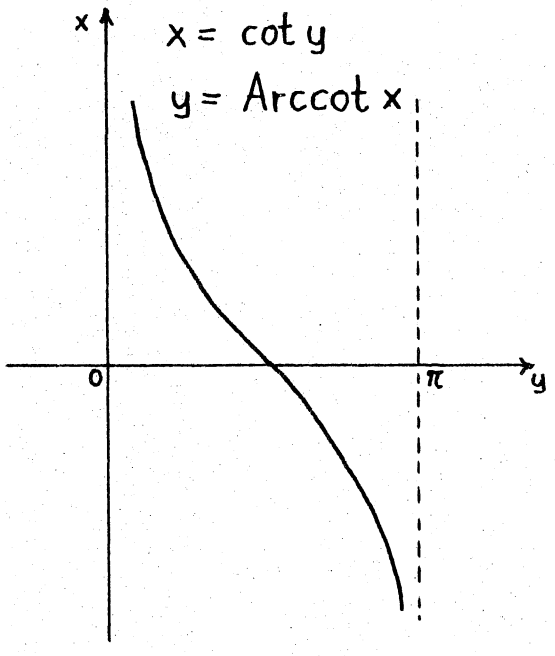


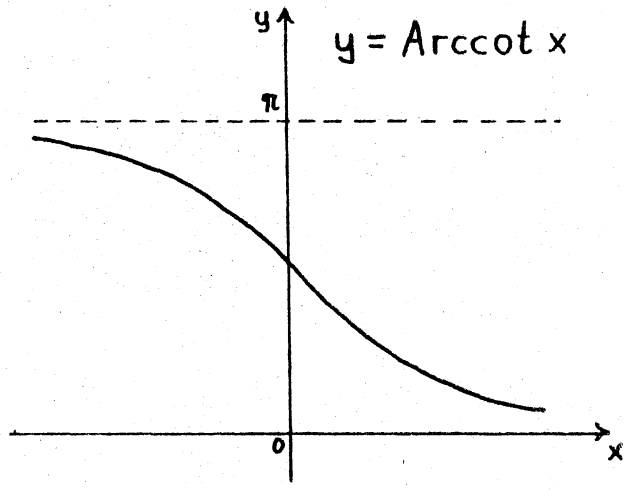


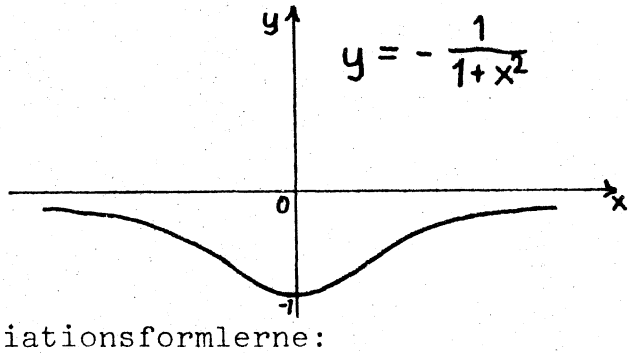
Restriktionen af funktionen $x = \text{coty}$ til intervallet $]0, \pi[$ er en bijektiv afbildning af $]0, \pi[$ på $\mathbb{R}$. Funktionen er aftagende og differentiabel med den afledede

$\frac{dx}{dy} = -(1 + \cot^2 y) = -(1 + x^2)$, som er < 0 i hele intervallet.

Den omvendte funktion, der betegnes $y = \text{Arccot}\, x$, er således en bijektiv afbildning af $\mathbb{R}$ på intervallet $]0,\pi[$; den er aftagende, og den er differentiabel med den afledede $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}$.







Vi sammenstiller differentiationsformlerne:

$$\frac{d\,\text{Arccos}\,x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \frac{d\,\text{Arcsin}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad x \in\,]-1,1[$$

$$\frac{d\,\text{Arctan}\,x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad \frac{d\,\text{Arccot}\,x}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Øvelse 2. Mængden af løsninger til en af ligningerne $x = \cos y$, $x = \sin y$, $x = \tan y$, $x = \cot y$ (hvor x er givet) betegnes ofte arccos x, arcsin x, arctan x, arccot x; dog benyttes arccos x, arcsin x, arctan x, arccot x også som be-

tegnelse for enhver af værdierne. Disse mængder bestemmes på den velkendte måde ud fra værdierne Arccos x, Arcsin x, Arctan x, Arccot x,

Af de velkendte formler for de trigonometriske funktioner følger naturligvis tilsvarende formler for Arcus funktionerne. Vi fremhæver formlerne

$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arccot} x = \tfrac{1}{2}\pi .$$

Geometrisk betyder disse formler, at graferne af funktionerne $y = \operatorname{Arccos} x$ og $y = \operatorname{Arcsin} x$ er symmetriske med hensyn til linien $y = \frac{1}{4}\pi$, og ligeså graferne af funktionerne $y = \operatorname{Arctan} x$ og $y = \operatorname{Arccot} x$ Vi kunne således have nøjedes med at indføre f.eks. Arcsin x og Arctan x idet de to andre funktioner udtrykkes ved disse.

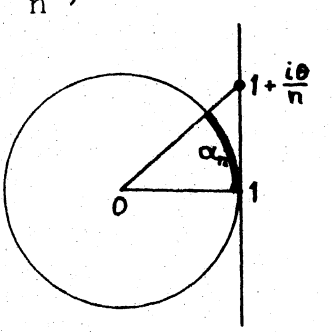
Idet Arcsin x og Arctan x for $x = 0$ har værdien 0, finder vi

$$\operatorname{Arcsin} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \; x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arctan} x = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}, \; x \in \mathbb{R} .$$

<u>Øvelse 3</u>. For ethvert $\theta \in \mathbb{R}$ er følgen $\left(\left(1 + \frac{i\theta}{n}\right)^n\right)$ konvergent med grænseværdien exp iθ:

$$\boxed{\exp i\theta = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i\theta}{n}\right)^n} .$$

<u>Bevis</u>. For $\theta = 0$ er sagen klar. Antag, $\theta \neq 0$, og sæt $\operatorname{Arctan} \frac{\theta}{n} = \alpha_n$. Da er $1 + \frac{i\theta}{n} = \left(1 + \frac{\theta^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\alpha_n}$, og altså $\left(1 + \frac{i\theta}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{\theta^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n} e^{in\alpha_n}$.



Nu gælder $\log\left(1 + \frac{\theta^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n^n} = \frac{1}{2}n\log\left(1+\frac{\theta^2}{n^2}\right)$

$$= \frac{\theta^2}{2n} \frac{\log\left(1+\frac{\theta^2}{n^2}\right)}{\frac{\theta^2}{n^2}} \to 0 \quad \text{for } n \to \infty,$$

altså $\left(1 + \frac{\theta^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n} \to 1$ for $n \to \infty$. Endvidere gælder $n\alpha_n = n \operatorname{Arctan} \frac{\theta}{n} = \theta \frac{\operatorname{Arctan} \frac{\theta}{n}}{\frac{\theta}{n}} \to \theta$ for $n \to \infty$. Altså gælder $\left(1 + \frac{i\theta}{n}\right)^n \to 1 \cdot e^{i\theta}$ for $n \to \infty$. ∎

Opgaver. 1. Vis, at hvis to differentiable funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opfylder betingelserne $f(0) = 1$, $g(0) = 0$, $f' = -g$, $g' = f$, da er $f = \cos$ og $g = \sin$.

2. Vis, at den ved $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ for $x \neq 0$ og $f(0) = 0$ definerede funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er differentiabel, og at dens afledede er diskontinuert i punktet 0. Vis, at dens afledede er begrænset.

3. Undersøg $\sqrt{x} \log \sin x$ for $x \to 0$ fra højre.

4. Find $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin 5x \sin^4 x \, dx$.

5. Find $\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \cos^2 x \sin^3 x \, dx$.

6. Find simplere udtryk for

$\cos(\operatorname{Arcsin} x)$, $\sin(2 \operatorname{Arctan} x)$, $\operatorname{Arcsin}(\cos x)$.

7. Find om muligt simplere udtryk for

$\operatorname{Arcsin}(\tan x)$, $\tan(2 \operatorname{Arctan} x)$, $\operatorname{Arctan}(2 \tan x)$.

8. Vis, at der for ethvert $x \in [-1,1]$ gælder $\operatorname{Arccos} \sqrt{1 - x^2} = |\operatorname{Arcsin} x|$.
Prøv at finde en tilsvarende formel for $\operatorname{Arcsin} \sqrt{1 - x^2}$.

9. Vis, at funktionen $x \mapsto f(x) = \operatorname{Arctan} x$ opfylder funktionalligningen

$$f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}\right), \quad x_1 x_2 < 1.$$

10. Vis, at der for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ gælder

$$\text{Arctan}(x_1 + x_2) < \text{Arctan } x_1 + \text{Arctan } x_2.$$

11. Find $\int_0^1 \text{Arcsin } x \, dx$.

12. Find $\int_0^1 \text{Arctan } x \, dx$.

13. Find stamfunktioner til Arcsin og Arctan.

14. Udled formlen

$$\lim_{n\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{\pi}{4}$$

ved at fortolke summen som middelsum for en funktion på intervallet $[0,1]$.

15. Vis, at $\frac{1}{2}\pi - \text{Arctan } x$ for $x \to +\infty$ er af samme størrelsesorden som $\frac{1}{x}$.

16. Multiple choice question: The following verse (1) tests the student's knowledge of Spanish; (2) Commemorates the siege of Syracuse; (3) gives π to thirty decimal places.

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Que de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

(Efter E.Hille.)

§ 17. De hyperbolske funktioner og deres omvendte funktioner.

Hyperbolsk cosinus og hyperbolsk sinus. Vi definerer disse funktioner $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ud fra eksponentialfunktionen ved

$$\boxed{\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}}.$$

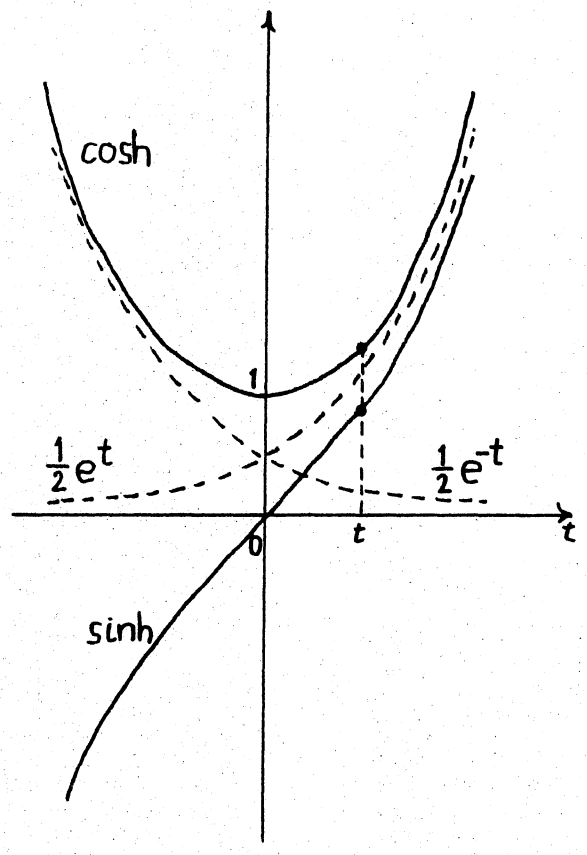
Man ser, at cosh er en lige funktion, d.v.s $\cosh(-t) = \cosh t$, og at sinh t er en ulige funktion, d.v.s. $\sinh(-t) = -\sinh t$. Endvidere, at cosh t er positiv for alle t, medens sinh t for $t \neq 0$ har samme fortegn som t. For $t = 0$ har funktionerne værdierne 1 og 0. Funktionerne er differentiable med hinanden som afledede:

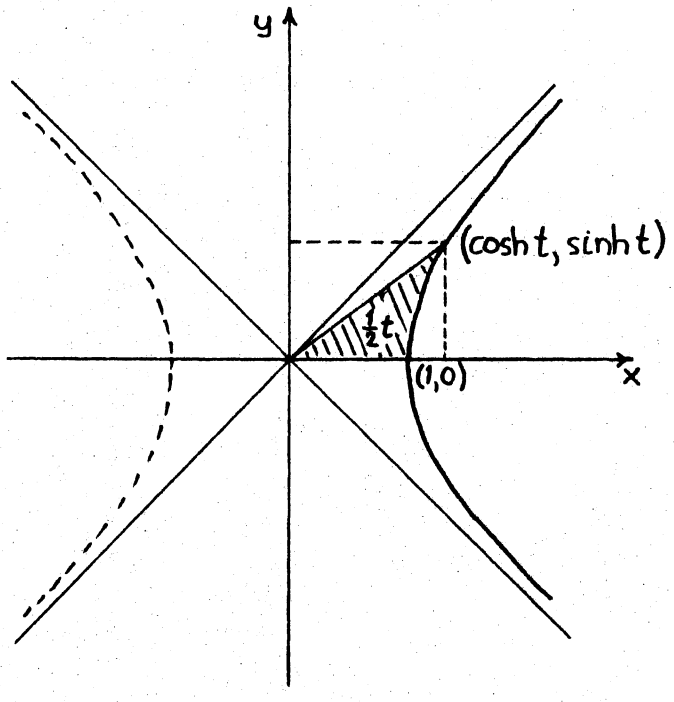
$$\boxed{\frac{d \cosh t}{dt} = \sinh t, \quad \frac{d \sinh t}{dt} = \cosh t}.$$

Heraf aflæses, at cosh er aftagende på $]-\infty,0[$ og voksende på $[0,+\infty[$, og at sinh er voksende.

Funktionernes grafer skitseres let på basis af graferne for funktionerne $\frac{1}{2}e^t$ og $\frac{1}{2}e^{-t}$. Da $e^t \to +\infty$ og $e^{-t} \to 0$ for $t \to +\infty$, ses, at $\cosh t \to +\infty$ for $t \to +\infty$, og altså også for $t \to -\infty$, og at $\sinh t \to +\infty$ for $t \to +\infty$, og altså $\sinh t \to -\infty$ for $t \to -\infty$. Værdimængden for cosh er derfor $[1,+\infty[$, og værdimængden for sinh er hele $\mathbb{R}$.

Af definitionerne følger umiddelbart, at funktionerne for alle t tilfredsstiller grundrelationen





$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

Af denne, i forbindelse med, at cosh er positiv, og sinh afbilder $\mathbb{R}$ på $\mathbb{R}$ og er voksende, fremgår, at den ved parameterfremstillingen $(x,y) = (\cosh t, \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$, bestemte kurve er den højre gren af enhedshyperblen $\{(x,y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$ gennemløbet efter voksende værdier af ordinaten.

Vi vil vise, at parameteren t har den geometriske betydning, at $\frac{1}{2}t$ er det med fortegn regnede areal af sektoren hørende til buen fra (1,0) til (cosh t, sinh t). På grund af symmetrien om x-aksen er det nok at føre beviset for $t > 0$. For det pågældende areal finder vi de to udtryk

$$A = \tfrac{1}{2}\cosh t \sinh t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2-1}\, dx$$

$$A = \int_0^{\sinh t} \sqrt{y^2+1}\, dy - \tfrac{1}{2}\cosh t \sinh t,$$

hvoraf

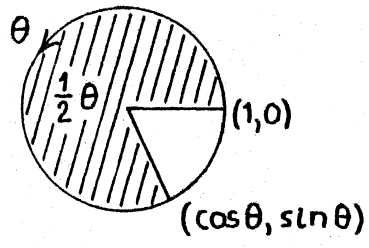
$$2A = \int_0^{\sinh t} \sqrt{y^2+1}\, dy - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2-1}\, dx.$$

I det første integral anvender vi substitutionen $y = \sinh u$, i det andet substitutionen $x = \cosh u$. Vi får da

$$2A = \int_0^t \cosh u\, d(\sinh u) - \int_0^t \sinh u\, d(\cosh u)$$

$$= \int_0^t [\cosh^2 u - \sinh^2 u]du = \int_0^t du = t.$$

Funktionerne cosh og sinh er således karakteriseret ud fra den højre gren af enhedshyperblen $\{(x,y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$ på samme måde som funktionerne cos og sin er karakteriseret ud fra enhedscirklen $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$; thi i stedet for at sige, at $(\cos\theta, \sin\theta)$ er det punkt af cirklen, for hvilket den med fortegn regnede bue fra $(1,0)$ til $(\cos\theta, \sin\theta)$ er θ, kan vi jo også sige, at $(\cos\theta, \sin\theta)$ er det punkt af cirklen, for hvilket det med fortegn regnede areal af den til nævnte bue hørende sektor er $\frac{1}{2}\theta$.



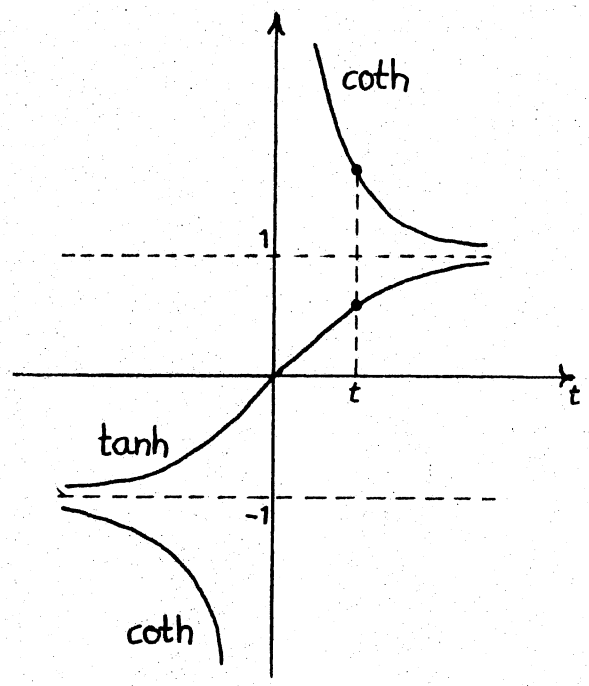
Hyperbolsk tangens og hyperbolsk cotangens. Disse funktioner $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\coth : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ defineres ved

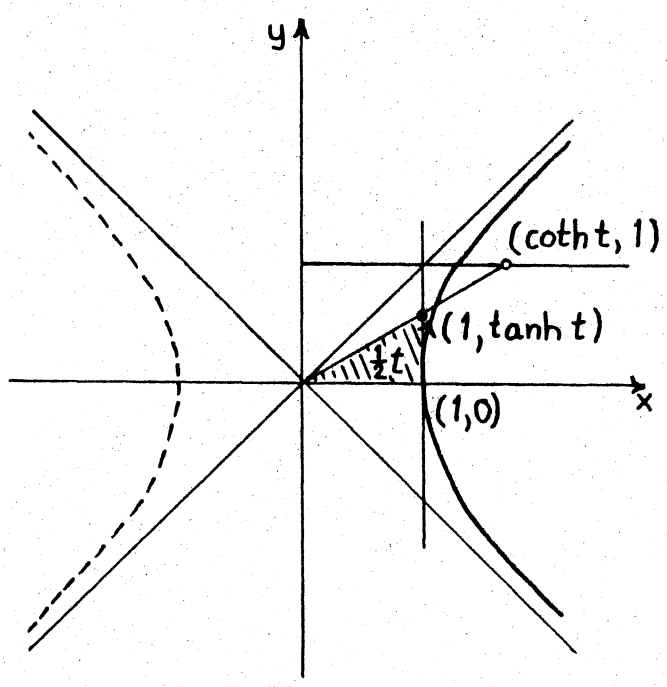
$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}, \qquad \coth t = \frac{\cosh t}{\sinh t} = \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1}$$

De har en geometrisk betydning svarende til den geometriske betydning af tan og cot. De er differentiable med de afledede

$$\frac{d\tanh t}{dt} = \frac{1}{\cosh^2 t} = 1 - \tanh^2 t, \quad \frac{d\coth t}{dt} = -\frac{1}{\sinh^2 t} = 1 - \coth^2 t$$

Funktionerne tanh og coth er begge ulige. Den første er voksende og har for $x \to +\infty$ og $x \to -\infty$ grænseværdierne 1 og -1. Dens værdimængde er derfor intervallet $]-1,1[$. Den anden er aftagende i hvert af intervallerne $]-\infty,0[$ og $]0,+\infty[$ og har for $x \to +\infty$ og $x \to -\infty$ grænseværdierne 1 og -1, medens den går mod $+\infty$ og $-\infty$ for $x \to 0$ fra højre og venstre. Dens værdimængde i de to intervaller er derfor $]-\infty,-1[$ og $]1,+\infty[$. På basis heraf skitseres de to funktioners grafer let.





Formler for de hyperbolske funktioner. Vi har allerede nævnt grundrelationen $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, som af-

spejler funktionernes forbindelse med enhedshyperblen $\{(x,y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$ på samme måde, som relationen $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ afspejler de trigonometriske funktioners forbindelse med enhedscirklen $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Analogien med de trigonometriske funktioner giver sig yderligere til kende ved, at der gælder additionsformlerne

$$\cosh(a + b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$$

$$\sinh(a + b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$$

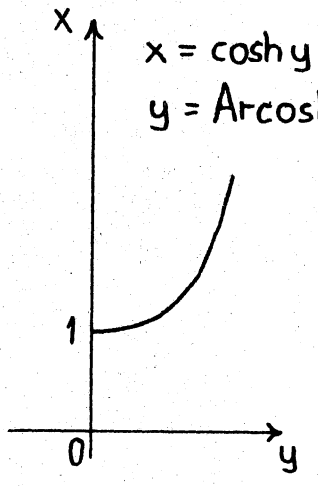
$$\tanh(a + b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1+\tanh a \tanh b}, \quad \coth(a + b) = \frac{1+\coth a \coth b}{\coth a + \coth b},$$

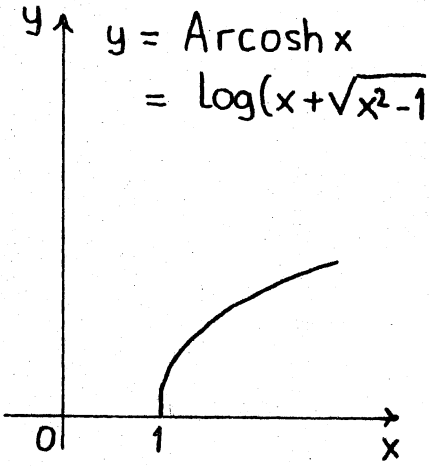
hvor det naturligvis i den sidste må forudsættes, at intet at tallene $a, b, a+b$ er 0. Disse formler verificeres umiddelbart ud fra definitionerne. Man bemærker, at disse formler ligesom grundrelationen svarer til de analoge formler for de trigonometriske funktioner, på nær fortegnsskifte ved led, der er produkt af to sinh-, tanh-, eller coth- faktorer. Denne forskel er let forståelig, når man betænker, at de trigonometriske formler kan verificeres ud fra Eulers formler. Fortegnsafvigelserne kommer fra faktorer $i^2 = -1$ hidrørende fra den faktor $\frac{1}{i}$ eller i, der optræder i Eulers formler for sin, tan og cot.

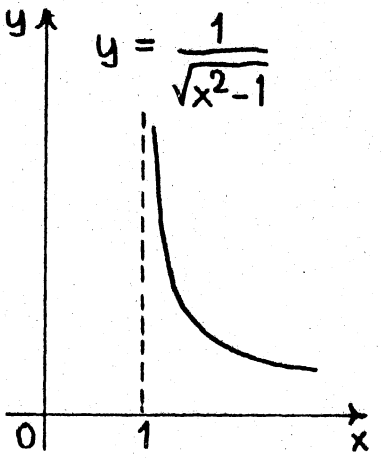
Af additionsformlerne for de hyperbolske funktioner udleder man en række andre formler, der på analog måde modsvarer formler for de trigonometriske funktioner.

De hyperbolske funktioners omvendte funktioner:

Area funktionerne. Restriktionen af funktionen $x = \cosh y$ til intervallet $[0,+\infty[$ er en bijektiv afbildning af $[0,+\infty[$ på intervallet $[1,+\infty[$. Funktionen er voksende og differentiabel med den afledede $\frac{dx}{dy} = \sinh y$, som er 0 i endepunktet 0, medens den er > 0 og altså $= \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$ i intervallet $]0,+\infty[$. Den omvendte funktion, der betegnes $y = \operatorname{Arcosh} x$ er således en bijektiv afbildning af intervallet $[1,+\infty[$ på intervallet $[0,+\infty[$; den er voksende, og den er differentiabel i $]1,+\infty[$ med den afledede $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Ved løsning af ligningen $\frac{e^y + e^{-y}}{2} = x$ (for givet x) finder vi for $y = \operatorname{Arcosh} x$ udtrykket $y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$. [Heraf fås naturligvis også den fundne formel $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.]

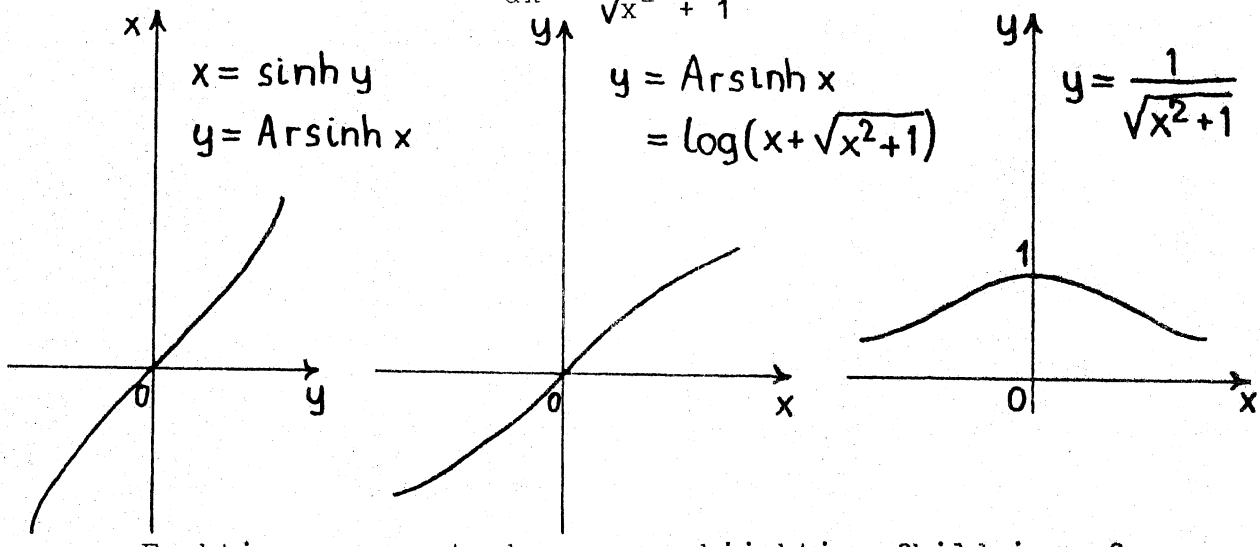




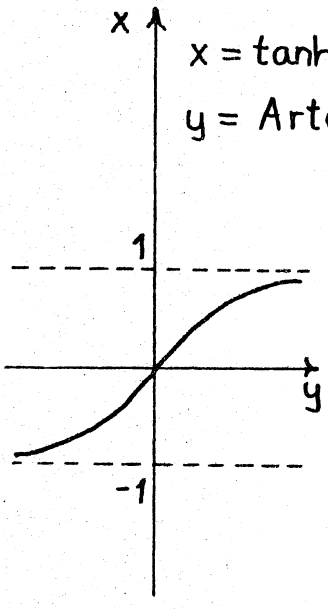


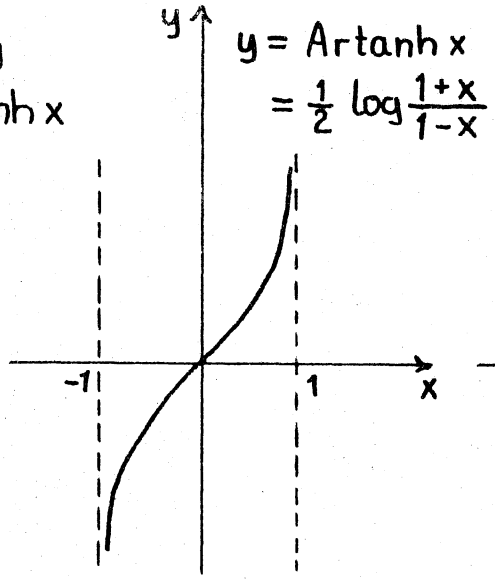
Funktionen $x = \sinh y$ er en bijektiv afbildning af $\mathbb{R}$ på $\mathbb{R}$. Den er voksende og differentiabel med den afledede $\frac{dx}{dy} = \cosh y$ som er > 0 og altså $= \sqrt{\sinh^2 y + 1}$ $= \sqrt{x^2 + 1}$. Den omvendte funktion, der betegnes

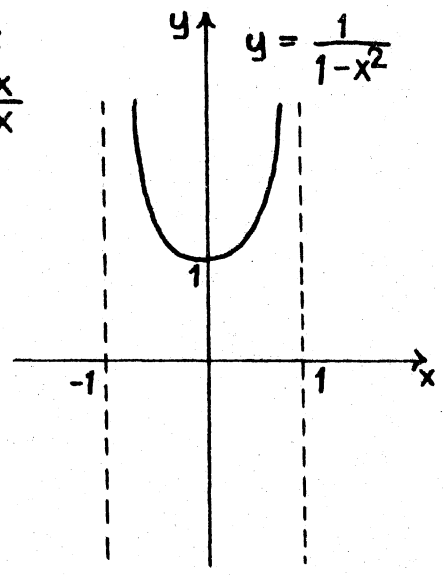
$y = \text{Arsinh}\, x$ er således en bijektiv afbildning af $\mathbb{R}$ på $\mathbb{R}$; den er voksende, og den er differentiabel med den afledede $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Ved løsning af ligningen $\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$ (for givet x) finder vi for $y = \text{Arsinh}\, x$ udtrykket $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$. [Heraf fås naturligvis også den fundne formel $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.]



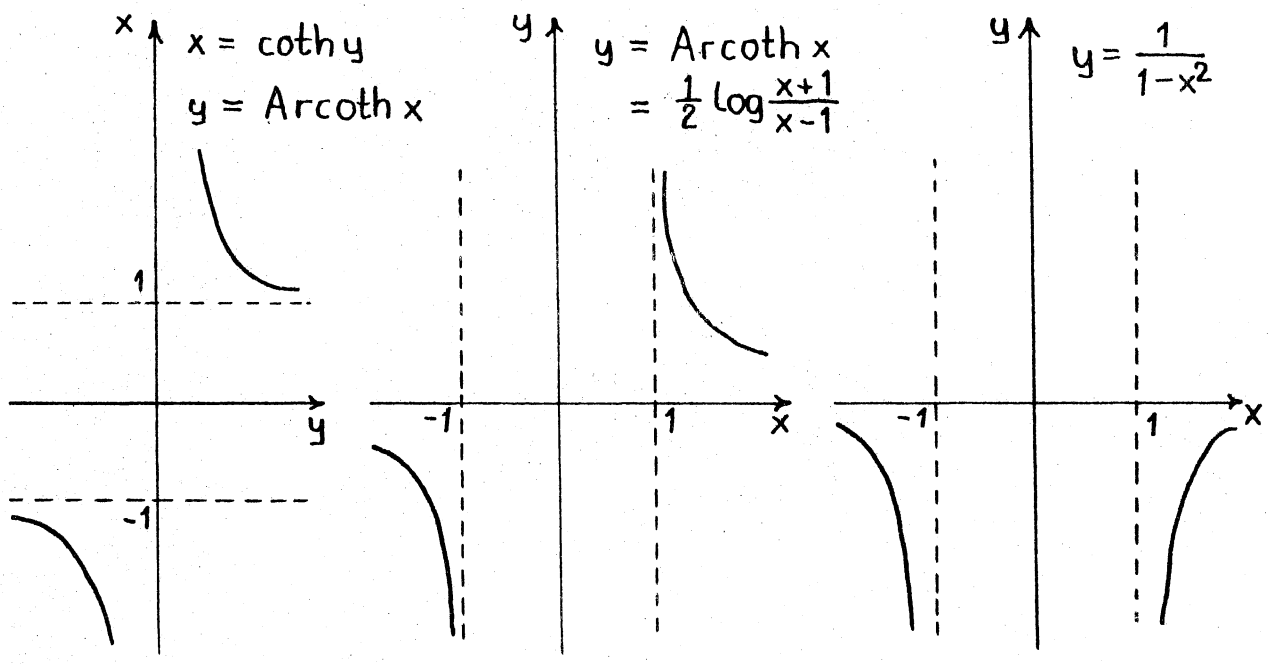
Funktionen $x = \tanh y$ er en bijektiv afbildning af $\mathbb{R}$ på $]-1,1[$. Den er voksende og differentiabel med den afledede $\frac{dx}{dy} = 1 - \tanh^2 y = 1 - x^2$, som er > 0. Den omvendte funktion, der betegnes $y = \text{Artanh}\, x$ er således en bijektiv afbildning af $]-1,1[$ på $\mathbb{R}$; den er voksende, og den er differentiabel med den afledede $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$. Ved løsning af ligningen $\frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = x$ (for givet x) finder man for $y = \text{Artanh}\, x$ udtrykket $y = \frac{1}{2}\log\frac{1 + x}{1 - x}$. [Heraf fås naturligvis også den fundne formel $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$.]







Funktionen $x = \coth y$ afbilder intervallerne $]-\infty,0[$ og $]0,+\infty[$ bijektivt på henh. $]-\infty,-1[$ og $]1,+\infty[$. Den er i hvert af intervallerne aftagende og differentiabel med den afledede $\frac{dx}{dy} = 1 - \coth^2 y = 1 - x^2$, som er < 0. Den omvendte funktion, der betegnes $y = \operatorname{Arcoth} x$ afbilder således intervallerne $]-\infty,-1[$ og $]1,+\infty[$ bijektivt på henh. $]-\infty,0[$ og $]0,+\infty[$; den er i hvert af intervallerne aftagende, og den er differentiabel med den afledede $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$. Ved løsning af ligningen $\frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} = x$ (for givet x) finder man for $y = \operatorname{Arcoth} x$ udtrykket $y = \frac{1}{2}\log \frac{x + 1}{x - 1}$. [Heraf fås naturligvis også den fundne formel $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$.]



Bemærk, at udtrykkene for Artanh x og Arcoth x kan sammenfattes i det ene udtryk $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$, og at Artanh x og Arcoth x har afledede, der bestemmes ved samme udtryk $\frac{1}{1-x^2}$ (betragtet i forskellige intervaller).

Vi sammenfatter de fundne formler:

$\operatorname{Arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$x \in [1, +\infty[$
$\frac{d \operatorname{Arcosh} x}{dx} = \frac{d \log(x + \sqrt{x^2 - 1})}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$x \in]1, +\infty[$
$\operatorname{Arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{d \operatorname{Arsinh} x}{dx} = \frac{d \log(x + \sqrt{x^2 + 1})}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\log \frac{1 + x}{1 - x}$	$x \in]-1, 1[$
$\frac{d \operatorname{Artanh} x}{dx} = \frac{d \frac{1}{2}\log \frac{1 + x}{1 - x}}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$	$x \in]-1, 1[$
$\operatorname{Arcoth} x = \frac{1}{2}\log \frac{x + 1}{x - 1}$	$x \notin [-1, 1]$
$\frac{d \operatorname{Arcoth} x}{dx} = \frac{d \frac{1}{2}\log \frac{x + 1}{x - 1}}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$	$x \notin [-1, 1]$

Som følge af de eksplicite udtryk kunne vi have sparet de særlige funktionstegn for areafunktionerne. Vi har omtalt dem, fordi man undertiden møder dem i literaturen og fordi de erindrer om funktionernes geometriske betydning.

Opgaver. 1. Vis, at hvis to differentiable funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opfylder betingelserne $f(0) = 1$, $g(0) = 0$, $f' = g$, $g' = f$, da er $f = \cosh$ og $g = \sinh$.

2. I parameterfremstillingen $(x,y) = (\cosh t, \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$, for højre gren af enhedshyperblen betragtes t som tiden. Karakteriser hastigheden $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ geometrisk.

3. Udfør beviset for additionsformlerne for de hyperbolske funktioner.

4. Vis, at $1 - \tanh x$ for $x \to +\infty$ er af samme størrelsesorden som e^{-2x}.

5. Find stamfunktioner til Arsinh og Artanh.

§ 18. Eksponentialfunktionen, de trigonometriske funktioner, og de hyperbolske funktioner for kompleks variabel.

Eksponentialfunktionen. Ud fra definitionen af eksponentialfunktionen exp for reel og rent imaginær værdi af den variable definerer vi nu funktionen på hele $\mathbb{C}$, idet vi for $z = x + iy$ sætter

$$\boxed{\exp z = e^z = \exp(x + iy) = \exp x \cdot \exp iy = e^x (\cos y + i \sin y)}.$$

På den reelle og den imaginære akse giver denne formel den i forvejen definerede værdi. Man ser, at der for vilkårlige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gælder

$$\boxed{\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2 \quad \text{eller} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}}.$$

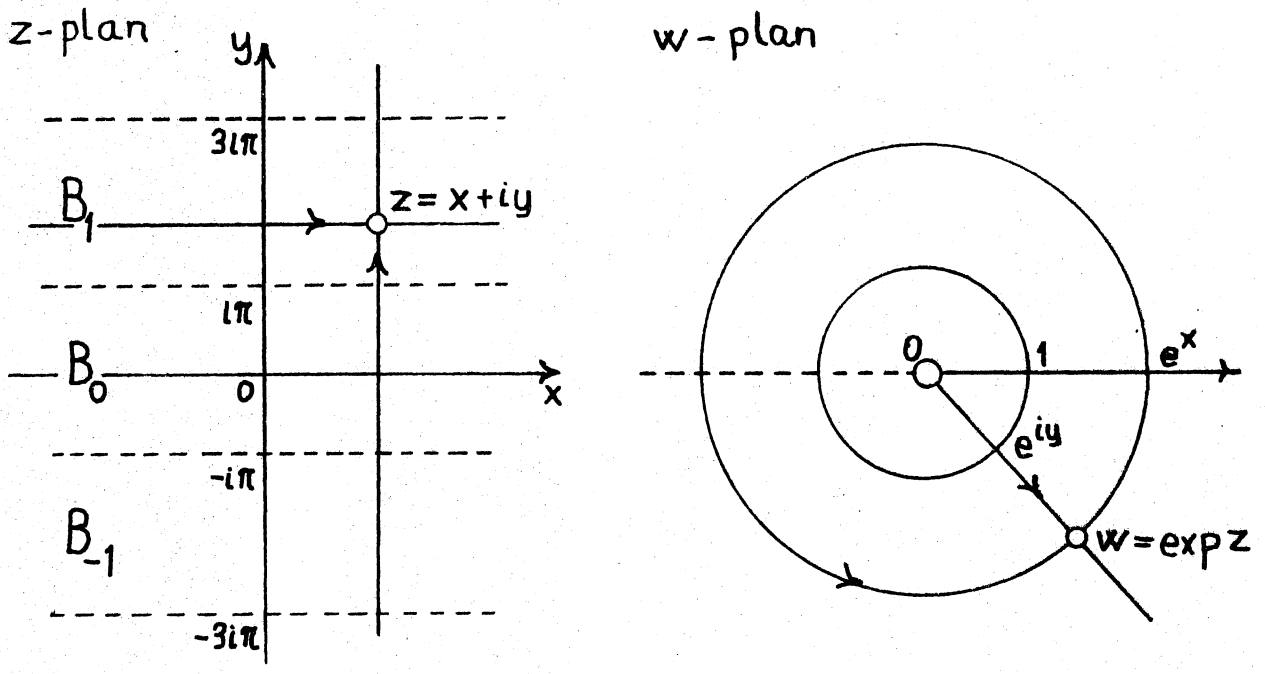
Definitionsligningen $\exp(x + iy) = \exp x \cdot \exp iy$ er et specialtilfælde af denne ligning.

Man bemærker, at $\exp z \neq 0$ for alle $z \in \mathbb{C}$, og at exp har perioden $2\pi i$, d.v.s.

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp z \quad \text{for alle} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ifølge definitionen er billedet af $z = x + iy$ ved afbildningen $w = \exp z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ punktet $w = e^x e^{iy}$ $= e^x \cos y + i\, e^x \sin y$, altså det punkt, hvis polære koordinater er e^x og y. Heraf ses: En ret linie $\{z = x + iy_o \mid x \in \mathbb{R}\}$ parallel med x-aksen afbildes bijektivt på halvlinien $\{w \neq 0 \mid \arg w = y_o\}$; en ret linie $\{z = x_o + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$ parallel med y-aksen

afbildes på cirklen $\{w \mid |w| = e^{x_o}\}$ gennemløbet



uendelig ofte. Billedmængden er således $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Afbildningen $w = \exp z$ er en surjektiv homomorf afbildning af $(\mathbb{C},+)$ på $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$. Hver af strimlerne

$B_p = \{z = x + iy \mid (2p - 1)\pi \leq y < (2p + 1)\pi\}$, $p \in \mathbb{Z}$,

afbildes bijektivt på $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Delelinierne $\{z = x + iy \mid y = (2p - 1)\pi\}$ afbildes alle på halvlinien $\{w \mid w \text{ reel og } < 0\}$.

For et vilkårligt komplekst tal $\lambda = \alpha + i\beta$ kan vi nu danne funktionen $t \mapsto f(t) = \exp\lambda t = e^{\lambda t}$ af den reelle variable t. Vi har

$$f(t) = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t).$$

Man ser, at $f(0) = 1$, og at funktionen er differentiabel med den afledede

$$f'(t) = \alpha e^{\alpha t}e^{i\beta t} + e^{\alpha t}\, i\beta\, e^{i\beta t} = (\alpha+i\beta)e^{\alpha t}e^{i\beta t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

Vi har altså for komplekst λ den samme differentiationsregel

$$\boxed{\frac{d\,\exp\lambda t}{dt} = \lambda\exp\lambda t}$$

som for reelt λ. Vi vil vise, at for ethvert $\lambda \in \mathbb{C}$ er funktionen $z = f(t) = \exp\lambda t$ den eneste differentiable funktion på $\mathbb{R}$, der opfylder betingelserne

$$f(0) = 1, \qquad f'(t) = \lambda f(t).$$

Den er altså karakteriseret ved at være løsning til differentialligningen

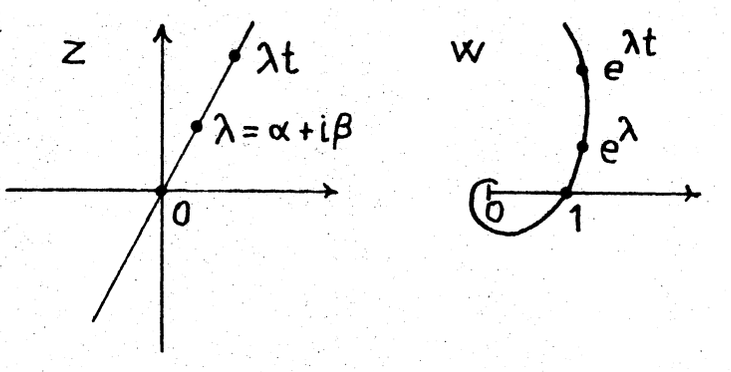
$$\frac{dz}{dt} = \lambda z$$

og opfylde betingelsen $f(0) = 1$. Hvis nemlig $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ opfylder disse betingelser, er funktionen $\varphi(t) = \frac{f(t)}{\exp\lambda t}$ differentiabel med den afledede

$$\varphi'(t) = \frac{f'(t)\exp\lambda t - f(t)\lambda\exp\lambda t}{(\exp\lambda t)^2} = \frac{\lambda f(t) - f(t)\lambda}{\exp\lambda t} = 0.$$

Altså er φ konstant, og da $\varphi(0) = 1$, finder vi $f(t) = \exp\lambda t$.

For givet $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ er $\{z = \lambda t \mid t \in \mathbb{R}\}$ en undergruppe af $(\mathbb{C},+)$. Dens billede ved afbildningen $w = \exp z$ er mængden $\{w = e^{\alpha t}e^{i\beta t} \mid t \in \mathbb{R}\}$, som er en undergruppe af $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$. For $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ er det den kurve i $w = re^{i\theta}$-planen, der i polære koordinater bestemmes ved parameterfremstillingen $(r,\theta) = (e^{\alpha t}, \beta t)$, $t \in \mathbb{R}$, altså ved ligningen $r = e^{\frac{\alpha}{\beta}\theta}$. Det er en såkaldt <u>logaritmisk spiral</u> gennem <u>1</u>.



Øvelse 1. For ethvert $z \in \mathbb{C}$ er følgen $\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right)$ konvergent med grænseværdien $\exp z$:

$$\boxed{\exp z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n}$$

Bevis. For $z = 0$ er sagen klar. Antag $z \neq 0$, og sæt $z = x + iy$. For $n > -x$ ligger $1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}$ til højre for den imaginære akse. Sæt

$$r_n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha_n = \operatorname{Arctan} \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = \operatorname{Arctan} \frac{y}{n + x}.$$

Da er $1 + \frac{z}{n} = r_n e^{i\alpha_n}$, og altså $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n e^{in\alpha_n}$.

For alle n fra et vist trin gælder $\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \neq 0$ og dermed

$$\log r_n^n = \frac{n}{2} \log\left[1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right] = \left(x + \frac{x^2+y^2}{2n}\right) \frac{\log\left[1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right]}{\frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}},$$

hvoraf ses, at $\log r_n^n \to x$ og følgelig $r_n^n \to e^x$ for $n \to \infty$. Endvidere ses, at der for $y \neq 0$ gælder

$$n\alpha_n = n \operatorname{Arctan} \frac{y}{n+x} = \frac{ny}{n+x} \cdot \frac{\operatorname{Arctan} \frac{y}{n+x}}{\frac{y}{n+x}} \to y \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

For $y = 0$ er $\alpha_n = 0$.

Følgelig gælder $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to e^x e^{iy} = e^z$ for $n \to \infty$. ∎

De trigonometriske og de hyperbolske funktioner.

Efter at have defineret eksponentialfunktionen for kompleks variabel kan vi nu også definere de trigonometriske funktioner for kompleks variabel $z = x + iy$. Det sker

ved, at vi i Eulers formler erstatter den reelle variable med en kompleks variabel. Vi sætter altså

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Man ser, at funktionerne cos og sin hermed er defineret på hele $\mathbb{C}$. De har ikke andre nulpunkter end nulpunkterne på $\mathbb{R}$. Thi ligningen $e^{iz} = -e^{-iz}$ eller $e^{2iz} = -1$ har kun løsningerne $z = \frac{1}{2}\pi + p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, og ligningen $e^{iz} = e^{-iz}$ eller $e^{2iz} = 1$ har kun løsningerne $z = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. Funktionerne tan og cot er således defineret henh. på $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\pi + p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}$ og $\mathbb{C} \setminus \{p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}$. De velkendte trigonometriske formler ses let at gælde også for komplekse variable.

På tilsvarende måde defineres de hyperbolske funktioner for kompleks variabel ved formlerne

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Man ser, at de kan udtrykkes ved de trigonometriske funktioner, idet der gælder

$$\cosh z = \cos \frac{z}{i}, \qquad \sinh z = i \sin \frac{z}{i},$$

$$\tanh z = i \tan \frac{z}{i}, \qquad \coth z = \frac{1}{i} \cot \frac{z}{i}.$$

Herefter er det klart, at der til de for de trigonometriske funktioner gældende formler svarer analoge formler for de hyperbolske funktioner; når funktionerne betragtes for kompleks variabel, er det de samme formler, blot skrevet på en anden måde.

Ved behandlingen af polynomier og rationale funktioner, og nu ved behandlingen af eksponentialfunktionen, de trigonometriske funktioner, og de hyperbolske funktioner, har vi set de fordele, der knytter sig til at betragte disse funktioner for kompleks variabel. Da vort egentlige formål kun er at studere funktionerne for reel variabel, vil vi her afstå fra et mere indgående studium af funktionerne for kompleks variabel, som hører hjemme i den almene komplekse funktionsteori.

Øvelse 2. For ethvert $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ har ligningen $\exp z = w$ uendelig mange løsninger $z = x + iy$, bestemt ved $x = \log|w|$, $y = \arg w$, hvor $\arg w$ gennemløber mængden af argumenter for w. Mængden af disse løsninger betegnes $\log w$; dog benyttes denne betegnelse også for enhver af løsningerne. Vi har altså

$$\log w = \log|w| + i \arg w.$$

Den værdi af $\log w$, der svarer til hovedværdien af $\arg w$, altså den værdi, der tilhører strimlen $B_o = \{z = x + iy \mid -\pi \leq y < \pi\}$, kaldes hovedværdien af

log w og betegnes Log w. Vi har altså

$$\text{Log } w = \log|w| + i \text{ Arg } w.$$

For et positivt, reelt tal r betyder log r herefter uendelig mange værdier. Hovedværdien Log r er log r i den sædvanlig betydning, og de øvrige fås ved addition af hele multipla af $2\pi i$. Når man taler om log r for et positivt, reelt tal r, mener man, med mindre andet fremgår af sammenhængen, altid log r i den sædvanlige betydning.

Svarende til denne indførelse af logaritmefunktionen for kompleks variabel kan man på basis af et studium af de ved de trigonometriske funktioner bestemte afbildninger indføre de trigonometriske funktioners omvendte funktioner for kompleks variabel.

For $\lambda = \alpha + i\beta \neq 0$ fås af $\int e^{\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}$ formlen

$$\int e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t)dt = \frac{1}{\alpha + i\beta} e^{\lambda t} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t),$$

altså

$$\boxed{\begin{aligned} \int e^{\alpha t}\cos\beta t dt &= e^{\alpha t} \frac{\alpha\cos\beta t + \beta\sin\beta t}{\alpha^2 + \beta^2} \\ \int e^{\alpha t}\sin\beta t dt &= e^{\alpha t} \frac{-\beta\cos\beta t + \alpha\sin\beta t}{\alpha^2 + \beta^2} \end{aligned}}$$

[Disse formler kan også findes ved brug af delvis integration.]

Opgaver. 1. Find alle kontinuerte funktioner $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, der opfylder funktionalligningen

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2).$$

2. Vis, at additionsformlerne for de trigonometriske funktioner også gælder for komplekse variable.

3. Udled formlen

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

og find en tilsvarende formel for $\sin(x + iy)$.

4. Find alle $z \in \mathbb{C}$, der tilfredsstiller ligningen

$$\cos z + \sin z = i.$$

§ 19. Udvidelse af integralbegrebet.

Definition af det udvidede integralbegreb. Vi har i § 13 defineret integralbegrebet for reelle og komplekse funktioner på et begrænset, afsluttet interval. Lad os nu betragte en funktion $f : A \to \mathbb{C}$ på et vilkårligt begrænset eller ubegrænset interval af en af de øvrige typer. Vi antager, at f er integrabel på ethvert begrænset, afsluttet delinterval af A. Lad $x_o \in A$. Hvis A ikke er opad begrænset eller er opad begrænset men ikke indeholder sit højre endepunkt b, definerer vi integralet af f fra x_o til $+\infty$ eller fra x_o til b som grænseværdien

$$\int_{x_o}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{x_o}^{x} f(t)dt, \text{ resp. } \int_{x_o}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to b} \int_{x_o}^{x} f(t)dt,$$

når grænseværdien eksisterer. Hvis A ikke er nedad begrænset eller er nedad begrænset men ikke indeholder sit venstre endepunkt a, definerer vi integralet fra $-\infty$ til x_o eller fra a til x_o som grænseværdien

$$\int_{-\infty}^{x_o} f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{x_o} f(t)dt, \text{ resp. } \int_{a}^{x_o} f(x)dx = \lim_{x\to a} \int_{x}^{x_o} f(t)dt,$$

når grænseværdien eksisterer. Det er klart, i hvert af de fire tilfælde, at hvis grænseværdien eksisterer for et $x_o \in A$, eksisterer den for ethvert $x_o \in A$. Hvis både en af de to første muligheder og en af de to sidste muligheder indtræffer, definerer vi integralet af f fra $-\infty$ til $+\infty$, fra a til $+\infty$, fra $-\infty$ til b,

eller fra a til b som summen af de to grænseværdier, altså

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{x_o} + \int_{x_o}^{+\infty}, \quad \int_{a}^{+\infty} = \int_{a}^{x_o} + \int_{x_o}^{+\infty}, \quad \int_{-\infty}^{b} = \int_{-\infty}^{x_o} + \int_{x_o}^{b}, \quad \int_{a}^{b} = \int_{a}^{x_o} + \int_{x_o}^{b}.$$

Summen er åbenbart uafhængig af valget af punktet $x_o \in A$.

Eksistensen af integralerne udtrykkes ofte ved at man siger, at funktionen kan integreres ud i $-\infty$ eller $+\infty$ eller ind i a eller b. Man kalder ofte integralerne uegentlige integraler.

For at undgå misforståelser kan man i tilfælde af endelige grænser a og b på integraltegnet tydeliggøre, at talen er om integralet defineret på den angivne måde ved grænseovergang, idet man for eksempel skriver $a\downarrow$ eller $a + 0$ i stedet for a, og $b\uparrow$ eller $b - 0$ i stedet for b. Vi vil dog undlade denne komplikation, idet man i praksis altid vil være klar over, om der "er noget i vejen" i a eller b. I denne forbindelse bemærkes, at hvis integralet $\int_a^b f(x)dx$ af en funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eksisterer i den sædvanlige betydning, eksisterer det også og har samme værdi, når det betragtes som uegentligt integral; thi i så fald er f begrænset, og man ser, at der gælder

$$\lim_{x\to a} \int_a^x f(t)dt = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to b} \int_x^b f(t)dt = 0.$$

Sætninger om det udvidede integralbegreb. I det følgende indskrænker vi os til at betragte kontinuerte funktioner $f : A \to \mathbb{C}$. Hvis F er en stamfunktion til f,

er eksistensen af integralerne ensbetydende med eksistensen af grænseværdier af $F(x)$ for $x \to +\infty$, resp. $x \to b$, og $x \to -\infty$, resp. $x \to a$, og integralernes værdier findes umiddelbart ved hjælp af disse grænseværdier.

Funktionen $x \mapsto x^{\alpha} :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ har stamfunktionen $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, hvis $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, og stamfunktionen $\log x$, hvis $\alpha = -1$. Man ser, at stamfunktionen har grænseværdien 0 for $x \to +\infty$, hvis $\alpha < -1$, medens den for $\alpha \geq -1$ går mod $+\infty$ for $x \to +\infty$, og at den har grænseværdien 0 for $x \to 0$, hvis $\alpha > -1$, medens den for $\alpha \leq -1$ går mod $-\infty$ for $x \to 0$. Følgelig gælder:

Integralet $\int_{x_0}^{+\infty} x^{\alpha}dx$, hvor $x_0 > 0$, eksisterer, hvis og kun hvis $\alpha < -1$, og integralet $\int_{0}^{x_0} x^{\alpha}dx$, hvor $x_0 > 0$, eksisterer, hvis og kun hvis $\alpha > -1$. Integralernes værdier er

$$\int_{x_0}^{+\infty} x^{\alpha}dx = \frac{x_0^{\alpha+1}}{-\alpha-1} \quad (\alpha < -1), \qquad \int_{0}^{x_0} x^{\alpha}dx = \frac{x_0^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha > -1).$$

[I det sidste integral er der naturligvis kun "noget i vejen" i 0, når $\alpha < 0$.]

Ved simple substitutioner ser vi: Funktionen $x \mapsto (x-c)^{\alpha} :]c,+\infty[\to \mathbb{R}$ kan integreres ud i $+\infty$, når $\alpha < -1$, og ind i c, når $\alpha > -1$. Funktionen $x \mapsto (c-x)^{\alpha} :]-\infty,c[\to \mathbb{R}$ kan integreres ud i $-\infty$, når $\alpha < -1$, og ind i c, når $\alpha > -1$.

Eksempler: $\frac{1}{x^2}$ kan integreres ud i $+\infty$ og ud i $-\infty$; $\frac{1}{\sqrt{x}}$ kan integreres ind i 0.

I tilfælde, hvor man ikke kan finde en stamfunktion til den givne funktion f, eller hvor man kun er interesseret i at fastslå eksistensen af integralet, er følgende sætning et værdifuldt hjælpemiddel:

Hvis $f : A \to \mathbb{C}$ er kontinuert, og der findes en kontinuert funktion $g : A \to \mathbb{R}$, således at $|f(x)| \leq g(x)$ for alle $x \in A$, og således at et af integralerne

$$J = \int_{x_o}^{+\infty} g(x)dx, \quad \int_{x_o}^{b} g(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{x_o} g(x)dx, \quad \int_{a}^{x_o} g(x)dx$$

eksisterer, da eksisterer også det tilsvarende af integralerne

$$I = \int_{x_o}^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_{x_o}^{b} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{x_o} f(x)dx, \quad \int_{a}^{x_o} f(x)dx,$$

og der gælder

$$|I| \leq J.$$

Bevis. Vi fører beviset for den første type; for de andre typer føres det på tilsvarende måde.

Vi sætter

$$F(x) = \int_{x_o}^{x} f(t)dt, \quad G(x) = \int_{x_o}^{x} g(t)dt.$$

Da er G voksende, $\lim_{x \to +\infty} G(x) = J$, og for vilkårlige $x,y \in [x_o, +\infty[$ gælder $|F(y) - F(x)| \leq |G(y) - G(x)|$. Vi vælger en følge af tal $x_n \in [x_o, +\infty[$, så at $x_n \to +\infty$ for $n \to \infty$. Da er følgen $(G(x_n))$ konvergent, altså en fundamentalfølge, og vi slutter af uligheden $|F(x_m) - F(x_n)| \leq |G(x_m) - G(x_n)|$, at også følgen $F(x_n)$

er en fundamentalfølge, og derfor konvergent. Lad dens grænseværdi hedde I.

Vælges nu til et givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ et $c \geq x_0$, så at $(0 \leq) J - G(c) < \varepsilon$, og dernæst et n, så at $x_n \geq c$ og $|I - F(x_n)| < \varepsilon$, har vi for alle $x \geq c$ uligheden

$$|I - F(x)| \leq |I - F(x_n)| + |F(x_n) - F(x)|$$

$$< \quad \varepsilon \quad + (J - G(c)) < 2\varepsilon.$$

Altså konvergerer $F(x)$ mod I for $x \to +\infty$.

Uligheden $|I| \leq J$ følger umiddelbart af, at $|F(x)| \leq G(x)$ for alle $x \in [x_0, +\infty[$.

[Beviset kunne have været formet enklere, hvis vi i forbindelse med omtalen af det almindelige konvergensprincip for følger havde behandlet den tilsvarende (yderst nærliggende) sætning for funktioner af en reel variabel.]

<u>Eksempel</u>. Funktionen $\frac{1}{1 + x^2}$ har stamfunktionen Arctan x som for $x \to +\infty$ og $x \to -\infty$ har grænseværdierne $\frac{1}{2}\pi$ og $-\frac{1}{2}\pi$. Idet Arctan 0 = 0 har vi altså

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 + x^2} dx = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = \pi.$$

Eksistensen af integralerne kunne sluttes uden kendskab til stamfunktionen, idet $\frac{1}{1 + x^2}$ er lige og for $x \to +\infty$ er af højst samme størrelsesorden som funktionen $\frac{1}{x^2}$.

Integralerne kan naturligvis tydes som arealer.

To vigtige integraler. Funktionen e^{x^2} går for $x \to +\infty$ hurtigere mod $+\infty$ end enhver potens x^α med $\alpha > 0$; følgelig går e^{-x^2} for $x \to +\infty$ hurtigere mod 0 end enhver potens x^α med $\alpha < 0$; den kan derfor integreres ud i $+\infty$. Vi vil vise:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Vor forhåndsviden om integralets eksistens vil iøvrigt ikke blive benyttet i beviset.

Bevis. Stamfunktionen $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ kan ikke udtrykkes ved de gængse funktionstegn. Vi går frem på følgende måde. Vi betragter

$$G(x) = (F(x))^2 = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$$

og finder

$$G'(x) = 2F(x)\,F'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Substitutionen $t = xu$ giver

$$G'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2u^2}\,x\,du = \int_0^1 2x\,e^{-x^2(u^2+1)}\,du$$

$$= -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-x^2(u^2+1)}}{u^2+1}\right)du = -\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(u^2+1)}}{u^2+1}\,du,$$

hvor vi ved den sidste omskrivning har benyttet sætningen (§ 14) om differentiation af et integral efter en parameter. Altså er funktionen

$$G(x) + \int_0^1 \frac{e^{-x^2(u^2+1)}}{u^2+1}\,du$$

konstant. For $x = 0$ har den værdien $\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{\pi}{4}$.

For alle $x \geq 0$ gælder altså

$$(F(x))^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{e^{-x^2(u^2+1)}}{u^2+1}\,du.$$

Nu gælder $e^{-x^2(u^2+1)} < e^{-x^2}$. Følgelig gælder

$$(0<)\quad \int_0^1 \frac{e^{-x^2(u^2+1)}}{u^2+1}\,du \leq e^{-x^2}\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\,du = e^{-x^2}\frac{\pi}{4},$$

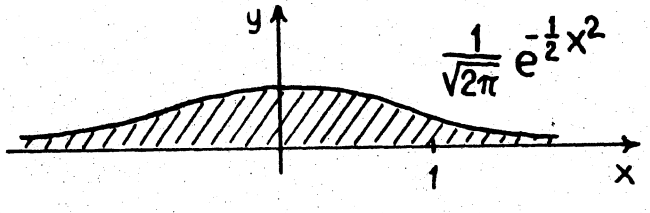
hvoraf ses, at $\int_0^1 \frac{e^{-x^2(u^2+1)}}{u^2+1}\,du \to 0$ for $x \to +\infty$.

Vi finder altså $(F(x))^2 \to \frac{\pi}{4}$ og dermed $F(x) \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

for $x \to +\infty$ (da $F(x) > 0$ for $x > 0$). □

Da e^{-x^2} er lige, har vi naturligvis også $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ og dermed $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Substitutionen $x = \frac{1}{\sqrt{2}}t$ giver

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = 1$$

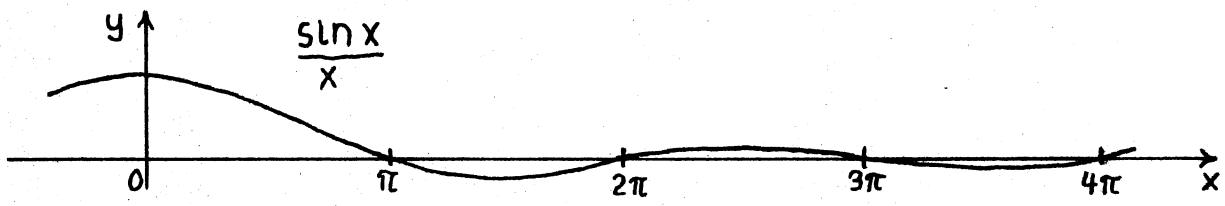


Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ spiller en betydningsfuld rolle bl.a. i teorien for varmeledning og i sandsynlighedsregningen.

Funktionen $\frac{\sin x}{x}$ har for $x \to 0$ grænseværdien 1, og lader vi $\frac{\sin x}{x}$ for $x = 0$ betyde 1, er funktionen kontinuert også i punktet 0. Vi vil vise:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}}$$

Det bemærkes, at eksistensen af integralet ikke kan ses ved sammenligning af $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ med en potens x^{α}, idet vi har $\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{1}{x}$ for $x = (p - \frac{1}{2})\pi$, $p \in \mathbb{N}$.



Bevis. For $a > 0$ og $t \geq 0$ defineres

$$f_a(t) = \int_0^a e^{-xt} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Da er $f_a(0) = \int_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx$, og idet $\left|e^{-xt} \frac{\sin x}{x}\right| \leq e^{-xt}$, har vi for $t > 0$

$$\left|f_a(t)\right| \leq \int_0^a e^{-xt} dx = \frac{1 - e^{-at}}{t} < \frac{1}{t},$$

hvoraf ses, at $f_a(t) \to 0$ for $t \to +\infty$.

Ifølge sætningen (§ 14) om differentiation af et integral efter en parameter og formlen (§ 18) for $\int e^{\alpha x} \sin\beta x\, dx$ finder vi

$$f_a'(t) = \int_0^a \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-xt} \frac{\sin x}{x}\right) dx = -\int_0^a e^{-xt} \sin x\, dx$$

$$= \left[e^{-xt} \frac{\cos x + t \sin x}{1 + t^2}\right]_{x=0}^{x=a}$$

$$= e^{-at} \frac{\cos a + t \sin a}{1 + t^2} - \frac{1}{1 + t^2}.$$

Følgelig er

$$f_a(t) - f_a(0) + \operatorname{Arctan} t = \int_0^t e^{-au} \frac{\cos a + u \sin a}{1 + u^2}\, du.$$

Da $|\cos a + u \sin a| \le \sqrt{1 + u^2} \le 1 + u^2$ for alle u, er

$$\left| \int_0^t e^{-au} \frac{\cos a + u \sin a}{1 + u^2} \, du \right| \le \int_0^t e^{-au} du = \frac{1 - e^{-at}}{a} \le \frac{1}{a} .$$

Der gælder altså

$$|f_a(t) - f_a(0) + \operatorname{Arctan} t| \le \frac{1}{a} .$$

For $t \to +\infty$ gælder som ovenfor vist $f_a(t) \to 0$, og endvidere $\operatorname{Arctan} t \to \frac{1}{2}\pi$. Vi får altså

$$\left| - f_a(0) + \tfrac{1}{2}\pi \right| \le \frac{1}{a} ,$$

d.v.s.

$$\left| \tfrac{1}{2}\pi - \int_0^a \frac{\sin x}{x} \, dx \right| \le \frac{1}{a} .$$

Heraf fremgår, at $\int_0^a \frac{\sin x}{x} \, dx \to \frac{1}{2}\pi$ for $a \to +\infty$. ∎

Da $\frac{\sin x}{x}$ er lige, har vi naturligvis også $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$, og dermed

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = 1.$$

Opgaver. 1. Find $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Gør rede for, at integralernes eksistens kan sluttes uden kendskab til stamfunktionen.

2. Find $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$

3. Vis, at

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cos\alpha x\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{for} \quad |\alpha| < 1 \\ \frac{1}{4}\pi & \text{for} \quad |\alpha| = 1 \\ 0 & \text{for} \quad |\alpha| > 1. \end{cases}$$

4. Vis, at $\frac{1}{x(\log x)^\alpha}$ kan integreres ud i $+\infty$, hvis og kun hvis $\alpha > 1$.

§ 20. Integration af rationale funktioner.

Rationale funktioner over $\mathbb{C}$. Lad $x \mapsto f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ være en rational funktion i $\mathbb{C}(x)$, og betragt den alene for reelle x. Funktionen er åbenbart differentiabel i den del af $\mathbb{R}$, der tilhører definitionsmængden, d.v.s i de intervaller, der fås ved af $\mathbb{R}$ at udelade de eventuelle reelle nulpunkter i nævneren. Den afledede $f' = \frac{F'G - FG'}{G^2}$ er ligeledes en rational funktion. Antages f givet på dekomponeret form

$$f(x) = c_o + c_1 x + \cdots + c_q x^q + \sum_{\rho=1}^{r} \left(\frac{d_{\rho 1}}{x-\alpha_\rho} + \frac{d_{\rho 2}}{(x-\alpha_\rho)^2} + \cdots + \frac{d_{\rho \nu_\rho}}{(x-\alpha_\rho)^{\nu_\rho}} \right),$$

fås

$$f'(x) = c_1 + \cdots + q c_q x^{q-1} - \sum_{\rho=1}^{r} \left(\frac{d_{\rho 1}}{(x-\alpha_\rho)^2} + \frac{2 d_{\rho 2}}{(x-\alpha_\rho)^3} + \cdots + \frac{\nu_\rho d_{\rho \nu_\rho}}{(x-\alpha_\rho)^{\nu_\rho+1}} \right),$$

således at f' altså fås på dekomponeret form. Man bemærker, at der i f' ikke forekommer stambrøker, i hvilke eksponenten i nævneren er 1, og at omvendt enhver rational funktion, i hvis dekomposition sådanne stambrøker ikke forekommer, er afledet af en rational funktion.

For at finde en stamfunktion til en vilkårlig rational funktion mangler vi således blot at finde stamfunktioner til stambrøker $\frac{1}{x-\alpha}$.

Hvis α er reel, drejer det sig om at finde en stamfunktion på hver af de to halvlinier $]-\infty,\alpha[$ og $]\alpha,+\infty[$. Man ser, at

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \log(x-\alpha) \quad \text{på} \quad]\alpha,+\infty[,$$

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \log(\alpha-x) \quad \text{på} \quad]-\infty,\alpha[,$$

så at vi som fælles udtryk kan benytte

$$\boxed{\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \log|x-\alpha|, \quad x \neq \alpha}.$$

Hvis α er imaginær, lad os sige $\alpha = \xi + i\eta$ $(\eta \neq 0)$ er $\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x-\xi-i\eta}$ defineret på hele $\mathbb{R}$. For at finde en stamfunktion skriver vi funktionen på formen

$$\frac{1}{x-\xi-i\eta} = \frac{x-\xi+i\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2} = \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+\eta^2} + i\,\frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}$$

og ser, at den har stamfunktionen

$$\boxed{\int \frac{1}{x-\xi-i\eta}\,dx = \frac{1}{2}\log\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right] + i \operatorname{Arctan}\frac{x-\xi}{\eta}}.$$

Vi har således følgende sætning:

<u>En stamfunktion til en funktion</u> $f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ <u>i</u> $\mathbb{C}(x)$ <u>kan i ethvert interval på</u> $\mathbb{R}$, <u>der ikke indeholder noget nulpunkt for nævnerpolynomiet, skrives som sum af en rational funktion og en linearkombination med koefficienter i</u> $\mathbb{C}$ <u>af funktioner af formen</u> $\log|x-\alpha|$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $\log[(x-\xi)^2+\eta^2]$ $(\xi,\eta \in \mathbb{R})$, $\operatorname{Arctan}\frac{x-\xi}{\eta}$ $(\xi,\eta \in \mathbb{R})$.

Udtrykket er det samme i alle sådanne intervaller, men vi kan naturligvis i de forskellige intervaller dis-

ponere forskelligt over den additive konstant.

Rationale funktioner over $\mathbb{R}$. Hvis $f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ tilhører $\mathbb{R}(x)$, kan resultatet af integrationen skrives på reel form.

Polynomiumsdelen af f har reelle koefficienter og volder derfor intet problem. Stambrøkerne hørende til reelle rødder i nævneren har reelle tællere og volder derfor heller intet problem. Tilbage er stambrøkerne hørende til de imaginære rødder i nævneren. For et par af konjugerede imaginære rødder $\xi + i\eta$ og $\xi - i\eta$ har bidraget til f formen

$$\frac{d_1}{x-(\xi+i\eta)} + \ldots + \frac{d_\mu}{(x-(\xi+i\eta))^\mu} + \frac{\overline{d_1}}{x-(\xi-i\eta)} + \ldots + \frac{\overline{d_\mu}}{(x-(\xi-i\eta))^\mu} .$$

Stambrøkerne med nævnereksponent > 1 bidrager til stamfunktionen med udtrykket

$$-\frac{d_2}{x-(\xi+i\eta)} - \ldots - \frac{1}{\mu-1}\frac{d_\mu}{(x-(\xi+i\eta))^{\mu-1}} - \frac{\overline{d_2}}{x-(\xi-i\eta)} - \ldots - \frac{1}{\mu-1}\frac{\overline{d_\mu}}{(x-(\xi-i\eta))^{\mu-1}}$$

der som tidligere vist kan skrives på formen

$$\frac{p_1 x+q_1}{(x-\xi)^2+\eta^2} + \ldots + \frac{p_{\mu-1}x+q_{\mu-1}}{((x-\xi)^2+\eta^2)^{\mu-1}} ,$$

hvor tællerne tilhører $\mathbb{R}[x]$. Tilbage er stambrøkerne med nævnereksponent 1. Sættes $d_1 = a+ib$, er $\overline{d_1} = a-ib$, og bidraget til stamfunktionen bliver

$$(a+ib)\left(\frac{1}{2}\log[(x-\xi)^2+\eta^2] + i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x-\xi}{\eta}\right)$$
$$+ (a-ib)\left(\frac{1}{2}\log[(x-\xi)^2+\eta^2] + i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x-\xi}{-\eta}\right),$$

der omskrives til

$$a \log[(x-\xi)^2+\eta^2] - 2b \operatorname{Arctan} \frac{x-\xi}{\eta} .$$

Hermed er stamfunktionen som ønsket udtrykt på reel form.

Eksempel 1. I simple tilfælde vil det ofte være således, at man hurtigt finder dekompositionen på reel form, og det vil da være naturligt også at foretage integrationen uden at forlade det reelle område. Således har vi tidligere (§ 12) fundet

$$\frac{3x}{x^3 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} .$$

Vi har altså

$$\int \frac{3x}{x^3 - 1}\, dx = \log|x - 1| - \int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx$$

For at finde det sidste integral foretager vi omskrivningen

$$\frac{x - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{2} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \sqrt{3} \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

og får

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}\, dx = \frac{1}{2} \log[x^2 + x + 1] - \sqrt{3} \operatorname{Arctan} \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

Eksempel 2. Undertiden kan det være en fordel at undlade dekompositionen og i stedet benytte sig af, at man kender stamfunktionens form. Som eksempel vil vi bestemme

$$I(x) = \int \frac{3x^5 + 5x^3 + x - 1}{x^2(x^2 + 1)^2}\, dx .$$

Da tælleren i funktionen under integraltegnet er af lavere grad end nævneren, optræder i dekompositionen i $\mathbf{C}(x)$ kun stambrøker med nævnerne $x, x^2, x-i, (x-i)^2, x+i, (x+i)^2$. Af den almene diskussion ovenfor fremgår derfor, at der findes en stamfunktion af formen

$$c_1 \log|x| + \frac{c_2}{x} + c_3 \log(x^2+1) + c_4 \operatorname{Arctan} x + \frac{c_5 x + c_6}{x^2+1}$$

med reelle koefficienter. Ved differentiation fås ligningen

$$\frac{c_1}{x} - \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3 2x}{x^2+1} + \frac{c_4}{x^2+1} + \frac{c_5(-x^2+1)-c_6 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^5+5x^3+x-1}{x^2(x^2+1)^2}$$

til bestemmelse af koefficienterne. Multiplikation med $x^2(x^2+1)^2$ giver

$$c_1 x(x^2+1)^2 - c_2(x^2+1)^2 + c_3 2x^3(x^2+1) + c_4 x^2(x^2+1) + c_5 x^2(-x^2+1) - c_6 2x^3 = 3x^5 + 5x^3 + x - 1.$$

$x = 0$ giver $-c_2 = -1$, altså $\underline{c_2 = 1}$.

$x = i$ giver $-c_5 2 + c_6 2i = -1 - i$, altså $\underline{c_5 = \frac{1}{2}}$, $\underline{c_6 = -\frac{1}{2}}$.

Indsættes disse værdier fås

$$c_1 x(x^2+1)^2 + c_3 2x^3(x^2+1) + c_4 x^2(x^2+1) = 3x^5 + \tfrac{3}{2}x^4 + 4x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + x$$
$$= x(x^2+1)(3x^2 + \tfrac{3}{2}x + 1),$$

hvoraf ved forkortning

$$c_1(x^2+1) + c_3 2x^2 + c_4 x = 3x^2 + \tfrac{3}{2}x + 1.$$

$x = 0$ giver $\underline{c_1 = 1}$.

$x = i$ giver $-c_3 2 + c_4 i = -2 + \frac{3}{2}i$, altså $\underline{c_3 = 1}$, $\underline{c_4 = \frac{3}{2}}$.

Vi har altså

$$I(x) = \log|x| + \frac{1}{x} + \log(x^2+1) + \frac{3}{2}\operatorname{Arctan} x + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$= \frac{3x^2 - x + 2}{2x(x^2+1)} + \log|x^3 + x| + \frac{3}{2}\operatorname{Arctan} x$$

Eksempel 3. En stamfunktion til en rational funktion kan i mange tilfælde findes (eller bestemmelsen kan tilbageføres til en simplere opgave) ved brug af de almene integrationsregler. Således finder man

$$\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}dx = \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^3}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(x^2+1)^2} + \int x \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1} \cdot$$

Opgaver. 1. Find $\int \frac{x - i}{(x + i)^2} dx$.

2. Find $\int \frac{x^3 - 4x + 9}{x^2(x - 1)(x + 2)} dx$.

3. Find $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^4 - 1} dx$

4. Find $\int \frac{1}{x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1)} dx$.

5. Find $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1 + x)^3} dx$.

6. Find $\int_3^{+\infty} \frac{x^3}{(4 - x^2)^3} dx$.

7. Find $\int \frac{x^2 + 4x - 7}{x^3 - 4x^2 + 9x - 10} dx$.

§ 21. Integration af forskellige typer af funktioner.

For en række funktionstyper kan integrationen udføres, idet man ved en egnet substitution reducerer opgaven til integration af en rational funktion.

En rational funktion af cos og sin. Lad R være en rational funktion af to variable, altså en funktion af formen

$$(u,v) \mapsto R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)} ,$$

hvor P og Q er polynomier, og Q ikke er nulpolynomiet. Indsættes $(u,v) = (\cos x, \sin x)$ fås en funktion

$$x \mapsto f(x) = R(\cos x, \sin x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} ,$$

som naturligvis kun er defineret for de x, for hvilke $Q(\cos x, \sin x) \neq 0$. En sådan funktion f kaldes en rational funktion af cos og sin; den har åbenbart perioden 2π, og den er kontinuert i ethvert interval, hvori den er defineret.

Idet vi foreløbig ser bort fra punkterne $(2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, selv om funktionen skulle være defineret i disse punkter, betragter vi den i periodeintervallet $]-\pi,\pi[$. Vi anvender substitutionen

$$t = \tan \frac{x}{2} \qquad -\pi < x < \pi$$

$$x = 2 \operatorname{Arctan} t \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt \qquad -\infty < t < +\infty .$$

Da x er en strengt voksende differentiabel funktion af t, og t-intervallet $]-\infty,+\infty[$ afbildes på x-intervallet $]-\pi,\pi[$, er forudsætningerne for anvendelse af den anden formel for

integration ved substitution opfyldt. Idet

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

finder vi

$$F(x) = \int f(x)dx = \left[\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt\right]_{t=\tan\frac{x}{2}},$$

gældende i ethvert delinterval af $]-\pi,\pi[$, hvori f er defineret. Opgaven er således reduceret til integration af en rational funktion. Sættes

$$G(t) = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt,$$

kan G ifølge § 20 udtrykkes ved hjælp af rationale funktioner og funktionerne log og Arctan, og F bliver altså udtrykt ved hjælp af disse funktioner og funktionen tan. Da udtrykket $F(x) = G(\tan\frac{x}{2})$ har perioden 2π, er den herved bestemte funktion F stamfunktion til f på ethvert interval, hvori f er defineret, og som ikke indeholder noget af punkterne $(2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. I ethvert sådant interval fås samtlige stamfunktioner til f ved addition af en vilkårlig konstant. I tilfælde af, at f er defineret også i punkterne $(2p+1)\pi$, kan de additive konstanter vælges således, at den fremkomne funktion F^* får samme grænseværdi fra venstre og højre i disse punkter. Når F^* i disse punkter tillægges denne værdi, bliver F^* stamfunktion i ethvert interval, hvori funktionen f er defineret.

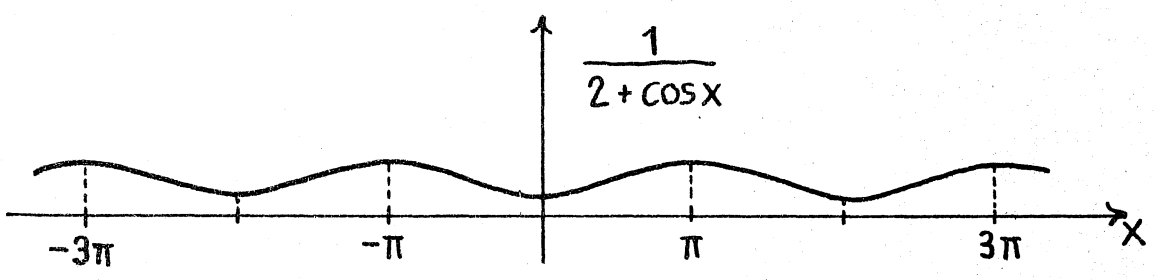
Eksempel. Vælges $R(u,v) = \frac{1}{2+u}$, fås

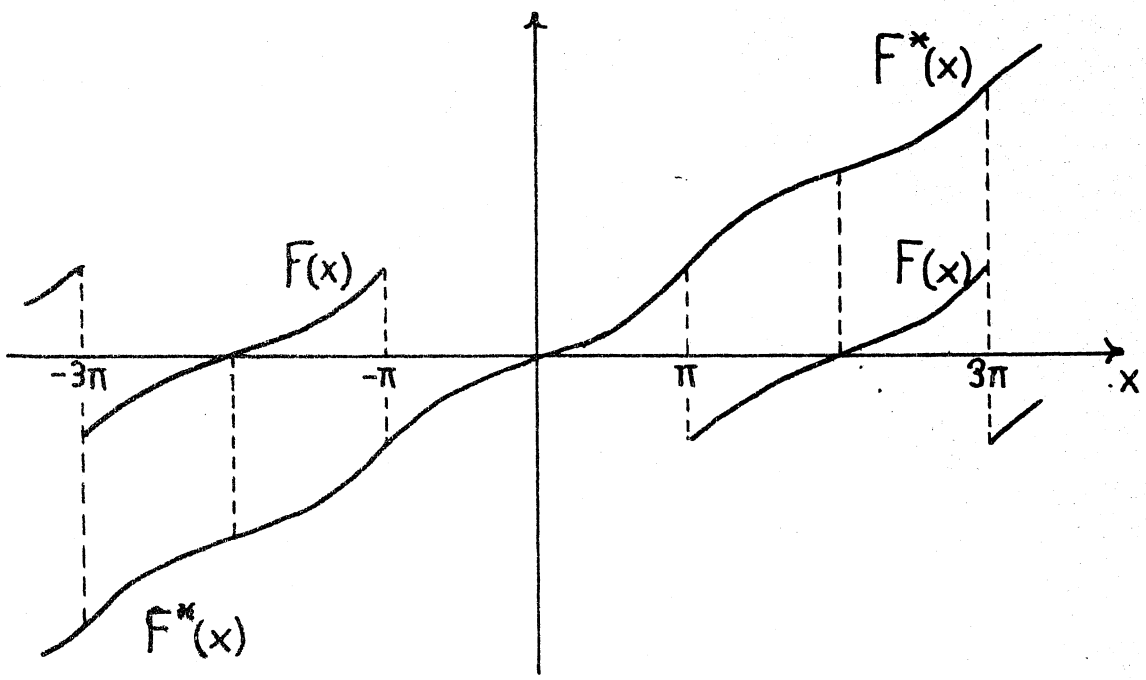
$$F(x) = \int \frac{1}{2+\cos x}dx = \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{3+t^2}dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2} \frac{dt}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Funktionen $\frac{1}{2+\cos x}$ er defineret på hele $\mathbb{R}$. Den fundne funktion $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}$ er stamfunktion på hvert interval $](2p-1)\pi,(2p+1)\pi[$, og har i hvert af punkterne $(2p+1)\pi$ grænseværdierne $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ fra venstre og $-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ fra højre. En stamfunktion på hele $\mathbb{R}$ er derfor

$$F^*(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + p\,\frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{for } x \in](2p-1)\pi,(2p+1)\pi[\\ (2p+1)\frac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{for } x = (2p+1)\pi. \end{cases}$$





Specielle tilfælde. Den anvendte substitution fører ofte til lange regninger. I specielle tilfælde kan følgende metoder anbefales:

A. Hvis udtrykket for $f(x)$ kan omformes til

$$S(\cos x)\sin x \quad \text{eller} \quad S(\sin x)\cos x,$$

hvor S er en rational funktion af en variabel, kan integrationen udføres ved substitutionen $t = \cos x$ eller $t = \sin x$, idet den første formel for integration ved substitution giver

$$\int S(\cos x)\sin x\, dx = \left[-\int S(t)dt\right]_{t=\cos x},$$

$$\int S(\sin x)\cos x\, dx = \left[\int S(t)dt\right]_{t=\sin x}.$$

B. Hvis udtrykket for $f(x)$ kan omformes til

$$S(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{eller} \quad S(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x}$$

hvor S er en rational funktion af en variabel, kan integrationen på tilsvarende måde udføres ved substitutionen $t = \tan x$ eller $t = \cot x$. Idet $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ og $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$, ser man iøvrigt, at de to former kommer ud på et med, at $f(x)$ kan omformes til $S_1(\tan x)$ eller $S_1(\cot x)$, hvor S_1 er en rational funktion. Da $\tan x$ og $\cot x$ er reciprokke, kan man naturligvis komme fra hver af de to former til den anden.

C. Hvis f er et polynomium i cos og sin, kan integrationen udføres ved, at man (i reglen enklest ved brug af Eulers formler, jfr. § 16) omformer udtrykket til en linearkombination af funktionerne $\cos nx$ og $\sin nx$.

Vi viser metoderne på en række eksempler.

Eksempler.

A. $\dfrac{\cos^5 x+\cos x}{2-\cos^2 x} = \dfrac{(\cos^4 x+1)\cos x}{2-\cos^2 x} = \dfrac{(1-\sin^2 x)^2+1}{1+\sin^2 x}\cos x.$ $t = \sin x$

$$\int \frac{\cos^5 x+\cos x}{2-\cos^2 x}dx = \int \frac{(1-t^2)^2+1}{1+t^2}dt = \int \frac{2-2t^2+t^4}{1+t^2}dt$$

$$= \int (t^2-3+\frac{5}{1+t^2})dt = \frac{1}{3}\sin^3 x - 3\sin x + 5\,\mathrm{Arctan}(\sin x).$$

B 1. $$\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x} = \int \frac{1}{1+4\tan^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \left[\int \frac{1}{1+4t^2}dt\right]_{t=\tan x} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(2\tan x).$$

Denne regning er gyldig i ethvert af intervallerne $](p-\frac{1}{2})\pi,(p+\frac{1}{2})\pi[$, $p \in \mathbb{Z}$. En stamfunktion på hele $\mathbb{R}$ bestemmes ved

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(2\tan x)+\frac{1}{2}p\pi & \text{for } x \in](p-\frac{1}{2})\pi,(p+\frac{1}{2})\pi[\\ (p+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi & \text{for } x = (p+\frac{1}{2})\pi. \end{cases}$$

Skitser graferne for $\dfrac{1}{1+3\sin^2 x}$, $\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(2\tan x)$, og $F(x)$.

B 2. $$\int (\frac{\cos x \sin x}{\cos^3+\sin^3 x})^2 dx = \int \frac{\tan^2 x}{(1+\tan^3 x)^2}\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}\int \frac{d(1+\tan^3 x)}{(1+\tan^3 x)^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{1+\tan^3 x} = -\frac{1}{3}\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}.$$

På den sidst anførte form er resultatet en stamfunktion på ethvert interval, hvor den integrerede funktion er defineret.

C. $$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{64} \int \left[e^{6ix}+e^{-6ix}-2\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right) - \left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+4\right] dx$$

$$= \frac{1}{32} \int (\cos 6x - 2 \cos 4x - \cos 2x + 2) dx$$

$$= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{6}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + 2x\right).$$

En rational funktion af cosh og sinh. Her kan man benytte metoder analoge til de ovenfor omtalte, eller man kan bemærke, at funktionen kan skrives som en rational funktion af e^x og benytte substitutionen $t = e^x$.

Eksempler.

$$\int \frac{1}{1+\tanh^2 x} dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1-\tanh^2 x}{1+\tanh^2 x} + 1\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d \tanh x}{1+\tanh^2 x} + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(\tanh x) + \frac{1}{2}x.$$

$$\int \frac{1}{\cosh x} dx = \int \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x} dx = \operatorname{Arctan}(\sinh x).$$

$$\int \frac{1}{\cosh x} dx = \int \frac{2e^x}{(e^x)^2+1} dx = 2 \operatorname{Arctan}(e^x).$$

[Det bemærkes, at $2 \operatorname{Arctan}(e^x) = \operatorname{Arctan}(\sinh x) + \frac{1}{2}\pi$.]

En rational funktion af x og en rodstørrelse $\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$.

Lad n være et helt tal ≥ 2, og $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle tal, Vi vil forudsætte at

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

idet i modsat fald enten et af talparrene (α,β) og (γ,δ) er $(0,0)$, eller talparrene er proportionale. Lad R være en rational funktion af to variable. Funktionen

$$x \mapsto f(x) = R(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}})$$

er åbenbart kontinuert i ethvert interval, hvori den er defineret. For at finde dens integral i ethvert sådant interval anvender vi substitutionen

$$t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$$

$$x = \frac{\delta t^n - \beta}{-\gamma t^n + \alpha}, \quad dx = n\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)t^{n-1}}{(-\gamma t^n+\alpha)^2}dt$$

Selve udregningen viser, at x-intervallet ved $t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ afbildes injektivt, altså bijektivt på et vist t-interval; omvendt afbilder $x = \frac{\delta t^n - \beta}{-\gamma t^n+\alpha}$ altså t-intervallet bijektivt på x-intervallet. Da x er en differentiable funktion af t, er forudsætningerne for anvendelse af den anden formel for integration ved substitution opfyldt. Vi finder

$$F(x) = \int f(x)dx = \left[\int R(\frac{\delta t^n - \beta}{-\gamma t^n+\alpha}, t)n\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)t^{n-1}}{(-\gamma t^n+\alpha)^2}dt\right]_{t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}}$$

Opgaven er således reduceret til integration af en rational funktion.

Eksempel. Funktionen $\frac{1}{x^2(\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}})}$ er defineret på intervallerne $]-\infty,-1[$ og $]0,+\infty[$. For at integrere den anvender vi substitutionen

$$t = \sqrt[6]{\frac{x+1}{x}}, \quad x = \frac{1}{t^6-1}, \quad dx = -\frac{6t^5}{(t^6-1)^2}dt.$$

Til de to x-intervaller svarer t-intervallerne $]0,1[$ og $]1,+\infty[$. Vi finder

$$\int \frac{dx}{x^2(\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}})} = \int \frac{1}{(\frac{1}{t^6-1})^2(t^3+t^2)}\cdot\left(-\frac{6t^5}{(t^6-1)^2}\right)dt$$

$$= -6\int \frac{t^3}{t+1}dt = -6\int(t^2-t+1-\frac{1}{t+1})dt$$

$$= -6\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \log(1+t)\right]$$

$$= -2\sqrt{\frac{x+1}{x}} + 3\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 6\sqrt[6]{\frac{x+1}{x}} + 6\log(1+\sqrt[6]{\frac{x+1}{x}}).$$

En rational funktion af x og en rodstørrelse $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Lad a,b,c være reelle tal. Vi vil antage, at a og $b^2 - 4ac$ er $\neq 0$. Af omskrivningen

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

ses, at hvis $\sqrt{|a|}(x+\frac{b}{2a})$ benyttes som ny variabel, hvilket blot er en lineær substitution, overføres rodstørrelsen i $\sqrt{k-x^2}$ eller $\sqrt{x^2+k}$, hvor $k \neq 0$. Disse to tilfælde vil vi behandle hvert for sig.

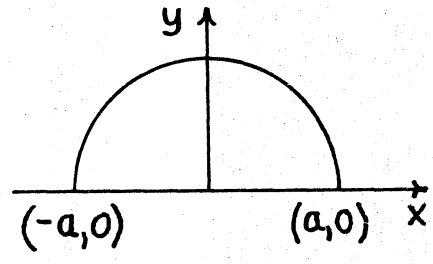
A. Rational funktion af x og $\sqrt{k-x^2}$. Her kan vi antage, at $k > 0$, idet rodstørrelsens definitionsmængde ellers er tom. Vi sætter $\sqrt{k} = a$.

Opgaven er da at integrere funktionen

$$x \mapsto f(x) = R(x,\sqrt{a^2-x^2}),$$

hvor R er en rational funktion af to variable. Funktionen er kontinuert i ethvert interval, hvori den er defineret; disse intervaller er naturligvis indeholdt i rodstørrelsens definitionsinterval $[-a,a]$.

Når x gennemløber intervallet $[-a,a]$, vil $(x,y) = (x,\sqrt{a^2-x^2})$ gennemløbe en halvcirkelbue. At finde en egnet substitution kommer derfor ud på at finde en simpel parameterfremstilling for halvcirkelbuen. Nærliggende er den trigonometriske parameterfremstilling



$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le \pi .$$

Benyttes i stedet $\tan\frac{t}{2}$ som parameter, fås en rational parameterfremstilling

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y &= a\,\frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t < +\infty,$$

hvor punktet $(-a,0)$ dog ikke kommer med.

Disse parameterfremstillinger modsvares af substitutionerne

$$x = a\cos t, \qquad t = \operatorname{Arccos}\frac{x}{a} \qquad -a \le x \le a$$

$$\sqrt{a^2-x} = a\sin t, \qquad dx = -a\sin t\,dt \qquad 0 \le t \le \pi$$

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad t = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \qquad -a < x \le a$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\frac{2t}{1+t^2}, \qquad dx = -a\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt \qquad 0 \le t < +\infty$$

Man ser, at betingelserne for anvendelse af den anden formel for integration ved substitution er opfyldt. Ved anvendelse af substitutionerne reduceres opgaven til integration af en rational funktion af cos og sin, resp. en rational funktion.

<u>Eksempel</u>. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. $\quad x \in]-1,0[, \quad x \in]0,1[$.

Benyttes substitutionen $x = \cos t$, fås

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\sin t}{\cos^2 t \sin t}dt = -\tan t = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Benyttes substitutionen $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, fås

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}\,\frac{1+t^2}{2t}\,\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt = -\int \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}dt$$

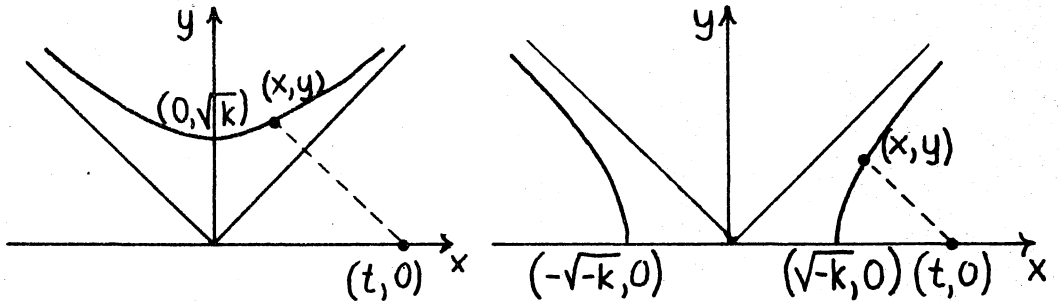
$$= -\int\left(\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1-t)^2}\right)dt = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t} = -\frac{2t}{1-t^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

<u>B. Rational funktion af x og $\sqrt{x^2+k}$</u>. Opgaven er at integrere funktionen

$$x \mapsto f(x) = R(x, \sqrt{x^2+k}),$$

hvor R er en rational funktion af to variable. Funktionen er kontinuert i ethvert interval, hvori den er defineret; disse intervaller er naturligvis indeholdt i rodstørrelsens definitionsmængde, som for $k > 0$ er hele $\mathbb{R}$ og for $k < 0$ er de to intervaller $]-\infty,-\sqrt{-k}\,[$ og $]\sqrt{-k},+\infty[$.

Man ser, at når x gennemløber rodstørrelsens definitionsmængde, vil $(x,y) = (x, \sqrt{x^2+k})$ gennemløbe den del af den ligesidede hyperbel med ligningen $y^2 - x^2 = k$, der er beliggende i halvplanen $\{(x,y) \mid y \geq 0\}$.



$k > 0$ $k < 0$

Sættes $x + y = t$, er $(t,0)$ skæringspunktet mellem x-aksen og linien gennem (x,y) med hældningskoefficient -1. Idet $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = -k$, finder vi $x - y = -\frac{k}{t}$ og dermed parameterfremstillingen

$$x = \frac{1}{2}(t-\frac{k}{t})$$

$$y = \frac{1}{2}(t+\frac{k}{t}).$$

Til den betragtede del af hyperblen svarer følgende parameterintervaller

$$\text{for } \underline{k > 0}: \quad 0 < t < +\infty$$

$$\text{for } \underline{k < 0}: \quad -\sqrt{-k} \leq t < 0 \quad \text{og} \quad \sqrt{-k} \leq t < +\infty.$$

Den til parameterfremstillingen svarende substitution er

$$x = \frac{1}{2}(t-\frac{k}{t}), \qquad t = x + \sqrt{x^2+k}$$

$$\sqrt{x^2+k} = \frac{1}{2}(t+\frac{k}{t}), \qquad dx = \frac{1}{2}(1+\frac{k}{t^2})dt.$$

Man ser, at betingelserne for anvendelse af den anden formel for integration ved substitution er opfyldt. Ved anvendelse af substitutionen reduceres opgaven til integration af en rational funktion.

I tilfældet $\underline{k > 0}$ kan vi, idet vi sætter $\sqrt{k} = a$, også benytte parameterfremstillingen

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sinh t \\ y &= a \cosh t \end{aligned}\right\} \quad -\infty < t < +\infty$$

for hyperbelgrenen. Den giver substitutionen

$$x = a \sinh t, \qquad t = \log(\frac{x}{a}+\sqrt{(\frac{x}{a})^2+1})$$

$$\sqrt{x^2+a^2} = a \cosh t, \qquad dx = a \cosh t \, dt.$$

I tilfældet $\underline{k < 0}$ kan vi, idet vi sætter $\sqrt{-k} = a$, for den højre halvhyperbelgren også benytte parameterfremstillingen

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cosh t \\ y &= a\sinh t \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t < +\infty.$$

Dette giver substitutionen

$$x = a\cosh t, \qquad t = \log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\sinh t, \qquad dx = a\sinh t\,dt$$

Eksempel. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$. $x \in]-\infty,0[$ og $x \in]0,+\infty[$. Benyttes substitutionen $x = \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$, $t = x+\sqrt{x^2+1}$, fås

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})}\ \frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})dt$$

$$= \int \frac{2}{t^2-1}dt = \int (\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1})dt = \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

$$= \log\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}+1}\right| = \log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}\ .$$

Benyttes substitutionen $x = \sinh t$, fås

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{\cosh t}{\sinh t\cosh t}dt = \int \frac{1}{\sinh t}dt = \int \frac{\sinh t}{\sinh^2 t}dt$$

$$= \int \frac{d\cosh t}{\cosh^2 t-1} = \left[\int \frac{du}{u^2-1}\right]_{u=\cosh t} = \frac{1}{2}\log\frac{\cosh t - 1}{\cosh t + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{\sinh^2 t+1}-1}{\sqrt{\sinh^2 t+1}+1} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)^2}{x^2} = \log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}.$$

Benyttes substitutionen $x = \tan t$, $t \in \left]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[$, fås

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{\tan t \frac{1}{\cos t}} \frac{1}{\cos^2 t}dt = \int \frac{1}{\sin t}dt$$

$$= \int \frac{\sin t}{\sin^2 t}dt = -\int \frac{d\cos t}{1-\cos^2 t} = \left[-\int \frac{du}{1-u^2}\right]_{u=\cos t}$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du\right]_{u=\cos t} = \left[\frac{1}{2}\log\frac{1-u}{1+u}\right]_{u=\cos t}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos t}{1+\cos t} = \frac{1}{2}\log\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}$$

Opgaver. 1. Find $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$.

2. Find $\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx$.

3. Find $\int \cos x \cot^2 x\, dx$. $-\frac{1}{\sin x} - \sin x$

4. Find $\int \frac{1}{1+\alpha\cos x}dx$, hvor $\alpha > 0$.

Tilfældene $\alpha = 1$, $\alpha < 1$, $\alpha > 1$ behandles hver for sig.

5. Find $\int x^2 \sin^2 x\, dx$.

6. Find $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

7. Find $\int \cos x \operatorname{Arctan}(2\tan x)dx$.

8. Find $\int x \tan^4 x\, dx$.

9. Find $\int\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$.

10. Find $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

11. Find $\int \frac{x}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}dx$.

12. Find $\int x^{-\frac{2}{3}} \text{Arctan } x \, dx$.

13. Find $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

14. Find $\int x^2\sqrt{1+x^2} \, dx$.

15. Find $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x-x^2}}$.

16. Find $\int \cos\sqrt{x} \, dx$.

17. Find $\int \text{Arctan}\sqrt{x} \, dx$.

§ 22. Uendelige rækker.

Konvergens af række. Udsnitskriteriet. I teorien for uendelige rækker har man følgende problemstilling: Der er givet en kompleks talfølge $a_1, a_2, \cdots$, og man ønsker at definerer summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{eller} \quad a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

af talfølgens uendeligt mange elementer. Man kalder det opskrevne symbol den til talfølgen (a_n) hørende uendelige række. Talfølgens n^{te} element a_n kaldes rækkes n^{te} led, og summen

$$s_n = a_1+\cdots+a_n$$

af de n første led kaldes rækkens n^{te} afsnit; talfølgen $s_1, s_2, \cdots$ kaldes afsnitsfølgen. Det på forhånd meningsløse symbol kan opfattes som en forskrift til ud fra talfølgen $a_1, a_2, \cdots$ at danne den nye talfølge $s_1, s_2, \cdots$.

Definition. En uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med komplekse led siges at være konvergent med sum s, hvis rækkens afsnitsfølge er konvergent med grænseværdi s. En række kaldes divergent, hvis den ikke er konvergent.

For en konvergent række benyttes symbolerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ også som betegnelse for rækkens sum.

Eksempel. For den uendelige række

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

er det n^{te} afsnit

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} .$$

Idet $s_n \to 1$ for $n \to \infty$, er rækken konvergent med sum 1.

Tallet $s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$ kaldes et udsnit af den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Anvendes det almindelige konvergensprincip (§ 2) på afsnitsfølgen, får vi:

Udsnitskriteriet. En uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med komplekse led er konvergent, hvis og kun hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $n_0 \in \mathbb{N}$, således at der gælder

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

for ethvert $n \geq n_0$ og ethvert p.

Heraf følger specielt, at hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, gælder $a_n \to 0$ for $n \to \infty$.

Af udsnitskriteriet (eller direkte ud fra definitionen af konvergens) følger, at en konvergent række forbliver konvergent, selv om man ændrer værdien af endeligt mange led; herved vil rækkens sum i almindelighed ændres.

Eksempel. For den harmoniske række

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

gælder $a_n \to 0$ for $n \to \infty$. Rækken er imidlertid divergent, idet vi for ethvert $n \in \mathbb{N}$ har

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} .$$

[Toner harmonerer, hvis deres frekvenser er proportionale med $1, 2, 3, \cdots$, altså hvis deres bølgelængder er proportionale med $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$, heraf navnet.]

Ved bevis for konvergens ved hjælp af udsnitskriteriet skal man vurdere den numeriske værdi af et udsnit $a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}$ ved en størrelse δ_n, der er uafhængig af p og går mod 0 for $n \to \infty$. I denne sammenhæng bemærker vi, at for en konvergent række giver vurderingen

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}| \leq \delta_n \quad \text{for ethvert } p \in \mathbb{N}$$

en vurdering af afvigelsen mellem summen s og det n^{te} afsnit s_n, idet vi af $s_{n+p} \to s$ for $p \to \infty$ slutter, at

$$|s - s_n| \leq \delta_n.$$

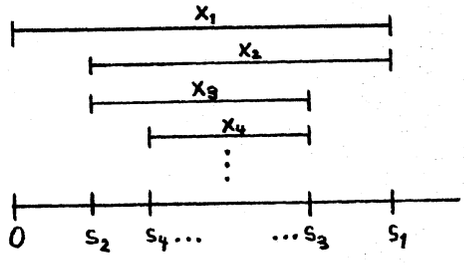
Alternerende række. Hvis $x_1, x_2, \cdots$ er en dalende følge af positive reelle tal, som er konvergent med grænseværdi 0, er den uendelige række

$$x_1 - x_2 + x_3 - \cdots + (-1)^{n-1}x_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$$

konvergent. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder om afvigelsen $s - s_n$ mellem summen s og det n^{te} afsnit s_n, at

$$|s - s_n| \leq x_{n+1}.$$

Bevis. Da tallene $x_1, x_2, \cdots$ er positive, må der gælde $0 < s_1$ og $s_{n+1} < s_n$ for n ulige, $s_{n+1} > s_n$ for n lige. Da følgen $x_1, x_2, \cdots$ er dalende, ser vi, at der må gælde



$$[0, s_1] \supseteq [s_2, s_1] \supseteq [s_2, s_3] \supseteq [s_4, s_3] \supseteq \cdots .$$

Disse intervaller har altså mindst et fælles punkt. Da det n^{te} interval i følgen har længden x_n, og $x_n \to 0$ for

$n \to \infty$, har intervallerne kun eet fælles punkt s. Da s_n er det ene endepunkt af det $(n+1)^{te}$ interval, må gælde

$$|s-s_n| \leq x_{n+1},$$

hvoraf følger $s_n \to s$ for $n \to \infty$. Altså er rækken konvergent med summen s, og den ønskede ulighed er godtgjort.∎

Tilføjelse. For n $\left\{\begin{matrix}\text{ulige}\\ \text{lige}\end{matrix}\right\}$ er s_n $\left\{\begin{matrix}\text{højre}\\ \text{venstre}\end{matrix}\right\}$ endepunkt for det $(n+1)^{te}$ interval i følgen. Altså er $s - s_n \left\{\begin{matrix}\leq 0\\ \geq 0\end{matrix}\right\}$ for $n \left\{\begin{matrix}\text{ulige}\\ \text{lige}\end{matrix}\right\}$. Der gælder altså

$$s - s_n = (-1)^n \theta_n x_{n+1}, \quad \text{hvor} \quad \theta_n \in [0,1].$$

Eksempel. Den uendelige række

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

("den harmoniske række med skiftende fortegn") er konvergent. Det vil senere blive vist, at dens sum s er lig med $\log 2$. Ved at beregne de første afsnit ser man, at $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$, $\frac{7}{12} \leq s \leq \frac{5}{6}$.

Absolut konvergens. Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en uendelig række med komplekse led. Der gælder:

Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, er den oprindelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ligeledes konvergent.

Bevis. Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet. Idet rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, findes et $n_0 \in \mathbb{N}$, således at

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

for $n \geq n_0$ (og alle p). Hermed har vi

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}| < \varepsilon$$

for $n \geq n_0$ (og alle p), hvoraf påstanden fås.□

Definition. En uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med komplekse led kaldes absolut konverget, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.

Bemærkning. Rækken $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$ er konvergent, men ikke absolut konvergent.

Afsnitsfølgen for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er stigende og følgelig konvergent, hvis og kun hvis den er begrænset. Altså:

Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, hvis og kun hvis der findes et tal $M \in \mathbb{R}$, således at der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$|a_1| + \cdots + |a_n| \leq M.$$

Man kan ofte eftervise absolut konvergens af en række ved sammenligning med en kendt række, idet der gælder:

Sammenligningskriteriet. Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, hvis der findes en konvergent række $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ med positive led, således at $|a_n| \leq b_n$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$.

Bevis. Idet rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent og dermed absolut konvergent (da $|b_n| = b_n$), findes et tal $M \in \mathbb{R}$, så at $b_1+\cdots+b_n \leq M$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$. Heraf fås

$$|a_1|+\cdots+|a_n| \leq b_1+\cdots+b_n \leq M$$

for ethvert $n \in \mathbb{N}$, hvilket giver påstanden.□

Tilføjelser. Man bemærker, at det er tilstrækkeligt, at der gælder $|a_n| \leq b_n$ fra et vist trin n_o, d.v.s. for $n \geq n_o$, idet man da har

$$|a_1|+\cdots+|a_n| \leq |a_1|+\cdots+|a_{n_o}| + M.$$

Når $|a_n| \leq b_n$ for alle n, slutter man af uligheden

$$|a_1+\cdots+a_n| \leq |a_1|+\cdots+|a_n| \leq b_1+\cdots+b_n,$$

at der for summerne s og t af rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ må gælde $|s| \leq t$.

Eksempler. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er konvergent, idet $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n}$ for $n \geq 2$, og rækken $1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots$ er konvergent. Idet sidstnævnte række har summen 2, slutter vi at summen af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er ≤ 2. Det vil senere blive vist, at summen er lig med $\frac{\pi^2}{6}$.

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$ er divergent, thi for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder $\frac{1}{n} < \tan\frac{1}{n}$, og rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent.

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n^2}$ er konvergent. Thi for ethvert $x \in]0,1]$ gælder $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{x}{\cos 1} < 2x$; for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder altså $\tan\frac{1}{n^2} < \frac{2}{n^2}$, og rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ er konvergent.

Kvotientrækker. En uendelig række af formen

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (a \neq 0)$$

kaldes en kvotientrække med kvotient q. Rækken er konvergent med sum $a\frac{1}{1-q}$, hvis $|q| < 1$, idet der for $q \neq 1$ gælder

$$a + aq + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{1}{1-q} - a\frac{q^n}{1-q},$$

og $a\frac{q^n}{1-q} \to 0$ for $n \to \infty$, når $|q| < 1$. Rækken er <u>divergent</u>, <u>hvis</u> $|q| \geq 1$, idet der da gælder $|aq^{n-1}| \geq |a|$ for alle n. Rækken er <u>absolut konvergent</u>, <u>hvis</u> $|q| < 1$, idet rækken

$$|a| + |aq| + |aq^2| + \ldots + |aq^{n-1}| + \ldots$$

er en kvotientrække med kvotient $|q|$, og altså er konvergent, hvis $|q| < 1$.

Man kan ofte bevise absolut konvergens af en række ved <u>sammenligning med en kvotientrække</u>. Som et specialtilfælde heraf nævner vi:

<u>Kvotientkriteriet</u>. <u>Hvis samtlige led i den uendelige række</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>er forskellige fra</u> 0, <u>og talfølgen</u> $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ <u>er konvergent i</u> $\mathbb{R}^*$ <u>med grænseværdi</u> c, <u>da er rækken absolut konvergent, hvis</u> $c < 1$, <u>og divergent hvis</u> $c > 1$.

<u>Bevis</u>. Hvis $c > 1$, gælder $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$, altså $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, fra et vist trin. Der gælder derfor ikke $a_n \to 0$ for $n \to \infty$, og rækken er følgelig divergent.

Hvis $c < 1$, kan vi vælge et q, så at $c < q < 1$. Der findes da et $n_0 \in \mathbb{N}$, så at

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q \quad \text{for alle } n \geq n_0,$$

altså

$$|a_{n+1}| \leq |a_n| \cdot q \quad \text{for} \quad n \geq n_0.$$

Sættes

$$M = \max\left\{|a_1|, \frac{|a_2|}{q}, \ldots, \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0-1}}\right\},$$

gælder følgelig

$$|a_n| \leq Mq^{n-1} \quad \text{for ethvert} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er altså absolut konvergent ifølge sammenligningskriteriet. ∎

Eksempel. Den uendelige række

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \cdots$$

er konvergent, idet $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \to 0$ for $n \to \infty$. Det vil senere blive vist, at rækkens sum er tallet e.

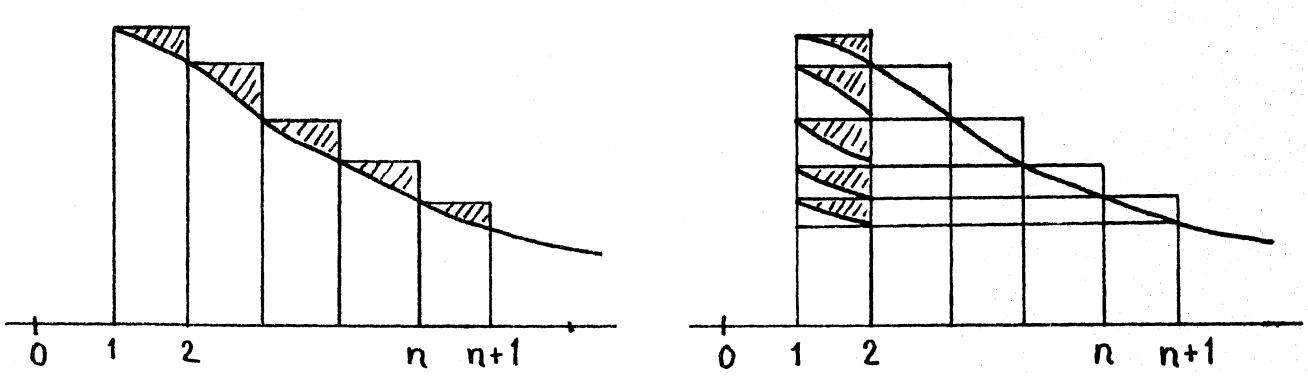
Bemærkning. For begge rækker $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ gælder $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ for $n \to \infty$. Den første række er divergent, den anden konvergent.

Sammenhæng med det udvidede integralbegreb. Lad $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ være en aftagende kontinuert funktion med positive værdier. Da er funktionen

$$x \mapsto F(x) = \int_1^x f(t)dt$$

voksende, og man ser, at integralet $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \to +\infty} F(x)$ eksisterer, hvis og kun hvis talfølgen $F(2), F(3), \cdots, F(n+1), \cdots$ er konvergent. Vi betragter nu den uendelige række

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$



For dens n^{te} afsnit s_n fås udtrykket

$$s_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = F(n+1) + x_n,$$

hvor x_n er arealet af den skraverede figur. Vi ser, at talfølgen $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ er stigende og opad begrænset ($x_n < f(1)$), altså konvergent. De to talfølger s_n og $F(n+1)$ er derfor enten begge konvergente eller begge divergente. Hermed har vi bevist

Integralkriteriet. Hvis $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ er en aftagende kontinuert funktion med positive værdier, da er den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent, hvis og kun hvis integralet $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ eksisterer.

Tilføjelse. For summen s af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ (når den er konvergent) må gælde

$$s = \int_1^{+\infty} f(x)dx + \theta \cdot f(1), \quad \text{hvor} \quad \theta \in]0,1[;$$

(thi $\lim_{n \to \infty} x_n$ må tilhøre intervallet $]0, f(1)[$).

Funktionen $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ er af den omhandlede type, når $\alpha \geq 0$. Vi har tidligere vist, at den kan integreres ud i $+\infty$, hvis og kun hvis $\alpha > 1$. I så fald er

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha - 1} .$$

Da rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ åbenbart er divergent, når $\alpha < 0$ (idet dens led da er ≥ 1), finder vi:

Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ er konvergent for $\alpha > 1$ og divergent for $\alpha \leq 1$. For $\alpha > 1$ gælder for dens sum $\zeta(\alpha)$, at

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} + \theta(\alpha), \quad \text{hvor} \quad \theta(\alpha) \in]0,1[.$$

Funktionen $\alpha \mapsto \zeta(\alpha)$ ($\alpha > 1$) kaldes zeta funktionen; den spiller en betydningsfuld rolle i talteorien.

For funktionen $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ fås

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n + \log \frac{n}{n+1},$$

hvoraf ses, at talfølgen $\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$ er konvergent. Dens grænseværdi er Eulers konstant

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0{,}5772\cdots .$$

Opgaver. 1. Bevis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}$ er konvergent, og at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ er divergent.

2. Bevis, at rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ begge er konvergente.

3. Undersøg, hvilke af de tre rækker $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, ✓ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ ✓, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ ✓, der er konvergente. *

4. Undersøg, hvilke af de tre rækker $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \log(n+1)}{2^n}$, ✓ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^7}$ ✓, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2}{3^n}$ ✓, der er konvergente.

5. Bevis, at rækkerne $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$ og $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$ begge er konvergente.

6. Bevis, at rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\log \log n}$ er konvergente, men ikke absolut konvergente.

*7. Vis, at hvis a_n er en aftagende følge af positive reelle tal, og rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, gælder $na_n \to 0$ for $n \to \infty$. Giv et eksempel på en aftagende følge a_n af positive reelle tal, for hvilken $na_n \to 0$ for $n \to \infty$, og rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent. Se bilag

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ konv når $a<e$, div. når $a>e$

8. Bevis, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, hvis der findes et tal $k \in [0,1[$ og et $n_0 \in \mathbb{N}$, således at $\sqrt[n]{|a_n|} \leq k$ for alle $n \geq n_0$.

9. Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, hvis $(n+2)|a_{n+1}| \leq n|a_n|$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$.

10. Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en i 0 differentiabel funktion, for hvilken $f(0) = 0$. Vis, at hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med reelle led er absolut konvergent, da er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ ligeledes absolut konvergent.

11. Undersøg for hver af nedenstående rækker, om den er konvergent eller divergent.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2 \log 3 \cdots \log(n+1)}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\log(n+1)]^n}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log 2 - \log 3 + \cdots + (-1)^n \log n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(1+\frac{1}{n})}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n)^2$ (g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[\log n]^2}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^2$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left[(1+\frac{1}{n})^n\right]$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(2n)!}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2}-n)$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{1+n^3}-n)$.

12. Bevis, at rækken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ er konvergent, hvis $\alpha > 1$, og divergent, hvis $\alpha \leq 1$.

13. Bevis, at talfølgen $a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$, hvor

$$a_n = \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log n} - \log\log n,$$

er konvergent. **

14. Vis, at hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ har begrænset afsnitsfølge $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, d.v.s. der findes et M, så at $|s_n| = |a_1 + \cdots + a_n| \leq M$ for ethvert n, og $b_1, b_2, \cdots$ er en aftagende følge af positive reelle tal med grænseværdi 0, da er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

Vink. Bevis og udnyt omskrivningen

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$
$$= s_1(b_1-b_2) + s_2(b_2-b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1}-b_n) + s_nb_n.$$

15. Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ er konvergent for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

Vink. Benyt forrige opgave.

**

$$a_n = \int_2^n \frac{dx}{x\log x} + \frac{\theta_n}{2\cdot\log 2} - \log\log n \quad ; \ \theta_n \in [0;1[$$

$$= \left[\log\log x\right]_2^n + \frac{\theta_n}{2\log 2} - \log\log n$$

$$= \log\log n - \log\log 2 + \frac{\theta_n}{2\log 2} - \log\log n$$

$$= \frac{\theta_n}{2\log 2} - \log\log 2$$

~~Da $\frac{1}{x\log x}$ konvergerer mod 0 idet $\log x$ konvergerer mod ∞ for $x \to \infty$~~ gælder mod ∞.

θ_n er en voksende og begrænset talfølge og er derfor konvergent mod en værdi θ, og således er også a_n konvergerer mod værdien $\frac{\theta}{2\log 2} - \log\log 2$.

§ 23. Regning med uendelige rækker. Omordning af leddene.

Multiplikation med konstant og addition. Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en konvergent uendelig række med komplekse led og λ et kompleks tal. Da er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ ligeledes konvergent, og for summerne af de to rækker gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være konvergente uendelige rækker med komplekse led. Da er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ ligeledes konvergent, og for summerne af de tre rækker gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Disse regler fremgår af reglerne for talfølger, idet disse anvendes på afsnitsfølgerne. Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ ligeledes absolut konvergent, og hvis rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er absolut konvergente er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ ligeledes absolut konvergente. Dette følger af, at $|\lambda a_n| = |\lambda||a_n|$ og $|a_n+b_n| \leq |a_n| + |b_n|$.

Eksempel. Idet s $(s = \log 2)$ betegner summen af rækken $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, har vi

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots$$

$$\frac{1}{2}s = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots$$

og dermed

$$\frac{3}{2}s = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots .$$

Omordning af leddene. Idet $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er en bijektiv afbildning, kan vi ud fra den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ danne rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$. Man siger, at denne række fremgår af den oprindelige række ved at omordne leddene, eller (med en løsere talemåde) at den indeholder de samme led som den oprindelige, blot i en anden rækkefølge. Rækken i eksemplet ovenfor $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ kan omordnes til rækken $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$, der ligeledes er konvergent, men ikke med den samme sum. For absolut konvergente rækker er forholdene dog enklere, idet der gælder:

Hvis den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent med sum s, er enhver række, der fremgår af den ved omordning af leddene, ligeledes absolut konvergent med sum s.

Bevis. Lad $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være en bijektiv afbildning.

Idet rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, findes et tal $M \in \mathbb{R}$, så at

$$|a_1| + \cdots + |a_n| \leq M$$

for ethvert $n \in \mathbb{N}$. Heraf følger, at der gælder

$$|a_{\tau(1)}| + \cdots + |a_{\tau(n)}| \leq M$$

for ethvert $n \in \mathbb{N}$, idet jo

$$|a_{\tau(1)}| + \cdots + |a_{\tau(n)}| \leq |a_1| + \cdots + |a_N|,$$

for $N = \max\{\tau(1), \cdots, \tau(n)\}$. Dette medfører, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ er absolut konvergent.

Lad nu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet. Idet rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er

absolut konvergent med sum s, kan vi finde $n_0 \in \mathbb{N}$, så at

$$\left| s - \sum_{k=1}^{n_0} a_k \right| < \varepsilon$$

og

$$|a_{n_0+1}|+\ldots+|a_{n_0+p}| < \varepsilon \quad \text{for ethvert } p \in \mathbb{N}.$$

Vi sætter $n_1 = \max\{\tau^{-1}(1),\ldots,\tau^{-1}(n_0)\}$ og betragter et vilkårligt $n \geq n_1$. Da gælder $\{\tau(1),\ldots,\tau(n)\} \supseteq \{1,\ldots,n_0\}$, og altså

$$s - \sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} = s - \sum_{k=1}^{n_0} a_k - \sum_{k\in T} a_k,$$

hvor $T = \{\tau(1),\ldots,\tau(n)\} \setminus \{1,\ldots,n_0\}$. Vælges $p \in \mathbb{N}$ så stor, at $T \subseteq \{n_0+1,\ldots,n_0+p\}$, ses at

$$\left| s - \sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} \right| \leq \left| s - \sum_{k=1}^{n_0} a_k \right| + \sum_{k\in T} |a_k|$$

$$< \varepsilon + |a_{n_0+1}|+\ldots+|a_{n_0+p}| < 2\varepsilon .$$

Hermed har vi vist, at rækken $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ er konvergent med sum s. ∎

Resultatet udtrykkes kort derved, at en absolut konvergent række er ubetinget konvergent (konvergensen er ikke betinget af leddenes rækkefølge). Man kan bevise, at en uendelig række, der ikke er absolut konvergent, kan omordnes til en divergent række. En række, der er konvergent, men ikke absolut konvergent, siges derfor at være betinget konvergent (konvergensen er betinget af leddenes rækkefølge).

Indførelse af parenteser. Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\ldots$ være en uendelig række med komplekse led og $n_1, n_2, \ldots$ en strengt voksende følge af tal i $\mathbb{N}$ (altså $0 < n_1 < n_2 < \ldots$). Sættes

$$b_p = \begin{cases} a_1+\ldots+a_{n_1} & \text{for } p = 1 \\ a_{n_{p-1}+1}+\ldots+a_{n_p} & \text{for } p > 1, \end{cases}$$

siges rækken $\sum_{p=1}^{\infty} b_p = (a_1+\ldots+a_{n_1}) + (a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2})+\ldots$ at være fremkommet af den givne række ved indførelse af parenteser.

Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum s, er enhver række $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$, der fremkommer af den ved indførelse af parenteser, ligeledes konvergent med sum s. Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, er rækken $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ ligeledes absolut konvergent.

Bevis. Lad s_n være det n^{te} afsnit af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Afsnitsfølgen for rækken $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ er da delfølgen $s_{n_1}, s_{n_2}, \cdots$ af følgen $s_1, s_2, \cdots$. Når følgen $s_1, s_2, \cdots$ er konvergent med grænseværdi s, er delfølgen $s_{n_1}, s_{n_2}, \cdots$ også konvergent med grænseværdi s. Hermed er den første påstand godtgjort.

Af denne fremgår, at hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_p$, hvor

$$c_p = \begin{cases} |a_1| + \cdots + |a_{n_1}| & \text{for } p = 1 \\ |a_{n_{p-1}+1}| + \cdots + |a_{n_p}| & \text{for } p > 1 \end{cases}$$

ligeledes konvergent. Da $|b_p| \leq c_p$ for ethvert $p \in \mathbb{N}$, slutter vi, at rækken $\sum_{p=1}^{\infty} |b_p|$ er konvergent. Hermed er den anden påstand godtgjort. ∎

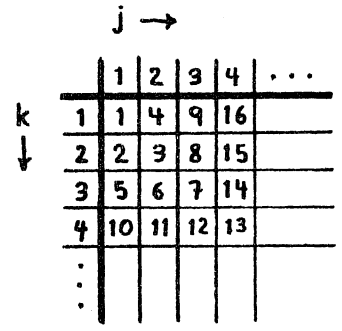
Multiplikation af rækker. Lad $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ og $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ være uendelige rækker med komplekse led. For ethvert par $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ danner vi produktet $c_{(j,k)} = a_j b_k$. Lad $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ være en bijektiv afbildning. Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\tau(n)}$ kaldes den til τ hørende produktrække for de to givne rækker. Vi siger (med en løsere talemåde) at produktrækken er dannet ved at danne alle produkter $a_j b_k$ af et led i rækken $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ og et led i rækken $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ og tage dem som elementer i en ny række i den ved τ bestemte rækkefølge.

Hvis rækkerne $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ og $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ er absolut konvergente med summer s og t, er enhver produktrække $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\tau(n)}$ absolut konvergent med sum st.

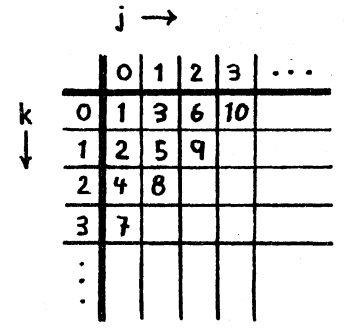
Bevis. Vi begynder med at betragte den specielle produktrække

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

der fremkommer ved at benytte den på figur 1 angivne nummerering af parrene (j,k).



figur 1



figur 2

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ er absolut konvergent med sum st. Idet de givne rækker er absolut konvergente, findes nemlig tal $M_a, M_b \in \mathbb{R}$, så at

$$|a_1| + \cdots + |a_n| \leq M_a, \quad |b_1| + \cdots + |b_n| \leq M_b$$

for ethvert $n \in \mathbb{N}$, og for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ har vi dermed for ethvert $n \in \mathbb{N}$

$$|d_1| + \cdots + |d_n| \leq |d_1| + \cdots + |d_{n^2}| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_j b_k|$$

$$= (|a_1| + \cdots + |a_n|)(|b_1| + \cdots + |b_n|) \leq M_a M_b,$$

hvilket viser den absolute konvergens. Af

$$d_1 + \cdots + d_{n^2} = (a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n) \to st \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

ser vi dernæst, at summen er st.

Enhver produktrække $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\tau(n)}$ fremgår af den specielle produktrække $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ ved omordning af leddene og må altså også være absolut konvergent med sum st.∎

Cauchy multiplikation. Idet vi for at opnå bekvemme betegnelser nummererer de givne rækkers led ved tallene $0,1,2,\cdots$ og benytter den på figur 2 viste nummerering af parrene (j,k) får vi ud fra de givne rækker $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ og $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ den specielle produktrække

$$a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + \cdots.$$

I denne indfører vi parenteser, således at hver ledgruppe $a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$ bestående af de led a_jb_k, for hvilke $j+k = n$, forenes til et led. Den således fremkomne række

$$a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0) + (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0) + \cdots$$

siges at være dannet ud fra rækkerne $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ og $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ved Cauchy multiplikation. Af det foregående fremgår:

Hvis rækkerne $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ og $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ er absolut konvergente med summer s og t, er den ved Cauchy multiplikation dannede række

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0)$$

absolut konvergent med sum st.

Bemærkning. Man kan vise, at hvis rækkerne $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ og $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ er konvergente med summer s og t og blot en af dem er absolut konvergent, er Cauchy produktrækken konvergent med sum st. Hvis ingen af rækkerne er absolut konvergent, behøver Cauchy produktrækken ikke at være konvergent, men man kan vise, at hvis den er konvergent, da har den også "den rigtige sum", nemlig st.

Opgave. Bevis, at rækken $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ kan omordnes til en divergent række, og at den for ethvert $a \in \mathbb{R}$ kan omordnes til en konvergent række med sum a.

Fremgangsmåde:

~~Divergent række:~~

Rækken $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ benævnes (a_n) og ~~dennes~~ tilhørende

$a_1-b_1+a_2-b_2+\cdots$ og tilhørende delsnitfølge (c_{q_n})

Da rækkerne (a_n) og (b_n) er divergente, idet for begge rækker gælder hhv.

$$\forall d>0 \forall N\in\mathbb{N}' \exists p\in\mathbb{N}' : \sum_{j=N}^{N+p} a_j > d, \quad \forall d<0 \forall N\in\mathbb{N}' \exists p\in\mathbb{N}' : \sum_{j=N}^{N+p} b_j < d$$

kan man successivt konstruere en række (P_n) med egenskaben

(1) $\sum_{j=P_{n-1}}^{P_n} a_j + b_n \geq k_n^*$ (2) $P_0 = 1$

* P_n vælges som det mindste tal med den omtalte egenskab

$$q_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} + \max\{m \mid m\in\mathbb{N}' \wedge P_m < \frac{n+1}{2}\} & \text{for } n \text{ ulige} \\ P_{n/2} + \frac{n}{2} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases}$$

~~og rækken (c_{q_n}) er således divergent.~~

A: Vælges $k_n = 1$ bliver delsnitsfølgen (c_{q_n}) divergent

B: Vælges for $n \geq 1$ $k_n = 0$ og $k_0 = a$ ~~som det mindst~~ og P_0 som det mindste tal med egenskaben

for $a \geq 0$: $\sum_{j=1}^{P_0} a_j \geq a$, for $a \leq 0$ $\sum_{j=1}^{P_0} b_j \leq a$

I dette tilfælde med ombytning af (a_n) og (b_n) i (1)

Da vil (c_{q_n}) blive konvergent med grænseværdi a. Udsvingene omkring a vil snævres ind imod 0.

Bemærkning. Man kan vise, at hvis rækkerne $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ og $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ er konvergente med summer s og t og blot en af dem er absolut konvergent, er Cauchy produktrækken konvergent med sum st. Hvis ingen af rækkerne er absolut konvergent, behøver Cauchy produktrækken ikke at være konvergent, men man kan vise, at hvis den er konvergent, da har den også "den rigtige sum", nemlig st.

Opgave. Bevis, at rækken $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ kan omordnes til en divergent række, og at den for ethvert $a \in \mathbb{R}$ kan omordnes til en konvergent række med sum a.

§ 24. Uendelige rækker, hvis led er funktioner.

Punktvis konvergens og uniform konvergens. Majorantkriteriet

Idet X betegner en ikke tom mængde og $f_1, f_2, \cdots$ en følge af komplekse funktioner på X, betragtes den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{eller} \quad f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots .$$

Funktionen f_n kaldes rækkens n^{te} led, og summen

$$s_n = f_1 + \cdots + f_n$$

af de n første led kaldes rækkens n^{te} afsnit; funktionsfølgen $s_1, s_2, \cdots$ kaldes afsnitsfølgen.

Indsættes et punkt $x \in X$ fås en sædvanlig række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ med komplekse led, hvis afsnitsfølge er talfølgen $s_1(x), s_2(x), \cdots$.

De i § 7 indførte begreber vedrørende funktionsfølger overføres umiddelbart til rækker, hvis led er funktioner.

Definition. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ kaldes punktvis konvergent med sumfunktionen f, hvis afsnitsfølgen s_n konvergerer punktvis mod f (altså hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er konvergent med sum $f(x)$ for ethvert $x \in X$) og uniformt konvergent med sumfunktion f, hvis afsnitsfølgen s_n konvergerer uniformt mod f.

Ifølge § 7 er afsnitsfølgen s_n uniformt konvergent, hvis og kun hvis den er en uniform fundamentalfølge. Heraf fås:

Udsnitskriteriet for uniform konvergens. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er uniformt konvergent, hvis og kun hvis der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $n_0 \in \mathbb{N}$, således at der gælder

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

for ethvert $n \geq n_o$, ethvert p, og ethvert $x \in X$.

En række $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, hvis led er positive reelle tal, kaldes en majorantrække for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, hvis der gælder

$$|f_n(x)| \leq b_n$$

for ethvert $n \in \mathbb{N}$ og ethvert $x \in X$.

Majorantkriteriet. Hvis der findes en konvergent majorantrække $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniformt konvergent.

Bevis. Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet. Idet rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, findes et $n_o \in \mathbb{N}$, så at

$$b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \varepsilon$$

for ethvert $n \geq n_o$ og ethvert p. For ethvert $n \geq n_o$, ethvert p. og ethvert $x \in X$ gælder dermed

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)|$$

$$\leq b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \varepsilon.$$

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er altså uniformt konvergent ifølge udsnitskriteriet for uniform konvergens.

Kontinuitet og uniform konvergens. Vi betragter nu det tilfælde, hvor X er et metrisk rum (X,dist), og hvor leddene f_n i rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er kontinuerte funktioner på X. Da er også afsnittene $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ kontinuerte, og af sætningen i § 7 om kontinuitet af grænsefunktionen for en uniformt konvergent følge af kontinuerte funktioner slutter vi:

Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er uniformt konvergent og hver af funktionerne f_n er kontinuert, da er også sumfunktionen f kontinuert.

Ledvis integration og differentiation. Vi betragter nu specielt det tilfælde, hvor talen er om rækker $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, hvis led er komplekse funktioner af en reel variabel, defineret på et afsluttet interval $[a,b]$.

Af en sætning i § 13 fås:

Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, hvis led er komplekse, kontinuerte funktioner på $[a,b]$, er uniformt konvergent på $[a,b]$ med sumfunktion f [som da ligeledes er kontinuert], er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ konvergent med sum $\int_a^b f(x)dx$. Der gælder altså formlen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx.$$

Af en sætning i § 14 fås

Hvis leddene i rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er C^1-funktioner på $[a,b]$, og

(a) der findes et $x_o \in [a,b]$, for hvilket rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o)$ er konvergent;

(b) den ved ledvis differentiation dannede række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ er uniformt konvergent på $[a,b]$ med sumfunktion g;

da er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniformt konvergent på $[a,b]$ med en sumfunktion f, der ligeledes er en C^1-funktion, og dennes afledede f' er netop funktionen g.

Ved anvendelserne vil det i reglen være således, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ på forhånd vides at være uniformt konvergent på $[a,b]$. Vi formulerer derfor særskilt følgende svagere form af sætningen:

Hvis leddene i rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er C^1-funktioner på $[a,b]$, og både rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ og den ved ledvis differentiation dannede række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ er uniformt konvergent på $[a,b]$, da er sumfunktionen f for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ en C^1-funktion, og dens afledede f' er sumfunktionen for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$. Der gælder altså formlen

$$(*) \qquad \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Opgave. Bevis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$ for ethvert $a \in \mathbb{R}_+$ er uniformt konvergent på intervallet $[-a,a]$. Vis, at rækkens sumfunktion $f(x)$ er en C^∞-funktion på $\mathbb{R}$.

Idet $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$

og $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Ses (1) $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 0$

Og af sætning fremgår det at

(2) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{x}{n}}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ uniform for alle x. ifl. majorantkriteriet

Af (1) og (2) konkluderes at (f_n) er uniform konvergent.

$(*)$ brugt m gange giver

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(m)}(x) \quad \text{hvor} \quad f_n^{(m)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^{m+1}} \sin \frac{x}{n} & \frac{-1}{n^{m+1}} \cos \frac{x}{n} \\ \frac{1}{n^{m+1}} \cos \frac{x}{n} \\ \frac{-1}{n^{m+1}} \sin \frac{x}{n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |f_n^{(m)}(x)| \leq \frac{1}{n^{m+1}}$$

Ved brug af majorantkriteriet ses for et vilkårligt $m \geq 1$ (for $m=0$ er allerede godtgjort) at $(f_n^{(m)})$ er uniform konvergent og f således er vilkårlig ofte differentiabel.

§ 25. Potensrækker.

Potensrækker alment. En uendelig række af formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{eller} \quad a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

hvor $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ er komplekse tal og x en kompleks variabel, kaldes en potensrække i den variable x. Tallene $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ kaldes rækkens koefficienter.

For en given potensrække betragter vi mængden A af de reelle tal $r \geq 0$, for hvilke talfølgen $|a_n| r^n$ er begrænset. Der gælder åbenbart $0 \in A$. Endvidere ses, at hvis $r \in A$ og $0 \leq r_1 < r$, gælder $r_1 \in A$. Heraf fremgår, at A er et interval. Tallet $\rho = \sup A$ kaldes potensrækkens konvergensradius. Den er enten 0, et positivt reelt tal, eller $+\infty$. Vi ser, at hvis $0 \leq r < \rho$, er talfølgen $|a_n| r^n$ begrænset, og hvis $r > \rho$, er talfølgen $|a_n| r^n$ ikke begrænset. Benævnelsen konvergensradius retfærdiggøres af følgende sætning:

Potensrækken er absolut konvergent i ethvert punkt x, for hvilket $|x| < \rho$, og divergent i ethvert punkt x for hvilket $|x| > \rho$.

Bevis. Hvis $|x| < \rho$, kan vi finde et r, så at $|x| < r$ Da findes et M, så at

$$|a_n| r^n \leq M \quad \text{for ethvert} \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

Vi har da

$$|a_n x^n| \leq M \left(\frac{|x|}{r}\right)^n \quad \text{for ethvert} \quad n \in \mathbb{N}_0 ,$$

og den absolute konvergens af potensrækken i punktet x føl-

ger af sammenligningskriteriet, idet $\frac{|x|}{r} < 1$.

Hvis $|x| > \rho$, er talfølgen $|a_n x^n|$ ikke begrænset, og potensrækken er derfor divergent i punktet x. ∎

Hvis $\rho = 0$, er potensrækken kun konvergent for $x = 0$, sådanne potensrækker er uden interesse. Hvis $\rho > 0$ kaldes den åbne cirkelskive $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < \rho\}$ potensrækkens <u>konvergenscirkel</u>. Hvis $\rho = +\infty$, er hele $\mathbb{C}$ konvergenscirkel. Som lige bevist, er potensrækken absolut konvergent i ethvert punkt af konvergenscirklen og divergent i ethvert punkt uden for dennes afslutning. En potensrække kan i tilfældet $0 < \rho < +\infty$ være konvergent i alle, i visse, eller i ingen punkter på konvergenscirklens rand. Behandlingen af potensrækker i punkter på konvergenscirklens rand udgør et interessant afsnit af den finere rækkelære, som vi ikke vil gå ind på. Intervallet $]-\rho, \rho[$ på $\mathbb{R}$ kaldes potensrækkens <u>konvergensinterval</u>.

Konvergensradius for en forelagt potensrække kan (i princippet) bestemmes ud fra definitionen. I mange tilfælde fører en af følgende regler hurtigere til målet:

1. <u>Hvis rækken</u> $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ <u>er divergent, og følgen af dens led</u> $|a_n| r^n$ <u>er begrænset, er</u> $\rho = r$.

2. <u>Hvis samtlige koefficienter</u> a_n <u>er</u> $\neq 0$, <u>og talfølgen</u> $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ <u>er konvergent i</u> $\mathbb{R}^*$ <u>med grænseværdi</u> c, <u>gælder</u> $\rho = \frac{1}{c}$.

Hvis $c = 0$, skal dette betyde, at $\rho = +\infty$. Hvis $c = +\infty$, betyder det, at $\rho = 0$.

Bevis. Den første regel følger af det ovenfor udledte.

For at bevise den anden regel bemærker vi, at når $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to c \in \mathbb{R}^*$, gælder $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \to c|x|$ for $x \neq 0$. Kvotientkriteriet viser derfor, at potensrækken er absolut konvergent i punktet x, hvis $c|x| < 1$, og divergent i punktet x, hvis $c|x| > 1$. Heraf fremgår, at $\rho = \frac{1}{c}$. ∎

Hvis $\rho > 0$, er potensrækken uniformt konvergent i enhver afsluttet cirkelskive $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq r\}$, hvor $0 < r < \rho$.

Bevis. Da punktet r tilhører konvergenscirklen, er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ absolut konvergent. For ethvert $n \in \mathbb{N}_0$ og ethvert x med $|x| \leq r$ gælder

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n.$$

Potensrækken har altså i cirkelskiven $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq r\}$ den konvergente majorantrække $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$, og påstanden følger af majorantkriteriet. ∎

Ethvert punkt af konvergenscirklen er indre punkt af en cirkelskive $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq r\}$, hvor $0 < r < \rho$. Idet potensrækkens led er kontinuerte funktioner, slutter vi, at sumfunktionen for en potensrække er en kontinuert funktion på konvergenscirklen $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < \rho\}$.

Det nærmere studium af sumfunktionen for en potensrække med $\rho > 0$ på konvergenscirklen hører hjemme i den almene komplekse funktionsteori. I det følgende indskrænker vi os til at studere sumfunktionen for reel variable x, altså som funktion på konvergensintervallet $]-\rho, \rho[$. Vi beviser først:

<u>En potensrække</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ <u>og den ved ledvis differentiation dannede potensrække</u> $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ <u>har samme konvergensradius</u> ρ.

<u>Bevis</u>. Lad A være mængden af de reelle tal $r \geq 0$, for hvilke talfølgen $|a_n| r^n$ er begrænset, og A' mængden af de reelle tal $r \geq 0$, for hvilke talfølgen $n|a_n| r^{n-1}$ er begrænset, eller, hvad der kommer ud på det samme, for hvilke talfølgen $n|a_n| r^n$ er begrænset. Vi skal vise, at $\sup A' = \sup A$.

Der gælder åbenbart $A' \subseteq A$. Følgelig er $\sup A' \leq \sup A$. På den anden side gælder for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, at $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} \to 0$ for $n \to \infty$. Hvis $r \in A$, må altså gælde $\frac{r}{1+\varepsilon} \in A'$. Dette udelukker, at der kan gælde $\sup A' < \sup A$. ∎

Da såvel potensrækken selv som den ved ledvis differentiation dannede række er uniformt konvergent på ethvert afsluttet delinterval $[-r,r] \subset]-\rho,\rho[$ af konvergensintervallet, ser vi, at sumfunktionen f for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergensradius $\rho > 0$ er en C^1-funktion på $]-\rho,\rho[$, og at dens afledede f' er sumfunktion for den ved ledvis differentiation dannede række $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Ved gentagen anvendelse af dette resultat fås følgende sætning:

<u>Sumfunktionen</u>

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

<u>af en potensrække med konvergensradius</u> $\rho > 0$ <u>er en</u> C^∞<u>-funktion på konvergensintervallet</u> $]-\rho,\rho[$. <u>For ethvert</u> $p \in \mathbb{N}$ <u>er dens</u> p^{te} <u>afledede sumfunktion for den ved</u> p <u>gange ledvis differentiation dannede række, altså</u>

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n x^{n-p}$$

$$= p!\, a_p + \frac{(p+1)!}{1!}a_{p+1}x + \cdots + \frac{(p+n)!}{n!}a_{p+n}x^n + \cdots .$$

Vi aflæser heraf, at $f^{(p)}(0) = p!a_p$. Dette gælder også for $p = 0$, idet $f^{(0)}$ betegner f, og $0!$ betyder 1.

For en vilkårlig C^∞-funktion $f: A \to \mathbb{C}$ på et interval $A \subseteq \mathbb{R}$, der indeholder punktet 0, kaldes potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

funktionens Taylorrække hørende til punktet 0. Vi har altså

En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergensradius $\rho > 0$ er Taylorrække hørende til punktet 0 for sin sumfunktion.

Heraf fremgår identitetssætningen:

Hvis sumfunktionerne for to potensrækker $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ med positive konvergensradier stemmer overens på et interval, der indeholder 0, er potensrækkerne identiske, altså $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n, \cdots$.

En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og den ved ledvis integration dannede potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ har naturligvis også samme konvergensradius ρ . Antages $\rho > 0$, og betegnes sumfunktionerne for de to rækker med f og F, har vi $F' = f$, og da $F(0) = 0$ gælder altså for ethvert $x \in]-\rho, \rho[$ formlen

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Hvis potensrækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ har positive konvergensradier ρ og σ og sumfunktionerne f og g, ser man ved at anvende Cauchy multiplikation, at produktet fg på cirkelskiven $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < \min\{\rho, \sigma\}\}$ fremstilles ved rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0\cdot b_n x^n+a_1 x\cdot b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\cdot b_1 x+a_n x^n\cdot b_0).$$

Der gælder altså for $|x| < \min\{\rho,\sigma\}$

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{hvor} \quad c_n = a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0.$$

I stedet for at betragte potensrækker i den variable x kunne vi naturligvis have betragtet potensrækker $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ i den variable $x - x_0$, hvor x_0 er et vilkårligt punkt i $\mathbb{C}$. For $\rho > 0$ fås da konvergenscirklen $\{x \in \mathbb{C} \mid |x-x_0| < \rho\}$. Hvis $x_0 \in \mathbb{R}$, er potensrækkens sumfunktion f en C^∞-funktion på konvergensintervallet $]x_0-\rho, x_0+\rho[$, og potensrækken er funktionens Taylorrække hørende til punktet x_0, d.v.s rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+\frac{f!(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots .$$

<u>Bemærkning</u>. Et polynomium $F(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ giver ved tilføjelse af 0-led en potensrække med sumfunktion F. Idet $x = x_0 + (x-x_0)$, ses ved anvendelse af binomialformlen, at F også kan skrives på formen $F(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j(x-x_0)^j$. Funktionens fremstilling ved Taylorrækken bliver her blot formlen

$$F(x) = F(x_0) + \frac{F'(x_0)}{1!}(x-x_0) +\cdots+ \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

kendt under navnet Taylors formel for et polynomium af grad $\leq n$.

Vi går nu over til betragtning af de elementære funktioners fremstilling ved potensrækker.

<u>Potensrækker for eksponentialfunktionen, de trigonometriske funktioner, og de hyperbolske funktioner</u>. Vi betragter først eksponentialfunktionen $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for reel variabel. Idet

funktionen og alle dens afledede har værdien 1 i punktet 0, er den tilhørende Taylorrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Denne potensrække kaldes eksponentialrækken. Den har konvergensradius $+\infty$, idet

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Sumfunktionen f stemmer for alle reelle værdier af x overens med eksponentialfunktionen. Ved insættelse af $x = 0$ ser vi nemlig, at $f(0) = 1$, og da den ved ledvis differentiation dannede række er rækken selv, må gælde $f' = f$. Sumfunktionen opfylder altså de to betingelser $f(0) = 1$, $f' = f$, hvorved vi i § 15 har karakteriseret funktionen $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sumfunktionen f af eksponentialrækken er defineret for enhver kompleks værdi af x. Vi vil vise, at den er eksponentialfunktionen $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ for kompleks variabel. Hertil vælger vi et vilkårligt $\lambda \in \mathbb{C}$ og sætter $x = \lambda t$, hvor $t \in \mathbb{R}$, hvorved fås

$$f(\lambda t) = g(t) = 1 + \frac{\lambda}{1!}t + \frac{\lambda^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}t^n + \cdots .$$

Ved indsættelse af $t = 0$ ses, at $g(0) = 1$, og da den ved ledvis differentiation dannede række fremgår af rækken selv ved multiplikation med λ, må gælde $g' = \lambda g$. Funktionen $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ opfylder altså de to betingelser $g(0) = 1$, $g' = \lambda g$, hvorved vi i § 18 har karakteriseret funktionen $\exp \lambda t$. Følgelig er $f(\lambda t) = \exp \lambda t$. Sættes $t = 1$ og skrives x i stedet for λ, ser vi, at $f(x) = \exp x$ for alle

$x \in \mathbb{C}$. Vi har hermed vist formlen

$$\exp x = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{C}$$

Idet $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, fremgår heraf formlerne

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{C}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, x \in \mathbb{C}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{C}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{C}$$

De to formelpar er naturligvis ensgyldige, idet vi jo for ethvert $x \in \mathbb{C}$ har $\cosh x = \cos \frac{x}{i}$, $\sinh x = i \sin \frac{x}{i}$.

Bemærkning. Af konvergensen af eksponentialrækken for ethvert $x \in \mathbb{C}$ følger, at $\frac{x^n}{n!} \to 0$ for $n \to \infty$ for ethvert $x \in \mathbb{C}$, hvilket iøvrigt også let vises direkte.

Potensrække for $(1+x)^\alpha$. For vilkårligt reelt α betragtes funktionen $x \mapsto (1+x)^\alpha$ på intervallet $]-1,1[$. Den er vilkårligt ofte differentiabel på $]-1,1[$. For $\alpha \in \mathbb{N}_0$ er den endda et polynomium. Ved differentiation fås

$$\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

For at få bekvemme betegnelser indfører vi de generaliserede binomialkoefficienter

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\ , \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Ved udregning ser vi, at der gælder

$$\binom{\alpha-1}{n-1} + \binom{\alpha-1}{n} = \binom{\alpha}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Med disse betegnelser kan vi skrive Taylorrækken for $(1+x)^\alpha$ hørende til punktet 0 som

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots .$$

Rækken kaldes binomialrækken. Hvis $\alpha \in \mathbb{N}_0$, gælder $\binom{\alpha}{n} = 0$ for $n > \alpha$, og rækken er da (efter bortkastning af leddene med $n > \alpha$) det fra binomialformlen kendte polynomium. Hvis $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, er samtlige koefficienter $\neq 0$, og idet

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}\right| = \frac{|\alpha-n|}{n+1} \to 1 \quad \text{for} \quad n \to \infty,$$

har rækken konvergensradius 1.

Idet $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ betegner binomialrækkens sumfunktion, ser vi ved ledvis differentiation, at der for $x \in]-1,1[$ gælder

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^n \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha\binom{\alpha-1}{n} + \alpha\binom{\alpha-1}{n-1}\right]x^n \\ &= \alpha\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\right) = \alpha f(x),\end{aligned}$$

altså

$$f'(x) = \frac{\alpha}{1+x} f(x) .$$

Heraf fås

$$\frac{d}{dx}\left[(1+x)^{-\alpha}f(x)\right] = \frac{-\alpha}{1+x}(1+x)^{-\alpha}f(x) + (1+x)^{-\alpha}\frac{\alpha}{1+x}f(x) = 0 .$$

Funktionen $(1+x)^{-\alpha}f(x)$ er altså konstant på intervallet $]-1,1[$. Ved indsættelse af $x = 0$ ses, at dens værdi er 1. Hermed har vi bevist formlen

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots, \quad x \in]-1,1[}.$$

Hvis $\alpha \in \mathbb{N}_0$, gælder formlen for enhver værdi af x, idet det da blot er den kendte binomialformel.

Potensrække for log(1+x). Af sumformlen for en kvotientrække (eller af binomialrækken for $\alpha = -1$) får vi

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots x\,(-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in]-1,1[,$$

hvoraf ved ledvis integration

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \quad x \in]-1,$$

Hermed er bevist formlerne

$$\boxed{\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, && x \in]-1,1[\\ -\log(1-x) &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots, && x \in]-1,1[\\ \log\frac{1+x}{1-x} &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right), && x \in]-1,1[\end{aligned}}$$

Potensrække for Arctan x. Af formlen

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, \quad x \in]-1,1[$$

fås

$$\text{Arctan } x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad x \in]-1,1[.$$

Hermed er bevist formlen

$$\boxed{\text{Arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad x \in]-1,1[}$$

Potensrække for Arcsin x. Af binomialrækken for $\alpha = -\frac{1}{2}$ fås

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in]-1,1[,$$

hvoraf

$$\text{Arcsin } x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in]-1,1[.$$

Idet vi benytter omformningen

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}(-1)^n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)},$$

får vi formlen

$$\boxed{\text{Arcsin } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in]-1,1[}.$$

Historisk bemærkning. Potensrækkerne for de elementære funktioner er fundet af I. Newton (o. 1665). Uafhængigt af ham blev rækken for $\log(1+x)$ fundet af N. Mercator (1667) og rækken for Arctan x af J. Gregory (1670) og G.W. Leibniz (1673). Den almene teori for uendelige rækker udvikledes i tilslutning til differential- og integralregningen. Taylorrækken blev opstillet af B. Taylor (1717), men findes allerede hos Joh. Bernoulli (1694). Indtil A.L. Cauchy (1821) indførte det eksakte konvergensbegreb, regnede man i vid udstrækning rent formelt med uendelige rækker. En eksakt teori for summation af

uendelige rækker omfattende klasser af divergente rækker er udviklet i nyere tid (fra o. 1890).

Øvelse 1. Eksponentialfunktionens funktionalligning.
Som et eksempel på multiplikation af absolut konvergente rækker vil vi på grundlag af eksponentialrækken verificere den for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ gyldige ligning $\exp(x_1+x_2) = \exp x_1 \cdot \exp x_2$.
Vi finder, idet vi benytter Cauchy multiplikation og anvender binomialformlen

$$\exp x_1 \cdot \exp x_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_1^j}{j!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_2^k}{k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x_1^n}{n!} \cdot 1 + \frac{x_1^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{x_2}{1!} + \cdots + \frac{x_1}{1!} \frac{x_2^{n-1}}{(n-1)!} + 1 \cdot \frac{x_2^n}{n!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x_1+x_2)^n = \exp(x_1+x_2).$$

Øvelse 2. Beregning af tallet e. Ud fra eksponentialrækken fås

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + r_n,$$

hvor vi for fejlen r_n ved brug af sammenligningskriteriet finder

$$0 < r_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right)$$

$$< \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!}.$$

Vælges $n = 13$ fås

$$1 = 1$$
$$\frac{1}{1!} = 1$$
$$\frac{1}{2!} = 0,5$$
$$\frac{1}{3!} = 0,16666\ 66666\ 66\cdots$$
$$\frac{1}{4!} = 0,04166\ 66666\ 66\cdots$$
$$\frac{1}{5!} = 0,00833\ 33333\ 33\cdots$$
$$\frac{1}{6!} = 0,00138\ 88888\ 88\cdots$$
$$\frac{1}{7!} = 0,00019\ 84126\ 98\cdots$$
$$\frac{1}{8!} = 0,00002\ 48015\ 86\cdots$$
$$\frac{1}{9!} = 0,00000\ 27557\ 31\cdots$$
$$\frac{1}{10!} = 0,00000\ 02755\ 73\cdots$$
$$\frac{1}{11!} = 0,00000\ 00250\ 52\cdots$$
$$\frac{1}{12!} = 0,00000\ 00020\ 87\cdots$$
$$\frac{1}{13!} = 0,00000\ 00001\ 60\cdots$$

altså $e = 2,71828\ 18284\ 40 + a + r_{13}$,

hvor $0 < a + r_{13} < 11 \cdot 10^{-12} + \frac{1}{13} \cdot 161 \cdot 10^{-12} < 24 \cdot 10^{-12}$.

Følgelig er

$$\boxed{e = 2,71828\ 18284\cdots}.$$

Øvelse 3. Irrationalitet af e. At e er et irrationalt tal blev først vist af J.H. Lambert (1761). Følgende bevis tilskrives J.-J. Fourier.

Hvis e var et rationalt tal, lad os sige $e = \frac{p}{q}$, hvor $p,q \in \mathbb{N}$, var

$$q!e = q!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}) + (\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots)$$

et helt tal. Første addend på højre side er et helt tal. Altså måtte også anden addend på højre side været et helt tal. Men den anden addend er positiv og

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = 1,$$

altså ikke hel.

Som vist af Ch. Hermite (1873) er e et transcendent tal.

Øvelse 4. Potensrækkerne for $\log(1+x)$ og $\operatorname{Arctan} x$ for $x = 1$. For $0 < x < 1$ kan vi anvende sætningen om alternerende række (§ 22) på potensrækken for $\log(1+x)$ og finder

$$|\log(1+x) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n})| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in]0,1[.$$

Ved at lade x konvergere mod 1 får vi heraf

$$|\log 2 - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n})| \leq \frac{1}{n+1},$$

hvoraf

$$\boxed{\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots} \quad .$$

Sammen ræsonnement kan anvendes på potensrækken for $\operatorname{Arctan} x$, hvorved fås

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots} \quad .$$

Øvelse 5. Beregning af tallet π. Formlen $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ er på grund af rækkens "langsomme konvergens" uegnet til beregning. Vælges $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ i rækken for $\operatorname{Arctan} x$ fås formlen

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots\right),$$

som hurtigt giver π med et antal decimaler. Endnu bedre er det at benytte en af de mange formler, der forbinder værdierne af Arctan x for simple rationale værdier af x. Et velegnet eksempel på en sådan formel er

$$\frac{\pi}{4} = 4\ \mathrm{Arctan}\ \frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\ \frac{1}{239}\ .$$

Af sætningen om alternerende række fås

$$\mathrm{Arctan}\ \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{5^7} + \frac{1}{9}\frac{1}{5^9} - p$$

$$\mathrm{Arctan}\ \frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\frac{1}{239^3} + q,$$

hvor $0 < p < \frac{1}{11}\frac{1}{5^{11}} < 2\cdot 10^{-9}$ og $0 < q < \frac{1}{5}\frac{1}{239^5} < 10^{-9}$. Vi få

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5} &= 0{,}2 \\
\frac{1}{3}\frac{1}{5^3} &= 0{,}00266\ 6666\cdots \\
\frac{1}{5}\frac{1}{5^5} &= 0{,}00006\ 4 \\
\frac{1}{7}\frac{1}{5^7} &= 0{,}00000\ 1828\cdots \\
\frac{1}{9}\frac{1}{5^9} &= 0{,}00000\ 0056\cdots \\
\hline
\mathrm{Arctan}\ \frac{1}{5} &= 0{,}19739\ 5558 + a,
\end{aligned}$$

hvor $0 < a < 5\cdot 10^{-9}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{239} &= 0{,}00418\ 4100\cdots \\
\frac{1}{3}\frac{1}{239^3} &= 0{,}00000\ 0024\cdots \\
\hline
\mathrm{Arctan}\ \frac{1}{239} &= 0{,}00418\ 4075 + b,
\end{aligned}$$

hvor $0 < b < 3\cdot 10^{-9}$.

$$\begin{aligned}
4\ \mathrm{Arctan}\ \frac{1}{5} &= 0{,}78958\ 2232 + 4a \qquad 0 < 4a < 20\cdot 10^{-9} \\
\mathrm{Arctan}\ \frac{1}{239} &= 0{,}00418\ 4075 + b \qquad 0 < b < 3\cdot 10^{-9} \\
\hline
\frac{\pi}{4} &= 0{,}78539\ 8154 + c \qquad 0 < c < 23\cdot 10^{-9} \\
\pi &= 3{,}14159\ 2616 + 4c \qquad 0 < 4c < 92\cdot 10^{-9}.
\end{aligned}$$

Følgelig er

$$\boxed{\pi = 3{,}14159\ 2\cdots}\ .$$

Øvelse 6. Irrationalitet af π. At π er et irrationalt tal blev først vist af J.H. Lambert (1761). Følgende bevis skyldes I. Niven (1947).

Idet F er et polynomium at grad $2n$ har man

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi F(x)\sin x\,dx = \left[-F(x)\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi F'(x)\cos x\,dx \\ &= (F(0)+F(\pi)) + \left[F'(x)\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi F''(x)\sin x\,dx \\ &= (F(0)+F(\pi)) - \int_0^\pi F''(x)\sin x\,dx \\ &= (F(0)+F(\pi)) - (F''(0)+F''(\pi)) + \cdots + (-1)^n(F^{(2n)}(0)+F^{(2n)}(\pi)). \end{aligned}$$

Antaget, at π var rational, lad os sige $\pi = \frac{a}{b}$, hvor $a,b \in \mathbb{N}$, vælger vi

$$\begin{aligned} F(x) &= [bx(\pi-x)]^n = [x(a-bx)]^n \\ &= c_n x^n + \cdots + c_{2n}x^{2n}, \text{ hvor } c_n,\cdots,c_{2n} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Man ser, at $F(0) = 0$, $F'(0) = 0,\cdots,F^{(n-1)}(0) = 0$, $F^{(n)}(0) = n!\,c_n$, $F^{(n+1)}(0) = (n+1)!c_{n+1},\cdots,F^{(2n)}(0) = (2n)!c_{2n}$. Da $F(x) = F(\pi-x)$, gælder for lige k, at $F^{(k)}(\pi) = F^{(k)}(0)$. Altså er integralet I for dette valg af F et helt tal deleligt med $n!$ Da $F(x)\sin x > 0$ på $]0,\pi[$, er $I > 0$. Følgelig gælder $I \geq n!$. Funktionen $F(x)\sin x$ har på $[0,\pi]$ sin største værdi for $x = \frac{\pi}{2}$, og denne er $(b\frac{\pi^2}{4})^n$. Altså gælder $I \leq (b\frac{\pi^2}{4})^n\pi$. Følgelig er

$$\frac{(b\frac{\pi^2}{4})^n\pi}{n!} \geq 1 \text{ for alle } n \in \mathbb{N},$$

men dette strider mod, at $\frac{A^n}{n!} \to 0$ for $n \to \infty$ for ethvert A.

Som vist af F.Lindemann (1882) er π et transcendent tal. Heraf følger, at cirklens kvadratur, d.v.s. konstruktion med passer og lineal af et kvadrat med samme areal som en given cirkel, ikke er mulig. Hvis man nemlig ud fra et liniestykke af længden 1 kunne konstruere et liniestykke af længden $\sqrt{\pi}$, kunne man også konstruere et liniestykke af længden π, og man kan ret let vise, at længderne af de liniestykker, der kan konstrueres ud fra et liniestykke af længden 1, udgør en delmængde af de algebraiske tal.

Øvelse 7. C^∞-funktioner, der ikke fremstilles ved deres Taylorrække. I alle de betragtede tilfælde af C^∞-funktioner $f:A \to \mathbb{C}$ på et interval A, der indeholder 0, har det vist sig, at funktionen, om ikke i hele intervallet A, så dog i et delinterval, fremstilles ved sin Taylorrække. Som vist af Cauchy er dette ikke altid tilfældet. Vi vil angive C^∞-funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, for hvilke Taylorrækken hørende til punktet 0 har konvergensradius $+\infty$, men ikke har f til sumfunktion.

Med T betegner vi klassen af funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ af formen

$$f(x) = \begin{cases} P(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

hvor P er et polynomium. Lad $f \in T$. For $x = 0$ er f differentiabel med den afledede 0, idet

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x}P(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x^2}) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to 0$$

[da $uP(u)\exp(-u^2) \to 0$ for $|u| \to +\infty$]. For $x \neq 0$ er f differentiabel med den afledede

$$\left[-P'(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2} + P(\frac{1}{x})\frac{2}{x^3}\right]\exp(-\frac{1}{x^2}).$$

Altså er f differentiabel, og vi har

$$f'(x) = \begin{cases} Q(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{for} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases},$$

hvor Q er polynomiet $Q(u) = -P'(u)u^2 + P(u)2u^3$. Der gælder altså $f' \in T$. Følgelig er f' differentiabel, og der gælder $f'' \in T$, etc. Enhver funktion $f \in T$ er altså C^∞, og da $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0, \cdots$ er dens Taylorrække hørende til punktet 0 rækken $\sum_{n=0}^{\infty} 0\, x^n$, som er konvergent for alle x med summen 0. Vælges f.eks. $P = 1$, er $f(x) \neq 0$ for $x \neq 0$. Summen af Taylorrækken er altså kun lig med $f(x)$ for $x = 0$.

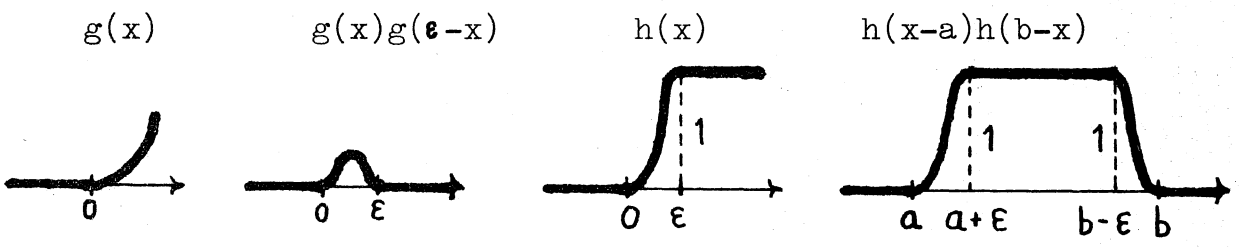
Ud fra dette eksempel kan dannes andre interessante eksempler på C^∞-funktioner. Således ser vi, at funktionen

$$g(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{for} \quad x > 0 \\ 0 & \text{for} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

er C^∞. Det samme gælder derfor for et vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ om funktionen $g(x)g(\varepsilon-x)$, som ses at være > 0 for $x \in]0,\varepsilon[$ og $= 0$ $x \notin]0,\varepsilon[$. Funktionen

$$h(x) = \frac{\int_0^x g(t)g(\varepsilon-t)dt}{\int_0^\varepsilon g(t)g(\varepsilon-t)dt}$$

er derfor C^∞ og $= 0$ for $x \leq 0$, strengt voksende for



$0 \leq x \leq \varepsilon$, og $= 1$ for $x \geq \varepsilon$. Betragtes nu et vilkårligt interval $]a,b[$ og vælges $\varepsilon < \frac{1}{2}(b-a)$, ser vi at funktionen $h(x-a)h(b-x)$ er C^∞ og $= 0$ for $x \leq a$, strengt voksende for $a \leq x \leq a+\varepsilon$, $= 1$ for $a+\varepsilon \leq x \leq b-\varepsilon$, strengt aftagende for $b-\varepsilon \leq x \leq b$, og $= 0$ for $x \geq b$.

Sådanne C^∞-funktioner udgør et nyttigt hjælpemiddel i forskelligartede undersøgelser.

Øvelse 8. Abels sætning om potensrækker. I forbindelse med en undersøgelse af binomialrækken (indbefattende punkter på konvergenscirklens rand) beviste N.H.Abel (1826) følgende sætning:

Hvis den uendelige række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ med komplekse led er konvergent, da er potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uniformt konvergent på intervallet $[0,1]$.

Bemærkning. Forudsætningen er, at potensrækken er konvergent for $x = 1$. Dens konvergensra-

dius ρ er altså ≥ 1. Hvis $\rho > 1$, følger af den almene teori, at potensrækken er uniformt konvergent på $[0,1]$. Sætningen udsiger altså kun noget nyt i tilfældet $\rho = 1$. Den medfører, at sumfunktionen er kontinuert på $[0,1]$ og ikke blot, som det fremgår af den almene teori, på $[0,1[$. Abels sætning indeholder altså følgende sætning: Hvis rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er konvergent, gælder

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{for} \quad x \to 1 \quad \text{fra venstre.}$$

Bevis. Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet. Da findes et $n_0 \in \mathbb{N}$, så at

$$|a_{n_0+1} + \cdots + a_{n_0+p}| < \varepsilon \quad \text{for alle} \quad p \in \mathbb{N}.$$

Vi sætter $b_n = 0$ for $n = n_0$, og $b_n = a_{n_0+1} + \cdots + a_n$ for $n > n_0$. Da er $|b_n| < \varepsilon$ for alle $n \geq n_0$. Endvidere er $a_n = b_n - b_{n-1}$ for $n > n_0$. For ethvert $x \in [0,1]$, ethvert $n \geq n_0$, og ethvert p fås nu

$$\begin{aligned}
&|a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p}| \\
&= |(b_{n+1}-b_n)x^{n+1} + (b_{n+2}-b_{n+1})x^{n+2} + \cdots \\
&\qquad + (b_{n+p-1}-b_{n+p-2})x^{n+p-1} + (b_{n+p}-b_{n+p-1})x^{n+p}| \\
&= |-b_n x^{n+1} + b_{n+1}(x^{n+1}-x^{n+2}) + \cdots \\
&\qquad + b_{n+p-1}(x^{n+p-1}-x^{n+p}) + b_{n+p}x^{n+p}| \\
&\leq |b_n|x^{n+1} + |b_{n+1}|(x^{n+1}-x^{n+2}) + \cdots \\
&\qquad + |b_{n+p-1}|(x^{n+p-1}-x^{n+p}) + |b_{n+p}|x^{n+p} \\
&\leq \varepsilon[x^{n+1} + (x^{n+1}-x^{n+2}) + \cdots + (x^{n+p-1}-x^{n+p}) + x^{n+p}] = \varepsilon \cdot 2x^{n+1} \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Heraf fås påstanden ved udsnitskriteriet for uniform konvergens. ∎

Funktioner af formen $\frac{f(x)}{g(x)}$. Opførslen af en funktion af denne form for $x \to 0$ kan let diskuteres, når f og g er givet som sumfunktioner for potensrækker. Vi viser metoden på nogle typiske tilfælde.

For $x \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ gælder

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots)}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \cdots$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots .$$

Idet sumfunktionerne for de på højre side optrædende potensrækker er kontinuerte i punktet $x = 0$, har funktionerne $\frac{1-\cos x}{x^2}$ og $\frac{\sin x}{x}$ for $x \to 0$ grænseværdierne $\frac{1}{2}$ og 1, og tillægger vi dem for $x = 0$ disse værdier, gælder formlerne for alle $x \in \mathbb{C}$.

For $x \in \mathbb{C}\setminus\{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ gælder

$$\varphi(x) = \frac{e^x-1}{1-\cos x} = \frac{(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)-1}{1-(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots)}$$

$$= \frac{1}{x}\,\frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\cdots}{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}+\cdots} .$$

Idet sumfunktionerne for de i den sidste brøk optrædende potensrækker er kontinuerte i punktet $x = 0$,

ses, at denne brøk konvergerer mod 2 for $x \to 0$.

For $x \to 0$ gælder derfor $|\varphi(x)| \to +\infty$. Af

$$\varphi(x) - \frac{2}{x} = \frac{1}{x} \frac{(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\cdots)-2(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}+\cdots)}{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}+\cdots}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\cdots}{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}+\cdots}$$

ses, at $\varphi(x) - \frac{2}{x} \to 1$ for $x \to 0$. Vi har altså

$$\varphi(x) = \frac{2}{x} + 1 + \psi(x),$$

hvor $\psi(x) \to 0$ for $x \to 0$.

Opgaver. 1. Vis, at konvergensradius ρ for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bestemmes ved formlen

$$\rho = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{hvor} \quad \lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Hvis $\lambda = 0$, skal det betyde, at $\rho = +\infty$. Hvis $\lambda = +\infty$, betyder det, at $\rho = 0$. *

2. Find konvergensradius for hver af potensrækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^{2n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n} x^n.$$

∞ $\sqrt{2}/2$ 3

3. Find konvergensradius for potensrækken

? ↘

$$ax - b^2x^2 + \cdots + a^{2n-1} x^{2n-1} - b^{2n} x^{2n} + \cdots,$$

hvor a og b er to positive tal.

$\rho = \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$

4. Vis, at potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konvergerer uniformt på konvergenscirklens afslutning. Nævn en potensrække med endelig positiv konvergensradius, som er divergent i ethvert punkt af konvergenscirklens rand. $\rho=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konv. | $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ $\rho=1$ $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ $|z|=1$ div.

5. Vis, at sumfunktionen f for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med positiv konvergensradius er en lige funktion, d.v.s. opfylder betingelsen $f(-x) = f(x)$, hvis og kun hvis $a_n = 0$ for alle ulige n, og en ulige funktion, d.v.s. opfylder betingelsen $f(-x) = -f(x)$, hvis og kun hvis $a_n = 0$ for alle lige n. En funktion fremstillet ved potensrække, der i et interval omkring 0 er kontant 0, består af lutter 0-led.

6. Idet $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, skal man ved i formlen

$$(1+x)^{\alpha+\beta} = (1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

at indføre potensrækkerne for de indgående funktioner bevise formlen

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{n-j}.$$

7. Bevis, at rækken

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{9} - \cdots\right.$$

er konvergent med summen $\frac{1}{2}\log 2$.

8. Vis, at potensrækken

$$\frac{x^3}{1\cdot 3} - \frac{x^4}{2\cdot 4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n-2)n} + \cdots$$

har konvergensradius 1, og find den ved rækken fremstillede funktion i intervallet $]-1,1[$.

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$$

9. Vis, at potensrækken $f(x) = -\frac{(1-x)^2}{2}\log(1-x) + \frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2}$

$$\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{x^n}{(n-2)(n-1)n} + \cdots$$

har konvergensradius 1, og find den ved rækken fremstillede funktion i intervallet $]-1,1[$.

10. Find potensrækken for $(1+x)\log(1+x)$, dels ved direkte udregning, dels ved først at finde potensrækken for differentialkvotienten.

11. Idet $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er en potensrække med reelle, ikke negative koefficienter og konvergensradius 1, skal man vise, at sumfunktionen f er voksende på intervallet $[0,1[$, og at følgende gælder:

(1) Hvis f(x) har en grænseværdi c for $x \to 1$, er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent med sum c.

(2) Hvis $f(x) \to +\infty$ for $x \to 1$, er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Anvend sætningen på potensrækken for Arcsin x.

12. Find potensrækker for funktionerne Arsinh x og artanh x.

*13. Bevis, at tallet e ikke er rod i noget andengradspolynomium $a_0x^2 + a_1x + a_2$ med hele koefficienter. (J.Liouville, 1840.)

Vink. Vis, at $a_0e + a_1 + a_2e^{-1}$ må være $\neq 0$.

14. Bevis formlen $\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239}$.

15. Bevis formlen $\frac{\pi}{4} = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{3} + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7}$.

16. Ved brug af potensrækken for $\log\frac{1+x}{1-x}$ skal man beregne log 2 med tre(eller flere) decimaler.

17. Find mængden af de $x \in \mathbb{R}$, for hvilke rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x^2+x)^n}{n}$$

er konvergent, og find rækkens sumfunktion.

$x \in \left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} ; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$; $y = \log(1+x+x^2)$

18. Find mængden af de $x \in \mathbb{R}$, for hvilke rækken $x \in]-1;\infty[$ $\quad \bar{u} = \frac{x}{1+x}$; $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{u}^n$ $\quad \left| \begin{array}{l} y = -\log(1-\bar{u}) \\ = \log(1+x) \end{array} \right.$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n \qquad \frac{dy}{d\bar{u}} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}^n = \frac{1}{1-\bar{u}}$$

er konvergent, og find rækkens sumfunktion.

19. Find en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, som i intervallet $]-1,1[$ fremstiller funktionen

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} \cdot \quad a_n = (-1)^n \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}\right]$$

20. Find en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, som i et interval $]-a,a[$ fremstiller funktionen $\frac{1}{x^2+2x+2}$. $= \frac{d}{dx} \operatorname{Arctan}(1+x)$

Hvor stort kan a vælges? $a \leq \sqrt{2}$

$a_{4n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}$; $a_{4n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}$; $a_{4n+2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}}$; $a_{4n+3} = 0$

21. For et vilkårligt $a \in \mathbb{R}_+$ skal man vise, at

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{1-\cos x}$$

har en grænseværdi for $x \to 0$, og finde denne. $\frac{1}{a}$

22. Vis, at

$$\frac{\sqrt[3]{5+x^5} - \sqrt[3]{5}}{x^5(e^x-1)} \qquad (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

kan skrives på formen $\frac{a}{x} + g(x)$, hvor g er en kontinuert funktion på $\mathbb{R}$. Find a og $g(0)$.

*23. På hvor mange måder kan et beløb på n pence veksles i mønter med pålydende 1 penny, 2 pence, og 3 pence?

Vink. Vis, at antallet er koefficienten til x^n i potensrækken for $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$, og find denne potensrække ved at dekomponere brøken. Det søgte antal bliver det hele tal, der ligger nærmest ved $\frac{1}{12}(n+3)^2$. Antallet kan også bestemmes ved et kombinatorisk ræsonnement.

§ 26. Partialbrøkrækker for cot x og $\frac{1}{\sin x}$. Potensrækker for x cot x og tan x. Bernoulli tal og Bernoulli polynomier.

Partialbrøkrækker for cot x og $\frac{1}{\sin x}$. Funktionen

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = i\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}$$

er (se § 18) defineret på mængden $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi$. [Vi benytter $\mathbb{Z}\pi$ som afkortet betegnelse for mængden $\{p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Den har perioden π. Der gælder

$$\boxed{\cot x - \frac{1}{x} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to 0}.$$

Bevis. Ved brug af potensrækkerne for cos og sin fås for $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi$

$$\cot x - \frac{1}{x} = \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}$$

$$= \frac{x(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots)-(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots)}{x(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots)}$$

$$= x\,\frac{(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!})+(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!})x^2+\cdots}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots}.$$

Idet sumfunktionerne for de i den sidste brøk i tælleren og nævneren optrædende potensrækker er kontinuerte i punktet $x = 0$, fås påstanden.∎

Ved brug af periodiciteten ses, at der for ethvert $n \in \mathbb{Z}$ gælder

$$\cot x - \frac{1}{x-n\pi} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to n\pi.$$

Vi vil nu bevise formlen

$$\boxed{\cot x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-n\pi}, \qquad x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi}.$$

Denne skal forstås således, at den uendelige række

$$\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$$

er konvergent med summen $\cot x$ for ethvert $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi$. Vi vil endda vise, at rækken for ethvert $r \in \mathbb{R}_+$ konvergerer uniformt på mængden $\{x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi \mid |x| \leq r\}$.

Formlen minder om dekompositionen af en rational funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (i det specielle tilfælde, hvor tælleren er af lavere grad end nævneren, og nævneren kun har simple nulpunkter) og kaldes partialbrøkrækken for funktionen cot.

Bevis. For givet $r \in \mathbb{R}_+$ gælder, når $|x| \leq r$ og $n \geq \frac{2r}{\pi}$,

$$\left| \frac{2x}{x^2-n^2\pi^2} \right| \leq \frac{2r}{n^2\pi^2-r^2} \leq \frac{2r}{n^2\pi^2-\frac{1}{4}n^2\pi^2} = \frac{8r}{3\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

og den uniforme konvergens af rækken på mængden $\{x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi \mid |x| \leq r\}$ følger af majorantkriteriet.

Ved

$$F(x) = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=-p}^{p} \frac{1}{x-n\pi} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$$

er der altså defineret en kontinuert funktion F på $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi$. Vurderingen ovenfor viser, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$ er uniformt konvergent på mængden

$\{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq \frac{1}{2}\pi\}$, hvoraf følger, at der gælder

$$F(x) - \frac{1}{x} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to 0.$$

Endvidere gælder, at F har perioden π, idet der for $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi$ gælder

$$F(x+\pi) = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=-p}^{p} \frac{1}{x+\pi-n\pi} = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=-(p+1)}^{p-1} \frac{1}{x-n\pi}$$

$$= \lim_{p\to\infty} \sum_{n=-p}^{p} \frac{1}{x-n\pi} + \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{x+(p+1)\pi} - \frac{1}{x-p\pi} \right)$$

$$= F(x).$$

Hermed er bevist, at funktionen

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cot x - F(x) & \text{for} \quad x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi \\ 0 & \text{for} \quad x \in \mathbb{Z}\pi \end{cases}$$

er kontinuert på $\mathbb{C}$ og har perioden π.

Vi ønsker at viser, at φ er nulfunktionen. Hertil bemærkes, at såvel cot som F tilfredsstiller funktionalligningen

$$2f(x) = f(\tfrac{1}{2}x) + f(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\pi), \qquad x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi.$$

Der gælder nemlig

$$2 \cot x = 2\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}x - \sin^2 \frac{1}{2}x}{\cos \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}x}$$

$$= \cot \tfrac{1}{2}x - \tan \tfrac{1}{2}x = \cot \tfrac{1}{2}x + \cot(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\pi),$$

og

$$F(\tfrac{1}{2}x) + F(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\pi) = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=-p}^{p} \frac{1}{\frac{1}{2}x-n\pi} + \sum_{n=-p}^{p} \frac{1}{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\pi-n\pi} \right)$$

$$= 2 \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=-2p}^{2p} \frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+(2n+1)\pi} \right) = 2F(x).$$

$$= 2 \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=-2p}^{2p} \frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+(2p+1)\pi} \right)$$

Heraf sluttes, at også φ tilfredsstiller funktionalligningen, altså at

$$2\varphi(x) = \varphi(\tfrac{1}{2}x) + \varphi(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\pi), \qquad x \in \mathbb{C},$$

idet ligningen må gælde også for $x \in \mathbb{Z}\pi$, da φ er kontinuert.

Lad nu $a \in \mathbb{R}_+$ være vilkårligt valgt. Idet $|\varphi|$ er kontinuert på den kompakte mængde

$$A = \{x \in \mathbb{C} \mid 0 \le \operatorname{Re} x \le \pi, \ |\operatorname{Im} x| \le a\},$$

har $|\varphi|$ på A en største værdi $M = |\varphi(x_0)|$, $x_0 \in A$. På grund af periodiciteten er M endda største værdi for $|\varphi|$ på hele strimlen $\{x \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} x| \le a\}$. Af funktionalligningen fås

$$2M = |2\varphi(x_0)| = |\varphi(\tfrac{1}{2}x_0) + \varphi(\tfrac{1}{2}x_0+\tfrac{1}{2}\pi)|$$
$$\le |\varphi(\tfrac{1}{2}x_0)| + |\varphi(\tfrac{1}{2}x_0+\tfrac{1}{2}\pi)|.$$

Idet $\frac{1}{2}x_0$ og $\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}\pi$ ligeledes ligger i strimlen, gælder

$$|\varphi(\tfrac{1}{2}x_0)| \le M \quad \text{og} \quad |\varphi(\tfrac{1}{2}x_0+\tfrac{1}{2}\pi)| \le M,$$

hvoraf vi slutter, at

$$|\varphi(\tfrac{1}{2}x_0)| = M \quad \text{og} \quad |\varphi(\tfrac{1}{2}x_0+\tfrac{1}{2}\pi)| = M.$$

Der gælder følgelig $|\varphi(\frac{1}{2^n}x_0)| = M$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$. Idet $\varphi(x) \to \varphi(0) = 0$ for $x \to 0$, ses heraf, at $M = 0$, altså at $\varphi(x) = 0$ for alle x i strimlen $\{x \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} x| \le a\}$. Da $a \in \mathbb{R}_+$ var vilkårligt valgt, er φ altså nulfunktionen. ∎

Ved brug af formlen

$$\frac{1}{\sin x} = \tfrac{1}{2}\left[\cot \tfrac{1}{2}x + \tan \tfrac{1}{2}x\right] = \tfrac{1}{2}\left[\cot \tfrac{1}{2}x - \cot(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\pi)\right]$$

fås for funktionen $\frac{1}{\sin}$ partialbrøkrækken

$$\boxed{\frac{1}{\sin x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x-n\pi}, \qquad x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi}.$$

Formlen skal forstås således, at den uendelige række

$$\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{x-n\pi} + \frac{(-1)^{-n}}{x+n\pi} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$$

er konvergent med summen $\frac{1}{\sin x}$ for ethvert $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi$. Ligesom rækken for cot x er den for ethvert $r \in \mathbb{R}_+$ uniformt konvergent på mængden $\{x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi \mid |x| \leq r\}$.

Bemærkning. Ved brug af formlerne $\tan x = -\cot(x+\frac{1}{2}\pi)$ og $\cos x = \sin(x+\frac{1}{2}\pi)$ kan man naturligvis også opskrive partialbrøkrækker for funktionerne tan og $\frac{1}{\cos}$.

Potensrækker for x cot x og tan x. Af partialbrøkrækken for cot x fås ved at erstatte x med πx

$$\tfrac{1}{2}\pi x \cot \pi x = \tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^2-n^2}, \qquad x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Tillægges funktionen x cot x værdien 1 for $x = 0$ (hvilket er grænseværdien for $x \to 0$), gælder formlen også for $x = 0$. Vi vil vise, at højre side i denne formel for $|x| < 1$ kan skrives som sumfunktion af en potensrække.

For det n^{te} led fås

$$\frac{x^2}{x^2-n^2} = -\frac{x^2}{n^2} \frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2}} = -\frac{x^2}{n^2} - \frac{x^4}{n^4} - \cdots - \frac{x^{2k}}{n^{2k}} + \frac{x^{2k+2}}{(x^2-n^2)n^{2k}}.$$

Idet det erindres (§ 22), at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ er konvergent for $\alpha > 1$, og at dens sum betegnes $\zeta(\alpha)$, finder vi ved brug af regnereglerne for uendelige rækker

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^2-n^2} = -\zeta(2)x^2 - \zeta(4)x^4 - \cdots - \zeta(2k)x^{2k} + R_k(x),$$

hvor $R_k(x)$ er summen af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{(x^2-n^2)n^{2k}}$. Idet der for $|x| < 1$ og alle $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\left| \frac{x^{2k+2}}{(x^2-n^2)n^{2k}} \right| \leq \frac{|x|^{2k+2}}{1-|x|^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

ses af sammenligningskriteriet, at $|R_k(x)| \leq \frac{|x|^{2k+2}}{1-|x|^2}\zeta(2)$,

hvoraf følger, at $R_k(x) \to 0$ for $k \to \infty$.

Der gælder altså

$$\tfrac{1}{2}\pi x \cot \pi x = \tfrac{1}{2} - \zeta(2)x^2 - \zeta(4)x^4 - \cdots - \zeta(2k)x^{2k} - \cdots, \quad |x| < 1.$$

Erstattes x med $\frac{x}{\pi}$ finder vi potensrækken for $x \cot x$

$$\boxed{x \cot x = 1 - \frac{2\zeta(2)}{\pi^2}x^2 - \frac{2\zeta(4)}{\pi^4}x^4 - \cdots - \frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}}x^{2k} - \cdots, \quad |x| < \pi}$$

og dermed

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2\zeta(2)}{\pi^2}x - \frac{2\zeta(4)}{\pi^4}x^3 - \cdots - \frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}}x^{2k-1} - \cdots, \quad 0 < |x| < \pi.$$

Ved brug af formlen $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$ fås heraf potensrækken for $\tan x$

$$\boxed{\tan x = (2^2-1)\frac{2\zeta(2)}{\pi^2}x + (2^4-1)\frac{2\zeta(4)}{\pi^4}x^3 + \cdots + (2^{2k}-1)\frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}}x^{2k-1} + \cdots, \quad |x| < \tfrac{1}{2}\pi}$$

<u>Bernoullitallene</u>. Ved brug af formlen $\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{2i} \cot \frac{x}{2i} - \frac{x}{2}$ og potensrækken for $x \cot x$ fås potensrækken for $\frac{x}{e^x-1}$, der skrives

$$\boxed{\frac{x}{e^x-1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{B_n}{n!}x^n + \cdots, \quad |x| < 2\pi},$$

hvor $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_3 = B_5 = \cdots = 0$, og $B_2, B_4 \cdots$ bestemmes af

$$B_{2k} = -\frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}} \frac{(2k)!}{(2i)^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1}} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Koefficienterne $B_0, B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ kaldes Bernoulli tallene, og funktionen $\frac{x}{e^x - 1}$ kaldes den frembringende funktion for Bernoulli tallene. Bemærk, at tallene $B_2, B_4, \cdots$ er skiftevis positive og negative. Af rækken

$$e^x - 1 = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

og den ovenstående række for $\frac{x}{e^x - 1}$ fås ved Cauchy multiplikation, at der gælder

$$x = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \quad , \quad |x| < 2\pi,$$

hvor

$$c_n = \frac{B_0}{n!} + \frac{B_1}{1!(n-1)!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!1!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k.$$

Ved brug af identitetssætningen for potensrækker sluttes heraf, at $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = \cdots = 0$. Dette giver

$$\boxed{B_0 = 1, \quad B_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} B_k \quad \text{for} \quad n \geq 2}.$$

Herved kan vi successivt bestemme Bernoullitallene. Man ser, at de er rationale tal. Vi anfører en tabel over de første af dem:

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$-\frac{174611}{330}$	$\frac{854513}{138}$

[Tallene har mærkelige artimetiske egenskaber. Det kan nævnes, at B_{120} har en 113-cifret tæller og en 10-cifret

nævner, medens B_{122} har en 107-cifret tæller og nævner 6.]

. Af en formel ovenfor fås nu

$$\boxed{\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \pi^{2k} \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}, \quad k \in \mathbb{N}} \ ,$$

altså for $k = 1,2,3,4$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450} \ .$$

Potensrækkerne for $x \cot x$ og $\tan x$ antager med brug af Bernoullitallene formen

$$x \cot x = 1 - \frac{2^2 B_2}{2!} x^2 + \frac{2^4 B_4}{4!} x^4 - \frac{2^6 B_6}{6!} x^6 + \cdots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} x^2 - \tfrac{1}{45} x^4 - \tfrac{2}{945} x^6 - \cdots, \qquad |x| < \pi$$

$$\tan x = (2^2-1) \frac{2^2 B_2}{2!} x - (2^4-1) \frac{2^4 B_4}{4!} x^3 + (2^6-1) \frac{2^6 B_6}{6!} x^5 - \cdots$$

$$= x + \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{2}{15} x^5 + \cdots, \qquad |x| < \tfrac{1}{2}\pi \ .$$

Bemærkning. Nogle forfattere forstår ved Bernoulli tallene de positive tal $B_2, -B_4, B_6, -B_8, \cdots$, som de betegner $B_1, B_2, B_3, B_4, \cdots$.

Bernoulli polynomierne. Af rækkerne

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_o + \frac{B_1}{1!} x + \frac{B_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{B_n}{n!} x^n + \cdots, \qquad |x| < 2\pi,$$

$$e^{xt} = 1 + \frac{t}{1!} x + \frac{t^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!} x^n + \cdots, \qquad t, x \in \mathbb{C},$$

heraf

$$\boxed{B_n(t+1) - B_n(t) = n\,t^{n-1} \quad \text{og} \quad B_n(1-t) = (-1)^n B_n(t)} \ .$$

For $\underline{n \geq 2}$ får vi heraf $B_n = \underline{B_n(0) = B_n(1)} = (-1)^n B_n(0) = (-1)^n B_n$, hvoraf det pånyt fremgår, at $B_3 = B_5 = \cdots = 0$. Af den første af formlerne fremgår ved induktion (idet n erstattes med $n+1$), at der for $n \geq 1$ gælder

$$\boxed{1^n + 2^n + \cdots + (k-1)^n = \frac{1}{n+1} B_{n+1}(k) - \frac{1}{n+1} B_{n+1}} \ .$$

Af definitionen på Cauchy multiplikation fremgår, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n'(t)}{n!} x^n$ er produktrækken af rækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{t^{n-1}}{n!} x^n$, hvis sumfunktioner er $\frac{x}{e^x - 1}$ og $x\,e^{xt}$. Der må altså gælde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n'(t)}{n!} x^n = \frac{x^2 e^{xt}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^{n+1}, \qquad |x| < \pi \ , \ t \in \mathbb{C}.$$

Af denne formel følger ved brug af identitetssætningen for potensrækker, at der gælder

$$B_0'(t) = 0, \quad B_n'(t) = n\,B_{n-1}(t) \quad \text{for} \quad n \geq 1.$$

For $n \geq 2$ fås heraf

$$\int_0^1 B_{n-1}(t)dt = \frac{1}{n}\left[B_n(1) - B_n(0)\right] = 0.$$

Der gælder altså

$$\boxed{B_0(t) = 1; \quad B_n(t) = n\int_0^t B_{n-1}(\tau)d\tau + B_n \\ \text{og} \quad \int_0^1 B_n(t)dt = 0 \quad \text{for} \quad n \geq 1} \ .$$

Vi møder senere Bernoulli polynomierne i gammafunktionens

og Fourierrækkernes teori.

Historisk bemærkning. Partialbrøkrækkerne for $\cot x$ og $\frac{1}{\sin x}$ og potensrækkerne for $x \cot x$ og $\tan x$, samt værdierne af rækkesummerne $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ er fundet af Euler. Bernoulli tallene og Bernoulli polynomierne har navn efter Jakob Bernoulli (1654-1705), som (i det posthumt udgivne værk Ars conjectandi, 1713) fandt formlen for potenssummerne $1^n + 2^n + \cdots + (k-1)^n$.

Opgaver. 1. Vis, at der for $x \in \mathbb{C} \setminus \{\pm(n+\frac{1}{2})\pi \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ gælder

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 - x^2}, \quad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)\pi}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 - x^2}.$$

2. Vis, at

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4n^2\pi^2}, \qquad x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\, 2\pi i.$$

3 Find summen af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

*4. Vis, at

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n\pi)^2}, \qquad x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi .$$

Vink. For $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ kan formlen fås ud fra partialbrøkrækken for $\cot x$ ved differentiation. For $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi$ kan den vises på lignende måde som partialbrøkrækken for $\cot x$.

5. Bevis formlerne

$$B_n(t+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(t), \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(t) = nt^{n-1}.$$

§ 27. Uendelige produkter.

Uendeligt produkt. Idet $a_1, a_2, \cdots$ er en kompleks talfølge, kaldes symbolet

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{eller} \qquad a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

det til talfølgen hørende uendelige produkt. Talfølgens n^{te} element a_n kaldes produktets n^{te} faktor, og produktet

$$t_n = a_1 \cdots a_n$$

af de n første faktorer kaldes produktets n^{te} afsnit. Talfølgen $t_1, t_2, \cdots$ kaldes afsnitsfølgen. Symbolet kan opfattes som en forskrift til ud fra talfølgen $a_1, a_2, \cdots$ at danne den nye talfølge $t_1, t_2, \cdots$.

Det uendelige produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ med komplekse faktorer kaldes konvergent med værdien t, hvis dets afsnitsfølge er konvergent med grænseværdien t.

For et konvergent uendeligt produkt benyttes symbolerne $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ og $a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ også som betegnelse for produktets værdi.

Vi vil betragte to uendelige produkter, der begge er fundet af Euler.

Eulers produktfremstilling for zetafunktionen. Lad $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ betegne følgen af primtal $2,3,5,7,11,13,\cdots$. For et vilkårligt $\alpha > 1$ har vi (§ 22)

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{6^{\alpha}} + \cdots,$$

altså

$$\zeta(\alpha)\frac{1}{2^\alpha} \equiv \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \cdots,$$

$$\frac{1}{2^\alpha}$$

og dermed ved subtraktion

$$\zeta(\alpha)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right) \equiv 1 + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{9^\alpha} + \frac{1}{11^\alpha} + \cdots,$$

hvor kun de led $\frac{1}{n^\alpha}$ står tilbage, for hvilke n ikke er delelig med 2. Heraf fås

$$\zeta(\alpha)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)-\frac{1}{3^\alpha} \equiv \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{9^\alpha} + \cdots,$$

og dermed ved subtraktion

$$\zeta(\alpha)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{3^\alpha}\right) \equiv 1 + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{11^\alpha} + \cdots,$$

hvor kun de led $\frac{1}{n^\alpha}$ står tilbage, for hvilke n hverken er delelig med 2 eller med 3. Efter k skridt har vi

$$\zeta(\alpha)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^\alpha}\right) \equiv 1 + \frac{1}{p_{k+1}^\alpha} + \cdots,$$

hvor kun de led $\frac{1}{n^\alpha}$ står tilbage, for hvilke n ikke er delelig med noget af de k første primtal; det første led efter 1 er altså $\frac{1}{p_{k+1}^\alpha}$. Heraf ses, at

$$0 < \zeta(\alpha)\left(1-\frac{1}{p_1^\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^\alpha}\right)-1 < \sum_{n=p_{k+1}}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \equiv \zeta(\alpha) - \sum_{n=1}^{p_{k+1}-1} \frac{1}{n^\alpha},$$

hvoraf

$$\zeta(\alpha)\left(1-\frac{1}{p_1^\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^\alpha}\right) \to 1 \quad \text{for} \quad k \to \infty.$$

Hermed er vist, at det uendelige produkt $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^\alpha}\right)$ er konvergent med værdien $\frac{1}{\zeta(\alpha)}$, hvilket er ensbetydende med, at det uendelige produkt $\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^\alpha}}$ er konvergent med værdien $\zeta(\alpha)$.

Vi har således Eulers produktfremstilling for $\zeta(\alpha)$:

$$\boxed{\zeta(\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^{\alpha}}}, \qquad \alpha > 1}$$

[I det foranstående er vi gået ud fra som kendt, at der er uendelig mange primtal. Dette bevises i Euklids elementer således: Lad $p_1, \cdots, p_n$ være primtal. Tallet $p_1 \cdots p_n + 1$ er ikke deleligt med noget af tallene $p_1, \cdots, p_n$. Den mindste divisor > 1 i tallet er et primtal. Altså er $\{p_1, \cdots, p_n\}$ ikke mængden af alle primtal. Dette bevis kan næppe overgås i simpelhed. Det er dog værd at bemærke, at sætningen også fås af det ovenstående ræsonnement. Hvis der nemlig kun var k primtal, ville vi efter k skridt have vist, at $\zeta(\alpha)(1-\frac{1}{p_1^{\alpha}}) \cdots (1-\frac{1}{p_k^{\alpha}}) = 1$ for alle $\alpha > 1$, hvilket strider mod, at $\zeta(\alpha) \to +\infty$ for $\alpha \to 1$.]

Eulers produktfremstilling danner basis for zetafunktionens talteoretiske anvendelser. Som et simpelt eksempel vil vi vise:

<u>Den uendelige række</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots,$

<u>hvis led er de reciproke værdier af primtallene, er divergent</u>.

<u>Bevis</u>. Af relationen $\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^{\alpha}}} \to \zeta(\alpha)$ for $n \to \infty$

slutter vi, at $\sum_{k=1}^{n} [-\log(1-\frac{1}{p_k^{\alpha}})] \to \log \zeta(\alpha)$ for $n \to \infty$.

Den uendelige række $\sum_{k=1}^{n} [-\log(1-\frac{1}{p_k^{\alpha}})]$ er altså konvergent med summen $\log \zeta(\alpha)$:

$$\log \zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} [-\log(1-\frac{1}{p_k^{\alpha}})], \qquad \alpha > 1.$$

For ethvert $\alpha > 1$ og ethvert $k \in \mathbb{N}$ er $\frac{1}{p_k^\alpha} < \frac{1}{p_k} \leq \frac{1}{2}$.

Ved brug af middelværdisætningen fås derfor (idet $\log 1 = 0$)

$$-\log(1-\frac{1}{p_k^\alpha}) = \frac{1}{1-\theta\frac{1}{p_k^\alpha}} \cdot \frac{1}{p_k^\alpha} < \frac{1}{1-1\cdot\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{p_k} = \frac{2}{p_k}.$$

Hvis rækken $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$ var konvergent, lad os sige med sum s, måtte altså ifølge sammenligningskriteriet for ethvert $\alpha > 1$ gælde

$$\log \zeta(\alpha) < 2s.$$

Da $\zeta(\alpha) > \frac{1}{\alpha-1}$ (§ 22) gælder imidlertid, at $\log \zeta(\alpha) \to +\infty$ for $\alpha \to 1$. Følgelig er rækken $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$ divergent. ∎

Historisk bemærkning. Ved brug af Eulers produktfremstilling for zetafunktionen og tilsvarende produktfremstillinger for visse med denne beslægtede funktioner (de såkaldte L-funktioner) viste P.G.L.Dirichlet (1837) den dybtliggende sætning, at enhver differensfølge $a, a+d, a+2d, \cdots$, hvor $a \in \mathbb{N}$ og $d \in \mathbb{N}$ er indbyrdes primiske, indeholder uendelig mange primtal. Metoden viser endda, at hvis disse betegnes $q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots$ er rækken $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ divergent. Han er dermed den egentlige grundlægger af den analytiske talteori, i hvilken talteoretiske sætninger udledes ved brug af funktionsteoretiske metoder. Dybtliggende resultater vedrørende primtallenes fordeling blev opnået af B.Riemann ved betragtning af zetafunktionen også for kompleks variabel. I videreførelse heraf beviste

J.Hadamard og C.de la Vallée-Poussin (1896) den såkaldte primtalsætning, der udsiger, at $\frac{p_k}{k \log k} \to 1$ for $k \to \infty$.

Produktfremstilling for sin x. Vi betragter partialbrøkrækken for cot x for reel variabel x og får for et vilkårligt $p \in \mathbb{N}$

$$(*) \qquad \cot x - \sum_{n=-p}^{p} \frac{1}{x-n\pi} = \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi .$$

Da $\cot x - \frac{1}{x-n\pi} \to 0$ for $x \to n\pi$, har venstre side en grænseværdi for $x \to n\pi$, $n \in \{0, \pm 1, \cdots, \pm p\}$, og vi tillægger venstre side denne værdi, når $x = n\pi$, $n \in \{0, \pm 1, \cdots, \pm p\}$. Da er venstre side kontinuert på intervallet $[-p\pi, p\pi]$. I rækken på højre side er leddene kontinuerte på $[-p\pi, p\pi]$, og rækken er uniformt konvergent på $[-p\pi, p\pi]$. Dens sum er altså kontinuert på $[-p\pi, p\pi]$, og formlen gælder for alle $x \in [-p\pi, p\pi]$.

I ethvert delinterval af $[-p\pi, p\pi]$, der ikke indeholder noget af punkterne $n\pi, n \in \{0, \pm 1, \cdots, \pm p\}$, har venstre side stamfunktionen

$$\log|\sin x| - \sum_{n=-p}^{p} \log|x-n\pi| = \log\left|\frac{\sin x}{\prod_{n=-p}^{p} (x-n\pi)}\right| .$$

Produktet $(-1)^p \prod_{n=-p}^{p} (x-n\pi) = x \cdot \prod_{n=1}^{p} (n^2\pi^2-x^2)$ har på intervallet $[-p\pi, p\pi]$ samme fortegnsvariation som sin x. Udtrykket kan derfor skrives

$$\log \frac{\sin x}{x \cdot \prod_{n=1}^{p} (n^2\pi^2-x^2)} .$$

Da $\frac{\sin x}{x-n\pi} \to (-1)^n$ for $x \to n\pi$, har udtrykket efter log-tegnet en fra 0 forskellig grænseværdi for $x \to n\pi$, $n \in \{0, \pm 1, \cdots, \pm p\}$, og tillægger vi udtrykket denne værdi, når $x = n\pi$, $n \in \{0, \pm 1, \cdots, \pm p\}$, er det en kontinuert, positiv funktion på intervallet $[-p\pi, p\pi]$. For alle $x \in [-p\pi, p\pi]$ gælder derfor

$$\int_0^x (\cot t - \sum_{n=-p}^{p} \frac{1}{t-n\pi})dt = \left[\log \frac{\sin t}{t \prod_{n=1}^{p} (n^2\pi^2 - t^2)}\right]_0^x$$

$$= \log \frac{\sin x}{x \prod_{n=1}^{p} (n^2\pi^2 - x^2)} - \log \frac{1}{\prod_{n=1}^{p} (n^2\pi^2)}$$

$$= \log \frac{\sin x}{x \prod_{n=1}^{p} (1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})}.$$

Ved integration af højre side i(*) får vi for ethvert $x \in [-p\pi, p\pi]$

$$\int_0^x \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} dt = \sum_{n=p+1}^{\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} dt$$

$$= \sum_{n=p+1}^{\infty} \left[\log(n^2\pi^2 - t^2)\right]_0^x = \sum_{n=p+1}^{\infty} \log(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}).$$

Ved brug af eksponentialfunktionens kontinuitet fås således for ethvert $x \in [-p\pi, p\pi]$

$$\frac{\sin x}{x\prod_{n=1}^{p}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})} = \exp\left[\lim_{q\to\infty}\sum_{n=p+1}^{q}\log(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})\right]$$

$$= \lim_{q\to\infty}\exp\left[\sum_{n=p+1}^{q}\log(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})\right] = \lim_{q\to\infty}\prod_{n=p+1}^{q}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}).$$

Da $p \in \mathbb{N}$ var vilkårligt valgt, har vi hermed bevist, at det uendelige produkt $x\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$ er konvergent med værdien $\sin x$ for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

Vi har således produktfremstillingen for $\sin x$:

$$\boxed{\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}), \qquad x \in \mathbb{R}}\ .$$

Formlen minder om faktoropløsningen af et polynomium. Afsnittet $\prod_{n=1}^{p}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$ er jo simpelthen det polynomium af grad $2p$, som i punktet $x = 0$ har værdien 1 (d.v.s. samme værdi som $\frac{\sin x}{x}$), og som har rødderne $\pm\pi, \cdots, \pm p\pi$. Uden bevis nævnes, at formlen endda gælder for ethvert $x \in \mathbb{C}$.

Indsættes $x = \frac{1}{2}\pi$, fås

$$1 = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{4n^2}) = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot 2n},$$

og dermed det først af J.Wallis (1655) fundne produkt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots.$$

Opgaver. 1. Vis, at

$$\sinh x = x\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$\sinh x = -i\sin ix = -i(ix)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(ix)^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$= x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

2. Vis, at

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

3. Vis, at

$$\cosh x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

§ 28. Taylors formel.

Taylors formel med restled. Hvis $f:A \longrightarrow \mathbb{C}$ er en $n-1$ gange differentiabel funktion på et interval $A \subseteq \mathbb{R}$, findes for ethvert $x_o \in A$ netop eet polynomium $P(x)$ af grad $\leq n-1$, som opfylder betingelserne

$$P(x_o) = f(x_o),\ P'(x_o) = f'(x_o), \cdots, P^{(n-1)}(x_o) = f^{(n-1)}(x_o),$$

nemlig polynomiet

$$P(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_o)}{(n-1)!}(x-x_o)^{n-1}.$$

Det kaldes det oskulerende polynomium af grad $n-1$ for f i punktet x_o. Man bemærker, at hvis f er C^∞ på A, er P et afsnit af Taylorrækken for f hørende til x_o. Vi søger et udtryk for afvigelsen $f(x) - P(x)$ mellem f og P i et vilkårligt fra x_o forskelligt punkt x af A. Hertil antages, at f er n gange differentiabel på A. Den simpleste form af resultatet fås, når f er reel.

Hvis $f:A \to \mathbb{R}$ er n gange differentiabel på et interval $A \subseteq \mathbb{R}$, og x_o og x er punkter af A, findes et ξ mellem x_o og x, så at

$$f(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_o)}{(n-1)!}(x-x_o)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_o)^n.$$

Ordet mellem er her taget i streng forstand, d.v.s $x_o < \xi < x$ eller $x < \xi < x_o$, eftersom $x > x_o$ eller $x < x_o$.

Udtrykket $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_o)^n$ for afvigelsen $f(x)-P(x)$ skyldes J.-L.Lagrange (1797), og formlen kaldes Taylors formel med Lagranges restled.

Bemærkning. For $n = 1$ er det differentialregningens middelværdisætning; idet sætningen jo da udsiger, at der findes et ξ mellem x_o og x, så at

$$f(x) = f(x_o) + f'(\xi)(x-x_o).$$

Bevis. Vi betragter først det tilfælde, hvor

$$f(x_o) = 0,\ f'(x_o) = 0, \cdots, f^{(n-1)}(x_o) = 0,\ f(x) = 0.$$

Det drejer sig da om at vise, at der findes et ξ mellem x_o og x, for hvilket $f^{(n)}(\xi) = 0$. Dette følger ved gentagen anvendelse af differentialregningens middelværdisætning. Af $f(x_o) = 0$, $f(x) = 0$ følger nemlig eksistensen af et ξ_1 mellem x_o og x, for hvilket $f'(\xi_1) = 0$; af $f'(x_o) = 0$, $f'(\xi_1) = 0$ følger eksistensen af et ξ_2 mellem x_o og ξ_1, for hvilket $f''(\xi_2) = 0$; etc; af $f^{(n-1)}(x_o) = 0$, $f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) = 0$ følger eksistensen af et ξ mellem x_o og ξ_{n-1}, for hvilket $f^{(n)}(\xi) = 0$.

I det almene tilfælde følger påstanden ved at man betragter funktionen

$$t \mapsto \varphi(t) = f(t) - P(t) - K(t-x_o)^n,$$

hvor P er det oskulerende polynomium af grad $n-1$, og K er valgt således, at $\varphi(x) = 0$. Funktionen φ falder da ind under det allerede behandlede specialtilfælde. Der findes altså et ξ mellem x_o og x, for hvilket

$$\varphi^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - 0 - Kn! = 0, \text{ d.v.s. } K = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \quad \square$$

[Af beviset ses, at det havde været tilstrækkeligt at forudsætte, at f er kontinuert i det afsluttede interval med endepunkter x_0 og x, og $n-1$ gange differentiabel i det halvåbne interval med disse endepunkter, det førstnævnte medregnet, samt n gange differentiabel i det åbne interval med disse endepunkter. Denne finesse er dog uden større interesse.]

Indføres tilvæksten $h = x-x_0$, har vi $\xi = x_0+\theta h$, hvor $\theta \in]0,1[$, og formlen kan dermed skrives

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}h^n.$$

Skrives Δx i stedet for h, og betegnes det k^{te} differential af f i punktet x hørende til tilvæksten Δx med $d^k f(x,\Delta x)$, kan formlen skrives

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\\ &= df(x_0,\Delta x) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,\Delta x) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(x_0,\Delta x)\\ &\quad + \frac{1}{n!}d^n f(x_0+\theta\Delta x,\Delta x).\end{aligned}$$

Sætningen kan ikke umiddelbart anvendes på en ikke reel funktion f. Anvendes den på Re f og Im f hver for sig, får man:

Hvis $f:A \to \mathbb{C}$ er n gange differentiabel på et interval $A \subseteq \mathbb{R}$, og x_0 og x er punkter af A, findes et ξ og et η mellem x_0 og x, så at

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{\operatorname{Re} f^{(n)}(\xi) + i \operatorname{Im} f^{(n)}(\eta)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Anvendelse til udledelse af potensrækkefremstillinger.

Taylors formel kan benyttes til udledelse af potensrækkefremstillinger. Anvendes den f.eks. på funktionen e^x med $x_0 = 0$, fås

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\theta x}, \qquad \theta \in]0,1[.$$

Ved hjælp af vurderingen

$$\left| \frac{x^n}{n!}e^{\theta x} \right| \leq \frac{|x|^n}{n!}e^{|x|}$$

og relationen

$$\frac{|x|^n}{n!} \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

følger den i § 25 udledte potensrækkefremstilling for e^x. Metoden har imidlertid ikke stor betydning. Dels er den ikke anvendelig i alle tilfælde; dels er vurderingen af restleddet i de tilfælde, hvor metoden kan anvendes, ofte besværlig.

Taylors grænseformel. Vi vil nu betragte spørgsmålet om, hvorledes afvigelsen $f(x) - P(x)$ mellem f og P forholder sig for $x \to x_0$. Hertil antages $f:A \to \mathbb{C}$ at være en C^n-funktion, altså n gange differentiabel med kontinuert n^{te} afledet $f^{(n)}$. Da er $\operatorname{Re} f^{(n)}$ og $\operatorname{Im} f^{(n)}$ kontinuerte i x_0, og vi har altså

$$\frac{\operatorname{Re} f^{(n)}(\xi)+i \operatorname{Im} f^{(n)}(\eta)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \alpha(x_0,x)(x-x_0)^n,$$

hvor $\alpha(x_0,x) \to 0$ for $x \to x_0$. Med brug af den i § 15 omtalte skrivemåde betegnes en funktion af formen $\alpha(x_0,x)(x-x_0)^n$, hvor $\alpha(x_0,x) \to 0$ for $x \to x_0$, altså en funktion, der for $x \to x_0$ er af lavere størrelsesorden end

$(x-x_o)^n$, med $\sigma((x-x_o)^n)$, der læses: lille σ af $(x-x_o)^n$. Vi har altså:

Hvis $f:A \to \mathbb{C}$ er en C^n-funktion på et interval $A \subseteq \mathbb{R}$, og x_o er et punkt af A, gælder for $x \to x_o$

$$f(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n + \sigma((x-x_o)^n).$$

Denne formel kaldes Taylors grænseformel.

Andre skrivemåder for formlen er følgende:

$$f(x_o+h) = f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}h^n + \sigma(h^n);$$

$$\Delta f = f(x_o+\Delta x) - f(x_o)$$

$$= df(x_o,\Delta x) + \frac{1}{2!}d^2f(x_o,\Delta x) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(x_o,\Delta x) + \sigma((\Delta x)^n).$$

Bemærkning. Betegnelsen $\sigma(h^n)$ finder anvendelse for alle $n \in \mathbb{N}_o$, idet $\sigma(h^o) = \sigma(1)$ betegner en vilkårlig funktion af h, der konvergerer mod 0 for $h \to 0$.

Ved brug af betegnelsen har man ofte anledning til at benytte følgende regneregler, der umiddelbart følger af definitionen:

$\sigma(h^n)$ kan erstattes med $\sigma(h^m)$, når $m < n$.

$\sigma(h^n) + \sigma(h^m)$ kan erstattes med $\sigma(h^k)$, hvor $k \leq \min\{n,m\}$.

$\sigma(h^n)\sigma(h^m)$ kan erstattes med $\sigma(h^{n+m})$.

$\frac{\sigma(h^n)}{h^m}$ kan erstattes med $\sigma(h^{n-m})$, når $m \leq n$.

Anvendelse til undersøgelse af funktioner af formen $\frac{f(x)}{g(x)}$. I § 25 er beskrevet, hvordan man kan undersøge en funktion af formen $\frac{f(x)}{g(x)}$ i det tilfælde, hvor f og g

er sumfunktioner af kendte potensrækker.

I tilfælde, hvor denne forudsætning ikke er opfyldt, kan undersøgelsen gennemføres på analog måde ved hjælp af Taylors grænseformel. Vi illustrerer metoden ved et eksempel.

Vi vil undersøge den ved

$$\varphi(x) = \frac{e^{\tan x} - e^{1-\cos 2x}}{(1-\cot x)\cos^2 2x} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

definerede funktion for $x \to \frac{1}{4}\pi$. Funktionerne f og g er C^∞ på definitionsmængderne for tan og cot, altså på $]0, \frac{1}{2}\pi[$. Der gælder $f(\frac{1}{4}\pi) = 0$ og $g(\frac{1}{4}\pi) = 0$. Ved udførelse af differentiationerne ses, at $f'(\frac{1}{4}\pi) = 0$, $f''(\frac{1}{4}\pi) = 4e$ og $g'(\frac{1}{4}\pi) = 0$, $g''(\frac{1}{4}\pi) = 0$, $g'''(\frac{1}{4}\pi) = 48$. Vi får altså

$$f(\tfrac{1}{4}\pi+h) = 2e\,h^2 + o(h^2)$$

$$g(\tfrac{1}{4}\pi+h) = 8\,h^3 + o(h^3)$$

og dermed

$$\varphi(\tfrac{1}{4}\pi+h) = \frac{2e\,h^2+o(h^2)}{8\,h^3+o(h^3)} = \frac{2e+o(1)}{8+o(1)} \cdot \frac{1}{h}.$$

Heraf fås

$$|\varphi(x)| \to +\infty \quad \text{for} \quad x \to \tfrac{1}{4}\pi$$

og mere nøjagtigt

$$(x-\tfrac{1}{4}\pi)\varphi(x) \to \frac{e}{4} \quad \text{for} \quad x \to \tfrac{1}{4}\pi.$$

For at få yderligere oplysninger må vi tage flere led med. Ved at differentiere en gang til, får vi $f'''(\frac{1}{4}\pi) = 48e$ og $g^{(4)}(\frac{1}{4}\pi) = -192$. Vi har altså

$$f(\tfrac{1}{4}\pi+h) = 2e\,h^2 + 8e\,h^3 + \sigma(h^3)$$

$$g(\tfrac{1}{4}\pi+h) = 8\,h^3 - 8\,h^4 + \sigma(h^4)$$

og dermed

$$\varphi(\tfrac{1}{4}\pi+h) - \frac{e}{4}\cdot\frac{1}{h} = \frac{2e\,h^2+8e\,h^3+\sigma(h^3)}{8\,h^3-8\,h^4+\sigma(h^4)} - \frac{e}{4}\cdot\frac{1}{h}$$

$$= \frac{e+4e\,h+\sigma(h)}{4-4\,h+\sigma(h)}\cdot\frac{1}{h} - \frac{e}{4}\cdot\frac{1}{h} = \frac{5e\,h+\sigma(h)}{4-4h+\sigma(h)}\cdot\frac{1}{h}$$

$$= \frac{5e+\sigma(1)}{4+\sigma(1)} \to \frac{5e}{4} \quad \text{for} \quad h \to 0.$$

Der gælder altså

$$\varphi(x) = \frac{e}{4x-\pi} + \frac{5e}{4} + \psi(x),$$

hvor $\psi(x) \to 0$ for $x \to \frac{1}{4}\pi$.

Opgaver.*1. Vis, at hvis $f:A \to \mathbb{R}$ er n gange differentiabel på et interval $A \subseteq \mathbb{R}$, og x_0 og x er punkter af A, findes for ethvert $p \in \{1,\cdots,n\}$ et ξ mellem x_0 og x, så at

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{p(n-1)!}(x-\xi)^{n-p}(x-x_0)^p.$$

(Udtrykket $\frac{f^{(n)}(\xi)}{p(n-1)!}(x-\xi)^{n-p}(x-x_0)^p$ for restleddet skyldes O.Schlömilch (1848); for $p = n$ fås Lagranges restled; for $p = 1$ fås en af Cauchy (1826) givet form af restleddet.)

Vink. Anvend middelværdisætningen på funktionen

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - K(x-t)^p,$$

hvor K er valgt således, at $\varphi(x_0) = 0$.

*2. Vis, at hvis $f:A \to \mathbb{R}$ er $n-1$ gange differentiabel på et interval $A \subseteq \mathbb{R}$ og n gange differentiabel i punktet $x_0 \in A$, da gælder for $x \to x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

Vink. Betragt først det specialtilfælde, hvor

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0, \cdots, f^{(n)}(x_0) = 0.$$

Bevis dernæst påstanden i det almene tilfælde ved at betragte funktionen

$$f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

3. Undersøg den ved

$$\varphi(x) = \frac{\log(1+x)+3\sin^2 x - x}{\sin x + x^2 - x} \to \frac{5}{2} \text{ for } x \to 0$$

definerede funktion for $x \to 0$.

4. Undersøg den ved

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x \log x} \to \frac{1}{2} \text{ for } x \to 1$$

definerede funktion for $x \to 1$.

5. Undersøg den ved

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\operatorname{Arcsin}\frac{x+1}{\sqrt{8}} - \operatorname{Arctan} x}$$

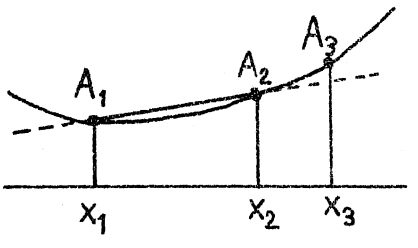
definerede funktion for $x \to 1$.

$|\varphi(x)| \to \infty$ for $x \to 1$

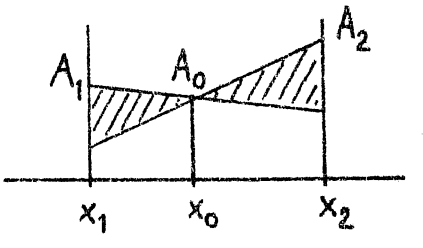
($\varphi(x) \to +\infty$ for $x \to 1^-$, $\varphi(x) \to -\infty$ for $x \to 1^+$)

§ 29. Konvekse og logaritmisk konvekse funktioner.

Konvekse funktioner. En funktion $f: I \to \mathbb{R}$ på et åbent (begrænset eller ubegrænset) interval $I \subseteq \mathbb{R}$ kaldes konveks, såfremt dens graf i ethvert interval $[x_1, x_2] \subset I$ ligger under eller på den ved punkterne



$A_1 = (x_1, f(x_1))$ og $A_2 = (x_2, f(x_2))$ bestemte korde A_1A_2. Heraf følger straks, at grafen uden for intervallet $[x_1, x_2]$ ligger over eller på kordens forlængelse. Thi lå f.eks. det til et $x_3 > x_2$ svarende punkt $A_3 = (x_3, f(x_3))$ under kordens forlængelse, ville jo A_2 ligge over korden A_1A_3. - Betragtes nu for et vilkårligt x_o punkter $x_1 < x_o$ og $x_2 > x_o$, ses, at grafen i $[x_1, x_2]$ må ligge i de to trekanter bestemt af linierne $x = x_1$, $x = x_2$, A_1A_o, og A_oA_2, hvor



$A_o = (x_o, f(x_o))$, $A_1 = (x_1, f(x_1))$, $A_2 = (x_2, f(x_2))$. Heraf fremgår, at funktionen er kontinuert i x_o. Altså: Enhver konveks funktion er kontinuert.

Definitionen af konveksitet kan formuleres således:

For vilkårlige $x_1 < x_o < x_2$ skal gælde

$$\frac{f(x_o)-f(x_1)}{x_o-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_o)}{x_2-x_o}.$$

Heraf følger: En sum af (to eller flere) konvekse funktioner er konveks. Grænsefunktionen for en punktvis konvergent følge af konvekse funktioner er konveks. Summen af en punktvis konvergent uendelig række, hvis led er konvekse funktioner, er konveks.

Vi nævner også: Enhver lineær funktion $\alpha x+\beta$ er konveks. Hvis f er konveks på et vist interval, og c er et reelt tal $\neq 0$, da er funktionerne $f(x+c)$ og $f(cx)$ konvekse på de tilsvarende intervaller.

En konveks funktion er ikke nødvendigvis differentiabel (eksempel: $|x|$). Der gælder: En differentiabel funktion $f:I \to \mathbb{R}$ er konveks, hvis og kun hvis f' er monotont voksende.

Bevis: (1) Antag f' monotont voksende. For givne $x_1 < x_o < x_2$ er ifølge middelværdisætningen

$$\frac{f(x_o)-f(x_1)}{x_o-x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2)-f(x_o)}{x_2-x_o} = f'(\xi_2),$$

hvor $\xi_1 \in]x_1,x_o[$, $\xi_2 \in]x_o,x_2[$. Af $\xi_1 < \xi_2$ følger $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, og konveksiteten er bevist.

(2) Antag f konveks. For givne $x_1 < x_2$ ligger grafen i $[x_1,x_2]$ under eller på korden. Heraf følger

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2).$$

Altså er f' monotont voksende. ∎

Af denne sætning følger: En to gange differentiabel funktion $f:I \to \mathbb{R}$ er konveks, hvis og kun hvis $f''(x) \geq 0$ for alle $x \in I$. Thi f' er monotont voksende, hvis og kun hvis $f''(x) \geq 0$ for alle $x \in I$.

Vi beviser endvidere: En differentiabel funktion $f:I \to \mathbb{R}$ er konveks, hvis og kun hvis dens graf for ethvert $x_o \in I$ ligger over eller på tangenten i punktet $A_o = (x_o, f(x_o))$.

Bevis. (1) Antag f konveks. For $x_1 < x_o < x_2$ ligger grafen i $[x_1, x_o]$ og $[x_o, x_2]$ under eller på korderne. Heraf følger

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_o)-f(x_1)}{x_o-x_1} \leq f'(x_o) \leq \frac{f(x_2)-f(x_o)}{x_2-x_o} = f'(\xi_2)$$

$$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_o) + (x_1 - x_o) f'(x_o)$$

og tilsvarende for x_2

hvilket udtrykker, at punkterne $A_1 = (x_1, f(x_1))$ og $A_2 = (x_2, f(x_2))$ ligger over eller på tangenten i $A_o = (x_o, f(x_o))$.

(2) Antag, at grafer for ethvert $x_o \in I$ ligger over eller på tangenten i $A_o = (x_o, f(x_o))$. For vilkårlige $x_1 < x_o < x_2$ vil så punkterne $A_1 = (x_1, f(x_1))$ og $A_2 = (x_2, f(x_2))$ ligger over eller på tangenten i A_o, hvoraf følger, at A_o ligger under eller på korden A_1A_2. Altså er f konveks. □

En funktion $f:I \to \mathbb{R}$ på et åbent (begrænset eller ubegrænset) interval $I \subseteq \mathbb{R}$ kaldes konkav, såfremt dens graf i ethvert interval $[x_1, x_2] \subset I$ ligger over eller på den ved punkterne $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$ bestemte korde. En funktion f er således konkav, hvis og kun hvis $-f$ er konveks. For konkave funktioner har man sætninger ganske svarende til de ovenstående.

Jensens ulighed. Som vist af J.L.W.V.Jensen (1906) spiller de konvekse funktioner en betydningsfuld rolle i teorien for uligheder. Dette beror på følgende sætning:

Funktionen $f: I \to \mathbb{R}$ er konveks, hvis og kun hvis der for vilkårlige punkter $x_1, \cdots, x_n \in I$ og vilkårlige tal $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ med sum 1 gælder Jensens ulighed

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

Bevis. (1) Antag, at f opfylder Jensens ulighed. Da er f konveks. Thi for $n = 2$ drejer det sig om uligheden $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, som blot er en anden formulering af definitionen på konveksitet. Uligheden er nemlig triviel, hvis $x_1 = x_2$; og hvis $x_1 \neq x_2$, er punktet $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2))$ et punkt af den ved $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$ bestemte korde, og alle kordens punkter (pånær endepunkterne) har denne form.

(2) Antag f konveks. Da gælder Jensens ulighed ifølge det lige bemærkede for $n = 2$. Heraf følger den ved induktion for vilkårligt $n > 2$. Thi antages den gyldig for færre end n punkter, finder vi, i tilfælde af n punkter, idet vi sætter

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_n} = \beta_1, \cdots, \frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_n} = \beta_{n-1}$$

og bemærker, at tallene $\beta_1, \cdots, \beta_{n-1} \in \mathbb{R}_+$ har sum 1,

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) &= f((1-\alpha_n)(\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{n-1} x_{n-1}) + \alpha_n x_n) \\ &\leq (1-\alpha_n) f(\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{n-1} x_{n-1}) + \alpha_n f(x_n) \\ &\leq (1-\alpha_n)(\beta_1 f(x_1) + \cdots + \beta_{n-1} f(x_{n-1})) + \alpha_n f(x_n) \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) + \alpha_n f(x_n). \end{aligned}$$

∎

Jensens ulighed har en simpel geometrisk betydning. Anbringes i punkterne $(x_1,f(x_1)),\cdots,(x_n,f(x_n))$ masser $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, er $(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n,\alpha_1 f(x_1)+\cdots+\alpha_n f(x_n))$ tyngdepunktet for dette massesystem. Uligheden udtrykker, at tyngdepunktet ligger over eller på funktionens graf.

For konkave funktioner har vi en tilsvarende sætning. Blot skal ulighedstegnet i Jensens ulighed vendes.

Eksempel. For givne $x_1,\cdots,x_n \in \mathbb{R}$ kaldes $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ det aritmetiske middeltal af $x_1,\cdots,x_n$, og for givne $x_1,\cdots,x_n \in \mathbb{R}_+$ kaldes $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$ det geometriske middeltal af $x_1,\cdots,x_n$. For vilkårlige $x_1,\cdots,x_n \in \mathbb{R}_+$ gælder uligheden mellem det geometriske og det aritmetiske middeltal:

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

Dette er en umiddelbar følge af Jensens ulighed. Funktionen $\log:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ er nemlig konkav, da dens afledede er monotont aftagende. Der gælder derfor

$$\log\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \geq \frac{\log x_1+\cdots+\log x_n}{n} = \log \sqrt[n]{x_1\cdots x_n},$$

hvilket (da log er monotont voksende) udtrykker det ønskede.

Logaritmisk konvekse funktioner. En funktion $f:I \to \mathbb{R}$ på et åbent (begrænset eller ubegrænset) interval $I \subseteq \mathbb{R}$ kaldes logaritmisk konveks, hvis den kun antager positive værdier, og $\log f$ er konveks.

Af sætningerne om konvekse funktioner følger umiddelbart: Enhver logaritmisk konveks funktion er kontinuert.

Et produkt af (to eller flere) logaritmisk konvekse funktioner er logaritmisk konveks. Grænsefunktionen for en punktvis konvergent følge af logaritmisk konvekse funktioner er logaritmisk konveks, hvis den kun antager positive værdier.

Derudover gælder følgende mærkelige sætning, som ikke umiddelbart følger af definitionen på logaritmisk konveksitet: En sum af (to eller flere) logaritmisk konvekse funktioner er logaritmisk konveks.

Bevis. Det er nok at se på en sum $f = f_1 + f_2$ af to logaritmisk konvekse funktioner. Det er klart, at $f(x) > 0$ for alle x. Lad $x_1 < x_2$, og lad de til $[x_1,x_2]$ svarende korder for de konvekse funktioner $\log f_1$ og $\log f_2$ være bestemt ved $\alpha_1 x+\beta_1$ og $\alpha_2 x+\beta_2$. Da gælder for $x \in [x_1,x_2]$

$$\log f_1(x) \le \alpha_1 x+\beta_1 \quad \text{og} \quad \log f_2(x) \le \alpha_2 x+\beta_2$$

og altså

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \le e^{\alpha_1 x+\beta_1} + e^{\alpha_2 x+\beta_2} = \varphi(x),$$

hvoraf $\log f(x) \le \log \varphi(x)$. For $x = x_1$ og $x = x_2$ gælder $\log f(x) = \log \varphi(x)$. De til $[x_1,x_2]$ svarende korder for $\log f$ og $\log \varphi$ er derfor samme linie. Det er derfor nok at vise, at grafen for $\log \varphi$ i $[x_1,x_2]$ ligger under eller på korden. Dette viser vi ved at vise, at $\log \varphi$ er konveks. Nu er $\log \varphi$ to gange differentiabel. Vi finder

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\varphi(x) = \frac{\varphi(x)\varphi''(x)-(\varphi'(x))^2}{(\varphi(x))^2} = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2 e^{(\alpha_1+\alpha_2)x+\beta_1+\beta_2}}{(\varphi(x))^2},$$

som er ≥ 0 for alle x. Altså er $\log\varphi$ konveks. □

Et vigtigt resultat fås ved at kombinere de foranstående sætninger. Lad $f(x,t)$ være en reel funktion på en produktmængde $I \times [a,b]$, hvor $I \subseteq \mathbb{R}$ er et åbent interval. Vi antager, at $f(x,t_0)$ er logaritmisk konveks på I for ethvert $t_0 \in [a,b]$, og at $f(x_0,t)$ er kontinuert på $[a,b]$ for ethvert $x_0 \in I$. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ vil

$$F_n(x) = [f(x,a)+f(x,a+h)+\cdots+f(x,a+(n-1)h)]\,h, \quad h = \frac{b-a}{n},$$

være logaritmisk konveks på I. For $n \to \infty$ gælder

$$F_n(x) \to F(x) = \int_a^b f(x,t)dt.$$

Da $F(x) > 0$ for alle $x \in I$, slutter vi, at $F(x)$ er logaritmisk konveks på I.

I forbindelse med det udvidede integralbegreb har dette resultat følgende konsekvens, som vil blive anvendt i gammafunktionens teori: <u>Er $\varphi:]a,b[\to \mathbb{R}$ kontinuert og positiv på det åbne interval $]a,b[$, hvor $0 \leq a < b \leq +\infty$, og eksisterer integralet</u>

$$F(x) = \int_a^b \varphi(t)t^{x-1}dt$$

<u>for alle $x > 0$, da er $F(x)$ logaritmisk konveks på $]0,+\infty[$.</u>

Bevis. Funktionen $f(x,t) = \varphi(t)t^{x-1}$ er defineret på $]0,+\infty[\times]a,b[$. Endvidere er $f(x,t_0)$ logaritmisk konveks på $]0,+\infty[$ for ethvert $t_0 \in]a,b[$, da $\log f(x,t_0)$ er en lineær funktion af x, og $f(x_0,t)$ er kontinuert på $]a,b[$ for ethvert $x_0 \in]0,+\infty[$. Følgelig er

$$\int_{a_1}^{b_1} \varphi(t)t^{x-1}dt$$

en logaritmisk konveks funktion på $]0,+\infty[$ for vilkårlige a_1,b_1, hvor $a < a_1 < b_1 < b$. Vi lader a_1 og b_1 gennemløbe talfølger, der konvergerer mod a og b. Funktionen $F(x)$ er altså grænsefunktion for en punktvis konvergent følge af logaritmisk konvekse funktioner, og da $F(x) > 0$ for alle $x \in]0,+\infty[$, slutter vi, at $F(x)$ er logaritmisk konveks.∎

Vi nævner også: Hvis f er logaritmisk konveks på et interval, og c er et reelt tal $\neq 0$, da er funktionerne $f(x+c)$ og $f(cx)$ logaritmisk konvekse på de tilsvarende intervaller.

Til slut beviser vi: Enhver logaritmisk konveks funktion er konveks.

Bevis. Lad f være logaritmisk konveks, og lad $\alpha x+\beta$ være korden for $\log f$ svarende til intervallet $[x_1,x_2]$. Da er $\log f(x) \leq \alpha x+\beta$ for $x \in [x_1,x_2]$, altså $f(x) \leq e^{\alpha x+\beta}$. Da $f(x)=e^{\alpha x+\beta}$ for $x = x_1$ og $x = x_2$, er korden for $e^{\alpha x+\beta}$ svarende til $[x_1,x_2]$ også korde for f. Men $e^{\alpha x+\beta}$ er konveks. Altså er $f(x)$ for $x \in [x_1,x_2]$ under eller på korden.∎

En funktion $f: I \to \mathbb{R}$ på et åbent (begrænset eller ubegrænset) interval $I \subseteq \mathbb{R}$ kaldes logaritmisk konkav, hvis den kun antager positive værdier, og log f er konkav. Begrebet logaritmisk konkavitet har ikke samme interesse som begrebet logaritmisk konveksitet, idet en sum af logaritmisk konkave funktioner i almindelighed ikke er logaritmisk konkav.

Opgaver. 1. Tegn grafen af funktionen $\frac{x}{\log x}$.

Find bl.a. monotoniintervallerne og de intervaller, hvori funktionen er konveks eller konkav.

2. Vis, at der for vilkårlige $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ gælder uligheden

$$\alpha = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} = \beta$$

Funktionen $f: x \to x^2$ er konkav ($f'' = 2$)
Tegnes alle tænkelige korder mellem x_i og x_j ($i \neq j$) og indtages midtpunktet for hver af disse, regnes sandsynligvis øverste punktet for korderne i dette have koordinatsættet (α, β^2) men β^2 vil ligge over grafen da f er konkav, hvorfor $\beta^2 \geq \alpha^2 \Rightarrow \beta \geq \alpha$

3. Efter den aritmetiske skala A og den Ørstedske skala Ø tillægges karaktererne følgende værdier:

	ug	ug-	mg+	mg	mg-	g+	g	g-	tg+	tg	tg-	mdl+	mdl	mdl-	slet+	slet
A	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
Ø	8	$7\frac{2}{3}$	$7\frac{1}{3}$	7	$6\frac{1}{3}$	$5\frac{2}{3}$	5	$3\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$	1	$-1\frac{2}{3}$	$-4\frac{1}{3}$	-7	$-12\frac{1}{3}$	$-17\frac{2}{3}$	-23

Ved en eksamen bestående af et antal prøver udregnes middeltallet m af karakterernes værdier, og hovedkarakteren H_A ved aritmetisk skala og $H_Ø$ ved Ørsteds skala fastsættes således:

H_A = ug hvis $9\frac{1}{2} \leq m$

ug- hvis $8\frac{1}{2} \leq m < 9\frac{1}{2}$

...

slet hvis $m < -4\frac{1}{2}$

$H_\emptyset$ = ug hvis $7\frac{5}{6} \leq m$

ug- hvis $7\frac{1}{2} \leq m < 7\frac{5}{6}$

...

slet hvis $m < -20\frac{1}{3}$.

Vis, at $H_\emptyset$ altid er lavere end eller lig H_A.

§ 30. Gammafunktionen.

Definition af gammafunktionen. Den af Euler indførte gammafunktion $\Gamma(x)$ løser den opgave på fornuftig måde at udvide begrebet $n!$ til vilkårlige reelle tal. Som det vil blive vist nedenfor har man for $n!$ udtrykket

$$\int_0^\infty e^{-t}\, t^n dt = n!.$$

Det ligger derfor nær i denne formel at erstatte n med et vilkårligt reelt x. Man har imidlertid valgt at definere gammafunktionen således, at den i punktet n har værdien $(n-1)!$. Definitionen lyder derfor

(1) $$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} dt}.$$

Vedrørende integralets eksistens bemærkes: På intervallet $]0,1]$ ligger e^{-t} mellem positive grænser. Altså kan $e^{-t}\, t^{x-1}$ integreres ind i 0, når og kun når $x - 1 > -1$, altså når og kun når $x > 0$. Idet $e^{-t}\, t^{x-1} = e^{-\frac{1}{2}t}\, e^{-\frac{1}{2}t}\, t^{x-1}$, og $e^{-\frac{1}{2}t}\, t^{x-1} \to 0$ for $t \to +\infty$ for ethvert x, kan $e^{-t}\, t^{x-1}$ integreres ud i $+\infty$ for ethvert x.

Ved ovenstående formel (1) er $\Gamma(x)$ således defineret for alle $x \in]0,+\infty[$.

Hvis man i $\int_a^b e^{-t}\, t^{x-1} dt$, hvor $0 < a < b < +\infty$, erstatter tallet $x > 0$ med $x + 1$ og anvender delvis integration, får man

$$\int_a^b e^{-t}\, t^x dt = \left[-e^{-t}\, t^x\right]_a^b + \int_a^b e^{-t} x t^{x-1} dt$$

$$= e^{-a} a^x - e^{-b} b^x + x \int_a^b e^{-t} t^{x-1} dt.$$

For $a \to 0$ og $b \to +\infty$ fås heraf

(2). $$\boxed{\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)}$$

Denne funktionalligning er grundlæggende for hele teorien. For $x = 1$ fås $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$. Funktionalligningen giver derfor $\Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2, \cdots, \Gamma(n) = (n-1)!$. Denne ligning $\Gamma(n) = (n-1)!$ gælder også for $n = 1$, idet man sætter $0! = 1$. Funktionalligningen er en almindeliggørelse af ligningen $n! = n\cdot(n-1)!$. Kender man gammafunktionen for $0 < x \leq 1$, kan man ved funktionalligningen finde dens værdier for $1 < x \leq 2$, ud fra disse dens værdier for $2 < x \leq 3$, etc.

Denne betragtning viser, at der findes uendelig mange funktioner på $]0,+\infty[$ der tilfredsstiller funktionalligningen $f(x+1) = x\,f(x)$, og for hvilke $f(1) = 1$ (og følgelig $f(n) = (n-1)!$). Man kan nemlig vælge $f(x)$ vilkårligt på $]0,1]$, bortset fra betingelsen $f(1) = 1$, og derefter benytte funktionalligningen til successivt at definere $f(x)$ på $]1,2]$, $]2,3]$, etc. Den således fundne funktion vil da tilfredsstille betingelserne.

Ifølge § 29 har $\Gamma(x)$ den egenskab at være logaritmisk konveks. Vi vil nu vise, at denne egenskab sammen med de allerede nævnte karakteriserer gammafunktionen.

<u>Karakterisering af $\Gamma(x)$.</u> <u>Funktionen $f(x) = \Gamma(x)$ har følgende egenskaber</u>:

a) den er defineret på $]0,+\infty[$ og tilfredsstiller funktionalligningen $f(x+1) = x\,f(x)$;

b) den er logaritmisk konveks;

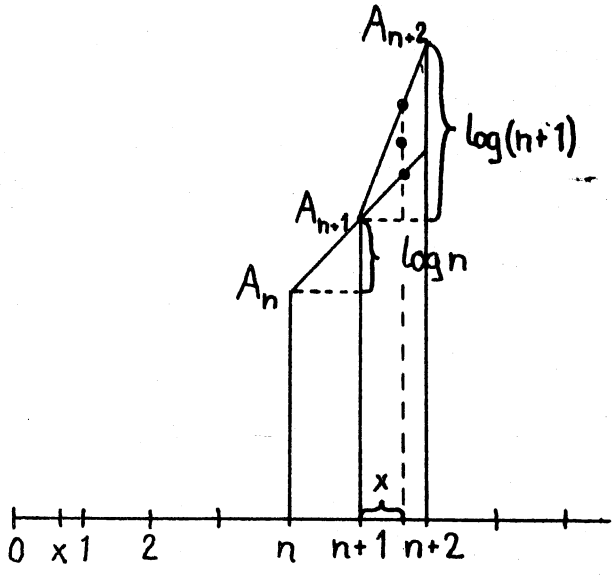
c) $f(1) = 1$.

Den er den eneste funktion, der har disse egenskaber.

Bevis. At $\Gamma(x)$ har egenskaberne, er allerede vist. Las os nu antage, at $f(x)$ har egenskaberne a)b)c). Vi vil da vise, at $f(x) = \Gamma(x)$ for alle x $]0,+\infty[$.

Vi har $f(n) = (n-1)!$.

Vi betragter grafen af $\log f(x)$ i intervallet $[n+1, n+2]$. Den ligger under eller på korden A_{n+1}, A_{n+2} og over eller på forlængelsen af korden A_nA_{n+1}. Disse korder har hældningskoefficienterne $\log(n+1)$ og $\log n$. Heraf ses: Hvis $0 < x \leq 1$, gælder



$$\log f(n+1+x) = \log f(n+1) + x \log n + \varepsilon(x,n),$$

hvor, $0 \leq \varepsilon \leq x \log(n+1) - x \log n \leq \log \frac{n+1}{n} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

Altså er

$$f(n+1+x) = n!\, n^x\, e^{\varepsilon(x,n)}.$$

Men $f(x+n+1) = (x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x\, f(x)$, da funktionen tilfredsstiller funktionalligningen. Altså er

$$f(x) = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\, e^{\varepsilon(x,n)}.$$

Da $\varepsilon(x,n) \to 0$ for $n \to \infty$, følger heraf

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Nu er $\Gamma(x)$ også en funktion, der opfylder a)b)c). Den netop udledte formel gælder altså også, når vi skriver $\Gamma(x)$ i stedet for $f(x)$. Følgelig er $f(x) = \Gamma(x)$ for $0 < x \leq 1$, og da begge funktioner tilfredsstiller funktionalligningen, må det samme gælde for alle $x > 0$.

Som biresultat har vi fundet

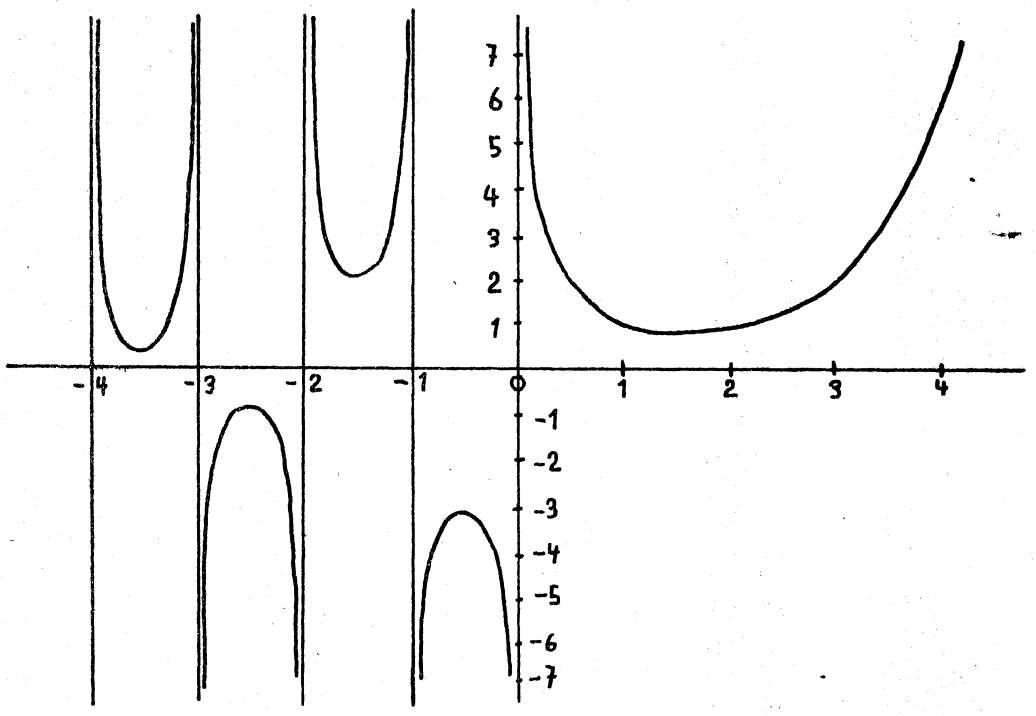
(3) $$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$$

foreløbig dog kun for $0 < x \leq 1$.

Inden vi diskuterer (3), vil vi definere $\Gamma(x)$ også for negative x. Dette kan ske på en og kun een måde, således at funktionalligningen (2) bliver opfyldt også for negative x. Ud fra $\Gamma(x)$ i $]0,1[$ fås $\Gamma(x)$ successivt i $]-1,0[$, $]-2,-1[$, etc. ved

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Man ser, at $\Gamma(x)$ bliver defineret for alle $x \neq 0,-1,-2,\cdots$. Da $\Gamma(x)$ er kontinuert og > 0 for $x > 0$, ser man, at $\Gamma(x)$ er kontinuert og < 0 i $]-1,0[$, kontinuert og > 0 i $]-2,-1[$, etc. Da $\Gamma(1) = 1$, ser man, at $\Gamma(x)$ i omegnen af $x = 0$ forløber omtrent som $\frac{1}{x}$, og følgelig i omegnen af $x = -1$ omtrent som $\frac{-1}{x+1}$, i omegnen af $x = -2$ omtrent som $\frac{1}{2(x+2)}$, etc., alment i omegnen af $x = -n$ omtrent som $\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. I hvert interval $]-n,-n+1[$ er $|\Gamma(x)|$



logaritmisk konveks. Thi

$$|\Gamma(x)| = \frac{\Gamma(x+n)}{|x|\,|x+1|\cdots|x+n-1|},$$

og $\frac{1}{|x+c|}$ er logaritmisk konveks på $]-\infty,-c[$.

Vi vil nu vise, at udtrykket (3) er gyldigt for alle x, for hvilke $\Gamma(x)$ er defineret, altså for alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,\cdots\}$. Hertil betegner vi det under limestegnet stående udtryk med $\Gamma_n(x)$ og bemærker, at

$$\Gamma_n(x+1) = x\Gamma_n(x)\,\frac{n}{x+n+1}, \quad \Gamma_n(x) = \frac{1}{x}\,\frac{x+n+1}{n}\,\Gamma_n(x+1).$$

Man ser da: Hvis grænseværdien $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x)$ eksisterer, så eksisterer også $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x+1)$. Hvis omvendt $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x+1)$ eksisterer, og $x \neq 0$, så eksisterer $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x)$. Da grænseværdien $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x)$ eksisterer for $0 < x \leq 1$, følger heraf, at den eksisterer for alle $x \neq 0,-1,-2,\cdots$. Sætter man $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x) = f(x)$, ser man endvidere, at $f(x+1) = x\,f(x)$. Da $f(x) = \Gamma(x)$ for $0 < x \leq 1$, ses, at formlen (3) gælder for alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,\cdots\}$.

Karakteriseringen af gammafunktionen ved betingelserne a)b)c) blev af E. Artin (1931) lagt til grund for teorien. Grundtanken stammer fra H. Bohr og J. Mollerup (1922). Vi følger her i det væsentlige Artins fremstilling. Formlen (3) blev af Gauss benyttet som udgangspunkt for teorien.

<u>Gammafunktionens produktfremstilling.</u> En simpel regning viser, at

$$\Gamma_n(x) = e^{x(\log n - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n})}\,\frac{1}{x}\,\frac{e^{\frac{x}{1}}}{1+\frac{x}{1}}\,\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+\frac{x}{2}}\cdots\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}.$$

For $n \to \infty$ konvergerer $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ ifølge § 22 mod. Eulers konstant

$$C = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n) = 0{,}5772\cdots .$$

Altså finder man produktfremstillingen

(4) $$\boxed{\Gamma(x) = e^{-Cx}\,\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}}$$

Heraf fås for $x > 0$

$$\log\Gamma(x) = -Cx - \log x + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{x}{k} - \log(1+\frac{x}{k})).$$

Den af denne række ved ledvis differentiation dannede række

$$-C - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}) = -C - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k(x+k)}$$

konvergerer uniformt på ethvert interval $]0,a]$, idet rækken $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k(x+k)}$ på $]0,a]$ har den konvergente majorantrække $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a}{k^2}$. Følgelig er $\log\Gamma(x)$ en C^1-funktion på $]0,a]$, og altså på $]0,+\infty[$, da a var vilkårlig, og der gælder

$$\frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = -C - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}).$$

Herud fra slutter vi på samme måde, at $\log\Gamma(x)$ er en C^2-funktion på $]0,+\infty[$, og at

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2},$$

og ved gentagen anvendelse af ræsonnementet, at $\log\Gamma(x)$ er en C^∞-funktion på $]0,+\infty[$, og at

$$\frac{d^n}{dx^n} \log \Gamma(x) = (-1)^n (n-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^n} \qquad (n \geq 2).$$

Altså er også $\Gamma(x) = \exp(\log \Gamma(x))$ en C^∞-funktion på $]0,+\infty[$, og heraf følger atter ved hjælp af funktionalligningen, at $\Gamma(x)$ er en C^∞-funktion på ethvert af intervallerne $]-1,0[$, $]-2,-1[$, etc.

Sammenhæng med sinus funktionen. Da $\Gamma(x)$ er defineret for $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,\cdots\}$, er $\Gamma(1-x)$ defineret for $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,\cdots\}$. Produktet $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ er altså defineret for $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Idet $\Gamma(1-x) = -x\,\Gamma(-x)$, har vi

$$\Gamma(1-x) = -x\, e^{-C(-x)} \frac{1}{-x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{k}}}{1-\frac{x}{k}},$$

og får altså for ethvert $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{k}}}{1-\frac{x}{k}} = \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}}.$$

Sammenholdes dette med den i § 27 udledte produktfremstilling for sinusfunktionen, ser vi, at vi har bevist formlen

(5) $$\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}}.$$

For $x = \frac{1}{2}$ fås heraf $(\Gamma(\frac{1}{2}))^2 = \pi$. Da $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$, gælder altså

(6) $$\boxed{\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}.$$

Heraf følger $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$, og alment $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\cdots(n-\frac{1}{2})\sqrt{\pi}$.

Betafunktionen. Udgangsintegralet (1) kaldes det andet Eulerske integral. Foruden dette betragtede Euler det såkaldte første Eulerske integral, der tjener til definition af betafunktionen

$$(7) \qquad \boxed{B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}dt}.$$

Vedrørende integralets eksistens bemærkes: For givet y ligger $(1-t)^{y-1}$ på $]0,\frac{1}{2}]$ mellem positive grænser; følgelig kan $t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}$ integreres ind i 0, hvis og kun hvis $x > 0$. For givet x ligger t^{x-1} på $[\frac{1}{2},1[$ mellem positive grænser; følgelig kan $t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}$ integreres ind i 1, hvis og kun hvis $y > 0$.

Ved ovenstående formel (7) er $B(x,y)$ således defineret for $x > 0$, $y > 0$.

Erstatter man i $\int_a^b t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$, hvor $0 < a < b < 1$, tallet $x > 0$ med $x + 1$, får man ved omskrivning og påfølgende delvis integration, at der for $y > 0$ gælder

$$\begin{aligned}\int_a^b t^x(1-t)^{y-1}dt &= \int_a^b (1-t)^{x+y-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt\\ &= \left[-\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\right]_a^b + \int_a^b \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\,x\,\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{1}{(1-t)^2}dt\\ &= \frac{a^x(1-a)^y - b^x(1-b)^y}{x+y} + \frac{x}{x+y}\int_a^b t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}dt.\end{aligned}$$

For $a \to 0$ og $b \to 1$ fås heraf funktionalligningen

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\,B(x,y).$$

Vi vælger nu et fast $y > 0$. For at få en funktion frem, der tilfredsstiller gammafunktionens funktionalligning danner vi

funktionen

$$f(x) = B(x,y)\Gamma(x+y).$$

For denne for $x > 0$ definerede funktion $f(x)$ gælder $f(x+1) = B(x+1,y)\Gamma(x+1+y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)(x+y)\Gamma(x+y) = x\, f(x)$. Endvidere er $f(x)$ logaritmisk konveks. Thi for fast y er $B(x,y)$ af formen $\int_0^1 \varphi(t)t^{x-1}dt$, hvor $\varphi(t) = (1-t)^{y-1}$ er kontinuert og positiv på $]0,1[$. Ifølge § 29 er derfor $B(x,y)$ logaritmisk konveks. Det samme gælder $\Gamma(x+y)$. Altså er $f(x)$ produkt af to logaritmisk konvekse funktioner og følgelig logaritmisk konveks. Funktionen $f(x)$ tilfredsstiller altså de to første af de tre betingelser a)b)c), der karakteriserer $\Gamma(x)$ på $]0,+\infty[$. Vi vil nu beregne $f(1)$. Vi finder

$$B(1,y) = \lim_{b\to 1} \int_0^b (1-t)^{y-1}dt = \lim_{b\to 1} \left[-\frac{(1-t)^y}{y}\right]_0^b = \frac{1}{y}.$$

Altså fås

$$f(1) = B(1,y)\Gamma(1+y) = \frac{\Gamma(1+y)}{y} = \Gamma(y).$$

Hvis en funktion $f(x)$ på $]0,+\infty[$ tilfredsstiller de to første af de tre betingelser a)b)c), der karakteriserer $\Gamma(x)$, så vil $\frac{f(x)}{f(1)}$ åbenbart tilfredsstille alle tre betingelser, og vil altså være $\Gamma(x)$. For funktionen $f(x)$ gælder derfor $f(x) = f(1)\Gamma(x) = \Gamma(y)\Gamma(x)$ for alle $x > 0$. Vi har hermed bevist, at der for alle positive x og y gælder formlen

(8) $$\boxed{B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}}.$$

Sættes $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, og anvendes i integralet substitutionen $t = \sin^2\varphi$, finder man

$$(\Gamma(\tfrac{1}{2}))^2 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi = \pi,$$

og dermed påny formlen $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Forskellige integraler. Anvendes i (1) substitutionen $e^{-t} = \tau$, og skrives derefter t i stedet for τ, fås formlen

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (\log \frac{1}{t})^{x-1} dt, \qquad x > 0.$$

På tilsvarende måde fås ved substitutionen $t^x = \tau$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{x}}} \frac{1}{x} dt, \qquad x > 0,$$

hvoraf

$$\Gamma(1+\frac{1}{x}) = \int_0^\infty e^{-t^x} dt, \qquad x > 0.$$

For $x = 2$ fås den i § 19 fundne formel

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Anvendes i (8) substitutionen $t = \frac{\tau}{\tau+1}$, henholdsvis $t = \sin^2\varphi$, fås

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x > 0,\ y > 0,$$

og

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\varphi)^{2x-1} (\cos\varphi)^{2y-1} d\varphi = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Sættes $y = 1 - x$, fås ved brug af (5)

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \qquad 0 < x < 1,$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \qquad 0 < x < 1, \quad t' = \frac{t}{1-t}$$

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\tan \varphi)^{2x-1} d\varphi = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \qquad 0 < x < 1. \quad t = \sin^2 \varphi$$

Legendres multiplikationsformel. Som et andet eksempel på anvendelsen af gammafunktionens karakterisering ved betingelserne a)b)c) vil vi betragte funktionen

$$f(x) = \Gamma(\tfrac{x}{2})\Gamma(\tfrac{x+1}{2}).$$

Den er defineret, når hverken $\frac{x}{2}$ eller $\frac{x+1}{2}$ er et af tallene $0,-1,-2\cdots$, d.v.s. for $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\cdots\}$. Vi finder

$$f(x+1) = \Gamma(\tfrac{x+1}{2})\Gamma(\tfrac{x+2}{2}) = \tfrac{x}{2}\,\Gamma(\tfrac{x+1}{2})\Gamma(\tfrac{x}{2}) = \tfrac{x}{2}\,f(x).$$

Dette er ikke gammafunktionens funktionalligning. For at blive af med 2-tallet i nævneren ganger vi $f(x)$ med 2^x, som ved erstatning af x med $x+1$ multipliceres med 2. Den herved fremkomne funktion

$$g(x) = 2^x\,\Gamma(\tfrac{x}{2})\Gamma(\tfrac{x+1}{2})$$

vil tilfredsstille funktionalligningen $g(x+1) = x\,g(x)$. På $]0,+\infty[$ er $g(x)$ som produkt af tre logaritmisk konvekse funktioner logaritmisk konveks. Følgelig er $\frac{g(x)}{g(1)} = \Gamma(x)$ for alle $x > 0$, og i kraft af funktionalligningen må det samme gælde for alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\cdots\}$.

Nu er $g(1) = 2\,\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1) = 2\sqrt{\pi}$. Vi har derfor fundet følgende formel, der skyldes A.-M.Legendre (1810)

(9) $$\boxed{\Gamma(\tfrac{x}{2})\Gamma(\tfrac{x+1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\,\Gamma(x)}\ .$$

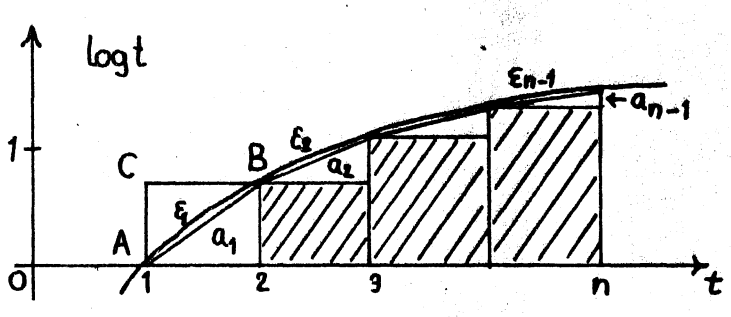
Stirlings formel. Ved en elementær betragtning kan man finde en tilnærmet værdi til $\Gamma(n) = (n-1)!$. Vi har

$$\log\Gamma(n) = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1)$$

og sammenligner derfor $\log\Gamma(n)$ med integralet

$$\int_1^n \log t\,dt = [t\log t - t]_1^n = n\log n - n + 1.$$

Forskellen mellem integralet og $\log\Gamma(n)$ består af trekantarealerne $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$, som tilsammen er $\frac{1}{2}\log n$, og de små arealer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$, som tilsammen er $< \frac{1}{2}\log 2$, idet (da log er konkav) de pågældende figurer alle kan finde plads i trekanten ABC. Man ser heraf, at



$$(n-\tfrac{1}{2})\log n - n + 1 - \tfrac{1}{2}\log 2 < \log\Gamma(n) < (n-\tfrac{1}{2})\log n - n + 1,$$

og altså

$$\frac{e}{\sqrt{2}}\cdot n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n} < \Gamma(n) < e\cdot n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

Dette giver anledning til at betragte en funktion af formen

$$f(x) = x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\mu(x)}, \qquad x > 0.$$

Vi vil bestemme funktionen $\mu(x)$ således, at funktionen $f(x)$ opfylder betingelserne a) og b). Da vil $\Gamma(x)$ være = a $f(x)$ for et passende a.

Ved en simpel regning finder vi

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = (1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}} e^{-1} \; e^{\mu(x+1) - \mu(x)}$$

Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at $f(x)$ opfylder a), er altså, at $\mu(x)$ opfylder funktionalligningen

$$\mu(x) - \mu(x+1) = (x+\tfrac{1}{2})\log(1+\frac{1}{x})-1 = g(x).$$

En sådan funktion $\mu(x)$ kan straks opskrives, nemlig

$$(*) \qquad \mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n),$$

forudsat at den her optrædende uendelige række er konvergent for ethvert $x > 0$. Vi udsætter beviset herfor et øjeblik og viser først, under antagelse af rækkens konvergens, at funktion $f(x)$, når vi benytter den ved (*) bestemte funktion $\mu(x)$, vil opfylde betingelsen b).

Funktionen $x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}$ er logaritmisk konveks. Thi dens logaritme er to gange differentiabel med den anden afledede $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$, som er > 0. Endvidere er $e^{\mu(x)}$ logaritmisk konveks, d.v.s. $\mu(x)$ er konveks. For at vise dette er det nok at vise, at hvert af leddene $g(x+n)$ i rækken (*) er konveks. Hertil er det atter nok at vise, at $g(x)$ er konveks, og dette følger af, at $g(x)$ er to gange differentiabel med den anden afledede $\frac{1}{2x^2(x+1)^2}$, som er > 0. Følgelig er $f(x)$ som produkt af logaritmisk konvekse funktioner logaritmisk konveks.

Vi mangler endnu at bevise konvergensen af rækken (*)

for ethvert $x > 0$. Samtidig med, at vi beviser dette, vil vi udlede et udtryk for dens sum $\mu(x)$. Vi benytter omskrivningen

$$g(x) = (x+\tfrac{1}{2})\log(1+\frac{1}{x})-1 = \tfrac{1}{2}(2x+1)\log\frac{1+\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}} - 1$$

og anvender den for $|y| < 1$ gyldige potensrækkeudvikling (§ 25)

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots .$$

Herved fås

$$g(x) = \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \frac{1}{7(2x+1)^6} + \cdots .$$

Heraf ses, at $g(x) > 0$ for alle $x > 0$. Vi forstørrer højre side, idet vi erstatter tallene $5,7,\cdots$ med 3. Da fremkommer på højre side en kvotientrække med første led $\frac{1}{3(2x+1)^2}$ og kvotient $\frac{1}{(2x+1)^2}$. Dens sum er

$$\frac{1}{3(2x+1)^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{(2x+1)^2}} = \frac{1}{12x(x+1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)} .$$

Vi har således

$$0 < g(x) < \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)}, \qquad x > 0.$$

Da rækken $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{12\,(x+n)} - \frac{1}{12(x+n+1)})$ er konvergent med sum $\frac{1}{12x}$, slutter vi, at rækken (*) er konvergent, og at der for dens sum $\mu(x)$ gælder

$$0 < \mu(x) < \frac{1}{12x}, \qquad x > 0.$$

Vi kan altså skrive

$$\mu(x) = \frac{\theta}{12x},$$

hvor θ er et af x afhængigt tal mellem 0 og 1.

Der gælder altså for et passende a

$$\Gamma(x) = ax^{x-\frac{1}{2}}e^{-x} + \mu(x), \quad x > 0.$$

For at bestemme a anvender vi Legendres formel og får for $x > 0$

$$a\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}+\mu\left(\frac{x}{2}\right)} \; a\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{x+1}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x+1}{2}+\mu\left(\frac{x+1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\, a\, x^{x-\frac{1}{2}}\, e^{-x+\mu(x)},$$

hvoraf ved forkortning

$$a\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}\; e^{\mu(x)-\mu\left(\frac{x}{2}\right)-\mu\left(\frac{x+1}{2}\right)}.$$

Nu gælder $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \to e$ for $x \to +\infty$ [thi sættes $\frac{1}{x} = h$, har man $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = (1+h)^{\frac{1}{h}}$, altså $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \frac{\log(1+h)}{h}$, som $\to 1$ for $h \to 0$]. Følgelig gælder $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \to 1$. Da ifølge det ovenstående $\mu(x) \to 0$ for $x \to +\infty$, slutter vi at

$$a = \sqrt{2\pi}.$$

Vi har hermed bevist formlen

(10)
$$\boxed{\begin{aligned} &\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}}\, e^{-x} + \mu(x), && x > 0 \\ &\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(x+n+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right)-1\right] = \frac{\theta}{12x}, && 0 < \theta < 1 \end{aligned}}.$$

Sættes $x = n$ og multipliceres med n, fås formlen

(11)
$$\boxed{n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n+\frac{\theta}{12n}}}$$

hvoraf formlen

(12)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}} = \sqrt{2\pi}$$

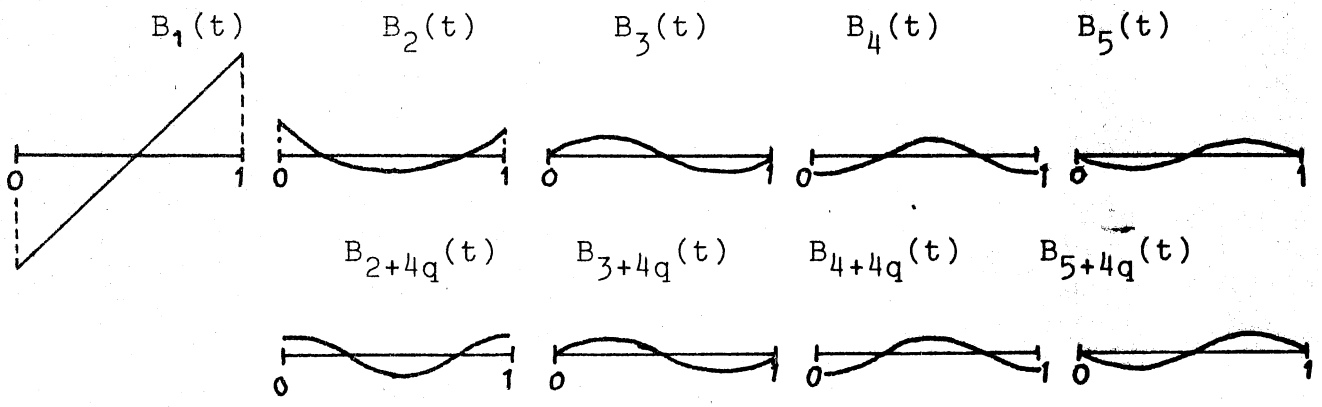
Formlerne (10),(11),(12) er kendt under navnet Stirlings formel efter J. Stirling, som (1730) først studerede $n!$ for store n.

Stirlings række. For funktionen $\mu(x)$ kan vi finde andre udtryk. Vi får herved brug for Bernoulli polynomierne $B_p(t)$ og Bernoulli tallene B_p. For disse gælder ifølge § 26

$$B_0(t) = 1, \qquad B_p(t) = p\int_0^t B_{p-1}(\tau)d\tau + B_p$$

$$\text{og} \quad \int_0^1 B_p(\tau)d\tau = 0 \quad \text{for} \quad p \geq 1.$$

Ved simple geometriske betragtninger ser man ud fra disse formler, at forløbet af $B_p(t)$ i $[0,1]$ for $p \geq 1$ er følgende:



Grafen er skiftevis symmetrisk om punktet $(\frac{1}{2},0)$ og om linien $t = \frac{1}{2}$. Figurerne beskriver fortegnsvariation og monotoniintervaller. Af betydning for det følgende er: For lige $p \geq 2$ er $B_p(0) = B_p(1) = B_p$ skiftevis positiv og negativ, og differensen $B_p - B_p(t)$ er for $0 < t < 1$ af konstant fortegn, nemlig af samme fortegn som B_p. For ulige $p \geq 3$ er $B_p(0) = B_p(1) = B_p = 0$.

Man har

$$g(x) \doteq (x+\tfrac{1}{2})\log(1+\tfrac{1}{x})-1 = (x+\tfrac{1}{2})\int_0^1 \frac{1}{t+x}dt - 1$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{t+x}-1\right)dt = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}-t}{t+x}dt = -\int_0^1 \frac{B_1(t)}{t+x}dt.$$

Ved gentagen anvendelse af delvis integration fås

$$\int_0^1 \frac{B_1(t)}{t+x}dt = \left[\frac{B_2(t)}{2(t+x)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{B_2(t)}{2(t+x)^2}dt$$
$$\int_0^1 \frac{B_2(t)}{2(t+x)^2}dt = \left[\frac{B_3(t)}{2\cdot 3(t+x)^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{B_3(t)}{3(t+x)^3}dt$$
$$\cdots$$
$$\int_0^1 \frac{B_{p-1}(t)}{(p-1)(t+x)^{p-1}}dt = \left[\frac{B_p(t)}{(p-1)p(t+x)^{p-1}}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{B_p(t)}{p(t+x)^p}dt.$$

Altså er

$$g(x) = -\left[\frac{B_2(t)}{2(t+x)}\right]_0^1 - \left[\frac{B_3(t)}{2\cdot 3(t+x)^2}\right]_0^1 - \cdots - \left[\frac{B_p(t)}{(p-1)p(t+x)^{p-1}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_p(t)}{p(t+x)^p}dt$$
$$= \frac{B_2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right) + \frac{B_3}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right) + \cdots + \frac{B_p}{(p-1)p}\left(\frac{1}{x^{p-1}}-\frac{1}{(x+1)^{p-1}}\right)$$
$$- \int_0^1 \frac{B_p(t)}{p(t+x)^p}dt$$

De to sidste led kan trækkes sammen til

$$\int_0^1 \frac{B_p - B_p(t)}{p(t+x)^p}dt$$

Vi får derfor

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n) = \frac{B_2}{2x} + \frac{B_3}{2\cdot 3x^2} + \cdots + \frac{B_{p-1}}{(p-2)(p-1)x^{p-2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{B_p - B_p(t)}{p(t+x+n)^p}dt.$$

Tallet p antages nu <u>lige</u>, $p = 2q$. Idet det erindres, at $B_\nu = 0$ for $\nu = 3,5,\cdots$, fås da

$$\mu(x) = \frac{B_2}{2x} + \frac{B_4}{3\cdot 4x^3} + \cdots + \frac{B_{2q-2}}{(2q-3)(2q-2)x^{2q-3}} + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{B_{2q} - B_{2q}(t)}{2q(t+x+n)^{2q}}dt.$$

Idet det erindres, at B_ν for $\nu = 2,4,\cdots$ er skiftevis positiv og negativ, og at $B_{2q} - B_{2q}(t)$ har konstant fortegn i $0 < t < 1$, nemlig samme fortegn som B_{2q}, ser vi, at leddene i summen er skiftevis positive og negative. Hermed er vist, at afsnittene i Stirlings række

$$\frac{B_2}{2x} + \frac{B_4}{3\cdot 4x^3} + \frac{B_6}{5\cdot 6x^5} + \cdots$$

er skiftevis $> \mu(x)$ og $< \mu(x)$. Vi får derfor for hvert q

(13)
$$\boxed{\mu(x) = \frac{B_2}{2x} + \frac{B_4}{3\cdot 4x^3} + \cdots + \frac{B_{2q-2}}{(2q-3)(2q-2)x^{2q-3}} + \theta\frac{B_{2q}}{(2q-1)2qx^{2q-1}}, \quad 0 < \theta < 1}.$$

Tallet θ afhænger naturligvis af q og x.

For $q = 1$ er det den tidligere udledte formel $\mu(x) = \frac{\theta}{12x}$.

Det var nærliggende at formode, at restleddet i den fundne formel ville gå mod 0 for $q \to \infty$, altså at Stirlings række ville være konvergent med summen $\mu(x)$. Stirlings række er imidlertid divergent. Formlen for $\mu(x)$ viser, at forskellen mellem $\mu(x)$ og det $(q-1)^{te}$ afsnit i Stirlings række går mod 0 ikke for $q \to \infty$, men for $x \to +\infty$, og hurtigere jo større q vælges.

Vælger man f.eks. $q = 4$, finder man

$$\mu(x) = \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \frac{\theta}{1680x^7}.$$

Herved har man et middel til at beregne $\Gamma(x)$ med stor nøjagtighed. For eksempel får man for $4 \le x \le 5$ ved at benytte dette udtryk for $\mu(x)$ (idet restleddet bortkastes) værdien af $\Gamma(x)$ med en fejl $< 10^{-6}$. Ved brug af funktionalligningen kan man herudfra finde $\Gamma(x)$ f.eks. for $1 \le x \le 2$ med samme nøjagtighed.

Opgaver. 1. Vis, at der for $n,m \in \mathbb{N}$ gælder

$$\int_0^1 \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}}dt = \frac{\Gamma(\frac{m}{n})\sqrt{\pi}}{n\,\Gamma(\frac{m}{n}+\frac{1}{2})}.$$

$$\int_0^1 \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}}dt = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{m-n}\cdot(1-t^n)^{\frac{1}{2}-1}\,n\,t^{n-1}dt = \frac{1}{n}\int_0^1 x^{\frac{m}{n}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}dx = \frac{1}{n}B(\tfrac{m}{n},\tfrac{1}{2})$$

2. Vis, at

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{\sqrt{32\pi}}.$$

Af Legendres formel:

$$\Gamma(\tfrac{1}{4})\cdot\Gamma(\tfrac{3}{4}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \Gamma(\tfrac{3}{4}) = \frac{\pi}{\Gamma(\frac{1}{4})\sqrt{2}}$$

ad 1. $m=1, n=4$

3. Vis, at

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{(\Gamma(\frac{1}{3}))^3}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{16\pi}}$$

og

Af Legendres formel

$$\Gamma(\tfrac{1}{3})\cdot\Gamma(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}) = 2^{\frac{1}{3}}\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\tfrac{2}{3})$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{3})\cdot\Gamma(\tfrac{2}{3}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \pi\,\frac{2}{\sqrt{3}}$$

4. Vis, at

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} = \pi.$$

$$\left(= \int_0^\infty \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,\frac{dt}{(1+t)^2} = \int_0^1 \frac{1+\frac{x}{1-x}}{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}dx = \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{1-x}}dx\right)$$

5. Bevis Gauss' multiplikationsformel

$$\Gamma(\tfrac{x}{p})\Gamma(\tfrac{x+1}{p})\cdots\Gamma(\tfrac{x+p-1}{p}) = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{x-\frac{1}{2}}}\Gamma(x).$$

6. Vis, at der for $x > 0$ gælder

$$\int_x^{x+1} \log\Gamma(t)dt = \log\sqrt{2\pi} + x\log x - x,$$

og at

$$\int_0^1 \log\Gamma(t)dt = \log\sqrt{2\pi}$$

(d.v.s. formlen gælder også for $x = 0$).

*7. Idet $f(t)$ er C^1 på $[0,n]$, skal man vise, at

$$\tfrac{1}{2}f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) + \tfrac{1}{2}f(n) - \int_0^n f(t)dt = \int_0^n \bar{B}_1(t)\,f'(t)dt,$$

hvor $\bar{B}_1(t)$ betegner den funktion med perioden 1, der på $[0,1[$ stemmer overens med $B_1(t)$. Udled herved, under forudsætning af, at $f(t)$ er C^{2k} på $[0,n]$, Euler-Maclaurins sumformel.

$$\tfrac{1}{2}f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) + \tfrac{1}{2}f(n) - \int_0^n f(t)dt$$
$$= \frac{B_2}{2!}\cdot[f'(n)-f'(0)] + \frac{B_4}{4!}[f'''(n)-f'''(0)] + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n)-f^{(2k-1)}(0)]$$
$$- \int_0^n \frac{\bar{B}_{2k}(t)}{(2k)!} f^{(2k)}(t)dt,$$

hvor $\bar{B}_{2k}(t)$ betegner den funktion med perioden 1, der på $[0,1[$ stemmer overens med $B_{2k}(t)$. Find herved ved at sætte $f(t) = \frac{1}{1+t}$ for Eulers konstant udtrykket

$$C = \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} + \cdots + \frac{B_{2k}}{2k} - \int_0^\infty \frac{\bar{B}_{2k}(t)}{(1+t)^{2k+1}}dt,$$

og vis derved, at tallene

$$\frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} + \cdots + \frac{B_{2k}}{2k}$$

er skiftevis mindre og større end C. Beregn de første af disse tal. - Prøv også at sætte $f(t) = \frac{1}{5+t}$, og find derved under brug af log 5 = 1,6094379··· værdien af C med 6 rigtige decimaler.

8. Bestem antallet af cifre i 1000!. 2568

§ 31. Simple typer af differentialligninger.

Lineære differentialligninger. Ved en sædvanlig differentialligning forstås en ligning, der udtrykker en relation mellem en (reel eller kompleks) funktion af en reel variabel og nogle af dens afledede. Differentialligningernes teori er opstået samtidig med differential- og integralregningen; dens store betydning for anvendelserne beror på, at naturlovene i vid udstrækning udtrykkes ved differentialligninger. Den almene teori for differentialligninger vil blive behandlet senere; på dette sted indskrænker vi os til at omtale løsningsmetoder for visse simple typer af differentialligninger.

Ved en lineær differentialligning af n^{te} orden forstås en ligning af formen

$$p_n(t)\,\frac{d^n x}{dt^n} + \cdots + p_1(t)\,\frac{dx}{dt} + p_0(t)\,x = q(t),$$

hvor $p_0, p_1, \cdots, p_n, q : I \to \mathbb{C}$ er kontinuerte funktioner på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$, og hvor p_n ikke er nulfunktionen. Ved en løsning eller et integral til ligningen på et interval $J \subseteq I$ forstås en C^n-funktion $x = \varphi(t) : J \to \mathbb{C}$, for hvilken

$$p_n(t)\,\varphi^{(n)}(t) + \cdots + p_1(t)\,\varphi'(t) + p_0(t)\,\varphi(t) = q(t)$$

for ethvert $t \in J$. At løse ligningen vil sige at finde alle dens løsninger. Ligningen kaldes homogen, hvis funktionen q er nulfunktionen, ellers inhomogen. Når vi i forbindelse med en inhomogen lineær differentialligning taler om den tilsvarende homogene ligning, mener vi den ligning,

der fås ved at erstatte funktionen q med nulfunktionen.

Hvis funktionen p_n ikke antager værdien 0, kan ligningen ved division med p_n bringes på normeret form, hvor koefficienten til $\frac{d^n x}{dt^n}$ er konstanten 1. Ved de løsningsmetoder, vi i det følgende skal omtale, vil vi hovedsagelig betragte normerede ligninger. I den almene teori bevises, at enhver løsning til en sådan ligning er restriktion af en løsning på intervallet I. Dette vil vi i det følgende tage for kendt, og vi vil, når talen er om løsninger til en normeret ligning, simpelthen mene løsninger på I.

Hvis funktionen p_n kun har isolerede nulpunkter, d.v.s. hvis der for ethvert nulpunkt t_o for p_n findes en omegn af t_o, hvori p_n ikke har andre nulpunkter end t_o (og andre tilfælde vil vi ikke møde), må man opdele intervallet I ved nulpunkterne for p_n og søge løsningerne i hvert af delintervallerne. Løsninger på intervaller, der indeholder nulpunkter for p_n, vil da kunne findes ved hjælp af følgende lille sætning:
Hvis $\varphi : J \to \mathbb{C}$ er en C^n-funktion, der tilfredsstiller differentialligningen i ethvert delinterval af J, hvori p_n ikke antager værdien 0, da er φ en løsning til differentialligningen på J. Dette følger af, at vi ved indsætning af φ i ligningens venstre side får en kontinuert funktion på J, der stemmer overens med q i ethvert punkt $t \in J$, der ikke er nulpunkt for p_n; da q ligeledes er kontinuert, må den da også stemme overens med q i nulpunkterne for p_n.

Den simpleste type er ligningen

$$\frac{dx}{dt} = f(t),$$

hvor $f : I \to \mathbb{C}$ er en kontinuert funktion. Løsningerne er stamfunktionerne til f. Betegner $F : I \to \mathbb{C}$ en af disse, er samtlige løsninger bestemt ved

$$x = F(t) + c, \qquad c \in \mathbb{C}.$$

Man siger, at løsningen indeholder den arbitrære konstant c (arbitrær = vilkårlig). Bestemmelse af en stamfunktion kaldes med en gammel men stadig brugt glose kvadratur (idet det kommer ud på et med arealbestemmelse). Hvis en differentialligning kan løses ved en eller flere stamfunktionsbestemmelser, siges den at kunne løses ved kvadratur.

Vedrørende løsningerne til en normeret ligning

$$\frac{d^n x}{dt^n} + p_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = q(t)$$

gælder visse almene sætninger, som vi kort vil omtale. I den udstrækning, vi nedenfor er i stand til at løse sådanne ligninger, fremgår gyldigheden af disse sætninger af løsningsformlerne.

Vi har allerede nævnt, at man i den almene teori beviser, at enhver løsning er restriktion af en løsning på I. Man beviser endvidere, at der for ethvert talsæt $(t_0, x_0, x_0', \cdots, x_0^{(n-1)})$, hvor $t_0 \in I$ og $x_0, x_0', \cdots, x_0^{(n-1)} \in \mathbb{C}$, findes en og kun een løsning $\varphi : I \to \mathbb{C}$, der opfylder betingelserne

$$\varphi(t_0) = x_0,\ \varphi'(t_0) = x_0', \cdots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}.$$

Mængden $C^n(I)$ af alle C^n-funktioner $\varphi : I \to \mathbb{C}$ udgør et vektorrum over $\mathbb{C}$. Man ser umiddelbart, at mængden af løsninger til den homogene ligning

$$\frac{d^n x}{dt^n} + p_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = 0$$

er et underrum af $C^n(I)$. I den almene teori bevises, at dette underrum er af dimension n. Samtlige løsninger til den homogene ligning bestemmes altså ved

$$x = c_1\varphi_1(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t), \qquad c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C},$$

hvor $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ er en basis for løsningsrummet. Man ser endvidere, at hvis φ_o er en vilkårlig løsning til den inhomogene ligning, vil en funktion $\varphi = \varphi_o + \psi$ være løsning til den inhomogene ligning, hvis og kun hvis ψ er løsning til den tilsvarende homogene ligning. Samtlige løsninger til den inhomogene ligning bestemmes altså ved,

$$x = \varphi_o(t) + c_1\varphi_1(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t), \qquad c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C},$$

hvor φ_o er en vilkårlig løsning til den inhomogene ligning, og $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ er en basis for løsningsrummet til den tilsvarende homogene ligning. Man siger, at løsningen indeholder n arbitrære konstanter.

I det tilfælde, hvor funktionerne $p_o, p_1, \cdots, p_n, q$ er reelle, vil man i almindelighed kun være interesseret i reelle løsninger. Dog står man sig ofte ved først at søge samtlige komplekse løsninger og derefter blandt disse at udskille de reelle. Om mængden af reelle løsninger gælder tilsvarende sætninger til de ovenfor nævnte. Man skal blot erstatte $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}$.

En bemærkning om eksponentialfunktionen. Til brug i det følgende beviser vi følgende (nærliggende) differentiationsregel:

Hvis $f : I \to \mathbb{C}$ er en differentiabel funktion på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$, da er funktionen $\exp \circ f$; eller $t \mapsto e^{f(t)}$, differentiabel med den afledede

$$(e^f)' = e^f \cdot f'.$$

Bevis. Vi har $e^f = e^{\operatorname{Re} f} \cdot e^{i \operatorname{Im} f}$, hvor funktionerne $e^{\operatorname{Re} f}$ og $e^{i \operatorname{Im} f}$ er differentiable med de afledede $e^{\operatorname{Re} f} \cdot \operatorname{Re} f'$ og $i\, e^{i \operatorname{Im} f} \cdot \operatorname{Im} f'$. Altså er e^f differentiabel med den afledede

$$(e^f)' = e^{\operatorname{Re} f} \operatorname{Re} f' \cdot e^{i \operatorname{Im} f} + e^{\operatorname{Re} f} \cdot i\, e^{i \operatorname{Im} f} \operatorname{Im} f'$$
$$= e^{\operatorname{Re} f}\, e^{i \operatorname{Im} f} \cdot (\operatorname{Re} f' + \operatorname{Im} f') = e^f \cdot f'. \square$$

Lineær differentialligning af første orden. Vi betragter en normeret lineær differentialligning af første orden

$$\boxed{\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t)},$$

hvor $p,q : I \to \mathbb{C}$ er kontinuerte funktioner. Lad $P : I \to \mathbb{C}$ være en stamfunktion til funktionen p:

$$P(t) = \int p(t)\,dt.$$

Ved indsætning ses, at funktionen $t \to \phi(t) = e^{-P(t)}$ er en løsning til den homogene ligning

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0.$$

I den oprindelige ligning sættes nu $x = \phi \cdot y$. Idet ϕ er

en C^1-funktion, og $\phi(t) \neq 0$ for alle $t \in I$, svarer herved til enhver C^1-funktion $y = \psi(t) : I \to \mathbb{C}$ en C^1-funktion $x = \varphi(t) = \phi(t)\psi(t)$, og enhver C^1-funktion $x = \varphi(t) : I \to \mathbb{C}$ fremkommer på denne måde (nemlig ved at vælge $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\phi(t)}$). Ved udregning fås

$$\frac{dx}{dt} + px = \frac{d\phi}{dt}y + \phi\frac{dy}{dt} + p\phi y = \phi\frac{dy}{dt}.$$

Funktionen $x = \varphi(t) = \phi(t)\psi(t)$ er altså løsning til den oprindelige ligning, hvis og kun hvis $y = \psi(t)$ er løsning til ligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q(t)}{\phi(t)} = e^{P(t)}q(t).$$

Idet denne lignings løsninger bestemmes ved

$$y = \int e^{P(t)}q(t)dt + c, \qquad c \in \mathbb{C},$$

ser vi, at løsningerne til den givne ligning er bestemt ved

$$\boxed{x = e^{-P(t)} \int e^{P(t)}q(t)dt + c\, e^{-P(t)}, \qquad c \in \mathbb{C},}$$
$$\text{hvor} \quad P(t) = \int p(t)dt.$$

Af løsningsformlen aflæses:

① Løsningerne til den homogene ligning er funktionerne $c\, e^{-P(t)}$. En løsning til den homogene ligning er altså enten nulfunktionen, eller den har ingen nulpunkter.

② Hvis $\varphi_0 : I \to \mathbb{C}$ er en løsning til den givne ligning, og ϕ er en fra nulfunktionen forskellig løsning til den homogene ligning, vil $\varphi = \varphi_0 + c\phi$, $c \in \mathbb{C}$, være samtlige løsninger til den givne ligning.

③ For ethvert $t_o \in J$ og ethvert $x_o \in \mathbb{C}$ findes en og kun een løsning $\varphi: J \to \mathbb{C}$ til den givne ligning, for hvilken $\varphi(t_o) = x_o$.

④ Hvis funktionerne p og q er reelle, fås samtlige reelle løsninger ved i løsningsformlen at vælge reelle stamfunktioner og vælge $c \in \mathbb{R}$. For ethvert $t_o \in J$ og ethvert $x_o \in \mathbb{R}$ er den ved $\varphi(t_o) = x_o$ bestemte løsning da reel.

Eksempel 1. Vi søger reelle løsninger til ligningen

$$t\frac{dx}{dt} + x = 4t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

I hvert af intervallerne $]-\infty,0[$ og $]0,+\infty[$ betragter vi den normerede ligning

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}x = 4t^2.$$

Vi finder på $]0,+\infty[$

$$P(t) = \int\frac{1}{t}dt = \log t\,, \quad \int e^{P(t)}q(t)\,dt = \int t\cdot 4t^2 dt = t^4,$$

altså løsningerne

$$x = \frac{1}{t}t^4 + c\frac{1}{t} \quad \text{eller} \quad x = t^3 + c\frac{1}{t}\,, \quad c \in \mathbb{R},$$

og på $]-\infty,0[$

$$P(t) = \int\frac{1}{t}dt = \log(-t), \quad \int e^{P(t)}q(t)\,dt = \int -t\cdot 4t^2 dt = -t^4,$$

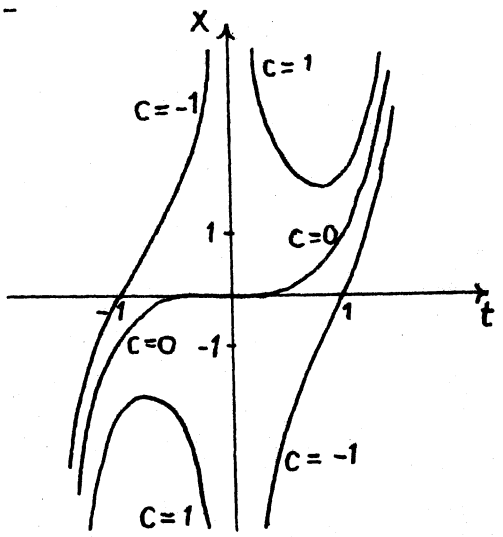
altså løsningerne

$$x = (-\frac{1}{t})(-t^4) + c(-\frac{1}{t}) \quad \text{eller} \quad x = t^3 + c\frac{1}{t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

[idet det naturligvis er ligegyldigt, om vi erstatter c med $-c$].

Man ser, at løsninger, der svarer til et $c \neq 0$, går mod $+\infty$ eller $-\infty$ for $x \to 0$. Ud over disse løsninger

(og restriktioner af dem) har den givne ligning den ene løsning $x = t^3$ på $\mathbb{R}$ (og restriktioner af den). Der går altså gennem ethvert punkt (t,x) med $t \neq 0$ og gennem $(0,0)$ een løsning, medens der ikke går nogen løsning gennem et punkt $(0,x)$ med $x \neq 0$.



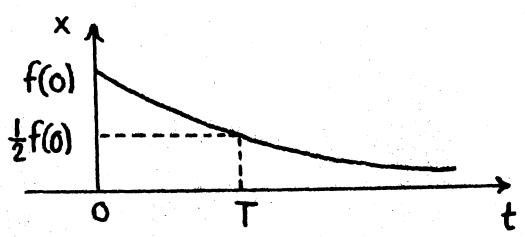
Man kunne naturligvis let have gættet løsningerne $x = t^3 + c\frac{1}{t}$ på $]0,+\infty[$ og $]-\infty,0[$ og derefter af ② sluttet, at der ikke er andre løsninger.

Eksempel 2. Radioaktivt henfald. Hvis x betegner mængden af et radioaktivt stof til tiden t, vil mængden af stof, der henfalder i tidsintervallet $[t,t+dt]$ være proportional med x og dt. Proportionalitetsfaktoren λ kaldes henfaldskonstanten. Udtrykt i præcis form betyder dette, at x tilfredsstiller differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x,$$

hvis løsninger er funktionerne

$$x = f(t) = c\, e^{-\lambda t}.$$



Man finder $f(0) = c$. Mængden $f(t)$ af stof til tiden t bestemmes altså ud fra mængden $f(0)$ af stof til tiden 0 ved ligningen $f(t) = f(0)\, e^{-\lambda t}$. - Betegner T løsningen til ligningen $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$, altså $T = \frac{\log 2}{\lambda}$, ser man, at der for ethvert t gælder $f(t+T) = \frac{1}{2} f(t)$. Tallet T kaldes halveringstiden.

Lineær differentialligning af anden orden. Vi betragter en normeret lineær differentialligning af anden orden

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = q(t)},$$

hvor $p_0, p_1, q : I \to \mathbb{C}$ er kontinuerte funktioner. Der findes ingen formel, hvorved bestemmelsen af løsningerne til en sådan ligning kan reduceres til bestemmelse af stamfunktioner for funktioner dannet ud fra funktionerne p_0, p_1, q. Vi vil imidlertid vise, at hvis vi kender en nulpunktsfri løsning $\Phi: I \to \mathbb{C}$ til den tilsvarende homogene ligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = 0,$$

kan bestemmelsen af samtlige løsninger til den oprindelige ligning ske ved bestemmelse af stamfunktioner. For at vise dette sætter vi i den oprindelige ligning $x = \Phi \cdot y$. Idet Φ er en C^2-funktion, og $\Phi(t) \neq 0$ for alle $t \in I$, svarer herved til enhver C^2-funktion $y = \psi(t) : I \to \mathbb{C}$ en C^2-funktion $x = \Phi(t)\psi(t)$, og enhver C^2-funktion $x = \varphi(t) : I \to \mathbb{C}$ fremkommer på denne måde (nemlig ved at vælge $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\Phi(t)}$). Ved udregning fås

$$x'' + p_1x' + p_0x = \Phi''y + 2\Phi'y' + \Phi y'' + p_1\Phi'y + p_1\Phi y' + p_0\Phi y$$
$$= \Phi y'' + (2\Phi' + p_1\Phi)y'.$$

Funktionen $x = \varphi(t) = \Phi(t)\psi(t)$ er altså løsning til den oprindelige ligning, hvis og kun hvis funktionen $y = \psi(t)$ er løsning til ligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{2\Phi'(t)}{\Phi(t)} + p_1(t)\right)\frac{dy}{dt} = \frac{q(t)}{\Phi(t)}.$$

Dette er imidlertid en normeret lineær differentialligning af første orden i $\frac{dy}{dt}$. Ved brug af den ovenfor fundne løsningsformel finder vi, at dens løsninger bestemmes ved

$$\frac{dy}{dt} = h_o(t) + c_1h_1(t), \qquad c_1 \in \mathbb{C},$$

hvor funktionerne h_o og h_1 er udtrykt ved stamfunktioner, altså

$$y = H_o(t) + c_1H_1(t) + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

hvor H_o og H_1 er stamfunktioner til h_o og h_1. Samtlige løsninger til den oprindelige ligning er altså bestemt ved

$$x = \Phi(t)H_o(t) + c_1\Phi(t)H_1(t) + c_2\Phi(t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

altså på formen

$$\boxed{x = \varphi_o(t) + c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}}.$$

Homogen ligning med konstante koefficienter. Som et særlig vigtigt tilfælde betragter vi den homogene ligning

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_ox = 0}$$

med konstante koefficienter $a_o, a_1 \in \mathbb{C}$. Her er $I = \mathbb{R}$,

Ved indsætning ses, at $x = e^{\lambda t}$, hvor $\lambda \in \mathbb{C}$, er løsning, hvis og kun hvis λ er rod i andengradsligningen.

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Lad denne have rødderne λ_1 og λ_2 (hvor eventuelt $\lambda_1 = \lambda_2$). Vi kan da anvende den ovenstående metode med $\Phi(t) = e^{\lambda_2 t}$. Idet vi sætter $x = \Phi \cdot y$ får vi ligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (2\lambda_2 + a_1)\frac{dy}{dt} = 0.$$

Da $\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1$, har vi $2\lambda_2 + a_1 = \lambda_2 - \lambda_1$. Ligningen lyder altså

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{dy}{dt} = 0.$$

Dens løsninger bestemmes ved

$$\frac{dy}{dt} = c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}, \qquad c_1 \in \mathbb{C}.$$

Undersøgelsen grener sig nu i to tilfælde:

① <u>To forskellige rødder</u> λ_1 <u>og</u> λ_2. Vi får da

$$y = \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Løsningerne til den oprindelige lignin bestemmes da (idet vi erstatter $\frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ med c_1) ved

$$\boxed{x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}}.$$

② <u>En dobbeltrod</u> λ. Vi får da

$$y = c_1 t + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Løsningerne til den oprindelige ligning bestemmes da ved

$$\boxed{x = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}}.$$

Reelle koefficienter. Hvis koefficienterne a_0, a_1 er reelle, foreligger følgende muligheder:

(1a) To forskellige reelle rødder λ_1 og λ_2. Løsningsformlen $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ giver da, som man let indser, de reelle løsninger for $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(1b) To konjugerede imaginære rødder $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ og $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Løsningsformlen kan da skrives

$$x = c_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t) + c_2 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \sin\beta t)$$
$$= (c_1+c_2)e^{\alpha t} \cos\beta t + i(c_1 - c_2)e^{\alpha t} \sin\beta t.$$

Når (c_1, c_2) gennemløber $\mathbb{C}^2$, gennemløber $((c_1+c_2), i(c_1-c_2))$ også $\mathbb{C}^2$. Løsningsformlen kan derfor også skrives

$$x = c_1 e^{\alpha t} \cos\beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin\beta t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

De reelle løsninger fås da, som man let indser, for $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Sættes $(c_1, c_2) = (r \sin\varphi, r \cos\varphi)$, fås de reelle løsninger på formen

$$x = r e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi), \qquad r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

(2) En reel dobbeltrod λ. Løsningsformlen $x = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}$ giver da, som man let indser, de reelle løsninger for $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Inhomogen ligning med konstante koefficienter.

"Gættemetoden". For en inhomogen ligning

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = q(t)}$$

med konstante koefficienter $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ kan man naturligvis

ligesom i tilfældet $q = 0$ anvende den ovenstående metode med $\phi(t) = e^{\lambda_2 t}$. Idet vi sætter $x = \phi \cdot y$, får vi ligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{dy}{dt} = q(t)e^{-\lambda_2 t},$$

hvis løsninger kan opskrives. Regningerne bliver dog selv for simple valg af funktionen q ofte ret lange. Da vi kender løsningerne til den til den oprindelige ligning svarende homogene ligning og ved, at alle løsninger til den inhomogene ligning fås ved til en løsning φ_o til ligningen at addere løsningerne til den homogene ligning, drejer det sig blot om at finde en enkelt løsning φ_o til den inhomogene ligning, og dette kan man ofte opnå ved gætning. Hvis $q(t)$ er af en af følgende former

1) et polynomium i t, 2) $a\,e^{kt}$, 3) $a \cos kt + b \sin kt$,

eller er dannet ved addition og multiplikation af sådanne funktioner indsætter man en funktion, der er af samme type som $q(t)$, men hvor de enkelte led er forsynet med ubekendte koefficienter, og prøver at tilpasse koefficienterne således, at ligningen tilfredsstilles.

Eksempel 3. For ligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2t^2 + 3$$

indsætter man $x = at^2 + bt + c$ og får

$$2at^2 + (2b-6a)t + (2c-3b+2a) = 2t^2 + 3.$$

Funktionen er altså løsning hvis $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$.

Da ligningen $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ har rødderne $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$, er samtlige løsninger til differentialligningen bestemt ved

$$x = t^2 + 3t + 5 + c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Eksempel 4. For ligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 3x = -5 \sin t$$

indsætter man $x = a \cos t + b \sin t$ og får

$$(2a+b)\cos t + (-a+2b)\sin t = -5 \sin t.$$

Funktionen er altså løsning, hvis $a = 1$, $b = -2$. Da ligningen $\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$ har rødderne $\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{11}}{2}$, er samtlige løsninger til differentialligningen bestemt ved

$$x = \cos t - 2 \sin t + c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{11}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{11}}{2}t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Eksempel 5. For ligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + x = \cos t$$

svigter gættemetoden. Man skulle efter metoden forsøge med en funktion af formen $a \cos t + b \sin t$, men enhver sådan funktion er løsning til den homogene ligning.

Vi anvender derfor her den almene metode. Ligningen $\lambda^2 + 1 = 0$ har rødderne $\lambda_1 = i$ og $\lambda_2 = -i$. Vælges $\phi(t) = e^{-it}$, og sættes $x = \phi \cdot y$ fås ligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2i \frac{dy}{dt} = \cos t \cdot e^{it} = \frac{e^{2it}+1}{2}.$$

Løsningsformlen for en differentialligning af første orden giver

$$\frac{dy}{dt} = e^{2it}\int e^{-2it}\,\frac{e^{2it}+1}{2}dt + c_1\,e^{2it}$$

$$= \tfrac{1}{2}t\,e^{2it} - \frac{1}{4i} + c_1\,e^{2it}, \qquad c_1 \in \mathbb{C},$$

hvoraf (med ændret betydning af c_1)

$$y = \frac{1}{4i}t\,e^{2it} - \frac{1}{4i}t + c_1\,e^{2it} + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Altså er samtlige løsninger til differentialligningen bestemt ved

$$x = e^{-it}y = \tfrac{1}{2}t\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} + c_1\,e^{it} + c_2\,e^{-it}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

eller

$$x = \tfrac{1}{2}t\sin t + c_1\cos t + c_2\sin t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

I stedet for at vælge $\phi(t) = e^{-it}$ kunne vi f.eks. have valgt $\phi(t) = \cos t$ (nulpunkterne for $\cos t$ skader ikke, da de er isolerede). Regningerne bliver dog da besværlige.

<u>En partikels bevægelse på en ret linie</u>. For en partikel, der kan bevæge sig på en ret linie, hvis punkter på sædvanlig måde fastlægges ved en koordinat (abscisse), er bevægelsen bestemt ved, at koordinaten x er en funktion af tiden t:

$$x = f(t).$$

Det antages, at f er en C^2-funktion. Hastigheden og accelerationen til tiden t er $\frac{dx}{dt} = f'(t)$ og $\frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$.

Ifølge I. Newtons anden lov (Philosophiæ naturalis principia mathematica, 1687) er kraften K til tiden t bestemt som produkt af partiklens masse m og accelerationen, altså

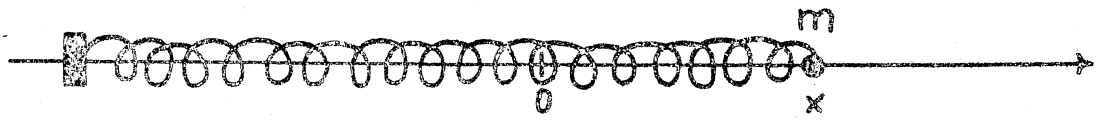
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = K.$$

Tænkes kraften givet som funktion af tiden, stedet, og hastigheden, er bevægelsen altså løsning til en differentialligning. Er kraftloven af formen

$$K = a(t)x + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t),$$

hvor a,b,c er kontinuerte funktioner af tiden, er talen om en lineær differentialligning af anden orden.

Harmonisk svingning. Partiklen antages fæstnet til en på linien fastspændt fjeder, således at den i



hvilestillingen er i begyndelsespunktet. Fjederkraften K er proportional med ændringen i fjederens længde og af modsat fortegn. Den er altså bestemt ved $K = -kx$, hvor $k > 0$ er en konstant. Bevægelsen tilfredsstiller derfor differentialligningen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{eller} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

hvilket er en homogen lineær differentialligning af anden orden med konstante koefficienter. Ligningen $m\lambda^2 + k = 0$ har rødderne $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Vi sætter $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. De reelle løsninger er da bestemt ved

$$x = r\sin(\omega t+\varphi), \qquad r \in \mathbb{R}_+\cup\{0\},\ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Idet vi ser bort fra tilfældet $r = 0$ (hvile), kaldes en sådan bevægelse en retlinet harmonisk svingning eller ren svingning med amplituden r. Bevægelsen har perioden $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, der angiver tiden for en fuld svingning (: frem og tilbage) og kaldes svingningstiden. Tallet ω kaldes den cykliske frekvens; det angiver antallet af svingninger pr. tidsinterval af længden 2π. Størrelsen $\omega t + \varphi$ kaldes fasen.

Bemærkelsesværdigt er, at svingningstiden $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ kun afhænger af systemets konstanter m og k, og altså er uafhængig af amplituden. Man udtrykker dette ved at sige, at svingningerne er isocrone eller ligetidige. Størrelserne T og ω kaldes også systemets egensvingningstid og cykliske egenfrekvens.

Dæmpet svingning. Det antages nu, at partiklens bevægelse hæmmes af en gnidningskraft, der er proportional med partiklens hastighed og modsat rettet denne. Foruden af fjederkraften $K_1 = -kx$ påvirkes partiklen altså af en gnidningskraft $K_2 = -a\frac{dx}{dt}$, hvor $a > 0$ er en konstant, og ialt altså af kraften $K = K_1 + K_2 = -kx - a\frac{dx}{dt}$. Bevægelsen tilfredsstiller da differentialligningen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\frac{dx}{dt} \qquad \text{eller} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

hvilket atter er en homogen lineær differentialligning af anden orden med konstante koefficienter. Vi vil kun

betragte det tilfælde, hvor gnidningen er lille, nærmere bestemt, hvor

$$a^2 < 4\,m\,k.$$

Dette er betingelsen for, at ligningen $m\lambda^2 + a\lambda + k = 0$ har imaginære rødder $\lambda = -\frac{a}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m}-(\frac{a}{2m})^2}$. Vi sætter $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}-(\frac{a}{2m})^2}$. De reelle løsninger er da bestemt ved

$$x = r\,e^{-\frac{a}{2m}t}\sin(\omega t+\varphi), \qquad r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\},\ \varphi \in \mathbb{R}.$$

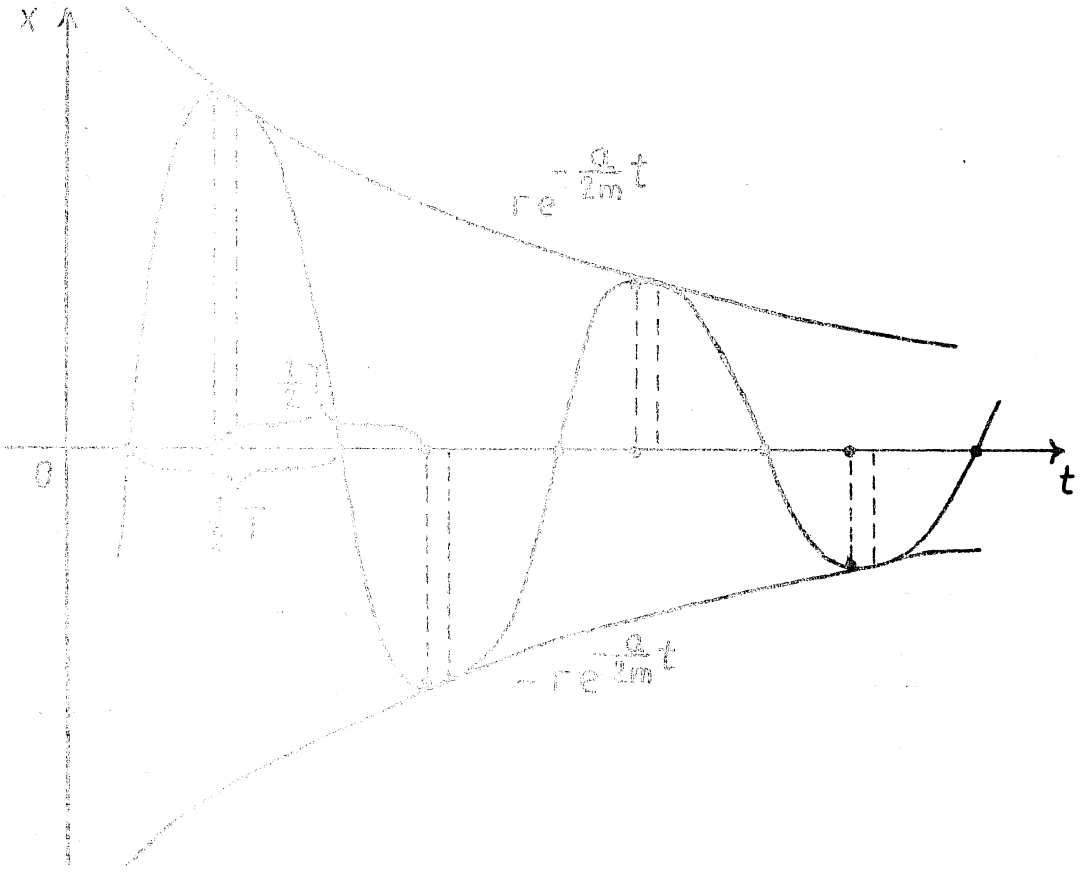
Idet vi ser bort fra tilfældet $r = 0$ (hvile), kaldes en sådan bevægelse en dæmpet svingning. Størrelserne $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ω, og $\omega t + \varphi$ kaldes atter svingningstiden, den cykliske frekvens, og fasen. Man ser, at tidsafstanden mellem to på hinanden følgende passager af hvilestillingen er $\frac{1}{2}T$, og at T er tidsafstanden mellem to på hinanden følgende passager i samme retning af hvilestillingen. Hastigheden er bestemt ved

$$\frac{dx}{dt} = r\,e^{-\frac{a}{2m}t}\left[\omega\cos(\omega t+\varphi) - \frac{a}{2m}\sin(\omega t+\varphi)\right].$$

Sættes $(\omega, -\frac{a}{2m}) = (r_1 \sin\varphi_1,\ r_1\cos\varphi_1)$, har man $r_1 = \sqrt{\omega^2+(\frac{a}{2m})^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, og følgelig

$$\frac{dx}{dt} = r\sqrt{\frac{k}{m}}\,e^{-\frac{a}{2m}t}\sin(\omega t+\varphi+\varphi_1).$$

Heraf ses, at partiklen mellem to på hinanden følgende passager af hvilestillingen bevæger sig monotont til en yderstilling og monotont tilbage. Yderstillingerne er bestemt ved $\frac{dx}{dt} = 0$. Man ser, at tidsafstanden mellem to på hinanden følgende yderstillinger er $\frac{1}{2}T$, og at T er



tidsafstanden mellem to på hinanden følgende yderstillinger til samme side. Tidsintervallet fra en passage af hvilestillingen til den påfølgende yderstilling er en konstant $< \frac{1}{4}T$.

Man ser, at svingningstiden T ved dæmpet svingning kun afhænger af systemets konstanter m,k,a. Ligesom ved harmonisk svingning siger man, at svingningerne er <u>isocrone</u> eller <u>ligetidige</u>. Størrelserne T og ω kaldes atter systemets <u>egensvingningstid</u> og cykliske <u>egenfrekvens</u>.

Bemærkning. Foruden med den cykliske frekvens ω opererer man med den sædvanlige frekvens $\frac{\omega}{2\pi}$, der angiver antallet af svingninger pr. tidsenhed.

Tvungen svingning. Vi tænker os nu, at fjederens fastspændingspunkt bevæges frem og tilbage på en sådan måde, at afvigelsen fra det oprindelige fastspændingspunkt til tiden t er $A \sin \Omega t$, hvor $A > 0$ og $\Omega > 0$ er konstanter. Herved ændres fjederkraften til $-k(x-A \sin \Omega t)$, og bevægelsesligningen bliver

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-A \sin \Omega t) - a \frac{dx}{dt}$$

eller

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + kx = k A \sin \Omega t.$$

Idet vi anvender gættemetoden, søger vi til denne ligning en løsning af formen

$$x = p \cos \Omega t + q \sin \Omega t,$$

hvor p og q er konstanter. Ved indsætning fås

$$[(k-m\Omega^2)p + a\Omega q] \cos \Omega t + [-a\Omega p + (k-m\Omega^2)q] \sin \Omega t = kA \sin \Omega t,$$

og dermed til bestemmelse af p og q de to ligninger

$$\begin{aligned} (k-m\Omega^2)p + a\Omega q &= 0 \\ -a\Omega p + (k-m\Omega^2)q &= kA, \end{aligned}$$

som har den ene løsning

$$(p,q) = \left(\frac{-kAa\Omega}{(k-m\Omega^2)^2 + a^2\Omega^2}, \frac{kA(k-m\Omega^2)}{(k-m\Omega^2)^2 + a^2\Omega^2} \right).$$

Sættes $(p,q) = (R \sin \Phi, R \cos \Phi)$, kan den fundne løsning skrives

$$x = R \sin(\Omega t + \Phi).$$

Den er altså en harmonisk svingning med amplituden

$$R = \sqrt{p^2+q^2} = \frac{kA}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+a^2\Omega^2}}.$$

Samtlige løsninger til differentialligningen er bestemt ved

$$x = R\sin(\Omega t+\phi) + r\,e^{-\frac{a}{2m}t}\sin(\omega t+\varphi), \quad r \in \mathbb{R}_+\cup\{0\},\ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Man ser, at efter en vis tids forløb er den dæmpede svingnings bidrag betydningsløst, og partiklen udfører praktisk talt kun svingningen $x = R\sin(\Omega t+\phi)$. Denne kaldes den af bevægelsen i fjederens fastspændingspunkt frembragte tvungne svingning. Den sker i takt med bevægelsen i fjederens fastspændingspunkt, men med en faseforskel ϕ. Den tvungne svingnings amplitude R er proportional med amplituden A af fastspændingspunktets svingning. Desuden afhænger den af dennes cykliske frekvens Ω. For givet A opnås maksimum af R (resonans), når

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{a^2}{2m^2}}.$$

For små værdier af a er dette omtrent den cykliske egenfrekvens $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}-(\frac{a}{2m})^2}$. Maksimalværdien af R er

$$R_{max} = \frac{kA}{a\omega}.$$

Dette er for små værdier af a langt mere end amplituden A af fastspændingspunktets svingning.

En partikels bevægelse i en plan. For en partikel, der kan bevæge sig i en plan, hvis punkter på sædvanlig måde bestemmes ved retviklede koordinater (x_1,x_2), er

bevægelsen bestemt ved, at $x = x_1 + i\,x_2$ er en funktion af tiden t:

$$x = f(t).$$

Nu drejer det sig altså om en kompleks funktion. Som før antages, at f er en C^2-funktion. Hastigheden og accelerationen til tiden t er atter $\frac{dx}{dt} = f'(t)$ og $\frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$, og Newtons anden lov udsiger, at kraften K, der naturligvis nu angives ved et komplekst tal, er produktet af massen m og accelerationen, altså

$$K = m\,\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Harmonisk svingning. Kraften K antages rettet mod 0 og i størrelse proportional med afstanden fra 0. Den er altså bestemt ved $K = -kx$, hvor $k > 0$ er en konstant. Bevægelsen tilfredsstiller derfor differentialligningen

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{eller} \qquad m\,\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Sættes $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, er dennes løsninger bestemt ved

$$x = c_1\,e^{i\omega t} + c_2\,e^{-i\omega t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Idet vi ser bort fra tilfældet $(c_1, c_2) = (0,0)$ (hvile), bemærker vi, at bevægelsen for $c_2 = 0$ er en bevægelse på cirklen $\{x \mid |x| = |c_1|\}$ med konstant vinkelhastighed , og for $c_1 = 0$ en bevægelse på cirklen $\{x \mid |x| = |c_2|\}$ med konstant vinkelhastighed $-\omega$. Hvis $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, benytter vi omskrivningen

$$x = c_1\,e^{i\omega t_0}\,e^{i\omega(t-t_0)} + c_2\,e^{-i\omega t_0}\,e^{-i\omega(t-t_0)}$$

og bemærker, at det er muligt at vælge t_o således, at $c_1 e^{i\omega t_o}$ og $c_2 e^{-i\omega t_o}$ får samme argument α. Vi har da

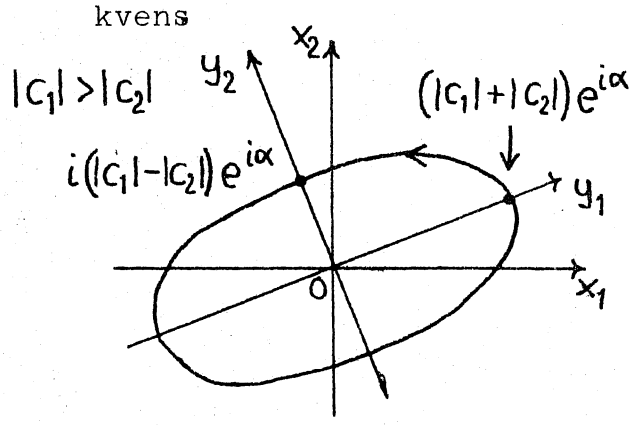
$$x\, e^{-i\alpha} = |c_1| e^{i\omega(t-t_o)} + |c_2| e^{-i\omega(t-t_o)}.$$

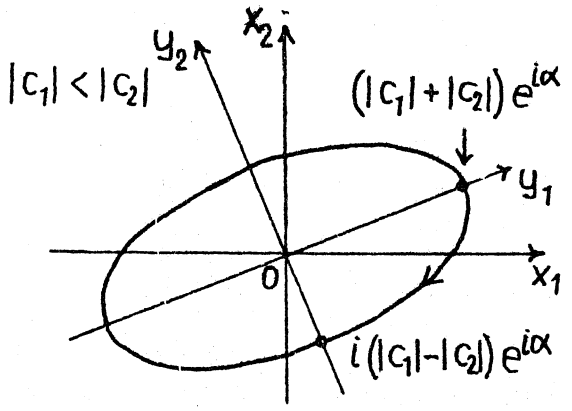
Sættes $x\, e^{-i\alpha} = y = y_1 + iy_2$, er (y_1, y_2) nye retvinklede koordinater, og bevægelsen bliver i disse bestemt ved

$$y_1 = (|c_1| + |c_2|) \cos \omega(t-t_o)$$

$$y_2 = (|c_1| - |c_2|) \sin \omega(t-t_o).$$

Hvis $|c_1| \neq |c_2|$, er dette parameterfremstilling for en ellipse med halvaksen $|c_1| + |c_2|$ og $||c_1| - |c_2||$ gennemløbet i positiv eller negativ omløbsretning, eftersom $|c_1| > |c_2|$ eller $|c_1| < |c_2|$. De først nævnte tilfælde, hvor $c_2 = 0$ eller $c_1 = 0$, kommer med under denne diskussion, når vi vælger t_o vilkårligt, og lader α være et argument for henholdsvis $c_1 e^{i\omega t_o}$ og $c_2 e^{-i\omega t_o}$; ellipsen bliver da en cirkel. Hvis $|c_1| = |c_2|$, er bevægelsen en harmonisk svingning på y_1-aksen, der således kommer som udartet tilfælde af en bevægelse på en ellipse, svarende til at halvaksen på y_2-aksen bliver 0.
I alle tilfælde har bevægelsen perioden $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Bevægelsen kaldes en plan harmonisk bevægelse. Størrelserne T og ω kaldes atter svingningstiden og den cykliske frekvens





Opgaver 1. Find samtlige løsninger til en af differentialligningerne

$\frac{dx}{dt} - x = t^2 + 1$, $x = -t^2 - 2t - 3 + Ce^t$

$\frac{dx}{dt} - x = \cos t$, $x = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + Ce^t$

$\frac{dx}{dt} - x = e^t$, $x = (t + C)e^t$

$\frac{dx}{dt} - x = e^{-t}$. $x = -\frac{1}{2}e^{-t} + Ce^t$

2. Find samtlige løsninger til en af differentialligningerne

$t\frac{dx}{dt} - x = t^3$, $t \in]0, +\infty[$,

$t\frac{dx}{dt} - x = (\log t)^3$ $t \in]0, +\infty[$,

$t\frac{dx}{dt} - x = t$ $t \in]0, +\infty[$.

3. Find en genvej til løsning af differentialligninger af formen

$$a(t)\frac{dx}{dt} + a'(t)x = q(t) \quad \text{og} \quad a(t)\frac{dx}{dt} - a'(t)x = q(t).$$

Formuler resultatet som en sætning.

$x = \frac{1}{a(t)}\int q(t)dt + C/a(t)$; $x = a(t)\int \frac{q(t)}{a(t)^2}dt + C \cdot a(t)$

4. Find samtlige løsninger til differentialligningerne

$$t\frac{dx}{dt} + x = \frac{t^3}{(1+t^2)^2} \quad \text{og} \quad (\sin t)\frac{dx}{dt} - (\cos t)x = \frac{\sin^2 t}{1+t^2}.$$

$x = \sin t \cdot \operatorname{Arctan} t + C \cdot \sin t$.

Vink. Benyt opg. 3.

$x = \frac{1}{2t}\left(\log(1+t^2) + \frac{1}{(1+t^2)^2}\right) + \frac{C}{t}$

5. En partikel med massen m synker lodret ned gennem en sej væske. Den afstand fra overfladen til tiden t betegnes x. Den påvirkes af den nedad rettede tyngdekraft

mg og af en med hastigheden proportional opad rettet kraft $-k\frac{dx}{dt}$ hidrørende fra væskens modstand. Idet bevægelsen sættes i gang til tiden $t = 0$ med $x = 0$ og $\frac{dx}{dt} = 0$, ønskes hastigheden og stedet bestemt som funktioner af tiden. Skitser graferne for de fundne funktioner.

6. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 3\cosh t.$$

7. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$(1-t^2)\frac{d^2x}{dt^2} - t\frac{dx}{dt} + 4x = t^2, \qquad t \in]-1,1[.$$

Vink. Benyt $u = \operatorname{Arcsin} t$ som ny uafhængig variabel.

8. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} - 4t\frac{dx}{dt} + 6x = 6(\log t)^2 + 2\log t + 4, \quad t \in]0,+\infty[.$$

Vink. Benyt $u = \log t$ som ny uafhængig variabel.

§ 32. Fourier rækker.

Harmonisk analyse. Ved en trigonometrisk række med perioden $p \in \mathbb{R}_+$ forstås en række af formen

$$\tfrac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \tfrac{2\pi}{p}nx + b_n \sin \tfrac{2\pi}{p}nx)$$

med komplekse koefficienter a_n og b_n. Den variable x er reel. Ifølge Eulers formler kommer dette ud på et med en række af formen

$$c_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{i\frac{2\pi}{p}nx} + c_{-n} e^{-i\frac{2\pi}{p}nx}\right).$$

En sådan række skrives kort

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{p}nx}.$$

Overgangen fra den ene skrivemåde til den anden sker ved formlerne

$$c_o = \tfrac{1}{2}a_o, \quad c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$a_o = 2c_o, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}). \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da funktionerne $e^{i\frac{2\pi}{p}nx}$ er bekvemmere at operere med end funktionerne $\cos \frac{2\pi}{p}nx$ og $\sin \frac{2\pi}{p}nx$, foretrækker man ved teoretiske betragtninger normalt den anden form. Man ser, at der i rækken optræder led $a \cos \lambda x + b \sin \lambda x$, resp. $ce^{i\lambda x}$, med netop de λ for hvilke dette er en funktion med perioden p. Rækkens n^{te} afsnit er

$$s_n(x) = \tfrac{1}{2}a_o + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos \tfrac{2\pi}{p}kx + b_k \sin \tfrac{2\pi}{p}kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\frac{2\pi}{p}kx}.$$

Det er klart, at hvis en trigonometrisk række med

perioden p er punktvis konvergent, vil dens sumfunktion $x \mapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ have perioden p.

Analogt forstås ved et trigonometrisk integral et udtryk af formen

$$\int_0^\infty [a(\lambda)\cos \lambda x + b(\lambda)\sin \lambda x]d\lambda \quad \text{eller} \quad \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

I sine undersøgelser over varmeteori gjorde J.-J. Fourier (1768 - 1830) den skelsættende opdagelse, at enhver funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med perioden p, der blot opfylder visse simple betingelser, kan fremstilles ved en trigonometrisk række med perioden p, og at analogt enhver funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, der blot opfylder visse simple betingelser, kan fremstilles ved et trigonometrisk integral. Man taler i denne forbindelse om harmonisk analyse, eller man siger, at funktionen kan opløses i rene svingninger, eller at den kan dannes ved superposition af rene svingninger. Resultatet er af stor betydning også for andre problemer i den matematiske fysik. På grund af de krav en eksakt behandling stiller med hensyn til analytisk teknik har teorien for harmonisk analyse øvet stor indflydelse på analysens udvikling. I denne forbindelse kan bemærkes, at Riemanns præcisering af det klassiske integralbegreb (jfr. § 13) skete i forbindelse med en undersøgelse af trigonometriske rækker, og at betydningen af Lebesgue integralet tidligt viste sig inden for de trigonometriske rækkers og integralers teori. Først med Lebesgues integralbegreb har teorien fået sin naturlige ramme. Vi må derfor her give afkald på en mere dybtgående

behandling af teorien. Vi vil indskrænke os til at bevise de klassiske resultater under simple antagelser vedrørende de betragtede funktioner.

Definition af Fourierrække. Ved behandlingen af trigonometrikse rækker kan vi indskrænke os til det tilfælde, hvor perioden p er 2π [ellers vælges $\frac{2\pi}{p}x$ som ny variabel]. Talen er da om rækker af formen

$$\tfrac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{eller} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Ved middelværdien af en stykkevis kontinuert funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med perioden 2π forstås integralet over et periodeinterval $[a,a+2\pi]$ divideret med 2π:

$$M\{f\} = M\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)dx.$$

[Det er åbenbart ligegyldigt, hvilket periodeinterval vi benytter.] Man bemærker, at der for funktionerne $x \mapsto e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, gælder

$$M\{e^{inx}\} = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} e^{inx}dx = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \neq 0. \end{cases}$$

Hvis en trigonometrisk række $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er uniformt konvergent med sumfunktion $f(x)$, som da er en kontinuert funktion med perioden 2π, er rækkens koefficienter bestemt ved

$$c_n = M\{f(x)\, e^{-inx}\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Bevis. Afsnitsfølgen $s_p(x) = \sum_{k=-p}^{p} c_k e^{ikx}$ konvergerer uniformt mod $f(x)$. For et fast $n \in \mathbb{Z}$ konvergerer

funktionsfølgen $s_p(x)e^{-inx}$ altså uniformt mod $f(x)e^{-inx}$, og der gælder derfor

$$M\{f(x)e^{-inx}\} = \lim_{p\to\infty} M\{s_p(x)e^{-inx}\}.$$

Nu er $s_p(x)e^{-inx} = \sum_{k=-p}^{p} c_k e^{i(k-n)x}$. Følgelig er

$M\{s_p(x)e^{-inx}\} = c_n$, når $p \geq |n|$. Altså er $M\{f(x)e^{-inx}\} = c_n$. □

Denne sætning motiverer følgende definition

For enhver stykkevis kontinuert funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med perioden 2π betegnes den trigonometriske række $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, hvis koefficienter c_n er bestemt ved

$$c_n = M\{f(x)e^{-inx}\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

som Fourier rækken for f. Vi udtrykker dette ved at skrive

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Dette er altså blot en anden skrivemåde for de uendelig mange formler til bestemmelse af tallene c_n.
(Tegnet $\sim$ læses: har Fourier rækken.)

Med brug af denne definition kan ovenstående sætning udtrykkes således: Hvis en trigonometrisk række $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er uniformt konvergent, er den Fourier række for sin sumfunktion $f(x)$.

Skrives Fourier rækken

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

lyder udtrykkene for koefficienterne (som man umiddelbart efterregner ved brug af de ovenfor anførte overgangsformler)

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = 2M\{f(x)\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} nx\} = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} nx\, dx, \qquad \begin{matrix} n \in \mathbb{N}_0 \\ n \in \mathbb{N}. \end{matrix}$$

Tallene c_n, resp. a_n og b_n, kaldes funktionens Fourier koefficienter (eller Fourier konstanter).

Riemanns lemma. Hvis $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ er stykkevis kontinuert, gælder

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx \to 0 \quad \text{for} \quad |\lambda| \to +\infty$$

og

$$\int_a^b f(x)\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\lambda x\, dx \to 0 \quad \text{for } |\lambda| \to +\infty .$$

Bevis. Den anden del af påstanden følger umiddelbart af den første del ved brug af Eulers formler. Første del af påstanden indses således:

Hvis f er konstant $= c$, har vi (for $\lambda \neq 0$)

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx = \int_a^b c\, e^{i\lambda x}dx = c\,\frac{e^{i\lambda b}-e^{i\lambda a}}{i\lambda},$$

altså

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx\right| \leq |c|\,\frac{2}{|\lambda|},$$

og dermed det ønskede. Heraf følger påstanden for enhver stykkevis konstant funktion.

Hvis f er kontinuert, og altså uniformt kontinuert, findes for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ en stykkevis konstant funktion $g : [a,b] \to \mathbb{C}$, således at $|f(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ for alle $x \in [a,b]$. Der gælder da

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx = \int_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx + \int_a^b (f(x)-g(x))e^{i\lambda x}dx,$$

altså

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx\right| \le \left|\int_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx\right| + \int_a^b |f(x)-g(x)|\,|e^{i\lambda x}|dx.$$

Det sidste led på højre side er $\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$ for alle λ. Det første led på højre side konvergerer mod 0 for $\lambda \to +\infty$. Der findes altså et q, så at dette led er $\le \frac{\varepsilon}{2}$ for alle λ, for hvilke $|\lambda| \ge q$. For $|\lambda| \ge q$ gælder altså

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Af den hermed godtgjorte gyldighed af påstanden for en kontinuert funktion følger den for enhver stykkevis kontinuert funktion.∎

Af Riemanns lemma følger, at der for Fourier koefficienterne c_n, resp. a_n og b_n, for en vilkårlig stykkevis kontinuert funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med perioden 2π gælder $c_n \to 0$ for $|n| \to \infty$, resp. $a_n \to 0$ og $b_n \to 0$ for $n \to \infty$.

Stykkevis differentiable funktioner. Den i § 13 givne definition af stykkevis kontinuerte funktioner kan formuleres således: En funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ kaldes stykkevis kontinuert, hvis der findes en deling af $[a,b]$ ved delepunkter $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$ og for hvert $j \in \{1,\cdots,k\}$ en kontinuert funktion $f_j : [x_{j-1},x_j] \to \mathbb{C}$ på det afsluttede interval $[x_{j-1},x_j]$, som falder sammen med f på det åbne interval $]x_{j-1},x_j[$. En funktion $f : A \to \mathbb{C}$ på et vilkårligt interval $A \subseteq \mathbb{R}$

kaldes stykkevis kontinuert, hvis den er stykkevis kontinuert på ethvert afsluttet delinterval $[a,b]$ af A.

I analogi hermed definerer vi: En funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ kaldes stykkevis differentiabel, hvis der findes en deling af $[a,b]$ ved delepunkter $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$ og for hvert $j \in \{1,\cdots,k\}$ en differentiabel funktion $f_j : [x_{j-1},x_j] \to \mathbb{C}$ på det afsluttede interval $[x_{j-1},x_j]$, som falder sammen med f på det åbne interval $]x_{j-1},x_j[$. En funktion $f:A \to \mathbb{C}$ på et vilkårligt interval $A \subseteq \mathbb{R}$ kaldes stykkevis differentiabel, hvis den er stykkevis differentiabel på ethvert afsluttet delinterval $[a,b]$ af A.

En stykkevis kontinuert funktion $f:A \to \mathbb{C}$ kaldes normaliseret, hvis dens værdi $f(x)$ i ethvert diskontinuitetspunkt x, der ikke er endepunkt for A, er lig med middeltallet $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ af grænseværdierne fra højre og venstre. En vilkårlig stykkevis kontinuert funktion $f:A \to \mathbb{C}$ normaliseres ved at man erstatter funktionsværdien i ethvert diskontinuitetspunkt, der ikke er endepunkt for A med $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Fourierrækkens konvergens. Hvis vi i udtrykket for Fourier koefficienten c_n erstatter x med $u - t$, hvor t er den nye integrationsvariable og derefter omdøber u til x, fås

$$c_n = M_t\{f(x-t)e^{-in(x-t)}\},$$

altså

$$c_n e^{inx} = M_t\{f(x-t)e^{int}\}.$$

Herved fås for Fourierrækkens afsnit udtrykket

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = M_t\{f(x-t)D_n(t)\},$$

Hvor $D_n(t)$ er Dirichlets kerne

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos kt$$

$$= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}.$$

Man ser, at der gælder

$$M\{D_n(t)\} = 1 \quad \text{og} \quad D_n(-t) = D_n(t)$$

og dermed

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)dt = 1.$$

Øvelse. Tegn grafen af $\sin\frac{1}{2}t$, $\sin(n+\frac{1}{2})t$ og $D_n(t)$ på $[-\pi,\pi]$ for $n = 3$.

En tilstrækkelig betingelse for, at Fourier rækken for en stykkevis kontinuert funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med perioden 2π er konvergent i punktet x med summen s, er eksistensen af grænseværdien

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2s}{\sin\frac{1}{2}t}.$$

Bevis. Vi har

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)D_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t)+f(x-t)]\, D_n(t)dt$$

og dermed

$$s_n(x) - s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-2s]\,D_n(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2s}{\sin\frac{1}{2}t}\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} h(t)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt,$$

hvor $h : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ betegner den funktion, der defineres ved

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t)+f(x-t)-2s}{\sin\frac{1}{2}t} & \text{for } 0 < t \leq \pi \\ \text{grænseværdien} & \text{for } t = 0. \end{cases}$$

Funktionen h er åbenbart stykkevis kontinuert. Af Riemanns lemma følger derfor, at $s_n(x) - s \to 0$ for $n \to \infty$. □

Da $\dfrac{\sin\frac{1}{2}t}{t}$ har en fra 0 forskellig grænseværdi for $t \to 0$ (nemlig grænseværdien $\frac{1}{2}$), er eksistensen af den omhandlede grænseværdi ensgyldig med eksistensen af grænseværdien

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2s}{t}.$$

Heraf ses, at hvis funktionen f er stykkevis differentiabel, er betingelsen opfyldt for <u>ethvert</u> punkt x, når vi for s vælger $f(x)$, hvis x er et kontinuitetspunkt for f, og $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, hvis x er et dis-

kontinuitetspunkt for f. Thi i det første tilfælde fås

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)-2s}{t} = \frac{f(x+t)-f(x)}{t} - \frac{f(x-t)-f(x)}{-t},$$

og i det andet tilfælde fås

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)-2s}{t} = \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} - \frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}.$$

Vi har således følgende

Hovedsætning. For enhver stykkevis differentiabel funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med perioden 2π er Fourier rækken punktvis konvergent, og sumfunktionen er den funktion, der fås ved normalisering af f.

Antages f normaliseret, gælder altså for alle x

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{hvor} \quad c_n = M\{f(x)e^{-inx}\}}.$$

Bemærkning. Man kan vise, at der findes kontinuerte funktioner $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med perioden 2π, hvis Fourier række er divergent for visse x.

Cosinus- og sinus-rækker. Hvis $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er en lige, stykkevis kontinuert funktion med perioden 2π, er $f(x)\cos nx$ lige og $f(x)\sin nx$ ulige, og vi finder for Fourier koefficienterne a_n og b_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

Fourier rækken er altså en cosinus-række (d: sinusleddene mangler). En stykkevis kontinuert funktion $f : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ kan udvides til en lige funktion med perioden 2π (på een

måde). Udvidelsen vil være en normaliseret funktion, hvis f er normaliseret og kontinuert i 0 og π, og stykkevis differentiabel, hvis f er stykkevis differentiabel. Vi har altså:

Enhver normaliseret, stykkevis differentiabel funktion $f : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, der er kontinuert i 0 og π, kan fremstilles ved en cosinus-række, idet der for alle $x \in [0,\pi]$ gælder

$$\boxed{f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{hvor} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx}.$$

Hvis $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er en ulige, stykkevis kontinuert funktion med perioden 2π, er $f(x)\cos nx$ ulige og $f(x)\sin nx$ lige, og vi finder for Fourier koefficienterne a_n og b_n

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

Fourier rækken er altså en sinus-række (d: konstantleddet og cosinus-leddene mangler). En stykkevis kontinuert funktion $f : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ kan udvides til en ulige funktion med perioden 2π, hvis og kun hvis den i 0 og π har værdien 0 (og da på een måde). Udvidelsen vil være en normaliseret funktion, hvis f er normaliseret, og stykkevis differentiabel, hvis f er stykkevis differentiabel. Vi har altså

Enhver normaliseret, stykkevis differentiabel funktion $f:[0,\pi] \to \mathbb{C}$, der i 0 og π har værdien 0, kan fremstilles ved en sinus-række, idet der for alle $x \in [0,\pi]$ gælder

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \text{hvor} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx}$$

Øvelse 1. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin nx}{n}$. Vi betragter den funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med perioden 2π, for hvilken

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{for } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

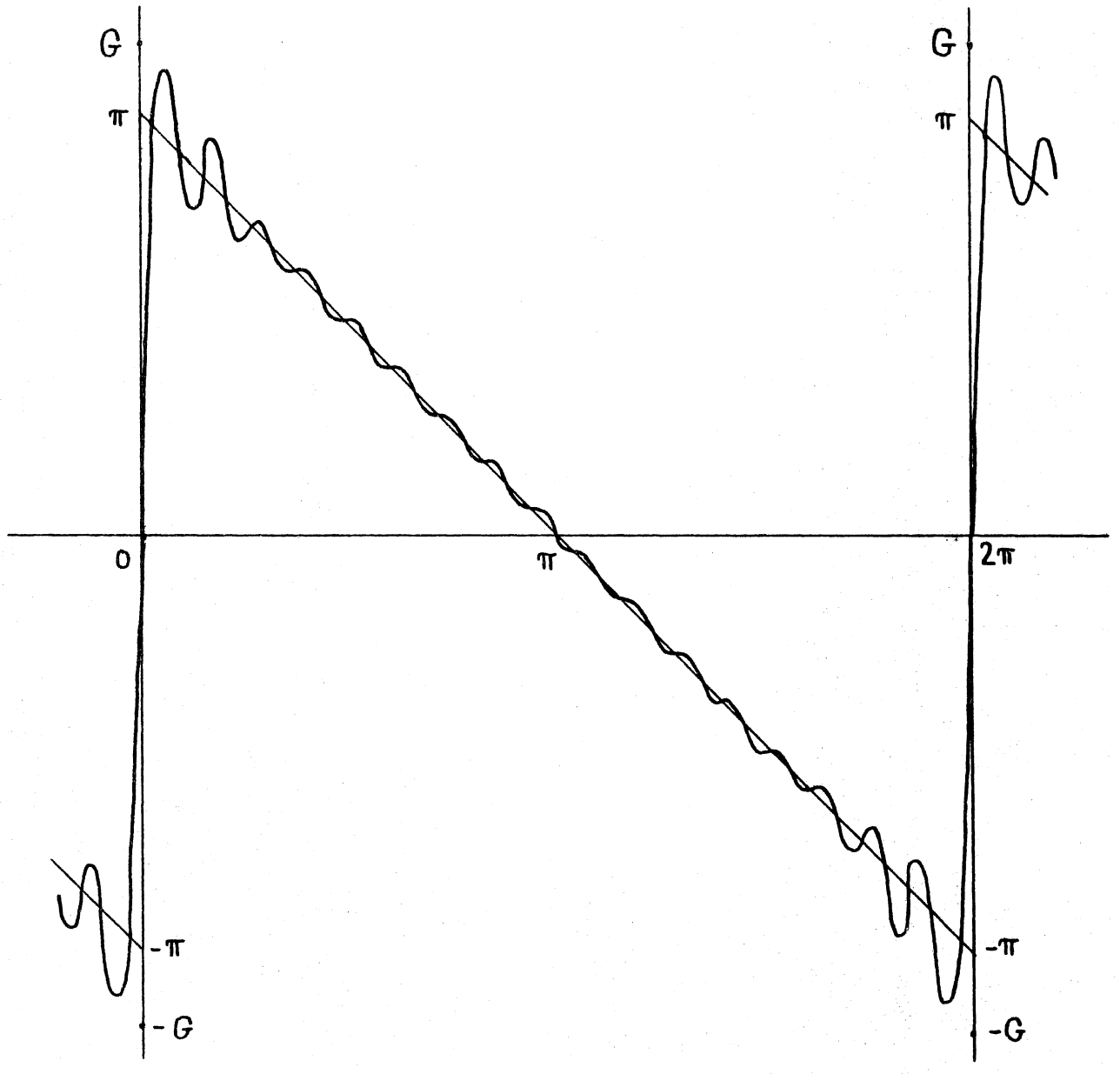
Den er åbenbart normaliseret og stykkevis differentiabel. Den er endvidere ulige. Dens Fourierrække er altså en sinus-række. Vi finder

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx = \frac{2}{n}.$$

Fourierrækken er altså rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin nx}{n}$, som følgelig er konvergent for alle x med summen $f(x)$. Vi har altså

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin nx}{n} = \pi - x \quad \text{for} \quad 0 < x < 2\pi}\ .$$

Figuren viser grafen af $f(x)$ og af afsnittet $s_{17}(x) = \sum_{k=1}^{17} \frac{2 \sin kx}{k}$.



[Det n^{te} afsnit $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2 \sin kx}{k}$ har den afledede

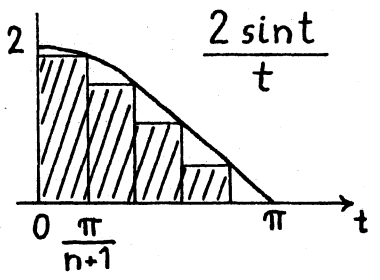
$$s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2 \cos kx = D_n(x) - 1 = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} - 1$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin \frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x} = \frac{2 \cos\frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

Ved hjælp heraf kan man diskutere monotoniintervallerne for $s_n(x)$. Man finder, at $s_n(x)$ i intervallet $[0,2\pi]$ har sin første og største maksimum i punktet $x = \frac{\pi}{n+1}$. Man ser, at

$$s_n(\tfrac{\pi}{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2 \sin \frac{k}{n+1}\pi}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2 \sin \frac{k}{n+1}\pi}{\frac{k}{n+1}\pi} \cdot \frac{\pi}{n+1}$$

er middelsum for integralet $G = \int_0^\pi \frac{2 \sin t}{t} dt$ hørende til inddelingen af $[0,\pi]$ i $n+1$ intervallet af længden $\frac{\pi}{n+1}$, og af følgelig $s_n(\frac{\pi}{n+1})$ konvergerer mod G for $n \to \infty$. En beregning viser, at $G = \pi \cdot 1{,}179\cdots$, altså $G > \pi$. Dette mærkelige forhold, at Fourierrækkens afsnit $s_n(x)$ for store n i nærheden af et diskontinuitetspunkt for den betragtede funktion svinger væsentligt ud over funktionens grænseværdier fra højre og venstre, er kendt under navnet Gibbs fænomen.]



Øvelse 2. Integration. Lad $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en stykkevis kontinuert funktion med perioden 2π, for hvilken $c_0 = M\{f(x)\} = 0$. Fourierrækken lyder da

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' c_n e^{inx} \quad \text{eller} \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

hvor mærket angiver, at $n = 0$ skal overspringes. Funktionen

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi + C \qquad (C \text{ en konstant})$$

er da en kontinuert, stykkevis differentiabel funktion med perioden 2π. Den har Fourierrækken

$$F(x) \sim C_o + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{c_n}{in} e^{inx} \quad \text{eller} \quad F(x) \sim C_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n},$$

hvor $C_o = M\{F(x)\}$. Thi konstantleddet i dens Fourier række er $M\{F(x)\}$, og for $n \neq 0$ fås, idet man inddeler $[0,2\pi]$ ved punkterne $0 = x_o < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = 2\pi$, hvor $x_1, \cdots, x_{k-1}$ er diskontinuitetspunkterne for f i $]0,2\pi[$,

$$M\{F(x)\, e^{-inx}\} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(x)\, e^{-inx} dx$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{2\pi} \left[F(x) \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{x_{j-1}}^{x_j} - \frac{1}{2\pi} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \frac{e^{-inx}}{-in} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} f(x) \frac{e^{-inx}}{in} dx = \frac{c_n}{in}.$$

Ifølge hovedsætningen gælder altså for alle x

$$\boxed{F(x) = C_o + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{c_n}{in} e^{inx} = C_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n}}.$$

Øvelse 3. Bernoulli polynomierne. For Bernoulli polynomierne $B_p(t)$ og Bernoulli tallene B_p gælder ifølge § 26

$$B_o(t) = 1; \qquad B_p(t) = p \int_o^t B_{p-1}(\tau) d\tau + B_p$$

$$\text{og} \quad \int_o^1 B_o(\tau) d\tau = 0 \quad \text{for} \quad p \geq 1.$$

Forløbet af $B_p(t)$ i $[0,1]$ for $p \geq 1$ er diskuteret i § 30. Der henvises til de der givne figurer.

Man ser, at der gælder

$$B_p\left(\frac{x}{2\pi}\right) = p \int_o^{\frac{x}{2\pi}} B_{p-1}(\tau) d\tau + B_p = \frac{p}{2\pi} \int_o^x B_{p-1}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right) d\xi + B_p$$

og

$$\int_o^{2\pi} B_p\left(\frac{x}{2\pi}\right) dx = 2\pi \int_o^1 B_p(t) dt = 0 \quad \text{for} \quad p \geq 1.$$

Idet vi med f_p for $p \geq 1$ betegner den stykkevis differentiable funktion med perioden 2π, der i $[0,2\pi[$ stemmer overens med $B_p(\frac{x}{2\pi})$, har vi altså $M\{f_p(x)\} = 0$ og

$$f_1(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2\pi}(\pi - x) \qquad \text{for } 0 \leq x < 2\pi$$

$$f_p(x) = \frac{p}{2\pi}\int_0^x f_{p-1}(\xi)d\xi + B_p \qquad \text{for } p \geq 2 \text{ og alle } x.$$

Ved brug af resultaterne i øvelse 1 og 2 ser vi, at Fourierrækkerne bliver

$$f_1(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{-\pi n}, \qquad f_2(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2\pi}\frac{\cos nx}{\pi n^2}$$

$$f_3(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 3}{(2\pi)^2}\frac{\sin nx}{\pi n^3}, \qquad f_4(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(2\pi)^3}\frac{\cos nx}{-\pi n^4}$$

og alment

$$f_{2k-1}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!}{2^{2k-2}\pi^{2k-1}}\frac{\sin nx}{n^{2k-1}}$$

$$f_{2k}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\frac{\cos nx}{n^{2k}},$$

samt Fourierrækkerne er konvergente med funktionerne som sumfunktion, med den ene undtagelse, at Fourierrækken for f_1 i et helt multiplum af 2π ikke har summen $f_1(0) = -\frac{1}{2}$, men summen 0 [funktionen f_1 er nemlig ikke normaliseret]. For Bernoulli polynomierne gælder altså

$$B_{2k-1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!}{2^{2k-2}\pi^{2k-1}}\frac{\sin 2\pi nt}{n^{2k-1}} \qquad \text{for } 0 \leq t \leq 1$$

[for $k = 1$ dog kun for $0 < t < 1$]

$$B_{2k}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\frac{\cos 2\pi nt}{n^{2k}} \qquad \text{for } 0 \leq t \leq 1.$$

Ved i den sidste formel at sætte $t = 0$ genfinder vi den i § 26 fundne formel

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \pi^{2k} \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}.$$

Øvelse 4. Uniform konvergens af Fourierrækker.

I lighed med definitionen af stykkevis differentiable funktioner vil vi sige, at en funktion $f:[a,b] \to \mathbb{C}$ er stykkevis C^1, hvis der findes en deling af $[a,b]$ ved delepunkter $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$, og for hvert $j \in \{1, \cdots, k\}$ en C^1-funktion $f_j:[x_{j-1}, x_j] \to \mathbb{C}$, som falder sammen med f på $]x_{j-1}, x_j[$. En funktion $f:A \to \mathbb{C}$ på et vilkårligt interval $A \subseteq \mathbb{R}$ kaldes stykkevis C^1, hvis den er stykkevis C^1 på ethvert afsluttet delinterval $[a,b]$ af A.

En tilstrækkelig betingelse for, at en trigonometrisk række $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ er uniformt konvergent, er ifølge majorantkriteriet, at rækken $|c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} (|c_n| + |c_{-n}|)$ er konvergent. Denne række skrives kort $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$, i overensstemmelse med skrivemåden $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ for den trigonometriske række.

Lad $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en stykkevis differentiabel funktion med perioden 2π og Fourierrækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. Ifølge hovedsætningen er rækken punktvis konvergent, og sumfunktionen er den funktion, der fås ved normalisering af f. Da rækkens led er kontinuerte, ser vi derfor, at en nødvendig betingelse for, at Fourierrækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er uniformt konvergent, er, at den funktion, der fås ved normalisering af f, er kontinuert. Når f er kontinuert, vil konvergens af rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$

ifølge ovenstående medføre, at Fourierrækken er uniformt konvergent med sumfunktionen f. Vi skal nedenfor udlede en tilstrækkelig betingelse for, at dette finder sted.

Hertil får vi brug for følgende sætning:

For en stykkevis kontinuert funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ med perioden 2π og Fourierrækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ gælder for ethvert $n\in\mathbb{N}$ uligheden

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \le M\{|f(x)|^2\}.$$

Uligheden er kendt under navnet Bessels ulighed.

Bevis. Bemærk først, at der for $n,m\in\mathbb{Z}$ gælder

$$M\{e^{inx}e^{-imx}\} = M\{e^{i(n-m)x}\} = \begin{cases} 1, & \text{når } n = m, \\ 0, & \text{når } n \neq m. \end{cases}$$

Idet $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, hvor $c_k = M\{f(x)e^{-ikx}\}$, fås nu for den ikke-negative funktion $|f(x)-s_n(x)|^2$:

$$0 \le M\{|f(x)-s_n(x)|^2\} = M\{(f(x)-s_n(x))(\overline{f(x)}-\overline{s_n(x)})\}$$

$$= M\{|f(x)|^2 - f(x)\overline{s_n(x)} - s_n(x)\overline{f(x)} + s_n(x)\overline{s_n(x)}\}$$

$$= M\{|f(x)|^2\} - \sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_k M\{f(x)e^{-ikx}\}$$

$$- \sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{M\{f(x)e^{-ikx}\}} + \sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-n}^{n} c_k\overline{c}_l M\{e^{ikx}e^{-ilx}\}$$

$$= M\{|f(x)|^2\} - \sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_k c_k - \sum_{k=-n}^{n} c_k\overline{c}_k + \sum_{k=-n}^{n} c_k\overline{c}_k$$

$$= M\{|f(x)|^2\} - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Heraf aflæses uligheden. □

Bemærkning. Af Bessels ulighed følger straks, at rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ er konvergent, og at dens sum er $\leq M\{|f(x)|^2\}$. Uden bevis nævner vi, at summen faktisk er $= M\{|f(x)|^2\}$. Ligningen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = M\{|f(x)|^2\}$ er kendt under navnet Parsevals ligning.

Vi vil dernæst vise:

Lad $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en funktion med perioden 2π, som er kontinuert og stykkevis C^1. Idet Fourier koefficienterne for funktionen f og dens afledede f' betegnes henholdsvis c_n og c_n', har man

$$c_n' = inc_n \quad \text{for alle } n \in \mathbb{Z},$$

(d.v.s. Fourierrækken for f' fås af Fourierrækken for f ved ledvis differentiation).

Bevis. Lad $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = 2\pi$ betegne en deling af $[0,2\pi]$ i intervaller, hvori f' er kontinuert. Vi har da

$$c_n' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x)e^{-inx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}(f(x_j)e^{-inx_j} - f(x_{j-1})e^{-inx_{j-1}})$$

$$- \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(-in)f(x)e^{-inx}dx$$

$$= 0 + in\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = inc_n. \square$$

[Foranstående sætning er, som man let ser, blot en anden formulering af den i øvelse 2 beviste sætning.]

Herved fås endelig:

Når $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er kontinuert og stykkevis C^1 og har perioden 2π, da er den tilhørende Fourierrække $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ uniformt konvergent med sumfunktionen f.

Bevis. For en funktion af den angivne type har vi fra Bessels ulighed og fra den foregående sætning, at der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\sum_{k=-n}^{n} |k\, c_k|^2 \leq M\{|f'(x)|^2\}.$$

Ved brug af den i § 4 viste ulighed (Cauchy-Schwarz' ulighed)

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

fås nu, at der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} |c_k| &= |c_0| + \sum_{k=-n}^{n}{}' k|c_k| \cdot \frac{1}{k} \\ &\leq |c_0| + \left(\sum_{k=-n}^{n}{}' k^2 |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=-n}^{n}{}' \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |c_0| + (M\{|f'(x)|^2\})^{\frac{1}{2}} (2\zeta(2))^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

hvor mærke på summationstegnet angiver, at $k = 0$ skal overspringes. Altså er $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ konvergent. Vi har imidlertid ovenfor gjort rede for, at når f er kontinuer og stykkevis differentiabel, vil konvergens af rækken

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ medføre, at Fourierrækken er uniformt konvergent med sumfunktionen f. □

Opgaver 1. Idet $r \in]-1,1[$, skal man vise, at den trigonometriske række

$$1 + 2r\cos\theta + 2r^2\cos 2\theta + \cdots + 2r^n \cos n\theta + \cdots$$

er uniformt konvergent, og at dens sumfunktion er

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Vis herved, at

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} d\theta = \frac{\pi r^n}{1 - r^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Vink. Benyt Eulers formler. $\int_0^{\pi} \frac{2}{1-r^2}\cos^2(n\theta) r^n \, d\theta$

2. Idet $r \in]-1,1[$, skal man vise, at den trigonometriske række

$$\sin\theta + r\sin 2\theta + r^2\sin 3\theta + \cdots + r^{n-1}\sin n\theta + \cdots$$

er uniformt konvergent, og at dens sumfunktion er

$$\frac{\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

Vis herved, at

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta \sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} d\theta = \frac{\pi r^{n-1}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vink. Benyt Eulers formler.

3. Find Fourierrækken for den ved

$$f(x) = |x| \quad \text{for} \quad -\pi \le x \le \pi$$

bestemte funktion med perioden 2π.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

4. Find Fourierrækken for den ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi & \text{for } 0 < x < \pi \\ -\frac{1}{4}\pi & \text{for } \pi < x < 2\pi \\ 0 & \text{for } x = 0 \text{ og } x = \pi \end{cases}$$

bestemte funktion med perioden 2π. Udled herved formlen

$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$

$f(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots$

5. Udled formlen

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{4k^2 - 1}.$$

Indsæt $x = \frac{1}{2}\pi$.

6. Fremstil $\cos x$ i intervallet $]0,\pi[$ ved en rækkeudvikling af formen

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad ; \quad b_{2n} = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}, \quad b_{2n+1} = 0$$

7. Find Fourierrækken for den ved

$$f(x) = \begin{cases} \pi \sin \alpha x & \text{for } 0 < x < 2\pi \\ \frac{1}{2}\pi \sin 2\alpha\pi & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

bestemte funktion med perioden 2π, hvor $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
Udled herved ved at sætte $x = 0$ og $x = \pi$ partialbrøkrækkerne for funktionerne cot og $\frac{1}{\sin}$.

8. Vis, at der for $x \in [0,\pi]$ gælder

$$\frac{\sin x}{3} - \frac{\sin 3x}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{\sin 5x}{3\cdot 5\cdot 7} - \frac{\sin 7x}{5\cdot 7\cdot 9} - \cdots = \frac{\pi}{8} \sin^2 x,$$

og at der for $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ gælder

$$\frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 3x}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{\cos 7x}{5\cdot 7\cdot 9} - \cdots = \frac{\pi}{8} \cos^2 x.$$

Fourierintegralets konvergens. Af udtrykket for den Fourier transformerede fås, idet x erstattes med $u - t$, hvor t er den nye integrationsvariable, og u bagefter omdøbes til x,

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-i(x-t)y}dt,$$

altså

$$g(y)e^{ixy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{ity}dt.$$

For fast x sættes

$$\varphi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} f(x-t)e^{ity}dt.$$

Da gælder for alle y

$$|g(y)e^{ixy} - \varphi_n(y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-n} + \int_{n}^{\infty} \right) f(x-t)e^{ity}dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-n} + \int_{n}^{\infty} \right) |f(x-t)|\,dt.$$

Da højre side konvergerer mod 0 for $n \to \infty$, konvergerer $\varphi_n(y)$ uniformt mod $g(y)e^{ixy}$ for $n \to \infty$. For Fourierintegralets afsnit fås derfor udtrykket

$$s_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-p}^{p} g(y)e^{ixy}dy = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-p}^{p} \varphi_n(y)dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^{p} \left(\int_{-n}^{n} f(x-t)e^{ity}dt \right) dy.$$

Her kan integrationernes rækkefølge ombyttes. [Da f ikke er forudsat kontinuert, men kun stykkevis kontinuert, må man først opdele intervallet $[-n,n]$ ved de i det liggende diskontinuitetspunkter for funktionen $t \mapsto f(x-t)$, derefter for hvert af delintervallerne foretage ombytnin-

9. Lad p være et positivt helt tal, og lad $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en C^p-funktion med perioden 2π, som er stykkevis C^{p+1}. Idet $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ betegner Fourierrækken for f, skal man for hvert $j \in \{1,\cdots,p\}$ vise, at den ved j gange ledvis differentiation dannede række $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^j c_n e^{inx}$ er uniformt konvergent med sumfunktionen $f^{(j)}$. *

10. Lad $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en stykkevis differentiabel, normaliseret funktion med perioden 2π og Fourierrækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. Vis, at hvis rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{\frac{3}{2}} |c_n|^2$ er konvergent, da er f kontinuert.

* Eftersom $f^{(j)}$ er kont. og stykkevis C^1 (i tilfælde af at $j=p$) da er tilhørende Fourierrække

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^j c_n e^{inx}$$

uniformt konv. i flg sætning side 32.20.

§ 33. Fourierintegraler

Absolut integrable funktioner. Definition af Fourier transformeret og Fourierintegral. En stykkevis kontinuert funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kaldes absolut integrabel, hvis integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

eksisterer i henhold til den i § 19 givne definition, altså hvis $|f(x)|$ kan integreres ud i $+\infty$ og $-\infty$. I det følgende betragtes en sådan funktion f. For ethvert $y \in \mathbb{R}$ gælder $|f(x)e^{-ixy}| = |f(x)|$ for alle x. Ifølge en sætning i § 19 (dér formuleret for kontinuerte funktioner, men gyldig også for stykkevis kontinuerte funktioner med samme bevis) eksisterer integralet

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

for ethvert $y \in \mathbb{R}$, og der gælder

$$|g(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx.$$

Funktionen $g:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kaldes den Fourier transformerede af f. Man ser, at det er en begrænset funktion på $\mathbb{R}$.

Funktionen g er uniformt kontinuert. Thi for vilkårlige punkter y og $y + h$ gælder

$$|g(y+h)-g(y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[e^{-ix(y+h)} - e^{-ixy}\right]dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,|e^{-ixh}-1|\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, 2|\sin \tfrac{1}{2}xh|\, dx.$$

For et vilkårligt $p \in \mathbb{R}_+$ benytter vi i intervallet $[-p,p]$ vurderingen $2|\sin \frac{1}{2}xh| \leq |xh| \leq p|h|$ og i intervallerne $]-\infty,-p]$ og $[p,+\infty[$ vurderingen $|\sin \frac{1}{2}xh| \leq 1$. Vi får da

$$|g(y+h)-g(y)| \leq \frac{p}{\sqrt{2\pi}} \int_{-p}^{p} |f(x)|\, dx \cdot |h| + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-p} + \int_{p}^{\infty} \right) |f(x)|\, dx.$$

For et givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vi <u>først</u> vælge p således, at sidste led på højre side er $< \frac{\varepsilon}{2}$, <u>dernæst</u> $\delta \in \mathbb{R}_+$ således, at første led på højre side er $< \frac{\varepsilon}{2}$, når $|h| < \delta$. Da gælder altså

$$|g(y+h)-g(y)| < \varepsilon \quad \text{for alle} \quad y \in \mathbb{R}, \quad \text{når} \quad |h| < \delta,$$

hvormed påstanden er godtgjort.

Endvidere har g den egenskab, at

$$g(y) \to 0 \quad \text{for} \quad |y| \to +\infty.$$

Thi for et vilkårligt $p \in \mathbb{R}_+$ har vi

$$|g(y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-p}^{p} f(x)e^{-ixy}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-p} + \int_{p}^{\infty} \right) f(x)e^{-ixy}\, dx \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-p}^{p} f(x)e^{-ixy}\, dx \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-p} + \int_{p}^{\infty} \right) |f(x)|\, dx.$$

For et givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vi først vælge p således, at sidste led på højre side er $< \frac{\varepsilon}{2}$, dernæst ifølge Riemanns lemma $q \in \mathbb{R}_+$ således, at første led på højre side er $< \frac{\varepsilon}{2}$, når $|y| > q$. Da gælder $|g(y)| < \varepsilon$, når $|y| > q$, hvormed påstanden er godtgjort.

Når g er den Fourier transformerede af f, skriver vi

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} dy.$$

Udtrykket på højre side kaldes Fourier integralet for f. De fundne egenskaber ved g sikrer ikke, at integralet eksisterer i henhold til den i § 19 givne definition. Kontinuiteten af g sikrer imidlertid, at afsnittet

$$s_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-p}^{p} g(y) e^{ixy} dy$$

eksisterer for ethvert $p \in \mathbb{R}_+$. Fourierintegralet kaldes konvergent i et punkt x med værdien s, hvis $s_p(x) \to s$ for $p \to +\infty$. Vedrørende konvergens af Fourierintegralet vil vi udlede resultater analoge til resultaterne for Fourierrækkers konvergens.

Bemærkninger. Den sidste af de ovenfor viste egenskaber ved den Fouriertransformerede medfører, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} xy \, dx \to 0 \quad \text{for} \quad y \to +\infty.$$

En stykkevis kontinuert funktion $f: [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ kaldes absolut integrabel, hvis $|f(x)|$ kan integreres ud i $+\infty$. For en sådan funktion gælder naturligvis

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \to 0 \quad \text{for} \quad |y| \to +\infty,$$

$$\int_0^{\infty} f(x) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} xy \, dx \to 0 \quad \text{for} \quad y \to +\infty.$$

[Betragt den udvidelse af f til $\mathbb{R}$, der er 0 på $]-\infty, 0[$.]

Dobbeltintegral. Lad $f:[a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion på et afsluttet interval i $\mathbb{R}^2$. Punkterne i $\mathbb{R}^2$ betegnes (x,y). Ifølge § 14 er integralet

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

en kontinuert funktion på $[c,d]$. Vi kan altså danne dobbeltintegralet

$$I = \int_c^d g(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Analogt er integralet

$$h(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

en kontinuert funktion på $[a,b]$. Vi kan altså danne dobbeltintegralet

$$J = \int_a^b h(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

Vi vil vise, at der gælder

$$I = J,$$

altså, at integrationernes rækkefølge er ligegyldig.

Bevis. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ sættes

$$g_n(y) = \sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n},y)\ \frac{b-a}{n}.$$

Da gælder $g_n(y) \to g(y)$ for $n \to \infty$ for ethvert $y \in [c,d]$, og ud fra den uniforme kontinuitet af f sluttes let, at g_n konvergerer uniformt mod g på $[c,d]$. Følgelig gælder

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_c^d g_n(y)dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\int_c^d f(a+k\frac{b-a}{n},y)\,dy\right)\frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} h(a+k\frac{b-a}{n})\ \frac{b-a}{n} = J. \square$$

Side 33.05 – blad 5 sider tilbage

gen, og så samle bidragene.] Herved fås

$$s_p(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \left(\int_{-p}^{p} f(x-t)e^{ity}dy \right) dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} f(x-t)D_p(t)dt,$$

hvor

$$D_p(t) = \int_{-p}^{p} e^{ity}dy = \frac{e^{itp}-e^{-itp}}{it} = \frac{2 \sin pt}{t}$$

spiller den analoge rolle til Dirichletkernen i Fourierrækketeorien og derfor er betegnet ligesådan [selv om det naturligvis nu er en anden funktion]. Vi får altså

$$s_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)D_p(t)dt,$$

idet man bemærker, at integralet eksisterer i henhold til den i § 19 givne definition, da $|D_p(t)| \leq 2p$ for alle $t \in \mathbb{R}$, og funktionen $t \mapsto f(x-t)D_p(t)$ følgelig er absolut integrabel. Da $D_p(-t) = D_p(t)$, finder vi slutteligt

$$s_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} [f(x+t)+f(x-t)] D_p(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} [f(x+t)+f(x-t)] \frac{\sin pt}{t} dt.$$

<u>En tilstrækkelig betingelse for, at Fourierintegralet for en stykkevis kontinuert, absolut integrabel funktion</u> $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ <u>er konvergent i punktet</u> x <u>med værdien</u> s, <u>er eksistensen af grænseværdien</u>

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2s}{t}.$$

Bevis. Lad $h:[0,+\infty[\to \mathbb{C}$ betegne den funktion, der defineres ved

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{t} & \text{for } t > 1 \\ \dfrac{f(x+t)+f(x-t)-2s}{t} & \text{for } 0 < t \leq 1 \\ \text{grænseværdien} & \text{for } t = 0 \end{cases}$$

Funktionen h er åbenbart stykkevis kontinuert, og da der for $t > 1$ gælder $|h(t)| \leq |f(x+t)| + |f(x-t)|$, er den absolut integrabel. Vi finder

$$s_p(x) = s\,\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin pt}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty h(t)\sin pt\,dt.$$

For $p \to +\infty$ konvergerer andet led på højre side mod 0. Endvidere gælder ifølge § 19

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin pt}{t}dt = \frac{2}{\pi}\int_0^p \frac{\sin u}{u}du \to 1.$$

Første led på højre side konvergerer altså mod s. Altså konvergerer $s_p(x)$ mod s for $p \to +\infty$. □

Hvis funktionen f er stykkevis differentiabel, er den i sætningen anførte betingelse opfyldt for ethvert punkt x, når vi for s vælger $f(x)$, hvis x er et kontinuitetspunkt for f, og $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, hvis x er et diskontinuitetspunkt for f. Se vedrørende begrundelsen herfor § 32.

Vi har således følgende

Hovedsætning. For enhver stykkevis differentiabel, absolut integrabel funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er Fourierintegralet konvergent for ethvert x, og det fremstiller den funktion, der fås ved normalisering af f.

Antages f normaliseret, gælder altså for alle x

$$\boxed{f(x) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-p}^{p} g(y)e^{ixy}dy, \quad \text{hvor} \quad g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx}.$$

Af sætningen følger, at hvis den Fouriertransformerede g for en normaliseret, stykkevis differentiabel funktion f er absolut integrabel, gælder

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ixy}dy,$$

d.v.s. den Fouriertransformerede af g er funktionen $x \mapsto f(-x)$.

Cosinus- og sinus-integraler. Lad f være stykkevis kontinuert og absolut integrabel.

Hvis f er lige, er for ethvert $y \in \mathbb{R}$ funktionen $f(x)\cos xy$ lige og funktionen $f(x)\sin xy$ ulige, og der gælder altså

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos xy - i \sin xy)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x)\cos xy \, dx.$$

Funktionen g er derfor også lige, og afsnittet $s_p(x)$ af Fourierintegralet kan derfor skrives

$$s_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-p}^{p} g(y)(\cos xy + i \sin xy)dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{p} g(y)\cos xy \, dy.$$

En stykkevis kontinuert funktion $f: [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ kan udvides til en lige funktion på $\mathbb{R}$ (på een måde). Udvidelsen vil være en normaliseret funktion, hvis f er normaliseret og kontinuert i 0; den vil være absolut integrabel, hvis f er absolut integrabel, og stykkevis differentiabel, hvis f er stykkevis differentiabel. Vi har altså

Enhver normaliseret, stykkevis differentiabel og absolut integrabel funktion $f:[0,+\infty[\to \mathbb{C}$, der er kontinuert i 0, kan fremstilles ved et cosinus-integral, idet der for alle $x \in [0,+\infty[$ gælder

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(y)\cos xy\, dy, \quad \text{hvor} \quad g(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos xy\, dy.}$$

Hvis f er ulige, er for ethvert $y \in \mathbb{R}$ funktionen $f(x)\cos xy$ ulige og funktionen $f(x)\sin xy$ lige, og der gælder altså

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos xy - i \sin xy)dx = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\sin xy\, dx.$$

Funktionen g er derfor også ulige, og afsnittet $s_p(x)$ af Fourierintegralet kan derfor skrives

$$s_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-p}^{p} g(y)(\cos xy + i \sin xy)dy = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^p g(y)\sin xy\, dy.$$

En stykkevis kontinuert funktion $f:[0,+\infty[\to \mathbb{C}$ kan udvides til en ulige funktion på $\mathbb{R}$, hvis og kun hvis den i 0 har værdien 0 (og da på een måde). Udvidelsen vil være en normaliseret funktion, hvis f er normaliseret; den vil være absolut integrabel, hvis f er absolut integrabel, og stykkevis differentiabel, hvis f er stykkevis differentiabel. Vi har altså (idet vi omdøber i $g(y)$ til $h(y)$):

Enhver normaliseret, stykkevis differentiabel og absolut integrabel funktion $f:[0,+\infty[\to \mathbb{C}$, der i 0 har værdien 0, kan fremstilles ved et sinus-integral, idet der for alle $x \in [0,+\infty[$ gælder

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_0^\infty h(y)\sin xy\, dy, \quad \text{hvor} \quad h(y) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\sin xy\, dx}.$$

Nogle vigtige Fourierintegraler. Det bemærkes, at hvis f har den Fourier transformerede g, og $a \in \mathbb{R}_+$, vil funktionen $x \mapsto f(\frac{x}{a})$ have den Fouriertransformerede $y \mapsto ag(ay)$, idet vi ved substitutionen $x = au$ finder

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tfrac{x}{a})e^{-ixy}dx = a\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iuay}du.$$

De funktioner f, vi vil betragte, er alle normaliserede, stykkevis differentiable, og absolut integrable. Endvidere er de lige. Deres Fouriertransformerede g er altså også lige, og formlerne kan skrives ved cosinusintegraler.

(1) Funktionen $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{for } |x| = 1 \\ 0 & \text{for } |x| > 1 \end{cases}$ har den Fourier transformerede

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-iy}-e^{iy}}{-iy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2\sin y}{y}$$

[altså $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ gange kernen $D_1(y)$]. Ifølge hovedsætningen gælder altså

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^{p} \frac{2\sin y}{y}\, e^{ixy}dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} \cos xy\, dy = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{for } |x| = 1 \\ 0 & \text{for } |x| > 1. \end{cases}$$

Ifølge en sætning i § 14 er φ_p differentiabel med den afledede

$$\varphi_p'(y) = \int_{-p}^{p} \frac{\partial}{\partial y} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2}\,dx = \int_{-p}^{p} -i(x+iy)e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2}\,dx.$$

Men

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2} = -(x+iy)e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2}.$$

Altså er

$$\varphi_p'(y) = i\left(e^{-\frac{1}{2}(p+iy)^2} - e^{-\frac{1}{2}(-p+iy)^2}\right)$$

$$= i\left(e^{-\frac{1}{2}p^2} e^{-ipy} e^{\frac{1}{2}y^2} - e^{-\frac{1}{2}p^2} e^{ipy} e^{\frac{1}{2}y^2}\right)$$

og følgelig

$$\left|\varphi_p'(y)\right| \leq 2e^{-\frac{1}{2}p^2} e^{\frac{1}{2}y^2}.$$

For ethvert $y \in \mathbb{R}$ gælder altså

$$\left|\varphi_p(y)-\varphi_p(0)\right| = \left|\int_0^y \varphi_p'(\eta)\,d\eta\right| \leq 2e^{-\frac{1}{2}p^2} e^{\frac{1}{2}y^2} |y|.$$

For $p \to +\infty$ følger heraf

$$\left|\varphi(y)-\varphi(0)\right| \leq 0, \qquad \text{dvs:} \qquad \varphi(y) = \varphi(0).$$

Funktionen φ er altså konstant.

For alle y gælder altså

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-ixy}\,dx = c\, e^{-\frac{1}{2}y^2},$$

hvor c er en konstant. Sættes $y = 0$, fås $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$, som ifølge § 19 vides at være $= 1$. Hermed er det ønskede bevist. Vi behøver imidlertid ikke at benytte resultatet fra § 19. Thi når $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ har den Fouriertransformerede $c\, e^{-\frac{1}{2}y^2}$, viser hovedsætningen, at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c\, e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{ixy}\, dy = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Sammenholdes de to formler, ses, at $c^2 = 1$ og følgelig $c = 1$ (da c åbenbart er > 0).

Ved cosinus-integral skrives formlen således:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos xy\, dx = e^{-\frac{1}{2}y^2}.$$

For et vilkårligt $a \in \mathbb{R}_+$ har funktionen $e^{-\frac{1}{2a^2}x^2}$ den Fouriertransformerede $a\, e^{-\frac{a^2}{2}y^2}$.

Opgaver. 1. Find den Fouriertransformerede $g(y)$ for funktionen

$$f(x) = \max\left\{1 - \frac{|x|}{a}, 0\right\},$$

hvor $a \in \mathbb{R}_+$. Vis, at g er absolut integrabel og har f som Fouriertransformeret. Opskriv også formlerne ved cosinus-integraler. Skitser graferne af f og g.

2. Fremstil e^{-x} for $x \in]0, +\infty[$ ved et sinus-integral.

3. Vis, at hvis $0 < c < b < a$, gælder

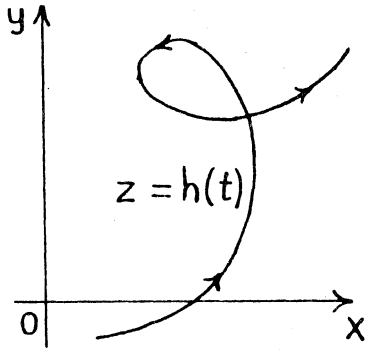
$$\int_0^{\infty} \sin ax \cos bx \cos cx \frac{dx}{x} = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{hvis } a > b + c \\ \frac{1}{4}\pi & \text{hvis } a < b + c. \end{cases}$$

§ 34. Plane kurver.

Kurvebegrebet. Vi tænker os, at der i planen er indført sædvanlige retvinklede koordinater x,y, så at planen bliver den reelle talplan $\mathbb{R}^2$. Vi foretrækker dog at operere med den komplekse variable $z = x + iy$, hvorved planen bliver den komplekse talplan $\mathbb{C}$. Punkter eller vektorer angives enten ved et komplekst tal $z = x + iy$ eller ved det reelle talpar (x,y).

Ved den følgende behandling af kurver i planen vil vi tillade os i nogen grad at gøre brug af intuitive geometriske ræsonnementer.

Lad $A \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. En C^n-afbildning $z = h(t)\colon A \to \mathbb{C}$, eller $(x,y) = (f(t),g(t))\colon A \to \mathbb{R}^2$, bestemmer en C^n-kurve i planen. Den variable t kaldes parameteren. Når t gennemløber parameterintervallet A, siges z at gennemløbe kurven. Vi taler i denne sammenhæng om en parametriseret kurve og kalder $z = h(t)\colon A \to \mathbb{C}$, eller $(x,y) = (f(t),g(t))\colon A \to \mathbb{R}^2$, en parameterfremstilling for kurven. Opfattes t som tiden, er talen om en bevægelse i planen. Antages $n \geq 2$, er $z' = h'(t)$ og $z'' = h''(t)$ hastigheden og accelerationen i bevægelsen, medens $|z'| = |h'(t)|$ kaldes farten. Til forskellige parameterværdier kan godt svare samme kurvepunkt; vi taler da om et multipelt punkt på kurven, specielt et dobbeltpunkt, hvis punktet fremkommer for netop to



parameterværdier.

Hvis $A \subseteq \mathbb{R}$ og $B \subseteq \mathbb{R}$ er intervaller, og $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, vil vi ved et C^n-parameterskift fra A til B forstå en bijektiv C^n-afbildning $t = \varphi(u)\colon B \to A$, for hvilken der, såfremt $n > 0$, gælder $\varphi'(u) \neq 0$ for alle $u \in B$. Ved anvendelse af et sådant fås af en C^n-afbildning $z = h(t)\colon A \to \mathbb{C}$ eller $(x,y) = (f(t),g(t))\colon A \to \mathbb{R}^2$ en ny C^n-afbildning $z = h\circ\varphi(u)\colon B \to \mathbb{C}$ eller $(x,y) = (f\circ\varphi(u),g\circ\varphi(u))\colon B \to \mathbb{R}^2$, der siges at bestemme den samme C^n-kurve med en ny parametrisering. De to parameterfremstillinger siges at svare til samme eller modsat gennemløbsretning af kurven, eftersom φ er voksende eller aftagende.

En kurve $z = h(t)\colon A \to \mathbb{C}$ i henhold til ovenstående definition må ikke forveksles med mængden $h(A)$ af kurvens punkter. I praksis vil vi dog ofte tale om en punktmængde, bestemt f.eks. som mængden af løsninger (x,y) til en ligning $F(x,y) = 0$, som en kurve, idet det pånær parameterskift vil være indlysende, hvorledes parametriseringen skal tænkes foretaget.

Ved studiet af en kurve lægger vi i almindelighed en bestemt parameterfremstilling til grund. For ikke at få for mange betegnelser skriver vi paramterfremstillingen $z = z(t)\colon A \to \mathbb{C}$, og betegner koordinatfunktionerne $x(t),y(t)$, så at $z(t) = x(t) + i\,y(t)$.

Tangent. Spids. Lad $z = z(t)\colon A \to \mathbb{C}$ være en C^n-kurve. Vi vil studere kurvens forløb for en omegn af en parameterværdi t. Hvis det for tilstrækkeligt små po-

sitive tilvækster Δt gælder, at punktet $z(t+\Delta t)$ er forskelligt fra punktet $z(t)$, og hvis halvlinien fra $z(t)$ gennem $z(t+\Delta t)$ konvergerer mod en grænsestilling T^+ for $\Delta t \to 0$ gennem positive værdier, siges kurven at have halvlinien T^+ som positiv halvtangent i $z(t)$. På tilsvarende måde defineres negativ halvtangent T^-. Hvis kurven har såvel en positiv som en negativ halvtangent i $z(t)$, og hvis disse er modsat rettede, siges kurven at have den linie gennem $z(t)$, der indeholder halvtangenterne, som tangent i $z(t)$. Tangenten orienteres i overensstemmelse med den positive halvtangent T^+. Skifter vi gennemløbsretning på kurven, ombyttes T^+ og T^-, og tangentens orientering bliver altså den modsatte. I tilfælde af ensrettede (altså sammenfaldende) halvtangenter, siges kurven at have en spids i $z(t)$. Også i dette tilfælde tillægges kurven en tangent i $z(t)$, nemlig den linie, der indeholder halvtangenterne. Den orienteres i overensstemmelse med den fælles retning af T^+ og T^-. Man ser, at spidstangentens orientering er uafhængig af kurvens gennemløbsretning. Eksisterer begge halvtangenterne, men er de hverken modsat rettede eller sammenfaldende, siges kurven at have et knæk i $z(t)$ og tilskrives ingen tangent i $z(t)$. Vi har her stiltiende forudsat, at t ikke er endepunkt for parameterintervallet A; for et endepunkt bliver der naturligvis kun tale om den ene halvtangent.

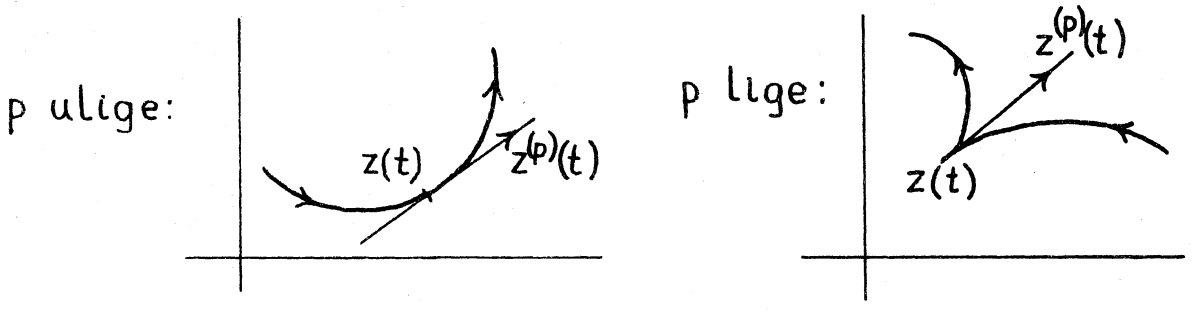
Hvis kurven har en tangent T i $z(t)$, defineres normalen N i $z(t)$ som den orienterede linie, der fremgår af T ved en drejning $\frac{1}{2}\pi$ om $z(t)$ i planens positive omløbsretning.

Vi antager nu, at $n \geq 1$, og at t ikke er et endepunkt af parameterintervallet. Idet vi yderligere antager, at de afledede $z'(t),\cdots,z^{(n)}(t)$ (hvis $n < \infty$) eller $z'(t),z''(t),\cdots$ (hvis $n = \infty$) ikke alle er 0, vil vi vise:

Betegner p det første tal, for hvilket $z^{(p)}(t) \neq 0$, gælder:

(1) Er p et ulige tal, har kurven i punktet $z(t)$ to modsat rettede halvtangenter, og den positive har retning efter vektoren $z^{(p)}(t)$.

(2) Er p et lige tal, har kuven en spids i punktet $z(t)$, og spidstangenten har retning efter vektoren $z^{(p)}(t)$.



Bevis. Ifølge Taylors grænseformel har vi

$$z(t+\Delta t) - z(t) = \frac{(\Delta t)^p}{p!}(z^{(p)}(t)+\varepsilon(\Delta t)),$$

hvor $\varepsilon(\Delta t) \to 0$ for $\Delta t \to 0$. For numerisk tilstrækkeligt små værdier $\Delta t \neq 0$ har vi dermed $z(t+\Delta t) \neq z(t)$. For p ulige er halvlinien fra $z(t)$ gennem $z(t+\Delta t)$ bestemt ved vektoren $z^{(p)}(t) + \varepsilon(\Delta t)$, når $\Delta t > 0$, og ved vektoren $-z^{(p)}(t) - \varepsilon(\Delta t)$, når $\Delta t < 0$, medens den for p lige er bestemt ved vektoren $z^{(p)}(t) + \varepsilon(\Delta t)$ uanset fortegnet for Δt. Idet $z^{(p)}(t) + \varepsilon(\Delta t) \to z^{(p)}(t)$ for $\Delta t \to 0$, fås påstanden heraf.∎

Konveksitet. Vendepunkt. Spids af første og anden art.

For at give en finere beskrivelse af kurvens forløb for en omegn af parameterværdien t indfører vi følgende begreber.

Kurven kaldes konveks i $z(t)$, hvis den har modsat rettede halvtangenter i $z(t)$, og $z(t+\Delta t)$ for alle numerisk tilstrækkeligt små $\Delta t \neq 0$ ligger på samme side af tangenten i $z(t)$.

Kurven siges at have et vendepunkt i $z(t)$, hvis den har modsat rettede halvtangenter i $z(t)$, og $z(t+\Delta t)$ for alle tilstrækkeligt små $\Delta t > 0$ ligger på den ene side og for alle numerisk tilstrækkeligt små $\Delta t < 0$ ligger på den anden side af tangenten i $z(t)$. Tangenten kaldes da en vendetangent.

Hvis kurven har en spids i $z(t)$, siges spidsen at være af første art, hvis $z(t+\Delta t)$ for alle tilstrækkeligt små $\Delta t > 0$ ligger på den ene side og for alle numerisk tilstrækkeligt små $\Delta t < 0$ ligger på den anden side af spidstangenten mens spidsen siges at være af anden art, hvis $z(t+\Delta t)$ for alle numerisk tilstrækkeligt små $\Delta t \neq 0$ ligger på samme side af

spidstangenten.

Idet vi antager $n \geq 2$ og desuden antager, at de afledede $z'(t), \cdots, z^{(n)}(t)$ (hvis $n < \infty$) eller $z'(t), z''(t), \cdots$ (hvis $n = \infty$) ikke alle er 0, og ydermere ikke alle ligger på samme rette linie, vil vi vise:

Betegner p det første tal, for hvilket $z^{(p)}(t) \neq 0$, og q det første tal efter p, for hvilket $z^{(q)}(t)$, ikke ligger på samme rette linie som $z^{(p)}(t)$, gælder:

(1a) Hvis p er ulige og q lige, er kurven konveks i $z(t)$.

(1b) Hvis p er ulige og q ulige, har kurven et vendepunkt i $z(t)$.

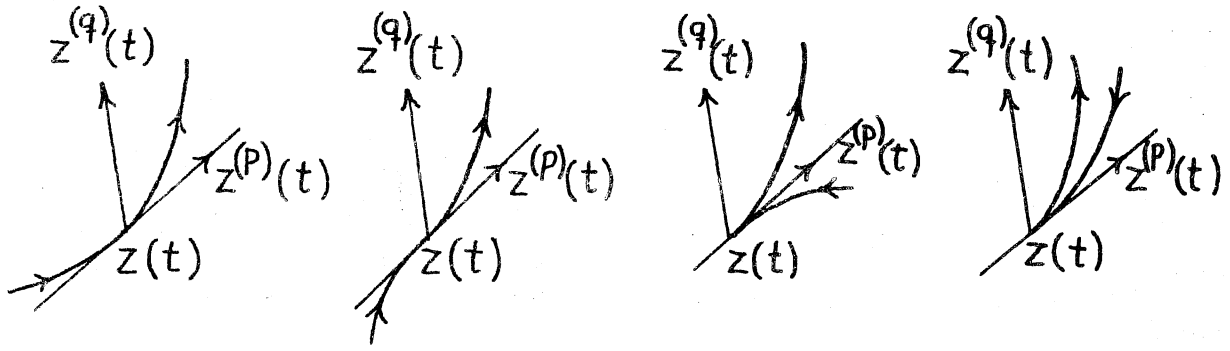
(2a) Hvis p er lige og q ulige, har kurven en spids af første art i $z(t)$.

(2b) Hvis p er lige og q lige, har kurven en spids af anden art i $z(t)$.

I alle fire tilfælde er forløbet i forhold til tangenten bestemt ved, at $z(t+\Delta t)$ for tilstrækkeligt små $\Delta t > 0$ ligger på den ved retningen af $z^{(q)}(t)$ bestemte side af tangenten.

Bevis. Ifølge Taylors grænseformel har vi

p ulige	p ulige	p lige	p lige
q lige	q ulige	q ulige	q lige



$$z(t+\Delta t) - z(t) = \frac{(\Delta t)^p}{p!}z^{(p)}(t)+\cdots+\frac{(\Delta t)^{q-1}}{(q-1)!}z^{(q-1)}(t)+\frac{(\Delta t)^q}{q!}(z^{(q)}(t)+\varepsilon(\Delta t)),$$

hvor $\varepsilon(\Delta t) \to 0$ for $\Delta t \to 0$. Samtlige led på højre side pånær det sidste ligger på tangenten i $z(t)$, og det sidste ligger for numerisk tilstrækkeligt små $\Delta t \neq 0$ ikke på tangenten, men på samme side af tangenten som vektoren $(\Delta t)^q z^{(q)}(t)$, altså på samme eller modsat side af tangenten som vektoren $z^{(q)}(t)$, eftersom $(\Delta t)^q$ er > 0 eller < 0. Heraf fås påstanden. □

Når man vil skaffe sig overblik over forløbet af en C^n-kurve, hvor $n \geq 2$, har det særlig betydning at bestemme eventuelle vendepunkter og spidser.

Ifølge det ovenstående er kurven konveks i punktet $z(t)$, hvis $z'(t)$ og $z''(t)$ er $\neq 0$ og ikke ligger på samme rette linie. Parameterværdierne for eventuelle vendepunkter og spidser må derfor søges blandt løsningerne til ligningen

$$\det \begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{pmatrix} = 0 .$$

Eksempel 1. Vi betragter kurven givet ved parameterfremstillingen

$$x = 2t^6 - 3t^4 + 1, \quad y = 2t^3 + 3t^2 - 3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kurven er en C^∞-kurve, og vi har

$$x' = 12t^5 - 12t^3 \qquad y' = 6t^2 + 6t$$

$$x'' = 60t^4 - 36t^2 \qquad y'' = 12t + 6,$$

altså

$$\det \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 12t^3(t+1)(t-1) & 6t(t+1) \\ 12t^2(5t^2-3) & 6(2t+1) \end{pmatrix}$$

$$= 72t^3(t+1)\det\begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ 5t^2-3 & 2t+1 \end{pmatrix} = -72t^3(t+1)^2(3t-2),$$

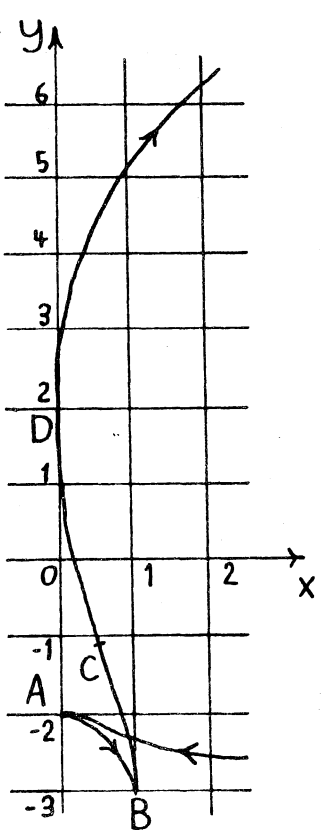
så at eventuelle vendepunkter og spidser må søges for parameterværdierne $t = -1, 0, \frac{2}{3}$. For hver af disse værdier beregner vi $(x,y),(x',y'),(x'',y''),\cdots$, idet beregningerne føres så langt frem, at p og q er fundet. Idet

$$x''' = 240t^3 - 72t \qquad y''' = 12$$

$$x^{(4)} = 720t^2 - 72 \qquad y^{(4)} = 0,$$

finder vi de i tabellen opstillede resultater

t	-1	0	$\frac{2}{3}$
(x,y)	$(0,-2)$	$(1,-3)$	$(\frac{425}{729},-\frac{29}{27})$
(x',y')	$(0,0)$	$(0,0)$	$(-\frac{160}{81},\frac{20}{3})$
(x'',y'')	$(24,-6)$	$(0,6)$	$(-\frac{112}{27},14)$
(x''',y''')	$(-168,12)$	$(0,12)$	$(\frac{208}{9},12)$
$(x^{(4)},y^{(4)})$		$(-72,0)$	



For hver af værdierne af t er i søjlen af talpar $(x',y'),(x'',y''),\cdots$ understreget det første, der er $\neq (0,0)$, og derefter det første, der ikke er proportionalt med dette. Man ser, at kurven har en spids af første art i det til $t = -1$ svarende punkt $A = (0,-2)$; spidstangenten er bestemt ved vektoren $(24,-6)$, og vektoren $(-168,12)$ bestemmer kurvens forløb i forhold til tangenten. Kurven har en spids af anden art i det til $t = 0$ svarende punkt $B = (1,-3)$; spidstangenten er bestemt ved vektoren $(0,6)$, og kurven ligger i en omegn af B på samme side af tangenten som vektoren $(-72,0)$. Kurven har et vendepunkt i det til $t = \frac{2}{3}$ svarende punkt $C = (\frac{425}{729},-\frac{29}{27})$; vendetangenten er bestemt ved vektoren $(-\frac{160}{81},\frac{20}{3})$, og vektoren $(\frac{208}{9},12)$ bestemmer kurvens forløb i forhold til tangenten,

Ved tegningen er foruden det således fundne benyttet nogle flere punkter med tangent, blandt andet det til parameterværdien $t = 1$ svarende punkt $D = (0,2)$, hvor kurven har y-aksen til tangent. Det bemærkes, at der gælder

$$x \to +\infty \text{ og } y \to -\infty \text{ for } t \to -\infty$$

og

$$x \to +\infty \text{ og } y \to +\infty \text{ for } t \to +\infty.$$

Polære koordinater. Det er ofte hensigtsmæssigt at benytte polære koordinater r,φ i planen.

Vi vil i det følgende tillade vilkårlige reelle værdier af r, ikke blot som det oftest sker (jfr. Mat 101 noter) værdier $r \geq 0$. Sammenhængen med de retvinklede koordinater x,y og med den komplekse variable z er givet ved

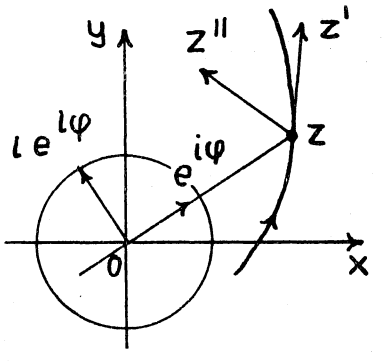
$$(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \quad \text{og} \quad z = re^{i\varphi}.$$

Et punkt $z = x + iy$ har uendelig mange polære koordinatpar (r,φ), idet vi for $z = 0$ kan benytte alle par (r,φ) med $r = 0$, medens vi for $z \neq 0$ kan vælge $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ eller $r = -|z| = -\sqrt{x^2+y^2}$, hvorefter der i hvert af de to tilfælde er uendelig mange værdier af φ.

Hvis $r = r(t)$ og $\varphi = \varphi(t)$ er C^n-funktioner på parameterintervallet A, er $z = z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$ ligeledes en C^n-funktion. Vi finder, idet vi antager $n \geq 2$,

$$z' = r'e^{i\varphi} + r\varphi' ie^{i\varphi}, \quad z'' = (r''-r\varphi'^2)e^{i\varphi} + (r\varphi''+2r'\varphi')ie^{i\varphi}.$$

Her er $e^{i\varphi}$ enhedsvektoren i den ved φ bestemte retning, medens $ie^{i\varphi}$ er den enhedsvektor, der fremgår af $e^{i\varphi}$ ved en drejning $\frac{1}{2}\pi$ i planens positive omløbsretning. I det af disse enhedsvektorer bestemte retvinklede koordinatsystem har z' og z'' altså koordinaterne $(r', r\varphi')$ og $(r''-r\varphi'^2, r\varphi''+2r'\varphi')$.



Opfattes t som tiden, kaldes r' og φ' henholdsvis <u>strækningshastigheden</u> og <u>vinkelhastigheden</u> for linie-

stykket $\overline{0z}$. Formlen for hastigheden z' kan anskueligt fortolkes ved, at kurvepunktets bevægelse er sammensat af en radial bevægelse med hastighed $r'e^{i\varphi}$ og en cirkelbevægelse med hastighed $r\varphi' ie^{i\varphi}$. En analog fortolkning af acceleration z'' bliver mere kompliceret.

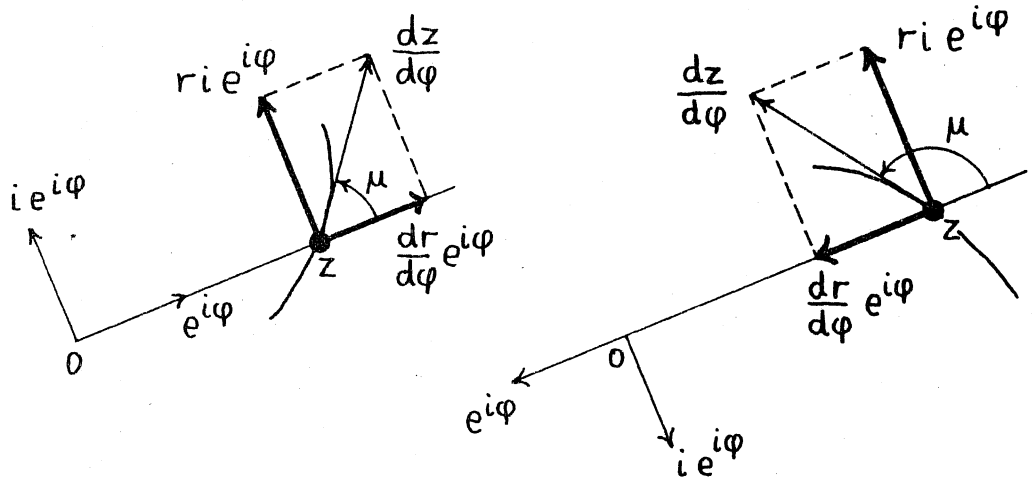
Hvis parameteren specielt er selve vinklen φ, så at talen er om en kurve givet ved en ligning $r = r(\varphi)$, forenkles formlerne til

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}e^{i\varphi} + r\, ie^{i\varphi}, \qquad \frac{d^2z}{d\varphi^2} = \left(\frac{d^2r}{d\varphi^2} - r\right)e^{i\varphi} + 2\frac{dr}{d\varphi} i\, e^{i\varphi}.$$

Vi har altså $\frac{dz}{d\varphi} \neq 0$, hvis og kun hvis $(\frac{dr}{d\varphi}, r) \neq (0,0)$. I et punkt med $r = 0$ og $\frac{dr}{d\varphi} \neq 0$ er tangenten bestemt ved vektoren $e^{i\varphi}$ eller $-e^{i\varphi}$, eftersom $\frac{dr}{d\varphi} > 0$ eller $\frac{dr}{d\varphi} < 0$, og i et punkt med $r \neq 0$ finder man for vinklen μ fra radiusvektor z til tangenten

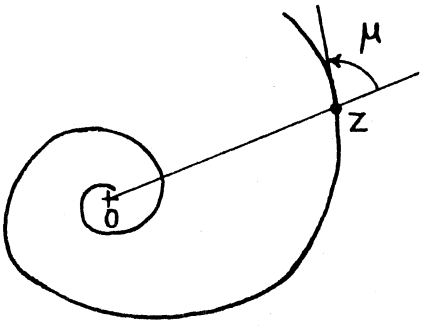
$$\cot\mu = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}.$$

Denne formel gælder både for $r > 0$ og $r < 0$ og ses let ved figurbetragtning. Vi har tegnet begge figurer svarende til en positiv værdi af $\frac{dr}{d\varphi}$.



$r > 0$ $r < 0$

Eksempel 2. Den kurve, der i polære koordinater bestemmes ved $r = a\, e^{b\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, hvor $a > 0$, $b > 0$, kaldes en logaritmisk spiral. Den er øjensynlig en C^∞-kurve, og r antager ikke værdien 0. For vinklen fra radiusvektor til tangenten fås $\cot \mu = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = b$; tangenten danner altså en konstant vinkel med radiusvektor.



Algebraiske kurver. Ved en algebraisk kurve af grad n forstås mængden af løsninger (x,y) til en ligning $F(x,y) = 0$, hvor F er et polynomium af grad n. De algebraiske kurver af grad 1 er således de rette linier, og de algebraiske kurver af grad 2 er de egentlige og udartede keglesnit.

Eksempel 3. Den algebraiske kurve af grad 3, der bestemmes ved ligningen

$$x^3 + y^3 = 3a\, xy,$$

hvor $a > 0$, kaldes Descartes' blad. Når (x,y) ligger på kurven, ligger også (y,x) på kurven; kurven er altså symmetrisk om linien $x = y$. Vi søger en parameterfremstilling i polære koordinater r, φ og indsætter derfor $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, hvorved fås

$$r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 3a\, r^2 \cos\varphi \sin\varphi .$$

Heraf sluttes, at løsningerne til ligningen

$$r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 3a \cos\varphi \sin\varphi$$

giver de polære koordinatpar (r,φ) til samtlige kurvepunkter, eventuelt pånær begyndelsespunktet (svarende til $r = 0$); dette kommer imidlertid også med ved den sidste ligning svarende til $\varphi = p\cdot\frac{1}{2}\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. Der er ingen løsning r for $\varphi = -\frac{1}{4}\pi+p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, og ellers netop en løsning. Idet en ændring af φ til $\varphi+\pi$ blot betyder et fortegnsskift på r, hvorved vi får polære koordinater til samme punkt i planen, er det tilstrækkeligt at betragte intervallet $-\frac{1}{4}\pi < \varphi < \frac{3}{4}\pi$. Vi har hermed fundet ligningen

$$r = r(\varphi) = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}, \qquad \varphi \in \left]-\tfrac{1}{4}\pi,\tfrac{3}{4}\pi\right[.$$

Man ser, at kurven er en C^∞-kurve. Idet

$$\frac{dr}{d\varphi} = 3a\frac{(\cos\varphi-\sin\varphi)(1+\cos\varphi\sin\varphi+\cos^2\varphi\sin^2\varphi)}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}$$

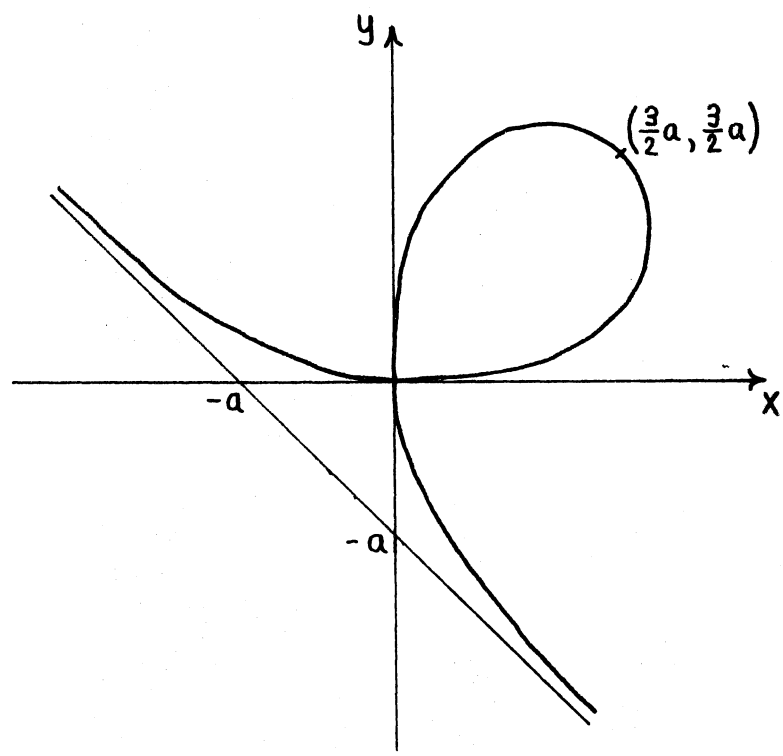
i parameterintervallet kun antager værdien 0 for $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, hvor $r = \frac{3a}{\sqrt{2}} \neq 0$, har kurven i hvert af sine punkter to modsat rettede halvtangenter. Vi får en vis oversigt over kurvens forløb ved at bestemme fortegn og monotoniintervaller for r. Af udtrykkene for r og $\frac{dr}{d\varphi}$ aflæses:

φ	$-\frac{1}{4}\pi$		0		$\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{2}\pi$		$\frac{3}{4}\pi$
r		neg.	0	pos.	$\frac{3a}{\sqrt{2}}$	pos.	0	neg.	
		voksende				aftagende			

Heraf ses, at kurven passerer to gange gennem begyndelsespunktet med henholdsvis x-aksen og y-aksen som tangent. For $\varphi \in]-\frac{1}{4}\pi, 0[$ ligger kurven i 2. kvadrant, for $\varphi \in]0, \frac{1}{2}\pi[$ i 1. kvadrant, og for $\varphi \in]\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi[$ i 4. kvadrant. Der gælder $r(\varphi) \to -\infty$ såvel for $\varphi \to -\frac{1}{4}\pi$ som for $\varphi \to \frac{3}{4}\pi$. Dette giver anledning til at undersøge, om kurven skulle have en asymptote parallel med linien $x + y = 0$. For at afgøre spørgsmålet betragtes den med fortegn regnede afstand fra linien $x + y = 0$ til kurvepunktet, for hvilken vi finder udtrykket

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} r(\varphi)[\cos\varphi + \sin\varphi] = \frac{3a}{\sqrt{2}} \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{1-\cos\varphi \sin\varphi}.$$

Afstanden konvergerer altså mod $-\frac{a}{\sqrt{2}}$ såvel for $\varphi \to -\frac{1}{4}\pi$ som for $\varphi \to \frac{3}{4}\pi$. Heraf følger, at kurven har linien $x + y = -a$ som asymptote såvel for $\varphi \to -\frac{1}{4}\pi$ som for $\varphi \to \frac{3}{4}\pi$. Man ser desuden, at afstanden er $> -\frac{a}{\sqrt{2}}$ for alle $\varphi \in]-\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi[$; kurven ligger altså på den positive side af asymptoten.



Opgaver. 1. Undersøg og tegn kurven givet ved parameterfremstillingen

$$x = t^2 + t^3, \quad y = 1 + t^3, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. Undersøg og tegn kurven givet ved parameterfremstillingen

$$x = t^2, \qquad y = t^4 + t^5, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

3. Undersøg og tegn kurven givet ved parameterfremstillingen

$$x = t^4(1-t)^2, \quad y = t^5(1-t)^2, \quad t \in \left[-\tfrac{1}{10}, \tfrac{11}{10}\right].$$

4. Undersøg og tegn kurven givet ved parameterfremstillingen

$$x = t^3 - t^2 + 1, \quad y = t^2 - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bevis, at tangenterne i to punkter med samme ordinat skærer hinanden på spidstangenten.

5. Et punkt gennemløber parablen $y^2 = 2px$ således, at hastighedens projektion på y-aksen har den konstante størrelse c. Find accelerationens størrelse og retning.

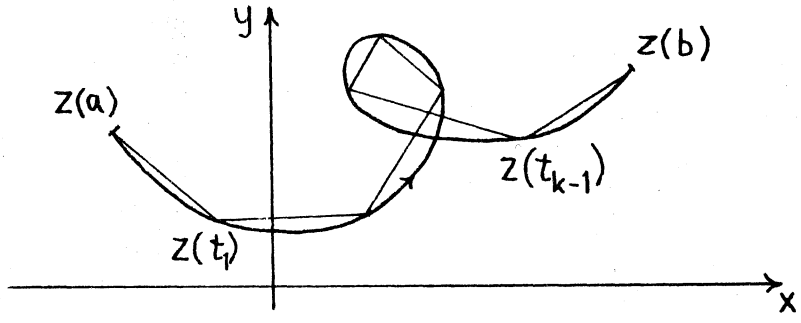
6. Et punkt bevæger sig på en cirkel således, at accelerationen danner en konstant vinkel med radien til punktet. Find vinkelhastigheden som funktion af tiden.

§ 35. Kurvers længde.

Længde af C^0-kurve. Lad $z = z(t)$: $[a,b] \to \mathbb{C}$ eller $(x,y) = (x(t),y(t))$: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ være en C^0-kurve med afsluttet parameterinterval $[a,b]$. For enhver inddeling D af $[a,b]$ ved delepunkter $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ danner vi længden

$$l(D) = \sum_{j=1}^{k} |z(t_j) - z(t_{j-1})|$$

af den brudte linie bestemt ved punkterne $z(a), z(t_1), \ldots, z(t_{k-1}), z(b)$.



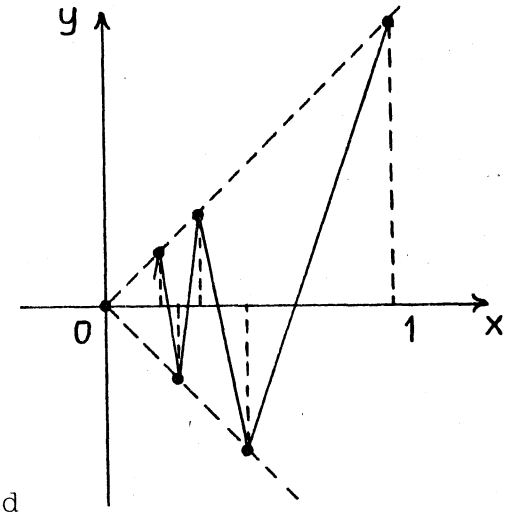
Ved længden l af kurven forstås supremum af talmængden $\{l(D)\}$, hvor D gennemløber alle inddelinger af $[a,b]$, altså

$$l = \sup\{l(D)\}.$$

Man ser umiddelbart, at talmængden $\{l(D)\}$ ikke ændres ved et C^0-parameterskift. Længden l er derfor uafhængig af parameterfremstillingen.

Hvis $l < +\infty$, kaldes kurven rektifikabel (eller rektificerbar).

Øvelse 1. Der findes C^0-kurver $z = z(t)$: $[a,b] \to \mathbb{C}$, der ikke er rektifikable, for hvilke altså $l = +\infty$. Som eksempel nævnes Peanos kurve $(x,y) = (x(t),y(t))$: $[0,1] \to \mathbb{R}^2$, jfr. § 8. Betegnes med D_n den inddeling af $[0,1]$, der bestemmes ved parameterværdierne $t = 0, \frac{1}{9^n}, \cdots, \frac{9^n-1}{9^n}, 1$, består den til D_n svarende brudte linie af 9^n liniestykker, der hvert har længden $\frac{1}{3^n}\sqrt{2}$, og vi har altså $l(D_n) = 3^n\sqrt{2}$. Talmængden $\{l(D)\}$ er altså ikke opad begrænset. Som et simplere eksempel nævnes følgende. Betragt den funktion f: $[0,1] \to \mathbb{R}$, der bestemmes ved, at $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{n}) = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ for $n \in \mathbb{N}$, og som er lineær på hvert af intervallerne $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$. Den er kontinuert, og $(x,y) = (t,f(t))$: $[0,1] \to \mathbb{R}^2$ er altså en C^0-kurve. Det er simpelthen grafen af f med x som parameter. Betegnes med D_n den inddeling af $[0,1]$, der bestemmes ved parameterværdierne $t = 0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{1}{2}, 1$, er den tilsvarende brudte linie bestemt ved punkterne $(0,0), (\frac{1}{n}, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}), (\frac{1}{n-1}, (-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}), \cdots, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (1,1)$, og der gælder følgelig $l(D_n) > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Da den harmoniske række er divergent, slutter vi, at talmængden $\{l(D)\}$ ikke er opad begrænset.



Hvis $z = z(t)$: $[a,b] \to \mathbb{C}$ er en C^0-kurve med længden l, og $[a',b']$ er et afsluttet delinterval af $[a,b]$, gælder for længden l' af delkurven $z = z(t)$: $[a',b'] \to \mathbb{C}$, at

$$l' \leq l.$$

Hvis den givne kurve er rektifikabel, er delkurven det altså også.

Bevis. For enhver inddeling D' af $[a',b']$ fås ved tilføjelse af a (hvis $a < a'$) og b (hvis $b' < b$) en inddeling D af $[a,b]$, og for længderne $l(D')$ og $l(D)$ af de tilsvarende brudte linier gælder åbenbart $l(D') \leq l(D)$. Heraf følger påstanden.∎

Hvis $z = z(t)$: $[a,b] \to \mathbb{C}$ er en C^0-kurve med længden l, og $a < c < b$, gælder for længderne l_a og l_b af delkurverne $z = z(t)$: $[a,c] \to \mathbb{C}$ og $z = z(t)$: $[c,b] \to \mathbb{C}$, at

$$l = l_a + l_b.$$

Hvis delkurverne er rektifikable, gælder det samme altså om den givne kurve.

Bevis. (1) To inddelinger D_a og D_b af henholdsvis $[a,c]$ og $[c,b]$ bestemmer en inddeling D af $[a,b]$, og for længderne $l(D_a)$, $l(D_b)$, $l(D)$ af de tilsvarende brudte linier gælder åbenbart $l(D_a) + l(D_b) = l(D)$. Følgelig er $l(D_a) + l(D_b) \leq l$, hvoraf følger, at $l_a + l_b \leq l$.

(2) Af en inddeling D af $[a,b]$ fås ved tilføjelse af c (hvis c ikke er delepunkt ved D) en inddeling D^*, og for længderne af de tilsvarende brudte linier gælder åbenbart $l(D) \leq l(D^*)$. Inddelingen D^* bestemmer inddelinger D_a og D_b af $[a,c]$ og $[c,b]$, og for længderne af de tilsvarende brudte linier gælder $l(D_a) + l(D_b) = l(D^*)$. Følgelig er $l(D) \leq l(D_a) + l(D_b) \leq l_a + l_b$, hvoraf ses, at $l \leq l_a + l_b$. □

Øvelse 2. For en inddeling D af $[a,b]$ bestemt ved delepunkter $a = t_o < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ betegnes tallet

$$\varphi(D) = \max\{t_j - t_{j-1} \mid j = 1, \cdots, k\}$$

som inddelingens finhed (jfr. § 13).

Hvis $z = z(t)$: $[a,b] \to \mathbb{C}$ er en C^0-kurve med længden l, findes for ethvert tal $\lambda < l$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, således at der for enhver inddeling D af $[a,b]$, for hvilken finheden $\varphi(D)$ er $< \varepsilon$, for længden $l(D)$ af den tilsvarende brudte linie gælder

$$l(D) > \lambda .$$

Bevis. Vi vælger et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at $\lambda + \delta < l$, og en inddeling D^* af $[a,b]$ ved delepunkter $a = t_o^* < t_1^* < \cdots < t_{p-1}^* < t_p^* = b$, således at $l(D^*) > \lambda + \delta$. Lad

$$\rho = \min\{t_q^* - t_{q-1}^* \mid q = 1, \cdots, p\},$$

og lad $\varepsilon \in]0,\rho[$ være valgt således, at der for ethvert $q = 0,1,\cdots,p-1,p$ gælder $|z(t)-z(t_q^*)| < \frac{\delta}{2p}$ for alle $t \in [a,b]$, for hvilke $|t-t_q^*| < \varepsilon$. Lad nu D være en vilkårlig inddeling af $[a,b]$ ved delepunkter $a = t_o < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$, for hvilken $\varphi(D) < \varepsilon$. For ethvert $q = 1,\cdots,p$ gælder, hvis $t_u,\cdots,t_v$ er de delepunkter ved D, der tilhører $]t_{q-1}^*,t_q^*[$, at længden af den brudte linie bestemt ved punkterne $z(t_{q-1}^*),z(t_u),\cdots,z(t_v),z(t_q^*)$ er $\geq |z(t_q^*)-z(t_{q-1}^*)|$, og at $|z(t_u)-z(t_{q-1}^*)| < \frac{\delta}{2p}$ og $|z(t_q^*)-z(t_v)| < \frac{\delta}{2p}$. Længden af den brudte linie bestemt ved punkterne $z(t_u),\cdots,z(t_v)$ er altså $> |z(t_q^*)-z(t_{q-1}^*)| - \frac{\delta}{p}$. Heraf ses, at

$$l(D) > l(D^*) - \delta > \lambda. \square$$

Længde af C^1-kurve. Om C^1-kurver gælder følgende hovedsætning:

Enhver C^1-kurve $z = z(t)$: $[a,b] \to \mathbb{C}$ eller $(x,y) = (x(t),y(t))$: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ med afsluttet parameterinterval $[a,b]$ er rektifikabel, og dens længde l er bestemt ved formlen

$$l = \int_a^b |z'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt.$$

Bevis. Vi sætter

$$I = \int_a^b |z'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt.$$

For enhver inddeling D af $[a,b]$ ved delepunkter $a = t_o < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ har vi for længden $l(D)$ af den tilsvarende brudte linie

$$l(D) = \sum_{j=1}^{k} |z(t_j)-z(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{k} \left|\int_{t_{j-1}}^{t_j} z'(t)dt\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |z'(t)|\,dt = \int_a^b |z'(t)|\,dt = I.$$

Følgelig gælder $l \leq I$.

Skrives $l(D)$ på formen

$$l(D) = \sum_{j=1}^{k} \sqrt{[x(t_j)-x(t_{j-1})]^2+[y(t_j)-y(t_{j-1})]^2},$$

fås ved brug af differentialregningens middelværdisætning

$$l(D) = \sum_{j=1}^{k} \sqrt{x'(\xi_j)^2+y'(\eta_j)^2}\,(t_j-t_{j-1}),$$

hvor $\xi_j, \eta_j \in]t_{j-1}, t_j[$, $j = 1, \cdots, k$. Skrives I på formen

$$I = \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt,$$

fås ved brug af integralregningens middelværdisætning

$$I = \sum_{j=1}^{k} \sqrt{x'(\zeta_j)^2+y'(\zeta_j)^2}\,(t_j-t_{j-1}),$$

hvor $\zeta_j \in]t_{j-1},t_j[$, $j = 1,\cdots,k$. Følgelig gælder

$$(0 \leq)I - l(D) = \sum_{j=1}^{k}\left(\sqrt{x'(\zeta_j)^2+y'(\zeta_j)^2} - \sqrt{x'(\xi_j)^2+y'(\eta_j)^2}\right)(t_j-t_{j-1}).$$

Vi bemærker nu, at funktionen

$$(\xi,\eta) \mapsto \sqrt{x'(\xi)^2+y'(\eta)^2} : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$$

er kontinuert og dermed (da $[a,b]\times[a,b]$ er kompakt) uniformt kontinuert. Til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes altså et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at

$$\left| \sqrt{x'(\xi)^2+y'(\eta)^2} - \sqrt{x'(\tilde{\xi})^2+y'(\tilde{\eta})^2} \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

for alle par $(\xi,\eta),(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) \in [a,b]\times[a,b]$, for hvilke $|\xi-\tilde{\xi}|<\delta, |\eta-\tilde{\eta}|<\delta$. For enhver inddeling D, for hvilken finheden $\varphi(D) = \max\{t_j-t_{j-1} \mid j = 1,\cdots,k\}$ er $< \delta$, gælder altså

$$(0 \leq)I - l(D) < \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon}{b-a}(t_j-t_{j-1}) = \varepsilon.$$

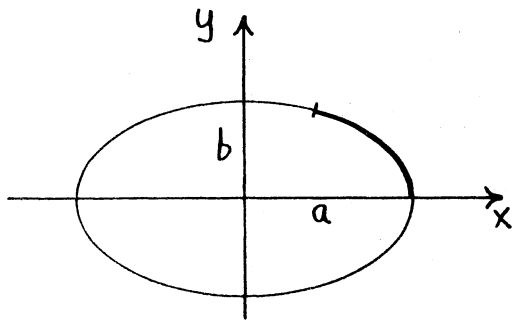
Følgelig må gælde $l = I$. ∎

Specielt fås for længden af grafen af en C^1-funktion $y = f(x)$: $[a,b] \to \mathbb{R}$, idet x benyttes som parameter, udtrykket

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Eksempel 1. For en ellipse med halvakser a og $b < a$ med den sædvanlige beliggenhed i forhold til ko-

ordinatsystemet benyttes parameterfremstillingen $(x,y) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0,2\pi]$. Vi finder for længden $l(u)$ af den til parameterintervallet $[0,u]$ svarende bue udtrykket



$$l(u) = \int_0^u \sqrt{(-a \sin t)^2 + (b \cos t)^2}\, dt = \int_0^u \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\, dt.$$

Idet $a^2 - b^2 = a^2e^2$, hvor $e \in]0,1[$ er ekscentriciteten antager udtrykket formen

$$l(u) = a \int_0^u \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\, dt.$$

Integralet kan ikke udtrykkes ved de hidtil indførte funktionstegn. I overensstemmelse med de af A.-M. Legendre indførte betegnelser kaldes de to funktioner

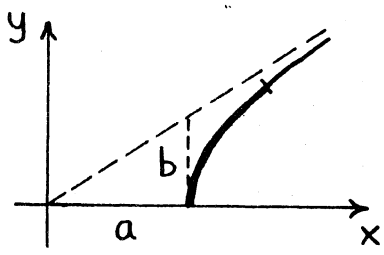
$$F(k,u) = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad \text{og} \quad E(k,u) = \int_0^u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt,$$

hvor $k \in]0,1[$ og $u \in \mathbb{R}$, elliptiske integraler af henholdsvis første og anden art. Ved i udtrykket for $l(u)$ at erstatte t med $\frac{1}{2}\pi - t$, finder vi

$$l(u) = a\, E(e, \tfrac{1}{2}\pi) - a\, E(e, \tfrac{1}{2}\pi - u),$$

hvor det første led på højre side er kvartellipsens længde.

For den øvre højre halvgren af en hyperbel med halvakser a og b med den sædvanlige beliggenhed i forhold til koordinatsystemet benyttes parameterfrem-



stillingen $(x,y) = (\frac{a}{\cos t}, b \tan t)$, $t \in [0, \frac{1}{2}\pi[$. Vi finder da for længden $l(u)$ af den til parameterintervallet $[0,u]$ svarende bue udtrykket

$$l(u) = \int_0^u \sqrt{(\frac{a \sin t}{\cos^2 t})^2 + (\frac{b}{\cos^2 t})^2}\, dt = \int_0^u \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2}}{\cos^2 t}\, dt,$$

som ved delvis integration omskrives til

$$l(u) = \tan u \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2} - \int_0^u \tan t \frac{a^2 \sin t \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2}}\, dt$$

$$= \tan u \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2} - \int_0^u \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2}\, dt + b^2 \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2}}.$$

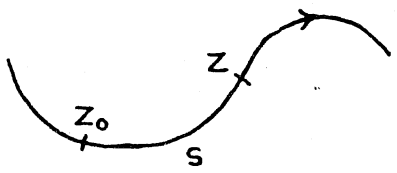
Idet $a^2 + b^2 = a^2 e^2$, hvor $e \in]1,+\infty[$ er ekscentriciteten, antager udtrykket formen

$$l(u) = a \tan u \sqrt{e^2 - \cos^2 u} - a \int_0^u \sqrt{e^2 - \cos^2 t}\, dt + \frac{b^2}{a} \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{e^2 - \cos^2 t}}.$$

Ved i integralerne at erstatte t med $\frac{1}{2}\pi - t$, finder vi

$$l(u) = a \tan u \sqrt{e^2 - \cos^2 u} - ae\left[E(\tfrac{1}{e}, \tfrac{1}{2}\pi) - E(\tfrac{1}{e}, \tfrac{1}{2}\pi - u)\right] + \frac{b^2}{ae}\left[F(\tfrac{1}{e}, \tfrac{1}{2}\pi) - F(\tfrac{1}{e}, \tfrac{1}{2}\pi - u)\right].$$

Naturlig parameterfremstilling. For en C^n-kurve $z = z(t)\colon A \to \mathbb{C}$ eller $(x,y) = (x(t),y(t))\colon A \to \mathbb{R}^2$ med vilkårligt parameterinterval A og $n \geq 1$ er buelængden regnet ud fra det til parameterværdien t_o svarende kurvepunkt $z_o = z(t_o)$ bestemt ved



$$s = s(t) = \int_{t_o}^{t} |z'(\tau)|\, d\tau = \int_{t_o}^{t} \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2}\, d\tau.$$

Herved er s regnet med fortegn, idet s for $t > t_0$ betegner længden af den til intervallet $[t_0,t]$ svarende bue og for $t < t_0$ betegner minus længden af den til intervallet $[t,t_0]$ svarende bue (medens $s = 0$ for $t = t_0$). Man ser, at s er en C^1-funktion af t, og at

$$s'(t) = |z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}.$$

Opfattes t som tiden, er $s'(t)$ altså farten. Antages $z'(t) \neq 0$ for alle $t \in A$, er $s = s(t)$ en C^n-funktion med positiv afledet. Betegnes dens værdimængde B, er den omvendte funktion $t = t(s)\colon B \to A$ et C^n-parameterskift. Foretages dette, får vi kurven bestemt ved en parameterfremstilling med den ud fra z_0 regnede buelængde s som parameter. Af reglen for differentiation af sammensat funktion fås

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{z'(t)}{|z'(t)|} \quad \text{og dermed} \quad \left|\frac{dz}{ds}\right| = 1.$$

Opfattes s som tiden, er farten altså konstant $= 1$.

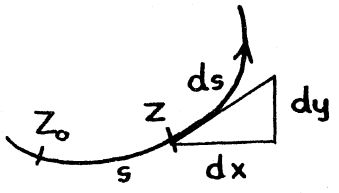
For den givne parameterfremstilling $z = z(t)\colon A \to \mathbb{C}$ er farten konstant $= 1$, hvis og kun hvis $s = t - t_0$, altså hvis og kun hvis $t = s + t_0$. En sådan parameterfremstilling, hvor parameteren er = den ud fra et kurvepunkt regnede buelængde plus en konstant, kaldes en <u>naturlig parameterfremstilling</u>. Ved teoretiske overvejelser er det ofte en fordel at benytte en naturlig parameter-

fremstilling. I konkrete eksempler er det som regel uhensigtsmæssigt; men vil foretrække en parameterfremstilling, der giver simple regneudtryk.

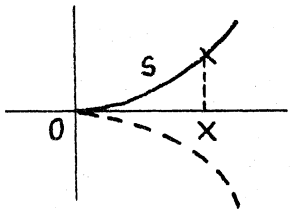
Formlen for buelængden erindres let ud fra ligningen

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2} \quad \text{eller} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

hvis geometriske indhold finder udtryk i den såkaldte karakteristiske trekant.



Eksempel 2. Den ved ligningen $y^2 = x^3$ bestemte kurve kaldes en semikubisk parabel. Den i første kvadrant liggende del er grafen af funktionen $y = x^{\frac{3}{2}}$. Dette er en C^1-funktion på $[0,+\infty[$. Idet x benyttes som parameter, fås for buelængden regnet fra begyndelsespunktet udtrykket



$$s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx$$

$$= \int_0^x \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{8}{27}(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27},$$

hvoraf fremgår den naturlige parameterfremstilling

$$(x,y) = (\frac{4}{9}(1+\frac{27}{8}s)^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9},\ [\frac{4}{9}(1+\frac{27}{8}s)^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}]^{\frac{3}{2}}).$$

Polære koordinater. For en kurve givet i polære koordinater ved $z = z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}: A \to \mathbb{C}$ fås af udtrykket

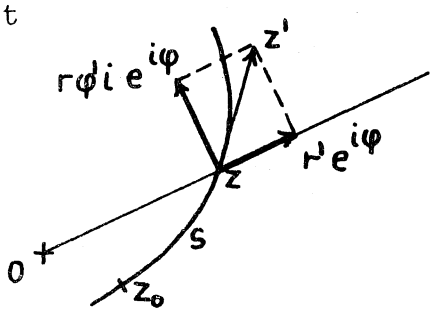
$$z' = r'e^{i\varphi} + r\varphi' i\, e^{i\varphi},$$

idet $e^{i\varphi}$ og $i\, e^{i\varphi}$ er på hinanden vinkelrette enhedsvektorer, for farten $|z'|$ udtrykket

$$|z'| = \sqrt{r'^2+(r\varphi')^2},$$

og dermed for buelængden udtrykket

$$s = \int_{t_o}^{t} \sqrt{r'^2+r^2\varphi'^2}\,dt.$$



Hvis parameteren er vinklen φ, altså hvis kurven er givet ved en ligning $r = r(\varphi)$, forenkles formlen til

$$s = \int_{\varphi_o}^{\varphi} \sqrt{(\frac{dr}{d\varphi})^2+r^2}\ d\varphi.$$

Eksempel 3. For den logaritmiske spiral $r = a\, e^{b\varphi}$, jfr. § 34, fås for buelængden regnet ud fra det til φ_o svarende punkt (r_o,φ_o) udtrykket

$$s = \int_{\varphi_o}^{\varphi} \sqrt{(ab\, e^{b\varphi})^2+(a\, e^{b\varphi})^2}d\varphi = \int_{\varphi_o}^{\varphi} \sqrt{b^2+1}\ a\, e^{b\varphi}\ d\varphi$$

$$= \left[\frac{\sqrt{b^2+1}}{b}\ a\, e^{b\varphi}\right]_{\varphi_o}^{\varphi} = \frac{\sqrt{b^2+1}}{b}\ (a\, e^{b\varphi}-a\, e^{b\varphi_o})$$

$$= \frac{\sqrt{b^2+1}}{b}\ (r-r_o).$$

Som tidligere vist er vinklen μ fra radiusvektor til tangenten konstant, idet den bestemmes ved $\cot\mu = b$. Man ser, at $\frac{\sqrt{b^2+1}}{b} = \frac{1}{\cos\mu}$, og at følgelig

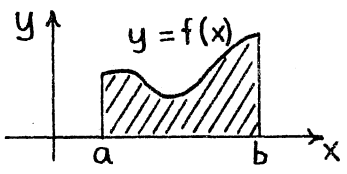
$$s = \frac{r-r_o}{\cos\mu} \qquad \text{eller} \qquad r - r_o = s\cos\mu,$$

hvilket også umiddelbart følger af, at $\frac{dr}{ds} = \cos\mu$.

§ 36. Areal af plane figurer.

Vi vil indskrænke os til en summarisk behandling af plane figurers areal, idet vi koncentrerer os om at udlede forskellige formler og ikke indlader os på principielle betragtninger vedrørende arealbegrebet.

Retvinklede koordinater. Udgangspunktet er den velkendte formel for arealet af et grundområde i retvinklede koordinater: Hvis $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuert og ikke negativ funktion på det afsluttede interval $[a,b]$, bestemmes arealet A af den figur, der begrænses af x-aksen, linierne $x = a$ og $x = b$, og kurven $y = f(x)$, ved formlen



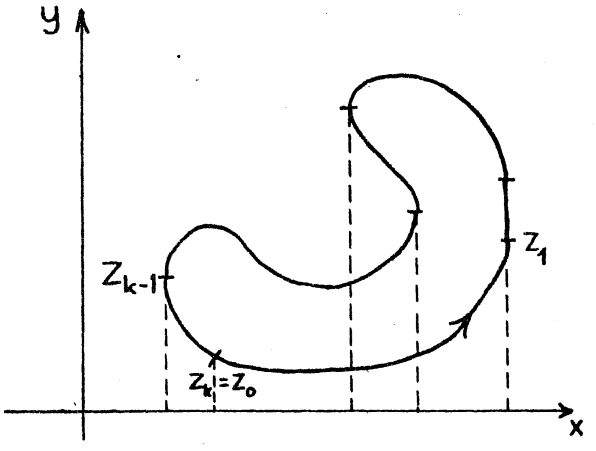
$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Hvis kurven $y = f(x)$ er bestemt ved en parameterfremstilling $(x,y) = (x(t),y(t))$, $t \in [\alpha,\beta]$, hvor $x(t)$ er en strengt voksende eller strengt aftagende C^1-funktion, der afbilder $[\alpha,\beta]$ på $[a,b]$, får vi ved anvendelse af substitutionen $x = x(t)$ formlen

$$A = \pm \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt = \pm \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt,$$

hvor fortegnet + skal bruges, hvis $x(t)$ er voksende, medens fortegnet - skal bruges, hvis $x(t)$ er aftagende.

Vi betragter nu en vilkårlig figur begrænset af en lukket C^1-kurve $(x,y) = (x(t),y(t))$, $t \in [\alpha,\beta]$. Til $t = \alpha$ og $t = \beta$ svarer samme punkt på kurven. Vi antager, at både $x(t)$ og $y(t)$ er stykkevis strengt mo-



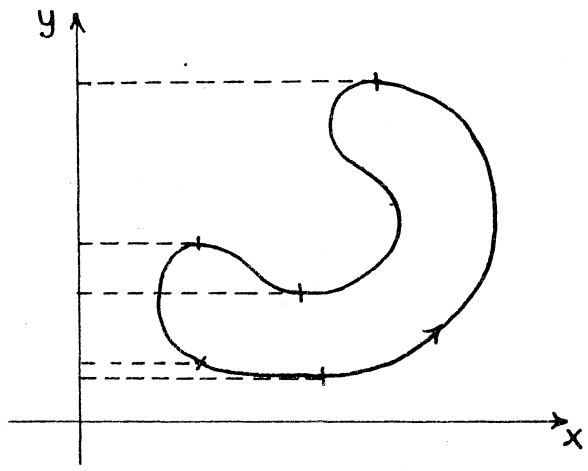
notone eller konstante, og at kurvens gennemløbsretning svarer til den positive omløbsretning, altså at figuren stedse ligger til venstre for kurven set i dennes gennemløbsretning.

Lad os først antage, at figuren ligger over x-aksen. Lad $\alpha = t_o < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = \beta$ være delepunkter, således at $x(t)$ er strengt monoton eller konstant i hvert af intervallerne $[t_{j-1},t_j]$, $j = 1,\cdots,k$. Hertil svarer en inddeling af kurven ved punkterne $z_j = (x(t_j),y(t_j))$. Man ser, at figurens areal A er lig med summen af arealerne af de til buerne $(x,y) = (x(t),y(t))$, $t \in [t_{j-1},t_j]$ svarende grundområder, idet disse regnes med fortegnet +, hvis $x(t)$ er aftagende i $[t_{j-1},t_j]$, og med fortegnet -, hvis $x(t)$ er voksende i $[t_{j-1},t_j]$. Heraf fås formlen

$$A = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

Til et konstansinterval for $x(t)$ svarer naturligvis intet grundområde, men det giver heller ikke noget bidrag til integralet.

Den fundne formel gælder også, hvis figuren ikke ligger over x-aksen. I så fald foretager vi blot en parallelforskydning $(x,y) \mapsto (x,y+c)$ i y-aksens retning, idet c vælges så stor, at den nye figur ligger over x-aksen. For arealet fås da udtrykket $-\int_\alpha^\beta (y(t)+c)x'(t)dt$, som er $= -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$, da $\int_\alpha^\beta x'(t)dt = x(\beta)-x(\alpha) = 0$.



Lader vi x-aksen og y-aksen bytte roller, kan vi anstille en tilsvarende betragtning. Talen biver nu om grundområder i forhold til y-aksen. Disse skal regnes med fortegnet +, hvis $y(t)$ er voksende i intervallet, og med fortegnet -, hvis $y(t)$ er aftagende i intervallet. Vi får derfor formlen

$$A = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt.$$

[At de to udtryk $-\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$ og $\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt$ har samme værdi, ses iøvrigt direkte af, at

$$\int_\alpha^\beta [y(t)x'(t)+x(t)y'(t)]dt = \int_\alpha^\beta (x(t)y(t))'dt = x(\beta)y(\beta)-x(\alpha)y(\alpha) = 0.]$$

Vi har således fundet følgende sætning:

Arealet A af en figur begrænset af en lukket C^1-kurve $(x,y) = (x(t),y(t))$, $t \in [\alpha,\beta]$ med stykkevis strengt monotone eller konstante funktioner $x(t)$ og $y(t)$ og med positivt omløb er bestemt ved formlerne

$$A = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt.$$

Det sidste udtryk har vi fundet ved at tage middeltallet af de to første..

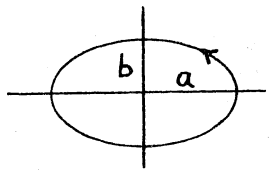
Vi bemærker, at sætningen også gælder for figurer begrænset af en kurve, der er stykkevis C^1 og iøvrigt opfylder de anførte betingelser.

Formlerne skrives kort

$$A = -\int y\,dx = \int x\,dy = \tfrac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx).$$

En intuitiv begrundelse af den sidste formel fremgår af, at $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x & y \\ dx & dy \end{pmatrix}$ er det med fortegn regnede areal af trekanten med vinkelspidser $(0,0),(x,y),(x+dx,y+dy)$. Man ser, at stykker på kurven, der forløber på en ret linie gennem begyndelsespunktet, ikke bidrager til integralet $\int(x\,dy - y\,dx)$.

Eksempel 1. For en ellipse med halvakser a og b i den sædvanlige beliggenhed i forhold til koordinatsystemet benyttes parameterfremstillingen $(x,y) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0,2\pi]$. Herved fås for ellipseskivens areal



$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy' - yx')\,dt = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi ab.$$

Eksempel 2. Opfattes planen som den komplekse plan, og skrives parameterfremstillingen $z = z(t), t \in [\alpha,\beta]$, har vi $z(t) = x(t) + i\,y(t)$, $z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$ og dermed

$$z\overline{z'} = (x+iy)(x'-iy') = xx' + yy' - i(xy' - yx').$$

Da $xx' + yy' = \frac{1}{2}(x^2+y^2)'$, har vi $\int_\alpha^\beta (xx'+yy')\,dt = 0$, og vi finder derfor formlen

$$A = \tfrac{1}{2}\, i \int_\alpha^\beta z(t)\,\overline{z'(t)}\,dt.$$

Polære koordinater. Hvis begrænsningskurven for en figur af den betragtede art er givet ved en parameterfremstilling $(r,\varphi) = (r(t),\varphi(t)), t \in [\alpha,\beta]$ i polære koordinater, har vi $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ og dermed

$$xy' - yx' = r\cos\varphi(r'\sin\varphi + r\varphi'\cos\varphi) - r\sin\varphi(r'\cos\varphi - r\varphi'\sin\varphi)$$
$$= r^2\varphi',$$

og vi finder derfor formlen

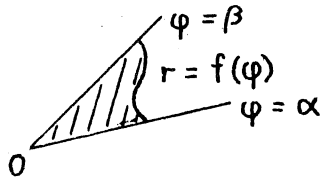
$$A = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(t)^2\varphi'(t)dt,$$

der kort skrives

$$A = \tfrac{1}{2}\int r^2 d\varphi.$$

Man ser pånyt, at stykker af kurven, der forløber på en ret linie gennem begyndelsespunktet, ikke bidrager til integralet.

Specielt har man for et grundområde i polære koordinater begrænset af linierne $\varphi = \alpha$ og $\varphi = \beta$ og en kurve $r = f(\varphi), \varphi \in [\alpha,\beta]$, hvor f er enten ikke negativ eller ikke positiv, at arealet bestemmes ved



$$A = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\varphi)^2 d\varphi.$$

Eksempel 3. For sløjfen på Descartes' blad har vi, jfr. § 34, ligningen

$$r = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}, \qquad \varphi \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

Arealet af sløjfen er derfor bestemt ved

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\right)^2 d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 9a^2\,\frac{\tan^2\varphi}{(1+\tan^3\varphi)^2}\,d\tan\varphi$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d(1+\tan^3\varphi)}{(1+\tan^3\varphi)^2} = \frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+\tan^3\varphi}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$= \frac{3a^2}{2}.$$

Opgaver. 1. Fra begyndelsespunktet nedfældes de vinkelrette på tangenterne til ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Fodpunkterne danner en lukket kurve. Beregn arealet af den af kurven begrænsede figur.

2. Tegn den kurve, hvis ligning er

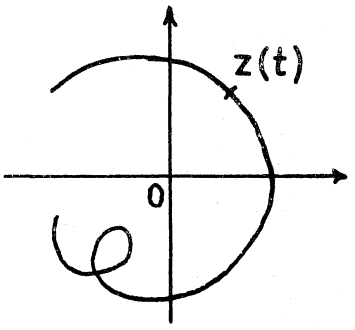
$$y^2 - 2xy - x^3 = 0.$$

Find dernæst arealet af et af kurven begrænset område.

3. Fra det faste punkt $A = (-a,0)$ trækkes en linie gennem punktet $B = (0,t)$, og stykket $|t|$ afsættes fra B til begge sider på denne linie. Idet B gennemløber y-aksen, beskriver de fremkomne punkter en kurve. Find dennes ligning såvel i retvinklede som i polære koordinater, og vis, at sløjfen har arealet $(2-\frac{1}{2}\pi)a^2$. (Strofoide.)

§ 37. Kurvers krumning.

Argumentfunktion. Lad $z = z(t)\colon A \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ være en kontinuert fra 0 forskellig funktion på et interval $A \subseteq \mathbb{R}$. For ethvert $t \in A$ kan vi da skrive $z(t) = |z(t)|\, e^{i\varphi(t)}$, hvor argumentet $\varphi(t)$ er bestemt på-nær et helt multiplum af 2π. Vi vil vise, at det er muligt at vælge $\varphi(t)$ som en kontinuert funktion. En sådan kaldes en kontinuert argumentfunktion for $z(t)$. Det bemærkes, at hvis $\varphi(t)$ er en kontinuert argumentfunktion for $z(t)$, er $\varphi(t) + p2\pi$, hvor $p \in \mathbb{Z}$, ligeledes en kontinuert argumentfunktion for $z(t)$, og at der ikke findes andre; det første er indlysende, og det sidste følger af, at hvis $\psi(t)$ er en kontinuert argumentfunktion for $z(t)$, er $\psi(t) - \varphi(t)$ en kontinuert funktion, hvis værdi for ethvert $t \in A$ er et helt multiplum af 2π, og en sådan funktion må være et konstant multiplum af 2π.



Vi sætter $z(t) = x(t) + i\, y(t)$. Beviset for eksistensen af en kontinuert argumentfunktion føres i en række skridt.

(1) I et delinterval af A, hvori $x(t) > 0$, er $\operatorname{Arctan} \frac{y(t)}{x(t)}$ en kontinuert argumentfunktion for $z(t)$. I et delinterval af A, hvori $x(t) < 0$, er $\operatorname{Arctan} \frac{y(t)}{x(t)} + \pi$ en kontinuert argumentfunktion for $z(t)$. I et delinterval af A, hvori $y(t) > 0$, er $\operatorname{Arccot} \frac{x(t)}{y(t)}$ en kontinuert argumentfunktion for $z(t)$. I et delinter-

val af A, hvori $y(t) < 0$, er $\text{Arccot}\frac{x(t)}{y(t)} + \pi$ en kontinuert argumentfunktion for $z(t)$.

(2) I ethvert punkt $t_o \in A$ er mindst et af tallene $x(t_o)$ og $y(t_o)$ forskelligt fra 0. Af kontinuiteten af funktionerne $x(t)$ og $y(t)$ følger da, at der findes et relativt åbent delinterval af A indeholdende t_o, hvori mindst en af betingelserne $x(t) > 0$, $x(t) < 0$, $y(t) > 0$, $y(t) < 0$ er opfyldt, og hvori der følgelig findes en kontinuert argumentfunktion.

(3) Vi vælger et $t_o \in A$ og en argumentværdi af $z(t_o)$ og betragter nu alle delintervaller B af A, der indeholder t_o, og på hvilke der findes en kontinuert argumentfunktion for $z(t)$. For ethvert sådant interval B betragter vi den kontinuerte argumentfunktion, hvis værdi i t_o er den valgte argumentværdi af $z(t_o)$. Det er da klart, at for to sådanne intervaller B_1 og B_2 må de tilsvarende argumentfunktioner stemme overens på $B_1 \cap B_2$. Heraf følger, at de pågældende funktioner alle er restriktion af en funktion $\varphi(t)$ på foreningsmængden I af alle de omhandlede intervaller B. Denne foreningsmængde er selv et interval, der indeholder t_o, og $\varphi(t)$ er åbenbart en kontinuert argumentfunktion på I. (Intervallet I er altså selv et af intervallerne B.)

(4) Vi vil nu vise, at $I = A$. I modsat fald må der findes et endepunkt t_1 for I, der enten er indre punkt for A eller er endepunkt for A uden at tilhøre I. Der findes et relativt åbent delinterval J af A

indeholdende t_1, hvori der findes en kontinuert argumentfunktion $\psi(t)$ for $z(t)$. Denne kan vælges, således at den i $I \cap J$ (der må være $\neq \emptyset$) stemmer overens med $\varphi(t)$. Den udvidelse af $\varphi(t)$, der i $J \setminus I$ stemmer overens med $\psi(t)$, er da en kontinuert argumentfunktion på $I \cup J$, hvilket strider mod bestemmelsen af I.□

Hvis funktionen $z = z(t): A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er en C^n-funktion, er $\varphi(t)$ ligeledes en C^n-funktion. Thi for ethvert $t_o \in A$ findes et relativt åbent delinterval af A indeholdende t_o, hvori $x(t) \neq 0$ eller $y(t) \neq 0$, og hvori $\varphi(t)$ derfor pånær et helt multiplum af π er $\operatorname{Arctan} \frac{y(t)}{x(t)}$ eller $\operatorname{Arccot} \frac{x(t)}{y(t)}$.

Krumning. Lad $z = z(t): A \to \mathbb{C}$ være en C^n-kurve i planen. Vi antager foreløbig, at $n \geq 1$, og at $z'(t) \neq 0$ for alle $t \in A$. Kurven har da i hvert punkt $z(t)$ en tangent T med modsat rettede halvtangenter. Tangentens positive retning bestemmes ved vektoren $z'(t)$.

Da $z'(t)$ er kontinuert og $\neq 0$, har $z'(t)$ en kontinuert argumentfunktion $\psi(t)$, bestemt pånær et helt multiplum af 2π. Vi har altså

$$z'(t) = |z'(t)|\, e^{i\psi(t)},$$

d.v.s. $e^{i\psi(t)}$ er enhedsvektoren i tangentens positive retning, og $\psi(t)$ er en af værdierne af vinklen fra x-aksen til T. For vilkårlige parameterværdier $t_1, t_2 \in A$ er differensen $\psi(t_2) - \psi(t_1)$ uafhængig af, hvilken kontinuert argumentfunktion for $z'(t)$, vi benytter. Denne differens kaldes tangentdrejningen for buen fra $z(t_1)$ til $z(t_2)$. Da $z'(t)$ er en C^{n-1}-funk-

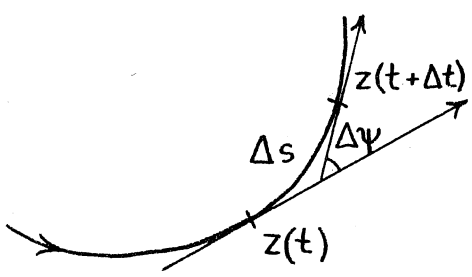
tion, er $\psi(t)$ er C^{n-1}-funktion.

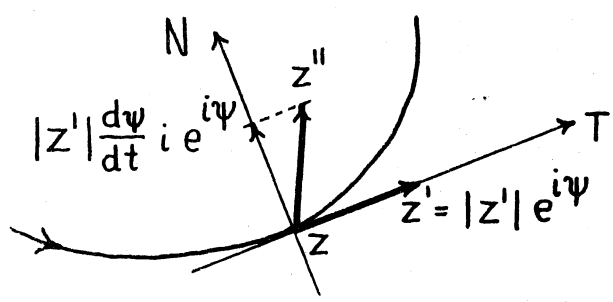
Vælges en parameterværdi $t_o \in A$, er buelængden

$$s = s(t) = \int_{t_o}^{t} |z'(t)|\, dt$$

regnet ud fra det til t_o svarende kurvepunkt $z_o = z(t_o)$ en C^n-funktion med positiv afledet. Indfører vi den som parameter, bliver ψ en C^{n-1}-funktion af s.

Vi forudsætter nu yderligere, at $n \geq 2$. For vilkårlige parameterværdier t og $t + \Delta t$ med $\Delta t \neq 0$ betragter vi forholdet $\frac{\Delta\psi}{\Delta s}$ mellem tangentdrejningen $\Delta\psi$ og buelængden Δs af buen fra $z(t)$ til $z(t+\Delta t)$.





For $\Delta t \to 0$ har dette forhold en grænseværdi

$$\varkappa = \varkappa(t) = \frac{d\psi}{ds} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} .$$

Den kaldes kurvens krumning i punktet $z(t)$.

For at beregne krumningen benytter vi, at $z' = |z'|\, e^{i\psi}$. Heraf fås

$$z'' = \frac{d|z'|}{dt}\, e^{i\psi} + |z'|\, \frac{d\psi}{dt}\, i\, e^{i\psi}.$$

Den positive retning af normalen N er bestemt ved en-

hedsvektoren i $e^{i\psi}$. Man ser derfor, at det med fortegn regnede areal af det af vektorerne z' og z'' udspændte parallelogram er $|z'|^2 \frac{d\psi}{dt}$. Vi har altså

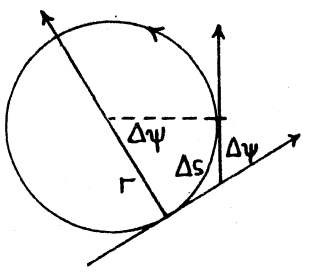
$$|z'|^2 \frac{d\psi}{dt} = \det\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}$$

Da $\frac{ds}{dt} = |z'| = \sqrt{x'^2+y'^2}$, finder vi for krumningen formlen

$$\boxed{\varkappa = \varkappa(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}}.$$

Man ser, at $\varkappa > 0$, $\varkappa = 0$, $\varkappa < 0$, eftersom vektoren z'' ligger på den positive side at T, på T, eller på den negative side af T.

For en <u>cirkel</u> med radius r og positiv omløbsretning finder vi for enhver bue $\frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \frac{1}{r}$. Krumningen $\varkappa$ er altså konstant $= \frac{1}{r}$. For en cirkel med radius r og negativ omløbsretning finder vi for enhver bue $\frac{\Delta\psi}{\Delta s} = -\frac{1}{r}$. Krumningen $\varkappa$ er altså konstant $= -\frac{1}{r}$. For en ret linie er krumningen konstant $= 0$. Heraf følger umiddelbart, at der for enhver kurve af den ovenfor betragtede art for ethvert punkt $z(t)$, i hvilket krumningen $\varkappa(t)$ er $\neq 0$, <u>blandt de cirkler, der går gennem punktet</u> $z(t)$ <u>og i dette har samme tangent</u> T <u>som kurven, findes en og kun een, der har samme krumning som kurven</u>, nemlig, idet vi regner radius i en rørende cirkel positiv eller negativ, eftersom cirklen ligger på tangentens positive eller negative side, cirklen med radius



$$\rho = \rho(t) = \frac{1}{\varkappa(t)}.$$

Denne cirkel kaldes krumningscirklen i punktet $z(t)$, dens radius $\rho(t)$ krumningsradius og dens centrum $z(t) + \rho(t)i\, e^{i\psi(t)}$ krumningscentrum. Medregner man blandt de cirkler, der rører kurven i punktet $z(t)$, tangenten T som udartet tilfælde, gælder det foregående også, når $\varkappa(t) = 0$; tangenten bliver da krumningscirkel. Naturligvis bliver der i tilfældet $\varkappa(t) = 0$ ikke tale om nogen krumningsradius eller noget krumningscentrum.

Opfattes parameteren t som tiden, og betegnes farten $|z'(t)|$ med $v(t)$, har vi $v = \frac{ds}{dt}$ og $\frac{d\psi}{dt} = \varkappa \frac{ds}{dt} = \varkappa v$, og får for hastigheden og accelerationen udtrykkene

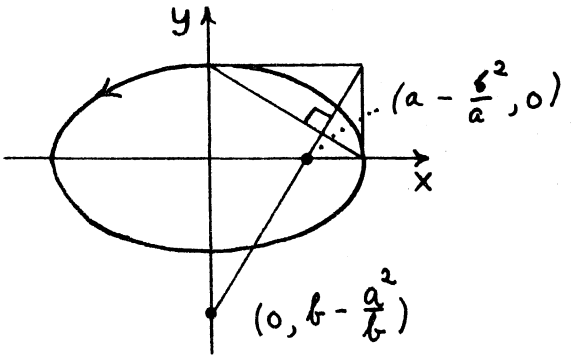
$$\boxed{z' = v\, e^{i\psi}, \qquad z'' = \frac{dv}{dt}\, e^{i\psi} + v^2 \varkappa i\, e^{i\psi}} \quad .$$

Hastigheden er altså en vektor i tangentens positive retning af længden $v = \frac{ds}{dt}$, medens accelerationen er sammensat af en tangentialacceleration af den med fortegn regnede længde $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$, og en på normalen liggende centripetalacceleration af den med fortegn regnede længde $v^2\varkappa = \frac{v^2}{\rho}$, hvor det sidste udtryk $\frac{v^2}{\rho}$ gælder for $\varkappa \neq 0$; man ser, at centripetalaccelerationen er rettet mod krumningscentrum.

Specielt fås for krumningen af grafen af en C^2-funktion $y = f(x)\colon A \to \mathbb{R}$, idet vi benytter x som parameter, udtrykket

$$\varkappa = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \, .$$

Eksempel 1. For en ellipse med halvakser a og $b < a$ med den sædvanlige beliggenhed i forhold til koordinatsystemet fås ud fra parameterfremstillingen $(x,y) = (a\cos t, b\sin t)$ for krumningen i det til parameterværdien t svarende punkt udtrykket



$$\varkappa(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} -a\sin t & b\cos t \\ -a\cos t & -b\sin t \end{pmatrix}}{[(-a\sin t)^2+(b\cos t)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man ser, at $\varkappa(t) > 0$ for alle t. For krumningsradius i toppunkterne fås udtrykkene $\varrho(0) = \frac{b^2}{a}$ og $\varrho(\frac{1}{2}\pi) = \frac{a^2}{b}$, ud fra hvilke krumningscentrerne let konstrueres. Krumningscirklerne i toppunkterne giver en god støtte ved tegning af ellipsen.

Evolut. Vi antager nu, at krumningen $\varkappa(t)$ er $\neq 0$ for alle $t \in A$. Af udtrykket for krumningen ses, at $\varkappa(t)$ er en C^{n-2}-funktion, og det samme gælder derfor om krumningsradius $\varrho(t)$. Ved kurvens evolut forstås den kurve, der gennemløbes af krumningscentret $z_1(t)$. Idet

$$z_1(t) = z(t) + \varrho(t)i\, e^{i\psi(t)},$$

ser man, at evoluten er en C^{n-2}-kurve.

Idet vi nu antager $n \geq 3$, finder vi

$$z_1'(t) = z'(t) + \varrho'(t)i\, e^{i\psi(t)} - \varrho(t)\psi'(t)e^{i\psi(t)}.$$

Da $\psi'(t) = \varkappa(t)\frac{ds}{dt}$, får vi $\varrho(t)\psi'(t)e^{i\psi(t)} = \frac{ds}{dt}e^{i\psi(t)} = z'(t)$,

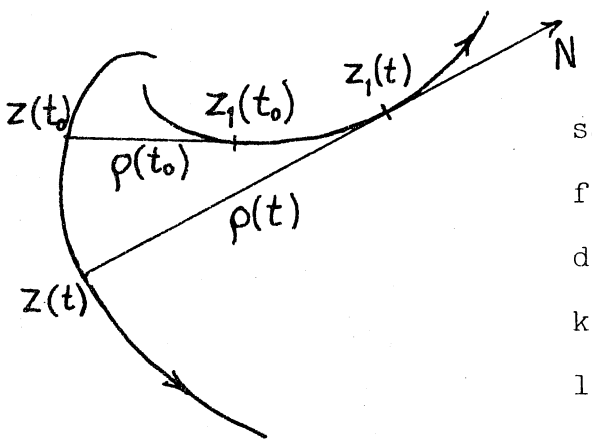
og dermed

$$z_1'(t) = \rho'(t) i\, e^{i\psi(t)}.$$

Heraf aflæses:

Hvis $\rho'(t)$ er positiv for alle $t \in A$, har evoluten i ethvert punkt $z_1(t)$ en tangent med modsat rettede halvtangenter, og denne tangent er normalen N til den givne kurve i punktet $z(t)$. Længden $s_1(t)$ af buen på evoluten fra det til en given parameterværdi t_o svarende punkt $z_1(t_o)$ til punktet $z_1(t)$ er bestemt ved

$$s_1(t) = \rho(t) - \rho(t_o).$$



Den givne kurve fås altså ud fra evoluten, ved at man fra hvert punkt $z_1(t)$ ud ad dens tangent afsætter et stykke af den med fortegn regnede længde $-\rho(t) = -s_1(t) - \rho(t_o)$.

Man siger derfor, at den givne kurve er afvikler (evolvent, involut) af sin evolut.

En tilsvarende sætning gælder for det tilfælde, hvor $\rho'(t)$ er negativ for alle $t \in A$; blot er evolutens tangent nu normalen N til den givne kurve med modsat orientering, og buelængden på evoluten er bestemt ved $s_1(t) = -\rho(t) + \rho(t_o)$. Dette tilfælde kan iøvrigt henføres til det foregående, ved at man skifter gennemløbsretning på den givne kurve.

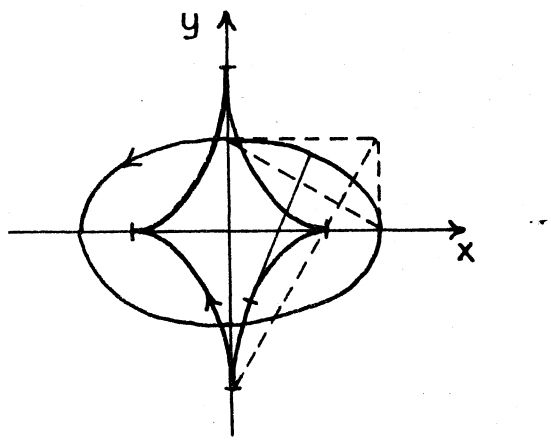
Eksempel 2. For ellipsen med halvakser a og b < a fås ud fra parameterfremstillingen $(x,y) = (a\cos t, b\sin t)$ for krumningsradius udtrykket

$$\rho(t) = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

hvoraf

$$\rho'(t) = \frac{3}{2}\,\frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}}{ab}(a^2-b^2)\sin 2t.$$

Altså er $\rho'(t) > 0$ for buerne i 1. og 3. kvadrant, og $\rho'(t) < 0$ for buerne i 2. og 4. kvadrant. Ellipsetangentens retning bestemmes ved vektoren $(x',y') = (-a\sin t, b\cos t)$, og normalens retning altså ved vektoren $(-y',x') = (-b\cos t, -a\sin t)$. Da denne har længden $(b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^{\frac{1}{2}}$, er krumningscentrum (x_1,y_1) for ellipsen i det til parameterværdien t svarende punkt bestemt ved



$$(x_1,y_1) = (a\cos t, b\sin t) + \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}(-b\cos t, -a\sin t)$$

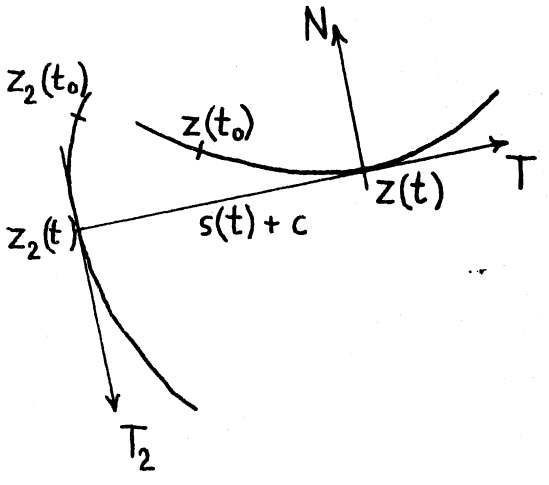
$$= \left(\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t, -\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t\right).$$

Svarende til ellipsens toppunkter fås spidser af første art på evoluten. Evolutens længde er $4(\rho(\frac{1}{2}\pi) - \rho(0)) = 4\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right)$.

Afvikler. Medens vi ovenfor gik ud fra en kurve og fandt en kurve, af hvilken den var afvikler, vil vi nu omvendt for en given kurve undersøge dens afviklere.

Lad $z = z(t)\colon A \to \mathbb{C}$ være en C^n-kurve. Vi antager foreløbig, at $n \geq 1$, og at $z'(t) \neq 0$ for alle $t \in A$. Vi har da $z'(t) = |z'(t)|\, e^{i\psi(t)}$, hvor $\psi(t)$ er en C^{n-1}-funktion. Vælges en parameterværdi t_o, er buelængden $s(t)$ regnet fra punktet $z(t_o)$ en C^n-funktion med den afledede $s'(t) = |z'(t)|$.

For hvert $t \in A$ afsætter vi ud fra $z(t)$ ad tangenten T et liniestykke af den med fortegn regnede længde $-(s(t)+c)$, hvor c er en konstant. Ved den til konstanten c hørende afvikler for kurven forstås den kurve, der gennemløbes af det fremkomne punkt $z_2(t)$. Idet



$$z_2(t) = z(t) - (s(t)+c)e^{i\psi(t)},$$

ser man, at afvikleren er en C^{n-1}-kurve.

Idet vi nu antager $n \geq 3$, vil vi nærmere undersøge afvikleren. Vi finder

$$z_2'(t) = z'(t) - s'(t)e^{i\psi(t)} - (s(t)+c)\psi'(t)i\, e^{i\psi(t)}.$$

Da $s'(t)e^{i\psi(t)} = |z'(t)|\, e^{i\psi(t)} = z'(t)$, får vi

$$z_2'(t) = -(s(t)+c)\psi'(t)i\, e^{i\psi(t)},$$

hvoraf ses, at hvis $(s(t)+c)\psi'(t) \neq 0$, har afvikleren i punktet $z_2(t)$ en tangent T_2 med modsat rettede halvtangenter, og denne er vinkelret på tangenten T til den givne kurve i punktet $z(t)$. Den har modsat retning eller samme retning som normalen N til den givne kurve i $z(t)$, eftersom $(s(t)+c)\psi'(t)$ er > 0 eller < 0.

Antages $(s(t)+c)\psi'(t) > 0$ for alle $t \in A$, og betegnes buelængden på afvikleren regnet ud fra punktet $z_2(t_0)$ med $s_2(t)$, har vi

$$s_2'(t) = (s(t)+c)\psi'(t),$$

og da tangentdrejningen for afvikleren ifølge det fundne er den samme som for kurven selv, finder vi for afviklerens krumningsradius $\rho_2(t)$ udtrykket

$$\rho_2(t) = \frac{ds_2}{d\psi} = \frac{s_2'(t)}{\psi'(t)} = s(t) + c.$$

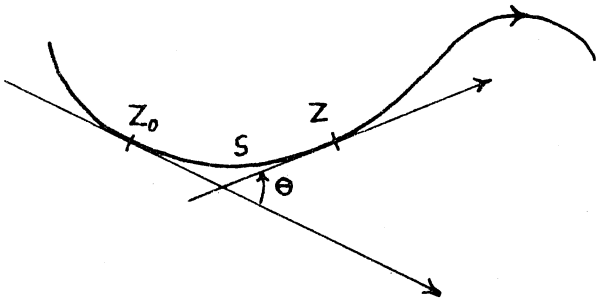
Heraf ses, at <u>den givne kurve er evolut for afvikleren</u>.

Samme resultat fås, hvis $(s(t)+c)\psi'(t) < 0$ for alle $t \in A$.

Teorien for evolut og afvikler skyldes C.Huygens (Horologium oscillatorium 1673).

<u>Naturlig ligning</u>. Lad $z = z(t): A \to \mathbb{C}$ være en C^n-kurve i planen. Vi antager, at $n \geq 1$, og at $z'(t) \neq 0$ for alle $t \in A$. Vi har da $z'(t) = |z'(t)|\, e^{i\psi(t)}$, hvor $\psi(t)$ er en C^{n-1}-funktion. Vælges en parameterværdi

$t_o \in A$, er buelængden $s = s(t)$ regnet ud fra det til t_o svarende kurvepunkt $z_o = z(t_o)$ en C^n-funktion med positiv afledet. Indfører vi den som parameter, bliver ψ en C^{n-1}-funktion af s.



Vi betragter nu tangentdrejningen $\theta = \psi(t) - \psi(t_o)$ af buen fra z_o til z som funktion af s. Denne funktion $\theta = \theta(s)$ er da ligeledes en C^{n-1}-funktion. Vi har $\theta(0) = 0$. Idet vi sætter $\psi(t_o) = \psi_o$, har vi

$$\frac{dz}{ds} = e^{i(\theta(s)+\psi_o)}$$

og dermed

$$z = z_o + \int_o^s e^{i(\theta(s)+\psi_o)} ds.$$

Heraf ses, at når punktet z_o og retningen af tangenten i z_o (d.v.s. vinklen ψ_o) er givet, bestemmer funktionen $\theta(s)$ den betragtede kurve. Funktionen $\theta(s)$ bestemmer altså kurven pånær dens beliggenhed i forhold til koordinatsystemet.

Som følge heraf kan vi benytte ligningen $\theta = \theta(s)$, d.v.s. tangentdrejningen som funktion af buelængden, som en ligning for den betragtede kurve. Den kaldes kurvens naturlige ligning svarende til den givne gennemløbsretning og det valgte begyndelsespunkt z_o. Antages $n \geq 2$,

er krumningen $\varkappa$ som funktion af buelængden bestemt ved

$$\varkappa = \varkappa(s) = \frac{d\theta}{ds}.$$

Er $\theta = \theta(s)$ en strengt monoton funktion af s, kan vi i stedet for denne funktion betragte den omvendte funktion $s = s(\theta)$, altså buelængden som funktion af tangentdrejningen. Ligningen $s = s(\theta)$ kaldes også kurvens naturlige ligning. Antages $n \geq 2$, og er krumningen $\varkappa(s) = \frac{d\theta}{ds}$ forskellig fra 0 for alle s, er krumningsradius ϱ som funktion af tangentdrejningen bestemt ved

$$\varrho = \varrho(\theta) = \frac{ds}{d\theta}.$$

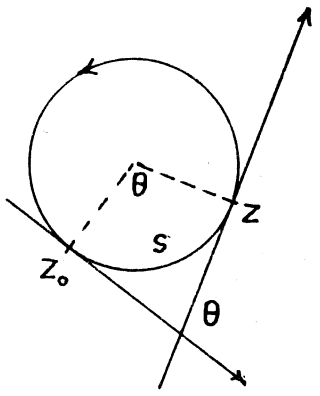
For kurver med strengt monoton tangentdrejning $\theta = \theta(s)$ er det naturligt at gå over til som positiv omløbsretning i planen at benytte den, der bestemmes ved tangentens drejningsretning. Herved opnår vi, at $\theta = \theta(s)$ og dermed også $s = s(\theta)$ bliver voksende. Dette svarer naturligvis til, at vi går over til at regne krumning og krumningsradius numerisk.

Eksempel 3. For en cirkel med radius r finder vi, at den naturlige ligning er

$$\theta = \theta(s) = \frac{s}{r} \text{ eller } s = s(\theta) = r\theta.$$

Dette er i overensstemmelse med, at der skal gælde

$$\frac{d\theta}{ds} = \varkappa(s) = \frac{1}{r} \text{ og } \frac{ds}{d\theta} = \varrho(\theta) = r.$$



For enhver C^{n-1}-funktion $\theta = \theta(s)\colon B \to \mathbb{R}$ på et interval $B \subseteq \mathbb{R}$ indeholdende 0, for hvilken $\theta(0) = 0$, findes en C^n-kurve, der har $\theta = \theta(s)$ som naturlig ligning

Bevis. Parameterfremstillingen

$$z = z(t) = \int_0^t e^{i\theta(t)}dt, \qquad t \in B,$$

bestemmer en C^n-kurve, for hvilken $z'(t) = e^{i\theta(t)} \neq 0$ for alle $t \in B$. For $t = 0$ fås $z(0) = 0$ og $z'(0) = 1$. Tangenten i $z(0) = 0$ er altså x-aksen. Da tangenten i $z(t)$ bestemmes ved vektoren $e^{i\theta(t)}$, er $\theta(t)$ tangentdrejningen for buen fra $z(0)$ til $z(t)$. Da $|z'(t)| = 1$ for alle $t \in B$, er buelængden regnet fra $z(0)$ lig med t. Den naturlige ligning er altså $\theta = \theta(s)$. ∎

Polære koordinater. For en kurve givet i polære koordinater ved $z = z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}\colon A \to \mathbb{C}$ har vi udtrykkene

$$z' = r'e^{i\varphi} + r\varphi' i\, e^{i\varphi}, \quad z'' = (r''-r\varphi'^2)e^{i\varphi} + (r\varphi''+2r'\varphi')i\, e^{i\varphi},$$

der viser, at z' og z'' i det af enhedsvektorerne $e^{i\varphi}$ og $i\, e^{i\varphi}$ bestemte retvinklede koordinatsystem har koordinaterne $(r', r\varphi')$ og $(r''-r\varphi'^2, r\varphi''+2r'\varphi')$. For krumningen fås derfor udtrykket

$$\varkappa = \frac{\det\begin{pmatrix} r' & r\varphi' \\ r''-r\varphi'^2 & r\varphi''+2r'\varphi' \end{pmatrix}}{(r'^2+(r\varphi')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

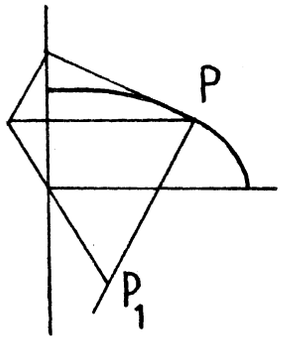
Hvis parameteren er vinklen φ, altså hvis kurven er

givet ved en ligning $r = r(\varphi)$, forenkles formlen til

$$\varkappa = \frac{\det\begin{pmatrix} \frac{dr}{d\varphi} & r \\ \frac{d^2r}{d\varphi^2} & 2\frac{dr}{d\varphi} - r \end{pmatrix}}{\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} + r^2}{\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Opgaver. 1. Vis, at krumningsradius i et vilkårligt punkt af ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ er lig med $\frac{a^2b^2}{d^3}$, hvor d betegner afstanden fra tangenten til begyndelsespunktet.

2. Vis, at krumningscentrum P_1 til en ellipse i et fra toppunkterne forskelligt punkt P kan konstrueres på følgende måde: Den vinkelrette på tangenten i dens skæringspunkt med en af akserne skæres med den på aksen vinkelrette linie gennem P. Diameteren gennem skæringspunktet vil da skære normalen i P_1.



3. Find krumningsradius og koordinaterne til krumningscentrum i et vilkårligt punkt af hyperbelgrenen $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Find krumningen af kurven $y = \log \sin x$, $0 < x < \pi$, som funktion af x.

5. Inddel kurven $y = x^3$ i buer med monoton krumning og skitser på grundlag af denne inddeling kurvens evolut.

6. Find den naturlige ligning for den logaritmiske spiral $r = a\, e^{b\varphi}$ regnet fra det til $\varphi = 0$ svarende punkt.

7. En kurve er givet ved den naturlige ligning

$$s = \frac{1}{\cos^3\theta} - 1, \quad 0 \leq \theta < \tfrac{1}{2}\pi.$$

Kurvens begyndelsespunkt ligger i koordinatsystemets begyndelsespunkt 0, og tangenten i 0 er x-aksen. Find en parameterfremstilling for kurven.

8. Vis, at krumningscentrum for den logaritmiske spiral $r = a\, e^{b\varphi}$ i punktet (r,φ) har de polære koordinater $(br,\varphi+\frac{1}{2}\pi)$. Vis derved, at evoluten er en ny logaritmisk spiral kongruent med den givne. Find en ligning til bestemmelse af de værdier af b, for hvilke kurven er identisk med evoluten.

9. Undersøg og tegn den kurve, der i polære koordinater er bestemt ved ligningen

$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

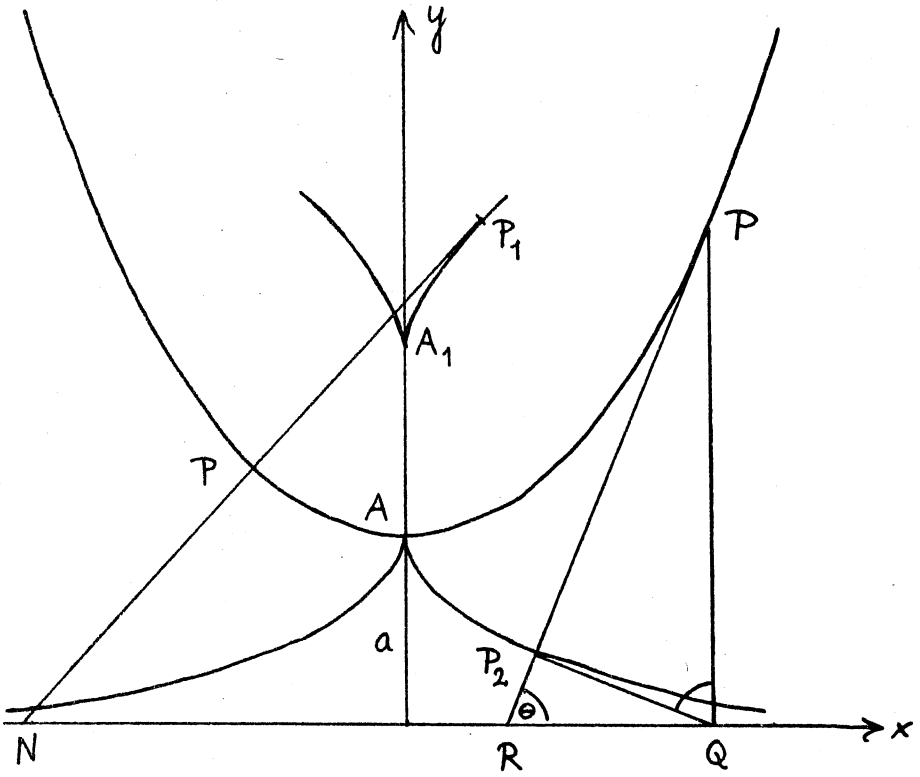
Bestem krumningen i et vilkårligt punkt af kurven. (Lemniskat.)

§ 38. Kædelinien og cykloiden.

Kædelinien. Vi vil anvende det foregående til undersøgelse af kædelinien.

$$y = a \cosh \frac{x}{a}, \qquad a > 0.$$

Kurven er symmetrisk om y-aksen. Punktet $A = (0,a)$ kaldes kædeliniens toppunkt, x-aksen dens ledelinie, tallet a dens parameter.



Vi vil først finde kurvens naturlige ligning regnet ud fra A. Hertil udregnes tangentdrejning θ og buelængde s som funktioner af x. Vi finder

$$\tan\theta = y' = \sinh \frac{x}{a}, \qquad \theta \in \left]-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\right[,$$

og

$$s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^x \cosh \frac{x}{a}\,dx = a \sinh \frac{x}{a}.$$

Ved at sammenholde disse udtryk finder vi som naturlig ligning for kædelinien regnet fra toppunktet A

$$s = a \tan\theta , \qquad \theta \in]-\tfrac{1}{2}\pi , \tfrac{1}{2}\pi[,$$

eller

$$\theta = \operatorname{Arctan} \frac{s}{a}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Man bemærker, at

$$y = a \cosh \frac{x}{a} = a\sqrt{1+\sinh^2 \frac{x}{a}} = a\sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{a}{\cos\theta} .$$

Af den naturlige ligning ses, at krumningen er $\neq 0$, og for krumningsradius finder vi udtrykket

$$\rho = \rho(\theta) = \frac{ds}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2\theta} = \frac{y}{\cos\theta} .$$

Heraf ses, at kædeliniens krumningscentrum P_1 i et vilkårligt punkt P er bestemt ved, at $PP_1 = -PN$, hvor N er normalens skæringspunkt med ledelinien. Specielt finder vi som krumningscentrum i toppunktet punktet $A_1 = (0,2a)$. Idet $\rho(\theta)$ er voksende for $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$, er kædeliniens højre halvdel afvikler af den tilsvarende del af evoluten, hvis naturlige ligning regnet fra A_1 bliver

$$s_1 = \rho(\theta) - \rho(0) = \frac{a}{\cos^2\theta} - a = a \tan^2\theta .$$

Hele evoluten består af denne kurve og dens symmetriske med hensyn til y-aksen; den har en spids i A_1.

Betegner vi for et vilkårligt punkt P af kurven med Q projektionen af P på ledelinien og med P_2 projektionen af Q på tangenten i P, bliver vinkel PQP_2 lig med θ, og vi får

$$QP_2 = y\cos\theta = a \text{ og } P_2P = QP_2\tan\theta = a\tan\theta = s.$$

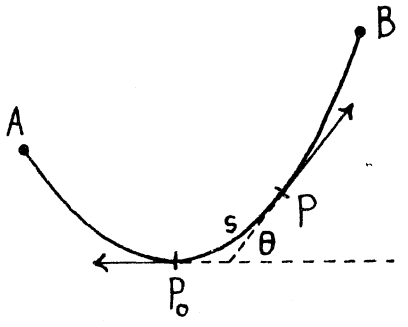
Indskrænker vi os til at betragte den højre halvdel af kædelinien, vil P_2 altså beskrive dennes afvikler fra A, som følgelig har P_2Q til tangent. Afvikleren har altså den egenskab, at tangentstykket fra røringspunktet til kædeliniens ledelinie har den konstante længde a. Dens naturlige ligning regnet fra A bliver

$$s_2 = \int_0^\theta a\tan\theta\, d\theta = a\log\frac{1}{\cos\theta},$$

thi der skal jo gælde $\frac{ds_2}{d\theta} = P_2P = s = a\tan\theta$. Afviklerne af de to halvdele af kædelinien taget fra A kaldes under eet traktricen; den har en spids i A.

Af figuren aflæser man, at traktricens krumningscentrum P i et vilkårligt punkt P_2 er bestemt ved relationen $P_2P \cdot P_2R = -a^2$, hvor R er normalens skæringspunkt med kædeliniens ledelinie.

Øvelse 1. Ligevægtsstilling af en snor. Betegnelsen kædelinie er valgt, fordi en fuldstændig bøjelig, homogen snor, der er ophængt i endepunkterne, vil have et stykke af en kædelinie som ligevægtsstilling. Vi vil her kun betragte det tilfælde, hvor snorens laveste punkt P_o ikke er et af ophængningspunkterne A og B. Af symmetrigrunde må ligevægtsstillingen være en kurve i den lodrette plan gennem



A og B. I hvert punkt af snoren har vi en spænding, og hvert af de to stykker, hvori punktet deler snoren, virker på det andet med en i punktet angribende kraft rettet efter tangenten og lig med denne spænding. Dette er, hvad der ligger i, at snoren er fuldstændig bøjelig. Af ligevægtsstillingen betragter vi nu et stykke P_oP, hvor P er et vilkårligt punkt f.eks. af buen P_oB. Dette stykke tænker vi os stivnet. Det således fremkomne stive legeme er da i ligevægt under påvirkning af følgende kræfter: (1) en kraft efter tangenten i P, hvis størrelse er lig med snorspændingen T i P; (2) en kraft efter tangenten i P_o, hvis størrelse er lig med snorspændingen T_o i P_o; (3) en lodret tyngdekraft af størrelsen λsg, hvor s er længden af snorstykket, λ er massen pr. længdeenhed af snoren, og g er tyngdeaccelerationen. Idet kræfternes sum er nulvektoren, får vi ved projektion på en vandret og en lodret linie, idet θ betegner hældningsvinklen for tangenten i P, ligningerne

$$T\cos\theta = T_o, \qquad T\sin\theta = \lambda sg,$$

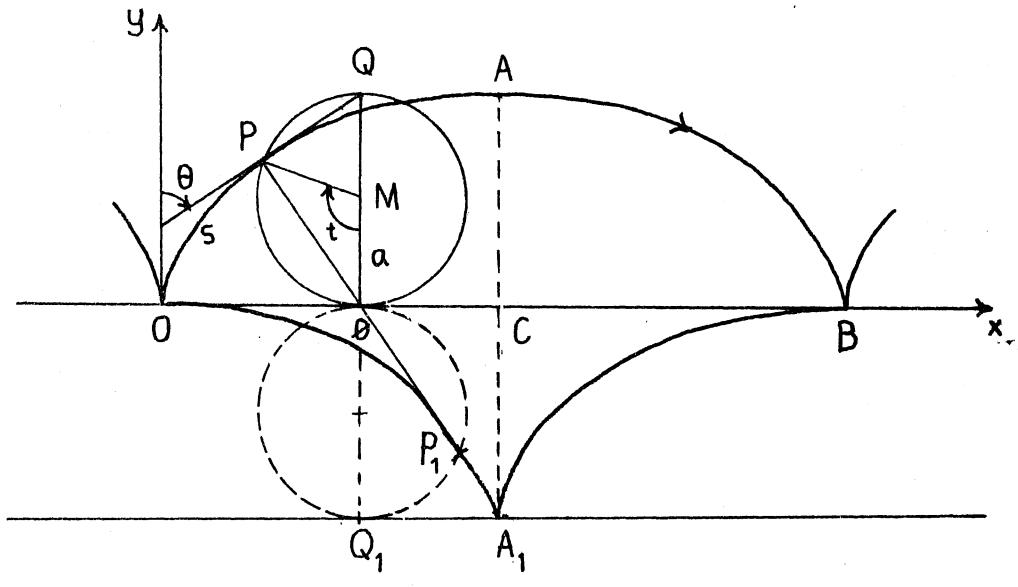
hvoraf ved division $\tan\theta = \frac{\lambda g}{T_o}s$ eller

$$s = a\tan\theta, \quad \text{hvor} \quad a = \frac{T_o}{\lambda g},$$

hvilket netop er den naturlige ligning for en kædelinie med toppunkt i P_o.

Cykloiden. Ved en (sædvanlig) cykloide forstås den kurve, der beskrives af et punkt på periferien af en cirkel,

der ruller henad en ret linie. Vi betegner cirklens radius med a og benytter den på figuren viste opstilling, hvor cirklen ruller på x-aksen, og begyndelsespunktet 0 er kurvepunkt. Som positiv drejningsretning i planen benytter vi den modsatte af den sædvanlige. Herved opnår vi, at cirklen drejer sig i positiv retning, når den ruller i x-aksens



positive retning. Idet vi benytter drejningsvinklen $t = \emptyset MP$ i cirklens rulning, regnet ud fra stillingen, hvor centret ligger på y-aksen, som parameter, fås $O\emptyset = at$, og derved som <u>parameterfremstilling for cykloiden</u>

$$(x,y) = (at-a\sin t, a-a\cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Idet der gælder $(x(t+2\pi),y(t+2\pi)) = (x(t)+a2\pi;y(t))$, består kurven af kongruente buer, af hvilke buen OB svarer til $0 \le t \le 2\pi$. Buen OB har symmetriaksen $x = a\pi$, der skærer den i buens toppunkt A.

Kurven er en C^∞-kurve. Vi finder

$$(x',y') = (a-a\cos t, a\sin t)$$
$$(x'',y'') = (a\sin t, a\cos t)$$
$$(x''',y''') = (a\cos t, -a\sin t).$$

Heraf ses, at $(x',y') = (0,0)$ for $t = p2\pi, p \in \mathbb{Z}$, hvilket svarer til kurvepunkterne på x-aksen. I et sådant punkt gælder $(x'',y'') = (0,a)$, $(x''',y''') = (a,0)$, hvoraf ses, at kurven her har en spids af første art med lodret spidstangent. I alle andre punkter har kurven to modsat rettede halvtangenter.

I det følgende indskrænker vi os til betragtning af buen $0B$ svarende til $0 \leq t \leq 2\pi$.

Vi søger tangenten i punktet P for $0 < t < 2\pi$. Normalen i P er bestemt ved vektoren $(y',-x') = (a\sin t, -a+a\cos t)$. Dette er netop vektoren $\overrightarrow{P\emptyset}$. Normalen i P går altså gennem den rullende cirkels rørringspunkt $\emptyset$ med x-aksen, og tangenten i P går følgelig gennem den rullende cirkels øverste punkt Q.

For tangentdrejningen $\theta = \theta(t)$ regnet ud fra 0 fås derfor udtrykket

$$\theta = 0\emptyset P = \tfrac{1}{2}t.$$

Tangentdrejningen er altså monoton.

Idet $\sqrt{x'^2+y'^2} = P\emptyset = 2a\sin\tfrac{1}{2}t$, finder vi for buelængden $s = s(t)$ regnet ud fra 0 udtrykket

$$s = \int_0^t 2a\sin\tfrac{1}{2}t\,dt = 4a - 4a\cos\tfrac{1}{2}t.$$

Hele buen $0B$ har altså længden $8a$.

Som naturlig ligning for cykloiden regnet ud fra spidsen 0 haves altså

$$s = 4a - 4a\cos\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Betegner vi med θ_1 og s_1 tangentdrejningen og buelængden regnet ud fra toppunktet A, har vi $\theta_1 = \theta - \frac{1}{2}\pi$ og $s_1 = s - 4a$. Som naturlig ligning for cykloiden regnet ud fra toppunktet A haves altså $s_1 = -4a\cos(\theta_1 + \frac{1}{2}\pi)$ eller

$$s_1 = 4a\sin\theta_1, \qquad -\tfrac{1}{2}\pi \le \theta_1 \le \tfrac{1}{2}\pi.$$

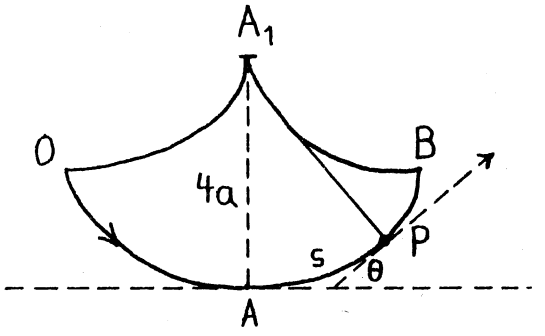
Af det ovenstående fås for krumningsradius $\rho = \rho(\theta)$ i punktet P udtrykket

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = 4a\sin\theta = 4a\sin\tfrac{1}{2}t = 2P\text{Ø}.$$

Krumningscentrum P_1 i punktet P er altså det til P symmetriske punkt med hensyn til Ø. Heraf fremgår, at evoluten er en cykloide kongruent med den givne, frembragt ved, at en cirkel med radius a ruller på linien $y = -2a$, og med toppunkter i den givnes spidser. For den betragtede bue OB består evoluten af de to halvbuer OA_1 og A_1B. At punktet P_1 gennemløber disse buer, når P gennemløber OB, fremgår af, at cirkelbuen ØP har længden OØ, og at følgelig (idet OC er halvcirklens længde) cirkelbuen Q_1P_1 har længden Q_1A_1.

Afvikleren af buen OA_1 ud fra 0 er derfor buen OA_2 og afvikleren af buen BA_1 ud fra B er buen BA. Dette kan naturligvis også ses direkte ud fra formlen for buelængden.

Øvelse 2. Cykloidependul. Ved at anbringe den forrige figur på hovedet ser vi, at en partikel P ophængt i punktet A_1 i en snor af længden 4a mellem buerne A_1O og A_1B (der tænkes som skabeloner) vil bevæge sig på cykloidebuen OAB. For et sådant pundul (med vægtløs, fuldstændig bøjelig snor) beviste Huygens (i Horologium oscillatorium), at svingningstiden er uafhængig af udsvingets størrelse. (For et sædvanligt matematisk pendul gælder dette kun med tilnærmelse.)



For at indse dette betegner vi nu med s og θ buelængde og tangentdrejning for cykloidebuen OB regnet ud fra A. Vi har da

$$s = 4a \sin\theta , \quad -\tfrac{1}{2}\pi \le \theta \le \tfrac{1}{2}\pi .$$

Bevægelsen er bestemt ved, at s er en funktion af tiden t. [Vi får ikke brug for den tidligere anvendelse af bogstavet t som betegnelse for parameteren.] Idet partiklens masse betegnes m, er den påvirket af tyngdekraften mg lodret nedad og af en kraft i snorens retning, altså vinkelret på banen. Den samlede kraft (vektorsummen af de to) er lig med massen gange accelerationen. Ved projektion på tangenten giver kraften fra snoren intet bidrag, medens tyngdekraftens projektion har den med fortegn regnede størrelse $-mg \sin\theta$. Accelerationens

projektion på tangenten er den såkaldte tangentialacceleration, hvis med fortegn regnede størrelse ifølge § 37 er $\frac{d^2s}{dt^2}$. Der gælder altså ligningen

$$-mg \sin\theta = m \frac{d^2s}{dt^2}$$

eller

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4a}s = 0.$$

Dette er imidlertid differentialligningen for harmonisk svingning, hvis løsninger ifølge § 31 er

$$s = k \sin\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}(t-t_0)\right),$$

hvor k og t_0 er vilkårlige konstanter. (Her kommer naturligvis kun værdier k med $|k| \leq 4a$ i betragtning.) Heraf aflæses påstanden, og vi finder for svingningstiden udtrykket

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Man bemærker, at man får samme resultat uden brug af snorophængningen mellem buerne A_1O og A_1B ved at tænke sig buen OAB fremstillet som en skabelon med en rille i, hvori partiklen kan bevæge sig gnidningsfrit under tyngdens påvirkning, idet gnidningsfrihed betyder, at kurven kun kan påvirke partiklen med en på tangenten vinkelret kraft. Man udtrykker resultatet ved at sige, at cykloiden er en isokron kurve. Det blev vist af N.H. Abel (1823), at der ikke findes andre isokrone kurver.

Opgaver. 1. Et punkt bevæger sig på kædelinien $y = a \cosh \frac{x}{a}$ med konstant fart c. Find accelerationen for punktets projektion på y-aksen.

2. For en cykloide frembragt ved rulning af en cirkel med radius a skal man finde arealet af den figur, der begrænses af en bue mellem to på hinanden følgende spidser og liniestykket med dem som endepunkter.

3. Find den naturlige ligning for parablen $x^2 = 2py$ regnet fra toppunktet. Vis dernæst, at brændpunktet beskriver en kædelinie, når parablen ruller på x-aksen.

4. Vis, at tangenterne til cykloiden

$$x = at - a \sin t, \quad y = a - a \cos t \quad t \in \mathbb{R},$$

i de til parameterværdierne $\tau - \frac{1}{2}\pi$ og $\tau + \frac{1}{2}\pi$ svarende punkter er vinkelrette på hinanden, og find parameterfremstillingen for den af deres skæringspunkt beskrevne kurve, idet τ tages som parameter. Vis herved, at kurven beskrives af et punkt i fast forbindelse med en cirkel med radius a, der ruller på en med x-aksen parallel linie.

§ 39. Keplers love. Newtons gravitationslov.

På grundlag af Tyge Brahes observationer fandt J. Kepler (Astronomia nova...de motibus stellae Martis 1609, Harmonice mundi 1619) sine tre love for planeternes bevægelse, ud fra hvilke Newton (i Principia) nåede til gravitationsloven. Keplers love udsiger:

1. Banen for enhver planet P er en ellipse med solen S i det ene brændpunkt.

2. Det af liniestykket SP i et tidsinterval $[t_1, t_2]$ beskrevne areal er proportionalt med intervallets længde $t_2 - t_1$.

3. Forholdet $\frac{a^3}{T^2}$ mellem tredje potens af ellipsens halve storakse og anden potens af omløbstiden er det samme for alle planeter.

Foruden bevægelser på en ellipse betragtede Newton bevægelser på en parabel eller en hyperbelgren.

ⓐ Lad os først betragte en bevægelse af en partikel i en plan. Vi opererer med den komplekse variable $z = r\,e^{i\varphi}$ og betragter en bevægelse $z = z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$, hvor $r(t)$ og $\varphi(t)$ er C^2-funktioner af tiden t. Vi antager $r(t) > 0$ og $\varphi'(t) > 0$ for alle t. For hastighed og acceleration har vi

$$z' = r'e^{i\varphi} + r\varphi' i\, e^{i\varphi}$$

$$z'' = [r''-r\varphi'^2]e^{i\varphi} + [2r'\varphi'+r\varphi'']i\, e^{i\varphi}.$$

Disse udtryk giver opløsningen af z' og z'' i en komponent på linien Oz og en derpå vinkelret komponent.

Idet vi vælger et udgangstidspunkt t_o, betegner vi med $A = A(t)$ det af liniestykket Oz i tidsintervallet $[t_o,t]$ beskrevne areal, såfremt $t > t_o$, og minus det i tidsintervallet $[t,t_o]$ beskrevne areal, såfremt $t < t_o$, og vi sætter $A(t_o) = 0$. Da er efter arealformlen i polære koordinater

$$A = \int_{t_o}^{t} \tfrac{1}{2}r^2\varphi'dt, \quad \text{altså} \quad A' = \tfrac{1}{2}r^2\varphi', \quad A'' = rr'\varphi' + \tfrac{1}{2}r^2\varphi''.$$

Det af liniestykket Oz i et tidsinterval $[t_1,t_2]$ beskrevne areal $A(t_2) - A(t_1)$ er proportionalt med $t_2 - t_1$, hvis og kun hvis <u>arealhastigheden</u> A' <u>er konstant</u>, altså $A'' = 0$ for alle t. Af udtrykket for z'' ses, at dette indtræffer, hvis og kun hvis den på Oz vinkelrette komponent af z'' er 0 for alle t, d.v.s. <u>hvis og kun hvis accelerationen</u> z'' <u>for alle</u> t <u>ligger på linien</u> Oz.

ⓑ Da $\varphi'(t) > 0$ for alle t, kan vi tage φ som parameter, og partiklens bane bliver derved bestemt ved, at r er en C^2-funktion af φ. Idet bevægelsen antages at ske med konstant arealhastighed $A' = c$, har vi

$$\tfrac{1}{2}r^2\varphi' = c \quad \text{eller} \quad \varphi' = \frac{2c}{r^2},$$

og accelerationen er

$$z'' = [r''-r\varphi'^2]e^{i\varphi}.$$

Vi finder

$$r' = \frac{dr}{d\varphi}\varphi' = \frac{2c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -2c\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}$$

$$r'' = -2c\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2}\varphi' = -\frac{4c^2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2}$$

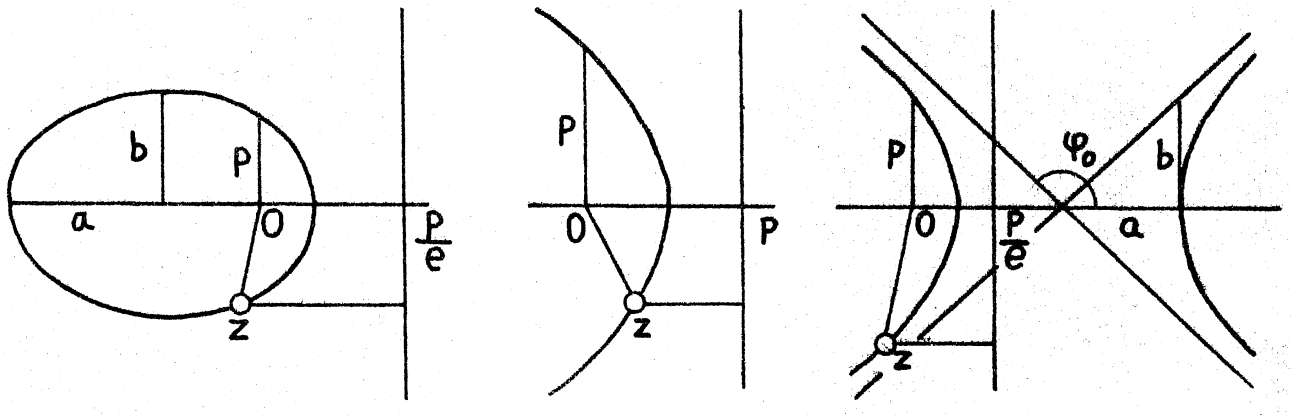
$$r\varphi'^2 = \frac{4c^2}{r^3},$$

og dermed for accelerationen Binets formel

$$z'' = -\frac{4c^2}{r^2}\left[\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right]e^{i\varphi}.$$

© Lad os nu antage, at bevægelsen sker på en ellipse, parabel eller hyperbelgren med 0 som brændpunkt; i tilfælde af en hyperbelgren skal denne vende hulheden mod 0.

Vi anbringer toppunktet, for ellipsens vedkommende det til 0 nærmeste toppunkt, på den positive reelle akse. Med e betegner vi keglesnittets ekscentricitet og med p dets parameter, d.v.s. den på aksen gennem brændpunkterne, for parablens vedkommende aksen, vinkelrette halve korde [ikke som det undertiden sker hele korden . Den til brændpunktet 0 hørende ledelinie er da linien $\{z = x+iy \mid x = \frac{p}{e}\}$, og vi finder, at der for ethvert punkt $z = x + iy = re^{i\varphi}$ på keglesnittet, for hyperblens



vedkommende på den betragtede gren, gælder ligningen $r = e(\frac{p}{e}-x) = p - e\,r\cos\varphi$, hvoraf ligningen i polære koordinater

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi} \qquad \text{eller} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi,$$

hvor vi får ellipsen $(0 < e < 1)$, gennemløbet uendelig ofte, når φ gennemløber $\mathbb{R}$, parablen $(e=1)$, når φ gennemløber $]-\pi,\pi[$, og hyperbelgrenen $(e > 1)$, når φ gennemløber $]-\varphi_0,\varphi_0[$, hvor φ_0 er den værdi i $]\frac{1}{2}\pi,\pi[$, for hvilken $\cos\varphi_0 = -\frac{1}{e}$. For $e = 0$ får vi ligningen $r = p$ for cirklen med centrum 0 og radius p, som herved kommer med i den følgende undersøgelse. Ud over dette får vi brug for, at p for ellipsen er bestemt ved $p = \frac{b^2}{a}$, hvor a og b er halvakserne.

Idet bevægelsen antages at ske med konstant arealhastighed $A' = c$, finder vi ved brug af Binets formel

$$z'' = -\frac{k}{r^2}e^{i\varphi}, \quad \text{hvor} \quad k = \frac{4c^2}{p}.$$

<u>Accelerationen er således stedse rettet mod</u> 0 <u>og dens størrelse er omvendt proportional med afstandens kvadrat</u>.

@ Idet vi nu specielt betragter en bevægelse på en ellipse med halvakser a og b (evt. en cirkel), beskriver liniestykket Oz ved et helt omløb ellipsens areal πab, som altså må være lig med cT, hvor T er omløbstiden (idet c jo er den konstante arealhastighed A'). Heraf fås $c = \frac{\pi ab}{T}$, altså, idet som foran bemærket $p = \frac{b^2}{a}$,

$$k = \frac{4c^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}.$$

ⓔ Sammenholdes det foregående med Keplers love ses, at hver planet bevæger sig, som om den var tiltrukket af solen med en kraft af størrelsen $k\frac{m}{r^2}$, hvor m er planetens masse, og k er ens for alle planeter. Heraf (og af andre grunde, jfr. ⓗ) førtes Newton gennem anvendelse af loven om aktion og reaktion til gravitationsloven, at to partikler med masser m_1 og m_2 og den indbyrdes afstand r tiltrækker hinanden med kræfter af størrelsen $\varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$, hvor $\varkappa$ er en konstant.

Ifølge det foranstående er $\varkappa = \frac{k}{M} = \frac{4\pi^2}{M} \frac{a^3}{T^2}$, hvor M er solens masse og a og T er halve storakse og omløbstid for en vilkårlig af planeterne. Vælges jordbanens halve storakse som længdeenhed, året som tidsenhed, og solens masse som masseenhed, fås simpelthen $\varkappa = k = 4\pi^2$.

Det bemærkes, at Keplers love kun kan forenes med gravitationsloven, når man antager planeternes masser ubetydelige i forhold til solens, således at man kan se bort fra planeternes tiltrækning af solen og af hinanden, og endvidere antager, at man kan behandle solen og planeterne som partikler. Hvad det sidste angår, viste Newton, at kugler, i hvilke massetætheden kun afhænger af afstanden fra centrum, virker på hinanden som var de partikler med massen i centrum.

ⓕ Betragtes omvendt en bevægelse $z = z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$ hvor $r(t)$ og $\varphi(t)$ er C^2-funktioner og $r(t) > 0$, $\varphi'(t) > 0$ for alle t, og antages, at accelerationen stedse er rettet mod 0, og at dens størrelse er omvendt proportional med afstandens kvadrat, altså $z'' = -\frac{k}{r^2}e^{i\varphi}$, hvor k er

en positiv konstant, må banen være en ellipse, parabel eller hyperbelgren med 0 som brændpunkt, i tilfælde af en hyperbelgren med hulheden vendende mod 0, og bevægelsen må ske med konstant arealhastighed c. Det sidste følger (jfr. ⓐ) af, at accelerationen er rettet mod 0. Det første følger af Binets formel, som viser, at $\frac{1}{r}$ som funktion af φ er løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{k}{4c^2};$$

dennes løsning er $\frac{1}{r} = \frac{k}{4c^2} + l\cos(\varphi-\alpha)$, hvor $\alpha \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, altså, hvis vi sætter $\frac{k}{4c^2} = \frac{1}{p}$ og $l = \frac{e}{p}$,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\varphi-\alpha) \quad \text{eller} \quad r = \frac{p}{1+e\cos(\varphi-\alpha)}.$$

ⓖ For et punkt $z = x + iy = re^{i\varphi}$ på den hyperbelgren, der vender hulheden bort fra 0, finder vi $r = e(x-\frac{p}{e}) = e\,r\cos\varphi - p$, hvoraf ses, at denne gren i polære koordinater har ligningen

$$r = \frac{p}{-1+e\cos\varphi} \quad \text{eller} \quad \frac{1}{r} = -\frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi,$$

hvor φ skal gennemløbe intervallet $]-(\pi-\varphi_0),\pi-\varphi_0[$. Heraf slutter man, at ved en bevægelse på denne gren med konstant arealhastighed c er accelerationen bestemt ved

$$z'' = \frac{k}{r^2}e^{i\varphi}, \quad \text{hvor} \quad k = \frac{4c^2}{p},$$

således at partiklen bevæger sig, som om den var frastødt fra 0 med en kraft af størrelsen $k\frac{m}{r^2}$, hvor m er

partiklens masse. Betragtes omvendt en bevægelse $z = z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$, hvor $r(t)$ og $\varphi(t)$ er C^2-funktioner og $r(t) > 0, \varphi'(t) > 0$ for alle t, og antages, at accelerationen stedse er rettet bort fra 0, og at dens størrelse er omvendt proportional med afstandens kvadrat, altså $z'' = \frac{k}{r^2}e^{i\varphi}$, hvor k er en positiv konstant, finder man, at banen må være en hyperbelgren med 0 som brændpunkt og hulheden vendende bort fra 0.

ⓗ Historiske bemærkninger. (1) I sin udledelse af gravitationsloven anvendte Newton ikke differentialregningen [hans form af den, den såkaldte fluxionslære, havde han ikke publiceret], men direkte infinitesimalgeometriske ræsonnementer, således som allerede Archimedes havde gjort i sine geometriske og mekaniske undersøgelser, og som det i den forudgående periode siden Galileis grundlæggelse af bevægelseslæren (Discorsi e demostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze 1638) var vanligt.

(2) For en bevægelse i en cirkel med radius r og konstant fart v havde Huygens fundet, at accelerationen er rettet mod centrum og har størrelsen $\frac{v^2}{r}$. Indsættes heri $v = \frac{2\pi r}{T}$, hvor T er omløbstiden, ses, at accelerationen har størrelsen $\frac{4\pi^2 r}{T^2} = 4\pi^2 \frac{r^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}$ og altså er proportional med $\frac{1}{r^2}$ for cirkelbevægelser, for hvilke Keplers tredje lov, formuleret som proportionalitet af r^3 og T^2, er gyldig. Denne simple iagttagelse var, som

Newton nævner, også gjort af Wren, Hooke og Halley. Proportionaliteten af r^3 og T^2 var kendt ikke blot for planeternes bevægelser (betragtet forenklet som cirkulære) men også for jupitermånernes bevægelser (med en anden værdi af proportionalitetsfaktoren). I den nævnte iagttagelse, i forbindelse med betragtning af accelerationen i månens bevægelse om jorden sammenholdt med accelerationen i det frie fald på jorden, lå allerede en stærk motivering for opstillingen af gravitationsloven, men det afgørende argument var bestemmelsen af accelerationen i ellipsebevægelsen, hvorved også Keplers første og anden lov kom med i motiveringen (og den tredje lov i dens eksakte form). Bagefter kunne Newton som bekendt forklare mangfoldige fænomener (præcessionen, tidevandet, kometernes bevægelse, o.s.v.) ved hjælp af loven. I tilslutning til det foregående bemærkes, at værdien af størrelsen $k = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$ for jupitermånerne og jordens måne sammenholdt med dens værdi for planetbanerne umiddelbart ledte til en bestemmelse af jupiters og jordens masser målt med solens masse som enhed. At dette gav fornuftige værdier var naturligvis en yderligere bekræftelse af loven.

Opgaver. 1. En partikel bevæger sig i $z = re^{i\varphi}$-planen på en logaritmisk spiral $r = a\, e^{b\varphi}$ med den konstante arealhastighed $\frac{1}{2}r^2\varphi' = c$. Vis, at den bevæger sig, som om den var tiltrukket af 0 med en kraft, hvis størrelse

er omvendt proportional med r^3.

Undersøg, om der findes andre kurver $r = f(\varphi)$ med den omhandlede egenskab.

2. En bevægelse i planen tænkes givet ved $(x,y) = (x(t),y(t)) = (r(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\varphi(t))$, hvor $r(t)$ og $\varphi(t)$ er C^2-funktioner af tiden t, og $r(t) > 0$, $\varphi'(t) > 0$ for alle t. Vis, at arealhastigheden $c = \frac{1}{2}r^2\varphi'$ kan bestemmes ud fra $x(t)$ og $y(t)$ ved formlen $c = \frac{1}{2}(-yx' + xy')$.

3. En partikel med massen 1 bevæger sig på ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ med konstant arealhastighed c i forhold til centrum. Vis, at den bevæger sig, som om den var tiltrukket af centrum med en kraft, der i afstanden r fra centrum har størrelsen $\frac{4c^2}{a^2b^2}r$.

Vink. Benyt opg. 2.

4. En partikel med massen 1 bevæger sig på hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ med konstant arealhastighed c i forhold til centrum. Vis, at den bevæger sig, som om den var frastødt af centrum med en kraft, der i afstanden r fra centrum har størrelsen $\frac{4c^2}{a^2b^2}r$.

Vink. Benyt opg. 2.

§ 40. Rumkurver. Omdrejningslegemer og omdrejningsflader. Statiske momenter og tyngdepunkter.

Rumkurver. Den foran givne teori for plane kurver generaliseres for visse deles vedkommende umiddelbart til kurver i rum af højere dimension. Det gælder selve begrebet C^n-kurve, parameterskift, tangentbestemmelse, begrebet længde af en C^0-kurve og formlen for en C^1-kurves længde. Disse generalisationer vil blive benyttet uden videre i det følgende. Derimod er generalisationen af teorien for kurvers krumning ikke helt selvfølgelig. Vi vil give en kort behandling af dette spørgsmål for kurver i det sædvanlige rum.

Vi indfører sædvanlige retvinklede koordinater x,y,z svarende til et højre koordinatsystem, så at rummet bliver talrummet $\mathbb{R}^3$. Et punkt eller en vektor (x,y,z) betegnes også kort $\underline{r}$. Vi betragter en C^2-kurve $\underline{r} = \underline{r}(t) = (x(t),y(t),z(t))$, $A \to \mathbb{R}^3$, hvor parameteren t kan opfattes som tiden, så at $\underline{r}'(t)$ og $\underline{r}''(t)$ er hastigheden og accelerationen. For simpelheds skyld vil vi antage, at $\underline{r}'(t)$ og $\underline{r}''(t)$ er lineært uafhængige for ethvert $t \in A$. Dette indebærer specielt, at $\underline{r}'(t) \neq \underline{0}$ for alle $t \in A$, så at kurven i ethvert punkt $\underline{r}(t)$ har en tangent med modsat rettede halvtangenter. Tangentens positive retning er bestemt ved vektoren $\underline{r}'(t)$. Ved kurvens tangentvektor $\underline{T} = \underline{T}(t)$ i punktet $\underline{r}(t)$ forstås en enhedsvektor på tangenten i dennes positive retning. Farten $|\underline{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}$, som vi betegner $v = v(t)$, er en positiv C^1-funktion, og idet $\underline{r}'(t) = v(t)\underline{T}(t)$, ser vi,

at også $\underline{T}(t)$ er en C^1-funktion.

Ifølge Taylors grænseformel har vi

$$\underline{r}(t+\Delta t)-\underline{r}(t) = \underline{r}'(t)\Delta t + \tfrac{1}{2}(\underline{r}''(t)+\underline{\varepsilon}(\Delta t))\Delta t^2,$$

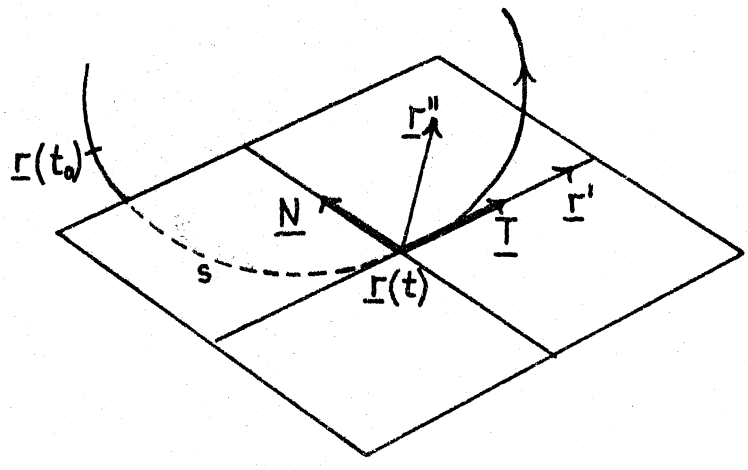
hvor $\underline{\varepsilon}(\Delta t) \to \underline{0}$ for $\Delta t \to 0$. Det første led på højre side er en vektor på tangenten; det andet giver ved division med $\frac{1}{2}\Delta t^2$ en vektor, der konvergerer mod $\underline{r}''(t)$. Da $\underline{r}''(t)$ ikke ligger på tangenten, ses heraf, at kurvepunktet $\underline{r}(t+\Delta t)$ for numerisk tilstrækkelig små værdier af Δt ikke ligger på tangenten, og at den af tangenten og punktet $\underline{r}(t+\Delta t)$ bestemte plan for $\Delta t \to 0$ konvergerer mod den plan gennem tangenten, der indeholder vektoren $\underline{r}''(t)$. Denne plan kaldes kurvens oskulationsplan i punktet $\underline{r}(t)$. Nærmere bestemt ser vi, at den af tangenten begrænsede halvplan, der indeholder punktet $\underline{r}(t+\Delta t)$, for $\Delta t \to 0$ konvergerer mod den af tangenten begrænsede halvplan, der indeholder vektoren $\underline{r}''(t)$. Denne halvplan kaldes oskulationshalvplanen i punktet $\underline{r}(t)$. Ved kurvens hovednormal i punktet $\underline{r}(t)$ forstås den i oskulationsplanen liggende normal til tangenten. Den orienteres således, at dens positive retning bestemmer oskulationshalvplanen. Ved kurvens hovednormalvektor $\underline{N} = \underline{N}(t)$ i punktet $\underline{r}(t)$ forstås en enhedsvektor på hovednormalen i dennes positive retning.

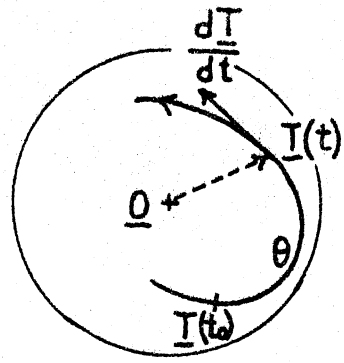
For buelængden $s = s(t)$ på kurven regnet ud fra det til en parameterværdi $t_o \in A$ svarende punkt $\underline{r}(t_o)$ har vi udtrykket

$$s = s(t) = \int_{t_o}^{t} |\underline{r}'(t)|\,dt = \int_{t_o}^{t} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt.$$

Det er en C^2-funktion med den positive afledede $\frac{ds}{dt} = |\underline{r}'(t)| = v(t)$.

Når t gennemløber parameterintervallet, gennemlø-





ber punktet $\underline{T}(t)$ en C^1-kurve på enhedskuglen med centrum $\underline{O}$. Denne kurve kaldes tangentbilledet for den betragtede kurve. Buelængden $\theta = \theta(t)$ på tangentbilledet regnet ud fra det til parameterværdien t_o svarende punkt $\underline{T}(t_o)$ kaldes tangentdrejningen for den givne kurve regnet fra punktet $\underline{r}(t_o)$. Det er en C^1-funktion.

Idet

$$\underline{r}' = v\underline{T}, \qquad \underline{r}'' = \frac{dv}{dt}\underline{T} + v\frac{d\underline{T}}{dt},$$

og $\frac{d\underline{T}}{dt}$ åbenbart må ligge i enhedskuglens tangentplan i punktet $\underline{T}(t)$ og altså er vinkelret på $\underline{T}(t)$, ser vi, at $\frac{d\underline{T}}{dt}$ må være rettet efter hovednormalen. Da endvidere farten $\left|\frac{d\underline{T}}{dt}\right|$ på tangentbilledet er $= \left|\frac{d\theta}{dt}\right|$, ser vi, at der må gælde $\frac{d\underline{T}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\underline{N}$.

Tages buelængden s som parameter, bliver θ en C^1-funktion af s. Dens afledede

$$\varkappa = \varkappa(t) = \frac{d\theta}{ds}$$

kaldes kurvens krumning i punktet $\underline{r}(t)$. Bemærk, at krumningen altid er positiv. Tallet

$$\rho = \rho(t) = \frac{1}{\varkappa(t)}$$

kaldes krumningsradius, den i oskulationshalvplanen liggende cirkel med radius $\rho(t)$, der rører kurven i punktet $\underline{r}(t)$, kaldes krumningscirklen, og dens centrum $\underline{r}(t) + \rho(t)\underline{N}(t)$ krumningscentrum.

Idet $v = \frac{ds}{dt}$, har vi $\frac{d\theta}{dt} = \varkappa \frac{ds}{dt} = v\varkappa$, hvoraf $\frac{d\underline{T}}{dt} = v\varkappa\underline{N}$, så at vi for hastigheden og accelerationen finder udtrykkene

$$\boxed{\underline{r}' = v\underline{T}, \qquad \underline{r}'' = \frac{dv}{dt}\underline{T} + v^2\varkappa\underline{N}} \ .$$

Hastigheden er altså en vektor i tangentens positive retning af længden $v = \frac{ds}{dt}$, medens accelerationen er sammensat af en tangentialacceleration af den med fortegn regnede længde $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$, og en centripetalacceleration af længden $v^2\varkappa = \frac{v^2}{\rho}$ rettet mod krumningscentrum.

Ud fra udtrykkene for $\underline{r}'$ og $\underline{r}''$ finder vi, at $\underline{r}' \times \underline{r}'' = v^3\varkappa\underline{T}\times\underline{N}$, hvoraf $v^3\varkappa = |\underline{r}'\times\underline{r}''|$, så at vi for krumningen finder formlen

$$\boxed{\varkappa = \varkappa(t) = \frac{|\underline{r}'\times\underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3} = \frac{\left[\left(\det\begin{pmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det\begin{pmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{(x'^2+y'^2+x'^2)^{\frac{3}{2}}}} \ .$$

Eksempel 1. Ved parameterfremstillinger

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, ht), \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,$$

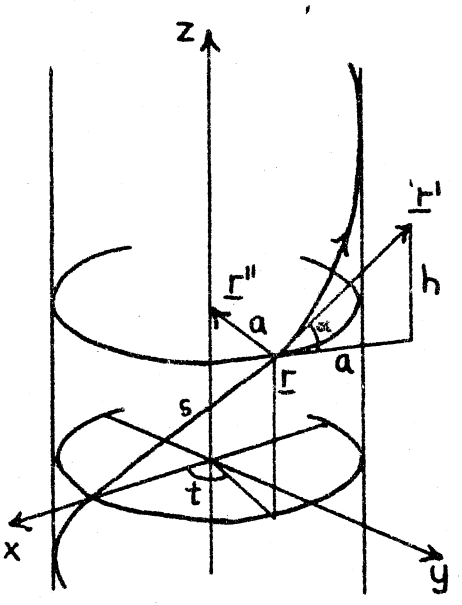
hvor $a > 0$ og $h \neq 0$, bestemmes en skruelinie. Skrueaksen er z-aksen, og a er kurvepunktets afstand fra skrueaksen, medens h er den med fortegn regnede reducerede skruehøjde, d.v.s. højden af en hel vinding divideret med 2π. Eftersom h er positiv eller negativ, er talen om en højre skruning eller en venstre skruning. Kurven er beliggende på omdrejningscylinderen med ligningen $x^2+y^2 = a^2$, og fremkommer af den i tangentplanen $x = a$ beliggende rette linie $x = a$, $z = \frac{h}{a}y$, idet planen indfoldes på cylinderen.

Kurven er åbenbart en C^∞-kurve. Vi finder

$$\underline{r}' = \underline{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, h)$$

$$\underline{r}'' = \underline{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0).$$

Man ser, at $|\underline{r}'| = \sqrt{a^2+h^2}$, og at $\underline{r}'$ ligger i cylinderens tangentplan og danner den ved $\tan\alpha = \frac{h}{a}$ bestemte vinkel med x,y-planen. Vektoren $\underline{r}'$ bestemmer skrueliniens tangent. Man ser endvidere, at $\underline{r}''$ er vektoren fra kurvepunktet til dets projektion på z-aksen. Vektorerne $\underline{r}'$ og $\underline{r}''$ er åbenbart lineært uafhængige, og da $\underline{r}''$ er vinkelret på $\underline{r}'$, er skrueliniens hovednormal bestemt ved $\underline{r}''$.



Buelængden regnet fra punktet (a,0,0) er

$$s = s(t) = \int_0^t |\underline{r}'| \, dt = \sqrt{a^2+h^2}\, t.$$

For krumningen finder vi

$$\varkappa = \varkappa(t) = \frac{|\underline{r}' \times \underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3} = \frac{\sqrt{a^2+h^2}\, a}{(\sqrt{a^2+h^2})^3} = \frac{a}{a^2+h^2}$$

og for krumningsradius altså

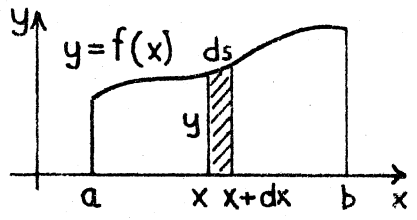
$$\rho = \rho(t) = \frac{a^2+h^2}{a}$$

Man bemærker, at $\varkappa$ og ρ er uafhængige af t. Dette er også på forhånd klart, idet skruelinien kan glide i sig selv.

Den klassiske opfattelse af begreberne differential og integral. Efter den klassiske Leibniz'ske opfattelse er et differential en "uendelig lille størrelse", et integral en "sum af uendelig mange uendelig små størrelser". Det skær af mystik, der fra begyndelsen omgav differential- og integralregningen, er hævet gennem den eksakte fremstilling. Den klassiske udtryksmåde har imidlertid sine store fordele og finder stadig udstrakt anvendelse. Vi vil lægge den til grund ved behandlingen af forskellige opgaver, som vi ikke kan ofre en udførlig omtale. Det drejer sig om udledelsen af formler for omdrejningslegemers volumen, omdrejningsfladers areal, statiske momenter og tyngdepunkter. Vi indlader os ikke på principielle betragtninger vedrørende disse begreber.

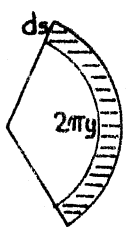
Omdrejningslegemers volumen. Omdrejningsfladers areal.

Idet $y = f(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er en ikke negativ kontinuert funktion betragtes det omdrejningslegeme, der fås ved at dreje den af x-aksen, linierne $x = a$ og $x = b$, og kurven $y = f(x)$ begrænsede figur om x-aksen. Den "uendelig tynde skive", der udskæres af snit svarende til x og x+dx, opfattes som en omdrejningscylinder med radius y og højde dx. Dens volumen er altså $\pi y^2 dx$. Omdrejningslegemets volumen V er derfor bestemt ved formlen



$$V = \int_a^b \pi y^2 dx \quad \text{eller udførligt} \quad V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

Idet $y = f(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er en ikke negativ C^1-funktion, vil vi finde arealet af den omdrejningsflade, der fås ved at dreje funktionens graf om x-aksen. Buelængden på grafen regnet fra et vilkårligt punkt af den betegnes s. Det "uendelig tynde bælte", der udskæres af snit svarende til x og x + dx, opfattes som et bælte af længden $2\pi y$ og bredden ds på en omdrejningskegle. Det udfoldes som en cirkelringssektor af længden $2\pi y$ og bredden ds. Dennes areal beregnes, som om det var et rektangel med sider $2\pi y$ og ds; arealet er altså $2\pi y ds$.



Vi har $ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+y'^2}dx$. Omdrejningsfladens areal O er derfor bestemt ved formlen

$$O = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx \quad \text{eller udførligt} \quad O = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

Eksempel 2. Vælges funktionen $y = \sqrt{r^2-x^2}: [-r,r] \to \mathbb{R}$, er omdrejningslegemet en kugle med radius r, og vi finder for dennes volumen udtrykket

$$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2-x^2)dx = \pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

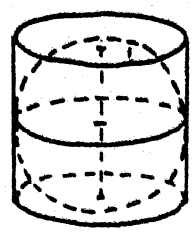
og for arealet af dens overflade, også kort kaldet overfladen, udtrykket

$$O = \int_{-r}^{r} 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx = \int_{-r}^{r} 2\pi r\, dx = 4\pi r^2.$$

Funktionen er faktisk kun C^1 på $]-r,r[$, så at vi ved at bruge arealformlen i dette tilfælde er gået ud over den ved opstillingen gjorte antagelse.

Betragtes kun det til et interval $[a,b] \subset [-r,r]$ svarende kuglebælte, ses at dettes areal er $\int_a^b 2\pi r dx = 2\pi r(b-a)$. [For $a = -r$ eller $b = r$ drejer det sig om en kuglekalot.]

Formlerne for kuglens volumen og overflade er fundet af Archimedes, der udtrykte dem ved at sige, at volumen og overflade er $\frac{2}{3}$ af volumen og overflade af en om kuglen omskrevet omdrejningscylinder.



Statiske momenter. Tyngdepunkter. Ved det statiske moment af et system af et endeligt antal punktformede masser i en plan med hensyn til en linie i planen forstås summen af produkterne af masserne og deres med fortegn regnede afstande fra linien. Det statiske moment er lig med det statiske moment af den samlede masse anbragt i tyngdepunktet. En kontinuert massefordeling behandles som et system af "uendelig mange uendelig små punktformede masser".

Idet $y = f(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, er en ikke negativ kontinuert funktion, søger vi de statiske momenter S_x og S_y om y-aksen og x-aksen af den af x-aksen, linierne $x = a$ og $x = b$, og kurven $y = f(x)$ begrænsede figur, idet denne tænkes belagt med masse med den konstante massetæthed 1 [d.v.s. enhver delfigur bærer en masse lig med delfigurens areal]. Den "uendelig tynde strimmel", der bestemmes ved x og $x + dx$, opfattes som et rektangel med sider y og dx. Dens masse ydx samles i tyngdepunktet $(x, \frac{1}{2}y)$. Dens momenter om y-aksen og x-aksen er altså $xydx$ og $\frac{1}{2}y^2dx$. De søgte momenter bestemmes altså ved formlerne

$$S_x = \int_a^b xy\,dx \qquad \text{og} \qquad S_y = \int_a^b \tfrac{1}{2}y^2dx.$$

Figurens masse er lig med dens areal

$$A = \int_a^b y\,dx.$$

Figurens tyngdepunkt (ξ, η) bestemmes ved, at $S_x = A\xi$, $S_y = A\eta$, altså

$$\xi = \frac{S_x}{A}, \qquad \eta = \frac{S_y}{A}.$$

Sammenholdes formlerne for S_y og η med den ovenfor fundne formel for volumenet V af omdrejningslegemet, finder vi, at $V = 2\pi S_y = A \cdot 2\pi\eta$. Hermed er vist:

Guldins første regel: Omdrejningslegemets volumen er produktet af arealet af den drejede figur og længden af den af figurens tyngdepunkt ved drejningen beskrevne cirkel.

Idet $y = f(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, er en (ikke nødvendigvis ikke negativ) C^1-funktion, søger vi de statiske momenter S_x og S_y om y-aksen og x-aksen af funktionens graf, idet denne tænkes belagt med masse med den konstante massetæthed 1 [d.v.s. enhver delkurve bærer en masse lig med delkurvens længde]. Buelængden på grafen regnet fra et vilkårligt punkt af den betegnes s. Det "uendelig lille kurvestykke", der bestemmes ved x og x + dx har massen ds, og dets momenter om y-aksen og x-aksen er altså xds og yds. Idet $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$, bestemmes de søgte momenter altså ved formlerne

$$S_x = \int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad \text{og} \quad S_y = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Kurvens masse er lig med dens længde

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Kurvens tyngdepunkt (ξ,η) bestemmes ved, at $S_x = L\xi$, $S_y = L\eta$, altså

$$\xi = \frac{S_x}{L}, \qquad \eta = \frac{S_y}{L}.$$

Sammenholdes (i tilfælde af, at $y = f(x)$ er ikke negativ) formlerne for S_y og η med den ovenfor fundne formel for arealet O af omdrejningsfladen, finder vi, at $O = 2\pi S_y = L\cdot 2\pi\eta$. Hermed er vist:

<u>Guldins anden regel</u>: <u>Omdrejningsfladens areal er produktet af længden af den drejede kurve og længden af den af kurvens tyngdepunkt ved drejningen beskrevne cirkel</u>.

De to regler findes allerede hos Pappos (o.300). De blev genfundet af P.Guldin (Centrobaryca 1635-41).

Eksempel 3. Ved brug af Guldins regler finder vi for halvcirkelskiven $\{(x,y)\mid x^2+y^2 \le r^2, y \ge 0\}$ tyngdepunktet $(\xi,\eta) = (0,\frac{4}{3\pi}r)$ og for halvcirklen $\{(x,y)\mid x^2+y^2 = r^2, y \ge 0\}$ tyngdepunktet $(\xi,\eta) = (0,\frac{2}{\pi}r)$.

Ved det statiske moment af et system af et endeligt antal punktformede masser i rummet med hensyn til en plan forstås summen af produkterne af masserne og deres med fortegn regnede afstande fra planen. Det statiske moment er lig med det statiske moment af den samlede masse anbragt i tyngdepunktet. En kontinuert massefordeling behandles som et system af "uendelig mange uendelig små punktformede masser".

Eksempel 4. For et omdrejningslegeme bestemt som ovenfor, belagt med masse med den konstante massetæthed 1 [d.v.s. ethvert dellegeme bærer en masse lig med dellegemets volumen], vil tyngdepunktet ligge på x-aksen. Vi tænker os tilføjet en z-akse. Idet tyngdepunktet betegnes med $(\xi,0,0)$, har vi da $S = V\xi$, hvor V er volumenet, og S er det statiske moment om y,z-planen, der bestemmes ved formlen

$$S = \int_a^b x\pi y^2 dx.$$

For halvkuglen $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2 \le r^2, x \ge 0\}$ finder vi

$$S = \int_0^r x\pi(r^2-x^2)dx = \pi\left[\tfrac{1}{2}r^2x^2-\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^r = \tfrac{1}{4}\pi r^4,$$

og tyngdepunktet er derfor $(\xi,0,0) = (\frac{3}{8}r,0,0)$.

Opgaver. 1. Vis, at krumningscentrerne for en skruelinie udgør en ny skruelinie, og at dennes krumningscentrer udgør den oprindelige skruelinie.

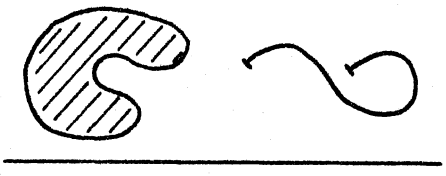
2. En cirkelformet etiket med radius a klæbes på en cirkulær-cylindrisk flaske med radius b. Find i et passende valgt koordinatsystem en parameterfremstilling for etikettens rand. Find vinklen mellem oskulationsplanen og cylinderens tangentplan i de punkter, hvori kurven skærer sine symmetriplaner.

3. Find volumen og overflade af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når cykloidebuen

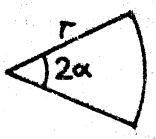
$$(x,y) = (at-a\sin t, a-a\cos t), \quad t \in [0,2\pi],$$

drejes om x-aksen. Find herved tyngdepunktet af dem af cykloidebuen og x-aksen begrænsede figur og tyngdepunktet af cykloidebuen selv.

4. Vis, at Guldins regler også gælder for en figur, resp. en kurve, af den på figuren viste art (præciser selv forudsætningerne). Find herved volumen og overflade af en kuglering (torus) frembragt ved drejning af en cirkel med radius a om en linie i dens plan med afstand b > a fra centrum.



5. Find tyngdepunktet for et cirkeludsnit med radius r og centervinkel 2α. Find endvidere tyngdepunktet for det omdrejningslegeme, der fås ved at dreje udsnittet om sin symmetriakse.



§ 43. En fixpunktsætning.

Fixpunkt for en afbildning. Kontraktion. Lad (S,dist) være et metrisk rum.

En afbildning $T: S \to S$ siges at have punktet $z \in S$ som fixpunkt, såfremt $T(z) = z$.

Afbildningen T kaldes en kontraktion, såfremt der findes et tal $C \in [0,1[$, for hvilket der for vilkårlige punkter $x \in S$, $y \in S$ gælder

$$\text{dist}(T(x),T(y)) \leq C \, \text{dist}(x,y)$$

Tallet C kaldes kontraktionskonstanten.

Sætning. Hvis rummet (S,dist) er fuldstændigt, og afbildningen $T: S \to S$ er en kontraktion, da har T netop eet fixpunkt $z \in S$.

Bevis. (1) Afbildningen har højst eet fixpunkt. Thi hvis z_1 og z_2 var to forskellige fixpunkter, var $0 < \text{dist}(z_1,z_2) = \text{dist}(T(z_1),T(z_2)) \leq C \, \text{dist}(z_1,z_2)$, i strid med at $C < 1$.

(2) Hvis z er et fixpunkt, kan vi let se, hvordan z må kunne bestemmes. For et vilkårligt $y \in S$ finder vi nemlig uligheden

$$\text{dist}(T(y),z) = \text{dist}(T(y),T(z)) \leq C \, \text{dist}(y,z).$$

Vælger vi nu et vilkårligt udgangspunkt $x \in S$, får vi ved at anvende denne ulighed successivt på $y = x$, $y = T(x)$,

$y = T^2(x) = T(T(x))$, etc., at

$$\begin{aligned} &\text{dist}(T(x),z) \leq C \ \text{dist}(x,z) \\ &\text{dist}(T^2(x),z) \leq C \ \text{dist}(T(x),z) \\ &\cdots \\ &\text{dist}(T^n(x),z) \leq C \ \text{dist}(T^{n-1}(x),z). \end{aligned}$$

Heraf ses, at

$$\text{dist}(T^n(x),z) \leq C^n \ \text{dist}(x,z),$$

hvoraf, da $C < 1$,

$$\text{dist}(T^n(x),z) \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

Punktfølgen $x,T(x),T^2(x),\cdots,T^n(x),\cdots$ konvergerer altså mod fixpunktet z.

(3) Endnu har vi ikke benyttet, at rummet er fuldstændigt. For nu under denne antagelse at vise, at der findes et fixpunkt, vælger vi et vilkårligt $x \in S$ og betragter punktfølgen $x,T(x),\cdots,T^n(x),\cdots$. Vi vil bevise, at denne er en fundamentalfølge. Hertil benytter vi kontraktionsegenskaben, der giver

$$\begin{aligned} \text{dist}(T^{n+1}(x),T^n(x)) &\leq C \ \text{dist}(T^n(x),T^{n-1}(x)) \\ &\leq C^2 \ \text{dist}(T^{n-1}(x),T^{n-2}(x)) \\ &\cdots \\ &\leq C^n \ \text{dist}(T(x),x). \end{aligned}$$

Heraf fås ved brug af trekantsuligheden

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(T^{n+m}(x),T^n(x)) &\le \sum_{\mu=0}^{m-1} \operatorname{dist}(T^{n+\mu+1}(x),T^{n+\mu}(x)) \\ &\le \sum_{\mu=0}^{m-1} C^{n+\mu} \operatorname{dist}(T(x),x) \\ &\le \frac{C^n}{1-C} \operatorname{dist}(T(x),x).\end{aligned}$$

For ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et n_o, således at

$$\frac{C^n}{1-C} \operatorname{dist}(T(x),x) < \varepsilon \quad \text{for} \quad n \ge n_o.$$

Vi har altså

$$\operatorname{dist}(T^{n+m}(x),T^n(x)) < \varepsilon \quad \text{For} \quad n \ge n_o, \quad m > 0.$$

Følgen $x,T(x),\cdots,T^n(x)\cdots$ er altså en fundamentalfølge. Den er derfor konvergent. Lad z betegne dens grænsepunkt. Vi vil vise, at z er et fixpunkt.

Hvis $y_n \to y$, ses af $\operatorname{dist}(T(y_n),T(y)) \le C \operatorname{dist}(y_n,y)$, at $T(y_n) \to T(y)$. Af $T^n(x) \to z$ følger derfor $T(T^n(x)) \to T(z)$, altså $T^{n+1}(x) \to T(z)$. Men vi har også $T^{n+1}(x) \to z$. Altså er $T(z) = z$. □

Den benyttede fremgangsmåde til bestemmelse af et fixpunkt kaldes iterationsmetoden eller de successive approksimationers metode. Som et redskab til bevis af eksistens- og entydighedssætninger er denne (i princippet gamle) metode udviklet af E. Picard (1856-1941) i 1890 for studiet af differentialligninger, jfr. § 49. Den er anvendelig for mange andre ligningstyper. Vi vil også anvende den på et fundamentalt problem i teorien for funktioner af flere variable.

§ 47. Differentialformer af første grad.

Definition af begrebet differentialform af første grad. Eksakt differentialform. Stamfunktion. Lad A være en åben mængde i $\mathbb{R}^k$. Vi vil yderligere antage, at A er sammenhængende. Dette er i følge § 8 ensbetydende med, at A er kurvesammenhængende, og endda ensbetydende med, at to hvilkesomhelst punkter i A kan forbindes med en i A forløbende trappelinie.

Ved en differentialform i A af første grad forstås et udtryk af formen

$$\omega = f_1(\underline{x})dx_1 + \cdots + f_k(\underline{x})dx_k,$$

hvor koefficienterne $f_1, \cdots, f_k$ er reelle funktioner på A. Det bemærkes dog, at den udviklede teori gælder uforandret, når koefficienterne er komplekse funktioner. Differentialformen kaldes en C^n-form, $n = 0, 1, 2, \cdots$, resp. en C^∞-form, hvis $f_1, \cdots, f_k$ er C^n, resp. C^∞.

Et eksempel på en differentialform af første grad er differentialet

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_k}dx_k$$

af en differentiabel funktion F på A. En differentialform af denne type kaldes eksakt. En eksakt C^n-form, resp. C^∞-form, er således differentialet af en C^{n+1}-funktion, resp. en C^∞-funktion.

Hvis en differentialform ω er eksakt, kaldes enhver funktion F på A, hvis differential den er, en stamfunktion til ω. Hvis F er en stamfunktion til ω, er enhver funk-

tion $F+k$, hvor k er en konstant, også en stamfunktion til ω, og ω har ikke andre stamfunktioner end funktionerne $F+k$. Hvis nemlig G også er en stamfunktion til ω, er funktionen $G-F$ differentiabel med differentialet 0. De partielle afledede af $G-F$ er altså alle 0, hvoraf følger, at $G-F$ er konstant på ethvert akseparallelt liniestykke i A. Da to hvilkesomhelst punkter i A kan forbindes med en i A forløbende akseparallel polygon, ses, at $G-F$ må være konstant i A.

For $k = 1$ er A et åbent interval. En differentialform af første grad er her simpelthen et udtryk $\omega = f(x)dx$, hvor f er en funktion på A. I dette tilfælde er enhver C^0-form eksakt. Dette udtrykker blot på en anden måde, at enhver C^0-funktion på A har en stamfunktion. Hvis $\omega = dF$, altså hvis F er en C^1-funktion på A, for hvilken $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in A$, gælder for vilkårlige $a,b \in A$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \omega = F(b) - F(a).$$

Dette er hovedsætningen i differential- og integralregningen for funktioner af en variabel.

Sammensætning af kurver. Lukkede kurver. Ved en C^0-kurve i $\mathbb{R}^k$, eller blot en kurve i $\mathbb{R}^k$, vil vi i det følgende stedse forstå en C^0-kurve $K: \underline{x} = \underline{h}(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, med afsluttet parameterinterval, betragtet med den ved parameterfremstillingen bestemte gennemløbsretning. De tilladte parameterskift $t = \varphi(u)$: $[\gamma,\delta] \to [\alpha,\beta]$, er altså sådanne,

hvor φ er en voksende C^0-funktion med $\varphi(\gamma) = \alpha$, $\varphi(\delta) = \beta$. Punkterne $\underline{a} = \underline{h}(\alpha)$ og $\underline{b} = \underline{h}(\beta)$ kaldes kurvens begyndelsespunkt og slutpunkt.

Foretages for en kurve K: $\underline{x} = \underline{h}(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, et parameterskift $t = \varphi(u)$: $[\gamma,\delta] \to [\alpha,\beta]$, hvor φ er en aftagende C^0-funktion med $\varphi(\gamma) = \beta$, $\varphi(\delta) = \alpha$, fås en kurve, som vi betegner -K. Vi siger, at -K fås af K ved at vende gennemløbsretningen.

For en inddeling af parameterintervallet $[\alpha,\beta]$ ved delepunkter $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ kan vi betragte kurverne K_i: $\underline{x} = \underline{h}(t)$, $t \in [t_{i-1},t_i]$. For hvert $i = 2,\cdots,n$ er slutpunktet for K_{i-1} begyndelsespunkt for K_i. Vi siger, at K er sammensat af kurverne $K_1,\cdots,K_n$, og skriver

$$K = K_1+\cdots+K_n.$$

Vilkårlige kurver $K_1,\cdots,K_n$ med den egenskab, at slutpunktet for K_{i-1} er begyndelsespunkt for K_i for hvert $i = 2,\cdots,n$, kan sammensættes til en kurve K, idet vi kan vælge parameterfremstillingerne for kurverne således, at slutpunktet for parameterintervallet for K_{i-1} er begyndelsespunktet for parameterintervallet for K_i for hvert $i = 2,\cdots,n$.

En kurve kaldes lukket, hvis slutpunktet falder sammen med begyndelsespunktet. Hvis K og L er kurver med samme begyndelsespunkt og samme slutpunkt, vil K+(-L), som vi kort skriver K-L, være en lukket kurve.

Ved en C^1-kurve i $\mathbb{R}^k$ vil vi analogt forstå en C^1-kurve K: $\underline{x} = \underline{h}(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, med afsluttet parameterinterval betragtet med den ved parameterfremstillingen bestemte gennemløbsretning. De tilladte parameterskift

$t = \varphi(u)\colon [\gamma,\delta] \to [\alpha,\beta]$ er her sådanne, hvor φ er en C^1-funktion med $\varphi(\gamma) = \alpha$, $\varphi(\delta) = \beta$ og $\varphi'(u) > 0$ for alle $u \in [\gamma,\delta]$.

Integral af en differentialform langs en kurve. Lad ω være en C^0-differentialform i mængden $A \subseteq \mathbb{R}^k$, og lad $K\colon \underline{x} = \underline{h}(t) = (h_1(t),\cdots,h_k(t))$, $t \in [\alpha,\beta]$, være en i A forløbende C^1-kurve. Ved integralet

$$\int_K \omega = \int_K f_1(\underline{x})dx_1 + \cdots + f_k(\underline{x})dx_k$$

af differentialformen ω langs kurven K forstås tallet

$$\int_\alpha^\beta [(f_1 \circ \underline{h}(t))h_1'(t) + \cdots + (f_k \circ \underline{h}(t))h_k'(t)]\,dt.$$

For at dette skal være en gyldig definition, må vi naturligvis godtgøre, at tallet ikke afhænger af den valgte parameterfremstilling. Foretages et tilladt parameterskift $t = \varphi(u)\colon [\gamma,\delta] \to [\alpha,\beta]$, får vi parameterfremstillingen $\underline{x} = \underline{h}\circ\varphi(u) = (h_1 \circ \varphi(u)),\cdots,h_k \circ \varphi(u))$, $u \in [\gamma,\delta]$, hvortil svarer integralet

$$\int_\gamma^\delta [(f_1 \circ \underline{h} \circ \varphi(u))(h_1' \circ \varphi(u))\varphi'(u) + \cdots + (f_k \circ \underline{h} \circ \varphi(u))(h_k' \circ \varphi(u))\varphi'(u)]\,du,$$

der netop er det, der fremgår af det forrige ved anvendelse af substitutionen $t = \varphi(u)$, og altså har samme værdi.
- Foretages derimod et parameterskift $t = \varphi(u)\colon [\gamma,\delta] \to [\alpha,\beta]$, hvor φ er en C^1-funktion med $\varphi'(u) < 0$ for alle $u \in [\gamma,\delta]$, får vi en parameterfremstilling for kurven $-K$, og idet i dette tilfælde $\varphi(\gamma) = \beta$, $\varphi(\delta) = \alpha$, ser vi, at $\int_{-K} \omega = -\int_K \omega$.

For en C^0-kurve $K = K_1 + \cdots + K_n$ dannet ved sammensætning af C^1-kurver $K_1, \cdots, K_n$, defineres integralet af ω langs K som summen af integralerne af ω langs $K_1, \cdots, K_n$, altså

$$\int_K \omega = \int_{K_1} \omega + \cdots + \int_{K_n} \omega.$$

Idet $-K = (-K_n) + \cdots + (-K_1)$, gælder reglen $\int_{-K} \omega = -\int_K \omega$ også i dette tilfælde.

Om integralet af en eksakt differentialform langs en kurve gælder følgende fundamentale sætning.

Hvis C^0-formen ω er eksakt, og F er en stamfunktion til ω, altså hvis F er en C^1-funktion og $\omega = dF$, gælder for enhver af C^1-kurver sammensat kurve K i A med begyndelsespunkt $\underline{a}$ og slutpunkt $\underline{b}$, at

$$\int_K \omega = \int_K dF = F(\underline{b}) - F(\underline{a}).$$

Bevis. ① Hvis K er en C^1-kurve $\underline{x} = \underline{h}(t), t \in [\alpha, \beta]$, er $F \circ \underline{h}(t)$ en C^1-funktion på $[\alpha, \beta]$ med den afledede

$$(F \circ \underline{h})'(t) = (f_1 \circ \underline{h}(t))h_1'(t) + \cdots + (f_k \circ \underline{h}(t))h_k'(t).$$

Der gælder følgelig

$$\int_K \omega = \int_\alpha^\beta (F \circ \underline{h})'(t)dt = F \circ \underline{h}(\beta) - F \circ \underline{h}(\alpha) = F(\underline{b}) - F(\underline{a}).$$

② Hvis K er sammensat af C^1-kurverne $K_1, \cdots, K_n$, og K_i har begyndelsespunktet $\underline{c}_{i-1}$ og slutpunktet $\underline{c}_i$,

så at $\underline{a} = \underline{c}_o$ og $\underline{b} = \underline{c}_n$, finder vi $\int_{K_i}\omega = F(\underline{c}_i) - F(\underline{c}_{i-1})$ og følgelig $\int_K\omega = \int_{K_1}\omega + \cdots + \int_{K_n}\omega = F(\underline{b}) - F(\underline{a})$. ∎

Skrives formlen på formen

$$F(\underline{b}) = F(\underline{a}) + \int_K\omega = F(\underline{a}) + \int_K dF.$$

ser man, at når man kender værdien af F i et givet punkt $\underline{a} \in A$ og kender differentialet $\omega = dF$, kan man beregne værdien af F i et vilkårligt punkt $\underline{b} \in A$.

Specielt finder vi, at hvis C^o-formen ω er eksakt, er dens integral langs enhver af C^1-kurver sammensat lukket kurve K i A lig med 0.

For et akseparallelt liniestykke K med begyndelsespunkt $(c_1, \cdots, c_{j-1}, a_j, c_{j+1}, \cdots, c_k)$ og slutpunkt $(c_1, \cdots, c_{j-1}, b_j, c_{j+1}, \cdots, c_k)$ finder vi

$$\int_K\omega = \int_{a_j}^{b_j} f_j(c_1, \cdots, c_{j-1}, x_j, c_{j+1}, \cdots, c_k)dx_j.$$

Hvis $a_j < b_j$, følger dette af, at K da har parameterfremstillingen $\underline{x} = (c_1, \cdots, c_{j-1}, x_j, c_{j+1}, \cdots, c_k)$, $x_j \in [a_j, b_j]$. Hvis $a_j > b_j$, følger det af, at $\int_K\omega = -\int_{-K}\omega$.

Idet vi for $k = 2$ og $k = 3$ betegner koordinaterne med x,y eller x,y,z og koefficienterne i en differentialform med X,Y eller X,Y,Z, kan differentialformen skrives

$$\omega = X(x,y)dx + Y(x,y)dy \quad \text{eller} \quad \omega = X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz.$$

For en C^o-form ω i A kan (X,Y) eller (X,Y,Z) opfattes som et kraftfelt i A. Integralet

$$\int_K \omega = \int_K X\,dx + Y\,dy \quad \text{eller} \quad \int_K \omega = \int_K X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

af ω langs en af C^1-kurver sammensat kurve K i A er da det arbejde, kraftfeltet udfører, når en partikel føres gennem K. At ω er eksakt betyder, at der findes en C^1-funktion F på A, så at $(X,Y) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$ eller $(X,Y,Z) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$, altså at kraftfeltet er gradientfeltet for F. Man siger da, at kraftfeltet er bestemt ved en kraftfunktion F. Arbejdet er da differensen mellem værdierne af F i kurvens endepunkt og begyndelsespunkt.

Eksempel 1. For integralet af differentialformen

$$\omega = y^2 dx + (x+y)dy$$

langs halvcirklen K: $(x,y) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$, finder vi

$$\int_K \omega = \int_0^\pi [\sin^2 t(-\sin t) + (\cos t + \sin t)\cos t]\,dt.$$

Da

$$\int_0^\pi \sin^2 t(-\sin t)\,dt = \int_0^\pi (1-\cos^2 t)\,d\cos t = \int_1^{-1} (1-x^2)\,dx = -\frac{4}{3},$$

$$\int_0^\pi \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi \sin t \cos t\,dt = 0,$$

fås

$$\int_K \omega = \int_K y^2 dx + (x+y)dy = -\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

Eksempel 2. Et eksempel på integral af en differentialform langs en kurve har vi allerede mødt i § 36, hvor vi (under nærmere præciserede antagelser) fandt at en figur begrænset af en lukket C^1-kurve $(x,y) = (x(t),y(t))$, $t \in [\alpha,\beta]$, har arealet

$$A = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]\,dt.$$

Betegnes kurven K gælder altså

$$A = -\int_K y\,dx = \int_K x\,dy = \tfrac{1}{2}\int_K -y\,dx + x\,dy.$$

Eksempel 3. Betegnes afstanden fra $(0,0,0)$ til (x,y,z) med r, og er k en positiv konstant, har funktionen

$$F(x,y,z) = \frac{k}{r} = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

i $\mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}$ gradientfeltet

$$(X,Y,Z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(-\frac{k}{r^3}x,-\frac{k}{r^3}y,-\frac{k}{r^3}z\right).$$

For ethvert $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ er vektoren (X,Y,Z), når den afsættes fra (x,y,z), rettet mod $(0,0,0)$, og dens længde er $\frac{k}{r^2}$. Funktionen $F(x,y,z) = \frac{k}{r}$ er altså kraftfunktion for et gravitationsfelt; en partikel, der bevæger sig i feltet tiltrækkes mod $(0,0,0)$ med en kraft, hvis størrelse er omvendt proportional med afstandens kvadrat. Feltets arbejde, når partiklen føres fra (x_0,y_0,z_0) til (x_1,y_1,z_1), er, idet afstandene fra $(0,0,0)$ betegnes r_0 og r_1, bestemt ved

$$F(x_1,y_1,z_1) - F(x_0,y_0,z_0) = \frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_0}.$$

Betingelse for, at en differentialform er eksakt. Lukket differentialform. Af det foregående fremgår umiddelbart, at hvis en C^0-form ω i A er eksakt, da har for vilkårlige punkter $\underline{a},\underline{b} \in A$ integralet af ω langs alle af C^1-kurver sammensatte kurver i A med begyndelsespunkt $\underline{a}$ og slutpunkt $\underline{b}$ samme værdi. Man udtrykker

dette kort ved at sige, at integralet er uafhængigt af vejen. Denne nødvendige betingelse for eksakthed er, som man ret let kan vise, også tilstrækkelig. Betingelsen er hovedsagelig af teoretisk interesse. For C^1-former opnår vi simplere og praktisk anvendelige resultater.

En nødvendig betingelse for, at en C^1-differentialform ω i mængden A er eksakt, er, at der for vilkårlige $i,j \in \{1,\cdots,k\}$ i ethvert punkt $x \in A$ gælder

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Hvis A er et interval, er betingelsen også tilstrækkelig.

En C^1-form, der opfylder den omhandlede betingelse, kaldes lukket. Sætningen kan altså også formuleres således:

En nødvendig betingelse for, at en C^1-form ω i A er eksakt, er, at den er lukket. Hvis A er et interval, er betingelsen også tilstrækkelig.

[En mere omfattende klasse af mængder A, for hvilke betingelsen er tilstrækkelig, omtales nedenfor.]

Bevis. ① Betingelsen er nødvendig. Hvis ω er eksakt, altså $\omega = dF$ for en C^2-funktion F på A, har vi $(f_1,\cdots,f_k) = (\frac{\partial F}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_k})$, altså

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Betingelsen udtrykker derfor blot reglen om, at differentiationernes rækkefølge er ligegyldig.

② Hvis A er et interval, er betingelsen også tilstrækkelig. For simpelheds skyld nøjes vi med at udføre beviset i tilfældet $k = 2$. Det forløber på tilsvarende måde for $k > 2$.

Idet koordinaterne betegnes x,y, gælder det om at vise, at en C^1-form

$$\omega = X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

på et interval A, for hvilken der for ethvert punkt $(x,y) \in A$ gælder

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

er eksakt. Vi vælger et punkt $(a,b) \in A$ og danner funktionen

$$F_1(x,y) = \int_a^x X(t,y)dt \quad \text{på} \quad A.$$

Denne funktion har åbenbart efter x den afledede $\frac{\partial F_1}{\partial x} = X(x,y)$, og ifølge sætningen om differentiation under integraltegnet (§ 14) har den efter y den afledede

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial y}(t,y)dt.$$

Da $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, finder vi

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial Y}{\partial x}(t,y)dt = Y(x,y) - Y(a,y).$$

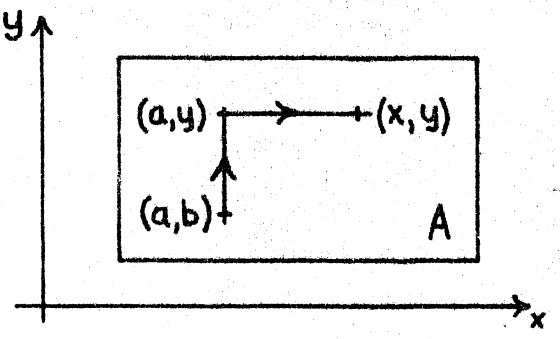
Altså er F_1 en C^2-funktion, og $\omega = dF_1 + Y(a,y)dy$. Nu dannes funktionen

$$F_2(x,y) = \int_b^y Y(a,t)dt \quad \text{på} \quad A.$$

Denne funktion er uafhængig af x og har altså efter x den afledede $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$. Endvidere har den efter y den afledede $\frac{\partial F_2}{\partial y} = Y(a,y)$. Altså er F_2 en C^2-funktion, og $dF_2 = Y(a,y)dy$. Følgelig er $F = F_1 + F_2$ en C^2-funktion på A, og der gælder $\omega = dF$. □

Bemærkning 1. Den fundne stamfunktion F er den, der i (a,b) har værdien 0.

Man ser, at $F_2(x,y)$ er integralet af ω langs liniestykket fra (a,b) til (a,y), og at $F_1(x,y)$ er integralet af ω langs liniestykket fra (a,y) til (x,y). Følgelig er $F(x,y)$ simpelthen integralet af ω langs den af disse to liniestykker dannede vinkellinie fra (a,b) til (x,y).



Bemærkning 2. Ved bestemmelsen af en stamfunktion er det i reglen hensigtsmæssigt at gå lidt anderledes frem end i beviset og først blot søge en eller anden C^2-funktion F_1, for hvilken $\frac{\partial F_1}{\partial x} = X(x,y)$, altså for hvilken dF_1 har formen

$$dF_1 = X(x,y)dx + Y_1(x,y)dy.$$

Da er Y_1 en C^1-funktion, og der gælder

$$\omega - dF_1 = [Y(x,y) - Y_1(x,y)]dy.$$

Idet $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ og $\frac{\partial Y_1}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$, gælder $\frac{\partial(Y-Y_1)}{\partial x} = 0$ for alle $(x,y) \in A$. Følgelig er $Y - Y_1$ uafhængig af x, altså en funktion af y alene. Betegnes den $Y_2(y)$, har vi altså

$$\omega - dF_1 = Y_2(y)dy.$$

Betegner vi nu med $F_2(y)$ en vilkårlig stamfunktion til $Y_2(y)$, vil $F = F_1 + F_2$ være en stamfunktion til ω. [Vi har her tilladt os at bruge betegnelserne $Y_2(y)$ og $F_2(y)$ for funktioner på A, der ikke afhænger af x.]

Eksempel 4. Differentialformen

$$\omega = (x^2+y^2)dx + (2xy+y)dy$$

er en C^∞-form i $\mathbb{R}^2$. Idet $\frac{\partial X}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Y}{\partial x}$, er formen lukket. Den er altså eksakt. For at finde en stamfunktion bemærker vi, at for fast y har $x^2 + y^2$ stamfunktionen $\frac{1}{3}x^3 + xy^2$. Vi betragter derfor funktionen $F_1(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2$. For denne gælder

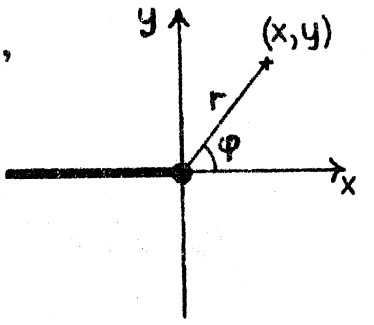
$$dF_1 = (x^2+y^2)dx + 2xy\,dy.$$

Altså er $\omega - dF_1 = y\,dy$, og da y har stamfunktionen $F_2(y) = \frac{1}{2}y^2$, finder vi, at ω har stamfunktionen

$$F(x,y) = F_1(x,y) + F_2(y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

Eksempel 5. Følgende eksempel viser, at en lukket differentialform ikke nødvendigvis er eksakt.

Vi indfører polære koordinater (r,φ) i planen og betragter i den åbne, sammenhængende mængde $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x \leq 0, y = 0\}$ funktionen $F(x,y) = \varphi$, hvor φ er den ved $-\pi < \varphi < \pi$ bestemte værdi af argumentet. I halvplanen $\{(x,y) \mid x > 0\}$ er $F(x,y) = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}$, i halvplanen $\{(x,y) \mid y > 0\}$ er $F(x,y) = \operatorname{Arccot} \frac{x}{y}$, og i halvplanen $\{(x,y) \mid y < 0\}$ er $F(x,y) = \operatorname{Arccot} \frac{x}{y} - \pi$. Altså er F en C^∞-funktion, og vi finder



$$dF = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Differentialformen

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

er imidlertid en C^∞-form i mængden $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$, og den opfylder i hele denne mængde betingelsen $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$. Den er altså lukket. Men den er ikke eksakt i $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$. Thi en stamfunktion til ω i $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ måtte i $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y) \mid x\leq 0, y=0\}$ have formen $F + k$, og F kan ikke udvides til en kontinuert funktion på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

At ω ikke er eksakt i $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ ses også ved udregning af integralet af ω langs cirklen K: $(x,y) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,2\pi]$. Vi finder

$$\int_K \omega = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\sin t}{1}(-\sin t) + \frac{\cos t}{1}\cos t\right]dt = 2\pi .$$

Hvis formen var eksakt, skulle integralet have været 0.

Eksempel 6. Differentialformen

$$\omega = (y^2+2zx+2x)dx + (z^2+2xy+2y)dy + (x^2+2yz+2z)dz$$

er en C^∞-form i $\mathbb{R}^3$. Idet $\frac{\partial Y}{\partial z} = 2z = \frac{\partial Z}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial x} = 2x = \frac{\partial X}{\partial z}$, $\frac{\partial X}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Y}{\partial x}$, er formen lukket. Den er altså eksakt. For faste y og z har $y^2 + 2zx + 2x$ stamfunktionen $y^2x + zx^2 + x^2$. For funktionen $F_1(x,y,z) = y^2x + zx^2 + x^2$ er

$$dF_1 = (y^2+2zx+2x)dx + 2xy\,dy + x^2dz.$$

Altså er

$$\omega - dF_1 = (z^2+2y)dy + (2yz+2z)dz.$$

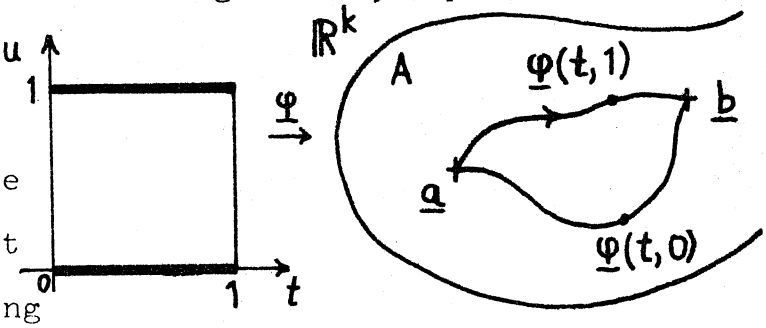
For fast z har $z^2 + 2y$ stamfunktionen $z^2y + y^2$. For funktionen $F_2(y,z) = z^2y + y^2$ er

$$dF_2 = (z^2+2y)dy + 2yz\,dz.$$

Altså er $\omega - dF_1 - dF_2 = 2zdz$, og da $2z$ har stamfunktionen $F_3(z) = z^2$, finder vi, at ω har stamfunktionen

$$F(x,y,z) = F_1(x,y,z) + F_2(y,z) + F_3(z)$$
$$= z^2y + x^2z + y^2x + x^2 + y^2 + z^2.$$

Enkelt sammenhængende mængder. En åben, sammenhængende mængde A i $\mathbb{R}^k$ kaldes enkelt sammenhængende, hvis følgende gælder. Betragt i (t,u)-planen kvadratet $[0,1]\times[0,1]$ og mængden $[0,1]\times\{0,1\}$ bestående af dets vandrette sider. Der forlanges nu, at enhver kontinuert afbildning



$\varphi\colon [0,1]\times\{0,1\} \to A$, for hvilken $\varphi(0,0) = \varphi(0,1) = a$,

$\underline{\varphi}(1,0) = \underline{\varphi}(1,1) = \underline{b}$, skal kunne udvides til en kontinuert afbildning $\underline{\varphi}: [0,1] \times [0,1] \to A$, for hvilken $\underline{\varphi}(0,u) = \underline{a}$, $\underline{\varphi}(1,u) = \underline{b}$ for alle $u \in [0,1]$. (For nemheds skyld har vi betegnet den udvidede afbildning med samme bogstav som den oprindelige.) Geometrisk udtrykt: Når to punkter $\underline{a}$ og $\underline{b}$ i A er forbundet med to i A forløbende kurver $\underline{x} = \underline{\varphi}(t,0), t \in [0,1]$, og $\underline{x} = \underline{\varphi}(t,1), t \in [0,1]$, skal den første kurve kunne overføres kontinuert i den anden ved en skare af kurver $\underline{x} = \underline{\varphi}(t,u), t \in [0,1]$ i A, der alle forbinder $\underline{a}$ og $\underline{b}$. ["Kontinuert overførsel" betyder, at $\underline{\varphi}(t,u)$ skal være kontinuert i $[0,1] \times [0,1]$, ikke blot kontinuert i hver af de variable for fast værdi af den anden variable.]

Hvis en åben, enkelt sammenhængende mængde A i $\mathbb{R}^k$ er foreningsmængde af et system $\{G_i | i \in I\}$ af åbne, sammenhængende delmængder, og der på hver af mængderne G_i er givet en funktion F_i, således at for vilkårlige $i_1, i_2 \in I$, for hvilke $G_{i_1} \cap G_{i_2} = \emptyset$, er differensen mellem restriktionerne af F_{i_1} og F_{i_2} til $G_{i_1} \cap G_{i_2}$ en konstant funktion, da findes en funktion F på A, hvis restriktion til enhver af mængderne G_i afviger fra funktionen F_i med en konstant.

Bevis. ① Hvis en af mængderne G_i er A selv, er udsagnet trivielt. Vi antager derfor i det følgende, at alle G_i er ægte delmængder af A.

② For enhver kurve K i A, der forløber i en af mængderne G_i, sætter vi $v(K) = F_i(\underline{b}) - F_i(\underline{a})$, hvor $\underline{a}$ betegner begyndelsespunktet og $\underline{b}$ slutpunktet for K. Dette er en gyldig definition, thi hvis K tilhører både G_{i_1} og G_{i_2}, er jo $F_{i_1}(\underline{b}) - F_{i_1}(\underline{a}) = F_{i_2}(\underline{b}) - F_{i_2}(\underline{a})$.

③ Hvis en sådan kurve er sammensat af kurverne $K_1, \cdots, K_n$, gælder åbenbart $v(K) = v(K_1) + \cdots + v(K_n)$.

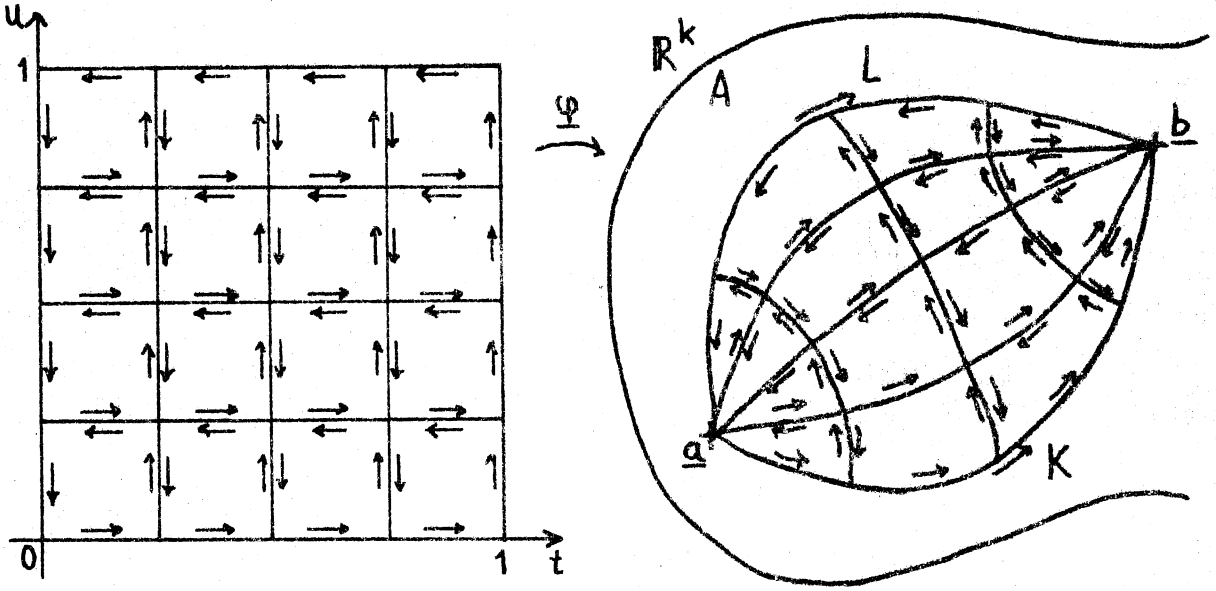
④ For enhver kompakt delmængde B af A findes et tal $\rho > 0$, således at enhver kugle med centrum i B og radius ρ tilhører en af mængderne G_i. Dette vises på følgende måde. Da B er kompakt og er overdækket med de åbne mængder G_i, findes indices $i_1, \cdots, i_p \in I$, således at $B \subseteq G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_p}$. For hvert $j \in \{1, \cdots, p\}$ er $d_j(\underline{x}) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^k \setminus G_{i_j})$ en kontinuert funktion på $\mathbb{R}^k$. Altså er også $d(\underline{x}) = \max\{d_1(\underline{x}), \cdots, d_p(\underline{x})\}$ en kontinuert funktion på $\mathbb{R}^k$. For ethvert $\underline{x} \in B$ er $d(\underline{x}) > 0$. Da B er kompakt, har restriktionen af funktionen $d(\underline{x})$ til B en mindste værdi ρ. Dette ρ opfylder det forlangte.

⑤ Definitionen af $v(K)$ i ② udvides nu til vilkårlige kurver K i A således. Hvis K: $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, er en kurve i A, er $B = \underline{\varphi}([\alpha, \beta])$ en kompakt delmængde af A. Ved brug af ④ og den uniforme kontinuitet af $\underline{\varphi}$ ses, at der findes en inddeling af $[\alpha, \beta]$ ved delepunkter $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, således at hver af kurverne $\underline{x} = \underline{\varphi}(t), t \in [t_{j-1}, t_j]$, til-

hører en af mængderne G_i. Vi sætter $v(K) = v(K_1)+\cdots+v(K_n)$. Dette er en gyldig definition. Thi for to inddelinger af $[\alpha,\beta]$ af den omhandlede art fås samme sum. For begge bliver summen nemlig ifølge ③ lig med summen svarende til den inddeling af $[\alpha,\beta]$, der fås ved at benytte samtlige delepunkter fra de to inddelinger.

⑥ Af definitionen fremgår, at hvis en kurve K i A er sammensat af kurverne $K_1,\cdots,K_n$, gælder $v(K) = v(K_1)+\cdots+v(K_n)$.

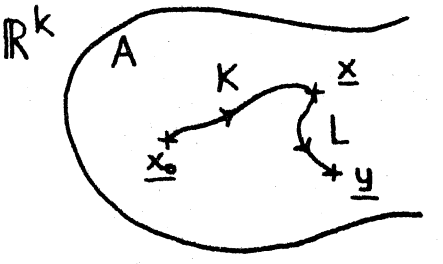
⑦ For to kurver K og L i A med samme begyndelsespunkt $\underline{a}$ og samme slutpunkt $\underline{b}$ gælder $v(K) = v(L)$. Godtgørelsen heraf er det springende punkt i hele beviset. Vi kan tænke os K og L



bestemt ved parameterfremstillinger $\underline{x} = \underline{\varphi}(t,0), t \in [0,1]$, og $\underline{x} = \underline{\varphi}(t,1), t \in [0,1]$, hvor $\underline{\varphi}$ er en kontinuert afbildning af $[0,1]\times[0,1]$ ind i A. Denne udvides til en kontinuert afbildning $\underline{\varphi}$ af $[0,1]\times[0,1]$ ind i A, således at $\underline{\varphi}(0,u) = \underline{a}$ og $\underline{\varphi}(1,u) = \underline{b}$ for alle

$u \in [0,1]$. Billedmængden $B = \underline{\varphi}([0,1]\times[0,1])$ er en kompakt delmængde af A. Ved brug af ④ og den uniforme kontinuitet af $\underline{\varphi}$ ses, at vi kan vælge n så stor, at billedet af hvert af kvadraterne $Q_{l,m} = \left[\frac{l-1}{n},\frac{l}{n}\right]\times\left[\frac{m-1}{n},\frac{m}{n}\right]$, $l,m \in \{1,\cdots,n\}$, ved $\underline{\varphi}$ tilhører en af mængderne G_i. Lad $K_{l,m}$ betegne den lukkede kurve, der er billede ved $\underline{\varphi}$ af randen af $Q_{l,m}$ taget med positiv omløbsretning. Da $K_{l,m}$ tilhører en af mængderne G_i, er $v(K_{l,m}) = 0$. På den anden side er summen af samtlige $v(K_{l,m})$ lig med $v(K) - v(L)$, idet bidragene fra de kurver, der svarer til kvadratsiderne i det indre af $[0,1]\times[0,1]$, parvis hæver hinanden, bidragene fra de kurver, der svarer til de lodrette kvadratsider på randen af $[0,1]\times[0,1]$, alle er 0 [disse sider afbildes i $\underline{a}$ eller $\underline{b}$], bidragene fra de kurver, der svarer til de vandrette kvadratsider på $[0,1]\times\{0\}$, har summen $v(K)$, og bidragene fra de kurver, der svarer til de vandrette kvadratsider på $[0,1]\times\{1\}$, har summen $-v(L)$. Altså gælder $v(K) - v(L) = 0$.

⑧ Nu vælges et fast punkt $\underline{x}_0 \in A$, og vi definerer F på A derved, at $F(\underline{x})$ for ethvert $\underline{x} \in A$ er værdien af $v(K)$ for en kurve K i A med begyndelsespunkt $\underline{x}_0$ og slutpunkt $\underline{x}$. Ifølge ⑦ er dette en gyldig definition. For to punkter $\underline{x},\underline{y} \in A$ kan vi, hvis K er en kurve i A med begyndelsespunkt $\underline{x}_0$ og slutpunkt $\underline{x}$ og L en kurve i A med begyndelsespunkt $\underline{x}$ og slutpunkt $\underline{y}$, som kurve i A med begyndelsespunkt $\underline{x}_0$ og



slutpunkt $\underline{y}$ benytte $K + L$. Vi ser herved, at $F(\underline{y}) = v(K+L) = v(K) + v(L) = F(\underline{x}) + v(L)$, altså $F(\underline{y}) - F(\underline{x}) = V(L)$. Hvis $\underline{x}$ og $\underline{y}$ tilhører samme mængde G_i, kan vi, da mængderne G_i er forudsat sammenhængende, vælge L i G_i. Ifølge ② gælder da $v(L) = F_i(\underline{y}) - F_i(\underline{x})$. Følgelig er $F(\underline{x}) - F_i(\underline{x}) = F(\underline{y}) - F_i(\underline{y})$, hvilket viser, at restriktionen af F til G_i afviger fra F_i med en konstant.□

Ved hjælp af foranstående sætning er vi nu i stand til at afrunde teorien for differentialformer, idet vi kan vise:

Den fundne nødvendige betingelse for, at en C^1-differentialform ω i en mængde A er eksakt, nemlig at formen er lukket, er også tilstrækkelig, når blot A er enkelt sammenhængende.

Bevis. Antag, at ω er en lukket C^1-form i en enkelt sammenhængende mængde A. Lad $\{G_i | i \in I\}$ være systemet af åbne intervaller, der er indeholdt i A. Da er A foreningsmængden af mængderne G_i, og hvert G_i er sammenhængende. I hvert G_i er ω eksakt. Lad F_i være en stamfunktion for ω i G_i. For vilkårlige $i_1, i_2 \in I$, for hvilke $G_{i_1} \cap G_{i_2} \neq \emptyset$, er $G_{i_1} \cap G_{i_2}$ et interval, og restriktionerne af F_{i_1}

og F_{i_2} til $G_{i_1} \cap G_{i_2}$ er stamfunktioner for ω i $G_{i_1} \cap G_{i_2}$, og har altså en konstant differens. Altså findes en funktion F på A, hvis restriktion til hvert G_i afviger fra F_i med en konstant. Et sådant F er åbenbart en stamfunktion for ω.□

En åben, konveks mængde A i $\mathbb{R}^k$ er enkelt sammenhængende. Thi en kontinuert afbildning $\varphi\colon [0,1] \times \{0,1\} \to A$, for hvilken $\varphi(0,0) = \varphi(0,1) = a$, $\varphi(1,0) = \varphi(1,1) = b$, udvides til en kontinuert afbildning $\varphi\colon [0,1] \times [0,1] \to A$, for hvilken $\varphi(0,u) = a$, $\varphi(1,u) = b$ for alle $u \in [0,1]$, ved fastsættelsen

$$\varphi(t,u) = (1-u)\varphi(t,0) + u\,\varphi(t,1).$$

Eksempel 7. Et eksempel på en åben, sammenhængende mængde, der ikke er enkelt sammenhængende, er for $k = 2$ mængden $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. Thi vi har jo i eksempel 5 angivet en lukket differentialform i $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$, der ikke er eksakt. For $k = 3$ er mængden $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid (x,y) = (0,0)\}$, altså rummet eksklusive z-aksen, et eksempel på en åben, sammenhængende mængde, der ikke er enkelt sammenhængende. Dette ses ved betragtning af formen

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy + 0\,dz.$$

Derimod er mængden $\mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}$, som man ret let kan vise, enkelt sammenhængende.

Opgaver. 1. Udregn kurveintegralet

$$\int_K (x+2y)dx + (y-2x)dy,$$

idet K er ellipsen $(x,y) = (4\cos t, 3\sin t), t \in [0,2\pi]$.

2. Udregn kurveintegralet

$$\int_K (x^2-y^2)dx - (x+y)dy,$$

dels når K er ellipsebuen $(x,y) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0,\frac{1}{2}\pi]$, dels når K er dennes korde $(x,y) = (a-at,bt), t \in [0,1]$.

3. Vis, at differentialformen

$$\omega = \left(\frac{-2x}{2-x^2-2y^2} + \frac{-x}{\sqrt{2-x^2-2y^2}}\right)dx + \left(\frac{-4y}{2-x^2-2y^2} + \frac{-2y}{\sqrt{2-x^2-2y^2}}\right)dy$$

er eksakt i mængden $\{(x,y) \mid x^2+2y^2 < 2\}$, og find den stamfunktion, der i punktet $(1,0)$ har værdien 0.

4. Vis, at differentialformen

$$\omega = \frac{x}{(x-y)^2}dx - \frac{x^2}{y(x-y)^2}dy$$

er eksakt i ethvert af de ved linierne $x = y$ og $y = 0$ bestemte vinkelrum.

Find samtlige stamfunktioner i hvert af disse vinkelrum.

5. Vis, at differentialformen

$$\omega = 2xz\exp(x^2+y^2)dx + 2yz\exp(x^2+y^2)dy + \exp(x^2+y^2)dz$$

er eksakt i $\mathbb{R}^3$, og find en stamfunktion.

6. Vis, at differentialformen $\omega = \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{x_1^2+\cdots+x_k^2}dx_j$

er eksakt i mængden $\mathbb{R}^k \setminus \{(0,\cdots,0)\}$, og find en stamfunktion.

7. Lad L og M være to C^1-funktioner på mængden $\{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$, der opfylder betingelsen $L'_y(x,y) = M'_x(x,y)$. Idet K(r) betegner cirklen $(x,y) = (r\cos t, r\sin t), t \in [0,2\pi]$, skal det vises, at kurveintegralet

$$\int_{K(r)} L(x,y)dx + M(x,y)dy$$

er uafhængigt af r.

*8. Vis, at differentialformen

$$\omega = -\frac{y(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}dx + \frac{x(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}dy$$

er lukket, men ikke eksakt, på mængden $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$.

*9. Vis, at differentialformen

$$\omega = -\frac{2xy}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}dx + \frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}dy$$

er eksakt på mængden $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ y = 0\}$.

*10. Vis, at mængden $\mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}$ er enkelt sammenhængende.

11. Bestem de C^1-funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for hvilke differenitalformen

$$[2x+y\ f(y)]\,dx + [3y^2+2x(f(y)+y^3)]\,dy$$

er eksakt.

§ 49. Eksistens- og entydighedssætning for sædvanlige differentialligningssystemer af første orden.

Metoder til løsning af de mangfoldige typer af differentialligninger man møder i forbindelse med geometriske og fysiske problemer udvikledes i løbet af 17-hundredtallet bl.a. af Johann Bernoulli, Euler, Lagrange. Vi har i § 31 omtalt de simpleste tilfælde. En almen teori, omfattende eksistens- og entydighedssætninger, blev først udviklet af Cauchy og videre udformet gennem undersøgelser i løbet af 18-hundredtallet bl.a. af R. Lipschitz og E. Picard.

Sædvanligt differentialligningssystem af første orden. Med V betegnes enten $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$ med normen

$$\|\underline{x}\| = \max\{|x_1|,\cdots,|x_k|\}, \qquad \underline{x} = (x_1,\cdots,x_k) \in V.$$

I rummet $\mathbb{R}\times V$ indfører vi den tilsvarende norm

$$\|(t,\underline{x})\| = \max\{|t|,\|\underline{x}\|\}, \qquad t \in \mathbb{R},\ \underline{x} \in V.$$

Lad der være givet en åben mængde Ω i $\mathbb{R}\times V$ og en kontinuert afbildning $\underline{f}\colon \Omega \to V$, altså en kontinuert funktion

$$\underline{f}(t,\underline{x}) = (f_1(t,x_1,\cdots,x_k),\cdots,f_k(t,x_1,\cdots,x_k))$$

defineret på Ω og med værdier i V. Det drejer sig om at bestemme differentiable funktioner $\underline{\varphi}\colon J \to V$, hvor $J \subseteq \mathbb{R}$ betegner et (begrænset eller ubegrænset, åbent, halvåbent eller afsluttet) interval, altså dif-

ferentiable funktioner

$$\underline{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_k(t))$$

defineret på et interval J og med værdier i V, således at der for alle $t \in J$ gælder $(t, \underline{\varphi}(t)) \in \Omega$ og

$$\underline{\varphi}'(t) = \underline{f}(t, \underline{\varphi}(t)),$$

i koordinater

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_k(t)) \\ \cdots \\ \varphi_k'(t) = f_k(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_k(t)), \end{cases}$$

Denne opgave skrives kort

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x}) \quad \text{eller} \quad \underline{x}' = \underline{f}(t, \underline{x}),$$

i koordinater

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \cdots, x_k) \\ \cdots \\ \dfrac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, \cdots, x_k) \end{cases} \qquad \text{eller} \qquad \begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \cdots, x_k) \\ \cdots \\ x_k' = f_k(t, x_1, \cdots, x_k) \end{cases}$$

og man taler om en sædvanlig vektordifferentialligning eller et sædvanligt differentialligningssystem af første orden, idet ordet "sædvanlig" refererer til, at der kun er en "uafhængig variabel" t, og ordene "af første orden" refererer til, at der kun optræder afledede af første orden. Enhver funktion $\underline{\varphi}$ med de nævnte egenskaber kaldes en løsning eller et integral til vektordifferentialligningen.

For enhver løsning $\underline{\varphi}: J \to V$ er $\underline{\varphi}'$ kontinuert. Dette følger af, at $\underline{\varphi}'(t) = \underline{f}(t,\underline{\varphi}(t))$.

Hvis $\underline{\varphi}: J \to V$ er en løsning, er restriktionen af $\underline{\varphi}$ til et vilkårligt delinterval af J naturligvis også en løsning til vektordifferentialligningen. En løsning $\underline{\varphi}: J \to V$ kaldes maksimal, hvis den ikke er ægte restriktion af en anden løsning, altså hvis der ikke findes nogen løsning defineret på en ægte udvidelse af J, der på J stemmer overens med $\underline{\varphi}$.

Geometrisk fortolkning. I rummet $\mathbb{R}\times V$ kan vektordifferentialligningen $\underline{x}' = \underline{f}(t,\underline{x})$ fortolkes på følgende måde. Ud fra hvert punkt $(t,\underline{x}) \in \Omega$ afsættes vektoren $(1,\underline{f}(t,\underline{x}))$. Herved fås et vektorfelt i Ω. Det drejer sig da om at bestemme de kurver i Ω, der har en parameterfremstilling af formen $(t,\underline{\varphi}(t))$, $t \in J$, og som i hvert af deres punkter tangerer den i punktet anbragte feltvektor.

Omskrivning til integralligning. Hvis $\underline{\varphi}: J \to V$ er en løsning til vektordifferentialligningen og t_o et punkt af J, i hvilket $\underline{\varphi}(t_o) = \underline{x}_o$, finder vi ved integration af

$$\underline{\varphi}'(t) = \underline{f}(t,\underline{\varphi}(t)), \quad t \in J,$$

at

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_o + \int_{t_o}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau, \quad t \in J.$$

Hvis omvendt $\underline{\varphi}: J \to V$ for et givet punkt $(t_o,\underline{x}_o) \in \Omega$ med $t_o \in J$ er en kontinuert funktion, for hvilken $(t,\underline{\varphi}(t)) \in \Omega$ for $t \in J$, og som tilfredsstiller denne

integralligning, har man $\underline{\varphi}(t_o) = \underline{x}_o$, og $\underline{\varphi}$ vil være differentiabel, da ligningens højre side er det, og vil tilfredsstille vektordifferentialligningen.

Eksempel 1. Hvis $\Omega = I \times V$, hvor $I \subseteq \mathbb{R}$ er et åbent interval, og $\underline{f}(t,\underline{x})$ er uafhængig af $\underline{x}$, drejer det sig om en ligning

$$\underline{x}' = \underline{g}(t), \quad t \in I,$$

hvor $\underline{g}(t) = (g_1(t),\cdots,g_k(t))$ er en kontinuert funktion på I, eller i koordinater om ligningssystemet

$$\begin{cases} x_1' = g_1(t) \\ \cdots \\ x_k' = g_k(t) \end{cases} \qquad t \in I.$$

Enhver løsning er da restriktion af en løsning $\underline{\varphi}: I \to V$, og samtlige maksimale løsninger er bestemt ved

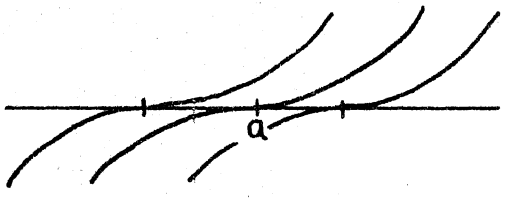
$$\underline{\varphi}(t) = \int_{t_o}^{t} \underline{g}(\tau)d\tau + \underline{x}_o$$

eller

$$\varphi_1(t) = \int_{t_o}^{t} g_1(\tau)d\tau + x_{o1}, \cdots, \varphi_k(t) = \int_{t_o}^{t} g_k(\tau)\,d\tau + x_{ok},$$

hvor t_o er et vilkårligt punkt i I og $\underline{x}_o = (x_{o1},\cdots,x_{ok})$ et vilkårligt punkt i V.

Eksempel 2. Vi vælger $V = \mathbb{R}$ og $\Omega = \mathbb{R} \times V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ og betragter funktionerne $\varphi(t) = (t-a)^3$ på $\mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R})$.

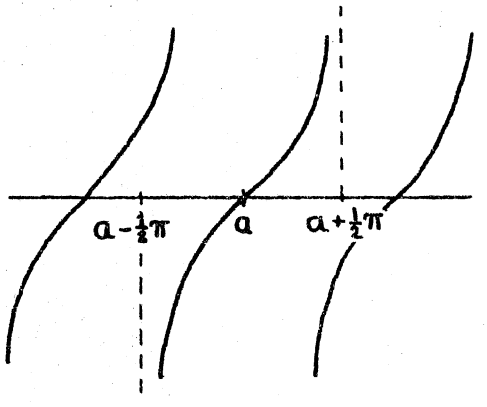


For hver af disse gælder $\varphi'(t) = 3(t-a)^2 = 3\,\varphi(t)^{\frac{2}{3}}$. Disse funktioner er altså løsninger til differentialligningen $x' = f(t,x) = 3x^{\frac{2}{3}}$, men denne har tillige som løsninger alle funktioner

$$\varphi(t)=\begin{cases}0 & t \le a\\ (t-a)^3 & t \ge a,\end{cases}\qquad \varphi(t)=\begin{cases}(t-a)^3 & t \le a\\ 0 & t \ge a,\end{cases}\qquad \varphi(t)=\begin{cases}(t-a_1)^3 & t \le a_1\\ 0 & a_1 \le t \le a_2\\ (t-a_2)^3 & t \ge a_2\end{cases}$$

samt $\varphi(t) = 0$. Det vil fremgå af det følgende, at differentialligningen ikke har andre løsninger end disse og deres restriktioner. Man ser, at der for ethvert punkt (t_o,x_o) findes uendelig mange løsninger $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for hvilke $\varphi(t_o) = x_o$. Man kan let danne mangfoldige eksempler af denne art ved at vælge passende kurvesystemer.

Eksempel 3. Vi vælger atter $V = \mathbb{R}$ og $\Omega = \mathbb{R}\times V = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ og betragter nu funktionerne $\varphi(t) = \tan(t-a), |t-a| < \frac{1}{2}\pi$ $(a \in \mathbb{R})$. For hver af disse gælder $\varphi'(t)=\dfrac{1}{\cos^2(t-a)} = 1 + \tan^2(t-a) = 1 + \varphi(t)^2$.



Disse funktioner er altså løsninger til differentialligningen $x' = f(t,x) = 1 + x^2$. Det vil fremgå af det følgende, at differentialligningen ikke har andre løsninger end disse og deres restriktioner. Bemærk, at til trods for at $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, har hver løsning et begrænset definitionsinterval.

Lipschitz betingelse. En funktion $\underline{f}(t,\underline{x})$: $\Omega \to V$ på en åben mængde Ω i $\mathbb{R}\times V$ siges i en delmængde Ξ af Ω at opfylde en Lipschitz betingelse (underforstået: med hensyn til $\underline{x}$), hvis der findes et til $C \geq 0$ således, at der for vilkårlige punkter $(t,\underline{x}_1) \in \Xi$ og $(t,\underline{x}_2) \in \Xi$ med samme t gælder

$$\|\underline{f}(t,\underline{x}_2)-\underline{f}(t,\underline{x}_1)\| \leq C\|\underline{x}_2-\underline{x}_1\| .$$

En funktion $\underline{f}(t,\underline{x})$: $\Omega \to V$ på en åben mængde Ω i $\mathbb{R}\times V$ siges lokalt at opfylde en Lipschitz betingelse, hvis der for ethvert $(t_o,\underline{x}_o) \in \Omega$ findes en omegn $\Xi \subseteq \Omega$ af $(t_o,\underline{x}_o)$, i hvilken funktionen opfylder en Lipschitz betingelse.

Hvis $V = \mathbb{R}^k$, og $\underline{f}(t,\underline{x}) = \underline{f}(t,x_1,\cdots,x_k)$ er kontinuert på Ω og har partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_k}$ med hensyn til $x_1,\cdots,x_k$, der ligeledes er kontinuerte på Ω, da opfylder $\underline{f}$ lokalt en Lipschitz betingelse.

Bevis. Vi vil vise, at $\underline{f}$ opfylder en Lipschitz betingelse i enhver i Ω indeholdt mængde

$$\Xi = \{(t,\underline{x}) \mid |t-t_o| \leq a, \ \|\underline{x}-\underline{x}_o\| \leq b\}.$$

Da Ξ er kompakt, er hver af funktionerne $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|$ begrænset på Ξ. Lad A være $\geq$ supremum for alle disse funktioner på Ξ. Idet $(t,\underline{x}_1) \in \Xi$ og $(t,\underline{x}_2) \in \Xi$, vil liniestykket med parameterfremstillingen $(t,\underline{x}_1+\theta(\underline{x}_2-\underline{x}_1))$, $\theta \in [0,1]$, tilhøre Ξ. Ifølge middelværdisætningen gælder for hvert $i = 1,\cdots,k$

$$f_i(t,\underline{x}_2) - f_i(t,\underline{x}_1) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x_{2j}-x_{1j}),$$

hvor de afledede er taget i et punkt af liniestykket. Altså gælder

$$|f_i(t,\underline{x}_2)-f_i(t,\underline{x}_1)| \leq \sum_{j=1}^{k} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| |x_{2j}-x_{1j}| \leq k\,A\|\underline{x}_2-\underline{x}_1\|.$$

Følgelig gælder

$$\|\underline{f}(t,\underline{x}_2) - \underline{f}(t,\underline{x}_1)\| \leq kA\|\underline{x}_2-\underline{x}_1\|.$$

Altså opfylder $\underline{f}$ i Ξ en Lipschitz betingelse, nemlig med konstanten kA. ∎

Hvis $V = \mathbb{C}^k$, og $\underline{f}(t,\underline{x})$ er kontinuert på Ω og, opfattet som funktion af $(t,\mathrm{Re}\ x_1,\mathrm{Im}\ x_1,\cdots,\mathrm{Re}\ x_k,\mathrm{Im}\ x_k)$, har partielle afledede med hensyn til $\mathrm{Re}\ x_1,\mathrm{Im}\ x_1,\cdots,\mathrm{Re}\ x_k,\mathrm{Im}\ x_k$, der ligeledes er kontinuerte på Ω, da opfylder $\underline{f}$ lokalt en Lipschitz betingelse.

Bevis. Vi vil vise, at $\underline{f}$ opfylder en Lipschitz betingelse i enhver i Ω indeholdt mængde

$$\Xi = \{(t,\underline{x}) \mid |t-t_o| \leq a, \|\underline{x}-\underline{x}_o\| \leq b\}.$$

Da Ξ er kompakt, er hver af funktionerne $\left|\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,f_i}{\partial\,\mathrm{Re}\,x_j}\right|$, $\left|\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,f_i}{\partial\,\mathrm{Im}\,x_j}\right|$, $\left|\frac{\partial\,\mathrm{Im}\,f_i}{\partial\,\mathrm{Re}\,x_j}\right|$, $\left|\frac{\partial\,\mathrm{Im}\,f_i}{\partial\,\mathrm{Im}\,x_j}\right|$ begrænset på Ξ. Lad A være $\geq$ supremum for alle disse funktioner på Ξ. Idet $(t,\underline{x}_1) \in \Xi$ og $(t,\underline{x}_2) \in \Xi$, gælder ifølge middelværdisætningen for ethvert $i = 1,\cdots,k$

$$|\mathrm{Re}\ f_i(t,\underline{x}_2)-\mathrm{Re}\ f_i(t,\underline{x}_1)| \leq 2k\,A\|\underline{x}_2-\underline{x}_1\|$$

$$|\mathrm{Im}\ f_i(t,\underline{x}_2)-\mathrm{Im}\ f_i(t,\underline{x}_1)| \leq 2k\,A\|\underline{x}_2-\underline{x}_1\|$$

og altså

$$|f_i(t,\underline{x}_2)-f_i(t,\underline{x}_1)| \leq 4k\,A\|\underline{x}_2-\underline{x}_1\|.$$

Følgelig gælder

$$\| \underline{f}(t,\underline{x}_2)-\underline{f}(t,\underline{x}_1)\| \leq 4k\, A\|\underline{x}_2-\underline{x}_1\| .$$

Altså opfylder $\underline{f}$ i Ξ en Lipschitz betingelse, nemlig med konstanten $4k\,A$. ∎

Hovedsætning. Når $\underline{f}(t,\underline{x})$: $\Omega \to V$ er kontinuert på en åben mængde Ω i $\mathbb{R}\times V$ og lokalt opfylder en Lipschitz betingelse, da findes der for ethvert punkt $(t_o,\underline{x}_o) \in \Omega$ en og kun een maksimal løsning $\underline{\varphi}$: $J \to V$ til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x}),$$

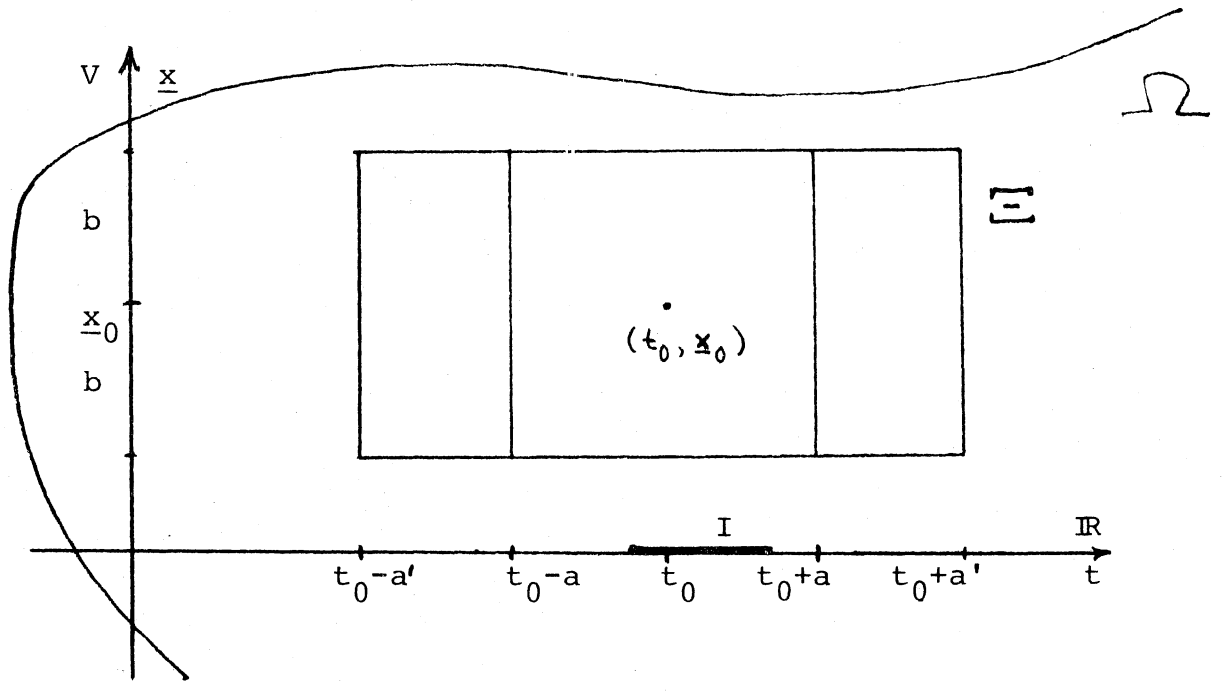
for hvilken $t_o \in J$ og $\underline{\varphi}(t_o) = x_o$. Enhver maksimal løsning $\underline{\varphi}$: $J \to V$ har et åbent definitionsinterval J, og enhver løsning til differentialligningen er restriktion af en maksimal løsning.

Bevis. Undervejs i beviset får vi brug for, at der for enhver kontinuert funktion $\underline{h}(\tau) = (h_1(\tau), \cdots, h_k(\tau))$: $[\alpha,\beta] \to V$ gælder

$$\left\| \int_\alpha^\beta \underline{h}(\tau)d\tau \right\| = \max \left\{ \left| \int_\alpha^\beta h_1(\tau)d\tau \right|, \cdots, \left| \int_\alpha^\beta h_k(\tau)d\tau \right| \right\}$$

$$\leq \max \left\{ \int_\alpha^\beta |h_1(\tau)|\, d\tau, \cdots, \int_\alpha^\beta |h_k(\tau)|\, d\tau \right\} \leq \int_\alpha^\beta \| \underline{h}(\tau)\|\, d\tau .$$

① For et vilkårligt punkt $(t_o,\underline{x}_o) \in \Omega$ vælger vi en omegn $\Xi = \{(t,\underline{x}) \mid |t-t_o| \leq a',\ \|\underline{x}-\underline{x}_o\| \leq b\} \subset \Omega$, hvori $\underline{f}$ opfylder en Lipschitz betingelse, lad os sige med konstant C. Vi vælger endvidere et tal $k \in]0,1[$.



Idet $\sup_{(t,\underline{x})\in\Xi} \|\underline{f}(t,\underline{x})\| = M$, sættes $a = \min\left\{a', \frac{b}{M}, \frac{k}{C}\right\}$.

[Her skal $\frac{b}{M}$ læses som $+\infty$, hvis $M = 0$, og $\frac{k}{C}$ som $+\infty$, hvis $C = 0$].

Vi betragter nu et vilkårligt interval $I \subseteq [t_0-a, t_0+a]$, der indeholder t_0, og sætter

$$S = C^0(I, \{\underline{x} \in V \mid \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \leq b\}).$$

Med afstandsdefinitionen

$$\text{dist}(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2) = \sup_{t\in I} \|\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_2(t)\|$$

bliver (S,dist) et fuldstændigt metrisk rum, da V er fuldstændigt og $\{\underline{x} \in V \mid \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \leq b\}$ er en afsluttet delmængde af V. For hvert $\varphi \in S$ kan vi danne funktionen $\underline{\psi} = T(\underline{\varphi})$, hvor $\underline{\psi}: I \to V$ er bestemt ved

$$\underline{\Psi}(t) = \underline{x}_o + \int_{t_o}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau, \qquad t \in I.$$

For ethvert $t \in I$ gælder

$$\|\underline{\Psi}(t)-\underline{x}_o\| = \left\| \int_{t_o}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau \right\| \le \left| \int_{t_o}^{t} \|\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))\| d\tau \right|$$

$$\le M|t-t_o| \le Ma \le b.$$

Funktionen $\underline{\Psi} = T(\underline{\varphi})$ tilhører altså også S, d.v.s. T er en afbildning af det fuldstændige metriske rum S ind i sig selv. Denne afbildning er en kontraktion. Thi for to vilkårlige funktioner $\underline{\varphi}_1 \in S$ og $\underline{\varphi}_2 \in S$ fås, idet vi sætter $\underline{\Psi}_1 = T(\underline{\varphi}_1)$ og $\underline{\Psi}_2 = T(\underline{\varphi}_2)$, for ethvert $t \in I$

$$\begin{aligned}
\|\underline{\Psi}_1(t)-\underline{\Psi}_2(t)\| &= \left\| \int_{t_o}^{t} \left[\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))-\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_2(\tau))\right] d\tau \right\| \\
&\le \left| \int_{t_o}^{t} \|\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))-\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_2(\tau))\| \, d\tau \right| \\
&\le \left| \int_{t_o}^{t} C\|\underline{\varphi}_1(\tau)-\underline{\varphi}_2(\tau)\| \, d\tau \right| \\
&\le C \sup_{t\in I} \|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{\varphi}_2(t)\| \, a \\
&\le k \, \mathrm{dist}(\underline{\varphi}_1,\underline{\varphi}_2),
\end{aligned}$$

og følgelig er

$$\mathrm{dist}(\underline{\Psi}_1,\underline{\Psi}_2) \le k \, \mathrm{dist}(\underline{\varphi}_1,\underline{\varphi}_2).$$

Af fixpunktsætningen fra § 43 fremgår derfor, at der findes en og kun een funktion $\underline{\varphi} \in S$, for hvilken $T(\underline{\varphi}) = \underline{\varphi}$, d.v.s. for hvilken

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_o + \int_{t_o}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau, \qquad t \in I.$$

Vi har således vist: <u>På ethvert interval</u> $I \subseteq [t_o-a, t_o+a]$, <u>for hvilket</u> $t_o \in I$, <u>findes der en og kun een løsning</u> $\underline{\varphi}$ <u>til differentialligningen, for hvilken</u> $\underline{\varphi}(t_o) = \underline{x}_o$ <u>og</u> $\|\underline{\varphi}(t) - \underline{x}_o\| \leq b$ <u>for alle</u> $t \in I$.

② Lad nu $\underline{\varphi}_1 : J_1 \to V$ og $\underline{\varphi}_2 : J_2 \to V$ være to løsninger til differentialligningen, for hvilke $t_o \in J_1 \cap J_2$ og $\underline{\varphi}_1(t_o) = \underline{x}_o$ og $\underline{\varphi}_2(t_o) = \underline{x}_o$. Vi vil vise, at $\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t)$ for alle $t \in J_1 \cap J_2$.

Hvis $J_1 \cap J_2$ kun består af t_o, er dette klart. Hvis $J_1 \cap J_2$ er et interval, vælger vi, idet a og b har samme betydning som ovenfor, et $\varepsilon_o \in]0,a]$, således at

$$\left.\begin{array}{l} \|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{x}_o\| \leq b \\ \|\underline{\varphi}_2(t)-\underline{x}_o\| \leq b \end{array}\right\} \text{ for alle } t \in J_1 \cap J_2 \cap [t_o-\varepsilon_o, t_o+\varepsilon_o].$$

I intervallet $I = J_1 \cap J_2 \cap [t_o-\varepsilon_o, t_o+\varepsilon_o]$ må da gælde $\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t)$. For ethvert $t' \in J_1 \cap J_2$, for hvilket $\underline{\varphi}_1(t') = \underline{\varphi}_2(t')$, findes på tilsvarende måde et $\varepsilon' > 0$, således at $\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t)$ for alle $t \in J_1 \cap J_2 \cap [t'-\varepsilon', t'+\varepsilon']$. Mængden

$$A = \{t \in J_1 \cap J_2 \mid \underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t)\}$$

er således en relativt åben delmængde af $J_1 \cap J_2$. Da $\underline{\varphi}_1$ og $\underline{\varphi}_2$ er kontinuerte, er A også en relativt afsluttet delmængde af $J_1 \cap J_2$. De eneste delmængder af et interval, der er både relativt åbne og relativt afsluttede, er imidlertid ifølge karakteriseringen af intervaller i § 8 intervallet selv og $\emptyset$. Da A

ikke er $\emptyset$ (vi har jo $t_0 \in A$), må A altså være hele $J_1 \cap J_2$.

Samtlige løsninger $\underline{\varphi}_0 : J_0 \to V$ til differentialligningen defineret på intervaller J_0, der indeholder t_0, og for hvilke $\underline{\varphi}_0(t_0) = \underline{x}_0$, er således restriktioner af en og samme funktion $\underline{\varphi}: J \to V$ defineret på foreningsmængden J af alle J_0, der åbenbart er et interval. Denne funktion $\underline{\varphi}: J \to V$ er åbenbart en løsning, og efter den måde, hvorpå den er dannet, er den maksimal, og enhver løsning $\underline{\varphi}_0 : J_0 \to V$ med $t_0 \in J_0$ og $\underline{\varphi}_0(t_0) = \underline{x}_0$ er en restriktion af den. Den er åbenbart den eneste maksimale løsning gennem $(t_0, \underline{x}_0)$. Intervallet J må være åbent. Thi blandt løsningerne gennem et vilkårligt punkt $(t_1, \underline{x}_1) \in \Omega$ findes jo funktioner defineret på et interval $[t_1 - a_1, t_1 + a_1]$.

Hermed er hovedsætningen bevist. ∎

Eksempel 4. For den i eksempel 2 betragtede differentialligning $x' = f(t,x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ opfylder funktionen $f(t,x)$ i hver af halvplanerne $\{(t,x) \mid x > 0\}$ og $\{(t,x) \mid x < 0\}$ lokalt en Lipschitz betingelse [idet $\frac{\partial f}{\partial x}$ eksisterer og er kontinuert i disse halvplaner]. Derimod opfylder $f(t,x)$ ikke lokalt en Lipschitz betingelse i hele planen. I halvplanen $\{(t,x) \mid x > 0\}$ må funktionerne $x = (t-a)^3$, $t > a$ $(a \in \mathbb{R})$ være samtlige maksimale løsninger, og i halvplanen $\{(t,x) \mid x < 0\}$ må funktionerne $x = (t-a)^3$, $t < a$ $(a \in \mathbb{R})$ være samtlige maksimale løsninger. Heraf sluttes let, at de i eksempel 2 angivne løsninger og deres restriktioner er samtlige løsninger til differentialligningen.

Eksempel 5. For den i eksempel 3 betragtede differentialligning $x' = f(t,x) = 1 + x^2$ opfylder funktionen $f(t,x)$ i hele $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ lokalt en Lipschitz betingelse. Heraf sluttes let, at de i eksempel 3 angivne løsninger og deres restriktioner er samtlige løsninger til ligningen.

Øvelse. Løsningens afhængighed af begyndelsesværdi og af ligningens højre side. Lad os betragte en differentialligning

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x}),$$

hvor $\underline{f}$ lokalt opfylder en Lipschitz betingelse. Ifølge hovedsætningen går der da gennem hvert punkt $(t_o,\underline{x}_o)$ af Ω en og kun een maksimal løsning $\underline{\varphi}$. Man kalder $\underline{x}_o$ begyndelsesværdien for $\underline{\varphi}$ svarende til det givne t_o. I visse forbindelser er det af betydning at vide, hvad der sker, hvis man ændrer begyndelsesværdien $\underline{x}_o$ lidt, eller ændrer ligningens højre side lidt, eller foretager begge ændringer samtidig. Vi vil indskrænke os til at udlede et resultat vedrørende forholdene i en omegn af $(t_o,\underline{x}_o)$ og under sådanne forudsætninger, at bevisførelsen bliver enklest mulig.

Foruden den givne ligning betragter vi en ligning

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}_1(t,\underline{x}),$$

hvor $\underline{f}_1\colon \Omega_1 \to V$ lokalt opfylder en Lipschitz betingelse. Vi antager, at $(t_o,\underline{x}_o) \in \Omega \cap \Omega_1$ og vælger en omegn

$$\Xi = \{(t,\underline{x}) \mid |t-t_o| \le a', \|\underline{x}-\underline{x}_o\| \le 2b\} \subset \Omega \cap \Omega_1,$$

hvori $\underline{f}$ og $\underline{f}_1$ hver for sig opfylder en Lipschitz betingelse, lad os sige med konstanter C og C_1. For det ovenfor benyttede tal $k \in]0,1[$ vælger vi $\frac{1}{2}$. Idet

$$\sup_{(t,\underline{x})\in\Xi} \|\underline{f}(t,\underline{x})\| = M \quad \text{og} \quad \sup_{(t,\underline{x})\in\Xi} \|\underline{f}_1(t,\underline{x})\| = M_1,$$

sætter vi

$$a = \min\left\{a', \frac{b}{M}, \frac{b}{M_1}, \frac{1}{2C}, \frac{1}{2C_1}\right\}.$$

Definitionsintervallet for den maksimale løsning $\underline{\varphi}$ til ligningen $\underline{x}' = \underline{f}(t,\underline{x})$ gennem $(t_o,\underline{x}_o)$ vil da ifølge beviset for hovedsætningen indeholde intervallet $[t_o-a,t_o+a]$, og der gælder $\|\underline{\varphi}(t)-\underline{x}_o\| \leq b$ for alle $t \in [t_o-a,t_o+a]$. Vælges et $\underline{x}_1$, så at $\|\underline{x}_1-\underline{x}_o\| \leq b$, vil definitionsintervallet for den maksimale løsning til ligningen $\underline{x}' = \underline{f}_1(t,\underline{x})$ gennem $(t_o,\underline{x}_1)$ ligeledes indeholde intervallet $[t_o-a,t_o+a]$, og vi har $\|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{x}_1\| \leq b$ og følgelig $\|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{x}_o\| \leq 2b$ for alle $t \in [t_o-a,t_o+a]$.

Som mål for ændringen af differentialligningen tager vi

$$\sup_{(t,\underline{x})\in\Xi} \|\underline{f}_1(t,\underline{x})-\underline{f}(t,x)\| = \rho,$$

og som mål for ændringen af løsningen tager vi

$$\sup_{t\in[t_o-a,t_o+a]} \|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{\varphi}(t)\| = \sigma.$$

For ethvert $t \in [t_o-a, t_o+a]$ finder vi

$$\underline{\varphi}_1(t)-\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_1 + \int_{t_o}^{t} \underline{f}_1(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))d\tau - \underline{x}_o - \int_{t_o}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau$$

$$= \underline{x}_1 - \underline{x}_o + \int_{t_o}^{t} \left[\underline{f}_1(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau)) - \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))\right] d\tau$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \left[\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau)) - \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))\right] d\tau,$$

hvoraf

$$\|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{\varphi}(t)\| \le \|\underline{x}_1-\underline{x}_o\| + \left|\int_{t_o}^{t} \|\underline{f}_1(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau)) - \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))\| d\tau\right|$$

$$+ \left|\int_{t_o}^{t} \|\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau)) - \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))\| d\tau\right|$$

$$\le \|\underline{x}_1-\underline{x}_o\| + \rho a + \left|\int_{t_o}^{t} C\|\underline{\varphi}_1(\tau)-\underline{\varphi}(\tau)\| d\tau\right|$$

$$\le \|\underline{x}_1-\underline{x}_o\| + \rho a + C\sigma a.$$

Følgelig gælder $\sigma \le \|\underline{x}_1-\underline{x}_o\| + a\rho + Ca\sigma$, og da $Ca \le \frac{1}{2}$ giver dette $\sigma \le 2\|\underline{x}_1-\underline{x}_o\| + 2a\rho$. Vi har altså

$$\|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{\varphi}(t)\| \le 2\|\underline{x}_1-\underline{x}_o\| + 2a\rho, \quad t \in [t_o-a, t_o+a].$$

Heraf ses: <u>Når $\|\underline{x}_1-\underline{x}_o\|$ og ρ begge er små, er ændringen $\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}(t)$ i løsningen lille på hele intervallet $[t_o-a, t_o+a]$</u>.

Hvis vi kun ændrer begyndelsesværdien, men ikke ligningen, falder leddet $2a\rho$ i vurderingen bort. Hvis vi kun ændrer ligningen, men ikke begyndelsesværdien, falder leddet $2\|\underline{x}_1-\underline{x}_o\|$ i vurderingen bort.

Opgaver. 1. Gør rede for, at højre side af differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

lokalt opfylder en Lipschitz betingelse, og find samtlige maksimale løsninger.

2. Gør rede for, at højre side af differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}, \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times]-1,1[,$$

lokalt opfylder en Lipschitz betingelse, og find samtlige maksimale løsninger.

3. Find en differentialligning

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

der som løsninger har følgende funktioner på $\mathbb{R}$:

$$x = a(1+\cos t) \qquad a \in [0,1],$$
$$x = b + \cos t, \qquad b \in]1,+\infty[,$$
$$x = c \qquad c \in]-\infty,0[.$$

Angiv samtlige maksimale løsninger til ligningen.

4. Lad I være et begrænset eller ubegrænset åbent interval på $\mathbb{R}$, og lad $f(t,x): I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, der lokalt opfylder en Lipschitz betingelse. Vis, at hvis $\varphi:]a,b[\to \mathbb{R}$ er en maksimal løsning til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),$$

og hvis $b \in I$, da gælder $\varphi(t) \to +\infty$ eller $\varphi(t) \to -\infty$ for $t \to b$ fra venstre.

§ 50. Løsning ved successive approksimationer.

Beviset for hovedsætningen ved hjælp af fixpunktsætningen viser, at den maksimale løsning $\underline{\varphi}$ til differentialligningen gennem punktet $(t_0,\underline{x}_0)$ i intervallet $[t_0-a,t_0+a]$ kan bestemmes ved successive approksimationer. Idet man går ud fra en vilkårlig kontinuert funktion $\underline{\varphi}_0: [t_0-a,t_0+a] \to \{\underline{x} \mid \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \leq b\}$ og successivt danner $\underline{\varphi}_1 = T(\underline{\varphi}_0), \underline{\varphi}_2 = T(\underline{\varphi}_1), \cdots$, vil følgen $\underline{\varphi}_0, \underline{\varphi}_1, \cdots, \underline{\varphi}_n, \cdots$ konvergere uniformt mod $\underline{\varphi}$ på $[t_0-a,t_0+a]$.

I almindelighed vil denne af Picard og andre behandlede metode kunne benyttes til bestemmelse af løsningen i et større interval. Vi vil vise dette i et særlig simpelt og vigtigt tilfælde.

Sætning. Hvis $\underline{f}(t,\underline{x})$ er kontinuert på $I*V$, hvor I er et begrænset eller ubegrænset åbent interval i $\mathbb{R}$, og $\underline{f}(t,\underline{x})$ i enhver mængde I_0*V, hvor I_0 er et begrænset, afsluttet delinterval af I, opfylder en Lipschitz betingelse, da har enhver maksimal løsning $\underline{\varphi}$ til differentialligningen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x})$$

definitionsintervallet I, og den maksimale løsning $\underline{\varphi}$ gennem et vilkårligt punkt $(t_0,\underline{x}_0) \in I*V$ kan findes ved successive approksimationer, idet man vælger en vilkårlig kontinuert funktion $\underline{\varphi}_0: I \to V$ og derefter definerer $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \cdots$ ved

$$\underline{\varphi}_n(t) = \underline{x}_o + \int_{t_o}^{t} \underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_{n-1}(\tau))d\tau, \quad t \in I;$$

<u>da vil</u> $\underline{\varphi}_n(t) \to \underline{\varphi}(t)$ <u>for</u> $n \to \infty$, <u>uniformt på ethvert begrænset, afsluttet delinterval</u> I_o <u>af</u> I.

<u>Bevis</u>. Vi kan nøjes med at betragte intervaller I_o, der indeholder t_o. Vi vælger et sådant. I mængden $I_o \times V$ opfylder $\underline{f}(t,\underline{x})$ en Lipschitz betingelse, lad os sige med konstanten C. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ og ethvert $t \in I_o$ gælder derfor

$$\|\underline{\varphi}_{n+1}(t) - \underline{\varphi}_n(t)\| = \left\| \int_{t_o}^{t} \left[\underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_n(\tau)) - \underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_{n-1}(\tau)) \right] d\tau \right\|$$

$$(*) \qquad \leq \left| \int_{t_o}^{t} \|\underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_n(\tau)) - \underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_{n-1}(\tau))\| \, d\tau \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_o}^{t} C\|\underline{\varphi}_n(\tau) - \underline{\varphi}_{n-1}(\tau))\| \, d\tau \right|.$$

Da $\underline{\varphi}_o$ og $\underline{\varphi}_1$ er kontinuerte, og I_o er begrænset og afsluttet, findes der et tal M, således at

$$\|\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_o(t)\| \leq M \quad \text{for alle} \quad t \in I_o.$$

Af $(*)$ fås derfor successivt, gældende for $t \in I_o$,

$$\|\underline{\varphi}_2(t) - \underline{\varphi}_1(t)\| \leq \left| \int_{t_o}^{t} CM d\tau \right| = CM|t-t_o|$$

$$\|\underline{\varphi}_3(t) - \underline{\varphi}_2(t)\| \leq \left| \int_{t_o}^{t} CCM|\tau - t_o| \, d\tau \right| = C^2 M \frac{|t-t_o|^2}{2!}$$

$$\cdots$$

$$\|\underline{\varphi}_{n+1}(t) - \underline{\varphi}_n(t)\| \leq \left| \int_{t_o}^{t} CC^{n-1} M \frac{|\tau - t_o|^{n-1}}{(n-1)!} d\tau \right| = C^n M \frac{|t-t_o|^n}{n!}$$

$$\cdots$$

Nu er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} C^n M \frac{|t-t_o|^n}{n!}$ konvergent for alle t [med summen $M\exp(C|t-t_o|)$] og uniformt konvergent på ethvert begrænset interval. Til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes altså et $n_o \in \mathbb{N}_o$, således at $\sum_{n=p}^{q-1} C^n M \frac{|t-t_o|^n}{n!} < \varepsilon$ for alle $t \in I_o$ og alle $p,q \in \mathbb{N}_o$ med $n_o \leq p < q$. Følgelig gælder

$$\begin{aligned}\|\underline{\varphi}_q(t)-\underline{\varphi}_p(t)\| &\leq \|\underline{\varphi}_q(t)-\underline{\varphi}_{q-1}(t)\| + \cdots + \|\underline{\varphi}_{p+1}(t)-\underline{\varphi}_p(t)\| \\ &\leq C^{q-1} M \frac{|t-t_o|^{q-1}}{(q-1)!} + \cdots + C^p M \frac{|t-t_o|^p}{p!} < \varepsilon\end{aligned}$$

for alle $t \in I_o$ og alle $p,q \in \mathbb{N}_o$ med $n_o \leq p < q$. Dette viser, at følgen $\underline{\varphi}_n(t), n = 0,1,2,\cdots$, er uniformt konvergent på I_o.

Idet vi betegner grænsefunktionen med $\underline{\varphi}(t)$, har vi for ethvert $t \in I_o$

$$\|\underline{f}(t,\underline{\varphi}(t))-\underline{f}(t,\underline{\varphi}_n(t))\| \leq C\|\underline{\varphi}(t)-\underline{\varphi}_n(t)\|.$$

Følgelig konvergerer $\underline{f}(t,\underline{\varphi}_n(t))$ mod $\underline{f}(t,\underline{\varphi}(t))$ uniformt på I_o. Vi får derfor

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}(t) = \lim_{n\to\infty} \underline{\varphi}_n(t) &= \underline{x}_o + \lim_{n\to\infty} \int_{t_o}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_{n-1}(\tau))d\tau \\ &= \underline{x}_o + \int_{t_o}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau,\end{aligned}$$

gældende for ethvert $t \in I$, idet vi blot vælger I_o således, at $t \in I_o$.

Hermed er vist, at $\underline{\varphi}$ er en løsning til differentialligningen, for hvilken $\underline{\varphi}(t_o) = \underline{x}_o$, og da dens definitionsinterval er I, er det åbenbart den maksimale løsning gennem $(t_o,\underline{x}_o)$.∎

§ 51. Eksistens- og entydighedssætning for sædvanlige differentialligningssystemer af højere orden.

Sædvanligt differentialligningssystem af højere orden. Idet $k_1, \cdots, k_s \in \mathbb{N}$, betegner vi med $V_r, r = 1, \cdots, s$, enten $\mathbb{R}^{k_r}$ eller $\mathbb{C}^{k_r}$ med normen

$$\|\underline{x}_r\| = \max\{|x_{r1}|, \cdots, |x_{rk_r}|\}, \underline{x}_r = (x_{r1}, \cdots, x_{rk_r}) \in V_r.$$

I alle V_r tænkes benyttet enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Hvor vi i det følgende opererer med $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, skal valget træffes i overensstemmelse hermed.

Lad der være givet en åben mængde Ω i $\mathbb{R} \times V_1 \times \cdots \times V_s$ samt kontinuerte funktioner $f_1, \cdots, f_s: \Omega \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, altså funktioner

$$f_r(t; \underline{x}_1; \cdots; \underline{x}_s) = f_r(t; x_{11}, \cdots, x_{1k_1}; \cdots; x_{s1}, \cdots, x_{sk_s}), r=1, \cdots, s, \quad /1$$

på Ω med værdier i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Det drejer sig om at bestemme funktioner $\varphi_1, \cdots, \varphi_s: J \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, hvor $J \subseteq \mathbb{R}$ betegner et (begrænset eller ubegrænset, åbent, halvåbent eller afsluttet) interval, således at φ_r er k_r gange differentiabel, og der for alle $t \in J$ gælder

$$(t; \varphi_1(t), \varphi_1'(t), \cdots, \varphi_1^{(k_1-1)}(t); \cdots; \varphi_s(t), \varphi_s'(t), \cdots, \varphi_s^{(k_s-1)}(t)) \in \Omega$$

og

$$\begin{cases} \varphi_1^{(k_1)}(t) = f_1(t;\varphi_1(t),\varphi_1'(t),\cdots,\varphi_1^{(k_1-1)}(t);\cdots;\varphi_s(t),\varphi_s'(t),\cdots,\varphi_s^{(k_s-1)}(t)) \\ \cdots \\ \varphi_s^{(k_s)}(t) = f_s(t;\varphi_1(t),\varphi_1'(t),\cdots,\varphi_1^{(k_1-1)}(t);\cdots;\varphi_s(t),\varphi_s'(t),\cdots,\varphi_s^{(k_s-1)}(t)). \end{cases}$$

Hvis alle tallene $k_1,\cdots,k_s$ er $= 1$, er dette et sædvanligt differentialligningssystem af første orden. Hvis mindst et af tallene $k_1,\cdots,k_s$ er > 1, kaldes det et sædvanligt differentialligningssystem af højere orden, og tallet $\max\{k_1,\cdots,k_s\}$ kaldes systemets orden.

Et sæt af funktioner $\varphi_1,\cdots,\varphi_s: J \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ med de nævnte egenskaber kaldes en løsning eller et integral til systemet. For enhver løsning er $\varphi_1^{(k_1)},\cdots,\varphi_s^{(k_s)}$ kontinuerte. En løsning kaldes maksimal, hvis den ikke er ægte restriktion af en anden løsning.

Systemet skrives også kort

$$\begin{cases} \dfrac{d^{k_1}x_1}{dt^{k_1}} = f_1(t;x_1,\dfrac{dx_1}{dt},\cdots,\dfrac{d^{k_1-1}x_1}{dt^{k_1-1}};\cdots;x_s,\dfrac{dx_s}{dt},\cdots,\dfrac{d^{k_s-1}x_s}{dt^{k_s-1}}) \\ \cdots \\ \dfrac{d^{k_s}x_s}{dt^{k_s}} = f_s(t;x_1,\dfrac{dx_1}{dt},\cdots,\dfrac{d^{k_1-1}x_1}{dt^{k_1-1}};\cdots;x_s,\dfrac{dx_s}{dt},\cdots,\dfrac{d^{k_s-1}x_s}{dt^{k_s-1}}). \end{cases}$$

Et sådant system er ensgyldigt med et sædvanligt differentialligningssystem af første orden, nemlig med systemet

$$\left\{\begin{array}{ll}
\left\{\begin{array}{ll} x_{11}' & = x_{12} \\ \cdots & \\ x_{1k_1-1}' & = x_{1k_1} \\ x_{1k_1}' & = f_1(t;x_{11},\cdots,x_{1k_1};\cdots;x_{s1},\cdots,x_{sk_s}) \end{array}\right. \\
\cdots & \\
\left\{\begin{array}{ll} x_{s1}' & = x_{s2} \\ \cdots & \\ x_{sk_s-1}' & = x_{sk_s} \\ x_{sk_s}' & = f_s(t;x_{11},\cdots,x_{1k_1};\cdots;x_{s1},\cdots,x_{sk_s}). \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Hermed menes: Hvis et sæt af funktioner $\varphi_1,\cdots,\varphi_s: J \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ er en løsning til systemet af højere orden, vil sættet $\varphi_1,\varphi_1',\cdots,\varphi_1^{(k_1-1)};\cdots;\varphi_s,\varphi_s',\cdots,\varphi_s^{(k_s-1)}$ være en løsning til systemet af første orden, og hvis et sæt af funktioner $\varphi_{11},\cdots,\varphi_{1k_1};\cdots;\varphi_{s_1},\cdots,\varphi_{sk_s}: J \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ er en løsning til systemet af første orden, vil sættet $\varphi_{11},\cdots,\varphi_{s1}$ være en løsning til systemet af højere orden. Begge dele indses umiddelbart ved indsætning.

Skrevet som en vektordifferentialligning lyder systemet af første orden

$$\frac{d(\underline{x}_1;\cdots;\underline{x}_s)}{dt} = \underline{f}(t;\underline{x}_1;\cdots;\underline{x}_s)$$

$$= (x_{12},\cdots,x_{1k_1},f_1(t;\underline{x}_1;\cdots;\underline{x}_s);\cdots;x_{s2},\cdots,x_{sk_s},f_s(t;\underline{x}_1;\cdots;\underline{x}_s)).$$

For at kunne anvende hovedsætningen i § 49 må vi se efter, hvad det betyder, at funktionen $\underline{f}(t;\underline{x}_1;\cdots;\underline{x}_s)$ lokalt opfylder en Lipschitz betingelse i Ω. Betingelsen herfor ses at være, at der til ethvert punkt

af Ω findes en i Ω indeholdt omegn og et C, således at der for vilkårlige punkter $(t;\underline{y}_1;\cdots;\underline{y}_s)$ og $(t;\underline{z}_1;\cdots;\underline{z}_s)$ i denne omegn med samme t gælder

$$\begin{cases} |f_1(t;\underline{y}_1;\cdots;\underline{y}_s)-f_1(t;\underline{z}_1;\cdots;\underline{z}_s)| \leq C \max\{\|\underline{y}_1-\underline{z}_1\|,\cdots,\|\underline{y}_s-\underline{z}_s\|\} \\ \cdots \\ |f_s(t;\underline{y}_1;\cdots;\underline{y}_s)-f_s(t;\underline{z}_1;\cdots;\underline{z}_s)| \leq C \max\{\|\underline{y}_1-\underline{z}_1\|,\cdots,\|\underline{y}_s-\underline{z}_s\|\}. \end{cases}$$

Under denne antagelse, som i hvert fald, når vi opererer med $\mathbb{R}$, er opfyldt, når funktionerne $f_1,\cdots,f_s$ har partielle afledede efter de variable $x_{11},\cdots,x_{1k_1};\cdots;x_{s1},\cdots,x_{sk_s}$, der er kontinuerte i Ω, og, når vi opererer med $\mathbb{C}$, er opfyldt, når $f_1,\cdots,f_s$ har partielle afledede med hensyn til $\operatorname{Re} x_{11},\operatorname{Im} x_{11},\cdots,\operatorname{Re} x_{1k_1},\operatorname{Im} x_{1k_1};\cdots;\operatorname{Re} x_{s1},\operatorname{Im} x_{s1},\cdots,\operatorname{Re} x_{sk_s},\operatorname{Im} x_{sk_s}$, der er kontinuerte i Ω, slutter vi, at der for ethvert punkt

$$(t_o;\underline{x}_{10};\cdots;\underline{x}_{so}) \in \Omega$$

findes en og kun een maksimal løsning $\varphi_1,\cdots,\varphi_s: J \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ til systemet af højere orden, for hvilken $t_o \in J$ og

$$(\varphi_1(t_o),\cdots,\varphi_1^{(k_1-1)}(t_o)) = \underline{x}_{10};\cdots;(\varphi_s(t_o),\cdots,\varphi_s^{(k_s-1)}(t_o)) = \underline{x}_{so}.$$

Endvidere slutter vi, at enhver maksimal løsning har et åbent definitionsinterval, og at enhver løsning er restriktion af en maksimal løsning.

En differentialligning af k^{te} orden. I tilfældet $s = 1$ drejer det sig om en differentialligning af k^{te} orden

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}),$$

hvor $f: \Omega \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ er en kontinuert funktion på en åben mængde Ω i $\mathbb{R} * \mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{R} * \mathbb{C}^k$. Ligningen er ensgyldig med systemet af første orden

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \cdots \\ \frac{dx_{k-1}}{dt} = x_k \\ \\ \frac{dx_k}{dt} = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_k). \end{cases}$$

Under forudsætning af at f, når vi opererer med $\mathbb{R}$, har partielle afledede efter $x_1, x_2, \cdots, x_k$, der er kontinuerte i Ω, og, når vi opererer med $\mathbb{C}$, har partielle afledede efter $\mathrm{Re}\, x_1, \mathrm{Im}\, x_1, \mathrm{Re}\, x_2, \mathrm{Im}\, x_2, \cdots, \mathrm{Re}\, x_k, \mathrm{Im}\, x_k$, der er kontinuerte i Ω, findes for ethvert punkt $(t_o, x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{ko}) \in \Omega$ en og kun een maksimal løsning $\varphi: J \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ til differentialligningen af k^{te} orden, for hvilken $t_o \in J$ og

$$(\varphi(t_o)), \varphi'(t_o), \cdots, \varphi^{(k-1)}(t_o)) = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{ko}).$$

Man kalder i denne sammenhæng $(t_o, x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{ko})$ et linieelement af $(k-1)^{te}$ orden og udtrykker resultatet ved at sige, at der gennem hvert linieelement af $(k-1)^{te}$ orden går en og kun een maksimal løsning til differentialligningen af k^{te} orden.

Eksempel. I stedet for t og x skrives x og y; mærker skal betegne differentiation efter x, og y skal være reel. I halvplanen $\{(x,y) \mid y > 0\}$ betragtes samtlige halvcirkler med centrum på x-aksen; de bestemmes ved funktionerne

$$y = \sqrt{r^2-(x-a)^2}, \quad x \in]a-r,a+r[\qquad (a \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+).$$

Vi søger en differentialligning med disse som løsninger. Funktionerne er åbenbart vilkårligt ofte differentiable. Vi benytter med fordel implicit differentiation. Af

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2$$

får man ved af differentiere to gange

$$1 + y'^2 + yy'' = 0.$$

Funktionerne er altså løsninger til differentialligningen

$$y'' = -\frac{1+y'^2}{y},$$

og de er åbenbart maksimale løsninger. Funktionen $f(x,y_1,y_2) = -\frac{1+y_2^2}{y_1}$ på mængden $\Omega = \{(x,y_1,y_2) \mid y_1 > 0\}$ har kontinuerte partielle afledede efter y_1 og y_2. Der går altså gennem hvert linieelement (x_0,y_{1o},y_{2o}) med $y_{1o} > 0$ en og kun een maksimal løsning. Men mængden af de betragtede halvcirkler har den egenskab, at der for ethvert sæt (x_0,y_{1o},y_{2o}) med $y_{1o} > 0$ går en halvcirkel gennem (x_0,y_{1o}), hvis tangent i (x_0,y_{1o}) har hældningskoefficienten y_{2o}. De givne

funktioner er derfor samtlige maksimale løsninger til differentialligningen.

Newtons differentialligninger for en partikels bevægelse. I tilfældet $s = 3$ med k_1,k_2,k_3 alle $= 2$ og V_1,V_2,V_3 alle $= \mathbb{R}^2$ antager differentialligningssystemet med ændret rækkefølge af de variable i funktionerne f_i, og efter tilføjelse af en faktor $m > 0$ på venstre side formen

$$\begin{cases} m\,x_1'' = f_1(t,x_1,x_2,x_3,x_1',x_2',x_3') \\ m\,x_2'' = f_2(t,x_1,x_2,x_3,x_1',x_2',x_3') \\ m\,x_3'' = f_3(t,x_1,x_2,x_3,x_1',x_2',x_3'), \end{cases}$$

hvor f_1,f_2,f_3 er kontinuerte funktioner på en åben mængde Ω i $\mathbb{R}^7$. Systemet er ensgyldigt med systemet af første orden

$$\begin{cases} x_1' = y_1 \\ x_2' = y_2 \\ x_3' = y_3 \\ m\,y_1' = f_1(t,x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) \\ m\,y_2' = f_2(t,x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) \\ m\,y_3' = f_3(t,x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3). \end{cases}$$

Sættes $(x_1,x_2,x_3) = \underline{x}$ og $(y_1,y_2,y_3) = \underline{y}$ og $(f_1,f_2,f_3) = \underline{f}$, kan systemet af anden orden skrives

$$m\, x'' = \underline{f}(t,\underline{x},\underline{x}')$$

og systemet af første orden

$$\begin{cases} \underline{x}' = \underline{y} \\ m\, \underline{y}' = \underline{f}(t,\underline{x},\underline{y}). \end{cases}$$

Vi har her bevægelsesligningerne, respektive bevægelsesligningen, for en partikel med massen m, der, når den til tiden t befinder sig i punktet $\underline{x}$ med hastigheden $\underline{x}' = \underline{y}$, er påvirket af kraften $\underline{f}(t,\underline{x},\underline{y})$. Thi ligningen $m\,\underline{x}'' = \underline{f}(t,\underline{x},\underline{x}')$ udtrykker Newtons anden lov, at kraften er massen gange accelerationen $\underline{x}''$. Løsningerne er de mulige bevægelser. Jfr. vedrørende konkrete tilfælde, hvor talen dog kun var om bevægelse af en partikel på en linie eller i en plan, de i § 31 diskuterede ligninger.

Det er herved forudsat, at man opererer i et fast koordinatsystem i det af Newton postulerede absolute rum, men ligningerne kan også anvendes for et bevæget koordinatsystem. Da er $\underline{x}'$ og $\underline{x}''$ den relative hastighed og acceleration og $\underline{f}(t,\underline{x},\underline{x}')$ den tilsyneladende kraft, som er lig med den virkelige kraft plus den fra koordinatsystemets bevægelse hedrørende fiktive kraft, der dog ofte er så lille, at man kan se bort fra den.

Under antagelse af, at funktionerne f_1,f_2,f_3 har partielle afledede efter x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3, der er kontinuerte i Ω, findes for givet $(t_o,x_{1o},x_{2o},x_{3o},y_{1o},y_{2o},y_{3o}) = (t_o,\underline{x}_o,\underline{y}_o) \in \Omega$ en og kun een bevægelse, ved hvilken partiklen til tiden t_o befinder sig i punktet $\underline{x}_o = (x_{1o},x_{2o},x_{3o})$ med hastigheden $\underline{y}_o = (y_{1o},y_{2o},y_{3o})$. Man kan imidlertid meget let udtænke mekaniske problemer, hvor den nævnte betingelse ikke er opfyldt, og hvor faktisk flere bevægelser er mulige. For eksempel kan man tænke sig, at $\Omega = \mathbb{R}^7$, og at kraften er bestemt ved $(f_1,f_2,f_3) = (m\,6\,x_1^{\frac{1}{3}},0,0)$. Da findes for $(t_o,x_{1o},x_{2o},x_{3o},y_{1o},y_{2o},y_{3o}) = (0,0,0,0,0,0,0)$ foruden hvile bl.a. løsningen $(x_1,x_2,x_3) = (t^3,0,0)$.

For enhver løsning har vi

$$m(x_1'x_1''+x_2'x_2''+x_3'x_3'') = f_1x_1' + f_2x_2' + f_3x_3',$$

altså, idet vi sætter $v = \sqrt{x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2}$,

$$\left[\tfrac{1}{2}mv^2\right]' = f_1x_1' + f_2x_2' + f_3x_3',$$

og følgelig, hvis $[t_1,t_2]$ er et afsluttet delinterval af løsningens definitionsinterval, og v_1 og v_2 er værdierne af v for $t = t_1$ og $t = t_2$

$$\tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \int_{t_1}^{t_2}\left[f_1x_1'+f_2x_2'+f_3x_3'\right]dt.$$

Når x_1,x_2,x_3 er sædvanlige retvinklede koordinater i rummet, er v farten i bevægelsen, og $\frac{1}{2}mv^2$ er partiklens kinetiske energi, mens integralet på højre side, jfr. § 47, er det af kraften under bevægelsen udførte arbejde i tidsintervallet $[t_1,t_2]$. Dette arbejde er

altså lig med tilvæksten i partiklens kinetiske energi.

Opgaver. 1. Vis, at enhver halvcirkel

$$y = b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2}, \qquad x \in]a-r,a+r[,$$

tilfredsstiller differentialligningen

$$y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}.$$

Find samtlige maksimale løsninger til denne ligning.

Vink. (1) Differentier ligningen $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ tre gange og eliminer a,b,r. (2) Godtgør og benyt, at der gennem hvert linieelement af anden orden går en og kun een maksimal løsning.

2. Opskriv for vilkårligt $a \in \mathbb{R}$ og $p \in \mathbb{R}_+$ ligningen for parablen med brændpunkt $(a,0)$ og toppunkt $(a,\frac{1}{2}p)$. Vis, at de funktioner $y = \varphi(x)$, hvis graf er den i halvplanen $\{(x,y) \mid y > 0\}$ liggende del af en sådan parabel, er maksimale løsninger til differentialligningen

$$y'' = \frac{y'^2-1}{2y}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

og at disse og deres restriktioner er samtlige løsninger til differentialligningen, der opfylder betingelsen $|y'| < 1$.

§ 52. Lineære differentialligninger.

Lineært differentialligningssystem af første orden.

Lad V være $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$, lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et begrænset eller ubegrænset åbent interval, og lad $\underline{f}(t,\underline{x})\colon I \times V \to V$ være en kontinuert funktion. Vektordifferentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x}),$$

eller differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t,x_1,\cdots,x_k) \\ \cdots \\ \dfrac{dx_k}{dt} = f_k(t,x_1,\cdots,x_k) \end{cases}$$

kaldes en lineær vektordifferentialligning eller et lineært differentialligningssystem af første orden, hvis funktionerne $f_1,\cdots,f_k$ er førstegradspolynomier i $x_1,\cdots,x_k$, altså hvis systemet har formen

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)x_1+\cdots+p_{1k}(t)x_k + q_1(t) \\ \cdots \\ \dfrac{dx_k}{dt} = p_{k1}(t)x_1+\cdots+p_{kk}(t)x_k + q_k(t), \end{cases}$$

hvor funktionerne $p_{ij}(t)$ og $q_i(t)$ er kontinuerte funktioner på I med værdier i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, eftersom V er $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$. Hvis funktionerne $q_i(t)$ alle er 0, kaldes systemet homogent, ellers inhomogent.

For et lineært differentialligningssystem af første orden opfylder funktionen $\underline{f}(t,\underline{x})$ i enhver mængde $I_o \times V$, hvor I_o er et begrænset, afsluttet delinterval af I, en Lipschitz betingelse.

Thi sættes

$$\max_{\substack{i=1,\cdots,k \\ j=1,\cdots,k}} \left\{ \sup_{t \in I_o} |p_{ij}(t)| \right\} = A,$$

har vi for ethvert $t \in I_o$ og vilkårlige punkter $\underline{x}_1 \in V$ og $\underline{x}_2 \in V$ for ethvert $i = 1,\cdots,k$

$$|f_i(t,\underline{x}_2)-f_i(t,\underline{x}_1)| = |p_{i1}(t)(x_{21}-x_{11})+\cdots+p_{ik}(t)(x_{2k}-x_{1k})|$$

$$\leq kA \max\{|x_{21}-x_{11}|,\cdots,|x_{2k}-x_{1k}|\} = kA\|\underline{x}_2-\underline{x}_1\|.$$

Følgelig er

$$\|\underline{f}(t,\underline{x}_2)-\underline{f}(t,\underline{x}_1)\| \leq kA \|\underline{x}_2-\underline{x}_1\| .$$

Af resultaterne i § 49 og § 50 slutter vi derfor:

Sætning 1. Gennem hvert punkt $(t_o,\underline{x}_o) \in I \times V$ går en og kun een maksimal løsning. Enhver maksimal løsning har definitionsintervallet I. Enhver løsning er restriktion af en maksimal løsning. Den maksimale løsning gennem et vilkårligt punkt $(t_o,\underline{x}_o)$ kan bestemmes ved successive approksimationer.

Tilfældet $k = 1$. ($V = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.) I dette tilfælde drejer det sig om en ligning

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t).$$

Som vist i § 31 har man her en færdig løsningsformel. Af hensyn til sammenligningen med den følgende behandling af tilfælget $k > 1$, gentager vi løsningen.

For den homogene ligning

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x$$

er for ethvert $(t_o,x_o) \in I \times V$ funktionen

$$x = x_o\Phi(t), \quad \text{hvor} \quad \Phi(t) = \exp\int_{t_o}^{t} p(\tau)d\tau, \quad t \in I,$$

en løsning gennem (t_o,x_o) med definitionsinterval I, og der kan følgelig ikke være andre (maksimale) løsninger.

For den inhomogene ligning bestemmes løsningen gennem (t_o,x_o) ved "de arbitrære konstanters variationsmetode": Da $\Phi(t) \neq 0$ for alle $t \in I$, og $\Phi(t_o) = 1$, vil der, når vi sætter $x = y\Phi(t)$, til en differentiabel funktion x på I, der i t_o har værdien x_o, svare en differentiabel funktion y på I, der i t_o har værdien x_o, og omvendt. Differentiation og indsætning giver

$$\frac{dy}{dt}\Phi(t) + y\frac{d\Phi(t)}{dt} = p(t)y\Phi(t) + q(t),$$

altså (da $\Phi(t)$ er løsning til den homogene ligning)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q(t)}{\Phi(t)}, \quad y = x_o + \int_{t_o}^{t} \frac{q(\tau)}{\Phi(\tau)}d\tau, \quad t \in I,$$

hvoraf

$$x = x_o\Phi(t) + \Phi(t)\int_{t_o}^{t} \frac{q(\tau)}{\Phi(\tau)}d\tau, \quad t \in I.$$

Tilfældet $k > 1$. ($V = \mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$.) I dette tilfælde har man ingen færdig løsningsformel, hvorved bestemmelsen af løsningerne tilbageføres til stamfunktionsbestemmelse. Man kan dog opstille visse resultater. Ved formuleringen er det hensigtsmæssigt i stedet for den hidtil brugte vektorbetegnelse at benytte matricer. Vi sætter

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{P}}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) \cdots p_{1k}(t) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ p_{k1}(t) \cdots p_{kk}(t) \end{pmatrix}, \qquad \underline{q}_1(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_k(t) \end{pmatrix}.$$

Da kan systemet skrives

$$\frac{d\underline{x}_1}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\underline{x}_1 + \underline{q}_1(t).$$

Sætning 2. De maksimale løsninger til et lineært, homogent ligningssystem

$$\frac{d\underline{x}_1}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\underline{x}_1$$

bestående af k ligninger med k ubekendte funktioner udgør et k-dimensionalt vektorrum (over det til grund lagte tallegeme $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$).

Bevis. Det er klart, at hvis $\underline{\varphi}_{|}$ er en løsning, er $a\underline{\varphi}_{|}$ en løsning ($a \in \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$), og hvis $\underline{\varphi}_{|}$ og $\underline{\psi}_{|}$ er løsninger, er $\underline{\varphi}_{|} + \underline{\psi}_{|}$ en løsning. Dette viser, at løsningerne udgør et underrum i vektorrummet af alle funktioner $\underline{\varphi}_{|} : I \to V$.

Vi betegner vektorrummet bestående af alle maksimale løsninger med S. Vi vælger nu et fast $t_o \in I$ og betragter den ved $\underline{\varphi}_{|} \mapsto \underline{\varphi}_{|}(t_o)$ bestemte afbildning af S ind i V, altså den afbildning, der til hver løsning $\underline{\varphi}_{|}$ lader svare dens værdi i t_o. Dette er åbenbart en lineær afbildning, og da der for hvert $\underline{x}_{o|} \in V$ findes en og kun een maksimal løsning $\underline{\varphi}_{|}$, for hvilken $\underline{\varphi}_{|}(t_o) = \underline{x}_{o|}$, er den bijektiv. Den er altså en isomorfi. Følgelig har S dimensionen k.∎

Fundamentalmatrix. Man ser, at et sæt af k løsninger $\underline{\varphi_1}_{|}, \cdots, \underline{\varphi_k}_{|}$ er en basis for løsningsrummet, hvis og kun hvis vektorerne $\underline{\varphi_1}_{|}(t_o), \quad , \underline{\varphi_k}_{|}(t_o)$ for eet $t_o \in I$ er en basis for V og at disse vektorer da for ethvert $t_o \in I$ er en basis for V. Den ved k løsninger $\underline{\varphi_1}_{|}, \cdots, \underline{\varphi_k}_{|}$ bestemte matrix

$$\underline{\underline{\Phi}}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \cdots \varphi_{k1}(t) \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \varphi_{1k}(t) \cdots \varphi_{kk}(t) \end{pmatrix},$$

hvis søjler er $\underline{\varphi_1}_{|}, \cdots, \underline{\varphi_k}_{|}$ [så at første index bliver søjleindex og anden index rækkeindex] er altså regulær

for alle $t \in I$, hvis løsningerne danner en basis for løsningsrummet, ellers singulær for alle $t \in I$. I det første tilfælde kaldes $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ en fundamentalmatrix. Ud fra en fundamentalmatrix bestemmes samtlige løsninger til det homogene ligningssystem ved

$$\underline{x}_{|} = \underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{a}_{|} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \cdots \varphi_{k1}(t) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_{1k}(t) \cdots \varphi_{kk}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_{|} \in V.$$

Vælger man specielt $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ således, at $\underline{\underline{\Phi}}(t_o) = \underline{\underline{E}}$, d.v.s. vælger man som basis $\underline{\underline{\varphi_1}}_{|}, \cdots, \underline{\underline{\varphi_k}}_{|}$ for løsningsrummet de k løsninger, for hvilke $\underline{\underline{\varphi_1}}_{|}(t_o), \cdots, \underline{\underline{\varphi_k}}_{|}(t_o)$ er de k enhedsvektorer, vil $\underline{x}_{|} = \underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{\underline{x_o}}_{|}$ for et vilkårligt $\underline{\underline{x_o}}_{|} \in V$ være den løsning, der går gennem $(t_o, \underline{x}_o)$.

Ved Wronski determinanten hørende til et sæt af k løsninger $\underline{\underline{\varphi_1}}_{|}, \cdots, \underline{\underline{\varphi_k}}_{|}$ forstås determinanten

$$W(t) = \det \underline{\underline{\Phi}}(t)$$

for den tilsvarende matrix $\underline{\underline{\Phi}}(t)$. Hvis løsningerne danner en basis for løsningsrummet, altså hvis $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ er en fundamentalmatrix, er $W(t) \neq 0$ for alle $t \in I$; ellers er $W(t) = 0$ for alle $t \in I$.

Sætning 3. For et vilkårligt sæt af k løsninger til det homogene ligningssystem er Wronski determinanten en løsning til differentialligningen

$$\frac{dW(t)}{dt} = [\mathrm{tr}\underline{\underline{P}}(t)]\,W(t) = [p_{11}(t)+\cdots+p_{kk}(t)]\,W(t),$$

og man har altså, når $t_o \in I$,

$$W(t) = W(t_o)\exp\int_{t_o}^{t} \mathrm{tr}\underline{\underline{P}}(\tau)d\tau, \quad t \in I.$$

Bevis. Differentialkvotienten $W'(t)$ kan beregnes som sum af determinanterne for de k matricer, man får ved at differentiere en række i $\underline{\underline{\Phi}}(t)$. Dette følger let af udtrykket for determinanten, idet man benytter differentiationsreglen for et produkt af k funktioner. Differentieres den i^{te} række, fås matricen

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{k1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi'_{1i}(t) & \cdots & \varphi'_{ki}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{1k}(t) & \cdots & \varphi_{kk}(t) \end{pmatrix}.$$

Indføres heri de fra differentialligningssystemet hidrørende udtryk for de afledede, antager matricen formen

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & & \varphi_{k1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{i1}(t)\varphi_{11}(t)+\cdots+p_{ik}(t)\varphi_{1k}(t) & \cdots & p_{i1}(t)\varphi_{k1}(t)+\cdots+p_{ik}(t)\varphi_{kk}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{1k}(t) & & \varphi_{kk}(t) \end{pmatrix}.$$

Dennes determinant er sum af determinanterne for de k matricer, man får ved i den i^{te} række at benytte det j^{te} led i hver sum, idet j efterhånden tillægges værdierne $1,\cdots,k$. For $j \neq i$ fås herved en matrix, i

hvilken den i^{te} række er fremgået af den j^{te} række ved multiplikation med $p_{ij}(t)$, og hvis determinant følgelig er 0. For $j = i$ fås den matrix, der fremgår af $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ ved at multiplicere den i^{te} række med $p_{ii}(t)$. Dens determinant er følgelig $p_{ii}(t)W(t)$. Ved addition ses, at $W'(t) = [p_{11}(t)+\cdots+p_{kk}(t)]\,W(t)$. □

Sætning 4. Ud fra en fundamentalmatrix $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ for det homogene ligningssystem bestemmes samtlige løsninger til det inhomogene ligningssystem

$$\frac{d\underline{x}_1}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\underline{x}_1 + \underline{q}_1(t),$$

idet $t_o \in I$, ved

$$\underline{x}_1 = \underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{a}_1 + \underline{\underline{\Phi}}(t)\int_{t_o}^{t} \underline{\underline{\Phi}}(\tau)^{-1}\underline{q}_1(\tau)d\tau, \quad t \in I.$$

Vælger man specielt $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ således, at $\underline{\underline{\Phi}}(t_o) = \underline{\underline{E}}$, fås for $\underline{a}_1 = \underline{x}_{o1}$ den løsning, der går gennem (t_o, x_o).

Bevis. Vi benytter "de arbitrære konstanters variationsmetode". Da $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ er regulær for alle $t \in I$, kan enhver funktion $\underline{\varphi}_1(t)\colon I \to V$ på en og kun een måde skrives på formen $\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{\psi}_1(t)$, nemlig ved at sætte $\underline{\psi}_1(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t)^{-1}\underline{\varphi}_1(t)$. Da elementerne i $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ er differentiable, bliver $\underline{\varphi}_1(t)$ og $\underline{\psi}_1(t)$ samtidig differentiable. Betingelsen for, at $\underline{\varphi}_1$ er løsning til det inhomogene system er nu, at

$$\underline{\underline{\Phi}}(t)\frac{d\underline{\psi}_1(t)}{dt} + \frac{d\underline{\underline{\Phi}}(t)}{dt}\underline{\psi}_1(t) = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{\psi}_1(t) + \underline{q}_1(t).$$

Nu er hver søjle i $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ løsning til det homogene system; altså er

$$\frac{d\underline{\underline{\Phi}}(t)}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{\Phi}}(t).$$

Den fundne ligning antager derfor formen

$$\frac{d\underline{\underline{\Psi}}_l(t)}{dt} = \underline{\underline{\Phi}}(t)^{-1}\underline{q}_l(t).$$

Samtlige løsninger til denne ligning bestemmes ved

$$\underline{\underline{\Psi}}_l(t) = \underline{a}_l + \int_{t_o}^{t} \underline{\underline{\Phi}}(\tau)^{-1}\underline{q}_l(\tau)d\tau,$$

hvoraf det ønskede resultat. ∎

I sætning 4 er indeholdt følgende resultat, som også let kunne vises direkte:

Sætning 5. Samtlige løsninger til det inhomogene system fås ved til een løsning til systemet at addere samtlige løsninger til det homogene system.

En lineær differentialligning af k^{te} orden. Lad V være $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$, lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et begrænset eller ubegrænset åbent interval, og lad $f(t,x_1,\cdots,x_k)$: $I \times V \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ være en kontinuert funktion. Differentialligningen

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f(t,x,\frac{dx}{dt},\cdots,\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}})$$

kaldes en lineær differentialligning af k^{te} orden, hvis funktionen f er et førstegradspolynomium i $x_1,\cdots,x_k$, altså hvis ligningen har formen

$$\frac{d^k x}{dt^k} = p_o(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt} + \cdots + p_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + q(t),$$

hvor funktionerne $p_o(t), p_1(t), \cdots, p_{k-1}(t), q(t)$ er kontinuerte funktioner på I med værdier i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, eftersom V er $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$. Ligningen kaldes <u>homogen</u>, hvis funktionen $q(t)$ er 0, ellers <u>inhomogen</u>.

Idet ligningen er ensgyldig med det lineære differentialligningssystem af første orden

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_k}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & 0 & 1 \\ p_o(t) & p_1(t) & p_2(t) & \cdots & p_{k-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix}$$

(hvor der står nuller på de ubeskrevne pladser i den kvadratiske matrix) i den forstand, at systemets løsninger netop er alle søjler

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(k-1)}(t) \end{pmatrix},$$

hvor $\varphi(t)$ er en løsning til ligningen af k^{te} orden, slutter vi straks af de foranstående resultater:

<u>Sætning 1*.</u> <u>For ethvert talsæt</u> $(t_o, x_{1o}, x_{2o}, \cdots, x_{ko}) \in I \times V$ <u>findes en og kun een maksimal løsning til</u> φ <u>til den lineære differentialligning af</u> k^{te} <u>orden, for hvilken</u>

$$(\varphi(t_o),\varphi'(t_o),\cdots,\varphi^{(k-1)}(t_o)) = (x_{1o},x_{2o},\cdots,x_{ko}).$$

Enhver maksimal løsning har definitionsintervallet I. Enhver løsning er restriktion af en maksimal løsning.

Sætning 2*: De maksimale løsninger til den homogene ligning

$$\frac{d^k x}{dt^k} = p_o(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt}+\cdots+p_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}$$

udgør et k-dimensionalt vektorrum (over det til grundlagte tallegeme $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$).

Bevis. Det er klart, at løsningerne udgør et vektorrum. At det er k-dimensionalt følger af, at der til den homogene ligning af k^{te} orden svarer det homogene ligningssystem af første orden, og at den bijektive afbildning af løsningsrummet for ligningen af k^{te} orden på løsningsrummet for ligningsssytemet af første orden, der består i, at vi til en løsning $\varphi(t)$ lader svare søjlen (*), er en lineær afbildning.∎

For et vilkårligt sæt af k løsninger $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_k(t)$ til den homogene ligning af k^{te} orden kan vi danne matricen

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_k(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_k'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(k-1)}(t) & \cdots & \varphi_k^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Denne er regulær for alle $t \in I$, hvis og kun hvis sættet er en basis for løsningsrummet for ligningen af k^{te} orden. Ellers er den singulær for alle $t \in I$. Dens determinant $W(t) = \det\underline{\Phi}(t)$ kaldes Wronskideterminanten hørende til sættet.

Sætning 3*. For et vilkårligt sæt af k løsninger til den homogene ligning af k^{te} orden er Wronskideterminanten en løsning til differentialligningen

$$\frac{dW(t)}{dt} = p_{k-1}(t)W(t).$$

og man har altså, når $t_o \in I$,

$$W(t) = W(t_o)\exp\int_{t_o}^{t} p_{k-1}(\tau)d\tau, \quad t \in I.$$

Sætning 4*. Ud fra en basis, $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_k(t)$ for løsningsrummet for den homogene ligning bestemmes samtlige løsninger til den inhomogene ligning af k^{te} orden ved

$$x = a_1\varphi_1(t)+\cdots+a_k\varphi_k(t) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+i}\varphi_i(t)\int_{t_o}^{t}\frac{W_i(\tau)}{W(\tau)}q(\tau)d\tau,$$

hvor $W_i(t)$ er determinanten for den matrix, der fremgår af $\underline{\Phi}(t)$ ved at slette k^{te} række og i^{te} søjle.

Bevis. Sætningen fremgår af sætning 4, idet man benytter, at elementerne i sidste søjle af $\underline{\Phi}(t)^{-1}$ er $(-1)^{k+i}\frac{W_i(t)}{W(t)}$.

Sætning 5*. Samtlige løsninger til den inhomogene ligning af k^{te} orden fås ved til een løsning til ligningen at lægge samtlige løsninger til den homogene ligning.

Opgaver 1. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 \cos t - x_2 \sin t \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \sin t + x_2 \cos t \end{aligned} \qquad (t,x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Vink. Betragt $z = x_1 + ix_2$.

2. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= - x_2 \cos t \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \cos t \end{aligned} \qquad (t,x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3.$$

3. Vis, at hvis $\varphi_1(t)$ er løsning til den lineære, homogene differentialligning af anden orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_o(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt},$$

og $\varphi_1(t) \neq 0$ for alle t i det betragtede interval, er samtlige løsninger bestemt ved

$$x = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t),$$

hvor

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)\int \frac{1}{\varphi_1(t)^2}(\exp\int p_1(t)dt)\ dt$$

Vis, at hvis $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ er en basis for løsningsrummet til den homogene ligning, er samtlige løsninger til den lineære, inhomogene differentialligning af anden orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_o(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt} + q(t)$$

bestemt ved

$$x = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\int \frac{\varphi_2(t)}{W(t)}q(t)dt + \varphi_2(t)\int \frac{\varphi_1(t)}{W(t)}q(t)\ dt,$$

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix}.$$

[Overalt står $\int \cdots dt$ for en vilkårligt valgt af de uendelig mange stamfunktioner til den pågældende funktion.]

4. Vis, at differentialligningen

$$\cos x \sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} + (\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x)\frac{dy}{dx} + 2y\cos^3 x = 0$$

har løsningen $y = \sin x$. Find derefter samtlige løsninger i $]0, \frac{1}{2}\pi[\times \mathbb{R}$. Find endelig samtlige løsninger i $]0, \frac{1}{2}\pi[\times \mathbb{R}$ til differentialligningen

$$\cos x \sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} + (\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x)\frac{dy}{dx} + 2y\cos^3 x = \cos^2 x \sin^3 x$$

Vink. Benyt opg. 3.

5. Bestem samtlige løsninger til differentialligningen

$$(1-t^2)\frac{d^2x}{dt^2} - t\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad t \in]-1,1[,$$

idet det opgives, at $x = t$ er en løsning.

§ 53. Lineære, homogene differentialligninger med konstante koefficienter.

Lineært, homogent differentialligningssystem af første orden med konstante koefficienter. For et lineært, homogent ligningssystem

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = p_{11}x_1 + \cdots + p_{1k}x_k \\ \cdots \\ \dfrac{dx_k}{dt} = p_{k1}x + \cdots + p_{kk}x_k \end{cases} \qquad \text{eller} \qquad \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{P}}\underline{x}$$

med konstante koefficienter p_{ij} (i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, eftersom V er $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$), altså med konstant matrix $\underline{\underline{P}}$, er intervallet I hele $\mathbb{R}$. For et sådant system kan man finde samtlige løsninger på følgende måde.

Vi foretager en koordinattransformation

$$\underline{x} = \underline{\underline{S}}\underline{y}, \qquad \underline{\underline{S}} \text{ regulær},$$

i rummet V. Herved erstattes ligningssystemet med systemet

$$\underline{\underline{S}}\frac{d\underline{y}}{dt} = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{S}}\underline{y} \qquad \text{eller} \qquad \frac{d\underline{y}}{dt} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{P}}\underline{\underline{S}}\underline{y}.$$

Vi benytter nu det fundamentale resultat fra algebraen, at man i tilfældet $V = \mathbb{C}^k$ kan vælge $\underline{\underline{S}}$ således, at $\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{P}}\underline{\underline{S}}$ får Jordans normalform

$$\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{P}}\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \boxed{\underline{\underline{B}}_1} & & & \\ & \boxed{\underline{\underline{B}}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\underline{\underline{B}}_q} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{B}}_1, \underline{\underline{B}}_2, \cdots, \underline{\underline{B}}_q$ er kvadratiske matricer langs hoveddiagonalen, uden for hvilke der står lutter nuller, og som hver for sig er af formen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

med et tal λ i hoveddiagonalen, 1 i skrålinien lige over, og ellers nuller. Samtlige tal i hoveddiagonalen i $\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{P}}\underline{\underline{S}}$ er samtlige rødder i polynomiet $\det(\underline{\underline{P}}-\lambda\underline{\underline{E}})$, hver skrevet så ofte som multipliciteten angiver, men samme rod kan forekomme i flere af matricerne $\underline{\underline{B}}_p$.

Efter en sådan transformation vil ligningerne i det nye system falde i klasser, en klasse svarende til hver af matricerne $\underline{\underline{B}}_p$. Hvis de af de variable $y_1, \cdots, y_k$, der svarer til de i et bestemt $\underline{\underline{B}}_p$ figurerende rækkenumre, betegnes $z_1, \cdots, z_l$ lyder den pågældende klasse af ligninger

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda z_1 + z_2$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \lambda z_2 + z_3$$

$$\cdots$$

$$\frac{dz_{l-1}}{dt} = \lambda z_{l-1} + z_l$$

$$\frac{dz_l}{dt} = \lambda z_l .$$

Dette systems løsninger findes vel hurtigst ved at man sætter

$$z_i = u_i \exp \lambda t, \quad \frac{dz_i}{dt} = \left(\frac{du_i}{dt} + \lambda u_i\right)\exp \lambda t,$$

hvorved fås systemet

$$\frac{du_1}{dt} = u_2, \ \frac{du_2}{dt} = u_3, \cdots, \frac{du_{l-1}}{dt} = u_l, \ \frac{du_l}{dt} = 0,$$

hvis løsninger er $(u_1, u_2, \cdots, u_l) = (F(t), F'(t), \cdots, F^{(l-1)}(t))$, hvor $F(t)$ er et vilkårligt polynomium af grad $\leq l-1$. Man får altså

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(t) \\ F'(t) \\ \vdots \\ F^{(l-1)}(t) \end{pmatrix} \exp \lambda t .$$

Vender man tilbage til det oprindelige ligningssystem, finder man samtlige løsninger skrevet på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} F_1(t)\exp\lambda_1 t \\ \vdots \\ F_1^{(l_1-1)}(t)\exp\lambda_1 t \\ \vdots \\ F_q(t)\exp\lambda_q t \\ \vdots \\ F_q^{(l_q-1)}(t)\exp\lambda_q t \end{pmatrix},$$

hvor λ_p betegner det i matricen $\underline{\underline{B}}_p$ $(p=1,\cdots,q)$ optrædende λ, og l_p denne matrix's orden, og $F_p(t)$ er et vilkårligt polynomium af grad $\leq l_p - 1$. Ialt optræder i disse polynomier k koefficienter. De k løsninger, der opnås ved at vælge alle disse koefficienter pånær een $= 0$, og denne ene $= 1$, vil udgøre en basis for løsningsrummet.

Hvis $\underline{\underline{P}}$ har reelle elementer, kan Jordans normalform opnås ved et $\underline{\underline{S}}$ med reelle elementer, hvis og kun hvis polynomiet $\det(\underline{\underline{P}}-\lambda\underline{\underline{E}})$ har lutter reelle rødder, og metoden er derfor under denne antagelse anvendelig også i tilfældet $V = \mathbb{R}^k$. Ellers må man operere med $V = \mathbb{C}^k$. Herved fås alle komplekse løsninger, blandt hvilke man derefter kan udskille de reelle.

<u>En lineær, homogen differentialligning af k^{te} orden med konstante koefficienter</u>. En lineær, homogen ligning

$$\frac{d^k x}{dt^k} + a_{k-1}\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \cdots + a_1\frac{dx}{dt} + a_o x = 0$$

med konstante koefficienter er ensgyldig med systemet

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_k}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

En simpel udregning viser, at

$$(-1)^k \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = K(\lambda).$$

[Idet søjlerne i $\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}$ betegnes $\underline{\underline{h_1}}, \underline{\underline{h_2}}, \cdots, \underline{\underline{h_k}}$, gælder

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = \det(\underline{\underline{h_1}}, \underline{\underline{h_2}}, \cdots, \underline{\underline{h_k}})$$

$$= \det(\underline{\underline{h_1}} + \lambda\underline{\underline{h_2}} + \cdots + \lambda^{k-1}\underline{\underline{h_k}}, \underline{\underline{h_2}}, \cdots, \underline{\underline{h_k}}).$$

Udvikling efter første søjle giver resultatet.] Polynomiet $K(\lambda)$ kaldes differentialligningens <u>karakteristiske polynomium</u>.

Idet vi opererer med $V = \mathbb{C}^k$, viser det foranstående resultat, at enhver løsning $(x_1, \cdots, x_k) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_k(t))$ til systemet af første orden må bestå af funktioner af formen

$$G_1(t)\exp\lambda_1 t + \cdots + G_q(t)\exp\lambda_q t,$$

hvor hvert $G_p(t)$ er et polynomium af grad $\leq l_p - 1$. Da løsningerne til systemet er alle sæt $(\varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(k-1)}(t))$, hvor $\varphi(t)$ er en løsning til ligningen af k^{te} orden, må specielt enhver løsning til denne ligning have den nævnte form. Da imidler-

tid løsningsrummet for ligningen af k^{te} orden har dimension k, er dette kun muligt, når $\lambda_1,\cdots,\lambda_q$ er parvis forskellige, og løsningsrummet består af alle funktioner af den pågældende form. Matricerne $\underline{\underline{B}}_p$ i Jordans normalform må altså i det her foreliggende tilfælde indeholde parvis forskellige λ, og for hvert $p = 1,\cdots,q$ må l_p simpelthen være multipliciteten af λ_p som rod i det karakteristiske polynomium $K(\lambda)$.

Hermed er vist:

Sætning. Løsningsrummet for den lineære, homogene differentialligning af k^{te} orden med konstante koefficienter har som basis de k funktioner

$$\exp\lambda_1 t,\ t\exp\lambda_1 t,\cdots,t^{l_1-1}\exp\lambda_1 t,$$
$$\cdots$$
$$\exp\lambda_q t,\ t\exp\lambda_q t,\cdots,t^{l_q-1}\exp\lambda_q t,$$

hvor $\lambda_1,\cdots,\lambda_q$ er de parvis forskellige rødder i ligningens karakteristiske polynomium, og $l_1,\cdots,l_q$ er disses multipliciteter.

Hvis koefficienterne $a_o,a_1,\cdots,a_{k-1}$ er reelle, og $K(\lambda)$ har lutter reelle rødder, giver sætningen også en basis for løsningsrummet svarende til, at vi opererer med $V = \mathbb{R}^k$. Ellers må vi operere med $V = \mathbb{C}^k$. Ud fra de komplekse basisfunktioner er det dog let at få en basis bestående af reelle funktioner. Thi når $K(\lambda)$ har reelle koefficienter, vil de imaginære rødder falde i par af konjugerede med samme multiplicitet. Er $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ et sådant par af rødder hver med multiplicitet 1, ser man, at vi i stedet for de 21 basisfunktioner

$$\exp(\alpha+i\beta)t,\quad t\exp(\alpha+i\beta)t,\cdots,t^{l-1}\exp(\alpha+i\beta)t,$$

$$\exp(\alpha-i\beta)t,\quad t\exp(\alpha-i\beta)t,\cdots,t^{l-1}\exp(\alpha-i\beta)t$$

kan benytte de 21 reelle funktioner

$$\exp\alpha t\cos\beta t,\ t\exp\alpha t\cos\beta t,\cdots,t^{l-1}\exp\alpha t\cos\beta t,$$

$$\exp\alpha t\sin\beta t,\ t\exp\alpha t\sin\beta t,\cdots,t^{l-1}\exp\alpha t\sin\beta t.$$

Opgaver. 1. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + x_2 - 2x_3\\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 \qquad (t,x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^4,\\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_1 + x_2\end{aligned}$$

og find den fundamentalmatrix for systemet, som for $t = 0$ er enhedsmatrix.

Vink. Systemet kan ved en koordianttransformation føres over i et system med diagonalmatrix.

2. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2\\ &\qquad (t,x_1,x_2)\in\mathbb{R}^3,\\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1,\end{aligned}$$

og opskriv den fundamentalmatrix for systemet, som for $t = 0$ er enhedsmatrix. Find dernæst den løsning $(\psi_1(t),\psi_2(t))$ til differentialligningssystemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + t^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + t, \qquad (t,x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3,$$

for hvilken $(\psi_1(0),\psi_2(0)) = (-1,2)$.

3. Find den løsning til differentialligningen

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 5\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = -2e^{-t}, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

for hvilken man for $t = 0$ har $(x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}) = (-1,-2,-10)$.

4. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -2\cos t, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

og den løsning $\varphi(t)$, for hvilken $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \pi$. Skitser grafen af φ i intervallet $0 \leq t \leq 2\pi$, og påvis, at den er symmetrisk om linien $t = \pi$.

Find Fourier rækken for den periodiske funktion $f(t)$ med perioden 2π, der i intervallet $0 \leq t \leq 2\pi$ stemmer overens med $\varphi(t)$.

Vink. Man kan med fordel benytte, at enhver løsning også er løsning til den ligning, der fås ved at addere den to gange differentierede ligning til den givne ligning. Jfr. iøvrigt eksempel 5 i § 31.

Diff. form $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ on $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Special case: $F(x,y)\,dx - dy$: $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$

$\omega = 0$ is the same as $h \cdot \omega = 0$ where $h \neq 0$ anywhere

$\Omega_g = \{(x,y) \in \Omega \mid g(x,y) \neq 0\}$

$\omega = 0$ on $\Omega_g \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{f}{g}$ on Ω_g,

Similarly on Ω_f : $\frac{dx}{dy} = -\frac{g(x,y)}{f(x,y)}$

Alg ω C^1-fn: f, g both C^1.

$\Omega^* = \{(x,y) \in \Omega \mid f,g \neq (0,0)$ in $(x,y)\}$.

Def. En lösning till $\omega = 0$ på Ω^* är en kurva $i\mathbb{R}^*$ som helt ligger i Ω^* kallas en integralkurva till ω på Ω^* om den är parametriserad som en reell parametrisering

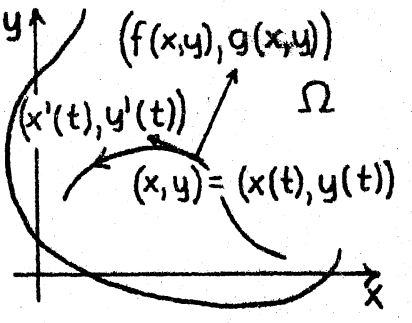
Sats. Om kurvan γ på Ω^* är en integralkurva till ω på Ω^* och h är en C^1-fn på Ω^* så är γ även en integralkurva till $h\omega$ på Ω^*. Och om γ är en integralkurva till $h\omega$ på Ω^* så är γ en integralkurva till ω på Ω^*.

Bevis

§ 54. Differentialligninger af formen $f(x,y)dx+g(x,y)dy = 0$.

Differentialligning af formen $f(x,y)dx+g(x,y)dy = 0$.

Lad der være givet en åben mængde Ω i $\mathbb{R}^2$ og to kontinuerte funktioner $f: \Omega \to \mathbb{R}$ og $g: \Omega \to \mathbb{R}$. Idet vi i ethvert punkt $(x,y) \in \Omega$ tænker os anbragt vektoren $(f(x,y),g(x,y))$ fremkommer et kontinuert vektorfelt i Ω. Vi søger samtlige C^1-kurver $t \mapsto (x(t),y(t)) \in \Omega$, for hvilke $(x'(t),y'(t)) \neq (0,0)$ for ethvert t i parameterintervallet, og for hvilke tangenten i ethvert kurvepunkt (x,y) er vinkelret på feltvektoren $(f(x,y),g(x,y))$. Dette betyder, at der for ethvert t skal gælde



$$f(x(t),y(t))x'(t) + g(x(t),y(t))y'(t) = 0.$$

De søgte kurver kaldes derfor løsninger eller integraler til differentialligningen

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0.$$

Sammenhæng med sædvanlige differentialligninger.

Den sædvanlige differentialligning

$$(+) \qquad \frac{dy}{dx} = F(x,y),$$

hvor $F: \Omega \to \mathbb{R}$ er en kontinuert funktion, giver formelt ved multiplikation med dx differentialligningen

$$(*) \qquad F(x,y)dx - dy = 0,$$

og der gælder: Løsningskurverne til ligningen (✱) er netop graferne for løsningsfunktionerne til ligningen (+). Hvis nemlig $y = \varphi(x)$ er løsning til (+), altså $\varphi'(t) = F(x,\varphi(x))$, er $t \mapsto (x(t),y(t)) = (t,\varphi(t))$ en C^1-kurve med $(x'(t),y'(t)) \neq (0,0)$, og ved indsætning ses, at den er løsning til (✱). Hvis omvendt $t \mapsto (x(t),y(t))$ er løsning til (✱), altså $(x'(t),y'(t)) \neq (0,0)$ og $F(x(t),y(t))x'(t)-y'(t) = 0$, må gælde $x'(t) \neq 0$ for alle t; følgelig har $x'(t)$ konstant fortegn, og vi kan tage x til parameter; parameterfremstillingen får da formen $x \mapsto (x,\varphi(x))$, hvor $F(x,\varphi(x)) - \varphi'(x) = 0$ for alle x, hvoraf ses, at $y = \varphi(x)$ er løsning til (+).

Idet vi bemærker, at ligningen $f(x,y)dx+g(x,y)dy = 0$ og en ligning, der fås ved at gange f og g med samme kontinuerte nulpunktsfri funktion, har de samme løsninger, ser vi, at ligningen i den åbne mængde $\Omega_g = \{(x,y) \in \Omega \mid g(x,y) \neq 0\}$ er ensgyldig med den sædvanlige differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}.$$

Ved at lade x og y bytte roller, ser vi, at ligningen i den åbne mængde $\Omega_f = \{(x,y) \in \Omega \mid f(x,y) \neq 0\}$ er ensgyldig med den sædvanlige differentialligning

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{g(x,y)}{f(x,y)}.$$

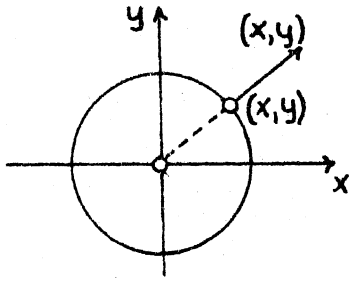
Antages, at funktionerne f og g er C^1-funktioner på Ω, kan vi på hver af disse ligninger anvende eksistens- og entydighedssætningen for sædvanlige differentialligninger. Ved, forsåvidt de har stykker fælles, at sammensætte maksimale løsninger til de to ligninger fås maksimale løsninger til ligningen $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ i mængden $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_g = \{(x,y)\in\Omega \mid (f(x,y),g(x,y)) \neq (0,0)\}$. Vi ser heraf:

Når f og g er C^1-funktioner, går der gennem hvert punkt af mængden $\Omega^* = \{(x,y)\in\Omega \mid (f(x,y),g(x,y)) \neq (0,0)\}$ en og kun een maksimal løsning til differentialligningen $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ i Ω^*.

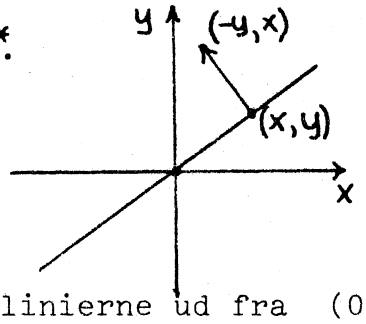
Enhver løsning i Ω^* er del af en maksimal løsning. Det bemærkes, at en maksimal løsning kan være en lukket kurve.

Punkterne af mængden $\Omega\setminus\Omega^*$, altså de punkter $(x,y) \in \Omega$, hvori $(f(x,y),g(x,y)) = (0,0)$, kaldes singulære punkter for differentialligningen $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$. Gennem et singulært punkt kan der gå ingen, een, eller flere løsninger. For de ligninger, vi skal betragte, er de singulære punkter i reglen isolerede (d.v.s. i en omegn findes ikke andre singulære punkter). Om der gennem et sådant punkt går løsninger, beror på, om man ved til maksimale løsninger i Ω^* at føje punktet kan danne kurver af den ønskede art i Ω.

Eksempel 1. Ligningen $x\,dx + y\,dy = 0$ i $\Omega = \mathbb{R}^2$ har det ene singulære punkt $(0,0)$. Funktionerne f og g er C^1 (endda C^∞). Gennem hvert punkt af mængden $\Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ går altså een maksimal løsning til ligningen i Ω^*. Da vektoren $(f(x,y),g(x,y)) = (x,y)$ for ethvert $(x,y) \neq (0,0)$ er beliggende på linien gennem $(0,0)$ og (x,y), ser man umiddelbart, at cirklerne med centrum $(0,0)$ udgør de maksimale løsninger til ligningen i Ω^*. Gennem det singulære punkt $(0,0)$ går ingen løsning til ligningen.



Eksempel 2. Ligningen $-y\,dx + x\,dy = 0$ i $\Omega = \mathbb{R}^2$ har det ene singulære punkt $(0,0)$. Funktionerne f og g er C^1 (endda C^∞). Gennem hvert punkt af mængden $\Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ går altså een maksimal løsning til ligningen i Ω^*. Da vektoren $(f(x,y),g(x,y)) = (-y,x)$ for ethvert $(x,y) \neq (0,0)$ er vinkelret på linien gennem $(0,0)$ og (x,y), ser man umiddelbart, at halvlinierne ud fra $(0,0)$, punktet $(0,0)$ ikke medregnet, udgør de maksimale løsninger til ligningen i Ω^*. Ved tilføjelse af det singulære punkt $(0,0)$ sammensættes halvlinierne til hele



linier gennem (0,0), og man ser, at løsningerne til ligningen i $\mathbb{R}^2$ er samtlige linier gennem (0,0) og dele deraf.

Sammenhæng med eksakte differentialformer.

Venstre side i en differentialligning af den betragtede art er jo en C^0-differentialform af første grad i Ω. Vi kan let vise følgende sætning.

Hvis C^0-differentialformen

$$\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

er eksakt i Ω, altså er differentialet af en C^1-funktion $H: \Omega \to \mathbb{R}$, er løsningerne til differentialligningen

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

niveaukurverne for funktionen H. Nøjagtigt udtrykt: Løsningerne er de C^1-kurver $t \mapsto (x(t),y(t)) \in \Omega$ med $(x'(t),y'(t)) \neq (0,0)$, langs hvilke H er konstant, d.v.s. som er indeholdt i en niveaukurve $\{(x,y)\in\Omega \mid H(x,y) = k\}$.

For en C^1-kurve $t \mapsto (x(t),y(t)) \in \Omega$ gælder nemlig

$$\frac{d}{dt} H(x(t),y(t)) = H'_x(x(t),y(t))x'(t) + H'_y(x(t),y(t))y'(t)$$
$$= f(x(t),y(t))x'(t) + g(x(t),y(t))y'(t),$$

og ligningen $f(x(t),y(t))x'(t) + g(x(t),y(t))y'(t) = 0$

er altså opfyldt for alle t, hvis og kun hvis $H(x(t),y(t))$ er konstant.

Ved hjælp af denne sætning kan vi løse differentialligningen $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$, hvis differentialformen ω på venstre side er eksakt. Som ovenfor bemærket ændres løsningerne ikke, selv om f og g multipliceres med samme kontinuerte nulpunktsfri funktion. Hvis vi kan finde en kontinuert funktion $h: \Omega \to \mathbb{R}$, så at differentialformen $h\omega = h(x,y)f(x,y)dx + h(x,y)g(x,y)dy$ er eksakt, kan vi altså løse ligningen i mængden $\{(x,y) \mid h(x,y) \neq (0,0)\}$. En sådan funktion h kaldes en integrationsfaktor for ω.

En differentialform med adskilte variable

$$\omega = f(x)dx + g(y)dy,$$

hvor $f: I \to \mathbb{R}$ og $g: J \to \mathbb{R}$ er kontinuerte funktioner på åbne intervaller I og J i $\mathbb{R}$, er eksakt i mængden $\Omega = I \times J$, idet den er differentialet af funktionen

$$H(x,y) = \int f(x)dx + \int g(y)dy.$$

Løsningerne til differentialligningen

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

bestemmes altså ved

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = k,$$

hvor k er en konstant. Differentialligningen

$$f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0,$$

hvor $f_1, g_1 : I \to \mathbb{R}$ og $f_2, g_2 : J \to \mathbb{R}$ er kontinuerte funktioner, overføres i en ligning med adskilte variable ved division med $f_2(y)g_1(x)$. De eventuelle nulpunkter for f_2 og g_1 kræver naturligvis en særskilt undersøgelse, men man ser umiddelbart, at et nulpunkt $b \in J$ for f_2 giver anledning til løsningskurven $t \mapsto (t,b), t \in I$, og at et nulpunkt $a \in I$ for g_1 giver anledning til løsningskurven $t \mapsto (a,t)$, $t \in J$.

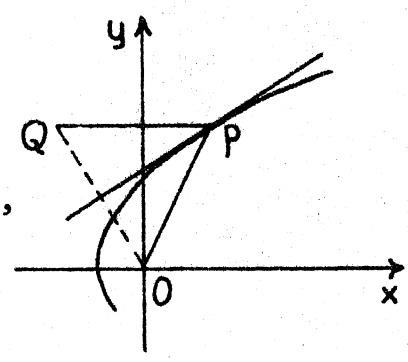
Eksempel 3. For ligningen $x\,dx + y\,dy = 0$ i eksempel 1 er venstre side en eksakt differentialform (de variable er adskilt). Venstre side er differentialet af funktionen $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Løsningskurverne er altså niveaukurverne for funktionen $x^2 + y^2$, d.v.s. de er bestemt ved $x^2 + y^2 = k$. Kun $k > 0$ giver løsninger.

Eksempel 4. Ligningen $-y\,dx + x\,dy = 0$ i eksempel 2 overføres ved division med xy i ligningen $-\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$, i hvilken de variable er adskilt. I hver af de åbne kvadranter $\{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$, $\{(x,y) \mid x > 0, y < 0\}$, $\{(x,y) \mid x < 0, y > 0\}$, $\{(x,y) \mid x < 0, y < 0\}$ bestemmes løsningerne altså ved

$$-\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dy}{y} = k, \quad \text{d.v.s.} \quad -\log|x| + \log|y| = k,$$

eller $\frac{|y|}{|x|} = k$ (>0) [med en ny betydning af k]. Herved bestemmes halvlinierne ud fra $(0,0)$, bortset fra dem på koordinatakserne, hvormed, idet $(0,0)$ medtages, er fundet alle løsninger pånær koordinatakserne, der trivielt er løsninger.

Eksempel 5. Vi søger de kurver, hvis tangent i ethvert kurvepunkt $P = (x,y) \neq (0,0)$ er halveringslinien for vinklen dannet af halvlinien gennem P parallel med den positive del af x-aksen og forlængelsen af liniestykket OP, hvor $O = (0,0)$. Afsættes vektoren $\vec{PQ} = (-\sqrt{x^2+y^2},0)$, vil vektoren $\vec{OQ} = (x-\sqrt{x^2+y^2},y)$ øjensynlig være vinkelret på tangentretningen. De søgte kurver er altså løsningerne til differentialligningen



$$(x-\sqrt{x^2+y^2})dx + y\,dy = 0.$$

Venstre side i denne ligning er ikke en eksakt differentialform, men man ser, at funktionen $(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ er en integrationsfaktor i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, idet

$$d(\sqrt{x^2+y^2}-x) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1)dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

for $(x,y) \neq (0,0)$. Løsningskurverne bestemmes altså ved

$$\sqrt{x^2+y^2} - x = k.$$

Her kommer kun værdier $k \geq 0$ i betragtning. For $k = 0$ fås den positive del af x-aksen (som sammen med $(0,0)$ udgør ligningens singulære punkter). For $k > 0$ kan ligningen for løsningskurven omformes til

$$x^2 + y^2 = (x+k)^2,\ x > -k, \quad \text{eller} \quad y^2 = 2k(x+\tfrac{1}{2}k).$$

og man ser, at den fremstiller parablen med brændpunkt $(0,0)$ og ledelinie $x = -k$.

Opgaven løses enklere i polære koordinater (r,φ). Insætter vi

$$x = r\cos\varphi \qquad dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi$$
$$y = r\sin\varphi, \qquad dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi,$$

fås ligningen

$$r(\cos\varphi - 1)(\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi) + r\sin\varphi(\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi) = 0$$

eller

$$r(1-\cos\varphi)dr + r^2\sin\varphi\, d\varphi = 0,$$

hvori de variable kan adskilles ved division med $r^2(1-\cos\varphi)$. Her svarer $r = 0$ blot til begyndelsespunktet, medens $1-\cos\varphi = 0$ giver den positive del af x-aksen som løsningskurve. De øvrige løsningskurver bestemmes af

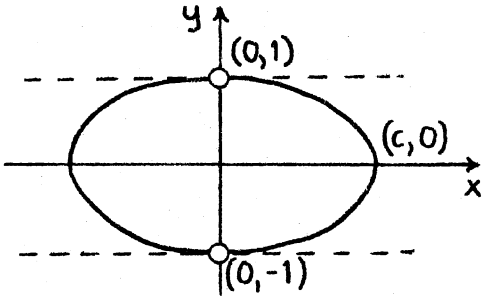
$$\int\frac{dr}{r} + \int\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}d\varphi = k,$$

eller (med en ny betydning af k)

$$r = \frac{k}{1-\cos\varphi}, \qquad k \in \mathbb{R}_+,$$

hvilket er en parabelligning i polære koordinater.

Eksempel 6. Vi søger en differentialligning i strimlen $\{(x,y) \mid -1 < y < 1\}$, hvis løsningskurver er



alle halvellipser, der fås af ellipser med $(0,1)$ og $(0,-1)$ som modstående toppunkter ved at udelade disse punkter. Ellipsen gennem $(c,0)$, hvor $c \neq 0$, har ligningen

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{1} = 1 \quad \text{eller} \quad x^2 + c^2y^2 - c^2 = 0,$$

hvor vi på den sidste form får et interval på y-aksen som udartet tilfælde for $c = 0$. Løses ligningen med hensyn til c^2 fås

$$c^2 = f(x,y) = \frac{x^2}{1-y^2}.$$

Kurverne er altså niveaukurverne for funktionen f og følgelig løsningskurverne for ligningen

$$f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy = \frac{2x}{1-y^2}dx + \frac{2x^2y}{(1-y^2)^2}dy = 0$$

eller

$$dx + \frac{xy}{1-y^2}dy = 0,$$

Differentialligningen kan alternativt fås ved følgende ræsonnement: Idet $t \mapsto (x(t),y(t))$ betegner en parameterfremstilling for kurven hørende til værdien c af konstanten, er funktionen $t \mapsto x(t)^2 + c^2\, y(t)^2 - c^2$ identisk 0. Der gælder derfor

$$2xx' + 2c^2yy' = 0.$$

Indsættes heri $c^2 = \frac{x^2}{1-y^2}$, fås den ønskede ligning.

Ortogonaltrajektorier. Lad der være givet en skare af C^1-kurver i mængden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, således at der går netop een kurve af skaren gennem hvert punkt af Ω. En C^1-kurve i Ω kaldes da en ortogonaltrajektorie for kurveskaren, hvis den skærer kurverne i skaren under ret vinkel. [Ved vinklen mellem to skærende kurver forstås vinklen mellem tangenterne i skæringspunktet.]

Hvis kurveskaren er løsningskurverne til differentialligningen

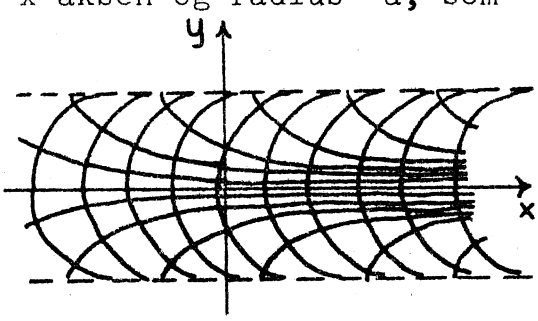
$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0,$$

hvor $f,g: \Omega \to \mathbb{R}$ er uden fælles nulpunkter i Ω, er ortogonaltrajektorierne løsningskurverne til differentialligningen

$$-g(x,y)dx + f(x,y)dy = 0.$$

Dette følger umiddelbart af, at vektoren $(-g(x,y),f(x,y))$ fås af vektoren $(f(x,y),g(x,y))$ ved en drejning på $\frac{1}{2}\pi$.

Eksempel 7. Vi søger ortogonaltrajektorierne for den i strimlen $\{(x,y) \mid -a < y < a\}$ beliggende skare af halvcirkler med centrum på x-aksen og radius a, som ligger til venstre for diameteren parallel med y-aksen. Halvcirklen med centrum $(c,0)$ har ligningen



$$x + \sqrt{a^2-y^2} = c,$$

hvoraf vi får differentialligningen for kurveskaren

$$dx - \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy = 0.$$

Ortogonaltrajektorierne er løsningskurverne til differentialligningen

$$\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dx + dy = 0.$$

Man ser, at x-aksen er ortogonaltrajektorie. For $y \neq 0$ kan de variable adskilles, og vi får

$$dx + \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy = 0,$$

hvoraf

$$x + \int \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy = k.$$

Integralet udregnes ved substitutionen $y = a \cos u$:

$$\int \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy = -a\int \frac{\sin^2 u}{\cos u}du = a\int (1 - \frac{1}{1-\sin^2 u})d \sin u$$

$$= a \sin u + \frac{a}{2} \log\left|\frac{1-\sin u}{1+\sin u}\right| = a \sin u + a \log\left|\frac{\cos u}{1+\sin u}\right|$$

$$= \sqrt{a^2-y^2} + a \log\left|\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\right|.$$

Ortogonaltrajektorierne er altså givet ved

$$x = k - \sqrt{a^2-y^2} - a \log\left|\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\right|, \quad k \in \mathbb{R},$$

og

$$y = 0.$$

I et punkt $P = (x,y)$ med $y \neq 0$ kan ortogonaltrajektoriebetingelsen også udtrykkes ved, at liniestykket fra P til tangentens skæringspunkt med x-aksen har den konstante længde a, og de fundne kurver er de eneste med denne egenskab. Kurverne er altså traktricer, jfr. § 38.

Anvendelse på sædvanlige differentialligninger.

En sædvanlig differentialligning af formen

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

kan ofte løses derved, at de variable kan adskilles i den tilhørende ligning

$$F(x,y)dx - dy = 0,$$

og denne metode spiller en vigtig rolle ved anvendelserne.

Eksempel 8. Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}, \qquad (x,y) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R},$$

har løsningen $y = 0$. De øvrige løsninger bestemmes af

$$\frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2} = 0,$$

altså

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = k$$

eller

$$y = \frac{x}{1+kx}.$$

For $k = 0$ fås linien $y = x$. For $k \neq 0$ kan ligningen omformes til

$$(x+\frac{1}{k})(y-\frac{1}{k}) = -\frac{1}{k^2},$$

der fremstiller en ligesidet hyperbel med asymptoterne $x = -\frac{1}{k}$ og $y = \frac{1}{k}$ og gående gennem punktet $(0,0)$.

Opgaver. 1. Find løsningskurverne til differentialligningen

$$(3x^2+y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Skitser den løsningskurve, der går gennem $(1,0)$.

2. Find de plane kurver, for hvilke tangenten i hvert kurvepunkt (x,y) går gennem punktet $(2x,0)$.

3. Idet $a > 0$ er en given konstant, skal man bestemme de plane kurver, for hvilke linien gennem begyndelsespunktet 0 parallel med kurvenormalen i det vilkårlige kurvepunkt P afskærer et liniestykke af længden a på den på OP vinkelrette halvlinie ud fra P.

4. En kurveskare i planen er i polære koordinater (r,φ) givet som løsningskurverne til differentialligningen

$$f(r,\varphi)dr + g(r,\varphi)d\varphi = 0.$$

Find en differentialligning, hvis løsningskurver er skaren af ortogonaltrajektorier.

*5. Find en differentialligning, hvis løsningskurver er skaren af cirkler gennem punkterne $(a,0)$ og $(-a,0)$, hvor $a > 0$ er en given konstant. Find kurveskarens ortogonaltrajektorier.

*6. Find ortogonaltrajektorierne for skaren af ellipser med brændpunkter $(a,0)$ og $(-a,0)$, hvor $a > 0$ er en given konstant.

7. Find løsningerne til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+y^2}}{x}, \quad (x,y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}.$$

8. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}.$$

Angiv den løsning $y = f(x)$, for hvilken $f(1) = -1$.

9. Find samtlige løsninger til differentialligningen $ydx + xdy = 0$. Find endvidere ortogonaltrajektorierne for denne kurveskare.

10. Find en differentialligning af formen

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0,$$

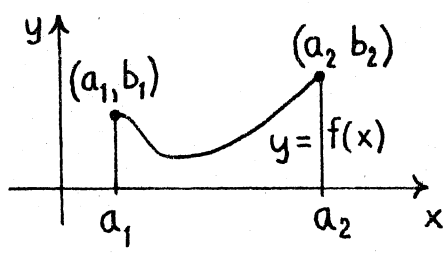
hvis løsninger er linierne $y = \alpha x$ og $y = -\alpha x$, hvor $\alpha > 0$ er en given konstant, og alle hyperbler med disse linier som asymptoter. Find dernæst ortogonaltrajektorierne for denne kurveskare.

§ 55. Variationsregning. Det simpleste problem.

I variationsregningen behandles ekstremumsopgaver for funktionaler, d.v.s. funktioner defineret på et funktionsrum.

I 1696 stillede Johann Bernoulli den opgave at finde brachistokronen - kurven med mindst faldtid, jfr. nedenfor - idet han foreløbig holdt sin egen løsning tilbage. Den blev løst bl.a. af broderen Jakob Bernoulli. Medens Johann Bernoullis løsning var af speciel karakter, idet den bragte problemet i forbindelse med en lysstråles vej i et medium med variabelt brydningsforhold og udnyttede Fermats princip, at lysstrålerne i et sådant medium går ad de hurtigste veje, var Jakob Bernoullis løsning af almen karakter og anvendelig på andre lignende opgaver. Som selvstændig disciplin udvikledes variationsregningen i løbet af 17-hundredtallet af Euler og Lagrange, og videre i løbet af 18-hundredtallet bl.a. af Legendre, Jacobi, Weierstrass.

Det simpleste problem med randbetingelser. Lad $F(x,y,p) \in C^2(\Omega)$ være en reel funktion på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Lad (a_1,b_1) og (a_2,b_2) med $a_1 < a_2$ være punkter i (x,y)-planen. En tilladt funktion er



en funktion $y = f(x) \in C^2([a_1,a_2])$, der opfylder randbetingelserne $f(a_1) = b_1$ og $f(a_2) = b_2$, og for hvilken $(x,f(x),f'(x)) \in \Omega$ for alle $x \in [a_1,a_2]$. Vi vil naturligvis antage, at Ω,

$(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ er sådan, at der findes tilladte funktioner. Med afstandsdefinitionen

$$\mathrm{dist}(f,g) = \sup_{x\in[a_1,a_2]} |f(x)-g(x)|$$

er mængden af tilladte funktioner et metrisk rum.

På dette rum betragtes funktionalen

$$I = I(f) = \int_{a_1}^{a_2} F(x,f(x),f'(x))dx.$$

Vi siger, at I har lokalt minimum, resp. lokalt maksimum, for den tilladte funktion f, såfremt der findes et $\rho > 0$, således at $I(f_1) \geq I(f)$, resp. $I(f_1) \leq I(f)$, for alle tilladte funktioner f_1, for hvilke $\mathrm{dist}(f,f_1) < \rho$, og vi siger, at I har globalt minimum, resp. globalt maksimum, for f, såfremt $I(f_1) \geq I(f)$, resp. $I(f_1) \leq I(f)$, for alle tilladte funktioner f_1. Som fælles betegnelse for minimum og maksimum benyttes ekstremum.

Vi søger tilladte funktioner f, for hvilke I har lokalt ekstremum.

Bemærk. For eksistensen af $I(f)$ havde det været nok at antage $F \in C^0(\Omega)$ og $f \in C^1([a_1,a_2])$. De ovenfor gjorte stærkere antagelser $F \in C^2(\Omega)$ og $f \in C^2([a_1,a_2])$ er betingede af den benyttede metode.

Udledelse af nødvendig betingelse for lokalt ekstremum. Vi antager, at I har lokalt ekstremum for den tilladte funktion f. Nu væges en vilkårlig funktion $g \in C^2([a_1,a_2])$, for hvilken $g(a_1) = 0$ og $g(a_2) = 0$. Da Ω er åben, vil der findes en omegn $]-\eta,\eta[$ af tallet 0, således at funktionen $f + \varepsilon g$ er tilladt

for alle ε i denne omegn. Thi mængden $\{(x,f(x),f'(x)) \mid x \in [a_1,a_2]\}$ er en kompakt delmængde af Ω. Altså findes et tal $d > 0$, således at ethvert punkt $(x_1,y_1,p_1) \in \mathbb{R}^3$, for hvilket der for et $x \in [a_1,a_2]$ gælder $\max\{|x_1-x|, |y_1-f(x)|, |p_1-f'(x)|\} < d$, vil tilhøre Ω. Sættes $\max\{\sup_{x\in[a_1,a_2]}|g(x)|, \sup_{x\in[a_1,a_2]}|g'(x)|\} = M$, ses, at $f + \varepsilon g$ er tilladt, når blot $|\varepsilon|M < d$, altså når $\varepsilon \in]-\eta,\eta[$, hvor $\eta = \frac{d}{M}$. I denne omegn af 0 betragtes funktionen

$$\varphi(\varepsilon) = I(f+\varepsilon g) = \int_{a_1}^{a_2} F(x,f(x)+\varepsilon g(x),f'(x)+\varepsilon g'(x))dx.$$

Da har φ lokalt ekstremum for $\varepsilon = 0$. Den under integraltegnet optrædende funktion af de to variable x og ε på mængden $[a_1,a_2]\times]-\eta,\eta[$ har efter ε en kontinuert partiel afledet, der udregnes efter kædereglen. Ifølge sætningen om differentiation af et integral efter en parameter, er φ altså differentiabel på $]-\eta,\eta[$ med den afledede

$$\varphi'(\varepsilon) = \int_{a_1}^{a_2}\{F_y'(x,f(x)+\varepsilon g(x),f'(x)+\varepsilon g'(x))g(x) + F_p'(x,f(x)+\varepsilon g(x),f'(x)+\varepsilon g'(x))g'(x)\}dx.$$

Altså er $\varphi'(0) = 0$, d.v.s.

$$\int_{a_1}^{a_2}\{F_y'(x,f(x),f'(x))g(x)+F_p'(x,f(x),f'(x))g'(x)\}dx = 0.$$

Ved delvis integration fås, idet funktionen $F_p'(x,f(x),f'(x))$ tilhører $C^1([a_1,a_2])$, jfr. udregningen nedenfor,

$$\int_{a_1}^{a_2} F'_p(x,f(x),f'(x))g'(x)dx$$

$$= \left[F'_p(x,f(x),f'(x))g(x)\right]_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2}\left[\frac{d}{dx}F'_p(x,f(x),f'(x))\right]g(x)dx.$$

Da $g(a_1) = 0$ og $g(a_2) = 0$, bliver betingelsen $\varphi'(0) = 0$ altså

$$\int_{a_1}^{a_2}\left\{F'_y(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx}F'_p(x,f(x),f'(x))\right\}g(x)dx = 0.$$

Den i parentesen optrædende funktion

$$h(x) = F'_y(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx}F'_p(x,f(x),f'(x))$$

tilhører $C^0([a_1,a_2])$. Ved udregning fås

$$h(x) = F'_y(x,f(x),f'(x)) - F''_{xp}(x,f(x),f'(x)) - F''_{yp}(x,f(x),f'(x))f'(x)$$
$$- F''_{pp}(x,f(x),f'(x))f''(x).$$

Vi indskyder nu:

Lemma. Hvis en funktion $h \in C^0([a_1,a_2])$ har den egenskab, at

$$\int_{a_1}^{a_2} h(x)\, g(x)dx = 0$$

for enhver funktion $g \in C^2([a_1,a_2])$, for hvilken $g(a_1) = 0$ og $g(a_2) = 0$, da er $h(x) = 0$ for alle $x \in [a_1,a_2]$.

Bevis. Beviset føres indirekte. Hvis der fandtes et $x \in [a_1,a_2]$, for hvilket f.eks. $h(x) > 0$, da fandtes der ifølge kontinuiteten et delinterval $]x_1,x_2[$ af $[a_1,a_2]$, hvori $h(x) > 0$. Nu vælges $g \in C^2([a_1,a_2])$ således, at $g(x) = 0$ for $x \in [a_1,x_1]$ og $x \in [x_2,a_2]$, og $g(x) > 0$ for $x \in]x_1,x_2[$. Dette er muligt, f.eks.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \in [a_1,x_1] \text{ og } x \in [x_2,a_2] \\ (x-x_1)^3(x_2-x)^3 & \text{for } x \in]x_1,x_2[. \end{cases}$$

Da er $\int_{a_1}^{a_2} h(x)g(x)dx > 0$ i strid med antagelsen. ∎

Ved anvendelse af dette lemma fås nu som nødvendig betingelse for lokalt ekstremum, at $y = f(x)$ opfylder Eulers differentialligning

$$\boxed{F'_y(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx}F'_p(x,f(x),f'(x)) = 0}$$

eller udførligt skrevet

$$\boxed{\begin{aligned} &F'_y(f,f(x),f'(x)) - F''_{xp}(x,f(x),f'(x)) - F''_{yp}(x,f(x),f'(x))f'(x) \\ &- F''_{pp}(x,f(x),f'(x))f''(x) = 0 \end{aligned}}$$

Kortere skrives ligningen

$$F'_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y,y') = 0$$

eller

$$F'_y(x,y,y') - F''_{xy'}(x,y,y') - F''_{yy'}(x,y,y')y' - F''_{y'y'}(x,y,y')y'' = 0.$$

Ved denne (lidt letsindige) skrivemåde optræder y' i to forskellige betydninger, nemlig dels i linien som afledet af funktionen $y = f(x)$, og dels som index som betegnelse for den tredje variable i funktionen F.

Udtrykket

$$\varphi'(0) = \int_{a_1}^{a_2} \left\{F'_y(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx}F'_p(x,f(x),f'(x))\right\} g(x)dx,$$

som kan dannes for enhver tilladt funktion f, kaldes variationen af I svarende til tilvækstfunktionen g og betegnes også δI eller $\delta I(f)$. Man bemærker, at δI

(opfattet som funktion af g) er en lineær funktional. Variationen af I er analog til differentialet af en funktion af en eller flere variable. Løsningerne til Eulers differentialligning er de funktioner f, for hvilke $\delta I(f) = 0$ for alle $g \in C^2([a_1,a_2])$ med $g(a_1) = 0, g(a_2) = 0$. De kaldes derfor stationære funktioner for I. Med en uheldig benævnelse kaldes de ofte ekstremaler for det betragtede variationsproblem, uanset om de giver ekstremum eller ej.

Da vi ikke har vil studere tilstrækkelige betingelser for ekstremum, kan vi i de følgende eksempler til begrundelse for, at de fundne funktioner virkelig løser de stillede opgaver, kun henvise til en plausibilitetsbetragtning.

Specialtilfælde. Hvis funktionen $F(x,y,p)$ ikke afhænger af x, fås ved multiplikation af Eulers differentialligning med y' ligningen

$$\frac{d}{dx}\left[F(x,y,y')-F'_p(x,y,y')y'\right] = 0.$$

Thi når F ikke afhænger af x, er

$$\frac{d}{dx}F(x,y,y') = F'_y(x,y,y')y' + F'_p(x,y,y')y''$$

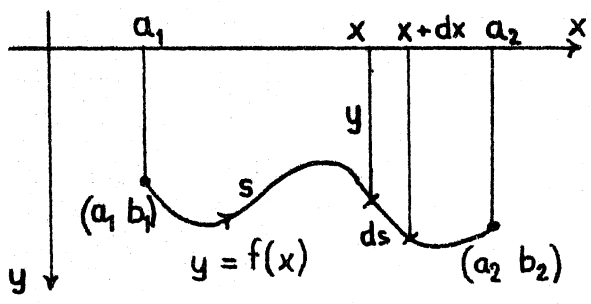
$$\frac{d}{dx}\left[F'_p(x,y,y')y'\right] = \frac{d}{dx}\left[F'_p(x,y,y')\right]y' + F'_p(x,y,y')y''.$$

For enhver løsning til Eulers differentialligning gælder altså

$$\boxed{F(x,y,y') - F'_p(x,y,y')y' = \text{konst.}} \quad ,$$

og enhver løsning til denne ligning, for hvilken $y' \neq 0$, vil også være en løsning til Eulers differentialligning.

Brachistokronen. Vi vælger y-aksen positiv nedad og betragter for givne punkter $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ med $a_1 < a_2, b_1 > 0, b_2 > 0$ en positiv funktion $y = f(x) \in C^2([a_1,a_2])$ med $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$. En partikel med massen m tænkes under tyngdens påvirkning at falde (glide) på grafen for f, der antages gnidningsfri, således at den begynder i punktet (a_1,b_1) til tiden 0 med farten $v_o = \sqrt{2gb_1}$, hvor g er tyngdeaccelerationen; dette er den fart partiklen ville opnå ved et fald fra en udgangsstilling (i hvile) på x-aksen. Med T betegnes faldtiden, d.v.s. tidspunktet for partiklens ankomst i punktet (a_2,b_2). Vi forudsætter ikke $b_2 > b_1$; udgangsfarten er tilstrækkelig til, at partiklen kan nå helt op til x-aksen. Vi ønsker at vælge f således, at faldtiden er mindst mulig.



Koordinaterne x og y er funktioner af tiden t, $0 \leq t \leq T$. Idet s er buelængden og v farten til tiden t, har vi

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_o^2 = mg(y-b_1)$$

[den fra kurven hidrørende kraft er vinkelret på hastigheden og udfører derfor intet arbejde]. Vi får heraf

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g\,y}}dx$$

og dermed for faldtiden udtrykket

$$T = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g\,y}}dx.$$

Opgaven er altså at bestemme f blandt de tilladte funktioner, således at

$$I = I(f) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx$$

er mindst mulig. Vi har her $\Omega = \{(x,y,p) \mid y > 0\}$ og

$$F(x,y,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}}\ .$$

Eulers differentialligning er

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y\sqrt{y}} - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = 0,$$

som ved nogen regning omskrives til

$$(\Delta) \qquad 1 + y'^2 + 2yy'' = 0,$$

en ligning, som vi ikke uden videre kan løse.

Benytter vi imidlertid, at F ikke afhænger af x, ser vi, at Eulers ligning multipliceret med y' giver

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}y' = \text{konst.}$$

eller

$$(*) \qquad y(1+y'^2) = \text{konst.} = 2\alpha\ (>0).$$

For et bestemt α må vi for enhver løsning have $0 < y < 2\alpha$. Vi søger først løsninger, for hvilke $0 < y < 2\alpha$, d.v.s. for hvilke $y' \neq 0$. For en sådan må y' have konstant fortegn (da y' er kontinuert). Vi har altså

$$\frac{dy}{dx} = y' = \sqrt{\frac{2\alpha}{y}-1} \text{ eller } \quad \frac{dy}{dx} = y' = -\sqrt{\frac{2\alpha}{y}-1}.$$

For en sådan løsning kan vi benytte y som uafhængig variabel. Vi få da, idet vi betragter den første ligning,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\alpha}{y}-1}} = \sqrt{\frac{y}{2\alpha-y}}, \quad x = \int\sqrt{\frac{y}{2\alpha-y}}dy.$$

Vi anvender substitutionen

$$y = 2\alpha \sin^2\tfrac{1}{2}u = \alpha(1-\cos u), \quad 0 < u < \pi,$$

og får

$$x = \int\sqrt{\frac{2\alpha \sin^2\frac{1}{2}u}{2\alpha \cos^2\frac{1}{2}u}}\, 2\alpha\sin\tfrac{1}{2}u \cos\tfrac{1}{2}u\, du = \int 2\alpha \sin^2\tfrac{1}{2}u\, du$$
$$= \int\alpha(1-\cos u)du = \alpha(u-\sin u) + \beta.$$

Vi har altså løsningerne

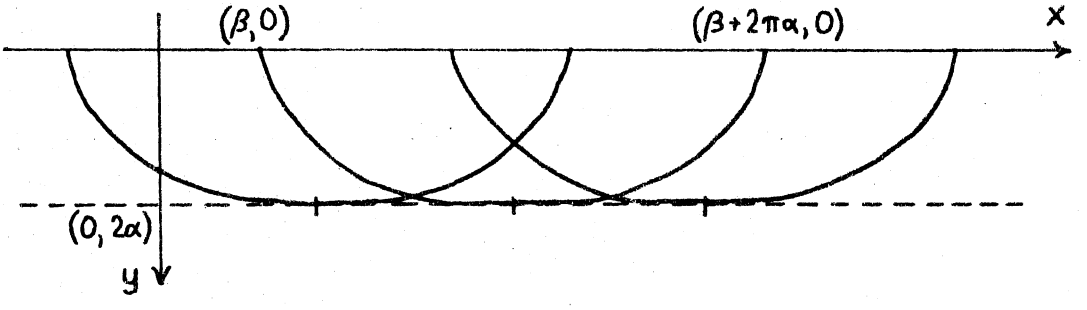
$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha(u-\sin u) + \beta \\ y &= \alpha(1-\cos u) \end{aligned}\right\} \quad 0 < u < \pi,$$

der fremstiller alle halve cykloidebuer frembragt ved at en cirkel med radius α ruller på x-aksen, regnet fra spids til toppunkt (endepunkterne ikke medregnet).
For den anden ligning får vi (på grund af symmetri) de halve cykloidebuer regnet fra toppunkt til spids (endepunkterne ikke medregnet). Løsningsmængden til ligningen (*) i strimlen $0 < y < 2\alpha$ består altså af de funktioner, hvis graf er en sådan halvcykloide eller del deraf. Da enhver løsning til ligningen forløber i strimlen $0 < y \leq 2\alpha$, og da $y = 2\alpha$ er løsning, ser man let, at løsningsmængden til ligningen (*) i strim-

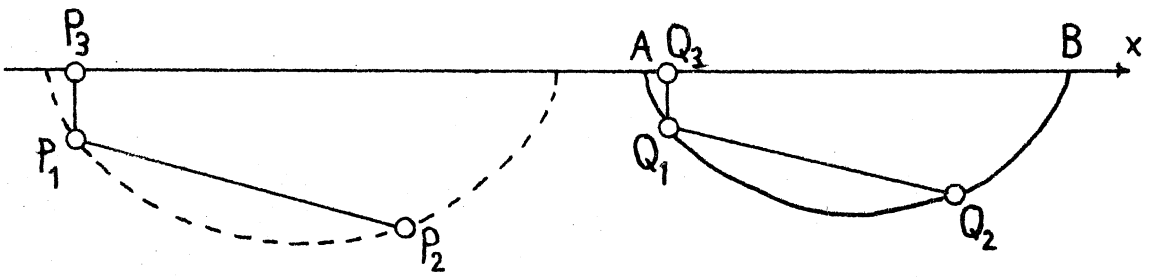
len $0 < y \leq 2\alpha$ består af $y = 2\alpha$ og de funktioner, hvis graf er en hel cykloidebue

$$(\S) \qquad \left.\begin{aligned} x &= \alpha(u-\sin u) + \beta \\ y &= \alpha(1-\cos u) \end{aligned}\right\} \quad 0 < u < 2\pi,$$

en halvcykloide og en halvlinie på $y = 2\alpha$, eller to halvcykloider og et mellemliggende stykke af linien $y = 2\alpha$, samt naturligvis restriktioner af disse. Da ligningen (*) er ensgyldig med Euler ligningen (Δ) for så vidt angår funktioner med $y' \neq 0$, og da en konstant funktion (åbenbart) ikke kan være løsning til Euler ligningen, slutter vi, at løsningsmængden til Euler ligningen består af de funktioner, hvis graf er en cykloidebue (§) ($0 < \alpha < +\infty, -\infty < \beta < +\infty$) eller del deraf.



Det må nu undersøges, om der gennem de givne punkter (a_1,b_1) og (a_2,b_2) går en cykloidebue (§). Vi vil indskrænke os til at skitsere et bevis for, at der går netop een. Det beror på, at cykloidebuer for forskellige α er ligedannede. Vi betegner de givne punkter P_1 og P_2, og projektionen af P_1 på x-aksen P_3.



Nu skaffer vi os for en fast cykloidebue AB en trekant $Q_1Q_2Q_3$ ligedannet med $P_1P_2P_3$, idet vi lader korden Q_1Q_2 variere parallet med P_1P_2. Forholdet $\frac{Q_1Q_2}{Q_1Q_3}$ vil da variere monotont fra 0 til $+\infty$ og vil altså for netop een stilling antage værdien $\frac{P_1P_2}{P_1P_3}$.

Hermed er godtgjort, at der for de givne endepunkter $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ er netop een stationær funktion $y = f(x)$ for integralet I, d.v.s. for faldtiden T, nemlig den, der bestemmes ved den pågældende cykloidebue. Man kan vise, at T har globalt minimum for denne funktion, der altså er løsning til brachistokrone problemet. Man kan vise, at resultatet også har gyldighed i de grænsetilfælde, hvor et af punkterne $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$, eller begge, ligger på x-aksen.

Bemærkning. Det blev sagt ovenfor, at vi ikke uden videre kan løse Eulerligningen (Δ). At dens løsningsmængde er bestemt ved cykloidebuerne (§) kan dog let sluttes af tidligere resultater. Thi skrives ligningen på formen $y'' = -\frac{1+y'^2}{2y}$, ses af eksistens- og entydighedssætningen, at der gennem hvert linieelement af første orden går en og kun een maksimal løsning. Skrives ligningen på formen $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -2y\sqrt{1+y'^2}$, ses, at cykloidebuerne er løsninger, idet ligningen udtrykker den i § 38 viste egenskab ved cykloiden, at krumnings-

radius er det dobbelte af stykket fra kurvepunktet til normalens skæringspunkt med x-aksen. De er åbenbart maksimale løsninger. Da man let geometrisk ser, at der gennem hvert linieelement af første orden går en af cykloidebuerne, kan der ikke være andre maksimale løsninger.

Omdrejningsflade med minimalt areal. For givne punkter $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ med $a_1 < a_2, b_1 > 0, b_2 > 0$ betragter vi en positiv funktion $y = f(x) \in C^2([a_1,a_2])$ med $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$. Ved drejning om x-aksen beskriver grafen af f en omdrejningsflade, hvis areal O ifølge § 40 er bestemt ved formlen

$$O = \int_{a_1}^{a_2} 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Vi ønsker at bestemme f således, at arealet er mindst muligt.

Opgaven er altså at bestemme f blandt de tilladte funktioner, således at

$$I = I(f) = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

er mindst mulig. Vi har her $\Omega = \{(x,y,p) \mid y > 0\}$ og

$$F(x,y,p) = y\sqrt{1+p^2}.$$

[Udtrykket for F bestemmer en C^2-funktion på hele $\mathbb{R}^3$. Indskrænkningen til Ω er betinget af problemstillingen.]

Eulers differentialligning er

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx}\left[y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = 0,$$

som ved nogen regning omskrives til

$$(\Delta) \qquad 1 + y'^2 - yy'' = 0,$$

en ligning, som vi ikke uden videre kan løse.

Benytter vi imidlertid, at F ikke afhænger af x, ser vi, at Eulers ligning multipliceret med y' giver

$$y\sqrt{1+y'^2} - y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}y' = \text{konst.}$$

eller

$$(*) \qquad \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{konst.} = \alpha \quad (>0).$$

For et bestemt α må vi for enhver løsning have $y \geq \alpha$. Vi søger først løsninger, for hvilke $y > \alpha$, d.v.s. for hvilke $y' \neq 0$. For en sådan må y' have konstant fortegn (da y' er kontinuert). Vi har altså

$$\frac{dy}{dx} = y' = \sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2}-1} \quad \text{eller} \quad \frac{dy}{dx} = y' = -\sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2}-1}.$$

For en sådan løsning kan vi benytte y som uafhængig variabel. Vi får da, idet vi betragter den første ligning,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2}-1}} = \frac{\alpha}{\sqrt{y^2-\alpha^2}}, \qquad x = \int\frac{\alpha}{\sqrt{y^2-\alpha^2}}dy.$$

Vi anvender substitutionen $y = \alpha \cosh u$, $u > 0$, og får

$$x = \int\frac{\alpha}{\alpha \sinh u}\alpha \sinh u \, du = \alpha u + \beta.$$

Vi har altså løsningerne

$$y = \alpha \cosh\frac{x-\beta}{\alpha}, \qquad x > \beta,$$

som fremstiller alle højre halvdele af kædelinier med x-aksen som ledelinie og toppunkt på linien $y = \alpha$ (toppunktet ikke medregnet). For den anden ligning får vi (på grund af symmetri) de venstre halvdele af kædelinierne (toppunktet ikke medregnet). Løsningsmængden til ligningen (✱) i halvplanen $y > \alpha$ består altså af de funktioner, hvis graf er en sådan halv kædelinie eller del deraf. Da enhver løsning til ligningen forløber i halvplanen $y \geq \alpha$, og da $y = \alpha$ er løsning, ser man let, at løsningsmængden til ligningen (✱) i halvplanen $y \geq \alpha$ består af $y = \alpha$ og de funktioner, hvis graf er en hel kædelinie

$$(\S) \qquad y = \alpha \cosh \frac{x-\beta}{\alpha}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

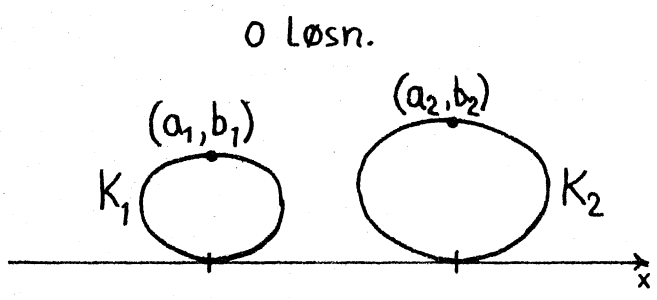
en halv kædelinie og en halvlinie på $y = \alpha$, eller to halve kædelinier og et mellemliggende stykke af linien $y = \alpha$, samt naturligvis restriktioner af disse. Da ligningen (✱) er ensgyldig med Euler ligningen (Δ) for så vidt angår funktioner med $y' \neq 0$, og da en konstant funktion (åbenbart) ikke kan være løsning til Euler ligningen, slutter vi, at løsningsmængden til Euler ligningen består af funktionerne ($\S$) ($\alpha > 0, -\infty < \beta < +\infty$) og deres restriktioner.

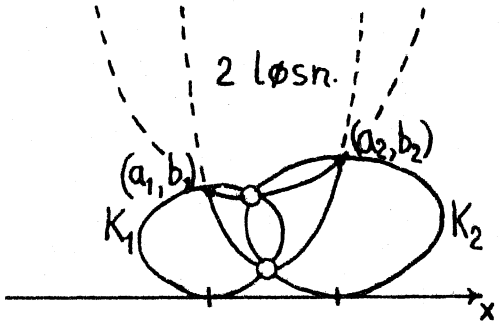
Det må nu undersøges, om der gennem de givne punkter $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ går en kædelinie ($\S$), og i givet fald hvor mange. Man ser, at dette kommer ud på et med at finde antallet af løsninger $(\beta,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ til

ligningsparret

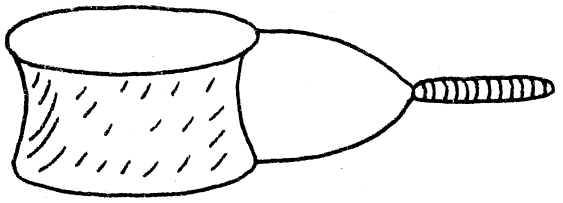
$$b_1 = \alpha \cosh \frac{a_1-\beta}{\alpha}, \quad b_2 = \alpha \cosh \frac{a_2-\beta}{\alpha}.$$

Den første ligning bestemmer en kurve K_1 bestående af toppunkterne (β,α) for kædelinier gennem (a_1,b_1), og den anden ligning bestemmer en kurve K_2 bestående af toppunkterne (β,α) for kædelinier gennem (a_2,b_2). Man kan vise, at disse kurver har 0, 1 eller 2 fælles punkter. Der er altså 0, 1 eller 2 kædelinier gennem de to punkter $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$.





De herved bestemte funktioner $y = f(x), a_1 \leq x \leq a_2$, er de stationære funktioner for integralet I, d.v.s. for arealet 0 af omdrejningsfladen. Man kan vise, at når der er to løsninger, giver den øverste globalt minimum for arealet, den nederste hverken lokalt minimum eller lokalt maksimum; er der kun een løsning, giver den hverken lokalt minimum eller lokalt maksimum. Fladen med mindst areal kan (når den findes) bestemmes eksperimentelt som sæbeskumsflade.



Korteste forbindelse mellem to punkter. Det drejer sig om at søge minimum af længden

$$I = I(f) = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

af kurven $y = f(x), a_1 \leq x \leq a_2$, hvor $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$. Eulers differentialligning er $-\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$, som giver $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{konst.}$, altså $y' = \text{konst.} = \alpha$, hvoraf $y = \alpha x + q$. Den lineære funktion, der fremstiller liniestykket med endepunkterne $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$, er således den eneste stationære funktion for I. Man kan (meget let) direkte vise, at den giver globalt minimum.

Afkald på den ene eller på begge randbetingelser. Vi betragter det simpleste problem med den modifikation, at vi giver afkald på en af randbetingelserne, f.eks. på randbetingelsen $f(a_2) = b_2$. De tilladte funktioner er altså nu alle funktioner $y = f(x) \in C^2([a_1,a_2])$, for hvilke $(x,f(x),f'(x)) \in \Omega$ for alle $x \in [a_1,a_2]$, og som opfylder randbetingelsen $f(a_1) = b_1$. Vi siger naturligvis atter, at

$$I = I(f) = \int_{a_1}^{a_2} F(x,f(x),f'(x))dx$$

har lokalt minimum, resp. lokalt maksimum, for den tilladte funktion f, såfremt der findes et $\rho > 0$, således at $I(f_1) \geq I(f)$, resp. $I(f_1) \leq I(f)$, for alle tilladte funktioner f_1, for hvilke $\text{dist}(f,f_1) < \rho$, og vi siger, at I har globalt minimum, resp. globalt maksimum, for f, såfremt $I(f_1) \geq I(f)$, resp. $I(f_1) \leq I(f)$, for alle tilladte funktioner f_1. Ordlyden af definitionen er den samme som før, men indholdet er et andet, idet de tilladte funktioner nu er en mere omfattende mængde. Vi søger atter funktioner f, for hvilke I har lokalt ekstremum.

Vi antager, at I har lokalt ekstremum for den tilladte funktion f. Nu vælges en vilkårlig funktion $g \in C^2([a_1,a_2])$, for hvilken blot $g(a_1) = 0$ (medens $g(a_2)$ kan være $\neq 0$). Da Ω er åben, findes en omegn af tallet 0, således, at funktionen $f + \varepsilon g$ er tilladt for alle ε i denne omegn. I denne omegn af 0 betragtes funktionen

$$\varphi(\varepsilon) = I(f+\varepsilon g) = \int_{a_1}^{a_2} F(x,f(x)+\varepsilon g(x),f'(x)+\varepsilon g'(x))dx.$$

Da har φ lokalt ekstremum for $\varepsilon = 0$. Endvidere er φ differentiabel. Altså er $\varphi'(0) = 0$. Vi foretager den samme udregning som foran, men får nu et led hidrørende fra $g(a_2)$. Vi finder

$$\varphi'(0) = F'_p(a_2,f(a_2),f'(a_2))g(a_2) + \int_{a_1}^{a_2} \left\{F'_y(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx}F'_p(x,f(x),f'(x))\right\} g(x)dx = 0.$$

Dette skal gælde for alle $g \in C^2([a_1,a_2])$, for hvilke $g(a_1) = 0$.

Det må da specielt gælde for de $g \in C^2([a_1,a_2])$, for hvilke tillige $g(a_2) = 0$. Funktionen f må altså opfylde betingelsen

$$\int_{a_1}^{a_2} \{F'_y(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx}F'_p(x,f(x),f'(x))\} g(x) = 0$$

for alle sådanne g. Men heraf følger, at $y = f(x)$ må opfylde Eulers differentialligning

$$F'_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F'_p(x,y,y') = 0.$$

Betingelsen $\varphi'(0) = 0$ giver derfor

$$F'_p(a_2,f(a_2),f'(a_2))g(a_2) = 0.$$

Da vi kan vælge g således, at $g(a_2) \neq 0$, giver dette

$$\boxed{F'_p(a_2,f(a_2),f'(a_2)) = 0} \quad .$$

Vi ser altså, at når vi ikke selv stiller en randbetingelse $f(a_2) = b_2$ svarende til endepunktet a_2, vil problemet selv give anledning til en sådan randbetingelse, nemlig den anførte, som derfor kaldes en naturlig randbetingelse.

Vi har altså som nødvendig betingelse for lokalt ekstremum, at $y = f(x)$ opfylder Eulers differentialligning, samt den naturlige randbetingelse.

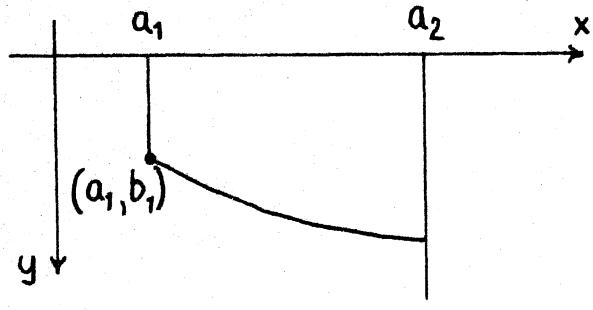
Analogt finder vi, at hvis vi giver afkald på randbetingelsen $f(a_1) = b_1$, erstattes denne af den naturlige

randbetingelse

$$\boxed{F'_p(a_1,f(a_1),f'(a_1)) = 0} \quad .$$

Giver vi afkald på begge randbetingelser $f(a_1) = b_1$ og $f(a_2) = b_2$, får vi begge de naturlige randbetingelser.

Brachistokronen med fri faldhøjde. Vi søger nu i halvplanen $y > 0$ en kurve $y = f(x), a_1 \le x \le a_2$, med givet begyndelsespunkt (a_1,b_1), langs hvilken en partikel med udgangsfarten $v_o = \sqrt{2g\,b_1}$ falder hurtigst muligt til et punkt af linien $x = a_2$ (ligegyldigt hvilket).



Idet $F(x,y,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}}$, altså $F'_p(x,y,y') = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}$, bliver den naturlige randbetingelse

$$\frac{f'(a_2)}{\sqrt{f(a_2)}\sqrt{1+f'(a_2)^2}} = 0,$$

altså $f'(a_2) = 0$. Løsningen er altså en del af en cycloide frembragt ved rulning af en cirkel på x-aksen, gående gennem (a_1,b_1) og med toppunkt på linien $x = a_2$. Man ser let, at der er netop een sådan.

Opgaver. 1. For givne punkter (a_1,b_1) og (a_2,b_2) i halvplanen $\{(x,y)\,|\,y>0\}$ skal man bestemme $y = f(x)$ blandt de tilladte funktioner således, at

$$I = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$$

er mindst mulig.

2. Find, idet $\Omega = \{(x,y,p) | y > 0, |p| < 1\}$, samtlige løsninger til Eulers differentialligning svarende til integralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{y}\sqrt{1-y'^2}\, dx.$$

Karakteriser løsningerne geometrisk, og vis, at der for givne endepunkter (a_1,b_1) og (a_2,b_2) findes en løsning hvis og kun hvis $\left|\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\right| < 1$, og at der i så fald findes netop een løsning.

3. Find, idet $\Omega = \{(x,y,p) \mid |p| < 1\}$, samtlige løsninger til Eulers differentialligning svarende til integralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1-y'^2}\, dx.$$

4. For givet endepunkt (a_1,b_1) skal man finde $y = f(x)$ i $[a_1,a_2]$ således, at arealet af den flade, der fremkommer ved drejning af grafen om x-aksen, er mindst muligt.

5. For givet endepunkt (a_1,b_1) skal man finde $y = f(x)$ i $[a_1,a_2]$ således, at grafens længde er mindst mulig.

6. Variationsproblem med to funktioner. Lad $F(t,x,y,p,q) \in C^2(\Omega)$ være en reel funktion på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^5$. Et tilladt funktionspar (f,g) er et par af funktioner $x = f(t) \in C^2([a_1,a_2])$, $y = g(t) \in C^2([a_1,a_2])$, som for $t = a_1$ og $t = a_2$ antager foreskrevne randværdier, og for hvilke $(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) \in \Omega$

for alle $t \in [a_1,a_2]$. Vis, at hvis integralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} F(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t))dt$$

har lokalt ekstremum for funktionsparret (f,g), da opfylder dette de to Eulerske differentialligninger

$$F'_x(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) - \frac{d}{dt}F'_p(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) = 0$$

$$F'_y(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) - \frac{d}{dt}F'_q(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) = 0.$$

§ 56. Variationsregning. Problem med bibetingelser.

Problem med bibetingelser og randbetingelser. Lad $F_0(x,y,p) \in C^2(\Omega), F_1(x,y,p) \in C^2(\Omega), \cdots, F_k(x,y,p) \in C^2(\Omega)$ være reelle funktioner på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Lad (a_1,b_1) og (a_2,b_2) med $a_1 < a_2$ være punkter i (x,y)-planen. En tilladt funktion skal atter være en funktion $y = f(x) \in C^2([a_1,a_2])$, der opfylder randbetingelserne $f(a_1) = b_1$ og $f(a_2) = b_2$, og for hvilken $(x,f(x),f'(x)) \in \Omega$ for alle $x \in [a_1,a_2]$.

Vi siger, at

$$I_0 = I_0(f) = \int_{a_1}^{a_2} F_0(x,f(x),f'(x))dx$$

har lokalt minimum, resp. lokalt maksimum, for den tilladte funktion f under bibetingelserne

$$\begin{cases} I_1 = I_1(f) = \int_{a_1}^{a_2} F_1(x,f(x),f'(x))dx = c_1 \\ \cdots \\ I_k = I_k(f) = \int_{a_1}^{a_2} F_k(x,f(x),f'(x))dx = c_k, \end{cases}$$

hvor $c_1,\cdots,c_k$ er givne tal, såfremt f er en tilladt funktion, der opfylder bibetingelserne, og der findes et $\rho > 0$, således at $I_0(f_1) \geq I_0(f)$, resp. $I_0(f_1) \leq I_0(f)$, for alle tilladte funktioner f, for hvilke $\text{dist}(f,f_1) < \rho$, og som ligeledes opfylder bibetingelserne, og vi siger, at I_0 har globalt minimum, resp. globalt maksimum, for den tilladte funktion f under bibetingelserne $I_1 = c_1,\cdots,I_k = c_k$, såfremt

f er en tilladt funktion, der opfylder bibetingelserne, og der gælder $I_o(f_1) \geq I_o(f)$, resp. $I_o(f_1) \leq I_o(f)$, for alle tilladte funktioner f_1, der ligeledes opfylder bibetingelserne. Som fælles betegnelse for minimum og maksimum benyttes atter ekstremum.

Vi søger tilladte funktioner f, for hvilke I_o har lokalt ekstremum under bibetingelserne $I_1 = c_1, \cdots I_k = c_k$.

Udledelse af nødvendig betingelse for lokalt ekstremum under bibetingelser. Vi antager, at I_o har lokalt ekstremum for den tilladte funktion f under bibetingelserne $I_1 = c_1, \cdots, I_k = c_k$. Nu vælges vilkårlige funktioner $g_o, g_1, \cdots, g_k \in C^2([a_1,a_2])$, for hvilke $g_j(a_1) = 0$ og $g_j(a_2) = 0$, $j = 0,1,\cdots,k$. Da Ω er åben, vil der findes en omegn $]-\eta,\eta[^{k+1}$ af punktet $(0,0,\cdots,0)$ i $(\varepsilon_o,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)$-rummet, således at funktionen $f + \varepsilon_o g_o + \varepsilon_1 g_1 + \cdots + \varepsilon_k g_k$ er tilladt for alle $(\varepsilon_o,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)$ i denne omegn. Thi mængden $\{(x,f(x),f'(x)) \mid x \in [a_1,a_2]\}$ er en kompakt delmængde af Ω. Altså findes et tal $d > 0$, således at ethvert punkt $(x_1,y_1,p_1) \in \mathbb{R}^3$, for hvilket der for et $x \in [a_1,a_2]$ gælder $\max\{|x_1-x|, |y_1-f(x)|, |p_1-f'(x)|\} < d$, vil tilhøre Ω. Betegnes med M det største af de $2(k+1)$ tal $\sup_{x\in[a_1,a_2]} |g_j(x)|$ og $\sup_{x\in[a_1,a_2]} |g_j'(x)|$, $j = 0,1,\cdots,k$, ses, at $f + \varepsilon_o g_o + \varepsilon_1 g_1 + \cdots + \varepsilon_k g_k$ er tilladt, når blot $(|\varepsilon_o| + |\varepsilon_1| + \cdots + |\varepsilon_k|)M < d$, altså i hvert fald, når $(\varepsilon_o,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k) \in]-\eta,\eta[^{k+1}$, hvor $\eta = \frac{d}{(k+1)M}$. Man

ser, at funktionen

$$\varphi_o(\varepsilon_o, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k) = I_o(f + \varepsilon_o g_o + \varepsilon_1 g_1 + \cdots + \varepsilon_k g_k)$$

har lokalt ekstremum i $(0,0,\cdots,0)$ under bibetingelserne

$$\begin{cases} \varphi_1(\varepsilon_o, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k) = I_1(f + \varepsilon_o g_o + \varepsilon_1 g_1 + \cdots + \varepsilon_k g_k) = c_1 \\ \cdots \\ \varphi_k(\varepsilon_o, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k) = I_k(f + \varepsilon_o g_o + \varepsilon_1 g_1 + \cdots + \varepsilon_k g_k) = c_k. \end{cases}$$

Af udtrykkene ses, at funktionerne $\varphi_i(\varepsilon_o, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$, $i = 0,1,\cdots,k$, tilhører $C^1(]-\eta,\eta[^{k+1})$. Af en sætning i Mat 101 slutter vi derfor, at rangen af matricen

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varepsilon_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial \varphi_o}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_o}{\partial \varepsilon_k} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varepsilon_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial \varepsilon_k} \end{pmatrix}$$

hvor de afledede skal tages i punktet $(0,0,\cdots,0)$, er højst k, d.v.s. dens søjler er lineært afhængige.

Ved beregningen af et bestemt af tallene $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varepsilon_j}$ skal vi sætte de øvrige ε_1 lig med 0, og beregne differentialkvotienten af $I_i(f + \varepsilon_j g_j)$ for $\varepsilon_j = 0$. Dette er den samme regning, vi har udført tidligere. Vi finder

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varepsilon_j} = \int_{a_1}^{a_2} \left\{F'_{iy}(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx}F'_{ip}(x,f(x),f'(x))\right\} g_j(x)dx.$$

Idet vi til afkortning sætter

$$h_i(x) = F'_{iy}(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx}F'_{ip}(x,f(x),f'(x)),$$

har vi altså, at matricen

$$\begin{pmatrix} \int_{a_1}^{a_2} h_o(x)g_o(x)dx & \int_{a_1}^{a_2} h_o(x)g_1(x)dx & \cdots & \int_{a_1}^{a_2} h_o(x)g_k(x)dx \\ \int_{a_1}^{a_2} h_1(x)g_o(x)dx & \int_{a_1}^{a_2} h_1(x)g_1(x)dx & \cdots & \int_{a_1}^{a_2} h_1(x)g_k(x)dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_{a_1}^{a_2} h_k(x)g_o(x)dx & \int_{a_1}^{a_2} h_k(x)g_1(x)dx & \cdots & \int_{a_1}^{a_2} h_k(x)g_k(x)dx \end{pmatrix}$$

for vilkårlige funktioner $g_o, g_1, \cdots, g_k \in C^2([a_1,a_2])$, for hvilke $g_j(a_1) = 0$ og $g_j(a_2) = 0$, $j = 0,1,\cdots,k$, har lineært afhængige søjler.

Vi betragter nu i rummet $\mathbb{R}^{k+1}$ mængden L bestående af alle vektorer

$$\begin{pmatrix} z_o \\ z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{a_1}^{a_2} h_0(x)g(x)dx \\ \int_{a_1}^{a_2} h_1(x)g(x)dx \\ \vdots \\ \int_{a_1}^{a_2} h_k(x)g(x)dx \end{pmatrix},$$

hvor $g \in C^2([a_1,a_2])$ og $g(a_1) = 0$, $g(a_2) = 0$.

Denne mængde L er åbenbart et underrum i $\mathbb{R}^{k+1}$, og ifølge det ovenstående er hvilkesomhelst $k+1$ vektorer i L lineært afhængige. Dimensionen af L er altså højst k, hvoraf følger, at der findes et k-dimensionalt underrum af $\mathbb{R}^{k+1}$, der indeholder L. Et sådant

underrum er bestemt som løsningsmængden for en ligning

$$\lambda_o z_o + \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_k z_k = 0, \quad \text{hvor}$$

$$(\lambda_o, \lambda_1, \cdots, \lambda_k) \neq (0,0,\cdots,0).$$

Vi ser altså, at der må findes et talsæt $(\lambda_o, \lambda_1, \cdots, \lambda_k) \neq (0,0,\cdots,0)$, således at

$$\int_{a_1}^{a_2} (\lambda_o h_o(x) + \lambda_1 h_1(x) + \cdots + \lambda_k h_k(x)) g(x)dx = 0$$

for alle $g \in C^2([a_1,a_2])$, for hvilke $g(a_1) = 0$ og $g(a_2) = 0$.

Ifølge det tidligere lemma gælder da

$$h(x) = \lambda_o h_o(x) + \lambda_1 h_1(x) + \cdots + \lambda_k h_k(x) = 0$$

for alle $x \in [a_1,a_2]$. Sætter vi

$$F(x,y,p) = \lambda_o F_o(x,y,p) + \lambda_1 F_1(x,y,p) + \cdots + \lambda_k F_k(x,y,p),$$

er

$$h(x) = F'_y(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx} F'_p(x,f(x),f'(x)).$$

Ligningen $h(x) = 0$ for alle $x \in [a_1,a_2]$ er derfor simpelthen Eulers differentialligning svarende til funktionen $F(x,y,p)$. Hermed har vi bevist:

En <u>nødvendig betingelse</u> for, at I_o har lokalt ekstremum for den tilladte funktion $y = f(x)$ under bibetingelserne $I_1 = c_1, \cdots, I_k = c_k$ er, at der findes et talsæt $(\lambda_o, \lambda_1, \cdots, \lambda_k) \neq (0,0,\cdots,0)$ således, at $y = f(x)$ er stationær for integralet

$$I = I(f) = \lambda_o I_o + \lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_k I_k = \int_{a_1}^{a_2} F(x,f(x),f'(x))dx,$$

hvor

$$F = \lambda_o F_o + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_k F_k.$$

Et sådant talsæt $(\lambda_o,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ kaldes et sæt af Lagrangeske multiplikatorer.

Ved løsning af en ekstremumsopgave med bibetingelser søger man løsningerne til Eulers differentialligning svarende til $I(f)$ for vilkårlige $\lambda_o,\lambda_1,\cdots,\lambda_k$. Derefter bestemmer man $\lambda_o,\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ og de øvrige til angivelse af løsningsfunktionerne tjenende parametre således, at bibetingelserne $I_1(f) = c_1,\cdots,I_k(f) = c_k$ og randbetingelserne $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ bliver opfyldt.

Kædelinien. Vi vælger y-aksen positiv opad. En fuldstændig bøjelig, homogen snor af længde L tænkes ophængt i punkterne $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$, hvor $a_1 < a_2$. Vi går ud fra, at der er en ligevægtsstilling bestemt ved en funktion $y = f(x) \in C^2([a_1,a_2])$, og at denne er karakteriseret ved, at tyngdepunktet ligger lavest muligt. Opgaven er at finde ligevægtstillingen. Ifølge § 40 er tyngdepunktets ordinat η bestemt ved ligningen

$$L\eta = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Ligevægtsstillingen er altså bestemt blandt de tilladte funktioner derved, at

$$I_o = I_o(f) = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

har globalt minimum under bibetingelsen

$$I_1 = I_1(f) = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx = L.$$

Vi har her $k = 1$, $\Omega = \mathbb{R}^3$, og funktionerne F_o og F_1 er

$$F_o(x,y,p) = y\sqrt{1+p^2} \quad \text{og} \quad F_1(x,y,p) = \sqrt{1+p^2}$$

Vi må naturligvis antage

$$L \geq \sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2} = L_o.$$

Ifølge det foranstående findes et talpar $(\lambda_o,\lambda_1) \neq (0,0)$, således at $y = f(x)$ er stationær for integralet

$$I = \lambda_o I_o + \lambda_1 I_1 = \int_{a_1}^{a_2} (\lambda_o y+\lambda_1)\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Hvis $\lambda_o = 0$ (og følgelig $\lambda_1 \neq 0$) er der ifølge § 55 kun een stationær funktion for I, der opfylder randbetingelserne. Den bestemmer liniestykket med endepunkterne $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ og opfylder kun bibetingelsen $I_1 = L$, når $L = L_o$. I så fald er den åbenbart løsning til opgaven [den er den eneste tilladte funktion, der opfylder bibetingelsen]. Hvis $\lambda_o \neq 0$, kan vi antage $\lambda_o = 1$ (idet multiplikation af I med et fra 0 forskelligt tal ikke ændrer problemet). Idet vi skriver λ i stedet for λ_1, drejer det sig da om integralet

$$I = I_0 + \lambda I_1 = \int_{a_1}^{a_2} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Dette er netop integralet fra det i § 55 behandlede problem om omdrejningsflade med minimalt areal, blot med $y + \lambda$ i stedet for y [vi har jo $y' = (y+\lambda)'$]. Eulers differentialligning kan derfor opskrives uden ny regning. Den bliver, idet vi sætter $y + \lambda = z$,

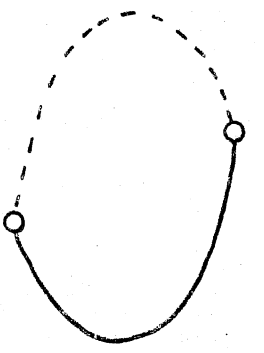
$$1 + z'^2 - zz'' = 0.$$

En løsning til denne ligning kan åbenbart ikke antage værdien 0. Den forløber altså enten i halvplanen $z > 0$ eller i halvplanen $z < 0$. Ifølge § 55 er løsningerne i halvplanen $z > 0$ bestemt ved $z = \alpha \cosh\frac{x-\beta}{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{R}$. Da ligningen ikke ændres, når man erstatter z med $-z$, er løsningerne i halvplanen $z < 0$ bestemt ved $z = -\alpha \cosh\frac{x-\beta}{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{R}$, d.v.s. ved $z = \alpha \cosh\frac{x-\beta}{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}_-$, $\beta \in \mathbb{R}$. Samtlige løsninger er altså bestemt ved $z = \alpha \cosh\frac{x-\beta}{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$, d.v.s. ved

$$y + \lambda = \alpha \cosh\frac{x-\beta}{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Dette er systemet af kædelinier med ledelinie $y = \lambda$ (liggende over eller under denne). Ved indsættelse i randbetingelserne og bibetingelsen finder man tre ligninger til bestemmelse af α, β, λ. Man ser, at bibetin-

gelsen kun kan opfyldes, når $L > L_o$. Man kan vise, at der i så fald er to løsninger, en med $\alpha > 0$ og en med $\alpha < 0$. De to kædelinier er symmetriske med hensyn til midtpunktet af liniestykket med endepunkter (a_1,b_1), (a_2,b_2). Den første løser opgaven; for den anden er I_o globalt maksimum under bibetingelsen $I_1 = L$.



Afkald på randbetingelse. Ændrer vi det foran betragtede problem derved, at vi giver afkald på randbetingelsen $f(a_2) = b_2$, finder vi som nødvendig betingelse for lokalt ekstremum under bibetingelserne, at underrummet i $\mathbb{R}^{k+1}$ bestående af alle vektorer

$$\begin{pmatrix} z_o \\ z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'_{op}(a_2,f(a_2),f'(a_2))g(a_2)+\int_{a_1}^{a_2} h_o(x)g(x)dx \\ F'_{1p}(a_2,f(a_2),f'(a_2))g(a_2)+\int_{a_1}^{a_2} h_1(x)g(x)dx \\ \vdots \\ F'_{kp}(a_2,f(a_2),f'(a_2))g(a_2)+\int_{a_1}^{a_2} h_k(x)g(x)dx \end{pmatrix}, \text{ hvor } g\in C^2([a_1,a_2]) \text{ og } g(a_1) = 0,$$

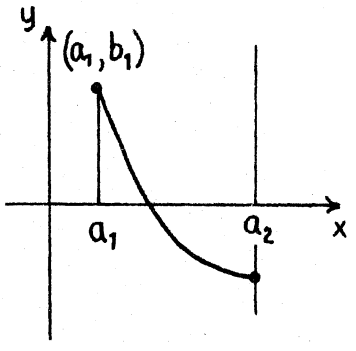
har en dimension $\leq k$. Dette fører til, at der må findes et talsæt $(\lambda_o,\lambda_1,\cdots,\lambda_k) \neq (0,0,\cdots,0)$ således, at når vi sætter

$$F = \lambda_o F_o + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_k F_k,$$

opfylder $y = f(x)$ Eulers differentialligning svarende til funktionen F samt den naturlige randbetingelse

$$F'_p(a_2, f(a_2), f'(a_2)) = 0.$$

Ligevægtsstilling af snor med fri ende. En snor af længden L ophænges med det ene endepunkt i (a_1, b_1), mens det andet (f.eks ved hjælp af en ring) kan glide på linien $x = a_2$.



Med de ved behandlingen af kædelinien benyttede betegnelser må ligevægtsstillingen $y = f(x)$ for et talpar $(\lambda_0, \lambda_1) \neq (0,0)$ være stationær for $I = \lambda_0 I_0 + \lambda_1 I_1$ med den naturlige randbetingelse

$$(\lambda_0 f(a_2) + \lambda_1) \frac{f'(a_2)}{\sqrt{1+f'(a_2)^2}} = 0.$$

Hvis $\lambda_0 = 0$, giver dette $f'(a_2) = 0$, og da løsningen i dette tilfælde er lineær, må den være konstant, altså $y = b_1$. Dette vil indtræffe, når $L = a_2 - a_1$. Hvis $\lambda_0 \neq 0$, kan vi antage $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \lambda$. Løsningen er da en kædelinie

$$y + \lambda = \alpha \cosh \frac{x-\beta}{\alpha}.$$

Følgelig er $f(a_2) + \lambda \neq 0$, og vi må som før have $f'(a_2) = 0$. Kædelinien har altså sit toppunkt på linien $x = a_2$ (d.v.s. $\beta = a_2$). Dette vil indtræffe, når $L > a_2 - a_1$.

Opgaver. 1. For givne endepunkter $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ i halvplanen $\{(x,y) | y > 0\}$ søges $y = f(x) > 0$ blandt de tilladte funktioner således, at

$$I_o = \int_{a_1}^{a_2} y^2 dx$$

er mindst mulig under bibetingelsen

$$I_1 = \int_{a_1}^{a_2} y \, dx = A,$$

hvor A er et givet positivt tal.

Vink. Benyt variationsregningen til at vise, at problemet kun kan have en konstant funktion til løsning, og eftervis direkte, at hvis der findes en konstant funktion, der opfylder randbetingelserne og bibetingelsen, er den en løsning.

Suppl. Opg. Mat. 102.

MATEMATIKFAGRÅDETS
NOTETRYKKERI
MATEMATISK INSTITUT
UNIVERSITETSPARKEN 5
2100 Ø

78.09/500

Supplerende opgaver.

1. Lad x være et ikke negativt reelt tal. Vis, at hvis det for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælder, at $x < \varepsilon$, da gælder $x = 0$.

2. Find $\sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ og $\inf\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.

3. Find supremum og infimum for talmængden

$$\left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \mid p, q, r \in \mathbb{N}\right\}.$$

4. For vilkårlige ikke tomme delmængder A og B af $\mathbb{R}$ defineres mængden $A + B$ ved

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Vis, at der gælder

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B, \quad \inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

5. En ikke tom mængde $A \subseteq]0,1[$ antages at opfylde følgende betingelser:

(1) $\sup A < 1$, (2) hvis $x, y \in A$ og $x < y$, gælder $\frac{x}{y} \in A$.

Vis, at mængden er af en af følgende typer:

$A = \{a, a^2, \dots, a^n\}$, hvor $a \in]0,1[$ og $n \in \mathbb{N}$;

$A = \{a, a^2, \dots, a^n, \dots\}$, hvor $a \in]0,1[$.

Vink. Sæt $\sup A = a$ og begynd med at vise, at hvert af intervallerne $]a^2, a]$, $]a^3, a^2]$, $]a^4, a^3]$, ... indeholder højst ét tal fra A.

6. I teksten er vist: Hvis fællesmængden for et system af afsluttede intervaller i $\mathbb{R}^*$ ikke er tom, er den et afsluttet interval.

Undersøg, om vi får et sandt udsagn, hvis vi erstatter ordet afsluttet med ordet åben.

7. Hvilke talfølger $(a_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N})$ opfylder følgende betingelse:

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

8. Bestem $\liminf a_n$ og $\limsup a_n$, idet

$$a_n = \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

9. Lad $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ være en surjektiv afbildning. Vis, at talfølgen $(\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N})$ for ethvert $a \in \mathbb{R}$ har en delfølge, der er konvergent med grænseværdien a.

10. Idet x betegner et vilkårligt reelt tal, skal man vise, at talfølgen $\left(\frac{x^n}{n!} \mid n \in \mathbb{N}\right)$ er konvergent med grænseværdien 0.

11. Lad $(a_n \in \mathbb{R}_+ \mid n \in \mathbb{N})$ være den ved

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1}^2 = a_n + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

definerede talfølge. Vis, at talfølgen er stigende, og find dens grænseværdi.

12. Idet $0 < a < b < +\infty$, defineres det aritmetiske middeltal $A(a,b)$, det geometriske middeltal $G(a,b)$, og det harmoniske middeltal $H(a,b)$ ved

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2},\quad G(a,b) = \sqrt{ab},\quad H(a,b) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Vis, at der gælder

$$a < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < b.$$

Idet $0 < a_1 < b_1 < +\infty$, sættes for $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = H(a_n, b_n),\quad b_{n+1} = A(a_n, b_n).$$

Vis, at talfølgen $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ er stigende og talfølgen $(b_n \mid n \in \mathbb{N})$ dalende, og at begge talfølger er konvergente med grænseværdien $G(a_1, b_1)$.

13. Bevis, at den uendelige decimalbrøk $0{,}333\ldots$ (hvor alle decimalerne er 3) fremstiller tallet $\frac{1}{3}$.

Bevis, at den uendelige decimalbrøk $0{,}142857\,142857\,142857\ldots$ (hvor 142857 stadig gentages) fremstiller tallet $\frac{1}{7}$.

***14.** Idet talfølgen $(a_n \in \mathbb{R}_+ \mid n \in \mathbb{N})$ antages at opfylde betingelsen

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

skal man vise, at talfølgen $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \mid n \in \mathbb{N}\right)$ er konvergent, og finde dens grænseværdi.

15. Lad $dist_1 : M \times M \to \mathbb{R}$ og $dist_2 : M \times M \to \mathbb{R}$ være afstandsfunktioner i samme mængde M. Vis, at den ved

$$dist(x,y) = \max\{dist_1(x,y), dist_2(x,y)\}$$

definerede funktion $dist : M \times M \to \mathbb{R}$ ligeledes er en afstandsfunktion i M.

*16. En talfølge $(a_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N})$ antages at opfylde følgende betingelse:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N} : 2n \leqslant p \leqslant 4n \Rightarrow |a_n - a_p| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Vis, at talfølgen er konvergent.

17. Er det rigtigt, at en mængde A i et metrisk rum er begrænset, hvis og kun hvis enhver numerabel delmængde af A er begrænset?

18. Lad $(M, dist)$ være et fuldstændigt metrisk rum og $(K(x_n, r_n) \mid n \in \mathbb{N})$ en følge af åbne kugler i M. Det antages, at der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder $x_{n+1} \in K(x_n, r_n)$ og $r_{n+1} < r_n - dist(x_n, x_{n+1})$. Endvidere antages det, at $r_n \to 0$ for $n \to \infty$. Vis, at kuglerne $K(x_n, r_n)$ har netop eet punkt fælles.

19. For vilkårlige ikke tomme delmængder A og B af $\mathbb{C}$ defineres mængden $A + B$ ved

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

(fortsættes)

Vis, at der gælder

$$\max\{\operatorname{diam}(A), \operatorname{diam}(B)\} \leqslant \operatorname{diam}(A+B) \leqslant \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B).$$

20. Angiv det indre og afslutningen, samt randen af hver af følgende delmængder af $\mathbb{R}$ (udstyret med den sædvanlige metrik $\operatorname{dist}(x,y) = |x-y|$):

1) $\mathbb{N}$, 2) $\mathbb{Z}$, 3) $]0,1]$, 4) $\mathbb{Q}$, 5) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

21. Angiv det indre og afslutningen, samt randen af følgende delmængde af $\mathbb{C}$ (udstyret med den sædvanlige metrik $\operatorname{dist}(x,y) = |x-y|$):

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{C} \mid \tfrac{2n-1}{2n} \leqslant |x| < \tfrac{2n}{2n+1}\}.$$

22. Angiv et system $\{\mathcal{G}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ af åbne delmængder af $\mathbb{R}$, for hvilket

$\bigcap\{\mathcal{G}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ikke er åben,

samt et system $\{\mathcal{F}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ af afsluttede delmængder af $\mathbb{R}$, for hvilket

$\bigcup\{\mathcal{F}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ikke er afsluttet.

23. Vis, at der for delmængder af et metrisk rum (M, dist) gælder relationerne

(1) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ (2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(fortsættes)

(3) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$ (4) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(5) $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^\circ \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^\circ$ (6) $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$,

og vis ved eksempler fra $\mathbb{R}$, at der i de fire sidste tilfælde ikke behøver at gælde lighedstegn.

Undersøg, om der også gælder relationerne

(7) $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^\circ \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^\circ$ (8) $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$.

*24. Idet A betegner en delmængde af et metrisk rum (M, dist), skal man vise, at

$$\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \overline{\mathring{\overline{A}}} = \overline{\mathring{A}}, \quad \mathring{\overline{\mathring{A}}} = \mathring{\overline{A}}.$$

Heraf følger, at de mængder, man kan danne ud fra A ved successivt at tage det indre og afslutningen et hvilketsomhelst antal gange og i vilkårlig rækkefølge, hver er identisk med en af mængderne

$$\mathring{A}, \ \overline{\mathring{A}}, \ \mathring{\overline{\mathring{A}}}, \ \overline{A}, \ \mathring{\overline{A}}, \ \overline{\mathring{\overline{A}}}.$$

Idet der for M vælges $\mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik, skal man give et eksempel på en mængde A, for hvilken de syv mængder

$$A, \ \mathring{A}, \ \overline{\mathring{A}}, \ \mathring{\overline{\mathring{A}}}, \ \overline{A}, \ \mathring{\overline{A}}, \ \overline{\mathring{\overline{A}}}$$

er indbyrdes forskellige.

Bemærk. Som betegnelse for det indre af en mængde A har vi her benyttet $\mathring{A}$ i stedet for A°.

*25. Idet A betegner en delmængde af et metrisk rum $(M, dist)$, skal man vise, at

$$\partial A^\circ \subseteq \partial A \quad \text{og} \quad \partial \overline{A} \subseteq \partial A.$$

Idet der for M vælges $\mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik, skal man give et eksempel på en mængde A, for hvilken de tre mængder ∂A, ∂A°, $\partial \overline{A}$ er indbyrdes forskellige.

26. Betragt $\mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik.

(1) Vis, at mængden $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ er både åben og afsluttet relativt til $\mathbb{Q}$.

(2) Undersøg, om mængden $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 1\}$ er (a) åben relativt til $\mathbb{Q}$ (b) afsluttet relativt til $\mathbb{Q}$.

27. Vis, at den ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, når } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{, når } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

definerede funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er kontinuert.

28. Om en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vides, at restriktionen af f til $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er kontinuert, og at restriktionen af f til $\mathbb{Q}$ er kontinuert. Vis, at f er kontinuert.

29. Idet $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betegner den ved

$$f(x) = x^2 + x - 1$$

bestemte funktion, skal man finde

$$f^{-1}([-2,1]),\ f^{-1}(]-2,1]),\ f^{-1}(\{1\}),\ f^{-1}([1,2[).$$

30. Vis, at den ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, når } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{, når } x = \frac{p}{q}, \text{ hvor } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, \\ & \quad \text{og } \frac{p}{q} \text{ er uforkortelig,} \end{cases}$$

definerede funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuert i ethvert punkt af $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, men diskontinuert i ethvert punkt af $\mathbb{Q}$.

31. Vis, at den ved $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ definerede afbildning $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er afstandsformindskende.

32. Idet (M, dist) er et metrisk rum, A en vilkårlig ikke tom delmængde af M, og x et vilkårligt punkt af M, skal man vise, at

$$\text{dist}(x, A) = \text{dist}(x, \overline{A}).$$

33. Idet (X, dist_X) og (Y, dist_Y) er metriske rum, og f og g er kontinuerte afbildninger af X ind i Y, skal man vise, at hvis $f(x) = g(x)$ for alle punkter x tilhørende en delmængde A af X, gælder $f(x) = g(x)$ for alle punkter x tilhørende afslutningen $\overline{A}$ af A.

34. Vis, at en reel funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ på et begrænset, afsluttet interval er kontinuert, hvis og kun hvis dens graf

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b]\}$$

er en begrænset, afsluttet delmængde af $\mathbb{R}^2$.

35. Idet $(M, dist)$ er et metrisk rum, kaldes en funktion $f: A \to \mathbb{R}$ på en mængde $A \subseteq M$ opad halvkontinuert, hvis der for ethvert $x \in A$ og ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at der for ethvert $y \in A$, for hvilket $dist(x,y) < \delta$, gælder

$$f(y) < f(x) + \varepsilon.$$

(a) Vis, at en funktion $f: A \to \mathbb{R}$ er opad halvkontinuert, hvis og kun hvis det for ethvert $c \in \mathbb{R}$ gælder, at punktmængden

$$\{x \in A \mid f(x) < c\}$$

er åben relativt til A.

(b) Vis, at enhver opad halvkontinuert funktion $f: A \to \mathbb{R}$ på en kompakt mængde $A \subseteq M$ har en største værdi.

36. Idet $(X, dist_X)$ og $(Y, dist_Y)$ er metriske rum og $f: X \to Y$ en afbildning, skal man såvel ved logiske symboler som i ord udtrykke, at f ikke er uniformt kontinuert.

37. Betragt de to funktioner $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der bestemmes ved

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Afgør for hver af dem, om funktionen er uniformt kontinuert.

38. Vis, at den ved $f(x) = \sqrt{1+x}$ definerede funktion $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ er uniformt kontinuert.

39. Vis, at grænsefunktionen $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ for en uniformt konvergent følge af uniformt kontinuerte funktioner $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ selv er uniformt kontinuert.

40. En følge af funktioner $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ kaldes stigende, hvis der for ethvert $x \in [0,1]$ og ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.

Konstruer en stigende, punktvis konvergent følge af kontinuerte funktioner $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, således at grænsefunktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ikke er begrænset.

41. Lad $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Lad $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ for hvert $n \in \mathbb{N}$ være den ved $g_n(x) = f(x, \frac{1}{n})$ bestemte funktion.

Vis, at funktionsfølgen $(g_n \mid n \in \mathbb{N})$ er uniformt konvergent, og angiv dens grænsefunktion.

42. Betragt den funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der bestemmes ved

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{når } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{når } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Vis, at f er diskontinuert i ethvert punkt.
(b) Vis, at der for ethvert $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} [\cos(\pi m! x)]^{2n} \right).$$

43. Vis, at hvis $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en kontinuert funktion, og $(f_n \mid n \in \mathbb{N})$ er en uniformt konvergent følge af kontinuerte, reelle funktioner på et begrænset, afsluttet interval $J \subset \mathbb{R}$, da er funktionsfølgen $(F \circ f_n \mid n \in \mathbb{N})$ ligeledes uniformt konvergent på J.

44. Vis, at hvis $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ er en følge af kontinuerte, reelle funktioner på intervallet $[0,1]$, der konvergerer uniformt mod funktionen $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, da gælder

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{for } n \to \infty.$$

45. Idet $J \subseteq \mathbb{R}$ betegner et interval af en vilkårlig af de mulige typer, og $f: J \to \mathbb{C}$ en differentiabel funktion, skal man vise, at hvis f' er begrænset, er f uniformt kontinuert. [En funktion kaldes begrænset, hvis dens værdimængde er begrænset.]

46. Angiv en funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med følgende egenskaber: (a) f er differentiabel, (b) f er uniformt kontinuert, (c) f' es ikke begrænset. [Sml. opg. 45.]

47. Vis, at hvis $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er differentiabel i punktet x_0, gælder for enhver følge af intervaller $[a_n, b_n]$ med positiv længde, således at $x_0 \in [a_n, b_n]$ for hvert n og $b_n - a_n \to 0$ for $n \to +\infty$, at

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \longrightarrow f'(x_0) \quad \text{for} \quad n \to +\infty.$$

48. Idet $y = f(x): A \to \mathbb{R}$ er en to gange differentiabel, strengt monoton funktion, der afbilder intervallet $A \subseteq \mathbb{R}$ på intervallet $B \subseteq \mathbb{R}$, og hvis differentialkvotient er $\neq 0$ i ethvert punkt $x \in A$, skal man vise, at den omvendte funktion $x = g(y): B \to \mathbb{R}$ er to gange differentiabel, og at der for ethvert punkt $y \in B$ gælder

$$g''(y) = -\frac{f''(g(y))}{[f'(g(y))]^3}.$$

49. Lad A og B være intervaller i $\mathbb{R}$, og lad φ være en differentiabel funktion med positiv afledet, der afbilder A på B. Lad ψ være dens omvendte. Idet $\Phi: A \to \mathbb{R}$ er en stamfunktion til φ, skal man vise, at ψ har stamfunktionen

$$y \mapsto \Psi(y) = y\,\psi(y) - \Phi(\psi(y)) : B \to \mathbb{R}.$$

Anvend sætningen på følgende tilfælde:
(1) $\varphi = \exp$, $A = \mathbb{R}$, (2) $\varphi = \tan$, $A = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

50. I det $f(x) = x^{10} + 3x^6 - 2x$, skal man for $a = 4$ og $\varepsilon = \frac{1}{100}$ bestemme et tal $\delta \in \mathbb{R}_+$ således, at $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ for alle $x \in \mathbb{R}$, for hvilke $|x - a| \leqslant \delta$.

51. Nævn en funktion $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, der er C^{17}, og hvis syttende afledede $f^{(17)}$ ikke er differentiabel i noget punkt.

52. Eksisterer der en isomorf afbildning af gruppen $(\mathbb{Q}, +)$ på gruppen $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$?

53. Undersøg, om de ved

$$f(x) = \sin\sqrt{x} \quad \text{og} \quad g(x) = \sin x^2$$

definerede funktioner $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ og $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er uniformt kontinuerte.

54. Vis, at den ved

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \exp\frac{1}{x}} & \text{for } x \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

definerede funktion $f: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ er differentiabel, og at dens afledede er kontinuert.

55. Vis, at den ved

$$f_n(x) = \frac{1 + e^x}{(1 + x^2)(n + e^x)}$$

definerede følge af funktioner $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er uniformt konvergent.

56. Vis, at den ved

$$f_n(x) = n^{1003}\, x^n (1-x)^n, \qquad x \in [0,1],$$

definerede følge af funktioner $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ er uniformt konvergent.

57. Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ være en kontinuert funktion, der tilfredsstiller funktionalligningen

$$f(x+y) = f(x)\,f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Vis, at der for vilkårlige $a, x \in \mathbb{R}$ gælder

$$f(x)\int_0^a f(t)\,dt = \int_0^{x+a} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt.$$

Vis herved, at f er differentiabel. Vis endelig, at der findes et tal $\lambda \in \mathbb{C}$, så at

$$f(x) = \exp(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

58. En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vis, at f er kontinuert, og find værdimængden af f.

59. (1) Find mængden A af de $x \in \mathbb{R}$, for hvilke udtrykket $f(x) = \cos(\operatorname{Arccos} x)$ er defineret, og tegn grafen af funktionen $f : A \to \mathbb{R}$.

(2) Find mængden B af de $x \in \mathbb{R}$, for hvilke udtrykket $g(x) = \operatorname{Arccos}(\cos x)$ er defineret, og tegn grafen af funktionen $g : B \to \mathbb{R}$.

60. Vis, at der for $x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ gælder

$$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x .$$

61. Čebyšev polynomierne $T_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, defineres således:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = x^2 - \tfrac{1}{2}$$
$$T_n(x) = x\,T_{n-1}(x) - \tfrac{1}{4}\,T_{n-2}(x) \quad \text{for } n > 2.$$

(1) Udregn $T_3(x)$, $T_4(x)$, $T_5(x)$, $T_6(x)$.

(2) Vis, at $T_n(x)$ er et normeret polynomium af grad n.

(3) Vis, at der for ethvert $\theta \in \mathbb{R}$ gælder

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\,T_n(\cos\theta) \quad \text{for } n > 0.$$

(4) Vis herved, at $2^{n-1}\,T_n(x)$ for $n > 0$ i punkterne $1, \cos\frac{\pi}{n}, \cos\frac{2\pi}{n}, \ldots, \cos\frac{n\pi}{n} = -1$ er skiftevis $+1$ og -1, og er monoton i hvert interval bestemt ved to på hinanden følgende af disse punkter. Vis endvidere, at der for $n > 0$ gælder

$$T_n(x) = \left(x - \cos\tfrac{\pi}{2n}\right)\left(x - \cos\tfrac{3\pi}{2n}\right)\cdots\left(x - \cos\tfrac{(2n-1)\pi}{2n}\right).$$

62. Undersøg, om den ved

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{|x|}}\,\operatorname{Arctan}\sqrt{|x|} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

definerede funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er differentiabel i ethvert punkt $x \in \mathbb{R}$.

63. Skitser grafen af funktionen $1-\cos\frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}_+$. Vis, at det uegentlige integral

$$I=\int_0^\infty\left(1-\cos\tfrac{1}{x}\right)dx$$

eksisterer, og find dets værdi.

64. Vis, at integralet

$$I=\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx$$

eksisterer, og find dets værdi.

65. Find $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

66. Find en stamfunktion til funktionen

$$\frac{\operatorname{Arctan}x}{x^2}$$

på intervallet $]0,+\infty[$, og find derved

$$\int_{\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\operatorname{Arctan}x}{x^2}dx.$$

(Resultatet ønskes reduceret mest muligt.)

67. Find

$$\varphi(x)=\int_0^x\frac{du}{\cosh u}\ (x\in\mathbb{R})\ \text{og}\ \psi(y)=\int_0^y\frac{dv}{\cos v}\ \left(y\in\left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[\right),$$

og vis, at de to funktioner φ og ψ er hinandens omvendte.

68. Der er givet et tal $k \in \mathbb{R}$.

(1) Gør rede for, at mængden $J = \{x \in \mathbb{R} \mid x + k(1-x) > 0\}$ for $k \neq 1$ er en åben halvlinie, der indeholder 1, og at den for $k = 1$ er $\mathbb{R}$. Vis, at der for $(x,y) \in J^2$ gælder $xy - k(1-x)(1-y) \in J$.

(2) Vis, at funktionen

$$f(x) = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi + k(1-\xi)}, \qquad x \in J,$$

tilfredsstiller ligningen

$$f\big(xy - k(1-x)(1-y)\big) = f(x) + f(y), \quad (x,y) \in J^2.$$

Vink. For at bevise ligningen kan man enten udregne integralet eller godtgøre, at ligningen passer for $x = 1$, og at venstre og højre side for fast y har samme afledede efter x.

***69.** Der er givet et tal $k \in]-\infty, 0[$.

(1) Gør rede for, at mængden $J = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - kx + kx^2 > 0\}$ er et åbent interval, der indeholder 0, og vis, at der for $(x,y) \in J^2$ gælder $1 - kxy > 0$ og $\frac{x+y-kxy}{1-kxy} \in J$.

(2) Vis, at funktionen

$$f(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{1 - k\xi + k\xi^2}, \qquad x \in J,$$

tilfredsstiller ligningen

$$f\left(\frac{x+y-kxy}{1-kxy}\right) = f(x) + f(y), \qquad (x,y) \in J^2.$$

Vink. Som til opg. 68.

*70. Der er givet et tal $k \in]0,4[$.

(1) Gør rede for, at $1 - kx + kx^2 > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og skitser punktmængden $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - kxy > 0\}$.

(2) Vis, at funktionen

$$f(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{1 - k\xi + k\xi^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

tilfredsstiller ligningen

$$f\left(\frac{x+y-kxy}{1-kxy}\right) = f(x) + f(y), \qquad (x,y) \in A.$$

Vink. Som til opg. 68.

*71. Der er givet et tal $k \in [4, +\infty[$.

(1) Gør rede for, at mængden $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 - kx + kx^2 > 0\}$ består af to åbne halvlinier, af hvilke den ene indeholder 0. Betegn denne halvlinie med J. Skitser punktmængden $A = \{(x,y) \in J^2 \mid 1 - kxy > 0\}$, og vis, at der for $(x,y) \in A$ gælder $\frac{x+y-kxy}{1-kxy} \in J$.

(2) Vis, at funktionen

$$f(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{1 - k\xi + k\xi^2}, \qquad x \in J,$$

tilfredsstiller ligningen

$$f\left(\frac{x+y-kxy}{1-kxy}\right) = f(x) + f(y), \qquad (x,y) \in A.$$

Vink. Som til opg. 68.

72. Find $\int \sqrt[4]{\frac{x+3}{x+2}}\, dx$.

73. Find $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$.

74. Bestem mængden af de tal $x \in \mathbb{R}$, for hvilke rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{in^2 x}$$

er konvergent.

75. Undersøg for hver af følgende rækker, om den er absolut konvergent, betinget konvergent, eller divergent:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n},$$

$$(d) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \log n \log\log n}, \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \sinh^3\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

76. Bestem mængden af de tal $a \in \mathbb{R}$, for hvilke rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^a \operatorname{Arctan}\frac{1}{n}$$

er konvergent.

77. Undersøg, for hvilke $t \in \mathbb{R}$ den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^t \left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{t^2}$$

er konvergent.

78. Find mængden af de $x \in \mathbb{R}$, for hvilke

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n.$$

79. Lad M betegne mængden af de reelle talfølger $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, for hvilke mængden $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \neq 0\}$ er endelig (d: som "ender med lutter nuller"). Vis, at den ved

$$\operatorname{dist}(\underline{x}, \underline{y}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

definerede funktion $\operatorname{dist} : M \times M \to \mathbb{R}$ er en metrik i M. Vis, at følgen $(\underline{x}_n \mid n \in \mathbb{N})$, hvor $\underline{x}_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \ldots)$, er en fundamentalfølge i det metriske rum (M, dist), og vis derved, at rummet (M, dist) ikke er fuldstændigt.

80. Lad $(a_n \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N})$ være en følge af komplekse tal, og antag, at talfølgen $(\sqrt[n]{|a_n|} \mid n \in \mathbb{N})$ er konvergent med grænseværdi a.

Vis, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, hvis $a \in [0, 1[$, og divergent, hvis $a \in]1, +\infty[$.

81. Vis, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+n^2)^2}$ er konvergent for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være rækkens sumfunktion.

Vis, at der for ethvert $x \in \mathbb{R}_+$ gælder

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} < f(x) < \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} + \frac{x^3}{(x^2+1)^2}.$$

Vis ved udregning af integralet, at

$$f(x) \longrightarrow \frac{\pi}{4} \quad \text{for} \quad x \to +\infty.$$

Vis, at rækken er uniformt konvergent på ethvert interval $[-a, a]$, men ikke på hele $\mathbb{R}$.

[Jfr. opg. 101.]

82. Der er givet en følge $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ af positive tal og for hvert $p \in \mathbb{N}$ en følge $(a_{pn} \mid n \in \mathbb{N})$ af komplekse tal. Det antages at

(1) den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

er konvergent;

(2) for ethvert $p \in \mathbb{N}$ og ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$|a_{pn}| \leqslant a_n;$$

(3) for ethvert $n \in \mathbb{N}$ er talfølgen $(a_{pn} \mid p \in \mathbb{N})$ konvergent.

(a) Gør rede for, at for hvert $p \in \mathbb{N}$ er den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{pn}$$

konvergent.

(b) Gør rede for, at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{p\to\infty} a_{pn}$$

er konvergent.

(c) Vis, at talfølgen

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{pn} \mid p \in \mathbb{N} \right)$$

er konvergent med grænseværdien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{p\to\infty} a_{pn}.$$

[Altså $\lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{pn} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{p\to\infty} a_{pn}$.]

*83. (1) Vis, at hvis man sætter

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\log n+\frac{1}{2}C+\varepsilon_n$$

og

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{2}\log n+\frac{1}{2}C+\log 2+\eta_n,$$

hvor C er Eulers konstant, gælder $\varepsilon_n\to 0$ og $\eta_n\to 0$.

(2) Vis herved, at når p og q er naturlige tal, vil den uendelige række, der fås ved omordning af rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, idet man først tager de første p positive led, så de første q negative led, så de næste p positive led, så de næste q negative led, o.s.v., være konvergent med summen $\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$.

84. Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x^2)^n+1}{(2x)^n}$$

er konvergent for $x\in\left]\frac{1}{2},1\right[$. Vis, at sumfunktionen er restriktion af en rationel funktion, og bestem denne.

85. Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\sin(2^n x)$$

er uniformt konvergent på $\mathbb{R}$. Vis, at rækkens sumfunktion f er en C^1-funktion, og find $f'(0)$. Find $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}f(x)\,dx$.

86. Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(3^n x)$$

er uniformt konvergent på $\mathbb{R}$. Vis, at rækkens sumfunktion f ikke er differentiabel i punktet 0. Find $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(x)\,dx$.

87. Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx\, e^{-n^2x^2}$$

er konvergent for ethvert $x \in \mathbb{R}$. Vis, at sumfunktionen er kontinuert i ethvert punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, men diskontinuert i 0.

88. Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh nx}$$

er konvergent for ethvert $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, og at sumfunktionen er kontinuert på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

89. (1) Vis, at der for vilkårlige $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ gælder $|(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)| \leqslant \exp(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)$.

(2) Lad a betegne en kompleks konstant, således at $|a|<1$. Vis da, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a^n(1-x)(1-ax)\cdots(1-a^nx)$ er uniformt konvergent på enhver cirkelskive $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leqslant r\}$.

93. Undersøg, for hvilke komplekse værdier af z rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n$$

er henholdsvis absolut konvergent og divergent.

Skitser punktmængden $\{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant \frac{1}{2}\}$, og undersøg, om rækken er uniformt konvergent på denne mængde.

94. Vis, at potensrækken

$$x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \cdots$$

er konvergent for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

Vis, at der for rækkens sumfunktion f gælder $f(x) \to \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ for $x \to +\infty$.

95. Beregn $\sqrt{2}$ med 6 decimaler ved brug af binomialrækken, idet der benyttes omskrivningen

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7}\sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{10}{7}\left(1 - \frac{1}{50}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

96. Beregn $\sqrt[3]{3}$ med 4 decimaler ved brug af binomialrækken, idet der benyttes omskrivningen

$$\sqrt[3]{3} = \frac{10}{7}\sqrt[3]{\frac{1029}{1000}} = \frac{10}{7}\left(1 + \frac{29}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

*97. Vis, at rækken

$$1-\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2-\cdots+(-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n+\cdots$$

er uniformt konvergent på intervallet $[-1,1]$, og at dens sum er $\sqrt{1-x}$. Vis herved, at følgen af polynomier

$$P_n(x)=1-\binom{\frac{1}{2}}{1}(1-x^2)+\binom{\frac{1}{2}}{2}(1-x^2)^2-\cdots+(-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}(1-x^2)^n$$

konvergerer uniformt på intervallet $[-1,1]$ mod funktionen $|x|$. Skitser grafen af $P_n(x)$ på $[-1,1]$ for $n=1$ og $n=2$.

Vink. For $x\in\,]-1,1[$ udtrykkes $\sqrt{1-x}$ ved binomialrækken

$$\sqrt{1-x}=1+\binom{\frac{1}{2}}{1}(-x)+\binom{\frac{1}{2}}{2}(-x)^2+\cdots+\binom{\frac{1}{2}}{n}(-x)^n+\cdots.$$

Vis, at leddene bortset fra det første er negative, når $x\in\,]0,1[$, og godtgør herved, at der for $x\in\,]0,1[$ og ethvert $n\in\mathbb{N}$ gælder

$$1+\binom{\frac{1}{2}}{1}(-x)+\binom{\frac{1}{2}}{2}(-x)^2+\cdots+\binom{\frac{1}{2}}{n}(-x)^n>0.$$

Godtgør herved, at der for ethvert $n\in\mathbb{N}$ gælder

$$1+\binom{\frac{1}{2}}{1}(-1)+\binom{\frac{1}{2}}{2}(-1)^2+\cdots+\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\geqslant 0.$$

Find herved en konvergent majorantrække for den betragtede række på intervallet $[-1,1]$.

98. Undersøg, om funktionen $x-\dfrac{1}{\log(1+\frac{1}{x})}$, $x\in\mathbb{R}_+$, har en grænseværdi for $x\to+\infty$.

99. Vis, at der for ethvert $y \in \mathbb{R}_+$ gælder

$$\log y = 2\left(\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2n+1} + \cdots\right).$$

Beregn herved $M = \log 10$ med 7 decimaler, idet der benyttes omskrivningen

$$M = 3\log 2 + \log\frac{5}{4}.$$

Vink. Regn med 10 decimaler. Lav først en tabel over $\frac{1}{3^n}$.

100. (a) Udled formlen

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Gør rede for, at den ved

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\, d\varphi$$

bestemte funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er vilkårligt ofte differentiabel.

(c) Vis, at f tilfredsstiller differentialligningen

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

(d) Vis, at f er sumfunktion for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

[Funktionen f er den 0te Bessel funktion og betegnes sædvanligvis J_0.]

101. Vis, at der for $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gælder formlen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+n^2)^2} = \frac{\pi}{4} \coth \pi x + \frac{\pi^2}{4} \frac{x}{\sinh^2 \pi x} - \frac{1}{2x}.$$

Vink. Af partialbrøkrækken for funktionen cot udledes for $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ formlen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{x^2+n^2} = \frac{\pi \coth \pi x}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Heraf fås den ønskede formel ved differentiation under brug af sætningen om ledvis differentiation.

[Jfr. opg. 81.]

***102.** Med A betegnes mængden af funktioner $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, for hvilke der findes en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med ikke negative koefficienter og konvergensradius $+\infty$, hvis sum for ethvert $x \in [0, +\infty[$ er $f(x)$.

Med B betegnes mængden af C^∞-funktioner $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, for hvilke der for ethvert $p \in \mathbb{N}_0$ og ethvert $x \in [0, +\infty[$ gælder $f^{(p)}(x) \geqslant 0$.

Vis, at $A = B$.

103. Vis, at funktionen $x \mapsto \log(1+e^x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er konveks, og udled herved uligheden

$$a_1^\alpha b_1^\beta + a_2^\alpha b_2^\beta \leqslant (a_1+a_2)^\alpha (b_1+b_2)^\beta,$$

hvor $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ og $\alpha + \beta = 1$.

104. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x \cos x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

105. Vis, at

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 t \cos(x \sin t)\, dt \to 0 \quad \text{for} \quad x \to +\infty.$$

106. Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betegne den funktion med periode 2π, som på intervallet $[-\pi, \pi]$ er defineret ved

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \cos 2t & \text{for } |t| \leqslant \frac{1}{2}\pi \\ 0 & \text{for } \frac{1}{2}\pi \leqslant |t| \leqslant \pi. \end{cases}$$

Skitser grafen for f på intervallet $[-\pi, \pi]$.

Gør rede for, at Fourier rækken for f har udseendet

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + a_2 \cos 2t + a \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos(2p+1)t}{(2p-1)(2p+1)(2p+3)},$$

og bestem a_0, a_2, og a.

Find summen af den uendelige række

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} - \cdots.$$

*107. På et vist tidspunkt er A i punktet $(0,0)$ og hans hund H i punktet $(0,1)$. Idet A bevæger sig ud ad x-aksen med farten 1, og H løber efter A med farten 1, således at H's hastighed i hvert øjeblik er rettet mod A, skal man vise, at afstanden HA konvergerer mod $\frac{1}{2}$. Endvidere skal man finde H's bane bestemt ved en ligning $x = f(y)$.

108. På et interval $J \subseteq \mathbb{R}$ er givet reelle C^2-funktioner $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, således at der for ethvert $t \in J$ gælder

$$(a(t), b(t)) \neq (0,0), \qquad \det \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{bmatrix} \neq 0.$$

For ethvert $t \in J$ betegnes med $L(t)$ den rette linie i $\mathbb{R}^2$, der bestemmes ved ligningen

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0.$$

(a) Vis, at for ethvert $t \in J$ vil linien $L(t)$ for alle numerisk tilstrækkeligt små $\Delta t \neq 0$, for hvilke $t + \Delta t \in J$, skæres af linien $L(t+\Delta t)$, og skæringspunktet vil for $\Delta t \to 0$ konvergere mod det punkt $(x(t), y(t))$, der bestemmes ved ligningsparret

$$\begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0. \end{cases}$$

(b) Vis, at $(x,y) = (x(t), y(t)) : J \to \mathbb{R}^2$ er en C^1-kurve, hvis tangent i ethvert punkt, for hvilket $(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$, er linien $L(t)$.

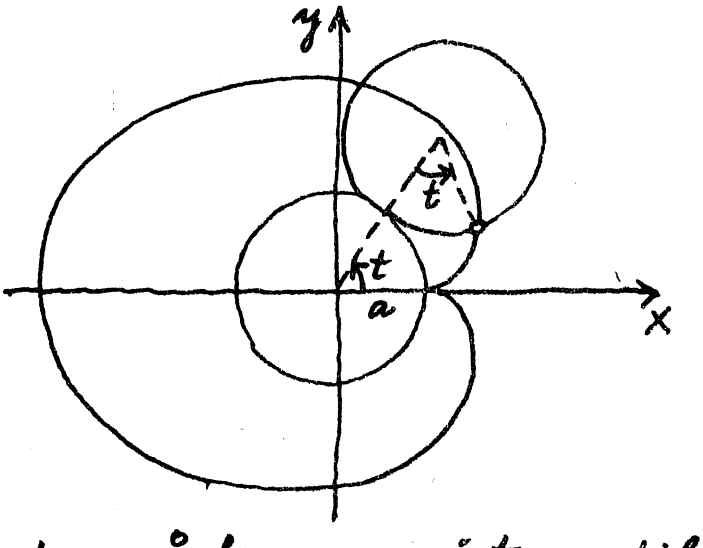
Kurven kaldes indhyllingskurven for linieskaren $(L(t) \mid t \in J)$.

Eksempel. Find indhyllingskurven i det tilfælde, hvor $L(t)$ er linien gennem punkterne $(\cos t, 0)$ og $(0, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

109. Vis, at krumningscirklen for en ellipse i et toppunkt på storaksen bortset fra dette punkt ligger inden i ellipsen.

110. Find krumningscirklen for grafen for $y = \cos x$ i punktet $(0,1)$, og vis, at grafen bortset fra dette punkt ligger uden for krumningscirklen.

111. Ved en kardioide forstås den kurve, der beskrives af et punkt på periferien af en cirkel, der ruller på en lige så stor cirkel. Idet der



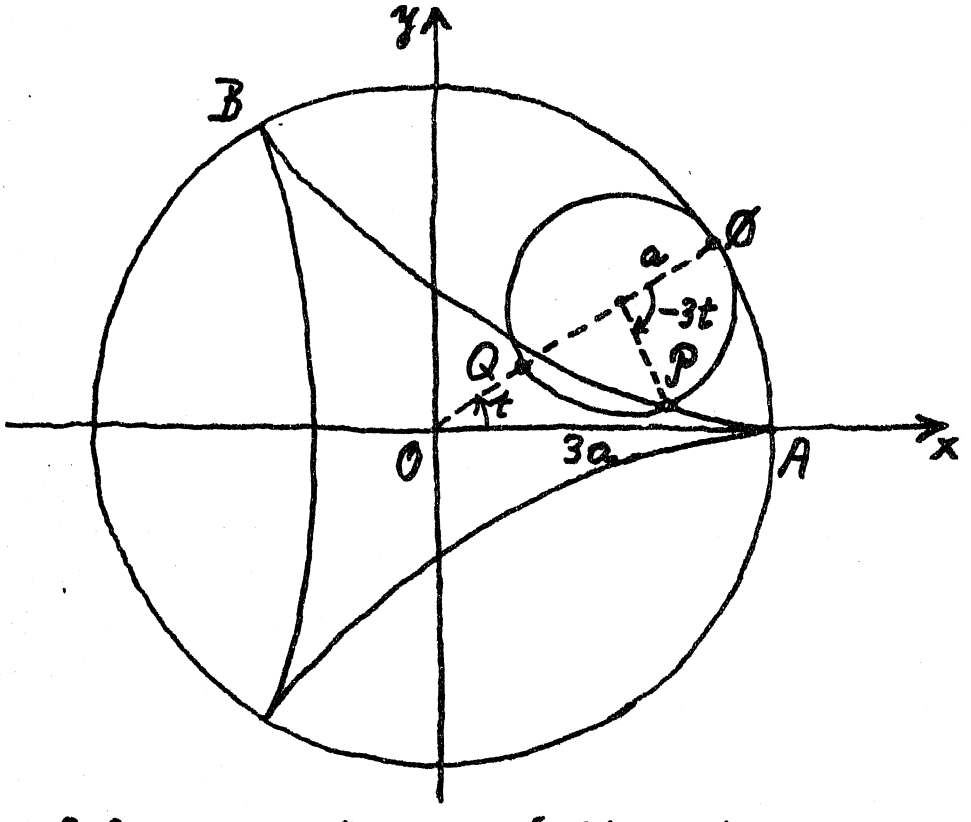
benyttes den på figuren viste opstilling, skal man vise, at kardioiden har parameterfremstillingen

$$(x,y) = (2a\cos t - a\cos 2t,\ 2a\sin t - a\sin 2t),\quad t \in [0, 2\pi].$$

Find herved kardioidens længde og arealet af den figur, den begrænser.

Vis, at evoluten ligeledes er en kardioide, nemlig den, der fås af den givne ved en homoteti ud fra $(0,0)$ i forholdet $-\frac{1}{3}$.

112. Ved Steiners hypocykloide forstås den kurve, der beskrives af et punkt på periferien af en cirkel, der ruller inden i en cirkel med tre gange så stor radius. Idet der benyttes



den på figuren viste opstilling, skal man vise, at kurven har parameterfremstillingen

$$(x, y) = (2a\cos t + a\cos 2t,\ 2a\sin t - a\sin 2t),\quad t \in \mathbb{R}.$$

Vis, at kurven har spidser af første art i de punkter, der svarer til parameterværdier $t \in \{\frac{2\pi}{3}n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, og at spidstangenterne går gennem O. (Vis og benyt, at det er nok at betragte det til $t = 0$ svarende punkt A.)

Vis, at $(y', -x') = 2\overrightarrow{PØ}$, og vis herved for $t \notin \{\frac{2\pi}{3}n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, at tangenten i P går gennem Q.

Find længden af buen AB og arealet af den af hele kurven begrænsede figur.

113. En massiv, homogen kugle med vægtfylde $\frac{1}{4}$ og radius 1 flyder på vandet, hvis vægtfylde antages at være 1. (Luftens vægtfylde regnes for 0.) Find centrums højde over vandoverfladen.

114. Find volumen af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når cykloidebuen

$$(x, y) = (at - a\sin t, a - a\cos t), \quad t \in [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi],$$

drejes om linien $\{(x,y) \mid y = a\}$.

115. Vis, at ligningen

$$(1+x^2)\sinh y - x^2 \tanh y = \sinh x$$

for ethvert $x \in \mathbb{R}$ har en og kun een løsning $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Gør rede for, at funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er C^∞, og find $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

116. Udtrykket

$$\omega = \left(\frac{x}{x^2+y^2} + e^x\right)dx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + e^{-y}\right)dy$$

definerer en C^∞-differentialform i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ af første grad. Vis, at ω er lukket i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vis, at ω er eksakt i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, og angiv en stamfunktion.

117. Bestem de C^1-funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for hvilke differentialformen

$$f(y)\,dx + 4x f(y)\,dy$$

er eksakt.

118. I mængden $\{(x,y,z) \in]0,1[^3 \mid y < xz\}$ betragtes differentialformen

$$\omega = \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{xz-y}{x(1-z)}}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx + \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{(xz-y)(1-y)}{(1-x)(1-z)\,y}}}{\sqrt{y(1-y)}}\,dy + \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{xz-y}{(1-x)\,z}}}{\sqrt{z(1-z)}}\,dz.$$

Vis, at ω er eksakt.

119. Vis, at funktionen $f(t,x) = |x|$, $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, opfylder en Lipschitz betingelse i hele $\mathbb{R}^2$, og find samtlige maksimale løsninger til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = |x|.$$

Samme opgave for funktionen $f(t,x) = |\sin x|$.

120. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$(\sinh x - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - \cosh x \frac{dy}{dx} + y = \cosh x - x.$$

121. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^k x}{dt^k} + \binom{k}{1}\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \binom{k}{2}\frac{d^{k-2}x}{dt^{k-2}} + \ldots + \binom{k}{k-1}\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

122. Lad $V(K)$ for et vilkårligt normeret polynomium

$$K(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

med komplekse koefficienter betegne det underrum af vektorrummet af alle komplekse funktioner på $\mathbb{R}$, der udgøres af løsningerne til differentialligningen

$$\frac{d^k x}{dt^k} + a_{k-1}\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \cdots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0.$$

[For $K(\lambda) = 1$ er talen ikke om en differentialligning, men simpelthen om ligningen $x = 0$, og $V(K)$ skal naturligvis i dette tilfælde betyde rummet bestående af funktionen 0.]

Vis, at der for vilkårlige normerede polynomier P og Q med komplekse koefficienter gælder

$$V(P) \cap V(Q) = V(D) \quad \text{og} \quad V(P) + V(Q) = V\left(\frac{PQ}{D}\right),$$

hvor D betegner største fælles divisor for P og Q.

Vis herudfra, at $V(P) \cap V(Q) = \{0\}$, hvis og kun hvis P og Q ikke har nogen rod fælles, og at der i så fald gælder

$$V(P) \oplus V(Q) = V(PQ).$$

Vis endvidere, at der gælder

$$V(P) \subseteq V(Q),$$

hvis og kun hvis P er divisor i Q.

123. I det $\alpha \in]1, +\infty[$ er givet, antages om en talfølge $(a_n \in \mathbb{R}_+ \mid n \in \mathbb{N})$, at

$$a_{n+1} = \sqrt{\alpha^2 - \alpha + a_n} \quad \text{for ethvert } n \in \mathbb{N}.$$

Vis, at talfølgen er konvergent med grænseværdien α.

Vink. Vis, at hvis $a_1 > \alpha$, gælder $a_{n+1} < a_n$ og $a_n > \alpha$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og hvis $a_1 < \alpha$, gælder $a_{n+1} > a_n$ og $a_n < \alpha$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

124. Vis, at der for vilkårlige $x, y \in \mathbb{R}$ gælder

$$|\sin(x+y)| \leqslant |\sin x| + |\sin y|.$$

Vis, at den ved

$$\operatorname{dist}(x, y) = |\sin(x-y)| + \left|\sin \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right|$$

definerede funktion $\operatorname{dist}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en metrik i $\mathbb{R}$.

125. Lad $\mathcal{B}$ betegne mængden af begrænsede reelle talfølger $\underline{x} = (x_i \mid i \in \mathbb{N})$.

Vis, at der ved

$$\operatorname{dist}(\underline{x}, \underline{y}) = \sup\{|x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$$

defineres en metrik i $\mathcal{B}$.

Vis, at det metriske rum $(\mathcal{B}, \operatorname{dist})$ er fuldstændigt.

Gør rede for, at mængden $\mathcal{K}$ af konvergente reelle talfølger er en delmængde af $\mathcal{B}$, og vis, at delrummet $(\mathcal{K}, \operatorname{dist})$ er fuldstændigt.

126. Lad $(M, dist)$ være et metrisk rum, og lad A og B være to ikke tomme delmængder af M. Vis, at der gælder

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow diam(A \cup B) \leqslant diam(A) + diam(B).$$

127. I det mængden $\mathbb{C}$ af komplekse tal organiseres som et metrisk rum med metriken $dist(x,y) = |x-y|$, skal man bestemme afslutningen af delmængden

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1 - \tfrac{1}{n} \wedge Re\, x > 0 \}.$$

128. Givet en kontinuert funktion f fra $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ind i $\mathbb{R}$, således at (1) $f(0) = 0$, og (2) funktionen $x \mapsto f(x) - x$ er strengt voksende på $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Vis, at funktionen f er strengt voksende og afbilder $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ bijektivt på $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Vis, at der gælder

$$0 \leqslant x - g(x) \leqslant f(x) - x \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\},$$

hvor g betegner den omvendte funktion til f.

129. Lad $\{x_1, x_2, \dots\}$, hvor $x_n \neq x_m$ for $n \neq m$, være mængden af rationale tal i $[0,1]$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ betragtes intervallet

$$I_n = \left] x_n - \tfrac{1}{2^{n+1}}, x_n + \tfrac{1}{2^{n+1}} \right[.$$

Vis, at

$$[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

130. Lad $(M, dist)$ være et metrisk rum, og lad $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ betegne et system af afsluttede delmængder af M. Vis, at hvis en af mængderne tilhørende $\mathcal{F}$ er kompakt, da er fællesmængden

$$A = \bigcap_{i \in I} F_i$$

kompakt.

131. Lad M betegne mængden af talpar

$$M = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}_+\}.$$

(a) Vis, at der ved

$$dist_M((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\left\{|x_1 - x_2|, \left|\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right|\right\}$$

er defineret en metrik i M.

(b) I det B betegner følgende delmængde af $(M, dist_M)$:

$$B = \{(x, y) \in M \mid |x| \leqslant 1,\ y \leqslant 1\},$$

skal man besvare følgende spørgsmål:

1° Er B afsluttet?
2° Er B kompakt?
3° Er B begrænset?

132. Om en kontinuert funktion $f: [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ vides, at $f(x) \to 0$ for $x \to +\infty$. Vis, at f er uniformt kontinuert.

133. Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være kontinuert, begrænset, og monoton. Vis, at f er uniformt kontinuert.

134. Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være uniformt kontinuert. Vis, at der findes tal $\alpha > 0$ og $\beta > 0$ således, at der for alle $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$|f(x)| \leqslant \alpha |x| + \beta.$$

*135. Lad $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion med den egenskab, at for hvert $x \in [a,b]$ har den på $[c,d]$ definerede funktion $y \mapsto f(x,y)$ globalt maksimum for netop een værdi af y. Idet denne værdi betegnes $g(x)$, skal man vise, at funktionen $g: [a,b] \to [c,d]$ er kontinuert.

*136. Lad (X, dist_X) og (Y, dist_Y) være metriske rum og $f: X \to Y$ en kontinuert afbildning, og lad A være en delmængde af X, hvis afslutning $\overline{A}$ er kompakt. Vis, at afslutningen $\overline{f(A)}$ af billedmængden $f(A)$ af A er billedet $f(\overline{A})$ af $\overline{A}$.

137. En funktion $f: \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \to \mathbb{R}$ antages at opfylde følgende betingelser:

(a) Dens restriktion til mængden $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ er kontinuert.

(b) For ethvert $x \in \mathbb{R}$ og enhver punktfølge $((x_n, y_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid n \in \mathbb{N})$, der konvergerer mod $(x,0)$, gælder

$$f(x_n, y_n) \to f(x,0) \quad \text{for } n \to +\infty.$$

Vis, at f er kontinuert.

140. Vis, at hvis en funktion $\underline{f}: \Omega \to V$ (hvor Ω er en åben mængde i $\mathbb{R} \times V$, og V er enten $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$) lokalt opfylder en Lipschitz betingelse, da opfylder den en Lipschitz betingelse i enhver kompakt og konveks delmængde Ξ af Ω.

141. Gør rede for, at der for ethvert punkt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ findes en og kun een maksimal løsning $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = e^{-x^2} + t^2,$$

for hvilken $\varphi(t_0) = x_0$. Vis, at enhver maksimal løsning til $(*)$ er strengt voksende og C^∞ på $\mathbb{R}$. Lad $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den maksimale løsning til $(*)$, for hvilken $\psi(1) = 0$. Vis, at der findes et interval $I = [1-a, 1+a]$ $(a > 0)$, således at $\psi: I \to \mathbb{R}$ er konveks. Find det oskulerende polynomium af grad 3 for ψ i punktet 1.

142. Benyt de successive approksimationers metode (§50) til at løse differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x$$

for 1) $(t_0, x_0) = (0, 1)$, 2) $(t_0, x_0) = (0, 0)$.

143. Benyt de successive approximationers metode til at løse differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = tx + t,$$

for $(t_0, x_0) = (0,0)$.

144. Find samtlige maksimale løsninger $\varphi:]-1,1[\to \mathbb{R}$ til differentialligningen

$$(*) \qquad (t-1)\frac{dx}{dt} - x = \arccos t.$$

Vis, at enhver af disse kan udvides til en differentiabel funktion $\tilde{\varphi}: [-1,1[\to \mathbb{R}$, der tilfredsstiller $(*)$ også for $t = -1$. Undersøg, om funktionerne φ kan udvides til differentiable funktioner på $[-1,1]$.

145. Find samtlige løsninger $\varphi:]-\infty,0[\to \mathbb{R}$ og samtlige løsninger $\psi:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ til differentialligningen

$$(*) \qquad \arctan t \frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t^2}.$$

Find dernæst samtlige løsninger $\eta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til $(*)$. Vis, at der gennem hvert linieelement af første orden $(0,0,p)$, hvor $p \in \mathbb{R}$, går en og kun een maksimal løsning

$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til (*). Er dette i overensstemmelse med eksistens- og entydighedssætningen i §51?

146. Vis, at den ved

$$f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{6t^5 x}{t^6 + x^2} & \text{for } (t,x) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (t,x) = (0,0) \end{cases}$$

definerede funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuert; men at f ikke lokalt opfylder en Lipschitz betingelse.

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),$$

og skitsér grafene af de maksimale løsninger. Hvor mange af disse går gennem $(0,0)$?

147. Lad $A \subseteq \mathbb{R}^*$ være ikke tom. Vis at

$$\sup A = - \inf(-A) ,$$

hvor $-A = \{-x \mid x \in A\}$.

Lad (x_n) være en talfølge i $\mathbb{R}^*$. Vis at

$$\limsup x_n = -\liminf(-x_n) .$$

148. Lad (a_n) og (b_n) være talfølger i $\mathbb{R}^*$ og antag at $a_n \leq b_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis at

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n$$

og

$$\limsup a_n \leq \limsup b_n .$$

149. Lad (a_n) og (b_n) være talfølger i $\mathbb{R}^*$ og antag at $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Vis at

$$\limsup(a_n + b_n) = a + \limsup b_n$$

og

$$\liminf(a_n + b_n) = a + \liminf b_n .$$

150. Bestem limes inferior og limes superior for talfølgen (a_n), hvor

$$a_n = (1 + (-1)^n)^n$$

151. Lad (M_i,dist_i), $i = 1,\ldots,k$ være k metriske rum og lad $M = M_1\times\ldots\times M_k$. For $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_k) \in M$ og $\underline{y} = (y_1,\ldots,y_k) \in M$ defineres

$$\mathrm{dist}_M(\underline{x},\underline{y}) = \max\{\mathrm{dist}_i(x_i,y_i) \mid i = 1,\ldots,k\}.$$

Vis, at (M,dist_M) er et metrisk rum og at der for $\underline{x} \in M$ og $r > 0$ gælder

$$K_M(\underline{x},r) = K_{M_1}(x_1,r)\times\ldots\times K_{M_k}(x_k,r).$$

Vis, at der om delmængder $A_i,B_i \subseteq M_i$; $i = 1,\ldots,k$ gælder

$$(A_1\times\ldots\times A_k) \cap (B_1\times\ldots\times B_k) = (A_1\cap B_1)\times\ldots\times(A_k\cap B_k)$$

$$A_1\times\ldots\times A_k \subseteq B_1\times\ldots\times B_k \Leftrightarrow A_1 \subseteq B_1 \wedge \ldots \wedge A_k \subseteq B_k$$

$$(A_1\times\ldots\times A_k)\setminus(B_1\times\ldots\times B_k) = \bigcup_{i=1}^{k} A_1\times\ldots\times A_{i-1}\times(A_i\setminus B_i)\times A_{i+1}\times\ldots\times A_k,$$

og udnyt dette til at vise at

$$\overline{A_1\times\ldots\times A_k} = \overline{A}_1\times\ldots\times\overline{A}_k$$

$$(A_1\times\ldots\times A_k)^{\circ} = A_1^{\circ}\times\ldots\times A_k^{\circ}$$

$$\partial(A_1\times\ldots\times A_k) = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{A}_1\times\ldots\times\overline{A}_{i-1}\times\partial A_i\times\overline{A}_{i+1}\times\ldots\times\overline{A}_k .$$

Vis endelig, at hvis A_i er åben i M_i for alle $i = 1,\ldots,k$ (resp. A_i er afsluttet i M_i for alle $i = 1,\ldots,k$) er en $A_1\times\ldots\times A_k$ åben (resp. afsluttet) i M.

152. Lad $(M_i,dist_i)$, $i = 1,\ldots,k$ være k metriske rum og lad $(M,dist_M)$ være det i opgave 151 definerede metriske rum hvor $M = M_1 \times \ldots \times M_k$ og

$$dist_M(\underline{x},\underline{y}) = \max\{dist_i(x_i,y_i) \mid i = 1,\ldots,k\}.$$

Vis, at $(M,dist_M)$ er fuldstændigt hvis og kun hvis hvert af rummene $(M_i,dist_i)$, $i = 1,\ldots,k$ er fuldstændige.

Lad $p_i:M \to M_i$, $i = 1,\ldots,k$ betegne den i'te projektionsafbildning givet ved $p_i(\underline{x}) = x_i$. Vis, at p_i er afstandsformindskende for hvert $i = 1,\ldots,k$.

Antag videre, at $(X,dist_X)$ er et metrisk rum, og lad $f:X \to M$ være en afbildning. For hvert $i = 1,\ldots,k$ defineres den i'te koordinatfunktion af f som $f_i = p_i \circ f$. (Man skriver ofte f som $\underline{f} = (f_1,\ldots,f_k)$.)

Vis, at f er kontinuert, hvis og kun hvis alle koordinatfunktionerne $f_1,\ldots,f_k$ er kontinuerte.

153. Lad $(M,dist)$ være det i §2 opg. 3 definerede metriske rum og $(X,dist_X)$ et vilkårligt metrisk rum. Vis, at enhver afbildning $f:M \to X$ er kontinuert.

154. Lad F_1 og F_2 være disjunkte afsluttede mængder i et metrisk rum (X,dist). Vis, at der findes en kontinuert funktion $\varphi: X \to [0,1]$ så $\varphi(x) = 0$ netop når $x \in F_1$, og $\varphi(x) = 1$ netop når $x \in F_2$.

155. Betragt et metrisk rum (M,dist). Til hvert punkt $a \in M$ og hvert reelt $r > 0$ defineres den *afsluttede kugle med centrum a og radius r* som punktmængden

$$B(a,r) = \{x \in M \mid \text{dist}(a,x) \leq r\}.$$

Vis, at B(a,r) er afsluttet.

Giv et eksempel på, at B(a,r) ikke behøver at være afslutningen af den åbne kugle K(a,r). (Lad f.eks. (M,dist) være et diskret rum, som defineret i §2, opg. 3.)

156. Giv et eksempel på en divergent reel talfølge (x_n), for hvilken ethvert punkt i $[\liminf x_n, \limsup x_n]$ er fortætningspunkt.

157. Vis, at enhver linie i planen $\mathbb{R}^2$ er homeomorf med $\mathbb{R}$. (Vink: Benyt en af de to koordinatfunktioner $x_j: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ til at afbilde linien på $\mathbb{R}$.)

161. Lad (M,dist) være et metrisk rum.

1) Lad (x_n) og (y_n) være fundamentalfølger i M. Vis, at $\lim \mathrm{dist}(x_n,y_n)$ eksisterer.

(Vink: vis og benyt, at der for punkter $a,b,c,d \in M$ gælder

$$|\mathrm{dist}(a,b)-\mathrm{dist}(c,d)| \leq \mathrm{dist}(a,c) + \mathrm{dist}(b,d)).$$

2) Vis, at der ved

$$d^*((x_n),(y_n)) = \lim \mathrm{dist}(x_n, y_n)$$

defineres en pseudometrik (opgave §2:8) i mængden M^* af fundamentalfølger i M.

Lad $(\hat{M},\hat{\mathrm{dist}})$ være det i opgave §2:8 ud fra (M^*,d^*) konstruerede metriske rum. Elementerne x i $\hat{M}$ er således ækvivalensklasser af fundamentalfølger, hvor (x_n) og (y_n) fra M^* tilhører samme klasse hvis og kun hvis $d^*((x_n),(y_n)) = 0$.

Definer afbildningen $i : M \to \hat{M}$ ved til $x \in M$ at lade svare ækvivalensklassen $i(x)$ indeholdende fundamentalfølgen $(x,x,x,\cdots,x,\cdots)$.

3) Vis, at

$$\mathrm{dist}(x,y) = \hat{\mathrm{dist}}(i(x),i(y)) \quad \text{for} \quad x,y \in M,$$

og dermed specielt at i er injektiv.

(Opgaven fortsættes)

4) Vis, at mængden $i(M) = \{i(x) | x \in M\}$ er tæt i $\{\hat{M}, \hat{dist}\}$.

5) Vis, at $(\hat{M}, \hat{dist})$ er et fuldstændigt metrisk rum.

(Vink: Lad $(\underline{x}^n)$ være en fundamentalfølge i $(\hat{M}, \hat{dist})$ og vælg $x_n \in M$ så $\hat{dist}(\underline{x}^n, i(x_n)) < \frac{1}{n}$ (jvf. 4)). Godtgør, at klassen indeholdende $(x_n) \in M^*$ er grænsepunkt for følgen $(\underline{x}^n)$ i $\hat{M}$.)

Det metriske rum $(\hat{M}, \hat{dist})$ kaldes <u>fuldstændiggørelsen</u> af $(M, dist)$. Idet M opfattes som delrum af $\hat{M}$ via afbildningen $i : M \to \hat{M}$ (jvf. 3)), er $\hat{M}$ det mindste fuldstændige metriske rum, der indeholder M: For et vilkårligt fuldstændigt metrisk rum (N,d) og afbildning $\varphi : M \to N$, der opfylder $d(\varphi(x), \varphi(y)) = dist(x,y)$ for $x,y \in M$, findes der netop en afbildning $\Phi : \hat{M} \to N$ der opfylder $\Phi \circ i = \varphi$ og

$$d(\Phi(\underline{x}), \Phi(\underline{y})) = \hat{dist}(\underline{x}, \underline{y}) \quad \text{for} \quad \underline{x}, \underline{y} \in \hat{M} .$$

162. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval. En funktion $f : I \to \mathbb{R}$ kaldes midtpunktkonveks hvis det for alle $x,y \in I$ gælder

$$f(\tfrac{1}{2}(x+y)) \leq \tfrac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Vis, at hvis $f: I \to \mathbb{R}$ er kontinuert og midtpunktkonveks så er f konveks.

163. Lad $I,J \subseteq \mathbb{R}$ være åbne intervaller og antag at $f: I \to \mathbb{R}$ er konveks, $f(I) \subseteq J$ og $g: J \to \mathbb{R}$ er konveks og voksende. Vis, at $g \circ f$ er konveks.

164. Lad $\varphi:]0,\infty[\to]0,\infty[$ være kontinuert. Vis, at hvis integralet

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\varphi(t)dt$$

eksisterer for alle $x > 0$ så er $F:]0,\infty[\to]0,\infty[$ logaritmisk konveks.

165. Lad $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ være kontinuert og lad $f: J \to \mathbb{R}$ være konveks på det åbne interval J hvorom det antages, at $\{g(x) \mid x \in [a,b]\} \subseteq J$. Vis, at

$$f(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(t))dt .$$

166. Find supremum og infimum for hver af mængderne

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\},$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\ ,\ n \in \mathbb{N}\},$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n^2+4n+4}{n^2+2n+2}\ ,\ n \in \mathbb{N}\},$$

og undersøg om der findes maksimum, henholdsvis minimum.

167. Find supremum og infimum for hver af mængderne

$$\{x^2+y \mid x \in [-\tfrac{1}{2},1]\ ,\ y \in [0,\tfrac{1}{2}]\},$$

$$\{x^2+y^2 \mid x \in [-\tfrac{1}{2},1]\ ,\ y \in [0,\tfrac{1}{2}[\},$$

$$\{x^2-y^2 \mid x \in [-\tfrac{1}{2},1]\ ,\ y \in]0,\tfrac{1}{2}[\},$$

$$\{x^2-5y \mid x \in]-\tfrac{1}{2},1]\ ,\ y \in]0,\tfrac{1}{2}[\},$$

og undersøg om der findes maksimum, henholdsvis minimum.

168. Lad $M \subseteq \mathbb{R}$ være ikke-tom og opad begrænset og betegn med D_M mængden af ikke-tomme delmængder af M. Idet

$$M^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \sup M'\ ,\ M' \in D_M\}$$

skal det vises, at

$$\sup M = \sup M^*.$$

Vis endvidere, at hvis M har et maksimum så findes $\max M^*$ og $\max M = \max M^*$.

169. Lad $A \subseteq]0,\infty[$ være ikke-tom. Vis, at mængden

$$A' = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} \in A\}$$

er opad begrænset netop hvis $\inf A > 0$ og at i så fald

$$\sup A' = \frac{1}{\inf A}.$$

Vis, at A' har et maksimum netop hvis A har et minimum og at i så fald

$$\max A' = \frac{1}{\min A}.$$

170. Lad M betegne mængden af arealer for trekanter, der er indskrevet i en fast cirkel med radius $r > 0$. Find $\sup M$ og $\inf M$ og undersøg om M har maksimum henholdsvis minimum.

171. Som opgave 170 hvor M nu er mængden af arealer for firkanter indskrevet i en fast cirkel med radius $r > 0$.

172. Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en begrænset talfølge i $\mathbb{R}$. Vis, at $\liminf_{n\to\infty} x_n$ er det største tal $a \in \mathbb{R}$ med egenskaben:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ er } \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq a-\varepsilon\} \text{ endelig (eller } = \emptyset).$$

Formuler og bevis den analoge påstand om $\limsup_{n\to\infty} x_n$.

173. Lad $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en talfølge med $a_n \geq 0$ og sæt $b_n = (-1)^{n-1} a_n$. Vis, at

$$-\limsup a_n \leq \liminf b_n \leq \limsup b_n \leq \limsup a_n .$$

174. Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en vilkårlig følge af rationale tal så $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Find $\liminf x_n$ og $\limsup x_n$.

175. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ betegner A_n en numerabel mængde. Vis, at mængden

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

er numerabel.

176. Lad P betegne mængden af polygoner i planen $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, hvis vinkelspidser tilhører mængden $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Vis, at P er numerabel.

177. Lad M_n for $n \in \mathbb{N}$ betegne mængden af reelle polynomier med heltallige koefficienter og grad n,

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \ , \ x \in \mathbb{R},$$

hvor $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0,1,\cdots,n$ og $a_n \neq 0$.

1) Vis, at M_n er numerabel.

Lad M betegne mængden af alle reelle polynomier med heltallige koefficienter.

2) Vis, at M er numerabel.

Ved et reelt algebraisk tal forstås et reelt tal, der er rod i et polynomium tilhørende M.

3) Gør rede for, at tallene $\frac{2}{3}$, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ og $\sqrt[4]{7+\sqrt[3]{5}}$ er algebraiske.

4) Vis, at mængden af reelle algebraiske tal er numerabel.

1) Vis, at delfølgerne $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ og $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ er monotone.

2) Vis, at (a_n) er konvergent hvis og kun hvis

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}) = 0 .$$

3) Vis, at talfølgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestemt ved

$$a_1 = 0 , a_2 = 1 \quad \text{og} \quad a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2} \quad \text{for} \quad n > 1$$

er konvergent.

4) Gør rede for, at $a_n = \frac{2}{3}\,(1-(-\frac{1}{2})^{n-1})$ og find $\lim_{n\to\infty} a_n$.

182. Lad Γ betegne mængden af cirkler i den komplekse plan $\mathbb{C}$. For $\gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma$ sætter vi

$$\text{dist}_1(\gamma_1,\gamma_2) = |\underline{c}_2 - \underline{c}_1| + |r_2 - r_1| \quad \text{og}$$

$$\text{dist}_2(\gamma_1,\gamma_2) = \sqrt{|\underline{c}_2 - \underline{c}_1|^2 + |r_2 - r_1|^2} ,$$

hvor $\underline{c}_1,\underline{c}_2$ betegner centrene og r_1,r_2 betegner radierne for cirklerne γ_1 og γ_2 .

1) Vis, at dist_1 og dist_2 er metrikker i mængden Γ .
Lad cirklen γ_0 med centrum $\underline{c}_0$ og radius r_0 være givet.

2) Beskriv mængden

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \text{dist}_1(\gamma,\gamma_0) = \tfrac{1}{2}\, r_0\}.$$

3) Vælg et $\underline{c}$ inden for γ_0 og beskriv mængden

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \text{dist}_2(\gamma,\gamma_0) = r_0 \quad \text{og} \quad \text{centrum}(\gamma) = \underline{c}\} .$$

178. Undersøg, om talfølgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved

1) $a_n = 6n - 10\sqrt{n}$ 2) $a_n = n(1 + (-1)^n)$

3) $a_n = \frac{5 + \sin n}{n}$ 4) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{1000}$

er konvergent i $\mathbb{R}$, og bestem i bekræftende fald dens grænseværdi.

179. Vis, at talfølgen givet ved

1) $a_n = \frac{1-n}{1+n}$ 2) $a_n = \frac{1-n}{1+n^2}$

3) $a_n = \frac{-n^5+3n^2+6}{2n^3-n^2+5n}$ 4) $a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

er konvergent i $\mathbb{R}^*$, og bestem dens grænseværdi.

180. Lad $q > 0$ og betragt talfølgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, givet ved $a_n = \sqrt[n]{q}$.

1) Vis, at for $q > 1$ er talfølgen (a_n) aftagende og konvergent med grænseværdien 1.

2) Formuler og bevis de tilsvarende udsagn i tilfældet $0 < q < 1$.

3) Vis, at

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a ,$$

hvor $0 < b \leq a$.

181. Lad $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en talfølge om hvilken det gælder, at for $n > 1$ tilhører a_{n+1} det åbne interval med endepunkterne a_{n-1} og a_n.

183. Idet $\mathbb{R}$ udstyres med den sædvanlige metrik skal det undersøges hvilke af delrummene

$$\mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{R}\ ,\ \mathbb{Z}\setminus\{0\},\ \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \mathbb{Q}\ ,\ \mathbb{Q}\setminus\{0\}$$

er fuldstændige.

184. Betragt delmængden $A \subseteq \mathbb{R}$ givet ved

$$A = \{-1\} \cup ([0,1[\cap\mathbb{Q}) \cup (]1,3[\setminus\{2\})\ .$$

Find mængderne A^0, $\overline{A}^0$, $(\overline{A^0})^0$, $\overline{A}$, $(\overline{A})^0$, $\overline{(\overline{A})^0}$ samt disse mængders rand.

185. Bestem A^0, $\overline{A}$ og ∂A for følgende delmængder i planen $\mathbb{R}^2$,

1) $A = \{(x_1,x_2) \mid 0 \le x_1 \le 1\ ,\ 0 \le x_2 \le 1\}$

2) $A = \{(x_1,x_2) \mid 0 \le x_1 < 1\ ,\ 0 \le x_2 < 1\}$

3) $A = \{(x_1,x_2) \mid 0 < x_1 < 1\ ,\ 0 < x_2 < 1\}$

4) $A = \{(x_1,x_2) \mid 0 < x_1\ ,\ 0 \le x_2\ ,\ x_1 + x_2 = 1\}$.

186. Bestem A^0 og $\partial A\setminus A$ for følgende delmængder i planen $\mathbb{R}^2$,

1) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1x_2 > 0\}$

2) $A = \{(x_1,x_2) \mid 0 < x_1 \le 1\ ,\ -1 \le x_2 < 2\}$

3) $A = \{(x_1,x_2) \mid 0 < |x_1| + |x_2| \le 2\}$

4) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1 < x_2\ ,\ x_1^2 + (x_2-1)^2 = 4\}$.

187. Lad A være en delmængde af et metrisk rum (M,dist). Vis, at mængden af fortætningspunkter for A, der ikke til-

hører A, er lig med mængden af randpunkter for A, der ikke tilhører A.

188. Lad $A = \{(x_1,x_2) \mid x_2 = \sin \frac{1}{x_1},\ x_1 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Find mængden af fortætningspunkter for A, der ikke tilhører A.

189. Lad T_1 være en trekant i planen $\mathbb{R}^2$, og lad for $n > 1$ T_n være den trekant, hvis vinkelspidser er midtpunkterne af siderne i T_{n-1}. Bestem det indre, randen og mængden af fortætningspunkter for foreningsmængden af disse trekanters

1) vinkelspidser,
2) sider,
3) ydre.

190. Gør rede for at delmængderne $A =]0,1]$ og $B = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ af $\mathbb{R}$ ikke er kompakte. Angiv en åben overdækning af A henholdsvis B, der ikke kan udtyndes til en endelig overdækning. Angiv en følge i A henholdsvis B, der ikke har noget fortætningspunkt i A henholdsvis B.

191. Lad (M,dist) være et diskret metrisk rum (jvf. opgave 3 i §2). Vis, at $A \subseteq M$ er kompakt hvis og kun hvis A er en endelig delmængde af M. Observer, at enhver delmængde af M er både åben, afsluttet og begrænset.

192. Lad A_1, A_2 og A være ikke tomme delmængder af et metrisk rum (M,dist). Vis, at

$$\mathrm{dist}(A_1,A_2) \leq \mathrm{dist}(A_1,A) + \mathrm{dist}(A,A_2) + \mathrm{diam}(A) .$$

Giv et eksempel på et metrisk rum (M,dist) og tre mængder

A_1, A_2 og A så

$$\text{dist}(A_1,A_2) > \text{dist}(A_1,A) + \text{dist}(A,A_2) .$$

193. Lad A_1 og A_2 være begrænsede delmængder af et metrisk rum (M,dist). Vis, at

$$\text{diam}(A_1 \cup A_2) \leq \text{diam}(A_1) + \text{diam}(A_2) + \text{dist}(A_1,A_2) ,$$

og specielt

$$\text{diam}(A_1 \cup A_2) \leq \text{diam}(A_1) + \text{diam}(A_2) ,$$

hvis $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \neq \emptyset$.

194. Undersøg om mængden $A \subseteq \mathbb{R}^2$ er sammenhængende, idet

1) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1 x_2 > 0\}$,

2) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1 x_2 > 0\} \cup \{(0,0)\}$,

3) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} h_n$, hvor $h_n = \{(x_1,x_2) \mid x_1 > 0 , x_2 = \frac{1}{n} x_1\}$

4) $A = (\bigcup_{n=1}^{\infty} h_n) \cup \{(x_1,x_2) \mid x_1 > 0 \text{ og } x_2 = 0\}$.

195. Lad A være en kurvesammenhængende delmængde af et metrisk rum (M,dist). Undersøg om $\overline{A}$ er kurvesammenhængende.

196. Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være kontinuert og antag, at der findes $a, b \in \mathbb{C}$ så $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$. Vis, at f er uniformt kontinuert.

197. Lad $f:]a,b[\to \mathbb{C}$ være kontinuert på et åbent begrænset interval $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$. Vis, at følgende udsagn er ensbetydende:

(i) f er uniformt kontinuert,

(ii) der findes $\tilde{f}: [a,b] \to \mathbb{C}$ kontinuert, som stemmer overens med f på $]a,b[$.

(iii) grænseværdierne $\lim_{x\to a^+} f(x)$ og $\lim_{x\to b^-} f(x)$ eksisterer.

198. Lad $f:]0,1[\to \mathbb{R}$ være kontinuert og antag at $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Vis, at f ikke er uniformt kontinuert.

199. I $\mathbb{C}$ med den sædvanlige afstand betragtes mængden

$$T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{z = e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

1) Vis, at $\{e^{in} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ er tæt i T.

(Vink: Til givet $N \in \mathbb{N}$ betragtes opdelingen $T = T_1 \cup \cdots \cup T_N$ hvor

$$T_j = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [(j-1)\tfrac{2\pi}{N}, j\tfrac{2\pi}{N}[\} \quad j = 1,2,\cdots,N.$$

Idet man udnytter at $2\pi \notin \mathbb{Q}$ ses, at tallene $e^{i}, e^{2i}, \cdots,$ er indbyrdes forskellige, og der findes derfor $j \in \{1,2,\cdots,N\}$ og $n,m \in \mathbb{N}$ så $1 \le n < m \le N+1$ og $e^{in}, e^{im} \in T_j$, og heraf indses at $e^{i(m-n)} \in T_1$, eller at følgen $(e^{ip(m-n)})_{p\in\mathbb{N}}$ går i skridt med længde $< \operatorname{diam} T_1 < \frac{2\pi}{N}$.)

2) Find $\liminf(\sin n)$ og $\limsup(\sin n)$

3) Vis, at til hvert tal $x \in [-1,1]$ findes en voksende følge $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ af naturlige tal så følgen $(\sin n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdi x.