Mål- og integralteori

Forelæsningsnoter af Tage Gutmann Madsen

Københavns Universitets Matematiske Institut
1975

Denne indføring i mål- og integralteori er vokset frem gennem nogle års undervisning af studerende på andet år ved Københavns Universitets Matematiske Institut. Studerende, instruktorer og censorer har således indvirket på den endelige udformning. Tydeligst vil man dog mærke påvirkningen fra min lærer, Børge Jessen.

Lad det være sagt, at den valgte vej ind i teorien er én blandt mange mulige.

Noterne er skrevet til Matematik 212, et kursus i tredie semester med fire forelæsningstimer om ugen. Begrænsningens kunst har derfor været stærkt påkrævet. Blandt udeladelserne er vigtige emner som Lebesgues differentiationsteori, Radon/Nikodyms sætning, Riesz' repræsentationssætning. Og Fourier integraler, Fourier transformation og sandsynlighedsregningens grundbegreber, der er behandlet i noterne, gennemgås ikke.

Der foreligger øvelsesopgaver til §§ 0-13, heriblandt mange, der belyser teorien.

Matematisk Institut, efteråret 1975,
Tage Gutmann Madsen

Indhold

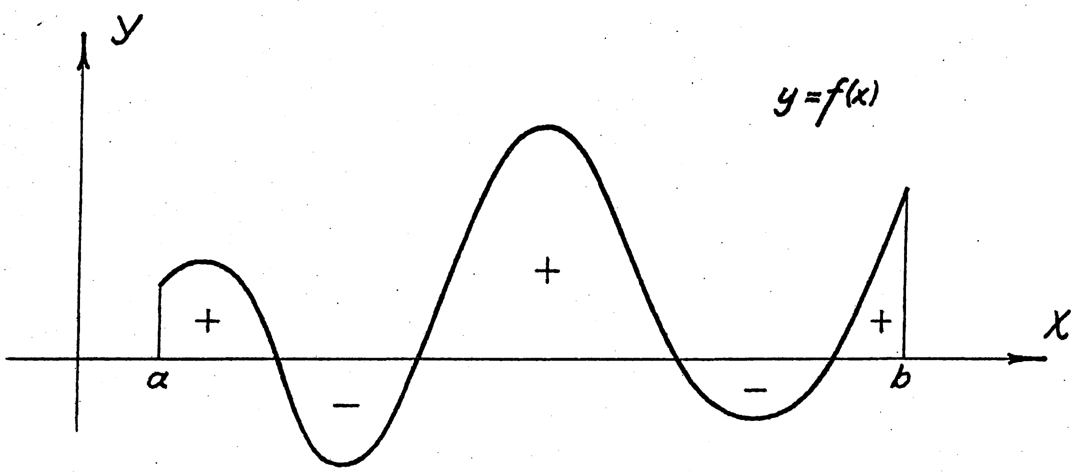
Indledning.

Når der i dette kursus tales om integralet af en funktion eller skrives $\int f(x)dx$, $\int f(x)d\mu(x)$, $\int f d\mu$ o. lign., menes altid et tal, nemlig en grænseværdi for visse summer. Integraltegnet $\int$, indført af Gottfried Wilhelm Leibniz (1675), er i øvrigt afledt af bogstavet S for det latinske ord summa.

For os er et integral således, hvad man også kalder et bestemt integral. Gængse betegnelser som $\int_a^b f(x)dx$, der skyldes Fourier (1816), vil naturligvis blive benyttet, når der er behov for at præcisere integrationsområdet.

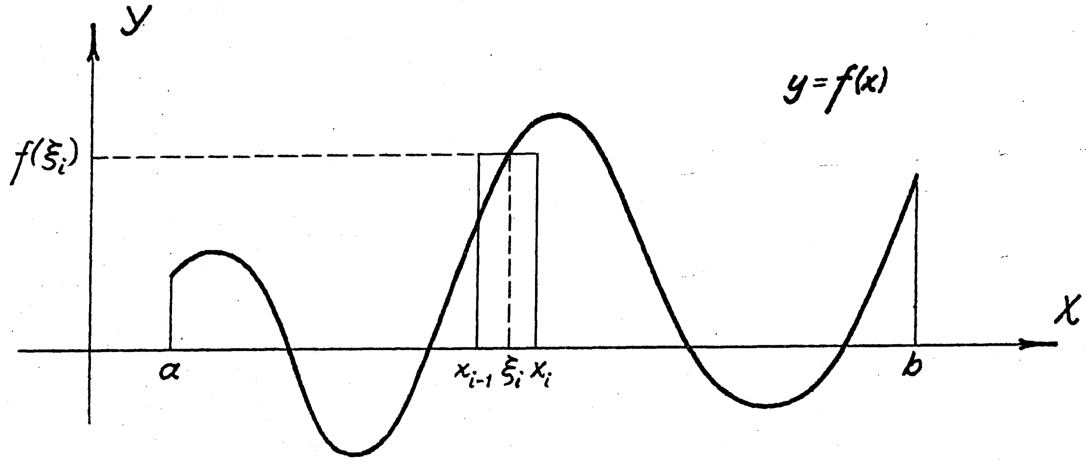
Om integralbegrebets udvikling.

Før Cauchy lod man sig nøje med at sige, hvilke arealer man skulle addere eller subtrahere for at opnå integralet $\int_a^b f(x)dx$ af en funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.



Til tilnærmet beregning af en sådan arealstørrelse har vel landmålere og matematikere til alle tider brugt middelsummer

$$S = \Sigma_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$



med $a = x_0 \leqq \xi_1 \leqq x_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots \leqq x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i \leqq \ldots \leqq x_n = b$. Augustin Cauchy tager ikke længere arealstörrelsen for givet. Han beviser, at hvis $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, da findes et tal I, således at

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \; |S - I| < \varepsilon$ for enhver inddeling med $\max_i (x_i - x_{i-1}) < \delta$,

og definerer derpå $\int_a^b f(x)dx$ som grænseværdien I for middelsummerne. (1823).

Bernhard Riemann definerer $\int_a^b f(x)dx$ på samme måde, men for enhver funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, hvor middelsummerne har en grænseværdi. (1854).

Riemann integralet, som det nu kaldes, vil vi dog foretrække at indføre som först gjort af Gaston Darboux (1873):

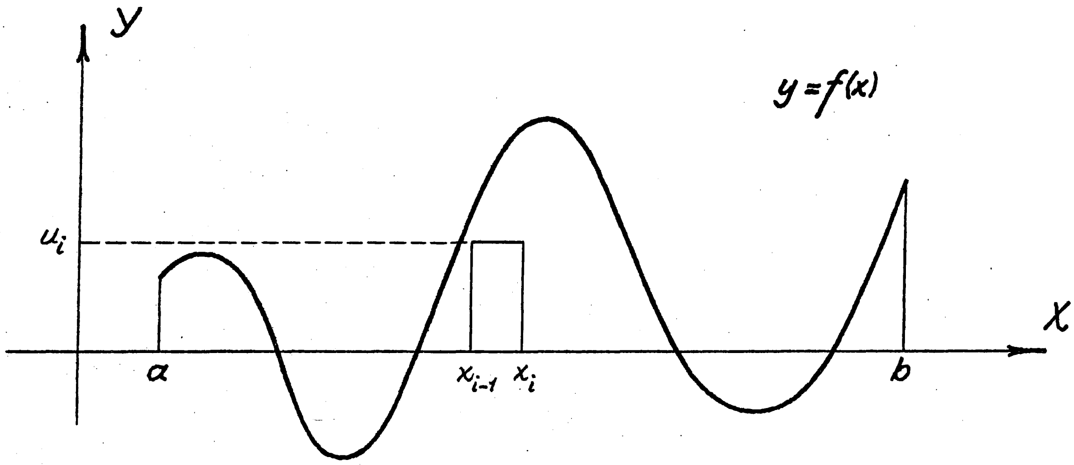
Lad $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ være en begrænset funktion.

Et tal $U \in \mathbb{R}$ kaldes da en undersum for f, hvis der findes en inddeling $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ samt tal $u_1, \ldots, u_n$, hvor

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i] : \; u_i \leqq f(x), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

således at $U = \sum_{i=1}^n u_i (x_i - x_{i-1})$. - Se figur p. 3.

Nedre Riemann integral af f, $\underline{\int}_a^b f(x)dx$, defineres nu som övre grænse for alle undersummer. Øvre Riemann integral af f, $\overline{\int}_a^b f(x)dx$ defineres ganske analogt som nedre grænse for alle oversummer.



Idet enhver undersum er mindre eller lig enhver oversum, har man

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx .$$

Hvis der her gælder lighedstegn, siges f at være <u>Riemann</u> <u>integrabel</u>, den fælles værdi kaldes <u>Riemann</u> <u>integralet</u> af f og betegnes $\int_a^b f(x)dx$.

Riemanns integralbegreb har desværre en alvorlig mangel: De Riemann integrable funktioner udgør ikke noget velafrundet område ved grænseovergang.

Eksempelvis kunne man ønske sig bekvemme regler af form

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n .$$

Betragt imidlertid for hvert $q \in \mathbb{Q}$, $0 < q \leq 1$, funktionen $f_q :]0,1] \to [0,\infty[$ givet ved

$$f_q(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = q \\ 0 & \text{for } x \neq q \end{cases} .$$

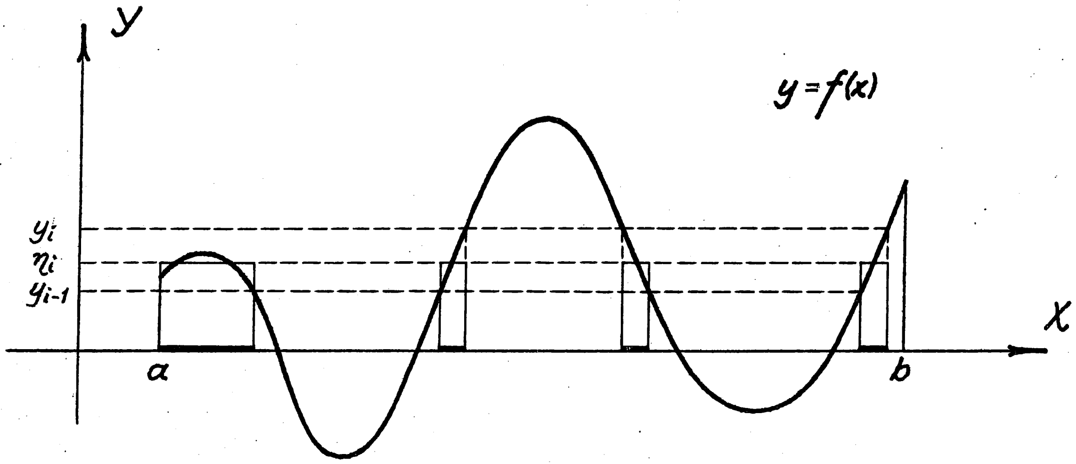
Alle funktionerne er Riemann integrable med integralet 0, således at

$$\sum_q \int_0^1 f_q(x)dx = 0,$$

men sum- og integraltegn kan ikke ombyttes; funktionen $\sum_q f_q$ er ikke Riemann integrabel. Det er den såkaldte <u>Dirichlet</u> <u>funktion</u>, med værdi 1 i hvert rationalt, 0 i hvert irrationalt punkt i intervallet $]0,1]$; øvre Riemann integral er lig 1, nedre Riemann integral lig 0.

Det er imidlertid lykkedes Henri Lebesgue (Intégrale, longueur, aire. Thèse. Paris 1902) at indføre et nyt integralbegreb, der indfrier alle rimelige forventninger vedrørende grænseovergang. Lebesgue integralet blev et afgørende gennembrud, en væsentlig forudsætning for den matematiske analyses udvikling i indeværende århundrede. Det er hovedemnet for dette kursus.

På dette sted vil vi dog nøjes med at skitsere, hvordan Lebesgue definerede integralet af en begrænset funktion $f:]a,b] \to \mathbb{R}$.



En <u>Lebesgue</u> <u>middelsum</u> har formen

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \cdot m(E_i),$$

hvor $\forall x \in]a,b]: \; y_0 < f(x) \leqq y_n$,

$$y_0 \leqq \eta_1 \leqq y_1 \leqq \eta_2 \leqq \dots \leqq y_{i-1} \leqq \eta_i \leqq y_i \leqq \dots \leqq \eta_n \leqq y_n,$$

$$E_i = \{x \in]a,b] \mid y_{i-1} < f(x) \leqq y_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

og $m(E_i)$ betyder „den samlede længde" af E_i.

Man bemærker, at der inddeles efter funktionsværdier.

Lebesgue indførte så integralet $\int_a^b f(x)dx$ som den eventuelle grænseværdi for middelsummer, svarende til $\max_i (y_i - y_{i-1}) \to 0$.

Til belysning af forskellen fra Riemanns fremgangsmåde giver vi Lebesgue ordet (Foredrag i Dansk Matematisk Forening, se Matematisk Tidsskrift B 1926, p. 54 ff):

> .... On peut dire encore que, avec le procédé de Riemann, on essayait de sommer les valeurs de la fonction en les prenant dans l'ordre où ils étaient fournis par la variation de x, on opérait donc comme le ferait un commerçant sans méthode qui compterait pièces et billets au hasard de l'ordre où ils lui tomberaient sous la main; tandis que nous opérons comme le commercant méthodique qui dit:
>
> j'ai $m(E_1)$ pièces de 1 couronne valant $1 \cdot m(E_1)$,
> j'ai $m(E_2)$ pièces de 2 couronnes valant $2 \cdot m(E_2)$,
> j'ai $m(E_3)$ billets de 5 couronnes valant $5 \cdot m(E_2)$,
>
> etc., j'ai donc en tout:
>
> $$S = 1 \cdot m(E_1) + 2 \cdot m(E_2) + 5 \cdot m(E_3) + \cdots .$$
>
> Les deux procédés conduiront, certes, le commerçant au même résultat parceque, si riche qu'il soit, il n'a qu'un nombre fini de billets à compter; mais pour nous, qui avons à additionner une infinité de valeurs, la différence entre les deux façons de faire est capitale.

Til Lebesgues integraldefinition knytter vi nogle bemærkninger.

1. Mængderne E_i kan være yderst komplicerede. Dannelsen af Lebesgue middelsummer forudsætter derfor et nærmere studium af begrebet „samlet længde", også kaldet Lebesgue mål, for vilde delmængder af $\mathbb{R}$.

2. Under forudsætning af et tilsvarende hold på areal, volumen, ..., ligeledes kaldet Lebesgue mål, for vilde delmængder af $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$, kan Lebesgue integralet for funktioner af 2, 3 eller flere reelle variable indføres ganske som for funktioner af 1 variabel. Ovenfor erstattes blot intervallet $[a,b]$ med funktionens definitionsmængde.

3. Tænker man sig en massefordeling på linien (eller i planen, rummet, ...), får man ved at lade $m(E_i)$ betyde den samlede masse i E_i, men i øvrigt gå frem som før, hvad der kaldes <u>Lebesgue</u>/<u>Stieltjes</u>

integralet af f med hensyn til den givne massefordeling. (Johann Radon 1913.) Videre:

4. Det er kun få, fundamentale egenskaber ved længde, areal, volumen, ..., der benyttes ved definitionen af Lebesgue integralet og ved beviserne vedrørende grænseovergang med dette. Idet man af et mål μ i en (abstrakt) mængde netop kræver disse egenskaber, kan så hovedtræk af teorien overføres til integration med hensyn til et vilkårligt mål. (Maurice Fréchet 1915.)

Nærmere om integralbegrebets udvikling kan man læse i T. Pesin: Classical and modern integration theories (Moskva 1966; Academic Press 1970). Se også Lebesgues ovennævnte foredrag samt N. Bourbaki: Éléments d'histoire des mathématiques (Hermann 1960) for kortere oversigter.

Ved kurset går vi frem modsat den historiske udvikling, idet vi starter med den abstrakte mål- og integralteori. (Se 4. ovenfor.) Selv om vi ikke havde andet sigte end Lebesgue integralet, ville denne fremgangsmåde dog have den fordel, at hovedtrækkene fremstår klarere, når teorien er befriet for irrelevante forudsætninger. På den anden side bør man stedse have det konkrete hovedtilfælde i tankerne: Lebesgue integralet i $\mathbb{R}^d$.

Vi vil i øvrigt ikke i detaljer følge Lebesgue i definitionen af integral, men benytte en af de mange mulige varianter, der bl.a. tillader os straks at inddrage også ubegrænsede funktioner, defineret f.eks. på hele $\mathbb{R}^d$.

Det ville ikke være rimeligt i et kursus at udvikle det effektive værktøj, integralteorien er blevet, uden at se det i brug. Allerede af den grund, at man først vinder fortrolighed med et stykke værktøj ved at bruge det.

Som anvendelsesområde er valgt harmonisk analyse (Fourier rækker, Fourier integraler). Et nærliggende valg: Det var udfordringen herfra, der førte Riemann til hans integralbegreb, og det var her, Lebesgue integralet først viste sig afgørende overlegent.

Et vel endnu vigtigere anvendelsesområde er sandsynlighedsregning, der ligefrem er at opfatte som en gren af mål- og integralteorien. Noterne slutter med en kort paragraf herom, skrevet især for de studerende, der ikke andre steder i studiet møder dette synspunkt.

§0. Regning med $\pm\infty$.

Det er undertiden bekvemt at udvide mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal med to ekstra elementer, som vi vil betegne ∞ og $-\infty$.

Vi sætter $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ og $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{0, \infty\}$.

0.1. Grænseovergang i $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

Ordningen af de reelle tal udvides til $\bar{\mathbb{R}}$, idet vi for hvert $a \in \mathbb{R}$ sætter
$$-\infty < a \quad \text{og} \quad a < \infty.$$
Desuden sættes
$$-\infty < \infty.$$

Enhver delmængde $A \subseteq \bar{\mathbb{R}}$, $A \neq \emptyset$, har da et supremum (også kaldet øvre grænse), $\sup A$, dvs. et mindste overtal, og ligeledes et infimum (nedre grænse), $\inf A$, dvs. et største undertal.

En følge $b_1, b_2, \ldots \in \bar{\mathbb{R}}$ siges at konvergere inden for $\bar{\mathbb{R}}$ mod $b \in \bar{\mathbb{R}}$, og vi skriver $b = \lim_n b_n$ eller $b_n \to b$ for $n \to \infty$, hvis der for $a, c \in \mathbb{R}$ gælder
$$a < b \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}: a < b_{n+p}$$
og
$$b < c \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}: b_{n+p} < c.$$
For $b = \infty$ er det sidste, for $b = -\infty$ det første krav tomt. For $b \in \mathbb{R}$ kan de to krav erstattes med
$$b \in]a, c[\Rightarrow \exists n\ \forall p: b_{n+p} \in]a, c[.$$

Enhver stigende følge $b_1 \leq b_2 \leq \ldots$, $b_n \in \bar{\mathbb{R}}$, konvergerer inden for $\bar{\mathbb{R}}$, nemlig mod $b = \sup\{b_1, b_2, \ldots\} = \sup_n b_n$. Vi skriver $b_n \nearrow b$ for $n \to \infty$.

For enhver dalende følge $b_1 \geq b_2 \geq \ldots$, $b_n \in \bar{\mathbb{R}}$, gælder tilsvarende $b_n \searrow \inf_m b_m$ for $n \to \infty$.

For enhver følge $b_1, b_2, \ldots \in \bar{\mathbb{R}}$ sættes
$$\liminf_m b_m = \sup_n \inf_p b_{n+p} \quad \text{og} \quad \limsup_m b_m = \inf_n \sup_p b_{n+p}.$$

Der gælder åbenbart
$$\inf_p b_{n+p} \nearrow \liminf_m b_m \quad \text{og} \quad \sup_p b_{n+p} \searrow \limsup_m b_m$$
for $n \to \infty$; specielt fremgår
$$-\infty \leqq \liminf_m b_m \leqq \limsup_m b_m \leqq \infty .$$

Man indser uden vanskelighed, at
$$a < \liminf_m b_m \Rightarrow \exists n \,\forall p: a < b_{n+p} , \quad \liminf_m b_m < a \Rightarrow \forall n \,\exists p: b_{n+p} < a,$$
eller, på kontraponeret form,
$$(\forall n \,\exists p: b_{n+p} \leqq a) \Rightarrow \liminf_m b_m \leqq a , \quad (\exists n \,\forall p: a \leqq b_{n+p}) \Rightarrow a \leqq \liminf_m b_m .$$
Dette giver en mere anskuelig karakterisering af <u>limes</u> <u>inferior</u> end den noget formelle definition ovenfor. Sprogligt kan „$\exists n \,\forall p: a < b_{n+p}$", „$\forall n \,\exists p: b_{n+p} < a$" gengives ved „elementerne i følgen $b_1, b_2, \ldots$ er fra et vist trin større end a", henholdsvis „der findes elementer mindre end a med vilkårligt høje numre".

Naturligvis kan <u>limes</u> <u>superior</u> karakteriseres tilsvarende.

Herefter verificeres umiddelbart:

<u>En følge $b_1, b_2, \ldots \in \overline{\mathbb{R}}$ er konvergent i $\overline{\mathbb{R}}$, hvis og kun hvis $\liminf_m b_m = \limsup_m b_m$. I bekræftende fald er</u>
$$\lim_m b_m = \liminf_m b_m = \limsup_m b_m .$$

I denne sætning ligger vor væsentlige interesse i limes inferior og limes superior.

Idet vi regner $-(-\infty) = \infty$, noteres sluttelig
$$-\limsup_m b_m = \liminf_m (-b_m) .$$

0.2. Regning i $\bar{\mathbb{R}}$.

Når ∞ indgår som led i en sum $\Sigma_{i=1}^n a_i$, $a_i \in \bar{\mathbb{R}}$, men $-\infty$ ikke gør det, sættes $\Sigma_{i=1}^n a_i = \infty$.

Når $-\infty$ indgår som led i en sum $\Sigma_{i=1}^n a_i$, $a_i \in \bar{\mathbb{R}}$, men ∞ ikke gør det, sættes $\Sigma_{i=1}^n a_i = -\infty$.

En sum, hvor både ∞ og $-\infty$ indgår som led, tillægges ingen mening. F.eks. er $\infty + (-\infty)$ ikke defineret.

En differens $b-a$ tolkes som $b+(-a)$. F.eks. er da $\infty - \infty$ ikke defineret.

Ethvert produkt ab med $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ tillægges en mening, idet vi sætter

$$0\cdot(\pm\infty) = (\pm\infty)\cdot 0 = 0,$$
$$c(\pm\infty) = (\pm\infty)c = \pm\infty \quad \text{når } 0 < c \leqq \infty,$$
$$c(\pm\infty) = (\pm\infty)c = \mp\infty \quad \text{når } -\infty \leqq c < 0.$$

Multiplikationen i $\bar{\mathbb{R}}$ er da kommutativ og associativ.

(Bemærkning. Man kunne opnå, at $a+b$ altid havde en mening ved at sætte $\infty + (-\infty) = (-\infty) + \infty = 0$. Men additionen ville da ikke være associativ, ligesom man ikke ville redde den distributive lov.)

Der er ikke meget pænt at sige om regneoperationerne i $\bar{\mathbb{R}}$. I almindelighed arbejder vi da også i $\mathbb{R}$ eller i $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{0,\infty\}$.

Lad os dog til senere brug nævne følgende simple regler:

$$a+b=c \Leftrightarrow a = c-b \quad \text{når } b\in\mathbb{R} \text{ og } a,c\in\bar{\mathbb{R}},$$
$$a+b \leqq a+c \Leftrightarrow b \leqq c \quad \text{når } a\in\mathbb{R} \text{ og } b,c\in\bar{\mathbb{R}},$$
$$\liminf_n (a+b_n) = a + \liminf_n b_n \quad \text{når } a\in\mathbb{R} \text{ og } b_1, b_2, \ldots \in\bar{\mathbb{R}}.$$

0.3. <u>Summer</u> $\Sigma_{j\in J} a_j$ <u>med</u> $0 \leqq a_j \leqq \infty$.

I $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{0,\infty\}$ kan og vil vi boltre os, hvad angår multiplikation og især addition. Først bemærkes, at begge regneoperationer inden for $\bar{\mathbb{R}}_+$ er kommutative og associative, og at den distributive lov gælder. Herved vil vi dog ikke blive stående.

Vi definerer <u>summen</u> $\Sigma_{j\in J} a_j$ af en <u>vilkårlig</u> familie $(a_j)_{j\in J}$ af tal $a_j \in \bar{\mathbb{R}}_+$ som supremum af alle endelige delsummer, altså

$$\Sigma_{j\in J} a_j \;=\; \sup \Sigma_{j\in I^*} a_j \,,$$

hvor supremum tages over alle endelige delmængder $I^* \supset \emptyset$ af indeksmængden J.

Dette er naturligvis kun noget nyt, hvis J er uendelig.

Splittes J i (gerne uendelig mange) delmængder J_k, $k \in K$, da er $\Sigma_{j\in J} a_j$ lig summen af summerne $\Sigma_{j\in J_k} a_j$. Mere formelt skrevet:

$$\Sigma_{j\in J} a_j \;=\; \Sigma_{k\in K} \Sigma_{j\in J_k} a_j$$

når $J = \bigcup_{k\in K} J_k$ med $J_{k_1} \cap J_{k_2} = \emptyset$ for $k_1 \neq k_2$.

(Vi regner $\Sigma_{j\in\emptyset} a_j = 0$, for det tilfælde at $J_k = \emptyset$ for et eller flere k.)

For bevis, se øvelse 0.8. – Resultatet finder specielt anvendelse på dobbeltsummer: For enhver familie $(b_{hk})_{(h,k)\in H\times K}$ af tal $b_{hk} \in \bar{\mathbb{R}}_+$ er

$$\Sigma_h \Sigma_k b_{hk} = \Sigma_{h,k} b_{hk} = \Sigma_k \Sigma_h b_{hk} .$$

I almindeliggørelse af den distributive lov gælder der i $\bar{\mathbb{R}}_+$

$$b\, \Sigma_{j\in J} a_j \;=\; \Sigma_{j\in J} (b a_j) .$$

Hvis en sum $\Sigma_{j\in J} a_j$, $a_j \in \bar{\mathbb{R}}_+$, har en endelig værdi, altså hvis

$$\Sigma_{j\in J} a_j < \infty ,$$

så er $a_j \neq 0$ for højst numerabelt mange indices $j \in J$.

Antag nemlig $\Sigma_{j\in J} a_j = s < \infty$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er der da højst endelig mange $j \in J$ med $a_j \geqq \frac{1}{n}$; antallet er begrænset af ns.

En sum $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$, $a_j \in \overline{\mathbb{R}}_+$, med $\mathbb{N}$ som indeksmængde kan tolkes som en <u>rækkesum</u>: Der gælder nemlig

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \nearrow \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \quad \text{for } n \to \infty.$$

Summen betegnes derfor også $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Eksempelvis er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty$.

(Summer $\sum_{j\in J} a_j$ med $a_j \in \mathbb{R}$, eller $a_j \in \mathbb{C}$, behandles i §4.6.)

§1. Målelige mængder.

1.1. Indledende om længde-, areal- og volumenproblemet.

Problemet består i til passende delmængder A af $\mathbb{R}$ (henholdsvis af $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ...) at knytte tal $m(A)$, som med rimelighed kan kaldes længden (henholdsvis arealet, voluminet, ...) af A.

Ud over kravet om, at kongruente mængder bør have samme længde (areal, volumen, ...), havde man tidligere fæstet sig ved additivitet: når en mængde A i $\mathbb{R}$ (henh. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ...) kan stykkes sammen af endelig mange, parvis disjunkte dele, der hver har en længde (areal, volumen, ...), da bør A som længde (areal, volumen, ...) have summen af delenes.

Émile Borel peger i stedet på numerabel additivitet: her tillades sammenstykninger også af numerabelt mange, parvis disjunkte dele; summen af længderne (arealerne, voluminerne, ...) er da en rækkesum. (Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898.) Denne drejning er afgørende for Lebesgue integralet.

Det turde nu være rimeligt at kræve, at mængden af delmængder af $\mathbb{R}$ (henh. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ...), der tilskrives længde (henh. areal, volumen, ...) ikke blot med to mængder A og B omfatter $A \cup B$, $A \cap B$ og $A \setminus B$, men tillige er stabil over for numerabel foreningsmængdedannelse, kort sagt er en σ-algebra (se nedenfor).

1.2. Begrebet σ-algebra.

En mængde $\mathbb{E}$ af delmængder af en mængde X kaldes en σ-algebra i X, hvis

(i) $X \in \mathbb{E}$

(ii) $\complement A = X \setminus A \in \mathbb{E}$, når $A \in \mathbb{E}$

(iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{E}$, når $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{E}$.

Der gælder da tillige
$$\emptyset \in \mathbb{E},$$
$$A \cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B \in \mathbb{E}, \quad \text{når } A, B \in \mathbb{E},$$
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{E}, \quad \text{når } A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{E}.$$
En σ-algebra er altså stabil overfor de sædvanlige mængdeoperationer anvendt på endelig eller numerabelt mange mængder.

Påstandene fremgår af
$$\emptyset = \complement X = X \setminus X,$$
$$A\cup B = A\cup B\cup\emptyset\cup\ldots\cup\emptyset\cup\ldots,$$
$$A\cap B = \complement(\complement A \cup \complement B),$$
$$A\setminus B = A \cap \complement B,$$
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \complement\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \complement A_n\right).$$

Mængden $\mathbb{P}(X)$ af alle delmængder af en mængde X er naturligvis en σ-algebra i X.

Enhver fællesmængde af σ-algebraer i X er igen en σ-algebra i X. Det verificeres umiddelbart.

__Sætning. Lad__ $\mathbb{A}$ __være en vilkårlig mængde af delmængder af en mængde__ X. __Der findes da en mindste σ-algebra__ $\mathbb{E}$ __i__ X, __der indeholder__ $\mathbb{A}$, dvs.

(i) $\mathbb{E}$ er en σ-algebra i X, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{E}$

(ii) for enhver σ-algebra $\mathbb{F}$ i X med $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{F}$ gælder $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$.

Bevis. Fællesmængden $\mathbb{E}$ for alle σ-algebraer $\mathbb{F}$ i X, der indeholder $\mathbb{A}$, er selv en σ-algebra indeholdende $\mathbb{A}$, – og åbenbart den mindste. Strengt taget burde først bemærkes, at der er noget at tage fællesmængden for, altså at der findes i hvert fald én σ-algebra $\mathbb{F}$ i X, der indeholder $\mathbb{A}$. Men det er oplagt: $\mathbb{P}(X)$.

Bemærk, at beviset er et rent eksistensbevis. Det giver ikke nogen eksplicit betingelse for, om en forelagt mængde $A \subseteq X$ tilhører $\mathbb{E}$ eller ej.

Mængderne tilhørende en σ-algebra $\mathbb{E}$ i en mængde X siges at være $\mathbb{E}$-<u>målelige</u> (eller blot <u>målelige</u>, når ingen misforståelse kan frygtes).

1.3. *Borel mængder.*

Et *interval* i $\mathbb{R}^d$ er en mængde

$$I = I_1 \times \dots \times I_d = \{(x_1,\dots,x_d) \mid x_i \in I_i,\ i=1,\dots,d\},$$

hvor hvert I_i er et (begrænset eller ubegrænset) interval i $\mathbb{R}$. Er alle I_i åbne, henholdsvis afsluttede i $\mathbb{R}$, fås et åbent, henholdsvis afsluttet interval I i $\mathbb{R}^d$. Er alle I_i begrænsede og af samme længde, kaldes I også en *terning*.

Vi skal især betragte intervaller $I = I_1 \times \dots \times I_d$, hvor hvert I_i er af form $]a_i, b_i]$ med $-\infty < a_i < b_i < \infty$. For at have et navn vil vi kalde dem *standard intervaller*.

Standard intervaller er velegnede som byggeklodser. F.eks. gælder:

Enhver åben mængde $O \neq \emptyset$ i $\mathbb{R}^d$ kan fås som forening af numerabelt mange, parvis disjunkte standard terninger.

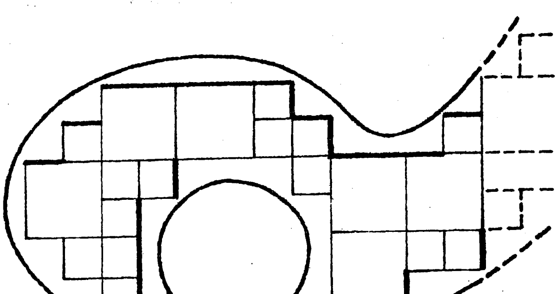
Bevis. De numerabelt mange terninger

$$\{(x_1,\dots,x_d) \mid n_i < x_i \leq n_i + 1,\ i=1,\dots,d\}$$

med $n_i \in \mathbb{Z}$ danner en klasseinddeling af $\mathbb{R}^d$, som maskerne i et net. Lad os kalde dem masker af 0^{te} orden. For hvert $p \in \mathbb{N}$ betragtes en tilsvarende klasseinddeling af $\mathbb{R}^d$ i masker af p^{te} orden

$$\{(x_1,\dots,x_d) \mid n_i 2^{-p} < x_i \leq (n_i+1) 2^{-p},\ i=1,\dots,d\}.$$

Enhver åben mængde $O \neq \emptyset$ i $\mathbb{R}^d$ kan nu opbygges af de masker af 0^{te}



O

orden, der er indeholdt i $\mathcal{O}$; de masker af 1^{ste} orden, der er indeholdt i $\mathcal{O}$ uden at være del af en maske af 0^{te} orden indeholdt i $\mathcal{O}$; osv.

Som konsekvens noteres, at en σ-algebra i $\mathbb{R}^d$, der indeholder ethvert standard interval (eller blot alle terninger i de ovennævnte klasseinddelinger af $\mathbb{R}^d$), også vil indeholde enhver åben mængde.

Omvendt er det klart, at en σ-algebra i $\mathbb{R}^d$, der indeholder alle åbne mængder, også vil indeholde alle intervaller. Thi ethvert interval kan fås som fællesmængde for en følge af åbne intervaller, eksempelvis

$$\{(x_1,\dots,x_d) \mid a_i < x_i \leqq b_i\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{(x_1,\dots,x_d) \mid a_i < x_i < b_i + \tfrac{1}{n}\}.$$

Ved <u>Borel</u> <u>algebraen</u> i $\mathbb{R}^d$ forstås den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}^d$, der indeholder alle åbne mængder i $\mathbb{R}^d$. Den betegnes $\mathbb{B}$ eller undertiden $\mathbb{B}_d$. De $\mathbb{B}$-målelige mængder, dvs. mængderne tilhørende $\mathbb{B}$, kaldes også <u>Borel</u> <u>mængder</u>.

Borel algebraen i $\mathbb{R}^d$ kan, ifølge ovenstående, også karakteriseres som den mindste σ-algebra, der indeholder alle standard intervaller (eller blot de numerabelt mange terninger, der omtales som masker i beviset ovenfor).

Borel mængderne i $\mathbb{R}$ blev første gang angivet af Émile Borel (1898), i forbindelse med en skitse til fastsættelse af længder for disse mængder (se §1.1). – For hvert talrum $\mathbb{R}^d$, $d\in\mathbb{N}$, er situationen ganske tilsvarende: Vi vil i hvert fald tilskrive ethvert standard interval i $\mathbb{R}^d$ et volumen (nemlig produktet af kantlængderne, se §5.2). Skal vore intentioner vedrørende volumenbegrebet (se §1.1) opfyldes, er det da nødvendigt at definere volumen ikke blot for enhver åben mængde (jfr. resultatet p. 16), men for enhver Borel mængde i $\mathbb{R}^d$.

Bemærk, at vi ikke er i besiddelse af generel, eksplicit betingelse til afgørelse af, om en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^d$ er en Borel mængde. Beviser for påstande af formen „$\forall B \in \mathbb{B}: [\ldots]$" bygges derfor direkte på definitionen af Borel algebraen $\mathbb{B}$ (bevismønstret optræder første gang i §2.1).

Medmindre det går meget underligt til, kan man imidlertid vente, at en konkret foreliggende mængde $A \subseteq \mathbb{R}^d$ er en Borel mængde (og det vil i reglen være let at vise det).

Eksempler: enhver afsluttet mængde, specielt enhver mængde omfattende netop ét punkt, og dermed enhver numerabel mængde i $\mathbb{R}^d$ er en Borel mængde.

For et vilkårligt metrisk eller blot topologisk rum X defineres Borel algebraen og Borel mængderne ganske som i tilfældet $X = \mathbb{R}^d$.

Borel algebraen i $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ vil vi betegne med $\overline{\mathbb{B}}$. Den kan f. eks. karakteriseres som den mindste σ-algebra i $\overline{\mathbb{R}}$, der indeholder alle mængder $]a, \infty]$, $a \in \mathbb{R}$, ligesom Borel algebraen $\mathbb{B}$ i $\mathbb{R}$ kan karakteriseres som den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}$, der indeholder alle halvlinier $]a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$. For $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ gælder (øvelse 1.6)

$$A \in \overline{\mathbb{B}} \Leftrightarrow A \cap \mathbb{R} \in \mathbb{B}.$$

§2. Målelige funktioner.

Vi skal senere tilskrive enhver Borel mængde $B \subseteq \mathbb{R}$ en „samlet længde" $m(B)$, kaldet Lebesgue målet af B. Et blik på udtrykket for en Lebesgue middelsum (se Indledning, p. 4) skulle da være nok til at motivere begrebet Borel funktion eller $\mathbb{B}$-målelig funktion $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ som en funktion, hvor $\{x \in]a,b] \mid f(x) > c\}$ er en Borel mængde for hvert $c \in \mathbb{R}$. Da er nemlig

$$\{x \mid c < f(x) \leq d\} = \{x \mid f(x) > c\} \setminus \{x \mid f(x) > d\}$$

en Borel mængde for vilkårlige $c, d \in \mathbb{R}$, således at Lebesgue middelsummerne for en begrænset Borel funktion $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ faktisk har mening.

2.1. Målelig funktion.

Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde $X \neq \emptyset$.

En funktion $f: X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ siges da at være $\mathbb{E}$-målelig, hvis

$$\forall a \in \mathbb{R}: \{x \in X \mid f(x) > a\} \in \mathbb{E}.$$

Som vi skal se (sætning $\bar{2}$ nedenfor), kunne vi have valgt mange andre definitioner, der kommer ud på det samme. Eksempelvis kunne vi have benyttet et andet ulighedstegn. Men først:

Lemma. Er φ en afbildning af X ind i en mængde Y, da vil

$$\{B \subseteq Y \mid \varphi^{-1}(B) \in \mathbb{E}\}$$

være en σ-algebra i Y.

Thi $\varphi^{-1}(Y) = X$, $\varphi^{-1}(\complement B) = \complement \varphi^{-1}(B)$ og $\varphi^{-1}(\bigcup_n B_n) = \bigcup_n \varphi^{-1}(B_n)$.

Sætning 1. En funktion $f: X \to \mathbb{R}$ er $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis $f^{-1}(B) \in \mathbb{E}$ for enhver Borel mængde B i $\mathbb{R}$.

Bevis. At f er $\mathbb{E}$-målelig, vil sige, at $f^{-1}(]a,\infty[) \in \mathbb{E}$ for

hvert $a \in \mathbb{R}$. Eller, anderledes sagt, at enhver mængde $]a,\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, tilhører
$$\{B \subseteq \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \in \mathbb{E}\}.$$
Ifølge lemmaet er dette en σ-algebra i $\mathbb{R}$. Og Borel algebraen $\mathbb{B}$ er den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}$, der indeholder alle mængder $]a,\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. – Når f er $\mathbb{E}$-målelig, har vi derfor
$$\mathbb{B} \subseteq \{B \subseteq \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \in \mathbb{E}\},$$
dvs. $f^{-1}(B) \in \mathbb{E}$ for enhver Borel mængde B i $\mathbb{R}$. – Det omvendte er trivielt.

Sætning $\bar{1}$. En funktion $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ er $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis $f^{-1}(B) \in \mathbb{E}$ for enhver Borel mængde B i $\overline{\mathbb{R}}$.

Bevis som for sætning 1, med selvfølgelige ændringer.

Følgende definition turde nu være nærliggende:

En funktion $f: X \to \mathbb{C}$ siges at være $\mathbb{E}$-målelig, hvis $f^{-1}(B) \in \mathbb{E}$ for enhver Borel mængde B i $\mathbb{C}$.

Indtil vi har godtgjort, at denne definition er konsistent med den foregående (p. 22), må vi dog skelne mellem, om en funktion f er $\mathbb{E}$-målelig betragtet som reel eller som kompleks funktion, når begge dele kan komme på tale.

Sætning 2. Lad $\mathbb{A}$ være en del af Borel algebraen $\mathbb{B}$ i $\mathbb{R}$, henholdsvis i $\mathbb{C}$, således at $\mathbb{B}$ er den mindste σ-algebra, der indeholder $\mathbb{A}$.

En funktion $f: X \to \mathbb{R}$, henholdsvis $f: X \to \mathbb{C}$, er da $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis $f^{-1}(B) \in \mathbb{E}$ for enhver mængde $B \in \mathbb{A}$.

Eksempelvis kan $\mathbb{A}$ bestå af de åbne mængder i $\mathbb{R}$, henh. i $\mathbb{C}$.

Bevis. Lad os f.eks. betragte tilfældet $f: X \to \mathbb{C}$. Påstanden er her
$$\mathbb{A} \subseteq \{B \subseteq \mathbb{C} \mid f^{-1}(B) \in \mathbb{E}\} \iff \mathbb{B} \subseteq \{B \subseteq \mathbb{C} \mid f^{-1}(B) \in \mathbb{E}\}.$$
Implikationen „$\Leftarrow$" er triviel. Omvendt: Ifølge vort lemma er

$\{B \subseteq \mathbb{C} \mid f^{-1}(B) \in \mathbb{E}\}$ en σ-algebra. Indeholder den $\mathbb{A}$, vil den derfor også indeholde $\mathbb{B}$.

Sætning 2̄. Lad $\mathbb{A}$ være en del af Borel algebraen $\bar{\mathbb{B}}$ i $\bar{\mathbb{R}}$, således at $\bar{\mathbb{B}}$ er den mindste σ-algebra i $\bar{\mathbb{R}}$, der indeholder $\mathbb{A}$.

En funktion $f: X \to \bar{\mathbb{R}}$ er da $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis $f^{-1}(B) \in \mathbb{E}$ for enhver mængde $B \in \mathbb{A}$.

Med $\mathbb{A} = \{]a,\infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$ genfindes definitionen (p. 19); med $\mathbb{A} = \{[a,\infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$ udskiftes ulighedstegnet „$>$" i definitionen med „$\geq$".

Bevis som for sætning 2.

En funktion $f: X \to \mathbb{C}$ kan på en og kun en måde skrives på formen $f = f' + if''$ med $f': X \to \mathbb{R}$, $f'': X \to \mathbb{R}$.

Sætning 3. En funktion $f: X \to \mathbb{C}$ er $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis realdelen $\operatorname{Re} f = f'$ og imaginærdelen $\operatorname{Im} f = f''$ begge er det.

Bevis. Borel algebraen i $\mathbb{C}$ er den mindste σ-algebra i $\mathbb{C}$, der indeholder alle halvplaner

$$\{y' + iy'' \mid y' > a\} \quad \text{og} \quad \{y' + iy'' \mid y'' > a\}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Thi enhver σ-algebra i $\mathbb{C}$, der indeholder de nævnte halvplaner, vil også indeholde alle strimler

$$\{y' + iy'' \mid a' < y' \leq b'\} \quad \text{og} \quad \{y' + iy'' \mid a'' < y'' \leq b''\},$$

dermed ethvert interval

$$\{y' + iy'' \mid a' < y' \leq b',\ a'' < y'' \leq b''\}$$

og videre enhver åben mængde i $\mathbb{C}$ (jfr. §1.3, p. 16).

Ifølge sætning 2 er $f: X \to \mathbb{C}$ da $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis

$$\{x \in X \mid f'(x) > a\} = f^{-1}(\{y' + iy'' \mid y' > a\}) \in \mathbb{E}$$

og

$$\{x \in X \mid f''(x) > a\} = f^{-1}(\{y' + iy'' \mid y'' > a\}) \in \mathbb{E}$$

for hvert $a \in \mathbb{R}$, dvs. hvis og kun hvis $f': X \to \mathbb{R}$ og $f'': X \to \mathbb{R}$ begge er $\mathbb{E}$-målelige.

Det er nu klart, at definitionen af $\mathbb{E}$-målelighed for en funktion $f: X \to \mathbb{C}$ er konsistent med den forudgående definition for reelle funktioner. Thi hvis f har lutter reelle værdier, er jo $\mathcal{R}e f = f' = f$ og $\mathcal{I}m f = f'' = 0$.

Som hovedtilfælde nævnes $X = \mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}$ = Borel algebraen $\mathbb{B}_d$ i $\mathbb{R}^d$. De $\mathbb{B}_d$-målelige funktioner på $\mathbb{R}^d$ kaldes også Borel målelige eller Borel funktioner.

Enhver kontinuert funktion $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ (specielt $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$) er Borel målelig. Thi for hver åben mængde $\mathcal{O}$ i $\mathbb{C}$ er $f^{-1}(\mathcal{O})$ åben og dermed en Borel mængde i $\mathbb{R}^d$; påstanden fås da af sætning 2.

Enhver monoton funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er Borel målelig. Thi for hvert $a \in \mathbb{R}$ er $f^{-1}(]a, \infty[)$ en halvlinie.

2.2. Målelig afbildning.

Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde $X \neq \emptyset$ og $\mathbb{F}$ en σ-algebra i en mængde $Y \neq \emptyset$.

En afbildning $\varphi: X \to Y$ siges da at være en <u>målelig afbildning</u> af $(X, \mathbb{E})$ ind i $(Y, \mathbb{F})$, hvis

$$\forall B \in \mathbb{F}: \ \varphi^{-1}(B) = \{x \in X \mid \varphi(x) \in B\} \in \mathbb{E}.$$

En $\mathbb{E}$-målelig funktion på X med værdier i $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$ er således det samme som en målelig afbildning af $(X, \mathbb{E})$ ind i $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$, betragtet med Borel algebraen.

Bemærk i øvrigt analogien med karakteriseringen af kontinuert afbildning ved åbne mængder.

Eksempel. Vi betragter tilfældet $Y = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{F}$ = Borel algebraen $\mathbb{B}_n$ i $\mathbb{R}^n$.

En afbildning $\varphi: X \to \mathbb{R}^n$ modsvares af funktioner $f_j: X \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, således at $\quad \forall x \in X: \ \varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.
Vi skriver $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$.

Her vil φ være en målelig afbildning af $(X, \mathbb{E})$ ind i $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}_n)$, hvis og kun hvis $f_1, \dots, f_n$ alle er $\mathbb{E}$-målelige.

Dette indses (jfr. beviset for sætning 3 i §2.1), idet vi udnytter, at
$$\{x \in X \mid f_j(x) > a\} = \varphi^{-1}(\{(y_1, \dots, y_n) \mid y_j > a\}).$$
Hvis σ-algebraen $\{B \subseteq \mathbb{R}^n \mid \varphi^{-1}(B) \in \mathbb{E}\}$ indeholder alle halvrum
$$\{(y_1, \dots, y_n) \mid y_j > a\},$$
vil den nemlig indeholde alle Borel mængder i $\mathbb{R}^n$.

Ved sammensætning af målelige afbildninger fås en målelig afbildning: Er φ en målelig afbildning af $(X, \mathbb{E})$ ind i $(Y, \mathbb{F})$ og ψ en målelig afbildning af $(Y, \mathbb{F})$ ind i $(Z, \mathbb{G})$, hvor $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$ er σ-algebraer i henholdsvis X, Y, Z, da er $\psi \circ \varphi$ en målelig afbildning af $(X, \mathbb{E})$ ind i $(Z, \mathbb{G})$.

Thi for hvert $C \in \mathbb{G}$ er $(\psi \circ \varphi)^{-1}(C) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(C)) \in \mathbb{E}$.

Specielt noteres: Er funktionerne $f_j : X \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, alle $\mathbb{E}$-målelige, og er g en Borel funktion på $\mathbb{R}^n$, da er

$$x \to g(f_1(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in X,$$

igen en $\mathbb{E}$-målelig funktion.

2.3. Grænseovergang med målelige funktioner.

Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde $X \neq \emptyset$.

For enhver følge $f_1, f_2, \ldots$ af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, er $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ og $\liminf_n f_n$ igen $\mathbb{E}$-målelige funktioner.

Her betegner eksempelvis $\sup_n f_n$ og $\limsup_n f_n$ funktionerne
$$x \to \sup_n f_n(x) \quad \text{og} \quad x \to \limsup_n f_n(x), \quad x \in X,$$
dvs. for hvert $x \in X$ er funktionsværdien lig supremum, henholdsvis limes superior for talfølgen $f_1(x), f_2(x), \ldots$.

Bevis. For hvert $a \in \mathbb{R}$ gælder
$$\sup_n f_n(x) > a \iff \exists n \in \mathbb{N} : f_n(x) > a,$$
altså $\quad \{x \in X \mid \sup_n f_n(x) > a\} = \bigcup_n \{x \in X \mid f_n(x) > a\} \in \mathbb{E}$

og analogt $\quad \{x \in X \mid \inf_n f_n(x) < a\} = \bigcup_n \{x \in X \mid f_n(x) < a\} \in \mathbb{E}$.

Det viser, at $\sup_n f_n$ og $\inf_n f_n$ er $\mathbb{E}$-målelige. Derpå benyttes, at
$$\limsup_m f_m = \inf_n \sup_p f_{n+p} \quad \text{og} \quad \liminf_m f_m = \sup_n \inf_p f_{n+p}.$$

Når en følge $f_1, f_2, \ldots$ af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ er punktvis konvergent i $\overline{\mathbb{R}}$, da er grænsefunktionen $\lim_n f_n$ igen $\mathbb{E}$-målelig.

Konvergensforudsætningen er, at talfølgen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ er konvergent i $\overline{\mathbb{R}}$ for hvert $x \in X$, og $\lim_n f_n$ betegner funktionen
$$x \to \lim_n f_n(x), \quad x \in X.$$

Da nu $\lim_n f_n = \liminf_n f_n = \limsup_n f_n$, er resultatet et umiddelbart korollar af det foregående.

Når en følge $f_1, f_2, \ldots$ af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_j : X \to \mathbb{C}$ er punktvis konvergent i $\mathbb{C}$, da er grænsefunktionen $\lim_n f_n$ igen $\mathbb{E}$-målelig.

Thi sættes $f_n = f_n' + i f_n''$ med $f_n' : X \to \mathbb{R}$, $f_n'' : X \to \mathbb{R}$, da har $\lim_n f_n$ som real- og imaginærdel funktionerne $\lim_n f_n'$ og $\lim_n f_n''$. Resultatet følger nu af det foregående ved brug af sætning 3 i § 2.1.

NB. En funktionsklasse, der er stabil over for punktvis konvergens, træffer man ikke hver dag!

2.4. Regning med målelige funktioner.

Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde $X \neq \emptyset$.

Når $f: X \to \mathbb{R}$ og $g: X \to \mathbb{R}$ er $\mathbb{E}$-målelige og $c \in \mathbb{R}$, da er $|f|$, cf, $f+g$, $f \vee g$, $f \wedge g$ og fg ligeledes $\mathbb{E}$-målelige.

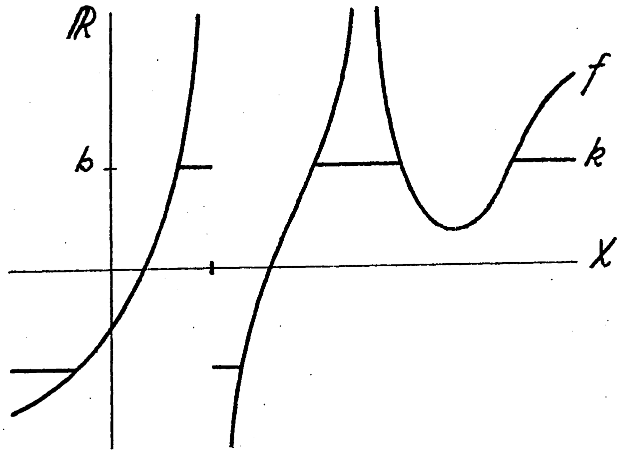
Her betegner eksempelvis $|f|$ og $f \vee g$ funktionerne

$$x \to |f(x)| \text{ og } x \to f(x) \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad x \in X.$$

Bevis. Påstanden følger af, at de nævnte funktioner kan fås ved sammensætning af $f: X \to \mathbb{R}$ eller $\varphi = (f, g): X \to \mathbb{R}^2$ med

$$y \to |y|, cy \quad \text{eller} \quad (y_1, y_2) \to y_1 + y_2, y_1 \vee y_2, y_1 \wedge y_2, y_1 y_2,$$

der alle er kontinuerte og dermed Borel funktioner. (Se §2.2.)



Ved undersøgelser vedrørende funktioner $f: X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, eller blot ubegrænsede funktioner, kan man undertiden med fordel foretage afkapning (truncéring). At afkappe f ved et $b \in \mathbb{R}_+$ vil sige at gå over til funktionen k givet ved

$$k(x) = \begin{cases} -b & \text{for } f(x) < -b \\ f(x) & \text{for } -b \leq f(x) \leq b \\ b & \text{for } b < f(x) \end{cases}.$$

Ved afkapning af en $\mathbb{E}$-målelig funktion $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ fås igen en $\mathbb{E}$-målelig funktion.

Verificeres umiddelbart, idet man betragter $\{x \mid k(x) > a\}$ i tilfældene $a < -b$, $-b \leq a < b$ og $a \geq b$.

Når $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ *og* $g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ *er* $\mathbb{E}$-*målelige og* $c \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, *da er* $|f|$, cf, $f \vee g$, $f \wedge g$ *og* fg *ligeledes* $\mathbb{E}$-*målelige*.

Hvis $f(x)+g(x)$ *er defineret for hvert* $x \in X$, *dvs.* $(f(x), g(x)) \neq (\pm\infty, \mp\infty)$, *gælder det samme for* $f+g$.

Bevis. Lad os for hvert $n \in \mathbb{N}$ med f_n og g_n betegne de funktioner, der fås ved at afkappe f og g ved n. For hvert $x \in X$ har vi da ikke blot $f_n(x) \to f(x)$ og $g_n(x) \to g(x)$, men også

$$|f_n(x)| \to |f(x)|, \qquad cf_n(x) \to cf(x),$$

$$f_n(x) \vee g_n(x) \to f(x) \vee g(x), \quad f_n(x) \wedge g_n(x) \to f(x) \wedge g(x), \quad f_n(x) g_n(x) \to f(x) g(x).$$

Og hvis $(f(x), g(x)) \neq (\pm\infty, \mp\infty)$, gælder tillige $f_n(x)+g_n(x) \to f(x)+g(x)$.

Påstandene følger nu af resultaterne ovenfor ved brug af §2.3.

Når $f: X \to \mathbb{C}$ *og* $g: X \to \mathbb{C}$ *er* $\mathbb{E}$-*målelige og* $c \in \mathbb{C}$, *da er* $|f|$, cf, $f+g$ og fg *ligeledes* $\mathbb{E}$-*målelige*.

Bevis. Funktionen $|f|$ kan fås ved sammensætning af f med $z \to |z|$, $z \in \mathbb{C}$. For de tre øvrige kan man benytte sætning 3 i §2.1; eksempelvis er jo $cf = (c'f' - c''f'') + i(c'f'' + c''f')$.

2.5. Målelig funktion på delmængde.

Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde X og lad $V \in \mathbb{E}$, $V \neq \emptyset$. Da vil $\mathbb{D} = \{A \subseteq V \mid A \in \mathbb{E}\}$ være en σ-algebra i V.

En funktion g med definitionsmængde V siges at være $\mathbb{E}$-*målelig*, hvis den er $\mathbb{D}$-målelig. Eksempelvis kommer dette i tilfældet $g: V \to \overline{\mathbb{R}}$ ud på $\quad \forall a \in \mathbb{R}: \{x \in V \mid g(x) > a\} \in \mathbb{E}$.

Nødvendigt og tilstrækkeligt er det, at følgende funktion $\tilde{g}$ defineret på hele X er $\mathbb{E}$-målelig:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{for } x \in V \\ 0 & \text{for } x \in X \setminus V. \end{cases}$$

Er g en $\mathbb{E}$-målelig funktion defineret på V, og er $\emptyset \subset U \subseteq V$, $U \in \mathbb{E}$, da er restriktionen $g|_U$ også $\mathbb{E}$-målelig.

En funktion g defineret på V vil være $\mathbb{E}$-målelig, hvis V kan skrives som endelig eller numerabel forening $V = \bigcup_n U_n$, hvor $U_n \in \mathbb{E}$ og $g|_{U_n}$ er $\mathbb{E}$-målelig for hvert n.

Thi er eksempelvis $g: V \to \overline{\mathbb{R}}$, har vi for hvert $a \in \mathbb{R}$

$$\{x \in U \mid g(x) > a\} = U \cap \{x \in V \mid g(x) > a\},$$

henh.

$$\{x \in V \mid g(x) > a\} = \bigcup_n \{x \in U_n \mid g(x) > a\}.$$

Eksempel. Enhver kontinuert (reel eller kompleks) funktion g defineret på en Borel mængde V i $\mathbb{R}^d$ er Borel målelig.

Thi originalmængden $g^{-1}(B)$ til enhver åben mængde B (i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) er åben relativt til V, altså af form $V \cap O$, hvor O er åben i $\mathbb{R}^d$, og tilhører følgelig Borel algebraen i $\mathbb{R}^d$. (Se §2.1, sætning 2.)

Eksempel. Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde X og lad $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ være $\mathbb{E}$-målelige.

Definitionsmængden for $f-g$ er

$$U = X \setminus ((\{x \mid f(x) = \infty\} \cap \{x \mid g(x) = \infty\}) \cup (\{x \mid f(x) = -\infty\} \cap \{x \mid g(x) = -\infty\})) \in \mathbb{E}.$$

Ser vi bort fra tilfældet $U = \emptyset$, vil derfor $f|_U$, $g|_U$ og dermed $f-g = f|_U - g|_U$ være $\mathbb{E}$-målelig (§2.4).

Som korollar findes, at $\{x \in X \mid g(x) < f(x)\} \in \mathbb{E}$. Thi mængden er tom hvis $U = \emptyset$, og ellers lig med

$$\{x \in U \mid (f-g)(x) > 0\} \in \mathbb{E}.$$

Herefter ses let, at $\{x \in X \mid f(x) \leqq g(x)\} \in \mathbb{E}$ og $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathbb{E}$.

(Mængden $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ vil naturligvis tilhøre $\mathbb{E}$ også for $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f, g : X \to \mathbb{C}$, thi her har man uden videre

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = \{x \in X \mid (f-g)(x) = 0\} = (f-g)^{-1}(\{0\}) \in \mathbb{E}.)$$

§3. Mål.

Det almene begreb mål er udsprunget af længde-, areal- og volumenbegrebet, således som dette har fundet sin udformning i Lebesgue målet, idet man har fæstet sig ved nogle få, fundamentale egenskaber som de afgørende ved definitionen af Lebesgue integralet og ved beviserne vedrørende grænseovergang med dette. (Radon 1913, Fréchet 1915, jfr. Indledning, p. 5,6.) Blandt disse egenskaber mærkes især numerabel additivitet (første gang fremhævet af Borel 1898, jfr. §1.1).

3.1. Mål.

Ved et <u>mål</u> i en mængde X vil vi forstå en funktion μ defineret på en mængde $\mathbb{E}$ af delmængder af X, hvor

(i) $\mathbb{E}$ er en σ-algebra i X

(ii) $\mu(E) \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$ for hvert $E \in \mathbb{E}$, $\mu(\emptyset) = 0$

(iii) $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$, når $E_1, E_2, \dots$ er parvis disjunkte og tilhører $\mathbb{E}$.

En mængde X betragtet med et mål $\mu : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ i X kaldes et <u>målrum</u>. Som betegnelse benyttes $(X, \mathbb{E}, \mu)$ eller blot (X,μ). Værdien $\mu(E)$ svarende til en mængde $E \in \mathbb{E}$ kaldes <u>målet</u> af E.

At (iii) er opfyldt, udtrykker man ved at sige, at μ er <u>numerabelt additiv</u>.

Man kan anskue et mål μ i X som beskrivelse af en massefordeling i X. Herved tolkes $\mu(E)$ som massen i mængden E.

Et mål $\mu : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ i en mængde X har følgende, hyppigt benyttede egenskaber:

(1) $\mu(\bigcup_{j=1}^n E_j) = \sum_{j=1}^n \mu(E_j)$, når $E_1,\dots,E_n$ er parvis disjunkte og tilhører $\mathbb{E}$.

Thi $\mu(E_1\cup\dots\cup E_n\cup\emptyset\cup\emptyset\cup\dots) = \mu(E_1)+\dots+\mu(E_n)+0+0+\dots$.

(2) $\mu(E)\leqq\mu(F)$, når $E,F\in\mathbb{E}$, $E\subseteqq F$.

(3) $\mu(F\setminus E)=\mu(F)-\mu(E)$, når $E,F\in\mathbb{E}$, $E\subseteqq F$ og $\mu(E)<\infty$.

Begge fås af $\mu(F)=\mu(E)+\mu(F\setminus E)$.

(4) $\mu(\bigcup_{j=1}^\infty E_j)\leqq\sum_{j=1}^\infty\mu(E_j)$, når $E_1,E_2,\dots\in\mathbb{E}$.
$\mu(\bigcup_{j=1}^n E_j)\leqq\sum_{j=1}^n\mu(E_j)$, når $E_1,\dots,E_n\in\mathbb{E}$.

Ad første påstand: Med
$$F_1=E_1 \quad\text{og}\quad F_j=E_j\setminus\bigcup_{i=1}^{j-1}E_i,\ j=2,3,\dots$$
er $F_1,F_2,\dots$ parvis disjunkte og
$$\bigcup_{j=1}^\infty F_j = \bigcup_{j=1}^\infty E_j .$$
Thi hvert $x\in\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ tilhører netop ét F_j, nemlig F_j med $j=\min\{i\mid x\in E_i\}$.

Det er klart, at $F_j\in\mathbb{E}$, og idet $F_j\subseteqq E_j$, har vi
$$\mu(\bigcup_j E_j)=\mu(\bigcup_j F_j)=\sum_j\mu(F_j)\leqq\sum_j\mu(E_j)$$
Anden påstand fås af første, eller vises analogt.

(5) $\mu(E_n)\nearrow\mu(\bigcup_{j=1}^\infty E_j)$, når $E_1\subseteqq E_2\subseteqq\dots$ og alle E_n tilhører $\mathbb{E}$.

Thi med $F_1=E_1$ og $F_j=E_j\setminus E_{j-1}$, $j=2,3,\dots$, er $F_1,F_2,\dots$ parvis disjunkte, $E_n=\bigcup_{j=1}^n F_j$, $n=1,2,\dots$, og $\bigcup_{j=1}^\infty E_j=\bigcup_{j=1}^\infty F_j$. Følgelig gælder
$$\mu(E_n)=\sum_{j=1}^n\mu(F_j)\nearrow\sum_{j=1}^\infty\mu(F_j)=\mu(\bigcup_{j=1}^\infty E_j).$$

(6) $\mu(E_n)\searrow\mu(\bigcap_{j=1}^\infty E_j)$, når $E_1\supseteqq E_2\supseteqq\dots$, alle E_n tilhører $\mathbb{E}$ og $\mu(E_1)<\infty$.

Thi med $F_n=E_1\setminus E_n$ har vi $F_1\subseteqq F_2\subseteqq\dots$ og $\bigcup_j F_j=E_1\setminus\bigcap_j E_j$.
Følgelig gælder
$$\mu(E_1)-\mu(E_n)=\mu(F_n)\nearrow\mu(\bigcup_j F_j)=\mu(E_1)-\mu(\bigcap_j E_j).$$

Z Som simple eksempler viser (se nedenfor), kan man i (6) ikke slette forudsætningen $\mu(E_1)<\infty$. (Men selvfölgelig kan man nöjes med $\exists n: \mu(E_n)<\infty$.) I (3) er forudsætningen $\mu(E)<\infty$ væsentlig.

<u>Eksempler</u>.

A. <u>Lebesgue målet</u>. (Hovedeksempel.)

Vi skal senere (§5) bevise, at der findes et og kun et mål m defineret på Borel algebraen i $\mathbb{R}$, hvis værdi for ethvert interval er lig intervallængden. Dette mål kalder vi <u>Lebesgue målet</u> i $\mathbb{R}$.

Mere generelt skal vi (ligeledes i §5) bevise, at der findes et og kun et mål $m=m_d$ defineret på Borel algebraen i $\mathbb{R}^d$, hvis værdi for ethvert interval er lig produktet af kantlængderne. Dette mål kalder vi <u>Lebesgue målet</u> i $\mathbb{R}^d$. Vi skal videre bevise, at kongruente Borel mængder i $\mathbb{R}^d$ har samme Lebesgue mål (§6.2, sætning 2); hermed vil det være berettiget at opfatte værdien $m(E)$ på en Borel mængde E i $\mathbb{R}^d$ som dennes volumen (specielt areal for $d=2$, længde for $d=1$).

Vi udsætter beviserne (som er ret lange og vanskelige), idet vi vil foretrække först at godtgöre, at et mål kan bruges til noget. Vi vil dog allerede nu tillade os at benytte Lebesgue målet i eksempler og övelser.

Ad (3), p. 32. Med $E=]1,\infty[\subsetneq\mathbb{R}$ og $F=]0,\infty[\subsetneq\mathbb{R}$ kan $m(F\setminus E)=m(]0,1])=1$ ikke findes som $\mu(F)-\mu(E)$. (Det havde ikke hjulpet at regne $\infty-\infty=0$.)

Ad (6), p. 32. Med $E_n=]n,\infty[\subsetneq\mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$, er $E_1\supsetneq E_2\supsetneq\dots$. Men $m(\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j)=m(\emptyset)=0$, skönt $m(E_n)=\infty$ for hvert n.

B. Tællemål.

Funktionen μ defineret på mængden $\mathbb{P}(X)$ af alle delmængder af en vilkårlig (endelig, numerabel eller overnumerabel) mængde X ved

$$\mu(E) = \begin{cases} \text{antal elementer i } E, & \text{når } E \subseteq X \text{ er endelig} \\ \infty & \text{, når } E \subseteq X \text{ er uendelig} \end{cases}$$

er et mål, kaldet tællemålet i X.

C. Er $\mu: \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ et mål i en mængde X og $A \in \mathbb{E}$, da vil funktionen

$$E \to \mu(A \cap E), \quad E \in \mathbb{E},$$

igen være et mål i X.

D. Er $(\mu_j)_{j\in J}$ en (endelig eller uendelig) familie af mål, alle defineret på samme σ-algebra $\mathbb{E}$ i en mængde X, og er $(a_j)_{j\in J}$ en familie af tal $a_j \in \overline{\mathbb{R}}_+$, da er funktionen $\sum_{j\in J} a_j\mu_j$, dvs.

$$E \to \sum_{j\in J} a_j\mu_j(E), \quad E \in \mathbb{E},$$

igen et mål i X.

Thi med $\mu = \sum_{j\in J} a_j\mu_j$ har vi

$$\mu(\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{j\in J} a_j\mu_j(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_j (a_j \sum_n \mu_j(E_n)) = \sum_j \sum_n a_j\mu_j(E_n)$$
$$= \sum_{n,j} a_j\mu_j(E_n) = \sum_n \sum_j a_j\mu_j(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n),$$

når $E_1, E_2, \ldots$ er parvis disjunkte og tilhører $\mathbb{E}$. (Se § 0.3.)

3.2. „<u>Næsten</u> <u>overalt</u>".

Lad $\mu: \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ være et mål i en mængde X.

En mængde $N \in \mathbb{E}$ med $\mu(N) = 0$ og ligeledes enhver delmængde $M \subseteq N$ kaldes da en <u>nulmængde</u> med hensyn til μ (kort: en μ-<u>nulmængde</u>).

En delmængde af en μ-nulmængde er igen en μ-nulmængde. En forening af endelig eller numerabelt mange μ-nulmængder er igen en μ-nulmængde.

I tilknytning til begrebet nulmængde benyttes sprogbrugen „næsten overalt":

Lad $P(x)$ være et prædikat (et åbent udsagn) vedrørende mængden X, eller blot vedrørende en delmængde $A \subseteq X$. (Eksempelvis kan $P(x)$ stå for „$f(x) = 0$", hvor f er en given funktion defineret på A.) Vendingen

„for næsten alle $x \in A$ med hensyn til μ: $P(x)$",

„for μ-næsten alle $x \in A$: $P(x)$"

eller, når misforståelser ikke kan frygtes, kortet ned til f. eks.

„for næsten alle x : $P(x)$",

skal da betyde:

„$\{x \in A \mid \neg P(x)\}$ er en nulmængde m.h.t. μ".

Til sammenligning bemærkes, at „$\forall x \in A: P(x)$" jo kommer ud på et med „$\{x \in A \mid \neg P(x)\}$ er tom".

Undertiden skrives blot „P næsten overalt", „P p.p.", „P a.e.", eller „P n.o." (p.p. står for presque partout, a.e. for almost everywhere).

I ovennævnte eksempel har vi således udtryksmåder som „$f(x) = 0$ for næsten alle $x \in A$", „$f = 0$ næsten overalt i A".

Endnu et eksempel: <u>Konvergens</u> <u>næsten</u> <u>overalt</u>. Lad $f_1, f_2, \ldots$ og f være funktioner defineret på X (eller eventuelt kun på dele af X).

Udsagnet „$f_n(x) \to f(x)$ for μ-næsten alle x" eller kort

$$„ f_n \to f \quad \mu\text{-n.o.} "$$

betyder da, at der findes en mængde $N \in \mathbb{E}$ med $\mu(N) = 0$, således at

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{for hvert } x \in X \setminus N.$$

Sættes
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in X \setminus N \\ 0 & \text{for } x \in N \end{cases},$$

og defineres $g_1, g_2, \dots$ på samme måde ud fra $f_1, f_2, \dots$, opnås konvergens overalt:
$$\forall x \in X: \ g_n(x) \to g(x).$$

Er $f_1, f_2, \dots$ og f alle $\mathbb{E}$-målelige, vil $g_1, g_2, \dots$ og g ligeledes være det (ifølge bemærkninger i §2.5).

Ved
$$f \sim g \iff f = g \text{ næsten overalt m.h.t. } \mu$$

defineres en ækvivalensrelation f.eks. i mængden af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f: X \to \mathbb{C}$. Relationen kan udstrækkes til $\mathbb{E}$-målelige funktioner, som er defineret μ-næsten overalt i X. I mange henseender viser ækvivalente funktioner sig at være „lige gode".

Eksempelvis harmonerer ækvivalensrelationen med konvergens næsten overalt: Hvis $f_n \to f$ μ-n.o., $f = h$ μ-n.o. og $\forall n: f_n = h_n$ μ-n.o., så gælder $h_n \to h$ μ-n.o.

Med hensyn til tællemålet i en mængde X findes ikke andre nulmængder end $\emptyset$. Men med hensyn til Lebesgue målet i $\mathbb{R}^d$ er der, allerede for $d=1$, flere, end man måske umiddelbart ville tro (se §6.3).

§4. Integral.

4.1. Integral af simple, positive funktioner.

En funktion med kun endelig mange funktionsværdier vil vi kalde *simpel*. Som eksempel nævnes *indikatorfunktionen* 1_A for en delmængde A af en mængde $X \neq \emptyset$, defineret ved

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{for } x \in X \setminus A \end{cases}$$

Er $a_1, \dots, a_n$ de forskellige funktionsværdier for en simpel funktion f defineret på en mængde $X \neq \emptyset$, da vil f være målelig med hensyn til en given σ-algebra $\mathbb{E}$ i X, hvis og kun hvis

$$A_j = \{x \in X \mid f(x) = a_j\} = f^{-1}(\{a_j\}) \in \mathbb{E}, \quad j = 1, \dots, n.$$

I det følgende tænkes givet et ikke tomt målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$, dvs. et mål $\mu : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ defineret på en σ-algebra $\mathbb{E}$ i en mængde $X \neq \emptyset$.

For enhver simpel, $\mathbb{E}$-målelig funktion $f : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\} = [0, \infty[$ defineres *integralet* af f med hensyn til μ, skrevet $\int f d\mu$, $\int f(x) d\mu(x)$ eller lignende, ved

$$\int f d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \mu(\{x \in X \mid f(x) = a_j\}) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \mu(A_j),$$

hvor $a_1, \dots, a_n$ betegner de forskellige funktionsværdier for f.

Åbenbart er $0 \leqq \int f d\mu \leqq \infty$.

Lemma 1. For vilkårlige simple, $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f, g : X \to [0, \infty[$ og vilkårligt $c \in [0, \infty[$ gælder

$$\int (cf) d\mu = c \int f d\mu, \quad \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Bevis. Kun den sidste påstand er værd at omtale:

1^0 Hvis $X = \bigcup_{h=1}^p C_h$, hvor $C_1,\dots,C_p \in \mathbb{E}$ er parvis disjunkte, og hvis $c_1,\dots,c_p \in [0,\infty[$, da er

$$\int(\Sigma_{h=1}^p c_h 1_{C_h})\,d\mu = \Sigma_{h=1}^p c_h \mu(C_h).$$

Bemærk, at nogle af mængderne C_h kan være tomme, og at $c_1,\dots,c_p$ ikke er forudsat indbyrdes forskellige. – Udelades tomme C_h, og erstattes led $c_{h_1}\mu(C_{h_1}),\dots,c_{h_k}\mu(C_{h_k})$ på højre side med $c_{h_1}\Sigma_{i=1}^k \mu(C_{h_i}) = c_{h_1}\mu(\bigcup_{i=1}^k C_{h_i})$ når $c_{h_1} = \dots = c_{h_k}$, kommer vi imidlertid tilbage til definitionen af $\int(\Sigma_{h=1}^p c_h 1_{C_h})\,d\mu$.

2^0 Er $a_1,\dots,a_m$ og $b_1,\dots,b_n$ de forskellige funktionsværdier for henholdsvis f og g, og sættes $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$, $i=1,\dots,m$, og $B_j = g^{-1}(\{b_j\})$, $j = 1,\dots,n$, har vi

$$X = X\cap X = (\bigcup_{i=1}^m A_i)\cap(\bigcup_{j=1}^n B_j) = \bigcup_{i,j}(A_i\cap B_j),$$

hvor de mn mængder $A_i \cap B_j \in \mathbb{E}$ er parvis disjunkte. Da nu

$$f = \Sigma_{i,j}\, a_i 1_{A_i\cap B_j}, \qquad g = \Sigma_{i,j}\, b_j 1_{A_i\cap B_j}$$

og dermed

$$f+g = \Sigma_{i,j}(a_i+b_j) 1_{A_i\cap B_j},$$

finder vi med brug af 1^0

$$\int f\,d\mu + \int g\,d\mu = \Sigma_{i,j}\, a_i\mu(A_i\cap B_j) + \Sigma_{i,j}\, b_j\mu(A_i\cap B_j)$$
$$= \Sigma_{i,j}(a_i+b_j)\mu(A_i\cap B_j) = \int(f+g)\,d\mu.$$

<u>Korollar</u>. <u>For</u> <u>simple</u>, <u>$\mathbb{E}$-målelige</u> <u>funktioner</u> $f,g: X\to[0,\infty[$, <u>hvor</u> $f \leqq g$, dvs. $\forall x\in X: f(x)\leqq g(x)$, <u>er</u>

$$\int f\,d\mu \leqq \int g\,d\mu.$$

Thi idet $g = f + (g-f)$ med $g - f \geqq 0$, har vi

$$\int g\,d\mu = \int f\,d\mu + \int(g-f)\,d\mu \geqq \int f\,d\mu.$$

NB. En simpel, $\mathbb{E}$-målelig funktion $f: X\to[0,\infty[$ kan jo skrives på formen $f = \Sigma_{j=1}^n a_j 1_{A_j}$ med $a_j \in [0,\infty[$, $A_j \in \mathbb{E}$, – i almindelighed endda på mange måder. Med lemma 1 til rådighed kunne man derfor tillade sig at glemme definitionen af $\int f d\mu$, blot man erindrer

Sætning. For hvert $E \in \mathbb{E}$ er
$$\int 1_E \, d\mu = \mu(E).$$

Til slut et lemma til brug i beviset for Lebesgues sætning om stigende grænseovergang (§4.2).

Lemma 2. For en vilkårlig simpel, $\mathbb{E}$-målelig funktion $f: X \to [0,\infty[$ vil $\nu: \mathbb{E} \to [0,\infty]$ defineret ved
$$\nu(E) = \int (f \cdot 1_E) \, d\mu, \quad E \in \mathbb{E},$$
være et mål.

Bevis. Idet $f = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{A_j}$ med $A_j \in \mathbb{E}$ og $0 \leqq a_j < \infty$, $j = 1, \dots, n$, har vi for hvert $E \in \mathbb{E}$
$$f \cdot 1_E = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{A_j} 1_E = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{A_j \cap E}$$
og dermed ifølge lemma 1 og sætning
$$\nu(E) = \int (f \cdot 1_E) \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \int 1_{A_j \cap E} \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j \cap E).$$
Påstanden fremgår nu af §3.1, eksempel C og D.

4.2. Integral af positive funktioner.

Vi skal opbygge dels en teori om integration af positive funktioner, dvs. funktioner med værdier i $[0,\infty] = \overline{\mathbb{R}}_+$, dels en teori om integration af endelige funktioner, med værdier i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Den første er ikke en del af den sidste. Sætningerne om integration af positive funktioner, der er overordentlig bekvemme, er derfor af blivende interesse.

Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde $X \neq \emptyset$. Med $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$ betegner vi mængden af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f: X \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$.

Lad videre $\mu: \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ være et mål.

For <u>enhver</u> funktion $f \in \mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$ definerer vi <u>integralet</u> af f med hensyn til μ, skrevet $\int f d\mu$, $\int f(x) d\mu(x)$ el. lign., ved

$$\int f d\mu = \sup \int s d\mu,$$

hvor øvre grænse tages over alle simple, $\mathbb{E}$-målelige funktioner $s: X \to [0,\infty[$ med $s \leqq f$.

Åbenbart er $0 \leqq \int f d\mu \leqq \infty$.

Bemærkninger.

1. Tallene $\int s d\mu$ kunne kaldes undersummer (jfr. Indledning).

2. Definitionen er tilladelig. Egentlig burde vi ikke straks have benyttet tegnet $\int$ både her og i §4.1; f.eks. kunne vi have skrevet $I(s) = I_\mu(s)$ for det i §4.1 definerede integral. Men når $f \in \mathcal{M}^+$ er simpel og endelig, gælder
$$I(f) = \sup I(s) = \int f d\mu.$$
Thi f er da selv blandt de funktioner s, hvorover supremum tages, og for hver af disse er $I(s) \leqq I(f)$ ifølge korollar i §4.1.

Som umiddelbar konsekvens af definitionen noterer vi, at
$$\int f d\mu \leqq \int g d\mu, \text{ når } f \leqq g,\ f,g \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E}).$$

En nøgle til teorien er følgende hovedsætning. (Jfr. H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration, Paris 1904, p. 98 ff. eller 2. éd. p. 105 ff.)

<u>Lebesgues sætning om stigende grænseovergang</u>. (Kort: <u>Lebesgues monotonisætning</u>.)

<u>For enhver stigende følge</u> $f_1 \leqq f_2 \leqq \dots$ <u>af funktioner</u> $f_n \in \mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ <u>gælder</u>
$$\int \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu .$$

Bevis. Vi bemærker, at $f = \lim_n f_n = \sup_n f_n \in \mathcal{M}^+$, og at talfølgen $(\int f_n \, d\mu)_{n=1,2,\dots}$ er stigende. Både venstre og højre side i ligningen har derfor mening.

Idet $f \geqq f_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, er det endvidere klart, at
$$\int f \, d\mu \geqq \lim_n \int f_n \, d\mu .$$
Problemet er altså at vise den modsatte ulighed.

Ifølge definitionen af $\int f \, d\mu$ kommer dette ud på at vise
$$\int s \, d\mu \leqq \lim_n \int f_n \, d\mu$$
for en vilkårlig simpel, $\mathbb{E}$-målelig funktion $s: X \to [0, \infty[$ med $s \leqq f$. – Det vil være nok for et vilkårligt tal $a \in]0,1[$ at vise
$$a \int s \, d\mu = \int as \, d\mu \leqq \lim_n \int f_n \, d\mu .$$

For hvert $x \in X$, hvor $0 < f(x)$, er $a\,s(x) < f(x) = \lim_n f_n(x)$, hvorfor $\exists n \in \mathbb{N}: a\,s(x) < f_n(x)$. Og $f(x) = 0$ medfører $0 = s(x) = f_1(x) = f_2(x) = \dots$.

Sætter vi $E_n = \{x \in X \mid a\,s(x) \leqq f_n(x)\}$, $n = 1,2,\dots$, har vi derfor
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X .$$
Endvidere er $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$, og alle E_n tilhører $\mathbb{E}$ (§ 2.5, eksempel).

Da nu $E \to \int (as \cdot 1_E) \, d\mu$, $E \in \mathbb{E}$, er et mål (§ 4.1, lemma 2), sluttes (§ 3.1, (5)), at
$$\int as \cdot 1_{E_n} \, d\mu \nearrow \int as \cdot 1_X \, d\mu = \int as \, d\mu .$$

Idet $as \cdot 1_{E_n} \leqq f_n$ og dermed $\int as \cdot 1_{E_n} \, d\mu \leqq \int f_n \, d\mu$, følger det ønskede,
$$\int as \, d\mu = \lim_n \int as \cdot 1_{E_n} \, d\mu \leqq \lim_n \int f_n \, d\mu .$$

Man kan ofte almindeliggøre resultater fra simple til vilkårlige funktioner i $\mathcal{M}^+$ ved hjælp af Lebesgues monotonisætning og følgende lemma.

Lemma. For enhver funktion $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ findes en stigende følge $s_1 \leqq s_2 \leqq \dots$ af simple, $\mathbb{E}$-målelige funktioner $s_n : X \to [0, \infty[$ med

$$f = \lim_n s_n .$$

Lemmaet selv har intet at gøre med målet μ, men forudsætter kun σ-algebraen $\mathbb{E}$ i X.

Bevis. Man kan benytte $s_n : X \to [0, n]$, $n = 1, 2, \dots$, givet ved

$$s_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } 0 \leqq f(x) < \frac{1}{2^n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{k}{2^n} & \text{når } \frac{k}{2^n} \leqq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{n2^n - 1}{2^n} & \text{når } \frac{n2^n-1}{2^n} \leqq f(x) < n \\ n & \text{når } n \leqq f(x) \leqq \infty \end{cases} .$$

Funktionerne s_n er $\mathbb{E}$-målelige, og for hvert $x \in X$ har vi

$$s_n(x) \nearrow f(x).$$

Thi er $f(x) < 1$, fås $s_1(x), s_2(x), \dots$ ud fra tallet $f(x)$ som nærmeste lavere multipla af $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots$. For $1 \leqq p \leqq f(x) < p+1$ begynder talfølgen $s_1(x)$, $s_2(x), \dots$ med $1, 2, \dots p$, medens de resterende elementer fås ud fra $f(x)$ som de nærmeste lavere multipla af $\frac{1}{2^{p+1}}, \frac{1}{2^{p+2}}, \dots$. Er $f(x) = \infty$, bliver talfølgen $1, 2, \dots$.

Sætning 1a. For vilkårlige $f, g \in \mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ gælder

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu .$$

Bevis. Reglen generaliseres fra simple funktioner ved hjælp af monotonisætning og lemma: Er $s_1 \leqq s_2 \leqq \dots$ og $t_1 \leqq t_2 \leqq \dots$ stigende følger af simple, $\mathbb{E}$-målelige funktioner $s_n, t_n : X \to [0, \infty[$ med $s_n \nearrow f$, $t_n \nearrow g$, da vil $s_n+t_n \nearrow f+g$. Vi har så

$$\int f\,d\mu + \int g\,d\mu = \lim_n \int s_n\,d\mu + \lim_n \int t_n\,d\mu$$
$$= \lim_n\left(\int s_n\,d\mu + \int t_n\,d\mu\right) = \lim_n \int (s_n+t_n)\,d\mu = \int (f+g)\,d\mu .$$

Sætning 1a almindeliggøres straks til endelig mange addender, ved induktion. Men i kraft af monotonisætningen kan man gå videre til numerabelt mange addender. Vi formulerer resultatet med $\mathbb{N}$ som indeksmængde:

<u>Sætning</u> 1b. <u>For</u> <u>vilkårlige</u> $f_k \in \mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$, $k=1,2,\ldots$, <u>gælder</u>
$$\int \Sigma_{k\in\mathbb{N}} f_k\,d\mu = \Sigma_{k\in\mathbb{N}} \int f_k\,d\mu .$$

Bevis. Af $\Sigma_{k=1}^{n} f_k \nearrow \Sigma_{k=1}^{\infty} f_k$ følger
$$\Sigma_{k=1}^{n} \int f_k\,d\mu = \int \Sigma_{k=1}^{n} f_k\,d\mu \nearrow \int \Sigma_{k=1}^{\infty} f_k\,d\mu .$$

<u>Sætning</u> 2. <u>For</u> $f \in \mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$ <u>og</u> $c \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$ <u>gælder</u>
$$\int cf\,d\mu = c\int f\,d\mu .$$

Bevis. For $c=0$ er påstanden triviel. For $0<c<\infty$ kan vi generalisere fra simple funktioner ved direkte brug af integraldefinitionen, idet vi udnytter $s \leqq f \Leftrightarrow cs \leqq cf$:
$$c\int f\,d\mu = c\sup_{s\leqq f}\int s\,d\mu = \sup_{s\leqq f} c\int s\,d\mu = \sup_{s\leqq f}\int cs\,d\mu = \sup_{s\leqq cf}\int s\,d\mu = \int cf\,d\mu .$$
For $c=\infty$ udnytter vi derpå $nf \nearrow \infty f$ og finder ved monotonisætningen
$$\infty\int f\,d\mu = \lim_n n\int f\,d\mu = \lim_n \int nf\,d\mu = \int \infty f\,d\mu .$$

<u>Korollar</u>. <u>For</u> $f \in \mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$ <u>gælder</u>
$$\int f\,d\mu = 0 \Leftrightarrow f=0 \text{ næsten overalt m.h.t. } \mu ,$$
<u>samt</u>
$$\int f\,d\mu < \infty \Rightarrow f<\infty \text{ næsten overalt m.h.t. } \mu .$$

Bevis. Med $A=\{x\in X \mid f(x)>0\}$ er $\infty\cdot f = \infty\cdot 1_A$ og dermed
$$\infty\int f\,d\mu = \int \infty f\,d\mu = \int \infty 1_A\,d\mu = \infty\int 1_A\,d\mu = \infty\,\mu(A).$$

Men dette viser $\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0$.

Med $B = \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$ er $\infty \cdot 1_B \leqq f$ og dermed

$$\infty \mu(B) = \int \infty 1_B \, d\mu \leqq \int f d\mu,$$

hvilket viser $\int f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(B) = 0$.

Vi slutter med et korollar af monotonisætningen, som vi skal udnytte ved beviset for Lebesgues sætning om majoriseret grænseovergang (§4.3).

<u>Fatous</u> <u>lemma</u>. <u>For</u> <u>vilkårlige</u> $f_n \in \mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$, $n = 1, 2, \ldots$, <u>gælder</u>

$$\int \liminf_n f_n \, d\mu \leqq \liminf_n \int f_n \, d\mu .$$

Bevis. Med $g_m = \inf_p f_{m+p}$, $m = 1, 2, \ldots$, har vi for hvert m

$$\int g_m \, d\mu \leqq \inf_p \int f_{m+p} \, d\mu \leqq \liminf_n \int f_n \, d\mu .$$

Da nu $g_m \nearrow \liminf_n f_n$ og dermed, ifølge monotonisætningen,

$$\int g_m \, d\mu \nearrow \int \liminf_n f_n \, d\mu ,$$

følger påstanden.

4.3. Integral af reelle funktioner.

Medens det, så længe talen er om integration af positive funktioner, er overordentlig bekvemt at operere med tallet ∞, ville det for vilkårlige reelle funktioner tværtimod være en belastning at inddrage ∞ og $-\infty$. Derfor lader vi være.

Er f en reel funktion, $f: X \to \mathbb{R}$, sætter vi $f^+ = f \vee 0$ og $f^- = -(f \wedge 0)$, altså

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{når } 0 \leqq f(x) \\ 0 & \text{når } f(x) \leqq 0 \end{cases}, \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } 0 \leqq f(x) \\ -f(x) & \text{når } f(x) \leqq 0 \end{cases}.$$

De to funktioner kaldes <u>den positive</u> og <u>den negative del</u> af f.

Bemærk, at $f = f^+ - f^-$ og $|f| = f^+ + f^-$.

Er $\mathbb{E}$ en σ-algebra i X, vil f være $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis f^+ og f^- begge er det.

Lad nu $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$.

En funktion $f: X \to \mathbb{R}$ siges da at være <u>integrabel</u> med hensyn til μ (kort: μ-<u>integrabel</u>), hvis f er $\mathbb{E}$-målelig og

$$\int f^+ d\mu < \infty, \quad \int f^- d\mu < \infty.$$

I bekræftende fald sættes

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

<u>Integralet</u> af f med hensyn til μ skrives også $\int f(x) d\mu(x)$ el. lign.

Mængden af μ-integrable funktioner $f: X \to \mathbb{R}$ betegnes $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mu) = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Åbenbart er $-\infty < \int f d\mu < \infty$ for hvert $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Definitionen af $\int f d\mu$ er tilladelig. Thi for $f \geqq 0$ er jo $f^+ = f$, $f^- = 0$.

Bemærk: Enhver $\mathbb{E}$-målelig funktion $f: X \to [0, \infty]$ har et integral $\int f d\mu$, eventuelt med værdien ∞, men den regnes kun for integrabel m.h.t. μ, hvis alle funktionsværdier $f(x)$ er endelige og $\int f d\mu$ er endeligt.

Sætning 1. En $\mathbb{E}$-målelig funktion $f: X \to \mathbb{R}$ er integrabel med hensyn til μ, hvis og kun hvis $|f|$ er det, dvs. hvis $\int |f| d\mu < \infty$. I bekræftende fald er
$$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu.$$

Bevis. Af $\int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu$ følger
$$\int f^+ d\mu < \infty, \int f^- d\mu < \infty \Leftrightarrow \int |f| d\mu < \infty,$$
og i bekræftende fald er
$$|\int f d\mu| = |\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu.$$

Integrabilitet godtgøres oftest ved følgende trivielle

Korollar 1. Hvis $f: X \to \mathbb{R}$ er $\mathbb{E}$-målelig, og hvis $|f| \leq g$, hvor $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ og $\int g d\mu < \infty$, så er f integrabel m.h.t. μ.

Bevis: $\int |f| d\mu \leq \int g d\mu$.

Sætning 2a. Er $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $a \in \mathbb{R}$, da er også $af \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og
$$\int af d\mu = a \int f d\mu.$$

For $a = 0$ er påstanden triviel. For $a > 0$ benyttes $(af)^+ = af^+$, $(af)^- = af^-$. Det er nu nok at betragte tilfældet $a = -1$; her benyttes $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$.

Sætning 2b. Når $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, da er også $f+g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og
$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Bevis. At summen $f+g: X \to \mathbb{R}$ er μ-integrabel, følger af, at den er $\mathbb{E}$-målelig, og at $|f+g| \leq |f| + |g|$, hvor $|f| + |g| \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ og
$$\int (|f| + |g|) d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu < \infty.$$
At $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$, kan nu vises således: Af
$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$
fås
$$(f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^-,$$

hvor alle led tilhører $\mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$. Men så er

$$\int (f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int (f+g)^- d\mu ,$$

og da disse integraler alle er endelige tal, sluttes

$$\int (f+g)^+ d\mu - \int (f+g)^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu ,$$

dvs.
$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu .$$

<u>Korollar 2.</u> <u>Når</u> $f,g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>og</u> $f \leqq g$, <u>da er</u>

$$\int f d\mu \leqq \int g d\mu .$$

<u>Lighedstegnet gælder, hvis og kun hvis</u> $f=g$ <u>næsten overalt m.h.t.</u> μ.

Bevis. Idet $g-f \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$, er $\int (g-f) d\mu \geqq 0$, med lighedstegn hvis og kun hvis $g-f=0$ næsten overalt m.h.t. μ (§4.2, korollar). Og

$$\int (g-f) d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu .$$

Grænsefunktionen f for en punktvis konvergent følge $f_1, f_2, \ldots$ af integrable funktioner behøver ikke at være integrabel, end ikke hvis talfølgen $\int f_1 d\mu, \int f_2 d\mu, \ldots$ er konvergent. Og hvis f er integrabel, gælder ikke nødvendigvis $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$. Det er let at give trivielle modeksempler, f.eks. med μ = Lebesgue målet på $\mathbb{R}$, således $f_n = 1_{]0,n]} - 1_{]-n,0]}$, henholdsvis $f_n = 1_{]n-1,n]}$, $n=1,2,\ldots$.

Der gælder imidlertid følgende simple og ofte anvendelige hovedsætning, et af teoriens højdepunkter:

<u>Lebesgues sætning om majoriseret grænseovergang</u>. (<u>Kort:</u> <u>Lebesgues majorantsætning</u>.)

<u>Lad funktionerne</u> $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$, <u>være</u> $\mathbb{E}$-<u>målelige og lad følgen</u> $f_1(x), f_2(x), \ldots$ <u>være konvergent i</u> $\mathbb{R}$ <u>for hvert</u> $x \in X$. <u>Hvis der findes en funktion</u> $g \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$ <u>med</u> $\int g d\mu < \infty$, <u>således at</u> $\forall n: |f_n| \leqq g$, <u>da er funktionerne</u> $f_1, f_2, \ldots$ <u>og</u> $f = \lim_n f_n$ <u>alle integrable m.h.t.</u> μ, <u>og</u>

$$\int f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\to} \int f d\mu .$$

Bevis. Lad $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med $\int g\,d\mu < \infty$ være en majorant for funktionerne $|f_1|, |f_2|, \dots$.

1° Det er klart, at $f_1, f_2, \dots$ og $f = \lim_n f_n$ er integrable m.h.t. μ, idet funktionerne alle er $\mathbb{E}$-målelige, og $|f_n| \leqq g$ medfører $|f| \leqq g$.

2° Antag her $\forall x \in X: g(x) < \infty$, således at majoranten g er integrabel m.h.t. μ.

Idet $g + f_n \geqq 0$ og $g - f_n \geqq 0$, kan vi anvende Fatous lemma (§4.2) på hver af følgerne $(g+f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(g-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da

$$\liminf_n (g+f_n) = \lim_n (g+f_n) = g+f,$$

får vi i første tilfælde

$$\int (g+f)\,d\mu \leqq \liminf_n \int (g+f_n)\,d\mu,$$

altså ifølge sætning 2b

$$\begin{aligned}\int g\,d\mu + \int f\,d\mu &\leqq \liminf_n \left(\int g\,d\mu + \int f_n\,d\mu\right)\\ &= \int g\,d\mu + \liminf_n \int f_n\,d\mu,\end{aligned}$$

dvs.

$$\int f\,d\mu \leqq \liminf_n \int f_n\,d\mu.$$

I andet tilfælde fås

$$\int (g-f)\,d\mu \leqq \liminf_n \int (g-f_n)\,d\mu,$$

altså

$$\begin{aligned}\int g\,d\mu - \int f\,d\mu &\leqq \liminf_n \left(\int g\,d\mu - \int f_n\,d\mu\right)\\ &= \int g\,d\mu - \limsup_n \int f_n\,d\mu,\end{aligned}$$

dvs.

$$\limsup_n \int f_n\,d\mu \leqq \int f\,d\mu.$$

Sammenholdt har vi

$$\int f\,d\mu \leqq \liminf_n \int f_n\,d\mu \leqq \limsup_n \int f_n\,d\mu \leqq \int f\,d\mu,$$

altså

$$\liminf_n \int f_n\,d\mu = \limsup_n \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu,$$

dvs.

$$\int f_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f\,d\mu.$$

3° Generelt: Med $N = \{x \in X \mid g(x) = \infty\}$ er $g \cdot 1_{X\setminus N}$ en μ-integrabel majorant for $|f_1 \cdot 1_{X\setminus N}|, |f_2 \cdot 1_{X\setminus N}|, \dots$. Ifølge 2° gælder derfor

$$\int f_n \cdot 1_{X\setminus N}\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f \cdot 1_{X\setminus N}\,d\mu.$$

Da nu $\mu(N) = 0$ (§4.2, korollar), har vi imidlertid (jfr. bemærkning nedenfor) $\int f_n\,d\mu = \int f_n \cdot 1_{X\setminus N}\,d\mu$ og $\int f\,d\mu = \int f \cdot 1_{X\setminus N}\,d\mu$.

Som et specialtilfælde af Lebesgues sætning nævnes, at <u>majorisering</u> <u>med</u> <u>en</u> <u>konstant</u> $K \in \mathbb{R}_+$,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : |f_n(x)| \leqq K,$$

<u>er</u> <u>en</u> <u>tilstrækkelig</u> <u>betingelse</u>, <u>når</u> $\mu(X) < \infty$. (Lebesgue 1902; den almene majorantbetingelse: Lebesgue 1908.)

For tilfældet $\mu(X) < \infty$ anføres også følgende elementære, ofte nyttige sætning:

<u>Når</u> <u>en</u> <u>følge</u> $f_1, f_2, \ldots$ <u>af</u> <u>funktioner</u> $f_n \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ <u>er</u> <u>uniformt</u> <u>konvergent</u> <u>og</u> $\mu(X) < \infty$, <u>da</u> <u>er</u> <u>også</u> $f = \lim_n f_n \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, <u>og</u>

$$\int f_n \, d\mu \underset{n \to \infty}{\to} \int f \, d\mu .$$

Det er ikke så vanskeligt at finde en μ-integrabel majorant for grænseovergangen. Men vi kan også føre et bevis alene ved elementære egenskaber ved integralet:

For hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ er $|f - f_n| < \varepsilon$ fra et vist trin at regne, følgelig

$$\int |f - f_n| \, d\mu \leqq \varepsilon \cdot \mu(X) < \infty ,$$

hvorfor $f - f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ og dermed $f = (f - f_n) + f_n \in \mathcal{L}(\mu)$, samt

$$\left|\int f \, d\mu - \int f_n \, d\mu\right| = \left|\int (f - f_n) \, d\mu\right| \leqq \int |f - f_n| \, d\mu \leqq \varepsilon \cdot \mu(X).$$

For Riemann integrable funktioner på et begrænset interval I i $\mathbb{R}$ gælder den tilsvarende sætning om uniform konvergens.

Derimod gælder intet modstykke til noget af de øvrige resultater om grænseovergang med integraler i §§ 4.2 og 4.3! Modeksempel: Numerér de rationale tal i I, $q_1, q_2, \ldots$, og sæt $f_n = 1_{\{q_1, \ldots, q_n\}}$, – for sætning 1b i § 4.2 dog $f_n = 1_{\{q_n\}}$. (Jfr. Indledning, p. 3.)

Bemærkning. Hvis $f = g$ næsten overalt m.h.t. μ, hvor $f : X \to \mathbb{R}$ er $\mathbb{E}$-målelig, medens $g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, da er også $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, og

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu .$$

Bevis. Vi skriver $f = g + (f-g)$. Idet $\int |f-g| d\mu = 0$ (§4.2, korollar), sluttes (sætning 1), at $f-g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ med $\int (f-g) d\mu = 0$. Dette giver straks det ønskede (sætning 2b).

Bemærkningen tillader en svækkelse af forudsætningerne i en række sætninger i disse noter.

I Lebesgues majorantsætning kan forudsætningen, at $f_1(x), f_2(x), \ldots$ er konvergent for <u>hvert</u> $x \in X$, således ændres til

$$f_n(x) \to f(x) \text{ for } \mu\text{-næsten alle } x \in X,$$

hvor $f: X \to \mathbb{R}$ er en $\mathbb{E}$-målelig funktion. Og hvad majorantfunktionen angår, vil det være nok, at

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ |f_n| \leqq g \text{ næsten overalt m.h.t. } \mu.$$

Thi da der kun er tale om numerabelt mange undtagelsesnulmængder, kan disse forenes til en enkelt, N, hvorefter den oprindelige sætning anvendes på $f_n \cdot 1_{X \setminus N} \to f \cdot 1_{X \setminus N}$.

4.4. Integral af komplekse funktioner.

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$.

Idet vi skriver en funktion $f: X \to \mathbb{C}$ på formen
$$f = f' + i f'' \quad \text{med } f': X \to \mathbb{R},\ f'': X \to \mathbb{R},$$
siges f at være <u>integrabel</u> med hensyn til μ, hvis f' og f'' begge er det. I bekræftende fald sættes
$$\int f d\mu = \int f' d\mu + i \int f'' d\mu .$$

Mængden af μ-integrable funktioner $f: X \to \mathbb{C}$ betegnes $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X,\mu) = \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, ganske som for reelle funktioner.

En funktion $f = f' + if''$, der er μ-integrabel, er åbenbart $\mathbb{E}$-målelig (§2.1, sætning 3). Det er også indlysende, at den konjugerede funktion $\bar{f} = f' - if''$ er μ-integrabel, og at $\int \bar{f} d\mu$ er konjugeret til $\int f d\mu$.

<u>Resultaterne</u> <u>i</u> §4.3 (<u>sætninger</u>, <u>korollarer</u>, <u>bemærkninger</u>, ...) <u>gælder</u> <u>ord</u> <u>til</u> <u>andet</u> <u>også</u> <u>for</u> <u>funktioner</u> <u>med</u> <u>komplekse</u> <u>værdier</u>, <u>idet</u> $\mathbb{R}$ <u>overalt</u> <u>ændres</u> <u>til</u> $\mathbb{C}$. Eneste undtagelse er korollar 2, der naturligvis er specifikt for reelle funktioner.

Begrundelsen er gennemgående ganske ligetil. Eksempelvis:

<u>Når</u> $f: X \to \mathbb{C}$ <u>er</u> μ-<u>integrabel</u> <u>og</u> $a \in \mathbb{C}$, <u>da</u> <u>er</u> <u>også</u> $af \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$

<u>og</u>
$$\int af d\mu = a \int f d\mu .$$

Thi med $f = f' + if''$ og $a = a' + ia''$ har vi
$$af = (a'f' - a''f'') + i(a'f'' + a''f').$$
Altså er $af \in \mathcal{L}(\mu)$ og
$$\begin{aligned}\int af d\mu &= \int (a'f' - a''f'') d\mu + i \int (a'f'' + a''f') d\mu \\ &= (a' \int f' d\mu - a'' \int f'' d\mu) + i(a' \int f'' d\mu + a'' \int f' d\mu) \\ &= (a' + ia'')(\int f' d\mu + i \int f'' d\mu) = a \int f d\mu .\end{aligned}$$

En $\mathbb{E}$-målelig funktion $f: X \to \mathbb{C}$ er integrabel m.h.t. μ, hvis og kun hvis $|f|$ er det, dvs. hvis $\int |f| d\mu < \infty$.

Thi f', f'' og $|f|$ er $\mathbb{E}$-målelige, og
$$|f'| \leqq |f|,\ |f''| \leqq |f| \quad \text{samt} \quad |f| \leqq |f'| + |f''|.$$

Kun for ét resultat kræver begrundelsen mere opfindsomhed:

Når $f: X \to \mathbb{C}$ er integrabel m.h.t. μ, da er
$$\left|\int f d\mu\right| \leqq \int |f| d\mu.$$

Bevis. Vælg $a \in \mathbb{C}$ med $|a| = 1$, således at $a\int f d\mu \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Da er
$$\left|\int f d\mu\right| = a\int f d\mu = \int af d\mu = \int g' d\mu + i\int g'' d\mu,$$
hvor vi har sat $af = g' + ig''$ med $g': X \to \mathbb{R}$, $g'': X \to \mathbb{R}$. Idet tallet er reelt, har vi
$$\left|\int f d\mu\right| = \int g' d\mu.$$
Uligheden følger nu af, at $g' \leqq |af| = |f|$.

Bemærk specielt, at Lebesgues sætning om majoriseret grænseovergang gælder ordret med $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$.

Med $f_n = f_n' + i f_n''$, $n = 1, 2, \ldots$, og $f = f' + if''$ kan sætningen for reelle funktioner nemlig anvendes på $f_n' \to f'$ og $f_n'' \to f''$, idet jo $|f_n| \leqq g$ medfører $|f_n'| \leqq g$ og $|f_n''| \leqq g$.

4.5. Integral over delmængde.

Idet $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et målrum med $X \neq \emptyset$, har vi hidtil kun behandlet integration m.h.t. μ af funktioner defineret på hele X. At det ikke er nogen egentlig indskrænkning, vil fremgå af nedenstående.

Først bemærkes, at er $V \in \mathbb{E}$, da vil $\mathbb{D} = \{A \subseteq V \mid A \in \mathbb{E}\}$ være en σ-algebra i V, og restriktionen $\mu|_{\mathbb{D}}$ af μ til $\mathbb{D}$ vil være et mål i V.

Der gælder nu:

Integration af en funktion g med definitionsmængde $V \in \mathbb{E}$, $V \neq \emptyset$, med hensyn til målet $\mu|_{\mathbb{D}}$ i V kommer ud på ét med integration af $\tilde{g}$ med hensyn til μ, hvor $\tilde{g}$ er funktionen defineret på hele X ved

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{for } x \in V \\ 0 & \text{for } x \in X \setminus V. \end{cases}$$

Bevis. Vi har allerede tidligere (§2.5) bemærket, at g er $\mathbb{D}$-målelig, hvis og kun hvis $\tilde{g}$ er $\mathbb{E}$-målelig.

1° Er $0 \leqq g \leqq \infty$, gælder i bekræftende fald

$$\int g \, d\mu|_{\mathbb{D}} = \int \tilde{g} \, d\mu.$$

Thi er $r: V \to \mathbb{R}$ en simpel, $\mathbb{D}$-målelig funktion, $0 \leqq r \leqq g$, da er $\tilde{r}$ en simpel, $\mathbb{E}$-målelig funktion, $0 \leqq \tilde{r} \leqq \tilde{g}$, med

$$\int r \, d\mu|_{\mathbb{D}} = \int \tilde{r} \, d\mu,$$

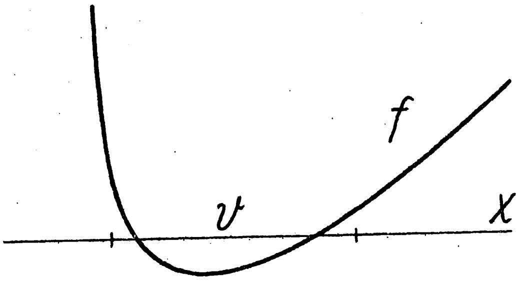
og er $s: X \to \mathbb{R}$ en simpel, $\mathbb{E}$-målelig funktion, $0 \leqq s \leqq \tilde{g}$, da er $s|_V$ en simpel, $\mathbb{D}$-målelig funktion, $0 \leqq s|_V \leqq g$, med

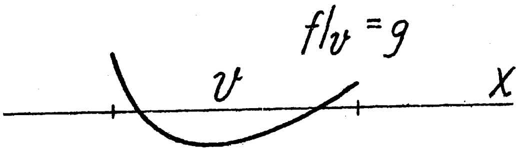
$$\int s|_V \, d\mu|_{\mathbb{D}} = \int s \, d\mu.$$

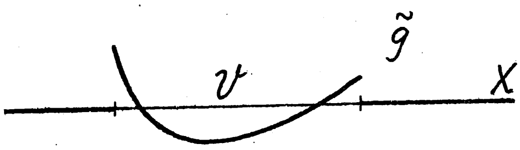
Definitionen på integral af positiv funktion (§4.2) giver nu umiddelbart påstanden.

2° Anvendelse af definitionerne på integral af reel og kompleks funktion (§§4.3, 4.4) viser derefter påstandens rigtighed også her.

For $\mathcal{L}(V, \mu|_{\mathbb{D}}) = \mathcal{L}(V, \mathbb{D}, \mu|_{\mathbb{D}})$ skrives ofte $\mathcal{L}(V, \mu)$.







Lad nu $V \in \mathbb{E}$, $V \neq \emptyset$, være indeholdt i definitionsmængden for en funktion f. Ved *integralet af f over V med hensyn til μ*,
$$\int_V f\,d\mu,$$
forstås da integralet af restriktionen $f|_V$ med hensyn til målet $\mu|_{\mathbb{D}}$ i V, forudsat dette integral eksisterer.

Integralet $\int_V f\,d\mu$ kan, ifølge resultatet ovenfor, også fås som $\int \tilde{g}\,d\mu$ med $g = f|_V$.

Hvis $f|_V \in \mathcal{L}(V, \mathbb{D}, \mu|_{\mathbb{D}})$, dvs. hvis $\tilde{g} \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, siges f at være *integrabel over V m.h.t. μ*.

Endelig sættes $\int_\emptyset f\,d\mu = 0$, og f regnes for μ-integrabel over $\emptyset$.

Bemærk: For en funktion f med hele X som definitionsmængde og vilkårligt $V \in \mathbb{E}$ er
$$\int_V f\,d\mu = \int f \cdot 1_V\,d\mu,$$
således at forstå, at de to integraler samtidig har mening og i bekræftende fald samme værdi.

Specielt er
$$\int_X f\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

Thi for $V \neq \emptyset$ er $\tilde{g} = f \cdot 1_V$, når $g = f|_V$.

En funktion f, der er integrabel m.h.t. μ over en mængde $V \in \mathbb{E}$, er også integrabel m.h.t. μ over enhver delmængde $U \subseteq V$, $U \in \mathbb{E}$.

Thi med $f|_V$ er restriktionen $f|_U$ ligeledes $\mathbb{E}$-målelig (§2.5), og
$$\int_U |f|\,d\mu \leq \int_V |f|\,d\mu < \infty.$$

Er f integrabel m.h.t. μ over både $\mathcal{U} \in \mathbb{E}$ og $\mathcal{V} \in \mathbb{E}$, da også over $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Hvis $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, er

$$\int_{\mathcal{U} \cup \mathcal{V}} f d\mu = \int_{\mathcal{U}} f d\mu + \int_{\mathcal{V}} f d\mu .$$

Bevis. Det er nok at betragte tilfældet $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, da $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ jo altid kan skrives som disjunkt forening $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup (\mathcal{V} \setminus \mathcal{U})$.

Da det er uden betydning, hvorledes f opfører sig uden for $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, kan vi gerne antage, at f har hele X som definitionsmængde. Når $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, er $f \cdot 1_{\mathcal{U} \cup \mathcal{V}} = f \cdot 1_{\mathcal{U}} + f \cdot 1_{\mathcal{V}}$, og påstanden er blot et specialtilfælde af sætning 2b i §4.3 eller §4.4.

Når $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots \in \mathbb{E}$ er parvis disjunkte, og f er integrabel m.h.t. μ over $\mathcal{V} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{U}_j$, da er

(*) $$\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{U}_j} f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathcal{U}_j} f d\mu .$$

Bevis. Vi kan gerne antage, at f har hele X som definitionsmængde. Påstanden

$$\int f \cdot 1_{\mathcal{V}} d\mu = \int \sum_{j=1}^{\infty} f \cdot 1_{\mathcal{U}_j} d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f \cdot 1_{\mathcal{U}_j} d\mu ,$$

dvs. $$\int \sum_{j=1}^{n} f \cdot 1_{\mathcal{U}_j} d\mu = \sum_{j=1}^{n} \int f \cdot 1_{\mathcal{U}_j} d\mu \underset{n \to \infty}{\to} \int f \cdot 1_{\mathcal{V}} d\mu ,$$

fås nu af Lebesgues majorantsætning, idet $\sum_{j=1}^{n} f \cdot 1_{\mathcal{U}_j}$ konvergerer punktvis mod $f \cdot 1_{\mathcal{V}}$, numerisk majoriseret af en μ-integrabel funktion, $|f \cdot 1_{\mathcal{V}}|$.

Ligningen (*) gælder også for en funktion $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$. Det er blot et specialtilfælde af sætning 1b i §4.2. Ved

$$\nu(E) = \int_E f d\mu = \int f \cdot 1_E d\mu , \quad E \in \mathbb{E},$$

defineres altså her et mål ν på E.

4.6. Summer $\Sigma_{j\in J} a_j$.

Hovedanvendelsen af det foregående er integration med hensyn til Lebesgue målet i $\mathbb{R}^d$. (Se §3.1, eksempel A.)

På dette sted vil vi imidlertid – som illustration af den almene teori – betragte integration med hensyn til tællemålet μ i en vilkårlig mængde $J \neq \emptyset$. (Se §3.1, eksempel B.)

Idet definitionsmængden for μ består af samtlige delmængder af J, er der ingen problemer med målelighed.

Sætning. For enhver funktion $f: J \to [0,\infty]$ er
$$\int_J f\,d\mu = \Sigma_{x\in J} f(x).$$

Bevis. For hvert $x \in J$ er $\int_{\{x\}} f\,d\mu = f(x)\cdot\mu(\{x\}) = f(x)$, og følgelig gælder
$$\int_I f\,d\mu = \Sigma_{x\in I} f(x)$$
for enhver endelig eller numerabel delmængde $I \subseteq J$ (se slutbemærkningen i §4.5). Ifølge sumdefinitionen (§0.3) er da
$$\int_J f\,d\mu \geqq \Sigma_{x\in J} f(x);$$
specielt gælder lighedstegn, hvis $\Sigma_{x\in J} f(x) = \infty$. Og hvis $\Sigma_{x\in J} f(x) < \infty$, vil $I = \{x\in J \mid f(x) \neq 0\}$ være højst numerabel (se §0.3), hvorfor
$$\int_J f\,d\mu = \int_I f\,d\mu + \int_{J\setminus I} f\,d\mu = \Sigma_{x\in I} f(x) + \Sigma_{x\in J\setminus I} f(x) = \Sigma_{x\in J} f(x).$$

En funktion $f: J \to \mathbb{R}$ eller $f: J \to \mathbb{C}$ er integrabel m.h.t. tællemålet μ i J, hvis og kun hvis
$$\Sigma_{x\in J} |f(x)| < \infty.$$
I bekræftende fald definerer vi summen $\Sigma_{x\in J} f(x)$ som integralet $\int_J f\,d\mu$. For $\mathcal{L}(J,\mu)$ skrives $\ell(J)$.

Er funktionen f skrevet som en familie $(a_j)_{j\in J}$ af tal, bliver sumbetegnelsen $\Sigma_{j\in J} a_j$, som i §0.3.

Er J endelig, f.eks. $J = \{1,\dots,n\}$, har summen $\Sigma_{j\in J}\, a_j = \Sigma_{j\in J}\, f(j)$ den sædvanlige betydning, idet regningen

$$\int_J f\,d\mu = a_1 \cdot \mu(\{1\}) + \dots + a_n \cdot \mu(\{n\}) = a_1 + \dots + a_n$$

gælder ikke blot i tilfældet $a_j \in [0,\infty]$, men også når tallene a_j alle er reelle eller komplekse.

En sum $\Sigma_{j\in\mathbb{N}}\, a_j$ med $\mathbb{N}$ som indeksmængde kan tolkes som en rækkesum $\Sigma_{j=1}^{\infty} a_j$, dvs.

$$\Sigma_{j=1}^{n} a_j \to \Sigma_{j\in\mathbb{N}}\, a_j \quad \text{for } n\to\infty,$$

ikke blot i tilfældet $a_j \in [0,\infty]$, men også når tallene a_j alle er reelle eller komplekse og $\Sigma_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < \infty$.

Tilfældet $a_j \in [0,\infty]$ er omtalt allerede i §0.3, og vi har siden benyttet det gentagne gange. I sidstnævnte tilfælde kan Lebesgues majorantsætning anvendes på grænseovergangen

$$f \cdot 1_{\{1,\dots,n\}} \to f = (a_j)_{j\in\mathbb{N}},$$

med $|f|$ som majorantfunktion. – For $a_j \in [0,\infty]$ kan Lebesgues monotonisætning i øvrigt anvendes på samme grænseovergang.

Med ℓ betegnes mængden af (reelle eller komplekse) talfølger $f = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, hvor

$$\Sigma_{j\in\mathbb{N}} |a_j| = \Sigma_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty,$$

altså talfølger, hvor rækken $\Sigma_{j=1}^{\infty} a_j$ er absolut konvergent.

Anderledes udtrykt drejer det sig om de (reelle eller komplekse) funktioner på $\mathbb{N}$, der er integrable m.h.t. tællemålet μ i $\mathbb{N}$. Altså $\ell = \mathcal{L}(\mathbb{N},\mu) = \ell(\mathbb{N})$.

Da rækkesummen $\Sigma_{j=1}^{\infty} a_j$ her, som netop vist, stemmer med integralet $\Sigma_{j\in\mathbb{N}}\, a_j = \int_{\mathbb{N}} f\,d\mu$, kan resultaterne i §§4.3, 4.4 såvel som mange senere resultater benyttes på absolut konvergente rækker, – ligesom §4.2 kan anvendes på rækker med positive led.

Eksempel. Som specialtilfælde af Lebesgues majorantsætning har vi:

Lad $\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}$, ... være rækker med reelle eller komplekse led og forudsæt, at følgen $a_{1j}, a_{2j}, \ldots$ er konvergent for hvert $j \in \mathbb{N}$. Hvis der findes en række $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ med $0 \leqq b_j$ og $\sum_{j=1}^{\infty} b_j < \infty$, således at $\forall n,j: |a_{nj}| \leqq b_j$, da er de givne rækker såvel som rækken $\sum_{j=1}^{\infty} \lim_n a_{nj}$ absolut konvergente, og om rækkesummerne gælder

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lim_n a_{nj} = \lim_n \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} .$$

Formentlig er det uhensigtsmæssigt således at opskrive specialtilfælde af vore integralsætninger. Det er nok bedre ved anvendelse på f.eks. rækker at tænke i et integralsprog.

4.7. Integral med hensyn til transformeret mål.

Lad $\mathbb{E}$ og $\mathbb{F}$ være σ-algebraer i ikke-tomme mængder X og Y og lad $\varphi: X \to Y$ være en målelig afbildning af $(X, \mathbb{E})$ ind i $(Y, \mathbb{F})$, dvs.

$$\forall B \in \mathbb{F}: \ \varphi^{-1}(B) = \{x \in X \mid \varphi(x) \in B\} \in \mathbb{E}.$$

Vi minder om, at $g \circ \varphi$ er en $\mathbb{E}$-målelig funktion på X, når g er en $\mathbb{F}$-målelig funktion på Y. (§2.2.)

Lad nu μ være et mål defineret på $\mathbb{E}$. Sætter vi

$$\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad B \in \mathbb{F},$$

da er ν, som man umiddelbart verificerer, et mål på $\mathbb{F}$. Videre gælder:

Sætning. For enhver $\mathbb{F}$-målelig funktion $g: Y \to [0,\infty]$ er

$$(*) \qquad \int_Y g \, d\nu = \int_X g \circ \varphi \, d\mu.$$

En $\mathbb{F}$-målelig funktion $g: Y \to \mathbb{R}$ eller $g: Y \to \mathbb{C}$ er integrabel m.h.t. ν, hvis og kun hvis $g \circ \varphi$ er integrabel m.h.t. μ. I bekræftende fald gælder $(*)$ også her.

Bevis. 1° For en indikatorfunktion 1_B på Y med $B \in \mathbb{F}$ er $1_B \circ \varphi = 1_{\varphi^{-1}(B)}$ og dermed

$$\int_Y 1_B \, d\nu = \nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \int_X 1_{\varphi^{-1}(B)} \, d\mu = \int_X 1_B \circ \varphi \, d\mu.$$

2° For en simpel funktion $s = \sum_{j=1}^n b_j \cdot 1_{B_j}$ på Y med $0 \leqq b_j < \infty$ og $B_j \in \mathbb{F}$, $j = 1, \dots, n$, er

$$\int_Y s \, d\nu = \sum_{j=1}^n b_j \int_Y 1_{B_j} \, d\nu = \sum_{j=1}^n b_j \int_X 1_{B_j} \circ \varphi \, d\mu = \int_X s \circ \varphi \, d\mu.$$

3° En $\mathbb{F}$-målelig funktion $g: Y \to [0,\infty]$ kan fås som grænsefunktion for en stigende følge $s_1 \leqq s_2 \leqq \dots$ af simple, $\mathbb{F}$-målelige funktioner $s_n: Y \to [0,\infty[$. (§4.2, lemma.) Idet $s_1 \circ \varphi \leqq s_2 \circ \varphi \leqq \dots$ og $g \circ \varphi = \lim_n (s_n \circ \varphi)$, giver Lebesgues monotonisætning

$$\int_Y g \, d\nu = \lim_n \int_Y s_n \, d\nu = \lim_n \int_X s_n \circ \varphi \, d\mu = \int_X g \circ \varphi \, d\mu.$$

4° Beviset fuldføres ved anvendelse af definitionerne på integral af reel og kompleks funktion.

Eksempler.

A. Lad μ være et mål defineret på en σ-algebra $\mathbb{E}$ i en mængde X. Er $\varphi: X \to \mathbb{R}$ en $\mathbb{E}$-målelig funktion, da kan ovenstående anvendes med $Y = \mathbb{R}$ og $\mathbb{F} = \mathbb{B} =$ Borel algebraen i $\mathbb{R}$. Målet ν på $\mathbb{R}$ kaldes <u>fordelingen</u> af φ. (Jfr. §16.2.)

B. Lad ν være defineret på en σ-algebra $\mathbb{F}$ i en mængde X og lad μ være en udvidelse af ν til et mål på en σ-algebra $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{F}$ i samme mængde X. For en $\mathbb{F}$-målelig funktion g kommer integration med hensyn til ν og μ da ud på ét.

Dette fremgår, idet man som φ benytter den identiske afbildning af X.

4.8. Integral med reel parameter.

Idet $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et målrum med $X \neq \emptyset$ og I et (begrænset eller ubegrænset) interval på $\mathbb{R}$, tænker vi os givet en funktion $f: X \times I \to \mathbb{R}$ eller $f: X \times I \to \mathbb{C}$.

For hvert $x \in X$ vil vi med $f(x,\cdot)$ eller f_x betegne snitfunktionen

$$t \to f(x,t), \quad t \in I,$$

medens vi for hvert $t \in I$ med $f(\cdot,t)$ eller f^t betegner snitfunktionen

$$x \to f(x,t), \quad x \in X.$$

Vi antager $f^t \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ for hvert $t \in I$ og betragter funktionen F defineret på I ved

$$F(t) = \int_X f^t d\mu = \int_X f(x,t)\, d\mu(x), \quad t \in I.$$

Ofte omtales F som „integralet $\int_X f(x,t)\, d\mu(x)$ som funktion af parameteren t".

Sætning 1. Antag yderligere, at alle snitfunktioner f_x er kontinuerte i samme punkt $t_0 \in I$. Findes der nu en funktion $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med $\int_X g\, d\mu < \infty$, således at

$$\forall t \in I \ \forall x \in X: \ |f(x,t)| \leqq g(x),$$

da er også F kontinuert i t_0.

Bevis. For enhver talfølge $t_1, t_2, \ldots \to t_0$, $t_n \in I$, vil funktionsfølgen $f^{t_1}, f^{t_2}, \ldots$ konvergere punktvis mod f^{t_0}. Vi har jo $f_x(t_n) \to f_x(t_0)$, dvs. $f(x,t_n) \to f(x,t_0)$ eller $f^{t_n}(x) \to f^{t_0}(x)$, for hvert $x \in X$. Når $\forall t \in I: |f^t| \leqq g$, hvor $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med $\int_X g\, d\mu < \infty$, sluttes derfor af Lebesgues majorantsætning, at $\int_X f^{t_n} d\mu \to \int_X f^{t_0} d\mu$, dvs. $F(t_n) \to F(t_0)$.

Sætning 2. Differentiation under integraltegnet. Ud over $\forall t \in I: f^t \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ antages her, at alle snitfunktioner f_x er differentiable i I, altså at den (partielle) afledede $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = Df_x(t)$ eksisterer for alle $x \in X$ og $t \in I$. Findes der nu en funktion $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$

med $\int_X g\,d\mu < \infty$, således at

$$\forall t \in I\ \forall x \in X:\ \left|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right| \leqq g(x),$$

da vil $x \to \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ tilhøre $\mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ for hvert $t \in I$, og F er differentiabel i I med

$$DF(t) = \frac{d}{dt}\int_X f(x,t)\,d\mu(x) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,d\mu(x).$$

Bevis. For fast $t \in I$ betragtes følgen

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_X \frac{f^{t_n} - f^t}{t_n - t}\,d\mu, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

af differenskvotienter svarende til en vilkårlig talfølge $t_1, t_2, \ldots \to t$ med $t_n \in I$, $t_n \neq t$, og det bemærkes, at funktionsfølgen $(f^{t_n} - f^t)/(t_n - t)$ konvergerer punktvis mod $x \to \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$. For hvert $x \in X$ har vi nemlig

$$\frac{f^{t_n}(x) - f^t(x)}{t_n - t} = \frac{f_x(t_n) - f_x(t)}{t_n - t} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Df_x(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(x,t).$$

Er f reel, findes der ifølge differentialregningens middelværdisætning et tal $\tau_{n,x}$ mellem t_n og t, således at

$$\frac{f_x(t_n) - f_x(t)}{t_n - t} = Df_x(\tau_{n,x}) = \frac{\partial}{\partial t} f(x, \tau_{n,x}).$$

Eksisterer nu en majorantfunktion g som beskrevet, har vi følgelig

$$\left|\frac{f^{t_n} - f^t}{t_n - t}\right| \leqq g \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N},$$

således at Lebesgues majorantsætning kan anvendes. Altså vil $x \to \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ tilhøre $\mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_X \frac{f^{t_n} - f^t}{t_n - t}\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,d\mu(x).$$

Er f kompleks, $f = f' + if''$, kan den reelle sætning anvendes på f' og f'', eller man kan modificere beviset ovenfor ved at anvende middelværdisætningen på f' og f'' og opnå majoriseringen

$$\left|\frac{f^{t_n} - f^t}{t_n - t}\right| \leqq g\sqrt{2}.$$

§5. Lebesgue målets indførelse.

5.1. Om længde af intervaller i $\mathbb{R}$.

Et hovedformål i §5 er at bevise følgende

Hovedsætning. Der findes et og kun et mål m defineret på Borel algebraen $\mathbb{B}$ i $\mathbb{R}$, hvis værdi $m(]a,b])$ for ethvert begrænset interval $]a,b] \subseteq \mathbb{R}$ er lig intervallængden $b-a$.

Det ved hovedsætningen bestemte mål m vil vi kalde Lebesgue målet i $\mathbb{R}$.

Et noget kompliceret bevis undgås ikke. I §5.1 gøres forberedelser til eksistensbeviset, i §§5.3-5.4 bestemmes et mål som ønsket, og i §5.5 vises, at der ikke er andre.

Lad os for §5.1 aftale, at alle intervaller, der omtales, er standard intervaller i $\mathbb{R}$, dvs. af form $]a,b]$ med $a,b \in \mathbb{R}$, – hvor andet da ikke direkte siges.

Lemma 1. (Additivitet.) Deles et interval $]a,b] \subseteq \mathbb{R}$ i endelig mange, parvis disjunkte intervaller $]c_j, d_j]$, da er

$$b-a = \Sigma_j (d_j - c_j).$$

Trivielt. Delintervallerne $]c_j, d_j]$ kan jo tænkes ordnet, så $a = c_1 < d_1 = c_2 < d_2 = c_3 < \dots < d_n = b$.

Vi skal se nedenfor, at længdemåling for intervaller i $\mathbb{R}$ ikke blot er additiv, men også numerabelt additiv (Korollar 2). Dette resultat, hvis gyldighed naturligvis er en nødvendig betingelse for eksistensen af et mål som ønsket, er ikke trivielt. (Længdemåling for intervaller i $\mathbb{Q}$ er således ikke numerabelt additiv!) Numerabelt mange intervaller kan ligge mere hulter til bulter, end man måske umiddelbart ville forestille sig.

Korollar 1. (Subadditivitet.) Overdækkes et interval $]a,b] \subseteq \mathbb{R}$ af endelig mange intervaller $]c_j,d_j]$, da er

$$b-a \leq \Sigma_j(d_j-c_j).$$

Elementært. Idet $e_0<e_1<\dots<e_n$ er samtlige forekommende intervalendepunkter ordnet efter størrelse, vil såvel $]a,b]$ som hvert $]c_j,d_j]$ være disjunkt forening af visse af intervallerne $]e_{k-1},e_k]$, $k=1,\dots,n$. Spaltes nu såvel $b-a$ som hvert d_j-c_j i en sum af led e_k-e_{k-1} efter lemma 1, da vil hvert led på ulighedens venstre side også forekomme på højre.

Lemma 2. (Numerabel subadditivitet.) Overdækkes et interval $]a,b] \subseteq \mathbb{R}$ af numerabelt mange intervaller $]c_j,d_j]$, da er

$$b-a \leq \Sigma_j(d_j-c_j).$$

Ved beviset er det nødvendigt at inddrage fundamentale egenskaber ved $\mathbb{R}$. (Lemmaet gælder ikke, hvis vi arbejder med intervaller i $\mathbb{Q}$ i stedet for $\mathbb{R}$!) Vi benytter Borels overdækningssætning.

Bevis. Det er nok at vise

$$b-a' \leq \Sigma_j(d_j-c_j)+\varepsilon$$

for vilkårligt a', $a<a'<b$, og vilkårligt $\varepsilon>0$.

Idet vi skriver ε på formen $\Sigma_j\varepsilon_j$ med $\varepsilon_j>0$ og sætter $d_j'=d_j+\varepsilon_j$, vil det afsluttede, begrænsede interval $[a',b]$ være overdækket af de åbne intervaller $]c_j,d_j'[$ og dermed (Borels overdækningssætning) allerede af endelig mange blandt disse, lad os sige

$$[a',b] \subseteq]c_{j_1},d_{j_1}'[\cup \dots \cup]c_{j_n},d_{j_n}'[.$$

Her kan vi naturligvis vende tilbage til standard intervaller $]a',b]$ og $]c_{j_k},d_{j_k}']$, hvorefter Korollar 1 giver, at uligheden

$$b-a' \leq \Sigma_j(d_j'-c_j)$$

er opfyldt, allerede når vi summerer over de endelig mange indices $j_1, \dots, j_n$.

Lemma 2 spiller en afgørende rolle i vort bevis for hovedsætningen, hvor det følgende resultat derimod ikke vil blive brugt. Det medtages dog her for en afrundings skyld.

Korollar 2. (Numerabel additivitet.) Deles et interval $]a,b] \subseteq \mathbb{R}$ i numerabelt mange, parvis disjunkte intervaller $]c_j, d_j]$, da er

$$b-a = \Sigma_j (d_j - c_j).$$

Bevis. Ved brug af lemma 1 sluttes, at

$$b-a \geqq \Sigma_j (d_j - c_j)$$

når endelig mange, parvis disjunkte intervaller $]c_j, d_j]$ er indeholdt i $]a,b]$. Man kan blot lade intervallerne $]c_j, d_j]$ indgå i en deling af $]a,b]$. - Generalisering af resultatet til uendelig mange $]c_j, d_j]$ er umiddelbar.

Den modsatte ulighed er indeholdt i lemma 2.

En generalisering.

Lad $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være voksende (dvs. $h(x) \leqq h(y)$ når $x < y$) og kontinuert fra højre.

Som vi senere (§5.5) skal se, findes der da et og kun et mål ν defineret på Borel algebraen $\mathcal{B}$ i $\mathbb{R}$, hvor

$$\nu(]a,b]) = h(b) - h(a)$$

for ethvert standard interval $]a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Dette mål vil vi kalde Lebesgue/Stieltjes målet eller Radon målet svarende til h.

Foreløbig bemærkes, at resultaterne (lemmaer og korollarer) ovenfor også gælder her, når ligning og ulighed ændres til

$$h(b) - h(a) = \Sigma_j (h(d_j) - h(c_j)), \quad h(b) - h(a) \leqq \Sigma_j (h(d_j) - h(c_j)).$$

I beviserne ændres de optrædende differenser $b-a$, d_j-c_j, ... ligeledes til tilvækster $h(b)-h(a)$, $h(d_j)-h(c_j)$, ... , medens $d_j' > d_j$ vælges, så $h(d_j') \leqq h(d_j)+\varepsilon_j$. Ellers ingen forandring. – Kontinuiteten fra højre udnyttes dels ved overgangen fra a til a', dels ved valget af d_j'.

Bemærk, at vi med $h(x)=x$ som et specialtilfælde er tilbage ved intervallængder.

5.2. Om volumen af intervaller i $\mathbb{R}^d$.

Længderne $b_i - a_i$ af intervallerne $I_i =]a_i, b_i]$ på $\mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$, kaldes kantlængder for intervallet $I = I_1 \times \dots \times I_d$ i $\mathbb{R}^d$. Vi sætter voluminet $v(I)$ af I til produktet af kantlængderne.

Hovedsætning. Der findes et og kun et mål m defineret på Borel algebraen $\mathbb{B}$ i $\mathbb{R}^d$, således at $m(I) = v(I)$ for ethvert standard interval I i $\mathbb{R}^d$.

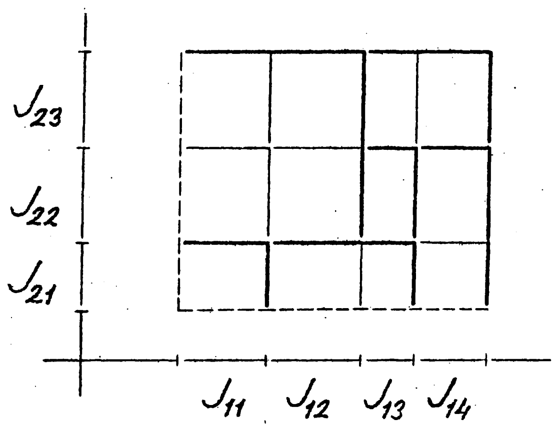
Det ved hovedsætningen bestemte mål m vil vi kalde Lebesgue målet i $\mathbb{R}^d$.

I §5.2 gøres forberedelser til eksistensbeviset, i §§5.3-5.4 bestemmes et mål som ønsket, og i §5.5 vises, at der ikke er andre.

Lemma 1. (Additivitet.) Deles et standard interval I i $\mathbb{R}^d$ i endelig mange, parvis disjunkte standard intervaller $I^{(j)}$, da er

$$v(I) = \Sigma_j v(I^{(j)}).$$

Elementært, omend beviset er lidt tungt at formulere: Idet $I = I_1 \times \dots \times I_d$ og $I^{(j)} = I_1^{(j)} \times \dots \times I_d^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$, vil endepunkterne af intervallerne $I_i^{(1)}, \dots, I_i^{(n)} \subseteq \mathbb{R}$ ordnet efter størrelse give en inddeling af $I_i \subseteq \mathbb{R}$ i standard intervaller



$$J_{i1} =]e_{i0}, e_{i1}],\ J_{i2} =]e_{i1}, e_{i2}], \dots$$
$$\dots J_{iq_i} =]e_{i,q_{i-1}}, e_{iq_i}].$$

Intervallet $I \subseteq \mathbb{R}^d$ består nu af de $q_1 q_2 \cdots q_d$ „byggeklodser"

$$J_{1p_1} \times J_{2p_2} \times \dots \times J_{dp_d},\quad p_i = 1, \dots, q_i,$$

og ved at gange ud på højre side i ligningen

$$v(I) = \Pi_{i=1}^{d}(e_{iq_i} - e_{i0}) = \Pi_{i=1}^{d} \Sigma_{p=1}^{q_i}(e_{ip} - e_{i,p-1})$$

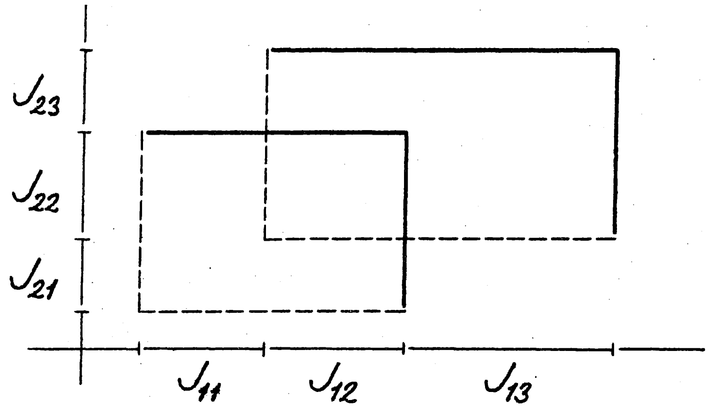
ser man, at $v(I)$ er lig summen af klodsernes voluminer. Hvert $I^{(j)} \subseteq \mathbb{R}^d$ vil imidlertid på tilsvarende vis bestå af visse af klodserne, ligesom $v(I^{(j)})$ er lig summen af de pågældende klodsers voluminer.

Bemærkning 1. Lad $I^{(1)}, \dots, I^{(n)}$ være vilkårlige standard intervaller i $\mathbb{R}^d$. Der findes da <u>parvis</u> <u>disjunkte</u> standard intervaller $J^{(1)}, \dots, J^{(p)}$, således at hvert $I^{(j)}$ er forening af visse $J^{(k)}$.

Man kan opfatte $J^{(1)}, \dots, J^{(p)}$ som et sæt byggeklodser, der tillader opbygning af et hvilket som helst $I^{(j)}$.

Konsekvens: Enhver mængde dannet ud fra endelig mange standard intervaller $I^{(1)}, \dots, I^{(n)}$ ved de sædvanlige mængdeoperationer $\cup$, $\cap$ og $\setminus$, som f.eks. $\cup_{j=1}^{n} I^{(j)}$, $I^{(n)} \setminus \cup_{j=1}^{n-1} I^{(j)}$, kan, hvis den da ikke er tom, skrives som forening af endelig mange, <u>parvis</u> <u>disjunkte</u> standard intervaller.

Bevis for bemærkning. Idet $I^{(j)} = I_1^{(j)} \times \dots \times I_d^{(j)}$, vil endepunk-



terne af intervallerne $I_i^{(1)}, \dots, I_i^{(n)} \subseteq \mathbb{R}$ ordnet efter størrelse bestemme en række standard intervaller på $\mathbb{R}$,

$$J_{i1} =]e_{i0}, e_{i1}], \ J_{i2} =]e_{i1}, e_{i2}], \ \dots \ , J_{iq_i} =]e_{i,q_i-1}, e_{iq_i}] .$$

Et brugbart sæt byggeklodser vil nu være de $q_1 q_2 \cdot \dots \cdot q_d$ intervaller

$$J_{1p_1} \times J_{2p_2} \times \dots \times J_{dp_d}, \ p_i = 1, \dots, q_i .$$

Korollar 1. (Subadditivitet.) Overdækkes et standard interval I i $\mathbb{R}^d$ af endelig mange standard intervaller $I^{(j)}$, da er

$$v(I) \leqq \Sigma_j\, v(I^{(j)}).$$

Elementært. Ifølge bemærkningen findes parvis disjunkte standard intervaller $J^{(1)}, \ldots, J^{(p)}$ i $\mathbb{R}^d$, således at såvel I som hvert $I^{(j)}$ er forening af visse $J^{(k)}$. Spaltes nu såvel $v(I)$ som hvert $v(I^{(j)})$ i en sum af led $v(J^{(k)})$ efter lemma 1, da vil hvert led på ulighedens venstre side også forekomme på højre.

Lemma 2. (Numerabel subadditivitet.) Overdækkes et standard interval I i $\mathbb{R}^d$ af numerabelt mange standard intervaller $I^{(j)}$, da er

$$v(I) \leqq \Sigma_j\, v(I^{(j)}) .$$

Bevis. Det er nok for vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ at vise

$$v(I) - \varepsilon \leqq \Sigma_j\, v(I^{(j)}) + \varepsilon .$$

Lad H være et standard interval med afslutning $\bar{H} \subseteq I$ og volumen $v(H) \geqq v(I) - \varepsilon$. Idet ε skrives på formen $\Sigma_j \varepsilon_j$ med $\varepsilon_j > 0$, tænkes videre valgt standard intervaller $J^{(j)}$ med indre $\mathring{J}^{(j)} \supseteq I^{(j)}$ og volumen $v(J^{(j)}) \leqq v(I^{(j)}) + \varepsilon_j$.

Det afsluttede, begrænsede interval $\bar{H}$ er nu overdækket af de åbne intervaller $\mathring{J}^{(j)}$ og dermed ifølge Borels overdækningssætning allerede af endelig mange blandt disse, lad os sige

$$\bar{H} \subseteq \mathring{J}^{(j_1)} \cup \ldots \cup \mathring{J}^{(j_n)}.$$

Da nu $H \subseteq J^{(j_1)} \cup \ldots \cup J^{(j_n)}$, giver korollar 1

$$v(H) \leqq \Sigma_{p=1}^{n}\, v(J^{(j_p)}),$$

altså

$$v(I) - \varepsilon \leqq v(H) \leqq \Sigma_{p=1}^{n}\, v(J^{(j_p)}) \leqq \Sigma_j\, v(J^{(j)}) \leqq \Sigma_j\, v(I^{(j)}) + \varepsilon .$$

Lemma 2 spiller en afgørende rolle i vort bevis for hovedsætningen, hvor det følgende resultat derimod ikke vil blive brugt. Det medtages dog her for en afrundings skyld.

<u>Korollar 2.</u> (<u>Numerabel additivitet.</u>) <u>Deles et standard interval I i $\mathbb{R}^d$ i numerabelt mange, parvis disjunkte standard intervaller $I^{(j)}$, da er</u>
$$v(I) = \Sigma_j\, v(I^{(j)}).$$

Bevis. Ved brug af lemma 1 sluttes, at
$$v(I) \geqq \Sigma_j\, v(I^{(j)}),$$
når endelig mange, parvis disjunkte standard intervaller $I^{(j)}$ er indeholdt i I. Man kan nemlig lade intervallerne indgå i en deling af I ved om fornødent at splitte $I \setminus \bigcup_j I^{(j)}$ i standard intervaller (jfr. konsekvens af bemærkning 1). – Generalisering af resultatet til uendelig mange $I^{(j)}$ er umiddelbar.

Den modsatte ulighed er indeholdt i lemma 2.

Bemærkning 2. En funktion $\alpha: \mathbb{A} \to [0,\infty]$ defineret på en mængde $\mathbb{A}$ af mængder kalder vi
<u>additiv</u> (henholdsvis <u>numerabelt additiv</u>), hvis
$$\alpha(A) = \Sigma_j\, \alpha(A_j),$$
når $A \in \mathbb{A}$ deles i endelig (henholdsvis numerabelt) mange, parvis disjunkte $A_j \in \mathbb{A}$,
<u>subadditiv</u> (henholdsvis <u>numerabelt subadditiv</u>), hvis
$$\alpha(A) \leqq \Sigma_j\, \alpha(A_j),$$
når $A \in \mathbb{A}$ overdækkes af endelig (henholdsvis numerabelt) mange $A_j \in \mathbb{A}$.

Hvis $\emptyset \in \mathbb{A}$ og $\alpha(\emptyset) = 0$, vil numerabel additivitet (henh. numerabel subadditivitet) trivielt medføre additivitet (henh. subadditivitet).

Bemærkning 3. Vi vil med $\mathbb{I} = \mathbb{I}_d$ betegne mængden af standard intervaller i $\mathbb{R}^d$ suppleret med den tomme mængde $\emptyset$. Idet vi sætter $v(\emptyset) = 0$, kan korollar 1 og lemma 2 da under ét udtrykkes:

<u>voluminet</u> $v : \mathbb{I} \to [0,\infty[$ <u>er</u> <u>numerabelt</u> <u>subadditivt</u>, dvs.

$$v(I) \leqq \sum_{j\in\mathbb{N}} v(I^{(j)}) \quad \text{når } I \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I^{(j)},\ I \in \mathbb{I} \text{ og } I^{(j)} \in \mathbb{I}.$$

Tilsvarende kan lemma 1 og korollar 2 under et udtrykkes: <u>voluminet</u> $v : \mathbb{I} \to [0,\infty[$ <u>er</u> <u>numerabelt</u> <u>additivt</u>.

5.3. Udvidelse til ydre mål.

Lad $\varkappa: \mathbb{K} \to [0,\infty]$ være en funktion defineret på en mængde $\mathbb{K}$ af delmængder af en mængde X. Vi forudsætter, at $\emptyset \in \mathbb{K}$ og $\varkappa(\emptyset) = 0$.

Ud fra $\varkappa$ defineres en funktion $\varkappa^*: \mathbb{P}(X) \to [0,\infty]$ på mængden $\mathbb{P}(X)$ af alle delmængder af X, idet vi for hvert $A \subseteq X$ sætter

$$\varkappa^*(A) = \inf \Sigma_n \varkappa(I_n),$$

hvor nedre grænse tages over alle numerable familier (I_n) med $I_n \in \mathbb{K}$ og $A \subseteq \bigcup_n I_n$; - findes der ingen sådan overdækning af A, sætter vi $\varkappa^*(A) = \infty$.

Det er klart, at $\varkappa^*(I) \leq \varkappa(I)$ for hvert $I \in \mathbb{K}$; specielt er $\varkappa^*(\emptyset) = 0$.

Thi $I \subseteq I \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$.

Videre bemærkes, at $\varkappa^*$ er numerabelt subadditiv: Overdækkes $A \subseteq X$ af numerabelt mange $A_n \subseteq X$, da er

$$\varkappa^*(A) \leq \Sigma_n \varkappa^*(A_n).$$

Thi er højre side endelig og skrives et vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ på formen $\varepsilon = \Sigma_n \varepsilon_n$ med $\varepsilon_n > 0$, da findes for hvert n mængder $I_{n1}, I_{n2}, \ldots \in \mathbb{K}$ med $A_n \subseteq \bigcup_j I_{nj}$, således at

$$\Sigma_j \varkappa(I_{nj}) < \varkappa^*(A_n) + \varepsilon_n.$$

Nu vil samtlige I_{nj} overdække A, hvorfor

$$\varkappa^*(A) \leq \Sigma_{n,j} \varkappa(I_{nj}),$$

altså $\quad \varkappa^*(A) \leq \Sigma_n \Sigma_j \varkappa(I_{nj}) < \Sigma_n(\varkappa^*(A_n) + \varepsilon_n) = \Sigma_n \varkappa^*(A_n) + \varepsilon.$

Vi kan kalde $\varkappa^*$ __det af $\varkappa$ frembragte ydre mål i__ X.

Ved et __ydre mål__ i en mængde X forstås nemlig en numerabelt subadditiv funktion $\alpha: \mathbb{P}(X) \to [0,\infty]$ med $\alpha(\emptyset) = 0$.

Et ydre mål er i almindelighed ikke et mål. Navnet er således uheldigt.

Det af $\varkappa$ frembragte ydre mål i X vil være en udvidelse af $\varkappa$, dvs.

$$\varkappa^*(I) = \varkappa(I) \quad \text{for hvert } I \in \mathbb{K},$$

hvis og kun hvis $\varkappa$ er numerabelt subadditiv.

Thi for givet $I \in \mathbb{K}$ er $\varkappa^*(I) \leqq \varkappa(I)$, medens uligheden $\varkappa(I) \leqq \varkappa^*(I)$ ifølge definitionen af $\varkappa^*(I)$ vil gælde, hvis og kun hvis $\varkappa(I) \leqq \sum_n \varkappa(I_n)$ for enhver numerabel overdækning $I \subseteq \bigcup_n I_n$, $I_n \in \mathbb{K}$.

Hovedeksempel. Det ydre Lebesgue mål i $\mathbb{R}^d$ definerer vi som det ydre mål v^* frembragt af voluminet v for standard intervaller i $\mathbb{R}^d$ (strengt taget: frembragt af funktionen $v: \mathbb{I} \to [0,\infty[$; se §5.2, bem. 3). Det ydre Lebesgue mål v^* er en udvidelse af v, dvs. for ethvert standard interval I i $\mathbb{R}^d$ er

$$v^*(I) = v(I) = \text{produktet af kantlængderne for } I,$$

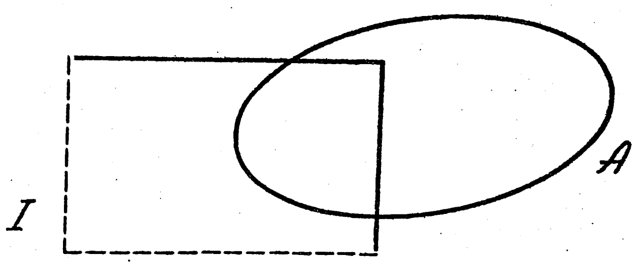
thi $v: \mathbb{I} \to [0,\infty[$ er som vist (§5.2) numerabelt subadditiv.

5.4. Caratheodorys sætning.

Det ydre Lebesgue mål i $\mathbb{R}^d$ er ikke additivt. (Øvelse 6.7.)
Dog gælder
$$v^*(A) = v^*(A \cap I) + v^*(A \setminus I)$$
for ethvert $A \subseteq \mathbb{R}^d$, når I er et standard interval.

Mere generelt:

Sætning 1. Lad $\varkappa^*$ betegne det ydre mål i $\mathbb{R}^d$ frembragt af en additiv funktion $\varkappa: \mathbb{I} \to [0,\infty]$ med $\varkappa(\emptyset) = 0$, hvor $\mathbb{I}$ betegner mængden af standard intervaller i $\mathbb{R}^d$ suppleret med $\emptyset$. Der gælder da
$$\varkappa^*(A) = \varkappa^*(A \cap I) + \varkappa^*(A \setminus I),$$
når $A \subseteq \mathbb{R}^d$ og $I \in \mathbb{I}$.



Bevis. Idet et ydre mål er subadditivt, er det nok at vise, at
$$\varkappa^*(A \cap I) + \varkappa^*(A \setminus I) \leqq \varkappa^*(A),$$
altså ifølge definitionen på $\varkappa^*(A)$ at
$$\varkappa^*(A \cap I) + \varkappa^*(A \setminus I) \leqq \Sigma_n \varkappa(I_n),$$
når $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, $I_n \in \mathbb{I}$.

Da er imidlertid $A \cap I \subseteq \bigcup_n (I_n \cap I)$ og dermed
$$\varkappa^*(A \cap I) \leqq \Sigma_n \varkappa(I_n \cap I).$$
Ligeledes er $A \setminus I \subseteq \bigcup_n (I_n \setminus I)$. Her kan hvert $I_n \setminus I$ skrives som disjunkt forening $\bigcup_{p=1}^{q_n} J_{np}$ af endelig mange $J_{n1}, J_{n2}, \ldots, J_{nq_n} \in \mathbb{I}$. (§5.2, konsekvens af bemærkning 1.) Idet samtlige J_{np} overdækker $A \setminus I$, har vi
$$\varkappa^*(A \setminus I) \leqq \Sigma_{n,p} \varkappa(J_{np}) = \Sigma_n \Sigma_{p=1}^{q_n} \varkappa(J_{np}),$$

og idet $\varkappa$ er additiv, og $I_n \cap I, J_{n1}, J_{n2}, \dots, J_{nq_n} \in \mathbb{I}$ er parvis disjunkte med forening I_n, gælder

$$\varkappa(I_n \cap I) + \Sigma_{p=1}^{q_n} \varkappa(J_{np}) = \varkappa(I_n).$$

Sammenholdt:

$$\varkappa^*(A \cap I) + \varkappa^*(A \setminus I) \leqq \Sigma_n \varkappa(I_n \cap I) + \Sigma_n \Sigma_{p=1}^{q_n} \varkappa(J_{np})$$
$$= \Sigma_n (\varkappa(I_n \cap I) + \Sigma_{p=1}^{q_n} \varkappa(J_{np})) = \Sigma_n \varkappa(I_n).$$

Lad nu α være et vilkårligt ydre mål i en mængde X, dvs. α er en funktion defineret på mængden $\mathbb{P}(X)$ af alle delmængder af X, hvor

(i) $\alpha(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ for hvert $A \subseteq X$, $\alpha(\emptyset) = 0$

(ii) $\alpha(A) \leqq \Sigma_n \alpha(A_n)$, når $A_1, A_2, \dots \subseteq X$ og $A \subseteq \bigcup_n A_n$.

Definition (inspireret af sætning 1). En mængde $E \subseteq X$ kaldes <u>målelig</u> <u>med</u> <u>hensyn</u> <u>til</u> <u>det</u> <u>ydre</u> <u>mål</u> α (kort: α-<u>målelig</u>), hvis

$$\forall A \subseteq X: \ \alpha(A) = \alpha(A \cap E) + \alpha(A \setminus E).$$

Denne betingelse (hvor „$=$" naturligvis kan erstattes af „$\geqq$") såvel som det almene begreb ydre mål skyldes Constantin Caratheodory. (Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1914, Math.-Phys. Klasse, p. 405 ff.) Betydningen ligger i

<u>Caratheodorys sætning.</u> <u>Restriktionen</u> $\mu = \alpha|_{\mathbb{M}}$ <u>af et ydre mål</u> α <u>i</u> X <u>til mængden</u> $\mathbb{M}$ <u>af</u> α-<u>målelige mængder er et mål i</u> X.

Det vil være bekvemt under beviset at have begrebet <u>mængde-algebra</u> i en mængde X til rådighed. Herved forstås en mængde $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$, hvor (i) $X \in \mathbb{A}$, (ii) $\complement E \in \mathbb{A}$, når $E \in \mathbb{A}$, (iii) $E \cup F \in \mathbb{A}$, når $E, F \in \mathbb{A}$.

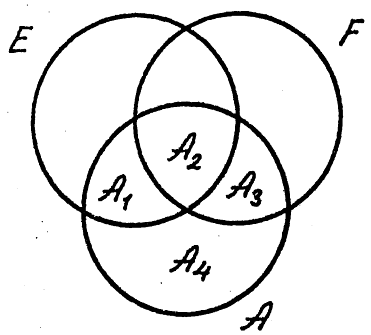
Konsekvenser: $\bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathbb{A}$ (induktion) og $\bigcap_{j=1}^n E_j \in \mathbb{A}$, når $E_1, \dots, E_n \in \mathbb{A}$, ligesom $E \setminus F = E \cap \complement F \in \mathbb{A}$, når $E, F \in \mathbb{A}$.

En foreningsmængde $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ med $E_j \in \mathbb{A}$ kan skrives som forening $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ af parvis disjunkte mængder $F_j \in \mathbb{A}$ med $F_j \subseteq E_j$, nemlig (jfr. p. 32)

$$F_1 = E_1, \quad F_j = E_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i, \ j = 2, 3, \dots .$$

Bevis for Caratheodorys sætning.

1° $\mathbb{M}$ er en mængdealgebra i X.

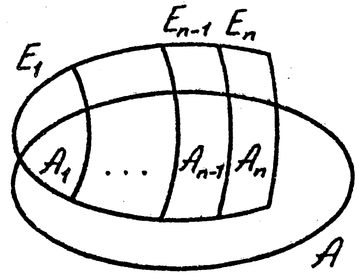


Thi det er oplagt, at $X \in \mathbb{M}$, og at $CE \in \mathbb{M}$, når $E \in \mathbb{M}$. Og med $E, F \in \mathbb{M}$ sluttes $E \cup F \in \mathbb{M}$, idet vi for vilkårligt $A \subseteq X$ med brug af figurens betegnelser finder

$$\begin{aligned}\alpha(A) &= \alpha(A_1 \cup A_2) + \alpha(A_3 \cup A_4)\\ &= \alpha(A_1 \cup A_2) + \alpha(A_3) + \alpha(A_4)\\ &= \alpha(A_1 \cup A_2 \cup A_3) + \alpha(A_4) = \alpha(A \cap (E \cup F)) + \alpha(A \setminus (E \cup F)).\end{aligned}$$

Her er først udnyttet $E \in \mathbb{M}$, derpå $F \in \mathbb{M}$ og endelig pány $E \in \mathbb{M}$.

2° Når $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathbb{M}$ er parvis disjunkte og $A \subseteq X$, gælder



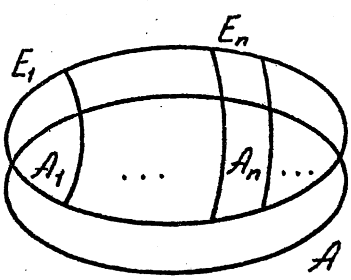
$$\alpha\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha(A_j),$$

hvor vi for overskueligheds skyld har sat $A \cap E_j = A_j$.

Bevises ved induktion. Påstanden er triviel for $n=1$, og for $n \geqq 2$ finder vi ved at udnytte $E_n \in \mathbb{M}$, at

$$\alpha\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \alpha\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) + \alpha(A_n).$$

3° Når $E_1, E_2, \dots \in \mathbb{M}$ er parvis disjunkte og $A \subseteq X$, gælder



$$\begin{aligned}\alpha(A) &\leqq \alpha\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \alpha\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\\ &\leqq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A_j) + \alpha\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leqq \alpha(A),\end{aligned}$$

hvor vi for overskueligheds skyld har sat $A \cap E_j = A_j$.

De to første ulighedstegn er oplagte, og hvad det sidste angår, vil det være nok for vilkårligt $n \in \mathbb{N}$ at vise

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha(A_j) + \alpha(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leqq \alpha(A)$$

eller, hvad der ifølge 2° kommer ud på det samme,

$$\alpha(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) + \alpha(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leqq \alpha(A).$$

Imidlertid er $\quad \alpha(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) + \alpha(A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \alpha(A),$

idet $\bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \mathbb{M}$ ifølge 1°.

4° $\quad \mathbb{M}$ er en σ-algebra i X.

Er nemlig $E_1, E_2, \ldots \in \mathbb{M}$ parvis disjunkte, vil $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ igen tilhøre $\mathbb{M}$; thi for vilkårligt $A \subseteq X$ har vi ifølge 3°

$$\alpha(A) = \alpha(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) + \alpha(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j).$$

Og enhver forening $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ med $E_j \in \mathbb{M}$ kan ifølge 1° skrives $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ med parvis disjunkte $F_j \in \mathbb{M}$.

5° $\quad$ Restriktionen $\mu = \alpha|_{\mathbb{M}}$ er et mål i X.

Vi skal endnu godtgøre, at $\alpha(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(E_j)$, når $E_1, E_2, \ldots \in \mathbb{M}$ er parvis disjunkte. Det er imidlertid indeholdt i ligningen

$$\alpha(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A \cap E_j) + \alpha(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$$

fra 3°: benyt specielt $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$.

Bemærkning. Enhver mængde $M \subseteq X$ med $\alpha(M) = 0$ er α-målelig. Thi for $A \subseteq X$ er $\alpha(A) \leqq \alpha(A \cap M) + \alpha(A \setminus M) = 0 + \alpha(A \setminus M) \leqq \alpha(A)$.

Konsekvens. Målet $\mu : \mathbb{M} \to [0, \infty]$ i Caratheodorys sætning er <u>fuldstændigt</u>. Hermed menes, at enhver μ-nulmængde tilhører $\mathbb{M}$, dvs.

$$M \subseteq N \text{ og } N \in \mathbb{M} \text{ med } \mu(N) = 0 \;\Rightarrow\; M \in \mathbb{M}.$$

Hovedeksempel: $X = \mathbb{R}^d$, $\alpha = v^*$.

En mængde $E \subseteq \mathbb{R}^d$, der er målelig med hensyn til det ydre Lebesgue mål v^* i $\mathbb{R}^d$, kaldes også <u>Lebesgue</u> <u>målelig</u>. En funktion, der er målelig med hensyn til σ-algebraen $\mathbb{L} = \mathbb{L}_d$ af Lebesgue målelige mængder i $\mathbb{R}^d$, kaldes ligeledes <u>Lebesgue</u> <u>målelig</u>. Målet $v^*|_{\mathbb{L}}$ vil vi kalde <u>det</u> <u>fuldstændige</u> <u>Lebesgue</u> <u>mål</u> i $\mathbb{R}^d$.

Enhver Borel mængde (og dermed enhver Borel funktion) i $\mathbb{R}^d$ er Lebesgue målelig.

Thi σ-algebraen $\mathbb{L}$ indeholder ifølge sætning 1 alle standard intervaller i $\mathbb{R}^d$, hvorfor $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{L}$.

Restriktionen $v^*|_{\mathbb{B}}$ er derfor også et mål, og da den ifølge §5.3 er en udvidelse af voluminet v for standard intervaller i $\mathbb{R}^d$, er eksistensdelen af hovedsætningen i §5.2 (og §5.1) nu bevist.

For en funktion $\varkappa: \mathbb{I} \to [0,\infty]$ med $\varkappa(\emptyset) = 0$, defineret på mængden $\mathbb{I}$ af standard intervaller i $\mathbb{R}^d$ suppleret med $\emptyset$, finder vi tilsvarende, idet $\varkappa^*$ betegner det af $\varkappa$ frembragte ydre mål i $\mathbb{R}^d$:

<u>Sætning 2.</u> <u>Hvis $\varkappa$ er additiv og numerabelt subadditiv, så er restriktionen $\varkappa^*|_{\mathbb{B}}$ en udvidelse af $\varkappa$ til et mål på Borel algebraen $\mathbb{B}$ i $\mathbb{R}^d$.</u>

Additivitet af $\varkappa$ sikrer nemlig, at $\varkappa^*|_{\mathbb{B}}$ er et mål (sætning 1 og Caratheodorys sætning), medens numerabel subadditivitet er nødvendig og tilstrækkelig for, at $\varkappa^*|_{\mathbb{B}}$ er en udvidelse af $\varkappa$ (§5.3).

Med $d=1$ og $\varkappa(]a,b]) = h(b) - h(a)$, hvor $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er voksende og kontinuert fra højre, er forudsætningerne i sætning 2 opfyldt. (§5.1, En generalisering.)

5.5. Radon mål i $\mathbb{R}^d$. (Lebesgue/Stieltjes mål.)

Et mål defineret på Borel algebraen $\mathbb{B}$ i $\mathbb{R}^d$, der har endelig værdi for enhver begrænset Borel mængde, vil vi kalde et Radon mål i $\mathbb{R}^d$. (Johann Radon behandlede integration med hensyn til mål i $\mathbb{R}^d$, Sitzungsberichte der Math.-Naturwiss. Klasse der Akademi der Wissenschaften, Wien 1913.) Ofte siges i stedet Borel mål i $\mathbb{R}^d$ eller Lebesgue/Stieltjes mål. (Jfr. de afsluttende linier i §5.5.)

Anskues et mål ν på Borel algebraen i $\mathbb{R}^d$ som beskrivelse af en massefordeling, turde betingelsen $\nu(B)<\infty$ for begrænsede Borel mængder B forekomme naturlig: der er ikke ophobet en uendelig stor masse i nogen begrænset del af $\mathbb{R}^d$.

Det er selvfølgelig nok at forlange $\nu(I)<\infty$ for ethvert standard interval I i $\mathbb{R}^d$.

Sætning. Er ν et Radon mål i $\mathbb{R}^d$, da gælder for enhver Borel mængde B

$$\nu(B) = \inf \Sigma_{n\in\mathbb{N}} \nu(I_n),$$

hvor nedre grænse tages over alle følger $I_1, I_2, \ldots$ med $I_n \in \mathbb{I}$ og $B \subseteq \bigcup_n I_n$.

Her betegner $\mathbb{I}$ som sædvanlig mængden af standard intervaller i $\mathbb{R}^d$ suppleret med $\emptyset$.

Bevis. Idet vi med $\varkappa$ betegner restriktionen $\nu|_{\mathbb{I}}$ af ν til $\mathbb{I}$, medens $\varkappa^*$ er det af $\varkappa$ frembragte ydre mål i $\mathbb{R}^d$ (§5.3), kan påstanden udtrykkes:

$$\nu(B) = \varkappa^*(B) \quad \text{for enhver Borel mængde } B.$$

Beviset føres i tre skridt.

1° $\nu(B) \leq \varkappa^*(B)$ for enhver Borel mængde B.

Trivielt. For enhver følge $I_1, I_2, \ldots$ med $I_n \in \mathbb{I}$ og $B \subseteq \bigcup_n I_n$ er jo

$$\nu(B) \leq \nu(\bigcup_n I_n) \leq \Sigma_n \nu(I_n) = \Sigma_n \varkappa(I_n).$$

I 2° og 3° udnytter vi, at $\varkappa^*|_{\mathbb{B}}$ er en udvidelse af $\varkappa$ til et mål (§5.4, sætning 2).

2° $\nu(B) = \varkappa^*(B)$ for enhver begrænset Borel mængde B.

Thi med $B \subseteq I$, $I \in \mathbb{I}$ har vi
$$\nu(I) = \varkappa(I) = \varkappa^*(I) = \varkappa^*(B) + \varkappa^*(I \setminus B),$$
ligesom
$$\nu(I) = \nu(B) + \nu(I \setminus B).$$
Idet $\nu(I) < \infty$, slutter vi, at der i ulighederne $\nu(B) \leqq \varkappa^*(B)$ og $\nu(I \setminus B) \leqq \varkappa^*(I \setminus B)$ må gælde lighedstegn.

3° $\nu(B) = \varkappa^*(B)$ for enhver Borel mængde B.

Thi B kan skrives som forening $B = \bigcup_n B_n$ af numerabelt mange, parvis disjunkte, begrænsede Borel mængder B_n. F.eks. kan man splitte $\mathbb{R}^d$ i standard intervaller I_n og sætte $B_n = B \cap I_n$. Vi har så
$$\nu(B) = \Sigma_n \nu(B_n) = \Sigma_n \varkappa^*(B_n) = \varkappa^*(B).$$

<u>Korollar 1. To Radon mål i $\mathbb{R}^d$, der stemmer overens for alle standard intervaller, er identiske.</u>

Klart.

Dette resultat omfatter specielt entydighedsdelen af hovedsætningen i §5.2 (og §5.1).

(Vi skal senere (§7.2, bemærkning) se korollar 1 opnået ad anden vej.)

De to følgende korollarer bruges ikke andetsteds i noterne.

<u>Korollar 2. Er ν et Radon mål og B en Borel mængde i $\mathbb{R}^d$, gælder</u>
$$\nu(B) = \inf\{\nu(G) \mid G \text{ åben}, G \supseteq B\}.$$
<u>Endvidere findes for hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ en åben mængde $G \supseteq B$, så</u>
$$\nu(G \setminus B) < \varepsilon.$$

Bevis. Det er klart, at $\nu(B) \leqq \inf\{\nu(G) \mid G \text{ åben}, G \supseteq B\}$.

1° For ethvert standard interval I er
$$\nu(I) = \inf\{\nu(G) \mid G \text{ åben}, G \supseteq I\} ;$$
thi skrives $I = \bigcap_m H_m$, hvor $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \ldots$ er en dalende følge af begrænsede, åbne mængder, f. eks.
$$I = \{(x_1,\ldots,x_d) \mid a_i < x_i \leqq b_i\} = \bigcap_m \{(x_1,\ldots,x_d) \mid a_i < x_i < b_i + \tfrac{1}{m}\},$$
har vi $\nu(H_m) \to \nu(I)$.

2° For en vilkårlig Borel mængde B findes (også hvis $\nu(B) = \infty$) ifølge sætningen ovenfor til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ en følge $I_1, I_2, \ldots$ med $I_n \in \mathbb{I}$ og $B \subseteq \bigcup_n I_n$, således at
$$\textstyle\sum_n \nu(I_n) \leqq \nu(B) + \frac{1}{2}\varepsilon .$$
Skrives nu $\frac{1}{2}\varepsilon = \sum_n \varepsilon_n$ med $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_+$, og tænkes ifølge 1° valgt åbne mængder $G_n \supseteq I_n$ med $\nu(G_n) < \nu(I_n) + \varepsilon_n$, da er $G = \bigcup_n G_n$ åben, $G \supseteq B$ og
$$\nu(G) \leqq \textstyle\sum_n \nu(G_n) \leqq \sum_n \nu(I_n) + \sum_n \varepsilon_n \leqq \nu(B) + \varepsilon .$$
Hermed har vi Korollarets første påstand.

3° Er $\nu(B) < \infty$, får vi i 2°, at
$$\nu(G) < \nu(B) + \varepsilon, \quad \text{dvs.} \quad \nu(G \setminus B) < \varepsilon .$$

4° En vilkårlig Borel mængde B kan skrives $B = \bigcup_n B_n$, hvor (B_n) er en følge af Borel mængder B_n med $\nu(B_n) < \infty$. Skrives nu $\varepsilon = \sum_n \varepsilon_n$ med $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_+$, og tænkes ifølge 3° valgt åbne mængder $G_n \supseteq B_n$ med $\nu(G_n \setminus B_n) < \varepsilon_n$, da er $G = \bigcup_n G_n$ åben, $G \supseteq B$, og idet
$$G \setminus B = \textstyle\bigcup_n (G_n \setminus B) \subseteq \bigcup_n (G_n \setminus B_n),$$
har vi $\nu(G \setminus B) \leqq \sum_n \nu(G_n \setminus B_n) < \sum_n \varepsilon_n = \varepsilon$.

<u>Korollar 3.</u> <u>Er</u> ν <u>et</u> <u>Radon mål</u> <u>og</u> B <u>en</u> <u>Borel</u> <u>mængde</u> <u>i</u> $\mathbb{R}^d$, <u>da findes</u> <u>for hvert</u> $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ <u>en</u> <u>afsluttet</u> <u>mængde</u> $F \subseteq B$, <u>så</u> $\nu(B \setminus F) < \varepsilon$. <u>Endvidere gælder</u>

$$\nu(B) = \sup\{\nu(C) \mid C \text{ kompakt}, \ C \subseteq B\}.$$

Bevis. 1° Ifølge korollar 2 findes en åben mængde $G \supseteq \complement B$, så $\nu(G \setminus \complement B) < \varepsilon$. Som F kan da benyttes $\complement G$, idet

$$B \setminus \complement G = B \cap G = G \setminus \complement B.$$

2° For hvert $a < \nu(B)$ findes altså en afsluttet mængde $F \subseteq B$ med $\nu(F) > a$. Videre findes en følge $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$ af kompakte mængder C_n med $F = \bigcup_n C_n$, f.eks. $C_n = F \cap \{(x_1, \ldots, x_d) \mid -n \leq x_i \leq n\}$. Da nu $\nu(C_n) \to \nu(F)$, findes der et C_n med $\nu(C_n) > a$.

Radon målene på $\mathbb{R}$ kan vi få godt styr på:

En voksende funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ giver anledning til en additiv funktion $\varkappa: \mathbb{I} \to [0, \infty[$ ved definitionen

$$\varkappa(]a,b]) = h(b) - h(a), \qquad \varkappa(\emptyset) = 0.$$

Forudsætter vi yderligere h kontinuert fra højre, vil $\varkappa$ være numerabelt subadditiv. For beviser henvises til §5.1, En generalisering.

<u>Der findes da et og kun et (Radon) mål</u> $\nu = \nu_h$ <u>på Borel algebraen i</u> $\mathbb{R}$, <u>hvor</u>

$$\nu(]a,b]) = h(b) - h(a)$$

<u>for ethvert standard interval</u> $]a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Thi $\nu = \varkappa^* |_{\mathbb{B}}$ er et sådant mål (§5.4, sætning 2), og det er det eneste (Korollar 1 ovenfor).

Ethvert Radon mål ν på $\mathbb{R}$ kan fås på denne måde, nemlig ud fra hver af funktionerne $h = g + c$, $c \in \mathbb{R}$, med

$$g(x) = \nu(]0,x]) \text{ for } x > 0, \quad g(x) = 0 \text{ for } x = 0, \quad g(x) = -\nu(]x,0]) \text{ for } x < 0.$$

Et integral $\int f d\nu_h$ skrives også $\int f dh$, $\int f(x) dh(x)$ eller lignende. Betegnelsen $\int_a^b f(x) dh(x)$ står for

$$\begin{array}{ll} \int_{]a,b]} f d\nu_h & \text{når } -\infty \leqq a < b < \infty , \\ 0 & \text{når } -\infty < a = b < \infty , \\ -\int_{]b,a]} f d\nu_h & \text{når } -\infty \leqq b < a < \infty , \end{array}$$

medens $\int_a^\infty f(x) dh(x)$ og $\int_\infty^a f(x) dh(x)$ står for henholdsvis $\int_{]a,\infty[} f d\nu_h$ og $-\int_{]a,\infty[} f d\nu_h$, når $-\infty \leqq a < \infty$.

Et integral med hensyn til et Radon mål i $\mathbb{R}^d$ kaldes et <u>Lebesgue/Stieltjes integral</u>. (Thomas Stieltjes indførte 1894 integral af en kontinuert funktion med hensyn til en voksende funktion h på et interval $[a,b]$ ved i Riemanns integraldefinition at erstatte intervallængder $x_i - x_{i-1}$ med tilvækster $h(x_i) - h(x_{i-1})$.)

§6. Lebesgue målet og Lebesgue integralet.

6.1. Lebesgue målet og Lebesgue integralet.

Hovedsætning. Der findes et og kun et mål m defineret på Borel algebraen $\mathbb{B}$ i $\mathbb{R}^d$, således at værdien $m(I)$ for ethvert standard interval I i $\mathbb{R}^d$ er produktet af kantlængderne.

Beviset er ført i §5. Lad os samle trådene: Ifølge §5.2 (for $d=1$ også §5.1) er voluminet $v: \mathbb{I} \to [0,\infty[$ additivt og numerabelt subadditivt. Restriktionen $v^*/_{\mathbb{B}}$ af det ydre Lebesgue mål v^* (se §5.3) til Borel algebraen $\mathbb{B}$ er derfor en udvidelse af v til et mål på $\mathbb{B}$ (se §5.3 og §5.4). – Entydighed følger af §5.5, korollar 1.

Definition. Det ved hovedsætningen bestemte mål m i $\mathbb{R}^d$ vil vi kalde Lebesgue målet i $\mathbb{R}^d$.

Vi har her et eksempel på en deskriptiv definition, hvor et objekt karakteriseres ved visse af sine egenskaber (et signalement). Entydighed og eksistens må være godtgjort. – En anden deskriptiv karakterisering af Lebesgue målet vil blive givet i §6.2 (se hovedsætning p. 88 og korollar p. 90).

Lebesgue målet $m(B)$ af en vilkårlig Borel mængde B i $\mathbb{R}^d$ er ifølge sætningen i §5.5

$$m(B) = \inf \Sigma_n v(I_n),$$

hvor nedre grænse tages over alle følger $I_1, I_2, \ldots$ med $I_n \in \mathbb{I}$ og $B \subseteq \bigcup_n I_n$.

Vi kunne således have givet en konstruktiv definition af Lebesgue målet m i $\mathbb{R}^d$, dvs. en definition bestående i angivelse af definitionsmængden $\mathbb{B}$ samt af værdien $m(B) = v^*(B)$ for hver mængde $B \in \mathbb{B}$.

En konstruktiv definition føles ofte mere umotiveret end en deskriptiv. Det kan være nyttigt at have karakteriseringer af begge typer.

Definitionen af <u>det ydre Lebesgue mål</u> ϑ^* i $\mathbb{R}^d$ (se §5.3, hovedeksempel) er af den konstruktive type, og det samme gælder vor definition af <u>det fuldstændige Lebesgue mål</u> $\vartheta^*|_{\mathbb{L}}$ i $\mathbb{R}^d$ (se §5.4, hovedeksempel).

Integralet af en funktion f med hensyn til det fuldstændige Lebesgue mål i $\mathbb{R}^d$ kaldes <u>Lebesgue integralet</u> af f og betegnes

$$\int f(x)\,dx = \int f(x_1,\dots,x_d)\,d(x_1,\dots,x_d)$$

eller lignende. Funktioner, der er integrable med hensyn til nævnte mål, kaldes <u>Lebesgue integrable</u>.

For en Borel funktion i $\mathbb{R}^d$ kommer integration med hensyn til Lebesgue målet m og det fuldstændige Lebesgue mål ud på ét. (Se §4.7, eksempel B.)

Begreberne ovenfor er opkaldt efter – og skyldes – Henri Lebesgue (Intégrale, longueur, aire. Thèse, Paris 1902. Leçons sur l'intégration, Paris 1904).

Med brug af udvalgsprincippet kan man vise eksistensen af mængder i $\mathbb{R}^d$, der ikke er Lebesgue målelige, dvs. ikke tilhører $\mathbb{L}$. (Se øvelse 6.6 og 6.8.) Også eksistensen af mængder tilhørende $\mathbb{L}\setminus\mathbb{B}$ kan godtgøres. (Øvelse 6.12.) Heraf kan sluttes (øvelse 6.13), at Lebesgue målet $m: \mathbb{B}\to[0,\infty]$ ikke er fuldstændigt. Men da Borel mængder og Borel funktioner ellers danner et velafrundet og tilstrækkelig omfattende område, vil vi i almindelighed holde os til dem. (Se også øvelse 6.2 og §7.1, bemærkning.)

I konsekvens heraf er det, vi har valgt at sige Lebesgue mål, fuldstændigt Lebesgue mål i stedet for henholdsvis Borel/Lebesgue mål, Lebesgue mål, som man ofte ser.

For $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}, m)$ skriver vi kort $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Ligeledes skrives $\mathcal{L}(A)$ for $\mathcal{L}(A, m)$, hvor A er en Borel mængde i $\mathbb{R}^d$.

6.2. Lebesgue målets invarians.

Før vi med rette kan opfatte Lebesgue målet m i $\mathbb{R}^d$ som det fornuftige volumenbegreb, må vi endnu vise, at det har samme værdi for kongruente mængder. (Sætning 2 nedenfor.) Hertil benytter vi en deskriptiv karakterisering af målene cm, $0 \leq c < \infty$, ved hjælp af additionen i $\mathbb{R}^d$. (Hovedsætning.)

Lad $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ være en bijektiv afbildning, hvor både φ og φ^{-1} er målelige, når $\mathbb{R}^d$ betragtes med Borel algebraen $\mathbb{B}$, dvs.

$$E \in \mathbb{B} \iff \varphi(E) \in \mathbb{B}.$$

Vi siger, at φ fører $\mathbb{B}$ over i sig selv.

Sætter vi

$$\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad B \in \mathbb{B},$$

hvor μ er et mål defineret på $\mathbb{B}$, da er ν igen et mål på $\mathbb{B}$. Vi siger, at μ ved φ føres over i ν.

En funktion g i $\mathbb{R}^d$ vil være Borel målelig, netop hvis $g \circ \varphi$ er det, og integration af g m.h.t. ν kommer ud på et med integration af $g \circ \varphi$ m.h.t. μ. (Se §2.2 og §4.7.)

Målet μ siges at være invariant ved φ, hvis $\nu = \mu$, dvs. hvis

$$\forall B \in \mathbb{B}: \ \mu(\varphi^{-1}(B)) = \mu(B).$$

Enhver homeomorf afbildning $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ fører Borel algebraen $\mathbb{B}$ i $\mathbb{R}^d$ over i sig selv, og den fører et Radon mål μ over i et Radon mål ν.

Thi at $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ er homeomorf, betyder, at φ er bijektiv og tillige med φ^{-1} kontinuert, hvorfor φ fører de åbne mængder over i de åbne mængder og dermed den mindste σ-algebra $\mathbb{B}$ indeholdende de åbne mængder over i sig selv. For enhver begrænset Borel mængde B er $\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) < \infty$, idet også $\varphi^{-1}(B)$ er begrænset; vi har jo $\varphi^{-1}(B) \subseteq$

$\varphi^{-1}(\bar{B})$, hvor afslutningen $\bar{B}$ og dermed $\varphi^{-1}(\bar{B})$ er kompakt.

<u>Translationen</u> τ_a bestemt ved $a \in \mathbb{R}^d$ er givet ved

$$\tau_a(x) = x + a, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Den er naturligvis en homeomorf afbildning af $\mathbb{R}^d$ på sig selv, med $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$.

<u>Sætning 1.</u> <u>Lebesgue målet</u> m <u>i</u> $\mathbb{R}^d$ <u>er translationsinvariant</u>, dvs. invariant ved enhver translation af $\mathbb{R}^d$.

Thi m føres ved en translation τ_a over i et mål ν, og for ethvert standard interval I i $\mathbb{R}^d$ vil $\tau_a^{-1}(I) = \tau_{-a}(I)$ påny være et standard interval med samme kantlængder, hvorfor

$$\nu(I) = m(\tau_{-a}(I)) = v(\tau_{-a}(I)) = v(I).$$

Af definitionen på Lebesgue målet følger da $\nu = m$.

Idet vi betegner $\tau_a(E)$ med $E + a$, kommer sætningen ud på, at

$$m(E - a) = m(E)$$

for ethvert $a \in \mathbb{R}^d$ og enhver Borel mængde E i $\mathbb{R}^d$. Sætningen indebærer, at

$$\int_E f(x)dx = \int_{E-a} f(x+a)dx,$$

således at forstå, at de to integraler samtidig har mening og i bekræftende fald samme værdi.

<u>Hovedsætning.</u> <u>Målene</u> cm, $c \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, <u>er de eneste translationsinvariante Radon mål i</u> $\mathbb{R}^d$.

Hermed har vi en ny deskriptiv karakterisering af Lebesgue målet m i $\mathbb{R}^d$, nemlig som det translationsinvariante Radon mål, der har værdien 1 på enhedsterningen

$$\{(x_1, \dots, x_d) \mid 0 < x_i \leqq 1, \; i = 1, \dots, d\}.$$

Bevis for hovedsætning.

Vi har lige vist, at m og dermed hvert af målene cm er translationsinvariant.

Lad nu omvendt μ være et translationsinvariant Radon mål i $\mathbb{R}^d$. Det har åbenbart samme værdi på alle standard intervaller med samme sæt af kantlængder. Idet vi med c betegner værdien på enhedsterningen, må værdien være c/q^d for enhver standard terning med kantlængde $1/q$, hvor $q \in \mathbb{N}$; enhedsterningen kan jo deles i q^d sådanne. For et standard interval med rationale kantlængder $r_1, \dots, r_d = p_1/q, \dots, p_d/q$ må værdien være $cr_1 \cdots r_d$; intervallet kan jo deles i $p_1 \cdots p_d$ terninger med kantlængde $1/q$. For et vilkårligt begrænset interval I med kantlængder $a_1, \dots, a_d$ følger nu $\mu(I) \leqq ca_1 \cdots a_d$, idet $\mu(I) \leqq \mu(J)$ for ethvert standard interval J med rationale kantlængder, hvor $I \subseteq J$. Tilsvarende ses $\mu(I) \geqq ca_1 \cdots a_d$. Da således $\mu(I) = cm(I)$ for ethvert begrænset interval I, følger $\mu = cm$ af §5.5, korollar 1.

<u>Sætning 2.</u> <u>Lebesgue målet</u> m <u>i</u> $\mathbb{R}^d$ <u>er invariant ved enhver isometri</u> $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

En isometri vil sige en afstandsbevarende afbildning. Man kan ret let vise (jfr. A. Brøndsted: Mat. 1x, 1969-70, p. 9.4.8 eller W. Fenchel/T. Gutmann Madsen: Elementær vektorregning, Mat. 1 AG, 1964-65, §8, eller A.J. Weir: Lebesgue integration and measure, Cambridge 1973, p. 137-139), at en isometri $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ kan udtrykkes

$$\underline{\underline{x}}_1 \to \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_1 + \underline{\underline{b}}_1, \quad \underline{\underline{x}}_1 \in \mathbb{R}^d,$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er en ortogonal $(d \times d)$-matrix, og elementer i $\mathbb{R}^d$ er skrevet som søjlevektorer. (Læseren kan eventuelt benytte dette som definition.) Er $\det \underline{\underline{A}} = 1$, kaldes φ en egentlig isometri eller en flytning; er $\det \underline{\underline{A}} = -1$, kaldes φ en uegentlig isometri. Bemærk, at $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ er bijektiv.

Mængder $E, F \subseteq \mathbb{R}^d$ kaldes kongruente, hvis der findes en isometri $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ med $\varphi(E) = F$. Sætning 2 kommer ud på, at kongruente Borel mængder i $\mathbb{R}^d$ har samme Lebesgue mål.

Bevis for sætning 2.

Det er nok at vise, at m er invariant ved en vilkårlig lineær isometri $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, svarende til $\underline{b}_1 = \underline{0}_1$, idet vi jo allerede ved, at m er translationsinvariant. For at opnå simplere betegnelser vælger vi at vise, at m er invariant ved φ^{-1}.

Ved φ^{-1} føres m over i Radon målet ν defineret ved

$$\nu(E) = m(\varphi(E)), \quad E \in \mathbb{B}.$$

Nu er ν translationsinvariant, thi idet $\varphi(x+a) = \varphi(x) + \varphi(a)$, har vi $\varphi \circ \tau_a = \tau_{\varphi(a)} \circ \varphi$ og dermed for hvert $E \in \mathbb{B}$

$$\nu(E+a) = m(\varphi(E+a)) = m(\varphi(E) + \varphi(a)) = m(\varphi(E)) = \nu(E).$$

Ifølge hovedsætningen ovenfor er da $\nu = cm$.

Idet φ er en isometri, er imidlertid $\varphi(B) = B$, når

$$B = \{(x_1, \dots, x_d) \mid \textstyle\sum_{i=1}^d x_i^2 \leq 1\}$$

er enhedskuglen i $\mathbb{R}^d$. Da nu

$$\nu(B) = m(\varphi(B)) = m(B), \quad 0 < m(B) < \infty,$$

sluttes $c = 1$, altså $\nu = m$, dvs. m er invariant ved φ^{-1}.

I modsætning til, hvad man efter definitionen kunne tro, er Lebesgue målet m i talrummet $\mathbb{R}^d$ ikke knyttet til dettes medfødte akseretninger. Det fremgår af sætning 2 og bringes også til udtryk i følgende

Korollar. I et euklidisk rum V af endelig dimension d findes et og på nær en konstant faktor kun et translationsinvariant Radon mål, som ikke er identisk 0. Det er tillige invariant ved enhver isometri af V og kan derfor normeres, så værdien er 1 for alle enhedsterninger.

Et Radon mål i V vil naturligvis sige et mål defineret på Borel algebraen i V, der har endelig værdi for enhver begrænset Borel mængde. (Jfr. §5.5.)

Bevis. Ved valg af et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O, e_1, \ldots, e_d)$, dvs. et punkt $O \in V$ og en ortonormal basis $(e_1, \ldots, e_d)$ af vektorer i V, bringes V i korrespondance med $\mathbb{R}^d$,

$$P \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_d) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \textstyle\sum_{i=1}^{d} x_i e_i \; .$$

Lebesgue målet m i $\mathbb{R}^d$ overføres åbenbart i et Radon mål μ i V, der ligesom m er invariant ved translationer og isometrier. På den anden side må et translationsinvariant Radon mål i V modsvare et i $\mathbb{R}^d$ og altså have formen $c\mu$.

En enhedsterning i V er en punktmængde, som i et passende sædvanligt retvinklet koordinatsystem modsvarer enhedsterningen

$$\{(x_1, \ldots, x_d) \mid 0 < x_i \leqq 1, \; i = 1, \ldots, d\}$$

i $\mathbb{R}^d$. Enhver enhedsterning i V kan åbenbart ved en isometri føres over i enhver anden, hvorfor μ har værdien 1 for dem alle.

Bemærkning 1. For en afbildning $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ givet ved

$$\underline{\underline{x}}_1 \to \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_1 + \underline{\underline{b}}_1 \, , \quad \underline{\underline{x}}_1 \in \mathbb{R}^d ,$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er en $(d \times d)$-matrix med $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$, finder man ved at ræsonnere som i beviset for sætning 2, at der eksisterer en konstant $c \in \mathbb{R}_+$, afbildningens <u>målforhold</u>, så

$$m(\varphi(E)) = c\, m(E)$$

for enhver Borel mængde $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Dette kommer ud på, at Lebesgue målet m ved φ føres over i m/c, og indebærer derfor, at

$$\int_E f \, d(m/c) = \int_{\varphi^{-1}(E)} (f \circ \varphi) \, dm \, ,$$

således at forstå, at de to integraler samtidig har mening og i bekræftende fald samme værdi. Målforholdet c er lig med Lebesgue målet af et d-parallelepipedum udspændt af söjlerne $\underline{\underline{a}}_{|1}, \ldots, \underline{\underline{a}}_{|d}$ i matricen $\underline{\underline{A}}$, idet

$$\{\underline{\underline{b}}_| + \Sigma_{i=1}^d x_i \underline{\underline{a}}_{|i} \mid 0 < x_i \leq 1,\ i=1,\ldots,d\}$$

er billede af enhedsterningen i $\mathbb{R}^d$.

Faktisk er $c = |\det \underline{\underline{A}}|$. (Se f.eks. S. Lang: Analysis II, Addison-Wesley 1969, p. 396-400.) Bemærk, at denne påstand er oplagt, hvis $\underline{\underline{A}}$ er en diagonalmatrix, og mere specielt hvis φ er en homoteti (ligedannethed). Formlerne

$$m(\varphi(E)) = |\det \underline{\underline{A}}| \cdot m(E), \qquad \int_{\varphi(E)} f(x)\,dx = \int_E f(\varphi(x))\,|\det \underline{\underline{A}}|\,dx$$

gælder også i tilfældet $\det \underline{\underline{A}} = 0$ (se §6.3, B).

Bemærkning 2. Transformation af Lebesgue integraler.

Lad $\varphi: X \to Y$ være en bijektiv afbildning af en åben mængde $X \subseteq \mathbb{R}^d$ på en åben mængde $Y \subseteq \mathbb{R}^d$, hvor φ og φ^{-1} begge er kontinuert differentiable, dvs. af klasse $\mathscr{C}^1$. Der gælder da:

<u>En funktion f defineret på Y er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis $(f\circ\varphi)\cdot|\det \underline{\underline{D}}\varphi|$ er det; i bekræftende fald er</u>

$$\int_Y f(y)\,dy = \int_X f(\varphi(x))\cdot|\det \underline{\underline{D}}\varphi(x)|\,dx .$$

Her betegner $\det \underline{\underline{D}}\varphi(x)$ Jacobi determinanten (funktionaldeterminanten) for φ i punktet x.

Sætningen er ikke overraskende, når man tager bemærkning 1 i betragtning. Vi forbigår beviset, som ikke er helt simpelt. (Se f.eks. Börge Jessen: Forelæsninger over funktioner af flere reelle variable, Matematik 2, Matematisk Institut, København 1965-66, kap. 1, §6. Eller E. Asplund / L. Bungart: A first course in integration, Holt, Rinehart and Winston 1966, p. 179-186. Eller S. Lang: Analysis II, Addison-Wesley 1969, p. 401-404.)

6.3. Eksempler.

A. Enhver endelig eller numerabel mængde $E \subseteq \mathbb{R}^d$ har Lebesgue målet 0.

Thi en mængde bestående af ét punkt $b = (b_1, \dots, b_d)$ er indeholdt i intervaller med vilkårligt lille volumen, således for hvert $n \in \mathbb{N}$ i
$$\{(x_1, \dots, x_d) \mid b_i - \tfrac{1}{n} < x_i \leqq b_i \,,\; i = 1, \dots, d\}.$$

B. Enhver hyperplan H i $\mathbb{R}^d$, $d \geqq 2$, har Lebesgue målet 0.

Bevis. I kraft af § 6.2, sætning 2, kan vi antage
$$H = \{(x_1, \dots, x_d) \mid x_d = 0\},$$
idet enhver hyperplan kan føres over i denne ved en isometri af $\mathbb{R}^d$. Det er videre nok at vise, at enhver begrænset mængde
$$K = \{(x_1, \dots, x_d) \mid x_d = 0,\; a_i < x_i \leqq b_i \,,\; i = 1, \dots, d-1\}$$
har Lebesgue målet 0, idet H kan fås som forening af numerabelt mange sådanne. Imidlertid er K indeholdt i intervaller med vilkårligt lille volumen, således for hvert $n \in \mathbb{N}$ i
$$\{(x_1, \dots, x_d) \mid -\tfrac{1}{n} < x_d \leqq 0,\; a_i < x_i \leqq b_i \,,\; i = 1, \dots, d-1\}.$$

Konsekvens. Ikke blot for et standard interval i $\mathbb{R}^d$, men også for et åbent eller afsluttet interval I i $\mathbb{R}^d$ er Lebesgue målet $m(I)$ lig produktet af kantlængderne.

En polygon i $\mathbb{R}^2$, et polyeder i $\mathbb{R}^3$ og generelt en polytop i $\mathbb{R}^d$ har samme Lebesgue mål, hvadenten randen medregnes eller ej. (Derimod kan randen R af et område i $\mathbb{R}^d$ have Lebesgue mål $m(R) > 0$, når $d \geqq 2$, og det samme gælder randen af en åben mængde i $\mathbb{R}$. Se øvelse 6.9 og 6.10.)

C. <u>Cantors mængde</u>.

Cantors mængde $Z \subseteq [0,1]$ fremkommer ved, at man fra intervallet $[0,1]$ fjerner den midterste åbne tredjedel, videre den midterste åbne tredjedel af $[0,\frac{1}{3}]$ og $[\frac{2}{3},1]$, den midterste åbne tredjedel af $[0,\frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]$ og $[\frac{8}{9},1]$, osv., altså

$$[0,1] \setminus Z \;=\;]\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}[\;\cup\;]\tfrac{1}{9},\tfrac{2}{9}[\;\cup\;]\tfrac{7}{9},\tfrac{8}{9}[\;\cup \dots .$$

Cantors mængde er afsluttet, og $m(Z) = 0$, idet

$$m([0,1] \setminus Z) \;=\; \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}\right) + \dots \;=\; 1.$$

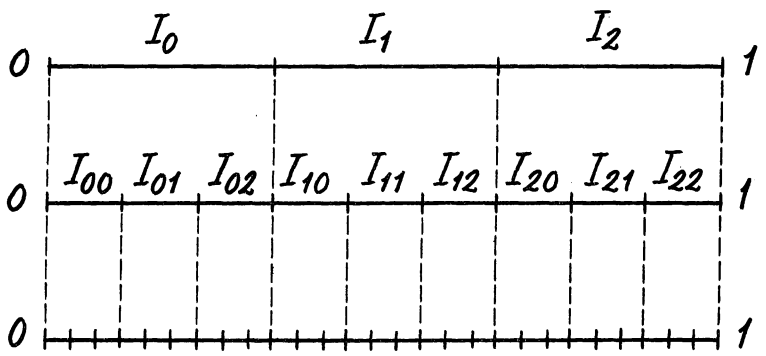
Man kunne tro, at der ikke var mange punkter tilbage, når man fra $[0,1]$ har fjernet numerabelt mange intervaller med længdesum 1. Af nedenstående karakterisering af Z ved trialbrøker vil imidlertid fremgå, at Z er ækvipotent med $\mathbb{R}$.

En trialbrøk $^3 0,a_1 a_2 \dots a_n \dots$, hvor hvert a_n er 0, 1 eller 2, siges at fremstille summen af rækken

$$a_1/3 + a_2/3^2 + \dots + a_n/3^n + \dots ,$$

hvilket vil være et tal i intervallet $[0,1]$.

Lad os her for de <u>afsluttede</u> intervaller, der fremkommer ved successive tredelinger af $[0,1]$ benytte betegnelser som vist på figuren:



Trialbrøken ovenfor fremstiller da samme tal som intervalindsnævringen

$$I_{a_1} \supset I_{a_1 a_2} \supset \dots \supset I_{a_1 a_2 \dots a_n} \supset \dots .$$

Heraf fremgår for det første, at hvert $x \in [0,1]$, som ikke er tredelingspunkt, har netop én trialbrøkfremstilling, medens delepunkterne har to: en endende på lutter 0'er, en endende på lutter 2'er.

Men det fremgår også, at Cantors mængde Z består af netop de tal, der kan fremstilles ved en trialbrøk ${}^{3}0,a_1a_2\ldots$ med cifrene 0 og 2. Fremstillingen er entydig. (På denne form er mængden angivet af Georg Cantor, Acta Mathematica 2 (1883), p. 407.)

At Z er ækvipotent med $\mathbb{R}$ følger nu af, at afbildningen

$$ {}^{3}0,a_1a_2\ldots a_n\ldots \rightarrow {}^{2}0,b_1b_2\ldots b_n\ldots , $$

der fører $x \in Z$ fremstillet ved trialbrøk ${}^{3}0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ med cifre 0 og 2 over i tallet fremstillet ved <u>dual</u>brøken med cifrene $b_n = a_n/2$, har hele intervallet $[0,1]$ som billedmængde.

Cantors mængde er således en afsluttet del af $\mathbb{R}$, ækvipotent med $\mathbb{R}$, men med Lebesgue målet 0.

Bemærkning. Da enhver delmængde af Z er Lebesgue målelig, ser man, at mængden af Lebesgue målelige mængder i $\mathbb{R}$ har samme mægtighed $2^{\aleph}$ som mængden af alle delmængder af $\mathbb{R}$. (Man kan vise, at Borel algebraen i $\mathbb{R}$ kun har mægtigheden $\aleph$.)

D. Uden at gå ind på detaljer nævner vi, at Giuseppe Peano som den første har angivet en kontinuert vej $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, hvis punkter udfylder enhedskvadratet $[0,1] \times [0,1]$ i $\mathbb{R}^2$. (Mathematische Annalen 36 (1890), p. 157-160. En af de første tilnærmelser kan man se anskueliggjort som flisegang i gårdhaven i Matematisk Institut, Danmarks tekniske Højskole.)

Peanos kurve har multiple punkter, dvs. punkter der optræder for mere end én parameterværdi. Ved modifikation af Peanos konstruktion (W.F. Osgood, Transactions of the American Mathematical Society 4 (1903), p. 107-112, - smukke figurer!) kan man imidlertid opnå en Jordan bue i $[0,1]\times[0,1]$, der ganske vist ikke udfylder hele kvadratet, men dog har Lebesgue mål tæt ved 1. (En Jordan bue i $\mathbb{R}^2$ er billedmængde ved en injektiv, kontinuert afbildning $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}^2$.)

E. Reelle tal r og v kaldes som bekendt <u>polære koordinater</u> for punktet $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, hvor $x = r\cos v$, $y = r\sin v$. Afbildningen $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der fører hvert $(r,v)\in\mathbb{R}^2$ over i $(x,y) = (r\cos v, r\sin v)$, har Jacobi determinanten $\det \underline{\underline{D}}\varphi(r,v) = r$. Restriktionen til det åbne interval

$$I = \{(r,v) \mid 0<r,\ -\pi<v<\pi\}$$

er injektiv, med regulær funktionalmatrix $\underline{\underline{D}}\varphi(r,v)$ for hvert $(r,v)\in I$, hvorfor også den omvendte afbildning er kontinuert differentiabel. Da $\varphi(I)$ er hele $\mathbb{R}^2$ pånær en halvlinie, gælder

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d(x,y) = \int_I f(r\cos v, r\sin v)\, r\, d(r,v)$$

for enhver Lebesgue integrabel funktion f på $\mathbb{R}^2$. Man taler om at <u>udtrykke integralet i polære koordinater</u>.

For et konkret eksempel, se §7.5, B.

6.4. Ubestemt integral.

En reel eller kompleks Borel funktion f defineret på $\mathbb{R}^d$ kaldes lokalt (Lebesgue) integrabel, hvis $\int_I |f(x)|\,dx < \infty$ for ethvert begrænset interval I i $\mathbb{R}^d$.

Ved det ubestemte integral af f forstås da funktionen ν givet ved
$$\nu(E) = \int_E f(x)\,dx$$
for enhver begrænset Borel mængde E i $\mathbb{R}^d$. Det ubestemte integral er numerabelt additivt, dvs.
$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$
når E deles i numerabelt mange Borel mængder E_n (se §4.5). Værdien $\nu(N)$ er 0 for enhver begrænset Borel mængde N med $m(N) = 0$.

Er $f \geqq 0$, kan man tænke på $\nu(E)$ som massen i E ved en massefordeling i $\mathbb{R}^d$ givet ved tætheden f. Er f reel, kan man tænke på $\nu(E)$ som ladningen i mængden E ved en elektrisk ladningsfordeling i $\mathbb{R}^d$ givet ved tætheden f.

Sætning. Lad ν være ubestemt integral af en lokalt integrabel Borel funktion $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. Hvis f er kontinuert i et punkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$, da findes til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at
$$\left| \frac{\nu(E)}{m(E)} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$
for enhver Borel mængde $E \subseteq K(x_0, \delta)$ med $m(E) > 0$.

Anskueligt sagt: „middeltætheden" $\nu(E)/m(E)$ går mod $f(x_0)$, når E „trækker sig sammen" om punktet x_0.

Bevis. Tænkes δ valgt, så $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ for x tilhørende kuglen $K(x_0, \delta)$ med centrum x_0 og radius δ, har vi

$$\left|\frac{\nu(E)}{m(E)} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{m(E)}\int_E (f(x)-f(x_0))\,dx\right|$$
$$\leq \frac{1}{m(E)}\int_E |f(x)-f(x_0)|\,dx \leq \frac{1}{m(E)}\int_E \varepsilon\,dx = \varepsilon .$$

Uden forudsætning om kontinuitet gælder, at f kan fås næsten overalt ud fra sit ubestemte integral ved en grænseovergang med middeltætheder (en „differentiation"). Dette skal vi ikke komme ind på. (Se f.eks. S. Saks: Théorie de l'intégrale, Warszawa 1933, chapitre 4.)

En Borel funktion f defineret på en åben mængde $\mathcal{O}$ i $\mathbb{R}^d$ kaldes lokalt (Lebesgue) integrabel, hvis $\int_C |f(x)|\,dx < \infty$ for enhver kompakt mængde $C \subseteq \mathcal{O}$. Det ubestemte integral ν af f er defineret for enhver Borel mængde E, der er indeholdt i en kompakt delmængde af $\mathcal{O}$, idet vi sætter
$$\nu(E) = \int_E f(x)\,dx .$$
Det foregående gælder også her, med selvfølgelige forandringer.

I resten af §6.4 betragtes tilfældet $d=1$.

Vi lader her $f: I \to \mathbb{C}$ være en Borel funktion defineret på et vilkårligt interval $I \subseteq \mathbb{R}$ og forudsætter f lokalt (Lebesgue) integrabel, hvilket kommer ud på, at $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$ for alle $a,b \in I$, $a<b$.

Det ubestemte integral ν af f er defineret for enhver Borel mængde E, der er indeholdt i et kompakt delinterval af I, idet vi sætter
$$\nu(E) = \int_E f(x)\,dx .$$
Ved betingelsen
$$F(b)-F(a) = \nu(]a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{for } a,b\in I,\ a<b,$$
giver ν her anledning til en skare af funktioner $F: I \to \mathbb{C}$. De kan også karakteriseres ved
$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt + \text{const.}, \quad x \in I,$$

hvor c er et fastholdt punkt i I. Hver af funktionerne F kaldes, ligesom ν, et <u>ubestemt</u> <u>integral</u> af f.

Sætningen p. 97 gælder også her (naturligvis således forstået, at kun mængder $E \subseteq I$ tages i betragtning). Med $E =]x_0,x]$ eller $E =]x,x_0]$, hvor $x_0, x \in I$, $x \neq x_0$, er

$$\frac{\nu(E)}{m(E)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

I et kontinuitetspunkt x_0 for f er ethvert ubestemt integral F af f altså differentiabelt med $DF(x_0) = f(x_0)$. Specielt noteres

<u>Infinitesimalregningens</u> <u>hovedsætning</u>. <u>For</u> <u>enhver</u> <u>kontinuert</u> <u>funktion</u> $f: I \to \mathbb{C}$ <u>er</u> <u>et</u> <u>ubestemt</u> <u>integral</u> F <u>tillige</u> <u>en</u> <u>stamfunktion</u>, dvs. F er differentiabel i I med afledet $DF = f$.

Da differensen mellem to stamfunktioner til f må være konstant (den afledede er 0), gælder også omvendt, at en stamfunktion til en <u>kontinuert</u> funktion $f: I \to \mathbb{C}$ tillige er et ubestemt integral. Hermed har vi

<u>Korollar</u>. <u>Er</u> $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ <u>kontinuert</u> <u>på</u> <u>et</u> <u>kompakt</u> <u>interval</u> $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, <u>og</u> <u>er</u> Φ <u>en</u> <u>stamfunktion</u> <u>til</u> f, <u>dvs.</u> <u>differentiabel</u> <u>i</u> $[a,b]$ <u>med</u> <u>afledet</u> $D\Phi = f$, <u>da</u> <u>er</u>

$$\int_a^b f(x)dx = [\Phi(x)]_{x=a}^{x=b} = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Korollaret giver mulighed for beregning af et stort antal integraler $\int_a^b f(x)dx$. Læseren har givetvis benyttet metoden utallige gange, omend tidligere uden at vide, at han udregnede Lebesgue integraler!
Eksempel:
$$\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

NB. Kontinuiteten af f er en væsentlig forudsætning i infinitesimalregningens hovedsætning. Et ubestemt integral $F: I \to \mathbb{C}$ af en lokalt integrabel Borel funktion $f: I \to \mathbb{C}$ er ikke i almindelighed en stamfunktion til f. (Øvelse 6.19. Dog er F differentiabel i næsten alle punkter $x \in I$ med $DF(x) = f(x)$, se f.eks. H.L. Royden: Real analysis, Macmillan 1963, eller T. Gutmann Madsen: Fourier rækker, Forelæsningsnoter 413, Matematisk Institut, København 1968-69, §4.)

Bemærk også, at en funktion $f: I \to \mathbb{C}$ kan have en stamfunktion $\Phi: I \to \mathbb{C}$ uden at være lokalt integrabel. (Se øvelse 6.20.)

(Hvis $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ <u>både</u> er integrabel <u>og</u> har en stamfunktion $\Phi: [a,b] \to \mathbb{C}$, gælder dog

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Se f.eks. C. Caratheodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1918 og 1927, genoptrykt af Chelsea 1948, p. 597, Satz 4.)

<u>Et ubestemt integral $F: I \to \mathbb{C}$ af en vilkårlig lokalt integrabel Borel funktion $f: I \to \mathbb{C}$ er kontinuert.</u>

Bevis. Lad $x_1, x_2, \ldots \to x$ med $x_n \in I$ og $x \in I$. Idet $a, b \in I$ tænkes valgt, således at $a \leq x_n \leq b$ for alle n, vil

$$f(t) \cdot 1_{[a,x_n]}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(t) \cdot 1_{[a,x]}(t) \qquad \text{for } t \neq x,$$

numerisk majoriseret af $|f| \cdot 1_{[a,b]} \in \mathcal{L}(I)$. Ved Lebesgues majorantsætning fås da

$$F(x_n) - F(a) = \int_I f \cdot 1_{[a,x_n]}\,dm \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_I f \cdot 1_{[a,x]}\,dm = F(x) - F(a),$$

altså $F(x_n) \to F(x)$ for $n \to \infty$.

Bemærkning. En kontinuert funktion $G: I \to \mathbb{C}$ er som bekendt uniformt kontinuert i hvert kompakt delinterval. Et ubestemt integral $F: I \to \mathbb{C}$ er endog <u>absolut kontinuert</u> (se f.eks. Shilov/Gurewich: Integral, measure and derivative, Prentice-Hall 1966, chapter 9.5) i hvert kompakt delinterval, en egenskab, vi ikke skal behandle i dette kursus, men som faktisk karakteriserer de ubestemte integraler af lokalt integrable funktioner $f: I \to \mathbb{C}$ (Lebesgue 1904).

6.5. Riemann integral og Lebesgue integral.

Lad f være en begrænset funktion defineret på et begrænset interval i $\mathbb{R}$. Der gælder da:

Sætning. Hvis f er Riemann integrabel, så er f også Lebesgue integrabel, og Lebesgue og Riemann integralet af f har samme værdi.

Bevis. Lad $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ være Riemann integrabel og lad os med R betegne Riemann integralet af f. (For definitioner se Indledning p. 2-3.)

En undersum $\sum_{i=1}^{p} u_i(x_i - x_{i-1})$ for f svarende til en inddeling af $]a,b]$ ved delepunkter $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b$ kan tolkes som Lebesgue integralet $\int_a^b g(x)dx$ af „trappefunktionen" $g \leq f$ givet ved

$$g(x) = u_i \quad \text{for } x_{i-1} < x \leq x_i, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Vi kan nu for hvert $n \in \mathbb{N}$ tænke os valgt en trappefunktion $g_n \leq f$ og analogt en trappefunktion $h_n \geq f$ med

$$R - \tfrac{1}{n} < \int_a^b g_n(x)dx, \qquad \int_a^b h_n(x)dx < R + \tfrac{1}{n}.$$

Da er $g = \sup_n g_n$ og $h = \inf_n h_n$ Borel funktioner, $g \leq f \leq h$, og for hvert $n \in \mathbb{N}$ er

$$R - \tfrac{1}{n} < \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b h(x)dx < R + \tfrac{1}{n},$$

altså

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b h(x)dx = R.$$

Af $\int_a^b (h-g)dm = 0$, $h - g \geq 0$, følger, at Borel mængden

$$\{x \mid h(x) - g(x) > 0\}$$

har Lebesgue målet 0. Da er delmængden $\{x \mid f(x) - g(x) > 0\}$ Lebesgue målelig med værdi 0 ved det fuldstændige Lebesgue mål, hvoraf videre følger, at $f - g$ og dermed $f = g + (f-g)$ er Lebesgue målelig. Det er klart, at

$$\int_a^b f(x)dx = R.$$

Bemærkninger.

1. En Riemann integrabel funktion er ikke nødvendigvis Borel målelig. (Eksempel: Funktionen φ på p. 467 i C. Caratheodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1918.)

2. Lebesgue integralets afgørende fortrin frem for Riemann integralet er ikke, at flere funktioner kan integreres (det er i sig ret uinteressant), men at der gælder langt mere tilfredsstillende sætninger, således Lebesgues sætninger om monoton og majoriseret grænseovergang (§§4.2, 4.3, 4.4) og Fischers fuldstændighedssætning (§8.4, se også §9.2, bemærkning).

Dette opnås allerede, når man holder sig til Borel funktioner (hvad vi jo i almindelighed gør).

3. Man kan også definere Riemann integral for funktioner af flere variable. Sætningen (og beviset) kan umiddelbart overføres.

§7. Produktmål.

7.1. Målelighed i cartesisk produkt.

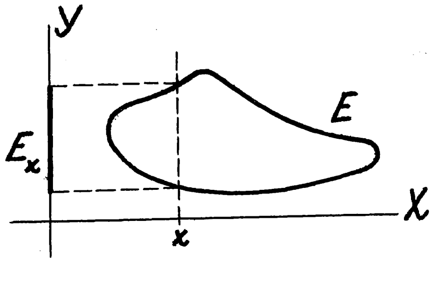
Med $Z = X \times Y$ betegnes *det cartesiske produkt* af mængderne X og Y, dvs.

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

For $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ er naturligvis $A \times B \subseteq Z$. Er g og h funktioner defineret på henholdsvis X og Y og med værdier i samme talområde $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$, betegnes funktionen

$$(x,y) \to g(x)h(y), \quad (x,y) \in Z,$$

med $g \otimes h$; den kaldes undertiden *tensorproduktet* af g og h.



For hvert $E \subseteq Z$ og $x \in X$ sættes

$$E_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in E\};$$

mængden omtales som et *snit* i E. Er f en funktion defineret på Z og $x \in X$, vil vi med $f(x,\cdot)$ eller f_x betegne *snittet* eller *snitfunktionen*

$$y \to f(x,y), \quad y \in Y.$$

Tilsvarende taler vi om snit $\{x \in X \mid (x,y) \in E\}$ og snitfunktion

$$x \to f(x,y), \quad x \in X,$$

bestemt ved et $y \in Y$; her benytter vi betegnelserne E^y og $f(\cdot,y)$ eller f^y.

Idet nu $\mathcal{X}$ og $\mathcal{Y}$ er σ-algebraer i henholdsvis X og Y, betegner vi med $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ den mindste σ-algebra i $Z = X \times Y$, der indeholder alle mængder $A \times B$, hvor $A \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{Y}$. (Disse omtales undertiden som „*rektangler*" m.h.t. $\mathcal{X}$ og $\mathcal{Y}$, for at have et ord.)

Er g en $\mathcal{X}$-målelig funktion på X og h en $\mathcal{Y}$-målelig funktion på Y, begge med værdier i samme talområde $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$, da er funktionen $g \otimes h$ målelig m.h.t. $\mathbb{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Bevis. Lad her 1_X og 1_Y betegne den konstante funktion med værdi 1 defineret på henholdsvis X og Y. For funktionerne

$$(x,y) \to g(x) \quad \text{og} \quad (x,y) \to h(y), \quad (x,y) \in Z,$$

har vi da betegnelsen $g \otimes 1_Y$, henholdsvis $1_X \otimes h$, og åbenbart er

$$g \otimes h = (g \otimes 1_Y) \cdot (1_X \otimes h).$$

Det er imidlertid umiddelbart, at hver af funktionerne $g \otimes 1_Y$ og $1_X \otimes h$ er målelig m.h.t. $\mathbb{Z}$. Eksempelvis i tilfælde af komplekse funktioner er jo

$$(g \otimes 1_Y)^{-1}(D) = \{(x,y) \,/\, g(x) \in D\} = g^{-1}(D) \times Y \in \mathbb{Z}$$

og $$(1_X \otimes h)^{-1}(D) = \{(x,y) \,/\, h(y) \in D\} = X \times h^{-1}(D) \in \mathbb{Z}$$

for enhver Borel mængde D i $\mathbb{C}$.

Sætning 1. Ethvert snit E_x i en mængde $E \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ tilhører $\mathcal{Y}$.

Bevis. For fast $x \in X$ er

$$\mathbb{E} = \{E \subseteq X \times Y \,/\, E_x \in \mathcal{Y}\}$$

en σ-algebra i $X \times Y$, idet

$$(X \times Y)_x = Y, \quad (X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x, \quad (\textstyle\bigcup_n E_n)_x = \bigcup_n (E_n)_x .$$

Og $\mathbb{E}$ indeholder alle $A \times B$, hvor $A \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{Y}$, idet $(A \times B)_x$ er B eller $\emptyset$. Altså er $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{E}$, dvs. $E_x \in \mathcal{Y}$ for alle $E \in \mathbb{Z}$.

Korollar 1. Ethvert snit f_a i en $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-målelig funktion f på $X \times Y$ er en $\mathcal{Y}$-målelig funktion.

Thi $\{y \in Y \,/\, f_a(y) \in D\} = \{(x,y) \in X \times Y \,/\, f(x,y) \in D\}_a$ for enhver Borel mængde D i henholdsvis $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$.

Tilsvarende resultater gælder naturligvis for snit E^y og f^b.

Hovedeksempel.

Det cartesiske produkt $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ vil vi identificere med $\mathbb{R}^d$, hvor $d = p+q$, idet vi for $x = (x_1, \dots, x_p)$ og $y = (y_1, \dots, y_q)$ tolker (x,y) som $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$.

Borel algebraerne i $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^p$ og $\mathbb{R}^q$ vil vi her betegne henholdsvis $\mathbb{B}_d$, $\mathbb{B}_p$ og $\mathbb{B}_q$.

Sætning 2. Er A og B Borel mængder i henholdsvis $\mathbb{R}^p$ og $\mathbb{R}^q$, dvs. $A \in \mathbb{B}_p$ og $B \in \mathbb{B}_q$, da vil $A \times B$ være en Borel mængde i $\mathbb{R}^d$, dvs. $A \times B \in \mathbb{B}_d$.

Bevis. Vi viser først, at $A \times \mathbb{R}^q \in \mathbb{B}_d$, når $A \in \mathbb{B}_p$.

Hertil bemærkes, at

$$\mathbb{A} = \{A \subseteq \mathbb{R}^p \mid A \times \mathbb{R}^q \in \mathbb{B}_d\}$$

indeholder ethvert standard interval $I = I_1 \times \dots \times I_p$ i $\mathbb{R}^p$, idet

$$I \times \mathbb{R}^q = I_1 \times \dots \times I_p \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \in \mathbb{B}_d,$$

samt at $\mathbb{A}$ er en σ-algebra i $\mathbb{R}^p$, idet $\mathbb{R}^p$ tilhører $\mathbb{A}$ og

$$(\mathbb{R}^p \setminus A) \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^d \setminus (A \times \mathbb{R}^q), \qquad (\cup_n A_n) \times \mathbb{R}^q = \cup_n (A_n \times \mathbb{R}^q).$$

Da $\mathbb{B}_p$ er den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}^p$, der indeholder alle standard intervaller i $\mathbb{R}^p$ (§1.3), har vi følgelig $\mathbb{B}_p \subseteq \mathbb{A}$, dvs. $A \times \mathbb{R}^q \in \mathbb{B}_d$, når $A \in \mathbb{B}_p$.

Tilsvarende gælder naturligvis, at $\mathbb{R}^p \times B \in \mathbb{B}_d$, når $B \in \mathbb{B}_q$.

Sætningen følger nu af, at $A \times B = (A \times \mathbb{R}^q) \cap (\mathbb{R}^p \times B)$.

Korollar 2. Med $d = p+q$ er $\mathbb{B}_d = \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$.

Bevis. Borel algebraen $\mathbb{B}_d$ er den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}^d$, der indeholder alle standard intervaller i $\mathbb{R}^d$ (§1.3), medens $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$ ifølge definition er den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}^d$, der indeholder alle mængder $A \times B$ med $A \in \mathbb{B}_p$, $B \in \mathbb{B}_q$.

Vi har da straks $\mathbb{B}_d \subseteq \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$, idet ethvert (standard) interval $I_1 \times \dots \times I_p \times J_1 \times \dots \times J_q$ i $\mathbb{R}^d$ kan skrives $I \times J$, hvor $I = I_1 \times \dots \times I_p$ og $J = J_1 \times \dots \times J_q$ er (standard) intervaller i henholdsvis $\mathbb{R}^p$ og $\mathbb{R}^q$.

Den omvendte inclusion $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q \subseteq \mathbb{B}_d$ fölger af sætning 2.

Som konsekvens af at $\mathbb{B}_d \subseteq \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$ noteres, at ethvert snit i en Borel mængde (Borel funktion) i $\mathbb{R}^d$ igen er en Borel mængde (Borel funktion).

Som konsekvens af at $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q \subseteq \mathbb{B}_d$ noteres, at $g \otimes h$ er en Borel funktion på $\mathbb{R}_d$, når g og h er Borel funktioner på henholdsvis $\mathbb{R}^p$ og $\mathbb{R}^q$ med værdier i samme talområde $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$.

Bemærkning. Betegner vi σ-algebraerne af Lebesgue målelige mængder (se §5.4, hovedeksempel) i $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$ og $\mathbb{R}^d$ med henholdsvis $\mathbb{L}_p$, $\mathbb{L}_q$ og $\mathbb{L}_d$, da er $\mathbb{L}_p \times \mathbb{L}_q \subset \mathbb{L}_d$. (Øvelse 7.8.) Det manglende lighedstegn komplicerer teorien om det fuldstændige Lebesgue mål i henseende til problemstillingerne i §7; heri ligger en væsentlig grund til, at vi foretrækker at arbejde med Borel mængder.

7.2. Et mængdeteoretisk lemma.

Vi indfører et hjælpebegreb: En mængde $\mathbb{D}$ af delmængder af en mængde X vil vi kalde en σ-klasse i X, hvis

(i) $X \in \mathbb{D}$

(ii) $\complement A = X \setminus A \in \mathbb{D}$ når $A \in \mathbb{D}$

(iii) $\bigcup_{n\in N} A_n \in \mathbb{D}$ når $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{D}$ og $A_m \cap A_n = \emptyset$ for $m \neq n$.

Da er tillige $\emptyset \in \mathbb{D}$, ligesom $A \cup B \in \mathbb{D}$ når $A, B \in \mathbb{D}$ og $A \cap B = \emptyset$.

Enhver σ-algebra i X (se §1.2) er naturligvis også en σ-klasse. Omvendt bemærkes, at en σ-klasse $\mathbb{D}$ i X vil være en σ-algebra, hvis

$$A \cap B \in \mathbb{D} \text{ når } A, B \in \mathbb{D}.$$

Thi da er også $A \cup B = \complement(\complement A \cap \complement B) \in \mathbb{D}$ og $A \setminus B = A \cap \complement B \in \mathbb{D}$, når $A, B \in \mathbb{D}$. En foreningsmængde $\bigcup_{n\in N} B_n$ med $B_n \in \mathbb{D}$ kan derfor skrives som forening $\bigcup_{n\in N} A_n$ af parvis disjunkte mængder $A_n \in \mathbb{D}$, nemlig

$$A_1 = B_1, \quad A_n = B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i, \; n = 2, 3, \ldots,$$

(jfr. omtalen af begrebet mængdealgebra p. 75, 76.)

Enhver fællesmængde af σ-klasser i X er igen en σ-klasse i X.

For enhver mængde $\mathbb{K}$ af delmængder af X findes én mindste σ-klasse $\mathbb{D}(\mathbb{K})$ i X, der indeholder $\mathbb{K}$ (nemlig fællesmængden af alle σ-klasser i X, der indeholder $\mathbb{K}$).

Naturligvis er $\mathbb{D}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{E}(\mathbb{K})$, hvor $\mathbb{E}(\mathbb{K})$ betyder den mindste σ-algebra i X, der indeholder $\mathbb{K}$. Bemærkelsesværdigt er det imidlertid, at her gælder lighedstegn, hvis

$$H \cap K \in \mathbb{K} \text{ når } H, K \in \mathbb{K}.$$

Det udtrykker vi i følgende

<u>Lemma</u>. <u>Lad $\mathbb{K}$ være en mængde af delmængder af en mængde X, hvor</u>

$$H \cap K \in \mathbb{K} \text{ \underline{når} } H, K \in \mathbb{K}.$$

Er $\mathbb{D}$ en σ-klasse i X, der indeholder $\mathbb{K}$, og betegnes med $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\mathbb{K})$ den mindste σ-algebra i X, der indeholder $\mathbb{K}$, da er $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{D}$.

Vor interesse i begrebet σ-klasse ligger i dette resultat.

Beviset fører vi ved at godtgøre, at den mindste σ-klasse $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathbb{K})$ i X, der indeholder $\mathbb{K}$, er en σ-algebra i X. Hertil er det som bemærket ovenfor nok at vise, at

$$A \cap B \in \mathbb{D} \text{ når } A, B \in \mathbb{D}.$$

For hvert $A \in \mathbb{D}$ er imidlertid $\mathbb{F}_A = \{B \subseteq X \mid A \cap B \in \mathbb{D}\}$ en σ-klasse i X, thi

(i) $A \cap X = A \in \mathbb{D}$.

(ii) $A \cap \complement B = \complement(\complement A \cup (A \cap B)) \in \mathbb{D}$ når $B \in \mathbb{F}_A$, idet $\complement A$ og $A \cap B$ er disj.

(iii) $A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_n) \in \mathbb{D}$ når $B_1, B_2, \ldots \in \mathbb{F}_A$ er parvis disj.

For hvert $H \in \mathbb{K}$ er $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}_H$ ifølge forudsætning. Vi slutter nu, at $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{F}_H$. Hermed er vist, at

$$H \cap B \in \mathbb{D} \text{ når } H \in \mathbb{K}, B \in \mathbb{D}.$$

For hvert $B \in \mathbb{D}$ er altså $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}_B$ og dermed også $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{F}_B$, dvs.

$$A \cap B \in \mathbb{D} \text{ når } A, B \in \mathbb{D}.$$

Som en første anvendelse viser vi

Entydighedssætning for mål. Lad $\mathbb{K}$ være en mængde af delmængder af en mængde X, hvor

$$H \cap K \in \mathbb{K} \text{ når } H, K \in \mathbb{K},$$

og lad μ og ν være mål defineret på den mindste σ-algebra $\mathbb{E}$ i X, der indeholder $\mathbb{K}$. Antag yderligere, at X kan skrives som forening $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ med $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$, hvor $K_n \in \mathbb{K}$ og $\mu(K_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$.

Hvis nu $\mu(H) = \nu(H)$ for alle $H \in \mathbb{K}$, så er $\mu = \nu$.

Bevis. For hvert $n \in \mathbb{N}$ sættes

$$\mathbb{D}_n = \{E \in \mathbb{E} \mid \mu(K_n \cap E) = \nu(K_n \cap E)\}.$$

Idet vi antager, at $\mu(H) = \nu(H)$ for alle $H \in \mathbb{K}$, har vi straks $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{D}_n$. Og $\mathbb{D}_n$ er en σ-klasse i X; thi

(i) $X \in \mathbb{D}_n$.

(ii) Når $E \in \mathbb{D}_n$, er også $\complement E = X \setminus E \in \mathbb{D}_n$,
idet $\mu(K_n \cap \complement E) = \mu(K_n) - \mu(K_n \cap E) = \nu(K_n) - \nu(K_n \cap E) = \nu(K_n \cap \complement E)$.
Her benyttes, at $\mu(K_n) = \nu(K_n) < \infty$.

(iii) Når $E_1, E_2, \ldots \in \mathbb{D}_n$ er parvis disjunkte, er også $\bigcup_j E_j \in \mathbb{D}_n$,
idet $\mu(K_n \cap \bigcup_j E_j) = \sum_j \mu(K_n \cap E_j) = \sum_j \nu(K_n \cap E_j) = \nu(K_n \cap \bigcup_j E_j)$.

Ifølge lemmaet ovenfor er da $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{D}_n$, dvs.

$$\mu(K_n \cap E) = \nu(K_n \cap E) \quad \text{for alle } E \in \mathbb{E}.$$

Det er nu let at slutte $\mu = \nu$. For vilkårligt $E \in \mathbb{E}$ er nemlig

$$\mu(E) = \lim_n \mu(K_n \cap E) = \lim_n \nu(K_n \cap E) = \nu(E),$$

idet $K_1 \cap E \subseteq K_2 \cap E \subseteq \ldots$ og $\bigcup_n (K_n \cap E) = E$.

Bemærkning. Sætningen indeholder korollar 1 i §5.5 som specialtilfælde, svarende til $X = \mathbb{R}^d$ og $\mathbb{K} = \mathbb{I}$, hvor $\mathbb{I}$ er mængden af standard intervaller i $\mathbb{R}^d$ suppleret med $\emptyset$. Entydighedsdelen af hovedsætningen i §5.2 (og §5.1) kan således vises uden brug af beviset for eksistensdelen.

7.3. Produktmål.

Et mål $\mu: \mathbb{X} \to [0,\infty]$ i en mængde X siges at være σ-endeligt, hvis X kan skrives som forening $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ af en følge af mængder $X_n \in \mathbb{X}$ med $\mu(X_n) < \infty$.

Mængderne X_n kan vælges som en stigende følge $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$, eller parvis disjunkte.

Et endeligt mål er også σ-endeligt.

Sætning 1. (Sætning om produktmål.) Lad $\mu: \mathbb{X} \to [0,\infty]$ og $\nu: \mathbb{Y} \to [0,\infty]$ være σ-endelige mål i mængder X og Y.

Der findes da et og kun et mål π defineret på den mindste σ-algebra $\mathbb{Z} = \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ i det cartesiske produkt $Z = X \times Y$, der indeholder alle mængder $A \times B$ med $A \in \mathbb{X}$, $B \in \mathbb{Y}$, således at

$$\pi(A\times B) = \mu(A)\cdot\nu(B) \quad \text{for alle } A\in\mathbb{X},\ B\in\mathbb{Y}.$$

Definition. Det ved sætningen bestemte mål kaldes produktmålet af μ og ν og betegnes $\mu\times\nu$.

Vi skal i §7.3 bevise sætningen og tillige give en konstruktiv karakterisering af produktmålet $\mu\times\nu$.

At der er højst et mål som ønsket, slutter vi straks af entydighedssætningen i §7.2:

Med $\mathbb{K} = \{A\times B \mid A\in\mathbb{X}, B\in\mathbb{Y}\}$ er jo

$$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2) = (A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2) \in \mathbb{K}$$

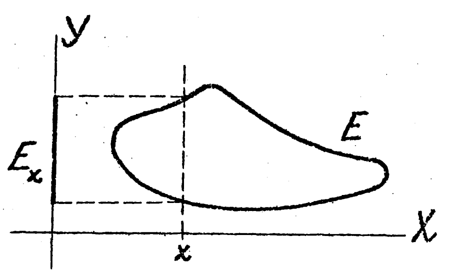
når $A_1, A_2 \in \mathbb{X}$ og $B_1, B_2 \in \mathbb{Y}$. Videre bemærkes, at der ifølge forudsætning findes mængder $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \in \mathbb{X}$ med $\mu(X_n) < \infty$ og $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots \in \mathbb{Y}$ med $\nu(Y_n) < \infty$, således at $X = \bigcup_n X_n$ og $Y = \bigcup_n Y_n$. Med $Z_n = X_n \times Y_n$ er så $Z = \bigcup_n Z_n$ og $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots$.

Tænker vi os mål π og ρ som ønsket, har vi

$$\pi(A\times\mathcal{B}) = \mu(A)\cdot\nu(\mathcal{B}) = \rho(A\times\mathcal{B}) \quad \text{for } A\in\mathcal{X},\ \mathcal{B}\in\mathcal{Y},$$

specielt $\pi(Z_n) = \mu(X_n)\cdot\nu(Y_n) < \infty$, $n = 1,2,\dots$, og entydighedssætningen giver da $\pi = \rho$.

<u>Eksistensen</u> af et mål som ønsket viser vi ved eksplicit at angive et, nemlig funktionen $\pi\colon \mathcal{Z}\to[0,\infty]$ bestemt ved



$$\pi(E) = \int_X \nu(E_x)\,d\mu(x), \quad E\in\mathcal{Z}.$$

(Ideen turde forekomme ret nærliggende for læseren, der i gymnasiet har beregnet arealer ved deling i strimler.) Vanskeligheden ligger i at godtgøre, at integralet $\int_X \nu(E_x)\,d\mu(x)$ har mening. Det sikres af

<u>Lemma 1.</u> <u>Lad</u> $\mathcal{X}$ <u>være en</u> σ-<u>algebra i en mængde</u> $X \neq \emptyset$, <u>medens</u> $\nu\colon \mathcal{Y}\to[0,\infty]$ <u>er et</u> σ-<u>endeligt mål i en mængde</u> Y.
<u>For hvert</u> $E\in\mathcal{Z}=\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ <u>er funktionen</u>

$$x \to \nu(E_x), \quad x\in X,$$

<u>da</u> $\mathcal{X}$-<u>målelig</u>.

Først et par bemærkninger.

1. Når E tilhører $\mathcal{Z}$, er der ved $g_E(x) = \nu(E_x)$, $x\in X$, virkelig givet en funktion $g_E\colon X\to[0,\infty]$, idet $E_x\in\mathcal{Y}$ for hvert $x\in X$ (§ 7.1, sætning 1).

2. For $E = A\times\mathcal{B}$, $A\in\mathcal{X}$, $\mathcal{B}\in\mathcal{Y}$, er

$$E_x = \begin{cases} \mathcal{B} & \text{når } x\in A \\ \emptyset & \text{når } x\in X\setminus A \end{cases}$$

og dermed $g_E = \nu(\mathcal{B})\cdot 1_A \in \mathcal{M}^+(X,\mathcal{X})$.

3. Når $E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$, hvor $E_1, E_2, \dots\in\mathcal{Z}$ er parvis disjunkte, da er $g_E = \sum_{j\in\mathbb{N}} g_{E_j}$. Thi for hvert $x\in X$ er $E_x = \bigcup_j (E_j)_x$, hvor $(E_1)_x, (E_2)_x, \dots \in\mathcal{Y}$ er parvis disjunkte, og dermed $g_E(x) = \nu(E_x) = \sum_j \nu((E_j)_x) = \sum_j g_{E_j}(x)$.

Og nu selve beviset. Vi benytter lemmaet i §7.2 med
$$\mathbb{K} = \{A\times B \mid A\in\mathbb{X}, B\in\mathbb{Y}\}.$$

1° Antag $\nu(Y)<\infty$. (Egentlig er det overflødigt at betragte dette tilfælde for sig, men her fremtræder ideen utilsløret.) Med
$$\mathbb{D} = \{E\in\mathbb{Z} \mid g_E \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{X})\}$$
er $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{D}$ ifølge bemærkning 2. Og $\mathbb{D}$ er her en σ-klasse i $Z=X\times Y$, idet

(i) $Z=X\times Y\in\mathbb{D}$. Funktionen g_Z er konstant med værdi $\nu(Y)$.

(ii) Når $E\in\mathbb{D}$, er også $\complement E = Z\setminus E\in\mathbb{D}$.
Thi ifølge bemærkning 3 er $g_E+g_{\complement E}=g_Z$, altså $g_{\complement E}=g_Z-g_E$. Her benyttes forudsætningen $\nu(Y)<\infty$.

(iii) Når $E_1,E_2,\dots\in\mathbb{D}$ er parvis disjunkte, er også $E=\bigcup_j E_j\in\mathbb{D}$.
Thi $g_E=\sum_j g_{E_j}$ ifølge bemærkning 3.

Lemmaet i §7.2 giver nu $\mathbb{Z}=\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\subseteq\mathbb{D}$, dvs. $g_E\in\mathcal{M}^+(X,\mathbb{X})$ for ethvert $E\in\mathbb{Z}$.

2° I det generelle tilfælde betragter vi, for vilkårligt $Y'\in\mathbb{Y}$ med $\nu(Y')<\infty$, mængden
$$\mathbb{D}' = \{E\in\mathbb{Z} \mid g_{Z'\cap E}\in\mathcal{M}^+(X,\mathbb{X})\},$$
hvor $Z'=X\times Y'$.

Vi har straks $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{D}'$, idet $g_{Z'\cap E}=\nu(Y'\cap B)\cdot 1_A\in\mathcal{M}^+(X,\mathbb{X})$, når $E=A\times B$ med $A\in\mathbb{X}$, $B\in\mathbb{Y}$. (Jfr. bemærkning 2.)

Og $\mathbb{D}'$ er en σ-klasse i $Z=X\times Y$, idet

(i) $Z\in\mathbb{D}'$. Funktionen $g_{Z'\cap Z}=g_{Z'}$ er konstant med værdi $\nu(Y')$.

(ii) Når $E\in\mathbb{D}'$, er også $\complement E\in\mathbb{D}'$.
Thi $g_{Z'\cap E}+g_{Z'\cap\complement E}=g_{Z'}$, altså $g_{Z'\cap\complement E}=g_{Z'}-g_{Z'\cap E}$. Her benyttes, at $\nu(Y')<\infty$.

(iii) Når $E_1,E_2,\dots\in\mathbb{D}'$ er parvis disjunkte, er også $E=\bigcup_j E_j\in\mathbb{D}'$.
Thi $g_{Z'\cap E}=\sum_j g_{Z'\cap E_j}$.

Lemmaet i §7.2 giver så $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{D}'$. Hermed er vist, at $g_{E\cap(X\times Y')}\in\mathcal{M}^+(X,\mathbb{X})$, når $E\in\mathbb{Z}$ og $Y'\in\mathbb{Y}$ med $\nu(Y')<\infty$.

3° Da ν ifølge forudsætning er σ-endelig, kan Y skrives som forening $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ af parvis disjunkte mængder $Y_n \in \mathcal{Y}$ med $\nu(Y_n) < \infty$. Vi sætter $Z_n = X \times Y_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

For vilkårligt $E \in \mathcal{Z}$ er nu $g_{E\cap Z_n} \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$, $n = 1, 2, \ldots$, ifølge 2°. Men da $E = \bigcup_n (E \cap Z_n)$, hvor $E\cap Z_1, E \cap Z_2, \ldots$ er parvis disjunkte, og dermed $g_E = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_{E\cap Z_n}$ ifølge bemærkning 3, slutter vi, at $g_E \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$, q.e.d.

Lemma 1 tillader os, i tilfælde af at der yderligere er givet et mål $\mu: \mathcal{X} \to [0, \infty]$, at sætte

$$\pi(E) = \int_X g_E \, d\mu = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) \quad \text{for hvert } E \in \mathcal{Z}.$$

Funktionen $\pi: \mathcal{Z} \to [0, \infty]$ vil være et mål i $Z = X \times Y$; thi når $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{Z}$ er parvis disjunkte og $E = \bigcup_n E_n$, da er $g_E = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_{E_n}$ (se bemærkning 3 ovenfor) og dermed (§4.2, sætning 1b)

$$\pi(E) = \int_X g_E \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X g_{E_n} \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \pi(E_n).$$

Endvidere er $\pi(A \times B) = \mu(A)\cdot\nu(B)$, når $A \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{Y}$; thi $g_{A\times B} = \nu(B)\cdot 1_A$ (se bemærkning 2 ovenfor), altså

$$\pi(A\times B) = \int_X \nu(B)\cdot 1_A \, d\mu = \nu(B)\int_X 1_A \, d\mu = \mu(A)\,\nu(B).$$

Hermed er også eksistensdelen af sætningen om produktmål bevist. (Tilfældet $X = \emptyset$ er jo trivielt.)

Med fuldførelsen af beviset for sætningen er vor definition af produktmålet $\mu\times\nu$ af to σ-<u>endelige</u> mål μ og ν retfærdiggjort.

<u>Lemma</u> 2. <u>Lad</u> $\mu: \mathcal{X} \to [0,\infty]$ <u>og</u> $\nu: \mathcal{Y} \to [0, \infty]$ <u>være</u> σ-<u>endelige</u> <u>mål</u> <u>i</u> <u>mængder</u> $X \neq \emptyset$ <u>og</u> $Y \neq \emptyset$. <u>Da</u> <u>er</u>

$$(\mu\times\nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y)$$

<u>for</u> <u>hvert</u> $E \in \mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Thi da funktionen $\pi: \mathcal{Z} \to [0,\infty]$ defineret ved

$$\pi(E) = \int_X \nu(E_x)\,d\mu(x), \quad E \in \mathbb{Z},$$

har de egenskaber, der karakteriserer $\mu\times\nu$, er $\mu\times\nu = \pi$.

Ganske analogt vil naturligvis $y \to \mu(E^y)$, $y \in Y$, tilhøre $\mathcal{M}^+(Y, \mathcal{Y})$ for hvert $E \in \mathbb{Z}$, og funktionen $\rho: \mathbb{Z} \to [0,\infty]$ givet ved

$$\rho(E) = \int_Y \mu(E^y)\,d\nu(y), \quad E \in \mathbb{Z},$$

har de egenskaber, der karakteriserer $\mu\times\nu$, hvorfor $\mu\times\nu = \rho$.

I tilgift til den deskriptive definition af $\mu\times\nu$ har vi med lemmaet to (analoge) konstruktive karakteriseringer.

Hovedeksempel.

Sætning 2. Idet $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ identificeres med $\mathbb{R}^{p+q}$, og m_p, m_q og m_{p+q} betegner Lebesgue målene i henholdsvis $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$ og $\mathbb{R}^{p+q}$, defineret på Borel algebraerne $\mathcal{B}_p$, $\mathcal{B}_q$ og $\mathcal{B}_{p+q}$, er

$$m_p \times m_q = m_{p+q}.$$

Bevis. Ifølge §7.1, Korollar 2, er $\mathcal{B}_p\times\mathcal{B}_q = \mathcal{B}_{p+q}$. Produktmålet $m_p\times m_q$ er altså defineret på Borel algebraen $\mathcal{B}_{p+q}$, og dets værdi $m_p(I)\cdot m_q(J) = v_p(I)\cdot v_q(J)$ for ethvert standard interval $I_1\times\ldots\times I_p\times J_1\times\ldots\times J_q = I\times J$ i $\mathbb{R}^{p+q}$ er åbenbart produktet af samtlige kantlængder. Men disse egenskaber karakteriserer Lebesgue målet m_{p+q}.

Konsekvens (jfr. lemma 1 og 2). For enhver Borel mængde E i $\mathbb{R}^{p+q}$ er $x \to m_q(E_x)$, $x \in \mathbb{R}^p$, en Borel funktion og

$$m_{p+q}(E) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(E_x)\,dx.$$

For $p=q=1$ kan formlen tolkes som arealbestemmelse ved deling i strimler, for $p=1, q=2$ som volumenbestemmelse ved deling i skiver.

Lad os også notere, at produktmålet $\mu\times\nu$ af Radon mål μ og ν i henholdsvis $\mathbb{R}^p$ og $\mathbb{R}^q$ er et Radon mål i $\mathbb{R}^{p+q}$.

7.4. Tonellis og Fubinis sætninger.

Tonellis sætning. Lad $\mu: \mathbb{X} \to [0,\infty]$ og $\nu: \mathbb{Y} \to [0,\infty]$ være σ-endelige mål i mængder $X \neq \emptyset$ og $Y \neq \emptyset$.

For hvert $f \in \mathcal{M}^+(X\times Y, \mathbb{X}\times\mathbb{Y})$ gælder da

(i) funktionen $x \to \int_Y f_x\, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$, $x \in X$, tilhører $\mathcal{M}^+(X,\mathbb{X})$,

(ii) $$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x).$$

Bemærkning. Når $f \in \mathcal{M}^+(X\times Y, \mathbb{X}\times\mathbb{Y})$, er der ved $g(x) = \int_Y f_x\, d\nu$, $x \in X$, virkelig givet en funktion $g: X \to [0,\infty]$, idet snitfunktionen f_x tilhører $\mathcal{M}^+(Y,\mathbb{Y})$ for hvert $x \in X$ (§7.1, korollar 1).

Påstandene er, at $g \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{X})$ og $\int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) = \int_X g\, d\mu$.

Bevis. 1° For en indikatorfunktion $f = 1_E$ på $X\times Y$ med $E \in \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ er de to påstande allerede vist i §7.3, omend i en anden formulering. For hvert $x \in X$ er nemlig $(1_E)_x = 1_{E_x}$, hvor 1_{E_x} betegner indikatorfunktionen på Y for snittet E_x; det står da at læse i §7.3, lemma 1, at funktionen $x \to \int_Y (1_E)_x\, d\nu = \nu(E_x)$, $x \in X$, tilhører $\mathcal{M}^+(X,\mathbb{X})$, og videre læses i lemma 2, at dens integral m.h.t. μ er $(\mu\times\nu)(E) = \int_{X\times Y} 1_E\, d(\mu\times\nu)$.

2° De to påstande gælder for enhver simpel funktion $f = \sum_{j=1}^n a_j 1_{E_j}$ på $X\times Y$ med $0 \leq a_j < \infty$, $E_j \in \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$.

Det følger af 1°, idet det er trivielt at verificere, at påstandene gælder for $f_1 + f_2$ og for cf_1, hvor $0 \leq c < \infty$, hvis de gælder for f_1 og f_2.

3° En vilkårlig funktion $f \in \mathcal{M}^+(X\times Y, \mathbb{X}\times\mathbb{Y})$ kan fås som grænsefunktion for en følge $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ af simple, $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$-målelige funktioner $f_n: X\times Y \to [0,\infty[$. (§4.2, lemma.) Vi noterer, at

$$\int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu) = \lim_n \int_{X\times Y} f_n \, d(\mu\times\nu)$$

ifølge Lebesgues monotonisætning.

For hvert $x \in X$ har vi $(f_n)_x \nearrow f_x$ og dermed

$$g_n(x) = \int_Y (f_n)_x \, d\nu \nearrow g(x) = \int_Y f_x \, d\nu$$

ifølge Lebesgues monotonisætning. Da nu $g_n \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{X})$ og $g_n \nearrow g$, er $g \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{X})$, samt

$$\int_X g \, d\mu = \lim_n \int_X g_n \, d\mu$$

ifølge Lebesgues monotonisætning. Og da $\int_{X\times Y} f_n \, d(\mu\times\nu) = \int_X g_n \, d\mu$, $n = 1,2,\dots$, sluttes endelig

$$\int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu) = \int_X g \, d\mu .$$

<u>Tilføjelse</u> <u>til</u> <u>Tonellis</u> <u>sætning</u>. Der gælder naturligvis et analogt resultat med integrationerne i dobbeltintegralet ombyttet (jfr. symmetrien i §7.3, lemma 2). Sammenholdt har vi da for enhver funktion $f \in \mathcal{M}^+(X\times Y, \mathbb{X}\times\mathbb{Y})$:

$$\int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu) = \int_X \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y) \, d\mu(x) \, d\nu(y) .$$

Resultatet rummer en ofte nyttig regel om ombytning af integrationsorden.

Vi tænker os stadig givet σ-endelige mål $\mu: \mathbb{X} \to [0,\infty]$ og $\nu: \mathbb{Y} \to [0,\infty]$ i mængder $X \neq \emptyset$ og $Y \neq \emptyset$.

For en $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$-målelig funktion $f: X\times Y \to \mathbb{R}$ vil snitfunktionen $f_x: Y \to \mathbb{R}$ være $\mathbb{Y}$-målelig for hvert $x \in X$, som allerede vist i §7.1. Videre er $A = \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{L}(Y,\mathbb{Y},\nu)\} \in \mathbb{X}$, og hvis $A \neq \emptyset$, vil funktionen $g: A \to \mathbb{R}$ givet ved

$$g(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x,y) \, d\nu(y), \quad x \in A,$$

være $\mathbb{X}$-målelig.

Begrundelse: Ifølge Tonellis sætning, (i), anvendt på f^+ og f^- vil funktionerne $p: X \to [0,\infty]$ og $n: X \to [0,\infty]$ givet ved

$$p(x) = \int_Y (f^+)_x \, d\nu \quad \text{og} \quad n(x) = \int_Y (f^-)_x \, d\nu, \quad x \in X,$$

tilhøre $\mathcal{M}^+(X,\mathbb{X})$. Idet $(f^+)_x = (f_x)^+$ og $(f^-)_x = (f_x)^-$, har vi derfor
$$A = \{x \in X \mid p(x) < \infty\} \cap \{x \in X \mid n(x) < \infty\} \in \mathbb{X},$$
samt hvis $A \neq \emptyset$, at $g = p|_A - n|_A$ er $\mathbb{X}$-målelig.

Ifølge Tonellis sætning, (ii), er endvidere
$$\int_X p\,d\mu = \int_{X\times Y} f^+ d(\mu\times\nu) \quad \text{og} \quad \int_X n\,d\mu = \int_{X\times Y} f^- d(\mu\times\nu).$$

I tilfælde af, at f er integrabel m.h.t $\mu\times\nu$, har vi derfor $\mu(X\setminus A) = 0$, idet $\int_X p\,d\mu < \infty$ og dermed $\mu(\{x\in X \mid p(x) = \infty\}) = 0$, ligesom $\int_X n\,d\mu < \infty$ og dermed $\mu(\{x \in X \mid n(x) = \infty\}) = 0$. (§4.2, Korollar.) Medmindre $A = \emptyset$, vil endvidere $p|_A$, $n|_A$ og dermed $g = p|_A - n|_A$ tilhøre $\mathcal{L}(A,\mu)$, og
$$\int_A g\,d\mu = \int_A p\,d\mu - \int_A n\,d\mu = \int_X p\,d\mu - \int_X n\,d\mu$$
$$= \int_{X\times Y} f^+ d(\mu\times\nu) - \int_{X\times Y} f^- d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu).$$

Vi noterer:

<u>Fubinis sætning.</u> <u>Lad</u> $\mu: \mathbb{X} \to [0,\infty]$ <u>og</u> $\nu: \mathbb{Y} \to [0,\infty]$ <u>være</u> σ-<u>endelige mål i mængder</u> $X \neq \emptyset$ <u>og</u> $Y \neq \emptyset$.

<u>For hvert</u> $f \in \mathcal{L}(X\times Y, \mathbb{X}\times\mathbb{Y}, \mu\times\nu)$ <u>gælder da</u>

(i) $A = \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{L}(Y,\mathbb{Y},\nu)\} \in \mathbb{X}$ <u>og</u> $\mu(X\setminus A) = 0$,

(ii) <u>funktionen</u> $x \to \int_Y f_x\,d\nu = \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$, $x \in A$, <u>er integrabel m.h.t.</u> μ,

(iii) $$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu) = \int_A \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x).$$

Sætningen gælder ordret også for funktioner f med komplekse værdier. Det fremgår, idet sætningen for reelle funktioner anvendes på f' og f'', hvor $f = f' + if''$. (De indledende resultater vedrørende en $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$-målelig, men ikke nødvendigvis $(\mu\times\nu)$-integrabel funktion $f: X\times Y \to \mathbb{R}$ gælder ligeledes med $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$.)

I (iii) skrives ofte $\int_X$ i stedet for $\int_A$, selv om integranden kun er defineret μ-næsten overalt i X.

<u>Tilføjelse til Fubinis sætning.</u> Der gælder naturligvis et analogt resultat med integrationerne i dobbeltintegralet ombyttet. Sammenholdt har vi da for enhver funktion $f \in \mathcal{L}(X \times Y, \mu \times \nu)$:

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y) \, d\mu(x) \, d\nu(y).$$

Resultatet rummer en ofte nyttig regel om ombytning af integrationsorden.

En $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-målelig funktion f defineret på $X \times Y$ tilhører jo $\mathcal{L}(X \times Y, \mu \times \nu)$, hvis $\int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \times \nu) < \infty$. Til udregning eller vurdering af dette integral benyttes ofte med fordel Tonellis sætning.

Eksempel. <u>Er</u> $g \in \mathcal{L}(X, \mu)$ <u>og</u> $h \in \mathcal{L}(Y, \nu)$, <u>da</u> <u>er</u> $g \otimes h \in \mathcal{L}(\mu \times \nu)$ <u>og</u>

$$\int_{X \times Y} g \otimes h \, d(\mu \times \nu) = \int_X g \, d\mu \cdot \int_Y h \, d\nu.$$

Thi $g \otimes h$ er $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-målelig ifølge §7.1, og Tonellis sætning giver

$$\int_{X \times Y} |g \otimes h| \, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y |g(x) h(y)| \, d\nu(y) \, d\mu(x)$$
$$= \int_X \left(|g(x)| \int_Y |h| \, d\nu \right) d\mu(x) = \int_Y |h| \, d\nu \cdot \int_X |g| \, d\mu < \infty.$$

Altså er $g \otimes h \in \mathcal{L}(X \times Y, \mu \times \nu)$, og regningen kan nu gentages uden numeriske tegn, i kraft af Fubinis sætning.

Bemærkning. For en funktion f, der er integrabel m.h.t. $\mu \times \nu$ over en mængde $E \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, kan Fubinis sætning anvendes på funktionen

$$(x,y) \to \begin{cases} f(x,y) & \text{for } (x,y) \in E \\ 0 & \text{for } (x,y) \in X \times Y \setminus E. \end{cases}$$

Samme idé kan naturligvis benyttes i forbindelse med Tonellis sætning.

<u>Hovedeksempel.</u>

<u>Når</u> $d = p + q$, $p, q \in \mathbb{N}$, <u>gælder</u>

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z) \, dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y) \, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) \, dy \, dx = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) \, dx \, dy$$

<u>for enhver Borel funktion f defineret på $\mathbb{R}^d$, der enten har værdier i $[0, \infty]$ eller har endelige (reelle eller komplekse) værdier og er Lebesgue integrabel.</u>

Thi ved identifikation af $\mathbb{R}^d$ med $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ stemmer Lebesgue målet $m_d : \mathcal{B}_d \to [0,\infty]$ overens med produktmålet $m_p \times m_q$ (§7.3, sætning 2). Tonellis og Fubinis sætninger står så til rådighed, idet integralet $\int_{\mathbb{R}^d} f(z)dz = \int_{\mathbb{R}^d} f\,dm_d$ opfattes som $\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f\,d(m_p \times m_q)$.

Resultatet skyldes Henri Lebesgue, 1902, for en begrænset funktion f defineret på et begrænset interval $I \times J$. (Guido Fubini klarede tilfældet $f \in \mathcal{L}(I \times J)$; 1907. Leonida Tonelli bemærkede, at $f \in \mathcal{L}(I \times J)$, hvis $\int_I \int_J |f(x,y)|\,dy\,dx < \infty$; 1909.)

7.5. Eksempler.

A. Idet V_d betegner Lebesgue målet af enhedskuglen i $\mathbb{R}^d$, $d = 1,2,\dots$, gælder

$$V_{d+1} = 2V_d \int_0^{\pi/2} \cos^{(d+1)} t \, dt.$$

Lad os nemlig opfatte $\mathbb{R}^{d+1}$ som $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ og udnytte, at Lebesgue målene i $\mathbb{R}^d$ og $\mathbb{R}$ som produkt har Lebesgue målet i $\mathbb{R}^{d+1}$. (§7.3, sætn. 2.)

Snittet i enhedskuglen

$$\{(x_1,\dots,x_d,y) \mid x_1^2 + \dots + x_d^2 + y^2 < 1\}$$

i $\mathbb{R}^{d+1}$ bestemt ved et $y \in \mathbb{R}$ er

$$\{(x_1,\dots,x_d) \mid x_1^2 + \dots + x_d^2 < 1 - y^2\}.$$

Det er tomt for $|y| \geq 1$, medens det for $|y| < 1$ er en kugle i $\mathbb{R}^d$ med radius $(1-y^2)^{1/2}$ og Lebesgue mål $V_d \cdot (1-y^2)^{d/2}$ (se §6.2, bemærkning 1). Følgelig (§7.3, lemma 2) er

$$V_{d+1} = \int_{-1}^{1} V_d \, (1-y^2)^{d/2} \, dy.$$

Den angivne rekursionsformel fås nu ved substitutionen $y = \sin t$.

Idet enhedskuglen i $\mathbb{R}$ er $]-1,1[$, har vi $V_1 = 2$. Formlen giver så (se f.eks. A. F. Andersen, H. Bohr, R. Pedersen: Matematisk Analyse II, København 1945, p. 213 og 234):

$$V_2 = \pi, \quad V_3 = 4\pi/3, \quad V_4 = \pi^2/2, \quad V_5 = 8\pi^2/15, \quad V_6 = \pi^3/6, \quad \dots .$$

Generelt kan man finde

$$V_d = \pi^{d/2} / \Gamma(\tfrac{d}{2}+1),$$

hvilket for d lige, $d = 2n$, kan skrives $V_{2n} = \pi^n / n!$.

B. Ifølge Tonellis sætning er

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-y^2} \, dy \, dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)^2.$$

Vi kan også udtrykke integralet på venstre side i polære koordinater (§6.3, eksempel E),

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+\times]-\pi,\pi[} e^{-r^2} r\, d(r,v),$$

og derpå benytte Tonellis sætning:

$$\int_{\mathbb{R}_+\times]-\pi,\pi[} e^{-r^2} r\, d(r,v) = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2} r\, dv\, dr = \pi\int_{\mathbb{R}_+} e^{-r^2} 2r\, dr = \pi \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t}\, dt = \pi.$$

Sammenholdt finder vi $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

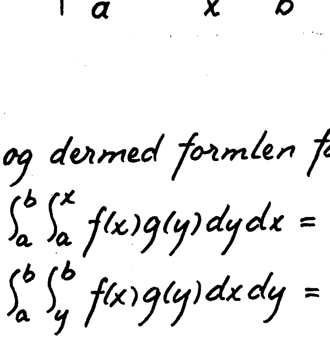
C. Partiel integration.

Lad Borel funktionerne f og g være Lebesgue integrable i et interval $[a,b]$ og lad F og G være ubestemte integraler af f og g. (Se §6.4). Da gælder

$$\int_a^b f(x)G(x)\, dx = [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)\, dx.$$

Bevis. Vi kan antage, at f og g er defineret på hele $\mathbb{R}$ med

$$f(x) = g(x) = 0 \quad \text{for } x \notin [a,b].$$



Da nu $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ og $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, er ifølge §7.4 funktionen $f\otimes g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ og dermed $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, hvor

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x)g(y) & \text{for } x \geq y \\ 0 & \text{for } x < y. \end{cases}$$

Fubinis sætning giver nu

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dx\, dy$$

og dermed formlen for partiel integration, idet

$$\int_a^b\int_a^x f(x)g(y)\, dy\, dx = \int_a^b f(x)(G(x)-G(a))\, dx = \int_a^b f(x)G(x)\, dx - G(a)(F(b)-F(a)),$$

$$\int_a^b\int_y^b f(x)g(y)\, dx\, dy = \int_a^b g(y)(F(b)-F(y))\, dy = F(b)(G(b)-G(a)) - \int_a^b g(y)F(y)\, dy.$$

§8. Funktionsrummene $\mathcal{L}_p$.

8.1. Funktionsrummet $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$.

For et vilkårligt målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ med $X \neq \emptyset$ er mængden $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ af μ-integrable funktioner $f: X \to \mathbb{C}$ et funktionsvektorrum, idet

$$af, f+g \in \mathcal{L}, \text{ når } a \in \mathbb{C},\ f, g \in \mathcal{L}.$$

Med $\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu$ gælder (i) $\|f\|_1 \geq 0$, (ii) $\|af\|_1 = |a| \|f\|_1$ og (iii) $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ for $a \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{L}$, medens

$$\|f\|_1 = 0 \iff f = 0 \ \mu\text{-næsten overalt},$$

ifølge §4.2, Korollar.

Her kan $\mathbb{C}$ erstattes med $\mathbb{R}$. I begge tilfælde vil det ofte være naturligt at betragte

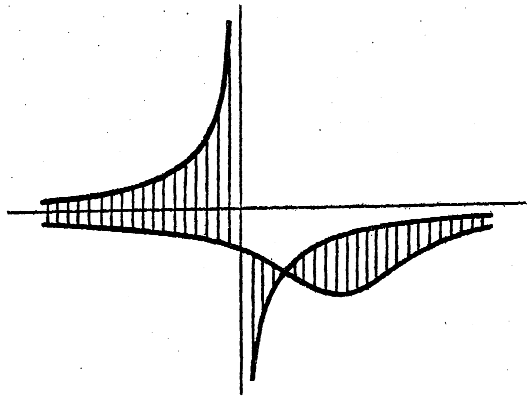
$$\|f-g\|_1 = \int |f-g| \, d\mu$$

som en afstand mellem funktionerne f og g tilhørende tilhørende $\mathcal{L}$. Man bemærker, at

$$\|f-g\|_1 = 0 \iff f = g \ \mu\text{-næsten overalt}.$$

En følge af funktioner $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{L}$ siges at konvergere mod $f \in \mathcal{L}$ i 1-middel, hvis $\|f_n - f\|_1 \to 0$ for $n \to \infty$.

Dette konvergensbegreb for funktioner er et helt andet end punktvis konvergens, som vi hidtil udelukkende har beskæftiget os med. (Et vist samspil er der dog, se §8.3, sætning 2 og §8.4, Korollar 1 og 2.)



Eksempel. For reelle funktioner $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}, m_d)$ er $\|f-g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - g(x)| \, dx = m_{d+1}(A)$, hvor $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{d+1} \mid y \text{ ligger mellem } f(x) \text{ og } g(x)\}$. (§7.3, sætning 2, Konsekvens.)

Med $f_n = \frac{1}{n}\cdot 1_{]0,n]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $n=1,2,\dots$, eller $f_n = n\cdot 1_{]0,\frac{1}{n}]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $n=1,2,\dots$, konvergerer talfölgen $f_1(x), f_2(x),\dots$ mod 0 for hvert $x\in\mathbb{R}$, dvs. $f_1, f_2,\dots$ konvergerer punktvis mod nulfunktionen. Men fölgen $f_1, f_2,\dots$ er ikke konvergent i 1-middel.

Fölgen $g_1, g_2,\dots \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ af indikatorfunktioner for intervallerne $]0,1]$, $]0,\frac{1}{2}]$, $]\frac{1}{2},1]$, $]0,\frac{1}{3}]$, $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, $]\frac{2}{3},1]$, $]0,\frac{1}{4}]$, ... konvergerer mod nulfunktionen i 1-middel, men for hvert $x\in]0,1]$ er talfölgen $g_1(x), g_2(x), \dots$ divergent.

8.2. <u>Vektorrum med seminorm</u>.

Ved en <u>pseudometrik</u> i en mængde V forstås en funktion $d\colon V\times V\to\mathbb{R}$, hvor

$$d(x,y)\geqq 0,\quad d(x,x)=0,$$
$$d(x,y)=d(y,x),$$
$$d(x,z)\leqq d(x,y)+d(y,z),\qquad \text{(trekantsuligheden)},$$

for $x,y,z\in V$.

Bemærk, at der muligvis findes punkter $x\neq y$ med $d(x,y)=0$. Er dette ikke tilfældet, kaldes d som bekendt en <u>metrik</u> (Maurice Fréchet, 1906).

For et <u>pseudometrisk rum</u>, dvs. en mængde V med en pseudometrik, defineres kugler, åbne og afsluttede mængder, osv., ganske som for et metrisk rum. En følge $x_1,x_2,\ldots\in V$ vil således konvergere mod $x\in V$, netop hvis $d(x,x_n)\to 0$ for $n\to\infty$.

Når $d(x,y)=0$, „følges" x og y: Af trekantsuligheden fås

$$\forall z\in V:\quad d(x,z)=d(y,z),$$

specielt kommer kugler med centrum x eller y ud på ét, $K(x,r)=K(y,r)$. Dermed vil x og y samtidig være indre punkter, ydre punkter eller randpunkter for en mængde $A\subseteq V$. <u>Er x grænsepunkt for en følge $x_1,x_2,\ldots$, vil y også være det</u>.

Ved en <u>seminorm</u> i et vektorrum V over $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$) forstås en funktion $N\colon V\to\mathbb{R}$, hvor

(i) $N(x)\geqq 0$,

(ii) $N(ax)=|a|\,N(x)$,

(iii) $N(x+y)\leqq N(x)+N(y)$, (trekantsuligheden),

for $x,y\in V$ og $a\in\mathbb{C}$ (henholdsvis $a\in\mathbb{R}$).

For $N(x)$ skrives sædvanligvis $\|x\|$. (Betegnelsen er først brugt af Erhard Schmidt 1907 for $\| \|_2$ i ℓ_2, se §8.3.)

Muligvis findes vektorer $x \neq 0$ med $N(x) = \|x\| = 0$. Er dette ikke tilfældet, kaldes N en <u>norm</u>.

I et vektorrum $\mathcal{V}$ med seminorm $\| \| = N$ indføres en pseudometrik ved definitionen

$$d(x,y) = \|y-x\| = N(y-x), \quad x,y \in \mathcal{V}.$$

Vi kan så tale om kugler, åbne og afsluttede mængder, osv. Og foruden om følger også om rækker: En række $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ med led $x_k \in \mathcal{V}$ siges at være <u>konvergent</u> i $\mathcal{V}, \| \|$ <u>med sum</u> $s \in \mathcal{V}$, hvis følgen af afsnit $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $n = 1, 2, \ldots$, er konvergent med grænse s, dvs. hvis

$$d(s_n, s) = \|s - s_n\| = N(s - s_n) \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Bemærk, at $N : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ er kontinuert; endda gælder

$$|N(y) - N(x)| \leqq N(y-x) = d(x,y).$$

Også kompositionerne er kontinuerte. Således kan man indse, at multiplikationen med skalarer er kontinuert i (a,x), ved brug af

$$N(by - ax) \leqq |b-a| N(y-x) + |b-a| N(x) + |a| N(y-x),$$

der fås af identiteten

$$by - ax = (b-a)(y-x) + (b-a)x + a(y-x).$$

For additionen i $\mathcal{V}$ benyttes

$$N((y'+y'') - (x'+x'')) \leqq N(y'-x') + N(y''-x'').$$

Idet $\mathcal{V}_0 = \{x \in \mathcal{V} \mid N(x) = 0\}$ er et underrum af $\mathcal{V}$, defineres ved

$$x \sim y \Leftrightarrow d(x,y) = N(y-x) = 0$$

en ækvivalensrelation i $\mathcal{V}$, der harmonerer med vektorrummets kompositioner. Mængden $V = \mathcal{V}/\mathcal{V}_0$ af ækvivalensklasser (sideunderrum)

$$[x] = \{y \in \mathcal{V} \mid N(y-x) = 0\}$$

er da et vektorrum med kompositioner defineret ved repræsentanter,

$$[x] + [y] = [x+y], \quad a[x] = [ax].$$

Da $N(x) = N(y)$, når $N(y-x) = 0$, defineres en funktion $N: V \to \mathbb{R}$ ved
$$N([x]) = N(x).$$
Denne funktion er en norm i V. Vi noterer:

Et vektorrum $\mathcal{V}$ med seminorm går over i et vektorrum V med norm, når elementerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen
$$x \sim y \Leftrightarrow \|y-x\| = 0.$$

Eksempel. For et vilkårligt målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ med $X \neq \emptyset$ defineres en seminorm i funktionsrummet $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ ved
$$\|f\|_1 = \int |f| d\mu, \quad f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu).$$
Det tilsvarende konvergensbegreb er konvergens i 1-middel. (Se §8.1.)

Funktionsrummet $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ med seminormen $\| \ \|_1$ går over i et vektorrum $L = L(X, \mathbb{E}, \mu)$ med norm (som vi også skriver $\| \ \|_1$), når funktionerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen $\sim$ givet ved
$$f \sim g \Leftrightarrow \|g-f\|_1 = 0,$$
dvs.
$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ næsten overalt m.h.t. } \mu.$$

Overgangen fra funktionsrummet $\mathcal{L}$ til Lebesgue rummet L består løst sagt i, at vi ophører at skelne mellem funktioner f og g, eller regner dem for lige gode, når $f = g$ næsten overalt m.h.t. μ. Præcist: de opfattes som repræsentanter for en og samme ting (nemlig for samme klasse).

En funktion defineret på et funktionsrum, eller eventuelt blot på et vektorrum, kaldes ofte en funktional. I nogle fremstillinger af integralteorien lægges der megen vægt på, at man skal opfatte integralet m.h.t. μ som funktionalen
$$f \to \int_X f d\mu, \quad f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu).$$
Denne funktional er lineær (§4.3, sætning 2a og 2b, henh. §4.4) og konti-

nuert, idet

$$\left|\int_X g\,d\mu - \int_X f\,d\mu\right| = \left|\int_X (g-f)\,d\mu\right| \leqq \int_X |g-f|\,d\mu = \|g-f\|_1 .$$

Specielt er $\int_X g\,d\mu = \int_X f\,d\mu$, når $\|g-f\|_1 = 0$. Integralet m.h.t. μ giver derfor anledning til en (kontinuert, lineær) funktional $[f] \to \int_X f\,d\mu$ på $L(X,\mathbb{E},\mu)$.

8.3. <u>Funktionsrummene</u> $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, $1 \leqq p < \infty$.

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$, medens p er et reelt tal, $1 \leqq p < \infty$.

En reel (eller kompleks) funktion f defineret på X siges at være p-<u>dobbelt</u> <u>integrabel</u> med hensyn til μ, hvis f er $\mathbb{E}$-målelig og

$$\int |f|^p d\mu < \infty .$$

Mængden af p-dobbelt integrable funktioner $f: X \to \mathbb{R}$ (eller $f: X \to \mathbb{C}$) betegnes $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\mu) = \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Bemærk, at $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(X, \mathbb{E}, \mu)$ netop er mængden $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ af μ-integrable funktioner på X. – I stedet for 2-dobbelt integrabel siges også <u>kvadratisk</u> <u>integrabel</u>.

<u>Mængden</u> $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ <u>er</u> <u>et</u> <u>funktionsvektorrum</u> <u>over</u> $\mathbb{R}$ (<u>eller</u> $\mathbb{C}$).

Thi er a en skalar og $f, g \in \mathcal{L}_p$, da er $af \in \mathcal{L}_p$ og $f+g \in \mathcal{L}_p$. Funktionerne af og $f+g$ er jo $\mathbb{E}$-målelige og

$$\int |af|^p d\mu = |a|^p \int |f|^p d\mu ,$$

$$\int |f+g|^p d\mu \leqq \int (|f|+|g|)^p d\mu \leqq 2^p \int |f|^p d\mu + 2^p \int |g|^p d\mu .$$

Den sidste ulighed følger af, at der for $b, c \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ gælder

$$(b+c)^p \leqq 2^p (b \vee c)^p = 2^p (b^p \vee c^p) \leqq 2^p (b^p + c^p),$$

med $b \vee c = \max\{b, c\}$.

Vi skal se, at der ved

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}, \quad f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$$

defineres en seminorm $\| \, \|_p$ i $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Problemet ligger i trekantsuligheden. For $p = 1$ er også den triviel, således at kun tilfældet $1 < p < \infty$ står tilbage. Her benytter vi

<u>Hölders ulighed.</u> <u>Når</u> $f \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>og</u> $g \in \mathcal{L}_q(X,\mathbb{E},\mu)$, <u>hvor</u> $p,q > 1$ <u>og</u> $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, <u>da er</u> $fg \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>og</u>

$$\|fg\|_1 = \int |fg|\,d\mu \leqq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Bemærk, at $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ er ensbetydende med

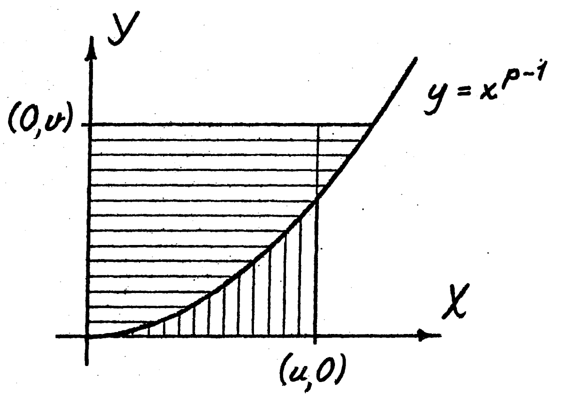
dels $(p-1)(q-1)=1$, dels $(p-1)q = p$.

(Det fremgår ved at multiplicere venstre og højre side med pq.) Relationen er i øvrigt symmetrisk i p og q og sætter $]1,\infty[$ i enentydig korrespondance med sig selv.

Under forudsætningen $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, viser vi først

$$(*) \qquad uv \leqq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \quad \text{for } u,v \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

(For $p=q=2$ er uligheden blot den trivielle $2uv \leqq u^2+v^2$.)



Lebesgue målet af de to med skravering angivne punktmængder i $\mathbb{R}^2$ er

$$\int_0^u x^{p-1}dx = \frac{u^p}{p}, \quad \int_0^v y^{q-1}dy = \frac{v^q}{q}$$

(§7.3, sætning 2, konsekvens). I sidste tilfælde er brugt

$$y = x^{p-1} \Leftrightarrow x = y^{q-1}.$$

Uligheden (*) fås nu straks, idet uv tolkes som målet af et rektangel.

Ved beviset for Hölders ulighed kan vi antage $\|f\|_p \neq 0$ og $\|g\|_q \neq 0$, thi ellers er $fg = 0$ næsten overalt, altså $\|fg\|_1 = 0$. Vi kan så yderligere antage $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, idet f,g ellers erstattes med $f/\|f\|_p$, $g/\|g\|_q$. Ifølge (*) er nu

$$|f(x)||g(x)| \leqq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$

for alle $x \in X$, og dermed

$$\int |fg|\,d\mu \leqq \frac{1}{p}\int |f|^p d\mu + \frac{1}{q}\int |g|^q d\mu$$
$$= \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q < \infty .$$

Heraf fremgår påstandene i Hölders ulighed. (Ved beviset er stiltiende benyttet, at fg er $\mathbb{E}$-målelig.)

<u>Minkowskis ulighed</u>. <u>Når</u> $f, g \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, <u>hvor</u> $1 \leqq p < \infty$, <u>da er</u> $f+g \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>og</u>
$$\|f+g\|_p \leqq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Vi ved allerede (p. 128), at $f+g \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$, således at det kun er selve uligheden, vi skal vise. Vi kan antage $p>1$ og lader q være givet ved $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Vi begynder med vurderingen
$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p d\mu = \int |f+g||f+g|^{p-1} d\mu$$
$$\leqq \int |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int |g||f+g|^{p-1} d\mu .$$

Funktionen $|f+g|^{p-1}$ er $\mathbb{E}$-målelig, og
$$\int |f+g|^{(p-1)q} d\mu = \int |f+g|^p d\mu < \infty ,$$
idet $f+g \in \mathcal{L}_p$. Altså er $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}_q$ med
$$\| |f+g|^{p-1} \|_q = \left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q} = \|f+g\|_p^{p-1} .$$

Hölders ulighed giver så
$$\int |f||f+g|^{p-1} d\mu \leqq \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} ,$$
$$\int |g||f+g|^{p-1} d\mu \leqq \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1} .$$

Sammenholdt har vi
$$\|f+g\|_p^p \leqq (\|f\|_p + \|g\|_p)\, \|f+g\|_p^{p-1} ,$$
hvoraf Minkowskis ulighed fås ved multiplikation af venstre og højre side med $\|f+g\|_p^{1-p}$, – forudsat $\|f+g\|_p > 0$. I modsat fald er uligheden triviel.

Sætning 1. Ved
$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}, \quad f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu),$$
defineres en seminorm i funktionsrummet $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, når $1 \leqq p < \infty$.

Det eneste problem var trekantsuligheden, dvs. Minkowskis ulighed.

Det til seminormen $\| \ \|_p$ svarende konvergensbegreb kaldes konvergens i p-middel (for $p=2$ også konvergens i kvadratisk middel). En følge $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ konvergerer således mod $f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ i p-middel, netop hvis
$$\|f_n - f\|_p \to 0 \text{ for } n \to \infty,$$
dvs. hvis
$$\int |f_n - f|^p d\mu \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$
Dette konvergensbegreb er et helt andet end punktvis konvergens (jfr. §8.1). Der gælder dog

Sætning 2. Lad $f_n \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, $n = 1, 2, \dots$, lad følgen $f_1(x), f_2(x), \dots$ være konvergent i $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) for hvert $x \in X$ og sæt $f(x) = \lim_n f_n(x)$, $x \in X$. Hvis der findes en funktion $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med $\int g^p d\mu < \infty$, -(vi regner $\infty^p = \infty$)-, således at $\forall n \in \mathbb{N}: |f_n| \leqq g$, da er $f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ og
$$\|f_n - f\|_p \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Bevis. Det er klart, at f er $\mathbb{E}$-målelig; da nu $|f| \leqq g$ og dermed $\int |f|^p d\mu \leqq \int g^p d\mu < \infty$, har vi $f \in \mathcal{L}_p$. Idet $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ for hvert $x \in X$ og $\forall n \in \mathbb{N}: |f_n - f|^p \leqq 2^p g^p$, hvor $\int 2^p g^p d\mu < \infty$, giver Lebesgues majorantsætning
$$\int |f_n - f|^p d\mu \to \int 0 \, d\mu = 0 \text{ for } n \to \infty.$$

For flere resultater om samspil med punktvis konvergens, se §8.4, korollar 1 og 2.

Seminormen $\| \ \|_p$ er ikke i almindelighed en norm i $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$, idet

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} = 0 \iff f = 0 \ \mu\text{-næsten overalt}.$$

Men ved at samle funktionerne i $\mathcal{L}_p$ i klasser kan man, ifølge §8.2, føre seminormen over i en norm:

<u>Funktionsrummet</u> $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>med seminormen</u> $\| \ \|_p$ <u>går over i et vektorrum</u> $L_p = L_p(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>med norm</u> (som vi også skriver $\| \ \|_p$), <u>når funktionerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen</u>

$$f \sim g \iff \|g - f\|_p = 0,$$

<u>dvs.</u>

$$f \sim g \iff f = g \ \underline{\text{næsten overalt m.h.t.}}\ \mu.$$

Hermed er <u>Lebesgue rummene</u> $L_p = L_p(X,\mathbb{E},\mu)$ indført for $1 \leqq p < \infty$. Bemærk, at $L_1(X,\mathbb{E},\mu) = L(X,\mathbb{E},\mu)$.

<u>Hvis</u> $\mu(X) < \infty$, <u>så er</u> $\mathcal{L}_r(X,\mathbb{E},\mu) \supseteq \mathcal{L}_s(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>for</u> $1 \leqq r < s$. <u>Hvis</u> $\mu(X) = 1$, <u>gælder tillige</u> $\|f\|_r \leqq \|f\|_s$, <u>når</u> $f \in \mathcal{L}_s(X,\mathbb{E},\mu)$.

Antag nemlig $\mu(X) < \infty$ og $f \in \mathcal{L}_s$. Anvendelse af Hölders ulighed på $|f|^r \in \mathcal{L}_{s/r}$ og den konstante funktion $1 \in \mathcal{L}_{s/(s-r)}$ giver da $|f|^r \in \mathcal{L}$, altså $f \in \mathcal{L}_r$, samt

$$\int |f|^r \cdot 1 \, d\mu \leqq \left(\int |f|^{r \cdot s/r} d\mu\right)^{r/s} \left(\int 1 \, d\mu\right)^{(s-r)/s}$$

dvs.

$$\|f\|_r \leqq \|f\|_s \, \mu(X)^{1/r - 1/s}.$$

I tilfældet $\mu(X) = \infty$ gælder ikke i almindelighed resultater af lignende karakter. For Lebesgue målet på $\mathbb{R}$ er det således let at give eksempler på funktioner tilhørende henholdsvis $\mathcal{L}_r \setminus \mathcal{L}_s$, $\mathcal{L}_r \cap \mathcal{L}_s$ og $\mathcal{L}_s \setminus \mathcal{L}_r$.

Er $f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{X}, \mu)$ og $g \in \mathcal{L}_p(Y, \mathbb{Y}, \nu)$, hvor $1 \leq p < \infty$, medens $\mu : \mathbb{X} \to [0,\infty]$ og $\nu : \mathbb{Y} \to [0,\infty]$ er σ-endelige mål i mængder $X \neq \emptyset$ og $Y \neq \emptyset$, da er $f \otimes g \in \mathcal{L}_p(X \times Y, \mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \mu \times \nu)$ med

$$\|f \otimes g\|_p = \|f\|_p \|g\|_p .$$

Thi $f \otimes g$ er $(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$-målelig (§7.1), og ifølge Tonellis sætning (§7.4) er

$$\begin{aligned}\int_{X \times Y} |f \otimes g|^p d(\mu \times \nu) &= \int_X \int_Y |f(x)|^p |g(y)|^p d\nu(y)\, d\mu(x) \\ &= \int_X |f(x)|^p \|g\|_p^p \, d\mu(x) = \|f\|_p^p \|g\|_p^p < \infty .\end{aligned}$$

For $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}, m)$ og $L_p(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}, m)$, hvor $\mathbb{B}$ er Borel algebraen og m Lebesgue målet i $\mathbb{R}^d$, skriver vi kort $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d)$, $L_p(\mathbb{R}^d)$. Ligeledes skrives $\mathcal{L}_p(A)$, $L_p(A)$ for $\mathcal{L}_p(A, m)$, $L_p(A, m)$, hvor A er en Borel mængde i $\mathbb{R}^d$.

Betegnelsen $\ell_p(J)$ bruges for $\mathcal{L}_p(J, \mu)$, når μ er tællemålet i $J \neq \emptyset$. Er en funktion på J skrevet som en familie $(a_j)_{j \in J}$ af reelle (eller komplekse) tal, har vi

$$(a_j)_{j \in J} \in \ell_p(J) \iff \sum_{j \in J} |a_j|^p < \infty ,$$

og i bekræftende fald

$$\|(a_j)_{j \in J}\|_p = \left(\sum_{j \in J} |a_j|^p\right)^{1/p} .$$

Her er $\| \ \|_p$ en norm (og ikke blot en seminorm).

For $\ell_p(\mathbb{N})$ skrives også ℓ_p. Altså

$$\ell_p = \{(a_1, a_2, \ldots) \mid \sum_{j=1}^\infty |a_j|^p < \infty\} ,$$

$$\|(a_1, a_2, \ldots)\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p\right)^{1/p} \quad \text{når } (a_1, a_2, \ldots) \in \ell_p .$$

Bemærk, at $\ell_p(\{1, \ldots, d\})$ netop er $\mathbb{R}^d$ (eller $\mathbb{C}^d$), med

$$\|(x_1, \ldots, x_d)\|_p = \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{1/p} .$$

Som specialtilfælde af Hölders og Minkowskis uligheder har vi her

$$\sum_{j=1}^{d} |x_j y_j| \leqq \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{d} |y_j|^q\right)^{1/q}$$

når $x_j, y_j \in \mathbb{C}$, $1 < p, q < \infty$ og $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, henholdsvis

$$\left(\sum_{j=1}^{d} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{d} |y_j|^p\right)^{1/p}$$

når $x_j, y_j \in \mathbb{C}$ og $1 \leqq p < \infty$. Det er disse uligheder, der skyldes henholdsvis Otto Hölder (1889) og Hermann Minkowski (1896).

Ligesom $\| \|_p$ i $\mathbb{R}^d$ og $\mathbb{C}^d$ er en generalisering ud fra det klassiske tilfælde $p=2$, således er rummene ℓ_p og $\mathcal{L}_p([a,b])$ først indført og studeret for $p=2$. (David Hilbert, Erhard Schmidt, Frédéric Riesz, Ernst Fischer, 1906-1908.) Tilfældet $p=2$ er også langt det mest interessante; vi skal behandle det nærmere i §13. For vilkårligt p, $1<p<\infty$, er $\mathcal{L}_p([a,b])$ indført af Frédéric Riesz (Mathematische Annalen 69 (1910), p. 449 ff.).

8.4. Fuldstændighedssætningen.

En følge $f_1, f_2, \dots$ af elementer i et (pseudo)metrisk rum $\mathcal{V}$ kaldes en Cauchy følge eller fundamentalfølge, hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m,n > N: \ d(f_m, f_n) < \varepsilon .$$

Enhver følge $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{V}$, der har et grænseelement $f \in \mathcal{V}$, er en Cauchy følge. Det fremgår af trekantsuligheden,

$$d(f_m, f_n) \leq d(f_m, f) + d(f, f_n).$$

Hvis omvendt enhver Cauchy følge i $\mathcal{V}$ er konvergent i $\mathcal{V}$, siges $\mathcal{V}$ at være fuldstændigt.

Med sædvanlig metrik er $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ som bekendt fuldstændige, i modsætning til $\mathbb{Q}$.

En række $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ med led tilhørende et vektorrum $\mathcal{V}$ (over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) med seminorm kaldes en Cauchy række, hvis følgen af afsnit $s_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$, $n = 1, 2, \dots$, er en Cauchy følge, dvs. hvis der til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $N \in \mathbb{N}$, således at

$$d(s_m, s_n) = \| s_n - s_m \| = \| \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} g_k \| < \varepsilon$$

når $n > m > N$.

Fuldstændighed kan her lige så godt defineres ved kravet, at enhver Cauchy række i $\mathcal{V}$ er konvergent i $\mathcal{V}$. Mere interessant er

Sætning. Et vektorrum $\mathcal{V}$ (over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) med seminorm er fuldstændigt, hvis og kun hvis enhver række $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ med led $g_k \in \mathcal{V}$, hvor $\sum_{k \in \mathbb{N}} \| g_k \| < \infty$, er konvergent i $\mathcal{V}$, – dvs. hvis „absolut konvergens" medfører konvergens.

Bevis. 1°. Når $\sum_{k \in \mathbb{N}} \| g_k \| < \infty$, dvs. når rækken $\sum_{k=1}^{\infty} \| g_k \|$ er konvergent i $\mathbb{R}$ og dermed en Cauchy række i $\mathbb{R}$, følger det straks af uligheden

$$\| \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} g_k \| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \| g_k \| ,$$

at $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ er en Cauchy række i $\mathcal{V}$ – og dermed konvergent i $\mathcal{V}$, hvis $\mathcal{V}$ er fuldstændigt.

2° Antag omvendt betingelsen opfyldt. Er $f_1, f_2, \ldots$ en Cauchy følge i $\mathcal{V}$, kan vi tænke os $n_1 < n_2 < \ldots$ valgt, således at

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \infty .$$

(F. eks. kan man sætte $n_k = k + \max\{m_1, \ldots, m_k\}$, hvor $m_1, m_2, \ldots$ er valgt, så

$$\|f_n - f_m\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{for } m, n > m_k \quad .)$$

Rækken $f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ er da konvergent med en sum $f \in \mathcal{V}$, dvs. afsnitsfølgen $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$ konvergerer mod f,

$$\|f - f_{n_k}\| \to 0 \text{ for } k \to \infty .$$

Men så vil også den oprindelige Cauchy følge $f_1, f_2, \ldots$ konvergere mod f. Det indser man ved hjælp af uligheden

$$\|f - f_n\| \leqq \|f - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f_n\| .$$

Et vektorrum V (over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) med <u>norm</u>, der er <u>fuldstændigt</u> ved metrikken

$$d(f, g) = \|g - f\|$$

kaldes et <u>Banach rum</u>. (Stefan Banach har fra 1920, som den første, behandlet sådanne rum generelt, bl. a. i Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932, genoptrykt af Chelsea.)

Et vektorrum $\mathcal{V}$ med <u>seminorm</u> er fuldstændigt, hvis og kun hvis $\mathcal{V}$ går over i et Banach rum V, når elementerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen

$$f \sim g \Leftrightarrow \|g - f\| = 0 .$$

Thi $[f_1], [f_2], \ldots \to [f]$, netop hvis $f_1, f_2, \ldots \to f$, idet

$$\|[f] - [f_n]\| = \|[f - f_n]\| = \|f - f_n\| ,$$

og tilsvarende vil $[f_1], [f_2], \ldots$ være en Cauchy følge, netop hvis $f_1, f_2, \ldots$ er det.

Med $\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{1/p}$, hvor $1 \leq p < \infty$, er det ofte langt mere hensigtsmæssigt at arbejde med Lebesgue rummet $L_p([a,b])$ i stedet for f.eks. rummet $\mathscr{C}([a,b])$ af kontinuerte funktioner, der ikke er fuldstændigt ved $\| \; \|_p$. Forholdet er som mellem $\mathbb{R}$ og $\mathbb{Q}$.

For et vilkårligt målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$, med $X \neq \emptyset$, og $1 \leq p < \infty$ gælder nemlig følgende hovedsætning:

Fischers fuldstændighedssætning. Med
$$\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}, \quad f \in \mathscr{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu),$$
er funktionsrummet $\mathscr{L}_p = \mathscr{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ fuldstændigt.

Anderledes sagt: Lebesgue rummet $L_p = L_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et Banach rum.

For $\mathscr{L}_2([a,b])$ skyldes sætningen Ernst Fischer. (Sur la convergence en moyenne, Comptes Rendus 144, Paris 1907, p. 1023. Han udnyttede straks resultatet til et elegant bevis (ibid. p. 1024) for Riesz/Fischers sætning om Fourier rækker, se §13.1, – en af Lebesgue integralets største triumfer.)

Bevis. Vi benytter sætningen p. 135, betragter altså en række $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ med led $g_k \in \mathscr{L}_p$, hvor $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty$, og søger en funktion $f \in \mathscr{L}_p$, således at
$$\|f - \sum_{k=1}^{n} g_k\|_p \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Eftersøgningen viser sig at lykkes derved, at rækken $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ er punktvis konvergent næsten overalt, med en sumfunktion, der kan bruges:

1° Med
$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|, \quad x \in X,$$
vil $h : X \to [0, \infty]$ tilhøre $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$. Og rækken $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ er (absolut) konvergent i hvert punkt $x \in X$, hvor $h(x) < \infty$.

2° For $n \to \infty$ har vi $\sum_{k=1}^{n} |g_k(x)| \nearrow h(x)$ for alle $x \in X$ og dermed
$$\left(\sum_{k=1}^{n} |g_k(x)|\right)^p \nearrow (h(x))^p,$$
idet vi regner $\infty^p = \infty$. Lebesgues monotonisætning giver da
$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} |g_k|\right)^p d\mu \nearrow \int h^p d\mu,$$
altså
$$\left\| \sum_{k=1}^{n} |g_k| \right\|_p \nearrow \left(\int h^p d\mu\right)^{1/p}.$$
Idet $\| \sum_{k=1}^{n} |g_k| \|_p \leqq \sum_{k=1}^{n} \|g_k\|_p \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p$ for alle $n \in \mathbb{N}$, finder vi som resultat:
$$\left(\int h^p d\mu\right)^{1/p} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty.$$

3° Da $\int h^p d\mu < \infty$, slutter vi (§4.2, Korollar), at
$$N = \{x \mid h(x) = \infty\} = \{x \mid (h(x))^p = \infty\} \in \mathbb{E}$$
har mål $\mu(N) = 0$. Rækken $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ er altså absolut konvergent for μ-næsten alle $x \in X$.

4° Lad nu $f: X \to \mathbb{R}$ (eller $f: X \to \mathbb{C}$) være en $\mathbb{E}$-målelig funktion, hvor
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$$
for $x \in X \setminus N$. Eksempelvis $f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot 1_{X \setminus N}$.

Da er $|f| \leqq h$ og dermed $\int |f|^p d\mu \leqq \int h^p d\mu$. I kraft af resultatet i 2° har vi derfor $f \in \mathcal{L}_p$ og
$$\|f\|_p \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p.$$

5° Ved at anvende 4° på rækken $\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k$ i stedet for på $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ finder vi
$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} g_k \right\|_p \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|g_k\|_p$$
og dermed
$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} g_k \right\|_p \to 0 \quad \text{for } n \to \infty.$$

Lad os notere:

<u>En rækkke $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ med led $g_k \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, hvor $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty$, er både (absolut) konvergent næsten overalt og konvergent i p-middel, med samme funktion $f \in \mathcal{L}_p$ som sum.</u>

<u>Korollar 1.</u> <u>En følge</u> $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, <u>der konvergerer i p-middel mod</u> $g \in \mathcal{L}_p$, <u>har altid en delfølge, der konvergerer punktvis mod</u> g <u>næsten overalt</u>.

Thi vælges $n_1 < n_2 < \ldots$, således at

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|_p < \infty$$

(jfr. 2°, p. 136), da vil følgen $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$, – som afsnitsfølge for rækken $f_{n_1} + \Sigma_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$, – konvergere både næsten overalt og i p-middel mod samme funktion $f \in \mathcal{L}_p$. Og åbenbart er $\|g - f\|_p = 0$, altså $f = g$ næsten overalt.

<u>Korollar 2.</u> <u>Hvis en følge</u> $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ <u>konvergerer i p-middel mod</u> $g_1 \in \mathcal{L}_p$ <u>og punktvis mod</u> g_2 <u>næsten overalt, da er</u> $g_1 = g_2$ <u>næsten overalt</u>.

Thi en passende delfølge konvergerer næsten overalt mod g_1, foruden naturligvis tillige mod g_2.

8.5. Funktionsrummet $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Betragtet med supremumnormen, også kaldet den uniforme norm,

$$\|f\|_u = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

er funktionsvektorrummet $\mathcal{B}(X)$ af begrænsede funktioner $f : X \to \mathbb{R}$ (eller $f : X \to \mathbb{C}$) på en mængde $X \neq \emptyset$ fuldstændigt, altså et Banach rum. Konvergensbegrebet er uniform konvergens. (Jfr. Mat 1y, 1968-69, p. 7.01-7.03.)

Lad nu $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$.

Et tal $a \in [0, \infty]$ siges da at være et μ-essentielt overtal for funktionen $f : X \to [0, \infty]$, hvis

$$f(x) \leqq a \quad \text{for } \mu\text{-næsten alle } x \in X.$$

Enhver funktion $f : X \to [0, \infty]$ har et mindste essentielt overtal $M \in [0, \infty]$. Det kaldes det μ-essentielle supremum for f og betegnes ess. sup f.

Thi f har i hvert fald et essentielt overtal, nemlig ∞, og

$$M = \inf \{ a \in [0, \infty] \mid f(x) \leqq a \text{ for } \mu\text{-næsten alle } x \in X \}$$

er selv et essentielt overtal for f, - og dermed det mindste. For hvert $k \in \mathbb{N}$ findes jo en mængde $N_k \in \mathbb{E}$ med $\mu(N_k) = 0$, således at

$$f(x) \leqq M + \tfrac{1}{k} \quad \text{for } x \notin N_k ,$$

men så er

$$f(x) \leqq M \quad \text{for } x \notin \textstyle\bigcup_k N_k ,$$

hvor $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k) = 0$.

En funktion f defineret på X, med værdier i $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$, siges at være μ-essentielt begrænset, hvis der findes et $a \in [0, \infty[$, således at

$$|f(x)| \leqq a \quad \text{for } \mu\text{-næsten alle } x \in X ,$$

dvs. hvis ess. sup $|f| < \infty$.

Med $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ betegnes mængden af μ-essentielt begrænsede, $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f: X \to \mathbb{R}$ eller $f: X \to \mathbb{C}$. Man verificerer umiddelbart, at $\mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ er et funktionsvektorrum, og at der ved

$$\|f\|_\infty = \text{ess. sup}\, |f|, \quad f \in \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$$

defineres en seminorm $\|\ \|_\infty$ i $\mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$.

Det til $\|\ \|_\infty$ svarende konvergensbegreb er uniform konvergens næsten overalt: Med $f_1, f_2, \ldots$ og f tilhørende $\mathcal{L}_\infty$ vil

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

hvis og kun hvis der findes en mængde $N \in \mathbb{E}$ med $\mu(N) = 0$, således at $f_n(x) \to f(x)$ uniformt for $x \in X \setminus N$.

Thi for hvert $n \in \mathbb{N}$ findes en mængde $N_n \in \mathbb{E}$ med $\mu(N_n) = 0$, således at uligheden $\quad |f_n(x) - f(x)| \leqq \|f_n - f\|_\infty$

er opfyldt for alle $x \notin N_n$. Med $N = \bigcup_n N_n$ vil der så være uniform konvergens i $X \setminus N$, hvis $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Omvendt: Uniform konvergens i $X \setminus N$ kommer ud på, at

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in X \setminus N\} \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Og når $\mu(N) = 0$, er

$$\|f_n - f\|_\infty \leqq \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in X \setminus N\}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

<u>Med</u> $\|f\|_\infty = \text{ess. sup}\, |f|$, $f \in \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$, <u>er funktionsrummet</u> $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>fuldstændigt</u>.

Funktionsrummet $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ går altså over i et Banach rum, betegnet $L_\infty = L_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$, når funktionerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen $\quad f \sim g \Leftrightarrow \|g - f\|_\infty = 0$,

dvs. $\quad f \sim g \Leftrightarrow f = g$ næsten overalt m.h.t. μ.

Bevis. Lad $f_1, f_2, \ldots$ være en Cauchy følge i $\mathcal{L}_\infty$.
For hvert $m, n \in \mathbb{N}$ kan vi tænke os valgt en mængde $N_{mn} \in \mathbb{E}$

med $\mu(N_{mn})=0$, således at
$$|f_m(x)-f_n(x)| \leqq \|f_m-f_n\|_\infty \quad \text{for } x\notin N_{mn}.$$
Vi vælger yderligere en mængde $N_1\in\mathbb{E}$ med $\mu(N_1)=0$, således at restriktionen $f_1|_{X\setminus N_1}$ er begrænset, og sætter $N=N_1\cup\bigcup_{m,n}N_{mn}$. Så er $N\in\mathbb{E}$ med $\mu(N)=0$, og
$$f_1|_{X\setminus N},\ f_2|_{X\setminus N},\ \dots$$
er en Cauchy følge i $\mathcal{B}(X\setminus N)$, betragtet med den uniforme norm. (Det er klart, at $X\setminus N\neq\emptyset$, medmindre vi er i det trivielle tilfælde $\mu(X)=0$.) Følgen konvergerer da uniformt mod en funktion i $\mathcal{B}(X\setminus N)$. Med
$$f(x)=\begin{cases}\lim_n f_n(x) & \text{for } x\in X\setminus N\\ 0 & \text{for } x\in N\end{cases}$$
er så $f\in\mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ og $\|f_n-f\|_\infty\to 0$.

<u>Hölders</u> <u>ulighed</u> (§8.3) gælder også med $p=1$, $q=\infty$:
<u>Når</u> $f\in\mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>og</u> $g\in\mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$, <u>da</u> <u>er</u> $fg\in\mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>og</u>
$$\|fg\|_1=\int|fg|\,d\mu \leqq \|f\|_1\|g\|_\infty.$$
Thi $|f(x)g(x)|\leqq|f(x)|\,\|g\|_\infty$ for μ-næsten alle $x\in X$.

<u>Hvis</u> $\mu(X)<\infty$, <u>så</u> <u>er</u> $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)\supseteqq\mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>for</u> $1\leqq p<\infty$.
<u>Hvis</u> $\mu(X)=1$, <u>gælder</u> <u>tillige</u> $\|f\|_p\leqq\|f\|_\infty$, <u>når</u> $f\in\mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$.

Thi når $f\in\mathcal{L}_\infty$, er $|f(x)|^p\leqq\|f\|_\infty^p$ for μ-næsten alle $x\in X$ og dermed
$$\int|f|^p d\mu \leqq \int\|f\|_\infty^p d\mu = \|f\|_\infty^p\,\mu(X).$$

Idet $\ell_\infty(J)$ står for $\mathcal{L}_\infty(J,\mu)$, hvor μ er tællemålet i $J\neq\emptyset$, har vi $\ell_\infty(J)=\mathcal{B}(J)$ og
$$\|(a_j)_{j\in J}\|_\infty=\|(a_j)_{j\in J}\|_u=\sup_{j\in J}|a_j|.$$
Det følger af, at $\emptyset$ er den eneste mængde med $\mu(\emptyset)=0$.

Specielt er $\ell_\infty=\ell_\infty(\mathbb{N})$ rummet af begrænsede talfølger.

Til slut et par resultater vedrørende $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}, m)$:

En <u>kontinuert</u> funktion $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (eller $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$) tilhører $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$, hvis og kun hvis den er begrænset. I bekræftende fald er

$$\|f\|_\infty = \|f\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|.$$

Thi er $|f(x_0)| > a$, så er $|f(x)| > a$ for alle x i en omegn af x_0, og dermed $m(\{x \mid |f(x)| > a\}) > 0$. Der er derfor ikke flere essentielle overtal for $|f|$, end der er overtal.

Betragtet med den uniforme norm $\| \ \|_u$ er funktionsrummet $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ af kontinuerte, begrænsede funktioner på $\mathbb{R}^d$ et Banach rum. (En fundamentalfølge her konvergerer jo uniformt mod en begrænset funktion (p. 140), som tillige er kontinuert (Mat 1y, 1968-69, p. 7.04).

Når $f, g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ og $f \neq g$, så er

$$\|g-f\|_\infty = \|g-f\|_u > 0;$$

ved overgang fra $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ til $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ fås altså $[f] \neq [g]$.

Funktionsrummet $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ indlejres derfor injektivt ved $f \to [f]$ som et fuldstændigt underrum af $L_\infty(\mathbb{R}^d)$. (Ofte tillader man sig at skrive $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) \subset L_\infty(\mathbb{R}^d)$.)

§9. Approksimation i middel.

Sætningerne i denne paragraf er bl. a. nyttige ved, at de ofte tillader generalisering af resultater, som man er i stand til at vise for simple eller pæne funktioner.

9.1. Approksimation med simple funktioner.

En delmængde $\mathcal{U}$ af et pseudometrisk rum $\mathcal{V}$ siges, ganske som i et metrisk rum, at være tæt i $\mathcal{V}$, hvis $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{V}$, dvs. hvis

$$\forall v \in \mathcal{V} \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists u \in \mathcal{U}: \quad d(u,v) < \varepsilon.$$

En delmængde A af et normeret eller seminormeret vektorrum $\mathcal{V}$ siges at være total i $\mathcal{V}$, hvis det af A udspændte underrum span A er tæt i $\mathcal{V}$. Underrummet span A består af alle endelige linearkombinationer af vektorer fra A.

Sætning 1. For ethvert målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ ligger de simple, $\mathbb{E}$-målelige funktioner $g: X \to \mathbb{C}$ med

$$\mu(\{x \in X \mid g(x) \neq 0\}) < \infty$$

tæt i $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ for ethvert p, $1 \leqq p < \infty$.

En simpel funktion er en funktion med kun endelig mange værdier.

Bevis. Vi bemærker, at en simpel, $\mathbb{E}$-målelig funktion $g: X \to \mathbb{C}$ tilhører $\mathcal{L}_p$, hvor $1 \leqq p < \infty$, netop hvis

$$\mu(\{x \in X \mid g(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Er nemlig $a_1, \dots, a_n$ de fra 0 forskellige værdier af g, og sættes

$A_j = g^{-1}(a_j)$, $j=1,\dots,n$, vil $\int |g|^p d\mu = \Sigma_{j=1}^n |a_j|^p \mu(A_j)$ være endeligt, netop hvis hvert $\mu(A_j)$ er det, dvs. hvis $\mu(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \Sigma_{j=1}^n \mu(A_j) < \infty$.

For $f \in \mathcal{L}_p$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ skal vises eksistensen af en funktion g som nævnt, med $\|f-g\|_p < \varepsilon$. Vi kan antage $f \geqq 0$, idet vi ellers udnytter

$$f = (f_1^+ - f_1^-) + i(f_2^+ - f_2^-).$$

Der findes da (§4.2, lemma) en følge $0 \leqq g_1 \leqq g_2 \leqq \dots$ af simple, $\mathbb{E}$-målelige funktioner med $g_n(x) \to f(x)$ for hvert $x \in X$.
Idet $0 \leqq g_n \leqq f$, $n=1,2,\dots$, hvor $f \in \mathcal{L}_p$, sluttes $g_n \in \mathcal{L}_p$ samt $\|f-g_n\|_p \to 0$ (§8.3, sætn. 2). Som den søgte funktion g kan da bruges g_n for et passende n.

I resten af §9 betragtes tilfældet $(X, \mathbb{E}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathbb{B}, \mu)$, hvor $\mathbb{B}$ er Borel algebraen i $\mathbb{R}^d$ og μ et Radon mål.

Vi ser først på approksimation med <u>trappefunktioner</u>, hvorved vi vil forstå funktioner $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, der kan skrives som linearkombination $g = \Sigma_1^n c_j 1_{I_j}$ af indikatorfunktioner for standard intervaller i $\mathbb{R}^d$ (se §1.3). En trappefunktion tilhører naturligvis $\mathcal{L}_p(\mu)$ for ethvert Radon mål μ i $\mathbb{R}^d$ og ethvert p.

<u>Sætning 2.</u> <u>For ethvert Radon mål μ i $\mathbb{R}^d$ ligger trappefunktionerne $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ tæt i $\mathcal{L}_p(\mu)$ for ethvert p, $1 \leqq p < \infty$.</u>
Anderledes sagt: mængden af indikatorfunktioner for standard intervaller i $\mathbb{R}^d$ er total i $\mathcal{L}_p(\mu)$.

Bevis. For $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ skal vises eksistensen af en trappefunktion g, så $\|f-g\|_p < \varepsilon$. I kraft af sætning 1 kan vi antage, at f er en simpel Borel funktion med

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}) < \infty,$$

altså en linearkombination $\Sigma_1^n b_j 1_{B_j}$, hvor hvert B_j er en Borel mængde med $\mu(B_j) < \infty$. Vi kan da videre antage, at f er indikatorfunktionen 1_B for en Borel mængde $B \subseteq \mathbb{R}^d$ med $\mu(B) < \infty$.

Nu findes (§5.5, sætning) en følge $I_1, I_2, \ldots$, hvor hvert I_n er et standard interval eller tomt, således at

$$B \subseteq \cup_1^\infty I_n \quad \text{og} \quad \Sigma_1^\infty \mu(I_n) < \mu(B) + (\tfrac{1}{2}\varepsilon)^p.$$

Vi tænker os N valgt, således at

$$\Sigma_{N+1}^\infty \mu(I_n) < (\tfrac{1}{2}\varepsilon)^p,$$

og sætter $g = 1_{\cup_1^N I_n}$.

Det er da klart, at g er en trappefunktion, idet $\cup_1^N I_n$ jo kan skrives som forening af endelig mange, parvis disjunkte standard intervaller (§5.2, bemærkning 1, Konsekvens). Og da

$$g - 1_B = (1_{\cup_1^\infty I_n} - 1_B) - (1_{\cup_1^\infty I_n} - g),$$

har vi $\quad \|g - 1_B\|_p \leq \|1_{\cup_1^\infty I_n} - 1_B\|_p + \|1_{\cup_1^\infty I_n} - g\|_p < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon$,

idet $\|1_{\cup_1^\infty I_n} - 1_B\|_p^p = \int (1_{\cup_1^\infty I_n} - 1_B)^p d\mu = \int 1_{\cup_1^\infty I_n \setminus B}\, d\mu$

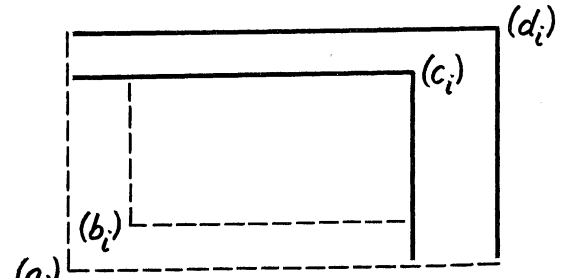
$$= \mu(\cup_1^\infty I_n) - \mu(B) \leq \Sigma_1^\infty \mu(I_n) - \mu(B) < (\tfrac{1}{2}\varepsilon)^p$$

og $\quad \|1_{\cup_1^\infty I_n} - g\|_p^p = \mu(\cup_1^\infty I_n \setminus \cup_1^N I_n) \leq \mu(\cup_{N+1}^\infty I_n) < (\tfrac{1}{2}\varepsilon)^p$.

<u>Lemma</u>. <u>Idet</u> μ <u>er et Radon mål i</u> $\mathbb{R}^d$, <u>findes til ethvert standard interval</u> $I =]a_1, c_1] \times \ldots \times]a_d, c_d]$ <u>og ethvert</u> $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ <u>talsæt</u> $b_1, \ldots, b_d$ <u>og</u> $d_1, \ldots, d_d$, <u>hvor</u> $a_i < b_i < c_i < d_i$, $i = 1, \ldots, d$, <u>således at</u>

$$\mu(J \setminus H) < \varepsilon$$

med $H =]b_1, c_1] \times \ldots \times]b_d, c_d]$, $J =]a_1, d_1] \times \ldots \times]a_d, d_d]$.



Konsekvens: Med $Q =]b_1, d_1] \times \ldots \times]b_d, d_d]$ er $\|1_Q - 1_I\|_p < \varepsilon^{1/p}$.

Bevis. Sættes $J_n =]a_1, c_1+\frac{1}{n}] \times \dots \times]a_d, c_d+\frac{1}{n}]$, har vi $I = \bigcap_n J_n$, $J_1 \supseteqq J_2 \supseteqq \dots$, og følgelig $\mu(J_n) \to \mu(I)$.

Sættes $H_n =]a_1+\frac{1}{n}, c_1] \times \dots \times]a_d+\frac{1}{n}, c_d]$ for $n \geqq N$, hvor $a_i + \frac{1}{N} < c_i$, $i = 1, \dots, d$, har vi $I = \bigcup_n H_n$, $H_N \subseteqq H_{N+1} \subseteqq \dots$, og følgelig $\mu(H_n) \to \mu(I)$.

Med n valgt, så $\mu(J_n \setminus I) < \frac{1}{2}\varepsilon$ og $\mu(I \setminus H_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$, kan talsæt $b_1, \dots, b_d$ og $d_1, \dots, d_d$ bruges, blot

$$a_i < b_i \leqq a_i + \frac{1}{n}, \quad c_i < d_i \leqq c_i + \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Endelig er

$$\| 1_Q - 1_I \|_p^p = \int | 1_Q - 1_I | \, d\mu = \mu(Q \setminus I) + \mu(I \setminus Q) \leqq \mu(J \setminus H).$$

<u>Sætning</u> 3. <u>For ethvert Radon mål</u> μ <u>i</u> $\mathbb{R}^d$ <u>og ethvert</u> p, $1 \leqq p < \infty$, <u>er funktionsrummet</u> $\mathcal{L}_p(\mu)$ <u>separabelt</u>, <u>dvs. der findes en numerabel, tæt delmængde</u>.

Bevis. Mængden af intervaller $Q =]b_1, d_1] \times \dots \times]b_d, d_d]$ med rationale b_i, d_i er numerabel. Det samme gælder da mængden af funktioner $q 1_Q$ med $q = q' + iq''$, $q', q'' \in \mathbb{Q}$, og ligeledes mængden af funktioner $\Sigma_1^n q_j 1_{Q_j}$.

Ifølge lemmaet kan indikatorfunktionen 1_I for ethvert standard interval I approksimeres i p-middel med vilkårlig nøjagtighed med indikatorfunktioner 1_Q for intervaller Q af ovennævnte art. Så kan også en funktion $c 1_I$ approksimeres med funktioner $q 1_Q = (q' + iq'') 1_Q$, $q', q'' \in \mathbb{Q}$, idet multiplikation med skalar er kontinuert i $\mathbb{C} \times \mathcal{L}_p(\mu)$, (se p. 125). Enhver trappefunktion $\Sigma_1^n c_j 1_{I_j}$, og dermed ifølge sætning 2 enhver funktion $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$, kan da approksimeres i p-middel med vilkårlig nøjagtighed med funktioner $\Sigma_1^n q_j 1_{Q_j}$.

9.2. Approksimation med pæne funktioner.

Med $\mathscr{C}^\infty = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ betegnes mængden af funktioner $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, for hvilke alle partielle afledede af enhver orden eksisterer og er kontinuerte.

Lemma. Er $H =]b_1,c_1] \times \dots \times]b_d,c_d]$ og $J =]a_1,d_1] \times \dots \times]a_d,d_d]$ intervaller i $\mathbb{R}^d$ med $a_i < b_i < c_i < d_i$, $i = 1,\dots,d$, da findes en funktion $g: \mathbb{R}^d \to [0,1]$ tilhørende $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ med

$$g(x) = 1 \text{ for } x \in H, \qquad g(x) = 0 \text{ for } x \in \mathbb{R}^d \setminus J.$$

Bevis. 1° I tilfældet $d = 1$ kan vi benytte os af, at funktionen f defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leqq 0 \end{cases}$$

tilhører $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. (Enhver funktion f_P givet ved

$$f_P(x) = \begin{cases} P(1/x) \cdot e^{-1/x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leqq 0 \end{cases},$$

hvor P er et polynomium, er nemlig differentiabel.)

For vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vil nu funktionen

$$x \to f(x) f(\varepsilon - x), \quad x \in \mathbb{R},$$

tilhøre $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$; den er positiv i intervallet $]0,\varepsilon[$, ellers 0.
For funktionen $h: \mathbb{R} \to [0,1]$ givet ved

$$h(x) = \int_0^x f(t) f(\varepsilon - t)\,dt \Big/ \int_0^\varepsilon f(t) f(\varepsilon - t)\,dt,$$

der også tilhører $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, er $h(x) = 0$ for $x \leqq 0$, $h(x) = 1$ for $x \geqq \varepsilon$.

Er $a < b < c < d$ og $\varepsilon \leqq \min\{b-a, d-c\}$, da vil $g: \mathbb{R} \to [0,1]$ givet ved $g(x) = h(x-a)h(d-x)$ tilhøre $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ og

$$g(x) = 1 \text{ for } x \in [b,c], \qquad g(x) = 0 \text{ for } x \notin]a,d[.$$

2° Ifølge 1° findes for hvert i en funktion $g_i : \mathbb{R} \to [0,1]$ tilhørende $\mathscr{C}^\infty$ med $g_i(x) = 1$ for $x \in [b_i, c_i]$, $g_i(x) = 0$ for $x \notin]a_i, d_i[$. Funktionen $g = g_1 \otimes \ldots \otimes g_d$, altså $g(x_1, \ldots, x_d) = g_1(x_1) \ldots g_d(x_d)$, har da de ønskede egenskaber.

<u>Sætning</u> 1. <u>For ethvert Radon mål</u> μ <u>i</u> $\mathbb{R}^d$ <u>er mængden af funktioner</u> $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ <u>med begrænset støtte tæt i</u> $\mathscr{L}_p(\mu)$ <u>for ethvert</u> p, $1 \leq p < \infty$.

At en funktion g på $\mathbb{R}^d$ har begrænset støtte, vil blot sige, at mængden $\{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) \neq 0\}$ er begrænset. (Ved <u>støtten</u> for g forstås afslutningen af nævnte mængde.)

En begrænset Borel funktion med begrænset støtte tilhører $\mathscr{L}_p(\mu)$.

Bevis for sætning 1. For $f \in \mathscr{L}_p(\mu)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ skal vises eksistensen af en funktion $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ med begrænset støtte, så $\|f - g\|_p < \varepsilon$. I kraft af § 9.1, sætning 2 kan vi antage, at f er indikatorfunktionen 1_I for et standard interval

$$I =]a_1, c_1] \times \ldots \times]a_d, c_d].$$

Der findes nu (§ 9.1, lemma) talsæt $b_1, \ldots, b_d$ og $d_1, \ldots, d_d$ med $a_i < b_i < c_i < d_i$, $i = 1, \ldots, d$, så $\mu(J \setminus H) < \varepsilon^p$, hvor

$$H =]b_1, c_1] \times \ldots \times]b_d, c_d], \qquad J =]a_1, d_1] \times \ldots \times]a_d, d_d],$$

og ifølge det netop viste lemma findes videre en funktion $g : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ tilhørende $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ med $g(x) = 1$ for $x \in H$, $g(x) = 0$ for $x \in \mathbb{R}^d \setminus J$. Idet

$$|1_I - g| \leq 1_{J \setminus H},$$

er nu $\|1_I - g\|_p^p = \int |1_I - g|^p d\mu \leq \int 1_{J \setminus H} d\mu = \mu(J \setminus H) < \varepsilon^p$.

Bemærkning. For en kontinuert funktion f defineret på et interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ kan integralet $\int_a^b f(x)dx$ defineres temmelig elementært (f.eks. som Cauchy gjorde det, eller som i gymnasiet ved Darboux' metode, se Indledning p. 2-3; i begge tilfælde udnyttes, at f er uniformt kontinuert). Mængden $\mathscr{C}([a,b])$ af kontinuerte funktioner på $[a,b]$ er et funktionsvektorrum, som kan normeres ved

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Rummet er ikke fuldstændigt. Og tilföjelse af Riemann integrable funktioner afhjælper ikke denne mangel. (Se övelse 8.22, 8.23.)

Men med <u>Lebesgue</u> <u>integralet</u>

$$f \to \int_a^b f(x)dx, \quad f \in \mathscr{L}([a,b]),$$

opnås en <u>udvidelse</u> <u>af</u> <u>integralet</u> <u>for</u> <u>kontinuerte</u> <u>funktioner</u> <u>til</u> <u>en</u> <u>kontinuert,</u> <u>lineær</u> <u>funktional</u> (se p. 126-127) <u>på</u> <u>et</u> <u>fuldstændigt</u> <u>funktionsvektorrum</u> $\mathscr{L}([a,b]), \| \|_1$ <u>med</u> $\mathscr{C}([a,b]), \| \|_1$ <u>som</u> <u>tæt</u> <u>underrum</u>. Heri ligger et afgörende fortrin.

For Lebesgue målet eller blot et Radon mål μ i $\mathbb{R}^d$ er

$$f \to \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu, \quad f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d, \mu),$$

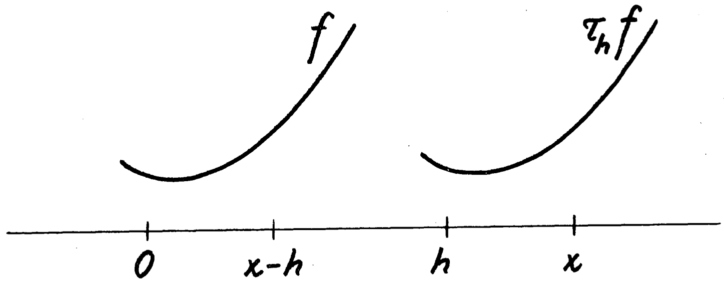
på samme måde en udvidelse af integralet m.h.t. μ fra rummet $\mathscr{K} = \mathscr{K}(\mathbb{R}^d)$ af kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}^d$ med begrænset stötte til en kontinuert, lineær funktional på et <u>fuldstændigt</u> funktionsvektorrum $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d, \mu), \| \|_1$ med $\mathscr{K}(\mathbb{R}^d), \| \|_1$ som tæt underrum.

(Hos det franske forfatterkollektiv Nicolas Bourbaki (Intégration, Paris 1952-) sigtes mod dette straks i definitionen af Lebesgue eller Lebesgue/Stieltjes integral: Ud fra integralet på $\mathscr{K}(\mathbb{R}^d)$ defineres först en seminorm $\| \|_1$ på et omfattende funktionsrum; rummet $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d, \mu)$ defineres derpå som afslutningen af $\mathscr{K}(\mathbb{R}^d)$, og endelig udvides funktionalen

$$f \to \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu, \quad f \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^d),$$

til $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d, \mu)$ ved kontinuitet (jfr. §15.4, lemma 2). Mere generelt kan $\mathbb{R}^d$ erstattes af et vilkårligt lokalt kompakt rum. - For detaljer, se f.eks. kapitel 1 i T. Gutmann Madsen: Abstrakt harmonisk analyse, Forelæsningsnoter 407, Matematisk Institut, København 1969-70.)

Vi har allerede gentagne gange benyttet den metode, der er nævnt i paragraffens indledende linier: reduktion til særlig behagelige funktionstyper. Som yderligere illustration tjener beviset for følgende sætning.



Vi siger, at en funktion f defineret på $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ved translationen τ_h med $h \in \mathbb{R}^d$ føres over i funktionen $\tau_h f$ defineret på $\tau_h(E) = E + h$ ved $\tau_h f(x) = f(x-h)$.

<u>Sætning 2.</u> <u>For enhver funktion</u> $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ <u>tilhørende</u> $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d)$, <u>hvor</u> $1 \leq p < \infty$, <u>gælder</u>

$$\|\tau_h f - f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} \to 0 \quad \underline{\text{for}}\ h \to 0.$$

Bemærk, at sætningen vedrører Lebesgue målet m i $\mathbb{R}^d$. Betegnelsen $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d)$ står for $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}, m)$.

Bevis. 1^0 Først betragtes tilfældet f kontinuert med begrænset støtte. Funktionen er da uniformt kontinuert: til ethvert

$\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et δ, $0<\delta<1$, så

$$|f(x-h)-f(x)|<\varepsilon \quad \text{blot} \quad |h| = (h_1^2+\dots+h_d^2)^{1/2} < \delta,$$

dvs. $|\tau_h f - f| < \varepsilon$ for $|h|<\delta$. Idet f er 0 uden for en kugle

$$K(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < R\},$$

har vi dermed for $|h|<\delta$, at

$$|\tau_h f - f| \leqq \varepsilon \cdot 1_{K(0,R+1)},$$

altså
$$\|\tau_h f - f\|_p^p \leqq \varepsilon^p \cdot m(K(0,R+1)).$$

2^0 Dernæst betragtes det almene tilfælde $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d)$. For vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes ifølge sætning 1 en kontinuert funktion $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ med begrænset støtte, så

$$\|g-f\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da Lebesgue målet er translationsinvariant, har vi for hvert $h \in \mathbb{R}^d$, at

$$\|f-\tau_h f\|_p \leqq \|f-g\|_p + \|g-\tau_h g\|_p + \|\tau_h(g-f)\|_p$$
$$< \frac{2\varepsilon}{3} + \|g-\tau_h g\|_p.$$

Ifølge 1^0 findes imidlertid et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så

$$\|g-\tau_h g\|_p < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{for } |h|<\delta$$

og dermed
$$\|f-\tau_h f\|_p < \varepsilon \quad \text{for } |h|<\delta.$$

Bemærkning. For $p=\infty$ kan ingen af sætningerne i §9.1 og §9.2 opretholdes; således er de alle falske for Lebesgue målet i $\mathbb{R}^d$.

§10. Foldning af funktioner på $\mathbb{R}^d$.

10.1. Algebraer.

En mængde A med to kompositioner $A \times A \to A$ betegnet $+$ og $\cdot$ samt en komposition $\mathbb{C} \times A \to A$, ligeledes betegnet $\cdot$, kaldes en (associativ) algebra over $\mathbb{C}$, hvis A med addition og multiplikation med skalarer er et vektorrum, hvis multiplikationen i A er associativ, og hvis

$$f(g+h) = fg + fh, \quad (f+g)h = fh + gh, \quad c(fg) = (cf)g = f(cg)$$

gælder for $f,g,h \in A$, $c \in \mathbb{C}$. (Som sædvanlig er multiplikationstegnet udeladt.) Ganske tilsvarende defineres algebra over $\mathbb{R}$. De krav, der alene vedrører additionen og multiplikationen i A, kan samles i, at A med disse to kompositioner er en ring.

En algebra siges at være kommutativ, hvis multiplikationen er kommutativ. Et eventuelt neutralt element ved multiplikationen kaldes etelement eller enhed i algebraen.

En norm i en algebra A er en funktion $A \to \mathbb{R}$, ofte betegnet $\|\ \|$, som ud over de sædvanlige krav til en norm i et vektorrum opfylder

$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\| \quad \text{for } f,g \in A.$$

Har A et etelement e, kræves almindeligvis tillige $\|e\| = 1$. En algebra med norm, hvor metrikken $d(f,g) = \|f-g\|$ er fuldstændig, kaldes en Banach algebra.

I en algebra med norm er de tre kompositioner alle kontinuerte. At eksempelvis multiplikationen er kontinuert i (f_0, g_0), følger af, at

$$\begin{aligned}\|fg - f_0g_0\| &= \|(f-f_0)(g-g_0) + (f-f_0)g_0 + f_0(g-g_0)\| \\ &\leq \|f-f_0\|\|g-g_0\| + \|f-f_0\|\|g_0\| + \|f_0\|\|g-g_0\|.\end{aligned}$$

Eksempel. Mængden $\mathscr{C}_b$ af begrænsede, kontinuerte funktioner defineret på $\mathbb{R}^d$, eller blot på et metrisk eller topologisk rum, er, betragtet med sædvanlig addition, multiplikation, multiplikation med skalar samt den uniforme norm $\|f\|_u = \sup_x |f(x)|$, en Banach algebra. Den konstante funktion med værdi 1 er etelement.

Mængden $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ af kontinuerte funktioner f på $\mathbb{R}^d$ med $f(x) \to 0$ for $|x| \to \infty$ er ligeledes en Banach algebra, men uden etelement.

10.2. Gruppealgebraen for en endelig gruppe.

Når G med komposition $\cdot$ er en endelig gruppe, defineres i mængden $\ell(G)$ af funktioner $f: G \to \mathbb{C}$ (eller $f: G \to \mathbb{R}$) en komposition $*$ kaldet foldning (engelsk og fransk: convolution) ved

$$f*g(i) = \sum_{kj=i} f(k)g(j) = \sum_{j\in G} f(ij^{-1})g(j).$$

Som en udregning kan vise (sml. §10.4), er foldningen associativ og

$$f*g*h(i) = \Sigma_{j,k\in G} f(ij^{-1})g(jk^{-1})h(k).$$

Det verificeres nu umiddelbart, at funktionsvektorrummet $\ell(G)$ med foldning som yderligere komposition er en algebra. Den kaldes gruppealgebraen for G. Den har indikatorfunktionen $1_{\{e\}}$ som etelement, hvor e er gruppens neutrale element, og den er kommutativ, hvis gruppen er det.

Man kan diskutere foldning for andre grupper med translationsinvariante mål. Vi skal behandle $(\mathbb{R}^d,+)$ og $(\mathbb{T},+)$.

Bemærkning. Når G er en endelig gruppe, udgør funktionerne $1_{\{i\}}$, $i\in G$, en (vektorrums)basis for $\ell(G)$, dvs. hvert $f\in\ell(G)$ har én fremstilling

$$f = \Sigma_{i\in G}\, a_i \cdot 1_{\{i\}}.$$

Idet $1_{\{k\}} * 1_{\{j\}} = 1_{\{kj\}}$, tillader man sig undertiden at identificere hvert $i\in G$ med $1_{\{i\}}$ og samtidig erstatte tegnet $*$ med $\cdot$. Da er

$$(\Sigma a_k k)\cdot(\Sigma b_j j) = \Sigma_{k,j}(a_k b_j)(kj) = \Sigma_i (\Sigma_{kj=i}\, a_k b_j)\, i\ ,$$

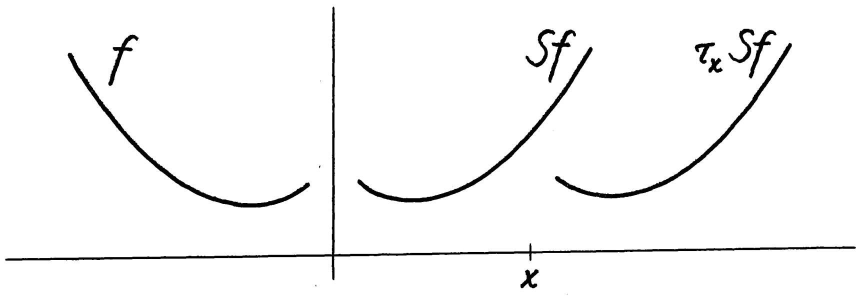
hvori formlen for foldning ligger gemt. Med denne symbolbrug taler man om regning med „formelle linearkombinationer af gruppeelementer".

10.3. Foldning af funktioner på $\mathbb{R}^d$.

Ved *foldningen* $f*g$ af to funktioner f og g defineret på hele $\mathbb{R}^d$ eller næsten overalt i $\mathbb{R}^d$ forstås funktionen

$$x \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \,,$$

defineret for de $x \in \mathbb{R}^d$, for hvilke $y \to f(x-y)g(y)$ er Lebesgue integrabel i $\mathbb{R}^d$. (Definitionsmængden kan være tom.)



Idet vi med Sf betegner funktionen givet ved $Sf(y) = f(-y)$, medens $\tau_x Sf$ betegner den funktion, som Sf føres over i ved translationen τ_x (se §9.2), har vi $(\tau_x Sf)(y) = Sf(y-x) = f(x-y)$. Foldningen $f*g$ er altså defineret ved

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_x Sf) g \, dm \,,$$

for de $x \in \mathbb{R}^d$ hvor $(\tau_x Sf)\cdot g$ er Lebesgue integrabel i $\mathbb{R}^d$.

Funktionerne $f*g$ og $g*f$ er identiske.

Thi for givet $x \in \mathbb{R}^d$ er

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)g(-y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$$

således at forstå, at integralerne samtidig har mening og i bekræftende fald samme værdi. Da Lebesgue målet i $\mathbb{R}^d$ er invariant ved afbildningen $y \to -y$ (se §6.2) såvel som ved translation, kan nemlig en integrationsvariabel y erstattes med $-y$ og videre med $y-x$.

Når $f_1 = f_2$ og $g_1 = g_2$ næsten overalt i $\mathbb{R}^d$, da er funktionerne $f_1 * g_1$ og $f_2 * g_2$ identiske.

Thi for givet $x \in \mathbb{R}^d$ er $(\tau_x S f_1) g_1 = (\tau_x S f_2) g_2$ næsten overalt.

Når $f*g$ er defineret i et punkt $x \in \mathbb{R}^d$, da er

$$(f*(cg))(x) = c\cdot(f*g)(x) \quad \text{for } c \in \mathbb{C}.$$

Når $f*g$ og $f*h$ er defineret i et punkt $x \in \mathbb{R}^d$, da er

$$(f*(g+h))(x) = (f*g)(x) + (f*h)(x).$$

Når $f(x) = 0$ for $x \notin A \subseteq \mathbb{R}^d$ og $g(x) = 0$ for $x \notin B \subseteq \mathbb{R}^d$, da er $f*g(x)$ defineret og lig 0 for $x \notin A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Thi $f(x-y)g(y) \neq 0 \;\Rightarrow\; x-y \in A,\ y \in B \;\Rightarrow\; x = (x-y)+y \in A+B$. For $x \notin A+B$ er funktionen $y \to f(x-y)g(y)$ altså identisk 0.

Sætning 1. Når f og g er Borel funktioner på $\mathbb{R}^d$, da er $f*g$ igen en Borel funktion. (Definitionsmængden kan være tom.)

Bevis. Da $f \otimes g$, dvs. funktionen $(x,y) \to f(x)g(y)$, er en Borel funktion på $\mathbb{R}^{2d}$ (§7.1), gælder dette også funktionen, der fås ved sammensætning med $(x,y) \to (x-y, y)$, dvs.

$$(x,y) \to f(x-y)g(y), \quad x,y \in \mathbb{R}^d.$$

Påstanden følger nu af bemærkningen p. 116_{9-4} (og p. 117_{5-3}).

Sætning 2. Når $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d)$ og $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^d)$, hvor $1 \leq p,q \leq \infty$ og $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, da er funktionen $f*g$ defineret i hele $\mathbb{R}^d$, og den er uniformt kontinuert og begrænset,

$$|f*g| \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Bevis. I kraft af Lebesgue målets invarians og Hölders ulighed (§8.3, §8.5) har vi for hvert $x \in \mathbb{R}^d$, at $\tau_x S f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d)$, at $(\tau_x Sf) g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, og at $|f*g(x)| = |\int_{\mathbb{R}^d} (\tau_x Sf) g \, dm| \leq \|\tau_x Sf\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q$.

At $f*g$ er uniformt kontinuert, ses ved vurderingen

$$|f*g(x+h) - f*g(x)| = |\int_{\mathbb{R}^d} (\tau_{x+h} Sf - \tau_x Sf) g \, dm|$$
$$\leq \|\tau_{x+h} Sf - \tau_x Sf\|_p \|g\|_q = \|\tau_h Sf - Sf\|_p \|g\|_q ,$$

idet $\|\tau_h Sf - Sf\|_p \to 0$ for $h \to 0$ ifølge §9.2, sætning 2, forudsat $1 \leq p < \infty$. For $p = \infty$ lader man blot f og g bytte roller.

Man bemærker, at foldes en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ med en funktion $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$, specielt med en begrænset, kontinuert funktion g på $\mathbb{R}^d$, da fås en begrænset, (uniformt) kontinuert funktion. Af lignende karakter er følgende sætning (og ligeledes §10.6, sætning 1).

<u>Sætning 3.</u> <u>Lad</u> $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. <u>Er</u> $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ <u>begrænset og differentiabel med en begrænset afledet, da gælder det samme om</u> $f*g$, <u>og</u>

$$\mathcal{D}(f*g) = f * \mathcal{D}g .$$

Bevis. Foldningen $f*g = g*f$ er defineret ved et integral, hvor integranden afhænger af en reel parameter x,

$$g*f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-y) f(y) dy .$$

For fastholdt $x \in \mathbb{R}$ er integranden $(\tau_x Sg) f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, for fastholdt y er integranden en differentiabel funktion af x, og

$$\left| \frac{\partial g(x-y) f(y)}{\partial x} \right| = |\mathcal{D}g(x-y) \cdot f(y)| \leq \text{const} \cdot |f(y)| ,$$

hvor $\text{const} \cdot |f| \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Følgelig (§4.8) er $f*g$ differentiabel med

$$\mathcal{D}(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g(x-y) f(y)}{\partial x} dy = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}g(x-y) f(y) dy = (f*\mathcal{D}g)(x) .$$

Både $f*g$ og $\mathcal{D}(f*g) = f*\mathcal{D}g$ er begrænsede og uniformt kontinuerte, idet $g, \mathcal{D}g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R})$. At $\mathcal{D}g$ er en Borel funktion, følger af, at $(\tau_{-h} g - g)/h \to \mathcal{D}g$ for $h \to 0$ gennem en følge.

10.4. Gruppealgebraen $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Vi skal her behandle foldning af funktioner tilhørende $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Sætning 1. Når $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ og $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, da er funktionen $f*g$ defineret næsten overalt i $\mathbb{R}^d$; der gælder $f*g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ og

$$\|f*g\|_1 \leqq \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

Bemærk, at vi her af hensyn til en bekvem formulering tillader, at en funktion tilhørende $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ kun er defineret næsten overalt.

Bevis. Da $f \otimes g$, dvs. funktionen $(x,y) \to f(x)g(y)$, er en Borel funktion i $\mathbb{R}^{2d}$ (§ 7.1), gælder dette også funktionen, der fås ved sammensætning med $(x,y) \to (x-y, y)$, dvs.

$$(x,y) \to f(x-y)g(y), \quad x,y \in \mathbb{R}^d.$$

Denne funktion tilhører da $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2d})$, idet vi med brug af Tonellis sætning og translationsinvariansen af Lebesgue målet i $\mathbb{R}^d$ finder

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x-y)g(y)|\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(|g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\, dx \right) dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(|g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx \right) dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty .$$

Af Fubinis sætning følger nu, at $y \to f(x-y)g(y)$ er integrabel for næsten alle $x \in \mathbb{R}^d$, og at den næsten overalt i $\mathbb{R}^d$ definerede funktion

$$x \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, dy ,$$

som jo netop er $f*g$, tilhører $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Da

$$|f*g(x)| \leqq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\, dy,$$

finder vi endelig

$$\|f*g\|_1 \leqq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x-y)g(y)|\, d(x,y) = \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

Sætning 2. Når $f, g, h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, da er

$$f*(g*h) = (f*g)*h \quad \text{næsten overalt i } \mathbb{R}^d.$$

Bevis. For hvert $x \in \mathbb{R}^d$ er

$$(f*(g*h))(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\cdot (g*h)(y)\,dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(f(x-y)\int_{\mathbb{R}^d} g(y-z)h(z)\,dz\Big)dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y-z)h(z)\,dz\,dy\ ,$$

således at forstå, at der er samtidig eksistens og i bekræftende fald samme værdi. På samme måde gælder

$$((f*g)*h)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x-z)\cdot h(z)\,dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-z-y)g(y)\,dy\cdot h(z)\Big)dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y-z)\,dy\cdot h(z)\Big)dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y-z)h(z)\,dy\,dz\,.$$

Ifølge Fubinis sætning er derfor

$$(f*(g*h))(x) = ((f*g)*h)(x) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(x-y)g(y-z)h(z)\,d(y,z)$$

for hvert $x\in\mathbb{R}^d$, hvor $\int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x-y)g(y-z)h(z)|\,d(y,z) < \infty$,

altså for næsten alle $x\in\mathbb{R}^d$, idet ifølge Tonellis sætning

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x-y)g(y-z)h(z)|\,d(y,z)\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y-z)h(z)|\,dx\,d(y,z)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}}\Big(|g(y-z)h(z)|\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,dx\Big)\,d(y,z)$$
$$= \|f\|_1\int_{\mathbb{R}^{2d}} |g(y-z)h(z)|\,d(y,z) = \|f\|_1\|g\|_1\|h\|_1 < \infty\,.$$

Vi har benyttet, at $(x,y,z) \to f(x-y)g(y-z)h(z)$

er en Borel funktion, hvilket følger af, at $f\otimes g\otimes h$ er det.

Foldningen $*: \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ giver anledning til en komposition $L(\mathbb{R}^d)\times L(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, idet funktionen $f*g$ som vist §10.3 kun afhænger af de klasser, der indeholder f og g ved ækvivalensrelationen „$f_1=f_2$ næsten overalt i $\mathbb{R}^d$". Opfattes $f*g\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ ligeledes som repræsentant for en klasse, får vi en komposition $L(\mathbb{R}^d)\times L(\mathbb{R}^d)$

$\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Den kaldes også *foldning* og betegnes $*$.

Sætning 3. Lebesgue rummet $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}, m)$, betragtet med sædvanlig addition, sædvanlig multiplikation med skalarer, foldning samt 1-norm, er en kommutativ Banach algebra, uden etelement.

Den kaldes ofte *gruppealgebraen* for gruppen $(\mathbb{R}^d, +)$. Der er dog andre kandidater til dette navn.

Vi ved på forhånd, at $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ er et Banach rum (§8.4). Det nye i sætningen, dvs. hvad der vedrører foldning, er en umiddelbar følge af sætning 1 og 2 samt indledende resultater i §10.3. Dog mangler vi at vise, at der ikke er noget neutralt element ved foldningen i $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

At $e \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ repræsenterer et etelement i $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, vil imidlertid sige, at
$$f * e = f \quad \text{næsten overalt i } \mathbb{R}^d$$
for enhver funktion $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$. Og det er allerede umuligt at få ligningen opfyldt f.eks. for $f =$ indikatorfunktionen for enhedsterningen, thi her vil foldningen $f * e$ med et $e \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ være kontinuert i $\mathbb{R}^d$ (§10.3, sætning 2) og derfor ikke kunne stemme med f næsten overalt.

10.5. Approksimative enheder i $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Er $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en følge af elementer i en kommutativ algebra A med norm og etelement e, da gælder

$$\|k_n - e\| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \iff \forall f\in A: \|fk_n - f\| \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Thi fk_n vil konvergere mod $fe = f$, når k_n konvergerer mod e, idet multiplikationen i A er kontinuert, og den omvendte implikation fås trivielt ved at benytte $f = e$.

En følge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af elementer i en kommutativ algebra A med norm kaldes en approksimativ enhed, hvis

$$\forall f\in A: \|fk_n - f\| \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

En sådan kan udmærket findes, uden at A har et etelement. Den kan da opfattes som en erstatning.

Bemærkning. En familie $(k_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, eller eksempelvis $(k_t)_{t\in[0,1[}$, kaldes ligeledes en approksimativ enhed ved grænseovergangen $t\to\infty$, henholdsvis $t\to 1$, hvis $\forall f\in A: \|fk_t - f\| \to 0$.

Resultaterne i det følgende er for det meste kun formuleret for $\mathbb{N}$ som indeksmængde, men kan uden videre kopieres til andre tilfælde.

Sætning. Er $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en følge af funktioner tilhørende $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, hvor

(i) $\forall n\in\mathbb{N}: k_n \geqq 0$

(ii) $\forall n\in\mathbb{N}: \int_{\mathbb{R}^d} k_n(x)\,dx = 1$

(iii) $\forall \delta\in\mathbb{R}_+: \int_{|x|>\delta} k_n(x)\,dx \to 0$ for $n\to\infty$,

da gælder $\forall f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^d): \|f*k_n - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f*k_n - f|\,dm \to 0$ for $n\to\infty$,

dvs. følgen (af klasser repræsenteret af) $k_1, k_2, \dots$ er en approksimativ enhed i Banach algebraen $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

En følge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af funktioner tilhørende $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, der opfylder (i), (ii) og (iii), vil vi kalde en <u>Dirac følge</u> for $\mathbb{R}^d$. (Navnet henviser til kvanteteoretikeren Paul Dirac, der opererede med en karikatur af funktionerne i en sådan følge: en „funktion" δ med $\delta(x) = 0$ for $x \neq 0$, men $\int_{\mathbb{R}^d} \delta(x)\,dx = 1$.)

Ganske tilsvarende defineres <u>Dirac familie</u>, eksempelvis i tilfældet $(k_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ med grænseovergang $t \to \infty$.

<u>Eksempel</u>. Er $k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, $k \geq 0$ og $\int_{\mathbb{R}^d} k(x)\,dx = 1$, da vil følgen $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ med $k_n(x) = n^d k(nx)$ være en Dirac følge for $\mathbb{R}^d$.

Den vil nemlig foruden (i) og (ii) opfylde (iii), thi for vilkårligt $\delta \in \mathbb{R}_+$ er (§6.2, bemærkning 1)

$$\int_{|x|>\delta} k(nx)\,n^d\,dx = \int_{|x|>n\delta} k(x)\,dx,$$

og $k \cdot 1_{\{x \mid |x| > n\delta\}} \to 0$ for $n \to \infty$, majoriseret af $k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Samme ræsonnement viser, at $(k_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ med $k_t(x) = t^d k(tx)$ er en Dirac familie for $t \to \infty$.

Bevis for sætning. 1° I hvert punkt x af definitionsmængden for $f * k_n$, altså for næsten alle x, er

$$\begin{aligned} f*k_n(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)k_n(y)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^d} k_n(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\,k_n(y)\,dy \end{aligned}$$

og dermed

$$|f*k_n(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|\,k_n(y)\,dy.$$

Da $(x,y) \to |f(x-y) - f(x)|\,k_n(y)$ er en Borel funktion i $\mathbb{R}^{2d}$, finder vi ved brug af Tonellis sætning

$$\begin{aligned} \|f*k_n - f\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|\,k_n(y)\,dy\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|\,k_n(y)\,dx\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} k_n(y)\,\|\tau_y f - f\|_1\,dy. \end{aligned}$$

2° Til vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tænkes først (§9.2, sætning 2) valgt et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så
$$\|\tau_y f - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for } |y| \leqq \delta.$$
For hvert n er da
$$\int_{|y|\leqq\delta} k_n(y)\,\|\tau_y f - f\|_1\,dy \leqq \int_{|y|\leqq\delta} \frac{\varepsilon}{2} k_n(y)\,dy \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\int_{|y|>\delta} k_n(y)\,\|\tau_y f - f\|_1\,dy \leqq \int_{|y|>\delta} 2\|f\|_1\,k_n(y)\,dy.$$
Vælges nu $N \in \mathbb{N}$, så det sidste integral er mindre end $\frac{\varepsilon}{2}$ for $n > N$, har vi
$$\|f * k_n - f\|_1 < \varepsilon \quad \text{for } n > N.$$

10.6. Mere om Dirac følger for $\mathbb{R}^d$.

Sætning 1. Når $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ og $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d)$, hvor $1 \leqq p < \infty$, da er $f * g$ defineret næsten overalt i $\mathbb{R}^d$ og tilhører igen $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d)$, med
$$\|f*g\|_p \leqq \|f\|_p \|g\|_1 .$$

Sætningen indeholder sætning 1 i §10.4 som specialtilfælde, svarende til $p=1$. (Dette resultat vil vi anvende i beviset, også i tilfældet $1<p<\infty$, hvor jo $|f|^p, |g| \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.)

Bevis. Vi antager $1<p<\infty$ og bestemmer q ved $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Ifølge §10.3, sætning 1, er $f*g$ en Borel funktion. Definitionsmængden er
$$B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,dy < \infty\}.$$

Ifølge Hölders ulighed er imidlertid
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|^{1/p}|g(y)|^{1/q}\,dy$$
$$\leqq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p|g(y)|\,dy\right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\,dy\right)^{1/q} < \infty ,$$
når $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|\,dy < \infty$, dvs. når x tilhører definitionsmængden A for $|f|^p * |g|$.

Altså er $A \subseteq B$, og følgelig $f*g$ defineret næsten overalt i $\mathbb{R}^d$, da $|f|^p * |g|$ er det (§10.4, sætning 1).

Idet
$$|f*g(x)| \leqq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,dy ,$$
finder vi endvidere for hvert $x \in A$, at
$$|f*g(x)|^p \leqq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p|g(y)|\,dy \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\,dy\right)^{p/q}$$
$$= \quad |f|^p*|g|(x) \quad \cdot \quad \|g\|_1^{\,p-1} .$$

Da nu $|f|^p * |g|$ ifølge §10.4, sætning 1, tilhører $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ med
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p * |g|\,dm = \| |f|^p * |g| \|_1 \leqq \| |f|^p \|_1 \|g\|_1 = \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p\,dm ,$$

sluttes, at $f*g$ tilhører $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d)$ med

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f*g|^p dm \leq \|g\|_1^p \cdot \int_{\mathbb{R}^d}|f|^p dm,$$

dvs.

$$\|f*g\|_p \leq \|g\|_1 \|f\|_p .$$

<u>Sætning</u> 2. <u>Er</u> $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>en</u> <u>Dirac</u> <u>følge</u> <u>af</u> <u>funktioner</u> <u>tilhørende</u> $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, <u>og</u> <u>er</u> $1\leq p<\infty$, <u>da</u> <u>gælder</u>

$$\forall f\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d):\ \|f*k_n - f\|_p \to 0 \ \underline{\text{for}}\ n\to\infty .$$

Sætningen i §10.5 er specialtilfældet $p=1$.

Bevis. Vi kan antage $1<p<\infty$ og bestemme q ved $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Det bemærkes, at $f*k_n\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d)$ ifølge sætning 1.

1° I hvert punkt x af definitionsmængden for $f*k_n$, altså for næsten alle x, er

$$f*k_n(x)-f(x) = \int_{\mathbb{R}^d}(f(x-y)-f(x))k_n(y)dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}(f(x-y)-f(x))(k_n(y))^{1/p}\cdot(k_n(y))^{1/q}dy .$$

Når yderligere $|f|^p*k_n(x)$ er defineret, altså stadig for næsten alle x, vil

$$y\to f(x-y)(k_n(y))^{1/p}$$

og dermed

$$y\to (f(x-y)-f(x))(k_n(y))^{1/p}$$

tilhøre $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d)$, hvorfor

$$|f*k_n(x)-f(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|^p k_n(y)dy\right)^{1/p}\cdot 1$$

ifølge Hölders ulighed. Vi finder nu ved Tonellis sætning

$$\|f*k_n - f\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|^p k_n(y)\,dy\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|^p k_n(y)\,dx\,dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}k_n(y)\,\|\tau_y f - f\|_p^p\,dy .$$

2° Beviset afsluttes på tilsvarende måde som i tilfældet $p=1$ (§10.5).

I tilfældet $p=\infty$ gælder sætning 1 stadig: her er $f*g$ endda defineret overalt og uniformt kontinuert (§10.3, sætning 2). Dette udelukker til gengæld, at sætning 2 kan være rigtig for $p=\infty$. I stedet har man:

<u>Er</u> $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>en Dirac følge af funktioner tilhørende</u> $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, <u>og er</u> $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ <u>begrænset og uniformt kontinuert, da gælder</u>

$$\|f*k_n - f\|_u \to 0 \text{ for } n\to\infty.$$

Dette vises som sætning 1 i §11.4, med selvfølgelige ændringer. Vi giver beviset der, dels fordi denne sætning er mere central, dels for også i §11 at udføre et bevis i detaljer.

§11. Foldning af periodiske funktioner.

11.1. Periodiske funktioner.

Vi skal betragte funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med en given periode $p \in \mathbb{R}_+$, dvs. funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, hvor

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; f(x+p) = f(x).$$

For simpelheds skyld antages $p = 2\pi$.

En funktion på $\mathbb{R}$ med periode 2π svarer til en funktion på kvotientgruppen $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ bestående af klasserne (kaldet sideklasser for $2\pi\mathbb{Z}$) ved ækvivalensrelationen

$$x \sim y \iff \exists n \in \mathbb{Z}: \; y - x = n2\pi.$$

Disse klasser er netop originalmængderne til de enkelte punkter på enhedscirklen $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ i $\mathbb{C}$ ved afbildningen

$$x \to e^{ix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funktionerne $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode 2π kan således fås på formen

$$x \to \varphi(e^{ix}), \; x \in \mathbb{R},$$

ud fra funktionerne $\varphi: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.

Her vil f være kontinuert, netop hvis φ er det. Mængden af kontinuerte funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (eller $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) med periode 2π vil vi derfor tillade os at betegne $\mathscr{C}(\mathbb{T})$.

Lebesgue målet i et interval $]a, a+2\pi]$ føres ved den bijektive afbildning $x \to e^{ix}$, $a < x \leq a + 2\pi$, over i et mål på $\mathbb{T}$. Dette mål vil, da Lebesgue målet m på $\mathbb{R}$ er translationsinvariant, være det samme, uanset hvilket $a \in \mathbb{R}$ der benyttes. Det kaldes <u>Lebesgue</u> <u>målet</u> på $\mathbb{T}$ og betegnes også m. Ofte vil det være fordelagtigt at benytte det normerede mål $\frac{1}{2\pi}m$, hvor $\frac{1}{2\pi}m(\mathbb{T}) = 1$.

For funktioner φ på $\mathbb{T}$ gælder
$$\int_{\mathbb{T}} \varphi \, d(\tfrac{1}{2\pi}m) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} \varphi(e^{ix})\,dx ,$$
således at forstå, at der er samtidig eksistens og i bekræftende fald samme værdi. Denne kaldes middelværdien af φ såvel som af den tilsvarende periodiske funktion f, givet ved $f(x) = \varphi(e^{ix})$, $x \in \mathbb{R}$. Vi vælger at formulere det følgende for periodiske funktioner.

I tilfældet $1 \leqq p < \infty$ betyder $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ da, at $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er en Borel funktion med periode 2π, hvor
$$\int_a^{a+2\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty ,$$
medens
$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} .$$

At $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{T})$ betyder, at $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er en Borel funktion med periode 2π, som er essentielt begrænset, medens
$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_x |f(x)| .$$

Vi bemærker:

1^0 Mængden $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ af kontinuerte funktioner $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode 2π er tæt i $\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ for ethvert p, $1 \leqq p < \infty$. (Det samme gælder $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$.)

Dette kan afledes af §9.2, sætning 1 (med brug af det forudgående lemma).

2^0 For enhver funktion $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$, hvor $1 \leqq p < \infty$, gælder
$$\|\tau_h f - f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} |f(x-h) - f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \to 0 \text{ for } h \to 0 .$$

Dette indses i analogi med §9.2, sætning 2, ved først at betragte tilfældet $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Målet m eller $\frac{1}{2\pi}m$ på $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ er invariant ved drejninger af $\mathbb{T}$, dvs. ved translationer i den kommutative gruppe $(\mathbb{T}, \cdot)$, kaldet cirkelgruppen. Det er da nærliggende at indføre foldning for funktioner på $\mathbb{T}$ eller, som vi vil formulere det, for funktioner på $\mathbb{R}$ med periode 2π.

Betegnelsen $\mathbb{T}$ hidrører fra, at en cirkelperiferi også kaldes en 1-dimensional torus. (Den sædvanlige 2-dimensionale torus, også kaldet en kuglering, modsvarer $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$.)

11.2. Foldning af periodiske funktioner.

Ved foldningen $f*g$ af to funktioner f og g defineret på $\mathbb{R}$ (eller næsten overalt i $\mathbb{R}$) og med periode 2π forstås funktionen

$$x \to \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x-y)g(y)dy,$$

defineret for de $x \in \mathbb{R}$, for hvilke $y \to f(x-y)g(y)$, $a < y \leq a+2\pi$, er Lebesgue integrabel. (Da Lebesgue målet er translationsinvariant, er det ligegyldigt, hvilket $a \in \mathbb{R}$ der benyttes.) – Definitionsmængden kan være tom.

Foldningen $f*g$ har perioden 2π.

Ganske som i §10.3 kan definitionen skrives

$$f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} (\tau_x Sf)g\, dm.$$

<u>Funktionerne $f*g$ og $g*f$ er identiske.</u>

Thi for givet $x \in \mathbb{R}$ er

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)g(-y)dy = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(y)g(x-y)dy.$$

<u>Når $f_1 = f_2$ og $g_1 = g_2$ næsten overalt, da er funktionerne $f_1 * g_1$ og $f_2 * g_2$ identiske.</u>

<u>Når $f*g$ er defineret i et punkt $x \in \mathbb{R}$, da er</u>

$$(f*(cg))(x) = c\cdot(f*g)(x) \text{ for } c \in \mathbb{C}.$$

<u>Når $f*g$ og $f*h$ begge er defineret i et punkt $x \in \mathbb{R}$, da er</u>

$$(f*(g+h))(x) = (f*g)(x) + (f*h)(x).$$

<u>Sætning 1. Når f og g er Borel funktioner på $\mathbb{R}$ med periode 2π, da er $f*g$ igen en Borel funktion.</u> (Definitionsmængden kan være tom.)

Indses ganske som sætning 1 i §10.3, blot bemærkes her, at $(x,y) \to f(x-y)g(y)\, 1_{]-\pi,\pi]}(y)$ er en Borel funktion på $\mathbb{R}^2$.

Sætning 2. Når $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ og $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{T})$, hvor $1 \leqq p, q \leqq \infty$ og $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, da er funktionen $f*g$ defineret og kontinuert i hele $\mathbb{R}$ med

$$|f*g| \leqq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Betydningen af betegnelserne er angivet i §11.1.

Beviset føres ganske som for den tilsvarende sætning i §10.3. Herved benyttes §11.1, 2°.

Korollar. Mængden $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ af kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$ med periode 2π, betragtet med sædvanlig addition, sædvanlig multiplikation med skalarer, foldning samt den uniforme norm, er en kommutativ Banach algebra.

Af bemærkningen efter sætning 3 vil fremgå, at algebraen $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ er uden etelement.

Bevis. Det er oplagt, at $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ er et Banach rum. For $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ fås af sætning 1, med $p = 1$, $q = \infty$, at $f*g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ med

$$\|f*g\|_\infty \leqq \|f\|_1 \|g\|_\infty \leqq \|f\|_\infty \|g\|_\infty .$$

At $*$ er associativ i $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, fremgår, når man udtrykker $(f*(g*h))(x)$ og $((f*g)*h)(x)$ som i beviset for sætning 2 i §10.4; udtrykkene gælder denne gang for ethvert x, og ombytningen af integrationsorden volder ingen problemer.

Sætning 3. Lad $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$. Er $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode 2π differentiabel med en begrænset afledet, da er $f*g$ differentiabel med

$$D(f*g) = f * Dg .$$

Beviset føres ganske som for den tilsvarende sætning i §10.3. Bemærk, at $D(f*g) = f * Dg$ er kontinuert (sætning 2).

Korollar. Når $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ og $g \in \mathcal{C}^p(\mathbb{T})$, da er $f*g \in \mathcal{C}^p(\mathbb{T})$ og

$$D^p(f*g) = f * D^p g .$$

Bemærkning. Lad g være differentiabel med en begrænset afledet, der har diskontinuitetspunkter. (Eksempel: lad a være et relativt maksimumspunkt for funktionen $x \to x^2 \cos\frac{1}{x}$, $0<x<\pi$, og definer g i periodeintervallet $]-\pi,\pi]$ ved $g(0)=0$,

$$g(x) = x^2\cos\frac{1}{x} \text{ for } 0<|x|\leqq a, \quad g(x)=a^2\cos\frac{1}{a} \text{ for } a\leqq|x|\leqq\pi\,.)$$

For hvert $e\in\mathcal{L}(\mathbb{T})$ er da $e*g\neq g$, idet $\mathcal{D}(e*g)$ er kontinuert overalt. Specielt fremgår, at $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ er uden etelement.

11.3. Gruppealgebraen $L(\mathbb{T})$.

Vi skal her omtale foldning af funktioner tilhørende $\mathcal{L}(\mathbb{T})$. Det erindres, at $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ betyder, at $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er en Borel funktion med periode 2π, hvor $\int_a^{a+2\pi} |f(x)|dx < \infty$, medens

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} |f(x)|dx.$$

Sætning 1. Når $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ og $g \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, da er funktionen $f*g$ defineret næsten overalt i $\mathbb{R}$; der gælder $f*g \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ og

$$\|f*g\|_1 \leqq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Sætning 2. Når $f,g,h \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, da er

$$f*(g*h) = (f*g)*h \quad \text{næsten overalt}.$$

Beviserne føres ganske som for de tilsvarende sætninger i §10.4, blot erstattes $\int_{\mathbb{R}^d}$, $\int_{\mathbb{R}^{2d}}$ med henholdsvis $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}$, $(\frac{1}{2\pi})^2 \int_{]0,2\pi] \times]0,2\pi]}$.

Ved overgang til mængden $L(\mathbb{T})$ af ækvivalensklasser ved relationen „$f_1 = f_2$ næsten overalt" fås

Sætning 3. Lebesgue rummet $L(\mathbb{T})$, betragtet med sædvanlig addition, sædvanlig multiplikation med skalarer, foldning samt 1-norm, er en kommutativ Banach algebra, uden etelement.

Den kaldes ofte gruppealgebraen for cirkelgruppen. Der er dog andre kandidater til dette navn (bl. a. $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, se §11.2).

For Banach algebraen $L(\mathbb{T})$ gælder, ganske svarende til sætningen i §10.5:

Sætning 4. Er $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en følge af funktioner på $\mathbb{R}$ med periode 2π, tilhørende $\mathcal{L}(\mathbb{T})$, hvor

(i) $\forall n \in \mathbb{N}: \; k_n \geqq 0$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}: \; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(x)dx = 1$

(iii) $\forall \delta,\ 0<\delta<\pi:\ \int_{\delta<|x|<\pi} k_n(x)\,dx \to 0$ for $n\to\infty$,

da gælder $\forall f\in\mathcal{L}(\mathbb{T}):\ \|f*k_n-f\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f*k_n-f|\,dm \to 0$ for $n\to\infty$,

dvs. følgen (af klasser repræsenteret af) $k_1, k_2, \dots$ er en approksimativ enhed i $L(\mathbb{T})$.

Beviset kan føres som for sætningen i §10.5, med selvfølgelige ændringer. Se også §11.4, sætning 3.

En følge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af funktioner på $\mathbb{R}$ med periode 2π, der tilhører $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ og opfylder (i), (ii) og (iii), vil vi kalde en Dirac følge for $\mathbb{T}$. Bemærk, at betingelse (iii) her specielt er opfyldt, når

$\forall \delta,\ 0<\delta<\pi:\ k_n(x)\to 0$ for $n\to\infty$, uniformt for $\delta<|x|<\pi$.

11.4. Mere om Dirac følger for $\mathbb{T}$.

Sætning 1. Er $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Dirac følge (se §11.3) af funktioner tilhørende $\mathcal{L}(\mathbb{T})$, da gælder

$$\forall f\in\mathcal{C}(\mathbb{T}):\ \|f*k_n-f\|_u\to 0 \text{ for } n\to\infty.$$

Specielt vil enhver Dirac følge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$ med periode 2π være en approksimativ enhed i Banach algebraen $(\mathcal{C}(\mathbb{T}),*,\|\ \|_u)$.

Bevis. For hvert $n\in\mathbb{N}$ og $x\in\mathbb{R}$ har vi

$$\begin{aligned} f*k_n(x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)k_n(y)dy - f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k_n(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-y)-f(x))k_n(y)dy \end{aligned}$$

og dermed $\quad |f*k_n(x)-f(x)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)-f(x)|\,k_n(y)\,dy.$

Idet en funktion $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$ er uniformt kontinuert, kan vi til vilkårligt $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ tænke os valgt et δ, $0<\delta<\pi$, så

$$|f(x-y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{blot } |y|<\delta.$$

Da er

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-y)-f(x)|k_n(y)dy \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}k_n(y)dy \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|y|<\pi}|f(x-y)-f(x)|k_n(y)dy \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|y|<\pi}2\|f\|_u k_n(y)dy.$$

Vælges nu $N\in\mathbb{N}$, så det sidste integral er mindre end $\frac{\varepsilon}{2}$ for $n>N$, har vi

$$|f*k_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \text{for } n>N \text{ og alle } x.$$

Sætning 2. Når $g\in\mathcal{L}(\mathbb{T})$ og $f\in\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$, hvor $1\leqq p<\infty$, da er $f*g\in\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ og $\quad \|f*g\|_p \leqq \|f\|_p\|g\|_1.$

Beviset føres som for sætning 1 i §10.6, med selvfølgelige ændringer.

<u>Sætning</u> 3. <u>Er</u> $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>en</u> <u>Dirac</u> <u>følge</u> <u>af</u> <u>funktioner</u> <u>tilhørende</u> $\mathcal{L}(\mathbb{T})$, <u>og</u> <u>er</u> $1 \leqq p < \infty$, <u>da</u> <u>gælder</u>

$$\forall f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T}): \|f * k_n - f\|_p \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Beviset for §10.6, sætning 2 kan benyttes med selvfølgelige ændringer. Da $m(\mathbb{T}) < \infty$, kan vi imidlertid slippe lettere. Vi udnytter, at $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ er tæt i $\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ og anvender sætning 1 og 2 ovenfor:

Til vilkårligt $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ og $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tænkes valgt en funktion $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, så $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$, og derpå et $N \in \mathbb{N}$, så

$$\|g * k_n - g\|_u < \frac{\varepsilon}{3} \text{ for } n > N.$$

Idet $\|f * k_n - g * k_n\|_p = \|(f-g) * k_n\|_p \leqq \|f-g\|_p \|k_n\|_1 = \|f-g\|_p$, har vi da for $n > N$

$$\begin{aligned}\|f * k_n - f\|_p &\leqq \|f * k_n - g * k_n\|_p + \|g * k_n - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \|g * k_n - g\|_u + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.\end{aligned}$$

§12. Fourier rækker.

12.1. Rene svingninger.

En reel funktion
$$x \to \rho\cos(\omega x - \varphi),\quad x \in \mathbb{R},$$
hvor $\rho, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$, $\omega > 0$, kaldes en ren svingning. Den kan også udtrykkes
$$x \to a\cos\omega x + b\sin\omega x\,,\quad x \in \mathbb{R},$$
hvor $a, b \in \mathbb{R}$, nemlig med $a = \rho\cos\varphi$, $b = \rho\sin\varphi$. En given reel ren svingning har en bestemt amplitude ρ og for $\rho \neq 0$ en bestemt frekvens $\omega/2\pi$ samt en fasekonstant φ bestemt modulo 2π.

En kompleks funktion
$$x \to a\cos\omega x + b\sin\omega x,\quad x \in \mathbb{R}$$
hvor $a, b \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}_+$, altså en funktion, hvis real- og imaginærdel er rene svingninger med samme frekvens $\omega/2\pi$, vil vi ligeledes kalde en ren svingning, med frekvens $\omega/2\pi$. Den kan også angives
$$x \to c_+ e^{i\omega x} + c_- e^{-i\omega x},\quad x \in \mathbb{R},$$
med $c_+, c_- \in \mathbb{C}$. Sammenhængen mellem koefficienterne er
$$\begin{aligned} a &= c_+ + c_- & \qquad c_+ &= \tfrac{1}{2}(a - ib) \\ b &= i(c_+ - c_-) & \qquad c_- &= \tfrac{1}{2}(a + ib)\ . \end{aligned}$$
Den sidste form viser sig at have væsentlige fortrin. Heri ligger en tilskyndelse til at arbejde med komplekse funktioner, hvad vi da også vil gøre ved udviklingen af den følgende teori. Bemærk, at en ren svingning er reel, netop hvis c_+ og c_- er konjugerede.

Som betegnelse for funktionen $x \to e^{i\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$, hvor $\alpha \in \mathbb{R}$, vil vi benytte e_α. En ren svingning med frekvens $\omega/2\pi$, hvor $\omega \in \mathbb{R}_+$, kan da skrives $c_+ e_\omega + c_- e_{-\omega}$.

Læren om opløsning af funktioner i rene svingninger kaldes <u>harmonisk</u> <u>analyse</u>.

12.2. Trigonometrisk række.

I indeværende §12 skal vi beskæftige os med periodiske funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med en given periode τ. En ren svingning med frekvensen $\omega/2\pi = 1/\tau$ kaldes da en grundsvingning, medens rene svingninger med frekvens $n\omega/2\pi = n/\tau$, $n = 2, 3, \dots$, kaldes oversvingninger. Ifølge Joseph Fourier (Sur la propagation de la chaleur, manuscript, Paris 1807) kan enhver funktion med periode τ skrives som rækkesum af en grundsvingning, oversvingninger samt et konstant led. Fouriers påstand er dog en stærk forenkling af de faktiske forhold.

For simpelheds skyld vælger vi at betragte funktioner med periode 2π. En række med konstant led, grundsvingning og oversvingninger kan da skrives
$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$
$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$$
eller mere korrekt
$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e_n + c_{-n}e_{-n}).$$
En sådan række kaldes en trigonometrisk række. Ofte tillader man sig for korthedens skyld at skrive den $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ eller $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e_n$. Vi noterer sammenhængen
$$a_n = c_n + c_{-n} \qquad c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n)$$
$$b_n = i(c_n - c_{-n}) \qquad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n),$$
gyldig for $n > 0$, samt for $n = 0$ hvis vi sætter $b_0 = 0$.

Sætning. Hvis en funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode 2π kan fås som sum af en uniformt konvergent trigonometrisk række, da kun af én, nemlig rækken med
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$
for $n \in \mathbb{Z}$, henholdsvis $n \in \mathbb{N}_0$.

Bevis. Lad $c_0 + \sum_1^{\infty}(c_m e^{imx} + c_{-m}e^{-imx})$ være uniformt konvergent for $x \in \mathbb{R}$ med sum $f(x)$. For hvert $n \in \mathbb{Z}$ er da

$$f(x)e^{-inx} = c_0 e^{-inx} + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m e^{i(m-n)x} + c_{-m} e^{i(-m-n)x}),$$

hvor vi igen har uniform konvergens, idet jo e_{-n} er en begrænset funktion. Ved ledvis integration fås da

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = c_0 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}dx + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}dx + c_{-m} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(-m-n)x}dx)$$

$$= c_n \cdot 2\pi.$$

12.3. Fourier række.

Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en Borel funktion med periode 2π, Lebesgue integrabel i et periodeinterval. Altså $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ med betegnelsen fra §11.

Den trigonometriske række

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \qquad \text{med } c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \; n \in \mathbb{Z},$$

eller anderledes skrevet

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{med } a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \; n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \; n \in \mathbb{N},$$

kaldes da Fourier rækken for f. Egentlig er det dog rækken $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e_n + c_{-n} e_{-n})$, der tænkes på. Tallene c_n, a_n og b_n kaldes Fourier koefficienter for f. At $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er Fourier rækken for f udtrykker man undertiden ved at skrive

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

(Bemærk, at udtrykkene for Fourier koefficienterne har mening.)

En motivering for definitionen har vi i sætningen i §12.2. Den kan nu formuleres:

Sætning. En uniformt konvergent trigonometrisk række er Fourier række for sin sumfunktion.

Integrationsteori og harmonisk analyse har udviklet sig i snæver forbindelse. Det arbejde, hvori Bernhard Riemann udvikler sit integralbegreb, har titlen: Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe (Göttingen 1854). Lebesgues integrationsteori blev omgående bragt i frugtbar anvendelse i den harmoniske analyse og har vist sig som dennes naturlige ramme.

De smukke resultater omfatter dog ikke, hvad man med Fourier umiddelbart ville håbe på:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}).$$

Ganske vist er det nu lykkedes (Lennart Carleson 1966) at vise, at ligningen gælder for næsten alle x, hvis $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$; men der findes funktioner $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, hvis Fourier række er divergent overalt (Andrej Kolmogorov 1926), og selv for kontinuert f kan Fourier rækken have et divergenspunkt (Paul du Bois-Reymond 1876), ja for enhver nulmængde $N \subset]-\pi,\pi]$ findes en kontinuert funktion, hvis Fourier række er divergent i hvert punkt af N. (Se f.eks. A. Zygmund: Trigonometric series, 2.ed., Cambridge University Press 1959, chapter 8 og Y. Katznelson: An introduction to harmonic analysis, Wiley 1968, p. 55-61.)

Det kan også nævnes, at en trigonometrisk række kan være konvergent overalt uden at være Fourier række for nogen funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$. (Et konkret eksempel er $\Sigma_2^\infty \sin nx/\log n$; se f.eks. R.E. Edwards: Fourier series I, Holt, Rinehart & Winston 1967, p.2.)

Vi skal først beskæftige os med tilstrækkelige betingelser for, at

$$f(x) = c_0 + \Sigma_{n=1}^\infty (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$$

i et bestemt punkt x. Derefter (§12.6 og §13) skal vi se på andre muligheder for, at rækken kan fremstille funktionen, end netop punktvis konvergens.

12.4. Riemann/Lebesgues lemma.

Riemann/Lebesgues lemma. For enhver funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ gælder, med $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} dx \to 0 \text{ for } |t| \to \infty$$

og dermed $\int_{\mathbb{R}} f(x) \cos tx \, dx \to 0, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin tx \, dx \to 0$ for $t \to \infty$.

Beviset udnytter, at trappefunktionerne ligger tæt i $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, (§9.1, sætning 2).

1° Er f indikatorfunktion for et begrænset interval $]a,b]$, følger påstanden af, at $\int_a^b e^{itx} dx = \left[\frac{1}{it} e^{itx}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{it}(e^{itb} - e^{ita})$

og dermed $\left|\int_a^b e^{itx} dx\right| \leq \frac{2}{|t|}$ for $t \neq 0$.

2° Er f en trappefunktion, dvs. $f = \sum_1^n c_j \cdot 1_{I_j}$, hvor hvert $I_j =]a_j, b_j]$ er et begrænset interval, har vi nu

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} dx = \sum_1^n c_j \int_{a_j}^{b_j} e^{itx} dx \to 0 \text{ for } |t| \to \infty.$$

3° Endelig betragtes det almene tilfælde $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. For vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en trappefunktion g, så $\|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Blot $|t|$ er tilstrækkelig stor, har vi nu ifølge 2° $\left|\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{itx} dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

og dermed $\left|\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} dx\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x)) e^{itx} dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{itx} dx\right| < \varepsilon$,

idet $\left|\int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x)) e^{itx} dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx = \|f-g\|_1$.

Korollar. For $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ vil $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{itx} dx \to 0$ for $|t| \to \infty$, $t \in \mathbb{R}$.

Idet a_n, b_n og c_n betegner Fourier koefficienterne for f (se §12.3), noteres specielt: $c_n \to 0$ for $|n| \to \infty$, $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ for $n \to \infty$.

12.5. Konvergens af Fourier række.

Lad s_n være det n^{te} afsnit af Fourier rækken $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e_n + c_{-n}e_{-n})$ for en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, altså

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \quad \text{for } n \in \mathbb{N}_0,\, x \in \mathbb{R}.$$

Idet $\quad c_k e^{ikx} = e^{ikx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)}f(y)dy,$

har vi $\quad s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k = \sum_{k=-n}^{n}(e_k * f) = f * \sum_{k=-n}^{n} e_k = f * \mathcal{D}_n,$

hvor $\mathcal{D}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ er det n^{te} afsnit af rækken $1 + \sum_{n=1}^{\infty}(e_n + e_{-n})$, altså

$$\mathcal{D}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx.$$

Funktionen $\mathcal{D}_n$ kaldes den n^{te} Dirichlet kerne. Det er en lige funktion, og

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(x)dx = 1.$$

For $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ finder vi

$$\mathcal{D}_n(x) = e^{-inx}\,\frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1}$$
$$= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

Vi noterer:

Det n^{te} afsnit s_n af Fourier rækken for en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ er lig $f * \mathcal{D}_n$, altså

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\mathcal{D}_n(y)dy \quad \text{for } n \in \mathbb{N}_0,\, x \in \mathbb{R}.$$

Dette er nøglen til studiet af Fourier rækkers konvergens. (Bemærk, at vi ikke sigter mod ubetinget konvergens.)

Dinis test. (1880). En tilstrækkelig betingelse for, at Fourier rækken $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e_n + c_{-n}e_{-n})$ for en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ er konvergent i punktet $x \in \mathbb{R}$ med sum

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}) = s$$

er, at

$$\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x+y) + f(x-y) - 2s}{y}\right|dy < \infty \quad \text{for et } \delta > 0$$

Bemærk, at integralet er endeligt for ethvert δ, blot det er tilfældet for ét.

Bevis. Idet $\mathcal{D}_n$ er en lige funktion, har vi

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-y)\mathcal{D}_n(y)dy + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-y)\mathcal{D}_n(y)dy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x+y)+f(x-y))\,\mathcal{D}_n(y)dy .$$

Og da $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(y)dy = 1$, har vi videre

$$s_n(x) - s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+y)+f(x-y)-2s)\,\mathcal{D}_n(y)dy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+y)+f(x-y)-2s}{y}\cdot\frac{y}{\sin\frac{1}{2}y}\cdot \sin(n+\tfrac{1}{2})y\,dy.$$

Idet $y/\sin\frac{1}{2}y$ er begrænset, har det sidste integral formen

$$\int_{\mathbb{R}} g(y)\sin(n+\tfrac{1}{2})y\,dy\,,\qquad \text{med } g\in\mathcal{L}(\mathbb{R}).$$

Af Riemann/Lebesgues lemma (§12.4) følger da, at $s_n(x)-s\to 0$.

Anvendelse. Betingelsen i Dinis test er opfyldt, med $s=f(x)$, når funktionen $f\in\mathcal{L}(\mathbb{T})$ er kontinuert i x samt differentiabel fra højre og venstre i punktet.

Mere alment er betingelsen opfyldt, med $s=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$, når funktionen $f\in\mathcal{L}(\mathbb{T})$ har grænseværdier $f(x+0)\in\mathbb{C}$ og $f(x-0)\in\mathbb{C}$ fra højre og venstre i punktet x, og når tillige

$$\frac{f(x+y)-f(x+0)}{y} \quad \text{og} \quad \frac{f(x-y)-f(x-0)}{-y}$$

har grænseværdier i $\mathbb{C}$ for $y\to 0_+$.

Thi da er funktionen

$$y \mapsto \frac{f(x+y)+f(x-y)-2\cdot\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))}{y}$$

begrænset i et interval $]0,\delta]$.

Vi vil hermed forlade problemet punktvis konvergens af en Fourier række, men skal dog nævne følgende sætning, der i det væsentlige skyldes Gustav Lejeune Dirichlet (1829). Dirichlet var den første, der gav et egentligt bevis for Fourier rækkers konvergens.

<u>Fourier rækken for en funktion</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>med periode</u> 2π, <u>der er af begrænset variation i</u> $[0, 2\pi]$, <u>er konvergent i hvert</u> $x \in \mathbb{R}$ <u>med sum</u>

$$\tfrac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

<u>Er</u> f <u>tillige kontinuert i</u> $[a,b]$, <u>da er konvergensen uniform i</u> $[a,b]$.

(Se f.eks. A. Zygmund: Trigonometrical series, 2. ed., Cambridge 1959, chapter 2, §8, eller A.J. Weir: Lebesgue integration and measure, Cambridge 1973, p. 208-210.)

12.6. Summabilitet.

En følge $s_0, s_1, \ldots$ af elementer i et vektorrum V med seminorm siges at være limiterbar med grænse $s \in V$, hvis $\|\sigma_n - s\| \to 0$ for $n \to \infty$, hvor
$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k .$$

En konvergent følge $s_0, s_1, \ldots$ med grænse s er også limiterbar med samme grænse. (Cauchy.)

Bevis. Til vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tænkes valgt et $M \in \mathbb{N}$, så
$$\|s_k - s\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ for } k > M.$$
For hvert $n > M$ er nu
$$\|\sigma_n - s\| = \left\|\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (s_k - s)\right\| \leq \frac{1}{n+1} \left\|\sum_{k=0}^{M} (s_k - s)\right\| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=M+1}^{n} \|s_k - s\|$$
$$< \frac{1}{n+1} \left\|\sum_{k=0}^{M} (s_k - s)\right\| + \frac{\varepsilon}{2} .$$
Idet $\frac{1}{n+1} \left\|\sum_{k=0}^{M} (s_k - s)\right\| \to 0$ for $n \to \infty$, findes derfor et $N \geq M$, så
$$\|\sigma_n - s\| < \varepsilon \text{ for } n > N.$$

Derimod kan en følge være limiterbar uden at være konvergent. Eksempelvis er $2s, 0, 2s, 0, 2s, \ldots$ limiterbar med grænse s.

En række $\sum_0^\infty a_n$ med led tilhørende et vektorrum V med seminorm siges at være summabel med sum $s \in V$, hvis følgen af afsnit $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n = 0, 1, \ldots$, er limiterbar med grænse s.

Eksempelvis er $2s - 2s + 2s - 2s + 2s - \ldots$ summabel med sum s.

Det n^{te} afsnitsmiddel $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k$ af en række $\sum_0^\infty a_n$ kan udtrykkes direkte ved rækkeleddene:
$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) a_k .$$

Thi af
$$\begin{array}{rcl} s_0 & = & a_0 \\ s_1 & = & a_0 + a_1 \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\ s_n & = & a_0 + a_1 + \ldots + a_n \end{array}$$
fås
$$(n+1)\,\sigma_n = (n+1)a_0 + na_1 + \ldots + 1 \cdot a_n = \sum_{k=0}^{n} (n+1-k) a_k .$$

Vi skal se, at det er fornuftigt at spørge efter summabilitet af Fourier rækken $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e_n + c_{-n} e_{-n})$ for en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$.

Idet vi for det n^{te} afsnit $s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ fandt $s_n = f * \mathcal{D}_n$, (§12.5), har vi for det n^{te} afsnitsmiddel

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(f * \mathcal{D}_k) = f * \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{D}_k\right) = f * F_n ,$$

hvor $F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{D}_k$ kaldes den n^{te} <u>Fejér</u> <u>kerne</u>.

Da $\mathcal{D}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ er det n^{te} afsnit af rækken $1 + \sum_{n=1}^{\infty}(e_n + e_{-n})$, er F_n dens n^{te} afsnitsmiddel, altså

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\cos kx .$$

Bemærk, at F_n er en lige funktion, og at

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)dx = 1 .$$

Fordelen ved at betragte summabilitet af Fourier rækker frem for konvergens ligger nu i, at følgen $F_0, F_1, \ldots$ har bedre egenskaber end $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots$. Specielt er den, som det vil fremgå nedenfor, en Dirac følge for $\mathbb{T}$. (Se §11.3 og §11.4.)

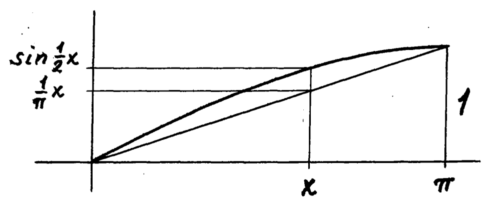
For $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ har vi (se §12.5)

$$\mathcal{D}_k(x) = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x} = \frac{2\sin(k+\frac{1}{2})x\,\sin\frac{1}{2}x}{2\sin^2\frac{1}{2}x} = \frac{\cos kx - \cos(k+1)x}{2\sin^2\frac{1}{2}x}$$

og dermed $F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{D}_k(x) = \frac{1}{n+1}\,\frac{1-\cos(n+1)x}{2\sin^2\frac{1}{2}x} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2 .$

Heraf fremgår for det første, at $F_n \geq 0$.

Da $\sin\frac{1}{2}x \geq \frac{1}{\pi}x$ for $0 < x \leq \pi$,



sluttes tillige, at

$$F_n(x) \leq \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi^2}{x^2} \quad \text{for } 0<|x|\leq\pi,\ n\in\mathbb{N}_0 .$$

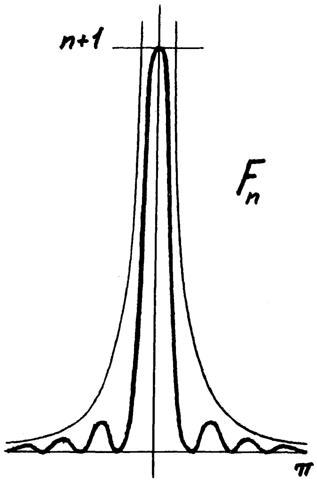
Denne vurdering viser, at

$$F_n(x) \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

når $0<|x|\leq\pi$, og at konvergensen er uniform for $\delta \leq |x| \leq \pi$, når $0<\delta<\pi$. Specielt gælder

$$\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} F_n(x)dx \to 0 \text{ for } n\to\infty .$$

Vi noterer:



Det n^{te} afsnitsmiddel σ_n af Fourier rækken for en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ er lig $f * F_n$, altså

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_n(y)\,dy \quad \text{for } n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Den n^{te} Fejér kerne F_n er et cosinuspolynomium af n^{te} grad,

$$0 \leqq F_n(x) \leqq \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi^2}{x^2} \quad \text{for } 0 < |x| \leqq \pi,$$

og

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,dx = 1.$$

Specielt er $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en Dirac følge for $\mathbb{T}$.

Hovedsætning. Fourier rækken for en vilkårlig funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ er summabel i $\mathcal{L}(\mathbb{T})$, $\| \ \|_1$, med sum f.

Påstanden er, at $\|\sigma_n - f\|_1 \to 0$ for $n \to \infty$, hvor σ_n er Fourier rækkens n^{te} afsnitsmiddel.

Dette følger af, at $\sigma_n = f * F_n$, idet $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Dirac følge for $\mathbb{T}$, se §11.3, sætning 4.

Korollar. Entydighedssætning.

Hvis $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ og $g \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ har samme Fourier række, dvs. samme Fourier koefficienter, så er $f = g$ næsten overalt.

Sætning 1. Fourier rækken for en vilkårlig funktion $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$, hvor $1 \leqq p < \infty$, er summabel i p-middel med sum f.

Påstanden er, at $\|\sigma_n - f\|_p \to 0$ for $n \to \infty$. Dette indses som i tilfældet $p = 1$, dog med brug af §11.4, sætning 3.

Sætning 2. (Fejér.) Fourier rækken for en vilkårlig kontinuert funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode 2π er uniformt summabel med sum f.

Påstanden er her, at $\|\sigma_n - f\|_u \to 0$ for $n \to \infty$, hvor σ_n er Fourier rækkens n^{te} afsnitsmiddel.

Dette følger af, at $\sigma_n = f * F_n$, idet $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en approksimativ enhed i $(\mathscr{C}(\mathbb{T}), *, \|\ \|_u)$, se §11.4, sætning 1.

Korollar. Weierstrass' approksimationssætning for periodiske funktioner.

Til enhver kontinuert funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode 2π og ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et trigonometrisk polynomium p, så
$$\forall x \in \mathbb{R}: |f(x) - p(x)| < \varepsilon .$$

Som p kan benyttes det n^{te} afsnitsmiddel σ_n af Fourier rækken for f, med tilpas stort n.

Det var Leopold Fejér, der som den første anvendte den summabilitetsmetode, vi har beskæftiget os med (Cesàro summabilitet af 1. orden) på Fourier rækker (Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Mathematische Annalen 58 (1904), p. 51-69). Blandt hans resultater nævner vi:

Er $f \in \mathscr{L}(\mathbb{T})$ kontinuert i et punkt $x \in \mathbb{R}$, da er Fourier rækken for f summabel i punktet med sum $f(x)$, dvs.
$$\sigma_n(x) = f * F_n(x) \to f(x) \text{ for } n \to \infty .$$

Som i beviset for §11.4, sætning 1 findes
$$|f * F_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)|\, F_n(y)\, dy .$$
Derpå udnyttes, at f er kontinuert i det givne punkt x, sml. §11.4, og beviset kan afsluttes ved at godtgøre
$$\int_{\delta<|y|<\pi} |f(x-y)|\, F_n(y)\, dy \to 0 \quad \text{og} \quad \int_{\delta<|y|<\pi} |f(x)|\, F_n(y)\, dy \to 0 \quad \text{for } n \to \infty .$$
Det sidste integral volder ingen problemer, det første vurderes ved
$$\sup\{F_n(y) \mid \delta < |y| < \pi\} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f|\, dm .$$

Inspireret af Fejérs resultater viste Henri Lebesgue (Sur la convergence des séries de Fourier, Mathematische Annalen 61 (1905), p. 271-77):

Fejér/Lebesgues sætning. Fourier rækken for en vilkårlig funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ er for næsten alle x summabel med sum $f(x)$,

$$\sigma_n(x) = f * F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \text{for næsten alle } x.$$

Vi kan ikke komme ind på beviset. (Se f.eks. T. Gutmann Madsen: Fourier rækker, Forelæsningsnoter 413, Matematisk Institut, København 1968-69, §4.)

Om forskellige metoder til summering af rækker og om deres anvendelse på Fourier rækker kan bl.a. læses i A. Zygmund: Trigonometric series, Warszawa 1935 eller 2. ed., Cambridge 1959, chapter 3.

§13. Ortogonaludviklinger.

13.1. Riesz/Fischers sætning.

Vi formulerer straks følgende perle:

Riesz/Fischers sætning. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at der findes en funktion $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, der har en given trigonometrisk række

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$$

som Fourier række, er, at $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$.

Resultatet skyldes Frédéric Riesz (Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, Comptes Rendus 144, p. 616, Paris 1907) og Ernst Fischer (Sur la convergence en moyenne, ibid., p. 1022). Det er ved denne lejlighed, Fischer viser fuldstændigheden af $\mathcal{L}_2([a,b])$, jfr. §8.4. Vi tilføjer:

I bekræftende fald gælder Parsevals ligning

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

og rækken er konvergent i kvadratisk middel med sum f, dvs.

$$\|f - s_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx \to 0 \quad \text{for } n \to \infty,$$

hvor $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$.

Bemærkninger. 1. Skrives den trigonometriske række på formen

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

er betingelsen $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty$, medens Parsevals ligning er

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \tfrac{1}{4}|a_0|^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

(Navnet henviser til Marc Antoine Parseval, der i 1799 angav en beslægtet ligning.)

2. Det er kun Fourier rækkerne for de kvadratisk integrable funktioner, man simpelt kan karakterisere. Der er ingen tilsvarende sætninger vedrørende f. eks. kontinuerte eller integrable funktioner. (Det kan nævnes, at en betingelse på de numeriske værdier af koefficienterne i en trigonometrisk række $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ ikke kan være tilstrækkelig for, at rækken er Fourier række for en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, uden at medføre $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ og dermed $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$. J. E. Littlewood 1926. Se f. eks. A. Zygmund: Trigonometric series, Warszawa 1935, p. 126, eller 2. udgave, Cambridge 1959, I p. 215.)

3. Medens parenteserne og rækkefølgen af leddene i en trigonometrisk række var væsentlig i §12, skal vi se, at dette her er uden betydning (§13.4).

4. Medens vi i §12 virkelig arbejdede med periodiske funktioner, idet foldning var et afgørende hjælpemiddel, får vi her kun brug for funktionerne i et fast interval, f. eks. $]-\pi, \pi]$. Sætning og bevis kan derfor indpasses i en generel ramme, som vi nu skal udvikle.

13.2. Skalarprodukt. Hilbert rum.

En Hermite form i et vektorrum $\mathcal{V}$ over $\mathbb{C}$ er en funktion $(x,y) \to \langle x|y\rangle$ fra $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ ind i $\mathbb{C}$, som er lineær i 2. komponent, dvs.

$$\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle \quad \text{for } x,y,z\in\mathcal{V},$$
$$\langle x|\lambda y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle \quad \text{for } x,y\in\mathcal{V},\ \lambda\in\mathbb{C},$$

og hvor

$$\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle} \quad \text{for } x,y\in\mathcal{V}.$$

Betingelserne medfører

$$\langle y+z|x\rangle = \langle y|x\rangle + \langle z|x\rangle,$$
$$\langle \lambda y|x\rangle = \bar{\lambda}\langle y|x\rangle.$$

Man siger, at Hermite formen er sesquilineær (halvandenlineær).

Man bemærker, at $\langle x|y\rangle = 0$, når $x = 0$ eller $y = 0$, specielt $\langle 0|0\rangle = 0$, samt at $\langle x|x\rangle \in \mathbb{R}$ for alle x.

En Hermite form kaldes positiv, hvis

$$\langle x|x\rangle \geqq 0 \quad \text{for alle } x,$$

den kaldes positiv definit, hvis

$$\langle x|x\rangle > 0 \quad \text{for alle } x \neq 0.$$

For vektorrum over $\mathbb{R}$ benyttes de samme definitioner, blot er konjugering overflödig, og man siger symmetrisk, bilineær form i stedet for Hermite form.

Som fælles navn for positiv Hermite form i et vektorrum over $\mathbb{C}$ og positiv symmetrisk, bilineær form i et vektorrum over $\mathbb{R}$ benytter vi skalarprodukt. Når formen er positiv definit, taler vi om et egentligt skalarprodukt.

Til et skalarprodukt i et vektorrum $\mathcal{V}$ over $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$ svarer en seminorm, givet ved

$$\|x\| = \langle x|x\rangle^{1/2}, \quad x\in\mathcal{V}.$$

Der gælder

$$|\langle x|y\rangle| \leqq \|x\|\,\|y\| \quad \text{for } x,y\in\mathcal{V},$$

kaldet Cauchy/Schwarz' ulighed.

Seminormen er åbenbart en norm, netop hvis skalarproduktet er egentligt.

Bevis. 1° Naturligvis er $\|x\| \geqq 0$, og $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ fås af
$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x | \lambda x \rangle = \bar{\lambda}\lambda \langle x|x \rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2.$$

2° Cauchy/Schwarz' ulighed. For ethvert $\lambda \in \mathbb{C}$ er
$$0 \leqq \langle x - \lambda y | x - \lambda y \rangle = \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda \langle x|y \rangle) + |\lambda|^2 \|y\|^2.$$
Med $\lambda = \alpha \cdot \overline{\langle x|y \rangle}$ opnår vi specielt
$$0 \leqq \|x\|^2 - 2\alpha |\langle x|y \rangle|^2 + \alpha^2 |\langle x|y \rangle|^2 \|y\|^2$$
for ethvert $\alpha \in \mathbb{R}$.

Heraf fremgår, at $\langle x|y \rangle = 0$, hvis $\|y\| = 0$. Og er $\|y\| > 0$, finder vi med $\alpha = 1/\|y\|^2$, at
$$0 \leqq \|x\|^2 - \frac{|\langle x|y \rangle|^2}{\|y\|^2}, \quad \text{dvs. } |\langle x|y \rangle|^2 \leqq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

3° Trekantsuligheden, $\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$, kan nu vises:
$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = \langle x+y | x+y \rangle &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x|y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leqq \|x\|^2 + 2|\langle x|y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leqq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Vi tænker os nu i et vektorrum $\mathcal{V}$ over $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$) givet et skalarprodukt og dermed en seminorm med dertil hørende pseudometrik (se §8.2).

Bemærk, at skalarproduktet er kontinuert, ligesom seminormen og kompositionerne. Kontinuiteten i (x_0, y_0) fremgår af
$$|\langle x|y \rangle - \langle x_0|y_0 \rangle| \leqq \|x - x_0\| \|y - y_0\| + \|x - x_0\| \|y_0\| + \|x_0\| \|y - y_0\|,$$
der fås ved Cauchy/Schwarz' ulighed ud fra identiteten
$$\langle x|y \rangle - \langle x_0|y_0 \rangle = \langle x - x_0 | y - y_0 \rangle + \langle x - x_0 | y_0 \rangle + \langle x_0 | y - y_0 \rangle.$$

Specielt er $\langle x|y \rangle = \langle x_0|y_0 \rangle$, når $\|x - x_0\| = \|y - y_0\| = 0$. For vektorrummet V af ækvivalensklasser
$$[x] = \{ z \in \mathcal{V} \mid \|x - z\| = 0 \},$$
med kompositioner defineret ved repræsentanter, defineres da en funk-

tion $V \times V \to \mathbb{C}$ ved $\langle [x] | [y] \rangle = \langle x | y \rangle$.

Denne funktion er et egentligt skalarprodukt i V, med tilhørende norm $\| [x] \| = \| x \|$. Vi noterer:

Et vektorrum $\mathcal{V}$ med skalarprodukt går over i et vektorrum V med egentligt skalarprodukt, når elementerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen $x \sim y \Leftrightarrow \| x - y \| = 0$.

Det vil ofte være fordelagtigt at tænke på elementerne i $\mathcal{V}$ som repræsentanter.

Det erindres (§8.4, p. 136), at V er fuldstændigt, dvs. enhver Cauchy følge i V konvergent, netop hvis dette er tilfældet for $\mathcal{V}$.

Når et vektorrum med egentligt skalarprodukt er fuldstændigt, kaldes det et Hilbert rum (efter David Hilbert, der implicit arbejdede med ℓ_2 i undersøgelser af integralligninger, Göttinger Nachrichten 1906. En aksiomatisk behandling blev første gang givet af Johann v. Neumann, Mathematische Begründung der Quantenmechanik, Göttinger Nachrichten 1927.).

Hovedeksempel. For et vilkårligt målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ defineres et skalarprodukt i funktionsvektorrummet $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(X, \mathbb{E}, \mu)$ af kvadratisk integrable funktioner $f : X \to \mathbb{C}$ eller $f : X \to \mathbb{R}$ ved

$$\langle f | g \rangle = \int \bar{f} g \, d\mu, \quad f, g \in \mathcal{L}_2(X, \mathbb{E}, \mu).$$

Det bemærkes, at $\bar{f} g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, idet $|\bar{f} g| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$.

Den tilsvarende seminorm er

$$\| f \| = \langle f | f \rangle^{1/2} = \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{1/2} = \| f \|_2 .$$

Vi ved da (Fischers fuldstændighedssætning, §8.4), at rummet $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(X, \mathbb{E}, \mu)$ er fuldstændigt.

Ved overgang til $L_2 = L_2(X, \mathbb{E}, \mu)$ fås et Hilbert rum.

Specielt er $\ell_2 = \{\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \Sigma_1^\infty |\lambda_n|^2 < \infty\}$ et Hilbert rum med
$$\langle\lambda|\mu\rangle = \Sigma_1^\infty \bar{\lambda}_n \mu_n .$$
Det samme gælder $\ell_2(J)$ for en vilkårlig (indeks)mængde $J \neq \emptyset$, idet vi hermed betegner rummet $\mathcal{L}_2$ svarende til tællemålet i J. Bemærk, at $\ell_2(\{1,\dots,d\})$ netop er $\mathbb{C}^d$ (eller $\mathbb{R}^d$) med sædvanligt skalarprodukt
$$\langle\lambda|\mu\rangle = \Sigma_1^d \bar{\lambda}_n \mu_n .$$

13.3. <u>Ortogonalitet</u> <u>og</u> <u>approksimation</u>.

Lad V være et vektorrum over $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$) med skalarprodukt.

Som det er sædvane, vil vi anvende en sprogbrug lånt fra euklidisk geometri. Formålet er at lette overblikket.

En vektor $x \in V$ siges at være <u>ortogonal</u> (vinkelret) på en vektor $y \in V$, hvis $\langle x/y\rangle = 0$. I symboler:

$$x \perp y \iff \langle x/y\rangle = 0.$$

En vektor $x \in V$ siges at være ortogonal på en mængde $\mathcal{B} \subseteq V$, hvis den er ortogonal på enhver vektor $y \in \mathcal{B}$,

$$x \perp \mathcal{B} \iff \forall y \in \mathcal{B}: \langle x/y\rangle = 0.$$

Den er da også ortogonal på det mindste underrum span $\mathcal{B}$, der indeholder $\mathcal{B}$. Dette består nemlig af alle (endelige) linearkombinationer af vektorer fra $\mathcal{B}$. Ligeledes er x ortogonal på afslutningen $\overline{\mathcal{B}}$ af $\mathcal{B}$, i kraft af skalarproduktets kontinuitet.

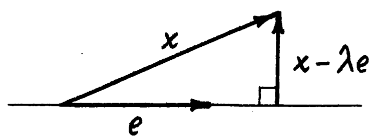
Ved udmultiplikation af $\langle x+y/x+y\rangle$ fremgår <u>Pythagoras' sætning</u>:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{når } x \perp y.$$

Den kan generaliseres ved induktion:

$$\|\textstyle\sum_1^n x_j\|^2 = \sum_1^n \|x_j\|^2 \quad \text{når } x_1,\dots,x_n \text{ er parvis ortogonale.}$$

Når $x \in V$ er vilkårlig, medens $e \in V$ er en <u>enhedsvektor</u>, dvs. $\|e\| = 1$, gælder



$$x - \lambda e \perp e \iff \lambda = \langle e/x\rangle,$$

idet jo $\langle e/x - \lambda e\rangle = \langle e/x\rangle - \lambda$. Tallet $\langle e/x\rangle$ kaldes <u>ortogonalkoefficienten</u> for x efter e.

<u>Bessels</u> <u>approksimationssætning</u>. (Friedrich W. Bessel 1828.)
<u>Lad</u> $x \in V$ <u>være</u> <u>vilkårlig</u>, <u>medens</u> $e_1,\dots,e_n \in V$ <u>er</u> <u>parvis</u> <u>ortogona-</u>

le enhedsvektorer, altså

$$\langle e_i | e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j, \\ 1 & \text{for } i = j. \end{cases}$$

Med $\lambda_j = \langle e_j | x \rangle$, $j = 1, \dots, n$, er afstanden

$$\| x - \textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \|$$

da skarpt mindre end for ethvert andet valg af $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Afstanden indgår i Bessels ligning

$$\| x - \textstyle\sum_{j=1}^n \langle e_j | x \rangle e_j \|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle e_j | x \rangle|^2 = \| x \|^2.$$

Specielt noteres Bessels ulighed

$$\textstyle\sum_{j=1}^n |\langle e_j | x \rangle|^2 \leqq \| x \|^2.$$

Bevis. Med $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ giver sættet $\lambda_j = \langle e_j | x \rangle$, $j = 1, \dots, n$, af ortogonalkoefficienter for x, som det eneste,

$$x - \textstyle\sum_1^n \lambda_j e_j \perp \mathcal{U}.$$

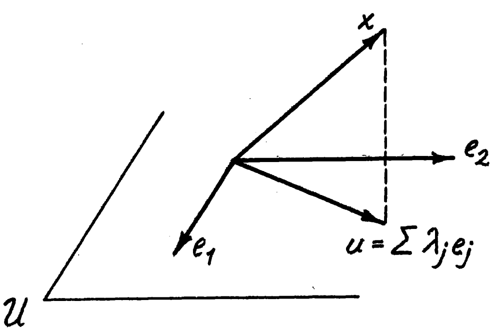
Thi dette kommer ud på

$$x - \textstyle\sum_1^n \lambda_j e_j \perp e_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

dvs.

$$\langle e_i | x - \textstyle\sum_1^n \lambda_j e_j \rangle = \langle e_i | x \rangle - \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Vektoren $u = \sum_1^n \lambda_j e_j$ med $\lambda_j = \langle e_j | x \rangle$ kaldes derfor den ortogonale projektion af x på $\mathcal{U}$.



Da $x - u \perp u$, giver Pythagoras

$$\| x - u \|^2 + \| u \|^2 = \| x \|^2.$$

Dette er Bessels ligning, idet

$$\| \textstyle\sum_1^n \lambda_j e_j \|^2 = \sum_1^n \| \lambda_j e_j \|^2 = \sum_1^n |\lambda_j|^2.$$

Med $v = \sum_1^n \mu_j e_j$ har vi $x - v = (x - u) + (u - v)$, hvor $x - u \perp u - v$.

Ifølge Pythagoras er da

$$\| x - v \|^2 = \| x - u \|^2 + \| u - v \|^2 \geqq \| x - u \|^2,$$

hvor lighedstegnet kun gælder, når

$$\| u - v \|^2 = \| \textstyle\sum_1^n (\lambda_j - \mu_j) e_j \|^2 = \sum_1^n |\lambda_j - \mu_j|^2 = 0,$$

dvs. når $\mu_j = \lambda_j = \langle e_j | x \rangle$, $j = 1, \dots, n$.

En vigtig anvendelse.

I $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, dvs. rummet af Borel funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode 2π, hvor $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$, benytter vi som skalarprodukt
$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$
Den tilsvarende seminorm er $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$.

Rummet kan identificeres med $\mathcal{L}_2$ rummet hørende til målet $\frac{1}{2\pi} m$ i intervallet $]-\pi,\pi]$. En funktion defineret her kan jo fortsættes til $\mathbb{R}$ som periodisk funktion.

Idet $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 0 & \text{for } m \neq n, \\ 1 & \text{for } m = n, \end{cases}$

er funktionerne e_n, $n \in \mathbb{Z}$, med $e_n(x) = e^{inx}$, parvis ortogonale og med norm 1.

For $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ er ortogonalkoefficienterne $\langle e_n|f\rangle$ netop de sædvanlige Fourier koefficienter c_n,
$$\langle e_n|f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx = c_n .$$
<u>Det n^{te} afsnit $s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ af Fourier rækken for en funktion $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ er således den linearkombination af funktionerne $e_{-n}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_n$, der approksimerer f bedst i kvadratisk middel.</u>

Specielt er $\|f - s_n\|_2 \leqq \|f - \sigma_n\|_2$, hvor $\sigma_n = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) c_k e_k$ er Fourier rækkens n^{te} afsnitsmiddel. Ifølge §12.6, sætning 1, gælder $\|f - \sigma_n\|_2 \to 0$ for $n \to \infty$; som korollar har vi nu:

<u>For enhver funktion $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ er Fourier rækken</u>
$$c_0 + \sum_1^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}),$$
<u>eller anderledes skrevet</u>
$$\tfrac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$
<u>konvergent i kvadratisk middel med sum f, dvs.</u>
$$\|f - s_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\Big|^2 dx \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Dette medfører, at $\|s_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \to \|f\|_2^2$ for $n \to \infty$, altså

<u>Parsevals ligning.</u> $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$

13.4. Ortonormale familier.

Lad atter V være et vektorrum med skalarprodukt.

En familie $(e_j)_{j\in J}$ af vektorer $e_j \in V$ kaldes ortonormal, hvis

$$\langle e_i | e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j, \\ 1 & \text{for } i = j, \end{cases}$$

dvs. hvis vektorerne e_j er parvis ortogonale enhedsvektorer.

For $J = \mathbb{N}$ tales naturligvis om en ortonormal følge.

Bemærkning. Det er kun af hensyn til gængse betegnelser, vi vælger at benytte indices og tale om en ortonormal familie i stedet for om en ortonormal mængde. For $i \neq j$ er jo nødvendigvis $e_i \neq e_j$, endda $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$.

I det følgende betegner f et vilkårligt element af V, medens $(e_j)_{j\in J}$ er en ortonormal familie i V.

„Rækken" $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j$ med $\lambda_j = \langle e_j | f \rangle$ kaldes da ortogonaludviklingen for f med hensyn til den ortonormale familie $(e_j)_{j\in J}$. I virkeligheden foreligger kun familien $(\lambda_j)_{j\in J}$ af ortogonalkoefficienter $\lambda_j = \langle e_j | f \rangle$; at man benytter skrivemåden $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j$, finder sin forklaring nedenfor.

Tilfældet J endelig, hvor der naturligvis ikke er problemer med fortolkningen af $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j$, er behandlet i Bessels approksimationssætning (§13.3). Det følgende er således væsentligt af interesse i tilfældet J uendelig.

Som generalisering af Bessels ulighed har vi straks

$$\sum_{j\in J} |\langle e_j | f \rangle|^2 \leq \|f\|^2,$$

idet

$$\sum_{j\in I^*} |\langle e_j | f \rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

for enhver endelig mængde $I^* \subseteq J$, $I^* \neq \emptyset$, ifølge Bessels ulighed.

Specielt bemærkes, at $(\lambda_j)_{j\in J} = (\langle e_j | f \rangle)_{j\in J}$ tilhører $\ell_2(J)$.

Videre noteres som konsekvens, at $\lambda_j = \langle e_j | f \rangle \neq 0$ indtræffer for højst numerabelt mange $j \in J$. (Se p. 11.)

Fremstilling ved ortogonalrække.

Hvis f tilhører det mindste afsluttede underrum $\overline{U} = \overline{\operatorname{span}}\{e_j \mid j \in J\}$, der indeholder vektorerne i den ortonormale familie $(e_j)_{j\in J}$, så vil ortogonaludviklingen $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j$, $\lambda_j = \langle e_j | f\rangle$, fremstille f i følgende forstand:

Til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en endelig mængde $H^* \subseteq J$, således at

$$\| f - \sum_{j\in I^*} \lambda_j e_j \| < \varepsilon$$

for enhver endelig mængde I^*, hvor $H^* \subseteq I^* \subseteq J$.

Thi $f \in \overline{U}$ betyder, at der til vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en linearkombination $\sum_{j\in H^*} \mu_j e_j$ med

$$\| f - \sum_{j\in H^*} \mu_j e_j \| < \varepsilon ,$$

og ifølge Bessels approksimationssætning (§13.3) anvendt på $(e_j)_{j\in I^*}$ er

$$\| f - \sum_{j\in I^*} \lambda_j e_j \| \leqq \| f - \sum_{j\in H^*} \mu_j e_j \| .$$

Omvendt: Hvis en „ortogonalrække" $\sum_{j\in J} \nu_j e_j$ i nævnte forstand fremstiller $f \in V$, så er $f \in \overline{U}$ og $\nu_j = \langle e_j | f\rangle$, $j \in J$.

Det er endda tilstrækkeligt, at der for hvert $i \in J$ og hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en endelig mængde $I^* \subseteq J$ med $i \in I^*$, så

$$\| f - \sum_{j\in I^*} \nu_j e_j \| < \varepsilon .$$

Thi at $f \in \overline{U}$ er da klart, og for enhver endelig mængde $I^* \subseteq J$ med $i \in I^*$ er ifølge Cauchy/Schwarz' ulighed

$$|\langle e_i | f\rangle - \nu_i| = |\langle e_i | f - \sum_{j\in I^*} \nu_j e_j\rangle| \leqq \| f - \sum_{j\in I^*} \nu_j e_j \| .$$

Parsevals ligning

$$\sum_{j\in J} |\langle e_j | f\rangle|^2 = \|f\|^2$$

gælder, hvis og kun hvis ortogonaludviklingen $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j$ for f fremstiller f, dvs. hvis og kun hvis $f \in \overline{\operatorname{span}}\{e_j \mid j \in J\}$.

Thi for enhver endelig mængde $I^* \subseteq J$ gælder Bessels ligning

$$\| f - \sum_{j\in I^*} \lambda_j e_j \|^2 + \sum_{j\in I^*} |\lambda_j|^2 = \|f\|^2 .$$

Om fremstilling ved ortogonalrække med hensyn til en <u>numerabel</u> ortonormal familie $(e_j)_{j\in J}$ noterer vi specielt:

Hvis $f \in \overline{\mathcal{U}} = \overline{\operatorname{span}}\{e_j \mid j \in J\}$, så vil ortogonaludviklingen $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j$, $\lambda_j = \langle e_j \mid f\rangle$, med vilkårlig nummerering af indices være en (sædvanligt) konvergent række med sum f.

Omvendt: Hvis en ortogonalrække $\sum_{j\in J} \nu_j e_j$ med indices taget i bare én rækkefølge (og endda gerne med led slået sammen ved parenteser) er konvergent med sum $f \in \mathcal{V}$, så er $f \in \overline{\mathcal{U}}$ og $\nu_j = \langle e_j \mid f\rangle$, $j \in J$.

<u>Ortonormal basis.</u>

En ortonormal familie $(e_j)_{j\in J}$ i $\mathcal{V}$ kaldes en <u>ortonormal basis</u> for $\mathcal{V}$, hvis $\{e_j \mid j \in J\}$ er total i $\mathcal{V}$, dvs. hvis $\overline{\operatorname{span}}\{e_j \mid j\in J\} = \mathcal{V}$.

<u>I så fald, og kun da, fremstilles ethvert</u> $f \in \mathcal{V}$ <u>ved sin ortogonaludvikling</u> $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j$, $\lambda_j = \langle e_j \mid f\rangle$.

<u>I så fald, og kun da, gælder Parsevals ligning</u>

$$\|f\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle e_j \mid f\rangle|^2$$

<u>for alle</u> $f \in \mathcal{V}$.

Er $(e_j)_{j\in J}$ en ortonormal <u>basis</u> for $\mathcal{V}$, får vi altså ved til hvert $f \in \mathcal{V}$ at tilordne familien $(\lambda_j)_{j\in J} = (\langle e_j \mid f\rangle)_{j\in J}$ af ortogonalkoefficienter en isometrisk, lineær afbildning af $\mathcal{V}$ ind i $\ell_2(J)$.

Specielt bemærkes <u>entydighedssætningen</u>:

$$(\forall j \in J: \langle e_j \mid f\rangle = 0) \Rightarrow \|f\| = 0$$

eller

$$(\forall j \in J: \langle e_j \mid f\rangle = \langle e_j \mid g\rangle) \Rightarrow \|f - g\| = 0.$$

En ortonormal familie $(e_j)_{j\in J}$ i $\mathcal{V}$ er naturligvis en ortonormal basis for underrummet $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\operatorname{span}}\{e_j \mid j\in J\}$.

Eksempel. Med $e_n(x) = e^{inx}$ er $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en ortonormal basis i $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, se §13.3. Fourier rækken $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e_n + c_{-n} e_{-n})$ for en funktion

$f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ fremgår af ortogonaludviklingen $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\, c_n e_n$ ved at ordne indices og slå led sammen med parenteser. For konvergensen i kvadratisk middel er dette uden betydning.

Også følgen

$$1,\ \sqrt{2}\cos x,\ \sqrt{2}\sin x,\ \ldots,\ \sqrt{2}\cos nx,\ \sqrt{2}\sin nx,\ \ldots$$

er en ortonormal basis i $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$. Ortogonaludviklingen for en funktion $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ er her

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots$$

som, med denne orden, igen går over i Fourier rækken ved samling af led to og to.

Bemærkning. Da vi på forhånd (§11.1) ved, at $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ er tæt i $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, kunne vi for at indse, at ovennævnte ortonormale familier er totale i $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, klare os med Weierstrass' approksimationssætning (§12.6). Ifølge denne ligger de trigonometriske polynomier tæt i $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ ved den uniforme norm og derfor også ved 2-normen.

13.5. Ortonormale familier i et fuldstændigt rum.

Alle påstande, hvormed vi indledte §13.1, er vist i det foregående, med undtagelse af én, den afgørende, som skyldes Riesz og Fischer:

Betingelsen $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2<\infty$ er tilstrækkelig for, at $c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx}+c_{-n}e^{-inx})$ er Fourier række for en funktion tilhørende $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$.

Her får vi brug for, at $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ er fuldstændigt.

Først betragtes en ortonormal følge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i et fuldstændigt vektorrum $\mathcal{V}$ med skalarprodukt.

Sætning. En række $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n e_n$ er konvergent i $\mathcal{V}$, hvis og kun hvis $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2<\infty$, dvs. hvis talfølgen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_2$.

Bevis. Da $\mathcal{V}$ er fuldstændigt, vil rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n e_n$ være konvergent, dvs. afsnitsfølgen konvergent, hvis og kun hvis

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,p\in\mathbb{N}:\ n>N\Rightarrow$$
$$\|s_{n+p}-s_n\|^2=\|\textstyle\sum_{n+1}^{n+p}\lambda_k e_k\|^2=\sum_{n+1}^{n+p}|\lambda_k|^2<\varepsilon.$$

Men dette er ligeledes nødvendigt og tilstrækkeligt for, at $\sum_1^{\infty}|\lambda_n|^2$ er konvergent i $\mathbb{R}$, dvs. $\sum_1^{\infty}|\lambda_n|^2<\infty$.

Lad nu $(e_j)_{j\in J}$ være en ortonormal familie i et fuldstændigt vektorrum $\mathcal{V}$ med skalarprodukt.

Riesz/Fischers generelle sætning. Betingelsen
$$\sum_{j\in J}|\lambda_j|^2<\infty$$
er ikke blot nødvendig, men også tilstrækkelig for, at $\sum_{j\in J}\lambda_j e_j$ er ortogonaludvikling for et $f\in\mathcal{V}$, dvs. for at
$$\exists f\in\mathcal{V}\ \forall j\in J:\ \lambda_j=\langle e_j|f\rangle.$$

I bekræftende fald vil $\sum_{j\in J}\lambda_j e_j$ specielt være ortogonaludvikling for og dermed fremstille et $f\in\overline{\mathcal{U}}=\overline{\operatorname{span}}\{e_j\mid j\in J\}$.

Med $\mathcal{V} = \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ og $e_n(x) = e^{inx}$ for $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, fås Riesz/Fischers sætning som formuleret i §13.1.

Bevis. Betingelsen er nødvendig ifølge den generaliserede Bessels ulighed (§13.4) $\quad \sum_{j\in J} |\langle e_j|f\rangle|^2 \leq \|f\|^2$.

Omvendt: Antages betingelsen opfyldt, er $\lambda_j \neq 0$ for højst numerabelt mange j (se §0.3). Hvis antallet er endeligt, altså $\lambda_j = 0$ for $j \neq j_1, \dots, j_s$, vil $f = \sum_{n=1}^{s} \lambda_{j_n} e_{j_n} \in \operatorname{span}\{e_j | j \in J\}$ have ortogonalkoefficienterne $\langle e_j|f\rangle = \lambda_j$, $j \in J$. I modsat fald er $\lambda_j = 0$ for $j \neq j_1, j_2, \dots$. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{j_n} e_{j_n}$ er nu konvergent i $\mathcal{V}$ ifølge sætningen ovenfor; og er f sum, altså $\|f - \sum_{n=1}^{N} \lambda_{j_n} e_{j_n}\| \to 0$ for $N \to \infty$, har vi $f \in \overline{\mathcal{U}}$ samt for hvert $j \in J$

$$\begin{aligned}\langle e_j|f\rangle &= \lim_{N\to\infty} \langle e_j | \textstyle\sum_{n=1}^{N} \lambda_{j_n} e_{j_n}\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty} \textstyle\sum_{n=1}^{N} \lambda_{j_n} \langle e_j | e_{j_n}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{j_n} \langle e_j | e_{j_n}\rangle = \lambda_j .\end{aligned}$$

Om fremstillingen af f ved „rækken" $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j$, se §13.4.

Bemærkning. Ortogonaludviklingen for et vilkårligt $g \in \mathcal{V}$ fremstiller altså et $f \in \overline{\mathcal{U}} = \overline{\operatorname{span}}\{e_j | j \in J\}$. Vi kan tolke f som ortogonalprojektion af g på $\overline{\mathcal{U}}$, thi $\forall j \in J: \langle e_j|g\rangle = \langle e_j|f\rangle$ kommer ud på, at $g - f$ er ortogonal på hvert e_j og dermed på $\overline{\mathcal{U}}$.

<u>Korollar</u>. <u>Den ortonormale familie</u> $(e_j)_{j\in J}$ <u>er en ortonormal basis for</u> $\mathcal{V}$, <u>hvis og kun hvis „entydighedssætningen gælder"</u>, <u>dvs. hvis</u>

$$(\forall j \in J: \langle e_j|f\rangle = 0) \Rightarrow \|f\| = 0 ,$$

<u>eller, hvad der kommer ud på det samme</u>,

$$(\forall j \in J: \langle e_j|f\rangle = \langle e_j|g\rangle) \Rightarrow \|f - g\| = 0 .$$

Bevis. At entydighedssætningen gælder, når $(e_j)_{j\in J}$ er en ortonormal basis, har vi allerede bemærket i §13.4. Et direkte argument: Er f ortogonal på hvert e_j, så også på $\overline{\operatorname{span}}\{e_j | j \in J\} = \mathcal{V}$, specielt $\|f\|^2 = \langle f|f\rangle = 0$.

Omvendt: For hvert $g \in \mathcal{V}$ findes ifølge Riesz/Fischers generelle sætning et $f \in \overline{\mathcal{U}} = \overline{\operatorname{span}}\{e_j \mid j \in J\}$ med samme ortogonaludvikling (jfr. bemærkningen ovenfor). Gælder entydighedssætningen, sluttes $\|f-g\|=0$ og dermed $g \in \overline{\mathcal{U}}$.

Eksempel. For Fourier rækker gælder entydighedssætningen

$$\left(\forall n \in \mathbb{Z}: \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx = 0\right) \Rightarrow f = 0 \text{ næsten overalt },$$

endda for $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, som vist i §12.6. Med $\mathcal{V} = \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ og $e_n(x) = e^{inx}$ for $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, giver korollaret da et nyt bevis for, at den trigonometriske ortonormale familie $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ er en basis for $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$. Denne gang et bevis, der benytter fuldstændigheden af $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$.

Tilsvarende gælder følgen

$$1,\ \sqrt{2}\cos x,\ \sqrt{2}\sin x,\ \ldots,\ \sqrt{2}\cos nx,\ \sqrt{2}\sin nx,\ \ldots\ .$$

13.6. Ortonormale baser i Hilbert rum.

I det følgende betragtes vektorrum med egentligt skalarprodukt (se §13.2).

Det er ikke nogen egentlig indskrænkning i forhold til de foregående afsnit, idet man jo kan bringe et skalarprodukt over i et egentligt skalarprodukt ved at samle vektorerne i klasser (se §13.2). Resultaterne finder således anvendelse på funktionsrum $\mathcal{L}_2(X,\mathbb{E},\mu)$, idet man opfatter funktioner som repræsentanter, dvs. går over til $L_2(X,\mathbb{E},\mu)$.

Ved at arbejde med et egentligt skalarprodukt opnår man betydelige lettelser i formuleringen. Eksempelvis er det bekvemt, at en konvergent række $\Sigma_0^\infty a_n$ har en bestemt sum, som man så kan betegne $\Sigma_0^\infty a_n$.

Vi begynder med at supplere §13.4, idet vi tænker os givet en ortonormal familie $(e_j)_{j\in J}$ i et vektorrum V med egentligt skalarprodukt.

Hvis „rækken" $\Sigma_{j\in J}\mu_j e_j$ er ortogonaludvikling for et $g\in\overline{U}=\overline{\operatorname{span}}\{e_j\,|\,j\in J\}$, dvs. hvis rækken fremstiller et $g\in V$ (se §13.4), så fremstiller den kun dette, og vi kan derfor skrive

$$g=\Sigma_{j\in J}\mu_j e_j\,,$$

altså benytte $\Sigma_{j\in J}\mu_j e_j$ som betegnelse for g.

For vilkårligt $f\in V$ gælder da

$$\langle f\,|\,\Sigma_{j\in J}\mu_j e_j\rangle=\Sigma_{j\in J}\mu_j\langle f\,|\,e_j\rangle,$$

hvor summen på højre side kan opfattes som et integral med hensyn til tællemålet i J. (§4.6.)

Bevis. Højre side har mening: det er det sædvanlige skalarprodukt af $(\langle e_j|f\rangle)_{j\in J}\in\ell_2(J)$ og $(\mu_j)_{j\in J}=(\langle e_j|g\rangle)_{j\in J}\in\ell_2(J)$.

Vi udnytter, at $\mu_j\neq 0$ for højst numerabelt mange $j\in J$ (p. 201). Hvis antallet er endeligt, altså $\mu_j=0$ for $j\neq j_1,\dots,j_s$, kommer ligningen blot ud på $\quad\langle f\,|\,\Sigma_{n=1}^s\mu_{j_n}e_{j_n}\rangle=\Sigma_{n=1}^s\mu_{j_n}\langle f\,|\,e_{j_n}\rangle.$

I modsat fald er $\mu_j = 0$ for $j \neq j_1, j_2, \dots$. Da er

$$\langle f \mid \Sigma_{n=1}^N \mu_{j_n} e_{j_n} \rangle = \Sigma_{n=1}^N \mu_{j_n} \langle f \mid e_{j_n} \rangle$$

for hvert $N \in \mathbb{N}$, og for $N \to \infty$ konvergerer venstre side mod $\langle f \mid g \rangle$, idet $\| g - \Sigma_{n=1}^N \mu_{j_n} e_{j_n} \| \to 0$, medens højre side konvergerer mod $\Sigma_{j \in J} \mu_j \langle f \mid e_j \rangle$, ifølge Lebesgues sætning om majoriseret konvergens. (Højre side kan nemlig opfattes som integralet med hensyn til tællemålet i J af $\nu_N : J \to \mathbb{C}$, hvor

$$\nu_N(j) = \begin{cases} \mu_{j_n} \langle f \mid e_{j_n} \rangle & \text{når } j = j_n \text{ og } n \leq N, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

For hvert $j \in J$ gælder $\nu_N(j) \to \mu_j \langle f \mid e_j \rangle$ for $N \to \infty$, og for alle N og j er

$$|\nu_N(j)| \leq |\mu_j \langle f \mid e_j \rangle|,$$

hvor integralet $\Sigma_{j \in J} |\mu_j \langle f \mid e_j \rangle| < \infty$ (ifølge Hölder).)

Den viste ligning kan også skrives

$$\langle f \mid g \rangle = \Sigma_{j \in J} \overline{\langle e_j \mid f \rangle} \langle e_j \mid g \rangle$$

og kaldes da Parsevals generaliserede ligning. Den gælder, som det fremgår ovenfor, hvis g, eller lige så gerne f, tilhører $\overline{U} = \overline{\operatorname{span}} \{ e_j \mid j \in J \}$. For $f = g$ går den over i den sædvanlige Parsevals ligning.

Bemærkning. For Parsevals generaliserede ligning er det ganske ligegyldigt, om skalarproduktet er egentligt.

Lad nu $(e_j)_{j \in J}$ være en ortonormal basis i et vektorrum V med egentligt skalarprodukt.

Ved til hvert $f \in V$ at tilordne familien $(\langle e_j \mid f \rangle)_{j \in J}$ af ortogonalkoefficienter fås da en lineær afbildning af V ind i $\ell_2(J)$, der ifølge Parsevals generaliserede ligning bevarer skalarprodukt,

$$\langle f \mid g \rangle = \Sigma_{j \in J} \overline{\langle e_j \mid f \rangle} \langle e_j \mid g \rangle \quad \text{for } f, g \in V.$$

Specielt bevares norm, $\quad \| f \|^2 = \Sigma_{j \in J} |\langle e_j \mid f \rangle|^2,$

og afstand. Afbildningen er dermed injektiv.

Den omvendte afbildning er
$$(\lambda_j)_{j\in J} \to \Sigma_{j\in J}\lambda_j e_j,$$
defineret for de $(\lambda_j)_{j\in J} \in \ell_2(J)$, hvor ortogonal„rækken" $\Sigma_{j\in J}\lambda_j e_j$ fremstiller et $f\in V$, i den i §13.4 beskrevne forstand.

Man kan tænke på familien $(\lambda_j)_{j\in J} = (\langle e_j|f\rangle)_{j\in J}$ som koordinat-„sæt", eller rettere sagt koordinatfamilie, for $f = \Sigma_{j\in J}\lambda_j e_j$ med hensyn til den ortonormale basis $(e_j)_{j\in J}$.

Vi noterer, at overgangen $f \to (\langle e_j|f\rangle)_{j\in J}$ til koordinatfamilie er en <u>unitær</u> afbildning af V på et <u>underrum</u> af Hilbert rummet $\ell_2(J)$.

(En <u>unitær</u> afbildning af et vektorrum V_1 med egentligt skalarprodukt på et vektorrum V_2 med egentligt skalarprodukt vil sige en bijektiv, lineær afbildning, der bevarer skalarprodukt. Findes en sådan afbildning, kaldes V_1 og V_2 isomorfe.)

Er V specielt et Hilbert rum, da er afbildningen $f \to (\langle e_j|f\rangle)_{j\in J}$ fra V til $\ell_2(J)$ <u>surjektiv</u>, ifølge Riesz/Fischers generelle sætning (§13.5). „Koordinatrummet" er altså <u>hele</u> $\ell_2(J)$.

Vi noterer:

<u>En ortonormal basis $(e_j)_{j\in J}$ i et Hilbert rum H giver anledning til en unitær afbildning af H på $\ell_2(J)$, nemlig</u>
$$f \to (\langle e_j|f\rangle)_{j\in J},\quad f\in H.$$
<u>Den omvendte afbildning er</u>
$$(\lambda_j)_{j\in J} \to \Sigma_{j\in J}\lambda_j e_j,\quad (\lambda_j)_{j\in J}\in \ell_2(J).$$

Eksempel. Med $e_n(x) = e^{inx}$ er $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ som vist en ortonormal basis i $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$. Overgangen $f \to (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ til familien af Fourier koefficienter giver følgelig, når f opfattes som repræsentant, en unitær afbildning af $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ på $\ell_2(\mathbb{Z})$. Specielt er $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ isomorf med $\ell_2(\mathbb{Z})$ og dermed med $\ell_2 = \ell_2(\mathbb{N})$.

13.7. Separable Hilbert rum.

Hilbert rummet $\ell_2 = \ell_2(\mathbb{N}) = \{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \Sigma_n |\lambda_n|^2 < \infty\}$ er separabelt, dvs. der findes en numerabel, tæt delmængde. Eksempelvis mængden af følger endende på lutter 0'er og med elementer af typen $q' + iq''$, $q', q'' \in \mathbb{Q}$. Ligeledes er $\mathbb{C}^d$ separabelt for ethvert $d \in \mathbb{N}$.

Der er mange andre eksempler på separable Hilbert rum. For ethvert Radon mål μ i $\mathbb{R}^d$ er Hilbert rummet $\mathcal{L}_2(\mu) = \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}, \mu)$ således separabelt, ifølge §9.1, sætning 3.

Men der gælder (Johann v. Neumann 1927):

<u>Ethvert separabelt Hilbert rum er isomorft med et af rummene $\mathbb{C}^d$, $d \in \mathbb{N}$, eller med ℓ_2.</u>

Vi har her tænkt på komplekse rum; for reelle rum gælder det tilsvarende, og med samme begrundelse.

Resultatet er indeholdt (se §13.6) i følgende

<u>Sætning. Ethvert separabelt vektorrum med skalarprodukt har en endelig eller numerabel ortonormal basis.</u>

Vi kan gerne antage skalarproduktet egentligt. I øvrigt benytter beviset i stedet for separabilitet kun den tilsyneladende svagere forudsætning, at vektorrummet har en numerabel, total delmængde.

Der bygges på nedenstående lemma og Gram/Schmidt ortonormalisering.

<u>Lemma. Enhver numerabel mængde B af vektorer i et vektorrum har en lineært uafhængig delmængde A med</u>

$$\operatorname{span} A = \operatorname{span} B.$$

At A er lineært uafhængig betyder, at enhver endelig delmængde af A er lineært uafhængig.

Bevis. Lad $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots\}$.

Vi sætter $n_1 = \min\{p \,/\, v_p \neq 0\}$,

$n_2 = \min\{p \,/\, (v_{n_1}, v_p) \text{ er lineært uafhængigt}\}$,

osv., dvs. ved rekursion

$$n_{k+1} = \min\{p \,/\, (v_{n_1}, \dots, v_{n_k}, v_p) \text{ er lineært uafhængigt}\}.$$

Der standses med n_s, såfremt

$$\{p \,/\, (v_{n_1}, \dots, v_{n_s}, v_p) \text{ er lineært uafhængigt}\} = \emptyset.$$

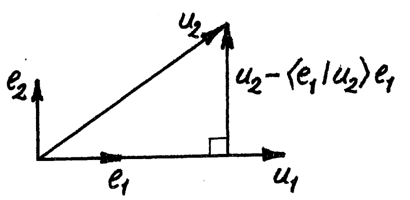
I så fald er $\mathcal{A} = \{v_{n_1}, \dots, v_{n_s}\}$ åbenbart lineært uafhængig, medens $(v_{n_1}, \dots, v_{n_s}, v_p)$ er lineært afhængigt for hvert p. Ethvert v_p er altså en linearkombination af $v_{n_1}, \dots, v_{n_s}$, dvs. $v_p \in \operatorname{span} \mathcal{A}$. Og af $\mathcal{B} \subseteq \operatorname{span} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{span} \mathcal{B}$ følger $\operatorname{span} \mathcal{A} = \operatorname{span} \mathcal{B}$.

Indtræffer standsning ikke, er $\mathcal{A} = \{v_{n_1}, v_{n_2}, \dots\}$ åbenbart lineær uafhængig. For hvert $q \in \mathbb{N}$ findes nu et k, så $q < n_{k+1}$. Da er $(v_{n_1}, \dots, v_{n_k}, v_q)$ lineært afhængigt, altså v_q en linearkombination af $v_{n_1}, \dots, v_{n_k}$ og dermed $v_q \in \operatorname{span} \mathcal{A}$. Og af $\mathcal{B} \subseteq \operatorname{span} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{span} \mathcal{B}$ følger $\operatorname{span} \mathcal{A} = \operatorname{span} \mathcal{B}$.

At anvende <u>Gram/Schmidt</u> <u>ortonormalisering</u> på en lineært uafhængig følge $u_1, u_2, \dots$ i et vektorrum med egentligt skalarprodukt vil sige at gå over til følgen $e_1, e_2, \dots$, hvor

e_1 fås ved normering af u_1, $e_1 = u_1/\|u_1\|$,

e_2 fås ved normering af $u_2 - \langle e_1 | u_2 \rangle e_1$,



osv., dvs. ved rekursion:

e_{n+1} fås ved normering af $u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | u_{n+1} \rangle e_i$.

(For uden nærmere overvejelse at sikre, at definitionen har mening, kan vi gøre en (i realiteten tom) tilføjelse:

hvis $u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | u_{n+1} \rangle e_i = 0$, sættes $e_{n+1} = 0$.)

Påstand: Følgen $e_1, e_2, \dots$ er ortonormal, og
$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \mathrm{span}\{u_1, \dots, u_n\} = U_n .$$

Beviset føres ved induktion, idet vi lader $P(n)$ stå for
$$(e_1, \dots, e_n) \text{ er ortonormalt og } \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n\} = U_n .$$
Her er $P(1)$ klar. Vi antager $P(n)$.

For vilkårlige λ_i, $i = 1, \dots, n$, er da $u_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \neq 0$, idet $u_{n+1} \notin U_n$; yderligere gælder
$$\mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n, u_{n+1} - \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\} = \mathrm{span}\{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\} = U_{n+1} ,$$
idet hver af vektorerne $e_1, \dots, e_n, u_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ er en linearkombination af vektorerne $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$ og omvendt. Normering af $u_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ ændrer ikke ligningen.

Med $\lambda_i = \langle e_i | u_{n+1} \rangle$, $i = 1, \dots, n$, opnås, at $u_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ er ortogonal på $e_1, \dots, e_n$. (Vektoren $\sum_{i=1}^n \langle e_i | u_{n+1} \rangle e_i$ er den ortogonale projektion af u_{n+1} på U_n; se begyndelsen af beviset for Bessels approksimationssætning, §13.3.) Altså er $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ ortonormalt, og $P(n+1)$ er vist.

Vi noterer:

<u>Gram/Schmidt ortonormalisering af en lineært uafhængig følge</u> $u_1, u_2, \dots$ <u>i et vektorrum med egentligt skalarprodukt giver en ortonormal følge</u> $e_1, e_2, \dots$, <u>hvor</u>
$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \mathrm{span}\{u_1, \dots, u_n\} .$$

Konsekvens: $\quad \mathrm{span}\{e_1, e_2, \dots\} = \mathrm{span}\{u_1, u_2, \dots\}$.
Thi $\mathrm{span}\{e_1, e_2, \dots\} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ og analogt.

Man taler også om <u>Gram/Schmidt ortonormalisering</u> af et lineært uafhængigt sæt $u_1, \dots, u_s$. Her fås på tilsvarende vis et ortonormalt sæt $e_1, \dots, e_s$, hvor $\quad \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \mathrm{span}\{u_1, \dots, u_n\}$, $n = 1, \dots, s$.

Navnet henviser til J.P. Gram (Om Rækkeudviklinger, bestemte ved Hjælp af de mindste Kvadraters Methode, Kjöbenhavn 1879; specielt

I og III) og Erhard Schmidt (Mathematische Annalen 63, 1907, p. 442-443).

Nu beviset for sætningen p. 211.

Lad V være et vektorrum med egentligt skalarprodukt, og lad $\mathcal{B}$ være en numerabel, total delmængde.

Ifølge lemmaet findes en lineært uafhængig mængde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ med $\operatorname{span} \mathcal{A} = \operatorname{span} \mathcal{B}$. Efter ordning af elementerne i $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \dots\} \quad \text{eller} \quad \mathcal{A} = \{u_1, \dots, u_s\},$$

giver Gram/Schmidt ortonormalisering en ortonormal basis $(e_1, e_2, \dots)$, henholdsvis $(e_1, \dots, e_s)$. Med $J = \mathbb{N}$, henholdsvis $J = \{1, \dots, s\}$ har vi nemlig

$$\operatorname{span}\{e_n \mid n \in J\} = \operatorname{span} \mathcal{A} = \operatorname{span} \mathcal{B}$$

og dermed

$$\overline{\operatorname{span}}\{e_n \mid n \in J\} = \overline{\operatorname{span}}\, \mathcal{B} = V.$$

Vi nævner slutteligt, at ethvert Hilbert rum har en ortonormal basis og dermed er isomorft med et rum $\ell_2(J)$. Beviset benytter udvalgsprincippet. (Se f.eks. S. Lang: Analysis II, Addison-Wesley 1969, p. 154.)

§14. Fourier integraler.

14.1. Fourier integral.

I teorien for Fourier rækker søges en funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med given periode fremstillet ved hjælp af grundsvingning og oversvingninger (se §12.2). Søger man uden forudsætning om periodicitet at opløse en funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ i rene svingninger, vil det være naturligt at tage alle frekvenser $t \in \mathbb{R}_+$ i betragtning og søge f fremstillet ikke ved en række, men ved et integral,

$$f(x) \sim \int_0^\infty \left(c(t)e^{i2\pi tx} + c(-t)e^{-i2\pi tx}\right)dt.$$

I indeværende §14 betragtes tilfældet $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, hvor vi skal se, at med

$$c(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi tx}\,dx$$

vil førnævnte integral, der så kaldes Fourier integralet for f, i passende forstand fremstille f.

14.2. Uegentligt integral.

Lad $g:]0,\infty[\to \mathbb{C}$ være en Borel funktion, hvor $\int_0^u |g(t)|dt < \infty$ for hvert $u \in \mathbb{R}_+$.

Hvis $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$, gælder

$$\int_0^\infty g(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} g(t)dt = \lim_{u\to\infty} \int_0^u g(t)dt.$$

Thi for enhver følge $u_1, u_2, \dots$ i $\mathbb{R}_+$ med $u_n \to \infty$ har vi

$$\int_0^{u_n} g(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} g \cdot 1_{]0,u_n]}\, dm \underset{n\to\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}_+} g\, dm,$$

ifølge Lebesgues sætning om majoriseret grænseovergang (§4.3, §4.4), idet $|g| \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ er majorant for funktionerne $|g \cdot 1_{]0,u_n]}|$.

Imidlertid kan $\int_0^u g(t)dt$ have en grænseværdi $c \in \mathbb{C}$ for $u \to \infty$, uden at $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$, jfr. nedenstående eksempel. For c benyttes da alligevel betegnelsen $\int_0^\infty g(t)dt$, eventuelt med anførelse af, at integralet er uegentligt.

I analogi med sædvane for rækker tillader man sig endvidere at opskrive symbolet $\int_0^\infty g(t)dt$ uden på forhånd at godtgøre, at afsnittet $\int_0^u g(t)dt$ har en grænseværdi $c \in \mathbb{C}$ for $u \to \infty$. Hvis dette så er tilfældet, siger man, at integralet $\int_0^\infty g(t)dt$ er konvergent med værdi c.

Man kan endnu træffe den sprogbrug, at et integral $\int_0^\infty g(t)dt$ er absolut konvergent. Hermed menes, at $\int_0^\infty |g(t)|dt$ er konvergent. Dette er imidlertid ensbetydende med, at $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$; thi

$$g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow |g| \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}_+} |g|dm = \lim_{u\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} |g| \cdot 1_{]0,u]}\, dm < \infty,$$

hvor Lebesgues monotonisætning (§4.2) er benyttet.

Eksempel. Integralet $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ er konvergent med værdien $\frac{\pi}{2}$, dvs.

$$\int_0^u \frac{\sin t}{t} dt \to \frac{\pi}{2} \quad \text{for } u \to \infty,$$

men integranden tilhører ikke $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$.

At $t \to \frac{\sin t}{t}$, $t \in \mathbb{R}_+$, ikke tilhører $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$, fremgår af, at

$$\int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt > \int_{(p-\frac{5}{6})\pi}^{(p-\frac{1}{6})\pi} \frac{1/2}{p\pi} dt = \frac{1}{3p},$$

hvormed $\int_0^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \sum_{p=1}^\infty \int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geqq \frac{1}{3} \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p} = \infty.$

At integralet $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ er konvergent, kan ses således: Da integrandens fortegn skifter i $\pi, 2\pi, \ldots$, er

$$\sum_{p=1}^\infty \int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \frac{\sin t}{t} dt$$

en alternerende række. Leddenes numeriske værdier aftager mod 0, idet

$$\int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt > \int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \frac{|\sin t|}{t+\pi} dt = \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$$

og

$$\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt < \frac{1}{p}.$$

Rækken er følgelig konvergent, dvs.

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{p=1}^n \int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \frac{\sin t}{t} dt$$

har en grænseværdi c for $n \to \infty$. Men heraf sluttes, at

$$s(u) = \int_0^u \frac{\sin t}{t} dt \to c \quad \text{for } u \to \infty,$$

idet $s(u)$ ligger mellem $s(n\pi)$ og $s((n+1)\pi)$ for $n\pi \leqq u \leqq (n+1)\pi$.

Værdien c af integralet $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ finder vi som $\lim_n s((n+\frac{1}{2})\pi)$,

hvor $s((n+\frac{1}{2})\pi) = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{(n+\frac{1}{2})t} (n+\frac{1}{2}) dt = \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt.$

Vi udnytter, at $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(t) dt = 1$, hvor (se §12.5)

$$\mathcal{D}_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t} \quad \text{for } t \neq 0 \pmod{2\pi}.$$

Differensen $\frac{\pi}{2} - s((n+\frac{1}{2})\pi) = \int_0^\pi \frac{1}{2}\mathcal{D}_n(t) dt - s((n+\frac{1}{2})\pi)$ kan skrives

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right) \sin(n+\tfrac{1}{2})t\, dt = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) \sin(2n+1)t\, dt$$

og konvergerer derfor mod 0 for $n \to \infty$ ifølge Riemann/Lebesgues lemma (§12.4), idet

$$t \to \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leqq \frac{\pi}{2},$$

er integrabel (funktionen er endog kontinuert i $[0, \frac{\pi}{2}]$, når den tillægges værdien 0 for $x = 0$).

Til afslutning nogle ord om <u>summabilitet</u> af et integral $\int_0^\infty g(t)dt$.

Vi forudsætter som før, at $g:]0,\infty[\to \mathbb{C}$ er en Borel funktion, hvor $\int_0^u |g(t)|dt < \infty$ for hvert $u \in \mathbb{R}_+$, og sætter

$$s(u) = \int_0^u g(t)dt, \quad u \geqq 0.$$

Da $s: [0,\infty[\to \mathbb{C}$ er kontinuert (p.100), kan vi danne <u>afsnitsmiddel</u>

$$\sigma(v) = \frac{1}{v}\int_0^v s(u)du, \quad v > 0.$$

Integralet $\int_0^\infty g(t)dt$ siges nu at være <u>summabelt</u> med værdien c, hvis $\sigma(v) \to c$ for $v \to \infty$.

<u>Et konvergent integral $\int_0^\infty g(t)dt$ med værdi c er også summabelt med samme værdi.</u>

Bevis (sml. §12.6). Til vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tænkes valgt et $H \in \mathbb{R}_+$, så

$$|s(u) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for } u > H.$$

For hvert $v > H$ er nu

$$\begin{aligned} |\sigma(v) - c| &= \left|\frac{1}{v}\int_0^v (s(u)-c)du\right| \\ &\leqq \frac{1}{v}\left|\int_0^H (s(u)-c)du\right| + \frac{1}{v}\int_H^v |s(u)-c|du \\ &\leqq \frac{1}{v}\left|\int_0^H (s(u)-c)du\right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Idet $\frac{1}{v}\left|\int_0^H (s(u)-c)du\right| \to 0$ for $v \to \infty$, findes derfor et $K \geqq H$, så

$$|\sigma(v) - c| < \varepsilon \quad \text{for } v > K.$$

Eksempel. Integralet $\int_0^\infty \cos t\, dt$ er ikke konvergent, men det er summabelt med værdien 0.

14.3. Fourier transformeret.

Ved den Fourier transformerede af en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ forstås funktionen $\mathcal{F}f = \hat{f}$ givet ved
$$\mathcal{F}f(t) = \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i t x} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Den er defineret for alle $t \in \mathbb{R}$, begrænset numerisk af $\|f\|_1$ og kontinuert med $$\mathcal{F}f(t) = \hat{f}(t) \to 0 \quad \text{for } |t| \to \infty.$$

For fast t er integranden nemlig en Borel funktion, numerisk lig $|f|$, altså integrabel med
$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i t x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_1 .$$
At $\mathcal{F}f = \hat{f}$ er kontinuert, følger af §4.8, sætning 1. At $\hat{f}(t) \to 0$ for $|t| \to \infty$, er indholdet af Riemann/Lebesgues lemma (§12.4).

Udtrykket for $\hat{f}(t)$ kan skrives
$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(2\pi t x) dx - i \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(2\pi t x) dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Er f en lige funktion, falder andet led bort, og $\hat{f}$ ses igen at være en lige funktion. Er f ulige, vil $\hat{f}$ igen være ulige.

Udvides en funktion $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ til en lige funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, har vi
$$\hat{f}(t) = 2 \int_{\mathbb{R}_+} g(x) \cos(2\pi t x) dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Funktionen $t \to \int_{\mathbb{R}_+} g(x) \cos(2\pi t x) dx = \frac{1}{2} \hat{f}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, kaldes den cosinustransformerede af g.

Udvides en funktion $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ til en ulige funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, har vi
$$\hat{f}(t) = -2i \int_{\mathbb{R}_+} g(x) \sin(2\pi t x) dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Funktionen $t \to \int_{\mathbb{R}_+} g(x) \sin(2\pi t x) dx = \frac{i}{2} \hat{f}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, kaldes den sinustransformerede af g.

14.4. Konvergens af Fourier integral.

Den Fourier transformerede $\mathcal{F}f = \hat{f}$ af en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ tilhører ikke i almindelighed $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, (se p. 225, NB). Vi behandler derfor Fourier integralet

$$\int_0^\infty (\hat{f}(t)e^{2\pi itx} + \hat{f}(-t)e^{-2\pi itx})\,dt$$

for $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ som et uegentligt integral, dvs. vi undersøger afsnittet

$$s_u(x) = s(u,x) = \int_0^u (\hat{f}(t)e^{2\pi itx} + \hat{f}(-t)e^{-2\pi itx})\,dt = \int_{-u}^u \hat{f}(t)e^{2\pi itx}\,dt$$

for $u \to \infty$. Konvergensforholdene viser sig at svare nøje til de fra Fourier rækker kendte.

For kortheds skyld skrives Fourier integralet ofte $\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(t)e^{2\pi itx}\,dt$.

For afsnittet $s_u(x)$ finder vi

$$s_u(x) = s(u,x) = \int_{-u}^u \hat{f}(t)e^{2\pi itx}\,dt = \int_{-u}^u \left(e^{2\pi itx}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi ity}\,dy\right)dt$$
$$= \int_{-u}^u \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{2\pi it(x-y)}\,dy\,dt.$$

Idet $f \otimes 1_{[-u,u]}$ tilhører $\mathcal{L}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, og $(y,t) \to e^{2\pi it(x-y)}$ jo er en begrænset Borel funktion, vil $(y,t) \to f(y)e^{2\pi it(x-y)}$, $y \in \mathbb{R}$, $-u \leq t \leq u$, tilhøre $\mathcal{L}(\mathbb{R}\times[-u,u])$. Fubinis sætning kan da anvendes,

$$s_u(x) = \int_{\mathbb{R}}\int_{-u}^u f(y)e^{2\pi it(x-y)}\,dt\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\int_{-u}^u e^{2\pi it(x-y)}\,dt\,dy.$$

<u>Resultat</u>: <u>Fourier integralet for en funktion</u> $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ <u>har afsnit</u>

$$s_u = f * \mathcal{D}_u, \quad u > 0,$$

<u>hvor</u> $\mathcal{D}_u(x) = \int_{-u}^u e^{2\pi itx}\,dt$ <u>er afsnit af integralet</u> $\int_0^\infty (e^{2\pi itx} + e^{-2\pi itx})\,dt$, <u>dvs. af</u> $\int_0^\infty 2\cos(2\pi tx)\,dt$.

Funktionerne $\mathcal{D}_u$ spiller en tilsvarende rolle i teorien for Fourier integraler som Dirichlets kerner (se §12.5) i Fourier række teorien. Derfor betegnelsen.

For $x \neq 0$ er $$\mathcal{D}_u(x) = \frac{\sin(2\pi ux)}{\pi x} = u\mathcal{D}_1(ux).$$

Funktionen $\mathcal{D}_u$ er lige. Den tilhører ikke $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, men integralet $\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}_u(x)dx = 2\int_0^{\infty}\mathcal{D}_u(x)dx$ er konvergent med værdien 1.

De sidste påstande følger trivielt af resultaterne om $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ i §14.2.

Bemærk i øvrigt, at $\mathcal{D}_u$ er en Fourier transformeret, nemlig af indikatorfunktionen $1_{[-u,u]}$.

Vi nøjes med ét resultat om punktvis konvergens af Fourier integralet (sml. §12.5):

<u>Dinis test. En tilstrækkelig betingelse for, at Fourier integralet for en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ er konvergent i punktet $x \in \mathbb{R}$ med værdi</u>
$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)e^{2\pi itx}dt = s,$$
<u>er, at</u>
$$\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x+y)+f(x-y)-2s}{y}\right|dy < \infty \quad \text{for et } \delta > 0.$$

Bemærk, at betingelsen er opfyldt for ethvert $\delta \in \mathbb{R}_+$, blot det er tilfældet for ét.

Bevis. Idet $\mathcal{D}_u$ er en lige funktion, har vi
$$s_u(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\mathcal{D}_u(y)dy = \int_{-\infty}^{0} f(x-y)\mathcal{D}_u(y)dy + \int_0^{\infty}f(x-y)\mathcal{D}_u(y)dy$$
$$= \int_0^{\infty}(f(x+y)+f(x-y))\mathcal{D}_u(y)dy.$$
Det sidste integral skrives $\int_0^1 + \int_1^{\infty}$. Vi har straks
$$\int_1^{\infty} = \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{f(x+y)+f(x-y)}{y}\sin(2\pi uy)dy \to 0 \text{ for } u \to \infty,$$
ifølge Riemann/Lebesgues lemma. Første led på højre side i
$$\int_0^1 = \frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{f(x+y)+f(x-y)-2s}{y}\sin(2\pi uy)dy + \frac{2s}{\pi}\int_0^1\frac{\sin(2\pi uy)}{y}dy$$
går ligeledes mod 0 for $u \to \infty$ (her benyttes forudsætningen), medens vi for sidste led (se §14.2, eksempel) finder
$$\frac{2s}{\pi}\int_0^{2\pi u}\frac{\sin y}{y}dy \to s \text{ for } u \to \infty.$$

Anvendelse af Dinis test: Læs herom i §12.5, med $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ ændret til $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Eksempel. Med $f = 1_{[-1,1]}$ findes

$$\int_0^\infty \mathcal{D}_1(t)\left(e^{2\pi i t x} + e^{-2\pi i t x}\right)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(2\pi t)}{t}\cos(2\pi t x)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\cos tx\,dt = \begin{cases} 1 & \text{for } |x|<1 \\ \frac{1}{2} & \text{for } |x|=1 \\ 0 & \text{for } |x|>1 \end{cases}.$$

14.5. Summabilitet af Fourier integral.

For afsnittet $s_u(x) = s(u,x) = \int_0^u (\hat{f}(t)e^{2\pi i t x} + \hat{f}(-t)e^{-2\pi i t x})dt$ af Fourier integralet for en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ fandt vi (§14.4)

$$s_u(x) = f * \mathcal{D}_u(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\mathcal{D}_u(y)dy$$

med $\mathcal{D}_u(y) = \int_{-u}^u e^{2\pi i t y}dt = \int_0^u 2\cos(2\pi t y)dt$. Fourier integralets afsnitsmiddel er da $\sigma_v(x) = \sigma(v,x) = \frac{1}{v}\int_0^v s(u,x)du = \frac{1}{v}\int_0^v \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\mathcal{D}_u(y)\,dy\,du$.

For fast x er $(y,u) \to f(x-y)\mathcal{D}_u(y)$ integrabel i $\mathbb{R} \times]0,v]$, thi første faktor $(\tau_x Sf) \otimes 1_{]0,v]}$ er det, og anden faktor $\mathcal{D}_u(y) = u\mathcal{D}_1(uy)$ er kontinuert og begrænset i $\mathbb{R} \times]0,v]$, idet
$$\mathcal{D}_1(z) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi z)}{\pi z} & \text{for } z \neq 0 \\ 2 & \text{for } z = 0. \end{cases}$$

Ifølge Fubinis sætning er da
$$\sigma_v(x) = \frac{1}{v}\int_{\mathbb{R}}\int_0^v f(x-y)\mathcal{D}_u(y)\,du\,dy = \int_{\mathbb{R}}\Big(f(x-y)\cdot\frac{1}{v}\int_0^v \mathcal{D}_u(y)du\Big)dy.$$

<u>Resultat</u>: <u>Fourier integralet for en funktion</u> $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ <u>har afsnitsmiddel</u>
$$\sigma_v = f * F_v, \quad v > 0,$$
<u>dvs.</u>
$$\sigma_v(x) = \sigma(v,x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)F_v(y)dy,$$
<u>hvor</u> $F_v(y) = \frac{1}{v}\int_0^v \mathcal{D}_u(y)du$ <u>er afsnitsmiddel af integralet</u> $\int_0^\infty (e^{2\pi i t y} + e^{-2\pi i t y})dt$, <u>dvs. af</u> $\int_0^\infty 2\cos(2\pi t y)\,dt$.

Funktionerne F_v spiller en tilsvarende rolle i teorien for Fourier integraler som Fejérs kerner (se §12.6) i Fourier række teorien. Derfor betegnelsen.

Fordelen ved at betragte summabilitet af Fourier integraler frem for konvergens ligger i, at familien $(F_v)_{v \in \mathbb{R}_+}$ har bedre egenskaber end $(\mathcal{D}_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$. Specielt er den, som det vil fremgå nedenfor, en Dirac familie for $\mathbb{R}$ ved grænseovergangen $v \to \infty$. (Se §10.5 og §10.6.)

For $y \neq 0$ er

$$\mathcal{D}_u(y) = \int_0^u 2\cos(2\pi t y)\,dt = \frac{\sin(2\pi u y)}{\pi y}$$

og dermed

$$F_v(y) = \frac{1}{v}\int_0^v \mathcal{D}_u(y)\,du = \frac{1}{v}\,\frac{1-\cos(2\pi v y)}{2\pi^2 y^2},$$

altså $F_v(y) = vF(vy)$ med

$$F(y) = F_1(y) = \frac{1-\cos(2\pi y)}{2\pi^2 y^2}$$

Åbenbart er $F \geqq 0$ og $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Vi beregner $\int_{\mathbb{R}} F(y)dy = 2\int_{\mathbb{R}_+} F(y)dy$ som $2\cdot \lim_{w\to\infty}\int_0^w F(y)dy$, idet vi for givet $w \in \mathbb{R}_+$ udnytter $\int_0^w F(y)dy = \lim_{s\to 0}\int_s^w F(y)dy$.

For $0<s<w$ fås ved partiel integration

$$\begin{aligned}\int_s^w F(y)dy &= \int_s^w \frac{1-\cos(2\pi y)}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{y^2}\,dy \\ &= \left[\frac{1-\cos(2\pi y)}{2\pi^2}\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)\right]_{y=s}^{y=w} - \int_s^w \frac{\sin(2\pi y)}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)dy.\end{aligned}$$

Dette giver

$$\int_0^w F(y)dy = -\frac{1-\cos(2\pi w)}{2\pi^2 w} + \frac{1}{\pi}\int_0^w \frac{\sin(2\pi y)}{y}\,dy$$

og dermed (§14.2, eksempel)

$$\int_{\mathbb{R}} F(y)dy = 2\cdot 0 + 2\lim_{w\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi w}\frac{\sin y}{y}\,dy = 1.$$

Vi noterer: <u>Familien $(F_v)_{v\in\mathbb{R}_+}$ er en Dirac familie for $\mathbb{R}$ ved grænseovergangen</u> $v\to\infty$. (Jfr. §10.5, eksempel.)

<u>Hovedsætning.</u> <u>For enhver funktion</u> $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ <u>er Fourier integralet</u>

$$\int_0^\infty \left(\hat{f}(t)e^{2\pi i t x} + \hat{f}(-t)e^{-2\pi i t x}\right)dt$$

<u>summabelt i</u> $\mathcal{L}(\mathbb{R}), \|\ \|_1$ <u>med værdi</u> f.

Påstanden er, at $\|\sigma_v - f\|_1 \to 0$ for $v\to\infty$, hvor σ_v er Fourier integralets afsnitsmiddel.

Dette følger af, at $\sigma_v = f * F_v$, idet $(F_v)_{v\in\mathbb{R}_+}$ er en Dirac familie for $\mathbb{R}$. (Se §10.5.)

<u>Korollar 1.</u> <u>Entydighedssætning.</u>

<u>Hvis</u> $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ <u>og</u> $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ <u>har samme Fourier transformerede</u>, $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$, <u>så er</u> $f = g$ <u>næsten overalt</u>.

<u>Korollar 2. Omvendingssætning.</u>

<u>Hvis den Fourier transformerede</u> $\mathcal{F}f$ <u>for en funktion</u> $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ <u>igen tilhører</u> $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, <u>dvs. hvis</u> $\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}f(t)|\,dt < \infty$, <u>så gælder</u>

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(t)\, e^{2\pi i t x}\, dt \quad \text{for næsten alle } x.$$

Ligningen gælder for alle x, hvis f tillige er kontinuert.

Bevis. Når $\mathcal{F}f = \hat{f} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, er Fourier integralet for f ifølge §14.2 summabelt for hvert $x \in \mathbb{R}$, med

$$\sigma_\vartheta(x) \underset{\vartheta \to \infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}_+} \left(\hat{f}(t) e^{2\pi i t x} + \hat{f}(-t) e^{-2\pi i t x}\right) dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(t) e^{2\pi i t x}\, dt = \mathcal{F}\mathcal{F}f(-x).$$

Men $\|\sigma_\vartheta - f\|_1 \to 0$ ifølge hovedsætningen. Af §8.4, korollar 2 fås så

$$f(x) = \mathcal{F}\mathcal{F}f(-x) \quad \text{for næsten alle } x.$$

NB. En nødvendig betingelse for, at den Fourier transformerede $\mathcal{F}f$ for en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ igen tilhører $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, er ifølge omvendingssætningen, at f stemmer overens næsten overalt med en kontinuert funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med $g(x) \to 0$ for $|x| \to \infty$.

§15. Fourier transformation.

15.1. Fourier transformationen $\mathcal{F}: L(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

Fourier transformationen $\mathcal{F}$, der fører hver funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ over i dens Fourier transformerede $\mathcal{F}f = \hat{f}$, er (se §14.3) en afbildning ind i mængden $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ af kontinuerte funktioner $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med $g(t) \to 0$ for $|t| \to \infty$.

Det er klart, at $\mathcal{F}: \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ er lineær, og at
$$\|\mathcal{F}f\|_u = \sup_t |\mathcal{F}f(t)| \leqq \|f\|_1 \quad \text{for } f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}).$$

Mere interessant er det, at
$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \qquad \text{for } f,g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}).$$

Bevis.
$$\mathcal{F}(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f*g(x)\, e^{-2\pi i t x} dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, e^{-2\pi i t x} dy\, dx.$$
For fast t er $(x,y) \to f(x-y)g(y)e^{-2\pi i t x}$ integrabel i $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, thi $f(x-y)g(y)$ er det (jfr. beviset for §10.4, sætning 1), medens $e^{-2\pi i t x}$ er kontinuert og begrænset. Ifølge Fubinis sætning er da
$$\mathcal{F}(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, e^{-2\pi i t x} dx\, dy.$$
Ved den inderste integration erstatter vi x med $x+y$ og får
$$\mathcal{F}(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}} \Big(g(y)\, e^{-2\pi i t y} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i t x} dx\Big) dy = \mathcal{F}f(t) \cdot \mathcal{F}g(t).$$

Idet $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$, når $f = g$ næsten overalt, dvs. når $\|f-g\|_1 = 0$, giver $\mathcal{F}: \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ anledning til en afbildning $L(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$, der ligeledes betegnes $\mathcal{F}$. Vi sætter altså $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}f$.

Fourier transformationen $\mathcal{F}: L(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ er injektiv ifølge entydighedssætningen (§14.5) og dermed ifølge ovenstående en <u>algebra-isomorfi</u> af gruppealgebraen $L(\mathbb{R})$ på en delalgebra $\mathcal{A}$ af $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

Specielt bemærkes, at foldning føres over i sædvanligt produkt af funktioner.

NB. Transformationen er norm- og dermed afstandsformindskende:

$$\|\mathcal{F}[f]\|_u = \|\mathcal{F}f\|_u \leqq \|f\|_1 = \|[f]\|_1 \quad \text{for } f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}).$$

Bemærkning. I algebraen $\mathcal{A}$ af Fourier transformerede findes åbenbart intet etelement (den konstante funktion på $\mathbb{R}$ med værdi 1 tilhører jo ikke $\mathcal{C}_0$). Altså er der (som vi i øvrigt ved i forvejen, §10.4) heller intet etelement i gruppealgebraen $L(\mathbb{R})$, dvs. intet neutralt element ved foldningen i $L(\mathbb{R})$.

15.2. Fourier transformation og differentiation.

Hvis ikke blot $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, men tillige funktionen $x \to xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tilhører $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, da er den Fourier transformerede $\mathcal{F}f = \hat{f}$ differentiabel med
$$\mathcal{D}\hat{f}(t) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, e^{-2\pi i t x} dx,$$
ifølge §4.8, sætning 2. Den afledede $\mathcal{D}\hat{f}$ er kontinuert (§4.8, sætning 1).

Heraf fremgår:

Hvis ikke blot $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, men tillige funktionen $x \to x^n f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tilhører $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, da er $\hat{f} \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, dvs. $\hat{f}$ er n gange differentiabel med kontinuert n^{te} afledet $\mathcal{D}^n\hat{f}$, og
$$\mathcal{D}^j\hat{f}(t) = (-2\pi i)^j \int_{\mathbb{R}} x^j f(x)\, e^{-2\pi i t x} dx, \quad j = 1, \dots, n.$$

Hvis $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ er ubestemt integral af en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, da er
$$\hat{f}(t) = 2\pi i t \hat{F}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bevis. Først bemærkes, at $F(x)$ har en grænseværdi for $x \to \infty$, idet
$$F(x) - F(0) = \int_0^x f(y)dy \to \int_{\mathbb{R}_+} f(y)dy,$$
og at denne må være 0, idet $\lim_{x\to\infty} |F(x)| > 0$ ville medføre $\int_0^\infty |F(x)|dx = \infty$. Tilsvarende gælder $F(x) \to 0$ for $x \to -\infty$.

Idet vi ved partiel integration finder
$$\int_a^b f(x) e^{-2\pi i t x} dx = [F(x) e^{-2\pi i t x}]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)(-2\pi i t e^{-2\pi i t x})dx,$$
sluttes derfor $\hat{f}(t) = \lim_{a,b \to -\infty,\infty} 2\pi i t \int_a^b F(x) e^{-2\pi i t x} dx = 2\pi i t \hat{F}(t)$.

Hvis $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ og $f, \mathcal{D}f, \dots, \mathcal{D}^n f$ alle tilhører $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, da er
$$\mathcal{F}\mathcal{D}^j f(t) = (2\pi i)^j t^j \mathcal{F}f(t), \quad j = 1, \dots, n.$$

Hertil anvendes det foregående resultat på $\mathcal{D}^{j-1}f$ og $\mathcal{D}^j f$.

15.3. Fourier transformationen i Schwartz rummet.

For kortheds skyld vil vi om en funktion $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sige, at $\varphi(x)$ går hurtigt mod 0 for $|x| \to \infty$, hvis

$$\forall m \in \mathbb{N}: \quad x^m \varphi(x) \to 0 \text{ for } |x| \to \infty.$$

Schwartz rummet $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ defineres nu som mængden af funktioner $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, hvor

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \ \forall m \in \mathbb{N}: \quad x^m \mathcal{D}^n \varphi(x) \to 0 \text{ for } |x| \to \infty.$$

Her betyder $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ som bekendt, at $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er vilkårligt ofte differentiabel. Betingelsen er så, at såvel φ som enhver af dens afledede går hurtigt mod 0.

Eksempelvis vil $x \to e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, tilhøre $\mathcal{S}$, ligesom $x \to p(x)e^{-x^2}$, hvor p er et polynomium.

Det er klart, at $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}_p(\mathbb{R})$ for ethvert p, $1 \leqq p < \infty$, idet allerede $x^2\varphi(x) \to 0$ for $|x| \to \infty$ medfører, at $(x^2)^p |\varphi(x)|^p$ er begrænset, altså $|\varphi(x)|^p \leqq M(x^2)^{-p} \leqq Mx^{-2}$ for $|x| \geqq 1$. Tillige er $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{C}_0(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R})$.

Det er endvidere klart, at $\mathcal{S}$ er et funktionsvektorrum. Det spiller en fundamental rolle i Laurent Schwartz' distributionsteori, hvad vi imidlertid ikke skal komme ind på (se L. Schwartz: Théorie des distributions, Paris 1951, chapitre 7, eller Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Paris 1961, chapitre 5).

Vi noterer: Når $\varphi \in \mathcal{S}$, vil såvel $\mathcal{D}\varphi$ som $x \to x\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, igen tilhøre $\mathcal{S}$.

Thi $\mathcal{D}^n\mathcal{D}\varphi = \mathcal{D}^{n+1}\varphi$ og $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x\varphi(x)) = x\mathcal{D}^n\varphi(x) + n\mathcal{D}^{n-1}\varphi(x)$ går hurtigt mod 0.

Med brug af dette og resultaterne i §15.2 finder vi følgende nøgleresultat:

Den Fourier transformerede $\mathcal{F}\varphi$ af en funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tilhører igen Schwartz rummet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Anderledes sagt: Schwartz rummet er stabilt ved Fourier transformationen $\mathcal{F}: \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, dvs. $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$.

Bevis. 1° Da $x \to x^n\varphi(x)$ tilhører $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ og dermed $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ for $n = 0,1,2,\dots$, slutter vi, at $\psi = \mathcal{F}\varphi$ tilhører $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ med

$$\mathcal{D}^n\psi(t) = (-2\pi i)^n \int_{\mathbb{R}} x^n \varphi(x) e^{-2\pi i t x} dx, \quad n = 0,1,2,\dots .$$

Specielt er $\mathcal{D}^n\psi \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$, nemlig $\mathcal{D}^n\psi = \mathcal{F}\varphi_n$ med

$$\varphi_n(x) = (-2\pi i)^n x^n \varphi(x).$$

2° Da φ og dermed $\mathcal{D}\varphi, \mathcal{D}^2\varphi, \dots$ tilhører $\mathcal{S}$, altså specielt $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ og $\varphi, \mathcal{D}\varphi, \mathcal{D}^2\varphi, \dots \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, slutter vi

$$(2\pi i)^m t^m \mathcal{F}\varphi(t) = \mathcal{F}\mathcal{D}^m\varphi(t), \quad m = 0,1,2,\dots .$$

Specielt er $t \to t^m \mathcal{F}\varphi(t) \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$.

3° For vilkårligt n, m får vi ved at anvende 2° på φ_n i stedet for φ, at $t \to t^m \mathcal{D}^n\psi(t)$ tilhører $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ og dermed $\mathcal{F}(\mathcal{L})$. Men så gælder (Riemann/Lebesgues lemma)

$$t^m \mathcal{D}^n\psi(t) \to 0 \text{ for } |t| \to \infty.$$

Det er bekvemt foruden Fourier transformationen $\mathcal{F}: \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ at arbejde med Fourier cotransformationen $\mathcal{F}^*$, hvor $\mathcal{F}^*f$ for $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ er givet ved

$$\mathcal{F}^*f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i t x} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Idet vi som tidligere (§10.3) med Sf betegner funktionen givet ved $Sf(x) = f(-x)$, gælder åbenbart

$$S(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}^*f = \mathcal{F}(Sf).$$

Sætning 1. Restriktionen af Fourier transformationen $\mathcal{F}: \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ til Schwartz rummet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ er en bijektiv afbildning af dette på sig selv. Den omvendte afbildning er restriktionen af Fourier cotransformationen $\mathcal{F}^*: \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ til $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Bevis. Ifølge nøgleresultatet er begge restriktioner afbildninger ind i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Vi skal vise, at de er hinandens omvendte, dvs. at
$$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}\varphi) = \varphi \quad \text{og} \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}^*\varphi) = \varphi \quad \text{for } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$
Den første ligning her er en direkte anvendelse af omvendingssætningen (§14.5), og den anden fås af den første, idet $\mathcal{F}(\mathcal{F}^*\varphi) = \mathcal{F}(S(\mathcal{F}\varphi)) = \mathcal{F}^*(\mathcal{F}\varphi)$.

Idet $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subsetneqq \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, har vi i Schwartz rummet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ det sædvanlige skalarprodukt med tilhørende norm:
$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\, \psi(x)\, dx, \qquad \|\varphi\|_2 = \langle \varphi | \varphi \rangle^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

<u>Sætning 2.</u> <u>Fourier transformationen</u> $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ <u>er en unitær afbildning af</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ <u>på sig selv, dvs. lineær og bijektiv med</u>
$$\langle \mathcal{F}\varphi | \mathcal{F}\psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle \quad \text{for } \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$
<u>specielt</u>
$$\|\mathcal{F}\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2 \quad \text{for } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$
<u>Endvidere gælder</u> $\langle \mathcal{F}\varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \mathcal{F}^*\psi \rangle$ <u>for</u> $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Vi mangler at vise ligningerne. Vi begynder med den sidste.
$$\langle \mathcal{F}\varphi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}\varphi(t)}\, \psi(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\, \psi(t)\, e^{2\pi i t x} dx\, dt.$$
Da $\bar{\varphi} \otimes \psi$ og dermed $(x,t) \to \overline{\varphi(x)}\, \psi(t)\, e^{2\pi i t x}$ tilhører $\mathcal{L}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, har vi
$$\langle \mathcal{F}\varphi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\, \psi(t)\, e^{2\pi i t x} dt\, dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\, \mathcal{F}^*\psi(x)\, dx = \langle \varphi | \mathcal{F}^*\psi \rangle.$$
Derpå findes
$$\langle \mathcal{F}\varphi | \mathcal{F}\psi \rangle = \langle \varphi | \mathcal{F}^*\mathcal{F}\psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle.$$

Vi bemærker, at $\mathcal{F}^*: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ naturligvis ligeledes er unitær.

15.4. Fourier/Plancherel transformationen.

For $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ er den Fourier transformerede $\mathcal{F}f$ givet ved
$$\mathcal{F}f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i t x} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$
For $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ kan denne definition ikke i almindelighed anvendes, idet jo $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \nsubseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Vi skal alligevel indføre en Fourier transformation for $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, også kaldt Fourier/Plancherel transformationen, og derved opnå en yderst harmonisk teori i $L_2(\mathbb{R})$. Resultaterne skyldes Michel Plancherel (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 30 (1910)).

Vi bygger på resultaterne i §15.3, idet vi vil indføre Fourier/Plancherel transformationen ved at udvide Fourier transformationen i Schwartz rummet ved kontinuitet.

Først et par almene lemmaer.

__Lemma 1.__ __En lineær afbildning T af et (semi)normeret vektorrum V ind i et normeret vektorrum W er kontinuert, hvis og kun hvis__
$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in V: \quad \|Tx\| \leqq M\|x\|.$$

Bevis. Det er klart, at betingelsen medfører uniform kontinuitet, idet
$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leqq M\|x-y\|.$$
Omvendt: Er T kontinuert i 0, findes til $\varepsilon = 1$ et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at
$$\|Tx - 0\| \leqq 1 \quad \text{for } \|x\| \leqq \delta,$$
altså
$$\|T(\tfrac{\delta x}{\|x\|})\| \leqq 1, \ \text{dvs. } \|Tx\| \leqq \tfrac{1}{\delta}\|x\|, \quad \text{for } \|x\| \neq 0.$$

__Lemma 2.__ __Lad V være et (semi)normeret vektorrum, og lad $S: U \to W$ være en kontinuert, lineær afbildning af et underrum $U \subseteq V$, der er tæt i V, ind i et Banach rum W. Der findes da en og kun en udvidelse af S til en kontinuert afbildning $T: V \to W$, og den er lineær.__

Bevis. Der er højst én udvidelse af S til en kontinuert afbildning $T: V \to W$; thi for hvert $x \in V$ findes følger $u_1, u_2, \dots$ fra U med $u_n \to x$, og så er nødvendigvis $Tx = \lim_n Tu_n = \lim_n Su_n$.

Beviset for eksistensen deler vi i en række skridt.

1° Når $u_1, u_2, \ldots \in \mathcal{U}$ er konvergent i $\mathcal{V}$, da er $Su_1, Su_2, \ldots$ konvergent i W. Thi med $u_1, u_2, \ldots$ er også $Su_1, Su_2, \ldots$ en Cauchy følge, ifølge lemma 1, og W er forudsat fuldstændigt.

2° Når $u_1, u_2, \ldots \in \mathcal{U}$ og $v_1, v_2, \ldots \in \mathcal{U}$ konvergerer mod samme $x \in \mathcal{V}$, da er $\lim_n Su_n = \lim_n Sv_n$. Thi ifølge 1° er også den blandede følge $Su_1, Sv_1, Su_2, Sv_2, \ldots$ konvergent.

3° Afbildningen $T: \mathcal{V} \to W$ defineres ved

$$Tx = \lim_n Su_n \quad \text{når } u_1, u_2, \ldots \to x, \quad x \in \mathcal{V},\ u_n \in \mathcal{U}.$$

Herved er foruden 1° og 2° benyttet, at $\mathcal{U}$ er tæt i $\mathcal{V}$.

4° T er en udvidelse af S. Thi med $u_n = u \in \mathcal{U}$ er $Tu = \lim_n Su_n = Su$.

5° T er lineær. Vi viser eksempelvis $T(x+y) = Tx + Ty$ for $x, y \in \mathcal{V}$: Når $u_n \to x$ og $v_n \to y$ med $u_n, v_n \in \mathcal{U}$, da vil $u_n + v_n \to x+y$, hvorfor

$$T(x+y) = \lim_n S(u_n + v_n) = \lim_n (Su_n + Sv_n) = Tx + Ty.$$

6° T er kontinuert. Hertil benyttes lemma 1. Er

$$\|Su\| \leqq M\|u\| \quad \text{for } u \in \mathcal{U},$$

da er

$$\|Tx\| \leqq M\|x\| \quad \text{for } x \in \mathcal{V};$$

thi når $u_n \to x$, $u_n \in \mathcal{U}$, har vi $Tx = \lim_n Su_n$ og videre

$$\|Tx\| = \lim_n \|Su_n\| \leqq \lim_n M\|u_n\| = M\|x\|,$$

idet vi udnytter kontinuiteten af norm og (semi)norm.

Bemærkning. Vi har forudsat W normeret, idet vi gentagne gange har brug for, at en konvergent følge i W har en bestemt grænsevektor. Derimod er det i $\mathcal{V}$ nok med en seminorm.

Schwartz rummet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ er tæt i $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, idet jo allerede funktionerne $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ med begrænset støtte ligger tæt i $\mathcal{L}_p(\mathbb{R})$ for ethvert p, $1 \leqq p < \infty$, som vist i §9.2.

Restriktionen af Fourier transformationen $\mathcal{F}: \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ til Schwartz rummet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ er en afbildning på $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, ifølge

§15.3, sætning 1. Opfatter vi billedet $\mathcal{F}\varphi$ af en funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ som repræsentant for en klasse $[\mathcal{F}\varphi] \in L_2(\mathbb{R})$, får vi en afbildning $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$. Denne afbildning $\varphi \to [\mathcal{F}\varphi]$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, er ifølge §15.3, sætning 2, lineær og normbevarende, specielt kontinuert, og idet $L_2(\mathbb{R})$ er fuldstændigt (Fischers fuldstændighedssætning, §8.4), har den ifølge lemma 2 en og kun en udvidelse til en kontinuert afbildning $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}: \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$. Denne kaldes Fourier/Plancherel transformationen.

Fourier/Plancherel transformationen af $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ defineres altså som den kontinuerte afbildning $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}: \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, hvor

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}\varphi = [\mathcal{F}\varphi] \quad \text{for } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Idet $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}f = \mathcal{F}_{\mathcal{P}}g$, når $f, g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ og $\|f-g\|_2 = 0$, giver $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}: \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ anledning til en afbildning $L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, der ligeledes kaldes Fourier/Plancherel transformationen og betegnes $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$. Vi sætter altså $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}[f] = \mathcal{F}_{\mathcal{P}}f$.

Fourier/Plancherel cotransformationen $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^*$ defineres på tilsvarende måde ud fra $\mathcal{F}^*: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Hovedsætning. Fourier/Plancherel transformationen $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ er en unitær afbildning af $L_2(\mathbb{R})$ på sig selv, dvs. den er lineær, bijektiv og bevarer skalarproduktet,

$$\langle \mathcal{F}_{\mathcal{P}}f \mid \mathcal{F}_{\mathcal{P}}g \rangle = \langle f \mid g \rangle \quad \text{for } f, g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}).$$

Specielt gælder Parseval/Plancherels ligning

$$\|\mathcal{F}_{\mathcal{P}}f\|_2 = \|f\|_2 \quad \text{for } f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}).$$

Den omvendte afbildning er Fourier/Plancherel cotransformationen $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^*: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$. Endvidere gælder

$$\langle \mathcal{F}_{\mathcal{P}}f \mid [g] \rangle = \langle [f] \mid \mathcal{F}_{\mathcal{P}}^* g \rangle \quad \text{for } f, g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}).$$

Bevis. 1° Når $\varphi_n \to f$ og $\psi_n \to g$ i 2-middel, $\varphi_n, \psi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, har vi

$$[\mathcal{F}\varphi_n] = \mathcal{F}_{\mathcal{P}}\varphi_n \to \mathcal{F}_{\mathcal{P}}f, \quad [\mathcal{F}\psi_n] = \mathcal{F}_{\mathcal{P}}\psi_n \to \mathcal{F}_{\mathcal{P}}g \quad \text{i 2-middel}$$

og dermed

$$\langle \mathcal{F}_{\mathcal{P}} f \mid \mathcal{F}_{\mathcal{P}} g \rangle = \lim \langle \mathcal{F}_{\mathcal{P}} \varphi_n \mid \mathcal{F}_{\mathcal{P}} \psi_n \rangle$$
$$= \lim \langle \mathcal{F} \varphi_n \mid \mathcal{F} \psi_n \rangle = \lim \langle \varphi_n \mid \psi_n \rangle = \langle f \mid g \rangle,$$

idet jo $\langle \mathcal{F}\varphi_n \mid \mathcal{F}\psi_n \rangle = \langle \varphi_n \mid \psi_n \rangle$.

2° Afbildningerne $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ og $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^* : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ er hinandens omvendte, dvs.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^* \mathcal{F}_{\mathcal{P}} f = [f] \quad \text{og} \quad \mathcal{F}_{\mathcal{P}} \mathcal{F}_{\mathcal{P}}^* f = [f] \quad \text{for } f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}).$$

Lad os f.eks. vise den første ligning. At de kontinuerte afbildninger $f \to \mathcal{F}_{\mathcal{P}}^* \mathcal{F}_{\mathcal{P}} f$ og $f \to [f]$ af $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ ind i $L_2(\mathbb{R})$ er identiske, følger af, at

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^* \mathcal{F}_{\mathcal{P}} \varphi = \mathcal{F}_{\mathcal{P}}^* [\mathcal{F}\varphi] = \mathcal{F}_{\mathcal{P}}^* \mathcal{F}\varphi = [\mathcal{F}^* \mathcal{F} \varphi] = [\varphi],$$

når φ tilhører den tætte del $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$. Vi har benyttet, at $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ og $\mathcal{F}^* \mathcal{F} \varphi = \varphi$.

3° Med brug af 1° og 2° finder vi sluttelig

$$\langle [f] \mid \mathcal{F}_{\mathcal{P}}^* g \rangle = \langle \mathcal{F}_{\mathcal{P}} [f] \mid \mathcal{F}_{\mathcal{P}} \mathcal{F}_{\mathcal{P}}^* g \rangle = \langle \mathcal{F}_{\mathcal{P}} f \mid [g] \rangle \quad \text{for } f, g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}).$$

Ved definitionen af Fourier/Plancherel transformationen $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} : \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ krævede vi kun overensstemmelse,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} f = [\mathcal{F} f],$$

med Fourier transformationen $\mathcal{F} : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ for funktioner f tilhørende Schwartz rummet. Vi skal imidlertid se, at ligningen er opfyldt, blot begge sider har mening, dvs. for enhver funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.

<u>Sætning</u>. <u>For enhver funktion</u> $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ <u>er</u> $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} f = [\mathcal{F} f]$.

Bevis. 1° Først betragtes funktioner $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ med begrænset støtte, dvs. hvor $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ er begrænset.

Lad $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en Dirac følge for $\mathbb{R}$ af funktioner $k_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ med begrænset støtte. Eksempelvis kan benyttes $k_n(x) = nk(nx)$, hvor $k \geq 0$ er en funktion tilhørende $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ med begrænset støtte og $\int_{\mathbb{R}} k(x)dx = 1$.

Da vil $f * k_n$ tilhøre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ og have begrænset støtte (§10.3). Specielt er $f * k_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ og dermed

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(f * k_n) = [\mathcal{F}(f * k_n)].$$

Imidlertid har vi dels $\|f*k_n - f\|_1 \to 0$, ifølge §10.5 og dermed (§15.1)

$$\|\mathcal{F}(f*k_n) - \mathcal{F}f\|_u \to 0,$$

dels har vi $\|f*k_n - f\|_2 \to 0$, ifølge §10.6, og dermed

$$\|\mathcal{F}_P(f*k_n) - \mathcal{F}_P f\|_2 \to 0.$$

Er g en repræsentant for $\mathcal{F}_P f$, vil $\mathcal{F}(f*k_n)$ således konvergere punktvis mod $\mathcal{F}f$ og i 2-middel mod g, hvoraf følger $g = \mathcal{F}f$ næsten overalt, dvs. $\mathcal{F}_P f = [g] = [\mathcal{F}f]$.

2^0 For vilkårligt $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ sætter vi $f_n = f \cdot 1_{[-n,n]}$. Idet $f_n \to f$, numerisk majoriseret af $|f|$, har vi dels $\|f_n - f\|_1 \to 0$, dels $\|f_n - f\|_2 \to 0$ (§8.3, sætning 2), og dermed

$$\|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f\|_u \to 0 \quad \text{og} \quad \|\mathcal{F}_P f_n - \mathcal{F}_P f\|_2 \to 0.$$

Nu er $\mathcal{F}_P f_n = [\mathcal{F}f_n]$ ifølge 1^0. Med $\mathcal{F}_P f = [g]$ vil $\mathcal{F}f_n$ således konvergere punktvis mod $\mathcal{F}f$ og i 2-middel mod g, hvoraf følger $g = \mathcal{F}f$ næsten overalt, dvs. $\mathcal{F}_P f = [\mathcal{F}f]$.

Bemærkning. Som korollar kan vi for vilkårligt $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ give en mere explicit bestemmelse af $\mathcal{F}_P f$, nemlig

$$\mathcal{F}_P f = \lim_n [\mathcal{F}f_n], \quad \text{i 2-middel},$$

hvor $f_n = f \cdot 1_{[-n,n]}$, altså $\mathcal{F}f_n(t) = \int_{-n}^{n} f(x) e^{-2\pi i t x} dx$.

Thi $\|\mathcal{F}_P f - [\mathcal{F}f_n]\|_2 = \|\mathcal{F}_P f - \mathcal{F}_P f_n\|_2 = \|f - f_n\|_2 \to 0$.

§16. Sandsynlighedsregningens grundbegreber.

Som først udført af Andrej Kolmogorov (Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1933) kan sandsynlighedsregningen indordnes som en gren af mål- og integralteorien, blot med en særlig terminologi og med særlige problemstillinger.

16.1. Sandsynlighedsfelt.

Et målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$, hvor $\mu(X) = 1$, kaldes også et sandsynlighedsfelt. Elementerne af X kaldes da gerne (de mulige) udfald, medens en mængde $A \in \mathbb{E}$ kaldes en hændelse, og værdien $\mu(A)$ kaldes sandsynligheden for hændelsen A. At $x \in A$ udtrykker man ved at sige, at hændelsen A indtræffer ved udfaldet x.

Eksempel 1. Til et kast med en (ideel) terning svarer et sandsynlighedsfelt med 6 udfald, hvor sandsynligheden for en hændelse A er $k/6$, når k er antallet af udfald, hvorved A indtræffer

Eksempel 2. Enhedscirklen $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ med det normerede Lebesgue mål $\frac{1}{2\pi}m$ defineret på Borel mængderne i $\mathbb{T}$ (se §11.1) er et sandsynlighedsfelt. Det svarer til et (ideelt) roulettespil.

Nogle pröver på sandsynlighedsteoretisk terminologi:

Den umulige hændelse: $\emptyset$. Den sikre hændelse: X.

Sandsynligheden for, at mindst en af hændelserne, henholdsvis samtlige hændelser $A_1, A_2, \ldots$ indtræffer: $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$, $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$.

Hændelsen A medfører hændelsen B: $A \subseteq B$.

Hændelserne A og B er uforenelige: $A \cap B = \emptyset$.

Hændelserne A og B er uafhængige: $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.

Er $\mathcal{B}$ en hændelse med $\mu(\mathcal{B}) > 0$, kan vi sætte

$$\mu_{\mathcal{B}}(A) = \frac{\mu(A \cap \mathcal{B})}{\mu(\mathcal{B})}$$

for hvert $A \in \mathbb{E}$. Man verificerer umiddelbart, at $(X, \mathbb{E}, \mu_{\mathcal{B}})$ igen er et sandsynlighedsfelt. Værdien $\mu_{\mathcal{B}}(A)$ kaldes den <u>(betingede)</u> <u>sandsynlighed</u> for A <u>under</u> <u>betingelsen</u> $\mathcal{B}$. Der gælder

$$\mu_{\mathcal{B}}(A) = \mu(A),$$

hvis og kun hvis A og $\mathcal{B}$ er uafhængige.

16.2. Stokastisk variabel.

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et sandsynlighedsfelt.

En $\mathbb{E}$-målelig funktion φ defineret på X og med værdier i $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ eller $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ kaldes da også en <u>stokastisk variabel</u>, medens integralet $\int_X \varphi \, d\mu$, når det har mening, kaldes <u>middelværdien</u> af φ eller den <u>forventede værdi</u> (tysk: Erwartung) af φ og betegnes $E(\varphi)$.

Er φ en stokastisk variabel og $\mathcal{B}$ en hændelse med $\mu(\mathcal{B}) > 0$, kaldes integralet $\int_X \varphi \, d\mu_{\mathcal{B}}$, for så vidt det har mening, den (<u>betingede</u>) <u>middelværdi</u> eller <u>forventede værdi</u> af φ <u>under betingelsen</u> $\mathcal{B}$. Som betegnelse benyttes $E_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Der gælder

$$E_{\mathcal{B}}(\varphi) = \int_X \varphi \, d\mu_{\mathcal{B}} = \frac{1}{\mu(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}} \varphi \, d\mu \quad \text{(samtidig eksistens).}$$

Thi da $\mu_{\mathcal{B}}(X \setminus \mathcal{B}) = 0$, er $\int_X \varphi \, d\mu_{\mathcal{B}} = \int_{\mathcal{B}} \varphi \, d\mu_{\mathcal{B}}$. Ifølge definition (se §4.5, p.54) er $\int_{\mathcal{B}} \varphi \, d\mu_{\mathcal{B}}$ og $\int_{\mathcal{B}} \varphi \, d\mu$ imidlertid integraler af $\varphi|_{\mathcal{B}}$ m.h.t. restriktionerne af $\mu_{\mathcal{B}}$ og μ til σ-algebraen $\{A \subseteq \mathcal{B} \mid A \in \mathbb{E}\}$ i $\mathcal{B}$. Og disse restriktioner adskiller sig kun ved faktoren $\mu(\mathcal{B})$.

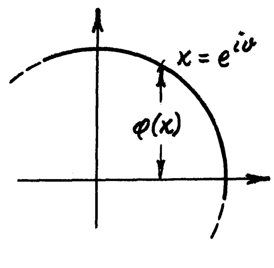
Hvis $E(\varphi)$ eksisterer (dvs. hvis φ tilhører $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ eller $\mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$), og hvis $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots$ er endelig eller numerabelt mange hændelser, hvoraf netop én må indtræffe (dvs. $X = \bigcup_i \mathcal{B}_i$, disj.), alle med $\mu(\mathcal{B}_i) > 0$, da er

$$E(\varphi) = \Sigma_i \, \mu(\mathcal{B}_i) \, E_{\mathcal{B}_i}(\varphi).$$

Thi dette kommer blot ud på, at $\int_X \varphi \, d\mu = \Sigma_i \int_{\mathcal{B}_i} \varphi \, d\mu$.

Eksempel 1. Den forventede værdi af antallet af øjne ved et terningkast er $\Sigma_{j=1}^{6} \, j \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$. Under forudsætning af et ulige, henholdsvis lige øjetal er den forventede værdi $2 \, \Sigma_{j=1,3,5} \, j \cdot \frac{1}{6} = 3$, henholdsvis $2 \, \Sigma_{j=2,4,6} \, j \cdot \frac{1}{6} = 4$.

Eksempel 2. Ved et roulettespil (se §16.1) er den forventede værdi af afstanden φ fra en given diameter, f. eks. den reelle akse,



$$E(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathfrak{Im}\, e^{iv}| \, dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin v| \, dv = \frac{2}{\pi}.$$

Lad $\varphi: X \to \mathbb{R}$ være en stokastisk variabel i et sandsynligheds-felt $(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Sætter vi
$$\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$$
for enhver Borel mængde $B \subseteq \mathbb{R}$, fås et mål ν i $\mathbb{R}$, som kaldes <u>fordelingen</u> af φ (se §4.7, specielt eksempel A).

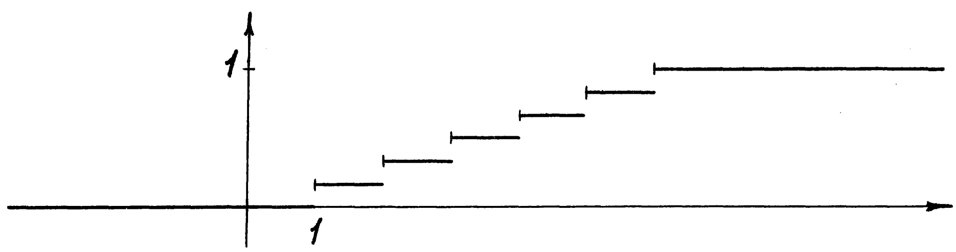
Som beskrevet i §5.5, p. 82, svarer ethvert Radon mål ν i $\mathbb{R}$ til en voksende funktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kontinuert fra højre, nemlig således at
$$\nu(]a,b]) = F(b) - F(a) \quad \text{for } a < b.$$
Når ν som her er fordeling af en stokastisk variabel, er $\lim_{t\to-\infty} F(t) > -\infty$. Vi kan da foreskrive $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, hvorefter F er entydigt bestemt og kaldes <u>fordelingsfunktionen</u> for φ.

Direkte er fordelingsfunktionen $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for φ givet ved
$$F(t) = \nu(]-\infty, t]) = \mu(\{x \in X \mid \varphi(x) \leq t\}), \quad t \in \mathbb{R}.$$
Med sandsynlighedsteoretiske gloser: $F(t)$ er sandsynligheden for, at φ antager en værdi $\leq t$.

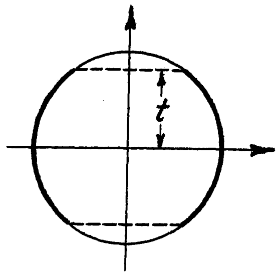
Bemærk, at $\lim_{t\to\infty} F(t) = \nu(\mathbb{R}) = \mu(X) = 1$.

I tilfælde af, at ν eller, hvad der kommer ud på det samme, F er ubestemt integral af en funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $f \geq 0$, dvs. (se §6.4)
$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du, \quad t \in \mathbb{R},$$
siges den stokastiske variable φ at være <u>kontinuert fordelt</u>, og f kaldes en <u>frekvensfunktion</u> for φ.

Eksempel 1 (fortsat). Figuren nedenfor viser grafen for fordelingsfunktionen for antallet af øjne ved et terningkast.



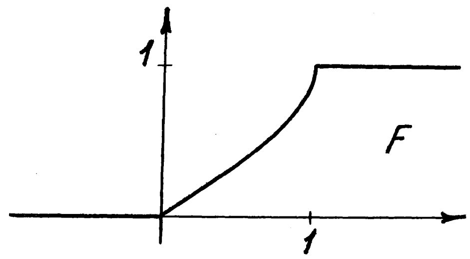
Eksempel 2 (fortsat). For hvert muligt udfald $x = e^{iv}$ ved et roulettespil sættes som før $\varphi(x)$ = afstanden fra x til den reelle akse, dvs. $\varphi(x) = \varphi(e^{iv}) = |\sin v|$.



For $0 \leqq t \leqq 1$ er $\{x \in \mathbb{T} \mid \varphi(x) \leqq t\} =$
$\{e^{iv} \mid |v| \leqq \operatorname{Arc}\sin t \ \vee \ |v - \pi| \leqq \operatorname{Arc}\sin t\}$.

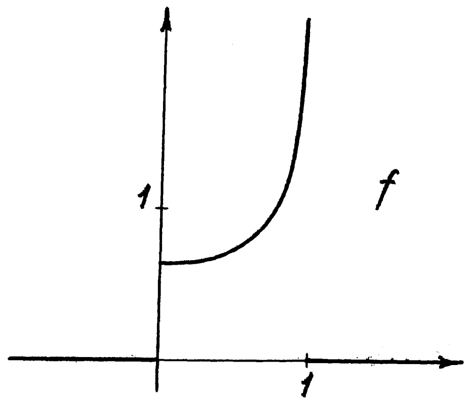
Fordelingsfunktionen $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for φ er følgelig givet ved

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leqq 0 \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc}\sin t & \text{for } 0 \leqq t \leqq 1 \\ 1 & \text{for } 1 \leqq t \ . \end{cases}$$



Den stokastiske variable φ er kontinuert fordelt, nemlig med nedenstående (ubegrænsede!) funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ som frekvensfunktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leqq 0 \\ \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} & \text{for } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{for } 1 \leqq t \ . \end{cases}$$



Figurerne til højre viser graferne for F og f.

Lad atter $\varphi: X \to \mathbb{R}$ være en vilkårlig reel stokastisk variabel i et sandsynlighedsfelt $(X, \mathbb{E}, \mu)$ og lad ν og F betegne fordelingen og fordelingsfunktionen for φ. Der gælder så (se §4.7 samt p. 83):

<u>Sætning. Er g en ikke-negativ Borel funktion på $\mathbb{R}$, da er</u>

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\,dF(t) = \int_{\mathbb{R}} g\,d\nu = \int_X (g \circ \varphi)\,d\mu = E(g \circ \varphi).$$

<u>Er g en reel eller kompleks Borel funktion på $\mathbb{R}$, da er g integrabel m.h.t. ν, hvis og kun hvis $g \circ \varphi$ er integrabel m.h.t. μ. I bekræftende fald er</u>

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\,dF(t) = \int_{\mathbb{R}} g\,d\nu = \int_X (g \circ \varphi)\,d\mu = E(g \circ \varphi).$$

Med $g(t)=t$ giver dette et udtryk for (den eventuelle) middelværdi af φ:
$$\int_{\mathbb{R}} t\,dF(t) = \int_{\mathbb{R}} t\,d\nu(t) = \int_X \varphi\,d\mu = E(\varphi).$$
(Fortolkning: middelværdien af φ er lig tyngdepunktet for den massefordeling på $\mathbb{R}$, der beskrives ved ν.)

Med $g(t)=t, t^2, t^3, \dots$ fås (de eventuelt eksisterende) <u>momenter</u> for φ:
$$\alpha_n = \int_{\mathbb{R}} t^n\,dF(t) = \int_{\mathbb{R}} t^n\,d\nu(t) = \int_X \varphi^n\,d\mu = E(\varphi^n), \quad n = 1,2,\dots .$$
Funktionen
$$u \to \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i u t}\,dF(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i u t}\,d\nu(t) = \int_X e^{-2\pi i u \varphi(x)}\,d\mu(x), \quad u \in \mathbb{R},$$
kaldes <u>den karakteristiske funktion</u> for ν, for F eller for φ. (Her er sætningen benyttet med $g_u(t) = e^{-2\pi i u t}$.)

For en stokastisk variabel $\varphi : X \to \mathbb{C}$ får vi et mål ν i $\mathbb{C}$, kaldet <u>fordelingen</u> af φ, ved at sætte
$$\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$$
for enhver Borel mængde B i $\mathbb{C}$. Er g en Borel funktion defineret på $\mathbb{C}$, gælder ifølge §47, at
$$\int_{\mathbb{C}} g\,d\nu = \int_X (g\circ\varphi)\,d\mu = E(g\circ\varphi),$$
således at forstå, at integralerne samtidig har mening og i bekræftende fald samme værdi. Med $g(z)=z$ giver dette et udtryk for (den eventuelle middelværdi af φ:
$$\int_{\mathbb{C}} z\,d\nu(z) = \int_X \varphi\,d\mu = E(\varphi).$$
(Fortolkning: middelværdien af φ er lig tyngdepunktet for den massefordeling i $\mathbb{C}$, der beskrives ved ν.)

Som et mål for, hvor meget de mulige værdier af en reel eller kompleks stokastisk variabel $\varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ spreder sig omkring middelværdien $m = E(\varphi) = \int_X \varphi\,d\mu$, benytter man ofte
$$\sigma = \sigma(\varphi) = \left(\int_X |\varphi - m|^2 d\mu\right)^{1/2} = \left(E(|\varphi-m|^2)\right)^{1/2},$$
der kaldes <u>spredningen</u> eller <u>standardafvigelsen</u> af φ.

For $\varphi \in \mathcal{L}_2(X, \mathbb{E}, \mu)$, dvs. $\sigma < \infty$, kan definitionen skrives

$$\sigma = \|\varphi - m\|_2 .$$

Om spredningen noteres <u>Čebyševs</u> <u>ulighed</u>

$$\mu(\{x \mid |\varphi(x) - m| \geqq a\sigma\}) \leqq \frac{1}{a^2},$$

der gælder for ethvert $a \in \mathbb{R}_+$, når $0 < \sigma < \infty$.

Thi med $A = \{x \mid |\varphi(x) - m| \geqq a\sigma\}$ er $a^2\sigma^2\chi_A \leqq |\varphi - m|^2$ og dermed

$$a^2\sigma^2\mu(A) = \int_X a^2\sigma^2\chi_A \, d\mu \leqq \int_X |\varphi - m|^2 d\mu = \sigma^2.$$

16.3. Uafhængige stokastiske variable.

Lad φ_1 og φ_2 være reelle stokastiske variable i et sandsynlighedsfelt $(X, \mathbb{E}, \mu)$. – I hele §16.3 vil vi i øvrigt, for simpelheds skyld, kun betragte reelle stokastiske variable.

Afbildningen $\varphi : X \to \mathbb{R}^2$ givet ved
$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)), \quad x \in X,$$
er da målelig, når $\mathbb{R}^2$ betragtes med Borel algebraen $\mathbb{B}_2$, dvs. $\varphi^{-1}(B) \in \mathbb{E}$ for enhver Borel mængde B i $\mathbb{R}^2$. (Se §2.2, eksempel.)

Sætter vi
$$\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$$
for enhver Borel mængde B i $\mathbb{R}^2$, fås et Radon mål ν i $\mathbb{R}^2$, som kaldes fordelingen af φ eller den simultane fordeling af φ_1 og φ_2. Er g en Borel funktion på $\mathbb{R}^2$, gælder ifølge §4.7, at
$$\int_{\mathbb{R}^2} g \, d\nu = \int_X (g \circ \varphi) \, d\mu,$$
altså
$$\int_{\mathbb{R}^2} g(t_1, t_2) \, d\nu(t_1, t_2) = \int_X g(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \, d\mu(x),$$
således at forstå, at integralerne samtidig har mening og i bekræftende fald samme værdi.

Med $g(t_1, t_2) = t_1$, henholdvis $g(t_1, t_2) = t_2$ fås
$$\int_{\mathbb{R}^2} t_1 \, d\nu(t_1, t_2) = \int_X \varphi_1 \, d\mu, \qquad \int_{\mathbb{R}^2} t_2 \, d\nu(t_1, t_2) = \int_X \varphi_2 \, d\mu .$$
(Fortolkning: $(E(\varphi_1), E(\varphi_2))$ er tyngdepunktet for den massefordeling i $\mathbb{R}^2$, der beskrives ved ν. Det eksisterer, netop hvis $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$.)

Fordelingerne ν_1 og ν_2 for φ_1 og φ_2 er bestemt ved ν. For enhver Borel mængde A i $\mathbb{R}$ gælder nemlig
$$\nu_1(A) = \nu(A \times \mathbb{R}), \qquad \nu_2(A) = \nu(\mathbb{R} \times A),$$
idet jo $\{x \mid \varphi_1(x) \in A\} = \{x \mid (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \in A \times \mathbb{R}\}$ og analogt. Man kalder ν_1

og ν_2 de til ν svarende <u>marginale</u> <u>fordelinger</u>. – Derimod er den simultane fordeling ν i almindelighed ikke fastlagt ved de marginale ν_1 og ν_2.

De stokastiske variable φ_1 og φ_2 siges at være <u>uafhængige</u>, hvis deres simultane fordeling ν netop er produktmålet af de marginale ν_1 og ν_2, altså hvis
$$\nu = \nu_1 \times \nu_2 .$$

Dette betyder (§7.3), at
$$\nu(B_1 \times B_2) = \nu_1(B_1) \cdot \nu_2(B_2),$$
når B_1 og B_2 er Borel mængder i $\mathbb{R}$.

Det er imidlertid tilstrækkeligt, at
$$\nu(I_1 \times I_2) = \nu_1(I_1) \cdot \nu_2(I_2),$$
når I_1 og I_2 er af formen $I_1 =]-\infty, b_1]$, $I_2 =]-\infty, b_2]$. Thi når to endelige Radon mål stemmer overens på alle sådanne intervaller $I_1 \times I_2$, vil de også gøre det på intervaller af form $]a_1, b_1] \times]-\infty, b_2]$ og videre på alle intervaller $]a_1, b_1] \times]a_2, b_2]$, dvs. på alle standard intervaller. Men så er de identiske (§5.5, korollar 1).

Erindres nu definitionen af ν, ν_1 og ν_2, har vi:

<u>De stokastiske variable</u> φ_1 <u>og</u> φ_2 <u>er uafhængige, hvis og kun hvis</u> $\mu(\{x \mid \varphi_1(x) \leqq b_1\} \cap \{x \mid \varphi_2(x) \leqq b_2\}) = \mu(\{x \mid \varphi_1(x) \leqq b_1\}) \cdot \mu(\{x \mid \varphi_2(x) \leqq b_2\})$ <u>for alle</u> $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Med sandsynlighedsteoretisk terminologi (§16.1) lyder betingelsen: For alle $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ er hændelserne „φ_1 antager en værdi $\leqq b_1$" og „φ_2 antager en værdi $\leqq b_2$" uafhængige.

Ganske tilsvarende kommer ligningen
$$\nu(B_1 \times B_2) = \nu_1(B_1) \cdot \nu_2(B_2),$$
hvor B_1 og B_2 er Borel mængder i $\mathbb{R}$, ud på
$$\mu(\{x \mid \varphi_1(x) \in B_1\} \cap \{x \mid \varphi_2(x) \in B_2\}) = \mu(\{x \mid \varphi_1(x) \in B_1\}) \cdot \mu(\{x \mid \varphi_2(x) \in B_2\}),$$
dvs. hændelserne „φ_1 antager en værdi i B_1" og „φ_2 antager en værdi i B_2" er uafhængige.

Sætning 1. Er φ_1 og φ_2 uafhængige stokastiske variable, der tilhører $\mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, da vil også produktet $\varphi_1\varphi_2$ tilhøre $\mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, og der gælder

$$E(\varphi_1\varphi_2) = E(\varphi_1)\cdot E(\varphi_2), \text{ dvs. } \int_X \varphi_1\varphi_2\,d\mu = \int_X \varphi_1\,d\mu \cdot \int_X \varphi_2\,d\mu .$$

Bevis. Vi benytter samme betegnelser som ovenfor. Først findes med brug af Tonellis sætning

$$\int_X |\varphi_1\varphi_2|\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^2} |t_1t_2|\,d\nu(t_1,t_2) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |t_1||t_2|\,d\nu_2(t_2)\,d\nu_1(t_1)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |t_1|\,d\nu_1(t_1)\cdot\int_{\mathbb{R}} |t_2|\,d\nu_2(t_2) = \int_X |\varphi_1|\,d\mu\cdot\int_X |\varphi_2|\,d\mu < \infty ,$$

altså $\varphi_1\varphi_2 \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$. Derefter kan regningen gentages uden numeriske tegn, med brug af Fubinis sætning.

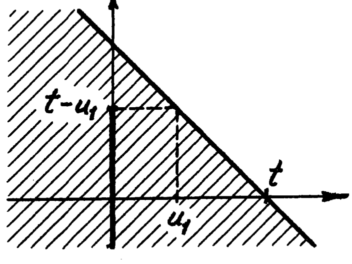
Korollar. Lad de uafhængige stokastiske variable φ_1 og φ_2 tilhøre $\mathcal{L}_2(X,\mathbb{E},\mu)$. Idet vi med σ_1, σ_2 og σ betegner spredningen af henholdsvis φ_1, φ_2 og $\varphi_1+\varphi_2$, gælder

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 .$$

Thi med $m_1 = \int_X \varphi_1\,d\mu$ og $m_2 = \int_X \varphi_2\,d\mu$ har vi

$$\sigma^2 = \int_X ((\varphi_1+\varphi_2)-(m_1+m_2))^2\,d\mu$$
$$= \int_X (\varphi_1-m_1)^2\,d\mu + \int_X (\varphi_2-m_2)^2\,d\mu + 2\int_X (\varphi_1-m_1)(\varphi_2-m_2)\,d\mu$$
$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\int_X (\varphi_1-m_1)\,d\mu \int_X (\varphi_2-m_2)\,d\mu = \sigma_1^2+\sigma_2^2 .$$

Vi betragter nu to vilkårlige uafhængige reelle stokastiske variable φ_1 og φ_2 i et sandsynlighedsfelt $(X,\mathbb{E},\mu)$, med fordelingsfunktioner F_1 og F_2, og vil bestemme fordelingsfunktionen F for summen $\varphi_1+\varphi_2$.



For vilkårligt $t\in\mathbb{R}$ har vi

$$F(t) = \mu(\{x\in X \mid \varphi_1(x)+\varphi_2(x) \leqq t\})$$
$$= \nu(\{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2 \mid u_1+u_2 \leqq t\}),$$

hvor ν betegner den simultane fordeling af φ_1 og φ_2. Da ν ifølge forudsætning er produktmålet af fordelingerne ν_1 og ν_2 for φ_1 og φ_2, slutter vi (§7.3, lemma 2), at

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \nu_2(]-\infty, t-u_1])\,d\nu_1(u_1).$$

Vi noterer

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} F_2(t-u)\,dF_1(u) = \int_{\mathbb{R}} F_1(t-u)\,dF_2(u).$$

Er φ_1 og φ_2 begge kontinuert fordelt (§16.2) med frekvensfunktioner henholdsvis f_1 og f_2, har vi dels (se øvelse 6.18)

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} F_1(t-u) f_2(u)\,du,$$

dels

$$F_1(t-u) = \int_{-\infty}^{t-u} f_1(v)\,dv = \int_{-\infty}^{t} f_1(v-u)\,dv,$$

og vi finder da ved Tonellis sætning

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{t} f_1(v-u) f_2(u)\,dv\,du = \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}} f_1(v-u) f_2(u)\,du\,dv,$$

altså

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f_1 * f_2(v)\,dv.$$

Vi noterer:

<u>Sætning 2.</u> <u>Er</u> φ_1 <u>og</u> φ_2 <u>indbyrdes uafhængige, kontinuert fordelte reelle stokastiske variable i et sandsynlighedsfelt, med frekvensfunktioner</u> f_1 <u>og</u> f_2, <u>da er</u> $\varphi_1 + \varphi_2$ <u>kontinuert fordelt med frekvensfunktion</u> $f_1 * f_2$.

Uafhængige hændelser og uafhængige stokastiske variable fremkommer, når man danner produkt af sandsynlighedsfelter:

Idet $(X_1, \mathbb{E}_1, \mu_1)$ og $(X_2, \mathbb{E}_2, \mu_2)$ er sandsynlighedsfelter, vil $(Z, \mathbb{Z}, \pi) = (X_1 \times X_2, \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ igen være et sandsynlighedsfelt, jfr. §7.3. Det kaldes <u>produktet</u> af de to sandsynlighedsfelter.

To hændelser $A_1 \times X_2$ og $X_1 \times A_2$, hvor $A_1 \in \mathbb{E}_1$ og $A_2 \in \mathbb{E}_2$ er altid uafhængige med hensyn til π, idet

$$\pi(A_1 \times X_2 \cap X_1 \times A_2) = \pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\cdot\mu_2(A_2) = \pi(A_1 \times X_2)\cdot\pi(X_1 \times A_2).$$

Løst sagt: A_1 og A_2 er uafhængige m.h.t. π.

For vilkårlige stokastiske variable $\varphi_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ og $\varphi_2 : X_2 \to \mathbb{R}$ er $\varphi_1 \otimes 1_{X_2}$ og $1_{X_1} \otimes \varphi_2$, dvs.

$$(x_1, x_2) \to \varphi_1(x_1) \quad \text{og} \quad (x_1, x_2) \to \varphi_2(x_2), \quad (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2,$$

uafhængige m.h.t. π. Løst sagt: φ_1 og φ_2 er uafhængige m.h.t. π.

Thi er $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ Borel mængder i $\mathbb{R}$, vil

$$\{(x_1,x_2) \mid \varphi_1(x_1) \in \mathcal{B}_1\} = \{x_1 \mid \varphi_1(x_1) \in \mathcal{B}_1\} \times X_2$$

og

$$\{(x_1,x_2) \mid \varphi_2(x_2) \in \mathcal{B}_2\} = X_1 \times \{x_2 \mid \varphi_2(x_2) \in \mathcal{B}_2\}$$

være uafhængige m.h.t. π.

Benyttes $(X_1,\mathbb{E}_1,\mu_1)$ og $(X_2,\mathbb{E}_2,\mu_2)$ som matematiske modeller for to forsøg, der ikke indvirker på hinanden, vil produktfeltet være den naturlige model for kombinationen af forsøgene.

Eksempel 1. Ved kast med en rød og en grøn terning er der $6 \cdot 6 = 36$ mulige udfald. Idet φ_1 og φ_2 er antallet af øjne på den røde, henholdsvis den grønne terning, har $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ den forventede værdi $\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = 12\frac{1}{4}$.

Eksempel 2. Lad φ være en talstørrelse (et „måleresultat"), der afhænger af udfaldet ved et forsøg. Med m betegnes den forventede værdi af φ, med σ spredningen af φ.

For to uafhængige udførelser af forsøget betegner vi med φ_1 og φ_2 måleresultatet ved henholdsvis første og anden udførelse. Middeltallet $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$, egentlig $(x_1,x_2) \to \frac{\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)}{2}$, der stadig har den forventede værdi m, vil da kun have spredningen $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$.

Ved anvendelser af sandsynlighedsregning har man naturligvis behov for at kombinere mange forsøg, f.eks. mange gentagelser af samme forsøg, ofte under forudsætning af, at de ikke indvirker på hinanden. I sandsynlighedsregningen spiller derfor produkter af mange sandsynlighedsfelter en stor rolle. Da vi imidlertid i målteorien kun har betragtet produkt af to mål, skal vi lade dette emne ligge og ligeledes undlade at definere og behandle uafhængighed af flere end to stokastiske variable.

(Vedrørende produkt af vilkårlig mange sandsynlighedsfelter og uafhængighed af vilkårlig mange stokastiske variable henvises til Børge Jessen: Abstrakt Maal- og Integralteori 4 (Matematisk Tidsskrift B

1939) og 10 (ibid. 1947) eller P.R. Halmos: Measure theory, Van Nostrand 1950, §§37,38,45-47. For en udførlig behandling af sandsynlighedsregning på målteoretisk grundlag henvises til Forelæsningsnoter i matematisk statistik og sandsynlighedsregning, Statistik 1 (Institut for Matematisk Statistik, Københavns Universitet).)

Et litteraturudvalg.

Mål og integral.

Om integralbegrebets udvikling.

H. Lebesgue: Sur le développement de la notion d'intégrale, Matematisk Tidsskrift B, København 1926, p. 54-74.

N. Bourbaki: Éléments d'histoire des mathématiques, Hermann, Paris 1960, p. 246-259.

I. N. Pesin: Classical and modern integration theories, Academic Press, New York 1970; russisk udgave Moskva 1966.

Nogle klassikere.

H. Lebesgue: Intégrale, longueur, aire. Thèse. Paris 1902.

H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gauthiers-Villars, Paris 1904; 2. udgave 1928.

C. Caratheodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1918; 2. udgave 1927 er genoptrykt af Chelsea, New York.

B. Jessen: Abstrakt Maal- og Integralteori 1-10, Matematisk Tidsskrift B, København 1934, 1935, 1938, 1939, 1942, 1944, 1947.

S. Saks: Théorie de l'intégrale, Warszawa 1933; 2. udgave: Theory of the integral, 1937, er genoptrykt af Hafner, New York.

Nogle lærebøger.

P. R. Halmos: Measure theory, Van Nostrand, New York 1950.

S. Lang: Analysis II, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1969.

M.E. Munroe: Introduction to measure and integration, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1953.

F. Riesz / B. Sz-Nagy: Leçons d'analyse fonctionelle, Akadémiai Kiado, Budapest 1952.

H.L. Royden: Real analysis, Macmillan, New York 1963.

W. Rudin: Real and complex analysis, McGraw-Hill, New York 1966.

I.E. Segal / R.A. Kunze: Integrals and operators, McGraw-Hill, New York 1968.

A.C. Zaanen: Integration, North-Holland, Amsterdam 1958; 2. udgave 1967.

Harmonisk analyse.

J. Fourier: Sur la propagation de la chaleur, manuskript Paris 1807.

N.K. Bary: A treatise on trigonometric series I-II, Pergamon, Oxford 1964; russisk udgave Moskva 1961.

H. Dym / H.P. McKean: Fourier series and integrals, Academic Press, New York 1972.

R.E. Edwards: Fourier series, a modern introduction, I-II, Holt, Rinehart & Winston, New York 1967.

R.R. Goldberg: Fourier transforms, Cambridge at the University Press 1961.

G.H. Hardy / W.W. Rogosinski: Fourier series, Cambridge at the University Press 1944; 2. udgave 1950.

Y. Katznelson: An introduction to harmonic analysis, Wiley, New York 1968.

R. Seeley: An introduction to Fourier series and integrals, Benjamin, New York 1966.

E.C. Titchmarch: Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford at the Clarendon Press 1937.

A. Zygmund: Trigonometric series, Warszawa 1935; 2. udgave I-II, Cambridge at the University Press 1959.

Sandsynlighedsregning.

A. Kolmogorov: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin 1933; engelsk udgave: Foundations of the theory of probability, Chelsea, New York 1950.

R.B. Ash: Real analysis and probability, Academic Press, New York 1972.

H. Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie, de Gruyter, Berlin 1968.

H. Bróns m.fl.: Statistik 1, forelæsningsnoter i matematisk statistik og sandsynlighedsregning, Institut for Matematisk Statistik, Kóbenhavns Universitet; 6. udgave 1974.

J. Lamperti: Probability, a survey of the mathematical theory, Benjamin, New York 1966.

M. Loève: Probability theory, foundations, random sequences, Van Nostrand, New York 1955.

J. Neveu: Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, Paris 1964.

A. Rényi: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.

Eksempler, der belyser teorien.
Oversigt.

(33 henviser til side 33, medens ö 3.4 henviser til övelse 3.4.)

En begrænset funktion på et begrænset interval, som er Lebesgue integrabel, men ikke Riemann integrabel	3, ó 4.1
En begrænset funktion på et begrænset interval, som er Lebesgue integrabel, men ikke stemmer overens næsten overalt med nogen Riemann integrabel funktion	ó 6.23
En mængde tilhørende $\mathbb{L}_2 \setminus \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_1$	106, ó 7.8
En σ-klasse, der ikke er en σ-algebra. (Banalt)	107, ó 7.9
To mål μ og ν, der har mere end ét „produktmål"	ó 7.13
Ombytninger af integrationsorden (og specielt summationsorden), der ændrer værdien	ó 7.13, 7.19, 7.20, 7.29, 7.30
Punktvis konvergens contra konvergens i middel	123
En Cauchy følge i $\mathcal{C}([0,1])$, $\Vert\ \Vert_1$, som ikke konvergerer i 1-middel mod nogen Riemann integrabel funktion	ó 8.23
En (Cesàro) summabel række, som ikke er konvergent. (Banalt)	187
En Abel summabel række, som ikke er (Cesàro) summabel	ó 12.17
Punktvis summable trigonometriske rækker, som ikke er Fourier rækker	ó 12.13
Punktvis divergente Fourier rækker og en punktvis konvergent trigonometrisk række, som ikke er Fourier række. (Henvisninger)	182
Et element i $\mathcal{L}_2(]-\pi,\pi])$ uden ortogonal projektion på et givet underrum $\mathcal{U}$ af $\mathcal{L}_2(]-\pi,\pi])$	ó 13.6
Et afsluttet, ægte underrum $\mathcal{U}$ af $\mathcal{C}(]-1,1])$ med $\mathcal{U}^{\perp} = \{0\}$	ó 13.15
En divergent ortogonaludvikling	ó 13.23
Et ikke separabelt Hilbert rum	ó 13.25
Et uegentligt integral, der er summabelt, men ikke konvergent	218
En kontinuert fordelt stokastisk variabel med ubegrænset frekvensfunktion	241

Symbolliste.

(33 henviser til side 33, medens ó 3.4 henviser til øvelse 3.4.)

Z: Pas på, en fejltagelse er nærliggende.
* foran øvelse eller del af øvelse: Opgaven er vanskelig.

mf

FORFATTERINDEKS

SAGREGISTER

57, ø68, 11.3 henviser til side 57 i noter, side 68 i øvelser samt øvelse 11.3.
Henvisning i kursiv markerer definition eller karakterisering.

mf