Matematik 2 MA
Matematisk Analyse

1994–95

Kapitel IV. Fourier Analyse

Gerd Grubb

Matematik 2. Matematisk Analyse

1994-95

Kapitel IV. Fourier analyse

§0. **Indledning**

§1. **Hilbert rum**

1.1. Hilbert rum og deres geometri 1.1
1.2. Ortonormale baser og Parsevals ligning 1.8
Opgaver til §1 1.15

§2. **Fourierrækker i en variabel**

2.1. Funktionsrum over $\mathbb{T}$ 2.1
2.2. Fourierrækken for en funktion $f \in L_1(\mathbb{T})$ 2.3
2.3. Riemann-Lebesgues lemma 2.5
2.4. Punktvis konvergens 2.6
2.5. Uniform konvergens 2.9
2.6. Konvergens i $L_2(\mathbb{T})$ og Parsevals ligning 2.12
Opgaver til §2 2.14

§3. **Operatorer på Hilbert rum**

3.1. Riesz' repræsentationssætning og den adjungerede operator 3.1
3.2. Unitære operatorer 3.5
3.3. Anvendelser af F, ubegrænsede operatorer 3.9
Opgaver til §3 3.18

§4. **Fourierudvikling af funktioner af flere variable**

4.1. Funktionsrum over $\mathbb{T}^k$ og multiple Fourierrækker 4.1
4.2. Uniform konvergens 4.4
4.3. Diagonalisering af differentialoperatorer 4.9
4.4. Anvendelser af Fourier transformationen 4.12
Opgaver til §4 4.15

INDEX

§1. Hilbert rum

1.1. Hilbert rum og deres geometri.

Definition 1.1. Et komplekst vektor rum V kaldes et *indre produkt rum* (eller præ-Hilbert rum), når det er forsynet med en funktion $(\cdot\,,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{C}$, som opfylder følgende fire betingelser for alle $u, v, w \in V$ og $\alpha \in \mathbb{C}$.

(S i) $(u, u) \geq 0$, og $(u, u) = 0$ hvis og kun hvis $u = 0$,
(S ii) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$,
(S iii) $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$
(S iv) $(u, v) = \overline{(v, u)}$.

Funktionen $(\cdot\,,\cdot)$ kaldes et *indre produkt* eller et *skalarprodukt*.

Vi bemærker, at (S ii), (S iii) og (S iv) medfører at $(\cdot\,,\cdot)$ er lineær i første variabel og konjugeret lineær (også kaldet semilineær) i anden variabel. Mere alment kalder man en afbildning $s\colon V \times V \to \mathbb{C}$ *sesquilineær* (idet sesqui på latin betyder $1\frac{1}{2}$), når den er lineær i første variabel og semilineær i anden variabel. (Også når skalarlegemet er $\mathbb{R}$ kan man definere indre produkt rum; her benyttes (S i)–(S iv) blot uden konjugeringstegnet.)

Eksempel 1.2. For $u = (u_1, \dots, u_n)$ og $v = (v_1, \dots, v_n)$ i $\mathbb{C}^n$ sættes

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i \,,$$

det hermitiske skalarprodukt.

Idet $C([a, b])$ betegner mængden af kontinuerte komplekse funktioner på intervallet $[a, b]$ kan vi for $f, g \in C([a, b])$ definere

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \,,$$

det er et skalarprodukt.

Også betegnelserne $\langle u, v\rangle$, $(u|v)$ og $\langle u|v\rangle$ for skalarproduktet forekommer i litteraturen. Da $\langle u, v\rangle$ ofte benyttes som betegnelse for den *bilineære* form $\sum_{i=1}^n u_i v_i$ eller $\int_a^b u(x)v(x)dx$ uden konjugering af v (samt sidstnævntes generalisationer i distributionsteorien), bruger vi her (u, v) for den sesquilineære form. I det følgende benyttes ofte $\{\dots\}$ hvor man ellers skriver $(\dots)$, for at undgå forveksling med skalarproduktet.

To vektorer u og v i et indre produkt rum V siges at være indbyrdes *ortogonale*, i symboler $u \perp v$, hvis $(u, v) = 0$. En mængde $\{e_i\}_{i\in I}$ af vektorer i V, indiceret ved en vilkårlig indexmængde I, kaldes et *ortogonalsystem*, hvis $(e_i, e_j) = 0$ når $i, j \in I$ med $i \neq j$; og det kaldes et *ortonormalsystem*, hvis der tillige gælder $(e_i, e_i) = 1$ for alle $i \in I$.

Lad A være en delmængde af V, $A \subset V$.[1] Vi skriver $u \perp A$ hvis $(u, v) = 0$ for alle $v \in A$.

Man bemærker, at enhver endelig delmængde af et ortonormalsystem $\{e_i\}_{i\in I}$ består af lineært uafhængige vektorer, thi hvis $\sum_{i\in I_0} c_i e_i = 0$, hvor $I_0 \subset I$ er endelig, så ser man for hvert $i \in I_0$ at $c_i = 0$ ved at tage indre produkt med e_i.

Når $\{x_i\}_{i\in I}$ er et system af vektorer i et vektorrum V, er $\operatorname{span}\{x_i\}_{i\in I}$ defineret som mængden af vektorer i V, der er linearkombinationer af elementerne i $\{x_i\}_{i\in I}$. Det er et lineært underrum af V (når vi siger underrum i det følgende, mener vi altid lineært underrum). Systemet $\{x_i\}_{i\in I}$ kaldes *lineært uafhængigt*, når ethvert endeligt delsystem er lineært uafhængigt.

Lad os indføre betegnelsen $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$. Vi skal om lidt se, at $\|\cdot\|$ faktisk er en norm.

Sætning 1.3 ("Pythagoras"). *Lad $x_1, \dots, x_n$ være et ortogonalsystem. Da gælder*

$$\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 .$$

Bevis. Da $x_i \perp x_j$ for $i \neq j$, gælder

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 &= \Big(\sum_{i=1}^n x_i , \sum_{j=1}^n x_j\Big) = \sum_{i,j=1}^n (x_i, x_j) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i, x_i) = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 . \quad \square\end{aligned}$$

Sætning 1.4 (Bessels approksimationssætning). *Lad $e_1, \dots, e_n$ være et ortonormalsystem i V. For ethvert $x \in V$ findes netop en vektor $u \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ for hvilken $x - u \perp \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, og den er givet ved*

$$u = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i .$$

For en vilkårlig vektor $v = \sum_{i=1} \lambda_i e_i \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ gælder

$$\|x - v\|^2 = \|x - u\|^2 + \sum_{i=1}^n |(x, e_i) - \lambda_i|^2 .$$

[1] I overensstemmelse med en almindelig international skrivemåde skrives fra nu af $\subset$ for inklusion mellem mængder, forstået sådan at $A \subset B$ tillader muligheden af at $A = B$.

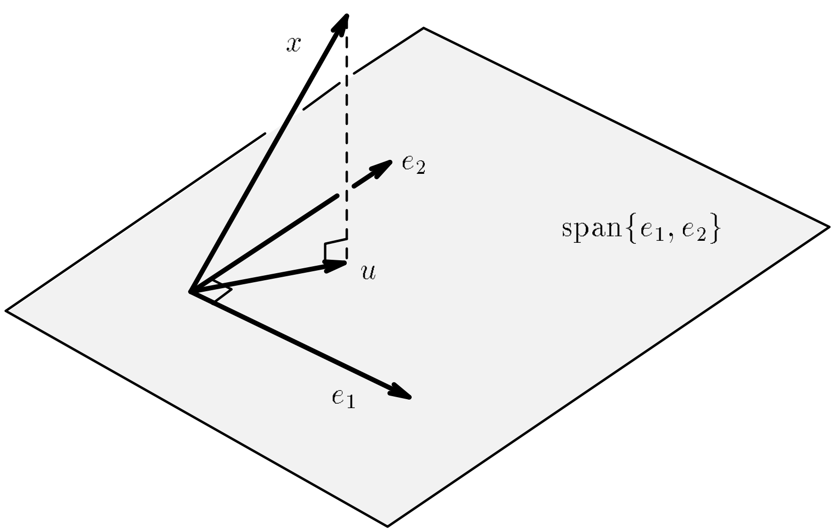
Bevis. Lad $u \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$, altså $u = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$. Så ser vi ved at tage skalarprodukt med hvert e_i, at $x - u \perp \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ medfører $(x, e_i) - \mu_i = 0$ for $i = 1, \ldots, n$. Dette viser at $\mu_i = (x, e_i)$ er eneste mulighed; omvendt ses at $\mu_i = (x, e_i)$ for alle i sikrer at $x - u \perp \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$. Den sidste ligning ovenfor fås af Pythagoras' sætning: Da $x - u \perp u - v$, er

$$\|x - v\|^2 = \|x - u + u - v\|^2 = \|x - u\|^2 + \|u - v\|^2;$$

og da $u - v = \sum_{i=1}^n ((x, e_i) - \lambda_i) e_i$, er

$$\|u - v\|^2 = \sum_{i=1}^n \|((x, e_i) - \lambda_i) e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i) - \lambda_i|^2 . \quad \square$$

For $v \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ gælder altså $\|x - v\| \geq \|x - u\|$, og der gælder $>$ når $v \neq u$. Vektoren u er altså den vektor i $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$, der har kortest afstand fra x. Den kaldes den *ortogonale projektion* af x på $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$.



Korollar 1.5 (Bessels ulighed). *Lad $e_1, \ldots, e_n$ være et ortonormalsystem i et indre produkt rum V. Da gælder for alle $x \in V$, at*

$$\sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Bevis. Benyt $v = 0$ i Bessels approksimationssætning. $\square$

Korollar 1.6 (Cauchy-Schwarz' ulighed). *Når u og v er vektorer i et indre produkt rum V, gælder*

$$|(u,v)| \leq \|u\|\|v\|\,.$$

Bevis. Tilfældet $v=0$ er trivielt, så vi antager at $v\neq 0$. Vektoren $\dfrac{v}{\|v\|}$ udgør et ortonormalsystem, så Bessels ulighed for $u\in V$ giver

$$\left|(u,\frac{v}{\|v\|})\right|^2 \leq \|u\|^2\,,$$

hvoraf Cauchy-Schwarz' ulighed følger umiddelbart. □

Sætning 1.7. *Et indre produkt rum V er et normeret vektorrum med normen $\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$.*

Bevis. Det eneste ikke trivielle i beviset er trekantsuligheden. Den ses således:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + (u,v) + (v,u) + \|v\|^2\,,\\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2\,,\\ &= (\|u\|+\|v\|)^2\,,\end{aligned}$$

hvor vi har brugt Cauchy-Schwarz' ulighed. □

Ved lignende regninger fås PARALLELLOGRAMLOVEN:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2\,.$$

Endvidere kan man vise POLARISERINGSIDENTITETEN (Opg. 1.7)

$$(u,v) = \frac{1}{4}\left[(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) + i(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2)\right],$$

der giver en formel for rekonstruktion af skalarproduktet ud fra normen.

Til normen er som bekendt knyttet en metrik på V

$$d(u,v) = \|u-v\|\,,$$

og vi har begreberne konvergens i V og fuldstændighed af V.

Man siger, at to skalarprodukter er *ækvivalente*, når de tilknyttede normer (og dermed metrikker) er ækvivalente, jvf. I §2.3.

Det bemærkes, at $(\cdot\,,\cdot)\colon V\times V\to\mathbb{C}$ er kontinuert med hensyn til produktmetrikken. Kontinuiteten ved $\{u,v\}\in V\times V$ ses f.eks. således: For alle $u',v'\in V$ gælder:

$$\begin{aligned}|(u,v)-(u',v')| &= |(u-u',v)+(u',v-v')|\\ &= |(u-u',v)+(u'-u,v-v')+(u,v-v')|\\ &\le \|u-u'\|\,\|v\|+\|u-u'\|\,\|v-v'\|+\|u\|\,\|v-v'\|,\end{aligned}$$

så når $\varepsilon\in\,]0,1]$ er givet, vil dette være $\le\varepsilon$, når både

$$\|u-u'\| \text{ og } \|v-v'\|\le\frac{\varepsilon}{3(1+\|u\|+\|v\|)}.$$

Specielt ses, at $u\mapsto(u,v)$ er en kontinuert afbildning fra V til $\mathbb{C}$ for hvert fast $v\in V$.

Definition 1.8. Et *Hilbert rum* er et fuldstændigt indre produkt rum.

Man kan vise, at et præ-Hilbert rum $(V,(\cdot\,,\cdot))$ altid kan fuldstændiggøres til et Hilbert rum, dvs. der findes et Hilbert rum $(H,(\cdot\,,\cdot)^{\sim})$ og en lineær afbildning $\varphi\colon V\to H$ så $\varphi(V)$ er tæt i H og så $(\varphi(x),\varphi(y))^{\sim}=(x,y)$ for $x,y\in V$. Det følger af, at V kan fuldstændiggøres på entydig måde som metrisk rum, jvf. Opg. I 5.2, idet vektorrumsstrukturen og skalarproduktet "følger med."

To Hilbert rum H_1 og H_2 siges at være *isomorfe*, hvis der findes en lineær afbildning $U\colon H_1\to H_2$ med hele H_2 som billede, som opfylder

$$(Uv,Uw)_{H_2}=(v,w)_{H_1},\ \text{for alle } v,w\in H_1.$$

U kaldes da en *isometrisk isomorfi*, eller en *unitær operator.*

Eksempel 1.9. Betragt $L_2([a,b])$, mængden af målelige, komplekse funktioner på intervallet $[a,b]$ som opfylder $\int_a^b|f(x)|^2dx<\infty$, og hvor man identificerer funktioner som er ens næsten overalt, jvf. II §7.3. $L_2([a,b])$ forsynes med det indre produkt

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx\,,$$

hvor integralet er endeligt, da

$$|f(x)\overline{g(x)}|\le\tfrac12|f(x)|^2+\tfrac12|g(x)|^2\,.$$

Det følger af Sætning II 7.18 (Fischers fuldstændighedssætning) og Sætning II 7.28, at $L_2([a,b])$ er en fuldstændiggørelse af $C([a,b])$ med hensyn til normen

$$\|f\| = \Big(\int_a^b |f(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

som svarer til ovennævnte skalarprodukt.

Mere alment er $L_2(X,\mu)$ et Hilbert rum når (X,μ) (kortere skrivemåde for $(X,\mathbb{E},\mu)$) er et målrum, med skalarprodukt og norm

$$(f,g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu\,, \quad \|f\| = \Big(\int_X |f(x)|^2\,d\mu\Big)^{\frac{1}{2}};$$

og rummet er fuldstændigt på grund af Fischers sætning.

Mængden $\ell_2(\mathbb{N})$ af talfølger $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bestående af komplekse tal, som opfylder $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, forsynes med indre produkt og norm

$$(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n\,, \quad \|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

hvormed det er et Hilbert rum. Dette stemmer med at opfatte $\ell_2(\mathbb{N})$ som rummet $L_2(\mathbb{N},\mu)$, hvor μ er tællemålet.

I forbindelse med diskussionen af ortonormalbaser skal vi se, at der er mange Hilbert rum, som forekommer i praksis, der er isomorfe med $\ell_2(\mathbb{N})$. Man kan da sige, at ℓ_2 er det kanoniske eksempel på et Hilbert rum.

Lad H_1 og H_2 være Hilbert rum, og betragt alle par af vektorer $\{u_1,u_2\}$, hvor $u_1 \in H_1$ og $u_2 \in H_2$. Disse par er elementer af et nyt Hilbert rum med det indre produkt

$$(\{u_1,u_2\},\{v_1,v_2\}) = (u_1,v_1)_{H_1} + (u_2,v_2)_{H_2}\,.$$

Dette Hilbert rum kaldes produktet af H_1 og H_2, og betegnes $H_1 \times H_2$.

Lemma 1.10. *Lad H være et Hilbert rum, og lad M være en afsluttet konveks delmængde. For hvert $u \in H$ eksisterer en entydigt bestemt vektor $v \in M$ tættest ved u, dvs. med $\|u-v\|$ mindst mulig.*

Bevis. Vi minder om at M kaldes konveks, hvis $tu + (1-t)v \in M$, hvergang $u,v \in M$ og $t \in [0,1]$. Lad $u \in H$, lad $d = \inf_{w\in M} \|u-w\|$, og vælg en følge $\{w_n\}$ af elementer i M, så at $\|u-w_n\| \to d$. Da gælder

$$\begin{aligned}\|w_n - w_m\|^2 &= \|(w_n-u)-(w_m-u)\|^2\,,\\ &= 2\|w_n-u\|^2 + 2\|w_m-u\|^2 - \|(w_n-u)+(w_m-u)\|^2\,,\end{aligned}$$

på grund af parallellogramloven. Det sidste led kan skrives $4\|u - \frac{1}{2}(w_n + w_m)\|^2$, og da $\frac{1}{2}(w_n + w_m) \in M$ følger, at

$$\|w_n - w_m\|^2 \leq 2\|w_n - u\|^2 + 2\|w_m - u\|^2 - 4d^2\,.$$

Til givet $\varepsilon > 0$ findes N så at der for $n \geq N$ gælder $\|w_n - u\| \leq d + \varepsilon$, hvoraf ses at der for $n, m \geq N$ gælder:

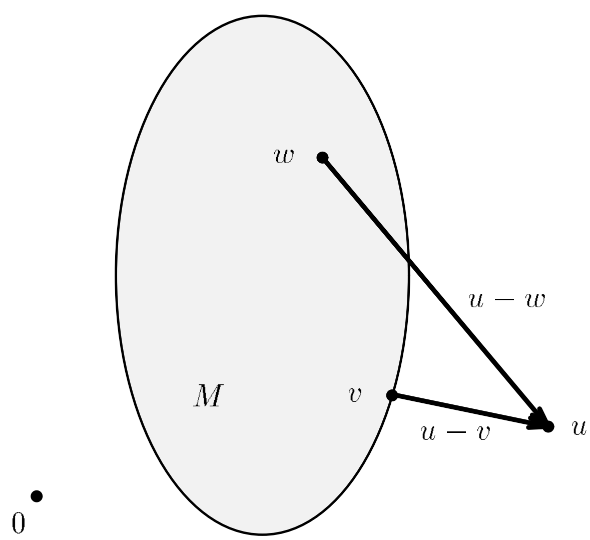
$$\|w_n - w_m\|^2 \leq 4(d+\varepsilon)^2 - 4d^2 = \varepsilon(8d + 4\varepsilon);$$

dette viser, at $\{w_n\}$ er en Cauchy følge. Da H er fuldstændigt, findes $v \in H$ så $w_n \to v$, og da M er afsluttet, må $v \in M$. Da $w_n \to v$, må $\|u - w_n\| \to \|u - v\|$, altså $\|u - v\| = d$, så v realiserer afstanden fra u til M.

Hvis v og v' er vektorer fra M med $\|u - v\| = \|u - v'\| = d$, må $\|\frac{1}{2}(v + v') - u\| \geq d$, da $\frac{1}{2}(v + v') \in M$. Ved hjælp af parallellogramloven fås

$$\begin{aligned}\|v - v'\|^2 &= \|v - u - (v' - u)\|^2 \\ &= 2\|v - u\|^2 + 2\|v' - u\|^2 - 4\|\tfrac{1}{2}(v + v') - u\|^2 \\ &= 4d^2 - 4\|\tfrac{1}{2}(v + v') - u\|^2 \leq 0\,,\end{aligned}$$

altså $v = v'$, hvilket viser entydighedsudsagnet. $\square$



Lad H være et Hilbert rum og M en delmængde, $M \subset H$, da er *ortogonalkomplementet* $M^\perp$ til M defineret som

$$M^\perp = \{\, w \in H \mid w \perp M \,\}.$$

Bemærk, at $M^\perp$ er et afsluttet underrum af H, da skalarproduktet er kontinuert.

Sætning 1.11 (Dekompositionssætningen). *Lad H være et Hilbert rum og X et afsluttet underrum. Da kan ethvert $u \in H$ på entydig måde skrives som $u = v + w$, hvor $v \in X$ og $w \in X^{\perp}$.*

Bevis. Lad $u \in H$. Af Lemma 1.10 fås, at der eksisterer et entydigt bestemt element $v \in X$ tættest ved u. Definer $w = u - v$, dvs. $u = v + w$. Vi vil vise, at $w \perp X$. Lad $x \in X \setminus \{0\}$ og $t \in \mathbb{R}$. Sættes $d = \|u - v\|$ $(= \|w\|)$, har vi, da $v + tx \in X$,

$$d^2 \leq \|u - (v + tx)\|^2 = \|w - tx\|^2 = d^2 - 2t\,\mathrm{Re}(w, x) + t^2\|x\|^2 \,.$$

Dette medfører at $-2t\ \mathrm{Re}(w, x) + t^2\|x\|^2 \geq 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, så andengrads-polynomiet $p(t) = \|x\|^2 t^2 - 2\,\mathrm{Re}(w, x)t$ må have $t = 0$ som dobbeltrod, og dermed må $\mathrm{Re}(w, x) = 0$. Da regningerne gælder for x erstattet med ix, sluttes, at også $\mathrm{Im}(w, x) = 0$; hvormed ialt, at $(w, x) = 0$. Da x var vilkårlig i $X \setminus \{0\}$, følger, at $w \in X^{\perp}$; og vi har dermed vist at u kan dekomponeres i en sum af to vektorer $v \in X$ og $w \in X^{\perp}$.

For at vise entydigheden af dekompositionen antager vi, at $u = v + w = v' + w'$; heraf følger at $v - v' = w' - w$, og da $v - v' \in X$ og $w' - w \in X^{\perp}$, som har fællesmængde $\{0\}$, sluttes at $v - v' = w' - w = 0$. $\square$

Vektoren v kaldes den ortogonale projektion af u på X. Dekompositionssætningen kaldes også projektionssætningen.

Dekompositionssætningen giver en naturlig isomorfi mellem $X \times X^{\perp}$ og H,

$$\{u, v\} \mapsto u + v \,.$$

Vi har altså, at $X + X^{\perp} = H$, og idet fremstillingen er entydig, siges H at være *direkte sum* af X og $X^{\perp}$; det udtrykkes i symboler ofte: $X \oplus X^{\perp} = H$.

1.2. Ortonormale baser og Parsevals ligning.

Som tidligere nævnt er et ortonormalsystem i et Hilbert rum H et system $\{e_i\}_{i \in I}$, hvor I er en indeksmængde og $(e_i, e_i) = 1$ for alle $i \in I$, $(e_i, e_j) = 0$ for alle i og $j \in I$ med $i \neq j$.

Et ortonormalsystem $\{e_i\}_{i \in I}$ kaldes en *ortonormal basis*, såfremt systemet er maksimalt, dvs. det kan ikke suppleres til et større ortonormalsystem. Et sådant system kaldes også et *fuldstændigt ortonormalsystem*.

Sætning 1.12. *Ethvert Hilbert rum $H \neq \{0\}$ har en ortonormal basis.*

Bevis. Vi benytter her nogle begreber fra mængdelære, som gennemgås i Mat 2AL. Mængden $\mathcal{C}$ af ortonormalsystemer i H er en partielt ordnet mængde med hensyn til ordning ved inklusion; den er også ikke-tom, for hvis $v \in$

$H \setminus \{0\}$, da er $\{v/\|v\|\}$ et ortonormalsystem. Lad $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ være en totalt ordnet delmængde af $\mathcal{C}$. Heraf følger, at $\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ er et ortonormalsystem, som indeholder hvert S_α, og som derfor er en majorant for $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Vi ser altså at enhver totalt ordnet delmængde af $\mathcal{C}$ har en majorant, og da følger det af Zorns lemma, at $\mathcal{C}$ har et maksimalt element. Et sådant er et ortonormalsystem, der ikke kan suppleres til et større ortonormalsystem. $\square$

Sætning 1.13. *Lad $\{e_i\}_{i\in I}$ være et ortonormalsystem i et Hilbert rum H, og lad $x \in H$. Der gælder:*

1° *Mængden $I(x) = \{\, i \in I \mid (x, e_i) \neq 0 \,\}$ er enten tom eller tællelig.*

2° *Lad $i_1, i_2, \ldots$ være en ordning af $I(x)$. Da er følgen $s_n = \sum_{j=1}^n (x, e_{i_j})e_{i_j}$, såvel som følgen $a_n = \sum_{j=1}^n |(x, e_{i_j})|^2$, konvergente for $n \to \infty$. Grænseværdierne er uafhængige af valget af ordning af $I(x)$ og betegnes*

$$\sum_{i\in I} (x, e_i)e_i\,, \ \textit{resp.} \ \sum_{i\in I} |(x, e_i)|^2,$$

og man har den generaliserede Bessel ulighed

$$\sum_{i\in I} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

(Hvis $I(x)$ er tom definerer vi $\sum_{i\in I}(x, e_i)e_i$ som nulvektoren 0.)

3° *$x - \sum_{i\in I}(x, e_i)e_i \perp e_{i'}$ for alle $i' \in I$.*

Bevis. Vi viser først 1°. For hvert $n \in \mathbb{N}$ betragter vi mængden

$$I_n(x) = \{\, i \in I \mid |(x, e_i)|^2 > \|x\|^2/n \,\}.$$

På grund af Bessels ulighed indeholder $I_n(x)$ højst $n-1$ elementer. Da $I(x) = \bigcup_{n=1}^\infty I_n(x)$, følger 1°.

Vi viser herefter 2° og 3°; de er oplagte når $I(x)$ er tom, så vi kan antage at $I(x) \neq \varnothing$. Hvis $I(x)$ er endelig, kan vi skrive $I(x) = \{i_1, \ldots, i_n\}$ og definere $\sum_{i\in I}(x, e_i)e_i$ til at være $\sum_{j=1}^n (x, e_{i_j})e_{i_j}$; den nævnte ulighed er Bessels ulighed, og der følger endvidere:

$$\begin{aligned}\left(x - \textstyle\sum_{j=1}^n (x, e_{i_j})e_{i_j}, e_{i'}\right) &= (x, e_{i'}) - \textstyle\sum_{j=1}^n (x, e_{i_j})(e_{i_j}, e_{i'}) \\ &= \begin{cases} (x, e_{i'}) - (x, e_{i'}) = 0 & \text{for } i' \in I(x) \\ 0 - 0 = 0 & \text{for } i' \in I \setminus I(x)\,. \end{cases}\end{aligned}$$

Endelig, hvis $I(x)$ er numerabel, vælger vi en ordning af $I(x)$

$$I(x) = \{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\}\,, \quad n \in \mathbb{N},$$

og sætter $s_n = \sum_{j=1}^{n}(x, e_{i_j})e_{i_j}$ for hvert n. Da $\sum_{j=1}^{n} |(x, e_{i_j})|^2 \le \|x\|^2$ for alle n, er rækken $\sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_{i_j})|^2$ konvergent med sum $\le \|x\|^2$; dette viser den generelle Bessel ulighed, som også gælder efter omordning, da det er en række med led ≥ 0.

For $m > n$ er

$$\|s_m - s_n\|^2 = \Big\| \sum_{j=n+1}^{m}(x, e_{i_j})e_{i_j} \Big\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |(x, e_{i_j})|^2 \,.$$

Dette medfører at $\{s_n\}$ er en Cauchy følge i H, og da rummet H er fuldstændigt, konvergerer s_n mod en vektor s, for hvilken altså $s = \sum_{j=1}^{\infty}(x, e_{i_j})e_{i_j}$. Vi definerer nu $\sum_{i \in I}(x, e_i)e_i = s$. På grund af kontinuiteten af det indre produkt fås

$$\begin{aligned}\Big(x - \sum_{i\in I}(x, e_i)e_i, e_{i'}\Big) &= (x - s, e_{i'}) = (x, e_{i'}) - (s, e_{i'}) \\ &= (x, e_{i'}) - (\lim s_n, e_{i'}) = (x, e_{i'}) - \lim (s_n, e_{i'}) \\ &= \begin{cases} (x, e_{i'}) - (x, e_{i'}) = 0 & \text{for } i' \in I(x) \\ 0 - 0 = 0 & \text{for } i' \in I \setminus I(x)\,. \end{cases}\end{aligned}$$

Lad os til slut vise, at definitionen af grænseværdien s er uafhængig af hvilken ordning der benyttes. Vi lader $\{k_1, k_2, \dots, k_n, \dots\}$ være en omordning af $I(x) = \{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots\}$ og sætter $s'_n = \sum_{j=1}^{n}(x, e_{k_j})e_{k_j}$. Analogt med det tidligere følger, at s'_n konvergerer mod en vektor s', og vi skal da vise, at $s = s'$.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet og lad $n_0 \in \mathbb{N}$ være valgt så stor, at der for $n \ge n_0$ gælder $\|s_n - s\| < \varepsilon$, $\|s'_n - s'\| < \varepsilon$, og $\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |(x, e_{i_j})|^2 < \varepsilon^2$. Der eksisterer $m_0 \in \mathbb{N}$ med $m_0 > n_0$ så at alle led i s_{n_0} findes med i s'_{m_0}, altså så at $\{e_{k_1}, \dots, e_{k_{m_0}}\} = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_0}}\} \cup \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ for en vis endelig indexmængde A, hvor $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \{e_{i_{n_0+1}}, e_{i_{n_0+2}}, \dots\}$. Så er $s'_{m_0} - s_{n_0} = \sum_{\alpha \in A}(x, e_\alpha)e_\alpha$, med

$$\|s'_{m_0} - s_{n_0}\|^2 \le \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |(x, e_{i_j})|^2 < \varepsilon^2 \,,$$

så $\|s'_{m_0} - s_{n_0}\| < \varepsilon$, og

$$\|s' - s\| \le \|s' - s'_{m_0}\| + \|s'_{m_0} - s_{n_0}\| + \|s_{n_0} - s\| < 3\varepsilon \,.$$

Da $\varepsilon > 0$ var vilkårlig, følger at $s' = s$. $\square$

Ortonormalsystemer er særligt interessante, hvis de er maksimale, hvilket følgende sætning demonstrerer.

Sætning 1.14. *Lad H være et Hilbert rum og lad $\{e_i\}_{i\in I}$ være et ortonormalsystem i H. Da er følgende fire udsagn ækvivalente:*

(1) *$\{e_i\}$ er maksimalt (også kaldet fuldstændigt).*
(2) *Når $x \in H$ og $x \perp e_i$ for alle $i \in I$, så er $x = 0$.*
(3) *For ethvert $x \in H$ gælder $x = \sum_{i\in I}(x, e_i)e_i$.*
(4) *For ethvert $x \in H$ gælder* Parsevals ligning*:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |(x, e_i)|^2.$$

Bevis.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Hvis (2) ikke er sand, eksisterer der en vektor $x \neq 0$, så at $x \perp \{\, e_i \mid i \in I \,\}$. Lad os definere e ved $e = x/\|x\|$, så har vi at $\{e_i\}_{i\in I} \cup \{e\}$ er et ortonormalsystem, som indeholder $\{e_i\}_{i\in I}$ som en ægte delmængde. Dette modsiger maksimaliteten af $\{e_i\}_{i\in I}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Af Sætning 1.13 følger, at $x - \sum_{i\in I}(x, e_i)e_i \perp e_{i'}$ for alle $i' \in I$, så (2) medfører at $x = \sum_{i\in I}(x, e_i)e_i$.

(3) $\Longrightarrow$ (4). Idet $I(x)$ og en ordning (i_j) defineres som i Sætning 1.13, får vi ved brug af Bessels approksimationssætning med $v = 0$, for hvert n:

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|x - \textstyle\sum_{j=1}^{n}(x, e_{i_j})e_{i_j}\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \|(x, e_{i_j})e_{i_j}\|^2 \\ &= \|x - \textstyle\sum_{j=1}^{n}(x, e_{i_j})e_{i_j}\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |(x, e_{i_j})|^2;\end{aligned}$$

her går det første led mod 0 ifølge (3), og dermed det andet led mod $\|x\|^2$, for $n \to \infty$. Altså er $\|x\|^2 = \sum_j |(x, e_{i_j})|^2$. (Når $I(x)$ har endeligt mange elementer, tages blot $n =$ antallet, og første led ovenfor er 0.)

(4) $\Longrightarrow$ (1). Hvis $\{e_i\}_{i\in I}$ ikke er maksimal, da er det en ægte delmængde af et ortonormalsystem $\{e_i\}_{i\in I} \cup \{e\}$. Da $e \perp e_i$ for $i \in I$ og $\|e\| = 1$, er Parsevals ligning ikke opfyldt for $x = e$. $\square$

Lad $\{e_i\}_{i\in I}$ være en ortonormal basis for Hilbert rummet H og x en vilkårlig vektor i H. Da kaldes tallene (x, e_i) *Fourierkoefficienterne* (eller ortogonalkoefficienterne) for x, og udtrykket $x = \sum_{i\in I}(x, e_i)e_i$ kaldes *Fourierrækken* eller ortogonaludviklingen for x.

Vi vil nu beskrive en metode til at konstruere et ortonormalsystem ud fra en vilkårlig følge af lineært uafhængige vektorer.

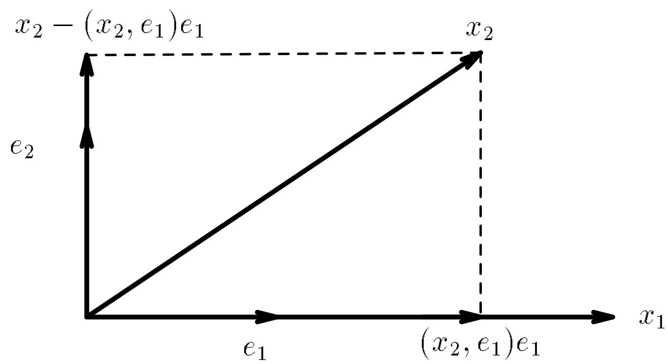
Sætning 1.15 (Gram–Schmidt ortonormalisering). *Givet et lineært uafhængigt system $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ i et Hilbert rum H. Ved proceduren:*

$$\begin{array}{lll} e_1 & \textit{fås ved normering af} & x_1, \ \textit{dvs. } e_1 = x_1/\|x_1\|, \\ e_2 & \textit{fås ved normering af} & x_2 - (x_2, e_1)e_1, \\ \vdots & & \\ e_n & \textit{fås ved normering af} & x_n - \sum_{i=1}^{n-1}(x_n, e_i)e_i\,, \\ \vdots & & \end{array}$$

defineres et ortonormalsystem med følgende egenskab: Idet man sætter $U_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, gælder for alle $n \in \mathbb{N}$, at

$$\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\} = U_n. \tag{P$_n$}$$

Dermed gælder tillige, at $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *udspænder det samme underrum som* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.



Bevis. Følgen $e_1, e_2, \dots$ er ortonormal, da hver af vektorerne er normeret og ortogonal på alle de foregående. Vi skal vise (P_n).

Beviset føres ved induktion. Det er klart at (P_1) gælder. Idet vi antager (P_n), skal vi vise (P_{n+1}).

For vilkårlige λ_i, $i = 1, \dots, n$, er $x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \neq 0$, idet $x_{n+1} \notin U_n = \mathrm{span}\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$ (jvf. (P_n)). Endvidere gælder

$$\mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n, (x_{n+1} - \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i)\} = \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_{n+1}\} = U_{n+1}\,,$$

idet hver af vektorerne $e_1, \dots, e_n, (x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i)$ er en linearkombination af $x_1, \dots, x_{n+1}$, og omvendt. Udsagnet gælder stadig hvis $x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ erstattes af den normerede vektor.

Med $\lambda_i = (x_{n+1}, e_i)$ for $i = 1, \dots, n$, opnås at $x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ er ortogonal på $e_1, \dots, e_n$. Altså er $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ ortonormal, og (P_{n+1}) er vist. $\square$

Jørgen P. Gram (1850–1916) var en dansk matematiker og aktuar, Erhard Schmidt (1876–1959) en tysk matematiker.

På side I 2.5 indførtes begrebet *separabelt metrisk rum.* Man kan vise, at et Hilbert rum er separabelt hvis og kun hvis der eksisterer en tællelig ortonormal basis; dette gælder for de fleste Hilbert rum som forekommer i praksis.

Lad H være et Hilbert rum med en numerabel ortonormal basis $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. (Overvejelserne i det følgende kan let generaliseres til baser med vilkårlig indeksmængde I, se Bemærkning 1.17 til sidst.) Den generaliserede Bessel ulighed (Sætning 1.13) viser, at når $x \in H$, er følgen $\{(x, e_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ i $\ell_2(\mathbb{N})$, jvf. Eksempel 1.9. Lad os betragte afbildningen

$$U\colon x \mapsto \{(x, e_i)\}_{i\in\mathbb{N}},$$

så er U altså en afbildning (man siger også: operator) fra H til $\ell_2(\mathbb{N})$. Denne operator er oplagt lineær, og det følger af Bessels ulighed, at den har norm ≤ 1. Parsevals ligning i Sætning 1.14 viser tilmed, at U er en *isometri.* Vi vil nu vise, at den er surjektiv, altså at der gælder følgende:

Sætning 1.16. *Lad H være et Hilbert rum med en ortonormal basis $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Operatoren*

$$U\colon x \mapsto \{(x, e_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$$

er en **isometrisk isomorfi** *af H på $\ell_2(\mathbb{N})$.*

Bevis. Som allerede nævnt, viser Parsevals ligning, at U er isometrisk. Da $\ell_2(\mathbb{N})$ er fuldstændigt, giver Sætning I 5.6 og I 5.3, at billedmængden $U(H)$ er afsluttet i $\ell_2(\mathbb{N})$.

Lad $\mathcal{M}_0$ betegne mængden af følger $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ hvor kun endeligt mange a_i er forskellige fra 0; det er oplagt, at $\mathcal{M}_0$ et et lineært underrum af $\ell_2(\mathbb{N})$. Endvidere er $\mathcal{M}_0$ *tæt i* $\ell_2(\mathbb{N})$, da der for et vilkårligt $a = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ gælder, at følgen $a^{(N)} = \{a_1, a_2, \dots, a_N, 0, 0, \dots\}$ konvergerer mod a i $\ell_2(\mathbb{N})$ for $N \to \infty$ (idet $\|a - a^{(N)}\|_{\ell_2}^2 = \sum_{i>N} |a_i|^2 \to 0$ for $N \to \infty$).

Bemærk nu, at $\mathcal{M}_0 \subset U(H)$. For til et givet $\{a_1, a_2, \dots, a_m, 0, \dots\}$ i $\mathcal{M}_0$ kan vi knytte $x = \sum_{i=1}^m a_i e_i$; så er $x \in H$, og Ux ses ved efterprøvning at være $= \{a_1, a_2, \dots, a_m, 0, \dots\}$. Da billedmængden for U altså er både tæt og afsluttet i $\ell_2(\mathbb{N})$, må den være hele rummet, hvormed U er surjektiv. $\square$

En isometrisk isomorfi mellem to Hilbert rum kaldes også en *unitær operator.* Mere om sådanne operatorer findes i §3.2. Den der anførte Sætning 3.7 er allerede vist i ovenstående sætning, ved et bevis der ikke kræver viden om adjungerede til unitære operatorer.

For U^{-1} har vi ifølge Sætning 1.16 samt formlen $x = \sum_{i\in\mathbb{N}}(x, e_i)e_i$, at U^{-1} er afbildningen

$$U^{-1}\colon \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i e_i, \quad \text{for } \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}).$$

Sætningen viser, at ethvert element $a = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ *antages* som Ux for et $x \in H$, og så er $a_i = (x, e_i)$, og summen $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i e_i$ er veldefineret. (Man kan også vise direkte, ved argumenter som i beviset for Sætning 1.13, at når $a = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$, er $s_N = \sum_{i=1}^N a_i e_i$ en Cauchy følge i H, og grænseværdien x opfylder $a = Ux$.)

$\mathbb{N}$ kan let erstattes med andre tællelige indeksmængder, f.eks. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^k$ eller delmængder $\mathbb{M}$ deraf. Bemærk, at Sætning 1.13 viser, at

$$\sum_{i\in\mathbb{M}}(x, e_i)e_i = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^N (x, e_{i_j})e_{i_j},$$

uanset hvilken ordning af $\mathbb{M}$ som en følge $\{i_1, i_2, \dots\}$, der anvendes. ("Summationsrækkefølgen er ligegyldig.")

Bemærkning 1.17*.* Ovenstående betragtninger gælder også, når $\mathbb{N}$ erstattes med en ikke nødvendigvis tællelig indeksmængde I. Vi skal da blot gøre os nogle overvejelser om rummet $\ell_2(I)$. Det består, jvf. II §4.6 og II Eks. 7.13b, af funktioner $a\colon I \to \mathbb{C}$, gerne skrevet $a = \{a_i\}_{i\in I}$ (med $a_i \in \mathbb{C}$), så at funktionen $|a|^2$ er integrabel med hensyn til tællemålet, dvs. $\sum_{i\in I} |a_i|^2 < \infty$ (man sætter da $\|a\|_{\ell_2(I)} = (\sum_{i\in I} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$). Nu viser man ved en overvejelse som i Sætning 1.13, at når $a = \{a_i\}_{i\in I} \in \ell_2(I)$, er *højst tælleligt mange* $a_i \neq 0$. Hvis disse ordnes som $\{a_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ (eller med $\mathbb{N}$ erstattet af en delmængde), gælder, at $a^{(N)} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_N}, 0, \dots\}$ konvergerer mod a i $\ell_2(I)$ for $N \to \infty$. Der gælder altså som i sætningens bevis, at $\mathcal{M}_0(I)$ *er tæt i* $\ell_2(I)$, hvor $\mathcal{M}_0(I)$ består af de elementer $\{a_i\}_{i\in I}$ hvor kun endeligt mange a_i er $\neq 0$.

Som ovenfor indser man, at $U\colon x \mapsto \{(x, e_i)\}_{i\in I}$ er en isometrisk lineær afbildning, at billedrummet $U(H)$ er afsluttet, og at $\mathcal{M}_0(I) \subset U(H)$. Så giver tætheden af $\mathcal{M}_0(I)$ i $\ell_2(I)$, at U er surjektiv, og dermed en isometrisk isomorfi af H på $\ell_2(I)$. Inversen U^{-1} sender $a = \{a_i\}_{i\in I} \in \ell_2(I)$ over i $\sum_{i\in I} a_i e_i$.

Opgaver til §1.

1.1. Betragt det endelig dimensionale komplekse Hilbert rum $H = \mathbb{C}^n$, med det hermitiske skalarprodukt $(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i$, hvor $u = (u_1, \dots, u_n)$ og $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ (Eksempel 1.2). Vis, at når vi definerer $e^{(i)}$ ved $e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)$, $e^{(2)} = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ... , $e^{(n)} = (0, 0, \dots, 1)$, så er $\{e^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ en ortonormal basis for H.

1.2. Vis, at $\{\sin n\theta\}_{n\in\mathbb{N}}$ udgør et ortogonalsystem i $L_2([0, \pi])$.

1.3. Lad os definere polynomier $p_0(x), p_1(x), \dots$ ved at kræve, at $p_n(x)$ er et polynomium af grad n i en variabel, koefficienten for x^n er 1 og $\{p_n\}$ er et ortogonalsystem i $L_2([0, 1])$. Find $p_0(x), p_1(x)$ og $p_2(x)$.

1.4. Lad V være et indre produkt rum. Vis, at det indre produkt kan udvides til fuldstændiggørelsen $\widehat{V}$, og at $\widehat{V}$ også er et indre produkt rum. (Jvf. Opg. I 5.2.)

1.5. Bestem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$, således at

$$\int_0^{\pi} \left| \cos\theta - \textstyle\sum_{n=1}^{3} a_n \sin n\theta \right|^2 d\theta \,,$$

får den mindst mulige værdi.

1.6. Vis, at $\{\sin(n - \frac{1}{2})\theta\}_{n\in\mathbb{N}}$ udgør et ortogonalsystem i $L_2([0, \pi])$.

1.7. Vis, at det indre produkt kan fås fra normen gennem *polariseringsidentiteten*

$$(u, v) = \frac{1}{4}\left[(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) + i(\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2)\right].$$

1.8. Lad X være et underrum af et Hilbert rum H. Vis, at $X^{\perp}$, ortogonalkomplementet til X, er et afsluttet underrum, og at $(X^{\perp})^{\perp}$ er afslutningen af X (også betegnet $\overline{X}$).

1.9. Vis, at $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \log\theta \sin n\theta d\theta = 0$.
(*Vink.* Dette kan fås som et korollar til Bessels ulighed, i forbindelse med ortogonalsystemet i Opg. 1.2.)

1.10. Lad $\{e_i\}_{i\in I}$ være en ortonormal basis for Hilbert rummet H. Vis at følgende generalisering af Parsevals ligning gælder, for alle $x, y \in H$:

$$\sum_{i\in I}(x, e_i)\overline{(y, e_i)} = (x, y)\,.$$

1.11. Lad H være et Hilbert rum og $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en ortonormal basis for H. Antag, at $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er et ortonormalt system i H som opfylder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < \infty\,.$$

Undersøg om $\{f_n\}$ er en ortonormal basis for H.
(*Vink.* Vis, at

$$|(e_j - f_j\,,\, e_i)| = |(e_i - f_i\,,\, f_j)|,$$

for alle i og j. Udnyt dette til at vise, at

$$\sum_j |(e_i - f_i\,,\, f_j)|^2 = \|e_i - f_i\|^2$$

for alle i, og slut heraf, at

$$\sum_j (e_i - f_i\,,\, f_j) f_j = e_i - f_i \quad \text{for alle } i\,.)$$

Bemærkning. Yderligere oplysninger kan findes i en artikel af N. Tsao: "Approximate bases in a Hilbert space" Amer. Math. Monthly **75** (1968) s. 750.

1.12. Lad V betegne vektorrummet af komplekse følger $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ som er 0 fra et vist trin. Definer $(\cdot\,,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ ved

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n\,.$$

(a) Gør rede for at V er et vektorrum og at $(\cdot\,,\cdot)$ er et indre produkt på V.
(b) Lad $\|\cdot\|$ betegne normen i V, som induceres af $(\cdot\,,\cdot)$ og sæt

$$M = \{\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \sum_{n=1}^{\infty} z_n \frac{1}{n} = 0\}\,.$$

Vis, at M er et afsluttet underrum af $(V, \|\cdot\|)$, og at $M \oplus M^{\perp} \neq V$.
(c) I forbindelse med dekompositionssætningen vises det, at hvis H er et Hilbert rum og X er et afsluttet underrum af H, så vil

$$H = X \oplus X^{\perp}\,.$$

Undersøg, om dette resultat er sandt i et indre produkt rum.

1.13. Sæt

$$V = \{\, f \in C([0,1]) \mid f(1) = 0\,\},$$
$$M = \{f \in V \mid \int_0^1 x f(x)dx = 1\}\,.$$

Vis, at

1° $(V, \|\cdot\|_u)$ er et Banach rum.
2° M er en afsluttet, konveks og ikke tom delmængde.
3° For alle $\varphi \in M$ gælder at

$$\|\varphi\| > \inf\{\, \|f - 0\|_u \mid f \in M\,\}\,.$$

Lad H være et Hilbert rum, M en afsluttet, konveks, ikke tom delmængde af G, og $u \in H$. Så findes ifølge Lemma 1.10 en entydigt bestemt vektor $v \in M$ tættest ved u. Undersøg, om dette resultat gælder i et Banach rum.

1.14. Lad H være et Hilbert rum, og $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en ortonormal basis for H. Antag, at $A : H \to H$ er lineær, og at

$$\sum_n \|A\, e_n\| < \infty\,.$$

Undersøg, om A er kontinuert.

1.15. DEN GENERALISEREDE POLARISERINGSIDENTITET.
Lad H være et Hilbert rum over $\mathbb{C}$.
Antag $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, $a^n = 1$ og $a^2 \neq 1$. Vis, at

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|x + a^k y\|^2\, a^k\,.$$

1.16. Et ikke-separabelt Hilbert rum.

Lad E betegne vektorrummet over $\mathbb{C}$ af alle reelle funktioner f af formen

$$f(t) = a_1\, e^{ib_1 t} + \cdots + a_n\, e^{ib_n t}, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{$*$}$$

hvor $n \in \mathbb{N}$ og $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

Vis, at

$$(f, g) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M} \int_{-M}^{M} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

eksisterer og er et indre produkt på E. Vis, at hvis f er som i $(*)$, så vil

$$\|f\|^2 = (f, f) = |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2\,.$$

Vis endelig, at fuldstændiggørelsen af E er et ikke-separabelt Hilbert rum.

1.17. Lad m være restriktionen af Lebesgue målet til

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}\,.$$

Vis, at $1, z, z^2, \ldots$ er ortogonale vektorer i $L_2(D_1, m)$. Bestem $\|z^n\|$. Lad $e_n = \dfrac{z^n}{\|z^n\|}$. Undersøg, om $\{e_0, e_1, \ldots\}$ er en ortonormal basis for $L_2(D_1, m)$.

1.18. Lad V være et normeret komplekst vektorrum, dvs. et komplekst vektorrum med en norm $\|\cdot\|$ som opfylder

1) $\|u\| \ge 0$; og $\|u\| = 0 \iff u = 0$;
2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$;
3) $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$;

når $u, v \in V$ og $\alpha \in \mathbb{C}$. Vis at V er et indre produkt rum, hvis normen $\|\cdot\|$ opfylder parallellogramloven

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2\,.$$

(*Vink.* Benyt polariseringsidentiteten (jvf. Opg. 1.7) til definition af et indre produkt, som skal vises at opfylde Definition 1.1. Eftervis først (S i) og (S iv), og dernæst (S ii) (tag realdelen først); slut heraf (S iii) for rationale α og benyt kontinuiteten af normen.)

Opgave 1.19. Lad H være et uendeligdimensionalt Hilbert rum.

1° Vis, at hvis H har en numerabel ortonormal basis, så er H separabelt (dvs. der findes en overalt tæt, tællelig delmængde).

2° Vis, at hvis H er separabelt, så findes en lineært uafhængig følge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, så at $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ er tæt i H. Vis ved Gram-Schmidt ortonormalisering, at H har en numerabel ortonormal basis.

§2. Fourierrækker i en variabel

I Kapitel II §7 blev der indført, dels funktionsrummene $\mathcal{L}_p(X,\mu)$ (mere udførligt skrevet $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$), dels rummene $L_p(X,\mu)$, der fås af $\mathcal{L}_p(X,\mu)$ ved at funktioner der er ens n.o. identificeres med hinanden. Her har L_p rummene den fordel, at $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ i disse rum, og de er Banach rum (specielt er L_2 rummene Hilbert rum, jvf. Eksempel 1.9). Vi kan anskue elementerne af $L_p(X,\mu)$ som funktioner der er fastlagt n.o. (ved detaljerede formuleringer kan man evt. henføre til repræsentanter for ækvivalensklasser).

Også for underrum af $\mathcal{L}_p(X,\mu)$ bestående af "pænere" funktioner har det interesse at betragte tilsvarende underrum af $L_p(X,\mu)$. For eksempel, når M er et kompakt interval $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_k,b_k]$ af $\mathbb{R}^k$, er de kontinuerte funktioner på M jo p-integrable m.h.t. Lebesgue målet, dvs. $C(M)$ er et underrum af $\mathcal{L}_p(M,m_k)$. Ved underrummet $C(M)$ af $L_p(M,m_k)$ forstår vi nu rummet af ækvivalensklasser $[f]\in L_p(M,m_k)$ der har en repræsentant $f\in C(M)$. (Bemærk, at der kun er én kontinuert repræsentant i hver ækvivalensklasse. Vi undlader altså at indføre en ny betegnelse, idet det vil fremgå af sammenhængen hvad der menes.) På lignende måde kan f.eks. mængden af stykkevis kontinuerte funktioner på $[a,b]$ opfattes som et underrum af $L_p([a,b])$; herved identificeres naturligt de funktioner der kun afviger fra hinanden ved værdien i eventuelle diskontinuitetspunkter.

Når vi i det følgende udtaler at et element af $L_p(M,m_k)$ er kontinuert, mener vi altså: det har en kontinuert repræsentant. Når vi udfører beregninger med sådanne elementer, er det i reglen underforstået, at den kontinuerte repræsentant benyttes. — Tilsvarende konventioner gælder for begreberne differentiabel, stykkevis kontinuert, osv. Se også slutningen af II §7.5.

2.1. Funktionsrum over $\mathbb{T}$.

I teorien for Fourierrækker i en variabel betragtes periodiske funktioner $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ som har periode 2π, dvs. $f(\theta)=f(\theta+2\pi)$ for alle $\theta\in\mathbb{R}$.

Funktionerne f på $\mathbb{R}$ med periode 2π kan identificeres med funktionerne f på $[-\pi,\pi]$ der opfylder $f(-\pi)=f(\pi)$ (idet de sidstnævnte forlænges til $\mathbb{R}$ så de får periode 2π); vi benytter denne identifikation til at indføre normer og skalarprodukter på rum af periodiske funktioner. Et hvilket som helst andet interval af $\mathbb{R}$ af længde 2π kan også anvendes.

En anden mulighed er at identificere funktionerne på $\mathbb{R}$ med periode 2π med funktionerne på kvotientgruppen $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, der består af ækvivalensklasserne defineret ved ækvivalensrelationen

$$\theta_1\sim\theta_2 \iff \exists n\in\mathbb{Z}:\ \theta_2-\theta_1=n\cdot 2\pi\,.$$

Disse klasser er netop originalmængderne til de enkelte punkter på enhedscirklen $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ i $\mathbb{C}$ ved afbildningen $\theta \mapsto e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, og en funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode 2π, kan derfor tillige identificeres med en funktion $\varphi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ via

$$f(\theta) = \varphi(e^{i\theta})\,.$$

Dette synspunkt er bekvemt, når man ikke ønsker at knytte definitionen til et bestemt interval (såsom $[-\pi, \pi]$), f.eks. ved definition af foldning (se Opg. 2.7–8). $\mathbb{T}$ står for "torus", idet cirklen er den endimensionale torus; i §4 ser vi generelt på den k-dimensionale torus $\mathbb{T}^k$ for $k \geq 1$.

Med $C(\mathbb{T})$ betegner vi mængden af kontinuerte funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, som er periodiske med periode 2π. Da denne kan identificeres med mængden af kontinuerte funktioner f på $[-\pi, \pi]$ med $f(-\pi) = f(\pi)$, og dette er et Banach rum med sup-normen $\|f\|_u = \sup_\theta |f(\theta)|$, er $C(\mathbb{T})$ et Banach rum med sup-normen.

Lad $p \in [1, \infty[$. Med $\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ betegner vi mængden af Borel funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som er periodiske med periode 2π, og for hvilke

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p \, d\theta < \infty\,;$$

her sætter vi

$$\|f\|_p = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p \, d\theta\Big)^{1/p}.$$

Bemærk, at $\|f\|_p = \big(\frac{1}{2\pi}\int_I |f(\theta)|^p \, d\theta\big)^{1/p}$ for ethvert interval I af længde 2π. Her kan $\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ identificeres med funktionsrummet $\mathcal{L}_p([-\pi, \pi[\,, \frac{1}{2\pi} m_1)$, hvor funktionerne i sidstnævnte rum blot forlænges til periodiske funktioner på $\mathbb{R}$; så en lang række sætninger fra Kapitel II overføres umiddelbart til rummene $\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$. For eksempel gælder Lebesgues sætning for $\mathcal{L}_p$-rum og Hölders ulighed; og når $p > 1$ er $\mathcal{L}_p(\mathbb{T}) \subset \mathcal{L}_1(\mathbb{T})$ med $\|f\|_p \geq \|f\|_1$, jvf. Sætning II 7.11.

Funktionsrummet $\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ går for hvert $1 \leq p < \infty$ over i et Banach rum $L_p(\mathbb{T})$, når funktionerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen

$$f \sim g \iff \|f - g\|_p = 0\,,$$

se side II 7.9. Man definerer på lignende måde $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{T})$ og $L_\infty(\mathbb{T})$, jvf. II §7.5.

Banach rummet $L_2(\mathbb{T})$ er specielt et Hilbert rum med indre produkt givet ved

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)} d\theta\,.$$

Som i de indledende bemærkninger kan vi opfatte $C(\mathbb{T})$ som et underrum af rummene $L_p(\mathbb{T})$, idet et element af $L_p(\mathbb{T})$ siges at tilhøre $C(\mathbb{T})$ når det har en repræsentant i $C(\mathbb{T})$. Herefter vil de fleste resultater blive formuleret direkte for L_p rummene, idet det overlades til læseren at formulere den tilsvarende konklusion for $\mathcal{L}_p$ rummene.

Systemet $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ af funktioner

$$e_n(\theta) = e^{in\theta},\ n \in \mathbb{Z},$$

er et ortonormalsystem i $L_2(\mathbb{T})$, thi

$$\begin{aligned}
(e_n, e_n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-n)\theta}\ d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\ d\theta = 1,\ \text{ for } n \in \mathbb{Z},\\
(e_n, e_m) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi i(n-m)}\left(e^{i\pi(n-m)} - e^{-i\pi(n-m)}\right) = 0\ \text{ for } n \neq m.
\end{aligned}$$

(Det er for at undgå normeringsfaktorer her, at vi har indbygget $\frac{1}{2\pi}$ i målet.)

Fourierrækken hørende til dette ortonormalsystem kaldes den trigonometriske Fourierrække, og den vil nu blive studeret i detaljer. Vi viser senere (Sætning 2.10), at ortonormalsystemet $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ er fuldstændigt i $L_2(\mathbb{T})$, dvs. er en basis for $L_2(\mathbb{T})$.

2.2. Fourierrækken for en funktion $f \in L_1(\mathbb{T})$.

Lad $f \in L_1(\mathbb{T})$, og betragt følgende række

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\, e^{in\theta} + c_{-n}\, e^{-in\theta}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{in\theta}\,,$$

$$\text{hvor } c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma)e^{-in\sigma}\ d\sigma\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Denne række kaldes den *trigonometriske Fourierrække* hørende til f. Udtrykket for *Fourierkoefficienterne* $c_n(f)$ har mening for alle $f \in L_1(\mathbb{T})$, men rækken er ikke altid konvergent i simpel forstand (f.eks. med punktvis konvergens). Vi skriver

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{in\theta}\,.$$

På den anden side kan man helt generelt betragte trigonometriske rækker af formen $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{in\theta}$, hvor $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ er et sæt komplekse tal. En sådan række kan godt være konvergent for alle $\theta \in \mathbb{R}$ med sum $f(\theta)$, uden at f endda tilhører $L_1(\mathbb{T})$.

Vores mål er at finde tilstrækkelige betingelser på f, for at Fourierrækken hørende til f konvergerer mod f i passende forstand (f.eks. punktvis konvergens, uniform konvergens, eller konvergens i et af de andre funktionsrum vi betragter).

Vi bruger i reglen følgen $s_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}$ som afsnitsfølge, hvilket svarer til den første skrivemåde ovenfor, eller til at ordne $\mathbb{Z}$ i rækkefølgen $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ For konvergens af ortogonalrækker i Hilbert rum er det jo ligegyldigt hvilken ordning der vælges, jvf. Sætning 1.13, og dette gælder også for de andre konvergensbegreber hvis der er absolut konvergens. Hvis absolut konvergens ikke er sikret, er konvergensen bundet til valget af afsnitsfølge (det gælder for Sætning 2.1 og 2.3 nedenfor).

Sætning 2.1. *Hvis rækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$ er uniformt konvergent, med sum f, da er $f \in C(\mathbb{T})$ og*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta\,.$$

Bevis. Da leddene i rækken tilhører $C(\mathbb{T})$, er $f \in C(\mathbb{T})$. For hvert n fremkommer ved multiplikation med funktionen $e^{-in\theta}$, som har numerisk værdi 1, en ny uniformt konvergent række:

$$f(\theta)e^{-in\theta} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\; e^{i(m-n)\theta}.$$

Her er ledvis integration tilladt, det giver at

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(e^{im\theta}, e^{in\theta}) = c_n\,. \qquad \square$$

Fourierrækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{in\theta}$ kan også skrives

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\,,\ \text{hvor}$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta\,,\ \text{for } n\in\mathbb{N}_0,$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta\,,\ \text{for } n\in\mathbb{N};$$

hvilket følger direkte af Eulers formler. Denne formulering benyttes specielt, når f er reel, og man ønsker en rækkeudvikling med reelle led. Systemet

$$\{\sqrt{2}\sin n\theta\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\sqrt{2}\cos n\theta\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{1\}$$

er et reelt ortonormalsystem i $L_2(\mathbb{T})$. Sinus og cosinus systemerne kan benyttes hver for sig på intervallet $[0,\pi]$, jvf. Opg. 2.9 og 2.10; der er en systematisk fremstilling i Kap. V §1.4.

2.3. Riemann-Lebesgues lemma.

Idet funktionerne $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ udgør et ortonormalsystem i Hilbert rummet $L_2(\mathbb{T})$, er Fourierkoefficienterne hørende til $f \in L_2(\mathbb{T})$ ($\subset L_1(\mathbb{T})$)

$$c_n(f) = (f, e^{in\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta\,;$$

og der gælder ifølge Bessels ulighed (Sætning 1.13), at

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \le \|f\|_2^2\,.$$

Specielt følger, at $c_n(f) \to 0\,,\ n \to \pm\infty$.

Vi vil nu vise, at dette endda gælder for $f \in L_1(\mathbb{T})$.

Sætning 2.2 (Riemann-Lebesgues lemma). *For enhver $f \in L_1(\mathbb{T})$ gælder, at $c_n(f) \to 0$ for $n \to \pm\infty$.*

Bevis. Vi viser først, at $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ ligger tæt i $\mathcal{L}_1(\mathbb{T})$. Dette ses f.eks. af, at når $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{T})$, er funktionerne (med $N \in \mathbb{N}$)

$$f_N(\theta) = \begin{cases} f(\theta) & \text{for } |f(\theta)| \le N \\ 0 & \text{for } |f(\theta)| > N\,, \end{cases}$$

i $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ (da de er begrænsede og målelige), og $f_N \to f$ i $\mathcal{L}_1(\mathbb{T})$ for $N \to \infty$ ved Lebesgues majorantsætning. Så er også $L_2(\mathbb{T})$ tæt i $L_1(\mathbb{T})$.

Lad $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{T})$. Til et givet $\varepsilon > 0$ vælges N så stort, at $\|f - f_N\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $f_N \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, eksisterer et n_0, så at $|c_n(f_N)| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $|n| > n_0$. Da er

$$\begin{aligned} |c_n(f)| = |c_n(f - f_N + f_N)| \le |c_n(f - f_N)| + |c_n(f_N)| \\ \le \|f - f_N\|_1 + |c_n(f_N)| < \varepsilon \end{aligned}$$

for $|n| > n_0$, og dette viser det ønskede. $\square$

2.4. Punktvis konvergens.

I dette afsnit betragtes en bestemt funktion $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{T})$, ikke blot en ækvivalensklasse.

Lad s_n være det n'te afsnit af Fourierrækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\theta}$ for $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{T})$, dvs.

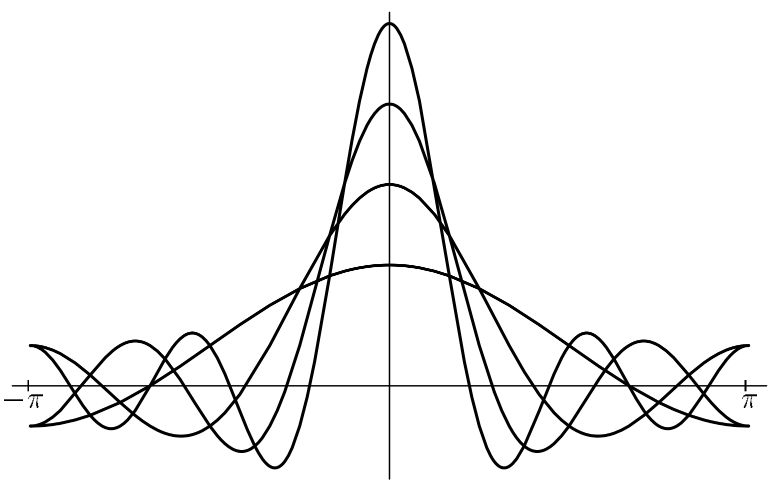
$$s_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ik\theta}\,.$$

Indsættes udtrykket for Fourierkoefficienterne får vi

$$s_n(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(\theta-\sigma)}f(\sigma)d\sigma \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(\theta-\sigma)f(\sigma)d\sigma\,,$$

hvor $\mathcal{D}_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$ kaldes den n'te *Dirichlet kerne.* Det følger af periodiciteten af $\mathcal{D}_n$ og f, at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(\theta-\sigma)f(\sigma)d\sigma = \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} \mathcal{D}_n(\sigma)f(\theta-\sigma)d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(\sigma)f(\theta-\sigma)d\sigma\,.$$



Den n'te Dirichlet kerne for $n = 1, \ldots, 4$.

Lad os studere $\mathcal{D}_n(\theta)$ lidt nærmere. Ved brug af Eulers formler fås, for $e^{i\theta} \neq 1$, dvs. for $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_n(\theta) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta} = e^{-in\theta}\sum_{k=0}^{2n} e^{ik\theta} = e^{-in\theta}\frac{e^{i(2n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\\ &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}-e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{i\frac{1}{2}\theta}-e^{-i\frac{1}{2}\theta}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\,.\end{aligned}$$

Det oprindelige udtryk for $\mathcal{D}_n(\theta)$ er veldefineret også for $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, dette stemmer med at $\sin(n+\frac{1}{2})\theta/\sin\frac{1}{2}\theta$ har en hævelig singularitet i hvert af punkterne $2\pi p$, $p \in \mathbb{Z}$.

Sætning 2.3 (Dini's Test (1880)**).** *En tilstrækkelig betingelse for, at Fourierrækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{in\theta}$ for en funktion $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{T})$ er konvergent i punktet $\theta \in \mathbb{R}$ med sum $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{in\theta} = s$ (dvs. $s - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta} \to 0$ for $n \to \infty$), er at*

$$\int_0^\delta \frac{|f(\theta+\sigma)+f(\theta-\sigma)-2s|}{\sigma} d\sigma < \infty\,, \tag{$*$}$$

for et $\delta > 0$.

Bevis. Idet $\mathcal{D}_n$ er en lige funktion, har vi

$$\begin{aligned} s_n(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(\theta-\sigma)\mathcal{D}_n(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(\theta-\sigma)\mathcal{D}_n(\sigma)d\sigma\,,\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(\theta+\sigma)+f(\theta-\sigma))\mathcal{D}_n(\sigma)d\sigma\,, \end{aligned}$$

og da $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(\sigma)d\sigma = 1$, følger

$$\begin{aligned} s_n(\theta) - s &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(\theta+\sigma)+f(\theta-\sigma)-2s)\mathcal{D}_n(\sigma)d\sigma\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f(\theta+\sigma)+f(\theta-\sigma)-2s}{\sin\frac{1}{2}\sigma}\sin(n+\tfrac{1}{2})\sigma\, d\sigma\,. \end{aligned}$$

Lad os sætte

$$g(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{f(\theta+\sigma)+f(\theta-\sigma)-2s}{\sin\frac{1}{2}\sigma} & \text{for } \sigma \in]0,\pi],\\[2ex] 0 & \text{for } \sigma \in]-\pi, 0], \end{cases}$$

så er

$$s_n(\theta) - s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\sigma)\sin(n+\tfrac{1}{2})\sigma\, d\sigma.$$

Da $\sigma/\sin\frac{1}{2}\sigma$ har en hævelig singularitet i 0, stemmer den overens med en kontinuert (dermed begrænset) funktion på $[-\pi,\pi]$. Idet vi skriver

$$g(\sigma) = \frac{f(\theta+\sigma)+f(\theta-\sigma)-2s}{\sigma}\frac{\sigma}{\sin\frac{1}{2}\sigma},\ \text{for } \sigma > 0,$$

ses, at $(*)$ medfører, at $g \in L_1([-\pi,\pi])$. Indføres $\sin(n+\frac{1}{2})\sigma = \frac{1}{2i}(e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta})$, har vi endelig:

$$s_n(\theta) - s = \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} g(\sigma)e^{\frac{1}{2}i\sigma}e^{in\sigma}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} g(\sigma)e^{-\frac{1}{2}i\sigma}e^{-in\sigma}\, d\sigma\,,$$

og det følger af Riemann-Lebesgues lemma, at $s_n(\theta) - s \to 0$ for $n \to \infty$. □

Korollar 2.4. *Lad $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{T})$, og lad $\theta \in \mathbb{R}$. Dens Fourierrække $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{in\theta}$ konvergerer mod s i punktet θ, når en af følgende betingelser (som hver for sig medfører Dinis betingelse $(*)$) er opfyldt:*

1° *$f \in C(\mathbb{T})$ og er differentiabel i θ, og $s = f(\theta)$.*

2° *f er stykkevis kontinuert på $\mathbb{R}$, samt differentiabel fra højre og fra venstre i θ (evt. med forskellige grænseværdier og differentialkvotienter fra højre: $f(\theta+)$, $f'(\theta+)$, og fra venstre: $f(\theta-)$, $f'(\theta-)$); og*

$$s = \frac{1}{2}(f(\theta+) + f(\theta-)).$$

3° *f er Hölder kontinuert af orden $\alpha > 0$ i θ, dvs. der findes en konstant M, så*

$$|f(\theta) - f(\sigma)| \le M|\theta - \sigma|^\alpha \text{ for } \sigma \in \mathbb{R},$$

og $s = f(\theta)$.

Bevis. Bemærk først, at hvis

$$h(\sigma) = \frac{f(\theta+\sigma) + f(\theta-\sigma) - 2s}{\sigma}$$

er kontinuert, eller blot stykkevis kontinuert, som funktion af σ på $\overline{\mathbb{R}}_+$, så er $(*)$ opfyldt. (Vi minder om, at en funktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ kaldes stykkevis kontinuert, når der findes endeligt mange delepunkter $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$, så φ stemmer overens med en funktion $\varphi_j \in C([t_{j-1}, t_j])$ på hvert interval $]t_{j-1}, t_j[\,$.)

Når 1° gælder, vil

$$\begin{aligned}\frac{f(\theta+\sigma) + f(\theta-\sigma) - 2s}{\sigma} &= \frac{f(\theta+\sigma) - f(\theta)}{\sigma} + \frac{f(\theta-\sigma) - f(\theta)}{\sigma} \\ &\to f'(\theta) - f'(\theta) = 0 \text{ for } \sigma \to 0,\end{aligned}$$

så $h(\sigma)$ er kontinuert på $\overline{\mathbb{R}}_+$, når $h(0)$ sættes lig med 0. Når 2° gælder, har vi

$$\begin{aligned}\frac{f(\theta+\sigma) + f(\theta-\sigma) - 2s}{\sigma} &= \frac{f(\theta+\sigma) - f(\theta+)}{\sigma} + \frac{f(\theta-\sigma) - f(\theta-)}{\sigma} \\ &\to f'(\theta+) - f'(\theta-) \text{ for } \sigma \to 0,\end{aligned}$$

så her er $h(\sigma)$ stykkevis kontinuert på $\overline{\mathbb{R}}_+$. I begge tilfælde fås $(*)$ (bemærk at 1° $\implies$ 2°).

Endelig, når 3° er opfyldt, er

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(\theta+\sigma)+f(\theta-\sigma)-2s}{\sigma}\Big| &\le \Big|\frac{f(\theta+\sigma)-f(\theta)}{\sigma}\Big| + \Big|\frac{f(\theta-\sigma)-f(\theta)}{\sigma}\Big| \\ &\le 2M\sigma^{\alpha-1}, \text{ for } \sigma > 0.\end{aligned}$$

Da funktionen $\sigma^{\alpha-1}$ kan integreres ind i 0 når $\alpha > 0$, ses, at $(*)$ er opfyldt. □

Specielt bemærker vi, at Fourierrækken for f konvergerer mod $f(\theta)$ i ethvert punkt, når $f \in C(\mathbb{T})$ og er differentiabel fra højre og venstre i ethvert punkt; eller når f er *Hölder kontinuert af orden* $\alpha > 0$ på $\mathbb{R}$, dvs. der findes en konstant M, så

$$|f(\theta_1) - f(\theta_2)| \le M|\theta_1 - \theta_2|^\alpha, \text{ for } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}.$$

Bemærk, at det er nok at verificere en sådan ulighed for θ_1 og θ_2 i et periodeinterval.

2.5. Uniform konvergens.

Lad os nu også betragte rummet $C^1(\mathbb{T})$ af kontinuert differentiable funktioner $f(\theta)$ med periode 2π; det er et Banach rum med normen

$$\|f\|_{C^1(\mathbb{T})} = \|f\|_u + \|f'\|_u.$$

Bemærk, at det kan identificeres med rummet af C^1-funktioner f på $[-\pi, \pi]$, for hvilke både $f(-\pi) = f(\pi)$ og $f'(-\pi) = f'(\pi)$.

Lemma 2.5. *For* $f \in C^1(\mathbb{T})$ *gælder*

$$c_n(f') = in\, c_n(f)\,.$$

Bevis.

$$\begin{aligned}c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[f(\theta)e^{-in\theta}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(-in)e^{-in\theta}d\theta \\ &= in\, c_n(f)\,,\end{aligned}$$

hvor vi har brugt delvis integration og udnyttet at $f(-\pi) = f(\pi)$. □

Sætning 2.6. *Når $f \in C^1(\mathbb{T})$, konvergerer Fourierrækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\theta}$ absolut og uniformt mod f.*

Bevis. Den generaliserede Bessel ulighed for $f' \in L_2(\mathbb{T})$ giver

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(\theta)|^2 d\theta\,,$$

hvorefter det følger af Lemma 2.5, at

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(f)|^2 \le \|f'\|_2^2\,. \tag{1}$$

Betragt rækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$. Denne række er en konvergent majorantrække for Fourierrækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\theta}$, da der for hvert $N \in \mathbb{N}$ gælder:

$$\begin{aligned}\sum_{0<|n|\le N} |c_n(f)| &= \sum_{0<|n|\le N} |nc_n(f)\frac{1}{n}| \\ &\le \Big(\sum_{0<|n|\le N} n^2|c_n(f)|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{0<|n|\le N} \frac{1}{n^2}\Big)^{\frac12} \\ &\le C\|f'\|_2\,, \qquad \text{med } C = \Big(2\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}\Big)^{\frac12};\end{aligned}$$

her brugte vi Cauchy-Schwarz' ulighed for skalarproduktet i $\mathbb{C}^{2N}$, samt (1) og den velkendte konvergens af rækken $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$.

Dette medfører at Fourierrækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\theta}$ konvergerer absolut og uniformt mod en kontinuert funktion $\tilde{f}$. (Vi minder om at ordene 'absolut og' angiver, at rækken af absolutværdier også konvergerer uniformt.) Da $f \in C^1(\mathbb{T})$, konvergerer Fourierrækken punktvis mod $f(\theta)$ for alle $\theta \in \mathbb{R}$ ifølge Dinis test (Korollar 2.4 1°), og vi kan slutte at $\tilde{f} = f$. $\square$

Det er ikke kun for funktionerne i $C^1(\mathbb{T})$, at Fourierrækken konvergerer uniformt; vi skal nu se på et noget større underrum af $C(\mathbb{T})$, hvor dette gælder.

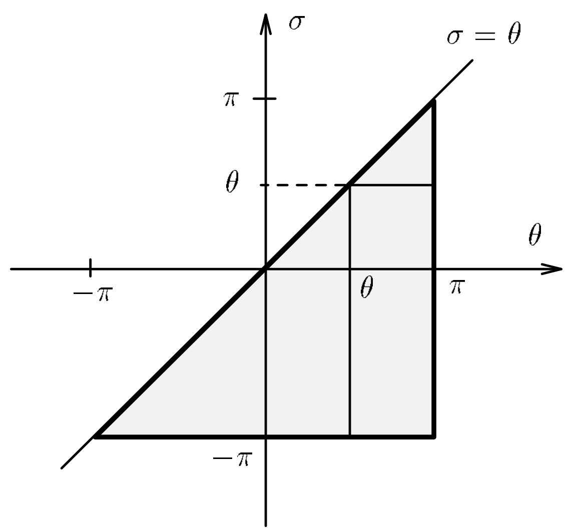
Betragt følgende rum $H^1(\mathbb{T})$ af funktioner:

$$H^1(\mathbb{T}) = \{\, f(\theta) = \textstyle\int_{-\pi}^{\theta} g(\sigma)d\sigma + k \mid g \in L_2(\mathbb{T})\,,\ c_0(g) = 0\,,\ k \in \mathbb{C}\,\}\,. \tag{2}$$

Ifølge Infinitesimalregningens Hovedsætning (Sætning II 5.6) er funktionerne i $H^1(\mathbb{T})$ kontinuerte, og betingelsen $c_0(g) = 0$ sikrer, at de er periodiske med periode 2π, altså $H^1(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$. Ifølge en sætning af Lebesgue er $f \in H^1(\mathbb{T})$ endda differentiabel n.o. med $f' = g \in L_2(\mathbb{T})$ (Sætning II 5.8). $H^1(\mathbb{T})$ indeholder de funktioner i $C(\mathbb{T})$ som er stykkevis C^1.

Vi vil nu vise, at for $f \in H^1(\mathbb{T})$ med g som ovenfor gælder

$$c_n(g) = i\,n\,c_n(f)\,. \tag{3}$$



Dette er klart for $n = 0$, og for $n \neq 0$ har vi

$$\begin{aligned}
i\,n\,c_n(f) = i\,n\,c_n(f-k) &= \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\theta} g(\sigma)e^{-in\theta}\,d\sigma d\theta \\
&= \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{\sigma}^{\pi} g(\sigma)e^{-in\theta}\,d\theta\Big)d\sigma \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\sigma)\left(e^{-in\sigma} - e^{-in\pi}\right)d\sigma = c_n(g)\,,
\end{aligned}$$

hvor vi har ombyttet integrationsordenen ved brug af Fubinis sætning.

Endvidere gælder:

Lemma 2.7. *Når $f \in H^1(\mathbb{T})$, er f Hölder kontinuert af orden $1/2$ på $[-\pi,\pi]$, dvs. der findes $M > 0$ så*

$$|f(\theta_1) - f(\theta_2)| \leq M|\theta_1 - \theta_2|^{\frac{1}{2}} \quad \textit{for} \quad \theta_1, \theta_2 \in [-\pi,\pi].$$

Bevis. Lad $\theta_2 \leq \theta_1$. For $f \in H^1(\mathbb{T})$ gælder, at $f(\theta_1) - f(\theta_2) = \int_{\theta_2}^{\theta_1} g(\theta)d\theta$ med $g \in L_2(\mathbb{T})$. Det følger da af Cauchy-Schwarz' ulighed, at

$$|f(\theta_1) - f(\theta_2)| \leq \int_{\theta_2}^{\theta_1} |1 \cdot g(\theta)|d\theta \leq |\theta_1 - \theta_2|^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta)|^2 d\theta\Big)^{\frac{1}{2}}\,,$$

så vi kan vælge $M = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta)|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}}$. $\square$

(Man ser ved brug af periodiciteten, at uligheden medfører gyldighed af en lignende ulighed for alle $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, med et større M.)

Af Dinis test (Korollar 2.4 3°) følger nu, at Fourierrækken for $f \in H^1(\mathbb{T})$ konvergerer punktvis mod f for alle $\theta \in \mathbb{R}$. Endvidere kan argumentet i Sætning 2.6 på grund af (3) udvides til at vise at $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$ også for $f \in H^1(\mathbb{T})$, og dermed følger den lovede generalisation af Sætning 2.6:

Sætning 2.8. *Når $f \in H^1(\mathbb{T})$, konvergerer Fourierrækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\theta}$ absolut og uniformt mod f.*

2.6. Konvergens i $L_2(\mathbb{T})$ og Parsevals ligning.

Vi har set, at når $f \in C^1(\mathbb{T})$ (eller blot $H^1(\mathbb{T})$), konvergerer Fourierrækken for f uniformt mod f. Der findes funktioner $f \in C(\mathbb{T})$, hvis Fourierrække divergerer i visse punkter, men mængden af sådanne punkter udgør en Lebesgue nulmængde ifølge en dybtgående sætning af den svenske matematiker L. Carleson (1966): *For $f \in L_2(\mathbb{T})$ er Fourierrækken $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{in\theta}$ konvergent for næsten alle $\theta \in \mathbb{R}$ med sum $f(\theta)$.*

I dette afsnit vises en enklere sætning, nemlig at Fourierrækken for $f \in L_2(\mathbb{T})$ er konvergent med sum f *i Hilbert rummet* $L_2(\mathbb{T})$.

I beviset får vi brug for følgende tæthedsresultat:

Lemma 2.9. *Mængden $C^\infty(\mathbb{T})$ af vilkårligt ofte differentiable funktioner på $\mathbb{R}$ med periode 2π er tæt i $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$; ydermere er $C_c^\infty(\,]-\pi,\pi[\,)$ (hvor elementerne udvides til periodiske funktioner) tæt i $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$. Tilsvarende udsagn gælder for $L_2(\mathbb{T})$, når funktionerne i $C^\infty(\mathbb{T})$ erstattes med deres ækvivalensklasser.*

Bevis. Af Sætning II 7.28 ses, at $C_c(\,]-\pi,\pi[\,)$ (dvs. de kontinuerte funktioner med støtte i kompakte delintervaller af $]-\pi,\pi[$) er tæt i $\mathcal{L}_2(\,]-\pi,\pi[\,)$. Beviset for Sætning II 8.21 giver, at også $C_c^\infty(\,]-\pi,\pi[\,)$ er tæt i $\mathcal{L}_2(\,]-\pi,\pi[\,)$ (idet $\operatorname{supp} v_\varepsilon \subset \operatorname{supp} v + [-\varepsilon,\varepsilon]$). Ved udvidelse til periodiske funktioner på $\mathbb{R}$ fås lemmaet for $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, og det følger umiddelbart for $L_2(\mathbb{T})$. (Bemærk, at $C_c^\infty(\,]-\pi,\pi[\,)$ her giver funktioner som er 0 i omegnen af $\pi + 2p\pi$ for $p \in \mathbb{Z}$.) $\square$

Sætning 2.10. *For $f \in L_2(\mathbb{T})$ er Fourierrækken konvergent i $L_2(\mathbb{T})$ med sum f, dvs.*

$$\|s_N(\cdot, f) - f\|_2 \to 0 \quad \text{for} \quad N \to \infty\,,$$

hvor $s_N(\theta, f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{in\theta}$. Der gælder altså, at $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\theta}$ i $L_2(\mathbb{T})$; dermed gælder også Parsevals ligning

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2\,.$$

Bevis. Lad $f \in L_2(\mathbb{T})$ og $\varepsilon > 0$ være givet. Ifølge Lemma 2.9 findes $g \in C^\infty(\mathbb{T})$ så $\|f - g\|_2 \le \varepsilon$. Af det sidste udsagn i Bessels approksimationssætning følger, at

$$\|f - s_N(\cdot, f)\|_2 \le \|f - s_N(\cdot, g)\|_2 \,,$$

og for udtrykket til højre har vi endvidere

$$\begin{aligned}\|f - s_N(\cdot, g)\|_2 &\le \|f - g\|_2 + \|g - s_N(\cdot, g)\|_2 \le \varepsilon + \|g - s_N(\cdot, g)\|_2 \\ &\le \varepsilon + \|g - s_N(\cdot, g)\|_u \le 2\varepsilon\end{aligned}$$

når N er tilstrækkeligt stor, ved Sætning 2.6 anvendt på g. Dette viser konvergensen af Fourierrækken i Hilbert rummet $L_2(\mathbb{T})$, og Parsevals ligning følger som i Sætning 1.14. □

Sætning 2.10 viser ifølge Sætning 1.14, at ortonormalsystemet $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ er en *ortonormal basis* for Hilbert rummet $L_2(\mathbb{T})$.

Erstattes indeksmængden $\mathbb{N}$ i Sætning 1.16 med $\mathbb{Z}$, kan denne sætning anvendes på basen $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ i $L_2(\mathbb{T})$. Lad os her betegne den optrædende afbildning ved F, altså

$$F\colon f \mapsto \{(f, e^{in\theta})\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Sætning 1.16 viser, at F er en isometrisk isomorfi af $L_2(\mathbb{T})$ på $\ell_2(\mathbb{Z})$. Enhver følge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ er altså billede af en funktion $f \in L_2(\mathbb{T})$ ved F. Dettte viser:

Korollar 2.11. *Når $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ er en talfølge med $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$, dvs. $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$, så konvergerer*

$$s_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}$$

i $L_2(\mathbb{T})$ for $N \to \infty$ mod en funktion $f(\theta)$, som netop har Fourierkoefficienterne $c_n(f) = c_n$.

Vi bemærker, at Opg. 1.10 viser, at

$$(f, g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}$$

for alle $f, g \in L_2(\mathbb{T})$.

Opgaver til §2.

2.1. Lad $f_n(\alpha) = \int_0^\pi x^\alpha \sin nx \, dx$, hvor $\alpha > -2$ og $n \in \mathbb{N}$. Vis, at

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha) = \begin{cases} 0\,, & \alpha > -1\,, \\ \text{en konstant}, & \alpha = -1\,, \\ +\infty, & -2 < \alpha < -1\,. \end{cases}$$

2.2. Find Fourierrækken for $f(\theta) = \sin^3(\theta)$.

2.3. Lad $f \in C(\mathbb{T})$ være stykkevis C^1, dvs. der findes delepunkter $t_0 = -\pi < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = \pi$, så f stemmer overens med en funktion $f_j \in C^1([t_{j-1}, t_j])$ på hvert interval $]t_{j-1}, t_j[$. Vis, at $f \in H^1(\mathbb{T})$, med $f(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} g(\sigma)\, d\sigma + f(-\pi)$, hvor g er en stykkevis kontinuert funktion, der stemmer overens med f_j' på hvert interval $]t_{j-1}, t_j[$.

2.4. Find Fourierrækken for f defineret ved: $f(\theta) = \theta$ for $\theta \in [-\pi, \pi[$, $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$. Vis, at Fourierrækken ikke konvergerer uniformt for $\theta \in [-\pi, \pi]$.

2.5. Vis, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(*Vink.* Brug Parsevals ligning for $f(\theta)$ i Opg. 2.4.)

2.6. Vis, at

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1}$$

for hvert $\theta \in]0, \pi[$, og beskriv rækkens sum for hvert $\theta \in \mathbb{R}$ ved en skitse af sumfunktionen. Bemærk specielt, at

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}\,.$$

2.7. Lad f og $g \in L_1(\mathbb{T})$. Vis, at foldningsproduktet $f * g$ defineret ved

$$(f * g)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta_1) g(\theta_1) d\theta_1$$

giver en funktion i $L_1(\mathbb{T})$.

2.8. Vis, at $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$ for $f, g \in L_1(\mathbb{T})$.

2.9. Vis, at $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin n\theta\right\}_{n=1}^{\infty}$ er en ortonormal basis for $L_2([0,\pi])$. Diskuter uniform konvergens af Fourierrækken.
(*Vink.* Udnyt, at man kender en basis for $L_2(\mathbb{T})$. Pas på normeringen.)

2.10. Vis, at $\left\{\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos n\theta\right\}_{n=1}^{\infty}$ er en ortonormal basis for $L_2([0,\pi])$. Diskuter uniform konvergens af Fourierrækken.

2.11. Find Fourierrækken for funktionen f defineret ved $f(\theta) = |\theta|$ for $\theta \in [-\pi, \pi[$, $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$, og diskuter konvergensen.

2.12. Vis, at $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(n - \frac{1}{2})\theta\right\}_{n=1}^{\infty}$ er en ortonormal basis for $L_2([0,\pi])$.

2.13. Vis, at når $f \in C^m(\mathbb{T})$, konvergerer Fourierrækken, og de ved ledvis differentiation op til orden $m-1$ dannede rækker, uniformt mod de tilsvarende afledede af f.

2.14. Vis, at når $f \in L_2(\mathbb{T})$ og Fourierkoefficienterne opfylder $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2m}|c_n(f)|^2 < \infty$ for et $m \in \mathbb{N}$, så er $f \in C^{m-1}(\mathbb{T})$.

2.15. Lad $\alpha \in]-1, 1]$, og lad $f_\alpha(\theta) = |\theta|^\alpha$ for $0 < |\theta| \le \pi$, $f_\alpha(0) = 0$, forlænget til en funktion med periode 2π.
(a) Vis, at for $\alpha > 0$ er f_α er Hölder kontinuert af orden α.
(b) Vis, at $f_\alpha \in H^1(\mathbb{T})$, hvis $\alpha > \frac{1}{2}$.
(c) Vis, at $f_\alpha \notin H^1(\mathbb{T})$, hvis $\alpha < \frac{1}{2}$.
(*Vink.* Brug Lemma 2.7.)
(*Bemærkning.* For fuldstændigheds skyld oplyses, at $f_{\frac{1}{2}} \notin H^1(\mathbb{T})$.)

2.16. Idet f_α defineres som i Opg. 2.15, skal man vise:
(a) $f_\alpha \in L_1(\mathbb{T})$ for $\alpha > -1$.
(b) $f_\alpha \in L_2(\mathbb{T})$ for $\alpha > -\frac{1}{2}$.
(c) Fourierrækken for f_α konvergerer punktvis mod f for $\alpha > 0$.
(d) Fourierrækken for f_α konvergerer uniformt mod f for $\alpha > \frac{1}{2}$.

2.17. Betragt en funktion f på $\mathbb{R}$ med periode 2π, således at f er kontinuert undtagen for $\theta = \theta_0 + 2p\pi$. Antag endvidere, at $f(\theta_0\pm) = \lim_{\epsilon\searrow 0} f(\theta_0 \pm \epsilon)$

eksisterer, og f opfylder

$$|f(\theta) - f(\theta_0+)| \leq M_+|\theta - \theta_0|^{\alpha_+}\,, \text{ for } \theta \in]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\,,$$

$$|f(\theta) - f(\theta_0-)| \leq M_-|\theta - \theta_0|^{\alpha_-}\,, \text{ for } \theta \in]\theta_0 - 2\pi, \theta_0[\,,$$

hvor $M_\pm$, $\alpha_\pm \in \mathbb{R}_+$. Vis, at Fourierrækken for f i punktet $\theta = \theta_0$ konvergerer mod $s = \frac{1}{2}\big(f(\theta_0+) + f(\theta_0-)\big)$.
Er f Hölder kontinuert af orden > 0?

§3. Operatorer i Hilbert rum

3.1. Riesz' repræsentationssætning og den adjungerede operator.

Vi vil nu se mere systematisk på lineære afbildninger mellem Hilbert rum. Der er en tradition for at afbildninger benævnes ved forskellige andre navne i forskellige situationer:

$$\begin{aligned} \textit{funktion}: &\quad \text{talrum} \to \text{talrum}, \\ \textit{funktional}: &\ \text{vektorrum} \to \text{talrum}, \\ \textit{operator}: &\ \text{vektorrum} \to \text{vektorrum}. \end{aligned}$$

Opdelingen er ikke fuldstændigt konsekvent (funktion og operator kan i princippet bruges i alle tre tilfælde), og det er især i forbindelse med uendeligdimensionale vektorrum, at de to sidstnævnte betegnelser benyttes. Vektorrummmene kan også erstattes af andre typer af mængder (f.eks. metriske rum).

Lad H og H_1 være to Hilbert rum. Rummet af kontinuerte lineære operatorer $T\colon H \to H_1$ betegnes i litteraturen gerne $\mathcal{L}(H, H_1)$ eller $\mathbf{B}(H, H_1)$; da bogstavet $\mathcal{L}$ bruges i flere andre betydninger i dette kursus, vil vi i det følgende anvende $\mathbf{B}$. Notationen $\mathbf{B}(E, F)$ eller $\mathcal{L}(E, F)$ bruges også for rummene af begrænsede operatorer mellem mere generelle normerede vektorrum E og F. Vi minder om at en lineær operator mellem normerede vektorrum er kontinuert hvis og kun hvis den er begrænset, jvf. Sætning I 4.6 og Bemærkning I 4.7.

$\mathbf{B}(H, H_1)$ er et Banach rum med normen

$$\|T\| = \sup_{\|u\|_H \le 1} \|Tu\|_{H_1} , \tag{1}$$

jvf. Sætning I 5.12. Da man i et Hilbert rum har, at

$$\|v\| = \sup_{\|w\| \le 1} |(v, w)| \tag{2}$$

(idet $\geq$ følger af Cauchy-Schwarz' ulighed, og $\leq$ fås ved at tage $w = v/\|v\|$), ser vi ved at anvende dette på H_1, at der endvidere gælder:

$$\|T\| = \sup\{\, |(Tu, v)_{H_1}| \bigm| \|u\|_H \le 1,\, \|v\|_{H_1} \le 1 \,\}. \tag{3}$$

Bemærk følgende simple konsekvens af (3): *Kendskabet til* (Tu, v) *for alle* $u \in H$, $v \in H_1$, *fastlægger* T. For hvis T_1 er en anden operator, for hvilken $(Tu, v)_{H_1} = (T_1 u, v)_{H_1}$ for alle $u \in H$ og $v \in H_1$, så er

$$\|T - T_1\| = \sup\{\, |((T - T_1)u, v)_{H_1}| \bigm| \|u\|_H \le 1,\, \|v\|_{H_1} \le 1 \,\} = 0,$$

og dermed $T = T_1$.

Når $T \in \mathbf{B}(H, H_1)$ og $S \in \mathbf{B}(H_1, H_2)$, ligger den sammensatte operator ST i $\mathbf{B}(H, H_2)$, og $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$, idet

$$\|STu\|_{H_2} \leq \|S\| \, \|Tu\|_{H_1} \leq \|S\| \, \|T\| \, \|u\|_H, \text{ for alle } u \in H.$$

I tilfældet hvor $H = H_1$, skrives også $\mathbf{B}(H, H) = \mathbf{B}(H)$. Identitetsoperatoren betegnes i reglen I.

Rummet $\mathbf{B}(H, \mathbb{C})$ af kontinuerte lineære afbildninger l fra H ind i $\mathbb{C}$ kaldes det *duale rum* til H og betegnes H^*. Elementerne i H^* er de *kontinuerte lineære funktionaler* på H. Normen defineres som i (1) ved

$$\|l\|_{H^*} = \sup_{\|u\|_H \leq 1} |l(u)|.$$

Når T er en lineær afbildning, kaldes mængden af vektorer u, for hvilke $Tu = 0$, *nulrummet* for T; det er klart et vektorrum.

Følgende vigtige sætning karakteriserer fuldstændigt H^* og bevistes i 1907 af F. Riesz og M. Fréchet.

Sætning 3.1 (Riesz' repræsentationssætning). *For hvert $l \in H^*$ eksisterer der et entydigt bestemt element $v_l \in H$, således at $l(u) = (u, v_l)_H$ for alle $u \in H$. Endvidere gælder $\|v_l\|_H = \|l\|_{H^*}$.*

Bevis. Betragt et $l \in H^*$. Entydigheden fås således: Hvis der for v og v' gælder, at $l(u) = (u, v) = (u, v')$ for alle u, så er

$$(u, v - v') = 0 \text{ for alle } u \in H.$$

Specielt for $u = v - v'$ fås $(v - v', v - v') = \|v - v'\|^2 = 0$ og dermed $v = v'$.

Nu viser vi eksistensen. Lad $\mathcal{N}$ være nulrummet for l. Da l er kontinuert, er $\mathcal{N}$ et afsluttet underrum af H. Hvis $\mathcal{N} = H$, gælder $l(u) = 0 = (u, 0)$ for alle u; altså kan vi tage $v_l = 0$. Antag nu, at $\mathcal{N}$ ikke udgør hele H. Af dekompositionssætningen (Sætning 1.11) følger, at der eksisterer en vektor $u_0 \neq 0$ i $\mathcal{N}^\perp$. Vi sætter

$$v_l = \frac{\overline{l(u_0)}}{\|u_0\|^2} \, u_0,$$

og vil nu verificere at denne vektor har de ønskede egenskaber. Bemærk først, at for $u \in \mathcal{N}$ gælder $l(u) = 0 = (u, v_l)$. Endvidere ses, at

$$l(u_0) = l(u_0) \frac{(u_0, u_0)}{\|u_0\|^2} = \left(u_0, \frac{\overline{l(u_0)}}{\|u_0\|^2} u_0 \right) = (u_0, v_l)\,,$$

så formlen stemmer også på u_0. Da begge funktionaler $l(\cdot)$ og $(\cdot, v_l)$ er lineære, og da de er ens på $\mathcal{N}$ og u_0, må de være ens på det lineære rum udspændt af $\mathcal{N}$ og u_0. Men $\mathcal{N}$ og u_0 udspænder hele H, da ethvert $v \in H$ kan skrives

$$v = \left(v - \frac{l(v)}{l(u_0)} u_0\right) + \frac{l(v)}{l(u_0)} u_0 \,,$$

hvor første led $\in \mathcal{N}$. Altså er $l(u) = (u, v_l)$ for alle $u \in H$, så den angivne vektor v_l er som ønsket.

Endelig får vi $\|l\|_{H^*} = \|v_l\|_H$ ved at bruge (1) og (2) således:

$$\|l\|_{H^*} = \sup_{\|u\| \le 1} |l(u)| = \sup_{\|u\| \le 1} |(u, v_l)| = \|v_l\|. \qquad \square$$

Denne sætning giver en naturlig identifikation af H^* med H, som vi herefter ofte vil benytte.

Eksempel 3.2. For Hilbert rummet $L_2(X, \mu)$ gælder, at når l er en kontinuert lineær funktional på rummet, så findes der en funktion $g \in L_2(X, \mu)$ (bestemt pånær på en nulmængde) så at

$$l(f) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu, \text{ for alle } f \in L_2(X, \mu).$$

Betragt nu to Hilbert rum H og H_1, og lad $T\colon H \to H_1$ være en kontinuert lineær operator. Vi vil indføre begrebet *den adjungerede operator* $T^*\colon H_1 \to H$.

Lad $v \in H_1$. For $u \in H$ definerer vi afbildningen

$$l_v\colon u \mapsto (Tu, v)_{H_1},$$

sammensat af

$$u \mapsto Tu \in H_1 \quad \text{ og } \quad w \mapsto (w, v)_{H_1} \in \mathbb{C}.$$

Da disse er kontinuerte lineære afbildninger, er $l_v \in H^*$, og da

$$|(Tu, v)_{H_1}| \le \|Tu\|_{H_1} \|v\|_{H_1} \le \|T\|\, \|u\|_H \|v\|_{H_1}\,, \text{ for alle } u,$$

er

$$\|l_v\|_{H^*} \le \|T\|\, \|v\|_{H_1}.$$

Riesz' repræsentationssætning medfører, at l_v kan identificeres med en entydigt bestemt vektor $v^* \in H$, hvormed

$$\begin{aligned} &(Tu, v)_{H_1} = (u, v^*)_H, \text{ for alle } u \in H; \text{ og} \\ &\|v^*\|_H \leq \|T\| \, \|v\|_{H_1}. \end{aligned}$$

Idet vi bruger denne fremgangsmåde for hvert $v \in H_1$, får vi ialt en afbildning fra H_1 til H,

$$v \mapsto l_v \mapsto v^*.$$

Afbildningen $v \mapsto v^*$ er åbenbart lineær, og den er kontinuert på grund af uligheden vist ovenfor. Denne afbildning (operator) kaldes T^*, *den adjungerede operator til* T. På grund af den viste ulighed er T^* begrænset, med norm $\leq \|T\|$. Vi har hermed vist:

Sætning 3.3. *Til enhver operator $T \in \mathbf{B}(H, H_1)$ findes en operator $T^* \in \mathbf{B}(H_1, H)$, så at*

$$(Tu, v)_{H_1} = (u, T^*v)_H, \text{ for alle } u \in H, \, v \in H_1; \tag{4}$$

her er $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Formel (4) fastlægger T^* entydigt, ifølge bemærkningen efter (3). Vi vil derfor ofte simpelthen anskue T^* som "den operator, der passer i formel (4)."

Ved kompleks konjugering giver (4)

$$(T^*v, u)_H = (v, Tu)_{H_1}, \text{ for alle } u \in H, \, v \in H_1;$$

og heraf aflæses, at den adjungerede operator til T^* er T, altså at $T^{**} = T$. Idet $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$ ifølge Sætning 3.3, sluttes at vi faktisk har $\|T^*\| = \|T\|$. Endvidere ser vi ved successive anvendelser af (4), at når $T \in \mathbf{B}(H, H_1)$ og $S \in \mathbf{B}(H_1, H_2)$, er

$$(STu, v)_{H_2} = (Tu, S^*v)_{H_1} = (u, T^*S^*v)_H, \text{ for alle } u, v,$$

og dermed $(ST)^* = T^*S^*$. Specielt er $(T^*T)^* = T^*T$. Vi har ialt vist:

Sætning 3.4. *For $T \in \mathbf{B}(H, H_1)$ og $S \in \mathbf{B}(H_1, H_2)$ gælder*

$$\begin{aligned} T^{**} &= T, & \|T^*\| &= \|T\|, \\ (ST)^* &= T^*S^*, & (T^*T)^* &= T^*T. \end{aligned} \tag{5}$$

Når $H = H_1$, kan vi sammenligne T og T^* nærmere. Man kalder en operator $T \in \mathbf{B}(H)$ *selvadjungeret*, når $T = T^*$. Ifølge Sætning 3.3 finder dette sted netop når

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \text{for alle} \quad u, v \in H\,.$$

Operatorer med egenskaben $(Tu,v) = (u,Tv)$ kaldes *symmetriske.* For operatorer $T \in \mathbf{B}(H)$ er selvadjungerethed altså ensbetydende med symmetriskhed. (Vi skal senere se på operatorer som ikke nødvendigvis er overalt defineret i H, og hvor der er en mere kompliceret sammenhæng mellem selvadjungerethed og symmetriskhed.)

Når X er et afsluttet underrum af H, defineres ved Sætning 1.11 en operator $P\colon H \to H$ som den afbildning der sender u over i v, når u har dekompositionen $u = v+w$, $v \in X$, $w \in X^\perp$. Det er klart en lineær operator. Den er begrænset, med $\|Pu\| \le \|u\|$ (faktisk med $\|P\| = 1$ når $X \ne \{0\}$), da $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$; altså er $P \in \mathbf{B}(H)$. Bemærk, at $P(H) = X$, og at $Pu = 0$ netop når $u \in X^\perp$. Endvidere gælder, at $P^2 = P$ og $P^* = P$, det sidste fordi der for $u = v + w$, $u' = v' + w'$ gælder

$$(Pu, u') = (v, u') = (v, v') = (u, v') = (u, Pu').$$

Operatoren P kaldes *den ortogonale projektion på X*; i almindelighed kaldes sådanne operatorer ortogonale projektioner (i H). Sætning 1.11 kaldes også projektionssætningen.

Eksempel 3.5. Lad $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ være et ortonormalsystem i H. Så er operatoren P defineret ved $P\colon u \mapsto \sum_{n=1}^N (u, e_n)_H e_n$, en ortogonal projektion i H, med $P(H) = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_N\}$.

3.2. Unitære operatorer.

Lad $U \in \mathbf{B}(H, H_1)$, og antag, at U er en *isometri*, dvs. $\|Uf\|_{H_1} = \|f\|_H$ for alle $f \in H$; dermed gælder også

$$(Uf, Ug)_{H_1} = (f, g)_H, \text{ for alle } f, g \in H,$$

på grund af polariseringsidentiteten (jvf. side 1.4). En isometri er naturligvis injektiv. Når U tillige er surjektiv, altså er en isometrisk isomorfi, kaldes den en *unitær operator* (fra H til H_1).

Lemma 3.6. *Når $U \in \mathbf{B}(H, H_1)$ er en isometri, gælder, at U er surjektiv (dermed unitær) hvis og kun hvis $U^* \in \mathbf{B}(H_1, H)$ er en isometri. I bekræftende fald er*

$$U^* = U^{-1}. \tag{7}$$

Bevis. U er som nævnt injektiv. Om $U^* \in \mathbf{B}(H_1, H)$ har vi

$$(U^*Uf, f')_H = (Uf, Uf')_{H_1} = (f, f')_H, \text{ for alle } f,\ f' \in H;$$

hvoraf følger, ved bemærkningen efter (3), at

$$U^*U = I. \tag{8}$$

Hvis U tillige er surjektiv, er den ialt bijektiv. Da fås (7) af (8) ved sammensætning med U^{-1} til højre. Så er U^* specielt en isometri.

På den anden side, hvis U^* er en isometri, så er

$$(g, g')_{H_1} = (U^*g, U^*g')_H = (UU^*g, g')_{H_1}, \text{ for alle } g, g' \in H_1,$$

hvilket medfører

$$UU^* = I. \tag{9}$$

De to identiteter (8) og (9) medfører tilsammen, at U er surjektiv med $U^{-1} = U^*$. $\square$

Sætning 3.7. *Når et Hilbert rum H har en numerabel ortonormal basis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, da er afbildningen U, der sender et element $f \in H$ over i sættet af dets Fourierkoefficienter $\{(f, e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, en unitær operator $U\colon H \to \ell_2(\mathbb{N})$.*

Som indeksmængde i stedet for $\mathbb{N}$ kan også anvendes $\mathbb{Z}$ eller, mere alment, en delmængde $\mathbb{M}$ af $\mathbb{Z}^k$.

Sætningen følger af Sætning 1.16 og definitionen af en unitær operator (et bevis baseret på Lemma 3.6 i tidligere udgaver af disse noter kan nu udelades).

Lad os for eksempel betragte $H = L_2(\mathbb{T})$ med ortonormalbasen $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Operatoren $F\colon L_2(\mathbb{T}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ defineret ved

$$(Ff)_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta\,, \tag{11}$$

er unitær, med

$$F^*(\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = F^{-1}(\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta};$$

og formlen for Fourierrækken

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\theta}$$

stemmer netop med at $F^*F = I$.

Vi kan nu også færdiggøre beskrivelsen af rummet $H^1(\mathbb{T})$. Dette er jo et vist rum af kontinuerte funktioner, og kan da opfattes som et underrum af $L_2(\mathbb{T})$, som forklaret i indledningen til §2.

Vi viser først en ulighed, i en generalitet vi senere skal bruge:

Lemma 3.8. *Når $g \in L_2([\alpha,\beta])$, og h defineres ved*

$$h(\theta) = \int_\alpha^\theta g(\sigma)\,d\sigma, \text{ for } \theta \in [\alpha,\beta],$$

så er

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta |h(\theta)|^2\,d\theta \le \|h\|_u^2 \le (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta |g(\theta)|^2\,d\theta.$$

Bevis. For hvert $\theta \in [\alpha,\beta]$ har vi, ved Cauchy-Schwarz' ulighed,

$$\begin{aligned} |h(\theta)|^2 &\le \Big(\int_\alpha^\theta |1\cdot g(\sigma)|\,d\sigma\Big)^2 \le \int_\alpha^\theta 1\,d\sigma \int_\alpha^\theta |g(\sigma)|^2\,d\sigma \\ &\le (\theta-\alpha)\|g\|^2_{L_2([\alpha,\theta])} \le (\beta-\alpha)\|g\|^2_{L_2([\alpha,\beta])}. \end{aligned}$$

Dette viser den højre ulighed, og den venstre er en velkendt ulighed for begrænsede målelige funktioner. □

(Man kan vise nogle lidt skarpere uligheder mellem h og g's L_2 normer, se Opg. 3.13 og Opg. V 2.2.)

Sætning 3.9. 1° *For $f \in H^1(\mathbb{T})$ fremstillet ved*

$$f(\theta) = \int_{-\pi}^\theta g(\sigma)\,d\sigma + k, \text{ med } g \in L_2(\mathbb{T}),\ c_0(g) = 0,\ k \in \mathbb{C}, \tag{12}$$

er g og k entydigt bestemt af f. $H^1(\mathbb{T})$ er et Hilbert rum med skalarprodukt og norm

$$\begin{aligned} (f,f_1)_{H^1(\mathbb{T})} &= (f,f_1)_{L_2(\mathbb{T})} + (g,g_1)_{L_2(\mathbb{T})}, \\ \|f\|_{H^1(\mathbb{T})} &= \big(\|f\|^2_{L_2(\mathbb{T})} + \|g\|^2_{L_2(\mathbb{T})}\big)^{\frac12}, \end{aligned}$$

hvor $f = \int_{-\pi}^\theta g(\sigma)\,d\sigma + k$ og $f_1 = \int_{-\pi}^\theta g_1(\sigma)\,d\sigma + k_1$.

2° *Endvidere gælder, at når $f \in L_2(\mathbb{T})$, ligger f i underrummet $H^1(\mathbb{T})$ hvis og kun hvis*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 < \infty. \tag{13}$$

Bevis. 1°. At g er bestemt af f følger af, at Fourierkofficienterne til g er bestemt af f, jvf. §2.5 (3) og Sætning 3.7. (Det følger også af den citerede sætning af Lebesgue.) Så er k ligeledes bestemt (iøvrigt også ved $k = f(-\pi)$). Reglerne (S ii)–(S iv) for skalarprodukter er oplagt opfyldt, og det er også klart, at $(f,f)_{H^1(\mathbb{T})} \ge 0$. Hvis $(f,f)_{H^1(\mathbb{T})} = 0$, er f nul som element af $L_2(\mathbb{T})$, og dermed nul overalt, da $f \in H^1(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$. Ialt ses, at de definerede udtryk er skalarprodukt og tilhørende norm på $H^1(\mathbb{T})$. Fuldstændigheden af $H^1(\mathbb{T})$ ses således: Lad $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ være en Cauchy følge i $H^1(\mathbb{T})$, med

$$f_j(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} g_j(\sigma)\, d\sigma + k_j \text{ og } c_0(g_j) = 0 \text{ for hvert } j \in \mathbb{N}.$$

Så er (f_j) og (g_j) Cauchy følger i $L_2(\mathbb{T})$, som, da dette rum er fuldstændigt, konvergerer mod elementer f henholdsvis g. Her er $c_0(g) = (g, 1) = \lim_j (g_j, 1) = \lim_j c_0(g_j) = 0$. Lad

$$h_j(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} g_j(\sigma)\, d\sigma, \quad h(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} g(\sigma)\, d\sigma; \tag{14}$$

og bemærk, at $f_j(\theta) - h_j(\theta)$ er konstanten k_j. Det ses af Lemma 3.8, at

$$\|h_j - h\|_u \le 2\pi \|g_j - g\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

hvormed h_j konvergerer uniformt (og i $L_2(\mathbb{T})$) mod h. Endvidere er (idet k_j også bruges som betegnelse for den konstante funktion k_j)

$$|k_j - k_l| = \|k_j - k_l\|_{L_2(\mathbb{T})} \le \|f_j - f_l\|_{L_2(\mathbb{T})} + \|h_j - h_l\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

så k_j er en Cauchy følge i $\mathbb{C}$ og dermed konvergent mod et tal k. Da er $f = \lim_j f_j = \lim_j (h_j + k_j) = h + k$ i $L_2(\mathbb{T})$, så f har repræsentanten

$$f(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} g(\sigma)\, d\sigma + k;$$

hvormed f tilhører $H^1(\mathbb{T})$ og er grænseværdi for f_j dér.

Vedr. 2° har vi allerede i §2.5 vist, at når $f \in H^1(\mathbb{T})$, gælder (13). Det omvendte fås således: Lad $f \in L_2(\mathbb{T})$, med Fourierkoefficienter $c_n(f)$ der opfylder (13). Definer $g \in L_2(\mathbb{T})$ som elementet med Fourierkoefficienter $c_n(g) = in\, c_n(f)$ for alle $n \in \mathbb{Z}$; bemærk at $c_0(g) = 0$. Definer $h \in H^1(\mathbb{T})$ ud fra g ved (14). Så har vi for $n \neq 0$, ved §2.5 (3), at

$$c_n(g) = in\, c_n(h),$$

dvs. h har de samme Fourierkoefficienter med $n \neq 0$ som f. Altså er $f - h$ lig med konstanten $k = c_0(f) - c_0(h)$, *som element af* $L_2(\mathbb{T})$. Da $h \in H^1(\mathbb{T})$, ser vi hermed, at f kan repræsenteres ved $h + k \in H^1(\mathbb{T})$. □

For senere reference vil vi indføre en betegnelse for følgende underrum af $H^1(\mathbb{T})$:

$$H_0^1(\mathbb{T}) = \{\, f \in H^1(\mathbb{T}) \mid f(\pi) = f(-\pi) = 0 \,\}. \tag{15}$$

Om dette gælder:

Korollar 3.10. *Når* $f \in H^1(\mathbb{T})$, *er* $f \in H^1_0(\mathbb{T})$ *hvis og kun hvis* $k = 0$ *i repræsentationen* (12).

Bevis. Vi har altid, at $f(-\pi) = f(\pi)$; her er $f(-\pi) = 0$ hvis og kun hvis $k = 0$. $\square$

$H^1_0(\mathbb{T})$ er et *afsluttet underrum* af $H^1(\mathbb{T})$, og dermed et Hilbert rum. (At $H^1_0(\mathbb{T})$ er afsluttet, ses f.eks. af at det er nulrum for den lineære afbildning $f \mapsto f(-\pi) = k$, som er kontinuert fra $H^1(\mathbb{T})$ til $\mathbb{C}$, idet, med betegnelser som i beviset for Sætning 3.9 2°,

$$|k| = \|k\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{T})} + \|h\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{T})} + 2\pi\|g\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq C\|f\|_{H^1(\mathbb{T})},$$

jvf. Lemma 3.8.)

Bemærk specielt, at Sætning 3.9 viser, at g i (12) er entydigt bestemt ved f, således at der er defineret en afbildning fra $f \in H^1(\mathbb{T})$ over i $g \in L_2(\mathbb{T})$. Afbildningen $f \mapsto g$ er klart lineær, og kontinuert da $\|g\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{H^1(\mathbb{T})}$ ifølge definitionen af normen på $H^1(\mathbb{T})$. Når $g \in C(\mathbb{T})$, er $g = f'$, altså afbildningen virker som $\frac{d}{d\theta}$. For g som i (12) vil vi opfatte afbildningen som en *generalisation af* $\frac{d}{d\theta}$. Lad os (i dette kursus) indføre betegnelsen ∂ for denne operator, altså

$$\begin{gathered} \partial f = g, \text{ når } f \text{ og } g \text{ er som i (12)}, \\ \partial\colon H^1(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T}). \end{gathered} \tag{16}$$

Af praktiske grunde vil vi endvidere betegne $\frac{1}{i}\partial = \mathcal{D}$.

Hidtil har vi kun defineret den afledte funktion f' for funktioner f, for hvilke der i ethvert punkt gælder, at differenskvotientfølgen har en grænseværdi. (Som en lille generalisation har vi tilladt at differentialkvotienten evt. ikke var defineret i enkelte punkter.) Indførelsen af ∂ er en langt mere almen generalisation. Bemærk dog, at ∂ stemmer overens med $\frac{d}{d\theta}$ i en "næsten overalt" betydning, ved den tidligere nævnte sætning af Lebesgue, II 5.8.

3.3. Anvendelser af F, ubegrænsede operatorer.

Vi vil nu beskrive nogle anvendelser af Fourieropløsningen, altså af den unitære operator $F\colon L_2(\mathbb{T}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$, der sender $f \in L_2(\mathbb{T})$ over i sættet af Fourierkoefficienter $\{(f, e^{in\theta})\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Operatoren F er bl.a. nyttig ved behandlingen af differentialoperatorer. På dette sted må vi nødvendigvis stifte bekendtskab med *ubegrænsede operatorer*, simpelthen fordi differentialoperatorer (selv den simpleste operator $d/d\theta$) repræsenteres i L_2-rum ved ubegrænsede operatorer. (Man kan også give eksempler på begrænsede operatorer, der kan behandles ved Fourieropløsning, se Eksempel 3.17 nedenfor.)

Lad E og F være normerede rum. Rummet $\mathbf{B}(E,F)$, også kaldet $\mathcal{L}(E,F)$, af kontinuerte (dvs. begrænsede, jvf. Bemærkning I 4.7) lineære operatorer fra E til F er indført i I §5.3, og yderligere behandlet (for Hilbertrumstilfældet) i §3.1 ovenfor. Disse operatorer er defineret overalt på E. Mere generelt vil vi fra nu af sige, at T er en lineær operator fra E til F, når T som definitionsmængde har et lineært underrum $D(T)$ af E og er en lineær afbildning af $D(T)$ ind i F. (Sprogbrugen "fra" E til F indgår altså i en mere løs betydning end før.) Definitionsmængden bliver også sommetider kaldt domænet (fra det engelske "domain"). Hvis $E = F$, kaldes T en *operator i* E.

Vi betragter nu en lineær operator fra E til F med definitionsmængde $D(T)$. Man siger, at T er *tæt defineret*, når $\overline{D(T)} = E$; og at T er overalt defineret, når $D(T) = E$.

Det blev vist i Sætning I 6.20, at hvis $D(T)$ er tæt i E, F er fuldstændigt, og T er kontinuert (dvs. begrænset), så kan T på entydig måde udvides til en overalt defineret, kontinuert lineær operator $\widetilde{T}$ fra E til F (dvs. $\widetilde{T} \in \mathbf{B}(E,F)$).

Det kan imidlertid også tænkes, at T *ikke* er begrænset, altså at $\|Tx\|$ kan blive vilkårligt stor, når $x \in D(T)$ med $\|x\| \le 1$ (eller med $\|x\| \le C$). Så kalder man T *ubegrænset*. I reglen vil definitionsmængden $D(T)$ så ikke være hele E, men en ægte delmængde (og T kan naturligvis ikke udvides til et element af $\mathbf{B}(E,F)$).

Det er bl.a. dèr, komplikationen ved at arbejde med ubegrænsede operatorer ligger, nemlig at man skal holde regnskab med definitionsmængder (og der kan være flere forskellige relevante at vælge imellem, i konkrete anvendelser).

Eksempel 3.11. Idet $H^1(\mathbb{T})$ er et underrum af $L_2(\mathbb{T})$, kan vi opfatte operatoren ∂ (se (16)) som en *operator i* $L_2(\mathbb{T})$ *med definitionsmængde* $D(\partial) = H^1(\mathbb{T})$. Det samme gælder naturligvis $\mathcal{D} = \frac{1}{i}\partial$; altså

$$\begin{gathered} \mathcal{D}f = \tfrac{1}{i}g, \text{ når } f \text{ og } g \text{ er som i (12)}, \\ D(\mathcal{D}) = H^1(\mathbb{T}). \end{gathered} \tag{17}$$

Definitionmængden er *tæt i* $L_2(\mathbb{T})$, idet $H^1(\mathbb{T})$ f.eks. indeholder $C^\infty(\mathbb{T})$, som er tæt i $L_2(\mathbb{T})$, ved Lemma 2.9. At operatoren er ubegrænset i $L_2(\mathbb{T})$, vises f.eks. i Opgave 3.14. (Disse egenskaber fremgår også af beviset for Sætning 3.16 nedenfor.)

Betragt nu tilfældet hvor $E = H$ og $F = H_1$ er Hilbert rum. Når T er en *tæt defineret* lineær operator fra H til H_1, kan man faktisk definere den adjungerede operator, *uanset om T er begrænset eller ej.* Som en hurtig forklaring kan man sige, at $T^*: v \mapsto T^*v$ er defineret for de $v \in H_1$, for hvilke der findes et $v^* \in H$, så at

$$(Tu, v)_{H_1} = (u, v^*)_H \text{ for } u \in D(T);$$

man sætter da $T^*v = v^*$, idet v^* er entydigt bestemt ved v på grund af tætheden af $D(T)$ i H. Altså,

$$\begin{aligned} D(T^*) &= \{ v \in H_1 \mid \exists v^* \in H \ \forall u \in D(T) : (Tu, v)_{H_1} = (u, v^*)_H \}, \\ T^*v &= v^*, \text{ når } v \in D(T^*). \end{aligned} \tag{18}$$

En mere udførlig forklaring: For hvert $v \in H_1$ betragtes funktionalen

$$l_v : u \mapsto (Tu, v)_{H_1}, \quad u \in D(T);$$

det er en lineær operator fra H til $\mathbb{C}$ med definitionsmængde $D(T)$. Nu lader vi $D(T^*)$ bestå af *de $v \in H_1$, for hvilke l_v er kontinuert*, dvs. for hvilke der findes en konstant c_v, så at $|l_v(u)| \le c_v \|u\|_H$ for $u \in D(T)$. Da $D(T)$ er tæt i H, udvides l_v for sådanne v entydigt til en kontinuert lineær funktional $\tilde{l}_v$ på H, og ved Riesz' repræsentationssætning findes netop ét element $v^* \in H$, så $\tilde{l}_v(u) = (u, v^*)_H$. Vi sætter da $T^*v = v^*$, hvormed der gælder

$$(Tu, v)_{H_1} = (u, T^*v)_H \text{ for } u \in D(T),\ v \in D(T^*).$$

T^* kaldes atter *den til T adjungerede operator.*

$D(T^*)$ ses let at være et lineært underrum af H_1, og T^* en lineær operator. Når T er ubegrænset, vil T^* som regel ligeledes være en ubegrænset operator, med $D(T^*)$ som ægte delmængde af H_1.

Når $H = H_1$, kan vi sammenligne T og T^* nærmere, og vi siger, at T er *selvadjungeret*, når $T^* = T$; dvs. når $D(T) = D(T^*)$ og $Tu = T^*u$ for $u \in D(T) = D(T^*)$.

I lighed med definitionen for begrænsede operatorer kalder vi en operator T i et Hilbert rum H, der opfylder

$$(Tu, v)_H = (u, Tv)_H \quad \text{for alle } u, v \in D(T),$$

symmetrisk. Som tidligere nævnt, gælder for $T \in \mathbf{B}(H)$, at T er symmetrisk hvis og kun hvis T er selvadjungeret. For ubegrænsede operatorer har vi:

Når T er symmetrisk og $D(T)$ er tæt i H, ses af (18) at elementerne i $D(T)$ opfylder betingelsen for at tilhøre $D(T^*)$, og at $T^*v = Tv$ for disse elementer; altså $D(T) \subset D(T^*)$ og $T^*|_{D(T)} = T$; kort udtrykt, $T \subset T^*$.

For sådanne operatorer er det blot $D(T) = D(T^*)$, der yderligere skal være opfyldt for at $T = T^*$. Altså, der gælder for en tæt defineret operator T, at: *T er symmetrisk med $D(T) = D(T^*)$* $\iff$ $T = T^*$. Det forekommer dog ofte i praksis, at $D(T)$ er en ægte delmængde af $D(T^*)$, og så er T jo ikke identisk med T^*.

Diskussionen af, hvilke symmetriske operatorer der er selvadjungerede (i det ubegrænsede tilfælde), hører hjemme i et systematisk studium af funktionalanalyse. I dette kursus vil vi blot behandle nogle få, centrale eksempler på selvadjungerede operatorer.

Vi vil her benytte følgende to meget naturlige principper: 1) En selvadjungeret operator i et Hilbert rum H *overføres ved en unitær afbildning* fra H til et andet Hilbert rum H_1 i en selvadjungeret operator i H_1. 2) Når T er *invers* til en begrænset selvadjungeret operator i et Hilbert rum, så er T selvadjungeret. De formuleres i detaljer i Lemma 3.14 og 3.15 nedenfor.

Først betragter vi et vigtigt specialtilfælde af operatorer, hvor man eksplicit kan finde den adjungerede operator, og der er et simpelt kriterium for selvadjungerethed.

Sætning 3.12. *Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og $p\colon X \to \mathbb{C}$ en målelig funktion, og definer* **multiplikationsoperatoren** M_p **i** $L_2(X,\mu)$ *ved*

$$\begin{aligned} D(M_p) &= \{\, g \in L_2(X,\mu) \mid pg \in L_2(X,\mu) \,\}, \\ M_p g &= pg \text{ for } g \in D(M_p). \end{aligned}$$

Der gælder da:

M_p er en lineær, tæt defineret operator i $L_2(X,\mu)$, og den adjungerede operator ${M_p}^*$ er multiplikationsoperatoren $M_{\overline{p}}$.

Hvis p er reel, er M_p selvadjungeret.

Hvis $|p(\xi)| \le C$ for alle $\xi \in X$, er M_p overalt defineret og begrænset, med norm $\le C$.

Bevis. Lineariteten er oplagt. Bemærk, at en målelig funktion g tilhører $D(M_p)$ hvis og kun hvis $(1 + |p|)g \in L_2(X,\mu)$. Altså er

$$D(M_p) = \Big\{ \frac{\varphi}{1+|p|} \,\Big|\, \varphi \in L_2(X,\mu) \Big\}.$$

Heraf følger, at $D(M_p)$ er tæt i $L_2(X,\mu)$, thi hvis $\overline{D(M_p)} \ne L_2(X,\mu)$, fandtes $g \in L_2(X,\mu) \setminus \{0\}$ med $g \perp \overline{D(M_p)}$, men så måtte der gælde

$$0 = \Big(\frac{\varphi}{1+|p|}, g\Big) = \Big(\varphi, \frac{g}{1+|p|}\Big), \text{ for alle } \varphi \in L_2(X,\mu),$$

og dette medfører $\dfrac{g}{1+|p|} = 0$ i strid med $g \ne 0$.

Vi har (jvf. (18)), at $g_1 \in D({M_p}^*)$ netop når der findes et $h \in L_2(X,\mu)$ så at

$$(M_p g, g_1) = (g, h), \text{ for alle } g \in D(M_p),$$

altså

$$\Big(\frac{p\varphi}{1+|p|}, g_1\Big) = \Big(\frac{\varphi}{1+|p|}, h\Big), \text{ for alle } \varphi \in L_2(X,\mu).$$

Dette omskrives til

$$\Big(\varphi, \frac{\overline{p} g_1}{1+|p|}\Big) = \Big(\varphi, \frac{h}{1+|p|}\Big), \text{ for alle } \varphi \in L_2(X,\mu), \tag{19}$$

og her ser vi, da $\dfrac{\overline{p} g_1}{1+|p|}$ og $\dfrac{h}{1+|p|}$ tilhører $L_2(X,\mu)$, at (19) gælder netop når disse er ens, altså

$$\overline{p} g_1 = h.$$

Dette viser, at ${M_p}^* = M_{\overline{p}}$.

Det følger nu også umiddelbart, at når $p = \overline{p}$ er M_p selvadjungeret.

Endelig er det klart, at når $|p(\xi)| \le C$ for $\xi \in X$, er $D(M_p) = L_2(X,\mu)$ og

$$\|M_p g\|_{L_2} \le C\|g\|_{L_2};$$

og da er M_p begrænset med $\|M_p\| \le C$. $\square$

Eksempel 3.13. Betragt Hilbert rummet $\ell_2(\mathbb{Z})$; det er rummet $L_2(\mathbb{Z},\mu)$ hvor μ er tællemålet på $\mathbb{Z}$. Lad N betegne operatoren "multiplikation med n", defineret præcist ved

$$\begin{aligned} N\colon a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} &\mapsto Na = \{(Na)_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{na_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\,, \\ D(N) &= \{\, a \in \ell_2(\mathbb{Z}) \mid \{na_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z}) \,\}. \end{aligned}$$

(Vi kunne også kalde operatoren M_n, men index n her kan misforstås.) $D(N)$ er en ægte delmængde af $\ell_2(\mathbb{Z})$, idet for eksempel

$$\tilde{a} = \{\tfrac{1}{1+|n|}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

ligger i ℓ_2 men ikke i $D(N)$ (idet $\{\frac{n}{1+|n|}\}_{n\in\mathbb{Z}} \notin \ell_2(\mathbb{Z})$).

Sætning 3.12 viser, at $D(N)$ er tæt i $\ell_2(\mathbb{Z})$, og, da n er reel, at N er selvadjungeret. Det er en ubegrænset operator, idet for eksempel følgen $\tilde{a}^{(M)} = \{\tilde{a}_n^{(M)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, defineret ved

$$\tilde{a}_n^{(M)} = \begin{cases} \frac{1}{1+|n|} & \text{for } |n| \le M, \\ 0 & \text{for } |n| > M, \end{cases}$$

består af elementer med norm

$$1 \le \|\tilde{a}^{(M)}\| = \big(\textstyle\sum_{|n|<M} \frac{1}{(1+|n|)^2}\big)^{\frac{1}{2}} \le \|\tilde{a}\|,$$

mens billedelementernes norm går mod ∞;

$$\|N\tilde{a}^{(M)}\| = \big(\textstyle\sum_{|n|<M} \frac{n^2}{(1+|n|)^2}\big)^{\frac{1}{2}} \to \infty \text{ for } M \to \infty.$$

Lemma 3.14. *Lad H og H_1 være Hilbert rum, og antag, at $U \in \mathbf{B}(H, H_1)$ er en unitær operator fra H til H_1.*

Lad T være en lineær operator i H, og definer operatoren T_1 i H_1 som $T_1 = UTU^{-1}$, dvs.

$$D(T_1) = UD(T), \quad T_1 v = UTU^{-1}v \text{ for } v \in D(T_1). \tag{20}$$

Hvis $D(T)$ er tæt i H, så er $D(T_1)$ tæt i H_1; og hvis T er ubegrænset, er T_1 ubegrænset. I det tæt definerede tilfælde er den adjungerede til T_1 netop $T_1^* = UT^*U^{-1}$; specielt, hvis T er selvadjungeret i H, er $T_1 = UTU^{-1}$ selvadjungeret i H_1.

Bevis. Når $D(T)$ er tæt defineret, kan et vilkårligt $v \in H_1$ approksimeres af en følge af elementer $v_n \in D(T_1)$ ved at man tager $v_n = Uu_n$, hvor $u_n \in D(T)$ konvergerer mod $u = U^{-1}v$; det viser tætheden af $D(T_1)$ i H_1. Ubegrænsethed af T overføres til T_1, fordi $\|Uu\|_{H_1} = \|u\|_H$, og $\|T_1Uu\|_{H_1} = \|UTU^{-1}Uu\|_{H_1} = \|Tu\|_H$ for $u \in D(T)$. Bemærk, at når $T_1 = UTU^{-1}$, så er $T = U^{-1}T_1U$, defineret på tilsvarende måde ud fra den unitære operator U^{-1} fra H_1 til H, så konklusionerne gælder også i modsat retning.

For bestemmelsen af den adjungerede i tilfældet af tæt definitionsmængde minder vi om, at $U^{-1} = U^*$. Når $u \in D(T^*)$ og $v \in D(T_1)$, er

$$\begin{aligned}(Uu, T_1v)_{H_1} &= (u, U^*T_1UU^{-1}v)_H = (u, TU^{-1}v)_H = (T^*u, U^{-1}v)_H \\ &= (UT^*u, v)_{H_1} \text{ for alle } v \in D(T_1);\end{aligned}$$

altså er $Uu \in D(T_1^*)$ med $T_1^*Uu = UT^*u$. Dette viser, at $D(UT^*U^{-1}) = UD(T^*) \subset D(T_1^*)$, og $T_1^*Uu = UT^*U^{-1}Uu$ dér; kort skrevet: $UT^*U^{-1} \subset T_1^*$. Ombyttes rollerne af T og T_1, og af U og U^{-1}, ser vi tilsvarende, at $U^{-1}T_1^*U \subset T^*$ og dermed $T_1^* \subset UT^*U^{-1}$. Ialt ses, at $T_1^* = UT^*U^{-1}$, og påstandene følger. $\square$

Lemmaet er egentlig bare udtryk for, at hvis vi ved en isometrisk isomorfi U af et Hilbert rum H på et andet H_1 fører en operator T i H over i en operator T_1 i H_1,

$$\begin{array}{ccc} H \supset D(T) & \xrightarrow{T} & H \\ {\scriptstyle U}\big\downarrow & & {\scriptstyle U}\big\downarrow \\ H_1 \supset D(T_1) & \xrightarrow{T_1} & H_1 \end{array} ,$$

så "følger egenskaberne med", her drejer det sig om tæthed af definitionsmængden, ubegrænsethed, og adjungering.

Som bemærket i beviset for lemmaet, fås T af T_1 på analog måde ved $T = U^{-1}T_1U$, og egenskaber ved T_1 overføres i egenskaber ved T. At der findes en unitær operator U så at (20) gælder, udtrykkes ofte kort ved at sige, at T_1 *er unitært ækvivalent med* T.

Vi formulerer også den anden regel, hvis bevis udelades (ikke fordi det er et specielt dybt resultat, men fordi begrebsapparatet omkring beviset er for omfattende til at medtages her).

Lemma 3.15. *Lad T være en tæt defineret lineær operator i H, og antag, at $T = S^{-1}$, hvor $S \in \mathbf{B}(H)$. Hvis $S = S^*$, så er $T = T^*$.*

Lad os nu undersøge, hvad den unitære afbildning $F\colon L_2(\mathbb{T}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ defineret ved (11) gør ved operatoren $\mathcal{D}$ defineret i (17). Ved brug af §2.5 (3) og Sætning 3.9 2° fås:

$$\begin{aligned} F(D(\mathcal{D})) &= F(H^1(\mathbb{T})) = \{\, \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z}) \mid \{na_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z}) \,\} \\ &= D(N), \\ F\mathcal{D}f &= \tfrac{1}{i} Fg = \tfrac{1}{i}\{(g, e_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= \{n(f, e_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{n(Ff)_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = NFf, \end{aligned}$$

hvor N er multiplikationsoperatoren studeret i Eksempel 3.13. Dette viser, at

$$F\mathcal{D}F^{-1} = N, \quad \text{og dermed } \mathcal{D} = F^{-1}NF. \tag{21}$$

Da N er en (tæt defineret, ubegrænset) selvadjungeret operator i $\ell_2(\mathbb{Z})$, giver Lemma 3.14, anvendt med $U = F^{-1}$, nu umiddelbart, at $\mathcal{D}$ er en (tæt defineret, ubegrænset) *selvadjungeret operator i* $L_2(\mathbb{T})$.

Dette giver et første, fundamentalt eksempel på en selvadjungeret *realisation* af en differentialoperator i et L_2-rum.

Sammenhængen mellem $\mathcal{D}$ og N kan illustreres ved et diagram:

$$\begin{array}{ccc} L_2(\mathbb{T}) \supset D(\mathcal{D}) & \xrightarrow{\ \mathcal{D}\ } & L_2(\mathbb{T}) \\ {\scriptstyle F}\big\downarrow & & {\scriptstyle F}\big\downarrow \\ \ell_2(\mathbb{Z}) \supset D(N) & \xrightarrow{\ N\ } & \ell_2(\mathbb{Z}) \end{array} .$$

Vi har hermed vist, for vores generalisation $\mathcal{D}$ af $\frac{1}{i}\frac{d}{d\theta}$:

Sætning 3.16. *Operatoren $\mathcal{D}$ i $L_2(\mathbb{T})$, defineret ved* (17), *er selvadjungeret (og tæt defineret, ubegrænset), og opfylder* (21).

Resultatet af ovenstående overvejelser minder lidt om diagonalisering af lineære afbildninger i endelig-dimensionale vektorrum, hvor man jo, når den tilhørende matrix er symmetrisk, kan finde et ortogonalt koordinatskift, der erstatter matricen med en *diagonalmatrix*, så den i de nye koordinater virker på basisvektorerne som en multiplikationsoperator.

I det foreliggende tilfælde har vi jo, at $\mathcal{D}$ virker som multiplikation med n på den n'te basisvektor $e^{in\theta}$. Analogt med det endeligdimensionale tilfælde kunne man skrive operatoren symbolsk op som en diagonalmatrix med rækker og søjler nummereret ved $\mathbb{Z}$, svarende til nummereringen af basisvektorerne (det ses i den ældre litteratur). På grund af denne analogi siger man, at Fourieropløsningen giver en *diagonalisering* af $\mathcal{D}$.

Andre eksempler på generelle realisationer af differentialoperatorer vil blive givet i forbindelse med multiple Fourierrækker i §4.3; se også Opg. 3.10–11. Endvidere vil vi i §4.4 se på Fourier transformationen, der ligeledes tillader en omformning af differentialoperatorer til multiplikationsoperatorer, nu i Hilbertrummet $L_2(\mathbb{R}^k)$.

$H^1(\mathbb{T})$ er et simpelt eksempel på en type af rum der kaldes Sobolev rum; mere alment er disse rum Hilbert rum hvor differentialoperatorerne op til en vis orden er veldefinerede, se §4.3. Formålet med at indføre Sobolev rum er at gøre det muligt at bruge funktionalanalyse (i form af Hilbertrumsteori) på differentialligningsproblemer, i situationer hvor rummene C^m af klassisk kontinuert differentiable funktioner kommer til kort.

Følgende eksempel viser, at Fourieropløsningen også kan diagonalisere visse begrænsede operatorer.

Eksempel 3.17. Betragt operatoren $U_{\theta_0}\colon L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T})$ defineret ved

$$(U_{\theta_0} f)(\theta) = f(\theta + \theta_0)\,, \quad \theta_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Det ses umiddelbart, at U_{θ_0} er unitær (da den er en surjektiv isometri), og

$$U_{\theta_0} U_{\theta_1} = U_{\theta_0+\theta_1}\,, \quad U_0 = I, \quad {U_{\theta_0}}^* = U_{-\theta_0}.$$

(I funktionalanalysen giver dette anledning til at man siger, at $\theta_0 \mapsto U_{\theta_0}$ udgør en én-parameter gruppe af unitære operatorer.) Med $F\colon L_2(\mathbb{T}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ defineret som ovenfor i (11), ser vi, at

$$\begin{aligned}(FU_{\theta_0} f)_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\theta_0)e^{-in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\theta_0}^{\pi+\theta_0} f(\theta)e^{-in(\theta-\theta_0)}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in(\theta-\theta_0)}d\theta = e^{in\theta_0}(Ff)_n\,,\end{aligned}$$

for alle $f \in L_2(\mathbb{T})$. Denne ligning kan skrives

$$(FU_{\theta_0}F^{-1}Ff)_n = e^{in\theta_0}(Ff)_n\,,$$

og da Ff gennemløber hele $\ell_2(\mathbb{Z})$, når f gennemløber $L_2(\mathbb{T})$, følger at $(FU_{\theta_0}F^{-1}a)_n = e^{in\theta_0}a_n$, for alle $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Operatoren U_{θ_0} er altså unitært ækvivalent med multiplikationsoperatoren

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \{e^{in\theta_0}a_n\}_{n\in\mathbb{Z}},$$

som også er unitær.

Bemærkning 3.17. Når vi medtager begrebet selvadjungerethed her, trods at der kun er plads til en antydning af teorien omkring det, er det fordi det forkommer hyppigt i faglitteraturen (også i Fysik), og af og til bruges ukorrekt (om operatorer der kun er symmetriske). Interessen af selvadjungerede operatorer er, at de har gode egenskaber i forskellige problemstillinger. Lad os blot nævne nogle eksempler uden bevis. Studiet af differentialoperatorer drejer sig i høj grad om at *løse ligninger*, altså for eksempel når A er en operator fra $D(A)$ ind i H: Løs ligningen

$$Au = f, \tag{22}$$

dvs. for givet $f \in H$ find $u \in D(A)$ så (22) gælder. Når A er *surjektiv*, vil det sige at der *eksisterer* en løsning u for hvert $f \in H$, og når A er *injektiv*, er der *højst én* løsning for hvert f. For selvadjungerede operatorer er der en god chance for *bijektivitet*; f.eks. er A bijektiv, hvis A er selvadjungeret og opfylder

$$(Au, u) \geq c > 0 \text{ for } u \in D(A) \text{ med } \|u\| = 1. \tag{23}$$

En anden interesse er, at der for selvadjungerede operatorer findes en dybtgående teori, *spektralteori*, der tillader al mulig manipulation med operatorerne. Den "diagonalisering", vi i dette kursus blot etablerer i nogle konkrete tilfælde, er et specialtilfælde af spektralteori. Med den kan man definere andre interessante operatorer ud fra A, nemlig f.eks. "eksponentialfunktioner": e^{itA} og, når (23) er opfyldt, e^{-tA}. De indgår i løsningen til problemer af formen

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t) + Au(t) = 0, \\ u(0) = g_0, \ \frac{\partial}{\partial t}u(t) = g_1; \end{cases} \quad \text{hhv.} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t) + Au(t) = 0, \\ u(0) = g; \end{cases}$$

der bl.a. kan repræsentere bølgeligningen hhv. varmeledningsligningen (med t som tidsparameter); se også Kapitel V, §4–5. Det systematiske studium hører hjemme i den videregående funktionalanalyse.

Opgaver til §3.

3.1. Lad $H = L_2(\mathbb{T})$ og $(Tf)(\theta) = t(\theta)f(\theta)$, hvor $f \in L_2(\mathbb{T})$ og t er en begrænset målelig funktion med periode 2π. Vis, at T er en kontinuert lineær operator i $L_2(\mathbb{T})$, og find T^*.

3.2. Lad $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ være et ortonormalsystem (ikke nødvendigvis fuldstændigt) i Hilbert rummet H, og lad $W\colon H \to \ell_2(\mathbb{N})$ være operatoren defineret ved

$$Wf = \{(f, e_1), (f, e_2), \dots\}\,.$$

Vis, at $W \in \mathbf{B}(H, \ell_2(\mathbb{N}))$, og at W^*W og WW^* er ortogonale projektioner i H henholdsvis $\ell_2(\mathbb{N})$.

3.3. Lad $H = \mathbb{C}^k$ og lad $T\colon H \to H$ være en lineær afbildning, med tilhørende matrix $(t_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$. Find matricen hørende til T^*.

3.4. Lad M betegne operatoren i $\ell_2(\mathbb{Z})$ defineret ved $M\colon \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \{\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Vis, at $F^{-1}MF$ er en unitær operator fra $L_2(\mathbb{T})$ til $H^1(\mathbb{T})$.

3.5. Vis, at når l svarer til v_l ved Riesz' repræsentationssætning, så er afbildningen $v_l \mapsto \bar{l}$ en isometrisk isomorfi af H på H^* (her betegner $\bar{l}$ den konjugerede funktional $\bar{l}\colon u \mapsto \overline{l(u)}$).

3.6. Lad $H = L_2(\mathbb{T})$, og lad $U_{\theta_0}\colon H \to H$ være defineret ved $(U_{\theta_0}f)(\theta) = f(\theta + \theta_0)$. Vis, at for $f \in H^1(\mathbb{T})$ gælder

$$i\frac{d}{d\theta_0}U_{\theta_0}f\bigg|_{\theta_0=0} = \mathcal{D}f\,,$$

jvf. Definition 3.15. Vi læser her $\dfrac{d}{d\theta_0}U_{\theta_0}f$ som $\lim_{h\to 0}\dfrac{U_{\theta_0+h}f - U_{\theta_0}f}{h}$ i $L_2(\mathbb{T})$.

3.7. Lad $T \in \mathbf{B}(H)$, og lad $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en ortonormal basis for H. Lad os definere

$$\|T\|_{\mathrm{HS}} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,.$$

$\|T\|_{\mathrm{HS}}$ kaldes *Hilbert–Schmidt normen* af T (som tillades evt. at være uendelig).

Vis, at $\|T\|_{\mathrm{HS}}$ er uafhængig af valget af basis $\{e_n\}$, og at $\|T\|_{\mathrm{HS}} = \|T^*\|_{\mathrm{HS}}$.

3.8. Vis, at der for operatorer S og $T \in \mathbf{B}(H)$ gælder, at $\|ST\|_{\mathrm{HS}} \leq \|S\|\ \|T\|_{\mathrm{HS}}$ og $\|TS\|_{\mathrm{HS}} \leq \|T\|_{\mathrm{HS}}\|S\|$, samt at $\|S\| \leq \|S\|_{\mathrm{HS}}$.

3.9. Vis, at mængden af operatorer $T \in \mathbf{B}(H)$ med $\|T\|_{\mathrm{HS}} < \infty$ udgør et Hilbert rum med skalarproduktet

$$(S,T)_{HS} = \sum_{n=1}^{\infty} (Se_n, Te_n)\,,$$

hvor $\{e_n\}$ er en ortonormal basis for H.

3.10. Vis, at operatoren $T_0 = -\dfrac{d^2}{d\theta^2}$ med definitionsmængde $D(T_0) = C^2(\mathbb{T})$ er en tæt defineret, symmetrisk, ubegrænset operator i $L_2(\mathbb{T})$. Find FT_0F^{-1}, hvor F er den unitære operator defineret ved (11).

3.11. Vis, at multiplikationsoperatoren N_2 defineret ved

$$D(N_2) = \{\, g \in \ell_2(\mathbb{Z}) \mid \{n^2 g_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})\,\},$$
$$N_2\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{n^2 g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\,,$$

er selvadjungeret. Vis, at operatoren T defineret ved

$$D(T) = F^{-1}D(N_2),$$
$$T = F^{-1}N_2F,$$

er en selvadjungeret udvidelse af T_0 defineret i Opg. 3.10.

3.12. Idet T er operatoren defineret i Opg. 3.11, skal man vise, at $T + I$ er er en bijektion af $D(T)$ på $L_2(\mathbb{T})$, og at $(T + I)^{-1}$ er en begrænset operator i $L_2(\mathbb{T})$ med endelig Hilbert–Schmidt norm.

3.13 Vis, at når $h(\theta) = \int_\alpha^\theta g(\sigma)\,d\sigma$ med $g \in L_2([\alpha,\beta])$, så er

$$\|h\|_{L_2([\alpha,\beta])} \leq 2^{-\frac{1}{2}}(\beta-\alpha)\|g\|_{L_2([\alpha,\beta]}.$$

(*Vink.* Integrer uligheden $|h(\theta)|^2 \leq (\theta-\alpha)\|g\|^2$.)

3.14 Man kan vise, at ∂ og $\mathcal{D}$ er ubegrænsede operatorer i $L_2(\mathbb{T})$, ved et direkte eksempel: Vis, at

$$g_R(\theta) = \begin{cases} R & \text{for } \theta \in [-\frac{1}{R}, 0[\,, \\ -R & \text{for } \theta \in [0, \frac{1}{R}], \\ 0 & \text{for } \theta \in [-\pi,\pi[\,\setminus[-\frac{1}{R}, \frac{1}{R}], \end{cases}$$

$$\text{giver } h_R(\theta) = \begin{cases} 1 - R|\theta| & \text{for } \theta \in [-\frac{1}{R}, \frac{1}{R}], \\ 0 & \text{for } \theta \in [-\pi,\pi[\,\setminus[-\frac{1}{R}, \frac{1}{R}], \end{cases}$$

ved formlen $h_R(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} g_R(\sigma)\, d\sigma$. Vis, at h_R går mod 0 i $L_2(\mathbb{T})$, mens $g_R = \partial h_R$ er divergent i $L_2(\mathbb{T})$, for $R \to \infty$. (Man udregner, at $\|h_R\| = \sqrt{2/(3R)}$, $\|g_R\| = \sqrt{2R}$.)

3.15 Vis, at når $f \in C(\mathbb{T})$ er stykkevis C^1 (jvf. Opg. 2.3), er $\mathcal{D}f$ lig med $\frac{1}{i}\frac{df}{d\theta}$, idet denne tillægges vilkårlige værdier i de punkter hvor f ikke er differentiabel.

3.16 Lad $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en ortonormal basis for et Hilbertrum H. Lad $U \in \mathbf{B}(H)$. Angiv en tilstrækkelig betingelse på U for at $\{Ue_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en ortonormal basis for H.

3.17 Vis, at hvis $P \in \mathbf{B}(H)$ opfylder $P^* = P$ og $P^2 = P$, så er P den ortogonale projektion på $X = P(H)$.

§4. Fourierudvikling af funktioner af flere variable

4.1. Funktionsrum over $\mathbb{T}^k$ og multiple Fourierrækker.

Lad os betragte funktioner på den k-dimensionale torus $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T}$, altså funktioner $f(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ som er periodiske med periode 2π i hver variabel.

Vi skriver $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ og $d\theta = d\theta_1 \cdots d\theta_k$, og betegner $]-\pi,\pi[^k =]-\pi,\pi[\times\cdots\times]-\pi,\pi[$ ved Q.

For hvert $p \in [1,\infty[$ lader vi $\mathcal{L}_p(\mathbb{T}^k)$ betegne rummet af Borel funktioner $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$, der er periodiske med periode 2π i hver variabel og opfylder

$$\|f\|_p = \Big((2\pi)^{-k}\int_Q |f(\theta)|^p\,d\theta\Big)^{1/p} < \infty\,.$$

Endvidere defineres $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{T}^k)$ som mængden af Borel funktioner $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ med periode 2π i hver variabel, som er essentielt begrænsede:

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_\theta |f(\theta)| < \infty\,.$$

Rummene kan identificeres med $\mathcal{L}_p(Q, (2\pi)^{-k} m_k)$, og arver derved de almindelige egenskaber for $\mathcal{L}_p$-rum, se II §7.

Funktionsrummet $\mathcal{L}_p(\mathbb{T}^k)$ går over i et Banach rum $L_p(\mathbb{T}^k)$, når funktionerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen $f \sim g \iff \|f-g\|_p = 0$.

Banach rummet $L_2(\mathbb{T}^k)$ er specielt et Hilbert rum med det indre produkt givet ved

$$(f,g) = (2\pi)^{-k}\int_Q f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta\,.$$

Lad $n = \{n_1, \ldots, n_k\} \in \mathbb{Z}^k$, hvor vi skriver $n\cdot\theta = n_1\theta_1 + \cdots + n_k\theta_k$ og $\|n\| = (n_1^2 + \cdots + n_k^2)^{\frac{1}{2}}$. Systemet af funktioner $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k}$ defineret ved

$$e_n(\theta) = e^{in\cdot\theta}\ (= e^{in_1\theta_1}\cdots e^{in_k\theta_k})$$

er et ortonormalsystem i $L_2(\mathbb{T}^k)$; dette følger direkte fra det én-dimensionale tilfælde, idet

$$\begin{aligned}(e_n, e_{n'})_{L_2(\mathbb{T}^k)} &= (2\pi)^{-k}\int_Q e^{i(n-n')\cdot\theta}d\theta\\ &= \prod_{j=1}^k\Big(\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n_j-n_j')\theta_j}\,d\theta_j\Big) = \begin{cases} 0 \text{ for } n \neq n', \\ 1 \text{ for } n = n', \end{cases}\end{aligned}$$

ved Fubinis sætning.

Vi kan ligeledes definere funktionsrummene $C^m(\mathbb{T}^k)$ $(m \geq 0)$ og $C^\infty(\mathbb{T}^k)$; det er de periodiske funktioner i k variable, som er kontinuerte og m gange, henholdsvis vilkårligt mange gange, kontinuert differentiable. Åbenbart er $C^\infty(\mathbb{T}) = \bigcap_{m\geq 0} C^m(\mathbb{T})$. ($C^0(\mathbb{T}^k)$ skrives også $C(\mathbb{T}^k)$.) Vi bemærker, at $C^m(\mathbb{T})$ kan identificeres med rummet af funktioner $f \in C^m(\overline{Q})$, for hvilke

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha f(-\pi, \theta_2, \dots, \theta_k) &= \partial^\alpha f(\pi, \theta_2, \dots, \theta_k),\\
\partial^\alpha f(\theta_1, -\pi, \dots, \theta_k) &= \partial^\alpha f(\theta_1, \pi, \dots, \theta_k),\\
&\vdots\\
\partial^\alpha f(\theta_1, \theta_2, \dots, -\pi) &= \partial^\alpha f(\theta_1, \theta_2, \dots, \pi),
\end{aligned} \tag{1}$$

for $|\alpha| \leq m$ (se II §8.2 vedr. ∂^α); her er definitionen via periodiske funktioner naturligvis mere kortfattet. Rummene $C^m(\mathbb{T}^k)$ og $C^\infty(\mathbb{T}^k)$ kan opfattes som underrum af rummene $L_p(\mathbb{T}^k)$, som forklaret i indledningen til §2.

For $k = 1$ er $\mathbb{T}^1 = \mathbb{T}$, og definitionerne stemmer med de tidligere.

Der gælder et lemma svarende til Lemma 2.9:

Lemma 4.1. *Mængden $C^\infty(\mathbb{T}^k)$ er tæt i $L_2(\mathbb{T}^k)$. Også mængden $C_c^\infty(Q)$ af vilkårligt ofte differentiable funktioner med kompakt støtte i Q (forlænget til periodiske funktioner) er tæt i $L_2(\mathbb{T}^k)$.*

For beviset kan vi igen henvise til beviset for Sætning II 8.21.

Vi vil nu vise, hvordan funktioner i $L_2(\mathbb{T}^k)$ kan udvikles i Fourierrækker efter systemet $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k}$. Disse Fourierrækker kaldes ofte multiple Fourierrækker eller multiple trigonometriske rækker (dobbelt-rækker i tilfældet $k = 2$), fordi ortonormalsystemet består af produktfunktioner (med multiindices). For $f \in L_2(\mathbb{T}^k)$ defineres den n'te *Fourierkoefficient* som sædvanligt ved

$$c_n = c_n(f) = (f, e_n) = (2\pi)^{-k} \int_Q f(\theta) e^{-in\cdot\theta}\, d\theta;$$

afbildningen af f over i koefficientfølgen $\{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}^k}$ betegnes F, og vi skriver

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} (f, e_n) e_n\,,$$

Fourierrækken for f. Som afsnitsfølge vælger vi i reglen

$$s_N(\theta) = \sum_{\max\{|n_1|,\dots,|n_k|\}\leq N} c_n e_n(\theta) \qquad \text{(også betegnet } s_N(\theta, f));$$

$\max\{|n_1|, \dots, |n_k|\}$ skrives kort $\|n\|_\infty$, jvf. side I 1.4.

Et afgørende skridt i analysen er at vise følgende:

Sætning 4.2. *Ortonormalsystemet* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k} = \{e^{in\cdot\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}^k}$ *er fuldstændigt i* $L_2(\mathbb{T}^k)$ *(dvs. det udgør en basis for* $L_2(\mathbb{T}^k)$*).*

Der gælder altså $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} c_n(f)e_n$ *i* $L_2(\mathbb{T}^k)$ *for ethvert* $f \in L_2(\mathbb{T}^k)$*, og*

$$F\colon f \mapsto \{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}^k}$$

er en unitær operator fra $L_2(\mathbb{T}^k)$ *til* $\ell_2(\mathbb{Z}^k)$*.*

Bevis. Vi viser først Parsevals ligning

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^k} |(f, e_n)|^2 = \|f\|^2_{L_2(\mathbb{T}^k)}\,, \tag{2}$$

for funktionerne i delmængden $C(\mathbb{T}^k)$ af $L_2(\mathbb{T}^k)$.

Lad os i detaljer betragte tilfældet hvor $k = 2$. Lad $f \in C(\mathbb{T}^2)$, og lad $M = \max|f(\theta_1, \theta_2)|$; og bemærk, at $f(\cdot, \theta_2)$ tilhører $C(\mathbb{T})$ som funktion af θ_1 for hvert fast θ_2. Vi viser da:

$$\begin{aligned}
\|f(\theta)\|_2^2 &= (2\pi)^{-2}\int_Q |f(\theta_1,\theta_2)|^2\, d\theta_1 d\theta_2 \\
&\overset{1}{=} \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta_1,\theta_2)|^2\,d\theta_1\Big)\,d\theta_2 \overset{2}{=} \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}|c_{n_1}(f(\cdot,\theta_2))|^2\,d\theta_2 \\
&\overset{3}{=} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|c_{n_1}(f(\cdot,\theta_2))|^2\,d\theta_2 \overset{4}{=} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\sum_{n_2\in\mathbb{Z}}|c_{n_1,n_2}(f)|^2
\end{aligned} \tag{3}$$

således: $\overset{1}{=}$ fås ved Fubinis sætning. $\overset{2}{=}$ følger af Parsevals ligning anvendt på $f(\cdot, \theta_2)$ for hvert θ_2. $\overset{3}{=}$ fås ved brug af Lebesgues sætning, idet afsnittene i rækken har en fast integrabel majorant, da der for alle N og alle θ_2 gælder:

$$\sum_{|n_1|\le N}|c_{n_1}(f(\cdot,\theta_2))|^2 \le \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta_1,\theta_2)|^2\,d\theta_1 \le M^2.$$

Endelig ses $\overset{4}{=}$ som følger:

Da $f(\theta_1, \theta_2) \in C(\mathbb{T}^2)$, er (jvf. Sætning I 4.27)

$$c_{n_1}(f(\cdot,\theta_2)) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_1,\theta_2)e^{-in_1\theta_1}\,d\theta_1$$

en kontinuert funktion af θ_2 med periode 2π, og man finder at $|c_{n_1}(f(\cdot, \theta_2))| \le M$ for alle θ_2. For $c_{n_1}(f(\cdot, \theta_2))$ gælder da Parsevals ligning, dvs.

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|c_{n_1}(f(\cdot,\theta_2))|^2\,d\theta_2 = \sum_{n_2\in\mathbb{Z}}|c_{n_2}(c_{n_1}(f(\cdot,\theta_2)))|^2,$$

og her genkendes konstanterne i højre side som

$$\begin{aligned} c_{n_2}(c_{n_1}(f(\cdot,\theta_2))) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c_{n_1}(f(\cdot,\theta_2))e^{-in_2\theta_2}\,d\theta_2 \\ &= (2\pi)^{-2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_1,\theta_2)e^{-in_1\theta_1-in_2\theta_2}\,d\theta_1 d\theta_2 \\ &= c_{n_1,n_2}(f). \end{aligned}$$

Dette viser (3), dvs. Parsevals ligning gælder for $f\in C(\mathbb{T}^2)$.

For generelle k går man frem ved induktion efter k, idet man lader $\theta' = (\theta_1,\dots,\theta_{k-1})$ og θ_k spille rollen som θ_1 og θ_2 ovenfor.

Nu fås Fourierrækkens konvergens for vilkårligt f omtrent som i Sætning 2.10: Lad f og $\varepsilon>0$ være givet. Ved Lemma 4.1 er $C^\infty(\mathbb{T}^k)$ en tæt delmængde af $L_2(\mathbb{T}^k)$, så der findes $g\in C^\infty(\mathbb{T}^k)$ med $\|f-g\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}\le\varepsilon$. For g gælder ifølge det netop viste, at $\|s_N(\cdot,g)\|_2\to\|g\|_2$, og dermed $\|g-s_N(\cdot,g)\|_2\to 0$ for $N\to\infty$, da $\|g\|_2^2=\|g-s_N(\cdot,g)\|_2^2+\|s_N(\cdot,g)\|^2$ ved Pythagoras.

Af det sidste udsagn i Bessels approksimationssætning følger, at

$$\|f-s_N(\cdot,f)\|_2\le\|f-s_N(\cdot,g)\|_2\,,$$

og for udtrykket til højre har vi endvidere

$$\|f-s_N(\cdot,g)\|_2\le\|f-g\|_2+\|g-s_N(\cdot,g)\|_2\le\varepsilon+\|g-s_N(\cdot,g)\|_2\le 2\varepsilon,$$

når N er tilstrækkeligt stor.

Dette viser, at for ethvert $f\in L_2(\mathbb{T}^k)$ konvergerer Fourierrækken mod f i $L_2(\mathbb{T}^k)$. De andre udsagn i sætningen følger nu af Sætningerne 1.14 og 3.7. $\square$

4.2. Uniform konvergens.

Vi vil nu studere uniform konvergens af Fourierrækken $f=\sum(f,e_n)e_n$, samt virkningen af differentialoperatorer. (Bemærk, at vi allerede nu har fuldstændigheden af det multiple trigonometriske system til rådighed, så beviserne kan forløbe anderledes end i §2.)

Formlen $\partial_\theta^j e^{in\theta}=(in)^j e^{in\theta}$ generaliseres i det k-dimensionale tilfælde til

$$\partial_\theta^\alpha e^{in\cdot\theta}=i^{|\alpha|}n^\alpha e^{in\cdot\theta},$$

hvor vi bruger multi-index notationen indført i Kap. II §8.2, se denne. (Her bruges $\partial_j=\partial/\partial\theta_j$ som en formel differentialoperator, ikke at forveksle med den brug af ∂ og ∂_1 vi gør i §4.3 og V §1.3.) Det vil ofte være bekvemt at indbygge potensen af i i differentialoperatoren. Vi definerer

$$D_j = \tfrac{1}{i}\partial_j = -i\partial_j, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_k^{\alpha_k},$$

hvor den variable evt. angives som nedre index (fx. D_{x_j}, D_x^α, D_θ^α). Så er

$$D_\theta^\alpha e^{in\cdot\theta} = n^\alpha e^{in\cdot\theta}.$$

Vi viser først:

Sætning 4.3. *Lad $f \in C^m(\mathbb{T}^k)$, med Fourierrækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}(f,e_n)e_n$, $e_n = e^{in\cdot\theta}$. For hvert $\alpha \in \mathbb{N}_0^k$ med $|\alpha| \le m$ gælder*

$$(D^\alpha f, e_n) = n^\alpha (f,e_n), \text{ og dermed } D^\alpha f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} n^\alpha (f,e_n)e_n;$$

rækken for $D^\alpha f$ er altså den ledvis differentierede række. Endvidere er

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}(1+\|n\|^2)^m |(f,e_n)|^2 < \infty. \tag{4}$$

Bevis: Lad $f \in C^m(\mathbb{T}^k)$, og betragt en differentialoperator D^α. Ved delvis integration i hver variabel, med brug af periodiciteten beskrevet i (1), fås

$$\begin{aligned}(D^\alpha f, e_n) &= (2\pi)^{-k}\int_Q (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha f(\theta)\, e^{-in\cdot\theta}\, d\theta \\ &= (2\pi)^{-k}\int_Q i^{|\alpha|} f(\theta)\, \partial^\alpha e^{-in\cdot\theta}\, d\theta = n^\alpha (f,e_n).\end{aligned}$$

Dermed bliver Parsevals ligning for $D^\alpha f$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}(n^\alpha)^2 |(f,e_n)|^2 = \|D^\alpha f\|_2^2.$$

Når α gennemløber alle multi-indices med længde $\le m$, fås ved addition:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}\sum_{|\alpha|\le m}(n^\alpha)^2 |(f,e_n)|^2 = \sum_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha f\|_2^2 < \infty.$$

Med brug af uligheden II §8.2 (3) kan vi heraf slutte, at

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}(1+\|n\|^2)^m |(f,e_n)|^2 < \infty. \qquad \square$$

Det kan bemærkes, at vi i beviset opnår følgende ulighed:

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_2^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} (1+\|n\|^2)^m |(f,e_n)|^2 \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_2^2,$$

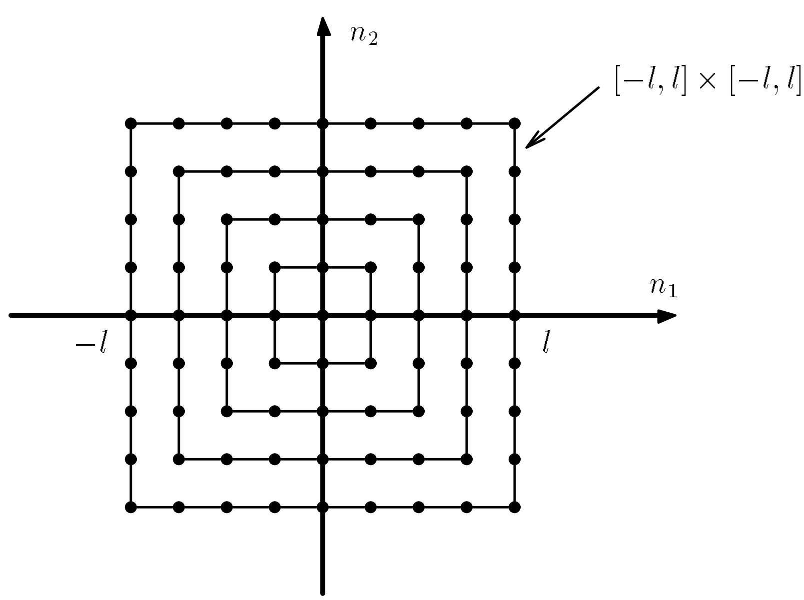
hvor konstanten C fås fra II §8 (3). Uligheden viser, at $(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$ og $(\sum_{n\in\mathbb{Z}^k} (1+\|n\|^2)^m |(f,e_n)|^2)^{\frac{1}{2}}$ er ækvivalente normer; den er nyttig ved præcise overvejelser.

Sætningen viser bl.a., at jo mere differentiabel f er, jo "bedre" konvergerer rækken af Fourierkoefficienter, jvf. (4). Nu er spørgsmålet så, hvor meget der skal til for at få uniform konvergens. Her har vi brug for:

Lemma 4.4. *For $a > k/2$ er*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^k} \frac{1}{(1+\|n\|^2)^a} < \infty.$$

Bevis. Betragt først tilfældet $k = 2$, hvor $\mathbb{Z}^2$ kan anskues som en punktmængde i planen (punkterne med heltalskoordinater).



For $l = 1, 2, \ldots$ ligger der netop $8l$ af disse punkter på randen af kvadratet $[-l,l]\times[-l,l]$, og for hvert af punkterne på denne rand, med koordinater $\{n_1, n_2\}$, gælder at

$$1 + n_1^2 + n_2^2 \geq 1 + l^2.$$

Når vi summerer over alle de punkter der ligger i et kvadrat $[-N, N] \times [-N, N]$ (dvs. alle punkter n med $\|n\|_\infty \leq N$), får vi da:

$$\sum_{\|n\|_\infty \leq N} \frac{1}{(1+\|n\|^2)^a} \leq 1 + \sum_{1 \leq l \leq N} \frac{8l}{(1+l^2)^a}.$$

Det sidste udtryk er konvergent for $N \to \infty$ præcis når $1 - 2a < -1$, dvs. når $a > 1$. Heraf ses, at når $a > 1$, er rækken $\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} (1 + \|n\|^2)^{-a}$ konvergent.

Dette viser påstanden for $k = 2$. For større værdier af k går vi frem på lignende måde:

$\mathbb{Z}^k$ betragtes som en punktmængde i $\mathbb{R}^k$. For $l = 1, 2, \ldots$ er der $\leq 2k(2l+1)^{k-1}$ punkter på den $(k-1)$-dimensionale rand af terningen $[-l, l]^k$, idet der er $2k$ randflader, der hver indeholder $(2l+1)^{k-1}$ punkter (hvoraf de på kanterne er med på flere randflader). Hvert af randpunkterne på terningen $[-l, l]^k$, med koordinater $n = \{n_1, \ldots, n_k\}$, opfylder

$$1 + \|n\|^2 \geq 1 + l^2.$$

Ved summation over terningen $[-N, N]^k$ får vi vurderingen

$$\sum_{\|n\|_\infty \leq N} \frac{1}{(1+\|n\|^2)^a} \leq 1 + \sum_{1 \leq l \leq N} \frac{2k(2l+1)^{k-1}}{(1+l^2)^a}.$$

Det sidste udtryk er konvergent for $N \to \infty$, når $k - 1 - 2a < -1$, dvs. $a > k/2$. Da konvergerer rækken som påstået. $\square$

(Det er ikke nogen tilfældighed, at disse vurderinger minder om visse vurderinger i II §8.)

Lad os anvende lemmaet først i nogle simple tilfælde.

Sætning 4.5. *Lad $f \in C^2(\mathbb{T}^k)$, med Fourierrækken $\sum_{n \in \mathbb{Z}^k} (f, e_n) e_n$, $e_n = e^{in \cdot \theta}$. Hvis $k = 2$ eller 3, konvergerer Fourierrækken absolut og uniformt mod f.*

Bevis. Ifølge Sætning 4.3 (4) for $m = 2$ har vi at

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^k} (1 + \|n\|^2)^2 |(f, e_n)|^2 < \infty.$$

Ved Cauchy-Schwarz' ulighed fås

$$\sum_{\|n\|_\infty \leq N} |(f, e_n)| \leq \Big(\sum_{\|n\|_\infty \leq N} |(f, e_n)|^2 (1 + \|n\|^2)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\|n\|_\infty \leq N} \frac{1}{(1 + \|n\|^2)^2} \Big)^{\frac{1}{2}},$$

hvor parentesen tilhøjre er konvergent for $N \to \infty$, når $k = 2$ eller 3, ifølge Lemma 4.4. Altså er

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^k} |(f, e_n)| < \infty.$$

Da $|e_n(\theta)| = |e^{in\cdot\theta}| = 1$, er rækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}^k} |(f, e_n)|$ majorantrække for Fourierrækken for f. Det følger da, at Fourierrækken er absolut og uniformt konvergent; og summen betegnes $\tilde{f}$. Da uniform konvergens medfører konvergens i $L_2(\mathbb{T}^k)$, og Fourierrækken konvergerer i $L_2(\mathbb{T}^k)$ mod f ifølge Sætning 4.2, ses at $\tilde{f} = f$. $\square$

Når man anvender Fourierrækker ved løsning af differentialligninger er man også interesseret i uniform konvergens af de *differentierede* Fourierrækker.

Definition 4.6. Vi siger, at Fourierrækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}(f, e_n)e_n$ *konvergerer (absolut) mod f i $C^l(\mathbb{T}^k)$*, hvis Fourierrækkerne for f og alle dens afledede op til og med orden l er (absolut og) uniformt konvergente, mod f og de tilsvarende afledede af f.

Sætning 4.7. *Lad $f \in L_2(\mathbb{T}^k)$ med Fourierrækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}(f, e_n)e_n$, $e_n = e^{in\cdot\theta}$, og lad l og $m \in \mathbb{N}_0$ med $m > l + k/2$. Hvis Fourierkoefficienterne opfylder (4), så konvergerer Fourierrækken absolut i $C^l(\mathbb{T}^k)$ mod en repræsentant for f i $C^l(\mathbb{T}^k)$.*

Specielt gælder, hvis $f \in C^m(\mathbb{T}^k)$, at Fourierrækken konvergerer absolut mod f i $C^l(\mathbb{T}^k)$.

Bevis. Når $\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}(1 + \|n\|^2)^m |(f, e_n)|^2 < \infty$, gælder der for $m > l + k/2$, l hel ≥ 0,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\|n\|_\infty \leq N} (1 + \|n\|^2)^{l/2} |(f, e_n)| \\
&\qquad = \sum_{\|n\|_\infty \leq N} (1 + \|n\|^2)^{m/2} |(f, e_n)| (1 + \|n\|^2)^{(l-m)/2} \\
&\qquad \leq \Big(\sum_{\|n\|_\infty \leq N} (1 + \|n\|^2)^m |(f, e_n)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\|n\|_\infty \leq N} (1 + \|n\|^2)^{l-m} \Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

hvor parentesen tilhøjre er konvergent for $N \to \infty$ da $l - m < -k/2$, ifølge Lemma 4.4. Da er rækken

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^k} (1 + \|n\|^2)^{l/2} |(f, e_n)|$$

konvergent. Imidlertid er den majorantrække for enhver af de ledvis differentierede Fourierrækker op til orden l:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^k} D^\alpha(f,e_n)e^{in\cdot\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} n^\alpha(f,e_n)e^{in\cdot\theta},$$

idet $n^\alpha \le (1+\|n\|^2)^{l/2}$ for $|\alpha| \le l$ ved II §8.2 (3); heraf ses, at disse rækker konvergerer absolut og uniformt, mod sumfunktioner f_α. Specielt er sumfunktionen f_0 kontinuert og repræsenterer f, da uniform konvergens medfører konvergens i $L_2(\mathbb{T}^k)$. Endvidere følger det af en sætning i Mat 1MA (generaliseret til partielle afledede, jvf. Opg. 4.13), at f_0 har kontinuerte partielle afledede $D^\alpha f_0$ op til orden l, og at $D^\alpha f_0 = f_\alpha$ for $|\alpha| \le l$. Dette viser den første del af sætningen.

Når $f \in C^m(\mathbb{T})$, er (4) opfyldt ifølge Sætning 4.3, og $f = f_0$. (Man kan her bemærke, at det at grænsefunktionen for den ved D^α ledvis differentierede række netop er $D^\alpha f$ (for $|\alpha| \le l$), allerede ses af Sætning 4.3.) $\square$

4.3 Diagonalisering af differentialoperatorer.

De multiple trigonometriske rækker bruges på ganske tilsvarende måde til den simple trigonometriske række, bl.a. til at diagonalisere differentialoperatorer.

Som et led i beviset for Sætning 4.3 viste vi jo, at for $f \in C^m(\mathbb{T})$ svarer D^α til multiplikation af den n-te Fourierkoefficient med n^α, når $|\alpha| \le m$. Det betyder netop, at Fourierafbildningen

$$F\colon f \mapsto \{(f,e_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^k} \tag{5}$$

giver en diagonalisering af D^α, der bliver til multiplikationsoperatoren hvor $a_n \mapsto n^\alpha a_n$.

Ved brug af den unitære operator F fra $L_2(\mathbb{T}^k)$ til $\ell_2(\mathbb{Z}^k)$ kan vi da behandle differentialoperatorer på $\mathbb{T}^k$ (med konstante koefficienter) ved betragtning af simple multiplikationsoperatorer i $\ell_2(\mathbb{Z}^k)$.

Eksempel 4.8. Lad α være et multi-index $\in \mathbb{N}_0^k$, og definer multiplikationsoperatoren N_α i $\ell_2(\mathbb{Z}^k)$ ved

$$\begin{aligned} N_\alpha a &= \{n^\alpha a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k},\\ D(N_\alpha) &= \{\, a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k} \in \ell_2(\mathbb{Z}^k) \mid \{n^\alpha a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k} \in \ell_2(\mathbb{Z}^k)\,\},\end{aligned}$$

altså $\{a_n\} \in D(N_\alpha) \iff \sum_{n\in\mathbb{Z}^k}(1+|n^\alpha|^2)|a_n|^2 < \infty$. Operatoren N_α er tæt defineret og selvadjungeret ifølge Sætning 3.12; den er ubegrænset når $\alpha \ne (0,\dots,0)$.

Vi kan nu definere operatoren $\mathcal{D}_\alpha$ i $L_2(\mathbb{T}^k)$ ved

$$\begin{aligned} D(\mathcal{D}_\alpha) &= F^{-1}D(N_\alpha), \\ \mathcal{D}_\alpha f &= F^{-1}N_\alpha F f \text{ for } f \in D(\mathcal{D}_\alpha). \end{aligned}$$

Det følger af Lemma 3.14, at $\mathcal{D}_\alpha$ er tæt defineret og selvadjungeret. Sammenhængen mellem $\mathcal{D}_\alpha$ og N_α kan illustreres ved et diagram meget lignende det i §3.3.

Når $f \in C^m(\mathbb{T}^k)$ for et $m \geq |\alpha|$, har $D^\alpha f$ jo netop Fourierkoefficientfølgen $\{n^\alpha(f, e_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^k} = N_\alpha\{(f, e_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^k}$, så der gælder

$$\begin{aligned} C^{|\alpha|}(\mathbb{T}^k) &\subset D(\mathcal{D}_\alpha), \\ \mathcal{D}_\alpha f &= D^\alpha f \text{ når } f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{T}^k). \end{aligned}$$

I almindelighed vil $D(\mathcal{D}_\alpha)$ dog være betydeligt større end $C^{|\alpha|}(\mathbb{T}^k)$.

Mens $\mathcal{D}$ i tilfældet $k = 1$ havde en relativt enkel interpretation, som generalisation af den klassiske differentiationsoperator i relation til stamfunktionsdannelse (se definitionen af rummet $H^1(\mathbb{T})$ i §2.5), er der ikke en tilsvarende simpel interpretation af $\mathcal{D}_\alpha$ for $k > 1$; idet funktionerne i $D(\mathcal{D}_\alpha)$ f.eks. ikke engang behøver være kontinuerte. Man skal her have fat i teorien for *distributioner* for at få en tilbundsgående analyse. Imidlertid *fungerer* ovenstående definition i praksis udmærket, så man kan også simpelthen acceptere den, som en definition af "generaliserede afledede."

Eksempel 4.9. Laplace operatoren

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial\theta_k^2}$$

spiller en vigtig rolle i fysik. Vi kan behandle den for periodiske funktioner ved brug af den diagonalisering, Fourieropløsningen (5) giver.

For $f \in C^2(\mathbb{T}^k)$ har vi ifølge Sætning 4.3, at

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^k} |(1 + n_1^2 + \cdots + n_k^2)(f, e_n)|^2 < \infty.$$

For $f \in C^2(\mathbb{T}^k)$ er endvidere

$$(\Delta f, e_n) = -(n_1^2 + \cdots + n_k^2)(f, e_n) = -\|n\|^2(f, e_n);$$

dvs. Δ går ved F over i multiplikation med $-\|n\|^2$, i det mindste for funktioner i $C^2(\mathbb{T}^k)$. Vi kan da generalisere Δ på følgende måde:

Lad $M_{-\|n\|^2}$ betegne multiplikationsoperatoren i $\ell_2(\mathbb{Z}^k)$ defineret ved

$$M_{-\|n\|^2}a = \{-\|n\|^2 a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k},\ \text{når } a \in D(M_{-\|n\|^2}) \text{ defineret ved}$$
$$D(M_{-\|n\|^2}) = \{\, a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k} \in \ell_2(\mathbb{Z}^k) \mid \{\|n\|^2 a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k} \in \ell_2(\mathbb{Z}^k)\,\},$$

altså $\{a_n\} \in D(M_{-\|n\|^2}) \iff \sum_{n\in\mathbb{Z}^k}(1+\|n\|^2)^2|a_n|^2 < \infty$; og $M_{-\|n\|^2}$ er en ubegrænset operator. Ved Sætning 3.12 er $M_{-\|n\|^2}$ tæt defineret og selvadjungeret.

Nu benytter vi den unitære operator F til at definere operatoren $\mathcal{A}_\Delta$ i $L_2(\mathbb{T}^k)$ ved

$$D(\mathcal{A}_\Delta) = F^{-1}D(M_{-\|n\|^2}),$$
$$\mathcal{A}_\Delta f = F^{-1}M_{-\|n\|^2}Ff \text{ for } f \in D(\mathcal{A}_\Delta).$$

Så følger det, ved Lemma 3.14, at $\mathcal{A}_\Delta$ er en (ubegrænset, tæt defineret) selvadjungeret operator i $L_2(\mathbb{T}^k)$, med

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_\Delta) &= \{\, f \in L_2(\mathbb{T}^k) \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}^k}(1+\|n\|^2)^2|(f,e_n)|^2 < \infty\,\} \\ &\supset C^2(\mathbb{T}^k), \end{aligned}$$

og $\mathcal{A}_\Delta$ stemmer overens med Δ på $C^2(\mathbb{T}^k)$. Vi illustrerer sammenhængen mellem $\mathcal{A}_\Delta$ og multiplikationsoperatoren ved et diagram:

$$\begin{array}{ccc} L_2(\mathbb{T}^k) \supset D(\mathcal{A}_\Delta) & \xrightarrow{\mathcal{A}_\Delta} & L_2(\mathbb{T}^k) \\ {\scriptstyle F}\big\downarrow & & {\scriptstyle F}\big\downarrow \\ \ell_2(\mathbb{Z}^k) \supset D(M_{-\|n\|^2}) & \xrightarrow{M_{-\|n\|^2}} & \ell_2(\mathbb{Z}^k) \end{array} .$$

Endvidere bemærker vi, at ved Sætning 4.7 er

$$D(\mathcal{A}_\Delta) \subset C(\mathbb{T}^k),\ \text{når } k = 2 \text{ eller } 3,$$

idet $l = 0 < 2 - k/2$ for $k = 2$ eller 3; det giver en vis regularitet af elementerne.

For fuldstændigheds skyld vil vi nævne, at rummet $D(\mathcal{A}_\Delta)$ hører med i en almen type af rum, kaldet *Sobolev rum* (over $\mathbb{T}^k$), der defineres således:

For $s \in [0,\infty[$ sættes, med reference til F i (5),

$$H^s(\mathbb{T}^k) = \{\, f \in L_2(\mathbb{T}^k) \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}^k}(1+\|n\|^2)^s|(Ff)_n|^2 < \infty\,\}$$

forsynet med skalarproduktet

$$(f,g)_{H^s(\mathbb{T}^k)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} (1+\|n\|^2)^s (Ff)_n \overline{(Fg)_n}.$$

Det er ikke svært at vise, at $H^s(\mathbb{T}^k)$ er et Hilbert rum (jvf. Opg. 4.5–4.6). For $s=1$ og $k=1$ fås netop rummet $H^1(\mathbb{T})$ indført tidligere. For $s=2$ og vilkårligt k fås $D(\mathcal{A}_\Delta)$ fra Eksempel 4.9.

For m hel er $H^m(\mathbb{T}^k)$ lig fællesmængden af definitionsmængderne $D(\mathcal{D}_\alpha)$ med $|\alpha|\le m$, indført i Eksempel 4.8; og rummet H^m benyttes netop som et rum, hvor differentiation op til orden m har mening. Ifølge Sætning 4.3 har vi, at

$$C^m(\mathbb{T}^k) \subset H^m(\mathbb{T}^k).$$

Første del af Sætning 4.7 viser, at

$$H^m(\mathbb{T}^k) \subset C^l(\mathbb{T}^k), \text{ når } 0 \le l < m - k/2. \tag{6}$$

Rummene H^m er altså større end rummene C^m, men dog ikke mere "vilde" end at deres elementer har klassiske differentialkvotienter op til en noget lavere orden (afhængigt af dimensionen). Inklusionen (6) er en version af SOBOLEV'S SÆTNING, som et led i diskussionen af den generalisation af differentiationsbegrebet, den russiske matematiker S. L. Sobolev indførte med rummene H^m (beg. i 1938).

Rummene bruges i den almene teori for partielle differentialligninger behandlet ved funktionalanalyse, som det vil føre for vidt at komme ind på her; men det var naturligt at nævne disse rum, når vi har de argumenter til rådighed, der allerede er opnået i Sætning 4.3 og 4.7 samt Eksempel 4.8–4.9.

4.4 Anvendelser af Fourier transformationen.

Fourier transformationen kan opfattes som en generalisation af Fourierrække udvikling, til funktioner defineret på hele rummet $\mathbb{R}^k$. Der er dog en afgørende forskel: Det tællelige sæt af Fourierkoefficienter

$$c_n = (2\pi)^{-k} \int_Q f(\theta) e^{-in\cdot\theta}\, d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}^k,$$

erstattes af Fourierintegralet

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x) e^{-i\xi\cdot x}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^k,$$

parametriseret ved den overtællelige mængde $\mathbb{R}^k$. Men Fourieropløsningen kan atter beskrives ved en isometrisk isomorfi af L_2-rum (under passende normeringer):

Det blev vist i II §8.3 (se Bemærkning 8.23 (d)), at Fourier transformationen $(2\pi)^{-k/2}\mathcal{F}$, oprindeligt defineret på $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ (som er tæt i $L_2(\mathbb{R}^k)$), udvides til en isometrisk isomorfi

$$F\colon L_2(\mathbb{R}^k) \to L_2(\mathbb{R}^k); \tag{7}$$

det er altså en unitær operator i $L_2(\mathbb{R}^k)$, med $F^* = F^{-1}$, jvf. §3.2.

Det interessante ved Fourier transformationen er, at den atter *overfører differentiation i multiplikation.* Vi har nemlig fra Sætning II 8.7 (idet $(-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha = D^\alpha$), at

$$F(D^\alpha f) = \xi^\alpha F f, \text{ for } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k). \tag{8}$$

Rgelen gælder altså for "pæne funktioner" (ligesom reglen i Sætning 4.3 blev vist for C^m-funktioner). Som i rækketilfældet kan man udstrække reglen til større rum af funktioner ved passende generalisationer, se eksemplerne nedenfor.

(Man møder endda den sprogbrug at sige at Fouriertransformationen "diagonaliserer" differentialoperatorer. Dette skal tages med et gran salt, idet vi ikke her umiddelbart kan henføre til en matrixfremstilling hvor operatorerne D^α bringes på diagonalform — det siges bare på grund af den lidt fjernere analogi med Fourierrækker. En direkte tolkning ville kræve avanceret målteori.)

Vi har allerede brugt Sætning 3.12 i tilfælde hvor $X = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ eller $\mathbb{Z}^k$ med tællemålet (altså ℓ_2 rum). Vi kan nu også bruge den i tilfældet $X = \mathbb{R}^k$ med $\mu =$ Lebesgue målet, til at definere selvadjungerede operatorer i $L_2(\mathbb{R}^k)$, der repræsenterer differentialoperatorer; også kaldet *realisationer* af differentialoperatorer.

Eksempel 4.10. Med begrundelse i (8) definerer vi A_{D^α} ved

$$\begin{aligned} D(A_{D^\alpha}) &= F^{-1}D(M_{\xi^\alpha}) = \{\, f \in L_2(\mathbb{R}^k) \mid \xi^\alpha (Ff)(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^k)\,\}, \\ A_{D^\alpha} f &= F^{-1} M_{\xi^\alpha} F f \text{ for } f \in D(A_{D^\alpha}), \end{aligned}$$

hvor F er Fourier transformationen (7), og M_{ξ^α} er multiplikationsoperatoren der ganger med $p(\xi) = \xi^\alpha$. Bemærk, at $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \subset D(A_{D^\alpha})$. Det følger af Sætning 3.12, at M_{ξ^α} er en tæt defineret, selvadjungeret operator i $L_2(\mathbb{R}^k)$. Den er ubegrænset, når $\alpha \neq 0$. Herefter fås ved Lemma 3.14, med $U = F^{-1}$, at A_{D^α} er en (for $|\alpha| > 0$ ubegrænset) tæt defineret, selvadjungeret operator. Den stemmer overens med D^α på $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$, og er dermed en generaliseret version af D^α.

Eksempel 4.11. Idet Δ ved Fourier transformationen F på $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ føres over i multiplikation med $-\xi_1^2 - \cdots - \xi_k^2 = -\|\xi\|^2$, definerer vi operatoren A_Δ ved

$$
\begin{aligned}
D(A_\Delta) &= F^{-1}D(M_{-\|\xi\|^2}) = \{\, f \in L_2(\mathbb{R}^k) \mid \|\xi\|^2 (Ff)(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^k)\,\},\\
A_\Delta f &= F^{-1}M_{-\|\xi\|^2}Ff \text{ for } f \in D(A_\Delta).
\end{aligned}
$$

Så er (via Sætning 3.12 og Lemma 3.14) A_Δ en (ubegrænset, tæt defineret) selvadjungeret operator, der stemmer overens med Δ på $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$. Det er en såkaldt realisation af Δ.

Også for $\mathbb{R}^k$ definerer man Sobolev rum som passende Hilbert rum hvor differentialoperatorerne op til en vis orden har mening (på denne generaliserede måde), nemlig, for $s \in [0, \infty[$:

$$
\begin{aligned}
&H^s(\mathbb{R}^k) = \{\, f \in L_2(\mathbb{R}^k) \mid (1 + \|\xi\|^2)^{s/2}(Ff)(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^k)\,\},\\
&\text{med } (f,g)_{H^s(\mathbb{R}^k)} = \tfrac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{R}^k} (Ff)(\xi)\overline{(Fg)(\xi)}(1 + \|\xi\|^2)^s \, d\xi.
\end{aligned}
$$

Bemærk, at $D(A_\Delta)$ netop er lig med $H^2(\mathbb{R}^k)$. Som i (6) kan man vise en inklusion (Sobolevs sætning):

$$
H^s(\mathbb{R}^k) \subset C_b^l(\mathbb{R}^k), \text{ når } s > l + k/2, \ l \text{ hel } \geq 0; \tag{9}
$$

her er $C_b^l(\mathbb{R}^k)$ rummet af C^l-funktioner med begrænsede afledede op til orden l. Den detaljerede analyse tages op i senere kurser.

Egenskaben (8) ved Fourier transformationen ligger til grund for avancerede moderne teorier for differential- og integral-operatorer, hvor man er kommet meget langt i analysen af løsninger til differentialligninger og deres egenskaber.

Opgaver til §4.

4.1. Lad $f \in L_2(\mathbb{T}^2)$ være defineret ved at $f(\theta_1, \theta_2) = \theta_1^2 \theta_2^2$ for $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in]-\pi, \pi[^2$. Find dobbelt-Fourierrækken.

4.2. Giv et alternativt bevis for Lemma 4.4 ved at vurdere summen ved hjælp af et integral.

4.3. Find diagonaliseringen af translationsgruppen U_{θ_0}; $(U_{\theta_0} f)(\theta) = f(\theta + \theta_0)$ i $L_2(\mathbb{T}^k)$, analogt med tilfældet $k = 1$.

4.4. Lad $e_n(\theta) = e^{in\cdot\theta}$, og lad $F : L_2(\mathbb{T}^k) \to l_2(\mathbb{Z}^k)$ være defineret som i §4.3. Lad $\mathcal{M} : \ell_2(\mathbb{Z}^k) \to \ell_2(\mathbb{Z}^k)$ være defineret ved

$$(\mathcal{M}a)_n = \frac{1}{1 + \|n\|^2} a_n\,, \text{ for } n \in \mathbb{Z}^k.$$

Vis, at $(I - \mathcal{A}_\Delta)F^{-1}\mathcal{M}Ff = f$ for alle $f \in L_2(\mathbb{T}^k)$, hvor $\mathcal{A}_\Delta$ er generalisationen af Laplace operatoren indført i Eksempel 4.9.

4.5. Lad $\ell_2^s(\mathbb{Z}^k)$ betegne mængden af følger $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k}$ som opfylder $\sum_{n\in\mathbb{Z}^k} (1 + \|n\|^2)^s |c_n|^2 < \infty$. Vis, at det er et Hilbert rum med skalarproduktet

$$(c, d)_{\ell_2^s(\mathbb{Z}^k)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} (1 + \|n\|^2)^s c_n \overline{d}_n.$$

(*Vink.* Rummet kan identificeres med $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^k, (1 + \|n\|^2)^s \mu)$, hvor μ er tællemålet.)

4.6. Vis, at F defineret i §4.3 afbilder $H^s(\mathbb{T}^k)$ isometrisk isomorft på $\ell_2^s(\mathbb{Z}^k)$ (se Opg. 4.5), og at $H^s(\mathbb{T}^k)$ dermed er et Hilbert rum.

4.7. Lad $Q_0 =]0, \pi[^k$. Vis, at systemet af funktioner

$$\varphi_n = (2/\pi)^{k/2} \sin n_1\theta_1 \ldots \sin n_k\theta_k, \quad n \in \mathbb{N}^k,$$

er et fuldstændigt ortonormalsystem i $L_2(Q_0)$. Vis, at $\partial^2/\partial\theta_j^2$, betragtet på $C_c^\infty(Q_0)$, diagonaliseres af dette system.

4.8. Definer $M_{-\|n\|^2}$ som i Eksempel 4.9, men for ortonormalsystemet $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}^k}$ indført i Opg. 4.7. Idet U betegner den ved Sætning 3.7 definerede unitære operator fra $L_2(Q_0)$ til $\ell_2(\mathbb{N}^k)$ knyttet til dette ortonormalsystem, skal man vise, at $A_{\Delta,0} = U^{-1}M_{-\|n\|^2}U$ er selvadjungeret, og stemmer overens med Laplace operatoren på mængden

$$\{\, u \in C^2(\overline{Q}_0) \mid u = 0 \text{ på } \partial Q_0 \,\} \subset D(A_{\Delta,0}).$$

4.9. Med notationer som i §4.4 om Fourier transformationen vises: Operatoren $M_{(1+\|\xi\|^2)^{-1}}$ er en begrænset, selvadjungeret operator i $L_2(\mathbb{R}^k)$, og

$$B = F^{-1}M_{(1+\|\xi\|^2)^{-1}}F$$

er invers til

$$I - A_\Delta \colon D(A_\Delta) \to L_2(\mathbb{R}^k).$$

4.10. Lad $k = 3$ i Eksempel 4.11. Vis, at $D(A_\Delta) \subset C_b(\mathbb{R}^3)$.
(*Vink.* Vis, at for $f \in D(A_\Delta)$ er $\hat{f}(\xi) \in L_1(\mathbb{R}^3)$, ved at gange $\hat{f}$ med $(1 + \|\xi\|^2)(1 + \|\xi\|^2)^{-1}$ og bruge Cauchy-Schwarz' ulighed.)

4.11. Lad $k = 3$ i Eksempel 4.11. Vis, at $D(A_\Delta)$ består af Hölder kontinuerte funktioner med Hölder eksponent $\gamma < 1/2$; dvs. for $\gamma < 1/2$ har hvert element i $D(A_\Delta)$ en repræsentant f, som opfylder

$$|f(x) - f(y)| \leq C_\gamma |x - y|^\gamma, \text{ for } x, y \in \mathbb{R}^3,$$

med $C_\gamma > 0$.
(*Vink.* Vis, at

$$\begin{aligned} |e^{i\xi\cdot x} - e^{i\xi\cdot y}| = 2\Big|\sin(\xi \cdot \frac{x-y}{2})\Big| &\leq 2\min\{1, \|\xi\|\,\|x-y\|\} \\ &\leq 2\min\{1, \|\xi\|^\gamma\,\|x-y\|^\gamma\}\,, \text{ for } \gamma \in [0,1], \end{aligned}$$

og benyt dette for $\gamma < 1/2$.)

4.12. Vis, at $H^s(\mathbb{R}^k)$ er et Hilbert rum.
(*Vink.* Sammenlign med Opg. 4.5–4.6.)

4.13. Betragt en række $\sum_{n=1}^\infty f_n(x,t)$, hvor f_n for hvert n er en kontinuert funktion af $(x,t) \in [a,b] \times M$; her er $[a,b]$ et interval af $\mathbb{R}$ og M et metrisk rum. Antag, at hver funktion f_n er differentiabel efter x med $\frac{\partial}{\partial x} f_n(x,t) \in C([a,b] \times M)$.
Vis, at hvis rækken $\sum_{n=1}^\infty f_n(x,t)$ konvergerer uniformt mod en grænsefunktion $f(x,t)$, og den ledvis differentierede række $\sum_{n=1}^\infty \frac{\partial}{\partial x} f_n(x,t)$ konvergerer uniformt mod en grænsefunktion $g(x,t)$, så eksisterer $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ og er lig med $g(x,t)$ i alle punkter af $[a,b] \times M$.
(*Vink.* Vis, at $\int_a^x g(y,t)\,dy = f(x,t) - f(a,t)$.)