

KØBENHAVNS UNIVERSITET
MATEMATISK INSTITUT

noter til

MATEMATIK 213

DIFFERENTIALLIGNINGER
med anvendelse i fysikken

august 1974

MATEMATIK 213, 1974-75

Dette eksemplar af

PAKKE 213

indeholder 1. udgave af KAP. 8-11 (incl.), og for at bringe disse kapitler i overensstemmelse med den nye 2. udgave af disse kapitler bør følgende tilføjelser og rettelser påføres:

SIDE:	BEM.:
8.4	L.2 tilføj: for $\xi \in]\alpha, \beta]$ L.3 tilføj: for $\xi \in [\alpha, \beta[$
8.23	L.7 arealet \rightarrow overfladearealet
9.3	L.13 Hvis u_0 skal være: hvis $u_0(\beta) = 0$, L.7 fn $(\varphi L\varphi) \rightarrow (\varphi L\varphi)_p$ L.5 fn Lemma 5.17 \rightarrow Lemma 5.16
9.6	L.11 $\sum_{n=1}^{\omega} \frac{1}{\lambda_j^2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\omega} \frac{1}{\lambda_n^2}$
9.7	L.22 5.18 \rightarrow 5.17
9.12	L.3 fn anvendelse \rightarrow anvendelsen
9.13	L.21 5.21 \rightarrow 5.20
9.14	L.15 (9.30) \rightarrow (9.31)
9.15	L.7 5.21 \rightarrow 5.20 L.12 $\ f_\varepsilon - \dots \rightarrow 2 \ f_\varepsilon - \dots$ L.2 fn 5.21 \rightarrow 5.20
9.17	L.2 $p(x), q(x) \rightarrow p(\xi), q(\xi)$ L.4, L.5 $p \rightarrow p(\xi)$
9.18	L.9 fn konverger \rightarrow konvergerer
9.20	en k \rightarrow en konver-
9.29	tilføj følgende afsnit:

Bemærkninger til [W] § 39.

Udtalelsen s. 178 øverst: "These conditions must be such that (39.3) holds" er ikke rigtig. Ved visse randbetingelser accepteres jo et randbidrag, som indbygges i $\ell(u, w)$ (i Rayleighkvotienten), jvf [W] s. 168 og opgave [W] 39.3.

Rettelser til eksemplet [W] s. 178: $G(x, \xi)$ skal være den nævnte funktion minus 1. Faktoren $\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$ skal være $\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}$.

- 10.14 L.2 begynd med $t_N = \dots$
 L.3 denne talfølge \rightarrow talfølgen t_N
 L.5 tilføj: for $N \rightarrow \infty$,
 10.18 L.10 $\sum_{\ell=1}^{\infty} \rightarrow \sum_{\ell=1}^{\infty}$
 L.13 ... ens \rightarrow planens
 L.17 $1 + \ell^2 < 1 + m^2 + n^2 \rightarrow 1 + \ell^2 \leq 1 + m^2 + n^2$
 L.22 $(2\ell)^k \rightarrow (2\ell+1)^k$
 L.24 $1 + \ell^2 < 1 + n_1^2 + \dots + n_k^2 \rightarrow 1 + \ell^2 \leq 1 + n_1^2 + \dots$
 10.19 L.2, L.3 $(2\ell)^k \rightarrow (2\ell+1)^k$
 L.4 $k(2\ell)^{k-1} \rightarrow 2k(2\ell)^{k-1}$
 10.20 L.3 5.18 \rightarrow 5.17
 10.21 L.3 fn 5.18 \rightarrow 5.17
 11.1 L.16 $u \in M_1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ med $u' \in M_1(\mathbb{R})$
 $\rightarrow u \in M_1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ med $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 u^2 dx < \infty$ og $u' \in M_1(\mathbb{R})$
 11.2 L.12 positive konstanter α og β
 \rightarrow en positiv konstant α og et polynomium $P(x)$
 L.13, L.14 $\beta \rightarrow P(x)$.

MATEMATIK 213, 1974-75

rettelsen 3
(til 1. udgave)

11.6 L.17 kun have... → kun kan have ...

11.7 L.10 på på → på

 L.2 fn 10.3 → 11.3

Disse noter består af bemærkninger og tilføjelser til kapitel I - VII i lærebogen af H. F. Weinberger: "A first course in partial differential equations", Xerox Publishing, Lexington, Massachusetts, 1965. Bogen benævnes overalt i det følgende ved [W]. De enkelte noteafsnit er markeret med et K eller et T i marginen, eftersom det drejer sig om en kommentar (i reglen en præcisering eller uddybning) til teksten i [W], eller et tillæg. Symbolet \square bruges til at markere afslutningen af et bevis.

Vi takker stud.scient. Carsten Claussen for den typografiske udformning.

Gerd Grubb

H. Højgaard Jensen

2. oplag (1975) er, bortset fra mindre rettelser, et uforandret optryk.

INDHOLDSFORTEGNELSE

- | | |
|--|------------|
| <u>1. Bølge-ligningen i en dimension:</u> | 1.1 - 1.12 |
| 1.1 Den svingende streng. | |
| 1.2 Den homogene bølge-ligning. | |
| 1.3 Karakteristikkene. | |
| 1.4 Den inhomogene bølge-ligning. | |
| 1.5 Den svingende streng med variabel tæthed. | |
| <u>2. Klassifikation af 2.ordens differentiaalligninger:</u> | 2.1 - 2.8 |
| 2.1 Ligninger på \mathbb{R}^2 med konstante koefficienter. | |
| 2.2 Ligninger på \mathbb{R}^2 med variable koefficienter. | |
| 2.3 Definitionsmængde og differentiability af løsninger til den karakteristiske ligning. | |
| 2.4 2.ordens ligninger på \mathbb{R}^n . | |
| <u>3. Oversigt over fysikkens differentiaalligninger:</u> | 3.1 - 3.3 |
| 3.1 Beskrivelse af fysiske systemer, | |
| 3.2 Karakteristiske træk ved forskellige fysiske discipliners differentiaalligninger. | |
| <u>4. Egenskaber ved elliptiske og paraboliske differential-ligninger.</u> | 4.1 - 4.3 |
| <u>5. Fourierrækker:</u> | 5.1 - 5.17 |
| 5.1 Egenverdi og egenfunktion. | |
| 5.2 Ortogonalsystemer. | |
| 5.3 Generelle Fourierrækker. | |
| 5.4 Riemann-Lebesgues Lemma. | |
| 5.5 Trigonometriske rækker. | |
| 5.6 Fuldstændigheden af det trigonometriske ortogonalsystem. | |
| <u>6. Problemer, hvor separation af de variable fører til trigonometriske rækker:</u> | 6.1 - 6.7 |
| 6.1 Varmeledningsligningen. | |
| 6.2 Laplace's ligning i et rektangel. | |
| 6.3 Laplace's ligning i en cirkel. | |
| 6.4 Den dæmpede bølge-ligning. | |

7. Krumlinede koordinater og separation af de variable: 7.1 - 7.9
- 7.1 Krumlinede koordinater.
 - 7.2 Separation af de variable.
 - 7.3 Oversigt over vigtige koordinatsystemer.
8. Om Greens funktion. 8.1 - 8.23.
- 8.1 Lösningssformlen for et begyndelsesværdiproblem.
 - 8.2 Lösningssformlen for et randværdiproblem.
 - 8.3 Greens funktion for differentiaalligningen $-(xu')' + \frac{n^2}{x}u = f$.
 - 8.4 Om δ -funktionen.
 - 8.5 Greens funktion for Dirichlet problemet i to variable.
 - 8.6 Greens funktion for Dirichlet problemet i flere end to variable.
9. Sturm-Liouville problemet. 9.1 - 9.29.
- 9.1 Elementære egenskaber samt eksistens af egenfunktioner og egenverdier.
 - 9.2 Fuldstændighed af systemet af egenfunktioner; uniform konvergens.
 - 9.3 Specielle egenskaber ved egenverdier og egenfunktioner.
 - 9.4 Singulære Sturm-Liouville problemer.
10. Dobbeltrækker og andre multiple rækker. 10.1 - 10.24.
- 10.1 Multiple talfølger og -rækker.
 - 10.2 Dobbeltrækker, hvis led er funktioner.
 - 10.3 Produktortogonalsystemer.
 - 10.4 Uniform konvergens af multiple trigonometriske rækker.
11. Nogle vigtige ortogonalsystemer. 11.1 - 11.10.
- 11.1 Hermite-funktioner og Hermite-polynomier.
 - 11.2 Laguerre-funktioner og Laguerre-polynomier.
 - 11.3 Mathieu-funktioner.
 - 11.4 Genererende funktioner.
- Supplerende opgaver. S.1 - S.17

LITTERATUR

Der findes et væld af monografier vedrørende partielle differentiaalligninger, heriblandt mange lærebøger med forskellige formål. Vi indskrænker os her til at nævne følgende bøger (se også litteraturhenvvisningerne i [W]):

R. Courant og D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*, bind I og II, Interscience Publishers, 1953 og 1961. Hovedværk inden for partielle differentiaalligninger. Bind I omfatter rækkeudviklingsmetoder og variationsregning, bind II de mere generelle klassiske metoder. Behandlingen stringent, men ikke overdrevent vanskelig. Særligt bind II er matematik-orienteret.

P. M. Morse og H. Feshbach: *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953.

Stort tobinds standardværk. Hovedvægten er lagt på differential- og integralligninger. Emnevalg, disposition og behandling er anvendelsesorienteret. Kan også bruges som opslagsværk.

P. Garabedian: *Partial Differential Equations*, Wiley & Sons, 1964.

Har samme sigte som Courant-Hilbert II, men er væsentligt mindre omfattende, og stedvis mere overskuelig.

E. Hansen: *Sædvanlige differentiaalligninger fra fysikken*, Polyteknisk forlag, Lyngby 1971.

Behandler primært de sædvanlige differentiaalligninger, der fremkommer ved separationsmetoder for partielle differentiaalligninger, som også stedvis behandles. Kommer iøvrigt ind på mange nyttige teknikker. Giver omhyggelige forklaringer, illustreret ved eksempler. Opgavesamling hertil ved S. Christiansen og E. Hansen, samme forlag.

L. Hörmander: Linear Partial Differential Operators, Academic Press, Springer Verlag, 1963.
 Meget avanceret teori, der kræver grundigt kendskab til funktionalanalyse og klassisk analyse.

Håndbøger og tabelværker:

E. Madelung: Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers, Springer Verlag, 1964.
 Håndbog, der giver mere end blot formler, men udelader alle beviser. Opdelt i en matematisk og en fysisk del. Differentialligninger ét blandt mange behandlede emner.

E. Jahnke og F. Emde: Tables of Functions, Dover Publications, 1945.
 Klassiker; indeholder formler og tabeller vedrørende specielle funktioner.

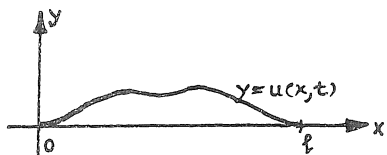
Murray R. Spiegel: Mathematical Handbook of Formulas and Tables, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
 Nogenlunde samme opbygning som den foregående, men mindre omfattende.

M. Abramowitz og I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, 1965.
 Indeholder både formler og tabeller. Mere omfattende end de foregående.

A. Erdélyi: Higher Transcendental Functions bd. I-III, McGraw-Hill, 1954-55.
 Meget omfattende formelsamling vedrørende specielle funktioner.

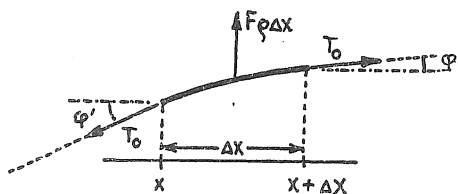
1. Bølgeligningen i en dimension

T 1.1 Den svingende streng.



Som indledning til teorien for partielle differentiaalligninger vil vi betragte det fysiske system, som består af en streng, der er fastgjort i to punkter. Til beskrivelse af strengens bevægelse vil vi benytte et

sædvanligt retvinklet koordinatsystem, hvor fastgøringspunkterne har koordinaterne $(0,0)$ henholdsvis $(l,0)$, hvor l er strengens hvilelængde. Vi antager, at alle bevægelser foregår praktisk taget i y -aksens retning (lodret). Strengens konfiguration beskrives ved angivelse af udsvinget $y = u(x,t)$ på stedet x til tiden t . For at kunne bestemme bevægelsen må vi kende den ydre kraft pr. masseenhed $F = F(x,t)$ (antages lodret) og massen pr. længde $\rho = \rho(x)$. Det antages yderligere, at der i strengens endepunkter virker modsatrettede indspændingskræfter, begge af størrelsen T_0 .



Vi betragter et lille stykke Δx af strengen ved stedet x til tiden t . Anvender vi Newtons 2. lov på stykket, får vi, når strengen antages fuldstændig bøjelig (dvs. at vi kan se bort fra elastiske kræfter vinkelret på strengen), at der for små udsving skal gælde dels, at spændingskraften er ens overalt langs strengen og lig T_0 , dels (se fig.) at

$$(1.1) \quad F(x,t) \rho(x) \Delta x + T_0 \sin \varphi - T_0 \sin \varphi' = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

da udsvingene er antaget små, kan $\sin \varphi$ og $\sin \varphi'$ sættes lig $\tan \varphi$ henholdsvis $\tan \varphi'$; men disse er på den anden side lig $\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t)$ henholdsvis $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$. Indsættes dette i (1.1) fås

$$(1.2) \quad F \rho \Delta x + T_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

som ved division med Δx og påfølgende grænseovergang $\Delta x \rightarrow 0$ giver

$$F \rho + T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

eller

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t) \quad \text{med } c^2 = \frac{T_0}{\rho}.$$

Ligning (1.3), der kaldes bølgeligningen, beskriver en lang række fysiske problemer, f.ex. lydudbredelse i en gas og udbredelse af elektromagnetiske bølger i en transmissionsleder. Ligning (1.3) er således af stor fysisk betydning; men den hører også til de matematisk set interessante, idet den er en af de få partielle differentiaalligninger, hvis almindelige løsning kan angives eksplicit, og vi begynder derfor studiet af de partielle differentiaalligninger med bølgeligningen.

K 1.2 Den homogene bølge-ligning:

Bemærkninger til [W] §2.

Ved variabelskiftet

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \xi &= x + ct \\ \eta &= x - ct \end{aligned} \quad \text{dvs.} \quad \begin{aligned} x &= \frac{\xi + \eta}{2} \\ t &= \frac{\xi - \eta}{2c} \end{aligned}$$

føres en funktion $u(x, t)$ over i en funktion

$$(1.5) \quad \tilde{u}(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right) = u(x, t).$$

Det er almindeligt anvendt "misbrug af notationen" (abuse of notation) at kalde \tilde{u} for u .

Reduktionen af differentiaalligningen

$$(1.6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

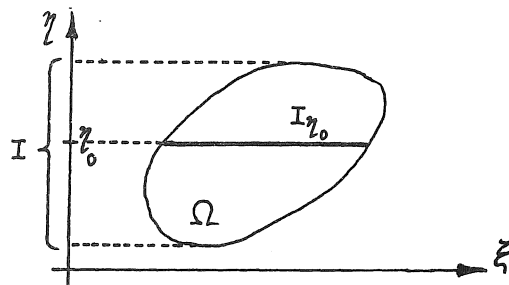
til differentiaalligningen

$$(1.7) \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

kræver, at u er C^2 , da der forekommer en identifikation af blandede afledede.

Sætningen om at C^2 -løsningerne $\tilde{u}(\xi, \eta)$ til (1.7) netop er funktionerne af formen $p(\xi) + q(\eta)$ (p og $q \in C^2$) gælder i hvert fald for de delmængder Ω af \mathbb{R}^2 , der er åbne og konvekse. Vi skal blot anvende følgende indlysende grundlemma:

Lemma 1.1 Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Lad $I = \{\eta \mid (\xi, \eta) \in \Omega\}$, og antag, at der for hvert $\eta_0 \in I$ gælder, at linien $\{(\xi, \eta) \mid \eta = \eta_0\}$ skærer Ω i et egentligt (evt. ubegrænset) interval I_{η_0} . Lad $g(\xi, \eta)$ være en kontinuert funktion på Ω . En funktion $v(\xi, \eta)$ på Ω er løsning til differentiaalligningen



$$(1.8) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} v(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) \quad \text{for alle } (\xi, \eta) \in \Omega$$

hvis og kun hvis

$$(1.9) \quad v(\xi, \eta) = \int g(\xi, \eta) d\xi + f(\eta) \quad \text{for alle } (\xi, \eta) \in \Omega;$$

her betegner $\int g(\xi, \eta) d\xi$ for hvert $\eta \in I$ en bestemt stamfunktion til $g(\xi, \eta)$ som funktion af $\xi \in I_{\eta}$, og $f(\eta)$ er en vilkårlig funktion på I .

*) Hermed menes, at intervallet indeholder mere end et enkelt punkt.

Bævis: Anvend sætningen om funktioner af én variabel for hvert η for sig; $f(\eta)$ betegner valget af en arbitrær konstant for hvert $\eta \in I$. \square

Lemmaet bruges til at vise følgende sætning, der bl.a. finder anvendelse, når Ω er åben og konveks:

Sætning 1.2 Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, og antag at de akseparallelle linier gennem punkter af Ω skærer Ω i egentlige intervaller. En funktion $u(\xi, \eta) \in C^2(\Omega)$ er løsning til

$$(1.10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{i } \Omega$$

hvis og kun hvis

$$(1.11) \quad u(\xi, \eta) = p(\xi) + q(\eta) \quad \text{for alle } (\xi, \eta) \in \Omega,$$

hvor $p \in C^2(I_1)$ og $q \in C^2(I_2)$; her er $I_1 = \{ \xi \mid (\xi, \eta) \in \Omega \}$ og $I_2 = \{ \eta \mid (\xi, \eta) \in \Omega \}$.

Bævis: Det ses umiddelbart, at funktioner af formen (1.11) opfylder (1.10). Omvendt: Antag at u er en løsning til (1.10). Anvend først Lemma 1.1 på $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, det giver

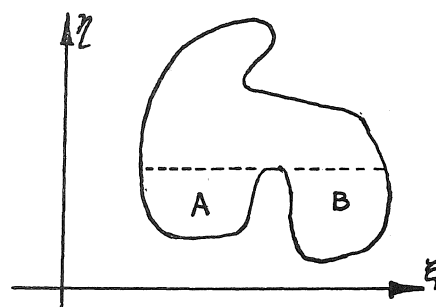
$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, \eta) = 0 + f(\eta) \quad \text{for } (\xi, \eta) \in \Omega.$$

Anvend dernæst lemmaet på u (med ξ 's og η 's roller byttet om), det giver

$$u(\xi, \eta) = \int f(\eta) d\eta + g(\xi) \quad \text{for } (\xi, \eta) \in \Omega,$$

som er af formen (1.11). \square

Bemærkning. Hvis Ω har hosstående form, kan man angive løsninger til (1.8) som ikke har formen (1.9), på den måde at når stamfunktionen $\int g(\xi, \eta) d\xi$ er fastlagt, kan der yderligere for hvert η vælges forskellige arbitrære konstanter i A og B - der adderes noget som ikke er en funktion af η alene.



K 1.3 Karakteristikker.

Bemærkninger og tilføjelser til [W] §3,4.

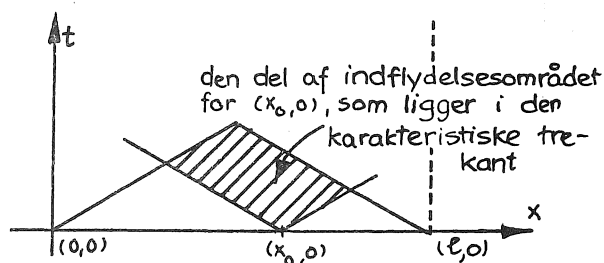
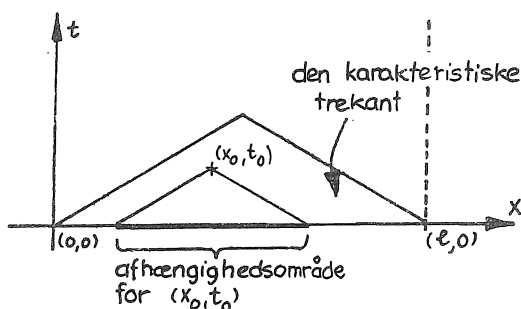
Det er vigtigt at være opmærksom på, at vi opererer med to forskellige eksemplarer af \mathbb{R}^2 , nemlig dels et rum-tids-koordinat-system (x, t) -planen, dels et todimensionalt rum-koordinat-system (x, u) -planen. Rum-tids-koordinatssystemet bruger vi til

at beskrive egenskaber ved svingningens udbredelse, mens (x,u) -rum-kordinatsystemet giver øjebliksbilleder, se f.ex. de to figurer på s.16 i [W]. Et fuldstændigt billede af processen kunne gives i et tredimensionalt (x,t,u) -koordinatsystem, ved grafen for løsningsfunktionen $u(x,t)$.

Karakteristikkerne for den forelagte bølge ligning defineres som linierne i rum-tids-koordinatsystemet med hældningskoefficient $\frac{1}{c}$ og $-\frac{1}{c}$. (De kan altså ikke "ses i det virkelige liv".) De spiller en stor rolle ved beskrivelsen af svingningsprocessen; vi skal her koncentrere os om følgende:

For problemet [W] (2.1) (hvor bølge ligningen optræder i homogen form, d.v.s. højre side er 0) med begyndelses- og randbetingelser, defineres afhængighedsområdet for et punkt $(x_0, t_0) \in [0, \ell] \times [0, \infty[$ som den mindste delmængde af intervallet $[0, \ell]$ på hvilken f og g skal være kendt for at løsningens værdi kan bestemmes i (x_0, t_0) (ved hjælp af formel [W] (2.16) med de angivne udvidede definitioner af f og g). Når (x_0, t_0) ligger i området $\{ (x,t) \mid t \geq 0, t \leq \frac{x}{c}, t \leq \frac{\ell-x}{c} \}$, der kaldes den karakteristiske trekant, fremgår det klart af formel [W] (2.16), at afhængighedsområdet for (x_0, t_0) er intervallet $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$. Vi skal se nedenfor, at også når (x_0, t_0) ligger oven for den karakteristiske trekant, kan afhængighedsområdet være en ægte delmængde af $[0, \ell]$.

For problemet [W] (2.1) defineres indflydelsesområdet for et punkt $(x_0, 0)$ på x -aksen ($x_0 \in [0, \ell]$) som mængden af punkter i $[0, \ell] \times [0, \infty[$, der har det givne punkt med i deres afhængighedsområde. Af det foregående ses, at den del af indflydelsesområdet, der ligger i den karakteristiske trekant, netop er den del af den karakteristiske trekant, som ligger over og på de to karakteristikker gennem $(x_0, 0)$.



Lad os nu vove os uden for den karakteristiske trekant. Her får vi et meget anskueligt geometrisk billede ved at anvende symmetrierne i definitionerne af de udvidede funktioner f og g . Lad (x_0, t_0) være et vilkårligt punkt i $[0, \ell] \times [0, \infty[$. Løsningens

værdi i (x_0, t_0) fås ud fra kendskabet til de udvidede funktioner f og g på intervallet $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$. Bemærk nu, at

$$(1.12) \quad \int_{-a}^a g(x) dx = 0 \quad \text{og} \quad \int_{\ell-b}^{\ell+b} g(x) dx = 0$$

for alle a og b , fordi g er ulige omkring 0 og omkring ℓ . Når venstre intervalendepunkt $x_0 - ct_0$ er til venstre for 0 , har vi da fordel af at erstatte $\int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} g(x) dx$ i formel [W] (2.16) med $\int_{-x_0 + ct_0}^{x_0 + ct_0} g(x) dx$ (og $f(x_0 - ct_0)$ med $-f(-x_0 + ct_0)$, f er jo også ulige omkring 0); hermed bliver venstre intervalendepunkt flyttet nærmere til $[0, \ell]$. Er det ikke kommet indenfor, fortsætter vi med at spejle intervalendepunktet i ℓ , dernæst atter i 0 , o.s.v. skiftevis i ℓ og i 0 (under stadig anvendelse af (1.12)), indtil vi har opnået et punkt i $[0, \ell]$. Kaldes slutpunktet for x_1 , har vi

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} ((-1)^{k_1} f(x_1) + f(x_0 + ct_0)) + \frac{1}{2c} \int_{x_1}^{x_0 + ct_0} g(x) dx,$$

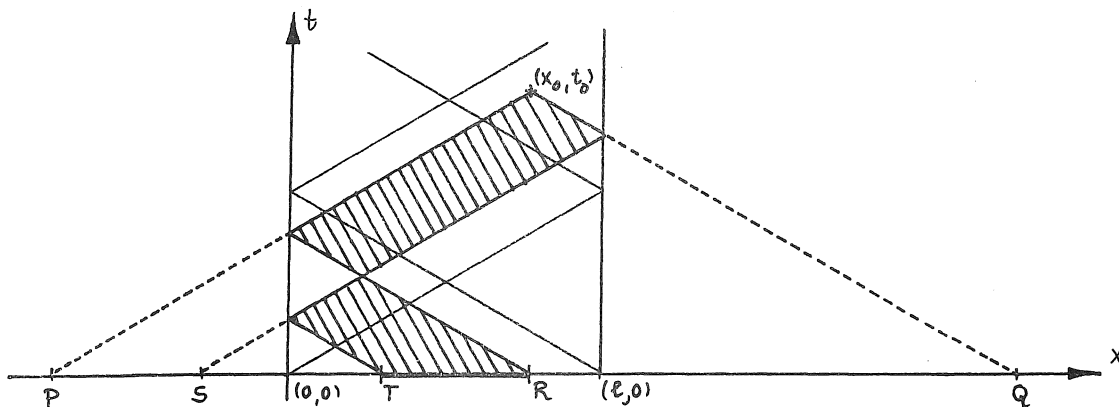
hvor k_1 betegner det samlede antal spejlinger.

Udføres den analoge proces for punktet $x_0 + ct_0$ (startende med spejling i ℓ), får vi til sidst en formel

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} ((-1)^{k_1} f(x_1) + (-1)^{k_2} f(x_2)) + \frac{1}{2c} \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx,$$

hvoraf ses at værdien af u i punktet (x_0, t_0) afhænger af f 's værdier i x_1 og x_2 og g 's værdier på intervallet mellem x_1 og x_2 ; endvidere indgår pariteten af de to hele tal k_1 og k_2 . Intervallet mellem x_1 og x_2 kaldes nu afhængighedsområdet for (x_0, t_0) (hvilket stemmer med definitionen; de fortegn, som også skal være kendt, er knyttet til (x_0, t_0)). Bemærk, at x_2 kan være mindre end x_1 .

Eksempel:



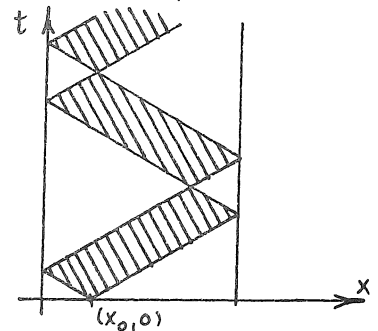
$$\int_P^Q g(x) dx = \int_R^Q g(x) dx = \int_R^S g(x) dx = \int_R^T g(x) dx = - \int_T^R g(x) dx$$

Intervallet TR er afhængighedsområdet for (x_0, t_0) .

På figuren (forrige side) ses, hvorledes afhængighedsområdet fremkommer som det interval, der afskæres på x -aksen af de to brudte linier dannet ved successivt at spejle de nedadrettede karakteristikker gennem (x_0, t_0) i linierne $x=0$ og $x=l$. Denne geometriske betragtningsmåde har den fordel (udover det anskuelige), at den også fungerer for tilfældet den inhomogene bølgeligning, hvor vi som afhængighedsområde får det begrænsede område omsluttet af de to brudte karakteristikkelinier og x -aksen (skraveret på figuren), jvf. senere.

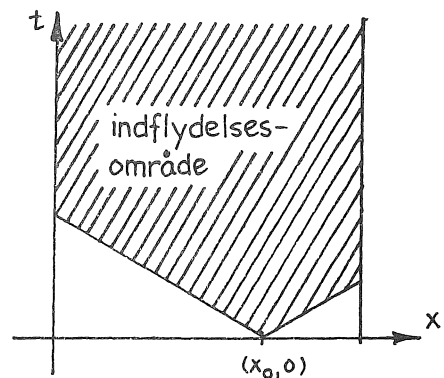
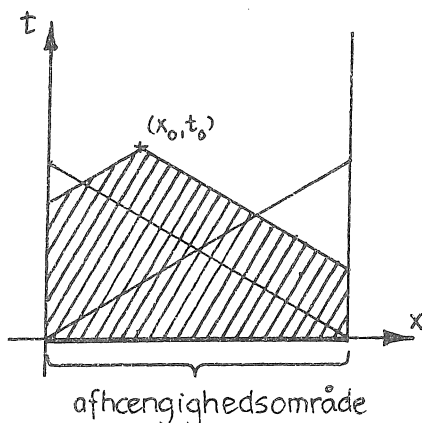
Pariteten af k_1 og k_2 og rækkefølgen af x_1 og x_2 afhænger blot af beliggenheden af (x_0, t_0) i forhold til de faste trekanter og parallelgrammer, der afskæres af de (opadrettede) brudte karakteristikkelinier, der starter i $(0,0)$ og i $(l,0)$.

Ovenstående anvendes nu også til at indse, at indflydelsesområdet for et punkt $(x_0, 0)$ består af parallelgrammerne omsluttet af de opadgående brudte (spejlede) karakteristikkelinier gennem $(x_0, 0)$. (Gennemtænk selv det geometriske argument!)



Se også den mere fysik-orienterede argumentation i [W] §3.

For det problem, der betragtes i [W] §4 (med "frie randbetingelser") får afhængighedsområder og indflydelsesområder en mindre særpræget struktur, idet der ikke optræder de cancellationer, som skyldtes, at g blev forlænget udover 0 og l på ulige måde. Således er afhængighedsområdet for ethvert punkt i $[0, l] \times [0, \infty[$ over selve karakteristikkene gennem $(0,0)$ og (l,l) lig med hele $[0, l]$, og indflydelsesområdet for et punkt $(x_0, 0)$ er lig med den del af $[0, l] \times [0, \infty[$, der ligger over de to opadrettede karakteristikkene gennem $(x_0, 0)$.



K 1.4 Den inhomogene bølge ligning.

Bemærkninger til [W] §5.

Bogens bevis for formel [W](5.2) er meget lidt anskueligt; i stedet kan man gå frem som følger. Vi skal løse ligningerne (1.13) - (1.15)

$$(1.13) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t) \quad i \Omega = \{(x,t) | t > 0\},$$

$$(1.14) \quad u(x,0) = 0 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R},$$

$$(1.15) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

(Løsninger med mere generelle begyndelsesværdier fås ved kombination af dette med de foregående paragraffer.) Vi forudsætter, at F er kontinuert på $\bar{\Omega}$.

Ved variabelskiftet (1.4) føres (1.13) over i ligningen

$$(1.16) \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4c^2} \tilde{F}(\xi, \eta) \quad i \Omega',$$

hvor $\tilde{u}(\xi, \eta) = u(x,t)$, $\tilde{F}(\xi, \eta) = F(x,t)$, og Ω' betegner billedet af Ω :

$$(1.17) \quad \Omega' = \{(\xi, \eta) | \xi > \eta\}.$$

Begyndelsesbetingelsen (1.14) bliver til

$$(1.18) \quad \tilde{u} = 0 \quad \text{på linien } \{(\xi, \eta) | \xi = \eta\}$$

(billedet af linien $\{(x,t) | t=0\}$). (1.15) giver, idet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right),$$

at

$$(1.19) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{på linien } \{(\xi, \eta) | \xi = \eta\}.$$

Da $\tilde{u} = 0$ på $\{(\xi, \eta) | \xi = \eta\}$, er den retningsafledede af \tilde{u} efter vektoren $(1,1)$ også 0 på linien $\{(\xi, \eta) | \xi = \eta\}$, d.v.s.

$$(1.20) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{på linien } \{(\xi, \eta) | \xi = \eta\}.$$

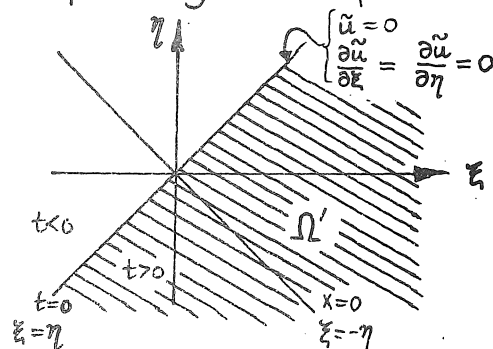
(1.19) og (1.20) giver tilsammen

$$(1.21) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{på linien } \{(\xi, \eta) | \xi = \eta\}.$$

[Intuitiv morale: når u selv, samt en tværgående afledet af u , er 0 på en linie, er alle retningsafledede af u lig med 0 på denne linie!]

Vi skal altså løse (1.16) i Ω' med begyndelsesbetingelser som angivet på figuren.

Hertil benyttes følgende, igen indlysende, skærpelse af Lemma 1.1:



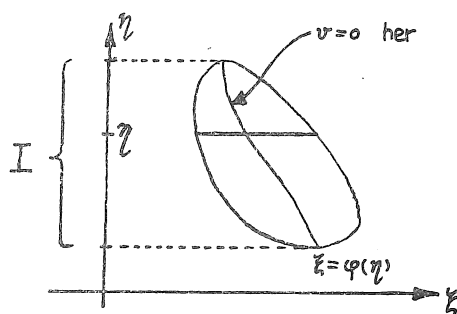
Lemma 1.3 Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $I = \{\eta \mid (\xi, \eta) \in \Omega\}$. Antag, at der for hvert $\eta_0 \in I$ gælder, at linien $\{(\xi, \eta) \mid \eta = \eta_0\}$ skærer Ω i et egentligt interval I_{η_0} , og vælg for hvert $\eta_0 \in I$ et punkt $(\varphi(\eta_0), \eta_0) \in \Omega$. Lad $g(\xi, \eta)$ være kontinuert på Ω . En funktion $v(\xi, \eta)$ er da løsning til problemet

$$(1.22) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} v(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) & \text{for alle } (\xi, \eta) \in \Omega \\ v(\varphi(\eta), \eta) = 0 & \text{for alle } \eta \in I \end{cases}$$

hvis og kun hvis

$$(1.23) \quad v(\xi, \eta) = \int_{\varphi(\eta)}^{\xi} g(r, \eta) dr \quad \text{for alle } (\xi, \eta) \in \Omega.$$

Bevis: (1.23) opfylder klart (1.22). Omvendt, hvis $v(\xi, \eta)$ er en løsning til (1.22), har den formen (1.9). Vælger vi her $\int_{\varphi(\eta)}^{\xi} g(r, \eta) dr$ som stamfunktion, skal $f(\eta) = 0$. \square



Vi får nu:

Sætning 1.4 Problemet (1.16), (1.18), (1.21) har den entydigt bestemte løsning

$$(1.24) \quad \tilde{u}(\xi, \eta) = \frac{-1}{4c^2} \int_{\xi}^{\eta} ds \int_s^{\xi} \tilde{F}(r, s) dr.$$

Bevis: Anvend først Lemma 1.3 på $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$, hvor (1.21) angiver, at vi skal vælge $\varphi(\eta) = \eta$; det giver

$$(1.25) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \int_{\eta}^{\xi} \frac{-1}{4c^2} \tilde{F}(r, \eta) dr.$$

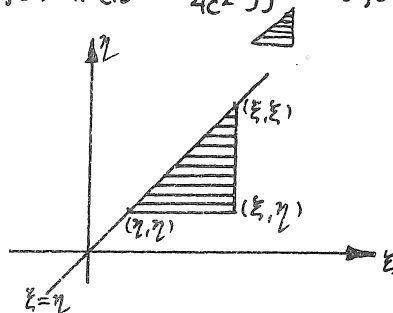
Dernæst anvendes lemmaet på \tilde{u} , med rollerne af ξ og η ombyttet, η i (1.25) skal nu være en integrationsvariabel, så vi kalder den s . Dette giver (1.24) (prøv efter!).

Det er klart, at \tilde{u} i (1.24) opfylder (1.16) og (1.18), endvidere, da både \tilde{u} og $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$ er 0 på linien $\{(\xi, \eta) \mid \xi = \eta\}$, fås på grund af (1.20), at også $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}$ er 0 på linien $\{(\xi, \eta) \mid \xi = \eta\}$. \square

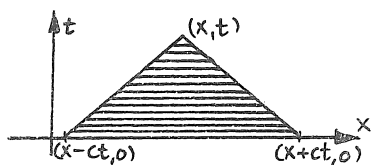
Endelig skal vi tilbage til de gamle koordinater (x, t) . Bemærk, at (1.24) nok er et dobbeltintegral, men ikke et rigtigt planintegral efter definitionen i MAT1-noterne (102) §57, side 57.04, idet $\eta \leq \xi$. Ombyttes disse grænser, fås \tilde{u} dog straks som planintegral

$$(1.26) \quad \tilde{u}(\xi, \eta) = \frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} \int_s^{\xi} \tilde{F}(r, s) dr ds = \frac{1}{4c^2} \iint_{\Delta} \tilde{F}(r, s) dr ds,$$

hvor der integreres over trekanten



J de gamle koordinater svarer dette område netop til den karakteristiske trekant (regn selv efter på ulighederne [W] s. 25 nederst!).



Funktionalmatricen er

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix}, \text{ og den nume-}$$

riske værdi af dennes determinant er $2c$. Regnereglerne for planintegraler ved koordinatskifte (se MAT1-noter (102) §57) giver da

$$(1.27) \quad u(x, t) = \iint_{\Delta} \frac{1}{4c^2} F(\bar{x}, \bar{t}) 2c \cdot d\bar{x} d\bar{t} = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\bar{t})}^{x+c(t-\bar{t})} F(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x} d\bar{t},$$

hvilket er den søgte formel, jvf. [W] (5.2).

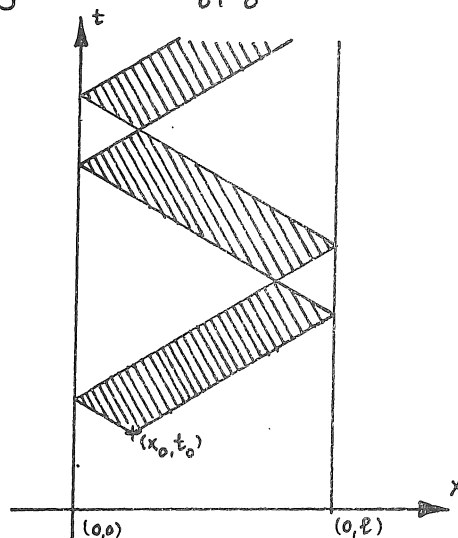
Bemærk følgende lille komplikation: Når $F \in C^0(\bar{\Omega})$, er $u(x, t)$ løsning i den forstand at $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \tilde{u}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) = \frac{-1}{4c^2} \tilde{F}(\xi, \eta)$. En direkte udregning af $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ efter formelen (1.27) kræver imidlertid yderligere en vis differentiability af $F(x, t)$ (f. ex. at $F \in C^1(\bar{\Omega})$, eller er passende stykkevis differentiable). Når $F \in C^1(\bar{\Omega})$ bliver $u \in C^2(\bar{\Omega})$, hvormed u er løsning i helt klassisk forstand. Vi vil imidlertid ikke give afkald på at kalde u en løsning, selv når F blot er kontinuert; - for at være helt korrekte kan vi da kalde u en generaliseret løsning, eller specificere på hvilken speciel måde den opfylder differentialligningen. (For 2'ordens differential-ligninger vil vi kalde C^2 -løsninger for klassiske løsninger, mens udtrykket generaliseret løsning vil blive brugt som brokasse for løsningsbegreber, som ikke sikkert giver C^2 -løsninger, men som dog er for nyttige til at undvære. Begrebet generaliseret løsning har en helt præcis definition i den mere dybtgående funktional-analyse, i distributionsteorien.)

Det vises i [W] på side 26, hvorledes den fremkomne løsning for problemet vedrørende området $\{(x, t) \mid t \geq 0\}$ kan bruges

til at løse problemet [W] (5.3), der vedrører halvstrimmelen $[0, \ell] \times [0, \infty[$, nemlig ved at såvel $f(x)$ og $g(x)$ som $F(x, t)$ forlænges til ulige funktioner omkring 0 og ℓ med hensyn til x . Løsningsfunktionen ved formel [W] (5.2) bliver da ulige omkring 0 og ℓ med hensyn til x (husk ved verifikationen, at x optræder i integralets grænser) og kontinuert, hvorefter følger, at den er 0 for $x=0$ og for $x=\ell$. Funktionen løser altså problemet [W] (5.3). At dette har højst én løsning, er ensbetydende med at problemet med f, g og F lig med 0 kun har nul-løsningen; gyldigheden heraf har vi allerede fra [W] §2. Vi har altså fundet løsningen til [W] (5.3).

Vi definerer nu afhængighedsområdet for et punkt (x_0, t_0) i $[0, \ell] \times [0, \infty[$ som den mindste delmængde heraf, hvori f, g og F skal være kendt for at $u(x_0, t_0)$ kan bestemmes. Når (x_0, t_0) ligger i den karakteristiske trekant, bliver afhængighedsområdet lig med trekanten afgrænset af x -aksen og de to nedadrettede karakteristikker gennem (x_0, t_0) . (Samme definition af karakteristikkene som på side 1.4.) Når (x_0, t_0) ligger over den karakteristiske trekant, får vi, ved benyttelse af at $\iint_{\Delta} F(x, t) dx dt$ er 0 for trekanter, der er symmetriske omkring $x=0$ eller $x=\ell$, at afhængighedsområdet for (x_0, t_0) bliver det begrænsede område (bestående af parallelogrammer, det nederste dog i reglen beskåret til en trekant, firkant eller femkant) afgrænset af de nedadgående brudte karakteristik-linier gennem (x_0, t_0) samt x -aksen; i eksemplet side 1.5 er det netop det skraverede område.

Indflydelsesområdet har nu interesse for ethvert punkt (x_0, t_0) i $[0, \ell] \times [0, \infty[$ (ikke blot punkterne på x -aksen); det defineres selvfølgelig som mængden af punkter i $[0, \ell] \times [0, \infty[$, der har (x_0, t_0) i deres afhængighedsområde. Her fås et område bestående af parallelogrammerne afgrænset af de opadgående brudte karakteristik-linier gennem (x_0, t_0) :



For problemet med "frie randbetingelser" får vi ikke helt denne fine struktur, da F her forlænges på lige måde. (Figurer nederst side 1.6.)

K 1.5 Den svingende streng med variabel tæthed.

Bemærkninger til [W] §7.

Ved integrationen af [W] (7.2) over området P integreres første led på venstre side med hensyn til t først og x bagefter, mens andet led integreres med hensyn til x først og t bagefter.

Jdet C_1 og C_2 er fremstillet ved funktionerne henholdsvis

$$t = Q_1(x) \quad , \quad x \in [0, \bar{x}] \quad ,$$

$$t = Q_2(x) \quad , \quad x \in [\bar{x}, \ell] \quad (Q_1(\bar{x}) = Q_2(\bar{x}) = \bar{t}) \quad ,$$

som vi udtrykker ved en fælles funktion $t = Q(x)$ for $x \in [0, \ell]$, bliver planintegralet af første led på venstre side (med u erstattet med v):

$$\begin{aligned} \iint_P \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + T_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} dx \int_0^{Q(x)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + T_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \left(\left[\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + T_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] (x, Q(x)) - \left[\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + T_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] (x, 0) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \left[\rho(x) \left(\frac{\partial v}{\partial t}(x, Q(x)) \right)^2 + T_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x, Q(x)) \right)^2 \right] dx \quad , \end{aligned}$$

når $f = g = 0$ i begyndelsesbetingelserne. Her kræves altså ingen yderligere betingelser på $Q(x)$.

For at integrationen af andet led skal give udtrykket i ligningen nederst side 37, må vi derimod forudsætte, at Q_1 er voksende og Q_2 aftagende (ellers kunne der f.ex. være tale om at integrere over flere intervaller for en bestemt t-værdi). Da vi siden får brug for at betragte differentialkvotienterne af Q_1 og Q_2 , og $Q_1'(x)$ og $Q_2'(x)$ kommer til at indgå i integranderne, må vi i alt forudsætte

$$Q_1 \in C^1([0, \bar{x}]) \quad , \quad Q_1 \text{ voksende} \quad ,$$

$$Q_2 \in C^1([\bar{x}, \ell]) \quad , \quad Q_2 \text{ aftagende} \quad .$$

Sæt $Q_1(0) = t_1$ og $Q_2(\ell) = t_2$ og antag at $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$. Definer

$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \in [0, t_1] \\ \text{den omvendte funktion til } Q_1, & \text{for } t \in [t_1, \bar{t}] \quad , \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \ell & \text{for } t \in [0, t_2] \\ \text{den omvendte funktion til } Q_2, & \text{for } t \in [t_2, \bar{t}] \quad . \end{cases}$$

Da kan vi omskrive planintegralet over P af andet led i [W] (7.2) (med u erstattet med v):

$$\begin{aligned} - \iint_P \frac{\partial}{\partial x} \left[T_0 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right] dx dt &= - \int_0^{\bar{t}} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left[T_0 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right] dx dt \\ &= - \int_0^{\bar{t}} \left[T_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right) (x_2(t), t) - T_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right) (x_1(t), t) \right] dt \quad , \end{aligned}$$

som under randbetingelserne $v(0, t) = 0$, $v(\ell, t) = 0$, bliver til

følgende (idet $\frac{\partial v}{\partial t}$ er 0 på de lodrette stykker):

$$= - \int_{t_2}^{\bar{t}} T_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right) (x_2(t), t) dt + \int_{t_1}^{\bar{t}} T_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right) (x_1(t), t) dt.$$

Ved variabelskiftet $t = Q(x)$ fås nu, idet $dt = Q'_j(x) dx$, $j=1,2$,

$$\begin{aligned} &= - \int_{\ell}^{\bar{x}} T_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right) (x, Q(x)) Q'_2(x) dx + \int_0^{\bar{x}} T_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right) (x, Q(x)) Q'_1(x) dx \\ &= \int_0^{\ell} T_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right) (x, Q(x)) Q'(x) dx, \end{aligned}$$

hvor Q' er opfattet som stykkevis kontinuert funktion.

Hermed er ingredienserne i [W](7.5) fundet, og beviset fortsætter som i bogen.

Beviset behandler kun det tilfælde, hvor (\bar{x}, \bar{t}) ligger så langt fra x -aksen, at de karakteristiske kurver gennem punktet skærer linierne $x=0$ og $x=\ell$ over x -aksen, idet de tilfælde, hvor kurverne skærer x -aksen før disse linier, overlades til læseren (berettiget).

2. Klassifikation af 2. ordens differentiaalligninger

K 2.1 Ligninger på \mathbb{R}^2 med konstante koefficienter.

Bemærkninger til [W]§8.

Til side 41, linie 3 f.n. bemærkes, at transformationen [W](8.2) kun har interesse, når $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$; det er ved brug af denne forudsætning, at man slutter $\alpha \neq 0$ og $\gamma \neq 0$.

Formel [W](8.4) er et eksempel på en brugbar transformation; andre fås ved at erstatte ξ med $k_1\xi$, η med $k_2\eta$, for konstanter k_1 og $k_2 \neq 0$.

Bemærkningen s.43 l.18-19 skal ikke forstås som et bevis for at løsninger til Laplaces ligning ikke kan have diskontinuiteter.

K 2.2 Ligninger på \mathbb{R}^2 med variable koefficienter.

Bemærkninger til [W]§9.

Det er uklart, hvad bogen mener med, at L kan reduceres til standard form i et "helt område". Det vi kan vise er, at vi kan reducere L i omegnen af et punkt (x_0, t_0) , hvor L er hyperbolsk og A (eller C) er $\neq 0$. Ofte vil reduktionen fungere i større områder, men vi giver ikke systematiske beviser herfor.

I det følgende gives en mere præcis redegørelse for overvejelserne side 45.

Antag, at $A \neq 0$ og $B^2 - 4AC > 0$ i en omegn Ω_1 af (x_0, t_0) . Vi betragter et koordinatskifte $\xi = \xi(x, t)$, $\eta = \eta(x, t)$, hvor vi søger ξ og η som C^2 -funktioner i en eventuelt mindre omegn Ω af (x_0, t_0) ; deres funktionaldeterminant

$$J = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

skal være $\neq 0$ i Ω . Ved kædereglene når man frem til følgende betingelser for, at principaldelen af L kommer på standardform (jvf. [W](9.2))

$$(2.1) \quad A \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + B \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = 0$$

$$(2.2) \quad A \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + B \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = 0$$

Nu, hvis ξ er løsning til (2.1), og $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ er 0 i et punkt, bliver $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ det også, i modstrid med vort krav om $J \neq 0$; tilsvarende kan vi ikke have $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$. Derfor kan (2.1) og (2.2) omskrives til

$$(2.3) \quad A \left(\frac{\frac{\partial \xi}{\partial t}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}} \right)^2 + B \frac{\frac{\partial \xi}{\partial t}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}} + C = 0,$$

$$(2.4) \quad A \left(\frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\frac{\partial \eta}{\partial x}} \right)^2 + B \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\frac{\partial \eta}{\partial x}} + C = 0.$$

(2.3) - eller (2.1) - kaldes ofte den karakteristiske ligning.)

Rødderne i andengradspolynomiet $A(x,t)\lambda^2 + B(x,t)\lambda + C(x,t)$ i λ er for hvert (x,t)

$$(2.5) \quad \lambda_{\pm}(x,t) = \frac{-B(x,t) \pm \sqrt{\mathcal{D}(x,t)}}{2A(x,t)},$$

hvor $\mathcal{D}(x,t) = B(x,t)^2 - 4A(x,t)C(x,t)$. Da $\mathcal{D} > 0$ og $A \neq 0$ i Ω_1 , er λ_+ og λ_- C^k -funktioner på Ω_1 , når A, B og C er det. Vi forudsætter, at disse er C^2 . Hvis vi kan finde ξ og η som løsninger til

$$(2.6) \quad \frac{\frac{\partial \xi}{\partial t}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}} = \lambda_+(x,t)$$

$$(2.7) \quad \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\frac{\partial \eta}{\partial x}} = \lambda_-(x,t)$$

i en omegn Ω af (x_0, t_0) ($\Omega \subseteq \Omega_1$), har vi løst problemet, thi da er (2.1) og (2.2) opfyldt;

$$J = (\lambda_- - \lambda_+) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{A} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0 \quad \text{i } \Omega;$$

og koefficienten til $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ i [W](9.2) bliver

$$(2A\lambda_+\lambda_- + B\lambda_+ + B\lambda_- + 2C) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\mathcal{D}}{A} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$$

(Den sidste, vigtige bemærkning mangler i [W].)

Der resterer problemet at løse de to første ordens partielle differentiaalligninger (2.6) og (2.7). Lad os f. ex. se på (2.6) ((2.7) behandles analogt!); den kan også skrives

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \lambda_+(x,t) \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0.$$

Betragt en differentiabel funktion $x = \varphi(t)$, som er defineret på et interval I , og hvis graf ligger i Ω_1 . Antag, at ξ er en løsning til (2.6) defineret på Ω_1 . Om den sammensatte funktion $\xi(\varphi(t), t)$ har vi, at

$$\frac{d}{dt} (\xi(\varphi(t), t)) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \varphi'(t) + \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{for } t \in I.$$

Derfor, hvis $\varphi(t)$ er valgt således at

$$\varphi'(t) = -\lambda_+(\varphi(t), t) \quad \text{for alle } t \in I,$$

da er $\frac{d}{dt} \xi(\varphi(t), t) = 0$ for $t \in I$, dvs. ξ er konstant langs grafen $(\varphi(t), t)$; denne er niveaukurve for $\xi(x,t)$. Vi kan altså finde

niveaukurver for ξ ved at løse differentialligningen

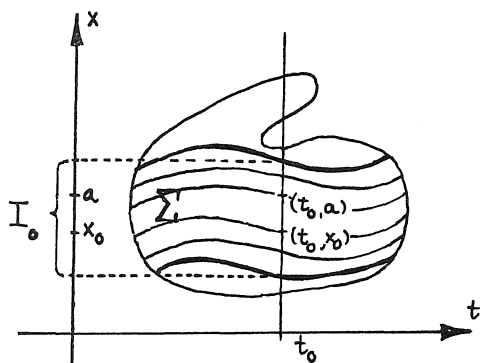
$$(2.8) \quad \frac{dx}{dt} = -\lambda_+(x,t).$$

(Bemærk, at der er et minus ved λ_+ i modsætning til i ligning (2.6).)

- Dette er præcis, hvad man var inde på i en lidt mere generel sammenhæng i MAT 1-noterne (102) §54, se specielt siderne 54.04-05. Da man ofte møder (2.8) udledt på formen $dx + \lambda_+(x,t)dt = 0$ [eller endda på formen $A(dt)^2 - Bdt dx + C(dx)^2 = 0$!] tilrådes det at konsultere MAT 1-noterne (102) §54.

Gennem ethvert punkt (x_1, t_1) af Ω_1 går der en og kun en maksimal løsning til (2.8); der er altså en entydigt bestemt niveaukurve for $\xi(x,t)$ gennem hvert punkt af Ω_1 . Men herudover lægger (2.6) ikke yderligere bånd på ξ ; den værdi ξ har på hver niveaukurve er ikke fastlagt ved (2.6). Ved konstruktionen af en løsning ξ til (2.6) kan værdien af ξ på hver niveaukurve faktisk vælges frit, når blot visse betingelser om differentiability og monotonicitet overholdes.

Konstruktionen af ξ foregår i detaljer således: Vi vil først



"ordne" skaren af niveaukurver i en omegn af (x_0, t_0) . (I det følgende skrives x og t i modsat rækkefølge, så kurverne er grafer af funktioner afbildet på sædvanlig måde.) Lad I_0 være et åbent interval omkring x_0 , for hvilket $\{t_0\} \times I_0 = \{(t_0, x) \mid x \in I_0\} \subseteq \Omega_1$. For hvert $a \in I_0$ betegner vi den maksimale løsning til (2.8) gennem (t_0, a) ved

$$(2.9) \quad x = \varphi(t, a) \quad \text{med definitionsinterval } I_a.$$

(Niveaukurverne, som er graferne for funktionerne $t \mapsto \varphi(t, a)$, er da parametriseret ved $a \in I_0$.) Lad Σ være foreningsmængden af graferne, når a gennemløber I_0 , altså

$$\Sigma = \bigcup_{a \in I_0} \{ (t, \varphi(t, a)) \mid t \in I_a \}.$$

Da to grafer med forskelligt a er disjunkte (p.gr. af entydigheds-sætningen for differentialligninger), hører hvert punkt $(t, x) \in \Sigma$ til et og kun et a . Altså kan (2.9) løses med hensyn til a , ved en funktion

$$(2.10) \quad a = \psi(t, x) \quad , \text{ for } (t, x) \in \Sigma.$$

Som ξ kan vi da vælge

$$(2.11) \quad \xi(t,x) = \psi(t,x), \quad \text{for } (t,x) \in \Sigma;$$

så får ξ den konstante værdi a langs den a 'te niveaukurve. Et mere generelt valg af ξ fås ved at vi vælger en monoton funktion $a \mapsto k(a)$ defineret på I_0 , og sætter

$$(2.12) \quad \xi(t,x) = k(\psi(t,x)) \quad \text{for } (t,x) \in \Sigma;$$

da har ξ værdien $k(a)$ på den a 'te niveaukurve.

Der er nu to problemer tilbage at behandle. 1) Da det kræves, at ξ er defineret på en åben omegn Ω omkring (t_0, x_0) , skal vi vise, at Σ indeholder en sådan åben omegn. 2) Differentiabiliteten af ξ skal undersøges, således at ligning (2.6) kan verificeres.

Med hensyn til pkt. 2) vil vi straks nævne, at under den givne forudsætning om at A, B og C er C^2 -funktioner gælder, at når k er en C^2 -funktion bliver ξ en C^2 -funktion; dermed er den løsning til (2.6).

En detaljeret redegørelse for 1) og 2) gives nedenfor.

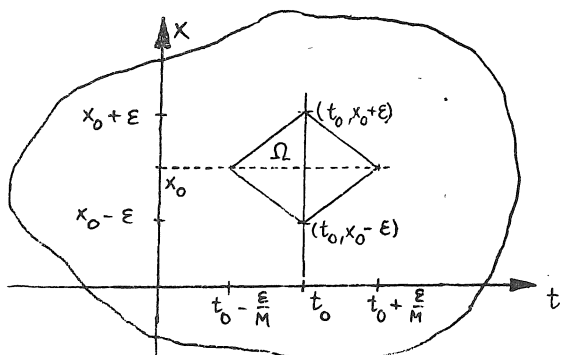
T 2.3 Definitionsmængde og differentiability af løsninger til den karakteristiske ligning.

Ovennævnte pkt. 1) besvares ved en nærmere analyse af beviset for eksistens- og entydighedssætningen i MAT1-noterne (102) §49.

Vi kan, efter en eventuel indskrænkning af Ω_1 , antage at $|\lambda_+(t,x)|$ er begrænset i Ω_1 af en positiv konstant M , der også er Lipschitz-konstant for $\lambda_+(t,x)$ i Ω_1 (λ_+ var jo C^2). For $(t_1, x_1) \in \Omega_1$ fungerer eksistensbeviset for løsningen gennem (t_1, x_1) da i ethvert interval af formen

$$\Xi = \{(t,x) \mid |t-t_1| \leq a, |x-x_1| \leq b\}$$

med $a \leq \frac{b}{M}$, $b < 1$ og $\max\{a,b\} < \text{dist}((t_1, x_1), [\Omega_1])$ (den sidste betingelse sikrer, at $\Xi \subset \Omega_1$). Derfor, når et (passende lille) $\delta > 0$ er givet, kan vi for ethvert punkt $(t_1, x_1) \in \Omega_1$ med $\text{dist}((t_1, x_1), [\Omega_1]) \geq \delta$ vælge $b = \min\{\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}\}$ og $a = \frac{b}{M}$; så at løsningen gennem (t_1, x_1) er defineret i det mindste på intervallet $[t_1 - \frac{b}{M}, t_1 + \frac{b}{M}]$, hvor den antager værdier i $[x_1 - b, x_1 + b]$. (Bemærk, at $|\lambda_+(t,x)| \leq M$ medfører at $|\varphi'(t)| \leq M$ for enhver løsning!)



Vælges nu som Ω den åbne rhombe begrænset af linierne gennem $(t_0, x_0 + \epsilon)$ og $(t_0, x_0 - \epsilon)$ med hældningskoefficienter $+M$ og $-M$ ses, at for ϵ lille nok vil der for ethvert punkt $(t_1, x_1) \in \Omega$ gælde, at definitionsintervallet for den maksimale

løsning gennem (t_1, x_1) indeholder intervallet $[t_0 - \frac{\epsilon}{M}, t_0 + \frac{\epsilon}{M}]$, og for $t = t_0$ antager løsningen en værdi i intervallet $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$.

Når $I_0 \supseteq]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$, vil Σ indeholde Ω . \square

Besvarelsen af pkt. 2) kræver nærmere oplysning om hvordan løsningsfunktionerne til (2.8) afhænger af data. Det er vist i slutningen af §49 i MAT1-noterne (102), at løsningsfunktionen gennem punktet (t_0, a) afhænger kontinuert (med hensyn til sup-normen på et passende interval omkring t_0) af a . Vi har brug for følgende mere dybtgående sætning, som f.ex. er vist i Petrowski: *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (Leipzig 1954), §22 (s. 73):

Sætning 2.1 Hvis $f(t, x)$ er en C^k -funktion af $(t, x) \in \Omega_1$, er løsningen $x(t, t_1, x_1)$ gennem punktet (t_1, x_1) til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

en C^k -funktion af $(t_1, x_1) \in \Omega_1$.

(Vi minder om at løsningen, for hvert (t_1, x_1) , endda er en C^{k+1} funktion af t .) Vi vil ikke gå ind på beviset her, blot anvende sætningen.

Da vi har sørget for, at $\lambda_+(t, x)$ er C^2 , fås at løsningerne $\varphi(t, a)$ (gennem (t_0, a) , $a \in I_0$, jvf. (2.9)), som er C^3 -funktioner af t , er C^2 -funktioner af a . Specielt er $\varphi(t, a)$ da en C^2 -funktion på det todimensionale interval

$$\Xi_0 = \{(t, a) \mid |t - t_0| \leq \frac{\epsilon}{M}, |a - x_0| \leq \epsilon\},$$

ϵ bestemt ovenfor. Vedrørende $\frac{\partial}{\partial a} \varphi(t, a)$ bemærker vi nu, at da $\varphi(t_0, a) = a$ for hvert $a \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ er $\frac{\partial}{\partial a} \varphi(t_0, a) = 1$ for hvert a . Betragt nu variabelskiftet $(t, a) \mapsto (\tau, x)$ defineret ved

$$(2.13) \quad \left. \begin{aligned} \tau &= t \\ x &= \varphi(t, a) \end{aligned} \right\} \text{ for } (t, a) \in \Xi_0.$$

Funktionaldeterminanten $J = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial a} = 1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot 0 = \frac{\partial}{\partial a} \varphi(t, a)$. Da denne funktion er kontinuert på Ξ_0 og er lig 1 i (t_0, a) (specielt i (t_0, x_0)), findes der en åben omegn Ω_2 af (t_0, x_0) indeholdt i Ξ_0 , så $J \neq 0$ dér. Da har (2.13) en omvendt afbildning (defineret på billedet Ω_3 af Ω_2)

$$(2.14) \quad \begin{aligned} t &= \tau \\ a &= \psi(\tau, x), \end{aligned}$$

og da $\varphi \in C^2$, er $\psi \in C^2$. Ω_3 er en åben omegn af (t_0, x_0) (bemærk at dette punkt føres over i sig selv ved (2.13)). Vælg $a \mapsto k(a)$ monoton og C^2 , da er

$$\xi = k(\psi(\tau, x)), \quad (\tau, x) \in \Omega_3$$

en C^2 -funktion af (τ, x) for $(\tau, x) \in \Omega_3$. \square

T 2.4 2.ordens ligninger på \mathbb{R}^n .

J slutningen af §10 i [W] gives en antydning af hvorledes anden ordens elliptiske differentialoperatorer i flere end to uafhængige variable karakteriseres; den tilsvarende karakterisation af parabolske differentialoperatorer omtales i [W] §13. Vi vil her gøre mere systematisk rede for disse karakterisationer; hyperbolske differentialoperatorer vil også blive medtaget.

Lad Ω være en åben delmængde af \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) og betragt en 2.ordens lineær differentialoperator L på Ω ,

$$(2.15) \quad (Lu)(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x).$$

2.ordensdelen (principaldelen) af L er da defineret ved

$$(2.16) \quad L_0 u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Funktionerne a_{ij} udgør tilsammen en (funktions-)matrix $\underline{A} = (a_{ij})$. Vi vil kræve, at $a_{ij} = a_{ji}$ for alle i, j ; dette kan altid opnås, når vi forudsætter $u \in C^2(\Omega)$, idet jo $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$, så a_{ij} og a_{ji} om nødvendigt kan lægges sammen og fordeles ligeligt på de to led $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ og $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$. Da er \underline{A} en symmetrisk matrix, entydigt bestemt ved L (eller L_0), den kaldes den til L (eller L_0) hørende matrix.

Vi vil undersøge, hvorledes udtrykket for Lu ændres ved en lineær koordinattransformation

$$(2.17) \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \underline{S} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

hvor \underline{S} er en given, regulær (tal-) matrix $\underline{S} = (s_{ij})$; (2.17) skrives i detaljer som:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} x_j$$

for hvert $i=1, \dots, n$.

Af kædereglen fås for i, j :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n s_{ki} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}$$

og

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^n s_{ki} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \right) = \sum_{k=1}^n s_{ki} \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_\ell} \cdot \frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n s_{ki} s_{\ell j} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_\ell}. \end{aligned}$$

Indsættes dette i (2.16) fås

$$L_0 u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{ij}(x) s_{ki} s_{\ell j} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_\ell} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n b_{k\ell}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_\ell},$$

hvor

$$b_{ke}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n s_{ki} a_{ij}(\underline{x}) \right) s_{ej}.$$

Resten af Lu transformeres til et 1.ordens differentiationsudtryk.

Matricen hørende til L i de nye koordinater er altså

$$\underline{B} = \underline{S} \underline{A} \underline{S}' \quad (\underline{S}' \text{ er den transponerede af } \underline{S}.)$$

Ved for hvert $\underline{x} \in \Omega$ at opfatte $\underline{A}(\underline{x})$ som matrix for en symmetrisk bilinearform på \mathbb{R}^n kan vi indføre $\text{ind}_+ \underline{A}(\underline{x})$, $\text{ind}_- \underline{A}(\underline{x})$ og $\dim N_{\underline{A}(\underline{x})}$ (jvf. MAT1-noter (101) side 8.2.2). Da matricen $\underline{B}(\underline{x}) = \underline{S} \underline{A}(\underline{x}) \underline{S}'$ svarer til den bilinearform, man får ud fra $\underline{A}(\underline{x})$ ved koordinattransformationen hørende til \underline{S}^{-1} (jvf. MAT1-noter (101) side 8.1.4) fås $\text{ind}_+ \underline{B}(\underline{x}) = \text{ind}_+ \underline{A}(\underline{x})$, $\text{ind}_- \underline{B}(\underline{x}) = \text{ind}_- \underline{A}(\underline{x})$ og $\dim N_{\underline{B}(\underline{x})} = \dim N_{\underline{A}(\underline{x})}$; disse størrelser er altså invariante under det lineære koordinat-skifte givet ved \underline{S} .

Positivitets- og negativitetsindex anvendes nu til at typebestemme L som følger:

Definition 2.2 Lad L være en 2.ordens differentialoperator og lad \underline{A} være den tilhørende symmetriske matrix.

- (i) L kaldes elliptisk i punktet \underline{x} , hvis $\underline{A}(\underline{x})$ er positiv definit eller negativ definit.
- (ii) L kaldes parabolsk i \underline{x} , hvis $\dim N_{\underline{A}(\underline{x})} = 1$ og $\underline{A}(\underline{x})$ er positiv semidefinit eller negativ semidefinit.
- (iii) L kaldes hyperbolsk i \underline{x} , hvis $\underline{A}(\underline{x})$ er regulær og enten $\text{ind}_+ \underline{A}(\underline{x}) = n-1$ eller $\text{ind}_- \underline{A}(\underline{x}) = n-1$.

Det fremgår af teorien for symmetriske bilinearformer (MAT1-noterne (101) side 8.3.1) at:

L er elliptisk i \underline{x} hvis og kun hvis der findes en regulær matrix \underline{S} , så $\underline{S} \underline{A}(\underline{x}) \underline{S}' = \pm \underline{E}$. Dette betyder, at der findes et lineært koordinat-skifte, så at anden ordensleddet i det nye koordinatsystem får formen $\pm \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n^2} \right)$ i det til \underline{x} svarende punkt. Hvis \underline{A} er konstant, vil det pågældende koordinat-skifte give 2.ordensleddet den nævnte form i hele Ω .

L er parabolsk i \underline{x} , hvis og kun hvis der findes en regulær matrix \underline{S} så $\underline{S} \underline{A}(\underline{x}) \underline{S}' = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. 2.ordensleddet har altså formen $\pm \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n^2} \right)$ i punktet svarende til \underline{x} i et passende valgt koordinatsystem (i hele Ω hvis \underline{A} er konstant).

L er hyperbolsk, hvis og kun hvis der findes en regulær matrix \underline{S} så $\underline{S} \underline{A}(\underline{x}) \underline{S}' = \pm \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ 0 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. 2.ordensleddet har altså formen $\pm \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n^2} \right)$ i punktet svarende til \underline{x} i et passende

valgt koordinatsystem (i hele Ω hvis \underline{A} er konstant).

J tilfældet $n=2$ er klassifikationen udtømmende, hvis vi forudsætter $\underline{A}(x) \neq \underline{0}$. (Vis selv, at den stemmer overens med den i [W] §8 angivne.) For $n > 2$ er det let at angive 2. ordens differentialoperatoren, der ikke er af en af de tre typer. (Et eksempel er differentialoperatoren $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}$, som kaldes ultrahyperbolsk. Sådanne operatoren optræder dog mindre ofte i anvendelse.)

3. Oversigt vedrørende fysikkens differentiaalligninger.

T 3.1 Beskrivelse af fysiske systemer.

- Behandlingen af et fysisk system kan typisk opdeles i fem hovedafsnit:
- (i) verbal formulering af problemet, herunder definition af system;
 - (ii) indførelse af relevante fysiske størrelser, valg af model og beskrivelsesniveau;
 - (iii) matematisk beskrivelse, i reglen ved opstilling af ligninger;
 - (iv) diskussion og løsning af ligningerne;
 - (v) fortolkning af resultatet og eventuel eksperimentel undersøgelse.

Den matematiske disciplin matematisk fysik beskæftiger sig med tredje og fjerde trin i denne række; en af grundene til, at dette er fordelagtigt, er, at forskellige fysiske problemer ofte beskrives ved ens ligninger, eksempelvis kan såvel mekaniske svingninger (f.ex. af en fjeder) som svingninger i en elektrisk svingningskreds beskrives ved differentiaalligningen

$$(3.1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x = 0,$$

hvor $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Selve ligningen rummer ingen information om hvilket fænomen, der beskrives, og dette er bl.a. en af grundene til at analogregnemaskiner kan beskrive f.ex. mekaniske fænomener.

Differentiaalligninger giver en kort sammenfattende beskrivelse af store problemkomplekser og egner sig til diskussion af almene træk ved fænomenerne; således beskriver f.ex. Maxwells ligninger (AW FYSIK 2a p. 165) hele elektromagnetismen, incl. optikken.

Et fysisk systems tilstand beskrives ved en eller flere fysiske størrelser, der f.ex. kan betragtes som funktioner af tiden og rumkoordinaterne, som tilsammen udgør fysikkens primære variable. Tilstandens udvikling i tiden beskrives typisk ved en differentiaalligning, der indeholder afledede af tilstandsstørrelserne med hensyn til i hvert fald tiden.

Eksempel 1 Et radioaktivt præparats tilstand kan beskrives ved antallet $n(t)$ af uomdannede atomer til tiden t ; denne størrelse kan altså kun antage hele, positive værdier, og dens afledede med hensyn til tiden har derfor ingen mening. Alligevel siger man, at det radioaktive henfald beskrives ved

$$(3.2) \quad \frac{dn}{dt} = -\lambda n$$

- hvordan kan (3.2) så tillægges en fornuftig betydning?

Eksempel 2

J den klassiske mekanik beskrives et N -partikelsystems tilstand ved angivelse af stedvektorerne \underline{r}_i og hastighederne \underline{v}_i ($i=1, \dots, N$) til ethvert tidspunkt. J almindelighed er \underline{r}_i og \underline{v}_i C^2 - henholdsvis C^1 -funktioner af tiden t . Hvis de ydre kræfter \underline{F}_i ($i=1, \dots, N$) er kendt, kan $\underline{r}_i(t)$ og $\underline{v}_i(t)$ i princippet findes ved løsning af differentiaalligningerne

$$(3.3) \quad m_i \frac{d^2}{dt^2} \underline{r}_i = \underline{F}_i,$$

der repræsenterer Newtons 2. lov.

Eksempel 3

En usammentrykkelig væske betragtes på et makroskopisk beskrivelsesniveau som et kontinuum (i modsætning til en diskret mængde). Tilstanden angives (f.ex.) ved hastighed $\underline{v}(\underline{r}, t)$ og tryk $p(\underline{r}, t)$ i alle punkter af væsken, og \underline{v} og p betragtes som differentiable funktioner af tid- og rumkoordinaterne.

Eksempel 4

J kvantemekanikken beskrives en partikels tilstand ved bølgefunktionen $\psi(\underline{r}, t)$, der er en i almindelighed kompleks, differentiable funktion af tid- og rumkoordinaterne. Bølgefunktionen skal (bl.a.) tilfredsstille (se f.ex. AW FYSIK 3 s. 102 ff)

$$(3.4) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\underline{r}, t) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

hvor Δ er Laplaceoperatoren og i den imaginære enhed.

Differentiaalligningerne, der beskriver tilstandens udvikling i tiden, kan benyttes til at finde tilstanden til senere tidspunkter, når den er kendt til et tidspunkt (begyndelsesværdiproblem). Specialtilfælde er ligevægtstilstande (statiske tilstande) og stationære tilstande. J kontinuumsteorier bestemmes disse af differentiaalligninger (i reglen partielle), der indeholder afledede af tilstandsstørrelserne med hensyn til rumkoordinaterne. Betingelser, der f.ex. refererer til omgivelsernes indflydelse, fører typisk til randværdiproblemer eller egenværdiproblemer.

T 3.2 Karakteristiske træk ved forskellige fysiske discipliners differentiaalligninger.

- i) klassisk, gnidningsfri punktmekanik (Newtons ligninger):
reversibel; nærvirkning i tid, fjernvirkning i rum; sædvanlige,

oftest ikke-lineære, differentiaalligninger af 2. orden i tiden;

- ii) deformerbare legemers mekanik (hydrodynamik og elasticitetslære):
reversibel, hvis der ses bort fra gnidning, ellers ikke; nærvirkning i tid og i rum (ikke eksakt); partielle differentiaalligninger (eks. bølge-ligningen, Laplace's ligning og Poisson's ligning), der dog kun er tilnærmelser til nøjagtigere, ikke-lineære ligninger. I anisotrope medier (forskellige egenskaber i forskellige retninger, f.ex. krystaller) er også de lineære ligninger mere komplicerede;
- iii) klassisk elektrodynamik i vacuum (Maxwells ligninger):
reversibel; nærvirkning i tid og rum; lineære, partielle differentiaalligninger i tid-og rumkoordinaterne (se f.ex. Reitz and Milford: Foundations of Electromagnetic Theory p.296ff); specialtilfælde: bølge-ligningen, Laplace's ligning og Poisson's ligning;
- iv) transportteori (varmeledning, diffusion etc.)
irreversibel; statistisk teori; nærvirkning i tid og rum; partielle differentiaalligninger af 1. orden i tiden, men af 2. orden i rumkoordinaterne (varmeledningsligningen [W] s.58); tilnærmet lineær. Under stationære forhold: Laplace's ligning.
- v) kvantemekanik (Schrödingerligningen for en partikel):
reversibel; statistisk teori; nærvirkning i tid og i rum; lineær partiel differentiaalligning af 1. orden i tiden, af 2. orden i rumkoordinaterne (se (3.4)), men med kompleks tilstandsfunktion.

4. Egenskaber ved elliptiske og paraboliske differentialligninger.

K Bemærkninger til [W] § 10-13.

J stedet for betegnelsen ∇^2 for Laplace operatoren (udtales "nabla i anden", på amerikansk "del squared") vil vi i reglen anvende den lige så udbredte betegnelse Δ ("Laplace"). I ligningen $\Delta u = -F$ vil vi hellere skrive minus foran Δ , altså

$$-\Delta u = F,$$

da $-\Delta$ i visse henseender er en smule mere praktisk at arbejde med end Δ . ($-\Delta$ har en vis positivitetsegenskab.)

Definitionen på side 49 af en lukket C^1 -kurve er mangelfuld, idet betingelsen $x'(\tau_0)y'(\tau_1) - x'(\tau_1)y'(\tau_0) = 0$ blot betyder, at tangentene i begyndelsespunkt og slutpunkt er parallelle; det kræves faktisk, at $(x'(\tau_0), y'(\tau_0))$ er proportional med $(x'(\tau_1), y'(\tau_1))$ med en positiv proportionalitetsfaktor.

For vore formål behøver vi slet ikke at nøjes med enkelt-sammenhængende områder, men kan vel få en vis lettelse ved kun at se på sammenhængende områder (begrænset af en eller flere lukkede kurver). Se dog diskussionen nedenfor, hvor vi betragter områder bestående af endeligt mange sådanne komponenter.

Til §11 bemærkes, at den normale afledede i reglen defineres som den retningsafledede på C efter den udadrettede normalvektor $\underline{n} = (n_x, n_y)$ til C , altså

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y},$$

dvs. formlen s. 53 l. 11 gælder pr. definition af $\frac{\partial u}{\partial n}$ snarere end pr. definition af grad u .

Vi betragter følgende typer af randværdiproblemer for Laplace operatoren, hvoraf de første tre har særlige navne:

1. Dirichlet problemet:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= F && \text{i } D, \\ u &= f && \text{på } C. \end{aligned}$$

2. Neumann problemet:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= F && \text{i } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f && \text{på } C. \end{aligned}$$

3. Det blandede problem:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= F && \text{i } D, \\ u &= f_1 && \text{p\aa } C_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f_2 && \text{p\aa } C_2, \end{aligned}$$

hvor C er den disjunkte forening af to delm\angder C_1 og C_2 .

4.

$$\begin{aligned} -\Delta u &= F && \text{i } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= f && \text{p\aa } C, \end{aligned} \quad \alpha \text{ given kontinuert funktion p\aa } C.$$

I disse problemer er F og f i reglen givne kontinuerte funktioner (p\aa D henholdsvis C), og u s\oges i $C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$ for Dirichlet problemet, i $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ for de andre problemer. Svagere krav kan ogs\aa forekomme.

R\asonnementet i §11 er gyldigt under foruds\atning af at $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$. Det giver, ved betragtning af hver komponent af D for sig, f\olgende entydighedss\atninger:

Problem 1 har h\ojst \e{n} l\osning.

For Problem 2 er l\osningen bestemt p\aa\er en konstant i hver sammenh\angskomponent af D (konstanterne kan v\are forskellige).

For Problem 3 er l\osningen entydigt bestemt i de sammenh\angskomponenter, hvis rande indeholder punkter af C_1 ; og bestemt p\aa\er en konstant i hver af de andre.

For Problem 4 haves: Lad $\alpha \geq 0$. S\aa er l\osningen entydigt bestemt i de komponenter, hvor $\alpha \neq 0$ i punkter af randen, og bestemt p\aa\er en konstant i hver af de andre.

(Bevis: For l\osningen til $-\Delta v = 0$, $\frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v = 0$ p\aa C , g\aelder, ved Green's formel

$$0 = \int_C \alpha v^2 ds + \iint_D \text{grad } v^2 dx dy.$$

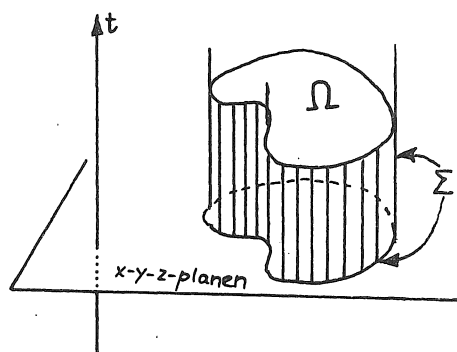
Da begge led er ≥ 0 , m\aa de v\are 0. Heraf f\olger, at $\text{grad } v = 0$, s\aa v er konstant i hver komponent; hvis $\alpha \neq 0$ i et randpunkt af komponenten, m\aa v v\are 0 d\er, s\aa konstanten er 0 af kontinuitetsgrunde.)

Beviset i [W]§12 for maksimumsprincippet foruds\atter blot, at u er kontinuert i \bar{D} og to gange differentiabel i D .

Betragtningerne i §13 b\or pr\aecliseres en smule:

Betegn $D \times]0, \bar{\epsilon}[$ ved Ω , og den interessante del af randen ved Σ :

$$\Sigma = (D \times \{0\}) \cup (C \times [0, \bar{t}])$$



Beviserne ved hjælp af energiintegraler er gyldige under forudsætning af at

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$$

(vi anvender Green's formel i x-y-z-koordinaterne og flytter en differentiation med hensyn til t uden for integraltegnet).

Beviset for maksimumsprincippet kræver ikke så megen regularitet op til Σ (blot kontinuitet), men argumentet [W] side 60 linie 14-15 kræver, at u er differentiabel efter t på hele $]0, \bar{t}[$, og at de anden afledede efter x, y og z eksisterer på $D \times]\bar{t}$.

5. Fourierrækker.K 5.1 Egenfunktion og egen værdi.

Bemærkninger til [W] §14.

Betegnelserne egenfunktion og egen værdi kræver nærmere forklaring.

Vi ved fra MAT101, at for en lineær afbildning (operator) $A: V \rightarrow V$ (V er et vektorrum) kaldes λ en egen værdi og v en dertil hørende egenvektor, når $v \neq 0$ og

$$Av = \lambda v.$$

Begrebet generaliseres uden videre til en afbildning $A: W \rightarrow V$, hvor W er et underrum af V .

Hvad er A, W og V her?

Skrives første linie i [W] (14.5) som

$$-X'' = \lambda X$$

ser vi, at A må have formen $-\frac{d^2}{dx^2}$. Men også definitionsområdet spiller en væsentlig rolle, det er her

$$D(A) = \{ X \in C^2([0,1]) \mid X(0) = X(1) = 0 \}.$$

Når A betragtes som operator fra $W = D(A)$ ind i $V = C^0([0,1])$, er de i bogen udledte værdier $\lambda = n^2\pi^2$ ($n \in \mathbb{N}$) netop egen værdierne for A , og de tilhørende egenvektorer, her kaldet egenfunktioner, er funktionerne $X_n(x) = \sin n\pi x$, $n \in \mathbb{N}$.

Betragt nu egen værdiproblemet [W] side 67 linie 12-13 fra neden. Her har operatoren igen formen $-\frac{d^2}{dx^2}$, men definitionsområdet er et andet, og vi får andre egen værdier og egenfunktioner. Kaldes operatoren A_1 , har vi

$$A_1 X = -\frac{d^2}{dx^2} X,$$

defineret for $X \in W_1 = D(A_1) = \{ X \in C^2([0,1]) \mid X'(0) = X'(1) = 0 \}$ med værdier i $V = C^0([0,1])$.

Egen værdierne er nu $\lambda = n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, med tilhørende egenfunktioner $\cos n\pi x$.

K 5.2 Ortogonalsystemer

Dette og næste afsnit kommenterer [W] § 15-16.

Bogens noget usystematiske fremstilling suppleres med følgende:

Fra MAT102 er vi vant til at betragte stykkevis kontinuerte funktioner, de defineres som bekendt således: Lad $[a,b]$ være et egentligt interval på \mathbb{R} ; vi siger da, at funktionen $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ er stykkevis kontinuert på $[a,b]$, hvis der findes en intervalinddeling

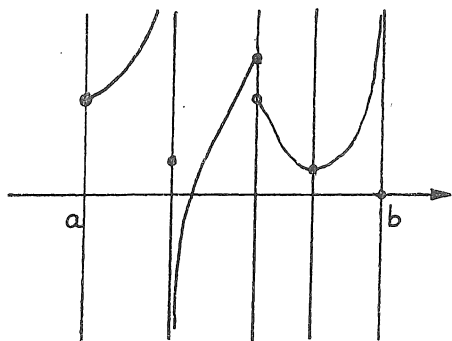
$$(5.1) \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$$

og funktioner $f_j \in C^0([x_{j-1}, x_j])$ for $j=1, \dots, k$, så $f(x) = f_j(x)$ for $x \in]x_{j-1}, x_j[$, $j=1, \dots, k$. En sådan funktion er begrænset. Vi

Vil nu gøre os den ulejlighed at medtage ubegrænsede funktioner, og indfører derfor klassen M (eventuelt præciseret til $M([a,b])$):

Definition 5.1 En funktion $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tilhører klassen M , hvis der findes en intervalinddeling (5.1), så f er kontinuert på hvert af de åbne intervaller $]x_{j-1}, x_j[$, $j=1, \dots, k$.

(Som i bogen betragtes kun reelle funktioner, omend vi uden væsentlig ulejlighed kunne have tilladt komplekse funktioner.) Når vi nu vil danne bestemte integraler, har vi brug for de uegentlige integraler indført i MAT 1-noterne (102) § 19:



Når $f \in M$, er $\int_a^b f(x) dx$ defineret hvis og kun hvis samtlige integraler $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx$ eksisterer. Her defineres

$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx$ som $\lim_{s \nearrow x_{j-1}} \int_s^c f(x) dx + \lim_{t \nearrow x_j} \int_c^t f(x) dx$, hvor c er et vilkårligt valgt punkt i $]x_{j-1}, x_j[$. $\int_a^b f(x) dx$ er summen af integralerne over $[x_{j-1}, x_j]$. Vi minder om følgende vigtige sætning vist i MAT 1-noterne (102) § 19:

Lemma 5.2 (i) Hvis $|f(x)| \leq g(x)$ på $]x_{j-1}, x_j[$ og $\int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x) dx$ eksisterer, da eksisterer $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx$, og $|\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx| \leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x) dx$.

(ii) Når g er ikke-negativ og kontinuert i $]x_{j-1}, x_j[$, gælder at $G(t) = \int_c^t g(x) dx$ er konvergent for $t \nearrow x_j$, hvis og kun hvis $G(t)$ er be-
grænset for $t \in [c, x_j[$. (At $\int_c^{x_j} g(x) dx$ eksisterer skrives da ofte $\int_c^{x_j} g(x) dx < \infty$.)

Vi betragter en følge af funktioner $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tilhørende M og vil interessere os for konvergensforholdene for rækker af formen $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, hvor $c_n \in \mathbb{R}$. Betegn afsnitsfølgen ved s_n ,

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x).$$

Punktvis konvergens og uniform konvergens er kendt fra MAT 102. Vi har yderligere brug for et tredje konvergensbegreb, som nu vil blive indført.

Definition 5.3 Lad $p \in M$ og antag at $p(x) > 0^*$ for alle $x \in [a,b]$. Klassen M_p består af alle funktioner $f \in M$ for hvilke integralet

$$(5.2) \quad \int_a^b (f(x))^2 p(x) dx \quad \text{eksisterer.}$$

*) Uden indskrænkning for det følgende kan vi lade p være 0 i endeligt mange punkter.

J det følgende tænkes givet et fast ρ , ρ kaldes en vægtfunktion.

Definition 5.4: Lad $f \in M$. Vi siger, at $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ konvergerer mod f i middel (med hensyn til ρ , på $[a, b]$), hvis $f - s_n \in M_\rho$ for hvert n og

$$(5.3) \quad \int_a^b (f(x) - s_n(x))^2 \rho(x) dx \rightarrow 0 \text{ for } n \rightarrow \infty.$$

Herudover har vi brug for endnu et begreb, ortogonalitet med hensyn til ρ :

Definition 5.5: Lad f og $g \in M$. Vi siger, at f og g er ortogonale (med hensyn til ρ , på $[a, b]$), hvis

$$(5.4) \quad \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx \text{ eksisterer og er } = 0.$$

Konvergensbegreber kan ofte formuleres ud fra metriker (eller normer); vi ved fra MAT102, at dette er tilfældet med den uniforme konvergens, som er konvergens med hensyn til metriken (i udvidet forstand) Dist:

$$\text{Dist}(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Denne udspringer af normen (i udvidet forstand)

$$\|f\|_{\text{sup}} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Vi vil nu vise, at konvergens i middel også (praktisk taget) er konvergens med hensyn til en metrik dannet ud fra en norm. Definér, for $f \in M_\rho$

$$(5.5) \quad \|f\|_\rho = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 \rho(x) dx}.$$

Er det en norm? Vi skal undersøge tre regler. Lad f og $g \in M_\rho$.

1° $\|f\|_\rho \geq 0$ er klart gyldig. Endvidere haves $f=0 \Rightarrow \|f\|_\rho=0$, mens $\|f\|_\rho=0 \Rightarrow f=0$ i hvert fald når f er kontinuert på $[a, b]$. - Hvis f har diskontinuitetspunkter, medfører $\|f\|_\rho=0$ blot, at f er 0 uden for disse; f kan være hvadsomhelst i selve punkterne. Altså er $\|\cdot\|_\rho$ i bedste fald det, der kaldes en seminorm. Man klarer i reglen dette på følgende fornuftige måde: Værdien af f i diskontinuitetspunkterne spiller ingen rolle for vort nye konvergensbegreb. Hvis vi indfører en ækvivalensrelation: $f \sim g$ hvis $f=g$ undtagen i endeligt mange punkter, gælder der: $\|f\|_\rho=0 \Rightarrow f \sim 0$. Erstattes nu M_ρ med mængden \dot{M}_ρ af ækvivalensklasser i M_ρ kan $\|\cdot\|_\rho$ overføres til \dot{M}_ρ (fordi $f \sim g \Rightarrow \|f\|_\rho = \|g\|_\rho$), og på dette rum er den en rigtig norm. - Vi vil ikke gøre

noget større nummer ud af denne defekt (der behandles systematisk i en mere almen teori), blot have den i bagtankerne, når vi lidt ukorrekt tillader os at kalde $\|\cdot\|_p$ en norm på M_p .

2° Når $f \in M_p$ er $\lambda f \in M_p$ for $\lambda \in \mathbb{R}$, og

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$$

(takket være kvadratroden i (5.5)).

3° Endelig vil vi vise, at $f, g \in M_p \Rightarrow f+g \in M_p$ og opfylder trekantsuligheden

$$(5.6) \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Hertil benyttes et vigtigt lemma:

Lemma 5.6 Når f og $g \in M_p$, eksisterer $\int_a^b f(x)g(x)\rho(x) dx$. Jdet dette betegnes ved

$$(5.7) \quad (f | g)_p = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x) dx,$$

har man

$$(5.8) \quad |(f | g)_p| \leq \|f\|_p \|g\|_p \quad \underline{\text{[Cauchy-] Schwarz' ulighed.}}$$

Bevis: Den elementære ulighed

$$(5.9) \quad 2|\alpha\beta| \leq \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{for alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(som følger af at $(\alpha+\beta)^2 \geq 0$ og $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$) giver, at

$$|f(x)g(x)\rho(x)| \leq \frac{1}{2} f(x)^2 \rho(x) + \frac{1}{2} g(x)^2 \rho(x) \quad \text{for hvert } x \in [a, b].$$

Da den ikke-negative funktion på højre side i følge det forudsatte kan integreres over $[a, b]$, følger det af Lemma 5.2 (i), at integralet $\int_a^b f(x)g(x)\rho(x) dx$ eksisterer. For ethvert $\alpha \in \mathbb{R}$ har vi nu, idet regnereglerne også gælder for det udvidede integralbegreb,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + \alpha g(x))^2 \rho(x) dx &= \int_a^b f^2 \rho dx + 2\alpha \int_a^b fg \rho dx + \alpha^2 \int_a^b g^2 \rho dx \\ &= A + 2\alpha B + \alpha^2 C, \end{aligned}$$

hvor A, B og C er uafhængige af α . Da dette andengrads polynomium i α er ≥ 0 for alle $\alpha \in \mathbb{R}$, er diskriminanten $D = 4B^2 - 4AC \leq 0$, dvs.

$$\left(\int_a^b fg \rho dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \rho dx \int_a^b g^2 \rho dx.$$

Med betegnelserne (5.5) og (5.7) udtrykker dette, at

$$|(f | g)_p| \leq \|f\|_p \|g\|_p$$

□

Vi kan nu vise punkt 3°. Thi vi har for f og $g \in M_p$

$$\int_a^b (f+g)^2 p dx = \int_a^b f^2 p dx + 2 \int_a^b fg p dx + \int_a^b g^2 p dx$$

hvoraf ses, at $f+g \in M_p$; endvidere benytter vi, at

$$\|f\|_p^2 = (f|f)_p,$$

til at indse at

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^2 &= \|f\|_p^2 + 2(f|g)_p + \|g\|_p^2 \\ &\leq \|f\|_p^2 + 2\|f\|_p\|g\|_p + \|g\|_p^2 \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p)^2, \end{aligned}$$

hvoraf (5.6) følger. \square

Udtrykket $(f|g)_p$ kaldes det indre produkt eller skalarprodukt af f og g . (Man møder også betegnelserne (f,g) , $\langle f,g \rangle$, $\langle f|g \rangle$ m.fl.). Benævnelsen var egentlig kun helt korrekt, hvis $(f|f)_p = 0$ altid medførte $f=0$ (samme defekt som ved normen).

Bemærkninger. Vi har vist, at M_p er et vektorrum over \mathbb{R} og at $\|\cdot\|_p$ praktisk taget er en norm på M_p . Med denne norm er M_p ikke fuldstændigt. Det kræver et mere generelt integralbegreb (Lebesgue-integralet), end det vi har til rådighed, at fuldstændiggøre M_p på fornuftig måde. Herved fremkommer et vektorrum, i reglen kaldet L_p^2 eller $L^2([a,b]; p)$, der består af de funktioner for hvilke integralerne i (5.5) og (5.7) eksisterer med hensyn til Lebesgue-integralet. (Man har atter en identifikation $f \sim g$ som ovenfor.) Dette studeres indgående i MAT 212.

Når \mathbb{R} erstattes med \mathbb{C} , defineres $\|f\|_p$ som $(\int_a^b |f(x)|^2 p(x) dx)^{\frac{1}{2}}$ (p stadig positiv) og $(f|g)_p$ som $\int_a^b f(x)\overline{g(x)}p(x) dx$ (kompleks konjugering).

Et fuldstændigt, normeret vektorrum, hvor normen udspringer af et skalarprodukt som her, kaldes et Hilbertrum. Sådanne rum behandles i MAT 212 og, særligt dybtgående, i MAT 323.

Schwarz' ulighed vises for kontinuerte funktioner i [W] s. 83-84.

Med indførelsen af $\|\cdot\|_p$ har vi specielt, jvf. definition 5.4, at $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ konvergerer mod f i middel netop når

$$\|f - s_n\|_p \rightarrow 0 \text{ for } n \rightarrow \infty;$$

og det er tilstrækkeligt for udtrykkets gyldighed at forudsætte,

at $\varphi_n \in M_\rho$ for alle n og $f \in M_\rho$.

Vi definerer nu:

Definition 5.7. $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kaldes et ortogonalsystem i M_ρ , hvis

- (i) $\varphi_n \in M_\rho$ og $\|\varphi_n\|_\rho \neq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $(\varphi_n | \varphi_m)_\rho = 0$ for alle $n \neq m$.

Eksempel. Systemet

$$\begin{cases} 1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots \\ \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \end{cases}$$

er et ortogonalsystem i funktionsklassen $M_\rho([-\pi, \pi])$ med $\rho=1$, altså klassen $M_1([-\pi, \pi])$ (kort skrevet M_1). Detaljer i [W] side 77-78, eller i MAT1-noterne (102) §32; specielt haves, idet vi skriver $\|\cdot\|_\rho$ som $\|\cdot\|$, når $\rho=1$,

$$\|1\|^2 = 2\pi, \quad \|\cos nx\|^2 = \|\sin nx\|^2 = \pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De tilhørende rækker skrives i reglen

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

K 5.3 Generelle Fourierrækker

Vi antager i det følgende, at $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ er et givet ortogonalsystem i M_ρ . Lad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ være en række dannet ud fra ortogonalsystemet, med reelle koefficienter c_n , og lad $f \in M_\rho$. Vi vil undersøge $\|f - s_n\|_\rho$. Man har

$$(5.10) \quad \begin{cases} 0 \leq \|f - s_n\|_\rho^2 = (f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k | f - \sum_{\ell=1}^n c_\ell \varphi_\ell)_\rho \\ = \|f\|_\rho^2 - 2 \sum_{k=1}^n c_k (f | \varphi_k)_\rho + \sum_{k=1}^n c_k^2 \|\varphi_k\|_\rho^2 \\ = \underbrace{\sum_{k=1}^n (c_k \|\varphi_k\|_\rho - \frac{(f | \varphi_k)_\rho}{\|\varphi_k\|_\rho})^2}_{I_n} + \underbrace{\|f\|_\rho^2 - \sum_{k=1}^n \frac{(f | \varphi_k)_\rho^2}{\|\varphi_k\|_\rho^2}}_{II_n}, \end{cases}$$

hvor I_n i sidste linie er fremkommet ved, for hvert k , at "komplettere kvadratet" ud fra $-2c_k(f | \varphi_k)_\rho + c_k^2 \|\varphi_k\|_\rho^2$ i næstsidste linie. Vi vil udnytte formel (5.10) på forskellige måder.

Bemærk først, at hvis c_k 'erne vælges således at I_n er 0, dvs.

$$(5.11) \quad c_k = \frac{(f | \varphi_k)_\rho}{\|\varphi_k\|_\rho^2},$$

ses at II_n er ≥ 0 ; bemærk at II_n er uafhængigt af valget af c_k 'erne. Dermed har vi:

Lemma 5.8. For ethvert $f \in M_\rho$ gælder

$$(5.12) \quad \sum_{k=1}^n \frac{(f|\varphi_k)_\rho^2}{\|\varphi_k\|_\rho^2} \leq \|f\|_\rho^2 \quad \text{for alle } n, \quad \underline{\text{Bessels ulighed.}}$$

Specielt er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f|\varphi_n)_\rho^2}{\|\varphi_n\|_\rho^2}$ konvergent, med sum $\leq \|f\|_\rho^2$, og $\frac{(f|\varphi_n)_\rho}{\|\varphi_n\|_\rho} \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

(Udeladelsen af bemærkningen $\text{II}_n \geq 0$ på dette sted gør Weinbergers bevis nederst s.71 - øverst s.72 unødigt uklart.)

Vi betragter nu (5.10) igen. Det afgørende spørgsmål er, hvor godt s_n approksimerer f , eller rettere, hvorledes vi skal vælge c_k 'erne for at approksimationen bliver bedst mulig. Dette besvares af

Lemma 5.9. Lad $f \in M_\rho$, og vælg koefficienterne c_k , så de opfylder (5.11). For ethvert andet valg af koefficienterne, \tilde{c}_k , gælder om de tilsvarende rækker

$$(5.13) \quad \|f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k\|_\rho \leq \|f - \sum_{k=1}^n \tilde{c}_k \varphi_k\|_\rho, \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bevis: J-formel (5.10) er II_n ens for de to rækker $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ og $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k \varphi_k$, mens I_n er 0 for den første og ≥ 0 for den anden. \square

Dette motiverer følgende definition:

Definition 5.10. Lad $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ være et ortogonalsystem i M_ρ og lad $f \in M_\rho$. Da defineres Fourierkoefficienterne for f med hensyn til systemet $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ved

$$(5.14) \quad c_n(f) = \frac{(f|\varphi_n)_\rho}{\|\varphi_n\|_\rho^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

og rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \varphi_n$ kaldes Fourierrækken for f m.h.t. $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. At en række $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ er Fourierrækken for f skrives kort $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$.

Vi har nu også

Sætning 5.11. Lad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ være en række dannet ud fra ortogonalsystemet $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, og lad $f \in M_\rho$. Hvis rækken konvergerer i middel mod f , da er $c_n = c_n(f)$ for hvert $n \in \mathbb{N}$.

Bevis: Når rækken konvergerer i middel mod f har vi, da både I_n og II_n i (5.10) er ≥ 0 , at $\text{I}_n \rightarrow 0$ og $\text{II}_n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$. Da I_n er det n 'te afsnit i rækken med ikke-negative led

$$\left(c_k \|\varphi_k\|_\rho - \frac{(f|\varphi_k)_\rho}{\|\varphi_k\|_\rho} \right)^2, \text{ må hvert led være } 0, \text{ dvs. } c_k = c_k(f) \text{ for alle } k. \quad \square$$

*) Mere alment, hvis $f \in M$, definerer vi Fourierkoefficienterne m.h.t. $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ved $c_n(f) = \frac{1}{\|\varphi_n\|_\rho^2} \int_a^b f \varphi_n \rho \, dx$ når integralet eksisterer.

Øvelse: Vis sætning 5.11 ved en overførsel af metoden side 32.03-04 i MAT1-noterne (102).

Sætning 5.11 udtaler, at hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ konvergerer mod f i middel, da er den netop Fourierrækken for f m.h.t. $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Man kan ikke altid være sikker på det omvendte, at når $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ er Fourierrækken for f , så konvergerer den i middel mod f , hvilket følgende modeksempel viser:

Eksempel. Funktionerne $\varphi_n(x) = \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$, udgør et ortogonalsystem på $[-\pi, \pi]$ med vægtfunktionen 1 (de er en delmængde af det trigonometriske system omtalt side 5.6). Fourierkoefficienterne for funktionen $f(x) \equiv 1$ efter dette system er alle 0. Fourierrækken består altså af lutter 0-led, og den kan da ikke konvergere i middel mod 1. (Man kan dog vise, at for funktioner, der er ulige omkring 0, konvergerer Fourierrækken efter dette ortogonalsystem mod funktionen.)

Andre modeksempel fås ved at vi fra et forelagt ortogonalsystem fjerner en af funktionerne, φ_{n_0} , og så betragter denne funktions udvikling efter det system, der udgøres af de øvrige funktioner.

Et kriterium for hvornår Fourierrækken for en forelagt funktion konvergerer mod funktionen har vi i følgende sætning, hvis bevis følger af observationen: når $c_k = c_k(f)$ for alle k , er $I_n = 0$ i (5.10), så at

$$(5.15) \quad \|f - \sum_{k=1}^n c_k(f) \varphi_k\|_{\rho}^2 = \|f\|_{\rho}^2 - \sum_{k=1}^n c_k(f)^2 \|\varphi_k\|_{\rho}^2 \text{ for alle } n.$$

Sætning 5.12. Lad $f \in M_{\rho}$. Fourierrækken for f m.h.t. $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergerer i middel mod f hvis og kun hvis

$$(5.16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)^2 \|\varphi_n\|_{\rho}^2 = \|f\|_{\rho}^2; \text{ Parsevals ligning.}$$

Med definitionen af $c_n(f)$ kan vi i øvrigt formulere Bessels ulighed (5.12) lidt anderledes:

$$(5.17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)^2 \|\varphi_n\|_{\rho}^2 \leq \|f\|_{\rho}^2.$$

Bemærk forskellen mellem Lemma 5.8 og Sætning 5.12: Bessels ulighed gælder for enhver Fourierrække, mens Parsevals ligning gælder præcis når Fourierrækken for f er konvergent i middel mod f .

De foranstående eksempler giver et indtryk af hvad der er galt med et ortogonalsystem for hvilket Fourierrækkerne ikke altid konvergerer i middel mod funktionerne: der er "for få" funktioner

i ortogonalsystemet, i en passende forstand. Vi indfører en terminologi for de ortogonalsystemer, hvor der altid er konvergens i middel:

Definition 5.13. Ortogonalsystemet $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i M_ρ siges at være fuldstændigt (eller totalt), hvis der for enhver funktion $f \in M_\rho$ gælder, at dens Fourierrække med hensyn til systemet $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergerer i middel mod f .

J følge sætning 5.12 er fuldstændighed af systemet $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ endvidere ækvivalent med, at Parsevals ligning gælder for enhver funktion $f \in M_\rho$.

J studiet af ortogonalsystemer i det følgende vil det være et kardinalpunkt at vise deres fuldstændighed.

— * —

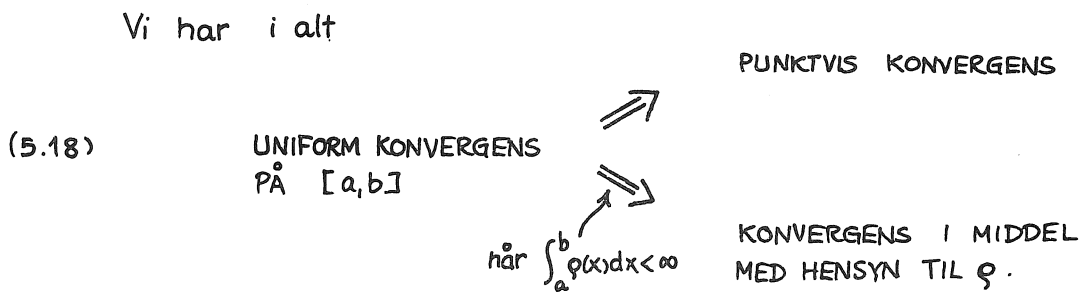
Til linie 18-23, [W] s.72 bemærkes: Vi har fra MAT 102, at $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$, når $f_n \rightarrow f$ uniformt. Den ledvise integration fungerer altså, når rækken, der fremkommer efter multiplikation med $\varphi_m \rho$, er uniformt konvergent. Dette gælder under den indskrænkende antagelse, at $\varphi_m \rho$ er begrænset. (Det på dette sted i [W] nævnte bevis er da helt analogt til beviset for sætningen side 32.03 i MAT1-noterne (102).)

Vedrørende sammenhængen mellem uniform konvergens og konvergens i middel bemærker vi i øvrigt, at uniform konvergens medfører konvergens i middel, når $\int_a^b \rho(x) dx < \infty$. Thi da haves, hvis $f_n \rightarrow f$ uniformt på $[a, b]$:

$$\|f - f_n\|_\rho^2 = \int_a^b (f - f_n)^2 \rho dx \leq \sup_{x \in [a, b]} (f(x) - f_n(x))^2 \int_a^b \rho dx \rightarrow 0.$$

Derfor medfører uniform konvergens af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ mod f , at (5.11) gælder, når blot $\int_a^b \rho(x) dx < \infty$.

Vi har i alt



Ingen af de øvrige implikationer ($\Leftarrow, \Leftarrow, \Downarrow$ og \Uparrow) er gyldige. (Prøv selv at vise dette ved eksempler, for $\rho = 1$!)

K 5.4 Riemann-Lebesgues Lemma.

Bemærkninger til [W] §17.

Sætningen s. 77 linie 5-6 kræver nærmere forklaring. Der påstås

Lemma 5.14: Lad $f \in M$ med $\int_a^b |f(x)| \rho(x) dx < \infty$. Definer, for hvert $A \geq 0$, funktionen f_A ved

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & \text{hvis } |f(x)| \leq A \\ 0, & \text{hvis } |f(x)| > A \end{cases}$$

Da gælder $\int_a^b |f(x) - f_A(x)| \rho(x) dx \rightarrow 0$ for $A \rightarrow \infty$.

[truncated = beskåret]

Bevis: Da f_A er stykkevis kontinuert, og $|f(x) - f_A(x)| \leq |f(x)|$, eksisterer integralet $\int_a^b |f(x) - f_A(x)| \rho(x) dx$.

Vi betragter tilfældet hvor b er eneste eventuelle diskontinuitetspunkt for f og ρ (ellers opdeles i endeligt mange intervaller af denne type). Da er $f(x)$ og $\rho(x)$ kontinuerte og begrænsede på alle intervaller af formen $[a, t]$, hvor $t < b$. Definer

$$x_A = \sup \{ t \in [a, b] \mid |f(x)| \leq A \text{ for } x \in [a, t] \}.$$

Da $x_A \leq b$ for alle A , og x_A er voksende for $A \nearrow \infty$, må $x_A \rightarrow c \leq b$ for $A \nearrow \infty$; her er $c = b$, da f er begrænset på ethvert interval $[a, t]$, $t < b$.

Vi har nu

$$\int_a^b |f(x) - f_A(x)| \rho(x) dx = \int_{x_A}^b |f(x) - f_A(x)| \rho(x) dx \leq \int_{x_A}^b |f(x)| \rho(x) dx \rightarrow 0$$

for $A \rightarrow \infty$; sidst nævnte konvergens er gyldig pr. definition af det uegentlige integral. \square

Vi bemærker i øvrigt (som i bogen), at Riemann-Lebesgues lemma

$$\frac{(f|\varphi_n)_\rho}{\|\varphi_n\|_\rho} \rightarrow 0 \text{ for } n \rightarrow \infty$$

for funktioner i $M_\rho([a, b])$ allerede følger af Bessels ulighed (Lemma 5.8). Argumentet i [W] side 77 udvider gyldigheden heraf til klassen af funktioner f , der opfylder

$$f \in M \text{ med } \int_a^b |f(x)| \rho(x) dx < \infty,$$

på bekostning af en forudsætning om ortogonalsystemet:

$$\exists K: \frac{|\varphi_n(x)|}{\|\varphi_n\|_\rho} < K \text{ for alle } x \in [a, b] \text{ og alle } n.$$

(Når $\int_a^b \rho(x) dx < \infty$, er den nye klasse af funktioner en udvidelse af M_ρ , ved Schwarz' ulighed: For $f \in M_\rho([a, b])$ er

$$\int_a^b |f(x)| \rho(x) dx = \int_a^b |f(x)| \cdot 1 \cdot \rho(x) dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.)$$

refter 1974

K 5.5 Trigonometriske rækker.

Bemærkninger til [W] §18-19.

Sætninger og beviser kan blot betragtes som udvidelser af de tilsvarende sætninger fra MAT 102.

Angående punktvis konvergens (§18) vises i [W] helt præcist:

Sætning 5.15: Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ have perioden 2π , med $f|_{[-\pi, \pi]} \in M([-\pi, \pi])$ og $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$. En tilstrækkelig betingelse for at $s_N(x) \rightarrow s$ i punktet x er, at

$$(5.19) \quad \int_0^{\pi} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2s|}{t} dt < \infty.$$

Specielt ^{*)}haves:

1° Hvis f er kontinuert i x , vil $s_N(x) \rightarrow f(x)$ hvis (i) eller (ii) gælder:

(i) f er differentiabel fra højre og fra venstre i x ;

(ii) f er Hölder kontinuert i x , dvs. der findes $k \geq 0, \alpha > 0$,

så
$$|f(y) - f(x)| \leq k |y - x|^{\alpha}$$

for y i et interval omkring x .

2° Hvis f har et spring i x , vil $s_N(x) \rightarrow \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$, hvis (i) eller (ii) gælder:

(i) $\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$ og $\frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}$ konvergerer for $t \rightarrow 0$.

(ii) Der findes $k \geq 0, \alpha > 0$ og $a > 0$, så at $|f(x+t) - f(x+0)| \leq kt^{\alpha}$
 $|f(x-t) - f(x-0)| \leq kt^{\alpha}$, for $t \in [0, a]$.

Vi bemærker, at under forudsætningen $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$ eksisterer integralet $\int_a^{\pi} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2s|}{t} dt$ for alle $a > 0$ (thi dér er $\frac{1}{t} < \frac{1}{a}$),

så der behøves kun særlige kriterier i omegnen af $t=0$. Tilstrækkeligheden af Hölder betingelserne følger af at $t^{-1+\alpha}$ kan integreres ind i 0.

Et eksempel på en kontinuert, men ikke Hölder kontinuert funktion er funktionen

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\log |t|} & \text{for } t \neq 0. \\ 0 & \text{for } t = 0. \end{cases}$$

Thi der gælder for ethvert $\alpha > 0$, at

$$\frac{|f(t) - f(0)|}{|t-0|^{\alpha}} = \frac{1}{|t|^{\alpha} \log |t|} \rightarrow +\infty \text{ for } t \rightarrow 0.$$

Bevis: Lad $0 < \beta < \alpha$. For $0 < t < 1$ er

^{*)}Bemærk, at (i) er specialtilfælde af (ii).

$|t^\beta \log t| = -t^\beta \int_1^t \frac{1}{s} ds = \int_t^1 \frac{t^\beta}{s} ds \leq \int_t^1 s^{\beta-1} ds = \left[\frac{1}{\beta} s^\beta \right]_t^1 = \frac{1}{\beta} (1 - t^\beta)$,
 hvormed

$$|t^\alpha \log t| = |t^{\alpha-\beta} t^\beta \log t| \leq t^{\alpha-\beta} \frac{1}{\beta} (1 - t^\beta) \rightarrow 0 \text{ for } t \rightarrow 0.$$

Da vil $|t^\alpha \log |t||^{-1} \rightarrow +\infty$ for $t \rightarrow 0$. \square

Afsnittet om uniform konvergens (§19) kan præciseres en del.

Linie 17-20 på side 81 kan give det fejlagtige indtryk, at man viser, at grænsefunktionen for en uniformt konvergent følge af kontinuerte funktioner er kontinuert, ved at vise at den ikke kan have spring. (Velkendt bróler i MAT 102.) Se hellere MAT1-noterne (102) §7.

Forudsætningen om f side 81 linie 27 er overflódig under de óvrige antagelser om f. Alligevel er den ikke umiddelbart tilstrækkelig til at sikre gyldigheden af de delvise integrationer nederst side 81. Vi vil udbedre dette ved nedenstående lemma; fórst lidt terminologi: At funktionen $f \in C^0([a,b])$ er differentiabel med kontinuert differentialkvotient i alle undtagen endeligt mange punkter af $[a,b]$, udtrykker vi kort ved at skrive $f' \in M([a,b])$, idet vi tillægger f' vilkårlige værdier i de manglende punkter. Når yderligere

$$\int_a^b (f'(x))^2 \rho(x) dx < \infty, \text{ siger vi at } f' \in M_\rho([a,b]).$$

Lemma 5.16: Lad f og g være kontinuerte funktioner på et interval $[a,b]$ og antag, at f' og g' tilhórer $M_1([a,b])$. Da eksisterer $\int_a^b f'(x)g(x) dx$ og $\int_a^b f(x)g'(x) dx$, og

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Specielt (for $g(x) \equiv 1$) er

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Bevis: Da f', g, f og $g' \in M_1([a,b])$, eksisterer $\int_a^b f'(x)g(x) dx$ og $\int_a^b f(x)g'(x) dx$ (Lemma 5.6). Hvis b er det eneste diskontinuitetspunkt for f' og g' , har vi for ethvert $t < b$:

$$\int_a^t f'(x)g(x) dx = f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^t f(x)g'(x) dx.$$

Når $t \rightarrow b$, vil $\int_a^t f'(x)g(x) dx \rightarrow \int_a^b f'(x)g(x) dx$ og $\int_a^t f(x)g'(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x)g'(x) dx$ pr. definition af det uegentlige integral; endvidere

vil $f(t)g(t) \rightarrow f(b)g(b)$, fordi fg er kontinuert i b . J at fås efter grænse-
overgangen
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

Som skulle vises.

Når $[a, b]$ er opdelt i n intervaller $[x_{j-1}, x_j]$ i hvis indre f' og g' er kontinuerte, anvendes foranstående argument på hvert af delintervallerne $[x_{j-1}, c_j]$ og $[c_j, x_j]$ (her er $c_j \in]x_{j-1}, x_j[$; $[x_{j-1}, c_j]$ approksimeres ved $[s, c_j]$ for $s \nearrow x_{j-1}$ og $[c_j, x_j]$ approksimeres ved $[c_j, t]$ for $t \nearrow x_j$); det giver

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x)dx &= \sum_{j=1}^n (f(x_j)g(x_j) - f(c_j)g(c_j) + f(c_j)g(c_j) - f(x_{j-1})g(x_{j-1})) - \int_a^b f(x)g'(x)dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx, \end{aligned}$$

fordi fg er kontinuert på $[a, b]$. (Summen er en "teleskop-sum", hvor alle led undtagen de "yderste" går ud.) \square

Med dette lemma kan bevismetoden i § 32 (s. 32.19-23) i MAT1-noterne (102) følges. Da vi nu indskrænker os til reelle funktioner, vil vi lige opregte hovedtrækkene i den reelle formulering:

Med betegnelserne $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$ har vi

Lemma 5.17: Når $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert og har perioden 2π , og $f' \Big|_{[-\pi, \pi]} \in M_1([-\pi, \pi])$, da er

$$(5.21) \quad a_n(f') = n b_n(f) \quad \text{for } n=0, 1, 2, \dots$$

$$(5.22) \quad b_n(f') = -n a_n(f) \quad \text{for } n=1, 2, \dots$$

Bevis: Findes i [W] nederst side 81; tilladeligheden af regningerne er godtgjort i Lemma 5.16. \square

Lemma 5.18: Antag, at f opfylder forudsætningerne i Lemma 5.17, og betegn dens Fourierrække ved $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Da er

$$(5.23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) < \infty,$$

og dermed

$$(5.24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

Bevis: Gyldigheden af (5.23) følger af Bessels ulighed (se (5.17)) anvendt på f' . Herefter fås f.ex. for a_n -rækken, ved anvendelse af Schwarz' ulighed for endelige summer (MAT1-noterne (102) §4),

at

$$\sum_{n=1}^N |a_n| = \sum_{n=1}^N |a_n| \cdot n \cdot \frac{1}{n} \leq \left(\sum_{n=1}^N n^2 a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

som er begrænset for $N \rightarrow \infty$, hvormed $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent. \square

Endelig fås

Sætning 5.19: Antag, at $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert og har perioden 2π (specielt er altså $f(-\pi) = f(\pi)$!), samt at $f'|_{[-\pi, \pi]} \in M_1([-\pi, \pi])$.
Fourierrækken for f med hensyn til det trigonometriske ortogonalsystem konvergerer da uniformt mod f .

Bevis: Det følger af Lemma 5.18, at Fourierrækken for f har den konvergente majorantrække

$$\frac{1}{2}|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|);$$

Fourierrækken er altså uniformt konvergent. Kald dens sumfunktion f_1 ; vi skal da vise, at $f(x) = f_1(x)$ for alle x . Dette gælder i følge Sætning 5.15 $1^\circ(i)$ i de punkter x , hvor f er differentiabel. For hvert af de øvrige punkter x_j gælder, at $f = f_1$ i en udprykket omegn $\{x \mid 0 < |x - x_j| < \varepsilon\}$ af x_j , hvorefter følger, da både f og f_1 er kontinuerte, at $f(x_j) = f_1(x_j)$. \square

(J beviset for at f er lig sumfunktionen for Fourierrækken følger Weinberger sig omsider kaldet til at vise Schwarz' ulighed for integraler; beviset går dernæst om ad en redegørelse for at f er Hölder kontinuert overalt, så Sætning 5.15 $1^\circ(ii)$ kan bruges.)

K 5.6 Fuldstændigheden af det trigonometriske ortogonalsystem.

Med Sætning 5.19 om uniform konvergens kan vi nu vise (jvf. [W] s. 85), at det trigonometriske ortogonalsystem er fuldstændigt. For ifølge (5.18) medfører uniform konvergens jo konvergens i middel, når q som her er $\equiv 1$. Dermed fås, at når f opfylder hypoteserne i Sætning 5.19, konvergerer Fourierrækken for f i middel mod f ; og vi vil vise dette for vilkårlige funktioner i M_1 ved at approksimere disse i middel med funktioner, der opfylder hypoteserne i Sætning 5.19.

"Beviset" for dette i [W] har to mangler: For det første angives det, at man approksimerer f ved at erstatte den med en lineær funktion i et "tilstrækkeligt lille" interval omkring hvert diskontinuitetspunkt - altså, hvis diskontinuitetspunktet er x_j , vælger vi $x'_j < x_j < x''_j$ og erstatter f på $[x'_j, x''_j]$ med en lineær funktion f_ε , der forbinder $(x'_j, f(x'_j))$ med $(x''_j, f(x''_j))$. Det er ikke tilstrækkeligt her, at x'_j og x''_j er tæt

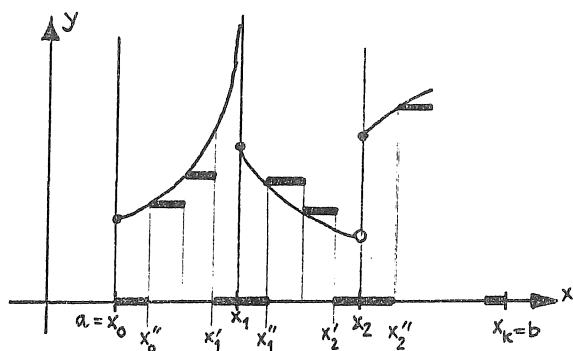
ved x_j , thi vi har kun hold på integralerne $\int_{x_j'}^{x_j} f(x)^2 dx$ og $\int_{x_j}^{x_j''} f(x)^2 dx$, ikke på selve funktionsværdierne $f(x_j')$ og $f(x_j'')$. Man kan dog komme frem til et brugbart valg af x_j' og x_j'' ved en ikke helt trivel anvendelse af integralregningens middelværdisætning. - For det andet overser [W], at f ikke behøver at være differentiabel på de resterende intervaller $[x_{j-1}'', x_j']$, så f skal også approksimeres her. Det kan vi gøre ved en anvendelse af at f er uniformt kontinuert på hvert $[x_{j-1}'', x_j']$, så den kan approksimeres, med hensyn til sup-normen, med en kontinuert, stykkevis lineær funktion.

] stedet for at udføre disse skridt i detaljer vil vi give et mere almengyldigt bevis, af hensyn til anvendelserne i [W] kapitel VIII.

Lemma 5.20. Lad $\rho \in M([a, b])$, $\rho > 0$. Antag, at $\int_a^b \rho(x) dx = c < \infty$. Lad $f \in M_\rho$. Givet $\epsilon > 0$.

- (i) Der findes en stykkevis konstant funktion g_ϵ på $[a, b]$ med $g_\epsilon(a) = g_\epsilon(b) = 0$, så $\|f - g_\epsilon\|_\rho^2 \leq \frac{\epsilon}{4}$.
- (ii) Der findes en C^2 -funktion f_ϵ på $[a, b]$ med $f_\epsilon(a) = f_\epsilon(b) = f_\epsilon'(a) = f_\epsilon'(b) = 0$ og $\|f - f_\epsilon\|_\rho^2 \leq \epsilon$.

Bevis: (i) Lad $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$ være de eventuelle diskontinuitetspunkter for f og ρ . Lad $\epsilon_1 > 0$; ϵ_1 vil blive præciseret senere.



Vælg x_j' ($j=1, \dots, k$) og x_j'' ($j=0, \dots, k-1$), så at

$$x_0 < x_0'' < x_1' < x_1'' < \dots < x_k' < x_k,$$

og

$$\int_{x_j'}^{x_j} f(x)^2 \rho(x) dx \leq \epsilon_1, \int_{x_j}^{x_j''} f(x)^2 \rho(x) dx \leq \epsilon_1,$$

for hvert j .

Der er ialt $2k$ sådanne integraler. Definer g_ϵ som 0 på intervallerne $[x_0, x_0'']$, $[x_1', x_1'']$, \dots , $[x_k', x_k]$.

Da f er uniformt kontinuert på intervallerne $[x_{j-1}'', x_j']$, eksisterer et $\delta > 0$, så at for $t_1, t_2 \in [x_{j-1}'', x_j']$ med $|t_1 - t_2| \leq \delta$ gælder $|f(t_1) - f(t_2)| \leq \sqrt{\epsilon_1}$. Vælg en inddeling af hvert interval $[x_{j-1}'', x_j']$ i intervaller af længde $\leq \delta$. På hvert af disse delintervaller sættes $g_\epsilon(x)$ lig med værdien af $f(x)$ i det venstre endepunkt. Da er $|f(x) - g_\epsilon(x)| \leq \sqrt{\epsilon_1}$ på hvert interval $[x_{j-1}'', x_j']$, og der gælder

$$\int_{x_{j-1}''}^{x_j'} (f(x) - g_\epsilon(x))^2 \rho(x) dx \leq \epsilon_1 \int_{x_{j-1}''}^{x_j'} \rho(x) dx.$$

Hermed er g_ϵ defineret på hele $[a, b]$, og vi har

$$\int_a^b (f(x) - g_\epsilon(x))^2 \rho(x) dx \leq 2k\epsilon_1 + \epsilon_1 \int_a^b \rho(x) dx = \epsilon_1(2k+c).$$

Vælges $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{4(2k+c)}$, opfylder g_ϵ

lemmaets udsagn (i).

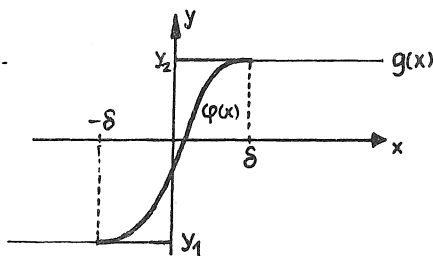
(ii) Vi går videre udfra g_ϵ , hvis springpunkter vi nu betegner ved $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ ($t_1 > a = t_0$ og $t_m < b = t_{m+1}$). I omegnen af hvert t_i skal g_ϵ udglattes til en (nært liggende) C^2 -funktion. Problemet løses først for en model:

$$\text{Lad } g(x) = \begin{cases} y_1 & \text{for } x \in]-\infty, 0[\\ y_2 & \text{for } x \in [0, \infty[\end{cases}$$

På stykket $[-\delta, \delta]$ erstatter vi g med polynomiet

$$\varphi(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{c(\delta)} \int_{-\delta}^x (t+\delta)^2 (t-\delta)^2 dt$$

hvor $c(\delta) = \int_{-\delta}^{\delta} (t+\delta)^2 (t-\delta)^2 dt = \frac{16}{15} \delta^5$. Denne funktion opfylder åbenbart



$\varphi(-\delta) = y_1$ og $\varphi(\delta) = y_2$, og endvidere, idet

$$\varphi'(x) = \frac{y_2 - y_1}{c(\delta)} (x+\delta)^2 (x-\delta)^2,$$

$\varphi'(-\delta) = \varphi'(\delta) = \varphi''(-\delta) = \varphi''(\delta) = 0$. Funk-

tionen f_δ defineret ved

$$f_\delta(x) = \begin{cases} g(x) & \text{for } |x| > \delta \\ \varphi(x) & \text{for } |x| \leq \delta \end{cases}$$

er da en C^2 -funktion. Bemærk endelig, at $|g(x) - f_\delta(x)| \leq |y_2 - y_1|$ for alle x . (Hvorfor?)

Vi betragter nu g_ϵ igen. Ved konstruktionen af g_ϵ har vi opnået, at diskontinuitetspunkterne for φ ligger i det indre af (visse af) intervallerne $]t_{i-1}, t_i[$. Følgelig findes et δ_0 , så φ er kontinuert på hvert af de afsluttede intervaller $[t_i - \delta_0, t_i + \delta_0]$. Lad $K_1 = \max \{ |g_\epsilon(x)| \mid x \in [a, b] \}$ og lad $K_2 = \max \{ \varphi(x) \mid x \in \bigcup_i [t_i - \delta_0, t_i + \delta_0] \}$. Vælg δ , så $\delta \leq \delta_0$ og $2\delta m (2K_1)^2 K_2 \leq \frac{\epsilon}{4}$.

Funktionen f_ϵ defineres nu som den funktion vi får ud fra g_ϵ ved at erstatte denne i hvert interval $[t_i - \delta, t_i + \delta]$ med en funktion som φ_i forbindende $(t_i - \delta, g_\epsilon(t_i - \delta))$ med $(t_i + \delta, g_\epsilon(t_i + \delta))$ (dvs. vi erstatter med

$$\varphi_i(x) = g_\epsilon(t_i - \delta) + \frac{1}{c(\delta)} (g_\epsilon(t_i + \delta) - g_\epsilon(t_i - \delta)) \int_{t_i - \delta}^x (t - (t_i - \delta))^2 (t - (t_i + \delta))^2 dt).$$

Da har vi

$$\begin{aligned} \|g_\epsilon - f_\epsilon\|_\varphi^2 &= \int_a^b (g_\epsilon(x) - f_\epsilon(x))^2 \varphi(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{t_i - \delta}^{t_i + \delta} (g_\epsilon - f_\epsilon)^2 \varphi dx \leq m \cdot 2\delta (2K_1)^2 K_2 \leq \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists \text{ alt er } \|f - f_\varepsilon\|_p^2 &\leq (\|f - g_\varepsilon\|_p + \|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p)^2 \leq 2(\|f - g_\varepsilon\|_p^2 + \|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p^2) \\ &\leq 2\left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da f_ε er 0 i omegnen af a og b , opfylder den lemmaets udsagn (ii). \square

Herefter vises fuldstændigheden af det trigonometriske ortogonalsystem som i [W] s. 85, idet vi finder en approksimerende funktion ved Lemma 5.20 (ii).

6. Problemer, hvor separation af de variable fører til trigonometriske rækker.

K 6.1 Varmeledningsligningen.

Bemærkninger til [W] §22.

Med udtalelsen "the series (22.2) can be differentiated term by term" menes ikke blot, at hver led i rækken kan differentieres, men også at den derved fremkomne række er konvergent, og dens sum er differentialkvotient af den oprindelige række. Vi skal her og i det følgende benytte det fra MATEMATIK 102 velkendte kriterium: Hvis $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ er en følge af funktioner i $C^1([a, b])$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ er konvergent (gerne blot punktvis) med sum $\varphi(x)$, og $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x)$ er uniformt konvergent med sum $\psi(x)$, da er $\varphi \in C^1([a, b])$ og $\varphi'(x) = \psi(x)$. - Kriteriet benyttes på rækker af formen $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$, med hensyn til x og t hver for sig, for de ledvist partielt differentierede rækker.

I undersøgelsen ([W], s. 94) af u 's kontinuitet op til x -aksen behøver vi ikke anvende maksimumsprincippet, når vi i stedet benytter Lemma 5.19. Thi det giver, når f er kontinuert med $f(0) = f(\pi) = 0$ og $f' \in M_1$, at $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$, hvormed $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ er en konvergent majorant-række for $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 kt} \sin nx$ på hele området $\bar{\Omega} = [0, \pi] \times [0, \infty[$. Da er summen $u(x, t)$ kontinuert på hele $\bar{\Omega}$, og $u(x, 0) = f(x)$.

K 6.2 Laplace's ligning i et rektangel.

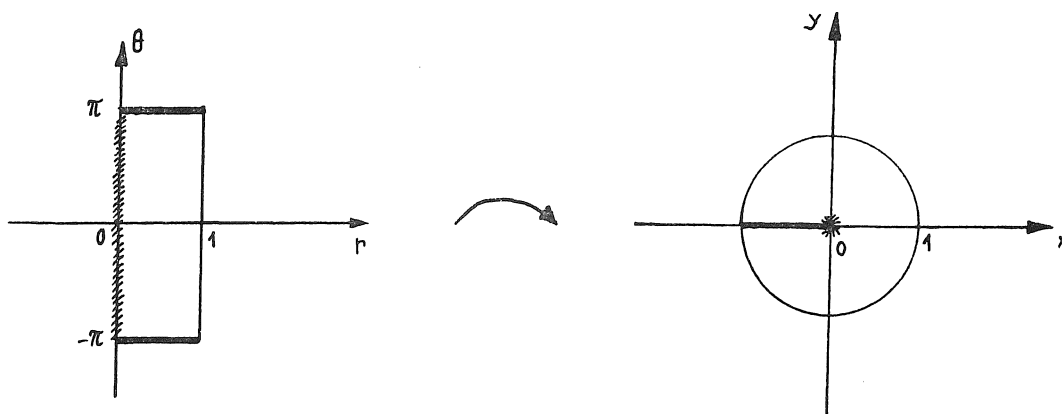
Bemærkninger til [W] §23.

I stedet for at bruge maksimumsprincippet kan vi som i 6.1 anvende, at under de nævnte forudsætninger er $\sum |b_n|$ konvergent, hvormed $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-2A}} |b_n|$ er majorantrække for $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh n(A-y)}{\sinh n} \sin nx$ på hele $\bar{\Omega} = [0, \pi] \times [0, A]$.

K 6.3 Laplace's ligning i en cirkel.

Bemærkninger til [W] §24.

Bemærk, at efter indførelsen af de polære koordinater må vi tage hensyn til en vis flertydighed med hensyn til θ . Vi har at gøre med en afbildning fra (r, θ) til (x, y) :



hvor hele liniestykket $\{0\} \times [-\pi, \pi]$ afbildes på $(0,0)$, og punkter $(r, -\pi)$ og (r, π) afbildes i samme punkt $(-r, 0)$ i x - y -planen. Overgangsformlerne er

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

(disse sammenfattes i $x+iy = r e^{i\theta}$ ved Eulers formler)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \text{Arctan } \frac{y}{x}, & \text{når } x > 0, \\ \text{Arccot } \frac{x}{y}, & \text{når } y > 0, \\ \text{Arccot } \frac{x}{y} - \pi, & \text{når } y < 0. \end{cases}$$

Ved omskrivningen af Δu til polære koordinater benytter vi, at

$$(6.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{r} = \cos \theta, \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{r} = \sin \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(mellemlregninger gyldige for } x \neq 0, \\ \text{for } x=0 \text{ anvendes andre formler)} \\ \text{(} -11- \text{)} \end{array}$$

Hermed bliver $\Delta u = 0$ til

$$(6.2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{i }]0,1[\times]-\pi, \pi[$$

Ligningen for $R(r)$ ([W] (24.4)), der opstår ved at vi indsætter $u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$ i (6.2), løses let ved at man indfører variabelskiftet $r = e^t$; dette giver nemlig for den sammensatte funktion $\tilde{R}(t) = R(e^t)$ ligningen

$$(6.3) \quad \tilde{R}''(t) - n^2 \tilde{R}(t) = 0,$$

som har konstante koefficienter. ([W] (24.4) er et specialtilfælde af en klasse af differentiaalligninger med polynomiale koefficienter (Eulers differentiaalligning), som løses ved denne metode.) (6.3) har løsningerne

$$\tilde{R}(t) = a + bt \quad \text{for } n=0,$$

$$\tilde{R}(t) = ae^{nt} + be^{-nt} \quad \text{for } n \neq 0,$$

hvoraf fås løsningerne til [w] (24.4):

$$R(r) = a + b \log r \quad \text{for } n=0,$$

$$R(r) = ar^n + br^{-n} \quad \text{for } n \neq 0.$$

De ubegrænsede løsninger bortkastes, fordi vi ønsker løsninger, der er kontinuerte på hele $[0,1]$.

Ved superposition når vi endelig frem til rækken [w] (24.6). For at denne skal give en løsning til det oprindelige problem og ikke bare en løsning i cirkelskiven med den negative x-akse bortskåret, må vi undersøge differentialkvotienterne efter x og y. Hvert led i (24.6) er konstant på $\{0\} \times [-\pi, \pi]$ og har periode 2π som funktion af θ , så de definerer virkelig funktioner af (x, y) . Ligeledes kan man gennemføre en diskussion af tilpasningen af differentialkvotienterne efter r og θ på den del af randen af rektangelet $[0,1] \times [-\pi, \pi]$, der ikke afbildes enetydigt. Vi kan imidlertid klare os på en simple måde:

Bemærk, at

$$(6.4) \quad r^n \cos n\theta = r^n \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{1}{2} [(re^{i\theta})^n + (re^{-i\theta})^n] = \frac{1}{2} [(x+iy)^n + (x-iy)^n].$$

Det er et polynomium i x og y og dermed en C^∞ -funktion af (x, y) ! Tilsvarende er

$$(6.5) \quad r^n \sin n\theta = \frac{1}{2i} [(x+iy)^n - (x-iy)^n]$$

et polynomium og dermed en C^∞ -funktion af (x, y) .

Endvidere har vi, for $n \geq 1$ (brug (6.1)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} r^n \cos n\theta &= nr^{n-1} \cos n\theta \frac{\partial r}{\partial x} + r^n (-n \sin n\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= nr^{n-1} (\cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta) = nr^{n-1} \cos (n-1)\theta. \quad *) \end{aligned}$$

Specielt ses at

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} r^n \cos n\theta \right| \leq nr^{n-1} \quad \text{overalt.}$$

Videre fås, for $n \geq 2$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} r^n \cos n\theta = \frac{\partial}{\partial x} (nr^{n-1} \cos (n-1)\theta) = n(n-1)r^{n-2} \cos (n-2)\theta$$

så

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} r^n \cos n\theta \right| \leq n^2 r^{n-2} \quad \text{overalt.}$$

Ved at gennemføre andre tilsvarende regninger finder vi i alt:

*) Formlen kan naturligtvis også vises ved differentiation af det polynomiale udtryk i (6.4). Det kræver dog f.ex. et bevis for at

$$\frac{\partial}{\partial x} (f(x+iy))^n = n (f(x+iy))^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x},$$

for komplekse funktioner f .

De 1'ordens afledede efter x og y af $r^n \cos n\theta$ og $r^n \sin n\theta$ er numerisk $\leq nr^{n-1}$ ($n \geq 1$).

De 2'ordens afledede efter x og y af $r^n \cos n\theta$ og $r^n \sin n\theta$ er numerisk $\leq n^2 r^{n-2}$ ($n \geq 2$).

:

De p 'te ordens afledede efter x og y af $r^n \cos n\theta$ og $r^n \sin n\theta$ er numerisk $\leq n^p r^{n-p}$ ($n \geq p$).

:

Da rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$, $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 r^{n-2}$, ..., $\sum_{n=p}^{\infty} n^p r^{n-p}$, ... (potensrækker i r !) alle har konvergensradius 1 (benyt f.ex. kvotientkriteriet), ses at alle rækker dannet ud fra rækken i [W] (24.6) ved ledvise differentiationer efter x og y er uniformt konvergente på cirkelskiver $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq r_0^2\}$, hvor $r_0 < 1$, således at sumfunktionen er C^∞ i den åbne enhedscirkelskive og tilfredsstillende differentiaalligningen $\Delta u = 0$ dér. - Dette forudsætter kun $\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta < \infty$.

Som sædvanlig har vi, når vi om $f(\theta)$ yderligere forudsætter: $f(\theta)$ kontinuert på $[-\pi, \pi]$ med $f(-\pi) = f(\pi)$, og $f' \in M_1$, at selve Fourier-rækken for f har den konvergente majorantrække $|a_0| + \sum (|a_n| + |b_n|)$ (jvf. Lemma 5.18). Da $|r^n \cos n\theta| \leq 1$ og $|r^n \sin n\theta| \leq 1$, er denne række da majorantrække for rækken for u på hele den afsluttede enhedscirkelskive, så u bliver kontinuert på $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ og lig med f på randen. ([W] bruger i stedet maksimumsprincippet.)

Løsningerne til Laplace's ligning $\Delta u = 0$ kaldes harmoniske funktioner. De specielle løsninger (6.4) og (6.5)

$$\frac{1}{2} [(x+iy)^n + (x-iy)^n] \text{ og } \frac{1}{2} [(x+iy)^n - (x-iy)^n]$$

kaldes de harmoniske polynomier (i to variable).

Bemærkning. Rækken for u kan opfattes som realdelen af en kompleks potensrække med konvergensradius ≥ 1 : Lad $z = x + iy (= re^{i\theta})$, så er, for $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta &= a_n \frac{z^n + \bar{z}^n}{2} + b_n \frac{z^n - \bar{z}^n}{2i} \\ &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) z^n + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \bar{z}^n \\ &= \frac{1}{2} c_n z^n + \frac{1}{2} \bar{c}_n \bar{z}^n = \operatorname{Re}(c_n z^n), \end{aligned}$$

når $c_n = a_n - ib_n$. Lad $c_0 = \frac{1}{2} a_0$. (For $n \geq 1$ er $\frac{1}{2} c_n$ netop koefficienten til $e^{in\theta}$ i den komplekse skrivemåde for Fourierrækken for $f(\theta)$)

anvendt i MAT1-noterne (102), § 32.)

Så er

$$u = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right),$$

hvor $|c_n| \leq 2c$, når $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta = c < \infty$.

En kompleks funktion, der er sum af en kompleks potensrække med positiv konvergensradius, kaldes en analytisk funktion. Vi ser, at harmoniske funktioner (i en cirkel omkring 0) er realdel af analytiske funktioner.

Rækken $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \varphi)$ på side 102 i [W] summeres let ved hjælp af Eulers formler: Lad $\theta - \varphi = \alpha$, så er (idet $r < 1$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N r^n \cos n\alpha &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N r^n \frac{1}{2} (e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (re^{i\alpha})^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (re^{-i\alpha})^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} re^{i\alpha} \frac{1 - (re^{i\alpha})^N}{1 - re^{i\alpha}} + \frac{1}{2} re^{-i\alpha} \frac{1 - (re^{-i\alpha})^N}{1 - re^{-i\alpha}} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{re^{i\alpha}}{1 - re^{i\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{re^{-i\alpha}}{1 - re^{-i\alpha}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1 - re^{i\alpha})(1 - re^{-i\alpha}) + re^{i\alpha}(1 - re^{-i\alpha}) + re^{-i\alpha}(1 - re^{i\alpha})}{(1 - re^{i\alpha})(1 - re^{-i\alpha})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \alpha} \end{aligned}$$

Til sidste afsnit i [W] §24 bemærker vi: Differentiation under integraltegnet med hensyn til x og y kræver en redegørelse for at integranden, der jo er givet som funktion af r, θ og φ , jvf. diskussionen s. 6.1-6.2, har partielle afledede efter x og y som er kontinuerlige for $(x, y, \varphi) \in \{x^2 + y^2 \leq r_0^2 < R^2, -\pi \leq \varphi \leq \pi\}$. Dette er faktisk tilfældet, når $f(\varphi)$ er kontinuert, da $r^2 = x^2 + y^2$, og $r \cos(\theta - \varphi) = r \cos \theta \cos \varphi + r \sin \theta \sin \varphi = x \cos \varphi + y \sin \varphi$. Dog ved vi allerede (s. 6.4), at u er C^∞ i den åbne cirkelskive $\frac{x^2 + y^2}{R^2} < 1$.

K 6.4 Den dæmpede bølgeligning.

Bemærkninger til [W] §26.

Bemærk, at maskineriet for separation af de variable for bølgeligningen uden dæmpningsled er indført i [W] §14 og genoptages på s. 114.

Argumentet øverst s. 114 er i detaljer følgende: Bemærk først,

at når $f \in C^2([0, \pi])$ med $f(0) = f(\pi) = f'(0) = f'(\pi) = 0$, er udvidelsen til en ulige funktion \tilde{f} på \mathbb{R} med periode 2π en $C^2(\mathbb{R})$ -funktion. Når yderligere $f''' \in M_1([0, \pi])$ har vi, med kompleks skrivemåde for Fourier-rækken:

$$\begin{aligned} c_n(f''') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'''(x) e^{-inx} dx \\ &= in \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) e^{-inx} dx \quad (= in c_n(f'')) \\ &= (in)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx \quad (= (in)^2 c_n(f')) \\ &= (in)^3 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = -in^3 c_n(f) \end{aligned}$$

ved delvis integration som i [W] s. 81, jvf. også noternes Lemma 5.17, s. 5.13. Da Parsevals ligning (eller blot Bessels ulighed) gælder for $c_n(f''')$, fås

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f''')|^2 < \infty, \text{ dvs. } \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^6 |c_n(f)|^2 < \infty.$$

Da $|c_n|^2 = \frac{1}{4} (a_n^2 + b_n^2)$, fås specielt $\sum n^6 b_n^2 < \infty$. Dernæst anvender vi Schwarz' ulighed for endelige summer:

$$\sum_{n=1}^N n^2 |b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^N n^6 b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

Som viser konvergens af $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|$, der (på en konstant nær) er majorantrække for de ledvist differentierede rækker af til og med 2' orden.

Herefter vises på side 114, hvordan man kan spalte en del af u fra, på hvilken ledvis differentiation ikke (behøver) anvendes, således at ledvis differentiation på den resterende del kræver færre omkostninger (i form af betingelser på f).

Ulighederne [W] (26.5) vises let ved hjælp af følgende elementære vurderinger:

Lemma 6.1. For alle $x, y \in \mathbb{R}$ gælder

$$(6.6) \quad |\cos x - \cos y| \leq |x - y|, \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

Bevis: For $x \neq y$ haves ved middelværdisætningen

$$\left| \frac{\cos x - \cos y}{x - y} \right| = |\sin \xi| \leq 1$$

idet ξ er et passende tal mellem x og y . Tilsvarende bevis for \sin . \square

Lemma 6.2. Lad $k > 0$. For alle $x \geq 2k$ er

$$(6.7) \quad x - \sqrt{x^2 - k^2} \leq \frac{k^2}{x}$$

Bevis: Vi har $x - \sqrt{x^2 - k^2} = x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{k^2}{x^2}} \right) = \frac{k^2}{x} \frac{1 - \sqrt{1-t}}{t}$,
 hvor $t = \frac{k^2}{x^2}$. Middelværdisætningen giver, for $0 < t \leq \frac{1}{4}$ (dvs. $\frac{x}{k} \geq 2$):

$$\frac{1 - \sqrt{1-t}}{t} = \frac{1}{2} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}} < 1$$

(idet τ er et passende tal mellem 0 og t), hvorefter det ønskede fås ved indsættelse af $t = \frac{k^2}{x^2}$. \square

En mere indgående anvendelse af Taylors formel giver forøvrigt

$$(6.8) \quad \left(x - \sqrt{x^2 - k^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{k^2}{x} = k^4 o(x^{-2}) \quad \text{for } x \rightarrow \infty$$

Lad os nu f.ex. vise den første ulighed i [W] (26.5). Lad n_0 være det mindste hele tal $> \frac{a}{c}$. For $n \geq n_0$ er

$$(6.9) \quad T_n - e^{-at} \cos nct = e^{-at} \left(\cos \sqrt{n^2 c^2 t^2 - a^2 t^2} - \cos nct \right) + \frac{a e^{-at}}{\sqrt{n^2 c^2 - a^2}} \sin \sqrt{n^2 c^2 t^2 - a^2 t^2}$$

For $n \geq 2 \frac{a}{c}$ er $\sqrt{n^2 c^2 - a^2} > \sqrt{\frac{1}{2} n^2 c^2} = \frac{nc}{\sqrt{2}}$, så andet led i (6.9) er $\leq \frac{1}{n} \frac{e^{-at} a \sqrt{2}}{c}$. Første led behandler vi ved brug af Lemma 6.1 og 6.2:

$$\begin{aligned} e^{-at} \left| \cos \sqrt{n^2 c^2 t^2 - a^2 t^2} - \cos nct \right| &\leq e^{-at} \left| \sqrt{(nct)^2 - (at)^2} - nct \right| \\ &\leq e^{-at} \frac{(at)^2}{nct} = \frac{1}{n} \frac{e^{-at} a^2 t}{c} \quad \text{for } n \geq \frac{2a}{c} \end{aligned}$$

Vi har dermed den ønskede vurdering for $n \geq 2 \frac{a}{c}$, med $B = \max_{0 \leq t \leq t_0} e^{-at} \left(\frac{a^2 t}{c} + \frac{a}{c} \sqrt{2} \right)$. B kan endelig modificeres så uligheden også gælder for de første endeligt mange værdier af n op til $2 \frac{a}{c}$.

De andre uligheder i [W] (26.5) fås på tilsvarende måde.

NB! J-formel [W] (26.6) og den foregående formel skal nu erstattes med nct .

7. Krumlinede koordinater og separation af de variable.

T 7.1 Krumlinede koordinater.

J [LW] chapter IV (side 63 ff) er behandlet metoden separation af de variable, og det er her vist, at bølge-ligningen, varmeledningsligningen og Laplaces ligning alle kan separeres, når de betragtes i to variable (for de to første ligninger en stedkoordinat og en tidskoordinat og for den sidste to rektangulære stedkoordinater).

Ved separation af rumkoordinaterne og tidskoordinaten i Schrödingerligningen, bølge-ligningen eller varmeledningsligningen med to eller flere rumkoordinater fremkommer den elliptiske differentiaalligning

$$(7.1) \quad \Delta u + k^2 u = 0$$

i rumkoordinaterne. Som specialtilfælde fås for $k=0$ Laplaces ligning, for k reel og konstant Helmholtz' ligning (eller svingningsligningen), mens tilfældet, hvor k^2 er en funktion af stedet repræsenterer den tidsafhængige Schrödingerligning.

J det følgende vil vi undersøge (7.1) i det todimensionale tilfælde samt antyde løsningsmetoden i det tredimensionale tilfælde. Vi kan indledningsvis undersøge separabiliteten af (7.1), når der benyttes sædvanlige retvinklede (rektangulære) koordinater x og y , og der altså er givet ligningen

$$(7.2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

Den er, når vi forudsætter, at k^2 er konstant, separerbar med partikulære løsninger af formen

$$(7.3) \quad u(x,y) = X(x)Y(y),$$

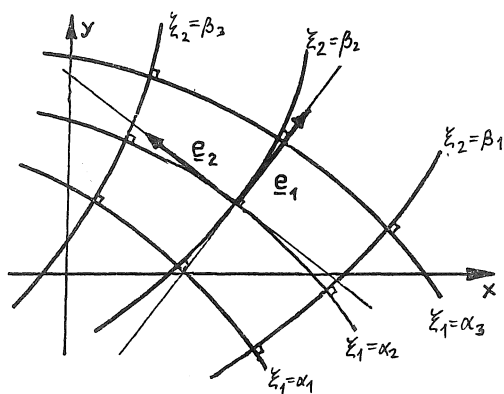
hvor $X(x)$ og $Y(y)$ er løsninger til

$$(7.4) \quad X'' - \lambda X = 0 \text{ hhv. } Y'' + (k^2 + \lambda)Y = 0.$$

J den konkrete anvendelsessituation er de sædvanlige retvinklede koordinater ofte upraktiske, idet symmetriegenskaber ved problemerne f.ex. kan bevirke, at randbetingelser er givet på kurver (for tredimensionale problemer på flader), hvis ligninger eller parameterfremstillinger ikke er bekvemme i de sædvanlige retvinklede koordinater. Vi vil derfor undersøge, hvorledes separabiliteten af (7.1) ændres ved et koordinatskifte. Lad der være givet et sæt nye koordinater (ξ_1, ξ_2) , forbundet med de gamle (x,y) -koordinater ved et par af C^2 -funktioner

(7.5) $x = x(\xi_1, \xi_2), y = y(\xi_1, \xi_2),$

som er defineret på et åbent område, hvori funktionalmatricen er regulær. I det funktionerne i almindelighed ikke behøver at være lineære, kaldes de nye koordinater (ξ_1, ξ_2) for krumlinede koordinater.



Som koordinatkurver betegner vi de kurver i planen for hvilke enten ξ_1 eller ξ_2 er konstant langs hele kurven. Koordinatkurver langs hvilke ξ_1 varierer, mens ξ_2 er konstant, kaldes ξ_1 -akser og omvendt.

For at kunne undersøge separabiliteten af (7.1) er det nødvendigt at kende det differentiationsudtryk, som Laplaceoperatoren Δ

bliver til i de nye koordinater. Vi vil her indskrænke os til at betragte ortogonale krumlinede koordinater, dvs. krumlinede koordinater, hvor ξ_1 -akser og ξ_2 -akser altid skærer hinanden under rette vinkler (mellem de respektive tangenter) - se figuren. Omskrivningen af operatoren Δ til (ξ_1, ξ_2) -koordinater kan ske ved direkte udregning af differentialkvotienterne, men vi sparer nogle regninger ved at benytte fremstillingen

(7.6) $\Delta u = \text{div}(\text{grad } u)$

for Laplaceoperatoren.

Buelængden s på ξ_i -akserne er bestemt ved

(7.7) $\frac{ds}{d\xi_i} = h_i(\xi_1, \xi_2), i=1,2,$

hvor den til ξ_i modsatte koordinat er fastholdt, og hvor

(7.8) $h_i(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_i}\right)^2}, i=1,2.$

Størrelserne h_1 og h_2 kaldes (ξ_1, ξ_2) -systemets metriske koefficienter.

Vi ønsker først at finde udseendet af grad u i (ξ_1, ξ_2) -systemet, og hertil benyttes at grad u i (x, y) -systemet har fremstillingen

(7.9) $\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right)$

Enhedsvektoren e_1 på tangenten til en ξ_1 -akse har i (x, y) -systemet fremstillingen

$$(7.10) \quad \underline{e}_1 = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1} \right)^2}} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \right),$$

og komponenten af grad u efter \underline{e}_1 er da skalarproduktet af de to vektorer:

$$(\underline{\text{grad}} u)_{\xi_1} = \underline{\text{grad}} u \cdot \underline{e}_1 = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_1},$$

hvor $u(x,y) = \tilde{u}(\xi_1, \xi_2)$. Altså bliver grad u i de nye koordinater

$$(7.11) \quad \underline{\text{grad}} u = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_2} \right).$$

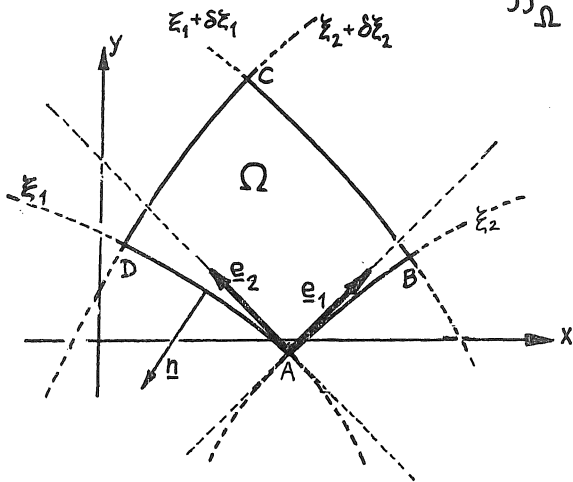
] det følgende skriver vi som vanligt u i stedet for \tilde{u} .

For at finde divergensen af et vektorfelt \underline{a} udtrykt i (ξ_1, ξ_2) -koordinaterne benytter vi divergenssætningen ([W] s. 52-53, MAT1-noterne (101), §60, s. 60.06):

$$(7.12) \quad \iint_{\Omega} \text{div} \underline{a} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \underline{a} \cdot \underline{n} \, ds,$$

hvoraf

$$(7.13) \quad \text{div} \underline{a} = \lim_{\text{diam}(\Omega) \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Omega} \text{div} \underline{a} \, d\sigma}{\iint_{\Omega} 1 \, d\sigma} = \lim_{\text{diam}(\Omega) \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial\Omega} \underline{a} \cdot \underline{n} \, ds}{\text{areal}(\Omega)}.$$



Som Ω benytter vi det på figuren viste område begrænset af koordinatkurverne gennem punkterne A, B, C og D med de angivne koordinatværdier; vi vil senere lade $\delta\xi_1$ og $\delta\xi_2$ gå mod 0.

Ved beregningen af strømmen $\int_{\partial\Omega} \underline{a} \cdot \underline{n} \, ds$ af vektorfeltet \underline{a} ud gennem $\partial\Omega$ betragter vi kurvestykkerne

AD og BC for sig, og AB og DC for sig. Bidraget fra f.eks AD og BC er differensen mellem strømmen ud gennem BC og strømmen ind gennem AD (jvf. (7.7)):

$$\left[a_1 h_2 + \frac{\partial}{\partial \xi_1} (a_1 h_2) \delta\xi_1 \right] \delta\xi_2 - a_1 h_2 \delta\xi_2 + o(\varepsilon^2)$$

eller

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} (a_1 h_2) \delta\xi_1 \delta\xi_2 + o(\varepsilon^2)$$

hvor a_1 er \underline{a} 's komponent efter \underline{e}_1 og hvor ε angiver størrelsesordenen af $\text{diam}(\Omega)$. Jalt fås

$$(7.14) \quad \int_{\partial\Omega} \underline{a} \cdot \underline{n} \, ds = \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (a_1 h_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (a_2 h_1) \right] \delta \xi_1 \delta \xi_2 + o(\epsilon^2).$$

Arealet af Ω er

$$h_1 \delta \xi_1 \, h_2 \delta \xi_2 + o(\epsilon^2);$$

for $\delta \xi_1$ og $\delta \xi_2 \rightarrow 0$ fås da ved brug af (7.13) værdien af $\text{div} \underline{a}$ i punktet A:

$$(7.15) \quad \text{div} \underline{a} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_2 a_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_1 a_2) \right].$$

For $\underline{a} = \text{grad} u$ giver dette med (7.11)

$$(7.16) \quad \text{div}(\text{grad} u) = \Delta u = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) \right].$$

Ved analoge betragtninger fås i tre dimensioner:

$$(7.17) \quad \Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \right).$$

K 7.2 Separation af de variable.

Bemærkninger til [W] side 68.

Vi er nu kommet såvidt, at vi kan undersøge separationen af de variable i (7.1) i krumlinede koordinater. Indledningsvis vil vi kort repetere forudsætningerne for metoden separation af de variable i lyset af begrebet krumlinede koordinater:

- (i) Den forelagte ligning $Lu=0$ skal have produktløsninger.
- (ii) Alle (begyndelses- og) randbetingelser skal være givet på koordinatkurver.
- (iii) De lineære operatoren, som definerer randbetingelser på en given koordinatkurve, må ikke indeholde afledede efter andre koordinater end den, der er konstant på kurverne, og koefficienterne i operatoren må ligeledes ikke afhænge af de øvrige koordinater.

Når disse forudsætninger er opfyldt, indsættes en produktfunktion og de separerede ligninger bestemmes. Ved hjælp af randbetingelserne på modstående koordinatkurver dannes dernæst egenværdiproblemer, som så løses. Af de fundne egenfunktioner dannes en produktrække, hvis koefficienter tilpasses randbetingelserne. Derefter undersøges konvergens af rækken, herunder kontinuitet og differentiability, og der sluttes med en verifikation af differentiaalligningen og randbetingelserne.

Vi kan nu genoptage behandlingen af (7.1), indledningsvis for to dimensioner. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at

Laplaces ligning separererer er, se (7.16), at forholdet mellem de metriske koefficienter er separerbart, dvs. at der findes funktioner $f_1(\xi_1)$ og $f_2(\xi_2)$ så

$$(7.18) \quad \frac{h_1(\xi_1, \xi_2)}{h_2(\xi_1, \xi_2)} = \frac{f_2(\xi_2)}{f_1(\xi_1)}$$

Udføres separationen af Laplaces ligning ved indsættelse af (7.18) og $u(\xi_1, \xi_2) = U_1(\xi_1)U_2(\xi_2)$ i (7.16) fås de separerede ligninger

$$(7.19) \quad f_i(\xi_i) \frac{d}{d\xi_i} \left(f_i \frac{dU_i}{d\xi_i} \right) = \lambda_i U_i, \quad i=1,2,$$

hvor

$$(7.20) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Skal Helmholtz' ligning eller den tidsuafhængige Schrödingerligning i to dimensioner kunne separeres, er der yderligere en betingelse, der må være opfyldt, nemlig at der findes funktioner $\varphi_1(\xi_1)$ og $\varphi_2(\xi_2)$, så

$$(7.21) \quad f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) h_1(\xi_1, \xi_2) h_2(\xi_1, \xi_2) k^2(\xi_1, \xi_2) = \varphi_1(\xi_1) + \varphi_2(\xi_2),$$

og de separerede ligninger bliver da

$$(7.22) \quad f_i(\xi_i) \frac{d}{d\xi_i} \left(f_i \frac{dU_i}{d\xi_i} \right) + \varphi_i(\xi_i) U_i(\xi_i) = \lambda_i U_i(\xi_i), \quad i=1,2,$$

hvor $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Ligninger af typen (7.22) vil vi vende tilbage til i [W] chapter VIII og senere i disse noter.

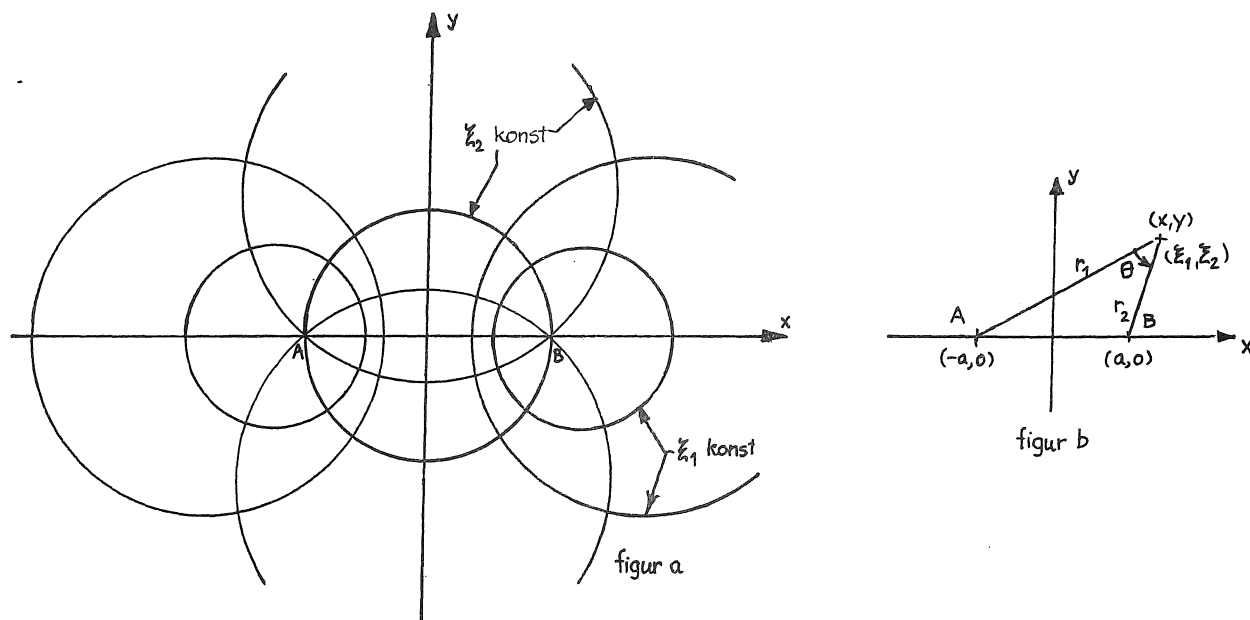
Mens Laplaces ligning i to dimensioner er separerbart i et stort antal koordinatsystemer (se f.ex. [W] s.236-245), medfører betingelsen (7.21), at Helmholtz' ligning kun kan separeres i få og Schrödingerligningen i færre eller ingen koordinatsystemer, afhængigt af funktionsformen af den potentielle energi, der indgår i k^2 . Betingelserne (7.18) og (7.21) fører for Helmholtz' ligning i to dimensioner til, at den kun er separerbart i koordinatsystemer, hvis koordinatkurver er keglesnit med fælles brændpunkter (konfokale keglesnit) eller disses udartede former (rette linier og cirkler). Disse 4 systemer er beskrevet bagerst i dette afsnit på siderne 7.7-7.8 sammen med de separerede ligninger og bemærkninger om egenfunktionerne; en del af disse specielle funktioner vil vi vende tilbage til i slutningen af disse noter.

Det bemærkes, at man uden at ændre separerbarheden kan dreje eller parallelforskyde koordinatsystemet samt multiplicere ξ_1 og ξ_2 med hver sin konstant. Man kan endog erstatte ξ_1 henholdsvis ξ_2 med en funktion af ξ_1 respektive ξ_2 , idet det kun er koordinatkurvernes geometriske udseende, der er væsentligt.

I tre dimensioner er forholdene mere komplicerede. Helmholtz' ligning og Laplaces ligning er kun fuldstændigt separerbare i

systemer, hvis koordinatflader er konfokale keglesnitsflader eller disses udartede former. De i alt 11 forskellige systemer betegnes efter fladerens art, vigtige eksempler er sædvanlige retvinklede (rektangulære) koordinater, cirkulære cylinderkoordinater og polære koordinater i rummet (sfæriske koordinater). Disse tre findes omtalt bagerst i dette afsnit - de øvrige^{*)} findes udførligt behandlet i f.ex. Morse and Feshbach: *Methods of Theoretical Physics*, chapter 5. De separerede ligninger giver anledning til indførelse af en del nye funktioner, hvoraf hver type i reglen danner et fuldstændigt ortogonalsystem. Vigtigst er kuglefunktionerne, specielt Legendre-polynomierne, der optræder i sfæriske koordinater (se [W] s. 188-193).

Eksempel (bipolære koordinater).



På figur a er vist nogle få koordinatkurver i bipolar koordinater. Koordinatkurverne svarende til ξ_1 konstant er cirkler, der er de geometriske steder for de punkter, hvis afstande (r_1 og r_2 , se figur b) til to punkter A og B har et konstant forhold (forholdscirkler over liniestykket AB). Koordinatkurverne svarende til ξ_2 konstant er cirkelbuer (fra A til B) hvorfra liniestykket ses under en på hver cirkelbue konstant vinkel θ (synsvinkelbuer). De to sæt kurver er hinandens ortogonaltrajektorier.

Som koordinater vælges

$$\xi_1 = \frac{r_1}{r_2}, \quad \xi_1 \in [0, \infty[\quad \text{og} \quad \xi_2 = \theta, \quad \xi_2 \in]-\pi, \pi];$$

det skal dog bemærkes, at man ofte i stedet for den angivne definition af ξ_1 vælger $\xi_1 = \log_e \frac{r_1}{r_2}$.

*) de otte andre er: paraboliske cylinderkoordinater, elliptiske cylinderkoordinater, koniske koordinater, paraboliske koordinater, langstrakte sfæroidekoordinater, fladtrykte sfæroide koordinater, paraboloidkoordinater og ellipsoide koordinater.

Sammenhængen mellem de sædvanlige retvinklede (x, y) -koordinater og de bipolære (ξ_1, ξ_2) -koordinater kan vises at være

$$x = a \frac{\xi_1^2 - 1}{1 + \xi_1^2 - 2\xi_1 \cos \xi_2}, \quad y = 2a \frac{\xi_1 \sin \xi_2}{1 + \xi_1^2 - 2\xi_1 \cos \xi_2}.$$

Ved partiel differentiation af disse udtryk og anvendelse af (7.8) findes de metriske koefficienter. Resultatet kan skrives

$$h_1^2 = \frac{h_2^2}{\xi_1^2} = \frac{4a^2}{(1 + \xi_1^2 - 2\xi_1 \cos \xi_2)^2}.$$

I de nye koordinater bliver Δu følgelig (se (7.16)):

$$\Delta u = \frac{(1 + \xi_1^2 - 2\xi_1 \cos \xi_2)^2}{4a^2 \xi_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\xi_1 \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{\xi_1} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} \right].$$

Laplaces ligning $\Delta u = 0$ får formen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{\xi_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{1}{\xi_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} = 0.$$

Denne ligning er separabel, og den har i øvrigt samme form som Laplaces ligning i sædvanlige polære koordinater i planen. Den kan derfor behandles omtrent som beskrevet i [W] §24 idet r og θ erstattes med henholdsvis ξ_1 og ξ_2 .

Bipolære koordinater er velegnede til løsning af Laplaces ligning med randbetingelser givet på to ikke-koncentriske cirkler eller cirkulære cylindre.

Helmholtz' ligning og den tidsuafhængige Schrödingerligning er ikke separerbare i bipolære koordinater på grund af den indviklede form af den første faktor i Δu .

T 7.3 Oversigt over vigtige koordinatsystemer.

koordinatsystem	separerede ligninger for Helmholtz' ligning	specielle funktioner
1. rektangulært (x, y) $h_1(x, y) = h_2(x, y) = 1$ $f_1(x) = f_2(y) = 1$ $\varphi_1(x) = \varphi_2(y) = 1$ koordinatkurverne er ortogonale rette linier	$\frac{d^2 U_1}{dx^2} = \lambda_1 U_1$ $\frac{d^2 U_2}{dy^2} = \lambda_2 U_2$ $\lambda_1 + \lambda_2 + k^2 = 0$	trigonometriske hyperbolske

koordinatsystem	separerede ligninger for Helmholtz' ligning	specielle funktioner
<p>2. polært (r, θ) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ $h_1(r, \theta) = 1, h_2(r, \theta) = r$ $f_1(r) = r, f_2(\theta) = 1$ $\varphi_1(r) = r^2 k^2, \varphi_2(\theta) = 0$</p> <p>koordinatkurverne er koncentriske cirkler og halvlinier udgående fra det fælles centrum</p>	$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_1}{dr} \right) + k^2 r^2 U_1 = \lambda_1 U_1$ $\frac{d^2 U_2}{d\theta^2} = \lambda_2 U_2$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$	<p>cylinderfunktioner (Bessel-funktioner etc.) - for $k=0$ fås logaritmefunktionen og potensfunktioner</p> <p>trigonometriske funktioner</p>
<p>3. paraboliske cylinderkoordinater (ξ_1, ξ_2) $x = \frac{1}{2}(\xi_1^2 - \xi_2^2), y = \xi_1 \cdot \xi_2$ $h_1(\xi_1, \xi_2) = h_2(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ $f_1(\xi_1) = f_2(\xi_2) = 1$ $\varphi_1(\xi_1) = k^2 \xi_1^2, \varphi_2(\xi_2) = k^2 \xi_2^2$</p> <p>koordinatkurverne er to sæt parabler med brændpunkt $(0,0)$</p>	$\frac{d^2 U_1}{d\xi_1^2} + k^2 \xi_1^2 U_1 = \lambda_1 U_1$ $\frac{d^2 U_2}{d\xi_2^2} + k^2 \xi_2^2 U_2 = \lambda_2 U_2$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$	<p>Weber- Hermite-funktioner</p> <p>for $k=0$ fås trigonometriske og hyperbolske funktioner.</p>
<p>4. elliptiske cylinderkoordinater (ξ_1, ξ_2) $x = a \cosh \xi_1 \cos \xi_2$ $y = a \sinh \xi_1 \sin \xi_2$ $h_1^2(\xi_1, \xi_2) = h_2^2(\xi_1, \xi_2) = a^2 (\cosh^2 \xi_1 - \cos^2 \xi_2)$ $f_1(\xi_1) = f_2(\xi_2) = 1$ $\varphi_1(\xi_1) = k^2 a^2 \cosh^2 \xi_1$ $\varphi_2(\xi_2) = k^2 a^2 \cos^2 \xi_2$</p> <p>koordinatkurverne er et sæt ellipser og et sæt hyperbler, alle med brændpunkterne $(\pm a, 0)$</p>	$\frac{d^2 U_1}{d\xi_1^2} + k^2 a^2 \cosh^2 \xi_1 U_1 = \lambda_1 U_1$ $\frac{d^2 U_2}{d\xi_2^2} - k^2 a^2 \cos^2 \xi_2 U_2 = \lambda_2 U_2$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$	<p>Modificerede Mathieu-funktioner</p> <p>Mathieu-funktioner</p> <p>for $k=0$ fås trigonometriske og hyperbolske funktioner.</p>

I tre dimensioner har vi tre vigtige koordinatsystemer:

1. Sædvanlige retvinklede koordinater (x, y, z):

$$h_1(x, y, z) = h_2(x, y, z) = h_3(x, y, z) = 1$$

Til Laplaces ligning

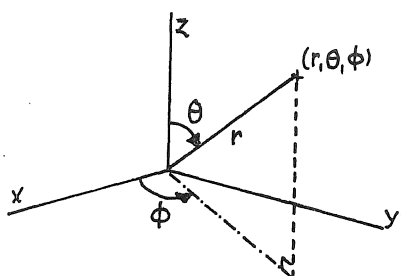
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

findes de separerede ligninger

$$U_i'' - \lambda_i U_i = 0, \quad i=1, 2, 3$$

hvor $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ og $U_1 = U_1(x)$, $U_2 = U_2(y)$ og $U_3 = U_3(z)$.

2. Sfæriske koordinater (r, θ , ϕ):



$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

hvor $r \in [0, \infty[$, $\theta \in [0, \pi[$ og $\phi \in [0, 2\pi[$.

Man finder

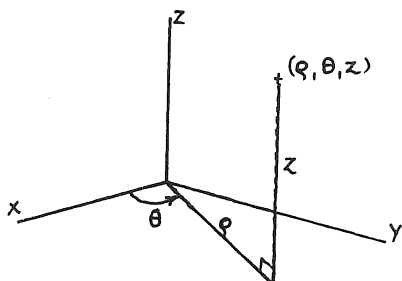
$$h_1(r, \theta, \phi) = 1, \quad h_2(r, \theta, \phi) = r, \quad h_3(r, \theta, \phi) = r \sin \theta.$$

I sfæriske koordinater har Laplaces ligning udseendet

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right] = 0.$$

Separation af de variable i denne ligning er behandlet i [W] § 43.

3. Cirkulære cylinderkoordinater (ρ , θ , z):



$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

hvor $\rho \in [0, \infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ og $z \in]-\infty, \infty[$.

Man finder

$$h_1(\rho, \theta, z) = 1, \quad h_2(\rho, \theta, z) = \rho, \quad h_3(\rho, \theta, z) = 1.$$

I cirkulære cylinderkoordinater har Laplaces ligning udseendet:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Separation af de variable i denne ligning behandles i [W] § 33.

8. Om Green's funktion.

K 8.1 Lösningsformlen for et begyndelsesværdiproblem.

Bemærkninger til [W] § 27.

Løsningen til et begyndelsesværdiproblem for 2'ordens differentiaalligningen

$$(8.1) \quad (p(x) u'(x))' + q(x) u(x) = f(x)$$

findes let ved hjælp af de formler, vi har vist i MAT 1-noterne (102), § 52. Med den dér anvendte skrivemåde tager (8.1) formen

$$(8.2) \quad u'' = -\frac{q}{p} u - \frac{p'}{p} u' + \frac{f}{p}$$

Vi antager, at $p \in C^1(A)$ og $p > 0$, og $q, f \in C^0(A)$, på et givet interval A på x -aksen. Når u_1 og u_2 er to lineært uafhængige løsninger til den homogene differentiaalligning: $(pu')' + qu = 0$ på A , defineres den tilhørende Wronski-determinant W ved:

$$(8.3) \quad W(x) = u_1(x) u_2'(x) - u_2(x) u_1'(x),$$

og samtlige løsninger til (8.1) på A fremstilles da ved:

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) - u_1(x) \int \frac{u_2(x)}{W(x)} \frac{f(x)}{p(x)} dx + u_2(x) \int \frac{u_1(x)}{W(x)} \frac{f(x)}{p(x)} dx,$$

jvf. MAT 1-noterne (102), § 52, Sætning 4* (og opgave 52.3). De to integraler er vilkårligt valgte stamfunktioner.

Lad nu $\alpha \in A$. Problemet

$$\begin{cases} (8.1) \text{ for } x \in A, \\ u(\alpha) = u'(\alpha) = 0, \end{cases}$$

har da den entydige løsning

$$u(x) = \int_{\alpha}^x \frac{-u_1(x) u_2(\xi) + u_2(x) u_1(\xi)}{W(\xi) p(\xi)} f(\xi) d\xi,$$

som skrives på denne måde ved et særligt bekvemt valg af stamfunktionerne. Da W opfylder $\frac{dW}{dx} = -\frac{p'}{p} W$, jvf. MAT 1-noterne (102), § 52, sætn. 3*, ses at $\frac{d}{dx}(Wp) = -\frac{p'}{p} Wp + p'W = 0$, så Wp er konstant på A . J bogen betegnes $-Wp$ ved K . Lösningsformlen bliver da

$$(8.4) \quad u(x) = \int_{\alpha}^x R(x, \xi) f(\xi) d\xi, \text{ hvor } R(x, \xi) = \frac{u_1(x) u_2(\xi) - u_2(x) u_1(\xi)}{K}$$

Betragtes punkterne x i et interval $[\alpha, \beta] \subseteq A$, kan vi også skrive

$$(8.5) \quad u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} I_{[\alpha, x]}(\xi) R(x, \xi) f(\xi) d\xi, \text{ for } x \in [\alpha, \beta],$$

hvor $I_{[\alpha, x]}(\xi)$ for hvert x betegner den funktion af ξ , der er 1

på intervallet $[\alpha, x]$ og 0 ellers (indikatorfunktionen for $[\alpha, x]$).

Bogen antyder en diskussion af tilfældet, hvor α er et randpunkt for A , som ikke er med i A .

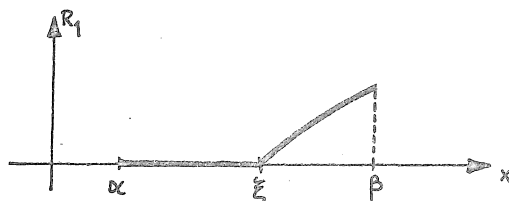
Med (8.5) har vi fremstillet løsningsoperatoren $P: f \mapsto u$ som en integraloperator, dvs. en operator, hvis virkning på f består i, at $f(\xi)$ multipliceres med en funktion af x og ξ , hvorefter man danner det bestemte integral m.h.t. ξ over et fast interval. Den pågældende funktion af x og ξ kaldes integraloperatorens kerne (ordet "kerne" bruges her i en helt anden betydning end i lineær algebra, hvor det jo betyder "nulrum"!). J (8.5) er kernen lig med

$$(8.6) \quad R_1(x, \xi) = I_{[\alpha, x]}(\xi) R(x, \xi) \text{ for } x \text{ og } \xi \in [\alpha, \beta],$$

altså: $R_1(x, \xi) = R(x, \xi)$ for $x \geq \xi$, $R_1(x, \xi) = 0$ for $x < \xi$. Bemærk, at $R_1(x, \xi)$ også kan udtrykkes ved

$$(8.7) \quad R_1(x, \xi) = I_{[\xi, \beta]}(x) R(x, \xi) \text{ for } (x, \xi) \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta].$$

Egenskaberne ved R ([W] s.119) indebærer specielt, at R_1 er kontinuert, mens $\frac{\partial R_1}{\partial x}$, opfattet som funktion af x for fast ξ , har et spring ved $x = \xi$, af størrelsen $\frac{1}{p(\xi)}$.



Et eksempel på grafen af $R_1(x, \xi)$ som funktion af x for fast ξ .

NB! Differentiationerne i l. 8-10, [W] s.119, efter x for fastholdt ξ bør pr. definition skrives som $\frac{\partial}{\partial x}$. Lignende ukorrekt notation optræder flere steder senere, se f.ex. sammenblandingen i [W] s. 123 l.4.

K 8.2 Løsningsformlen for et randværdiproblem.

Bemærkninger til [W] § 28.

Vi skriver linie 1 i formel [W] (28.1) som $-(pu')' - qu = f$, og lader L betegne differentialoperatoren defineret ved $Lu = -(pu')' - qu$. (Den har en vis positivitetsegenskab.) Løsningsoperatoren $T: f \mapsto u$ for problemet (28.1) udregnes i [W] s.121 til, når $D \neq 0$, at være givet ved

$$(8.8) \quad u(x) = - \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{v_2(\alpha)v_1(x) - v_1(\alpha)v_2(x)}{D} R(\beta, \xi) + I_{[\alpha, x]}(\xi) R(x, \xi) \right] f(\xi) d\xi.$$

Kernen for denne integraloperator (dvs. (-1) gange funktionen i []) kaldes $G(x, \xi)$, Greens funktion, jvf. [W] (28.3). Uden

at regne yderligere på udtrykket kan vi vise (a)-(d) i [W] (28.4) blot ved at benytte de tidligere viste egenskaber ved R . (Prøv efter!) Symmetrirelationen $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ fremgår af formelen [W] (28.2), men kan også vises at være en konsekvens af (28.4), se nedenfor (Korollar 8.2).

Vi vil nu vise, at Greens funktion $G(x, \xi)$ faktisk er bestemt ved de fire egenskaber opregnet i [W] (28.4). Dette giver dels en alternativ metode til at bestemme $G(x, \xi)$ - i stedet for at regne frem til formlerne, (28.2) -, dels har det den fordel at kunne generaliseres til problemer af andre typer end (28.1). Her tænkes dels på problemer med andre randbetingelser (betingelser der involverer $u'(\alpha)$ eller $u'(\beta)$), dels på singulære problemer, hvor funktionerne p og q eller intervallet $[\alpha, \beta]$ udarter på en eller anden måde. Betingelserne (28.4) (a), (c) og (d) bibeholdes da, mens (b) erstattes med de nye randbetingelser eller øvrige bibetingelser. Som udartede tilfælde har vi f.ex. tilfældet af et ubegrænset interval (jvf. supplerende opgave nr. 12) eller tilfældet, hvor p er 0 i et endepunkt (f.ex. ligning [W] (24.4), som vil blive behandlet nedenfor i Afsnit 8.3); i sådanne tilfælde erstatter man i reglen den ene (eller begge) randbetingelse(r) med krav om begrænsethed o.l.

Princippet om udledelsen af G vil blive formuleret og bevist for et generelt, ikke udartet randværdiproblem; bevismetoden kan derefter efterprøves på de udartede tilfælde, vi får brug for, hver for sig.

Vi antager: $p \in C^1(A)$ og $q \in C^0(A)$ er givne, reelle funktioner med $p > 0$ på et begrænset, afsluttet, egentligt interval $A = [\alpha, \beta]$. Endvidere er der givet fire reelle konstanter a, b, c og d , således at $(a, b) \neq (0, 0)$ og $(c, d) \neq (0, 0)$. Vi betragter randværdiproblemet

$$(8.9) \quad \begin{cases} [Lu \equiv] & -\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) - qu = f \quad \text{på } A = [\alpha, \beta], \\ [B_1 u \equiv] & a u(\alpha) + b u'(\alpha) = 0, \\ [B_2 u \equiv] & c u(\beta) + d u'(\beta) = 0. \end{cases}$$

Sætning 8.1. Når problemet (8.9) med $f=0$ kun har nul-løsningen, gælder:

Der findes en og kun en funktion $G(x, \xi)$ på $A \times A$, som er C^2 på $(A \times A) \setminus \{(x, \xi) \mid x = \xi\}$, og for hvert $\xi \in A$ opfylder

$$(8.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) \right) + q(x) G(x, \xi) = 0 \quad \text{for } x \in A \setminus \{\xi\}, \\ (b_1) \quad a G(\alpha, \xi) + b \frac{\partial G}{\partial x}(\alpha, \xi) = 0, \\ (b_2) \quad c G(\beta, \xi) + d \frac{\partial G}{\partial x}(\beta, \xi) = 0, \\ (c) \quad G(\cdot, \xi)^* \in C^0(A), \\ (d) \quad G(\cdot, \xi) \text{ er stykkevis } C^1 \text{ p\u00e5 } A, \text{ og (n\u00e5r } \xi \in]\alpha, \beta[) \\ \quad \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) = -\frac{1}{p(\xi)}. \end{array} \right.$$

Denne l\u00f8sning har formen

$$(8.11) \quad G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{K} u_1(x) u_2(\xi) & \text{for } x \leq \xi \\ \frac{1}{K} u_2(x) u_1(\xi) & \text{for } x \geq \xi, \end{cases}$$

hvor u_1 og u_2 er egentlige l\u00f8sninger til (jvf. (8.9))

$$\begin{cases} Lu_1 = 0 & \text{i } A, \\ B_1 u_1 = 0 & ; \end{cases} \quad \text{henholdsvis} \quad \begin{cases} Lu_2 = 0 & \text{i } A, \\ B_2 u_2 = 0 & ; \end{cases}$$

og $K = -p(x)W(x) = -p(x)(u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x))$ (som er en konstant $\neq 0$). Funktionen $G(x, \xi)$ er Greens funktion for problemet (8.9), dvs. l\u00f8sningen til (8.9) fremstilles ved

$$(8.12) \quad u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Bevis: Lad u_1 v\u00e6re l\u00f8sningen til $Lu=0$ med begyndelsesv\u00e6rdierne $u_1(\alpha) = b$, $u_1'(\alpha) = -a$; da $(a, b) \neq 0$, er u_1 ikke identisk 0, men u_1 opfylder betingelsen $B_1 u_1 = 0$. Tilsvarende, lad u_2 v\u00e6re l\u00f8sningen til $Lu=0$ med $u_2(\beta) = d$, $u_2'(\beta) = -c$, s\u00e5 er $B_2 u_2 = 0$, men u_2 er ikke identisk 0. Under foruds\u00e6tningen om at det homogene problem (8.9) med $f=0$ kun har null\u00f8sningen, er u_1 og u_2 ikke proportionale, idet de ellers begge var l\u00f8sninger til det homogene problem. Da er Wronskideterminanten $W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)$ som bekendt $\neq 0$ i hele A , og $-p(x)W(x)$ (der som tidligere bem\u00e6rket er en konstant K) er $\neq 0$. Funktionen $G(x, \xi)$ defineret ved (8.11) vises nu ved umiddelbar verifikation at opfylde betingelserne i (8.10); den tilh\u00f8rer klart $C^2((A \times A) \setminus \{(x, \xi) | x = \xi\})$.

Omvendt, antag at $G(x, \xi) \in C^2((A \times A) \setminus \{(x, \xi) | x = \xi\})$ er

*) $G(\cdot, \xi)$ angiver, at vi betragter funktionen af x for hvert fast ξ .

løsning til (8.10). Betragt funktionen for et fast $\xi \in]a, b[$. På grund af (a) og (b₁) må $G(x, \xi)$ være et multiplum af $u_1(x)$ for $x \in]\alpha, \xi[$, altså

$$G(x, \xi) = a_1(\xi) u_1(x) \quad \text{for } \alpha \leq x < \xi.$$

Tilsvarende fås, på grund af (a) og (b₂), at G på stykket $]\xi, \beta]$ må have formen

$$G(x, \xi) = a_2(\xi) u_2(x) \quad \text{for } \xi < x \leq \beta.$$

Opførslen ved $x = \xi$ bestemmes af (c) og (d), som giver

$$(8.13) \quad \begin{cases} a_2(\xi) u_2(\xi) - a_1(\xi) u_1(\xi) = 0, \\ a_2(\xi) u_2'(\xi) - a_1(\xi) u_1'(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)}. \end{cases}$$

Determinanten for dette ligningssystem til bestemmelse af a_2 og a_1 er netop $W(\xi)$, hvormed løsningen fastlægges til

$$a_1(\xi) = -\frac{u_2(\xi)}{W(\xi)p(\xi)} = \frac{1}{K} u_2(\xi)$$

$$a_2(\xi) = -\frac{u_1(\xi)}{W(\xi)p(\xi)} = \frac{1}{K} u_1(\xi).$$

Hermed er $G(x, \xi)$ fastlagt for alle $x \in A$, alle $\xi \in]\alpha, \beta[$ (og vi har netop fundet formen (8.11)). Af kontinuitetsgrunde bestemmer dette G på hele $A \times A$.

Endelig skal vi eftervise, at (8.12) giver løsningen til (8.9).

Dette gøres let ved brug af (8.11): Lad $u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) f(\xi) d\xi$, så er:

$$(8.14) \quad \begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{K} u_2(x) \int_{\alpha}^x u_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{K} u_1(x) \int_x^{\beta} u_2(\xi) f(\xi) d\xi, \\ u'(x) &= \frac{1}{K} u_2'(x) \int_{\alpha}^x u_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{K} u_2(x) u_1(x) f(x) \\ &\quad + \frac{1}{K} u_1'(x) \int_x^{\beta} u_2(\xi) f(\xi) d\xi - \frac{1}{K} u_1(x) u_2(x) f(x) \\ &= \frac{1}{K} u_2'(x) \int_{\alpha}^x u_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{K} u_1'(x) \int_x^{\beta} u_2(\xi) f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

hvoraf

$$B_1 u = 0 + \frac{1}{K} B_1 u_1 \cdot \int_{\alpha}^{\beta} u_2(\xi) f(\xi) d\xi = 0,$$

$$B_2 u = \frac{1}{K} B_2 u_2 \cdot \int_{\alpha}^{\beta} u_1(\xi) f(\xi) d\xi + 0 = 0,$$

samt

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= -\frac{d}{dx} \left(p(x) u_2'(x) \frac{1}{K} \int_{\alpha}^x u_1(\xi) f(\xi) d\xi \right) - q(x) \frac{1}{K} u_2(x) \int_{\alpha}^x u_1(\xi) f(\xi) d\xi \\ &\quad - \frac{d}{dx} \left(p(x) u_1'(x) \frac{1}{K} \int_x^{\beta} u_2(\xi) f(\xi) d\xi \right) - q(x) \frac{1}{K} u_1(x) \int_x^{\beta} u_2(\xi) f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (Lu_2)(x) \frac{1}{K} \int_{\alpha}^x u_1(\xi) f(\xi) d\xi - p(x) u_2'(x) \frac{1}{K} u_1(x) f(x) \\
&+ (Lu_1)(x) \frac{1}{K} \int_x^{\beta} u_2(\xi) f(\xi) d\xi + p(x) u_1'(x) \frac{1}{K} u_2(x) f(x) \\
&= 0 + p(x) \frac{1}{K} (-u_1(x) u_2'(x) + u_2(x) u_1'(x)) f(x) = f(x). \quad \square
\end{aligned}$$

Ved brug af resultatet fra suppl. opg. nr. 18 kan man også verificere, at (8.12) giver løsningen, direkte ud fra G 's egenskaber (8.10) (uden anvendelse af den eksplicitte form (8.11)).

Af fremstillingen (8.11) fås i øvrigt straks:

Korollar 8.2. Under forudsætningerne for Sætning 8.1 opfylder G

(8.15) $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ for alle $(x, \xi) \in A \times A$.

Konstruktionen i Sætning 8.1 anvendes i praksis i bogens eksempler side 122 og side 125.

J diskussionen i [W] s. 123 f.n. - 124 f.o. af tilfældet $D=0$ vises, at $D=0$ netop betyder, at der er en egentlig løsning v til det homogene problem

$$(8.16) \quad Lv = 0 \text{ på } [\alpha, \beta], \quad v(\alpha) = v(\beta) = 0.$$

Heraf sluttet umiddelbart, at ethvert inhomogent problem har enten ingen eller flere end én løsninger. J bogen udregnes en nødvendig betingelse på f for at det inhomogene problem med f på højre side har løsninger.

J tilfældet $D=0$ er v egenfunktion hørende til egen-værdien $\lambda=0$ for egenværdiproblemet

$$Lv = \lambda v, \quad v \in D(L) = \{ u \in C^2 \mid u(\alpha) = u(\beta) = 0 \}$$

Egenværdiproblemer (som har løsninger, netop når der ikke er entydighed, altså når der ikke findes en Greens funktion for $L - \lambda$) behandles systematisk i [W] kapitel VII.

K 8.3 Greens funktion for differentia ligningen $-(x u'(x))' + \frac{n^2}{x} u(x) = f(x)$.

Bemærkninger til [W] §29.

Der er intet angivet om, hvorledes Greens funktion for problemerne øverst s. 130 konstrueres. Fremgangsmåden s. 120-121

kan ikke umiddelbart overføres, da vi ikke har en randværdi i 0. Med nogen eftertanke kan man dog på lignende måde løse problemet fra grunden. Det har dog nok snarere været tanken (og det er regneteknisk lettere) at gå ud fra en karakterisering af Greens funktion analog til Sætning 8.1:

Vi betragter problemet, for $A =]0, R]$,

$$(8.17) \quad \begin{cases} (a) & [(Lu)(x) \equiv] - (xu'(x))' + \frac{n^2}{x} u(x) = f(x) \text{ i } A, \\ (b_1) & u \text{ begrænset på } A, \\ (b_2) & u(R) = 0. \end{cases}$$

(n er hel ≥ 0 .) Lad u_1 være en egentlig løsning til (a), (b₁) med $f=0$ og lad u_2 være en egentlig løsning til (a), (b₂) med $f=0$. Hvis vi kan vælge u_1 og u_2 lineært uafhængige, kan vi definere $G(x, \xi)$ ved (8.11) for $(x, \xi) \in A \times A$. For en begrænset, kontinuert funktion f på A lader vi nu

$$(8.18) \quad u(x) = \int_0^R G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \text{for } x \in]0, R],$$

hvor vi ser af den eksplicitte form (8.14), at integralet eksisterer (u_2 integreres kun over intervallet $[x, R]$). Ved regningerne på side 8.5-6 findes at u opfylder (8.17)(a) og (b₂). Såvidt går de generelle betragtninger; verifikationen af (8.17)(b₁) hænger på den præcise form af u_1 og u_2 , som vi nu vil angive.

Problemet (a) med $f=0$ blev diskuteret i [W] §24, hvor vi fandt samtlige løsninger

$$h=0: \quad u(x) = C_1 + C_2 \log x,$$

$$h>0: \quad u(x) = C_1 x^n + C_2 x^{-n}.$$

Som u_1 og u_2 kan vi da vælge

$$(8.19) \quad \begin{cases} h=0: & u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = \log x - \log R = \log \frac{x}{R}, \\ h>0: & u_1(x) = x^n, \quad u_2(x) = \frac{x^n}{R^n} - \frac{R^n}{x^n}. \end{cases}$$

Det ses, at i alle tilfælde er u_1 og u_2 lineært uafhængige. Vi bestemmer K :

$$h=0: \quad K = -p(x)W(x) = -x \cdot \frac{1}{x} = -1,$$

$$h>0: \quad K = -p(x)W(x) = -x \left[x^n \left(\frac{n}{R^n} x^{n-1} - \frac{(-n)R^n}{x^{n+1}} \right) - nx^{n-1} \left(\frac{x^n}{R^n} - \frac{R^n}{x^n} \right) \right] \\ = -2nR^n.$$

Dermed bliver $G(x, \xi)$:

$$n=0: \quad G_0(x, \xi) = \begin{cases} -\log \frac{\xi}{R} = \log \frac{R}{\xi} & \text{for } x \leq \xi, \\ -\log \frac{x}{R} = \log \frac{R}{x} & \text{for } x \geq \xi, \end{cases} \quad (8.20)$$

$$n>0: \quad G_n(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2nR^n} x^n \left(\frac{R^n}{\xi^n} - \frac{\xi^n}{R^n} \right) & \text{for } x \leq \xi, \\ \frac{1}{2nR^n} \xi^n \left(\frac{R^n}{x^n} - \frac{x^n}{R^n} \right) & \text{for } x \geq \xi. \end{cases}$$

J redegørelsen for, at (8.18) er løsning til (8.17), mangler vi at verificere (b₁). Betragtes (8.14) med u₁ og u₂ fra (8.19) indsat, [α, β] = [0, R], ser vi, at der for n=0 optræder udtryk

$$\log x \int_0^x f(\xi) d\xi \quad \text{og} \quad \int_x^R \log \xi f(\xi) d\xi,$$

som (idet $\sup_{\xi \in A} |f(\xi)| = c$) vurderes ved

$$\left| \log x \int_0^x f(\xi) d\xi \right| \leq |\log x| \cdot cx$$

og (for x < 1)

$$\left| \int_x^R \log \xi f(\xi) d\xi \right| \leq c \cdot \int_x^R |\log \xi| d\xi = c_1 + \int_x^1 c(-\log \xi) d\xi \leq c_2 + cx |\log x|,$$

som er begrænsede på A, fordi $x \log x \rightarrow 0$ for $x \rightarrow 0$. For n > 0 benyttes vurderingerne

$$\left| \frac{1}{x^n} \int_0^x \xi^n f(\xi) d\xi \right| \leq c \frac{1}{x^n} \int_0^x \xi^n d\xi = c \frac{x}{n+1},$$

$$\left| x^n \int_x^R \frac{f(\xi)}{\xi^n} d\xi \right| \leq cx^n \int_x^R \xi^{-n} d\xi = cx^n \left[\frac{\xi^{-n+1}}{-n+1} \right]_x^R = c_1 + c_2 x, \quad *)$$

som ligeledes viser, at u er begrænset på A. Altså er G_n(x, ξ) Greens funktion for problemet (8.17).

J løsningsformlerne i [W] s. 130 l. 6-10 er (x, ξ) erstattet med (r, ρ); i øvrigt er det blot versioner af (8.18) med f(ρ) = ρ A_n, henholdsvis f(ρ) = ρ B_n, indsat, og G_n(r, ρ) bestemt ved formlerne (8.20).

Vurderingen i linie 13-14, [W] s. 130 fås således: Idet

$$a_n(r) = \int_0^R G_n(r, \rho) A_n(\rho) \rho d\rho,$$

er

$$|a_n(r)|^2 \leq \int_0^R |G_n(r, \rho)|^2 \rho d\rho \cdot \int_0^R |A_n(\rho)|^2 \rho d\rho$$

*) Dette gælder for n > 1; for n = 1 vurderes ved x log x.

Ved Schwarz' ulighed med vægtfunktion $f(\rho) = \rho$.

Det første integral i produktet vurderes ved (for $n > 0$):

$$\int_0^R G_n(r, \rho)^2 \rho d\rho = \int_0^r \left[\frac{1}{2nR^n} \left(\frac{R^n}{r^n} - \frac{r^n}{R^n} \right) \right]^2 \rho^{2n} \rho d\rho + \int_r^R \left[\frac{1}{2nR^n} r^n \right]^2 \left(\frac{R^n}{\rho^n} - \frac{\rho^n}{R^n} \right)^2 \rho d\rho$$

$$\leq \frac{1}{4n^2 r^{2n}} \int_0^r \rho^{2n+1} d\rho + \frac{r^{2n}}{4n^2 R^{2n}} \int_r^R R^{2n} \rho^{-2n+1} d\rho,$$

idet $\frac{R^n}{\xi^n} - \frac{\xi^n}{R^n} \leq \frac{R^n}{\xi^n}$ for $0 < \xi \leq R$. Dette udregnes for $n \geq 2$ til

$$= \frac{r^2}{4n^2(2n+2)} + \frac{r^{2n}}{4n^2} \left(\frac{R^{-2n+2}}{-2n+2} - \frac{r^{-2n+2}}{-2n+2} \right)$$

$$= \frac{r^2}{4n^2(2n+2)} + \frac{r^2}{4n^2(2n-2)} - \frac{r^{2n} R^{-2n+2}}{4n^2(2n-2)}$$

$$\leq \frac{r^2}{8n^2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{r^2 \cdot 2n}{8n^2(n^2-1)} = \frac{r^2}{4n(n^2-1)}$$

$$\leq \frac{R^2}{4n(n^2-1)}$$

T 8.4 Om δ -funktionen

Vi har set, at den omvendte operator (når den findes) til differentialoperatoren

$$L: u \mapsto f = -[(pu)'] + qu,$$

defineret på $D(L) = \{u \in C^2([\alpha, \beta]) \mid u(\alpha) = u(\beta) = 0\}$, er en integraloperator

$$T: f \mapsto u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

defineret på $C^0([\alpha, \beta])$. Sættningen af de to operatorer giver altså identiteten

$$(8.21) \quad L \circ T = I \quad (\text{dvs. } LTf = f \text{ for alle } f \in C^0([\alpha, \beta])).$$

Identitetsoperatoren $I: f \mapsto f$ kan ikke skrives som en integraloperator med en funktion af x og ξ som kerne. Jmidlertid skriver man alligevel ofte I ved et udtryk, der ligner en integraloperator:

$$(8.22) \quad f(x) = (If)(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(x - \xi) f(\xi) d\xi \quad \text{for } x \in [\alpha, \beta].$$

Dette udtryk interpreteres på følgende måde. δ eller $\delta(x)$ betegner en "massefordeling" (et mål) på x -aksen med massen

1 i punktet 0 og massen 0 ellers. (δ er ikke en funktion, men betegnelsen " δ -funktionen" hænger ved af historiske grunde.) Ganger vi δ -målet med en kontinuert funktion $f(x)$, får vi en massefordeling $\delta(x)f(x)$, som er lig $f(0)$ i punktet 0, og 0 ellers. Integralet $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx$ er en opsummering af disse masser - hvor kun massen i 0 bidrager -, altså

$$(8.23) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0).$$

(Definitionen af mål gives i Matematik 212; ovenstående er baseret på en intuitiv fornemmelse af dette begreb.) Da $\delta(x)$ er 0 udenfor en omegn af 0, har vi også

$$(8.24) \quad \int_a^b \delta(x)f(x)dx = f(0), \text{ når } a < 0 < b.$$

Vi regner med disse integraler ganske som med sædvanlige integraler. Integralet i (8.22) tolkes ved (8.24) ved variabelskiftet $y = x - \xi$, $dy = -d\xi$:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \delta(x-\xi)f(\xi)d\xi &= -\int_{x-\alpha}^{x-\beta} \delta(y)f(x-y)dy = \int_{x-\beta}^{x-\alpha} \delta(y)f(x-y)dy \\ &= f(x-0) = f(x), \end{aligned}$$

når $x \in]\alpha, \beta[$, således at $x-\beta < 0 < x-\alpha$.

Eksempler på regneregler for δ . Af hensyn til anvendelser i fysikken vil vi nævne nogle yderligere eksempler på "regneregler", man får ved benyttelse af (8.23).

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)f(y+a)dy = f(a).$$

$$2) \quad \text{For } a \neq 0 \text{ er } \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

Man har nemlig, ved variabelskiftet $y=ax$, at

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)f(x)dx &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)f\left(\frac{y}{a}\right)dy = \frac{1}{|a|} f(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \delta(x)f(x)dx \end{aligned}$$

(når $a < 0$, ombyttes integrationsgrænserne $-\infty$ og $+\infty$ i første omgang; de byttes tilbage ved at faktoren $\frac{1}{a}$ erstattes med $\frac{1}{|a|}$).

$$3) \quad \text{For } a > 0 \text{ er } \delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x+a) + \delta(x-a)].$$

Thi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - a^2) f(x) dx = \int_{-\infty}^0 \delta(x^2 - a^2) f(x) dx + \int_0^{\infty} \delta(x^2 - a^2) f(x) dx,$$

som ved substitutionerne $x = -\sqrt{y}$, henholdsvis $x = \sqrt{y}$, giver

$$\begin{aligned} &= \int_{+\infty}^0 \delta(y - a^2) f(-\sqrt{y}) \frac{dy}{-2\sqrt{y}} + \int_0^{\infty} \delta(y - a^2) f(\sqrt{y}) \frac{dy}{2\sqrt{y}} \\ &= - \frac{f(-\sqrt{y})}{-2\sqrt{y}} \Big|_{y=a^2} + \frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \Big|_{y=a^2} \\ &= - \frac{f(-a)}{-2a} + \frac{f(a)}{2a} = \frac{1}{2a} [f(-a) + f(a)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} [\delta(x+a) + \delta(x-a)] f(x) dx. \end{aligned}$$

δ -målet har forskellige egenskaber, som alle er knyttet til integrationsformler, hvor man integrerer produkter af den betragtede funktion (eller det betragtede mål) med "pæne" funktioner. Som universalklasse af pæne funktioner indføres, for ethvert åbent interval $A \subseteq \mathbb{R}$, klassen $C_0^\infty(A)$:

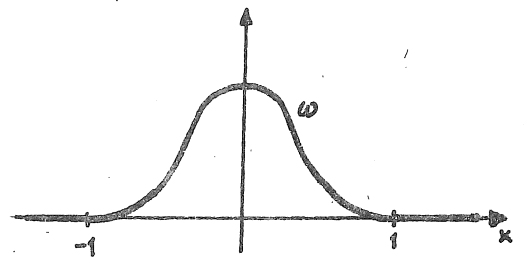
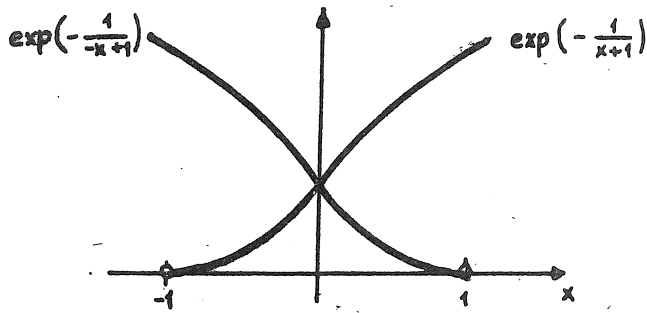
$$C_0^\infty(A) = \{ \varphi \in C^\infty(A) \mid \exists \text{ kompakt delmængde } K \subset A, \text{ så } \varphi \text{ er } 0 \text{ uden for } K \}.$$

I denne definition er K afhængig af φ . Afslutningen af den mængde, hvor φ er $\neq 0$, kaldes i reglen for støtten af φ ; dermed består $C_0^\infty(A)$ af de C^∞ -funktioner på A , som har kompakt støtte i A .

Vi minder om at der virkelig eksisterer C^∞ -funktioner på \mathbb{R} med kompakt støtte; dette blev vist i MAT 1-noterne (102), §25 øvelse 7 (sådanne kan ikke være sum af deres Taylorrække på \mathbb{R}). Et eksempel er funktionen

$$(8.25) \quad \omega(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{2}{1-x^2}\right) & \text{for } |x| < 1, \\ 0 & \text{for } |x| \geq 1; \end{cases}$$

denne er positiv på $] -1, 1[$ og 0 ellers. $\left(\exp\left(-\frac{2}{1-x^2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{x+1}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{-x+1}\right) \right)$, hvor hver faktor er af typen $\exp\left(-\frac{1}{y}\right)$, der for $y > 0$ behandles ganske som $\exp\left(-\frac{1}{y^2}\right)$ i MAT 1-noterne (102) §25, øvelse 7.)



Man kan konstruere mange andre C_0^∞ -funktioner ud fra denne funktion.

Når integralerne af en forelagt funktion ganget med funktioner i C_0^∞ har så stor interesse, skyldes det følgende entydighedssætning (som er en version af det fundamentale lemma i Variationsregningen, jvf. MAT1-noterne (102) side 55.04).

Lemma 8.3. Lad A være et åbent interval af \mathbb{R} . Hvis f og $g \in C_0^\infty(A)$, og

$$\int_A f(x)\varphi(x) dx = \int_A g(x)\varphi(x) dx \text{ for alle } \varphi \in C_0^\infty(A),$$

da er $f = g$.

Bevis: Lad $h = f - g$; vi skal vise at $h = 0$. Vi har

$$(8.26) \quad \int_A h(x)\varphi(x) dx = 0 \text{ for alle } \varphi \in C_0^\infty(A).$$

Antag, at $h(x_0)$ er $\neq 0$ for et $x_0 \in A$; f.ex. $h(x_0) > 0$. Da findes der et $t > 0$, så $h(x) > 0$ i intervallet $[x_0 - t, x_0 + t] \subset A$. Lad $\varphi_0(x) = \omega(\frac{1}{t}(x - x_0))$, så er $\varphi_0(x) > 0$ for $x \in]x_0 - t, x_0 + t[$ og $\varphi_0(x) = 0$ ellers; og $\varphi_0 \in C_0^\infty(A)$. Da er

$$\int_A h(x)\varphi_0(x) dx = \int_{x_0-t}^{x_0+t} h(x)\varphi_0(x) dx > 0,$$

i modstrid med (8.26). \square

Vi siger, at $f_n \rightarrow f$ svagt på A for $n \rightarrow \infty$, hvis

$$\int_A f_n \varphi dx \rightarrow \int_A f \varphi dx \text{ for } n \rightarrow \infty, \text{ for hvert } \varphi \in C_0^\infty(A).$$

Den første vigtige egenskab ved δ -målet, vi vil vise, er hvorledes δ kan fremstilles som svag grænseværdi af en følge af pæne funktioner. Betegn

$$\int_{-1}^1 \omega(x) dx = c,$$

og definer

$$(8.27) \quad \omega_n(x) = \frac{n}{c} \omega(nx) \quad \text{for hvert } n \in \mathbb{N}.$$

Om $\omega_n(x)$ gælder åbenbart

$$(8.28) \quad \begin{cases} \omega_n(x) > 0 \text{ for } x \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[, \omega_n(x) = 0 \text{ for } x \notin]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[. \\ \int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(x) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \omega_n(x) dx = 1. \end{cases}$$

Lemma 8.4. $\omega_n \rightarrow \delta$ svagt (på \mathbb{R}), dvs.

$$(8.29) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \text{ for } n \rightarrow \infty,$$

for alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Bevis:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| &= \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \omega_n(x) \varphi(x) dx - \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \omega_n(x) \varphi(0) dx \right| \\ &\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \omega_n(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \sup_{x \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[} |\varphi(x) - \varphi(0)| \cdot 1 \\ &\rightarrow 0 \text{ for } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

fordi φ er kontinuert i 0. (Vi har to steder benyttet, at $\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \omega_n(x) dx = 1$). \square

Bemærk, at beviset for (8.29) også er gyldigt, når der som φ står en vilkårlig kontinuert funktion f . (8.29) viser en måde til at udpege funktionsværdien $f(0)$ ud fra kendskabet til integralerne $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f(x) dx$ for $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

$(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kaldes en approximerende følge for δ -målet. Der anvendes også andre approximerende følger, f. ex. følgen $(\frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x})_{n \in \mathbb{N}}$, hvis funktionerne i den approximerende følge ikke behøver at have kompakt støtte; og følgen $(\frac{n}{2} I_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(x))_{n \in \mathbb{N}}$, hvis man ikke har behov for differentiable funktioner. (Prøv at vise Lemma 8.4 for disse funktionsfølger!)

Når f og g er to funktioner (eller mål) på A , siger vi,

at $f' = g$ svagt (eller: f har den svage differentialkvotient g),
hvis

$$(8.30) \quad \int_A f(x) \varphi'(x) dx = - \int_A g(x) \varphi(x) dx \quad \text{for alle } \varphi \in C_0^\infty(A).$$

Definitionen stemmer overens med den sædvanlige definition af differentialkvotient, idet når $f \in C^1(A)$ med $f' = g$ gælder formelen (8.30) ved delvis integration (der er intet randbidrag, fordi $\varphi \in C_0^\infty(A)$).

Den anden vigtige egenskab ved δ -målet, vi vil vise, er at δ er svag differentialkvotient af funktionen $I_{[0, \infty[}(x)$, som også kaldes Heavisidefunktionen og betegnes $H(x)$. ($H(x) = 1$ for $x \geq 0$, $H(x) = 0$ for $x < 0$.)

Lemma 8.5. $H(x) = I_{[0, \infty[}(x)$ har den svage differentialkvotient $\delta(x)$, dvs.

$$(8.31) \quad \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = -\varphi(0) \quad \text{for alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Bevis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x) \varphi'(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(x) \Big|_0^K = -\varphi(0),$$

hvor K betegner et tilstrækkeligt stort tal, for hvilket $\varphi(x) = 0$ for $x \geq K$. \square

Sidstnævnte egenskab ved δ -målet kan bruges til at uddybe formelen (8.21) noget mere. Denne formel skrives i detaljer, med brug af (8.22)

$$(8.32) \quad L_x \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(x - \xi) f(\xi) d\xi \quad \text{for } f \in C^0([\alpha, \beta]).$$

(L_x står for anvendelse af differentialoperatoren mht. den x -variable.) Integranden i venstre side af (8.32) opfylder ikke betingelserne for, at vi kan flytte differentialoperatoren L_x inden for integraltegnet:

$$(8.33) \quad \int_{\alpha}^{\beta} L_x G(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(x - \xi) f(\xi) d\xi;$$

alligevel møder man ofte formelen

$$(8.34) \quad L_x G(x, \xi) = \delta(x - \xi),$$

som ville være en konsekvens af Lemma 8.3, hvis dette kunne anvendes. Vi kan imidlertid begrunde (8.34) (og da også (8.33)) ved brug af Lemma 8.5.

Lad ξ være et fast punkt i $] \alpha, \beta [$. Ifølge Sætning 8.1(a) gælder der, helt klassisk

(8.35) $L_x G(x, \xi) = 0$ i punkterne $x \neq \xi$.

Hvad angår punktet $x = \xi$ har vi jo, jvf. Sætning 8.1 (d), at $\frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi)$ er defineret som stykkevis kontinuert funktion, med et spring $-\frac{1}{p(\xi)}$ i $x = \xi$. Dette kan også udtrykkes på den måde, at

(8.36)
$$p(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) = -H(x - \xi) + g(x, \xi),$$

hvor H er Heavisidefunktionen (og altså $-H(x - \xi)$ springer fra 0 til -1 i punktet $x = \xi$), og $g(x, \xi)$ er kontinuert. Faktisk gælder endda om $g(x, \xi)$, at den er kontinuert differentiable efter x i hele intervallet $[\alpha, \beta]$, idet man for $x \neq \xi$ har, som konsekvens af (8.35) og (8.36)

(8.37)
$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial G}{\partial x} \right) = -qG,$$

hvor qG er kontinuert på $[\alpha, \beta]$; da g er kontinuert, følger det, at (8.37) gælder for alle $x \in [\alpha, \beta]$.

Vi har hermed spaltet $p(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi)$ op i to led, vi kan differentiere (svagt):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} H(x - \xi) + \frac{\partial}{\partial x} g(x, \xi) \\ &= -\delta(x - \xi) - qG, \end{aligned}$$

dvs.

$$L_x G = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) \right) + q(x) G(x, \xi) \right] = \delta(x - \xi).$$

δ -målet behandles systematisk i teorien for distributioner (også kaldet generaliserede funktioner); hovedværker er her L. Schwartz: "Théorie des distributions" (findes også på engelsk) og I.M. Gelfand-G. Shilov: "Verallgemeinerte Funktionen" (oversat fra russisk, findes også på engelsk).

K 8.5 Greens funktion for Dirichlet problemet i to variable.

Bemærkninger til [W] §30.

Ligesom vi for det endimensionale randværdiproblem (8.9) kan skrive løsningsoperatoren $T: f \mapsto u$ som en integraloperator, er det ønskeligt at formulere løsningsoperatoren for det to-dimensionale Dirichlet problem

(8.38)
$$\begin{cases} -\Delta u = F & \text{i } D \\ u = 0 & \text{på } C \end{cases}$$

(hvor D er et område i planen med rand C), som en integraloperator

$$(8.39) \quad u(P) = \int_D G(P, Q) F(Q) dQ.$$

P og Q angiver her punkter i planen (f.ex. $P=(x, y)$ og $Q=(\xi, \eta)$ i retvinklede koordinater, eller $P=(r, \theta)$ og $Q=(\rho, \varphi)$ i polære koordinater) og dQ er arealelementet; $dQ = d\xi d\eta$ i retvinklede koordinater (ξ, η) , og $dQ = \rho d\rho d\varphi$ i polære koordinater (ρ, φ) . (|Funktionaldeterminanten| ved koordinatskiftet $\xi = \rho \cos \varphi$, $\eta = \rho \sin \varphi$ er $|\frac{\partial \xi}{\partial \rho} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \eta}{\partial \rho}| = \rho$.) Kernen $G(P, Q)$ kaldes Greens funktion for problemet (8.38).

Tilfældet, hvor D er cirklen med radius R

$$K_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\},$$

behandles i [W] §29-30, hvor løsningsformlen [W](29.10) omskrives (i første omgang formelt) til formen (8.39) med

$$(8.40) \quad G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi} \log(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)) + \frac{1}{4\pi} \log(R^2 + \frac{r^2 \rho^2}{R^2} - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)),$$

jvf. [W](30.5). Dette udtryk har en vigtig geometrisk fortolkning. Idet afstanden PQ mellem P og Q opfylder

$$\begin{aligned} (PQ)^2 &= |re^{i\theta} - \rho e^{i\varphi}|^2 = (re^{i\theta} - \rho e^{i\varphi})(re^{-i\theta} - \rho e^{-i\varphi}) \\ &= r^2 + \rho^2 - r\rho(e^{i(\theta - \varphi)} + e^{-i(\theta - \varphi)}) = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi), \end{aligned}$$

ser vi, at første led i $G(P, Q)$ er lig $-\frac{1}{4\pi} \log(PQ)^2 = -\frac{1}{2\pi} \log PQ$. Altså er

$$(8.41) \quad G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \log PQ + \gamma_0(P, Q),$$

hvor

$$(8.42) \quad \gamma_0(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \log(R^2 + \frac{r^2 \rho^2}{R^2} - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)).$$

Første led i (8.41) $-\frac{1}{2\pi} \log PQ$ er defineret for $P \neq Q$ og opfylder

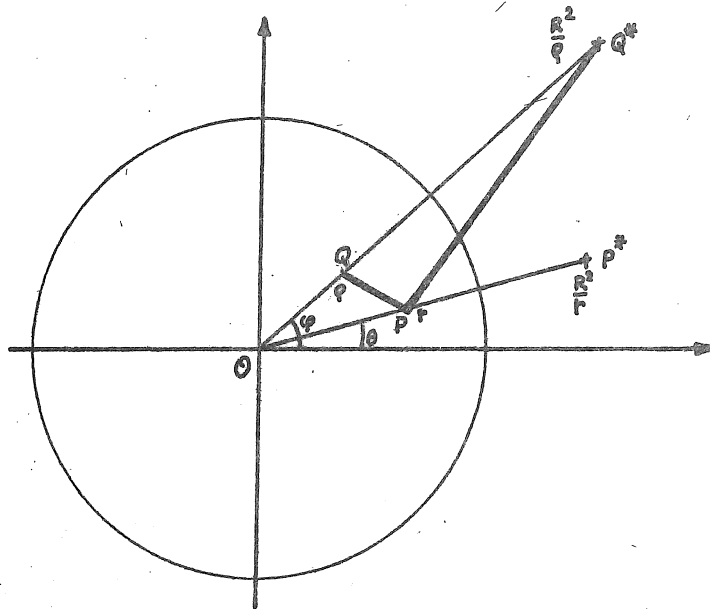
$$(8.43) \quad \Delta_P \log PQ = \Delta_Q \log PQ = 0 \text{ for } P \neq Q. \quad *)$$

(Bevis: $1 \cdot \log r$ (for $r \neq 0$) er en af de separerede løsninger til Laplaces ligning i polære koordinater, som vi fandt i [W] §24; da den er ubegrænset, blev den dog ikke medtaget i rækkeudviklingen. - Det er forøvrigt også let at vise ved direkte udregning, at $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \log \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ for $(x, y) \neq (0, 0)$. Ved

*) Δ_P betegner Laplaceoperatoren mht. P .

udregning af $\Delta_P PQ$ flytter vi koordinatsystemets begyndelsespunkt hen i Q .)

Andet led i (8.41) kan også (på en konstant) tolkes som logaritmen til en afstand i planen, nemlig afstanden mellem P og det punkt Q^* , man får ved at invertere Q i cirklen:



Q^* er det punkt på OQ 's forlængelse, som opfylder $OQ \cdot OQ^* = R^2$, dvs. Q^* har polære koordinater $(\frac{R^2}{\rho}, \varphi)$. (For $Q=0$ defineres Q^* ikke; da er $\gamma_0(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log R$.) Hermed fås

$$(8.44) \quad \begin{aligned} \gamma_0(P, Q) &= \frac{1}{4\pi} \log \left[\frac{\rho^2}{R^2} \left(\left(\frac{R^2}{\rho} \right)^2 + r^2 - 2 \frac{R^2}{\rho} r \cos(\theta - \varphi) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \log \left[\frac{OQ}{R} PQ^* \right] \quad (\text{tolket som } \frac{1}{2\pi} \log R, \text{ når } Q=0). \end{aligned}$$

Når P og Q ligger i \bar{K}_R , kan PQ^* kun blive 0 ved at P og Q er det samme randpunkt af K_R . Altså er $\gamma_0(P, Q)$ defineret for alle (P, Q) i mængden

$$(8.45) \quad A = (\bar{K}_R \times \bar{K}_R) \setminus \{(P, Q) \mid P \in \partial K_R, P=Q\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Det fremgår af (8.44), at $\gamma_0(P, Q)$ for hvert Q er en C^∞ -funktion af P , som opfylder $\Delta_P \gamma_0(P, Q) = 0$, når $(P, Q) \in A$.

For at finde $\gamma_0(P, Q)$'s opførsel som funktion af Q benytter vi, at det følger af (8.42), at $\gamma_0(P, Q) = \gamma_0(Q, P)$ for alle $(P, Q) \in A$, hvormed γ_0 har de analoge egenskaber mht. Q .

Bemærk endnu en egenskab, som ses af (8.42): $\gamma_0(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log PQ$, når P eller $Q \in \partial K_R$. (eller (8.44))

Vi har da ialt fundet:

Lemma 8.6. I det P og Q har de polære koordinater (r, θ) henholdsvis (ρ, φ) , og A betegner mængden (8.45), opfylder funktionen $\gamma_0(P, Q)$, defineret ved (8.42):

$$(8.46) \quad \gamma_0(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{OQ}{R} PQ^* \right) = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{OP}{R} P^*Q \right) \quad \left(\text{tolket som } \frac{1}{2\pi} \log R, \text{ n\u00e5r } Q \text{ eller } P=O \right),$$

$$(8.47) \quad \gamma_0(P, Q) \text{ er en } C^\infty\text{-funktion af } P \text{ og af } Q \text{ for } (P, Q) \in A,$$

$$(8.48) \quad \Delta_P \gamma_0(P, Q) = \Delta_Q \gamma_0(P, Q) = 0 \text{ for } (P, Q) \in A,$$

$$(8.49) \quad \gamma_0(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log PQ, \text{ n\u00e5r } P \text{ eller } Q \in \partial K_R,$$

$$(8.50) \quad \gamma_0(P, Q) = \gamma_0(Q, P) \text{ for } (P, Q) \in A.$$

Betragt nu $G(P, Q)$ igen. Denne er kun defineret p\u00e5 den mindre m\u00e6ngde

$$(8.51) \quad A' = (\bar{K}_R \times \bar{K}_R) \setminus \{ (P, Q) \mid P \in \bar{K}_R, P=Q \}.$$

Ved hj\u00e6lp af Lemma 8.6 ser vi, at funktionen har f\u00f8lgende egenskaber:

S\u00e6tning 8.7. $G(P, Q)$, defineret ved

$$(8.41) \quad G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \log PQ + \gamma_0(P, Q)$$

p\u00e5 m\u00e6ngden A' (se (8.51)), er en C^∞ -funktion af P og af Q , og opfylder:

$$(8.52) \quad \begin{cases} (a) & \Delta_P G(P, Q) = \Delta_Q G(P, Q) = 0, \text{ for } (P, Q) \in A', \\ (b) & G(P, Q) = 0, \text{ n\u00e5r } P \text{ eller } Q \in \partial K_R. \end{cases}$$

Endvidere er $G(P, Q) = G(Q, P)$ for alle $(P, Q) \in A'$.

Bevis: (a) f\u00f8lger af (8.43) og (8.48). (b) f\u00f8lger af (8.49) (jvf. (8.41)). \square

Egenskaberne (8.52) (a) og (b) svarer helt til egenskaberne (a) og (b) i [W] (28.4) (eller (a) og (b) i S\u00e6tning 8.1) for Greens funktion i det endimensionale tilf\u00e6lde. Hele s\u00e6ttet (a), (b), (c), (d) i [W] (28.4) (eller i S\u00e6tning 8.1) sikrede, at Greens funktion $G(x, \xi)$ definerede l\u00f8sningsoperatoren [W] (28.3) (eller (8.12)). I det flerdimensionale tilf\u00e6lde, vi nu betragter, kan (c) og (d) ikke direkte

generaliseres, idet singulariteten af $G(P, Q)$ ved $P=Q$ ikke mere er en simpel, hævelig diskontinuitet. Det viser sig, at (c) og (d) simpelthen må erstattes med oplysningen: $G(P, Q)$ er sum af et logaritmisk led $-\frac{1}{2\pi} \log PQ$ og en funktion, der er C^∞ efter P og Q på hele $K_R \times K_R$.

Dette udsagn sammen med (8.52) (a) og (b) samt kravet om at $G(P, Q)$ er en C^∞ -funktion af P og af Q for $(P, Q) \in A'$, bestemmer $G(P, Q)$ entydigt. Thi en funktion, der opfylder disse betingelser, har form som en sum: $-\frac{1}{2\pi} \log PQ + g(P, Q)$, hvor $g(P, Q)$, for hvert fast $Q \in K_R$, er løsning til det specielle Dirichlet problem

$$(8.53) \quad \begin{cases} \Delta_P g(P, Q) = 0 & \text{for } P \in K_R, \\ g(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log PQ & \text{for } P \in \partial K_R. \end{cases}$$

Vi ved fra vor generelle entydighedssætning for Laplace-operatoren, at problemet (8.53) har højst en løsning (for hvert $Q \in K_R$). Ved at benytte den simple geometriske karakter af området K_R har vi fundet løsningen $\gamma_0(P, Q)$, jvf. Lemma 8.6.

På basis af Lemma 8.6 - Sætning 8.7 kan man endelig verificere, at

$$(8.54) \quad u(P) = \int_{K_R} G(P, Q) F(Q) dQ$$

har mening og definerer en løsning til Dirichlet problemet (8.38) med $D = K_R$, når $F \in C^1(K_R)$ og er begrænset. Det er her ikke svært at behandle selve integralet og de første partielle afledede, idet den logaritmiske singularitet af $G(P, Q)$ og singulariteterne af de første partielle afledede af $G(P, Q)$, som er af typen $\frac{1}{PQ}$, afhjælpes af faktoren ρ i $dQ = \rho d\rho d\varphi$. (For integralet i en lille cirkel $K_{\rho, \epsilon}$ omkring det farlige punkt P indføres polære koordinater med P som begyndelsespunkt, så ρ bliver til PQ .) For de partielle afledede af anden orden af $u(P)$ må man imidlertid anvende en mere snedig teknik, idet PQ gange de anden afledede af $G(P, Q)$ er for singulære. For det i [W] §30 angivne bevis er princippet, at man inddrager nogle differenskvotienter af F , hertil anvendes at $F \in C^1(K_R)$. Problemet om verifikation af den oprindelige differentiaalligning (i (x, y) -koordinater) i den fulde enhedscirkel (inklusive den negative x -akse) berøres ikke. Et bevis formuleret direkte i (x, y) -koordinater

naterne findes f.ex. i Courant - Hilbert: Methods of Mathematical Physics I s. 366 - 368; her foretages en delvis integration, der fører den anden differentiation over på F.

At selve (8.54) definerer en kontinuert funktion $u(P)$ på \bar{K}_R gælder, når blot F er kontinuert på K_R og begrænset. Det følger direkte af (8.52)(b), at $u(P) = \int_{K_R} 0 \cdot F(Q) dQ = 0$ for $P \in \partial K_R$.

Vi har i alt:

Sætning 8.8. Når $F \in C^1(K_R)$ og er begrænset, er $u(P) = \int_{K_R} G(P,Q) F(Q) dQ$ kontinuert på \bar{K}_R , og

$$(8.55) \quad -\Delta_P \int_{K_R} G(P,Q) F(Q) dQ = F(P) \quad \text{for } P \in K_R,$$

$$\int_{K_R} G(P,Q) F(Q) dQ = 0 \quad \text{for } P \in \partial K_R.$$

Ovenstående analyse af Dirichlet problemet for K_R har interesse, fordi de vigtigste principper nu også kan vises at gælde for generelle områder D , jvf. [W] s. 135-136.

Når $G(P,Q) = -\frac{1}{2\pi} \log PQ + \gamma_0(P,Q)$ indsættes i (8.55), ser vi straks, at også

$$(8.56) \quad -\Delta_P \int_{K_R} \frac{-1}{2\pi} \log PQ F(Q) dQ = F(P) \quad \text{for } P \in K_R,$$

fordi $\gamma_0(P,Q)$ opfylder (8.47) og (8.48), så Δ_P kan flyttes inden for integraltegnet i dette led. Vi får da videre:

Sætning 8.9. For et vilkårligt, begrænset område $D \subset \mathbb{R}^2$ gælder, når $F \in C^1(D)$ og er begrænset:

$$(8.57) \quad -\Delta_P \int_D \frac{-1}{2\pi} \log PQ F(Q) dQ = F(P) \quad \text{for } P \in D.$$

Bevis: Lad $P_0 \in D$ og vælg en lille cirkel $K_{P_0, \epsilon}$ med centrum P_0 og radius ϵ , så $K_{P_0, \epsilon} \subset D$. Når $P \in K_{P_0, \frac{\epsilon}{2}}$ og $Q \in D \setminus K_{P_0, \epsilon}$, er $PQ \geq \frac{\epsilon}{2}$, hvormed

$$-\Delta_P \int_{D \setminus K_{P_0, \epsilon}} \frac{-1}{2\pi} \log PQ F(Q) dQ = \int_{D \setminus K_{P_0, \epsilon}} \Delta_P \left(\frac{1}{2\pi} \log PQ \right) F(Q) dQ = 0 \quad \text{for } P \in K_{P_0, \frac{\epsilon}{2}}.$$

Da fås for $P \in K_{P_0, \frac{\epsilon}{2}}$:

$$-\Delta_P \int_D \frac{-1}{2\pi} \log PQ \cdot F(Q) dQ = -\Delta_P \int_{K_{P_0, \epsilon}} \frac{-1}{2\pi} \log PQ \cdot F(Q) dQ = F(P),$$

ved (8.56) (med begyndelsespunkt P og $R = \epsilon$). \square

Sætningen giver en universel metode til konstruktion af en løsning til differentialligningen

$$-\Delta u = F \quad \text{i } D,$$

for hvert D . En løsning, der yderligere er tilpasset randbetingelsen

$$u = 0 \quad \text{på } C = \partial D,$$

får man ved at konstruere en funktion $\gamma(P, Q)$ med egenskaber som i Lemma 8.6, relativt til området D :

$$(8.58) \left\{ \begin{array}{l} \gamma(P, Q) \text{ er en } C^\infty\text{-funktion af } P \text{ og af } Q \text{ for } (P, Q) \in A, \text{ hvor} \\ A = (\bar{D} \times \bar{D}) \setminus \{(P, Q) \mid P \in C, P = Q\}, \\ \Delta_P \gamma(P, Q) = \Delta_Q \gamma(P, Q) = 0 \quad \text{for } (P, Q) \in A; \\ \gamma(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log PQ, \quad \text{når } P \text{ eller } Q \in C. \end{array} \right.$$

Greens funktion for D bliver da

$$G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \log PQ + \gamma(P, Q),$$

som har egenskaberne i Sætning 8.8 (med K_P erstattet med D); hvormed Dirichlet problemet (8.38) har løsningen u bestemt ved (8.39), når $F \in C^1(D)$ og er begrænset. Ved verifikationen af at $-\Delta u = F$ i et punkt P viser man, at kun det logaritmiske led bidrager (og kun i en lille omegn omkring P). Randbetingelsen er opfyldt, fordi $G(P, Q)$ er defineret således, at den er 0, når $P \in C$.

Funktionen $\gamma(P, Q)$ kendes eksplicit for nogle få områder af simpel geometrisk natur. Eksistensen af γ følger i almindelighed af en eksistenssætning for løsninger til (8.58), som egentlig beskriver en skare af specielle Dirichlet problemer (mht. P for fastholdt Q , og omvendt).

Eksempel. Området $D = \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \mid x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ er ubegrænset, men af en så enkel type, at ovenstående betragtninger kan gennemføres for dette. Vi vælger her $\gamma(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log(P\tilde{Q})$,

hvor \tilde{Q} er det punkt, der fås fra Q ved spejling i y -aksen (dvs. når $Q = (\xi, \eta)$, er $\tilde{Q} = (-\xi, \eta)$). Greens funktion bliver altså

$$G(P, Q) = G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \frac{1}{2\pi} \sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \log \frac{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

Når $F \in C^1(\mathbb{R}_+^2)$, er begrænset og har kompakt støtte, definerer

$$u(x, y) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4\pi} \log \left[\frac{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right] F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

løsningen til

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = F(x, y) & \text{for } x > 0, y \in \mathbb{R}, \\ u(0, y) = 0 & \text{for } y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

K 8.6 Greens funktion for Dirichlet problemet i flere end to variable.

Bemærkninger til [W] §35 og §45.

Funktionen $-\frac{1}{2\pi} \log PQ$, som angiver singulariteten af enhver Greens funktion $G(P, Q)$ for Poissons ligning i to variable, og som opfylder Sætning 8.9 for ethvert $D \subset \mathbb{R}^2$, kaldes en fundamentalløsning til Laplace operatoren på \mathbb{R}^2 . For \mathbb{R}^3 finder man, jvf. [W] §35, at funktionen

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{PQ}$$

har den tilsvarende egenskab; Greens funktion for Dirichlet problemet (8.38) for et vilkårligt område $D \subset \mathbb{R}^3$ (med rand C) er af formen

$$G(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{PQ} + \gamma(P, Q),$$

hvor $\gamma(P, Q)$ opfylder

$$\Delta_P \gamma(P, Q) = \Delta_Q \gamma(P, Q) = 0 \quad \text{for alle } P, Q \in D,$$

$$\gamma(P, Q) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{PQ} \quad \text{når } P \text{ eller } Q \in C.$$

Da får $G(P, Q)$ egenskaberne i Sætning 8.8 (med K_R erstattet med D), og løsningen til Dirichlet problemet (8.38) udtrykkes ved (8.39), når $F \in C^1(D)$ og er begrænset.

For kuglen (jvf. [W] §45)

$$D = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \}$$

konstrueres $G(P, Q)$ analogt til ved cirklen:

$$G(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{PQ} - \frac{1}{4\pi} \frac{R}{OQ} \frac{1}{PQ^*} \left[= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{PQ} - \frac{1}{4\pi} \frac{R}{OP} \frac{1}{P^*Q} \right],$$

hvor Q^* er punktet på OQ 's forlængelse med afstand $\frac{R^2}{OQ}$ fra centrum O . (Q^* kaldes billedet af Q ved inversion i kuglen med radius R .)

J \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, finder man som fundamentalløsning

$$\frac{1}{(n-2)c_n} \frac{1}{(PQ)^{n-2}},$$

hvor c_n er arealet af enhedskuglen i \mathbb{R}^n . Greens funktion for en kugle findes atter som sum af fundamentalløsningen og en funktion dannet herudfra ved inversion af Q (eller P) i kuglen. (Flere detaljer i Courant-Hilbert: Methods of Mathematical Physics II, s. 264 ff.)

Også i tilfældet af flere end én variabel møder man formlen (8.55) udtrykt ved hjælp af δ -målet (som i n variable er karakteriseret ved $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(\underline{x}) f(\underline{x}) dx_1 \dots dx_n = f(\underline{0})$, for enhver kontinuert funktion på \mathbb{R}^n):

$$-\Delta_P \int_D G(P, Q) F(Q) dQ = \int_D \delta(PQ) F(Q) dQ, \text{ for } P \in D.$$

Dette udtrykkes også ved formlen

$$-\Delta_P G(P, Q) = \delta(PQ),$$

hvis geometriske begrundelse dog ikke er helt så ligetil som begrundelsen i 1 dimension (i Afsnit 8.3).

9. Sturm-Liouville problemet.

K 9.1. Elementære egenskaber samt eksistens af egenfunktioner og egenverdier.

Dette og det følgende afsnit kommenterer [W] §36.

§36 i [W] giver en særdeles lettilgængelig og elegant udledning af de vigtigste egenskaber ved Sturm-Liouville problemet. Det følgende er en systematisk fremstilling af bevisgangen i [W] §36, med de notationsmæssige lettelser, vi har til rådighed fra noterne.

Man betragter egenværdiproblemet på et egentligt, begrænset interval $[\alpha, \beta]$ (valgt som $[0, 1]$ i [W] §36):

$$(9.1) \quad \begin{cases} (a) & -(pu')' + qu = \lambda \rho u \quad \text{på }]\alpha, \beta[, \\ (b) & u(\alpha) = u(\beta) = 0, \end{cases}$$

hvor p, q og ρ er givne funktioner på $[\alpha, \beta]$, med egenskaberne

$$(9.2) \quad \begin{cases} p \in C^1([\alpha, \beta]), \quad q \text{ og } \rho \in C^0([\alpha, \beta]); \\ p > 0, \quad q \geq 0 \text{ og } \rho > 0 \text{ på } [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Et sådant problem kaldes et regulært Sturm-Liouville problem. Singulære Sturm-Liouville problemer er problemer, hvor p, q og ρ opfylder (9.2) med undtagelser i visse punkter, og randbetingelsen (b) er tilpasset hertil (intervallet $]\alpha, \beta[$ eventuelt ubegrænset).

Mere abstrakt kan (9.1) skrives

$$(9.3) \quad Lu = \lambda u,$$

hvor L er differentialoperatoren defineret ved

$$(9.4) \quad \begin{cases} Lu = \frac{1}{\rho} [-(pu')' + qu], \\ D(L) = \{ u \in C^2([\alpha, \beta]) \mid u(\alpha) = u(\beta) = 0 \}. \end{cases}$$

De værdier af λ , for hvilke (9.3) (eller (9.1)) kan finde sted med $u \neq 0$ kaldes egenverdier (ev.), og de pågældende funktioner $u \neq 0$ kaldes egenfunktioner (ef.) hørende til λ . Som egenrummet for λ betegnes mængden af alle ef. u hørende til λ samt funktionen 0. Egenrummet

for λ er klart et lineært underrum af $D(L)$, af dimension 21.

Sammen med L skal vi bruge differentialoperatoren L_0 defineret ved

$$(9.5) \quad L_0 u = -(pu')' + qu \quad ; \quad D(L_0) = D(L).$$

φ kommer til at spille rollen som vægtfunktion som i Kapitel 5; vi minder om notationerne

$$(f|g)_\varphi = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)\varphi(x) dx \quad , \quad \|f\|_\varphi^2 = \int_\alpha^\beta f(x)^2 \varphi(x) dx,$$

defineret for funktioner i det lineære rum $M_\varphi([\alpha, \beta])$. (Under forudsætningerne (9.2) er $M_\varphi([\alpha, \beta]) = M_1([\alpha, \beta])$.)

Vi får endvidere ofte lejlighed til at betragte den bilineære form

$$(9.6) \quad \ell(f, g) = \int_\alpha^\beta (p(x) f'(x) g'(x) + q(x) f(x) g(x)) dx$$

defineret på rummet V :

Definition 9.1: V defineres som mængden af funktioner f på $[\alpha, \beta]$, som opfylder

(i). $f \in C^0([\alpha, \beta])$ med $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

(ii) f' eksisterer som funktion i M , og

$$(9.7) \quad \ell(f, f) = \int_\alpha^\beta (p(f')^2 + q f^2) dx < \infty.$$

Når f og $g \in V$, følger eksistensen af integralet i (9.6) ved Schwarz' ulighed. Under betingelserne (9.2) på p og q kan uligheden i (9.7) simpelthen erstattes med

$$(9.8) \quad \int_\alpha^\beta (f'(x))^2 dx < \infty.$$

Formen (9.7) har imidlertid betydning, når vi går over til singulære S.-L. problemer.

Bemærk, at der gælder

$$(9.9) \quad D(L) \subset V \subset M_\varphi([\alpha, \beta]),$$

som ægte delmængder.

Bemærkning 9.2. Det er let at vise, at når q ikke er identisk 0, er $\ell(f, g)$ et skalarprodukt på V , med tilhørende norm $\sqrt{\ell(f, f)}$. Denne er ikke ækvivalent med $\|f\|_\varphi$.

Vi skal nu undersøge egenverdier og egenrum.

Lemma 9.3. Alle egenrum er endimensionale. For hver egenfunktion u gælder $u'(\alpha) \neq 0$.

Bevis. Lad $\lambda \in \mathbb{R}$. For hvert $c \in \mathbb{R}$ har problemet

$$(9.10) \quad \begin{cases} (L - \lambda)u = 0 \text{ på }]\alpha, \beta[& (\text{dvs. } u'' + \frac{p'}{p}u' + \frac{\lambda q - q}{p}u = 0), \\ u(\alpha) = 0, \\ u'(\alpha) = c, \end{cases}$$

en og kun en løsning; idet u_0 betegner løsningen med $c=1$, er løsningen for vilkårligt c lig med cu_0 ; ikke trivielle løsninger fås for $c \neq 0$. Løsningsmængden til

$$(9.11) \quad \begin{cases} (L - \lambda)u = 0 \text{ på }]\alpha, \beta[, \\ u(\alpha) = 0, \end{cases}$$

er altså endimensional, parametriseret ved $u'(\alpha)$. Hvis $u_0(\beta) \neq 0$, er λ egenverdi og den tilhørende mængde af egenfunktioner består af funktionerne cu_0 , $c \neq 0$. Hvis $u_0(\beta) = 0$, er λ ikke egenverdi. \square

Udsagnet gælder ikke for alle typer af randbetingelser (f.ex. ikke for de periodiske randbetingelser for $\mathbb{H}(\theta)$ betragtet i [W]§24).

Følgende omskrivninger bruges igen og igen:

Lemma 9.4. Lad $\varphi \in \mathcal{D}(L)$, $\psi \in V$. Da er

$$(9.12) \quad (L\varphi | \psi)_p = \ell(\varphi, \psi).$$

Specielt gælder

$$(9.13) \quad (L\varphi | \psi)_p = (\varphi | L\psi), \text{ når } \varphi \text{ og } \psi \in \mathcal{D}(L).$$

Bevis: Delvis integration, hvor det anvendes at randværdierne er 0 (for tilladeligheden, se Lemma 5.17): Når $\varphi \in \mathcal{D}(L)$, $\psi \in V$, er

$$\begin{aligned} (L\varphi | \psi)_p &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{p} [-(p\varphi')' + q\varphi] \psi \, dx \\ &= - \cancel{p\varphi'\psi} \Big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} (p\varphi'\psi' + q\varphi\psi) \, dx \\ &= \ell(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Hvis også $\psi \in \mathcal{D}(L)$, er dette endvidere

$$\begin{aligned}
 &= \cancel{\varphi p \psi'} \Big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} \varphi [-(p\psi)'+q\psi] dx \\
 &= (\varphi | L\psi)_{\rho} . \square
 \end{aligned}$$

Operatorer, som opfylder (9.13), kaldes symmetriske (i fysikken ofte hermitiske, specielt ved komplekse skalarprodukter). Ordet selvadjungeret bruges om operatorer, der opfylder (9.13) samt en vis fuldstændighedsbetingelse.

Lemma 9.5. Egenrummene for L er indbyrdes ortogonale mht. ρ , dvs. hvis u er en egenfunktion for λ , v er egenfunktion for μ , og $\lambda \neq \mu$, er $(u|v)_{\rho} = 0$.

Bevis. Da u og $v \in \mathcal{D}(L)$ og $Lu - \lambda u = 0$, $Lv - \mu v = 0$, fås ved brug af (9.13)

$$0 = (Lu - \lambda u | v)_{\rho} - (u | Lv - \mu v)_{\rho} = (\mu - \lambda) (u|v)_{\rho} ,$$

hvoraf $(u|v)_{\rho} = 0$, da $\mu - \lambda \neq 0$. \square

Lemma 9.6. Når u er egenfunktion hørende til λ , gælder

$$(9.14) \quad \lambda \|u\|_{\rho}^2 = \ell(u, u) = \int_{\alpha}^{\beta} (p(u')^2 + qu^2) dx ;$$

specielt haves, at alle egenverdier er positive.

Bevis: Vi ser af (9.12), at

$$\lambda \|u\|_{\rho}^2 = (\lambda u | u)_{\rho} = (Lu | u)_{\rho} = \ell(u, u) = \int_{\alpha}^{\beta} (p(u')^2 + qu^2) dx .$$

Denne størrelse er klart ≥ 0 . Da $u'(\alpha) \neq 0$ (Lemma 9.3) og $p > 0$ på $[\alpha, \beta]$, er størrelsen > 0 ; da er $\lambda > 0$. \square

Den sidste udtalelse i lemmaet gælder ikke for alle randbetingelser, f.ex. ikke for randbetingelsen $u'(\alpha) = u'(\beta) = 0$ for operatoren $-\frac{d^2}{dx^2}$ (eller den periodiske randbetingelse betragtet i [W] §24).

Da 0 ikke er egenverdi for det forelagte problem, har operatoren L_0 (se (9.5)) en Greens funktion $G(x, \xi)$. Bemærk, at $G(x, \xi)$, betragtet som funktion af x for fast ξ (eller omvendt), tilhører V , jvf. Sætning 8.1. $G(x, \xi)$

benyttes til at opnå nogle mere dybtgående udsagn om systemet af egenfunktioner.

Lemma 9.7. En funktion $u \in C^0([\alpha, \beta])$ er egenfunktion for L hørende til en egenværdi λ hvis og kun hvis

$$u(x) = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) u(\xi) \rho(\xi) d\xi \quad \text{for alle } x \in [\alpha, \beta].$$

Bevis: At $u \in D(L)$ med $Lu = \lambda u$ er ensbetydende med at u er løsning til

$$\begin{cases} L_0 u = f & \text{på }]\alpha, \beta[, \\ u(\alpha) = u(\beta) = 0, \end{cases}$$

med $f = \lambda \rho u$. Ifølge Kapitel 8 (eller [W] §28) gælder dette hvis og kun hvis

$$u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) \lambda \rho(\xi) u(\xi) d\xi \quad \text{for } x \in [\alpha, \beta]. \quad \square$$

Den sidste identitet skrives også

$$(9.15) \quad u(x) = \lambda (G(x, \cdot) | u(\cdot))_{\rho} \quad \text{for } x \in [\alpha, \beta],$$

jvf. fodnoten side 8.4.

Dette benyttes til at vise

Lemma 9.8. Lad $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ være en endelig mængde af indbyrdes forskellige egenværdier. Da er

$$(9.16) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^2} \leq \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi)^2 \rho(x) \rho(\xi) dx d\xi.$$

Bevis. For hvert j betegner u_j en ef. hørende til λ_j . Da u_1, \dots, u_n er et (endeligt) ortogonalsystem, kan vi udvikle $G(x, \cdot)$ efter dette for hvert fast x , og Fourierkoefficienterne bliver ifølge (9.15)

$$(9.17) \quad c_j(G(x, \cdot)) = \frac{(G(x, \cdot) | u_j(\cdot))_{\rho}}{\|u_j\|_{\rho}^2} = \frac{u_j(x)}{\lambda_j \|u_j\|_{\rho}^2}.$$

Bessels ulighed giver nu

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{u_j(x)}{\lambda_j \|u_j\|_{\rho}^2} \right)^2 \|u_j\|_{\rho}^2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi)^2 \rho(\xi) d\xi.$$

hvoraf, efter multiplikation med $\rho(x)$ og integration mht. $x \in [\alpha, \beta]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi)^2 \rho(\xi) \rho(x) d\xi dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x) \sum_{j=1}^n \frac{u_j(x)^2}{\lambda_j^2 \|u_j\|_{\rho}^2} dx$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^2} \frac{\|u_j\|_{\rho}^2}{\|u_j\|_{\rho}^2} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^2} \quad \square$$

Heraf følger straks

Sætning 9.9. 1° Hvert begrænset interval af den reelle akse indeholder kun endeligt mange egenverdier; dvs. mængden af egenverdier er enten endelig eller udgør en følge, som konvergerer mod $+\infty$.

2° Lad ω = antallet af egenverdier ($\omega \leq +\infty$), og arranger mængden af egenverdier som en følge $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\omega}$. Da er

$$(9.18) \quad \sum_{n=1}^{\omega} \frac{1}{\lambda_j^2} \leq \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi)^2 \rho(x) \rho(\xi) dx d\xi.$$

Bevis. På grund af Lemma 9.6 behøver vi kun at undersøge intervaller af \mathbb{R}_+ . Lad $a > 0$. Hvis der var uendeligt mange egenverdier i $]0, a]$, fandtes der specielt en følge $(\mu_j)_{j=1}^{\infty}$ af egenverdier $\in]0, a]$. For denne ville gælde

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j^2} \geq n \cdot \frac{1}{a^2} \rightarrow \infty \text{ for } n \rightarrow \infty,$$

i modstrid med (9.16).

Altså er der kun endeligt mange egenverdier i hvert begrænset interval $]0, a]$, $a \in \mathbb{R}_+$, og vi kan ordne samtlige egenverdier i voksende rækkefølge

$$(9.19) \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

nummereret ved de naturlige tal $\leq \omega$, hvor ω er det samlede antal ev. ($\omega \leq +\infty$). Da (9.16) gælder for hvert afsnit i rækken $\sum_{j=1}^{\omega} \frac{1}{\lambda_j^2}$, gælder uligheden også for rækkens sum. \square

Vi skal senere se, at $\omega = +\infty$, og at der gælder lighedstegn i (9.18).

Fra nu af tænker vi os systemet af egenverdier ordnet ved (9.19), og vi vælger for hver ev. λ_n en

tilhørende ef. u_n . Da systemet $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ udgør et (endeligt eller numerabelt) ortogonalsystem, kan vi danne Fourierrækker efter dette. (Det overlades til læseren at tilpasse teorien i Kapitel 5 til endelige ortogonalsystemer.) For $f \in M_p$ er Fourierkoefficienterne (jvf. Definition 5.10)

$$c_n(f) = \frac{(f | u_n)_p}{\|u_n\|_p^2}$$

Lemma 9.10. For $\varphi \in D(L)$ gælder $(L\varphi | u_n)_p = \lambda_n (\varphi | u_n)_p$ for alle n , og dermed

$$(9.20) \quad c_n(L\varphi) = \lambda_n c_n(\varphi).$$

Bevis: Da φ og $u_n \in D(L)$, haves ved (9.13),

$$(L\varphi | u_n)_p = (\varphi | Lu_n)_p = (\varphi | \lambda_n u_n)_p = \lambda_n (\varphi | u_n)_p. \quad \square$$

Eksempel. Problemet

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

har som bekendt som egenfunktioner $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ med tilhørende egenverdier n^2 . Lemma 9.10 udtrykker, at $c_n(-f'') = n^2 c_n(f)$, når $f \in D(L)$; et fænomen, vi har udnyttet kraftigt ved separationsmetoderne i [W]§22, 23, 26 og 29. Dette var let at vise, fordi differentialoperatoren var så enkel.

(Vi har også andre steder udnyttet, at den trigonometriske række for en funktion f og dennes differentialkvotienter har en simpel sammenhæng (under passende betingelser på f), jvf. Lemma 5.18 og udregningerne side 6.6. Sammenhængen er mest slående ved den komplekse notation: $c_n(f') = in c_n(f)$, når f.ex. $f \in C^1([0, 2\pi])$ med $f(0) = f(2\pi)$. Princippet er her, at anvendelse af en differentialoperator med konstante koefficienter svarer til multiplikation af koefficienterne i den komplekse trigonometriske række for f med et polynomium i n .)

Det spændende ved Lemma 9.10 er, at det viser, at ortogonalsystemet $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ frembyder et lignende fænomen mht. differentialoperatoren L , hvis koefficienter p, q og ρ i reglen ikke er konstanter.

Vi har to vigtige problemer at undersøge: eksistensen af en uendelig følge af egenfunktioner for L , og fuldstændigheden af dette ortogonalsystem. Vi begynder

med en analyse.

Lemma 9.11. Hvis systemet $\{u_n\}_{n=1}^{\omega}$ er fuldstændigt, gælder

$$(9.21) \quad \|\varphi\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{n=1}^{\omega} c_n(\varphi)^2 \|u_n\|_{\mathcal{F}}^2 \quad \text{for } \varphi \in M_{\mathcal{F}},$$

$$(9.22) \quad [(L\varphi | \varphi)_{\mathcal{F}} =] \quad \ell(\varphi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\omega} \lambda_n c_n(\varphi)^2 \|u_n\|_{\mathcal{F}}^2 \quad \text{for } \varphi \in \mathcal{D}(L),$$

$$(9.23) \quad \|L\varphi\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{n=1}^{\omega} \lambda_n^2 c_n(\varphi)^2 \|u_n\|_{\mathcal{F}}^2 \quad \text{for } \varphi \in \mathcal{D}(L).$$

Bevis. (9.21) er Parsevals ligning for φ . (9.23) fås af Parsevals ligning for $L\varphi$, ved brug af (9.20). Idet $c_n(L\varphi + \varphi) = c_n(L\varphi) + c_n(\varphi) = (\lambda_n + 1) c_n(\varphi)$, fås (9.22) ved

$$\begin{aligned} \ell(\varphi, \varphi) &= (L\varphi | \varphi)_{\mathcal{F}} = \frac{1}{2} (\|L\varphi + \varphi\|_{\mathcal{F}}^2 - \|L\varphi\|_{\mathcal{F}}^2 - \|\varphi\|_{\mathcal{F}}^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\omega} (\lambda_n + 1)^2 c_n(\varphi)^2 \|u_n\|_{\mathcal{F}}^2 - \sum_{n=1}^{\omega} \lambda_n^2 c_n(\varphi)^2 \|u_n\|_{\mathcal{F}}^2 - \sum_{n=1}^{\omega} c_n(\varphi)^2 \|u_n\|_{\mathcal{F}}^2 \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\omega} \left(\frac{1}{2} [(\lambda_n + 1)^2 - \lambda_n^2 - 1] c_n(\varphi)^2 \|u_n\|_{\mathcal{F}}^2 \right) = \sum_{n=1}^{\omega} \lambda_n c_n(\varphi)^2 \|u_n\|_{\mathcal{F}}^2. \quad \square \end{aligned}$$

Vi nævner endvidere, at (9.22) faktisk gælder for $\varphi \in V$:

$$(9.22') \quad \ell(\varphi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\omega} \lambda_n c_n(\varphi)^2 \|u_n\|_{\mathcal{F}}^2 \quad \text{for alle } \varphi \in V;$$

dette oplyses i [W] s. 166 l. 10 f.n. - l. 6 f.n. uden egentlig redegørelse, men vil blive diskuteret nedenfor (Lemma 9.20).

Sætning 9.12. Hvis ortogonalsystemet $\{u_n\}_{n=1}^{\omega}$ er fuldstændigt, opfylder den k -te egen værdi

$$\lambda_k = \min \left\{ \frac{\ell(\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\mathcal{F}}^2} \mid \varphi \in \mathcal{D}(L) \setminus \{0\}, (\varphi | u_1)_{\mathcal{F}} = \dots = (\varphi | u_{k-1})_{\mathcal{F}} = 0 \right\};$$

dette minimum antages for $\varphi = u_k$.

Bevis. Da egen værdierne er ordnet ved (9.19), har vi for $\varphi \in \mathcal{D}(L) \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \ell(\varphi, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\omega} \lambda_n c_n(\varphi)^2 \|u_n\|_{\mathcal{F}}^2 \geq \lambda_1 \sum_{n=1}^{\omega} c_n(\varphi)^2 \|u_n\|_{\mathcal{F}}^2 \\ &= \lambda_1 \|\varphi\|_{\mathcal{F}}^2, \end{aligned}$$

så

$$\lambda_1 \leq \frac{\ell(\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\mathcal{F}}^2} \quad \text{for alle } \varphi.$$

For $\varphi = u_1$ er $\frac{\ell(u_1, u_1)}{\|u_1\|_p^2} = \frac{(Lu_1 | u_1)_p}{\|u_1\|_p^2} = \lambda_1$. Dette viser sætningen for $k=1$.

For $k > 1$ observerer vi, at når $(\varphi | u_1)_p = (\varphi | u_2)_p = \dots = (\varphi | u_{k-1})_p = 0$, er $c_1(\varphi) = \dots = c_{k-1}(\varphi) = 0$, så at

$$\ell(\varphi, \varphi) = \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n c_n(\varphi)^2 \|u_n\|_p^2 \geq \lambda_k \sum_{n=k}^{\infty} c_n(\varphi)^2 \|u_n\|_p^2 = \lambda_k \|\varphi\|_p^2;$$

for sådanne φ gælder (når $\varphi \neq 0$)

$$\lambda_k \leq \frac{\ell(\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_p^2}$$

Specielt er $\varphi = u_k$ af denne art og opfylder

$$\frac{\ell(u_k, u_k)}{\|u_k\|_p^2} = \frac{(Lu_k | u_k)_p}{\|u_k\|_p^2} = \lambda_k. \quad \square$$

Udtrykket $\frac{\ell(\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_p^2}$ er så vigtigt, at det tillægges et specielt navn:

Definition 9.13. For $\varphi \in V \setminus \{0\}$ defineres Rayleighkvotienten $R(\varphi)$ ved

$$(9.24) \quad R(\varphi) = \frac{\ell(\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_p^2} \left(= \frac{\int_{\alpha}^{\beta} (p(\varphi')^2 + q\varphi^2) dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2 \rho dx} \right).$$

Bemærk, at man specielt har:

$$(9.25) \quad R(u_k) = \lambda_k \quad \text{for hvert } k;$$

dette indgik i ovenstående bevis.

Sætning 9.12 tjener som en inspiration til at give en karakterisering af egenfunktionerne, uden forudsætning om at der er uendeligt mange, endsige at systemet af dem er fuldstændigt.

For hvert $1 < k \leq \infty$ defineres

$$(9.26) \quad V_k = \{ \varphi \in V \mid (\varphi | u_1)_p = \dots = (\varphi | u_{k-1})_p = 0 \}.$$

Vi sætter $V_1 = V$.

Sætning 9.14 (Minimumsprincippet).

(i) Hvis $R(\varphi)$, betragtet på mængden $V \setminus \{0\}$, antager minimum ved ψ , og $\psi \in D(L)$, da er ψ egenfunktion hørende til den laveste egenverdi λ_1 , og $R(\psi) = \lambda_1$.

(ii) Lad $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \omega$. Hvis $R(\varphi)$, betragtet på mængden $V_k \setminus \{0\}$, antager minimum ved ψ , og $\psi \in \mathcal{D}(L)$, da er ψ et multiplum af u_k , og $R(\psi) = \lambda_k$.

Bevis. (i). Vi antager, at $R(\varphi)$, betragtet på $V \setminus \{0\}$, antager minimum ved ψ , som tilhører $\mathcal{D}(L)$. Betegn $R(\psi) = \mu$. Lad $\varphi \in V$, og dan funktionen

$$f(\varepsilon) = R(\psi + \varepsilon\varphi).$$

Funktionen er defineret i et egentligt interval $]-\eta, \eta[$ (η er i almindelighed $= +\infty$, men endelig og > 0 , hvis φ er proportional med ψ). Da $f(0) = R(\psi)$, følger det af antagelsen, at

$$(9.27) \quad f(\varepsilon) \geq f(0) \quad \text{for alle } \varepsilon \in]-\eta, \eta[.$$

Nu er $f(\varepsilon)$ en rationel funktion af ε

$$f(\varepsilon) = \frac{\ell(\psi + \varepsilon\varphi, \psi + \varepsilon\varphi)}{(\psi + \varepsilon\varphi | \psi + \varepsilon\varphi)_\rho} = \frac{\ell(\psi, \psi) + 2\varepsilon \ell(\psi, \varphi) + \varepsilon^2 \ell(\varphi, \varphi)}{\|\psi\|_\rho^2 + 2\varepsilon (\psi | \varphi)_\rho + \varepsilon^2 \|\varphi\|_\rho^2}$$

og derfor differentiabel efter ε . (9.27) medfører da at $f'(0) = 0$, hvor $f'(0)$ udregnes til

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{2 \ell(\psi, \varphi) \|\psi\|_\rho^2 - 2(\psi | \varphi)_\rho \ell(\psi, \psi)}{\|\psi\|_\rho^4} \\ &= \frac{2 \ell(\psi, \varphi)}{\|\psi\|_\rho^2} - \frac{2(\psi | \varphi)_\rho \mu}{\|\psi\|_\rho^2} = \frac{2}{\|\psi\|_\rho^2} \left((L\psi | \varphi)_\rho - \mu(\psi | \varphi)_\rho \right) \\ &= \frac{2}{\|\psi\|_\rho^2} (L\psi - \mu\psi | \varphi)_\rho, \quad \text{jvf. Lemma 9.4.} \end{aligned}$$

Ligningen $f'(0) = 0$ giver altså

$$(9.28) \quad (L\psi - \mu\psi | \varphi)_\rho = 0 \quad \text{for alle } \varphi \in V.$$

Ved Lemma 8.3 sluttet heraf, at $L\psi = \mu\psi$, dvs. ψ er egenfunktion hørende til egenværdien μ ! Da $R(\psi)$ er mindst mulig, må $\psi = u_1$ (jvf. 9.25) og $\mu = \lambda_1$. Dette viser (i).

[Den foretagne undersøgelse hører hjemme i Variationsregningen, se fx MAT 1-noterne (102) §55-56. Vi har karakteriseret minimum for funktionalet $I_0(\varphi) = \int_\alpha^\beta (\rho(\varphi')^2 + q\varphi^2) dx$

på funktionsklassen V (under forudsætning om at minimum antages på funktionsklassen $D(L)$ - essentielt samme bevis karakteriserer minimum på funktionsklassen $D(L)$), under bibetingelsen $I_1(\varphi) = \int_a^b \varphi^2 \rho \, dx = 1$. Ved udregning af Eulers differential-ligning med Lagrange-multiplikatorer kommer man netop frem til et egenverdiproblem for L .]

(ii) Beviset forløber på samme måde, idet φ nu vælges i V_k , indtil vi når frem til udsagnet

$$(9.29) \quad (L\psi - \mu\psi | \varphi)_\rho = 0 \quad \text{for alle } \varphi \in V_k.$$

Vi viser, at dette medfører (9.28), ved hjælp af følgende indskudte lemma:

Lemma 9.15. Lad $f \in M_\rho$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ ($n \leq \omega$) gælder

$$(9.30) \quad \left(f - \sum_{j=1}^n c_j(f) u_j \mid u_i \right)_\rho = 0 \quad \text{for } i=1, \dots, n.$$

Bevis for Lemma 9.15:

$$\begin{aligned} \left(f - \sum_{j=1}^n c_j(f) u_j \mid u_i \right)_\rho &= (f \mid u_i)_\rho - \sum_{j=1}^n c_j(f) (u_j \mid u_i)_\rho \\ &= (f \mid u_i)_\rho - c_i(f) \|u_i\|_\rho^2 = 0, \quad \text{pr. definition af } c_i(f). \quad \square \end{aligned}$$

Beviset for Sætning 9.14 afsluttes nu således:

Lad $f \in V$. Så ligger $\varphi = f - \sum_{j=1}^{k-1} c_j(f) u_j$ i V og opfylder $(\varphi \mid u_i)_\rho = 0$ for $i=1, \dots, k-1$. Altså er $\varphi \in V_k$, og $(L\psi - \mu\psi \mid \varphi)_\rho = 0$ ifølge (9.29). For hvert $j=1, \dots, k-1$ er

$$\begin{aligned} (L\psi - \mu\psi \mid u_j)_\rho &= (L\psi \mid u_j)_\rho - (\mu\psi \mid u_j)_\rho \\ &= (\psi \mid Lu_j)_\rho - \mu(\psi \mid u_j)_\rho \\ &= (\lambda_j - \mu)(\psi \mid u_j)_\rho = 0, \end{aligned}$$

da $\psi \in V_k$. Da fås for f :

$$\begin{aligned} (L\psi - \mu\psi \mid f)_\rho &= (L\psi - \mu\psi \mid \varphi)_\rho + (L\psi - \mu\psi \mid \sum_{j=1}^{k-1} c_j(f) u_j)_\rho \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da f var vilkårlig i V , har vi nu vist, at (9.28) gælder, og vi slutter ved Lemma 8.3, at ψ er en egenfunktion for L . Da $\psi \in V_k$, kan den ikke være proportional med nogen af funktionerne u_1, \dots, u_{k-1} ; da $R(\psi)$ er lavest mulig, må ψ være proportional med u_k (jvf. (9.25)). \square

[Behandlingen af (ii) kan formuleres som et variationsproblem med k bibetingelser.]

Om eksistensen af disse minima for $R(\psi)$ må vi tage følgende sætning til troende (der henvises i [W] til Courant - Hilbert I).

Sætning 9.16.

(i) Der eksisterer en funktion $u_1 \neq 0$ (entydigt bestemt på nær en skalær faktor), ved hvilken $R(\psi)$ har minimum på mængden $V \setminus \{0\}$. $u_1 \in D(L)$ og er egenfunktion for hørende til den laveste egenværdi λ_1 .

(ii) Lad $k \in \mathbb{N}$. Når u_1, \dots, u_{k-1} er egenfunktioner for L hørende til egenværdierne $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ (respektive), defineres V_k ved (9.26), og der gælder: Der eksisterer en funktion $u_k \neq 0$ (entydigt bestemt på nær en skalær faktor) ved hvilken $R(\psi)$ har minimum på mængden $V_k \setminus \{0\}$. $u_k \in D(L)$ og er egenfunktion for L hørende til egenværdien λ_k .

Denne sætning giver eksistensen af u_1, u_2, \dots ved induktion. Induktionen hører ikke op, idet V er uendelig dimensional, således at V_k ikke reduceres til $\{0\}$ for noget k . Altså kan vi omsider afgøre, at der er uendeligt mange egenværdier:

Korollar 9.17. $\omega = +\infty$.

Bemærk, at når vi først har eksistensen af et minimum, antaget ved et element af $D(L)$, følger det af Sætning 9.14, hvorledes dette er egenværdi. Sætning 9.14 (samt Lemma 9.3) sikrer endvidere, at alle egenfunktionerne kommer med ved anvendelse af Sætning 9.16. Fra nu af kan vi i princippet konstruere egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ som de successive minima for $R(\psi)$ (på V_1, V_2, V_3, \dots) og

egenfunktionerne som de tilhørende funktioner, hvor minimum antages.

[Definitionen af V_k for $k \geq 2$ er afhængig af de foregående egenfunktioner. Der findes en mere generel teori, hvor man for hvert k betragter alle rum W_k af formen

$$W_k = \{ \varphi \in V \mid (\varphi | \varphi_1)_\rho = \dots = (\varphi | \varphi_{k-1})_\rho = 0 \}, \text{ for et sæt } \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1} \in V \setminus \{0\}.$$

Da er $\lambda_k = \text{maximum over alle sæt } \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1} \text{ af minimum over det pågældende } W_k \setminus \{0\} \text{ af } R(\varphi)$; kort skrevet

$$\lambda_k = \max_{\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1} \in V \setminus \{0\}} \min_{\varphi \in W_k \setminus \{0\}} R(\varphi).$$

V_k svarer til det valg af W_k , der giver det største minimum. Dette resultat kaldes maximum - minimum princippet (max-min - princippet); det har den fordel, at λ_k defineres uafhængigt af de øvrige ev. og ef.]

K 9.2 Fuldstændighed af systemet af egenfunktioner; uniform konvergens.

At ortogonalsystemet af egenfunktioner $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ er fuldstændigt, betyder (jvf. Definition 5.13), at der for enhver funktion $f \in M_\rho([\alpha, \beta])$ gælder, at dennes Fourierrekke efter systemet $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerer i middel mod f . Vi viser dette først for en pænere klasse af funktioner, og anvender dernæst Lemma 5.21 til at opnå det for generelle $f \in M_\rho$. (Hertil bruges Sætning 9.14 og 9.16. Vi skal senere se, at Fourierrekken for tilstrækkeligt pæne f konvergerer uniformt mod f , som en følge af fuldstændigheden. Bemærk, at tingene gøres i en anden rækkefølge end ved de trigonometriske rækker, hvor vi diskuterede punktvise konvergens først, dernæst uniform konvergens og tilsidst konvergens i middel; dette blev klaret uden den ubeviste Sætning 9.16.)

Lemma 9.18. For $f \in V$, $k \in \mathbb{N}$, gælder

$$(9.31) \quad \left\| f - \sum_{n=1}^{k-1} c_n(f) u_n \right\|_\rho^2 \leq \frac{1}{\lambda_k} \left[\ell(f, f) - \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n c_n(f)^2 \|u_n\|_\rho^2 \right] \leq \frac{1}{\lambda_k} \ell(f, f).$$

Bevis. Betegn $c_n(f)$ ved c_n . Lad $\varphi_k = f - \sum_{n=1}^{k-1} c_n u_n$, så er $\varphi_k \perp u_1, \dots, u_{k-1}$ ved Lemma 9.15, altså $\varphi_k \in V_k$. Vi har

$$\begin{aligned} \ell(\varphi_k, \varphi_k) &= \ell\left(f - \sum_{n=1}^{k-1} c_n u_n, f - \sum_{m=1}^{k-1} c_m u_m\right) \\ &= \ell(f, f) - 2 \sum_{n=1}^{k-1} c_n \ell(u_n, f) + \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{m=1}^{k-1} c_n c_m \ell(u_n, u_m). \end{aligned}$$

Nu er $\ell(u_n, f) = (Lu_n | f)_p = \lambda_n (u_n | f)_p = \lambda_n c_n(f) \|u_n\|_p^2$, ved (9.12) og (9.20); specielt er $\ell(u_n, u_m) = \lambda_n c_n(u_m) \|u_n\|_p^2 = \delta_{nm} \lambda_n \|u_n\|_p^2$ *). Da fås

$$\begin{aligned} \ell(\varphi_k, \varphi_k) &= \ell(f, f) - 2 \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n c_n^2 \|u_n\|_p^2 + \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n c_n^2 \|u_n\|_p^2 \\ (9.32) \quad &= \ell(f, f) - \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n c_n^2 \|u_n\|_p^2. \end{aligned}$$

Da $\ell(\varphi_k, \varphi_k) \geq 0$, aflæser vi heraf, at

$$(9.33) \quad \ell(f, f) - \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n c_n^2 \|u_n\|_p^2 \geq 0.$$

Specielt ses, at hvis $\varphi_k = 0$, så at $\ell(\varphi_k, \varphi_k) = 0$, er

$$\ell(f, f) = \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n c_n^2 \|u_n\|_p^2.$$

Nu, når $\varphi_k = 0$, er altså de to første udtryk i (9.31) lig 0 og det tredje, $\frac{1}{\lambda_k} \ell(f, f)$, er ≥ 0 , hvormed hele (9.30) er opfyldt.

Antag dernæst, at $\varphi_k \neq 0$. Da $\varphi_k \in V_k \setminus \{0\}$, gælder ifølge Sætning 9.14 og 9.16

$$\frac{\ell(\varphi_k, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|_p^2} \geq \lambda_k.$$

Dette giver (idet $\lambda_k > 0$)

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{n=1}^{k-1} c_n u_n\|_p^2 &= \|\varphi_k\|_p^2 \leq \frac{1}{\lambda_k} \ell(\varphi_k, \varphi_k) \\ &= \frac{1}{\lambda_k} \left(\ell(f, f) - \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n c_n^2 \|u_n\|_p^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_k} \ell(f, f); \end{aligned}$$

hvor vi til den sidste ulighed benytter, at $\lambda_n c_n^2 \|u_n\|_p^2 \geq 0$ for hvert n . \square

*) δ_{nm} står for "Kronecker's delta", som er defineret ved

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{når } n=m, \\ 0 & \text{når } n \neq m. \end{cases}$$

Sætning 9.19. Ortogonalsystemet af egenfunktioner $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ er fuldstændigt.

Bevis. For $f \in V$ har vi ifølge Lemma 9.18, at

$$\|f - \sum_{n=1}^{k-1} c_n(f) u_n\|_p^2 \leq \frac{1}{\lambda_k} \ell(f, f), \text{ for alle } k \in \mathbb{N},$$

da $\frac{1}{\lambda_k} \rightarrow 0$ for $k \rightarrow \infty$, følger det, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) u_n$ kon-

vergerer i middel (i $M_p([\alpha, \beta])$) mod f . For $f \in M_p([\alpha, \beta])$ kan vi for hvert $\varepsilon > 0$ ifølge Lemma 5.21 vælge $f_\varepsilon \in V$ (endda $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(L)$), så at $\|f - f_\varepsilon\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Da får vi ved brug af (5.15),

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{n=1}^{k-1} c_n(f) u_n\|_p^2 &\leq \|f - \sum_{n=1}^{k-1} c_n(f_\varepsilon) u_n\|_p^2 \\ &\leq 2 \left(\|f - f_\varepsilon\|_p^2 + \|f_\varepsilon - \sum_{n=1}^{k-1} c_n(f_\varepsilon) u_n\|_p^2 \right) \\ &\leq \varepsilon + \|f_\varepsilon - \sum_{n=1}^{k-1} c_n(f_\varepsilon) u_n\|_p^2. \end{aligned}$$

Da det sidste led går mod 0 for $k \rightarrow \infty$, sluttet at

$$\|f - \sum_{n=1}^{k-1} c_n(f) u_n\|_p^2 \rightarrow 0 \text{ for } k \rightarrow \infty. \quad \square$$

Med denne sætning er forudsætningerne i Lemma 9.11 opfyldt, og vi har de tre Parseval-ligninger (9.21), (9.22) og (9.23). Den midterste kan som nævnt vises at gælde for $f \in V$:

Lemma 9.20. For f og $g \in V$ gælder

$$(9.34) \quad \ell(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n(f)^2 \|u_n\|_p^2,$$

$$(9.35) \quad \ell(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n(f) c_n(g) \|u_n\|_p^2.$$

Bevisskitse. Det antydes i [W] s.166 l. 10. f.n. - 6. f.n., at identiteten (9.34) bevises ved approksimation af f med funktioner $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(L)$. Vi skal her gøre opmærksom på, at det ikke er nok med en approksimation mht. $\|\cdot\|_p$, det skal være en approksimation, hvor $\ell(f - f_\varepsilon, f - f_\varepsilon)$ bliver lille; altså en approksimation hvor både $f - f_\varepsilon$ og $f' - f'_\varepsilon$ giver små integraler. Man finder en sådan approksimerende funktion ved at anvende Lemma 5.21 på f' : Der ligger en C^1 -funktion g_ε tæt ved f' ; derfor søger man

at anvende $f_\varepsilon(x) = \int_\alpha^x g_\varepsilon(t) dt$ som approksimerende funktion til $f(x)$. Her $f_\varepsilon(\alpha) = 0$, men g_ε må modificeres (med en lineær funktion), så også $f_\varepsilon(\beta) = 0$.

Når $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(L)$ er konstrueret, så at $\ell(f - f_\varepsilon, f - f_\varepsilon) \leq \varepsilon$, går beviset videre ved hjælp af (9.32) og (9.33):

$$\begin{aligned} 0 &\leq \ell(f, f) - \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n c_n(f)^2 \|u_n\|_p^2 = \ell(\varphi_k, \varphi_k) \\ &= \ell(\varphi_k - \varphi_{k,\varepsilon} + \varphi_{k,\varepsilon}, \varphi_k - \varphi_{k,\varepsilon} + \varphi_{k,\varepsilon}) \quad (\varphi_{k,\varepsilon} = f_\varepsilon - \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n c_n(f_\varepsilon)^2 \|u_n\|_p^2) \\ &= \ell(\varphi_k - \varphi_{k,\varepsilon}, \varphi_k - \varphi_{k,\varepsilon}) + 2\ell(\varphi_k - \varphi_{k,\varepsilon}, \varphi_{k,\varepsilon}) + \ell(\varphi_{k,\varepsilon}, \varphi_{k,\varepsilon}) \\ &\leq 2\ell(\varphi_k - \varphi_{k,\varepsilon}, \varphi_k - \varphi_{k,\varepsilon}) + 2\ell(\varphi_{k,\varepsilon}, \varphi_{k,\varepsilon}) \quad (\text{ved en version af Schwarz' ulighed}) \\ &\leq 2\ell(f - f_\varepsilon, f - f_\varepsilon) + 2\ell(\varphi_{k,\varepsilon}, \varphi_{k,\varepsilon}) \quad (\text{ved (9.32)}). \end{aligned}$$

Første led er $\leq 2\varepsilon$, og andet led $\rightarrow 0$ for $k \rightarrow \infty$, fordi $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(L)$. Heraf følger (9.34).

Endelig vises (9.35) ud fra (9.34) ved brug af $\ell(f, g) = \frac{1}{2} [\ell(f+g, f+g) - \ell(f, f) - \ell(g, g)]$. \square

Dette lemma skal anvendes på $G(x, \xi)$, der jo tilhører V , men ikke $\mathcal{D}(L)$, som funktion af hver af de variable (jvf. Sætning 8.1 (d)).

Sætning 9.21. For hvert $(x, y) \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ gælder

$$(9.36) \quad G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(y)}{\lambda_n \|u_n\|_p^2}$$

og

$$(9.37) \quad G(x, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)^2}{\lambda_n \|u_n\|_p^2}.$$

Bevis. Lad $f(\cdot) = G(x, \cdot)$, $g(\cdot) = G(y, \cdot)$. Bemærk, at

$$(9.38) \quad c_n(f) = \frac{(G(x, \cdot) | u_n(\cdot))_p}{\|u_n\|_p^2} = \frac{u_n(x)}{\lambda_n \|u_n\|_p^2}$$

ved (9.17). Da er

$$\begin{aligned} \lambda_n c_n(f) c_n(g) \|u_n\|_p^2 &= \lambda_n \frac{u_n(x)}{\lambda_n \|u_n\|_p^2} \cdot \frac{u_n(y)}{\lambda_n \|u_n\|_p^2} \|u_n\|_p^2 \\ &= \frac{u_n(x) u_n(y)}{\lambda_n \|u_n\|_p^2} \end{aligned}$$

På den anden side er

$$\begin{aligned} \ell(f, g) &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(p(x) \left[\frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \xi) \frac{\partial G}{\partial \xi}(y, \xi) \right] + q(x) G(x, \xi) G(y, \xi) \right) d\xi \\ &= \int_{\alpha}^y \dots d\xi + \int_y^{\beta} \dots d\xi \\ &= p G(x, \xi) \left. \frac{\partial G}{\partial \xi}(y, \xi) \right|_{\alpha}^y + \int_{\alpha}^y G(x, \xi) (L_{\xi} G(y, \xi)) d\xi \\ &\quad + p G(x, \xi) \left. \frac{\partial G}{\partial \xi}(y, \xi) \right|_y^{\beta} + \int_y^{\beta} G(x, \xi) (L_{\xi} G(y, \xi)) d\xi \\ &= G(x, y), \quad \text{ved (8.10) (a) - (d) og (8.15)}. \end{aligned}$$

Indsættes dette i (9.34), fås (9.36). (9.37) fås ved at vi sætter $x=y$ i (9.36). \square

Dette anvendes til at vise hovedsætningen om uniform konvergens.

Sætning 9.22. Når $f \in V$, konverger Fourierrækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) u_n(x)$ absolut og uniformt mod f .

Bevis. Betegn $c_n(f)$ ved c_n . Vi har for ethvert udsnit $\sum_{n=k+1}^{k+p} c_n u_n(x)$, ved Schwarz' ulighed for endelige summer

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=k+1}^{k+p} |c_n u_n(x)| \right)^2 &= \left(\sum_{n=k+1}^{k+p} |c_n| \sqrt{\lambda_n} \|u_n\|_{\rho} \frac{|u_n(x)|}{\sqrt{\lambda_n} \|u_n\|_{\rho}} \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{n=k+1}^{k+p} \lambda_n c_n^2 \|u_n\|_{\rho}^2 \right) \left(\sum_{m=k+1}^{k+p} \frac{u_m(x)^2}{\lambda_m \|u_m\|_{\rho}^2} \right) \\ &\leq G(x, x) \sum_{n=k+1}^{k+p} \lambda_n c_n^2 \|u_n\|_{\rho}^2 \leq C \sum_{n=k+1}^{k+p} \lambda_n c_n^2 \|u_n\|_{\rho}^2, \end{aligned}$$

hvor $C = \max_{x \in [\alpha, \beta]} G(x, x)$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2 \|u_n\|_{\rho}^2$ er konvergent,

følger det, at $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n u_n(x)|$ er uniformt konvergent (med $\text{sum} \leq \sqrt{C \cdot \ell(f, f)}$).

Kald summen $g(x)$; det er en kontinuert funktion, og vi skal vise, at den er lig $f(x)$. (Dette mangler i [W].) I midlertid medfører ovenstående, at $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$ konvergerer i middel mod g (jvf. (5.18)); da rækken også konvergerer i middel mod f (Sætning 9.19), er $\|f - g\|_p = 0$, hvorefter $f = g$, da begge funktioner er kontinuerte. \square

Rækken i (9.36) kan, for fast y , læses som Fourier-rækken for $G(x, y)$ som funktion af x , jvf. (9.38). Derfor har vi specielt:

Korollar 9.23. For hvert fast y konvergerer rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(y)}{\lambda_n \|u_n\|_p^2}$ mod $G(x, y)$ absolut og uniformt mht. $x \in [\alpha, \beta]$. (Tilsvarende udsagn med x og y ombyttet.)

Bemærkning 9.24. [W] skriver (nederst s.167), at konvergensten er uniform i begge variable samtidigt. Dette er sandt nok, og kan vises ved følgende argument hentet fra Courant-Hilbert I s.139-140 (Mercers Sætning): Da

$$\left(\sum_{n=k+1}^{k+p} \frac{|u_n(x) u_n(y)|}{\lambda_n \|u_n\|_p^2} \right)^2 \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} \frac{u_n(x)^2}{\lambda_n \|u_n\|_p^2} \sum_{m=k+1}^{k+p} \frac{u_m(y)^2}{\lambda_m \|u_m\|_p^2}$$

for hvert $k, p \in \mathbb{N}$, er det tilstrækkeligt at vise at

(9.39) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)^2}{\lambda_n \|u_n\|_p^2}$ konvergerer uniformt mod $G(x, x)$ for $x \in [\alpha, \beta]$.

Dette følger af den punktvis konvergens, ved anvendelse af følgende sætning af Dini: Når leddene i rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er ikke-negative, kontinuerte funktioner på et kompakt interval $[\alpha, \beta]$, og rækken konvergerer punktvis mod en kontinuert funktion f på $[\alpha, \beta]$, da er konvergensten uniform. Sætningen kan vises med de midler, vi har fra MAT.1.

Ved brug af (9.39) kan vi forøvrigt vise identiteten

$$(9.40) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi)^2 \rho(x) \rho(\xi) dx d\xi,$$

som lovet i Afsnit 9.1. Thi Parsevals ligning anvendt på Fourierrækken for $G(x, \cdot)$ for hvert fast x giver (jvf. (9.38))

$$(9.41) \quad \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi)^2 \rho(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)^2}{\lambda_n^2 \|u_n\|_{\rho}^2} \quad \text{for hvert } x.$$

Da $\lambda_n \rightarrow \infty$ for $n \rightarrow \infty$, vil $\frac{1}{\lambda_n^2} < \frac{1}{\lambda_n}$ for n tilstrækkelig stor, hvorved den uniforme konvergens af rækken i (9.39) medfører uniform konvergens af rækken i (9.41). Ved multiplikation af hver side i (9.41) med $\rho(x)$ og integration over $[\alpha, \beta]$, kan vi da flytte summationen udenfor integraltegnet, hvoraf

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi)^2 \rho(\xi) \rho(x) d\xi dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)^2 \rho(x)}{\lambda_n^2 \|u_n\|_{\rho}^2} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 \|u_n\|_{\rho}^2} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)^2 \rho(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}, \end{aligned}$$

som viser (9.40). \square

Rækkefremstillingen af $G(x, y)$ anvendes i [W] s. 167-168 til en omformning af løsningsformlen

$$(9.42) \quad u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) F(\xi) d\xi$$

for problemet

$$(9.43) \quad \begin{cases} L_0 u = F, \\ u(\alpha) = u(\beta) = 0. \end{cases}$$

Vi finder den samme omformning på en ganske simpel måde: Når u er løsning til (9.43) med $F \in C^0([\alpha, \beta])$, er $u \in \mathcal{D}(L)$ med $Lu = \frac{F}{\rho}$. Ved Lemma 9.10 er da

$$c_n\left(\frac{F}{\rho}\right) = c_n(Lu) = \lambda_n c_n(u).$$

Derfor opfylder Fourierrækken for u :

$$(9.44) \quad u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(u) u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n\left(\frac{F}{\rho}\right)}{\lambda_n} u_n(x),$$

med uniform konvergens, fordi $u \in V$.

(For udsagnet i [W] synes den uniforme konvergens af (9.44) at være baseret på den uniforme konvergens af rækken for $G(x,y)$ mht. $(x,y) \in [\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta]$ (jvf. Bemærkning 9.24). Man indsætter rækken for G i (9.42). - De betragtede funktioner F er lidt mere generelle, hvilket kræver en begrundelse for at (9.42) også i så fald definerer en løsning, m.m.)

Til sidst i [W] §36 nævnes randbetingelsen $u(\alpha) = 0, p(\beta)u'(\beta) + au(\beta) = 0$ ($a \geq 0$). Den behandles ved den forudgående teori, idet man sætter $\mathcal{L}(\varphi, \psi) = \int_{\alpha}^{\beta} (p\varphi'\psi' + q\varphi\psi) dx + a\varphi(\beta)\psi(\beta)$ og $V = \{\varphi \in C^0([\alpha,\beta]) \mid \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'^2 dx < \infty, \varphi(\alpha) = 0\}$.

K 9.3 Specielle egenskaber ved egenverdier og egenfunktioner.

Bemærkninger til [W] §38.

Diskussionen af egenfunktionernes nulpunkter forudsætter, at man har gjort sig klart, at en egenfunktion kun har endeligt mange nulpunkter på $[\alpha,\beta]$. Dette ses således: Antag, at $u_k(x)$ havde uendeligt mange forskellige nulpunkter på $[\alpha,\beta]$. Da $[\alpha,\beta]$ er kompakt, ville der eksistere en konvergent følge af disse, $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$; kald grænseværdien x_0 . Da u_k er kontinuert, er $u(x_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} u(x_j) = 0$. Endvidere vil

følgen af differenskvotienter $\frac{u(x_j) - u(x_0)}{x_j - x_0}$ konvergere mod 0,

hvormed $u'_k(x_0) = 0$, da u_k er differentiabel. Altså er $(L - \lambda_k)u_k = 0$, $u_k(x_0) = u'_k(x_0) = 0$, så u_k er løsning til et homogent problem med begyndelsesværdier 0; da er $u_k(x) = 0$ for alle $x \in [\alpha,\beta]$. Dette strider mod antagelsen om, at u_k var egenfunktion.

Vi udnytter denne bemærkning bl.a. til at se, at $|u_1(x)|$ er stykkevis C^1 ; så at vi kan skrive $\int_{\alpha}^{\beta} p \left(\frac{du_1}{dx}\right)^2 dx$ om til $\int_{\alpha}^{\beta} p(x) \left(\frac{d|u_1|}{dx}\right)^2 dx$.

Det påstås i [W] s.173, l.3-7, at $\bar{\lambda}_1 > \lambda_1$ finder sted, så snart de to problemer ikke er identiske. Dette er ikke helt korrekt. Hvad vi kan vise er i sin helhed følgende:

Sætning 9.25. Hvis $\bar{p}(x) \geq p(x)$, $\bar{q}(x) \geq q(x)$, $\frac{1}{\bar{p}(x)} \geq \frac{1}{p(x)}$ for alle $x \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$, og $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \subseteq [\alpha, \beta]$, da er $\bar{\lambda}_1 \geq \lambda_1$. Skarp ulighed (dvs. $\bar{\lambda}_1 > \lambda_1$) gælder, såfremt yderligere en af følgende betingelser er opfyldt:

- (i) $\bar{p} > p$ i $\bar{\alpha}$ eller $\bar{\beta}$,
- (ii) $\bar{q} > q$ i et punkt af $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$,

(iii) $\frac{1}{\bar{p}} > \frac{1}{p}$ i et punkt af $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$,

(iv) $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \neq [\alpha, \beta]$.

Første påstand vises i [W]. Sidste påstand bevises således: Lad \bar{u}_1 og φ være defineret som på side 172 i [W]. Såfremt (iv) finder sted, kan φ ikke være egenfunktion for det oprindelige problem, idet φ og φ' er 0 i et endepunkt af $[\alpha, \beta]$. Da minimumsfunktionen for $R(\varphi)$ er bestemt entydigt på nær en konstant, fås altså $\bar{\lambda}_1 = \bar{R}(\bar{u}_1) \geq R(\varphi) > \lambda_1$ (hvor \bar{R} er Rayleigh kvotienten for det ændrede problem). (Bemærk også, at φ ikke kan være C^2 .) Hvis $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}] = [\alpha, \beta]$, men en af betingelserne (i), (ii), (iii) er opfyldt, ses at $\bar{\lambda}_1 = \bar{R}(\bar{u}_1) > R(\bar{u}_1) \geq \lambda_1$, idet $\bar{u}_1 \neq 0$ i $] \alpha, \beta [$ og $\bar{u}_1' \neq 0$ i omegnen af α og af β (jvf. Lemma 9.3). \square

Det kan derimod forekomme at $\bar{p} > p$ i et indre delinterval af $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$ uden at den laveste egenværdi ændres, idet man kan konstruere problemer, hvor $\bar{u}_1' = 0$ i et indre delinterval af $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$.

K 9.4 Singulære Sturm-Liouville problemer.

Bemærkninger til [W] §39, 41 og 43.

I tilfælde af at p, q og ρ opfylder (9.2) i $[\alpha, \beta]$ med undtagelse af enkelte punkter (i reglen et eller to endepunkter), skal vi tage hensyn hertil i definitionen af V og af $D(L)$. Vi skal da dels indføre nogle integrabilitetsbetingelser, der sikrer at $\varphi \in M_\rho$, $\ell(\varphi, \varphi) < \infty$ eller $L\varphi \in M_\rho$, dels nogle randbetingelser, der sikrer entydighed af løsningen til $Lu = f$, eller, mere alment, sikrer at randbidragene forsvinder ved den delvise integration, der fører til den vigtige formel $\ell(\varphi, \psi) = (L\varphi | \psi)_\rho$.*

Hvad angår integrabilitetsbetingelserne, har vi brug for at betragte følgende rum (hvor A betegner $[\alpha, \beta] \setminus \{\text{de singulære punkter}\}$):

$$M_\rho = \{ \varphi \in M([\alpha, \beta]) \mid \int_\alpha^\beta \varphi^2 \rho dx < \infty \},$$

$$W = \{ \varphi \in M_\rho \mid \varphi \in C^0(A) \text{ med } \varphi' \in M, \int_\alpha^\beta (p(\varphi')^2 + q\varphi^2) dx < \infty \},$$

$$X = \{ \varphi \in W \mid \varphi \in C^2(A) \text{ med } \frac{1}{\rho} [-(p\varphi')' + q\varphi] \in M_\rho \};$$

*) Ved visse randbetingelser indbygges dog et randbidrag i $\ell(\varphi, \psi)$, jvf. slutningen af [W] §36 og s.920 sådanne medtages ikke her.

V og $\mathcal{D}(L)$ bliver delmængder af W resp. X . *)

Hvad angår randbetingelserne; skal disse sikre, at

$$\begin{aligned} \ell(\varphi, \psi) - (L\varphi | \psi)_p &= \int_{\alpha}^{\beta} [(p\varphi'\psi' + q\varphi\psi) - (-(p\varphi')'\psi + q\varphi\psi)] dx \\ &= p\varphi'\psi \Big|_{\alpha}^{\beta} \text{ er lig } 0 \text{ for } \varphi \in \mathcal{D}(L), \psi \in V, \end{aligned}$$

hvilket kan opnås på forskellige måder efter omstændighederne. Når f.ex. $p(x) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \alpha$, er $\lim_{x \rightarrow \alpha} p(x)\varphi'(x)\psi(x) = 0$, hvis φ' og ψ er begrænsede, eller f.ex. ψ er begrænset og φ' er ubegrænset på en sådan måde, at $\lim_{x \rightarrow \alpha} p(x)\varphi'(x) = 0$.

Vi skal se i detaljer på Bessel ligningen

$$-u'' - \frac{1}{x}u' + \frac{m^2}{x^2}u = \lambda u, \text{ dvs. } \frac{1}{x}[-(xu')' + \frac{m^2}{x}u] = \lambda u,$$

hvor $p=x$, $q = \frac{m^2}{x}$ og $r=x$ på $]0,1[$ (de er singulære i punktet 0); og på Legendre ligningen

$$-((1-x^2)u')' + \frac{m^2}{1-x^2}u = \lambda u,$$

hvor $p=1-x^2$, $q = \frac{m^2}{1-x^2}$ og $r=1$ på $] -1,1[$ (p og q er singulære i begge endepunkter -1 og 1). m betegner et helt ikke-negativt tal.

For Bessel ligningen har vi

$$M_p = \{ \varphi \in M([0,1]) \mid \int_0^1 \varphi^2 x dx < \infty \},$$

$$W = \{ \varphi \in M_p \mid \varphi \in C^0([0,1]) \text{ med } \varphi' \in M, \int_0^1 (x(\varphi')^2 + \frac{m^2}{x}\varphi^2) dx < \infty \},$$

$$X = \{ \varphi \in W \mid \varphi \in C^2([0,1]) \text{ med } \frac{1}{x}[-(x\varphi')' + \frac{m^2}{x}\varphi] \in M_p \}.$$

Som randbetingelse i det singulære endepunkt 0, hvor $p(x) = x \rightarrow 0$, vælges i [W] §39 betingelsen: φ begrænset, $\lim_{x \rightarrow 0} x\varphi'(x) = 0$, mens [W] §41 angiver: φ og φ' begrænsede. For simpelheds skyld holder vi os til den sidste, altså vi tager ialt som randbetingelser

$$(9.45) \quad \begin{cases} \varphi \text{ og } \varphi' \text{ begrænsede på }]0,1[; \\ \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

Dermed bliver

$$V = \{ \varphi \in W \mid (9.45) \text{ gælder } \},$$

*) En del af regningerne kan udføres uden, at $L\varphi \in M_p$; vi forudsætter dette for at få den systematiske Sturm-Liouville teori til at fungere.

dvs. i detaljer: $\varphi \in C^0([0,1])$ med $\varphi' \in M$, $\varphi(1) = 0$, φ og φ' begrænsede, $\int_0^1 \varphi^2 x dx < \infty$, $\int_0^1 x(\varphi')^2 dx < \infty$ og $\int_0^1 \frac{m^2}{x} \varphi^2 dx < \infty$.

Det ses, at visse af betingelserne overlapper: De to første integraler eksisterer, når φ og φ' er begrænsede. Dette giver:

$$V = \{ \varphi \in C^0([0,1]) \text{ med } \varphi' \in M \mid \varphi \text{ og } \varphi' \text{ begrænsede, } \int_0^1 \frac{m^2}{x} \varphi^2 dx < \infty \}.$$

Vi bemærker iøvrigt, at det resterende integral, når $m > 0$, lægger stærke bånd på φ 's opførsel nær 0; hvis φ f.ex. er kontinuert i 0, må der gælde, at $\varphi(0) = 0$.

Endvidere fås

$$D(L) = \{ \varphi \in X \mid (9.45) \text{ gælder} \},$$

altså i detaljer (idet vi benytter beskrivelsen af V):

$$D(L) = \{ \varphi \in C^2([0,1]) \mid \varphi \text{ og } \varphi' \text{ er begrænsede, } \varphi(1) = 0, \int_0^1 \frac{m^2}{x} \varphi^2 dx < \infty \text{ og } \int_0^1 \frac{1}{x} ((-x\varphi')' + \frac{m^2}{x} \varphi^2) dx < \infty \}.$$

Teorien fra [W] §36 og 38 og noterne Afsn. 9.1-9.3 gennemføres herefter med enkelte modifikationer, som angivet i [W] §39. Udover de i Afsnit 8.3 viste egenskaber for de der udledte Greens funktioner skal man også vise, at $u(x) = \int_0^1 G_n(x, \xi) f(\xi) d\xi$ har begrænset differentialkvotient (sml. (8.17) og (9.45)); det vises let ud fra (8.14).

For Legendre differentiaalligningen har vi

$$M_p = \{ \varphi \in M([-1,1]) \mid \int_{-1}^1 \varphi^2 dx < \infty \},$$

$$W = \{ \varphi \in M_p \mid \varphi \in C^0([-1,1[) \text{ med } \varphi' \in M, \int_{-1}^1 ((1-x^2)(\varphi')^2 + \frac{m^2}{1-x^2} \varphi^2) dx < \infty \},$$

$$X = \{ \varphi \in W \mid \varphi \in C^2([-1,1[) \text{ med } -((1-x^2)\varphi')' + \frac{m^2}{1-x^2} \varphi \in M_p \}.$$

For begge endepunkter -1 og 1 har $p(x) = 1-x^2$ grænseværdien 0. I [W] §43 vælges betingelsen " φ begrænset, $(1-x^2)\varphi' \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \pm 1$ " i l. 15-16 s. 189, mens betingelsen " φ og φ' begrænsede" angives hederst på siden. Vi vælger for simpelhedens skyld som randbetingelse:

(9.46) φ og φ' begrænsede på $] -1, 1[$.

Dermed bliver

$$V = \{ \varphi \in W \mid \varphi \text{ opfylder (9.46)} \}$$

$$= \{ \varphi \in C^0(] -1, 1[) \text{ med } \varphi' \in M \mid \varphi \text{ og } \varphi' \text{ begrænsede, } \int_{-1}^1 \frac{m^2}{1-x^2} \varphi^2 dx < \infty \}.$$

Endvidere fås

$$D(L) = \{ \varphi \in X \mid \varphi \text{ opfylder (9.46)} \}$$

$$= \{ \varphi \in C^2(] -1, 1[) \mid \varphi \text{ og } \varphi' \text{ er begrænsede, } \int_{-1}^1 \frac{m^2}{1-x^2} \varphi^2 dx < \infty$$

$$\text{og } \int_{-1}^1 \left(-((1-x^2)\varphi')' + \frac{m^2}{1-x^2} \varphi \right)^2 dx < \infty \}.$$

Teorien fra [W] § 36 og 38, noterne Afsn. 9.1-9.3, gennemføres herefter med modifikationerne angivet i [W] § 43.

I udledningen af Legendre polynomierne i [W] § 43 påstås det nederst side 190, at uligheden

$$(9.47) \quad - \frac{c_{k+1}}{c_k} > \frac{1}{2} \cdot \frac{k-1}{k+1}$$

for $k-1 > \lambda$ medfører, at sumfunktionen for rækken $\sum_{k=1}^{\infty} c_k (t-1)^k$ vil gå mod $+\infty$ eller $-\infty$ for $t \rightarrow -1$, hvis ikke rækken "bryder af" (dvs. at λ er heltallig på en sådan måde, at c_k er 0 fra et vist trin). Denne slutning er ikke korrekt; som modeksempel kan nævnes, at hvis c_k var defineret rekursivt ved

$$c_{k+1} = -\frac{1}{2} \frac{k}{k+2} c_k \text{ for } k=1, 2, \dots$$

med $c_1 \neq 0$, var (9.47) klart opfyldt, men eftersom

$$c_{k+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\cancel{k}}{k+2} \cdot \frac{\cancel{k-1}}{k+1} \cdot \frac{\cancel{k-2}}{k} \cdot \dots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} c_1$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{2}{(k+2)(k+1)} c_1 = \frac{-4}{(k+2)(k+1)} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} c_1$$

ville rækken $\sum_{k=2}^{\infty} c_k (1-t)^k$ tage formen $-4 c_1 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k} \left(\frac{1-t}{2}\right)^k$ som er uniformt konvergent (og altså har kontinuert sumfunktion) for $\left|\frac{1-t}{2}\right| \leq 1$, dvs. for $t \in [-1, 3]$.

Man skal bruge den eksakte formel for c_k 'erne for at nå frem til kravet om, at rækken skal bryde af. Vi viser dette i det følgende, samtidigt vil vi dog ændre udledningen af de begrænsede egenfunktioner en smule, idet vi vil rækkeudvikle ud fra punktet $t=0$ i stedet for bogens udvikling ud fra $t=1$ (derved får vi i tilgift opdelingen af egenfunktionerne i lige og ulige funktioner).

Vi søger en løsning til problemet

$$(9.48) \quad \begin{cases} (i) [(L-\lambda)P =] -\frac{d}{dt}((1-t^2)\frac{dP}{dt}) - \lambda P = 0 & \text{på }]-1,1[, \\ (ii) & P \text{ og } P' \text{ begrænsede på }]-1,1[, \end{cases}$$

og forsøger med en række

$$P(t) = \sum c_k t^k, \quad \text{summeret over } k = \mu, \mu+1, \mu+2, \dots$$

Her er første koefficient $c_\mu \neq 0$, hvor μ à priori er et vilkårligt reelt tal; vi må dog straks forudsætte $\mu \geq 0$, for at P kan være kontinuert i 0. I det

$$\begin{aligned} (L-\lambda)(c_k t^k) &= -\frac{d}{dt}((1-t^2)k c_k t^{k-1}) - \lambda c_k t^k \\ &= -k(k-1)c_k t^{k-2} + (k(k+1) - \lambda) c_k t^k, \end{aligned}$$

ses at ledvis anvendelse af $L-\lambda$ på rækken for P efter nogle omfordelinger fører til rækken

$$(9.49) \quad -\mu(\mu-1)c_\mu t^{\mu-2} - (\mu+1)\mu c_{\mu+1} t^{\mu-1} + \sum_{k=\mu, \mu+1, \dots} [-(k+1)(k+2)c_{k+2} + (k(k+1) - \lambda)c_k] t^k.$$

Vi vil kræve, at alle led i (9.49) er 0, men altså $c_\mu \neq 0$. Dette giver betingelserne

$$(9.50) \quad \mu(\mu-1) = 0,$$

$$(9.51) \quad \mu(\mu+1) c_{\mu+1} = 0,$$

$$(9.52) \quad c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} c_k \quad \text{for } k = \mu+p, p \in \mathbb{N}_0.$$

Den første betingelse giver straks, at $\mu=0$ eller $\mu=1$. Rækken for $P(t)$ er altså en rigtig potensrække

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

hvor $a_0 \neq 0$, eller $a_0 = 0$ med $a_1 \neq 0$. Hvis rækken har positiv konvergensradius $\rho > 0$, er $P(t) \in C^\infty]-\rho, \rho[$, og alle differentialekvotienter fås ved ledvis differentiation (jvf. MAT1-noterne (102) §25), så $P(t)$ er løsning til (9.48) (i), når altså betingelserne (9.51) og (9.52) er opfyldt.

Tilfældet $a_0 \neq 0$ svarer til $\mu = 0$, $c_0 = a_0$. Her lægger (9.51) ingen bånd på $c_1 = a_1$. Vælger vi $c_1 = 0$, får vi at kun koefficienterne med lige nr. er $\neq 0$, og disse er alle bestemt ved c_0 , se (9.52). Rækken med $c_0 = 1$ kalder vi $l(t)$

$$l(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} t^{2n},$$

hvis led alle er lige funktioner, så l bliver lige.

Tilfældet $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ svarer til $\mu = 1$, dvs. $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2$, etc... (9.51) giver her, at $c_2 = 0$, hvorefter (9.52) medfører, at alle led med lige nr. er 0, mens de ulige er bestemt ud fra c_1 . Rækken med $c_1 = 1$ kalder vi $u(t)$, altså

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} t^{2n+1},$$

hvis led alle er ulige funktioner, så u bliver ulige.

Vedrørende rækkernes konvergens bemærker vi først, at hvis $\lambda = k(k+1)$ for et $k \in \mathbb{N}_0$, er $c_{k+2p} = 0$ for alle $p \in \mathbb{N}$ ifølge (9.52). Når k er lige, betyder dette, at $l(t)$ er et polynomium (mens alle koefficienterne for $u(t)$ er $\neq 0$), når k er ulige, er $u(t)$ et polynomium (mens alle koefficienterne for $l(t)$ er $\neq 0$). I de polynomiale tilfælde er konvergensradius $+\infty$. I alle andre tilfælde benytter vi kvotientkriteriet, idet vi opfatter rækkerne som potensrækker i t^2 :

$$(9.53) \quad l(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} (t^2)^n, \quad u(t) = t \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} (t^2)^n,$$

hvor koefficientforholdet (med $\mu = 0$ eller $\mu = 1$) opfylder

$$\frac{c_{2(n+1)+\mu}}{c_{2n+\mu}} = \frac{(2n+\mu)(2n+1+\mu) - \lambda}{(2n+1+\mu)(2n+2+\mu)} \rightarrow 1 \text{ for } n \rightarrow \infty.$$

Altså er konvergensradius 1; rækkerne er konvergente for $t^2 < 1$.

Da løsningsmængden til differentiaalligningen (9.48) (i)

er parametriseret ved værdierne af $P(0)$ og $P'(0)$, fås samtlige løsninger som linearkombinationer af $\ell(t)$ og $u(t)$ (herunder løsningerne med $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0$ fra tilfældet $\mu = 0$).

Vi skal nu se på randbetingelsen (9.48)(ii). Denne er opfyldt af $\ell(t)$ og $u(t)$ i de tilfælde, hvor disse er polynomier, dvs.

$$(9.54) \quad \begin{cases} c_0 \cdot \ell(t) \quad (c_0 \neq 0) \text{ er egenfunktion, når } \lambda = k(k+1), \underline{k \text{ lige}} \geq 0, \\ c_1 \cdot u(t) \quad (c_1 \neq 0) \text{ er egenfunktion, når } \lambda = k(k+1), \underline{k \text{ ulige}} > 0. \end{cases}$$

Det vil nu blive vist, at der ikke er andre egenfunktioner.

Betragt rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+\mu} t^{2n+\mu}$ ($\mu = 0$ eller 1), hvor $c_\mu = 1$, og hvor $c_{2n+\mu}$ er defineret rekursivt ved (9.52), altså

$$(9.55) \quad c_{2n+2+\mu} = \frac{(2n+\mu)(2n+1+\mu) - \lambda}{(2n+1+\mu)(2n+2+\mu)} c_{2n+\mu} \quad \text{for } n \geq 0,$$

idet vi antager, at λ ikke er noget af tallene $(2n+\mu)(2n+1+\mu)$ for $n \in \mathbb{N}_0$. Vi omskriver (9.55) til

$$\begin{aligned} c_{2n+2+\mu} &= \frac{2n+\mu}{2n+2+\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{(2n+\mu)(2n+1+\mu)} \right) c_{2n+\mu} \\ &= \frac{\cancel{2n+\mu}}{2n+2+\mu} \cdot \frac{\cancel{2n-2+\mu}}{2n+\mu} \cdot \dots \cdot \frac{2+\mu}{4+\mu} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{(2n+\mu)(2n+1+\mu)} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{(2+\mu)(3+\mu)} \right) c_{2+\mu} \end{aligned}$$

som kort skrives

$$(9.56) \quad c_{2n+2+\mu} = \frac{2+\mu}{2n+2+\mu} \left[\prod_{\ell=1}^n \left(1 - \frac{\lambda}{(2\ell+\mu)(2\ell+1+\mu)} \right) \right] c_{2+\mu}.$$

Her er benyttet notationen $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n = \prod_{\ell=1}^n q_\ell$ (" $\prod_{\ell=1}^n$ " læses: "produktet, for ℓ gående fra 1 til n "). Endvidere definerer man, når $(q_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ er en talfølge, det uendelige produkt $\prod_{\ell=1}^{\infty} q_\ell$ ved talfølgen $(\prod_{\ell=1}^n q_\ell)_{n \in \mathbb{N}}$, idet man siger, at produktet er konvergent med (grænse)værdi a , når sidstnævnte talfølge (afsnitsfølgen) konvergerer mod a for $n \rightarrow \infty$ (se f.ex. MAT 1-noterne (102) § 27).

For at finde størrelsesordenen af $c_{2n+\mu}$ må vi vurdere det optrædende produkt; dette gøres ved hjælp af følgende

kriterium.

Lemma 9.26. Lad $(x_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ være en følge af tal $\neq -1$, med grænseværdi 0. Hvis rækken $\sum_{\ell=1}^{\infty} x_\ell$ er absolut konvergent, da er det uendelige produkt $\prod_{\ell=1}^{\infty} (1+x_\ell)$ konvergent, med grænseværdi $\neq 0$.

Bevis. Da $x_\ell \rightarrow 0$, kan vi vælge ℓ_0 , så $1+x_\ell > 0$ for $\ell \geq \ell_0$.

Da er $\prod_{\ell=1}^n (1+x_\ell) = \left(\prod_{\ell=1}^{\ell_0-1} (1+x_\ell) \right) \left(\prod_{\ell=\ell_0}^n (1+x_\ell) \right)$ (for $n \geq \ell_0$), hvor

første faktor er et fast tal $\neq 0$, således at vi skal vise konvergens af anden faktor for $n \rightarrow \infty$. Da denne størrelse er positiv, kan vi tage logaritmen:

$$\log \left(\prod_{\ell=\ell_0}^n (1+x_\ell) \right) = \sum_{\ell=\ell_0}^n \log (1+x_\ell).$$

Heraf ses, at produktet er konvergent præcis når rækken $\sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} \log (1+x_\ell)$ er konvergent. Da $\log (1+x)$ er differentiable i punktet $x=0$ med differentialkvotient 1, findes en omegn $] -\delta, \delta[$, så $|\log (1+x)| < 2|x|$ for $x \in] -\delta, \delta[$. Ved sammenligningskriteriet fås da, at når $\sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} |x_\ell|$ er konvergent, er $\sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} \log (1+x_\ell)$ det også. Endelig er $\prod_{\ell=\ell_0}^{\infty} (1+x_\ell) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\ell=\ell_0}^n (1+x_\ell) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\sum_{\ell=\ell_0}^n \log (1+x_\ell) \right) = \exp \left(\sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} \log (1+x_\ell) \right) > 0. \square$

For produktet i [] i (9.56) fås hermed: Da

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\lambda}{(2\ell+\mu)(2\ell+1+\mu)}$$

er konvergent (sammenlign med konstant.

$\sum \frac{1}{\ell^2}$), og alle led er $\neq 1$ ved antagelsen om λ , vil

$$\prod_{\ell=1}^n \left(1 - \frac{\lambda}{(2\ell+\mu)(2\ell+1+\mu)} \right)$$

konvergere mod et tal $b \neq 0$ for $n \rightarrow \infty$.

Det følger da af (9.56), at $C_{2n+\mu}$ asymptotisk opfører sig som en konstant $\cdot \frac{1}{n}$. Mere præcist:

Vælg n_0 så stor, at

$$\left| b - \prod_{\ell=1}^n \left(1 - \frac{\lambda}{(2\ell+\mu)(2\ell+1+\mu)} \right) \right| \leq \frac{|b|}{4} \text{ for } n \geq n_0.$$

Da er

$$\left| C_{2n+2+\mu} - \frac{(2+\mu)C_{2+\mu} b}{2n+2+\mu} \right| \leq \frac{1}{4} \frac{(2+\mu) |C_{2+\mu} \cdot b|}{2n+2+\mu} \text{ for } n \geq n_0.$$

Leddene i rækkerne for $\ell(t)$ og $u(t)$ kan nu, for $n \geq n_0$, vurderes oppefra og nedefra ved leddene i rækkerne

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b'}{2n} t^{2n} &= \frac{b'}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (t^2)^n = -\frac{b'}{2} \log(1-t^2) \\ &= -\frac{b'}{2} [\log(1+t) + \log(1-t)] \quad \text{for } t \in]-1, 1[, \end{aligned}$$

henholdsvis

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b'}{2n+1} t^{2n+1} &= b' \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} t^m - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} t^{2n} \right) \\ &= b' \left(-\log(1-t) + \frac{1}{2} \log(1-t^2) \right) = \frac{b'}{2} (\log(1+t) - \log(1-t)), \end{aligned}$$

hvor b' vælges som $\frac{3}{2}(2+\mu)C_{2+\mu}b$ for en vurdering med numerisk større led og b' vælges som $\frac{1}{2}(2+\mu)C_{2+\mu}b$ for en vurdering med numerisk mindre led (med samme fortegn). Det følger, at $\ell(t)$ og $u(t)$ går mod $\pm\infty$ (fortegnet afhængigt af $C_{2+\mu}b$) som $\log(1-t)$ for $t \nearrow 1$, og mod $\pm\infty$ som $\log(1+t)$ for $t \searrow -1$. (Hermed menes: $0 < b_1 < \left| \frac{\ell(t)}{\log(1-t)} \right| < b_2$ i en omegn af 1, etc.)

Hvis λ er et af tallene $k(k+1)$, viser dette, når k er lige, at $u(t)$ ikke er egenfunktion, så egenrummet udspændes af $\ell(t)$ (jvf. (9.54)); når k er ulige udspændes egenrummet af $u(t)$.

Hvis λ ikke er et af tallene $k(k+1)$, viser ovenstående, at $\ell(t)$ og $u(t)$ begge er ubegrænsede i begge endepunkter af $] -1, 1[$. En linearkombination må, da ℓ og u er henholdsvis lige og ulige, være ubegrænset i det mindste i det ene endepunkt (den i $[W]$ konstruerede løsning er netop begrænset i ét endepunkt). Altså er λ ikke egenværdi.

10. Dobbeltrækker og andre multiple rækker.

T 10.1 Multiple talfølger og -rækker.

En dobbelttalfølge (kort betegnet en dobbeltfølge) indexeret ved talpar $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ er en funktion $(m, n) \mapsto a_{mn}$ fra $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ind i \mathbb{R} eller \mathbb{C} ; vi betegner den også ved $(a_{mn} \mid (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$, $(a_{mn})_{m, n \in \mathbb{N}}$, eller blot a_{mn} (evt. $a_{m, n}$). Dobbeltfølgen kan eventuelt angives ved et skema:

m \ n	1	2	3	...
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...
⋮	⋮	⋮	⋮	

Ud fra en sådan dobbelttalfølge danner man en dobbelttalrække (dobbeltrække)

$$\sum_{m, n \in \mathbb{N}} a_{mn}$$

tallene a_{mn} kaldes dobbeltrækkens led. Der er mange forskellige måder, på hvilke vi kan søge at knytte en sum til en given dobbelt-række. Vigtige eksempler er:

1) Itereret summation bestående af summation over n for hvert m og derefter summation over m :

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn} \right), \quad \text{skrives også } \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn} \quad *)$$

(udtrykket $\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}$ kaldes gerne en itereret dobbeltrække).

2) Itereret summation, over m først og n bagefter:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{mn}$$

3) Summation af den sædvanlige række dannet ved ordning af dobbeltrækkens led ved hjælp af en bijektiv afbildning $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (en ordning):

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\tau(k)}$$

De forskellige summationsmetoder behøver ikke at give samme resultat.

Eksempel: For dobbeltfølgen

*) $\sum_{n \in \mathbb{N}}$ bruges synonymt med $\sum_{n=1}^{\infty}$.

$m \backslash n$										$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}$
	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$...	0
	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$...	0
	0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$...	0
	0	0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$...	0
	0	0	0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$...	0
	0	0	0	0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$...	0
	0	0	0	0	0	0	1	-1	...	0
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
$\sum_{m \in \mathbb{N}} a_{mn}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$	0	...	

gælder, at $\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn} = 0$, mens $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{mn} = +\infty$.

Jmidlertid forenkles situationen betydeligt, når dobbeltrækkens led alle er ≥ 0 .

Sætning 10.1. Lad $(a_{mn})_{m,n \in \mathbb{N}}$ være en dobbeltfølge med reelle, ikke-negative led. For den tilhørende dobbeltrække er følgende udsagn $1^\circ - 4^\circ$ ækvivalente:

1° $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}$ er konvergent for hvert m med sum s_m , og $\sum_{m \in \mathbb{N}} s_m$ er konvergent med sum s .

2° $\sum_{m \in \mathbb{N}} a_{mn} = t_n$ for hvert n , og $\sum_{n \in \mathbb{N}} t_n = s$.

3° Der findes en ordning $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, så at $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\tau(k)} = s$.

4° For enhver ordning $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gælder $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\tau(k)} = s$.

Bevis: Vi bemærker straks, at $3^\circ \Leftrightarrow 4^\circ$ på grund af sætningen om omordning af en absolut konvergent række (MAT 1-noterne (102) s. 23.02); når τ_1 og τ_2 er to ordninger, er rækken $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\tau_2(k)}$ netop dannet ud fra rækken $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\tau_1(k)}$ ved omordningen defineret ved $\tau_2^{-1} \circ \tau_1$.

Vi vil vise, at $1^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$; beviset for at $2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$ er analogt.

Antag først, at 3° gælder, d.v.s. der er givet en ordning $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ for hvilken rækken $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\tau(k)}$ er konvergent med sum s . For hvert fast m har vi da, at ethvert afsnit $\sum_{n=1}^{h_0} a_{mn} \leq s$; altså er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ konvergent med sum $s_m \leq s$. Betragt nu et afsnit $\sum_{m=1}^{m_0} s_m$ i rækken $\sum_{m=1}^{\infty} s_m$. Lad $\epsilon > 0$, da kan vi for hvert $m \leq m_0$ bestemme $n_0(m)$, så

$$\sum_{n=1}^{n_0(m)} a_{mn} \geq s_m - \frac{\epsilon}{m_0} \quad \text{Jalt fås}$$

$$(10.1) \quad \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{n=1}^{n_0(m)} a_{mn} \geq \sum_{m=1}^{m_0} s_m - \epsilon.$$

Jmidlertid er mængden

$$\{(m, n) \mid m \leq m_0, n \leq n_0(m)\}$$

indeholdt i en mængde $\{\tau(k) \mid k \leq k_0\}$ for k_0 tilstrækkelig stor, så venstre side i (10.1) er $\leq s$. Altså er

$$\sum_{m=1}^{m_0} s_m \leq s + \epsilon.$$

Da ϵ var vilkårlig, ses at $\sum_{m=1}^{m_0} s_m \leq s$, for ethvert m_0 , dvs. rækken $\sum_{m=1}^{\infty} s_m$ er konvergent med sum $s' \leq s$. Kort fortalt har vi vist:

$$(10.2) \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\tau(k)} = s \Rightarrow \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn} = s' \leq s.$$

Antag dernæst omvendt, at 1° gælder, og lad $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ være en bijektiv afbildning. Lad $k_0 \in \mathbb{N}$. Betegn det største m , som optræder i mængden af talpar $T = \{\tau(k) \mid k \leq k_0\}$, ved m_0 . Definer for hvert $m \leq m_0$

$$N_m = \{n \mid (m, n) \in T\},$$

N_m kan være tom. Vi har da

$$T = \bigcup_{m=1}^{m_0} \{(m, n) \mid n \in N_m\},$$

hvormed

$$\sum_{k \leq k_0} a_{\tau(k)} = \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{n \in N_m} a_{mn} \leq \sum_{m=1}^{m_0} s_m \leq s.$$

Da er rækken $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\tau(k)}$ konvergent med sum $s'' \leq s$, og vi har vist

$$(10.3) \quad \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn} = s \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\tau(k)} = s'' \leq s.$$

Ved brug af (10.2) fås nu, at $s'' = s$, hvilket viser 1° \Rightarrow 3°.

Anvendes (10.3) på (10.2), fås 3° \Rightarrow 1°. \square

Om en vilkårlig dobbeltrække $\sum_{m, n \in \mathbb{N}} a_{mn}$ vil vi sige, at den er absolut konvergent, hvis dobbeltrækken $\sum_{m, n \in \mathbb{N}} |a_{mn}|$ er konvergent efter en af metoderne 1°-4° (og dermed efter dem alle, med samme grænseværdi). At en dobbeltrække $\sum_{m, n \in \mathbb{N}} a_{mn}$ er absolut konvergent med sum s (dette begreb begrundes i følgende sætning), angives ved:

$$\sum_{m, n \in \mathbb{N}} a_{mn} = s.$$

Sætning 10.2. Hvis dobbeltrækken $\sum_{m, n \in \mathbb{N}} a_{mn}$ er absolut konvergent,

konvergerer den efter hver af metoderne $1^\circ - 4^\circ$; Sætning 10.1, og

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{mn} = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\tau(k)},$$

for enhver ordning $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Bævis: Betegn summen af $\sum_{m, n \in \mathbb{N}} |a_{mn}|$ ved s_0 . Ifølge det givne er

$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{mn}|$ konvergent (for hvert m), hvormed $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}$ er absolut konvergent;

betegn summen ved s_m . Endvidere har vi for hvert m_0

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=1}^{m_0} s_m \right| &\leq \sum_{m=1}^{m_0} |s_m| = \sum_{m=1}^{m_0} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn} \right| \\ &\leq \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{mn}| \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{mn}| = s_0, \end{aligned}$$

hvoraf følger, at den itererede række $\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}$ er konvergent; betegn

summen ved s . Man finder analogt, at $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{mn}$ er konvergent; be-

tegn summen ved s' . Endelig er, for en vilkårlig ordning $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

rækken $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\tau(k)}$ absolut konvergent ifølge det givne; betegn sum-

men ved s'' . Vi mangler at vise, at $s = s' = s''$; lad os f.ex. vise, at $s = s''$.

Lad $\varepsilon > 0$; vi kan da finde $k_0 \in \mathbb{N}$, så at

$$\left| s'' - \sum_{k=1}^{k_0} a_{\tau(k)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

og

$$\sum_{k=k_0+1}^{k_0+p} |a_{\tau(k)}| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

for alle $p \in \mathbb{N}$. Mængden af talpar $T = \{ \tau(k) \mid k \leq k_0 \}$ skrives som i beviset for Sætning 10.1

$$T = \bigcup_{m=1}^{m_0} \{ (m, n) \mid n \in N_m \}$$

hvor $m_0 = \max \{ m \mid \exists n \in \mathbb{N} : (m, n) \in T \}$ og $N_m = \{ n \mid (m, n) \in T \}$.

Vælg $m_1 \geq m_0$ således at

$$\left| s - \sum_{m=1}^{m_1} s_m \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

og vælg for hvert $m \leq m_1$ et tal $n_1(m)$, så $n_1(m) \geq \max N_m$, når $m \leq m_0$, og

$$\left| s_m - \sum_{n=1}^{n_1(m)} a_{mn} \right| \leq \frac{\varepsilon}{4m_1}$$

Jalt har vi da

$$\begin{aligned} |s - s''| &\leq \left| s - \sum_{m=1}^{m_1} s_m \right| + \left| \sum_{m=1}^{m_1} s_m - \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1(m)} a_{mn} \right| \\ &\quad + \left| \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1(m)} a_{mn} - \sum_{(m,n) \in T} a_{mn} \right| + \left| \sum_{(m,n) \in T} a_{mn} - s'' \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{m=1}^{m_1} \frac{\varepsilon}{4m_1} + \sum_{k=k_0+1}^{k_0+p} |a_{\tau(k)}| + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon,$$

hvor vi har observeret, at $\{(m, n) \mid m \leq m_1, n \leq n_1(m)\} \supseteq T$, og vi har valgt p , så de overskydende talpar ligger i mængden $\{\tau(k) \mid k_0+1 \leq k \leq k_0+p\}$. Da ε var vilkårlig, følger at $s = s''$. \square

Udover de nævnte summationsmetoder kan man tænke sig andre; f.ex. iterationsmetoder, hvor talparrene i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ordnes i en numerabel familie $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ af numerable mængder $A_m = \{(p_{mn}, q_{mn}) \mid n \in \mathbb{N}\}$, og man først summerer over hver A_m , dernæst summerer de fremkomne summer over m . Dette svarer i virkeligheden blot til en omordning af $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (en bijektiv afbildning $\sigma: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$), hvor iterationsmetoden 1^o anvendes på den omordnede dobbeltrække. Absolut konvergens bevares ved en sådan omordning; beviset herfor kan føres tilbage til sætningen om omordning af en sædvanlig række.

Vi kan også betragte bijektive afbildninger mellem \mathbb{N} (eller \mathbb{N}^2) og \mathbb{N}^k (k hel > 2) og opstille nye iterative summationsmetoder. Dette fører ind på begreberne k -doppeltrække (specielt tripeltrække, for $k=3$), hvis behandling begrebsmæssigt ligner dobbeltrækkerne i så høj grad, at vi ikke vil give mange detaljer.

En tripel (tal) følge er en funktion $(n_1, n_2, n_3) \mapsto a_{n_1, n_2, n_3}$ fra \mathbb{N}^3 ind i \mathbb{R} eller \mathbb{C} ; den tilhørende tripel (tal) række skrives

$\sum_{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}} a_{n_1, n_2, n_3}$. For k hel positiv defineres en k -dobbelt (tal) følge som

en funktion $(n_1, \dots, n_k) \mapsto a_{n_1, \dots, n_k}$ fra \mathbb{N}^k ind i \mathbb{R} eller \mathbb{C} ; den tilhørende k -dobbelttrække skrives $\sum_{n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}} a_{n_1, \dots, n_k}$. Når $k > 1$, er det ofte en fordel

at bruge vektornotation, altså skrive (n_1, \dots, n_k) som \underline{n} (et multi-index), hvorved k -dobbeltfølgen og k -dobbelttrækken skrives

$$(a_{\underline{n}})_{\underline{n} \in \mathbb{N}^k} \quad \text{henholdsvis} \quad \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^k} a_{\underline{n}}.$$

Notationer med multi-indices anvendes meget i moderne værker om partielle differentiaalligninger. Indexmængden kan f.ex. også være \mathbb{N}_0^k eller \mathbb{Z}^k .

Når $k > 2$, er der flere end to naturlige iterationsmetoder, svarende til hvilken rækkefølge man vælger at summere de k indices efter; men moralen bliver som i Sætning 10.1 og 10.2:

Sætning 10.3. For en k -dobbelttrække med reelle, ikke-negative led er samtlige summationsmetoder under a) og b) ækvivalente:

$$a) \quad \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \dots \sum_{n_k \in \mathbb{N}} a_{\underline{n}},$$

hvor $\underline{n} = (n_1, \dots, n_k)$, og (j_1, \dots, j_k) er en permutation af $(1, \dots, k)$;

b)
$$\sum_{l \in \mathbb{N}} a_{\underline{\varepsilon}(l)}$$
 hvor $\underline{\varepsilon}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^k$ er en bijektiv afbildning.

Vi siger, at k -dobbeltrækken $\sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n$ er absolut konvergent, når $\sum_{n \in \mathbb{N}^k} |a_n|$ konvergerer efter en af (og dermed alle) metoderne i Sætning 10.3, og man finder

Sætning 10.4. Hvis k -dobbeltrækken $\sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n$ er absolut konvergent, er den konvergent efter enhver af summationsmetoderne i Sætning 10.3, med samme sum.

Beviser: Øvelse. \square

T 10.2 Dobbeltrækker, hvis led er funktioner.

Man kan naturligvis definere k -dobbelfølger, hvis elementer tilhører en vilkårlig mængde V ; det er simpelthen afbildninger $(n_1, \dots, n_k) \mapsto a_{n_1, \dots, n_k} \in V$ fra \mathbb{N}^k ind i V . Vi vil se på tilfældet, hvor V er et funktionsvektorum, så vi kan addere elementerne og danne k -dobbeltrækker. Da alle principielle spørgsmål allerede viser sig for tilfældet $k=2$, vil vi nøjes med at behandle dette tilfælde eksplicit.

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (tilstrækkelig pæn til at vi kan integrere over A), og lad V betegne mængden af reelle eller komplekse funktioner på A . Betragt en dobbeltfølge $(f_{mn})_{m,n \in \mathbb{N}}$ af sådanne funktioner. For dobbeltrækken $\sum_{m,n \in \mathbb{N}} f_{mn}$ kan vi indføre summationsmetoderne $1^\circ - 4^\circ$ i forrige afsnit, idet vi nu yderligere må skelne mellem punktvise konvergens, uniform konvergens og konvergens i middel med hensyn til en vægtfunktion $\varphi(x)$ på A . Herved fås en samling konvergensbegreber, som bliver temmelig stor, fordi vi ved iterationsmetoderne 1° og 2° kan vælge forskelligt konvergensbegreb ved den første og den anden grænseovergang.

Notationen for konvergens i middel på A er følgende: $\varphi(x)$ betegner en positiv funktion på A , som er kontinuert (eventuelt med visse diskontinuiteter af en sådan art at teorien har mening). Vi definerer

$$\|f\|_p^2 = \int_A |f(x)|^2 \varrho(x) dx_1 \dots dx_e$$

og, når integralet eksisterer,

$$(f|g)_p = \int_A f(x) \overline{g(x)} \varrho(x) dx_1 \dots dx_e$$

($g(x)$ konjugeres, når f og g tillades at være komplekse funktioner). I det følgende skriver vi for simpelhedsskyld $dx_1 \dots dx_e$ som dx . Funktionsklassen $M_p(A)$ (evt. M_p) definerer vi i tilfældet $p > 1$ som mængden af kontinuerte funktioner f på A med $\|f\|_p < \infty$. (Visse diskontinuiteter kunne tillades; det må gøres specielt i de tilfælde, hvor der er brug for det.) At

$$f \in M_p(A), f_n \in M_p(A) \text{ for hvert } n, \|f - \sum_{n=1}^N f_n\|_p \rightarrow 0 \text{ for } N \rightarrow \infty,$$

udtrykker vi kort ved

$$(10.8) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n = f \quad \text{i } \underline{M_p(A)};$$

i ord: rækken konvergerer i middel (på A , m.h.t. ϱ) mod f .

Sætningerne i afsnit 5.2 og 5.3 overføres uden videre til tilfældet, hvor intervallet $[a, b]$ er erstattet med mængden A .

Svarende til (10.8) skriver vi

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n = f \quad \text{uniformt på } A,$$

hvis $\sup_{x \in A} |f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x)| \rightarrow 0$ for $N \rightarrow \infty$; og

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n = f \quad \text{punktvis på } A,$$

hvis $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ for hvert $x \in A$.

Vi vil ikke opregne alle de forskellige konvergensbegreber for dobbelttrækker, men blot fremhæve nogle tilfælde, hvor visse af dem falder sammen.

For punktvis konvergens har man, som en umiddelbar konsekvens af Sætning 10.2:

Korollar 10.5. Hvis der for hvert $x \in A$ gælder, at $\sum_{m, n \in \mathbb{N}} |f_{mn}(x)|$ er konvergent efter en af metoderne 1°-4° i Sætning 10.1, da er rækken $\sum_{m, n \in \mathbb{N}} f_{mn}(x)$ punktvis konvergent efter hver af metoderne 1°-4°, med samme sum.

For uniform konvergens fås let ved hjælp af majorantkriteriet:

Sætning 10.6. Antag, at der findes en dobbelttalrække $\sum_{m, n \in \mathbb{N}} a_{mn}$, så der for hvert $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gælder

$$|f_{mn}(x)| \leq a_{mn} \text{ for alle } x \in A.$$

Hvis $\sum_{m,n \in \mathbb{N}} a_{mn}$ er konvergent, findes der en funktion $f(x)$ på A , om hvilken der gælder:

1° For hvert $m \in \mathbb{N}$ er $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_{mn}$ uniformt konvergent på A med sum f_m , hvor $\sum_{m \in \mathbb{N}} f_m$ er uniformt konvergent på A med sum f .

2° For hvert $n \in \mathbb{N}$ haves

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} f_{mn} = g_n \quad \text{uniformt på } A,$$

hvor

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n = f \quad \text{uniformt på } A.$$

3° For enhver ordning $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ gælder

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} f_{\tau(k)} = f \quad \text{uniformt på } A.$$

De sædvanlige sætninger om uniform konvergens kan nu anvendes på dobbeltrækker, som opfylder forudsætningerne i Sætning 10.6, ved at man summerer efter en ordning τ .

Konvergens i middel har særlig interesse i forbindelse med Fourierrækker. En dobbeltfølge af funktioner i $M_p(A)$, $(\Phi_{mn})_{m,n \in \mathbb{N}}$ kaldes et dobbeltortogonalsystem i $M_p(A)$, hvis

$$(10.9) \quad (\Phi_{mn} | \Phi_{m'n'})_p = 0 \quad \text{hvis og kun hvis } (m,n) \neq (m',n').$$

For en funktion $f \in M_p(A)$ defineres Fourierkoefficienterne efter dette system ved

$$(10.10) \quad c_{mn}(f) = \frac{(f | \Phi_{mn})_p}{\|\Phi_{mn}\|_p^2} \quad \text{for } m,n \in \mathbb{N},$$

og Fourierrækken for f er dobbeltrækken

$$f \sim \sum_{m,n \in \mathbb{N}} c_{mn}(f) \Phi_{mn}.$$

Vi har her

Sætning 10.7. Lad $f \in M_p(A)$ have Fourierrækken $\sum_{m,n \in \mathbb{N}} c_{mn} \Phi_{mn}$. Der gælder da om nedenstående udsagn 1°-5°, at 3° \Leftrightarrow 4° \Leftrightarrow 5°, samt at 1° \Rightarrow 5° og 2° \Rightarrow 5°.

1° For hvert $m \in \mathbb{N}$ findes $f_m \in M_p(A)$, så

$$(10.11) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{mn} \Phi_{mn} = f_m \quad \text{i } M_p(A),$$

og

$$(10.12) \quad \sum_{m \in \mathbb{N}} f_m = f \quad \text{i } M_p(A).$$

2° For hvert $n \in \mathbb{N}$ findes $g_n \in M_\varphi(A)$, så

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} c_{mn} \Phi_{mn} = g_n \quad \text{i } M_\varphi(A),$$

og

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n = f \quad \text{i } M_\varphi(A).$$

3° Der findes en ordning $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$, så

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} c_{\tau(k)} \Phi_{\tau(k)} = f \quad \text{i } M_\varphi(A),$$

4° For enhver ordning $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ gælder

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} c_{\tau(k)} \Phi_{\tau(k)} = f \quad \text{i } M_\varphi(A).$$

5° Parsevals ligning (for dobbeltortogonalsystemer) gælder:

$$(10.13) \quad \sum_{m, n \in \mathbb{N}} |c_{mn}|^2 \|\Phi_{mn}\|_\varphi^2 = \|f\|_\varphi^2.$$

Bevis: Jfølge Sætning 10.1 kan rækken i (10.13) summeres på enhver af de der nævnte måder, med samme resultat (den er for øvrigt altid konvergent, idet der gælder en analog til Bessels ulighed).

Vælger vi en ordning τ , er rækken $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_{\tau(k)} \Phi_{\tau(k)}$ Fourierrækken for f efter ortogonalsystemet $\{\Phi_{\tau(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$; Sætning 5.12 giver da, at $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_{\tau(k)} \Phi_{\tau(k)} = f$ i $M_\varphi(A)$, hvis og kun hvis $\sum_{k \in \mathbb{N}} |c_{\tau(k)}|^2 \|\Phi_{\tau(k)}\|_\varphi^2 = \|f\|_\varphi^2$. Heraf fås ækvivalensen af 3°, 4° og 5°.

Lad os nu vise $1^\circ \Rightarrow 5^\circ$; $2^\circ \Rightarrow 5^\circ$ vises analogt. For hvert fast m er følgen $\{\Phi_{mn}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et ortogonalsystem i $M_\varphi(A)$. Ved Sætning 5.11 følger det, at tallene c_{mn} , $n \in \mathbb{N}$, er Fourierkoefficienterne for f_m efter dette system, og Sætning 5.12 giver, at

$$(10.14) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{mn}|^2 \|\Phi_{mn}\|_\varphi^2 = \|f_m\|_\varphi^2.$$

Nu, hvis $m \neq m'$, har vi ved successiv anvendelse af

$$\left| \left(f_m - \sum_{n=1}^N c_{mn} \Phi_{mn} \mid f_{m'} \right)_\varphi \right| \leq \|f_m - \sum_{n=1}^N c_{mn} \Phi_{mn}\|_\varphi \|f_{m'}\|_\varphi \rightarrow 0 \text{ for } N \rightarrow \infty,$$

at

$$\begin{aligned} (f_m \mid f_{m'})_\varphi &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N c_{mn} \Phi_{mn} \mid f_{m'} \right)_\varphi \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\lim_{N' \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N c_{mn} \Phi_{mn} \mid \sum_{n'=1}^{N'} c_{m'n'} \Phi_{m'n'} \right)_\varphi \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

fordi $(\Phi_{mn} \mid \Phi_{m'n'}) = 0$ for alle n og n' . Ud af følgen $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ dannes delfølgen $(f_{m_j})_{j \in \mathbb{N}}$ bestående af dem af funktionerne f_m , der ikke er identisk 0; følgen $(f_{m_j})_{j \in \mathbb{N}}$ er da et ortogonalsystem i $M_\varphi(A)$. Jfølge det givne konvergerer $\sum_{j \in \mathbb{N}} f_{m_j}$ i middel mod f , hvoraf følger, at Fourierkoefficienterne for f m.h.t. systemet $(f_{m_j})_{j \in \mathbb{N}}$ alle er 1 (Sætning 5.11), samt at (ved Sætning 5.12)

$$(10.15) \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \|f_{m_j}\|_{\varphi}^2 = \|f\|_{\varphi}^2.$$

(Tilfældene hvor kun endeligt mange f_m er $\neq 0$ overlades til læseren.)
 (10.14) og (10.15) giver tilsammen

$$\begin{aligned} \|f\|_{\varphi}^2 &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \|f_{m_j}\|_{\varphi}^2 = \sum_{m \in \mathbb{N}} \|f_m\|_{\varphi}^2 \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{mn}|_{\varphi}^2 \|\Phi_{mn}\|_{\varphi}^2. \quad \square \end{aligned}$$

At vi ikke kan vise $5^{\circ} \Rightarrow 1^{\circ}$ skyldes blot den sædvanlige defekt ved vores funktionsklasse M_{φ} (jvf. bemærkningen side 5.5). Når 5° gælder, vil rækkerne $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_{mn} \Phi_{mn}$ faktisk konvergere i middel mod funktioner f_m , som kan have mange diskontinuitetspunkter; med brug af Lebesgue integralet kan man dernæst vise, at $\|f - \sum_{m=1}^N f_m\|_{\varphi} \rightarrow 0$.

Dobbeltortogonalsystemet $(\Phi_{mn})_{m,n \in \mathbb{N}}$ siges at være fuldstændigt i $M_{\varphi}(A)$, hvis der findes en ordning τ , så det sædvanlige ortogonalsystem $(\Phi_{\tau(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ er fuldstændigt. Ifølge Sætning 10.7 er dette ensbetydende med, at Parsevals ligning (10.13) gælder for enhver funktion $f \in M_{\varphi}(A)$.

K 10.3 Produktortogonalsystemer.

Dette og næste afsnit knytter an til [W] §31-35, 41, 44 m.fl.

I forbindelse med metoden "separation af de variable" skal man behandle rækkeudviklinger efter ortogonalsystemer, hvis elementer er produkter af funktioner af hver sin variabel. Når der er flere end to uafhængige variable får de pågældende rækker i reglen form af dobbeltrækker eller k -dobbelttrækker.

Eksempler:

1. Laplaces ligning i en terning kan behandles ved betragtning af dobbeltrækken (for $(x, y, z) \in [0, \pi]^3$):

$$\sum_{m, n \in \mathbb{N}} d_{mn} \frac{\sinh \sqrt{n^2 + m^2} (\pi - z)}{\sinh \sqrt{n^2 + m^2} \pi} \sin mx \sin ny$$

jvf. [W] §32.

2. Laplaces ligning i en cylinder kan behandles ved hjælp af dobbeltrækken (for $(r, \theta, z) \in [0, R_1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$)

$$\sum_{m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}} (c_{mn} \cos m\theta + d_{mn} \sin m\theta) \frac{I_m(nr)}{I_m(nR_1)} \sin nz,$$

hvor I_m er den m 'te "Bessel-funktion med imaginært argument", se

[W] § 33.

3. Den tredimensionale bølge ligning i en terning. De ialt fire uafhængige variable (x, y, z, t) gennemløber en cylinder $[0, \pi]^3 \times [0, \infty[$ med terningen som "bundflade". Begyndelses- og randværdiproblemet kan løses ved hjælp af en tripelrække

$$\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^3} \left(d_{\underline{n}} \cos \|\underline{n}\| ct + \tilde{d}_{\underline{n}} \frac{\sin \|\underline{n}\| ct}{\|\underline{n}\| c} \right) \sin n_1 x \sin n_2 y \sin n_3 z$$

hvor vi har brugt vektornotation: $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $\|\underline{n}\| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$, se ibrigt [W] § 34.

4. Poissons ligning i en terning kan behandles ved hjælp af en tripelrække (for $(x, y, z) \in [0, \pi]^3$)

$$\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^3} \frac{D_{\underline{n}}}{\|\underline{n}\|^2} \sin n_1 x \sin n_2 y \sin n_3 z,$$

jvf. [W] § 35.

5. Svingninger i en cirkulær membran kan behandles ved hjælp af en dobbeltrække (for $(r, \theta, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \infty[$)

$$\sum_{m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}} (c_{mn} \cos m\theta + d_{mn} \sin m\theta) \varphi_{m,n}(r) \cos(c\sqrt{\lambda_n^{(m)}} t),$$

hvor $\lambda_n^{(m)}$ er den n -te egenværdi og $\varphi_{m,n}(r)$ er den n -te egenfunktion til egenværdiproblemet for Bessels differentialligning

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) + \frac{m^2}{r^2} u = \lambda u & \text{for } 0 < r < 1, \\ u \text{ og } u' \text{ begrænsede på }]0, 1], u(1) = 0, \end{cases}$$

hvis løsninger udtrykkes ved den m -te Besselfunktion $J_m(r)$ ved formlen

$$\varphi_{m,n}(r) = J_m(\sqrt{\lambda_n^{(m)}} r),$$

jvf. [W] § 41.

6. Laplaces ligning i en kugle kan behandles ved hjælp af dobbeltrækken (for $(r, \varphi, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi] \times [-\pi, \pi]$)

$$\sum_{m, n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{R^n} r^n (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta),$$

hvor funktionerne P_n^m er de associerede Legendre-funktioner, jvf. [W] § 44.

I disse eksempler optræder produktrækker af formen (med kompleks notation for de trigonometriske rækker):

$$(10.20) \quad \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} c_{mn}(t) e^{imx} e^{iny}$$

(eksempel 1 med $t = z$, eksempel 2 med $(x, y, t) = (\theta, z, r)$);

$$(10.21) \quad \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^3} c_{\underline{n}}(t) e^{in_1 x} e^{in_2 y} e^{in_3 z}$$

(eksempel 3, eksempel 4 med c_n uafhængig af t),

$$(10.22) \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}} c_{mn}(t) e^{imx} \varphi_{mn}(y).$$

(eksempel 5 med $(x, y) = (r, \theta)$, eksempel 6 med $(x, y, t) = (\varphi, \theta, r)$); i (10.22) er systemet $(\varphi_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ et fuldstændigt ortogonalsystem (på et interval af y -aksen) for hvert fast m .

(10.20) er et specialtilfælde af (10.22), og (10.21) er af samme, rent trigonometriske type som (10.20); det principielt set mest generelle tilfælde er (10.22). Behandlingen af alle tre tilfælde falder ind under følgende sætning:

Sætning 10.8. Lad $A \subseteq \mathbb{R}^{l_1}$ være en begrænset, afsluttet mængde, og lad $B \subseteq \mathbb{R}^{l_2}$ være åben eller afsluttet, A og B forsynet med positive vægtfunktioner $\rho(\underline{x}) \in C^0(A)$ henholdsvis $\sigma(\underline{y}) \in C^0(B)$. (A og B antages at være så pæne, at vi kan integrere over dem, f.ex. kan det være intervaller.) Lad $(\varphi_m(\underline{x}))_{m \in \mathbb{N}}$ være et ortogonalsystem i $M_\rho(A)$, og lad der for hvert $m \in \mathbb{N}$ være givet et ortogonalsystem $(\psi_{mn}(\underline{y}))_{n \in \mathbb{N}}$ i $M_\sigma(B)$. Mængden $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{l_1+l_2}$ betragtes, med vægtfunktionen $\Sigma(\underline{x}, \underline{y}) = \rho(\underline{x})\sigma(\underline{y})$. Der gælder da:

- 1) Funktionerne $\Phi_{mn}(\underline{x}, \underline{y}) = \varphi_m(\underline{x})\psi_{mn}(\underline{y})$ for $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ udgør et ortogonalsystem i $M_\Sigma(A \times B)$.
- 2) Hvis systemet $(\varphi_m(\underline{x}))_{m \in \mathbb{N}}$ er fuldstændigt i $M_\rho(A)$, og hvert af systemerne $(\psi_{mn}(\underline{y}))_{n \in \mathbb{N}}$ er fuldstændigt i $M_\sigma(B)$, da er $(\Phi_{mn})_{m, n \in \mathbb{N}}$ fuldstændigt i $M_\Sigma(A \times B)$.

Til beviset for 2) vil vi benytte Lebesgues sætning om domineret konvergens (rettere: et korollar til Lebesgues sætning).

Sætning 10.9 (Lebesgue). Hvis $u_N(\underline{y}) \rightarrow 0$ for $N \rightarrow \infty$ punktvis på B , og der findes en ikke-negativ funktion $u(\underline{y})$ med $\int_B u(\underline{y}) d\underline{y} < \infty$, så at $|u_N(\underline{y})| \leq u(\underline{y})$ for hvert $\underline{y} \in B$, alle $N \in \mathbb{N}$,

da gælder

$$\int_B |u_N(\underline{y})| d\underline{y} \rightarrow 0 \text{ for } N \rightarrow \infty.$$

Sætningen vises i MAT 212. Uden denne sætning kunne vi vise 2) under yderligere forudsætninger om de givne systemer, jvf. senere; det er dog nok en lettelse at konstatere nu, at 2) gælder helt alment.

Bevis for Sætning 10.8:

- 1) For to talpar (m, n) og $(m', n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ har vi:

*) Under antagelserne om A og ρ er funktionerne i $M_\rho(A)$ netop de kontinuerte funktioner på A (men $M_\rho(A)$ og $C^0(A)$ har ikke samme norm). Endvidere, når $f \in M_\Sigma(A \times B)$, vil $f(\underline{x}, \underline{y})$ for hvert fast \underline{y} tilhøre $M_\rho(A)$.

$$\begin{aligned}
 (\Phi_{mn} | \Phi_{m'n'})_{\Sigma} &= \int_{A \times B} \varphi_m(\underline{x}) \psi_{mn}(\underline{y}) \overline{\varphi_{m'}(\underline{x}) \psi_{m'n'}(\underline{y})} \varrho(\underline{x}) \sigma(\underline{y}) d\underline{x} d\underline{y} \\
 (10.23) \quad &= \int_A \varphi_m(\underline{x}) \overline{\varphi_{m'}(\underline{x})} \varrho(\underline{x}) d\underline{x} \cdot \int_B \psi_{mn}(\underline{y}) \overline{\psi_{m'n'}(\underline{y})} \sigma(\underline{y}) d\underline{y} \\
 &= (\varphi_m | \varphi_{m'})_{\varrho} \cdot (\psi_{mn} | \psi_{m'n'})_{\sigma}.
 \end{aligned}$$

Når $m \neq m'$, er dette 0. Når $m = m'$, er det 0 hvis og kun hvis $n \neq n'$.
 Altså haves netop, at $(\Phi_{mn} | \Phi_{m'n'})_{\Sigma} = 0$ hvis og kun hvis $(m, n) \neq (m', n')$,
 dvs. det er et dobbeltortogonalsystem.

2) Lad $f(\underline{x}, \underline{y}) \in M_{\Sigma}(A \times B)$. Fourierkoefficienterne for f efter systemet $(\Phi_{mn})_{m, n \in \mathbb{N}}$ er

$$\begin{aligned}
 (10.24) \quad c_{mn} &= \|\Phi_{mn}\|_{\Sigma}^{-2} (f | \Phi_{mn})_{\Sigma} \\
 &= \|\varphi_m\|_{\varrho}^{-2} \cdot \|\psi_{mn}\|_{\sigma}^{-2} \int_{A \times B} f(\underline{x}, \underline{y}) \overline{\varphi_m(\underline{x}) \psi_{mn}(\underline{y})} \varrho(\underline{x}) \sigma(\underline{y}) d\underline{x} d\underline{y}
 \end{aligned}$$

(vi har benyttet (10.23)).

Vi kan også, for hvert fast \underline{y} , danne Fourierkoefficienterne for $f(\underline{x}, \underline{y})$ efter systemet $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ i $M_{\varrho}(A)$; det giver for hvert m en funktion af \underline{y} :

$$a_m(\underline{y}) = \|\varphi_m\|_{\varrho}^{-2} \int_A f(\underline{x}, \underline{y}) \overline{\varphi_m(\underline{x})} \varrho(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Da integranden $f(\underline{x}, \underline{y}) \overline{\varphi_m(\underline{x})} \varrho(\underline{x})$ er kontinuert på $A \times B$, og derfor uniformt kontinuert på $A \times B_0$ for hver kompakt delmængde B_0 af B , er $a_m(\underline{y})$ kontinuert på B . Endvidere gælder, at $a_m(\underline{y}) \in M_{\sigma}(B)$, thi vi har

$$\begin{aligned}
 |a_m(\underline{y})| &= \|\varphi_m\|_{\varrho}^{-2} |(f(\cdot, \underline{y}) | \varphi_m(\cdot))_{\varrho}| \\
 &\leq \|\varphi_m\|_{\varrho}^{-2} \|f(\cdot, \underline{y})\|_{\varrho} \|\varphi_m\|_{\varrho} \\
 &= \|\varphi_m\|_{\varrho}^{-1} \|f(\cdot, \underline{y})\|_{\varrho} \quad \text{for hvert } \underline{y},
 \end{aligned}$$

hvormed

$$\begin{aligned}
 \int_B |a_m(\underline{y})|^2 \sigma(\underline{y}) d\underline{y} &\leq \|\varphi_m\|_{\varrho}^{-2} \int_B \left(\int_A |f(\underline{x}, \underline{y})|^2 \varrho(\underline{x}) d\underline{x} \right) \sigma(\underline{y}) d\underline{y} \\
 &= \|\varphi_m\|_{\varrho}^{-2} \|f\|_{\Sigma}^2.
 \end{aligned}$$

Vi kan da danne Fourierkoefficienterne for denne funktion efter systemet $(\psi_{mn}(\underline{y}))_{m, n \in \mathbb{N}}$ i $M_{\sigma}(B)$:

$$\begin{aligned}
 a_{mn} &= \|\psi_{mn}\|_{\sigma}^{-2} \int_B a_m(\underline{y}) \overline{\psi_{mn}(\underline{y})} \sigma(\underline{y}) d\underline{y} \\
 &= \|\psi_{mn}\|_{\sigma}^{-2} \|\varphi_m\|_{\varrho}^{-2} \int_B \int_A f(\underline{x}, \underline{y}) \overline{\varphi_m(\underline{x}) \psi_{mn}(\underline{y})} \varrho(\underline{x}) \sigma(\underline{y}) d\underline{x} d\underline{y} \\
 &= c_{mn} \quad (!),
 \end{aligned}$$

og vi har da ifølge fuldstændigheden af systemet $(\psi_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ i $M_\sigma(B)$:

$$\int_B |a_m(\underline{y}) - \sum_{n=1}^N c_{mn} \psi_{mn}(\underline{y})|^2 \sigma(\underline{y}) d\underline{y} \rightarrow 0,$$

for $N \rightarrow \infty$. Ved multiplikation af denne talfølge med $|\varphi_m(\underline{x})|^2 \rho(\underline{x})$ og integration over A fås

$$\int_A \int_B |a_m(\underline{y}) \varphi_m(\underline{x}) - \sum_{n=1}^N c_{mn} \psi_{mn}(\underline{y}) \varphi_m(\underline{x})|^2 \sigma(\underline{y}) \rho(\underline{x}) d\underline{y} d\underline{x} \rightarrow 0,$$

d.v.s.

$$\varphi_m(\underline{x}) a_m(\underline{y}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{mn} \Phi_{mn}(\underline{x}, \underline{y}) \quad \text{i } M_\Sigma(A \times B).$$

Funktionerne

$$f_m(\underline{x}, \underline{y}) = \varphi_m(\underline{x}) a_m(\underline{y})$$

spiller altså rollen som f_m i Sætning 10.7, 1°.

Påstanden kan da vises ved, at vi viser at

$$(10.25) \quad \sum_{m \in \mathbb{N}} f_m = f \quad \text{i } M_\Sigma(A \times B).$$

Hertil betragtes

$$\begin{aligned} I_N &= \left\| f - \sum_{m=1}^N f_m \right\|_\Sigma^2 \\ &= \int_{A \times B} \left| f(\underline{x}, \underline{y}) - \sum_{m=1}^N f_m(\underline{x}, \underline{y}) \right|^2 \rho(\underline{x}) \sigma(\underline{y}) d\underline{x} d\underline{y} \\ &= \int_{A \times B} \left| f(\underline{x}, \underline{y}) - \sum_{m=1}^N \varphi_m(\underline{x}) a_m(\underline{y}) \right|^2 \rho(\underline{x}) \sigma(\underline{y}) d\underline{x} d\underline{y}. \end{aligned}$$

Pr. definition af $a_m(\underline{y})$ har vi for hvert fast \underline{y}

$$(10.26) \quad J_N(\underline{y}) = \int_A \left| f(\underline{x}, \underline{y}) - \sum_{m=1}^N \varphi_m(\underline{x}) a_m(\underline{y}) \right|^2 \rho(\underline{x}) d\underline{x} \rightarrow 0,$$

for $N \rightarrow \infty$. I_N dannes af denne talfølge ved multiplikation med $\sigma(\underline{y})$ og integration over B . Under visse omstændigheder kan man vise, at $J_N(\underline{y})$ konvergerer uniformt mht. \underline{y} (se Bemærkning 10.10 nedenfor, og påstanden [W] s. 142 l. 10-12), hvoraf sluttet at $I_N \rightarrow 0$, når B og $\sigma(\underline{y})$ er begrænsede. Helt alment kan vi bruge Lebesgues sætning:

$$\begin{aligned} (10.27) \quad J_N(\underline{y}) &= \left\| f(\cdot, \underline{y}) - \sum_{m=1}^N a_m(\underline{y}) \varphi_m(\cdot) \right\|_\rho^2 \\ &= \left\| f(\cdot, \underline{y}) \right\|_\rho^2 - \sum_{m=1}^N |a_m(\underline{y})|^2 \|\varphi_m\|^2 \quad (\text{ved (5.15)}) \\ &\leq \left\| f(\cdot, \underline{y}) \right\|_\rho^2 = \int_A |f(\underline{x}, \underline{y})|^2 \rho(\underline{x}) d\underline{x} = J(\underline{y}), \end{aligned}$$

for hvert $\underline{y} \in B$, alle $N \in \mathbb{N}$, hvor

$$\int_B J_N(\underline{y}) \sigma(\underline{y}) d\underline{y} = \int_B \int_A |f(x, \underline{y})|^2 \rho(x) \sigma(\underline{y}) dx d\underline{y} = \|f\|_{\Sigma}^2.$$

Da $J_N(\underline{y}) \sigma(\underline{y}) \rightarrow 0$ punktvis på B , er ≥ 0 og opfylder (10.27), følger det af Sætning 10.9, at $I_N \rightarrow 0$, hvilket viser (10.25).

Hermed er redegjort for at 1° i Sætning 10.7 gælder, hvormed 3°, 4° og 5° gælder for $f \in M_{\Sigma}(A \times B)$, og systemet $(\Phi_{mn})_{m, n \in \mathbb{N}}$ er fuldstændigt. \square

For mere generelle funktioner kan man herefter vise Fourierræk-
kens konvergens ved approksimation i middel (på $A \times B$, mht. Σ) med
kontinuerte funktioner.

Bemærkning 10.10. Antag, at A er et interval $[\alpha, \beta]$, og at syste-
met $(\varphi_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ er ortogonalsystemet svarende til et regulært Sturm-
Liouville problem, φ_m hørende til egen værdien λ_m . Antag, at B er
begrænset, og $\sigma(\underline{y})$ er begrænset. Antag, at $\frac{\partial f}{\partial x}$ eksisterer og er kon-
tinuert på $A \times B$, og f og $\frac{\partial f}{\partial x}$ er begrænsede på $A \times B$.

Da har vi for hvert \underline{y} , jvf. [W] s. 166 l. 2, og disse noter s. 9.13
(Lemma 9.19),

$$\begin{aligned} J_N(\underline{y}) &= \|f(\cdot, \underline{y}) - \sum_{m=1}^N a_m(\underline{y}) \varphi_m(\cdot)\|_{\rho}^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_N} \int_{\alpha}^{\beta} [p(x) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \underline{y})\right)^2 + q(x) f(x, \underline{y})^2] dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda_N} K, \end{aligned}$$

hvor

$$K = (\beta - \alpha) \max_{(x, \underline{y}) \in A \times B} \left(p(x) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + q(x) f^2 \right).$$

Da $\lambda_N \rightarrow \infty$ for $N \rightarrow \infty$, fås at $J_N(\underline{y}) \rightarrow 0$ uniformt, hvorefter sluttes, at
 $I_N \rightarrow 0$ for $N \rightarrow \infty$ ved brug af sætningen om integration af en uniformt
konvergent funktionsfølge. Da vi også har

$$J_N(\underline{y}) = \|f(\cdot, \underline{y})\|_{\rho}^2 - \sum_{m=1}^N |a_m(\underline{y})|^2 \|\varphi_m\|_{\rho}^2,$$

viser dette tillige påstanden i [W] s. 142 l. 10-12.

Endvidere giver det (sammen med andre overvejelser i bevist
for Sætning 10.8) den manglende dækning for henvisningen i [W]
s. 182, l. 2 fra neden: "By the argument of Section 31...".

For nævnte eksempler (s. 10.10ff) behandles nu ved Sætning
10.8:

For rækker af typen (10.20) sætter vi $A=B=[0, 2\pi]$, $\rho=\sigma=1$;
da $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ er et fuldstændigt ortogonalsystem i $M_1([0, 2\pi])$,
følger, at $(\Phi_{mn})_{m, n \in \mathbb{Z}}$ med $\Phi_{mn} = e^{imx} e^{iny} = e^{i(mx+ny)}$ er et fuld-

stændigt dobbeltortogonalsystem i $M_1([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$. [Den variable t opfattes i (10.20) som en parameter: Fourierrækken efter (x, y) af en kontinuert funktion $f(x, y, t)$ konvergerer i middel mht. $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ mod f for hvert fast t .]

Specielt haves for enhver ordning $k \mapsto (n_1(k), n_2(k))$ (bijektiv afbildning af \mathbb{N} på $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) at ortogonalsystemet $(e^{i(n_1(k)x + n_2(k)y)})_{k \in \mathbb{N}}$ er fuldstændigt i $M_1([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$. Dermed kan tripelortogonalsystemet $(e^{in_1x} e^{in_2y} e^{in_3z})_{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}}$ i (10.21) organiseres som $(e^{i(n_1(k)x + n_2(k)y)} e^{in_3z})_{k \in \mathbb{N}, n_3 \in \mathbb{Z}}$, hvis fuldstændighed fås af Sætning 10.8 med $A = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, $\rho(x, y) = 1$, $B = [0, 2\pi]$, $\sigma(z) = 1$.

For rækker af typen (10.22) anvender vi Sætning 10.8 med $A = [0, 2\pi]$, $\rho(x) = 1$ og $(\varphi_m(x)) = \text{det trigonometriske ortogonalsystem}$. For systemet Ψ_{mn} kan vi i eksempel 5 tage $B =]0, 1[$, $\sigma(y) = y$, og i eksempel 6 tage $B =]-\pi, \pi[$, $\sigma(y) = 1$. Der vil senere blive introduceret yderligere ortogonalsystemer af specielle funktioner: Laguerrefunktionerne med $B =]0, \pi[$, $\sigma(y) = e^y$; Hermitefunktionerne med $B =]-\infty, \infty[$, $\sigma(y) = 1$; Mathieufunktionerne med $B = [0, 2\pi]$, $\sigma(y) = 1$; se Kapitel 11 i disse noter.

K 10.4 Uniform konvergens af multiple trigonometriske rækker.

Dobbeltortogonalsystemet af trigonometriske funktioner på $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ dannet ud fra det trigonometriske system på $[0, 2\pi]$

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

kan med reel notation angives ved skemaet

1	cos y	sin y	cos 2y	sin 2y	...
cos x	cos x cos y	cos x sin y	cos x cos 2y	cos x sin 2y	...
sin x	sin x cos y	sin x sin y	sin x cos 2y	sin x sin 2y	...
cos 2x	cos 2x cos y	cos 2x sin y	cos 2x cos 2y	cos 2x sin 2y	...
sin 2x	sin 2x cos y	sin 2x sin y	sin 2x cos 2y	sin 2x sin 2y	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Fourierkoefficienterne efter dette system betegner $[W]$ (jvf §31) ved

$\frac{1}{4} a_{00}$	$\frac{1}{2} a_{01}$	$\frac{1}{2} b_{01}$	$\frac{1}{2} a_{02}$	$\frac{1}{2} b_{02}$...
$\frac{1}{2} a_{10}$	a_{11}	b_{11}	a_{12}	b_{12}	...
$\frac{1}{2} c_{10}$	c_{11}	d_{11}	c_{12}	d_{12}	...
$\frac{1}{2} a_{20}$	a_{21}	b_{21}	a_{22}	b_{22}	...
$\frac{1}{2} c_{20}$	c_{21}	d_{21}	c_{22}	d_{22}	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Ved opskrivningen af rækkerne bliver de led, der indeholder et 0 i index, placeret særskilt.

Det er her en virkelig notationsmæssig lettelse at bruge den komplekse skrivemåde samt (især for $k > 2$) multi-indices (jvf. eksemplerne i foregående afsnit). Benytter man endvidere, at

$$e^{in_1 x_1} e^{in_2 x_2} \dots e^{in_k x_k} = e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)} = e^{i \underline{n} \cdot \underline{x}}$$

skrives den k -dobbelte trigonometriske række simpelthen som

$$\sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^k} c_{\underline{n}} e^{i \underline{n} \cdot \underline{x}}$$

hvor $\underline{x} \in [0, 2\pi]^k$ (eller eventuelt $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$).

Betingelser for uniform konvergens må forventeligt blive generalisationer af Sætning 5.20, se også Lemma 5.18 og 5.19. Vi finder her, at den krævede "glathed" af f vokser med dimensionen.

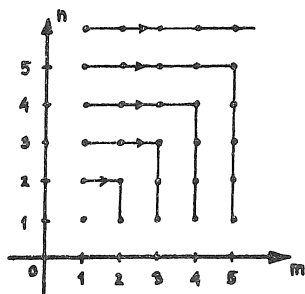
Lemma 10.11. Lad $\alpha > 0$.

(i) Dobbeltrækken $\sum_{m, n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(1+m^2+n^2)^\alpha}$ er konvergent, hvis og kun hvis $\alpha > 1$. Samme udsagn gælder for $\sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1+m^2+n^2)^\alpha}$.

(ii) Lad k hel > 1 . k -dobbeltrækken $\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^k} \frac{1}{(1+n_1^2 + \dots + n_k^2)^\alpha}$ er konvergent hvis og kun hvis $\alpha > \frac{k}{2}$. Samme udsagn for $\sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^k} \frac{1}{(1+n_1^2 + \dots + n_k^2)^\alpha}$.

Bevis: (Ordlyd og bevis for (i) er et specialtilfælde af (ii).)

(i) Talparrene $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ svarer til gitterpunkterne i første kvadrant, som vi ordner efter den i MAT 1-noterne (102) §23 på side 23.05 beskrevne rækkefølge:



$$\underbrace{(1,1)}_{1 \text{ pkt}}, \underbrace{(1,2), (2,2), (2,1)}_{3 \text{ punkter}}, \underbrace{(1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,1)}_{5 \text{ punkter}}, \dots$$

For hvert helt tal $l > 0$ har vi, at omkredsen af kvadratet $[-l, l] \times [-l, l]$ bidrager med $2l-1$ punkter; for disse gælder: m eller n er lig l , begge er $\leq l$. Vi får altså en summation over

$$\begin{aligned} & 1 \text{ led med } 1+m^2+n^2 = 3 \\ & 3 \text{ led med } 1+2^2 < 1+m^2+n^2 < 2+2 \cdot 2^2 \\ & \vdots \\ & 2l-1 \text{ led med } 1+l^2 < 1+m^2+n^2 < 2+2l^2 \end{aligned}$$

Dette giver

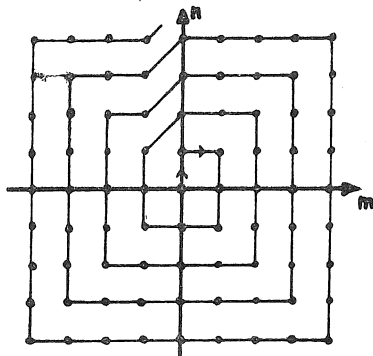
$$\sum_{l=1}^{l_0} \frac{2l-1}{2^\alpha (1+l^2)^\alpha} < \sum_{m, n \leq l_0} \frac{1}{(1+m^2+n^2)^\alpha} < \sum_{l=1}^{l_0} \frac{2l-1}{(1+l^2)^\alpha}$$

Da rækken $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l-1}{(1+l^2)^\alpha}$ konvergerer hvis og kun hvis $\alpha > 1$ (sammenlign

med $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{c}{l^{2\alpha-1}}$, $c = \text{konstant}$), fås at den givne dobbeltrække konvergerer

hvis og kun hvis $\alpha > 1$.

Når summationen er over $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, summerer vi over alle planens gitterpunkter på den nærliggende måde:



rækken

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(2\ell)^k - (2\ell-1)^k}{(1+\ell^2)^\alpha}$$

Tælleren $(2\ell)^k - (2\ell-1)^k$ er et polynomium $p(\ell)$ i ℓ af grad $k-1$

$$p(\ell) = k(2\ell)^{k-1} + \text{lavere grads led.}$$

Sidstnævnte række vil da konvergere præcis når rækken $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell^{k-1}}{\ell^{2\alpha}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^{2\alpha-k+1}}$ er konvergent, dvs. når $2\alpha - k + 1 > 1$, altså $\alpha > \frac{k}{2}$. Hermed

har vi vist udsagnet for k -dobbeltrækken, hvor der summeres over \mathbb{Z}^k .

Ved summation over \mathbb{N}^k medtages $\ell^k - (\ell-1)^k$ punkter af den ℓ -te skal, dette er også et polynomium af grad $k-1$:

$$\ell^k - (\ell-1)^k = k\ell^{k-1} + \text{lavere grads led.}$$

Herefter går beviset som foran. \square

Weinberger viser i [W]§31, at hvis $f(x,y)$ er en funktion på \mathbb{R}^2 , som har periode 2π i hver af de variable x og y , er C^1 på \mathbb{R}^2 og har 2' afledede, hvis kvadrater kan integreres over $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ (karakteren af de eventuelle diskontinuiteter specificeres ikke), så konvergerer den dobbelte trigonometriske række for f uniformt mod f på $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ (og på \mathbb{R}^2).

Formuleret i en sætning, hvor det træder tydeligere frem, hvad der får rækken til at konvergere uniformt (mens det lidt vage udsagn om de anden afledede erstattes af et skarpere krav), har vi altså:

Sætning 10.12: Lad $f \in C^0([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ have den dobbelte trigonometriske række

$$(10.28) \quad f(x,y) \sim \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{mn} e^{imx} e^{iny}$$

Hvis f kan udvides til en funktion på \mathbb{R}^2 , som har perioden 2π i x og y og tilhører $C^2(\mathbb{R}^2)$, da gælder

$$(10.29) \quad \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |c_{mn}| \text{ er konvergent,}$$

hvormed Fourierrækken (10.28) konvergerer uniformt mod f på $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Bevis: Rækkerne, som fås ved ledvis anvendelse af $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ er henholdsvis

$$- \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} m^2 c_{mn} e^{imx} e^{iny}$$

$$- \sum mn c_{mn} e^{imx} e^{iny},$$

$$- \sum n^2 c_{mn} e^{imx} e^{iny}.$$

Man viser ved delvis integration (som i Lemma 5.18 eller på s. 6.6), at

$$c_{mn} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = -m^2 c_{mn}(f), \quad c_{mn} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = -mn c_{mn}(f), \quad c_{mn} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = -n^2 c_{mn}(f),$$

så ovennævnte rækker er virkelige Fourierrækkerne for $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ resp. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Parsevals ligning giver da

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} m^4 |c_{mn}|^2 (2\pi)^2, \quad \text{(integration over } [0, 2\pi]^2 \text{ med vægtfunktion 1)}$$

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} m^2 n^2 |c_{mn}|^2 (2\pi)^2,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} n^4 |c_{mn}|^2 (2\pi)^2;$$

specielt ses, at rækken

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (1+m^2+n^2)^2 |c_{mn}|^2$$

er konvergent. Vi får da ved anvendelse af Schwarz' ulighed for endelige summer:

$$\begin{aligned} \sum_{|m|, |n| \leq N} |c_{mn}| &\leq \left(\sum_{|m|, |n| \leq N} |c_{mn}|^2 (1+m^2+n^2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|m|, |n| \leq N} \frac{1}{(1+m^2+n^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \text{konstant} \quad \text{for alle } N, \end{aligned}$$

ved brug af Lemma 10.11 (i). Dette viser (10.29), hvormed Fourierrækken er uniformt konvergent.

Kald sumfunktionen g , da har vi også (jvf. (5.18)), at Fourierrækken konvergerer i middel mod g . Da den vides at konvergere i middel mod f , fås $\|f - g\| = 0$, hvoraf (da f og g er kontinuerte) $f = g$. \square

Denne sætning er langt fra tilstrækkelig, idet vi også har brug for at undersøge uniform konvergens af de ledvist differentierede rækker, samt at generalisere sætningerne til tripelrækker og evt. mere almene k -dobbelt-rækker. Alt dette er indeholdt i næste sætning, hvis bevis i princippet blot er en generalisation af foregående bevis.

Lad $k \in \mathbb{N}$ og $\ell \in \mathbb{N}_0$. Vi indfører klassen $C_{\#}^{\ell}([0, 2\pi]^k)$, som mængden af funktioner i $C^{\ell}([0, 2\pi]^k)$ der kan udvides til funktioner i $C^{\ell}(\mathbb{R}^k)$, så at den udvidede funktion er periodisk i hver koordinatretning med periode 2π .

Sætning 10.13. Antag, at $f \in C^0([0, 2\pi]^k)$ har den trigonometriske k -dobbeltrække

$$(10.30) \quad f \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n e^{i n \cdot x}$$

a) Hvis

$$(10.31) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} (n_1^2 + \dots + n_k^2)^{\ell/2} |c_n| \quad \text{er konvergent,}$$

da er $f \in C_{\#}^{\ell}([0, 2\pi]^k)$, og Fourierrækken (10.30), samt de ved ledvis differentiation af orden ℓ til og med ℓ dannede rækker, konvergerer uniformt mod f resp. mod de tilsvarende partielle afledede af f på $[0, 2\pi]^k$ (dvs. Fourierrækken konvergerer mod f i $C^{\ell}([0, 2\pi]^k)$.)

b) Hvis $f \in C_{\#}^{\ell_1}([0, 2\pi]^k)$, hvor $\ell_1 > \frac{k}{2} + \ell$, da gælder (10.31), hvorved Fourierrækken (10.30) konvergerer mod f i $C^{\ell}([0, 2\pi]^k)$.

Bevis: a) Når

$$(10.32) \quad L = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial x_k^{\alpha_k}}$$

er et differentiationsudtryk af orden $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = \ell' \leq \ell$, er den tilsvarende ledvist differentierede række

$$(10.33) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} L(c_n e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n i^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} n_1^{\alpha_1} \dots n_k^{\alpha_k} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)}$$

Da

$$(10.34) \quad (n_1^{\alpha_1} \dots n_k^{\alpha_k})^2 \leq (n_1^2 + \dots + n_k^2)^{\ell'}$$

(idet højre side ved udregning giver en sum af positive produkter, hvoriblandt venstre side optræder med hel positiv koefficient), har (10.33) majorantrækken (for $x \in \mathbb{R}^k$)

$$(10.35) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} (n_1^2 + \dots + n_k^2)^{\ell'/2} |c_n|$$

Hver af rækkerne (10.35) for $0 \leq \ell' \leq \ell$ konvergerer, når rækken med $\ell' = \ell$ gør det. Altså konvergerer enhver af rækkerne (10.33) (med L af orden $\leq \ell$) uniformt på \mathbb{R}^k , hvorefter sætningen om ombytning af differentiation og summation giver, at sumfunktionen for (10.30) $\in C^{\ell}(\mathbb{R}^k)$. Da leddene har periode 2π i hver koordinataksens retning, har sumfunktionen (som er lig med f på $[0, 2\pi]^k$) det også, altså er $f \in C_{\#}^{\ell}([0, 2\pi]^k)$.

b) Antag her, at $f \in C_{\#}^{\ell_1}([0, 2\pi]^k)$ med $\ell_1 > \frac{k}{2} + \ell$. Ved brug af delvis integration i hver variabel fås, som en generalisation af Lemma 5.18:

$$c_n(Lf) = i^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} n_1^{\alpha_1} \dots n_k^{\alpha_k} c_n(f),$$

når L er en differentialoperator (10.32) af orden $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \leq \ell_1$.

Rækken (10.33) konvergerer da i middel mod L_f , dvs. vi har Parsevals ligning

$$(10.36) \quad \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^k} (n_1^{\alpha_1} \dots n_k^{\alpha_k})^2 |c_{\underline{n}}|^2 (2\pi)^k = \int_{[0, 2\pi]^k} |L_f(\underline{x})|^2 d\underline{x}$$

for ethvert sæt $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^k$ med $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \leq l_1$.

Bemærk nu, at der for ethvert l' gælder

$$(10.37) \quad (1 + n_1^2 + \dots + n_k^2)^{l'} \leq \text{konstant} \cdot \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_k \leq l'} (n_1^{\alpha_1} \dots n_k^{\alpha_k})^2,$$

idet venstre side ved udregning findes at bestå af en sum, med heltallige koefficienter, af de på højre side optrædende endeligt mange produkter.

Da fås, ved Schwarz' ulighed for endelige summer, for $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\max |n_j| \leq N} (n_1^2 + \dots + n_k^2)^{\frac{l'}{2}} |c_{\underline{n}}| &\leq \sum_{\max |n_j| \leq N} \frac{(1 + n_1^2 + \dots + n_k^2)^{l'/2} |c_{\underline{n}}|}{(1 + n_1^2 + \dots + n_k^2)^{(l'-l)/2}} \\ &\leq \left(\sum_{\max |n_j| \leq N} (1 + n_1^2 + \dots + n_k^2)^{l'} |c_{\underline{n}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\max |n_j| \leq N} \frac{1}{(1 + n_1^2 + \dots + n_k^2)^{l-l'}} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Den første faktor er konvergent for $N \rightarrow \infty$ på grund af (10.36) og (10.37). Da $l_1 - l > \frac{k}{2}$, er anden faktor konvergent på grund af Lemma 10.11 (ii). Altså gælder (10.31), og resten af sætningen følger ved brug af a). \square

Overalt, hvor randværdiproblemer behandles ved rækkeudvikling i trigonometriske rækker, giver denne sætning nøglen til diskussionen af, på hvilken måde den formelt opskrevne række løser det forelagte problem.

Kort beskrevet anvendes sætningen på eksemplerne 1-3 i foregående afsnit således:

Som løsning til det forelagte randværdiproblem opskrives rækken

$$(10.38) \quad u(\underline{x}, t) \sim \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^k} c_{\underline{n}}(t) e^{i \underline{n} \cdot \underline{x}},$$

hvor hvert led $c_{\underline{n}}(t) e^{i \underline{n} \cdot \underline{x}}$ er løsning til differentialligningen (som er homogen), og koefficienterne $c_{\underline{n}}(t)$ er tilpasset randbetingelsen $u(\underline{x}, t_0) = f(\underline{x})$ ved

$$(10.39) \quad f(\underline{x}) \sim \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^k} c_{\underline{n}}(t_0) e^{i \underline{n} \cdot \underline{x}}$$

Man skal nu undersøge, hvornår (10.38) løser problemet i klassisk forstand. Her anvendes på den ene side Sætning 10.13 b),

som ud fra oplysninger om f giver majorantrækker for rækken (10.39) og for et passende udvalg af dens ledvist differentierede rækker. På den anden side benyttes dette, sammen med vurderinger af $|C_n(t)|$ ved $|C_n(t_0)|$, til at vise uniform konvergens af (10.38) og visse af denne rækkes ledvist differentierede rækker; heri indgår Sætning 10.13 a).

Det er typisk for denne metode, at man taber nogen differentiability ved overgangen fra f til u . Lad os se på eksempel 3, bølge ligningen i en terning (se [W], § 34):

Vi søger løsninger til

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 & \text{for } (\underline{x}, t) \in D \times]0, \infty[, \\ u = f & \text{på } D \times \{0\}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{på } D \times \{0\}, \\ u = 0 & \text{på } C \times]0, \infty[; \end{cases}$$

her er $D =$ terningen $]0, \pi[$ i \underline{x} -rummet \mathbb{R}^3 , og C er dennes rand. (For simpelheds skyld har vi taget $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$.) Løsningen findes i form af rækken (jvf. [W] (34.6))

$$u(\underline{x}, t) \sim \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^3} d_{\underline{n}} \cos \|\underline{n}\| ct \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2 \sin n_3 x_3$$

($\|\underline{n}\| = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{\frac{1}{2}}$), hvor $d_{\underline{n}}$ er bestemt ved

$$f(\underline{x}) \sim \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^3} d_{\underline{n}} \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2 \sin n_3 x_3.$$

Rækken for u , samt rækkerne dannet ud fra denne ved ledvis differentiation af til og med 2' orden, er uniformt konvergente, hvis rækken

$$\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^3} |d_{\underline{n}}| (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

er konvergent. I så fald konvergerer rækken for u i $C^2(\bar{D} \times [0, \infty[)$, og u tilfredsstiller differentiaalligning og randbetingelser.

Ved hjælp af Sætning 10.13 b) ser vi nu, at dette er opfyldt, hvis f har en udvidelse til \mathbb{R}^3 , som tilhører $C^4(\mathbb{R}^3)$, og har periode 2π og er ulige i hver af de variable x_1, x_2 og x_3 . ($l_1 = 4 > 2 + \frac{3}{2} = l + \frac{k}{2}$.)

Øvelse 10.14. Undersøg de tilsvarende problemer, hvor $D =]0, \pi[$

og $D =]0, \pi[$. Hvad må vi forlange om f for at metoden giver en C^2 -løsning? For $D =]0, \pi[$ sammenlignes med behandlingen af den endimensionale bølgeligning i [W] kapitel I.

De tilsvarende overvejelser for eksempel 1 og 2 giver udsagn om u 's kontinuitet og differentiability på det afsluttede område (altså "op til randen"). Differentiability i det indre af området fås her under ganske svage betingelser på f , fordi koefficientfunktionerne $c_n(t)$ aftager eksponentielt for $\|n\| \rightarrow \infty$, uniformt på kompakte delmængder af det indre.

I eksempel 4 er selve differentiaalligningen inhomogen ($-\Delta u = F(x_1, x_2, x_3)$ i en terning $]0, \pi[^3$), mens randbetingelsen er homogen. Her anvendes Sætning 10.13 b) på rækkeudviklingen for F , hvorefter Sætning 10.13 a) anvendes på rækkeudviklingen for u , idet det udnyttes, at dennes koefficienter fås udfra koefficienterne til F 's række ved division med $(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$.

Øvelse 10.15. Præcisér, hvorledes Sætning 10.13 b) anvendes på eksempel 4; hvad er l_1 , l og k ?

11. Nogle vigtige ortogonalsystemer.T 11.1 Hermite-funktioner og Hermite-polynomier.

Differentialligningen

$$(11.1) \quad u'' - x^2 u + \lambda u = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

optræder i forbindelse med en række fysiske problemer, f. ex. ved separation af Schrödinger-ligningen for en partikel i et centralfelt, hvor den potentielle energi er proportional med kvadratet på afstanden til kraftcentret, samt ved separation af den tredimensionale bølge-ligning i paraboliske cylinderkoordinater (smlgn. disse noters kapitel 7).

Ligning (11.1) er af Sturm-Liouville-typen med

$$p(x) = 1 > 0 \quad q(x) = x^2 \geq 0, \quad r(x) = 1 > 0.$$

Begge intervalendepunkter $-\infty$ og $+\infty$ er singulære punkter, og vi sætter som randbetingelse, at $u(x) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \pm\infty$ og u' er beskænset. Endvidere pålægges integrabilitetsbetingelser (jvf. Afsnit 9.4):

$$M_p(\mathbb{R}) = M_1(\mathbb{R}) = \{u \in M(\mathbb{R}) \mid \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx < \infty\}, \text{ og } l(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} (u'v' + x^2 uv) dx$$

betragtes på mængden af $u \in M_1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ med $u' \in M_1(\mathbb{R})$ (og opfyldende randbetingelsen). Dermed fungerer Sturm-Liouville maskineriet; vi noterer specielt at alle e_v er positive.

Det er helt simpelt at se, at differentialoperatoren hermed er symmetrisk. Tilbage har vi kun at se på eksistens og integrabilitet af en Greens funktion. Dette opsættes, indtil vi har fundet egenfunktionerne.

Lad os først betragte funktionen $e^{-\alpha x^2}$, der for $\alpha > 0$ tilfredsstiller randbetingelserne. Ved indsættelse i (11.1) ses, at denne er tilfredsstillet, hvis $\lambda = 1$ og $\alpha = \frac{1}{2}$. Altså er $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ en egenfunktion med egenværdien 1. For $\lambda = 1$ har differentialligningen to lineært uafhængige løsninger, men den anden divergerer for $x \rightarrow \pm\infty$ (vis dette!).

Det er nu nærliggende at sætte

$$(11.2) \quad u(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} H(x).$$

Differentialligningen for H bliver da

$$(11.3) \quad H'' - 2xH' + (\lambda - 1)H = 0.$$

Denne ligning søges løst ved polynommetoden, dvs. vi sætter

$$(11.4) \quad H = \sum_k a_k x^k, \quad \text{summeret over } k = \mu, \mu+1, \dots$$

og finder ved sammenligning af koefficienter rekursions-

formlen

$$(11.5) \quad a_{k+2} (k+2)(k+1) = a_k (2k+1 - \lambda).$$

Skal rækken bryde af opefter med højeste eksponent n , må vi kræve, at $a_n \neq 0$, $a_{n+1} = 0$ og $a_{n+2} = 0$. Af (11.5) følger da for det første, at

$$(11.6) \quad \lambda = 2n+1$$

og for det andet, at alle koefficienterne $a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5}, \dots$ er nul.

Rækken skal også standse nedad; ellers var $H(x)$ ikke defineret for $x=0$. Den laveste eksponent har vi kaldt μ ; vi har altså, at $a_\mu \neq 0$, mens $a_{\mu-2} = 0$. Af (11.5) følger da

$$(11.7) \quad \mu(\mu-1) = 0.$$

μ er således enten 0 eller 1, der begge er acceptable for såvidt angår forholdene for $x=0$. Da μ er heltallig bliver alle eksponenterne og dermed også n heltallige. De er enten alle lige (hvormed $H(x)$ er lige) eller alle ulige (hvormed $H(x)$ er ulige). Da $n \geq \mu$, er for $\mu=0$ de mulige værdier af λ tallene $1, 5, 9, \dots$, for $\mu=1$ derimod tallene $3, 7, 11, \dots$.

Hvis rækken standser opad, dvs. λ er et ulige naturligt tal, har vi fundet en egenfunktion, idet $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ multipliceret med et vilkårligt polynomium tilfredsstiller randbetingelserne.

Vi har dermed vist, at der eksisterer egenfunktioner af formen

$$(11.8) \quad \begin{cases} u_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x), \\ \lambda = 2n+1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

hvor $H_n(x)$ er et polynomium af grad n med rekursionsformlen

$$(11.9) \quad a_{k+2} = \frac{2(k-n)}{(k+2)(k+1)} a_k$$

Det er nu naturligt at spørge, om vi har fundet alle egenfunktionerne. Det er let at se (smlgn. f.ex. s. 11.6), at for $\lambda = 2n+1$ er den anden af de to lineært uafhængige løsninger uacceptabel. Egenværdierne er altså simple^{*)}, som ved det regulære Sturm-Liouville-problem, studeret i Afsnit 9.1-9.2.

Hvis λ ikke er et ulige, naturligt tal, vil rækken fortsætte. Den vil være konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$, idet

$$(11.10) \quad \frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{2k+1-\lambda}{(k+2)(k+1)} < \frac{2}{k+2}$$

da $\lambda > 0$. Men hvordan opfører summen sig for $x \rightarrow \pm \infty$?

*) dvs. alle egenrum er endimensionale.

Vi nøjes med at se på de lige funktioner og sammenligner med potensrækken for

$$(11.11) \quad e^{\frac{1}{2}x^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\nu!} = \sum_{\substack{k=0 \\ (k \text{ lige})}}^{\infty} \frac{x^k}{2^{k/2}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)!}$$

Denne række har koefficientforholdet

$$\frac{b_{k+2}}{b_k} = \frac{1}{k+2}$$

Af (11.10) ses, at

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{1}{k+2} + \frac{k-\lambda}{(k+2)(k+1)}$$

For ethvert λ vil vi for k tilstrækkelig stor have at gøre med to rækker, hvis led har konstant fortegn, og leddene i $H(x)$ kan, fra et vist nr., vurderes op og ned ved konstanter gange leddene i $e^{x^2/2}$ -rækken (analogt til diskussionen i Afsnit 9.4). Der findes da positive konstanter α og β , således at

$$|H(x)| > \alpha e^{\frac{1}{2}x^2} - \beta$$

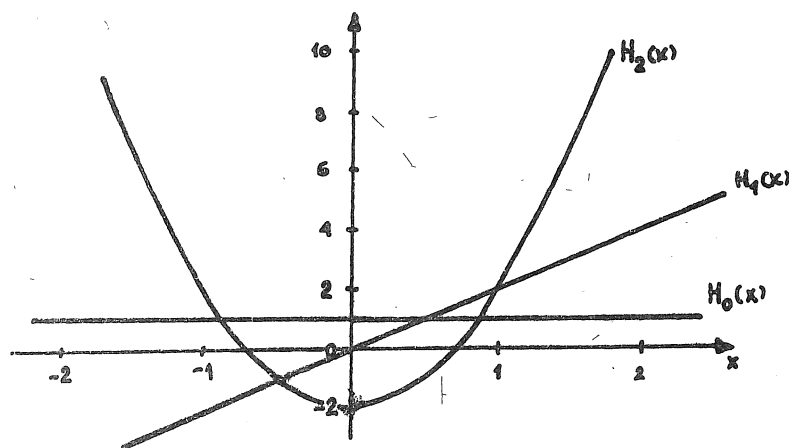
Heraf følger, at $|u(x)| = e^{-\frac{1}{2}x^2} |H(x)| > \alpha - \beta e^{-\frac{1}{2}x^2}$, så u ikke går mod nul for $x \rightarrow \pm \infty$, og den er derfor uacceptabel.

Vi slutter (som i Afsnit 9.4), at der ikke er flere egenfunktioner end de allerede fundne (11.8).

Polynomierne $H_n(x)$ kaldes Hermite-polynomier. De normeres ofte således, at koefficienten til x^n (højeste forekommende potens af x) er 2^n . De første er:

$$H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = 2x; \quad H_2(x) = 4x^2 - 2; \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

De første tre af disse er vist på figur 11.1.



figur 11.1
Hermite-polynomier

Funktionerne $H_n(x)$ danner et ortogonalsystem med vægtfunktionen e^{-x^2} , idet Hermite-funktionerne $u_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x)$

er ortogonale med hensyn til vægtfunktionen $\rho = 1$:

$$(11.10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}.$$

Vi nævner uden bevis en analogi til Rodrigues' formel:

$$(11.11) \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Skal man diskutere systemets fuldstændighed på den i [W] brugte måde, må man finde en Green's funktion til et tilfælde, hvor λ ikke er egenverdi, og vise, at $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi)^2 \rho(x) \rho(\xi) dx d\xi$ er endelig.

Vi gennemfører ikke diskussionen, men nævner, at Green's funktion svarende til $\lambda = -1$ kan angives eksplicit; altså hvis $G(x, \xi)$ tilfredsstiller randbetingelserne samt differentialligningen

$$(11.12) \quad \frac{d^2 G}{dx^2} - x^2 G - G = -\delta(x - \xi),$$

vil

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(x^2 + \xi^2)/2} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt \cdot \int_{\xi}^{\infty} e^{-t^2} dt & \text{for } x \leq \xi, \\ -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(x^2 + \xi^2)/2} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-t^2} dt \cdot \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt & \text{for } x \geq \xi. \end{cases}$$

Den kan vises at opfylde integrabilitetsbetingelsen, så at systemet af egenfunktioner er fuldstændigt og Sturm-Liouville teorien kan anvendes helt igennem.

T 11.2 Laguerre-funktioner og Laguerre-polynomier.

Disse funktioner optræder bl.a. ved separation i polære koordinater af Schrödingerligningen for en partikel i visse centalkraftfelter, nemlig dels det side 11.1 nævnte felt (potentiell energi proportional med r^2), dels Coulombfeltet som i hydrogenatomet (potentiell energi proportional med $\frac{1}{r}$). Den simpleste differentialligning, der fører til Laguerre-funktioner, er

$$(11.13) \quad x u'' + (1+x) u' + \lambda u = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Ligningen er af Sturm-Liouville typen med

$$p = x e^x, \quad q = 0, \quad \rho = e^x,$$

idet den ved den sædvanlige teknik ([W] s.117) kan omskrives til

$$(11.14) \quad (x e^x u')' + \lambda e^x u = 0.$$

Begge intervalendepunkter 0 og $+\infty$ er singulære, og vi sætter som randbetingelse, at u og u' er begrænsede, samt at $u(x) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$. Ved integrabilitetsbetingelser sættes $M_\rho(\mathbb{R}_+) = \{u \in M(\mathbb{R}_+) \mid \int_0^\infty (u(x))^2 e^x dx < \infty\}$, og $l(u,v) = \int_0^\infty x e^x u' v' dx$ betragtes på mængden af $u \in M_\rho(\mathbb{R}_+) \cap C^0(\mathbb{R}_+)$ med $u' \in M(\mathbb{R}_+)$ og $\int_0^\infty x e^x (u')^2 dx < \infty$ (og opfyldende randbetingelsen). Hermed fungerer S.L.-maskineriet; differentialoperatoren (defineret på $D(L)$) er symmetrisk, og egenverdierne er positive. - Det resterende problem om en Greens funktion omtales senere.

Ved indsættelse i (11.13) ses, at e^{-x} er en egenfunktion hørende til egenværdien $\lambda = 1$. Vi indfører derfor den nye funktion v ved

$$(11.15) \quad u = e^{-x} \cdot v$$

og finder for den differentiaalligningen

$$(11.16) \quad x v'' + (1-x) v' + (\lambda-1) v = 0.$$

Denne søges løst ved polynommetoden:

$$(11.17) \quad v = \sum a_k x^k, \quad \text{summeret over } k = \mu, \mu+1, \dots$$

Vi finder rekursionsformlen

$$(11.18) \quad a_{k+1} (k+1)^2 = a_k (k+1-\lambda).$$

Skal rækken bryde af nedefter (med laveste potens x^μ) og opefter (med højeste potens x^n) må ifølge (11.18) gælde

$$\mu = 0 \quad \text{og} \quad \lambda = n+1, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Vi har så fundet løsningerne

$$(11.19) \quad u_n(x) = e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^n a_k x^k = e^{-x} L_n(x),$$

hvor

$$(11.20) \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k-n}{(k+1)^2}.$$

De ses at tilfredsstille alle rand- og integrationsbetingelser og er derfor egenfunktioner.

Vi gennemfører derefter en undersøgelse som på s. 11.2-11.3 vedrørende Hermite-funktionerne. For $\lambda \neq n+1, n \in \mathbb{N}_0$, fortsætter rækken; dens koefficienter sammenlignes med koefficienterne for potensrækken for funktionen $e^{x/2}$, og vi finder, at vel konvergerer rækken for alle endelige x , men for $x \rightarrow \infty$ går $e^{-x/2} \cdot v = e^{x/2} \cdot u$ ikke mod nul. Løsningen er derfor ikke en egenfunktion. Da vi for et givet λ kun finder én række, nemlig én, der begynder ved $\mu=0$, bør vi undersøge, om der findes en anden acceptabel, lineært uafhængig løsning. Det kan ske ved betragtning af Wronski-determinanten. Af (11.14) følger, at for to løsninger u_1 og u_2 med samme λ gælder

$$(11.21) \quad x e^x (u_1' u_2 - u_2' u_1) = \text{konst.}$$

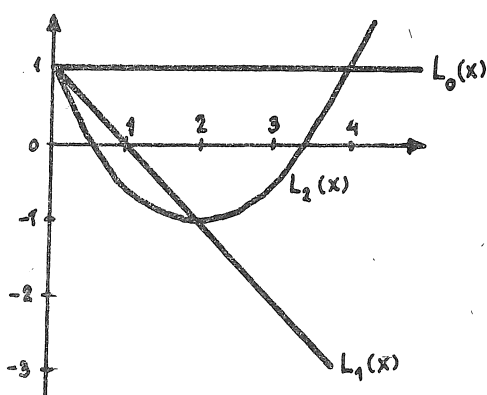
Lad u_1 være af formen (11.15) med v givet ved (11.17) med $\mu=0$; så er u_1 og u_1' begrænsede. Af (11.21), betragtet for $x \rightarrow 0$, ses da, at vi kun have randbetingelserne " u_2 begrænset og u_2' begrænset" opfyldt for u_2 , såfremt Wronski-determinanten er identisk nul; men så er de to løsninger proportionale.

Vi har altså fået alle egenfunktionerne med.

Polynomierne $L_n(x)$ kaldes Laguerre-polynomier. De normeres oftest således, at koefficienten til x^n (højeste forekommende potens af x) er $(-1)^n$. De første er

$$L_0(x) = 1 ; L_1(x) = 1 - x ; L_2(x) = 2 - 4x + x^2 ,$$

og disse er gengivet nedenfor på figur 11.2.



figur 11.2
Laguerre-polynomier

Laguerre-polynomierne $L_n(x)$ danner et ortogonalsystem med vægtfunktionen e^{-x} , idet funktionerne $e^{-x} L_n(x)$ er et ortogonalsystem med vægtfunktionen e^x (se (11.14)); nær-

mere bestemt:

$$(11.22) \quad \int_0^{\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = (n!)^2 \delta_{mn}$$

Det ligger nært at almindeliggøre diskussionen til det tilfælde, hvor afstanden mellem nulpunkterne for koefficienterne til u'' og u' ikke netop er 1. Vi får da ligningen

$$x u'' + (1-k+x) u' + \lambda u = 0.$$

Går vi frem omtrent som før, finder vi, at vi for $k > -1$ får nye ortogonale polynomier, hvis vægtfunktioner er $e^{-x} x^k$. De kaldes generaliserede Laguerre-polynomier og betegnes $L_n^k(x)$. For k hel hænger de på på simpel måde sammen med $L_n(x)$, nemlig ved

$$(11.23) \quad L_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} L_n(x).$$

De egentlige Laguerre-polynomier kan også findes ved en formel, analog til Rodrigues' formel:

$$(11.24) \quad L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

Bevis for fuldstændigheden kræver diskussion af Green's funktion for differentialoperatoren. For $\lambda = 0$ findes den eksplicit af ligning (11.14), der let lader sig integrere. Resultatet bliver

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \int_{\xi}^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt & \text{for } x \leq \xi, \\ \int_x^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt & \text{for } \xi \leq x. \end{cases}$$

Den kan forholdsvis let vises at opfylde integrabilitetsbetingelsen; der bliver kun tale om logaritmiske singulariteter, som ikke ødelægger integrabiliteten.

T 10.3 Mathieu-funktioner.

Ved separation af bølgeligningen i elliptiske cylinderkoordinat-

koordinater fås (se s.7.8) differentialligningen (bogstavbetegnelserne er her anderledes end i skemaet s.7.8):

$$(11.25) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} - k^2 \cos^2 \varphi \cdot u + \lambda u = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Den er af den regulære Sturm-Liouville type. I andre forklædninger optræder den ved talrige fysiske problemer, f.ex. svingninger af mekaniske eller elektriske systemer, hvis parametre som f.ex. pendullængde, kraftkonstant, kapacitet eller selvinduktion varierer periodisk med tiden. Endvidere optræder den i forbindelse med teorien for bølgebevægelse i elliptiske cylindre, ved behandlingen af Schrödingerligningen i et rumligt periodisk kraftfelt som i en krystal, samt ved mange andre problemer.

Vi kan f.ex. opfatte (11.25) som den ene af de ligninger („vinkel“-ligningen), der opstår ved separation af bølge- lingen for en ellipseformet, svingende membran. I dette tilfælde må vi som randbetingelse have

$$(11.26) \quad u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi).$$

Vi har da et Sturm-Liouville problem med periodiske randbetingelser (smlgn. [W] opg. 36.3).

De egenfunktioner, der bestemmes af (11.25) og (11.26) kaldes periodiske Mathieufunktioner eller blot Mathieufunktioner. De danner et fuldstændigt ortogonalsystem mht. samme funktionsklasse som det trigonometriske ortogonalsystem.

Egenfunktioner og egenverdier kan ikke angives på sluttet form. De første gives som regel som Fourierrækker (trigonometriske), hvis koefficienter ligesom egenverdierne kan angives som potensrækker i k .

T 11.4 Genererende funktioner.

En række af de specielle funktioner kan defineres og beregnes som koefficienter i rækkeudviklinger af visse funktioner af to variable, såkaldte genererende funktioner. Et eksempel herpå gives i formel [W](44.8), der med $\frac{r}{\rho} = t$ antager formen

$$(11.27) \quad \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t \cos \theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) t^n.$$

Den udsiger, at $P_n(\cos \theta)$ er koefficienter til t^n i en Taylor-række for funktionen på venstre side. Denne er den genererende funktion for Legendre-polynomierne.

Vi nævner uden bevis tre andre vigtige genererende funktioner

$$\text{Hermite-polynomier: } e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

$$\text{Bessel-funktioner: } e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \quad (\text{Potensrække})$$

samt

$$e^{i x \cos t} = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(x) \cos nt \quad (\text{Fourier-række}).$$

I øvrigt henvises til håndbøger.

NOGLE VIGTIGE ORTOGONALSYSTEMER

DIFFERENTIALLIGNING	STURM-LIOUVILLE FORM	INTERVAL - ENDEPUNKTER	RANDBETINGELSER	EGENVERDI λ_n	EGENFUNKTION u_n	ORTOGONALITET; NORMERING
$u'' + \lambda u = 0$	$-u'' = \lambda u$	$0, \pi$	$u(0) = u(\pi) = 0$	$n^2; n \in \mathbb{N}$	$\sin nx$	$\int_0^\pi u_n u_{n'} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{n,n'}$
$u'' + \lambda u = 0$	$-u'' = \lambda u$	$0, 2\pi$	$u(2\pi) = u(0);$ $u'(2\pi) = u'(0)$	$n^2; n \in \mathbb{Z}$	e^{inx}	$\int_0^{2\pi} u_n \bar{u}_{n'} dx = 2\pi \delta_{n,n'}$
$u'' + \frac{1}{x} u' - \frac{m^2}{x^2} u + \lambda u = 0$	$-(xu')' + \frac{m^2}{x} u = \lambda xu$	$0, 1$	$u(1) = 0;$ u og u' begrænsede	$[j_n^{(m)}]^2$, hvor $J_m(j_n^{(m)}) = 0$	$J_m(j_n^{(m)} x)$, Besselfunktion af m'te orden	$\int_0^1 u_n u_{n'} dx = \frac{1}{2} [J_{m+1}(j_n^{(m)})]^2 \delta_{n,n'}$
$(1-x^2)u'' - 2xu' + \lambda u = 0$	$-((1-x^2)u')' = \lambda u$	$-1, 1$	u og u' begrænsede	$n(n+1); n \in \mathbb{N}_0$	$P_n(x)$ Legendre-polynomier	$\int_{-1}^1 u_n u_{n'} dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,n'}$
$(1-x^2)u'' - 2xu' - \frac{m^2}{1-x^2} u + \lambda u = 0$	$-((1-x^2)u')' + \frac{m^2}{1-x^2} u = \lambda u$	$-1, 1$	u og u' begrænsede	$n(n+1); n \geq m$ $m, n \in \mathbb{N}$	$P_n^m(x)$ associerede Legendre-polynomier	$\int_{-1}^1 u_n u_{n'} dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,n'}$
$xu'' + (1+x)u' + \lambda u = 0$	$-(xe^x u')' = \lambda e^x u$	$0, \infty$	u og u' begrænsede $u(x) \rightarrow C$ for $x \rightarrow \infty$	$n+1; n \in \mathbb{N}_0$	$e^{-x} L_n(x)$, hvor $L_n(x)$ er Laguerre-polynomier	$\int_0^\infty L_n L_{n'} e^{-x} dx = \int_0^\infty u_n u_{n'} e^x dx = (n!)^2 \delta_{n,n'}$
$u'' - x^2 u + \lambda u = 0$	$-u'' + x^2 u = \lambda u$	$-\infty, \infty$	$u(x) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \pm\infty$	$2n+1; n \in \mathbb{N}_0$	$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, hvor $H_n(x)$ er Hermite-polynomier	$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} H_n H_{n'} dx = \int_{-\infty}^\infty \bar{u}_n u_{n'} dx = n! 2^n \sqrt{\pi} \delta_{n,n'}$
$u'' - k^2 \cos^2 x \cdot u + \lambda u = 0$	$-u'' + k^2 \cos^2 x \cdot u = \lambda u$	$0, 2\pi$	$u(0) = u(2\pi)$ $u'(0) = u'(2\pi)$	transcendente funktioner af k	Mathieufunktioner	$\int_0^{2\pi} u_n u_{n'} dx = 0$ for $n \neq n'$

SUPPLERENDE OPGAVER

1. Lad $\ell \in \mathbb{R}_+$ og sæt $J = [0, 1]$, $\Omega =]0, \ell[\times]0, \infty[$. Lad M og N betegne funktionsrummene

$$M = \{ f \in C^2(J) \mid f(0) = f(\ell) = f''(0) = f''(\ell) = 0 \}$$

$$N = \{ g \in C^1(J) \mid g(0) = g(\ell) = 0 \},$$

og forsyn M med C^2 -normen

$$\|f\|_2 = \sup_{x \in J} \max \{ |f(x)|, |f'(x)|, |f''(x)| \}$$

og N med C^1 -normen

$$\|g\|_1 = \sup_{x \in J} \max \{ |g(x)|, |g'(x)| \}.$$

Gør rede for at M og N er fuldstændige metriske rum.

Lad $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge i M , der er konvergent med grænseværdi f_0 , og lad $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge i N , der er konvergent med grænseværdi g_0 . For hvert par f_n, g_n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) betegnes løsningen til problemet [W](2.1) (side 8) ved u_n . Vis, at $u_n \rightarrow u_0$ i $C^2(\Omega)$ for $n \rightarrow \infty$, idet $C^2(\Omega)$ forsynes med normen

$$\|u\|_2 = \sup_{(x,t) \in \Omega} \max \left\{ |u(x,t)|, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t) \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \right| \right\}$$

[Man viser med andre ord, at løsningsafbildningen $\{f, g\} \rightarrow u$ er kontinuert fra $M \times N$ til $C^2(\Omega)$.]

Vink: Dan rummene \tilde{M} og \tilde{N} bestående af udvidelser af funktionerne i M og N som beskrevet i [W] side 12-13, og anvend formel [W](2.16).

2. Lad $c > 0$. Idet Ω betegner det åbne område i \mathbb{R}^2 defineret ved

$$\Omega = \left\{ (x,t) \mid t > 0, 0 < x < 1 + \frac{c}{2}t \right\}$$

skal man finde løsningen til begyndelses- og randværdiproblemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{i } \Omega,$$

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{for } x \in [0,1],$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{for } x \in [0,1],$$

$$u(0,t) = 0 \quad \text{for } t > 0,$$

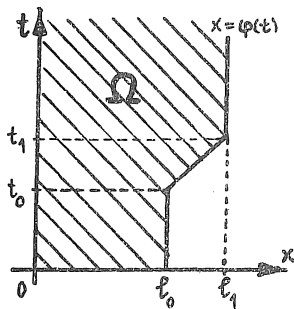
$$u\left(1 + \frac{c}{2}t, t\right) = 0 \quad \text{for } t > 0;$$

hvor f er en C^2 -funktion på intervallet $[0,1]$ med f, f' og f'' lig med 0 i endepunkterne 0 og 1. Løsningen ønskes præcist angivet for $t \leq \frac{2}{c}$ og kvalitativt beskrevet (gerne med støtte i en tegning) for generelle t . Beskriv indflydelsesområdet for et punkt mellem 0 og 1 på x -aksen.

3. Betragt bølgligningen for en uendelig lang spændt snor med $F=0$, $u(x,0) = f(x)$ og $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$.

Angiv betingelser, som $f(x)$ og $g(x)$ må være underkastet, såfremt der kun skal opstå bølger, som udbreder sig i den ene retning.

4. Man betragter bølgligningen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (med c konstant > 0) i følgende område Ω i (x,t) -planen:



$$\Omega = \{(x,t) \mid t > 0, 0 < x < \varphi(t)\},$$

hvor

$$\varphi(t) = \begin{cases} l_0 & \text{for } 0 \leq t \leq t_0 \\ l_0 + a(t-t_0) & \text{for } t_0 \leq t \leq t_1 \\ l_1 & \text{for } t \geq t_1 \end{cases};$$

her er $a = \frac{l_1 - l_0}{t_1 - t_0}$, hvor t_0, t_1, l_0, l_1 givne

positive størrelser med $t_1 > t_0$.

1° Vis, at hvis $0 < a \leq c$, så har problemet

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{i } \Omega, \\ u(x,0) = f(x) & \text{for } x \in [0, l_0], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & \text{for } x \in [0, l_0], \\ u(0,t) = 0 & \text{for } t \geq 0, \\ u(\varphi(t),t) = 0 & \text{for } t \geq 0, \end{cases}$$

højst en løsning.

[Vink: Man kan benytte en omskrivning som i [W] §7 ("energiintegralmetoden"). Heri indgår brugen af at på hvert af de rand-liniestykker, hvor u er 0, er også en retningsafledet af u lig med 0.]

2° Vis, at hvis $a > c$, kan problemet (*) have flere løsninger for samme værdi af f og g .

[Vink: Vis, at der findes løsninger u til (*) med $f=g=0$, men med foreskrevet (ikke-trivielt) værdi af $\frac{\partial u}{\partial t}$ på det skrå stykke af randen (jvf. [W] opg. 2.10).]

Ovenstående matematiske problem er en model for f.ex. svingningerne i ledningen til en sporvogn. Formuleringen svigter

for $a > c$ (fysisk interpretation?).

5. For problemet (*) i opgave 4 undersøges følgende spørgsmål for hver værdi af $a \in \mathbb{R}$: Er alle løsninger til (*) af formen $p(x+ct) + q(x-ct)$? Begrund svarene.

For $|a| < c$ kan dette eventuelt benyttes til at vise eksistensen af en løsning til (*).

6. Vis, for problemet (*) i opgave 4, at når $a < -c$, findes der værdier af f og g (med $f \in M, g \in N$, som i opgave 1, relativt til intervallet $[0, t_0]$) for hvilken (*) ingen løsninger har. (Fysisk interpretation?)

7. Lad L betegne differentialoperatoren på \mathbb{R}^2 defineret ved

$$Lu = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1+xy) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + 3u.$$

1° Bestem typen af L i ethvert punkt af \mathbb{R}^2 .

2° Find karakteristiske koordinater $\xi = \xi(x, y)$ og $\eta = \eta(x, y)$ i de områder, hvor L er hyperbolsk.

3° Skitser de karakteristiske kurver (niveaukurverne for ξ og η) på en tegning. Undersøg specielt forløbet af de karakteristiske kurver i omegnen af punkterne $(1, 1)$ og $(-1, -1)$ i (x, y) -planen.

8. Lad D betegne en åben, begrænset mængde i \mathbb{R}^3 med rand C . Man betragter begyndelses- og randværdiproblemet (*) for varmeledningsligningen (hvor $k > 0$):

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = F(x, y, z, t) & \text{i } \Omega, \\ u|_{\Sigma} = f(x, y, z, t), \end{cases}$$

hvor $\Omega = D \times]0, \bar{t}[$ og $\Sigma = (D \times \{0\}) \cup (C \times]0, \bar{t}[$; $\bar{t} \geq 0$.

Vis, at der findes konstanter K_1 og K_2 , så at der for enhver løsning u til et problem (*) gælder

$$\sup_{P \in \Omega} |u(P)| \leq K_1 \sup_{P \in \Omega} |F(P)| + K_2 \sup_{P \in \Sigma} |f(P)|.$$

9. Vis formel [W] (24.1), dels ved almindelig gennemregning, dels ved anvendelse af formlerne i noternes afsnit 7.

10. Opskriv de harmoniske polynomier i to variable, for $n \leq 5$. (Se noter side 6.4)

11. Hvad må vi forudsætte om f , for at løsningen [W] (24.6) til Dirichlet problemet for enhedscirklen

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \\ u = f & \text{på } C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \end{cases}$$

fremstiller en C^2 -funktion på \bar{D} ?

12. Find temperaturfordelingen i rummet omkring en cirkulær cylinder, der længe har været holdt på en tilstand med fastlagt temperaturfordeling $T = f(\theta)$ ($-\pi < \theta \leq \pi$) på overfladen og således, at den samlede varmestrøm fra cylinderen er nul. Løs problemet i detaljer for det tilfælde, at den ene halvdel af cylinderoverfladen ($\theta > 0$) har én temperatur, den anden halvdel ($\theta \leq 0$) en anden temperatur. (Vedrørende løsningens kontinuitet op til cylinderoverfladen kan der henvises til metoder i [W] §25.)

13. Man betragter de elliptiske cylinderkoordinater indført i noterne side 7.8. Den angivne afbildning $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (x, y)$ betegnes i denne opgave ved Φ .

- 1° Vis, at koordinatkurverne $\xi_1 = \text{konstant}$ og $\xi_2 = \text{konstant}$ i (x, y) -planen skærer hinanden under en ret vinkel.
- 2° Skitser det krumlinede koordinatsystem ved at tegne nogle af disse koordinatkurver i (x, y) -planen.
- 3° Undersøg om afbildningen $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er surjektiv.
- 4° Vis, at det åbne område $A =]0, \infty[\times]-\pi, \pi[$ i (ξ_1, ξ_2) -planen afbildes injektivt ved Φ ; men at dets afslutning \bar{A} ikke gør det. Hvad er billedet af A ved Φ ? Hvilke randpunkter af A kan medtages uden at ødelægge injektiviteten?

14. Lad C betegne ellipsen (hvor $\alpha > \beta > 0$)

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1\}$$

og betegn med D det begrænsede område med C som randkurve:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1\}.$$

- 1° Vis, at problemet

$$\begin{cases} (i) & \Delta u = 0 \text{ i } D \\ (ii) & u = 0 \text{ på } C \end{cases}$$

kun har løsningen $u = 0$.

2° Omskriv problemet til elliptiske cylinderkoordinater, således at C er en koordinatkurve $\xi_1 = k$ (en konstant). (Man kan her benytte, at ellipsen C også beskrives ved parameterfremstillingen $x = \alpha \cos \xi_2$, $y = \beta \sin \xi_2$.) Find de separerede løsninger til den omskrevne differentialligning.

3° Vis, at funktionen $\sin \xi_2 (e^{\xi_1} - e^{2k-\xi_1})$ tilfredsstiller den omskrevne differentialligning samt randbetingelsen (ii). Hvorfor må funktionen alligevel forkastes som løsning til (i) - (ii)?

4° Find alle løsninger til (i) af formen $U_1(\xi_1)U_2(\xi_2)$.

15. Lad C betegne ellipsen (hvor $\alpha > \beta > 0$)

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1\},$$

lad C' betegne liniestykket mellem ellipsens brændpunkter:

$$C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a, y = 0\}$$

(hvor $a = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$), og lad D' betegne det åbne område mellem de to kurver:

$$D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1, (x, y) \notin C'\}.$$

Løs problemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ i } D' \\ u = V \text{ på } C \\ u = V' \text{ på } C' \end{cases}$$

hvor V og V' er givne konstanter.

Giv nogle fysiske fortolkninger af resultatet. Udregn eventuelt den elektriske afledningsmodstand* pr. længde i et kabel med indre og ydre ledertværsnit C' og C , idet isolatoren mellem lederne har den elektriske ledningsevne σ .

*) dvs. modstanden mellem lederne.

16. I området mellem en cirkel og en ret linie (der ikke skærer cirklen) skal man finde en løsning til Laplaces ligning, som antager de konstante værdier V og 0 på henholdsvis cirklen og linien. (Brug bipolar koordinater.)

Benyt løsningen til at finde den elektriske modstand pr. længde mellem en cirkulær cylinder med radius R og en plan plade parallel med cylinderaksen i afstand $d > R$ fra denne. Ledningsevnen af stoffet mellem cylinder og plan kaldes σ .

17. Lad $[a, b]$ være et egentligt interval på \mathbb{R} , og betegn ved A det trekantformede område

$$A = \{ (x, \xi) \mid x \in [a, b], \xi \in [a, x] \}.$$

Lad $F(x, \xi) \in C^0(A)$ med $\frac{\partial F}{\partial x} \in C^0(A)$. Vis, at funktionen

$F_1(x) = \int_a^x F(x, \xi) d\xi$ er differentiabel for $x \in [a, b]$, med differentialkvotient

$$\frac{d}{dx} \int_a^x F(x, \xi) d\xi = F(x, x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} F(x, \xi) d\xi$$

Vink: For $h > 0$ kan man skrive differenskvotienten

$$\frac{1}{h} (F_1(x+h) - F_1(x)) \text{ som to led: } \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(x+h, \xi) d\xi + \frac{1}{h} \left(\int_a^x (F(x+h, \xi) - F(x, \xi)) d\xi \right),$$

der diskuteres hver for sig; for $h < 0$ anvendes en anden, lignende omskrivning.

18. Lad $[a, b]$ være et egentligt interval på \mathbb{R} , og definer

$$A = \{ (x, \xi) \mid x \in [a, b], \xi \in [a, x] \},$$

$$B = \{ (x, \xi) \mid x \in [a, b], \xi \in [x, b] \}.$$

Lad $G(x, \xi)$ være en funktion på $[a, b] \times [a, b]$, som opfylder

$$1^\circ \quad G \in C^0([a, b] \times [a, b])$$

$$2^\circ \quad G|_A \in C^2(A), \quad G|_B \in C^2(B); \text{ og}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) \right) = -q(x) G(x, \xi), \text{ for } (x, \xi) \in A^\circ \text{ eller } B^\circ$$

(det indre af trekantterne).

$$3^\circ \quad \frac{\partial G}{\partial x} \text{ springer med } -\frac{1}{p(x)} \text{ ved passage fra } B \text{ til } A, \\ \text{dvs. :}$$

for hvert punkt $(c, c) \in A \cap B$ gælder

$$\lim_{\substack{(x, \xi) \rightarrow (c, c) \\ (x, \xi) \in A^{\circ}}} \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) - \lim_{\substack{(x, \xi) \rightarrow (c, c) \\ (x, \xi) \in B^{\circ}}} \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) = -\frac{1}{p(c)}.$$

Vis, at for $f \in C^0([a, b])$ gælder, for alle $x \in [a, b]$,

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \right) - q(x) \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi = f(x).$$

Vink. Anvend opg. 17 på integraler over $[a, x]$ og $[x, b]$.

19. Lad $m \in \mathbb{N}$. Find Greens funktion for problemet

$$(*) \begin{cases} -\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{du}{dx} \right) + \frac{m^2}{1-x^2} u = f \text{ på }]-1, 1[, \\ u \text{ begrænset på }]-1, 1[, \end{cases}$$

idet det opgives at det homogene problem

$$-\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{du}{dx} \right) + \frac{m^2}{1-x^2} u = 0 \text{ på }]-1, 1[,$$

har løsningen $u(x) = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{m}{2}}$.

Har (*) en Greens funktion, hvis $m=0$?

[Facitliste: [W] s. 189.]

20. Find de seks laveste egenfrekvenser ω_n (vinkelfrekvenserne) for en, langs randen fastholdt, spændt cirkulær membran med radius a og bølgehastighed c , idet det er givet, at $\frac{c}{a} = 200 \text{ s}^{-1}$.*) Skitser knudelinierne (dvs. kurver, hvor udsvinget konstant er nul) for de tilhørende egensvingninger.

21. En homogen, spændt streng med fastholdte ender trækkes ud, så den danner en parabel, som er symmetrisk om strengens midtnormal. Den slippes til $t=0$ med begyndelseshastighed nul.

Find udsvinget $u(x, t)$ ved separationsmetoden, dvs. ved superposition af egensvingninger.

Find talværdien af forholdet mellem de største udsving hidrørende fra de to egensvingninger med henholdsvis laveste og næstlaveste forekommende frekvens (grund-

*) dvs. sekund⁻¹.

tonen og første forekommende overtone).

Vink: „Spiegel“ *) kan være til nytte med hensyn til Fourierrækkerne.

22. Som opg. 21, men for en cirkulær membran, der til $t=0$ har form som en omdrejningsparaboloide.

Vink: Integraler af formen $\int x^n J_0(x) dx$ kan findes ved hjælp af formler i „Spiegel“.

23. Find egensvingninger (normal modes) $u_{k,n,m}(r, \theta, \varphi, t)$ og tilhørende (vinkel) egenfrekvenser $\omega_{k,n,m}$ for det indre af en kugle med fastholdt overflade. Kuglens radius er a , og udsvinget u antages at tilfredsstille bølgeligningen

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Find talværdien af $\frac{a}{c} \cdot \omega_{k,n,m}$ for nogle af de laveste egenfrekvenser; diskuter for hver af dem, hvor mange tilhørende egensvingninger der er, og karakteriser den til hver af disse hørende svingningsform.

Vink: Se opgave 5 i [W] §44 med tilhørende løsning s. 424. „Spiegel“ angiver (s. 138) Bessel-funktionerne af halvtallig orden.

Note: Funktionerne $j_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, kaldes sfæriske Bessel-funktioner og findes i større tabellværker. De benyttes meget i kvante- og kerne-fysik.

*) Murray R. Spiegel: Mathematical Handbook of Formulas and Tables
Schaums Outline Series, McGraw-Hill, N.Y. 1968.

24. Find løsninger af formen

$$u = e^{i(kz - \omega t)} v(r), \quad k, \omega \in \mathbb{R}_+$$

til problemet

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(r, \theta, z, t)}{\partial t^2} = 0 & \text{for } r \in [0, R[, \theta \in [0, 2\pi[\\ & z, t \in]-\infty, \infty[\\ u(R, \theta, z, t) = 0 & \text{for } \theta \in [0, 2\pi[, z, t \in]-\infty, \infty[\end{cases}$$

Skitsér sammenhængen mellem ω og k for de forskellige løsninger.

Skitsér funktionen $v(r)$ for den løsning, der har to knudelinier, dvs. to nulpunkter for $v(r)$ i intervallet $0 \leq r < R$.

Vis, at ω har en mindsteværdi ω_m og find denne.

Vis, at $\omega \geq \omega_m$ også gælder for løsninger af formen

$$u = e^{i(kz - \omega t)} w(r, \theta)$$

$$w(R, \theta) = 0.$$

[Vink: Brug f.ex. monotonicitetsteoremet].

25. Find de karakteristiske kurver for differentialoperatoren M defineret på \mathbb{R}^2 ved

$$Mu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2(y - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (y^2 - 2yx^2 + x^4) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Bestem typen af M i ethvert punkt af \mathbb{R}^2 .

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1973-74.

Matematik 213

Skriftlige opgaver til løsning i 3 timer. Sættet består af 3 opgaver.
Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

Bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

betragtes på området $A = \{(x, y, t) \mid 0 \leq y \leq a\}$, under betingelserne

$$u = 0 \text{ for } y = 0 \text{ og for } y = a$$

u er begrænset på A

(idet c og a er givne positive konstanter).

Vis, at problemet har egentlige løsninger af formen

$$u(x, y, t) = f(y) \sin(kx - \omega t)$$

hvor k (vinkelbølgetallet) og ω (vinkelfrekvensen) er positive konstanter; bestem de mulige funktioner $f(y)$ samt for hver af disse sammenhængen mellem k og ω . For hvilke værdier af ω eksisterer der bølger af den angivne form?

Angiv et fysisk problem, for hvilket det stillede matematiske problem kan være model.

(opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1973-74.

Matematik 213. Skriftlige opgaver til løsning i 3 timer.

Opgave nr. 2.

Med L betegnes differentialoperatoren defineret på (x,t) -planen ved

$$Lu = \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1° Bestem typen af L i ethvert punkt af (x,t) -planen, og find karakteristiske koordinater i de områder hvor L er hyperbolsk.

2° Idet Ω betegner området

$$\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad t > 0\},$$

betragtes nu begyndelses- og randværdiproblemet

$$(*) \begin{cases} (Lu)(x,t) = F(x,t) & \text{i } \Omega, \\ u(x,0) = f(x) & \text{for } x \in [0, \frac{\pi}{4}], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & \text{for } x \in [0, \frac{\pi}{4}], \\ u(0,t) = f_3(t) & \text{for } t \geq 0, \\ u(\frac{\pi}{4}, t) = f_4(t) & \text{for } t \geq 0, \end{cases}$$

hvor F, f, g, f_3 og f_4 er givne kontinuerte funktioner.

a) Entydighed. Beskriv, for ethvert punkt $(x_0, t_0) \in \Omega$, det område i (x,t) -planen hvor F skal være kendt, og de stykker på x -aksen, t -aksen og linien $x = \frac{\pi}{4}$, hvor f, g, f_3 og f_4 skal være kendt, for at værdien af $u(x_0, t_0)$ er entydigt bestemt

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1973-74

Matematik 213. Skriftlige opgaver til løsning i 3 timer.

(d.v.s. beskriv afhængighedsområdet for (x_0, t_0)).
 Specielt ønskes afhængighedsområdet for punktet
 $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ angivet i detaljer.

- b) Eksistens. Gennemgå i korte træk anvendelsen af metoden "separation af de variable" på problemet (*) med F, g, f_3 og f_4 lig med 0 (diskussion af konvergensforhold kræves ikke). Herunder fremkommer et egenværdiproblem som ikke kan løses ved simple metoder, hvorfor der må redegøres for at Sturm Liouville teorien kan anvendes. Vis, at egenværdierne $\lambda_n (n=1, 2, \dots)$ for det pågældende problem tilfredsstiller

$$16 n^2 \leq \lambda_n \leq 32 n^2 \quad \text{for hvert } n$$

(for eksempel ved sammenligning med passende problemer med konstante koefficienter).

Opgave nr. 3.

Lad D være et åbent område i planen begrænset af en lukket C^1 -kurve C . Vis, at problemet

$$\begin{cases} -\Delta u + 2u = F & \text{i } D, \\ u = 0 & \text{på } C, \end{cases}$$

har højst én løsning $u \in C^2(\bar{D})$ for hver given funktion F .

26.

Med L betegnes differentialoperatoren defineret ved

$$(1) \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{x^2+y^2} \frac{\partial u}{\partial y},$$

for $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Man betragter randværdiproblemet

$$(2) \quad Lu = 0 \quad \text{i } K_R \setminus \{0\},$$

$$(3) \quad u = f \quad \text{på } \partial K_R,$$

hvor K_R er cirkelskiven $K_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2\}$, med rand $\partial K_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2\}$. Betingelsen (3) skrives i polære koordinater (r, θ) som

$$u(R, \theta) = f(\theta) \quad \text{for } \theta \in]-\pi, \pi[.$$

1° Omskriv Lu til polære koordinater.

2° Vis, at når $f \in C^2(\mathbb{R})$ og har periode 2π , da findes der en begrænset løsning til (2) - (3), som tilhører $C^1(\bar{K}_R \setminus \{0\}) \cap C^2(K_R \setminus \{0\})$ og opfylder $r \frac{\partial u}{\partial r} \rightarrow 0$ for $r \rightarrow 0$; (Find en løsning på rækkeform; vis, at den opfylder differentiaalligning og randbetingelser.)

3° Vis formlerne (for $u \in C^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$)

$$(4) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(u^2 \operatorname{grad}(\log \sqrt{x^2+y^2})) &= 2u \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad}(\log \sqrt{x^2+y^2}) \\ &= 2u \left(\frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{x^2+y^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

4° Vis, at problemet (2) - (3) har højst én løsning u (tilhørende $C^1(\bar{K}_R \setminus \{0\}) \cap C^2(K_R \setminus \{0\})$), som er begrænset og opfylder $r \frac{\partial u}{\partial r} \rightarrow 0$ for $r \rightarrow 0$. (Vink:

Man kan multiplicere (2) med u og integrere over $K_R \setminus K_\varepsilon$ for små $\varepsilon > 0$. Anvendelse af (4), divergenssætningen og randbetingelsen fører da til et integral over $K_R \setminus K_\varepsilon$ plus to integraler over ∂K_ε , som går mod 0 for $\varepsilon \rightarrow 0$.)

27.

En uendelig lang spændt streng har på stedet $x = 0$

et spring i massefylde, så at bølgehastigheden er c_1 for $x < 0$, men c_2 for $x > 0$ (c_1 og c_2 er to forskellige positive konstanter).

1° Angiv indflydelsesområdet for punktet $(x, t) = (0, 0)$.

2° Bestem strengens udsving $u(x, t)$ ved løsning af følgende problem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{for } x < 0, t > 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{for } x > 0, t > 0;$$

med begyndelsesbetingelser

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{for } x \leq 0, \text{ hvor } f \in C^2 \text{ og } f(0) = f'(0) = f''(0) = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -c_1 f'(x) \quad \text{for } x \leq 0;$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{for } x > 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{for } x > 0;$$

og overgangsbetingelser:

$$u \text{ og } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ er kontinuerte for } x = 0.$$

(Vink: Man kan benytte, at $u(x, t) = p_1(\xi_1) + q_1(\eta_1)$ i området $x < 0$, $u(x, t) = p_2(\xi_2) + q_2(\eta_2)$ i området $x > 0$, hvor (ξ_1, η_1) og (ξ_2, η_2) er de tilhørende karakteristiske koordinater.)

3° Vis, at betingelsen $f''(0) = 0$ er nødvendig, for at $u(x, t)$ skal være en C^2 -funktion i begge områder $\{(x, t) \mid x < 0, t > 0\}$ og $\{(x, t) \mid x > 0, t > 0\}$.

28. (Eksamensopgave 1, vinteren 1974-75)

Man betragter differentialoperatoren L defineret ved

$$Lu = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

for $(x, y) \in \Omega$, hvor Ω er mængden $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$.

1°) Bestem typen af L i ethvert punkt af Ω .

2°) Find karakteristiske koordinater $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, og udregn formen af L udtrykt ved de nye koordinater (ξ, η) .

3°) Find samtlige funktioner $u(x, y)$, som er løsning til differentiaalligningen

$$Lu = 0 \quad \text{i } \Omega.$$

29. (Eksamensopgave 2, vinteren 1974-75).

J det følgende betegner a et positivt tal, og $k(x)$ er en kontinuert funktion på intervallet $[0, a]$, hvor $k(x)$ opfylder $1 \leq k(x) \leq 2$.

Man betragter begyndelses- og randværdiproblemet:

$$(*) \quad \begin{cases} (1) & \frac{\partial u}{\partial t} - k(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{for } (x, t) \in]0, a[\times]0, \infty[, \\ (2) & u(x, 0) = f(x) \quad \text{for } x \in]0, a[, \\ (3) & u(0, t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0, \\ (4) & u(a, t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0; \end{cases}$$

som skal løses ved metoden "separation af de variable".

1°) Vis, at for de egentlige løsninger $u(x, t)$ til (1), (3) og (4), der har formen $u(x, t) = X(x)T(t)$, gælder, at $X(x)$ er egenfunktion for Sturm-Liouville problemet

$$(**) \quad \begin{cases} (5) & \varphi''(x) + \lambda \frac{1}{k(x)} \varphi(x) = 0 \quad \text{for } x \in]0, a[, \\ (6) & \varphi(0) = \varphi(a) = 0. \end{cases}$$

Er dette et regulært Sturm-Liouville problem? Hvad er p, q og ρ ?

Egenværdierne for (***) betegnes ved λ_n (ordnet i en voksende følge $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$), og for hvert n betegner φ_n en tilhørende egenfunktion. Bestem for hvert n en funktion $T_n(t)$, for hvilken $T_n(0) = 1$ og $T_n(t)\varphi_n(x)$ er løsning til (1), (3) og (4).

J resten af opgaven antages, at $f \in M_p([0, a])$.

2°) Vis, at der findes en og kun talfølge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, for hvilken rækken

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(t) \varphi_n(x)$$

fremstiller en funktion $u(x, t)$, som er defineret for $t=0$ og opfylder (2). (Funktionen $u(x, t)$ anses for defineret for de værdier af t , for hvilke rækken konvergerer i middel i

$M_p([0, a])$ mht. x .) Vis, at $|c_n| \leq \frac{\|f\|_p}{\|\varphi_n\|_p}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

3°) Vis, at egenværdierne λ_n til (**) opfylder

$$(8) \quad \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 \leq \lambda_n \leq 2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 \quad \text{for } n \in \mathbb{N}.$$

4°) Vis, at der findes en konstant K , således at egenfunktionerne $\varphi_n(x)$ til (**) opfylder

$$|\varphi_n(x)| \leq K \sqrt{\lambda_n} \|\varphi_n\|_p \quad \text{for } x \in [0, a], n \in \mathbb{N}.$$

[VINK: Vis ud fra ligningen $\varphi_n(x) = \int_0^x \varphi_n'(y) dy$, at

$$|\varphi_n(x)| \leq K \left(\int_0^a \varphi_n'(y)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Det sidste udtryk kan f.ex. omskrives ved brug af en sætning om Rayleigh-kvotienten.]

Vis, at rækken (7) konvergerer uniformt for $(x, t) \in [0, a] \times [t_0, \infty[$, for ethvert $t_0 > 0$.

5°) I det yderligere oplyses, at der findes en konstant K_1 , således at

$$(10) \quad |\varphi_n'(x)| \leq K_1 \lambda_n \|\varphi_n\|_p \quad \text{for } x \in [0, a], n \in \mathbb{N},$$

skal man vise, at rækkerne dannet ud fra (7) ved ledvis anvendelse af $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ og $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ konvergerer uniformt for $(x, t) \in [0, a] \times [t_0, \infty[$, for hvert $t_0 > 0$; og dermed at $u(x, t)$ opfylder (1), (3) og (4).

6°) Vis, at når $f \in C^1([0, a])$ med $f(0) = f(a) = 0$, da er rækken (7) uniformt konvergent på $[0, a] \times [0, \infty[$, og $u(x, t)$ er løsning til (*).

[Hertil kan benyttes en sætning fra noternes kapitel 9.]

30 (Eksamensopgave 1, vinteren 1975-76)

1° Bestem typen af differentialoperatoren L defineret ved

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

i alle punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2° Idet D betegner det åbne kvadrat

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

og C er dets rand, skal man vise, at problemet

$$\begin{cases} Lu = f & \text{i } D, \\ u = g & \text{på } C, \end{cases}$$

hvor $f \in C^0(D)$ og $g \in C^0(C)$, har højst én løsning $u \in C^2(D)$.

31 (Eksamensopgave 2, vinteren 1975-76)

Man betragter et højt cirkelformet hus, f.eks. en kornsilo, hvori varmen alene udbreder sig ved varmeledning. Det ønskes undersøgt, hvorledes temperaturen fordeler sig i huset, når dette til tiden $t = 0$ har temperaturfordelingen f , og det er udsat for en ydre temperaturpåvirkning g , som kun afhænger af tiden t . Idet huset fremstilles ved koordinater (x, y, z) hvor $x^2 + y^2 \leq 1$ og $z \in$ et interval af \mathbb{R} , antages det, at f kun afhænger af x og y , og at huset er

så højt, at temperaturfordelingen u kan antages at være uafhængig af z . Man skal altså løse ligningssystemet (for en konstant $k > 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ for } x^2 + y^2 < 1, t > 0 ; \\ (2) \quad u(x, y, t) = g(t) \text{ for } x^2 + y^2 = 1, t > 0 ; \\ (3) \quad u(x, y, 0) = f(x, y) \text{ for } x^2 + y^2 \leq 1. \end{array} \right.$$

Det antages, at $f \in C^0(\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\})$ og $g \in C^1([0, \infty[)$, samt at $f(x, y) = 0$ for $x^2 + y^2 = 1$, og $g(0) = 0$.

1^o Find først løsningen for tilfældet hvor $g(t) = 0$ for $t \geq 0$. Hertil anvendes separationsmetoden, hvorved løsningen opskrives som en rækkeudvikling (for hvert t) efter et fuldstændigt ortogonalsystem af funktioner udtrykt ved polære koordinater r og θ . Angiv funktionerne i ortogonalsystemet og opskriv formler for koefficienterne i rækken.

Konvergensforhold forventes ikke diskuteret.

2^o Find, ligeledes på rækkeform, løsningen for generelle $g \in C^1([0, \infty[)$. (Vink: Man kan betragte det problem, funktionen $v(x, y, t) = u(x, y, t) - g(t)$ må være løsning til.) Angiv specielt løsningens udseende i midten af huset (dvs. for $r = 0$).

32 (Eksamensopgave 3, vinteren 1975-76).

Beregn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2}$ for $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$.

(Vink: Man kan for eksempel sammenligne udtrykket med en fremstilling af en vis Greens funktion.)