Matematik 6, 1968–69

Bent Fuglede

Funktionalanalyse

Noter til Matematik 6

Med bidrag af Hans Tornehave og Esben Kehlet
og supplerende sider fra 1971–72 af Christian Berg

Afsnit I

Mængdelære: T.1.
Topologi: T.2, K.Tilf, F.Tilf.
Topologiske vektorrum: T.V.R.

Afsnit II.

Uendelig sum af vektorer: F.1.
Hilbertrum: H.R.
Rum af kontinuerte lineære afbildninger. Dualt rum. Svag topologi: F.4.
Banach algebra. Resolvent. Spektrum: F.5.

Afsnit III.

Operatorer: Oper.
Operatorer på Hilbert rum: Op. H.
Specielle operatorer: Spec. Op.

Afsnit IV.

Egenværdier af endelig index. Jordans normalform: F.7.
Totalkontinuerte operatorer: F.8.
Totalkontinuerte operatorer på Hilbertrum: F.9.
Integraloperatorer: F.1O.
Autonome systemer: Aut. Syst.
Partielle differentialligninger af første orden: P.D.1.
Banach algebra: B.

Københavns Universitets Matematiske Institut.

Noter til Matematik 6.

1968-69 , afsnit I.

(Pakke nr. 60)

Indhold:

Mængdelære:	T.1	1 - 17
	Opgaver	1 - 30
Topologi:	T.2	1 - 20
	K.Tilf.	1 - 5
	F.Tilf.	1 - 3
	Opgaver	1 - 32
Topologiske vektorrum:	T.V.R.	1 - 64
	Opgaver	1 - 42

Pakke nr. 60 (1968-69) omfatter følgende sider:

Mat. 6,	1967-68	Rett. I. 1 - 3
	1962	T.1, 1 - 17
	1962	Rettelsesblad T1
	1962	T.1, opgaver 1 - 11
	1966-67	T.1, opgaver 13 - 21
	1967-68	T.1, opgaver 22 - 30
	1962	T.2, 1 - 20
	1962	Rettelsesblad T2
	1964-65	K. Tilf. 1 - 5
	1965-66	F. Tilf. 1 - 3
	1962 f.	T2, opgaver 1 - 14
	1965-66	T.2, opgaver 15 - 19
	1966-67	T.2, opgaver 20 - 32
	1968-69	T.V.R. 0, 00
	1965-66	T.V.R. 1 - 61
	1968-69	T.V.R. 62 - 64
	1968-69	T.V.R., opgaver 1-42

Rettelser til afsnit I.

T.1

T.1.7, linie 13: Efter "et" tilføjes "ægte".

T.1.12, linie 5: "afhængigt" rettes til "uafhængigt".

linie 17: "fuldstændigt" rettes til "induktivt".

T.1.17, linie 1: "formaldisterne" rettes til "formalisterne".

T.2 Jvf. tidl. rettelsesblad T.2 samt F.Tilf.1.

T.2.2, linie 4: $W \in U \cap V$ rettes til $W \subseteq U \cap V$.

linie 4_n: $0 \subseteq \grave{0}$ rettes til $0 \in \grave{0}$.

linie 9_n: U rettes til V.

T.2.5, linie 4 : Foran punktum tilføjes "bestemte mængder".

T.2.6, linie 6 : Det sidste $\grave{F}_2$ skal være $\grave{F}_1$.

T.2.10, linie 9_n: M rettes til M_j.

T.2.11, linie 1 : $\grave{U}_{j_\mu}(a_{j_\mu})$ rettes til U_{j_μ} for $\mu = 1,2$.

linie 3 : Samme rettelse.

T.2.15, linie 8 : Ikke korrekt, at $\mathring{B} \cap A$ er det indre af B i forhold til A.

linie 8_n: Efter "og" tilføjes "det tilsvarende filter".

T.2.17, linie 2_n: Efter 0 tilføjes = ∁B. Desuden rettes $\mathring{A}$ til 0_1.

T.2.18, linie 8 : $x \notin 0(q)$ rettes til $x \in 0(q)$.

linie 9 : Tilføj "$f(x) = 1$ for $x \notin 0(1)$".

T.2.19, linie 5_n: "på" rettes til "ind i".

K.Tilf. 1,
linie 3 : Efter "enhver" tilføjes "ikke tom".

F.Tilf.2,
linie 3_n: Det i parentes anførte udgår.

T.V.R. 5, linie 6: "rum" rettes til "vektorrum"

T.V.R. 6, linie 13: Tilføj: $y + V \in \dot{B}(y)$, og

linie 7_n: U rettes til U.

T.V.R. 11, linie 1: Efter det første "åben" tilføjes: i E_2, Efter det andet "åben" tilføjes: i E_1

linie 5_n: Efter "komplementærmængder" tilføjes "og benyttelse af, at f er surjektiv".

T.V.R. 18, linie 9: Denne og den følgende linie ændres til: "holder en begrænset og afsluttet, altså kompakt, mængde A og derfor inducerer et fundamentalfilter på denne."

T.V.R. 25, linie 10: $s \in T$ rettes til $s \in S$ og $t \in T$.

linie 16: "kordinaltal" rettes til "kardinaltal".

linie 19: Samme rettelse.

T.V.R. 27, linie 13: Efter "dimension" tilføjes "af et lokalkonvekst t.v.r."

T.V.R. 41, linie 10_n: Tilføj: "for ethvert $x \in E$".

T.V.R. 45, linie 2_n: =< rettes til $\leqq$.

T.V.R. 48, linie 10: $\leqq$ rettes til $\geqq$.

T.V.R. 59, linie 6_n: Tilføj: Vi sætter $\rho = \rho_1$.

F.1

F.1. 1, linie 2: Efter "ordnet" tilføjes "eller blot prærordnet".

linie 13_n: "voksende" bør måske erstattes med "opad".

linie 11_n: "aftagende" bør måske erstattes med "nedad".

F.1. 2, linie 15: Efter T tilføjes: En sådan afbildning kaldes et net på T.

linie 3_n: Foran "funktion" tilføjes "begrænset".

F.1. 2, linie 5_n: Eksempel 2 skal her modificeres således, at et element af M skal betyde en inddeling af den omtalte art suppleret med opgivelsen af et punkt i hvert af delintervallerne. Funktionsværdierne i disse indskudte punkter indgår så i definitionen af en middelsum (Riemann-sum). De indskudte punkter skal ikke influere på ordningen af M.

F.1. 3, linie 1_n: Ordene "afsnitsfiltret Φ på" kan lige så gerne udelades.

F.1. 5, linie 9_n: "overlades til læseren" erstattes med "findes i T2, lemma 2.16.2".

F.1. 8, linie 3_n: Det kan tilføjes, at den omvendte sætning (summabilitet $\Rightarrow$ absolut summabilitet) kun gælder, når E er endeligdimensionalt.

F.1.10, linie 4: Tilføj: og alle $p > 0$.

linie 6_n: "summerabel" rettes til "summabel".

F.3

F.3. 1, overskrift: "Hilbertrum" rettes til "Hilbertsum".

F.3. 2, Foran §3.2 burde placeres det lemma, som er anbragt på side F3.11.

F.3. 4, linie 1: f_i rettes til $f_i^{(m)}$.

linie 9_n: f^n rettes til $f^{(n)}$.

F.3. 5, linie 1_n: $k(H_i)$ og $k(H_j)$ rettes til $k_i(H_i)$ og $k_j(H_j)$.

F.3. 6, linie 2: Samme rettelse.

linie 3: Samme rettelse.

F.3. 7, linie 6: $I \times J$ rettes til $I \times I$.

linie 10: Efter "sætning 2.8" tilføjes: At $k(H) = H^*$ følger af, at k(H)er fuldstændigt (fordi H

Mat.6, 1968-69

Københavns Universitets Matematiske Institut

Noter til Matematik 6

1968-69, afsnit II.

(Pakke nr. 61)

Indhold:

Uendelig sum af vektorer:	F.1	1 - 11
Hilbertrum:	H.R.	1 - 40
	Opgaver	1 - 14
Rum af kontinuerte lineære afbildninger. Dualt rum. Svag topologi:	F.4	1 - 23
Banach algebra. Resolvent. Spektrum:	F.5	1 - 18
Opgaver:	F.	1 - 30

Mat. 6, 1968-69

Pakke nr. 61 (1968-69) omfatter følgende sider:

Mat. 6,	1968-69	Rett. II 1-4
	1965-66	F.1, 1-11
	1967-68	H.R. 1-17
	1968-69	H.R. 18-40
	1967-68	H.R., opg. 1-9
	1968-69	H.R., opg. 10-14
	1965-66	F.4, 1-23
	1965-66	F.5, 1-18
	1968-69	F.opg. 1-5
	(1965-66)	F.opg. 6-30

Rettelser til afsnit II.

F.1

F.1. 1, linie 2: Efter "ordnet" tilføjes "eller blot præordnet".

linie 13_n: "voksende" bør måske erstattes med "opad".

linie 11_n: "aftagende" bør måske erstattes med "nedad".

F.1. 2, linie 15: Efter T tilføjes: En sådan afbildning kaldes et net på T.

linie 3_n: Foran "funktion" tilføjes "begrænset".

linie 5_n: Eksempel 2 skal her modificeres således, at et element af M skal betyde en inddeling af den omtalte art suppleret med opgivelsen af et punkt i hvert af delintervallerne. Funktionsværdierne i disse indskudte punkter indgår så i definitionen af en middelsum (Riemann-sum). De indskudte punkter skal ikke influere på ordningen af M.

F.1. 3, linie 1_n: Ordene "afsnitsfiltret Φ på " kan lige så gerne udelades.

F.1. 5, linie 9_n: "overlades til læseren" erstattes med "findes i T2, lemma 2.16.2".

F.1. 8, linie 3_n: Det kan tilføjes, at den omvendte sætning (summabilitet $\Rightarrow$ absolut summabilitet) kun gælder, når E er endeligdimensionalt.

F.1.10, linie 4: Tilføj: og alle $p > 0$.

linie 6_n: "summerabel" rettes til "summabel".

H.R.

H.R. 3, linie 1_n: "hermetisk" rettes til "hermitesk".

H.R. 4, linie 2: Samme rettelse.

H.R. 6, linie 8_n: "semonormegenskab" rettes til "seminormegenskab".

H.R. 8, linie 10_n: $\Sigma\|x + i^\nu y\|^2$ rettes til $\Sigma i^\nu \|x+i^\nu y\|^2$.

linie 1_n: Tilføj: (opg.4).

H.R. 14, linie 5: Tilføj: $\Longleftrightarrow x \in F^\perp$. (Komma flyttes).

H.R. opg. 6: $\mathrm{Re}\ (x-y|x-z) \leqq 0$ rettes til $\mathrm{Re}\ (x-y|z-y) \leqq 0$.

F.4.

F.4. 3, linie 11_n: $\int fg(x)dx$ rettes til $\int f(x)g(x)dx$.

linie 5_n: Foran "Radon" tilføjes "σ-endeligt". Et mål μ på T kaldes σ-endeligt eller σ-finit, dersom T kan overdækkes med et numerabelt system af mængder med endeligt mål.

linie 2_n: R^n rettes til $\dot{R}^n$.

F.4. 4, linie 13_n: Efter "eksempel" tilføjes "idet det forudsættes, at μ er σ-endeligt.

F.4. 6, linie 12_n: "Hvis E" rettes til "Hvis F".

F.4. 8, linie 1: Efter "normeret" tilføjes "og $E \neq \{0\}$."

linie 13: Det anførte bevis for sætn. 4.4 udgår under henvisning til beviset for samme sætning i T.V.R., § 41.

F.4.10, linie 7: "linearformerne" rettes til "de lineære afbildninger".

F.4.10, linie 15: E rettes til E'.

linie 16: Tilføj: "og dermed E er endeligdimensionalt (jvf. sætn. 4.7)."

linie 1_n: Foran "afsluttet" tilføjes "svagt".

F.4.11, linie 11_n: Foran $\prod_{x\in E} U_x$ tilføjes U = .

F.4.12, linie 6: "linearform" rettes til "bilinearform".

linie 14: Det første E" efter (E')' slettes.

F.4.16, linie 10: Til ovenstående kan føjes, at der med de indførte betegnelser gælder

$$M^{\perp} = F^{\perp} = \overline{F}^{\perp} \ (=M^{\perp\perp\perp}) ,$$

fordi en kontinuert linearform $x' \in E'$, som er 0 på M, også bliver 0 på $\overline{F}$, idet kernen $x'^{-1}(0)$ jo er et afsluttet underrum af E og derfor med M tillige indeholder det af M udspændte afsluttede underrum $\overline{F}$.

F.4.19, linie 13_n: Tilføj "For $p = \infty$ forudsættes μ σ-endeligt".

linie 9_m: $L^p(\mu,T;K)$ rettes til $L^p(T,\mu;K)$.

F.5.

F.5. 1, linie 1: Hvad vi her kalder en algebra betegnes i litteraturen ofte som en associativ algebra.

F.5. 2, linie 4: "det neutrale element" rettes til "ételementet".

F.5. 3, linie 11: "Eksempler" rettes til "Eksempel".

F.5. 5, linie 13: Efter "ethvert" tilføjes "ikke konstant".

linie 8: Tilføj: (Sætningen gælder også for et konstant polynomium p, dersom $\sigma(A) \neq \emptyset$.)

F.5. 7, linie 2: Foran "kompakt" tilføjes "ikke-tomt".

F.5, 8, linie 7: Efter "Banach-rum" tilføjes $\neq \{\underline{0}\}$.

linie 6: X' rettes til x'.

F.5.10, linie 4: $<$ rettes til $\leq$.

F.5.11, linie 6: X' rettes til x'.

linie 2_n: "impliceret" rettes til "implicit".

linie 6_n: *) henviser til tilføjelsen nederst på siden.

F.5.13, linie 7: Første gang rettes C til C'.

linie 11: "Lionvilles" rettes "Liouvilles".

F.5.17, linie 3_n: Efter "Banach-rum" tilføjes $\neq \{\underline{0}\}$.

F.5.17-18 ; § F.5.14 udgår under henvisning til Oper., §12.

F.opg.

F.opg.18: Det forudsættes tillige, at enten $p(0) = 0$ eller der eksisterer et ételement i algebraen.

F.opg.20: Det forudsættes tillige, at algebraen er $\neq \{\underline{0}\}$ og har et ételement.

Mat.6, 1968-69

Pakke nr. 62 (1968-69) omfatter følgende sider:

Mat.6, 1968-69	Rett. III 1-3
1967-68	Oper. 0-32
1967-68	Oper., opg. 1-22
1967-68	Op.H. 0-64
1967-68	Op.H., opg. 1-33
1967-68	Spec.Op., 0, 00, 1-33, 36-57
1967-68	Spec.Op., opg. 1-20

Rettelser til afsnit III.

Oper.

Oper. 21, linie 12: lemma 10.2 rettes til lemma 10.1.

linie 8_n: E rettes til E_1.

Oper., opg. 9 : Det forudsættes tillige, at E_2 er fuldstændigt.

Oper., opg. 17 d) : "vis" rettes til "hvis".

Op.H.

Op.H. 10, linie 3_n: $(x|u)-(y|v)$ rettes til $(u|x)-(v|y)$.

Op.H. 11, linie 12: $(x,u) = (y,0)$ rettes til $(x|u) = (y|0)$.

linie 13: (x,u) rettes til $(x|u)$.

linie 3_n: delmængden rettes til delmængder.

Op.H. 12, linie 2: $(x,u) + (y,v)$ rettes til $(x|u)+(y|v)$.

Op.H. 13, linie 9: Efter $(G^{\perp})^{\perp}$ tilføjes: $= \overline{G}$.

Op.H. 18, linie 5: I_1 rettes til: $UU^{-1} = I_2$.

Op.H. 31, linie 5: "explcit udtrukker" rettes til "explicit udtrykker".

Op.H. 33, linie 1: "lemmaet" rettes til "sætningen".

Op.H. 36, linie 9_n: Foran symmetriske tilføjes: tæt definerede.

Op.H. 39, linie 13_n: $\bigcup_{j\in J}$ rettes til $\bigcup_{j\in J}$.

linie 8_n: Samme rettelse (2gange).

linie 6_n: Samme rettelse.

linie 5_n: Samme rettelse.

Op.H. 44, linie 1: "Banach*-algebra" burde overalt i det følgende erstattes med den mere gængse betegnelse "C*-algebra", idet kravet $\|A^*A\|=\|A\|^2$ ikke bør medtages i definitionen på en Banach*-algebra.

linie 10_n: e(x) = x rettes til e(x) = 1.

Op.H. 45, linie 9 : Efter "strukturrummet" tilføjes: eller spektret for $\mathcal{A}$.

linie 10 : C(X) rettes til C(S).

linie 14 : "Gel'fands sætning" rettes til: "eksistensen af Gel'fand-transformationen.

Op.H. 46, linie 1_n: "homonorfi" rettes til "homomorfi".

Op.H. 50, linie 9 : j rettes til q.

linie 1_n: Efter E tilføjes: $\neq \{0\}$.

Op.H. 54, linie 4_n: x rettes til t (3 gange).

Op.H. 56, linie 11 : Efter E tilføjes: $\neq \{0\}$.

Op.H. 57, linie 12 : x rettes til t (4 gange).

Op.H. 58, linie 6 : "kummuterende" rettes til "kommuterende".

Op.H., opg. 12 : Foran "isometrisk" tilføjes: "tæt defineret".

Op.H., opg. 18 : Ulighedstegnene vendes (eller også rettes $\overline{\lambda}$ til λ). Desuden rettes $\rho'(S)$ til $\rho'(S) \cap \dot{R}$.

Op.H., opg. 19 : Foran "symmetrisk" tilføjes:"tæt defineret".

Spec.Op.

Spec. Op. 0, linie 7_n: $\tilde{f}(x) = f(-x)$ rettes til $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$.

Spec. Op. 12, linie 1-2: "Med a og b som ovenfor indfører vi" rettes til "Vi indfører".

linie 5 : "intervallet [a,b]" rettes til "et interval $[a,b] \supseteq st(v)$.

Spec. Op. 18, linie 6 : v_q rettes til v_1.

Spec. Op. 27, linie 3 : Tilføj: "f * g $\in$ L og ".

linie 6 : "at f * g $\in$ L og " slettes.

Spec.Op. 36 : Denne side burde hedde side 34, og analogt i resten af kapitlet.

Spec.Op. 38, linie 5_n : Foran "De øvrige" tilføjes: Eks.3 kan udledes ved residueregning (Cauchy's intergralformel). "virificeres" rettes til "verificeres".

Spec.Op. 42, linie 12_n: Højre side af ligningen rettes til $\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x-y)f_2(y)e^{\pm iu(x-y)}e^{\pm iuy}dm_2(x,y)$.

Spec.Op. 53, linie 6_n: Foran $\int_{-p}^{p}$ tilføjes $1/\sqrt{2\pi}$.

linie 3_n: I det midterste udtryk rettes f_2 til $\overline{f_2}$.

Spec.Op., opg. 12 : max $|\varphi(u)|$ rettes til max $|\hat{\varphi}(u)|$.

Operatorer

Indholdsoversigt:

	side
1. Afbildning fra en mængde til en anden.	1
2. Grafen for en afbildning.	3
3. Operator.	5
4. Regning med operatorer.	7
5. Regneregler for operatorer.	8
6. Kommuterende operatorer.	10
7. Lineært uafhængig famlie af underrum. Direkte sum.	11
8. Stabilt underrum. Reduktion.	15
9. Egenværdier. Egenvektorer.	17
10. Afsluttet operator.	19
11. Kontinuert operator.	22
12. Resolvent og spektrum for operatorer.	25
13. Det endeligdimensionale tilfælde.	30
14. Transponeret operator.	31

Kapitel 1.

Mængdelære.

1.1. Vi skal i dette afsnit beskæftige os med en idékreds, som har principiel betydning for udviklingen af den abstrakte mængdelære, og som har mange anvendelser i den videregående matematik. Vi begynder med at minde om begrebet ordensrelation på en mængde A.

En relation på A er som bekendt givet ved en mængde $R \subseteq A \times A$, og man benytter et relationstegn, f.eks. $\prec$, således at $(a,b) \in R$ skrives $a \prec b$. Relationen er en ordensrelation, når den har følgende egenskaber:

1) $\forall a \in A\ (a \prec a)$. Reflexivitet.

2) $\forall a,b \in A\ ((a \prec b \wedge b \prec a) \Rightarrow a = b)$.

3) $\forall a,b,c \in A\ ((a \prec b \wedge b \prec c) \Rightarrow a \prec c)$. Transivitet.

Eksempler på ordensrelationer er relationen $\leq$ på $\mathbb{R}$ og relationen $\subseteq$ på mængden $\mathfrak{D}(M)$ af delmængder af en mængde M. I stedet for $a \prec b$ vil vi skrive $b \succ a$ og derved defineres en ny ordensrelation $\succ$, som er den omvendte til $\prec$. Af 2) fremgår, at $a \prec b$ samtidig med $a \succ b$ kun finder sted for $a = b$. Relationen $a \prec b$ læses "a kommer før b" eller "a minoriserer b". Tilsvarende siges også "b kommer efter a" eller "b majoriserer a". En mængde A med en ordensrelation kaldes en ordnet mængde. Den kaldes en fuldstændig ordnet mængde, når betingelsen

$$\forall a,b \in A\ (a \prec b \vee b \prec a)$$

er opfyldt. Hvis man vil understrege, at en mængde blot er ordnet, men ikke nødvendigvis fuldstændigt ordnet, kalder vi den partielt ordnet. F.eks. er $\mathbb{R}$ fuldstændig ordnet ved $\leq$, medens $\mathfrak{D}(M)$ er partielt ordnet ved $\subseteq$.

1.2. Vi får brug for endnu en række begreber i tilslutning

til ordnede mængder. Vi betragter først en ordnet mængde A med ordensrelationen $-<$, og vi definerer da:

$a \in A$ kaldes <u>det første element</u> i A, såfremt

$$\forall b \in A\ (a -< b).$$

Det fremgår af betingelsen 2) i 1.1, at der virkelig højst findes 1 element af A, som tilfredsstiller denne betingelse. Analogt definerer vi

$a \in A$ kaldes <u>det sidste element</u> i A, såfremt

$$\forall b \in A\ (b -< a).$$

Vi understreger, at det første element og det sidste element ifølge definitionerne står i relationen $-<$ eller $>-$ (er sammenlignelige med) alle elementerne i A. Det er let at angive ordensrelationer, hvor intet element er sammenligneligt med alle andre, og der vil da ikke findes første eller sidste element.

$a \in A$ kaldes <u>et minimalt element</u> i A, såfremt

$$\forall b \in A\ (b -< a \Rightarrow b = a).$$

$a \in A$ kaldes <u>et maximalt element</u> i A, såfremt

$$\forall b \in A\ (a -< b \Rightarrow b = a).$$

En mængde kan have mange maximale elementer, men 2 af disse vil aldrig være sammenlignelige. Et element, der ikke er sammenligneligt med noget andet element, er efter definitionerne på en gang minimalt og maximalt. Hvis det første element i A eksisterer, er det tillige det eneste minimale element i A, og tilsvarende for det sidste element. Hvis A er fuldstændigt ordnet og a et minimalt element i A, da er a det første element i A. Analogt for maximalt element.

1.3. Lad A være en fuldstændig ordnet mængde. Ethvert $x \in A$ definerer et <u>venstre afsnit</u> $V_A(x)$ bestående af de elementer, der er forskellige fra x og går forud for x. Analogt defineres et <u>højre afsnit</u> $H_A(x)$. Altså

$$V_A(x) = \{y \in A \mid y \neq x \wedge y \prec x\}.$$

Vi bemærker, at V_A er en afbildning af A ind i $\dot{D}(A)$.

1.3.1. Definition. En fuldstændig ordnet mængde A kaldes velordnet, hvis enhver ikke tom delmængde af A har et første element. Ved et venstre afsnit i A forstås et afsnit $V_A(x)$ som ovenfor defineret eller hele mængden A.

Mængden $\dot{N}$ af naturlige tal er velordnet ved relationen $\leqq$, men $\dot{Q}$ og $\dot{R}$ er ikke velordnede ved denne relation.

1.3.2. Sætning. En foreningsmængde af venstre afsnit i en velordnet mængde er selv et venstre afsnit.

Bevis. Lad A være en velordnet mængde og $\{U_j \mid j \in J\}$ en mængde af venstre afsnit. Vi sætter $U = \bigcup_j U_j$. Hvis U ikke er hele A, har $A \setminus U$ et første element x, og vi har da $V_A(x) \subseteq U$. For et y med $x \prec y$ ville $y \in U_j$ medføre $x \in U_j$, hvilket ikke gælder. Altså er $U = V_A(x)$.

1.3.3. Sætning. Lad A være en velordnet mængde og $B \subseteq A$ en delmængde med følgende egenskab:

$$\forall x \in A \ (V_A(x) \subseteq B \Rightarrow x \in B).$$

Da er B = A.

Bevis. Ellers fandtes der et første element $x \in A \setminus B$ og dette ville medføre $V_A(x) \subseteq B$, altså efter antagelsen i sætningen $x \in B$ i modstrid med $x \in A \setminus B$.

Sætning 1.3.3 er grundlaget for en bevismetode, der kaldes transfinit induktion. Vi skal se eksempler på denne bevismetode i det følgende.

1.4. Lad A og B være ordnede mængder med ordensrelationer, som vi vil betegne med $\prec$ for begge mængder. En afbildning φ: A ind i B kaldes voksende, såfremt

$$\forall x,y \in A \ (x \prec y \Rightarrow \varphi(x) \prec \varphi(y)).$$

Hvis φ tillige er bijektiv og φ^{-1} voksende, kaldes φ ~~en~~ ordensisomorfi, og A og B kaldes ordensisomorfe. Det er klart, at ordensisomorf med er en ækvivalensrelation.

En ordensisomorfi afbilder første element på første element, minimalt element på minimalt element, venstre afsnit på venstre afsnit, fuldstændig ordnet mængde på fuldstændig ordnet mængde, velordnet mængde på velordnet mængde o.s.v.

Hvis A er fuldstændig ordnet, medens B er ordnet og φ: A ind i B er voksende og bijektiv, da er B åbenbart fuldstændig ordnet og φ en ordensisomorfi.

1.4.1. Sætning. Lad A og B være ordensisomorfe velordnede mængder. Der eksisterer da kun 1 ordensisomorfi φ: A på B.

Bevis. Vi benytter transfinit induktion. Lad φ: A på B og ψ: A på B være ordensisomorfier. Vi betragter

$$E = \{x \in A \mid \varphi(x) = \psi(x)\}.$$

For $x \in A$ og $V_A(x) \subseteq E$ bliver x det første element i $A \setminus V_A(x)$, altså $\varphi(x)$ og $\psi(x)$ begge det første element i $B \setminus \varphi(V_A(x)) = B \setminus \psi(V_A(x))$. Af sætning 1.3.3 følger nu $E = A$ og sætningen er bevist.

1.4.2. Sætning. En velordnet mængde A er ikke ordensisomorf med noget venstre afsnit $V_A(x) \subset A$.

Bevis. Vi benytter atter transfinit induktion. Lad φ: A på $V_A(x)$ være en ordensisomorfi. Vi sætter

$$E = \{y \in A \mid \varphi(y) = y\}.$$

For $y \in A$ og $V_A(y) \subseteq E$ bliver y det første element i $A \setminus V_A(y)$ og $\varphi(y)$ følgelig det første element i $\varphi(A \setminus V_A(y) = A \setminus V_A(y)$. Altså får vi $\varphi(y) = y$, hvilket medfører $y \in E$, og påstanden følger nu af sætning 1.3.3.

1.4.3. Sætning. Lad A og B være velordnede mængder og φ: A

ind i B og ψ: A ind i B ordensisomorfier, der begge afbilder A på et venstre afsnit af B. Da er φ og ψ identiske.

Bevis. I specialtilfældet $\varphi(A) = \psi(A)$ følger det af sætning 1.4.1, at φ og ψ er identiske. Af $x \in \psi(A)$, $x \notin \varphi(A)$ følger $\varphi(A) \subsetneq V_A(x) \subset \psi(A)$, og afbildningen $\varphi \circ \psi^{-1}$: $\psi(A)$ på $\varphi(A)$ er da en ordensisomorfi mellem den velordnede mængde $\psi(A)$ og afsnittet $\varphi(A)$ i modstrid med sætning 1.4.2.

1.4.4. Sætning. Af 2 velordnede mængder A og B vil en altid være ordensisomorf med et venstre afsnit af den anden.

Bevis. Lad $\{C_j \mid j \in J\}$ være mængden af venstre afsnit af A, for hvilke der eksisterer ordensisomorfier φ_j: C_j ind i B, således at $\varphi_j(C_j)$ er et afsnit af B. For $x \in C_j \cap C_k$ gælder ifølge 1.4.3, da $C_j \cap C_k$ åbenbart er et afsnit af A, at $\varphi_j(x) = \varphi_k(x)$. For $C = \bigcup_j C_j$ kan vi derfor definere φ: C ind i B, idet vi for $x \in C_j$ sætter $\varphi(x) = \varphi_j(x)$. Ifølge sætning 1.3.2 er C et venstre afsnit af A. Vi vil vise, at enten er $C = A$ eller $\varphi(C) = B$. I modsat fald eksisterede nemlig et første element $\xi \in A \setminus C$ og et første element $\eta \in B \setminus \varphi(C)$, og

$$\varphi^{*}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{for } x \in C \\ \eta & \text{for } x = \xi \end{cases}$$

definerer da en ordensisomorfi af $C \cup \{\xi\}$ på afsnittet $\varphi(C) \cup \{\eta\}$ af B, men så er $C \cup \{\xi\}$ en af mængderne C_j i modstrid med definitionen af C.

1.5. Af sætning 1.4.4 fremgår, at de velordnede mængder er omtrent ens, således at afsnittene af en eneste velordnet "modelmængde" vil være tilstrækkelige til alle formål, hvis blot "modellen" er lang nok. Det er nærliggende at starte med $\mathbb{N}$, dog plejer man at medtage 0, idet man derved opnår, at hvert tal i rækken netop er antallet af de forudgående. Hvis mængden har flere elementer, findes der blandt dem et første. Et sådant be-

tegner vi ω og de følgende med $\omega+1$, $\omega+2$,... . Hvis det stadig ikke er nok, fortsættes med 2ω, $2\omega+1$,... o.s.v. Når dette heller ikke er nok, fortsættes med ω^2, ω^2+1,..., $\omega^2+\omega$,..., $2\omega^2$,..., ω^3,..., ω^ω,... . Når sammenbygning på denne måde ikke giver mere, kan vi gå videre med et ω_1, derefter med et ω_2 o.s.v. Således kommer vi til den transfinite talrække

$$0,1,2,3\ldots,\omega,\omega+1,\omega+2,\ldots,2\omega,2\omega+1,\ldots,\omega^2,\omega^2+1,\ldots,\omega^2+\omega,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ldots,\omega^2+2\omega,\ldots,2\omega^2,\ldots,\omega^3,\ldots,\omega^\omega,\ldots,\omega_1,\omega_1+1,\ldots,$$
$$\omega_1+\omega,\ldots,\omega_1+\omega^\omega,\ldots,\omega_2,\ldots .$$

Der er altid mulighed for at bygge videre på denne række, og den kan således bringes til at indeholde en kopi af enhver velordnet mængde, man møder. Afsnittet V(q), hvor q er et symbol fra rækken, siges at have ordningstypen q. Enhver velordnet mængde får således tillagt en ordningstype, og velordnede mængder er ordensisomorfe, hvis og kun hvis de har samme ordningstype.

1.6. I de følgende undersøgelser får vi brug for det såkaldte udvalgsaksiom, som først blev fremsat af E. Zermelo i 1904.

1.6.1. Udvalgsaksiomet. Svarende til en mængde M findes der altid en afbildning u: $\dot{D}(M) \setminus \{\emptyset\}$ ind i M, således at $u(A) \in A$ for ethvert $A \in \dot{D}(M) \setminus \{\emptyset\}$. Afbildningen u kaldes en udvalgsfunktion.

Udvalgsfunktionen u knytter således til enhver ikke tom delmængde $A \subseteq M$ et element af denne mængde. At en sådan udvalgsfunktion virkelig eksisterer, forekommer i første omgang næsten indlysende. Zermelo benyttede sit udvalgsaksiom til beviset for følgende sætning.

1.6.2. Velordningssætningen. På enhver mængde M kan der indføres en ordningsrelation, således at M bliver velordnet.

Bevis. Lad $u: \dot{D}(M) \setminus \{\emptyset\}$ ind i M være en udvalgsfunktion. Vi sætter $u(M) = a_o$. Ved en kæde vil vi forstå en delmængde $K \subseteq M$ med en velordningsrelation $-<$, således at ethvert $x \in K$ tilfredsstiller betingelsen

(1) $$x = u(M \setminus V_K(x)),$$

hvor $V_K(x)$ er det ved x bestemte venstre afsnit af K. Lad nu K og L være to sådanne kæder. Vi ved da fra sætning 1.4.4 at 1 af dem, lad os sige K, er ordensisomorf med et venstre afsnit af den anden, og vi har således en ordensisomorfi φ: K ind i L, og $\varphi(K)$ er et venstre afsnit af L. Vi indfører punktmængden

$$E = \{x \in K \mid \varphi(x) = x\}.$$

Hvis $x \in K$ er et element, for hvilket $V_K(x) \subseteq E$, har vi ifølge definitionen af E, at $V_K(x) = \varphi(V_K(x))$, og da $\varphi(V_K(x))$ er et afsnit af L eksisterer $y \in L$, således at $\varphi(V_K(x)) = V_K(x) = V_L(y)$. Af (1) følger da

$$y = u(M \setminus V_L(y)) = u(M \setminus V_K(x)) = x,$$

altså $x \in E$. Transfinit induktion giver altså $E = K$, så vi ser, at K er et afsnit af L.

Lad nu $\{K_j \mid j \in K\}$ være mængden af alle kæder i M. Vi sætter $K^* = \bigcup_j K_j$. For $x,y \in K^*$ har vi da kæder K_1 og K_2 som indeholder x og y, og da den ene kæde er et afsnit af den anden, findes der en kæde, der indeholder både x og y, og denne kæde giver os en relation $x -< y$. De foregående overvejelser viser, at denne relation er ens for alle kæder, der indeholder x og y. Heraf fremgår, at $x -< y$ og $y -< x$ medfører $x = y$. Af $x -< y$ og $y -< z$ fås, idet der findes en kæde, som indeholder x, y og z, at $x -< z$. Altså er K^* en fuldstændig ordnet mængde. En mængde K_j er eventuelt identisk med K^*. I modsat fald findes K_s, således at $K_j \subset K_s \subseteq K^*$, og K_j er da et venstre afsnit af K_s og dermed også et venstre afsnit af K^*. En delmængde $A \subseteq K^*$ har elementer

fælles med en mængde K_j, og det første element i $A \cap K_j$ bliver åbenbart det første element i A. Altså er K^* velordnet.

Vi har således fundet en kæde K^*, der indeholder alle andre kæder. Er nu $K^* \subset M$ en ægte delmængde, kan vi sætte $u(M \setminus K^*) = a$. Ved at tilføje a efter alle elementerne i K^* får vi en ny velordnet mængde, og den er åbenbart en kæde. Men det strider mod, at K^* indeholder alle andre kæder. Altså er $K^* = M$, og M er velordnet ved relationen $-<$.

1.7. Til enhver velordnet mængde svarer en ordningstype. I stedet for ordningstype siger man ofte ordenstal. En abstrakt mængde kan (hvis den er uendelig) organiseres på flere måder som velordnet mængde, og den har derfor ikke nogen bestemt ordningstype. Imidlertid falder de abstrakte mængder i ækvivalenskategorier ved den sædvanlige mængdeækvivalens og hver sådan kategori tilordnes et kardinaltal. Af velordningssætningen følger, at det for to mængder A og B altid gælder, at 1 af dem kan afbildes på en delmængde af den anden. Hvis A kan afbildes på en delmængde af B, vil vi skrive kard $A \leqq$ kard B, hvor "kard" betyder kardinaltal for", og det er da klart, at relationen $\leqq$ bliver reflexiv og transitiv. At $\leqq$ er en ordningsrelation fremgår af følgende sætning, F. Bernsteins ækvivalenssætning (1897):

1.7.1. Sætning. Hvis 2 mængder A og B tilfredsstiller både kard $A \leqq$ kard B og kard $B \leqq$ kard A, da er A og B ækvivalente.

Bevis. Beviset er helt elementært, og det benytter hverken udvalgsaksiomet eller velordning. Efter forudsætningerne har vi injektive afbildninger f: A ind i B og g: B ind i A. Vi bemærker, at elementerne i A og B er ordnede i kæder, hvis elementer skiftevis tilhører A og B, og hvor ethvert element er billede af det foregående, altså

$$\ldots \overset{g}{\Leftarrow} a_{-1} \overset{f}{\Rightarrow} b_{-1} \overset{g}{\Leftarrow} a_{o} \overset{f}{\Rightarrow} b_{o} \overset{g}{\Leftarrow} a_{1} \overset{f}{\Rightarrow} b_{1} \overset{g}{\Leftarrow} \ldots .$$

Kæden er éntydigt bestemt ved ethvert af sine elementer. Den kan bryde af til venstre, idet den kan have et første element, som ikke tilhører billedet af den anden mængde, og den vil da være uendelig og uden gentagelser. Kæden kan også være periodisk, og den kan strække sig i det uendelige i begge retninger uden gentagelser.

Ethvert element i A eller B tilhører præcis 1 kæde, og vi får således klasseinddelinger af A og B. Til hver klasse i A er knyttet en klasse i B (den, der stammer fra samme kæde), og klasser, der svarer til hinanden, har lige mange (evt. numerabelt mange) elementer. Vi kan altså for hver klasse i A vælge en bijektiv afbildning på den tilsvarende klasse i B, og disse bijektive afbildninger definerer da åbenbart en bijektiv afbildning af A på B. Dermed er Bernsteins sætning vist.

Imidlertid må vi indrømme, at vi ikke, som vi lovede i begyndelsen, har vist sætningen uden brug af udvalgsaksiomet. Vi har jo for hver af klasserne i A valgt 1 af de mulige afbildninger, og det synes at være en stiltiende anvendelse af udvalgsaksiomet. En nærmere undersøgelse afslører dog hurtigt, at vi kan angive en ganske bestemt afbildning for hver klasse, så det ikke bliver nødvendigt at vælge. Hvis klassen stammer fra en periodisk kæde eller en kæde, der er uendelig i begge retninger, er restriktionen af f selv bijektiv og således anvendelig. Det samme gælder, hvis kæden har et første element, som tilhører A. Hvis kæden derimod har et første element, som tilhører B, vil restriktionen af g^{-1} være bijektiv. Vi har således angivet et konkret valg af afbildning for hver enkelt klasse. Vi understreger endnu engang, at sammenligneligheden af vilkårlige kardinaltal

ikke har kunnet vises uden brug af velordning og dermed af udvalgsaksiomet.

Det her benyttede bevis for F. Bernsteins ækvivalenssætning stammer fra B. Jessens forelæsninger.

Vi bemærker, at enhver mængde af kardinaltal er velordnet ved relationen $\leqq$. Hvis vi nemlig velordner mængder med de omtalte kardinaltal vil en af disse få mindst ordningstype, da en mængde af ordningstyper er velordnet, og den vil da også have det laveste kardinaltal.

1.8. De fleste anvendelser af velordningssætningen vedrører mængder med mere sammensat organisation. Det er oftest nødvendigt at kombinere velordningssætningen med transfinit induktion, men anvendelserne har et vist ensartet præg, og det er derfor muligt én gang for alle at udpræparere et lemma, som i de fleste tilfælde overflødiggør den længere bevisførelse. Det nævnte lemma kaldes sædvanligvis Zorn's lemma efter M. Zorn (A remark on method in transfinite algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 41(1935), 667-670), men det er omtalt af K. Kuratowski allerede i 1922.

1.8.1. Definition. Lad A være en ordnet mængde. Et element $a \in A$ kaldes en majorant for en delmængde $B \subseteq A$, såfremt

$$\forall x \in B \ (x \prec a).$$

Mængden A kaldes induktivt ordnet, såfremt enhver fuldstændig ordnet delmængde af A har en majorant.

1.8.2. Zorn's lemma. Enhver induktivt ordnet mængde har et maximalt element.

Bevis. Lad A være induktivt ordnet ved relationen $\prec$. For $B \subseteq A$ vil vi med H(B) betegne mængden af "ægte" majoranter til B, altså

$$H(B) = \{x \in A \mid \forall y \in B(y \prec x \wedge y \neq x)\}.$$

Lad u: $\dot{D}(A) / \{\emptyset\}$ ind i A være en udvalgsfunktion. En velordnet delmængde $K \subsetneq A$ kaldes en kæde, såfremt

$$\forall x \in K \ (x = u(H(V_K(x)))).$$

specielt er kædens første element $u(H(\emptyset)) = u(A)$, således at alle kæder begynder med samme element. For 2 kæder K og L gælder, at den ene, lad os sige K, er ordensisomorf med et afsnit af den anden. Der eksisterer altså en ordensisomorfi φ: K ind i L, og vi kan betragte mængden

$$E = \{x \in K \mid \varphi(x) = x\}.$$

For $y \in K$, $V_K(y) \subsetneq E$ får vi $V_K(y) = V_L(y)$, altså

$$\varphi(y) = u(H(V_L(y))) = u(H(V_K(y))) = y,$$

og transfinit induktion giver, at K er identisk med et afsnit af L. Ganske som i beviset for velordningssætningen ser vi, at foreningsmængden af alle kæder selv er en kæde, og det bliver den mest omfattende af alle kæder, idet den har enhver anden kæde som afsnit. Hvis denne kæde havde ægte majoranter, kunne vi danne en ny kæde ved tilføjelse af et element i modstrid med dens majorantegenskab. Da A er induktivt ordnet, har den maksimale kæde et sidste element, og det er et element uden ægte majoranter, altså netop et maximalt element. Dermed er beviset færdigt.

1.9. Vi vil illustrere Zorn's lemma med en vigtig anvendelse indenfor vektorrummenes teori. Vi minder om, at et vektorrum over et legeme K (med elementer $\alpha,\beta,\ldots$) er en Abelsk gruppe E med K som operatorring, således at vi for $a,b,\ldots \in E$ kan danne udtryk af formen αa, og således at

$1 \cdot a = a$, $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$, $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$, $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$.

En mængde $\{e_j \mid j \in J\}$ af elementer af E siges at være lineært afhængig, hvis der gælder en relation

$$\alpha_1 e_{j_1} + \ldots + \alpha_m e_{j_m} = \underline{0},$$

hvor koefficienterne $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ ikke alle er $\underline{0}$. At $\{e_j \mid j \in J\}$ er lineært afhængig er således ensbetydende med, at et af elementerne e_j kan udtrykkes som en linearkombination af endelig mange andre.

Omvendt siges $\{e_j \mid j \in J\}$ at være lineært afhængigt (eller frit), såfremt systemet ikke er afhængigt. De lineært uafhængige systemer i E udgør en partielt ordnet mængde med ordensrelationen $\subseteq$. Hvis vi har en fuldstændig ordnet mængde $\{U_k \mid k \in K\}$ af lineært uafhængige systemer $U_k = \{e_j \mid j \in J_k\}$, hvor altså mængderne J_k er elementer af en mængde I, som er fuldstændig ordnet ved inklusion. Det er klart, at foreningsmængden

$$\bigcup_k U_k = \{e_j \mid j \in \bigcup J_k\}$$

er lineært uafhængig, da endelig mange elementer fra $\bigcup U_k$ er indeholdt i endelig mange U_k og derfor i den mest omfattende af disse, og derfor er lineært uafhængige. Men så er $\bigcup U_k$ en majorant for $\{U_k \mid k \in K\}$ og mængden af lineært uafhængige systemer er således fuldstændigt ordnet ved $\subseteq$. Altså giver Zorn's lemma, at der eksisterer et maksimalt uafhængigt system $\{e_j \mid j \in J\}$.

Det ses, at anvendelsen af Zorn's lemma i dette typiske tilfælde var næsten umiddelbar. Vi har beskrevet fremgangsmåden så bredt, fordi det var første gang, og i det følgende vil vi være mindre grundige.

Et maksimalt uafhængigt system $\{e_j \mid j \in J\}$ kaldes en basis for vektorrummet. For $a \in E$ gælder det altså, at a sammen med systemet $\{e_j \mid j \in J\}$ udgør et lineært uafhængigt system, og vi har derfor en relation

$$\beta a + \beta_1 e_{j_1} + \ldots + \beta_m e_{j_m} \equiv \underline{0},$$

hvor ikke alle koefficienterne er $\underline{0}$. Da $e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}$ er lineært

uafhængige, medfører dette $\beta \neq 0$, og vi har derfor en fremstilling

$$a = \alpha_1 e_{j_1} + \ldots + \alpha_m e_{j_m}.$$

To forskellige fremstillinger af denne form ville give en relation mellem endelig mange basiselementer. Altså er fremstillingen éntydig bestemt ved elementet a.

1.10. Ovenstående overvejelser afviger kun på et eneste punkt fra tilsvarende overvejelser i matematik 2, nemlig ved vort uindskrænkede bevis for eksistensen af en basis.

Lad os f.eks. vælge $K = \dot{Q}$ og $E = \dot{R}$ med de sædvanlige regneregler. Sætningen giver da, at der eksisterer en mængde $B = \{b_j \mid j \in J\}$ af reelle tal, således at ethvert reelt tal a på én og kun én måde kan skrives på formen

$$a = q_1 b_{j_1} + \ldots + q_m b_{j_m}.$$

Eksistensen af en sådan basis for de reelle tal er først vist af Hamel.

Af den elementære teori for lineære operatorer følger nu, at enhver afbildning φ: B ind i $\dot{R}$ giver anledning til en lineær afbildning f: $\dot{R}$ ind i $\dot{R}$, idet vi for

$$x = x_1 b_{j_1} + \ldots + x_m b_{j_m}$$

med rationale $x_1, \ldots, x_m$ sætter

$$f(x) = x_1 \varphi(b_{j_1}) + \ldots + x_m \varphi(b_{j_m}).$$

Funktionen f tilfredsstiller linearitetsbetingelsen

$$f(px+qy) = pf(x) + qf(y)$$

for rationale p og q.

Dette viser eksistensen af diskontinuerte løsninger til funktionalligningen

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1.11. Det vil være urimeligt at slutte dette kapitel uden

at nævne den diskussion Zermelos resultater gav anledning til. Ved første blik synes ovenstående overvejelser vel meget uskyldige, og selve udvalgsaksiomet må forekomme overordentlig rimeligt.

Ved nærmere eftertanke må man dog erkende, at f.eks. en udvalgsfunktion på $\mathbb{R}$ slet ikke er så omtalt et begreb. Intet menneske har kunnet angive nogen algoritme, som ved anvendelse på en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}$ altid giver et element af $\mathbb{R}$ som resultat. Det har med andre ord ikke været muligt at angive et eksplicit udtryk for udvalgsfunktionen. Tilsvarende gælder det, at man ikke eksplicit kan angive en basis for de reelle tal, og man har heller ikke eksplicit kunnet angive andre løsninger til funktionalligningen

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

end netop de trivielle kontinuerte løsninger $f(x) = kx$.

Vi bemærker, at det for en velordnet mængde er let at angive en udvalgsfunktion, idet man blot til enhver ikke tom delmængde knytter dens første element, hvis eksistens jo netop er sikret ved velordningen. Udvalgsaksiomet er således virkelig en nødvendig forudsætning for velordningssætningen.

Det er også klart, at Zorn's lemma medfører velordningssætningen og dermed udvalgsaksiomet. Lad nemlig A være en mængde. Vi kan betragte mængden $A^* = \{K_j \mid j \in J\}$ af alle mulige velordnede mængder, der er delmængder af A udstyrede med passende ordningsrelation. For disse har vi ordningsrelationen $K_{j_1} \prec K_{j_2}$, hvor $\prec$ betyder: "er et afsnit af". Denne ordning er åbenbart induktiv, og Zorn's lemma sikrer os, at der eksisterer et maksimalt element. Men det er klart, at et element kun kan blive maksimalt ved at omfatte hele A, og dermed er velordningssæt-

ningen bevist.

Vi må altså indrømme, at det kritiserede udvalgsaksiom er grundlæggende for alle de foregående undersøgelser. Den omstændighed, at udvalgsaksiomet giver eksistensbeviser for ting, der ikke kan konstrueres eksplicit, har ført til at eksistensbeviser på grundlag af udvalgsaksiomet i en vis forstand anses for mindre tilfredsstillende af mange matematikere. En nærmere gennemgang af den matematiske analyses grundlag har imidlertid vist, at stiltiende anvendelser af udvalgsaksiomerne forekommer ret hyppigt.

1.12. En medvirkende årsag til matematikernes skepsis overfor udvalgsaksiomet var en række paradoxer, som opstod ved uforsigtig omgang med mængdelæren. Her er det berømteste:

For mængden Ω af alle mængder gælder åbenbart

$$\Omega \in \Omega,$$

og der er derfor rimelighed i at definere en mængde af mængder på følgende måde:

$$M = \{A \mid A \notin A\}.$$

Det ses da, at

$$M \in M \iff M \notin M,$$

så vi er nået frem til en modstrid, skønt vi ikke har gjort nogen som helst antagelse.

Men vi har jo også ordenstyperne

$$0,1,2,\ldots,\ \omega,\omega+1,\ldots,\ 2\omega,\ldots,\ \omega^2,\ldots,\ \omega^\omega,\ldots,\ \omega_1,\ldots,\omega_2,\ldots\ .$$

Lad Ω være mængden af alle ordenstyper. Nu er hver ordenstype jo netop ordenstypen af det forudgående afsnit. Men efter afsnittet Ω skulle således stå ordenstypen for Ω. Det er klart, at det kan der ikke blive mening i.

1.13. Det har været kendt siden oldtiden, at også den rene logik støder på vanskeligheder af lignende art som de ovenfor

omtalte. En påstand, der udtaler sig om, hvorvidt den selv er sand eller falsk, kan sædvanligvis ikke tillægges en af sandhedsværdierne "sand" eller "falsk". Hvis matematikkens grundlag skal opbygges over en formel logik, må denne tage disse fænomener i betragtning, således at påstande af den nævnte art i en eller anden forstand "holdes udenfor".

1.14. Vi skal ikke her indlade os på en nærmere diskussion af de ovenfor omtalte problemer, men finder det dog rimeligt at sige lidt om den senere udvikling. Den matematiske grundlagsforskning, som har til formål at opstille et modsigelsesfrit grundlag for logik og matematik, har udviklet sig i flere retninger. Vi skal først nævne den intuitionistiske retning, som bestræber sig på at opbygge mest muligt af matematikken efter særlig strenge principper, således at der ikke skulle blive fare for modsigelser. Intuitionisterne anerkender kun strengt konstruktive eksistensbeviser. Lad os f.eks. antage, at vi ønsker at bevise, at uendelig mange hele tal har en vis egenskab A. Vi kunne da antage

$$\exists N \; \forall n \geq N \text{ (n har egenskaben non A)},$$

og hvis denne antagelse fører til en modstrid, ville vi have et indirekte bevis for påstanden om, at der eksisterer vilkårlig store hele tal med egenskaber A. Fra intuitionistisk synspunkt ville et bevis af den anførte form ikke blive godtaget. Derimod ville intuitionisterne godtage et bevis, som angiver et tal med egenskaben A og en metode til ud fra et tal med egenskaben A at konstuere et større tal med egenskaben A.

Det fremgår heraf, at store og centrale dele af matematisk analyse fra intuitionistisk synspunkt må forkastes og mange andre afsnit af matematikken bliver meget besværlige.

1.15. I modsætning til intuitionisterne har formaldisterne søgt at opbygge hele matematikken inklusive de ovenfor benyttede metoder på et solidt grundlag ved hjælp af en fælles aksiomatisk opbygning af logisk matematik. Det er dog ikke lykkedes at vise, at et sådant grundlag er modsigelsesfrit. Det har tværtimod vist sig, at et logisk system, der er kraftigt nok til at begrunde indførelsen af mængden $\dot{\mathbb{N}}$ af naturlige tal, nødvendigvis må omfatte udsagn, der ikke kan karakteriseres som sande eller falske. Dette udelukker dog ikke, at det logiske grundlag kan være anvendeligt. Nyere undersøgelser tyder på, at vanskelighederne overhovedet indtræder ved indførelsen af $\dot{\mathbb{N}}$, og at udvalgsaksiomet ikke derefter giver anledning til nye vanskeligheder.

1.16. I de sædvanlige fremstillinger undgår man de mængdeteoretiske paradoxer ved kun at udvikle mængdelæren for delmængder af et fast valgt univers U. Som det vil være bekendt, kommer man dog til at betragte mængder af mængder af delmængder eller endnu mere komplicerede begreber. Man er derfor ikke fuldt sikret mod paradoxer som det, der var baseret på ordenstyperne.

Endelig skal vi fremhæve, at man uden risiko kan fremsætte generelle udtalelser om alle mængder, enhver ordenstype etc. Det er således ikke farligt at benytte alkvantoren $\forall$, selvom den refererer til "alle mængder". Det er symbolet $\{x \mid \ldots\}$, der giver anledning til paradoxer, når man ikke nøjes med at anvende det i situationer, hvor x kun gennemløber et univers.

T 1.4. Formlen i linie 4 f.n. rettes til $\varphi(A \setminus V_A(y)) = V_A(x) \setminus V_A(y)$. Det er klart, at y er det første element i denne mængde, så vi får $\varphi(y) = y$.

T 1.7. Midt på siden optræder afsnittet $\varphi(V_K(x))$ af L, og det benyttes på afgørende måde, at $\varphi(V_K(x)) \neq L$. Dette følger umiddelbart af, at $\varphi(x) \in L$ men $\varphi(x) \notin \varphi(V_K(x))$.
I linie 12 f.n. skal der stå $\{K_J \mid j \in J\}$.
Afsnittet fra det sidste punktum i linie 4 f.n. til side 1.8 linie 2 erstattes med følgende:

Lad A være en vilkårlig, ikke tom delmængde af K^*. Vi kan vælge $j \in J$, således at $A \cap K_j \neq \emptyset$. Da K_j er velordnet, har $A \cap K_j$ et første element w. Lad $v \in A$ være et fra u forskelligt element. Hvis $v \in K_j$ gælder $w \prec v$, fordi w er det første element i $A \cap K_j$. For $v \notin K_j$ kan vi vælge $s \in J$, således at $v \in K_s$. Men så er K_j et afsnit af K_s, og da w, men ikke v, tilhører K_j, kan vi igen slutte, at $w \prec v$. Altså er w det første element i A. Dermed har vi bevist, at K^* er velordnet ved $\prec$. For ethvert element $x \in K^*$ eksisterer $j \in J$, således at $x \in K_j$ og (1) gælder således for x, idet afsnittet $V_{K_j}(x)$ ikke afhænger af j. Altså er K^* en kæde.

T 1.14. Linie 6 f.o. "omtalt" rettes til "enkelt"

1. Vis, at der eksisterer en velordnet mængde A med den egenskab, at ethvert venstreafsnit $V_A(x)$ for $x \in A$ er en numerabel mængde, medens A selv ikke er nummerabel. Vis, at alle mængder med denne egenskab har samme ordningstype. (Kontinuumhypotesen udtaler, at den således indførte mængde A er ækvivalent med et interval. Nyere undersøgelser tyder på, at kontinuumhypotesen ikke strider mod logikkens og mængdelærens øvrige aksiomer, men at den heller ikke kan afledes af disse).

2. Lad $\{A_j \mid j \in J\}$ være en mængde af mængder blandt hvilke ingen er indbyrdes ækvivalente, og blandt hvilke ingen har større kardinaltal end alle de øvrige. Vis, at $\bigcup A_j$ har større kardinaltal end enhver af mængderne A_j.

3. Vis, at det for enhver mængde M gælder, at

$$\text{kard } M < \text{kard } \dot{D}(M).$$

Indirekte. Antag, at f: M på $\dot{D}(M)$ er bijektiv og betragt

$$A = \{x \in M \mid x \notin f(x)\}.$$

Der findes da et $a \in M$, således at $f(a) = A$. Undersøg, om $a \in A$. Læg mærke til, hvordan ræsonnementet minder påfaldende om et af parådoxerne.

4. Vis ved hjælp af resultaterne fra opgaverne 2 og 3, at "mængden af alle kardinaltal" vil give anledning til et paradox ganske som "mængden af alle ordenstyper".

5. Vis, at enhver lineært uafhængig mængde af vektorer fra et vektorrum kan udvides til en basis for vektorrummet.

6. Vis, at mængden af alle følger af reelle tal fra intervallet $]0,1[$ er ækvivalent med et interval. Benyt decimalfremstilling og konstruer afbildning efter skemaet

$0,a_1a_2a_3\ldots \leftrightarrow (0,a_1a_3a_5\ldots,\ 0,a_2a_6a_{10}\ldots,\ 0,a_4a_{12}a_{20}\ldots,\ldots)$.

Glem ikke, at visse tal på to måder kan fremstilles som decimalbrøk. Udnyt Bernsteins ækvivalenssætning.

7. Udvid resultatet fra opgave nr. 6 til vilkårlige reelle talfølger.

8. Vis, at mængden af kontinuerte afbildninger f: [0,1] ind i $\grave{\mathrm{R}}$ er ækvivalent med [0,1]. Benyt, at f er helt bestemt ved sin restriktion til $[0,1] \cap \grave{\mathrm{Q}}$ og anvend derefter resultatet fra opgave nr. 7.

9. Vis, at mængden af afbildninger f: [0,1] ind i $\grave{\mathrm{R}}$ har større kardinaltal end [0,1]. Benyt resultatet fra opgave nr. 3.

10. Vi betragter en vilkårlig afbildning g: [0,1] ind i $\grave{\mathrm{R}}$. Kan vi da altid konstruere en kontinuert afbildning f: [0,1] ind i $\grave{\mathrm{R}}$, således at $\forall x \in [0,1]\ (f(x) \neq g(x))$? Svaret er benægtende på grund af følgende konstruktion:

Lad $\hat{\mathrm{C}}([0,1],\grave{\mathrm{R}})$ være mængden af kontinuerte afbildninger f: [0,1] ind i $\grave{\mathrm{R}}$. Ifølge opgave nr. 8 eksisterer en bijektiv afbildning φ: [0,1] ind i $\hat{\mathrm{C}}([0,1],\grave{\mathrm{R}})$ og for $x \in [0,1]$ er $\varphi(x)$: [0,1] ind i $\grave{\mathrm{R}}$ en kontinuert afbildning, som til $y \in [0,1]$ lader svare $\varphi(x)(y) \in \grave{\mathrm{R}}$. Det er nu let at vise, at der til afbildningen g: [0,1] ind i $\grave{\mathrm{R}}$ defineret ved $g(x) = \varphi(x)(x)$ ikke svarer noget kontinuert x med den ønskede egenskab.

Dette er et andet eksempel på et rent eksistensbevis, der ikke kan udformes til et konstruktivt bevis.

11. Vis, at enhver ordnet mængde kan fremstilles som foreningsmængde af 2 disjunkte mængder, således at den ene af disse er velordnet, og den anden ikke har et første element.

13. En reflexiv og transitiv relation $=<$ på en mængde A kaldes en præordensrelation på A. Vis, at den relation $\sim$ på A, som defineres ved

$$\forall a,b \in A\ [a \sim b \iff a =< b \wedge b =< a]$$

er en ækvivalensrelation. Gør rede for, at $=<$ på naturlig måde inducerer en ordensrelation på mængden $A/\sim$ af ækvivalensklasser i A m.h.t. $\sim$. Påvis endvidere, at denne ordensrelation er fuldstændig, hvis og kun hvis den givne præordensrelation opfylder kravet

$$\forall a,b \in A\ [a =< b \vee b =< a].$$

14. Lad $(A,=<)$ være en fuldstændigt ordnet mængde. Vis, at afbildningen $V_A : A \to \dot{D}(A)$ givet ved

$$V_A(x) = \{y \in A \mid y -< x\} \qquad (x \in A),$$

er voksende og injektiv, samt at x er det første element af $A \setminus V_A(x)$.

15. Lad A være en velordnet mængde, og lad $x \in A$. Vis, at $V_A(x) \cup \{x\}$ er et venstreafsnit af A.

16. Lad A være en velordnet mængde, og lad B være et venstreafsnit af A.
Vis, at $V_B(y) = V_A(y)$ for ethvert $y \in B$.

17. Lad A være en velordnet mængde, B et venstreafsnit af A, og lad $C \subsetneq B$. Vis, at C er et venstreafsnit af A, hvis og kun hvis C er et venstreafsnit af B.

18. Vis, at mængden af venstreafsnit i en velordnet mængde er velordnet (under inklusion).

19. For to velordnede mængder vil vi med skrivemåden $A \subsetneqq B$ betegne, at A er ordensisomorf med et venstreafsnit af B. Bevis, at $A \subsetneqq A$ (klart) og at

$$A \subsetneqq B \wedge B \subsetneqq C \Rightarrow A \subsetneqq C$$

(for tre velordnede mængder A,B,C).
Dette betyder, at relationen $\subsetneqq$ på "klassen af alle velordnede mængder" er en præordensrelation (jvf.opg.13).

Bevis endvidere, at den til $\subsetneqq$ svarende ækvivalensrelation er relationen "er ordensisomorf med".

Vis endelig, at den af $\subsetneqq$ inducerede ordensrelation på "klassen" af alle ordinaltal (= velordningstyper = klasser af ordensisomorfe velordnede mængder) er fuldstændig, ja en velordningsrelation.

20. Lad A og B være (abstrakte) mængder, og lad $f:A \to B$ være surjektive. Vis, at kard $B \leqq$ kard A. (Benyt udvalgsaksiomet).

21. Gør rede for, at Mængden $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0^2$ af alle ordnede par (a,b), hvor $a,b \in \aleph_0$, er velordnet under den lexicografiske ordning, der defineres ved

$$[(a_1,b_1) =< (a_2,b_2)] \Longleftrightarrow$$

$$[a_1 < a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 < b_2)].$$

Hvilken ordenstype har $\aleph_0^2$?

22. Gør rede for, at mængden M af alle følger $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in \aleph_0^{\aleph_0}$, i hvilke kun endelig mange elementer er $\neq 0$, er velordnet under lexicografisk ordning (jvf.opg.21). Hvilken ordenstype og hvilket kardinaltal har M ?

Hvilke konsekvenser ville det få, dersom man udelod kravet om, at kun endelig mange elementer i de betragtede følger måtte være $\neq 0$?

22. Lad $M \subsetneq \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}$ være mængden af alle de følger $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ på $\mathbb{N}_0$ for hvilke $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n \neq 0\}$ er endelig. For to forskellige elementer $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ og $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ af M eksisterer da

$$m = \max \{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n \neq b_n\} .$$

Vi skriver $a =< b$ hvis enten $a = b$ eller

$$a \neq b \ \wedge \ a_m < b_m .$$

Vis, at den således definerede relation på M er en velordensrelation (den kan kaldes lexicografisk ordning "bagfra"). Hvilken ordenstype har M derved fået?

23. (Regning med kardinaltal.) Lad $(\alpha_j)_{j\in J}$ være en vilkårlig familie af kardinaltal. For hvert $j \in J$ lad A_j betegne en mængde med kard $A_j = \alpha_j$ (en repræsentant for α_j). Gør rede for, at det har mening at definere summen $\Sigma\alpha_j$ og produktet $\Pi\alpha_j$ af den givne familie (α_j) af kardinaltal ved

$$\sum_{j\in J} \alpha_j = \text{kard} \bigcup_{j\in J} A_j ,$$

$$\prod_{j\in J} \alpha_j = \text{kard} \prod_{j\in J} A_j ,$$

idet det i tilfældet $\Sigma\alpha_j$ forudsættes, at repræsentanterne A_j er valgt som parvis disjunkte mængder. Vis også at dette sidste altid er muligt. I tilfælde af en endelig indeksmængde $J = \{1,2,\cdots,n\}$ skrives også

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n ,$$

$$\prod_{j=1}^{n} \alpha_j = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n .$$

I tilfældet $J = \emptyset$ defineres $\sum_{j\in\emptyset} \alpha_j = 0$, $\prod_{j\in\emptyset} \alpha_j = 1$.

24. Bevis, at additionen af kardinaltal er kommutativ og associativ idet der for enhver familie $(\alpha_j)_{j\in J}$ af kardinaltal gælder

$$\sum_{j\in J} \alpha_j = \sum_{j\in J} \alpha_{\pi(j)}$$

for enhver bijektiv afbildning (permutation) $\pi : J \to J$, samt

$$\sum_{j\in J} \alpha_j = \sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in J_i} \alpha_j \right)$$

for enhver inddeling $J = \bigcup_{i\in I} J_i$ i parvis disjunkte delmængder J_i. Bevis endvidere de analoge regler for multiplikation af kardinaltal.

25. Lad α og β være to kardinaltal og lad A og B være repræsentanter for disse: kard A = α, kard B = β. Gør rede for, at det har mening at definere potensen

$$\alpha^\beta = \text{kard } (A^B) ,$$

hvor A^B betegner mængden af alle afbildninger af B ind i A. Vis endvidere, at

$$\alpha^\beta = \prod_{j\in B} \alpha_j , \quad \beta\alpha = \sum_{j\in B} \alpha_j ,$$

når vi sætter $\alpha_j = \alpha$ for alle $j \in B$.

26. Bevis potensreglerne

$$\prod_{j\in J} (\alpha^{\beta_j}) = \alpha^{\sum \beta_j} ,$$

$$\prod_{j\in J}(\alpha_j{}^{\beta}) = (\prod_{j\in J}\alpha_j)^{\beta} ,$$

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma} .$$

27. Lad $(\alpha_j)_{j\in J}$ og $(\beta_j)_{j\in J}$ være to familier af kardinaltal over samme indeksmængde J. Vis, at hvis der for ethvert $j \in J$ gælder $\alpha_j \leqq \beta_j$, så er

$$\sum_{j\in J}\alpha_j \leqq \sum_{j\in J}\beta_j , \quad \prod_{j\in J}\alpha_j \leqq \prod_{j\in J}\beta_j .$$

28. For ethvert uendeligt kardinaltal α gælder for ethvert $n \in \mathbb{N}$:

$$n + \alpha = \alpha + \alpha = \alpha ,$$

$$n\alpha = \alpha\alpha = \alpha ,$$

$$\alpha^n = \alpha .$$

Bevis dette i tilfældet $\alpha = \text{alef}_0 := \text{kard } \mathbb{N}$. Vis derved, at kard $\mathbb{Q}$ = kard $\mathbb{N}$.

29. Idet man definerer alef = kard $\mathbb{R}$ skal det vises, at

$$\text{alef} = 2^{\text{alef}_0} = (\text{alef}_0)^{\text{alef}_0} = (\text{alef})^{\text{alef}_0} .$$

Vis derved, at det i opg. 28 anførte gælder for α = alef. Vis endvidere, at

$$\text{kard } I = \text{alef}$$

for ethvert interval $I \subseteq \mathbb{R}$, der ikke udarter til et punkt. Vis endelig, at kard A = alef for enhver åben delmængde af $\mathbb{R}^n$, som ikke er tom.

30. Gør rede for, at der for enhver mængde M gælder

$$\text{kard } \dot{D}(M) = 2^{\text{kard } M} .$$

Vis derved under benyttelse af opg. 3, at der for ethvert kardinaltal α gælder

$$\alpha < 2^{\alpha} ,$$

specielt altså $\text{alef}_0 < \text{alef}$. Kontinuumshypotesen udsiger, at der ikke eksisterer noget kardinaltal β med $\text{alef}_0 < \beta < \text{alef}$. Den generaliserede kontinuumshypotese udsiger, at for ethvert uendeligt kardinaltal α er 2^{α} det mindste kardinaltal $> \alpha$. For nylig har P.J.Cohen bevist, at kontinuumshypotesen er uafhængig af mængdelærens øvrige aksiomer inklusive udvalgsaksiomet (og ligeledes at dette er uafhængigt af de resterende aksiomer). Det har således ingen mening at spørge, om kontinuumshypotesen (eller udvalgsaksiomet) er rigtig eller forkert, på lignende måde som det ikke har mening at spørge om parallelaksiomet i plangeometrien er sandt eller falskt.

2. Om topologi.

2.1. Vi vil kort repetere de topologiske grundbegreber og indføre enkelte nye synspunkter. En udførlig omtale findes i noterne til matematik 1.

2.2. En mængde M organiseres som et topologisk rum $T = (M,Ò)$, ved hjælp af en mængde $Ò \subseteq Ð(M)$ af delmængder af M, idet følgende betingelser kræves opfyldt:

å1). $M \in Ò$ og $\emptyset \in Ò$.

å2). $O_j \in Ò$ for $j \in J$ medfører $\bigcup_j O_j \in Ò$.

å3). $(O_1 \in Ò \wedge O_2 \in Ò) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in Ò$.

Mængderne, der tilhører Ò kaldes <u>åbne mængder</u>.

En mængde M kan også organiseres som et topologisk rum $T = (M,Ù)$ ved en afbildning Ù: M ind i $Ð(Ð(M))$, som til hvert $x \in M$ knytter en mængde $Ù(x)$ af delmængder af M. Disse kaldes omegne af x, og følgende betingelser kræves opfyldt:

o1). $Ù(x) \neq \emptyset$.

o2). For $U \in Ù(x)$ gælder $x \in U$.

o3). Af $U \in Ù(x)$ og $V \supseteq U$ følger $V \in Ù(x)$.

o4). Af $U,V \in Ù(x)$ følger $U \cap V \in Ù(x)$.

o5). Til $U \in Ù(x)$ svarer $V \in Ù(x)$, således at

$\forall y \in V(U \in Ù(y))$.

Den sidste betingelse udtrykker, at en omegn af x også er omegn af ethvert punkt, der ligger tilstrækkelig nær ved x. Af o3) fremgår, at det ikke er nødvendigt at kende hele $Ù(x)$, idet $Ù(x)$ er helt bestemt ved en delmængde $È(x) \subseteq Ù(x)$, når blot enhver mængde i $Ù(x)$ har en delmængde, der tilhører $È(x)$. Mængden $È(x)$ kaldes da en omegnsbasis for x, og når en sådan er givet for alle $x \in M$, har vi $T = (M,È)$, hvor È: M ind i $Ð(Ð(M))$ nu må

tilfredsstille betingelserne:

b1). $\grave{B}(x) \neq \emptyset$.

b2). For $U \in \grave{B}(x)$ gælder $x \in U$.

b3). Til $U,V \in \grave{B}(x)$ svarer $W \in \grave{B}(x)$, således at $W \in U \cap V$.

b4). Til $U \in \grave{B}(x)$ svarer $V \in \grave{B}(x)$, således at ethvert $y \in V$ har et $W \in \grave{B}(y)$ med $W \subsetneq U$.

Det er indlysende, at der ved

$$\grave{U}(x) = \{U \in \grave{D}(M) | \exists V \in \grave{B}(x)(U \supsetneq V)\}$$

defineres en afbildning $\grave{U}$, som tilfredsstiller o1),...,o5).

2.3. Vi vil kort vise, at overgangene mellem $T = (M,\grave{O})$ og $T = (M,\grave{U})$ sker ved definitionerne:

(1) $\grave{O} = \{O \in \grave{D}(M) | \forall x \in O(O \in \grave{U}(x))\}$

(2) $\grave{U}(x) = \{U \in \grave{D}(M) | \exists O \in \grave{O}(x \in O \wedge O \subsetneq U)\}$,

idet vi dog bemærker, at (2) kan erstattes med

(2') $\grave{B}(x) = \{O \in \grave{O} | x \in O\}$.

Lad os først antage, at $T = (M,\grave{U})$, og at $\grave{O}$ er defineret ved (1). Det er da klart, at $\grave{O}$ tilfredsstiller å1,...,å3. Definerer vi nu $\grave{B}(x)$ ved (2'), ses det umiddelbart, at $\grave{B}(x) \subsetneq \grave{U}(x)$. Lad os nu omvendt antage, at $U \in \grave{U}(x)$. Vi definerer

$$V = \{y \in U | U \in \grave{U}(y)\}.$$

Af o5) ses nu, at ethvert $y \in U$ har en omegn, som også tilhører V, altså $V \in \grave{O}$. Trivielt er $V \subsetneq U$. Altså gælder $V \subsetneq U$ og $V \in \grave{B}(x)$. Altså vil $\grave{U}(x)$ tilfredsstille (2).

Hvis omvendt $T = (M,\grave{O})$, definerer vi $\grave{B}(x)$ ved (2'), og det ses umiddelbart, at b1),...,b4) er opfyldt. Det er da klart, at alle $O \subsetneq \grave{O}$ tilfredsstiller $\forall x \in O(O \in \grave{U}(x))$. Hvis omvendt O tilfredsstiller dette, har vi for ethvert $x \in O$ en basismængde $U(x) \in \grave{B}(x)$ med $U(x) \in \grave{O}$, og med $U(x) \subsetneq O$. Vi får da $O = \bigcup_{x \in U} U(x)$, altså $U \in \grave{O}$ på grund af å2).

2.4. Et topologisk rum $T = (M,\dot{U}) = (M,\dot{O})$ betegnes også $T = (M,\dot{U},\dot{O})$. Mængden M kaldes den underliggende mængde for T. Det er ofte overflødigt at have en særlig betegnelse for denne mængde. I stedet for $x \in M$, $A \subseteq M$ skrives $x \in T$, $A \subseteq T$ etc.

Vi betragter $S = (M,\dot{U},\dot{O})$ og $T = (M_1,\dot{U}_1,\dot{O}_1)$. En afbildning $f: S$ ind i T kaldes kontinuert i $a \in S$ med $f(a) = b \in T$, såfremt

$$\forall U \in \dot{U}_1(b)(f^{-1}(U) \in \dot{U}(a)).$$

Endvidere kaldes f kontinuert, hvis den er kontinuert i ethvert $a \in S$. Dette er ensbetydende med, at betingelsen

$$\forall C \in \dot{O}_1(f^{-1}(O) \in \dot{O}):$$

2.5. For nemheds skyld vil vi ofte tale om et topologisk rum T uden at specificere mængden $\dot{O}$ af åbne mængder eller afbildningen $\dot{U}$. Vi vil også ofte bruge bogstaverne $\dot{O}$ og $\dot{U}$ i forbindelse med flere forskellige topologiske rum, når det ikke giver fare for misforståelse.

Det er dog undertiden nyttigt samtidigt at studere flere topologier på samme underliggende mængde, og vi må da skrive $T_1 = (M,\dot{O}_1,\dot{U}_1)$, $T_2 = (M,\dot{O}_2,\dot{U}_2)$ etc. Vi bemærker, at uligheden $\dot{O}_1 \subseteq \dot{O}_2$ er ensbetydende med $\forall x \in M(\dot{U}_1(x) \subseteq \dot{U}_2(x))$. Hvis disse uligheder er opfyldt, siger vi, at topologien $\dot{O}_2$ (eller $\dot{U}_2$) er finere end topologien $\dot{O}_1$ (eller $\dot{U}_1$). Den finere topologi har således flere omegne af ethvert punkt og flere åbne mængder end den grovere.

For $T_1 = (M,\dot{O}_1,\dot{U}_1)$, $T_2 = (M,\dot{O}_2,\dot{U}_2)$ er en afbildning $i: T_2$ ind i T_1 givet ved $i(x) = x$ for alle $x \in M$ (den identiske afbildning). Det ses, at i er kontinuert, hvis og kun hvis T_2 er finere end T_1.

2.6. Lad $\{T_j = (M_j,\dot{O}_j,\dot{U}_j) \mid j \in J\}$ være en mængde af topologiske rum. Lad S være en mængde og $f_j: S$ ind i T_j være afbild-

ninger. Hvis vi nu ønsker at indføre en topologi på S, således at alle f_j bliver kontinuerte, må vi sørge for, at alle $f_j^{-1}(O_j)$, hvor $O_j \in \grave{O}_j$, kommer med blandt de åbne mængder. Vi er da også nød til at medtage alle fællesmængder

$$(1) \qquad f_{j_1}^{-1}(O_{j_1}) \cap \ldots \cap f_{j_m}^{-1}(O_{j_m}),$$

hvor $j_1, \ldots, j_m$ er indbyrdes forskellige. På grund af relationen

$$f_j^{-1}(O_j') \cap f_j^{-1}(O_j'') = f_j^{-1}(O_j' \cap O_j'')$$

vil fællesmængden af endelig mange mængder af formen (1) igen være en mængde af formen (1). Mellem de åbne mængder i S må vi i hvert fald inkludere alle foreningsmængder af mængder af formen (1) blandt de åbne mængder. Men derved bliver netop å1),...,å3) opfyldt. Vi har således fundet den groveste topologi på S, som sikrer, at alle f_j bliver kontinuerte. For alle finere topologier vil det ligeledes gælde, at alle f_j bliver kontinuerte.

2.7. Som et specielt eksempel på den i 2.6 omtalte metode til indførelse af topologi på en mængde vil vi betragte et produkt af uendelig mange topologiske rum.

Lad $T_j = (M_j, \grave{O}_j, \grave{U}_j)$, $j \in J$ være topologiske rum. Produktmængden ΠM_j består af alle afbildninger α: J ind i $\cup M_j$ med $\alpha(j) \in M_j$ for alle j. Vi har afbildninger (projektioner) p_k: ΠM_j på T_k definerede ved $p_k(\alpha) = \alpha(k)$. Produktrummet $T = \Pi T_j$ fås ved at udstyre ΠM_j med den groveste topologi, for hvilken alle projektionerne p_k bliver kontinuerte. Som åbne mængder må vi da indføre alle foreningsmængder af mængder af formen

$$(2) \qquad \{\alpha \mid \alpha(j_1) \in O_{j_1}, \ldots, \alpha(j_m) \in O_{j_m}\}.$$

Vi ser, at ethvert p_j afbilder mængden (2) i en åben mængde, og da foreningsmængde afbildes i foreningsmængde, vil hvert p_j afbilde åben mængde på åben mængde. Projektionerne p_j bliver

altså åbne afbildninger.

Som basis for omegne af $\alpha \in T$ kan vi åbenbart benytte de ved

$$\{\beta | \beta(j_1) \in U_{j_1}(\alpha(j_1)), \ldots, \beta(j_m) \in U_{j_m}(\alpha(j_m))\}.$$

Heraf fremgår, at en følge (β_n) på T konvergerer mod $\alpha \in T$, såfremt der til m; $j_1, \ldots, j_m$; $U_{j_1}(\alpha(j_1)), \ldots, U_{j_m}(\alpha(j_m))$ altid svarer et N, således at vi for alle $n \geq N$ har

$$\beta_n(j_\mu) \in U_{j_\mu}(\alpha(j_\mu)), \ \mu = 1, \ldots, m.$$

Dette er imidlertid ensbetydende med, at $\beta_n(j) \to \alpha(j)$ for hvert fast $j \in J$.

Produktrumstopologien, som vi netop har indført, er den groveste topologi, for hvilken alle projektionerne bliver kontinuerte, og den modsvarer altså koordinatvis konvergens for følger. Det er ofte hensigtsmæssigt at udstyre mængdeprodukter med en finere topologi end produktrumstopologien, men vi skal dog senere se, at produktrumstopologien har meget bekvemme egenskaber.

2.8. Begrebet <u>filter</u> indføres som et hjælpemiddel, der giver os mulighed for at samle en mængde forskellige konvergensbegreber i en fælles generalisation.

Lad M være en mængde. En delmængde $\dot{F}$ af $\dot{D}(M)$ kaldes et filter, når følgende betingelser er opfyldt.

f1). $M \in \dot{F}$.

f2). $\emptyset \notin \dot{F}$.

f3). $\forall A \in \dot{F} \ \forall B \in \dot{F}(A \cap B \in \dot{F})$.

f4). $\forall A \in \dot{F} \ \forall B \in \dot{D}(M)(B \supseteq A \Rightarrow B \in \dot{F})$.

Hvis $T = (M, \dot{U})$ er et topologisk rum, er mængden $\dot{U}(x)$ for ethvert $x \in M$ et filter ifølge betingelserne o1),...,o4). Hvis

M er en uendelig mængde, vil de delmængder af M, som har endelig komplementærmængde, udgøre et filter. Hvis M er uendelig og ikke numerabel, vil de delmængder, som har numerabel komplementærmængde, udgøre et filter.

2.9. Hvis $\dot{F}_1$ og $\dot{F}_2$ er filtre på samme mængde M foretrækker man at læse relationen $\dot{F}_1 \subseteq \dot{F}_2$ som $\dot{F}_2$ er finere end $\dot{F}_2$ eller $\dot{F}_1$ er grovere end $\dot{F}_2$. Filtret, der blot består af mængden M_1, er det groveste filter på M. Hvis $a \in M$, er mængden af delmængder, der indeholder a, et filter, og vi bemærker, at der ikke kan eksistere noget finere filter. Dette filter er således et maximalt element i mængden af filtre på M.

2.9.1. Definition. Et maximalt filter kaldes et ultrafilter.

2.9.2. Sætning. Ethvertfilter på M kan udvides til et ultrafilter på M.

Bevis. Lad $\{\dot{F}_j \mid j \in J\}$ være en mængde af filtre på M, fuldstændig ordnet ved $\subseteq$. Det er da umiddelbart, at $\bigcup_j \dot{F}_j$ er et filter på M. Enhver fuldstændig ordnet mængde af filtre kan således majoriseres. Derfor vil mængden af filtre finere end et forelagt filter $\dot{F}$ være induktivt ordnet, og ifølge Zorn's lemma indeholder den således et maksimalt element, altså et ultrafilter.

Vi skal tilføje, at det ovenfor anførte eksempel på et maksimalt filter, nemlig filtret bestående af alle mængder, som indeholder et punkt $a \in M$ er det eneste kendte eksempel på et ultrafilter, der er givet eksplicit. Der findes dog andre ultrafiltre. På $\dot{N}$ vil således mængderne med endelig komplementærmængde udgøre et filter, men disse mængder har intet fælles punkt, og udvidelse af filtret til et ultrafilter må derfor give et ultrafilter, der ikke er af den ovenfor omtalte slags.

2.10. Vi skal angive et bekvemt kriterium for, om et forelagt filter et ultrafilter.

2.10.1. Lemma. Et filter $\dot{F}$ på en mængde M er et ultrafilter, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall A \subseteq M(A \in \dot{F} \vee \complement A \in \dot{F}).$$

Bevis. Vi antager først, at betingelsen ikke er opfyldt. Der findes da en mængde $A \subseteq M$, således at $A \notin \dot{F}$ og $\complement A \notin \dot{F}$. Vi danner

$$\dot{G} = \{B \subseteq M \mid A \cup B \in \dot{F}\}.$$

Det er klart, at $M \in \dot{G}$. Af $A \notin \dot{F}$ følger $\emptyset \notin \dot{G}$. Relationen

$$(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) = A \cup (B_1 \cap B_2)$$

viser, at $B_1, B_2 \in \dot{G}$ medfører $B_1 \cap B_2 \in \dot{G}$. Det ses heraf, at $\dot{G}$ er et filter. Trivielt gælder $\dot{G} \supseteq \dot{F}$, men da $\complement A$ åbenhart tilhører $\dot{G}$, men ikke $\dot{F}$, kan lighedstegnet ikke gælde. Altså er $\dot{F}$ ikke et ultrafilter.

Lad os dernæst antage, at betingelsen er opfyldt for filtret $\dot{F}$. Vi ved, at $\dot{F}$ kan udvides til et ultrafilter $\dot{G}$. For $A \in \dot{G}$ gælder nu ifølge f2) og f3), at $\complement A \notin \dot{F}$, men betingelsen viser så, at $A \in \dot{F}$. Da dette gælder for ethvert $A \in \dot{G}$, kan vi altså slutte, at $\dot{G} \subseteq \dot{F}$, altså $\dot{G} = \dot{F}$. Dermed er beviset fuldført.

2.11. En mængde $\dot{B}$ af delmængder af en mængde M kaldes en filterbasis på M, når følgende betingelser er opfyldt.

fb1). $\dot{B} \neq \emptyset$.

fb2). $\emptyset \notin \dot{B}$.

fb3). $\forall U, V \in \dot{B}\ \exists W \in \dot{B}(W \subseteq U \cap V)$.

Vi udvider filterbasis til en mængde $\dot{B}^*$, idet vi sætter

$$\dot{B} = \{U \subseteq M \mid \exists V \in \dot{B}(V \subseteq U)\},$$

og vi ser da, at $\dot{B}^*$ er et filter og åbenbart det groveste filter med $\dot{B}$ som delmængde. Vi kalder $\dot{B}^*$ det ved basis $\dot{B}$ bestemte filter.

Vi vil kalde $\grave{B}$ en ultrafilterbasis, hvis $\grave{B}^*$ er et ultrafilter.

2.12. Vi betragter 2 mængder M_1 og M_2, samt en afbildning $f: M_1$ ind i M_2. Lad $\grave{B}$ være en filterbasis på M_1. Da f inducerer en afbildning $f: \grave{D}(\grave{D}(M_1))$ ind i $\grave{D}(\grave{D}(M_2))$, vil f afbilde $\grave{B}$ i en mængde $f(\grave{B}) \subseteq \grave{D}(\grave{D}(M_2))$, og det er klart, at $f(\grave{B})$ tilfredsstiller fb1),...,fb3), idet den sidstnævnte følger af relationen

$$f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V).$$

Da der sædvanligvis ikke gælder lighedstegn i denne relation, vil billedet af et filter sædvanligvis ikke være et filter, men kun en filterbasis.

Lad os antage, at $\grave{F}$ er et ultrafilter på M_1. Vi betragter en mængde $A \subseteq M_2$. Da $f^{-1}(A)$ og $f^{-1}(CA)$ er komplementærmængder, vil én af dem ifølge lemmaet 2.10.1 tilhøre $\grave{F}$, og billedet af den, f.eks. $f(f^{-1}(A))$ vil tilhøre $f(\grave{F})$. Men da $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$, medføre dette, at A eller CA tilhører det ved filterbasis $f(\grave{F})$ bestemte filter. Vi har således bevist sætningen:

2.12.1. Sætning. Enhver afbildning vil afbilde filter eller filterbasis på filterbasis og ultrafilter på basis for ultrafilter.

2.13. Vi vender nu tilbage til studiet af topologiske rum, og vi indleder med følgende definition:

2.13.1. Definition. Et filter $\grave{F}$ på et topologisk rum $T = (M,\grave{U})$ siges at have grænsepunktet $a \in T$ eller at konvergere mod a, såfremt det er finere end filtret $\grave{U}(a)$ af omegne af a. En filterbasis på T siges at konvergere mod a, hvis den bestemmer et filter, som konvergerer mod a.

Et filter eller en filterbasis kan eventuelt have flere grænsepunkter. Lad $T_1 = (M_1,\grave{U}_1)$ være et andet topologisk rum, og lad $f: T$ ind i T_1 være an afbildning, der er kontinuert i a.

Da vil $f^{-1}(\dot{U}_1(f(a))) \subseteq \dot{U}(a)$, altså $f(\dot{U}(a)) \supseteq \dot{U}_1(f(a))$. Af $\dot{F} \supseteq \dot{U}(a)$ følger således $f(\dot{F}) \supseteq \dot{U}_1(f(a))$. Det ses, at en kontinuert funktion afbilder et filter (eller en filterbasis) med grænsepunkt a i en filterbasis med grænsepunkt f(a).

2.14. Inden vi går videre med studiet af filtre på topologiske rum, skal vi kort repetere endnu et par afsnit af den mængdeteoretiske topologi. Vi vil ved denne lejlighed give en ganske kortfattet indførelse af begreberne med udnyttelse af kraftige metoder.

2.14.1. Definition. En mængde A på et topologisk rum T kaldes afsluttet, hvis $O = CA$ er åbne.

Vi skal ikke indføre en særlig betegnelse for afsluttede mængder. Vi skal minde om, at en fællesmængde for afsluttede er afsluttet, og at en foreningsmængde af 2 afsluttede mængder er afsluttet. Rummet T samt den tomme mængde $\emptyset$ er afsluttede. En afbildning f: S ind i T er kontinuert, hvis og kun hvis enhver afsluttet mængde i T har afsluttet originalmængde.

2.14.2. Definition. Lad $T = (M,\dot{O})$ være et topologisk rum. For $A \in T$ indfører vi det indre

$$\mathring{A} = \bigcup_{O\in\dot{O};\, O\subseteq A} O$$

samt afslutningen

$$\overline{A} = \bigcap_{O\in\dot{O},\, CO\supseteq A} CO.$$

Vi ser, at $\mathring{A}$ er den største åbne delmængde i A. Punkterne i $\mathring{A}$ kaldes indre punkter i A. Det er netop de punkter, der har A som omegn. De indre punkter i CA kaldes ydre punkter for A. Afslutningen $\overline{A}$ er den mindste afsluttede mængde, der har A som delmængde. Den består af netop de punkter, der ikke er ydre punkter for A. Disse punkter kaldes kontaktpunkter for A. Hvis vi inddrager omegnene får vi følgende karakterisering af kontakt-

punkterne:

$$x \in \bar{A} \iff \forall U \in \dot{U}(x)(U \cap A \neq \emptyset).$$

2.15. Vi betragter nu igen et filter $\dot{F}$ på et topologisk rum $T = (M,\dot{O},\dot{U})$. Et punkt $x \in T$ kaldes kontaktpunkt for $\dot{F}$, hvis det er kontaktpunkt for ethvert $A \in \dot{F}$. Dette er udtrykt i relationen

$$\forall A \in \dot{F}\ \forall U \in \dot{U}(x)(A \cap U \neq \emptyset),$$

som viser, at x er kontaktpunkt for $\dot{F}$, hvis og kun hvis

$$\dot{B} = \{A \cap U | A \in \dot{F} \wedge U \in \dot{U}(x)\}$$

er en filterbasis. Vi bemærker, at det filter, der svarer til $\dot{B}$ er finere end både $\dot{F}$ og $\dot{U}(x)$.

Af disse overvejelser ses, hvis $\dot{F}$ specielt er et ultrafilter, at $\dot{F}$ er finere end $\dot{U}(x)$, altså konvergent med x som grænsepunkt. Der med har vi vist følgende sætning:

2.15.1. Sætning. Hvis et ultrafilter har et kontaktpunkt er det konvergent med kontaktpunktet som grænsepunkt.

2.16. Vi behøver endnu en vigtig hjælpesætning om filtre. Formuleringen af denne sætning må desværre blive ret kompliceret, men beviset er ganske enkelt.

2.16.1. Lemma. Lad $\dot{F}$ være et filter på et topologisk rum $T = (M,\dot{O},\dot{U})$. Lad $\{T_j = (M,,\dot{O}_j,\dot{U}_j | j \in J\}$ være en mængde af topologiske rum, og lad for hvert $j \in J$ endvidere f_j: T ind i T_j være en afbildning. Lad a være et punkt af T. Hvis topologien på T netop er den groveste topologi, for hvilken alle f_j er kontinuerte, og det for hvert $j \in J$ gælder, at filterbasis $f_j(\dot{F})$ har $f_j(a)$ som grænsepunkt, da er $\dot{F}$ konvergent med a som grænsepunkt.

Bevis. Vi skriver $a_j = f_j(a)$. Vi betragter en vilkårlig omegn $U \in \dot{U}(a)$. På grund af kravet til topologien på T kan vi vælge $f_1,\ldots,f_m \in J$; $U_{j_1} \in \dot{U}_{j_1}(a_{j_1}),\ldots,U_{j_m} \in \dot{U}_{j_m}(a_{j_m})$, således at

$$f_{j_1}^{-1}(\dot{U}_{j_1}(a_{j_1})) \cap \ldots \cap f_{j_m}^{-1}(\dot{U}_{j_m}(a_{j_m})) \subseteq U.$$

Da $f_j(\dot{F})$ har a_j som grænsepunkt, eksisterer der mængder $A_{j_\mu} \in \dot{F}$, således at $f_{j_\mu}(A_{j_\mu}) \subseteq \dot{U}_{j_\mu}(a_{j_\mu})$, $\mu = 1,\ldots,m$, og vi har da

$$A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_m} \subseteq U,$$

hvilket viser, at $U \in \dot{F}$. Dermed har vi vist, at $\dot{F} \supseteq \dot{U}(a)$, og beviset er fuldført.

Som et specielt tilfælde kan T være produktrummet ΠT_j, medens afbildningerne f_j er projektionerne p_j. Dermed får vi sætningen.

2.16.2. Lemma. Et filter på et produktrum konvergerer, hvis alle dets projektioner konvergerer.

2.17. Vi understreger endnu engang, at de i de foregående afsnit omtalte grænsepunkter ikke behøver at være éntydigt bestemte. Vi skal nu omtale visse sider af kompakthedsteorien, men på grund af den omstændighed, at grænsepunkter ikke er éntydigt bestemte, vil vi i stedet for "kompakt" sige "quasikompakt".

2.17.1. Definition. Et topologisk rum T kaldes quasikompakt, hvis enhver overdækning af T med åbne mængder indeholder en endelig overdækning.

Vi kan også sige, at T er quasikompakt, hvis det gælder, at en samling af åbne mængder, som ikke indeholder nogen endelig overdækning af T, ikke kan dække T. Hvis vi oversætter dette til en udtalelse om komplementærmængderne, får vi sætningen:

2.17.2. Sætning. Et topologisk rum T er quasikompakt, hvis og kun hvis det for enhver filterbasis, der består af afsluttede delmængder af T, gælder, at den består af mængder, hvis fællesmængde ikke er tom.

Hvis $\dot{F}$ er et vilkårligt filter på T, vil afslutningerne af mængderne i $\dot{F}$ udgøre en filterbasis. Derved får vi sætningen:

2.17.3. Sætning. Et topologisk rum T er quasikompakt, hvis og/kun hvis ethvert filter på T har et kontaktpunkt.

Denne betingelse er imidlertid opfyldt for alle filtre på T, hvis den blot er opfyldt for alle ultrafiltre på T (derved benytter vi på afgørende måde, at ethvert filter på T kan udvides til et ultrafilter på T). Vi får derved sætningen:

2.17.4. Sætning. Et topologisk rum T er quasikompakt, hvis og kun hvis ethvert ultrafilter på T er konvergent.

2.18. Om forplantning af quasikompakthed ved afbildninger har vi hovedsætningen:

2.18.1. Sætning. Lad f:S på T være en kontinuert, surjektiv afbildning af et quasikompakt, topologisk rum S på et topologisk rum T. Da er T quasikompakt.

Bevis. Lad $\Delta = \{O_j | j \in J\}$ være en overdækning af T med åbne mængder. Så er $\{f^{-1}(O_j) | j \in J\}$ en overdækning af S med åbne mængder, og da S er kompakt, indeholder den en endelig overdækning, der f.eks. kan bestå af $f^{-1}(O_1),\ldots,f^{-1}(O_m)$. Men så vil $O_1,\ldots,O_m$ dække T, og dermed er påstanden bevist.

2.19. Vi skal nu vise en hovedsætning, A. Tychonoff's sætning (1930) om kompakthed af produktrum.

2.19.1. Sætning. Et topologisk produktrum $T = \Pi T_j$ er quasikompakt, hvis og kun hvis hvert af rummene T_j er quasikompakt.

Bevis. Lad os først antage, at T er quasikompakt. Da hver projektion P_j:T på T_j er surjektiv og kontinuert, er hvert T_j quasikompakt ifølge sætning 2.18.1. Lad os dernæst antage, at hvert T_j er quasikompakt, og lad $\dot{F}$ være et ultrafilter på T.

2.12.1.
Ifølge sætning/er hver projektion $p_j(\dot{F})$ ultrafilterbasis, og vi kan derfor ifølge sætning 2.17.4. vælge $a_j \in T_j$, således at $p_j(\dot{F})$ konvergerer mod a_j. Af sætning 2.16.2 følger nu, at $\dot{F}$ konvergent og ved fornyet anvendelse af sætning 2.17.4 får vi, at T er quasikompakt.

Vi gør opmærksom på, at Tychonuff's sætning på afgørende vis bygger på udvalgsaksiomet. Den kan sagtens vises ved mere direkte metoder, men sådanne beviser bliver ret tunge. Den her benyttede metode er udviklet af Henry Curton.

2.20. De ovenfor omtalte topologiske rum har en meget generel karakter, og det er rimeligt at tilføje flere forudsætninger for derved at nå til rum med behageligere egenskaber. Vi vil først og fremmest udelukke de groveste topologier, idet disse har særlig patologiske egenskaber. Vi prøver først med følgende forudsætning.

2.20.1. Adskillelsesaksiom T_1. For vilkårlige punkter $a,b \in T$ eksisterer en omegn $U \in \dot{U}(b)$, således at $a \notin U$.

Aksiomet udtrykker, at komplementærmængden $C(\{a\})$ er åben, altså at en mængde som består af ét enkelt punkt er afsluttet. Dette er igen ensbetydende med, at alle endelige mængder på T er afsluttede. Aksiomet udtrykker også, at samtlige omegne af b har b som eneste fællespunkt.

2.21. Adskillelsesaksiomet 2.20.1 vil oftest vise sig ikke at være kraftigt nok til at have større interesse. Derimod er det følgende en meget væsentlig forbedring.

2.21.1. Adskillelsesaksiom T2. For vilkårlige punkter $a,b \in T$ eksisterer omegne $U \in \dot{U}(a)$, $V \in \dot{U}(b)$, således at $U \cap V = \emptyset$.

Et topologisk rum med dette adskillelsesaksiom kaldes et Hausdorff-rum. Vi bemærker, at et topologisk rum med uende-

lig mange punkter, og i hvilket netop mængder med endelig komplementærmængde er åbne, tilfredsstiller T1, men ikke T2. Heraf fremgår, at T2 ikke følger af T1. Betydningen af T2 ligger først og fremmest i følgende sætning:

2.21.2. Sætning. Et konvergent filter på et Hausdorff-rum har kun 1 grænsepunkt.

Bevis. Lad $\dot{F}$ være et filter på et Hausdorff-rum T, lad a og b være punkter af T. Vi betragter filtrene $\dot{U}(a)$ og $\dot{U}(b)$. Da der findes omegne $U \in \dot{U}(a)$, $V \in \dot{U}(b)$ med $U \cap V = \emptyset$ vil U og V ikke begge tilhøre $\dot{F}$ og $\dot{F}$ er derfor ikke finere end begge filtrene $\dot{U}(a)$ og $\dot{U}(b)$.

2.22. Det er klart, at et produktrum $T = \Pi T_j$ er et Hausdorff-rum, hvis og kun hvis hvert T_j er et Hausdorff-rum.

2.22.1. Definition. Ved et kompakt rum forstås et quasikompakt Hausdorff-rum.

Sætning 2.19.1 giver umiddelbart en anden udgave af Tychonoff's sætning.

2.22.2. Sætning. Et produktrum $T = \Pi T_j$ er kompakt, hvis og kun hvis hvert af rummene T_j er kompakt.

Billedet af et Hausdorff-rum ved en kontinuert afbildning, behøver ikke igen at være et Hausdorff-rum, og et Hausdorff-rum kan være billede ved en kontinuert afbildning af et rum, der ikke er et Hausdorff-rum. Tilsvarende gælder for rum med egenskaben T_1.

2.23. Inden vi går videre, skal vi kort omtale begrebet delrum. Lad T være et topologisk rum. Til en delmængde $A \subseteq T$ svarer "injektionen" i:A ind i T defineret ved $i(x) = x$ for alle $x \in A$. Vi forsyner nu A med den groveste topologi, for hvilken i bliver kontinuert, og derved får et topologisk rum, delrummet A af T. Det vil kun i sjældne tilfælde være nødven-

digt at skelne mellem delmængden A af T og delrummet A af T. For en delmængde $B \subseteq A$ gælder det, at den også er delmængde af T, og ved omtale af egenskaber ved A er det nødvendigt at præcisere, om disse skal opfattes i forhold til A eller T.

En mængde B på A er åben (afsluttet), hvis den er fællesmængde for A og en åben (afsluttet) mængde på T. Hvis vi med $\mathring{B}$ og $\overline{B}$ betegner det indre og afslutningen i forhold til T, bliver $\mathring{B} \cap A$ og $\overline{B} \cap A$ det indre og afslutningen i forhold til A. Hvis $\grave{U}(x)$ er mængden af omegne af x i T, får vi for $x \in A$, at

$$\{U \cap A \mid U \in \grave{U}(x)\}$$

er mængden af omegne af x på A.

Vi bemærker, at delrum af Hausdorff-rum (T1-rum) igen er Hausdorff-rum (T_1-rum). Spørgsmålet om delrum af kompakte rum er ikke helt så enkelt. Vi vil sige, at en delmængde $A \subseteq T$ er kompakt, såfremt delrummet A er kompakt.

2.23.1. Sætning. En kompakt delmængde af et Hausdorff-rum er afsluttet.

Bevis. Lad T være et Hausdorff-rum og $A \subseteq T$ en kompakt delmængde. For $a \in \overline{A}$ og $U \in \grave{U} \in \grave{U}(a)$ gælder $A \cap U \neq \emptyset$. Altså er

$$\grave{F} = \{A \cap V \mid V \in \grave{U}(a)\}$$

et filter på delrummet A. På A eksisterer der da et ultrafilter $\grave{G}$, som er finere end $\grave{F}$. Da A er kompakt konvergerer $\grave{G}$ med et grænsepunkt $b \in A$. Nu er $\grave{G}$ filterbasis på T og finere end både $\grave{U}(a)$ og $\grave{U}(b)$. Da T er et Hausdorff-rum medfører dette, at $a = b$. Dermed har vi vist, at $a \in A$, altså $\overline{A} \subseteq A$. Dette viser, at A er afsluttet.

2.23.2. Sætning. En delmængde A af et kompakt rum T er kompakt, hvis og kun hvis den er afsluttet.

Bevis. Sætning 2.23.1 medfører "kun hvis". Lad nu A være afsluttet, og lad $\hat{F}$ være et ultrafilter på A. Vi udvider $\hat{F}$ til

et ultrafilter $\dot{G}$ på T. Dette konvergerer mod et grænsepunkt $a \in T$. Da a tilhører alle afsluttede mængder i $\dot{G}$ og nogle af disse er delmængder af A (da A er afsluttet), ligger a i A. Ethvert $U \in \dot{U}(a)$ tilhører $\dot{G}$, og $U \cap A$ vil da tilhøre $\dot{F}$. Heraf følger, at $\dot{F}$ konvergerer mod a. Dermed har vi vist, at A er quasikompakt, og vi ved allerede, at A er et Hausdorff-rum.

2.24. Vi skal endnu kort omtale nogle resultater, der understreger betydningen af Hausdorff's forudsætning T2. Vi betragter kontinuerte afbildninger $f,g:S$ ind i T, hvor S og T er topologiske rum. For $A \subseteq S$ gælder

$$f^{-1}(\overline{f(A)}) \supseteq f^{-1}(f(A)) \supseteq A,$$

og da $f^{-1}(\overline{f(A)})$ er afsluttet, indeholder den $\bar{A}$ og vi får den almengyldige sætning $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Vi antager nu, at T er et Hausdorff-rum. Lad os antage, at $a \in S$ er et punkt, for hvilket $f(a) \neq g(a)$. Vi kan da finde omegne U og V af f(a) og g(a), således at $U \cap V = \emptyset$. For $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ gælder da $f(x) \neq g(x)$. Dette viser, at $\{x \in S \mid f(x) = g(x)\}$ er en afsluttet delmængde af S. Hermed har vi vist, at hvis $f(x) = g(x)$ er opfyldt for alle $x \in A \subseteq S$, da gælder $f(x) = g(x)$ for alle $x \in \bar{A}$.

2.25. Vi indfører nu igen et adskillelsesaksiom stærkere end de foregående. En mængde $U \subseteq T$ kaldes en <u>omegn af en mængde</u> $A \subseteq T$, hvis der eksisterer en åben mængde $O \subseteq T$, således at $A \subseteq O \subseteq U$.

2.25.1. <u>Adskillelsesaksiom</u> T3. Et punkt $a \in T$ og en afsluttet mængde A, som ikke indeholder a, har omegne uden fælles punkter.

Vi forudsætter med andre ord, at der for $a \notin A$ og A afsluttet eksisterer åbne mængder O_1 og O_2, således at $a \in O_1$, $O_2 \supseteq A$,

$O_1 \cap O_2$. Nu er $O = CA$ en vilkårlig åben mængde, der indeholder A, og T3 er da ensbetydende med, at en sådan åben omegn O altid indeholder en afsluttet omegn CO_2. Vi har derfor:

2.25.2. Sætning. Adskillelsesaksiomet T3 er opfyldt, hvis og kun hvis der findes en omegnsbasis $\grave{B}:T$ ind i $\grave{D}(\grave{D}(T))$, for hvilken alle $\grave{B}(x)$ er afsluttede.

Det er klart, at T1 og T3 i forening medfører T2, men T3 kan godt være opfyldt uden at T1 gælder. Hvis både T2 (og dermed T1) og T3 gælder, kaldes T et regulært rum. Vi har sætningen

2.25.3. Sætning. Et kompakt rum er regulært.

Bevis. Lad $A \subsetneq T$ være afsluttet og $a \notin A$ et punkt af T. For hvert x i A kan vi finde åbne mængder $O'(x)$ og $O''(x)$ med $a \in O'(x)$, $x \in O''(x)$, $O'(x) \cap O''(x) = \emptyset$. Da T er kompakt og A afsluttet er A kompakt, og overdækningen $\{O''(x) \mid x \in A\}$ af A med åbne mængder indeholder derfor en endelig overdækning, så vi har $A \subsetneq O''(x_1) \cup \ldots \cup O''(x_m) = O''$. Vi sætter $O'(x_1) \cap \ldots \cap O'(x_m) = O'$, og O' og O'' er da åbne omegne af a og A uden fælles punkter.

2.26. Det er nærliggende at skærpe aksiomet T3 endnu engang. Derved får vi følgende antagelse:

2.26.1. Adskillelsesaksiom T4. To disjunkte afsluttede mængder på T har altid disjunkte åbne omegne.

Et Hausdorff-rum på hvilket T4 gælder, kaldes et normalt rum. Vi bemærker i øvrigt, at T4 åbenbart er ensbetydende med, at følgende gælder i T4:

Til $A \subsetneq O$, hvor A er afsluttet og O åben svarer altid en åben mængde O_1, således at $A \subsetneq O_1 \subsetneq \bar{O}_1 \subsetneq O$.

Vi ser, at denne proces med indskydning af åbne mængder kan fortsættes i det uendelige. Vi skriver $O_1 \subset\subset O_2$ i stedet for $\bar{O}_1 \subsetneq O_2$. Vi skriver $O(1)$ i stedet for O og $O(0)$ i stedet for A og med særligt valg af betegnelser kan vi efterhånden få

$$0(o) \subset\subset 0(\tfrac{1}{2}) \subset\subset 0(1)$$

$$0(o) \subset\subset 0(\tfrac{1}{4}) \subset\subset 0(\tfrac{1}{2}) \subset\subset 0(\tfrac{3}{4}) \subset\subset 0(1)$$

$$0(o) \subset\subset 0(\tfrac{1}{8}) \subset\subset 0(\tfrac{1}{4}) \subset\subset 0(\tfrac{3}{8}) \subset\subset \ldots \subset\subset 0(\tfrac{7}{8}) \subset\subset 0(1).$$

Ved at fortsætte denne proces får vi svarende til hver ægte brøk q, hvis nævner er en totalspotens, knyttet en mængde $0(q)$, der vokser med q. Vi definerer nu en afbildning $f:T$ ind i $[0,1]$, idet vi sætter

$$f(x) = \inf\{q \mid x \notin 0(q)\}$$

for $x \notin 0(o)$ og $f(x) = 0$ for $x \in 0(o)$.

Et punkt $y \in [0,1]$ har en omegnsbasis bestående af omegne af formen $[q_1,q_2]$, hvor $y \in]q_1,q_2[$. Nu gælder

$$f^{-1}([q_1,q_2]) \supseteq 0(q_2) \setminus \bar{0}(q_1),$$

og et x med $f(x) = y$ må tilhøre denne overskudsmængde. Der kommer modifikationer for $y = 0$ og for $y = 1$, men disse tilfælde overlades til læseren. Det ses, at f bliver kontinuert. Dermed har vi vist den vanskelige del af sætningen:

2.26.2. Sætning. Aksiomet T4 gælder, hvis og kun hvis T har følgende egenskab: Hvis A og B er afsluttede, disjunkte mængder, eksisterer der en kontinuert afbildning $f:T$ ind i $[0,1]$, således at

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } x \in A \\ 1 \text{ for } x \in B. \end{cases}$$

Vi mangler at vise, at den her anførte betingelse medfører T4. Vi behøver imidlertid blot at benytte $f^{-1}([0,\tfrac{1}{3}[)$ og $f^{-1}(]\tfrac{2}{3},1])$ som de åbne mængder.

Det er klart, at intervallet $[0,1]$ i sætning 2.26.2 kan erstattes med et vilkårligt andet afsluttet interval.

2.26.3. Lemma. Lad T være et topologisk rum, for hvilket T4 gælder, og lad $A \subseteq T$ være en afsluttet delmængde. Lad $f:A$ ind i $[-1,1]$ være en kontinuert afbildning. Der eksisterer en

kontinuert afbildning g:T ind i $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$, således at $|f(x)-g(x)| \leq \frac{2}{3}$ for alle $x \in A$.

Bevis: Vi behøver blot at vælge $g(x) = -\frac{1}{3}$ for $f(x) \leq -\frac{1}{3}$ og $g(x) = \frac{1}{3}$ for $f(x) \geq \frac{1}{3}$ og udvide g(x) i henhold til sætning 2.26.2.

2.26.4. Sætning. Lad T være et topologisk rum, for hvilket T4 gælder, og lad $A \subseteq T$ være en afsluttet delmængde. En kontinuert afbildning f:A ind i [-1,1] kan udvides til en kontinuert afbildning af T ind i [-1,1].

Bevis. Ifølge lemma 2.26.3. kan vi vælge en kontinuert afbildning g_1:T ind i $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$, således at vi får den kontinuerte afbildning

$$h_1 = f-g_1 : A \text{ ind i } [-\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}].$$

Vi vælger nu g_2:T ind i $[-\frac{2}{3^2},\frac{2}{3^2}]$, således at vi får den kontinuerte afbildning

$$h_2 = h_1-g_2 : A \text{ ind i } [-\tfrac{2^2}{3^2},\tfrac{2^2}{3^2}].$$

Således får vi en følge (g_n) af afbildninger g_n:T ind i $[-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}]$, og en følge (h_n) af afbildninger A ind i $[-\frac{2^n}{3^n}, \frac{2^n}{3^n}]$. Afbildningen $f_n = g_1+\ldots+g_n$ er en kontinuert afbildning

$$f_n : T \text{ ind i } [-1+\tfrac{1}{3^n}, 1-\tfrac{1}{3^n}],$$

og vi har $h_n = f-f_n$, samt $f_n-f_{n-1} = g_n$. Det ses, at følgen (f_n) konvergerer ligeligt på T, og grænsefunktionerne er derfor kontinuert. Det ses tillige, at grænsefunktionen afbilder på [-1,1] og er identisk med f på A. Dermed er sætningen vist.

2.27. Et rum kan tilfredsstille T4 uden at tilfredsstille T1, men dette tilfælde har ikke større interesse. Et Hausdorffrum, for hvilket T4 gælder, kaldes et normalt rum. Vi har sæt-

ningerne.

2.27.1. Sætning. Et kompakt rum er normalt.

2.27.2. Sætning. Et metrisk rum er normalt.

Den første sætning bevises på ganske lignende måde som sætning 2.25.3, og vi behøver ikke at opholde os ved det. Lad A og B være disjunkte afsluttede mængder i et metrisk rum T. Ved

$$p(x) = \mathrm{dist}(x,A); \quad q(x) = \mathrm{dist}(x,B),$$

defineres kontinuerte afbildninger $p,q:T$ ind i $[0,\infty[$, og vi bemærker, at $p(x)$ og $q(x)$ ikke bliver 0 for samme værdi af x. Den ved

$$f(x) = \frac{(p(x))^2}{(p(x))^2+(q(x))^2}$$

definerede afbildning $f:T$ ind i $[0,1]$ er kontinuert og afbilder hele A i 0 og hele B i 1. Dermed er sætningen vist.

De her omtalte sætninger om fortsættelse af kontinuerte funktioner skyldes P. Urysohn (1925). Han har også beskæftiget sig med muligheden af, at indføre en metrik på et topologisk rum. Det fremgår af det foregående, at dette i hvert fald kun er muligt, hvis rummet tillige med ethvert af dets delrum er normalt. Det er imidlertid også nødvendigt at kræve, at mængden af omegne af ethvert punkt har en numerabel basis, men selv dette er endnu ikke helt tilstrækkeligt. Urysohn beviste sætningen under den ekstra antagelse, at der for samtlige omegne var en basis bestående af numerabelt mange åbne mængder. Det er dog helt indlysende, at dette krav ikke er nødvendigt.

Mat. 6.

Rettelsesblad T 2.

2.3. Kolon efter formlen sidst i afsnit 2.4 slettes, og der tilføjes "er opfyldt".

2.13. Sidst i linie 3 f.o. tilføjes "er".

Linie 6: navnet skal være Tychonoff.

Linie 9: navnet skal være Henry Cartan.

Aksiomet 2.20.1 rettes til følgende: For vilkårlige punkter $a,b \in T$, hvor $a \neq b$, eksisterer en omegn $U \in \dot{U}(b)$, således at $a \notin U$.

Også i 2.21.1 indføjes "hvor $a \neq b$" på det tilsvarende sted.

2.14. I linie 2 f.n. rettes "derved får" til "får derved".

2.15. Midt i linie 12 slettes $\in \dot{U}$.

2.17. Allerførst på siden skal der stå $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, og i linie 2 f.o. rettes A til a.

2.19. I linie 6 f.n. rettes "grænsefunktionerne" til "grænsefunktionen."

Opgave 9. Det drejer sig om en fineste topologi på M.

Topologi. (Tilføjelser til T.2).

Lad T være et topologisk rum, med de åbne mængder Ò. En basis for Ò er en delmængde Ḃ af Ò, med den egenskab, at enhver mængde i Ò er foreningsmængde af mængder fra Ḃ; eller sagt på en anden måde: $\forall\, 0 \in Ò\ \forall\, x \in 0\ \exists\, B \in Ḃ(x \in B \subseteq 0)$.

Man ser let, at en mængde Ḃ af delmængder af en mængde T er basis for en topologi på T, d.v.s. at mængden af foreningsmængder af mængder fra Ḃ opfylder aksiomerne for åbne mængder, hvis og kun hvis Ḃ opfylder følgende aksiomer:

åb 1. $\forall\, x \in T\ \exists B \in Ḃ(x \in B)$

åb 2. $\forall\, B_1, B_2 \in Ḃ\ \forall\, x \in B_1 \cap B_2\ \exists\, B_3 \in Ḃ(x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2)$.

To mængder $Ḃ_1$ og $Ḃ_2 \in Ḋ(Ḋ(T))$, der opfylder disse aksiomer, kaldes ækvivalente, hvis de er baser for den samme topologi på T; dette gælder, hvis og kun hvis:

$\forall\, B_1 \in Ḃ_1\ \forall\, x \in B_1\ \exists\, B_2 \in Ḃ_2(x \in B_2 \subseteq B_1)$,

og $\forall\, B_2 \in Ḃ_2\ \forall\, x \in B_2\ \exists\, B_1 \in Ḃ_1(x \in B_1 \subseteq B_2)$.

Hvis kun den ene af disse betingelser er opfyldt, er topologien bestemt ved den ene af baserne finere end topologien bestemt ved den anden.

Hvis vi for en mængde $Ḃ \in Ḋ(Ḋ(T))$, der opfylder åb 1. og 2., og for $x \in T$ sætter $Ḃ(x) = \{B \in Ḃ \mid x \in B\}$, får vi en afbildning $\to Ḋ(Ḋ(T))$, der opfylder aksiomerne for omegnsfilterbaser; herved svarer ækvivalente baser til ækvivalente filterbaser (d.v.s. baser for samme filter) i hvert punkt; idet vi til afbildningen $x \to Ḃ(x)$ lader svare topologien på T med de åbne mængder $Ò = \{0 \in Ḋ(T) \mid \forall\, x \in 0\ \exists\, B \in Ḃ(x)(B \subseteq 0)\}$, er Ḃ netop basis for Ò.

Hvis vi omvendt for en afbildning $x \to \grave{B}(x)$ af T ind i $\grave{D}(\grave{D}(T))$, der opfylder aksiomerne for omegnsfilterbaser, sætter $\grave{O} = \{0 \in \grave{D}(T) \mid \forall x \in 0\ \exists B \in \grave{B}(x)(B \subseteq 0)\}$, vil $\grave{O}$ opfylde aksiomerne for åbne mængder; herved giver afbildninger, der til hvert punkt lader svare ækvivalente filterbaser, samme topologi, og for hvert $x \in T$ er $\grave{O}(x) = \{0 \in \grave{O} \mid x \in 0\}$ en filterbasis ækvivalent med $\grave{B}(x)$.

Et topologisk rum T opfylder det første numerabilitetsaksiom, hvis der for ethvert $x \in T$ eksisterer en numerabel basis for $\grave{U}(x)$; f.eks. opfylder ethvert metriserbart topologisk rum det første numerabilitets aksiom. T opfylder det andet numerabilitets aksiom, hvis der findes en numerabel basis for topologien; hvis T opfylder det andet numerabilitets aksiom, opfylder T også det første, men ikke omvendt.

Et topologisk rum T opfylder aksiomet T_0, hvis:
$\forall x,y \in T(x \neq y \Rightarrow [(\exists U_x \in \grave{U}(x)(y \notin U_x)) \vee (\exists U_y \in \grave{U}(y)(x \notin U_y))])$, d.v.s. hvis et af de forskellige punkter x og y har en omegn, der ikke indeholder det andet.

Mængden af kontinuerte afbildninger af et topologisk rum S ind i et topologisk rum T vil vi betegne C(S,T).

Et topologisk rum T kaldes fuldstændig regulært, hvis T opfylder aksiomet T_1, og

$\forall x \in T\ \forall A \in \grave{D}(T)(x \notin A = \overline{A} \Rightarrow [\exists f \in C(T,[0,1])([f(x) = 1] \wedge [f(A) \subseteq \{0\}])])$, d.v.s. hvis der til en afsluttet delmængde A og et punkt x udenfor A eksisterer en kontinuert afbildning af T ind i [0,1], der er 1 i x og 0 på A.

Urysohns lemma viser, at ethvert normalt rum er fuldstændig regulært, og man ser let, at et fuldstændig regulært

rum er regulært.

Begrebet fuldstændig regulært rum skyldes Urysohn, jfr. Math. Ann. XCIV (1925) og Tychonoffs artikel i Math.Ann. CII (1930).

Et topologisk rum T kaldes lokal kompakt, hvis T er et Hausdorff rum, og ethvert punkt har en kompakt omegn.

I et lokal kompakt rum T findes der for ethvert punkt x en basis for filtret af omegne af punktet bestående af kompakte mængder; thi hvis K er en kompakt omegn af x og U er en vilkårlig omegn af x, så er $U \cap K$ en omegn af x i den relative topologi på K; da K er et regulært rum, indeholder $U \cap K$ en relativt til K afsluttet, og derfor kompakt, mængde V, der er en omegn af x relativt til K, og således har formen $V_1 \cap K$, hvor V_1 er en omegn af x; da K er en omegn af x, er V en omegn af x.

Specielt er et lokal kompakt rum regulært; vi viser om lidt, at det endog er fuldstændig regulært.

Ethvert kompakt rum er lokal kompakt. $\grave{R}^n$ er lokal kompakt for ethvert $n \in \grave{N}$.

En kompaktificering af et topologisk rum T er et par $(\hat{T},\varphi)$, hvor $\hat{T}$ er et kompakt rum og φ er en homeomorfi af T på en tæt delmængde af $\hat{T}$; vi vil ofte tillade os at kalde $\hat{T}$ en kompaktificering af T. Man kan vise, at et topologisk rum har en kompaktificering, hvis og kun hvis det er fuldstændig regulært.

Sætning: Ethvert lokal kompakt rum har en kompaktificering.

Bevis: Til det lokal kompakte, ikke-kompakte rum T tilføjer vi et enkelt punkt ∞. Det således fremkomne rum $T_\infty = T \cup \{\infty\}$ topologiserer vi, idet vi fastsætter, at en mængde $O \subseteq T_\infty$ er åben, hvis $O \cap T$ både er åben i T og enten er O eller

indeholder komplementærmængden til en kompakt delmængde af T. Herved bliver $\{T_\infty \setminus K \mid K$ er en kompakt delmængde af $T\}$ en basis for filtret af omegne af ∞, den relative topologi på T falder sammen med den oprindelige topologi, og T er tæt i T_∞, da T ikke er kompakt. T_∞ er åbenbart quasi-kompakt, og T_∞ er et Hausdorff rum, da T er lokalt kompakt.

T_∞ kaldes ét-punkts kompaktificeringen (eller Aleksandroff kompaktificeringen) af T. Man ser let, at $\dot{R}_\infty$ er homeomorf med en cirkel, og at $\dot{C}_\infty$ er homeomorf med en kugle (Riemannkuglen). Vi nævner, at også den hyperbolske plan og den projektive plan kan betragtes som kompaktificeringer af $\dot{C}$.

En kompleks funktion f på et topologisk rum T siges at have kompakt støtte, hvis $st(f) = \overline{\{t \in T \mid f(t) \neq 0\}}$ er kompakt.

Sætning: Lad T være et lokal kompakt rum, A en kompakt delmængde og B en afsluttet delmængde disjunkt med A. Der findes en kontinuert afbildning $f:T \to [0,1]$, med kompakt støtte, for hvilken $f(A) \subseteq \{1\}$ og $f(B) \subseteq \{0\}$.

Bevis: $B \cup \{\infty\}$ er en afsluttet delmængde af T_∞, disjunkt med A. Da T_∞ er et normalt rum, kan vi vælge en åben mængde U, for hvilken $B \cup \{\infty\} \subseteq U$ og $\overline{U} \cap A = \emptyset$, og en kontinuert afbildning $f:T_\infty \to [0,1]$, for hvilken $f(A) \subseteq \{1\}$ og $f(\overline{U}) \subseteq \{0\}$. Da U er en åben omegn af $\{\infty\}$, er $T_\infty \setminus U$ en kompakt delmængde af T. $f|T$ opfylder således de stillede betingelser.

Corollar: Et lokal kompakt rum er fuldstændig regulært.

Vi nævner endnu, at der findes normale rum, der ikke er lokal kompakte (f.eks. $\dot{Q}$) og ikke er metriserbare, lokal kompakte rum, der ikke er normale, og regulære rum, der ikke tillader ikke-konstante reelle kontinuerte funktioner, og således

specielt ikke er fuldstændigt regulære, men at et regulært rum, der opfylder det andet numerabilitets aksiom, er metriserbart.

I øvrigt henviser vi til lærebøger, f.eks. af Aleksandroff og Hopf, eller Kelley, eller Bourbaki (Top. Gen., specielt Chap. I, II, IX og X). Vi gør opmærksom på, at nogle forfattere tillægger en del af de indførte betegnelser andre betydninger.

Tilføjelser og rettelser til T 2

Side T 2.9, linie 1-4 erstattes med flg.:

For enhver omegn $U_1 \in \dot{U}_1(f(a))$ gælder

$$f^{-1}(U_1) \in \dot{U}(a), \text{ og } f(f^{-1}(U_1)) \subseteq U_1.$$

Dette viser, at

$$f(f^{-1}(U_1)) \in f(\dot{U}(a)) \subseteq f(\dot{F}),$$

og at U_1 tilhører det af filterbasis $f(\dot{F})$ bestemte filter. En funktion, der er kontinuert i a, afbilder således ethvert konvergent filter (og enhver konvergent filterbasis) med grænsepunkt a på en konvergent filterbasis med grænsepunkt f(a):

$$\dot{F} \to a \Rightarrow f(\dot{F}) \to f(a).$$

Hvis f er surjektiv, og $\dot{F}$ er et filter (på M), bliver $f(\dot{F})$ åbenbart et filter (på M_1).

Bemærk også, at dersom et filter $\dot{F}_1$ konvergerer mod a, da vil ethvert finere filter $\dot{F}_2 \supseteq \dot{F}_1$ ligeledes konvergere mod a.

Vi skal senere (§ 2.21) afgrænse en vigtig klasse af topologiske rum, de såkaldte Hausdorffrum, hvori ethvert konvergent filter kun har ét grænsepunkt.

Side T 2.10, linie 3. Efter ordet filter tilføjes: eller en filterbasis.

Side T 2.10, linie 12-14 erstattes med flg.:

Bemærk, at et grænsepunkt for et (konvergent) filter tillige er et kontaktpunkt for dette.

For et vilkårligt filter (eller en filterbasis) $\dot{F}$ ses det, at mængden af samtlige kontaktpunkter for $\dot{F}$ er $\bigcap_{A \in \dot{F}} \bar{A}$.

Ved forfining af et filter kan kontaktpunkter forsvinde (men aldrig opstå): Hvis $\dot{F}_2 \supseteq \dot{F}_1$, er ethvert kontaktpunkt for $\dot{F}_2$ tillige et kontaktpunkt for $\dot{F}_1$.

Dersom x er et kontaktpunkt for et filter $\dot{F}$, kan $\dot{F}$ forfines til et filter (og derfor også til et ultrafilter), som konvergerer mod x. (Den ovenfor konstruerede filterbasis $\dot{B}$ bestemte jo netop et filter finere end $\dot{F}$, og også finere end $\dot{U}(x)$, dvs. konvergerende mod x.) Specielt gælder følgende sætning (2.15.1)

Side T 2.10, sidste linie: I stedet for $f_1, \ldots, f_m$ læses $j_1, j_2, \ldots, j_m$.

Side T 2.11. I beviset for sætning 2.17.2 indgår lidt mere end antydet:

En ikke tom mængde $\dot{S}$ af ikke tomme delmængder af en mængde M kaldes undertiden en filtersubbasis på M, såfremt fællesmængden for endelig mange mængder fra $\dot{S}$ aldrig er tom. Mængden af alle disse fællesmængder er da åbenbart en filterbasis på M (den mindste indeholdende $\dot{S}$). Således bestemmer enhver filtersubbasis en filterbasis (og denne jo igen et filter). Omvendt er enhver filterbasis specielt en filter-

subbasis.

Som et simpelt eksempel på en filtersubbasis kan anføres mængden af alle komplementærmængder til mængder bestående af kun ét punkt. Den herved bestemte filterbasis består af alle mængder med endelig komplementærmængde.

Af definition 2.17.1 følger nu umiddelbart ved overgang til komplementærmængder, at et topologisk rum T er quasikompakt, hvis og kun hvis det om enhver filtersubbasis $\mathcal{S}$ bestående af afsluttede mængder $A \subset T$ gælder, at $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A \neq \emptyset$.

Det er imidlertid tilstrækkeligt at efterprøve denne betingelse for enhver filterbasis bestående af afsluttede mængder. (Dette følger simpelthen af, at fællesmængden for samtlige mængder, der indgår i en filtersubbasis, øjensynlig er lig med fællesmængden for samtlige mængder, som indgår i den tilsvarende filterbasis.)

Hermed er sætning 2.17.2 bevist.

1. Om et filter $\dot{F}$ på en uendelig mængde M gælder, at fællesmængden for mængderne i $\dot{F}$ er tom. Vis, at $\dot{F}$ er finere end det filter, der består af alle mængder med endelig komplementærmængde.

2. Vis, at fællesmængden for alle mængder i et ultrafilter højst indeholder 1 punkt, og at filtret i så fald består af alle mængder, som indeholder dette punkt.

3. En mængde A hører ikke til ultrafiltret $\dot{F}$. Vis, at
$$\{A \cap B | B \in \dot{F}\} = \dot{D}(A).$$

4. Lad $T_1 = (M,\dot{O}_1)$ og $T_2 = (M,\dot{O}_2)$ være topologiske rum med samme underliggende mængde. Vis, at T_1 er finere end T_2, hvis og kun hvis ethvert filter på M, som konvergerer på T_1, konvergerer på T_2 mod det samme punkt.

5. Et topologisk rum S består af intervallet [0,1] samt et element 1^*. For punkterne på [0,1] benyttes den sædvanlige omegnsbasis, medens $\dot{B}(1^*)$ består af alle mængder $\{1^*\} \cup [h,1[$ med $h \in [0,1[$. Vis, at S tilfredsstiller T_1, men ikke T_2.

6. Konstruer et topologisk rum med 3 elementer, således at T_3, men ikke T_1 er opfyldt.

7. (Vanskelig). Lad X være en mængde. Alle topologier, som gør X til et regulært rum uden isolerede punkter (d.v.s. uden åbne mængder, der kun indeholder 1 punkt) ordnes ved relationen grovere. Vis, at der i denne ordning findes maximale elementer. Disse kaldes ultraregulære topologier på X. Vis, at følgende gælder for ultraregulære topologier. Enhver

mængde uden isolerede punkter og med komplementærmængde uden isolerede punkter er både åben og afsluttet. En mængde uden isolerede punkter har åben afslutning. Det indre af en overalt tæt mængde er overalt tæt. Fællesmængden for 2 overalt tætte mængder er overalt tæt.

8. Vis, at et delrum af et regulært rum er regulært.

9. Lad S være et topologisk rum, og lad M være en mængde. Lad f: S ind i M være en afbildning. Gør rede for, at der eksisterer en fineste topologi, for hvilken f er kontinuert.

10. Lad S være et topologisk rum og $\sim$ en ækvivalensrelation på S. Benyt metoden fra opgave nr. 9 til at indføre en topologi på klassemængden.

11. På intervallet $]0,1[$ indføres den groveste topologi, for hvilken de åbne intervaller, mængden af rationale tal med potens af 2 i nævneren samt mængden af rationale tal med potens af 3 i nævneren er åbne. Vis, at det således definerede rum er et Hausdorff-rum, men ikke regulært.

12. En afbildning f:S ind i T, hvor S og T er topologiske rum, kaldes åben, hvis det for enhver åben mængde $O \subseteq S$ gælder, at f(O) er åben. Vis, at der eksisterer en afbildning f:$\grave{R}$ ind i $\grave{R}$, som er åben, men ikke kontinuert. (Benyt en basis for de reelle tal som vektorrum over de rationale tal).

13. Det antages, at det i opgave 10 omtalte rum S er normalt. Vis, at klassemængden bliver et Hausdorff-rum, hvis og kun hvis enhver af klasserne er en afsluttet delmængde af S. Vis, at den kanoniske afbildning af S på klasserummet bliver åben, hvis klasserummet er et Hausdorff-rum.

14. Vis, at den i opgave 10 omtalte klasserumstopologi i det specielle tilfælde, hvor enhver klasse er en afsluttet delmængde af S, er karakteriseret ved følgende egenskab: Enhver kontinuert afbildning f:S ind i T, hvor T er et vilkårligt topologisk rum og f en vilkårlig på hver klasse konstant/kontinuert afbildning, kan fås ved sammensætning af den kanoniske afbildning af S på klasserummet med en passende, af f afhængig, kontinuert afbildning af klasserummet ind i T.

15. Lad $f: T \to T_1$ være en afbildning af et topologisk rum T ind i et andet topologisk rum T_1, og lad $a \in T$. Gør rede for, at f er kontinuert i a, dersom det om ethvert filter $\dot{F}$ på T med grænsepunkt a gælder, at $f(\dot{F}) \to f(a)$.

16. Lad $\dot{F}_1$ og $\dot{F}_2$ betegne to filtre på samme mængde M. Vis, at $\dot{F}_1 \cap \dot{F}_2$ er et filter på M (og derfor det fineste filter på M, som er grovere end både $\dot{F}_1$ og $\dot{F}_2$). Vis tillige, at

$$\dot{F}_1 \cap \dot{F}_2 = \{A_1 \cup A_2 \mid A_1 \in \dot{F}_1 \wedge A_2 \in \dot{F}_2\}.$$

17. Lad atter $\dot{F}_1$ og $\dot{F}_2$ være filtre på en mængde M. Vis, at der findes et filter finere end både $\dot{F}_1$ og $\dot{F}_2$, hvis og kun hvis

$$A_1 \in \dot{F}_1 \wedge A_2 \in \dot{F}_2 \Rightarrow A_1 \cap A_2 \neq \emptyset.$$

Vis tillige, at hvis denne betingelse er opfyldt, da vil det groveste blandt alle filtre finere end $\dot{F}_1$ og $\dot{F}_2$ bestå af mængderne $A_1 \cap A_2$, hvor A_1 gennemløber $\dot{F}_1$ og A_2 gennemløber $\dot{F}_2$.

18. Bevis, at et topologisk rum er et Hausdorffrum, hvis (og kun hvis) ethvert konvergent filter kun har ét grænsepunkt. (Anvend f.eks. opg. 17 på omegnsfiltrene hørende til to punkter af rummet.)

19. Idet $\dot{F}$ betegner et filter på en mængde M, og A er en delmængde af M, sættes

$$\dot{F}_A = \{A \cap F \mid F \in \dot{F}\}.$$

Vis, at $\dot{F}_A$ er et filter på A hvis (og kun hvis) $A \cap F \neq \emptyset$ for ethvert $F \in \dot{F}$. I bekræftende fald siges $\dot{F}_A$ at være induceret

af $\dot{F}$ på A. - Lad dernæst M være et topologisk rum og x et punkt af M. Vis, at omegnsfiltret $\dot{U}(x)$ inducerer et filter på A, hvis og kun hvis x er et kontaktpunkt for A.

20. Med $\dot{F}$ betegnes elementarfiltret på $\dot{N}$ (bestående af alle delmængder af $\dot{N}$ med endelig komplementærmængde). Med f betegnes en afbildning af $\dot{N}$ ind i $\dot{N}$. Bevis, at filterbasen $f(\dot{F})$ frembringer et filter $\dot{G}$ på $\dot{N}$, som er finere end $\dot{F}$, hvis og kun hvis $f(n) \to +\infty$ for $n \to +\infty$. Vis dernæst, at hvis f er strengt voksende er $\dot{G}$ en ægte forfining af $\dot{F}$. Kan $\dot{G}$ være et ultrafilter?

21. Lad $\dot{F}$ være et filter på en mængde M_1, og lad $f:M_1 \to M_2$ være surjektiv.
Vis, at $f(\dot{F})$ er et filter (ikke blot en filterbasis) på M_2.

22. Lad $(T_j)_{j\in J}$ være en familie af topologiske rum. Bevis, at $\prod_{j\in J} T_j$ er et Hausdorffrum, hvis og kun hvis hvert T_j er det.

23. Giv et eksempel på to topologiske rum S og T samt en kontinuert afbildning $f:S \to T$, således at S opfylder (T_2), hvorimod T end ikke opfylder (T_1).
Giv dernæst et eksempel, hvor T opfylder (T_2), men S ikke opfylder (T_1).

24. Giv et bevis, som ikke bygger på udvalgsaksiomet, for at produktet af to kompakte rum er kompakt.

25. Lad $\dot{F}$ være et filter på et quasi-kompakt rum T, og lad K betegne mængden af kontaktpunkter for $\dot{F}$.
Bevis, at enhver omegn af K tilhører $\dot{F}$. (Vejledning: Dersom en omegn V af K ikke tilhørte $\dot{F}$, ville $\{A \cap \complement V \mid A \in \dot{F}\}$ ifølge opg. 19 være et filter på $\complement V$, der opfattet som filterbasis på T ville have et kontaktpunkt x.)

26. Bevis, at et filter $\dot{F}$ på et kompakt rum T er konvergent, hvis og kun hvis $\dot{F}$ har præcis ét kontaktpunkt. (Benyt opgave 25.)

27. Lad $f:S \to T$ være en kontinuert og bijektiv afbildning af et kompakt rum S på et Hausdorff (og derfor kompakt) rum T. Bevis, at f er en homeomorfi (altså at også f^{-1} er kontinuert).

28. Vis, at enhver kompakt topologi på en mængde M (d.v.s. enhver topologi på M, der gør M kompakt) er minimal i mængden af alle Hausdorff topologier på M, ordnet ved inklusion. (Benyt opg.27.)

29. Bevis, at ethvert filter $\dot{F}$ på en mængde M er fællesmængden for alle ultrafiltre på M, som er finere end $\dot{F}$.

30. Formuler og bevis en omvendt sætning til Urysohns sætning 2.26.4.

31. Hvilke diskrete rum er a) kompakte, b) lokalkompakte, c) metriserbare.

32. Lad $(T_j)_{j\in J}$ være en familie af topologiske rum, og lad for hvert $j \in J$ A_j være en delmængde af T_j. Bevis, at $\Pi\bar{A}_j$ er afslutningen af ΠA_j inden for ΠT_j.
Find specielt betingelsen for, at ΠA_j er afsluttet.

Topologiske vektorrum

Indholdsoversigt:

		side
1.	Om visse delmængder af et vektorrum	1
2 - 7.	Topologisk vektorrum	3
8.	Kvotient af topologiske vektorrum	12
9.	Produkt af topologiske vektorrum	12
10.	Den ligelige struktur på et t.v.r.	14
11 - 14.	Fuldstændighed	16
15 - 17.	Ligelig kontinuitet	18
18.	Direkte sum. Komplementært underrum. Projektion.	22
19.	Projektionsafbildninger	23
20.	Relation til kvotientrummet	24
21.	Topologisk direkte sum. Topologisk komplement	25
22.	Hyperplan og linearform	27
23.	Afsluttet hyperplan og kontinuert linearform	30
24.	Om vektorrum af endelig dimension	31
25 - 26.	Om afsluttede underrum	33
27.	Om kegler	34
28.	Hahn-Banach's sætning	35
29.	Om vektorrum over $\mathbb{C}$	37
30.	Udspændt underrum. Total delmængde	39
31.	Seminorm	40
32.	Kontinuert seminorm på et t.v.r.	42
33.	Lokalkonveks topologi defineret ved seminormer	44
34.	Kontinuitet af lineær afbildning udtrykt ved seminormer	46
35.	Hahn-Banach's sætning i analytisk formulering	47
36 - 38.	Normeret rum	48

(fortsættes)

side

39. Fuldstændighedgørelse 53

40 - 43. En sætning af Baire og dens rolle i funktional-analysen 56

Variant 62

Opgaver 1 - 42

Topologiske vektorrum.

1. Om visse delmængder af et vektorrum. Lad E betegne et vektorrum (i algebraisk betydning) med koefficientlegeme K, hvor $K = \mathbb{R}$ eller $K = \mathbb{C}$. Lad $A \subseteq E$. Vi kalder

A symmetrisk, hvis $\lambda A \subseteq A$ for alle $\lambda \in K$ med $|\lambda| = 1$,

A stjerneformet, hvis $\lambda A \subseteq A$ for alle $\lambda \in [0,1]$,

A stjerneformet symmetrisk, hvis $\lambda A \subseteq A$ for alle $\lambda \in K$ med $|\lambda| \leq 1$,

A konveks, hvis $\lambda A + (1-\lambda)A \subseteq A$ for alle $\lambda \in [0,1]$.

Da gælder:

a) A symmetrisk $\Rightarrow$ $\lambda A = A$ for alle $\lambda \in K$ med $|\lambda| = 1$.
A konveks $\Rightarrow$ $\lambda A + (1-\lambda)A = A$ for alle $\lambda \in [0,1]$.

b) $A \neq \emptyset \wedge$ A stjerneformet $\Rightarrow \underline{0} \in A$.

c) A konveks $\wedge$ $\underline{0} \in A$ $\Rightarrow$ A stjerneformet.

d) A konveks $\wedge$ A symmetrisk $\Rightarrow$ A stjerneformet.

e) A stjerneformet $\wedge$ A symmetrisk $\Leftrightarrow$ A stjerneformet symmetrisk.

f) Billedet af en konveks (henh. symmetrisk eller stjerneformet) mængde ved en lineær afbildning er konvekst (henh. symmetrisk eller stjerneformet).

g) Enhver endelig linearkombination $\Sigma \lambda_j A_j$, enhver fællesmængde $\cap A_j$ og ethvert produkt ΠA_j af konvekse (henh. symmetriske eller stjerneformede) mængder A_j er konvekst (henh. symmetrisk eller stjerneformet).

Bevis.

Ad a) Lad A symmetrisk, $x \in A$ og $|\lambda| = 1$. Da er $|\lambda^{-1}| = 1$,

og $x = \lambda(\lambda^{-1}x) \in \lambda A$. For vilkårligt $A \subseteq E$, $\lambda \in [0,1]$ og $x \in A$ gælder $x = \lambda x + (1-\lambda)x \in \lambda A + (1-\lambda)A$.

Ad b) $x \in A \Rightarrow 0x = \underline{0} \in A$.

Ad c) $x \in A \wedge \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x = \lambda x + (1-\lambda)\underline{0} \in A$.

Ad d) Vi kan antage $A \neq \emptyset$. Lad $x \in A$. Da vil $-x = (-1)x \in A$ på grund af symmetrien, og $\underline{0} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in A$ på grund af konveksiteten. Herefter benyttes c).

Ad e) $\Leftarrow$ klart. For at vise $\Rightarrow$ betragtes $x \in A$, $\lambda \in K$, $|\lambda| \leq 1$. Da $\lambda = |\lambda| \operatorname{sgn} \lambda = \lambda_1\lambda_2$, hvor $\lambda_1 \in [0,1]$ og $|\lambda_2| = 1$, fås $\lambda x = \lambda_1(\lambda_2 x) \in A$.

Ad f) Lad $f : E \to F$ være lineær, $A \subseteq E$, A for eksempel konveks, $\lambda \in [0,1]$. Da gælder

$$\lambda f(A) + (1-\lambda)f(A) = f(\lambda A) + f((1-\lambda)A) = f(\lambda A + (1-\lambda)A) = f(A).$$

Ad g) En linearkombination $\Sigma \lambda_j A_j$ af konvekse delmængder A_j af E er konveks; thi for $\lambda \in [0,1]$ gælder

$$\lambda \Sigma \lambda_j A_j + (1-\lambda) \Sigma \lambda_j A_j = \Sigma \lambda_j(\lambda A_j + (1-\lambda)A_j) = \Sigma \lambda_j A_j.$$

Udsagnet om fællesmængde er klart. Lad dernæst $(E_j)_{j\in J}$ være en familie af vektorrum (over samme legeme K), og lad for hvert $j \in J$ A_j være en konveks delmængde af E_j. Da bliver ΠA_j en konveks delmængde af vektorrummet ΠE_j over K (i hvilket regneoperationerne defineres koordinatvis). Thi for $x, y \in \Pi A_j$ og $\lambda \in [0,1]$ gælder $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Pi A_j$, fordi der for hvert $j \in J$ gælder $x_j, y_j \in A_j$, og derfor

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)_j = \lambda x_j + (1-\lambda)y_j \in A_j.$$

Det fremgår af g, at der for enhver delmængde A af et vektorrum E eksisterer en mindste konveks mængde omfattende A, det såkaldte konvekse hylster, conv A, for A. Det er nemlig fællesmængden for alle konvekse delmængder af E som omfatter A. Analogt ind-

føres det symmetriske, det stjerneformede og det symmetrisk-stjerneformede hylster for A. Dette sidste er

$$\bigcup_{|\lambda|\leq 1} \lambda A = \{\lambda x \mid \lambda \in K \wedge |\lambda| \leq 1 \wedge x \in A\}.$$

Det konvekse hylster for A består af alle (endelige) "konvekse kombinationer" $\Sigma \lambda_j x_j$ af vektorer $x_j \in A$, altså alle linearkombinationer $\Sigma \lambda_j x_j$ med $\lambda_j \in [0,1]$ og $\Sigma \lambda_j = 1$. (Jvf. T3, opg. 5.)

En mængde $A \subseteq E$ kaldes absorberende, hvis

$$\forall x \in E \ \exists \alpha > 0 \ \forall \lambda \in K: \ |\lambda| \leq \alpha \Rightarrow \lambda x \in A,$$

altså hvis der(for ethvert $x \in E$) gælder $\lambda x \in A$ for alle λ i en tilstrækkelig lille omegn af 0 i K. (Denne omegn kan afhænge af x.)

Mængden af alle absorberende delmængder af et vektorrum E er åbenbart et filter på E. Det kan bemærkes, at dersom A betegner en stjerneformet symmetrisk mængde, da er A absorberende hvis (og kun hvis) der til ethvert $x \in E$ findes $\lambda \in \dot{R}_+$ så at $\lambda x \in A$. Det er endda nok at betragte λ af formen $\lambda = 1/n$, $n \in \dot{N}$, hvorfor betingelsen kan omskrives til

$$\bigcup_{n\in\dot{N}} n A = E.$$

2 2. Topologisk vektorrum. Ved et topologisk vektorrum (t.v.r.) forstås et vektorrum E, som tillige er et topologisk rum, og hvori de to algebraiske operationer er kontinuerte.

Vi skal kun betragte t.v.r. med koefficientlegemet $K = \dot{R}$ eller $\dot{C}$. Det forudsættes altså, at afbildningerne $(x,y) \to x + y$ og $(\lambda,x) \to \lambda x$ af henholdsvis $E \times E$ og $K \times E$ ind i E er kontinuerte.

For ethvert $a \in E$ er specielt parallelforskydningen $x \to a + x$ af E på E kontinuert. Da den også er bijektiv, og da

dens omvendte afbildning er af samme art, nemlig $x \to -a + x$, og derfor kontinuert, bliver enhver parallelforskydning en homeomorfi af E på sig selv. Heraf følger:

$$\forall a \in E: \quad \dot{U}(a) = \{a + U \mid U \in \dot{U}(\underline{0})\}.$$

I topologisk henseende indtager $\underline{0}$ derfor ingen særstilling sammenlignet med andre punkter af E.

For ethvert $\lambda \in K$ er afbildningen $x \to \lambda x$ af E ind i E kontinuert. For $\lambda \neq 0$ kaldes afbildningen en homoteti. Da en sådan er bijektiv, og da den omvendte afbildning $x \to \lambda^{-1}x$ ligeledes er en homoteti og dermed kontinuert, bliver enhver homoteti en homeomorfi af E på sig selv. Heraf følger:

$$\forall \lambda \in K \quad \forall U \in \dot{U}(\underline{0}) \quad : \quad \lambda U \in \dot{U}(\underline{0}).$$

Da additionen specielt er kontinuert i $(\underline{0},\underline{0})$, findes der til enhver omegn $U \in \dot{U}(\underline{0})$ en omegn $V \in \dot{U}(\underline{0})$ så at $(x,y) \in V \times V \Rightarrow x + y \in U$, altså så at

$$V + V \subseteq U.$$

Tilsvarende gælder åbenbart, dersom $\dot{U}(\underline{0})$ erstattes med en vilkårlig basis $\dot{B}(\underline{0})$ for $\dot{U}(\underline{0})$.

For ethvert $x \in E$ er afbildningen $\lambda \to \lambda x$ af K ind i E specielt kontinuert i 0. Dette er åbenbart ensbetydende med at sige, at enhver omegn $U \in \dot{U}(\underline{0})$ er absorberende.

Afbildningen $(\lambda,x) \to \lambda x$ af $K \times E$ ind i E er specielt kontinuert i $(0,\underline{0})$. Til ethvert $U \in \dot{U}(\underline{0})$ findes derfor $\alpha > 0$ og $V \in \dot{U}(\underline{0})$ så at $|\lambda| \leq \alpha \wedge x \in V \Rightarrow \lambda x \in U$, altså så at $|\lambda| \leq \alpha \Rightarrow \lambda V \subseteq U$. Som ovenfor nævnt, er $\alpha V \in \dot{U}(\underline{0})$, og det stjerneformet - symmetriske hylster W af αV er derfor ligeledes en

omegn af $\underline{0}$.

Ifølge stk. 1 gælder nu

$$W = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda\, \alpha\, V = \bigcup_{|\lambda| \leq \alpha} \lambda\, V \subseteq U.$$

Hermed er vist, at enhver omegn af $\underline{0}$ omfatter en stjerneformet omegn af $\underline{0}$.

Sætning: I ethvert topologisk rum E over K(=$\dot{\mathbb{R}}$ eller $\dot{\mathbb{C}}$) eksisterer der en basis $\dot{\mathcal{B}}(\underline{0})$ for filtret $\dot{\mathcal{U}}(\underline{0})$ af omegne af $\underline{0}$ i E med følgende egenskaber:

i) Enhver mængde $U \in \dot{\mathcal{B}}(\underline{0})$ er stjerneformet symmetrisk og absorberende.

ii) $\forall\, U \in \dot{\mathcal{B}}(\underline{0})\ \ \forall\, \lambda \in K \setminus \{0\} : \lambda\, U \in \dot{\mathcal{B}}(\underline{0})$.

iii) $\forall\, U \in \dot{\mathcal{B}}(\underline{0})\ \ \exists\, V \in \dot{\mathcal{B}}(\underline{0}) : V + V \subseteq U$.

Betegner omvendt E et vilkårligt vektorrum over K, og $\dot{\mathcal{B}}(\underline{0})$ en filterbasis på E med egenskaberne i, ii, iii, da frembringer $\dot{\mathcal{B}}(\underline{0})$ omegnsfiltret af $\underline{C}$ i netop én topologi på E, ved hvilken E bliver et topologisk vektorrum. Herved danner $\{x + U \mid U \in \dot{\mathcal{B}}(\underline{0})\}$ en basis for filtret af omegne af $x \in E$.

Bevis. Lad først E være et t.v.r.. Idet vi for $\dot{\mathcal{B}}(\underline{0})$ tager mængden af alle stjerneformet symmetriske omegne af $\underline{0}$, har vi ovenfor bevist, at $\dot{\mathcal{B}}(\underline{0})$ er en basis for filtret $\dot{\mathcal{U}}(\underline{0})$ af omegne af $\underline{0}$ i E. Egenskaberne i, ii, iii følger herefter af de ovenfor udledte konsekvenser af kravet om regneoperationernes kontinuitet.

Lad dernæst E betegne et vektorrum (uden topologi), og lad $\dot{\mathcal{B}}(\underline{0})$ være en filterbasis på E med de anførte egenskaber i, ii, iii. Med $\dot{\mathcal{U}}(\underline{0})$ betegnes det af $\dot{\mathcal{B}}(\underline{0})$ frembragte filter på E.

Ifølge det foregående er

$$\grave{U}(x) = \{x + U \mid U \in \grave{U}(\underline{0})\}$$

den eneste mulighed for filtret af omegne af $x \in E$, når der skal være tale om et t.v.r.. Vi definerer derfor $\grave{U}(x)$ som anført for ethvert $x \in E$. Det er klart at $\grave{U}(x)$ er et filter, og at

$$\grave{B}(x) = \{x + U \mid U \in \grave{B}(\underline{0})\}$$

er en basis for $\grave{U}(x)$. Da mængderne i $\grave{B}(\underline{0})$ er ikke-tomme og tillige er stjerneformede, må de alle indeholde $\underline{0}$ (se b, stkm 1), og mængderne i $\grave{B}(x)$ indeholder derfor x. For at indse, at E er et topologisk rum, mangler vi derfor blot at eftervise betingelsen b 4 (eller o5). Til $x \in E$ og $x + U \in \grave{B}(x)$ (altså $U \in \grave{B}(\underline{0})$) svarer ifølge iii $V \in \grave{B}(\underline{0})$ med $V + V \subseteq U$. Da gælder $x + V \in \grave{B}(x)$; og for ethvert $y \in x + V$ er

$$y + V \subseteq x + V + V \subseteq x + U .$$

Tilbage står at eftervise kontinuiteten af de algebraiske operationer. At additionen er kontinuert i $(x_o, y_o) \in E \times E$ fremgår af, at hvis $x \in x_o + V$ og $y \in y_o + V$, så gælder

$$x + y \in (x_o + V) + (y_o + V) = (x_o + y_o) + (V + V) \subseteq x_o + y_o + U,$$

såfremt $V \in \grave{B}(\underline{0})$ er bestemt ud fra opgivet $U \in \grave{B}(\underline{0})$ i henhold til iii, altså så at $V + V \subseteq U$. Lad os dernæst betragte multiplikationen med skalarer. Lad $(\lambda_o, x_o) \in K \times E$, og lad atter $U \in \grave{B}(\underline{0})$ være givet. Vi søger et tal $\delta > 0$ og en omegn $W \in \grave{B}(\underline{0})$ så at

$$|\lambda - \lambda_o| \leq \delta \wedge x - x_o \in W \Rightarrow \lambda x - \lambda_o x_o \in U.$$

Nu viser omskrivningen

$$\lambda x - \lambda_o x_o = (\lambda - \lambda_o)(x - x_o) + \lambda_o(x - x_o) + (\lambda - \lambda_o)x_o,$$

at det er tilstrækkeligt at opnå (for de omtalte λ, x) at

$$(\lambda - \lambda_o)(x - x_o) \in V \ \wedge \ \lambda_o(x - x_o) \in V \ \wedge \ (\lambda - \lambda_o)x_o \in V,$$

såfremt blot $V \in \dot{B}(\underline{0})$ er bestemt så at $V + V + V \subseteq U$. Ved gentagen anvendelse af iii ses at der til ethvert $U \in \dot{B}(\underline{0})$ eksisterer et $V \in \dot{B}(\underline{0})$ så at $V + V + V + V \subseteq U$, og da $\underline{0} \in V$ gælder tillige $V + V + V \subseteq U$. Da V er stjerneformet symmetrisk, haves

$$|\lambda - \lambda_o| \leqq 1 \ \wedge \ x - x_o \in V \Rightarrow (\lambda - \lambda_o)(x - x_o) \in V.$$

Udsagnet $\lambda_o(x - x_o) \in V$ er altid sandt, hvis $\lambda_o = 0$. Er $\lambda_o \neq 0$, er det opfyldt for $x - x_o \in \lambda_o^{-1} V$. Udsagnet $(\lambda - \lambda_o)x_o \in V$ er sandt for alle $\lambda - \lambda_o$ i en tilstrækkelig lille omegn $|\lambda - \lambda_o| \leqq \alpha$ af 0 i K, fordi V er absorberende. Herefter behøver vi blot at sætte $\delta = \min(\alpha, 1)$, og $W = V$ såfremt $|\lambda_o| \leqq 1$, $W = \lambda_o^{-1} V$ såfremt $|\lambda_o| > 1$.

3. Sætning. Ethvert topologisk vektorrum E opfylder adskillelseaxiomet (T 3). Mængden af stjerneformet symmetriske, afsluttede omegne af $\underline{0}$ udgør en basis for $\dot{U}(\underline{0})$. Endvidere er E et Hausdorffrum (og dermed regulært), hvis og kun hvis $\bigcap_{U \in \dot{U}(\underline{0})} U = \{\underline{0}\}$.

Bevis. Til given omegn $x + U$ af $x \in E$ (hvorved $U \in \dot{U}(\underline{0})$) findes som vist en omegn $V \in \dot{U}(\underline{0})$ så at $V + V \subseteq U$. Afslutningen af $x + V$ er da en afsluttet omegn af x, som vi nu viser er en delmængde af $x + U$. For ethvert kontaktpunkt y for $x + V$ findes $z \in (x + V) \cap (y - V)$, fordi $-V \in \dot{U}(\underline{0})$, $y - V \in \dot{U}(y)$. Da således $y - z \in V$, gælder

$$y = z + (y - z) \in x + V + V \subseteq x + U.$$

Hermed er bevist, at E opfylder (T3). Derfor bliver E regulært (specielt Hausdorff) hvis og kun hvis E opfylder (T1), altså hvis der for $x \neq y$ findes en omegn $x + U$ af x, som ikke indeholder y. Det er åbenbart nok at forlange dette for $x = \underline{0}$, og vi kommer herved til betingelsen $\bigcap_{U \in \mathring{U}(\underline{0})} U = \{\underline{0}\}$.

Der gælder nu alment for en delmængde A af et t.v.r. E:

$$A \text{ konveks} \Rightarrow \bar{A} \text{ konveks},$$

og tilsvarende med symmetriske eller stjerneformet i stedet for konveks. Dette fremgår let af, at

$$\lambda \bar{A} \subseteq \overline{\lambda A}, \qquad \bar{A} + \bar{B} \subseteq \overline{A+B}$$

for vilkårlige delmængder $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ og for $\lambda \in K$. Og disse relationer følger af, at afbildningerne $x \to \lambda x$ af E ind i E og $(x,y) \to x + y$ af $E \times E$ ind i E er kontinuerte (samt at $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$, når $E \times E$ udstyres med produkttopologien, jvf. T2, opg. 32).

Enhver omegn $U \in \mathring{U}(\underline{0})$ omfatter som vist en afsluttet omegn $V \in \mathring{U}(\underline{0})$. Denne omfatter igen en stjerneformet symmetrisk omegn $W \in \mathring{U}(\underline{0})$. Men så er i henhold til ovenstående $\bar{W}$ en stjerneformet symmetrisk omegn af $\underline{0}$, og $\bar{W} \subseteq \bar{V} = V \subseteq U$.

4. Definition. Et t.v.r. E kaldes lokalkonvekst, dersom de konvekse omegne af $\underline{0}$ danner en basis for $\mathring{U}(\underline{0})$.

På samme måde som i beviset for sætning 3 indses, at de konvekse, symmetriske, afsluttede omegne af $\underline{0}$ i et lokalkonvekst rum danner en basis for $\mathring{U}(\underline{0})$. Og i sætning 2 behøver man blot at lade begrebet "konveks symmetrisk" træde i stedet for det svagere be-

greb "stjerneformet symmetrisk" (jvf. d, stk. 1) for at nå, til et tilsvarende resultat for lokalkonvekse rum.

Herved kan man for øvrigt se bort fra egenskaben iii, da den følger af de øvrige egenskaber ved $\dot{B}(0)$, når mængderne heri er konvekse. For V kan man nemlig da tage $\frac{1}{2}$ U, idet $\frac{1}{2}$ U + $\frac{1}{2}$ U = U, når U er konveks.

Det vil i det følgende altid blive fremhævet, dersom et t.v.r. skal forudsættes lokalkonvekst eller Hausdorff.

Som et elementært eksempel på et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. over K (=$\dot{R}$ eller $\dot{C}$) kan nævnes vektorrummet K^m ($m \in \dot{N}$) udstyret med den sædvanlige produkttopologi. (Jvf. sætning 9 nedenfor.)

5. Ved en <u>isomorfi</u> af et t.v.r. E_1 på et t.v.r. E_2 (begge over samme legeme K) forstås en isomorfi i algebraisk betydning (altså en bijektiv, lineær afbildning), som tillige er en homeomorfi. Som sædvanlig kaldes to rum isomorfe, dersom der eksisterer en isomorfi af det ene på det andet. Der er her åbenbart tale om en ækvivalensrelation i "klassen" af alle t.v.r. over K.

<u>Sætning</u>. Ethvert 1-dimensionalt <u>Hausdorff</u> t.v.r. E over K (=$\dot{R}$ eller $\dot{C}$) er isomorft med K.

<u>Bevis</u>. Lad $e \in E \setminus \{0\}$. Da er $E = Ke = \{\lambda e \mid \lambda \in K\}$. Ved $\lambda \to \lambda e$ defineres en bijektiv, lineær og kontinuert afbildning af K på E. For at vise , at denne afbildning er en isomorfi, mangler vi at godtgøre, at den omvendte afbildning er kontinuert i ethvert punkt $\lambda_0 e \in E$, altså at der for ethvert $\alpha > 0$ findes en omegn $\lambda_0 e + U$ af $\lambda_0 e$ i E således at

$$\lambda e \in \lambda_0 e + U \quad \Rightarrow \quad |\lambda - \lambda_0| < \alpha.$$

Hertil vælger vi blot U som en stjerneformet symmetrisk omegn af $\underline{0}$ i E for hvilken $\alpha e \notin U$, hvilket er muligt, fordi E opfylder T 1. Lad nu $\lambda e \in \lambda_0 e + U$. Var $|\lambda - \lambda_0| \geq \alpha$, blev $|\alpha(\lambda - \lambda_0)^{-1}| \leq 1$, og derfor var

$$\alpha e = \alpha(\lambda - \lambda_0)^{-1} \cdot (\lambda - \lambda_0)e \in U$$

i modstrid med betydningen af U.

Det tilføjes, at forudsætningen om, at E er Hausdorff, ikke kan undværes, idet den diffuse topologi på E = K (med K og $\emptyset$ som eneste åbne mængder) gør K til et lokalkonvekst t.v.r., som ikke er Hausdorff og derfor ikke kan være isomorft med K udstyret med den sædvanlige topologi (altså med det K, der er tænkt på i sætningen).

6. Lad E_1 være et t.v.r. over K, E_2 et vektorrum over K, og $f: E_1 \to E_2$ en <u>lineær</u>, <u>surjektiv</u> afbildning. Det verificeres umiddelbart, at der defineres en topologi på E_2 ud fra den givne topologi på E_1, når man som åbne delmængder af E_2 tager de mængder $B \subseteq E_2$, for hvilke $f^{-1}(B)$ er åben i E_1. Det er klart, at herved bliver f kontinuert, og den omtalte topologi på E_2 er den fineste med denne egenskab.

Vi viser nu, at f desuden bliver en <u>åben</u> afbildning (d.v.s. overfører åben delmængde af E_1 i åben delmængde af E_2), og at E_2 bliver et topologisk vektorrum. Endvidere bliver E_2 lokalkonvekst, dersom E_1 er det. Og E_2 bliver et Hausdorff-rum, hvis og kun hvis $f^{-1}(\underline{0})$ er <u>afsluttet</u> i E_1.

Kernen $N = f^{-1}(\underline{0})$ er jo et underrum af E_1 og kaldes også nulrummet for f. Åbenbart gælder $f^{-1}(f(x)) = x + N$ for ethvert $x \in E_1$. For en delmængde $A \subseteq E_1$ er derfor

$$f^{-1}(f(A)) = \bigcup_{x \in A} (x+N) = N + A = \bigcup_{y \in N} (y+A).$$

Specielt er f(A) åben, såfremt A er åben. Lad os dernæst vise, at additionen er kontinuert i et vilkårligt punktpar $(x_2, y_2) \in E_2 \times E_2$. Da f er surjektiv, findes $(x_1, y_1) \in E_1 \times E_1$ med $f(x_1) = x_2$, $f(y_1) = y_2$, og derfor $f(x_1 + y_1) = f(x_1) + f(y_1) = x_2 + y_2$. For enhver omegn U af $x_2 + y_2$ i E_2 er $f^{-1}(U)$ en omegn af $x_1 + y_1$ i E_1, fordi f er kontinuert. Da nu additionen i E_1 er kontinuert, findes omegne V af x_1 og W af y_1 så at $V + W \subseteq f^{-1}(U)$. Men da f er åben, bliver f(V) en omegn af $f(x_1) = x_2$ og f(W) en omegn af y_2. Da f er lineær, gælder for disse omegne

$$f(V) + f(W) = f(V + W) \subseteq f(f^{-1}(U)) = U,$$

hvilket netop viser, at additionen er kontinuert. Beviset er analogt for den anden regneoperation.

Da f er lineær og åben, afbildes enhver konveks omegn V af $\underline{0}$ i E_1 på en konveks omegn f(V) af $\underline{0}$ i E_2 (stk. 1, f). Hvis nu E_1 er lokalkonvekst, danner disse omegne f(V) en basis for filtret af omegne af $\underline{0}$ i E_2. Thi for enhver omegn U af $\underline{0}$ i E_2 er $f^{-1}(U)$ en omegn af $\underline{0}$ i E_1. Der findes derfor (stk. 4) en konveks omegn V af $\underline{0}$ i E_1 så at $V \subseteq f^{-1}(U)$ og derfor $f(V) \subseteq f(f^{-1}(U)) = U$. Hermed er vist, at E_2 bliver lokalkonvekst, dersom E_1 er det.

Ved overgang til komplementærmængder antager definitionen på topologien i E_2 formen: B ($\subseteq E_2$) afsluttet i $E_2 \iff f^{-1}(B)$ afsluttet i E_1. Anvendt på $B = \{\underline{0}\}$ fås derfor:

E_2 Hausdorff $\iff$ $\{\underline{0}\}$ afsluttet i E_2

$\iff f^{-1}(\{\underline{0}\}) = N$ afsluttet i E_1.

7. Bemærk det specielle tilfælde af det i stk. 6 fundne resultat, hvor den lineære afbildning $f : E_1 \to E_2$ er bijektiv. Ved den fundne topologi på E_2 (der i dette tilfælde kaldes billedet af topologien på E_1 ved afbildningen f) bliver f således en isomorfi af E_1 på E_2. De åbne delmængder af E_2 er her simpelthen billederne ved f af de åbne delmængder af E_1, og tilsvarende for afsluttede mængder.

8. Kvotient af topologiske vektorrum. En mere typisk anvendelse af resultatet i stk. 6 er følgende:

Sætning. Lad E være et t.v.r. og $F \subseteq E$ et underrum af E. Med k betegnes den kanoniske afbildning af E på kvotientrummet E/F givet ved $k(x) = x + F$ for $x \in E$. Når E/F udstyres med den fineste topologi for hvilken k er kontinuert, bliver k en åben afbildning og E/F et t.v.r. Dersom E er lokalkonvekst, bliver E/F det også. Endelig er E/F Hausdorff, hvis og kun hvis F er afsluttet i E.

Bevis. Da $k:E \to E/F$ er lineær og surjektiv, fremgår sætningen umiddelbart af det i stk. 6 fundne resultat anvendt på $E_1 = E$, $E_2 = E/F$ og $f = k$, idet det bemærkes, at $k^{-1}(0) = F$.

9. Produkt af topologiske vektorrum. Lad $(E_j)_{j\in J}$ være en familie af topologiske vektorrum over samme legeme K. Da er produktrummet $E = \prod_{j\in J} E_j$ dels et vektorrum over K (ved koordinatvis definition af regneoperationerne), dels et topologisk rum (ved produkttopologien).

Sætning. Ethvert produkt $\prod E_j$ af topologiske vektorrum er et t.v.r. Dette er lokalkonvekst, resp. Hausdorff, hvis og kun hvis hvert af rummene E_j er det.

Bevis. For at vise, at f.eks. additionen i $E = \prod E_j$ er kontinuert, betragtes to punkter $x, y \in E$ og en omegn U af $x + y$ i E. Vi kan gerne antage, at $U = \prod_{j \in J} U_j$, hvor U_j er en omegn af $(x + y)_j = x_j + y_j$ i E_j, og hvor $J_U = \{ j \in J \mid U_j \neq E_j \}$ er endelig. Da additionen i E_j er kontinuert, findes omegne V_j af x_j og W_j af y_j med $V_j + W_j \subseteq U_j$. For $j \in J \setminus J_U$ benytter vi $V_j = W_j = E_j$ $(= U_j)$. Da bliver $V = \prod_{j \in J} V_j$ og $W = \prod_{j \in J} W_j$ omegne af henholdsvis x og y med $V + W \subseteq U$.

Hvis de givne rum E_j, $j \in J$, alle er lokalkonvekse, bliver produktrummet E det også. Som basis for filtret af omegne af $\underline{0}$ i E haves jo mængderne $\prod_{j \in J} U_j$, hvor U_j er en konveks omegn af $\underline{0}$ i E_j, og hvor $J_U = \{ j \in J \mid U_j \neq E_j \}$ er endelig. Resultatet fremgår da af, at ethvert produkt af konvekse mængder er konvekst (stk. 1, g). At omvendt lokalkonveksiteten af E medfører lokalkonveksiteten af hvert E_j kan f.eks. vises analogt med den tilsvarende slutning i stk. 6. - Endelig gælder alment, at et produkt af (ikke tomme) topologiske rum er Hausdorff, hvis og kun hvis de enkelte rum er det (T2, opg. 22).

10. Den ligelige struktur på et topologisk vektorrum. Begreber som fundamentalfilter, fundamentalfølge, fuldstændighed, ligelig kontinuitet og flere andre kan behandles naturligt i alle sådanne rum, som er udstyret med en såkaldt ligelig (=uniform) struktur, hvilket løst sagt betyder, at man kan tale om, at to variable punkter ligger tæt ved hinanden (af en vis "orden"). Vi skal ikke her komme ind på teorien for ligelige rum i almindelighed (herom henvises til Bourbaki, Topologie générale, ch.2), men i stedet behandle spørgsmål om ligelighed i tilknytning til en af hovedtyperne af sådanne rum, nemlig de topologiske vektorrum. I et sådant ligger to punkter tæt ved hinanden, dersom deres differens tilhører en "lille" omegn af $\underline{0}$. (En anden hovedtype af ligelige rum er de metriske rum, hvor jo afstanden mellem to punkter giver et naturligt mål for, hvor tæt de to punkter ligger ved hinanden).

Definition. Et filter (eller en filterbasis) Φ på et t.v.r. E kaldes fundamentalt, dersom det indeholder vilkårligt små mængder, d.v.s.

$$\forall U \in \dot{U}(\underline{0}) \quad \exists A \in \Phi : \quad A - A \subseteq U.$$

Et filter Φ på E er fundamentalt, hvis og kun hvis

$$\forall U \in \dot{U}(\underline{0}) \quad \exists x \in E : \quad x + U \in \Phi.$$

(Ad "hvis": Til givet $U \in \dot{U}(\underline{0})$ findes $V \in \dot{U}(\underline{0})$ med $V - V \subseteq U$. Af $A = x + V \in \Phi$ følger da $A - A = V - V \subseteq U$. Ad "kun hvis": Lad $x \in A$; da er $A - x \subseteq A - A \subseteq U$ og derfor $A \subseteq x + U$. Af $A \in \Phi$ følger således $x + U \in \Phi$.)

Et konvergent filter (eller filterbasis) er fundamentalt, som man umiddelbart ser af den sidste form af definitionen.

Ethvert filter, som er finere end et fundamentalfilter, er selv et fundamentalfilter. (Klart.)

Et filter (eller en filterbasis) Φ på en delmængde M af et t.v.r. E kaldes fundamentalt, dersom Φ, opfattet som filterbasis på E, er fundamental. Betingelsen herfor er åbenbart igen, at

$$\forall U \in \dot{U}(0) \quad \exists A \in \Phi : \quad A - A \subseteq U.$$

Lemma. Dersom et fundamentalfilter Φ på E inducerer et filter

$$\Phi_M = \{ A \cap M \mid A \in \Phi \}$$

på en delmængde $M \subseteq E$ (altså hvis $A \cap M \neq \emptyset$ for alle $A \in \Phi$), da er Φ_M et fundamentalfilter på M.

Thi opfattet som filterbasis på E bestemmer Φ_M et filter, som er finere end Φ som følge af inklusionen $A \supseteq A \cap M$.

Specielt kan nævnes, at filtret $\dot{U}(x)$ af omegne af et punkt $x \in E$ inducerer et fundamentalfilter på enhver delmængde $M \subseteq E$ for hvilken $x \in \overline{M}$. Opfattet som filterbasis på E konvergerer det mod x, men ikke som filter på M, med mindre $x \in M$.

Sætning. Ethvert kontaktpunkt for et fundamentalfilter er et grænsepunkt for dette.

Bevis. Lad x være et kontaktpunkt for et fundamentalfilter Φ på et t.v.r. E.

For enhver omegn $U \in \dot{U}(0)$ findes $V \in \dot{U}(0)$ med $V + V \subseteq U$. Lad $A \in \Phi$, $A - A \subseteq V$, og lad $y \in (x + V) \cap A$. Da er $A - y \subseteq A - A \subseteq V$, og derfor

$$A \subseteq y + V \subseteq x + V + V \subseteq x + U.$$

Korollar. Hvis et fundamentalfilter på en mængde M kan ud-

vides til en filter på M, som har et grænsepunkt $x \in M$, da konvergerer også Φ mod x.

Thi x er et kontaktpunkt for Φ.

En punktfølge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på E bestemmer filterbasen $\{\{x_m \mid m > n\}\ n \in \mathbb{N}\}$, nemlig billedet af elementarfiltret på $\mathbb{N}$ ved afbildningen $n \to x_n$ af $\mathbb{N}$ ind i E. Denne filterbasis på E er åbenbart fundamental hvis og kun hvis følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en fundamentalfølge i den forstand, at

$$\forall V \in \dot{U}(0)\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall m,n \in \mathbb{N}:\ \ m,n > N \Rightarrow x_m - x_n \in V.$$

11. Fuldstændighed. En delmængde M af et t.v.r. E kaldes fuldstændig, dersom ethvert fundamentalfilter på M er konvergent i M. Vi kalder M følgefuldstændig, dersom enhver fundamentalfølge på M er konvergent i M. Hvis M er fuldstændig, da også følgefuldstændig. Det omvendte gælder ikke i almindelighed; men vi har dog flg. resultat:

Sætning. Hvis der findes en numerabel basis for filtret af omegne af 0 i E, er enhver følgefuldstændig delmængde af E fuldstændig.

Bevis. Lad $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en numerabel basis for $\dot{U}(0)$. Ifølge sætning 3 omfatter U_n en afsluttet omegn V_n, og $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er da ligeledes en basis for $\dot{U}(0)$. Lad nu $M \subseteq E$ være følgefuldstændig, og lad Φ være et fundamentalfilter på M. Til $n \in \mathbb{N}$ findes $A_n \in \Phi$ med $A_n - A_n \subseteq V_n$. Mængderne $B_n = A_1 \cap \cdots \cap A_n$ danner en aftagende følge af mængder fra Φ. Vælges $x_n \in B_n$, gælder for $m,n \geq N$, at $x_m, x_n \in B_N$ og derfor

$$x_m - x_n \in B_N - B_N \subseteq A_N - A_N \subseteq V_N.$$

Da enhver omegn af 0 i E omfatter et V_N, er hermed vist, at føl-

gen $(x_n)_{n\in\dot{N}}$ på M er fundamental. Ifølge forudsætning har denne følge derfor et grænsepunkt $x \in M$. Af $x_m - x_N \in V_N$ for $m \geqq N$ følger for $m \to \infty$, at $x - x_N \in \bar{V}_N = V_N$. Af $A_N - A_N \subseteq V_N$ og $x_N \in A_N$ følger $A_N - x_N \subseteq V_N$ og

$$A_N \subseteq x_N + V_N = x - (x - x_N) + V_N \subseteq x - V_N + V_N.$$

Dette viser, at $\Phi \to x$ i M, fordi der til enhver omegn $x + U$ af x findes $V_N \in \dot{U}(0)$ med $V_N - V_N \subseteq U$ og derfor $x + U \supseteq A_N \in \Phi$.

12. Sætning. En fuldstændig delmængde af et Hausdorff t.v.r. E er afsluttet.

Bevis. Lad x være et kontaktpunkt for en fuldstændig delmængde M af E. Da inducerer $\dot{U}(x)$ et fundamentalfilter Φ på M, og dette vil, opfattet som filterbasis på E, konvergere mod x. Da M er fuldstændigt, har Φ et grænsepunkt $y \in M$. Da E er Hausdorff, er $x = y$.

13. Sætning. En afsluttet delmængde af et fuldstændigt t.v.r. E er fuldstændig.

Bevis. Lad Φ være et fundamentalfilter på en afsluttet delmængde M af E. Da er Φ en fundamentalfilterbasis på E og derfor konvergent i E. Et grænsepunkt x for Φ er også kontaktpunkt for Φ, altså for enhver mængde fra Φ, specielt for M, hvorfor $x \in \bar{M} = M$.

Man bemærker, at sætn. 12 og 13 er analoge med kompaktheds-teoriens sætninger 23.1 og 23.2 i T2. Iøvrigt gælder der den sætning, at enhver kompakt delmængde M af et t.v.r. E er fuldstændig. Thi ethvert filter Φ på M kan udvides til et i M konvergent filter på M. Anvendes dette på et fundamentalfilter Φ fremgår resultatet af sætning 10.

14. Sætning. For ethvert $m \in \dot{N}$ er talrummet K^m et fuldstændigt

Hausdorff t.v.r. over K(=$\hat{\mathbb{R}}$ eller $\hat{\mathbb{C}}$).

Bevis. Enhver fundamentalfølge $(x_n)_{n\in\hat{\mathbb{N}}}$ på K^m er begrænset, lad os sige $|x_n| \leqq a$ for alle $n \in \hat{\mathbb{N}}$. Nu er kuglen $\{x \in K^m \mid |x| \leqq a\}$ kompakt, derfor fuldstændig, hvorfor $\lim_{n\to\infty} x_n$ eksisterer (og tilhører denne kugle). Da K^m har en numerabel basis for omegnene af $\underline{0}$ (f.eks. de nævnte kugler, nu med $a=1/n, n \in \hat{\mathbb{N}}$), er hermed vist, at K^m er fuldstændigt. (I øvrigt kunne beviset også føres med filtre, idet ethvert fundamentalfilter på K^m indeholder en begrænset mængde A og derfor inducerer et fundamentalfilter på denne, derfor også på $\bar{A}$, som er kompakt.)

15. Ligelig kontinuitet. En afbildning $f:M \to F$ af en delmængde M af et t.v.r. E ind i et t.v.r. F kaldes ligelig kontinuert, dersom der til enhver omegn V af $\underline{0}$ i F findes en omegn U af $\underline{0}$ i E, således at der for $x,y \in M$ gælder

$$x - y \in U \Rightarrow f(x) - f(y) \in V ,$$

altså $x \in y + U \Rightarrow f(x) \in f(y) + V$. For fastholdt y viser dette at f er kontinuert i y. En ligelig kontinuert afbildning er således kontinuert.

En kontinuert afbildning af en kompakt mængde M ind i F er ligelig kontinuert, som man let ser ved at benytte den velkendte overdækningsegenskab for M (Borel - Lebesgue's overdækningssætning).

En kontinuert, lineær afbildning $f: E \to F$ er ligelig kontinuert, fordi $f(x) - f(y) = f(x - y)$. (Det er således nok at forudsætte kontinuitet i $\underline{0}$).

Svarende til sætningen om, at en konvergent filterbasis ved en kontinuert afbildning overføres i en konvergent filterbasis, haves følgende

Sætning. Lad f: M → F være en ligelig kontinuert afbildning af en delmængde M af et t.v.r. E ind i et t.v.r. F. For enhver fundamentalfilterbasis Φ på M er $f(\Phi)$ en fundamentalfilterbasis på F.

Bevis. Til enhver omegn V af 0 i F findes en omegn U af 0 i E som anført i definitionen på ligelig kontinuitet. Til U findes $A \in \Phi$ med $A - A \subseteq U$, hvoraf $f(A) \in f(\Phi)$ og $f(A) - f(A) \subseteq V$.

Lemma. Lad $E = \prod_{i \in I} E_i$ være et produkt af t.v.r. E_i, og lad p_i betegne den kanoniske projektion af E på E_i ($i \in I$). En filterbasis Φ på E er fundamental, hvis og kun hvis enhver af filterbaserne $p_i(\Phi)$ er fundamental.

Bevis. "Kun hvis" følger af den foregående sætning, idet p_i er kontinuert og lineær, derfor ligelig kontinuert. Enhver omegn af 0 i E omfatter en basisomegn af formen $V = \prod_{i \in I} V_i$, hvor V_i er en omegn af 0 i E_i, og således, at $J = \{i \in I \mid V_i \neq E_i\}$ er endelig. For hvert $i \in J$ vælges $A_i \in \Phi$ således at $p_i(A_i) - p_i(A_i) \subseteq V_i$. Da findes $A \in \Phi$ med $A \subseteq \bigcap_{i \in J} A_i$, og vi slutter, at $A - A \subseteq V$, fordi $p_i(A) \subseteq p_i(A_i)$, og derfor $p_i(A) - p_i(A) \subseteq V_i$ (også for $i \in I \setminus J$).

Det analoge resultat om konvergente filtre er: En filterbasis Φ på et produkt $E = \prod_{i \in I} E_i$ af topologiske rum E_i konvergerer mod $x \in E$, hvis og kun hvis $p_i(\Phi) \to p_i(x)$ for ethvert $i \in I$ (T2, Lemma 16.2).

Ved kombination af disse to lemmaer fås den vigtigere halvdel af

16. Sætning. Et produkt $E = \prod_{i \in I} E_i$ af topologiske vektorrum E_i er fuldstændigt, hvis og kun hvis hvert E_i er fuldstændigt.

Beviset for "kun hvis" overlades til læseren:

17. Sætning. (Udvidelse ved kontinuitet.) Lad f: M → F være

en ligelig kontinuert afbildning af en delmængde M af et t.v.r. E ind i et fuldstændigt Hausdorff t.v.r. F. Da kan f på netop én måde udvides til en kontinuert afbildning $\bar{f}$ af afslutningen $\bar{M}$ ind i F; og $\bar{f}$ bliver ligelig kontinuert.

Hvis specielt M er et underrum af E, og $f: M \to F$ er kontinuert og lineær, da bliver $\bar{f}: \bar{M} \to F$ kontinuert og lineær.

Bevis. Lad først $M \subseteq E$ og $f: M \to F$ ligelig kontinuert. Ifølge lemma 10 inducerer filtret $\dot{U}_E(x)$ af omegne af et punkt $x \in \bar{M}$ et fundamentalfilter

$$\Phi(x) = \{M \cap (x + U) \mid U \in \dot{U}_E(0)\}$$

på M. Opfattet som filterbasis på E eller på $\bar{M}$ konvergerer $\Phi(x)$ mod x, stadig ifølge lemma 16. En eventuel kontinuert udvidelse $\bar{f}$ af f til $\bar{M}$ overfører derfor $\Phi(x)$ i en filterbasis $\bar{f}(\Phi(x)) = f(\Phi(x))$ på F, som konvergerer mod $\bar{f}(x)$. Da F er Hausdorff, har vi hermed vist, at $\bar{f}(x)$ er entydigt bestemt for ethvert $x \in \bar{M}$ som $\lim f(\Phi(x))$, og dermed at en kontinuert udvidelse af f til $\bar{M}$ højst kan ske på én måde.

For dernæst at vise, at der eksisterer en ligelig kontinuert udvidelse $\bar{f}: \bar{M} \to F$ af f til $\bar{M}$ bemærker vi, at med ovenstående betegnelser er $f(\Phi(x))$ en fundamentalfilterbasis på F ifølge sætn. 15. Da F er forudsat fuldstændigt og Hausdorff, har $f(\Phi(x))$ netop ét grænsepunkt, som vi vil betegne med $\bar{f}(x)$, altså

$$\bar{f}(x) = \lim f(\Phi(x)), \qquad x \in \bar{M}.$$

Den således definerede afbildning $\bar{f}: \bar{M} \to F$ er en udvidelse af den givne afbildning $f: M \to F$, fordi $\Phi(x)$ i tilfældet $x \in M$ jo netop er omegnsfiltret for x i delrumstopologien på M, hvorfor $f(\Phi(x))$ konvergerer mod $f(x)$, da f er kontinuert.

Ved beviset for, at $\bar{f}$ er ligelig kontinuert benyttes, at ethvert t.v.r. opfylder adskillelsesaksiom T3 (sætn. 3). Da således enhver omegn af $\underline{0}$ i F omfatter en afsluttet omegn af $\underline{0}$, er det tilstrækkeligt at vise, at der for enhver afsluttet omegn V af $\underline{0}$ i F findes en omegn $U \in \mathring{U}_E(\underline{0})$ så at

$$x,y \in \bar{M} \wedge x-y \in U \Rightarrow \bar{f}(x) - \bar{f}(y) \in V.$$

Da $f: M \to F$ er ligelig kontinuert, findes til V en omegn $U_1 \in \mathring{U}_E(\underline{0})$ så at

$$x_1,y_1 \in M \wedge x_1-y_1 \in U_1 \Rightarrow f(x_1) - f(y_1) \in V.$$

Til U_1 findes en symmetrisk omegn $U \in \mathring{U}_E(\underline{0})$ med $U + U + U \subseteq U_1$. Lad nu $x,y \in \bar{M}$ og $x-y \in U$. Da er $A = M \cap (x + U) \in \Phi(x)$, $B = M \cap (y + U) \in \Phi(y)$. Som grænsepunkt for filterbasen $\Phi(x)$ er $\bar{f}(x)$ et kontaktpunkt for denne, altså for enhver af dens mængder, specielt for $f(A)$. Tilsvarende er $\bar{f}(y)$ kontaktpunkt for $f(B)$, og $\bar{f}(x) - \bar{f}(y)$ derfor for $f(A) - f(B)$ ifølge subtraktionens kontinuitet i F. Nu gælder $f(A) - f(B) \subseteq V$, og derfor $\bar{f}(x) - \bar{f}(y) \in \bar{V} = V$; thi for vilkårligt $x_1 \in A$, $y_1 \in B$ er

$$\begin{aligned} x_1-y_1 &\in (x + U) - (y + U) = (x - y) + U - U \\ &\subseteq U + U + U \subseteq U_1 , \end{aligned}$$

og derfor $f(x_1) - f(y_1) \in V$.

Tilbage står at vise, at $\bar{f}$ bliver lineær, dersom M er et underrum af E og $f: M \to F$ er lineær. I ethvert t.v.r. er afslutningen $\bar{M}$ af et underrum M igen et underrum. Dette vises på samme måde som det analoge resultat om konvekse mængder anført efter beviset for sætn. 3. Ved om fornødent at erstatte E med $\bar{M}$ kan vi ved beviset for lineariteten af $\bar{f}$ gerne antage, at $\bar{M} = E$, altså at underrummet M er overalt tæt i E. Beviset føres da ved hjælp

af princippet om udvidelse af identiteter ved kontinuitet (T2, stk. 24). For ethvert $\lambda \in K$ stemmer de kontinuerte afbildninger $x \to \bar{f}(\lambda x)$ og $x \to \lambda \bar{f}(x)$ overens for $x \in M$, fordi restriktionen f af $\bar{f}$ til M jo er forudsat lineær. Ifølge det nævnte princip stemmer de derfor også overens på hele $\bar{M} = E$. På tilsvarende måde vises additiviteten af $\bar{f}$, idet de to afbildninger $(x,y) \to \bar{f}(x+y)$ og $(x,y) \to \bar{f}(x) + \bar{f}(y)$ af $E \times E$ ind i F er kontinuerte og stemmer overens på underrummet $M \times M$, som åbenbart er tæt i $E \times E$.

Vi forlader hermed studiet af den ligelige struktur på et t.v.r. og går over til at behandle nogle begreber vedrørende underrum af et sådant rum. Som forberedelse undersøger vi først nogle rent algebraiske begreber i tilknytning til et vilkårligt vektorrum,

18. Direkte sum. Komplementært underrum. Projektion. Lad S og T være underrum af et vektorrum E. Restriktionen f af additionen i E til $S \times T$ afbilder $S \times T$ lineært på underrummet $S + T$ af E:

$$f: S \times T \to S + T \qquad \text{(lineær, surjektiv)},$$

idet altså $f(s,t) = s + t$ for $s \in S$, $t \in T$. Vi kalder summen $S + T$ direkte, dersom f er injektiv (og dermed ialt en isomorfi af $S \times T$ på $S + T$), altså dersom enhver vektor $x \in E$ højst har én fremstilling af formen $x = s + t$ med $s \in S$, $t \in T$. Da f er lineær, bliver betingelsen for direkte sum, at kernen $f^{-1}(\underline{0})$ for f er nulelementet i $S \times T$, altså at $s + t = \underline{0} \Rightarrow s = t = \underline{0}$ (for $s \in S$, $t \in T$). Heraf følger, at summen $S + T$ er direkte, hvis og kun hvis $S \cap (-T) = \{\underline{0}\}$, altså $S \cap T = \{\underline{0}\}$.

Vi skal nu særlig betragte det tilfælde, hvor hele rummet E er fremstillet som direkte sum $E = S + T$ af to underrum S og T.

I så fald siges T at være et komplementært underrum, eller blot et komplement, til S, og S siges at være et komplement til T. Ethvert underrum S af et vektorrum E har et komplementært underrum T (ja uendelig mange sådanne, hvis $S \subset E$). For at indse dette behøver vi blot at vælge en basis for S og supplere disse lineært uafhængige vektorer i E med vektorer $t_j \in E$, $j \in J$, således at $\{s_i\}_{i\in I} \cup \{t_j\}_{j\in J}$ bliver en basis for E. (At dette er muligt, vises ved hjælp af Zorns lemma på samme måde som eksistensen af en basis for E, jvf. T1, specielt opg. 5.) Det af vektorerne t_j, $j \in J$, udspændte underrum T af E (d.v.s. det mindste underrum af E, som omfatter $\{t_j\}_{j\in J}$) er da åbenbart et komplement til S.

19. Projektions-afbildninger. Når E er fremstillet som direkte sum af to underrum S og T, defineres to afbildninger p og q af E ind i E, idet vi for ethvert $x \in E = S + T$ betragter den entydigt bestemte fremstilling $x = s + t$ med $s \in S$, $t \in T$ og sætter

$$p(x) = s\ , \quad q(x) = t \quad (\text{for } x = s + t).$$

Vi kalder p og q projektionsafbildningerne, eller kort projektionerne, af E på henholdsvis S og T (langs henholdsvis T og S). Åbenbart er

$$S = p(E) = q^{-1}(\underline{0}), \quad T = q(E) = p^{-1}(\underline{0}).$$

Endvidere er p og q lineære afbildninger, og desuden idempotente, d.v.s. $(p^2=)p\circ p = p$, $(q^2=)q\circ q = q$. Idet vi med i og o betegner henholdsvis den identiske afbildning af E på E og den konstante afbildning af E på $\underline{0}$, gælder endvidere

$$p + q = i\ , \quad p \circ q = q \circ p = o\ ,$$

forstået således, at $p(x) + q(x) = x$, og $p(q(x)) = q(p(x)) = \underline{0}$ for ethvert $x \in E$. Omvendt gælder følgende

Lemma. Lad $p: E \to E$ være en lineær, idempotent afbildning af et vektorrum E i sig selv. Da er den ved $p + q = i$ bestemte afbildning $q = i - p$ ligeledes lineær og idempotent. Endvidere er E direkte sum af underrummene $S = p(E) = q^{-1}(\underline{0})$ og $T = q(E) = p^{-1}(\underline{0})$; og p og q er netop projektionerne af E på S og T (langs henholdsvis T og S).

Bevis. For ethvert $x \in E$ er

$$q(p(x)) = p(x) - p(p(x)) = \underline{0} ;$$
$$p(q(x)) = p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = \underline{0}.$$

Dette viser, at $q \circ p = p \circ q = o$. Endvidere bliver q idempotent, fordi

$$q(q(x)) = q(x - p(x)) = q(x) - q(p(x)) = q(x).$$

Af $p \circ q = o$ følger videre, at $q(E) \subseteq p^{-1}(\underline{0})$. Den modsatte inklusion fremgår af, at $p(x) = \underline{0} \Rightarrow x = q(x) \in q(E)$. Tilsvarende vises, at $p(E) = q^{-1}(\underline{0})$. Det er herefter klart, at

$$S + T = p(E) + q(E) = E ; \quad S \cap T = q^{-1}(\underline{0}) \cap p^{-1}(\underline{0}) = \underline{0}$$

idet $p(x) = q(x) = \underline{0} \Rightarrow x = p(x) + q(x) = \underline{0}$.
For ethvert $x \in E$ er $x = p(x) + q(x)$ en fremstilling af formen $x = s + t$, $s \in S$, $t \in T$. Da summen $E = S + T$ er direkte, er hermed vist, at p og q netop er de omtalte projektionsoperatorer, og lemmaet er bevist.

20. Relation til Kvotientrummet. Lad atter S betegne et vilkårligt underrum af et vektorrum E. Vi betragter den kanomiske afbildning $k: E \to E/S$. Billedet $k(x)$ af $x \in E$ er det sideunder-

rum $x + S$ til S, som indeholder x. Der gælder nu

Lemma. Et underrum $T \subsetneq E$ er et komplement til et underrum $S \subsetneq E$, hvis og kun hvis restriktionen af den kanoniske afbildning $k: E \to E/S$ til T er en bijektiv afbildning (og dermed en isomorfi) af T på E/S.

Bevis. At $\varphi = k|T$ skal være bijektiv, betyder åbenbart, at der for ethvert $x \in E$ skal findes netop ét $t \in T$ så at $\varphi(t) = k(x)$, d.v.s. så at $k(t) = k(x)$, altså $k(x - t) = 0$, eller med andre ord $x - t \in S$. Men dette er ensbetydende med, at ethvert $x \in E$ skal have netop én fremstilling af formen $x = s + t$ med $s \in T$, hvilket jo er definitionen på, at $S + T = E$ og at denne sum er direkte. Og det betyder jo definitionsmæssigt, at T er et komplement til S.

Ved co-dimensionen af et underrum S af et vektorrum E forstås dimensionen af kvotientrummet E/S. (Dimensionen af et vektorrum defineres som det største kordinaltal for nogen lineært uafhængig delmængde af rummet. Det kan vises, at alle baser for et vektorrum er parvis ækvipotente, hvorfor rummets dimension også kan karakteriseres som det fælles kordinaltal for alle baser.)

For ethvert komplement T til et underrum S af E gælder således ifølge det foregående

$$\text{co-dim } S = \dim E/S = \dim T.$$

21. Topologisk direkte sum. Topologisk komplement. De rent algebraiske betragtninger i stk. 18 og 19 skal nu suppleres med topologiske betragtninger i det tilfælde, hvor E betegner et topologisk vektorrum. Lad S og T betegne to underrum af E. Udstyret med delrumstopologien fra E bliver S, T og $S + T$ åbenbart topologiske vektorrum, og produktet $S \times T$ bliver derefter et

t.v.r. med produktrumstopologien; denne ses let at være identisk med delrumstopologien fra $E \times E$.

Definition. En sum $S + T$ af to underrum S, T af et t.v.r. E kaldes topologisk direkte, dersom restriktionen f af additionen i E fra $E \times E$ til $S \times T$ er en isomorfi af det topologiske vektorrum $S \times T$ på det topologiske vektorrum $S + T$.

Da additionen i E er kontinuert, bliver $f: S \times T \to S + T$, defineret ved $f(s,t) = s + t$, ligeledes kontinuert. Derfor bliver summen $S + T$ topologisk direkte, hvis og kun hvis den for det første er (algebraisk) direkte (altså $S \cap T = \{0\}$) og hvis tillige f^{-1} er kontinuert.

Lad os nu antage, at $E = S + T$, og at denne sum er algebraisk direkte. Vi betragter projektionerne p og q af E på S og T givet ved

$$p(x) = s,\ q(x) = t \quad \text{for } x = s + t,\ s \in S,\ t \in T.$$

Da bliver åbenbart

$$f^{-1}(x) = (p(x),\ q(x)) \quad \text{for } x \in S + T = E.$$

Heraf fremgår, at betingelsen for, at den algebraisk direkte sum $E = S + T$ også bliver topologisk direkte, er at p og q er kontinuerte. Naturligvis er det nok at forlange at f.eks. p er kontinuert, idet $q = i - p$ da ligeledes bliver kontinuert, eftersom såvel i som subtraktionen er kontinuert. Vi kan hermed supplere Lemma 19 således.

Sætning. Lad $p: E \to E$ være en lineær, idempotent, kontinuert afbildning af et t.v.r. E i sig selv. Da er E topologisk direkte sum af underrummene $p(E)$ og $p^{-1}(0)$.

Bemærk også, at hvis $E = S + T$ er topologisk direkte, og

hvis E er et Hausdorff t.v.r., da er S og T nødvendigvis afsluttede. Thi med de tidligere betegnelser er $S = q^{-1}(\underline{0})$, hvor p og q er kontinuerte, og $\{\underline{0}\}$ er afsluttet.

Lad atter S være et underrum af et t.v.r. E. Ved et topologisk komplementært underrum (eller kort: et topologisk komplement) til S forstås et algebraisk komplement T til S, for hvilket summen E = S + T er topologisk direkte.

Man har eksempler på Hausdorff t.v.r. (endda Banach-rum), hvori ikke ethvert afsluttet underrum besidder et topologisk komplementært underrum. Vi viser nedenfor, at ethvert underrum af endelig co-dimension i et t.v.r. har et topologisk komplement. Det samme kan for øvrigt vises (ved hjælp af Hahn-Banach's sætning) om ethvert underrum af endelig dimension.

Lemma. Et underrum S af et t.v.r. E har et topologisk komplement, hvis og kun hvis den identiske afbildning $i: S \to S$ kan udvides til en kontinuert lineær afbildning $p: E \to S$.

Bevis. Som afbildning af E ind i E er en sådan udvidelse p ligeledes kontinuert og lineær. Den er desuden idempotent, idet $p(p(x)) = i(p(x)) = p(x)$, fordi $p(x) \in S$. Heraf følger "hvis"-delen under henvisning til ovenstående sætning, idet $p(E) = S$. Den anden del af lemmaet er klar, idet man for p tager projektionsafbildningen af E på S langs et topologisk komplement T til S.

22. Hyperplan og linearform. Lad E være et vektorrum over K. Ved en hyperplan i E forstås et maximalt ægte sideunderrum i E, altså et sideunderrum $H \subset E$ som ikke er ægte delmængde af noget andet sideunderrum af E bortset fra E selv. En hyperplan gennem $\underline{0}$ er således et maximalt ægte underrum af E.

Lemma. Et underrum H af et vektorrum E over K er en hyper-

plan, hvis og kun hvis co-dim H = 1. I så fald gælder for ethvert $e \in E \setminus H$, at Ke er et komplementært underrum til H.

Bevis. Lad k betegne den kanoniske afbildning af E på E/H, og antag først at co-dim H = 1, altså dim E/H = 1. For enhver vektor $e \in E\setminus H$ udgør vektoren $k(e) = e + H$ en basis for E/H. For enhver vektor $x \in E$ findes derfor $\lambda \in K$ så at $x + H = \lambda(e + H) = \lambda e + H$, altså $x \in \lambda e + H$. Dette viser, at $E = Ke + H$, og tillige, at H er en hyperplan, idet ethvert underrum S med $S \supset H$ indeholder en vektor $e \notin H$, hvorfor $S \supseteq Ke + H = E$. Antages det omvendt, at H er en hyperplan, og vælges atter $e \in E\setminus H$, da er underrummet $Ke + H$ en ægte udvidelse af H, hvorfor $Ke + H = E$. Da denne sum er direkte; bliver co-dim H = 1.

Vi vil nu nærmere studere opspaltningen $E = Ke + H$ af vektorrummet E som direkte sum af et 1-dimensionalt underrum Ke og en hyperplan H, hvorved $e \notin H$. Projektionen p på Ke langs H er lineær. Billedet $p(x)$ af en vektor $x \in E$ har formen $p(x) = \lambda e$, hvor $\lambda \in K$, og hvor λ afhænger af x, lad os sige $\lambda = \varphi(x)$. Da afbildningen $\lambda e \to \lambda$ af Ke på K er lineær, bliver den sammensatte afbildning $x \to p(x)(=\lambda x) \to \lambda(=\varphi(x))$ ligeledes lineær.

Definition. Ved en linearform, eller en lineær funktional, på et vektorrum E over K forstås en lineær afbildning af E ind i K.

Vi har ovenfor gjort rede for, at der til enhver hyperplan H i E og enhver vektor $e \in E\setminus H$ svarer en linearform φ på E således at der for ethvert $x \in E$ gælder

$$p(x) = \varphi(x)e \ , \quad x \in \varphi(x)e + H \ ,$$

hvor p er projektionen af E på Ke langs H. Åbenbart er $H = p^{-1}(0) = \varphi^{-1}(0)$ samt $\varphi(e) = 1$, og derfor φ ikke iden-

tisk 0.

Lad nu omvendt $\varphi: E \to K$ være en vilkårligt opgivet linearform på E, som ikke er identisk 0. Da er $H = \varphi^{-1}(0)$ et ægte underrum af E. Vi viser, at H er en hyperplan, og at φ er bestemt på den ovenfor angivne måde ud fra H ved passende valg af $e \notin H$. Lad nemlig $e_1 \notin H$, altså $\varphi(e_1) \neq 0$. Sættes $e = \varphi(e_1)^{-1} e_1$, bliver $\varphi(e) = 1$. Den ved $p(x) = \varphi(x)e$ $(x \in E)$ definerede afbildning p af E ind i E er åbenbart lineær og har billedmængden Ke, hvorfor p også bliver idempotent:

$$p(p(x)) = p(\varphi(x)e) = \varphi(x)p(e) = \varphi(x)\varphi(e)e = \varphi(x)e = p(x).$$

Ifølge lemma 19 har vi derfor den direkte sum

$$E = p(E) + p^{-1}(\underline{0}) = Ke + H,$$

idet $p^{-1}(\underline{0}) = \varphi^{-1}(0) = H$. Dette viser, at co-dim H = 1, altså at H er en hyperplan.

Det bemærkes, at for en given hyperplan H i E findes der uendelig mange linearformer $\varphi \neq 0$ på E med $\varphi^{-1}(0) = H$; men to af disse, φ og φ_1, er altid proportionale. Thi vælges $e \in E \setminus H$, og sættes $\alpha = \varphi_1(e) / \varphi(e)$, da defineres ved $x \to \varphi_1(x) - \alpha\,\varphi(x)$ en linearform $\varphi_1 - \alpha\,\varphi$ på E, som er = 0 overalt på H og desuden for x = e og derfor også på $H + Ke = E$. Specielt er φ entydigt bestemt ud fra H, når værdien $\varphi(e)$ i et forelagt punkt $e \notin H$ er opgivet.

Lad os nu betragte en hyperplan H, som ikke går gennem $\underline{0}$. Den med H parallelle hyperplan H_0 gennem $\underline{0}$ har en ligning $\varphi(x) = 0$, altså $H_0 = \varphi^{-1}(0)$ med φ som ovenfor. Da $H = e + H_0$ for $e \in H$ (ogdermed $e \notin H_0$), bliver φ konstant lig med $\varphi(e)$ på H, altså $H = \varphi^{-1}(\alpha)$ med $\alpha = \varphi(e) \neq 0$. Normeres φ så at $\varphi(e) = 1$,

bliver således $H = \varphi^{-1}(1)$ og φ entydigt bestemt. Omvendt er det klart, at for enhver linearform $\varphi \neq 0$ på E og for ethvert $\alpha \in K \setminus \{0\}$ er $\varphi^{-1}(\alpha)$ en hyperplan i E, som ikke går gennem 0.

23. Afsluttet hyperplan og kontinuert linearform. Lad nu E være et topologisk vektorrum over K. Da gælder:

Lemma. Enhver hyperplan H i et t.v.r. E er enten overalt tæt eller afsluttet i E.

Bevis. Vi kan gerne antage, at H går gennem 0, fordi enhver parallelforskydning er en homeomorfi. Afslutningen $\bar{A}$ af et underrum A af E er igen et underrum (jvf. det tilsvarende om konvekse mængder sidst i stk. 3.) Da således $\bar{H}$ er et underrum, og H et maximalt ægte underrum, må der gælde lighedstegn netop ét af stederne i inklusionerne $H \subseteq \bar{H} \subseteq E$.

Sætning. Lad H være en hyperplan i et t.v.r. E og $\varphi \neq 0$ en linearform på E, som er konstant på H. Da er H afsluttet, hvis og kun hvis φ er kontinuert. I bekræftende fald er summen $E = Ke + H$ topologisk direkte for ethvert $e \in E \setminus H$, og afbildningen φ er åben.

Bevis. Vi kan atter antage, at H går gennem 0, altså $H = \varphi^{-1}(0)$. Da K er et Hausdorffrum, bliver $\varphi^{-1}(0)$ afsluttet, såfremt φ er kontinuert. Lad nu omvendt H være afsluttet. Vi vælger $e \in E$ med $\varphi(e) = 1$. Da udgør $e + H = \varphi^{-1}(1)$ en basis for det 1-dimensionale kvotientrum E/H. Da H er afsluttet, er ifølge sætning 8 E/H et Hausdorffrum, og ifølge sætning 5 er dette (topologisk) isomorft med K. Nærmere gælder ifølge beviset for sætning 5, at den ved $\lambda \to \lambda(e + H) = \lambda e + H$ bestemte algebraiske isomorfi ψ af K på E/H også er en topologisk isomorfi (altså tillige en homeomorfi). Vi har nu skemaet

$$E \xrightarrow{k} E/H \xrightarrow{\psi^{-1}} K ,$$

hvor k betegner den kanoniske afbildning af E på E/H. For ethvert $x \in E$ haves ifølge stk. 22 $x \in \varphi(x)e + H$. Derfor er $k(x) = \varphi(x)e + H$, og $\psi^{-1}(k(x)) = \varphi(x)$. Idet således $\varphi = \psi^{-1} \circ k$, bliver φ kontinuert, fordi både k og ψ^{-1} er kontinuerte og åbne.

Lad nu $e \in E \setminus H$. Da gælder ifølge lemma 22 $E = Ke + H$, hvor denne sum er algebraisk direkte. Projektionen p af E på Ke langs H er ifølge stk. 22 givet ved $p(x) = \varphi(x)e$, altså sammensat af den kontinuerte afbildning $\lambda \to \lambda e$ af K ind i E og linearformen φ. Hvis φ er kontinuert, bliver p det derfor også, hvilket ifølge sætn. 21 betyder, at summen $E = p(E) + p^{-1}(0) = Ke + H$ bliver topologisk direkte. - Omvendt er det i øvrigt klart, at hvis den nævnte sum er topologisk direkte, da bliver H afsluttet i tilfælde af, at E er et Hausdorffrum (se bemærkningen efter sætn. 21).

24. Om vektorrum af endelig dimension.

Sætning. Ethvert Hausdorff t.v.r. E over K af endelig dimension m er (topologisk) isomorft med talrummet K^m og dermed fuldstændigt. Enhver algebraisk isomorfi mellem E og K^m er en homeomorfi.

Bevis. For $m = 1$ udsiger sætn. 5, at E er topologisk isomorft med K, og det fremgår af beviset, at enhver algebraisk isomorfi af K på E er en homeomorfi. Idet vi derefter går frem ved induktion, antager vi at det tilsvarende gælder for dimensionstallet $m - 1$. Lad nu E være et m-dimensionalt Hausdorff t.v.r. over K, og lad $(e_1, \ldots, e_m)$ være en vilkårlig basis for E. Med H betegnes den af vektorerne $e_1, \ldots, e_{m-1}$ frembragte hyperplan i E. Da denne er et $(m-1)$-dimensionalt Hausdorff t.v.r. i delrumstopologien, er den ifølge induktionsantagelsen isomorf med K^{m-1}, og den algebraiske isomorfi

$$(1) \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) \to \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{m-1} e_{m-1}$$

er en homeomorfi af K^{m-1} på H. Ifølge sætn. 14 er H fuldstændigt og derfor afsluttet i E (sætn. 12). Men så er summen $E = H + (Ke_m)$ topologisk direkte ifølge sætn. 23. Det betyder definitionsmæssigt (stk.21), at restriktionen af additionen i E til $H \times (Ke_m)$ er en homeomorfi af $H \times (Ke_m)$ på $H + (Ke_m) = E$. På den anden side er afbildningen

$$(2) \qquad (\lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}, \lambda_m) \to (\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{m-1} e_{m-1}, \lambda_m e_m)$$

åbenbart en homeomorfi af K^m på $H \times (Ke_m)$, fordi afbildningen (1) som nævnt er en homeomorfi af K^{m-1} på H, og afbildningen $\lambda_m \to \lambda_m e_m$ en homeomorfi af K på Ke_m ifølge det 1-dimensionale tilfælde.

Ved sammensætning af homeomorfi (2) med additionens restriktion til $H \times (Ke_m)$ fås afbildningen

$$(3) \qquad (\lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}, \lambda_m) \to \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{m-1} e_{m-1} + \lambda_m e_m$$

af K^m på E, og denne algebraiske isomorfi er derfor ligeledes en homeomorfi. Hermed er induktionsbeviset gennemført, idet enhver algebraisk isomorfi af K^m på E jo er af formen (3) for en passende basis $(e_1, \cdots, e_m)$ for E, nemlig e_j = billedet af den j'te "enhedsvektor" i K^m. Endelig fremgår fuldstændigheden af E af sætn. 14.

Korollar 1. Ethvert endelig-dimensionalt underrum af et Hausdorff t.v.r. er afsluttet.

Dette fremgår af ovenstående sætning i forbindelse med sætn. 12.

Korollar 2. Enhver lineær afbildning $f: E \to F$ af et endelig-dimensionalt Hausdorff t.v.r. E over K ind i et t.v.r. F over K er kontinuert.

Thi ifølge sætningen ovenfor er det øjensynlig tilstrækkeligt at vise dette i tilfældet $E = K^m$; og her har f atter formen (3) med e_j = billedet ved f af den j'te enhedsvektor i K^m, $j=1,\dots,m$. Da regneoperationerne i F er kontinuerte, bliver f derfor kontinuert.

25. Om afsluttede underrum.

Sætning. Lad S være et afsluttet og T et endeligdimensionalt underrum af et t.v.r. E. Da er underrummet S + T afsluttet i E.

Bevis. Lad k betegne den kanoniske afbildning af E på E/S. Da S er afsluttet, er E/S Hausdorff (sætn. 8). Da T er et endeligdimensionalt underrum af E, og da k er lineær, bliver k(T) et endeligdimensionalt underrum af E/S og derfor afsluttet ifølge korollar 1 ovenfor. Da k er kontinuert, bliver $k^{-1}(k(T))$ således afsluttet i E. Nu er imidlertid

$$k^{-1}(k(T)) = \{k^{-1}(k(t)) \mid t \in T\}$$
$$= \{s + t \mid s \in S \wedge t \in T\} = S + T,$$

idet $x \in k^{-1}(k(t)) \iff k(x) = k(t) \iff k(x - t) = \underline{0} \iff x - t \in S$ $\iff x = s + t'$ for passende $s \in S$.

26. Om afsluttede underrum af endelig co-dimension.

Sætning. Lad S være et afsluttet underrum af endelig co-dimension i et t.v.r. E. Da er ethvert algebraisk komplement T til S tillige et topologisk komplement.

Bevis. Vi betegner atter den kanoniske afbildning af E på Hausdorffrummet E/S med k. Da S er afsluttet i E, er $S \cap T$ afsluttet i delrumstopologien på T; og idet $S \cap T = \{\underline{0}\}$, må T være et Hausdorff t.v.r. ifølge stk. 3. At S har endelig co-dimension,

betyder jo at E/S og T er endeligdimensionale. Ifølge lemma 20 er restriktionen $k|T$ af k til T en algebraisk isomorfi mellem de endeligdimensionale Hausdorff t.v.r. T og E/S. Ifølge sætn. 24 er $k|T$ en homeomorfi. Den omvendte afbildning $\varphi: E/S \to T$ er derfor ligeledes kontinuert. Vi har nu skemaet

$$E \xrightarrow{k} E/S \xrightarrow{\varphi} T,$$

hvor k og φ, og dermed også $\varphi \circ k$, er kontinuerte. Men $\varphi \circ k$ er netop projektionen p af E på T langs S; thi for vilkårligt $x \in E$ haves fremstillingen $x = s + t$ med $s \in S$ og $t = p(x) \in T$. Da bliver $x + S = t + S$, og derfor

$$\varphi(k(x)) = \varphi(k(t)) = t = p(x),$$

idet φ jo var den omvendte afbildning til $k|T$.

27. Om kegler. En delmængde A af et vektorrum E kaldes en kegle med toppunkt 0, dersom

$$\lambda A \subseteq A \qquad \text{for ethvert } \lambda \in \dot{R}_+,$$

idet $\dot{R}_+ =]0, +\infty[$. Fællesmængden for er mængde af kegler med toppunkt 0 er en kegle med toppunkt 0. For enhver mængde $A \subseteq E$ er fællesmængden P for mængden af alle kegler, der omfatter A, derfor den mindste sådanne kegle. Åbenbart gælder

$$P = \{\lambda x \mid \lambda \in \dot{R}_+ \wedge x \in A\} = \bigcup_{\lambda \in \dot{R}_+} \lambda A.$$

Lemma. Lad $A \subseteq E$ være konveks, og lad P være den mindste kegle med toppunkt 0, som omfatter A. Da er P konveks.

Bevis. Vi betragter to punkter $\lambda_1 x_1$ og $\lambda_2 x_2$ af P, hvor altså $\lambda_1, \lambda_2 \in \dot{R}_+$ og $x_1, x_2 \in A$. For ethvert $\mu \in [0,1]$ gælder da

$$\mu\lambda_1 x_1 + (1 - \mu)\lambda_2 x_2 = (\mu\lambda_1 + (1 - \mu)\lambda_2)(\rho x_1 + (1 - \rho)x_2),$$

hvor $\mu\lambda_1 + (1-\mu)\lambda_2 \in \overbrace{\dot{R}_+}^{\text{fordi } \dot{R}_+ \text{ er}}$ konveks, og hvor ρ er defineret ved

$$\rho = \frac{\mu\lambda_1}{\mu\lambda_1 + (1-\mu)\lambda_2} .$$

Åbenbart er $\rho \in [0,1]$, og derfor $\rho x_1 + (1-\rho)x_2 \in A$, da A er konveks. Følgelig gælder $\mu\lambda_1 x_1 + (1-\mu)\lambda_2 x_2 \in P$.

28. Hahn-Banach's sætning. Som forberedelse bemærker vi først, at hvis E er et Hausdorff t.v.r. over $\dot{R}$ af dimension ≥ 2, da er $E \setminus \{\underline{0}\}$ et sammenhængende topologisk rum i delrumstopologien. Lad nemlig $a, b \in E \setminus \{\underline{0}\}$, og lad S betegne det (eller et af de) 2-dimensionale underrum af E, som indeholder a og b. Da er S homeomorft med $\dot{R}^2$ ifølge sætning 24, og resultatet fremgår derfor af, at $\dot{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ åbenbart er sammenhængende (endda "kurvesammenhængende"). Bemærk også, at $E \setminus \{\underline{0}\}$ ikke er en konveks delmængde af E (se på a og -a).

Lemma. Lad A være en åben, konveks, ikke tom delmængde af et Hausdorff t.v.r. E over $\dot{R}$ af dimension ≥ 2, og lad $\underline{0} \notin A$. Da eksisterer en linie gennem $\underline{0}$, som ikke møder A.

Bevis. Med P betegner vi den mindste kegle med toppunkt $\underline{0}$, som omfatter A. Da A er åben og ikke tom, gælder det samme om λA for ethvert $\lambda \in \dot{R}_+$ og derfor også om $P = \bigcup_{\lambda \in \dot{R}_+} \lambda A$. Endvidere er P konveks ifølge lemma 27. Da $\underline{0} \notin A$, gælder $\underline{0} \notin P$, altså $P \subsetneq E \setminus \{\underline{0}\}$. Da P er konveks i modsætning til $E \setminus \{\underline{0}\}$, har vi således $\emptyset \subset P \subset E \setminus \{\underline{0}\}$. Da $E \setminus \{\underline{0}\}$ er sammenhængende, fordi dim $E \geq 2$, har P mindst ét randpunkt $x \in E \setminus \{\underline{0}\}$ som delmængde af det topologiske rum $E \setminus \{\underline{0}\}$. Åbenbart er x tillige et randpunkt for P som delmængde af E. Da P er åben, gælder $x \notin P$. Vi vil nu vise, at det én-dimensionale underrum $\dot{R}x$ af E ikke møder P og dermed heller ikke A. Da P er en kegle og $x \notin P$, gælder åbenbart $\lambda x \notin P$ for $\lambda \in \dot{R}_+$. Da $\underline{0} \notin P$, er det derfor tilstrækkeligt at

vise, at $-x \notin P$, thi da vil $-\lambda x \notin P$ for $\lambda \in \dot{R}_+$. Antog man nu, at $-x \in P$, så fandtes en omegn V af $-x$ med $V \subsetneq P$. Men så var $-V$ en omegn af randpunktet x for P, og der fandtes derfor $y \in P \cap (-V)$. Idet således $y \in P$ og $-y \in V \subsetneq P$, måtte $\underline{0} = \frac{1}{2}(y + (-y)) \in P$, fordi P er konveks; men som nævnt gælder $\underline{0} \notin P$.

Vi er nu i stand til at formulere og bevise hovedresultatet i indeværende afsnit, Hahn Banach's sætning, først i dens geometriske formulering.

Sætning. (Hahn-Banach). Lad E være et topologisk vektorrum over K (=$\dot{R}$ eller $\dot{C}$). Lad A være en åben, konveks, ikke tom delmængde af E, og lad S være et sideunderrum af E med $S \cap A = \emptyset$. Da eksisterer der en afsluttet hyperplan H i E, for hvilken $H \supseteq S$ og $H \cap A = \emptyset$.

Bevis i tilfældet $K = \dot{R}$. Efter en parallelforskydning kan vi opnå, at $\underline{0} \in S$, altså at S er et underrum. Med M betegner vi mængden af alle underrum T af E for hvilke $T \supseteq S$ og $T \cap A = \emptyset$. Da er M induktivt ordnet ved inklusion, idet foreningsmængden af enhver fuldstændigt ordnet delmængde af M åbenbart igen er et underrum tilhørende M og således udgør en majorant for delmængden. Ifølge Zorns lemma eksisterer der et maximalt element H i M. Af $H \cap A = \emptyset$, altså $H \subsetneq CA$, følger dels, at $H \neq E$ fordi $A \neq \emptyset$, og dels at $\overline{H} \subsetneq CA$ fordi A er åben, altså at $\overline{H} \cap A = \emptyset$. Da nu $\overline{H}$ igen er et underrum af E (jvf. det tilsvarende om konvekse mængder i stk. 3), og da $\overline{H} \supseteq H \supseteq S$, er $\overline{H} \in M$, og derfor $\overline{H} = H$ fordi H var maximalt i M. Hermed er vist, at H er et afsluttet underrum af E.

Tilbage står at vise, at H er en hyperplan, altså at $\dim E/H = 1$. Nu er $F = E/H$ et Hausdorff t.v.r. (sætn. 8); og betegner vi med k den kanoniske afbildning af E på F, bliver k(A) en åben, konveks, ikke tom delmængde af F, fordi k er åben og

lineær. Endvidere indeholder k(A) ikke nulelementet $\underline{0}_F$ i F, thi for vilkårligt $x \in A$ gælder $x \notin H$ og derfor $k(x) \neq \underline{0}_F$. Antog man nu, at dim E/H = dim F $\geq$ 2, da fandtes ifølge ovenstående lemma et 1-dimensionalt underrum L af F med $L \cap k(A) = \emptyset$. Da var $k^{-1}(L)$ et underrum af E, og $k^{-1}(L) \cap A = \emptyset$. (Thi for $x \in A$ gælder $k(x) \in k(A)$ og derfor $k(x) \notin L$, $x \notin k^{-1}(L)$). Da k er surjektiv og $L \supset \{\underline{0}_F\}$, må $k^{-1}(L) \supset k^{-1}(\underline{0}_F) = H \supsetneq S$. Vi er herved ført til, at $k^{-1}(L) \in M$ og $k^{-1}(L) \supset H$, hvilket strider mod, at H var maximal i M. Dermed er sætningen bevist i tilfældet $K = \mathbb{R}$. Beviset i tilfældet $K = \mathbb{C}$ bringes i næste stykke.

29. Om vektorrum over $\mathbb{C}$. Et vektorrum E over $\mathbb{C}$ kan også opfattes som et vektorrum over $\mathbb{R}$; dette sidste kaldes så det underliggende reelle vektorrum hørende til det komplekse vektorrum E. Da begrebet konveksitet kun involverer reelle skalarer, er de konvekse delmængder de samme i begge tilfælde. Et underrum af det komplekse vektorrum E er naturligvis ligeledes et underrum af det underliggende reelle rum E_0; men det omvendte behøver ikke at være tilfældet. Da multiplikation med en skalar $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er en isomorfi af det komplekse vektorrum E på sig selv, bliver det specielt en isomorfi af det reelle vektorrum E_0 på sig selv. For ethvert underrum M af E_0 er derfor iM ligeledes et underrum af E_0. Betingelsen for, at M er et underrum af E, er åbenbart at iM = M; thi for ethvert $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ gælder da

$$\lambda M = \alpha M + i\beta M \subseteq M + iM = M + M = M.$$

Lemma. Lad E være et vektorrum over $\mathbb{C}$ og E_0 det underliggende vektorrum over $\mathbb{R}$. For ethvert underrum M af E_0 er $M \cap (iM)$ et underrum af E. Hvis M er en hyperplan i E_0, er $M \cap (iM)$ en hyperplan i E.

Bevis. $M \cap (iM)$ er et underrum af E, fordi

$$i(M \cap iM) = (iM) \cap (i^2M) = M \cap (iM).$$

Lad nu M være en hyperplan i E_0. Hvis $M \subseteq iM$, er $M \cap (iM) = M$ åbenbart en hyperplan i E. Lad dernæst $M \not\subseteq iM$, og lad $e \in M$, $e \notin iM$. Da er $ie \notin i^2M = M$, og vi har de direkte summer

$$E_0 = \dot{R}(ie) + M = \dot{R}e + iM,$$

fordi M og iM er hyperplaner i E_0 (lemma 22). Vi viser nu, at $E = \dot{C}e + (M \cap iM)$, hvoraf fremgår, at underrummet $M \cap (iM)$ er en hyperplan i E. Ethvert $x \in E$ har en fremstilling $x = \beta(ie) + y$, hvor $\beta \in \dot{R}$, $y \in M$. Og y har en fremstilling $y = \alpha e + z$, hvor $\alpha \in \dot{R}$, $z \in iM$. Men så gælder

$$x = (\alpha + i\beta)e + z,$$

hvor $\alpha + i\beta \in \dot{C}$, og hvor $z \in M \cap (iM)$. At $z \in M$ fremgår nemlig af, at $z = y - \alpha e$, hvor $y, e \in M$ og $\alpha \in \dot{R}$. Hermed er lemmaet bevist.

Vi er nu i stand til at bevise Hahn-Banach's sætning for et t.v.r. E over $\dot{C}$. Med den foreliggende topologi på E bliver det underliggende vektorrum E_0 over $\dot{R}$ åbenbart et t.v.r. over $\dot{R}$. Det givne underrum S af E er som nævnt tillige et underrum af E_0. Ifølge den allerede beviste sætning for reelle t.v.r. findes der en afsluttet hyperplan H_0 i E_0 med $H_0 \supseteq S$ og $H_0 \cap A = \emptyset$. Da er iH_0 ligeledes afsluttet, og $H_0 \cap (iH_0) = H$ er en afsluttet hyperplan i E ifølge ovenstående lemma.

Da nu $iS = S$, fås

$$H = H_0 \cap (iH_0) \supseteq S \cap (iS) = S.$$

Det er klart, at H ikke møder A, fordi $H \subseteq H_0$ og H_0 ikke møder A.

30. Udspændt underrum. Total delmængde. Lad M være en delmængde af et vektorrum E over K (=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Fællesmængden F for mængden af underrum af E, som omfatter M, kaldes det af M udspændte underrum (i algebraisk betydning). Det består af alle vektorer i E, som kan fremstilles som linearkombination af endeligt mange vektorer fra M.

Dersom E er et t.v.r., kaldes afslutningen $\overline{F}$ af F det af M udspændte afsluttede underrum af E. Åbenbart er $\overline{F}$ det mindste afsluttede underrum af E, som omfatter M.

Definition. En delmængde M af et t.v.r. E kaldes total, dersom det af M udspændte underrum F (i algebraisk betydning) er overalt tæt i E, altså dersom det af M udspændte afsluttede underrum af E udgør hele E : $\overline{F} = E$.

Sætning. En delmængde M af et lokalkonvekst t.v.r. E er total, hvis og kun hvis der for enhver kontinuert linearform f på E gælder, at

$$f(x) = 0 \text{ for alle } x \in M \Rightarrow f \equiv 0.$$

Anderledes udtrykt: M er total, hvis og kun hvis M skiller de kontinuerte linearformer på E i den forstand, at der for 2 vilkårlige sådanne, f_1 og f_2, gælder

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ for alle } x \in M \Rightarrow f_1 \equiv f_2.$$

Bevis. Den sidste formulering af sætningen fremgår af den første anvendt på den ved $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ definerede kontinuerte linearform $f = f_1 - f_2$ på E. For enhver delmængde $M \subsetneq E$ og enhver kontinuert linearform f på E gælder, at

$$f(x) = 0 \text{ på } M \Rightarrow f(x) = 0 \text{ på } \overline{F},$$

når $\bar{F}$ betegner det af M udspændte afsluttede underrum af E. Dette følger straks af, at $f^{-1}(0)$ er et afsluttet underrum af E og derfor med M må omfatte $\bar{F}$. Heraf fremgår "kun hvis" - delen.

Beviset for "hvis" - delen føres indirekte. Antag altså, at M ikke er total, d.v.s. $\bar{F} \neq E$. Lad $y \in C\bar{F}$ (åben), og lad V være en åben, konveks omegn af $\underline{0}$ i E således at $y + V \subseteq C\bar{F}$. Ifølge Hahn-Banach's sætning eksisterer der en afsluttet hyperplan H i E med $H \supseteq \bar{F}$ og $H \cap (y + V) = \emptyset$. Lad $H = f^{-1}(0)$, hvor f er en kontinuert linearform på E (stk. 23). Da er altså $f = 0$ på H, specielt på M, mer. $f \neq 0$.

Korollar 1. Ethvert afsluttet underrum $S \subset E$ af et lokalkonvekst t.v.r. E er fællesmængden for mængden af alle afsluttede hyperplaner $H \supseteq S$ i E; og sådanne hyperplaner eksisterer.

Thi i ovenstående bevis (med $S = M = F = \bar{F}$) fandt vi for ethvert $y \in CS$ en afsluttet hyperplan $H \supseteq S$ med $y \notin H$.

Korollar 2. Lad E være et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. af dimension > 0. Der eksisterer afsluttede hyperplaner i E, og kontinuerte linearformer $\neq 0$ på E.

Thi $S = \{\underline{0}\}$ er et afsluttet underrum af E, da E er Hausdorff; og $S \subset E$, da $\dim E > 0$.

31. Seminorm. Lad E være et vektorrum over K (=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). En funktion $p: E \to \mathbb{R}$ kaldes en seminorm på E, dersom følgende 2 betingelser er opfyldt:

1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ for ethvert $\lambda \in K$, $x \in E$;

2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ for ethvert $x, y \in E$.

Det følger heraf at $p(\underline{0}) = 0$ (sæt $\lambda = 0$ i 1), og at $p(x) \geq 0$ for ethvert $x \in E$, idet

$$0 = p(\underline{0}) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x).$$

Endvidere gælder resten af "trekantsuligheden":

$$|p(x) - p(y)| \leqq p(x - y) ,$$

idet $p(x) \leqq p(y) + p(x - y)$ og $p(y) \leqq p(x) + p(y - x)$ ifølge 2), og $p(y - x) = p(x - y)$ ifølge 1).

Endelig er en seminorm en konveks funktion, idet

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqq p(\lambda x) + p((1 - \lambda)y) \leqq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y),$$

for $\lambda \in [0,1]$ og $x,y \in E$.

En seminorm p kaldes en norm, dersom $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

For enhver linearform $f: E \to K$ er den ved $x \to |f(x)|$ bestemte funktion $|f|$ en seminorm på E.

Lemma. Lad p være en seminorm på et vektorrum E. Da er mængden

$$A = \{x \in E \mid p(x) \leqq 1\}$$

konveks, symmetrisk og absorberende. Endvidere er

$$p(x) = \inf \{\alpha \in \dot{R}_+ \mid x \in \alpha A\}.$$

Bevis. Symmetrien følger af 1), konveksiteten af at p er en konveks funktion, og den absorberende egenskab af, at p er endelig. For ethvert $x \in E$ gælder nemlig $\lambda x \in A$ for $|\lambda| < 1/p(x)$. Åbenbart er for ethvert $\alpha \in \dot{R}^+$ ifølge 1)

$$\alpha A = \{x \in E \mid p(x) \leqq \alpha\},$$

og denne mængde er da ligeledes konveks, symmetrisk og absorberende. Idet således

$$p(x) \leqq \alpha \iff x \in \alpha A,$$

og idet $p(x) = \inf \{\alpha \in \dot{R}_+ \mid p(x) \leqq \alpha\}$, fremkommer det anførte udtryk for $p(x)$.

32. Kontinuert seminorm på et t.v.r.

Lemma. En seminorm p på et t.v.r. E er ligelig kontinuert, dersom p er kontinuert i $\underline{0}$, eller blot begrænset i en omegn af $\underline{0}$.

Bevis. Lad $p(x) \leqq \alpha$ for alle $x \in U$, hvor $U \in \dot{U}(\underline{0})$. Da gælder for ethvert $\varepsilon > 0$, at $p(y) \leqq \varepsilon$ for alle $y \in (\varepsilon/\alpha)\, U$, og $(\varepsilon/\alpha)U = V \in \dot{U}(\underline{0})$. Endelig er

$$|p(x) - p(y)| \leqq p(x - y) \leqq \varepsilon \quad \text{for } x - y \in V.$$

Sætning. Lad E være et t.v.r. over K.

a) For enhver kontinuert seminorm p på E er mængden

$$A = \{x \in E \mid p(x) \leqq 1\}$$

en konveks, symmetrisk, afsluttet omegn af $\underline{0}$ i E.

b) Enhver konveks symmetrisk, afsluttet omegn af $\underline{0}$ fremkommer på denne måde ud fra netop én kontinuert seminorm p på E, nemlig

$$p(x) = \inf \{\alpha \in \dot{R}_+ \mid x \in \alpha A\}.$$

Bevis. a) Klart ifølge lemma 31, idet A åbenbart nu er afsluttet, da p er kontinuert, og idet A omfatter den åbne mængde $\{x \in E \mid p(x) < 1\}$, som indeholder $\underline{0}$.

b) Ifølge samme lemma er der ikke andre muligheder for p end den i sætningen anførte. Da enhver omegn af $\underline{0}$ er absorberende, eksisterer der for ethvert $x \in E$ et tal $\alpha \in \dot{R}_+$ så at $\alpha^{-1}x \in A$, altså $x \in \alpha A$, hvorfor $p(x)$ er veldefineret som et (endeligt) reelt tal $\geqq 0$.

For $\lambda \in K \setminus \{0\}$ og $\alpha \in \dot{R}_+$ gælder

$$\lambda x \in \alpha A \iff x \in \lambda^{-1} \alpha A \iff x \in |\lambda|^{-1} \alpha A,$$

fordi A er symmetrisk. Derfor bliver

$$p(\lambda x) = \inf \{\alpha \in \dot{R}_+ \mid x \in |\lambda|^{-1} \alpha A\}$$
$$|\lambda| \inf \{|\lambda|^{-1} \alpha \in \dot{R}_+ \mid x \in |\lambda|^{-1} \alpha A\} = |\lambda| p(x).$$

Hermed er vist, at $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ for $\lambda \neq 0$; men det samme gælder åbenbart for $\lambda = 0$.

For at eftervise subadditiviteten betragter vi to tal $\alpha, \beta \in \dot{R}_+$ og bemærker, at

$$x \in \alpha A \wedge y \in \beta A \Rightarrow x + y \in (\alpha + \beta)A$$
$$\Rightarrow p(x + y) \leqq \alpha + \beta.$$

Vi har her benyttet, at $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$, fordi A er konveks. Da nu α og β kan vælges vilkårligt tæt til henholdsvis $p(x)$ og $p(y)$, slutter vi, at $p(x + y) \leqq p(x) + p(y)$, og dermed at p er en seminorm.

Det er klart, at $x \in A \Rightarrow p(x) \leqq 1$. Antag dernæst, at $x \notin A$. Da CA er åben, findes $\mu > 1$ så at $1 \leqq \alpha \leqq \mu \Rightarrow \alpha^{-1} x \notin A$. Nu er A konveks og indeholder $\underline{0}$, hvorfor A er stjerneformet (stk. 1, c), altså $\alpha A \subseteq A$ for ethvert $\alpha \in [0,1]$. Da $x \notin A$, gælder således $x \notin \alpha A$ for $\alpha \in [0,1]$, og dermed ialt for $\alpha \in [0,\mu]$, hvorfor $p(x) \geqq \mu > 1$. Hermed er vist, at $A = \{x \in E \mid p(x) \leqq 1\}$. Da således seminormen p er begrænset i omegnen A af $\underline{0}$, er p kontinuert ifølge lemmaet ovenfor.

Bemærkning. På ganske tilsvarende måde vises det, at for enhver kontinuert seminorm p er $B = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$ en konveks, symmetrisk, åben omegn af $\underline{0}$, og enhver sådan fremkommer på denne måde ud fra netop én seminorm p, nemlig $p(x) = \inf \{\alpha \in \dot{R}_+ \mid x \in \alpha B\}$.

Det kan endvidere vises, at $B = \mathring{A}$ og $A = \bar{B}$.

33. Lokalkonveks topologi defineret ved seminormer. Lad E være et vektorrum over K (= $\dot{R}$ eller $\dot{C}$), og lad P være en given mængde af seminormer på E. For ethvert $p \in P$ og ethvert $\alpha \in \dot{R}_+$ er mængden

$$V_{p,\alpha} = \{x \in E \mid p(x) \leq \alpha\}$$

ifølge lemma 31 konveks, symmetrisk og absorberende. Med $\dot{B}(\underline{0})$ betegner vi mængden af alle fællesmængder

$$V_{p_1,\alpha_1} \cap V_{p_2,\alpha_2} \cap \cdots \cap V_{p_m,\alpha_m}$$

af endelig mange mængder af formen $V_{p,\alpha}$ med $p \in P$, $\alpha \in \dot{R}_+$. Da enhver fællesmængde af endeligt mange konvekse, symmetriske og absorberende mængder igen har disse tre egenskaber (og ifølge den sidste af disse ikke er tom), er $\dot{B}(\underline{0})$ en filterbasis på E. For ethvert $\lambda \in \dot{R}_+$ gælder $\lambda V_{p,\alpha} = V_{p,\lambda\alpha}$, hvoraf følger, at $V \in \dot{B}(\underline{0}) \Rightarrow \lambda V \in \dot{B}(\underline{0})$. Ifølge sætning 2 (jvf. tillige stk. 4) findes der derfor netop én topologi på E, hvorved E bliver et t.v.r. og $\dot{B}(\underline{0})$ en basis for filtret af omegne af $\underline{0}$. Herved bliver $\{x + V \mid V \in \dot{B}(\underline{0})\}$ en basis for $\dot{U}(x)$. Vi kalder denne topologi for den ved mængden P af seminormer definerede topologi på E. Med denne topologi bliver E åbenbart et lokalkonvekst t.v.r.

Det ville ingen forskel gøre, om man i stedet definerede $V_{p,\alpha} = \{x \in E \mid p(x) < \alpha\}$; thi der gælder for $\alpha \in \dot{R}_+$

$$\{x \in E \mid p(x) \leq \alpha/2\} \subseteq \{x \in E \mid p(x) < \alpha\} \subseteq \{x \in E \mid p(x) \leq \alpha\}.$$

Sætning. Den ved en mængde P af seminormer på et vektorrum E definerede lokalkonvekse topologi på E er den groveste topologi på E, der gør E til et t.v.r. og for hvilken enhver af seminormer-

ne $p \in P$ er kontinuert.

Bevis. Det er klart, at ethvert $p \in P$ er kontinuert i den ved P definerede topologi, idet $V_{p,\alpha}$ er en omegn af $\underline{0}$ for ethvert $\alpha \in \dot{R}_+$. Betragter vi omvendt en vilkårlig topologi på E, hvorved E bliver et t.v.r. og ethvert $p \in P$ bliver kontinuert, da må $V_{p,\alpha}$ for ethvert $p \in P$ og $\alpha \in \dot{R}_+$ være en omegn af $\underline{0}$. Derfor er enhver af mængderne i $\dot{B}(\underline{0})$ en omegn af $\underline{0}$, og da parallelforskydningerne i E skal være homeomorfier, må $x + V$ være en omegn af x for ethvert $V \in \dot{B}(\underline{0})$. Dette viser, at den betragtede vilkårlige topologi med de anførte egenskaber er finere end den ved P bestemte topologi.

Det bemærkes, at enhver lokalkonveks topologi på et vektorrum E kan defineres ved seminormer på den angivne måde. Vi behøver nemlig blot at tage P som mængden af alle seminormer på E, som er kontinuerte i den forelagte topologi. Den ved P definerede nye topologi på E er ifølge ovenstående sætning grovere end den givne topologi. Lad omvendt V være en omegn af $\underline{0}$ i den givne topologi. Ved beviset for, at V også er en omegn af $\underline{0}$ i den ved P bestemte topologi, kan vi antage at V er konveks, symmetrisk og afsluttet. Ved $p(x) = \inf \{\alpha \in \dot{R}_+ | x \in \alpha V\}$ defineres ifølge sætn. 32 en kontinuert seminorm på E, og denne tilhører således P. Ifølge samme sætning er $V = V_{p,1} = \{x \in E \mid p(x) \leqq 1\}$, hvilket netop er en omegn af $\underline{0}$ i den ved P bestemte topologi. Da parallelforskydningerne er homeomorfier i begge topologier, er påstanden hermed bevist.

Lemma. Lad P være en mængde af seminormer på et vektorrum. Den ved P definerede topologi på E er Hausdorff, hvis og kun hvis der for ethvert $x \neq \underline{0}$ i E findes $p \in P$ med $p(x) \neq 0$.

Bevis. For et sådant p er $\{y \in E \mid p(y) = < \frac{1}{2}p(x)\}$ en omegn af $\underline{0}$, som ikke indeholder x. Hvis derimod $p(x) = 0$ for alle $p \in P$,

gælder $x \in V_{p,\alpha}$ for ethvert $p \in P$, $\alpha \in \dot{R}_+$,

og derfor er $x \in V$ for enhver omegn V af $\underline{0}$ i den ved P definerede topologi, hvilket viser, at denne ikke er Hausdorff.

34. Kontinuitet af lineær afbildning udtrykt ved seminormer.

Lad E og F være lokalkonvekse topologiske vektorrum over samme legeme K, og lad topologien på E være defineret ved en mængde P af seminormer på E og topologien på F ved en mængde Q af seminormer på F.

Sætning. Med ovenstående betegnelser er en lineær afbildning $f: E \to F$ kontinuert, hvis og kun hvis der til enhver seminorm $q \in Q$ findes en endelig mængde af seminormer $p_i \in P$, $i = 1,2,\dots,m$, og et tal $c > 0$ så at

$$q(f(x)) \leqq c \sup_{1 \leqq i \leqq m} p_i(x) \quad \text{for alle } x \in E.$$

Bevis. Hvis f er kontinuert i $\underline{0}$, findes til omegnen $W = \{y \in F \mid q(y) \leqq 1\}$ af $\underline{0}$ i F en omegn af formen $V = V_{p_1,\alpha_1} \cap \dots \cap V_{p_m,\alpha_m}$ af $\underline{0}$ i E, som ved f afbildes ind i W. Sættes $\alpha = \min_{1 \leqq i \leqq m} \alpha_i$, gælder, at

$$\sup_{1 \leqq i \leqq m} p_i(x) \leqq \alpha \Rightarrow x \in V \Rightarrow f(x) \in W \Rightarrow q(f(x)) \leqq 1,$$

hvoraf på grund af homogeniteten $q(f(x)) \leqq \alpha^{-1} \sup_i p_i(x)$. Lad os dernæst antage, at betingelsen er opfyldt, og lad os vise, at f bliver kontinuert i $\underline{0}$ og dermed overalt. Enhver omegn af $\underline{0}$ i F omfatter fællesmængden af endeligt mange omegne af formen $W_{q,\beta} = \{y \in F \mid q(y) \leqq \beta\}$, hvor $q \in Q$, $\beta \in \dot{R}_+$. Det er da nok at vise, at $f^{-1}(W_{q,\beta})$ er en omegn af $\underline{0}$ i E. Til q findes ifølge forudsætning $p_1,\dots,p_m \in P$ og $c > 0$ så at den anførte ulighed gælder. Men så gælder åbenbart for $\alpha = \beta/c$, at

$$V_{p_1,\alpha} \cap \dots \cap V_{p_m,\alpha} \subseteq f^{-1}(W_{q,\beta}).$$

Bemærkning. Af denne sætning aflæses i tilfældet E = F, f = i (=den identiske afbildning af E på sig selv) betingelsen for, at den ved én mængde P af seminormer på et vektorrum E definerede topologi på E er finere end (eller grovere end, eller identisk med) den ved en anden mængde Q af seminormer definerede topologi på E. To mængder af seminormer, P og Q, på E kaldes ækvivalente, dersom de definerer samme topologi på E.

Enhver endelig mængde af seminormer $p_1, \ldots, p_m$ på et vektorrum E er åbenbart ækvivalent med en enkelt seminorm p, f.eks. $p = \sum_{i=1}^{m} p_i$ eller

$$p(x) = \sup_{1 \leq i \leq m} p_i(x).$$

35. Hahn-Banach's sætning i analytisk formulering.

Sætning. Lad p være en seminorm på et vektorrum E over K (= $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Lad M være et underrum af E, og lad $f: M \to K$ være en linearform på M således at $|f(x)| \leq p(x)$ for alle $x \in M$. Da kan f udvides til en linearform $f_1: E \to K$ på E således at $|f_1(x)| \leq p(x)$ for alle $x \in E$.

Bevis. Vi kan antage $f \neq 0$, idet vi ellers blot tager $f_1 = 0$. Den givne seminorm p på E definerer en lokalkonveks topologi på E. Da p herved bliver kontinuert, er den konvekse mængde $A = \{x \in E | p(x) < 1\}$ åben og ikke tom, idet $\underline{0} \in A$. Ved ligningen $f(x) = 1$ defineres en hyperplan $L = \{x \in M \mid f(x) = 1\}$ i M; og L er et underrum af E, som ikke møder A, idet $p(x) \geq |f(x)| = 1$ for $x \in L$. Ifølge Hahn-Banach's sætning i geometrisk formulering (sætn. 28) eksisterer der en afsluttet hyperplan H i E med $H \supseteq L$ og $H \cap A = \emptyset$. I inklusionerne $L \subseteq H \cap M \subseteq M$ må lighedstegn indtræffe netop ét sted, fordi L er en hyperplan i M. Da $\underline{0} \in M$, hvorimod $\underline{0} \notin H$ (fordi $\underline{0} \in A \subseteq \complement H$), må $H \cap M \neq M$, og derfor er

$H \cap M = L$. Som vist i stk. 22 har H en ligning $f_1(x) = 1$, altså $H = \{x \in E \mid f_1(x) = 1\}$, hvor $f_1 : E \to K$ er en kontinuert linearform på E. Da således $L = H \cap M = \{x \in M \mid f_1(x) = 1\}$, har hyperplanen L i M både ligningen $f(x) = 1$ og ligningen $f_1(x) = 1$, hvorfor linearformerne f og f_1 stemmer overens på M (stk. 22), d.v.s. f_1 er en udvidelse af f. Tilbage står at eftervise, at $|f_1(x)| \leq p(x)$ for alle $x \in E$. Da $H \subseteq CA = \{x \in E \mid p(x) \geq 1\}$, er denne ulighed klar for $x \in H$, d.v.s. for $f_1(x) = 1$. For en vilkårlig værdi $\alpha \in K$ af $f_1(x)$ sluttes (hvis $\alpha \neq 0$), at $f_1(\alpha^{-1}x) = 1$ og derfor

$$p(x) = |\alpha| p(\alpha^{-1}x) \leq |\alpha| = |f_1(x)|.$$

Bemærkning. Hvis E er givet som et t.v.r., og hvis p er en kontinuert seminorm på E, da bliver f_1 en kontinuert linearform på E, som man umiddelbart ser ud fra uligheden $|f_1(x)| \leq p(x), x \in E$.

36. Normeret rum. Vi minder om, at en norm på et vektorrum E over K (= $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) er defineret som en seminorm, som kun antager værdien 0 i $\underline{0}$. Det er altså en afbildning $x \to \|x\|$ af E ind i $[0, +\infty[$, som opfylder kravene

1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ for ethvert $\lambda \in K$, $x \in E$;

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for ethvert $x, y \in E$;

3) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \underline{0}$.

Et vektorrum E kaldes et normeret rum, dersom der er givet en norm $\| \ \|$ på E. Den ved denne ene (semi)norm definerede topologi på E kaldes normtopologien. Udstyret med denne topologi er E specielt et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r., idet betingelsen i lemma 33 er opfyldt ifølge 3). Endvidere er normen en kontinuert funktion på E.

Et normeret rum er samtidig et metrisk rum, idet afstanden defineres ved

$$\text{dist}\,(x,y) = \|x - y\|.$$

Det eftervises umiddelbart, at der herved virkelig defineres et afstandsmål på E. Den tilsvarende topologi på E er netop normtopologien, idet kuglerne $\{y \in E \mid \|x - y\| \leqq r\}$, $r \in \dot{R}_+$, i begge tilfælde danner en basis for filtret af omegne af $x \in E$. Også den ligelige struktur (jvf. stk. 10) er åbenbart den samme, hvadenten E opfattes som et t.v.r. (med normtopologien) eller som et metrisk rum (med den ovenfor angivne metrik).

Et t.v.r. E kaldes normerbart, dersom der findes en norm på E, således at den tilhørende normtopologi netop er den givne topologi på E.

Et fuldstændigt normeret vektorrum kaldes også er Banach-rum efter den polske matematiker S. Banach, der i sin bog: Théorie des opérations linéaires har givet den første systematiske behandling af de (normerede) topologiske vektorrum.

Lad E og F være to normerede rum (over samme legeme K). Vi tillader os at benytte samme betegnelse for normerne i E og F. Lad $f: E \to F$ være en lineær afbildning af E ind i F. Ifølge sætn. 34 bliver f kontinuert, hvis og kun hvis der findes en konstant $c > 0$ således at

$$\|f(x)\| \leqq c\,\|x\| \qquad \text{for alle } x \in E.$$

Det fremgår heraf specielt (i tilfældet $E = F$, $f = i$), at to normer $\|\ \|_1$ og $\|\ \|_2$ på et vektorrum E er ækvivalente (d.v.s. definerer samme topologi på E), hvis og kun hvis der findes en konstant $c > 0$ således at

$$c^{-1}\|x\|_1 \leqq \|x\|_2 \leqq c\|x\|_1 \qquad \text{for alle } x \in E.$$

Ses der derimod bort fra denførste af disse uligheder, fremkommer betingelsen for, at den ved $\| \ \|_1$ definerede normtopologi på E er finere end den ved $\| \ \|_2$ definerede.

En lineær afbildning $f: E \to F$ af et normeret rum E ind i et normeret rum F kaldes <u>isometrisk</u>, dersom normen bevares, altså

$$\|f(x)\| = \|x\| \qquad \text{for alle } x \in E.$$

En sådan afbildning er altså specielt kontinuert. Det naturlige isomorfibegreb for normerede rum er <u>isometrisk isomorfi</u>, altså eksistens af en bijektiv, lineær, isometrisk afbildning $f: E \to F$.

Til sætn. 17 om <u>udvidelse ved kontinuitet</u> kan føjes følgende i det tilfælde, hvor E og F er normerede rum og hvor F altså er et Banach-rum: Da den givne lineære afbildning $f: M \to F$ af det overalt tætte underrum M af E ind i F er forudsat kontinuert, eksisterer der ifølge det foregående et tal $c > 0$ så at $\|f(x)\| \leqq c \|x\|$ for alle $x \in M$. Den entydigt bestemte udvidelse af f til en kontinuert lineær afbildning $f_1: E \to F$ opfylder nu automatisk den tilsvarende ulighed $\|f_1(x)\| \leqq c \|x\|$ for alle $x \in E$. Dette følger af, at $\{x \in E \mid \|f_1(x)\| - c\|x\| \leqq 0\}$ åbenbart er afsluttet (fordi venstre side af uligheden afhænger kontinuert af x) og omfatter M, som er tæt i E.

På samme måde ses det, at hvis f er en isometri, da gælder det samme om f_1.

37. <u>Sætning</u>. Ethvert <u>endeligt</u> produkt af normerede rum E_i $(i = 1,2,\ldots,m)$ er normerbart. Idet normen på E_i betegnes med $\| \ \|_i$, defineres produktrumstopologien på $E = \prod_{i=1}^{m} E_i$ eksempelvis ved følgende norm $\| \ \|$:

$$\|x\| = \sup_{1 \leqq i \leqq m} \|x_i\|_i \qquad (x = (x_1,\ldots,x_m) \in E).$$

Bevis. Det eftervises let, at der herved defineres en norm på E. Idet α gennemløber $\dot{R}_+$ danner mængderne

$$\{x \in E \mid \|x\| \leqq \alpha\} = \prod_{i=1}^{m} \{x_i \in E_i \mid \|x_i\|_i \leqq \alpha\}$$

en basis for filtret af omegne af $\underline{0}$ i E såvel i normtopologien på E som i produktrumstopologien.

Det tilføjes, at der ved $x \to \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_i$ åbenbart defineres en anden norm på E, og den er ækvivalent med ovenstående norm (nemlig $\geqq$ denne og $\leqq$ m gange denne), definerer altså ligeledes produkttopologien på E. Det samme kan mere almindeligt vises for ethvert $p \in [1, +\infty[$ om afbildningen $x \to (\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_i^p)^{1/p}$.

Vi minder om, at produktrummet $E = \prod_{i=1}^{m} E_i$ er fuldstændigt (altså et Banach-rum), hvis og kun hvis hvert af rummene E_i er fuldstændigt (sætn. 16).

Eksempelvis er det K-dimensionale talrum K^m et Banach-rum over K for enhver af normerne

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p)^{1/p} \quad (1 \leqq p < \infty)$$

og også med normen

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leqq i \leqq m} |x_i|.$$

38. For at komme til eksempler på uendeligdimensionale normerede rum betragter vi (som forberedelse) svarende til en given, ikke tom mængde T vektorrummet K^T bestående af alle afbildninger $x: T \to K$. Således er K^T identisk med produktrummet $\prod_{t \in T} K_t$, hvor $K_t = K$ for ethvert $t \in T$. Produktrumstopologien på K^T defineres åbenbart ved systemet af seminormer

$$x \to |x(t)| \qquad (x \in K^T),$$

hvor t gennemløber T. Denne topologi kaldes også topologien for punktvis konvergens, fordi eksempelvis en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på K^T konvergerer mod $x \in K^T$, hvis og kun hvis $x_n(t) \to x(t)$ for ethvert $t \in T$. Udstyret med denne topologi er K^T åbenbart et fuldstændigt, lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. (sætn. 9 og sætn. 16); men normerbart er det kun i det ovenfor betragtede tilfælde, hvor T er en endelig mængde.

For enhver mængde T danner de begrænsede funktioner $x : T \to K$ (hvor altså $\sup_{t\in T} |x(t)| < \infty$) et underrum af vektorrummet K^T. På dette underrum, som vi vil betegne med $B(T) = B(T,K)$, indfører vi følgende norm:

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in T} |x(t)| \qquad (x \in B(T)).$$

Det eftervises umiddelbart, at dette virkelig er en norm på B(T). Den tilhørende normtopologi på B(T) kaldes topologien for ligelig konvergens, fordi en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på B(T) åbenbart konvergerer mod $x \in B(T)$ i normtopologien, hvis og kun hvis $x_n(t) \to x(t)$ (punktvis og) ligeligt med hensyn til $t \in T$. Da $|x(t)| \leqq \|x\|_\infty$ for ethvert $t \in T$, er topologien for ligelig konvergens på B(T) finere end topologien for punktvis konvergens (delrumstopologien på underrummet B(T) og K^T).

Vi viser nu, at det normerede rum B(T) er fuldstændigt, altså et Banach-rum. Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en fundamentalfølge på B(T). Til $\varepsilon > 0$ findes altså $N \in \mathbb{N}$ med

$$\|x_m - x_n\|_\infty = \sup_{t\in T} |x_m(t) - x_n(t)| \leqq \varepsilon \quad \text{for } m,n \geqq N.$$

For ethvert $t \in T$ er følgen $(x_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ derfor en fundamentalfølge på K. Da K er fuldstændigt, eksisterer for ethvert $t \in T$ en grænseværdi $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$. Hermed er vist, at den givne følge

(x_n) konvergerer mod funktionen $x \in K^T$ i topologien for punktvis konvergens på K^T. Tilbage står at vise, at $x \in B(T)$ og at $\|x - x_n\|_\infty \to 0$ for $n \to \infty$. Ved at lade $n \to \infty$ i uligheden $|x_m(t) - x_n(t)| \leqq \varepsilon$ for $m, n \geqq N$ finder vi, at $|x(t) - x_n(t)| \leqq \varepsilon$ for $n \geqq N$. Dette viser dels, at $x - x_n$ er en begrænset funktion for $n \geqq N$, altså at $x - x_n \in B(T)$ og dermed $x \in B(T)$, og dels at $\|x - x_n\|_\infty \leqq \varepsilon$ for $n \geqq N$, hvorfor $x_n \to x$ i normtopologien på $B(T)$. Da således enhver fundamentalfølge på $B(T)$ er konvergent, er $B(T)$ fuldstændigt ifølge sætn. 11, idet $B(T)$ som normeret rum jo har en numerabel basis for filtret af omegne af $\underline{0}$, f.eks. kuglerne med centrum $\underline{0}$ og radius $1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

Lad os nu særlig betragte det tilfælde, hvor mængden T er et topologisk rum. De begrænsede funktioner $x : T \to K$, som tillige er kontinuerte, udgør åbenbart et underrum af $B(T)$, og dette underrum er afsluttet i normtopologien på $B(T)$, fordi kontinuitet bevares ved ligelig konvergens. De begrænsede, kontinuerte funktioner på et topologisk rum T danner derfor ifølge sætn. 13 et Banach-rum under benyttelse af normen $\| \ \|_\infty$. Vi fremhæver det vigtige tilfælde, hvor T er kompakt og enhver kontinuert funktion på T derfor begrænset:

Sætning. Vektorrummet $C(T) = C(T,K)$ af alle kontinuerte funktioner $x: T \to K$ på et kompakt topologisk rum T er et Banach-rum med normen

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in T} |x(t)| = \max_{t \in T} |x(t)|, \quad x \in C(T).$$

39. Fuldstændiggørelse. Lad E betegne et Hausdorff t.v.r. over $K(= \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C})$. Ved en fuldstændiggørelse af E forstås et par $(\hat{E},k)$, hvor $\hat{E}$ er et fuldstændigt Hausdorff t.v.r. (over samme koefficientlegeme som E), og hvor k er en isomorfi (altså

lineær homeomorfi) af E på et overalt tæt underrum k(E) af $\hat{E}$.

Dersom E er et normeret rum, forlanges desuden, at $\hat{E}$ er at normeret rum (og dermed et Banachrum), og at k er en <u>isometri</u>, altså $\|k(x)\| = \|x\|$ for alle $x \in E$.

<u>Sætning</u>. Ethvert Hausdorff t.v.r. har en fuldstændiggørelse, og ligeså ethvert normeret rum.

Vi skal ikke gennemføre beviset for denne sætning, men dog skitsere beviset i tilfælde af et normeret rum. Her gås frem på lignende måde som ved Cantor's udvidelse af $\mathbb{Q}$ til $\mathbb{R}$, idet elementerne i $\hat{E}$ defineres som klasser af ækvivalente fundamentalfølger på E. To følger på E kaldes ækvivalente, dersom deres differens konvergerer mod <u>0</u>. Summen x + y af to ækvivalensklasser x og y, repræsenterede ved fundamentalfølgerne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på E, defineres som den ækvivalensklasse, der indeholder følgen $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Denne sidste ses let at være en fundamentalfølge, ligesom det vises, at resultatet x + y ikke afhænger af de valgte repræsentanter for x og y. På analog måde defineres λx for $\lambda \in K$, $x \in \hat{E}$, og det påvises, at $\hat{E}$ er et vektorrum. Normen $\|x\|$ af $x \in \hat{E}$ defineres ved

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|,$$

som eksisterer, fordi normen på E er ligelig kontinuert (lemma 32) og derfor overføre fundamentalfølgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i en fundamentalfølge $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ på det fuldstændige rum K. (Eller direkte: $|\|x_m\| - \|x_n\|| \leq \|x_m - x_n\|$.) Igen er resultatet uafhængigt af den valgte repræsenterende fundamentalfølge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, og det eftervises let, at $\hat{E}$ er et normeret rum.

Idet man for $x \in E$ definerer k(x) som klassen af alle følger, der konvergerer mod x, repræsenteret ved følgen $(x,x,\cdots,x,\cdots)$,

40. En sætning af Baire og dens rolle i funktionalanalysen.

Sætning (Baire). Lad E være et fuldstændigt, metrisk rum. Foreningsmængden $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ for en følge af afsluttede mængder $A_n \subsetneq E$ uden indre punkter er en mængde uden indre punkter.

Ved overgang til komplementærmængder lyder komklusionen, at fællesmængden $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ for en følge af åbne, overalt tætte mængder $A_n \subsetneq E$ er overalt tæt i E.

Bevis (i den sidste formulering). Vi betegner med $K(x,\rho) = \{y \in E \mid \text{dist}\,(x,y) < \rho\}$ den åbne kugle med centrum $x \in E$ og radius $\rho > 0$. Opgaven er at vise, at $\bar{A} = E$, altså at ethvert punkt $x_1 \in E$ er kontaktpunkt for $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, idet det er givet, at $\bar{A}_n = E$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi skal således påvise, at $K(x_1,\rho_1) \cap A \neq \emptyset$ for ethvert opgivet $x_1 \in E$ og $\rho_1 > 0$. Hertil bestemmes ved induktion en følge af kugler $K_n = K(x_n,\rho_n)$, $n \in \mathbb{N}$ (af hvilke K_1 er den forelagte), således at

$$\bar{K}_{n+1} \subsetneq K_n \cap A_n, \qquad \rho_n \leqq \rho_1/n$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Er K_n bestemt, vælges $x_{n+1} \in K_n \cap A_n$, hvilket er muligt fordi K_n er en omegn af x_n og derfor møder den tætte mængde A_n. Dernæst vælges $\rho_{n+1} \leqq \rho_1/(n+1)$ og så lille, at den åbne omegn $K_n \cap A_n$ af x_{n+1} omfatter den afsluttede kugle $\{y \in E \mid \text{dist}(x_{n+1}, y) \leqq \rho_{n+1}\}$, som jo atter omfatter $\bar{K}_{n+1} = \overline{K(x_{n+1},\rho_{n+1})}$. Det er nu klart, at følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er fundamental: thi for $m > n$ er $x_m \in K_m \subsetneq K_n$, og derfor $\text{dist}\,(x_m,x_n) < \rho_n \to 0$ for $n \to \infty$. Da E er forudsat fuldstændigt, eksisterer $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ er $x \in \bar{K}_{n+1} \subsetneq K_n \cap A_n \subsetneq K_1 \cap A_n$, fordi $x_m \in K_{n+1}$ for $m > n$. Dette viser, at $x \in K_1 \cap A$.

Vi skal nu anvende Baires sætning på topologiske vektorrum. Spørgsmålet melder sig da, hvilke topologiske vektorrum E er

metriserbare (i den forstand, at der på E kan indføres et afstandsmål, som bestemmer samme topologi som den givne på E). Som omtalt (stk. 36) er ethvert normerbart rum metriserbart, idet vi som afstand mellem x og y kan benytte $\|x - y\|$, hvor $\| \ \|$ betegner en norm på E, der definerer den givne topologi. Dette afstandsmål er endda forskydningsinvariant, idet det kun afhænger af x - y. Mere almindeligt gælder, at et lokalkonvekst t.v.r. er metriserbart, hvis og kun hvis topologien er Hausdorff og kan defineres ved en numerabel mængde af seminormer p_n, $n \in \mathbb{N}$. I så fald kan topologien på E igen bestemmes ved en invariant metrik dist(x,y) = d(x-y), hvor f.eks.

$$d(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} p_n(x)/(1+p_n(x)).$$

Helt generalt kan det vises, at et t.v.r. E er metriserbart (og da med en invariant metrik), hvis og kun hvis filtret $\mathcal{U}(\underline{0})$ af omegne af $\underline{0}$ har en numerabel basis med fællesmængden $\{\underline{0}\}$.

41. Sætning. (Princippet om ligelig begrænsning). Lad M være en mængde af kontinuerte, lineære afbildninger af et Banach-rum E ind i normeret rum F. Hvis $\sup_{f\in M} \|f(x)\| < +\infty$ for ethvert $x \in E$, da eksisterer en konstant c så at

$$\|f(x)\| \leq c \, \|x\| \qquad \text{for alle } x \in E \text{ og } f \in M.$$

Antagelsen $\sup_{f\in M} \|f(x)\| < +\infty$ udtrykkes også ved at sige, at M er punktvis begrænset. Konklusionen udtrykkes ved at sige, at M er ligeligt begrænset. Ved passende definition af begrebet begrænset delmængde af et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. kan sætningen for øvrigt generaliseres til to sådanne rum E og F, af hvilke E er fuldstændigt.

Bevis. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ er mængden

$$A_n = \{x \in E \mid \|f(x)\| \leqq n \quad \text{for ethvert } f \in M\}$$

åbenbart afsluttet. Ifølge den punktvise begrænsning af M er $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$. Af Baire's sætning følger da, at mindst én af mængderne A_n har indre punkter. Lad x_o være et indre punkt af A_n, og lad $\rho > 0$ være bestemt så at $\|x\| \leqq \rho \Rightarrow x_o + x \in A_n$. Da gælder for $f \in M$ og $\|x\| \leqq \rho$, at

$$\|f(x)\| = \|f(x_o + x) - f(x_o)\| \leqq \|f(x_o + x)\| + \|f(x_o)\| \leqq 2n,$$

og dermed af homogenitetsgrunde $\|f(x)\| \leqq (2n/\rho)\|x\|$ for vilkårligt $x \in E$.

42. Sætning (Banach). Lad E og F være fuldstændige, metriserbare t.v.r. (f.eks. Banach-rum), og lad $f: E \to F$ være en kontinuert, lineær afbildning. Hvis f er surjektiv, er f åben.

Bevis. Vi viser først at for enhver omegn U af $\underline{0}$ i E er afslutningen $\overline{f(U)}$ af billedet af U en omegn af $\underline{0}$ i F, dernæst at f(U) selv er en omegn af $\underline{0}$. Heraf følger på grund af lineariteten, at $f(x+U) = f(x) + f(U)$ er en omegn af f(x) for ethvert $x \in E$, og dermed at f er en åben afbildning.

Lad V være en stjerneformet symmetrisk omegn af $\underline{0}$ i E med $V + V \subseteq U$. Da V er absorberende, er $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\,V = E$ (stk. 1), og derfor $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(n\,V) = f(E) = F$. Så meget mere overdækkes F af de afsluttede mængder $\overline{f(n\,V)} = \overline{n\,f(V)} = n\,\overline{f(V)}$. Ifølge ovenstående sætning af Baire har mindst én af mængderne $n\,\overline{f(V)}$ derfor indre punkter, og det samme må da gælde om $\overline{f(V)}$. (Vi benytter flere gange, at multiplikation med $\lambda \neq 0$ er en homeomorfi.) Lad da y være et indre punkt af $\overline{f(V)}$ og dermed -y et (indre) punkt af $-\overline{f(V)} = \overline{-f(V)} = \overline{f(-V)} = \overline{f(V)}$ (her benyttes, at V er symmetrisk).

Der findes altså $W \in \mathring{U}_F(\underline{0})$ med $y + W \subsetneq \overline{f(V)}$ og derfor

$$W = (-y) + (y + W) \subsetneq \overline{f(V)} + \overline{f(V)}$$
$$\subsetneq \overline{f(V) + f(V)} = \overline{f(V + V)} \subsetneq \overline{f(U)}.$$

(Thi da additionen i F er kontinuert, bliver $y_1 + y_2$ et kontaktpunkt for $f(V) + f(V)$, dersom y_1 og y_2 er kontaktpunkter for $f(V)$.) Hermed er da vist, at $\overline{f(U)}$ er en omegn af $\underline{0}$ i F.

I resten af beviset tænkes på hvert af rummene E og F indført en forskydningsinvariant metrik, som bestemmer den givne topologi på det pågældende rum. I begge tilfælde betegner vi med $d(x)$ afstanden mellem $\underline{0}$ og x, (altså $d(x) = \|x\|$ i tilfælde af Banach-rum). Ifølge trekantsuligheden er $d(x + y) \leqq d(x) + d(y)$, og tilsvarende for summer af flere vektorer. For $\rho > 0$ betegner vi med $K(x,\rho)$ kuglen med centrum x og radius ρ, igen såvel i E som i F.

Opgaven er til opgivet $r > 0$ at vise, at $f(K(\underline{0},r))$ er en omegn af $\underline{0}$ i F, altså at der findes $\rho > 0$ så at $f(K(\underline{0},r)) \supseteq K(\underline{0},\rho)$ Hertil sættes $r_n = 2^{-n}r$ for $n \in \mathbb{N}$. Ifølge det allerede beviste er $\overline{f(K(\underline{0},r_n))}$ en omegn af $\underline{0}$ i F, og der findes således $\rho_n > 0$ så at

$$\overline{f(K(\underline{0},r_n))} \supseteq K(\underline{0},\rho_n).$$

Vi kan desuden antage, at $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$.

Lad nu $y \in K(\underline{0},\rho) \subsetneq F$. Vi skal bestemme $x \in K(\underline{0},r) \subsetneq E$ så at $f(x) = y$. Hertil bestemmes successivt $x_1, x_2, \ldots$ i E således at, idet $x_0 = \underline{0}$,

$$(*) \qquad d(x_n - x_{n-1}) < r_n, \qquad d(f(x_n) - y) < \rho_{n+1}.$$

Hvis x_i er bestemt i overensstemmelse med disse krav for

$i = 1,2,\ldots,n-1$, gælder $d(f(x_{n-1})-y) < \rho_n$. Da således $y - f(x_{n-1}) \in K(\underline{0},\rho_n) \subseteq \overline{f(K(\underline{0},r_n))}$, eksisterer $u_n \in K(\underline{0},r_n)$ med $d(y-f(x_{n-1}) - f(u_n)) < \rho_{n+1}$. Idet vi sætter $x_n = x_{n-1} + u_n$, bliver (*) opfyldt på grund af lineariteten af f. Nu er $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fundamentalfølge på E, idet der for $m > n$ gælder

$$d(x_m - x_n) = d(\sum_{i=n+1}^{m} u_i) \leq \sum_{i=n+1}^{m} d(u_i) < \sum_{i=n+1}^{m} r_i < 2^{-n}r,$$

som går mod 0 for $n \to \infty$. Da E er fuldstændigt, eksisterer $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E$, og der gælder

$$d(x) = \lim_{n\to\infty} d(x_n) = \lim_{n\to\infty} d(\sum_{i=1}^{n} u_i) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} d(u_i) < \sum_{n=1}^{\infty} r_n = r,$$

altså $x \in K(\underline{0},r)$. Da f er kontinuert, bliver $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ ifølge (*), fordi $\lim_{n\to\infty} \rho_{n+1} = 0$.

Korollar 1. En bijektiv, lineær, kontinuert afbildning af et fuldstændigt, metriserbart t.v.r. på et andet er en homeomorfi (og dermed en topologisk isomorfi).

Korollar 2. Lad E være et fuldstændigt, metriserbart t.v.r. Hvis E er algebraisk direkte sum af to afsluttede underrum S og T, da er denne sum $E = S + T$ topologisk direkte.

Thi som delrum af E er S og T fuldstændige ifølge sætn. 13. Da de også er metriserbare, bliver $S \times T$ et fuldstændigt, metriserbart rum. Afbildningen $f: S \times T \to S + T = E$ givet ved $f(s,t) = s + t$ er bijektiv, lineær og kontinuert, og derfor en homeomorfi ifølge det første korollar.

43. Sætning (om den afsluttede graf). En lineær afbildning $f: E \to F$ af et fuldstændigt, metriserbart t.v.r. ind i et andet sådant er kontinuert, hvis og kun hvis grafen

$$G = \{(x,y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$$

for f er en afsluttet delmængde af $E \times F$.

Bevis. Med $p: E \times F \to E$ og $q: E \times F \to F$ betegnes projektionerne af $E \times F$ på E og F givet ved $p(x,y) = x$, $q(x,y) = y$. Vi viser først, at f bliver kontinuert, såfremt G er afsluttet. Da p og q er kontinuerte og lineære, bliver restriktionen $\varphi = p|G$ af p til G kontinuert og lineær. Desuden er φ åbenbart bijektiv. Dens omvendte afbildning $\varphi^{-1}: E \to G$ er givet ved $\varphi^{-1}(x) = (x,f(x))$, og den er ligeledes kontinuert ifølge korollar 1 ovenfor. Men så bliver f selv kontinuert, idet der åbenbart gælder $f = q \circ \varphi^{-1}$.

At omvendt grafen G for en kontinuert afbildning $f: E \to F$ er afsluttet, er et elementært resultat, som gælder uafhængigt af lineariteten af f, og som blot forudsætter, at E og F er topologiske rum, og F Hausdorff. Lad nemlig $(x,y) \in E \times F$ være et kontaktpunkt for G. Da inducerer filtret af omegne af (x,y) i $E \times F$ et filter Φ på G, og dette vil - opfattet som filterbasis på $E \times F$ - konvergere mod (x,y). Da p og q er kontinuerte, vil $p(\Phi) \to x$ og $q(\Phi) \to y$. Da f er kontinuert, gælder derfor $(f \circ p)(\Phi) = f(p(\Phi)) \to f(x)$. Nu har $f \circ p$ og q åbenbart samme restriktion til G, og da Φ består af delmængder af G, bliver $(f \circ p)(\Phi) = q(\Phi)$. Da F er Hausdorff, har den konvergente filterbasis $(f \circ p)(\Phi) = q(\Phi)$ kun ét grænsepunkt, hvorfor $f(x) = y$.

Variant

§§5, 24 kan erstattes af følgende mere direkte behandling af de endeligdimensionale Hausdorff t.v.r.

For ethvert $m \in \mathbb{N}$ er ifølge sætn. 9 (eller direkte) talrummet K^m et (for øvrigt lokalkonvekst) Hausdorff t.v.r. over K, fordi koefficientlegemet K selv er et sådant.

Lemma. Enhver lineær afbildning $f:K^m \to E$ af K^m ind i et t.v.r. E over K er kontinuert.

Bevis. Det er åbenbart (jvf. §15) tilstrækkeligt at påvise kontinuiteten i $(0,\cdots,0)$. Til given omegn U af $\underline{0}$ i E findes en omegn V af $\underline{0}$ i E med

$$\underbrace{V + V + \cdots + V}_{m \text{ led}} \subseteq U .$$

Da V er absorberende, findes for ethvert $n = 1,\cdots,m$ en omegn W_n af 0 i K således at $\lambda f(e_n) \in V$ for alle $\lambda \in W_n$. Vi har her indført basisvektorerne

$$e_1 = (1,0,\cdots,0) \ , \ \cdots \ , \ e_m = (0,\cdots,0,1)$$

i K^m. For ethvert $x = (x_1,\cdots,x_m) \in K^m$ haves $x = \sum_{n=1}^{m} x_n e_n$, og derfor gælder

$$f(x) = \sum_{n=1}^{m} x_n f(e_n) \in \sum_{n=1}^{m} V \subseteq U ,$$

såfremt blot $x \in \prod_{n=1}^{m} W_n$. Da denne sidste mængde er en omegn af $(0,\cdots,0)$ i K^m, er f kontinuert i dette punkt. |

Sætning. Ethvert Hausdorff t.v.r. E over K (=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) af endelig dimension m er topologisk isomorft med talrummet K^m.

Bevis. Der eksisterer en algebraisk isomorfi (bijektiv lineær afbildning) $f:K^m \to E$. Vi viser, at enhver sådan er en homeomorfi. Ifølge ovenstående lemma er f kontinuert. Tilbage står at vise, at $f^{\circ -1}$ er kontinuert f.eks. i $\underline{0}$, altså at billedet f(U) af enhver (basis-)omegn U af $(0,\cdots,0)$ i K^m er åbent i E. Da K^m åbenbart er lokalkompakt, kan vi antage, at U er kompakt. Randen U^* er en afsluttet delmængde af U og dermed ligeledes kompakt, og $(0,\cdots,0) \notin U^*$. Da f er kontinuert og E Hausdorff, bliver $f(U^*)$ kompakt og derfor afsluttet i E; og da f er lineær og injektiv, gælder $\underline{0} = f(0,\cdots,0) \notin f(U^*)$. Da $E \setminus f^*(U)$ således er en (åben) omegn af $\underline{0}$ i E, eksisterer en stjerneformet omegn V af $\underline{0}$ i E således at $V \subsetneq E \setminus f(U^*)$, altså $V \cap f(U^*) = \emptyset$, og dermed

$$f^{\circ -1}(V) \cap U^* = \emptyset \ .$$

Da f er lineær, er $f^{\circ -1}(V)$ ligeledes stjerneformet. Derfor gælder $f^{\circ -1}(V) \subsetneq U$. Thi antog man, at der eksisterer $x \in f^{\circ -1}(V) \cap \complement U$, så ville liniestykket

$$\{\lambda x \mid 0 \leqq \lambda \leqq 1\} \subsetneq f^{\circ -1}(V)$$

møde $\complement U$ (for $\lambda = 1$) og U (for $\lambda = 0$) og derfor også møde randen U^* i strid med at $f^{\circ -1}(V) \cap U^* = \emptyset$. Da f er surjektiv, slutter vi af $f^{\circ -1}(V) \subsetneq U$, at

$$V = f(f^{\circ -1}(V)) \subsetneq f(U) \ ,$$

og dermed at f(U) ligesom V er en omegn af $\underline{0}$ i E. |

Korollar. Enhver lineær afbildning af et endeligdimensionalt Hausdorff t.v.r. E ind i et t.v.r. F er kontinuert. Enhver algebraisk isomorfi mellem to endeligdimensionale Hausdorff t.v.r. E og F er en homeomorfi (og dermed en topologisk isomorfi).

Bevis. Ifølge sætningen reducerer det første udsagn sig til tilfældet $E = K^m$ behandlet i det ovenstående lemma. Det sidste udsagn fremgår af det første ved anvendelse på den inverse afbildning. |

Bemærkning. Sætningen (eller korollaret) kan åbenbart også formuleres derhen, at der på K^m kun eksisterer én topologi, der gør K^m til et Hausdorff t.v.r. (nemlig den sædvanlige). Thi den identiske afbildning af K^m er en algebraisk isomorfi. Derimod er den diffuse topologi på K^m et eksempel på en topologi, der gør K^m til et (for øvrigt lokalkonvekst) t.v.r., som ikke er Hausdorff.

Opgaver til Topologiske vektorrum.

Ved vektorrum forstås vektorrum over $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

1. Vis, at enhver foreningsmængde af stjerneformede, henholdsvis symmetriske, delmængder af et vektorrum er stjerneformet, henholdsvis symmetrisk.

2. Vis, at enhver absorberende delmængde af et vektorrum omfatter en stjerneformet symmetrisk absorberende mængde.

3. (Konveks funktion). Lad A betegne en konveks delmængde af et vektorrum E. En funktion $f:A \to \mathbb{R}$ kaldes konveks dersom det for ethvert $\lambda \in [0,1]$ og $x_1, x_2 \in A$ gælder, at

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) .$$

Bevis, at definitionen er ensbetydende med kravet om, at "overgrafen"

$$\{(x,y) \in A \times R \mid y \geqq f(x)\}$$

er en konveks delmængde af $E \times \mathbb{R}$. (I stedet for $y \geqq f(x)$ kunne her også skrives $y > f(x)$.)

4. Lad A betegne en konveks delmængde af et vektorrum E. Idet $x_j \in A$ og $\lambda_j \in [0,1]$ for $j = 1,\cdots,m$, og idet $\Sigma\lambda_j = 1$, skal man vise, at $\Sigma\lambda_j x_j \in A$. Lad endvidere $f:A \to \mathbb{R}$ være konveks. Vis, at $f(\Sigma\lambda_j x_j) \leqq \Sigma\lambda_j f(x_j)$.

5. Lad $\{A_j\}_{j\in J}$ være en mængde af konvekse delmængder af et vektorrum. Vis, at det konvekse hylster af foreningsmængden

$A := \bigcup_{j \in J} A_j$ består af samtlige konvekse kombinationer $\sum_{j \in J} \lambda_j x_j$ af endeligt mange punkter $x_j \in A_j$ (altså $\lambda_j \in [0,1]$, $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$, og $\lambda_j \neq 0$ kun for endeligt mange $j \in J$). Specialiser derpå til det tilfælde hvor hver af mængderne A_j kun består af ét punkt x_j.

6. Lad A og B betegne to konvekse delmængder af et vektorrum E, og lad $A \cap B = \emptyset$. Bevis at der eksisterer to konvekse mængder U og V, således at $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$ og $U \cup V = E$. (Benyt Zorns lemma).

7. Giv et eksempel på en mængde $A \subsetneq \dot{R}^2$, som er afsluttet, men hvor conv A ikke er afsluttet.

8. Lad A betegne en delmængde af et t.w.r. Bevis:
   a) A åben $\Rightarrow$ conv A åben.
   b) A konveks $\Rightarrow$ Å konveks.

9. Lad A betegne en konveks delmængde af et t.v.r. Lad $x_0 \in Å$, $x \in \bar{A}$. Bevis, at samtlige punkter $y \neq x$ på liniestykket med endepunkter x_0 og x er indre punkter af A, altså $y \in Å$. (Betragt f.eks. først tilfældet $x \in A$).

10. Lad A betegne en konveks delmængde af et t.v.r., og lad $Å \neq \emptyset$. Vis, at $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ og $\mathring{\bar{A}} = Å$. (Benyt opgave 9).

11. Lad $f: A \to \dot{R}$ betegne en konveks funktion defineret i en konveks, åben delmængde $A \neq \emptyset$ af et t.v.r. Bevis, at f er kon-

tinuert, hvis og kun hvis f er opadtil begrænset i en passende, ikke tom, åben delmængde af A. (Vejledning vedr. "hvis": Vis først, at f er kontinuert i $x_0 \in A$ dersom f er opadtil begrænset i en omegn af x_0. Vis dernæst, at f er opadtil begrænset i en passende omegn af et vilkårligt punkt af A).

12. Lad $f:A \to \dot{R}$ være en konveks funktion defineret i en konveks, åben delmængde $A \neq \emptyset$ af $\dot{R}^n$. Bevis, at f er kontinuert. (Benyt opgave 11 og det forhold, at filtret af omegne af et punkt i $\dot{R}^n$ har en basis bestående af mængder, som hver er det konvekse hylster af en endelig mængde).

13. Lad E betegne et vektorrum, og lad $\dot{B}(\underline{0})$ betegne mængden af alle konvekse delmængder U af E som er symmetriske og absorberende. Bevis, at $\dot{B}(\underline{0})$ udgør en basis for filtret af omegne af $\underline{0}$ i den fineste topologi på E, hvorved E er et lokalkonvekst t.v.r. Bevis tillige, at E herved bliver et Hausdorff rum. (Vejledning til dette sidste: Lad $e \in E$, $e \neq \underline{0}$, og lad H betegne en hyperplan i E gennem $\underline{0}$, som ikke indeholder e. Da vil $H +]-1,1[e \in \dot{B}(\underline{0})$).

14. Lad E være et vektorrum udstyret med den i opg. 13 omtalte fineste lokalkonvekse topologi. Bevis følgende:

a) Enhver seminorm på E er kontinuert.

b) Enhver linearform på E er kontinuert.

c) Ethvert underrum af E er afsluttet.

d) Et punkt $x_0 \in E$ er et indre punkt af en konveks mængde $A \subsetneq E$ hvis og kun hvis der på enhver linie gennem x_0

findes et i A indeholdt liniestykke, hvortil x_0 hører uden at være endepunkt for liniestykket.

15. Lad E være et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r.. Bevis, at følgende udsagn er ækvivalente (jvf. T.V.R., side 56 f.)

1°) Der eksisterer et forskydningsinvariant afstandsmål på E, som netop bestemmer den givne topologi på E.

2°) E er metriserbart.

3°) Der eksisterer en numerabel basis for filtret af omegne af $\underline{0}$ i E.

4°) Topologien på E kan defineres ved en numerabel mængde af seminormer p_n, $n \in \mathbb{N}$.

Vejledning: Vis, at $1° \Rightarrow 2° \Rightarrow 3° \Rightarrow 4° \Rightarrow 1°$. Ved $4° \Rightarrow 1°$ sættes dist(x,y) = d(x-y), hvor

$$d(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} .$$

Eftervis og benyt derpå følgende uligheder:

a) $\lambda/(1+\lambda) \leqq \mu/(1+\mu)$ for $0 \leqq \lambda \leqq \mu$.

b) $(\lambda+\mu)/(1+\lambda+\mu) \leqq \lambda/(1+\lambda) + \mu/(1+\mu)$ for $\lambda,\mu \geqq 0$.

c) $\lambda/(1+\lambda) \leqq 2\lambda$ for $\lambda \in [0,1]$

d) $p_n(x) \leqq \varepsilon$ gælder for ethvert $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$ for hvilke $d(x) \leqq \varepsilon/2^{n+1}$.

- Det kan for øvrigt vises, at $1°, 2°, 3°$ er ækvivalente også uden antagelsen om lokalkonveksitet.

16. (Filtrerende mængde af seminormer.) Lad p og q være seminormer på et vektorrum E.

a) Vis, at den ved

$$p =< q \iff \exists c \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in E: p(x) \leqq cq(x)$$

definerede relation på mængden S af alle seminormer på E er reflexiv og transitiv, altså en præordensrelation. To seminormer p og q kaldes ækvivalente, dersom $p \prec q \wedge q \prec p$.

b) Vis, at S er filtrerende ved relationen $\prec$.

c) Lad $P \subseteq S$ være en filtrerende mængde af seminormer (d.v.s. at to vilkårlige seminormer $p,q \in P$ har en fælles majorant i P). Vis, at mængderne $\{x \in E | p(x) \leq \alpha\}$ danner en basis for filtret af omegne af $\underline{0}$ i den ved P definerede lokalkonvekse topologi på E.

d) Lad P være en filtrerende mængde af seminormer på et vektorrum E og Q en vilkårlig mængde af seminormer på et vektorrum F. Vis, at en lineær afbildning $f:E \to F$ er kontinuert i de ved P og Q definerede topologier på E og F, hvis og kun hvis

$$\forall q \in Q \quad \exists p \in P: \quad q \circ f \prec p .$$

e) Lad Q være en vilkårlig mængde af seminormer på et vektorrum. Vis, at Q kan udvides til en filtrerende mængde P af seminormer på E, således at P og Q er ækvivalente, d.v.s. definerer samme topologi på E.

17. (Kvotient af Banachrum.) Lad E være et normeret rum og F et afsluttet underrum E. For ethvert sideunderrum $\dot{x} \in E/F$ sættes

$$\|\dot{x}\| = \inf\{\|x\| \mid x \in \dot{x}\} .$$

Vis, at der herved defineres en norm på E/F og at den derved bestemte lokalkonvekse topologi på E/F er identiske med kvotienttopologien. Vis dernæst, at hvis E er fuldstændigt, da gælder det samme om det normerede rum E/F.

18. En delmængde B af et t.v.r. E kaldes <u>begrænset</u>, dersom den absorberes af enhver omegn af $\underline{0}$ i E i den forstand, at

$$\forall V \in \mathring{U}(\underline{0})\ \exists \lambda \in \mathring{R}_+ : \lambda B \subseteq V .$$

Det er klart, at enhver delmængde af en begrænset mængde er begrænset. Bevis følgende:

a) Foreningen af endeligt mange begrænsede mængder er begrænset.

b) Enhver endelig mængde er begrænset.

c) Enhver kompakt mængde er begrænset.

d) Elementerne i enhver fundamentalfølge udgør en begrænset mængde.

e) Afslutningen af en begrænset mængde er begrænset.

f) I et lokalkonvekst rum er det konvekse hylster for en begrænset mængde begrænset.

19. Lad P være en mængde af seminormer på et vektorrum E. Bevis, at en mængde $B \subseteq E$ er begrænset i den ved P definerede topologi, hvis og kun hvis enhver af seminormerne $p \in P$ er begrænset på B, altså hvis

$$\forall p \in P\ \ \exists c \in \mathring{R}_+\ \ \forall x \in B:\ p(x) \leqq c .$$

20. Bevis, at en delmængde B af et t.v.r. E over K er begrænset hvis og kun hvis det for enhver punktfølge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på B og enhver talfølge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på K med $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ gælder, at $\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \underline{0}$ i E.

21. Bevis, at en delmængde B af et t.v.r. E er begrænset hvis (og kun hvis) enhver numerabel delmængde af B er begrænset. (Benyt opg. 20.)

22. Lad $f:E \to F$ være en kontinuert lineær afbildning af et t.v.r. E ind i et t.v.r. F, og lad $B \subsetneq E$ være begrænset i E. Vis, at f(B) er begrænset i F.

23. Lad $E = \prod_{i\in I} E_i$ være et produkt af t.v.r. E_i. Vis, at en mængde $B \subsetneq E$ er begrænset, hvis og kun hvis hver af dens projektioner $p_i(B)$ er begrænset.

24. Vis, at summen af to begrænsede mængder er begrænset.

25. Vis, at et t.v.r. E er normerbart, hvis og kun hvis E er lokalkonvekst og Hausdorff og der eksisterer en begrænset omegn af $\underline{0}$.

26. Vis, at fuldstændiggørelse af et Hausdorff t.v.r. E er entydigt bestemt pånær isomorfi i følgende forstand: Lad $\varphi_i:E \to E_i$ $(i=1,2)$ være fuldstændiggørelser af E. Da eksisterer der en (topologisk) isomorfi ψ af E_1 på E_2 så at $\psi\circ\varphi_1=\varphi_2$.

27. En delmængde A af et t.v.r. E kaldes prækompakt, dersom der til enhver omegn V af $\underline{0}$ i E findes en endelig mængde $X = \{x_1,\cdots,x_m\} \subsetneq E$ således at

$$A \subsetneq \bigcup_{i=1}^{m} (x_i+V) = X + V .$$

a) Vis, at det i givet fald kan opnås, at $X \subsetneq A$.

b) Vis, at det er tilstrækkeligt at betragte omegne V fra en forelagt subbasis for $\dot{U}(\underline{0})$, d.v.s. en delmængde $\dot{S}(\underline{0})$ af $\dot{U}(\underline{0})$ således at fællesmængderne af endeligt mange mængder udtagne af $\dot{S}(\underline{0})$ danner en basis for $\dot{U}(\underline{0})$.

c) Lad E være Hausdorff, og lad $\varphi: E \to \hat{E}$ være en fuldstændiggørelse af E. Vis, at $A \subseteq E$ er prækompakt, hvis og kun hvis $\varphi(A)$ har kompakt afslutning i $\hat{E}$.

28. Bevis de til a) - e) i opg. 18 samt opg. 22 og 24 svarende udsagn, idet "begrænset" overalt erstattes med "prækompakt". Vis også, at enhver prækompakt mængde er begrænset.

29. Lad $A_1, \cdots, A_m$ være kompakte konvekse delmængder af et Hausdorff t.v.r. E. Bevis at conv $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ ligeledes er kompakt.

30. Vis, at det stjerneformet symmetriske hylster af en kompakt (eller blot prækompakt) delmængde af et Hausdorff t.v.r. E er kompakt (resp. prækompakt).

31. Vis, at det konvekse hylster af en prækompakt delmængde af af et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. E er prækompakt. Vis, derved, at hvis E desuden er fuldstændigt, har det konvekse hylster af enhver kompakt delmængde af E kompakt afslutning i E.

32. Lad E være et vektorrum over K (=Ŕ eller Ĉ). For ethvert j fra en indeksmængde J lad $f_j: E \to F_j$ være en lineær afbildning af E ind i et t.v.r. F_j over K. Idet man udstyrer E med den tilhørende initialtopologi (den groveste topologi på E for hvilken alle afbildningerne f_j er kontinuerte), skal det vises, at E er et t.v.r.. Vis også, at hvis topologien på F_j for hvert $j \in J$ er defineret ved en seminorm q_j (man kunne også betragte flere), så er topologien på E defineret ved mængden af seminormer $q_j \circ f_j$, $j \in J$. Specialtil-

fælde: underrum, produktrum.

33. (Topologien for kompakt konvergens i C(X).) Lad X være et ikke tomt, lokalkompakt topologisk rum. Med $\dot{K} = \dot{K}(X)$ betegner vi mængden af alle kompakte delmængder af X. Med C(X) betegnes det underrum af $\dot{R}^X$ (henholdsvis $\dot{C}^X$), der består af alle kontinuerte funktioner $X \to \dot{R}$ (henh. $X \to \dot{C}$). Vi udstyrer C(X) med den groveste topologi for hvilken enhver af de lineære afbildninger

$$f \to f|K \quad \text{(restriktionen af } f \text{ til } K\text{)}$$

af C(X) ind i C(K), $K \in \dot{K}(X)$, er kontinuert. Herved benyttes på C(K) den ligelige topologi, bestemt ved supremumnormen $\| \ \|_\infty$. -Den således definerede initialtopologi på C(X) kaldes topologien for ligelig konvergens på kompakte delmængder af X, eller kort topologien for kompakt konvergens.

a) Vis, at der for ethvert $K \in \dot{K}(X)$ defineres en seminorm p_K på C(X) ved

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| \qquad (f \in C(X)) \ ,$$

og at mængden af disse seminormer er filtrerende (opg.16) og bestemmer den omhandlede topologi på C(X), som derfor er lokalkonveks. Vis også, at C(X) er Hausdorff.

b) Udfyld detaillerne i nedenstående bevisskitse for at C(X) er fuldstændigt: Ovennævnte restriktionsafbildning $f \to f|K$ inducerer for ethvert $K \in \dot{K}(X)$ en afbildning af et forelagt fundamentalfilter Φ på C(X) over på en fundamentalfilterbasis Φ_K på C(K). Der eksisterer en funktion f på X med $f|K = \lim \Phi_K$ for ethvert $K \in \dot{K}(X)$. Da X er lokalkompakt, bliver f kontinuert. Ifølge en sætning om initialtopologi gælder $\Phi \to f$ i C(X).

c) Vis, at $C(X)$ er metriserbart hvis X er numerabelt i det uendelige.

d) Vis, at $C(X)$ er normerbart hvis og kun hvis X er kompakt, og at i så fald den omhandlede topologi på $C(X)$ er den ligelige, d.v.s. defineret ved supremumnormen $\| \|_\infty$.

34. Lad X være et ikke tomt, lokalkompakt rum. Med $C_0(X)$ betegnes mængden af alle kontinuerte funktioner på X med kompakt støtte.

a) Gør rede for, at $C_0(X)$ er et underrum af $B(X)$. Vis, at afslutningen $\overline{C}_0(X)$ af $C_0(X)$ inden for $B(X)$ (udstyret med den ligelige topologi) består af alle funktioner $f \in C(X)$ som går mod 0 når x fjerner sig i det uendelige i X, d.v.s.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathring{K}(X): \quad x \in X \setminus K \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

b) Vis, at hvis X er numerabelt i det uendelige, bliver $C_0(X)$ ikke fuldstændigt i den ligelige topologi (medmindre X er kompakt). (Konstruer en funktion $f \in \overline{C}_0(X) \setminus C_0(X)$.)

c) Vis, at $C_0(X)$ er et overalt tæt underrum af $C(X)$ (udstyret med topologien for kompakt konvergens). Vis derved, at $C_0(X)$ og $\overline{C}_0(X)$ ikke er fuldstændige i de inducerede topologier for kompakt konvergens (medmindre X er kompakt).

35. (Den stærke topologi på $C_0(X)$.) Lad X være et ikke tomt, lokalkompakt rum. For enhver kompakt mængde $K \subsetneq X$ er

$$C_0(X,K) := \{f \in C_0(X) \mid \mathrm{st}(f) \subsetneq K\}$$

et underrum af $C_0(X)$. Med P betegner vi mængden af alle de

seminormer på $C_0(X)$ hvis restriktion p_K til hvert $C_0(X,K)$ er kontinuert i den ligelige topologi på $C_0(X,K)$. Den ved P bestemte lokalkonvekse topologi på $C_0(X)$ kaldes den stærke topologi på $C_0(X)$.

a) Vis, at den stærke topologi på $C_0(X)$ er Hausdorff og er den fineste lokalkonvekse topologi på $C_0(X)$, som på hvert $C_0(X,K)$ netop inducerer den ligelige topologi på dette underrum. (Man siger derfor, at den stærke topologi på $C_0(X)$ er den induktive limes af de ligelige topologier på rummene $C_0(X,K)$. - Vejledning: Benyt at supremumnormen på $C_0(X)$ tilhører P).

b) Vis, at en linearform μ på $C_0(X)$ (eller en lineær afbildning μ af $C_0(X)$ ind i et andet lokalkonvekst t.v.r.) er kontinuert i den stærke topologi på $C_0(X)$ hvis og kun hvis restriktionen af μ til hvert $C_0(X,K)$ er kontinuert. - De kontinuerte linearformer μ på $C_0(X)$ betegnes også som Radon mål. De kontinuerte linearformer på $C(X)$ kan identificeres med Radon mål med kompakt støtte.

36. (Vanskelig.) Lad X være et ikke tomt lokalkompakt rum, som er numerabelt i det uendelige. Vi sætter

$$C_+(X) = \{h \in C(X) \mid \forall x \in X: \ h(x) > 0\} ,$$

og for ethvert $h \in C_+(X)$:

$$p_h(f) = \sup_{x\in X}(|f(x)|h(x)) \qquad (f \in C_0(X)) .$$

a) Vis, at p_h for ethvert $h \in C_+(X)$ er en norm på $C_0(X)$, og at $p_h \in P$ (jvf. foregående opgave). Vis også, at $\{p_h \mid h \in C_+(X)\}$ er filtrerende.

b) Vis, at den ved $\{p_h \mid h \in C_+(X)\}$ bestemte lokalkonvekse

topologi på $C_0(X)$ netop er den stærke topologi.

c) Vis, at $C_0(X)$ er fuldstændigt i den stærke topologi.

d) Vis, at den stærke topologi på $C_0(X)$ ikke er metriserbar (medmindre X er kompakt).

e) Vis, at den stærke topologi på $C_0(X)$ er strengt finere end den ligelige (medmindre X er kompakt).

37. (Positivt Radonmål.) Lad X være et ikke tomt, lokalkompakt rum, og μ en linearform på $C_0(X)$ som er <u>positiv</u> i den forstand, at $\mu(f) \geq 0$ for enhver funktion $f \in C_0(X)$ for hvilken $f \geq 0$ (d.v.s. $f(x) \geq 0$ for alle $x \in X$). Bevis, at μ er kontinuert i den stærke topologi på $C_0(X)$ og dermed er et (positivt) Radonmål på X. Vejledning: Reducér til tilfældet X kompakt og benyt, at der her gælder $-\|f\|_\infty \leq f(x) \leq \|f\|_\infty$ for alle $x \in X$, såfremt f er reel.

38. (Eksempler på Radonmål.) Lad X være et ikke tomt interval på $\dot{\mathbb{R}}$, og lad h være Lebesgue-integrabel over ethvert kompakt delinterval af X. Vis, at der defineres et Radonmål μ ved

$$\mu(f) = \int f(x)h(x)dx \ , \quad f \in C_0(X) \ ,$$

og at dette er positivt hvis og kun hvis $h(x) \geq 0$ næsten overalt i X. Man siger, at der således definerede Radonmål μ har <u>tætheden</u> h med hensyn til Lebesguemålet på X. Svarende til $h = 1$ fås selve Lebesguemålet på X.

39. Lad X være et ikke tomt interval på $\dot{\mathbb{R}}$, og lad $g:\dot{\mathbb{R}} \to \dot{\mathbb{R}}$ være af endelig variation på ethvert kompakt delinterval af X. Det forudsættes tillige, at g er kontinuert i højre endepunkt af X såfremt dette tilhører X. For enhver funktion $f \in C_0(X)$ defineres <u>Stieltjesintegralet</u> af f med hensyn til

g ved

$$\int f(x)dg(x) = \lim_{\delta \to 0} \sum_n f(n\delta)[g(n\delta + \delta) - g(n\delta)] ,$$

hvor n gennemløber $\{n \in \dot{Z} \mid n\delta \in X\}$. Gør rede for at summen på højre side kun indeholder endeligt mange led $\neq 0$, og at der ved $f \to \int f(x)dg(x)$ defineres et Radonmål på X, som er positivt hvis g er voksende. - Ifølge en vigtig sætning af F. Riesz er ethvert Radonmål på X af denne form.

40. Med betegnelserne fra de foregående opgaver skal det vises, at hvis $g \in C^1(X)$, gælder

$$\int f(x)g'(x)dx = \int f(x)dg(x) , \quad f \in C_o(X) ,$$

således at det tilhørende Radonmål i dette tilfælde har den kontinuerte tæthed $Dg = g'$ med hensyn til Lebesguemålet.

41. Lad a være et givet punkt af intervallet $X \subseteq \dot{R}$. Vis at der ved $\delta_a(f) = f(a)$, $f \in C_o(X)$, defineres et positivt Radonmål på X. Det kaldes Diracmålet i a, eller massen +1 anbragt i a. Find en funktion g således at $\delta_a(f) = \int f(x)dg(x)$ for alle $f \in C_o(X)$. Vis, at δ_a ikke har nogen tæthed med hensyn til Lebesguemålet på X.

42. Lad E betegne vektorrummet af kontinuerte funktioner $f : [0,1] \to \dot{R}$. For ethvert talpar (δ,ε), hvor $0 < \delta < 1$ og $\varepsilon > 0$, sættes

$$V(\delta,\varepsilon) = \{f \in E \mid m\{t \in I \mid |f(t)| > \varepsilon\} < \delta\} ,$$

hvor nu betegner Lebesguemålet.

a) Vis, at $\{V(\delta,\varepsilon) \mid 0 < \delta < 1 , \ \varepsilon > 0\}$ er en basis for omegnsfiltret af 0 i E for netop én topologi på E, der gør E til et t.v.r.

b) Vis, at der for ethvert (δ,ε) med $0 < \delta < 1$, $\varepsilon > 0$, eksisterer $n \in \mathbb{N}$ således at

$$V(\delta,\varepsilon) + V(\delta,\varepsilon) + \cdots + V(\delta,\varepsilon) = E$$

(n ens led på venstre side). Vis først, at den konstante funktion 1 kan skrives som sum af stykkevis lineære funktioner $\in E$ hvis støtter har Lebesguemål $< \delta$.

c) Vis, at E ikke er lokalkonvekst, og at den eneste kontinuerte linearform på E er nulformen.

§ 1. Uendelig sum af vektorer.

1.1 Afsnitsfiltret på en filtrerende mængde. Ved en filtrerende mængde forstås en ordnet mængde $M = (M, =<)$, i hvilken enhver delmængde bestående af 2 elementer har en majorant, altså

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \quad \exists z \in M \quad (x =< z \ \wedge \ y =< z).$$

Idet vi antager, at M ikke er tom, defineres afsnittet $A(x)$ i M bestemt ved et element $x \in M$ således:

$$A(x) = \{y \in M \mid x =< y\}.$$

Mængden af alle afsnittene i M er øjensynlig en filterbasis på M, kaldet afsnitsfilterbasen. (Ad fb.2: $x \in A(x)$. Ad fb.3: $A(x) \cap A(y) \supseteq A(z)$ med z som ovenfor). Det ved afsnitsfilterbasen bestemte filter kaldes afsnitsfiltret på M.

Undertiden siger man, at M er filtrerende mod højre (eller voksende filtrerende) for at fremhæve, at afsnittene består af elementer y "til højre" for x $(x =< y)$. Tilsvarende siges M at være filtrerende mod venstre (eller aftagende filtrerende), dersom M er filtrerende m.h.t. den modsatte ordensrelation $>=$, altså dersom enhver delmængde af M bestående af 2 elementer har en minorant i M.

Enhver ordnet mængde, der har et første (sidste) element, er åbenbart filtrerende mod venstre (højre), men de interessanteste eksempler på filtrerende mængde er ikke af denne slags.

Eksempler. 1) Med den naturlige ordning ($\leqq$) er $\mathbb{N}$ filtrerende såvel mod højre som mod venstre. I tilfældet "højre" (altså $\leqq$) bliver afsnitsfiltret netop elementarfiltret på $\mathbb{N}$, bestående af alle delmængder af $\mathbb{N}$ med endelig komplementærmængde.

2) Lad M betegne mængden af alle inddelinger af et interval $[a,b] \subsetneq \grave{R}$ i endelig mange afsluttede delintervaller, som parvis er uden fælles indre punkter. Idet en sådan inddeling siges at komme før en anden, dersom den anden er en underdeling af den første, har vi defineret en filtrerende ordning på M.

3) For enhver mængde I er $\grave{D}(I)$ filtrerende både m.h.t. $\subsetneq$ og $\supsetneq$. Det samme gælder om mængden $\grave{D}_e(I)$ af alle endelige delmængder af I. Idet vi på $\grave{D}_e(I)$ benytter ordensrelationen $\subsetneq$, bliver afsnittet $A(J_o)$, hvor $J_o \in \grave{D}_e(I)$, mængden af alle endelige delmængder $J \supsetneq J_o$ af I. Afsnitsfiltret tilhører således $\grave{D}(\grave{D}(\grave{D}_e(I)))$.

Lad nu M være en filtrerende mængde, og lad Φ betegne afsnitsfilterbasen (eller afsnitsfiltret) på M. Lad $f:M \to T$ være en afbildning af M ind i et topologisk rum T. Da inducerer f en afbildning af Φ på en filterbasis $f(\Phi)$ på T. Dersom $f(\Phi)$ er konvergent i T med grænsepunkt $a \in T$, siger vi, at afbildningen f har a som grænseværdi (grænsepunkt) langs den filtrerende mængde M, og dette skrives $f(x) \to a$ langs M, eller

$$\lim_{x \in M} f(x) = a$$

Dersom T er et Hausdorffrum, er grænseværdien entydigt bestemt.

I ovenstående eksempel 1 er en afbildning af $\grave{N}$ ind T en punktfølge $(a_n)_{n \in \grave{N}}$, og begrebet grænsepunkt $\lim_{n \in \grave{N}} a_n$ stemmer overens med det sædvanlige begreb $\lim_{n \to \infty} a_n$. - I eksempel 2 kan vi til en sådan inddeling knytte en middelsum for Riemannintegralet af en forelagt funktion $f:[a,b] \to \grave{R}$. Da vil denne afbildning af M ind i $\grave{R}$ (inddeling $\to$ middelsum) have en grænseværdi langs den filtrerende familie, hvis og kun hvis f er

Riemannintegrabel; og grænseværdien er i bekræftende fald lig med $\int_a^b f(x)dx$. - Illustration til eks.3 bringes i den følgende paragraf.

Sætning (om monoton grænseovergang). Lad $f : M \to [-\infty, +\infty]$ være en voksende, resp. aftagende, funktion på en filtrerende ordnet mængde M. Da har f en grænseværdi langs M, nemlig

$$\lim_{x \in M} f(x) = \sup_{x \in M} f(x), \text{ resp. } \inf_{x \in M} f(x).$$

Bevis. Lad eksempelvis f være voksende. For enhver intervalomegn [a,b] af sup f findes $x \in M$ med $a \leq f(x) \leq \sup f$. For afsnittet $A(x) = \{y \in M \mid x \prec y\}$ haves derfor $f(A(x)) \subseteq [a, \sup f] \subseteq [a,b]$.

1.2 Summabel familie af vektorer. Vi betragter et Hausdorff t.v.r. E over K(= $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Lad $(a_i)_{i \in I}$ betegne en familie af vektorer $a_i \in E$, altså en afbildning $i \to a_i$ af en mængde I ind i E. Med $\mathfrak{D}_e(I)$ betegnes mængden af alle endelige delmængder af indexmængden I. $\mathfrak{D}_e(I)$ er filtrerende ordnet ved inklusion ($\subseteq$), jvf. eks.3 i foregående stykke. Vi definerer en afbildning $J \to s_J$ af $\mathfrak{D}_e(I)$ ind i E ved

$$s_J = \sum_{i \in J} a_i \qquad (J \in \mathfrak{D}_e(I)).$$

Disse delsummer s_J er jo veldefinerede, da E er et vektorrum. (Vi sætter $s_\emptyset = 0$.)

Definition. En familie $(a_i)_{i \in I}$ af vektorer a_i i et Hausdorff t.v.r. E kaldes summabel med summen $s \in E$, dersom delsumafbildningen $J \to s_J$ af $\mathfrak{D}_e(I)$ ind i E har grænseværdien s langs afsnitsfiltret Φ på $\mathfrak{D}_e(I)$.

Dette krav kommer ud på følgende: For enhver omegn V af $\underline{0}$ i E skal der findes en endelig delmængde J_o af I således at der for enhver endelig delmængde $J \supseteq J_o$ af I gælder $s_J \in s + V$.

I bekræftende fald betegnes grænseværdien $s \in E$ (der jo er entydigt bestemt) også med $s = \sum_{i\in I} a_i$.

Det er klart, at hvis I er endelig, bliver enhver familie $(a_i)_{i\in I}$ summabel med den sædvanlige sum $s(=s_I)$. Mere almindeligt gælder det åbenbart, at hvis mængden $J=\{i\in I \mid a_i \neq \underline{0}\}$ er endelig, bliver $(a_i)_{i\in I}$ summabel med summen $s=s_J$. I det hele taget påvirkes spørgsmålet, om en familie er summabel, og i så fald med hvilken sum, ikke af, om vi tilføjer eller fjerner led, som er $= \underline{0}$.

Bemærk, at der i begrebet summabel familie og sum af en sådan (i modsætning til tilsvarende begreber for uendelig række jvf. nedenfor) ikke indgår nogen ordning af selve indexmængden I, altså ingen "rækkefølge" af "leddene" a_i. Dette ytrer sig også i, at summabilitet og sum af en familie $(a_i)_{i\in I}$ ikke påvirkes af overgang til en anden index j ved en bijektiv afbildning $j \to \varphi(j)$ af en mængde J på I, idet man sætter $b_j = a_{\varphi(j)}$. Herved induceres nemlig en ordensisomorfi af $D_e(J)$ på $D_e(I)$, og tilsvarende delsummer for $(a_i)_{i\in I}$ og $(b_j)_{j\in J}$ er identiske.

1.3 Sætning. Lad $f: E \to F$ være en kontinuert, lineær afbildning af E ind i F (begge Hausdorff t.v.r.). For enhver summabel familie $(a_i)_{i\in I}$ på E er familien $(f(a_i))_{i\in I}$ på F summabel med summen

$$\sum_{i\in I} f(a_i) = f\Big(\sum_{i\in I} a_i\Big).$$

Dette følger af en almindelig sætning om afbildning af et konvergent filter Φ ved en kontinuert afbildning, når vi blot bemærker, at der for enhver endelig delmængde $J \in \grave{D}_e(I)$ gælder $f(\sum_{i\in J} a_i) = \sum_{i\in J} f(a_i)$, fordi f er lineær.

1.4 Sætning. Lad $E = \prod_{\alpha\in A} E_\alpha$ være et produkt af Hausdorff topologiske vektorrum E_α, og lad p_α betegne den kanoniske projektion af E på E_α. En familie $(x_i)_{i\in I}$ på E er summabel, hvis og kun hvis enhver af de projicerede familier $(p_\alpha(x_i))_{i\in I}, \alpha\in A$, er summabel; og i så fald gælder

$$p_\alpha(\sum_{i\in I} x_i) = \sum_{i\in I} p_\alpha(x_i) \qquad (\alpha \in A).$$

Bevis; "Kun hvis" følger af sætn. 1.3, som også giver os den sidste ligning, idet jo hver p_α er kontinuert og lineær. "Hvis" -delen følger af en almindelig sætning, ifølge hvilken et filter $\grave{F}$ på et produkt af topologiske rum $\prod_{\alpha\in A} T_\alpha$ er konvergent hvis (og kun hvis) $p_\alpha(\grave{F})$ konvergerer for hvert $\alpha \in A$. (Beviset for denne sætning overlades til læseren).

1.5 Sætning. Lad (a_i) og (b_i) være summable familier på et Hausdorff t.v.r. E, og med samme indexmængde I. Da er familien $(a_i + b_i)$ og (for enhver skalar $\lambda \in K$) familien (λa_i) summable med de respektive summer

$$\Sigma(a_i + b_i) = \Sigma a_i + \Sigma b_i,$$

$$\Sigma(\lambda a_i) = \lambda \Sigma a_i.$$

Bevis. Af den foregående sætning følger, at familien af par (a_i, b_i) er summabel i $E \times E$ med summen (s,t),

hvor $s = \Sigma a_i$, $t = \Sigma b_i$. Da afbildningen $(x,y) \to x + y$ af $E \times E$ er kontinuert og lineær, følger det af sætn. 1.2, at familien $(a_i + b_i)_{i\in I}$ er summabel med summen $s + t$. Da afbildningen $x \to \lambda x$ af E ind i E er kontinuert og lineær, følger resten af sætningen ligeledes af sætn. 1.2.

1.6 Sætning. En nødvendig og, hvis E er fuldstændigt, tilstrækkelig betingelse for, at en familie $(a_i)_{i\in I}$ på et Hausdorff t.v.r. E er summabel, er at der til enhver omegn V af $\underline{0}$ i E findes en endelig delmængde J_o af I således at der gælder $\sum_{i\in K} a_i \in V$ for enhver endelig delmængde K af $I\setminus J_o$.

Bevis. a) Nødvendigheden. Det antages, at (a_i) er summabel med sum s. Til en omegn V af $\underline{0}$ findes en symmetrisk omegn W af $\underline{0}$ så at $W + W \subseteq V$. Til W findes $J_o \in \grave{D}_e(I)$ med $s_J \in s + W$ for enhver $J \in \grave{D}_e(I)$ med $J \supseteq J_o$. For vilkårlig $K \in \grave{D}_e(I)$ med $K \cap J_o = \emptyset$ haves derfor

$$s_K = s_{J_o\cup K} - s_{J_o} \in (s + W) - (s + W) \subseteq V.$$

b) Tilstrækkeligheden. Med V og W som før vælges $J_o \in \grave{D}_e(I)$ så at $s_K \in W$ for alle endelige $K \subseteq I \setminus J_o$. Da gælder

$$s_J - s_{J'} = s_{J\setminus J_o} - s_{J'\setminus J_o} \in W-W \subseteq V$$

for vilkårlige $J, J' \in \grave{D}_e(I)$ omfattende J_o. Ved afbildningen $J \to s_J$ af $\grave{D}_e(I)$ ind i E overføres afsnittet $\{J \in \grave{D}_e(I) \mid J \supseteq J_o\}$ derfor i en mængde $A \subseteq E$ med $A - A \subseteq V$. Dette viser, at den nævnte afbildning overfører afsnitsfilterbasen Φ på $\grave{D}_e(I)$ i en

fundamentalfilterbasis på E. Da E er fuldstændigt, er den sidstnævnte filterbasis konvergent, og altså er $(a_i)_{i\in I}$ summabel.

Anvendes betingelsen i sætning 1.6 specielt på mængder K bestående af kun ét element $k \in I \setminus J_o$ kommer man til flg. sætning.

1.7 Sætning. En nødvendig betingelse for, at en familie $(a_i)_{i\in I}$ på et Hausdorff vektorrum er summabel, er at enhver omegn af $\underline{0}$ i E indeholder alle a_i pånær højst en endelig delfamilie.

Idet vi ser bort fra det trivielle tilfælde, hvor I er endelig, kan betingelsen også udtrykkes ved, at $a_i \to \underline{0}$ langs filtret af komplementærmængder til endelige delmængder af I (d.v.s., at afbildningen $i \to a_i$ overfører dette filter på I i en filterbasis på E, som konvergerer mod $\underline{0}$). Betingelsen er ingenlunde tilstrækkelig.

Korollar. Lad $(a_i)_{i\in I}$ være en summabel familie af vektorer på et Hausdorff t.v.r. E, i hvilket der findes en numerabel basis for filtret af omegne af $\underline{0}$. Da gælder $a_i = \underline{0}$ for alle $i \in I$ pånær højst numerabelt mange.

Thi er $\{V_n\}$ en numerabel basis for $\dot{U}(\underline{0})$, og sættes

$$I_n = \{i \in I \mid a_i \notin V_n\}$$

da er I_n endelig ifølge sætn. 1.7, og $\bigcup I_n$ derfor numerabel. For ethvert $i \in I \setminus (\bigcup I_n)$ gælder $a_i \in \bigcap V_n = \{\underline{0}\}$ (idet E er et Hausdorffrum).

1.8 Sætning. En familie $(a_i)_{i\in I}$ af tal $a_i \in [0, +\infty[$ er summabel hvis og kun hvis mængden af endelige delsummer s_J er opadtil begrænset. I så fald gælder

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\{ s_J \mid J \subseteq I,\ J \text{ endelig} \}.$$

Det er bekvemt at definere $\Sigma a_i = +\infty$, dersom betingelsen ikke er opfyldt (altså sup $s_J = +\infty$). Herved gælder ovenstående ligning for enhver familie (a_i) af tal ≥ 0, og en sådan familie bliver summabel, hvis og kun hvis $\Sigma a_i < +\infty$.

Bevis. Delsumafbildningen $J \to s_J$ af $\grave{D}_e(I)$ ind i $[0, +\infty[$ er voksende, da $a_i \geq 0$. Derfor har denne afbildning ifølge sætn. 1.1, når den opfattes som afbildning ind i $[-\infty, +\infty]$, grænseværdien sup $\{s_J \mid J \in \grave{D}_e(I)\}$. Betingelsen for, at $\{a_i\}_{i\in I}$ er summabel er nu, at denne grænseværdi er endelig, nemlig tilhører vektorrummet $\grave{R}$.

1.9 Absolut summabel familie. Vi antager her, at det i de foregående stykker betragtede t.v.r. E specielt er et Banachrum E, d.v.s. et fuldstændigt, normeret vektorrum. En familie $(a_i)_{i\in I}$ af vektorer $a_i \in E$ kaldes absolut summabel, dersom familien $(\|a_i\|)_{i\in I}$ af normer er summabel, altså (ifølge sætn.1.8) dersom

$$\sum_{i\in I} \|a_i\| < +\infty.$$

Sætning. Enhver absolut summabel familie $(a_i)_{i\in I}$ på et Banachrum E er summabel, og

$$\Big\| \sum_{i\in I} a_i \Big\| \leq \sum_{i\in I} \|a_i\|.$$

Bevis. Vi betragter en vilkårlig basisomegn $V = \{ x \in E \mid \|x\| < \varepsilon \}$ af $\underline{0}$ i E.

Da familien $(\|a_i\|)_{i\in I}$ på $\dot{\mathbb{R}}$ er summabel, findes der ifølge sætn. 1.6 en delmængde $J_o \in \dot{\mathfrak{D}}_e(I)$ således at der for enhver delmængde $J \in \dot{\mathfrak{D}}_e(I)$ med $J \cap J_o = \emptyset$ gælder $\sum_{i\in J} \|a_i\| < \varepsilon$. Så meget mere er $\| \sum_{i\in J} a_i\| < \varepsilon$, altså $s_J = \sum_{i\in J} a_i \in V$, for ethvert sådant J. Da E er fuldstændigt, viser dette ifølge sætn. 1.6, at $(a_i)_{i\in I}$ er summabel. Lad s være summen. For ethvert $J \in \dot{\mathfrak{D}}_e(I)$ viser uligheden

$$\|s_J\| = \| \sum_{i\in J} a_i\| \leqq \sum_{i\in J} \|a_i\| \leqq \sum_{i\in I} \|a_i\|,$$

ved grænseovergang langs $\dot{\mathfrak{D}}_e(I)$, at

$$\|s\| = \lim_{J\in\dot{\mathfrak{D}}_e(I)} \|s_J\| \leqq \sum_{i\in I} \|a_i\|.$$

1.10 <u>Uendelig række.</u> Til en punktfølge $(a_n)_{n\in\dot{\mathbb{N}}}$ i et Hausdorff t.v.r. E knytter man symbolsk den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

For ethvert $n \in \dot{\mathbb{N}}$ defineres det n'te afsnit i rækken ved

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Rækken siges at være konvergent med summen s, dersom afsnitsfølgen $(s_n)_{n\in\dot{\mathbb{N}}}$ er konvergent med grænseværdien $s \in E$, der i så fald også betegnes med $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Enhver af sætningerne 1.3 - 1.9 om summabel familie og sum har sit sidestykke for begrebet konvergens og sum af uendelig række, og beviset er analogt (eller simplere).

Specielt fremhæves (svarende til 1.6) det almindelige konvergensprincip, ifølge hvilket rækken Σa_n er konvergent hvis og kun hvis der til enhver omegn V af $\underline{0}$ i E findes $N \in \dot{\mathbb{N}}$ så at

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \in V \qquad \text{for alle } n > N$$

For "hvis"-delen må E forudsættes fuldstændig (eller i det mindste "følgefuldstændig"; enhver fundamentalfølge på E skal være konvergent). Og konsekvensen af "kun hvis"-delen (svarende til sætn. 1.7) lyder: Hvis Σa_n er konvergent, er $\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{0}$. Endelig (1.9): En absolut konvergent række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ på et Banachrum E (d.v.s. en række for hvilken $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ er konvergent) er konvergent (endda ubetinget, jvf. nedenfor).

En uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes <u>ubetinget konvergent</u>, dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ er konvergent for enhver permutation φ af $\dot{\mathbb{N}}$ (altså bijektiv afbildning $\varphi: \dot{\mathbb{N}} \to \dot{\mathbb{N}}$).

<u>Sætning.</u> En uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ på et Hausdorff t.v.r. E er ubetinget konvergent hvis og kun hvis følgen $(a_n)_{n\in\dot{\mathbb{N}}}$ af rækkens led er summerabel. I bekræftende fald gælder for enhver permutation φ af $\dot{\mathbb{N}}$, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n\in\dot{\mathbb{N}}} a_n .$$

Her betegner venstre side summen af rækken $a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + \ldots$ efter ovenstående definition, medens højre side er summen af den summable familie $(a_n)_{n\in\dot{\mathbb{N}}}$ efter definition 1.2.

Specielt gælder således

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n .$$

Det er klart, at hvis familien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er summabel med summen s, er afsnitsfølgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent med grænseværdien s, og ligeledes følgen af "permuterede" afsnit $a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + \ldots + a_{\varphi(n)}$. Thi for enhver omegn V af $\underline{0}$ i E findes en endelig delmængde J_o af $\mathbb{N}$ således at der for enhver endelig delmængde $J \supseteq J_o$ af $\mathbb{N}$ gælder $s_J \in s + V$. Vælges $N \in \mathbb{N}$ så at $J_o \subseteq \{1,2,\ldots,N\}$ (resp. $J_o \subseteq \{\varphi(1),\ldots, \varphi(N)\}$), gælder derfor $s_n \in s + V$ (resp. $a_{\varphi(1)} + \ldots + a_{\varphi(n)} \in s + V$) for $n > N$.

Vi udelader beviset for den vanskeligere del af sætningen (ubetinget konvergens $\Rightarrow$ summabilitet), og nøjes med at henvise til Bourbaki, Top.gén., ch.3, p.69f.

For en række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med led $a_n \in [0, +\infty[$ er det klart, at konvergens, ubetinget konvergens og summabilitet er identiske begreber (og at summen bliver den samme i alle tilfælde). Thi er rækken konvergent med summen s, gælder for ethvert $J \in \mathfrak{D}_e(\mathbb{N})$, at $s_J \leqq s$, fordi der findes $n \in \mathbb{N}$ så at $J \subseteq \{1,2,\ldots, n\}$, hvorfor $s_J \leqq s_n \leqq s$. Da således $\sup s_J < +\infty$ er familien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ summabel ifølge sætn. 1.8, (og derfor er rækken også ubetinget konvergent ifølge den nemme del af ovenstående sætning).

1. Lad $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. For enhver mængde J og ethvert $p \in [1,+\infty]$ betegnes med $l_p(J) = l_p(J;K)$ Banachrummet af alle familier $(x_j)_{j\in J} \in K^J$ for hvilke $\|x\|_p < +\infty$, idet vi sætter

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j\in J} |x_j|^p\right)^{1/p} & \text{for } 1 \leq p < +\infty , \\ \sup_{j\in J} |x_j| & \text{for } p = +\infty , \end{cases}$$

og benytter denne såkaldte p-norm som norm. I tilfældet J endelig skrives også $l_p(n)$ i stedet for $l_p(J)$, idet n=kard J. (Da er $l_p(n) = K^n$ som vektorrum betragtet, og de forskellige p-normer på K^n er parvis ækvivalente.)

Gør rede for, at det duale rum til $l_p(n)$ på naturlig måde kan identificeres isometrisk med $l_q(n)$, hvor $1/p+1/q=1$ (specielt $q=1$ for $p = +\infty$, $q = +\infty$ for $p=1$). Benyt hertil Hölder's ulighed:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q ,$$

gældende for $x,y \in \mathbb{C}^n$.

2. I tilfældet $J = \mathbb{N}$ skrives kort l_p i stedet for $l_p(\mathbb{N}) = l_p(\mathbb{N};K)$. Gør rede for, at det duale rum til l_p på naturlig måde kan identificeres isometrisk med l_q (hvor $1/p + 1/q = 1$), forudsat at $1 \leq p < +\infty$.

3. Bevis, at $l_p = l_p(\mathbb{N};K)$ er separabelt (jvf.opg.5) for $1 \leq p < +\infty$, men ikke for $p = +\infty$.

4. Med c betegnes mængden af alle talfølger $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på K for hvilke $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Vis, at c er et afsluttet underrum af l_∞, og at c' på naturlig måde kan identificeres med l_1, idet c normeres ved $\| \|_\infty$. Vis, at c ikke er refleksivt.

Hilbertrum

Indholdsoversigt:

		side
1.	Bilineær afbildning. Bilineær form.	1
2.	Sesquilineær form.	2
3.	Positiv hermitesk form.	4
4.	Præhilbertrum. Hilbertrum.	7
5.	Sætning (om eksistens af nærmeste punkt).	10
6.	Ortogonalitet.	11
7.	Definition (af $M^{\perp}$).	13
8.	Ortogonalt komplement. Ortogonal projektion	14
9.	Total delmængde af et Hilbertrum	16
10.	Sætning (Fréchet-Riesz).	17
11.	Hilbertsum af Hilbertrum.	18
12.	Hilbertsum af underrum.	22
13.	Ortonormalsystem.	29
14.	Ortonormalbasis.	32
15.	Gram-Schmidts ortogonaliseringsproces.	33
16.	Separabelt rum.	34
17.	Mere om totale delmængder.	35
18.	Dimension.	37

Opgaver 1-14

Hilbertrum

1. Bilineær afbildning. Bilineær form. I naturlig fortsættelse af begrebet lineær afbildning af et vektorrum ind i et andet defineres begrebet bilineær afbildning således:

Lad E,F og G være vektorrum over samme legeme K. En afbildning

$$f: E \times F \to G$$

kaldes bilineær, dersom den er lineær i hver variabel for sig, altså dersom

(BL_1) $\quad f(x_1+x_2,y) = f(x_1,y) + f(x_2,y)$

(BL_2) $\quad f(x,y_1+y_2) = f(x,y_1) + f(x,y_2)$

(BL_3) $\quad f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$

(BL_4) $\quad f(x,\mu y) = \mu f(x,y)$

for alle vektorer $x,x_1,x_2 \in E$, alle vektorer $y,y_1,y_2 \in F$, og alle skalarer $\lambda,\mu \in K$.

Det følger umiddelbart, at $f(\underline{0},\underline{0}) = \underline{0}$, og mere almindeligt at $f(x,\underline{0}) = f(\underline{0},y) = \underline{0}$ for alle $x \in E$, $y \in F$. (Heraf ses ved addition, at en bilineær afbildning ikke kan være lineær, medmindre den er identisk $\underline{0}$.)

Definitionen på bilinearitet kan åbenbart også udtrykkes under ét ved

(BL) $$f(\sum_i \lambda_i x_i \ , \ \sum_j \mu_j y_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \ f(x_i,y_j)$$

for alle (endelige) linearkombinationer $\Sigma\lambda_i x_i$ og $\Sigma\mu_j y_j$ af vektorer $x_i \in E$, henholdsvis $y_j \in F$.

Heraf følger specielt i tilfældet F = E identiteterne

$$f(x\pm y,\ x\pm y) = f(x,x) \pm f(y,x) \pm f(x,y) + f(y,y),$$

hvoraf udledes den såkaldte parallellogramlov:

(1) $f(x+y,\ x+y) + f(x-y,\ x-y) = 2f(x,x) + 2f(y,y),$

og desuden

(2) $f(x+y,\ x+y) - f(x-y,\ x-y) = 2f(x,y) + 2f(y,x).$

En bilineær afbildning $f:E\times F \to G$ kaldes symmetrisk, dersom F = E og

$$f(x,y) = f(y,x) \qquad \text{for alle } x,y \in E.$$

For en symmetrisk bilineær afbildning $f:E\times E \to G$ gælder ifølge (2) den såkaldte polariserings identitet:

(3) $$4f(x,y) = f(x+y,\ x+y) - f(x-y,\ x-y),$$

der udtrykker f ved dens værdier på "diagonalen" $\{(x,x)\,|\,x \in E\}$ i E.

En bilineær afbildning $f:E\times F \to K$, altså ind i koefficientlegemet, kaldes også en bilineær form på E×F. Hvis F = E tillader vi os også at kalde f en bilineær form på E (i stedet for på E×E).

I det følgende betragtes kun vektorrum over et af legemerne $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

2. Sesquilineær form. Af betydning i teorien for Hilbertrum er først og fremmest de sesquilineære former. Disse defineres således:

Lad E og F være vektorrum over legemet K(= $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). En afbildning

$$f:E\times F \to K$$

kaldes en sesquilineær form, dersom den er lineær i første variable og konjugeret lineær i anden variable, altså dersom f opfylder (BL_1), (BL_2), (BL_3) samt

(SL_4) $$f(x,\mu y) = \overline{\mu}\, f(x,y)$$

for $x \in E$, $y \in F$, $\mu \in K$.

Igen gælder $f(x,\underline{0}) = f(\underline{0},y) = 0$. Definitionen på en sesquilineær form f kan åbenbart udtrykkes under ét ved

(SL) $$f(\sum_i \lambda_i x_i, \sum_j \mu_j y_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\mu}_j\, f(x_i,y_j).$$

I tilfældet $K = \mathbb{R}$ falder begreberne bilineær form og sesquilineær form åbenbart sammen.

Såvel parallellogramloven (1) som regelen (2) gælder øjensynlig også for en sesquilinær form f på et vektorrum E (d.v.s. på E×E). Hvis $K = \mathbb{C}$, fås desuden af (2) ved anvendelse på iy i stedet for y:

$$if(x+iy,\ x+iy) - if(x-iy,\ x-iy) = 2f(x,y) - 2f(y,x).$$

Adderes dette til (2), kommer vi til følgende polariseringsidentitet

(4) $$f(x,y) = \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{4} i^\nu\, f(x+i^\nu y,\ x+i^\nu y),$$

gældende for en sesquilineær form f på et vektorrum E over $\mathbb{C}$. Svarende til polariserings identiteten (3) for en symmetrisk bilineær afbildning udtrykker (4) en sesquilineær form f (i tilfældet F = E) ved dens værdier på diagonalen. Bemærk, at der i (4) ikke forudsættes noget om symmetri af den sesquilineære form f.

For sesquilinære former er det relevante symmetribegreb følgende. En sesquilineær form $f:E\times E \to K$ kaldes hermetisk, dersom

(H) $$f(x,y) = \overline{f(y,x)} \qquad \text{for alle } x,y \in E.$$

Vi taler da kort om en hermetisk form på E. (I tilfældet $K = \mathbb{R}$ er dette det samme som en symmetrisk bilineær form.)

Lemma. En sesquilineær form $f: E\times E \to \mathbb{C}$ på et komplekst vektorrum E er hermitesk, hvis og kun hvis f er reel på diagonalen:

$$f(x,x) \in \mathbb{R} \qquad \text{for alle } x \in E.$$

Bevis. Hvis f er hermitesk, fås for $y = x$, at $f(x,x) = \overline{f(x,x)}$, altså at $f(x,x)$ er reel for alle $x \in E$. Er omvendt denne betingelse opfyldt, fås ud fra polariserings identiteten (4)

$$\overline{f(y,x)} = \frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{4} \overline{i}^{\nu} f(y+i^{\nu}x,\ y+i^{\nu}x)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{4} i^{-\nu} f(x+i^{-\nu}y,\ x+i^{-\nu}y) = f(x,y),$$

idet $\overline{i}^{\nu} = i^{-\nu}$ og $y+i^{\nu}x = i^{\nu}(x+i^{-\nu}y)$. For en hermitesk (sesquilineær) form $f: E\times E \to K$ gælder åbenbart identiteterne

(5) $$f(x\pm y,\ x\pm y) = f(x,x) \pm 2\mathrm{Re}\, f(x,y) + f(y,y).$$

3. Positiv hermitesk form. En hermitesk (underforstået: sesquilineær) form f på et vektorrum E over K (= $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) kaldes positiv (eller positiv semi-definit), dersom f er (reel og) ≥ 0 på diagonalen:

$$f(x,x) \geq 0 \qquad \text{for alle } x \in E.$$

En positiv hermitesk form f kaldes udartet (eller degenereret hvis der eksisterer en vektor $x \neq \underline{0}$ således at $f(x,x) = 0$. I modsat fald siges f at være ikke udartet.

Sætning (Cauchy-Schwarz' ulighed). For enhver positiv hermitesk form f på et vektorrum E gælder

$$|f(x,y)|^2 \leqq f(x,x)\, f(y,y) \tag{6}$$

for alle $x,y \in E$. Mængden

$$N = \{x \in E \mid f(x,x) = 0\}$$

er et underrum af E. Dersom $N = \{\underline{0}\}$, indtræffer lighedstegnet i (6) hvis og kun hvis x og y er lineært afhængige.

Bevis. Da f er positiv på diagonalen, er $f(x-\lambda y, x-\lambda y) \geqq 0$ for ethvert $x,y \in E$ og ethvert $\lambda \in K$. For givne $x,y \in E$ vil vi heraf udlede (6) ved at disponere passende over λ. Ved udregning fås

$$0 \leqq f(x,x) - 2\mathrm{Re}\,[\overline{\lambda}\, f(x,y)] + \lambda\overline{\lambda}\, f(y,y).$$

Sættes for kortheds skyld

$$f(x,y) = \alpha\, e^{i\beta} \quad , \quad \lambda = \rho\, e^{i\sigma}$$

med reelle $\alpha, \beta, \rho, \sigma$, fås videre

$$0 \leqq f(x,x) - 2\rho\,\alpha\cos(\sigma-\beta) + \rho^2 f(y,y),$$

hvor vi kan disponere frit over $\rho,\sigma \in \dot{\mathbb{R}}$. For at få mest muligt ud af uligheden sætter vi $\sigma = \beta$, hvorved $\cos(\sigma-\beta) = 1$. (Herved minimiseres nemlig højre side såfremt $\rho > 0$.) Der gælder altså

$$0 \leqq f(x,x) - 2\alpha\rho + f(y,y)\,\rho^2$$

for alle $\rho \in \dot{\mathbb{R}}$. Hvis nu $f(y,y) \neq 0$ (altså > 0), må diskriminanten

$$D = 4\alpha^2 - 4f(x,x)\, f(y,y)$$

være $\leqq 0$, hvilket giver (6) idet $\alpha^2 = |\alpha|^2 = |f(x,y)|^2$. Hvis derimod $f(y,y) = 0$, bliver nødvendigvis $\alpha = 0$, altså $f(x,y) = 0$ og dermed atter (6) opfyldt. Thi for $\alpha \neq 0$ er der tale om et første-

gradspolynomium over $\dot{\mathbb{R}}$, og et sådant kan ikke være ≥ 0 for alle værdier af den (reelle) uafhængige variable ρ. Hermed er (6) bevist.

Det er klart, at $x \in N \Rightarrow \lambda x \in N$ for ethvert $\lambda \in K$, fordi $f(\lambda x,\lambda x) = \lambda\bar{\lambda}\, f(x,x)$. At dernæst $x,y \in N \Rightarrow x+y \in N$ følger af (5) i forbindelse med (6), og N er således et underrum.

Lad nu $N = \{\underline{0}\}$, altså f ikke udartet; og antag, at der for to vektorer $x,y \in E$ gælder lighedstegn i (6). Hvis $f(y,y) = 0$, altså $y = \{\underline{0}\}$, er x og y jo lineært afhængige. Hvis $f(y,y) > 0$, bliver ovennævnte diskriminant $D = 0$, og der eksisterer derfor ifølge det ovenstående et $\rho \in \dot{\mathbb{R}}$ således at $f(x-\lambda y) = 0$ for $\lambda = \rho\, e^{i\beta}$ (nemlig for $\sigma = \beta$). Da således $x-\lambda y = \underline{0}$, er igen x og y lineært afhængige. |

Korollar. For enhver positiv hermitesk form f på et vektorrum E er afbildningen $x \to f(x,x)^{\frac{1}{2}}$ en seminorm på E. Således gælder Minkowski's ulighed:

$$f(x+y,\ x+y)^{\frac{1}{2}} \leq f(x,x)^{\frac{1}{2}} + f(y,y)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

for alle $x,y \in E$.

Bevis. Den første semonormegenskab (homogenitetsbetingelsen) følger af, at $f(\lambda x,\lambda y) = |\lambda|^2 f(x,y)$. Den anden (subadditiviteten (7)) fås af (5) og (6):

$$\begin{aligned} f(x+y,\ x+y) &\leq f(x,x) + 2|f(x,y)| + f(y,y) \\ &\leq f(x,x) + 2f(x,x)^{\frac{1}{2}}\, f(y,y)^{\frac{1}{2}} + f(y,y) \\ &= [f(x,x)^{\frac{1}{2}} + f(y,y)^{\frac{1}{2}}]^2 . \end{aligned}$$ |

Åbenbart er seminormen $x \to f(x,x)^{\frac{1}{2}}$ en norm, hvis og kun hvis f ikke er udartet, d.v.s. hvis og kun hvis $N = \{\underline{0}\}$. I dette til-

fælde indtræffer lighedstegn i (7) hvis og kun hvis x og y er ensrettede i den forstand, at der (såfremt $y \neq 0$) findes et reelt tal $\lambda \geq 0$ således at $x = \lambda y$. Beviset herfor overlades til læseren.

4. Præhilbertrum. Hilbertrum. Når der på et vektorrum E er givet en positiv hermitesk form f, definerer den tilhørende seminorm $x \to f(x,x)^{\frac{1}{2}}$ en topologi på E, hvorved E bliver et lokalkonvekst topologisk vektorrum. (T.V.R., §33). Vi skal særlig betragte det tilfælde, hvor dette rum bliver Hausdorff. Ifølge lemmaet i T.V.R., §33 indtræffer dette her netop når den nævnte seminorm er en norm, altså når f ikke er udartet. I givet fald vil vi kalde E (eller rettere parret (E,f) bestående af vektorrummet E og den forelagte positive, ikke udartede hermiteske form f på E) for et præhilbertrum. Da vi herefter holder formen f fast, vil vi hellere betegne dens værdier således

$$f(x,y) = (x|y)$$

og den tilhørende norm ved $\| \ \|$, altså

$$\|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}}.$$

Udførligt lyder definitionen således:

Definition. Ved et præhilbertrum over K(=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) forstås et vektorrum E over K, hvorpå der er givet en positiv, ikke udartet hermitesk form, altså en afbildning $(x,y) \to (x|y)$ af $E \times E$ ind i K med følgende egenskaber:

$$(x_1+x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y)$$

$$(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$$

$$(x|y) = \overline{(y|x)}$$

$$(x|x) \geq 0$$

$$(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

for $x_1, x_2, x, y \in E$ og $\lambda \in K$. Tallet $(x|y)$ kaldes skalarproduktet af vektorerne x og y, og $||x|| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$ kaldes normen af x.

Dersom man udelader det sidste af ovenstående 5 krav, altså tillader den positive hermiteske form (skalarproduktet) at være udartet, taler vi om et vektorrum med skalarprodukt.

Ved ikke at anføre egenskaberne (BL_2) og (SL_4) i ovenstående definition har vi udnyttet, at disse åbenbart er konsekvenser af $(BL_1)\wedge(BL_2)\wedge(H)$.

De vigtigste af de i det foregående omtalte identiteter for positive hermiteske former kan i tilfælde af skalarproduktet på et præhilbertrum (eller blot et vektorrum med skalarprodukt) skrives således:

$$||x\pm y||^2 = ||x||^2 \pm 2\mathrm{Re}(x|y) + ||y||^2,$$

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 \qquad \text{(parallellogramloven)},$$

$$4(x|y) = ||x+y||^2 - ||x-y||^2 \qquad \text{(polariseringsidentitet, } K=\mathbb{R}),$$

$$4(x|y) = \sum_{\nu=1}^{4} ||x+i^\nu y||^2 \qquad \text{(polariseringsidentitet, } K=\mathbb{C}),$$

$$|(x|y)| \leq ||x||\,||y|| \qquad \text{(Cauchy-Schwarz' ulighed)},$$

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \qquad \text{(Minkowski's ulighed)},$$

$$||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$$

Et præhilbertrum er som nævnt specielt et normeret rum med normen $x \to ||x|| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$, og denne adlyder parallellogramloven. Omvendt kan det vises, at hvis parallellogramloven gælder for et normeret rum, bliver dette et præhilbertrum, når skalarproduktet defineres ved den til det forelagte koefficientlegeme hørende polariseringsidentitet.

Lemma. Skalarproduktet på et præhilbertrum (eller blot et vektorrum med skalarprodukt) er kontinuert.

Bevis. For at indse, at afbildningen $(x,y) \to (x|y)$ af $E \times E$ ind i K er kontinuert i et forelagt punktpar (x_o,y_o) benyttes omskrivningen

$$|(x|y) - (x_o|y_o)| = |(x-x_o|y) + (x_o|y-y_o)|$$
$$\leqq \|x-x_o\| \, \|y\| + \|x_o\| \, \|y-y_o\|,$$

hvoraf det ønskede fremgår på grund af kontinuiteten af normen.|

Korollar. For enhver vektor $y \in E$ er den ved

$$\varphi_y(x) = (x|y)$$

definerede afbildning $\varphi_y : E \to K$ kontinuert og lineær, altså en kontinuert linearform på E.

Vi skal senere beskæftige os med spørgsmålet om der findes andre kontinuerte linearformer på E end formerne φ_y, $y \in E$.

Definition. Ved et Hilbertrum over K(= $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) forstås et præhilbertrum over K, som er fuldstændigt, altså i hvilket enhver fundamentalfølge er konvergent.

Det bemærkes, at fuldstændiggørelsen $\hat{E}$ (T.V.R., §39) af et præhilbertrum E bliver et Hilbertrum, idet skalarproduktet af to elementer x og y af $\hat{E}$, repræsenterede ved fundamentalfølgerne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på E, naturligt defineres ved

$$(x|y) = \lim_{n\to\infty} (x_n|y_n).$$

Det eftervises let (jvf. beviset for ovenstående lemma), at talfølgen med elementerne $(x_n|y_n)$ er en fundamentalfølge på K og dermed konvergent, samt at grænseværdien ikke afhænger af de valgte repræsenterende fundamentalfølger (x_n) og (y_n). Derefter

verificeres kravene til et skalarprodukt uden vanskelighed, og $\hat{E}$ er således et prähilbertrum. Da $\hat{E}$ jo tillige er fuldstændigt, bliver det et Hilbertrum.

5. Sætning. Lad F betegne en konveks, fuldstændig, ikke tom delmængde af et prähilbertrum E. Da indeholder F netop ét punkt y_o af mindst mulig norm, altså

$$\|y_o\| = \inf_{y\in F} \|y\| \ .$$

Bevis. Idet vi sætter $\inf_{y\in F}\|y\| = d$, kan vi vælge en minimalfølge på F, d.v.s. en følge af punkter $y_n \in F$ således at

$$\|y_n\| \to d \qquad \text{for } n \to \infty \ .$$

Vi vil vise, at enhver sådan minimalfølge på den konvekse mængde F er en fundamentalfølge og dermed konvergent, da F tillige er forudsat fuldstændig. Hertil benyttes parallellogramloven, ifølge hvilken der for $m,n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\|y_m-y_n\|^2 = 2\|y_m\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|y_m+y_n\|^2.$$

Da F er konveks, gælder $\frac{1}{2}(y_m+y_n) \in F$ og følgelig efter definitionen af d

$$\|y_m+y_n\|^2 = 4\|\tfrac{1}{2}(y_m+y_n)\|^2 \geq 4d^2.$$

Ved indsættelse heraf fås

$$\|y_m-y_n\|^2 \leq 2\|y_m\|^2 + 2\|y_n\|^2 - 4d^2,$$

og her går højre side mod 0 for $m,n \to \infty$.

Med $y_o \in F$ betegnes grænseværdien for fundamentalfølgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på F. Da er

$$\|y_o\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = d,$$

hvorfor y_o har den ønskede minimalegenskab.

Dersom $y \in F$ ligeledes har $\|y\| = d$, fås pany ud fra parallellogramloven, idet $\frac{1}{2}(y+y_0) \in F$, at

$$\|y-y_0\|^2 = 2\|y\|^2 + 2\|y_0\|^2 - 4\|\tfrac{1}{2}(y+y_0)\|^2$$
$$\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

og dermed $y = y_0$.|

Korollar. Lad atter F betegne en konveks, fuldstændig, ikke tom delmængde af et prähilbertrum E. For ethvert punkt $x \in E$ eksisterer der netop ét punkt $y \in F$, som ligger nærmest ved x, altså for hvilket

$$\|y-x\| = \inf_{z \in F} \|z-x\|.$$

Bevis. Da parallelforskydningen $u \to u-x$ af E på E er lineær og afstandsbevarende, overfører den F i en konveks, fuldstændig, ikke tom delmængde F-x af E. Opgaven at minimisere afstanden $\|z-x\|$ for $z \in F$ består da i at finde et element af mindst mulig norm i F-x, og denne opgave har ifølge sætningen ovenfor netop én løsning.|

Det fundne, nærmest ved x beliggende punkt af F kaldes fodpunktet for x, eller den metriske projektion af x på F.

I det følgende vil vi anvende ovenstående korollar på afsluttede underrum af et Hilbertrum.

6. Ortogonalitet. Lad E betegne et prähilbertrum (eller blot et vektorrum med skalarprodukt). En vektor $x \in E$ siges at være vinkelret, eller ortogonal, på en vektor $y \in E$, dersom skalarproduktet $(x|y)$ er lig med 0:

$$x \perp y \iff (x|y) = 0.$$

Åbenbart er relationen $\perp$ symmetrisk: $x \perp y \iff y \perp x$, så vi kan tale om (indbyrdes) ortogonale vektorer x og y.

En vektor $x \in E$ siges at være vinkelret, eller ortogonal, på en delmængde $M \subsetneq E$, dersom x er vinkelret på enhver vektor i M:

$$x \perp M \iff [(x|y) = 0 \quad \text{for alle } y \in M].$$

Endelig siges en mængde $M \subsetneq E$ at være ortogonal på en mængde $N \subsetneq E$, hvilket skrives $M \perp N$, dersom en af nedenstående ækvivalente betingelser er opfyldt:

$$\forall x \in M: \quad x \perp N,$$

$$\forall y \in N: \quad M \perp y \quad (\text{d.v.s. } y \perp M),$$

$$\forall x \in M \quad \forall y \in N: \quad (x|y) = 0.$$

Der er atter tale om en symmetrisk relation. For to indbyrdes ortogonale vektorer x,y gælder den <u>pythagoræiske lov</u>:

$$x \perp y \Rightarrow \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

idet leddet $\pm 2\mathrm{Re}(x|y)$ falder bort. Mere almindeligt gælder for et (endeligt) system af <u>parvis ortogonale vektorer</u> $x_1,\ldots,x_n \in E$ og for vilkårlige skalarer $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in K$ identiteten

$$(8) \qquad \Big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \|x_i\|^2 .$$

Denne viser specielt, at i et præhilbertrum er ethvert system af parvis ortogonale vektorer $\neq 0$ <u>lineært uafhængigt</u>.

<u>Lemma</u>. Enhver (endelig) sum $\sum_{i=1}^{n} F_i$ af parvis ortogonale underrum F_i af et præhilbertrum er topologisk direkte.

<u>Bevis</u>. For $x_i \in F_i$ $(i=1,\ldots,n)$ sættes $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$.

Ifølge den pythagoræiske formel er

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

Som ovenfor fremgår det heraf, at $x = \underline{0}$ kun kan indtræffe når alle $x_i = \underline{0}$. Dette betyder, at summen ΣF_i er algebraisk direkte. For ethvert j er endvidere $\|x_j\| \leqq \|x\|$ ifølge ovenstående relation. Den lineære projektionsafbildning $x \to x_j$ af ΣF_i på F_j er således normformindskende og dermed kontinuert, hvorfor summen ΣF_i også er topologisk direkte (jvf. T.V.R.,§21 i tilfælde af en sum af 2 underrum).|

7. Definition. For en delmængde M af et vektorrum E med skalarprodukt sættes

$$M^{\perp} = \{x \in E \mid x \perp M\}$$

$$= \{x \in E \mid \forall y \in M: (x|y) = 0\}.$$

For to delmængder M,N af E gælder åbenbart:

$$M \subseteq N \Rightarrow M^{\perp} \supseteq N^{\perp},$$

$$M \perp N \iff M \subseteq N^{\perp} \iff N \subseteq M^{\perp}.$$

Lemma. For enhver delmængde M af et vektorrum E med skalarprodukt er $M^{\perp}$ et afsluttet underrum af E. Endvidere er $M^{\perp} = F^{\perp}$, når F betegner det af M udspændte afsluttede underrum af E.

Bevis. Idet

$$M^{\perp} = \bigcap_{y \in M} \{y\}^{\perp},$$

(fortolket som E hvis $M = \emptyset$) er det tilstrækkeligt at eftervise første del af lemmaet for en delmængde $\{y\}$ bestående af kun én vektor $y \in E$. Den til y hørende kontinuerte linearform φ_y på E,

som vi i korollaret til lemma 4 definerede ved $\varphi_y(x) = (x|y)$, har det afsluttede nulrum

$$\varphi_y^{-1}(0) = \{y\}^\perp. \tag{9}$$

Endelig gælder

$$x \in M^\perp \iff \{x\} \subseteq M^\perp \iff M \subseteq \{x\}^\perp \iff F \subseteq \{x\}^\perp,$$

hvor den ikke trivielle del ($\Rightarrow$) af den sidste biimplikation følger af, at det afsluttede underrum $\{x\}^\perp$ af E med M også må indeholde det mindste afsluttede underrum F indeholdende M.|

Det tilføjes, at der åbenbart gælder

$$\{\underline{0}\}^\perp = E\ , \quad E^\perp = \{\underline{0}\}\ ,$$

sidstnævnte relation dog kun i et <u>præhilbertrum</u>; i et sådant er jo $\underline{0}$ den eneste vektor ortogonal på sig selv (som udtryk for at skalarproduktet her forudsættes ikke udartet).

8. <u>Ortogonalt komplement</u>. <u>Ortogonal projektion</u>.

<u>Lemma</u>. Hvis det om to underrum F,G af et præhilbertrum E gælder, at

$$F \perp G \quad \wedge \quad F+G = E,$$

så er $F^\perp = G$ og $G^\perp = F$.

<u>Bevis</u>. Vi mangler at vise, at f.eks. $G^\perp \subseteq F$. Lad da $x \in G^\perp$, og betragt opspaltningen $x = y+z$ med $y \in F$, $z \in G$. Da er $z = x-y \in G^\perp$, fordi $x \in G^\perp$ og $y \in F \subseteq G^\perp$. Følgelig er $z \in G \cap G^\perp = \{\underline{0}\}$, idet z specielt er ortogonal på sig selv. Altså er $x = y$ og dermed $x \in F$. |

<u>Sætning</u>. Lad F betegne et <u>fuldstændigt underrum</u> af et præhilbertrum E. Da gælder $E = F+F^\perp$, hvor summen er topologisk

direkte. Projektionen P(x) af en vektor $x \in E$ på F langs $F^\perp$ er netop det punkt af F, som ligger nærmest ved x. Endvidere er $F^{\perp\perp} = F$.

Bevis. Ifølge lemma 6 er summen $F+F^\perp$ af de to indbyrdes ortogonale underrum F og $F^\perp$ topologisk direkte. Ifølge korollaret til sætning 5 eksisterer der for givet $x \in E$ netop ét punkt $y \in F$ så at

$$\|x-y\| = \inf_{z\in F} \|x-z\| .$$

Tilbage står blot at vise, at $x-y \in F^\perp$; thi da har x fremstillingen

$$x = y + (x-y) \in F+F^\perp .$$

For at vise, at $x-y \perp u$ for en forelagt vektor $u \in F$ (gerne $u \neq 0$) benyttes, at $z := y+\lambda u$ tilhører underrummet F for ethvert $\lambda \in K$, fordi $y,u \in F$. Ifølge minimalegenskaben ved y er derfor

$$0 \leqq \|x-z\|^2 - \|x-y\|^2 = -2\mathrm{Re}[\bar{\lambda}(x-y|u)] + |\lambda|^2\|u\|^2,$$

idet $x-z = (x-y) - \lambda u$. Sættes her (jvf. beviset for Cauchy-Schwarz' ulighed)

$$(x-y|u) = \alpha e^{i\beta} \quad , \quad \lambda = \rho e^{i\sigma}$$

med reelle α, β, ρ, σ, fås

$$-2\rho\alpha \cos(\sigma-\beta) + \rho^2\|u\|^2 \geqq 0$$

for alle reelle ρ, σ. Sættes $\sigma = \beta$, sluttes at diskriminanten $D = 4\alpha^2 \leqq 0$, hvoraf $\alpha = 0$ og dermed $(x-y|u) = 0$, hvilket skulle bevises. At $F^{\perp\perp} = F$ følger nu af ovenstående lemma anvendt på $G = F^\perp$. |

Projektionsafbildningen $P = P_F$, der afbilder en vektor $x \in E$ i dens projektion y på F langs $F^\perp$, kaldes en ortogonal projektionsoperator. Vi udelader dog ofte betegnelsen ortogonal.

I stedet for P(x) betegnes billedet (projektionen) y af x ofte med Px (operatorskrivemåde).

En (ortogonal) projektionsoperator P af et præhilbertrum E på et fuldstændigt underrum F er som nævnt lineær, idempotent, normformindskende og derfor kontinuert. Den har desuden følgende egenskaber:

(10) $$(Px_1|x_2) = (Px_1|Px_2) = (x_1|Px_2)$$

for alle x_1, $x_2 \in E$. Den første ligning kommer ud på, at $(Px_1|x_2 - Px_2) = 0$, og dette følger af, at $Px_1 \in F$ medens $x_2 - Px_2 \in F^\perp$. På lignende måde vises den anden ligning.

Når F er et afsluttet underrum af et Hilbertrum E, kaldes $F^\perp$ det ortogonale komplement til F. Ifølge lemma 7 er $F^\perp$ ligeledes et afsluttet underrum af E, og dettes ortogonale komplement er altså som vist $F^{\perp\perp} = F$.

9. Total delmængde af et Hilbertrum.

Sætning. For enhver delmængde M af et Hilbertrum E er $M^{\perp\perp}$ det af M udspændte afsluttede underrum af E, og $M^{\perp\perp\perp} = M^\perp$.

Bevis. Idet vi med F betegner det af M udspændte afsluttede underrum, er ifølge lemma 7 $M^\perp = F^\perp$ og derfor ifølge sætning 8 $M^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} = F$. Endelig fås $M^{\perp\perp\perp} = F^\perp = M^\perp$. |

Korollar. En delmængde M af et Hilbertrum E er total, hvis og kun hvis $M^\perp = \{0\}$, altså hvis og kun hvis det for enhver vektor $x \in E$ gælder, at

$$[(x|y) = 0 \text{ for alle } y \in M] \Rightarrow x = 0.$$

Bevis. Med betegnelserne ovenfor betyder M total, at F = E. Det er klart, at F = E medfører $F^\perp = E^\perp = \{0\}$. Omvendt gælder, at

$$F^{\perp} = \{\underline{0}\} \Rightarrow F = F^{\perp\perp} = \{\underline{0}\}^{\perp} = E.$$

Da $M^{\perp} = F^{\perp}$, er korollaret hermed bevist.

Den fundne karakteristik af de totale delmængder af et Hilbertrum kan i medfør af nedenstående vigtige sætning opfattes som et specialtilfælde (bevist ad anden vej) af den tidligere (under benyttelse af Hahn-Banach's sætning) fundne karakteristik af de totale delmængder af et vilkårligt lokalkonvekst topologisk vektorrum (T.V.R., §30).

10. Sætning (Fréchet- Riesz). Til enhver kontinuert linearform φ på et Hilbertrum E findes netop én vektor $y \in E$ således at $\varphi = \varphi_y$, altså

$$\varphi(x) = (x|y) \quad \text{for alle } x \in E.$$

Bevis. Som omtalt i T.V.R., §23, er kernen $F = \varphi^{-1}(0)$ en afsluttet hyperplan i E. Ifølge sætning 8 ovenfor er $F^{\perp}$ specielt et algebraisk komplement til F og dermed 1-dimensionalt. Lad $e \in F^{\perp} \setminus \{\underline{0}\}$, altså $F^{\perp} = Ke$. Ifølge sætning 8 og lemma 7 er

$$F = F^{\perp\perp} = (Ke)^{\perp} = \{e\}^{\perp} = \varphi_e^{-1}(0)$$

med $\varphi_e(x) = (x|e)$, jvf. (9), §7. Ifølge korollaret til lemma 4 er φ_e ligesom φ en kontinuert linearform på E, og da $\varphi_e^{-1}(0) = F = \varphi^{-1}(0)$, slutter vi af en tidligere bemærkning (T.V.R., side 29) at der eksisterer $\lambda \in K$ så at $\varphi = \lambda\varphi_e$, altså

$$\varphi(x) = \lambda(x|e) = (x|\overline{\lambda}e) = \varphi_y(x)$$

for alle $x \in E$, idet vi sætter $\overline{\lambda}e = y$. Entydigheden følger af, at $\varphi_y = \varphi_z$ betyder $y-z \perp E$, altså $y-z = \underline{0}$. Ved eksistensbeviset har vi stiltiende forudsat, at φ ikke er identisk 0. For $\varphi \equiv 0$ kan vi imidlertid tage $y = \underline{0}$.

Sætningen viser, at afbildningen $T: E \to E'$ defineret ved

$$T(y)(x) = \langle x, T(y)\rangle = (x|y), \qquad x,y \in E$$

er bijektiv.

Desuden er det let at se at T er konjugeret lineær og isometrisk:

$$T(y_1 + y_2) = T(y_1) + T(y_2),\ T(\lambda y) = \overline{\lambda}\, T(y),\ \|T(y)\| = \|y\|.$$

Corollar. Ethvert Hilbertrum E er refleksivt.

Bevis: Den kanoniske indlejring af E i det biduale rum E'' betegnes j og er givet ved

$$\langle x', j(x)\rangle = \langle x, x'\rangle \quad \text{for} \quad x \in E,\ x' \in E',$$

eller da $E' = T(E)$

$$\langle T(y), j(x)\rangle = \langle x, T(y)\rangle = (x|y) \quad \text{for} \quad x,y \in E.$$

For at indse at j er surjektiv betragtes for $x'' \in E''$ afbildningen $h: E \to K$ givet ved

$$h(y) = \overline{\langle T(y), x''\rangle},$$

som ses at være en kontinuert linearform på E. Ifølge den foregående sætning findes da $x \in E$ så $h(y) = (y|x)$, altså

$$\langle T(y), x''\rangle = (x|y) \quad \text{for} \quad y \in E,$$

hvilket viser at $j(x) = x''$. |

11. Hilberts sum af Hilbertrum. Lad $(H_i)_{i\in I}$ være en familie af præhilbertrum over samme legeme K (=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Vi betegner skalarproduktet i H_i med $(\ |\ )_i$ og normen i H_i med $\|\ \|_i$. Lad $\prod_{i\in I} H_i$ betegne produktmængden (uden topologi) af de givne rum H_i, altså mængden af familier

$$x = (x_i)_{i\in I} \qquad (x_i \in H_i \text{ for } i \in I) .$$

Med G betegner vi underrummet af vektorrummet $\prod_{i\in I} H_i$ bestående af de familier x, hvor $x_i \neq \underline{0}$ for alle $i \in I$ pånær højst endelig mange. Endelig indfører vi mængden

$$H = \bigoplus_{i\in I} H_i = \{x \in \prod_{i\in I} H_i \mid \sum_{i\in I} \|x_i\|_i^2 < +\infty\} ,$$

for hvilken der åbenbart gælder $G \subseteq H \subseteq \Pi H_i$. Eftersom

$$\sum_{i\in I} \|x_i + y_i\|_i^2 \leq \sum_{i\in I} 2(\|x_i\|_i^2 + \|y_i\|_i^2) < +\infty$$

for $x,y \in H$, ses det let, at H er et vektorrum (et underrum af ΠH_i). Af Cauchy - Schwarz' ulighed

$$|(x_i|y_i)_i| \leq \|x_i\|_i \|y_i\|_i \leq \tfrac{1}{2}(\|x_i\|_i^2 + \|y_i\|_i^2$$

følger, at familien $((x_i|y_i)_i)_{i\in I}$ af tal i K er absolut summabel for ethvert $x,y \in H$. Vi definerer

$$(x|y) = \sum_{i\in I} (x_i|y_i)_i \qquad (x,y \in H)$$

med henvisning til sætn. F. 1.9 og def. F. 1.2. Det eftervises let under benyttelse af sætn. F. 1,5, at der herved er defineret et skalarprodukt på H, og at H er et præhilbertrum; normen på H er givet ved

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i\|_i^2 \qquad (x \in H) .$$

Dersom de givne rum H_i er Hilbertrum, kaldes $H = \bigoplus_{i\in I} H_i$ for Hilbertsummen af familien $(H_i)_{i\in I}$.

Sætning. For enhver familie $(H_i)_{i\in I}$ af Hilbertrum H_i gælder, at Hilbertsummen $H = \bigoplus_{i\in I} H_i$ er et Hilbertrum, og at G er et overalt tæt underrum af H.

Bevis. Vi mangler at vise, at G er tæt i H, og at H er fuldstændigt. Lad $x = (x_i)_{i\in I} \in H$. Ifølge sætning F. 1.6 findes til opgivet $\varepsilon > 0$ en endelig mængde $J \subseteq I$ således at $\sum_{i\in I\setminus J} \|x_i\|_i^2 \leqq \varepsilon$. Idet vi sætter $y_i = x_i$ for $i \in J$, $y_i = 0$ for $i\in I\setminus J$, bliver $y \in G$ og

$$\|x - y\|^2 = \sum_{i\in I\setminus J} \|x_i\|_i^2 \leqq \varepsilon ,$$

hvilket viser, at G er tæt i H. Fuldstændigheden af H vises på helt samme måde som i det kendte specialtilfælde, hvor $I = \mathbb{N}$ og $H_i = K$. Lad nemlig $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ være en fundamentalfølge i H. Hvert $x^{(n)}$ er en familie $(x_i^{(n)})_{i\in I}$. For ethvert $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$ så at

$$\sum_{i\in I} \|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\|_i^2 = \|x^{(m)} - x^{(n)}\|^2 \leqq \varepsilon^2$$

for alle $m,n \geqq N$. Det følger heraf, at hver af koordinatfølgerne $(x_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ er en fundamentalfølge i H_i ($i \in I$) og derfor konvergent, da H_i er fuldstændigt:

$$x_i^{(n)} \to x_i \in H_i \qquad \text{for } n \to \infty .$$

For enhver endelig delmængde $J \subseteq I$ gælder

$$\sum_{i\in J} \|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\|_i^2 \leqq \varepsilon^2 ,$$

for $m,n \geqq N$. Lades heri $m \to \infty$, fås for $n \geqq N$

$$\sum_{i\in J} \|x_i - x_i^{(n)}\|_i^2 \leqq \varepsilon^2 ,$$

altså, idet der tages supremum over J (sætn. F. 1.8):

$$\sum_{i\in I} \|x_i - x_i^{(n)}\|_i^2 \leqq \varepsilon^2$$

for $n \geqq N$. Sættes $x = (x_i)_{i\in I}$, hvorved $x \in \Pi H_i$, gælder inden for dette vektorrum at $x = x^{(n)} + (x - x^{(n)})$, hvilket viser at $x \in H$, fordi $x^{(n)} \in H$ og $x - x^{(n)} \in H$, sidstnævnte på grund af ovenstående ulighed. Denne kan nu skrives $\|x - x^{(n)}\| \leqq \varepsilon$ for $n \geqq N$ og viser således, at $x^{(n)} \to x$ i H for $n \to \infty$. Hermed er godtgjort at H er fuldstændigt.|

At G er et overalt tæt underrum af H, kan også udtrykkes ved at H er (en realisation af) kompletteringen af præhilbertrummet G. Naturligvis er G = H hvis I er endelig, men ellers ikke i almindelighed. En sådan endelig Hilbertsum er også i topologisk henseende identisk med produktrummet $\prod_{i\in I} H_i$, som man let viser. For en uendelig Hilbertsum (af Hilbertrum $H_i \neq \{\underline{0}\}$) gælder derimod inklusionen

$$\bigoplus_{i\in I} H_i \subset \prod_{i\in I} H_i ,$$

ligeledes topologisk i den forstand, at topologien på $\oplus H_i$ (altså normtopologien) er strengt finere end delrumstopologien på $\oplus H_i$ som delmængde af ΠH_i med produktrumstopologien. Thi enhver omegn af $\underline{0}$ i delrumstopologien induceret af produktrumstopologien er ubegrænset idet den indeholder en hel linie.

For $I = \{1,2,\cdots,n\}$ skrives også

$$H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$$

i stedet for $\bigoplus_{i=1}^{n} H_i$. For en vilkårlig indexmængde I betegner vi med $l^2(I) = l^2(I;K)$ den specielle Hilbertsum, hvor alle $H_i = K$,

altså Hilbertrummet bestående af alle familier $x = (x_i)_{i\in I}$ af tal $x_i \in K$ med $\sum_{i\in I} |x_i|^2 < \infty$. I tilfældet $I = \{1,2,\cdots,n\}$ bliver $l^2(I) = K^n$, det sædvanlige n-dimensionale talrum med det sædvanlige skalarprodukt $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$. I tilfældet $I = \mathbb{N}$ fås derimod $l^2(I) = l^2$ = det Hilbertske følgerum (over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Dette er det oprindelige af D. Hilbert studerede rum.

Idet vi vender tilbage til det generelle tilfælde $H = \bigoplus_{i\in I} H_i$ betragter wi den naturlige indlejring k_i af H_i i H, som til $u \in H_i$ lader svare

$$k_i(u) = x = (x_j)_{j\in I}, \quad \text{hvor } x_j = \begin{cases} u \text{ for } j = i \\ \underline{0} \text{ for } j \neq i \end{cases}.$$

Denne indlejring k_i er åbenbart en (isometrisk) isomorfi af H_i på et afsluttet underrum $k_i(H_i)$ af H. Åbenbart gælder for enhver vektor $x = (x_j)_{j\in I} \in H$

(11) $\quad x \in k_i(H_i) \iff x_j = \underline{0}$ for ethvert $j \neq i$,

(12) $\quad x \perp k_i(H_i) \iff x_i = \underline{0}$.

(Ad(12): $x \perp k_i(H_i)$ betyder, at der for ethvert $u \in H_i$ gælder $(x|k_i(u)) = 0$, altså ifølge definitionen af skalarproduktet i H $(x_i|u)_i = 0$, hvilket er ensbetydende med $x_i = \underline{0}$.)

Det fremgår af (11) og (12), at $k_i(H_i) \perp k_j(H_j)$ for $i \neq j$, og af (11) at det af $\bigcup_{i\in I} k_i(H_i)$ udspændte underrum i algebraisk betydning netop er underrummet G. Da G er tæt i H, er således $\bigcup_{i\in I} k_i(H_i)$ total i H (jvf. T.V.R., §30).

Lemma. Den ortogonale projektion af en vektor $x = (x_j)_{j\in I} \in H = \bigoplus_{j\in I} H_j$ på underrummet $k_i(H_i)$ er netop billedet $k_i(x_i)$ af "koordinaten" $x_i \in H_i$ ved den naturlige indlejring af

H_i i H.

Bevis. Det er klart at $k_i(x_i) \in k_i(H_i)$. Om vektoren $y = x - k_i(x_i)$ gælder ifølge (12) $y \perp k_i(H_i)$, fordi $y_i = x_i - (k_i(x_i))_i = x_i - x_i = \underline{0}$. |

12. Hilbertsum af underrum. Vi betragter en familie $(F_i)_{i\in I}$ af fuldstændige underrum F_i af et prähilbertrum E, og antager at disse underrum er parvis ortogonale:

$$\forall i,j \in I : \quad i \neq j \Rightarrow F_i \perp F_j .$$

Vi betegner med $\sum_{i\in I} F_i$ det af $\bigcup_{i\in I} F_i$ udspændte underrum i algebraisk betydning, og med

$$F = \overline{\sum_{i\in I} F_i}$$

afslutningen heraf, altså det af $\bigcup_{i\in I} F_i$ udspændte underrum af E i topologisk betydning (jvf. T.V.R., § 30). Endelig indfører vi Hilbertsummen

$$H = \bigoplus_{i\in I} F_i$$

af rummene F_i, der jo alle er Hilbertrum. Vi vil konstuere en (isometrisk) isomorfi k af F på et underrum k(F) af H med den egenskab, at restriktionen af k til F_i for ethvert $i \in I$ netop er den naturlige indlejring k_i af F_i i Hilbertsummen H, altså

$$(13) \qquad k|F_i = k_i \qquad \text{for ethvert } i \in I .$$

Først må vi udvide indlejringerne k_i til $\sum_{i\in I} F_i$ ved linearitet. Nu består $\sum_{i\in I} F_i$ af alle vektorer

$$(14) \qquad x = \sum_{i\in I} x_i , \qquad x_i \in F_i ,$$

med kun endeligt mange $x_i \neq \underline{0}$ (hvorfor summen $\sum_{i\in I} x_i$ er veldefineret, idet man kun medtager led $x_i \neq \underline{0}$). Da k ønskes lineær, er den eneste mulighed for billedet $k(x) \in H$ af den omhandlede vektor $x \in \Sigma F_i$

$$(15) \qquad k(x) = \sum_{i\in I} k(x_i) = \sum_{i\in I} k_i(x_i) = (x_i)_{i\in I} \cdot$$

Det sidste lighedstegn fremgår af, at der ifølge definitionen af k_i (§11) gælder

$$(k_i(x_i))_j = \begin{cases} x_i & \text{for } j = i \\ \underline{0} & \text{for } j \neq i \end{cases} .$$

Vi definerer derfor afbildningen $k : \sum_{i\in I} F_i \to H$ ved (15), hvilket har mening, da fremstillingen (14) er entydigt bestemt ved $x \in \sum_{i\in I} F_i$, fordi underrummene F_i er parvis ortogonale (jvf. H.R., lemma 6). Ifølge (15) er billedrummet $k(\sum_{i\in I} F_i)$ netop det i §11 indførte underrum G af Hilbertsummen H bestående af alle familier $(x_i)_{i\in I} \in H$ for hvilke $\{i \in I \mid x_i \neq \underline{0}\}$ er endelig.

Den således definerede afbildning $k: \sum_{i\in I} F_i \to H$ er åbenbart lineær og opfylder kravet (13). Endvidere er k isometrisk. Thi for en anden vektor $y = \sum_{i\in I} y_i \in \sum_{i\in I} F_i$ haves ifølge (15) i forbindelse med definitionen af skalarproduktet i Hilbertsummen H

$$(k(x)\,|\,k(y)) = ((x_i)_{i\in I}\,|\,(y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} (x_i\,|\,y_i) \cdot$$

Og på den anden side gælder på grund af ortogonaliteten af underrummene F_i

$$(x\,|\,y) = \Big(\sum_{i\in I} x_i \,\Big|\, \sum_{i\in I} y_j\Big) = \sum_{(i,j)\in I\times I} (x_i\,|\,y_j) = \sum_{i\in I} (x_i\,|\,y_i) ,$$

idet $(x_i\,|\,y_j) = 0$ for $i \neq j$ fordi $x_i \in F_i$, $y_j \in F_j$. (Husk også,

at kun endeligt mange x_i eller y_j er $\neq 0$.)

Vi må nu nødvendigvis definere den ønskede afbildning $k : F \to H$ som den entydigt bestemte udvidelse ved kontinuitet (T.V.R., sætn. 17) af den lineære, isometriske (og derfor ligeligt kontinuerte) afbildning $k : \sum_{i\in I} F_i \to H$. Ifølge en bemærkning allersidst i T.V.R., §36, er også udvidelsen k isometrisk, altså en isomorfi af præhilbertrummet F på et underrum k(F) af H. Billedrummet k(F) er overalt tæt i H, fordi det omfatter $k(\sum_{i\in I} F_i) = G$, som ifølge sætn. 11 er tæt i H. Hvis F er fuldstændigt (specielt hvis E er fuldstændigt), bliver også k(F) fuldstændigt, altså afsluttet i H og dermed k(F) = H.

Vi indfører for hvert $i \in I$ den ortogonale projektionsoperator P_i af E på det fuldstændige underrum F_i af E (H.R. §8). Ved hjælp af disse projektioner kan vi beskrive isomorfien k explicit således

$$k(x) = (P_i x)_{i\in I} \qquad \text{for ethvert } x \in F . \tag{16}$$

Thi da $P_i x$ er den retvinklede projektion af $x \in F$ på F_i, må $k(P_i x) = k_i(P_i x)$ være den retvinklede projektion af $k(x) \in H$ på $k(F_i) = k_i(F_i)$, fordi k bevarer skalarproduktet og dermed ortogonaliteten. Skrives k(x) på formen $k(x) = (f_j)_{j\in I}$ med $f_j \in F_j$, bliver ifølge lemma 11 projektionen af k(x) på $k_i(F_i)$ netop $k_i(f_i)$. Da således $k_i(f_i) = k_i(P_i x)$ for alle $i\in I$, bliver $f_i = P_i x$ for alle $i\in I$, og dermed

$$k(x) = (f_i)_{i\in I} = (P_i x)_{i\in I}.$$

Lad os nu antage, at E er et Hilbertrum. Vi betragter altså en familie af parvis ortogonale, afsluttede underrum af et

Hilbertrum E, og betegner med F det af $\bigcup_{i\in I} F_i$ udspændte afsluttede underrum af E. I medfør af den fundne isomorfi k af F på Hilbertsummen H tillader man sig ofte at identificere F med H og skrive

$$F = \bigoplus_{i\in I} F_i$$

i stedet for $\overline{\sum_{i\in I} F_i}$. Og man kalder da F for Hilbertsummen af underrummene F_i, $i\in I$. (Til forskel herfra kan man så benytte betegnelsen ydre Hilbertsum om det i §11 indførte begreb.) Eksempelvis kan skrives $E = F \oplus F^{\perp}$, når $F^{\perp}$ betegner det ortogonale komplement til et afsluttet underrum F af et Hilbertrum.

I tilfældet E et Hilbertrum og F = E kan de fundne resultater nu formuleres således:

12.1. Sætning. Lad et Hilbertrum E være Hilbertsum af parvis ortogonale, afsluttede underrum F_i, $i\in I$. Da eksisterer der netop én (isometrisk) isomorfi k af E på den ydre Hilbertsum $H = \bigoplus_{i\in I} F_i$ med den egenskab (13), at restriktionen af k til F_i for ethvert $i\in I$ er den naturlige indlejring k_i af F_i i H.

Billedet k(x) af en vektor $x\in E$ er givet ved

$$k(x) = (P_i x)_{i\in I},$$

idet P_i for hvert $i\in I$ betegner den ortogonale projektionsoperator af E på F_i.

Vi bestemmer nedenfor den inverse isomorfi $k^{\circ -1}: H \to E$ (Korollar til sætn. 12.3). Først vender vi imidlertid tilbage til den generelle situation og beviser følgende sætning:

12.2. Sætning. Lad E være et prähilbertrum og $(F_i)_{i\in I}$ en familie af parvis ortogonale, fuldstændige underrum af E med

tilhørende ortogonale projektionsoperatorer P_i. Lad F betegne det af $\bigcup_{i\in I} F_i$ udspændte afsluttede underrum af E. Da gælder for ethvert $x\in E$:

a) $\sum_{i\in I} \|P_i x\|^2 \leqq \|x\|^2$.

b) Følgende udsagn er ækvivalente: (i) $x \in F$; (ii) $\sum_{i\in I} \|P_i x\|^2 = \|x\|^2$; (iii) familien $(P_i x)_{i\in I}$ er summabel i E med summen $\sum_{i\in I} P_i x = x$.

c) Hvis F er fuldstændigt med tilhørende projektionsoperator P, er familien $(P_i x)_{i\in I}$ summabel i E for ethvert $x \in E$, og der gælder

$$\sum_{i\in I} P_i x = Px \ , \quad \sum_{i\in I} \|P_i x\|^2 = \|Px\|^2 \ .$$

Bevis. Vi forudskikker den bemærkning, at hvis F er fuldstændigt med tilhørende projektionsoperator P, så er for ethvert $x \in E$ og $i \in I$ projektionen $P_i(Px)$ af Px på F_i lig med $P_i x$, fordi

$$Px - P_i x = (x - P_i x) - (x - Px)$$

er ortogonal på F_i, idet $x - P_i x \perp F_i$ og $x - Px \perp F \supseteq F_i$.

For enhver endelig delmængde $J \in \dot{D}_e(I)$ af I er summen

$$F_J = \sum_{j\in J} F_j$$

ifølge H.R., lemma 6, topologisk direkte. Derfor er F_J topologisk isomorf med produktet $\prod_{j\in J} F_j$ af de fuldstændige rum F_j, $j \in J$, og dermed selv fuldstændig. (Jvf. T.V.R., def. 21, i tilfældet kard J = 2. Alternativt kan benyttes, at isomorfien k afbilder F_J på hele Hilbertsummen $\bigoplus_{j\in J} F_j$ fordi J er endelig.) Vi betegner med P_J den til F_J hørende projektionsoperator. For ethvert $x \in E$ har $P_J x \in F_J$ fremstillingen

(17) $$P_J x = \sum_{j\in J} P_j(P_J x) = \sum_{j\in J} P_j x,$$

idet $P_j(P_J x) = P_j x$ for $j \in J$ ifølge bemærkningen ovenfor (med j, J i stedet for i, I). Der gælder således

$$P_J = \sum_{j\in J} P_j$$

efter den gængse "punktvise" definition af en endelig sum af afbildninger ind i et vektorrum.

Anvendes den pythagoræiske regel på de ortogonale summer

$$x = P_J x + (x - P_J x), \quad P_J x = \sum_{j\in J} P_j x,$$

fås

(18) $$\sum_{j\in J} \|P_J x\|^2 = \|P_J x\|^2 = \|x\|^2 - \|x - P_J x\|^2 \leqq \|x\|^2,$$

hvoraf

$$\sum_{i\in I} \|P_i x\|^2 = \sup\{ \sum_{j\in J} \|P_j x\|^2 \mid J \in \mathring{D}_e(I)\} \leqq \|x\|^2 .$$

Hermed er godtgjort a). Tillige viser (18), at der under b) gælder (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). Det er klart at (iii) $\Rightarrow$ (i), fordi alle $P_i x \in F$. Endelig vises (i) $\Rightarrow$ (ii) ved hjælp af isomorfien k anvendt på $x \in F$:

$$\|x\|^2 = \|k(x)\|^2 = \sum_{i\in I} \|P_i x\|^2$$

under benyttelse af (16). Åbenbart fremgår c) af b) ved anvendelse på $Px \in F$ under henvisning til bemærkningen ved bevisets begyndelse.

I hovedtilfældet: E et Hilbertrum og F = E kommer vi sluttelig til følgende resultat

12.3. Sætning. Lad et Hilbertrum E over K være Hilbertsum af parvis ortogonale, afsluttede underrum F_i, $i \in I$ med tilhørende projektionsoperatorer P_i. Da gælder:

a) For ethvert $x \in E$ er familien $(P_i x)_{i \in I}$ summabel i E med

summen x:

$$x = \sum_{i\in I} P_i x$$

Endvidere gælder for $x \in E$

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \|P_i x\|^2,$$

og mere almindeligt for $x,y \in E$

$$(x|y) = \sum_{i\in I} (P_i x|P_i y) = \sum_{i\in I} (P_i x|y),$$

hvor der er tale om en absolut summabel familie af tal $(P_i x|P_i y) = (P_i x|y) \in K$. b) Betegner omvendt $(x_i)_{i\in I}$ en vilkårlig familie på E således at $x_i \in F_i$ for hvert $i \in I$, og så at $\sum_{i\in I} \|x_i\|^2 < +\infty$, da er denne familie $(x_i)_{i\in I}$ summabel i E, og dens sum $x = \sum_{i\in I} x_i$ er karakteriseret ved, at

(19) $\qquad P_i x = x_i \quad$ for ethvert $i \in I$.

Bevis. Ad a). Vi mangler kun den sidste relation, som atter fremgår ved anvendelse af isomorfien k under henvisning til (16):

$$(x|y) = (k(x)|k(y)) = \sum_{i\in I} (P_i x|P_i y).$$

Ad b). Den givne familie $f = (x_i)_{i\in I}$ er netop et element af den ydre Hilbertsum $H = \bigoplus_{i\in I} F_i$. Ifølge sætn. 12.1. er i det foreliggende tilfælde afbildningen $k : E \to H$ bijektiv. Sættes $k^{\circ -1}(f)=x$, gælder ifølge (16)

$$f = k(x) = (P_i x)_{i\in I},$$

hvilket er ensbetydende med (19). Og af (19) følger omvendt i henhold til a)

$$x = k^{\circ -1}(f) = \sum_{i\in I} P_i x = \sum_{i\in I} x_i. \quad |$$

Korollar. Den i sætn. 12.1 omhandlede isomorfi k af E på den ydre Hilbertrum $H = \bigoplus_{i\in I} F_i$, givet ved

$$k(x) = (P_i x)_{i\in I}, \quad \forall x \in E,$$

har sin inverse $k^{\circ -1}: H \to E$ bestemt ved

$$k^{\circ -1}((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} x_i \ , \ \forall (x_i)_{i\in I} \in H.$$

13. Ortonormalsystem. Vi bemærker først at en enkelt vektor $e \neq \underline{0}$ i et præhilbertrum E over K udspænder det 1-dimensionale underrum

$$Ke = \{ae \mid a \in K\}$$

af E, og dette er fuldstændigt ifølge T.V.R., sætn. 5 (eller sætn. 24.) Den tilhørende ortogonale projektionsoperator P_e afbilder en vektor $x \in E$ i en vektor ae, hvor $a \in K$ bestemmes ved $x - ae \perp Ke$, altså $(x - ae|e) = 0$, $a = (x|e)/(e|e)$. Den retvinklede projektion af x på Ke er således

$$P_e x = \frac{(x|e)}{\|e\|^2} e \ ,$$

specielt $P_e x = (x|e)e$ dersom $\|e\| = 1$.

Definition. En familie $(e_i)_{i\in I}$ af indbyrdes ortogonale, normerede vektorer e_i i et præhilbertrum E kaldes en ortonormal familie eller et ortonormalsystem.

Et sådant er altså karakteriseret ved betingelserne

$$(e_i|e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ for } i = j \ , \\ 0 \text{ for } i \neq j \ . \end{cases}$$

Heri ligger specielt, at $e_i \neq e_j$ for $i \neq j$, således at man gerne kan identificere den ortogonale familie $(e_i)_{i\in I}$ med mængden $\{e_i \mid i \in I\} \subseteq E$. Vi minder om, at ethvert ortonormalsystem er lineært uafhængigt (i den forstand at ethvert endeligt delsystem

er lineært uafhængigt) ifølge en bemærkning i H.R., §6.

Vi vil nu anvende sætningerne i §12 på de 1-dimensionale underrum $F_i = Ke_i$ med tilhørende projektionsoperatorer P_i, hvor

$$P_i x = (x|e_i)\, e_i, \quad \forall x \in E .$$

13.1. Sætning. Lad $(e_i)_{i\in I}$ være et ortonormalsystem i et prähilbertrum E over K, og lad F betegne det af systemet udspændte afsluttede underrum af E. Da gælder for ethvert $x \in E$:

a) $\sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2 \leqq \|x\|^2$ (Bessels ulighed).

b) Følgende udsagn er ækvivalente: (i) $x \in F$;

(ii) $\sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2 = \|x\|^2$; (iii) familien $((x|e_i)e_i)_{i\in I}$ er summabel i E med summen $\sum_{i\in I} (x|e_i)e_i = x$.

c) Hvis F er fuldstændigt med tilhørende projektionsoperator P, er familien $((x|e_i)e_i)_{i \in I}$ summabel i E for ethvert $x \in E$, og der gælder

$$\sum_{i\in I} (x|e_i)e_i = Px \ , \quad \sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2 = \|Px\|^2 .$$

d) Hvis F er fuldstændigt, defineres der en isometrisk isomorfi φ af F på $l^2(I;K)$ ved

$$\varphi(x) = ((x|e_i))_{i\in I}, \quad \forall x \in F, \tag{20}$$

altså $\varphi(x) = (a_i)_{i\in I}$, hvor $a_i = (x|e_i)$, $i\in I$.

Den inverse isomorfi $\varphi^{\circ -1}$ af $l^2(I;K)$ på F er bestemt ved

$$\varphi^{\circ -1}((a_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i e_i \ , \ \forall (a_i)_{i\in I} \in l^2(I;K). \tag{21}$$

Bevis. a),b) og c) følger umiddelbart af de tilsvarende udsagn i sætn. 12.2. Ifølge sætn. 12.1 anvendt på de 1-dimensionale underrum $F_i = Ke_i$, $i \in I$, defineres der en isometrisk isomorfi k af F på den ydre Hilbertsum $\bigoplus_{i\in I} (Ke_i)$ ved

$$x \to k(x) = ((x|e_i)e_i)_{i\in I} , \quad \forall x \in E .$$

For ethvert $i \in I$ er afbildningen $ae_i \to a$, $a \in K$, åbenbart en isometrisk isomorfi af Ke_i på K, og afbildningen

$$(a_i e_i)_{i\in I} \to (a_i)_{i\in I} , \quad \forall (a_i)_{i\in I} \in l^2(I,K),$$

derfor en isometrisk isomorfi af $\bigoplus_{i\in I} (Ke_i)$ på $l^2(I;K) = \bigoplus_{i\in I} K$.

(overvej dette!). Ved sammensætning af disse isomorfier kommer vi til den ønskede isomorfi φ af F på $l^2(I;K)$ bestemt ved (20). Og ifølge korollaret til sætn. 12.3 bestemmes omvendt $\varphi^{\circ -1}$ ved sammensætningen

$$(a_i)_{i\in I} \to (a_i e_i)_{i\in I} \xrightarrow{k^{\circ -1}} \sum_{i\in I} a_i e_i ,$$

hvor $(a_i)_{i\in I}$ gennemløber $l^2(I;K)$. |

Bemærkninger. Ifølge korollaret til sætn. F.1.7 fremgår det af Bessels ulighed, at mængden $\{i \in I \mid (x|e_i) \neq 0\}$ er numerabel for ethvert $x \in E$.

Sættes for $x,y \in F$

$$a_i = (x|e_i) , \quad b_i = (y|e_i)$$

for $i \in I$, haves ifølge punkt b) af ovenstående sætning

$$x = \sum_{i\in I} a_i e_i , \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in I} |a_i|^2 ,$$

(og tilsvarende for y), og endvidere

$$(x|y) = \sum_{i\in I} (x|e_i)(e_i|y) = \sum_{i\in I} a_i \overline{b_i} .$$

Svarende til hovedtilfældet F = E haves endelig

13.2. Sætning. Lad $(e_i)_{i\in I}$ være et ortonormalsystem i et præhilbertrum E. Følgende 4 udsagn er ækvivalente:

(i) Ortonormalsystemet $(e_i)_{i\in I}$ er totalt i E.

(ii) For ethvert $x \in E$ er familien $((x|e_i)e_i)_{i\in I}$ summabel i E, og

$$x = \sum_{i\in I} (x|e_i)e_i \ .$$

(iii) For ethvert $x \in E$ gælder Parsevals formel:

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2 \ .$$

(iv) For ethvert $x,y \in E$ gælder den udvidede Parsevals formel:

$$(x|y) = \sum_{i\in I} (x|e_i)(e_i|y) = \sum_{i\in I} (x|e_i)\overline{(y|e_i)} \ .$$

Dersom E er et Hilbertrum er hvert af disse udsagn endvidere ækvivalent med udsagnet

(v) $\forall x \in E: [(x|e_i) = 0 \text{ for alle } i \in I] \Rightarrow x = 0$.

Bevis. Med betegnelserne fra den foregående sætning er (i) ækvivalent med, at $F = E$. Derfor haves (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) ifølge punkt b) af sætn. 12.2. I henhold til en bemærkning til denne sætning følger også (iv) af $F = E$, og det er klart, at (iv) $\Rightarrow$ (iii). Det er ligeledes klart, at f.eks. (ii) $\Rightarrow$ (v). Hvis F er et Hilbertrum, gælder omvendt (v) $\Rightarrow$ (i) ifølge H.R., korollaret til sætn. 9. |

14. Ortonormalbasis. Et totalt ortonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ for et præhilbertrum kaldes også en ortonormalbasis for dette. En ortonormalbasis er ikke i almindelighed nogen basis i alge-

braisk forstand, idet fremstillingen

$$x = \sum_{i\in I} (x|e_i)e_i$$

af en vektor $x \in E$ som sum af komposanterne $(x|e_i)e_i$ normalt indeholder uendelig mange led $\neq 0$. Men de endelige delsummer $\sum_{i\in J} (x|e_i)e_i$, $J \in \dot{D}_e(I)$, konvergerer mod x langs $\dot{D}_e(I)$ som beskrevet i F.1.

Tallene $(x|e_i)$ kaldes ofte koordinaterne for x med hensyn til basen (koordinatsystemet) $(e_i)_{i\in I}$.

Af sætning 13.2 fremgår, at hvis et ortonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ er totalt (altså en basis), da er systemet maximalt, er altså ikke ægte delmængde af noget ortonormalsystem. Omvendt er et maximalt ortonormalsystem i et Hilbertrum totalt.

En ortonormalbasis for et prähilbertrum E er samtidigt ortonormalbasis for kompletteringen $\hat{E}$ af E (når E er indlejret i $\hat{E}$.

Sætning. I ethvert Hilbertrum eksisterer der en ortonormalbasis.

Nærmere gælder, at ethvert ortonormalsystem A i et Hilbertrum E kan udvides til en ortonormalbasis $B \supseteq A$ (og heraf fremgår selve sætningen for $A = \emptyset$).

Bevis. Mængden af alle ortonormal systemer i E, som omfatter A, er øjensynlig induktivt ordnet ved inklusion, og der eksisterer derfor et maximalt ortonormalsystem $B \supseteq A$ i Hilbertrummet E, altså en ortonormalbasis for E.

15. Gram-Schmidts ortonormaliseringsproces.

Sætning. Lad (x_n) betegne et numerabelt system af lineært uafhængige vektorer i et prähilbertrum E. Da eksisterer der netop ét ortonormalsystem (e_n) i E med følgende egenskaber:

a) For hver index n udspænder $e_1,\cdots,e_n$ samme underrum af E som $x_1,\cdots,x_n$.

b) For hver index n er $(x_n|e_n)$ reel og > 0 .

Bevis. Med F_n betegnes det af $x_1,\cdots,x_n$ udspændte n-dimensionale (derfor fuldstændige) underrum af E, altså $F_n=Kx_1+\cdots+Kx_n$, og med P_n den tilhørende ortogonale projektionsoperator. Den eneste mulighed for e_1 er $e_1 = \|x_1\|^{-1}x_1$. Vektoren

$$y_{n+1} = x_{n+1} - P_n x_{n+1}$$

er $\neq 0$, tilhører F_{n+1} og er vinkelret på F_n. Det af y_{n+1} udspændte 1-dimensionale underrum Ky_{n+1} er således det ortogonale komplement til F_n i F_{n+1}. Dersom systemet (e_n) har egenskaben a), tilhører e_{n+1} ligeledes det omtalte komplement, hvorfor $e_{n+1} = ay_{n+1}$ med $a \in K$ (a afhængig af n). Af $\|e_{n+1}\| = 1$.*) Skal systemet (e_n) desuden opfylde (b), må der gælde $\bar{a}(x_{n+1}|y_{n+1}) = (x_{n+1}|e_{n+1}) > 0$. Tilsammen fastlægger de fundne betingelser på $|a|$ og $\bar{a}$ tallet $a = |a|^2/\bar{a}$ og dermed den normerede vektor $e_{n+1} = ay_{n+1}$ entydigt. Herefter konstueres ortonormalsystemet (e_n) uden vanskelighed. Betegnes med E_n det af $e_1,\cdots,e_n$ udspændte underrum af E, altså $E_n = Ke_1+\cdots+Ke_n$, vises ved induktion, at $E_n = F_n$, idet gyldigheden heraf for et vist n medfører

$$F_{n+1} = F_n + Kx_{n+1} = F_n + Ky_{n+1} = E_n + Ke_{n+1} = E_{n+1} .$$

Det bemærkes, at (e_n) er totalt, altså en ortonormalbasis for E, hvis og kun hvis (x_n) er totalt.

16. Separabelt rum. Et topologisk rum kaldes separabelt, dersom det indeholder en numerabel, overalt tæt delmængde.

*) følger $|a|\|y_{n+1}\| = 1$

Sætning. Et præhilbertrum E har en numerabel ortonormalbasis, hvis og kun hvis E er separabelt.

Bevis. Antag først, at E er separabelt, og lad $\{y_n\}$ være en numerabel og overalt tæt (eller blot total) delmængde af E. Vi bestemmer en lineært uafhængig delmængde $\{x_n\} \subseteq \{y_n\}$, som udspænder samme vektorrum som $\{y_n\}$, og derfor er total, idet vi for hvert n bortkaster y_n, hvis og kun hvis y_n er linearkombination af $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$. (Overvej dette nøjere). Ved ortonormalisering af det numerable, totale system (x_n) fås en numerabel ortonormalbasis for E.

Hvis der omvendt eksisterer et numerabelt totalt ortonormalsystem i E, så er E separabelt ifølge korrollaret til lemma 17.1 nedenfor. |

17. Mere om totale delmængder.

17.1. Lemma. Enhver total, uendelig delmængde M af et t.v.r. E kan udvides til en overalt tæt delmængde af E, som er ækvipotent med M.

Bevis. Lad K_o betegne en overalt tæt, numerabel delmængde af koefficientlegemet K således at $1 \in K_o$. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ betegner vi med $F^{(n)}$ og $F_o^{(n)}$ mængden af alle vektorer i E, der kan fremstilles som linearkombination af n elementer af M med koefficienter tilhørende K, henholdsvis K_o, altså

$$F^{(n)} = KM + KM + \cdots + KM \quad (n \text{ led}),$$
$$F_o^{(n)} = K_oM + K_oM + \cdots + K_oM \quad (n \text{ led}).$$

Åbenbart er $F^{(n)}$ og $F_o^{(n)}$ billedet af $K^n \times M^n$, henholdsvis $(K_o)^n \times M^n$, ved den kontinuerte afbildning $f: K^n \times E^n \to E$ givet ved

$$f(a_1,\cdots,a_n,x_1,\cdots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

for $a_1,\cdots,a_n \in K$, $x_1,\cdots,x_n \in E$. Vi sætter videre

$$F_o = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_o^{(n)} , \quad F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{(n)} ,$$

og bemærker, at F er det af M udspændte underrum af E. Da M er total, er F overalt tæt i E. Da $1 \in K_o$, gælder $M \subseteq F_o^{(1)} \subseteq F_o \subseteq F$. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ er produktmængden $(K_o)^n$ tæt i K^n, idet

$$\overline{(K_o)^n} = (\overline{K}_o)^n = K^n .$$

Af samme grund er $(K_o)^n \times M^n$ tæt i $K^n \times M^n$, og derfor er det kontinuerte billede $F_o^{(n)}$ tæt i $F^{(n)}$:

$$\overline{F_o^{(n)}} = \overline{f(K_o^n \times M^n)} \supseteq f(\overline{K_o^n \times M^n}) \supseteq f(K^n \times M^n) = F^{(n)}$$

(se §T2.24). Endelig bliver foreningsmængden $F_o = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_o^{(n)}$ tæt i $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{(n)}$ og dermed i E.

Tilbage står at vise, at kard F_o = kard M, såfremt M er uendelig. Vi finder for ethvert $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{kard } F_o^{(n)} &\leqq \text{kard}(K_o^n \times M^n) = \aleph_o^n (\text{kard } M)^n \\ &= \aleph_o \text{ kard } M = \text{kard } M . \end{aligned}$$

Vi har her anvendt T1, opg. 20, på afbildningen $f:(K_o)^n \times M^n \to F_o^{(n)}$, og dernæst benyttet T.1, opg. 28, på α = kard M. - Endelig fås ifølge T.1, opg. 23,

$$\text{kard } F_o \leqq \sum_{n\in\mathbb{N}} \text{kard } F_o^{(n)} \leqq \aleph_o \cdot \text{kard } M = \text{kard } M ,$$

hvoraf kard F_o = kard M da $M \subseteq F_o$. |

Korollar. Et t.v.r. E er separabelt, hvis og kun hvis der eksisterer en numerabel, total delmængde M af E.

Bevis. Følger af lemmaet, hvis M er uendelig, og af beviset for lemmaet, hvis M er endelig, thi da bliver kard $F_o^{(n)} \leqq \aleph_o$ kard $M \leqq \aleph_o$ og derfor kard $F_o \leqq \aleph_o$.

17.2. Lemma. Lad $(e_i)_{i\in I}$ være et ortonormalsystem og M en total mængde i et præhilbertrum E. Da er kard $I \leqq$ kard M.

Bevis. Hvis M er endelig, udspænder M (algebraisk) et vektorrum F af endelig dimension $m \leqq$ kard M. Da F er såvel afsluttet som overalt tæt i E, er F = E. Eftersom ethvert ortonormalsystem er lineært uafhængigt, er kard $I \leqq m$. Lad dernæst M være uendelig. Ifølge det foregående lemma eksisterer en tæt mængde $F_o \subseteq E$ med kard F_o = kard M. For nu at vise, at kard $I \leqq$ kard F, definerer vi en injektiv afbildning af I ind i F_o på følgende måde. Lad $V = \{x \in E \mid \|x\| < \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$. Enhver af kuglerne $e_i + V$ møder F_o, da F_o er overalt tæt. Til $i \in I$ lader vi nu svare et punkt af $F_o \cap (e_i + V)$. Den således bestemte afbildning af I ind i F_o er injektiv, fordi kuglerne $e_i + V$ er parvis disjunkte, idet $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ for $i \neq j$ ifølge den pythagoræiske formel.

I resten af paragraffen betragtes kun Hilbertrum.

18. Dimension. Det mindste kardinaltal for nogen total delmængde af et Hilbertrum E kaldes Hilbertdimensionen (eller blot dimensionen) af E og betegnes dim E.

18.1. Sætning. For enhver ortonormal basis B for et Hilbertrum E gælder kard B = dim E.

Alle ortonormalbaser er således ækvipotente. Uligheden kard $B \leqq$ dim E følger af lemma 17.2. Den modsatte ulighed følger af, at B er total. |

Da ethvert ortonormalsystem er lineært uafhængigt, er Hil-

bertdimensionen af E højst lig med den algebraiske dimension af E. Lighedstegnet indtræffer blandt andet hvis Hilbertdimensionen er endelig, fordi en ortonormalbasis $e_1,\cdots,e_m$ for E da tillige er en basis for E i algebraisk betydning, idet enhver vektor $x \in E$ jo har fremstillingen $x = \sum_{i=1}^{m} (x|e_i)e_i$. Begreberne endeligdimensionalt Hilbertrum og dimension af et sådant har således samme betydning, hvad enten der tænkes på Hilbertdimension eller algebraisk dimension. Derimod har det Hilbertske følgerum $l^2 = l^2(\dot{N})$ (over $\dot{R}$ eller $\dot{C}$) Hilbertdimensionen $\aleph_o$ = kard $\dot{N}$ (jvf. nedenfor) medens den algebraiske dimension kan vises at være $\aleph$ = kard $\dot{R}$ (opg.12).

Ifølge lemma 17.1 er Hilbertdimensionen af et Hilbertrum E, som ikke er endeligdimensionalt, det mindste kardinaltal for nogen overalt tæt delmængde af E. Specielt har et sådant Hilbertrum dimensionen $\aleph_o$, hvis og kun hvis det er separabelt. (Dette følger også sætn. 16.)

Ethvert Kardinaltal forekommer som dimension af et Hilbertrum. For enhver mængde I er nemlig

$$\dim l^2(I) = \text{kard } I ,$$

idet elementerne

$$(\delta_{ij})_{j\in I} , \quad i \in I$$

danner en ortonormalbasis for $l^2(I)$.

18.2. Sætning. Ethvert Hilbertrum E over K er isometrisk isomorft med $l^2(I;K)$, hvor I betegner en mængde med kard I = dim E.

Bevis. Lad $(e_i)_{i\in I}$ betegne en ortonormalbasis for E. Ifølge sætn. 13.1, d) defineres der en isometrisk isomorfi φ

af E på $l^2(I;K)$ ved

$$\varphi(x) = (x|e_i)_{i\in I} = (a_i)_{i\in I}, \quad \forall x \in E ,$$

og der gælder

$$\varphi^{o-1}((a_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i e_i , \quad \forall (a_i)_{i\in I} \in l^2(I;K). \ |$$

18.3. Sætning. To Hilbertrum E og E^* over samme koefficientlegeme K er isometrisk isomorfe hvis (og kun hvis) de har samme Hilbertdimension.

Bevis (for hvis-delen). Lad kard I = dim E = dim E^*. Lad $(e_i)_{i\in I}$ og $(e_i^*)_{i\in I}$ være ortonormalbaser for E og E^*. Som i beviset for den foregående sætning har vi da isomorfien φ:E på $l^2(I;K)$ og en tilsvarende isomorfi φ^*:E^* på $l^2(I,K)$. Disse isomorfier er karakteriseret ved

$$\varphi(e_i) = (\delta_{ij})_{j\in J} = \varphi^*(e_i^*) , \quad \forall i \in I .$$

Åbenbart er $\psi = \varphi^{*o-1} \circ \varphi$ en isometrisk isomorfi af E på E^*, karakteriseret ved

$$\psi(e_i) = e_i^* , \quad \forall i \in I.$$

Eksplicit er ψ ifølge beviset for den foregående sætning bestemt ved

$$\psi(x) = \sum_{i\in I} (x|e_i)e_i^* , \quad \forall x \in E .$$

Den afbilder således enhver vektor $x = \sum_{i\in I} a_i e_i \in E$ (hvor altså $a_i = (x|e_i)$, $\sum_{i\in I} |a_i|^2 < +\infty$) i den vektor $\psi x) = \sum_{i\in I} a_i e_i^* \in E^*$, der har det samme koordinatsæt $(a_i)_{i\in I} \in l^2(I;K)$ med hensyn til

ortonormalbasen $(e_i^*)_{i\in I}$ for E^* som x har med hensyn til ortonormalbasen $(e_i)_{i\in I}$ for E.

Eksempel. Vektorrummet $E = L^2([a,b];\dot{C})$ af alle (ækvivalensklasser af) kvadratisk Lebesgue integrable funktioner $f:[a,b] \to \dot{C}$ er et Hilbertrum med skalarproduktet

$$(f|g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt ,$$

idet fuldstændigheden er et udtryk for Riesz-Fischer's sætning. I tilfældet $b-a = 2\pi$ danner funktionerne e_n defineret for $t \in [a,b]$ ved

$$e_n(t) = \exp(int) , \forall n \in \dot{Z} ,$$

en ortonormalbasis for E, som derfor har Hilbertdimensionen

$$\dim E = \text{kard } \dot{Z} = \aleph_o$$

og således er separabelt. Den ovenfor omtalte isomorfi $\varphi:E\mapsto l^2(\dot{Z};\dot{C})$ består i, at man til enhver funktion $f \in L^2([a,b];\dot{C})$ lader svare sættet $(a_n)_{n\in\dot{Z}}$ af funktionens Fourierkonstanter a_n:

$$a_n = (f|e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(t)\exp(-int)dt .$$

At denne afbildning er isometrisk:

$$\|f\|^2 = \sum_{n\in\dot{Z}} |(f|e_n)|^2 = \sum_{n\in\dot{Z}} |a_n|^2$$

udtrykker her den gængse form for Parsevals formel.

19. Den svage topologi på Hilbertrum.

Den svage topologi $\sigma(E, E')$ på et Hilbertrum E er defineret ved seminormerne

$$p_f(x) = |f(x)| \quad , \quad x \in E, \ f \in E',$$

jvf. T.V.R. 44,46. Af sætning 10 følger nu, at den svage topologi på E er bestemt ved familien af seminormer $(p_y)_{y \in E}$

$$p_y(x) = |(x|y)|, \quad x \in E.$$

En følge $x_n \in E$ konvergerer således svagt mod en vektor $x \in E$ hvis og kun hvis

$$\lim_{n \to \infty} (x_n|y) = (x|y)$$

for alle $y \in E$.

Som bemærket tidligere er den svage topologi på E strengt grovere end den stærke topologi (normtopologien) på E med mindre $\dim E < \infty$. Dette kan indses simpelt ved at betragte en ortonormal følge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, idet en sådan konvergerer svagt mod 0 ifølge Bessels ulighed (13.1), men den konvergerer ikke stærkt mod 0.

Forskellen på topologierne træder også frem ved at enhedskuglen i E er svagt kompakt, fordi et Hilbertrum er refleksivt. På den anden side er enhedskuglen ikke stærkt kompakt (når $\dim E = \infty$), idet en ortonormal følge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ikke kan have stærkt konvergente delfølger da $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ for $n \neq m$.

Den følgende sætning giver en simpel betingelse for at svag konvergens medfører stærk konvergens.

19.1 Sætning. Antag at følgen $x_n \in E$ konvergerer svagt mod $x \in E$, og at $\limsup\|x_n\| \leq \|x\|$. Så vil x_n konvergere stærkt mod x.

Bevis: Af $\|x-x_n\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(x|x_n)$ fås $0 \leq \limsup\|x-x_n\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(x|x) + \limsup\|x_n\|^2 \leq \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0$.

19.2 Sætning. Enhedskuglen B i et separabelt Hilbertrum er metriserbar også i den svage topologi.

Bevis: Et separabelt Hilbertrum E indeholder en numerabel delmængde D, som er overalt tæt i E i den stærke topologi. Åbenbart er B indeholdt i afslutningen $\overline{(2B) \cap D}$ af $(2B) \cap D$ i den stærke topologi. (Faktisk er allerede $B \cap D$ overalt tæt i B.) Idet vi ordner $(2B) \cap D$ i en følge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bliver enhver af afbildningerne $x \to |(x|z_n)|$ en seminorm på E. Derfor bestemmer også

$$p(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|(x|z_n)| \quad , \quad x \in E \ ,$$

en seminorm på E, idet rækken er konvergent, fordi $|(x|z_n)| \leq \|x\|\,\|z_n\| \leq 2\|x\|$. Faktisk er p en norm, da $p(x) = 0$ medfører $(x|z_n) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og derfor $(x|z) = 0$ for alle $z \in B$, da $B \subset \overline{2B \cap D} = \overline{\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$. Ved

$$\mathrm{dist}(x,y) = p(x-y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|(x-y\,|\,z_n)|,$$

defineres derfor et forskydningsinvariant afstandsmål på E. Vi vil vise, at dette, betragtet på B, bestemmer den svage topologi på B. En omegn af et punkt $x \in B$ i den svage topol på B indeholder fællesmængden for endeligt mange mængder af formen

$$\{y \in B \mid |(x - y|z)| < \varepsilon\},$$

hvor $z \in E$ og $\varepsilon \in \dot{R}_+$. Ved om fornødent at erstatte z med $\|z\|^{-1}z$ og ε med $\|z\|^{-1}\varepsilon$, hvilket ikke influerer på mængden, kan vi opnå at $\|z\| \leq 1$, altså $z \in B$.

Når vi skal vise, at enhver svag omegn af x i B omfatter en kugleomegn

$$\{y \in B \mid \text{dist}(x, y) < \delta\},$$

er det tilstrækkeligt at betragte en svag omegn af den angivne form. Til ε bestemmer vi først n så at $\|z - z_n\| < \varepsilon/4$ og dernæst $\delta > 0$ så at $2^n\delta < \varepsilon/2$. For et punkt $y \in B$ med $\text{dist}(x, y) < \delta$ gælder da

$$\begin{aligned} |(x - y|z)| &\leq |(x - y|z_n)| + |(x - y|z - z_n)| \\ &\leq 2^n \text{dist}(x,y) + \|x - y\| \, \|z - z_n\| \\ &\leq 2^n\delta + 2\|z - z_n\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

For omvendt at vise, at en given kugleomegn af x i B indeholder en svag omegn af x i B, vælger vi til radius δ i den givne kugleomegn et nummer $N \in \dot{N}$ så at $2^{-N} < \delta/8$. Da er for $y \in B$

$$\begin{aligned} \sum_{n>N} 2^{-n}|(x - y|z_n)| &\leq \sum_{n>N} 2^{-n}\|x - y\| \, \|z_n\| \\ &\leq \sum_{n>N} 2^{-n} \cdot 4 = 4 \cdot 2^{-n} < \delta/2. \end{aligned}$$

Dernæst betragtes den svage omegn

$$\bigcap_{n=1}^{N} \{y \in B \mid |(x - y|z_n)| < \delta/(2N)\}.$$

For enhver vektor y heri bliver åbenbart $\mathrm{dist}(x,y) < \delta$. □

Bemærkning. Den ved afstandsmålet dist bestemte topologi på hele E er strengt finere end den svage topologi på E, medmindre E er endeligdimensionalt. Faktisk er den svage topologi på hele E ikke metriserbar, ja opfylder end ikke 1. numerabilitetsaksiom med mindre E er endeligdimensionalt.

Som beviset viser, gælder lemmaet for ethvert normeret rum med separabelt dualrum.

19.3 Korollar. Af enhver begrænset punktfølge på et Hilbertrum kan udtages en svagt konvergent delfølge.

Det er åbenbart tilstrækkeligt at betragte en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på enhedskuglen B i det givne Hilbertrum. Med F betegner vi det af $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ udspændte afsluttede underrum af E. Da er F et separabelt Hilbertrum, da den numerable mængde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er total i F. Da enhedskuglen $B \cap F$ i F er kompakt i den svage topologi på F, og tillige metriserbar ifølge ovenstående lemma, har $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en delfølge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, som konvergerer svagt i F. Der findes altså et $y \in F$, så at

$$\lim_{n\to\infty}(y_n|z) = (y|z)$$

for ethvert $z \in F$. Samme relation er triviel for $z \in F^{\perp}$ hvor $(y_n|z) = (y|z) = 0$. Den gælder derfor også for $z \in F + F^{\perp} = E$.

Alternativ til H.R. § 12.

(Kan læses i stedet for H.R. 21 linie 7 til H.R. 29 linie 5

Vi betragter en familie $(F_i)_{i\in I}$ af fuldstændige underrum F_i af et prähilbertrum E, og antager at disse underrum er parvis ortogonale:

$$\forall i,j \in I : i \neq j \Rightarrow F_i \perp F_j .$$

Vi betegner med $\sum_{i\in I} F_i$ det af $\bigcup_{i\in I} F_i$ udspændte underrum i algebraisk betydning. Enhver vektor $x \in \sum_{i\in I} F_i$ kan på en og kun en måde skrives

$$x = \sum_{i\in I} x_i \quad , \tag{16}$$

hvor $x_i \in F_i$ for hvert $i \in I$, men hvor $x_i = \underline{0}$ undtagen for endelig mange indices i. Der er derfor ingen problemer med at definere ovenstående sum.

Afslutningen

$$F = \overline{\sum_{i\in I} F_i}$$

er det af $\bigcup_{i\in I} F_i$ udspændte underrum i topologisk betydning (jvf. T.V.R., 3o).

Endelig indfører vi Hilbertsummen $H = \bigoplus_{i\in I} F_i$ af rummene F_i, der jo alle er Hilbertrum, og for hvert $i \in I$ betegner P_i projektionsoperatoren af E på F_i.

Sætning 1. a) For hvert $x \in E$ tilhører familien $(P_i x)_{i\in I}$ Hilbertsummen H, og afbildningen $k : E \to H$ givet ved

$$k(x) = (P_i x)_{i\in I}$$

en lineær og afstandsformindskende ($\|k\| \leq 1$):

$$\|k(x)\|^2 = \sum_{i\in I} \|P_i x\|^2 \leq \|x\|^2$$

b) Følgende 3 udsagn er ækvivalente: (i) $x \in F$; (ii) $\sum_{i\in I} \|P_i x\|^2 = \|x\|^2$; (iii) Familien $(P_i x)_{i\in I}$ er summabel i E med summen $\sum_{i\in I} P_i x = x$.

c) Hvis F er fuldstændigt med tilhørende projektionsoperator P, er familien $(P_i x)_{i\in I}$ summabel i E for hvert $x \in E$, og der gælder

$$\sum_{i\in I} P_i x = Px \ , \quad \sum_{i\in I} \|P_i x\|^2 = \|Px\|^2.$$

Bevis: Vi forudskikker den bemærkning, at hvis $G_1 \subseteq G_2$ er fuldstændige underrum med tilhørende projektionsoperator P_1, P_2, så er for hvert $x \in E$

$$P_1(P_2 x) = P_2(P_1 x) = P_1 x.$$

Da nemlig $P_1 x \in G_1 \subseteq G_2$ er $P_2(P_1 x) = P_1 x$, og da $x - P_1(P_2 x) = (x - P_2 x) + (P_2 x - P_1(P_2 x))$ ser man, at $x - P_1(P_2 x)$ er ortogonal på G_1, fordi $x - P_2 x \perp G_2$, $P_2 x - P_1(P_2 x) \perp G_1$. Herved opfylder $P_1(P_2 x) \in G_1$, den egenskab, der karakteriserer $P_1 x$.

For enhver endelig delmængde $J \in \dot{D}_e(I)$ af I er summen

$$F_J = \sum_{j\in J} F_j$$

ifølge H.R., lemma 6, topologisk direkte. Derfor er F_J topologisk isomorf med produktet $\prod_{j\in J} F_j$ af de fuldstændige rum F_j, $j \in J$, og derfor selv fuldstændigt. (Jvf. T.V.R. def. 21, i tilfældet cardJ = 2.)

Vi betegner med P_J den til F_J hørende projektionsoperator. For hvert $x \in E$ har $P_J x \in F_J$ fremstillingen

$$(17) \qquad P_J x = \sum_{j\in J} P_j(P_J x) = \sum_{j\in J} P_j x \ ,$$

idet $P_j(P_J x) = P_j x$ for $j \in J$ ifølge bemærkningen ovenfor.

Der gælder således

$$P_J = \sum_{j\in J} P_j$$

efter den gængse "punktvise" definition af en endelig sum af afbildninger ind i et vektorrum.

Anvendes den pythagoræiske regel på de ortogonale summer

$$x = P_J x + (x - P_J x) \ , \ P_J x = \sum_{j\in J} P_j x \ ,$$

fås

$$(18) \qquad \sum_{j\in J} \|P_j x\|^2 = \|P_J x\|^2 = \|x\|^2 - \|x - P_J x\|^2 \leq \|x\|^2$$

hvoraf

$$\sum_{i\in I} \|P_i x\|^2 = \sup\{ \sum_{j\in J} \|P_j x\|^2 \mid J \in \dot{D}_e(I)\} \leq \|x\|^2.$$

Herved er a) godtgjort. Tillige viser (18), at der under b) gælder (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). Det er klart at (iii) $\Rightarrow$ (i), fordi alle $P_i x \in F$. For at indse at (i) $\Rightarrow$ (ii) bemærkes, at mængden af $x \in E$ for hvilke (ii) gælder er lig med mængden

$$D = \{x \in E \mid \|k(x)\| = \|x\|\},$$

som er afsluttet, fordi $k : E \to H$ er kontinuert.

Af (16) følger (den optrædende sum er endelig), at $P_i x = x_i$ for alle $i \in I$, når $x \in \sum_{i\in I} F_i$, og af Pythagoras følger så

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i\|^2 = \sum_{i\in I} \|P_i x\|^2 = \|k(x)\|^2.$$

Dette viser, at $D \supseteq \sum_{i\in I} F_i$, altså $D \supseteq F$ fordi D er afsluttet. Hermed er vist at (i) $\Rightarrow$ (ii). (Da (ii) $\Rightarrow$ (i) ved vi faktisk at $D = F$).

Åbenbart fremgår c) af b) ved anvendelse på $Px \in F$, idet som bemærket $P_i Px = P_i x$ for alle $i \in I$. □

Corollar 2. Restriktionen af k til F definerer en isometrisk isomorfi $k : F$ ind i H. Billedet ved k af $\sum_{i\in I} F_i$ er underrummet G af H bestående af alle de familier $(x_i)_{i\in I}$, hvor $x_i = 0$ for alle $i \in I$ på nær højst endelig mange. Afbildningen k er surjektiv, hvis og kun hvis F er fuldstændig.

I bekræftende fald er $k^{-1} : H \to F$ givet på følgende måde: Enhver familie $(x_i)_{i\in I} \in H$ er summabel og dens sum

$$x = \sum_{i\in I} x_i$$

er netop $x = k^{-1}((x_i)_{i\in I})$.

Bevis: Hvis F er fuldstændigt, så også $k(F)$, da k er en isometri. Dermed er $k(F)$ afsluttet i H, men da $k(F) \supseteq G$, er $k(F)$ også tæt i H, og så må $k(F) = H$.

Da H er et Hilbertrum følger på den anden side af $k(F) = H$, at $k(F)$ og dermed F er fuldstændigt.

Hvis k er surjektiv, findes til $(x_i)_{i\in I} \in H$ et element $x \in F$ så $k(x) = (x_i)_{i\in I}$, altså

$$P_i x = x_i \quad \text{for alle} \quad i \in I.$$

Af sætning 1, b) følger da, at $(x_i)_{i\in I}$ er summabel med sum x, altså

$$x = k^{-1}((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} x_i. \qquad \square$$

I hovedtilfældet: E Hilbertrum og $F = E$, er k en isometrisk isomorfi af E på Hilbertsummen $H = \bigoplus_{i\in I} F_i$. Man tillader sig derfor ofte at identificere E med $\bigoplus_{i\in I} F_i$, og taler om at E er 'Hilbertsummen af familien $(F_i)_{i\in I}$. (Til forskel herfra kan man så benytte betegnelsen ydre Hilbertsum om det i § 11 indførte begreb).

I hovedtilfældet kommer vi til følgende resultat:

Sætning 3. Lad Hilbertrummet E over K være Hilbertsum af familien $(F_i)_{i\in I}$ af parvis ortogonale afsluttede underrum af E, og lad $(P_i)_{i\in I}$ være de tilhørende projektionsoperatorer. Da gælder:

a) For hvert $x \in E$ er familien $(P_i x)_{i\in I}$ summabel i E med summen x:

$$x = \sum_{i\in I} P_i x \ , \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in I} \|P_i x\|^2$$

For $x,y \in E$ er familien af tal $(P_i x \mid P_i y) \in K$ absolut summabel og der gælder

$$(x|y) = \sum_{i\in I} (P_i x \,|\, P_i y).$$

b) Lad $(x_i)_{i\in I}$ være en familie i E så $x_i \in F_i$ for hvert $i \in I$. Så er familien summabel i E hvis og kun hvis $\sum_{i\in I} \|x_i\|^2 < \infty$, og i bekræftende fald er dens sum $x = \sum_{i\in I} x_i$ karakteriseret ved at

(19) $\qquad P_i x = x_i$ for ethvert $i \in I$.

Bevis: Ad a). Den isometriske isomorfi $k : E \to \bigoplus_{i\in I} F_i$ bevarer det indre produkt, og heraf følger den sidste relation, hvilket var det eneste, der ikke overføres fra sætning 1.

Ad b). Hvis familien $(x_i)_{i\in I}$ er summabel med summen x, altså

$$x = \sum_{i\in I} x_i ,$$

fås ved anvendelse af den kontinuerte lineære operator P_j, $j \in J$, at $P_j x = \sum_{i\in I} P_j x_i$, men

$$P_j x_i = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ x_i & \text{for } i = j \end{cases},$$

da $F_i \perp F_j$ for $i \neq j$. Altså er $P_i x = x_i$ for alle $i \in I$. Af a) følger nu at

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \|P_i x\|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i\|^2 < \infty.$$

Hvis omvendt $\sum_{i\in I} \|x_i\|^2 < \infty$ tilhører familien $(x_i)_{i\in I}$ den ydre Hilbertsum $\bigoplus_{i\in I} F_i$, og derfor findes præcis et element $x \in E$ så

$$k(x) = (x_i)_{i\in I},$$

og af k's definition følger da, at $P_i x = x_i$ for alle $i \in I$. Af a) følger nu, at $(x_i)_{i\in I}$ er summabel med sum x.

Betingelsen (19) er ensbetydende med at $k(x) = (x_i)_{i\in I}$, og da k er injektiv, ses det at betingelsen (19) fastlægger x entydigt. □

Opgaver til Hilbertrum

1. Lad K være et legeme, og lad $m,n \in \dot{N}$. Vis, at for enhver matrix $(a_{jk})_{j=1,\ldots,m;k=1,\ldots,n}$ med elementer $a_{jk} \in K$ er den ved

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j y_k$$

[med $x = (x_1,\ldots,x_m)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$] definerede afbildning af $K^m \times K^n$ ind i K bilineær. Vis også, at enhver bilineær form f på $K^m \times K^n$ har netop én fremstilling af denne form. Vis endelig, at f er symmetrisk, hvis og kun hvis den tilhørende matrix er symmetrisk, d.v.s. $m = n$ og $a_{jk} = a_{kj}$ for alle $j,k = 1,\ldots,m$.

2. Vis, at for enhver matrix $(a_{jk})_{j=1,\ldots,m;k=1,\ldots,n}$ med elementer $a_{jk} \in K$, hvor $K = \dot{R}$ eller $\dot{C}$, er den ved

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j \overline{y}_k$$

definerede afbildning af $K^m \times K^n$ ind i K sesquilineær. Vis også, at enhver sesquilineær form f på $K^m \times K^n$ har netop én fremstilling af denne form. Vis endelig, at f er hermitesk hvis og kun hvis den tilhørende matrix er hermitesk, d.v.s. $m = n$ og $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$ for alle $j,k = 1,\ldots,m$.

3. Lad f være en positiv hermitesk form på et vektorrum E, og lad N betegne underrummet $\{x \in E \mid f(x,x) = 0\}$. Idet man for $x \in E$ sætter $\dot{x} = x+N$, skal man vise, at der ved

$$g(\dot{x},\dot{y}) = f(x,y)$$

defineres en ikke udartet, positiv hermitesk form på E/N.

På denne måde kan der således af ethvert vektorrum E med skalarprodukt afledes et præhilbertrum E/N.

4. Lad E være et normeret rum over K(=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) således at der for alle $x,y \in E$ gælder

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Vis, at der ved den relevante polariseringsidentitet defineres et skalarprodukt på E, som altså derved bliver et præhilbertrum over K.

5. Vis, at når a og b er forskellige vektorer i et vektorrum med skalarprodukt, vil mængden af de vektorer x i rummet, for hvilke $\|x-a\| = \|x-b\|$, være en afsluttet hyperplan.

6. Lad F være en konveks, fuldstændig, ikke tom delmængde af et præhilbertrum E. For ethvert $x \in E$ betegnes med $p(x)$ den metriske projektion af x på F, altså det punkt af F, som ligger nærmest ved x. Vis, at afbildningen p er afstandsformindskende (og derfor ligelig kontinuert). Vis endvidere, at $p(x)$ er det eneste punkt y af F for hvilket

$$\mathrm{Re}(x-y|x-z) \leq 0 \quad \text{for alle } z \in F.$$

Fortolk dette resultat geometrisk i tilfældet $E = \mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$.

7. Idet $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, betegnes med E det underrum af $K^{\mathbb{N}}$, der består af alle følger $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på K, for hvilke $x_n \neq 0$ kun

gælder for endeligt mange $n \in \mathbb{N}$. For $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ og $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ sættes

$$(x|y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y}_n,$$

hvor der i summen på højre side ses bort fra de led, som er 0.

a) Vis, at E med dette udtryk som skalarprodukt er et præhilbertrum over K, og at dette ikke er fuldstændigt.

b) Lad $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}\setminus E$, og lad φ betegne den ved $\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ definerede linearform på E. Vis, at φ er kontinuert (altså at hyperplanen $F = \varphi^{-1}(0)$ er afsluttet), hvis og kun hvis $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < +\infty$. Vis endvidere, at i givet fald har φ ikke formen $x \to (x|y)$ for nogen vektor $y \in E$, og at $F^\perp = \{\underline{0}\}$, $F^{\perp\perp} \supset F$.

8. Lad E betegne vektorrummet over $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ bestående af alle kontinuerte funktioner $f:[-1,1] \to K$.

a) Vis, at der ved

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt\ , \quad f,g \in E,$$

defineres et skalarprodukt på E, som derved bliver et præhilbertrum.

b) Vis, at der ved

$$\varphi(f) = \int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

defineres en kontinuert linearform på E, men at denne ikke har formen $\varphi(f) = (f|g)$ for nogen vektor $g \in E$. Vis derved at E ikke er fuldstændigt. Vis endvidere, at nulrummet $F = \varphi^{-1}(0)$ er en afsluttet hyperplan i E, for hvilken $F^\perp = \{\underline{0}\}$, $F^{\perp\perp} \supset F$.

c) Vis, at der ved $\psi(f) = f(0)$ defineres en diskontinuert linearform på E. Hvad følger heraf om nulrummet $\psi^{-1}(0)$?

d) Med L, henholdsvis U, betegnes mængden af lige, henholdsvis ulige, funktioner i E. Vis, at L og U er underrum af E, og at $L \perp U$, $L+U = E$. Vis derved, at $L^{\perp} = U$, $U^{\perp} = L$, specielt at L og U er afsluttede.

9. Vis, at der for enhver vektor x i et præhilbertrum E gælder

$$\|x\| = \sup_{y \in B} |(x|y)|,$$

hvor $B = \{y \in E \mid \|y\| \leq 1\}$ betegner enhedskuglen i B. Vis også, at det anførte supremum er et ægte maksimum.

10. Vis, at enhedskuglen $\{x \in E \mid \|x\| \leqq 1\}$ i et uendeligdimensionalt Hilbertrum E ikke er kompakt.

11. Lad $\lambda_n \in l^2$, $\lambda_n > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Sæt $e_n = (\delta_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$. I Hilbertrummet $E = l^2$ betegner vi med F og G det mindste afsluttede underrum indeholdende henholdsvis $\{e_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ og $\{e_{2n} + \lambda_n e_{2n-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Vis, at $F \cap G = \{\underline{0}\}$, $\overline{F + G} = E$, og

$$F+G = \{x \in E \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{-2} |(x|e_{2n-1})|^2 < +\infty\} .$$

Vis derved, at $F + G \neq E$, og at summen $F + G$ ikke er topologisk direkte.

12. For ethvert $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$, sættes $x_\lambda = (\lambda^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Vis, at $\{x_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1\}$ er en lineært uafhængig delmængde af l^2 (d.v.s. enhver endelig delmængde af den omhandlede mængde er lineært uafhængig). Vis derved, at den algebraiske dimension af l^2 er $\aleph = \text{kard } \mathbb{R}$.

13. Find ved ortogonalisering en ortonormalbasis for det af funktionerne $t \to 1$, $t \to t$, $t \to t^2$ udspændte underrum af prähilbertrummet E betragtet i opg. 8, og bestem koordinaterne for funktionen $t \to t^2$ med hensyn til den fundne basis. Vis, at funktionerne

$$\varphi_n(t) = (n + \tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}} P_n(t) , \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

hvor

$$P_n(t) = (2^n n!)^{-1} D^n (t^2 - 1)^n$$

er de såkaldte Legendre-polynomier, danner et ortonormalsystem i E. (Begynd med at vise, at P_n er ortogonalt på alle polynomier af højst (n-1)-te grad.) Af Weierstrass' approksimationssætning sluttes, at ortonormalsystemet er totalt.

14. Der er givet en reel funktion w, som er defineret, kontinuer og positiv i det åbne interval $]a,b[$, hvor $-\infty \leqq a < b \leqq \infty$, og for hvilken

$$\int_a^b w(t)|t|^n dt < \infty , \quad n = 0,1,2,\ldots .$$

I vektorrummet $P]a,b[$ bestående af de reeelle polynomiers restriktioner til intervallet $]a,b[$ defineres et skalarprodukt ved

$$(p|q) = \int_a^b w(t)p(t)q(t)dt .$$

Vis, at dette præhilbertrum har en og kun én ortonormalbasis $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots)$, således at φ_n for hvert $n = 0,1,\cdots$ er et polynomium af n-te grad, hvori t^n har en positiv koefficient.

Vis, at polynomiet φ_n har n forskellige reelle rødder, som alle ligger i intervallet $]a,b[$. (Benyt, at der findes polynomier af (n-1)-te grad, som har n-1 foreskrevne rødder.)

De til visse specielle "vægtfunktioner" w hørende ortonormalsystemer af polynomier spiller en fremtrædende rolle i analysen og dens anvendelser.

For $a = -1$, $b = 1$, $w(t) = 1$ fås de ovenfor (opg. 13) omtalte polynomier, som fremgår ved normering af Legendre-polynomierne $P_n(t)$.

For $a = -1$, $b = 1$, $w(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ fås

$$\varphi_0(t) = \pi^{-\frac{1}{2}}, \quad \varphi_n(t) = (\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}} T_n(t), \quad n = 1,2,\ldots,$$

hvor

$$T_n(t) = \cos(n \operatorname{Arccos} t) , \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

er de såkaldte Čebysev-polynomier.

For $a = 0$, $b = \infty$, $w(t) = e^{-t}$ fås

$$\varphi_n(t) = n!^{-1} L_n(t) ,$$

hvor

$$L_n(t) = e^t D^n(t^n e^{-t}) , \qquad n = 0,1,2,\dots ,$$

er de såkaldte Laguerre-polynomier.

For $a = -\infty$, $b = \infty$, $w(t) = e^{-t^2}$ fås

$$\varphi_n(t) = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} H_n(t) , \qquad n = 0,1,2,\dots ,$$

hvor

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} D^n e^{-t^2}$$

er de såkaldte Hermite-polynomier.

Eftervis, at disse polynomfølger er ortonormalsystemer hørende til de angivne vægtfunktioner.

(Se f.eks. bøger af Szegö, Sansone, Tricomi, Courant-Hilbert).

15. Lad E være et prähilbertrum med enhedskugle $S = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$. Vis at der til hvert randpunkt x af S findes præcis en hyperplan H så $H \cap S = \{x\}$. (Tangentplanen til S i x).
Hvordan kan H udtrykkes ved x.
Vis endelig at alle randpunkter af S er ekstreme.

16. Lad E være et uendeligdimensionalt Hilbertrum, og $e_1, e_2, \ldots$ en ortonormal følge. Vis at $\underline{0}$ er et svagt kontaktpunkt for mængden $A = \{\sqrt{n}\, e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. (Betragt en svag basisomegn af $\underline{0}$ bestemt ved endelig mange vektorer $x_1, \ldots, x_r$ og antag at den er disjunkt med A. Udled heraf modstrid med uligheden

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{n \in \mathbb{N}} |(x_i | e_n)|^2 < \infty .)$$

Vis dernæst, at der ikke findes nogen punktfølge i A der konvergerer svagt mod $\underline{0}$, og slut heraf at den svage topologi på E ikke opfylder 1. numerabilitetsaxiom.

17. Vis at ethvert Hilbertrum er følgefuldstændigt i den svage topologi.

18. Lad E være et uendeligdimensionalt Hilbertrum. Vis at der findes en linearform φ på E som ikke er kontinuert. Lad nu I betegne mængden af endeligdimensionale underrum F af E. Vis at der til hvert $F \in I$ findes præcis en vektor $x_F \in F$ så

$$\varphi(y) = (y | x_F) \quad \text{for alle} \quad y \in F.$$

Vis at mængdesystemet

$$\Phi = \{A_F \mid F \in I\},$$

hvor $A_F = \{x_G \mid G \in I \ , \ G \supseteq F\}$, er en fundamentalfilterbasis på E forsynet med den svage topologi.

Vis dernæst at E ikke er fuldstændigt i den svage topologi. (Antag at $\Phi \to x_o$ i den svage topologi, og udled så at $\varphi(y) = (y|x_o)$ for alle $y \in E$).

§4. Rum af kontinuerte lineære afbildninger. Dualt rum. Svag Topologi.

4.1 Vektorrummet L(E,F). Algebraen L(E,E). Lad først E betegne en vilkårlig, ikke tom mængde og F et topologisk vektorrum (t.v.r.) over K = $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Produktrummet $F^E = \prod_{x\in E} F$ består af alle afbildninger f: E → F og er et vektorrum over K, idet regneoperationerne defineres punktvis:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda\, f(x)$$

for f, g ∈ F^E, x ∈ E, λ ∈ K. Med produktrumstopologien er F^E desuden et t.v.r.(Hausdorff, resp. lokalkonvekst, hvis og kun hvis F er det). Produktrumstopologien på F^E kaldes også topologien for punktvis konvergens, fordi eksempelvis en følge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på F^E konvergerer mod f ∈ F^E hvis og kun hvis $f_n(x) \to f(x)$ i F for ethvert x ∈ E. Ifølge sin definition (T2, stk.7) er produktrumstopologien på F^E den groveste topologi på F^E for hvilken enhver af projektionsafbildningerne p_x :

$$f \to f(x) \qquad\qquad (x \in E)$$

af F^E ind i F er kontinuert.

I det følgende skal også E betegne et t.v.r. over K. Med L(E,F) betegner vi mængden af alle kontinuerte lineære afbildninger f: E → F. Da er L(E,F) et underrum af vektorrummet F^E. Delrumstopologien på L(E,F) kaldes ligeledes topologien for punktvis konvergens. Ofte har man dog brug for en anden og finere topologi på L(E,F). Dette spørgsmål nøjes vi med at behandle i det tilfælde, hvor E og F er normerede rum (stk.3 nedenfor). Om det generelle

tilfælde henvises til Bourbaki, Esp.vect.top., ch. 3-4, eller til den lille bog af Robertson og Robertson.

I tilfældet E = F kan vi benytte sammensætning, altså $(f,g) \to f \circ g$, som en tredie kompositionsregel på L(E,E), som herved bliver en algebra over K, idet der foruden aksiomerne for et vektorrum gælder

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$
$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h, \quad f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h,$$
$$(\lambda f) \circ g = \lambda (f \circ g), \quad f \circ (\lambda g) = \lambda (f \circ g),$$

for $\lambda \in K$ og $f,g,h \in L(E,E)$. I denne algebra findes et element e med den egenskab at $e \circ f = f$ for alle $f \in L(E,E)$, nemlig den identiske afbildning e af E på sig selv.

4.2. Dualt rum. Foruden tilfældet F = E er tilfældet F = K af særlig interesse. Mængden L(E,K) af alle kontinuerte linearformer $f: E \to K$ på det topologiske vektorrum E over K Kaldes det(topologisk) duale rum til E og betegnes også med E'. Topologien for punktvis konvergens kaldes her også den svage topologi på E'. Den er lokalkonveks og Hausdorff, fordi K er det. Den kan defineres ved systemet af seminormer

$$f \to |f(x)| \qquad (x \in E)$$

på E'.

Eksempler. 1) $E = C_0(T) = C_c(T,K)$ = rummet af alle kontinuerte funktioner $f: T \to K$ med kompakt støtte. Topologien på $C_0(T)$ er den i T3, opg.29 omhandlede. Det duale rum E' til $C_0(T)$ er mængden af alle såkaldte Radon mål μ på T med værdier i K.

I stedet for $\mu(f)$ skrives også $\int f d\mu$. Man kan derefter udvikle teorien for Lebesgue integralet med hensyn til et sådant mål μ (jvf.Bourbaki, Intégration,ch.1-6). Det må fremhæves, at for et

Radon mål har enhver kompakt mængde endeligt mål.

2) $E = C(T) = C(T,K)$ = rummet af alle kontinuerte funktioner $f: T \to K$. Topologien på $C(T)$ er den i T3, opg.28 omhandlede topologi for ligelig konvergens på kompakte delmængder af T. Det duale rum E' til $C(T)$ kan identificeres med mængden af alle Radon mål μ på T med kompakt støtte og med værdier i K.

3) Det duale rum til $C_o^\infty(\dot{R}) = C_o^\infty(\dot{R},\dot{R})$ (jvf.T3, opg.30) er rummet af (reelle) distributioner på $\dot{R}$. Det duale rum til $C^\infty(\dot{R}) = C^\infty(\dot{R},\dot{R})$ er rummet af (reelle) distributioner på $\dot{R}$ med kompakt støtte.

4) De duale rum til $L_{loc}(\dot{R})$, $L(\dot{R})$ og $L_o(\dot{R})$ (jvf.T3, opg.31) viser sig at kunne identificeres med henholdsvis $L_o^\infty(\dot{R})$, $L^\infty(\dot{R})$ og $L_{loc}^\infty(\dot{R})$. Her betegner $L^\infty(\dot{R})$ mængden af (ækvivalensklasser af) Lebesgue målelige funktioner $g: \dot{R} \to \dot{R}$, som er i det væsentlige begrænsede i den forstand, at

$$\|g\|_{L^\infty} = \inf_{\lambda \in \dot{R}} \{\lambda \mid |g(x)| \leq \lambda \text{ næsten overalt}\}$$

er et endeligt tal. Den ved g bestemte kontinuerte linearform på $L(\dot{R})$ er givet ved at $f \to \int_{\dot{R}} fg(x)dx$. $L_o^\infty(\dot{R})$ består af de elementer af $L^\infty(\dot{R})$, der repræsenteres ved funktioner, som er = 0 næsten overalt udenfor hver sin kompakte mængde. $L_{loc}^\infty(\dot{R})$ består af de (ækvivalensklasser af) målelige funktioner, som er i det væsentlige begrænsede på hver kompakt delmængde af $\dot{R}$. - Tilsvarende gælder, dersom $\dot{R}$ erstattes med $\dot{R}^n$ (eller en målelig delmængde af $\dot{R}^n$), eller hvis Lebesguemålet på $\dot{R}$ erstattes med et vilkårligt positivt Radon mål på et lokalkompakt rum T, jvf.eksempel 1.

5) Lad $1 \leq p < \infty$, og lad μ være et positivt Radon mål på et lokalkompakt rum T, for eksempel Lebesgue målet på R^n. Med $\mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(T,\mu;K)$ betegnes mængden af alle μ-målelige funktioner

f: T → K for hvilke $|f|^p$ er μ-integrabel. For en sådan funktion sættes

$$\|f\|_{L^p} = (\int |f(x)|^p d\mu(x))^{1/p},$$

Herved er defineret en seminorm på $\mathcal{L}^p(\mu)$, og har værdien 0 for netop de funktioner f, som er 0 næsten overalt m.h.t. μ. Betegnes mængden af disse sidste funktioner med N, er kvotientrummet $\mathcal{L}^p/N = L^p = L^p(\mu) = L^p(T,\mu;K)$ et normeret vektorrum over K (og fuldstændigt ifølge Riesz-Fischer's sætning), idet normen er som ovenfor angivet med f vilkårlig valgt i den pågældende ækvivalensklasse. Det duale rum til Banachrummet $L^p(\mu)$ kan, dersom $1 \leqq p < \infty$, identificeres med $L^q(\mu)$, hvor q er bestemt ved

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(specielt $q = +\infty$ for $p = 1$). Her defineres $L^\infty(\mu) = L^\infty(T,\mu;K)$ som omtalt i det foregående eksempel. Den til et element af $L^q(\mu)$, repræsenteret ved en funktion $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, svarende kontinuerte linearform på $\mathcal{L}^p(\mu)$ (og derigennem på $L^p(\mu)$) er bestemt ved $f \to \int fg\, d\mu$ for $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Nogle specialtilfælde af dette resultat vil blive udledt nedenfor (stk.10), hvor det ligeledes vil blive påvist, at det tilsvarende for $p = \infty$, $q = 1$ ikke gælder. Et afgørende hjælpemiddel ved beviset i tilfældet $1 \leqq p < \infty$ er <u>Hölder's ulighed</u> for $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$:

$$\left|\int fg\, d\mu\right| \leqq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Denne er triviel for $p = 1$ og følger for $p = 2$ af Cauchy - Schwarz' ulighed i quasi præ Hilbertrummet $\mathcal{L}^2(\mu)$. - Endelig bemærkes, at det duale rum til $L^p_{loc}(\mu)$ og $L^p_o(\mu)$ på samme måde kan identificeres med henholdsvis $L^q_o(\mu)$ og $L^q_{loc}(\mu)$ for $1 \leqq p < \infty$, hvad man

let udleder af resultatet for $L^p(\mu)$.

4.3 $L(E,F)$ i tilfælde af normerede rum E og F. Vi tillader os at benytte samme betegnelse $\|\ \|$ for normen i begge de givne normerede rum E og F, og vi vil ligeledes benytte denne betegnelse for en vis norm, som vi nu skal indføre på vektorrummet $L(E,F)$. Ved denne norm defineres en anden og finere topologi på $L(E,F)$ end topologien for punktvis konvergens, hvilken sidste ikke kommer til anvendelse i indeværende stykke.

Først bemærker vi, at en lineær afbildning $f: E \to F$ er kontinuert, hvis og kun hvis den er begrænset i den forstand, at den afbilder enhedskuglen i E, altså mængden

$$S = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\},$$

på en begrænset mængde $f(S) \subseteq F$, d.v.s. en mængde indeholdt i en kugle, $\{y \in F \mid \|y\| \leq c\}$ i F. Definitionen på begrænsethed af en lineær afbildning $f: E \to F$ lyder altså

$$(1) \qquad x \in S \Rightarrow \|f(x)\| \leq c$$

for en vis konstant c. Af homogenitetsgrunde kan betingelsen åbenbart også udstykkes således:

$$(2) \qquad x \in E \Rightarrow \|f(x)\| \leq c\|x\|,$$

som man ser ved (for $x \neq 0$) at anvende (1) på $\|x\|^{-1}x$. Det er klart, at en lineær afbildning $f: E \to F$ er kontinuert (i 0 og derfor overalt), dersom den er begrænset, idet $\|x\| < \varepsilon/c \Rightarrow \|f(x)\| < \varepsilon$. Det omvendte vises således. Hvis f er kontinuert (i 0), findes $\rho > 0$ så at $\|f(x)\| \leq 1$ for alle $x \in E$ med $\|x\| \leq \rho$. For $x \in S$ er $\|\rho x\| \leq \rho$ og derfor

$$\|f(\rho x)\| = \|\rho f(x)\| = \rho\|f(x)\| \leq 1\ ,$$

hvorfor (1) er opfyldt med $c = 1/\rho$.

For vilkårlig $f \in L(E,F)$ defineres nu

$$\|f\| = \sup_{x \in S} \|f(x)\| .$$

Således er $\|f\|$ den mindste brugbare konstant c i (1) eller (2). Specielt gælder ifølge (2)

$$\|f(x)\| \leqq \|f\| \, \|x\| \tag{3}$$

for $f \in L(E,F)$, $x \in E$. Idet vi ser bort fra det trivielle tilfælde $E = \{\underline{0}\}$, gælder nærmere, at

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\|/\|x\| \mid x \in E \wedge x \neq \underline{0}\} .$$

Sætning. Lad E og F være normerede vektorrum. Vektorrummet $L(E,F)$ af alle kontinuerte lineære afbildninger $f: E \to F$ er normeret ved normen

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in E \wedge \|x\| \leqq 1\},$$

og der gælder $\|f(x)\| \leqq \|f\| \, \|x\|$ for $f \in L(E,F)$, $x \in E$. Hvis E er fuldstændigt (altså et Banachrum), da også $L(E,F)$.

Bevis. For at vise, at afbildningen $f \to \|f\|$ af E ind i R er en norm på $L(E,F)$ betragtes $f,g \in L(E,F)$, $\lambda \in K$ og $x \in S$. Da gælder

$$\|\lambda f\| = \sup_{x \in S} \|\lambda f(x)\| = \sup_{x \in S} (|\lambda| \, \|f(x)\|) = |\lambda| \sup_{x \in S} \|f(x)\| = |\lambda| \, \|f\| ;$$

$$\|f + g\| = \sup_{x \in S} \|f(x) + g(x)\| \leqq \sup_{x \in S} (\|f(x)\| + \|g(x)\|) \leqq \|f\| + \|g\| .$$

Af $\|f\| = 0$ følger på grund af (3), at $\|f(x)\| = 0$, d.v.s. $f(x) = \underline{0}$, for alle $x \in E$, altså $f = \underline{0}$. Lad dernæst F være fuldstændigt, og lad $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en fundamentalfølge på det normerede rum $L(E,F)$. Til $\varepsilon > 0$ findes altså $N \in \mathbb{N}$ så at $\|f_m - f_n\| \leqq \varepsilon$ for $m,n > N$, d.v.s.

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leqq \varepsilon \|x\| \qquad \text{for } m,n > N, \quad x \in E. \tag{4}$$

For fastholdt $x \in E$ ses heraf, at følgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ er en fundamentalfølge på F. Vi definerer en afbildning $f: E \to F$ ved

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E).$$

Det vises let, at f er lineær, idet f.eks.

$$f(x + y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x + y) = \lim_{n\to\infty}(f_n(x) + f_n(y)) = f(x) + f(y) .$$

Lader vi nu $m \to \infty$ i (4), fås

$$(5) \qquad \|f(x) - f_n(x)\| \leqq \varepsilon\|x\| \qquad \text{for } n > N, \quad x \in E ,$$

hvoraf følger, at $f - f_n$ er en begrænset, d.v.s. kontinuert, lineær afbildning af E ind i F. Men så tilhører også $f = (f-f_n) + f_n$ vektorrummet $L(E,F)$, og vi slutter af (5), at $\|f - f_n\| \leqq \varepsilon$ for $n > N$. Dette viser, at $f_n \to f$ i det normerede rum $L(E,F)$, når $n \to \infty$, og dette er derfor fuldstændigt.

Det betyder i øvrigt ingen væsentlig indskrænkning at antage, at også E er fuldstændigt. Thi i modsat fald kan vi ved kompletering indlejre E som et tæt underrum af et Banachrum $\hat{E}$. Enhver kontinuert lineær afbildning $f: E \to F$ kan, når F er et Banachrum, ifølge sætning F2.8 på netop én måde udvides til en kontinuert lineær afbildning $g: \hat{E} \to F$, og der gælder $\|g\| = \|f\|$ fordi uligheden (3) bevares ved udvidelsen med samme konstant $c = \|f\|$. Omvendt er enhver kontinuert lineær afbildning $g: \hat{E} \to F$ udvidelsen af sin restriktion $g|E$ fra E til $\hat{E}$. Ved $f \to g$ defineres på denne måde en (isometrisk) isomorfi af Banachrummet $L(E,F)$ på Banachrummet $L(\hat{E},F)$. Man kan derfor i mange forbindelser tillade sig at identificere $L(E,F)$ med $L(\hat{E},F)$ (dog ikke for så vidt angår topologien for punktvis konvergens på $L(E,F)$).

Det bemærkes til slut, at i tilfældet $F = E$, hvor $L(E,E)$ som omtalt i stk.1 er en algebra med sammensætning som multiplikation,

da bliver, når E er normeret, L(E,E) en normeret algebra, d.v.s. et normeret vektorrum, som tillige er en algebra, og for hvilken

$$\|f \circ g\| \leqq \|f\| \, \|g\|.$$

Thi for $f,g \in L(E,E)$ og $x \in S$ haves

$$\|(f \circ g)(x)\| = \|f(g(x))\| \leqq \|f\| \, \|g(x)\| \leqq \|f\| \, \|g\|.$$

Dersom det underliggende normerede rum E er fuldstændigt, bliver L(E,E) ifølge ovenstående sætning ligeledes fuldstændig. En sådan fuldstændig, normeret algebra kaldes også en Banach algebra.

4.4 Sætning. (Princippet om ligelig begrænsning.) Lad E og F være normerede rum, af hvilke E er fuldstændigt. Lad $M \subseteq L(E,F)$, og antag at $\sup_{f \in M} \|f(x)\| < +\infty$ for ethvert $x \in E$. Da er M begrænset, altså $\sup_{f \in M} \|f\| < +\infty$.

Bevis. Opgaven er at påvise eksistensen af en konstant c så at $\|f\| \leqq c$ for alle $f \in M$, d.v.s.

$$\|f(x)\| \leqq c \quad \text{for } f \in M, \quad x \in S,$$

idet S betegner enhedskuglen i E. Det er imidlertid tilstrækkeligt at bevise den tilsvarende påstand for en eller anden kugle $K(x_0,\rho) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| < \rho\}$. For hvis $\|f(x)\| \leqq c_0$ for $f \in M$ og $x \in K(x_0,\rho)$ (og derfor også af kontinuitetsgrunde for $x \in \overline{K(x_0,\rho)} = \{x \in E \mid \|x - x_0\| \leqq \rho\}$), da kan vi for $y \in S$ benytte dette for $x = x_0 + \rho y \in K(x_0,\rho)$ og for x_0. Herved fås for $f \in M$

$$\rho\|f(y)\| = \|f(x) - f(x_0)\| \leqq \|f(x)\| + \|f(x_0)\| \leqq 2c_0,$$

og dermed $\|f(y)\| \leqq 2c_0/\rho$ for $f \in M$, $y \in S$.

Antager man nu, at funktionerne i M ikke er ligelig begrænsede i nogen kugle, kan vi ved induktion bestemme en følge af kugler $K_n = K(x_n,\rho_n)$ og en følge af afbildninger $f_n \in M$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ således at $\rho_n \leqq 2^{-n}$, $\overline{K}_n \subset K_{n-1}$ for $n \geqq 1$, og

$$\|f_n(x)\| \geq n \qquad \text{for alle } x \in \overline{K}_n .$$

Thi er x_ν, ρ_ν og f_ν valgt for $\nu \leq n$ i overensstemmelse med disse krav, da kan vi efter vor antagelse vælge $x_{n+1} \in K_n$ og $f_{n+1} \in M$ så at $\|f_{n+1}(x_{n+1})\| > n + 1$. Dernæst vælges $\rho_{n+1} \leq 2^{-n-1}$ og så lille, at $K_{n+1} = K(x_{n+1},\rho_{n+1})$ opfylder betingelsen $\overline{K}_{n+1} \subset K_n$ (altså $\rho_{n+1} \leq \rho_n - \|x_{n+1} - x_n\|$) og tillige at $\|f_{n+1}(x)\| \geq n + 1$ for alle $x \in \overline{K}_{n+1}$. Dette sidste kan opnås, fordi afbildningen $x \to \|f(x)\|$ er kontinuert i E, specielt i x_{n+1} . Efter at have valgt $x_o \in E$ vilkårligt, $\rho_o = 1$ og $f_o \in M$ vilkårligt, har vi derefter fastlagt følgerne (x_n), (ρ_n) og (f_n), og dermed også følgen (K_n) af kugler $K_n = K(x_n,\rho_n)$.

Det er klart, at følgen (x_n) er en fundamentalfølge, idet $x_m \in K_m \subset K_n$ for $m > n$, altså $\|x_m - x_n\| < \rho_n \leq 2^{-n}$ for $m > n$. Da E er fuldstændigt, eksisterer $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Endvidere gælder $x \in \overline{K}_n$ og derfor $\|f_n(x)\| \geq n$ for alle n, i modstrid med forudsætningen om, at $\sup_{f\in M}\|f(x)\| < +\infty$ for ethvert $x \in E$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Korollar.</u> En punktvis konvergent følge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af kontinuerte lineære afbildninger f_n af et Banachrum E ind i et normeret rum F er (ligelig) begrænset: $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\| < +\infty$.

Thi for ethvert x er $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ en konvergent punktfølge i det normerede rum F, og derfor begrænset.

4.5 <u>Om de to topologier på</u> L(E,F). Lad E og F være to normerede vektorrum. På vektorrummet L(E,F) har vi i stk.1 indført topologien for punktvis konvergens og i stk.3 normtopologien. For den førstnævnte topologi haves en basis for omegnene af $\underline{0}$ i mængderne

$$\bigcap_{x\in A} \{f \in L(E,F) \mid \|f(x)\| \leq \rho\},$$

hvor A gennemløber mængden $\grave{D}_e(E)$ af alle endelige delmængder af E. Således defineres topologien for punktvis konvergens ved systemet af seminormer

$$f \to \|f(x)\| \qquad (f \in L(E,F)),$$

idet x gennemløber E. Det er altså den groveste topologi på L(E,F) for hvilken L(E,F) bliver et t.v.r. således at alle disse seminormer (eller, hvad der kommer ud på det samme, alle linearformerne $f \to f(x)$) er kontinuerte.

Specielt er topologien for punktvis konvergens grovere end normtopologien på L(E,F), idet enhver af ovenstående seminormer jo er kontinuert i normtopologien ifølge uligheden $\|f(x)\| \leq \|x\| \, \|f\|$. I almindelighed er topologien for punktvis konvergens strengt grovere end normtopologien på L(E,F). Dette træder således frem i tilfældet F = K, hvor de to topologier på L(E,K) = E' kun er identiske, hvis E er endeligdimensionalt (nemlig lokalkompakt ifølge sætn.4.6 nedenfor).

4.6 Dualt rum til et normeret rum. Det duale rum E' = L(E,K) til et normeret rum E er ifølge sætn.4.3 et Banachrum med normen

$$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|,$$

hvor S betegner enhedskuglen i E. For vilkårlig $f \in E'$, $x \in E$ gælder $|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$. Normtopologien på E' kaldes også den stærke topologi på E', medens topologien for punktvis konvergens kaldes den svage topologi på E' (engelsk: weak* topology).

Sætning. For ethvert normeret rum E er enhedskuglen $S' = \{f \in E' \mid \|f\| \leq 1\}$ i det duale rum E' kompakt i den svage topologi på E'.

Det følger heraf, at cS' ligeledes er svagt kompakt for ethvert $c \in R^+$, og videre at enhver begrænset, afsluttet delmængde af E'

er svagt kompakt (som afsluttet delmængde af en svagt kompakt kugle cS').

Bevis. Mængden E^* af alle linearformer på E (kontinuerte eller ej) kaldes det algebraisk duale rum til E. Det er et afsluttet underrum af det topologiske vektorrum K^E, for E^* er fællesmængden for systemet af mængder

$$\{f \in K^E |\ f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y) = 0\},$$

idet λ,μ gennemløber K og x,y gennemløber E. Og enhver af disse mængder er afsluttet i K^E, fordi den pågældende afbildning

$$f \to f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)$$

af K^E ind i det topologiske vektorrum K er kontinuert ifølge definitionen af produktrumstopologien på K^E, og fordi K er Hausdorff.

For hvert $x \in E$ sætter vi $U_x = \{\lambda \in K |\ |\lambda| \leq \|x\|\}$. Dette interval i $\dot{R}$ (eller cirkelskive i $\dot{C}$) er en kompakt delmængde af K, og produktmængden

$$\prod_{x\in E} U_x = \bigcap_{x\in E} \{f \in K^E |\ |f(x)| \leq \|x\|\}$$

er derfor en kompakt (specielt afsluttet) delmængde af Hausdorffrummet $\prod_{x\in E} K = K^E$ ifølge Tychonoffs sætning. Nu gælder

$$S' = E' \cap U = E^* \cap U,$$

fordi enhver begrænset linearform er kontinuert, og vi slutter, at $S' = E^* \cap U$ er kompakt (som afsluttet delmængde af den kompakte mængde U). Hermed er sætningen bevist.

4.7 Bidualt rum. Refleksivt rum. Lad E være et normeret rum og E' dets duale. Med skrivemåden

$$\langle x, x' \rangle = x'(x)$$

for $x \in E$, $x' \in E'$, bliver afbildningen $(x,x') \to \langle x, x' \rangle$ af

$E \times E'$ ind i K <u>bilineær</u>, idet der for $x,y \in E$, x', $y' \in E'$ og $\lambda,\mu \in K$ gælder

$$< \lambda x + \mu y,\ x' > = \lambda< x,\ x' > + \mu< y,x' >,$$

$$<x,\ \lambda x' + \mu y' > = \lambda < x,x' > + \mu< x,y' >,$$

ifølge definitionen på lineær afbildning, henholdsvis lineære regneoperationer med sådanne. Denne linearform på $E \times E'$ er desuden kontinuert, når E og E' udstyres med de respektive normtopologier (og $E \times E'$ derefter med produkttopologien). Dette vises på samme måde som kontinuiteten af skalarproduktet på et Hilbertrum.

Specielt er for ethvert $x \in E$ afbildningen φ_x: $E' \to K$ defineret ved

$$\varphi_x(x') = < x,\ x' > = x'(x)$$

lineær og kontinuert, idet E' udstyres med sin stærke topologi (normtopologien). Således er $\varphi_x \in (E')'$ "E" kaldes det <u>biduale</u> rum til E. Ved $x \to \varphi_x$ defineres på denne måde en afbildning af E ind i E". Denne afbildning er åbenbart lineær, idet

$$\varphi_{\lambda x+\mu y}(x') = <\lambda x + \mu y,x'> = \lambda<x,x'> + \mu<y,x'> = \lambda\varphi_x(x') + \mu\varphi_y(x'),$$

altså $\varphi_{\lambda x+\mu y} = \lambda\varphi_x + \mu\varphi_y$. Endvidere er afbildningen $x \to \varphi_x$ af E ind i E" isometrisk. Thi på den ene side gælder for $\|x'\| \leq 1$

$$|\varphi_x(x')| = |< x,\ x' >| \leq \|x\|\ \|x'\| \leq \|x\|,$$

hvoraf $\|\varphi_x\| \leq \|x\|$. På den anden side kan vi til ethvert $x \in E$ bestemme $x' \in E'$ så at $\|x'\| \leq 1$ og $< x,x' > = \|x\|$. Dette følger af Hahn - Banach's sætning på analytisk form (T3, sætn.23.1) anvendt på underrummet Kx. Defineres nemlig $f(\lambda x) = \lambda\|x\|$ for $\lambda \in K$, er f en linearform på Kx med $|f(\lambda x)| = |\lambda|\ \|x\| = \|\lambda x\|$, altså $|f(y)| = \|y\|$ for $y \in Kx$. Der eksisterer derfor en linearform x'

på hele E, som udvider f, og for hvilken

$$|x'(y)| = |< y, x' >| \leq \|y\|$$

for alle $y \in E$, altså $\|x'\| \leq 1$. Da specielt $x'(x) = f(x) = \| x \|$, er hermed vist, at $\|\varphi_x\| = \|x\|$.

Vi er således nået til følgende sætning.

Sætning. Lad E være et normeret rum og E' dets dualerum. Idet vi til enhver vektor $x \in E$ knytter linearformen φ_x på E' givet ved

$$\varphi_x(x') = < x, x' > = x'(x) \qquad (x' \in E'),$$

defineres en (isometrisk) isomorfi af E på et underrum af E".

Denne isomorfi kaldes den naturlige eller kanoniske indlejring af E i E", og man plejer at identificere E med det pågældende underrum af E". Hvis E er et Banachrum, bliver det efter indlejringen et fuldstændigt, altså afsluttet, underrum af Banachrummet E".

Definition. Et normeret rum E kaldes refleksivt, dersom den naturlige indlejring af E i E" er surjektiv, altså dersom E = E" efter ovenstående identifikation.

Det er klart, at et refleksivt rum nødvendigvis må være fuldstændigt. Eksplicit lyder kravet til et refleksivt rum, at enhver kontinuert linearform på E' (når E' udstyres med sin stærke topologi) skal have formen $x' \to < x, x' >$ for et vist $x \in E$. Det er ikke tilstrækkeligt, at Banachrummene E og E" er (isometrisk) isomorfe; for isomorfien skal udtrykkelig være den naturlige indlejring af E i E".

Det bemærkes til slut, at det for ethvert normeret rum E med det duale E' gælder, at enhver linearform f på E', som er kontinuert i den svage topologi på E', har formen

$$f(x') = \langle x, x' \rangle \qquad (x' \in E')$$

for netop én vektor $x \in E$. Entydigheden følger af ovenstående sætning, idet $\langle x_1, x' \rangle = \langle x_2, x' \rangle$ for alle $x' \in E'$ medfører $\varphi_{x_1-x_2}(x') = 0$ for alle $x' \in E'$, altså $\|\varphi_{x_1-x_2}\| = 0$, $\|x_1-x_2\| = 0$. Eksistensen af $x \in E$ vises således. Kontinuiteten af linearformen f i den svage topologi på E' betyder, at der findes $a \in R^+$ og $A \in \dot{D}_e(E)$ så at

$$|f(x')| \leqq a \cdot \sup_{x \in A} |\langle x, x' \rangle|$$

(jvf. T3, opg.26). Det ses heraf, at $\langle x, x' \rangle = 0$ for alle $x \in A$ medfører $f(x') = 0$, og dette viser ifølge en sætning fra den lineære algebra, at linearformen f er en linearkombination af linearformerne $\varphi_x: x' \to \langle x, x' \rangle$, hvor x gennemløber A.

4.8 Den svage topologi på E. Hvadenten det normerede rum E er refleksivt eller ej, kan vi, idet vi på den angivne måde indlejrer E som et underrum af E", betragte delrumstopologien på E bestemt ud fra den svage topologi på E", det duale rum til Banachrummet E'. Denne topologi kaldes den svage eller afsvækkede topologi på E. Den er bestemt ved systemet af seminormer

$$x \to |\langle x, x' \rangle| \qquad (x \in E)$$

på E, idet x' gennemløber E', og er derfor den groveste topologi på E, der gør E til et t.v.r., og for hvilken de anførte seminormer (eller, hvad der kommer ud på det samme, linearformerne $x' \in E'$) alle er kontinuerte. Specielt er den afsvækkede topologi på E grovere end den oprindelige topologi på E, normtopologien, som også kaldes den stærke topologi på E. (jvf. tilsvarende bemærkninger om den svage topologi på E' i stk.5.)

For en vilkårlig delmængde $M \subseteq E$ sætter vi

$$M^{\perp} = \{x' \in E' \mid \langle x, x' \rangle = 0 \text{ for alle } x \in M\}.$$

Det er klart, at $M^{\perp}$ er et underrum af E', og afsluttet, ikke blot i normtopologien på E', men også i den svage topologi på E', idet jo $M^{\perp} = \bigcap_{x \in M} \{x\}^{\perp}$, og $\{x\}^{\perp}$ er originalmængden til $\{0\}$ ved linearformen $x' \to \langle x | x' \rangle$, som er kontinuert på E', ikke blot i normtopologien på E', men også i den svage topologi på E' efter dennes definition (jvf.stk.5).

For enhver delmængde N af E' kan man på tilsvarende måde betragte det svagt afsluttede underrum af E'', som består af de linearformer tilhørende E'', som hver for sig er 0 på N. Vi foretrækker imidlertid (lidt usystematisk) at benytte betegnelsen $N^{\perp}$ for fællesmængden mellem den omtalte delmængde af E'' og E, idet E som hidtil tænkes indlejret som et underrum af E''. Efter denne definition bliver

$$N^{\perp} = \{x \in E \mid \langle x, x' \rangle = 0 \text{ for alle } x' \in N\}$$

et underrum af E, afsluttet i den svage topologi på E, idet denne jo netop var defineret som delrumstopologien på E som delmængde af E'' med den svage topologi. Så meget mere er $N^{\perp}$ stærkt afsluttet i E.

Herefter har symbolet $M^{\perp\perp} = (M^{\perp})^{\perp}$ mening for enhver delmængde M af E, og $M^{\perp\perp}$ er et svagt (og stærkt) afsluttet underrum af E, som åbenbart indeholder M som delmængde.

Sætning. For enhver delmængde M af et normeret rum E er $M^{\perp\perp}$ det af M udspændte afsluttede underrum af E såvel i den stærke som i den svage topologi på E.

Bevis. Lad F være det af M udspændte vektorrum, $\overline{F}$ dettes afslutning i den stærke topologi, og G afslutningen af F i den svage

topologi på E. Da gælder

$$M \subseteq F \subseteq \overline{F} \subseteq G \subseteq M^{\perp\perp}$$

ifølge det foregående. (At $\overline{F} \subseteq G$ følger af, at den stærke topologi på E er finere end den svage). Vi mangler at bevise, at $\overline{F}$ udgør hele $M^{\perp\perp}$, altså at F er tæt i $M^{\perp\perp}$, eller at M er total i $M^{\perp\perp}$. Ifølge sætn.2.11 skal det vises, at en kontinuert linearform φ på $M^{\perp\perp}$, som er 0 på M, er 0 på hele $M^{\perp\perp}$. Ifølge Hahn-Banach's sætning kan φ udvides til en kontinuert linearform x' på E. Da $x' \supseteq \varphi$, og φ er 0 på M, er $x' \in M^{\perp}$, og derfor $\langle x,x' \rangle = 0$ for ethvert $x \in M^{\perp\perp}$.

Korollar. De afsluttede underrum af E er de samme i den stærke og i den svage topologi på E. De kontinuerte linearformer på E er ligeledes de samme i de topologier på E.

Thi en linearform f på et t.v.r. er kontinuert hvis og kun hvis underrummet $f^{-1}(0)$ er afsluttet.

Det duale rum E' er således samme mængde, hvadenten E som hidtil tænkes udstyret med normtopologien eller med den afsvækkede topologi (der imidlertid - som navnet antyder - først er defineret, når E' er fastlagt ud fra normtopologien på E).

Man kan udvide de fundne resultater på en interessant måde ved i stedet for $M^{\perp}$ og $M^{\perp\perp}$ at operere med den såkaldte polare mængde M° og den bipolare mængde $M^{\circ\circ}$. For en vilkårlig delmængde $M \subseteq E$ defineres

$$M^{\circ} = \{x' \in E' \mid \operatorname{Re} \langle x,x' \rangle \leq 1 \text{ for alle } x \in M\},$$

som åbenbart er en konveks, svagt afsluttet delmængde af E' indeholdende 0. For et underrum $M \subseteq E$ gælder $M^{\circ} = M^{\perp}$. Analogt defineres N° for en delmængde N af E' som mængden af alle $x \in E$ med $\operatorname{Re} \langle x,x' \rangle \leq 1$ for alle $x' \in N$. Man viser derpå, at for enhver

mængde $M \subseteq E$ er M^{oo} afslutningen af conv $(M \cup \{0\})$ såvel i den svage som i den stærke topologi på E. (Med conv A, hvor $A \subseteq E$, betegnes den mindste konvekse delmængde af E, som omfatter A.) Specielt er de afsluttede konvekse delmængder af E de samme i de to topologier.

Hvis E er refleksivt, bliver der fuld symmetri mellem E og E'. Åbenbart bliver E' da ligeledes refleksivt. Vi kan så overføre tidligere fundne resultater fra E til E' eller omvendt. Eksempelvis bliver de afsluttede underrum af E' de samme i den stærke og i den svage topologi på E', og ligeså de kontinuerte linearformer på E', forudset at E er refleksivt, og også kun i dette tilfælde, idet enhver stærkt kontinuert linearform på E', når den tillige er svagt kontinuert, bliver af formen $x' \to \langle x, x' \rangle$ for et vist $x \in E$ ifølge et resultat fra stk.7.

Af sætn.4.6 fremgår på samme måde, at enhedskuglen $S = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ i et refleksivt Banachrum E er kompakt i den svage topologi på E. Også denne egenskab er karakteristisk for refleksive rum; men vi skal ikke komme ind på beviset herfor.

4.9 Dualitet i Hilbertrum. Lad H være et Hilbertrum. Idet vi til $g \in H$ knytter den kontinuerte linearform φ_g bestemt ved

$$\varphi_g(f) = (f|g),$$

har vi som tidligere vist defineret en bijektiv afbildning $g \to \varphi_g$ af H på H'. Denne afbildning er øjensynlig konjugeret lineær i den forstand, at

$$\varphi_{\lambda g + \mu h} = \bar{\lambda}\, \varphi_g + \bar{\mu}\, \varphi_h$$

for $\lambda, \mu \in K$ og $g, h \in H$, idet

$$\varphi_{\lambda g + \mu h}(f) = (f|\lambda g + \mu h) = \bar{\lambda}(f|g) + \bar{\mu}(f|h) = \bar{\lambda}\varphi_g(f) + \bar{\mu}\varphi_h(f)$$

for alle $f \in H$. Endvidere er den isometrisk:

$$\|\varphi_g\| = \|g\|.$$

Thi ifølgeCauchy-Schwarz' ulighed er $|\varphi_g(f)| = |(f|g)| \leq \|g\|\|f\|$, og her gælder lighedstegn for $f = g$.

Hermed er ialt vist, at afbildningen $g \to \varphi_g$ af H på H' er en "konjugeret isomorfi", d.v.s. en bijektiv, isometrisk (og derfor homeomorf), konjugeret lineær afbildning. I tilfældet $K = \mathbb{R}$ kan man således identificere H' med det dermed isomorfe rum H, idet man identificerer φ_g med g. I tilfældet $K = \mathbb{C}$ kan man på samme måde identificere H' med det til H "konjugerede" Hilbertrum, der er den samme mængde som H, men hvor produktet af $\lambda \in \mathbb{C}$ og $f \in H'$ defineres som $\bar{\lambda}f$ i stedet for λf, og hvor skalarproduktet af $f \in H'$ og $g \in H'$ defineres som $\overline{(f|g)} = (g|f)$.

Idet vi nu overfører den svage topologi på H' til H, defineres den ved systemet af seminormer

$$g \to |(f|g)| = |(g|f)|$$

på H, hvor f gennemløber H. Eksempelvis konvergerer en følge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>svagt</u> mod en vektor $f \in H$, hvis og kun hvis $\lim_{n\to\infty}(f_n|g) = (f|g)$ for ethvert $g \in H$.

At den svage topologi på et Hilbertrum H er <u>strengt</u> grovere end den stærke topologi (normtopologien) på H (medmindre H er endelig-dimensionalt) træder blandt andet frem derigennem, at der i H eksisterer et numerabelt ortonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, og den derved bestemte følge konvergerer svagt mod <u>0</u>, fordi $(f|e_n) \to 0$ for $n \to \infty$ for ethvert $f \in H$ ifølge Bessels ulighed $\sum_{n\in\mathbb{N}}|(f|e_n)|^2 \leq \|f\|^2$. Man kan også henholde sig til, at medens enhedskuglen $S = \{f \in H| \ \|f\| \leq 1\}$ ifølge sætn.4.6 er svagt kompakt, er S ikke stærkt kompakt. For ovennævnte ortonormale følge

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ har intet kontaktpunkt i den stærke topologi på H. Var nemlig e et sådant, da fandtes $m,n \in \mathbb{N}$ med $\|e_m - e\| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\|e - e_n\| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$, og derfor $\|e_m - e_n\| < \sqrt{2}$, i strid med at $\|e_m - e_n\| = \sqrt{2}$ ifølge den pythagoræiske formel.

Ethvert Hilbertrum er <u>refleksivt.</u> Dette fremgår af bemærkningerne i slutningen af foregående stykke, men påvises også let direkte. Det gælder om at indse, at enhver kontinuert linearform på H' har formen $\psi \to \psi(f)$ for et vist $f \in H$. På grund af den"konjugerede isomorfi" mellem H og H' kommer dette ud på, at enhver <u>konjugeret</u> lineær afbildning af H ind i K har formen $g \to (f|g)$, altså at enhver linearform på H har formen $g \to (\overline{f|g}) = (g|f)$, hvilket jo netop er tilfældet.

4.10 <u>Dualitet i rummene L^p.</u> Lad μ være et positivt Radon mål på et lokalkompakt rum T (f.eks. Lebesguemålet på $\mathbb{R}^m$). For ethvert p, $1 \leqq p \leqq +\infty$, er $L^p(\mu) = L^p(T,\mu;K)$ et Banachrum med den i eks.5,stk.2 anførte norm $\|f\|_{L^p}$.

<u>Sætning.</u> Lad $1 \leqq p < +\infty$, og lad $1/p + 1/q = 1$ (specielt $q = +\infty$ for $p = 1$). Idet vi til ethvert $g \in L^q(T,\mu,K)$ knytter linearformen

$$f \to \int f\, g\, d\mu \qquad (f \in L^p(\mu,T;K)),$$

som ifølge Hölder's ulighed er defineret og kontinuert på $L^p(T,\mu;K)$, fremkommer en (isometrisk) isomorfi af Banachrummet $L^q(T,\mu;K)$ på det duale rum til Banachrummet $L^p(T,\mu;K)$.

Vi tillader os her og i det følgende at identificere en funktion med dens ækvivalensklasse, idet vi altså ikke skelner mellem funktioner, der stemmer overens næsten overalt m.h.t. μ. For $p = 2$ følger sætningen af, at L^2 er et Hilbertrum med skalarproduktet $(f|g) = \int f\, \overline{g}\, d\mu$. Idet vi til $g \in L^2$ lader svare linear-

formen φ_g: $f \to \int f\,\bar{g}\,d\mu$ på L^2, defineres som vist i det foregående stykke en konjugeret lineær isometri af L^2 på dets duale Hilbertrum. Ved i stedet at knytte linearformen $\varphi_{\underline{g}}$: $f \to \int f\,g\,d\mu$ til g, fås derfor en lineær isometri af L^2 på dets duale rum, altså en isomorfi.

For $p < 2$ kan sætningen bevises på grundlag af resultatet for $p = 2$. For simpelheds skyld vil vi nøjes med at betragte tilfældet $p = 1$, og vi vil yderligere antage, at μ er et <u>begrænset</u> mål: $\int d\mu < +\infty$. Dette medfører, at $L^2 \subset L^1$, også i topologisk betydning, idet Cauchy-Schwarz' ulighed viser at

$$\|f\|_{L^1} = \int |f|\,d\mu = \int |f| \cdot 1\,d\mu \leq \|f\|_{L^2}\,\|1\|_{L^2} ,$$

hvor konstanten $\|1\|_{L^2} = (\int d\mu)^{\frac{1}{2}}$ er endelig. Enhver begrænset linearform φ på L^1 bestemmer derfor ved restriktion til L^2 en linearform, der så meget mere er begrænset på Hilbertrummet L^2 med normen $\|\ \|_{L^2}$. Der eksisterer altså $g \in L^2$ så at

$$(1) \qquad \varphi(f) = \int f\,g\,d\mu \qquad\qquad (f \in L^2) .$$

Vi viser dernæst, at $g \in L^\infty$ og at $\|g\|_{L^\infty} = \|\varphi\|$. Hertil indføres mængderne

$$E_\lambda = \{\ x \in T \mid |g(x)| > \lambda\ \} \qquad (\lambda \in R^+)$$

og funktionerne e_λ defineret ved $e_\lambda(x) = 0$ for $x \notin E_\lambda$ og

$$e_\lambda(x) \cdot g(x) = |g(x)| \quad \text{for} \quad x \in E_\lambda .$$

Herved bliver $|e_\lambda(x)| = 1$ for $x \in E_\lambda$ og 0 ellers. Specielt er $e_\lambda \in L^2 \subset L^1$, og $\|e_\lambda\|_{L^1} = \int_{E_\lambda} d\mu = \mu(E_\lambda)$. Indsættes $f = e_\lambda$ i (1) fås

$$\varphi(e_\lambda) = \int e_\lambda\,g\,d\mu = \int_{E_\lambda} |g|\,d\mu \geq \lambda\,\mu(E_\lambda) .$$

Da nu $|\varphi(e_\lambda)| \leqq \|\varphi\| \, \|e_\lambda\|_{L^1}$, sluttes heraf at

$$\lambda \, \mu(E_\lambda) \leqq \|\varphi\| \, \mu(E_\lambda) \ ,$$

altså $\lambda \leqq \|\varphi\|$ dersom $\mu(E_\lambda) > 0$. Dette viser, at $\mu(E_\lambda) = 0$ for $\lambda > \|\varphi\|$, hvoraf følger, at

$$|g(x)| \leqq \|\varphi\| \text{ for næsten alle } x \in T.$$

Hermed er vist, at $g \in L^\infty$ og $\|g\|_{L^\infty} \leqq \|\varphi\|$.

Da $g \in L^\infty$, bestemmer g en kontinuert linearform ψ på L^1 ved $\psi(f) = \int f \, g \, d\mu$, og det er klart, at $\|\psi\| \leqq \|g\|_{L^\infty}$, idet

$$|\psi(f)| = \left|\int f \, g \, d\mu\right| \leqq \int |f| \, |g| \, d\mu \leqq \|g\|_{L^\infty} \, \|f\|_{L^1}$$

for alle $f \in L^1$. Nu har φ og ψ ifølge (1) samme restriktion til underrummet L^2 af L^1, og vi slutter, at $\varphi = \psi$ ifølge sætn.2.8, fordi L^2 er overalt tæt i L^1. Dette sidste fremgår af, at enhver funktion $f \in L^1$ er grænseværdi i L^1 for følgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, hvor $f_n(x) = f(x)$ for de x, hvor $|f(x)| \leqq n$, medens $f_n(x) = 0$ i øvrigt. Thi funktionerne $|f - f_n|$ danner en punktvis aftegende følge af integrable funktioner, som konvergerer mod 0 punktvis næsten overalt (fordi $|f(x)| < \infty$ næsten overalt), og derfor gælder

$$\|f - f_n\|_{L^1} = \int |f - f_n| \, d\mu \to 0$$

for $n \to \infty$. Og hver af funktionerne f_n er begrænset, nemlig $|f_n(x)| \leqq n$ for alle x. Derfor er $f_n \in L^2$, idet $\int d\mu < +\infty$ efter vor antagelse.

Hermed er da bevist, at $\psi = \varphi$, og derfor at $\varphi(f) = \int f \, g \, d\mu$ for alle $f \in L^1$, og at $\|\varphi\| = \|g\|_{L^\infty}$. Den i sætningen omtalte afbildning af $L^q = L^\infty$ ind i det duale rum til $L^p = L^1$ er hermed vist

at være surjektiv og isometrisk. Det er klart, at den er lineær, og hermed er sætningen bevist (i tilfældet $p = 1$, μ begrænset).

Det fremgår specielt af sætningen, at L^p er refleksivt for $1 < p < +\infty$. Til slut vil vi påvise, at L^1 ikke i almindelighed er refleksivt. Lad os for T tage et kompakt interval $[a,b] \subset \dot{R}$ og for μ tage Lebesguemålet på dette interval. Endelig betragter vi det reelle tilfælde $K = \dot{R}$. Rummet $C = C([a,b])$ af alle (reelle) kontinuerte funktioner på $T = [a,b]$ kan opfattes som et underrum af L^∞, idet vi identificerer en kontinuert funktion $g \in C$ med dens ækvivalensklasse i L^∞. Herved benyttes, at g er begrænset, fordi T er kompakt, og at en ækvivalensklasse højst kan indeholde én kontinuert funktion, som man let ser. For $g \in C$ bliver $\|g\|_{L^\infty} = \sup_{x\in T}|g(x)|$ af lignende årsag. (Var $|g(x)| > \|g\|_{L^\infty}$ i et punkt $x_0 \in T$, da også i en omegn af dette, og dermed i en mængde af positivt mål). Vi vil nu konstruere en kontinuert linearform φ på L^∞, som ikke har formen $g \to \int_a^b f(x)g(x)dx$ for nogen funktion $f \in L^1$. Hertil vælges et vilkårligt punkt af $T = [a,b]$, f.eks. a, og vi betragter linearformen

$$\psi : g \to g(a) \qquad (g \in C)$$

på C. Da $|g(a)| \leq \sup_{x\in T}|g(x)| = \|g\|_{L^\infty}$, er denne linearform på C begrænset. Ifølge Hahn - Banach's sætning kan ψ udvides fra C til en kontinuert linearform φ på L^∞. Var nu $\varphi(g) = \int_a^b f\,g\,dx$ for et vist $f \in L^1$ og for alle $g \in L^\infty$, da måtte specielt

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \qquad \text{for alle } g \in C,$$

idet $\varphi(g) = \psi(g) = g(a)$. At dette er umuligt kan vises ved at betragte en følge af funktioner $g_n \in C$ med $g_n(a) = 1, |g_n(x)| \leq 1$ for alle x, og $g_n(x) = 0$ for alle $x \geq a + 1/n$. (For eksempel

sættes $g_n(x) = 1 - n(x - a)$ for $a \leqq x \leqq a + 1/n$, og $g_n(x) = 0$ ellers). Da gælder

$$\left| \int_a^b f(x) g_n(x) dx \right| \leqq \int_a^{a+1/n} |f(x)| dx,$$

som konvergerer mod 0 for $n \to \infty$ i strid med, at $g_n(a) = 1$.

Ovenstående linearform ψ på C tilhører det duale rum til C og er altså et specielt Radon mål på $T = [a,b]$. Dette mål kan beskrives ved, at dets støtte kun består af punktet a , og at dets samlede "masse" (koncentreret i dette punkt) er lig med 1. I fysikken kaldes et sådant mål efter Dirac en "deltafunktion", men det er som ovenfor vist ikke nogen funktion i sædvanlig forstand.

5. Banach - algebra. Resolvent og spektrum.

5.1 Algebra. Inverst element. Ved en algebra $\mathcal{A}$ over K(=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) forstås et vektorrum over K, hvori desuden er defineret en kompositionsregel kaldet multiplikation, som afbilder $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ ind i $\mathcal{A}$ på en sådan måde, at

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC) \\ (A + B)C &= AC + BC \\ A(B + C) &= AB + AC \\ (\alpha A)B &= \alpha(AB) = A(\alpha B) \qquad \text{(skrives } \alpha AB\text{)} \end{aligned}$$

for alle $A,B,C \in \mathcal{A}$, $\alpha \in K$.

En algebra er således specielt en ring. Hvis denne er kommutativ, altså hvis $AB = BA$ for alle $A,B \in \mathcal{A}$, kaldes $\mathcal{A}$ en kommutativ algebra.

Som bekendt findes der i en ring, specielt i en algebra, højst ét ételement, d.v.s. et element $I \in \mathcal{A}$ for hvilket

$$AI = IA = A \qquad \text{for alle } A \in \mathcal{A}.$$

Nulelementet i (vektorrummet) $\mathcal{A}$ betegner vi med 0. Herved gælder

$$A0 = 0A = 0$$

for alle $A \in \mathcal{A}$ (hvadenten 0 i 0A opfattes som nulelementet i $\mathcal{A}$ eller som tallet $0 \in K$).

Et element $X \in \mathcal{A}$ for hvilket

$$AX = XA = I$$

kaldes et inverst element til $A \in \mathcal{A}$. Et element A kan højst

have ét inverst, idet $AX = YA = I$ medfører

$$Y = YI = Y(AX) = (YA)X = IX = X$$

Hvis A har et inverst element, betegnes dette med A^{-1}, og A kaldes <u>invertibel</u> (eller regulær). Eksempelvis har det neutrale element I (såfremt et sådant forefindes) det inverse $I^{-1} = I$. Der gælder

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

i den forstand, at med A og B er også AB invertibel. Hvis A er invertibel da også αA for $\alpha \neq 0$, samt A^n for $n \in \mathbb{N}$, og der gælder

$$(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$$
$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \qquad \text{(skrives også } A^{-n}\text{)}.$$

Vi definerer $A^0 = I$.

Mængden $\mathcal{a}_{inv}$ af alle invertible elementer af $\mathcal{a}$ er således en <u>gruppe</u> under multiplikation. Vi nævner endnu, at det i visse ringe og algebraer kan forekomme, at AB er invertibel selv om hverken A eller B er det. Dette kan dog ikke indtræffe i en kommutativ ring, jvf. lemma 5.3 nedenfor.

5.2. <u>Lemma</u>. Mængden af alle elementer $X \in \mathcal{a}$, som kommuterer med et forelagt element $A \in \mathcal{a}$, altså $AX = XA$, er en delalgebra af $\mathcal{a}$, som med et invertibelt element X tillige indeholder X^{-1}.

Hvis altså X og Y kommuterer med A, da gælder det samme om elementerne $X + Y$, XY, αX samt X^{-1}, hvis X er invertibel. Bevis vedrørende X^{-1} :

$$AX^{-1} = IAX^{-1} = X^{-1}XAX^{-1} = X^{-1}AXX^{-1} = X^{-1}AI = X^{-1}A.$$

5.3. Lemma. Et produkt af indbyrdes kommuterende elementer af en algebra kan kun være invertibelt, såfremt hvert af elementerne er det.

Bevis. Vi sætter $(A_1 \ldots A_n)^{-1} = X$. Da produktet $A_1 \ldots A_n$ kommuterer med hvert af elementerne $A_1, \ldots, A_n$ (fordi disse kommuterer indbyrdes), vil ifølge lemma 5.2 også X kommutere med $A_1, \ldots, A_n$, og derfor gælder

$$(A_2 \ldots A_n X)A_1 = A_1(A_2 \ldots A_n X) = I \ ,$$

som viser, at A_1 har det inverse $A_2 \ldots A_n X$. Ved ombytning af A'rne vises analogt, at også $A_2, \ldots, A_n$ er invertible.

5.4 Eksempler. Vi har tidligere (F4.2) omtalt algebraen L(E,E) bestående af alle kontinuerte lineære afbildninger af et t.v.r. E ind i sig selv, idet multiplikationen defineres som sammensætning, og de lineære regneoperationer defineres punktvis. (Denne algebra er en delalgebra af algebraen af alle lineære afbildninger af E ind i sig selv.) I begge tilfælde haves et ételement, nemlig den identiske afbildning af E på sig selv. A er invertibel hvis og kun hvis A er bijektiv og den omvendte afbildning $A^{\circ -1}$ er kontinuert (i tilfældet L(E,E)); i bekræftende fald er denne omvendte afbildning åbenbart netop det inverse element til A.

Andre eksempler omtales senere (§ 5.7.)

5.5 Resolvent. Spektrum. Lad $\mathcal{A}$ være en algebra med ételement I. Lad $A \in \mathcal{A}$ og $\lambda \in K$. Dersom $A - \lambda I$ har et inverst element

$$(A - \lambda I)^{-1},$$

kaldes dette ofte for resolventen. Historisk stammer denne betegnelse fra tilfældet $\mathcal{A} = L(E,E)$, idet en ligning af formen

$$Ax - \lambda x = y$$

med den ubekendte $x \in E$ og med givet $y \in E$ har løsningen

$$x = (A - \lambda I)^{-1}y ,$$

som afhænger kontinuert af y, forudsat at resolventen eksisterer.

Mængden af de tal $\lambda \in K$, for hvilke $A - \lambda I$ er invertibel, altså resolventen $(A - \lambda I)^{-1}$ eksisterer, kaldes resolventmængden hørende til A. Resten af K kaldes spektret for A og betegnes med $\sigma(A)$, altså

$$\sigma(A) = \{\lambda \in K \mid A - \lambda I \text{ er ikke invertibel}\}.$$

Man efterviser let de to resolventligninger

$$(A - \lambda I)^{-1} - (A - \mu I)^{-1} = (\lambda - \mu)(A - \lambda I)^{-1}(A - \mu I)^{-1},$$

$$(A - \lambda I)^{-1} - (B - \lambda I)^{-1} = -(A - \lambda I)^{-1}(A - B)(B - \lambda I)^{-1} .$$

De gælder såfremt de optrædende resolventer er definerede, altså for $\lambda,\mu \in \complement\,\sigma(A)$ i den første, og for $\lambda \in \complement\sigma(A)$, $\lambda \in \complement\,\sigma(B)$ i den anden resolventligning.

5.6 Polynomium på en algebra. Lad p betegne et polynomium over K, altså

$$p(\lambda) = \alpha_o + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_n\lambda^n$$

med givne $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. For ethvert element A af en algebra $\mathcal{A}$ over K defineres

$$p(A) = \alpha_o I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_n A^n.$$

For givet $A \in \mathcal{A}$ er afbildningen $p \to p(A)$ af algebraen P af alle polynomier over K (med sædvanlig definition af regneoperationerne) ind i den forelagte algebra $\mathcal{A}$ en homomorfi, nemlig lineær og multiplikativ. Det sidste betyder, at

$$(pq)(A) = p(A)q(A)$$

for to vilkårlige polynomier p og q med produktpolynomiet pq. Med betegnelsen

$$q(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \ldots + \beta_m\lambda^m$$

haves nemlig

$$(pq)(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda) = \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)\lambda + \ldots + \alpha_n\beta_m\lambda^{n+m},$$

hvoraf tilsvarende med A i stedet for λ.

Sætning. Lad A være et element af en algebra $\mathcal{A}$ over $\mathbb{C}$ med ételement. For ethvert polynomium p over $\mathbb{C}$ gælder

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)),$$

altså: spektret for billedet p(A) er billedet $p(\sigma(A))$ af spektret for A.

Bevis. Lad $\alpha \in \mathbb{C}$, og lad

$$p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_n\lambda^n$$

med $\alpha_n \neq 0$. Vi skal vise, at $\alpha \in \sigma(p(A)) \iff \alpha \in p(\sigma(A))$. Ved opløsning i førstegradsfaktorer (her benyttes $K = \mathbb{C}$) fås

$$p(\lambda) - \alpha = \alpha_n \prod_{\nu=1}^{n}(\lambda - \lambda_\nu) .$$

Af den ovenfor omtalte homomorfiegenskab følger, at

$$p(A) - \alpha I = \alpha_n \prod_{\nu=1}^{n}(A - \lambda_\nu I) .$$

Under benyttelse af lemma 5.3 fås nu

$$\begin{aligned}
&\alpha \notin p(\sigma(A)) \iff \forall \lambda \in \sigma(A): \ p(\lambda) \neq \alpha \\
&\iff \forall \lambda \in \sigma(A) \ \ \forall \nu = 1,2,\ldots,n: \ \lambda \neq \lambda_\nu \\
&\iff \forall \nu = 1,2,\ldots,n : \ (A - \lambda_\nu I)^{-1} \ \text{eksisterer} \\
&\iff (p(A) - \alpha I)^{-1} \ \text{eksisterer} \\
&\iff \alpha \notin \sigma(p(A)) \ .
\end{aligned}$$

5.7 Normeret algebra. Banach-algebra. En algebra $\mathcal{A}$ over $K(= \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C})$ kaldes en normeret algebra, dersom vektorrummet $\mathcal{A}$ er normeret ved en norm $\| \ \|$ for hvilken

$$\|AB\| \leq \|A\| \ \|B\|$$

for alle $A,B \in \mathcal{A}$. Dersom der forefindes et ételement I, vil vi altid antage, at $\|I\| = 1$.

I en normeret algebra $\mathcal{A}$ er ikke blot multiplikationen med skalarer og additionen kontinuerte; også afbildningen $(A,B) \longrightarrow AB$ af $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ ind i $\mathcal{A}$ er kontinuert. Dette ses på sædvanlig måde af omskrivningen

$$\begin{aligned}
XY - AB &= (X - A)Y + A(Y - B) \\
&= (X - A)(Y - B) + (X - A)B + A(Y - B) \ ,
\end{aligned}$$

hvoraf

$$\|XY - AB\| \leq \|X - A\| \ \|Y - B\| + \|X - A\| \ \|B\| + \|A\| \ \|Y - B\| \ ,$$

der viser, at $XY - AB \longrightarrow 0$ for $X \to A$, $Y \to B$.

En normeret algebra $\mathcal{A}$ siges at være fuldstændig, og kaldes da også en Banach-algebra, dersom vektorrummet $\mathcal{A}$ er fuldstændigt m.h.t. den betragtede norm og altså er et Banach - rum.

Eksempler (jvf. F 4.3). 1) $\mathcal{A} = C(T) = C(T;K)$ = mængden af alle kontinuerte funktioner $f:T \to K$, hvor T er et kompakt rum. Idet også multiplikationen defineres punktvis:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad (f,g \in C(T),\ x \in T) ,$$

bliver C(T) en kommutativ Banach-algebra med konstanten 1 som neutralt element og med normen

$$\|f\| = \sup_{x \in T} |\ f(x)\ | .$$

f^{-1} eksisterer hvis og kun hvis $f(x) \neq 0$ for alle $x \in T$; i så fald er $f^{-1}(x) = f(x)^{-1} = 1/f(x)$.

2) $\mathcal{A} = L^\infty(\dot{R}) = L^\infty(\dot{R}\ ;\ K)$ = mængden af alle (ækvivalensklasser af) i det væsentlige begrænsede, Lebesgue-målelige funktioner $f:\dot{R} \to K$. Idet multiplikationen defineres punktvis, og idet normen defineres ved

$$\|f\| = \|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \dot{R}} |f(x)| ,$$

bliver $L^\infty(\dot{R})$ en kommutativ Banach-algebra med konstanten 1 som (repræsentant for) ételementet.

3) $\mathcal{A} = L^1(\dot{R}) = L^1(\dot{R};K)$ = mængden af alle (ækvivalensklasser af) Lebesgue-integrable funktioner $f:\dot{R} \to K$. Som produkt af $f \in L^1(\dot{R})$ og $g \in L^1(\dot{R})$ tages nu foldningen $f * g \in L^1(\dot{R})$ defineret ved

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)\ g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = (g*f)(x),$$

og som norm tages

$$\|f\| = \|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx .$$

Det eftervises let ved hjælp af Fubini's sætning, at f * g herved er veldefineret som element af $L^1(\grave{R})$, og at

$$\|f * g\| \leqq \|f\| \, \|g\| \ .$$

Således bliver $L^1(\grave{R}) = L^1(\grave{R};K)$ en kommutativ Banach algebra. Ved et ræsonnement som det i F 4.22 benyttede kan det vises, at denne algebra er uden ételement.

4) Idet E betegner et Banach-rum, er algebraen $\mathcal{a} = L(E,E)$ af alle kontinuerte lineære afbildninger $A:E \to E$ en Banach algebra med normen

$$\|A\| = \sup \{\|Ax\| \mid x \in E \wedge \|x\| \leqq 1\}$$

(jvf.§ F 4.3). Som ételement haves den identiske afbildning af E på sig selv. L(E,E) er <u>ikke kommutativ</u> (med mindre dim E $\leqq$ 1).

5.8 <u>Sætning</u>. Lad $\mathcal{a}$ være en Banach algebra over K med ételement I. For ethvert $A \in \mathcal{a}$ med $\|A\| < 1$ har da I - A et inverst element, nemlig

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \quad = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \ ,$$

hvor rækken er <u>absolut konvergent</u> .

<u>Bevis</u>. Ved gentagen anvendelse af uligheden $\|AB\| \leqq \|A\| \, \|B\|$ fås let, at

$$\|A^n\| \leqq \|A\|^n$$

for alle $n \in \grave{N}$. For $\|A\| < 1$ gælder derfor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|} \ .$$

Dette viser (jvf.§ F 1.9-10), at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ er absolut konvergent i $\mathcal{A}$. Kaldes summen for S, gælder da afbildningen $X \to AX$ af $\mathcal{A}$ ind i $\mathcal{A}$ er kontinuert for givet $A \in \mathcal{A}$ (se § 5.7), at

$$AS = A \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} A^n = S - I,$$

fordi multiplikationen med A kan ske ledvis. På samme måde vises det, at $SA = S - I$. Da således

$$(I - A)S = S(I - A) = I,$$

bliver $(I - A)^{-1} = S$, hvormed sætningen er bevist. Vi bemærker også, at under de angivne forudsætninger gælder uligheden

$$\|(I - A)^{-1} - I\| = \| \sum_{n=1}^{\infty} A^n \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A\|^n = \frac{\|A\|}{1 - \|A\|},$$

hvoraf specielt følger, at

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq 1 + \frac{\|A\|}{1-\|A\|} = \frac{1}{1-\|A\|}$$

i overensstemmelse med den ovenfor fundne vurdering af $\Sigma\|A^n\|$. Den fundne kvotientrækkefremstilling af $(I - A)^{-1}$ inden for en Banach algebra $\mathcal{A}$ kaldes Neumann's række efter C. Neumann, der benyttede denne metode i integralligningernes teori.

5.9 Sætning. Mængden $\mathcal{A}_{inv}$ af invertible elementer i en Banach - algebra $\mathcal{A}$ med ételement er en åben delmængde af $\mathcal{A}$, og afbildningen $A \to A^{-1}$ af $\mathcal{A}_{inv}$ ind i $\mathcal{A}$ er kontinuert.

Bevis. Det er tidligere omtalt (§ 5.1), at $\mathcal{A}_{inv}$ udgør en gruppe under multiplikation. Lad $A \in \mathcal{A}_{inv}$, og lad

$X \in \mathcal{A}$, $\|X\| < 1/\|A^{-1}\|$. Da er

$$\|- A^{-1}X\| \leqq \|A^{-1}\| \, \|X\| < 1 ,$$

hvorfor ifølge den foregående sætning $I + A^{-1}X$ er invertibel, og

$$\|(I + A^{-1}X)^{-1}\| \leqq (1 - \|A^{-1}X\|)^{-1} < (1 - \|A^{-1}\| \, \|X\|)^{-1} .$$

Men så er også $A + X = A(I + A^{-1}X)$ invertibel, og

$$\begin{aligned} &\|(A + X)^{-1} - A^{-1}\| = \|(I + A^{-1}X)^{-1}A^{-1} - A^{-1}\| \\ &\leqq \|(I + A^{-1}X)^{-1} - I\| \, \|A^{-1}\| \\ &\leqq \|A^{-1}\| \, \|A^{-1}X\| \, / \, (1 - \|A^{-1}X\|) \\ &\leqq \|A^{-1}\|^2 \, \|X\| \, / \, (1 - \|A^{-1}\| \, \|X\|) . \end{aligned}$$

Denne vurdering viser, at $(A + X)^{-1} - A^{-1} \to 0$ for $X \to 0$ i $\mathcal{A}$, hvormed sætningen er bevist.

Korollar. Lad $\mathcal{A}$ være en Banach algebra over K med ételement I . For ethvert $A \in \mathcal{A}$ er spektret $\sigma(A)$ en afsluttet delmængde af K, og resolventmængden $\complement\sigma(A)$ derfor åben.

Thi resolventmængden er originalmængden til den åbne mængde $\mathcal{A}_{\text{inv}}, \subseteq \mathcal{A}$ ved den kontinuerte afbildning $\lambda \to A - \lambda I$ af K ind i $\mathcal{A}$.

Det tilføjes, at resolventen $(A - \lambda I)^{-1}$ afhænger kontinuert af $\lambda \in \complement\sigma(A)$, idet der er tale om sammensætning af de kontinuerte afbildninger $\lambda \to A - \lambda I$ af K ind i $\mathcal{A}$ (med billedmængden indeholdt i $\mathcal{A}_{\text{inv}}$) og $X \to X^{-1}$ af $\mathcal{A}_{\text{inv}}$ i $\mathcal{A}$.

5.10 Analytisk funktion med vektorielle værdier. En afbildning $\lambda \to f(\lambda)$ af en åben delmængde $\omega \subset K$ ind i et Hausdorff t.v.r. E over K kaldes differentiabel i et punkt $\mu \in \omega$ med differential-

kvotienten $(Df)(\mu)$, dersom

$$\lim_{\lambda\to\mu}[(\lambda-\mu)^{-1}(f(\lambda) - f(\mu))] = (Df)(\mu).$$

I bekræftende fald gælder for ethvert $x' \in E'$ (det topologisk duale rum til E), idet vi benytter skrivemåden $\langle x,x'\rangle = x'(x)$ (jvf. § F 4.7), at

$$\langle(\lambda - \mu)^{-1}(f(\lambda) - f(\mu)) \ , \ X' \ \rangle \to \langle(Df)(\mu), \ x'\rangle$$

for $\lambda \to \mu$. Her kan venstre side omskrives til

$$\frac{\langle f(\lambda), \ x'\rangle \ - \ \langle f(\mu), \ x'\rangle}{\lambda - \mu} \ ,$$

og vi kommer derved til, at funktionen $\langle f,x'\rangle$, altså

$$\lambda \to \langle f(\lambda), \ x'\rangle \ ,$$

som afbilder ω ind i K, er differentiabel for $\lambda = \mu$ med differentialkvotienten $\langle(Df)(\mu), \ x'\rangle$.

Vi antager nu, at E er et Banach-rum og at $K = \mathbb{C}$. Hvis $f: \omega \to E$ er differentiabel i ethvert punkt af ω, kaldes f også analytisk (eller holomorf) i ω . Af det ovenstående fremgår, at funktionen $\lambda \to \langle f(\lambda), \ x'\rangle$ for ethvert $x' \in E'$ er en sædvanlig kompleks analytisk (nemlig differentiabel) funktion af den komplekse variable $\lambda \in \omega$ med differentialkvotienten $\langle Df, \ x'\rangle$.

Under benyttelse af princippet for ligelig begrænsning (sætn. F 4.4) kan man omvendt vise, at en funktion $f: \omega \to E$ er differentiabel.*) Heraf følger specielt, at med f er også Df, D^2f,... analytiske i ω . Vi skal ikke her komme ind på beviset for dette nøgleresultat i teorien for analytiske funktioner med vektorielle værdier, men nøjes med at lade bevisidéen indgå impliceret i et specialtilfælde (§ 5.13). *) (altså analytisk i ω, dersom enhver af funktionerne $\langle f,x'\rangle$, $x' \in E'$, er analytisk i ω .

5.11 Sætning. For ethvert element A af en kompleks Banachalgebra $\mathcal{A}$ med ételement I er resolventen $(A - \lambda I)^{-1}$ differentiabel, altså analytisk, som funktion af λ i resolventmængden $\subset \sigma(A)$.

Bevis. Vi har tidligere fundet, at resolventmængden er åben og at resolventen $f(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ er kontinuert dér som funktion af λ . Ifølge den første af resolventligningerne (se stk. 5) kan differenskvotienten omskrives således

$$(\lambda - \mu)^{-1} (f(\lambda) - f(\mu)) = (A - \lambda I)^{-1} (A - \mu I)^{-1} ,$$

altså til $f(\lambda)f(\mu)$. For $\lambda \to \mu$ fås grænseværdien $f(\mu)^2$, hvormed er vist, at f er differentiabel med $Df = f^2$, altså

$$D[(A - \lambda I)^{-1}] = (A - \lambda I)^{-2} ,$$

ganske som i specialtilfældet $\mathcal{A} = K$, hvor $A \in K$.

Bemærkning. Beslægtet med resolventen er $(I - \lambda A)^{-1}$, der åbenbart er defineret i en åben delmængde af K indeholdende 0. Ved omskrivningen

$$(\lambda - \mu)^{-1} [(I - \lambda A)^{-1} - (I - \mu A)^{-1}] = (I - \lambda A)^{-1} A (I - \mu A)^{-1},$$

som f.eks. kan udledes af (eller ligesom) den anden resolventligning (§ 5.5), ses, at $(I-\lambda A)^{-1}$ er differentiabel for de værdier af $\lambda \in K$, hvor den er defineret, med differentialkvotienten $A(I - \lambda A)^{-2}$ (her benyttes også lemma 5.2). Iøvrigt gælder for $\lambda \neq 0$, at $I - \lambda A = -\lambda(A - \lambda^{-1} I)$, og derfor

$$(I - \lambda A)^{-1} = -\lambda^{-1}(A - \lambda^{-1} I)^{-1} \qquad (\lambda \neq 0) ,$$

idet de to sider af ligningen er definerede for nøjagtig de samme værdier af $\lambda \neq 0$. (Men venstre side er jo desuden defineret for $\lambda = 0$.)

5.12 Sætning. Spektret $\sigma(A)$ for et element A af en kompleks Banach-algebra med ételement er ikke tomt.

Bevis. Var $\sigma(A) = \emptyset$, blev ifølge den foregående sætning resolventen $(A - \lambda I)^{-1}$ analytisk i hele den komplekse plan $\dot{\mathbb{C}}$. Formelen sidst i foregående stykke viser, at $(A - \lambda I)^{-1} \to 0$ i $\mathcal{A}$ for $|\lambda| \to +\infty$ (nemlig for $\lambda^{-1} \to 0$ i $\dot{\mathbb{C}}$). For ethvert element A' af det duale rum $\mathcal{A}'$ til Banach-rummet $\mathcal{A}$ sluttes heraf, at

$$\langle (A - \lambda I)^{-1}, A' \rangle \to 0 \qquad \text{for } |\lambda| \to \infty .$$

Ifølge et resultat fra § 5.10 er $\langle (A - \lambda I)^{-1}, A' \rangle$ en sædvanlig analytisk funktion af $\lambda \in \dot{\mathbb{C}}$, altså en hel funktion, og da den går mod 0 for $|\lambda| \to \infty$ er den ifølge Lionville's sætning identisk med 0. Da dette gælder for ethvert $A' \in \mathcal{A}'$, bliver $(A - \lambda I)^{-1} = 0$, nulelementet i $\mathcal{A}$. Her benyttes, at den naturlige indlejring af $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}''$ er injektiv, nemlig endda isometrisk (sætn. F 4.7). Vi er således ført til en modstrid, da nulelementet 0 ikke er inverst til noget element.

5.13 Spektralradien. Lad $\mathcal{A}$ være en Banach-algebra med ételement I, og lad $A \in \mathcal{A}$. Af omskrivningen $A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$ for $\lambda \neq 0$ fremgår, at $A - \lambda I$ er invertibel, dersom $I - \lambda^{-1}A$ er det, og det er ifølge sætn.5.8 i hvert fald tilfældet for $\|\lambda^{-1}A\| < 1$, altså for $|\lambda| > \|A\|$. Dette viser, at

(1) $$\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\| .$$

Da således $\sigma(A)$ er indeholdt i cirkelen om 0 med radius $\|A\|$, har vi indset at spektret $\sigma(A)$ for et element af en Banach algebra med ételement er ikke blot afsluttet, men kompakt som delmængde af K. (I tilfældet $K = \dot{\mathbb{R}}$ skal cirkelen ovenfor naturligvis fortolkes som liniestykket $[-\|A\|, \|A\|]$.)

Vi definerer nu spektralradien $r(A)$ for et element A af en kompleks Banach-algebra med ételement ved

$$r(A) = \max \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\} ,$$

altså som radius i den mindste cirkelskive om 0, der indeholder spektret $\sigma(A)$.

Ved således at skrive max i stedet for sup har vi udnyttet, at $\sigma(A)$ er kompakt og ikke tomt. På cirkelperiferien $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = r(A)\}$ ligger altså mindst ét punkt af $\sigma(A)$.

Det fundne resultat (1) kan nu udtrykkes ved, at $r(A) \leq \|A\|$.

Vi kan let skærpe dette resultat, idet vi bemærker, at der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda^n \in \sigma(A^n) \Rightarrow |\lambda^n| \leq \|A^n\|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq \|A^n\|^{1/n} .$$

Den første af disse implikationer følger af sætn.5.6. Vi har således fundet, at $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow |\lambda| \leq \liminf (\|A^n\|^{1/n})$, og derfor gælder

$$r(A) \leq \lim_{n \to \infty} \inf(\|A^n\|^{1/n}) . \tag{2}$$

Vi vil nu vise, at $\lim(\|A^n\|^{1/n})$ eksisterer, og er lig med $r(A)$. Vi betragter den med resolventen beslægtede funktion $(I - \lambda A)^{-1}$, der som nævnt i bemærkningen i § 5.11 er differentiabel, altså analytisk, i den åbne delmængde af $\mathbb{C}$, hvor den er defineret, specielt i en omegn af 0. Omskrivningen sidst i § 5.11 viser, at $(I - \lambda A)^{-1}$ foruden for $\lambda = 0$ er defineret for alle sådanne $\lambda \neq 0$ hvor $\lambda^{-1} \in \complement\, \sigma(A)$, specielt for $|\lambda^{-1}| > r(A)$ (ifølge definitionen på $r(A)$), altså ialt for $|\lambda| < 1/r(A)$. For ethvert

$A' \in \mathcal{A}'$ er derfor udtrykket

$$\langle (I - \lambda A)^{-1} , A' \rangle$$

en sædvanlig analytisk funktion af λ for $|\lambda| < 1/r(A)$ (jvf. § 5.10).

På den anden side gælder ifølge sætn. 5.9 den Neumannske række

$$(I - \lambda A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n$$

for $\|\lambda A\| < 1$, altså for $|\lambda| < 1/\|A\|$. Følgelig er for ethvert $A' \in \mathcal{A}'$

$$\langle (I - \lambda A)^{-1} , A' \rangle = \langle \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n , A' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \langle A^n, A' \rangle$$

hvor den ledvise anvendelse af linearformen A' er tilladelig, fordi A' er kontinuert og lineær. Hermed er godtgjort, at $\langle (I - \lambda A)^{-1} , A' \rangle$ er analytisk for $|\lambda| < 1/\|A\|$, nemlig sum af en konvergent potensrække.

Ved kombination af de fundne resultater sluttes nu, at $\langle (I - \lambda A)^{-1} , A' \rangle$ er analytisk for $|\lambda| < 1/r(A)$ med potensrækkefremstillingen

$$\langle (I - \lambda A)^{-1}, A' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle A^n, A' \rangle \lambda^n .$$

For fastholdt λ med $|\lambda| < 1/r(A)$ går leddene $\langle \lambda^n A^n, A' \rangle$ derfor mod 0 for $n \to \infty$, hvorfor specielt

$$\sup_n |\langle \lambda^n A^n, A' \rangle| < \infty .$$

Dette gælder for ethvert $A' \in \mathcal{A}'$. For hvert n defineres en kontinuert linearform på $\mathcal{A}'$, altså et element af $\mathcal{A}''$, ved

(3) $$A' \to \langle \lambda^n A^n, A' \rangle .$$

Denne linearform er billedet af $\lambda^n A^n$ ($\in \mathcal{A}$) ved den naturlige indlejring af $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}''$ og har derfor samme norm som $\lambda^n A^n$ (jvf.§F 4.7). Da nu de omtalte linearformer (3) er "punktvis" begrænsede, følger det af <u>princippet om ligelig begrænsning</u> (sætn. F 4.4), at deres normer danner en begrænset følge, altså at

$$\sup_n \|\lambda^n A^n\| < \infty .$$

Kaldes dette supremum (som afhænger af λ) for $B(\lambda)$, haves derfor

$$\|A^n\|^{1/n} \leqq B(\lambda)^{1/n}/|\lambda|$$

og **følgelig** (idet $B(\lambda)^{1/n} \to 1$ for $n \to \infty$)

$$\limsup (\|A^n\|^{1/n}) \leqq 1/|\lambda| .$$

Eftersom dette gælder for ethvert $|\lambda| < 1/r(A)$, altså for $1/|\lambda| > r(A)$, sluttes at

$$\limsup (\|A^n\|^{1/n}) \leqq r(A). \tag{4}$$

Sammenholdes dette med (2) finder vi, at følgen $(\|A^n\|^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdien $r(A)$.

Vi samler de fundne resultater for det komplekse tilfælde i følgende sætning.

<u>Sætning.</u> Spektret $\sigma(A)$ for et element A af en kompleks Banach-algebra $\mathcal{A}$ med ételement er en ikke tom, kompakt delmængde af $\mathbb{C}$. Spektralradien $r(A)$ er bestemt ved

$$r(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| = \lim_{n\to\infty} (\|A^n\|^{1/n}) .$$

Dersom $r(A) = 0$, altså $\sigma(A) = \{0\}$, kaldes A et <u>generaliseret nilpotent</u> element. Baggrunden herfor er, at ethvert nilpo-

tent element $A \in \mathcal{A}$, opfylder betingelsen $\sigma(A) = \{0\}$; thi af $A^n = 0$ følger $\sigma(A)^n = \sigma(A^n) = \sigma(0) = \{0\}$.

5.14. Resolvent og spektrum for operatorer. Lad E betegne et t.v.r. over K (= Ŕ eller Č). Da er mængden $\mathcal{A} = L(E,E)$ af alle kontinuerte lineære afbildninger af E ind i E en algebra med ételementet I = den identiske afbildning af E på sig selv. For ethvert $A \in L(E,E)$ er resolventen $(A - \lambda I)^{-1}$ den omvendte afbildning til $A - \lambda I$ og defineret for de $\lambda \in K$, hvor $A - \lambda I$ er bijektiv og åben (nemlig bijektiv og med en kontinuert omvendt afbildning). De øvrige værdier af λ udgør så spektret for A.

Disse definitioner kan vi overføre på det mere generelle tilfælde, hvor A blot betegner en operator på E, altså en lineær afbildning af et underrum af
E ind i E. Vi definerer resolventen for en operator A på E som den omvendte (inverse) operator $(A - \lambda I)^{-1}$ til $A - \lambda I$ (se M1). Herved er resolventen veldefineret som operator på E for de tal λ, hvor $A - \lambda I$ er injektiv (d.v.s. de tal $\lambda \in K$, som ikke er egenværdier for A, jvf.§ 6.3). Ved resolventmængden for A vil vi dog kun forstå mængden af de tal $\lambda \in K$, for hvilke resolventen desuden er kontinuert og defineret i hele E, altså $(A - \lambda I)^{-1} \in L(E,E)$. Komplementærmængden til resolventmængden kaldes som sædvanlig spektret for A og betegnes med $\sigma(A)$. Vi har altså $\complement\sigma(A) = \{\lambda \in K \mid A - \lambda I \text{ injektiv og } (A - \lambda I)^{-1} \in L(E,E)\}$.

Vi forudsætter nu, at det topologiske vektorrum E er et Banach-rum over Č, hvorfor L(E,E) er en kompleks Banach-algebra (§ 5.7, eks.4). For en operator i L(E,E) er nedenstående sætning indeholdt i 5.9 og 5.11:

Sætning. Spektret $\sigma(A)$ for en operator på et komplekst Banach-rum er en afsluttet delmængde af $\mathbb{C}$, og resolventen $(A - \lambda I)^{-1}$ er analytisk som funktion af $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ med værdier i $L(E,E)$.

Bevis. Vi kan antage, at $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$. Lad nu $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Vi skal vise, at $(A - \lambda I)^{-1}$ eksisterer som operator i $L(E,E)$ for alle $\lambda \in \mathbb{C}$ i en omegn af λ_0, og at $(A - \lambda I)^{-1}$ er differentiabel m.h.t. λ for $\lambda = \lambda_0$. Ved om fornødent at erstatte A med $A - \lambda_0 I$, hvorved $\sigma(A)$ og resolventmængden for A åbenbart blot parallelforskydes med beløbet $-\lambda_0$, kan vi antage, at $\lambda_0 = 0$, altså at A^{-1} eksisterer og $\in L(E,E)$. Af omskrivningen

$$(A - \lambda I) = (I - \lambda A^{-1})A$$

følger, at

$$(A - \lambda I)^{-1} = A^{-1}(I - \lambda A^{-1})^{-1} .$$

Da nu $(I - \lambda A^{-1})^{-1}$ ifølge bemærkningen i § 5.11 eksisterer inden for $L(E,E)$ og er differentiabel m.h.t. λ i en omegn af 0, gælder det samme efter multiplikation med den konstante operator $A^{-1} \in L(E,E)$.

1. Lad $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. For enhver mængde J og ethvert $p \in [1,+\infty]$ betegnes med $l_p(J) = l_p(J;K)$ Banachrummet af alle familier $(x_j)_{j\in J} \in K^J$ for hvilke $\|x\|_p < +\infty$, idet vi sætter

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j\in J} |x_j|^p\right)^{1/p} & \text{for } 1 \leqq p < +\infty, \\ \sup_{j\in J} |x_j| & \text{for } p = +\infty, \end{cases}$$

og benytter denne såkaldte p-norm som norm. I tilfældet J endelig skrives også $l_p(n)$ i stedet for $l_p(J)$, idet n=kard J. (Da er $l_p(n) = K^n$ som vektorrum betragtet, og de forskellige p-normer på K^n er parvis ækvivalente.)

Gør rede for, at det duale rum til $l_p(n)$ på naturlig måde kan identificeres isometrisk med $l_q(n)$, hvor $1/p+1/q=1$ (specielt $q=1$ for $p = +\infty$, $q = +\infty$ for $p=1$). Benyt hertil Hölder's ulighed:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leqq \|x\|_p \|y\|_q,$$

gældende for $x,y \in \mathbb{C}^n$.

2. I tilfældet $J = \mathbb{N}$ skrives kort l_p i stedet for $l_p(\mathbb{N}) = l_p(\mathbb{N};K)$. Gør rede for, at det duale rum til l_p på naturlig måde kan identificeres isometrisk med l_q (hvor $1/p + 1/q = 1$), forudsat at $1 \leqq p < +\infty$.

3. Bevis, at $l_p = l_p(\mathbb{N};K)$ er separabelt (jvf.opg.5) for $1 \leqq p < +\infty$, men ikke for $p = +\infty$.

4. Med c betegnes mængden af alle talfølger $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på K for hvilke $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Vis, at c er et afsluttet underrum af l_∞, og at c' på naturlig måde kan identificeres med l_1, idet c normeres ved $\| \|_\infty$. Vis, at c ikke er refleksivt.

5. (Andet numerabilitetsaxiom og separabilitet.) Et topologisk rum $T = (T,Q)$ siges at opfylde det andet numerabilitetsaxiom, dersom topologien (d.v.s. systemet Q af åbne mængder) har en numerabel basis (K Tilf.). Et topologisk rum T kaldes separabelt, dersom der findes en overalt tæt numerabel delmængde af T (H.R.16). Bevis følgende:

a) Ethvert delrum af et topologisk rum, som opfylder 2. numerabilitetsaxiom, har ligeledes denne egenskab.

b) Ethvert topologisk rum, som opfylder 2. numerabilitetsaxiom, er separabelt.

(fortsættes)

c) Et metrisk rum opfylder 2.numerabilitetsaxiom hvis (og kun hvis) det er separabelt.

d) Ethvert delrum af et separabelt metrisk rum er separabelt.

e) Et t.v.r. er separabelt hvis (og kun hvis) det indeholder en numerabel total delmængde (F 2.11).

f) Et Hilbertrum er separabelt hvis og kun hvis dets Hilbertdimension er numerabel.

6. Lad E være et Banach-rum og E' dets duale (forsynet med normtopologien). Udfyld detaillerne i nedenstående bevis for, at

$$E' \text{ separabel} \Rightarrow E \text{ separabel} .$$

(Den modsatte implikation er falsk, jvf. eksemplet $E = l^1$, $E' = l^\infty$ i opg. 3.). Enhedssfæren $E_1' = \{f \in E' \mid \|f\| = 1\}$ i E' indeholder en numerabel, tæt mængde $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in E \ (\|x_n\| \leq 1 \ \wedge \ |f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2})$.

$f \in E_1' \ \wedge \ (\forall n \in \mathbb{N} : f(x_n) = 0)$

$\Rightarrow \|f - f_n\| \geq |f(x_n) - f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}$.

7. Lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge på et præ-Hilbertrum H, og lad $f \in H$. Det antages, at $f_n \to f$ i den svage topologi på H, og at $\|f_n\| \to \|f\|$. Vis, at $f_n \to f$ i den stærke topologi på H.

8. (Operator, som ikke kan afsluttes.) Lad $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis for et separabelt Hilbertrum H, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af elementer af H. Vis, at der findes netop én operator T på H, hvis definitionsmængde er det af

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ udspændte underrum (i algebraisk forstand), og for hvilken $Te_n = f_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis dernæst, at hvis hvert e_m ($m \in \mathbb{N}$) forekommer uendelig ofte i følgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, er $D(T^*) = \{\underline{0}\}$ og dermed $G(T)$ overalt tæt i $H \times H$, hvorfor specielt T ikke kan afsluttes.

9. (Isometrisk operator.) Ved en isometrisk operator, eller en <u>isometri</u>, på et præ-Hilbertrum H forstås en lineær afbildning $V: H \to H$, som bevarer skalarproduktet, altså for hvilken

$$\forall x,y \in H : \quad (Vx|Vy) = (x|y) .$$

a) Vis, at enhver lineær, normbevarende afbildning V af et præ-Hilbertrum i sig selv er en isometri.

b) Vis, at enhver afbildning V af et præ-Hilbertrum i sig selv, som bevarer skalarproduktet, er lineær og dermed en isometri.

c) Vis, at en isometri er afstandsbevarende:

$$\forall x,y \in H : \quad \|Vx - Vy\| = \|x - y\| ,$$

og at omvendt enhver afstandsbevarende afbildning V af et <u>reelt</u> præ-Hilbertrum i sig selv, for hvilken $V(\underline{0}) = \underline{0}$, bevarer skalarproduktet og dermed er en isometri.

d) Gør rede for, at enhver isometri af et præ-Hilbertrum H er injektiv og kontinuert tillige med V^{-1}, hvorfor begrebet en isometri på H er identisk med en isomorfi af H på et underrum af H, Bemærk også, at $\|V\| = 1$.

e) Vis, at en operator V på et <u>Hilbertrum</u> H er en isometri, hvis og kun hvis V^* eksisterer og $V^*V = I$. I så fald

er altså V^* en venstre-invers til V.

10. (Unitær operator.) Vis, at følgende tre egenskaber hos en isometri U på et Hilbertrum H er ækvivalente: i)surjektiv, ii)invertibel inden for L(H,H), iii)normal, d.v.s. $U^*U = UU^*$.
surjektiv
En isometri U på et Hilbertrum H kaldes en unitær (eller, hvis H er reelt, gerne en ortogonal) operator. En sådan er altså karakteriseret ved ligningerne

$$U^*U = UU^* = I \ ,$$

og kan også beskrives som en isomorfi af H på sig selv. Åbenbart gælder $U^* = U^{-1}$.

11. (En ikke-unitær isometri.) Lad $H = l^2 = l^2(\mathbb{N};K)$. Vis, at den ved

$$x = (x_1,x_2,x_3,\ldots) \longrightarrow Vx = (0,x_1,x_2,\ldots)$$

fastlagte afbildning $V: H \to H$ er en isometri, men ikke unitær. Find V^*x for ethvert $x \in H$. Find alle egenværdier og tilhørende egenvektorer for V^*. Find derved spektrene $\sigma(V)$ og $\sigma(V^*)$.

12. Lad A være en operator på et Hilbertrum med D(A) tæt. Vis,at $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$, altså at $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$.

13. Eftervis de to resolventligninger i § F5.5.

14. (Adverst element.) Lad $\mathcal{A}$ være en algebra, gerne uden ételement, og lad $A \in \mathcal{A}$. Et element $X \in \mathcal{A}$ siges at være venstre-adverst (resp. højre-adverst) til A, dersom

$$XA = X + A \ , \qquad \text{resp. } AX = A + X \ .$$

Vis, at hvis A har såvel et venstre- som et højre-adverst element, da er disse ens og entydigt bestemt. Det således bestemte element kaldes da det adverse til A og betegnes med $A^{\sim}$, altså

$$A^{\sim} A = AA^{\sim} = A + A^{\sim} .$$

Vis endelig, at dersom $\mathcal{A}$ har et ételement I, gælder

$$I - A^{\sim} = (I - A)^{-1} ,$$

hvor de to udtryk er samtidigt definerede.

15. (Adjunktion af ételement.) Lad $\mathcal{A}$ være en algebra over K uden ételement. Vis, at produktrummet $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \times K$, som i forvejen er et vektorrum over K, bliver en algebra med ételement ved følgende definition af multiplikationen:

$$(A,\alpha)(B,\beta) = (AB + \alpha B + \beta A,\ \alpha\beta).$$

Vis, at der ved $A \to (A,0)$ defineres en isomorfi af $\mathcal{A}$ på en delalgebra (for øvrigt et maximalt ideal) af $\mathcal{A}_1$. Vis, at $(A,0)^{\sim} = (A^{\sim},0)$, hvor begge symboler er defineret samtidigt. Vis endelig, at hvis $\mathcal{A}$ er normeret, bliver $\mathcal{A}_1$ normeret ved normen

$$\|(A,\alpha)\| = \|A\| + |\alpha| ,$$

og ovennævnte isomorfi bliver isometrisk.

16. (Spektrum i algebra uden ételement.) Med betegnelserne fra foregående opgave defineres spektret $\sigma(A)$ for et element $A \in \mathcal{A}$ som spektret for det tilsvarende element $(A,0) \in \mathcal{A}_1$. Vis, at $0 \in \sigma(A)$ for ethvert $A \in \mathcal{A}$, og at der for $\lambda \neq 0$ gælder

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda^{-1}A \quad \text{har intet adverst.}$$

17. Lad $\mathcal{A}$ være en algebra over $\dot{\mathbb{C}}$ uden ételement, og lad p være et polynomium over $\dot{\mathbb{C}}$ uden konstantled. Vis, at $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$. Vis også, at antagelsen $p(0) = 0$ ikke kan undværes.

18. Lad $\mathcal{A}$ være en algebra over $\dot{\mathbb{R}}$, og lad p være et polynomium over $\dot{\mathbb{R}}$. Vis, at $\sigma(p(A)) \supseteq p(\sigma(A))$. Giv et eksempel, hvor lighedstegnet ikke indtræffer, selv om der er et ételement.(Lad f.eks. $\mathcal{A} = L(E,E)$, hvor $E = \dot{\mathbb{R}}^2$, og lad A være en drejning af passende størrelse.)

19. Lad $\mathcal{A}$ være en normeret algebra med ételement I (og med $||I|| = 1$). Vis, at $||A^{-1}|| \geq ||A||^{-1}$ for ethvert invertibelt $A \in \mathcal{A}$.

20. (Renormering for at opnå $||I|| = 1$.) Lad $\mathcal{A}$ være en normeret algebra. For $A \in \mathcal{A}$ betegner vi med T_A den ved

$$T_A(X) = AX$$

definerede kontinuerte, lineære afbildning (multiplikation til venstre) af $\mathcal{A}$ ind i $\mathcal{A}$. Som element af $L(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ har T_A normen

$$||T_A|| = \sup\{||T_A(X)|| \mid X \in \mathcal{A} \wedge ||X|| \leq 1\} .$$

Vis, at der ved $||A||_* = ||T_A||$ defineres en ny norm på algebraen $\mathcal{A}$, og at $||A||_* \leq ||A||$ for alle $A \in \mathcal{A}$. Vis, endelig, at hvis $\mathcal{A}$ har et ételement I, da gælder $||I||_* = 1$ (uanset om $||I|| = 1$ eller ej), og de to normer er ækvivalente (d.v.s. $\exists k \in \dot{\mathbb{R}}_+ \; \forall A \in \mathcal{A} : k^{-1}||A|| \leq ||A||_* \leq k||A||$).

21. Lad $\mathcal{A} = l^1(\dot{Z},K)$ = Banach-rummet af alle afbildninger $x: \dot{Z} \to K$ (skrevet som følge : $x = (x_n)_{n\in\dot{Z}}$ med $\|x\| = \sum_{n\in\dot{Z}} |x_n| < \infty$. For $x = (x_n)_{n\in\dot{Z}}$ og $y = (y_n)_{n\in\dot{Z}}$ defineres <u>foldningen</u> $x * y$ ved

$$(x * y)_n = \sum_{m\in\dot{Z}} x_{n-m}y_m .$$

Vis, at $\mathcal{A}$ med foldningen som multiplikation og med den angivne norm bliver en kommutativ Banach-algebra med ételement og find dette.

22. Bevis de i eksemplerne i § 5.7 indeholdte udsagn.

23. Lad $\mathcal{A}$ være en Banach-algebra med ételement I, og lad $A,B \in \mathcal{A}$, A invertibel, og $\|BA^{-1}\| < 1$ (eller $\|A^{-1}B\| < 1$). Vis, at A - B er invertibel, og at

$$(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} + \ldots,$$

hvor rækken er absolut konvergent. Giv herved et nyt bevis for sætn. 5.9.

24. Vis, at ethvert element X af en Banach-algebra, for hvilket $\|X\| < 1$, har et adverst element $X^{\sim}$, og at $X^{\sim} = -\sum_{n=1}^{\infty} X^n$, hvor rækken er absolut konvergent.

25. Vis, at mængden af elementer af en Banach-algebra, for hvilke det adverse element eksisterer, er åben, og at afbildningen $X \to X^{\sim}$ er kontinuert.

26. Vis, at formelen for spektralradien også gælder i en kompleks Banach-algebra uden ételement (jvf. opg. 16).

27. Bevis, at $\sigma(A^{-1}) = [\sigma(A)]^{-1}$, når A er et invertibelt element af en Banach-algebra.

28. Vis, at spektret for en unitær operator på et Hilbertrum ligger på enheds cirkelen $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

29. Lad X være et element af en kompleks Banach-algebra $\mathcal{A}$ med ételement I. For enhver i en omegn af cirkelen $\Gamma(X) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq r(X)\}$ holomorf funktion f (med komplekse værdier) defineres

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, X^n .$$

Vis, at rækken er absolut konvergent inden for $\mathcal{A}$, og at afbildningen $f \to f(X)$ er en homomorfi af algebraen af holomorfe funktioner f af den omtalte art ind i $\mathcal{A}$. Vis endvidere, at der for ethvert invertibelt element $A \in \mathcal{A}$ gælder

$$f(A^{-1}XA) = A^{-1}f(X)A .$$

Vis endelig, at $\sigma(f(X)) = f(\sigma(X))$.(Benyt, at $\Gamma(X)$ for givet $\alpha \in \mathbb{C}$ kun indeholder endelig mange nulpunkter for $f - \alpha$, hvorfor $f - \alpha$ kan skrives på formen $f - \alpha = pg$, hvor p er et polynomium, og hvor g er holomorf og $\neq 0$ på $\Gamma(X)$.

30. Lad A og B være elementer af en kompleks Banach-algebra $\mathcal{A}$ med ételement. Vis, at $\exp(A + B) = \exp A \exp B$ hvis $AB = BA$, og at $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$. Vis dernæst i tilfældet $\mathcal{A} = L(H,H)$, H et komplekst Hilbertrum, at $\exp(iA)$ er unitær hvis A er selvadjungeret. Vis endelig i tilfældet $\mathcal{A} = L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$, at determinanten af exp A er exp(sp A), hvor sp A betegner sporet af A. (Benyt f.eks. Jordan's normalform.)

Operatorer.

1. Afbildning fra en mængde til en anden. Lad E_1 og E_2 betegne mængder og T en afbildning fra E_1 til E_2, d.v.s. en afbildning af en delmængde D(T) af E_1 ind i E_2:

$$T : D(T) \to E_2 , \qquad D(T) \subseteq E_1 .$$

D(T) kaldes definitionsmængden for T. Billedmængden T(D(T)) betegner vi også kort med R(T) (efter engelsk: range).

Vi minder om, at T kaldes injektiv, hvis

$$\forall x,y \in D(T): \qquad Tx = Ty \Rightarrow x = y .$$

For en injektiv afbildning T fra E_1 til E_2 defineres den omvendte, eller inverse, afbildning $T^{\circ -1} = T^{-1}$ som den afbildning fra E_2 til E_1, hvis definitionsmængde er billedmængden for T:

$$D(T^{-1}) = R(T) ,$$

og som til ethvert element $y \in R(T)$ lader svare det entydigt bestemte element $x \in D(T)$ for hvilket $Tx = y$:

$$T^{-1}(Tx) = x \qquad \text{for alle } x \in D(T) .$$

Kravet om at T skal være injektiv betyder jo netop, at den inverse relation T^{-1} til den givne relation (afbildningen T) igen er en afbildning (nu fra E_2 til E_1), d.v.s. knytter højst ét element af E_1 til ethvert element af E_2.

Lad S og T være to afbildninger fra E_1 til E_2. Vi kalder S en restriktion af T, og T en udvidelse af S, dersom

$$D(S) \subseteq D(T) \wedge [\forall x \in D(S): Sx = Tx].$$

I givet fald skrives $S \subsetneqq T$ (eller $T \supsetneqq S$). Herved er åbenbart defineret en (partiel) ordensrelation på mængden af samtlige afbildninger fra E_1 til E_2. Specielt fremhæves, at

$$S \subsetneqq T \wedge T \subsetneqq S \iff S = T ,$$

idet $S = T$ definitionsmæssigt skal betyde, at

$$D(S) = D(T) \wedge [\forall x \in D(S): Sx = Tx].$$

Det ses let, at

$$T \text{ injektiv} \wedge S \subsetneqq T \Rightarrow S \text{ injektiv} \wedge S^{-1} \subsetneqq T^{-1}.$$
$$T \text{ injektiv} \Rightarrow T^{-1} \text{ injektiv} \wedge (T^{-1})^{-1} = T.$$

Lad dernæst S være en afbildning fra E_1 til E_2 og T en afbildning fra E_2 til en tredie mængde E_3. Da definerer vi den sammensatte afbildning $T \circ S$ (kaldes ofte produktet og skrives TS) fra E_1 til E_3 ved

$$D(TS) = \{x \in D(S) \mid Sx \in D(T)\} ,$$

$$\forall x \in D(TS): \quad (TS)x = T(Sx) (=TSx) ,$$

hvor TSx blot er en bekvem skrivemåde for billedet. Vi forlanger altså ikke, at $R(S) \subsetneqq D(T)$, i hvilket tilfælde $D(TS) = D(S)$. Man verificerer let den <u>associative lov</u>:

$$(1) \qquad U(TS) = (UT)S \quad (= UTS)$$

gældende for afbildninger S fra E_1 til E_2, T fra E_2 til E_3 og U fra E_3 til E_4. Udtrykket UTS er en bekvem skrivemåde for den resulterende afbildning fra E_1 til E_4.

Ligeledes vises det let, at

$$(2) \qquad (TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1} ,$$

forstået således: Hvis S er en injektiv afbildning fra E_1 til E_2, og T en injektiv afbildning fra E_2 til E_3, da er TS injektiv, og deres inverse er $S^{-1}T^{-1}$.

2. Grafen for en afbildning. Lad T betegne en afbildning fra en mængde E_1 til en mængde E_2, altså en afbildning af en delmængde $D(T) \subseteq E_1$ ind i E_2. Grafen for denne relation fra E_1 til E_2 er jo defineret som følgende delmængde af produktmængden $E_1 \times E_2$:

$$G = G(T) = \{(x,y) \in E_1 \times E_2 \mid x \in D(T) \wedge y = Tx\} .$$

Det er klart, at T er entydigt bestemt ud fra sin graf G(T). Idet vi indfører de kanoniske projektioner p_1 og p_2 af $E_1 \times E_2$ på henholdsvis E_1 og E_2, givet ved

$$p_1(x,y) = x , \qquad p_2(x,y) = y$$

for $(x,y) \in E_1 \times E_2$, gælder åbenbart

$$D(T) = p_1(G) , \qquad R(T) = p_2(G) .$$

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en mængde $G \subseteq E_1 \times E_2$ er grafen for en afbildning fra E_1 til E_2, er åbenbart, at restriktionen $p_1|G$ er injektiv, altså at

(3) $\forall x \in E_1 \quad \forall y,z \in E_2 \; [(x,y),(x,z) \in G \Rightarrow y = z]$;

thi herved udtrykkes jo, at der til ethvert $x \in E_1$ højst findes ét $y \in E_2$ med $(x,y) \in G$. Når denne betingelse er opfyldt, bestemmes den til G hørende afbildning T fra E_1 til E_2 åbenbart ved $D(T) = p_1(G)$ og

(4) $T = p_2(p_1|G)^{-1} = (p_2|G)\,(p_1|G)^{-1}$,

(5) $$p_2|G = T \circ (p_1|G) .$$

Den i § 1 indførte ordensrelation for afbildninger fra E_1 til E_2 harmonerer øjensynlig med den med samme symbol $\subseteq$ betegnede inklusionsrelation for graferne:

$$S \subseteq T \iff G(S) \subseteq G(T) .$$

Enhver delmængde af en graf $G(T)$ er åbenbart selv en græf, nemlig for en restriktion af T.

Også begrebet invers afbildning kan (ligesom begrebet invers relation i almindelighed) formuleres under benyttelse af grafbegrebet. Vi definerer en afbildning U af $E_1 \times E_2$ på $E_2 \times E_1$ ved

$$U(x,y) = (y,x) .$$

For enhver delmængde G af $E_1 \times E_2$ er billedmængden $U(G)$ altså en delmængde af $E_2 \times E_1$, og vi skriver undertiden G^{-1} i stedet for $U(G)$, altså

$$G^{-1} = \{(y,x) \in E_2 \times E_1 \mid (x,y) \in G\}.$$

Lemma. For enhver afbildning T fra E_1 til E_2 gælder, at T er injektiv (d.v.s. T^{-1} eksisterer), hvis og kun hvis $U(G(T)) = (G(T))^{-1}$ er en graf (for en afbildning fra E_2 til E_1). I givet fald gælder

$$G(T^{-1}) = G(T)^{-1} .$$

Bevis. Ifølge (3) er $G(T)^{-1}$ en graf, hvis og kun hvis det for ethvert $y \in E_2$ og vilkårlige $x_1, x_2 \in E_1$ gælder, at

$$(y,x_1),(y,x_2) \in G(T)^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2 ,$$

altså at

$$(x_1,y),(x_2,y) \in G(T) \Rightarrow x_1 = x_2 ;$$

men denne sidste implikation er jo netop definitionen på, at T er injektiv. Det er klart ud fra definitionen på T^{-1}, at der for T injektiv gælder $G(T^{-1}) = G(T)^{-1}$. |

3. Operator. Lad nu E_1 og E_2 betegne vektorrum over samme legeme K. En afbildning T fra E_1 til E_2 kaldes en operator (fra E_1 til E_2), hvis D(T) er et underrum af E_1 og afbildningen $T : D(T) \to E_2$ er lineær. I tilfælde af en operator T kaldes D(T) definitionsrummet, og R(T) = T(D(T)), der jo så bliver et underrum af E_2, kaldes billedrummet for T.

Ved nulrummet N(T) for en operator T forstås originalmængden

$$N(T) = T^{-1}(\underline{0}) = \{x \in D(T) \mid Tx = \underline{0}\} ,$$

hvor $\underline{0}$ her betyder nulvektoren i det andet rum E_2. Som bekendt er N(T) et underrum af D(T) og dermed af E_1. Endvidere er T injektiv, hvis og kun hvis $N(T) = \{\underline{0}\}$, hvor $\underline{0}$ her betyder nulvektoren i E_1. I givet fald er den inverse afbildning T^{-1} af underrummet $R(T) \subseteq E_2$ på D(T) lineær og dermed en (injektiv) operator fra E_2 til E_1 kaldet den inverse operator til T.

En operator T fra E_1 til $E_2 = E_1$ vil vi også kalde en operator på E_1.

En operator T fra E_1 til E_2 siges at være overalt defineret, hvis $D(T) = E_1$. Det drejer sig da simpelthen om en lineær afbildning af E_1 ind i E_2. Som simple eksempler på overalt definerede operatorer kan nævnes nuloperatoren $0 : E_1 \to E_2$ defineret ved

$0\underline{x} = \underline{0}$ (=nulelementet i E_2) for alle $x \in E_1$; og enhedsoperatoren $I : E \to E$ defineret på et vektorrum E ved $Ix = x$ for alle $x \in E$.

Mængden af alle lineære afbildninger (vektorrumshomomorfier) af et vektorrum E_1 ind i et vektorrum E_2 betegnes $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$.

3.1. Lemma. En afbildning T fra et vektorrum E_1 til et vektorrum E_2 er en operator fra E_1 til E_2, hvis og kun hvis grafen $G(T)$ er et underrum af $E_1 \times E_2$.

Bevis. Hvis $G = G(T)$ er et underrum af vektorrummet $E_1 \times E_2$, bliver $D(T) = p_1(G)$ et underrum af E_1, fordi p_1 er lineær, i det foreliggende tilfælde. Endvidere bliver afbildningen T lineær ifølge (4), fordi p_2 er lineær og fordi den omvendte afbildning $(p_1|G)^{-1}$ til den lineære, bijektive afbildning $p_1|G : G \to D(T)$ ligeledes er lineær. Lad det dernæst være givet, at T er en operator, og lad $(x_1, y_1) \in G(T)$ og $(x_2, y_2) \in G(T)$. Da gælder for $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, at

$$\lambda_1 \cdot (x_1, y_1) + \lambda_2 \cdot (x_2, y_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \in G(T) ,$$

fordi $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in D(T)$, og fordi

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T x_1 + \lambda_2 T x_2 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 . \quad |$$

Vi undersøger dernæst, hvilke underrum af $E_1 \times E_2$ er grafer for operatorer fra E_1 til E_2.

3.2 Lemma. Et underrum $G \subseteq E_1 \times E_2$ er grafen før en operator fra E_1 til E_2, hvis og kun hvis

$$\forall y \in E_2 \; [(\underline{0}, y) \in G \Rightarrow y = \underline{0}] .$$

Bevis. At betingelsen er nødvendig, fremgår umiddelbart

af den tidligere fundne betingelse (3) for, at en delmængde $G \subseteq E_1 \times E_2$ er en graf, idet vi sætter $x = \underline{0}$, $z = \underline{0}$ og benytter, at nulvektoren $(\underline{0},\underline{0})$ i $E_1 \times E_2$ tilhører G. Lad os dernæst antage, at betingelsen er opfyldt. For ethvert $x \in E_1$ og ethvert $y,z \in E_2$ med (x,y), $(x,z) \in G$ gælder, da G er et underrum, at

$$(x,y) - (x,z) = (\underline{0},y-z) \in G ,$$

hvoraf vi slutter, at $y-z = \underline{0}$, altså $y = z$. Da betingelsen (3) således er opfyldt, er G grafen for en afbildning T fra E_1 til E_2; og da G er et underrum, er T en operator ifølge det foregående lemma. |

Korollar. Ethvert underrum af grafen G(T) for en operator T er selv grafen for en operator (nemlig for restriktionen af T til et underrum af D(T)).

4. Regning med operatorer. Summen S + T og differensen S-T af to operatorer S og T fra vektorrummet E_1 til vektorrummet E_2 defineres ved

$$D(S \pm T) = D(S) \cap D(T) ,$$
$$\forall x \in D(S) \cap D(T): \quad (S \pm T)x = Sx \pm Tx .$$

Det eftervises let, at de således definerede afbildninger $S \pm T$ fra E_1 til E_2 er operatorer.

For enhver skalar $\lambda \in K$ og enhver operator T fra E_1 til E_2 defineres afbildningen λT ved

$$D(\lambda T) = D(T) ,$$
$$\forall x \in D(T): \quad (\lambda T)(x) = \lambda(Tx) \ (=\lambda Tx) .$$

Igen ses det let, at λT er en operator fra E_1 til E_2. For enheds-

operatoren I på et vektorrum E er λI således defineret ved

$$(\lambda I)(x) = \lambda x \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in E.$$

Specielt er

$$1I = I\ , \quad 0I = 0 \text{ (nuloperatoren på E)}\ .$$

Produktet λT af en skalar $\lambda \in K$ og en operator T fra E_1 til E_2 kan nu ved hjælp af de specielle produkter λI føres tilbage til det i § 1 indførte begreb produkt (=sammensætning) af afbildninger, specielt af operatorer således:

$$\lambda T = (\lambda I)T\ .$$

5. Regneregler for operatorer. Det eftervises let, at additionen af operatorer er kommutativ og associativ og har nuloperatoren som neutralt element:

$$S + T = T + S\ ,$$
$$S + (T + U) = (S + T) + U\ ,$$
$$0 + T = T + 0 = T\ .$$

Her betegner S,T,U og nuloperatoren 0 operatorer fra et vektorrum E_1 til et vektorrum E_2.

Operatoren

$$-T = 0 - T = (-1)T$$

(ligeledes fra E_1 til E_2) har egenskaberne

$$S + (-T) = S - T\ ,$$
$$T + (-T) = T - T = 0|D(T) \subseteq 0\ , \tag{6}$$

og kan altså kun hvis $D(T) = E_1$ betragtes som det modsatte element til T i sædvanlig algebraisk betydning.

Vi har tidligere ((1),§1) omtalt, at multiplikationen (sammensætningen) af operatorer er associativ. Den er normalt ikke kommutativ, selv ikke i tilfældet $E_1 = E_2 = E_3$ (=E) og overalt definerede operatorer. Åbenbart gælder for en operator T fra E_1 til E_2 og en operator U fra E_2 til E_3

$$(7) \qquad UO_{12} = O_{13}, \quad O_{23}T = O_{13}|D(T) \subseteq O_{13},$$

idet O_{ij} betegner nuloperatoren $O_{ij} : E_i \to E_j$.

For enhver operator T fra E_1 til E_2 gælder endvidere

$$(8) \qquad TI_1 = I_2T = T,$$

idet I_j betegner enhedsoperatoren på E_j. Hvis T er injektiv gælder åbenbart

$$(9) \qquad \begin{cases} T^{-1}T = I_1|D(T) \subseteq I_1 \\ TT^{-1} = I_2|R(T) \subseteq I_2 . \end{cases}$$

Man eftervise uden vanskelighed følgende distributive love:

$$(10) \qquad (U + V)S = US + VS,$$

$$(11) \qquad U(S + T) \supseteq US + UT,$$

gældende for operatorer S,T fra E_1 til E_2 og U,V fra E_2 til E_3. At der normalt ikke gælder lighedstegn i (11) skyldes, at det for en vektor $x \in D(S + T) = D(S) \cap D(T)$ godt kan ske, at $(S + T)x = Sx + Tx$ tilhører D(U) uden at Sx og Tx hver for sig tilhører D(U). Dette kan naturligvis ikke indtræffe hvis U er overalt defineret: $D(U) = E_2$, i hvilket tilfælde (blandt andre)

der derfor gælder lighedstegn i (11).

Endelig verificeres let følgende love involverende multiplikation med skalarer $\lambda,\mu \in K$ (betegnelser i øvrigt som ovenfor):

$$(\lambda\mu)T = \lambda(\mu T) \ (=\lambda\mu T) \ ,$$
$$(\lambda + \mu)T = \lambda T + \mu T \ ,$$
$$\lambda(S + T) = \lambda S + \lambda T \ ,$$
$$(12) \qquad (\lambda U)T = \lambda(UT) \ (=\lambda UT) \subseteq U(\lambda T),$$

med lighedstegn til slut i (12) hvis $\lambda \neq 0$ eller hvis U f.eks. er overalt defineret.

Hvis man begrænser sig til overalt definerede operatorer på et vektorrum E, da udtrykker de ovenstående regneregler (hvori de forekommende inklusionstegn nu kan erstattes med lighedstegn), at mængden Hom (E,E) af alle overalt definerede operatorer på E er en algebra med enhedsoperatoren I på E som ételement og nuloperatoren 0 på E som nulelement.

6. Kommuterende operatorer. Lad E betegne et vektorrum, og lad S og T være operatorer på E, d.v.s. fra E til E. Som definition på ombyttelighed af S og T ville man nok ved første øjekast vælge kravet ST = TS. Det viser sig dog, at dette krav er for restriktivt i mange situationer, og at det på den anden side slet ikke er hensigtsmæssigt at definere ombyttelighed for operatorer medmindre mindst én af dem er overalt defineret. Vi opstiller da følgende:

Definition: Hvis S og T er operatorer på E med D(S) = E, siges S at kommutere med T, og T at kommutere med S, dersom

$$ST \subseteq TS \ .$$

Dette sidste krav er åbenbart ensbetydende med, at

$$\forall x \in D(T)\ [Sx \in D(T) \ \wedge \ T(Sx) = S(Tx)]\ .$$

Definitionen har mening, fordi den i det tilfælde, hvor også $D(T) = E$, er ensbetydende med $ST = TS$, i hvilken relation S og T indgår symmetrisk.

Nuloperatoren 0 på E kommuterer ifølge (7) med enhver operator T på E. (Dette ville ikke gælde alment hvis man forlangte $ST = TS$ i definitionen på kommutativitet.) Men almindeligt gælder:

Lemma. For enhver operator T på et vektorrum E udgør de operatorer S, som er overalt definerede på E og som kommuterer med T, en delalgebra af algebraen $\widetilde{\mathrm{Hom}}(E,E)$ af alle lineære afbildninger af E i sig selv, og denne delalgebra indeholder enhedsoperatoren I på E.

Bevis (sml. lemma F.5.2): Lad $R,S \in \mathrm{Hom}\,(E,E)$ kommutere med T, og lad $\lambda \in K$. Da gælder ifølge regnereglerne i § 5

$$\begin{aligned}(\lambda S)T &= \lambda(ST) \subseteq \lambda(TS) \subseteq T(\lambda S)\ ,\\ (R+S)T &= RT + ST \subseteq TR + TS = T(R+S)\ ,\\ (RS)T &= R(ST) \subseteq R(TS) = (RT)S \subseteq (TR)S = T(RS)\ ,\end{aligned}$$

hvoraf lemmaet følger, idet tillige ifølge (8) $IT = T = TI$. |

Hvis T er overalt defineret, vises det ligesom i lemma F.5.2, at T også kommuterer med S^{-1} for enhver bijektiv lineær afbildning $S : E \to E$, der kommuterer med T. (Dette ville ikke gælde alment for en operator T, som ikke er overalt defineret.)

7. Lineært uafhængig familie af underrum. Direkte sum.

Lad E være et vektorrum. En endelig familie $(F_j)_{j\in J}$ af underrum af E kaldes lineært uafhængig (eller fri), dersom en sum $\sum_{j\in J} x_j$ af vektorer fra de respektive underrum (altså $x_j \in F_j$) kun kan være $\underline{0}$, dersom hver af vektorerne x_j er $\underline{0}$. I modsat fald kaldes familien $(F_j)_{j\in J}$ lineært afhængig.

En uendelig familie af underrum kaldes lineært uafhængig, dersom enhver endelig delfamilie er det.

Det ses, at en familie $(F_j)_{j\in J}$ af underrum $\neq \{\underline{0}\}$ er lineært uafhængig, hvis og kun hvis enhver familie $(x_j)_{j\in J}$ af vektorer x_j, hvor $x_j \in F_j \setminus \{\underline{0}\}$, er lineært uafhængig.

I en lineært uafhængig familie $(F_j)_{j\in J}$ af underrum $F_j \neq \{\underline{0}\}$ af E kan der åbenbart ikke forekomme gentagelser. Afbildningen $j \to F_j$ er altså injektiv i dette tilfælde, og man kan derfor identificere familien $(F_j)_{j\in J}$ (som jo egentlig betyder den omtalte afbildning) med selve mængden $\{F_j\}_{j\in J}$ (billedmængden for den omtalte afbildning), ganske som det kendes fra begrebet lineært uafhængig familie eller mængde af vektorer. Men i modsætning til forholdene ved vektorer kan man i tilfælde af en lineært uafhængig familie af underrum tilføje underrummet $\{\underline{0}\}$ (endda så ofte man vil) uden at den lineære uafhængighed går tabt. Svarende til, at den tomme familie af underrum må anses for at være lineært uafhængig, gælder det således specielt, at enhver familie af underrum, der alle er $\{\underline{0}\}$, er lineært uafhængig.

For enhver endelig familie $(F_j)_{j\in J}$ af underrum af E er summen

$$F = \sum_{j\in J} F_j$$

altid defineret som et underrum af E, nemlig bestående af alle

vektorer $x = \sum_{j\in J} x_j$, hvor $x_j \in F_j$ for ethvert $j \in J$.

I tilfælde af en uendelig familie af underrum medregnes til summen $\sum_{j\in J} F_j$ kun sådanne summer $x = \sum_{j\in J} x_j$, hvor desuden $x_j = \underline{0}$ for alle $j \in J$ pånær højst endelig mange. (Herved har $\sum_{j\in J} x_j$ jo mening).

Summen $\sum_{j\in J} F_j$ er åbenbart identisk med det af de givne underrum (d.v.s. af deres forening $\bigcup_{j\in J} F_j$) udspændte underrum af E (i algebraisk forstand, jvf. T.V.R., §30).

Vi siger, at et underrum F af E er (algebraisk) direkte sum af en familie $(F_j)_{j\in J}$ af underrum af E, dersom $F = \sum_{j\in J} F_j$ og tillige $(F_j)_{j\in J}$ er lineært uafhængig. I så fald kan enhver vektor $x \in F$ på netop én måde fremstilles som sum af endelig mange vektorer fra hver sit af underrummene F_j (når bortses fra tilføjelse eller borttagelse af $\underline{0}$.)

Nødvendigt og tilstrækkeligt for lineær uafhængighed i et system $(F_j)_{j\in J}$ af underrum af E er, at der for ethvert $i \in J$ gælder

$$F_i \cap \sum_{j\in J\setminus\{i\}} F_j = \{\underline{0}\} ,$$

thi herved udtrykkes, at ingen vektor $\underline{x} \neq \underline{0}$ tilhørende et af rummene F_i kan være sum af vektorer fra andre af rummene F_j.

Lemma. Lad T betegne en injektiv, lineær afbildning af et vektorrum E ind i et vektorrum F. Hvis E er direkte sum af en familie $(E_j)_{j\in J}$ af underrum af E, så er billedrummet $T(E) \subseteq F$ direkte sum af familien $(T(E_j))_{j\in J}$ af underrum af F.

Bevis. Lad $y_j \in T(E_j)$ for ethvert $j \in J$, og antag at $\sum_{j\in J} y_j = \underline{0}$ i F (hvori specielt skal ligge at $y_j \neq \underline{0}$ højst indtræf-

fer for endeligt mange $j \in J$). Da eksisterer for ethvert $j \in J$ en vektor $x_j \in E_j$ således at $Tx_j = y_j$. For $y_j = \underline{0}$ bliver $x_j = \underline{0}$, da T er injektiv. Åbenbart er derfor $\sum_{j\in J} x_j$ defineret, og

$$T\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) = \sum_{j\in J} Tx_j = \sum_{j\in J} y_j = \underline{0} .$$

Da T er injektiv, må $\sum_{j\in J} x_j = \underline{0}$ i E. Da summen $\sum_{j\in J} E_j$ er direkte, bliver for ethvert $j \in J$ $x_j = \underline{0}$ og dermed $y_j = Tx_j = \underline{0}$. |

Det er klart, at for <u>enhver</u> lineær afbildning $T : E \to F$ og enhver familie $\{E_j\}_{j\in J}$ af underrum af E, gælder

$$T\Big(\sum_{j\in J} E_j\Big) = \sum_{j\in J} T(E_j) .$$

Lad nu $(E_j)_{j\in J}$ betegne en lineært uafhængig, endelig familie af underrum af E med (direkte) sum $\sum_{j\in J} E_j = E$. For hvert $i \in J$ defineres en afbildning $P_i : E \to E$ ved

$$P_i x = x_i ,$$

idet x tænkes fremstillet på formen $x = \sum_{j\in J} x_j$ med $x_j \in E_j$ for ethvert $j \in J$. Da er disse afbildninger P_i lineære og idempotente, og

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i \qquad (i,j \in J). \tag{13}$$

Endvidere gælder $\sum_{i\in J} P_i = I$, den identiske afbildning af E på sig selv. For ethvert $i \in J$ er

$$P_i(E) = E_i , \qquad P_i^{-1}(\underline{0}) = \sum_{j\in J\setminus\{i\}} E_j .$$

Vi kalder P_i for projektionen (eller rettere projektionsafbildningen eller-operatoren) af E på E_i langs de øvrige underrum,

nemlig langs $\sum_{j\in J\setminus\{i\}} E_j$.

Omvendt bestemmer enhver endelig familie $(P_j)_{j\in J}$ af lineære, idempotente afbildninger $P_j: E \to E$ med summen I og opfyldende (13) en spaltning af E som direkte sum af underrummene $P_j(E)$, og der gælder $P_i x = x_i$ for $x = \sum_{j\in J} x_j$ med $x_j \in P_j(E)$. - Beviserne for disse forhold overlades til læseren.

Hvis E er et <u>topologisk</u> vektorrum (over $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$), kaldes en frenstilling $F = \sum_{j\in J} F_j$ af et underrum F af E som direkte sum af en endelig familie $(F_j)_{j\in J}$ af underrum af E for en <u>topologisk direkte sum</u>, dersom desuden enhver af de tilhørende projektionsafbildninger $P_i: F \to F$ er <u>kontinuert</u> (altså $P_i \in L(F,F)$).

Hvis E specielt er et præ Hilbertrum, og hvis de givne underrum $(F_j)_{j\in J}$ er parvis ortogonale, da er de lineært uafhængige, og summen $F = \sum_{j\in J} F_j$ er topologisk direkte (H.R., lemma 6).

8. <u>Stabilt underrum. Reduktion</u>. Lad E være et vektorrum, og lad T betegne en lineær afbildning af E i sig selv, altså en operator på E med $D(T) = E$. (Man kunne let almindeliggøre det følgende til vilkårlige operatorer på E.)

En delmængde $F \subseteq E$ kaldes <u>stabil</u> (eller <u>invariant</u>) over for T, dersom $T(F) \subseteq F$. Eksempelvis er nulrummet $N(T) = T^{-1}(\underline{0})$ og billedrummet $R(T) = T(E)$ stabile over for T og tillige over for enhver med T kommuterende operator $S : E \to E$. Thi

$$Tx = \underline{0} \Rightarrow T(Sx) = S(Tx) = \underline{0}$$

$$y = Tx \Rightarrow Sy = S(Tx) = T(Sx) .$$

Lad nu E være fremstillet som direkte sum af to underrum

F og G, altså

$$E = F + G \ , \qquad F \cap G = \{0\} \ .$$

Projektionsoperatoren på F langs G betegnes med P, og projektionsoperatoren på G langs F betegnes med Q. Der gælder $Q = I - P$.

Lemma. Med ovenstående betegnelser gælder, at F og G er stabile over for T, hvis og kun hvis P (og derfor Q) kommuterer med T.

Bevis. Hvis P kommuterer med T, da gælder det samme om Q ifølge lemma 5. I givet fald haves for $x \in F$, at

$$Tx = TPx = PTx \in F \ ,$$

hvilket viser, at F er stabilt over for T. Analogt med G. Antag dernæst, at F og G er stabile. For ethvert $x \in E$ fås $Px \in F$, $TPx \in F$, altså

$$TPx = PTPx = PT(x - Qx) = PTx \ ,$$

fordi $PTQx = 0$, idet $Qx \in G$ og derfor $TQx \in G$. |

Til en given lineær afbildning $T : E \to E$ kan naturligvis altid findes en spaltning af E som direkte sum af underrum F og G, der er stabile over for T, nemlig om ikke andet så en triviel spaltning, d.v.s. $F = \{0\}$, $G = E$ eller omvendt.

Definition. T kaldes reducibel, dersom der eksisterer en ikke-triviel spaltning af E som direkte sum af to underrum, der er stabile over for T. I modsat fald kaldes T irreducibel.

Betingelsen for reducibilitet er med andre ord, at der eksisterer en idempotent operator $P : E \to E$, som kommuterer med T, og som er $\neq 0$ og $\neq I$.

Vi tilføjer, at i tilfælde af et Hausdorff t.v.r. E og en kontinuert lineær afbildning $T : E \to E$ (altså $T \in L(E,E)$) er det relevante begreb "topologisk" reducibilitet, d.v.s. eksistens af en ikke triviel spaltning af E som topologisk direkte sum af to (nødvendigvis afsluttede) underrum F og G stabile over for T. Eller med andre ord eksistens af en kontinuert idempotent $P \in L(E,E)$ med $PT = TP$ og $P \neq 0,I$.

I tilfælde af et Hilbertrum E er det endnu speciellere begreb "ortogonal" reducibilitet af særlig betydning (navnlig i forbindelse med de såkaldte normale operatorer); her forlanges tillige, at $F \perp G$, altså at P er en "ortogonal" projektionsoperator.

9. Egenværdier. Egenvektorer. Lad E være et vektorrum over et legeme K og I den identiske afbildning af E på sig selv. Vi betragter en operator T på E, altså en lineær afbildning af et underrum D(T) af E ind i E. For enhver skalar $\lambda \in K$ er $T - \lambda I$ ligeledes en operator på E med definitionsrummet D(T). Den afbilder $x \in D(T)$ i $Tx - \lambda x$.

En skalar $\lambda \in K$ kaldes en egenværdi for operatoren T, dersom $T - \lambda I$ ikke er injektiv, altså dersom nulrummet

$$N(T-\lambda I) = \{x \in D(T) \mid (T - \lambda I)x = \underline{0}\}$$

er $\neq \{\underline{0}\}$, hvilket atter er ensbetydende med, at der eksisterer vektorer $x \neq \underline{0}$ i D(T) således at

$$Tx = \lambda x .$$

Sådanne vektorer kaldes egenvektorer for T hørende til egenværdien λ. Underrummet $N(T-\lambda I)$ kaldes det til λ hørende egenrum

for T. Det består af egenvektorerne hørende til λ samt af $\underline{0}$ og er åbenbart stabilt over for T (og også for enhver med T kommuterende operator $S \in \mathrm{Hom}(E,E)$).

Sætning. Egenvektorer, resp. egenrum, hørende til indbyrdes forskellige egenværdier for en operator T er lineært uafhængige.

Bevis. Lad $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ være indbyrdes forskellige egenværdier for T med tilhørende egenrum $E_j = N(T - \lambda_j I)$, $j = 1,2,\dots,r$. Idet beviset føres ved induktion, kan vi gerne antage, at familien $(E_1,\dots,E_{r-1})$ er lineært uafhængig. Det gælder da blot om at vise, at ingen vektor $x \in E_r$ med $x \neq \underline{0}$ kan fremstilles på formen

$$x = x_1 + \dots + x_{r-1}$$

med $x_i \in E_i$ for $i = 1,2,\dots,r-1$. Men af en sådan fremstilling ville ved anvendelse af T følge

$$Tx = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{r-1} x_{r-1}$$

og dermed

$$\underline{0} = Tx - \lambda_r x = (\lambda_1 - \lambda_r)x_1 + \dots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r)x_r ,$$

hvilket efter induktionsantagelsen kun er muligt, hvis leddene på højre side alle er $\underline{0}$, og dermed $x_1 = \dots = x_{r-1} = \underline{0}$.

Lad nu specielt E være et vektorrum over $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ af endelig dimension m, og lad T være en overalt defineret operator på E, altså en lineær afbildning af E i sig selv. Ved den geometriske multiplicitet af et tal $\lambda \in K$ m.h.t. T forstås dimensionen af $(T - \lambda I)^{-1}(\underline{0})$. Den er altså positiv, hvis og kun hvis λ er

egenværdi for T. Ved den algebraiske multiplicitet af $\lambda \in K$ forstås multipliciteten af λ som rod i det karakteristiske polynomium p_T:

$$p_T(\lambda) = \det(T - \lambda I) \ .$$

Den er altså positiv hvis og kun hvis λ virkelig er rod i p_T. Nu vides det fra den lineære algebra, at dette indtræffer netop når kernen for $T - \lambda I$ er $\neq \{0\}$, altså når λ er egenværdi for T. De to multipliciteter er derfor enten begge = 0 eller $\neq 0$. Som vi senere skal se (§F.7.9), gælder det endvidere, at den geometriske multiplicitet af λ altid højst er lig med den algebraiske.

10. Afsluttet operator. I denne og de resterende paragraffer i kapitlet forudsætter vi, når ikke andet siges, at de optrædende vektorrum er topologiske vektorrum over K(=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Produktet $E_1 \times E_2$ af to sådanne rum E_1 og E_2 er ligeledes et t.v.r. (T.V.R., sætning 9), og de kanoniske projektionsafbildninger p_1 og p_2 af $E_1 \times E_2$ på E_1, henholdsvis E_2, er kontinuerte og åbne afbildninger (§T2.7).

Definition. En operator T fra E_1 til E_2 kaldes afsluttet, dersom dens graf G(T) er afsluttet i $E_1 \times E_2$. Vi siger, at en operator T kan afsluttes, dersom der eksisterer en afsluttet operator $\supseteq$ T.

10.1. Lemma. En operator T fra E_1 til E_2 kan afsluttes, hvis og kun hvis afslutningen $\overline{G(T)}$ af grafen for T er en graf. I givet fald er den ved

$$G(\overline{T}) = \overline{G(T)} \tag{14}$$

bestemte operator $\overline{T}$ fra E_1 til E_2 den snævreste afsluttede udvidelse af T, og der gælder

(15) $$D(\overline{T}) \subseteq \overline{D(T)} .$$

Bevis. Det er klart, at hvis $\overline{G(T)}$ er graf for en operator $\overline{T}$ fra E_1 til E_2, da er denne en afsluttet udvidelse af T. Hvis omvendt T besidder en afsluttet udvidelse S, gælder $G(T) \subseteq G(S)$ og derfor $\overline{G(T)} \subseteq \overline{G(S)} = G(S)$. Som underrum af grafen G(S) er $\overline{G(T)}$ da selv en graf. Defineres $\overline{T}$ ved $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$, har vi samtidigt vist, at $G(\overline{T}) \subseteq G(S)$, altså $\overline{T} \subseteq S$, for enhver afsluttet udvidelse S af T. For at bevise (15) bemærker vi, at

$$G(T) \subseteq D(T) \times E_2 \subseteq \overline{D(T)} \times E_2 .$$

Da den sidste produktmængde er afsluttet i $E_1 \times E_2$, bliver

$$G(\overline{T}) = \overline{G(T)} \subseteq \overline{D(T)} \times E_2 ,$$

hvorefter (15) fremkommer ved anvendelse af projektionen p_1 af $E_1 \times E_2$ på E_1. |

10.2. Lemma. For ethvert underrum G af $E_1 \times E_2$ gælder

$$\overline{G^{-1}} = \overline{G}^{-1}.$$

Bevis. Den i §2 indførte bijektive afbildning U af $E_1 \times E_2$ på $E_2 \times E_1$ givet ved $U(x,y) = (y,x)$ overfører jo G i $U(G) = G^{-1}$. I det foreliggende tilfælde, hvor E_1 og E_2 er topologiske (vektor)rum, bliver U åbenbart en homeomorfi, hvorfor $\overline{U(G)} = U(\overline{G})$. |

10.3 Sætning. Lad T være en injektiv operator, som kan afsluttes. Da kan T^{-1} afsluttes, hvis og kun hvis $\overline{T}$ er injektiv. I givet fald gælder

$$\overline{T^{-1}} = \overline{T}^{-1} .$$

Bevis. Ifølge lemma 2 er $G(T^{-1}) = G(T)^{-1}$ og i medfør af ovenstående lemma

$$G(\overline{T})^{-1} = \overline{G(T)}^{-1} = \overline{G(T)^{-1}} = \overline{G(T^{-1})} .$$

Endvidere er $\overline{T}$ injektiv hvis og kun hvis $G(\overline{T})^{-1} = \overline{G(T^{-1})}$ er grafen for en operator fra E_2 til E_1, og dette er ifølge lemma 10.1 videre ensbetydende med at T^{-1} kan afsluttes. Hermed er første del af sætningen bevist. I givet fald fås under benyttelse af lemma 10.2

$$G(\overline{T^{-1}}) = \overline{G(T^{-1})} = G(\overline{T})^{-1} = G(\overline{T}^{-1}). \quad |$$

Korollar. Den inverse operator til en (injektiv) afsluttet operator er afsluttet.

10.4. Lemma. Nulrummet N(T) for en afsluttet operator T fra E_1 til E_2 er et afsluttet underrum af E_1.

Bevis: Åbenbart er

$$N(T) = \{x \in E \mid (x,\underline{0}) \in G(T)\} .$$

Heraf fremgår det ønskede, da G(T) er afsluttet i $E_1 \times E_2$ og da afbildningen $x \to (x,\underline{0})$ af E_1 ind i $E_1 \times E_2$ er kontinuert (fordi den identiske afbildning I af E_1 på E_1 og den konstante afbildning 0 af E_1 på $\{\underline{0}\} \subseteq E_2$ begge er kontinuerte). |

Analogt vises (i tilfældet $E_1 = E_2$), at ethvert egenrum $N(T - \lambda I)$ for en afsluttet operator T på E er afsluttet. Her benyttes, at

$$N(T - \lambda I) = \{x \in E \mid (x,\lambda x) \in G(T)\} ,$$

og at afbildningen $x \to (x,\lambda x)$ er kontinuert.

11. Kontinuert operator. En operator T fra E_1 til E_2 kaldes kontinuert, hvis den lineære afbildning $T:D(T) \to E_2$ er kontinuert, idet $D(T) \subseteq E_1$ udstyres med delrumstopologien fra E_1.

Sætning. Lad E_2 være et fuldstændigt Hausdorff t.v.r., og lad T være en kontinuert operator fra E_1 til E_2. Da kan T afsluttes, og afslutningen $\overline{T}$ fås ved udvidelse af T ved kontinuitet. Der gælder derfor

$$D(\overline{T}) = \overline{D(T)} .$$

Specielt er T afsluttet, hvis og kun hvis D(T) er afsluttet.

Bevis. Først viser vi, at T kan afsluttes, altså at underrummet $\overline{G(T)}$ er en graf. Ifølge lemma 3.2 skal det hertil godtgøres, at $(\underline{0},y) \in \overline{G(T)}$ medfører $y = \underline{0}$. Lad altså $(\underline{0},y) \in E_1 \times E_2$ være et kontaktpunkt for G(T), og antag at $y \neq \underline{0}$. Da E_2 er forudsat Hausdorff, findes der disjunkte omegne V og W af henholdsvis $\underline{0}$ og y i E_2. Da afbildningen $T : D(T) \to E_2$ er kontinuert, specielt i $\underline{0}$, eksisterer der en omegn U_o af $\underline{0}$ i delrummet D(T) således at $T(U_o) \subseteq V$. Som bekendt har U_o formen $U_o = U \cap D(T)$, hvor U betegner en omegn af $\underline{0}$ i E_1. Nu er jo $U \times W$ en omegn af $(\underline{0},y)$ i $E_1 \times E_2$ og indeholder derfor et punkt $(x,y) = (x,Tx)$ af G(T), fordi $(\underline{0},y) \in \overline{G(T)}$. Men så er $x \in U \cap D(T) = U_o$ og $Tx = y \in W$ i strid med, at $Tx \in V$ fordi $x \in U_o$, og at $V \cap W = \emptyset$.

Hvis specielt D(T) er afsluttet, følger det derpå af lemma 10.1 at T selv er afsluttet, idet $D(\overline{T}) = D(T)$. I det generelle tilfælde kan T udvides ved kontinuitet til en kontinuert operator S fra E_1 til E_2 med $D(S) = \overline{D(T)}$ (T.V.R., sætn.17). Da D(S) således er afsluttet, må S ifølge bemærkningen ovenfor være afsluttet, hvorfor $\overline{T} \subseteq S$. Det gælder da blot om at vise, at $G(\overline{T}) \supseteq G(S)$, thi da bliver $\overline{T} = S$ og dermed $D(\overline{T}) = D(S) = \overline{D(T)}$. Lad os med f betegne den afbildning af D(S) ind i $E_1 \times E_2$, der defineres ved

$$f(x) = (x, Sx) .$$

Da S er kontinuert, bliver f det også. Åbenbart er

$$f(D(S)) = G(S) , \qquad f(D(T)) = G(T) ,$$

sidstnævnte fordi $T \subseteq S$. Det følger nu (§T.2.24), at

$$G(S) = f(D(S)) = f(\overline{D(T)}) \subseteq \overline{f(D(T))} = \overline{G(T)} = G(\overline{T}) . \quad |$$

Bemærkning. Ved beviset for, at enhver kontinuert operator T kan afsluttes, har vi ikke benyttet fuldstændigheden af E_2. Også kontinuiteten af afslutningen $\overline{T}$ kan let bevises uden brug af fuldstændigheden af E_2.

Vi minder til slut om sætningen om den afsluttede graf (T.V.R., sætning 43), ifølge hvilken enhver afsluttet lineær afbildning $T : E_1 \to E_2$ er kontinuert, såfremt E_1 og E_2 forudsættes fuldstændige og metriserbare. Dette resultat udstrækkes uden videre til en kontinuert operator fra E_1 til E_2 med afsluttet definitionsrum D(T), thi delrummet D(T) er da ligeledes fuldstændigt og metriserbart. Kombineres dette med sidste del af sætning 11, fås følgende hovedresultat:

Scholium. I tilfælde af to fuldstændige metriserbare topologiske vektorrum E_1 og E_2 og en lineær operator T fra E_1 til E_2 gælder, at hvilkesomhelst to af nedenstående tre udsagn medfører det tredie:

a) T er kontinuert.

b) T er afsluttet.

c) D(T) er afsluttet.

Idet vi vender tilbage til vilkårlige t.v.r. E_1 og E_2, viser vi endelig.

Lemma. Lad T være en operator fra E_1 til E_2, som kan afsluttes, og lad $S \in L(E_1,E_2)$. Da kan S + T afsluttes, og der gælder

$$\overline{S + T} = S + \overline{T} .$$

Specielt er S + T afsluttet, hvis T er det.

Bevis. Da $D(S) = E_1 \supseteq D(T)$ er $D(S + T) = D(S) \cap D(T) = D(T)$, og vi har derfor biimplikationerne

$$\begin{aligned} & (x,y) \in G(S + T) \\ & \iff x \in D(S + T) \wedge y = (S + T)x \\ & \iff x \in D(T) \wedge y - Sx = Tx \\ & \iff (x,y - Sx) \in G(T) . \end{aligned}$$

Ved $(x,y) \to (x,y - Sx)$ defineres en afbildning f af $E_1 \times E_2$ i sig selv, og vi har set, at

$$G(S + T) = f^{-1}(G(T)) . \tag{16}$$

Det eftervises umiddelbart, at f er bijektiv og at den inverse

afbildning f^{-1} af $E_1 \times E_2$ på sig selv er givet ved $(u,v) \to (u,v + Su)$. Da S er kontinuert, bliver f og f^{-1} ligeledes kontinuerte, altså topologiske afbildninger.

Af (16) følger derfor

$$\overline{G(S + T)} = f^{-1}(\overline{G(T)}) = f^{-1}(G(\overline{T})) = G(S + \overline{T}) ,$$

idet den sidste ligning fås ved anvendelse af (16) med $\overline{T}$ i stedet for T. |

12. Resolvent og spektrum for operatorer. For en vilkårlig operator T på et vektorrum E over K vil vi kalde den inverse operator $(T - \lambda I)^{-1}$ til $T - \lambda I$ for resolventen for T hørende til $\lambda \in K$, forudsat blot, at denne inverse operator eksisterer, altså at $T - \lambda I$ er injektiv. Resolventen for T eksisterer altså for netop de $\lambda \in K$, som ikke er egenværdier for T.

Lad nu E være et topologisk vektorrum over $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. For enhver operator T på E vil vi kalde den ved

$$\rho'(T) = \{\lambda \in K \mid (T - \lambda I)^{-1} \text{ eksisterer og er kontinuert}\}$$

definerede delmængde af K for regularitets området for T.

For en operator $T \in L(E,E)$ (altså overalt defineret og kontinuert) er begreberne resolventmængde $\rho(T)$ og spektrum $\sigma(T) = K \setminus \rho(T)$ veldefinerede i henhold til §F.5.5, fordi L(E,E) er en algebra med ételement (nemlig enhedsoperatoren I på E). For at se, hvad disse begreber indebærer, må vi først bestemme de invertible elementer af algebraen L(E,E).

12.1. Lemma. En operator $S \in L(E,E)$ er invertibel inden for algebraen L(E,E) hvis og kun hvis den inverse operator S^{-1}

eksisterer, er overalt defineret og kontinuert, altså hvis og kun hvis S er injektiv og $S^{-1} \in L(E,E)$. I givet fald er den inverse operator S^{-1} netop det inverse element til S inden for algebraen $L(E,E)$.

Man kan åbenbart også udtrykke dette resultat ved at sige, at de invertible elementer af $L(E,E)$ er de topologiske vektorrumsisomorfier af E på sig selv.

Bevis. Lad først $S \in L(E,E)$ være injektiv, og lad den inverse operator S^{-1} være overalt defineret og kontinuert. Ialt er da S en lineær homeomorfi (=topologisk vektorrumsisomorfi) af E på sig selv. Da nu $S^{-1}S = SS^{-1} = I$, og da også $S^{-1} \in L(E,E)$, viser dette at den inverse operator S^{-1} er inverst element til S inden for $L(E,E)$. Lad dernæst $S \in L(E,E)$ betegne et invertibelt element af algebraen $L(E,E)$, og lad $T \in L(E,E)$ betegne det inverse element til S, d.v.s.

$$TS = ST = I .$$

Da $TS = I$ er injektiv, må det samme nødvendigvis gælde om S, hvorfor den inverse operator S^{-1} eksisterer. Af den associative lov (1),§1 for operatormultiplikation følger derpå, at

$$S^{-1} = S^{-1}I = S^{-1}(ST) = (S^{-1}S)T = IT = T ,$$

hvorfor $S^{-1} = T$ tilhører $L(E,E)$. |

Lad nu $T \in L(E,E)$ og $\lambda \in K$. Idet vi anvender ovenstående lemma på $S = T - \lambda I$, finder vi, at λ tilhører resolventmængden $\rho(T)$ for T hvis og kun hvis $T - \lambda I$ er injektiv og den inverse operator $(T - \lambda I)^{-1}$ (resolventen for T) er overalt defineret og kontinuert, nemlig tilhører $L(E,E)$.

I det følgende forudsætter vi, at E er et fuldstændigt Haus-

dorff t.v.r. (f.eks. et Banachrum).

Definition. Ved resolventmængden $\rho(T)$ for en vilkårlig operator T på E forstås mængden af alle $\lambda \in K$ for hvilke resolventen $(T - \lambda I)^{-1}$ eksisterer, er kontinuert og tæt defineret. Spektret for T er $\sigma(T) = K \setminus \rho(T)$.

Det vil fremgå af korollaret til det følgende lemma, at denne definition i tilfældet $T \in L(E,E)$ stemmer overens med definitionen af $\rho(T)$ og $\sigma(T)$ for elementet T af algebraen $L(E,E)$. Åbenbart gælder $\rho(T) \subsetneq \rho'(T)$, og nærmere:

$$\rho(T) = \rho'(T) \cap \{\lambda \in K \mid T - \lambda I \text{ har tæt billedrum}\} . \tag{17}$$

12.2. Lemma. Hvis T kan afsluttes, er

$$\sigma(\overline{T}) = \sigma(T), \quad \rho(\overline{T}) = \rho(T), \quad \rho'(\overline{T}) = \rho'(T) .$$

Bevis. Ifølge lemma 11 kan $T - \lambda I$ afsluttes for ethvert $\lambda \in K$, og der gælder $\overline{T - \lambda I} = \overline{T} - \lambda I$. Det er klart, at der for enhver operator S med $S \supsetneq T$ gælder $\rho'(S) \subsetneq \rho'(T)$. Specielt er således $\rho'(\overline{T}) \subsetneq \rho'(T)$. Lad nu $\lambda \in \rho'(T)$. Ifølge sætning 11 har $(T - \lambda I)^{-1}$ kontinuert afslutning, og

$$\overline{D[(T - \lambda I)^{-1}]} = \overline{D[(T - \lambda I)^{-1}]} .$$

Ifølge sætning 10.3 er $\overline{T} - \lambda I = \overline{T - \lambda I}$ injektiv, og

$$(\overline{T} - \lambda I)^{-1} = (\overline{T - \lambda I})^{-1} = \overline{(T - \lambda I)^{-1}} .$$

Da denne sidste operator som vist er kontinuert, har vi påvist at $\lambda \in \rho'(\overline{T})$ og dermed ialt at $\rho'(\overline{T}) = \rho'(T)$. Desuden har vi fundet, at for ethvert $\lambda \in \rho'(\overline{T}) = \rho'(T)$ gælder

$$D[(\overline{T} - \lambda I)^{-1}] = \overline{D[(T - \lambda I)^{-1}]} ,$$

hvorfor billedrummene for $\overline{T} - \lambda I$ og $T - \lambda I$ har samme afslutning (og det første af dem er afsluttet). Hvis et af de to billedrum er overalt tæt, bliver det andet det derfor også. Dette viser i henhold til (17), at $\rho(\overline{T}) = \rho(T)$. | Af beviset fremgår endvidere:

Korollar: Hvis T er afsluttet, har $T - \lambda I$ afsluttet billedrum for ethvert $\lambda \in \rho'(T)$. Specielt er $T - \lambda I$ surjektiv (og dermed bijektiv) for ethvert $\lambda \in \rho(T)$, og vi har derfor

$$\rho(T) = \{\lambda \in K \mid T - \lambda I \text{ injektiv } \wedge (T - \lambda I)^{-1} \in L(E,E)\} .$$

Man plejer at inddele spektret $\sigma(T)$ i følgende tre disjunkte dele, som åbenbart tilsammen udtømmer $\sigma(T)$:

a) Punktspektret $\sigma_p(T)$ er mængden af alle egenværdier for T.

b) Residualspektret $\sigma_r(T)$ er mængden af alle $\lambda \in K$, for hvilke resolventen $(T - \lambda I)^{-1}$ eksisterer, men ikke er tæt defineret.

c) Det kontinuerte spektrum $\sigma_c(T)$ er mængden af alle $\lambda \in K$, for hvilke resolventen $(T - \lambda I)^{-1}$ eksisterer, er tæt defineret, men ikke kontinuert.

Åbenbart gælder

$$\rho(T) \subseteq \rho'(T) \subseteq \rho(T) \cup \sigma_r(T) .$$

For operatoren λI bliver for ethvert $\lambda \in K$ åbenbart

$$\sigma(\lambda I) = \{\lambda\} ,$$

og λ er en egenværdi for λI. For en vilkårlig operator T viser man let, at der for ethvert $\lambda \in K$ gælder

(18) $$\sigma(T - \lambda I) = \sigma(T) - \lambda ,$$

og analogt med $\sigma_p, \sigma_r, \sigma_c$, ρ eller ρ' i stedet for σ.

12.3. Sætning. Lad $E \neq \{0\}$ være et Banachrum over $\mathbb{C}$. For enhver afsluttet operator T på E er spektret $\sigma(T)$ en afsluttet delmængde af $\mathbb{C}$, og resolventen $(T - \lambda I)^{-1}$ er analytisk som funktion af $\lambda \in \rho(T)$ med værdier i Banach-algebraen $L(E,E)$. Hvis $T \in L(E,E)$, er $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Bevis. I tilfældet $T \in L(E,E)$ er disse resultater indeholdt i sætningerne F.5.9 og F.5.11 anvendt på Banach-algebraen $L(E,E)$. For en vilkårlig afsluttet operator T på E kan påstanden let reduceres til dette specialtilfælde. Vi kan åbenbart antage, at $\rho(T) \neq \emptyset$. Lad nu $\lambda_0 \in \rho(T)$. Opgaven er at vise, at resolventen $(T - \lambda I)^{-1}$ eksisterer og tilhører $L(E,E)$ for alle λ i en omegn af λ_0, og at afbildningen $\lambda \to (T - \lambda I)^{-1}$ af $\rho(T)$ ind i $L(E,E)$ er differentiabel i λ_0. Ved om fornødent at erstatte T med $T - \lambda_0 I$, hvorved $\rho(T)$ erstattes med $\rho(T - \lambda_0 I) = \rho(T) - \lambda_0$, kan vi antage at $\lambda_0 = 0$, altså at T^{-1} eksisterer som operator og tilhører $L(E,E)$. Af omskrivningerne

$$T - \lambda I = IT - \lambda T^{-1}T = (I - \lambda T^{-1})T$$

(af hvilke den første åbenbart gælder selv om $D(T) \subset E$, og den anden følger af den første distributive lov (10),§5) slutter vi ud fra (2),§1, at

$$(T - \lambda I)^{-1} = T^{-1}(I - \lambda T^{-1})^{-1} .$$

Da nu $T^{-1} \in L(E,E)$, eksisterer $(I - \lambda T^{-1})^{-1}$ inden for $L(E,E)$ og er differentiabel med hensyn til λ i en omegn af 0 (jvf.

bemærkningen i § F.5.11), og det samme gælder åbenbart efter multiplikation med den af λ uafhængige operator $T^{-1} \in L(E,E)$. |

13. Det endeligdimensionale tilfælde. Ethvert vektorrum over K (= $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) kan som bekendt udstyres med en topologi, der gør rummet til et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. (Den fineste sådanne topologi defineres ved systemet af alle seminormer på E, jvf. T.V.R., §33.)

Lad nu E være af endelig dimension m. Ifølge T.V.R., sætn. 24 findes der da kun én topologi på E, som gør E til et Hausdorff t.v.r., og ved denne bliver E topologisk isomorft med K^m. Derfor bliver alle underrum af E afsluttede og alle linearformer og operatorer på E bliver kontinuerte og afsluttede. Resolventmængden $\rho(T)$ for en operator T på E består derfor af alle tal $\lambda \in K$, for hvilke $T - \lambda I$ er en bijektiv afbildning af D(T) på E, hvilket kun er muligt, hvis $D(T) = E$, altså hvis $T \in \mathrm{Hom}(E,E)$ (= $L(E,E)$ i det foreliggende tilfælde). Nu vides det fra den lineære algebra, at for en operator $T \in \mathrm{Hom}(E,E)$ er $T - \lambda I$ surjektiv hvis og kun hvis den er injektiv, altså hvis og kun hvis λ ikke er egenværdi for T. Hermed er bevist følgende sætning:

Sætning. Spektret for en overalt defineret operator T på et endeligdimensionalt Hausdorff t.v.r. E udgøres af egenværdierne for T, altså $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.

I tilfældet $K = \mathbb{C}$, $E \neq \{0\}$ er $\sigma(T) \neq \emptyset$, idet det karakteristiske polynomium ifølge algebraens fundamentalsætning har mindst én rod.

For en operator T på E med $D(T) \subset E$ er som vist $\rho(T) = \emptyset$, altså $\sigma(T) = K$.

14. Transponeret operator. For ethvert t.v.r. E over K (= $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) har vi i §F.4.2 defineret det (topologisk) duale rum $E' = L(E,K)$ som vektorrummet af alle kontinuerte linearformer på E.

Lad nu $T \in L(E_1,E_2)$ betegne en kontinuert lineær afbildning af et t.v.r. E_1 ind i et t.v.r. E_2. Vi vil hertil knytte en lineær afbildning T' af vektorrummet E_2' ind i vektorrummet E_1'. For ethvert $\alpha \in E_2' = L(E_2,K)$ definerer vi

$$T'\alpha = \alpha \circ T ,$$

som åbenbart tilhører $E_1' = L(E_1,K)$. At den således definerede afbildning $T' : E_2' \to E_1'$ er lineær, ses let direkte, men følger også straks af regnereglerne for overalt definerede operatorer (§5).

Med skrivemåden $\alpha(x) = \langle x,\alpha\rangle$ for billedet af en vektor x ved en linearform α kan definitionen af T' åbenbart udtrykkes således:

$$\langle Tx,\alpha\rangle = \langle x,T'\alpha\rangle \quad \text{for alle } x \in E_1,\ \alpha \in E_2'.$$

Vi kalder T' for den transponerede operator til T.

Man kan også definere T' (som operator fra E_2' til E_1') for mere generelle operatorer fra E_1 til E_2. Dette spørgsmål såvel som nærmere egenskaber ved transponerede operatorer vil vi dog nøjes med at behandle i det vigtige tilfælde, hvor E_1 og E_2 er Hilbertrum. Ved hjælp af den konjugerede isomorfi mellem et Hilbertrum og dets duale, som udspringer af Fréchet-Riesz' sætning (H.R., sætn.10 og § F.4.9) kan vi for en operator $T \in L(E_1,E_2)$, når E_1 og E_2 er Hilbertrum, overføre den transponerede operator $T' : E_2' \to E_1'$ i en operator $T^* : E_2 \to E_1$ kaldet

den adjungerede operator til $T : E_1 \to E_2$.

Denne vil vi studere nærmere i det følgende kapitel.

Opgaver til Operatorer.

1. (Relationer.) Idet en relation T fra en mængde E_1 til en mængde E_2 identificeres med sin graf, der jo er en (vilkårlig) delmængde af $E_1 \times E_2$, defineres " billedet" $T(x) = Tx$ af et element $x \in E_1$, og mere almindeligt billedet $T(M)$ af en delmængde $M \subseteq E_1$, ved

$$Tx = \{y \in E_2 \mid (x,y) \in T\}$$
$$T(M) = \bigcup_{x \in M} Tx = \{y \in E_2 \mid \exists x \in M : (x,y) \in T\} .$$

Endvidere sætter vi

$$D(T) = \{x \in E_1 \mid Tx \neq \emptyset\}$$
$$R(T) = T(E_1) = T(D(T)) = \{y \in E_2 \mid \exists x \in E_1 : y \in Tx\} .$$
$$T^{-1} = \{(y,x) \in E_2 \times E_1 \mid (x,y) \in T\}$$

Bevis følgende:

a) $D(T) = p_1(T)$, $R(T) = p_2(T) = D(T^{-1})$.

b) $\forall M \subseteq E_1$: $T(M) = T(M \cap D(T))$.

c) $\forall M \subseteq E_1$: $T(M) = \emptyset \iff M \cap D(T) = \emptyset$.

d) $\forall M_1, M_2 \subseteq E_1$: $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow T(M_1) \subseteq T(M_2)$.

e) For enhver familie af delmængder $M_j \subseteq E_1$ $(j \in J)$ gælder

$$T\left(\bigcup_{j \in J} M_j\right) = \bigcup_{j \in J} T(M_j)$$

f) $\forall x \in E_1 \quad \forall y \in E_2$: $y \in Tx \iff x \in T^{-1}y$.

g) For to relationer S,T fra E_1 til E_2 gælder

$$S \subseteq T \iff \forall x \in E_1 : Sx \subseteq Tx.$$

h) En relation T fra E_1 til E_2 er (grafen for) en afbildning fra E_1 til E_2, hvis og kun hvis mængden Tx for ethvert $x \in E_1$ indeholder højst ét element. (I givet fald identificeres Tx gerne med dette ene element ifald $x \in D(T)$.)

i) For en relation T fra E_1 til E_2 gælder, at den inverse relation T^{-1} fra E_2 til E_1 er en afbildning hvis og kun hvis T selv er injektiv i den forstand, at T afbilder forskellige elementer af E_1 på disjunkte delmængder af E_2, altså

$\forall x_1, x_2 \in E_1: \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow T(x_1) \cap T(x_2) = \emptyset$.

2. (Lineær relation) Lad E_1 og E_2 være vektorrum. En relation fra E_1 til E_2 kaldes lineær, hvis den (d.v.s. dens graf) er et underrum af $E_1 \times E_2$. Vis, at en relation T fra E_1 til E_2 er lineær hvis og kun hvis der gælder $T \neq \emptyset$ samt

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K \quad \forall x_1, x_2 \in E_1: \quad T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \supseteq \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2) .$$

Vis også, at lighedstegnet i givet fald kun indtræffer hvis T er en overalt defineret operator, altså $T \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ (sæt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Bevis dernæst følgende om en lineær relation T fra E_1 til E_2:

a) $D(T)$ er et underrum af E_1.

b) $T\,\underline{0}$ er et underrum af E_2. (Sæt $x_1 = x_2 = \underline{0}$.)

c) For ethvert $x \in D(T)$ er Tx et sideunderrum til $T\,\underline{0}$ i E_2. (Sæt $x_1 = \underline{0}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; og sæt derpå $x_1 = x_2$, $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$.)

d) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K \quad \forall M_1, M_2 \subseteq E_1: \quad T(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) \supseteq \lambda_1 T(M_1) + \lambda_2 T(M_2)$, med lighedstegn ifald T er en overalt defineret operator.

e) T er en operator hvis og kun hvis $T\,\underline{0} = \{\underline{0}\}$.

f) T er injektiv hvis og kun hvis $\underline{0} \in Tx \Rightarrow x = \underline{0}$.

3. (Multiplikation af relationer.) Lad $E_1, E_2, \ldots$ være mængder, og S være en relation fra E_1 til E_2, T fra E_2 til E_3, og U fra E_3 til E_4. Ved sammensætning af S og T opstår produktet $T \circ S = TS$ defineret som relation fra E_1 til E_3 ved

$$TS = \{(x,z) \in E_1 \times E_3 \mid \exists y \in E_2 : (x,y) \in S \wedge (y,z) \in T\} .$$

Bevis nedenstående udsagn, hvor I_1 og I_2 betegner enhedsoperatoren på henholdsvis E_1 og E_2:

a) $\forall x \in E_1 : (TS)x = T(Sx)$.

b) $D(TS) = \{x \in D(S) \mid Sx \cap D(T) \neq \emptyset\}$.

c) $\forall M \subseteq E_1 : (TS)(M) = T(S(M))$.

d) $U(TS) = (UT)S$.

e) $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.

f) $SI_1 = I_2S = S$.

g) $S^{-1}S \supseteq I_1 \mid D(S)$, $SS^{-1} \supseteq I_2 \mid D(S)$, med lighedstegn hvis og kun hvis S er injektiv, henholdsvis S er en afbildning.

h) Hvis S og T er afbildninger, er også TS en afbildning, nemlig det sædvanlige produkt TS.

i) Hvis S og T er lineære relationer (og E_1, E_2, E_3 derfor vektorrum), er også TS en lineær relation.

4. (Lineære regninger med lineære relationer.) Lad S,T og U være lineære relationer fra et vektorrum E_1 til et vektorrum E_2. Man definerer $S \pm T$ som en relation fra E_1 til E_2 ved

$$S \pm T = \{(x,y) \in E_1 \times E_2 \mid y \in Sx \pm Tx\} ,$$

altså ved

$$\forall x \in E_1 : (S \pm T)x = Sx \pm Tx .$$

Bevis følgende, idet $0:E_1 \to E_2$ er nuloperatoren, og - T betyder 0 - T:

a) $S \pm T$ er en lineær relation, og $D(S \pm T) = D(S) \cap D(T)$.

b) $(S \pm T)(M) \subseteq S(M) \pm T(M)$ for enhver delmængde $M \subseteq E_1$. Lighedstegnet indtræffer f.eks. hvis M indeholder højst ét element .

c) $S + T = T + S$.

d) $S + (T + U) = (S + T) + U$.

e) $0 + T = T + 0 = T$.

f) $S + (-T) = S - T$.

g) $T + (-T) = T - T \supseteq 0|D(T)$ med lighedstegn hvis og kun hvis T er en operator.

h) Hvis S og T er operatorer, stemmer den her givne definition af $S \pm T$ overens med den sædvanlige.

5. (De distributive love for lineære relationer.) Lad S,T være lineære relationer fra E_1 til E_2, og U,V fra E_2 til E_3, idet E_1, E_2, E_3 er vektorrum. Bevis følgende, hvori 0_{ij} står for nulopera'oren $0:E_i \to E_j$:

a) $(U + V)S \subseteq US + VS$, med lighedtegn f.eks. hvis S er en operator.

b) $U(S + T) \supseteq US + UT$, med lighedstegn f.eks. hvis U er en overalt defineret operator.

c) $U0_{12} \supseteq 0_{13}$, med lighedstegn hvis og kun hvis U er en operator.

d) $0_{23}T = 0_{13} \mid D(T) \subseteq 0_{13}$.

6. Lad $T : E \to E$ være en lineær afbildning af et vektorrum E i sig selv. Lad E_1 og E_2 være underrum af E med direkte sum E. Gør rede for, at T på naturlig måde kan fremstilles som en art blokmatrix

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} ,$$

hvor $T_{ij}: E_j \to E_i$ er lineær. Hvad er betingelsen for, at E_1, resp. E_2, er stabilt over for T? Generaliser til en spaltning af E som direkte sum af flere end 2 underrum E_j.

7. Lad T være en operator på et vektorrum E, og lad $P : E \to E$ være idempotent ($P^2 = P$) og lineær. Vis, at P kommuterer med T (altså $PT \subseteq TP$) hvis og kun hvis T afbilder $P(E) \cap D(T)$ ind i $P(E)$ og $P^{-1}(\underline{0}) \cap D(T)$ ind i $P^{-1}(\underline{0})$, og desuden $D(T)$ er stabilt overfor P. Vis også, at den sidste betingelse, altså $P(D(T)) \subseteq D(T)$, er ensbetydende med, at $D(T)$ er (direkte) sum af sine projektioner på $P(E)$ og $P^{-1}(\underline{0})$, altså

$$D(T) = P(D(T)) + (I - P)(D(T)) ,$$

og ligeledes er ensbetydende med, at

$$P(D(T)) = P(E) \cap D(T) .$$

8. (Udvidelse ved linearitet.) Lad E_1 og E_2 være vektorrum, og lad f være en afbildning fra E_1 til E_2. Vis, at f kan udvides til en operator fra E_1 til E_2, hvis og kun hvis det for enhver endelig familie $(x_j)_{j \in J}$ på $D(f)$ og tilhørende skalarer $\lambda_j \in K$ gælder, at

$$\sum_{j\in J} \lambda_j x_j = \underline{0} \Rightarrow \sum_{j\in J} \lambda_j f(x_j) = \underline{0} .$$

Vis, at i givet fald kan f kun på én måde udvides til en lineær afbildning af det af $D(f)$ udspændte underrum af E_1 ind i E_2. Vi siger, at denne lineære afbildning er fremkommet ved udvidelse af f ved linearitet. Vis endelig, at hvis M betegner en lineært uafhængig delmængde af E_1, kan enhver afbildning $f : M \to E_2$ udvides til en lineær afbildning af det af M udspændte underrum af E_1 ind i E_2.

9. Lad E_1 og E_2 være normerede rum over K (=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$), og lad $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, resp. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, betegne en følge af vektorer i E_1, resp. E_2. Vis, at der eksisterer en kontinuert lineær afbildning T af det af $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ udspændte afsluttede underrum af E_1 ind i E_2 således at

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad Tu_n = v_n,$$

hvis og kun hvis der eksisterer en konstant $c > 0$ således at der for ethvert $m \in \mathbb{N}$ og for vilkårlige $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in K$ gælder

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n v_n \right\| \leq c \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n u_n \right\| .$$

(Betragt eventuelt først tilfældet $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lineært uafhængig.) Vis også, at i givet fald er T entydigt bestemt. Vis endelig, at i givet fald kan T udvides til en operator $S \in L(E_1, E_2)$ i hvert af følgende to tilfælde: 1) E_2 er 1-dimensionalt (altså gerne $E_2 = K$), 2) Ethvert afsluttet underrum af E_1 har et topologisk komplement (f.eks. E_1 = et Hilbertrum). - Det tilføjes, at alt det anførte også gælder for vilkårlige familier $(u_j)_{j\in J}$ og $(v_j)_{j\in J}$ i stedet for følger.

10. Lad T være en operator fra et normeret rum E_1 til et normeret rum E_2 med $D(T) \neq \{\underline{0}\}$.

Vi sætter

$$C(T) = \sup\{\|Tx\| \mid x \in D(T) \wedge \|x\| = 1\}$$
$$c(T) = \inf\{\|Tx\| \mid x \in D(T) \wedge \|x\| = 1\} .$$

Som bekendt gælder, at $C(T) < \infty$ er ensbetydende med, at T er kontinuert; og i givet fald er $C(T) = \|T|D(T)\|$. Bevis, at $c(T) > 0$ er ensbetydende med, at T^{-1} eksisterer og er kontinuert; og at der i givet fald gælder

$$c(T) = \|T^{-1} \mid D(T^{-1})\|^{-1} .$$

Bevis på grundlag heraf, at for en bijektiv operator $T \in L(E_1,E_2)$ med $T^{-1} \in L(E_2,E_1)$ gælder

$$\|T^{-1}\| = \|T\|^{-1} ,$$

hvis og kun hvis T har formen $T = \lambda V$, hvor $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ og hvor V er en (isometrisk) isomorfi af E_1 på E_2.

11. Lad T være en operator fra E_1 til E_2, hvor disse rum er t.v.r.. Vis, at T er <u>afsluttet</u> hvis og kun hvis det for ethvert $(x,y) \in E_1 \times E_2$ og ethvert filter Φ på $D(T)$ gælder, at

$$\Phi \to x(\text{i } E_1) \wedge T(\Phi) \to y(\text{i } E_2) \Rightarrow x \in D(T) \wedge Tx = y .$$

Vis også, at T <u>kan afsluttes</u> hvis og kun hvis det for ethvert $y \in E_2$ og ethvert filter Φ på $D(T)$ gælder, at

$$\Phi \to \underline{0} \wedge T(\Phi) \to y \Rightarrow y = \underline{0} .$$

Vis endelig, at hvis E_2 ikke er Hausdorff, eksisterer der

ingen afsluttet operator fra E_1 til E_2.

12. Benyt de i den foregående opgave fundne betingelser for, at en operator T er afsluttet, eller kan afsluttes, til at give nye beviser for lemmaerne 10.4 og 11 samt det første udsagn i sætn. 11.

13. Lad T være en kontinuert operator fra et t.v.r. E_1 til et Hausdorff t.v.r. E_2. Vis, at afslutningen $\overline{T}$ er kontinuert. (Vejledning: Til given symmetrisk omegn V og $\underline{0}$ i E_2 findes en åben omegn U af $\underline{0}$ i E_1 med $T(U \cap D(T)) \subseteq V$ og derfor $\overline{T}(U \cap D(\overline{T})) \subseteq V + V$.)

14. (Operator, som ikke kan afsluttes.) Lad $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis for et separabelt Hilbertrum E, og lad T betegne udvidelsen ved linearitet (opg. 8) af den konstante afbildning af $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ på e_1. Vis, at operatoren T på E ikke kan afsluttes. (Betragt følgen af vektorer $x_n = n^{-1}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)$.)

15. Lad E være et t.v.r., og lad $P \in L(E,E)$ være idempotent ($P^2 = P$). Vis, at

$$\sigma(P) = \sigma_p(P) \subseteq \{0,1\} .$$

16. Lad T være en injektiv operator på et vektorrum E over K, og lad $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Vis, at

$$(T^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1}(\underline{0}) = (T - \lambda I)^{-1}(\underline{0}) ,$$

og slut heraf, at λ er egenværdi for T hvis og kun hvis

λ^{-1} er egenværdi for T^{-1}, og at egenrummene i givet fald er de samme i de to tilfælde. Idet det dernæst antages, at λ ikke er egenværdi for T, skal man etablere følgende forbindelse mellem resolventerne for T^{-1} og T:

$$(T^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1} = -\lambda^2(T - \lambda I)^{-1} - \lambda I ,$$

idet man gør rede for lovligheden af nedenstående regninger:

$$\begin{aligned} T^{-1} - \lambda^{-1}I &= -\lambda^{-1}(T - \lambda I)T^{-1} , \\ (T^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1} &= -\lambda T(T - \lambda I)^{-1} \\ &= -\lambda(\lambda I + (T - \lambda I))(T - \lambda I)^{-1} \\ &= -\lambda^2(T - \lambda I)^{-1} - \lambda I . \end{aligned}$$

17. (Det udvidede spektrum.) For $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ sættes henholdsvis $K_\infty = \mathbb{R}_\infty$ eller $\mathbb{C}_\infty$ (étpunktskompaktificeringen af det lokalkompakte rum K). Vi har altså

$$K_\infty = K \cup \{\infty\}, \quad 0^{-1} = \infty, \ \infty^{-1} = 0 .$$

Lad T være en operator på et fuldstændigt Hausdorff t.v.r. over K. Vi udvider definitionen af spektrum m.v., idet vi henregner ∞ til den (det) udvidede

a) regularitetsområde $\rho'_\infty(T)$, hvis T er kontinuert,
b) resolventmængde $\rho_\infty(T)$, hvis T er kontinuert og tæt defineret (og dermed $T \in L(E,E)$ ifald T tillige forudsættes afsluttet),
c) kontinuerte spektrum $\sigma_{c,\infty}(T)$, hvis T er tæt defineret, men ikke kontinuert,
d) Residualspektrum $\sigma_{r,\infty}(T)$, vis T ikke er tæt defineret.

Derimod medregnes ∞ aldrig til det udvidede punktspektrum,

og vi sætter altså $\sigma_{p,\infty}(T) = \sigma_p(T)$. For det således udvidede spektrum $\sigma_\infty(T) = K_\infty \setminus \rho_\infty(T)$ gælder åbenbart (i lighed med det "endelige" spektrum)

$$\sigma_\infty(T) = \sigma_{p,\infty}(T) \cup \sigma_{c,\infty}(T) \cup \sigma_{r,\infty}(T) \ .$$

Vis, at der for enhver injektiv operator T på E gælder

$$\sigma_\infty(T^{-1}) = [\sigma_\infty(T)]^{-1} \ ,$$

og analogt for $\rho'_\infty, \rho_\infty, \sigma_{c,\infty}, \sigma_{r,\infty}$ og $\sigma_{p,\infty}$.

18. Lad $a,b,c,d \in K$ (=$\hat{\mathbb{R}}$ eller $\hat{\mathbb{C}}$), og lad $ad-bc = k \neq 0$. Med konventionerne

$$\lambda + \infty = \infty + \lambda \quad \text{for} \quad \lambda \neq \infty \ ,$$
$$\lambda \cdot \infty = \infty \cdot \lambda = \lambda/0 = \infty \ \text{for} \ \lambda \neq 0$$
$$\lambda/\infty = 0 \quad \text{for} \quad \lambda \neq \infty \ ,$$

hvor $\lambda \in K_\infty$, definerer den brudne lineære substitution

$$f(\lambda) = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \quad (\forall \lambda \in K) \ , \quad f(\infty) = \frac{a}{c} \ ,$$

en afbildning $f : K_\infty \to K_\infty$. Gør rede for, at denne afbildning f er bijektiv, og at

$$f^{-1}(\lambda) = \frac{-d\lambda + b}{c\lambda - a} \quad (\forall \lambda \in K), \quad f^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} \ .$$

Vis endvidere, at der (hvis $c \neq 0$) gælder $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, hvor

$$f_1(\lambda) = c\lambda + d, \quad f_2(\lambda) = 1/\lambda, \quad f_3(\lambda) = -\frac{k}{c}\lambda + \frac{a}{c}$$

for $\lambda \in K_\infty$. Lad nu T være en vilkårlig lineær relation på et vektorrum E over K. Vi definerer

$$f(T) = (aT + bI)(cT + dI)^{-1} ,$$

$$f_1(T) = cT + dI , \quad f_2(T) = T^{-1} , \quad f_3(T) = -\frac{k}{c}T + \frac{a}{c}I ,$$

sidstnævnte ifald $c \neq 0$. Da er $f(T), f_1(T), f_2(T), f_3(T)$ lineære relationer på E.

a) Vis, at hvis $c \neq 0$ gælder $f(T) = f_3(f_2(f_1(T)))$.

b) Vis, at der ved $T \to f(T)$ defineres en bijektiv og inklusionsbevarende afbildning af mængden af alle lineære relationer (på E) på sig selv, og at den omvendte afbildning er givet ved $T \to f^{-1}(T)$. (Betragt evt. først specialtilfældene $f(\lambda) = 1/\lambda$ og $f(\lambda) = a\lambda + b$, $a \neq 0$.)

c) Vis, at restriktionen af den i b) nævnte afbildning til mængden af alle de operatorer T på E, for hvilke $cT + dI$ er injektiv, afbilder denne mængde på mængden af alle operatorer T (på E), for hvilke $cT - aI$ er injektiv.

d) Idet det forudsættes, at E er et fuldstændigt Hausdorff t.v.r., skal det vises, at for enhver operator T på E med $cT + dI$ injektiv gælder

$$\sigma_\infty(f(T)) = f(\sigma_\infty(T)) ,$$

og tilsvarende for $\rho'_\infty, \rho_\infty, \sigma_{c,\infty}, \sigma_{r,\infty}$ og $\sigma_{p,\infty}$.

19. Med betegnelserne fra opg. 17 skal det vises, at hvis T kan afsluttes, gælder

$$\sigma_\infty(\overline{T}) = \sigma_\infty(T), \quad \rho_\infty(\overline{T}) = \rho_\infty(T), \quad \rho'_\infty(\overline{T}) = \rho'_\infty(T),$$
$$\sigma_{p,\infty}(\overline{T}) \supseteq \sigma_{p,\infty}(T), \quad \sigma_{c,\infty}(\overline{T}) \subseteq \sigma_{c,\infty}(T), \quad \sigma_{r,\infty}(\overline{T}) \subseteq \sigma_{r,\infty}(T).$$

(Tilsvarende relationer for $\sigma, \rho, \rho', \sigma_p, \sigma_c, \sigma_r$ er åbenbart konsekvenser heraf.)

20. Lad T være en operator på et Banachrum E over K.

a) Vis, at $\sigma(T)$ er afsluttet i K. (Benyt opgave 16 til at vise, at $0 \in \rho(T)$ medfører at 0 er indre punkt af $\rho(T)$.)

b) Vis, at $\sigma_\infty(T)$ er afsluttet (og dermed kompakt) i det kompakte topologiske rum K_∞ (étpunktskompaktificeringen af K).

c) Lad $K = \mathbb{C}$. Vis, at $\sigma_\infty(T) \neq \emptyset$. Vis endelig, at $\sigma(T) = \emptyset$ er ensbetydende med, at $\overline{T^{-1}}$ eksisterer, tilhører $L(E,E)$ og er generaliseret nilpotent i Banach-algebraen $L(E,E)$ over $\mathbb{C}$.

21. Lad $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis for et separabelt Hilbertrum E, og lad

$$v = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-1} e_n .$$

Med F betegnes det af $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ udspændte underrum af E (i algebraisk betydning), og med T den operator på E, for hvilken $D(T) = F$ og

$$Te_1 = v , \quad Te_n = e_{n-1} \quad \text{for} \quad n \geq 2 .$$

Gør rede for, at der eksisterer netop én sådan operator T. Vis, at T er injektiv, tæt defineret og kontinuert, at $\overline{T}$ ikke er injektiv, at T^{-1} ikke kan afsluttes, at $0 \in \sigma_c(T)$, og at $0 \in \sigma_p(\overline{T})$. (Vejledning: Betragt vektoren $x = e_1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-1} e_{n+1}$, og vis at $\overline{T}x = \underline{0}$.

22. På Banachrummet $E = C([0,1]; \mathbb{C})$ defineres en afbildning A med $D(A) = E$ ved

$$(Af)(s) = \int_0^s f(t)dt$$

for $f \in E$, $s \in [0,1]$. Vis, at $A \in L(E,E)$, at den for $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$(A^n f)(s) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^s (s - t)^{n-1} f(t)dt ,$$

samt at A er injektiv og generaliseret nilpotent. Find derpå $D(A^{-1})$, og bestem $A^{-1}g$ for $g \in D(A^{-1})$. Vis, at $\sigma(A^{-1}) = \emptyset$, hvorimod $\sigma_\infty(A^{-1}) = \sigma_{c,\infty}(A^{-1}) = \{\infty\}$.

Operatorer på Hilbertrum

Indholdsoversigt:

		side
1.	Begrænsede sesquilineære former.	1
2.	Adjungering af begrænset operator.	3
3.	Adjungering af tæt defineret operator.	5
4.	Adjungering af lineær relation.	10
5.	Isometriske og unitære operatorer.	16
6.	Symmetriske og selvadjungerede operatorer.	20
7.	Cayleytransformationen.	24
8.	Normal operator.	32
9.	Om spektret for operatorer på Hilbertrum.	34
10.	Normal operator med rent punktspektrum.	39
11.	Kontinuert funktion af selvadjungeret operator.	43
12.	Ordning af begrænsede selvadjungerede operatorer.	54

Operatorer på Hilbertrum.

1. Begrænsede sesquilineære former. Lad E_1 og E_2 være normerede vektorrum over $K(=\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C})$, og lad $B_1 = \{x \in E_1 \mid \|x\| \leq 1\}$ og analogt B_2 betegne enhedskuglen i E_1, henholdsvis E_2. Vi betragter en sesquilineær form (H.R., §2) $f : E_1 \times E_2 \to K$ og definerer

$$\|f\| = \sup\{|f(x,y)| \mid (x,y) \in B_1 \times B_2\},$$

hvorved $\|f\| \in [0,+\infty]$. Vi kalder den sesquilineære form f begrænset dersom $\|f\|<+\infty$. Af homogenitetsgrunde gælder åbenbart, at f er begrænset hvis og kun hvis der eksisterer en konstant $c \in \mathbb{R}$ således at

$$\forall(x,y) \in E_1 \times E_2: \quad |f(x,y)| \leq c\,\|x\|\,\|y\|.$$

Og i givet fald er $\|f\|$ den mindste sådanne konstant c. Hvis $E_1, E_2 \neq \{0\}$, gælder endvidere for enhver sesquilineær form f, at

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x,y)|}{\|x\|\,\|y\|} \mid x \in E_1 \setminus \{0\},\ y \in E_2 \setminus \{0\}\right\}.$$

Læseren opfordres til at overveje disse forhold.

Lad nu E_2 være et præhilbertrum. Til enhver lineær afbildning $T : E_1 \to E_2$ knytter vi en funktion $f : E_1 \times E_2 \to K$ ved følgende definition:

(1) $$\forall(x,y) \in E_1 \times E_2: \quad f(x,y) := (Tx|y)$$

(med skalarprodukt i E_2). Det eftervises umiddelbart, at f er en sesquilineær form på $E_1 \times E_2$. Endvidere er operatoren T entydigt bestemt ved den tilhørende form f, altså afbildningen $T \to f$ injektiv. Thi af $(Tx|y) = (T_1x|y)$ for alle $(x,y) \in E_1 \times E_2$ følger, at

for ethvert $x \in E_1$ er $Tx - T_1x \perp E_2$, altså $Tx = T_1x$, og dette viser at $T = T_1$.

Sætning. Lad $T : E_1 \to E_2$ være en lineær afbildning af et normeret rum E_1 ind i et præhilbertrum E_2, og lad f betegne den tilhørende sesquilineære form givet ved (1). Da er f begrænset hvis og kun hvis T er begrænset (altså $T \in L(E_1, E_2)$). I givet fald gælder $\|f\| = \|T\|$. Hvis E_2 er et Hilbertrum, findes der til enhver begrænset sesquilineær form f én (og kun én) operator $T \in L(E_1, E_2)$ således at (1) gælder.

Bevis. Det vises let ud fra Cauchy - Schwarz' ulighed, at for enhver vektor x i et præhilbertrum med enhedskugle B er

$$\|x\| = \max_{y \in B} |(x|y)| ,$$

idet $\|x\| = |(x|y)|$ eksempelvis gælder for $y = \|x\|^{-1}x$ (hvis $x \neq 0$). Ved anvendelse heraf fås med betegnelserne fra (1)

$$\sup_{x \in B_1} \|Tx\| = \sup_{x \in B_1} \sup_{y \in B_2} |(Tx|y)| ,$$

hvoraf første del af sætningen aflæses. Lad dernæst E_2 være et Hilbertrum og lad f betegne en begrænset sesquilineær form på $E_1 \times E_2$. For fastholdt $x \in E_1$ er den ved $y \to \overline{f(x,y)}$ bestemte afbildning $\overline{f(x,\cdot)}$ af E_2 ind i K en linearform på E_2, og denne linearform er kontinuert fordi der for alle $y \in E_2$ gælder

$$|f(x,y)| \leq \|f\| \, \|x\| \, \|y\| .$$

Ifølge Fréchet-Riesz' sætning (H.R., sætn. 10) eksisterer der derfor netop én vektor $z \in E_2$ således at

$$\forall y \in E_2 : \quad \overline{f(x,y)} = (y|z) .$$

Den ved $Tx = z$ definerede afbildning $T : E_1 \to E_2$ er altså karakteriseret ved, at

$$\forall x \in E_1 \quad \forall y \in E_2: \quad \overline{f(x,y)} = (y|Tx) ,$$

og heraf fremgår (1) ved konjugering. Endvidere er T lineær, fordi den ved $x \to (Tx|y) = f(x,y)$ bestemte afbildning $f(\cdot,y)$ af E_1 ind i K er lineær for ethvert $y \in E_2$, og dermed

$$\begin{aligned}(T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)|y) &= \lambda_1(Tx_1|y) + \lambda_2(Tx_2|y) \\ &= (\lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2|y)\end{aligned}$$

for alle $x_1, x_2 \in E_1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Da $y \in E_2$ var vilkårlig, sluttes heraf som sædvanligt, at $T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2$. Endelig følger det af det allerede beviste, at T er begrænset (altså $T \in L(E_1,E_2)$) med $\|T\| = \|f\|$. |

2. Adjungering af begrænset operator.

Sætning. Lad E_1 og E_2 være Hilbertrum. For enhver operator $T \in L(E_1,E_2)$ eksisterer der netop én operator $T^* \in L(E_2,E_1)$ således at

$$(2) \qquad \forall x \in E_1 \quad \forall y \in E_2: \quad (Tx|y) = (x|T^*y) .$$

Endvidere gælder $T^{**} = T$ samt

$$\|T^*\| = \|T\| , \qquad \|T^*T\| = \|T\|^2 .$$

Bevis. Ved

$$f(y,x) = (y|Tx) , \quad (y,x) \in E_2 \times E_1 ,$$

defineres der en sesquilinearform på $E_2 \times E_1$. Den er begrænset,

fordi T er forudsat begrænset:

$$|f(y,x)| = |(y|Tx)| \leqq \|y\| \, \|Tx\| \leqq \|T\| \, \|y\| \, \|x\| \, .$$

Det ses at $\|f\| \leqq \|T\|$. Ifølge sætning 1 eksisterer der derfor netop én operator $T^* \in L(E_2,E_1)$ for hvilken der for alle $y \in E_2$, $x \in E_1$ gælder $f(y,x) = (T^*y|x)$, altså

$$(y|Tx) = (T^*y|x) \, ,$$

hvilket ved konjugering ses at være ensbetydende med (2). Desuden er

$$\|T^*\| = \|f\| \leqq \|T\| .$$

Vi anvender nu det vi ste på $T^* \in L(E_2,E_1)$ i stedet for $T \in L(E_1,E_2)$ og kommer derved til en operator $(T^*)^* \in L(E_1,E_2)$ karakteriseret ved, at der for alle $x \in E_1$, $y \in E_2$ gælder

$$(x|T^*y) = (T^{**}x|y) \, ,$$

eller ifølge (2) $(Tx|y) = (T^{**}x|y)$. Da T og T^{**} således bestemmer samme sesquilinearform på $E_1 \times E_2$, er de identiske: $T = T^{**}$. Videre fås

$$\|T\| = \|T^{**}\| \leqq \|T^*\| \leqq \|T\| \, ,$$

altså $\|T^{**}\| = \|T\|$. Endelig bliver $\|T^*T\| = \|T\|^2$; thi på den ene side er

$$\|T^*T\| \leqq \|T^*\| \, \|T\| = \|T\|^2 \, ,$$

og på den anden side gælder for alle $x \in B_1$ (enhedskuglen i E_1):

$$\|Tx\|^2 = (Tx|Tx) = (T^*Tx|x) \leqq \|T^*T\| \, ,$$

hvoraf $\|T\|^2 \leqq \|T^*T\|$. |

Den således definerede operator $T^* \in L(E_2,E_1)$ kaldes den adjungerede til operatoren $T \in L(E_1,E_2)$. I den følgende paragraf udvider vi *-operationen (adjungering) fra de begrænsede, overalt definerede operatorer til vilkårlige, tæt definerede operatorer.

3. Adjungering af tæt defineret operator. Vi betragter en operator T fra Hilbertrummet E_1 til Hilbertrummet E_2 og antager, at T er tæt defineret, d.v.s. at $\overline{D(T)} = E_1$. Vi ønsker da til T at knytte en operator T^* fra E_2 til E_1 således:

En vektor $v \in E_2$ siges at tilhøre $D(T^*)$, dersom der eksisterer en vektor $u \in E_1$, således at

$$(3) \qquad \forall x \in D(T) : \quad (Tx|v) = (x|u) .$$

I givet fald defineres billedet af v ved T^* som

$$T^*v = u .$$

Denne definition af T^*v har mening, fordi u er entydigt bestemt ud fra v netop som følge af kravet om, at D(T) skal være tæt i E_1. Thi hvis u_1 og u_2 betegner to vektorer i E_1, som indsat i stedet for u i (3) tilfredsstiller denne relation, fås ved subtraktion

$$0 = (x|u_1) - (x|u_2) = (x|u_1 - u_2)$$

for alle $x \in D(T)$, og dette medfører jo $u_1 - u_2 = \underline{0}$ netop når D(T) er tæt i E_1 (H.R., §9).

Vi rekapitulerer ovenstående definition af afbildningen T^* fra E_2 til E_1 ud fra en forelagt tæt defineret operator T fra E_1 til E_2:

$$D(T^*) = \{v \in E_2 \mid \exists u \in E_1 \ \forall x \in D(T) : (Tx \mid v) = (x \mid u)\} ,$$

$$\forall x \in D(T) \ \forall v \in D(T^*) : (Tx \mid v) = (x \mid T^*v) .$$

Vi viser derpå, at afbildningen T^* er en operator fra E_2 til E_1, altså at $D(T^*)$ er et underrum af E_2, og afbildningen $T^*:D(T^*) \to E_1$ er lineær. Lad $v_1, v_2 \in D(T^*)$ og $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. For alle $x \in D(T)$ gælder da

$$(Tx \mid \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \bar{\lambda}_1(Tx \mid v_1) + \bar{\lambda}_2(Tx \mid v_2)$$
$$= \bar{\lambda}_1(x \mid T^* v_1) + \bar{\lambda}_2(x \mid T^* v_2) = (x \mid \lambda_1 T^* v_1 + \lambda_2 T^* v_2) ,$$

hvilket netop betyder, at $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in D(T^*)$ og at $T^*(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T^* v_1 + \lambda_2 T^* v_2$.

Den således definerede operator T^* fra E_2 til E_1 kaldes den adjungerede operator til den givne, tæt definerede operator T fra E_1 til E_2. Der er åbenbart tale om en udvidelse af *-operationen således som denne blev defineret i §2, hvor T skulle være begrænset og overalt defineret, nemlig $T \in L(E_1, E_2)$, og hvor T^* så også blev begrænset og overalt defineret (i E_2).

Grafen for den adjungerede operator T^* til en tæt defineret operator T fra E_1 til E_2 er åbenbart

$$G(T^*) = \{(v,u) \in E_2 \times E_1 \mid \forall x \in D(T) : (Tx \mid v) = (x \mid u)\}$$
$$= \{(v,u) \in E_2 \times E_1 \mid \forall (x,y) \in G(T) : (y \mid v) = (x \mid u)\}$$

Det eftervises let på grundlag heraf, at T^* er en afsluttet operator fra E_2 til E_1 (se §4). Hvis $E_1 = E_2$ og $T^* = T$, kaldes T selvadjungeret.

For to operatorer S og T fra E_1 til E_2 af hvilke S er tæt defineret, gælder åbenbart, at

$$(4) \qquad S \subseteq T \Rightarrow S^* \supseteq T^* .$$

Vi går dernæst over til at udlede forskellige regneregler for *-operationen i samspil med de operationer med operatorer,

vi har mødt i det foregående kapitel.

3.1. Sætning. Lad S og T være operatorer fra E_1 til E_2, og antag at $D(S) \cap D(T)$ er overalt tæt i E_1. Da er

$$(S \pm T)^* \supseteq S^* \pm T^* .$$

Lighedstegnet indtræffer bl.a. hvis S eller T tilhører $L(E_1,E_2)$.

Bevis. Af $D(S) \cap D(T)$ tæt følger $D(S)$ tæt og $D(T)$ tæt. Lad $y \in D(S^* + T^*) = D(S^*) \cap D(T^*)$. For ethvert $x \in D(S + T) = D(S) \cap D(T)$ gælder da

$$\begin{aligned} ((S + T)x \mid y) &= (Sx \mid y) + (Tx \mid y) \\ &= (x \mid S^*y) + (x \mid T^*y) = (x \mid (S^* + T^*)y) , \end{aligned}$$

hvilket viser, at $y \in D((S + T)^*)$ og at $(S + T)^*y = S^*y + T^*y$. Hermed er vist, at $(S + T)^* \supseteq S^* + T^*$. Antag nu, at $S \in L(E_1,E_2)$ og dermed $S^* \in L(E_2,E_1)$, og lad $y \in D((S + T)^*)$. For ethvert $x \in D(T) = D(S + T)$ gælder da

$$\begin{aligned} (Tx \mid y) &= ((S + T)x \mid y) - (Sx \mid y) \\ &= (x \mid (S + T)^*y) - (x \mid S^*y) = (x \mid (S + T)^*y - S^*y) , \end{aligned}$$

hvilket viser, at $y \in D(T^*)$. Hermed er vist, at $D((S + T)^*) \subseteq D(T^*) = D(S^* + T^*)$, når $S \in L(E_1,E_2)$ og T er tæt defineret. Tilfældet S - T behandles analogt. |

3.2. Sætning. Lad T være en tæt defineret operator fra E_1 til E_2. For ethvert $\lambda \in K$ gælder

$$(\lambda T)^* \supseteq \bar{\lambda} T^* .$$

Lighedstegnet indtræffer hvis $\lambda \neq 0$ eller hvis $T \in L(E_1,E_2)$.

Bevis. Lad $y \in D(\bar{\lambda}T^*) = D(T^*)$. For ethvert $x \in D(\lambda T) = D(T)$ gælder da

$$((\lambda T)x|y) = \lambda(Tx|y) = \lambda(x|T^*y) = (x|(\bar{\lambda}T^*)y) ,$$

hvilket viser, at $y \in D((\lambda T)^*)$ og at $(\lambda T)^*y = \bar{\lambda}T^*y$. Hermed er vist, at $(\lambda T)^* \supseteq \bar{\lambda}T^*$. Hvis $\lambda \neq 0$, fås heraf ved anvendelse på λ^{-1} og λT i stedet for λ og T:

$$\bar{\lambda}^{-1}(\lambda T)^* \subseteq (\lambda^{-1}\lambda T)^* = T^* ,$$

hvoraf vi ved multiplikation med $\bar{\lambda}$ får $(\lambda T)^* \subseteq \bar{\lambda}T^*$. Hvis $T \in L(E_1, E_2)$, gælder det samme om λT, hvorfor $\bar{\lambda}T^*$ og $(\lambda T)^*$ begge tilhører $L(E_2, E_1)$ og der må derfor gælde lighedstegn også i dette tilfælde.

3.3. Sætning. Lad S være en operator fra E_1 til E_2 og T en operator fra E_2 til et tredie Hilbertrum E_3, og antag at T og TS (og derfor S) er tæt definerede i henholdsvis E_2 og E_1. Da gælder

$$(TS)^* \supseteq S^*T^* .$$

Lighedstegnet indtræffer bl.a. hvis $T \in L(E_2, E_3)$.

Bevis. Lad $y \in D(S^*T^*)$, altså $y \in D(T^*) \wedge T^*y \in D(S^*)$. For ethvert $x \in D(TS)$, altså $x \in D(S) \wedge Sx \in D(T)$, gælder da

$$(TSx|y) = (Sx|T^*y) = (x|S^*T^*y) ,$$

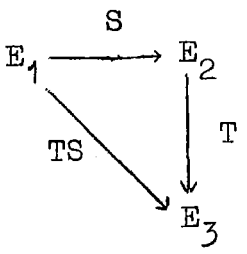
hvilket viser, at $y \in D((TS)^*)$ og at $(TS)^*y = S^*T^*y$. Hermed er vist, at $(TS)^* \supseteq S^*T^*$. Antag nu, at $T \in L(E_2, E_3)$ og dermed

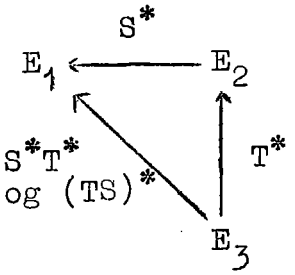
$T^* \in L(E_3,E_2)$. (I dette tilfælde behøver vi om S kun at forudsætte, at D(S) er tæt i E_1, thi $D(T) = E_2$ giver $D(TS) = D(S)$.) Lad $y \in D((TS)^*)$. For ethvert $x \in D(S) = D(TS)$ gælder da

$$(Sx|T^*y) = (TSx|y) = (x|(TS)^*y) ,$$

hvilket viser, at $T^*y \in D(S^*)$ og dermed at $y \in D(S^*T^*)$. Altså er $D((TS)^*) \subseteq D(S^*T^*)$. |

Følgende diagram illustrerer sætningen:





Korollar. Hvis en operator $S \in L(E,E)$ kommuterer med en tæt defineret operator T på Hilbertrummet E, så kommuterer S^* med T^*.

Bevis. Af det givne: $ST \subseteq TS$ (se Oper., §6) følger ved to anvendelser af ovenstående sætning i forbindelse med (4)

$$S^*T^* \subseteq (TS)^* \subseteq (ST)^* = T^*S^* ,$$

hvor lighedstegnet til slut gælder fordi $S \in L(E,E)$. |

3.4. Sætning. Lad T være en tæt defineret operator fra E_1 til E_2. Nulrummet for T^* er det ortogonale komplement (inden for E_2) til afslutningen af billedrummet for T:

$$N(T^*) = R(T)^{\perp} = \overline{R(T)}^{\perp} ,$$
$$\overline{R(T)} = [N(T^*)]^{\perp} .$$

Bevis. Første del følger af biimplikationerne

$$y \in N(T^*) \iff y \in D(T^*)_* \wedge T^*y = \underline{0}$$
$$\iff \forall x \in D(T): (Tx|y) = (x|\underline{0}) = 0$$
$$\iff y \in R(T)^\perp .$$

Derefter fås $\overline{R(T)} = [R(T)]^{\perp\perp} = [N(T^*)]^\perp$. |

Korollar. T^* er injektiv, hvis og kun hvis billedrummet $R(T)$ er tæt (i E_2).

4. Adjungering af lineær relation. Nærmest som et hjælpemiddel vil vi nu yderligere udvide *-operationen fra at være defineret for tæt definerede operatorer til at være defineret for vilkårlige relationer fra Hilbertrummet E_1 til Hilbertrummet E_2. Idet vi karakteriserer en sådan relation ved sin graf G, som er en (vilkårlig) delmængde af $E_1 \times E_2$, kalder vi relationen lineær, dersom dens graf er et underrum af $E_1 \times E_2$. I det følgende identificerer vi ligefrem enhver relation med sin graf.

Definition. For en vilkårlig delmængde (relation) $G \subseteq E_1 \times E_2$ defineres

$$G^* = \{(v,u) \in E_2 \times E_1 \mid \forall (x,y) \in G: (x|u) = (y|v)\} .$$

Det eftervises let, at G^* er et afsluttet underrum af $E_2 \times E_1$, nemlig fællesmængden for nulrummene for de kontinuerte linearformer

$$(v,u) \to (x|u) - (y|v)$$

på $E_2 \times E_1$, som fremkommer, når (x,y) gennemløber G. Således er G^* (grafen for) en lineær relation fra E_2 til E_1. Vi kalder G^*

for den adjungerede relation til G. At denne definition af *-operationen for relationer er en udvidelse af den i §3 indførte *-operation for tæt definerede operatorer fremgår af følgende lemma.

4.1. Lemma. En operator T fra E_1 til E_2 er tæt defineret, hvis og kun hvis underrummet $G(T)^*$ er graf for en operator fra E_2 til E_1. I givet fald gælder

$$G(T^*) = G(T)^* .$$

Bevis. Ifølge Oper., lemma 3.2, er underrummet $G(T)^*$ (grafen for) en operator fra E_2 til E_1, hvis og kun hvis $(\underline{0},u) \in G(T)^*$ medfører $u = \underline{0}$. Nu gælder ifølge definitionen af $G(T)^*$:

$$\begin{aligned}(\underline{0},u) \in G(T)^* &\iff \forall (x,y) \in G(T): (x,u) = (y,\underline{0}) \\ &\iff \forall x \in D(T): (x,u) = 0 \\ &\iff u \perp D(T) .\end{aligned}$$

Heraf følger første del af lemmaet under henvisning til H.R.,§9. Anden del fremgår derefter umiddelbart ved sammenligning med udtrykket for $G(T^*)$ i §3. |

Idet vi nu vender tilbage til *-operationen $G \to G^*$ for vilkårlige delmængder $G \subseteq E_1 \times E_2$, ser vi en tydelig lighed med operationen $M \to M^\perp$ for vilkårlige delmængder M af et Hilbertrum. Der er endda ikke blot tale om en analogi, men om en direkte forbindelse, som vi nu skal se, idet vi dog for bekvemmeligheds skyld begrænser os til tilfældet $E_1 = E_2$. Vi ser altså på delmængden af produktrummet $E \times E$, hvor E er et Hilbertrum. Som bekendt (F.3) bliver $E \times E$ ligeledes et Hilbertrum, nemlig Hilbertsummen $E \oplus E$, ved følgende difinition af skalarproduktet af

to elementer (x,y) og (u,v) af $E \times E$:

$$((x,y) \mid (u,v)) = (x,u) + (y,v) .$$

Vi betragter nu følgende to afbildninger U og V af $E \oplus E$ på sig selv:

$$U(x,y) = (y,x) , \quad V(x,y) = (-y,x) .$$

Det eftervises umiddelbart, at U og V er lineære, bijektive og bevarer sklarproduktet på $E \oplus E$:

$$((\pm y,x)|(\pm v,u)) = (y|v) + (x|u) = ((x,y)|(u,v)) .$$

Således er U og V isometriske isomorfier af Hilbertrummet $E \oplus E$ på sig selv. Endvidere verificeres det let, at

$$U^2 = I, \quad V^2 = -I , \quad UV = -VU ,$$

hvor I betegner enhedsoperatoren på $E \oplus E$.

Operatoren U har vi mødt tidligere (Oper.,§2). Den afbilder en delmængde $G \subseteq E \times E$ (altså en relation G på E) på delmængden (den inverse relation)

$$U(G) = G^{-1} .$$

Ved hjælp af operatoren V kan vi nu etablere følgende forbindelse mellem operationerne * og $^{\perp}$:

$$(5) \qquad \forall G \subseteq E \times E : \quad G^* = V(G^{\perp}) = [V(G)]^{\perp} .$$

Det sidste lighedstegn følger af, at den isometriske isomorfi V bevarer skalarproduktet og dermed specielt ortogonalitet i $E \oplus E$. Beviset forløber derefter således:

$$(v,u) \in G^* \iff \forall (x,y) \in G\colon (-y|v) + (x|u) = 0$$
$$\iff \forall (x,y) \in G\colon (-y,x) \perp\!\!\!\perp (v,u)$$
$$\iff (v,u) \perp V(G) \ .$$

4.2. Lemma. For ethvert underrum $G \subseteq E \times E$ gælder

a) $\overline{G}^* = G^*$, b) $G^{**} = \overline{G}$, c) $(G^{-1})^* = (G^*)^{-1}$.

Bevis. Under benyttelse af tilsvarende resultater for operationen $\perp\!\!\!\perp$ (H.R., lemma 7 og sætn. 9) fås:

$$(\overline{G})^* = V(\overline{G}^{\perp}) = V(G^{\perp}) = G^* \ ,$$
$$(G^*)^* = [V(G^*)]^{\perp} = [V^2(G^{\perp})]^{\perp} = (G^{\perp})^{\perp} \ ,$$

idet $V^2 = -I$. Da $VU = -UV$, og da også U er isometrisk og derfor bevarer ortogonalitet, fås endelig

$$(G^{-1})^* = [V(G^{-1})]^{\perp} = [VU(G)]^{\perp} = [UV(G)]^{\perp}$$
$$= U[V(G)]^{\perp} = U(G^*) = (G^*)^{-1} . \ |$$

På samme måde som identiteten $\overline{G^{-1}} = \overline{G}^{-1}$ for lineære relationer (nemlig for underrum af produktrummet) ved specialisering til (grafer for) Operatorer førte til sætningen om, at $\overline{T^{-1}} = \overline{T}^{-1}$ (Oper., sætn. 10.3), kan vi specialisere ovenstående lemma til operatorer under benyttelse af lemma 4.1, og vi kommer derved til følgende tre sætninger.

4.3. Sætning. Lad T være en operator, som kan afsluttes. Da er T tæt defineret hvis (og kun hvis) $\overline{T}$ er tæt defineret. I givet fald gælder

$$\overline{T}^* = T^* \ (= \overline{T^*}) \ .$$

Bevis. Ifølge lemma 4.2, a) i forbindelse med Oper. (14), §10, er

$$G(\overline{T})^* = \overline{G(T)}^* = G(T)^* ,$$

og resultatet fremgår derfor af lemma 4.1. |

4.4. Sætning. Lad T være en tæt defineret operator. Da kan T afsluttes hvis og kun hvis T^* er tæt defineret. I givet fald gælder

$$T^{**} = \overline{T} , \quad T^{***} = T^* .$$

Bevis. Ifølge Oper., lemma 10.1, kan T afsluttes hvis og kun hvis G(T) er grafen for en operator. Ifølge lemma 4.2, b) er $\overline{G(T)} = G(T)^{**}$. Ifølge lemma 4.1 er $G(T)^* = G(T^*)$; og videre er $G(T)^{**} = G(T^*)^*$ grafen for en operator hvis og kun hvis T^* er tæt defineret. I givet fald er $(G(T^*)^* = G(T^{**})$, og vi slutter ialt at

$$G(\overline{T}) = \overline{G(T)} = G(T)^{**} = G(T^*)^* = G(T^{**}) ,$$

altså at $\overline{T} = T^{**}$. Heraf sluttes endelig ud fra sætn. 4.3, at $T^{***} = (T^{**})^* = \overline{T}^* = T^*$. |

Korollar. Ved *-operationen bestemmes en involutorisk og derfor bijektiv afbildning af mængden af alle tæt definerede, afsluttede operatorer på sig selv:

T tæt defineret og afsluttet $\Rightarrow$

T^* tæt defineret og afsluttet $\wedge$ $T^{**} = T$.

Dette resultat er analogt med det tidligere (sætn. 2) fundne for den mindre klasse L(E,E) af alle overalt definerede kontinuerte

operatorer.

4.5. Sætning. Lad T være en injektiv, tæt defineret operator. Da er T^{-1} tæt defineret hvis og kun hvis T^* er injektiv. I givet fald gælder

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} .$$

Bevis. Forudsætningerne om T betyder netop, at T^{-1} og T^* eksisterer. Ifølge lemma 4.1 er T^{-1} tæt defineret hvis og kun hvis underrummet

$$[G(T^{-1})]^* = [G(T)^{-1}]^* = [G(T)^*]^{-1} = [G(T^*)]^{-1}$$

er grafen for en operator; og dette indtræffer netop hvis T^* er injektiv. (Vi har herved benyttet Oper., lemma 2, samt lemma 4.2, c) ovenfor.) I givet fald fås videre af det ovenstående

$$G((T^{-1})^*) = [G(T^{-1})]^* = [G(T^*)]^{-1} = G((T^*)^{-1}) . \quad |$$

Korollar. Den inverse operator til en injektiv selvadjungeret operator er selvadjungeret.

Sætningerne 4.3 og 4.5 er analoge med Oper., sætn. 10.3. Når også denne anvendes på et Hilbertrum E, kan de tre sætninger under ét formuleres således:

Scholium: De tre afbildninger på mængden af alle operatorer på E:

1) inversion: $T \to T^{-1}$ (defineret når T er injektiv) ,

2) afslutning: $T \to \overline{T}$ (defineret når T kan afsluttes) ,

3) adjungering: $T \to T^*$ (defineret når $\overline{D(T)} = E$)

er parvis ombyttelige i den forstand, at hvis $T \to T^\alpha$ og $T \to T^\beta$

refererer til to forskellige af de tre afbildninger, så gælder

$$(T^{\alpha})^{\beta} = (T^{\beta})^{\alpha}$$

forstået således, at hvis T^{α} og T^{β} eksisterer (som operatorer) for en given operator T, så eksisterer $(T^{\alpha})^{\beta}$ hvis og kun hvis $(T^{\beta})^{\alpha}$ eksisterer; og i givet fald gælder den anførte ligning.

Det bemærkes, at når sætn. 4.3 kunne formuleres med (tilsyneladende) færre forudsætninger, skyldes dette blot, at T^* altid er afsluttet, når den eksisterer, altså $\overline{T^*} = T^*$.

5. Isometriske og unitære operatorer. En operator V fra et normeret rum E_1 til et normeret rum E_2 kaldes isometrisk, dersom den lineære afbildning $V : D(V) \to E_2$ er isometrisk (=afstandsbevarende), hvilket på grund af lineariteten er det samme som normbevarende:

$$\|Vx\| = \|x\| \quad \text{for alle } x \in D(V) .$$

Følgelig gælder $|\lambda| = 1$ for enhver egenværdi for V.
En isometrisk operator V er specielt kontinuert og injektiv, og den inverse operator V^{-1} fra E_2 til E_1 er åbenbart ligeledes isometrisk. En isometrisk operator V er således det samme som en isometrisk isomorfi af D(V) på $R(V) = D(V^{-1})$.

Ifølge Oper., sætn. 11 kan enhver isometrisk operator V afsluttes. Afslutningen $\overline{V}$ er ligeledes isometrisk. Thi for $(x,y) \in G(\overline{V})$ findes en følge af par $(x_n,y_n) \in G(V)$ med $x_n \to x$ i E_1 og $y_n = Vx_n \to y = \overline{V}x$ i E_2 for $n \to \infty$, hvorfor

$$\|\overline{V}x\| = \lim_n \|Vx_n\| = \lim_n \|x_n\| = \|x\| .$$

Ifølge Oper., sætning 10.3, haves

(6) $$\overline{V}^{-1} = \overline{V^{-1}} ,$$

og specielt, gælder: V afsluttet $\iff$ V^{-1} afsluttet.

Hvis E_1 og E_2 er præhilbertrum, viser man let, at en isometrisk operator V fra E_1 til E_2 også bevarer skalarproduktet:

(7) $$(Vx|Vy) = (x|y) \quad \text{for alle } x,y \in D(V) ,$$

idet man anvender polariseringsidentiteten på begge sider af (7).

I det følgende vil vi forudsætte, at E_1 og E_2 er Hilbertrum. En isometrisk operator fra E_1 til E_2 med $D(V) = E_1$ tilhører åbenbart $L(E_1,E_2)$. Dersom tillige $R(V) = E_2$, kaldes V en unitær operator; det er det samme som en isometrisk isomorfi af hele E_1 på hele E_2.

Idet vi med I_1 og I_2 betegner enhedsoperatoren på E_1, henholdsvis E_2, haves følgende sætning.

5.1. Sætning. En operator $V \in L(E_1,E_2)$ er isometrisk, hvis og kun hvis $V^*V = I_1$. En operator $U \in L(E_1,E_2)$ er unitær, hvis og kun hvis

$$U^*U = I_1 \quad \wedge \quad UU^* = I_2 .$$

Bevis. Betingelsen (7) for isometri kan, når $D(V) = E_1$, omskrives til

$$(V^*Vx|y) = (x|y) \quad \text{for alle } x,y \in E_1 .$$

Dette er åbenbart (§1) ensbetydende med, at $V^*Vx = x$ for alle $x \in E_1$, altså at $V^*V = I_1$.

Hvis $U^*U = I_1$, er U altså isometrisk med $D(U) = E_1$. Hvis desuden $UU^* = I_2$, er $R(U) = E_2$, og dermed er U ialt unitær. Bemærk tillige, at så bliver

$$U^{-1} = U^* .$$

Hvis omvendt U er unitær, specielt isometrisk, så har vi set at $U^*U = I_1$. Da U afbilder E_1 bijektivt på E_2, eksisterer U^{-1} og afbilder E_2 på E_1, hvorfor $UU^{-1} = I_2$ og

$$UU^* = (UU^*)(UU^{-1}) = U(U^*U)U^{-1} = UI_1U^{-1} = I_1 . \quad |$$

Vi betragter nu atter en vilkårlig isometrisk operator V fra Hilbertrummet E_1 til Hilbertrummet E_2. Da E_2 er fuldstændigt og V er kontinuert, gælder ifølge Oper., sætning 11 at

(8) $$D(\overline{V}) = \overline{D(V)} , \quad R(\overline{V}) = \overline{R(V)} ,$$

idet den sidste relation fås af den første ved overgang til den isometriske operator V^{-1} og benyttelse af (6):

$$R(\overline{V}) = D(\overline{V}^{-1}) = D(\overline{V^{-1}}) = \overline{D(V^{-1})} = \overline{R(V)} .$$

Det fremgår specielt af (8) og (6), at

$$D(V) \text{ afsluttet} \iff V \text{ afsluttet} \iff R(V) \text{ afsluttet} .$$

Definition. Ved defektrummene Δ^+ og Δ^- for en isometrisk operator V fra E_1 til E_2 forstås det ortogonale komplement for $\overline{D(V)}$ i E_1, henholdsvis for $\overline{R(V)}$ i E_2:

$$\Delta^+ = \Delta^+(V) = [D(V)]^{\perp} = \overline{D(V)}^{\perp} ,$$
$$\Delta^- = \Delta^-(V) = [R(V)]^{\perp} = \overline{R(V)}^{\perp} .$$

Ved defekttallene for V forstås Hilbertdimensionerne af de afsluttede underrum Δ^+ og Δ^-:

$$\delta^+ = \delta^+(V) = \dim(\Delta^+), \quad \delta^- = \delta^-(V) = \dim(\Delta^-) .$$

Parret (δ^+,δ^-) af disse to kardinaltal kaldes defektindex for V.

Det fremgår af (8), at defektrum og defektindex er de samme for $\overline{V}$ som for V:

$$\Delta^{\pm}(\overline{V}) = \Delta^{\pm}(V) \ , \quad \delta^{\pm}(\overline{V}) = \delta^{\pm}(V) \ .$$

For en afsluttet isometrisk operator V gælder åbenbart

(9) $$D(V) = (\Delta^{+})^{\perp} \ , \quad R(V) = (\Delta^{-})^{\perp} \ .$$

5.2. Lemma. En isometrisk operator er unitær, hvis og kun hvis den er afsluttet og har defektindex (0,0).

Bevis. Da en unitær operator specielt er isometrisk, følger dette lemma straks af (9), som viser, at

$$D(V) = E_1 \iff \Delta^{+} = \{0\} \ , \quad R(V) = E_2 \iff \Delta^{-} = \{0\} \ .$$

5.3. Sætning. En isometrisk operator V fra E_1 til E_2 kan udvides til en unitær operator fra E_1 til E_2, hvis og kun hvis $\delta^{+}(V) = \delta^{-}(V)$.

Bevis. Antag først, at U er en unitær udvidelse af V. Da U ligesom V afbilder D(V) på R(V), må U (i sin egenskab af en skalarproduktbevarende isomorfi af E_1 på E_2) afbilde $[D(V)]^{\perp} = \Delta^{+}(V)$ på $[R(V)]^{\perp} = \Delta^{-}(V)$. Restriktionen W af U til $\Delta^{+}(V)$ er således en isometrisk isomorfi af dette Hilbertrum på Hilbertrummet $\Delta^{-}(V)$, og disse to Hilbertrum må derfor have samme Hilbertdimension, altså $\delta^{+}(V) = \delta^{-}(V)$.

Antag dernæst omvendt, at $\delta^{+}(V) = \delta^{-}(V)$. Da Hilbertrummene $\Delta^{+}(V)$ og $\Delta^{-}(V)$ således har samme Hilbertdimension, er de isometrisk isomorfe. Lad $W: \Delta^{+}(V) \to \Delta^{-}(V)$ være en isometrisk isomorfi af $\Delta^{+}(V)$ på $\Delta^{-}(V)$. For vilkårligt $x \in E_1$ indføres projektionerne

y og z af x på de indbyrdes vinkelrette afsluttede underrum $D(\bar{V})$ og $\Delta^+(V)$ med summen E_1. Vi definerer Ux ved

$$Ux = \bar{V}y + Wz .$$

Åbenbart er U herved fastlagt som en lineær afbildning af $D(\bar{V}) \oplus \Delta^+(V) = E_1$ på $R(\bar{V}) \oplus \Delta^-(V) = E_2$. Det er klart, at $U \supseteq V$. Endelig bliver U isometrisk og dermed unitær, idet med ovenstående betegnelser

$$\|Ux\|^2 = \|\bar{V}y\|^2 + \|Wz\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2 . \quad |$$

Bemærkning. Hvis $\delta^+(V) = \delta^-(V) > 0$, kan udvidelsen af V til en unitær operator U ske på flere måder, idet W kan vælges på flere måder.

Ved samme metode som ovenfor vises det let, at en isometrisk operator V med f.eks.

$$\delta^+(V) > \delta^-(V)$$

kan udvides (på flere måder) til en afsluttet isometrisk operator med defektindex af formen $(\gamma,0)$, idet γ blot skal opfylde kravet $\gamma + \delta^-(V) = \delta^+(V)$. Analogt hvis $\delta^+(V) < \delta^-(V)$. En sådan afsluttet isometrisk operator med defektindex af formen $(0,\gamma)$ eller $(\gamma,0)$ kaldes maksimal, fordi den ikke besidder nogen isometrisk ægte udvidelse. Der er jo netop tale om de isometriske operatorer V for hvilke $D(V) = E_1$, henholdsvis $R(V) = E_2$.

6. Symmetriske og selvadjungerede operatorer. En operator S på et præhilbertrum kaldes symmetrisk (eller hermitesk), hvis den tilsvarende sesquilineære form på $D(S) \times D(S)$ er hermitesk, altså hvis

$$\forall x,y \in D(S): \quad (Sx|y) = (x|Sy) .$$

I givet fald kaldes S positiv, hvis den omtalte hermiteske form er positiv, altså hvis $(Sx|x) \geq 0$ for alle $x \in D(S)$.

6.1. Lemma. En operator S på et komplekst præhilbertrum er symmetrisk hvis og kun hvis $(Sx|x)$ er reelt for alle $x \in D(S)$.

Bevis. Følger straks af H.R., lemma 2, anvendt på den til S hørende sesquilineære form $(x,y) \to (Sx|y)$. |

Følgende regneregler for symmetriske operatorer på et præhilbertrum E verificeres uden vanskelighed:

(10) S,T symm. $\Rightarrow$ S $\pm$ T symm.

(11) S symm. $\wedge$ $\lambda \in \dot{R} \Rightarrow \lambda S$ symm.

(12) S symm. og injektiv $\Rightarrow S^{-1}$ symm.

Det er klart, at enhedsoperatoren I på E er symmetrisk, og det følger derefter af (10) og (11), at med S er også $S - \lambda I$ og, når den eksistrer, resolventen $(S - \lambda I)^{-1}$ symmetrisk for ethvert $\lambda \in \dot{R}$.

Følgende identitet, som spiller en rolle længere fremme, gælder for en symmetrisk operator S på et komplekst præhilbertrum:

$$(13) \qquad \|Sx - \lambda x\|^2 = \|Sx - \alpha x\|^2 + \beta^2\|x\|^2$$

for $x \in D(S)$ og $\lambda = \alpha + i\beta \in \dot{C}$. Thi ved udregning af venstre side skrevet som $\|(Sx - \alpha x) - i\beta x\|^2$ forsvinder ifølge ovenstående lemma leddet

$$2\,\mathrm{Re}(Sx - \alpha x|i\beta x) = 2\beta\,\mathrm{Im}[(Sx|x) - \alpha\|x\|^2] .$$

6.2. Sætning. Enhver egenværdi for en symmetrisk operator S er reel. Egenrummene hørende til to forskellige egenværdier er indbyrdes ortogonale.

Bevis. At enhver egenværdi λ for S er reel, er jo definitionsmæssigt klart i tilfældet $K = \mathbb{R}$. I tilfældet $K = \mathbb{C}$ følger det af lemma 6.1 anvendt på en egenvektor x til λ, at

$$(Sx|x) = (\lambda x|x) = \lambda\|x\|^2$$

er reelt, og dermed at λ er reel. Lad dernæst λ og μ være to forskellige egenværdier for S, og lad $Sx = \lambda x$, $Sy = \mu y$. Da fås

$$\lambda\cdot(x|y) = (\lambda x|y) = (Sx|y) = (x|Sy) = (x|\mu y) = \overline{\mu}(x|y) .$$

Da $\overline{\mu} = \mu \neq \lambda$, sluttes at $(x|y) = 0$. |

I det følgende forudsættes det, at E er et Hilbertrum. Vi skal navnlig beskæftige os med tæt definerede symmetriske operatorer.

6.3. Lemma. En tæt defineret operator S på et Hilbertrum E er symmetrisk, hvis og kun hvis $S \subseteq S^*$. I givet fald eksisterer afslutningen $\overline{S} = S^{**}$ og er ligeledes symmetrisk.

Bevis. Det første udsagn følger umiddelbart af definitionen på S^* og af definitionen på symmetrisk operator. For enhver tæt defineret, symmetrisk operator S er S^* således en afsluttet udvidelse af S, hvorfor $\overline{S}$ eksisterer og $\overline{S} \subseteq S^* = \overline{S}^*$. Her har vi til slut benyttet sætning 4.3, og vi har således fundet at $\overline{S}$ er symmetrisk. Endelig er $\overline{S} = S^{**}$ ifølge sætning 4.4. |

Vi minder om, at man ved en selvadjungeret operator forstår en tæt defineret operator S på et Hilbertrum for hvilken

$S^* = S$.

6.4. Lemma. En tæt defineret operator S er selvadjungeret, hvis og kun hvis S er afsluttet og tillige S og S^* begge er symmetriske.

Bevis. $S = S^*$ medfører at S (og S^*) er symmetrisk (ifølge det foregående lemma) og at S bliver afsluttet. Den omvendte slutning sker således:

$$S^{**} = \overline{S} = S \subseteq S^* \subseteq S^{**} ,$$

hvoraf $S = S^*$. |

En symmetrisk operator S (på et Hilbertrum) kaldes maksimal, dersom den ikke besidder nogen ægte udvidelse til en symmetrisk operator. Ifølge lemma 6.3 må en tæt defineret, maksimal symmetrisk operator nødvendigvis være afsluttet.

6.5. Lemma. For enhver symmetrisk udvidelse T af en tæt defineret symmetrisk operator S gælder

$$S \subseteq T \subseteq T^* \subseteq S^* .$$

Bevis. Af $S \subseteq T$ følger jo at T er tæt defineret og at $T^* \subseteq S^*$. Da T er forudsat symmetrisk, bliver ifølge lemma 6.3 $T \subseteq T^*$. |

Korollar. En selvadjungeret operator er maksimal symmetrisk.

7. Cayleytransformationen. I teorien for funktioner af en kompleks variabel forstår man ved Cayleytransformationen den bijektive afbildning af den udvidede komplekse plan $\dot{\mathbb{C}}_\infty$ på sig selv, som er givet ved den første af nedenstående brudne lineære substitutioner

$$(14) \qquad v = \frac{s-i}{s+i}\,, \quad s = i\,\frac{1+v}{1-v} \qquad (s,v \in \dot{\mathbb{C}}_\infty)\,.$$

Den anden substitution er den inverse afbildning. Hvis man indskrænker sig til endelige værdier af de komplekse variable s,v, afbilder Cayleytransformationen $\dot{\mathbb{C}} \setminus \{-i\}$ bijektivt på $\dot{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$. En hovedegenskab ved Cayleytransformationen er, at den afbilder den reelle akse $\dot{\mathbb{R}}$ på enhedscirkelen fraregnet tallet 1.

Som et hjælpemiddel i teorien for symmetriske operatorer vil vi nu generalisere Cayleytransformationen fra at virke på komplekse tal til at virke på operatorer på et komplekst vektorrum.

Lad S være en operator på et vektorrum E over $\dot{\mathbb{C}}$, og antag at S + iI er injektiv, altså at -i ikke er egenværdi for S. Da er

$$(15) \qquad V = (S - iI)(S + iI)^{-1}$$

en veldefineret operator på E. Den kaldes for den Cayleytransformerede af operatoren S. Eftersom

$$R[(S + iI)^{-1}] = D(S + iI) = D(S) = D(S - iI)\,,$$

bliver

$$(16) \qquad D(V) = D[(S + iI)^{-1}] = R(S + iI)$$
$$= \{Su + iu \mid u \in D(S)\}\,,$$

og fremstillingen $x = Su + iu$ (med $u \in D(S)$) af en vilkårlig vektor $x \in D(V)$ er entydig. Billedet Vx bestemmes ved

$$Vx = (S - iI)(S + iI)^{-1}x = (S - iI)u \ .$$

Vi har derfor følgende bijektive parameterfremstilling af grafen for V (med parameteren $u \in D(S)$):

$$(17) \qquad G(V) = \{(Su + iu,\ Su - iu) \mid u \in D(S)\} \ .$$

Det aflæses heraf, at operatoren $I - V$ er injektiv, altså at 1 ikke er egenværdi for V. Thi af $Vx = x$ følger $Su + iu = Su - iu$ og dermed $u = \underline{0}$ og $x = Su + iu = \underline{0}$.

Under benyttelse af (15) og dens konsekvenser (16), (17) vil vi nu søge omvendt at udtrykke S ved V. Ifølge (17) er åbenbart

$$(18) \qquad D(V) = R(S + iI) \ , \quad R(V) = R(S - iI) \ .$$

Under benyttelse af regneregler for operatorer fås videre, idet vi skeler til (14),

$$\begin{aligned} I - V &= [I \mid D(V)] - V \\ &= (S + iI)(S + iI)^{-1} - (S - iI)(S + iI)^{-1} \\ &= [(S + iI) - (S - iI)](S + iI)^{-1} \\ &= [2iI \mid D(S)](S + iI)^{-1} = 2i(S + iI)^{-1} \ , \end{aligned}$$

og analogt

$$I + V = [(S + iI) + (S - iI)](S + iI)^{-1} = 2S(S + iI)^{-1} \ .$$

Heraf sluttes, at

$$\begin{aligned} &i(I + V)(I - V)^{-1} = 2iS(S + iI)^{-1}[(2i)^{-1}(S + iI)] \\ &= S(S + iI)^{-1}(S + iI) = S[I \mid D(S)] = S \ . \end{aligned}$$

7.1. Lemma. Ved Cayleytransformationen

$$V = (S - iI)(S + iI)^{-1} \tag{15}$$

defineres en ordensisomorfi (med hensyn til inklusion $\subsetneq$) af mængden af alle operatorer S for hvilke S + iI er injektiv på mængden af alle operatorer V for hvilke I - V er injektiv. Den inverse afbildning er givet ved

$$S = i(I + V)(I - V)^{-1} . \tag{19}$$

Bevis. Det er klart, at afbildningen (Cayleytransformationen) er voksende, altså at

$$S_1 \subsetneq S_2 \Rightarrow V_1 \subsetneq V_2 .$$

Den allerede foretagne analyse viste, at afbildningen er injektiv, og at den inverse Cayleytransformation er givet ved (19) og dermed ligeledes er voksende. Tilbage er blot at vise, at afbildningen er surjektiv, altså at enhver operator V med I - V injektiv er den Cayleytransformerede af en operator S med S + iI injektiv. Den ved (19) definerede operator S er åbenbart veldefineret, fordi I - V er injektiv. Vi skal vise, at S + iI er injektiv og at (15) er opfyldt. På samme måde som ovenfor fås af (19)

$$D(S) = R(I - V) , \tag{20}$$

$$S + iI = i[(I + V) + (I - V)](I - V)^{-1} = 2i(I - V)^{-1} , \tag{21}$$

$$S - iI = i[(I + V) - (I - V)](I - V)^{-1} = 2iV(I - V)^{-1} . \tag{22}$$

Af (22) fremgår, at $D(S) = D(S + iI) = R(I - V)$ og desuden at S + iI er injektiv, og vi slutter derefter, at

$$(S - iI)(S + iI)^{-1} = 2iV(I - V)^{-1}[(2i)^{-1}(I - V)] = V . \quad |$$

Lad os nu antage, at vektorrummet E er et præhilbertrum (over $\mathbb{C}$). Under benyttelse af parameterfremstillingen (17) for G(V) fås, idet $x = Su + iu$,

$$\|x\|^2 = \|Su + iu\|^2 = \|Su\|^2 + \|u\|^2 + 2\mathrm{Im}(Su|u) ,$$
$$\|Vx\|^2 = \|Su - iu\|^2 = \|Su\|^2 + \|u\|^2 - 2\mathrm{Im}(Su|u) .$$

Heraf følger, at V er isometrisk, hvis og kun hvis $(Su|u)$ er reel for alle $u \in D(S)$, altså ifølge lemma 6.1 hvis og kun hvis S er symmetrisk. I givet fald gælder (jvf. (13), §6)

$$\|Su \pm iu\|^2 = \|Su\|^2 + \|u\|^2 , \tag{23}$$

hvoraf $\|(S \pm iI)u\| \geq \|u\|$. Dette betyder, at $(S \pm iI)^{-1}$ er normformindskende og dermed kontinuert.

I det følgende forudsætter vi stedse, at E er et komplekst Hilbertrum.

7.2. Sætning. Ved Cayleytransformationen (15) defineres en ordensisomorfi (m.h.t. inklusion $\subseteq$) af mængden af alle tæt definerede, symmetriske operatorer S på mængden af alle isometriske operatorer V, for hvilke I - V har tæt billedrum. Endvidere gælder biimplikationerne

$$S \text{ afsluttet} \iff V \text{ afsluttet}$$
$$\iff R(S + iI) \text{ afsluttet} \iff R(S - iI) \text{ afsluttet.}$$

Bevis. For en symmetrisk operator S er +i og -i jo ikke egenværdier, hvorfor S - iI og S + iI er injektive. Specielt er den Cayleytransformerede V veldefineret og ifølge det foregående isometrisk. Hvis desuden S er tæt defineret, har ifølge (20) I - V tæt billedrum.

Lad nu omvendt V betegne en isometrisk operator, for hvilken R(I - V) er tæt. Da er I - V nødvendigvis injektiv, thi af x = Vx følger x = 0, idet vi viser, at x må være ortogonal på R(I - V). For enhver vektor y ∈ D(V) gælder nemlig, når Vx = x, at

$$(x|y - Vy) = (x|y) - (x|Vy) = (Vx|Vy) - (x|Vy) = 0 .$$

Idet I - V således er injektiv, er den isometriske operator V den Cayleytransformerede af en symmetrisk operator S, og ifølge (20) er denne tæt defineret i det foreliggende tilfælde.

Da E er fuldstændigt og Hausdorff, og da V og $(S + iI)^{-1}$ er kontinuerte og har samme definitionsrum, sluttes vi af Oper., sætn. 10.3 og sætn. 11, at hvis et af følgende fem objekter (operatorer eller underrum) er afsluttet, da er de det alle:

$$V, \quad D(V) = D[(S + iI)^{-1}] = R(S + iI) ,$$
$$(S + iI)^{-1} , \quad S + iI , \quad S .$$

På samme måde vises: R(S - iI) afsluttet ⟺ S afsluttet. |

Definition. Ved defektrummene Δ^+, Δ^- og defektindex (δ^+,δ^-) for en tæt defineret, symmetrisk operator S på et komplekst Hilbertrum E forstås de tilsvarende objekter for den isometriske Cayleytransformerede $V = (S - iI)(S + iI)^{-1}$, altså ifølge (15)

$$\Delta^+ = \Delta^+(S) = [D(V)]^\perp = [R(S + iI)]^\perp = N(S^* - iI) ,$$
$$\Delta^- = \Delta^-(S) = [R(V)]^\perp = [R(S - iI)]^\perp = N(S^* + iI) ,$$
$$\delta^+ = \dim(\Delta^+) , \quad \delta^- = \dim(\Delta^-) .$$

De sidst anførte udtryk for defektrummene, som fås ved anvendelse af sætning 3.4, viser at Δ^+ og Δ^- er egenrummene for S^* høren-

de til henholdsvis +i og -i. Da $(\overline{S})^* = S^*$ (lemma 6.3), har $\overline{S}$ samme defektrum og samme defektindeks som S. Heraf fås

$$(24) \qquad \overline{R(S \pm iI)} = (\Delta^{\pm})^{\perp} = R(\overline{S} \pm iI) ,$$

idet dette sidste underrum er afsluttet ifølge ovenstående sætning.

Det kan vises, at tallene $\pm i$ ikke indtager nogen særstilling, idet der for $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gælder

$$\dim N(S^* - \lambda I) = \begin{cases} \delta^+(S) & \text{for} \quad \operatorname{Im}\lambda > 0 , \\ \delta^-(S) & \text{for} \quad \operatorname{Im}\lambda < 0 . \end{cases}$$

7.3. Sætning. For en tæt defineret, symmetrisk operator S på et komplekst Hilbertrum E er følgende udsagn ensbetydende:

a) S er selvadjungeret .

b) S er afsluttet, og har defektindex (0,0) .

c) $S + iI$ og $S - iI$ er surjektive: $R(S \pm iI) = E$.

d) Den Cayleytransformerede $V = (S - iI)(S + iI)^{-1}$ er unitær .

Bevis. a) ⇒ b): Ifølge sætning 6,2 har S kun reelle egenværdier. Når $S^* = S$, er derfor $S^* \pm iI$ injektiv, hvorfor $\delta^- = \delta^+ = 0$; og desuden er $S = S^*$ jo afsluttet.

b) ⇒ c): Når $S = \overline{S}$ og $\Delta^+ = \Delta^- = \{0\}$, er ifølge (24) $R(S \pm iI) = \{0\}^{\perp} = E$.

c) ⇒ a): Lad $x \in D(S^*)$, og sæt $(S^* + iI)x = y$. Af c) følger eksistensen af $u \in D(S)$ med $(S + iI)u = y$.

Da $S \subseteq S^*$, gælder således

$$(S^* + iI)u = y = (S^* + iI)x .$$

Heraf følger $x = u$ og dermed $x \in D(S)$, fordi $S^* + iI$ er injektiv i konsekvens af, at $\delta^- = 0$ ifølge c); og vi har hermed vist, at $D(S^*) = D(S)$, altså $S^* = S$.

Efter således at have bevist, at a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a), afslutter vi beviset med at bemærke, at der gælder c) $\Longleftrightarrow$ d) ifølge (18) i forbindelse med definitionen af en unitær operator som en isometrisk operator, der afbilder hele E på hele E. |

Korollar. En tæt defineret, symmetrisk operator S har selvadjungeret afslutning $\bar{S}$, hvis og kun hvis $(\delta^+(S),\delta^-(S)) = (0,0)$.

Bevis. Følger af sætningen, da $\delta^{\pm}(S) = \delta^{\pm}(\bar{S})$. |

7.4. Sætning. En tæt defineret, symmetrisk operator S på et komplekst Hilbertrum E kan udvides til en selvadjungeret operator på E, hvis og kun hvis $\delta^+(S) = \delta^-(S)$.

Bevis. Lad V være den Cayleytransformerede af S. Ifølge sætning 5.3 kan V udvides til en unitær operator U på E hvis og kun hvis $\delta^+(V) = \delta^-(V)$, d.v.s. $\delta^+(S) = \delta^-(S)$. I givet fald gælder $R(I - U) \supseteq R(I - V)$, og da $R(I - V)$ er overalt tæt i E, må det samme derfor gælde om $R(I - U)$. Altså er også U den Cayleytransformerede af en symmetrisk operator T, som må være selvadjungeret ifølge den foregående sætning. Da Cayleytransformationen er en ordensisomorfi, gælder $T \supseteq S$, fordi $U \supseteq V$.

Omvendt er det klart, at enhver selvadjungeret udvidelse af S ved hjælp af den inverse Cayleytransformation bestemmer en unitær udvidelse af V, hvorfor der ifølge sætning 5.3 må gælde $\delta^+ = \delta^-$. !

Bemærkningerne i slutningen af § 5.3. giver åbenbart anledning til tilsvarende bemærkninger vedrørende symmetriske udvidel-

ser af en symmetrisk operator. Således gælder:

7.5. Sætning. En tæt defineret, symmetrisk operator S på et komplekst Hilbertrum er maksimal, hvis og kun hvis den er afsluttet og mindst ét af defekttallene er 0.

Til slut anføres en sætning, der eksplcit udtrukker definitionsrummet for den adjungerede til en symmetrisk operator ved hjælp af defektrummene.

7.6. Sætning. For en tæt defineret, afsluttet symmetrisk operator S på et komplekst Hilbertrum E haves den algebraisk direkte sum

$$D(S^*) = D(S) + \Delta^+(S) + \Delta^-(S).$$

Bevis. De tre underrum på højre side er jo delmængder af $D(S^*)$, idet $S \subsetneq S^*$ og $\Delta^{\pm} = N(S^* \mp iI)$. Opgaven er da at vise, at der for givet $x \in D(S^*)$ eksisterer netop én fremstilling $x = u + v + w$ med $u \in D(S)$, $v \in \Delta^+$, $w \in \Delta^-$. Dette kan også udtrykkes ved at sige, at der eksisterer netop ét par $(u,v) \in D(S) \times \Delta^+$ for hvilket $x - u - v \in \Delta^-$ (thi da bliver w jo entydigt bestemt ved $w = x - u - v$). Kravet $x - u - v \in \Delta^-$ er ensbetydende med

$$(S^* + iI)(x - u - v) = 0 .$$

For $u \in D(S)$ er $(S^* + iI)u = (S + iI)u$. For $v \in \Delta^+$ er $S^*v = iv$ og derfor $(S^* + iI)v = 2iv$. Kravet til $u \in D(S)$ og $v \in \Delta^+$ lyder da

$$(S^* + iI)x = (S + iI)u + 2iv . \tag{25}$$

Da S er forudsat afsluttet, er $R(S + iI) = (\Delta^+)^{\perp}$ ifølge (24). Lad y og z betegne projektionerne af $(S^* + iI)x$ på henholdsvis $(\Delta^+)^{\perp}$ og Δ^+. Da er (25) ensbetydende med

$$(S + iI)u = y \quad \wedge \quad 2iv = z \ ,$$

og disse ligninger har netop én løsning $(u,v) \in D(S) \times \Delta^+$ for givet $y \in (\Delta^+)^\perp$, $z \in \Delta^+$, fordi $S + iI$ afbilder $D(S)$ bijektivt på $R(S + iI) = (\Delta^+)^\perp$. |

Korollar. For en tæt defineret, afsluttet symmetrisk operator S med endelige defekttal δ^+, δ^- er

$$\dim [D(S^*) / D(S)] = \delta^+ + \delta^- \ .$$

8. Normal operator. En operator T på et Hilbertrum E kaldes normal, dersom følgende tre betingelser er opfyldt:

a) T er tæt defineret og afsluttet .

b) $D(T^*) = D(T)$.

c) $\|T^*x\| = \|Tx\|$ for alle $x \in D(T)$.

Vedrørende betingelsen c) bemærkes, at den ved polarisering på sædvanlig måde fører til

$$(T^*x|T^*y) = (Tx|Ty) \quad \text{for alle} \quad x,y \in D(T) \ .$$

Det er klart, at med T er også T^* normal. Enhver selvadjungeret operator er normal, og ligeledes enhver unitær operator. (En symmetrisk operator er kun normal, hvis den er selvadjungeret, og en isometrisk operator er kun normal, hvis den er unitær. Overvej dette!)

Sætning. En operator $T \in L(E,E)$ er normal, hvis og kun hvis den kommuterer med sin adjungerede: $T^*T = TT^*$.

Bevis. For alle $x,y \in E$ gælder, når $T \in L(E,E)$:

$$(T^*Tx|y) = (Tx|Ty) \ , \quad (TT^*x|y) = (T^*x|T^*y) \ ,$$

og heraf fremgår lemmaet, fordi en operator $S \in L(E,E)$ ifølge §1 er entydigt bestemt ved den tilhørende sesquilineære form $(x,y) \to (Sx|y)$ på E. |

Det kan mere almindeligt vises, at en tæt defineret, afsluttet operator T er normal, hvis og kun hvis der gælder $T^*T = TT^*$.

Lemma. Lad S og T være normale operatorer. Hvis $S \in L(E,E)$, og hvis S^* kommuterer med T, så er $S + T$ normal, og $(S + T)^* = S^* + T^*$.

Bevis. Ifølge korollaret til sætn. 3.3 kommuterer S^* med T (altså $S^*T \subseteq TS^*$), hvis og kun hvis $S^{**} = S$ kommuterer med T^*. Det kan for øvrigt vises (men ikke elementært), at dette videre er ensbetydende med at S kommuterer med T, når som her T er normal og $S \in L(E,E)$.

Det er klart, at $D(S + T) = D(T)$. Ifølge sætning 3.4 er $(S + T)^* = S^* + T^*$, hvorfor

$$D((S + T)^*) = D(S^* + T^*) = D(T^*) = D(T) = D(S + T) .$$

Endvidere er $S + T$ afsluttet ifølge Oper., lemma 11 (eller fordi $S + T = S^{**} + T^{**} = (S^* + T^*)^*$) . Tilbage står at verificere c). Lad da $x \in D(S + T) = D(T)$. Da $\|S^*x\| = \|Sx\|$ og $\|T^*x\| = \|Tx\|$, bliver

$$\begin{aligned} &\|(S^* + T^*)x\|^2 - \|(S + T)x\|^2 \\ &= (S^*x|T^*x) + (T^*x|S^*x) - (Sx|Tx) - (Tx|Sx) . \end{aligned}$$

Da nu $S^*T \subseteq TS^*$ og $ST^* \subseteq S^*T$, gælder $S^*x \in D(T)$ og $Sx \in D(T^*) = D(T)$, og vi finder

$$(S^*x|T^*x) = (x|ST^*x) = (x|T^*Sx) = (Tx|Sx)$$

og analogt (eller ved konjugering) $(T^*x|S^*x) = (Sx|Tx)$. |

Korollar. For enhver normal operator T er $T - \lambda I$ normal for ethvert $\lambda \in K$.

9. Om spektret for operatorer på Hilbertrum.

9.1. Sætning. Dersom λ er egenværdi for en normal operator T, er $\bar{\lambda}$ egenværdi for T^*, og egenrummet er det samme i begge tilfælde:

$$N(T - \lambda I) = N(T^* - \bar{\lambda} I) .$$

Egenrummene hørende til to forskellige egenværdier for T er indbyrdes ortogonale.

Bevis. Da $T - \lambda I$ er normal og har den adjungerede $T^* - \bar{\lambda} I$, gælder for ethvert $x \in D(T)$:

$$\|(T - \lambda I)x\| = \|(T^* - \bar{\lambda} I)x\| ,$$

hvoraf første del af sætningen følger. Af $Tx = \lambda x$ og $Ty = \mu y$ følger, da $T^*y = \bar{\mu} y$ som netop vist, at

$$\lambda(x|y) = (Tx|y) = (x|T^*y) = (x|\bar{\mu}y) = \mu(x|y) ,$$

hvoraf $(x|y) = 0$ såfremt $\lambda \neq \mu$.

9.2. Sætning. Residualspektret for en normal operator T er tomt: $\sigma_r(T) = \emptyset$, og derfor gælder $\rho'(T) = \rho(T)$.

Bevis. For enhver tæt defineret operator T viser formelen $(T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I$ i forbindelse med korollaret til sætn. 3.4,

at $T - \lambda I$ har tæt billedrum, hvis og kun hvis $\bar{\lambda}$ ikke er egenværdi for T^*. Ifølge sin definition (Oper., §12) består residualspektret for en tæt defineret operator T derfor af alle $\lambda \in K$, som ikke er egenværdi for T, men for hvilke $\bar{\lambda}$ er egenværdi for T^*. Anvendt på en normal operator giver dette $\sigma_r(T) = \emptyset$ i henhold til den foregående sætning. Som omtalt i Oper., §12, gælder for enhver operator T, at

$$\rho(T) \subseteq \rho'(T) \subseteq \rho(T) \cup \sigma_r(T) .$$

For en normal operator T fås derfor $\rho'(T) = \rho(T)$. |

9.3. Lemma. Regularitetsområdet $\rho'(T)$ for en vilkårlig operator T på et normeret rum består af alle tal $\lambda \in K$ for hvilke der eksisterer en konstant $c > 0$ således at

$$\|Tx - \lambda x\| \geq c\|x\| \quad \text{for alle } x \in D(T) . \tag{26}$$

Bevis. Den anførte betingelse viser umiddelbart, at $T - \lambda I$ er injektiv. Sættes $Tx - \lambda x = y$, altså $x = (T - \lambda I)^{-1}y$, fås endvidere af (26)

$$\|(T - \lambda I)^{-1}y\| \leq c^{-1}\|y\| \quad \text{for alle } y \in R(T - \lambda I) ,$$

hvilket viser, at $(T - \lambda I)^{-1}$ er begrænset, altså kontinuert, og dermed at $\lambda \in \rho'(T)$. Da man åbenbart også kan slutte tilbage, er lemmaet hermed bevist. |

I det følgende udnytter vi flere gange, at for en normal operator T på et Hilbertrum karakteriseres resolventmængden $\rho(T)$ ved gyldigheden af en ulighed af formen (26), fordi $\rho(T) = \rho'(T)$ ifølge sætning 9.2.

9.5. Lemma. For enhver positiv symmetrisk operator S på et præhilbertrum omfatter regularitetsområdet $\rho'(S)$ alle negative reelle tal.

Bevis. For ethvert $\lambda < 0$ gælder for alle $x \in D(S)$

$$\|Sx - \lambda x\|^2 = \|Sx\|^2 - 2\lambda(Sx|x) + \lambda^2\|x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2$$

fordi $(Sx|x)$ er reel og ≥ 0. |

9.6. Lemma. Lad S og T være normale operatorer tilhørende $L(E,E)$. Hvis S^* kommuterer med T, er ST og TS normale.

Bevis.

$$(ST)^*(ST) = T^*S^*ST = T^*SS^*T$$
$$= ST^*\,TS^* = STT^*S^* = (ST)(ST)^* .$$

Korollar. Enhver potens af en normal operator $T \in L(E,E)$ er normal.

9.7. Sætning. I tilfælde af et komplekst Hilbertrum $E \neq \{0\}$ er spektralradien for en normal operator $T \in L(E,E)$ lig med operatornormen:

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \|T\| .$$

Bevis. For alle $x \in E$ er $\|T^2x\| = \|T(Tx)\| = \|T^*Tx\|$, hvorfor $\|T^2\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$ ifølge sætning 2. Ved gentagen anvendelse heraf fås

$$\|T^n\| = \|T\|^n$$

for enhver potens $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ (gælder faktisk for alle $n \in \mathbb{N}$). Heraf fremgår resultatet umiddelbart. |

9.4. Lemma. For enhver symmetrisk operator S på et præhilbertrum E omfatter regularitetsområdet $\rho'(S)$ alle ikke-reelle tal $\lambda \in K$. For enhver isometrisk operator V på et præhilbertrum E omfatter $\rho'(V)$ alle tal $\lambda \in K$ med $|\lambda| \neq 1$.

Bevis. Den første påstand har kun indhold hvis $K = \hat{C}$. Den følger da af nedenstående ulighed, som fremgår af (13), §6:

$$(27) \qquad \|Sx - \lambda x\| \geq |\mathrm{Im}\lambda| \, \|x\| \quad \text{for alle } x \in D(S) .$$

For en isometrisk operator V benyttes nedenstående ulighed

$$\|Vx - \lambda x\| \geq (1-|\lambda|)\|x\| \quad \text{for alle } x \in D(V) ,$$

som vises ved at udvikle $\|Vx - \lambda x\|^2$ og anvende Cauchy-Schwarz' ulighed samt $\|Vx\| = \|x\|$.

Korollar. Spektret for en selvadjungeret operator S er reelt: $\sigma(S) \subseteq \hat{R}$. Spektret for en unitær operator er en delmængde af $\{\lambda \in K \mid \|\lambda\| = 1\}$.

Bevis. Følger af lemmaet, fordi en selvadjungeret eller unitær operator specielt er normal. |

Bemærkning. De eneste symmetriske operatorer på et kompleks Hilbertrum for hvilke spektret er reelt er de essentielt selvadjungerede operatorer, d.v.s. de operatorer S, hvis afslutning $\bar{S}$ eksisterer og er selvadjungeret, eller med andre ord de symmetriske operatorer, hvis defektindex er (0,0) (korollar til sætn. 7.3). Dog er for en vilkårlig symmetrisk operator S ikke blot punktspektret $\sigma_p(S)$, men også det kontinuerte spektrum $\sigma_c(S)$ reelt ifølge lemma 9.4. Hvis $\delta^{\pm}(S) \neq 0$, gælder imidlertid $\mp i \in \sigma_r(S)$.

Korollar. Nuloperatoren 0 er den eneste normale operator, som er nilpotent eller blot generaliseret nilpotent (jvf. slutningen af §F.5.13).

9.8. Lemma. Hvis et afsluttet underrum F af et Hilbertrum E er stabilt over for en operator $T \in L(E,E)$, så er $F^{\perp}$ stabilt over for T^*.

Bevis. Lad $y \in F^{\perp}$. Da er $T^*y \in F^{\perp}$ fordi der for ethvert $x \in F$ gælder $Tx \in F$ og derfor

$$(x|T^*y) = (Tx|y) = 0 \ . \ |$$

Korollar. Følgende udsagn er ensbetydende:

a) F er stabilt over for T og T^* .

b) F og $F^{\perp}$ er stabile over for T .

c) Den til F hørende ortogonale projektionsoperator P kommuterer med T : PT = TP (jvf. Oper., §6).

Man siger undertiden, at F reducerer T, dersom disse udsagn er opfyldt.

9.9. Sætning. Lad F være et afsluttet underrum af et Hilbertrum E, og antag at F reducerer en operator $T \in L(E,E)$. Da er restriktionerne $T|F$ og $T^*|F$ til Hilbertrummet F hinandens adjungerede. Hvis T er normal, henholdsvis selvadjungeret, gælder det samme om $T|F$.

Bevis. For vilkårlige $x,y \in F$ gælder

$$((T|F)x|y) = (Tx|y) = (x|T^*y) = (x|(T^*|F)y) \ ,$$

hvorfor $(T|F)^* = T^*|F$. Specielt er derfor $T|F$ selvadjungeret dersom T er det. Lad nu T være normal. Det ses umiddelbart, at

$T|F$ kommuterer med $T^*|F = (T|F)^*$, fordi T kommuterer med T^*, altså $TT^* = T^*T$. Men så er $T|F$ normal ifølge sætning 8. |

10. Normal operator med rent punktspektrum. Lad T være en normal operator på et Hilbertrum E, og lad os med $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ betegne mængden af alle egenværdier for T, hver kun medregnet én gang, altså $\lambda_i \neq \lambda_j$ for $i \neq j$. De tilhørende egenrum

$$F_j = N(T - \lambda_j I) = N(T^* - \overline{\lambda}_j I)$$

er afsluttede underrum af E, som afbildes i sig selv ved T og T^* og er parvis ortogonale. (Oper., §10.4 samt sætning 9.1 ovenfor.) Åbenbart gælder

$$\text{kard } J \leqq \dim E ,$$

hvor dim E betegner Hilbertdimensionen af E.

Definition. En normal operator T på E siges at have rent punktspektrum, hvis $\bigcup_{j\in J} F_j$ er total i E, altså hvis Hilbertsummen $\bigoplus_{j\in J} F_j$ af egenrummene F_j udgør hele E.

Dette kommer ud på, at der eksisterer en ortonormalbasis for E bestående af lutter egenvektorer for T. Thi på den ene side vil eksistensen af en sådan ortonormalbasis B åbenbart medføre, at UF_j bliver total, fordi $UF_j \supseteq B$ og B er total. På den anden side behøver vi blot at vælge en ortonormalbasis B_j for hvert af egenrummene F_j og derpå sætte $B = UB_j$. Da bliver B åbenbart total, hvis UF_j er det.

Betegnelsen "rent punktspektrum" er måske noget misvisende, idet den kunne lede til den opfattelse, at spektret $\sigma(T)$ for en normal operator T med rent punktspektrum kun skulle bestå af egenværdierne, som jo tilsammen udgør hvad vi tidligere (Oper.,

§12) har kaldt punktspektret for T: $\sigma_p(T) = \{\lambda_j\}_{j\in J}$. Nu er $\sigma_p(T)$ ikke nødvendigvis en afsluttet mængde, og eventuelle kontaktpunkter for $\sigma_p(T)$ må jo også tilhøre den afsluttede mængde $\sigma(T)$. Det kan for øvrigt let vises, at der for enhver normal operator T med rent punktspektrum netop gælder

$$\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)}.$$

Som den modsatte yderlighed til rent punktspektrum haves for normale operatorer begrebet rent kontinuert spektrum. Vi siger, at en normal operator T har <u>rent kontinuert spektrum</u>, dersom T slet ingen egenværdier har, altså dersom $\sigma_p(T) = \emptyset$. Da residualspektret $\sigma_r(T)$ ifølge sætning 9.2 er tomt for enhver normal operator T, kan definitionen på rent kontinuert spektrum for en normal operator også formuleres ved

$$\sigma(T) = \sigma_c(T)$$

(og der er således intet at invende mod betegnelsen rent kontinuert spektrum).

Idet vi nu for simpelheds skyld begrænser os til normale operatorer af klassen $L(E,E)$, har vi følgende:

<u>Sætning</u>. Lad $T \in L(E,E)$ være normal, og lad F betegne Hilbertsummen af alle egenrummene for T. Da haves spaltningen $E = F \oplus F^{\perp}$ af E i indbyrdes ortogonale afsluttede underrum, som begge er stabile over for T. Restriktionen af T til F er normal og har rent punktspektrum. Restriktionen af T til $F^{\perp}$ er ligeledes normal, men har rent kontinuert spektrum.

<u>Bevis</u>. Med de tidligere indførte betegnelser er hvert egenrum F_j for T (og T^*) afsluttet og stabilt over for T og T^*.

Følgelig er også det af $\cup F_j$ udspændte underrum ΣF_j stabilt over for T og T^*. Da endvidere disse operatorer er forudsat kontinuerte, bliver åbenbart også afslutningen af ΣF_j, altså Hilbertsummen $F = \oplus F_j$ af de indbyrdes ortogonale underrum F_j stabil over for T of T^*. Men så gælder det samme ifølge korollaret til lemma 9.8 om $F^\perp$, og desuden er restriktionerne $T|F$ og $T|F^\perp$ normale ifølge sætning 9.9. Det er klart, at $T|F^\perp$ har rent kontinuert spektrum, da eventuelle egenvektorer for $T|F^\perp$ også måtte være egenvektorer for T og dermed tilhøre F, hvilket er umuligt, fordi $F \cap F^\perp = \{0\}$. På den anden side har $T|F$ de samme egenværdier og egenvektorer som T og har dermed rent punktspektrum ifølge definitionen af F. |

Korollar. Enhver normal operator $T : E \to E$ på et endeligdimensionalt komplekst Hilbertrum E har rent punktspektrum.

Bevis. Med ovenstående betegnelser er $T|F^\perp$ normal og ville derfor ifølge algebraens fundamentalsætning have mindst én egenværdi hvis $F^\perp \neq \{0\}$. |

Vælger vi for en sådan operator T en ortonormalbasis for E bestående af egenvektorer for T, bliver den hertil svarende matrix for T en diagonalmatrix, hvori diagonalelementerne er egenværdierne for T, hver medtaget så ofte som dens geometriske multiplicitet angiver. Det ses for øvrigt af denne matrixfremstilling, at den geometriske og den algebraiske multiplicitet her er lige store (jvf. Oper., §9).

Nok så instruktivt er det at indføre de ortogonale projektionsoperatorer P_j som projicerer E ortogonalt på egenrummene F_j. Som omtalt i Oper., §7 gælder da

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i , \qquad \sum_{j \in J} P_j = I$$

som udtryk for, at E er den direkte sum af egenrummene F_j, idet J jo her er endelig, fordi E er forudsat endeligdimensionalt. For selve den normale operator T får vi nu åbenbart spektralfremstillingen

$$T = \sum_{j\in J} \lambda_j P_j \quad . \tag{28}$$

Thi for ethvert $x \in E$ er $x = \Sigma P_j x$ og derfor $Tx = \Sigma TP_j x = \Sigma \lambda_j P_j x$, fordi $P_j x \in F_j$.

Betragter vi dernæst en normal operator T på et Hilbertrum E, som ikke er endeligdimensionalt, så gælder helt den samme spektralfremstilling med uændret bevis i det meget specielle tilfælde, hvor T har rent punktspektrum og hvor desuden $\sigma_p(T)$ er endeligt, altså det tilfælde, hvor T kun har endeligt mange egenværdier λ_j, $j \in J$, og hvor de tilsvarende egenrum har summen E.

Hvis vi nøjes med at forudsætte, at T er en normal operator med rent punktspektrum, kan man opretholde den fundne spektralfremstilling forstået således at der for ethvert $x \in D(T)$ gælder

$$Tx = \sum_{j\in J} \lambda_j P_j x \quad ,$$

og man kan desuden let vise, at

$$x \in D(T) \iff \sum_{j\in J} |\lambda_j|^2 \, \|P_j x\|^2 < \infty \quad .$$

I de følgende kapitler møder vi i de totalkontinuerte operatorer en vigtig klasse af operatorer, hvis spektrale egenskaber er særlig simple, og som - hvis de er normale - altid har rent punktspektrum.

For en helt vilkårlig normal (specielt for enhver selvadjungeret) operator T på et komplekst Hilbertrum E kan man generalisere begrebet spektralfremstilling ved at erstatte summen (28) med et

Integral af den variable λ med hensyn til et såkaldt projektionsmål. Et sådant kan opfattes som en σ-additiv og multiplikativ afbildning P af Borellegemet på K (eller blot på $\sigma(T)$) ind i mængden af alle ortogonale projektionsoperatorer på E udstyret med topologien for punktvis konvergens i E.

Vi skal ikke gennemføre beviset for dette hovedresultat i teorien for normale operatorer, den såkaldte spektralsætning, som først blev vist (i en anden form) af D. Hilbert. Til orientering nævner vi, at i det endeligdimensionale tilfælde er med de ovenfor indførte betegnelser projektionsmålet af en Borelmængde $M \subseteq K$ givet ved

$$P(M) = \sum_{\lambda_j \in M} P_j \quad .$$

I de følgende paragraffer vil vi imidlertid udvikle, hvad man kan kalde første etape i et af beviserne for spektralsætningen i tilfælde af en begrænset normal operator, idet vi vil indføre begrebet kontinuert funktion af en sådan operator.

11. Kontinuert funktion af en begrænset normal operator.

I det følgende betegner E et komplekst Hilbertrum $\neq \{0\}$.

11.1 Lemma. Lad A være en afsluttet selvadjungeret delalgebra af L(E,E) indeholdende I. For enhver operator $T \in A$ gælder

$$\sigma_A(T) = \sigma(T),$$

altså spektret for T relativt til A er lig spektret for T relativt til L(E,E).

Bevis. Ifølge lemma B.2.1 er $\sigma(T) \subseteq \sigma_A(T)$.

Vi indser dernæst, at randen af $\sigma_A(T)$ er indeholdt i $\sigma(T)$, (jvf. B. opg. 20).

I modsat fald findes $\lambda \in \partial\sigma_A(T)$ så $\lambda \in \rho(T)$. Da λ ligger i randen af $\sigma_A(T)$ findes en følge af tal $\lambda_m \in \rho_A(T)$ så $\lambda_m \to \lambda$ (i $\mathbb{C}$). Operatorerne $T - \lambda_m I$ er altså invertible indenfor A, specielt indenfor $L(E,E)$. Der findes derfor operatorer $B_n \in A$ så $(T - \lambda_m I)^{-1} = B_n$. Da $T - \lambda_m I \to T - \lambda I$ i $L(E,E)$, og da $T - \lambda I$ er invertibel indenfor $L(E,E)$, gælder $B_n \to (T - \lambda I)^{-1}$ ifølge B.3.3, hvilket medfører at $(T - \lambda I)^{-1}$ tilhører den afsluttede mængde A. Dette viser, at $(T - \lambda I)$ er invertibel indenfor A, altså $\lambda \in \rho_A(T)$, hvilket er en modstrid med at $\lambda \in \partial\sigma_A(T)$.

I tilfældet T selvadjungeret kan vi nu vise at $\sigma(T) = \sigma_A(T)$.

Ifølge Korollar 9.4 vil $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, og derfor må alle randpunkter af $\sigma_A(T)$ være reelle, men så må $\sigma_A(T) \subseteq \mathbb{R}$. Dette medfører at $\sigma_A(T) = \partial\sigma_A(T)$, hvilket alt i alt viser, at $\sigma(T) = \sigma_A(T)$.

Lad nu $T \in A$ være vilkårlig og lad $\lambda \in \rho(T)$. Vi skal indse at $\lambda \in \rho_A(T)$. Operatoren $S = T - \lambda I \in A$ er invertibel i $L(E,E)$, og derfor er også S^* og S^*S invertible i $L(E,E)$, altså $0 \notin \sigma(S^*S)$. Da A er en selvadjungeret delalgebra vil $S^*S \in A$, og da S^*S er selvadjungeret, sikrer det lige viste at $\sigma(S^*S) = \sigma_A(S^*S)$, altså $0 \notin \sigma_A(S^*S)$, hvilket medfører at der findes $B \in A$ så

$B(S^*S) = I$, altså $VS = I$, hvor $V = BS^* \in A$.

På samme måde har vi at $0 \notin \sigma_A(SS^*)$, og derfor findes $C \in A$ så

$(SS^*)C = I$, altså $SH = I$, hvor $H = S^*C \in A$.

Disse to ligninger udsiger, at S er både venstre og højre

invertibel indenfor A, og at V og H er henholdsvis venstre og højre invers til S.

Nu ser man imidlertid let at $V = H$, thi

$V = VI = V(SH) = (VS)H = IH = H$.

Hermed er vist at S er invertibel indenfor A, altså $\lambda \in \rho_A(T)$. ∎

Lad nu $T \in L(E,E)$ være en begrænset normal operator på E. Hvis p er et komplekst polynomium, er $p(T)$ en veldefineret normal operator på E. Vi vil nedenfor vise, at man på rimelig måde kan definere $f(T)$, hvis blot f er en kontinuert funktion på T's spektrum $\sigma(T)$, som er en ikke tom kompakt delmængde af $\mathbb{C}$.

Vi minder om at $C(\sigma(T),\mathbb{C})$ er en kommutativ C^*-algebra med etelement 1, som altså er funktionen $z \mapsto 1$. Funktionerne $z \mapsto z$ og $z \mapsto \bar{z}$ betegnes kort z og $\bar{z}$. (det er undertiden bekvemt at bruge betegnelserne e, q og $\bar{q}$ for disse funktioner.)

11.2 Sætning. Lad T være en begrænset normal operator på E. Der findes en og kun en kontinuert homomorfi

$$\varphi : C(\sigma(T),\mathbb{C}) \longrightarrow L(E,E)$$

for hvilken

$$\varphi(1) = I , \quad \varphi(z) = T , \quad \varphi(\bar{z}) = T^* .$$

Denne homomorfi φ er en isometrisk $*$-isomorfi af C^*-algebraen $C(\sigma(T),\mathbb{C})$ på den mindste afsluttede delalgebra A af $L(E,E)$, der indeholder I, T, og T^*. Billedalgebraen A er kommutativ og selvadjungeret og består derfor af normale operatorer.

Bevis. Algebraen $C(\sigma(T),\mathbb{C})$ er frembragt af funktionerne 1, z og $\bar{z}$, idet mængden af polynomier i z og $\bar{z}$ er en overalt tæt delalgebra ifølge Stone-Weierstrass' sætning (T.V.R. p.90). Dette viser, at φ som kontinuert homomorfi er entydigt fastlagt ved sine værdier på 1, z, $\bar{z}$.

For at nå til eksistensen af φ betragtes mængden

$$\mathbb{C}[T,T^*] = \left\{ p(T,T^*) \,\middle|\, p \in \mathbb{C}[X_1,X_2] \right\},$$

altså mængden af polynomiumsudtryk i de 2 elementer T og T^*. Da $TT^* = T^*T$ er $\mathbb{C}[T,T^*]$ en delalgebra af $L(E,E)$, den mindste delalgebra af $L(E,E)$ der indeholder I, T og T^*.

Algebraen $\mathbb{C}[T,T^*]$ er kommutativ og selvadjungeret, og dette gælder så også om afslutningen $A = \overline{\mathbb{C}[T,T^*]}$, som er den mindste afsluttede delalgebra af $L(E,E)$, der indeholder I, T og T^*. Vi har dermed at A er en kommutativ C^*-algebra med etelement, frembragt af elementerne I,T og T^*.

Vi vil nu vise, at spektret Δ for A er homeomorft med spektret $\sigma(T)$ for T. Ifølge CB. 4.1 er $\mathcal{F}(T)$ en kontinuert funktion af Δ på $\sigma_A(T) \overset{=\sigma(T)}{=}$, men $\mathcal{F}(T)$ er også injektiv og altså en homeomorfi,*) thi hvis $\mathcal{F}(T)(\delta_1) = \mathcal{F}(T)(\delta_2)$ for to karakterer $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ gælder også (jvf. CB.5.3)

$$\mathcal{F}(T^*)(\delta_1) = \overline{\mathcal{F}(T)(\delta_1)} = \overline{\mathcal{F}(T)(\delta_2)} = \mathcal{F}(T^*)(\delta_2),$$

men så er $\delta_1 = \delta_2$ ifølge CB. sætning 4.3.

Homeomorfien $\mathcal{F}(T) : \Delta \longrightarrow \sigma(T)$ inducerer en isometrisk $*$-isomorfi

$$\Phi : C(\sigma(T),\mathbb{C}) \longrightarrow C(\Delta,\mathbb{C}),$$

nemlig $\Phi(f) = f \circ \mathcal{F}(T)$, hvor $f \in C(\sigma(T),\mathbb{C})$. For $f = 1$, z, $\overline{z}$ får vi altså følgende funktioner af Δ ind i $\mathbb{C}$:

$$\Phi(1) : \delta \mapsto 1 \quad ; \quad \Phi(z) : \delta \mapsto \delta(T) \quad ; \quad \Phi(\overline{z}) : \delta \mapsto \overline{\delta(T)}.$$

Ifølge Gelfand-Naimark's sætning er Gelfandtransformationen $\mathcal{F}$ en isometrisk $*$-isomorfi

$$\mathcal{F} : A \longrightarrow C(\Delta,\mathbb{C}),$$

og de Gelfandtransformerede $\mathcal{F}(I)$, $\mathcal{F}(T)$ og $\mathcal{F}(T^*)$ er følgende funktioner af Δ ind i $\mathbb{C}$:

*) Jvfr. Top. opg.30.

$$\mathcal{F}(I):\ \delta \mapsto 1 \quad ;\quad \mathcal{F}(T):\ \delta \mapsto \delta(T) \quad ;\quad \mathcal{F}(T^*):\ \delta \mapsto \delta(T^*).$$

Da $\delta(T^*) = \overline{\delta(T)}$ for enhver karakter δ (CB.5.3), har vi altså

$$\mathcal{F}(I) = \Phi(1) \quad ;\quad \mathcal{F}(T) = \Phi(z) \quad ;\quad \mathcal{F}(T^*) = \Phi(\bar{z}).$$

Den sammensatte afbildning $\varphi = \mathcal{F}^{-1} \circ \Phi$ er en isometrisk $*$-isomorfi

$$\varphi:\ C(\sigma(T),\mathbb{C}) \longrightarrow A \subseteq L(E,E)$$

med de ønskede egenskaber. ∎

Hvis $p \in C(\sigma(T),\mathbb{C})$ er restriktionen af et polynomium til $\sigma(T)$ gælder $\varphi(p) = p(T)$, thi hvis

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k ,$$

fås ved anvendelse af homomorfien φ

$$\varphi(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi(z)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k = p(T).$$

Vi indfører derfor følgende definition:

Definition. For enhver kontinuert funktion $f \in C(\sigma(T),\mathbb{C})$ betegnes operatoren $\varphi(f)$ med $f(T)$, og vi kalder operatoren $f(T)$ for funktionen f af den normale operator $T \in L(E,E)$.

Som udtryk for at φ er en isometrisk $*$-isomorfi har vi følgende regler for regning med kontinuerte funktioner af operatoren T:

$$(f + g)(T) = f(T) + g(T),$$
$$(\lambda f)(T) = \lambda f(T),$$
$$(fg)(T) = f(T)g(T),$$

$$\overline{f}(T) = f(T)^*,$$

$$f(T) = g(T) \Leftrightarrow f = g,$$

$$\|f(T)\| = \|f\| = \max\{|f(z)| \mid z \in \sigma(T)\},$$

gældende for $f, g \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Hertil kan tilføjes, at der for funktionerne 1, z, $\overline{z}$ gælder

$$1(T) = I, \quad z(T) = T, \quad \overline{z}(T) = T^*.$$

Yderligere bemærkes at $f(T)$ er selvadjungeret netop hvis f er en reel funktion. Heraf følger iøvrigt, at T er selvadjungeret netop hvis $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ (under forudsætningen, at T er normal, idet der findes ikke-normale operatorer med reelt spektrum. Overvej dette for 2×2 matricer).

11.3 Sætning. Lad T være en begrænset normal operator på E. Spektret for operatoren $f(T)$ er værdimængden for f på $\sigma(T)$:

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)).$$

Specielt er $f(T)$ invertibel indenfor $L(E,E)$ hvis og kun hvis $f(z) \neq 0$ for alle $z \in \sigma(T)$. I givet fald gælder

$$f(T)^{-1} = f^{-1}(T),$$

hvor f^{-1} er den kontinuerte funktion på $\sigma(T)$: $z \mapsto 1/f(z)$.

Bevis. Da φ er en isomorfi af $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ på A, er $\sigma_A(f(T)) = \sigma(f)$, men som bekendt er $\sigma(f) = f(\sigma(T))$, og ifølge lemma 11.1 er $\sigma_A(f(T)) = \sigma(f(T))$. Specielt er $f(T)$ invertibel hvis og kun hvis $0 \notin \sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$, altså netop hvis $f(z) \neq 0$ for alle $z \in \sigma(T)$. Hvis f opfylder denne betingelse er $ff^{-1} = f^{-1}f = 1$, og derfor gælder

$$f(T)f^{-1}(T) = f^{-1}(T)f(T) = 1(T) = I,$$

hvilket viser, at $f^{-1}(T)$ er den inverse operator til $f(T)$. ∎

Bemærkning. For en kontinuert funktion $f \in C(S)$ defineret på en mængde $S \subseteq \hat{C}$ indeholdende $\sigma(T)$ som ægte delmængde definerer vi naturligvis $f(T)$ som $f_o(T)$, hvor f_o betegner restriktionen af f til $\sigma(T)$. Ovenstående regneregler forbliver åbenbart gyldige for funktioner i $C(S)$, men det må erindres, at normen $\|f\|$ skal referere til $\sigma(T)$ og ikke til S. Ellers gælder kun uligheden

$$\|f(T)\| \leq \sup_{x \in S} |f(x)|,$$

og relationen $f(T) = g(T)$ er kun ensbetydende med at $f(x) = g(x)$ for alle $x \in \sigma(T)$.

11.4 Sætning. For enhver funktion $f \in C(\sigma(T), \hat{C})$ kommuterer $f(T)$ med enhver operator $S \in L(E,E)$, som kommuterer med T og T^*:

$$\left.\begin{aligned} TS &= ST \\ T^*S &= ST^* \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad f(T)S = Sf(T).$$

Bevis. Normalisatoren $N_S = \{X \in L(E,E) \mid XS = SX\}$ er en delalgebra af $L(E,E)$ indeholdende I (B.1.1), og desuden er N_S klart afsluttet. Hvis derfor T og T^* tilhører N_S, må N_S omfatte A, som er den mindste afsluttede delalgebra af $L(E,E)$, der indeholder I, T og T^*.

12. Ordning af begrænsede selvadjungerede operatorer.

Lad E være et komplekst Hilbertrum $\neq \{0\}$. Inden for algebraen $L(E,E)$ udgør mængden af selvadjungerede (hermite-

ske) operatorer et reelt underrum

$$L_s(E,E) = \{A \in L(E,E) \mid A = A^*\}$$

af det underliggende reelle vektorrum til $L(E,E)$.

Vi vil nu forsyne $L_s(E,E)$ med en ordning. For to operatorer $A,B \in L(E,E)$ skrives $A \leq B$ (eller $B \geq A$), hvis og kun hvis $A,B \in L_s(E,E)$ og

integral af den variable λ med hensyn til et såkaldt projektionsmål. Et sådant kan opfattes som en σ-additiv og multiplikativ afbildning P af Borellegemet på K (eller blot på $\sigma(T)$) ind i mængden af alle ortogonale projektionsoperatorer (på E) udstyret med topologien for punktvis konvergens i E.

Vi skal ikke gennemføre beviset for dette hovedresultat i teorien for normale operatorer, den såkaldte spektralsætning, som først blev bevist (i en anden form) af D. Hilbert. Til orientering nævner vi, at i det endeligdimensionale tilfælde er med de ovenfor indførte betegnelser projektionsmålet af en Borelmængde $M \subseteq K$ givet ved

$$P(M) = \sum_{\lambda_j \in M} P_j \, .$$

I de følgende paragraffer vil vi imidlertid udvikle hvad man kan kalde første etape i et af beviserne for spektralsætningen i tilfælde af en begrænset selvadjungeret operator, idet vi vil indføre begrebet kontinuert funktion af en sådan operator.

11. Kontinuert funktion af selvadjungeret operator. Ved en *-algebra $\mathcal{A}$ over $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ forstås en (associativ) algebra over K, hvorpå er defineret en involutorisk, konjugeret lineær og antimultiplikativ afbildning $A \to A^*$ af $\mathcal{A}$ på sig selv:

$$\begin{aligned} A^{**} &= A && \text{(involutorisk)} \\ (A+B)^* &= A^* + B^* \\ (\lambda A)^* &= \bar{\lambda} A^* && \text{(konjugeret lineær)} \\ (AB)^* &= B^* A^* && \text{(antimultiplikativ)} \, , \end{aligned}$$

hvor $A, B \in \mathcal{A}$ og $\lambda \in K$.

Ved en Banach*-algebra forstås en Banach-algebra, som samtidigt er en *-algebra, og for hvilken der yderligere gælder

$$\|A^*\| = \|A\| \qquad \text{(isometrisk)}$$
$$\|A^*A\| = \|A\|^2$$

for alle $A \in \mathcal{A}$. (For øvrigt følger isometrien let af de øvrige egenskaber.)

Eksempler. 1) Lad S være et ikke tomt, kompakt topologisk rum. Da er mængden $C(S) = C(S;K)$ af alle kontinuerte funktioner $f:S \to K$ en Banach*-algebra ved punktvis definition af de algebraiske operationer og med supremumnormen

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in S} |f(x)| \qquad (f \in C(S)) ,$$

samt med punktvis konjugering som involution:

$$f^*(x) = \overline{f(x)} \qquad (x \in S, \quad f \in C(S)) ,$$

altså kort $f^* = \overline{f}$. Det eftervises umiddelbart, at C(S) herved er blevet en kommutativ Banach*-algebra med ételementet e givet ved $e(x) = x$ for alle $x \in S$. Et element $f \in C(S)$ er invertibelt i C(S), hvis og kun hvis $f(x) \neq 0$ for alle $x \in S$, altså $0 \notin f(S)$. Heraf fremgår, at spektret for et element $f \in C(S)$ er værdimængden for f:

$$\sigma(f) = f(S) .$$

2) Lad $E \neq \{0\}$ være et Hilbertrum over K (=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Da er mængden $L(E,E)$ af alle kontinuerte lineære afbildninger $A:E \to E$ en Banach*-algebra ved de sædvanlige algebraiske operationer med operatorer, idet man benytter operatornormen og tager adjungering $A \to A^*$ som involution. Enhedsoperatoren I er étele-

mentet i L(E,E).

Også i de øvrige eksempler på Banach-algebraer (F.5.7) er der tale om Banach*-algebraer ved passende definition af involutionen. Herom nærmere i et senere afsnit (Specielle operatorer).

Et hovedresultet i teorien for kommutative Banach*-algebraer er Gel'fands sætning, som udsiger, at enhver kommutativ Banach*-algebra $\mathcal{A}$ over $\mathbb{C}$ med ételement er isomorf med C(S;$\mathbb{C}$) for et passende kompakt rum S (entydigt bestemt pånær homeomorfi). Dette rum S kaldes strukturrummet, og isomorfien

$$F : \mathcal{A} \text{ på } C(X)$$

kaldes Gel'fand transformationen. Den vedrører den samlede Banach*-algebra struktur på $\mathcal{A}$ og C(S), er altså en isometrisk *-isomorfi.

I det følgende vil vi bevise Gel'fands sætning i det simplere tilfælde, hvor $\mathcal{A}$ er en vis afsluttet kommutativ *-delalgebra af Banach*-algebraen L(E,E), idet $E \neq \{0\}$ er et Hilbertrum over $\mathbb{C}$. Nærmere tager vi som $\mathcal{A}$ den mindste afsluttede delalgebra af L(E,E), der indeholder I og given begrænset selvadjungeret operator A på E. I dette tilfælde viser det sig, at vi som strukturrum S kan benytte spektret $\sigma(A)$, der jo er en kompakt delrum af $\mathbb{R}$. Vi fører beviset ved at konstruere den inverse isomorfi $F^{-1} = \varphi$ af $C(\sigma(A))$ på den omhandlede delalgebra af L(E,E).

Som udgangspunkt tager vi den kommutative algebra $\mathbb{C}[X]$ af alle polynomier

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \cdots + \alpha_n X^n$$

over $\mathbb{C}$. Denne algebra bliver en *-algebra ved involutionen $p \to \bar{p}$ defineret ved

$$\bar{p} = \bar{\alpha}_o + \bar{\alpha}_1 X + \bar{\alpha}_2 X^2 + \cdots + \bar{\alpha}_n X^n .$$

Til ethvert polynomium $p \in \mathbb{C}[X]$ hører jo en kontinuert funktion $p:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ defineret ved

$$p(x) = \alpha_o + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$$

for $x \in \mathbb{C}$. For enhver kompakt delmængde S af $\mathbb{R}$ betegner vi med p_S restriktionen af denne funktion til S. Da er afbildningen

(29) $$p \to p_S$$

af *-algebraen $\mathbb{C}[X]$ ind i *-algebraen $C(S) = C(S,\mathbb{C})$ åbenbart en *-homomorfi, nemlig en homomorfi for hvilken $\bar{p} \to (p_S)^* = \bar{p}_S$ (jvf. eks. 1):

$$\bar{p}_S(x) = \bar{\alpha}_o + \bar{\alpha}_1 x + \bar{\alpha}_2 x^2 + \cdots + \bar{\alpha}_n x^n = \overline{p_S(x)}$$

for alle $x \in S$. (Herved er benyttet at $S \subseteq \mathbb{R}$.) Injektiv bliver denne *-homomorfi (29) hvis og kun hvis S er en uendelig mængde (hvorfor?).

Lad nu $A \in L(E,E)$ være en given begrænset selvadjungeret operator, og lad

$$S = \sigma(A)$$

være spektret for A. For ethvert polynomium $p \in \mathbb{C}[X]$ sætter vi som sædvanlig

$$p(A) = \alpha_o I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_n A^n .$$

Afbildningen

(30) $$p \to p(A)$$

af $\mathbb{C}[X]$ ind i $L(E,E)$ er som tidligere omtalt (§F.5.6) en homonorfi,

og den bliver også en *-homomorfi, idet

$$\bar{p}(A) = \bar{\alpha}_o I + \bar{\alpha}_1 A + \bar{\alpha}_2 A^2 + \dots + \bar{\alpha}_n A^n = [p(A)]^* ,$$

fordi $A^* = A$. Da $\dot{C}[X]$ er kommutativ, bliver billedalgebraen en kommutativ *-delalgebra af $L(E,E)$ bestående af <u>normale</u> operatorer, idet $p(A)$ kommuterer med $\bar{p}(A) = [p(A)]^*$.

11.1. <u>Lemma</u>. For ethvert polynomium $p \in \dot{C}[X]$ gælder

$$\|p(A)\| = \|p_S\|_\infty ,$$

altså: operatornormen af $p(A)$ er lig med supremumnormen af restriktionen p_S af polynomfunktionen p til spektret $S = \sigma(A)$.

<u>Bevis</u>. Ifølge sætningen i §F.5.6 er

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) \quad (= p(S)) .$$

Da $p(A)$ er normal, er dens operatornorm lig med spektralradien (sætn. 9.7):

$$\begin{aligned} \|p(A)\| &= \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(p(A))\} \\ &= \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in p(S)\} = \|p_S\|_\infty . \end{aligned} \quad |$$

Vi definerer nu en afbildning af en vis delmængde af $C(S)$ ind i $L(E,E)$. Lad $P(S)$ betegne billedmængden for afbildningen (29), altså mængden af alle funktioner $S \to \dot{C}$ af formen p_S, hvor p gennemløber polynomalgebraen $\dot{C}[X]$. Til hver sådan funktion p_S knytter vi operatoren

$$p_S(A) = p(A) .$$

Denne definition har mening også hvis $S = \sigma(A)$ er endelig (og dermed afbildningen (29): $p \to p_S$ ikke er injektiv); thi hvis to

polynomier $p,q \in \mathbb{C}[X]$ bestemmer samme funktion $p_S = q_S$ på S, så bestemmer polynomiet $p - q$ funktionen $(p - q)_S = p_S - q_S = 0$, og derfor er ifølge lemmaet

$$\|p(A) - q(A)\| = \|(p - q)(A)\| = \|(p - q)_S\|_\infty = 0 \ ,$$

altså $p(A) = q(A)$.

Som billede af *-algebraen $\mathbb{C}[X]$ ved *-homomorfien (29) er $P(S)$ en *-delalgebra af $C(S)$. Ifølge lemma 11.1 er afbildningen $p_S \to p(A)$ isometrisk og derfor injektiv:

$$\|p_S(A)\| = \|p(A)\| = \|p_S\|_\infty \ ,$$

og det er klart, at denne afbildning er en *-homomorfi, fordi både (29) og (30) var *-homomorfier.

Ifølge Weierstrass' approximationssætning er $P(S)$ overalt tæt i $C(S)$. Selv om dette resultat vel er mest bekendt i det tilfælde hvor den kompakte mængde $S \subseteq \mathbb{R}$ specielt er et kompakt interval på $\mathbb{R}$, så følger deraf det samme resultat for en vilkårlig kompakt mængde $S \subseteq \mathbb{R}$. Lad nemlig J betegne et kompakt interval således at $S \subseteq J$. Da ethvert kompakt rum er normalt, følger det af Urysohns sætning, at enhver funktion $f \in C(S)$ kan udvides til en funktion $g \in C(J)$. Til givet $\varepsilon > 0$ eksisterer nu et polynomium p således at

$$|p(x) - g(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{for alle } x \in J \ .$$

Anvendt for $x \in S$ viser dette, at $|p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ og dermed at $\|p_S - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Af hensyn til en anvendelse nedenfor tilføjer vi, at enhver kontinuert funktion $f \in C(S)$, som i et punkt $x_o \in S$ antager værdien $f(x_o) = 0$, kan approximeres i $C(S)$ med polynomfunktioner p_S,

der ligeledes antager værdien $p_S(x_o) = p(x_o) = 0$ i punktet x_o. Thi bestemmes først til givet $\varepsilon > 0$ et polynomium q med $\|q_S - f\|_\infty < \varepsilon/2$, og sættes dernæst $p = q - q(x_o)$, hvorved $p(x_o) = 0$, bliver

$$\|p_S - q_S\|_\infty = |q(x_o)| = |q(x_o) - f(x_o)| \leqq \|q_S - f\|_\infty < \varepsilon/2 ,$$

$$\|p_S - f\|_\infty \leqq \|p_S - q_S\|_\infty + \|q_S - f\|_\infty < \varepsilon .$$

Vi anvender nu sætningen om udvidelse ved kontinuitet (T.V.R. sætn. 17) på den lineære, isometriske (specielt ligeligt kontinuerte) afbildning

$$p_S \to p_S(A) \tag{31}$$

af det overalt tætte underrum $P(S)$ af Banachrummet $C(S)$, $S = \sigma(A)$, ind i Banachrummet $L(E,E)$. Der eksisterer altså netop én udvidelse af afbildningen (31) til en kontinuert afbildning

$$\varphi : C(S) \to L(E,E) .$$

Og denne udvidelse φ bliver ligeledes lineær og isometrisk (T.V.R., §36). Da endvidere afbildningen (31) var en *-homomorfi af *-delalgebraen $P(S)$ af $C(S)$, viser man let på den sædvanlige måde, at også udvidelsen φ er en *-homomorfi, altså at der yderligere gælder

$$\begin{aligned} \varphi(fg) &= \varphi(f)\varphi(g) \\ \varphi(\bar{f}) &= [\varphi(f)]^* \end{aligned}$$

for $f,g \in C(S)$. Man udnytter hertil, at såvel multiplikationen som involutionen på en Banach*-algebra er kontinuert.

Da φ er lineær og isometrisk, er φ specielt injektiv. Ialt er φ således en isometrisk *-isomorfi af $C(S)$ på sit billede

$\varphi(C(S))$, som derfor er en Banach*-delalgebra af $L(E,E)$. Da $C(S)$ er kommutativ bliver $\varphi(C(S))$ det også, og da $\varphi(C(S))$ tillige er stabil over for adjungering, består den af lutter normale operatorer. Da polynomalgebraen $P(S)$ var tæt i $C(S)$, bliver

$$\varphi(P(S)) = \{p(A) \mid p \in \mathbb{C}[X]\}$$

overalt tæt i $\varphi(C(S))$; og da $\varphi(C(S))$ er fuldstændig og dermed afsluttet i $L(E,E)$, bliver $\varphi(C(S))$ simpelthen afslutningen af $\varphi(P(S))$ i $L(E,E)$.

Med e og j betegner vi følgende specielle funktioner tilhørende $P(S) \subseteq C(S)$:

$$e(x) = 1 , \quad q(x) = x \qquad (x \in S) .$$

Nu er e ételementet i $C(S)$, og e og q frembringer $P(S)$, idet $P(S)$ åbenbart er den mindste delalgebra af $C(S)$, som indeholder e og q. (I topologisk henseende frembringer e og q derfor afslutningen $C(S)$ af $P(S)$.) Ved anvendelse af isomorfien φ slutter vi, at operatorerne

$$\varphi(e) = I , \quad \varphi(q) = A \tag{32}$$

frembringer $\varphi(P(S))$, som kan kaldes algebraen af alle polynomier i A. Og i topologisk betydning frembringer I og A hele billedalgebraen $\varphi(C(S))$, som vi vil kalde algebraen af kontinuerte funktioner af den givne selvadjungerede operator A (jvf, nedenfor).

Ialt er hermed bevist nedenstående sætning, i hvis formulering vi tillader os at skrive p i stedet for p_S for ethvert polynomium p over $\mathbb{C}$.

11.2. Sætning. Lad A være en begrænset selvadjungeret operator på et komplekst Hilbertrum E, og lad $\sigma(A)$ betegne spek-

tret for A. Der eksisterer netop én kontinuert afbildning

$$\varphi : C(\sigma(A)) \to L(E,E)$$

for hvilken der for ethvert polynomium p over $\mathbb{C}$ (opfattet som funktion på $\sigma(A)$) gælder

$$\varphi(p) = p(A) .$$

Denne afbildning φ er en isometrisk *-isomorfi af Banach*-algebraen $C(S)$ på den mindste afsluttede delalgebra af $L(E,E)$, der indeholder operatorerne I og A. Billedalgebraen $\varphi(C(S)) \subseteq L(E,E)$ er kommutativ og stabil overfor adjungering, og består derfor af normale operatorer.

Idet vi udvider betegnelsen $p(A)$ for $\varphi(p)$ i tilfælde af et polynomium til en vilkårlig kontinuert funktion $f \in C(\sigma(A))$, skriver vi

$$\varphi(f) = f(A) , \qquad f \in C(\sigma(A)) ,$$

og kalder operatoren $f(A)$ for funktion f af den selvadjungerede operator $A \in L(E,E)$. Som udtryk for at φ er en isometrisk *-isomorfi har vi da følgende regler for regning med kontinuerte funktioner af operatoren A:

$$\begin{aligned} (f+g)(A) &= f(A) + g(A) , \\ (\lambda f)(A) &= \lambda f(A) , \\ (fg)(A) &= f(A)g(A) , \\ \bar{f}(A) &= [f(A)]^* , \\ \|f(A)\| &= \|f\|_\infty = \max_{t\in\sigma(A)} |f(t)| , \end{aligned}$$

gældende for $f,g \in C(\sigma(A))$, $\lambda \in K$. Hertil kan føjes, at der for funktionerne (polynomierne) $e(x) = 1$ og $q(x) = x$ ifølge (32)

gælder

$$e(A) = I \ , \qquad q(A) = A \ .$$

11.3 Sætning. En kontinuert funktion $f(A)$ af en begrænset selvadjungeret operator A på E er invertibel indenfor $L(E,E)$ hvis og kun hvis f er invertibel indenfor $C(\sigma(A))$, altså hvis $f(x) \neq 0$ for alle $x \in \sigma(A)$. I givet fald gælder

$$f(A)^{-1} = f^{-1}(A) \ ,$$

hvor $f^{-1}(x) = 1/f(x)$ for all $x \in \sigma(A)$.

Bevis. Hvis den anførte betingelse er opfyldt bliver $f(A)$ naturligvis invertibel i $L(E,E)$ med den inverse operator $f^{-1}(A)$, idet $ff^{-1} = f^{-1}f = e$ og derfor

$$f(A)f^{-1}(A) = f^{-1}(A)f(A) = e(A) = I \ .$$

Hvis derimod $f(x_o) = 0$ for mindst ét $x_o \in \sigma(A)$, eksisterer der ifølge en bemærkning ovenfor til Weierstrass' approximationssætning en følge af polynomier p_n med $p_n(x_o) = 0$ således at $p_n \to f$ i $C(\sigma(A))$, når p_n opfattes som funktion på $\sigma(A)$. Da φ er kontinuert, gælder derfor $p_n(A) \to f(A)$ i $L(E,E)$. Nu er $p_n(A)$ ikke invertibel i $L(E,E)$, fordi

$$0 \in p_n(\sigma(A)) = \sigma(p_n(A))$$

eftersom $p_n(x_o) = 0$. Men så må $f(A) = \lim p_n(A)$ ligeledes være ikke-invertibel i $L(E,E)$, da de ikke-invertible elementer af denne Banach-algebra udgør en afsluttet mængde (sætn. F.5.9).

Korollar. Spektret for $f(A)$ er værdimængden for f på spektret $\sigma(A)$:

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) \ .$$

Bevis. For ethvert $\lambda \in \mathbb{C}$ skal der vises, at $\lambda \in \sigma(f(A)) \iff \lambda \in f(\sigma(A))$. Sættes $f-\lambda e = g$, bliver $f(A) - \lambda I = g(A)$, og resultatet fremgår da af ovenstående sætning, ifølge hvilken $f(A) - \lambda I$ er invertibel i $L(E,E)$ hvis og kun hvis $f - \lambda e$ ikke antager værdien 0 på $\sigma(A)$. |

Bemærkning. For en kontinuert funktion $f \in C(S)$ defineret på en mængde $S \subsetneq \mathbb{C}$ indeholdende $\sigma(A)$ som ægte delmængde definerer vi naturligvis $f(A)$ som $f_0(A)$, hvor f_0 betegner restriktionen af f til $\sigma(A)$. Ovenstående regneregler forbliver åbenbart gyldige for funktioner i $C(S)$, men det må erindres, at normen $\|f\|_\infty$ skal referere til $\sigma(A)$ og ikke til S. Ellers gælder kun uligheden

$$\|f(A)\| \leq \sup_{x \in S} |f(x)| \ .$$

Og relationen $f(A) = g(A)$ er kun ensbetydende med, at $f(x) = g(x)$ for alle $x \in \sigma(A)$.

11.4. Sætning. For enhver funktion $f \in C(\sigma(A))$ kommuterer $f(A)$ med enhver operator $B \in L(E,E)$, som kommuterer med A:

$$AB = BA \Rightarrow f(A)B = Bf(A) \ .$$

Bevis. Mængden M af alle de elementer X af en Banach algebra $\mathcal{A}$, som kommuterer med et givet element $B \in \mathcal{A}$, er jo en delalgebra af $\mathcal{A}$ indeholdende I (lemma F.5.2), og endvidere er M afsluttet i $\mathcal{A}$, fordi M er originalmængden til $0 \in \mathcal{A}$ ved den kontinuerte afbildning $X \to XB - BX$ af $\mathcal{A}$ i sig selv. Hvis derfor A betegner et element af M, må M også indeholde den mindste af-

sluttede delalgebra af $\mathcal{L}$, der indeholder I og A. I det foreliggende tilfælde er denne mindste delalgebra netop billedalgebraen $\varphi(C(\sigma(A)))$ bestående af alle kontinuerte funktioner af A. |

Vi bemærker til slut, at lemma 11.1 og dermed alle efterfølgende resultater i denne paragraf også gælder i det reelle tilfælde, idet det let kan vises, at formelen $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ også gælder for en <u>selvadjungeret</u> operator $A \in L(E,E)$ på et reelt Hilbertrum E og for et reelt polynomium p. (Derimod gælder Gel'fands sætning i sin generelle form kun i det komplekse tilfælde.)

12. <u>Ordning af begrænsede selvadjungerede operatorer</u>. Lad E være et Hilbertrum over $\mathbb{C}$. Inden for algebraen $L(E,E)$ af alle begrænsede (=kontinuerte) lineære afbildninger af E i sig selv danner de begrænsede selvadjungerede operatorer en delmængde som vi vil betegne med $L_s(E,E)$:

$$L_s(E,E) = \{A \in L(E,E) \mid A^* = A\} .$$

Af identiteterne $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ fremgår, at $L_s(E,E)$ er et vektorrum over $\mathbb{R}$, nemlig et underrum af det underliggende reelle vektorrum til $L(E,E)$ (jvf. T.V.R., § 29).

Analogt gælder i øvrigt for enhver kompleks *-algebra. Således danner de funktioner $f \in C(S;\mathbb{C})$ (S kompakt) for hvilke $\bar{f} = f$ (altså f reel) vektorrummet $C(S;\mathbb{R})$ over $\mathbb{R}$. På dette har vi den naturlige (punktvise) ordning, hvor $f \leqq g$ betyder, at $f(x) \leqq g(x)$ for alle $x \in S$. Vi vil nu også definere er ordning på $L_s(E,E)$.

For to operatorer $A,B \in L(E,E)$ skrives $A \leqq B$ (eller $B \geqq A$), hvis og kun hvis $A,B \in L_s(E,E)$ og

$$\forall x \in E: \quad (Ax|x) \leqq (Bx|x) \ .$$

Herved er defineret en (partiel) ordensrelation $\leqq$ på $L_s(E,E)$, idet der for $A,B,C \in L_s(E,E)$ gælder

$$A \leqq B \ \wedge \ B \leqq C \ \Rightarrow \ A \leqq C \ ,$$
$$A \leqq B \ \wedge \ B \leqq A \ \Leftrightarrow \ A = B \ .$$

Det sidste kommer jo ud på, at der for $A,B \in L_s(E,E)$ gælder:

$$[\forall x \in E: \quad (Ax|x) = (Bx|x)] \Leftrightarrow A = B \ .$$

Og implikationen $\Rightarrow$ følger af, at en selvadjungeret operator $A \in L_s(E,E)$ ifølge §1 er entydigt bestemt ved den tilhørende hermiteske form $(x,y) \to (Ax|y)$ og denne igen ved sin restriktion $x \to (Ax|x)$ til diagonalen i $E \times E$ (som følge af polariseringsidentiteten).

Med denne ordensrelation $\leqq$ bliver $L_s(E,E)$ et <u>ordnet vektorrum</u> (over $\mathbb{R}$), idet ordningen harmonerer med de lineære operationer:

$$A \leqq B \ \Rightarrow \ A + C \ \leqq \ B + C \ ,$$
$$A \leqq B \ \wedge \ \lambda \geqq 0 \ \Rightarrow \ \lambda A \leqq \lambda B \ .$$

Vi har tidligere (§ 6) indført begrebet <u>positiv</u> symmetrisk operator. For en operator $A \in L_s(E,E)$ er dette åbenbart ensbetydende med $A \geqq 0$ i den her betragtede ordning på $L_s(E,E)$. Det eftervises umiddelbart at mængden

$$L_s^+(E,E) = \{A \in L_s(E,E) \mid A \geqq 0\}$$

af alle positive selvadjungerede operatorer i $L(E,E)$ er en <u>konveks kegle</u> (T.V.R., §27):

$$A \geqq 0 \ \wedge \ B \geqq 0 \ \Rightarrow \ A + B \geqq 0 \ ,$$
$$A \geqq 0 \ \wedge \ \lambda \geqq 0 \ \Rightarrow \ \lambda A \geqq 0 \ .$$

12.1. Lemma. Hvis $A \geqq 0$, så er $B^*AB \geqq 0$ for enhver operator $B \in L(E,E)$.

Bevis. $(B^*ABx|x) = (A(Bx)|Bx) \geqq 0$. |

Korollar. For enhver operator $B \in L(E,E)$ er $B^*B \geqq 0$. Specielt gælder $B^2 \geqq 0$ for enhver selvadjungeret operator $B \in L_s(E,E)$.

Dette følger af, at $B^*B = B^*IB$ og at $I \geqq 0$. |

12.2. Sætning. Lad A være en begrænset selvadjungeret operator på et komplekst Hilbertrum E. Isomorfien φ af $C(\sigma(A);\dot{C})$ ind i $L(E,E)$ afbilder $C(\sigma(A);\dot{R})$ ordensisomorft ind i $L_s(E,E)$.

For $f,g \in C(\sigma(A);\dot{R})$ gælder således:

(33) $\quad f \geqq 0 \quad (\text{på } \sigma(A)) \iff f(A) \geqq 0 \ ,$

(34) $\quad f \leqq g \quad (\text{på } \sigma(A)) \iff f(A) \leqq g(A) \ .$

Endvidere gælder for $f \in C(\sigma(A); \dot{C})$:

(35) $\quad f$ reel (på $\sigma(A)$) $\iff$ $f(A)$ selvadjungeret.

Bevis. Da φ er injektiv, er $\overline{f} = f$ (på $\sigma(A)$) ensbetydende med $\overline{f}(A) = f(A)$, hvoraf (35) følger, idet $\overline{f}(A) = f(A)^*$. Da φ er lineær, reduceres (34) let til (33). Hvis $f \geqq 0$ (på $\sigma(A)$), er $g = f^{1/2}$ veldefineret og tilhører $C(\sigma(A), \dot{R})$, hvorfor $g(A)$ er selvadjungeret. Og ifølge korollaret til lemma 12.1 er $g(A)^2 \geqq 0$, hvoraf (33), idet

$$f(A) = g^2(A) = (g \cdot g)(A) = g(A)g(A) = g(A)^2 \geqq 0 \ .$$

Hvis omvendt $f(A) \geqq 0$, så er ifølge lemma 9.5 $\sigma(f(A)) \subseteq [0,+\infty[$ og dermed ifølge korrollaret til sætn. 11.3 $f(\sigma(A)) \subseteq [0,+\infty]$, hvilket netop betyder, at $f \geqq 0$ (på $\sigma(A)$). |

12.3. Sætning. For enhver positiv operator $A \in L_s^+(E,E)$ eksisterer der netop én positiv operator $R \in L_s^+(E,E)$ for hvilken $R^2 = A$.

Bevis. For funktionen q defineret ved $q(x) = x$ for $x \in \sigma(A)$ gælder jo $q(A) = A$, og da $A \geqq 0$ slutter vi af (33), at $q \geqq 0$ (på $\sigma(A)$), altså at $\sigma(A) \subseteq [0,+\infty[$. (Dette følger også direkte af lemma 9.5.) Men så defineres der en funktion $r = q^{1/2} \in C(\sigma(A),\mathbb{R})$ ved

$$r(x) = x^{1/2} = \sqrt{x} \qquad (x \in \sigma(A)) ,$$

og der gælder $r \geqq 0$ og $r^2 = q$. Heraf følger $r(A) \geqq 0$ og (som ovenfor)

$$r(A)^2 = r^2(A) = q(A) = A .$$

I stedet for $r(A)$ skrives også $A^{1/2}$ eller $\sqrt{A}$.

For dernæst at påvise entydigheden betragter vi en vilkårlig løsning $Q \in L_s^+(E,E)$ til ligningen $Q^2 = A$. Vi skal vise, at $Q = A^{1/2}$. Idet vi for kortheds skyld sætter $A^{1/2} = R$, bemærkes først, at Q kommuterer med $Q^2 = A$ og derfor ifølge sætn. 11.4 med $A^{1/2} = R$, hvorfor

$$(Q + R)(Q - R) = Q^2 + RQ - QR - R^2 = Q^2 - R^2 = 0 .$$

For vilkårligt $x \in E$ sættes $(Q - R)x = y$, og opgaven er at vise, at $y = 0$. Nu gælder

$$\|Q^{1/2}y\|^2 + \|R^{1/2}y\|^2 = (Qy|y) + (Ry|y)$$
$$= ((Q + R)(Q - R)x|y) = 0 ,$$

hvoraf $Q^{1/2}y = R^{1/2}y = 0$, og følgelig $Qy = Q^{1/2}Q^{1/2}y = 0$ og tilsvarende $Ry = 0$. Heraf følger endelig

$$\|y\|^2 = \|(Q - R)x\|^2 = ((Q - R)^2x|x) = ((Q - R)y|y) = 0. \quad |$$

12.4. Sætning. Produktet af to kummuterende positive operatorer er positivt:

$$A,B \in L_s^+(E,E) \wedge AB = BA \Rightarrow AB \in L_s^+(E,E) .$$

Bevis. Vi bemærker først, at produktet af to selvadjungerede operatorer $A,B \in L_s(E,E)$ er selvadjungeret, hvis og kun hvis $AB = BA$. Dette følger straks af, at $(AB)^* = B^*A^* = BA$. Lad dernæst $A,B \in L_s^+(E,E)$. Af $AB = BA$ sluttes ifølge sætn. 11.4, at $RB = BR$, hvor $R = A^{1/2}$, og heraf følger ud fra lemma 12.1:

$$AB = RRB = RBR = R^*BR \geq 0 . \quad |$$

I det følgende forudsætter vi, at $E \neq \{0\}$. For en given selvadjungeret operator $A \in L(E,E)$ sætter vi

$$a = \inf_{\|x\|=1} (Ax|x) = \inf_{x\neq 0} \frac{(Ax|x)}{\|x\|^2} = \max\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda I \leq A\} ,$$

$$b = \sup_{\|x\|=1} (Ax|x) = \sup_{x\neq 0} \frac{(Ax|x)}{\|x\|^2} = \min\{\lambda \in \mathbb{R} \mid A \leq \lambda I\} .$$

Det verificeres umiddelbart at de anførte udtryk for a, henholdsvis b, er veldefinerede og identiske. Således gælder

$$aI \leq A \leq bI ,$$

d.v.s.

$$a\|x\|^2 \leqq (Ax|x) \leqq b\|x\|^2 \qquad \text{for alle } x \in E;$$

og a og b er henholdsvis størst og mindst med den pågældende egenskab. Tallene a og b kaldes grænserne for den selvadjungerede operator A (henholdsvis nedre og øvre grænse for A).

12.5. Sætning. Intervallet [a,b] er det mindste interval, som omfatter spektret $\sigma(A)$. Der gælder således

$$\sigma(A) \subseteq [a,b] \quad \wedge \quad a,b \in \sigma(A) \ .$$

Bevis. Under benyttelse af funktionerne e,q definerede ved $e(\lambda) = 1$, $q(\lambda) = \lambda$ for $\lambda \in \sigma(A)$ haves for vilkårlige $\alpha,\beta \in \hat{R}$ med $\alpha \leqq \beta$:

$$\begin{aligned}
&\sigma(A) \subseteq [\alpha,\beta] \\
\iff &\forall \lambda \in \sigma(A): \quad \alpha \leqq \lambda \leqq \beta \\
\iff &\alpha e \leqq q \leqq \beta e \qquad\qquad (\text{på } \sigma(A)) \\
\iff &\alpha I \leqq A \leqq \beta I \\
\iff &[a,b] \subseteq [\alpha,\beta] \ .
\end{aligned}$$

Her er i sidste skridt udtrykt, at [a,b] som ovenfor nævnt er det mindste afsluttede interval $[\alpha,\beta]$ med $\alpha I \leqq A \leqq \beta I$. Endvidere er benyttet, at φ er en ordensisomorfi (sætn. 12.2), og at $\varphi(e) = I$, $\varphi(q) = A$ ifølge (32), §11. At $a,b \in \sigma(A)$ følger af, at $\sigma(A)$ er afsluttet. |

Korollar. $\|A\| = \max(|a|,|b|)$.

Dette følger af sætningen, fordi $\|A\|$ er lig med spektralradien for A, da A specielt er normal (sætn 9.7). - Man kan også let give elementære beviser for sætn. 12.5 og det anførte korollar.

12.6. Lemma. Hvis $0 \leqq A \leqq cI$, så er $A^2 \leqq cA$, altså

$$\|Ax\|^2 \leqq c(Ax|x) \qquad \text{for alle } x \in E .$$

Bevis. $cA - A^2 = A(cI - A) \geqq 0$ ifølge sætn. 12.4, fprdi A og $cI - A$ kommuterer og er $\geqq 0$.

12.7. Sætning. Lad $H \subseteq L_s(E,E)$ være en opad filtrerende mængde af begrænsede selvadjungerede operatorer, og antag at

$$\forall x \in E: \quad \sup_{A \in H} (Ax|x) < +\infty .$$

Da eksisterer netop én operator $B \in L_s(E,E)$ således at

$$\forall x \in E: \quad (Bx|x) = \sup_{A \in H} (Ax|x) .$$

Endvidere gælder

$$\forall x \in E: \quad Bx = \lim_{A \in H} Ax .$$

Bevis. Entydigheden er klar. Ved beviset for eksistensen kan vi gerne antage, at $H \subseteq L_s^+(E,E)$. Thi i modsat fald vælger vi $A_o \in H$ og erstatter H først med afsnittet $H_o = \{A \in H \mid A_o \leqq A\}$ og derpå med $H_o - A_o = \{A - A_o \mid A \in H_o\} \subseteq L_s^+(E,E)$. Hvis B_o har de ønskede egenskaber i relation til $H_o - A_o$, så vises det let, at $B = A_o + B_o$ har de ønskede egenskaber i relation til H_o og derfor til H, fordi H er filtrerende. Lad altså $H \subseteq L_s^+(E,E)$. For ethvert $x \in E$ er

$$\sup_{A \in H} \|A^{1/2}x\|^2 = \sup_{A \in H} (Ax|x) < +\infty .$$

Ifølge princippet om ligelig begrænsning haves derfor

$$\sup_{A \in H} \|A\| = \sup_{A \in H} \|A^{1/2}\|^2 := c < +\infty .$$

For nu at vise, at nettet $(Ax)_{A\in H}$ på E er fundamentalt (og dermed konvergent) for ethvert $x \in E$, bestemmer vi til $\varepsilon > 0$ en operator $A_o \in H$ således at (for den givne vektor $x \in E$)

$$(A_o x|x) > \sup_{A\in H} (Ax|x) - \varepsilon \ .$$

For ethvert $A_1 \in H$ med $A_1 \geqq A_o$ gælder da ifølge ovenstående lemma

$$\|(A_1 - A_o)x\|^2 \leqq c[(A_1 x|x) - (A_o x|x)] < \varepsilon \ ,$$

idet jo $(A_1 x|x) \leqq \sup_{A\in H} (Ax|x) < (A_o x|x) + \varepsilon$. For vilkårlige A_1, A_2 tilhørende afsnittet $\{A \in H | A \geqq A_o\}$ gælder således

$$\|A_1 x - A_2 x\| \leqq \|A_1 x - A_o x\| + \|A_o x - A_2 x\| < 2\varepsilon^{1/2} \ .$$

Hermed er bevist, at afbildningen $A \to Ax$ af den filtrende mængde H ind i E, altså nettet $(Ax)_{A\in H}$, er et fundamentalnet for ethvert $x \in E$. Betegnes grænsevektoren med Bx, altså

$$Bx = \lim_{A\in H} Ax \ ,$$

så defineres der ved $x \to Bx$ en afbildning $B:E \to E$, der åbenbart bliver lineær. Da endvidere

$$\|Bx\| = \lim_{A\in H} \|Ax\| \leqq c\|x\|$$

for alle $x \in E$, er B begrænset. For vilkårlige $x,y \in E$ gælder

$$(Bx|y) = \lim_{A\in H} (Ax|y) = \lim_{A\in H} (x|Ay) = (x|By) \ ,$$

altså ialt $B \in L_s(E,E)$. Endelig haves for ethvert $x \in E$

$$(Bx|x) = \lim_{A\in H}(Ax|x) = \sup_{A\in H} (Ax|x) \ ,$$

fordi afbildningen $A \to (Ax|x)$ af H ind i $\hat{R}$ er voksende. |

12.8. Bemærkning. Det er klart, at der gælder $B \leqq C$ for enhver operator $C \in L_s(E,E)$ for hvilken $A \leqq C$ for alle $A \in H$. Med andre ord er B netop supremum af H.

$$B = \sup H = \sup_{A \in H} A ,$$

inden for den ordnede mængde $L_s(E,E)$.

Sætning 12.7 spiller en afgørende rolle i beviset for spektralsætningen for en begrænset selvadjungeret operator A. Det gælder om at generalisere begrebet funktion f(A) af A fra de hidtil betragtede kontinuerte funktioner f til vilkårlige begrænsede Borelmålelige funktioner f på $\sigma(A)$, altså at udvide isomorfien φ fra $C(\sigma(A))$ til en mere omfattende Banachalgebra $L^\infty(\sigma(A))$. Projektionsmålet P(M) af en Borelmængde $M \subseteq \sigma(A)$ kan derefter defineres ved

$$P(M) = \varphi(e_M) = e_M(A) ,$$

idet e_M betegner den karakteristiske funktion hørende til M. Da $e_M^2 = e_M = \bar{e}_M$, bliver $[e_M(A)]^2 = e_M(A) = [e_M(A)]^*$, altså $P(M) = e_M(A)$ en ortogonal projektionsoperator.

Denne udvidelsesproces er analog med udvidelsen af et positivt Radonmål (Radonintegral) μ, lad os sige på et kompakt rum S (her $\sigma(A)$), fra at være en positiv (d.v.s. voksende) linearform på C(S) til at blive en positiv linearform på vektorrummet af alle Borelmålelige og begrænsede (eller blot μ-integrable) funktioner på S. I begge tilfælde består første skridt i at udvide fra kontinuerte til halvkontinuerte funktioner. Herved benyttes, at en (f.eks. opad) halvkontinuert funktion g på et kompakt rum

S er punktvis supremum af den opad filtrende mængde $\{f \in C(S) \mid f \leqq g\}$, hvorfor vi kan definere

$$\mu(g) := \int g d\mu := \sup \{\mu(f) \mid f \in C(S) \wedge f \leqq g\},$$

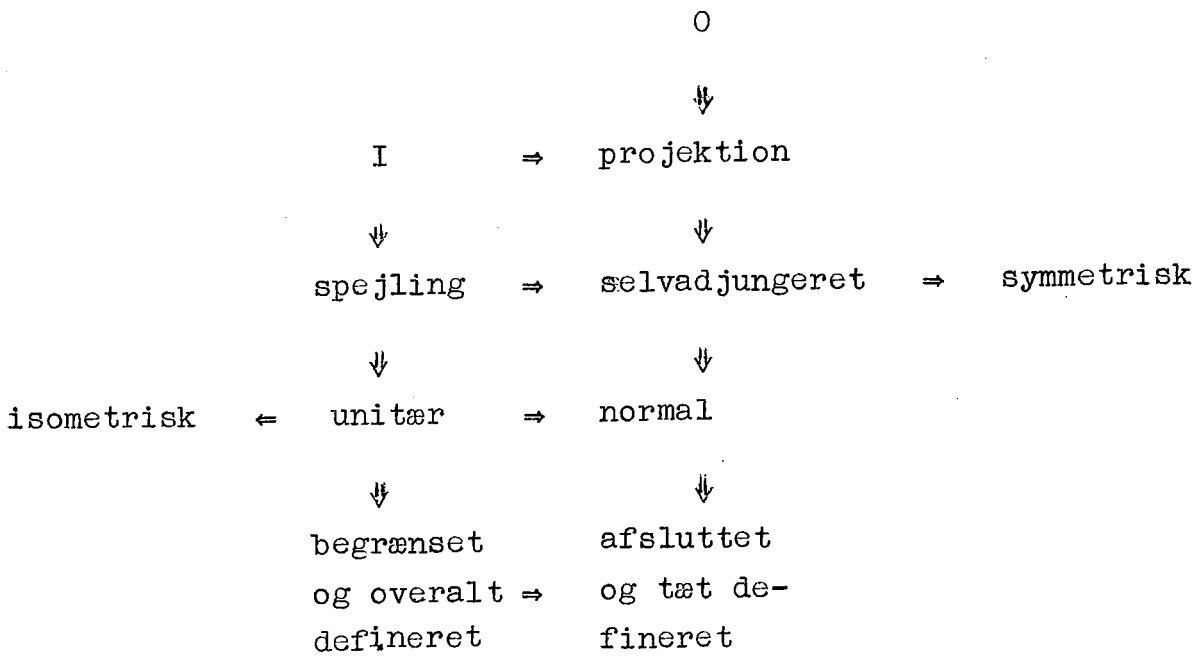
og i tilfælde af isomorfien φ:

$$\varphi(g) := g(A) := \sup\{f(A) \mid f \in C(S) \wedge f \leqq g\}.$$

med $S = \sigma(A)$. I dette sidste tilfælde må vi dog forudsætte g begrænset for at dette supremum inden for $L_s(E,E)$ skal eksistere i henhold til sætn. 12.7.

Vi skal ikke her beskrive den videre udvidelsesproces, men man når (i operatortilfældet) til slut til en Banach algebra $L^\infty(\sigma(A))$ af (ækvivalensklasser af) begrænsede komplekse Borel-målelige funktioner på $\sigma(A)$, og en positiv, isometrisk *-isomorfi af $L^\infty(\sigma(A))$ på en *-delalgebra af $L(E,E)$ bestående af normale operatorer, nemlig (hvis E er separabelt) den mindste *-delalgebra af $L(E,E)$ indeholdende I og A, som er afsluttet i topologien for punktvis konvergens. Sætn. 11.4 erstattes med det finere resultat, at den nye billedalgebra (i det separable tilfælde) netop består af samtlige operatorer fra $L(E,E)$, der kommuterer med enhver operator $B \in L(E,E)$ som kommuterer med A.

Hovedtyper af operatorer på et Hilbertrum



(Ved projektion og spejling er underforstået: ortogonal)

For operatorer T (på et Hilbertrum) gælder endvidere følgende biimplikationer:

T spejling $\iff$ T selvadjungeret og unitær

T unitær $\iff$ T normal og isometrisk

T selvadjungeret $\iff$ T normal og symmetrisk

For en overalt defineret operator T gælder ifølge sætningen om den afsluttede graf:

T kontinuert $\iff$ T afsluttet.

Opgaver til
Operatorer på Hilbertrum.

Hvor ikke andet er anført, er de optrædende rum Hilbertrum over $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

1. Giv eksempler på, at lighedstegnet ikke behøver at gælde i relationerne

$$(S + T)^* \supseteq S^* + T^*, \quad (TS)^* \supseteq S^*T^* .$$

2. Giv et direkte bevis for formelen $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ i tilfælde af en injektiv operator T, for hvilken T og T^{-1} tilhører $L(E,E)$.

3. Lad T være en tæt defineret operator som kan afsluttes. Vis, at

$$\sigma(T^*) = [\sigma(T)]^*$$

hvor * på højre side angiver kompleks konjugering. (Jvf. analoge resultater for afslutning eller invertering.) Vis også, at

$$[\sigma_r(T)]^* \subseteq \sigma_p(T^*) \subseteq [\sigma_r(T) \cup \sigma_p(T)]^* ,$$
$$[\rho'(T)]^* \subseteq \rho(T^*) \cup \sigma_p(T^*) .$$

4. Find den adjungerede T^* til den i Oper., opg.14, henholdsvis opg.21 betragtede operator T.

5. Vis, at enhver afbildning V af et præhilbertrum E i sig selv,

som bevarer skalarproduktet, er lineær (og dermed en isometri).

6. Vis, at en isometrisk (=normbevarende) operator $V \in L(E,E)$, hvor E er et normeret rum, er afstandsbevarende:

$$\forall x,y \in E : \quad \|Vx - Vy\| = \|x - y\| ,$$

og at omvendt i tilfælde af et reelt præhilbertrum E enhver afstandsbevarende afbildning $V : E \to E$ for hvilken $V(\underline{0}) = \underline{0}$, bevarer skalarproduktet og dermed er en lineær isometri.

7. (En maksimal, ikke unitær isometri.) Lad $E = l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Vis at den ved

$$x = (x_1,x_2,x_3,\ldots) \to Vx = (0,x_1,x_2,\ldots)$$

fastlagte afbildning $V : E \to E$ er en isometrisk operator, som ikke er unitær. Find defektrummene og defekttallene for V. Find V^*x for ethvert $x \in E$. Find alle egenværdier og tilhørende egenvektorer for V^*. Find $\sigma(V)$, $\sigma_p(V)$, $\sigma_c(V)$, $\sigma_r(V)$, og tilsvarende for V^*.

8. Bevis, at en tæt defineret, symmetrisk operator S på et Hilbertrum E er selvadjungeret, hvis enten $D(S) = E$ eller $R(S) = E$. (Vis i sidste tilfælde, at S er injektiv, og se på S^{-1}.)

9. (Projektion.) Lad $P \in L(E,E)$, hvor E betegner et komplekst Hilbertrum. Vis, at følgende udsagn er ækvivalente:

a) P er en ortogonal projektionsoperator.

b) P er idempotent ($P^2 = P$) og selvadjungeret.

c) $P^*P = P$.

d) P er normal, og $\sigma(P) \subsetneq \{0,1\}$.

e) P er normal og idempotent.

Det anbefales at vise a $\Rightarrow$ b $\Rightarrow$ c $\Rightarrow$ d $\Rightarrow$ e $\Rightarrow$ a. Hvor benyttes $K = \mathbb{C}$? Vis endelig, at i givet fald gælder for $x \in E$:

$$x \in P(E) \iff \|Px\| = \|x\| .$$

Herefter vil vi kort sige projektion i stedet for ortogonal projektionsoperator.

10. (Spejling) Lad F være et afsluttet underrum af et komplekst Hilbertrum E. Med P betegnes den tilhørende projektion, altså $P(E) = F$. Vis, at operatoren

$$S = 2P - I = P - (I - P)$$

er karakteriseret ved, at for ethvert $x \in E$ er Sx spejlbilledet af x i F i den forstand, at

$$\tfrac{1}{2}(x + Sx) \in F, \qquad (x - Sx) \perp F .$$

Vis endvidere, at følgende udsagn om en operator $S \in L(E,E)$ er ækvivalente:

a) S er en spejling i ovennævnte forstand.

b) S er involutorisk ($S^2 = I$) og selvadjungeret.

c) S er unitær og selvadjungeret.

d) S er normal, og $\sigma(S) \subsetneq \{-1,1\}$.

e) S er normal og involutorisk.

11. (Partiel isometri.) Lad F og G være afsluttede underrum af et Hilbertrum E, og lad P og Q være de tilhørende projektioner.

Ved en partiel isometri på E med F som begyndelsesrum og G som slutrum forstås en overalt defineret operator på E, som afbilder $F^{\perp}$ på $\{0\}$ og afbilder F isometrisk på G. Vis, at disse to krav til W er ensbetydende med

$$W^*W = P \quad \wedge \quad WW^* = Q \ ,$$

og at i givet fald også W^* er en partiel isometri. Vis, at enhver partiel isometri er kontinuert. Vis, at en operator $W \in L(E,E)$ er en partiel isometri hvis og kun hvis

$$W^*WW^* = W^* \quad \wedge \quad WW^*W = W \ .$$

12. Vis, at for enhver isometrisk operator V er V^* en partiel isometri.

13. Lad E og F være Hilbertrum. Vis, at hvis $T \in L(E,F)$, så er dim $\overline{T(E)} \leq$ dim E, hvor der er tale om Hilbertdimension. Vis derved, at E og F er topologisk isomorfe, hvis og kun hvis de er isometrisk isomorfe.

14. Lad F og G være afsluttede underrum af et Hilbertrum E. Vis, at

$$\dim F < \dim G \ \Rightarrow \ G \cap F^{\perp} \neq \{0\} \ .$$

Vejledning: Lad Q betegne den til G hørende prtogonale projektionsoperator, og sæt $T = Q|F$. Da gælder for enhver vektor $y \in G$, at $y \perp F \iff y \perp T(F)$. - Gælder også den modsatte implikation til den omspurgte?

15. Lad P og Q være projektioner på et Hilbertrum E. Vis, at $\|P - Q\| \leq 1$. (Udtryk P og Q ved de tilhørende spejlinger, jvf. opg. 10.) Vis dernæst, at

$$\|P - Q\| < 1 \Rightarrow \dim P(E) = \dim Q(E) .$$

(Det er endda tilstrækkeligt at forudsætte, at $\|Px - Qx\| < \|x\|$ for alle $x \in E \setminus \{0\}$.) Gælder den modsatte implikation?

16. Lad S og T være afsluttede operatorer på et Hilbertrum E med $D(S) = D(T)$, og antag at der eksisterer $c > 0$ således at der for alle $x \in D(S) \setminus \{0\}$ gælder

$$\|Sx\| \geq c\|x\| , \quad \|Tx\| \geq c\|x\| , \quad \|Sx - Tx\| < c\|x\| .$$

Vis, at $\dim R(S)^{\perp} = \dim R(T)^{\perp}$. (Benyt opg. 14 og vis at $R(S)$ er afsluttet.)

17. Lad T være en tæt defineret og afsluttet operator på et Hilbertrum E. Vis, at den ved

$$\delta(\lambda) = \dim[R(T - \lambda I)]^{\perp} = \dim[(T^* - \overline{\lambda} I)^{-1}(0)]$$

definerede funktion δ er konstant i enhver sammenhængende delmængde af regularitetsområdet $\rho'(T)$. (Benyt opg.16.)

18. Lad S være en tæt defineret, symmetrisk operator på et komplekst Hilbertrum E. Vis, at der for ethvert $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gælder

$$\dim[(S^* - \overline{\lambda} I)^{-1}(0)] = \begin{cases} \delta^+(S) & \text{for} \quad \operatorname{Im} \lambda > 0 \\ \delta^-(S) & \text{for} \quad \operatorname{Im} \lambda < 0 . \end{cases}$$

Vis tillige, at hvis $\rho'(S) \neq \emptyset$, er $\delta^+(S) = \delta^-(S)$, og S kan udvides til en selvadjungeret operator.

19. Lad S være en symmetrisk operator på et præhilbertrum E, og antag at $D(S) \neq \{\underline{0}\}$. Idet x gennemløber $D(S) \setminus \{\underline{0}\}$ sættes

$$a = \inf \frac{(Sx|x)}{\|x\|^2}, \quad b = \sup \frac{(Sx|x)}{\|x\|^2}, \quad c = \sup \frac{|(Sx|x)|}{\|x\|^2}.$$

Vis, at S er kontinuert, hvis og kun hvis S er såvel nedadtil begrænset (d.v.s. $a > -\infty$) som opadtil begrænset (d.v.s. $b < +\infty$). Vis samtidigt, at i givet fald gælder

$$\|S\| = c = \max(|a|, |b|).$$

Vejledning til $\|S\| \leqq c$: For $x,y \in D(S)$ gælder

$$4\,\mathrm{Re}(Sx|y) = (S(x+y)|x+y) - (S(x-y)|x-y)$$
$$\leqq c\|x+y\|^2 + c\|x-y\|^2.$$

Anvendes her parallellogram identiteten, og indsættes $y = tSx$, fås det ønskede for passende $t \in \dot{\mathbb{R}}$.

20. Lad S være en symmetrisk operator på et præhilbertrum $E \neq \{\underline{0}\}$, og antag at S er nedadtil begrænset med nedre grænse a (jvf. opg.19). Vis, at

$$\mathrm{Re}\,\lambda < a \Rightarrow \lambda \in \rho'(S).$$

Vis derved i tilfælde af en tæt defineret symmetrisk operator S på et komplekst Hilbertrum E, at hvis S er nedadtil begrænset, kan S udvides til en selvadjungeret operator.

21. Lad $S \in L(E,E)$ være en selvadjungeret operator på et Hilbert-

rum $E \neq \{0\}$, og lad $a,b \in \mathbb{R}$ være grænderne for S. Bevis følgende:

a) $\sigma(S) \subseteq [a,b]$, $a \in \sigma(S)$, $b \in \sigma(S)$.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\sigma(S) = \{\lambda\} \iff S = \lambda I$.

c) Spektralradien for S er $\|S\|$.

Vejledning til $a \in \sigma(S)$: Reducér til tilfældet $a = 0$, anvend her Cauchy-Schwarz' ulighed på den positive hermiteske form $(x,y) \to (Sx|y)$ på E, og sæt derefter $y = Sx$.

22. Lad A være en begrænset selvadjungeret operator på et Hilbertrum $E \neq \{0\}$ over $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, og lad p være et polynomium over K. Vis, at

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) .$$

- Resultaterne af denne og den foregående opgave er i tilfældet $K = \mathbb{C}$ indeholdt i forelæsningsnoterne.

23. Lad T være en tæt defineret, afsluttet operator på et Hilbertrum E. Med P betegner vi den projektion på $E \times E$ hvis billedrum er grafen G(T).

a) Vis, at der for ethvert $z \in E$ eksisterer netop ét $x \in D(T)$ så at $P(z,0) = (x,Tx)$.

b) Vis, at de ved $Bz = x$, $Cz = Tx$ definerede afbildninger B og $C = TB$ af E ind i E er lineære og normformindskende og dermed tilhører $L(E,E)$.

c) Vis, at B er injektiv, og at $B^{-1} = T^*T + I$, samt at B og T^*T (og TT^*) er selvadjungerede.

d) Vis, at T er afslutningen af sin restriktion T_0 til $D(T^*T)$.

e) Vis, at T^*T har samme nulrum som T og at $R(T^*T)$ er overalt tæt i $R(T^*)$.

24. To operatorer S og T kaldes metrisk ens, hvis $D(S) = D(T)$ og

$$\|Sx\| = \|Tx\| \qquad \text{for alle } x \in D(T) .$$

a) Vis, at hvis S og T er metrisk ens, gælder

$$(Sx|Sy) = (Tx|Ty) \qquad \text{for alle } x,y \in D(T) .$$

b) Vis, at to tæt definerede afsluttede operatorer S og T er metrisk ens, hvis og kun hvis

$$S^*S = T^*T .$$

Vejledning vedr. "hvis": vis først at $S_o := S|D(S^*S)$ og $T_o := T|D(T^*T)$ er metrisk ens, og benyt derpå opg.23,d.

c) Vis, at en tæt defineret afsluttet operator T er normal, hvis og kun hvis $T^*T = TT^*$.

25. Lad S og T være normale operatorer. Vis, at

$$S \subseteq T \Rightarrow S = T ,$$

altså at enhver normal operator er maximal normal.

26. Lad $T \in L(E,E)$, hvor E er et komplekst Hilbertrum. Vis, at der eksisterer netop ét par af selvadjungerede operatorer $A,B \in L(E,E)$ således at

$$T = A + iB .$$

Vis også, at T er normal hvis og kun hvis $AB = BA$.

27. (Polar dekomposition). Lad $T \in L(E,E)$. Vis, at der eksisterer netop ét par (S,V) af en positiv operator $S \in L_s(E,E)$ og

en isometrisk isomorfi V af $\overline{R(S)}$ på $\overline{R(T)}$ således at

$$T = VS \ .$$

Vis også, at V er unitær hvis og kun hvis T og T^* er injektive. Fortolk det fundne resultat geometrisk i tilfældet $E = \mathbb{R}^n$.

28. Vis, at en operator $T \in L(E,E)$ er normal hvis og kun hvis der eksisterer en positiv operator S og en unitær operator U således at

$$T = US = SU \ .$$

Vis også, at i givet fald er U entydigt bestemt ved T såfremt T er injektiv.

29. Et isoleret punkt λ_o af spektret for en normal operator A er nødvendigvis en egenværdi for A. Bevis dette i tilfældet $A \in L_s(E,E)$. (Benyt en kontinuert funktion f med $f(\lambda_o) = 1$, $f(\lambda) = 0$ for $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{\lambda_o\}$; vis, at f(A) projicerer E ind i egenrummet $(A - \lambda_o I)^{-1}(\underline{0})$.)

30. Vis, at der for enhver projektion P gælder $0 \leqq P \leqq I$.

31. Lad P og Q være projektioner på E. Bevis følgende:

a) $PQ = 0 \iff P(E) \perp Q(E) \iff P + Q$ er en projektion. I givet fald er P + Q projektionen på P(E) + Q(E).

b) $P \leqq Q \iff P(E) \subseteq Q(E) \iff P = QP \iff P = PQ \iff Q - P$ er en projektion. I givet fald er PQ = QP, og Q - P er projektionen på $\mathbf{Q(E)} \ominus P(E) := Q(E) \cap P(E)^{\perp}$.

c) $PQ = QP \iff PQ$ er en projektion $\iff P + Q - PQ$ er en projektion. I givet fald er $(PQ)(E) = P(E) \cap Q(E)$ og $(P + Q - PQ)(E) = P(E) + Q(E)$.

d) $PQ = QP \iff P(E) \ominus [P(E) \cap Q(E)] \perp Q(E)$

$\iff P(E) \ominus [P(E) \cap Q(E)] \perp Q(E) \cap Q(E)]$.

32. Lad $(P_j)_{j\in J}$ være en familie af projektioner $P_j : E \to E$. Idet det antages, at $P_i P_j = 0$ for $i \neq j$, skal man vise, at projektionen P på $\bigoplus_{j\in J} P_j(E)$ er givet ved

$$Px = \sum_{j\in J} P_j x \qquad \text{for ethvert } x \in E ,$$

hvor der på højre side er tale om en summabel familie.

33. Lad $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en voksende følge af projektioner: $P_n \leqq P_{n+1}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis, at projektionen P på det af $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n(E)$ udspændte afsluttede underrum er givet ved

$$Px = \lim_{n\to\infty} P_n x .$$

Vis endvidere, at P er den mindste projektion, som er $\geq P_n$ for ethvert n, altså at $P = \sup_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

Specielle operatorer

Indholdsoversigt:

		side
1.	Multiplikationsoperatorer.	1
2.	Absolut kontinuitet.	8
3.	Differentiationsoperatoren på $L^2(X)$.	13
4.	Randbetingelser.	16
5.	Translation og foldning i L^p-rum.	21
6.	Fouriertransformationen.	37
7.	Det udjævnede Fourierintegral.	44
8.	Konvergens og summabilitet.	48
9.	Fourier-Plancherel operatoren.	51
10.	Operatorerne P og Q.	56

Notation:

$^{\vee}$ $\quad \check{f}(x) = f(-x)$.

$^{-}$ $\quad \bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.

$\tilde{}$ $\quad \tilde{f}(x) = f(-x)$.

$*$ $\quad (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$ (foldning) (s. 23).

$\| \ \|_p$ $\quad L^p$-norm $(1 \leq p \leq +\infty)$. (s.21).

$(AC) = (AC)(X)$ = rummet af absolut kontinuerte funktioner $X \to \mathbb{C}$ (s.9).

$B = B(X)$ = rummet af begrænsede funktioner $X \to \mathbb{C}$.

$C = C(X)$ = rummet af kontinuerte funktioner $X \to \mathbb{C}$.

$C_o = C_o(X)$ = rummet af funktioner i C_o med kompakt støtte.

$\overline{C}_o = \overline{C_o(X)}$ = rummet af kontinuerte funktioner $X \to \grave{C}$ gående med 0 i det uendeligt fjerne.

$C^m = C^m(X)$ = rummet af m gange kontinuerligt differentiable funktioner $X \to \grave{C}$.

$C_o^m = C_o^m(X)$ = rummet af funktioner i C^m med kompakt støtte.

D = differentiationsoperatoren d/dx på (AC) (I §1 betegner D dog difinitionsrum). (s.8)

dom = definitionsrum.

$F, \overline{F}$ = Fouriertransformationen på L. (s.37).

J_t = translationsoperatoren: $(J_t f)(x) = f(x-t)$, (s.22).

$L = L(\grave{R})$ = rummet af (ækvivalensklasser af) Lebesgueintegrable funktioner $\grave{R} \to \grave{C}$.

$L^p = L^p(\grave{R})$ $(1 \leqq p \leqq +\infty)$ (s.21).

$L_{loc} = L_{loc}(\grave{R})$ = rummet af (ækvivalensklasser af) lokalt integrable funktioner $\grave{R} \to \grave{C}$.

m_2, m_3 = Lebesguemålet på $\grave{R}^2$, $\grave{R}^3$.

P = den maximale operator på L^2 hørende til -id/dx . (s.14).

P_o = den minimale operator på L^2 hørende til -id/dx. (s.4).

Q = multiplikationsoperatoren på L^2 hørende til funktionen $x \to x$, $x \in \grave{R}$ (s.56).

st = støtte.

T_φ = multiplikationsoperatoren $\varphi \cdot$ på et L^2-rum . (s.1).

$U, \overline{U}$ = Fourier-Plancherel operatoren på L^2. (s.53).

Specielle operatorer.

1. Multiplikationsoperatorer. Lad μ være et positivt, σ-endeligt Radonmål på et ikke tomt lokalkompakt rum X, f.eks. Lebesguemålet på $\mathbb{R}^n$. Vi betragter Hilbertrummet

$$E = L^2(\mu) = L^2(X,\mu)$$

over $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ bestående af alle (ækvivalensklasser af) kvadratisk integrable funktioner $f:X \to K$, idet normen $\|f\|_2$ af en sådan defineres ved

$$\|f\|_2^2 = \int |f(x)|^2 d\mu(x)$$

og skalarproduktet af $f \in E$ og $g \in E$ ved

$$(f|g) = \int f\bar{g}d\mu = \int f(x)\ \overline{g(x)}d\mu(x) \ .$$

Lad $\varphi:X \to K$ være en given μ-målelig funktion (eller dennes ækvivalensklasse). Produktet $\varphi\psi$ af 2 sådanne defineres punktvis:

$$(\varphi\psi)(x) = \varphi(x)\ \psi(x) \ , \qquad x \in X \ .$$

Vi definerer en afbildning T_φ på $E = L^2(\mu)$ ved

$$D(T_\varphi) = \{f \in L^2(\mu) \mid \varphi f \in L^2(\mu)\}$$
$$T_\varphi f = \varphi f \qquad \text{for } f \in D(T_\varphi) \ .$$

Det verificeres umiddelbart, at $D(T_\varphi)$ er et underrum af $L^2(\mu)$, og at T_φ er en operator på $L^2(\mu)$. Den kaldes den ved φ bestemte multiplikationsoperator (betegnes undertiden $\varphi\cdot$ i stedet for T_φ).

1.1. Lemma. Grafen for T_φ har parameterfremstillingen

$$G(T_\varphi) = \{(\frac{h}{1+|\varphi|} \ , \ \frac{\varphi h}{1+|\varphi|}) \mid h \in L^2(\mu)\} \ .$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Bevis}}.\quad f \in D(T_\varphi) &\iff f \in L^2(\mu) \wedge \varphi f \in L^2(\mu) \\ &\iff |f| + |\varphi f| \in L^2(\mu) \\ &\iff (1 + |\varphi|)f \in L^2(\mu) \\ &\iff \exists h \in L^2(\mu):\ f = h/(1 + |\varphi|)\ . \end{aligned}$$

I givet fald er $h = (1 + |\varphi|)f$ entydigt bestemt ud fra $f \in D(T_\varphi)$, og der gælder $T_\varphi f = \varphi f = \varphi h/(1 + |\varphi|)$. |

1.2. Sætning. For enhver μ-målelig funktion $\varphi: X \to K$ er multiplikationsoperatoren T_φ en normal operator på $L^2(\mu)$, og der gælder

$$(T_\varphi)^* = T_{\overline{\varphi}}\ .$$

Endvidere er T_φ injektiv hvis og kun hvis $\varphi(x) \neq 0$ for μ-næsten alle $x \in X$; og i givet fald er

$$(T_\varphi)^{-1} = T_{1/\varphi}\ .$$

Et tal $\lambda \in K$ er egenværdi for T_φ hvis og kun hvis originalmængden $\varphi^{-1}(\lambda)$ har positivt μ-mål. Det tilhørende egenrum er da

$$(T_\varphi - \lambda I)^{-1} = \{f \in L^2(\mu) \mid f(x) = 0 \text{ for } \mu\text{-n.a. } x \in C\varphi^{-1}(\lambda)\}\ .$$

Spektret $\sigma(T_\varphi)$ er den essentielle værdimængde for φ, d.v.s.

$$\sigma(T_\varphi) = \{\lambda \in K \mid \forall r > 0:\quad \mu(\varphi^{-1}(K(\lambda,r))) > 0\ ,$$

hvor $K(\lambda,r) = \{\zeta \in K \mid |\zeta - \lambda| < r\}$. Endelig er T_φ begrænset hvis og kun hvis φ er essentielt begrænset, d.v.s. $\varphi \in L^\infty(X,\mu) = L^\infty(\mu)$; og i givet fald bestemmes operatornormen af T_φ ved

$$\begin{aligned} \|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty &= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |\varphi(x)| \\ &= \min\{c \in [0,+\infty[\mid |\varphi(x)| \leq c \text{ for } \mu\text{-næsten alle } x \in X\}\ . \end{aligned}$$

Bevis. Vi bestemmer først den adjungerede til T_φ og viser samtidigt at $D(T_\varphi)$ er tæt i $L^2(\mu)$. Lad da g, $g^* \in L^2(\mu)$, og antag at $(g,g^*) \in G(T_\varphi)^*$, d.v.s.

$$\forall f \in D(T_\varphi): \qquad (T_\varphi f | g) = (f | g^*) \ .$$

Under benyttelse af parameterfremstillingen for $G(T_\varphi)$ (Lemma 1.1) kan dette omskrives til, at der for alle $h \in L^2(\mu)$ gælder

$$\int \frac{\varphi h}{1+|\varphi|} \cdot \overline{g} \, d\mu = \int \frac{h}{1+|\varphi|} \cdot \overline{g^*} \, d\mu$$

altså

$$\int h \cdot \overline{\frac{\overline{\varphi} g - g^*}{1+|\varphi|}} \, d\mu = 0 \ .$$

Dette er ensbetydende med, at funktionen

$$\frac{\overline{\varphi} g - g^*}{1+|\varphi|} = \frac{\overline{\varphi}}{1+|\varphi|} g - \frac{1}{1+|\varphi|} g^* \ ,$$

(der er kvadratisk μ-integrabel, fordi g, $g^* \in L^2(\mu)$ og fordi $\overline{\varphi}/(1+|\varphi|)$ og $1/(1+|\varphi|)$ er begrænsede og målelige) er ortogonal på enhver funktion $h \in L^2(\mu)$, og altså selv er $=0$ μ-næsten overalt, d.v.s.

$$g^* = \overline{\varphi} g \ .$$

Hermed er da vist, at

$$G(T_\varphi)^* = \{(g,g^*) \in L^2(\mu) \times L^2(\mu) \mid g^* = \overline{\varphi} g\} = G(T_{\overline{\varphi}}) \ ,$$

altså at denadjungerede relation til operatoren T_φ er operatoren $T_{\overline{\varphi}}$. Men dette betyder jo, at T_φ er tæt defineret og at $(T_\varphi)^* = T_{\overline{\varphi}}$ (Op.H., lemma 4.1).

Det er klart, at $D(T_{\bar{\varphi}}) = D(T_\varphi)$, altså $D((T_\varphi)^*) = D(T_\varphi)$. For ethvert $f \in D(T_\varphi)$ gælder endvidere

$$\|(T_\varphi)^* f\|_2^2 = \|\bar{\varphi} f\|_2^2 = \int |\bar{\varphi}|^2 |f|^2 d\mu = \int |\varphi|^2 |f|^2 d\mu = \|T_\varphi f\|_2^2$$

Da således T_φ og $(T_\varphi)^*$ er metrisk ens, bliver T normal (Op.H., §8).

Hvis vi for $\alpha, \beta \in K$ betegner funktionen $x \to \alpha\varphi(x) + \beta$ med $\alpha\varphi + \beta$, gælder åbenbart (hvis $\alpha \neq 0$)

$$T_{\alpha\varphi+\beta} = \alpha T_\varphi + \beta I \ .$$

For $f \in L^2(\mu)$ og $\lambda \in K$ gælder i $L^2(\mu)$

$$\begin{aligned} T_\varphi f = \lambda f &\iff (\varphi - \lambda) f = 0 \\ &\iff f(x) = 0 \text{ for } \mu\text{-næsten alle } x \in C\varphi^{-1}(\lambda) \end{aligned}$$

Hvis specielt $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0$, må derfor $f = 0$ i $L^2(\mu)$, hvilket viser, at λ så ikke er egenværdi for T_φ, altså at $T_\varphi - \lambda I$ er injektiv. Hvis derimod $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0$, findes en μ-målelig delmængde $A \subseteq \varphi^{-1}(\lambda)$ med $0 < \mu(A) < +\infty$ (fordi μ er forudsat σ-endeligt), og funktionen $f = 1_A$ tilhører da $L^2(\mu) \setminus \{0\}$ og opfylder $T_\varphi f = \lambda f$, hvorfor λ må være en egenværdi for T_φ.

Idet vi sætter $\lambda = 0$, slutter vi, at T_φ er injektiv (d.v.s. 0 ikke egenværdi for T_φ), hvis og kun hvis $\mu(\varphi^{-1}(0)) = 0$, altså $\varphi(x) \neq 0$ for (μ-næsten) alle $x \in X$. I givet fald er $1/\varphi$ målelig, og

$$\begin{aligned} G(T_\varphi^{-1}) &= \{(f,g) \in L^2(\mu) \times L^2(\mu) \mid f = \varphi g\} \\ &= \{(f,g) \in L^2(\mu) \times L^2(\mu) \mid g = \varphi^{-1} f\} = G(T_{1/\varphi}) \ . \end{aligned}$$

Hvis $\varphi \in L^\infty(\mu)$, er $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_\infty$ for μ-næsten alle $x \in X$, og derfor gælder for ethvert $f \in L^2(\mu)$

$$|\varphi(x)f(x)| = |\varphi(x)|\,|f(x)| \leqq \|\varphi\|_\infty |f(x)|$$

for μ-n.a. $x \in X$, hvilket betyder at $\varphi f \in L^2(\mu)$ og at

$$\|\varphi f\|_2 \leqq \|\varphi\|_\infty \|f\|_2 .$$

Dette betyder videre, at $D(T_\varphi) = L^2(\mu)$ og at T_φ er begrænset med $\|T_\varphi\| \leqq \|\varphi\|_2$. Lad dernæst omvendt T_φ være en begrænset operator, og lad os vise at φ må være essentielt begrænset med $\|\varphi\|_\infty \leqq \|T_\varphi\|$. Vi skal altså vise, at mængden

$$N = \{x \in X \mid |\varphi(x)| > \|T_\varphi\|\}$$

har målet $\mu(N) = 0$. Da μ er σ-endeligt, er det tilstrækkeligt at vise, at $\mu(A \cap N) = 0$ for enhver μ-målelig mængde $A \subseteq X$ med $\mu(A) < +\infty$, thi X kan jo overdækkes med en numerabel familie af sådanne mængder. Vi sætter $f(x) = 1$ for $x \in A \cap N$, og $f(x) = 0$ iøvrigt. Da gælder $f \in L^2(\mu)$ og, hvis $\mu(A \cap N) > 0$,

$$\|T_\varphi f\|_2^2 = \int |\varphi f|^2 d\mu = \int_{A\cap N} |\varphi|^2 d\mu > \int_{A\cap N} \|T_\varphi\|^2 d\mu = \|T_\varphi\|^2 \|f\|_2^2$$

i modstrid med betydningen af operatornormen $\|T_\varphi\|$.

Tilbage står at bestemme spektret $\sigma(T_\varphi)$ eller resolventmængden $\rho(T_\varphi)$. Vi finder for $\lambda \in K$:

$$\begin{aligned}
\lambda \in \rho(T_\varphi) &\iff T_\varphi - \lambda I = T_{\varphi-\lambda} \text{ invertibel i } L(E,E) \\
&\iff T_{\varphi-\lambda} \text{ injektiv} \wedge T_{1/(\varphi-\lambda)} \text{ begrænset} \\
&\iff 1/(\varphi-\lambda) \text{ er defineret } \mu\text{-n.o. og} \in L^\infty(\mu) \\
&\iff \exists r > 0: |\varphi - \lambda| \geqq r \quad \mu\text{-n.o.} \\
&\iff \exists r > 0: \mu(\varphi^{-1}(K(\lambda,r))) = 0.
\end{aligned}$$

<u>Korollar</u>: T_φ er <u>selvadjungeret</u> hvis og kun hvis $\varphi(x)$ er reel (μ-næsten) overalt i X. T_φ er <u>unitær</u> hvis og kun hvis $|\varphi(x)| = 1$

(μ-næsten) overalt.

1.3. Sætning. Ved $\varphi \to T_\varphi$ defineres en isometrisk *-isomorfi af den kommutative Banach*-algebra $L^\infty(X,\mu)$ på en delalgebra af Banach*-algebra $L(E,E)$ af alle begrænsede, overalt definerede operatorer på Hilbertrummet $E = L^2(X,\mu)$.

Her er $L^\infty(X,\mu)$ forsynet med punktvis multiplikation, og normeret ved $\| \ \|_\infty$, samt udstyret med involutionen $\varphi \to \bar{\varphi}$ (punktvis konjugering). Og $L(E,E)$ er udstyret med operatormultiplikation, operatornorm, samt adjungering som involution.

Bevis. Vi har allerede vist, at $T_\varphi \in L(E,E)$ når $\varphi \in L^\infty(\mu)$, samt at $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ og $(T_\varphi)^* = T_{\bar{\varphi}}$. Tilbage står, at afbildningen $\varphi \to T_\varphi$ er (lineær og) multiplikativ:

$$T_{\varphi\psi} = T_\varphi T_\psi \quad \text{for } \varphi,\psi \in L^\infty(\mu) \ ,$$

og dette følger af, at der for ethvert $f \in L^2(\mu)$ gælder

$$T_{\varphi\psi} f = \varphi\psi \cdot f = \varphi \cdot \psi f = \varphi \cdot T_\psi f = T_\varphi T_\psi f \ . \ |$$

Det kan tilføjes, at hvis man for reelle $\varphi,\psi \in L^\infty(\mu)$ definerer $\varphi \leqq \psi$ ved $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ μ-næsten overalt, så gælder med den velkendte ordensrelation på mængden af selvadjungerede operatorer i $L(E,E)$ implikationen

$$\varphi \leqq \psi \iff T_\varphi \leqq T_\psi \ .$$

Beviset herfor kan overlades til læseren.

Korollar. Spektret $\sigma(\varphi)$ for et element φ af algebraen $L^\infty(X,\mu)$ er den essentielle værdimængde for φ (nemlig spektret for multiplikationsoperatoren $T_\varphi = \varphi \cdot$ på $L^2(X,\mu)$).

Bevis. På grund af ovenstående isomorfi er det klart, at $\sigma(\varphi)$ er spektret for T_φ som element af billedalgebraen $\{T_\varphi | \varphi \in L^\infty(X,\mu)\} \subsetneq L(E,E)$. At dette sidste spektrum er identisk med spektret for operatoren T_φ (altså for T_φ som element af hele algebraen $L(E,E)$) fremgår straks af, at hvis $T_\varphi - \lambda I$ er invertibel i $L(E,E)$, så også i den omtalte billedalgebra. Thi

$$(T_\varphi - \lambda I)^{-1} = (T_{\varphi-\lambda})^{-1} = T_{1/(\varphi-\lambda)}$$

tilhører billedalgebraen, fordi $1/(\varphi-\lambda) \in L^\infty(X,\mu)$ eftersom $T_{1/(\varphi-\lambda)}$ er en begrænset operator. |

Bemærkning. Ved om fornødent at erstatte X med $st(\mu)$ kan vi gerne antage, at $st(\mu) = X$, altså at enhver ikke tom, åben mængde $A \subsetneq X$ har positivt mål $\mu(A) > 0$. I så fald gælder for enhver kontinuert funktion φ, at

$$\sigma(\varphi) = \sigma(T_\varphi) = \overline{\varphi(X)},$$
$$\|\varphi\|_\infty = \|T_\varphi\| = \sup_{x\in X} |\varphi(x)| ,$$

idet den essentielle værdimængde for φ her er identisk med afslutningen $\overline{\varphi(X)}$ af værdimængden $\varphi(X)$. Thi $\varphi^{-1}(K(\lambda,r))$ er en åben delmængde af X, hvorfor

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(T_\varphi) &\iff \forall r > 0: \quad \mu(\varphi^{-1}(K(\lambda,r))) > 0 \\
&\iff \forall r > 0: \quad \varphi^{-1}(K(\lambda,r)) \neq \emptyset \\
&\iff \forall r > 0: \quad \varphi(X) \cap K(\lambda,r) \neq \emptyset \\
&\iff \lambda \in \overline{\varphi(X)} \ .
\end{aligned}$$

Hvis φ desuden har kompakt støtte, altså $\varphi \in C_o(X)$, (specielt hvis X er kompakt) bliver værdimængden $\varphi(X)$ jo kompakt, og derfor

$$\sigma(\varphi) = \sigma(T_\varphi) = \varphi(X) ,$$
$$\|\varphi\|_\infty = \|T_\varphi\| = \max_{x\in X} |\varphi(x)| .$$

Det sidste gælder for øvrigt også under den svagere forudsætning $\varphi \in \overline{C_o}(X)$, altså $\varphi(x) \to 0$ når x fjerner sig i det uendelige i X (hvis X er ikke-kompakt), jvf. T.V.R., opg.62. I dette tilfælde gælder endvidere

$$\sigma(\varphi) = \sigma(T_\varphi) = \varphi(X) \cup \{0\} .$$

2. Absolut kontinuitet. Vi betragter Lebesguemålet på et ikke tomt interval $X \subseteq \mathring{R}$ og betegner med $\mathcal{L}_{loc} = \mathcal{L}_{loc}(X)$ vektorrummet af alle Lebesguemålelige funktioner $f : X \to \mathring{C}$, som er lokalt integrable i X, d.v.s. integrable over ethvert kompakt delinterval af X. Med $L_{loc} = L_{loc}(X)$ betegnes vektorrummet af alle ækvivalensklasser af lokalt integrable funktioner.

En funktion $u:X \to \mathring{C}$ kaldes absolut kontinuert, dersom der eksisterer en funktion $f \in \mathcal{L}_{loc}(X)$ således at der for alle $x, x_o \in X$ gælder

$$u(x) - u(x_o) = \int_{x_o}^{x} f(y)dy . \tag{1}$$

I givet fald kaldes u en stamfunktion til f og f en afledet af u. Det er åbenbart tilstrækkeligt at verificere (1) for en enkelt værdi af $x_o \in X$ og for alle $x \in X$. Samtlige afledede f af en absolut kontinuert funktion u danner åbenbart en ækvivalensklasse, fordi en funktion $f \in \mathcal{L}_{loc}(X)$ er ækvivalent med 0 hvis og kun hvis dens integral over alle kompakte delintervaller af X er 0 (lemma 5.7 nedenfor).

Vi har således en afbildning

$$D: (AC) \to L_{loc}$$

af mængden (AC) af alle absolut kontinuerte funktioner $u:X \to \mathbb{C}$ på $L_{loc} = L_{loc}(X)$, idet vi til $u \in (AC)$ lader svare ækvivalensklassen af samtlige afledede af u. Det ses let, at (AC) er et underrum af vektorrummet $C = C(X)$ af alle kontinuerte komplekse funktioner på X, og at afbildningen D er lineær. Kernen for D består åbenbart af alle konstante funktioner $X \to \mathbb{C}$.

Da en ækvivalensklasse højst kan indeholde én kontinuert funktion, kan vi tillade os at identificere enhver kontinuert funktion $f \in C(X)$ med sin ækvivalensklasse $\dot{f} \in L_{loc}(X)$ og altså opfatte C(X) som et underrum af $L_{loc}(X)$, På den anden side er vektorrummet $C^1 = C^1(X)$ af alle differentiable funktioner $u:X \to \mathbb{C}$ med kontinuert differentialkvotient åbenbart et underrum af (AC), og den ovenfor indførte lineære afbildning $D:(AC) \to L_{loc}$ er en udvidelse af den klassiske differentiationsoperator, der afbilder C^1 på C og dermed ind i L_{loc}. Fremover vil vi ikke altid skelne mellem en funktion $f \in \mathcal{L}_{loc}$ og dens ækvivalensklasse $\dot{f} \in L_{loc}$.

Ved den foretagne udvidelse af differentiationsoperatoren D fra C^1 til (AC) bevares en række egenskaber. Af vigtighed for det følgende er navnlig reglen om differentiation af et produkt, eller med andre ord reglen for <u>delvis integration</u>.

2.1. <u>Sætning</u>. Produktet af to absolut kontinuerte funktioner u,v på et inteval $X \subseteq \mathbb{R}$ er absolut kontinuert på X, og der gælder

$$D(uv) = Du \cdot v + uDv \ .$$

For $a,b \in X$ haves altså

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b Du \cdot v + \int_a^b uDv \ .$$

(herved angiver prikken hvor langt operatoren D skal virke.)

Bevis. Idet vi sætter Du = f og Dv = g fås under benyttelse af Fubinis sætning:

$$\int_a^b Du\cdot v = \int_a^b (f(y)v(y)dy = \int_a^b f(y)\{v(a) + \int_a^y g(x)dx\}dy$$

$$= v(a)\int_a^b f(y)dy + \iint\limits_{a\leqq x\leqq y\leqq b} f(y)g(x)dxdy ,$$

$$\int_a^b uDv = \int_a^b u(x)g(x)dx = \int_a^b \{u(a) + \int_a^x f(y)dy\}\, g(x)dx$$

$$= u(a)\int_a^b g(x)dx + \iint\limits_{a\leqq y\leqq x\leqq b} f(y)g(x)dxdy .$$

Idet summen af de to dobbeltintegraler er integralet over kvadratet $[a,b] \times [a,b]$, altså

$$\int_a^b\int_a^b f(y)g(x)dxdy = \int_a^b f(y)dy \int_a^b g(x)dx ,$$

fås ialt

$$\int_a^b Du\cdot v + \int_a^b uDv$$

$$= v(a)(u(b)-u(a)) + u(a)(v(b) - v(a)) + (u(b) - u(a))(v(b)-v(a))$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a). \quad |$$

2.2. Lemma. Lad X være et ikke tomt, åbent interval på $\mathbb{R}$. Differentiationsoperatoren D afbilder $C_o^1(X)$ på den hyperplan H i $C_o(X)$ der består af alle funktioner $g \in C_o(X)$ for hvilke $\int_X g = 0$.

Bevis. Lad først $v \in C_o^1(X)$, og vælg $a,b \in X$ så at $st(v) \subseteqq [a,b]$ og dermed af kontinuitetsgrunde $v(a) = v(b) = 0$. Da bliver

$$\int_X Dv = \int_a^b Dv = v(b) - v(a) = 0 .$$

Lad dernæst $g \in C_o(X)$ og $\int_X g = 0$. Vi vælger nu $a,b \in X$ så at $st(g) \subseteqq [a,b]$ og indfører en stamfunktion v til g ved

$$v(x) = \int_a^x g(y)dy \ , \qquad x \in X \ .$$

Herved gælder $v \in C^1(X)$, $Dv = g$, og $st(v) \subsetneqq [a,b]$. Det er jo klart, at $v(x) = 0$ for $x < a$; og det samme gælder for $x > b$ fordi g da er 0 uden for $[a,x]$, hvorfor $\int_a^x g = \int_X g = 0$. At $H = \{g \in C_o(X) \mid \int_X g = 0\}$ er en hyperplan i $C_o(X)$, følger af, at afbildningen $\varphi: C_o(X) \to \dot{C}$ defineret ved

$$(2) \qquad \varphi(g) = \int_X g$$

åbenbart er en linearform på $C_o(X)$, der ikke forsvinder identisk. Der eksisterer jo $g \in C_o(X)$ med $g \geqq 0$ overalt, $g \not\equiv 0$, og dermed $\int_X g > 0$.) Hermed er da vist, at D afbilder $C_o^1(X)$ på hyperplanen $H = \varphi^{-1}(0)$. |

2.3. Sætning. Lad X være et ikke tomt, åbent interval på $\dot{R}$, og lad $u,f \in L_{loc}(X)$. Da er u (ækvivalent med) en absolut kontinuert funktion med den afledede $Du = f$, hvis og kun hvis

$$(3) \qquad \forall v \in C_o^1(X) : \qquad \int_X uDv = -\int_X fv \ .$$

Bevis. Indledningsvis bemærkes at produktet af en funktion fra $C_o(X)$ og en funktion fra $L_{loc}(X)$ åbenbart er Lebesgue-integrabel over X. Da $v \in C_o^1(X) \subsetneqq C_o(X)$, og dermed $Dv \in C_o(X)$, er hermed vist, at integralerne i (3) eksisterer.

Hvis $u \in (AC)$ og $Du = f$, følger (3) ved anvendelse af sætn. 2.1 om delvis integration, idet $a,b \in X$ vælges så at $st(v) \subsetneqq [a,b]$, hvorved $v(a) = v(b) = 0$, og integralerne reduceres til integraler over $[a,b]$. Som allerede bemærket er jo $C_o^1 \subsetneqq (AC)$, og differentiationsoperatoren D på (AC) en udvidelse af den klassiske differentiationsoperator D på C^1, eller på C_o^1.

Lad dernæst betingelsen (3) være opfyldt. Med a og b som ovenfor indfører vi en stamfunktion u^* til f i X ved

$$u^*(x) = \int_a^x f(y)dy \ , \qquad x \in X \ .$$

Da $f \in L_{loc}(X)$, er $u^* \in (AC)$ og $Du^* = f$. Vi anvender nu igen sætn. 2.1 på intervallet [a,b], men med u^* i stedet for u. Herved fås

$$- \int_X fv = - \int_a^b Du^* . v = \int_a^b u^* Dv = \int_X u^* Dv \ ,$$

gældende for ethvert $v \in C_o^1(X)$. Sammenholdt med (3) viser dette, at

(4) $\forall v \in C_o^1(X)$: $\qquad \int_X (u - u^*)Dv = 0$.

Vi indfører derpå en linearform ψ på $C_o(X)$ ved

$$\psi(g) = \int_X (u - u^*)g \ ,$$

hvilket har mening, da integranden tilhører $C_o(X)$, fordi $u - u^* \in C(X)$ og $g \in C_o(X)$. Med betegnelserne fra lemma 2.2 udtrykker (4) nu, at $\psi(g) = 0$ for alle $g \in H$. Da H er en hyperplan, må enten $\psi \equiv 0$ eller $H = \psi^{-1}(0)$. På den anden side gælder $H = \varphi^{-1}(0)$ for den i (2) definerede linearform. Da samtlige "ligninger" for en hyperplan er parvis proportionale, slutter vi, at der eksisterer en konstant c så at

$$\forall g \in C_o(X): \qquad \psi(g) = c \ \varphi(g)$$

(hvorved tilfældet $\psi \equiv 0$ svarer til $c = 0$). Hermed er da vist, at funktionen

$$h := (u - u^*) - c \in L_{loc}(X)$$

opfylder betingelsen $\int hg = 0$ for alle $g \in C_o(X)$. Men dette er ef-

ter lemma 5.7 nedenfor: ensbetydende med, at h = 0 (næsten overalt), altså at

$$u(x) = u^*(x) + c \tag{5}$$

for næsten alle $x \in X$. Da $u^* \in (AC)$, er det således godtgjort, at u er (ækvivalent med) en absolut kontinuert funktion. Endelig gælder ifølge (5) $Du = Du^* = f$. |

Bemærkning. I betingelsen (3) er det tilstrækkeligt at medtage alle funktioner $v \in C_0^\infty(X)$, idet man i beviserne for lemma 2.2 og sætn. 2.3 blot behøver at erstatte C_0^1 og C_0 med C_0^∞. Herefter udtrykker (3) simpelthen at $Du = f$ i distributionsbetydning.

3. Differentiationsoperatoren på $L^2(X)$. Lad X være et ikke tomt, åbent interval på $\dot{R}$. Hilbertrummet

$$E = L^2(X)$$

(med koefficientlegemet $\dot{C}$) er et underrum af $L_{loc}(X)$, fordi enhver over X kvadratisk integrabel funktion f er integrabel over ethvert endeligt interval $[a,b] \subseteq X$ ifølge Cauchy-Schwarz' ulighed:

$$\left(\int_a^b |f|\cdot 1\right)^2 \leqq \int_a^b |f|^2 \cdot \int_a^b 1 \leqq (b-a) \int_X |f|^2 < +\infty .$$

Vi kan derfor betragte restriktionen af grafen for den i §2 indførte differentiationsoperator $D:(AC) \to L_{loc}$ til $L^2(X) \times L^2(X)$. Vi foretrækker imidlertid at erstatte D med $i^{-1}D = -iD$ og definerer en operator P på $E = \mathbb{D}^2(X)$ på følgende måde, idet vi nu betegner definitionsrummet for en operator T med dom T:

$$\text{dom } P = \{u \in L^2(X) \cap (AC)(X) \mid Du \in L^2(X)\} , \tag{6}$$

$$Pu = -iDu \quad \text{for} \quad u \in \text{dom } P .$$

Grafen $G(P)$ for P består da af alle $(u,f) \in L^2(X) \times L^2(X)$ for hvilke en af nedenstående to ensgyldige betingelser (jvf. sætn. 2.3) er opfyldt:

$$(7) \qquad \forall x_o, x \in X : \quad u(x) - u(x_o) = i \int_{x_o}^{x} f(y)dy \ ,$$

$$(8) \qquad \forall v \in C_o^1(X) : \quad \int_X uDv = - i \int_X fv \ .$$

Denne operator P kaldes den maximale operator hørende til differentiationssymbolet $-iD$. Det er klart, at

$$C_o^1(X) \subsetneq \text{dom } P \ ,$$

fordi der for $u \in C_o^1(X)$ gælder $Du \in C_o(X) \subsetneq L^2(X)$. Vi kan derfor betragte restriktionen P_o af P til $C_o^1(X)$, altså differentialoperatoren $-iD$ (gerne "klassisk") betragtet på $C_o^1(X)$. Man kalder P_o (eller undertiden dens afslutning) for den minimale operator hørende til $-iD$.

Hvis vi i (8) erstatter v med $\bar{v}$ (punktvis konjugering), multiplicerer med i og indsætter

$$i\,D\bar{v} = i\,\overline{Dv} = \overline{-i\,Dv} = \overline{P_o v} \ ,$$

kan (8) omformes til

$$(9) \qquad \forall v \in \text{dom } P_o : \qquad (u|P_o v) = (f|v) \ .$$

Dette er altså betingelsen for, at et par $(u,f) \in L^2(X) \times L^2(X)$ tilhører $G(P)$. Men samtidig er (9) definitionen på, at $u \in \text{dom } P_o^* \wedge P_o^* u = f$, altså at $(u,f) \in G(P_o^*)$. Hermed er bevist

3.1. Sætning. Den maximale operator P hørende til $-iD$ er den adjungerede til den minimale operator P_o, altså $P_o^* = P$.

Korollar. P er afsluttet; P_0 er symmetrisk, og

$$\overline{P_0} = P^* \subseteq P \ , \quad \overline{P_0^*} = P \ .$$

Thi $P_0^* = P$ er en udvidelse af P_0. (Selve symmetrien af P_0 kunne dog også let vises direkte ved delvis integration.) Da P_0 er symmetrisk, eksisterer afslutningen $\overline{P_0} = P_0^{**} = P^*$; og da $P = P_0^*$ er en afsluttet udvidelse af P_0, bliver også $P \supseteq \overline{P_0}$ $(=P^*)$. |

Hvis vi havde valgt at definere P og P_0 som maximal og minimal operator hørende til selve differentiationssymholet D i stedet for -iD (eller lige så gerne iD), så ville P_0 ikke blive symmetrisk, men "skævsymmetrisk", idet der ville gælde $P_0^* = -P \supseteq -P_0$.

Vi går nu over til at bestemme defektindex (δ^+,δ^-) for den symmetriske operator P_0 (eller for dens afslutning $\overline{P}_0$). Hertil skal betragtes ligningerne $P_0^* u = \pm iu$, altså

$$Pu = \pm iu \ .$$

Vi søger altså de over X kvadratisk integrable løsninger u til differentialligningen $Du = \mp u$ med $u \in (AC)$. Men da højre side $\mp u$ således skal være (endda absolut) kontinuert i X, må u som stamfunktion dertil automatisk blive af klassen $C^1(X)$ og dermed være en "klassisk" løsning til differentialligningen $du/dx = \mp u(x)$, altså

$$u(x) = c\, e^{\mp x} \ , \qquad x \in X \ ,$$

i de to tilfælde, idet c er en kompleks konstant. En sådan funktion u tilhører altså defektrummet $\Delta^{\pm} = (P \mp iI)^{-1}(0)$ for P_0 hvis og kun hvis $u \in L^2(X)$ (og dermed $Pu = iu \in L^2(X)$). Nu gælder åbenbart

$$\int_X e^{-2x}dx < +\infty \iff \inf X > -\infty ,$$

$$\int_X e^{2x}dx < +\infty \iff \sup X < +\infty .$$

Hermed er vi nået til følgende resultat, idet a og b betegner to reelle tal med a < b:

3.2. Sætning. Om den minimale differentiationsoperator P_o på $L^2(X)$ gælder:

1°) Hvis X er et begrænset interval]a,b[, har P_o defektindex (1,1) og besidder derfor uendelig mange selvadjungerede udvidelser.

2°) Hvis X =]a,+ ∞[, er $(\delta^+,\delta^-) = (1,0)$; og hvis X =]- ∞,b[, er $(\delta^+,\delta^-) = (0,1)$. I disse tilfælde er P_o derfor maksimal symmetrisk og kan ikke udvides til en selvadjungeret operator.

3°) Hvis X = Ṙ, har P_o defektindex (0,0). Derfor er $\bar{P}_o$ selvadjungeret og $\bar{P}_o = P_o^* = P$. I dette tilfælde er således den maximale operator P hørende til -iD selvadjungeret.

4. Randbetingelser. Vi betragter en funktion u ∈ dom P, hvor P er den maximale operator hørende til - iD på et åbent interval X, som vi nu antager ≠ Ṙ. Idet vi benytter den absolut kontinuerte repræsentant for ækvivalensklassen u og sætter Pu = f, gælder ifølge (7) for ethvert $x_o, x \in X$

$$u(x) = u(x_o) + i\int_{x_o}^{x} f(y)dy .$$

Her er imidlertid højre side veldefineret også for $x \in \bar{X}$ og fremstiller en absolut kontinuert funktion af $x \in \bar{X}$, fordi

$f \in L^2(X) = L^2(\bar{X})$, og dermed f er integrabelt over ethvert endeligt delinterval af $\bar{X}$ som nævnt i begyndelsen af §3. På denne måde kan vi altså repræsentere ethvert element $u \in \text{dom } P$ ved en funktion $u \in (AC)(\bar{X})$ (med $Du \in L^2(\bar{X}) = L^2(X)$). Denne fortolkning vil blive underforstået i det følgende hver gang vi omtaler <u>værdien</u> $u(x)$ af $u \in \text{dom } P$ i et punkt $x \in \bar{X}$.

Lad os nu nærmere undersøge tilfældet 1°, hvor $X =]a,b[$ er et <u>begrænset</u>, åbent interval. Da endepunkterne a,b tilhører $\bar{X}$, har ethvert $u \in \text{dom } P$ i henhold til det ovenstående veldefinerede <u>randværdier</u> $u(a), u(b)$ idet u repræsenteres ved en funktion $u \in (AC)(\bar{X}), \bar{X} = [a,b]$.

4.1. <u>Lemma</u>. For vilkårlige $u,v \in \text{dom } P$ gælder

$$(Pu|v) - (u|Pv) = -i[u\bar{v}]_a^b ,$$

hvor $[u\bar{v}]_a^b = u(b)\overline{v(b)} - u(a)\overline{v(a)}$.

<u>Bevis</u>.

$$(Tu|v) - (u|Tv) = \int_a^b (-iDu\cdot\bar{v} + u\cdot\overline{iDv})$$
$$= -i\int_a^b (Du\cdot\bar{v} + uD\bar{v}) = -i[u\bar{v}]_a^b$$

ifølge sætn. 2.1. |

Dette lemma tillader os nu at bestemme $\bar{P}_0 = P^*$. Da $\bar{P}_0 \subseteq P$, er det tilstrækkeligt at bestemme dom $\bar{P}_0$. Definitionsmæssigt består dom $\bar{P}_0 = \text{dom } P^*$ af alle $u \in \text{dom } P$ for hvilke

$$\forall v \in \text{dom } P : \qquad (Pv|u) = (v|Pu) .$$

Ifølge lemma 4.1 er denne betingelse ækvivalent med

$$(10) \qquad \forall v \in \text{dom } P : \qquad u(b)\overline{v(b)} - u(a)\overline{v(a)} = 0 .$$

Betingelsen (10) er i hvert fald opfyldt, hvis den givne funktion $u \in \text{dom } P$ tilfredsstiller følgende to homogene randbetingelser

$$u(a) = u(b) = 0 \ .$$

Og dette er også nødvendigt for at (10) skal gælde. Anvender man nemlig (10) på to funktioner $v_1, v_2 \in \text{dom } P$ for hvilke

$$\begin{vmatrix} v_1(a) & v_1(b) \\ v_2(a) & v_2(b) \end{vmatrix} \neq 0$$

(f.eks. $v_1(x) = 1$, $v_2(x) = x$), så følger det, at $u(a) = u(b) = 0$.

Hermed er da vist, at $\overline{P}_0 = P^*$ er restriktionen af P til

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} \text{dom } \overline{P}_0 &= \{u \in \text{dom } P \mid u(a) = u(b) = 0\} \\ &= \{u \in (AC) \mid Du \in L^2 \wedge u(a) = u(b) = 0\} \ . \end{aligned}$$

Endelig vil vi bestemme samtlige selvadjungerede udvidelser S af den minimale operator P_0 (og dermed af $\overline{P}_0$), altså samtlige selvadjungerede restriktioner S af den maximale operator $P = P_0^*$ (jvf. Op. H., lemma 6.5). Dette kan ske under benyttelse af Cayleytransformationen (Op.H.,§7), men sker også let direkte.

Vi begynder med at analysere opgaven. Lad S være en selvadjungeret operator af den ønskede art:

$$\overline{P}_0 \subseteq S = S^* \subseteq P \ .$$

Da S skal være en symmetrisk restriktion af P, fås af lemma 4.1 for $u, v \in \text{dom } S$:

$$\text{(12)} \qquad u(b)\overline{v(b)} - u(a)\overline{v(a)} = (Su \mid v) - (u \mid Sv) = 0 \ .$$

Sættes $v = u$, sluttes heraf at $|u(b)| = |v(b)|$, når $u \in \text{dom } S$.

Lad nu v betegne en bestemt funktion tilhørende dom S \ dom $\bar{P}_0$. (En sådan eksisterer fordi $\bar{P}_0$ jo ikke er selvadjungeret.) Da er ifølge (11) v(a) og v(b) ikke begge = 0, og da $|v(a)| = |v(b)|$ er de derfor begge $\neq 0$. Vi sætter $v(b)/v(a) = \gamma$, hvorved $|\gamma| = 1$. For ethvert $u \in$ dom S gælder da ifølge (12)

$$u(b) = \bar{\gamma}^{-1}u(a) = \gamma u(a) \ . \tag{13}$$

Omvendt må enhver funktion $u \in$ dom P, der opfylder (13), tilhøre dom S. Thi da $v(b) = \gamma v(a)$, kan vi, efter om fornødent at have erstattet v med $(u(a)/v(a))v$, antage at u(a) = v(a) og følgelig $u(b) = \gamma u(a) = \gamma v(a) = v(b)$. Men så gælder $u - v \in$ dom $\bar{P}_0 \subsetneq$ dom S ifølge (11), og dermed $u = v + (u - v) \in$ dom S.

De eneste muligheder for en selvadjungeret udvidelse af $\bar{P}_0$ er således restriktionerne P_γ af P til et underrum af formen

$$\text{dom } P_\gamma := \{u \in \text{dom } P \mid u(b) = \gamma u(a)\} \ , \tag{14}$$

hvor $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$. Det er imidlertid klart ifølge lemma 4.1, at restriktionen P_γ af P til det anførte underrum af dom P virkelig er en symmetrisk, ægte udvidelse af $\bar{P}_0$ for ethvert sådant γ. Vi viser til slut, at P_γ er selvadjungeret, altså at dom $P_\gamma^* \subsetneq$ dom P_γ.

Da $P_\gamma \supsetneq P_0$, er $P_\gamma^* \subsetneq P_0^* = P$. Lad nu $u \in$ dom P_γ^*. For alle $v \in$ dom P_γ gælder altså $(P_\gamma v|u) = (v|P_\gamma^* u)$, d.v.s. $(Pv|u) = (v|Pu)$, eller ifølge lemma 4.1

$$v(b)\overline{u(b)} - v(a)\overline{u(a)} = 0.$$

Vælges som ovenfor $v \in$ dom $P_\gamma \setminus$ dom $\bar{P}_0$, bliver $v(b) = \gamma v(a) \neq 0$, og vi slutter, at $\overline{u(b)} = \gamma^{-1}\overline{u(a)}$, d.v.s.

$$u(b) = \bar{\gamma}^{-1}u(a) = \gamma u(a) \ ,$$

hvilket viser, at $u \in \text{dom } P_\gamma$ og dermed $P_\gamma^* = P_\gamma$.

Alternativt kan dette også sluttes af, at $P_\gamma \subsetneq P_\gamma^* \subsetneq P$, og at dom P/dom P_γ er 1-dimensionalt ifølge (14), hvorfor $P_\gamma^* \supset P_\gamma$ ville medføre $P_\gamma^* = P$ og $P_\gamma^{**} = P^* = \bar{P}_0$ i strid med, at der faktisk gælder $\bar{P}_0 \subset P_\gamma \subsetneq P_\gamma^{**}$.

Vi formulerer de fundne resultater i følgende sætning:

4.2. Sætning. Lad $X =]a,b[$ være et begrænset interval. Afslutningen $\bar{P}_0$ af den minimale operator P_0 hørende til differentiationssymbolet -iD er restriktionen af den maximale operator $P = P_0^*$ til

$$\text{dom } \bar{P}_0 = \{u \in \text{dom } P \mid u(a) = u(b) = 0\} .$$

For ethvert $\gamma \in \dot{C}$ med $|\gamma| = 1$ er restriktionen af P til

$$\text{dom } P_\gamma = \{u \in \text{dom } P \mid u(b) = \gamma u(a)\}$$

en selvadjungeret udvidelse af $\bar{P}_0$. Enhver selvadjungeret udvidelse af P_0 fremkommer på denne måde for netop én værdi af γ.

Lad os nu undersøge P_γ nærmere, f.eks. i tilfældet $\gamma = 1$. For simpelheds skyld vil vi desuden antage, at $b - a = 2\pi$, f.eks.

$$a = -\pi , \quad b = \pi .$$

Da lyder den randbetingelse, der fastlægger dom P_γ inden for dom P således:

$$u(-\pi) = u(\pi)$$

(periodisk randbetingelse). Vi bestemmer først egenværdierne for $P_\gamma = P_1$. For ethvert $\lambda \in \dot{R}$ består egenrummet $(P_1 - \lambda I)^{-1}(\underline{0})$ af alle $u \in \text{dom } P$ for hvilke $u(-\pi) = u(\pi)$ og $-iDu = \lambda u$. På

samme måde som ved undersøgelsen af defektrummene for P_o i §3 ses det straks, at ligningen $Du = i\lambda u$ kun har de klassiske løsninger

$$u(x) = ce^{i\lambda x} , \qquad -\pi \leqq x \leqq \pi ,$$

hvor $c \in \dot{C}$. Disse tilhører åbenbart alle dom P, men tilfredsstiller ikke alle randbetingelsen $u(-\pi) = u(\pi)$. Denne er (for $c \neq 0$) kun opfyldt for heltallige λ, nemlig for $e^{2\pi i\lambda} = 1$. Hermed er da fundet, at punktspektret $\sigma_p(P_1) = \dot{Z}$, og at hver egenværdi $n \in \dot{Z}$ er simpel, idet det tilhørende egenrum for P_1 udspændes af egenfunktionen $x \to e^{inx}$, eller efter normering

$$\varphi_n(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{inx} , \qquad n \in \dot{Z} .$$

Nu vides det, at ortonormalsystemet $(\varphi_n)_{n\in\dot{N}}$ på $L^2([-\pi,\pi])$ er totalt, og vi slutter, at den selvadjungerede udvidelse P_1 af P_o har <u>rent punktspektrum</u>. Det samme gælder for ethvert $\gamma \in \dot{C}$, $|\gamma| = 1$.

Vi skal senere (§9) behandle tilfældet $X = \dot{R}$ og vise, at den selvadjungerede operator $P = \overline{P}_o$ i dette tilfælde har et <u>rent kontinuert spektrum</u>.

5. <u>Translation og foldning i L^p-rum</u>. For ethvert p, $1 \leqq p \leqq +\infty$, betegner vi med $L^p = L^p(\dot{R})$ Banachrummet af alle (ækvivalensklasser af) Lebesguemålelige funktioner $f:\dot{R} \to \dot{C}$ for hvilke højre side i ligningen

$$\|f\|_p := \begin{cases} (\int |f(x)|^p dx)^{1/p} & \text{hvis } p < +\infty \\ \operatorname{ess\,sup} |f(x)| & \text{hvis } p = +\infty \end{cases}$$

er et endeligt tal. (Vi skriver $\int_{-\infty}^{\infty} = \int$.) Dette tal definerer så L^p-normen $\|f\|_p$. Ved det essentielle supremum af en målelig funktion $g:\dot{R} \to \dot{C}$ forstås som før nævnt den mindste essentielle majorant for g, altså det mindste $c \in [-\infty,+\infty]$ for hvilket der gælder $g(x) \leqq c$ for næsten alle $x \in \dot{R}$. (Overvej at der altid eksisterer en mindste blandt samtlige essentielle majoranter for g.)
For ethvert $t \in \dot{R}$ definerer vi nu en afbildning $J_t:L^p \to L^p$, idet vi for ethvert $f \in L^p$ sætter

$$(J_t f)(x) = f(x - t) \qquad (x \in \dot{R}) ,$$

hvorved $J_t f \in L^p$ og $\|J_t f\|_p = \|f\|_p$ på grund af Lebesguemålets translationsinvarians. Da J_t åbenbart er lineær og bijektiv, er J_t en isometrisk isomorfi af L^p på sig selv, og

$$J_t^{-1} = J_{-t} \qquad (t \in \dot{R}) .$$

Man kalder J_t for den ved t bestemte translationsoperator på L^p. Det ses endvidere, at $J_o = I$ (enhedsoperatoren på L^p), og

$$J_s J_t = J_{s+t} \qquad (s,t \in \dot{R}) .$$

5.1. Sætning. Lad $1 \leqq p < +\infty$. For ethvert $f \in L^p$ er afbildning $t \to J_t f$ en ligelig kontinuert bevægelse i L^p, specielt kontinuert for $t = 0$:

$$\lim_{t\to 0} \int |f(x - t) - f(x)|^p dx = \lim_{t\to 0} \|J_t f - f\|_p^p = 0 .$$

Beviset beror på, at påstanden er elementær i tilfældet $f \in C_o$, og at C_o er overalt tæt i L^p. Vi betragter først tilfældet $f \in C_o$, altså f kontinuert og med støtte i et interval A af endeligt mål (længde) a. Da er f ligeligt kontinuert, og der findes altså til givet $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ således at

$$\forall x,y \in \dot{R} : \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

Heraf følger for $s,t \in \dot{R}$ med $|s - t| < \delta$:

$$\|J_s f - J_t f\|_p^p = \int |f(x - s) - f(x - t)|^p dx \leqq 2a\varepsilon^p ,$$

fordi $f(x - s) - f(x - t) = 0$ for alle x uden for $(A + s) \cup (A + t)$, hvilken mængde har mål $\leqq 2a$. Heraf følger påstanden i tilfældet $f \in C_o$.

For en vilkårlig funktion $f \in L^p$ findes til givet $\varepsilon > 0$ en funktion $\varphi \in C_o$ således at $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$. Til φ (og ε) findes δ så at $\|J_s\varphi - J_t\varphi\|_p < \varepsilon$ for alle $s,t \in \dot{R}$ med $|s - t| < \delta$. Men så gælder for $|s - t| < \delta$:

$$\|J_s f - J_t f\|_p \leqq \|J_s f - J_s\varphi\|_p + \|J_s\varphi - J_t\varphi\|_p + \|J_t\varphi - J_t f\|_p < 3\varepsilon$$

fordi $\|J_s f - J_s\varphi\|_p = \|J_s(f - \varphi)\|_p = \|f - \varphi\|_p$, etc. |

Foldningen $f * g$ af to funktioner $f,g:\dot{R} \to \dot{C}$ defineres ved

$$(15) \qquad (f * g)(x) = \int f(x - y)g(y)dy \qquad (\int = \int_{-\infty}^{\infty})$$

for de værdier af x for hvilke funktionen $y \to f(x - y)g(y)$ er integrabel (over $\dot{R}$). Ved substitutionen $y \to x-y$ overføres foldningsintegralet i $\int f(y)g(x-y)dy$, hvoraf følger

$$(16) \qquad (f * g)(x) = (g * f)(x)$$

forstået således, at de to foldninger er defineret for nøjagtigt

de samme $x \in \dot{R}$ og stemmer overens for disse.

Det vises let, at for enhver målelig funktion $f:\dot{R} \to \dot{C}$ er de ved

$$g(x,y) = f(x-y) , \quad h(x,y) = f(y)$$

definerede funktioner $g,h:\dot{R}^2 \to \dot{C}$ målelige m.h.t. Lebesguemålet m_2 på $\dot{R}^2$. Thi dette gælder åbenbart i tilfældet f kontinuert (hvorved også g og h bliver kontinuerte), og derfor også for enhver Borelmålelig funktion f, hvorved g og h bliver Borelmålelige i $\dot{R}^2$. En vilkårlig Lebesguemålelig funktion f kan jo fremstilles som summen af en Borelmålelig funktion og en funktion ækvivalent med 0. Det er derfor tilstrækkeligt at betragte tilfældet f ækvivalent med 0. Men så eksisterer der en Borelmålelig funktion f^* ækvivalent med 0 således at $|f| \leqq f^*$ overalt. Defineres nu $g^*(x,y) = f^*(x-y)$, bliver g^* Borelmålelig og ifølge Lebesgue-Fubini's sætning ækvivalent med 0, idet

$$\int_{\dot{R}^2} g^* = \int_{\dot{R}} \left(\int_{\dot{R}} f^*(x-y)dx\right)dy = \int_{\dot{R}} 0\,dy = 0 .$$

Heraf sluttes endelig, at g er ækvivalent med 0, specielt m_2-målelig, fordi $|g| \leqq g^*$ overalt. Analogt med h.

I det følgende vil vi betragte forskellige tilfælde, hvor foldningen er defineret i det mindste næsten overalt og har behagelige egenskaber.

5.2. Sætning. Lad $f \in L^p$, $g \in L^q$, hvor $1/p + 1/q = 1$, $1 \leqq p, q \leqq +\infty$. Da er foldningen $f * g$ defineret overalt på $\dot{R}$ ved (15) og fremstiller en begrænset, ligeligt kontinuert funktion.

Endvidere gælder

$$\|f * g\|_\infty \leqq \|f\|_p \, \|g\|_q . \tag{17}$$

Afbildningen $(f,g) \to f * g$ af $L^p \times L^q$ ind i L^∞ er bilineær og kontinuert.

Bevis. Med betegnelsen

$$\overset{\vee}{f}(x) = f(-x)$$

haves $f(x-y) = \overset{\vee}{f}(y-x) = (J_x \overset{\vee}{f})(y)$. Af $f \in L^p$ følger $\overset{\vee}{f} \in L^p$, $J_x \overset{\vee}{f} \in L^p$ og

$$\|J_x \overset{\vee}{f}\|_p = \|\overset{\vee}{f}\|_p = \|f\|_p$$

for ethvert $x \in \dot{R}$. Da vi har forudsat $g \in L^q$, hvor p og q er indbyrdes konjugerede eksponenter, d.v.s. $1/p + 1/q = 1$, så følger det af Hölder's ulighed, at funktionen $y \to f(x-y)g(y)$ er integrabel for ethvert $x \in \dot{R}$, al tså at foldningsintegralet (15)

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int (J_x \overset{\vee}{f} \cdot g)$$

er defineret for ethvert $x \in \dot{R}$. Og endvidere gælder

$$|(f * g)(x)| \leqq \|J_x \overset{\vee}{f}\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q ,$$

$$|(f * g)(x) - (f * g)(y)| = |\int (J_x \overset{\vee}{f} - J_y \overset{\vee}{f}) \cdot g| \leqq \|J_x \overset{\vee}{f} - J_y \overset{\vee}{f}\|_p \|g\|_q ,$$

for ethvert $x \in \dot{R}$. Den første af disse uligheder viser, at $f * g$ er begrænset og at (17) gælder. Det er klart, at afbildningen $(f,g) \to f * g$ er bilineær. At den er kontinuert ses herefter ved den sædvanlige omskrivning og vurdering ved hjælp af (17):

$$f * g - f_o * g_o = (f - f_o) * g + f_o * (g - g_o) ,$$

$$\|f * g - f_o * g_o\|_\infty \leqq \|f - f_o\|_p \|g\|_q + \|f_o\|_p \|g - g_o\|_q .$$

Den anden ulighed ovenfor viser i tilfældet $p < +\infty$ ifølge sæt-

ning 5.1, at f * g er ligeligt kontinuert. Hvis p = + ∞, altså q = 1, ombytter vi først f med g og p med q under henvisning til (16). |

Bemærkning. I tilfældet 1 < p, q < + ∞ (stadigvæk med 1/p + 1/q = 1) viser man let, at f * g ∈ $\overline{C_0}$, altså at den kontinuerte funktion x → (f * g)(x) går mod 0 for |x| → + ∞.

5.3. Sætning. Lad f, g ∈ L. Foldningen (f * g)(x) er da defineret næsten overalt ved

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y)dy$$

og fremstiller en funktion f * g ∈ L. Endvidere gælder

(18) $$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

med lighedstegn hvis f ≥ 0, g ≥ 0. For f, g, h ∈ L haves den associative lov

$$(f * g) * h = f * (g * h) .$$

Med foldning som "multiplikation" er L en kommutativ Banach-algebra over Ĉ.

Beviset beror på Lebesgue-Fubini's sætning. Som ovenfor påvist er funktionen

$$(x,y) \to f(x-y)g(y)$$

målelig med hensyn til Lebesguemålet m_2 på $\hat{R}^2$. Vi viser nu, at denne funktion også er m_2-integrabel:

(19) $$\int_{\hat{R}^2} |f(x-y)g(y)| dm_2(x,y) = \int(\int |f(x-y)| \, |g(y)| dx)dy$$
$$= \int(\int |f(x-y)| dx)|g(y)| dy = \|J_y f\|_1 \|g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1 < + \infty .$$

Derfor er ifølge Lebesgue-Fubini's sætning funktionen $y \to f(x-y)g(y)$ integrabel over $\dot{R}$ for næsten alle $x \in \dot{R}$, hvilket netop betyder, at $f * g$ er defineret næsten overalt. Endvidere fås

$$\int|f * g| = \int|\int f(x-y)g(y)dy|dx \leqq \int(\int|f(x-y)g(y)|dy)dx$$
$$= \int(\int|f(x-y)|\ |g(y)|dx)dy = \|f\|_1\|g\|_1$$

ifølge (19), hvilket viser, at $f * g \in L$ og at (18) gælder. Det er også klart, at $\|f * g\|_1 = \|f\|_1\|g\|_1$ såfremt $f,g \geqq 0$.

For at bevise den <u>associative lov</u> for $f,g,h \in L$ betragtes funktionen

$$(x,y,z) \to f(y)g(x-y-z)h(z) ,$$

som på lignende måde som den ovenfor betragtede funktion af to variable vises at være målelig, nu med hensyn til Lebesguemålet m_3 på $\dot{R}^3$. Ved en regning som ovenfor viser vi dernæst, at den nævnte funktion bliver m_3-integrabel:

$$\int_{\dot{R}^3}|f(y)g(x-y-z)h(z)|dm_3(x,y,z)$$
$$= \int_{\dot{R}^2}(\int|f(y)|\ |g(x-y-z)|\ |h(z)|dx)dm_2(y,z)$$
$$= \int_{\dot{R}^2}|f(y)|\ |h(z)|(\int|g(x-y-z)|dx)dm_2(y,z)$$
$$= \int_{\dot{R}^2}|f(y)|\ |h(z)|\ \|g\|_1 dm_2(y,z) = \|f\|_1\|g\|_1\|h\|_1 .$$

Derfor er funktionen $(y,z) \to f(y)g(x-y-z)h(z)$ m_2-integrabel for næsten alle $x \in \dot{R}$, og for ethvert sådant x gælder

$$[(f * g) * h](x) = \int(f * g)(x-z)h(z)dz$$
$$= \int(\int f(y)g(x-z-y)dy)h(z)dz$$
$$= \int f(y)(\int g(x-y-z)h(z)dz)dy$$
$$= \int f(y)(g * h)(x-y)dy = [f *(g * h)](x) .$$

Da foldningen på L åbenbart er bilineær, er det hermed ialt vist, at Banach-rummet L over $\mathbb{C}$ med foldning som multiplikation er en Banach-algebra. Denne er kommutativ ifølge (16). Det kan vises, at den ikke har noget ételement. |

5.4. Sætning. Lad $f \in L^p$, $g \in L$, hvor $1 \leqq p \leqq +\infty$. Foldningen $(f * g)(x)$ er da defineret næsten overalt ved (15) og fremstiller en funktion | $f * g \in L^p$. Endvidere gælder

$$\|f * g\|_p \leqq \|f\|_p \|g\|_1 .$$

Hvis også $h \in L$, haves $(f * g) * h = f * (g * h)$ i L^p. Afbildningen $(f,g) \to f * g$ af $L^p \times L$ ind i L^p er bilineær og kontinuert.

Bevis. Tilfældet $p = +\infty$ omfattes af sætning 5.2 og $p = 1$ af sætning 5.3. Vi antager derfor $1 < p < +\infty$, definerer q ved $1/p + 1/q = 1$, og sætter

$$g_1(y) = |g(y)|^{1/p} \operatorname{sgn} g(y) , \quad g_2(y) = |g(y)|^{1/q} ,$$

hvorved $g_1 \in L^p$, $g_2 \in L^q$, $g = g_1 g_2$. Produktet

$$f(x - y)g(y) = f(x - y)g_1(y)g_2(y)$$

er derfor integrabelt med hensyn til y for ethvert $x \in \mathbb{R}$ for hvilket den målelige funktion $y \to f(x-y)g_1(y)$ tilhører L^p, altså for hvilket

$$\int |f(x - y)|^p \, |g_1(y)|^p \, dy < +\infty .$$

Da dette integral kan omskrives til $(|f|^p * |g_1|^p)(x)$, og da $|f|^p \in L$, $|g_1|^p \in L$, slutter vi af den foregående sætning, at den omhandlede betingelse virkelig er opfyldt for næsten alle x.

Efter således at have godtgjort, at $f * g$ er defineret næ-

sten overalt, viser vi, at denne funktion er målelig. Hertil betragtes en hjælpefunktion $e \in L^q$. Funktionen

$$(x,y) \to e(x)f(x-y)g(y) = f(x-y)g_1(y)\cdot e(x)g_2(y)$$

er m_2-integrabel, fordi faktorerne $f(x-y)g_1(y)$ og $e(x)g_2(y)$ tilhører henholdsvis $L^p(m_2)$ og $L^q(m_2)$ som funktioner af (x,y). Det første følger af beviset for sætning 5.3, nemlig af (19) med f og g erstattet med $|f|^p \in L$ og $|g_1|^p \in L$. Og det andet følger af at $e^q \in L$ og $g_2^q \in L$, og derfor

$$\int |e(x)g_2(y)|^q dm_2(x,y) = \int |e(x)|^q dx \int |g_2(y)|^q dy < +\infty .$$

Herefter slutter vi som sædvanlig af Lebesgue-Fubini's sætning, at

$$\int e(x)f(x-y)g(y)dy = e(x)(f * g)(x)$$

fremstiller en integrabel, specielt målelig funktion af $x \in \dot{R}$. Dette gælder for ethvert $e \in L^q$. Vælges e så at $e(x) \neq 0$ for alle $x \in \dot{R}$ (f.eks. $e(x) = \exp(-|x|)$) slutter vi efter division med e at $f * g$ er målelig.

Dernæst viser vi, at $\int |f * g|^p < +\infty$. Vi finder ved anvendelse af Hölder's ulighed samt (18):

$$|(f * g)(x)| = |\int f(x-y)g_1(y)\cdot g_2(y)dy|$$

$$\leqq (\int |f(x-y)|^p |g_1(y)|^p dy)^{1/p} (\int |g_2(y)|^q dy)^{1/q}$$

$$|(f * g)(x)|^p \leqq (|f|^p * |g|)(x)\cdot (\int |g(y)|dy)^{p/q}$$

$$\int |f * g|^p \leqq \|g\|_1^{p/q} \cdot \int |f|^p * |g| = \|g\|_1^{p/q} \cdot \int |f|^p \cdot \int |g|$$

$$= \|f\|_p^p \|g\|_1^{1+p/q} = \|f\|_p^p \|g\|_1^p < +\infty .$$

Heraf følger tillige, at $\|f * g\|_p \leqq \|f\|_p \|g\|_1$. Det er som sædvan-

ligt klart, at foldningen er bilineær, og dens kontinuitet vises som i sætning 5.2.

Tilbage står at vise, at $(f*g)*h = f*(g*h)$ (næsten overalt) når $f \in L^p$, $g \in L$, $h \in L$. Begge sider af ligningen eksisterer i L^p, idet $f*g \in L^p$ som allerede vist, og $g*h \in L$ ifølge den foregående sætning. Vi benytter atter en hjælpefunktion $e \in L^q$ med $e(x) \neq 0$ for alle $x \in \dot{R}$. For at vise, at den m_3-målelige funktion

$$(x,y,z) \to e(x)f(y)g(x-y-z)h(z)$$

er m_3-integrabel, benytter vi at $|g|*|h| \in L$ og at $|f|*(|g|*|h|) \in L^p$, og finder

$$\int_{\dot{R}^3} |e(x)f(y)g(x-y-z)h(z)|\,dm_3(x,y,z)$$

$$= \int |e(x)| \{\int |f(y)| (\int |g(x-y-z)|\ |h(z)|dz)dy\}dx$$

$$= \int |e|\cdot(|f|*(|g|*|h|)) < +\infty$$

ifølge Hölder's ulighed. - Derefter sluttes efter division med $e(x)$, at funktionen

$$(y,z) \to f(y)g(x-y-z)h(z)$$

er m_2-integrabel for næsten alle $x \in \dot{R}$. Og for ethvert sådant x viser man på ganske samme måde som i beviset for sætning 5.3 at $[(f*g)*h](x) = [f*(g*h)](x)$. |

5.5. Sætning. Lad $k:\dot{R} \to \dot{R}$ være en reel funktion med egenskaberne

$$k \geq 0\,, \quad k \in L\,, \quad \int k = 1\,, \tag{20}$$

og sæt for ethvert $\varepsilon > 0$, $x \in \dot{R}$

(21) $$k_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} k(\frac{x}{\varepsilon}) \ ,$$

hvorved k_ε får de samme egenskaber som anført for k. For enhver funktion $f \in L^p$, hvor $1 \leqq p < +\infty$, gælder da, at $k_\varepsilon * f \to f$ i L^p, altså

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|k_\varepsilon * f - f\|_p = 0 \ .$$

Bevis. Af den foregående sætning fremgår at $k_\varepsilon * f$ er defineret næsten overalt og tilhører L^p. For ethvert $x \in \mathbb{R}$ for hvilket $(k_\varepsilon * f)(x)$ er defineret, haves under benyttelse af, at $\int k_\varepsilon = 1$, idet vi udfører substitutionen $y \to \varepsilon y$ under integraltegnet:

$$\begin{aligned} |(k_\varepsilon * f)(x) - f(x)| &= |\int k_\varepsilon(y)(f(x-y)-f(x))dy| \\ &= |\int k(y)(f(x-\varepsilon y)-f(x))dy| \\ &\leqq \int k(y)|f(x-\varepsilon y)-f(x)|dy \ , \end{aligned}$$

eftersom $k \geqq 0$. Hvis $1 < p < +\infty$, indfører vi q ved $1/p + 1/q = 1$, og vurderer det sidste integral ved hjælp af Hölder's ulighed således:

$$\begin{aligned} & \int k(y)^{1/q} \cdot k(y)^{1/p} |f(x-\varepsilon y)-f(x)|dy \\ \leqq\ & (\int k(y)dy)^{1/q} (\int k(y)|f(x-\varepsilon y)-f(x)|^p dy)^{1/p} \\ =\ & (\int k(y)|f(x-\varepsilon y)-f(x)|^p dy)^{1/p} \ , \end{aligned}$$

idet $\int k(y)dy = 1$. Vi ser, at resultatet af denne vurdering for $1 < p < +\infty$ også er gyldigt (trivielt og med lighedstegn) i det tilbageværende tilfælde $p = 1$.

Opløftes nu til potensen p og integreres med hensyn til x, fås derfor for ethvert $p \in [1, +\infty[$ ved anvendelsen af Lebesgue-Fubini's sætning på den m_2-målelige funktion af (x,y), som optræder under det sidste integraltegn:

$$\|k_\varepsilon * f - f\|_p^p \leqq \int k(y)\left(\int |f(x-\varepsilon y)-f(x)|^p dx\right)dy = \int k(y) g_\varepsilon(y)dy ,$$

hvor vi har sat

$$g_\varepsilon(y) = \int |f(x-\varepsilon y)-f(x)|^p dx = \|J_{\varepsilon y} f - f\|_p^p .$$

For ethvert $y \in \mathbb{R}$ gælder ifølge sætn. 5.1 at $g_\varepsilon(y) \to 0$, og derfor $k(y)g_\varepsilon(y) \to 0$, for $\varepsilon \to 0$. Endvidere haves

$$g_\varepsilon(y) \leqq (\|J_{\varepsilon y} f\|_p + \|f\|_p)^p = 2^p \|f\|_p^p ,$$

og dermed

$$(0 \leqq)\ k(y)g_\varepsilon(y) \leqq 2^p \|f\|_p^p k(y) .$$

Hermed er fundet en integrabel majorant, og vi slutter af Lebesgue's konvergenssætning, at

$$\|k_\varepsilon * f - f\|_p = \left(\int k(y) g_\varepsilon(y)dy\right)^{1/p} \to 0$$

for $\varepsilon \to 0$. |

I tilfældet p=1 kan sætningen siges at udtrykke, at familien (k_ε) for $\varepsilon \to 0$ bestemmer en approximativ enhed i Banach-algebraen L med foldning som multiplikation.

5.6. Lemma. Lad $1 \leqq p \leqq +\infty$. Hvis en følge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på L^p konvergerer i L^p-norm mod $f \in L^p$, så findes der en delfølge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ som konvergerer punktvis næsten overalt mod f:

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x) = f(x) \qquad \text{for næsten all } x \in \mathbb{R} .$$

Bevis. Følger af beviset for Riesz-Fischer's sætning om fuldstændigheden af L^p, men vises også direkte således, idet vi ser bort fra det trivielle tilfælde $p = +\infty$, hvor konvergens af en følge i L^∞-norm jo simpelthen betyder punktvis og ligelig

$$\|k_\varepsilon * f - f\|_p^p \leqq \int k(y)\left(\int |f(x-\varepsilon y)-f(x)|^p dx\right)dy = \int k(y) g_\varepsilon(y)\,dy ,$$

hvor vi har sat

$$g_\varepsilon(y) = \int |f(x-\varepsilon y)-f(x)|^p dx = \|J_{\varepsilon y} f - f\|_p^p .$$

For ethvert $y \in \mathbb{R}$ gælder ifølge sætn. 5.1 at $g_\varepsilon(y) \to 0$, og derfor $k(y)g_\varepsilon(y) \to 0$, for $\varepsilon \to 0$. Endvidere haves

$$g_\varepsilon(y) \leqq (\|J_{\varepsilon y} f\|_p + \|f\|_p)^p = 2^p \|f\|_p^p ,$$

og dermed

$$(0 \leqq)\ k(y)g_\varepsilon(y) \leqq 2^p \|f\|_p^p k(y) .$$

Hermed er fundet en integrabel majorant, og vi slutter af Lebesgue's konvergenssætning, at

$$\|k_\varepsilon * f - f\|_p = \left(\int k(y) g_\varepsilon(y)\,dy\right)^{1/p} \to 0$$

for $\varepsilon \to 0$. |

I tilfældet p=1 kan sætningen siges at udtrykke, at familien (k_ε) for $\varepsilon \to 0$ bestemmer en approximativ enhed i Banach-algebraen L med foldning som multiplikation.

5.6. Lemma. Lad $1 \leqq p \leqq +\infty$. Hvis en følge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på L^p konvergerer i L^p-norm mod $f \in L^p$, så findes der en delfølge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ som konvergerer punktvis næsten overalt mod f:

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x) = f(x) \qquad \text{for næsten all } x \in \mathbb{R} .$$

Bevis. Følger af beviset for Riesz-Fischer's sætning om fuldstændigheden af L^p, men vises også direkte således, idet vi ser bort fra det trivielle tilfælde $p = +\infty$, hvor konvergens af en følge i L^∞-norm jo simpelthen betyder punktvis og ligelig

konvergens uden for en vis nulmængde. Lad altså $p < +\infty$, og vælg $n_1 < n_2 < \ldots$ så at

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int |f_{n_j}(x) - f(x)|^p dx < +\infty ,$$

f.eks. $\|f_{n_j} - f\|_p < 2^{-j/p}$. Dette er muligt fordi $\|f_n - f\|_p \to 0$ for $n \to \infty$. Om den målelige funktion g defineret ved

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_j}(x) - f(x)|^p$$

gælder da

$$\int g(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int |f_{n_j}(x) - f(x)|^p dx < +\infty .$$

Heraf følger, at $g(x) < +\infty$ for næsten alle x, og da $g(x) < +\infty$ medfører at $\lim_{j\to\infty} |f_{n_j}(x) - f(x)|^p = 0$ ifølge definitionen af g, er lemmaet hermed bevist. |

Korollar. Hvis en følge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på L^p konvergerer i L^p-norm mod $f \in L^p$ og desuden konvergerer punktvis næsten overalt mod en funktion f^*, så gælder $f^* = f$ næsten overalt.

Dette korollar vises også let direkte ved hjælp af Fatou's lemma, stadig for $p < +\infty$:

$$\int |f^* - f|^p = \int \lim |f_n(x) - f(x)|^p \, dx$$
$$\leq \lim_{n\to\infty}(\inf) \int |f_n - f|^p = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p = 0 .$$

5.7. Lemma. For at en i et åbent interval $X \subseteq \mathbb{R}$ lokalt integrabel funktion $f: X \to \mathbb{C}$ skal være identisk 0 (næsten overalt) i X, er enhver af følgende to betingelser nødvendig og tilstrækkelig:

a) $\int_J f(x)dx = 0$ for ethvert kompakt delinterval $J \subseteq X$,

b) $\int f(x)\varphi(x)dx = 0$ for enhver funktion $\varphi \in C_0(X)$ (eller lige så

gerne $\varphi \in C_0^\infty(X)$).

Bevis. Nødvendigheden af disse betingelser er jo oplagt. Ved beviset for tilstrækkeligheden er det åbenbart nok at vise, at $f(x) = 0$ for næsten alle x tilhørende et forelagt kompakt delinterval $[a,b] \subseteq X$, idet X jo kan overdækkes af numerabelt mange sådanne. Der eksisterer da et tal $c > 0$ således at $[a-c,b+c] \subseteq X$. Vi definerer nu en funktion $g \in L(\dot{R})$ ved $g(x)=f(x)$ for $x \in [a-c,a+c]$ og $g(x) = 0$ ellers. Opgaven er da at vise, at $(f(x) =)g(x) = 0$ for næsten alle $x \in [a,b]$, såfremt en af de anførte betingelser er opfyldt.

Ad a). Sæt $k = 1_{[0,1]}$. Da har k egenskaberne (20) anført i sætn. 5.5. For $\varepsilon < c$ gælder derfor for ethvert $x \in [a,b]$:

$$(k_\varepsilon * g)(x) = \int k_\varepsilon(x-y)g(y)dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x} g(y)dy = \frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x} f(y)dy = 0$$

ifølge betingelsen a). For $\varepsilon \to 0$ haves ifølge sætning 5.5 $k_\varepsilon * g \to g$ i $L^1(\dot{R})$. I henhold til det foregående lemma findes derfor en følge $(\varepsilon_n)_{n\in\dot{N}}$ gående mod 0, gerne med $0 < \varepsilon_n < c$, således at $k_{\varepsilon_n} * g \to g$ punktvis næsten overalt. Da $k_{\varepsilon_n} * g = 0$ i $[a,b]$, slutter vi at $g = 0$ næsten overalt i $[a,b]$.

Ad b) Her vælges $k \in C_0^\infty$ med $st(k) \subseteq [-1,1]$ og med egenskaberne (20), f.eks.

$$k(x) = \gamma \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \quad \text{for } |x| < 1$$

og $k(x) = 0$ for $|x| \geq 1$, idet konstanten $\gamma > 0$ bestemmes så at $\int k(x)dx = 1$. For $\varepsilon < c$ fås atter $(k_\varepsilon * g)(x) = 0$ for ethvert $x \in [a,b]$, nu ifølge betingelsen b) anvendt på funktionen $\varphi(y) = k_\varepsilon(x-y)$, som er af klassen $C_0^\infty(\dot{R})$ med

$st(\varphi) \subsetneq [a-c,b+c] \subsetneq X$. Herefter sluttes som under a). |

- Det bemærkes, at det således beviste lemma 5.7 fandt anvendelse i §2 (side 8 og 13).

6. Fouriertransformationen. For en integrabel funktion $f \in L = L(\dot{R})$ med værdier i $\dot{C}$ defineres en funktion $Ff:\dot{R} \to \dot{C}$ ved

$$(22) \qquad (Ff)(u) = \int f(x)e^{iux}dx \qquad (\int = \int_{-\infty}^{\infty}) .$$

Da $|e^{iux}| = 1$ for alle $u \in \dot{R}$, er $f(x)e^{iux}$ integrabel m.h.t. $x \in \dot{R}$ for ethvert $u \in \dot{R}$, og $(Ff)(u)$ er således veldefineret (og endelig) i $\dot{C}$ for ethvert $u \in \dot{R}$. Man kalder funktionen Ff for den Fouriertransformerede af $f \in L$. Samme navn gives den funktion $\bar{F}f$, der bestemmes ved det beslægtede integral

$$(\bar{F}f)(u) = \int f(x)e^{-iux}dx .$$

Det ses umiddelbart, at Fouriertransformationen F (henholdsvis $\bar{F}$) er en lineær afbildning af L ind i vektorrummet $\dot{C}^{\dot{R}}$ af alle komplekse funktioner på $\dot{R}$. Imellem disse to afbildninger består åbenbart følgende simple forbindelser:

$$(23) \qquad \overline{Ff} = \bar{F}\,\bar{f} , \quad \bar{F}f = \overset{\vee}{Ff} ,$$

hvorved definitionsmæssigt

$$(24) \qquad \bar{f}(x) = \overline{f(x)} , \quad \overset{\vee}{f}(x) = f(-x)$$

for ethvert $x \in \dot{R}$ og enhver funktion $f:\dot{R} \to \dot{C}$. (Den sidste af relationerne (23) fremgår ved substitutionen $x \to -x$ under integraltegnet.)

For en lige funktion $f \in L$ bliver derfor $\bar{F}f = Ff$, og nærmere

(25) $(Ff)(u) = (\bar{F}f)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ux)dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(ux)dx$,

hvor det sidste integral er den såkaldte <u>cosinustransformerede</u> af $f \in L([0,+\infty[)$. For en <u>ulige</u> funktion $f \in L$ bliver derimod

$$(Ff)(u) = -(\bar{F}f)(u) = i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(ux)dx = 2i\int_{0}^{\infty} f(x)\sin(ux)dx ,$$

hvor det sidste integral er den <u>sinustransformerede</u> af $f \in L([0,+\infty[)$.

I nedenstående tabel anføres den Fouriertransformerede $g = Ff = \bar{F}f$ af nogle simple, lige funktioner $f \in L$ med reelle værdier, hvorfor også Ff bliver lige og med reelle værdier ifølge (25):

	f(x)	g(u)
1)	$e^{-\frac{1}{2}x^2}$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}u^2}$
2)	$e^{-\lvert x\rvert}$	$\frac{2}{1+u^2}$
3)	$\frac{1}{1+x^2}$	$\pi e^{-\lvert u\rvert}$
4)	$(1-\lvert x\rvert)^+$	$\frac{1-\cos u}{\frac{1}{2}u^2} = \frac{\sin^2(\frac{1}{2}u)}{(\frac{1}{2}u)^2}$
5)	$1_{[-1,1]}(x)$	$2\frac{\sin u}{u}$

Man bemærker, at i eks. 1 (som vil blive behandlet nedenfor) gælder specielt $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}Ff = f$. De øvrige eksempler virificeres ved elementære stamfunktionsbestemmelser. I eks. 2 gælder ifølge eks.3 $F(Ff) = 2\pi f$. Skrevet på formen

$$\frac{1}{2\pi} F\bar{F}f = f$$

(eller $(2\pi)^{-1}FFf = f$)er dette et udtryk for en generel hovedegen-

skab ved Fouriertransformationen i tilfælde af en funktion $f \in L$, for hvilken den Fouriertransformerede ligeledes er integrabel (sætn. 7.1 nedenfor). En sådan funktion er også den i eks. 4 betragtede positive del af funktionen $x \to (1-|x|)$, men derimod ikke den i eks. 5 betragtede karakteristiske funktion for intervallet $[-1,1]$. Det er netop en af vanskelighederne i teorien, at Fouriertransformationen ikke afbilder L ind i L (på samme måde som Fourierrækken for en integrabel funktion ikke behøver at være absolut konvergent).

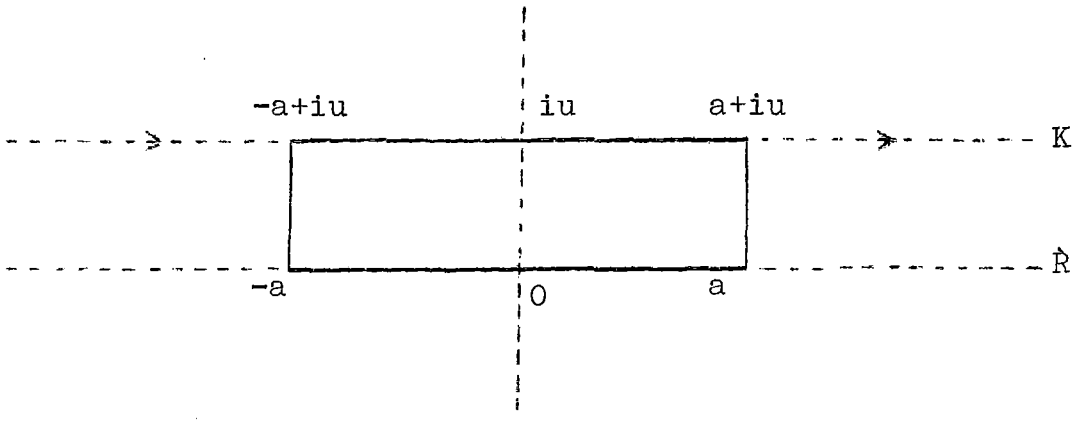
Lad os nu betragte eks. 1. Det er velkendt, at $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = \sqrt{2\pi}$. For heraf at bestemme den Fouriertransformerede $Ff = \bar{F}f$ af $f(x) = \exp(-\frac{1}{2}x^2)$ omskrives

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tfrac{1}{2}x^2 - iux)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\,[-\tfrac{1}{2}(x+iu)^2 - \tfrac{1}{2}u^2]dx$$
$$= \exp\,(-\tfrac{1}{2}u^2) \int_K \exp(-\tfrac{1}{2}z^2)dz\ ,$$

hvor K betegner den rette linie i $\dot{C}$ parallel med den reelle akse og gående gennem iu. Ved anvendelse af Cauchy's integralsætning på den i hele $\dot{C}$ holomorfe funktion $z \to \exp(-\frac{1}{2}z^2)$ med den på nedenstående figur angivne integrationsvej (rektangel) fås efter grænseovergangen $a \to +\infty$

$$\int_K \exp(-\tfrac{1}{2}z^2)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tfrac{1}{2}x^2)dx\ (=\sqrt{2\pi})\ ,$$

og dermed det ønskede resultat $Ff = \bar{F}f = (2\pi)^{\frac{1}{2}}f$.



Under grænseovergangen $a \to +\infty$ forsvinder nemlig bidragene fra de to lodrette rektangelsider af længden $|u|$; thi i et punkt $z = \pm a + it$, $0 \leqq |t| \leqq |u|$, haves

$$|\exp(-\tfrac{1}{2}z^2)| = \exp \operatorname{Re}(-\tfrac{1}{2}z^2) = \exp(-\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}t^2) \leqq \exp(-\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}u^2),$$

hvilket (også efter multiplikation med sidelængden $|u|$) går mod 0 for $a \to +\infty$.

Vi går dernæst over til at undersøge den Fouriertransformerede $g = Ff$ (eller $\bar{F}f$) af en vilkårlig funktion $f \in L$. Det er klart, at g er <u>begrænset</u>, idet der for alle $u \in \dot{R}$ gælder

$$|g(u)| \leqq \int |f(x)e^{\mp iux}|dx = \int |f(x)|dx \ .$$

Heraf følger

$$\|g\|_\infty \leqq \|f\|_1 \ , \tag{26}$$

for øvrigt med lighedstegn hvis $f \geqq 0$, idet der da gælder $g(0) = \int f(x)dx = \|f\|_1$.

Endvidere er g <u>ligeligt kontinuert</u>, som man ser ved anvendelse af Lebesgue's konvergenssætning efter vurderingen

$$\begin{aligned} |g(u+h)-g(u)| &\leqq \int |f(x)e^{iux}(e^{ihx}-1)|dx \\ &= \int |f(x)| \ |e^{ihx}-1|dx \ . \end{aligned}$$

For $h \to 0$ gælder jo $e^{ihx}-1 \to 0$ for ethvert $x \in \dot{R}$, og integranden i det sidste integral har den integrable majorant $2|f(x)|$. Dette integral går derfor mod 0 for $h \to 0$, og da det er uafhængigt af u, er hermed godtgjort, at g er ligeligt kontinuert.

Endelig gælder <u>Riemann-Lebesgue's lemma</u>:

$$g(u) \to 0 \quad \text{for} \quad |u| \to \infty \ . \tag{27}$$

Beviset herfor kan ske ved reduktion til det elementære tilfælde $f \in C_0$ (eller f en trappefunktion med kompakt støtte), idet C_0 (eller mængden af de nævnte trappefunktioner) er overalt tæt i L. Vi kan imidlertid også direkte behandle det generelle tilfælde $f \in L$ under benyttelse af lemma 5.1 for $p = 1$ (som just beroede på at C_0 er tæt i L). Vi har nemlig

$$g(u) = \int f(x)e^{iux}dx = \int f(x+t)e^{iu(x+t)}dx \ .$$

Sættes $t = \pi/u$, hvorved $e^{iut} = e^{i\pi} = -1$, fås

$$g(u) = -\int f(x+t)e^{iux}dx = -\tfrac{1}{2}\int [f(x+t)-f(x)]e^{iux}dx \ ,$$

$$|g(u)| \leqq \tfrac{1}{2}\int |f(x+t)-f(x)|dx \to 0$$

for $t = \pi/u \to 0$, d.v.s. for $|u| \to \infty$.

Foruden lineariteten har Fouriertransformationen F (og $\bar{F}$) en række andre simple algebraiske egenskaber. I nedenstående oversigt er i første kolonne anført nogle integrable funktioner dannet ud fra givne integrable funktioner f, f_1, f_2. I anden kolonne er angivet de tilsvarende Fouriertransformerede udtrykt ved de Fouriertransformerede g, g_1, g_2 af henholdsvis f, f_1, f_2. Resultaterne gælder for såvel F som $\bar{F}$, idet forskellen mellem disse kun giver sig udslag i de regler, hvori i indgår, altså reglerne a_1, a_2, og her refererer øverste fortegn til F og nederste til $\bar{F}$.

	$f(x)$	$g(u)$
a_1	$f(x-a) \quad (a \in \mathbb{R})$	$e^{\mp iau}g(u)$
a_2	$e^{iax}f(x) \quad (a \in \mathbb{R})$	$g(u\mp a)$
b	$a^{-1}f(a^{-1}x)(a > 0)$	$g(au)$
c	$\overset{\vee}{f}(x) = f(-x)$	$\overset{\vee}{g}(u) = g(-u)$
c_1	$\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$	$\tilde{g}(u) = \overline{g(-u)}$
c_2	$\check{f}(x) = \overline{f(-x)}$	$\bar{g}(u) = \overline{g(u)}$
d	$(f_1 * f_2)(x) = \int f_1(x-y)f_2(y)dy$	$g_1(u)g_2(u)$

Af disse regler er a_2 og c_1 trivielle, og a_1,b,c eftervises ved indførelse af en ny integrationsvariabel, henholdsvis x-a, $a^{-1}x$ og -x. Endvidere fremgår c_2 f.eks. ved kombination af c og c_1, medens d bevises ved hjælp af Lebesgue-Fubini's sætning:

$$\int (f_1 * f_2)(x)e^{\mp iux}dx = \int (\int f_1(x-y)f_2(y)dy)e^{\mp iu(x-y)}e^{\mp iuy}dx$$
$$= \int (\int f_1(x-y)e^{\mp iu(x-y)}dx)f_2(y)e^{\mp iuy}dy$$
$$= \int f_1(x)e^{\mp iux}dx \int f_2(y)e^{\mp iuy}dy = g_1(u)g_2(u).$$

Dette er lovligt fordi funktionen $(x,y) \to f_1(x-y)f_2(y)e^{\mp iux}$ er integrabel m.h.t. m_2 som vist i (19) i beviset for sætning 5.3, idet $f_1, f_2 \in L$.

Som en art omvending af d og en forberedelse til en passende fortolkning af relationen $(2\pi)^{-1}F\bar{F}f = f$ vil vi endnu vise, at der for $f_1, f_2 \in L$ gælder

$$F(f_1 \cdot \bar{F}f_2) = (Ff_1) * f_2 \,, \tag{28}$$

og tilsvarende efter ombytning af F og $\bar{F}$. Bemærk at $\bar{F}f_2 \in B \cap C \subsetneq L^\infty$ og derfor $f_1 \cdot \bar{F}f_2 \in L$, således at venstre side

eksisterer. Også foldningen på højre side af $Ff_1 \in L^\infty$ med $f_2 \in L$ eksisterer ifølge sætn. 5.2. Ved fornyet anvendelse af Lebesgue-Fubini's sætning fås nu, idet funktionen $(u,y) \to f_1(u)f_2(y)e^{i(x-y)u}$ åbenbart er m_2-integrabel, fordi $f_1, f_2 \in L$:

$$\begin{aligned}[F(f_1 \cdot \bar{F}f_2)](x) &= \int f_1(u)\left(\int f_2(y)e^{-iuy}dy\right)e^{ixu}du \\ &= \int\left(\int f_1(u)e^{i(x-y)u}du\right)f_2(y)dy \\ &= \int (Ff_1)(x-y)f_2(y)dy = [(Ff_1)*f_2](x) \ .\end{aligned}$$

Vi samler de vigtigste af de fundne resultater (herunder (26),(27)) i nedenstående sætning, i hvilken vi desuden tilføjer, at F of $\bar{F}$ er injektive (vises i næste §).

Sætning. Fouriertransformationen F (eller $\bar{F}$) er en injektiv, normformindskende (og derfor kontinuert) homomorfi af Banach-algebraen L med foldning som multiplikation og normen $\| \ \|_1$ ind i Banach-algebraen $\bar{C}_o$ med punktvis multiplikation og supremumnormen $\| \ \|_\infty$.

Vi minder om, at $\bar{C}_o$ betegner afslutningen af rummet C_o af alle kontinuerte funktioner med kompakt støtte inden for Banach-algebraen B af alle begrænsede funktioner $\dot{R} \to \dot{C}$ med punktvis multiplikation og med den ligelige topologi bestemt ved normen $\| \ \|_\infty$. Eksplicit består $\bar{C}_o$ af alle kontinuerte funktioner $f:\dot{R} \to \dot{C}$ for hvilke $f(x) \to 0$ for $|x| \to \infty$ (T.V.R., opg. 62).

Det er ikke lykkedes på simpel måde at karakterisere billedrummet for afbildningen F (eller $\bar{F}$) af L ind i $\bar{C}_o$. Dette er et sidestykke til det forhold, at man ikke har nogen simpel karakteristik af de trigonometriske rækker med koefficienter gående mod 0, som er Fourierrækker for integrable funktioner.

7. Det udjævnede Fourierintegral. Ud fra en given integrabel funktion $f \in L$ har vi dannet den Fouriertransformerede $\bar{F}f = g \in \bar{C}_0$ (i analogi med følgen af Fourierkonstanter for en integrabel funktion med perioden 2π). Vi vil nu søge at genfinde f som noget i retning af Fg fortolket på passende måde (svarende til at en periodisk funktion kan fås ved i en passende forstand at summere den tilhørende Fourierrække). Vanskeligheden består i, at $\bar{F}f = g$ som nævnt ikke behøver at være integrabel, hvorfor Fourierintegralet $\int g(u)e^{iux}du$ ikke behøver at eksistere som Lebesgueintegral. For at bøde herpå multiplicerer vi først den begrænsede, kontinuerte funktion g med en passende integrabel "konvergensfaktor" h_ε afhængig af en parameter $\varepsilon > 0$ og gående punktvis mod 1 for $\varepsilon \to 0$. Nærmere vælger vi en funktion h (f.eks. funktionen f i hvert af eksemplerne 1-4 i §6) med egenskaberne

$$(29) \quad h \in L \cap \bar{C}_0 , \quad h \geq 0 , \quad h(0) = 1 , \quad Fh \in L , \; Fh \geq 0 ,$$

og sætter

$$(30) \qquad h_\varepsilon(u) = h(\varepsilon u) \qquad (\varepsilon > 0) ,$$

hvorved h_ε har de samme egenskaber (29) som h, og

$$(31) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(u) = h(0) = 1 \qquad \text{for ethvert } u \in \dot{R} .$$

Da $h \in \bar{C}_0$ er begrænset, er der her tale om begrænset konvergens, idet $\|h_\varepsilon\|_\infty = \|h\|_\infty < +\infty$.

Vi normerer funktionen $Fh \in L$ og sætter

$$(32) \qquad Fh = \gamma k , \quad \gamma = \|Fh\|_1 ,$$

hvorved funktionen $k = \gamma^{-1}Fh$ blandt andet får følgende egenskaber:

$$(33) \qquad k \in L , \quad k \geq 0 , \quad \int k(x)dx = 1 .$$

Ifølge reglen b, §6 anvendt på (30) gælder nu

$$(34) \qquad Fh_\varepsilon = \gamma k_\varepsilon \ , \quad k_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}k(\frac{x}{\varepsilon}) \ ,$$

og k_ε har de samme egenskaber (33) som k. I henhold til (33) kan vi nu anvende sætning 5.5 med p = 1, og vi slutter at

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(k_\varepsilon * f) = f \text{ i } L \ ,$$

d.v.s. $\lim_{\varepsilon\to 0} \|k_\varepsilon * f - f\|_1 = 0$. Anvendes derfor (28), §6, med h_ε og f i stedet for f_1 og f_2, fås

$$(35) \qquad F(h_\varepsilon \bar{F}f) = \gamma\cdot(k_\varepsilon * f) \to \gamma f \text{ i } L \text{ for } \varepsilon \to 0,$$

gældende for enhver funktion $f \in L$.

Hvis specielt $\bar{F}f = g$ også tilhører L, så gælder $h_\varepsilon \bar{F}f = h_\varepsilon g \to g$ i L, fordi $h_\varepsilon g \to g$ punktvis ifølge (31) og fordi $\|h\|_\infty \varepsilon$ er en integrabel majorant. Da $F:L \to \bar{C}_0$ er kontinuert, følger det at

$$(36) \qquad F(h_\varepsilon \bar{F}f) \to F(\bar{F}f) \text{ punktvis (og ligeligt) for } \varepsilon \to 0 \ .$$

Sammenholder vi (35) og (36), slutter vi af korollæret til lemma 5.6, at

$$(37) \qquad f, \bar{F}f \in L \Rightarrow F\bar{F}f = \gamma f \text{ (næsten overalt)}.$$

Det fremgår specielt af (37) at konstanten $\gamma = \|Fh\|_1$ indført i (32) ikke blot naturligvis er uafhængig af den givne funktion $f \in L$, men også af den i (29) indførte funktion h. Vi kan derfor bestemme γ ved for h at tage f.eks. en af funktionerne i eks. 1-4, §6. Benyttes således eks. 2:

$$h(u) = e^{-|u|} \ , \quad (Fh)(x) = \frac{2}{1+x^2} \ ,$$

finder vi

$$\gamma = \|Fh\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\pi \ ;$$

men samme resultat fås altså i de øvrige 3 eksempler. Heraf sluttes for eks. 4's vedkommende, at der gælder

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{1}{2}x)}{(\frac{1}{2}x)^2}\,dx = 2\pi \ .$$

Også formlen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tfrac{1}{2}x^2)\,dx = \sqrt{2\pi}$$

kunne åbenbart være udledt ad denne vej ved betragtning af eks. 1.

Vi formulerer de vigtigste af de ovenfor fundne resultater i nedenstående sætning, hvori vi dividerer faktoren $\gamma = 2\pi$ fra (35) og (37) over på $\bar{F}f$.

7.1. Sætning. Lad $h:\dot{R} \to \dot{R}$ være en funktion med egenskaberne (29), og sæt $h_\varepsilon(u) = h(\varepsilon u)$ for $\varepsilon > 0$. Idet vi for en vilkårlig funktion $f \in L$ sætter $g = (2\pi)^{-1}\bar{F}f$, altså

$$g(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx \ ,$$

gælder at det "udjævnede" Fourierintegral $F(h_\varepsilon g)$ givet ved

$$[F(h_\varepsilon g)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\varepsilon u)g(u)e^{iux}du$$

konvergerer mod f i L-norm for $\varepsilon \to 0$, altså

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|F(h_\varepsilon g) - f\|_1 = 0 \ .$$

Hvis specielt $g = (2\pi)^{-1}\bar{F}f \in L$, så gælder næsten overalt

$$Fg = f \ , \quad \bar{F}g = \overset{\vee}{f} \ .$$

Bevis. Vi mangler kun at vise, at $\bar{F}g = \overset{\vee}{f}$ når g og dermed

$\overset{\vee}{g}$ er integrable. Og denne relation fremgår ved anvendelse af (23) og reglen c, §6:

$$\bar{F}g = F\overset{\vee}{g} = (Fg)^{\vee} = \overset{\vee}{f} .$$

- Det tilføjes, at vi som sædvanlig kan ombytte F og $\bar{F}$ i sætningens udsagn. |

Korollar. F og $\bar{F}$ er injektive.

Thi af $\bar{F}f = \underline{0}$ i $\bar{C}_0$, altså $g \equiv 0$, følger $F(h_\varepsilon g) \equiv 0$ for ethvert $\varepsilon > 0$, og derfor er $\|f\|_1 = 0$. |

7.2. Lemma. Lad $f \in L \cap B$ (integrabel og begrænset), og antag at $\bar{F}f \geqq 0$. Da gælder $\bar{F}f \in L$, og derfor $(2\pi)^{-1}F\bar{F}f = f$ næsten overalt.

Bevis. Idet vi atter sætter $g = \gamma^{-1}\bar{F}f$, fås af (35) $F(h_\varepsilon g) = k_\varepsilon * f$. Tages her værdien i 0, fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_\varepsilon(u)g(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)f(-y)dy ,$$

Denne størrelse er $\geqq 0$, fordi $h_\varepsilon \geqq 0$ og $g \geqq 0$. Det sidste integral er $\leqq \|\overset{\vee}{f}\|_\infty \int k_\varepsilon = \|f\|_\infty$. Ved anvendelse af Fatou's lemma fås derfor

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(u)g(u)du \leqq \lim_{\varepsilon\to 0}\inf \int_{-\infty}^{\infty} h_\varepsilon(u)g(u)du \leqq \|f\|_\infty$$

og dermed $g \in L$. | (Hvis vi specielt vælger h lige samt aftagende i intervallet $[0,+\infty[$, hvilket gælder om de i §6, eks. 1-4 betragtede funktioner, kan vi i stedet for Fatou's lemma benytte den mere elementære sætning om monoton konvergens, idet $h_\varepsilon(u) = h(\varepsilon u)$ og dermed $h_\varepsilon(u)g(u)$ så danner en stigende følge af funktioner, når ε går mod 0 gennem en aftagende følge af tal.)

8. Konvergens og summabilitet. Lad $\varphi:\dot{R} \to \dot{C}$ betegne en funktion som er integrabel over ethvert endeligt interval, altså $\varphi \in L_{loc}$. For ethvert $p > 0$ kaldes

$$s_p := \int_{-p}^{p} \varphi(u)du$$

for det ved p bestemte (symmetriske) afsnit i det uegentlige integral $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)du$, der jo ikke er forudsat at eksistere som Lebesgueintegral. Hvis nu grænseværdien

$$s := \lim_{p\to\infty} s_p = \lim_{p\to\infty} \int_{-p}^{p}\varphi(u)du$$

eksisterer i $\dot{C}$, siges det uegentlige integral $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)du$ at være konvergent (i Cauchy's forstand, fordi der benyttes symmetriske afsnit), og grænseværdien s kaldes Cauchy's hovedværdi (principale værdi) af integralet.

Vi betragter dernæst afsnitsmiddelværdierne

$$S_p := \frac{1}{p}\int_0^p s_q\, dq = \int_{-p}^{p} \left(1-\frac{|u|}{p}\right)\varphi(u)du ,$$

hvor omskrivningen er sket ved anvendelse af Lebesgue-Fubini's sætning. Hvis grænseværdien $S := \lim_{p\to\infty} S_p$ eksisterer i $\dot{C}$, siges integralet $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)du$ at være "summabelt" (i Cesaro's forstand) med værdien S. - Det er let at vise, at hvis $\lim_{p\to\infty} s_p = s$ eksisterer, da gælder også $\lim_{p\to\infty} S_p = s$. Det omvendte gælder ikke, som man ser af eksemplet $\varphi(u) = \cos u$.

Lad os nu betragte Fourierintegralet for en funktion $f \in L$. Herved menes det uegentlige integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{iux}du , \tag{38}$$

hvor $g = (2\pi)^{-1}\bar{F}f$ er den Fouriertransformerede af f, defineret for alle $u \in \dot{R}$ ved Lebesgueintegralet

$$g(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx.$$

Bemærk faktoren $(2\pi)^{-1}$, som ikke var medtaget i §6. Da $g \in \bar{C}_o$, er g specielt lokalt integrabel. Afsnittene s_p og afsnitsmiddelværdierne S_p i Fourierintegralet er givet for ethvert $p > 0$ som funktioner af $x \in \dot{R}$ ved Lebesgueintegralerne

$$(39) \qquad s_p(x) = \int_{-p}^{p} g(u)e^{iux}dx \ ,$$

$$(40) \qquad S_p(x) = \frac{1}{p}\int_o^p s_q(x)dq = \int_{-p}^{p} (1 - \frac{|u|}{p})g(u)e^{iux}dx \ .$$

Hvis vi nu sammenligner (40) med det "udjævnede" Fourierintegral

$$(41) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} h(\frac{u}{p})g(u)e^{iux}du$$

indført i den foregående paragraf (nu med $\varepsilon = 1/p$), så fremkommer afsnitsmiddelværdierne $S_p(x)$ ved at vælge $h(u) = (1-|u|)^+$ og sætte

$$h_p(u) := h(\frac{u}{p}) = \begin{cases} 1 - \frac{|u|}{p} & \text{for } |u| \leq p \\ 0 & \text{for } |u| \geq p \ . \end{cases}$$

Som tidligere nævnt har funktionen h egenskaberne (29), § 7. Den Fouriertransformerede

$$K_p = \frac{1}{2\pi} Fh_p$$

kaldes Fejér's kerne. Ifølge eks. 4, § 6, bestemmes den (for $x \neq 0$) ved

$$K_p(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2(\frac{1}{2}px)}{p(\frac{1}{2}x)^2} \ .$$

Fejer's kerne er således overalt ≥ 0, og den er integrabel over $\dot{R}$ med

$$\|K_p\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} K_p(x)dx = 1$$

(jvf. (33),(34), §7). Ved hjælp af denne kerne kan afsnitsmiddelværdien $S_p = S_p(x)$ ifølge (28), §6, udtrykkes direkte ved den givne funktion $f \in L$ som $S_p = F(h_p g) = K_p * f$, altså

$$(42) \qquad S_p(x) = \int_p^p (1 - \frac{|u|}{p})\, g(u) e^{iux} du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) K_p(y) dy \ .$$

Med det her foretagne valg $h(u) = (1 - |u|)^+$ udsiger første del af sætning 7.1, at Fourierintegralet $\int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iux} du$, som vi i (38) knyttede til funktionen $f \in L$ (altså med $g = (2\pi)^{-1} \bar{F} f$) er Cesàro summabelt i <u>normtopologien</u> på L med værdien f i den forstand, at

$$\lim_{p \to \infty} \|S_p - f\|_1 = \lim_{p \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |S_p(x) - f(x)| dx = 0 \ .$$

Et dybere liggende resultat er <u>Fejér-Lebesgue's sætning</u> ifølge hvilken det samme gælder punktvis <u>næsten overalt</u>, altså

$$\lim_{p \to \infty} S_p(x) = f(x) \qquad \text{for næsten alle } x \in \dot{R} \ .$$

Derimod er det let ud fra (42) at bevise <u>Fejér's sætning</u>, som udsiger, at der gælder

$$\lim_{p \to \infty} S_p(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

for ethvert $x \in \dot{R}$ i hvilket de anførte grænseværdier af f fra venstre og højre eksisterer (i $\dot{C}$).

For dernæst at bringe selve <u>afsnittene</u> (39) i Fourierintegralet (38) på formen (41), må vi åbenbart sætte $h = 1_{[-1,1]}$ og

$$(43) \qquad h_p(u) := h(\tfrac{u}{p}) = \begin{cases} 1 \text{ for } |u| \leq p \\ 0 \text{ for } |u| > p \ . \end{cases}$$

Denne gang er funktionen h imidlertid diskontinuert, og dens

Fouriertransformerede er hverken integrabel over $\hat{\mathbb{R}}$ eller overalt $\gtrless 0$ (eks.5, §6). Den Fouriertransformerede $D_p = (2\pi)^{-1}Fh_p$ af h_p defineret i (43) kaldes Dirichlet's kerne. Den bestemmes (for $x \neq 0$) ved

$$D_p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin px}{x} .$$

Skønt $h = 1_{[-1,1]}$ således ikke har alle egenskaberne (29), §7, er h og h_p i hvert fald integrable over $\hat{\mathbb{R}}$, hvorfor vi kan anvende (28), §6, side 42 til at udtrykke afsnittene s_p direkte ved den givne funktion $f \in L$ som $s_p = F(h_p g) = D_p * f$, altså

$$s_p(x) = \int_{-p}^{p} g(u)e^{iux}du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, D_p(y)dy .$$

På grundlag heraf kan man blandt andet vise, at Fourierintegralet (38) hørende til $f \in L$ er konvergent med værdien

$$\lim_{p\to\infty} s_p(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

for ethvert $x \in \hat{\mathbb{R}}$ i hvilket grænseværdierne $f(x+)$, $f(x-)$ samt de "afledede" fra højre og venstre

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x+t)-f(x+)}{t} , \quad \lim_{t\to 0+}\frac{f(x-t)-f(x-)}{-t}$$

alle eksisterer.

9. Fourier-Plancherel operatoren. Vi betragter først en funktion $f \in L \cap L^2$. Da $f \in L^2$ og dermed $\tilde{f} \in L^2$ (hvor $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$) slutter vi af sætning 5.2 for $p = 2$, at foldningen $f * \tilde{f}$ er defineret for ethvert $x \in \hat{\mathbb{R}}$ ved

$$(44)\quad (f*\tilde{f})(x) = \int f(x-y)\overline{f(-y)}dy = \int f(x+y)\overline{f(y)}dy ,$$

samt at $f*\tilde{f}$ er begrænset og ligeligt kontinuert. Da $f,\tilde{f} \in L$, er

$f * \check{f} \in L$ ifølge sætning 5.3. Af reglerne c_2 og d, §6, fås

$$F(f * \check{f}) = Ff \cdot F\check{f} = Ff \cdot \overline{Ff} = |Ff|^2 \geqq 0 .$$

Da således $f * \check{f} \in L \cap B$ og $F(f*\check{f}) \geqq 0$, slutter vi af lemma 7.2, idet vi nu sætter

$$g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Ff ,$$

at $|g|^2 = (2\pi)^{-1}F(f*\check{f})$ er integrabel, og derfor at

$$f*\check{f} = \frac{1}{2\pi} \overline{F}F(f*\check{f}) = \overline{F}(|g|^2) \tag{45}$$

næsten overalt. Men i det foreliggende tilfælde er ikke blot den Fouriertransformerede på højre side, men også $f*\check{f}$ en (ligelig) kontinuert funktion, hvorfor (45) må gælde overalt, og dermed ifølge (44)

$$\int f(x+y)\overline{f(y)}dy = \int |g(u)|^2 e^{-iux} du$$

for ethvert $x \in \mathbb{R}$. Indsættes $x = 0$, fås heraf

$$\int |f(y)|^2 dy = \int |g(u)|^2 du ,$$

altså $g = (2\pi)^{-1}Ff \in L^2$ og $\|g\|_2 = \|f\|_2$.

Hermed er da bevist, at restriktionen af $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}F$ til underrummet $L \cap L^2$ af L og L^2 afbilder dette underrum isometrisk $\| \ \|_2$ (og lineært) ind i L^2. Nu er $L \cap L^2$ overalt tæt i L^2. Dette følger naturligvis af, at $C_o \subseteq L \cap L^2$ er tæt i L^2, men vises også let direkte, idet vi for ethvert $f \in L^2$ og ethvert $p > 0$ sætter

$$f^{(p)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } |x| \leqq p \\ 0 & \text{for } |x| > p . \end{cases} \tag{46}$$

Det er klart, at $f^{(p)} \in L^2$, og da enhver funktion i L^2 jo er

integrabel over ethvert endeligt interval, bliver $f^{(p)}$ integrabel og dermed ialt $f^{(p)} \in L \cap L^2$. Ifølge sætningen om monoton grænseovergang under integraltegnet gælder

$$(47) \qquad \|f-f^{(p)}\|^2 = \int_{|x|>p} |f(x)|^2 dx \to 0$$

for $p \to \infty$.

Vi udvider nu den isometriske lineære afbildning $f \to (2\pi)^{-\frac{1}{2}} Ff$ af $L \cap L^2$ ind i L^2 ved kontinuitet (T.V.R., sætn. 17) og kommer derved til en isometrisk lineær afbildning U af hele L^2 ind i L^2 (T.V.R., §36, eller Op. H., §5). Analogt udvider vi restriktionen af $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \bar{F}$ til $L \cap L^2$ ved kontinuitet til en isometrisk operator $\bar{U}$ defineret på hele L^2. For vilkårligt $f \in L^2$ er ifølge (46),(47) $f = \lim_{p\to\infty} f^{(p)}$ og derfor

$$Uf = \lim_{p\to\infty} Uf^{(p)} = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Ff^{(p)} .$$

Der er jo her tale om konvergens i L^2-norm, hvilket også undertiden kaldes konvergens i middel (i modsætning til punktvis konvergens). Med skrivemåden l.i.m. (limit in mean) refererende til grænseværdi (grænsefunktion) i L^2-norm er vi herved kommet til Plancherel's formel:

$$(Uf)(x) = \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (Ff^{(p)})(x) = \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-p}^{p} f(u) e^{iux} du .$$

For to funktioner $f_1, f_2 \in L \cap L^2$ fås under anvendelse af (23), regel c, samt (28) (alt i §6):

$$\sqrt{2\pi}(\bar{U}f_1 \mid f_2) = \int \bar{F}f_1 \cdot f_2 = \int \overset{\vee}{F}f_1 \cdot \bar{f}_2$$
$$= \int (Ff_1)^{\vee} \bar{f}_2 = [(Ff_1) * \bar{f}_2](0) = [F(f_1 \bar{F} \bar{f}_2)](0)$$
$$= \int f_1 \cdot \overline{Ff_2} = \sqrt{2\pi}\,(f_1 \mid Uf_2) .$$

Denne identitet $(\bar{U}f_1|f_2) = (f_1|Uf_2)$ forplanter sig på sædvanlig måde ved udvidelse ved kontinuitet fra $L\cap L^2$ til hele L^2:

$$\forall f_1,f_2 \in L^2: \quad (\bar{U}f_1|f_2) = (f_1|Uf_2) .$$

Men dette betyder jo (Op.H.,§2), at de isometriske operatorer $U,\bar{U}:L^2 \to L^2$ er hinandens adjungerede, hvorfor de er unitære og hinandens inverse:

$$\bar{U} = U^* = U^{-1} .$$

Thi da U er isometrisk, gælder $U^*U = I$, og da $\bar{U} = U^*$ er isometrisk haves tilsvarende $UU^* = (U^*)^*U^* = I$.

Også forbindelserne (23) mellem F og $\bar{F}$ bevares åbenbart ved udvidelsen.

$$\overline{Uf} = \bar{U}\,\bar{f} , \quad \bar{U}f = U\check{f}$$

for alle $f \in L^2$. Af den sidstnævnte følger $\bar{U}\check{f} = f$ og dermed

$$U^2f = U\bar{U}\check{f} = UU^{-1}\check{f} = \check{f} ,$$
$$U^4f = U^2(U^2f) = U^2\check{f} = f ,$$

ligeledes for alle $f \in L^2$ (jvf. sidste formel i sætn. 7.1).

Sammenfattende har vi bevist

<u>Sætning</u> (Plancherel). Der eksisterer netop én kontinuert lineær afbildning $U:L^2 \to L^2$, henholdsvis $\bar{U}:L^2 \to L^2$, som på underrummet $L\cap L^2$ stemmer overens med Fouriertransformationen $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}F$, henholdsvis $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\bar{F}$. Disse operatorer U og $\bar{U}$ er isometriske og bijektive, altså unitære, og de er indbyrdes adjungerede og derfor indbyrdes inverse:

$$\bar{U} = U^* = U^{-1} , \qquad U = \bar{U}^* = \bar{U}^{-1} .$$

For enhver funktion $f \in L^2$ gælder med middelkonvergens (konvergens i L^2-norm):

$$(Uf)(x) = \underset{p \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-p}^{p} f(u)e^{iux}du ,$$

og tilsvarende for $\bar{U}f = U^{-1}f$, idet i erstattes med -i. Endelig gælder

$$U^2f = \bar{U}^2f = \overset{\vee}{f} , \qquad U^4f = \bar{U}^4f = f .$$

Den unitære operator U (eller $\bar{U}$) på det komplekse Hilbertrum $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ kaldes Fourier-Plancherel operatoren. Blandt dens øvrige egenskaber kan nævnes, at regnereglerne a_1, a_2, b, c, c_1, c_2 i §6 også gælder for $U, \bar{U}$ i stedet for $F, \bar{F}$, idet de åbenbart bevares ved udvidelsen ved kontinuitet fra $L \cap L^2$ til L^2 og ikke påvirkes af konstanten $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$.

Af den fundne identitet $U^4 = I$ følger

$$\lambda \in \sigma(U) \Rightarrow \lambda^4 \in \sigma(U^4) = \{1\} ,$$

altså at spektret $\sigma(U)$ kun kan indeholde de 4. enhedsrødder 1,i,-1,-i. Det kan vises, at

$$\sigma(U) = \{1,i,-1,-i\} ,$$

og at U har rent punktspektrum. De Hermiteske ortogonalfunktioner h_n, $n = 0,1,2,\ldots$, defineret ved

$$h_n(x) = (-1)^n \exp(\tfrac{1}{2}x^2)(d/dx)^n \exp(-x^2)$$

danner et totalt ortogonalsystem i L^2 bestående af egenfunktioner for U, idet

$$Uh_n = i^n h_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0) .$$

10. Operatorerne P og Q. På Hilbertrummet $L^2 = L^2(\hat{R})$ over $\hat{C}$ betegner vi med Q den multiplikationsoperator T_q, der bestemmes ved funktionen $q:\hat{R} \to \hat{C}$ defineret ved $q(x) = x$. Ifølge sætning 1.2 er Q en ubegrænset selvadjungeret operator på L^2 med rent kontinuert spektrum $\sigma(Q) = \hat{R}$. Vi minder om, at

$$\text{dom } Q = \{f \in L^2 \mid \int x^2|f(x)|^2dx < \infty\} ,$$
$$(Qf)(x) = xf(x) \qquad \text{for ethvert } f \in \text{dom } Q .$$

Med P betegner vi den maximale operator på $L^2 = L^2(\hat{R})$ hørende til differentiationssymbolet $-iD = -id/dx$ i tilfælde af intervallet $\hat{R} =]-\infty,+\infty[$. Ifølge sætning 3.2 er P en (ubegrænset) selvadjungeret operator på L^2, og P er såvel afslutningen som den adjungerede til sin (essentielt selvadjungerede) restriktion P_o til C_o^1 (eller C_o^∞). Vi minder om, at

$$\text{dom } P = \{f \in L^2 \cap (AC) \mid Df \in L^2\}$$
$$Pf = -iDf \qquad \text{for ethvert } f \in \text{dom } P.$$

Sætning. Fourier-Plancherel operatoren U på L^2 etablerer en unitær ækvivalens mellem P og Q, idet der gælder

$$Q = U^{-1}PU .$$

Bevis. Vi betragter først en funktion $f \in C_o^1 \subseteq \text{dom } P \cap \text{dom } Q$, og bemærker at f, Qf og $Pf = -iDf$ så alle tilhører $C_o \subseteq L \cap L^2$. Ved delvis integration fås derfor

$$\sqrt{2\pi}(U^{-1}Pf)(x) = (\bar{F}Pf)(x) = \int -if'(u)e^{-ixu}du$$
$$= \int if(u)(-ix)e^{-ixu}du = x(\bar{F}f)(x) = \sqrt{2\pi}(QU^{-1}f)(x) ,$$

altså $U^{-1}Pf = QU^{-1}f$. Da således

$$\forall f \in C_o^1 : \qquad Pf = UQU^{-1}f ,$$

er restriktionen P_o af P til C_o^1 en restriktion af den med Q unitæræk-vivalente (og derfor selvadjungerede) operator UQU^{-1}:

$$P_o \subseteq UQU^{-1} .$$

Men da P både er afslutningen P_o^{**} og den adjungerede P_o^* af P_o, slutter vi, at

$$P = P_o^{**} \subseteq UQU^{-1} \subseteq P_o^* = P ,$$

altså $P = UQU^{-1}$, $Q = U^{-1}PU$. |

Det følger specielt af sætningen, at P ligesom Q har rent kontinuert spektrum $\sigma(P) = \dot{R}$. At der ikke kan forekomme egenværdier, ses også let direkte af, at differentialligningen

$$-iDf = \lambda f$$

kun har de klassiske løsninger

$$f(x) = ce^{i\lambda x} ,$$

og disse tilhører ikke L^2 for $c \neq 0$.

Opgaver til Specielle Operatorer.

1. Lad μ være et positivt σ-endeligt Radonmål på et ikke tomt, lokalkompakt rum X (f.eks. Lebesguemålet på $\dot{R}$). Vis, at der gælder

$$f(T_\varphi) = T_{f\circ\varphi}$$

for ethvert $\varphi \in L^\infty(X,\mu)$ og ethvert $f \in C(\sigma(T_\varphi))$, idet T_φ betegner multiplikationsoperatoren $\varphi\cdot$ og analogt $T_{f\circ\varphi} = (f\circ\varphi)\cdot$.

2. Lad μ og X være som i opg.1. Vis, at der for vilkårlige μ-målelige funktioner φ, ψ på X gælder

$$T_{\varphi+\psi} = \overline{T_\varphi + T_\psi}\,, \qquad T_{\varphi\psi} = \overline{T_\varphi T_\psi}\,,$$

hvor stregen angiver afslutning. Vis, at hvis ψ er essentielt begrænset, gælder $T_{\varphi+\psi} = T_\varphi + T_\psi$ og $T_{\varphi\psi} = T_\varphi T_\psi$.

3. Lad X være et åbent interval på $\dot{R}$, og lad $q:X \to \dot{C}$ være kontinuert. Med S betegnes den maximale differentialoperator på $L^2(X) = L^2(X;\dot{C})$ hørende til symbolet $-iD+q\cdot$, altså

$$\operatorname{dom} S = \{u \in L^2(X) \cap (AC)(X) \mid -iDu+qu \in L^2(X)\},$$

$$\forall u \in \operatorname{dom} S: \qquad Su = -iDu+qu.$$

Med T betegnes den analoge differentialoperator, i hvilken q er erstattet med den punktvis konjugerede funktion $\bar{q}$. Med S_o og T_o betegnes restriktionerne af S og T til mængden (AC_o) af absolut kontinuerte funktioner $u:X \to \dot{C}$ med kompakt støtte i X.

a) Vis, at $S_o^* = T$, $T_o^* = S$.

b) Vis, at for ethvert $\varphi \in C_0^1(X)$, $u \in$ dom S gælder $\varphi u \in$ dom S_0 og

$$S_0(\varphi u) = \varphi\, Su - i\varphi' u,$$

hvor $\varphi' = D\varphi$. Analogt for T.

c) Vis, at i tilfældet $X = \dot{R}$ gælder $S^* = T$, $T^* = S$. (Vejledning: Benyt b idet φ erstattes med φ_ε, hvor $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$, hvorefter $\varepsilon \to 0$.)

I tilfældet q reel og $X = \dot{R}$ er således S = T selvadjungeret. Dette fremgår også direkte af a), idet $S_0 = T_0$ nu bliver symmetrisk med defektindex (0,0). Vis dette.

4. Lad $f \in L^p = L^p(\dot{R})$, $g \in L^q = L^q(\dot{R})$, hvor $1<p,\ q<+\infty$ og $1/p+1/q = 1$. Vis, at

$$(f * g)(x) \to 0 \quad \text{for} \quad |x| \to \infty\ ,$$

og dermed at $f*g \in \overline{C}_0 = \overline{C}_0(R)$.

5. Lad $f \in L^p$, $g \in L^q$, hvor $1 \leq p, q \leq +\infty$ og $1/p+1/q \geq 1$. Vis, at $f * g$ er defineret næsten overalt og tilhører L^r, hvor

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\ .$$

Vis også, at $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Vis endelig, at hvis desuden $h \in L^s$, hvor $1/p+1/q+1/s \geq 2$, så gælder (næsten overalt)

$$(f*g)*h = f*(g*h).$$

Vejledning i tilfældet $1<p,q<+\infty$ og $1/p+1/q>1$: Sæt $1/r' = 1-1/r$, og opspalt f og g som $f = f_1 f_2$, $g = g_1 g_2$, hvor

$$f_1 = |f|^{p/r}\ ,\quad f_2 = |f|^{1-p/r}\ \operatorname{sgn} f\ ,$$

$$g_1 = |g|^{q/r}\ ,\quad g_2 = |g|^{1-q/r}\ \operatorname{sgn} g.$$

Benyt derpå Hölder's ulighed på $\int f_1(x-y)g_1(y)\cdot f_2(x-y)g_2(y)dy$ med de konjugerede eksponenter r og r'. Gå i øvrigt frem som i beviset for sætn. 5.4, nu med hjælpefunktion $e \in L^{r'}$ i opgavens første del.

6. Vis, at L som algebra med foldning som multiplikation ikke har noget ételement.

7. Vis, at konvergens medfører Cesàro summabilitet i tilfælde af et uegentligt integral $\int_0^\infty \varphi(x)dx$ med $\varphi \in L_{loc}([0,+\infty[)$, og analogt i tilfælde af et uegentligt integral $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$ med $\varphi \in L_{loc}(\grave{R})$ under benyttelse af symmetriske afsnit $s_p = \int_{-p}^{p}\varphi(x)dx$.

8. Bevis Fejér's sætning: Lad $f \in L$ og sæt $g = (2\pi)^{-1}\,\bar{F}f$. Da er Fourierintegralet $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{iux}du$ Cesàro summabelt med værdien $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ for ethvert $x \in \grave{R}$, hvor grænseværdierne $f(x+)$ og $f(x-)$ eksisterer.

9. Lad $f \in L$ og $qf \in L$, hvor $q(x) = x$ for alle $x \in \grave{R}$. Vis, at $Ff \in C^1$ og at

$$-iDFf = F(qf).$$

10. Lad f_1, $f_2 \in L^2$. Vis, at

$$F(f_1 f_2) = (Uf_1) * (Uf_2).$$

Vis derved, at Fouriertransformationen $F:L \to B \cap C$ har samme billedmængde som foldningsafbildningen $(f_1,f_2) \to f_1 * f_2$ af $L^2 \times L^2$ ind i $B \cap C$.

11. Lad $\varphi \in L$, $f \in L^2$. Vis, at der (næsten overalt) gælder

$$U(\varphi * f) = F\varphi \cdot Uf.$$

12. (Foldningsoperatorer.) Lad $\varphi \in L$. Vis, at der defineres en begrænset operator $S_\varphi : L^2 \to L^2$ ved

$$S_\varphi f = \varphi * f \quad \text{for} \quad f \in L^2.$$

Vis, at Fourier-Plancherel operatoren U etablerer en unitær ækvivalens mellem foldningsoperatoren S_φ og multiplikationsoperatoren $T_{\hat{\varphi}} = \hat{\varphi}\cdot$, hvor $\hat{\varphi} := F\varphi$, altså at

$$S_\varphi = U\, T_{\hat{\varphi}}\, U^{-1}.$$

Vis, at S_φ er normal og at $(S_\varphi)^* = S_{\tilde{\varphi}}$, hvor $\tilde{\varphi}(x) := \overline{\varphi(-x)}$. Vis endvidere, at

$$\|S_\varphi\| = \max_{u \in \hat{R}} |\varphi(u)| \leq \|\varphi\|_1 ,$$

$$\sigma(S_\varphi) = \hat{\varphi}(\hat{R}) \cup \{0\}.$$

13. I de følgende opgaver betragtes Hilbertrummet $L^2 = L^2(\hat{R})$ over $\hat{C}$. Med P betegnes den maximale operator hørende til differentiationssymbolet $-id/dx$ på intervallet $\hat{R}$, og med

Q multiplikationsoperatoren hørende til funktionen q defineret ved $q(x) = x$ for $x \in \dot{R}$. Altså kort:

$$P = -id/dx\ , \quad Q = x^{\bullet}\ .$$

Da er P og Q selvadjungerede.

Med T betegnes den (maximale) differentialoperator på L^2, der defineres ved

$$\text{dom } T = \{\, u \in L^2 \cap (AC) \mid du/dx + xu \in L^2 \,\}\ ,$$

$$\forall u \in \text{dom } T: \qquad Tu = du/dx + xu.$$

Bevis følgende:

a) T^* fremgår af T ved at erstatte xu med -xu. T og T^* er afslutningerne af deres restriktioner til (AC_0) (jvf. opg. 3). Endvidere er $Q + iP \subseteq T$, $Q - iP \subseteq T^*$.

b) $PQ - QP = -iI$.

c) For ethvert $f,g \in \text{dom } P \cap \text{dom } Q$ gælder

$$(Pf|Qf) - (Qf|Pf) = i\|f\|^2,$$

$$\|Tf\|^2 = \|Pf\|^2 + \|Qf\|^2 - \|f\|^2,$$

$$\|T^*f\|^2 = \|Pf\|^2 + \|Qf\|^2 + \|f\|^2.$$

d) $Q + iP$ og $Q - iP$ er afsluttede, og derfor gælder

$$Q+iP = T, \quad Q-iP = T^*.$$

14. For ethvert $s \in \dot{C}$ betegnes med $h^{(s)}$ den funktion $\dot{R} \to \dot{C}$, der defineres ved

$$h^{(s)}(x) = \exp[-\tfrac{1}{2}(x-s)^2] \qquad (x \in \dot{R},\ s \in \dot{C}).$$

Bevis følgende:

a) For ethvert $s \in \dot{C}$ gælder $h^{(s)} \in L^2$ og

$$Th^{(s)} = sh^{(s)}$$

b) For ethvert $g \in L^2$ er funktionen $s \to (h_s|g)$ holomorf i $\dot{C}$, og $(h_s|h_o)$ antager ikke værdien 0.

c) $\{h^{(s)} | s \in \dot{C}\}$ er total i L^2.

d) $\sigma_p(T) = \sigma_r(T^*) = \dot{C}$. Ethvert $s \in \dot{C}$ er en simpel egenværdi for T med egenrummet $\dot{C}h^{(s)}$.

e) De eneste begrænsede operatorer (definerede på hele L^2) som kommuterer med T, er operatorerne λI, $\lambda \in \dot{C}$. (Benyt Liouville's sætning på funktionen
$f(s) = (Bh^{(s)}|h^{(o)}) / (h^{(s)}|h^{(o)})$.)

Heraf følger specielt, at de eneste begrænsede operatorer, der kommuterer med både P og Q, er operatorerne λI, $\lambda \in \dot{C}$. Man udtrykker dette ved at sige, at parret (P,Q) er <u>irreducibelt</u>.

15. (Heisenbergs kommutatorrelation.) Vis, at der for ethvert $f \in \mathrm{dom}(P^2+Q^2)$ gælder $f \in \mathrm{dom}(PQ) \cap \mathrm{dom}(QP)$, og

$$\|(P^2+Q^2)f\|^2 = \|P^2f\|^2 + \|Q^2f\|^2 + 2\|QPf\|^2 - 2\|f\|^2.$$

Vis derved, at P^2+Q^2 er afsluttet , og at

$$P^2 + Q^2 - I \subsetneq T^*T \quad , \qquad P^2 + Q^2 + I \subsetneq TT^*.$$

Vis derpå, at der gælder lighedstegn i disse inklusioner. Benyt hertil metoden fra opg.3 til at vise, at T^*T og TT^* er afslutningerne af deres restriktioner til underrummet

$$(AC_0^1) = \{u \in C_0^1(\dot{R}) \mid Du \in (AC)\} \subsetneq \mathrm{dom}(P^2+Q^2).$$

Vis endelig, at P^2+Q^2 er selvadjungeret.

Det kan omvendt vises, at hvis (P,Q) betegner et irreducibelt par af aelvadjungerede operatorer på et Hilbertrum H, og hvis P^2+Q^2 er selvadjungeret og hvis endelig Heisenbergs kommutatorrelation

$$"PQ - QP = -iI"$$

gælder overalt på $\mathrm{dom}(P^2+Q^2)$, så eksisterer der en unitær operator $V:H \to L^2$ således at

$$VPV^{-1} = -id/dx \ , \quad VQV^{-1} = x\cdot \ ,$$

hvor $-id/dx$ og $x\cdot$ betegner de i opg.13 omhandlede operatorer P og Q.

16. (Heisenbergs usikkerhedsrelation.) Vis, at der for $f \in \mathrm{dom}\, P \cap \mathrm{dom}\, Q$ med $\|f\| = 1$ gælder

$$\|Pf - af\| \, \|Qf - bf\| \geq \tfrac{1}{2}$$

for alle $a, b \in \mathbb{C}$. For hvilket a og b fås den bedste udnyttelse af denne ulighed? For hvilke f, a, b gælder lighedstegnet? Vejledning: Vis som i opg.13 c), at der for $a, b \in \mathbb{R}$ og $f \in \mathrm{dom}\, P \cap \mathrm{dom}\, Q$ gælder

$$(Pf-af \mid Qf-bf) - (Qf-bf \mid Pf-af) = i\|f\|^2.$$

17. Lad $f \in L^2$, $\|f\| = 1$, og lad $\hat{f} = Uf$ være den Fourier-Plancherel transformerede af f. Vis, at der for $a, b \in \mathbb{C}$ gælder

$$\int |x-a|^2 \, |f(x)|^2 dx \cdot \int |x-b|^2 \, |\hat{f}(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \ .$$

Fortolk denne ulighed efter passende valg af a, b som en

sætning om spredningerne af sandsynlighedsfelterne med tæthederne $|f|^2$ og $|\hat{f}|^2$. Vis, at lighedstegnet kun kan indtræffe hvis begge felter er normale.

18. (Hermiteske polynomier.) Gør rede for, at potensrækken for den holomorfe funktion

$$s \to \exp(-s^2+2sx)$$

for givet $x \in \dot{R}$ har formen

$$\exp(-s^2+2sx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} s^n ,$$

hvor H_n er et polynimium af graden n. Vis, at disse såkaldte Hermite polynomier bestemmes ved

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2)(d/dx)^n \exp(-x^2)$$

$$= \Sigma(-1)^\nu \frac{n(n-1)\ldots(n-2\nu+1)}{\nu!} (2x)^{n-2\nu} ,$$

hvor der summeres over alle $\nu \in \dot{N}_0$ med $2\nu \leq n$. Således er

$$H_0(x) = 1, \qquad H_1(x) = 2x,$$
$$H_2(x) = 4x^2-2, \qquad H_3(x) = 8x^3-12x,$$
$$H_4(x) = 16x^4-48x^2+12, \qquad H_5(x) = 32x^5-160x^3+120x.$$

Det anførte explicite udtryk for polynomiet H_n kan f.eks. udledes af, at H_n tilfredsstiller differentialligningen

$$H_n''(x) - 2x\, H_n'(x) + 2n\, H_n(x) = 0.$$

Vis dette.

19. (Hermiteske ortogonalfunktioner.) Den ved

$$h_n(x) = H_n(x)\exp(-\tfrac{1}{2}x^2) \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

definerede funktion af $x \in \mathbb{R}$ kaldes den n'te Hermiteske ortogonalfunktion. Vis, at der for $n \in \mathbb{N}_0$ gælder

$$T^*h_n = h_{n+1}, \qquad Th_{n+1} = (2n+2)h_n$$

$$TT^*h_n = (2n+2)h_n, \quad T^*Th_n = 2nh_n .$$

Vis, at $\{h_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ er et totalt ortogonalsystem i L^2. Vejledning vedrørende totaliteten: Antag at $f \in L^2$ opfylder

$$\int x^n \exp(-\tfrac{1}{2}x^2)\, f(x)dx = 0$$

for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Slut heraf, at

$$\int \exp(sx-\tfrac{1}{2}x^2)\, f(x)dx = 0$$

for alle $s \in \mathbb{C}$. Betragt derpå den Fouriertransformerede af funktionen $x \to f(x)\exp(-\frac{1}{2}x^2)$. - Vis endelig, at der for $n \in \mathbb{N}_0$ gælder

$$\|h_n\|^2 = \int H_n(x)^2 \exp(-x^2)dx = 2^n n!\sqrt{\pi} .$$

20. (Spektret for Fourier-Plancherel operatoren.) Vis, at der mellem Fourier-Plancherel operatoren U og operatoren $T^* = Q-iP$ (opg.13) består relationen

$$UT^* = i\,T^*U .$$

Vis derved, at der for ethvert $n \in \mathbb{N}_0$ gælder

$$Uh_n = i^n h_n ,$$

hvor h_n er den n'te Hermiteske ortogonalfunktion. For ethvert $\nu = 0,1,2,3$ danner altså funktionerne $h_{\nu+4n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, en ortogonalbasis for egenrummet for U hørende til egenværdien i^ν; og U har således rent punktspektrum, nemlig

$$\sigma(U) = \sigma_p(U) = \{1, i, -1, -i\}.$$

Københavns Universitets Matematiske Institut

Noter til Matematik 6.

1968-69, afsnit IV.

(Pakke nr.63)

Indhold:

Egenværdier af endelig index. Jordans normalform:

F.7 1-16

Totalkontinuerte operatorer:

F.8 1-21

Totalkontinuerte operatorer på Hilbertrum:

F.9 1-12

Integraloperatorer:

F.10 1-28

Opgaver: F. 31-47

Autonome systemer:

Aut. Syst. 1-19

Opgaver 1-4

Partielle differentialligninger af første orden:

P.D.1 1-35

Opgaver 1-6

Partielle differentialligninger af anden orden (under udarbejdelse).

Mat.6, 1968-69

Pakke nr. 63 (1968-69) omfatter følgende sider:

Mat.6, 1968-69	Rett. IV. 1 - 5
1965-66	F.7, 1-10, 10a
1966-67	F.7, 11-12
1965-66	F.7, 13-15
1966-67	F.7, 16
1965-66	F.8, 1-9
1966-67	F.8, 10-15
1965-66	F.8, 16
1966-67	F.8, 17-21
1965-66	F.9, 1-12
1965-66	F.10, 1-25
1966-67	F.10, 26-28
1965-66	F.opg. 31-47
1967-68	Aut.Syst. 0-19
1968-69	Aut.Syst.,opg. 1-5
1967-68	P.D.1, 0-35
1968-69	P.D.1, opg. 1-6

Rettelser til afsnit IV.

F.7.

F.7. 2, linie 3_n: Tilføj: Restriktionen af S til $S^{-p}(\underline{0})$ er nilpotent af orden netop p. Restriktionen af S til $S^p(E)$ er bijektiv som afbildning $S^p(E) \to S^p(E)$. (Beviset herfor er anført i rettelsen til side F 7.3.)

F.7. 3, Efter formellinien midt på siden kan tilføjes beviset for ovennævnte tilføjelse til sætningen:

$\forall x \in S^{-p}(\underline{0}) : S^p x = \underline{0}$. Dette viser, at den første restriktion er nilpotent af orden p.

$\exists x \in S^{-p}(\underline{0}): x \notin S^{-(p-1)}(\underline{0})$. Da således $S^{p-1}x \neq \underline{0}$, viser dette, at der er nilpotens af orden netop p.

Den anden restriktion er injektiv, fordi $S^p(E) \cap S^{-1}(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$ ifølge lemmaet, pkt.(a).

Den er surjektiv, fordi

$S(S^p(E)) = S^{p+1}(E) = S^p(E)$.

F.7. 3, linie 4_n: Efter $S^{-(p-1)}(\underline{0})$ tilføjes "inden for $S^{-p}(\underline{0})$".

linie 3_n: $S^{-p-1}(\underline{0})$ rettes til $S^{-(p-1)}(\underline{0})$.

F.7. 6, linie 2 : Efter "injektiv" tilføjes "for $1 \leqq \nu \leqq n \leqq p$".

F.7. 7, linie 6_n: G_n rettes til G_p.

linie 4_n: Samme rettelse.

F.7.10a, linie 4 : "at" rettes til "et".

linie 6_n: Bevis for denne isomorfi: Lad L betegne et algebraiesk komplement til S(N) inden for N, altså

$$N = L + S(N) \quad \text{(direkte)}.$$

Da er summen

$$N + M = L + S(N) + M$$

ligeledes direkte, hvorfor L også er et algebraisk komplement til $S(N) + M$ inden for $N + M$. Men så er L isomorft med såvel $N/S(N)$ som $(N + M) / (S(N) + M)$.

F.8.

F.8. 1, linie 2_n indtil F.8.2, linie 10: Kan erstattes med følgende:

Lad V være en stjerneformet symmetrisk omegn af 0. Da er $(2^n V)_{n \in \mathbb{N}}$ en voksende følge af åbne mængder, som tilsammen overdækker E, specielt U. Da U er kompakt eksisterer derfor $n \in \mathbb{N}$ så at $U \subseteq 2^n V$, altså $2^{-n} U \subseteq V$.

F.8. 2, I linie 6,8 og 9 erstattes $\frac{1}{2}V$ med en stjerneformet omegn W af 0 i E, for hvilken $W + W \subseteq V$.

F.8. 5, linie 1 : "(ensartet ligelig kontinuert)" udgår.

F.8. 6, linie 6 : "er også $\hat{T}(\hat{B})$ kompakt," rettes til "har også $\hat{T}(\hat{B})$ kompakt afslutning i $\hat{F}$."

F.8. 9, linie 2 : "er derfor selv kompakt." ændres til "har derfor kompakt afslutning."

F.8.12, linie 5_n: "et tal c" rettes til "et tal $c > 0$."

F.8.13, linie 2_n: For øvrigt gælder $S(M_n) = M_{n+1}$ (men ikke nødvendigvis $S(N_{n+1}) = S(N_n)$).

F.8.14, linie 8_m: "direkte" rettes til "indirekte".

F.8.17, linie 13_n: "sætn. F.6.4" rettes til "Oper., sætn. 13".

F.9.

F.9. 4, linie 3 : "strengt finere end" rettes til "forskellig fra".

linie 5 : "ja opfylder end ikke" rettes til "idet den ikke opfylder".

F.9. 8, linie 6 : Efter "er" tilføjes "(såfremt $E \neq \{\underline{0}\}$)". Desuden kan tilføjes til sætningen, at enhver egenværdi $\lambda \neq 0$ for T har index 1. Bevis: $S = T - \lambda I$ er normal, og $S^{-1}(\underline{0}) = S^{-2}(\underline{0})$, idet

$$S^2x = \underline{0} \iff \|S(Sx)\| = 0$$
$$\iff \|S^*(Sx)\| = 0$$
$$\Rightarrow (S^*Sx|x) = \|Sx\|^2 = 0$$
$$\iff Sx = \underline{0}.$$

F.9. 9, linie 4_n: Anden gang rettes = til $\leqq$.

F.9.11, linie 8_n: λ_n rettes til $|\lambda_n|$.

F.9.12 : Tilføj: I tilfælde af et Hilbertrum over $\dot{R}$ (i stedet for $\dot{C}$) gælder alt det i §§ 9.7-9.8 anførte uforandret i det vigtige tilfælde, hvor operatoren T er symmetrisk (og totalkontinuert). Jvf. Op.H., opg. 21.

F.10.

F.10. 8, linie 3 : dt rettes til $d\mu(t)$.

F.10.10, linie 12 : "neutralt element" rettes til "ételement".

F.10.15, linie 3_n: Denne og den følgende linie erstattes med: "ethvert $s \in A$ gælder, at for μ-næsten ethvert $t \in A$ er funktionen $k(\cdot,t)$ kontinuert i s, og dersom tillige $k(s,\cdot)$ er μ-målelig for ethvert $s \in A$, og endelig majoranten

$t \to \sup_{s \in A} |K(s,t)|$ er kvadratisk μ-integra-".

F.10.20, linie 9 : "vendt" rettes til "anvendt".

linie 7_n: "højre" rettes til "højere".

linie 1_n: $>$ rettes til $\geq$.

F.10.21, linie 4 : Herefter tilføjes: Det forudsættes tillige, at $p \in C^1(A)$.

F.10.23, linie 5_n: I erstattes med A.

F.10.25, linie 9_n: (21) rettes til (20).

linie 7_n: Efter "integraloperatoren" tilføjes: "på C(A)".

F.10.26, linie 1 : "reciproææe" rettes til "reciprokke".

linie 8_n: $D(L^2(A,\mu))$ rettes til $S(L^2(A,\mu))$.

F.10.27, linie 8 : T_n^{-1} rettes til T^{-1}.

linie 13 : Det indføjede "komme" slettes.

F.10.28, linie 1_n: Kvadratrodstegnet skal virke på hele brøken $\frac{2}{b-a}$.

F.opg. Opgaverne 31,34,37 samt opg. 42 a),b),d) udgår.

F.opg. 31: n! rettes til (n-1)!

F.opg. 41: Linie 4: Foran "findes" tilføjes: "for ethvert $s \in A$".

Linie 5:"$\forall t \in A : |f(t)| \leq c$" rettes til "$|f(s)| \leq c$".

Linie 8: Efter $\forall f \in$ tilføjes: H.

Linie 11: "i det tilfælde, hvor A desuden" rettes til "under benyttelse af, at A".

Linie 12: "hvor" rettes til "at".

F.opg. 44: L(E,E) rettes til $L_t(E,E)$.

Aut.Syst.14, linie 9 : Efter "for" tilføjes: ",at ω er åben, og for".

linie 14 : I formel (6) rettes = til $\rightarrow$.

Aut.Syst.16, linie 11 : Foran "integralbasis" tilføjes: "regulær".

Aut.Syst.17, linie 6 : Efter "injektiv" tilføjes: "og kontinuert".

P.D.1. 10, linie 4 : n-2 rettes til n-1.

P.D.1. 11, linie 14_n: "være" rettes til "omfatte".

P.D.1. 13, linie 9 : $J_o(u)$ rettes til $J_o(s)$.

P.D.1. 24, linie 5 : Efter "fladenormalretning" tilføjes (p,q,-1).

P.D.1. 27, linie 7_n: $D_t y(s,t)$ rettes til $D_t x(s,t)$.

P.D.1. 29, linie 5 : Foran "af" tilføjes: "med hensyn til s".

P.D.1. 30, linie 8 : $J_o(u)$ rettes til $J_o(s)$.

linie 9 : "allw" rettes til "alle".

7. Egenværdier af endelig index. Jordans normalform.

I denne paragraf betegner E et vektorrum over K(=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Vi vil undersøge forskellige endelighedsbetingelser vedrørende egenværdier λ for en lineær afbildning T: E → E (altså en overalt defineret operator på E). Til dette formål betragtes operatoren $S = T - \lambda I$.

7.1 Kæder af nulrum og billedrum. Index. Lad S: E → E være lineær. For ethvert $n \in \mathbb{N}_0$ betegner vi med $S^{-n}(\underline{0})$ nulrummet (=kernen) for S^n og med $S^n(E)$ billedrummet for S^n. Begge disse underrum af E er stabile over for S (jvf.F 6.3). Nulrummene $S^{-n}(\underline{0})$ danner en voksende følge eller kæde:

$$\{\underline{0}\} = S^{-0}(\underline{0}) \subsetneq S^{-1}(\underline{0}) \subsetneq \ldots \subsetneq S^{-n}(\underline{0}) \subsetneq \ldots,$$

medens billedrummene $S^n(E)$ danner en aftagende kæde:

$$E = S^0(E) \supsetneq S^1(E) \supsetneq \ldots \supsetneq S^n(E) \supsetneq \ldots .$$

Såfremt lighedstegn indtræffer et sted i en af kæderne, da også i resten af kæden efter dette sted. Thi dersom $S^{-n}(\underline{0}) = S^{-n-1}(\underline{0})$ for et vist n, da gælder

$$S^{-n-1}(\underline{0}) = S^{-1}(S^{-n}(\underline{0})) = S^{-1}(S^{-n-1}(\underline{0})) = S^{-n-2}(\underline{0}) ,$$

og hvis $S^n(E) = S^{n+1}(E)$, slutter vi på lignende måde, at $S^{n+1}(E) = S^{n+2}(E)$.

Vi definerer nu $p = \infty$ (resp. $q = \infty$), dersom lighedstegn ikke indtræffer i kæden af nulrum (resp.kæden af billedrum). I modsat fald defineres p (resp. q) ved

$$S^{-0}(\underline{0}) \subset S^{-1}(\underline{0}) \subset \ldots \subset S^{-p}(\underline{0}) = S^{-p-1}(\underline{0}) = \ldots ,$$

resp.

$$S^{0}(E) \supset S^{1}(E) \supset \ldots \supset S^{q}(E) = S^{q+1}(E) = \ldots \quad .$$

Det ses, at $p = 0$ er ensbetydende med, at S er injektiv (altså λ ikke egenværdi for T i tilfældet $S = T - \lambda I$), medens $q = 0$ er ensbetydende med, at S er surjektiv.

Lemma. Lad $S: E \to E$ være lineær, og lad $m,n \in \mathbb{N}_0$. Da gælder

(a) $S^{-m}(\underline{0}) = S^{-m-n}(\underline{0}) \iff S^{m}(E) \cap S^{-n}(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$;

(b) $S^{n}(E) = S^{n+m}(E) \iff S^{m}(E) + S^{-n}(\underline{0}) = E$.

Bevis. (a) $S^{-m}(\underline{0}) = S^{-m-n}(\underline{0})$

$\iff \forall x \in E : [S^{m}x = \underline{0} \iff S^{n}(S^{m}x) = \underline{0}]$

$\iff \forall y \in S^{m}(E) : [y \in S^{-n}(\underline{0}) \Rightarrow y = \underline{0}]$

$\iff S^{m}(E) \cap S^{-n}(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$.

(b) $S^{n}(E) = S^{n+m}(E)$

$\iff \forall x \in E \ \exists z \in E : S^{n}x = S^{n+m}z$

$\iff \forall x \in E \ \exists z \in E : x - S^{m}z \in S^{-n}(\underline{0})$

$\iff \forall x \in E : x \in S^{m}(E) + S^{-n}(\underline{0})$

$\iff E = S^{m}(E) + S^{-n}(\underline{0})$.

Sætning. Lad $S: E \to E$ være lineær. Hvis $p < \infty$ og $q < \infty$, da er $p = q$, og E er direkte sum af $S^{p}(\underline{0})$ og $S^{p}(E)$.

Sætningen udsiger altså, at hvis såvel kæden af nulrum som kæden af billedrum bliver stationær, da indtræffer dette på sam-

me trin. Den fælles værdi af p og q kaldes så index for S. Vi vedtager, at en operator med enten $p = \infty$ eller $q = \infty$ skal tillægges index $+\infty$.

Bevis for sætningen. Antag først $p \geq q$. Da er $S^p(E) = S^q(E)$ ifølge definitionen af q. Idet $S^{-p}(\underline{0}) = S^{-p-1}(\underline{0})$ ifølge definitionen af p, fås af ovenstående lemma (a), at $S^p(E) \cap S^{-1}(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$, altså at $S^q(E) \cap S^{-1}(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$, og dermed ved fornyet anvendelse af lemmaet at $S^{-q}(\underline{0}) = S^{-q-1}(\underline{0})$, d.v.s. $q \geq p$. -Antag dernæst $q \geq p$. Da er $S^{-q}(\underline{0}) = S^{-p}(\underline{0})$. Idet $S^q(E) = S^{q+1}(E)$, sluttes af (b) i lemmaet, at $S^1(E) + S^{-q}(\underline{0}) = E$, altså $S^1(E) + S^{-p}(\underline{0}) = E$, og dermed igen ifølge (b) at $S^p(E) = S^{p+1}(E)$, d.v.s. $p \geq q$. -Hermed er bevist, at $p = q$; og det følger nu af lemmaet, at

$$E = S^{-p}(\underline{0}) + S^p(E); \qquad S^{-p}(\underline{0}) \cap S^p(E) = \{\underline{0}\} .$$

I tilfældet $S = T - \lambda I$ kaldes index p for operatoren $T - \lambda I$ også for index for (egenværdien) λ hørende til T. (λ er egenværdi for T hvis og kun hvis index p for λ er > 0.)

7.2 Under samme forudsætning som i sætn.7.1, altså at S har endelig index p, vil vi nu (i tilfældet $p > 0$) spalte $S^{-p}(\underline{0})$ i en direkte sum af underrum, der ligeledes er stabile over for S.

Vi begynder med at vælge et (algebraisk) komplementært underrum G_p til $S^{-(p-1)}(\underline{0})$, således at

$$S^{-p}(\underline{0}) = G_p + S^{-p-1}(\underline{0}) ,$$

hvor denne sum er direkte. Bemærk at $G_p \neq \{\underline{0}\}$, fordi $S^{-(p-1)}(\underline{0}) \subset S^{-p}(\underline{0})$.

Ved induktion vil vi nu successivt finde p underrum : G_p (som anført), $G_{p-1},\ldots,G_1$, således at der for $n = p,p-1,\ldots,2,1$ gælder

$$(1) \quad S^{-n}(\underline{0}) = G_n + S(G_{n+1}) +\ldots+ S^{p-n}(G_p) + S^{-(n-1)}(\underline{0}) ,$$

hvor denne sum er direkte.

Lad os da antage, at $G_p,G_{p-1},\ldots,G_n$ allerede er fastlagt, hver gang i overensstemmelse med (1).

Idet vi sætter

$$F_n = G_n + S(G_{n+1}) +\ldots+ S^{p-n}(G_p) ,$$

bliver $F_n \subseteq S^{-n}(\underline{0})$ og derfor $S(F_n) \subseteq S(S^{-n}(\underline{0})) \subseteq S^{-(n-1)}(\underline{0})$. Dersom nu $n > 1$, gælder også $S^{-(n-2)}(\underline{0}) \subseteq S^{-(n-1)}(\underline{0})$, hvorfor ialt

$$S(F_n) + S^{-(n-2)}(\underline{0}) \subseteq S^{-(n-1)}(\underline{0}) .$$

Nu er summen på venstre side direkte; thi af $x_n \in F_n$ og $Sx_n \in S^{-(n-2)}(\underline{0})$ følger $x_n \in S^{-(n-1)}(\underline{0})$ og dermed $x_n = \underline{0}$, $Sx_n = \underline{0}$, fordi summen $F_n + S^{-(n-1)}(\underline{0})$ var direkte ifølge induktionsantagelsen (1).

Samme ræsonnement viser, at <u>restriktionen af</u> S <u>til</u> F_n <u>er injektiv</u>, idet $Sx_n = \underline{0}$ specielt medfører $Sx_n \in S^{-(n-2)}(\underline{0})$, hvoraf fulgte $x_n = \underline{0}$, når $x_n \in F_n$. Men så må den direkte sum, der definerer F_n, ved S overføres i en direkte sum, der fremstiller $S(F_n)$, nemlig

$$S(F_n) = S(G_n) + S^2(G_{n+1})+\ldots+ S^{p-n+1}(G_p).$$

Vi definerer nu G_{n-1} som et komplement til $S(F_n) + S^{-(n-2)}(\underline{0})$ inden for $S^{-(n-1)}(\underline{0})$ og har da den nye direkte sum

$$S^{-(n-1)}(\underline{0}) = G_{n-1} + S(F_n) + S^{-(n-2)}(\underline{0})$$

$$= G_{n-1} + S(G_n) + \ldots + S^{p-(n-1)}(G_p) + S^{-(n-2)}(\underline{0}).$$

Hermed er induktionen gennemført, og vi har ialt følgende direkte summer

$$S^{-p}(\underline{0}) = G_p + S^{-(p-1)}(\underline{0})$$

$$S^{-(p-1)}(\underline{0}) = G_{p-1} + S(G_p) + S^{-(p-2)}(\underline{0})$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$S^{-1}(\underline{0}) = G_1 + S(G_2) + \ldots + S^{p-1}(G_p) + S^{-0}(\underline{0}) .$$

Indsættes enhver af disse ligninger (pånær den første) i den foregående, fås idet $S^{-0}(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$,

$$S^{-p}(\underline{0}) = G_1 + \sum_{n=1}^{2} S^{n-1}(G_2) + \sum_{n=1}^{3} S^{n-1}(G_3) + \ldots + \sum_{n=1}^{p} S^{n-1}(G_p),$$

$$(2) \qquad S^{-p}(\underline{0}) = H_1 + H_2 + \ldots + H_p ,$$

hvor vi har indført underrummene

$$H_n = \sum_{\nu=1}^{n} S^{\nu-1}(G_n) \qquad (n = 1,\ldots,p).$$

Disse er alle stabile overfor S, fordi $G_n \subseteq S^{-n}(\underline{0})$, altså $S^n(G_n) = \{\underline{0}\}$, og dermed

$$S(H_n) = \sum_{\nu=1}^{n} S^{\nu}(G_n) = \sum_{\nu=1}^{n-1} S^{\nu}(G_n) = \sum_{\nu=2}^{n} S^{\nu-1}(G_n) \subseteq H_n .$$

Hermed er vi nået til en opspaltning (2) af den ønskede art. Bemærk at $H_p \neq \{\underline{0}\}$, fordi som nævnt $G_p \neq \{\underline{0}\}$.

7.3 I fortsættelse af foregående stykke bemærker vi, at restriktionen af $S^{\nu-1}$ til G_n er injektiv. Thi hvis $x \in G_n$ og $S^{\nu-1}x = \underline{0}$, så er også $S^{n-1}x = \underline{0}$, og derfor gælder

$$x \in G_n \cap S^{-(n-1)}(\underline{0}) = \{\underline{0}\},$$

fordi summen (1) er direkte.

Som en første konsekvens heraf anføres, at hvis et af underrummene G_n er direkte sum af to underrum G_n' og G_n'', og hvis vi sætter

$$H_n' = \sum_{\nu=1}^{n} S^{\nu-1}(G_n'), \quad H_n'' = \sum_{\nu=1}^{n} S^{\nu-1}(G_n''),$$

da bliver ikke blot hver af disse summer direkte, men også summen $H_n = H_n' + H_n''$. Dette sidste følger af, at summen

$$S^{\nu-1}(G_n) = S^{\nu-1}(G_n') + S^{\nu-1}(G_n'')$$

er direkte for ethvert $\nu = 1,2,\ldots,n$, fordi $S^{\nu-1}|G_n$ er injektiv. Bemærk også, at H_n' og H_n'' er stabile over for S af samme grund som H_n.

En anden konsekvens er, at

$$\dim S^{\nu-1}(G_n) = \dim G_n,$$

og derfor $\dim H_n = n \cdot \dim G_n$, hvoraf ifølge (2)

$$\dim S^{-p}(\underline{0}) = \sum_{n=1}^{p} \dim H_n = \sum_{n=1}^{p} n \dim G_n.$$

Det fremgår specielt heraf, at hvis $S^{-1}(\underline{0})$ er endeligdimensionalt, da også $S^{-p}(\underline{0})$. Thi da $S^{n-1}(G_n) \subseteq S^{-1}(\underline{0})$ for $n = 1,\ldots,p$, bliver $\dim G_n = \dim S^{n-1}(G_n)$ endelig, og derfor også $\dim S^{-p}(\underline{0})$.

7.4 Det irreducible tilfælde. En operator $S \in L(E,E)$ kaldes nilpotent af orden n, dersom $S^n = 0$, og nilpotent af orden netop n, hvis desuden $S^{n-1} \neq 0$.

Lemma. Lad $S: E \to E$ være lineær, irreducibel og af endelig index $p > 0$. Da er $\dim E = p$, S er nilpotent af orden netop p, og der gælder for ethvert $n = 0,1,\ldots,p$

$$\dim S^{-n}(\underline{0}) = \operatorname{codim} S^n(E) = n .$$

Bevis. Ifølge sætn. 7,1 er E direkte sum af $S^{-p}(\underline{0})$ og $S^p(E)$; men når S er irreducibel, må denne spaltning af E være triviel. Da $p > 0$, er $S^{-p}(\underline{0}) \supseteq S^{-1}(\underline{0}) \supset \{\underline{0}\}$, hvorfor nødvendigvis

$$S^{-p}(\underline{0}) = E, \qquad S^p(E) = \{\underline{0}\} .$$

Begge dele betyder, at $S^p = 0$. Efter definitionen af p er åbenbart $S^{p-1} \neq 0$ og dermed S nilpotent af orden netop p.

Ifølge (2),§7.2, har vi opspaltningen

$$E = S^{-p}(\underline{0}) = H_1 + \ldots + H_p$$

af E som direkte sum af stabile underrum $H_n = \sum_{\nu=1}^{n} S^{\nu-1}(G_n)$, af hvilke $H_p \neq \{\underline{0}\}$. Da S er irreducibel, må der derfor gælde

$$E = H_p = \sum_{n=1}^{p} S^{n-1}(G_n) ,$$

medens $H_n = \{\underline{0}\}$ (og derfor $G_n = \{\underline{0}\}$) for $n < p$. Dernæst slutter vi af en bemærkning i §7.3, at $\dim G_n = 1$. Thi ellers kunne vi spalte G_p i en direkte sum $G_p = G_p' + G_p''$ af underrum $G_p' \neq \{\underline{0}\}$, $G_p'' \neq \{\underline{0}\}$, hvilket ville lede til en spaltning $E = H_p' + H_p''$ af $E = H_p$ som en ligeledes ikke triviel, direkte sum af stabile under-

rum $H_p' = \sum_{n=1}^{p} S^{n-1}(G_p')$ og $H_p'' = \sum_{n=1}^{p} S^{n-1}(G_p'')$.

Af en anden bemærkning i §7.3 fremgår nu, at dim $H_p = p$. Men så må nødvendigvis gælde

$$\dim S^{-n}(\underline{0}) = n , \qquad \dim S^{n}(E) = p - n$$

for $n = 0,1,\ldots,p$ på grund af definitionerne af p og q (=p) i §7.1; thi disse to ligninger har vi verificeret for $n = 0$ og $n = p$, og da såvel kæden af nulrum som kæden af billedrum er strengt monoton for $0 \leq n \leq p$, må ligningerne også gælde for disse værdier af n.

Hermed er lemmaet bevist. Vi tilføjer, at den betragtede lineære afbildning S af det p-dimensionale vektorrum E i sig selv har simple matriksfremstillinger i passende koordinatsystemer. Idet vi stadig følger konstruktionen i §3.7 og benytter, at $S^{-p}(\underline{0}) = E$, dim $G_p = 1$ og $H_p = E$, behøver vi blot at vælge en vektor $e_p \in G_p$, $e_p \neq \underline{0}$ (eller mere direkte udtrykt: vi vælger en vektor $e_p \in E \setminus S^{-(p-1)}(\underline{0})$ og sætter $G_p = Ke_p$). Derpå definerer vi

$$e_n = S^{p-n}e_p \qquad (n = 1,2,\ldots,p)$$

og bemærker, at disse vektorer danner en basis for E, fordi summen

$$E = \sum_{\nu=1}^{p} S^{\nu-1}(G_p) = \sum_{n=1}^{p} S^{p-n}(G_p) = \sum_{n=1}^{p} K(e_n)$$

er direkte. Da nu

$$\begin{aligned} Se_1 &= 0 \\ Se_2 &= e_1 \\ Se_3 &= e_2 \\ &\cdots\cdots \\ Se_p &= e_{p-1} , \end{aligned}$$

har afbildningen S følgende matrix $\underline{\underline{N}}_p$ i det ved basen $(e_1,\ldots,e_p)$ bestemte koordinatsystem:

$$(3) \qquad \underline{\underline{N}}_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

I denne matrix er elementerne umiddelbart over hoveddiagonalen alle 1, medens de øvrige elementer alle er 0.

7.5 Tilfældet $S^{-1}(\underline{0})$ endeligdimensional. Vi betragter nu en operator $S: E \to E$ om hvilken vi blot forudsætter, at $S^{-1}(\underline{0})$ er endeligdimensionalt og at S er af endelig index p. (I tilfældet $S = T - \lambda I$ forudsættes altså, at λ har såvel endelig multiplicitet som endelig index). Disse forudsætninger er naturligvis trivielt opfyldt, hvis vektorrummet E selv er endeligdimensionalt, men dette vil vi ikke antage her.

Udgangspunktet er som før den direkte sum

$$E = S^{-p}(\underline{0}) + S^p(E)$$

af de stabile underrum $S^{-p}(\underline{0})$ og $S^p(E)$, af hvilke $S^{-p}(\underline{0})$ her har endelig dimension ifølge den sidste bemærkning i §7.3. Da vi nu ikke længere forudsætter S irreducibel, behøver denne spaltning af E naturligvis ikke at være triviel, og det kan (hvis $p > 0$) også tænkes, at f.eks. $S^{-p}(\underline{0})$ kan spaltes videre i en direkte sum af stabile underrum, altså at restriktionen af S til $S^{-p}(\underline{0})$ er reducibel. Men da $S^{-p}(\underline{0})$ er endeligdimensionalt, må man ved fortsat spaltning engang komme til en fremstilling af $S^{-p}(\underline{0})$ som

en direkte sum af endelig mange stabile underrum $E_j \neq \{\underline{0}\}$ $(j = 1,\ldots m)$, som ikke kan spaltes yderligere, d.v.s. for hvilke restriktionerne

$$S_j = S|E_j \qquad (j = 1,\ldots,m)$$

alle er <u>irreducible</u>. Da $S^{-p}(\underline{0})$ og dermed E_j er endelig-dimensionalt, har S_j endelig index, lad os sige p_j. Således er forudsætningerne i lemma 7.4 opfyldt med E_j, S_j, p_j i stedet for E, S, p, og vi slutter, at S_j er <u>nilpotent</u> af orden netop p_j, og at $\dim E_j = p_j$, alt for $j = 1,\ldots,m$. Heraf følger den første af relationerne

$$(4) \qquad \dim[S^{-p}(\underline{0})] = \sum_{j=1}^{m} p_j$$

$$(5) \qquad \text{index } S \ (=p) = \max_{j=1,\ldots,m} p_j .$$

Det er klart, at $p \geqq p_j$ for ethvert j, idet $S_j^{\,p} = S^p|E_j = 0$, fordi $E_j \subseteq S^{-p}(\underline{0})$. Sættes $\max p_j = q$, følger den resterende ulighed $p \leqq q$ af at $S^{-p}(\underline{0}) \supseteq S^{-q}(\underline{0})$, altså at $S^q(S^{-p}(\underline{0})) = \{\underline{0}\}$:

$$S^q(S^{-p}(\underline{0})) = S^q(\Sigma_j E_j) = \Sigma_j S_j^{\,q}(E_j) = \Sigma_j S_j^{\,p_j}(E_j) = \{\underline{0}\}.$$

Vælger vi derfor en basis for hvert af de stabile underrum E_j på den i stk. 7.4 omtalte måde, så at S_j får matricen N_{p_j}, da fås ialt en basis for $\Sigma E_j = S^{-p}(\underline{0})$, med hensyn til hvilken restriktionen af S til S^{-p} $S^{-p}(\underline{0})$ har følgende matrix (skrevet som blokmatrix):

$$(6) \qquad \operatorname{diag}(\underline{\underline{N}}_{p_1},\ldots,\underline{\underline{N}}_{p_m}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{N}}_{p_1} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{N}}_{p_2} & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{N}}_{p_m} \end{pmatrix}$$

Her er $\underline{\underline{N}}_{p_1},\ldots,\underline{\underline{N}}_{p_m}$ givet ved (3) med $p = p_1,\ldots,p_m$; og hvert $\underline{\underline{0}}$ står for en matrix, hvis elementer alle er 0.

Sætning. Lad S være en lineær afbildning af et vektorrum E i sig selv. Hvis S har endelig index, og hvis kernen $S^{-1}(\underline{0})$ har endelig dimension, gælder dim $S^{-1}(\underline{0})$ = co-dim S(E).

Bevis. I tilfælde af at endeligdimensionalt vektorrum E er dette et hovedresultat inden for den elementære lineære algebra. (Forudsætningerne om S er naturligvis automatisk opfyldte i dette tilfælde.)

I det aktuelle tilfælde betegnes index for S med p, og vi benytter den direkte sum $E = N + M$, hvor $N = S^{-p}(\underline{0})$ og $M = S^{p}(E)$ er stabile over for S. Nu gælder sætningens konklusion for restriktionerne S_N og S_M af S til N og M, fordi N er endeligdimensionalt og fordi S_M er bijektiv (som afbildning $M \to M$). Heraf følger det ønskede, idet $S^{-1}(\underline{0}) = S_N^{-1}(\underline{0})$, $S(N) = S_N(N)$, og derfor

$$\dim S^{-1}(\underline{0}) = \dim[N/S(N)] = \dim[(N + M)/(S(N) + M)]$$

$$= \dim[(N + M)/(S(N) + S(M))] = \dim[E/S(E)].$$

Herved er benyttet, at vektorrummene $N/S(N)$ og $(N + M)/(S(N) + M)$ åbenbart er isomorfe.

Til slut bemærkes, at der under de i sætningen angivne forudsætninger også gælder

$$\dim S^{-n}(\underline{0}) = \text{co-dim } S^{n}(E) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Thi med S har åbenbart også S^n endelig index, og $S^{-n}(\underline{0}) \subseteq S^{-p}(\underline{0})$ er endeligdimensionalt.

7.6 Lemma. Lad $T:E \to E$ være lineær, og lad f og g betegne to indbyrdes primiske polynomier over koefficientlegemet K for E. Da er kernen for f(T) indeholdt i billedrummet for g(T), altså $[f(T)]^{-1}(\underline{0}) \subseteq [g(T)](E)$.

Bevis. Da f og g er indbyrdes primiske (altså uden fælles polynomdivisor af positiv grad) eksisterer der ifølge en sætning fra algebraen to polynomier h og k så at hf+kg = 1 og dermed

$$h(T)f(T) + k(T)g(T) = I.$$

Dersom $x \in [f(T)]^{-1}(\underline{0})$, altså $f(T)x = \underline{0}$, bliver følgelig

$$x = k(T)g(T)x = g(T)k(T)x \in [g(T)](E).$$

Vi er nu i stand til at videreføre sætn.7.1.

7.7. Sætning. Lad $T:E \to E$ være lineær, og lad $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ være indbyrdes forskellige egenværdier for T af endelig index. Idet p_i betegner index for λ_i, haves følgende spaltning af E som direkte sum af r+1 stabile underrum:

$$E = \sum_{i=1}^{r} (T-\lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0}) + [\prod_{i=1}^{r} (T-\lambda_i I)^{p_i}](E).$$

Bevis. For r = 1 er dette indeholdt i sætn.7.1 anvendt på $S = T-\lambda_1 I$. Idet vi går frem ved induktion og antager sætningen gyldig for r-1 egenværdier, har vi den direkte sum

$$(*) \qquad E = \sum_{i=1}^{r-1} (T-\lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0}) + M,$$

hvor

$$M = [g(T)](E), \qquad g(t) = \prod_{i=1}^{r-1} (t-\lambda_i)^{p_i}.$$

Da $g(\lambda_r) \neq 0$, er g ikke delelig med $t \to t-\lambda_r$, hvorfor g er primisk med $t \to (t-\lambda_r)^n$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$. Ifølge ovenstående lemma er derfor

$$(T - \lambda_r I)^{-n}(\underline{0}) \subseteq M.$$

Idet vi nu betegner restriktionen af $T-\lambda_r I$ til det stabile underrum M med S, gælder derfor for alle n

$$S^{-n}(\underline{0}) = (T - \lambda_r I)^{-n}(\underline{0}).$$

Dette viser sammen med relationen

$$S^n(M) = (T-\lambda_r I)^n g(T)(E) = g(T)(T-\lambda_r I)^n(E),$$

at S har samme endelige index p_r som $T-\lambda_r I$. Ifølge sætn.7.1 har vi derfor den direkte sum

$$M = S^{-p_r}(\underline{0}) + S^{p_r}(M)$$

$$= (T-\lambda_r I)^{-p_r}(\underline{0}) + [(T-\lambda_r I)^{p_r} \prod_{i=1}^{r-1} (T-\lambda_i I)^{p_i}](E).$$

Indsættes dette i (*), fås det ønskede resultat.

7.8 Jordans normalform. Vi betragter nu en lineær afbildning $T:E \to E$, hvor E er et endeligdimensionalt vektorrum over det komplekse tallegeme $\mathbb{C}$. Det er en velkendt konsekvens af algebraens fundamentalsætning (eller af sætn.5.12), at T har mindst én egenværdi, såfremt $E \neq \{\underline{0}\}$. (Matricen $\underline{\underline{N}}_p$ indført i (3),§7.4, viser, at der ikke behøver at være mere end én egenværdi selv om $p = \dim E > 1$, og at denne kan have geometrisk multiplicitet 1.)

Lad nu $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ være samtlige (forskellige) egenværdier for T. Vi indfører det såkaldte minimalpolynomium

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{p_i},$$

hvor p_i er index for λ_i. Ifølge den foregående sætning har det

stabile underrum $[P(T)](E)$ kun $\underline{0}$ fælles med ethvert af underrummene $(T - \lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0})$ og indeholder derfor ingen egenvektor for T. Nu må enhver egenvektor for restriktionen af T til $[P(T)](E)$ naturligvis også være egenvektor for T, og vi slutter derfor, at den nævnte restriktion slet ikke har nogen egenvektorer og altså heller ingen egenværdier. Men dette betyder, at $[P(T)](E) = \{\underline{0}\}$, altså

$$(7) \qquad P(T) = \prod_{i=1}^{r} (T - \lambda_i I)^{p_i} = 0 \ .$$

Ved anvendelse af sætn.7.7 kommer vi derfor til følgende hovedresultat:

Sætning. Lad T være en lineær afbildning af et endeligdimensionalt, kompleks vektorrum E i sig selv. Lad $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ være de indbyrdes forskellige egenværdier for T med index henholdsvis $p_1,\ldots,p_r$. Da er E direkte sum af de stabile underrum $(T - \lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0})$.

Herefter kan vi angive en simpel matrixfremstilling for T svarende til en passende valgt basis for E. For hver egenværdi λ_i sætter vi

$$d_i = \dim (T - \lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0})$$

og vælger en basis for $(T - \lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0})$ således at restriktionen af $T - \lambda_i I$ til dette stabile underrum får en matrix af formen (6),§7.5, altså

$$\operatorname{diag}(\underline{\underline{N}}_{p_{i1}}, \underline{\underline{N}}_{p_{i2}}, \ldots, \underline{\underline{N}}_{p_{im_i}}) \ ,$$

hvor p_{ij} for $j = 1,2,\ldots,m_i$ angiver dimensionerne af de m_i under-

rum, der fremkommer ved en fuldstændig spaltning af $(T - \lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0})$ i en direkte sum af stabile underrum (således at restriktionen af T til hver af disse er irreducibel). Specielt gælder ifølge (4) og (5),§ 7.5,

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} = \dim(T - \lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0}) = d_i \ ,$$

$$(9) \qquad \max_{j=1,\ldots,m_i} p_{ij} = p_i \ .$$

Restriktionen af selve T til $(T - \lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0})$ får herved matricen

$$\mathrm{diag}(\underline{\underline{N}}_{p_{i1}} + \lambda_i \underline{\underline{I}}_{p_{i1}}, \ldots, \underline{\underline{N}}_{p_{im_i}} + \lambda \underline{\underline{I}}_{p_{im_i}}) \ ,$$

hvor $\underline{\underline{I}}_p$ for $p \in \mathbb{N}$ betegner enhedsmatrix af orden p, og hvor derfor

$$\underline{\underline{N}}_p + \lambda \underline{\underline{I}}_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Heri er elementerne i diagonalen alle λ , umiddelbart over diagonalen alle 1, og i øvrigt alle 0.

Den ønskede basis for E fremkommer nu ved at sammenfatte de således bestemte baser for underrummene $(T - \lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0})$, $i = 1,\ldots,r$. Derved får T ialt en matrix, hvis diagonalelementer er egenværdierne $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$, idet λ_i optræder d_i gange i træk med $d_i = \dim(T - \lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0})$; elementerne umiddelbart over diagonalen er enten 1 eller 0, dog altid 0 ved overgangen mellem to forskellige egenværdier i diagonalen ; og alle de øvrige elementer i matricen er 0.

En sådan matrix siges at have Jordans normalform, og vi har altså vist, at enhver lineær afbildning T: E → E med E kompleks og endeligdimensionalt ved passende valg af basis for E får en matrix af Jordans normalform. Formuleret som en sætning om matricer udsiger dette hovedresultat, at der for enhver matrix $\underline{\underline{T}}$ med n rækker og søjler og med komplekse elementer eksisterer en invertibel matrix $\underline{\underline{S}}$, ligeledes kompleks og med n rækker og søjler, således at

$$\underline{\underline{S}}^{-1}\ \underline{\underline{T}}\ \underline{\underline{S}}$$

har Jordans normalform. (Søjlerne i $\underline{\underline{S}}$ vælges som basisvektorer for $E = \mathbb{C}^n$ på den ovenfor beskrevne måde .)

7.9 Ved hjælp af den fundne matrixfremstilling (på Jordans normalform) for en lineær afbildning T: E → E, hvor E er et kompleks endeligdimensionalt vektorrum, finder vi umiddelbart, at det karakteristiske polynomium R for T er givet ved

$$R(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{d_i} ,$$

fordi λ_i optræder d_i gange i diagonalen og elementerne under denne alle er 0. Dette viser, at den algebraiske multiplicitet af λ_i netop er $d_i = \dim(T - \lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0})$. Den geometriske multiplicitet af λ_i , altså $\dim(T - \lambda_i I)^{-1}(\underline{0})$ er derfor højst lig med den algebraiske, eftersom $(T - \lambda_i I)^{-1}(\underline{0}) \subseteq (T - \lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0})$. Lige store er de to multipliciteter hvis og kun hvis $p_i = 1$. Betingelsen for, at dette gælder for alle egenværdierne, er derfor, at Jordans normalform reduceres til en diagonalmatrix, således som det f.eks. kendes fra de normale operatorer på et endeligdimensionalt, komplekst Hilbertrum (F6, sætn. 7).

Det fremgår umiddelbart ved sammenligning mellem (8) og (9), at

$$p_i \leqq d_i \qquad (i = 1,\ldots,r).$$

Dette betyder, at minimalpolynomiet P er divisor i det karakteristiske polynomium R, og da P(T) = 0 ifølge (7), slutter vi at

$$R(T) = 0 \ .$$

Denne relation kaldes Cayley-Hamilton's ligning.

Til slut vil vi vise, at P går op i ethvert polynomium Q med Q(T) = 0, hvilket er anledningen til navnet minimalpolynomium for P. For ethvert i = 1,...,r betegnes med $q_i (\geqq 0)$ multipliciteten af λ_i som rod i Q. Der findes da et polynomium g_i med med $g_i(\lambda_i) \neq 0$, så at

$$Q(t) = (t-\lambda_i)^{q_i} g_i(t)$$

og derfor

$$0 = Q(T) = (T-\lambda_i I)^{q_i} g_i(T).$$

Dette viser, at $[g_i(T)](E) \subseteq (T-\lambda_i I)^{-q_i}(\underline{0})$, og vi slutter af lemma 7.6 ved anvendelse på de indbyrdes primiske polynomier $t \to (t-\lambda_i)^{p_i}$ og g_i, at

$$(T-\lambda_i I)^{-p_i}(\underline{0}) \subseteq [g_i(T)](E) \subseteq (T-\lambda_i I)^{-q_i}(\underline{0}).$$

Men heraf følger det ud fra definitionen på index p_i, at $p_i \leqq q_i$. Da dette gælder for alle i = 1,...,r, må P være divisor i Q.

8. Totalkontinuerte operatorer.

Vi skal i denne og den gølgende paragraf behandle en vigtig type af kontinuerte operatorer på et normeret vektorrum, de såkaldte totalkontinuerte, eller kompakte, operatorer. En sådan operator har spektralegenskaber, der nøje svarer til de for lineære afbildninger på et endeligdimensionalt rum kendte, idet dog punktet $\lambda = 0$ af spektret indtager en særstilling. Således viser vi blandt andet, at ethvert punkt $\lambda \neq 0$ af spektret for en totalkontinuert operator T er en egenværdi for T af endelig multiplicitet og endelig index.

Teorien for totalkontinuerte operatorer påbegyndtes af D.Hilbert, som betragtede selvadjungerede operatorer på et Hilbertrum, og udvikledes i det generelle tilfælde af F.Riesz. Motivet var at generalisere og simplificere I.Fredholms teori for lineære integralligninger.

Den følgende fremstilling følger i hovedsagen kapitel 11 af J.Dieudonné, Foundations of Modern Analysis.

8.1 Sætning. Et topologisk vektorrum E er lokalkompakt, hvis og kun hvis E er endeligdimensionalt og Hausdorff.

Bevis. Et m-dimensionalt Hausdorff t.v.r. over K er jo isomorft med K^m og derfor lokalkompakt. Lad dernæst E være et t.v.r. som er lokalkompakt, d.v.s. er Hausdorff og besidder en kompakt omegn U af $\underline{0}$. Vi kan gerne antage, at U er stjerneformet symmetrisk, altså $\lambda U \subseteq U$ for $\lambda \in K$, $|\lambda| \leq 1$. (Thi U omfatter en stjerneformet symmetrisk, afsluttet- og derfor kompakt- omegn.)

Først viser vi, at omegnene $2^{-n}U$, $n \in \mathbb{N}$, danner en basis for filtret af omegne af $\underline{0}$ i E. I modsat fald fandtes en omegn V af $\underline{0}$, gerne stjerneformet symmetrisk, så at $2^{-n}U \not\subseteq V$ for ethvert

$n \in \dot{N}$; og vi kunne da vælge

$$x_n \in 2^{-n}U \cap C\, V \qquad \text{for } n \in \dot{N}.$$

Punktfølgen $(2^n x_n)_{n\in\dot{N}}$ på den kompakte mængde U havde da mindst ét kontaktpunkt (fortætningspunkt) $y \in U$. Da $\lambda y \to \underline{0}$ i E for $\lambda \to 0$ i K, fandtes $N \in \dot{N}$ så at

$$2^{-n}y \in \tfrac{1}{2}V \qquad \text{for } n > N.$$

Da y var kontaktpunkt for $(2^n x_n)_{n\in\dot{N}}$, fandtes endvidere $n \geq N$ så at $2^n x_n \in y + \frac{1}{2}V$ og derfor

$$x_n \in 2^{-n}y + \tfrac{1}{2}2^{-n}V \subseteq \tfrac{1}{2}V + \tfrac{1}{2}V = V$$

i strid med valget af x_n.

For ethvert $x \in E$ er $x + \frac{1}{2}U$ en omegn af x. Da U er kompakt, findes en endelig mængde $\{a_1,\ldots,a_m\} \subseteq U$ således at

$$U \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (a_j + \tfrac{1}{2}U) = \{a_1,\ldots,a_m\} + \tfrac{1}{2}U\ .$$

Lad M betegne det af $\{a_1,\ldots,a_m\}$ udspændte endeligdimensionale underrum af E. Da E er Hausdorff, er M afsluttet. Vi har da

$$U \subseteq M + \tfrac{1}{2}U \subseteq M + \tfrac{1}{2}(M + \tfrac{1}{2}U) = M + \frac{1}{2^2}U.$$

Fortsættes på denne måde, fås $U \subseteq M + 2^{-n}U$ for alle $n \in \dot{N}$, og derfor

$$U \subseteq \bigcap_{n\in\dot{N}} (M + \frac{1}{2^n}U) = \overline{M} = M\ .$$

Thi for ethvert $x \in E \setminus \overline{M} = E \setminus M$ findes en omegn af x, gerne af formen $x + 2^{-n}U$, som ikke møder M, altså $x \notin M + 2^{-n}U$, idet $-U = U$.

Efter således at have påvist, at $U \subseteq M$, slutter vi, at

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\,U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\,M = M ,$$

og dermed at $E = M$ er endeligdimensionalt.

8.2 I det følgende betragtes udelukkende normerede vektorrum. Ved enhedskuglen i et sådant rum E forstås mængden $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$

Definition. En lineær afbildning T af et normeret rum E ind i et normeret rum F kaldes totalkontinuert, eller kompakt, dersom billedet T(B) af enhedskuglen B i F har kompakt afslutning $\overline{T(B)}$ i F, altså dersom T(B) er indeholdt i en kompakt delmængde af F.

Det følger så, at $\overline{T(A)}$ er kompakt for enhver begrænset mængde $A \subseteq E$.

Definitionen på totalkontinuitet kan også udtrykkes således: Enhver begrænset punktfølge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på E overføres ved T i en punktfølge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på F, som har en konvergent delfølge. Det er åbenbart tilstrækkeligt at betragte punktfølger $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på B.

Ækvivalensen af de to definitioner fremgår af, at en delmængde af et metrisk rum F har kompakt afslutning, hvis og kun hvis enhver punktfølge på delmængden har en delfølge, som konvergerer i F. Dette anvendes på $T(B) \subseteq F$.

En totalkontinuert afbildning $T: E \to F$ er nødvendigvis kontinuert. Thi $\overline{T(B)}$ er kompakt og derfor begrænset, eftersom normen på F er kontinuert, derfor begrænset på enhver kompakt mængde.

Når vi i det følgende taler om en totalkontinuert operator T på E, eller fra E til F, vil vi altid underforstå, at $D(T) = E$.

Herved bliver altså $T \in L(E,E)$, resp. $T \in L(E,F)$.

Den identiske afbildning I af E på sig selv er et eksempel på en kontinuert operator på E, som ikke er totalkontinuert, medmindre B er kompakt og E derfor lokalkompakt, d.v.s. endeligdimensional (sætn. 8.1).

8.3. Eksempel. Lad μ betegne Lebesguemålet på et kompakt interval $A \subseteq \mathbb{R}$ (eller på en kompakt delmængde A af $\mathbb{R}^m$). Mængden $C(A) = C(A;K)$ af alle kontinuerte funktioner $f: A \to K$ på A er da et Banach-rum med normen

$$\|f\| = \sup_{t \in A} |f(t)| .$$

Lad $k = k(s,t)$ betegne en given kontinuert afbildning af $A \times A$ ind i K, den såkaldte kerne. For enhver funktion $f \in C(A)$ defineres en funktion g på A ved

$$g(s) = \int_A k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t).$$

Vi vil vise, at $g \in C(A)$, og at operatoren $f \to Tf = g$ på $C(A)$ er totalkontinuert.

Da $A \times A$ er kompakt, og kernen k er kontinuert, bliver k ligelig kontinuert. Specielt findes til $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ så at

$$|s - s'| < \delta \Rightarrow \forall t \in A: |k(s,t) - k(s',t)| < \varepsilon .$$

For $|s - s'| < \delta$ gælder derfor

$$|g(s) - g(s')| = \left|\int_A (k(s,t) - k(s',t))\, f(t)\, d\mu(t)\right|$$

$$\leq \varepsilon \int_A |f(t)|\, d\mu(t) \leq \varepsilon\, \mu(A)\, \|f\| .$$

Hermed er vist, at $Tf = g$ er ligelig kontinuert, og ydermere at

$\{Tf \mid f \in B\}$ er en ækvikontinuert (=ensartet ligelig kontinuert) mængde af funktioner, idet $B = \{f \in C(A) \mid \|f\| \leq 1\}$.

Endvidere er kernen k begrænset, lad os sige $|k(s,t)| \leq M$ for alle $(s,t) \in A \times A$.
Heraf følger let, at

$$|g(s)| \leq M\mu(A)\,\|f\| ,$$

og dermed at $T(B) = \{Tf \mid f \in B\}$ er en begrænset delmængde af $C(A)$. Ifølge Ascolis sætning har enhver begrænset og ækvikontinuert delmængde af $C(A)$ kompakt afslutning i $C(A)$. Hermed er bevist, at $\overline{T(B)}$ er kompakt, altså at integraloperatoren $T:C(A) \to C(A)$ er totalkontinuert.

Det fundne resultat udstrækkes uden vanskelighed til det tilfælde, hvor μ betegner et vilkårligt positivt Radon mål på et kompakt metrisk rum A.

8.4 Det ville ikke betegne nogen væsentlig indskrænkning i begrebet totalkontinuitet, dersom man nøjes med at betragte det tilfælde, hvor de normerede rum E og F er fuldstændige, altså Banach-rum. Et vilkårligt normeret vektorrum E kan jo indlejres som et overalt tæt underrum af et Banach-rum $\hat{E}$ (fuldstændiggørelsen af E, jvf. § F2.9). Lad nu $T: E \to F$ være totalkontinuert, altså $\overline{T(B)}$ kompakt. Denne mængde $\overline{T(B)}$ forbliver kompakt, selv om den opfattes som delmængde af fuldstændiggørelsen $\hat{F} \supseteq F$ af F. Specielt er $\overline{T(B)}$ også afsluttet i $\hat{F}$ og er derfor afslutningen af $T(B)$ i $\hat{F}$. Men så er $T: E \to \hat{F}$ også totalkontinuert. Endelig har denne sidste operator ifølge sætn. F 2.8 en entydigt bestemt udvidelse til en kontinuert afbildning $\hat{T}: \hat{E} \to \hat{F}$. For nu

at vise, at $\hat{T}$ er totalkontinuert, bemærkes, at enhedskuglen $\hat{B} = \{\hat{x} \in \hat{E} \mid \|\hat{x}\| \leq 1\}$ i $\hat{E}$er en delmængde af afslutningen af 2B (faktisk også af B) i $\hat{E}$, som man let viser. Følgelig er $\hat{T}(\hat{B})$en delmængde af afslutningen af $\hat{T}(2B) = T(2B)$ i $\hat{E}$. Da $T: E \to F$ var totalkontinuert, er afslutningen af T(2B) i $\hat{F}$ imidlertid kompakt, og derfor er også $\hat{T}(\hat{B})$ kompakt, hvilket skulle vises.

Som et resultat i modsat retning kan det anføres, at hvis $T: E \to F$ er totalkontinuert, og hvis E_1 er et underrum af E, da er restriktionen $T_1 = T|E_1$ naturligvis ligeledes totalkontinuert som afbildning af E_1 ind i F. Hvis endvidere F_1 betegner et <u>afsluttet</u> underrum af F således at $T(E_1) \subseteq F_1$, da bliver også $T_1: E_1 \to F_1$ totalkontinuert. Thi afslutningen af $T_1(B_1) = T(B \cap E_1) \subseteq F_1$ i F er indeholdt i den kompakte mængde $\overline{T(B)} \cap F_1$. Specielt er hermed vist, at restriktionen af en totalkontinuert operator $T: E \to E$ til et <u>stabilt</u>, <u>afsluttet</u> underrum af E er totalkontinuert.

8.5 Med $L_t(E,F)$ betegner vi i det følgende mængden af alle totalkontinuerte afbildninger af det normerede rum E ind i det normerede rum F. Vi har da $L_t(E,F) \subseteq L(E,F)$, hvor L(E,F) betegner mængden af alle kontinuerte lineære afbildninger af E ind i F. Som bekendt (sætn.F 4.3) er L(E,F) et normeret vektorrum under brug af operatornormen; og L(E,F) er fuldstændigt, altså et Banach-rum, dersom F er det.

<u>Sætning</u>. $L_t(E,F)$ er et underrum af L(E,F). Hvis F er <u>fuldstændigt</u>, er $L_t(E,F)$ <u>afsluttet</u> i L(E,F) (og dermed selv fuldstændigt).

Bevis. Med B betegnes enhedskuglen i E. At f.eks. $T_1 + T_2 \in L_t(E,F)$, når T_1 og T_2 er i $L_t(E,F)$, følger af, at

$$(T_1 + T_2)(B) \subseteq T_1(B) + T_2(B) \subseteq \overline{T_1(B)} + \overline{T_2(B)},$$

og at summen af to kompakte delmængder af F er kompakt som billede af mængdernes kompakte produkt ved den kontinuerte afbildning $(y_1,y_2) \to y_1 + y_2$ af $F \times F$ ind i F.

Lad dernæst F være fuldstændigt. Da L(E,F) er et normeret rum, bliver delmængden $L_t(E,F)$ afsluttet i L(E,F), hvis (og kun hvis) det for enhver følge $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ på $L_t(E,F)$, som konvergerer inden for L(E,F), gælder at grænseværdien $T = \lim_j T_j$ tilhører $L_t(E,F)$. For at vise, at denne betingelse er opfyldt, betragtes en vilkårlig følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på enhedskuglen $B \subseteq E$. For hvert $j \in \mathbb{N}$ har følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en delfølge $(x_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ således at følgen $(T_j x_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent i F. Foretages denne udtynding af $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i stedet successivt, først for $j = 1$, dernæst ved fortsat udtynding for $j = 2$, og så videre, og betragtes diagonalfølgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hvor $y_n = x_n^{(n)}$, da er for ethvert $j \in \mathbb{N}$ følgen $(T_j y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (når bortses fra dens j første elementer) en delfølge af $(T_j x_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ og derfor konvergent, altså en fundamentalfølge på F.

Men heraf følger let, at også $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en fundamentalfølge på F, og dermed konvergent, da F er fuldstændigt. Thi for givet $\varepsilon > 0$ findes først $j \in \mathbb{N}$ så at $\|T - T_j\| < \varepsilon/3$, dernæst $N \in \mathbb{N}$ så at $\|T_j y_m - T_j y_n\| < \varepsilon/3$ for $m,n > N$. For $m,n > N$ gælder da, idet $y_m, y_n \in B$,

$$\|Ty_m - Ty_n\| \leq \|(T - T_j)y_m\| + \|T_j y_m - T_j y_n\| + \|(T_j - T)y_n\| < \varepsilon .$$

8.6 Sætning. Ved sammensætning af en kontinuert og en totalkontinuert operator fås, uanset rækkefølgen, en totalkontinuert operator.

Idet E,F og G er tre normerede rum, haves altså implikationerne

$$T \in L_t(E,F) \wedge S \in L(F,G) \Rightarrow ST \in L_t(E,G) ,$$

$$T \in L(E,F) \wedge S \in L_t(F,G) \Rightarrow ST \in L_t(E,G).$$

Den første af disse følger f.eks. af, at det kontinuerte billede $S(\overline{T(B)})$ af den kompakte mængde $\overline{T(B)}$ er kompakt i G og omfatter $(ST)(B) = S(T(B))$. Den anden implikation følger af, at $T(B) \subseteq \|T\|B_1$, hvor B_1 er enhedskuglen i F. Følgelig gælder

$$(ST)(B) = S(T(B)) \subseteq \|T\| S(B_1) \subseteq \|T\| \overline{S(B_1)},$$

og her er $\overline{S(B_1)}$, og derfor $\|T\| \overline{S(B_1)}$, kompakt i G.

Korollar. $L_t(E,E)$ er et tosidet ideal i $L(E,E)$, afsluttet hvis E er et Banach-rum.

8.7 En lineær afbildning $T: E \to F$ siges at have endelig rang, dersom billedrummet T(E) er endeligdimensionalt. I så fald defineres rangen af T ved $\operatorname{rg} T = \dim T(E)$.

Sætning. Enhver kontinuert, lineær afbildning $T \in L(E,F)$ med endelig rang er totalkontinuert.

Bevis. Det endeligdimensionale, normerede vektorrum $T(E) \subseteq F$ er lokalkompakt (sætn.8.1) og besidder altså en kompakt omegn V af $\underline{0}$. Denne omfatter en kugle εB_1, $\varepsilon > 0$, hvor B_1 betegner enhedskuglen i T(E). Da B_1 er en afsluttet delmængde af

den kompakte mængde $\varepsilon^{-1}V$, er B_1 kompakt. Da T er begrænset, er T(B) indeholdt i den kompakte mængde $\|T\|B_1$ og er derfor selv kompakt.

Det følger af sætningen, at hvis specielt F er endeligdimensionalt, bliver $L_t(E,F) = L(E,F)$. Samme konklusion haves, hvis i stedet E er endeligdimensionalt, idet så B og dermed T(B) bliver kompakt for $T \in L(E,F)$.

En anden konsekvens af sætningen ovenfor i forbindelse med sætn. 8.5 er, at hvis F er et Banach-rum, og hvis $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en følge af kontinuerte operatorer af endelig rang, som konvergerer inden for L(E,F) mod en operator $T \in L(E,F)$, da er T totalkontinuert. Interessant er spørgsmålet, om enhver totalkontinuert operator $T \in L_t(E,F)$ kan fås på denne måde som grænseværdi af en følge af kontinuerte operatorer af endelig rang, altså om delmængden af $L_t(E,F)$ bestående af operatorerne af endelig rang er overalt tæt i $L_t(E,F)$. Svaret vides at være bekræftende for visse typer af Banach-rum F, herunder alle Hilbertrum; men spørgsmålet står åbent i det generelle tilfælde.

8.8 Riesz' teori. I resten af paragraffen betragtes en totalkontinuert operator T på et normeret rum E. Med B betegnes som hidtil enhedskuglen i E, og med I den identiske afbildning af E på sig selv. Vi sætter

$$S = I - T$$

med henblik på at undersøge $\lambda = 1$ som muligt punkt af spektret $\sigma(T)$. Siden føres tilfældet $\lambda \neq 0$ tilbage hertil ved omskrivningen $T - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}T)$, hvor $\lambda^{-1}T$ er totalkontinuert.

Vi begynder med en elementær bemærkning om "tilnærmet ortogonalitet" i et normeret rum E. Lad $G \subset E$ være et afsluttet, ægte underrum af E. Hvis E er et Hilbertrum, har ethvert punkt $x_0 \in G^{\perp}$ som bekendt den egenskab, at $\underline{0}$ er det nærmeste punkt i G, altså at

$$\forall\, u \in G: \qquad \|x_0 - u\| \geqq \|x_0\|.$$

Et punkt $x_0 \neq \underline{0}$ med denne egenskab eksisterer imidlertid ikke nødvendigvis i tilfælde af et vilkårligt normeret rum E (selv ikke ethvert Banach-rum). Men vi kan altid svarende til et opgivet tal $k < 1$ finde $x_0 \in E\backslash G$ med

$$(*) \qquad \forall\, u \in G: \qquad \|x_0 - u\| \geqq k\, \|x_0\|\,,$$

og af homogenitetgrunde kan vi derefter tillige opnå, at $\|x_0\| = 1$.

For at komme til et punkt $x_0 \in E\backslash G$ med egenskaben (*), behøver vi blot at vælge $y_0 \in E\backslash G$ og indføre afstanden

$$\alpha = \operatorname{dist}(y_0, G) = \inf_{u \in G} \|y_0 - u\|,$$

som åbenbart er > 0, da y_0 ikke tilhører $\overline{G} = G$. Da $\alpha/k > \alpha$, eksisterer $u_0 \in G$ med $\|y_0 - u_0\| \leqq \alpha/k$; og $x_0 = y_0 - u_0$ har derfor den ønskede egenskab (*), fordi der for $u \in G$ gælder $u_0 + u \in G$ og derfor

$$\|x_0 - u\| = \|y_0 - (u_0 + u)\| \geqq \alpha \geqq k\|y_0 - u_0\| = k\|x_0\|.$$

Vi skal nu anvende dette resultat i den foreliggende situation.

8.9 Lemma. Lad F og G være afsluttede underrum af E med $S(F) \subsetneqq G \subset F$. Da eksisterer $x_0 \in F\backslash G$ med $\|x_0\| = 1$ således at

$\|Tx_o - Tx\| \geq \frac{1}{2}$ for alle $x \in G$.

Bevis. Ved anvendelse af det ovenstående med F i stedet for E og med $k = \frac{1}{2}$ finder vi $x_o \in F \setminus G$ med $\|x_o\| = 1$ og med $\|x_o - u\| \geq \frac{1}{2}$ for alle $u \in G$. For ethvert $x \in G$ er

$$Tx_o - Tx = x_o - (x + Sx_o - Sx) = x_o - u,$$

idet vi sætter $u = x + Sx_o - Sx$. Resultatet fremgår da af, at $u \in G$, og dette følger af, at $x \in G$, $Sx_o \in S(F) \subseteq G$, og $S\,x \in S(G) \subseteq S(F) \subseteq G$.

8.10 Lemma.

a) $S^{-1}(\underline{0})$ er afsluttet og endeligdimensionalt.

b) $S(E)$ er afsluttet.

Bevis. Vi sætter $S^{-1}(\underline{0}) = N$.

a) Da S er kontinuert og $\{\underline{0}\}$ afsluttet, er $S^{-1}(\underline{0}) = N$ afsluttet. For $x \in N$ er $Tx = x$. Derfor er

$$B \cap N = T(B \cap N) \subseteq T(B) \subseteq \overline{T(B)}.$$

Da B og N er afsluttede, er $B \cap N$ afsluttet og derfor kompakt, da den er delmængde af den kompakte mængde $\overline{T(B)}$. Da enhedakuglen $B \cap N$ i det normerede rum N således er kompakt, er N lokalkompakt og derfor endeligdimensionalt ifølge sætn. 8.1.

b) Lad $y \in \overline{S(E)}$. Da E er et metrisk rum, findes em følge af vektorer $y_n \in S(E)$ med $\lim_n y_n = y$. For ethvert n findes $x_n \in E$ med $Sx_n = y_n$. Vi viser først ad indirekte vej, at følgen af afstande

$$d_n = \mathrm{dist}(x_n, N)$$

er begrænset. I modsat fald kunne vi efter overgang til en passende delfølge antage, at $d_n \to +\infty$ for $n \to \infty$. Vi sætter

$$z_n = d_n^{-1} x_n ,$$

hvorved $\operatorname{dist}(z_n,N) = d_n^{-1} \operatorname{dist}(x_n,d_nN) = 1$. Der eksisterer derfor $u_n \in N$ med

$$\|z_n - u_n\| \leq 2.$$

Sættes nu $v_n = z_n - u_n$, fås

$$Sv_n = Sz_n - Su_n = Sz_n = d_n^{-1} Sx_n \to \underline{0}$$

for $n \to \infty$, da $Sx_n \to y$ og $d_n^{-1} \to 0$ for $n \to \infty$.
Endvidere er

$$\operatorname{dist}(v_n,N) = \operatorname{dist}(z_n - u_n, N - u_n) = \operatorname{dist}(z_n,N) = 1 .$$

Da $\|v_n\| \leq 2$ og T er totalkontinuert, har følgen $(Tv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en konvergent delfølge:

$$Tv_{n_p} \to v \in E \qquad \text{for } p \to \infty .$$

Da $Sv_n \to \underline{0}$ og $v_n = Sv_n + Tv_n$, slutter vi, at $v_{n_p} \to v$. Da endvidere $\operatorname{dist}(x,N)$ afhænger kontinuert af $x \in E$, og da $\operatorname{dist}(v_n,N) = 1$ som ovenfor vist, fås $\operatorname{dist}(v,N) = 1$. Men dette strider mod, at $Sv = \lim_{n\to\infty} Sv_n = \underline{0}$, altså $v \in N$.

Der findes således et tal c så at $d_n \leq c$ for alle n. Ifølge definitionen af $d_n = \operatorname{dist}(x_n,N)$ findes $u_n \in N$ med $\|x_n - u_n\| \leq 2c$. Ved om fornødent at erstatte x_n med $x_n - u_n$, hvilket ikke påvirker Sx_n, kan vi antage, at $\|x_n\| \leq 2c$. Da T er totalkontinuert, har $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ så en konvergent delfølge:

$$Tx_{n_p} \to v \in E \qquad \text{for } p \to \infty .$$

Da $Sx_n = y_n \to y$, fås

$$x_{n_p} = Sx_{n_p} + Tx_{n_p} \to y + v$$

og derfor af kontinuitetsgrunde $Sx_{n_p} \to S(y + v)$. Da E er Hausdorff, må der således gælde $y = S(y + v) \in S(E)$. Hermed er vist, at S(E) er afsluttet i E.

Bemærkning. For ethvert $n \in \dot{N}$ er ifølge binomialformelen

$$S^n = (I - T)^n = I - TU,$$

hvor U er et polynomium i T, og dermed $U \in L(E,E)$. Ifølge sætn. 8.6 er TU totalkontinuert, og vi slutter, at S^n har den form, som i det foregående er fastsat for S. Ifølge lemma 8.10 er derfor også $S^{-n}(\underline{0})$ (afsluttet og) endeligdimensionalt, og $S^n(E)$ er afsluttet i E.

8.11 Lemma. S har endelig index p. Summen $E = S^{-p}(\underline{0}) + S^p(E)$ er topologisk direkte. Restriktionen af S til det stabile, endeligdimensionale underrum $S^{-p}(\underline{0})$ er nilpotent af orden netop p. Restriktionen af S til det stabile, afsluttede underrum $S^p(E)$ er en topologisk isomorfi af dette på sig selv.

Bevis. Til afkortning sætter vi i dette bevis

$$N_n = S^{-n}(\underline{0}), \qquad M_n = S^n(E).$$

Da gælder åbenbart

$$S(N_{n+1}) \subseteq N_n \subseteq N_{n+1} , \qquad S(M_n) \subseteq M_{n+1} \subseteq M_n .$$

Antages det nu, at $N_n \subset N_{n+1}$ for alle $n \in \dot{N}_o$, så findes der i-

følge lemma 8.9 (med $F = N_{n+1}$, $G = N_n$) en vektor $x_n \in N_{n+1} \setminus N_n$ med $\|x_n\| = 1$, således at der for alle $x \in N_n$ gælder $\|Tx_n - Tx\| \geq \frac{1}{2}$. For $m < n$ kan dette anvendes med $x = x_m$, fordi $x_m \in N_{m+1} \subseteq N_n$. Da således

$$\|Tx_m - Tx_n\| \geq \tfrac{1}{2} \quad \text{for alle } m,n \text{ med } m < n,$$

kan følgen $(Tx_n)_{n\in\hat{N}}$ ikke have nogen konvergent delfølge, hvilket strider imod totalkontinuiteten af T.

På lignende måde fører antagelsen om, at $M_{n+1} \subset M_n$ for alle $n \in \hat{N}_o$, til en modstrid, idet der ifølge lemma 8.9 (med $F = M_n$, $G = M_{n+1}$) eksisterer $x_n \in M_n \setminus M_{n+1}$ med $\|Tx_n - Tx\| \geq \frac{1}{2}$ for alle $x \in M_{n+1}$, specielt for $x = x_m$ med $m > n$.

Det fremgår nu af sætn. F 7.1, at S har endelig index, lad os sige p, og at $E = N_p + M_p$, hvor denne sum er algebraisk direkte. Da N_p er endeligdimensionalt og M_p er afsluttet, er summen også topologisk direkte ifølge T.V.R. sætn. 26. At restriktionen af S til $N_p = S^{-p}(\underline{0})$ er nilpotent af orden p følger af definitionen af index p. Restriktionen $S|M_p$ er kontinuert og er en algebraisk isomorfi af M_p på sig selv. For at vise, at $S|M_p$ er en topologisk isomorfi må vi godtgøre, at dens inverse er kontinuert, d.v.s. begrænset. Vi viser dette direkte, idet vi antager, at der findes en følge af vektorer $x_n \in M_p$ med $\|Sx_n\| = 1$, således at $\|x_n\| \to \infty$ for $n \to \infty$.
Sættes $v_n = \|x_n\|^{-1} x_n$, bliver

$$v_n \in M_p, \quad \|v_n\| = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \|Sv_n\| = 0.$$

Efter overgang til en passende delfølge kan vi som sædvanlig antage, at $\lim_n Tv_n = v$ eksisterer i E, hvorfor

$$v_n = Sv_n + Tv_n \to \underline{0} + v = v$$

i E. Heraf følger dels, at $v \in \bar{M}_p = M_p$, fordi $v_n \in M_p$, dels at $\|v\| = \lim_n \|v_n\| = 1$, altså specielt at $v \neq \underline{0}$, og endelig fås $Sv = \lim_n Sv_n = \underline{0}$. Dette strider imidlertid imod, at restriktionen af S til M_p var injektiv.

8.12 Lemma. Hvis S er injektiv, er S en topologisk isomorfi af E på E.

Dette er blot et specialtilfælde af sidste udsagn i det foregående lemma svarende til index p = 0, hvorved $N_p = \{\underline{0}\}$, $M_p = E$.

Vi er nu i stand til at udlede hovedresultaterne i Riesz' teori.

8.13 Sætning. Lad $T : E \to E$ være en totalkontinuert operator på et normeret rum E over K(=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$).

a) Spektret $\sigma(T)$ er en kompakt og (højst) numerabel delmængde af K bestående af lutter isolerede punkter bortset eventuelt fra 0. Hvis E ikke er endeligdimensionalt, gælder $0 \in \sigma(T)$.

b) Ethvert tal $\lambda \neq 0$ i $\sigma(T)$ er en egenværdi for T af endelig multiplicitet og endelig index. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ er kernen $(T - \lambda I)^{-n}(\underline{0})$ og billedrummet $(T - \lambda I)^n(E)$ afsluttede i E, og codim $[(T - \lambda I)^n(E)] = \dim [(T - \lambda I)^{-n}(\underline{0})]$ er endelig.

c) For ethvert $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ er E topologisk direkte sum af de stabile, afsluttede underrum

$$N(\lambda) = (T - \lambda I)^{-p(\lambda)}(\underline{0}), \quad M(\lambda) = (T - \lambda I)^{p(\lambda)}(E),$$

hvor $p(\lambda)$ betegner index af λ. Restriktionen af $T - \lambda I$ til

$N(\lambda)$ er nilpotent af orden netop $p(\lambda)$, og restriktionen af $T - \lambda I$ til $M(\lambda)$ er en topologisk, lineær afbildning af dette underrum på sig selv.

d) For $\lambda,\mu \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ og $\lambda \neq \mu$ gælder $N(\mu) \subseteq M(\lambda)$.

e) Hvis E er et Banach-rum over $\mathbb{C}$, har resolventen $(T - \zeta I)^{-1}$ som analytisk funktion af $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ en pol af orden netop $p(\lambda)$ i ethvert punkt $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$.

Dette sidste skal betyde, at afbildningen

$$\zeta \to (\zeta - \lambda)^{p(\lambda)}(T - \zeta I)^{-1}$$

af $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ ind i $L(E,E)$ for $\zeta \to \lambda$ har en grænseværdi $\neq 0$ i normtopologien på $L(E,E)$. Det følger heraf, at for ethvert $x \in E$, $y' \in E'$ er $\langle (T - \zeta I)x, y' \rangle$ en sædvanlig meromorf funktion af $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Jvf. § F.5, og bemærk, at linearformen $A \to \langle Ax, y' \rangle$ på $L(E,E)$ er kontinuert.)

Bevis. For givet $\lambda \neq 0$ benyttes omskrivningen

$$T - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}T) = -\lambda S,$$

hvor $S = I - \lambda^{-1}T$ har samme form som hidtil, fordi $\lambda^{-1}T$ er totalkontinuert. Idet

$$(T - \lambda I)^{-n}(0) = S^{-n}(0), \qquad (T - \lambda I)^{n}(E) = S^{n}(E),$$

har $T - \lambda I$ samme endelige index $p(\lambda)$ som S.

Hvis λ ikke er egenværdi for T, er $T - \lambda I$ og dermed S injektiv, og de bliver da ifølge lemma 8.12 tillige surjektive og topologiske afbildninger. Da således $(T - \lambda I)^{-1} \in L(E,E)$, til-

hører λ resolventmængden for T. Hermed er vist b) og c) under henvisning til lemma 8.10, henholdsvis 8.11. Og d) følger af lemma F 7.6 anvendt på de indbyrdes primiske polynomier $f(t) = (t - \mu)^{p(\mu)}$ og $g(t) = (t - \lambda)^{p(\lambda)}$.

Hvis $0 \notin \sigma(T)$, er T en (topologisk) isomorfi af E på E, og T(B) er derfor en omegn af $\underline{0}$ med kompakt afslutning i E, det sidste på grund af totalkontinuiteten af T. Altså må E være lokalkompakt og dermed endeligdimensionalt.

At $\sigma(T)$ er kompakt, følger af et almindeligt resultat vedrørende Banach-algebra (§ F 5.13) i det tilfælde, hvor E er et Banach-rum og L(E,E) derfor en Banach-algebra. Vi giver nu uafhængigt heraf et direkte bevis, der gælder for ethvert normeret rum E, og hvor vi udnytter totalkontinuiteten af T. Samtidigt viser vi, at ethvert $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ er et isoleret punkt af $\sigma(T)$. Hvis E har endelig dimension, er alt dette trivielt, da $\sigma(T)$ jo så er endelig (sætn. F 6.4). Vi antager derfor i det følgende, at E ikke er endeligdimensionalt, hvorfor som vist $0 \in \sigma(T)$.

For ethvert $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ findes en egenvektor x, som vi gerne kan normere, altså $\|x\| = 1$, $Tx = \lambda x$. Følgelig gælder

$$|\lambda| = \|\lambda x\| = \|Tx\| \leq \|T\|,$$

hvormed er bevist, at $\sigma(T)$ er begrænset.

For dernæst at vise, at $\sigma(T)$ er afsluttet, betragter vi et punkt $\lambda \in \overline{\sigma(T)}$ og viser, at $\lambda \in \sigma(T)$. Da $0 \in \sigma(T)$, kan vi antage, at $\lambda \neq 0$. Da K opfylder 1. numerabilitetsaksion, eksisterer en følge af tal $\lambda_n \in \sigma(T)$ med $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Vi kan gerne antage, at $\lambda_n \neq 0$ for ethvert n. Da således hvert λ_n er en egenværdi for T, findes som før $x_n \in E$ med

$$\|x_n\| = 1 \ , \qquad Tx_n = \lambda_n x_n \ .$$

Da T er totalkontinuert, har $(Tx_n)_{n\in\hat{N}}$ en konvergent delfølge $(Tx_{n_p})_{p\in\hat{N}}$:

$$\lim_{p\to\infty} Tx_{n_p} = y \quad \text{i } E.$$

Sættes $x = \lambda^{-1} y$, fås for $p \to \infty$

$$x_{n_p} = \lambda_{n_p}^{-1} Tx_{n_p} \to \lambda^{-1} y = x \quad \text{i } E.$$

Heraf følger af kontinuitetsgrunde $\|x\| = \lim_{p\to\infty} \|x_{n_p}\| = 1$ og

$$Tx = \lim_{p\to\infty} Tx_{n_p} = y = \lambda x.$$

Således er x en normeret egenvektor for T hørende til λ, hvorfor $\lambda \in \sigma(T)$. Altså er $\sigma(T)$ afsluttet og dermed ialt kompakt.

Ovenstående ræsonnement viser nu også, at hvert punkt $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ er et isoleret punkt af $\sigma(T)$. Thi i modsat fald fandtes en følge af tal $\lambda_n \neq \lambda$ med $\lambda_n \in \sigma(T)$ og $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Da $\lambda \neq 0$, kan vi atter antage, at $\lambda_n \neq 0$ for alle n. Med ovenstående betegnelser kommer vi nu til en modstrid ved at bemærke, at

$$x_n \in (T - \lambda_n I)^{-1}(\underline{0}) \subsetneq (T - \lambda_n I)^{-p(\lambda_n)} = N(\lambda_n) \subsetneq M(\lambda)$$

ifølge d), fordi λ_n og λ er to forskellige tal i $\sigma(T) \setminus \{0\}$. Da $M(\lambda)$ er afsluttet ifølge b), fås $x = \lim_{p\to\infty} x_{n_p} \in M(\lambda)$. Men da $x \neq \underline{0}$, og $Tx = \lambda x$, kan x ikke tilhøre $M(\lambda)$, fordi restriktionen af $T - \lambda I$ til $M(\lambda)$ er injektiv ifølge c). Altså er λ isoleret i $\sigma(T)$.

For ethvert $n \in \hat{N}$ er mængden

$$H_n = \sigma(T) \cap \{\lambda \in K \mid |\lambda| \geq 1/n\}$$

kompakt og dens punkter alle isolerede i $\sigma(T)$, så meget mere i

H_n. Heraf følger, at H_n er endelig, og derfor at $\sigma(T) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \cup \{0\}$ er (højst) numerabel. Hermed er a) godtgjort.

Tilbage står at bevise e). Med T_N og I_N betegner vi restriktionerne af T og I til $N(\lambda)$, og med T_M og I_M restriktionerne til $M(\lambda)$. Ifølge a) har $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ en omegn $U(\lambda)$, hvis punkter alle tilhører resolventmængden $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ og er $\neq 0$. For ethvert $\zeta \in U(\lambda) \setminus \{\lambda\}$ afbilder isomorfien $T - \zeta I$ de stabile underrum $N(\lambda)$ og $M(\lambda)$ topologisk og lineært på sig selv. Således er restriktionerne $T_N - \zeta I_N$ og $T_M - \zeta I_M$ af $T - \zeta I$ til N og M topologiske isomorfier af N, henholdsvis M, på sig selv, og $(T_N - \zeta I_N)^{-1}$ og $(T_M - \zeta I_M)^{-1}$ er netop restriktionerne af $(T - \zeta I)^{-1}$ til henholdsvis N og M. Idet vi med P_N og P_M betegner de kontinuerte projektionsoperatorer, der projicerer $E = N + M$ (topologisk direkte sum) på N langs M, henholdsvis på M langs N, haves derfor for ethvert $\zeta \in U(\lambda) \setminus \{\lambda\}$:

$$(1) \qquad (T - \zeta I)^{-1} = (T_N - \zeta I_N)^{-1} P_N + (T_M - \zeta I_M)^{-1} P_M .$$

Da nu λ ifølge c) tilhører resolventmængden for T_M, er afbildningen $\zeta \to (T_M - \zeta I_M)^{-1}$ af $U(\lambda)$ ind i Banach-algebraen $L(M(\lambda), M(\lambda))$ (her benyttes, at E, og dermed det afsluttede underrum $M(\lambda)$, er forudsat fuldstændigt) kontinuert også for $\zeta = \lambda$. Åbenbart er afbildningen $X \to XP_M$ af $L(M(\lambda), M(\lambda))$ ind i $L(E,E)$ kontinuert, fordi $\|XP_M\| \leqq \|X\| \, \|P_M\|$. Følgelig afhænger sidste led i (1) kontinuert af ζ også for $\zeta = \lambda$, hvorfor

$$(2) \qquad (\zeta - \lambda)^{p(\lambda)} (T_M - \zeta I_M) P_M \to 0$$

i $L(E,E)$ for $\zeta \to \lambda$, idet jo $p(\lambda) > 0$ fordi λ er en egenværdi.

Til undersøgelsen af det "singulære", første led i (1) benytter vi følgende identitet gældende for to kommuterende

elementer X og Y af en Banach algebra, af hvilke X forudsættes at være nilpotent af orden netop p:

$$-Y^p = X^p - Y^p = (X^{p-1} + X^{p-2}Y + \dots + Y^{p-1})(X - Y).$$

Hvis X - Y er invertibel, sluttes heraf at

$$-Y^p (X - Y)^{-1} = X^{p-1} + X^{p-2} Y + \dots + Y^{p-1}$$
$$\to X^{p-1} \neq 0 \quad \text{for } Y \to 0.$$

Anvendt på $X = T_N - \lambda I_N$, som jo er nilpotent af orden netop $p(\lambda)$ ifølge b), og $Y = (\zeta - \lambda)I_N$, som konvergerer mod 0 for $\zeta \to \lambda$, fås inden for Banach-algebraen $L(N(\lambda), N(\lambda))$, idet $X - Y = T_N - \zeta I_N$ er invertibel for $\zeta \neq \lambda$:

$$(\zeta - \lambda)^{p(\lambda)}(T_N - \zeta I_N)^{-1} \to -(T_N - \lambda I_N)^{p(\lambda)-1} \neq 0$$

for $\zeta \to \lambda$, $\zeta \neq \lambda$. Da afbildningen $X \to XP_N$ af $L(N(\lambda), N(\lambda))$ ind i $L(E,E)$ er kontinuert (jvf. ovenfor), gælder derfor inden for $L(E,E)$ for $\zeta \to \lambda$, $\zeta \neq \lambda$:

$$(3) \qquad (\zeta - \lambda)^{p(\lambda)} (T_N - \zeta I_N)^{-1} P_N \to -(T_N - \lambda I_N)^{p(\lambda)-1} P_N$$
$$= -(T - \lambda I)^{p(\lambda)-1} P_N \neq 0.$$

Ved addition af (2) og (3) fås under benyttelse af (1) ved grænseovergang $\zeta \to \lambda$, $\zeta \in U(\lambda) \setminus \{\lambda\}$:

$$(\zeta - \lambda)^{p(\lambda)}(T - \zeta I)^{-1} \to -(T - \lambda I)^{p(\lambda)-1} P_N \neq 0$$

inden for $L(E,E)$. Altså har resolventen $(T - \zeta I)^{-1}$ for $\zeta = \lambda$ en pol af orden netop $p(\lambda)$ med residuet $-(T - \lambda I)^{p(\lambda)-1} P_N$, som for øvrigt afbilder E ind i egenrummet $(T - \lambda I)^{-1}(0)$ og derfor har endelig rang. – Hermed er sætningen bevist.

Bemærkning. Hvis $\sigma(T)$ er en uendelig mængde (hvilket jo ikke kan indtræffe i tilfælde af et endeligdimensionalt rum E), er 0 nødvendigvis et fortætningspunkt for $\sigma(T)$, og det eneste sådanne. Man kan derfor ordne $\sigma(T) \setminus \{0\}$ som en talfølge (f.eks. med aftagende numeriske værdier) med grænseværdien 0. Selv om man gentager hvert $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ så ofte som dets multiplicitet $\dim[(T - \lambda I)^{-1}(\underline{0})]$ som egenværdi angiver, vil følgen af egenværdien konvergere mod 0.

Hvis $K = \mathbb{C}$, er $\sigma(T) \neq \emptyset$ (medmindre $E = \{\underline{0}\}$). I det endeligdimensionale tilfælde følger dette af sætn. 6.4, og ellers er jo $0 \in \sigma(T)$.

8.14 Om resolventens form. Lad $T \in L(E,E)$. For ethvert $\lambda \notin \sigma(T)$ er resolventen $(T - \lambda I)^{-1}$ defineret inden for $L(E,E)$ og ombyttelig med T (lemma F5.2). Ved ligningen

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1} I + \lambda^{-2} R_\lambda$$

defineres en operator $R_\lambda \in L(E,E)$. Ifølge den anden resolventligning (F5.4) anvendt på $A = T$, $B = 0$ er

$$R_\lambda = \lambda T(T - \lambda I)^{-1} = \lambda(T - \lambda I)^{-1} T.$$

Heraf fremgår, at R_λ tilhører ethvert ideal inden for $L(E,E)$, som indeholder T. Specielt er R_λ totalkontinuert, dersom T er det.

9. Totalkontinuerte operatorer på Hilbertrum.

Vi begynder med nogle resultater af selvstændig interesse vedrørende svag topologi.

9.1 Lemma. Lad E og F være topologiske vektorrum. En kontinuert lineær afbildning $T: E \to F$ er også kontinuert i de svage topologier på E og F.

Bevis. Da $T \in L(E,F)$, eksisterer den adjungerede operator T' som en overalt defineret lineær afbildning af det (topologisk) duale rum F' til F ind i dualrummet E' til E (M 1.16). En basisomegn V af $\underline{0}$ i F med den svage topologi er fællesmængde for endeligt mange omegne af formen

$$\{y \in F \mid |\langle y,y'\rangle| < \varepsilon\},$$

hvor $y' \in F'$ og $\varepsilon > 0$. Af identiteten

$$\langle Tx,y'\rangle = \langle x,T'y'\rangle$$

for $x \in E$, $y' \in F'$, følger at $T^{-1}(V)$ er fællesmængde for endeligt mange mængder af formen

$$\{x \in E \mid |\langle x,T'y'\rangle| < \varepsilon\},$$

og det er en svag omegn af $\underline{0}$ i E.

9.2 Lemma. Enhver svagt konvergent følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på et normeret rum E er begrænset: $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.

Bevis. Ved den naturlige indlejring φ af E i E'' (§ F4.7-4.8) svarer der til $x_n \in E$ en kontinuert linearform $\varphi(x_n) = f_n$ på

dualrummet E', defineret ved

$$f_n(x') = \langle x_n, x' \rangle = x'(x_n),$$

og der gælder $\|f_n\| = \|x_n\|$, da φ er isometrisk. At følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er svagt konvergent med grænseværdi $x \in E$ betyder jo, at $x'(x_n) \to x'(x)$ for ethvert $x' \in E'$. Sættes $\varphi(x) = f$, gælder altså

$$f_n(x') \to f(x') \qquad \text{for ethvert } x' \in E' .$$

Idet E' er fuldstændigt (sætn. F 4.3), følger lemmaet nu af princippet for ligelig begrænsning (§ F4.4).

9.3 Lemma. Enhedskuglen i et separabelt Hilbertrum er metriserbar også i den svage topologi.

Bevis. Et separabelt Hilbertrum E indeholder en numerabel delmængde D, som er overalt tæt i E i den stærke topologi. Åbenbart er B indeholdt i afslutningen $\overline{(2B) \cap D}$ af $(2B)\cap D$ i den stærke topologi. (Faktisk er allerede $B\cap D$ overalt tæt i B.) Idet vi ordner $(2B)\cap D$ i en følge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bliver enhver af afbildningerne $x \to |(x|z_n)|$ en seminorm på E. Derfor bestemmer også

$$p(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} |(x|z_n)| , \qquad x \in E ,$$

en seminorm på E, idet rækken er konvergent, fordi $|(x|z_n)| \leqq \|x\| \, \|z_n\| \leqq 2\|x\|$. Faktisk er p en norm, da $p(x) = 0$ medfører $(x|z_n) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og derfor $(x|z) = 0$ for alle $z \in B$, da $B \subset \overline{2B \cap D} = \overline{\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$. Ved

$$\operatorname{dist}(x,y) = p(x - y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} |(x - y \mid z_n)| ,$$

defineres derfor et forskydningsinvariant afstandsmål på E. Vi

vil vise, at dette, betragtet på B, bestemmer den svage topologi på B.En omegn af et punkt $x \in B$ i den svage topologi på B indeholder fællesmængden for endeligt mange mængder af formen

$$\{y \in B \mid \ |(x - y|z)| < \varepsilon\} ,$$

hvor $z \in E$ og $\varepsilon \in \dot{R}_+$. Ved om fornødent at erstatte z med $\|z\|^{-1}z$ og ε med $\|z\|^{-1}\varepsilon$, hvilket ikke influerer på mængden, kan vi opnå at $\|z\| \leqq 1$, altså $z \in B$.

Når vi skal vise, at enhver svag omegn af x i B omfatter en kugleomegn

$$\{y \in B| \ \mathrm{dist}(x,y) < \delta\} ,$$

er det tilstrækkeligt at betragte en svag omegn af den angivne form. Til ε bestemmer vi først n så at $\|z - z_n\| < \varepsilon/4$ og dernæst $\delta > 0$ så at $2^n\delta < \varepsilon/2$. For et punkt $y \in B$ med $\mathrm{dist}(x,y) < \delta$ gælder da

$$\begin{aligned} |(x - y|z)| &\leqq |(x - y|z_n)| + |(x - y|z - z_n)| \\ &\leqq 2^n \mathrm{dist}(x,y) + \|x - y\| \ \|z - z_n\| \\ &\leqq 2^n\delta + 2\|z - z_n\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon . \end{aligned}$$

For omvendt at vise, at en given kugleomegn af x i B indeholder en svag omegn af x i B, vælger vi til radius δ i den givne kugleomegn et nummer $N \in \dot{N}$ så at $2^{-N} < \delta/4$. Da er

$$\begin{aligned} \sum_{n>N} 2^{-n}|(x - y|z_n)| &\leqq \sum_{n>N} 2^{-n}\|x - y\| \ \|z_n\| \\ &\leqq \sum_{n>N} 2^{-n} \cdot 2 = 2 \cdot 2^{-N} < \delta/2 . \end{aligned}$$

Dernæst betragtes den svage omegn

$$\bigcap_{n=1}^{N} \{y \in B \mid \ |(x - y|z_n)| < \delta/(2N)\} .$$

For enhver vektor y heri bliver åbenbart dist(x,y) < δ .

Bemærkning. Den ved afstandsmålet dist bestemte topologi på hele E er strengt finere end den svage topologi på E, medmindre E er endeligdimensionalt. Faktisk er den svage topologi på hele E ikke metriserbar, ja opfylder end ikke 1.numerabilitetsaksiom.

Som beviset viser, gælder lemmaet for ethvert normeret rum med separabelt dualrum.

Korollar. Af enhver begrænset punktfølge på et Hilbertrum kan udtages en svagt konvergent delfølge.

Det er åbenbart tilstrækkeligt at betragte en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på enhedskuglen B i det givne Hilbertrum. Med F betegner vi det af $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ udspændte afsluttede underrum af E. Da er F et separabelt Hilbertrum, da den numerable mængde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er total i F. Da enhedskuglen B $\cap$ F i F er kompakt i den svage topologi på F (sætn.F 4.6), og tillige metriserbar ifølge ovenstående lemma, har $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en delfølge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, som konvergerer svagt i F. Der findes altså et $y \in F$, så at

$$\lim_{n\to\infty}(y_n|z) = (y|z)$$

for ethvert $z \in F$. Samme relation er triviel for $z \in F^{\perp}$, hvor $(y_n|z) = (y|z) = 0$. Den gælder derfor også for $z \in F + F^{\perp} = E$.

9.4 Sætning. Lad E være et Hilbertrum og F et normeret rum. En lineær afbildning T: E → F er totalkontinuert, hvis og kun hvis T transformerer enhver svagt konvergent punktfølge på E i en stærkt konvergent følge på F

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ svagt i } E \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx \text{ stærkt i } F .$$

Som det vil fremgå af beviset, behøver man blot at eftervise, at hvis $\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{0}$ svagt i E, da er $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stærkt konvergent i F. Det er desuden i medfør af lemma 9.2 tilstrækkeligt at betragte følger $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på enhedskuglen $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ i E.

Bevis. Antag først, at T er totalkontinuert, specielt kontinuert; og lad $\lim x_n = x$ svagt i E. Ifølge lemma 9.1 gælder da

$$\lim Tx_n = Tx \qquad \text{svagt i F.}$$

Ifølge lemma 9.2 er følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrænset. Hvis nu $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ikke konvergerer stærkt mod Tx i F, må der findes et tal $\varepsilon > 0$ og en delfølge $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ med

$$\|Tx_{n_p} - Tx\| > \varepsilon \qquad \text{for alle } p \in \mathbb{N} .$$

Efter en eventuel yderligere udtynding kan vi, da $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ er begrænset og T er forudsat totalkontinuert, antage at $(Tx_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ er stærkt konvergent i F, lad os sige med grænseværdien $y \in F$. Så meget mere gælder $\lim Tx_{n_p} = y$ svagt i F. Da også den svage topologi på F er Hausdorff, slutter vi at $y = Tx$, og dermed at $\lim Tx_{n_p} = Tx$ stærkt i F, i modstrid med valget af følgen $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Antag dernæst, at T transformerer enhver følge på E, som går svagt mod 0, i en konvergent følge på F. Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en given følge på B. Ifølge korollaret til lemma 9.3 har den en svagt konvergent delfølge $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$. Betegnes dennes svage grænseværdi med x, gælder $x_{n_p} - x \to 0$ svagt i E, og derfor er efter vor antagelse følgen

$$(T(x_{n_p} - x))_{p\in\mathbb{N}} = (Tx_{n_p} - Tx)_{p\in\mathbb{N}}$$

stærkt konvergent i F. Det samme gælder da åbenbart om følgen $(Tx_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$.

9.5 Vi inddrager nu begrebet adjungeret operator. Lad E og F være Hilbertrum, og lad $T \in L(E,F)$. Da eksisterer $T^* \in L(F,E)$, og der gælder

$$(Tx|y) = (x|T^*y) \qquad \text{for } x \in E,\ y \in F.$$

Endvidere er $T^{**} = T$ og $\|T^*\| = \|T\|$.

Sætning. T^* er totalkontinuert, hvis og kun hvis T er totalkontinuert.

Bevis. Da $T^{**} = T$, er det nok at vise, at T^* er totalkontinuert når T er det. Lad da $y_n \to \underline{0}$ svagt i F. Da vil $T^*y_n \to \underline{0}$ svagt i E ifølge lemma 9.1 . Derfor vil $TT^*y_n \to \underline{0}$ stærkt i E . Da $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er begrænset (§ 9.2), slutter vi, at

$$\|T^*y_n\|^2 = (TT^*y_n|y_n) \leqq \|TT^*y_n\|\|y_n\| \to 0$$

for $n \to \infty$, altså at $T^*y_n \to \underline{0}$ stærkt i E.

9.6 Lad nu $T \in L(E,E)$ være en totalkontinuert operator på et Hilbertrum E over K med den ligeledes totalkontinuerte adjungerede operator $T^* \in L(E,E)$. For ethvert $\lambda \in K$ og ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$[(T - \lambda I)^n]^* = [(T - \lambda I)^*]^n = (T^* - \bar{\lambda} I)^n,$$

og vi slutter derfor af M1, sætn. 4.3.3, at

(1) $$(T^* - \bar{\lambda}I)^{-n}(\underline{0}) = [(T - \lambda I)^n(E)]^{\perp} .$$

Vi antager nu, at $\lambda \neq 0$. Da har $T - \lambda I$ endelig index p, og $(T - \lambda I)^n(E)$ er afsluttet ifølge sætn. F 8.13. Idet $M^{\perp\perp} = M$ for ethvert afsluttet underrum af et Hilbertrum, følger det af (1), at

(2) $$(T - \lambda I)^n(E) = [(T^* - \bar{\lambda}I)^{-n}(\underline{0})]^{\perp} .$$

Af sætn. F 7.5 fremgår nu, at

$$\dim[(T - \lambda I)^{-n}(\underline{0})] = \operatorname{codim}[(T - \lambda I)^n(E)]$$

$$= \dim[(T - \lambda I)^n(E)]^{\perp} = \dim[(T^* - \bar{\lambda}I)^{-n}(\underline{0})] .$$

Dette viser, at $\bar{\lambda}$ har <u>samme multiplicitet og samme index</u> med hensyn til T^* som λ har med hensyn til T.

Vi samler de vigtigste af de fundne resultater i følgende sætning, som er velkendt i tilfældet $E = K^m$, $m \in \mathbb{N}$.

<u>Sætning</u>. (Fredholms alternativer). Lad T være en totalkontinuert operator på et Hilbertrum E, og lad $\lambda \neq 0$.

1°) Hvis λ ikke er egenværdi for T, da er $\bar{\lambda}$ ikke egenværdi for T^*. Hver af ligningerne

$$Tx - \lambda x = y, \text{ resp. } T^*x - \bar{\lambda}x = y ,$$

har for givet $y \in E$ netop én løsning, og denne afhænger kontinuert af y.

2°) Hvis λ er egenværdi for T, da med endelig multiplicitet $m > 0$, og $\bar{\lambda}$ er så egenværdi for T^* med samme multiplicitet m. Enhver af ovenstående inhomogene ligninger kan løses for netop de $y \in E$, som er ortogonale på samtlige løsninger til den anden ligning svarende homogene ligning, altså til

$$T^*x - \bar{\lambda}x = 0, \text{ resp. } Tx - \lambda x = 0.$$

9.7 Totalkontinuerte, normale operatorer.

Sætning. Enhver totalkontinuert, normal operator T på et Hilbertrum E over $\mathbb{C}$ har et rent punktspektrum, og der gælder

$$E = \overline{T(E)} \oplus T^{-1}(\underline{0}) \quad . \tag{3}$$

Endvidere er $\overline{T(E)}$ Hilbertsummen af egenrummene hørende til de fra 0 forskellige egenværdier for T. Normen af T er bestemt ved

$$\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \quad .$$

T har endelig rang hvis og kun hvis $\sigma(T)$ er endelig.

Bevis. Med betegnelserne fra § F. 6.7 har restriktionen af T til det stabile, afsluttede underrum $F^{\perp}$ ingen egenværdier. Da nu $T|F^{\perp}$ er totalkontinuert (§ F 8.4), kan dens spektrum derfor slet ikke indeholde tal $\neq 0$, da sådanne tal måtte være egenværdier for den (sætn. F 8.13b). Var nu $F^{\perp} \neq \{\underline{0}\}$, måtte $T|F^{\perp}$ derfor have spektret $\{0\}$, altså spektralradien 0. Men da $T|F^{\perp}$ er normal (sætn. F 6.2), måtte $T|F^{\perp}$ være nuloperatoren (§ F 6.6) og altså alligevel have en egenværdi, nemlig 0, i strid med betydningen af $F^{\perp}$. Altså er $F^{\perp} = \{\underline{0}\}$, $F = E$, hvilket netop betyder, at T har rent punktspektrum.

Ifølge sætn. F 6.9 for $\lambda = 0$ er $T^{-1}(\underline{0}) = T^{*-1}(\underline{0})$, og ifølge M1, sætn. 4.3.3. er $T^{*-1}(\underline{0}) = \overline{T(E)}^{\perp}$, hvoraf (3) følger. De fra 0 forskellige egenværdier for T udgør ifølge sætn. 8.13 a) en (højst) numerabel mængde:

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_{n \in J} \quad ,$$

hvor $J = \mathbb{N}$ eller et afsnit af $\mathbb{N}$, og hvor vi kan antage, at afbildningen $n \to \lambda_n$ er injektiv. At T nu har rent punktspektrum,

betyder definitionsmæssigt, at

$$(4) \qquad E = T^{-1}(\underline{0}) \oplus [\underset{n\in J}{\oplus}(T - \lambda_n I)^{-1}(\underline{0})] ,$$

og derfor ved sammenligning med (3)

$$\overline{T(E)} = \underset{n\in J}{\oplus}(T - \lambda_n I)^{-1}(\underline{0}) .$$

Da hvert af egenrummene $(T - \lambda_n I)^{-1}(\underline{0})$ har endelig dimension ≥ 1, og da billedrummet $T(E)$ er afsluttet, hvis det er endeligdimensionalt (og for øvrigtkun i dette tilfælde, jvf. slutbemærkningen i næste stykke), gælder derfor, at $\sigma(T)$ er en endelig mængde netop hvis $T(E)$ er endeligdimensionalt, altså hvis T har endelig rang.

Med P_n betegner vi nu den projektionsoperator, som projicerer E vinkelret på egenrummet $(T - \lambda_n I)^{-1}(\underline{0})$, $n \in J$; og tilsvarende betegner P_o projektionen på $T^{-1}(\underline{0})$. Da gælder ifølge (4) for ethvert $x \in E$

$$(5) \qquad x = P_o x + \sum_{n\in J} P_n x$$

i normtopologien på E (sætn. F 3.5). Ved anvendelse af den kontinuerte lineære afbildning T fås heraf, idet $TP_o = 0$, $TP_n = \lambda_n P_n$:

$$(6) \qquad Tx = \sum_{n\in J} \lambda_n P_n x .$$

Da vektorerne $P_n x$ er indbyrdes ortogonale, bliver

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n\in J} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2 \leq c^2 \sum_{n\in J} \|P_n x\|^2 = c^2 \|x\|^2 ,$$

hvor $c = \max_{n\in J} |\lambda_n| = \max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$. Dette viser, at $\|T\| \leq c$. At der her gælder lighedstegn, fremgår ved at vælge x som egenvektor til en numerisk største egenværdi. Følger også ud fra spektralradien.

9.8 Vi er nu i stand til eksplicit at diskutere ligningen

$$(7) \qquad Tx - \lambda x = y$$

og herunder tillige give et nyt bevis for sætningen om Fredholms alternativer i det her betragtede simplere tilfælde af en totalkontinuert normal operator. Vi kan her også behandle tilfældet $\lambda = 0$, der jo indtager en særstilling.

Af (5) og (6) fås

$$Tx - \lambda x = -\lambda P_o x + \sum_{n\in J} (\lambda_n - \lambda) P_n x \ .$$

Sammenholdes dette med den til (5) svarende fremstilling

$$y = P_o y + \sum_{n\in J} P_n y \ , \qquad y \in E \ ,$$

finder vi, at (7) er ensbetydende med systemet af ligninger

$$(8) \qquad -\lambda P_o x = P_o y \ ; \qquad (\lambda_n - \lambda) P_n x = P_n y \ ,$$

hvor $n \in J$.

1°) Hvis $\lambda \neq 0$ og $\lambda \notin \sigma(T)$, har ligningen (7) for ethvert $y \in E$ den entydigt bestemte løsning

$$(9) \qquad x = (T - \lambda I)^{-1} y = -\lambda^{-1} P_o y + \sum_n (\lambda_n - \lambda)^{-1} P_n y \ .$$

At der på højre side virkelig er tale om en summabel familie, fremgår af, at leddene er indbyrdes ortogonale, og at

$$\sum_n |\lambda_n - \lambda|^{-2} \|P_n y\|^2 < \infty \ .$$

Thi der gælder $\sum_n \|P_n y\|^2 \leqq \|y\|^2 < \infty$, og $\sup_n |\lambda_n - \lambda|^{-2} < \infty$, det sidste som følge af, at $\lambda \notin \sigma(T)$, så at λ har positiv afstand fra $\sigma(T)$, og dermed

$$\inf_n |\lambda_n - \lambda| > 0 \ .$$

2°) Hvis $\lambda = \lambda_m$ for et vist m, kan ligningen (7) ikke løses, medmindre $P_m y = 0$, altså medmindre y er ortogonal på det tilhørende egenrum

$$(T - \lambda_m I)^{-1}(\underline{0}) = (T^* - \bar{\lambda}_m I)^{-1}(\underline{0})$$

for T eller T^* (jvf.sætn. F 6.6). Er denne betingelse opfyldt, bestemmes en af løsningerne til (7) ved

$$x = -\lambda^{-1} P_o y + \sum_{n \neq m} (\lambda_n - \lambda)^{-1} P_n y \ ,$$

og de øvrige løsninger fås ved hertil at addere vilkårlige egenvektorer hørende til egenværdien λ_m. At der også her bliver tale om en summabel familie på højre side, vises ganske som i tilfældet 1°, idet λ_m er et isoleret punkt af spektret.

3°) I tilfældet $\lambda = 0$, som ikke omfattes af den hidtidige undersøgelse, lyder (7) $Tx = y$, og de vektorer y, for hvilke den kan løses, udgør netop billedrummet T(E). Ifølge (8) er følgende to betingelser åbenbart nødvendige og tilsammen tilstrækkelige for, at $y \in T(E)$:

$$(10) \qquad P_o y = 0 \ ; \qquad \sum_{n \in J} \lambda_n^{-2} \|P_n y\|^2 < \infty \ .$$

Og i givet fald haves som løsning til $Tx = y$ vektoren

$$x = \sum_{n \in J} \lambda_n^{-1} P_n y \ ,$$

hvortil, hvis 0 er egenværdi for T, kan adderes en vilkårlig dertil hørende egenvektor. Den sidste af betingelserne (10) udtrykker jo netop, at familien $(\lambda_n^{-1} P_n y)_{n \in J}$ af ortogonale vektorer er summabel.

Naturligvis falder denne summabilitetsbetingelse bort, der-

som J er endelig, altså dersom T har endelig rang. Men i øvrigt danner tallene λ_n^{-1} en ubegrænset talfølge, fordi lim $\lambda_n = 0$, og det fremgår let heraf, at den sidste af betingelserne (10) ikke er opfyldt for enhver vektor y med $P_0 y = 0$, altså at $T(E) \subset \overline{T(E)} = [T^{-1}(\underline{0})]^{\perp}$, eller med andre ord, at T(E) ikke er afsluttet i E.

10. Integraloperatorer.

Vi skal i denne paragraf behandle en vigtig type af totalkontinuerte operatorer, nemlig integraloperatorer med passende betingelser på kernen. Simplest er tilfældet, hvor kernen er kontinuert (jvf. § 8.3); men vi vil dog først betragte det tilfælde, hvor kernen blot forudsættes kvadratisk integrabel. Til slut belyses teorien ved dens anvendelse på en vis type af selvadjungerede differentialoperatorer, hvorved vi løser det klassiske Sturm-Liouville problem.

10.1 Tensorprodukt af L^2-rum. Lad A og B være lokalkompakte topologiske rum, og lad μ og ν være positive σ-endelige Radonmål på henholdsvis A og B. (For eksempel kan A og B være af typen $\mathbb{R}^m$, og μ og ν kan være Lebesguemålet herpå eller på en målelig delmængde.) Med $\mu \otimes \nu$ betegnes produktmålet på $A \times B$.

Et vigtigt hjælpemiddel for det følgende er Fubinis sætning. Lad $f: A \times B \to \mathbb{R}$ være målelig med hensyn til $\mu \otimes \nu$. Da gælder

$$\int_{A\times B} f d(\mu \otimes \nu) = \int_A d\mu(s) \int_B f(s,t)\, d\nu(t) =$$

$$\int_B d\nu(t) \int_A f(s,t)\, d\mu(s)$$

såfremt enten $f \geq 0$ eller f er integrabel med hensyn til $\mu \otimes \nu$. I så fald eksisterer $\int_B f(s,t)\, d\nu(t)$ for μ-næsten alle $s \in A$ og fremstiller en funktion, hvis integral med hensyn til μ er defineret. Tilsvarende for det sidste udtryk. Samme resultat gælder med den udvidede tallinie i stedet for $\mathbb{R}$, eller med $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$. For integralet med hensyn til $\mu \otimes \nu$ benyttes også betegnelsen

$$\int_{A\times B} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_A\int_B f(s,t)\,d\mu(s)\,d\nu(t)\ .$$

Vi betragter nu Hilbertrummene

$$E = L^2(A,\mu),\quad F = L^2(B,\nu),\quad E\otimes F = L^2(A\times B,\ \mu\otimes\nu)$$

over et og samme koefficientlegeme $K(=\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C})$. Den sædvanlige L^2-norm på hvert af disse Hilbertrum betegnes med $\|\ \|_2$, og skalarproduktet med $(\ |\ )$. Vi kalder $E\otimes F$ <u>tensorproduktet</u> af E og F.

Specielle elementer af $E\otimes F$ er <u>tensorproduktet</u> $e\otimes f$ <u>af to elementer</u> $e\in E$ og $f\in F$. Ud fra vilkårlige repræsentanter $s\to e(s)$ og $t\to f(t)$ for ækvivalensklasserne e og f dannes funktionen

$$(s,t)\ \to\ e(s)\,f(t),\qquad (s,t)\in A\times B.$$

Denne er målelig med hensyn til $\mu\otimes\nu$, og den tilhørende ækvivalensklasse, som vi betegner med $e\otimes f$, afhænger ikke af, hvilke repræsentanter vi vælger for e og f. Af Fubinis sætning fremgår, at

$$\int_A\int_B |e(s)\,f(t)|^2\,d\hat{\mu}(s)\,d\nu(t) =$$

$$\int_A |e(s)|^2\,d\mu(s)\ \cdot\ \int_B |f(t)|^2\,d\nu(t) < \infty\ ,$$

altså at $e\otimes f\in L^2(A\times B,\ \mu\otimes\nu) = E\otimes F$, og

$$\|e\otimes f\|_2 = \|e\|_2\ \|f\|_2\ .$$

Ligeledes fremgår det af Fubinis sætning, at

$$(1)\qquad (e_1\otimes f_1\,|\,e_2\otimes f_2) = (e_1|e_2)\cdot(f_1|f_2)$$

for $e_1, e_2 \in E$ og $f_1, f_2 \in F$.

Lad dernæst $e \in E$, $f \in F$ og $g \in E \otimes F$. Da fås

$$(2)\quad \begin{cases} (g|e \otimes f) = \int_A \int_B g(s,t)\ \overline{e(s)f(t)}\ d\mu(s)\ d\nu(t) = \\ \int_A \overline{e(s)}\ d\mu(s) \int_B g(s,t)\ \overline{f(t)}\ d\nu(t) = \\ \int_B \overline{f(t)}\ d\nu(t) \int_A g(s,t)\ \overline{e(s)}\ d\mu(s)\ , \end{cases}$$

fordi funktionen $(s,t) \to g(s,t)\ \overline{e(s)\ f(t)}$ er integrabel med hensyn til $\mu \otimes \nu$, eftersom funktionerne $(s,t) \to g(s,t)$ og $(s,t) \to e(s)\ f(t)$ er kvadratisk integrable med hensyn til $\mu \otimes \nu$. Vælger vi et øjeblik $e \in E$ så at $e(s) \neq 0$ for alle $s \in A$ (hvilket er muligt, da μ er forudsat σ-endeligt), da slutter vi af Fubinis sætning, at ikke blot $\int_B g(s,t)\ \overline{e(s)}\ \overline{f(t)}\ d\nu(t)$, men også $\int_B g(s,t)\ \overline{f(t)}\ d\nu(t)$ eksisterer for μ-næsten alle $s \in A$ og fremstiller en μ-målelig funktion af s. Denne funktion bliver endda kvadratisk μ-integrabel, idet

$$(3)\quad \left|\int_B g(s,t)\ \overline{f(t)}\ d\nu(t)\right|^2 \leqq \int_B |g(s,t)|^2\ d\nu(t) \cdot \|f\|_2^2\ ,$$

hvor højre side er μ-integrabel ifølge Fubinis sætning. På samme måde ses, at $\int_A g(s,t)\ e(s)\ d\mu(s)$ for givet $e \in E$, $g \in E \otimes F$ eksisterer for ν-næsten alle $t \in B$ og fremstiller en kvadratisk ν-integrabel funktion af $t \in B$.

Lad nu $(\varphi_i)_{i \in I}$ betegne et ortonormalsystem på E og $(\psi_j)_{j \in J}$ et ortonormalsystem på F. Da er ifølge (1)

$$(\varphi_i \otimes \psi_j)_{(i,j) \in I \times J}$$

et ortonormalsystem på $E \otimes F$. Skal dette sidste være totalt, må nødvendigvis de givne systemer være totale i henholdsvis E og F, som man let ser. Denne betingelse er imidlertid også tilstrækkelig. Thi af (2) følger, at hvis $g \in E \otimes F$ og $(g|\varphi_i \otimes \psi_j) = 0$ for alle $(i,j) \in I \times J$, da er for ethvert $j \in J$ den kvadratisk μ-integrable funktion

$$s \to \int_B g(s,t)\, \overline{\psi_j(t)}\, d\nu(t)$$

ortogonal på alle funktionerne φ_i, $i \in I$. Derfor er $\int_B g(s,t)\, \overline{\psi_j(t)}\, d\nu(t) = 0$ for μ-næsten alle $s \in A$. Men så er for μ-næsten alle s den kvadratisk ν-integrable funktion $t \to g(s,t)$ ortogonal på ψ_j inden for F. Er nu J (højst) numerabel, svarende til at F er separabelt, slutter vi, at

$$\nu(\{t \in B \mid g(s,t) \neq 0\}) = 0$$

for μ-næsten alle $s \in A$, og dermed ifølge Fubini

$$\|g\|_2^2 = \int_A d\mu(s) \int_B |g(s,t)|^2\, d\nu(t) = 0\ ,$$

hvormed er vist, at $(\varphi_i \otimes \psi_j)_{(i,j)\in I\times J}$ er totalt. Hvis E eller F ikke er separabelt, fungerer dette bevis ikke, da der bliver tale om foreningen af en ikke numerabel familie af nulmængder; men resultatet kan da bevises ad anden vej. I øvrigt er $E = L^2(A,\mu)$ separabelt, hvis $A = \grave{R}^m$ og μ er Lebesguemålet på $\grave{R}^m$ eller på en målelig delmængde heraf.

En konsekvens af ovennævnte resultat er, at

$$\dim(E \otimes F) = \dim E \cdot \dim F,$$

hvor dim betegner Hilbertdimensionen, altså dim E = kard I, etc.

10.2 Integraloperator af Hilbert-Schmidts type. Vi sætter fremover $B = A$ og $\nu = \mu$. Vi betragter altså Hilbertrummet

$$E = L^2(A,\mu)$$

over K. Lad nu

$$(s,t) \to k(s,t) , \qquad s, t \in A ,$$

være en given $(\mu \otimes \mu)$-målelig funktion af $s,t \in A$ med værdier i K, den såkaldte kerne. Om denne forudsætter vi i dette stykke, at den er af Hilbert-Schmidts type, d.v.s. kvadratisk integrabel med hensyn til $\mu \otimes \mu$. Den tilhørende ækvivalensklasse k skal med andre ord tilhøre tensorproduktet $E \otimes E$:

$$k \in L^2(A \times A, \mu \otimes \mu) = E \otimes E ,$$

altså

$$\|k\|_2^2 = \int_A \int_A |k(s,t)|^2 \, d\mu(s) \, d\mu(t) < \infty .$$

Heraf følger, som nævnt i det foregående stykke, ud fra Fubinis sætning, at funktionen $t \to k(s,t)$ er kvadratisk μ-integrabel for μ-næsten alle $s \in A$, og der gælder

$$(4) \qquad \|k\|_2^2 = \int_A d\mu(s) \int_A |k(s,t)|^2 \, d\mu(t)$$

og en analog formel svarende til ombytning af integrationsrækkefølgen.

For enhver funktion $t \to f(t)$, kvadratisk μ-integrabel over A, eksisterer integralet

$$g(s) = \int_A k(s,t) \, f(t) \, d\mu(t)$$

derfor for næsten alle s og afhænger kun af den givne funktions

ækvivalensklasse $f \in E$. Den fremkomne μ-næsten overalt i A definerede funktion $s \to g(s)$ er endvidere kvadratisk μ-integrabel og bestemmer derfor et element g af E. Som i (3) haves nemlig

$$(5) \qquad |g(s)|^2 \leqq \int_A |k(s,t)|^2 \, d\mu(t) \cdot \|f\|_2^2$$

og derfor

$$\int_A |g(s)|^2 \, d\mu(s) \leqq \int_A d\mu(s) \int_A |k(s,t)|^2 d\mu(t) \cdot \|f\|_2^2 = \|k\|_2^2 \, \|f\|_2^2 ,$$

altså $\|g\|_2 \leqq \|k\|_2 \|f\|_2$. Det er klart, at g afhænger lineært af f, og vi har nu tillige vist, at den ved $Tf = g$, altså

$$(Tf)(s) = \int_A k(s,t) \, f(t) \, d\mu(t) \; ; \qquad f \in E,$$

definerede operator T er kontinuert, altså tilhører $L(E,E)$, og at operatornormen opfylder uligheden

$$\|T\| \leqq \|k\|_2 .$$

Denne ulighed viser specielt, at hvis $k = 0$ i $E \otimes F$, altså hvis $k(s,t) = 0$ $(\mu \otimes \mu)$-næsten overalt i AxA, da er $\|k\|_2 = 0$ og derfor $T = 0$. Heraf fremgår let, at integraloperatoren T kun afhænger af kernens ækvivalensklasse $k \in L^2(AxA, \mu \otimes \mu)$, men ikke af hvorledes kernen vælges som funktion af (s,t) inden for sin ækvivalensklasse.

Vi vil nu vise, at T er <u>totalkontinuert</u>, altså $T \in L_t(E,E)$. Lad $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge på E, som konvergerer mod 0 i den <u>svage</u> topologi på E. En sådan følge er jo normbegrænset (lemma 9.2):

$$\sup_n \|f_n\|_2 = c < \infty .$$

For ethvert s, for hvilket funktionen $t \to k(s,t)$ er kvadratisk μ-integrabel, er $g_n(s) = (Tf_n)(s)$ defineret som skalarproduktet af denne funktion $k(s,\cdot)$ med $\overline{f}_n$, og for ethvert sådant s konvergerer talfølgen $(g_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ derfor mod 0. Hermed er vist, at følgen af μ-integrable funktioner $s \to |g_n(s)|^2$ går punktvis mod 0 for næsten alle s. For deraf at slutte, at

$$\|Tf_n\|^2 = \|g_n\|^2 = \int_A |g_n(s)|^2 \, d\mu(s) \to 0 \qquad \text{for } n \to \infty ,$$

er det ifølge Lebesgues konvergenssætning tilstrækkeligt at eftervise, at følgens funktioner har en fælles μ-integrabel majorant. Men dette er faktisk tilfældet ifølge (5), som viser, at der for alle n gælder

$$|g_n(s)|^2 \leq c^2 \int_A |k(s,t)|^2 \, d\mu(t),$$

og funktionen på højre side er integrabel, jvf.(4), og uafhængig af n. Altså er $T \in L_t(E,E)$.

Den hermitisk transponerede kerne k^* givet ved

$$(s,t) \to \overline{k(t,s)}$$

er åbenbart også kvadratisk integrabel med hensyn til $\mu \otimes \mu$. Betegnes den tilhørende integraloperator af Hilbert-Schmidt typen med T^*, bliver T^* den adjungerede operator til T, idet der ifølge (2) gælder

$$(6) \quad (Tf|g) = \int_A \overline{g(s)} \, d\mu(s) \int_A k(s,t) \, f(t) \, d\mu(t) = (k|g \otimes \overline{f})$$

$$= \int_A f(t) \, d\mu(t) \int_A k(s,t) \, \overline{g(s)} \, d\mu(s) = (f|T^*g)$$

for vilkårlige $f,g \in E$.

Vi samler de fundne resultater i følgende sætning:

Sætning. For enhver kerne $k \in L^2(A\times A, \mu \otimes \mu)$ defineres ved

$$(Tf)(s) = \int_A k(s,t)\, f(t)\, dt\ , \qquad f \in L^2(A,\mu),$$

en totalkontinuert operator T på Hilbertrummet $E = L^2(A,\mu)$. Den hermitisk transponerede kerne k^* givet ved $k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$ bestemmer på tilsvarende måde den adjungerede operator T^*, der således ligeledes er en integraloperator af Hilbert-Schmidts type. Der gælder

$$\|T\| = \|T^*\| \leq \|k\|_2 = \left(\int_A \int_A |k(s,t)|^2\, d\mu(s)\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Af (6) følger endvidere, at kernen $k \in E \otimes F$ er entydigt bestemt ud fra operatoren T. Af linearitetsgrunde er det nok at vise, at hvis T er nuloperatoren, er $k = \underline{0}$, altså $k(s,t) = 0$ næsten overalt i $A\times A$. Men ifølge (6) er $(k|g \otimes \overline{f}) = 0$ for alle $f,g \in E$. Anvendes dette med $g = \varphi_i$, $f = \overline{\varphi_j}$, hvor $(\varphi_j)_{j\in J}$ betegner en ortonormalbasis for E, og hvor derfor $(\varphi_i \otimes \varphi_j)_{(i,j)\in J\times J}$ er en ortonormalbasis for $E \otimes E$ (§10.1), da slutter vi, at $k = \underline{0}$.

10.3 Sammensætning af kerner. Med betegnelserne fra de foregående stykker betragter vi to elementer $g,h \in E \otimes E = L^2(A\times A, \mu\times\mu)$. Integralet

$$k(s,t) = \int_A g(s,\tau)\, h(\tau,t)\, d\mu(\tau)$$

eksisterer og er endeligt for $(\mu \otimes \mu)$-næsten alle $(s,t) \in A \times A$, fordi funktionerne $\tau \to g(s,\tau)$ og $\tau \to h(\tau,t)$ vides at være kvadratisk μ-integrable for μ-næsten alle $s \in A$, henholdsvis $t \in A$. Endvidere er den således næsten overalt definerede funktion $(s,t) \to k(s,t)$ målelig med hensyn til $\mu \otimes \mu$ .Dette fremgår som

tidligere ved benyttelse af Fubinis sætning. For $e,f \in E$ er nemlig funktionen

$$(s,\ \tau,\ t) \to e(s)\ g(s,\tau)\ h(\tau,t)\ f(t), \quad (s,\tau,t) \in A \times A \times A$$

målelig med hensyn til $\mu \otimes \mu \otimes \mu$, og den er også integrabel med hensyn til dette mål, idet der gælder

$$\int_A \int_A \int_A |e(s)\ g(s,\tau)\ h(\tau,t)\ f(t)|\ d\mu(s)\ d\mu(\tau)\ d\mu(t)$$

$$= \int_A \Big(\int_A |e(s)|\ |g(s,\tau)|\, d\mu(s) \cdot \int_A |h(\tau,t)|\ |f(t)|\ d\mu(t) \Big) d\mu(\tau)\ ;$$

og her fremstiller integralerne med hensyn til s og t kvadratisk integrable funktioner af τ (jvf.(3), §10.1), hvorfor deres produkt er integrabelt med hensyn til τ. Ifølge Fubinis sætning eksisterer derfor integralet

$$\int_A e(s)\ g(s,\tau)\ h(\tau,t)\ f(t)\ d\mu(\tau) = k(s,t)\ e(s)\ f(t)$$

for $(\mu \otimes \mu)$-næsten alle (s,t) og fremstiller en integrabel, specielt målelig, funktion af $(s,t) \in A \times A$. Vælges nu e og f så at $e(s) \neq 0$ og $f(t) \neq 0$ for alle $s,t \in A$, slutter vi, at $k(s,t)$ selv er målelig med hensyn til $\mu \otimes \mu$ som funktion af $(s,t) \in A \times A$.

Endelig bliver denne funktion kvadratisk integrabel, fordi der ifølge Cauchy-Schwarz gælder

$$|k(s,t)|^2 \leq \int_A |g(s,\tau)|^2 d\mu(\tau) \cdot \int_A |h(\tau,t)|^2\ d\mu(\tau)$$

og derfor

$$\int_A \int_A |k(s,t)|^2 d\mu(s) d\mu(t) \leq$$

$$\int_A \int_A |g(s,\tau)|^2\ d\mu(s)\ d\mu(\tau) \cdot \int_A \int_A |h(\tau,t)|^2\ d\mu(\tau)\ d\mu(t).$$

Hermed er samtidig vist, at

$$\|k\|_2 \leqq \|g\|_2 \, \|h\|_2 \, . \tag{7}$$

Vi kalder k den af g og h sammensatte kerne (jvf. matrix-multiplikation.)

Ved sammensætning af en kerne k med sig selv opstår den såkaldte itererede kerne

$$k^{(2)}(s,t) = \int_A k(s,\tau)\, k(\tau,t)\, d\mu(\tau),$$

og ved sammensætning af denne med k fremkommer $k^{(3)}$, og så fremdeles.

Det overlades til læseren at eftervise, at med sammensætning som "multiplikation" bliver Hilbertrummet $E \otimes E$ en algebra (sædvanligvis ikke-kommutativ og uden neutralt element). Ifølge (7) er der tale om en normeret algebra og dermed en Banach-algebra. Det eneste punkt, som kræver opmærksomhed, er beviset for den associative lov, og denne følger ved anvendelse af Fubini's sætning.

Den afbildning af $E \otimes E = L^2(A \times A, \mu \otimes \mu)$ ind i $L(E,E)$ – mængden af alle kontinuerte operatorer defineret på $E = L^2(A,\mu)$ – som opstår ved til kernen $k \in E \otimes E$ at lade svare integraloperatoren T med denne kerne, er som påvist i slutningen af foregående stykke injektiv. Det er klart, at den er lineær, og vi har set, at den fører k^*, hvor $k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$, over i den adjungerede operator T^*. Endvidere føres sammensætningen af to kerner g og h over i sammensætningen (produktet) af de tilsvarende operatorer; thi for vilk. $f \in E$ gælder

$$\int_A \Big\{ \int_A g(s,\tau)\, h(\tau,t)\, d\mu(\tau) \Big\}\, f(t)\, d\mu(t) =$$

$$\int_A g(s,\tau) \Big\{ \int_A h(\tau,t)\, f(t)\, d\mu(t) \Big\} d\mu(\tau)$$

ifølge (2),§10.1, for ethvert $s \in A$, for hvilket funktionen $\tau \to g(s,\tau)$ er kvadratisk μ-integrabel, og det indtræffer jo for næsten alle $s \in A$.

Den omtalte afbildning $k \to T$ af algebraen $E \otimes E$ ind i algebraen $L(E,E)$ er således en injektiv homomorfi, altså en isomorfi af $E \otimes E$ på billedmængden, der består af samtlige operatorer på E, som kan fremstilles som integraloperatorer med kvadratisk integrabel kerne. Det kan vises, at disse operatorer T netop er de såkaldte operatorer af Hilbert-Schmidts type på E, karakteriseret direkte ved, at der for en (og derfor for enhver) ortonormalbasis $(\varphi_j)_{j\in J}$ for E gælder

$$\sum_{j\in J} \|T\varphi_j\|^2 < \infty .$$

Mængden $L_h(E,E)$ af alle operatorer af Hilbert-Schmidts type på E er altså en delalgebra af mængden $L_t(E,E)$ af alle totalkontinuerte operatorer på E, og udgør for øvrigt ligesom denne et tosidet ideal i $L(E,E)$.

10.4 Symmetrisk kerne. Lad nu specielt den givne kerne $k \in L^2(A \times A, \mu \otimes \mu)$ være hermitisk symmetrisk, altså $k = k^*$, d.v.s.

$$k(s,t) = \overline{k(t,s)} \quad \text{for næsten alle } (s,t) \in A \times A .$$

Den tilhørende integraloperator T er da symmetrisk (altså selvadjungeret): $T = T^*$. Ifølge sætn. 8.13 er mængden $\sigma(T) \setminus \{0\}$

(højst) numerabel, og hvert tal i denne mængde er reelt og er en egenværdi for T med endelig multiplicitet (= dimension af egenrummet). Idet hver egenværdi $\neq 0$ nu gentages efter sin multiplicitet, opstår en talfølge

$$(\lambda_n)_{n\in J} ,$$

hvor $J = \mathbb{N}$ eller et afsnit af $\mathbb{N}$ (og hvor sidstnævnte mulighed ifølge §F9.8 indtræffer netop når T har endelig rang).

I hvert af de tilhørende egenrum vælges en ortonormalbasis; og herved fremkommer ialt et ortonormalsystem $(e_n)_{n\in J}$, hvor

$$Te_n = \lambda_n e_n , \qquad n \in J .$$

Det af $\{e_n\}_{n\in J}$ udspændte afsluttede underrum $\bigoplus_{n\in J} \mathbb{K}e_n$ af E er ifølge sætn.F9.7 netop afslutningen $\overline{T(E)}$ af operatorens billedrum og er også det ortogonale komplement til nulrummet $T^{-1}(\underline{0})$, der jo indtager en særstilling blandt samtlige egenrum. Vi henviser også til §9.7 og §9.8 angående løsning af Fredholms integralligning $Tf - \lambda f = g$, nemlig ligningen

$$\int_A k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t) - \lambda f(s) = g(s)$$

for givet $g \in E = L^2(A,\mu)$. Egenværdierne $\lambda_n (\neq 0)$ og de tilhørende egenvektorer for T kaldes også egenværdier og egenfunktioner for kernen k.

Vi skal nu bestemme en rækkeudvikling af kernen k efter dens ovennævnte egenfunktioner e_n. Først vælges vilkårligt en ortonormalbasis $(f_i)_{i\in I}$ for $T^{-1}(\underline{0})$. Sammen med ortonormalbasen $(e_n)_{n\in J}$ for $[T^{-1}(\underline{0})]^\perp$ bestemmer den en ortonormalbasis for hele rummet E. Ifølge §10.1 danner derfor vektorerne

$$e_m \otimes \bar{e}_n \ , \ e_m \otimes \bar{f}_i \ , \ f_h \otimes \bar{e}_n \ , \ f_h \otimes \bar{f}_i \ ,$$

hvor $h,i \in I$, $m,n \in J$, en ortonormalbasis for $E \otimes E$. For kernen $k \in E \otimes E$ gælder ifølge (6)

$$(k|g \otimes \bar{f}) = (Tf|g) = (f|Tg),$$

hvilket bliver = 0 hvis enten f eller g tilhører $T^{-1}(\underline{0})$. Og for $(k|e_m \otimes \bar{e}_n)$ finder vi

$$(k|e_m \otimes \bar{e}_n) = (Te_n|e_m) = (\lambda_n e_n|e_m) = \lambda_n \delta_{nm} \ .$$

I udviklingen af k efter ovennævnte ortonormalbasis bliver derfor kun følgende tilbage:

$$(8) \qquad k = \sum_{n\in J} \lambda_n (e_n \otimes \bar{e}_n) \ ,$$

hvor rækken konvergerer i $E \otimes E$, altså med L^2-normen på $L^2(A \times A, \ \mu \otimes \mu)$.

Under benyttelse af Parsevals sætning sluttes heraf den vigtige formel

$$(9) \qquad \|k\|_2^2 = \int_A \int_A |k(s,t)|^2 \, d\mu(s) \, d\mu(t) = \sum_{n\in J} \lambda_n^2 \ .$$

Den itererede kerne $k^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$ svarer til operatoren T^p og har derfor egenværdierne $(\lambda_n^p)_{n\in J}$ og samme egenfunktioner $(e_n)_{n\in J}$ som T, hvorfor vi af (8) udleder den i $E \otimes E$ konvergente rækkefremstilling

$$(10) \qquad k^{(p)} = \sum_{n\in J} \lambda_n^p \, (e_n \otimes \bar{e}_n).$$

Resultaterne i dette stykke gælder åbenbart også for en kerne,

hvis tilhørende operator T blot er normal: $T^*T = TT^*$, hvilket umiddelbart oversættes til ombytteligheden af kernen k og k^* ved sammensætning. Blot skal vi i (9) erstatte λ_n^2 med $|\lambda_n|^2$.

Den med resolventen beslægtede operator R_λ (§F.8.14) er igen en integraloperator med kerne k_λ af Hilbert-Schmidt typen, fordi $L_h(E,E)$ som nævnt i foregående stykke er et ideal i $L(E,E)$. Dens egenfunktioner er igen $(e_n)_{n\in J}$, og de tilhørende egenværdier er åbenbart $\lambda(\lambda_n - \lambda)^{-1}\lambda_n$, hvorfor vi har fremstillingen

$$k_\lambda = \sum_{n\in J} \frac{\lambda\lambda_n}{\lambda_n - \lambda}\, e_n \otimes \bar{e}_n \,. \tag{11}$$

10.5 Benyttelse af den ligelige topologi. Lad nu μ være et positivt mål på et kompakt rum A, f.eks. Lebesguemålet på en kompakt mængde $A \subseteq \grave{R}^m$. Der gælder da $\mu(A) < \infty$. Vi betragter de to normerede rum

$$E = L^2(A,\mu) \quad , \qquad F = C(A)$$

over et og samme koefficientlegeme K(=$\grave{R}$ eller $\grave{C}$) og med normerne henholdsvis

$$\|f\|_2 = \left(\int_A |f(t)|^2 d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in A} |f(t)| \,.$$

E er et Hilbertrum med skalarproduktet $(f|g) = \int_A f(t)\,\overline{g(t)}\, d\mu(t)$, medens F er et Banachrum.

Om målet μ kan vi gerne antage, at $\mu(U) > 0$ for enhver åben mængde $U \neq \emptyset$, altså at støtten for μ udgør hele A. Thi ellers erstatter vi blot A med støtten af μ, d.v.s. den mindste afsluttede delmængde af A hvis komplementærmængde har målet 0.

Herved opnår vi, at en ækvivalensklasse tilhørende $L^2(A,\mu)$ højst kan indeholde én kontinuert funktion, altså at $F = C(A)$ kan identificeres med et underrum af $E = L^2(A,\mu)$, idet en kontinuert funktion på A identificeres med sin ækvivalensklasse.

Åbenbart gælder inklusionen $F \subseteq E$ også i topologisk henseende, d.v.s. den identiske afbildning af F ind i E er kontinuert, eller med andre ord: topologien på F med normen $\| \ \|_\infty$ (den ligelige topologi) er finere end delrumstopologien på $F \subseteq E$ med normen $\| \ \|_2$. Dette følger af uligheden

$$\|f\|_2 \leq \mu(A)^{\frac{1}{2}} \|f\|_\infty \ , \qquad f \in F \ .$$

Som kerne betragter vi nu en funktion $k: A \times A \to K$ med følgende tre egenskaber:

1°) k er målelig m.h.t. produktmålet $\mu \otimes \mu$ på $A \times A$.

2°) For ethvert $s \in A$ er funktionen

$$k_s: t \to k(s,t)$$

kvadratisk μ-integrabel over A, altså $k_s \in L^2(A,\mu)$.

3°) Afbildningen $s \to k_s$ af A ind i Hilbertrummet $E = L^2(A,\mu)$ er kontinuert, altså

$$\lim_{\sigma \to s} \|k_\sigma - k_s\|_2 = 0 \qquad \text{for ethvert } s \in A.$$

Det eftervises let, at enhver kontinuert kerne $k \in C(A \times A)$ opfylder disse tre krav. Mere generelt gælder, at en $(\mu \otimes \mu)$-målelig kerne k opfylder de stillede betingelser, dersom det for μ-næsten alle $t \in A$ gælder, at funktionen $s \to k(s,t)$ er kontinuert, og dersom tillige $\sup_{s \in A} |k(s,t)|$ er en kvadratisk μ-integrabel funktion af t. (Man benytter Lebesgues konvergenssætning.)

Som eksempel på en diskontinuert kerne med egenskaberne $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ kan nævnes en kerne af Volterras type . Her er $A = [a,b]$ et kompakt interval på tallinien, og μ er Lebesguemålet på A. Det forudsættes, at

$$k(s,t) = 0 \quad \text{for} \quad a \leqq s < t \leqq b$$

og at k er kontinuert relativt til den ved uligheden $a \leqq t \leqq s \leqq b$ bestemte trekant i $\mathbb{R}^2$. Verifikation af $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ for en sådan kerne kan ske ud fra ovenstående kriterium, men foretages også let direkte.

Lad os nu nærmere undersøge en vilkårlig kerne k med egenskaberne $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ på $A \times A$, hvor A er et kompakt rum og μ et positivt Radon mål på A med støtten A. På grund af trekantsuligheden

$$\left| \, \|k_\sigma\|_2 - \|k_s\|_2 \, \right| \leqq \|k_\sigma - k_s\|_2$$

følger det af 3°, at $\|k_s\|$ er en kontinuert funktion af $s \in A$. Da endvidere A er kompakt, har $\|k_s\|$ en størsteværdi

$$c = \max_{s \in A} \|k_s\| \, . \tag{12}$$

Af Fubinis sætning fremgår derfor, at

$$\|k\|_2^2 = \int_{A \times A} |k|^2 d(\mu \otimes \mu) = \int_A d\mu(s) \int_A |k(s,t)|^2 d\mu(t)$$

$$= \int_A \|k_s\|_2^2 \, d\mu(s) \leqq c^2 \mu(A) < \infty \, ,$$

så at k er en kerne af Hilbert-Schmidts type.

For enhver funktion $f \in E = L^2(A,\mu)$ og ethvert $s \in A$ er skalarproduktet

$$(k_s|\bar{f}) = (f|\bar{k}_s) = \int_A k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t)$$

veldefineret ifølge 2°. Af Cauchy-Schwarz' ulighed følger for $\sigma, s \in A$ og $f \in E$, at

$$(13) \qquad |(k_\sigma|\bar{f}) - (k_s|\bar{f})| = |(k_\sigma - k_s|\bar{f})| \leqq \|k_\sigma - k_s\|_2 \, \|f\|_2 .$$

Ifølge 3° er derfor den ved $g(s) = (k_s|\bar{f})$ definerede funktion g kontinuert på A, altså $g \in C(A) = F$. Ved $Tf = g$, altså

$$(Tf)(s) = (k_s|\bar{f}) = \int_A k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t)$$

defineres således en afbildning

$$T : E \to F$$

(hvor $E = L^2(A,\mu)$, $F = C(A)$), og denne afbildning er åbenbart lineær.

Idet nu ifølge (12)

$$|(Tf)(s)| = |(k_s|\bar{f})| \leqq \|k_s\|_2 \, \|f\|_2 \leqq c\|f\|_2$$

for alle $s \in A$ og alle $f \in E$, gælder

$$(14) \qquad \|Tf\|_\infty \leqq c\|f\|_2 , \qquad f \in E .$$

Dette betyder, at $T \in L(E,F)$, og at den tilhørende operatornorm $\|T\|_{2,\infty}$ opfylder uligheden $\|T\|_{2,\infty} \leqq c$. Ved betragtning af funktionerne $f = \bar{k}_s$, $s \in A$, indses i øvrigt let, at

$$\|T\|_{2,\infty} = c = \max_{s\in A} \|k_s\|_2 .$$

Ulighederne (13) og (14) viser nu, at billedet $T(B) = \{Tf \mid f \in E \wedge \|f\|_2 \leqq 1\}$ af enhedskuglen B i $E = L^2(A,\mu)$ er

en begrænset og ækvikontinuert delmængde af $F = C(A)$. Det følger derfor af Ascolis sætning, at $T(B)$ har kompakt afslutning i F, altså at T er totalkontinuert som operator $E \to F$, d.v.s. $T \in L_t(E,F)$.

Vi har imidlertid her ikke brug for andet end at $T \in L(E,F)$ og $T \in L_t(E,E)$, hvilket sidste er svagere end $T \in L_t(E,F)$, fordi inklusionen $F \subsetneq E$ som tidligere omtalt er topologisk. Og at $T \in L_t(E,E)$ følger af, at kernen k som nævnt er af Hilbert-Schmidts type, hvorfor vi kan benytte sætn. 10.2.

Vi tilføjer uden bevis, at omvendt enhver operator $T \in L_t(E,F)$ er en integraloperator med en kerne med egenskaberne $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$. Heraf fremgår, at den med resolventen beslægtede operator R_λ (§F8.14) ligeledes er en integraloperator med en kerne af samme art, såfremt blot $\lambda \neq 0$, $\lambda \notin \sigma(T)$. Thi af $(T - \lambda I)^{-1} \in L(E,E)$ og $T \in L_t(E,F)$ følger ud fra sætn.F8.6, at $R_\lambda = \lambda T(T - \lambda I)^{-1} \in L_t(E,F)$.

10.6 Ligelig konvergent rækkeudvikling efter egenfunktionerne. Med betegnelserne fra det foregående stykke vil vi nu nærmere betragte det tilfælde, hvor kernen k med egenskaberne $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ er hermitesk symmetrisk:

$$k(s,t) = \overline{k(t,s)}\,, \qquad s,t \in A.$$

Den tilhørende integraloperator $T \in L(E,E)$, hvor $E = L^2(A,\mu)$, er da selvadjungeret. Med $(\lambda_n)_{n\in J}$ betegnes systemet af fra 0 forskellige egenværdier for T, hver gentaget i overensstemmelse med sin multiplicitet; og med $(e_n)_{n\in J}$ betegnes et tilsvarende ortonormalsystem af egenfunktioner e_n, altså

$$Te_n = \lambda_n e_n , \qquad n \in J .$$

Her er $J = \mathbb{N}$ eller et afsnit af $\mathbb{N}$. Da nu T faktisk afbilder $E = L^2(A,\mu)$ ind i underrummet $F = C(A)$ af E, bliver egenfunktionerne $e_n = \lambda_n^{-1} Te_n$ nødvendigvis kontinuerte, altså

$$e_n \in C(A) , \qquad n \in J.$$

De eventuelle egenfunktioner hørende til den mulige egenværdi 0 for T behøver derimod ikke at være kontinuerte. Idet vi med P_o betegner projektionsoperatoren af Hilbertrummet $E = L^2(A,\mu)$ vinkelret på underrummet $T^{-1}(\underline{0}) = \{f \in E | Tf = \underline{0}\}$, gælder ifølge (5),§9.7

$$f = \sum_{n\in J} (f|e_n)e_n + P_o f , \quad f \in L^2(A,\mu),$$

hvor den ortogonale familie $((f|e_n)e_n)_{n\in J}$ er summabel i $L^2(A,\mu)$.

Da $T \in L(E,E)$ og $TP_o f = \underline{0}$, fås ved anvendelse af T, idet $Te_n = \lambda_n e_n$:

$$Tf = \sum_{n\in J} \lambda_n (f|e_n)e_n = \sum_{n\in J} (Tf|e_n)e_n .$$

Her benyttes tillige, at

$$(Tf|e_n) = (f|Te_n) = (f|\lambda_n e_n) = \lambda_n (f|e_n) ,$$

da T er symmetrisk og λ_n derfor reel. Men nu er også $T \in L(E,F)$, og derfor gælder den fundne rækkeudvikling ikke blot i normtopologien på $F = L^2(A,\mu)$, men også i normtopologien på $E = C(A)$, den <u>ligelige topologi</u> . Altså gælder for ethvert $s \in A$ og ethvert $f \in E$

$$(15)\quad (Tf)(s) = \int_A k(s,t)f(t)d\mu(t) = \sum_{n\in J} \lambda_n(f|e_n)e_n(s)$$

$$= \sum_{n\in J} (Tf|e_n)e_n(s) ,$$

hvor rækken konvergerer ligeligt med hensyn til s eller er endelig, nemlig hvis T har endelig rang). Rækken er endda absolut konvergent, eftersom

$$2\,|\lambda_n(f|e_n)e_n(s)| \leqq \lambda_n^2\,|e_n(s)|^2 + |(f|e_n)|^2 ,$$

og rækkerne $\sum_{n\in J} |(f|e_n)|^2$ og $\sum_{n\in J} \lambda_n^2|e_n(s)|^2$ er begge konvergente. For den sidstes vedkommende fremgår dette af følgende identitet (jvf.(10)) vendt på s = t.

$$(16)\quad (k_s|k_t) = \int_A k(s,\tau)k(\tau,t)d\mu(\tau) = \sum_{n\in J} \lambda_n^2 e_n(s)\overline{e_n(t)} .$$

Denne punktvis konvergente rækkefremstilling af den itererede kerne $k^{(2)}(s,t)$ (som her er kontinuert ifølge egenskab 3° ved k) fås af (15) anvendt på $f = \bar{k}_t$:

$$(k_s|k_t) = (T\bar{k}_t)(s) = \sum_{n\in J} \lambda_n(\bar{k}_t|e_n)e_n(s) = \sum \lambda_n^2\, e_n(s)\overline{e_n(t)},$$

idet

$$(\bar{k}_t|e_n) = \overline{(k_t|\bar{e}_n)} = \overline{(Te_n)(t)} = \lambda_n\overline{e_n(t)} .$$

Også for de højre itererede kerner $k^{(p)}$ gælder under de her betragtede forudsætninger rækkeudviklingen (10) ikke blot i $L^2(A \times A, \mu \otimes \mu)$, men også i form af punktvis konvergens. Derimod behøver den tilsvarende rækkeudvikling (8) af selve kernen k ikke at gælde punktvis. Det kan dog vises (Mercers sætning), at (8) gælder punktvis og ligeligt i tilfælde af en kontinuert, symmetrisk og positiv definit kerne. Det sidste betyder, at $\lambda_n > 0$

for alle $n \in J$, eller hvad der kommer ud på det samme at $(Tf|f) \geq 0$ for alle $f \in E$. Det er,for øvrigt tilstrækkeligt ved Mercers sætning at antage, at højst endelig mange egenværdier λ_n er < 0. - Beviset for Mercers sætning findes i den citerede bog af Dieudonné.

Vi formulerer hovedresultatet for dette stykke i følgende sætning.

Sætning. Lad μ være et positivt Radon mål på et kompakt rum A, og lad k være en kontinuert kerne på $A \times A$ (eller i det mindste en kerne med egenskaberne $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$, §10.5). Idet det forudsættes, at k er hermitesk symmetrisk, betegnes med $(\lambda_n)_{n\in J}$ systemet af fra 0 forskellige egenværdier for k, hver gentaget efter sin multiplicitet, og med $(e_n)_{n\in J}$ et tilhørende ortonormalsystem af egenfunktioner. Disse sidste er alle kontinuerte. For enhver funktion $f \in L^2(A,\mu)$ er funktionen $g = Tf$, givet ved

$$g(s) = \int_A k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t),$$

kontinuert på A, og der gælder den ligeligt og absolut konvergente rækkefremstilling

$$g(s) = \sum_{n\in J} (g|e_n)\, e_n(s), \quad (g|e_n) = \int_A g(t)\, \overline{e_n(t)}\, d\mu(t).$$

10.7 Sturm-Liouville problemet. Lad $A = [a,b]$ være et kompakt interval på tallinien, og lad p og q være givne kontinuerte reelle funktioner definerede på A og med værdier

$$p(t) > 0, \quad q(t) \geq 0 \qquad (t \in A).$$

For enhver funktion $u \in C^2(A;\dot{R})$ defineres en kontinuert funktion

$Lu \in C(A;\grave{R})$ ved

$$(Lu)(t) = -\frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{du(t)}{dt}\right] + q(t)\,u(t)\ ,$$

eller kort: $Lu = -(pu')' + qu$. Herved er defineret en lineær afbildning

$$L\colon C^2(A) \to C(A)\ ,$$

idet vi her og i det følgende underforstår, at koefficientlegemet er $K = \grave{R}$.

For $u,v \in C^2(A)$ finder vi

$$\frac{d}{dt}(puv' - pu'v) = u(pv')' - (pu')'v = vLu - uLv.$$

Heraf fås ved integration Lagranges formel:

$$(17)\quad \int_a^b (Lu\cdot v - uLv)dt = [puv' - pu'v]_a^b\ ,$$

hvor $[f]_a^b$ er en forkortelse for $f(b) - f(a)$. En anden konsekvens af den foregående identitet er implikationen

$$(18)\qquad Lu = 0 \wedge Lv = 0 \quad \Rightarrow \quad puv' - pu'v = \text{konstant}.$$

Af særlig interesse er visse restriktioner af afbildningen $L\colon C^2(A) \to C(A)$, som fremkommer ved indførelse af to passende randbetingelser. Vi skal her kun betragte randbetingelserne

$$(19)\qquad u(a) = 0 \ \wedge\ u(b) = 0\ .$$

Med T betegnes restriktionen af L til underrummet

$$D(T) = \{u \in C^2(A) \mid u(a) = u(b) = 0\}$$

af $C^2(A)$ og dermed af $C(A)$. I det følgende vil vi opfatte T som

en operator på C(A) med definitionsrummet D(T) som ovenfor angivet. Det fremgår umiddelbart af Lagranges formel (17), at T er en symmetrisk operator på præ Hilbertrummet C(A) med det sædvanlige skalarprodukt, idet

$$(Tu|v) - (u|Tv) = \int_a^b (Lu \cdot v - uLv)dt$$

$$= [puv' - pu'v]_a^b = 0$$

som følge af, at u og v opfylder randbetingelserne (19).

Enhver egenværdi λ for T er simpel, d.v.s. har multipliciteten 1. Lad nemlig

$$Tu = \lambda u, \qquad Tv = \lambda v.$$

Idet vi sætter

$$w(t) = u'(a)\, v(t) - v'(a)\, u(t),$$

gælder $Tw = \lambda w$, og desuden er $w(a) = 0$ og

$$w'(a) = u'(a)\, v'(a) - v'(a)\, u'(a) = 0 .$$

Da således $w \in C^2(A)$ tilfredsstiller differentialligningen $Lw - \lambda w = 0$ samt begyndelsesbetingelserne $w(a) = w'(a) = 0$, og da det samme gælder om funktionen 0, slutter vi af entydighedssætningen for differentialligninger af 2.orden, at $w = 0$, og dermed at u og v er lineært afhængige.

Forudsætningen $q(t) \geq 0$ for alle $t \in I$ tjener blot til at sikre, at enhver egenværdi for T er > 0. Antages det nemlig, at u er egenfunktion for T hørende til en egenværdi $\lambda \leq 0$, da føres vi til en modstrid på følgende måde. Da $u(a) = 0$, må $u'(a) \neq 0$, thi ellers var $u = 0$ ifølge entydighedssætningen ligesom ovenfor,

Vi kan gerne antage at $u'(a) > 0$, idet vi ellers blot erstatter u med $-u$. Da u er kontinuert, er mængden $B = \{t \in A | u(t) \leqq 0\}$ afsluttet, og der gælder $a \in B$, $b \in B$. Da $u'(a) > 0$, er $u(t) > 0$ for alle t i et åbent interval med venstre endepunkt a, hvorfor a er et isoleret punkt af B. Mængden $B \setminus \{a\}$ er derfor afsluttet, og da den indeholder b, har den et mindste element $b^* \leqq b$. Da nu $Lu = \lambda u$, bliver

$$\frac{d}{dt}(p(t)\, u'(t)) = (q(t) - \lambda)\, u(t) \geqq 0 \quad \text{for } a < t < b^* ,$$

idet $q(t) \geqq 0$, $\lambda \leqq 0$, og $u(t) > 0$ for $a < t < b^*$. Følgelig er pu' voksende i $[a,b^*]$, og da $p(a)\, u'(a) > 0$, bliver $pu' > 0$ og derfor $u' > 0$ i $[a,b^*]$. Men så er u strengt voksende i dette interval, og da $u(a) = 0$, bliver $u(b^*) > 0$ i strid med, at $b^* \in B$. Hermed er da bevist, at et tal $\lambda \leqq 0$ ikke kan være egenværdi for T.

Specielt er T injektiv og har derfor en invers operator T^{-1}, som vi nu vil bestemme. Lad φ og ψ betegne de ved begyndelsesbetingelserne

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi'(a) = 1; \qquad \psi(b) = 0, \quad \psi'(b) = 1$$

fastlagte løsninger til differentialligningen $Lu = 0$. De er lineært uafhængige, da de i modsat fald tilhørte $D(T)$ og dermed opfyldte ligningen $Tu = 0$. Det følger, at determinanten $\varphi\psi' - \varphi'\psi$ overalt er $\neq 0$. Ifølge (18) er derfor

$$p\varphi'\psi - p\varphi\psi' = c$$

hvor c er en konstant $\neq 0$. Ifølge en bekendt løsningsformel har den inhomogene differentialligning

$$Lu = f$$

for givet $f \in C(A)$ den fuldstændige løsning

$$u(s) = c^{-1}\psi(s) \int^s \varphi(t)\, f(t)dt - c^{-1}\varphi(s) \int^s \psi(t)\, f(t)dt.$$

Vi hæfter os nu særlig ved den partikulære løsning u, der fremkommer ved at vælge de optrædende stamfunktioner så at de bliver 0 for henholdsvis $s = a$ og $s = b$, altså

$$(20) \quad u(s) = c^{-1}\psi(s) \int_a^s \varphi(t)\, f(t)dt + c^{-1}\varphi(s) \int_s^b \psi(t)\, f(t)dt.$$

Denne særlige løsning u til $Lu = f$ opfylder åbenbart begge randbetingelserne $u(a) = u(b) = 0$, fordi $\varphi(a) = \psi(b) = 0$. Da således $u \in D(T)$, er den ved (20) bestemte funktion altså netop løsningen til $Tu = f$, d.v.s. $u = T^{-1}f$.

Vi indfører nu den såkaldte Green's funktion $k: A\times A \to \dot{R}$ ved

$$(21) \qquad k(s,t) = \begin{cases} c^{-1}\varphi(s)\,\psi(t) & \text{for } a \leqq s \leqq t \leqq b \\ c^{-1}\psi(s)\,\varphi(t) & \text{for } a \leqq t \leqq s \leqq b \end{cases}$$

(bemærk overensstemmelsen for $s = t$). Åbenbart er k kontinuert og symmetrisk på $A \times A$. Herved kan (21) skrives

$$u(s) = (T^{-1}f)(s) = \int_a^b k(s,t)\, f(t)dt \ ,$$

og T^{-1} er således integraloperatoren med den symmetriske, kontinuerte kerne k.

Som nævnt er 0 ikke egenværdi for T, og T er altså injektiv. Da T^{-1} naturligvis også er injektiv, er 0 heller ikke egenværdi for integraloperatoren T^{-1}. For $\lambda \neq 0$ haves biimplikationerne

$$Tu = \lambda u \iff u = T^{-1}(\lambda u) = \lambda T^{-1}u$$

$$\iff T^{-1}u = \lambda^{-1}u \ .$$

Følgelig er egenværdierne for T^{-1} netop de reciproææe til egenværdierne for T, og egenrummene er de samme i begge tilfælde:

$$(T - \lambda I)^{-1}(\underline{0}) = (T^{-1} - \lambda^{-1} I)^{-1}(\underline{0}) \ .$$

Som allerede påvist, er egenværdierne for T alle simple og > 0, og det samme gælder da om egenværdierne for T^{-1}.

Foruden rummet C(A) betragter vi nu også Hilbertrummet $L^2(A,\mu)$, hvor μ betegner Lebesguemålet på det kompakte interval $A = [a,b]$. Vi betegner med

$$S : L^2(A,\mu) \to L^2(A,\mu)$$

integraloperatoren på $L^2(A,\mu)$ med den symmetriske, kontinuerte Green'ske kerne k. Da k er symmetrisk, er S symmetrisk (d.v.s. selvadjungeret). Da k er kontinuert, er betingelserne $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ i stk. 5 opfyldt, hvorfor S afbilder $L^2(A,\mu)$ ind i C(A). Specielt er derfor egenfunktionerne for S hørende til egenværdier $\neq 0$ alle kontinuerte (jvf. stk. 6) og dermed allerede egenfunktioner for restriktionen af S til C(A), der jo kan opfattes som et underrum af $L^2(A,\mu)$. Denne restriktion $S|C(A)$ er netop T^{-1}, nemlig integraloperatoren på C(A) med kernen k.

Det tilføjes, at S (ligesom T^{-1}) ikke har 0 som egenværdi. Da S er selvadjungeret, kommer dette jo ud på, at billedrummet $D(L^2(A,\mu))$ er overalt tæt i $L^2(A,\mu)$, og det er det, fordi allerede $S(C(A)) = T^{-1}(C(A)) = D(T)$ er tæt i L^2, f.eks. fordi D(T) omfatter $C_0^2(]a,b[)$, der vides at være tæt i $L^2(]a,b[) = L^2([a,b])$.

Med $\{\lambda_n\}_{n\in J}$ betegner vi mængden af egenværdier for differentialoperatoren T, hver kun medtaget én gang, i overensstemmelse med, at egenværdierne alle er simple. For hvert $n \in J$ betegner vi med φ_n en normeret egenfunktion for T hørende til egenværdien λ_n (>0):

$$T\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \qquad \int_a^b \varphi_n(t)^2 dt = 1.$$

Som ovenfor påvist er da $\{\lambda_n^{-1}\}_{n\in J}$ mængden af samtlige egenværdier for integraloperatoren $T^{-1}: C(A) \to C(A)$ og også for integraloperatoren $S : L^2(A,\mu) \to L^2(A,\mu)$; og det til λ_n^{-1} hørende egenrum for T^{-1}, eller for S, er $\dot{R}\varphi_n$. Disse egenrum er indbyrdes ortogonale på grund af symmetrien af k (og dermed af T^{-1} og S). Vi har da

$$S\,\varphi_n = T_n^{-1}\varphi_n = \lambda_n^{-1}\varphi_m, \qquad \int_a^b \varphi_m(t)\,\varphi_n(t)dt = \delta_{m,n}.$$

Da 0 ikke er egenværdi for S, er ortonormalsystemet $(\varphi_n)_{n\in J}$ totalt i Hilbertrummet $L^2(A,\mu)$, og da dette ikke er endeligdimensionalt, bliver J uendelig, altså $J = \dot{\mathbb{N}}$.

Ifølge sætn. 10.6 kan enhver funktion i billedrummet for S, specielt enhver funktion u i billedrummet D(T) for T^{-1}, fremkomme stilles ved den ligeligt og absolut konvergente række

$$u(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(s), \qquad c_m = \int_a^b u(t)\varphi_n(t)dt.$$

Bemærk også, at da $\varphi_n \in D(T)$, er $\varphi_n \in C^2(A)$, og $\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0$.

Om egenværdierne λ_n for T ved vi, at $\lambda_n^{-1} \to 0$ for $n \to \infty$ på grund af totalkontinuiteten af T^{-1} (og S). Altså gælder (da alle $\lambda_n > 0$):

$$\lambda_n \to +\infty \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Nærmere haves ifølge (9), stk. 4,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} = \int_a^b \int_a^b k(s,t)^2 ds\, dt < \infty .$$

Hermed er fundet hovedresultaterne i teorien for det klassiske Sturm-Liouville problem. Nærmere oplysninger om egenvær-

diernes asymptotiske forhold kan fås ved sammenligning med simple specielle differentialoperatorer af den betragtede type. Simplest er tilfældet $p = 1$, $q = 0$, hvor $Lu = -u''$, og hvor egenværdeerne og egenfunktionerne bliver

$$\lambda_n = n^2\pi^2/(b - a)^2$$

$$\varphi_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{b-a} \sin\left(n\pi \frac{t-a}{b-a}\right) .$$

31. På Hilbertrummet $H = L^2([0,1];\mathbb{C})$ defineres en operator A ved

$$(Af)(s) = \int_0^s f(t)dt$$

for $f \in H$, $s \in [0,1]$. Vis, at $A \in L(H,H)$, at der for $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$(A^n f)(s) = \frac{1}{n!}\int_0^s (s-t)^{n-1} f(t)dt \ ,$$

og at A er injektiv, generaliseret nilpotent.

Find definitionsmængden D for operatoren A^{-1}, og bestem $A^{-1}g$ for $g \in D$. Vis at $\sigma(A^{-1}) = \emptyset$ (når ∞ ikke medregnes). Find exp A.

32. Lad T være en operator fra et normeret rum E til et normeret rum F med $D(T) \neq \{\underline{0}\}$.

Vi sætter

$$C(T) = \sup\{||Tx|| \mid x \in D(T) \wedge ||x|| = 1\}$$

$$c(T) = \inf\{||Tx|| \mid x \in D(T) \wedge ||x|| = 1\}.$$

Som bekendt gælder, at $C(T) < \infty$ er ensbetydende med, at T er kontinuert; og i givet fald er $C(T) = ||T|D(T)||$. Bevis, at $c(T) > 0$ er ensbetydende med, at T^{-1} eksisterer og er kontinuert; og at der i givet fald gælder

$$c(T) = ||T^{-1} \mid D(T^{-1})||^{-1} \ .$$

Bevis på grundlag heraf, at for en bijektiv operator $T \in L(E,F)$ med $T^{-1} \in L(F,E)$ gælder

$$||T^{-1}|| = ||T||^{-1},$$

hvis og kun hvis T har formen $T = \lambda V$, hvor $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ og hvor V er en (isometrisk) isomorfi af E på F. (jvf.opg.19).

33. Udled den i §F 6.1 omtalte forbindelse mellem spaltning af et vektorrum E som direkte sum af underrum E_j og spaltning af enhedsoperatoren I på E som sum af projektionsoperatorer P_j. Diskuter også det tilsvarende problem i det topologiske tilfælde.

34. Lad $T: E \to E$ være en lineær afbildning af et vektorrum E i sig selv. Lad E_1 og E_2 være underrum af E med direkte sum E. Gør rede for, at T på naturlig måde kan fremstilles som en art blokmatrix

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},$$

hvor $T_{ij}: E_j \to E_i$ er lineær. Hvad er betingelsen for, at E_1, resp. E_2, er stabilt over for T ? Generaliser til en spaltning af E som direkte sum af flere end 2 underrum E_j.

35. Bevis sætning 7.5 uden at gøre brug af dens gyldighed i det endeligdimensionale tilfælde. (Benyt i stedet lemma 7.4 efter at have spaltet $N = S^{-p}(\underline{0})$ til bunds som direkte sum af stabile underrum.)

36. Lad $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ være egenværdierne for en lineær afbildning $T: E \to E$ af et endeligdimensionalt komplekst vektorrum E i sig selv, og lad p_i være index for λ_i $(i = 1,\ldots,r)$. Vis, at resolventen $(T - \lambda I)^{-1}$ har formen

$$(T - \lambda I)^{-1} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{n=1}^{p_i} (\lambda - \lambda_i)^{-n} A_{i,n},$$

hvor hvert $A_{i,n}$ er en af λ uafhængig, lineær afbildning af E i sig selv, og hvor $A_{i,p_i} \neq 0$. Således har resolventen en pol af orden netop p_i i punktet λ_i.

37. Lad T: E → E være lineær, E kompleks og endeligdimensional. Vis, at ethvert polynomium Q med Q(T) = 0 er deleligt med minimalpolynomiet for T.

38. Lad T: E → E være en normal operator med rent punktspektrum $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ på et Hilbertrum E. Vis, at

$$\sigma(T) = \overline{\{\lambda_j\}_{j\in J}} .$$

39. (Matrixfremstilling af kontinuerte operatorer på et Hilbertrum.)

Lad $(e_j)_{j\in J}$ være en ortonormalbasis for et Hilbertrum E over K. Til enhver operator $A \in L(E,E)$ knyttes den dobbelt indicerede familie ("matrix") $(a_{ij})_{i,j\in J}$, hvor

$$a_{ij} = (Ae_j | e_i) = (e_j | A^* e_i).$$

Vis, at den herved definerede afbildning af L(E,E) ind i $K^{J\times J}$ er lineær og injektiv.

a) Find matricen for A^*.

b) For $x \in E$ og $y = Ax$ sættes $x_j = (x|e_j)$ og $y_j = (y|e_j)$, $j \in J$. Vis, at

$$y_i = \sum_{j\in J} a_{ij} x_j \qquad (i \in J),$$

hvor der er tale om en absolut summabel familie $(a_{ij}x_j)_{j\in J}$.

c) Lad $B \in L(E,E)$ have matricen $(b_{ij})_{i,j\in J}$. Vis, at AB har

matricen $(c_{ij})_{i,j\in J}$, hvor

$$c_{ij} = \sum_{k\in J} a_{ik}b_{kj} \qquad (i,j \in J),$$

og hvor der igen er tale om en absolut summabel familie.

d) Vis, at der gælder

$$\sum_{i,j\in J} |a_{i,j}|^2 = \sum_{j\in J} \|Ae_j\|^2 = \sum_{i\in J} \|A^* e_i\|^2 ,$$

og at denne størrelse ikke afhænger af den betragtede ortonormalbasis $(e_j)_{j\in J}$. I tilfælde af, at størrelsen er endelig, kaldes den kvadratrod for Hilbert-Schmidt normen af A, og A siges at være en operator af Hilbert-Schmidt typen. I det følgende betegnes med $L_h(E,E)$ mængden af alle operatorer af Hilbert-Schmidt typen på Hilbertrummet E.

e) Vis, at $L_h(E,E)$ er et tosidet ideal i $L(E,E)$.

40. (Matricer af Hilbert-Schmidt typen.) En matrix $(a_{ij})_{i,j\in J} \in K^{J\times J}$, hvor J er en given indexmængde, og hvor $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, siges at være af Hilbert-Schmidt typen, dersom

$$\sum_{i,j\in J} |a_{ij}|^2 < +\infty .$$

Mængden af alle sådanne matricer (for givet J) er altså Hilbertrummet $l^2(J \times J;K)$ med skalarproduktet

$$((a_{ij})_{i,j\in J} \mid (b_{ij})_{i,j\in J}) = \sum_{i,j\in J} a_{ij}\,\overline{b_{ij}} .$$

Gør rede for, at mængden $L_h(E,E)$ af alle operatorer af Hilbert-Schmidt typen på et Hilbertrum E over K, er et Hilbertrum under benyttelse af Hilbert-Schmidt normen, og at den

i opg.39 omhandlede afbildning af $L(E,E)$ ind i $K^{J\times J}$ bestemmer en (isometrisk) isomorfi af $L_h(E,E)$ på $l^2(J \times J;K)$. Vis endelig, at Hilbert-Schmidt normen af en operator $A \in L_h(E,E)$ er $\geq$ operatornormen $\|A\|$.

41. (Ascolis sætning.) Lad A være et kompakt, metrisk rum og H en delmængde af Banachrummet $C(A) = C(A ; K)$.,Det forudsættes, at H er punktvis begrænset og ækvikontinuert. Det første betyder, at der findes $c \in \dot{R}$ så at

$$\forall f \in H \quad \forall t \in A: |f(t)| \leq c.$$

Det andet betyder, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ og $s \in A$ findes en omegn $V(s)$ af s i A så at

$$\forall f \in \quad \forall t \in V(s) : \ |f(s) - f(t)| < \varepsilon .$$

Under disse forudsætninger udsiger Ascolis sætning, at H har kompakt afslutning i C(A).

Bevis dette i det tilfælde, hvor A desuden er separabelt, altså hvor der findes en numerabel, overalt tæt delmængde $D \subset A$.(Lad $(f_n)_{n\in\dot{N}}$ være en vilkårlig følge på H . Vis først ved hjælp af diagonalmetoden, at der findes en delfølge af $(f_n)_{n\in\dot{N}}$, som konvergerer punktvis for ethvert $s \in D$. Vis dernæst under benyttelse af ækvikontinuiteten, at den omtalte delfølge er en fundamentalfølge i C(A).)

42. (Integraloperatorer af Hilbert-Schmidt typen.) Lad A være et lokalkompakt topologisk rum, og lad μ være et σ-endeligt positivt Radon mål. Vi betragter Hilbertrummet $E = L^2(A,\mu)$ over $\dot{C}$ og tensorproduktet

$$E \otimes E = L^2(A \times A, \mu \otimes \mu).$$

Lad $k \in E \times E$.

a) Gør rede for, at der ved

$$(Tf)(s) = \int_A k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t), \qquad f \in E,$$

en
defineres totalkontinuert operator $T \in L(E,E)$ med $\|T\| \leq \|k\|_2$, hvor

$$\|k\|_2^2 = \int_{A\times A} |k|^2\, d(\mu \otimes \mu) = \iint_{AA} |k(s,t)|^2 d\mu(s) d\mu(t).$$

b) Vis, at der for $f, g \in E$ gælder, at

$$(Tf \mid g) = \int_A \int_A k(s,t)\overline{g(s)} f(t)\, d\mu(s)\, d\mu(t) = (k \mid g \otimes \overline{f}),$$

og udled heraf, at T^* bestemmes som T, blot med den hermitisk transponerede kerne $(s,t) \to \overline{k(t,s)}$ i stedet for k.

c) Vis, at $T \in L_h(E,E)$, og at T har Hilbert-Schmidt normen $\|k\|_2$. Betegner $(\psi_j)_{j\in J}$ en vilkårlig ortonormalbasis for E, skal man endvidere vise, at

$$k = \sum_{j\in J} T\psi_j \otimes \overline{\psi}_j ,$$

hvor der er tale om en summabel familie af indbyrdes ortogonale vektorer i $E \otimes E$.

d) Gør rede for, at der ved $(g,h) \to k$, hvor

$$k(s,t) = \int_A g(s,\sigma)\, k(\sigma,t)\, d\mu(\sigma)$$

defineres en kompositionsregel på $E \otimes E$, og at Hilbertrummet $E \otimes E$ med denne komposition bliver en Banach-algebra (i almindelighed uden ételement).

e) Vis, at den afbildning af $E \otimes E$ ind i $L(E,E)$, der bestemmes ved til $k \in E \otimes E$ at knytte integraloperatoren T med kernen k, er en isomorfi af Hilbertrummet og algebraen $E \otimes E$ på $L_h(E,E)$, idet $L_h(E,E)$ opfattes som Hilbertrum med Hilbert-Schmidt normen (opg. 39,40) og som delalgebra af $L(E,E)$.

43. Vis, at mængden af operatorer af endelig rang defineret på et Hilbertrum E er overalt tæt i Hilbertrummet $L_h(E,E)$ med Hilbert-Schmidt normen. Vis derved, at enhver operator af Hilbert-Schmidt typen er totalkontinuert.

44. Vis, at mængden af operatorer af endelig rang defineret på et Hilbertrum E er overalt tæt i $L_t(E,E)$ normeret ved operatornormen. (Forsøg først at approximere en selvadjungeret, eller normal, operator $T \in L(E,E)$ med operatorer af endelig rang.)

45. Vis, at blandt samtlige normale operatorer med rent punktspektrum på et Hilbertrum E er de totalkontinuerte, normale operatorer karakteriseret ved, at de fra 0 forskellige egenværdier, talt med multiplicitet, danner enten en endelig mængde eller en mod 0 konvergerende talfølge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$; og at de normale operatorer af Hilbert-Schmidt typen er karakteriseret ved, at der yderligere gælder $\Sigma\, |\lambda_n|^2 < \infty$.

46. Lad k være en kontinuert kerne af Volterras type, altså en kontinuert afbildning af en trekant $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq s \leq b\}$ ind i $\mathbb{C}$. Vis, at den tilhørende operator T, givet ved

$$(Tf)(s) = \int_a^s k(s,t)\, f(t)\, dt \ ,$$

har spektret $\{0\}$, hvadenten T betragtes som operator på $C([a,b])$ eller på $L^2([a,b])$ (sml. opg. 31).

47. Lad E og F være normerede rum, og lad $T: E \to F$ være lineær og kontinuert med den svage topologi på E, men med den stærke topologi på F. Vis, at T har endelig rang.- Sammenhold dette med med sætning F9.4, hvor der er tale om "følge kontinuitet".

Autonome systemer

Indholdsoversigt: side

1. Om systemer af sammenhørende differentialligninger 1

2. Autonomt system 3

3. Fuldstændig løsning 7

4. Integral. Inte-gralbasis 12

Autonome systemer.

1. Om systemer af sædvanlige differentialligninger. Et system af n sammenhørende differentialligninger af 1. orden til bestemmelse af n ubekendte (lad os sige reelle) funktioner x_i af en reel variabel t:

$$\dot{x}_i = a_i(t,x_1,\dots,x_n) , \qquad i = 1,\dots,n ,$$

hvor prikken angiver differentiation med hensyn til t, kan sammenfattes på vektorform til

$$\dot{\underline{x}} = \underline{a}(t,\underline{x}) , \tag{1}$$

idet $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$, $\dot{\underline{x}} = (\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n)$, $\underline{a} = (a_1,\dots,a_n)$.

Vi forudsætter altid, at $\underline{a}$ (d.v.s. hvert a_i) er defineret og kontinuert i en åben mængde $\Omega^* \subseteq \dot{R}^{n+1}$ og desuden opfylder en lokal Lipschitzbbetingelse med hensyn til $\underline{x}$ i Ω^*, hvilket f.eks. er tilfældet dersom $\underline{a}$ (d.v.s. hvert a_i) har partielle afledede af 1. orden i Ω^* med hensyn til $x_1,\dots,x_n$, og disse er kontinuerte i Ω^*.

Ved en løsning vil (1) forstås en differentiabel afbildning ("bevægelse") $t \to \underline{x}(t)$ af et interval $I \subseteq \dot{R}$ ind i $\dot{R}^n$ med følgende egenskaber

$$\forall t \in I : \quad (t,\underline{x}(t)) \in \Omega^* \ \wedge \ \dot{\underline{x}}(t) = \underline{a}(t,\underline{x}(t)).$$

Den første af disse udsiger altså, at løsningens graf

$$G = \{(t,\underline{x}) \in \dot{R}^{n+1} \mid t \in I \ \wedge \underline{x} = \underline{x}(t)\}$$

skal være en delmængde af Ω^*.

Under de nævnte forudsætninger gælder den bekendte eksistens- og entydighedssætning, ifølge hvilken der for ethvert

$(\tau,\underline{\xi}) = (\tau,\xi_1,\cdots,\xi_n) \in \Omega^*$ eksisterer netop én løsning $t \to \underline{x}(t)$ til (1) for hvilken $\underline{x}(\tau) = \underline{\xi}$. Når ikke andet siges, tænkes en løsning til (1) altid defineret i sit maksimale definitionsinterval. Dette er som bekendt et åbent delinterval af $\dot{\mathbb{R}}$; vi betegner det med $I(\tau,\underline{\xi})$.

Mere udførligt kan vi med

$$(2) \qquad \underline{x} = \underline{f}(t,\tau,\underline{\xi}), \qquad (\tau,\underline{\xi}) \in \Omega^* , \qquad t \in I(\tau,\underline{\xi}) ,$$

betegne værdien af den omtalte partikulære løsning for værdien $t \in I(\tau,\underline{\xi})$ af den uafhængige variable. Ved denne betegnelse træder det frem, at løsningen først er fastlagt som funktion af t, når dens værdi $\underline{\xi}$ for en fikseret værdi τ af den uafhængige variable er foreskrevet. Funktionen $\underline{f}$ afbilder således mængden

$$\Omega^{**} = \{t,\tau,\underline{\xi}\} \in \dot{\mathbb{R}}^{n+2} \mid (\tau,\underline{\xi}) \in \Omega^* \wedge t \in I(\tau,\underline{\xi})\}$$

ind i $\dot{\mathbb{R}}^n$. Afbildningen $\underline{f}$ er åbenbart karakteriseret ved følgende egenskaber gældende for $(\tau,\underline{\xi}) \in \Omega^*$ og $t \in I(\tau,\underline{\xi})$:

$$\begin{cases} (t,\ \underline{f}(t,\tau,\underline{\xi})) \in \Omega^* \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\ \underline{f}(t,\tau,\underline{\xi}) = \underline{a}(t,\underline{f}(t,\tau,\underline{\xi})) \\ f(\tau,\tau,\underline{\xi}) = \underline{\xi} \ . \end{cases}$$

Under de angivne forudsætninger om det givne vektorfelt $\underline{a}:\Omega^* \to \dot{\mathbb{R}}^n$ gælder foruden eksistens-og entydighedssætningen også følgende sætning om løsningens kontinuerte afhængighed af begyndelsesværdierne:

Sætning. Definitionsmængden Ω^{**} for løsningsafbildningen $\underline{f}$ er en åben delmængde af $\dot{\mathbb{R}}^{n+2}$, og $\underline{f}$ er kontinuert. Hvis $\underline{a}$ er af klassen $C^m(\Omega^*)$ for et vist $m \in \dot{\mathbb{N}}$, så er $\underline{f}$ og $\partial\underline{f}/\partial t$ af klassen $C^m(\Omega^{**})$.

Vi skal ikke her komme ind på beviset for dette vigtige resultat, men nævner dog lige, at det anførte om $\partial \underline{f}/\partial t$ følger af det øvrige på grund af den ovenfor omtalte relation

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\underline{f}(t,\tau,\underline{\xi}) = \underline{a}(t,\underline{f}(t,\tau,\underline{\xi}))\ ,$$

idet den sammensatte funktion på højre side er af klassen $C^m(\Omega^{**})$ fordi $\underline{a} \in C^m(\Omega^*)$ og $\underline{f} \in C^m(\Omega^{**})$.

2. Autonomt system. Vektordifferentialligningen (1), eller det tilsvarende system af sammenhørende differentialligninger, kaldes autonomt dersom den uafhængige variable t (tiden) ikke indgår explicit, d.v.s. dersom afbildningen $\underline{a}$ (hastighedsfeltet) ikke afhænger af t. Et autonomt differentialligningssystem har således formen

$$\dot{x}_i = a_i(x_1,\cdots,x_n)\ , \qquad i = 1,\cdots,n,$$

eller på vektorform

$$\dot{\underline{x}} = \underline{a}(\underline{x})\ . \tag{3}$$

Vi forudsætter overalt i det følgende, at vektorfeltet $\underline{a}$ er defineret i en åben mængde $\Omega \subseteq \mathring{R}^n$, og at $\underline{a}$ (d.v.s. hvert a_i) har kontinuerte partielle afledede af 1. orden i Ω, hvilket kort skrives $\underline{a} \in C^1(\Omega)$. Opfattet som funktion af $(t,\underline{x})$ gælder da $\underline{a} \in C^1(\Omega^*)$ med $\Omega^* = \mathring{R} \times \Omega$, en åben delmængde af $\mathring{R}^{n+1}$. Altså gælder såvel eksistens- og entydighedssætningen som sætn. 1 for det betragtede autonome system (3).

Ved en løsning til (3) forstås jo en differentiabel afbildning (bevægelse) $t \to \underline{x}(t)$ af et interval I ind i Ω for hvilken

$$\forall t \in I : \qquad \dot{\underline{x}}(t) = \underline{a}(\underline{x}(t)).$$

Billedmængden for en bevægelse $t \to \underline{x}(t)$ i Ω kaldes også bevægelsens banekurve; den er altså en delmængde af Ω.

Karakteristisk for et autonomt system er, at hvis $t \to \underline{\varphi}(t)$ er en løsning til (3) i et interval I, så er for ethvert $t^\circ \in \dot{R}$ bevægelsen $t \to \underline{\varphi}(t-t^\circ)$ ligeledes en løsning til (3), nemlig i intervallet $t^\circ+I$. Thi for $t \in t^\circ+I$ gælder

$$\frac{d}{dt}\,[\underline{\varphi}(t-t^\circ)] = \dot{\underline{\varphi}}(t-t^\circ) = \underline{a}(\underline{\varphi}(t-t^\circ)) \ .$$

De to løsninger har åbenbart samme billedmængde (banekurve).

Omvendt gælder, at hvis to løsninger $t \to \underline{\varphi}(t)$ og $t \to \underline{\psi}(t)$ til (3) (med maksimale definitionsintervaller henholdsvis I og J) har samme banekurve, så findes en konstant $t^\circ \in \dot{R}$ så at $J = t^\circ+I$ og $\psi(t) = \varphi(t-t^\circ)$ for alle $t \in J$. Det er endda på grund af entydighedssætningen tilstrækkeligt at forudsætte, at banekurverne $\underline{\varphi}(I)$ og $\underline{\psi}(J)$ har mindst ét punkt $\underline{x}^\circ$ fælles. Thi af $\underline{\varphi}(t') = \underline{\psi}(t'')=\underline{x}^\circ$ følger, idet vi sætter $t'' - t' = t^\circ$, at løsningerne $t \to \underline{\varphi}(t-t^\circ)$ og $t \to \underline{\psi}(t)$ til (3) begge antager værdien $\underline{x}^\circ$ for $t = t''$, hvorfor de må være identiske. - Hermed er da vist følgende

Sætning. Banekurverne for to løsninger til et autonomt system (3) er enten disjunkte eller identiske. Det sidste indtræffer netop hvis de to løsninger kun adskiller sig ved en forskydning i tiden.

Definition. Med $\underline{x} = \underline{\varphi}(t,\underline{\xi})$, hvor $t \in \dot{R}$, $\underline{\xi} \in \Omega$, betegner vi værdien til tiden t af den løsning til det autonome system (3), som til tiden 0 har værdien $\underline{\xi}$. Med $I(\underline{\xi})$ betegnes det maksimale definitionsinterval for denne løsning. Definitionsmængden for $\underline{\varphi}$ er da

$$(4) \qquad \Delta = \{(t,\underline{\xi}) \in \dot{R}^{n+1} \mid \underline{\xi} \in \Omega \wedge t \in I(\underline{\xi})\} \ .$$

For ethvert $\tau \in \dot{R}$ er foruden $t \to \underline{\varphi}(t,\underline{\xi})$ også $t \to \underline{\varphi}(t-\tau,\underline{\xi})$ en løsning til (3) som ovenfor vist, nemlig den løsning der til tiden τ antager værdien $\underline{\xi}$. Med betegnelsen (2) haves derfor i det autonome tilfælde

$$\underline{f}(t,\tau,\underline{\xi}) = \underline{\varphi}(t-\tau,\underline{\xi}) \ , \quad I(\tau,\xi) = I(\xi) + \tau \ ,$$

og specielt $\underline{f}(t,0,\underline{\xi}) = \underline{\varphi}(t,\underline{\xi})$. Ifølge sætn. 1 er derfor Δ åben og $\underline{\varphi} \in C^1(\Delta)$. $\partial\underline{\varphi}/\partial t \in C^1(\Delta)$, Eksplicit karakteriseres $\underline{\varphi}$ definitionsmæssigt ved egenskaberne

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\,\underline{\varphi}(t,\underline{\xi}) = \underline{a}(\underline{\varphi}(t,\underline{\xi})) \ , \qquad \underline{\varphi}(0,\underline{\xi}) = \underline{\xi} \ ,$$

gældende for $\underline{\xi} \in \Omega$, $t \in I(\underline{\xi})$.

Et punkt $\underline{x}^\circ \in \Omega$ kaldes <u>singulært</u> for (3), dersom $\underline{a}(\underline{x}^\circ) = \underline{0}$, altså $a_i(\underline{x}^\circ) = 0$ for alle $i = 1,2,\cdots,n$. Den entydigt bestemte løsning til (3) for hvilken $\underline{x}(0) = \underline{x}^\circ$ er da simpelthen den konstante afbildning $\underline{x}(t) = \underline{x}^\circ$ af intervallet $I(\underline{x}^\circ) = \dot{R}$ på $\underline{x}^\circ$, altså $\underline{\varphi}(t,\underline{x}^\circ) = \underline{x}^\circ$ for alle $t \in \dot{R}$. Bevægelsen består derfor i forbliven i $\underline{x}^\circ$, og banekurven udarter til $\{\underline{x}^\circ\}$. - Omvendt er det klart, at en konstant funktion $t \to \underline{x}^\circ$ kun kan være løsning til (3), dersom $\underline{x}^\circ$ er et singulært punkt. Vi fremhæver, at ifølge det ovenstående kan banekurven for en ikke-konstant løsning til (3) ikke indeholde singulære punkter.

Interessant er spørgsmålet om løsningernes forhold i omegnen af et isoleret singulært punkt $\underline{x}^\circ$. Vi skal ikke komme ind herpå, men nævner blot som en af de forekommende muligheder, at $\underline{x}^\circ$ eventuelt kan være et grænsepunkt for én eller flere løsninger. Ved et <u>grænsepunkt</u> for en løsning $t \to \underline{x}(t)$ til (3) med maksimalt definitionsinterval $I =]\alpha,\beta[$, hvor $\alpha,\beta \in [-\infty,+\infty]$, forstås enten $\lim\limits_{t\to\alpha} \underline{x}(t)$ eller $\lim\limits_{t\to\beta} \underline{x}(t)$, forsåvidt den pågældende grænseværdi eksisterer

i Ω. Et sådant grænsepunkt må nødvendigvis være et singulært punkt, og der må gælde $\alpha = -\infty$, henholdsvis $\beta = +\infty$. Disse påstande følger let af eksistens-og entydighedssætningen. Vi fremhæver, at et eventuelt grænsepunkt for en løsning qua singulært punkt ikke tilhører løsningens banekurve (medmindre løsningen er konstant). At flere løsninger kan have et grænsepunkt fælles, strider derfor ikke mod sætning 2.

Hovedinteressen vedrørende løsning af et autonomt system (3) knytter sig til bestemmelsen af banekurverne for løsningerne, eller kortere: løsningsbanerne. Medens der til fastlæggelse af en partikulær løsning kræves angivelse af n integrationskonstanter (f.eks. $\xi_1,\cdots,\xi_n$ i (2) efter at τ er fikseret på vilkårlig måde), afhænger løsningsbanerne almindeligvis kun af n-1 parametre, som vi skal se i næste paragraf. Dette hænger sammen med, at hver løsningsbane j_0 hører til en 1-parametret skare af løsninger, der fremgår af hverandre ved vilkårlige forskydninger i tiden, og herved disponeres der netop over 1 integrationskonstant.

Eksempel 1. Det autonome system

$$\dot{x}_1 = -x_2 , \qquad \dot{x}_2 = x_1$$

i planen $\Omega = \hat{R}^2$ er lineært med konstante koefficienter og kan derfor løses ved standardmetoden for sådanne systemer. Simplere er det imidlertid at differentiere f.eks. den første ligning for derved at eliminere x_2 ved hjælp af den anden ligning. Herved kommer vi til $\ddot{x}_1 + x_1 = 0$, som sammen med $\dot{x}_1 = -x_2$ er ensbetydende med det givne system. Vi finder herved løsningerne

$$(x_1,x_2) = (a \cos t + b \sin t , a \sin t - b \cos t)$$

med arbitrære konstanter $a,b \in \hat{R}$. Det maximale definitionsinterval

er $\dot{R}$, og løsningen er periodisk med perioden 2π (dog konstant for $(a,b) = (0,0)$). Den løsning, der fastlægges ved $\underline{x} = \underline{\xi}$ for $t = 0$ fremkommer åbenbart for $(a,b) = (\xi_1, -\xi_2)$ og er derfor

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(t,\underline{\xi}) = (\xi_1 \cos t - \xi_2 \sin t \ , \ \xi_1 \sin t + \xi_2 \cos t) \ .$$

Den derved beskrevne bevægelse er (for $\underline{\xi} \neq \underline{0}$) en jævn cirkelbevægelse med centrum $\underline{0}$ og vinkelhastighed 1.

Eksempel 2. Det autonome system

$$\dot{x}_1 = x_1 \ , \quad \dot{x}_2 = x_2$$

i planen $\Omega = \dot{R}^2$ har løsningerne

$$x_1 = ae^t, \quad x_2 = be^t$$

med arbitrære konstanter $a,b \in \dot{R}$. Det maximale definitionsinterval er $\dot{R}$. Den ved $\underline{x} = \underline{\xi}$ for $t = 0$ fastlagte løsning fremkommer for $(a,b) = (\xi_1, \xi_2)$ og er derfor

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(t,\underline{\xi}) = e^t \underline{\xi} \ .$$

De ikke singulære løsningsbaner er de åbne halvlinier udgående fra det singulære punkt $\underline{0}$, som er grænsepunkt for alle banerne.

Bemærkning. Det kan vises, at for enhver åben delmængde Ω_o af Ω udgøres banekurverne for løsningerne til (3), betragtet som autonomt system i Ω_o, netop af alle sammenhængskomponenterne af alle fællesmængderne $K \cap \Omega_o$ mellem Ω_o og løsningsbanerne K for (3) i Ω.

3. Fuldstændig løsning. I den foregående paragraf har vi med $\underline{x} = \underline{\varphi}(t,\underline{\xi})$ betegnet værdien til tiden t af den løsning til

det autonome system (3), som til tiden t=0 har værdien $\underline{\xi}$, et opgivet punkt af Ω. I og for sig har vi herved angivet den fuldstændige løsning til (3), og denne afhænger altså af de n integrationskonstanter $\xi_1,\cdots,\xi_n$. Vi foretrækker imidlertid, som allerede antydet, at fastlægge den fuldstændige løsning ved hjælp af n integrationskonstanter $\tau,u_1,\cdots,u_{n-1}$, af hvilke $\underline{u} = (u_1,\cdots,u_{n-1})$ fastlægger løsningsbanen, medens τ angiver til hvilken tid løsningen er nået til et bestemt sted i sin bane.

Definition. Lad $\omega \subseteq \dot{R}^{n-1}$ være åben, og lad der for hvert $\underline{u} \in \omega$ være givet et åbent interval $J(\underline{u}) \subseteq \dot{R}$ med den egenskab, at mængden

$$\omega^* = \{(t,\underline{u}) \in \dot{R} \times \omega \mid t \in J(\underline{u})\} \subseteq \dot{R}^n$$

er åben. Lad der endvidere være givet en regulær afbildning

$$(6) \qquad (t,\underline{u}) \rightarrow \underline{x}(t,\underline{u})$$

af ω^* på Ω med følgende egenskaber:

a) For ethvert $\underline{u} \in \omega$ er bevægelsen $t \rightarrow \underline{x}(t,\underline{u})$ en løsning til (3) i Ω med det maximale definitionsinterval $J(\underline{u})$.

b) Til to forskellige værdier af $\underline{u} \in \omega$ svarer på denne måde løsninger med forskellige (og derfor disjunkte) banekurver.

Under disse omstændigheder siger vi, at den fuldstændige løsning til (3) er givet ved

$$\underline{x} = \underline{x}(t - \tau, \underline{u}) ,$$

hvor $\tau \in \dot{R}$, $\underline{u} \in \omega$, og hvor t gennemløber det maximale definitionsinterval $\tau + J(\underline{u})$.

Bemærkning. Denne definition er rimelig, idet det under de angivne forudsætninger er klart, at hver løsning til (3) i Ω kommer med for mindst ét valg af $(\tau,\underline{u}) \in \dot{R} \times \omega$ fordi afbildningen (6) er antaget surjektiv. Vedrørende entydigheden bemærkes, at i hvert fald $\underline{u}$ er entydigt bestemt ud fra løsningen, ja endda ud fra dennes banekurve ifølge b. I tilfælde af en injektiv (d.v.s. ikke periodisk) løsning er også τ entydigt bestemt, hvorimod τ i tilfælde af en periodisk løsning naturligvis kun er bestemt modulo perioden.

Det må fremhæves, at der ikke behøver at eksistere nogen afbildning (6) med de anførte egenskaber. En nødvendig, men ingenlunde tilstrækkelig betingelse for eksistensen af en sådan afbildning er åbenbart, at Ω ikke indeholder singulære punkter. Imidlertid skal vi nu se, at der altid eksisterer en afbildning af typen (6) (og dermed en fuldstændig løsning i den nævnte betydning) i passende åbne delmængder af Ω, herunder i en passende åben omegn af et vilkårligt ikke-singulært punkt af Ω.

Ved en regulær k-dimensional flade B i Ω vil vi forstå billedet af en åben mængde $\omega \subseteq \dot{R}^k$ ved en regulær homeomorfi $\underline{u} \to \underline{\xi}(\underline{u})$ af ω ind i Ω, d.v.s. en topologisk afbildning $\underline{\xi}$ af klassen $C^1(\omega)$ af ω på sit billede $B \subseteq \Omega$ således at funktionalmatricen

$$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j}\right) \quad i = 1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,k$$

overalt i ω har højst mulig rang, nemlig rangen k ($\leq n$).

Lad nu B betegne en regulær (n-1)-dimensional flade i Ω, som ikke indeholder singulære punkter for det autonome system (3), og ikke tangerer nogen løsningsbane for (3). Disse to krav kan under ét formuleres analytisk under benyttelse af den forelagte parameterfremstilling $\underline{u} \to \underline{\xi}(\underline{u})$, $\underline{u} \in \omega$ ($\subseteq \dot{R}^{n-1}$) for B således:

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} a_1(\underline{\xi}), & \partial\xi_1/\partial u_1, \cdots, \partial\xi_1/\partial u_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_n(\underline{\xi}), & \partial\xi_n/\partial u_1, \cdots, \partial\xi_n/\partial u_{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

for ethvert punkt $\underline{\xi} \in B$ (altså for ethvert $\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{u})$, $\underline{u} \in \omega$). Thi komplementerne til elementerne i første søjle i denne determinant er jo koordinaterne til en egentlig vektor på normalen til B i det ikke singulære punkt $\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{u}) \in B$.

For ethvert $\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{u}) \in B$ er den løsning til (3), som til tiden 0 har værdien $\underline{\xi}$, ifølge (5) givet ved

$$(8)\qquad \underline{x} = \underline{x}(t,\underline{u}) := \underline{\varphi}(t,\underline{\xi}(u))$$

med det maximale definitionsinterval

$$J(\underline{u}) := I(\underline{\xi}(u))$$

indeholdende 0. Mængden

$$\begin{aligned} \omega^* &= \{(t,\underline{u}) \in \dot{R} \times \omega \mid t \in J(\underline{u})\} \\ &= \{(t,\underline{u}) \in \dot{R} \times \omega \mid (t,\underline{\xi}(u)) \in \Delta\} \end{aligned}$$

(jvf.(4)) er en åben delmængde af $\dot{R} \times \dot{R}^{n-1} = \dot{R}^n$. Herved har vi sikret os, at betingelsen a er opfyldt. Afbildningen (8) af ω^* ind i Ω er sammensat af C^1-afbildninger og er derfor af klassen $C^1(\omega^*)$. Da nu

$$\left(\frac{\partial \underline{x}(t,\underline{u})}{\partial t} \right)_{t=0} = \underline{a}(\underline{x}(0,u)) = \underline{a}(\underline{\xi}(u))$$

(jvf. (5)), bliver funktionaldeterminanten

$$(9)\qquad \frac{\partial(x_1, \cdots\cdots, x_n)}{\partial(t, u_1, \cdots, u_{n-1})}$$

for afbildningen (8) for t=0 netop determinanten (7), som er forudsat $\neq 0$ for ethvert $\underline{u} \in \omega$.

Det kan vises, at funktionaldeterminanten (9) er $\neq 0$ overalt i ω^*, altså også for $t \neq 0$. Da afbildningen (8) af ω^* ind i Ω således er regulær, er den ifølge en kendt sætning fra analysen åben og injektiv. Specielt er billedmængden Ω° en åben delmængde af Ω. Øjensynligt er Ω° foreningsmængden af samtlige løsningsbaner for (3) i Ω, som møder B.

Hvis nu hver løsningsbane i Ω højst har ét punkt fælles med B (hvilket ikke udelukker periodiske løsninger til (3)), så er betingelsen b opfyldt, og dermed har afbildningen (8) alle de ønskede egenskaber, om ikke i hele Ω så dog i den åbne delmængde Ω°. Her er den fuldstændige løsning til (3) i den ovenfor præciserede betydning således givet ved

$$\underline{x} = \underline{x}(t-\tau, \underline{u}) \qquad (\tau \in \dot{R},\ \underline{u} \in \omega)$$

inden for Ω°. (Hvis specielt hver løsningsbane for (3) i Ω har netop ét punkt fælles med B, så bliver $\Omega^\circ = \Omega$.)

Men under alle omstændigheder eksisterer der for ethvert ikke singulært punkt $\underline{x}^\circ \in \Omega$ *) således at der i hver af disse omegne Ω° findes en fuldstændig løsning til (3) i Ω° af den omhandlede art. Ved om fornødent at erstatte Ω med en forelagt åben omegn af $\underline{x}^\circ$ i Ω kan vi åbenbart nøjes med at konstruere en fuldstændig løsning til (3) i en enkelt passende åben omegn Ω° af $\underline{x}^\circ$ i Ω. Da $\underline{x}^\circ$ ikke er singulært, gælder $\underline{a}(\underline{x}^\circ) \neq \underline{0}$, lad os f.eks. sige $a_n(\underline{x}^\circ) \neq 0$. Vi prøver nu at benytte en passende del af hyperplanen $x_n = x_n^\circ$ i $\dot{R}^n$ som begyndelsesflade B, givet ved den regulære parameterfremstilling

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{u}) = (u_1, \cdots, u_{n-1}, x_n^\circ) ,$$

*) en omegnsbasis for $\underline{x}^\circ$ i Ω bestående af åbne omegne Ω°.

som åbenbart opfylder betingelsen (7) i hvert fald i punktet $\underline{x}^\circ = \underline{\xi}(x_1^\circ,\cdots,x_{n-1}^\circ)$, hvori den omhandlede determinant (7) har værdien $a_n(\underline{x}^\circ) \neq 0$. Den sammensatte afbildning (8) har derfor sin funktionaldeterminant (9) forskellig fra 0 for $(t,\underline{u}) = (0,x_1^\circ,\cdots,x_{n-1}^\circ)$, og der eksisterer følgelig en åben intervalomegn J af 0 i $\dot{R}$ og en åben omegn ω af $(x_1^\circ,\cdots,x_{n-1}^\circ)$ i $\dot{R}^{n-1}$, således at $\omega^* := J \times \omega$ ved (8) afbildes regulært og homeomorft på en (åben) omegn Ω° af $\underline{x}^\circ$ i Ω. For fastholdt $\underline{u} \in \omega$ har løsningen

$$\underline{x} = \underline{x}(t,\underline{u}) = \underline{\varphi}(t,\underline{\xi}(\underline{u})) = \underline{\varphi}(t,u_1,\cdots,u_{n-1},x_n^\circ)$$

det maximale definitionsinterval $J(\underline{u}) = J$, thi når t konvergerer mod et endepunkt af J, og dermed $(t,\underline{u})$ konvergerer mod et randpunkt for $\omega^* = J \times \omega$, så kan $\underline{x} = \underline{x}(t,\underline{u})$ ikke konvergere mod noget punkt af billedmængden Ω° fordi afbildningen $(t,\underline{u}) \to \underline{x}(t,\underline{u})$ af $J \times \omega$ på Ω° jo er en homeomorfi. Da således løsningsbanerne i Ω° netop er billederne af "fibrene" $J \times \{\underline{u}\}$ $(\underline{u} \in \omega)$ i $\omega^* = J \times \omega$, er det klart, at hver løsningsbane har netop ét punkt fælles med B = billedet af "sektionen" $\{0\} \times \omega^*$.

4. Integral, Integralbasis. Ved et bevægelsesintegral, eller kort et inte-gral, til et autonomt system (3) i Ω forstås en funktion $u:\Omega \to \dot{R}$, som er konstant på hver løsningsbane. Dette kommer åbenbart ud på, at originalmængden

$$u^{o-1}(c) = \{x \in \Omega \mid u(\underline{x}) = c\}$$

for ethvert $c \in \dot{R}$ frembringes af løsningsbaner, d.v.s. er foreningsmængde for et (eventuelt tomt) system af hele løsningsbaner.

Ved en integralbasis for (3) forstå et sæt af netop n-1 integraler $u_1,\cdots,u_{n-1}$, som skiller løsningsbanerne i den forstand, at en-

hver løsningsbane K er entydigt bestemt ved sættet af de konstante værdier af integralerne $u_1,\cdots,u_{n-1}$ langs K. Dette kommer åbenbart ud på, at løsningsbanerne præcis er samtlige ikke tomme originalmængder

$$(10) \qquad K = \{\underline{x} \in \Omega \mid u_j(\underline{x}) = c_j \text{ for } j = 1,\cdots,n-1\} ,$$

hvor $(c_1,\cdots,c_{n-1})$ gennemløber $\dot{R}^{n-1}$.

I stedet for som hidtil at angive løsningsbanerne på parameterform med tiden t som parameter, nemlig ud fra løsningerne til (3), har vi således nu angivet hver bane som fællesmængde for n-1 "integralflader" $u_j^{\circ -1}(c_j)$ af dimensionen n-1.

En integralbasis $(u_1,\cdots,u_{n-1})$ kaldes <u>regulær</u>, hvis $u_1,\cdots,u_{n-1} \in C^1(\Omega)$ og hvis funktionalmatricen

$$(11) \qquad \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{j=1,\cdots,n-1;\ i=1,\cdots,n}$$

overalt i Ω er af højst mulig rang, altså af rangen n-1. Dette sidste er ensbetydende med at <u>gradienterne</u>

$$\operatorname{grad} u_j = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) , \qquad j=1,\cdots,n-1 ,$$

er lineært uafhængige i hvert punkt af Ω.

4.1. <u>Sætning</u>. Hvis der i Ω eksisterer en integralbasis $(u_1,\cdots,u_{n-1})$ for (3) (i hele Ω), så bestemmes et vilkårligt integral u til (3) i Ω ved

$$u = \Phi(u_1,\cdots,u_{n-1}) = \Phi(u_1(\underline{x}),\cdots,u_{n-1}(\underline{x})) ,$$

hvor Φ er en arbitrær funktion (entydig bestemt ved u) defineret på billedmængden $\omega \subseteq \dot{R}^{n-1}$ for afbildningen $\underline{x} \to (u_1(\underline{x}),\cdots,u_{n-1}(\underline{x}))$

af Ω ind i $\dot{R}^{n-1}$.

Hvis integralbasen $(u_1,\cdots,u_{n-1})$ er regulær, er ω åben og der gælder

$$u \in C^1(\Omega) \iff \Phi \in C^1(\omega) .$$

Beviset for første del af sætningen er oplagt, idet værdien $\Phi(c_1,\cdots,c_{n-1})$ af Φ i et punkt $(c_1,\cdots,c_{n-1}) \in \omega$ er fastlagt som den konstante værdi af integralet u langs den ved (10) givne løsningsbane K. Implikationen $\Phi \in C^1(\omega) \Rightarrow u \in C^1(\Omega)$ er triviel. Vi forbigår beviset (som dog ikke er vanskeligt) for den modsatte implikation. |

4.2. Sætning. Antag at der i Ω eksisterer en fuldstændig løsning for (3) i den i §3 angivne betydning, altså bestemt ud fra en regulær afbildning af formen (6) af ω^* på Ω

$$(t,\underline{u}) = \underline{x}(t,\underline{u}) \tag{6}$$

med egenskaberne a og b. Da bestemmer ligningen $\underline{x}(t,\underline{u}) = \underline{x}$ ved løsning med hensyn til $\underline{u} = (u_1,\cdots,u_{n-1})$ og elimination af t en regulær integralbasis for (3) i Ω.

Bevis. Ethvert punkt $\underline{x} \in \Omega$ tilhører jo netop én løsningsbane. Da afbildningen (6) er surjektiv, eksisterer der et, og ifølge b også kun ét, punkt $\underline{u} = (u_1,\cdots,u_{n-1}) \in \omega$ således at den løsningsbane, hvorpå $\underline{x}$ ligger, er banen for løsningen $\underline{x} = \underline{x}(t,\underline{u})$, $t \in J(\underline{u})$, jvf. a. Herved er $u_1,\cdots,u_{n-1}$ fastlagt som funktioner af $\underline{x} \in \Omega$, som åbenbart er konstante på hver løsningsbane. Det er klart, stadig ifølge b, at integralerne $u_1,\cdots,u_{n-1}$ skiller løsningsbanerne og dermed danner en integralbasis for (3) i Ω. At

denne er regulær følger let af, at afbildningen (6) er regulær og derfor åben og lokalt injektiv. |

Korollar. For ethvert ikke singulært punkt $\underline{x}^\circ \in \Omega$ danner de omegne Ω° af $\underline{x}^\circ$ i Ω, i hvilke der eksisterer en regulær integralbasis for (3) betragtet i Ω°, en basis for filtret af omegne af $\underline{x}^\circ$ i Ω.

Thi vi fandt jo i §3, at de omegne Ω° af $\underline{x}^\circ$ i Ω, i hvilke der eksisterer en fuldstændig løsning af den omhandlede art, danner en basis for omegnsfiltret af $\underline{x}^\circ$. |

Eksempel 1 (jvf. side 6): $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$. Vi søger først at konstruere en fuldstændig løsning ved metoden i §3 i området $\Omega = \dot{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$, som er uden singulære punkter. Som begyndelseskurve B kan vi åbenbart tage f.eks. den positive del af x_1-aksen:

$$B = \{(x_1,x_2) \in \dot{R}^2 \mid x_1 > 0 \wedge x_2 = 0\} ,$$

som er billedet af $\omega =]0,+\infty[$ ved den regulære homeomorfi

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}(u) = (u,0) , \qquad u \in \omega .$$

Den ved $\underline{x} = \underline{\xi}(u)$ for $t = 0$ fastlagte løsning til det autonome system $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$ er da

$$\underline{x} = \underline{x}(t,u) = \underline{\varphi}(t,\underline{\xi}(u)) = (u \cos t, u \sin t) .$$

Denne løsning er for ethvert $u \in \omega$ periodisk med perioden 2π (og har derfor det maximale definitionsinterval $\dot{R}$). I overensstemmelse med teorien er afbildningen $(t,u) \to \underline{x}(t,u)$ af $\omega^* = \dot{R} \times \omega$ ind i Ω regulær, idet

$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(t,u)} = \begin{vmatrix} -u \sin t & \cos t \\ u \cos t & \sin t \end{vmatrix} = -u$$

er $\neq 0$ overalt i ω^*. Afbildningen er endvidere surjektiv, idet B har netop ét punkt fælles med hver løsningsbane (cirkel om $\underline{0}$) i $\Omega = \dot{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$. Følgelig bestemmes den fuldstændige løsning til det forelagte autonome system i Ω ved

$$(x_1, x_2) = (u \cos(t-\tau) , \quad u \sin(t-\tau))$$

med de arbitrære integrationskonstanter $(\tau, u) \in \dot{R} \times]0, +\infty[$ og det maximale definitionsinterval $\dot{R}$.

Ved løsning med hensyn til u og elimination af t (eller $t-\tau$)) fås

$$u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\underline{x}| , \qquad \underline{x} \in \Omega ,$$

hvilken funktion derfor danner en integralbasis i Ω. Det fuldstændige integral i Ω bestemmes således ved $u = \Phi(r)$, en arbitrær funktion af afstanden $|\underline{x}| = r$ fra $\underline{0}$.

Eksempel 2 (jvf. side 7): $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = x_2$. Løsningsbanerne i den udprikkede plan var de åbne halvlinier med det fælles (singulære) grænsepunkt $\underline{0}$. Uden at gå om ad bestemmelsen af en fuldstændig løsning (som i §3) ser vi derfor straks, at funktionen $u = x_2/x_1$ er et integral i hver af halvplanerne $x_1 > 0$ eller $x_1 < 0$. Da u åbenbart skiller løsningsbanerne i hver af disse halvplaner, og da

$$\text{grad } u = (-x_2/x_1^2 , 1/x_1) \neq \underline{0} ,$$

danner u en regulær integralbasis i halvplanen. - Tager vi for Ω i stedet den langs den negative del af x_1-aksen opskårne plan, kan vi åbenbart som regulær integralbasis benytte integralet

$$\Theta = \text{Arg } (x_1 + ix_2) ,$$

altså den i intervallet $]-\pi,\pi[$ beliggende værdi af vinkelen fra vektoren $(1,0)$ til vektoren (x_1,x_2). - I hele den udprikkede plan $\dot{R}^2\setminus\{0\}$ findes nok kontinuerte integraler (f.eks. $\cos\theta = x_1/r$, $\sin\theta = x_2/r$), men intet kontinuert integral u kan skille løsningsbanerne. Thi restriktionen af u til den opskårne plan måtte da være en injektiv og altså strengt monoton funktion af ovennævnte integral θ i dettes værdiinterval $]-\pi,\pi[$, hvilket fører til en diskontinuitet for u langs den negative del af x_1-aksen. Hvis man endelig vil tale om polarvinkelen θ som integralbasis for det omhandlede autonome system i hele den udprikkede plan, måtte man opfatte θ som en "flertydig funktion", eller mere præcist erstatte den udprikkede plan med den tilhørende universelle overdækningsflade (den Riemannske flade for funktionen $\log(x_1+ix_2)$). - Sluttelig kan det nævnes, at der i hele planen $\dot{R}^2$ slet ikke eksisterer kontinuerte integraler bortset fra de trivielle integraler, nemlig konstanterne; thi da det singulære punkt 0 er grænsepunkt for alle løsningsbanerne, må et kontinuert integral i $\dot{R}^2$ være konstant lig med sin værdi i 0.

Bemærkning. Det kan undertiden være nemmere at finde n-1 integraler til et autonomt system (3) direkte ved manipulationer med de n givne sammenhørende differentialligninger uden først at bestemme den fuldstændige løsning og derpå løse m.h.t. integrationskonstanterne. Man får da brug for følgende lemma.

Lemma. Antag at Ω er uden singulære punkter for det autonome system (3). Lad $u_1,\dots,u_{n-1}$ være integraler af klassen $C^1(\Omega)$ og med lineært uafhængige gradienter overalt i Ω. For ethvert $c = (c_1,\dots,c_{n-1}) \in \dot{R}^{n-1}$ er da hver sammenhængskomponent af originalmængden

$$K(\underline{c}) = \{\underline{x} \in \Omega | u_j(\underline{x}) = c_j \text{ for } j = 1,\cdots,n-1\}$$

en løsningsbane (og der findes ikke andre løsningsbaner end disse). Specielt skiller $(u_1,\cdots,u_{n-1})$ løsningsbanerne (og udgør dermed en regulær integralbasis) hvis og kun hvis hver af mængderne $K(\underline{c})$ er sammenhængende.

Bevis. $K(\underline{c})$ er jo foreningsmængde for et system af hele løsningsbaner. Hver sådan løsningsbane $k \subsetneq K(\underline{c})$ må være åben relativt til $K(\underline{c})$. Thi ud fra antagelsen om, at systemet af integraler $(u_1,\cdots,u_{n-1})$ er regulært, har hvert punkt $\underline{x}^\circ \in k \subsetneq K(\underline{c})$ ifølge sætningen om implicit funktionsbestemmelse en åben omegn $\Omega_o \subsetneq \Omega$ således at $K(\underline{c}) \cap \Omega_o$ er en simpel regulær bue K° (billedet af et åbent interval ved en regulær homemorfi). Men så er den komponent k° af $k \cap \Omega_o = k \cap K^\circ$, som indeholder $\underline{x}^\circ$, netop den gennem $\underline{x}^\circ$ gående løsningsbane for (3) betragtet i Ω_o (ifølge bemærkningen sidst i §2). Da $\underline{x}^\circ$ ikke er singulært, er k° derfor en hel åben delbue af K° gående gennem $\underline{x}^\circ$ og er dermed en omegn af $\underline{x}^\circ$ i K° og følgelig også i $K(\underline{c})$ fordi $K^\circ = K(\underline{c}) \cap \Omega_o$ er åben relativt til $K(\underline{c})$. - Da således hver løsningsbane $k \subsetneq K(\underline{c})$ er åbem relativt til $K(\underline{c})$, og da komplementærmængden $K(\underline{c}) \setminus k$ ligeledes er åben (som foreningsmængde for de øvrige løsningsbaner $\subsetneq K(\underline{c})$) slutter vi, at k virkelig er en sammenhængskomponent af $K(\underline{c})$. Omvendt gælder det for enhver sammenhængskomponent K af enhver af mængderne $K(\underline{c})$, at den gennem et punkt $\underline{x}^\circ \in K$ gående løsningsbane k er identisk med K, fordi k selv er en sammenhængskomponent af $K(\underline{c})$.

Eksempel 1 (jvf. side 6,15). Af $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$ sluttes

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 0 ,$$

hvorfor $u := x_1^2 + x_2^2$ er et integral (af klassen C^1). Gradienten

$$\text{grad } u = (2x_1, 2x_2)$$

er $\neq \underline{0}$ i den udprikkede plan $\Omega = \dot{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$, hvor vi har fjernet det singulære punkt $\underline{0}$. For hvert $c \in \dot{R}$ er $K(c) = \{(x_1, x_2) \in \Omega | x_1^2 + x_2^2 = c\}$ en cirkel (eller tom) og dermed sammenhængende. Da endvidere Ω er uden singulære punkter, slutter vi, at det fundne integral u danner en regulær integralbasis, og at løsningsbanerne netop er de omtalte cirkler.

Eksempler 3. Det autonome system

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_3 , \quad \dot{x}_2 = x_3 - x_1 , \quad \dot{x}_3 = x_1 - x_2$$

i $\dot{R}^3$ har punkterne af linien $L: x_1 = x_2 = x_3$ som singulære punkter. Idet vi finder

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 0$$
$$x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3 = 0 ,$$

kommer vi til integralerne

$$u_1 = x_1 + x_2 + x_3 , \quad u_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 ,$$

hvis gradienter $(1,1,1)$ og $(2x_1, 2x_2, 2x_3)$ er lineært uafhængige i $\Omega = \dot{R}^3 \setminus L$. For ethvert $(c_1, c_2) \in \dot{R}^2$ er

$$K(c_1, c_2) = \{\underline{x} \in \Omega | x_1 + x_2 + x_3 = c_1 \wedge x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c_2\}$$

en cirkel (eller tom), nemlig fællesmængde inden for Ω for en plan og en kugleflade. (Hvis disse rører hinanden, ligger røringspunktet på L og tilhører dermed ikke $\Omega = \dot{R}^3 \setminus L$.) Da således mængderne $K(c_1, c_2)$ alle er sammenhængende, udgør de netop samtlige banekurver i Ω, og (u_1, u_2) danner en regulær integralbasis i Ω.

Opgaver til Autonome Systemer.

1. Vis, at enhver løsning $t \to \underline{x}(t)$ til et autonomt system enten er injektiv, periodisk eller konstant.

2. Lad $\lambda : \Omega \to \dot{R}$ og $\underline{a} : \Omega \to \dot{R}^n$ være af klassen $C^1(\Omega)$, Ω åben i $\dot{R}^n$. Vis, at hvis λ ikke antager værdien 0, har det autonome system

$$\dot{\underline{x}} = \lambda(\underline{x})\underline{a}(\underline{x})$$

i Ω nøjagtigt de samme løsningsbaner som systemet $\dot{\underline{x}} = \underline{a}(\underline{x})$.

3. Med $\underline{x} = \underline{\varphi}(t, \underline{\xi})$ betegnes den løsning til det autonome system

$$\dot{\underline{x}} = \underline{a}(\underline{x})$$

i $\Omega \subseteq \dot{R}^n$, som for $t = 0$ antager værdien $\underline{\xi} \in \Omega$. Vi antager i denne opgave for simpelheds skyld, at denne løsning for ethvert $\underline{\xi} \in \Omega$ har det maximale definitionsinterval $\dot{R}$, altså at $\underline{\varphi}$ er defineret på $\dot{R} \times \Omega$. For ethvert $t \in \dot{R}$ defineres der da en afbildning $T_t : \Omega \to \Omega$ ved

$$T_t(\underline{x}) = \underline{\varphi}(t, \underline{x}) \ .$$

Denne afbildning er af klassen $C^1(\Omega)$. Bevis følgende:

a) T_t er bijektiv.

b) "Strømningen" $t \to T_t$ er "stationær" i den betydning, at

$$\forall s, t \in \dot{R} : \quad T_s \circ T_t = T_{s+t} \ ,$$

altså at afbildningen $t \to T_t$ er en homomorfi af de reelle tals additive gruppe ind i gruppen af alle bijektive afbildninger af Ω på sig selv.

c) T_t er en regulær homeomorfi.

4. (Liouvilles sætning). Med betegnelserne fra den foregående opgave indføres funktionaldeterminanten $u(t,\underline{x})$ for afbildningen T_t taget i punktet $\underline{x}$. Bevis følgende:

a) $u(s + t,\underline{x}) = u(s,T_t\underline{x}) \cdot u(t,\underline{x})$.

b) $\frac{\partial}{\partial t} u(t,\underline{x}) = [\sum_{i=1}^{n} (D_i a_i)\circ(T_t\underline{x})]u(t,\underline{x})$.

(Betragt først tilfældet $t=0$, og benyt derpå a).

c) $u(t,\underline{x}) = \exp \int_0^t \sum_{i=1}^{n} (D_i a_i)\circ(T_s\underline{x})ds$.

d) Hvis $\operatorname{div} \underline{a}(= \sum_{i=1}^{m} D_i a_i) = 0$ overalt i Ω, er hver af afbildningerne T_t volumenbevarende (= måltro).

5. Find en regulær integralbasis for det autonome system

$$\dot{x} = y\ , \quad \dot{y} = x\ , \quad \dot{z} = 2xyz$$

i hvert af halvrummene $x + y > 0$, $x + y < 0$.

Partielle differentialligninger af første orden

Indholdsoversigt:

		Side
1.	Den lineære homogene ligning	1
2.	Den quasilineære ligning	5
3.	Løsning af et begyndelsesværdiproblem	10
4.	Den generelle ligning af 1. orden	17
5.	Løsning af et begyndelsesværdiproblem	24

Partielle differentialligninger af første orden.

1. Den lineære homogene ligning:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(\underline{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \ .$$

Her betegner $a_1,\cdots,a_n$ givne funktioner af klassen $C^1(\Omega)$, hvor Ω er en åben delmængde af $\hat{R}^n$. Ved en løsning til (1) forstås en funktion $u \in C^1(\Omega)$, som tilfredsstiller (1) i den forstand at

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(\underline{x})(D_i u)(\underline{x}) = 0 \quad \text{for alle } \underline{x} \in \Omega \ .$$

Vi betragter nu det autonome system i Ω

$$(3) \qquad \dot{x}_i = a_i(\underline{x}) = a_i(x_1,\cdots,x_n) \quad (i = 1,\cdots,n) \ ,$$

eller på vektorform

$$\dot{\underline{x}} = \underline{a}(\underline{x}) \ ,$$

hvor $\underline{a} = (a_1,\cdots,a_n)$. Banekurverne for løsningerne til dette autonome system (3) af sædvanlige differentialligninger kaldes karakteristikkerne for den partielle differentialligning (1).

1.1. Sætning. Løsningerne til den lineære homogene partielle differentialligning (1) i Ω er netop integralerne af klassen $C^1(\Omega)$ til det autonome system (3), altså de funktioner $u \in C^1(\Omega)$ som er konstante langs hver karakteristik.

Bevis. Lad $t \to \underline{x}(t)$ være en vilkårlig løsning til det autonome system (3) med maximalt definitionsinterval I. En funktion

$u \in C^1(\Omega)$ er konstant langs den tilhørende banekurve (karakteristik) K hvis og kun hvis den sammensatte funktion

$$t \to u(\underline{x}(t)) , \qquad t \in I ,$$

af klassen $C^1(I)$ er konstant, altså har sin differentialkvotient

$$\frac{du(\underline{x}(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (D_i u)(\underline{x}(t)) \frac{dx_i(t)}{dt}$$

identisk 0. Indsættes heri $\dot{x}_i(t) = a_i(\underline{x}(t))$, bliver betingelsen, at

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\underline{x}) D_i u(\underline{x}) = 0$$

for alle punkter $\underline{x} = \underline{x}(t)$ af den betragtede karakteristik K. Da karakteristikkerne jo tilsammen overdækker Ω, bliver u konstant langs hver karakteristik, hvis og kun hvis (2) er opfyldt.|

På grund af denne sætning betegner man gerne ethvert integral $u:\Omega \to \dot{R}$ til det karakteristiske autonome system (3) (altså enhver funktion som er konstant langs hver karakteristik) som en generaliseret løsning til den partielle differentialligning (1), uanset om u er af klassen $C^1(\Omega)$ eller ej.

- Hermed er da teorien for den lineære homogene partiellle differentialligning (1) ført tilbage til teorien for det autonome system (3) af sædvanlige differentialligninger. Specielt fremgår af Aut. Syst., sætn. 4.1, 4.2 følgende:

1.2. Sætning. Hvis der i Ω eksisterer en regulær integralbasis $(u_1,\cdots,u_{n-1})$ for det karakteristiske system (3) (og det gør der altid i passende omegne af ethvert ikke singulært punkt af Ω), så er den fuldstændige løsning til den partielle differentialligning (1) givet ved

$$u = \Phi(u_1,\cdots,u_{n-1}) = \Phi(u_1(\underline{x}),\cdots,u_{n-1}(\underline{x})) \ ,$$

hvor Φ er en arbitrær funktion af klassen C^1 defineret på billedmængden for afbildningen $\underline{x} \to (u_1(\underline{x}),\cdots,u_{n-1}(\underline{x}))$ af Ω ind i $\dot{R}^n$.

Således afhænger den fuldstændige løsning til (1) af én arbitrær funktion af n-1 reelle variable. Det samme vil normalt vise sig at gælde for en vilkårlig partiel differentialligning af 1. orden med n uafhængige variable. (For n=1 reducerer dette sig til det velkendte forhold, at den fuldstændige løsning til en sædvanlig differentialligning afhænger af én arbitrær konstant, idet en konstant kan opfattes som en "funktion af 0 variable".)

Det simpleste eksempel på en partiel differentialligning i n uafhængige variable $x_1,\cdots,x_n$ er den lineære homogene ligning

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$$

i $\Omega = \dot{R}^n$, hvis fuldstændige løsning åbenbart er

$$u = \Phi(x_2,\cdots,x_n) \ ,$$

en arbitrær funktion $\Phi \in C^1(\dot{R}^{n-1})$ af $(x_2,\cdots,x_n)$. Selve disse n-1 koordinater danner netop en regulær integralbasis for det karakteristiske system

$$\dot{x}_1 = 1 \ , \quad \dot{x}_2 = \cdots = \dot{x}_n = 0 \ .$$

Karakteristikkerne er de rette linier i $\dot{R}^n$ parallelle med x_1-aksen.

Vi betragter dernæst nogle eksempler, der knytter sig til eksemplerne i kapitlet om autonome systemer.

Eksempel 1. I $\dot{R}^2$ betragtes den partielle differentialligning

$$-x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

med det karakteristiske system $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$. Som påvist i Aut.Syst., eks. 1, er karakteristikkerne cirklerne $x_1^2 + x_2^2 =$ konstant (herunder det singulære punkt $\{\underline{0}\}$), og funktionen $(x_1,x_2) \to x_1^2 + x_2^2$ danner en integralbasis af klassen $C^1(\dot{R}^2)$, som er regulær i $\dot{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$. Den fuldstændige generaliserede løsning til den forelagte partielle differentialligning i $\dot{R}^2$ er derfor

$$u = \Phi(x_1^2 + x_2^2) ,$$

hvor $\Phi:[0,+\infty[\to \dot{R}$ er en arbitrær funktion. Ønskes løsninger u i streng forstand, altså $u \in C^1(\dot{R}^2)$, er det tilstrækkeligt (men ikke helt nødvendigt!) at tage $\Phi \in C^1([0,+\infty[)$.

Eksempel 2. I den udprikkede plan $\Omega = \dot{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ betragtes den partielle differentialligning

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

med det karakteristiske system $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = x_2$. Som tidligere påvist (Aut.syst., eks. 2) skiller intet enkelt kontinuert integral hertil karakteristikkerne. Disse er de åbne halvlinier i $\dot{R}^2$ udgående fra $\underline{0}$, og den fuldstændige generaliserede løsning til den forelagte partielle differentialligning er derfor givet ved

$$u = \Phi(\theta) ,$$

hvor $\Phi:\dot{R} \to \dot{R}$ er en arbitrær periodisk funktion med perioden 2π af den (modulo 2π bestemte) polarvinkel $\theta = \arg(x_1+ix_2)$. Åbenbart gælder $u \in C^1(\Omega) \iff \Phi \in C^1(\dot{R})$.

- Havde vi taget $\Omega = \dot{R}^2$, var de eneste løsninger blevet konstanterne. Hvis man på den anden side begrænser sig til en af halvplanerne $x_1 > 0$ eller $x_1 < 0$, så danner funktionen $(x_1,x_2) \to x_2/x_1$

en regulær integralbasis, og den fuldstændige løsning bliver da $u = \Phi(x_2/x_1)$ med en arbitrær funktion $\Phi \in C^1(\dot{R})$.

Resultaterne i eks. 1 og 2 fremgår også direkte af identiteterne

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2},$$

hvorved de partielle afledede $\partial u/\partial r$ og $\partial u/\partial \theta$ af en funktion $u \in C^1(\dot{R}^2 \setminus \{\underline{0}\})$ givet i polære koordinater r,θ er udtrykt ved funktionens partielle afledede $\partial u/\partial x_1$ og $\partial u/\partial x_2$ med hensyn til de retvinklede koordinater $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$. - Læseren opfordres til at verificere de anførte identiteter.

2. Den quasilineære ligning. Idet vi alene af bekvemmelighedsgrunde indskrænker os til $n = 2$ uafhængige variable x,y og betegner den afhængige variable med z, lyder den quasilineære partielle differentialligning af 1. orden

$$(4) \qquad a(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = c(x,y,z),$$

hvor koefficienterne a,b,c er givne funktioner af klassen C^1 definerede i en åben mængde $\Omega \subseteq \dot{R}^3$.

Hvis a og b er uafhængige af z, og hvis c er "lineær" i z, (d.v.s. $c(x,y,z) = c_0(x,y) + c_1(x,y)z$) kaldes ligningen (4) lineær. Er desuden $c \equiv 0$, genfinder vi den lineære homogene ligning fra §1 (nu i $n=2$ uafhængige variable).

Ved en løsning til (4) forstås en funktion f af klassen C^1, defineret i en åben delmængde ω af xy-planen og med graf

$$G(f) = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in \omega\}$$

indeholdt i Ω, således at (4) er opfyldt overalt i ω, når man for z, $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ indsætter henholdsvis $f(x,y)$, $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, altså:

$$a(x,y,f(x,y))f_x(x,y) + b(x,y,f(x,y))f_y(x,y) = c(x,y,f(x,y))$$

for alle $(x,y) \in \omega$. (Vi benytter her for kortheds skyld betegnelserne f_x, f_y i stedet for $D_x f$, $D_y f$; analogt i det følgende.)

Normalen til grafen $G(f)$ for en funktion $f \in C^1(\omega)$ (ω åben delmængde af xy-planen) bestemmes jo ved vektoren $(f_x, f_y, -1)$. Geometrisk betyder differentialligningen (4) derfor, at normalen til $G(f)$ skal være vinkelret på feltvektoren (a,b,c) i ethvert punkt af $G(f)$, eller anderledes udtrykt, at tangentplanen til $G(f)$ i ethvert punkt $(x,y,z) \in G(f)$ skal indeholde feltvektoren $(a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z))$. (Denne betingelse er naturligvis automatisk opfyldt i ethvert singulært punkt.)

Herved ledes vi naturligt til at betragte det autonome differentialligningssystem

$$(5) \qquad \dot{x} = a(x,y,z), \quad \dot{y} = b(x,y,z), \quad \dot{z} = c(x,y,z)$$

i Ω. Løsningsbanerne hertil kaldes karakteristikkerne for den quasilineære partielle differentialligning (4).

I den følgende sætning interesserer vi os kun for sådanne løsninger f til den quasilineære ligning (4) som er definerede i hele projektionen

$$\Omega' = pr_{x,y}(\Omega) = \{(x,y) \in \dot{R}^2 \mid \exists z \in \dot{R}: (x,y,z) \in \Omega\}$$

af Ω på xy-planen. Dette betegner imidlertid ingen væsentlig indskrænkning, idet man i tilfælde af en løsning f defineret i en (åben) mængde $\omega \subset pr_{x,y}(\Omega)$ blot erstatter Ω med

$\Omega \cap \mathrm{pr}_{x,y}^{\circ -1}(\omega) = \Omega \cap (\omega \times \hat{\mathbb{R}})$. Som nævnt i en bemærkning sidst i Aut.Syst., §2, er karakteristikkerne for (4) betragtet i delmængden $\Omega \cap (\omega \times \hat{\mathbb{R}})$ netop samtlige komponenter af fællesmængderne $K \cap (\omega \times \hat{\mathbb{R}})$, hvor K gennemløber mængden af alle karakteristikker for (4) i hele Ω.

Sætning. En funktion $f \in C^1(\mathrm{pr}_{x,y}(\Omega))$ er en løsning til den quasilineære ligning (4) hvis og kun hvis grafen G(f) kan frembringes af karakteristikker.

Denne betingelse skal betyde, at G(f) er foreningsmængden for en mængde af hele karakteristikker for (4) i Ω (altså løsningsbaner for (5) i Ω), eller anderledes udtrykt at G(f) med et punkt af en karakteristik altid indeholder hele karakteristikken.

Bevis. Ad "hvis": For ethvert ikke singulært punkt $(x_0,y_0,z_0) \in G(f)$ indeholder G(f) ifølge antagelsen hele den gennem punktet gående karakteristik K. Specielt indeholder tangentplanen til G(f) i (x_0,y_0,z_0) tangenten til K i dette punkt, og denne bestemmes jo ved feltvektoren $(a(x_0,y_0,z_0),b(x_0,y_0,z_0),c(x_0,y_0,z_0))$ i pumktet.

Ad "kun hvis". Lad f være en løsning til (4) i $\Omega' = \mathrm{pr}_{x,y}(\Omega)$, og lad $(x_0,y_0,z_0) \in G(f)$, altså $(x_0,y_0) \in \Omega' \wedge z_0 = f(x_0,y_0)$. Vi betragter det autonome system

$$(6) \qquad \dot{x} = a(x,y,f(x,y)) \ , \quad \dot{y} = b(x,y,f(x,y))$$

i Ω' og betegner med $t \to (x(t),y(t))$ den løsning til (6) i Ω' for hvilken $(x(0),y(0)) = (x_0,y_0)$. Det maximale definitionsinterval for denne løsning til (6) betegnes med I. Da er bevægelsen

$$t \to (x(t),\ y(t),\ f(x(t),\ y(t))) \ , \qquad t \in I \ ,$$

en løsning til det karakteristiske system (5) i Ω, som man umiddelbart efterviser under benyttelse af, at f tilfredsstiller (4). Intervallet I er åbenbart det maximale definitionsinterval for denne løsning til (5). Den tilhørende banekurve (karakteristik) K er åbenbart indeholdt i G(f), og den går gennem det givne punkt $(x_0,y_0,z_0) \in G(f)$ (som jo nås til tiden t=0). |

Bemærkning. Samtlige karakteristikker for (4) udgør jo normalt en (n=)2-parametret familie af kurver i Ω. Projektionerne af karakteristikkerne på xy-planen kan også meget vel udgøre en n-parametret kurvefamilie (i Ω'), og disse projicerede karakteristikker kan i så fald ikke alle være løsningsbaner for et og samme autonome system i $\Omega' (\subseteq \mathbb{R}^n)$. Begrænser man sig derimod til projektionerne af de karakteristikker for (4), der er indeholdt i grafen G(f) for en bestemt løsning f til (4), så vil disse til f hørende projicerede karakteristikker efter det ovenfor viste være løsningsbanerne for det autonome system (6) i Ω' (og dermed normalt udgøre en (n-1)-parametret kurvefamilie). Hvis specielt a og b (eller i det mindste forholdet a:b) ikke afhænger af z, så er løsningsbanerne for (6) de samme for enhver løsning f til (4) og udgør da netop samtlige projicerede karakterisikker for den quasilineære differentialligning (4) i Ω. Dette tilfælde indtræffer jo f.eks. ved en lineær partiel differentialligning, specielt ved den lineære homogene ligning $a(x,y)\,\partial z/\partial x + b(x,y)\partial z/\partial y = 0$, hvor de projicerede karakteristikker således er identiske med karakteristikkerne i den i §1 angivne betydning (nu med n=2).

I medfør af ovenstående sætning er det naturligt at betegne enhver funktion $f:pr_{x,y}(\Omega) \to \mathbb{R}$, hvis graf $G(f) \subseteq \Omega$ er frembragt af karakteristikker, som en generaliseret løsning til (4) i $pr_{x,y}(\Omega)$,

uanset om f er af klassen C^1 eller ej.

Ved den benyttede karakteriatikmetode har vi således reduceret også den quasilineære ligning (4) til et autonomt system (5), det karakteristiske system for (4). For at bestemme en løsning f til (4) i $\Omega' = pr_{x,y}(\Omega)$ ved dens graf G(f) skal vi altså ud af den n(=2)-parametrede familie af samtlige karakteristikker for (4) udvælge en (n-1)(=1)-parametret delfamilie, og det på en sådan måde, at foreningsmængden G af de udvalgte karakteristikker er en graf (for en funktion $f: \Omega' \to \mathbb{R}$), d.v.s. G skal ved projektion på x,y-planen afbildes bijektivt på Ω'.

Lad os nu antage, at der eksisterer en integralbasis (u,v) for det karakteristiske system (5) i Ω. De enkelte karakteristikker K karakteriseres da ved de konstante værdier af (u,v) langs K. For at udtage en (n-1)(=1)-parametret familie af karakteristikker må vi lægge netop ét bånd på (u,v), altså foreskrive netop én ligning $\Phi(u,v) = 0$ mellem u og v. Den fuldstændige løsning til den quasilineære ligning (4) er derfor givet implicit ved ligningen

$$\Phi(u,v) = \Phi(u(x,y,z),\ v(x,y,z)) = 0\ ,$$

hvor Φ betegner en arbitrær funktion af de to variable u,v. Dette resultat må dog fortolkes på passende måde, hvad vi imidlertid her vil afstå fra. Normalt vil man også kunne angive båndet mellem u og v (geometrisk: beskrive kurven $\Phi(u,v) = 0$ i u,v-planen) ved at udtrykke f.eks. v som funktion af u, lad os sige $v = \varphi(u)$ (svarende til løsning af ligningen $\Phi(u,v) = 0$ med hensyn til v), og man kommer derved til den fuldstændige løsning

$$v(x,y,z) = \varphi(u(x,y,z))$$

til (4), hvor også denne ligning mellem x,y og z må tænkes løst med hensyn til z. Den fuldstændige løsning til den quasilineære ligning (4) afhænger således reelt af <u>én arbitrær funktion</u> φ af n-2=1 variabel, således som vi måtte vente; men vi afstår som sagt fra en nærmere præcisering af dette resultat.

3. <u>Løsning af et begyndelsesværdiproblem</u>. Lad der i $\Omega' = \mathrm{pr}_{x,y}(\Omega)$ være givet en regulær (n-1)(=1)-dimensional flade B', altså her en kurve. B' er således billedet af et åbent interval $I \subseteq \dot{R}$ ved en regulær homeomorfi

$$s \to (x(s),y(s)) , \qquad s \in I ,$$

af I ind i Ω'. Vi søger en løsning f til den quasilineære ligning

$$(4) \qquad a(x,y,z)\,\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y,z)\,\frac{\partial z}{\partial y} = c(x,y,z) ,$$

som antager opgivne værdier z(s) i punkterne $(x(s),y(s)) \in B'$, altså som opfylder <u>begyndelsesbetingelsen</u>

$$(7) \qquad f(x(s),y(s)) = z(s) , \qquad s \in I ,$$

hvor z er en given funktion af klassen $C^1(I)$. Vi må naturligvis forlange, at billedmængden B for den regulære homeomorfi

$$(8) \qquad s \to (x(s),y(s),z(s)) , \qquad s \in I ,$$

af I indi xyz-rummet er indeholdt i Ω. Ved projektion på xy-planen afbildes rumkurven B åbenbart bijektivt på den givne plane kurve $B' \subseteq \Omega'$.

Vi forudsætter nu yderligere, at vort begyndelsesværdiproblem er <u>ikke-karakteristisk</u>. Herved menes, at tangenten til B ikke i noget punkt $(x,y,z) \in B$ projiceres i den projicerede karak-

teristiske retning (a(x,y,z), b(x,y,z)) ved projektion på xy-planen, idet det desuden underforstås, at $(a,b) \neq (0,0)$ overalt på B. Analytisk udtrykkes forudsætningen om at problemet er ikke-karakteristisk således:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} x'(s) , & a(x(s),y(s),z(s)) \\ y'(s) , & b(x(s),y(s),z(s)) \end{vmatrix} \neq 0 , \quad s \in I .$$

Geometrisk kan vi herafter formulere det stillede begyndelsesværdiproblem således: Find en løsning f til den quasilineære ligning (4), hvis graf G(f) indeholder rumkurven B. Vi vil nu vise, at dette problem i det mindste "lokalt" har netop én løsning. Det er klart, hvad vi skal gøre. Ifølge sætn. 3 skal grafen G(f) for en løsning til (4) frembringes af karakteristikker, og da G(f) tillige skal indeholde B som delmængde, må G(f) simpelthen være foreningsmængden af alle de karakteristikker der møder B. Vi betegner denne foreningsmængde med G.

Hvis nu G projiceres injektivt ned i xy-planen, altså hvis G er grafen for en funktion f defineret i en (lad os sige åben) mængde, nemlig $pr_{x,y}(G) \subsetneq \Omega'$, så er denne funktion f definitionsmæssigt en generaliseret løsning til vort begyndelsesværdiproblem, og den eneste sådanne defineret på $pr_{x,y}(G)$. En løsning i streng forstand bliver f altså såfremt $f \in C^1$.

Men under alle omstændigheder kan man opnå (ved for hvert punkt $p \in B$ kun at medtage en passende lille bue gennem p af den gennem p gående karakteristik) at foreningsmængden G_0 af disse buer er grafen for en løsning til det stillede problem i $\omega := pr_{x,y}(G)$, og den eneste sådanne.

Analytisk former undersøgelsen sig således. For ethvert $s \in I$

betegner vi med

$$(10) \qquad t \to (x(s,t),y(s,t),z(s,t))$$

den løsning til det karakteristiske autonome system (5), som for $t = 0$ har værdien $(x(s),y(s),z(s)) \in B$, altså

$$(11) \quad \begin{cases} D_t x(s,t) = a(x(s,t),y(s,t),z(s,t)) , \\ D_t y(s,t) = b(x(s,t),y(s,t),z(s,t)) , \\ D_t z(s,t) = c(x(s,t),y(s,t),z(s,t)) , \\ x(s,0) = x(s) , \quad y(s,0) = y(s) , \quad z(s,0) = z(s) . \end{cases}$$

Det maximale definitionsinterval for denne løsning (10) til (5) for givet $s \in I$ betegner vi med $J(s)$. Det fremgår af Aut.Syst., sætn. 1, at mængden

$$H = \{(s,t) \in I \times \grave{R} \mid t \in J(s)\}$$

er åben i $\grave{R}^2$, og at afbildningen

$$(s,t) \to (x(s,t),y(s,t),z(s,t))$$

af H ind i Ω er af klassen $C^1(H)$. (Det kan for øvrigt vises, at denne afbildning altid er regulær.) Billedmængden er åbenbart netop foreningsmængden G af alle de karakteristikker som har mindst ét punkt fælles med B. Det er ikke sikkert at G i sin helhed er en graf, altså projiceres injektivt med i xy-planen. Ifølge (11) reducerer funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} D_s x(s,t) , & D_t x(s,t) \\ \\ D_s y(s,t) , & D_t y(s,t) \end{vmatrix}$$

sig for $t = 0$ til den fra 0 forskellige determinant i (9). For

ethvert $s_0 \in I$ eksisterer der derfor en åben omegn $H_0 \subsetneq H$ af $(s_0,0)$ således at afbildningen

$$(12) \qquad (s,t) \to (x(s,t),y(s,t)) , \qquad (s,t) \in H_0$$

er en regulær homeomorfi af H_0 på en åben mængde $\omega \subsetneq \Omega'$. Ved om fornødent at erstatte H_0 med en passende deri indeholdt åben omegn af $(s_0,0)$ kan vi antage, at hver "fiber"

$$\{t \in \mathbb{R} | (s,t) \in H_0\} , \qquad s \in I ,$$

i H_0 er sammenhængende, altså tom eller et (åbent) interval $J_0(u) \neq \emptyset$ (svarende til hvad der gjaldt om H); thi vi kunne jo f.eks. tage $H_0 = I_0 \times J_0$, produktet af to passende åbne intervalomegne af henholdsvis s_0 og 0. Det kan vises, at man endda kan vælge H_0 fælles for alle $s_0 \in I$, altså således at fibrene $J_0(s)$, $s \in I$, alle er ikke tomme.

Lad os med

$$(13) \qquad (x,y) \to (s(x,y),t(x,y)) , \qquad (x,y) \in \omega ,$$

betegne den inverse afbildning til den regulære homeomorfi (12). Da er afbildningen (13) en regulær homeomorfi af ω på H_0. Ved hjælp af denne kan vi nu indføre x,y som parametre (i stedet for s,t) for den del G_0 af "fladen" G, der svarer til H_0 (altså G_0 = billedet af H_0 ved (10)). Således bliver G_0 grafen for den ved

$$f(x,y) = z(s(x,y),t(x,y))$$

definerede funktion $f \in C^1(\omega)$. Ligesom i slutningen af beviset i Aut. Syst., §3, er det klart at $J_0(s)$ for ethvert $s \in I$ er det maximale definitionsinterval for den ved $(x,y,z) = (x(s),y(s),z(s)$ for $t = 0$ bestemte løsning (10) til det autonome system (5) betrag-

tet i $\Omega_0 = \Omega \cap \mathrm{pr}_{x,y}^{\circ -1}(\omega)$, og derfor er G_0 netop foreningsmængden for de karakteristikker i Ω_0, der møder B. Det følger således af sætn. 2, at f inden for ω er en løsning, og den eneste sådanne, til det stillede begyndelses værdi problem (7) for den quasilineære ligning (4).

Vi formulerer hovedresultatet af undersøgelsen i følgende sætning.

Sætning. Lad der være givet en plan kurve $B' \subsetneq \Omega' (= \mathrm{pr}_{x,y}(\Omega))$ som billede af et åbent interval $I \subsetneq \dot{R}$ ved en regulær homeomorfi

$$s \to (x(s), y(s))$$

af I ind i Ω'. Lad der endvidere være givet en funktion $s \to z(s)$ af klassen $C^1(I)$ således at der for ethvert $s \in I$ gælder $(x(s), y(s), z(s)) \in \Omega$ samt

$$\begin{vmatrix} x'(s) , & a(x(s),y(s),z(s)) \\ y'(s) , & b(x(s),y(s),z(s)) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Da findes der en åben delmængde ω af Ω' omfattende B', således at der i ω eksisterer netop én løsning $f \in C^1(\omega)$ til den quasilineære differentialligning (4) som tilfredsstiller begyndelsesbetingelsen

$$\forall s \in I : \quad f(x(s), y(s)) = z(s) .$$

Eksempel 3. For den quasilineære ligning

$$(y-z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z-x) \frac{\partial z}{\partial y} = x-y$$

har vi det karakteristiske system

$$\dot{x} = y-z \ , \quad \dot{y} = z-x \ , \quad \dot{z} = x-y$$

med punkterne af linien L:x=y=z som singulære punkter. Vi har tidligere (Aut. Syst., eks. 3, s.19) fundet, at funktionerne

$$u = x+y+z \ , \qquad v = x^2+y^2+z^2$$

danner en integralbasis for dette autonome system i $\Omega = \dot{R}^3$, og at karakteristikkerne er samtlige cirkler, der opstår som banekurve for et punkt ved drejning af rummet omkring den singulære linie L. (Faktisk beskrives selve løsningerne til det autonome system ved denne drejning, når den forgår med vinkelhastigheden $\sqrt{3}$.) Den fuldstændige løsning til den ferelagte partielle differentialligning er da med passende fortolkning givet implicit ved en ligning af formen

$$\Phi(x+y+z, \ x^2+y^2+z^2) = 0 \ ,$$

hvor Φ er en arbitrær funktion af 2 reelle variable. Geometrisk karakteriseres løsningerne som de funktioner $f \in C^1$ hvis graf G(f) er foreningsmængde af passende buer af karakteristiske cirkler, d.v.s. G(f) skal være en passende del af en omdrejningsflade med aksen L (vi afstår fra en nærmere præcisering). Vi betragter nu <u>begyndelsesproblemet</u>

$$f(x,0) = 0 \ , \qquad 0 < x < +\infty,$$

altså z=0 på den positive del B' af x-aksen i xy-planen. Vi benytter parameterfremstillingen

$$x = x(s) = s \ , \quad y = y(s) = 0 \ , \quad 0 < s < +\infty \ ,$$

for B' og har altså opgivet begyndelsesværdierne

$$z = z(s) = 0 \ .$$

Det eftervises umiddelbart, at forudsætningerne i sætn. 3 er opfyldt. Vi søger altså en løsning f til den betragtede partielle differentialligning, hvis graf G(f) omfatter den positive del B af x-aksen (i xyz-rummet), nemlig rumkurven B med parameterfremstillingen

$$s \to (x(s), y(s), z(s)) = (s,0,0), \qquad 0 < s < +\infty .$$

Foreningsmængden G af karakteristikkerne gennem punkterne af B er omdrejningskeglen med akse L frembragt af B. Af symmetrigrunde er også denpositive del af z-aksen en frembringer for G, og tangentplanen til G langs denne frembringer er givet ved x+y=0. Bortset fra z-aksens positive del ligger G i halvrummet x+y > 0 og projiceres bijektivt på halvplanen x+y > 0 i xy-planen ved projektion ned i denne. Således er $G_0 = G \setminus \{\text{z-aksens positive del}\}$ grafen for en generaliseret løsning til den partielle differentialligning i halvplanen $\omega_0 = \{(x,y) \mid x+y > 0\}$. - Analytisk former disse betragtninger sig således. Den gennem det løbende punkt (s,0,0), s > 0, af B gående karakteristik (cirkel) K karakteriseres ved de konstante værdier $(u,v) = (s,s^2)$ af de nævnte 2 integraler langs K. Ved elimination af parameteren s > 0 fås, at de karakteristikker, som skærer B, svarer til punkterne af parabelgrenen $v = u^2$, u > 0 i uv-planen. Foreningsmængden G af disse karakteristikker, altså den ovennævnte kegle, består derfor af allle punkter $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ for hvilke x+y+z > 0 og

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 .$$

Denne sidste ligning reducerer sig til

$$xy+yz+zx = 0 .$$

For givet (x,y) med $x+y \neq 0$ har denne ligning netop én løsning z, nemlig

$$z = -\frac{xy}{x+y} .$$

For denne funktion af klassen C^1 fås

$$x+y+z = \frac{x^2+y^2+xy}{x+y} ,$$

som er > 0 hvis og kun hvis $x+y > 0$, idet tælleren altid er > 0 undtagen i $(0,0)$ som ikke opfylder $x+y \neq 0$. Altså har det stillede begyndelsesværdiproblem netop én løsning f i halvplanen ω_0: $x+y > 0$, nemlig

$$f(x,y) = -\frac{xy}{x+y} .$$

4. Den generelle ligning af 1.orden. Idet vi fortsat blot for bekvemmeligheds skyld nøjes med 2 uafhængige variable x, y, lyder den generelle førsteordens partielle differentialligning

$$F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}) = 0 \qquad (14)$$

til bestemmelse af z som funktion af x,y. Her betegner F en i en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^5$ given funktion, som vi vil antage er af klassen $C^2(\Omega)$.

Det løbende punkt af $\mathbb{R}^5$ vil vi betegne med

$$\underline{r} = (x,y,z,p,q) .$$

For en funktion $(x,y) \to f(x,y)$ af klassen C^1 af de 2 variable (x,y), defineret i en åben mængde $\omega \subseteq \mathbb{R}^2$, vil vi foruden den sædvanlige graf $G(f)$ indføre grafen af orden 1 ved

$$G^{(1)}(f) = \{(x,y,z,p,q) \in \dot{R}^5 \mid (x,y) \in \omega\ , \quad z = f(x,y)\ , \quad p = f_x(x,y)\ , \quad q = f_y(x,y)\}\ .$$

Ved en løsning til den partielle differentialligning (14) forstås en funktion f af klassen C^1 i en åben mængde $\omega \subseteq \dot{R}^2$ for hvilken (14) har mening og er opfyldt når man for z,p,q indsætter henholdsvis $f(x,y)$, $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ og lader (x,y) gennemløbe ω:

$$(15) \qquad F(x,y,f(x,y),f_x(x,y),f_y(x,y)) = 0\ , \quad (x,y) \in \omega\ .$$

Med andre ord er $f \in C^1(\omega)$ løsning til (14) hvis og kun hvis

$$G^{(1)}(f) \subseteq \Omega \ \wedge\ [\forall \underline{r} \in G^{(1)}(f) : \ F(\underline{r}) = 0]\ ,$$

eller kortere: hvis og kun hvis

$$G^{(1)}(f) \subseteq F^{\circ -1}(0)\ .$$

For en løsning $f \in C^2(\omega)$ fås ved differentiation af (15) med hensyn til x og y:

$$(16) \qquad \begin{cases} F_x + F_z \cdot f_x(x,y) + F_p \cdot f_{xx}(x,y) + F_q \cdot f_{yx}(x,y) = 0\ , \\ F_y + F_z \cdot f_y(x,y) + F_p \cdot f_{xy}(x,y) + F_q \cdot f_{yy}(x,y) = 0\ , \end{cases}$$

gældende for $(x,y) \in \omega$, idet man i de partielle aflede af F skal indsætte det løbende punkt $(x,y,f(x,y),f_x(x,y),f_y(x,y))$ af $G^{(1)}(f)$.

Vi betragter nu en differentiabel bevægelse

$$(17) \qquad t \to \underline{r}(t) = (x(t),y(t),z(t),p(t),q(t))$$

i $\dot{R}^5$, hvor t gennemløbeb et åbent interval I. Banekurven for denne bevægelse er indeholdt i grafen $G^{(1)}(f)$ af orden 1 for en given

funktion $f \in C^1(\omega)$ (ω åben mængde i $\dot{R}^2$) hvis og kun hvis ligningerne

$$(18) \quad z(t) = f(x(t),y(t)) , \quad p(t) = f_x(x(t),y(t)) , \quad q(t) = f_y(x(t),y(t))$$

er opfyldt for all $t \in I$. I givet fald fås ved differentiation af disse tre ligninger

$$(19) \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = f_x(x(t),y(t))\dot{x}(t) + f_y(x(t),y(t))\dot{y}(t) , \\ \dot{p}(t) = f_{xx}(x(t),y(t))\dot{x}(t) + f_{xy}(x(t),y(t))\dot{y}(t) , \\ \dot{q}(t) = f_{yx}(x(t),y(t))\dot{x}(t) + f_{yy}(x(t),y(t))\dot{y}(t) , \end{cases}$$

gældende for $t \in I$. Af den første af disse 3 ligninger fås ved hjælp af (18) den såkaldte kompatibilitetsbetingelse

$$(20) \quad \dot{z}(t) = p(t)\dot{x}(t) + q(t)\dot{y}(t) ,$$

som er bemærkelsesværdig ved, at den ikke explicit indeholder funktionen $f \in C^1(\omega)$, på hvis graf af orden 1 den betragtede bevægelse (17) skulle forløbe. Kompatibilitetsbetingelsen (20) er altså nødvendig for, at en differentiabel bevægelse (17) overhovedet kan forløbe på grafen af orden 1 for en eller anden funktion.

Vi søger derpå at indføre karakteristikker for den partielle differentialligning (14) som banekurver for løsningerne til et passende autonomt system i $\Omega \subseteq \dot{R}^5$, idet vi tilstræber, at man ved hjælp af sådanne karakteristikker skal kunne frembringe grafen af orden 1 for enhver løsning til (14) (jvf. "kun hvis" - delen af sætn. 2 i det quasilineære tilfælde). Der er derfor anledning til at videreføre de ovenstående betragtninger, nu med tanke på at bevægelsen (17) skal forløbe på $G^{(1)}(f)$ for en eller anden løsning

$f \in C^2(\omega)$ til den partielle differentialligning (14). Idet vi således antager at $\underline{r}(t) \in G^{(1)}(f)$ for alle $t \in I$, slutter vi af ligningerne (16) ved indsættelse af $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=f(x(t),y(t))=z(t)$, etc.:

$$(21) \qquad \begin{cases} F_x + F_z \cdot p(t) + F_p \cdot f_{xx}(x(t),y(t)) + F_q \cdot f_{yx}(x(t),y(t)) = 0 , \\ F_y + F_z \cdot q(t) + F_p \cdot f_{xy}(x(t),y(t)) + F_q \cdot f_{yy}(x(t),y(t)) = 0 , \end{cases}$$

hvor de partielle aflede af F nu skal tages i $\underline{r} = \underline{r}(t) = (x(t),y(t),z(t),p(t),q(t))$.

Ligesom kompatibilitetsbetingelsen (20) ikke indeholder funktionen f (på hvis graf af orden 1 den betragtede bevægelse (17) skulle forløbe), således vil vi nu søge i ligningerne (19) at bortelliminere f (som jo her indgår med sine afledede af 2.orden), idet vi gennem (21) udnytter antagelsen om, at $f \in C^2(\omega)$ skal være en løsning til vor partielle differentialligning (14). For at kunne bortskaffe $f_{xx}, f_{xy} = f_{yx}, f_{yy}$ fra (19) ved hjælp af (21) vil vi pålægge bevægelsen (17) på $G^{(1)}(f)$ følgende to betingelser

$$(22) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = F_p(x(t),y(t),z(t),p(t),q(t)), \\ \dot{y}(t) = F_q(x(t),y(t),z(t),p(t),q(t)), \end{cases}$$

gældende for alle $t \in I$. (Bemærk, at f ikke indgår i disse ligninger.) Indsættes (22) i (19), og subtraheres herfra de respektive ligninger (21) under iagttagelse af, at $f_{yx} = f_{xy}$, fås

$$(23) \qquad \begin{cases} \dot{p}(t) = - F_x - p(t)F_z , \\ \dot{q}(t) = - F_y - q(t)F_z , \end{cases}$$

hvori som ovenfor skal tænkes indsat $\underline{r}(t) = (x(t),y(t),z(t),p(t),q(t))$

i de partielle afledede af F.

Idet vi sluttelig indsætter (22) i kompatibilitetsbetingelsen (20):

$$\dot{z}(t) = p(t)F_p + q(t)F_q \ , \tag{24}$$

har vi sammenfattende fundet, at den betragtede bevægelse (17) på grafen $G^{(1)}(f)$ af orden 1 for en eller anden løsning f af klassen C^2 til (14) tilfredsstiller (22),(24),(23) og altså er en løsning til det autonome system

$$\begin{cases} \dot{x} = F_p = F_p(x,y,z,p,q) \ , \\ \dot{y} = F_q \ , \\ \dot{z} = p\,F_p + q\,F_q \ , \\ \dot{p} = -F_x - p\,F_z \ , \\ \dot{q} = -F_y - q\,F_z \ . \end{cases} \tag{25}$$

Enhver løsning til (25) opfylder åbenbart kompatibilitetsbetingelsen (20), idet

$$\dot{z} = pF_p + qF_q = p\dot{x} + q\dot{y} \ .$$

<u>Lemma</u>. Funktionen F er et integral til det autonome system (25).

<u>Bevis</u>. For enhver løsning $t \to \underline{r}(t) = (x(t),y(t),z(t),p(t),q(t))$ til (25) fås ved differentiation

$$\frac{d}{dt} F(\underline{r}(t)) = \dot{x}(t)F_x(\underline{r}(t)) + \dot{y}F_y + \dot{z}F_z + \dot{p}F_p + \dot{q}F_q = 0$$

ifølge ligningerne (25). |

Definition. Ved karakteristikkerne for den partielle differentialligning

$$(14) \qquad F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

forstås de løsningsbaner K for det autonome system (25) langs hvilke den konstante værdi af F er 0, altså $K \subseteq F^{\circ -1}(0)$.

Åbenbart er den 4-dimensionale "flade" $F^{\circ -1}(0) \subseteq \Omega$ netop foreningsmængden af samtlige karakteristikker. Medens løsningsbanerne for systemet (25) jo afhænger af 4 integrationskonstanter, danner karakteristikkerne således kun en 3-parametret familie, idet vi har fikseret den konstante værdi F = 0 af et af integralerne til (25).

Svarende til sætn. 2 i det quasilineære tilfælde haves nu følgende resultat, i hvilket vi nøjes med at betragte løsninger f til (14) definerede i hele projektionen

$$\Omega' = pr_{x,y}(\Omega) = \{(x,y) \in \dot{R}^2 \mid \exists (z,p,q) \in \dot{R}^3 : (x,y,z,p,q) \in \Omega\}$$

af $\Omega \subseteq \dot{R}^5$ ned i xy-planen. Ligesom i sætn. 2 betegner dette ikke nogen væsentlig indskrænkning, idet man i tilfælde af en løsning f defineret i en åben mængde $\omega \subseteq \Omega'$ blot erstatter Ω med $\Omega \cap pr^{\circ -1}_{x,y}(\omega) = \Omega \cap (\omega \times \dot{R}^3)$.

Sætning. En funktion $f \in C^2(\Omega')$ er en løsning til den partielle differentialligning (14) hvis og kun hvis dens graf $G^{(1)}(f)$ af orden 1 kan frembringes af karakteristikker.

Bevis. "Hvis"-delen er her triviel, idet hver karakteristik, og derfor også en foreningsmængde $G^{(1)}(f)$ af sådanne, er indeholdt i $F^{\circ -1}(0)$. Antag dernæst omvendt, at $f \in C^2(\Omega')$ er en løsning til (14), og lad $\underline{r}_\circ = (x_\circ, y_\circ, z_\circ, p_\circ, q_\circ) \in G^{(1)}(f)$. Da f er en løsning

til (14), altså $G^{(1)}(f) \subseteq F^{\circ -1}(0)$, gælder specielt $F(\underline{r}_o) = 0$, og den gennem $\underline{r}_o$ gående løsningsbane for (25) er derfor en karakteristik. Opgaven er at vise, at denne karakteristik er en delmængde af $G^{(1)}(f)$. Hertil betragtes det autonome system

$$(26) \qquad \begin{cases} \dot{x} = F_p(x,y,f(x,y),f_x(x,y),f_y(x,y)) \ , \\ \dot{y} = F_q(x,y,f(x,y),f_x(x,y),f_y(x,y)) \ , \end{cases}$$

i Ω'. Lad $t \to (x(t),y(t))$, $t \in I$, betegne den løsning hertil for hvilken $(x(0),y(0)) = (x_o,y_o)$, og definer derpå funktionerne $t \to z(t),p(t),q(t)$ ved

$$(18) \quad z(t) = f(x(t),y(t)), \ p(t) = f_x(x(t),y(t)), \ q(t) = f_y(x(t),y(t)) \ .$$

Da forløber bevægelsen

$$(17) \quad t \to \underline{r}(t) = (x(t),y(t),z(t),p(t),q(t)) \ , \qquad t \in I \ ,$$

på $G^{(1)}(f)$, og der gælder $\underline{r}(0) = \underline{r}_o$. Tilbage står blot at vise, at denne bevægelse på $G^{(1)}(f)$ er en løsning til det autonome system (25), thi da er dens banekurve netop den gennem det givne punkt $\underline{r}_o \in G^{(1)}(f)$ gående karakteristik. Men at bevægelsen $t \to \underline{r}(t)$ tilfredsstiller (25), fremgår af den tidligere foretagne undersøgelse, som ledte os til systemet (25.) Thi ligningerne (22) er jo opfyldt ifølge definitionen af $t \to (x(t),y(t))$ som løsning til (26) i forbindelse med definitionen (18). Og af (22) og (18) fulgte jo i forbindelse med (21) de resterende ligninger i det autonome system (25) under forudsætning af, at f (som her) var en løsning af klassen C^2 til den partielle differentialligning (14). |

Bemærkning. I stedet for at beskrive en karakteristik som banekurven for en bevægelse $t \to (x(t),y(t),z(t),p(t),q(t))$ i $\dot{R}^5$ plejer man ofte at opfatte den som en "strimmel" i det 3-dimensionale xyz-rum, idet funktionerne $p=p(t)$, $q=q(t)$ benyttes til at fastlægge en flade-normalretning i det løbende punkt af kurven $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ i $\dot{R}^3$. Sætning 3 udsiger da, at en funktion $f \in C^2(\Omega')$ tilfredsstiller den partielle differentialligning (14), hvis og kun hvis grafen G(f) frembringes af karakteristiske strimler i den forstand at G(f) indeholder (og tangerer) enhver karakteristisk strimmel, som den har et punkt fælles med, og som den tangerer i dette.

5. Løsning af et begyndelsesværdiproblem. Lad der i $\Omega' = pr_{x,y}(\Omega)$ være givet en regulær kurve B' som billede af et åbent interval $I \subsetneq \dot{R}$ ved en regulær homeomorfi

$$s \to (x(s) , y(s)) , \qquad s \in I ,$$

af I ind i Ω'. Ligesom i det quasilineære tilfælde (§3) søger vi en løsning f til den forelagte partielle differentialligning

$$F(x,y,z, \frac{\partial z}{\partial x} , \frac{\partial z}{\partial y}) = 0 , \tag{14}$$

som antager opgivne værdier z(s) i punkterne (x(s),y(s)) af B', altså som opfylder begyndelsesbetingelsen

$$f(x(s),y(s)) = z(s) , \qquad s \in I , \tag{27}$$

hvor z er en given funktion af klassen $C^1(I)$,

Hvis f betegner en sådan løsning, defineret i en åben mængde $\omega \subset \Omega'$ omfattende B', så defineres der på sædvanlig måde kontinuerte funktioner $s \to p(s),q(s)$ ved

(28) $p(s) = f_x(x(s),y(s))$, $q(s) = f_y(x(s),y(s))$,

og der gælder for ethvert $s \in I$, at $(x(s),y(s),z(s),p(s),q(s))$ tilhører Ω og at $F(x(s),y(s),z(s),p(s),q(s)) = 0$, samt

(29) $z'(s) = p(s)x'(s) + q(s)y'(s)$,

idet ' betegner differentiation med hensyn til s.

En nødvendig betingelse for, at det stillede begyndelsesværdiproblem (14), (27) skal kunne løses, er altså, at de givne funktioner $s \to x(s),y(s),z(s)$ af klassen $C^1(I)$ skal kunne suppleres med kontinuerte funktioner $s \to p(s),q(s)$ således at bevægelsen

(30) $s \to \underline{r}(s) = (x(s),y(s),z(s),p(s),q(s))$, $s \in I$,

forløber på "fladen" $F^{\circ -1}(0)$, og således at kompatibilitetsbetingelsen (29) er opfyldt (jvf.(20)).

I det følgende forudsætter vi derfor, at en sådan supplering er mulig, altså at de to ligninger

(31) $$\begin{cases} F(x(s),y(s),z(s),p,q) = 0 \\ x'(s)p + y'(s)q - z'(s) = 0 \end{cases}$$

med de to ubekendte p,q har mindst en løsning (p,q) for ethvert $s \in I$, og at denne løsning er (eller i tilfælde af flere løsninger: kan vælges) kontinuert som funktion af $s \in I$. Hvis der er flere sådanne kontinuerte løsninger $(p,q) = (p(s),q(s))$ til (31), betragter vi hver af disse for sig. Vi vil vise, at hver af dem under den nedenfor omtalte yderligere forudsætning giver anledning til én løsning til det stillede begyndelsesværdiproblem.

Vi betragter altså en bevægelse (30) på $F^{\circ -1}(0)$ opfyldende kompaktibilitetsbetingelsen (29). Banekurven for denne bevægelse

betegnes med B. Vi forudsætter nu yderligere, at begyndelsesværdiproblemet er ikke karakteristisk. Herved menes, at funktionaldeterminanten hørende til (31) er $\neq 0$, altså

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} x'(s) , & F_p(x(s),y(s),z(s),p(s),q(s)) \\ y'(s) , & F_q(x(s),y(s),z(s),p(s),q(s)) \end{vmatrix} \neq 0$$

for alle $s \in I$. Desuden vil vi antage, at funktionerne $s \to p(s),q(s)$ ikke blot er kontinuerte, men af klassen $C^1(I)$. Betingelsen (32) betyder geometrisk, at tangenten til B ikke i noget punkt $\underline{r} \in B$ projiceres i den projicerede karakteristiske retning $(F_p(\underline{r}),F_q(\underline{r}))$ ved projektion på xy-planen (jvf. de 2 første ligninger i det autonome system (25)).

Vi søger herafter en løsning f til den partielle differentialligning (14), som antager de givne begyndelsesværdier, altså opfylder (27), og for hvilken desuden (28) er opfyldt med de betragtede "supplerende funktioner" $s \to p(s),q(s)$. Denne opgave kan kort formuleres således:

Find en løsning f til (14) hvis graf $G^{(1)}(f)$ af orden 1 indeholder banekurven B for bevægelsen (30) på $F^{\circ -1}(0)$.

For at diskutere denne opgave under henvisning til sætn. 4 betegner vi for ethvert $s \in I$ med

$$(33) \qquad t \to \underline{r}(s,t) = (x(s,t),y(s,t),z(s,t),p(s,t),q(s,t))$$

den løsning til det karakteristiske autonome system (25), som for $t = 0$ har værdien

$$(34) \qquad \underline{r}(s,0) = \underline{r}(s) = (x(s),y(s),z(s),p(s),q(s)) ,$$

altså som for $t = 0$ passerer kurven B i det til parameterværdien s

svarende punkt $\underline{r}(s)$ af B. Det maximale definitionsinterval for denne løsning betegnes med $J(s)$. Da $B \subseteq F^{-1}(0)$, specielt $F(\underline{r}(s,0)) = 0$, er banekurven $K(s)$ for den omhandlede løsning til (25) en karakteristik, idet den konstante værdi af F langs $K(s)$ er

$$(35) \qquad F(\underline{r}(s,t)) = F(\underline{r}(s,0)) = 0 , \qquad t \in J(s) .$$

Det fremgår af Aut. Syst., sætn. 1, at mængden

$$H = \{(s,t) \in I \times \dot{R} \mid t \in J(s)\}$$

er åben i $\dot{R}^2$, og at afbildningerne

$$(36) \qquad (s,t) \to \underline{r}(s,t)$$

og $(s,t) \to D_t\underline{r}(s,t)$ af H ind i $\dot{R}^5$ er af klassen $C^1(H)$. (Det kan for øvrigt vises at afbildningen (36) er regulær.) Billedmængden $G \subseteq F^{\circ -1}(0)$ er netop foreningsmængden for all de karakteristikker, der har mindst ét punkt fælles med B.

Som udtryk for , at $\underline{r}(s,t)$ som funktion af $t \in J(s)$ for fast $s \in I$ tilfredsstiller det autonome system (25) haves identiteterne

$$(37) \qquad \begin{cases} D_t y(s,t) = F_p(\underline{r}(s,t)) , \\ D_t y(s,t) = F_q(\underline{r}(s,t)) , \\ D_t z(s,t) = p(s,t)F_p(\underline{r}(s,t)) + q(s,t)F_q(\underline{r}(s,t)) , \\ D_t p(s,t) = -F_x(\underline{r}(s,t)) - p(s,t)F_z(\underline{r}(s,t)) , \\ D_t q(s,t) = -F_y(\underline{r}(s,t)) - q(s,t)F_z(\underline{r}(s,t)) . \end{cases}$$

Af de 3 første af disse identiteter følger

$$(38) \qquad D_t z(s,t) = p(s,t)D_t x(s,t) + q(s,t)\, D_t y(s,t) ,$$

altså at bevægelsen $t \to \underline{r}(s,t)$ for fast $s \in I$ opfylder kompatibilitetsbetingelsen (20) for alle $t \in J(s)$ (hvad vi også har omtalt tidligere for enhver løsning til det autonome system (25)). Vi vil nu vise, at også bevægelsen $s \to \underline{r}(s,t)$ for fast t opfylder den tilsvarende kompatibilitetsbetingelse

$$(39) \qquad D_s z(s,t) = pD_s x(s,t) + qD_s y(s,t)$$

for $(s,t) \in H$. For $t = 0$ reducerer (39) sig ifølge (34) til kompatibilitetsbetingelsen (29) for kurven B givet ved parameterfremstillingen (30), og denne betingelse har vi jo forudsat opfyldt. Med betegnelsen

$$u = D_s z - pD_s x - qD_s y$$

som funktion af $(s,t) \in H$ gælder således

$$(40) \qquad u(s,0) = 0 , \qquad s \in I .$$

Som omtalt ved (35) er både $(s,t) \to \underline{r}(s,t)$ og $(s,t) \to D_t\underline{r}(s,t)$ af klassen $C^1(H)$. Da således $D_s D_t \underline{r}$ eksisterer og er kontinuert, eksisterer også $D_t D_s \underline{r}$, og der gælder

$$D_s D_t \underline{r} = D_t D_s \underline{r} , \qquad (s,t) \in H .$$

Heraf følger tillige, at $D_t u$ eksisterer i H, og vi finder

$$\begin{aligned} D_t u &= D_t(D_s z - pD_s x - qD_s y) \\ &= D_t D_s z - pD_t D_s x - qD_t D_s y - D_t p \cdot D_s x - D_t q \cdot D_s y \\ &= D_s(D_t z - pD_t x - qD_t y) + D_s p \cdot D_t x + D_s q \cdot D_t y - D_t p \cdot D_s x - D_t q \cdot D_s y . \end{aligned}$$

Indsættes heri (38) og (37), fås

$$D_t u = F_p D_s p + F_q D_s q + (F_x + pF_z) D_s x + (F_y + qF_z) D_s y$$
$$= (F_x D_s x + F_y D_s y + F_z D_s z + F_p D_s p + F_q D_s q) + F_z \cdot (-D_s z + pD_s x + qD_s y) ,$$

idet vi har tilføjet leddet $F_z D_s z$ og trukket det fra igen. Den første parentes i det sidste udtryk for $D_t u$ er netop den partielle afledede af den sammensatte funktion $F \circ \underline{r}$, og da denne er identisk 0 ifølge (35), bliver resultatet af regningerne

$$D_t u(s,t) = - F_z(\underline{r}(s,t)) \cdot u(s,t) , \qquad (s,t) \in H .$$

For fastholdt $s \in I$ tilfredsstiller funktionen $t \to u(s,t)$ således den sædvanlige differentialligning

$$\frac{du}{dt} = gu , \qquad t \in J(s) ,$$

hvor vi har sat $-F_z(\underline{r}(s,t)) = g(t)$. Da endvidere u antager værdien $u(s,0) = 0$ for t=0 ifølge (40), slutter vi af entydighedssætningen (eller af den explicite løsning til differentialligningen), at u er identisk 0 i J(s), altså

$$u(s,t) = 0 , \qquad (s,t) \in H ,$$

hvormed (39) er godtgjort.

Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} D_s x(s,t) , & D_t x(s,t) \\ D_s y(s,t) , & D_t y(s,t) \end{vmatrix}$$

reducerer sig ifølge (34) og de to første ligninger (37) for $t = 0$ til den i (32) optrædende determinant $\neq 0$. For ethvert $s_o \in I$ eksisterer derfor en åben omegn $H_o \subseteq H$ af $(s_o,0)$ således at afbildningen

(41) $(s,t) \to (x(s,t),y(s,t)) , \qquad (s,t) \in H_o ,$

er en regulær homeomorfi af H_o på en åben mængde $\omega \subsetneq \Omega'$. Ved om fornødent at erstatte H_o med en passende deri indeholdt åben omegn af $(s_o,0)$ (f.eks, et produkt af to åbne intervaller) kan vi antage, at hver fiber

$$\{t \in \dot{R} \mid (s,t) \in H_o\} , \qquad s \in I ,$$

i H_o (ligesom i H) er sammenhængende, altså tom eller et (åbent) interval $J_o(u) \neq \emptyset$. Det kan vises, at man endda kan vælge H_o fælles for allw $s_o \in I$, altså således at fibrene $J_o(s)$, $s \in I$, alle er ikke tomme.

Lad os med

(42) $(x,y) \to (s(x,y),t(x,y)) , \qquad (x,y) \in \omega ,$

betegne den inverse afbildning til den regulære homeomorfi (37). Da er (42) en regulær homeomorfi af ω på H_o. Ved hjælp af denne kan vi nu indføre (x,y) som parametre (i stedet for (s,t)) for den del G_o af "fladen " G, der svarer til H_o (altså G_o = billedet af H_o ved (36)). Vi kommer derved til følgende parameterfremstilling (regulær homeomorfi) for G_o:

$$\begin{aligned} (x,y) \to \underline{r} &= \underline{r}(s(x,y),\ t(x,y)) \\ = \ (x,y,z(s(x,y),t(x,y)) &, \ p(s(x,y),t(x,y)) , \\ & \qquad q(s(x,y),t(x,y))) , \end{aligned}$$

hvor (x,y) gennemløber ω. Vi sætter

(43) $f(x,y) = z(s(x,y),t(x,y)) , \qquad (x,y) \in \omega ,$

hvorved $f \in C^1(\omega)$, og finder ved hjælp af (38),(39) under benyttelse af sætningen om differentialet af en sammensat funktion:

$$\begin{aligned} df &= D_s z \cdot ds + D_t z \cdot dt \\ &= (pD_s x + qD_s y)ds + (pD_t x + qD_t y)dt \\ &= p \cdot (D_s x \cdot ds + D_t x \cdot dt) + q \cdot (D_s y \cdot ds + D_t y \cdot dt) \\ &= pdx + qdy \ , \end{aligned}$$

altså $(f_x, f_y) = (p,q)$, eller udførligt

$$(44) \qquad \begin{cases} f_x(x,y) = p(s(x,y),t(x,y)) \ , \\ f_y(x,y) = q(s(x,y),t(x,y)) \ , \end{cases}$$

for alle $(x,y) \in \omega$. Indsættes nu (43) og (44) i ovenstående parameterfremstilling for G_o med $(x,y) \in \omega$ som parameterpunkt, ser vi, at G_o simpelthen er grafen af orden 1 for funktionen f:

$$G^{(1)}(f) = G_o \subsetneq F^{\circ -1}(0) \ ,$$

hvorfor f er en løsning til den partielle differentialligning (14) i den åbne mængde $\omega \supsetneq B'$. Og da $G^{(1)}(f) = G_o \supsetneq B$, er f tillige en løsning til det stillede begyndelsesproblem i den på side 26 (midt) præciserede form. Ifølge (44) er $f_x, f_y \in C^1(\omega)$, altså $f \in C^2(\omega)$. Det følger af sætn. 4, at der ikke kan være andre løsninger af klassen $C^2(\omega)$.

Vi formulerer hovedresultatet af undersøgelsen i følgende sætning.

Sætning. Lad $F \in C^2(\Omega)$. Lad der være givet en plan kurve $B' \subsetneq \Omega' (= pr_{x,y}(\Omega))$ som billede af et åbent interval $I \subsetneq \mathring{R}$ ved en regulær homeomorfi af klassen $C^1(I)$:

$$s \to (x(s),y(s))$$

af I ind i Ω'. Lad der endvidere være givet funktioner

$s \to z(s),p(s),q(s)$ af klassen $C^1(I)$ således at der for alle $s \in I$ gælder $(x(s),y(s),z(s),p(s),q(s)) \in \Omega$ samt

$$F(x(s),y(s),z(s),p(s),q(s)) = 0 ,$$
$$x'(s)p(s) + y'(s)q(s) - z'(s) = 0 ,$$
$$\begin{vmatrix} x'(s) , & F_p(x(s),y(s),z(s),p(s),q(s)) \\ y'(s) , & F_q(x(s),y(s),z(s),p(s),q(s)) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Da findes der en åben mængde $\omega \subsetneq \Omega'$ indeholdende B', således at der i ω eksisterer netop én løsning $f \in C^2(\omega)$ til den partielle differentialligning

$$F(x,y,z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0 ,$$

som for alle $s \in I$ opfylder betingelserne

$$f(x(s),y(s)) = z(s), \quad f_x(x(s),y(s)) = p(s) ,$$
$$f_y(x(s),y(s)) = q(s) .$$

Eksempel. (Optikkens differentialligning):

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 .$$

Den har formen (14) med eksempelvis

$$F(x,y,z,p,q) = \tfrac{1}{2}(p^2+q^2-1),$$

defineret i $\Omega = \dot{R}^5$. Differentialligningen udsiger geometrisk, at normalen $(D_x z, D_y z, -1)$ til en løsningsgraf $G(f)$ skal danne vinkelen 45° med z-aksen, altså at tangentplanen til $G(f)$ i hvert punkt af $G(f)$ skal danne vinkelen 45° med xy-planen.

Det autonome system (25) lyder.

$$\dot{x} = p,\ \dot{y} = q,\ \dot{z} = p^2 + q^2,\ \dot{p} = 0,\ \dot{q} = 0.$$

Løsningerne hertil er givet ved p = konstant, q = konstant, og

$$x = pt + a,\ y = qt + b,\ z = (p^2+q^2)t + c,$$

hvor p,q,a,b,c er arbitrære konstanter. Karakteristikkerne fremkommer som banekurver herfor, idet integrationskonstanterne p,q pålægges båndet $p^2 + q^2 = 1$. De karakteristiske strimler er derfor samtlige retlinede strimler i $\mathbb{R}^3$, beliggende i en plan dannende en vinkel på 45° med xy-planen.

For at løse den forelagte partielle differentialligning med begyndelsesbetingelsen z = 0 langs en given regulær C^2 -kurve

$$B': s \to (x(s), y(s)), \qquad s \in I,$$

lad os sige med buelængden s som parameter, må vi søge at supplere funktionerne x,y og z(=0) med C^1 -funktioner p,q af s således at

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = 1 \\ x'(s)p + y'(s)q = 0. \end{cases}$$

Da s betegner buelængden på B' regnet fra et fast punkt, er $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$, og vi finder derfor de to kontinuerte løsninger

$$(p,q) = \pm(-y'(s), x'(s)),$$

af hvilke vi f.eks. betragter (p,q) = (-y'(s), x'(s)), d.v.s. enhedsvektoren på den positive normal til B' i punktet (x(s),y(s)). Den løsning til det karakteristiske autonome system, som til tiden t = 0 befinder sig i punktet (x(s), y(s)) ∈ B', er følgelig

$$x = x(s,t) = x(s) - ty'(s),$$
$$y = y(s,t) = y(s) + tx'(s),$$
$$z = z(s,t) = t,$$
$$p = p(s,t) = -y'(s),$$
$$q = q(s,t) = x'(s).$$

Vi betragter dernæst funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} x'(s) - ty''(s), & -y'(s) \\ y'(s) + tx''(s), & x'(s) \end{vmatrix} = 1 - t\kappa(s),$$

hvor

$$\kappa(s) = x'(s)\, y''(s) - y'(s)\, x''(s)$$

er krumningen af B' i det til s svarende punkt. For $t = 0$ er determinanten $\neq 0$, hvilket betyder, at vort begyndelsesværdiproblem er ikke-karakteristisk.

I det følgende forudsættes yderligere, at krumningen $\kappa(s)$ er > 0 og aftagende som funktion af $s \in I$, og desuden at den totale krumning (tangentdrejning) $\int_I \kappa(s)\, ds$ er $\leqq \pi$. Under disse omstændigheder kan det vises, at afbildningen

$$(s,t) \to (x(s,t),\, y(s,t)) = (x(s),\, y(s)) + t\,(-y'(s), x'(s))$$

af hele den åbne mængde

$$H_o = \{(s,t) \in I \times \mathbb{R} \mid t < \rho(s)\},$$

ind i xy-planen er <u>injektiv</u>. Her betegner $\rho(s) = 1/\kappa(s)$ krumningsradien for B'. Da endvidere denne afbildning er regulær, fordi $1 - t\kappa(s) > 0$, og da fibrene $J(s) =]-\infty, \rho(s)[$ er intervaller, slutter vi af sætn. 5, at der i billedområdet ω for denne afbildning af H_o ind i planen eksisterer netop én løsning $f \in C^2(\omega)$ til den partielle differentialligning $(\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2 = 1$, for

hvilken f er identisk 0 på B' og tillige grad f langs B' sammenfalder med den positive normal til B', altså

$$f_x(x(s), y(s)) = -y'(s),\ f_y(x(s), y(s)) = x'(s).$$

For at komme til denne løsning f må man finde den inverse afbildning af ω på H_o ved at løse med hensyn til s,t, og dernæst indsætte i ligningen z = t, altså ved at eliminere s mellem ligningerne

$$x = x(s) - zy'(s),$$
$$y = y(s) + zx'(s),$$

og derpå løse med hensyn til z. Geometrisk betyder dette, at $z = f(x,y)$ for et givet punkt $(x,y) \in \omega$ angiver afstanden, målt på den gennem (x,y) gående normal til B', fra denne normals skæringspunkt med B' til punktet (x,y). De projicerede karakteristikker for denne løsning f er netop normalerne til B' ("lysstrålerne" udgående fra B'). Definitionsområdet ω for f er foreningsmængden for de hålvlinier på normalerne til B' der har det pågældende krumningscentrum som endepunkt, og som går gennem det tilhørende kurvepunkt (nemlig ifølge uligheden $z = t < \rho(s)$). Randen af ω består af to halvlinier i forening med evoluten for B', som for øvrigt her er en konveks regulær kurve (den "kaustiske" kurve). Niveaukurverne z = konstant på G(f) projiceres i parallelkurverne for B' ("bølgefronterne" ved lysudsendelsen fra B'). Disse er som bekendt ortogonaltrajektorier til "lysstrålerne", som derfor er projektionerne af kurverne af størst fald på G(f).

1. Diskuter ligningen $(\cos y)\frac{\partial z}{\partial x} + (\sin x)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

2. Diskuter ligningen $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha z$ for givet $\alpha \in \mathbb{R}$.
Diskuter endvidere i tilfældet $\alpha = 1$ begyndelsesværdiproblemet: $z = 1$ for
a) $x^2 + y^2 = 1$, b) $x = 1$, c) $|x| = |y| = 1$.

3. Diskuter begyndelsesværdiproblemet (jvf. Aut.Syst. opg. 5)

$$\begin{cases} y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 2xyz, \\ z = y^2 \quad \text{for} \quad x = 0. \end{cases}$$

4. Diskuter ligningen $z\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ med begyndelsesbetingelserne:
a) $z = -x$ for $y = 0$, b) $z = -x^2$ for $y = 0$.

5. Undersøg, om differentialligningen
$$(1 + z)\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - z)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$$
har løsninger, som forsvinder identisk på y-aksen.

6. Bestem karakteristikkerne for ligningen
$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = xy,$$
og diskuter begyndelsesproblemet $z = y$ for $x = 0$.

BANACH - ALGEBRA

§1. Generelt om algebraer 1

§2. Resolvent og spektrum 5

§3. Normerede algebraer, Banachalgebraer 8

§4. Differentiable funktioner med vektorielle værdier 13

§5. Spektralradien 16

§6. Banach $*$-algebra, C^*-algebra 19

Opgaver

Litteratur:

C.Rickart: General theory of Banach algebras.

J.Dixmier: Les C^*-algèbres et leurs représentations.

K.Hoffman: Fundamentals of Banachalgebras.

§1. Generelt om algebraer.

Ved en algebra A over et kommutativt legeme K forstås et vektorrum A over K, hvori der desuden er defineret en kompositionsregel kaldet multiplikation, som afbilder $A \times A$ ind i A, og som opfylder betingelserne

(a1) $(a+b)c = ac + bc$, $a(b+c) = ab + ac$

(a2) $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$ (skrives λab)

(a3) $(ab)c = a(bc)$

for alle $a, b, c \in A$, $\lambda \in K$

En algebra er således specielt en ring. Hvis denne er kommutativ, altså hvis $ab = ba$ for alle $a, b \in A$, kaldes A en kommutativ algebra.

Som bekendt findes der i en ring, specielt i en algebra, højst et etelement, d.v.s. et element $e \in A$ for hvilket

$$ae = ea = a \qquad \text{for alle } a \in A.$$

Findes et sådant element e taler vi om en algebra med etelement.

Bemærkning. De her betragtede algebraer kaldes ofte associative algebraer fordi (a3) er opfyldt. I differentialgeometri støder man på "algebraer" -de såkaldte Lie-algebraer- hvor (a3) ikke er opfyldt, men i stedet gælder Jacobi's identitet: $a(bc) + b(ca) + c(ab) = 0$.

Lad nu A være en algebra med etelement e. Et element $a \in A$ kaldes invertibelt (eller regulært), hvis a er in-

vertibelt i den underliggende ring A. Der findes i så fald et entydigt bestemt element $a^{-1} \in A$, kaldet det <u>inverse element</u> til a, som opfylder

$$a a^{-1} = a^{-1} a = e .$$

Etelementet e er invertibelt og $e^{-1} = e$. Endvidere gælder $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$ i den forstand, at med a og b er også ab invertibel. Hvis a er invertibel da også λa for $\lambda \neq 0$ og a^n for $n \in \mathbb{N}$, og der gælder

$$(\lambda a)^{-1} = \lambda^{-1} a^{-1}$$

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n \qquad \text{(skrives også } a^{-n}\text{)}.$$

Vi definerer $a^0 = e$.

Mængden A_{inv} af alle invertible elementer i A er således en <u>gruppe</u> under multiplikation, og legemets multiplikative gruppe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ definerer en ydre komposition i A_{inv}.

Et <u>underrum</u> $\mathcal{B} \subseteq A$ kaldes en <u>delalgebra</u> (resp. et <u>ideal</u>) i A hvis $\mathcal{B}$ er en <u>delring</u> (resp. et <u>ideal</u>) i den underliggende ring A.

En <u>homomorfi</u> $\varphi : A \to \mathcal{B}$ af en algebra A over K ind i en algebra $\mathcal{B}$ over K er en afbildning, som er <u>lineær</u> og som er en <u>ringhomomorfi</u>; den opfylder altså foruden linearitetenkravet

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y) \qquad \text{for alle } x, y \in A .$$

Homomorfien φ kaldes en <u>isomorfi</u>, hvis den er bijektiv. I dette tilfælde er også φ^{-1} en homomorfi (af $\mathcal{B}$ på A). Kernen $\varphi^{-1}(0)$ ved en homomorfi φ er et ideal i A.

1.1 Lemma. Normalisatoren $N_a = \{ x \in A \mid ax = xa \}$ for et element $a \in A$ er en delalgebra af A, som med et invertibelt element x tillige indeholder x^{-1}.

Beviset kommer ud på, at hvis x og y kommuterer med a da gælder det samme om elementerne $x+y$, xy, λx samt x^{-1} hvis x er invertibelt. Bevis vedrørende x^{-1}: $ax^{-1} = e(ax^{-1}) = x^{-1}(xa)x^{-1} = x^{-1}(ax)x^{-1} = x^{-1}a(xx^{-1}) = (x^{-1}a)e = x^{-1}a$. ∎

1.2 Lemma. Et produkt af n indbyrdes kommuterende elementer fra A kan kun være invertibelt, såfremt hvert af elementerne er det.

Bevis: Induktion efter n. For n=1 er der intet at vise, og vi antager nu lemmaet bevist for n-1 elementer og forudsætter at $x = a_1 a_2 \cdots a_m$ er invertibelt. Vi sætter $y = a_2 \cdots a_m$.

Da x kommuterer med a_1 (fordi a'erne kommuterer indbyrdes), vil ifølge lemma 1.1 også x^{-1} kommutere med a_1, og derfor gælder

$$(yx^{-1})a_1 = y(x^{-1}a_1) = y(a_1x^{-1}) = (ya_1)x^{-1} = (a_1y)x^{-1} = \begin{cases} a_1(yx^{-1}) \\ xx^{-1} = e \end{cases},$$

hvilket viser at a_1 er invertibelt (med $a_1^{-1} = yx^{-1}$), men så er også $y = a_1^{-1}x$ invertibelt. Induktionsforudsætningen sikrer da, at også $a_2, \cdots, a_m$ er invertible. ∎

Det kan indtræffe at et produkt af to ikke kommuterende elementer er invertibelt uden at elementerne selv er invertible, jvf. opg.1.

Et ideal I i A definerer en ækvivalensrelation i A nemlig $x \sim y \ (\mathrm{mod}.\ I) \Leftrightarrow x - y \in I$.

Denne ækvivalensrelation harmonerer med regnereglerne, så mængden af ækvivalensklasser $A/I = A/\sim$ er på naturlig måde organiseret til en algebra over K. Som vektorrum betragtet er A/I det sædvanlige kvotientrum af A over underrummet I, og som ring betragtet er A/I den sædvanlige kvotientring af A over idealet I.

Den kanoniske afbildning $\pi : A \to A/I$ der til $a \in A$ lader svare a's ækvivalensklasse $\pi(a) = a + I$ er en surjektiv homomorfi med I som kerne.

Eksempler. Betegner E et vektorrum over K er mængden Lin(E,E) af lineære afbildninger af E ind i sig selv en algebra over K, idet multiplikationen defineres som sammensætning og de lineære regneoperationer defineres punktvis. Hvis K er $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ og hvis E desuden er et topologisk vektorrum, er mængden L(E,E) af kontinuerte lineære afbildninger af F ind i sig selv en delalgebra af Lin(E,E) med samme etelement nemlig den identiske afbildning. Et element $f \in \mathrm{Lin}(E,E)$ er invertibelt præcis hvis f er bijektiv, og f^{-1} er den sædvanlige inverse afbildning. Et element $f \in L(E,E)$ er invertibelt hvis og kun hvis f er bijektiv og f^{-1} er kontinuert.

Mængden af polynomier over K, altså mængden af udtryk af formen

$$(*) \qquad p(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n ,$$

hvor $\alpha_0, \cdots, \alpha_n \in K$, udgør en algebra $K[X]$ over K ved de fra algebraen kendte regneoperationer. Denne algebra er kommutativ.

Hvis A er en algebra over K med etelement e og hvis $a \in A$ kan man for hvert polynomium $p \in K[X]$ definere et element $p(a) \in A$ ved

$$p(a) = \alpha_0 e + \alpha_1 a + \cdots + \alpha_n a^n,$$

idet p har formen (*).

For givet $a \in A$ er afbildningen $p \mapsto p(a)$ en homomorfi af algebraen $K[X]$ ind i algebraen A, og billedet er den mindste delalgebra af A der indeholder e og a. Den er kommutativ.

§2. Resolvent og spektrum.

Overalt i denne paragraf betegner A en algebra over K med etelement e, og vi forudsætter $A \neq \{0\}$.

Definition. Ved resolventmængden $\rho_A(a)$ og spektret $\sigma_A(a)$ for et element $a \in A$ forstås mængderne

$$\rho_A(a) = \{ \lambda \in K \mid a - \lambda e \in A_{inv} \}$$

$$\sigma_A(a) = \{ \lambda \in K \mid a - \lambda e \notin A_{inv} \}.$$

Hvis det af sammenhængen fremgår, hvilken algebra A der er på tale, udelades A ofte i betegnelserne: $\rho(a)$, $\sigma(a)$.

For $\lambda \in \rho(a)$ eksisterer elementet $R_\lambda = (a - \lambda e)^{-1}$, og afbildningen $R : \rho(a) \to A$ givet ved

$$\lambda \mapsto R_\lambda = (a - \lambda e)^{-1}$$

kaldes resolventen for a . (Egentlig burde vi skrive $R_\lambda(a)$ for at understrege R_λ's afhængighed af a).

Vi bemærker at $R_\lambda \in N_a$ for alle $\lambda \in \rho(a)$, og at $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$ for $\lambda, \mu \in \rho(a)$ jvf. lemma 1.1. Endvidere gælder resolventligningen

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu \qquad \text{for alle } \lambda, \mu \in \rho(a).$$

Der gælder $\sigma(\alpha e) = \{\alpha\}$, $\rho(\alpha e) = K \setminus \{\alpha\}$, $\alpha \in K$.

Hvis E er et endelig dimensionalt vektorrum over K og f en lineær afbildning af E ind i sig selv, så er f bijektiv blot den er injektiv. Heraf følger, at spektret for f med hensyn til algebraen $\mathrm{Lin}(E,E)$ er de $\lambda \in K$ for hvilke $f - \lambda e$ ikke er injektiv, altså

$\sigma(f)$ = mængden af f's egenværdier.

For $\lambda \in \rho(f)$ er $f - \lambda e$ bijektiv, og derfor har ligningen

$$f(x) - \lambda x = y$$

for hvert $y \in E$ præcis en løsning $x \in E$, nemlig

$$x = (f - \lambda e)^{-1} y = R_\lambda(f)(y).$$

Dette forklarer, hvorfor $R_\lambda = R_\lambda(f)$ kaldes f's resolvent.

Vi skal nu undersøge hvordan spektret forholder sig ved homomorfier.

2.1 Lemma. Lad A og B være to algebraer over K med ætelementer e_A og e_B, og lad $\varphi: A \to B$ være en homomorfi så $\varphi(e_A) = e_B$. For hvert element $a \in A$

$$\sigma_B(\varphi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$$

Hvis specielt $\mathcal{B}$ er en delalgebra af $\mathcal{A}$ så $e_{\mathcal{A}} \in \mathcal{B}$ (så har $\mathcal{B}$ $e_{\mathcal{A}}$ som etelement) gælder for alle $b \in \mathcal{B}$

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b)$$

d.v.s. "spektret vokser når algebraen aftager".

Bevis: Hvis $\lambda \in \rho_{\mathcal{A}}(a)$ findes $x \in \mathcal{A}$ så

$$(a - \lambda e_{\mathcal{A}})x = x(a - \lambda e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{A}} .$$

Anvendes homomorfien φ fås

$$(\varphi(a) - \lambda e_{\mathcal{B}})\varphi(x) = \varphi(x)(\varphi(a) - \lambda e_{\mathcal{B}}) = e_{\mathcal{B}} ,$$

hvilket viser at $\lambda \in \rho_{\mathcal{B}}(\varphi(a))$.

Det andet resultat følger af det første anvendt på den kanoniske indlejring $i_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. ∎

2.2 Sætning (Hilbert-Dirac) Lad $\mathcal{A}$ være en algebra med etelement e over de komplekse tals legeme $\mathbb{C}$. For ethvert ikke konstant polynomium p over $\mathbb{C}$ gælder

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) \qquad \text{for alle } a \in \mathcal{A},$$

altså spektret for billedet $p(a)$ er lig billedet $p(\sigma(a))$ af spektret for a.

Hvis $\sigma(a) \neq \emptyset$ gælder udsagnet også for et konstant polynomium.

Bevis: Lad $\alpha \in \mathbb{C}$ og lad $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m$ med $\alpha_m \neq 0$, $m \geq 1$. Polynomiet $p(x) - \alpha$ kan opløses i førstegradsfaktorer, altså

$$p(x) - \alpha = \alpha_m \prod_{i=1}^{m} (x - \lambda_i) ,$$

og heraf fås

$$p(a) - \alpha e = \alpha_m \prod_{i=1}^{m} (a - \lambda_i e) .$$

Under benyttelse af lemma 1.2 fås nu

$$\begin{aligned}
\alpha \in p(\sigma(a)) &\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \sigma(a)\ (\alpha = p(\lambda)) \\
&\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \sigma(a)\ \exists\, i \in \{1,\dots,n\}\ (\lambda = \lambda_i) \\
&\Leftrightarrow \exists\, i \in \{1,\dots,n\}\ (\lambda_i \in \sigma(a)) \\
&\Leftrightarrow \exists\, i \in \{1,\dots,n\}\ (a - \lambda_i e \text{ ikke invertibel}) \\
&\Leftrightarrow p(a) - \alpha e \text{ ikke invertibel} \\
&\Leftrightarrow \alpha \in \sigma(p(a)).
\end{aligned}$$

Da $\alpha \in \mathbb{C}$ var vilkårlig er sætningens første del bevist. Hvis p er det konstante polynomium α_0 er $p(a) = \alpha_0 e$ og $\sigma(p(a)) = \{\alpha_0\}$. Hvis $\sigma(a) \neq \emptyset$ er $p(\sigma(a)) = \{\alpha_0\}$. ∎

Bemærkning. Sætning 2.2 er rigtig for ethvert kommutativt legeme K i hvilken algebraens fundamentalsætning er rigtig. Sådanne legemer kaldes algebraisk afsluttede.

§3. Normerede algebraer. Banachalgebraer.

I det følgende vil vi udelukkende beskæftige os med algebraer A over de reelle eller komplekse tals legeme. Er en sådan algebra A forsynet med en topologi i hvilken regneoperationerne er kontinuerte, taler man om en topologisk algebra. Vi skal her kun se på topologiske algebraer, hvor topologien udspringer af en norm på A.

Definition: En algebra A over K (= $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) kaldes en normeret algebra, dersom vektorrummet A er normeret ved en norm $\|\cdot\|$ for hvilken

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \qquad \text{for alle } a, b \in A.$$

Hvis algebraen har et etelement e følger heraf at $\|e\| \leq \|e\|^2$, altså $\|e\| \geq 1$ hvis $A \neq \{0\}$. Man kan altid omnormere A så $\|e\| = 1$, jvf. opg.8, så i teoretiske overvejelser vil vi altid forudsætte $\|e\| = 1$.

For at se at en normeret algebra er en topologisk algebra, skal man blot vise at multiplikationen $(x,y) \mapsto xy$ af $A \times A$ ind i A er kontinuert. Dette ses på sædvanlig måde af omskrivningen

$$ab - xy = (a-x)b + x(b-y) =$$
$$(a-x)b + (x-a)(b-y) + a(b-y),$$

hvoraf

$$\|ab-xy\| \leq \|a-x\|\|b\| + \|x-a\|\|b-y\| + \|a\|\|b-y\|,$$

der viser, at $xy \to ab$ for $x \to a$, $y \to b$.

En normeret algebra A siges at være <u>fuldstændig</u>, og kaldes da en <u>Banachalgebra</u>, dersom vektorrummet A er fuldstændigt m.h.t. den betragtede norm og altså er et Banachrum.

Enhver normeret algebra har en fuldstændiggørelse $\hat{A}$, som er en Banachalgebra. Dette vises på samme måde som det analoge resultat for normerede rum.

Det følger umiddelbart af regneoperationernes kontinuitet, at afslutningen af en delalgebra (resp. et ideal) i en normeret algebra A igen er en delalgebra (resp. et ideal) i A.

Hvis I er et afsluttet ideal i den normerede algebra A, kan vi forsyne kvotientalgebraen A/I med en norm

$$\|\dot{x}\| = \inf\{\|x\| \mid x \in \dot{x}\},$$

idet $\dot{x} \in A/I$ er den ækvivalensklasse der indeholder $x \in A$, jvf. T.V.R. opg.17.

Hermed gælder klart $\|\dot{x}\dot{y}\| \leq \|\dot{x}\|\|\dot{y}\|$ så A/I er en normeret algebra. (Der kan dog indtræffe at A/I får et etelement med $\|e\| > 1$). Hvis A er en Banachalgebra, er A/I også en Banachalgebra.

3.1 Sætning. Lad A være en Banachalgebra med etelement e så $\|e\|=1$. For ethvert element $a \in A$ med $\|a\| < 1$ er $e-a$ invertibel og

$$(e-a)^{-1} = e + a + a^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

hvor rækken er absolut konvergent. $\|(e-a)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|a\|}$.

Bevis: Ved gentagen anvendelse af uligheden $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ fås at $\|a^n\| \leq \|a\|^n$ for alle $n=0,1,2,\cdots$. Hvis $\|a\| < 1$ gælder derfor $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1-\|a\|}$.

Dette viser (F.1,9-10), at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ er absolut konvergent, og dermed konvergent da A er et Banachrum. Kaldes summen for s gælder

$$\|s\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \leq \frac{1}{1-\|a\|},$$

og

$$as = a\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n = s - e,$$

fordi multiplikation med a kan ske ledvis, da afbildningen $x \mapsto ax$ er kontinuert. På samme måde ses det, at $sa = s-e$. Da således $(e-a)s = s(e-a) = e$, er påstanden vist. ∎

Den fundne kvotientrække for $(e-a)^{-1}$ kaldes Neumann's række efter C. Neumann, der benyttede den i integralligningernes teori.

3.2 Corollar. Spektret $\sigma(a)$ for et element a er indeholdt i mængden $\{\lambda \in K \mid |\lambda| \leq \|a\|\}$.

For $|\lambda| > \|a\|$ er $e - \lambda^{-1}a$ nemlig invertibel, og derfor er $a - \lambda e = -\lambda(e - \lambda^{-1}a)$ invertibel.

3.3 Sætning. Mængden A_{inv} af invertible elementer i en Banachalgebra A med etelement er en åben delmængde af A og afbildningen $x \mapsto x^{-1}$ er en homeomorfi af A_{inv} på sig selv.

Bevis: Lad a være invertibel. Vi vil indse at så er også $a+x$ invertibel, når blot $\|x\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$.

For et sådant x gælder

$$\|-a^{-1}x\| \leq \|a^{-1}\|\|x\| < 1,$$

og den foregående sætning sikrer da, at $e + a^{-1}x$ er invertibel, og at $\|(e+a^{-1}x)^{-1}\| \leq (1 - \|a^{-1}x\|)^{-1}$.

Så er også $a+x = a(e + a^{-1}x)$ invertibel, og da

$$(a+x)^{-1} - a^{-1} = (e+a^{-1}x)^{-1}\left(e - (e+a^{-1}x)\right)a^{-1} = -(e+a^{-1}x)^{-1}a^{-1}xa^{-1},$$

finder vi

$$\|(a+x)^{-1} - a^{-1}\| \leq \frac{\|a^{-1}\|^2\|x\|}{1 - \|a^{-1}x\|} \leq \frac{\|a^{-1}\|^2\|x\|}{1 - \|a^{-1}\|\|x\|}.$$

Denne vurdering viser at $(a+x)^{-1} \to a^{-1}$ for $x \to 0$.

Vi har nu vist, at A_{inv} er åben og at afbildningen $x \mapsto x^{-1}$ er kontinuert i ethvert punkt $a \in A_{inv}$. Da afbildningen er bijektiv og lig sin inverse, er sætningen hermed vist. □

3.4 Corollar. Lad A være en Banachalgebra med etelement. For hvert $a \in A$ er resolventmængden $\rho(a)$ en åben delmængde af K og spektret $\sigma(a)$ er kompakt.

Resolventmængden er nemlig originalmængden af A_{inv} ved den kontinuerte afbildning $\varphi: K \to A$ givet ved $\varphi(\lambda) = a - \lambda e$. Hermed er $\sigma(a)$ afsluttet og begrænset ifølge 3.2.

Det tilføjes at resolventen $R: \rho(a) \to A$ er kontinuert, idet R er sammensat af $\varphi: \rho(a) \to A_{inv}$ og homeomorfien $x \mapsto x^{-1}$ af A_{inv}.

Eksempler. 1) $A = CB(T,K)$ = mængden af alle kontinuerte begrænsede funktioner $f: T \to K$ ($=\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) på et topologisk rum T. Ifølge T.V.R.,38, er A et Banachrum under den ligelige norm $\|f\| = \sup_{x \in T} |f(x)|$, og defineres multiplikationen i A punktvis $fg(x) = f(x)g(x)$, ser man at A er en kommutativ Banachalgebra med konstanten 1 som etelement. En funktion $f \in A$ er invertibel præcis når $f(x) \neq 0$ for alle $x \in T$, og i så fald er f^{-1} givet ved $f^{-1}(x) = 1/f(x)$. Et yderst vigtigt specialtilfælde fremkommer, hvis T er et kompakt rum.

2) $A = L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R},K)$ = mængden af alle (ækvivalensklasser af) Lebesgue-integrable funktioner $f: \mathbb{R} \to K$. Som produkt af $f,g \in L^1(\mathbb{R})$ tages foldningen $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ defineret ved

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,g(x-y)\,dy = g*f(x),$$

og som norm tages 1-normen

$$\|f\| = \|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx .$$

Herved er A en kommutativ Banachalgebra. Det kan vises at den ikke har noget etelement.

3) $A = L^\infty(\mathbb{R}) = L^\infty(\mathbb{R},K)$ = mængden af alle (ækvivalensklasser af) essentielt begrænsede, Lebesgue-målelige funktioner $f:\mathbb{R} \to K$. Idet multiplikationen defineres punktvis, og idet normen er ∞-normen

$$\|f\| = \|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

bliver $L^\infty(\mathbb{R})$ en kommutativ Banachalgebra med konstanten 1 som (repræsentant for) etelementet.

4) Idet E er et Banachrum $\neq \{0\}$ er Banachrummet $A = L(E,E)$ af kontinuerte lineære afbildninger $f:E \to E$ en Banachalgebra, idet multiplikationen defineres ved sammensætning $fg(x) = f(g(x))$. At $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$ ses således:

$$\|fg(x)\| \leq \|f\|\,\|g(x)\| \leq \|f\|\|g\|\|x\| \leq \|f\|\|g\|$$

for alle $x \in E$ med $\|x\| \leq 1$.

§4. Differentiable funktioner med vektorielle værdier.

En afbildning $\lambda \mapsto f(\lambda)$ af en åben delmængde $\omega \subseteq K$ ind i et Hausdorff t.v.r. E over K kaldes differentiabel i et punkt $\mu \in \omega$ med differentialkvotienten $Df(\mu) \in E$, dersom

$$\lim_{\lambda\to\mu} \left[(\lambda-\mu)^{-1}(f(\lambda)-f(\mu))\right] = Df(\mu)$$

I bekræftende fald gælder for ethvert $x' \in E'$ (det topologisk duale rum til E), idet vi benytter skrivemåden $\langle x, x'\rangle = x'(x)$, at

$$\langle (\lambda-\mu)^{-1}(f(\lambda)-f(\mu)),\ x'\rangle \to \langle Df(\mu),\ x'\rangle$$

for $\lambda \to \mu$. Her kan venstre side omskrives til

$$\frac{\langle f(\lambda), x' \rangle - \langle f(\mu), x' \rangle}{\lambda - \mu},$$

og vi kommer derved til, at funktionen $\lambda \mapsto \langle f(\lambda), x' \rangle$, som afbilder ω ind i K, er differentiabel for $\lambda = \mu$ med differentialkvotienten $\langle Df(\mu), x' \rangle$.

Vi siger at f er skalært differentiabel i μ, hvis alle funktionerne $\langle f, x' \rangle$, $x' \in E'$ er differentiable i μ, og vi har hermed vist, at en differentiabel funktion er skalært differentiabel.

Vi antager nu, at E er et Banachrum og at $K = \dot{C}$. Hvis $f: \omega \to E$ er differentiabel i ethvert punkt af ω, kaldes f også holomorf eller analytisk i ω. Af det ovenstående fremgår, at funktionen $\lambda \mapsto \langle f(\lambda), x' \rangle$ for ethvert $x' \in E'$ er en sædvanlig holomorf funktion af den komplekse variable $\lambda \in \omega$ med differentialkvotienten $\langle Df, x' \rangle$.

Under benyttelse af princippet om ligelig begrænsning kan man omvendt vise, at en funktion $f: \omega \to E$ er holomorf, hvis den blot er skalært holomorf. Vi vil ikke gå ind på det iøvrigt simple bevis for dette resultat. En konsekvens af det vil være, at med f er også $Df, D^2f, \cdots$ holomorfe i ω, idet den analoge påstand for sædvanlige holomorfe funktioner er velkendt.

4.1 Sætning. For ethvert element a af en kompleks Banachalgebra A med etelement e er resolventen $R: \rho(a) \to A$ en holomorf funktion og

$$DR(\mu) = R_\mu^2 = (a - \mu e)^{-2}.$$

Bevis: Vi har indset at $\rho(a)$ er en åben delmængde af den omplekse plan, og at $\lambda \mapsto R_\lambda$ er kontinuert. For $\lambda, \mu \in \rho(a)$, $\lambda \neq \mu$ iver resolventligningen

$$(\lambda-\mu)^{-1}(R_\lambda - R_\mu) = R_\lambda R_\mu ,$$

g dette har grænseværdien $R_\mu^2 = (a-\mu e)^{-2}$ for $\lambda \to \mu$, hvilket iser, at R er differentiabel i $\rho(a)$ (altså holomorf) med len angivne differentialkvotient. ∎

Bemærk at facit er som ved den sædvanlige komplekse funktion $\lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$, $a \in \dot{C}$.

4.2 Sætning. Spektret $\sigma(a)$ for et element a af en kompleks Banachalgebra A med etelement er ikke tomt.

Bevis: Antager vi at $\sigma(a) = \emptyset$, er resolventen R en holomorf funktion i hele den komplekse plan. For $|\lambda| > \|a\|$ gælder iflg. 3.1

$$\|R_\lambda\| = \|(-\lambda)^{-1}(e-\lambda^{-1}a)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{1-\|\lambda^{-1}a\|} = \frac{1}{|\lambda|-\|a\|} .$$

Heraf følger at $\|R_\lambda\| \to 0$ for $|\lambda| \to \infty$, og derfor er $\|R_\lambda\|$ begrænset som funktion af λ i hele $\dot{C}$.

For enhver kontinuert linearform $x' \in A'$ er derfor

$$\lambda \mapsto \langle R_\lambda, x' \rangle$$

en begrænset holomorf funktion i hele $\dot{C}$, og den går mod 0 for $|\lambda| \to \infty$. Af Liouville's sætning følger da, at den er identisk nul. Af ligningen

$$\langle R_\lambda, x' \rangle = 0 \quad \text{for alle } \lambda \in \dot{C},\ x' \in A'$$

følger så at $R_\lambda = \underline{0}$ for alle $\lambda \in \dot{C}$ (T.V.R.,44), hvilket er en modstrid, da R_λ som inverst element til $a-\lambda e$ ikke kan være $\underline{0}$. ∎

Vi fremhæver at ovenstående resultat er meget fundamentalt, og at det tilsvarende resultat for reelle Banachalgebraer er forkert, jvf. opg.6. En vigtig konsekvens af sætningen er følgende:

4.3 Gelfand-Mazur's sætning. En kompleks Banachalgebra A med etelement e som desuden er et legeme er isometrisk isomorf med de komplekse tals legeme $\grave{C}$.

Bevis: For hvert $a \in A$ består spektret $\sigma(a)$ af præcis et tal $\lambda_a \in \grave{C}$, og om dette gælder $a = \lambda_a e$. Den foregående sætning sikrer nemlig at $\sigma(a) \neq \phi$, og for hvert $\lambda \in \sigma(a)$ er $a - \lambda e$ ikke invertibel, altså lig 0, da A er forudsat at være et legeme. Afbildningen $a \mapsto \lambda_a$ af A ind i $\grave{C}$ er klart en isometrisk isomorfi af A på $\grave{C}$ ($\|e\|=1$). ∎

En tilsvarende sætning gælder ikke for reelle Banachalgebraer, idet $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ og kvaternionerne er reelle Banachalgebraer som også er legemer. Det kan på den anden side vises, at der ikke er andre end disse.

§5. Spektralradien.

Vi betragter en kompleks Banachalgebra A med etelement e, $\|e\|=1$. For hvert $a \in A$ er spektret $\sigma(a)$ en ikke tom kompakt delmængde af $\grave{C}$. Vi indfører nu tallet

$$r(a) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\} = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\},$$

som kaldes spektralradien for a ; det er nemlig radius i den mindste cirkelskive med centrum 0 som omslutter spektret.

Af 3.2 følger at $r(a) \leq \|a\|$.

5.1 Sætning. (Gelfand) Spektralradien $r(a)$ for et element $a \in A$ er givet ved

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Bevis: For $\lambda \in \sigma(a)$ vil $\lambda^n \in \sigma(a^n)$, $n = 1,2,\cdots$ på grund af sætning 2.2. Så vil $|\lambda^n| \leq \|a^n\|$, altså $|\lambda| \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$, og heraf følger

$$(1) \qquad r(a) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Vi betragter nu funktionen $\psi(\lambda) = (e - \lambda a)^{-1}$, og vil vise at den er veldefineret og holomorf i den åbne cirkelskive $|\lambda| < \frac{1}{r(a)}$ ($:= \infty$ hvis $r(a)=0$).

Vi indser først at $e-\lambda a \in A_{inv}$ for $|\lambda| < \frac{1}{r(a)}$.

Dette er klart for $\lambda = 0$, og hvis $\lambda \neq 0$, $|\lambda| < \frac{1}{r(a)}$, vil $\lambda^{-1} \in \rho(a)$, og derfor er $e - \lambda a = -\lambda(a - \lambda^{-1}e) \in A_{inv}$.

Af sætning 3.3 følger at ψ er kontinuert for $|\lambda| < \frac{1}{r(a)}$.

For $|\lambda|, |\mu| < \frac{1}{r(a)}$ gælder den til resolventligningen analoge formel

$$\psi(\lambda) - \psi(\mu) = (e-\lambda a)^{-1}\left[(e-\mu a) - (e-\lambda a)\right](e-\mu a)^{-1} = (\lambda-\mu)a\,\psi(\lambda)\psi(\mu).$$

Kontinuiteten af ψ sikrer da at

$$\lim_{\lambda\to\mu} (\lambda-\mu)^{-1}(\psi(\lambda) - \psi(\mu)) = a\,\psi(\mu)^2,$$

og dette viser, at ψ er holomorf for $|\lambda| < \frac{1}{r(a)}$ med differential-

kvotienten

$$D\psi(\lambda) = a\,\psi(\lambda)^2 = a\,(e-\lambda a)^{-2}.$$

For hvert $x' \in A'$ er så $\lambda \mapsto \langle \psi(\lambda), x' \rangle$ en sædvanlig holomorf funktion i cirkelskiven $|\lambda| < \frac{1}{r(a)}$.

På den anden side gælder Neumann's række

$$\psi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n$$

i den mindre cirkelskive $|\lambda| < \frac{1}{\|a\|}$ $\left(\frac{1}{\|a\|} \geq \frac{1}{r(a)}\right)$, og dermed gælder potensrække fremstillingen

$$\langle \psi(\lambda), x' \rangle = \langle \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n, x' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle a^n, x' \rangle \lambda^n$$

for $|\lambda| < \frac{1}{\|a\|}$, idet den ledvise anvendelse af linearformen x' er tilladelig, fordi x' er kontinuert og lineær.

Fra teorien for sædvanlige holomorfe funktioner ved man at potensrække fremstillingen (ud fra 0) for en holomorf funktion gælder i den største åbne cirkelskive med centrum 0, som er indeholdt i holomorfiområdet for funktionen.

Anvendes dette resultat i den foreliggende situation, finder vi

$$\langle \psi(\lambda), x' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle a^n, x' \rangle \lambda^n,$$

gyldig for alle $x' \in A'$, $|\lambda| < \frac{1}{r(a)}$.

For fastholdt λ med $0 < |\lambda| < \frac{1}{r(a)}$ går potensrækkens led $\langle a^n, x' \rangle \lambda^n$ derfor mod 0 for $n \to \infty$, hvorfor specielt

$$\sup_n |\langle \lambda^n a^n, x' \rangle| < \infty.$$

Dette gælder for hvert $x' \in A'$. Betegner $\varphi : A \to A''$ den kanoniske indlejring af A i det biduale rum A'', er $x_n'' = \varphi(\lambda^n a^n)$ en følge af kontinuerte linearformer på A', som er punktvis begrænset. Ifølge princippet om ligelig begrænsning gælder

derfor at

$$\sup_n \| x_n'' \| < \infty ,$$

eller da φ er en isometri, at

$$\sup_n \| \lambda^n a^n \| < \infty .$$

Kaldes dette supremum (som afhænger af λ) for $\mathcal{B}(\lambda)$, har vi altså

$$\| a^n \|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{B}(\lambda)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{for alle } n \in \mathbb{N},$$

og følgelig (idet $\mathcal{B}(\lambda)^{\frac{1}{n}} \to 1$ for $n \to \infty$)

$$\limsup_{n \to \infty} \| a^n \|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{|\lambda|} .$$

Eftersom dette gælder for ethvert λ med $0 < |\lambda| < \frac{1}{r(a)}$, følger klart at

$$\limsup \| a^n \|^{\frac{1}{n}} \leq r(a) . \tag{2}$$

Påstanden i sætningen følger nu ved at sammenholde (1) og (2). ∎

Dersom $r(a) = 0$, altså $\sigma(a) = \{0\}$ kaldes a et <u>generaliseret nilpotent element</u>. Et element a kaldes som bekendt <u>nilpotent</u>, hvis der findes et $n \in \mathbb{N}$ så $a^n = 0$ (det mindste sådanne n kaldes a's orden), og for sådanne gælder klart $r(a) = 0$.

§6. <u>Banach *-algebra</u>, <u>C^*-algebra</u>.

Formålet med denne paragraf er mere at fastlægge en vigtig terminologi end at bevise nogle resultater. Vi skal senere vende tilbage til de indførte begreber.

Lad A være en kompleks algebra. Ved en involution i A forstås en afbildning $*: A \to A$ med egenskaberne

(i) $(x^*)^* = x$ (involutorisk)

(ii) $(x+y)^* = x^* + y^*$ } (konjugeret lineær)

(iii) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$ }

(iv) $(xy)^* = y^* x^*$ (antimultiplikativ)

for alle $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Af (i) følger at $*$ er bijektiv. Vi siger at A er en $*$-algebra eller en algebra med involution. Elementet x^* kaldes ofte det adjungerede til x. En delmængde $M \subseteq A$ kaldes selvadjungeret, hvis $M = M^*$, altså hvis det for alle $x \in M$ gælder at $x^* \in M$.

I algebraen $A = \mathbb{C}$ er $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ en involution, iøvrigt den eneste mulige. Også i eksemplerne i §3 er der naturlige involutioner.

1),3). I $A = CB(T,\mathbb{C})$, $A = L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ er $f \mapsto \bar{f}$ en involution, idet $\bar{f}$ er funktionen $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.

2) I $A = L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ defineres en involution $*$ ved

$$f^*(x) = \overline{f(-x)}.$$

4) I $A = L(E,E)$, hvor E nu forudsættes at være et komplekst Hilbertrum, defineres en involution $*$, idet T^* betegner den adjungerede operator til $T \in L(E,E)$.

Lad nu A være en algebra med involution. Et element $a \in A$ kaldes hermite'sk eller selvadjungeret, hvis $a = a^*$, normalt, hvis $aa^* = a^*a$. Et hermite'sk element er normalt, og i en kommutativ algebra er alle elementer normale.

De hermite'ske elementer i A udgør et reelt underrum af A. Hvis a og b er hermite'ske elementer er ab hermite'sk præcis hvis a og b kommuterer.

Ethvert element a kan på entydig måde skrives

$$a = a_1 + i a_2 \text{ , hvor } a_1 \text{ og } a_2 \text{ er hermite'ske.}$$

Af en sådan fremstilling følger nemlig $a^* = a_1 - i a_2$, og altså

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(a + a^*) \text{ , } a_2 = \tfrac{1}{2i}(a - a^*) \text{ ,}$$

hvilket på den anden side giver den ønskede opspaltning.

Hvis A har et etelement e gælder $e = e^*$, thi

$$e = (e^*)^* = (e e^*)^* = e e^* = e^* .$$

Man finder nu let, at hvis a er invertibelt i A, da er også a^* invertibelt og

$$(a^*)^{-1} = (a^{-1})^* .$$

Heraf følger videre at $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$ $(:= \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(a)\})$.

Et element a kaldes <u>unitært</u>, hvis $aa^* = a^*a = e$, altså såfremt a er invertibelt og $a^* = a^{-1}$. De unitære elementer udgør en gruppe ved multiplikation.

En homomorfi $\varphi : A \to \mathcal{B}$ af en $*$-algebra A ind i en $*$-algebra $\mathcal{B}$ kaldes en <u>$*$-homomorfi</u>, hvis der udover homomorfiegenskaberne gælder at $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$.

Hvis en $*$-algebra A desuden er udstyret med en norm taler man om en <u>normeret $*$-algebra</u>, såfremt involutionen og normen er kædet sammen ved betingelsen

(v) $\|x^*\| = \|x\|$ (isometri) for alle $x \in A$.

Hvis algebraen er fuldstændig, taler man om en

Banach $*$-algebra eller en Banachalgebra med involution.

De ovenfor nævnte eksempler på $*$-algebraer er alle Banach $*$-algebraer.

Klassen af Banach $*$-algebraer er en broget forsamling, og det er vanskeligt at sige noget generelt om den. Hvis man derimod kræver endnu en betingelse opfyldt, indskrænkes mulighederne betydeligt.

Definition. En kompleks Banach $*$-algebra A kaldes en C^*-algebra, hvis der gælder

(vi) $\|x^*x\| = \|x\|^2$ for alle $x \in A$.

I en C^*-algebra gælder også $\|xx^*\| = \|x\|^2$.

Disse algebraer er indført af Gelfand og Naimark i 1943. Af eksemplerne ovenfor er 1) og 3) klart C^*-algebraer. Også 4) er en C^*-algebra, hvilket fremgår af resultater om operatorer på Hilbertrum. Derimod er 2) ikke nogen C^*-algebra.

Lad E være et komplekst Hilbertrum, og lad A være en afsluttet selvadjungeret delalgebra af $L(E,E)$. Så er A en C^*-algebra. Gelfand og Naimark har vist, at enhver C^*-algebra A er isometrisk $*$-isomorf med en C^*-algebra af denne type, altså at der findes et komplekst hilbertrum E og en isometrisk $*$-homomorfi $\varphi : A \to L(E,E)$.

Vi vil ikke vise denne imponerende struktursætning her, men skal i næste kapitel beskæftige os med en meget køn struktursætning for kommutative C^*-algebraer.

6.1. Sætning. For ethvert normalt element a i en C^*-algebra A med etelement gælder $r(a) = \|a\|$.

Bevis: For ethvert hermite'sk element a gælder ifølge (vi), at $\|a^2\| = \|a\|^2$. Ved induktion indser man dernæst at

$$\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n} \qquad \text{for } n=1,2,\cdots.$$

Da følgen $\|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ konvergerer mod spektralradien $r(a)$, får vi heraf $\|a\| = r(a)$, hvilket viser påstanden for hermite'ske elementer.

Hvis to elementer a og b fra A kommuterer, gælder

$$r(ab) \leq r(a)\,r(b).$$

Der gælder nemlig $(ab)^n = a^n b^n$, hvoraf $\|(ab)^n\| \leq \|a^n\|\,\|b^n\|$. Ved at uddrage den n'te rod og lade n gå mod ∞ opnås det ønskede.

Hvis a er normalt gælder derfor

$$r(aa^*) \leq r(a)\,r(a^*) \leq \|a\|\,\|a^*\| = \|a\|^2 = \|aa^*\|.$$

På den anden side er aa^* hermite'sk, så $r(aa^*) = \|aa^*\|$ ifølge det lige viste. Altså gælder

$$r(aa^*) = r(a)\,r(a^*) = \|aa^*\| = \|a\|^2$$

for et normalt element a.

Nu gælder helt almindeligt at $r(a) = r(a^*)$, f.eks. fordi $\|a^n\| = \|(a^*)^n\|$. Altså har vi $r(a)^2 = \|a\|^2$ for ethvert normalt element a, og dermed er sætningen vist. ∎

Supplement: Sætningen gælder også for C^*-algebraer uden etelement, når $r(a)$ defineres i overensstemmelse med opg. 4 og

1. Lad E være et uendelig dimensionalt vektorrum over K. Vis, at der findes ikke invertible elementer $f, g \in Lin(E,E)$ så $f \circ g = e$ (den identiske afbildning af E på sig selv).

2. Lad A være en algebra over K, gerne uden etelement. Vis at $x \circ y = x + y - xy$ definerer en associativ komposition i A, og at den har et neutralt element. Vi kalder et element $a \in A$ advertibelt, hvis det er invertibelt ved $\circ$, og det til a inverse element kaldes det adverse til a og betegnes $a^\sim$. Vis at $a^\sim$ er karakteriseret ved

$$a a^\sim = a^\sim a = a + a^\sim .$$

Vis endelig, at hvis A har et etelement e, gælder $e - a^\sim = (e-a)^{-1}$, hvor de to udtryk er samtidigt definerede.

3. (Adjunktion af etelement). Lad A være en algebra over K uden etelement. Vis at produktrummet $A_1 = A \times K$, som i forvejen er et vektorrum over K, bliver en algebra med etelement ved følgende definition af multiplikationen:

$$(a,\alpha)(b,\beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta) .$$

Vis, at der ved $a \mapsto (a,0)$ defineres en isomorfi af A på et maximalt ideal af A_1. Vis, at $(a,0)^\sim = (a^\sim, 0)$, hvor begge symboler er defineret samtidigt. Vis endelig, at hvis A er normeret (og fuldstændig), bliver A_1 normeret (og fuldstændig) ved normen

$$\|(a,\alpha)\| = \|a\| + |\alpha|,$$

og ovennævnte isomorfi bliver isometrisk.

4. (Spektrum i algebra uden etelement). Med betegnelserne fra foregående opgave defineres spektret $\sigma(a)$ for et element $a \in A$ som spektret for det tilsvarende element $(a,0) \in A_1$. Vis, at $0 \in \sigma(a)$ for hvert element $a \in A$, og at der for $\lambda \neq 0$ gælder

$$\lambda \in \sigma(a) \Leftrightarrow \lambda^{-1}a \quad \text{er ikke advertibel.}$$

5. Lad A være en algebra over $\mathbb{C}$ uden etelement, og lad p være et polynomium over $\mathbb{C}$ uden konstantled. Vis, at $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$. Vis også, at antagelsen $p(0) = 0$ ikke kan undværes.

6. Lad A være en algebra over $\mathbb{R}$, og lad p være et polynomium over $\mathbb{R}$. Vis, at $\sigma(p(a)) \supseteq p(\sigma(a))$.

Betragt dernæst den reelle Banachalgebra $A = \mathcal{L}(E,E)$, hvor $E = \mathbb{R}^2$, og find et element $a \in A$ med tomt spektrum. Find også et element $a \in A$ for hvilket ligheds-tegnet ikke indtræffer i ovenstående inklusion.

7. Lad A være en normeret algebra med etelement e så $\|e\| = 1$. Vis, at $\|a^{-1}\| \geq \|a\|^{-1}$ for ethvert invertibelt element $a \in A$.

8. (Renormering for at opnå $\|e\| = 1$). Lad A være en

normeret algebra med etelement e, om hvilket vi blot ved at $\|e\| \geq 1$. For $a \in A$ betegner vi med L_a den ved

$$L_a(x) = ax$$

definerede kontinuerte, lineære afbildning af A ind i A (multiplikation fra venstre). Som element af $L(A,A)$ har L_a normen

$$\|L_a\| = \sup\{\|ax\| \mid x \in A,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Vis, at der ved $\|a\|_* = \|L_a\|$ defineres en ny norm på algebraen A så $\|e\|_* = 1$. Vis endelig, at de to normer er ækvivalente (d.v.s. $\exists k > 0\ \forall a \in A : k^{-1}\|a\| \leq \|a\|_* \leq k\|a\|$).

9. Lad $A = l^1(\dot{Z}, K)$ = Banachrummet af alle afbildninger $x : \dot{Z} \to K$ (skrevet som følge $x = (x_n)_{n \in \dot{Z}}$) med

$$\|x\| = \sum_{n \in \dot{Z}} |x_n| < \infty .$$

For $x = (x_n)_{n \in \dot{Z}}$ og $y = (y_n)_{n \in \dot{Z}}$ defineres <u>foldningen</u> $x * y$ ved

$$(x * y)_n = \sum_{m \in \dot{Z}} x_{n-m}\, y_m .$$

Vis, at A med foldningen som multiplikation og med den angivne norm bliver en kommutativ Banachalgebra med etelement og find dette.

10. Lad A være en Banachalgebra med etelement e, og lad $a, b \in A$, a invertibel, og $\|ba^{-1}\| < 1$. Vis, at $a - b$ er invertibel, og at

$$(a-b)^{-1} = a^{-1} + a^{-1}ba^{-1} + a^{-1}ba^{-1}ba^{-1} + \cdots ,$$

hvor rækken er absolut konvergent. Giv herved et nyt bevis for sætning 3.3.

11. Vis, at ethvert element af en Banachalgebra for hvilket $\|x\| < 1$, har et adverst element $x^{\sim}$, og at

$$x^{\sim} = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n ,$$

hvor rækken er absolut konvergent.

12. Vis, at mængden af advertible elementer i en Banachalgebra er åben, og at afbildningen $x \mapsto x^{\sim}$ er en homeomorfi af denne mængde på sig selv.

13. Vis, at formlen for spektralradien også gælder i en kompleks Banachalgebra uden etelement (jvf.opg. 4).

14. Bevis, at $\sigma(a^{-1}) = [\sigma(a)]^{-1}$, når a er et invertibelt element af en algebra med etelement.

15. Vis, at spektret for et unitært element af en C^*-algebra med etelement ligger på enhedscirkelen $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

16. Lad x være et element af en kompleks Banachalgebra A med etelement e . For enhver i en omegn af spektralcirklen $\Gamma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq r(x)\}$ holomorf funktion f (med komplekse værdier) defineres

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n .$$

Vis, at rækken er absolut konvergent inden for A , og at afbildningen $f \mapsto f(x)$ er en homomorfi af "algebraen" af holomorfe funktioner f af den omtalte art ind i A.

Vis endvidere, at der for ethvert invertibelt element $a \in A$ gælder $f(a^{-1}xa) = a^{-1}f(x)a$

Vis endelig, at $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$. (Benyt, at $\Gamma(x)$ for givet $\alpha \in \dot{C}$ kun indeholder endelig mange nulpunkter for $f-\alpha$ med mindre f er konstant α, hvorfor $f-\alpha$ kan skrives på formen $f-\alpha = pg$ hvor p er et polynomium, og g er holomorf og $g \neq 0$ på $\Gamma(x)$).

17. Lad a og b være elementer af en kompleks Banachalgebra A med etelement. Vis, at $exp(a+b) = exp(a)\,exp(b)$ hvis $ab = ba$, og at $exp(a)^{-1} = exp(-a)$.

Antag nu, at A er en C^*-algebra. Vis at $exp(ia)$ er unitær, hvis a er hermite'sk, og slut heraf at $\sigma(a)$ er reelt, når a er hermite'sk. (Brug opg. 15 og 16).

18. Lad A være en kompleks Banachalgebra med etelement e ($\|e\| = 1$). Vis, at $e - x$ er invertibel blot $r(x) < 1$.

19. Lad A betegne algebraen af komplekse $n \times n$ matricer. Idet vi sætter $M^* = \bar{M}'$ (=den konjugerede og transponerede matrix), skal man vise, at $*$ er en involution i A, og dernæst, at A er en Banachalgebra med involution under normen

$$\|M\| = \sqrt{sp(MM^*)},$$

hvor $sp\,N$ betyder sporet af matricen N. Hvad er $\|E\|$, hvor E er enhedsmatricen, og hvad er $\sigma(M)$ for $M \in A$?

Er A en C^*-algebra?

20. Lad A være en kompleks Banachalgebra med etelement e og lad B være en afsluttet delalgebra af A så $e \in B$. Vis, at $\partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(b)$ for ethvert $b \in B$ (idet $\partial\sigma_B(b)$ betyder randen af spektret $\sigma_B(b)$ som delmængde af $\dot{C}$). Vis dernæst, at hvis $\sigma_A(b) \subseteq \dot{R}$ gælder $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$. Vis endelig, at $r_A(b) = r_B(b)$ for alle $b \in B$, idet $r_A(b)$ er spektralradien relativt til A og analogt for $r_B(b)$.

21. Kvaternionerne. Vi udstyrer $\dot{C}^2$ med multiplikationen

$$zw = (z_1 w_1 - z_2 \overline{w_2}, z_1 w_2 + z_2 \overline{w_1}),$$

hvor $z = (z_1, z_2)$, $w = (w_1, w_2)$.

Vis, at $\dot{C}^2$ med denne multiplikation og sædvanlig addition er en ikke-kommutativ ring med etelement $(1,0)$. Idet $\dot{C}^2$ på sædvanlig måde er et vektorrum over $\dot{C}$ og over $\dot{R}$, skal man vise, at $\dot{C}^2$ er en algebra over $\dot{R}$, men ikke nogen algebra over $\dot{C}$.

For $z \in \dot{C}^2$ indfører vi den konjugerede kvaternion $z^* = (\overline{z_1}, -z_2)$ og kvaternionens norm $\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$.

Vis at

$$\|zw\| = \|z\|\|w\| \quad \text{og at} \quad zz^* = z^*z = (\|z\|^2, 0).$$

Vis endelig, at $\dot{C}^2$ er et legeme og en Banachalgebra over $\dot{R}$.

Idet vi identificerer $\dot{C}^2$ med $\dot{R}^4$ via

$$(z_1, z_2) \longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

hvor $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$, når vi til den sædvanlige fremstilling af kvaternionerne.

22. Lad T være en vilkårlig kompakt delmængde af $\dot{C}$. Find en kompleks Banachalgebra A med etelement og et element $a \in A$ hvis spektrum $\sigma(a) = T$.

23. Lad A være en kompleks Banachalgebra med etelement. Vis at følgende to betingelser er ensbetydende:

1) $\forall a \in A \ (\|a\| = r(a))$

2) $\forall a \in A \ (\|a^2\| = \|a\|^2)$.

Gælder påstanden også, hvis der ikke er noget etelement?

24. Lad A være en kompleks Banachalgebra med etelement e. Vis, at mængden $D = \{(a,\lambda) \in A \times \dot{C} \mid \lambda \in \rho(a)\}$ er en åben delmængde af $A \times \dot{C}$, og at $(a,\lambda) \mapsto R_\lambda(a) = (a - \lambda e)^{-1}$ er en kontinuert afbildning af D ind i A.

Vis, at afbildningen $a \mapsto \sigma(a)$ har følgende "kontinuitetsegenskab": For enhver åben delmængde $U \subseteq \dot{C}$ er mængden $\{a \in A \mid \sigma(a) \subseteq U\}$ åben i A.

Vis endelig, at spektralradien $r : A \to \dot{R}$ er en opad halvkontinuert funktion.

25. Lad A være en C^*-algebra. Vis at

$$\|x\| = \sup\{\|xy\| \mid \|y\| \leq 1\}.$$

Antag at e er et <u>venstre etelement</u>, altså at $a = ea$ for alle $a \in A$. Vis at e er et etelement.

Brug disse resultater til at vise følgende:

Lad A være en C^*-algebra uden etelement, og lad A_1 være algebraen med etelement defineret i opg.3.

Vis, at A_1 er en C^*-algebra ved fastsættelserne

$$(a,\alpha)^* = (a^*, \bar{\alpha}), \quad \|(a,\alpha)\| = \sup\{\|ay+\alpha y\| \mid y \in A, \|y\| \leq 1\},$$

og at der ved $a \mapsto (a,0)$ defineres en isometrisk $*$-homomorfi af A ind i A_1.

26. Udregn foldningen $f^* * f$ idet f er følgende funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0 \\ 1 & \text{for } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{for } 2 \leq x \end{cases}.$$

Vis dernæst at $\|f^* * f\| < \|f\|^2$, idet $\|\cdot\|$ er normen i Banachalgebraen $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.