KAPITEL I.

KONVERGENS AF REELLE OG KOMPLEKSE TALFØLGER.

Indhold:

§0. Nogle grundbegreber.

A. Matematisk logik og mængdelære.

Matematisk logik er logik udtrykt i formelsprog efter matematisk forbillede. Som grundlægger regner man George Boole (1815-64), og den matematiske logik har udviklet sig til en omfattende disciplin i nær tilknytning til studiet af matematikkens grundlag. Vi indskrænker os her til at give en præcisering af det logiske tegnsprog i den form vi vil benytte det til formulering af matematiske udsagn.

Matematiske udsagn. Udsagn opbygges fra atomiske udsagn ved hjælp af udsagnslogiske konnektiver og kvantorer.

De atomiske udsagn vil som regel have formen

$$xRy \ ,$$

hvor x og y er variable eller konstanter, der betegner veldefinerede matematiske objekter, og R er et relationssymbol, som f.eks. $=$, $<$, $\in$. I mange tilfælde vil x eller y dog være sammensatte termer, der er opbygget fra variable og konstanter, som f.eks. "$a+b/2$" . Et atomisk udsagn uden variable har en af sandhedsværdierne s ("sand") eller f ("falsk"), medens atomiske udsagn med variable normalt først får en sandhedsværdi, når de indgående variable knyttes til matematiske objekter.

De udsagnslogiske konnektiver er

negation:	$\neg p$	læses "non p" eller "ikke p" ;
konjunktion:	$p \wedge q$	læses "p og q" ;
disjunktion:	$p \vee q$	læses "p eller q" ;
implikation:	$p \Rightarrow q$	læses "hvis p så q" ;
biimplikation:	$p \Leftrightarrow q$	læses "p hvis og kun hvis q" .

Til disse hører sandhedstabellerne:

p	$\neg p$
s	f
f	s

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
s	s	s	s	s	s
s	f	f	s	f	f
f	s	f	s	s	f
f	f	f	f	s	s

Ved hjælp af disse kan man for alle kombinationer af sandhedsværdier for udsagn $p_1,\dots,p_n$ udregne sandhedsværdien for et udsagn p, der er opbygget fra $p_1,\dots,p_n$ ved hjælp af de udsagnslogiske konnektiver. Et udsagn, der på denne måde altid får tillagt sandhedsværdien s kaldes en udsagnslogisk tautologi. Et udsagn q siges at være en udsagnslogisk konsekvens af et udsagn p, såfremt implikationen $p \Rightarrow q$ er en udsagnslogisk tautologi. Dette betyder, at q er sand for alle kombinationer af sandhedsværdier for hvilke p er sand. To udsagn p og q kaldes udsagnslogisk ækvivalente, hvis biimplikationen $p \Leftrightarrow q$ er en tautologi. Dette er ensbetydende med at både $p \Rightarrow q$ og $q \Rightarrow p$ er udsagnslogiske tautologier. Udsagn af følgende form benyttes ofte som udsagnslogiske tautologier

$$\begin{array}{ccc}
\neg\neg p & \Rightarrow & p \\
p \Rightarrow q & \Leftrightarrow & \neg p \vee q \\
p \Rightarrow q & \Leftrightarrow & \neg q \Rightarrow \neg p \\
\neg(p \wedge q) & \Leftrightarrow & \neg p \vee \neg q \\
\neg(p \vee q) & \Leftrightarrow & \neg p \wedge \neg q
\end{array}$$

(Parenteser udelades i overensstemmelse med, at "bindingsevnen" for konnektiverne $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ og $\Leftrightarrow$ er faldende.)

Kvantorerne er:

alkvantoren: $\forall x p(x)$ læses som "for alle x gælder $p(x)$".
eksistenskvantoren: $\exists x p(x)$ læses som "der eksisterer et x, så $p(x)$".

Ved brug af kvantorerne i denne form er underforstået en universalmængde, som variablene gennemløber. I udsagnene $\forall x p(x)$ og $\exists x p(x)$ siges variablen x at blive bundet af kvantoren. En variabel, som ikke er bundet, kaldes fri. Et udsagn med frie variable kaldes et åbent udsagn, medens et udsagn uden frie variable kaldes et afsluttet udsagn. Ofte reserveres betegnelsen udsagn til afsluttede udsagn. Åbne udsagn får tildelt en sandhedsværdi, når de frie variable knyttes til elementer i universalmængden, medens afsluttede udsagn uden videre er sande eller falske.

Medens man ved at gennemprøve et endeligt antal muligheder kan undersøge om et udsagn er en udsagnslogisk tautologi, har man i almindelighed for uendelige universalmængder ingen mulighed for at afgøre om et udsagn er sandt for alle tildelinger af værdier til de frie variable. Vigtige typer af udsagn med denne egenskab (tautologier) er følgende:

$$\exists x \exists y p(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x p(x,y)$$
$$\forall x \forall y p(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x p(x,y)$$
$$\neg \exists x p(x) \Leftrightarrow \forall x \neg p(x)$$
$$\neg \forall x p(x) \Leftrightarrow \exists x \neg p(x)$$
$$\exists x (p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$$
$$\forall x (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow \forall x p(x) \wedge \forall x q(x)$$
$$\exists x \forall y p(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x p(x,y)$$
$$\forall x p(x) \vee \forall x q(x) \Rightarrow \forall x (p(x) \vee q(x))$$
$$\exists x (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \exists x p(x) \wedge \exists x q(x)$$

Udsagnene $\forall x \in M: p(x)$ og $\exists x \in M: p(x)$ kan opfattes som forkortelser for udsagnene $\forall x(x \in M \Rightarrow p(x))$ og $\exists x(x \in M \wedge p(x))$

Sætninger og beviser. En matematisk teori består af udsagn der formuleres i matematiske sætninger. Ved definitioner fastlægges betydningen af de begreber der indgår i teorien (gives en beskrivelse af teoriens objekter) og de matematiske sætninger er "sande" udsagn om disse begreber (objekter). Visse af teoriens sætninger "aksiomerne" antages uden videre at være sande, medens de øvrige er "konsekvenser" af aksiomerne og kan "bevises" ud fra disse.

Matematiske sætninger er (kan være) nyttige fordi de udsagn der hævdes er "sande udsagn om virkeligheden", kan anvendes. For eksempel stemmer det overens med al sædvanlig erfaring, at for en retvinklet trekant er kvadratet af hypotenusens længde lig summen af kvadraterne af kateternes længder.

Vi skal ikke her give en nærmere præcisering af hvad et bevis for en matematisk sætning er. Kravene til et matematisk bevis har ændret sig gennem tiden, men det væsentlige ved et bevis er, at det overbeviser om sandheden af den påstand det hævder at bevise. Om et bevis er "godt nok" afgøres således til en vis grad ved matematisk erfaring.

Et matematisk bevis består ofte af en række delargumenter eller skridt ("mellemregninger") hvor der i hvert skridt hævdes en påstand som "let" indses at være sand og som, når skridtene tages under ét samlet giver den ønskede påstand. Efterhånden som der opnås fortrolighed med beviser vil mange af disse skridt kunne udelades.

Følgende type bevis "<u>kontraposition</u>" kan ofte benyttes når en påstand af formen $(p \Rightarrow q)$ skal godtgøres. Idet de sammensatte udsagn $(p \Rightarrow q)$ og $(\neg q \Rightarrow \neg p)$ er ækvivalente, kan et bevis for at $(p \Rightarrow q)$ er sandt føres ved at vise at $(\neg q \Rightarrow \neg p)$ er sandt. For eksempel vil påstanden (hvis f er differentiabel så er f kontinuert) kunne bevises ved at vise påstanden (hvis f er ikke-kontinuert så er f ikke-differentiabel).

En anden hyppigt benyttet bevistype er det "<u>indirekte bevis</u>" (reductio ad absurdum), der består i ud fra negationen af den påstand som ønskes bevist at udlede en modstrid, d.v.s. at et udsagn af formen $(p \wedge \neg p)$ er sandt. I eksemplet ovenfor er negationen af påstanden (hvis f er differentiabel så er f kontinuert) udsagnet (f er differentiabel og f er ikke-kontinuert), og et indirekte bevis for den første påstand kan føres ved at vise at der ud fra negationen kan sluttes f.eks. (f er differentiabel og f er ikke-differentiabel) eller (f er kontinuert og f er ikke-kontinuert).

<u>Nødvendige og tilstrækkelige betingelser</u>. Et åbent udsagn $p(x)$ kan opfattes som en <u>betingelse</u> på x eller en <u>egenskab</u> ved x, idet det at hævde at $p(x)$ er sandt kommer ud på at x er således beskaffen at $p(x)$ er sandt til forskel fra eventuelle x' for hvilke $p(x')$ er falskt.

Lad p og q være åbne udsagn i den variable x. Hvis udsagnet

$$\forall x \; p(x) \Rightarrow q(x) \;,$$

er sandt, så siger vi at p er en <u>tilstrækkelig betingelse</u> for q (at p er "<u>stærkere</u>" end q) og at q er en <u>nødvendig betingelse</u> for p (at q er "<u>svagere</u>" end p). Tilsvarende hvis udsagnet

$$\forall x \; p(x) \Leftrightarrow q(x) \;,$$

er sandt, så siger vi at p er en <u>nødvendig</u> og <u>tilstrækkelig betingelse</u> for q (p og q er "<u>lige stærke</u>"). Idet enhver differentiabel funktion er kontinuert, kan vi altså sige, at differentiabilitet er en tilstrækkelig betingelse for kontinuitet og at kontinuitet er en nødvendig betingelse for differentiabilitet.

Ved en skriftlig fremstilling af matematik foretrækker man i reglen det smidige sædvanlige sprog frem for det logiske tegnsprog, som - når det skal læses - kræver en omsætning til sædvanligt sprog. Derimod finder det logiske tegnsprog udstrakt anvendelse i tilslutning til mundtlig fremstilling. Ved anvendelsen tillader man sig, ligesom ved brugen af det egentlige matematiske tegnsprog, ofte friheder, som det næppe lønner sig at forsøge at afgrænse.

- " -

Mængdelæren er grundlæggende i vore dages matematik. Som selvstændig disciplin er den grundlagt af Georg Cantor (1845-1918) i en række afhandlinger fra årene 1874-97. Vi skal ikke her gå ind på de dybereliggende afsnit af den almene mængdelære, men kun omtale dens tegnsprog og dens simpleste begreber.

Mængdebegrebet. Ved en mængde vil vi i det følgende forstå en velafgrænset samling af matematiske objekter; disse kaldes mængdens elementer. At x er element af mængden M, skrives $x \in M$ eller $M \ni x$; at x ikke er element af mængden M, skrives $x \notin M$ eller $M \not\ni x$. Man ser, at $x \notin M$ blot er en anden skrivemåde for $\neg(x \in M)$. En mængde er selv et matematisk objekt og kan som sådant være element af andre mængder. En mængde kaldes ofte et rum; dens elementer kaldes da punkter.

En endelig mængde kan angives ved at man i en krøllet parentes opremser dens elementer. Der er herved intet i vejen for, at samme element skrives flere gange, og rækkefølgen er ligegyldig. Således betegner $\{1,3,2,5,2\}$ og $\{1,5,2,3\}$ den samme mængde, nemlig den, hvis elementer er tallene $1,2,3,5$ og ikke andre objekter; og hvis x er et matematisk objekt betegner $\{x\}$ mængden med det ene element x.

For nogle mængder benyttes faste betegnelser:

$\emptyset$ er den tomme mængde;
$\mathbb{N}$ er mængden af alle naturlige, d.v.s. hele, positive tal;
$\mathbb{N}_0$ er mængden af alle ikke-negative hele tal;
$\mathbb{Z}$ er mængden af alle hele tal;
$\mathbb{Q}$ er mængden af alle rationale tal;
$\mathbb{R}$ er mængden af alle reelle tal;
$\mathbb{R}_+$ er mængden af alle positive reelle tal;
$\mathbb{C}$ er mængden af alle komplekse tal.

En mængde A kaldes <u>delmængde</u> af mængden B og man skriver $A \subseteq B$ eller $B \supseteq A$, hvis hvert element af A også er element af B. Mængden A kaldes <u>ægte delmængde</u> af mængden B, hvis A er delmængde af B og $A \neq B$. Den tomme mængde $\emptyset$ er delmængde af enhver mængde.

Mængden af delmængder af en mængde M, altså den mængde, hvis elementer er delmængderne af M, betegnes i det følgende $\mathbb{P}(M)$, og kaldes <u>potensmængden</u> for M.

Ofte vil der være givet en fast mængde M, hvorom undersøgelserne drejer sig. Mængden M kaldes da <u>grundmængden</u>, eller <u>universalmængden</u>. Af sproglige grunde er det da hensigtsmæssigt at benytte benævnelsen mængde fortrinsvis for delmængder af M og for andre mængder at benytte et synonym. F.eks. kan man kalde en delmængde af $\mathbb{P}(M)$ et <u>system</u> af delmængder af M eller blot et mængdesystem.

Hvis der til hvert element i af en mængde I (der ikke behøver at være delmængde af M) er knyttet et element x_i af M, udgør disse elementer en delmængde af M, der betegnes $\{x_i \mid i \in I\}$. Mængden I kaldes <u>indexmængden</u>. Ved brug af denne betegnelse forlanges ikke, at de til to forskellige indices svarende elementer er forskellige. Hvis I består af tallene $1,\ldots,n$, er det mængden $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Hvis $I = \mathbb{N}$, benyttes også betegnelsen $\{x_1,x_2,\ldots\}$.

En delmængde A af M kan være karakteriseret ved en eller flere egenskaber, der udskiller elementerne af A blandt elementerne af M. Det er i reglen bekvemt at formulere de egenskaber, der karakteriserer elementerne af A, ved et udsagn $p(x)$, således at A som elementer har netop de elementer x af M, for hvilke $p(x)$ er sandt. Vi skriver da

$$A = \{x \in M \mid p(x)\} \quad \text{eller} \quad A = \{x \mid p(x)\},$$

idet den sidste skrivemåde kan benyttes, når det af sammenhængen fremgår, hvilken mængde M, der er grundmængde.

<u>Mængdealgebra</u>. For delmængder af en grundmængde M defineres <u>fællesmængden</u> $A \cap B$, <u>foreningsmængden</u> $A \cup B$, og <u>overskudsmængden</u> $A \setminus B$ af A over B, eller <u>komplementet</u> af B i A, ved formlerne

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\} \ .$$

Komplementet $M \setminus A$ af en delmængde A af M i M kaldes kort <u>komplementærmængden</u> for A og betegnes også $\sim A$ eller $\complement A$. Man bemærker, at $\sim(\sim A) = A$, $\sim M = \emptyset$, $\sim\emptyset = M$, og at der for vilkårlige delmængder af M gælder $A \setminus B = A \cap (\sim B)$. Hvis $A \cap B = \emptyset$, kaldes A og B <u>disjunkte</u>.

Man ser, at $(A\cap B) \cap C = A \cap (B\cap C)$ og $(A\cup B) \cup C = A \cup (B\cup C)$, så at man kan udelade parenteserne og tale om mængderne $A \cap B \cap C$ og $A \cup B \cup C$. For vilkårlige mængder $A_1, \ldots, A_n$ kan man herefter også tale om fællesmængden $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ og foreningsmængden $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, der kort betegnes $\cap_{i=1}^{n} A_i$ og $\cup_{i=1}^{n} A_i$.

Alment kan vi, hvis der til hvert element i af en indexmængde I er knyttet en delmængde A_i af M , definere fællesmængden $\cap\{A_i \mid i \in I\}$ og foreningsmængden $\cup\{A_i \mid i \in I\}$ ved formlerne

$$\cap\{A_i \mid i \in I\} = \{x \mid \forall i \in I: x \in A_i\}$$
$$\cup\{A_i \mid i \in I\} = \{x \mid \exists i \in I: x \in A_i\} \ .$$

De to mængder betegnes også $\cap_{i\in I} A_i$ og $\cup_{i\in I} A_i$. Hvis $I = \mathbb{N}$ anvendes også betegnelserne $A_1 \cap A_2 \cap \ldots$ og $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ eller $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ og $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Der gælder <u>dualitetslovene</u>

$$A \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (A \setminus A_i)$$

$$A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (A \setminus A_i) \ .$$

Et system $\{A_i \mid i \in I\}$ af delmængder af M siges at <u>overdække</u> en delmængde A af M , eller at udgøre en <u>overdækning</u> af A , hvis $A \subseteq \cup\{A_i \mid i \in I\}$. Hvis $A = \cup\{A_i \mid i \in I\}$ og mængderne i systemet er parvis disjunkte og ingen af dem er den tomme mængde $\emptyset$, kaldes overdækningen en klassedeling af A .

Den betragtede grundmængde har kun virkelig betydning i forbindelse med begrebet komplementærmængde. De øvrige begreber: fællesmængde, foreningsmængde, overskudsmængde, er uafhængige af hvilken grundmængde indeholdende de pågældende mængder man vælger.

<u>Produktmængder</u>. Lad X og Y være to mængder. Ved <u>produktet</u> $X \times Y$ forstås mængden af alle ordnede par (x,y), hvor $x \in X$ og $y \in Y$. Man kalder elementerne x og y <u>koordinaterne</u> af (x,y) eller <u>projektionerne</u> af (x,y) på X og Y; undertiden kaldes x <u>abscissen</u> og y <u>ordinaten</u> af (x,y).

Hvis $A \subseteq X$ og $B \subseteq Y$, er $A \times B$ en delmængde af $X \times Y$ (men $X \times Y$ har naturligvis, undtagen i trivielle tilfælde, mange flere delmængder end delmængder af denne form).

For vilkårlige mængder $X_1,\dots,X_n$ kan vi danne mængden $X_1 \times \dots \times X_n$ bestående af alle ordnede sæt $(x_1,\dots,x_n)$, hvor $x_1 \in X_1,\dots,x_n \in X_n$.

Hvis alle X_i er samme mængde X, betegnes produktet $X \times \dots \times X$ med X^n. Mængden X^n består altså af alle ordnede sæt $(x_1,\dots,x_n)$, hvor $x_1,\dots,x_n \in X$.

Mængden $\mathbb{R}^k$ kaldes det k-<u>dimensionale</u> <u>reelle</u> <u>talrum</u>. For $k = 1,2,3$ optræder $\mathbb{R}^k$ i den aritmetiske beskrivelse af en ret linie, en plan, eller rummet, der baseres på indførelsen af koordinater. Analogt kaldes mængden $\mathbb{C}^k$ det k-<u>dimensionale</u> <u>komplekse</u> <u>talrum</u>.

<u>Induktionsbeviser</u>. Vi skal tage for givet, at mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal $\{1,2,3,\dots\}$ har følgende egenskab (<u>princippet</u> <u>for</u> <u>matematisk</u> <u>induktion</u>):

En delmængde $A \subseteq \mathbb{N}$ som opfylder

(i) $1 \in A$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}: n \in A \Rightarrow n+1 \in A$,

er lig $\mathbb{N}$.

Denne egenskab ved $\mathbb{N}$ udnyttes i <u>induktionsbeviser</u>. Lad $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$ være en følge af udsagn. Et induktionsbevis for at alle disse udsagn er sande kan føres ved at godtgøre følgende to påstande:

1^o. p_1 er sandt,

2^o. for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder, at hvis p_n er sandt så er p_{n+1} sandt.

Mængden $A = \{n \in \mathbb{N} \mid p_n \text{ er sandt}\}$ opfylder nemlig, at $1 \in A$ (1^o) og $\forall n \in \mathbb{N}: n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ (2^o), og er derfor ifølge princippet for matematisk induktion lig $\mathbb{N}$.

Påstanden 1^o kaldes <u>induktionens start</u> og 2^o kaldes <u>induktionsskridtet</u>.

EKSEMPEL. For alle naturlige tal $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1) .$$

Lad p_n for $n \in \mathbb{N}$ betegne udsagnet

$$\text{"}1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)\text{"} .$$

Udsagnet p_1 er altså at $1 = \frac{1}{2}\cdot 1(1+1) = 1$ som er sandt, og p_2 er at $1+2 = \frac{1}{2}2\cdot(2+1) = 3$ som også er sandt. Vi skal vise at p_n er sand for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induktion og vi har set at induktionen kan starte. Lad os godtgøre induktionsskridtet. Antag altså, for et $n \in \mathbb{N}$, at p_n er sandt, altså at

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1) .$$

Så finder vi

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= \frac{1}{2}n(n+1)+(n+1) \\ &= (n+1)(\tfrac{1}{2}n+1) = (n+1)\tfrac{1}{2}\cdot 2(\tfrac{1}{2}n+1) = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1)[(n+1)+1] , \end{aligned}$$

hvilket viser at p_{n+1} er sandt.

Dermed er induktionsskridtet godtgjort, og det følger af princippet for matematisk induktion at

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n\,(n+1)$$

for alle naturlige tal n . ▯

Der vil i det følgende ofte være brug for at kunne skrive summer af et (stort) antal tal på en kort og overskuelig måde. Dette gøres ved hjælp af summationstegnet Σ (stort græsk sigma). For reelle tal $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \in \mathbb{N})$, skriver vi således

$$\sum_{j=1}^{k} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \;.$$

Her er summationsvariablen j blot en eller anden variabel der gennemløber tallene $1, 2, \ldots, k$. F.eks. kan vi skrive

$$\sum_{j=1}^{k} a_j = \sum_{p=1}^{k} a_p = \sum_{i=0}^{k-1} a_{i+1} = \ldots \;.$$

Med denne konvention kan formlen i det foregående eksempel skrives

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}n\,(n+1) \;.$$

EKSEMPEL. For ethvert reelt tal $q \neq 1$ og ethvert naturligt tal $n \in \mathbb{N}$ gælder ("kvotientrække med kvotient q "):

$$1+q+q^2+ \ldots +q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

eller skrevet med summationstegn $\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Lad p_n betegne udsagnet

$$\text{"}1+q+ \ldots +q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\text{"} \;.$$

Udsagnet p_1 er altså $1+q = \frac{1-q^2}{1-q}$, som er sandt fordi $(1+q)(1-q) = 1-q^2$. Vi vil vise at p_n er sandt for alle $n \in \mathbb{N}$

ved induktion, og vi har set at p_1 er sandt. Lad os bevise induktionsskridtet. Antag altså at p_n er sandt d.v.s. at

$$1+q+\ \dots\ +q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} .$$

Så finder vi

$$1+q+\ \dots\ +q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q} ,$$

hvilket viser at p_{n+1} er sandt.

Ifølge princippet for matematisk induktion gælder altså

$$1+q+\ \dots\ +q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

for $q \neq 1$ og alle $n \in \mathbb{N}$. []

EKSEMPEL. For et naturligt tal $n \in \mathbb{N}$ betegner $n!$ (n <u>fakultet</u> eller n <u>udråbstegn</u>) produktet $1 \cdot 2 \cdots n$, og vi sætter $0! = 1$. For $n \in \mathbb{N}_0$ og $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$ er <u>binomialkoefficienten</u> $\binom{n}{k}$ givet ved

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

For reelle tal a og b og naturlige tal $n \in \mathbb{N}$ gælder <u>binomialformlen</u>

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}b^n + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n}a^n ,$$

som ved hjælp af summationstegnet kort skrives

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

Vi vil vise binomialformlen ved induktion og betegner med p_n for $n \in \mathbb{N}$ udsagnet

$$"(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}".$$

Udsagnet p_1 er altså

$$a+b = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a+b ,$$

som er sandt. Udsagnet p_2 er

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k} = \binom{2}{0} a^0 b^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^2 b^0$$

$$= b^2 + 2ab + a^2,$$

som også er sandt.

I beviset for induktionsskridtet får vi brug for at der for $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

for $k = 1,2,\ldots,n$. Dette ses ved udregning:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$$

$$= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n+1-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} .$$

Nu til induktionsskridtet. Antag altså, at der for et $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

Så finder vi

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} ,$$

her spaltes sidste, henholdsvis første led fra

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1-1} a^{k+1} b^{n+1-(k+1)}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} ,$$

i den første sum erstattes $k+1$ med k, hvorefter k altså gennemløber tallene $1,2,\ldots,n$,

$$= \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} ,$$

som ved hjælp af formlen $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ kan skrives

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} ,$$

hvilket viser induktionsskridtet.

Ifølge princippet for matematisk induktion gælder altså

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

for $n \in \mathbb{N}$ og reelle tal a,b. ∎

B. Relationer og afbildninger.

Relationer. Lad X og Y være to mængder. Ved en relation fra X til Y forstås en delmængde R af produktmængden $X \times Y$. For vilkårlige elementer $x \in X$ og $y \in Y$ siger vi, at x står i relationen R til y, såfremt $(x,y) \in R$. I denne sammenhæng benyttes i stedet for $(x,y) \in R$ også skrivemåden xRy.

Relationer betegnes ofte ved særlige tegn i stedet for ved bogstaver.

Ud fra relationen R fra X til Y dannes en relation R^{-1} fra Y til X, kaldet den <u>omvendte</u> relation til R, idet delmængden R^{-1} af produktmængden $Y \times X$ defineres som mængden af ordnede par (y,x), for hvilke $(x,y) \in R$. Man ser, at de to udsagn xRy og $yR^{-1}x$ er ensgyldige.

Er specielt X og Y samme mængde M, kaldes en relation fra X til Y en relation i M. En relation i M er altså en delmængde R af M^2.

En relation R i en mængde M kaldes <u>refleksiv</u>, hvis der for ethvert $x \in M$ gælder xRx. Den kaldes <u>symmetrisk</u>, hvis der for vilkårlige $x,y \in M$ gælder $xRy \Rightarrow yRx$, altså hvis $R^{-1} = R$. Den kaldes <u>asymmetrisk</u>, hvis der for vilkårlige $x,y \in M$ gælder $xRy \wedge x \neq y \Rightarrow \neg yRx$; man overbeviser sig let om, at dette kommer ud på et med, at der for vilkårlige $x,y \in M$ gælder $xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$. Den kaldes <u>transitiv</u>, hvis der for vilkårlige $x,y,z \in M$ gælder $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

<u>Ækvivalensrelation</u>. En relation $\sim$ i en mængde M kaldes en <u>ækvivalensrelation</u>, hvis den er <u>refleksiv</u>, <u>symmetrisk</u>, og <u>transitiv</u>, altså hvis der for vilkårlige elementer af M gælder

(1) $\quad x \sim x$

(2) $\quad x \sim y \Rightarrow y \sim x$

(3) $\quad x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Begrebet ækvivalensrelation står på følgende måde i forbindelse med begrebet <u>klassedeling</u>:

Lad $\{A_i \mid i \in I\}$ være et system af delmængder af M, der udgør en klassedeling af M. Ved fastsættelsen $x \sim y$, når x og y tilhører samme klasse A_i, er da defineret en ækvivalensrelation i M. Dette er klart.

Enhver ækvivalensrelation $\sim$ i M fremkommer på denne måde ud fra netop een klassedeling. For at indse dette danner man for hvert $x \in M$ mængden $A_x = \{y \in M \mid x \sim y\}$. Man viser nu let, at systemet $\{A_x \mid x \in M\}$ udgør en klassedeling af M, at $\sim$ netop er den til denne klassedeling hørende ækvivalensrelation, og at $\sim$ ikke hører til nogen anden klassedeling af M.

Klasserne (delmængderne) ved den til en ækvivalensrelation hørende klassedeling kaldes <u>ækvivalensklasser</u>, og mængden af ækvivalensklasser kaldes <u>kvotientmængden</u> for ækvivalensrelationen.

Ordningsrelation. En relation $\preccurlyeq$ i en mængde M kaldes en ordningsrelation, hvis den er refleksiv, asymmetrisk, og transitiv, altså hvis

(1) $x \preccurlyeq x$

(2) $x \preccurlyeq y \ \wedge \ y \preccurlyeq x \ \Rightarrow \ x = y$

(3) $x \preccurlyeq y \ \wedge \ y \preccurlyeq z \ \Rightarrow \ x \preccurlyeq z$.

Når $\preccurlyeq$ er en ordningsrelation i M, skrives i stedet for $x \preccurlyeq y \ \wedge \ x \neq y$ også $x \prec y$. I stedet for $x \preccurlyeq y$ og $x \prec y$ skrives også $y \succcurlyeq x$ og $y \succ x$, d.v.s. $\succcurlyeq$ og $\succ$ benyttes som betegnelser for de omvendte relationer til $\preccurlyeq$ og $\prec$. Bemærk, at $\neg(x \prec x)$ og at $x \prec y \ \wedge \ y \prec z \ \Rightarrow \ x \prec z$.

En ordningsrelation kaldes total, hvis der for vilkårlige indbyrdes forskellige $x,y \in M$ gælder $x \prec y$ eller $y \prec x$.

En mængde M udstyret med en ordningsrelation $\preccurlyeq$ kaldes en ordnet mængde; mængden siges at være organiseret ved relationen $\preccurlyeq$; er ordningsrelationen total kaldes mængden totalt ordnet. Ønsker man i benævnelsen for en ordnet mængde at anføre ordningsrelationens navn, taler man om den ordnede mængde $(M,\preccurlyeq)$.

Afbildninger eller funktioner. Ved en afbildning af en mængde X ind i en mængde Y , eller en funktion fra X til Y , forstås en tilordning, hvorved der til hvert element $x \in X$ svarer et bestemt element $y \in Y$.

En afbildning betegnes i reglen ved et enkelt bogstav, undertiden ved en ordforkortelse. At f er en afbildning af X ind i Y skrives

$$f\colon X \to Y \quad \text{eller} \quad X \xrightarrow{f} Y .$$

Mængden X kaldes afbildningens definitionsmængde og mængden Y dens dispositionsmængde. Det til et element $x \in X$ svarende element af Y betegnes $f(x)$. Det kaldes billedet af x ved f eller den til x hørende værdi eller funktionsværdi. At $f(x)$ svarer til x skrives hyppigt $x \mapsto f(x)$, og ofte benyttes symbolet

$$x \mapsto f(x) ,$$

simpelthen som betegnelse for afbildningen f . En afbildning $f\colon X \to Y$ omtales ofte som afbildningen $f(x)$ eller $y = f(x)$, idet $x \in X$ kaldes den uafhængige variable og $y \in Y$ den afhængige variable.

I tilfælde af en endelig mængde X kan en afbildning angives ved en tabel:

$$f = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ f(x_1) & \dots & f(x_n) \end{pmatrix} .$$

For en vilkårlig delmængde A af X udgør billederne af alle $x \in A$ en delmængde af Y, der kaldes <u>billedet</u> af A ved f og betegnes $f(A)$, altså

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} .$$

Den særlige brug af tegnet f i forbindelsen $f(A)$ er en praktisk konvention og bør ikke føre til misforståelser. Billedet $f(X)$ kaldes <u>billedmængden</u> eller <u>værdimængden</u> for f.

Ved <u>grafen</u> for en afbildning $f\colon X \to Y$ forstås delmængden $\{(x,f(x)) \mid x \in X\}$ af $X \times Y$. En delmængde R af $X \times Y$ er åbenbart grafen for en afbildning af X ind i Y, hvis og kun hvis der for ethvert $x \in X$ findes et og kun eet $y \in Y$, for hvilket $(x,y) \in R$. Begrebet afbildning indordnes herigennem under begrebet relation, idet afbildninger af X ind i Y modsvarer denne specielle type af relationer fra X til Y.

En afbildning $f\colon X \to Y$ kaldes <u>surjektiv</u> eller en afbildning af X <u>på</u> Y, hvis $f(X) = Y$. Den kaldes <u>injektiv</u>, hvis der for vilkårlige indbyrdes forskellige $x_1, x_2 \in X$ gælder $f(x_1) \neq f(x_2)$. Den kaldes <u>bijektiv</u>, hvis den er både surjektiv og injektiv, altså hvis ethvert $y \in Y$ er billede af et og kun eet $x \in X$. Man ser, at afbildningen $f\colon X \to Y$ er bijektiv, hvis og kun hvis det om dens graf $R = \{(x,f(x)) \mid x \in X\}$, opfattet som relation fra X til Y, gælder, at den omvendte relation R^{-1} modsvarer en afbildning af Y ind i X; denne afbildning kaldes den <u>omvendte afbildning</u> til f og betegnes f^{-1}; den er naturligvis også bijektiv, og der gælder $(f^{-1})^{-1} = f$.

Er $A \subseteq X$ og er $f\colon X \to Y$ og $g\colon A \to Y$ afbildninger, siges g at være en <u>restriktion</u> (indskrænkning) af f, og f en <u>ekstension</u> (udvidelse) af g, hvis $g(x) = f(x)$ for ethvert $x \in A$. Nærmere bestemt kaldes g i dette tilfælde <u>restriktionen af</u> f <u>til</u> A. Den betegnes $f|A$.

Er $f\colon X \to Y$ en afbildning og er y et element af Y, kaldes ethvert element x af X, for hvilket $f(x) = y$, et originalelement for y ved f. Et element $y \in Y$ kan have intet, eet, eller flere originalelementer. For en vilkårlig delmængde B af Y udgør samtlige originalelementer for alle $y \in B$ en delmængde af X, der kaldes originalmængden for B ved f og betegnes $f^{-1}(B)$, altså

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} .$$

Bemærk, at denne betegnelse bruges uanset om f er bijektiv eller ej. Hvis f er bijektiv, så at den omvendte afbildning $f^{-1}: Y \to X$ eksisterer, er originalmængden $f^{-1}(B)$ lig med billedet af B ved f^{-1}. Ved indførelsen af betegnelsen $f^{-1}(B)$ for originalmængden er vi altså ikke kommet i strid med betegnelsesmåden for billedet af en mængde. Bemærk, at $f^{-1}(Y) = X$, og at der for en vilkårlig delmængde A af X gælder $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

Vælges specielt for B en mængde $\{y\}$ bestående af eet element, bliver originalmængden $f^{-1}(\{y\})$ mængden bestående af samtlige originalelementer for y. Man bemærker, at de fra $\emptyset$ forskellige af disse mængder $f^{-1}(\{y\})$ udgør en klassedeling af X. [Den tilsvarende ækvivalensrelation $\sim$ er bestemt ved, at $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.]

I visse sammenhænge spiller betragtningen af originalmængden en større rolle end betragtningen af billedmængden. Vi fremhæver følgende regler, som kort kan udtrykkes ved at sige, at de fundamentale mængdeoperationer bevares ved overgang til originalmængder:

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2), \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i),$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \quad f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i),$$

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) .$$

[For billedmængder gælder $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$, $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$, $f(A_1 \setminus A_2) \subseteq f(A_1)$, men i almindelighed ikke $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ og $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$.]

Lad X, Y, Z være mængder og lad $f: X \to Y$ og $g: Y \to Z$ være afbildninger. Den sammensatte afbildning $g \circ f: X \to Z$ defineres da som den afbildning, hvorved der til hvert element $x \in X$ svarer elementet $g(f(x))$ i Z, altså

$$x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) .$$

For sammensætning af afbildninger gælder den associative regel: Hvis X, Y, Z, U er mængder og $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to U$ er afbildninger, er

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f .$$

Thi $h\circ(g\circ f)$ og $(h\circ g)\circ f$ er afbildninger af X ind i U, og begge har for ethvert $x \in X$ værdien $h(g(f(x)))$. Man kan derfor udelade parenteserne og simpelthen skrive $h\circ g\circ f$.

Lad $f: X \to Y$ og $g: Y \to Z$ være afbildninger. Da gælder: Hvis f og g begge er surjektive, er $g\circ f$ surjektiv. Hvis f og g begge er injektive, er $g\circ f$ injektiv. Hvis f og g begge er bijektive, er $g\circ f$ bijektiv, og da er $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$. Endvidere gælder: Hvis $g\circ f$ er injektiv, er f injektiv (men ikke nødvendigvis g). Hvis $g\circ f$ er surjektiv, er g surjektiv (men ikke nødvendigvis f).

Blandt afbildningerne af en mængde X ind i sig selv fremhæves den identiske afbildning id_X, ved hvilken hvert element $x \in X$ svarer til sig selv: $x \mapsto x$. Hvis A er en delmængde af X, kaldes restriktionen af id_X til A for inklusionsafbildningen fra A til X.

For enhver bijektiv afbildning $f: X \to Y$ gælder $f^{-1}\circ f = id_X$ og $f\circ f^{-1} = id_Y$.

Hvis $(M,\leq)$ og $(\hat{M},\hat{\leq})$ er ordnede mængder, og $\varphi: M \to \hat{M}$ er en afbildning, for hvilken der for vilkårlige $a,b \in M$ gælder $a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \hat{\leq} \varphi(b)$, siger man, at afbildningen er monotont voksende eller stigende. Hvis $a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \hat{\geq} \varphi(b)$ siges den at være monotont aftagende eller dalende. Hvis $a < b \Rightarrow \varphi(a) \hat{<} \varphi(b)$ siges den at være ordenstro eller strengt voksende. Hvis $a < b \Rightarrow \varphi(a) \hat{>} \varphi(b)$ siges den at være strengt aftagende.

Punktfølger og talfølger. Lad X være en ikke-tom mængde. En punktfølge - eller blot følge - på X er en afbildning af $\mathbb{N}$ ind i X; en punktfølge på X skrives $(x_n \in X \mid n \in \mathbb{N})$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ eller (x_n), hvor $x_n \in X$ er billedet af $n \in \mathbb{N}$ ved den afbildning, der definerer punktfølgen. En punktfølge på X er altså en "uendelig række" af elementer $x_n \in X$ taget i rækkefølgen $x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots$ og hvor et bestemt element $x \in X$ kan optræde på flere forskellige (også uendelig mange forskellige) "pladser" i rækkefølgen. En punktfølge $(x_1,x_2,x_3, \dots)$ må ikke forveksles med delmængden $\{x_1,x_2,x_3, \dots\} \subseteq X$, altså mængden af følgens elementer. Hvis f.eks. $x,y \in X$ opfylder $x \neq y$ er punktfølgerne

$$(x,y,x,y,x,y\dots) \;,\; (x,x,y,x,x,y,x,x,y,\dots) \text{ og } (x,y,y,y\dots)$$

alle forskellige (som afbildninger af $\mathbb{N}$ ind i X), medens mængden af følgens elementer i alle tilfælde er $\{x,y\}$.

Hvis mængden X er en mængde af tal (reelle, udvidet reelle eller komplekse) kaldes en punktfølge på X en talfølge (reel, udvidet reel eller kompleks) og hvis X er en mængde af funktioner eller afbildninger defineret på en mængde $M \neq \emptyset$ siger vi funktionsfølge på M eller følge af afbildninger på M i stedet for punktfølge på X.

En punktfølge (y_n) på X kaldes en delfølge af en punktfølge (x_n) på X hvis der findes en strengt voksende afbildning $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n < m \Rightarrow \sigma(n) < \sigma(m))$ så $y_n = x_{\sigma(n)}$ for $n \in \mathbb{N}$, eller anderledes sagt, hvis der findes en strengt voksende følge $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ af naturlige tal så $y_p = x_{n_p}$ for $p \in \mathbb{N}$ (svarende til $\sigma(p) = n_p$).

For eksempel er punktfølgerne

$$(x_2,x_4,x_6,\dots) \;,$$
$$(x_1,x_4,x_9,\dots) \;,$$
$$(x_1,x_2,x_3,x_5,x_8,\dots) \;,$$

delfølger af punktfølgen (x_n), svarende til $\sigma(p) = 2p$, $\sigma(p) = p^2$ og

$$\sigma(p) = \begin{cases} 1 & \text{for } p = 1 \;, \\ 2 & \text{for } p = 2 \;, \\ \sigma(p-1)+\sigma(p-2) & \text{for } p \geq 3 \;. \end{cases}$$

Det er imidlertid afgørende, at man kan ræsonnere om en delfølge uden at kende den eksplicit. Ofte vil man blot vide, at der findes en delfølge med visse bestemte egenskaber.

Ekvipotens og numerabilitet. Hvis X og Y er mængder og der findes en bijektiv afbildning af X på Y, og dermed også en bijektiv afbildning af Y på X, kaldes X og Y ekvipotente eller de siges at have samme mægtighed. Det er klart, at hvis X og Y er ekvipotente og hvis Y og Z er ekvipotente så er X og Z ekvipotente.

En mængde X siges at være en <u>endelig</u> mængde med n elementer, hvis elementerne i X kan nummereres ved hjælp af afsnittet $\{1,\ldots,n\}$ af den naturlige talrække. Man får X skrevet på formen $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$, hvor $x_i \neq x_j$ for $i \neq j$. Til de endelige mængder regnes også $\emptyset$.

De endelige mængder med n elementer kan karakteriseres som de mængder, der er ekvipotente med afsnittet $\{1,\ldots,n\}$ af den naturlige talrække.

En ikke tom mængde X som ikke er endelig kaldes <u>uendelig</u>. Lad X være en ikke tom mængde og betragt følgende delmængde $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists x_1,\ldots,x_m \in X \,,\ x_i \neq x_j \ \text{for} \ i \neq j\} \,.$$

(A er altså de naturlige tal m for hvilke der findes m indbyrdes forskellige elementer af X.) Det er klart at $1 \in A$, og at $n \notin A \Rightarrow n+1 \notin A$ (hvis der ikke findes n indbyrdes forskellige elementer af X så findes heller ikke $n+1$ indbyrdes forskellige elementer af X). Man ser, at X er en endelig mængde med n elementer hvis og kun hvis $A = \{1,2,\ldots,n\}$. En uendelig mængde X har altså egenskaben, at for hvert $m \in \mathbb{N}$ findes m indbyrdes forskellige elementer af X. Blandt de uendelige mængder skal vi især interessere os for de numerable mængder.

En mængde X kaldes <u>numerabel</u> eller <u>tællelig</u>, hvis elementerne i X kan nummereres ved hjælp af hele den naturlige talrække $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$, altså hvis X kan skrives på formen $X = \{x_1,x_2,\ldots\} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, hvor $x_i \neq x_j$ for $i \neq j$.

De numerable mængder kan karakteriseres som de mængder, der er ekvipotente med hele den naturlige talrække $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$.

For eksempel er mængderne

$$\{1,3,5,7,9,\ldots,2n-1,\ldots\}$$
$$\{2,4,6,8,10,\ldots,2n,\ldots\}$$
$$\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots,n,-n,\ldots\} = \mathbb{Z}$$

alle numerable. Den eksplicite nummerering af $\mathbb{Z}$ er givet ved $x_1 = 0$, $x_{2n} = n$ og $x_{2n+1} = -n$. Man ser specielt, at man fra en numerabel mængde kan fjerne numerabelt mange elementer og dog er restmængden stadig uendelig.

Det kunne synes rimeligt under benævnelsen numerabel mængde at medtage de endelige mængder (og undertiden ser man denne sprogbrug anvendt), men vi vil her bruge udtrykket i den anførte betydning.

(1) <u>Enhver uendelig mængde X har en numerabel delmængde</u>.

Lad x_1 være et element af X . Da X er uendelig, er $X\setminus\{x_1\}$ ikke tom. Lad x_2 være et element af $X\setminus\{x_1\}$. Da X er uendelig, er $X\setminus\{x_1,x_2\}$ ikke tom. Således fortsættes, og vi får derved i X valgt en numerabel delmængde $\{x_1,x_2,\ldots\}$. ‖

(2) <u>Enhver delmængde af en numerabel mængde X er endelig eller numerabel</u>.

Lad $X = \{x_1,x_2,\ldots\}$ og lad A være en delmængde af X . Vi noterer elementerne i A i den rækkefølge vi møder dem i X og konstaterer, at $A = \{x_{p_1},\ldots,x_{p_n}\}$, hvor $p_1 < \ldots < p_n$, eller $A = \{x_{p_1},x_{p_2},\ldots\}$, hvor $p_1 < p_2 < \ldots$. ‖

(3) <u>Foreningsmængden af endeligt eller numerabelt mange endelige eller numerable mængder er endelig eller numerabel</u>.

Lad mængderne være $X_1 = \{x_{11},x_{12},\ldots\}$, $X_2 = \{x_{21},x_{22},\ldots\}$,

... (hvor vi i betegnelserne har afstået fra at give udtryk for, om de enkelte mængder er endelige eller numerable og om der er endeligt eller numerabelt mange mængder) og lad $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots$. Da er $X = \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, x_{22}, x_{31}, \ldots\}$ (hvor pladser, til hvilke der ikke svarer noget element, naturligvis skal forbigås). Idet vi stryger gentagelser, får vi X skrevet på formen $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eller $\{x_1, x_2, \ldots\}$, hvor $x_i \neq x_j$ for $i \neq j$. ▮

I tilfældet hvor X og Y er numerable mængder $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ og $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ bliver den valgte nummerering af $X \cup Y$ altså ("blandingen")

$$X \cup Y = \{x_1, x_2, y_1, x_3, y_2, x_4, y_3, \ldots\} ,$$

og hvis $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ er en tredie numerabel mængde bliver nummereringen af $X \cup Y \cup Z$ altså

$$X \cup Y \cup Z = \{x_1, x_2, y_1, x_3, y_2, z_1, x_4, y_3, z_2, \ldots\} .$$

(4) <u>Hvis</u> $X_1, \ldots, X_n$ <u>er numerable mængder, er også produktmængden</u> $X_1 \times \ldots \times X_n$ <u>numerabel</u>.

For $n = 2$ følger det af, at $X_1 \times X_2$ er foreningsmængden af de numerabelt mange mængder $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1\}$, $x_2 \in X_2$, som hver er numerabel. Ved induktion ses herefter, at det gælder for $n > 2$. ▮

Som eksempler nævnes:

$\mathbb{Z}$ er numerabel. Thi $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \{1,2,\ldots\} \cup \{-1,-2,\ldots\}$.

$\mathbb{Q}$ <u>er numerabel</u>. Thi $\mathbb{Q} = M_1 \cup M_2 \cup \ldots$, hvor M_n er mængden $\{\frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z}\}$, som er numerabel.

Med nummereringen af $\mathbb{Z}$ som angivet ved

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$$

bliver mængderne M_n altså

$$M_1 = \{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$$
$$M_2 = \{0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1,-1,\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2},\ldots\}$$
$$M_3 = \{0,\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3},1,-1,\ldots\}$$
$$M_4 = \{0,\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{4},\ldots\}$$
$$\vdots$$

og nummereringen af $\mathbb{Q}$ begynder således

$$0,1,0,-1,\tfrac{1}{2},0,2,-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},0,-2,1,-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{4},0,3,\ldots\ ,$$

altså efter at gentagelser er slettet

$$0,1,-1,\tfrac{1}{2},2,-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},-2,-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{4},3,\ldots\ .$$

Der findes mange andre måder at nummerere $\mathbb{Q}$ på.

Følgelig er også $\mathbb{Z}^n$ og $\mathbb{Q}^n$ numerable for ethvert $n \in \mathbb{N}$.

Det vil senere i §2 blive vist, at $\mathbb{R}$ ikke er <u>numerabel</u>. Følgelig er $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$ heller ikke numerable.

Mængder, der er ekvipotente med $\mathbb{R}$ siges at have <u>kontinuets mægtighed</u>.

Medens en endelig mængde ikke er ekvipotent med nogen ægte delmængde, gælder om uendelige mængder:

<u>Enhver uendelig mængde er ekvipotent med en ægte delmængde, for eksempel med enhver mængde, der fremgår af den ved at udelade et element</u>.

<u>Bevis</u>. Lad M være en uendelig mængde og a et af dens elementer. Vi vælger i M en numerabel delmængde $D = \{x_1,x_2,\ldots\}$, hvor $x_1 = a$ og $x_i \neq x_j$ for $i \neq j$. Sættes nu $f(x_i) = x_{i+1}$ for alle $i \in \mathbb{N}$, og $f(x) = x$ når $x \in M \setminus D$, er f en bijektiv afbildning af M på $M \setminus \{a\}$. (I et hotel med uendelig mange værelser kan der, selv om alle værelser er belagt, altid skaffes plads til en ny gæst.) ▯

§1. De reelle tal.

I det følgende skal vi give en beskrivelse af de reelle tal. Der er ikke tale om en egentlig indførelse af de reelle tal - som vil blive givet i et senere kursus - men om en præcisering af de reelle tals grundlæggende egenskaber til brug i den matematiske analyse.

Tager man mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal med de fundamentale egenskaber:

> mængden $\mathbb{N}$ har ikke noget sidste element, enhver ikke-tom delmængde af $\mathbb{N}$ har et første element og enhver ikke-tom opad begrænset delmængde af $\mathbb{N}$ har et sidste element

for givet, da kan man konstruere de reelle tal. Den sikkerhed der vindes ved en sådan konstruktion er måske ikke særlig værdifuld, idet eksistensen af mængden $\mathbb{N}$ med disse egenskaber - som godt nok er intuitivt oplagt - ikke kan bevises, men simpelthen må tages som grundlag for matematikken.

Fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{R}$. Det hele begynder med mængden af naturlige tal

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4...\} ,$$

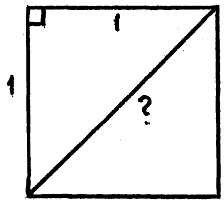
og indenfor $\mathbb{N}$ er defineret to regneoperationer addition og multiplikation samt en naturlig ordning. For at opnå et talområde der også tillader subtraktion, udvides $\mathbb{N}$ til mængden af hele tal

$$\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\} ,$$

og indenfor $\mathbb{Z}$ er defineret addition/subtraktion, multiplikation og en naturlig ordning som "harmonerer" med regneoperationerne i den forstand at de sædvanlige regler for regning med uligheder gælder (kort udtrykt: $\mathbb{Z}$ er en ordnet ring). Mængden $\mathbb{Z}$ indeholder $\mathbb{N}$ og har egenskaber analoge til egenskaberne ved $\mathbb{N}$: der findes hverken første eller sidste element i $\mathbb{Z}$ og enhver ikke-tom opad (nedad) begrænset delmængde har et sidste (henholdsvis første) element. Imidlertid er division (med fra 0 forskellig divisor) ikke altid mulig indenfor $\mathbb{Z}$, hvilket motiverer indførelsen af de rationale tal

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\} .$$

Mængden $\mathbb{Q}$ udgør et regneområde ved operationerne addition/subtraktion og multiplikation/division (med fra 0 forskellig divisor) og er udstyret med en ordning, som harmonerer med regneoperationerne (kort udtrykt er $\mathbb{Q}$ et <u>ordnet legeme</u>). Mængden $\mathbb{Q}$ indeholder $\mathbb{Z}$ og der findes intet element i $\mathbb{Q}$ der kommer efter (før) alle elementer i $\mathbb{Z}$, specielt har $\mathbb{Q}$ hverken første eller sidste element. Derimod har $\mathbb{Q}$ ikke de til $\mathbb{Z}$ svarende egenskaber vedrørende første (henholdsvis sidste) element i ikke-tomme nedad (opad) begrænsede delmængder. Eksempel: $\{\frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Videre gælder, at visse størrelser, f.eks. længden af diagonalen i et kvadrat med sidelængde 1, ikke kan udtrykkes ved et rationalt tal, hvilket kommer ud på at der ikke findes noget rationalt tal r så



$$r^2 = 2 .$$

EKSEMPEL. Der findes intet rationalt tal $r \in \mathbb{Q}_+$ som tilfredsstiller ligningen $r^2 = 2$. Beviset føres indirekte. Antag altså, at $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ med $p,q \in \mathbb{N}$ opfylder $r^2 = 2$. Vi kan godt antage at brøken $\frac{p}{q}$ er uforkortelig, thi ellers erstattes $\frac{p}{q}$ med den tilsvarende uforkortelige brøk; specielt er altså enten p eller q (eller begge) ulige (ellers ville $\frac{p}{q}$ kunne forkortes). Så gælder

$$2q^2 = p^2 .$$

For tal $s \in \mathbb{N}$ gælder, som man let ser, at

$$s \text{ er lige} \Leftrightarrow s^2 \text{ er lige}$$

og

$$s \text{ er ulige} \Leftrightarrow s^2 \text{ er ulige} .$$

Af ligningen ovenfor fås da at p^2 er lige, altså at p er lige, d.v.s. af formen $p = 2t$ med $t \in \mathbb{N}$. Indsættes dette fås

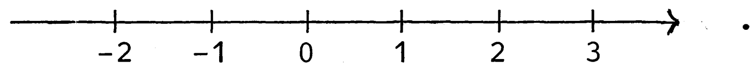
$$2q^2 = p^2 = (2t)^2 = 4t^2$$

eller

$$q^2 = 2t^2 ,$$

hvilket viser, at q^2 er lige, altså at q er lige. Men så er både p og q lige hvilket er umuligt. $\square$

Regneområdet $\mathbb{Q}$ har altså visse mangler ("huller") og $\mathbb{Q}$ udvides derfor til mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal hvis elementer bekvemt kan anskues som "punkterne" på en tallinie orienteret mod højre



De reelle tal $\mathbb{R}$ indeholder $\mathbb{Q}$ og udgør ligesom $\mathbb{Q}$ et ordnet regneområde (kort er et ordnet legeme). Der gælder ikke i almindelighed, at en ikke-tom opad (nedad) begrænset delmængde af $\mathbb{R}$ har et sidste (henholdsvis første) element, men, og heri består den fundamentale forskel mellem $\mathbb{R}$ og $\mathbb{Q}$, der findes nyttige erstatninger nemlig supremum og infimum.

Supremum og infimum. De reelle tal skrevet udførligt som en ordnet mængde er altså $(\mathbb{R},\leq)$ hvor $a \leq b$ for $a,b \in \mathbb{R}$ betyder at a ligger til venstre for b (eller falder sammen med b) på tallinien.

Lad M være en ikke-tom delmængde af $\mathbb{R}$. Hvis der findes et element $x \in M$ med egenskaben

$$\forall z \in M: x \leq z \quad ,$$

så er x det eneste element fra M med denne egenskab, og x kaldes det første element af M eller minimum for M. Tilsvarende er et element $y \in M$ med egenskaben

$$\forall z \in M: z \leq y \quad ,$$

entydigt bestemt og kaldes det sidste element af M eller maksimum for M. Det er vigtigt at gøre sig klart, at M ikke nødvendigvis har første eller sidste element. F.eks. har mængden $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ et sidste element men intet første element.

Et tal $x \in \mathbb{R}$ kaldes et undertal for M $(M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset)$ eller en minorant for M hvis

$$\forall z \in M: x \leq z \quad ,$$

og M siges at være <u>nedad begrænset</u>, hvis der findes et undertal for M. Tilsvarende siges et tal $y \in \mathbb{R}$ at være et <u>overtal</u> eller en <u>majorant</u> for M hvis

$$\forall z \in M: z \leq y \quad ,$$

og M er <u>opad begrænset</u>, hvis M har et overtal.

Den fundamentale egenskab ved $\mathbb{R}$ kan nu udtrykkes:

<u>For enhver ikke-tom nedad begrænset mængde</u> $M \subseteq \mathbb{R}$ <u>har mængden af undertal for</u> M (som er ikke-tom) <u>et sidste element</u>, som kaldes <u>infimum for</u> M og betegnes $\inf M$.

Tilsvarende: <u>For enhver ikke-tom opad begrænset mængde</u> $M \subseteq \mathbb{R}$ <u>har mængden af overtal for</u> M <u>et første element</u>, som kaldes <u>supremum for</u> M og betegnes $\sup M$.

Det er vigtigt at holde begrebsparrene maksimum/minimum og supremum/infimum ude fra hinanden. Medens en <u>begrænset</u> (d.v.s. såvel opad som nedad begrænset) ikke-tom delmængde $M \subseteq R$ <u>altid</u> har et infimum og et supremum, findes som nævnt ikke nødvendigvis et første og/eller sidste element. På den anden side, <u>hvis</u> en ikke-tom mængde M har et første element x (henholdsvis sidste element y) så er den nedad (henholdsvis opad) begrænset og dens infimum (henholdsvis supremum) er x (henholdsvis y).

Vi slår fast, at et bevis for at $a \in \mathbb{R}$ er infimum for en ikke tom nedad begrænset delmængde $M \subseteq \mathbb{R}$ kommer ud på følgende:

1) at vise at a er et <u>undertal</u> for M, altså $\forall z \in M: a \leq z$,

2) at vise at a er det <u>største undertal</u> for M, altså

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in M: a+\varepsilon > z \; .$$

Supremum for en ikke tom opad begrænset delmængde af $\mathbb{R}$ bestemmes på analog måde.

Den fundamentale egenskab ved $\mathbb{R}$ formuleret ovenfor kaldes <u>supremums egenskaben</u> (og <u>infimums egenskaben</u>).

<u>Numerisk værdi</u>. Det reelle tal 0 deler $\mathbb{R}$ i de positive reelle tal $\mathbb{R}_+$ og de negative reelle tal. Et reelt tal $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ kaldes <u>positivt</u> hvis $0 \leq a$, og <u>negativt</u> hvis $a \leq 0$.

Den <u>numeriske værdi</u> af et reelt tal $a \in \mathbb{R}$ er det reelle tal $|a|$ defineret ved

$$|a| = \begin{cases} a & \text{hvis } 0 \leq a , \\ -a & \text{hvis } a \neq 0 \text{ og } a \leq 0 . \end{cases}$$

Som man let ser gælder $|a| \geq 0$ for $a \in \mathbb{R}$ og at $|ab| = |a||b|$ for $a,b \in \mathbb{R}$. Der gælder endvidere følgende vigtige ulighed for reelle tal $a,b \in \mathbb{R}$,

$$|a+b| \leq |a| + |b| , \quad \text{"\underline{trekantsuligheden}".}$$

Det er nemlig umiddelbart, at

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad \text{og} \quad -|b| \leq b \leq |b|$$

hvoraf ved hjælp af regnereglerne for uligheder

$$a+b \leq |a| + |b| \quad \text{og} \quad -(a+b) \leq (|a|+|b|) .$$

Nu er $|a+b|$ enten $a+b$ eller $-(a+b)$ og de to uligheder ovenfor viser påstanden.

Ved induktion ser man, at der for $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| ,$$

for reelle tal $a_1,\ldots,a_n$.

Ud fra trekantsuligheden fås let følgende nyttige ulighed

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a-b| \quad \text{for} \quad a,b \in \mathbb{R} .$$

Delmængder af $\mathbb{R}$. I det følgende tænker vi på $\mathbb{R}$ som tallinien, og vi har da inklusionerne

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} .$$

Ud fra supremum/infimum egenskaben ved $\mathbb{R}$ får vi

SÆTNING 1.1. Delmængden $\mathbb{Z}$ af $\mathbb{R}$ er hverken opad eller nedad begrænset.

BEVIS. Antag at $\mathbb{Z}$ er en opad begrænset delmængde af $\mathbb{R}$ og sæt $a = \sup \mathbb{Z}$. Da gælder $z \leq a$ for alle $z \in \mathbb{Z}$, altså specielt $z + 1 \leq a$ for alle $z \in \mathbb{Z}$, hvoraf $z \leq a - 1$ for alle $z \in \mathbb{Z}$. Men så er også $a - 1 < a$ et overtal for $\mathbb{Z}$ hvilket er en modstrid. Analogt ses, at $\mathbb{Z}$ ikke er nedad begrænset. ▯

Et *interval* er en delmængde af $\mathbb{R}$ af formen

$[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ afsluttet interval,

$[a,b[\; = \{x \mid a \leq x < b\}$, $]a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ halvåbent interval,

$]a,b[\; = \{x \mid a < x < b\}$ åbent interval.

Herved er antaget $a < b$. Punktet a er *venstre endepunkt* og punktet b *højre endepunkt* for intervallet. Lejlighedsvis er det bekvemt at regne en mængde bestående af eet punkt for et afsluttet interval med sammenfaldende endepunkter. En talmængde er *begrænset*, hvis og kun hvis den er delmængde af et interval. Tallet $b - a$ kaldes *længden* af intervallet.

En *halvlinie* er en delmængde af $\mathbb{R}$ af formen

venstre halvlinie:

$]-\infty,a] = \{x \mid x \leq a\}$ afsluttet

$]-\infty,a[\; = \{x \mid x < a\}$ åben

højre halvlinie:

$[a,+\infty[\; = \{x \mid x \geq a\}$ afsluttet

$]a,+\infty[\; = \{x \mid x < a\}$ åben

Punktet a er *endepunkt* for halvlinien. Lejlighedsvis kaldes også halvlinier og hele $\mathbb{R}$, der også skrives $]-\infty,+\infty[$ intervaller; intervaller i den strenge betydning må da kendetegnes som begrænsede intervaller. En delmængde $A \subseteq \mathbb{R}$ er opad begrænset med overtal a hvis og kun hvis $A \subseteq]-\infty,a]$; og A er nedad begrænset med undertal a hvis og kun hvis $A \subseteq [a,+\infty[$.

Lad $x \in \mathbb{R}$. Da findes netop ét tal $z \in \mathbb{Z}$ for hvilket $x \in [z,z+1[$ og z kaldes den hele del af x og betegnes ofte $[x]$. Ifølge 1.1 er x ikke et undertal for $\mathbb{Z}$, og mængden $A = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq x\}$ er således ikke-tom og opad begrænset. Lad z være det sidste (største) element i A . Så gælder som man let ser $x \in [z,z+1[$.

SÆTNING 1.2. Ethvert interval af længde > 1 indeholder mindst et helt tal $z \in \mathbb{Z}$.

BEVIS. Lad intervallets endepunkter være a og b $(a < b)$. Med $z = [a+1]$ har vi $a < z \leq a+1 < b$. ▯

DEFINITION. En delmængde A af $\mathbb{R}$ kaldes overalt tæt (eller blot tæt) i $\mathbb{R}$, hvis der for ethvert åbent interval $]a,b[$ gælder $]a,b[\cap A \neq \emptyset$, altså hvis der i ethvert åbent interval $]a,b[$ ligger mindst et punkt af A .

Hvis A er overalt tæt i $\mathbb{R}$ ligger der naturligvis i ethvert åbent interval $]a,b[$ uendelig mange punkter af A. Thi der findes et $x_1 \in]a,b[\cap A$, et $x_2 \in]a,x_1[\cap A$, et $x_3 \in]a,x_2[\cap A$, etc. Punkterne $x_1,x_2,\ldots$ er parvis forskellige og tilhører alle $]a,b[\cap A$.

SÆTNING 1.3. Delmængden $\mathbb{Q}$ er tæt i $\mathbb{R}$.

BEVIS. Lad $]a,b[$ være et åbent interval og lad $n \in \mathbb{Z}$ være valgt således, at $n > \frac{1}{b-a}$. Da gælder naturligvis $n \in \mathbb{N}$, og længden af intervallet $]na,nb[$ er > 1 . Lad $z \in \mathbb{Z}$ tilhøre dette interval, altså $na < z < nb$. Da tilhører tallet $\frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$ intervallet $]a,b[$. ▯

De rationale tal $\mathbb{Q}$ er således en numerabel tæt delmængde af $\mathbb{R}$. Andre eksempler på numerable overalt tætte delmængder af $\mathbb{R}$ er mængden $\{ra \mid r \in \mathbb{Q}\}$, hvor a er et vilkårligt fra 0 forskelligt reelt tal, og mængden $\left\{\frac{z}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} , z \in \mathbb{Z}\right\}$.

I denne fremstilling har vi forudsat de reelle tal bekendt. Det foranstående er blevet udført i enkeltheder for at vise, hvorledes de omhandlede egenskaber kan udledes fra supremum/infimum egenskaben. Yderligere egenskaber vil blive udledt i det følgende, men vi understreger, at vi ikke tilstræber en fuldstændig fremstilling. Velkendte egenskaber vil således ofte blive benyttet uden kommentar.

<u>De udvidede reelle tal</u>. I betegnelsen for halvlinier har vi anvendt de to symboler $+\infty$ ("plus uendelig") og $-\infty$ ("minus uendelig"). Mængden $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ kaldes <u>de udvidede reelle tal</u>.

Ordningen af $\mathbb{R}$ udvides til en ordning af $\mathbb{R}^*$ ved at fastsætte $-\infty < a$ og $a < +\infty$ for ethvert $a \in \mathbb{R}$, og $-\infty < +\infty$. Da er $(\mathbb{R}^*,\leq)$ åbenbart en totalt ordnet mængde med $-\infty$ som første (mindste) element og $+\infty$ som sidste (største) element (hvor første (sidste) element har den oplagte betydning som i tilfældet af den totalt ordnede mængde $(\mathbb{R},\leq)$), og man indser let: <u>For enhver ikke tom delmængde</u> A <u>af</u> $\mathbb{R}^*$ <u>eksisterer</u> $\sup A$ (første element i mængden af overtal for A) <u>og</u> $\inf A$ (sidste element i mængden af undertal for A) . Der gælder åbenbart

$$(-\infty \leq) \quad \inf A \leq \sup A \quad (\leq +\infty) .$$

Selv om vi kun er interesseret i at studere delmængder af $\mathbb{R}$, er det derfor en fordel at arbejde i $\mathbb{R}^*$, idet vi derved i undersøgelserne kan undgå opspaltningen i tilfælde svarende til, om de betragtede mængder er opad eller nedad begrænsede eller ikke. At $A \subseteq \mathbb{R}$ ikke er opad begrænset udtrykkes ved, at $\sup A = +\infty$; at $A \subseteq \mathbb{R}$ ikke er nedad begrænset udtrykkes ved, at $\inf A = -\infty$.

Karakteriseringen af sup (inf) som det mindste overtal (største undertal) giver umiddelbart at der gælder: Hvis A og B er ikke-tomme delmængder af $\mathbb{R}^*$ med $A \subseteq B$ har vi $\sup A \leq \sup B$ og $\inf A \geq \inf B$ ("jo større mængde, desto større sup og desto mindre inf"). Endvidere: Hvis A og B er ikke-tomme delmængder af $\mathbb{R}^*$, der opfylder, at hvert element af A er mindre end hvert element af B, $(\forall a \in A \ \forall b \in B: a \leq b)$ så har vi $\sup A \leq \inf B$.

<u>Intervaller</u> i $\mathbb{R}^*$ er mængder af formen:

$$[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{afsluttet interval,}$$

$$\left.\begin{array}{l} [a,b[\ = \{x \mid a \leq x < b\} \\ ]a,b] = \{x \mid a < x \leq b\} \end{array}\right\} \quad \text{halvåbent interval,}$$

$$]a,b[\ = \{x \mid a < x < b\} \quad \text{åbent interval,}$$

hvor $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, med samme tilføjelse som tidligere, at en mængde bestående af eet punkt lejlighedsvis regnes for et afsluttet interval.

Vi har følgende vigtige karakterisering af intervaller i $\mathbb{R}^*$.

<u>SÆTNING 1.4.</u> En ikke-tom delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^*$ er et interval hvis og kun hvis A har egenskaben

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^*: \quad x,z \in A \ \wedge \ x < y < z \ \Rightarrow \ y \in A,$$

(hvis A indeholder x og z så også hvert tal mellem x og z).

BEVIS. Det er klart, at et interval har egenskaben. Antag omvendt, at A har egenskaben og sæt $a = \inf A$ og $b = \sup A$. Medmindre A består af et enkelt tal, i hvilket tilfælde $A = [a,b]$ er et interval, gælder $a < b$ og $A \subseteq [a,b]$. Lad $y \in]a,b[$. Der findes $x \in A$ med $x < y$ (thi ellers var $\inf A \geq y$) og $z \in A$ med $y < z$ (analogt), hvoraf ifølge forudsætning, $y \in A$. Altså gælder $]a,b[\subseteq A$, og idet $A \subseteq [a,b]$, må A være en af mængderne $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ eller $]a,b[$, altså et interval. ▮

Af Sætning 1.4 fås umiddelbart, at fællesmængden for et vilkårligt system af intervaller i $\mathbb{R}^*$ er et interval i $\mathbb{R}^*$ eller den tomme mængde. Videre fås, at fællesmængden for et vilkårligt system af afsluttede intervaller i $\mathbb{R}^*$ er et afsluttet interval eller lig $\emptyset$; fællesmængden er nemlig, hvis den ikke er tom, et interval i $\mathbb{R}^*$, og endepunkterne for dette interval tilhører hvert af intervallerne i systemet, og dermed også fællesmængden, som derfor er afsluttet.

<u>SÆTNING 1.5.</u> For enhver dalende følge $[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \dots$ af afsluttede intervaller i $\mathbb{R}^*$, er fællesmængden det afsluttede interval $[a,b]$ hvor $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ og $b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

BEVIS. For $n,m \in \mathbb{N}$ med $n < m$ har vi $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$ hvoraf $a \leq b$, og man ser nu let at $\cap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n] = [a,b]$. ▮

Det havde været rart, om man kunne udvide regneoperationerne $+$ og $\cdot$ til $\mathbb{R}^*$, således at $(\mathbb{R}^*,\leq)$ blev et ordnet regneområde, men dette er ikke muligt. En fornuftig udvidelse af regneoperationerne til $\mathbb{R}^*$ er følgende:

Vi definerer summen $a + b$ som $+\infty$, hvis en af addenderne er $+\infty$, og den anden endelig, og hvis begge addender er $+\infty$, og som $-\infty$, hvis en af addenderne er $-\infty$ og den anden endelig, og hvis begge addender er $-\infty$. $(\infty) + (-\infty)$ defineres ikke.

Vi definerer produktet $a \cdot b$ som $+\infty$, hvis en eller begge faktorer er uendelig (d.v.s. $+\infty$ eller $-\infty$) og enten begge faktorer er > 0 eller begge faktorer er < 0 , og som $-\infty$, hvis en eller begge faktorer er uendelig og en af dem er > 0 og en af dem er < 0 . Vi sætter $0 \cdot (\infty) = 0 \cdot (-\infty) = 0$.

Differensen $a - b$ defineres som $a + (-b)$, idet vi sætter $-(-\infty) = +\infty$ og $-(+\infty) = -\infty$, og kvotienten $\frac{a}{b}$ defineres som $a \cdot \frac{1}{b}$, idet vi sætter $\frac{1}{+\infty} = 0$ og $\frac{1}{-\infty} = 0$. For $b = 0$ defineres $\frac{a}{b}$ ikke.

Med $|+\infty|$ og $|-\infty|$ menes naturligvis $+\infty$.

Lidt historie.

Matematikken har sit udgangspunkt i studiet af tallene og de geometriske figurer. Medens den babylonske matematik (begyndende omkring -1800) var aritmetisk betonet, førte opdagelsen af eksistensen af inkommensurable liniestykker, der tilskrives Pythagoras, til at grækerne satte geometrien i forgrunden. Den almene, af Eudoxos grundlagte, størrelseslære, som vi finder i Euklids elementer (omkring -300) indeholder dog væsentlige træk af en teori for de positive reelle tal. De negative tal fik først sent almindeligt indpas. Med udviklingen af algebraen i 15-hundredtallet og med P. Fermats og R. Descartes' grundlæggelse af den analytiske geometri i første halvdel af 16-hundredtallet kom tallene igen i forgrunden og vejen var banet for analysen (differential- og integralregningen) som blev udviklet af I. Newton og G. W. Leibniz i sidste halvdel af 16-hundredtallet. Under den fortsatte udvikling i 17- og 18-hundredtallet spillede spørgsmålet om matematikkens grundlag kun en underordnet rolle. En strengt gennemført teori for de reelle tal blev først udført i anden halvdel af 18-hundredtallet af K. Weierstrass, G. Cantor, Ch. Méray, R. Dedekind. Samtidig indså man, at geometrien kunne underordnes aritmetikken, idet den kunne opbygges som en rent aritmetisk konstruktion. Tænker man f.eks. på planens geometri, går man simpelthen ud fra den analytiske geometris formelapparat, idet man vender sagen på hovedet og definerer et punkt som et ordnet par (x,y) af to reelle tal, en ret linie som mængden af løsninger (x,y) til en ligning $ax + by + c = 0$, hvor $(a,b) \neq (0,0)$, afstanden mellem to punkter (x_1,y_1) og (x_2,y_2) som $((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)^{\frac{1}{2}}$, etc. Herefter fik matematikken sit grundlag i den naturlige talrække; af L. Kronecker udtrykt således: "De naturlige tal har Vorherre skabt, alt andet er menneskeværk". Den naturlige talrække blev karakteriseret af G. Peano. Om hele spørgsmålet om matematikkens grundlag gælder, at det må ses i sammenhæng med den matematiske logik.

På dette sted skal ikke gives en nærmere behandling af geometriens grundlag. Vi henholder os til, at geometrien som anført kan indordnes under aritmetikken, og forudsætter i det følgende den elementære geometri bekendt. Forbindelsen med aritmetikken virker begge veje: dels gennem den analytiske behandling af geometriske opgaver, dels ved at den geometriske beskrivelse anvendes til anskueliggørelse af opgaver i analysen. Når man, som det ofte sker, anvender et geometrisk ræsonnement ved behandlingen af en rent analytisk opgave, bør man naturligvis gøre sig klart, at det kunne omsættes til aritmetisk form.

Som nævnt kan de reelle tal konstrueres ud fra de naturlige tal. Konstruktionen kan udføres på forskellige måder og ved forskellige konstruktioner fås faktisk forskellige "modeller" af $\mathbb{R}$. Det er imidlertid afgørende at disse forskellige objekter er lige "gode" præciseringer af det intuitive begreb om de reelle tal som udgørende tallinien.

Vi skal ikke komme nærmere ind på disse konstruktioner men blot nævne, at én metode, der går tilbage til R. Dedekind, udnytter de såkaldte Dedekind snit. Herved tænkes et reelt tal α fastlagt ud fra $\mathbb{Q}$ ved mængden af rationale tal $\leq \alpha$, altså ved det snit i $\mathbb{Q}$, der er bestemt ved α . Mængden af disse snit kan gives en algebraisk struktur som et ordnet legeme, der har supremumsegenskaben. Ideen i en anden metode, som skyldes G. Cantor, består i at et reelt tal α tænkes bestemt ud fra $\mathbb{Q}$ ved mængden af talfølger af rationale tal der "konvergerer" mod α . Disse mængder af "rationale" talfølger kan så organiseres til et ordnet legeme med supremumsegenskaben. I begge tilfælde bygger supremumsegenskaben på at $\mathbb{Z}$ er en ubegrænset delmængde af $\mathbb{Q}$.

§2. Konvergens af reelle talfølger.

Konvergente talfølger. Vi skal nu præcisere hvad vi vil forstå ved, at en talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$, altså en afbildning $n \mapsto x_n$ af $\mathbb{N}$ ind i $\mathbb{R}^*$, konvergerer mod $x \in \mathbb{R}^*$. Ved definitionen skelnes mellem tilfældene $x \in \mathbb{R}$ og $x = \pm\infty$.

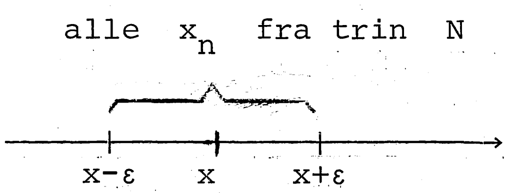
DEFINITION. En talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ siges at være konvergent med grænseværdi $x \in \mathbb{R}$, hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et tal $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ gælder at

$$|x_n - x| < \varepsilon .$$

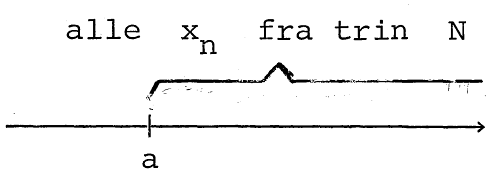
Talfølgen (x_n) siges at gå mod (eller have grænseværdien) ∞ (henh. $-\infty$), hvis der til hvert $a \in \mathbb{R}$ findes et tal $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ gælder

$$x_n > a \quad (\text{henh. } x_n < a) .$$

Udsagnet er, i tilfælde af grænseværdi $x \in \mathbb{R}$, at til hvert interval $I =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ omkring x $(\varepsilon > 0)$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så $x_n \in I$ for $n \geq N$, altså så $x_n \in I$ fra "trin" N (som naturligvis afhænger af $\varepsilon > 0$).



Udsagnet er, i tilfælde af grænseværdi $+\infty$, at til hvert interval $I =]a, +\infty]$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så $x_n \in I$ for $n \geq N$, altså så $x_n \in I$ fra "trin" N (som afhænger af $a \in \mathbb{R}$).



Hvis talfølgen (x_n) i $\mathbb{R}^*$ er konvergent med grænseværdi $x \in \mathbb{R}^*$ skriver vi (for eksempel) $x = \lim x_n$, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_n \to x$ for $n \to \infty$.

En talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$, som ikke er konvergent, altså for hvilken der ikke findes noget $x \in \mathbb{R}^*$ så $x_n \to x$, kaldes <u>divergent</u>.

Man ser let, at hvis $x_n \to x$ og $x_n \to y$ så gælder $x = y$. Lad $A \subseteq \mathbb{R}^*$ være et afsluttet interval. For enhver talfølge (x_n) <u>på</u> A (d.v.s. talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ så $x_n \in A$ for alle $n \in \mathbb{N}$) som er konvergent gælder $\lim x_n \in A$.

EKSEMPLER. Talfølgen $x_n = \frac{1}{n}$ konvergerer mod 0, og talfølgen $x_n = n$ konvergerer mod $+\infty$. Talfølgen $x_n = (-1)^n$ er divergent.

For hvert $x \in \mathbb{R}$ findes en følge (x_n) af rationale tal så $x_n \to x$. Thi for hvert $n \in \mathbb{N}$ er $]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ (Sætning 1.3) og vælges x_n heri har vi $x_n \to x$.

Vi skal nu se, at enhver <u>monoton</u> talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$, d.v.s. enten <u>stigende</u> $(x_1 \leq x_2 \leq \ldots)$ eller <u>dalende</u> $(x_1 \geq x_2 \geq \ldots)$ er konvergent.

<u>SÆTNING 2.1</u>. Enhver stigende talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ er konvergent med grænseværdien $\sup\{x_n\}$; enhver dalende talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ er konvergent med grænseværdien $\inf\{x_n\}$.

BEVIS. Vi nøjes med at bevise det første udsagn; beviset for det andet udsagn er analogt.

Sæt $x = \sup\{x_n\}$. Da er $x_n \leq x$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

(1) Antag først, at $x \in \mathbb{R}$, og lad $\varepsilon \in R_+$. Da er $x - \varepsilon$ intet overtal for $\{x_n\}$. Der findes altså et $N \in \mathbb{N}$, så at $x_N > x-\varepsilon$. Men så må for alle $n \geq N$ gælde $x-\varepsilon < x_n \leq x$ og altså $|x_n-x| < \varepsilon$.

(2) Antag dernæst, at $x = +\infty$ og lad $a \in \mathbb{R}$. Da er a intet overtal for $\{x_n\}$. Der findes altså et $N \in \mathbb{N}$, så at

$x_N > a$. Men så må for alle $n \geq N$ gælde $x_n > a$.

(3) Antag endelig, at $x = -\infty$. Da er $x_n = -\infty$ for alle $n \in \mathbb{N}$. For ethvert $a \in \mathbb{R}$ gælder derfor $x_n < a$ for alle n . ∎

Delfølger og fortætningspunkter. Det er umiddelbart at gå efter, at hvis talfølgen (x_n) i $\mathbb{R}^*$ er konvergent med grænseværdi $x \in \mathbb{R}^*$, så er enhver delfølge (x_{n_p}) af (x_n) (se side I.19) ligeledes konvergent med grænseværdi x .

Vi skal nedenfor se, at en vilkårlig følge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ (konvergent eller ej) har konvergente delfølger.

DEFINITION. Lad (x_n) være en talfølge i $\mathbb{R}^*$. Et tal $x \in \mathbb{R}$ siges at være fortætningspunkt for følgen (x_n) hvis det for hvert $\varepsilon > 0$ gælder, at mængden

$$\{m \in \mathbb{N} \mid x-\varepsilon < x_m < x+\varepsilon\}$$

er uendelig, og tilsvarende siges $+\infty$ (henh. $-\infty$) at være fortætningspunkt for (x_n) hvis der for hvert $a \in \mathbb{R}$ gælder at mængden

$$\{m \in \mathbb{N} \mid x_m > a\} \quad (\text{henh. } \{m \in \mathbb{N} \mid x_m < a\})$$

er uendelig.

Udsagnet er, at til hvert $\varepsilon > 0$ (henh. $a \in \mathbb{R}$) findes uendelig mange "numre" $m \in \mathbb{N}$ så $x_m \in \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ (henh. $x_m > a$, henh. $x_m < a$) .

Talfølgerne $(+\infty,-\infty,+\infty,-\infty,\ldots)$ og $(1,-2,3,-4,5,\ldots)$ har både $+\infty$ og $-\infty$ som fortætningspunkter, medens talfølgen $(1,-1,1,-1,\ldots)$ har fortætningspunkterne 1 og -1 . Hvis (x_n) er konvergent med grænseværdi $x \in \mathbb{R}^*$, så er x (som man let ser) fortætningspunkt for (x_n) .

<u>SÆTNING 2.2</u>. En talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ har $x \in \mathbb{R}^*$ som fortætningspunkt hvis og kun hvis der findes en delfølge (x_{n_p}) af (x_n) så $\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = x$.

BEVIS. Antag, at (x_n) har $x \in \mathbb{R}^*$ som fortætningspunkt. Vi nøjes med at betragte tilfældet $x \in \mathbb{R}$, idet $x = \pm\infty$ behandles analogt. Mængden $\{m \in \mathbb{N} \mid x-1 < x_m < x+1\}$ er uendelig, specielt ikke tom så der findes $n_1 \in \mathbb{N}$ så $|x_{n_1}-x| < 1$. Videre er $\{m \in \mathbb{N} \mid x-\frac{1}{2} < x_m < x+\frac{1}{2}\}$ uendelig så der findes $n_2 > n_1$ så $|x_{n_2}-x| < \frac{1}{2}$. Således fortsættes og vi får bestemt en følge $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ af tal fra $\mathbb{N}$ så $|x_{n_p}-x| < \frac{1}{p}$. Det er nu klart, at delfølgen (x_{n_p}) er konvergent med grænseværdi x .
Det omvendte er umiddelbart. ▮

EKSEMPEL. Mængden $\mathbb{Q}$ er som bekendt numerabel. Lad $(x_1,x_2,\ldots)$ være $\mathbb{Q}$ ordnet i en følge. Denne følge har <u>alle</u> punkter $x \in \mathbb{R}^*$ som fortætningspunkter. Lad nemlig $x \in \mathbb{R}$ være givet og betragt et $\varepsilon > 0$. Hvis mængden

$$\{m \in \mathbb{N} \mid x-\varepsilon < x_m < x+\varepsilon\}$$

var endelig måtte gælde at $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\cap \mathbb{Q}$ var endelig hvilket ikke er tilfældet. Analogt med $x = \pm\infty$.

<u>Limes inferior og limes superior</u>. For en vilkårlig talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ danner vi to nye talfølger (y_n) og (z_n) i $\mathbb{R}^*$, idet vi sætter

$$y_n = \inf\{x_n,x_{n+1},\ldots\} \ , \quad z_n = \sup\{x_n,x_{n+1},\ldots\} \ .$$

Talfølgen (y_n) er åbenbart stigende og talfølgen (z_n) er åbenbart dalende. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder $y_n \le z_n$, og dermed har vi for $p < q$, at $y_p \le y_q \le z_q \le z_p$, hvoraf ses, at ethvert element af mængden $\{y_n\}$ er $\le$ ethvert element af mængden $\{z_n\}$. Vi skriver dette således:

$$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq \cdots \leq \cdots \leq z_n \leq \cdots \leq z_2 \leq z_1 .$$

Følgerne (y_n) og (z_n) er altså konvergente (Sætning 2.1) og der gælder

$$\lim y_n = \sup\{y_n\} \leq \inf\{z_n\} = \lim z_n .$$

DEFINITION. Tallet $\lim y_n$ kaldes den nedre grænseværdi eller limes inferior for talfølgen (x_n) og betegnes $\liminf x_n$, og tallet $\lim z_n$ kaldes den øvre grænseværdi eller limes superior for talfølgen (x_n) og betegnes $\limsup x_n$.

Vi har altså

$$\liminf x_n = \lim_n(\inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}) ,$$

$$\limsup x_n = \lim_n(\sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}) ,$$

og der gælder

$$(-\infty \leq) \quad \liminf x_n \leq \limsup x_n \quad (\leq +\infty) .$$

For talfølgen $x_n = (-1)^n$ har vi $\liminf x_n = -1$ og $\limsup x_n = 1$, og for talfølgen $x_n = n$ har vi $\liminf x_n = \limsup x_n = +\infty$.

En mere intuitiv beskrivelse af tallene $\liminf x_n$ og $\limsup x_n$ for en talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ fås af

SÆTNING 2.3. Lad (x_n) være en talfølge i $\mathbb{R}^*$. Tallet $\limsup x_n$ er det eneste tal $x \in \mathbb{R}^*$ som opfylder:

(1) for hvert $a \in \mathbb{R}^*$ med $a < x$ findes uendelig mange $n \in \mathbb{N}$ så $x_n \geq a$,

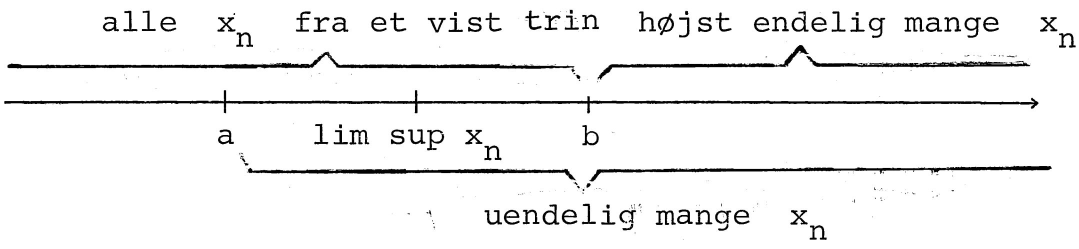
(2) for hvert $b \in \mathbb{R}^*$ med $b > x$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så $x_n \leq b$ for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$.

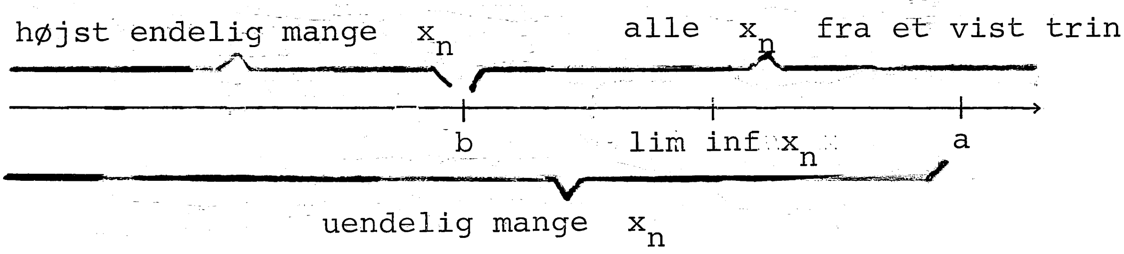
Tallet $\liminf x_n$ er det eneste tal $y \in \mathbb{R}^*$ som opfylder:

(3) for hvert $a \in \mathbb{R}^*$ med $a > y$ findes uendelig mange $n \in \mathbb{N}$ så $x_n \leq a$

(4) for hvert $b \in \mathbb{R}^*$ med $b < y$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så $x_n \geq b$ for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$.

På en tallinie kan dette illustreres på følgende måde





BEVIS. Vi nøjes med at vise påstanden om $\lim\sup x_n$; påstanden om $\lim\inf x_n$ indses på analog måde.

Lad $x = \lim\sup x_n$ og lad $a \in \mathbb{R}^*$ med $a < x$, (hvis $x = -\infty$ findes intet sådant a , og (1) er altid sandt). Med $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, som ovenfor, gælder $z_n \to x$, og idet (z_n) er aftagende og $x > a$ gælder $z_n > a$ for alle $n \in \mathbb{N}$; men dette medfører at $x_n \geq a$ for uendelig mange $n \in \mathbb{N}$ (thi i modsat fald gælder jo $x_n < a$ fra et vist trin og dermed $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \leq a$ fra dette trin). Altså gælder (1). Lad $b \in \mathbb{R}^*$ med $b > x$ (hvis $x = +\infty$ ...) . Idet $z_n \to x < b$ findes $N \in \mathbb{N}$ så $z_n \leq b$ for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$. Dermed gælder $x_n \leq b$ for alle $n \geq N$, altså (2).

Antag nu omvendt, at $x \in \mathbb{R}^*$ opfylder (1) og (2). Vi skal se at $x = \lim z_n$. Hvis $x = -\infty$ så fås af (2), at til hvert $b \in \mathbb{R}$ findes $N \in \mathbb{N}$ så $x_n \leq b$ for $n \geq N$. Men så gælder $z_n \leq b$ for $n \geq N$ altså $z_n \to -\infty$. Analogt fås, hvis $x = +\infty$, af (1), at $z_n \to +\infty$. For $x \in \mathbb{R}$ og $\varepsilon > 0$ fås af (2) med $b = x+\varepsilon$, at der findes $N \in \mathbb{N}$ så

$$x_n \leq x+\varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N ,$$

og (1) med $a = x-\varepsilon$ giver at $x_n \geq x-\varepsilon$ for uendelig mange n , hvoraf

$$z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \quad \text{for} \quad n \geq N$$

altså $z_n \to x$. ▮

KOROLLAR 2.4. Lad (x_n) være en talfølge i $\mathbb{R}^*$. Tallene $\liminf x_n$ og $\limsup x_n$ er fortætningspunkter for følgen (x_n) og ethvert fortætningspunkt for (x_n) tilhører intervallet $[\liminf x_n, \limsup x_n]$.

BEVIS. Det følger af Sætning 2.3, at for hvert åbent interval I indeholdende $\liminf x_n$ (henh. $\limsup x_n$) gælder at mængden $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in I\}$ er uendelig. Intet tal uden for intervallet $[\liminf x_n, \limsup x_n]$ kan være fortætningspunktet for (x_n) , thi hvis f.eks. $x > x-\varepsilon > \limsup x_n$, med $\varepsilon > 0$, har vi ifølge Sætning 2.3 (2), at mængden $\{m \in \mathbb{N} \mid x_n \in]x-\varepsilon, \infty[\}$ er endelig. ▮

KOROLLAR 2.5. For en vilkårlig følge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ findes en delfølge af (x_n) , der er konvergent med grænseværdi $\liminf x_n$ og en delfølge af (x_n) der er konvergent med grænseværdi $\limsup x_n$.

BEVIS. Korollar 2.4 og Sætning 2.2. ▮

KOROLLAR 2.6. Lad (x_n) være en talfølge på et afsluttet begrænset interval $[a,b]$ (d.v.s. $a \leq x_n \leq b$ for alle $n \in \mathbb{N}$). Da har (x_n) et fortætningspunkt tilhørende $[a,b]$, eller anderledes sagt: der findes en delfølge af (x_n) som er konvergent med grænseværdi tilhørende $[a,b]$.

BEVIS. Det er klart, at $a \leq \liminf x_n \leq \limsup x_n \leq b$, og påstanden fås af Korollar 2.4 eller 2.5. ▮

SÆTNING 2.7. En talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ er konvergent hvis og kun hvis $\liminf x_n = \limsup x_n$, og i så fald er

$$\lim x_n = \liminf x_n = \limsup x_n .$$

BEVIS. Som før sætter vi $y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ og $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Beviset falder i tre dele.

(1) Hvis (x_n) er konvergent med grænseværdi $x \in \mathbb{R}$, så findes til hvert $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ så $x-\varepsilon \leq x_n \leq x+\varepsilon$ for $n \geq N$, altså specielt, $x-\varepsilon \leq y_n \leq z_n \leq x+\varepsilon$ for $n \geq N$ hvilket viser at $z_n \to x$ og $y_n \to x$.

Hvis omvendt $\liminf x_n = \limsup x_n = x \in \mathbb{R}$, så findes til hvert $\varepsilon > 0$, ifølge Sætning 2.3, et $N \in \mathbb{N}$ så $x_n \leq x+\varepsilon$ for $n \geq N$ og et $M \in \mathbb{N}$ så $x-\varepsilon \leq x_n$ for $n \geq M$. For $n \geq \max(N,M)$ har vi da $x-\varepsilon \leq x_n \leq x+\varepsilon$ hvilket viser at $x_n \to x$.

(2) Hvis (x_n) er konvergent med grænseværdi $+\infty$, findes til hvert $a \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ så $x_n \geq a$ for $n \geq N$, hvoraf $a \leq y_n \leq z_n$ for $n \geq N$ hvilket viser at $y_n \to +\infty$ og $z_n \to +\infty$.

Hvis omvendt $\liminf x_n = \limsup x_n = +\infty$, så findes til $a \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ så $a \leq y_n$ for $n \geq N$ hvoraf specielt $a \leq x_n$ for $n \geq N$ hvilket viser at $x_n \to +\infty$.

(3) Tilfældet "$-\infty$" behandles ligesom (2). ‖

SÆTNING 2.8. En talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ er konvergent med grænseværdi $x \in \mathbb{R}^*$ hvis og kun hvis x er det eneste fortætningspunkt for (x_n) .

BEVIS. Hvis $x_n \to x$ så er x klart fortætningspunkt for (x_n) , og der findes ikke andre idet $\{x\} = [\lim\inf x_n, \lim\sup x_n]$. Hvis omvendt x er det eneste fortætningspunkt for (x_n) så gælder $\lim\inf x_n = \lim\sup x_n = x$, altså $x_n \to x$. ‖

For det meste er vi kun virkelig interesserede i talfølger i $\mathbb{R}$. Man ser imidlertid, at når vi for en sådan følge $(x_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N})$ vil gennemføre det foranstående, er vi nødt til at operere i $\mathbb{R}^*$. Når en talfølge (x_n) i $\mathbb{R}$ kaldes <u>konvergent</u>, mener man normalt, at den er konvergent med en grænseværdi $\lim x_n \in \mathbb{R}$, medens man, når den er konvergent med grænseværdien $\lim x_n = +\infty$ eller $\lim x_n = -\infty$, normalt vil kalde den <u>divergent</u>, men dog sige, at den "går mod" $+\infty$ eller $-\infty$ (eller lign.).

EKSEMPEL. Lad (x_n) og (y_n) være talfølger i $\mathbb{R}$ og antag at $x_n \to x$ og $y_n \to y$ hvor $x,y \in \mathbb{R}$. Så gælder, som man let ser, at talfølgerne (x_n+y_n) , (x_n-y_n) og (x_ny_n) er konvergente med grænseværdierne $x+y$, $x-y$ og xy . Hvis yderligere $y_n \neq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og $y \neq 0$ så er talfølgen $(x_ny_n^{-1})$ konvergent med grænseværdi xy^{-1} .

<u>Nogle nyttige talfølger</u>. Vi får ofte brug for konvergensforholdene for nedenstående talfølger:

	x_n	konvergens?
1	$n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n}$	$\lim x_n = 1$
2	$\frac{1}{n} \log n$	$\lim x_n = 0$
3	n^p , $p \in \mathbb{R}$	$\lim x_n = 0$ for $p < 0$ $\lim x_n = 1$ for $p = 0$ $\lim x_n = +\infty$ for $p > 0$
4	$(-1)^n n^p$, $p \in \mathbb{R}$	$\lim x_n = 0$ for $p < 0$ $\left.\begin{array}{l}\liminf x_n = -1\\ \limsup x_n = 1\end{array}\right\}$ for $p = 0$ $\left.\begin{array}{l}\liminf x_n = -\infty\\ \limsup x_n = +\infty\end{array}\right\}$ for $p > 0$
5	a^n , $a \in \mathbb{R}$	$\lim x_n = 0$ for $\lvert a\rvert < 1$ $\lim x_n = 1$ for $a = 1$ $\left.\begin{array}{l}\liminf x_n = -1\\ \limsup x_n = 1\end{array}\right\}$ for $a = -1$ $\left.\begin{array}{l}\liminf x_n = -\infty\\ \limsup x_n = +\infty\end{array}\right\}$ for $a < -1$ $\lim x_n = +\infty$ for $a > 1$
6	$a^n n^p$, $a,p \in \mathbb{R}$	$\lim x_n = 0$ for $\lvert a\rvert < 1$, $p \in \mathbb{R}$ $\lim x_n = \infty$ for $a > 1$, $p \in \mathbb{R}$ $\left.\begin{array}{l}\liminf x_n = -\infty\\ \limsup x_n = +\infty\end{array}\right\}$ for $a < -1$, $p \in \mathbb{R}$
7	$(1+\frac{x}{n})^n$, $x \in \mathbb{R}$	$\lim x_n = \exp(x)$

(1). Ifølge binomialformlen har vi for $\varepsilon > 0$

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + \frac{n}{1}\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$$

hvilket viser, at $n \leq (1+\varepsilon)^n$ når $\frac{n-1}{2}\varepsilon^2 \geq 1$, altså når $n \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$. Dermed fås

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon^2} \quad .$$

(2). Idet den naturlige logaritmefunktion $\log$ er kontinuert og $\log 1 = 0$ fås af (1)

$$\frac{1}{n}\log n = \log \sqrt[n]{n} \to \log 1 = 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty \; .$$

(3). For $p = 0$ har vi $n^p = 1$ for alle n, og for $p > 0$ gælder $n^p \geq a$ (>0) for $n \geq a^{\frac{1}{p}}$. For $p < 0$ har vi $n^p = \frac{1}{n^{-p}}$.

(4). Er umiddelbar.

(5). For $a = 1$ har vi $a^n = 1$ for alle n ; for $a = 0$ er $a^n = 0$ for alle n ; for $0 < |a| < 1$ er $|a^n| = |a|^n \leq \varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ når $n \log|a| \leq \log\varepsilon$ altså når $n \geq \frac{\log\varepsilon}{\log|a|}$ $(\log|a| < 0)$. For $a = -1$ er følgen $x_n = (-1)^n$.

For $a > 1$ gælder $a^n \geq k$ $(k>0)$ for $n \geq \frac{\log k}{\log a}$, og for $a < -1$ er følgen $x_n = (-1)^n |a|^n$.

(6). For $|a| < 1$ og $p \leq 0$ fås påstanden af (3) og (5). Betragt tilfældet $|a| < 1$ og $p > 0$. Vi sætter $b = -\frac{1}{2}\log|a|$. Dermed er $b > 0$ og funktionen

$$f(x) = x^p e^{-bx} \quad \text{for} \quad x \geq 0 \; ,$$

er differentiabel og

$$f'(x) = px^{p-1}e^{-bx} + x^p(-b)e^{-bx} = (p-bx)x^{p-1}e^{-bx} \; .$$

Vi ser, at $f'(x) \geq 0$ for $0 \leq x \leq \frac{p}{b}$ og $f'(x) \leq 0$ for $\frac{p}{b} \leq x$, altså at f antager sit maksimum for $x = \frac{p}{b}$. Sætter vi $c = f\left(\frac{p}{b}\right)$ (>0) har vi altså

$$f(x) \leq c \quad \text{for alle} \quad x \geq 0 .$$

Dermed gælder

$$|n^p a^n| = n^p |a|^n = n^p e^{-bn} e^{-bn} \leq c\, e^{-bn} .$$

Idet $c\, e^{-bn} \leq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ for $n \geq \frac{1}{b}(\log c - \log \varepsilon)$ fås at

$$\lim_{n\to\infty} n^p a^n = 0$$

De øvrige tilfælde fås nu let.

(7). For $x \in \mathbb{R}$ gælder $1 + \frac{x}{n} > 0$ for $n > -x$ og for sådanne n har vi

$$\log(1+\tfrac{x}{n})^n = n \log(1+\tfrac{x}{n}) = x \cdot \frac{n}{x} \log(1+\tfrac{x}{n}) \to x ,$$

idet logaritmefunktionen er differentiabel i punktet 1 med differentialkvotient 1. Heraf fås så da eksponentialfunktionen er kontinuert at

$$(1+\tfrac{x}{n})^n = \exp(\log(1+\tfrac{x}{n})^n) \to \exp(x) .$$

Fundamentalfølger. Det almindelige konvergensprincip. Det er i mange forbindelser nyttigt at kunne vise, at en talfølge (x_n) i $\mathbb{R}$ er konvergent uden på forhånd at kende grænseværdien. Hertil et nyt begreb.

DEFINITION. En talfølge (x_n) i $\mathbb{R}$ kaldes en fundamentalfølge (eller en Cauchy-følge) hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $m,n \in \mathbb{N}$ med $m \geq N$ og $n \geq N$ gælder

$$|x_m - x_n| < \varepsilon .$$

Med andre ord skal der til hvert $\varepsilon > 0$ kunne findes et nummer N således, at den indbyrdes afstand mellem vilkårlige to elementer i følgen "efter" N er $< \varepsilon$.

Hvis talfølgen (x_n) i $\mathbb{R}$ er konvergent med grænseværdi $x \in \mathbb{R}$ så er (x_n) en fundamentalfølge. Lad nemlig $\varepsilon > 0$ være givet. Idet $x_n \to x$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$, og for $m,n \in \mathbb{N}$ opfyldende $m \geq N$, $n \geq N$ har vi så

$$|x_m - x_n| = |x_m - x + x - x_n| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

hvilket viser, at (x_n) er en fundamentalfølge. Det omvendte er også rigtigt.

SÆTNING 2.9. (Det almindelige konvergensprincip) En talfølge (x_n) i $\mathbb{R}$ er konvergent med en grænseværdi tilhørende $\mathbb{R}$ hvis og kun hvis (x_n) er en fundamentalfølge.

BEVIS. Lad (x_n) være en fundamentalfølge i $\mathbb{R}$. Vi starter med at indse, at (x_n) er begrænset, altså at der findes $a,b \in \mathbb{R}$ så $a \leq x_n \leq b$ for alle n . Der findes nemlig $N \in \mathbb{N}$ så $|x_n - x_m| \leq 1$ for $n,m \geq N$, og med

$$a = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_N\} - 1$$
$$b = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_N\} + 1$$

har vi det ønskede $a \leq x_n \leq b$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dette viser specielt at

$$a \leq \liminf x_n \leq \limsup x_n \leq b .$$

Vi vil vise at $\liminf x_n = \limsup x_n$, hvilket godtgør påstanden ifølge Sætning 2.7. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Så findes

$N \in \mathbb{N}$ så $|x_m - x_n| \leq \varepsilon$ for $m,n \geq N$ hvoraf specielt

$$x_N - \varepsilon \leq x_n \leq x_N + \varepsilon \quad \text{for alle} \quad n \geq N ,$$

men så har vi

$$x_N - \varepsilon \leq \liminf x_n \leq \limsup x_n \leq x_N + \varepsilon$$

eller $0 \leq \limsup x_n - \liminf x_n \leq 2\varepsilon$, og da dette gælder for hvert $\varepsilon > 0$ fås det ønskede, at $\liminf x_n = \limsup x_n$. ▮

EKSEMPEL. Lad følgen (x_n) være fastlagt induktivt ved

$$x_1 = 2 , \quad x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}) \quad \text{for} \quad n = 1,2,3,\ldots \quad .$$

Vi skal se, at (x_n) er en fundamentalfølge. Hertil bemærker vi først, at der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$1 \leq x_n \leq 2 .$$

Dette er nemlig klart for $n = 1$, og hvis $1 \leq x_n \leq 2$ for et $n \in \mathbb{N}$ har vi

$$x_{n+1} \leq \tfrac{1}{2}(2+\frac{2}{1}) = 2 \quad \text{og} \quad x_{n+1} \geq \tfrac{1}{2}(1+\frac{2}{2}) = 1$$

hvoraf påstanden ved induktion. Dernæst udregner vi for $n \geq 2$,

$$x_{n+1} - x_n = \tfrac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} = (x_n - x_{n-1})\left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{x_n x_{n-1}}\right)$$

hvoraf idet, $1 \leq x_n x_{n-1} \leq 4$, og dermed $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{x_n x_{n-1}} \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \tfrac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| .$$

Ved gentagen anvendelse fås så, idet $|x_2 - x_1| = |\frac{3}{2} - 2| = \frac{1}{2}$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq (\tfrac{1}{2})^{n-1}|x_2 - x_1| = (\tfrac{1}{2})^n \quad \text{for} \quad n \geq 2 .$$

Lad nu $m > n \geq 2$ og udregn

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - \ldots - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (\tfrac{1}{2})^{m-1} + (\tfrac{1}{2})^{m-2} + \ldots + (\tfrac{1}{2})^n . \end{aligned}$$

Leddet til sidst er en kvotientrække med $m - n$ led og kvotient $\frac{1}{2}$ og sum

$$\frac{(\frac{1}{2})^n(1-(\frac{1}{2})^{m-n})}{1-\frac{1}{2}} = 2(\tfrac{1}{2})^n(1-(\tfrac{1}{2})^{m-n}) \leq (\tfrac{1}{2})^{n-1} .$$

Idet $(\frac{1}{2})^{n-1} \to 0$ for $n \to \infty$ findes til hvert $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ så $(\frac{1}{2})^{n-1} < \varepsilon$ for $n \geq N$ og for $m > n \geq N$ har vi så at

$$|x_m - x_n| \leq (\tfrac{1}{2})^{n-1} < \varepsilon .$$

Altså er (x_n) en fundamentalfølge og dermed konvergent. Lad x betegne grænseværdien. Af regnereglerne for grænseværdier fås

$$x = \lim x_{n+1} = \lim \tfrac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}) = \tfrac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

hvoraf $x = \sqrt{2}$.

<u>Decimalbrøk</u>. Når $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, skrives tallet $\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}$ som bekendt $0,a_1a_2\ldots a_n$, og udtrykket kaldes en <u>endelig decimalbrøk</u>. Tallet tilhører intervallet $[0,1[$. Ved en <u>uendelig decimalbrøk</u> forstås et udtryk $0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$, hvor $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in \{0,1,\ldots,9\}$. Sættes $x_n = 0,a_1a_2\ldots a_n$, er talfølgen $x_1, x_2, \ldots$ stigende, og da tallene tilhører intervallet $[0,1[$ er følgen konvergent med en grænseværdi x , der tilhører intervallet $[0,1]$. Denne grænseværdi kaldes værdien af den uendelige decimalbrøk, og man skriver

$$x = 0,a_1a_2\ldots a_n\ldots \quad .$$

Man bemærker, at $0,a_1a_2\ldots a_n = 0,a_1a_2\ldots a_n00\ldots$.

<u>SÆTNING 2.10</u>. Ethvert tal x i intervallet $[0,1]$ kan fremstilles ved en uendelig decimalbrøk. Et tal x i intervallet $]0,1[$, der kan fremstilles ved en endelig decimalbrøk, fremstilles ved netop to uendelige decimalbrøker. Alle andre tal i $[0,1]$ har netop een fremstilling ved en uendelig decimalbrøk.

For et tal med to uendelige decimalbrøkfremstillinger lyder disse

$$0,a_1a_2\ldots a_n00\ \ldots \quad \text{og} \quad 0,a_1a_2\ldots(a_n-1)99\ldots \quad ,$$

hvor $a_n \in \{1,\ldots,9\}$.

EKSEMPEL. Reelle tal i $[0,1]$ kan også fremstilles ved <u>dualbrøker</u> ("to-talsystemet"). En <u>endelig dualbrøk</u> et et udtryk ${}^{2}0,a_1a_2\ldots a_n$, hvor $a_1,\ldots,a_n \in \{0,1\}$, som repræsenterer tallet $a_1\cdot 2^{-1} + a_2\cdot 2^{-2} + \ldots + a_n\cdot 2^{-n}$. En <u>uendelig dualbrøk</u> er et udtryk ${}^{2}0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$, hvor $a_i \in \{0,1\}$, som repræsenterer tallet $\lim x_n$, hvor (x_n) er den stigende talfølge på $[0,1]$ givet ved

$$x_n = a_1\cdot 2^{-1} + \ldots + a_n\cdot 2^{-n} \ .$$

Der gælder nu et resultat helt analogt til Sætning 2.10.

<u>Mægtigheden af mængden af reelle tal og af de reelle talrum</u>. Vi afrunder omtalen af de reelle tal med at vise nogle sætninger, som ganske vist ikke skal benyttes i det følgende, men som dog naturligt hører med i en behandling af de reelle tals grundlæggende egenskaber.

<u>SÆTNING 2.11</u>. Mængden $\mathbb{R}$ er ikke numerabel. (Anderledes sagt: For enhver numerabel delmængde A af $\mathbb{R}$ er $\mathbb{R}\setminus A \neq \emptyset$.)

BEVIS. Lad $A = \{x_1,x_2,\ldots\}$. Vælg et afsluttet interval $[a_1,b_1]$, så at $x_1 \notin [a_1,b_1]$, dernæst et afsluttet interval $[a_2,b_2] \subseteq [a_1,b_1]$, så at $x_2 \notin [a_2,b_2]$, etc. Dette er åbenbart muligt. Fællesmængden for den dalende følge $[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \ldots$ af afsluttede intervaller er et afsluttet interval $[a,b]$. Lad $x \in [a,b]$. Da gælder åbenbart $x \neq x_1$, $x \neq x_2, \ldots$, altså $x \in \mathbb{R}\setminus A$. ‖

<u>SÆTNING 2.12</u>. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ er $\mathbb{R}^n$ ekvipotent med $\mathbb{R}$. Anderledes udtrykt: De reelle talrum $\mathbb{R}^n$ har alle kontinuets mægtighed.

BEVIS. For $n = 1$ er intet at vise. Vi antager derfor $n > 1$. Vi går frem i en række skridt.

1. Mængden $\mathbb{R}$ er foreningsmængde af de numererbart mange disjunkte mængder

$$]z-1,z] \ , \quad z \in \mathbb{Z} \ ,$$

der hver for sig er ekvipotent med mængden $]0,1]$. Mængden $\mathbb{R}^n$ er foreningsmængde af de numererbart mange disjunkte mængder

$$]z_1-1,z_1] \times \ldots \times]z_n-1,z_n] \ , \quad z_1 \in \mathbb{Z},\ldots,z_n \in \mathbb{Z} \ ,$$

der hver for sig er ekvipotent med mængden $]0,1]^n$. Det er derfor tilstrækkeligt at vise, at mængden $]0,1]$ er ekvipotent med mængden $]0,1]^n$.

2. Vi betragter først tilfældet $n = 2$. Det gælder da om at angive en bijektiv afbildning af $]0,1]$ på $]0,1]^2$.

Ethvert $x \in]0,1]$ har een uendelig decimalbrøkfremstilling $0,a_1a_2\ldots a_q\ldots$, hvor decimalfølgen ikke ender med lutter nuller, og enhver uendelig decimalbrøk $0,a_1a_2\ldots a_q\ldots$, hvor decimalfølgen ikke ender med lutter nuller, fremstiller et tal $x \in]0,1]$.

For enhver sådan decimalbrøk opdeler vi decimalfølgen i stykker, idet eventuelle nuller tages sammen med første efterfølgende fra nul forskellige decimal. Eksempelvis skrives decimalbrøken

$$0,\ 0\ 1\ 3\ 9\ 0\ 0\ 4\ 7\ 5\ 0\ 9\ 8\ 0\ 0\ 0\ 6\ \ldots$$

således

$$0,\ \boxed{0\ 1}\boxed{3}\boxed{9}\boxed{0\ 0\ 4}\boxed{7}\boxed{5}\boxed{0\ 9}\boxed{8}\boxed{0\ 0\ 0\ 6}\ \ldots \ .$$

De mulige stykker er altså af formen $\boxed{0\ldots0a}$, hvor der først står et antal (evt. ingen) nuller og derefter et af tallene $1,\ldots,9$. Ved decimalbrøkfremstillingen er således etableret en bijektiv afbildning

$$x \mapsto g_1,g_2,\ldots$$

af $]0,1]$ på mængden af følger af stykker.

En bijektiv afbildning af $]0,1]$ på $]0,1]^2$ etableres nu ved at man, når $x \in]0,1]$ svarer til følgen $g_1,g_2,\ldots$, som billede af x i $]0,1]^2$ vælger parret (x_1,x_2) , hvor x_1 svarer til følgen $g_1,g_3,\ldots$ og x_2 til følgen $g_2,g_4,\ldots$. Eksempelvis benyttes altså som billede af punktet

$$x = 0,\boxed{0\ 1}\,\boxed{3}\,\boxed{9}\,\boxed{0\ 0\ 4}\,\boxed{7}\,\boxed{5}\,\boxed{0\ 9}\,\boxed{8}\,\boxed{0\ 0\ 0\ 6}\ \ldots \in\ ]0,1]$$

punktet

$$(x_1,x_2) = (0,\boxed{0\ 1}\,\boxed{9}\,\boxed{7}\,\boxed{0\ 9}\,\boxed{0\ 0\ 0\ 6}\ \ldots,\ 0,\boxed{3}\,\boxed{0\ 0\ 4}\,\boxed{5}\,\boxed{8}\ldots) \in\ ]0,1]^2.$$

3. For $n > 2$ er beviset analogt. Det gælder da om at angive en bijektiv afbildning af $]0,1]$ på $]0,1]^n$. Når $x \in\ ]0,1]$ svarer til følgen $g_1, g_2, \ldots$, benytter vi som billede af x punktet $(x_1,\ldots,x_n) \in\ ]0,1]^n$, hvor x_i svarer til følgen $g_i, g_{i+n}, g_{i+2n} \ldots$. ▮

BEMÆRKNING. De to sætninger: at $\mathbb{R}$ ikke er numerabel, og at $\mathbb{R}^n$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$ er ekvipotent med $\mathbb{R}$, danner begyndelsen til Cantors mængdelære. Den første sætning viser, at der findes uendelige mængder af forskellig mægtighed; den anden, at talrum af forskellige dimension er ekvipotente, så at dimensionen altså ikke hænger sammen med rummets mægtighed.

BEMÆRKNING. Hvis vi i ovenstående bevis havde opereret med decimalbrøkerne selv (uden opdelingen i stykker) og til $x = 0,a_1a_2,\ldots a_q \ldots$ havde tilordnet $(x_1,x_2) = (0,a_1a_3\ldots,\ 0,a_2a_4\ldots)$, havde vi ikke opnået en bijektiv afbildning af $]0,1]$ på $]0,1]^2$, ja, ikke engang en afbildning af $]0,1]$ ind i $]0,1]^2$. Eksempelvis ville vi for $x = 0{,}010101\ldots = \frac{1}{99}$ have fået $x_1 = 0{,}000\ldots = 0$ og $x_2 = 0{,}111\ldots = \frac{1}{9}$. Denne opspaltning af decimalbrøken kan dog siges at være den grundlæggende ide i beviset. Cantor reddede beviset ved en ret kompliceret betragtning. Den ovenfor benyttede ide med opdeling i stykker skyldes J. König.

§3. Konvergens af komplekse talfølger.

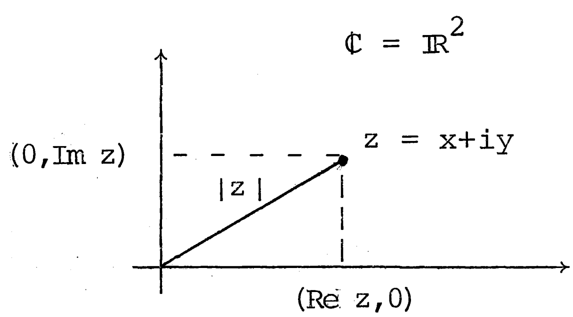
De begreber, der i §2 blev behandlet vedrørende konvergens af reelle talfølger bygger på begrebet "afstand" mellem reelle tal, og inden vi tager fat på "konvergens begreber" for komplekse talfølger, skal vi præcisere et afstandsbegreb i $\mathbb{C}$.

Afstand i $\mathbb{C}$. Mængden $\mathbb{C}$ af komplekse tal er organiseret som et legeme, der ikke kan forsynes med en ordning som gør $\mathbb{C}$ til et ordnet legeme. Oftest vil vi tænke på $\mathbb{C}$ som $\mathbb{R}^2$, altså som mængden af ordnede par (x,y) med $x,y \in \mathbb{R}$. Det komplekse tal z identificeres således med parret $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ hvor $z = x+iy$, og x kaldes realdelen af z , $x = \operatorname{Re} z$, og y kaldes imaginærdelen af z , $y = \operatorname{Im} z$. De reelle tal $\mathbb{R}$ opfattes herved som delmængden $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ af $\mathbb{C}$. For $z = x+iy \in \mathbb{C}$ kaldes tallet $\bar{z} = x-iy \in \mathbb{C}$ det til z konjugerede tal. Herved har vi $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$.

Den numeriske værdi $|z|$ af $z = x+iy \in \mathbb{C}$ er tallet

$$|z| = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\geq 0) ,$$

altså længden af liniestykket der forbinder 0 og z .



Der gælder $|z|^2 = z\bar{z}$ samt $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ og $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$. Afbildningen $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0,\infty[$ har følgende fundamentale egenskaber:

A: $\quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,

B: $\quad |zz'| = |z|\,|z'|$,

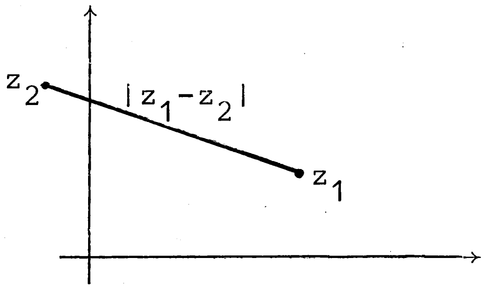
C: $\quad |z+z'| \leq |z| + |z'|$,

gældende for $z,z' \in \mathbb{C}$.

Her er egenskaben A umiddelbar, B verificeres ved en simpel udregning og C fås af

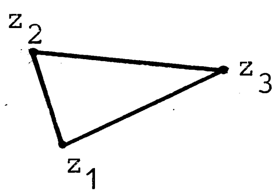
$$
\begin{aligned}
|z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z+z'}) = z\bar{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\bar{z} \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \le |z|^2 + |z'|^2 + 2|\mathrm{Re}(z\overline{z'})| \\
&\le |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z|+|z'|)^2 .
\end{aligned}
$$

Ud fra begrebet numerisk værdi defineres <u>afstanden</u> <u>fra</u> $z_1 \in \mathbb{C}$ <u>til</u> $z_2 \in \mathbb{C}$ som tallet $|z_1-z_2|$ (≥ 0) . Idet $|z_1-z_2| = |z_2-z_1|$ siges også blot afstanden <u>mellem</u> z_1 og z_2 . Dette afstandsbegreb har følgende egenskaber:



<u>I:</u> afstanden mellem z_1 og z_2 er ≥ 0 og $= 0$ hvis og kun hvis $z_1 = z_2$.

<u>II:</u> for alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ er afstanden mellem z_1 og $z_2 \leq$ summen af afstandene mellem z_1 og z_2 og mellem z_2 og z_3 , altså det velkendte, at en vilkårlig af sidelængderne i en trekant er $\leq$ summen af de to andre siders længder.



Her er I en følge af A, og II fås af C idet

$$|z_1-z_3| = |(z_1-z_2)+(z_2-z_3)| \leq |z_1-z_2| + |z_2-z_3|$$

hvilket netop udtrykker II. Denne ulighed kaldes <u>trekantsuligheden</u>.

Sammenfattende har vi for $z, z' \in \mathbb{C}$ ulighederne

$$\left.\begin{matrix} |\mathrm{Re}\ z| \\ |\mathrm{Im}\ z| \end{matrix}\right\} \leq |z| \leq |\mathrm{Re}\ z| + |\mathrm{Im}\ z| , \tag{1}$$

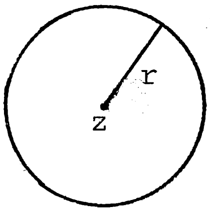
$$|z+z'| \leq |z| + |z'| ,$$

$$\Big|\,|z|-|z'|\,\Big| \leq |z-z'| ,$$

hvor den sidste fås af trekantsuligheden:

$|z| = |z-z'+z'| \leq |z-z'| + |z'|$ og $|z'| = |z'-z+z| \leq |z'-z| + |z|$.

For $z \in \mathbb{C}$ og $r > 0$ defineres den <u>åbne</u> <u>kugle</u> (<u>cirkel</u>) med <u>centrum</u> z og <u>radius</u> r som mængden



$$K(z,r) = \{z' \in \mathbb{C} \mid |z-z'| < r\} ,$$

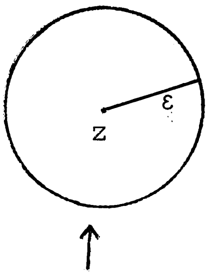
altså som de $z' \in \mathbb{C}$ der har afstand $< r$ til z , og den tilsvarende <u>afsluttede</u> <u>kugle</u> er mængden

$$\overline{K(z,r)} = \{z' \in \mathbb{C} \mid |z-z'| \leq r\} .$$

<u>Komplekse talfølger</u>. Vi går nu over til begrebet konvergens for komplekse talfølger (z_n) , altså afbildninger $n \mapsto z_n$ af $\mathbb{N}$ ind i $\mathbb{C}$.

<u>DEFINITION</u>. En talfølge (z_n) i $\mathbb{C}$ siges at være <u>konvergent</u> med grænseværdi $z \in \mathbb{C}$, hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så $z_n \in K(z,\varepsilon)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$.

Vi skriver så $z_n \to z$ eller $\lim z_n = z$. Udsagnet er, at til hver åben kugle med centrum z findes et $N \in \mathbb{N}$ så z_n tilhører denne kugle fra "trin" N . Anderledes sagt: $z_n \to z$ hvis og kun hvis den reelle talfølge $(|z_n-z|)$ af afstande mellem z og z_n er konvergent med grænseværdi 0 . En kompleks talfølge (z_n) der ikke er konvergent, altså for hvilken der ikke findes noget $z \in \mathbb{C}$ så $z_n \to z$, kaldes <u>divergent</u>.



alle z_n fra trin N

<u>SÆTNING 3.1</u>. En talfølge (z_n) i $\mathbb{C}$ er konvergent med grænseværdi $z \in \mathbb{C}$ hvis og kun hvis de reelle talfølger $(\mathrm{Re}\, z_n)$ og $(\mathrm{Im}\, z_n)$ begge er konvergente med grænseværdier $\mathrm{Re}\, z$ henholdsvis $\mathrm{Im}\, z$.

BEVIS. Det følger af den venstre ulighed i (1) ovenfor, at $z_n \to z$ medfører $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ og $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$, og den højre ulighed i (1) viser den modsatte implikation. Mere præcist: Antag, at $z_n \to z$ og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Så findes $N \in \mathbb{N}$ så $|z_n - z| < \varepsilon$ for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ og dermed har vi

$$|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon$$

og

$$|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| = |\operatorname{Im}(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon$$

for $n \geq N$, hvilket viser at $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ og $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$. Antag nu omvendt, at $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ og $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$, og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Så findes $N, M \in \mathbb{N}$ så

$$|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for} \quad n \geq N$$

og

$$|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for} \quad n \geq M .$$

For $n \geq \max\{N, M\}$ har vi da

$$|z_n - z| \leq |\operatorname{Re}(z_n - z)| + |\operatorname{Im}(z_n - z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

hvilket viser, at $z_n \to z$. ▮

EKSEMPEL. For følgen $z_n = (i)^n$ har vi $(\operatorname{Re} z_n) = (0,-1,0,1,0,-1,\ldots)$ og $(\operatorname{Im} z_n) = (1,0,-1,0,1,0,\ldots)$.

DEFINITION. Et tal $z \in \mathbb{C}$ kaldes et <u>fortætningspunkt for talfølgen</u> (z_n) i $\mathbb{C}$, hvis det for hvert $\varepsilon > 0$ gælder, at mængden $\{m \in \mathbb{N} \mid z_m \in K(z, \varepsilon)\}$ er uendelig.

Som i §2 ser man, at $z \in \mathbb{C}$ er fortætningspunkt for følgen (z_n) hvis og kun hvis der findes en delfølge (z_{n_p}) af (z_n), som er konvergent med grænseværdi z.

EKSEMPLER. Talfølgen $z_n = n + \frac{1}{n}i$ er divergent og har ingen fortætningspunkter. Talfølgen $z_n = (i)^n$ har de fire fortætningspunkter $1, -1, i, -i$.

Der findes (altså) talfølger i $\mathbb{C}$ uden fortætningspunkter. En begrænset talfølge (z_n) i $\mathbb{C}$ (d.v.s. som opfylder $\sup\{|z_n| \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$) har imidlertid altid mindst ét fortætningspunkt.

SÆTNING 3.2. Enhver begrænset talfølge (z_n) i $\mathbb{C}$ har et fortætningspunkt.

BEVIS. Med $r = \sup\{|z_n| \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$ har vi $\operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n \in [-r,r]$. Ifølge Korollar 2.6 findes en konvergent delfølge $(\operatorname{Re} z_{n_p})$ af $(\operatorname{Re} z_n)$. Den dertil svarende delfølge $(\operatorname{Im} z_{n_p})$ af $(\operatorname{Im} z_n)$ er en følge på $[-r,r]$ og den har derfor en konvergent delfølge $(\operatorname{Im} z_{n_{p_q}})$. Men så er ifølge Sætning 3.1 $(z_{n_{p_q}})$ en konvergent delfølge af (z_n) , og altså har (z_n) et fortætningspunkt. ▯

DEFINITION. En følge (z_n) i $\mathbb{C}$ kaldes en fundamentalfølge (eller en Cauchy følge) hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $m,n \in \mathbb{N}$ med $m \geq N$ og $n \geq N$ gælder at $|z_n - z_m| < \varepsilon$, altså hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et "trin" $N \in \mathbb{N}$ så den indbyrdes afstand mellem vilkårlige to følgeelementer efter trin N er $< \varepsilon$.

SÆTNING 3.3. (Det almindelige konvergensprincip). En følge (z_n) i $\mathbb{C}$ er konvergent hvis og kun hvis den er en fundamentalfølge.

BEVIS. Påstanden fås af Sætning 3.1 og Sætning 2.9 idet man ved hjælp af uligheden (1) ser, at (z_n) er en fundamentalfølge hvis og kun hvis $(\mathrm{Re}\, z_n)$ og $(\mathrm{Im}\, z_n)$ begge er fundamentalfølger. ▯

EKSEMPEL. Lad (z_n) og (w_n) være talfølger i $\mathbb{C}$ med $z_n \to z$ og $w_n \to w$. Så gælder

$$z_n+w_n \to z+w \;,\; z_n-w_n \to z-w \;\text{ og }\; z_nw_n \to zw \;,$$

og hvis $z_n \neq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og $z \neq 0$ så gælder også $z_n^{-1} \to z^{-1}$.

BEMÆRKNING. Vi har tidligere set, at for en konvergent reel talfølge (x_n) på et <u>afsluttet begrænset interval</u> $A \subseteq \mathbb{R}$ gælder, at $\lim x_n \in A$. Tilsvarende har vi, at for en konvergent kompleks talfølge (z_n) på en <u>afsluttet kugle</u> $\overline{K(w,r)}$ $(w \in \mathbb{C},\ r > 0)$, altså $z_n \in \overline{K(w,r)}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, gælder at $z = \lim z_n \in \overline{K(w,r)}$. Antager vi nemlig, at $|z-w| = r' > r$ så findes $N \in \mathbb{N}$ med egenskaben: $|z-z_n| < r'-r$ for $n \geq N$ og dermed har vi ifølge trekantsuligheden

$$|z-w| \leq |z-z_N| + |z_N-w| < r'-r+r = r'$$

hvilket er en modstrid.

Vi skal senere komme nærmere ind på delmængder $A \subseteq \mathbb{C}$ med egenskaben:

$$z_n \in A \,,\; z_n \to z \;\Rightarrow\; z \in A \;,$$

men enhver afsluttet kugle har, som vi lige har set, egenskaben.

<u>Formulering med kvantorer</u>. Hidtil har vi defineret konvergensbegreberne i ord, men det kan være nyttigt at have korte, præcise (men vanskeligere at læse) formuleringer ved hjælp af kvantorer.

Lad (z_n) være en kompleks talfølge og $z \in \mathbb{C}$. At (z_n) er <u>konvergent med grænseværdi</u> z udtrykkes

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N \;\Rightarrow\; |z_n-z| < \varepsilon \;, \tag{1}$$

og (z_n) er en <u>fundamentalfølge</u> hvis og kun hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n,m \in \mathbb{N}: (n \geq N \wedge m \geq N) \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon . \tag{2}$$

Talfølgen (z_n) er således <u>konvergent</u> hvis og kun hvis

$$\exists z \in \mathbb{C} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}: n \geq N \Rightarrow |z_n - z| \leq \varepsilon . \tag{3}$$

Ifølge Sætning 3.3 er udsagnene (2) og (3), som på forhånd er helt forskellige, ensbetydende.

Negationen af (3), der udtrykker at (z_n) er <u>divergent</u>, er

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N}: n \geq N \wedge |z_n - z| \geq \varepsilon ,$$

som i ord kan udtrykkes: til hvert $z \in \mathbb{C}$ (centrum) findes et $\varepsilon > 0$ (radius) så ligegyldigt hvor stort et $N \in \mathbb{N}$ der betragtes findes et $n \geq N$ så z_n ikke tilhører den åbne kugle $K(z,\varepsilon)$.

§4. Uendelige rækker.

I det følgende får vi ofte brug for at kunne skrive tal som "sum" af "uendelig mange" tal; indholdet i disse udtryk skal nu præciseres ved hjælp af konvergens begrebet for talfølger.

Konvergens og absolut konvergens af uendelig række. Lad (a_n) være en kompleks talfølge. Den til (a_n) hørende uendelige række er den formelle sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{eller} \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad .$$

Disse formelle udtryk, som på forhånd er uden mening, skal nu - under visse omstændigheder - tillægges en talværdi. Talfølgens n'te element a_n kaldes den uendelige rækkes n'te led, og summen af de n $(n \in \mathbb{N})$ første led,

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n \quad ,$$

kaldes det n'te afsnit i den uendelige række. Talfølgen (s_n) kaldes afsnitsfølgen for den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

DEFINITION. Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hørende til (a_n) kaldes konvergent hvis afsnitsfølgen er konvergent, og i så fald kaldes afsnitsfølgens grænseværdi for rækkens sum. Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ikke er konvergent siges den uendelige række at være divergent.

For en konvergent uendelig række benyttes $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eller $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ også som betegnelse for rækkens sum.

BEMÆRKNING. En vilkårlig kompleks talfølge (s_n) er afsnitsfølge for en uendelig række. Med $a_1 = s_1$ og $a_n = s_n - s_{n-1}$ for $n \geq 2$ har vi nemlig

$$a_1+a_2+\ldots+a_n = s_1+(s_2-s_1)+\ldots+(s_{n-1}-s_{n-2})+(s_n-s_{n-1}) = s_n \, ,$$

hvilket viser, at (s_n) er afsnitsfølge for $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

BEMÆRKNING. Ofte vil et tal være fastlagt som sum af en uendelig række. Afsnitsfølgen konvergerer altså mod tallet og giver derfor en "bedre og bedre" approksimation til tallet. Endvidere er selve repræsentationen af reelle tal som uendelige decimal- (eller dual-) brøker "knyttet" til uendelige rækker. En uendelig decimalbrøk $0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ (se side I.50) betegner nemlig blot summen af den konvergente uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$.

Et udsnit i den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er summen af endelig mange på hinanden følgende led i rækken, altså et tal af formen

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p} = s_{n+p}-s_n$$

hvor $n,p \in \mathbb{N}$. Det almindelige konvergens princip (Sætning 3.3) giver nu et vigtigt teoretisk kriterium for rækkekonvergens.

SÆTNING 4.1. (Udsnitskriteriet) Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent hvis og kun hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n,p \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ gælder at

$$|a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}| < \varepsilon \quad .$$

BEVIS. Afsnitsfølgen (s_n) er nemlig konvergent hvis og kun hvis den er en fundamentalfølge hvilket netop er betingelsen i sætningen.▮

Det følger af Sætning 4.1, at en nødvendig betingelse for konvergens af den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er, at $a_n \to 0$ for $n \to \infty$. Videre ser man, at konvergens af $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kun afhænger af "halen" i følgen (a_n) .

Ved bevis for konvergens ved hjælp af udsnitskriteriet skal den numeriske værdi af et udsnit $a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}$ vurderes uafhængigt af p ved en størrelse δ_n hvor $\lim \delta_n = 0$. For en konvergent uendelig række giver vurderingen

$$|s_{n+p}-s_n| = |a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}| \leq \delta_n \quad \text{for alle} \quad p \in \mathbb{N} ,$$

et mål for afvigelsen mellem summen s og det n'te afsnit, idet $\lim_{p\to\infty} s_{n+p} = s$ medfører, at $|s-s_n| \leq \delta_n$.

EKSEMPEL. Den <u>harmoniske række</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent, thi udsnittet med n led startende med det $(n+1)$'te led er

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} ,$$

så ligegyldigt hvor "langt ude" man starter vil der være udsnit $\geq \frac{1}{2}$ (og dermed vilkårligt store).

EKSEMPEL. Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergente uendelige rækker er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ konvergent og for hvert $\lambda \in \mathbb{C}$ er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ konvergent og for summerne gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Dette ses ved at betragte de respektive afsnitsfølger.

I forskellige forbindelser er begrebet konvergent uendelig række ikke fyldestgørende (se nedenfor) og vi skal derfor skærpe dette begreb.

<u>DEFINITION</u>. En uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes <u>absolut konvergent</u> hvis den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.

Det følger umiddelbart af udsnitskriteriet, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent hvis den er absolut konvergent. Vi har jo for $n,p \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}| \leq |a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+p}| .$$

Idet afsnitsfølgen for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er stigende og derfor konvergent hvis og kun hvis den er begrænset, har vi, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent hvis og kun hvis

$$\sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_i| \mid n \in \mathbb{N} \right\} < \infty .$$

Eksempler på uendelige rækker. (a) Alternerende række. En uendelig række af formen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x_n$, hvor (x_n) er en aftagende følge af positive reelle tal med grænseværdi 0, er konvergent. Lad nemlig (s_n) betegne afsnitsfølgen. Idet $x_n > 0$ har vi $0 < s_1 = x_1$ og $s_{n+1} < s_n$ for n ulige $(s_{n+1} = s_n+(-1)^n x_{n+1} < s_n)$ samt $s_{n+1} > s_n$ for n lige $(s_{n+1} = s_n+(-1)^n x_{n+1} > s_n)$; da (x_n) er aftagende har vi

$$[0,s_1] \supseteq [s_2,s_1] \supseteq [s_2,s_3] \supseteq [s_4,s_3] \supseteq \dots .$$

Disse intervaller har ifølge Sætning 1.5 netop et punkt $s \in \mathbb{R}$ fælles, da længden af det n'te interval er x_n og $x_n \to 0$. Altså har vi $s_n \to s$.

For hvert $n \in \mathbb{N}$ er s_n endepunkt i det (n+1)'te interval, og idet s tilhører hvert af intervallerne har vi vurderingen

$$|s-s_n| \leq x_{n+1} .$$

EKSEMPEL. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ (den harmoniske række med skiftende fortegn) er konvergent. Man kan vise at summen er $\log 2$ (p. V.14).

(b) Teleskopisk række. Hvis talfølgen (a_n) har formen $a_n = b_{n+1} - b_n$ for en talfølge (b_n) er det n'te afsnit i den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ givet ved

$$\begin{aligned} s_n &= a_n+a_{n-1}+\dots+a_2+a_1 \\ &= (b_{n+1}-b_n)+(b_n-b_{n-1})+\dots+(b_3-b_2)+(b_2-b_1) = b_{n+1}-b_1 , \end{aligned}$$

idet summen er "teleskopisk" (andet led i en parentes ophæves af første led i næste parentes). Heraf ses, at den uendelige række

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ er konvergent hvis og kun hvis (b_n) er konvergent, og at rækkens sum i så fald er

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1 .$$

EKSEMPEL. Idet $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ har vi, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ er konvergent med sum 1.

(c) Kvotientrække. For $a,q \in \mathbb{C}$ betragter vi den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$ (kvotientrækken med første led a og kvotient q). For $q = 1$ er rækken konvergent hvis $a = 0$ og ellers divergent da det almindelige led for $a \neq 0$ ikke går mod 0 for $n \to \infty$. For $q \neq 1$ finder vi det n'te afsnit

$$s_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \quad \text{for} \quad n = 1,2,\ldots ,$$

hvoraf ses, at (s_n) i tilfældet $a \neq 0$ er konvergent hvis og kun hvis $|q| < 1$ og at i så fald $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$.

Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ er for $a \neq 0$ konvergent hvis og kun hvis $|q| < 1$. Rækken er endda absolut konvergent, idet talfølgen (s_n') hvor

$$s_n' = \sum_{k=1}^{n} |aq^{k-1}| = \frac{|a|(1-|q|^n)}{1-|q|} ,$$

er konvergent hvis $|q| < 1$.

Konvergenskriterier. I almindelighed er det ikke muligt eksplicit at beregne afsnitsfølgen for en uendelig række, og vi skal nu omtale nogle metoder, der "via opførslen" af (a_n), ofte kan føre til afklaring af konvergens/divergens af $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. I dette afsnit definerer vi $\frac{a}{0} = +\infty$ for $a > 0$ og $\frac{0}{0} = 1$.

SÆTNING 4.2. (Sammenligningskriteriet) Lad (a_n) være en talfølge og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ en absolut konvergent række. Hvis

$$c = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} < +\infty ,$$

da er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

BEVIS. Dette fås af udsnitskriteriet. Lad nemlig $\varepsilon > 0$ være givet og vælg $N \in \mathbb{N}$ så

$$|b_{n+1}|+\ldots+|b_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{c+1}$$

for alle $n \geq N$ og alle $p \in \mathbb{N}$. Vælg dernæst $M \in \mathbb{N}$ så $|a_n| \leq (c+1)|b_n|$ for alle $n \geq M$. For $n \geq \max\{N,M\}$ har vi så

$$|a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+p}| \leq (c+1)(|b_{n+1}|+\ldots+|b_{n+p}|) \leq \varepsilon$$

for alle $p \in \mathbb{N}$, hvilket viser, at $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent. $\square$

BEMÆRKNING. Hovedindholdet i sammenligningskriteriet er det intuitivt klare, at hvis det almindelige led i den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med ikke-negative led er "majoriseret" af det almindelige led i en <u>konvergent</u> uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, altså hvis $0 \leq a_n \leq b_n$ for $n \in \mathbb{N}$, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Mere almindeligt er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, hvis der findes et $c > 0$ så $0 \leq a_n \leq cb_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, eller blot for alle n "fra et vist trin".

EKSEMPEL. Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ er (absolut) konvergent, og dermed er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ (absolut) konvergent, thi

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 \quad (< +\infty) .$$

BEMÆRKNING. Sammenligningskriteriet kan også benyttes den "anden" vej: Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ er divergent og

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} > 0 ,$$

så er $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent (analogt bevis).

EKSEMPLER. De uendelige rækker $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$ er begge divergente, thi de har positive led og ved sammenligning med den harmoniske række fås

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

EKSEMPEL. Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er absolut konvergente uendelige rækker så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ absolut konvergent. Dette følger af sammenligningskriteriet og trekantsuligheden

$$|a_n+b_n| \le |a_n| + |b_n| ,$$

idet $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|+|b_n|)$ er konvergent.

Sammenligningskriteriet skal nu specialiseres til tilfældet hvor sammenligningsrækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er en kvotientrække.

<u>KOROLLAR 4.3.</u> (Rodkriteriet) Lad (a_n) være en talfølge og definér $\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Hvis $\lambda < 1$ så er den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent og hvis $\lambda > 1$ da er rækken divergent.

BEVIS. Antag, at $\lambda < 1$ og vælg $q \in]\lambda,1[$. Der findes $N \in \mathbb{N}$ så $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ for $n \ge N$, altså $|a_n| \le q^n$ for $n \ge N$ hvoraf

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{q^n} \le 1$$

og sammenligningskriteriet giver, da $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ er absolut konvergent, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent.

Hvis $\lambda > 1$ så er $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ altså $|a_n| \ge 1$ for uendelig mange $n \in \mathbb{N}$, og dermed er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. ▮

<u>KOROLLAR 4.4.</u> (Kvotientkriteriet) Lad (a_n) være en talfølge og definer

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \text{og} \quad \beta = \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad .$$

Hvis $\alpha < 1$ så er den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, og hvis $\beta > 1$ er rækken divergent.

BEVIS. Antag først, at $\alpha < 1$, og betragt $q \in]\alpha,1[$. Der findes $N \in \mathbb{N}$ så $|a_{n+1}| \leq |a_n|q$ for $n \geq N$ og dermed

$$|a_n| \leq |a_{n-1}|q \leq \dots \leq |a_N|q^{n-N}$$

for alle $n \geq N+1$. Dermed har vi $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{|a_N|}\, q^{\frac{n-N}{n}}$ for $n \geq N+1$, **altså**

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_N|}\, q^{\frac{n-N}{n}}\right) = q \ ,$$

og Korollar 4.3 giver, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent. Hvis $\beta > 1$ gælder $|a_{n+1}| > |a_n|$ fra et vist trin, og dermed konvergerer (a_n) ikke mod 0, altså er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. ▮

EKSEMPLER. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ er konvergent, idet $\frac{n!}{(n+1)!} \to 0$. For rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ har vi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \ ,$$

og den første er divergent, den anden konvergent.

EKSEMPEL. For talfølgen (a_n) hvor $a_n = (\frac{1}{2})^n$ for n ulige og $a_n = (\frac{1}{3})^n$ lige finder vi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n & \text{for } n \text{ ulige} \\ \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^n & \text{for } n \text{ lige} \end{cases} , \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } n \text{ ulige} \\ \frac{1}{3} & \text{for } n \text{ lige} \end{cases} ,$$

hvoraf

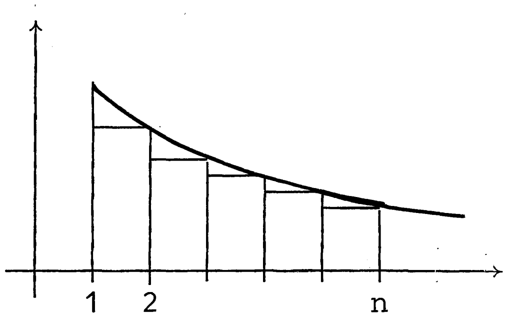
$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \ , \ \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty \ , \ \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} \ ,$$

således, at kvotientkriteriet ikke kan afgøre konvergens/divergens medens rodkriteriet viser, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent.

BEMÆRKNING. Af beviset for Korollar 4.4 og eksemplet ovenfor ses, at rodkriteriet er effektivt stærkere end kvotientkriteriet. Derimod er det ofte lettere at beregne α og β i Korollar 4.4 end λ i Korollar 4.3. Lad (a_n) være en talfølge for hvilken $\lambda = \lim\sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. For $q \in]\lambda,1[$ gælder så $q^{-n}|a_n| \to 0$; vælges nemlig $q' \in]\lambda,q[$ har vi $|a_n| \leq (q')^n$ fra et vist trin N og dermed for $n \geq N$, $q^{-n}|a_n| \leq (\frac{q'}{q})^n$ som går mod 0 for $n \to \infty$. Rodkriteriet (og så meget mere kvotientkriteriet) angiver således kun konvergens for rækker hvor det almindelige led går "hurtigere" mod 0 end q^n for et $q \in]0,1[$, og kun divergens for rækker hvor det almindelige led end ikke går mod 0. For eksempel vil ingen af kriterierne ovenfor direkte kunne afgøre konvergens/divergens for rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ hvor $\alpha \geq 1$. Hertil kan vi imidlertid benytte:

SÆTNING 4.5. (Integralkriteriet) Lad $f: [1,\infty[\to]0,\infty[$ være en kontinuert og aftagende funktion. Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er konvergent hvis og kun hvis følgen af integraler $(\int_1^n f(t)dt \mid n \in \mathbb{N})$ er konvergent.

BEVIS. Med betegnelsen $F(n) = \int_1^n f(t)dt$ for $n \in \mathbb{N}$ har vi, da



f er aftagende, at (se figur)

$$f(k+1) \leq F(k+1)-F(k) \leq f(k)$$

for $k \in N$, og ved addition af disse uligheder for $k = 1,2,3,\ldots,n-1$ $(n \geq 2)$ finder vi, da $F(1) = 0$ og F-leddene udgør en teleskopisk sum, at

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq F(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad \text{for } n \geq 2 . \qquad (+)$$

Heraf ses påstanden idet såvel følgen $(F(n))$ som afsnitsfølgen for $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er voksende og derfor konvergente hvis og kun hvis de er begrænsede. ▮

BEMÆRKNING. Uligheden (+) udtrykker simpelthen, at "undersummen" $\sum_{k=2}^{n} f(k)$ og "oversummen" $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ for integralet $\int_1^n f(t)dt$, er mindre end henholdsvis større end $\int_1^n f(t)dt$.

BEMÆRKNING. Med de samme betegnelser har vi ulighederne

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + F(n) \quad \text{og} \quad F(n) \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

hvoraf i tilfælde af konvergens

$$\lim_{n\to\infty} F(n) \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \le f(1) + \lim_{n\to\infty} F(n) \quad ,$$

altså

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} F(n) + \theta f(1) \quad \text{hvor} \quad \theta \in [0,1] \ .$$

I alle tilfælde er følgen $\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - F(n)\right)$ dalende, og begrænset, altså konvergent. Vi har nemlig ifølge uligheden fra beviset ovenfor, at

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(k) - F(n) &\ge \sum_{k=1}^{n} f(k) - F(n) + f(n+1) - F(n+1) + F(n) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - F(n+1) \ ,\end{aligned}$$

og vi har set, at

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} f(k) - F(n) \le f(1) \ .$$

EKSEMPEL. Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, er konvergent hvis og kun hvis $\alpha > 1$.

For $\alpha = 1$ er rækken den harmoniske række, som er divergent. For $\alpha \le 1$ har vi $n^{-\alpha} \ge \frac{1}{n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og af sammenligningskriteriet fås, at $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ er divergent for $\alpha \le 1$. For $\alpha > 1$ betragter vi funktionen $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$ af $[1,\infty[$ ind i $]0,\infty[$, som er kontinuert og aftagende. Vi finder

$$\int_1^n f_\alpha(x)\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x=1}^{x=n} = \frac{1-n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

hvoraf

$$\sup\left\{\int_1^n f_\alpha(x)\,dx \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1} < \infty ,$$

og af integralkriteriet ser vi, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} f_\alpha(n)$$

er konvergent for $\alpha > 1$.

Funktionen $\alpha \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ defineret for $\alpha > 1$ kaldes <u>zeta-funktionen</u> og betegnes ζ , altså

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \quad \text{for} \quad \alpha > 1 .$$

EKSEMPEL. I tilfælde af funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ finder vi fra Bemærkningen, at talfølgen med n'te element

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{t}\,dt = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$$

er konvergent. Grænseværdien kaldes <u>Eulers</u> <u>konstant</u>

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) = 0{,}5772\ldots \quad .$$

<u>Omordning af leddene i en uendelig række</u>. Lad (a_n) være en talfølge og $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en bijektiv afbildning. Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ siges at fremgå af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ved <u>omordning</u> <u>af</u> <u>leddene</u>, eller mindre præcist, at den indeholder de "samme" led som $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, blot taget i en anden rækkefølge.

EKSEMPEL. Den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \qquad (*)$$

er konvergent, lad os sige med sum s , men <u>ikke</u> absolut konvergent.

Vi skal se, at den kan omordnes til en konvergent række med sum $\neq s$, og at den kan omordnes til en divergent række. Leddene i (*) falder i to grupper,

$$\text{plus-led:} \quad 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$$
$$\text{minus-led:} \quad -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \ldots \quad .$$

Vi har

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots$$

og

$$\frac{1}{2}s = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \ldots$$

hvoraf ved ledvis addition

$$\frac{3}{2}s = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots \quad .$$

Rækken dannet ud fra (*) ved at tage plus-led 1 og 2, minusled 1, plus-led 3 og 4, minus-led 2, o.s.v., er altså konvergent med sum $\frac{3}{2}s \neq s$.

Vi vil nu omordne (*) til en divergent række. Idet rækken af plus-led $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ er divergent, gælder om afsnitsfølgen $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$, at $\lim s_n = +\infty$. Der findes derfor en følge $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ af naturlige tal så

$$s_{n_1} \geq 2, \; s_{n_2} - s_{n_1} \geq 2, \; \ldots \; s_{n_{p+1}} - s_{n_p} \geq 2, \; \ldots \quad .$$

Omordningen af (*) bestemt ved, at vi tager n_1 plusled, 1 minus-led $n_2 - n_1$ plus-led, 1 minus-led, o.s.v. giver da det ønskede

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots}_{n_1} - \frac{1}{2} + \underbrace{\qquad\qquad}_{n_2 - n_1} - \frac{1}{4} + \underbrace{\qquad\qquad}_{n_3 - n_2} - \frac{1}{6} + \ldots \quad .$$

Idet hver gruppe af plus-led med det følgende minus-led har sum ≥ 1 gælder nemlig for afsnitsfølgen $(\tilde{s}_n)$ i den omordnede række, at

$$\tilde{s}_p \geq N \quad \text{for} \quad p \geq n_N + N ,$$

altså, at $\tilde{s}_p \to +\infty$ for $p \to \infty$.

På analog måde kan det indses, at (*) for hvert $a \in \mathbb{R}$ kan omordnes, ved en "passende" blanding af plus-led og minus-led, til en konvergent række med sum a.

Disse fænomener kan dog ikke indtræffe for absolut konvergente rækker.

<u>SÆTNING 4.6</u>. Lad (a_n) være en talfølge så den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent og lad $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være en bijektiv afbildning. Da er $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ absolut konvergent og

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} .$$

BEVIS. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent og har derfor begrænset afsnitsfølge. For $n \in \mathbb{N}$ har vi

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k| \leq \sup\left\{ \sum_{k=1}^{m} |a_k| \;\middle|\; m \in \mathbb{N} \right\} < \infty ,$$

hvor $N = \max\{\tau(1), \tau(2), \dots \tau(n)\}$, hvilket viser at $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\tau(n)}|$ har begrænset afsnitsfølge, og dermed at $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ er absolut konvergent.

Vi sætter $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Til $\varepsilon > 0$ findes ifølge konvergensen $M_1 \in \mathbb{N}$ så

$$|s - \sum_{k=1}^{n} a_k| < \varepsilon \quad \text{for alle} \quad n \geq M_1 ,$$

og, ifølge udsnitskriteriet anvendt på $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, et $M_2 \in \mathbb{N}$ så

$$|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq M_2 \quad \text{og alle} \quad p \in \mathbb{N} .$$

Med $M = \max\{M_1, M_2\}$ har vi da

$$|s - \sum_{k=1}^{M} a_k| < \varepsilon \quad \text{og} \quad |a_{M+1}| + \dots + |a_{M+p}| < \varepsilon \quad \text{for alle} \quad p \in \mathbb{N} .$$

Lad nu $N \in \mathbb{N}$ være valgt så $n \geq N$ medfører $\tau(n) \geq M$, f.eks.

$N = \max\{\tau^{-1}(1),\ldots,\tau^{-1}(M)\}$. For $n \geq N$ har vi da at tallene $1,2,\ldots,M$ alle forekommer blandt $\tau(1),\ldots,\tau(n)$ og vi kan derfor skrive

$$s - \sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} = s - \sum_{k=1}^{M} a_k - \sum_{k\in T} a_k$$

hvor $T = \{\tau(1),\tau(2),\ldots,\tau(n)\} \setminus \{1,2,\ldots,M\}$. For $p \in \mathbb{N}$ valgt så stor at $T \subseteq \{M+1,M+2,\ldots,M+p\}$ kan vi vurdere

$$|s - \sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)}| \leq |s - \sum_{k=1}^{M} a_k| + |\sum_{k\in T} a_k|$$

$$< \varepsilon + \sum_{k\in T} |a_k| \leq \varepsilon + \sum_{k=M+1}^{M+p} |a_k| \leq 2\varepsilon ,$$

hvilket viser, at $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ har sum s . ▮

BEMÆRKNING. En absolut konvergent række siges i kraft af Sætning 4.6 at være <u>ubetinget konvergent</u>, idet konvergensen ikke "afhænger" af leddenes "rækkefølge". Man kan vise, at en uendelig række, der er konvergent men ikke absolut konvergent, kan omordnes til en divergent række. En sådan række, hvor konvergens/divergens afhænger af leddenes rækkefølge, kaldes derfor <u>betinget konvergent</u>.

<u>Indførelse af parenteser</u>. Lad (a_n) være en talfølge og $n_1,n_2,\ldots$ en strengt voksende følge af tal i $\mathbb{N}$ (altså $0 < n_1 < n_2 < \ldots$) . Sættes

$$b_p = \begin{cases} a_1+\ldots+a_{n_1} & \text{for } p = 1 \\ a_{n_{p-1}+1}+\ldots+a_{n_p} & \text{for } p > 1 , \end{cases}$$

siges rækken $\sum_{p=1}^{\infty} b_p = (a_1+\ldots+a_{n_1}) + (a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2}) + \ldots$ at fremkomme af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ved <u>indførelse af parenteser</u>.

<u>SÆTNING 4.7</u>. Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum s , er enhver række $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$, der fremkommer af den ved indførelse af pa-

renteser, ligeledes konvergent med sum s. Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, er rækken $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ ligeledes absolut konvergent.

BEVIS. Lad (s_n) være afsnitsfølgen for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Afsnitsfølgen for rækken $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ er da delfølgen $s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots$ af følgen $s_1, s_2, \ldots$. Når følgen $s_1, s_2, \ldots$ er konvergent med grænseværdi s, er delfølgen $s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots$ også konvergent med grænseværdi s. Hermed er den første påstand godtgjort.

Specielt får man, at hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_p$, hvor

$$c_p = \begin{cases} |a_1| + \ldots + |a_{n_1}| & \text{for } p = 1 \\ |a_{n_{p-1}+1}| + \ldots + |a_{n_p}| & \text{for } p > 1 \end{cases}$$

ligeledes konvergent. Da $|b_p| \leq c_p$ for ethvert $p \in \mathbb{N}$, slutter vi, at rækken $\sum_{p=1}^{\infty} |b_p|$ er konvergent. Hermed er den anden påstand godtgjort. ▮

<u>Multiplikation af rækker</u>. <u>Cauchy multiplikation</u>. Lad $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ og $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ være uendelige rækker. For ethvert par $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ danner vi produktet $c_{(j,k)} = a_j b_k$. Lad $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ være en bijektiv afbildning. Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\tau(n)}$ kaldes den til τ hørende produktrække for de to givne rækker. Vi siger (med en løsere talemåde) at produktrækken er dannet ved at danne alle produkter $a_j b_k$ af et led i rækken $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ og et led i rækken $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ og tage dem som elementer i en ny række i den ved τ bestemte rækkefølge.

<u>SÆTNING 4.8</u>. Hvis rækkerne $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ og $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ er <u>absolut</u> konvergente med summer s og t, er enhver produktrække $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\tau(n)}$ absolut konvergent med sum st.

BEVIS. Den specielle produktrække

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} d_n ,$$

der fremkommer ved at benytte den i skemaet angivne nummerering af parrene (j,k) , er absolut konvergent med sum st . Idet de givne rækker er absolut konvergente, findes nemlig tal $M_a, M_b \in \mathbb{R}$, så at

$j \rightarrow$, $k \downarrow$

k \ j	1	2	3	4	...
1	1	4	9	16	
2	2	3	8	15	
3	5	6	7	14	
4	10	11	12	13	
⋮					

$$|a_1| + \dots + |a_n| \leq M_a , \quad |b_1| + \dots + |b_n| \leq M_b$$

for ethvert $n \in \mathbb{N}$, og for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ har vi dermed for ethvert $n \in \mathbb{N}$

$$|d_1| + \dots + |d_n| \leq |d_1| + \dots + |d_{n^2}| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_j b_k|$$

$$= (|a_1| + \dots + |a_n|)(|b_1| + \dots + |b_n|) \leq M_a M_b ,$$

hvilket viser den absolutte konvergens. Af

$$d_1 + \dots + d_{n^2} = (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n) \rightarrow st \quad \text{for} \quad n \rightarrow \infty$$

ser vi dernæst, at summen er st .

Enhver produktrække $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\tau(n)}$ fremgår af den specielle produktrække $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ ved omordning af leddene og er altså ifølge Sætning 4.6 absolut konvergent med sum st . ∎

For at opnå bekvemme betegnelser nummerer vi de givne rækkers led ved tallene $0,1,2,\dots$. Benytter vi den i skemaet viste nummerering af parrene (j,k) fås ud fra de givne rækker $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ og $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ den specielle produktrække

$j \rightarrow$, $k \downarrow$

k \ j	0	1	2	3	...
0	1	3	6	10	
1	2	5	9		
2	4	8			
3	7				
⋮					

$$a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + \dots .$$

I denne indfører vi parenteser, således at hver ledgruppe $a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$ bestående af de led a_jb_k, for hvilke $j+k = n$, forenes til et led. Den således fremkomne række

$$a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0) + (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0) + \ldots$$

siges at være dannet ud fra rækkerne $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ og $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ved <u>Cauchy multiplikation</u>. Det n'te led $(n = 0,1,2,\ldots)$ i Cauchy produktrækker er altså $\sum_{p=0}^{n} a_pb_{n-p}$. Af det foregående fremgår:

<u>Sætning 4.9</u>. Hvis rækkerne $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ og $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ er absolut konvergente med summer s og t, er den ved Cauchy multiplikation dannede række

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} a_pb_{n-p}\right),$$

absolut konvergent med sum st.

EKSEMPEL. For komplekse tal z_1 og z_2 betragter vi de to uendelige rækker

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z_1)^n \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z_2)^n .$$

Det følger af kvotientkriteriet (Sætning 4.4), at begge rækkerne er absolut konvergente. Ved Cauchy multiplikation af de to rækker fås den absolut konvergente række

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}(z_1)^p\frac{1}{(n-p)!}(z_2)^{n-p}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!(n-p)!}(z_1)^p(z_2)^{n-p}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(z_1)^p(z_2)^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n$$

hvor vi har benyttet binomialformlen.

EKSEMPEL. Den uendelige række $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ er en alternerende række og derfor konvergent, men den er ikke absolut konvergent. For det n'te led i rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ dannet ved Cauchy multiplikation af

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ med sig selv, finder vi

$$c_n = \frac{(-1)^0}{\sqrt{1}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} + \frac{(-1)^1}{\sqrt{2}} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \frac{(-1)^0}{\sqrt{1}}$$

$$= (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}} \right)$$

hvoraf

$$|c_n| = \frac{1}{\sqrt{1}\ \sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = 1 \ ,$$

altså er $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent.

BEMÆRKNING. Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være konvergente rækker. Som eksemplet ovenfor viser er Cauchy produktrækken ikke nødvendigvis konvergent, men man kan vise, at den er konvergent hvis blot én af rækkerne er absolut konvergent. Endvidere kan man vise, at hvis Cauchy produktrækken er konvergent så har den altid den "rigtige" sum nemlig $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.

§5. Uendelige produkter.

Til yderligere belysning af konvergensbegrebet for talfølger og uendelige rækker skal vi nu kort omtale uendelige produkter og give nogle eksempler på produktfremstillinger.

Uendelige produkter. Lad (a_n) være en kompleks talfølge. Det til (a_n) hørende uendelige produkt er det formelle produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{eller} \quad a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots \quad .$$

Talfølgens n'te element a_n kaldes det uendelige produkts n'te faktor og produktet

$$p_n = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i \, ,$$

af de n første faktorer kaldes det uendelige produkts n'te afsnit. Følgen (p_n) kaldes afsnitsfølgen for $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$.

DEFINITION. Det uendelige produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ hørende til talfølgen (a_n) siges at være konvergent hvis afsnitsfølgen (p_n) er konvergent, og i så fald kaldes afsnitsfølgens grænseværdi det uendelige produkts værdi. Hvis $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ ikke er konvergent siges det uendelige produkt at være divergent.

For et konvergent uendeligt produkt benyttes også

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{eller} \quad a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$$

som betegnelse for det uendelige produkts værdi.

BEMÆRKNING. Lad (a_n) være en talfølge. Hvis der findes $n \in \mathbb{N}$ så $a_n = 0$ er afsnitsfølgen for $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ klart konvergent med grænseværdi 0. Dette tilfælde vil vi lade ude af betragtning i det følgende.

BEMÆRKNING. Lad (a_n) være en talfølge med $a_n \neq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og antag, at det uendelige produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med værdi $p \in \mathbb{C}$.

Hvis $p \neq 0$ så gælder $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$; thi det n'te afsnit p_n er $\neq 0$ og derfor

$$a_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{p_n} \to \frac{p}{p} = 1 \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Hvis $p = 0$ kan vi ikke slutte tilsvarende; f.eks. gælder for en vilkårlig talfølge (a_n) som opfylder $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ for alle n at $p_n = a_1 a_2 \ldots a_n \to 0$ for $n \to \infty$.

EKSEMPEL. Det uendelige produkt

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{j+1}\right)\left(1+\frac{1}{j+1}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1-\left(\frac{1}{j+1}\right)^2\right)$$

er konvergent med grænseværdi $\frac{1}{2}$. Det n'te afsnit er nemlig givet ved

$$\prod_{j=1}^{n} \left(1-\frac{1}{j+1}\right)\left(1+\frac{1}{j+1}\right) = \left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\right) \ldots \left(\frac{n}{n+1}\,\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

som konvergerer mod $\frac{1}{2}$ for $n \to \infty$.

Hvis det om talfølgen (a_n) gælder, at $a_n > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, fås for det n'te afsnit p_n,

$$\log p_n = \log\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \log a_i$$

og idet man udnytter logaritmefunktionens kontinuitet ses, at (p_n) er konvergent med grænseværdi $p > 0$ hvis og kun hvis $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n$ er konvergent. I bekræftende fald fås så, at

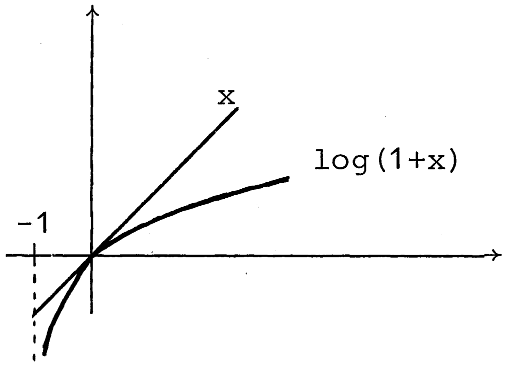
$$p = \prod_{n=1}^{\infty} a_n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n\right) .$$

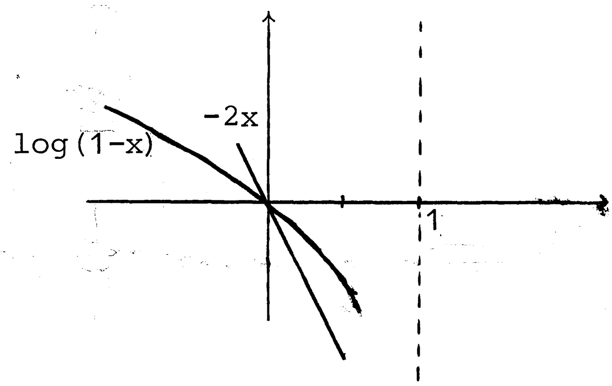
Vi skal nu give nogle simple betingelser for konvergens/divergens af visse uendelige produkter udtrykt ved hjælp af konvergens/divergens af uendelige rækker.

Hertil skal vi benytte ulighederne

$$\log(1+x) \leq x \quad \text{for} \quad x > -1 \;, \tag{1}$$

$$-2x \leq \log(1-x) \quad \text{for} \quad x \in [0,\tfrac{1}{2}] \tag{2}$$





<u>SÆTNING 5.1</u>. Lad (a_n) være en kompleks talfølge med $a_n \neq -1$ for alle n og antag at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent. Så er det uendelige produkt $\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j)$ konvergent med en værdi $\neq 0$.

BEVIS. Lad $s = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. For $n \in \mathbb{N}$ har vi da

$$|p_n| = |\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)| = \prod_{j=1}^{n}|1+a_j| \leq \prod_{j=1}^{n}(1+|a_j|)$$

hvoraf ved hjælp af (1)

$$\log|p_n| \leq \sum_{j=1}^{n}\log(1+|a_j|) \leq \sum_{j=1}^{n}|a_j| \leq s \;,$$

eller $|p_n| \leq e^s$. Videre gælder

$$|p_{n+1}-p_n| = |p_n((1+a_{n+1})-1)| = |p_n||a_{n+1}| \leq e^s|a_{n+1}|$$

og derfor for $m,n \in \mathbb{N}$ med $m > n$

$$|p_m-p_n| \leq \sum_{j=n}^{m-1}|p_{j+1}-p_j| \leq \sum_{j=n}^{m-1} e^s|a_{j+1}| = e^s\sum_{j=n}^{m-1}|a_{j+1}| \;.$$

Heraf ses ved hjælp af udsnitskriteriet (Sætning 4.1), at (p_n) er en fundamentalfølge i $\mathbb{C}$, altså findes $p \in \mathbb{C}$ så $p_n \to p$.

Vi mangler blot at indse, at $p \neq 0$. Idet $a_n \neq -1$ har vi $p_n \neq 0$ for alle n . Endvidere gælder $|a_n| \to 0$, fordi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, så der findes $N \in \mathbb{N}$ således at $n \geq N \Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{2}$. Idet logaritmefunktionen er voksende fås af (2) ovenfor for $n \geq N$,

$$\log|p_n| = \log(|p_{N-1}| \prod_{j=N}^{n} |1+a_j|) \geq \log(|p_{N-1}| \prod_{j=N}^{n} (1-|a_j|))$$

$$= \log|p_{N-1}| + \sum_{j=N}^{n} \log(1-|a_j|) \geq \log|p_{N-1}| - \sum_{j=N}^{n} 2|a_j|$$

$$\geq \log|p_{N-1}| - 2s ,$$

hvilket viser at $p \neq 0$, thi hvis $p_n \to 0$ har vi $|p_n| \to 0$ hvoraf $\log|p_n| \to -\infty$. ∎

<u>SÆTNING 5.2.</u> Hvis talfølgen (a_n) opfylder $0 \leq a_n < 1$ for $n \in \mathbb{N}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent så konvergerer det uendelige produkt $\prod_{j=1}^{\infty} (1-a_j)$ mod 0.

BEVIS. Af (1) får vi for $n \in \mathbb{N}$

$$\log|p_n| = \log \prod_{j=1}^{n} (1-a_j) = \sum_{j=1}^{n} \log(1-a_j) \leq - \sum_{j=1}^{n} a_j$$

eller

$$0 < p_n = |p_n| \leq \exp(- \sum_{j=1}^{n} a_j)$$

hvilket viser at $p_n \downarrow 0$, da $\exp(-x) \downarrow 0$ for $x \to \infty$. ∎

<u>SÆTNING 5.3.</u> Hvis talfølgen (a_n) opfylder $a_n \geq 0$ for $n \in \mathbb{N}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent så divergerer det uendelige produkt $\prod_{j=1}^{\infty} (1+a_j)$ mod $+\infty$.

BEVIS. For alle $n \in \mathbb{N}$ gælder, som man let ser,

$$\sum_{j=1}^{n} (1+a_j) \geq 1 + a_1 + \ldots + a_n ,$$

hvilket viser sætningens påstand. ▮

Nogle produktfremstillinger. Der findes som bekendt uendelig mange primtal. Lad $p_1, p_2, p_3, \ldots$ betegne følgen af primtal $2, 3, 5, 7, \ldots$. Vi skal nu vise Euler's produktfremstilling af zeta-funktionen (cf. I.71).

SÆTNING 5.4. For alle $\alpha > 1$ gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \prod_{k=1}^{\infty} (1-p_k^{-\alpha})^{-1} .$$

BEVIS. Venstresiden er zeta-funktions værdi $\zeta(\alpha)$, altså

$$\zeta(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots$$

hvoraf

$$\zeta(\alpha) 2^{-\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{6^{\alpha}} + \ldots$$

og dermed ved subtraktion

$$\zeta(\alpha)(1-2^{-\alpha}) = 1 + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \ldots ,$$

hvor kun de led $\frac{1}{n^{\alpha}}$ står tilbage, for hvilke n ikke er delelig med 2. Videre finder vi

$$\zeta(\alpha)(1-2^{-\alpha}) 3^{-\alpha} = \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{9^{\alpha}} + \frac{1}{15^{\alpha}} + \ldots$$

og dermed ved subtraktion

$$\zeta(\alpha)(1-2^{-\alpha})(1-3^{-\alpha}) = 1 + \frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{7^{\alpha}} + \frac{1}{11^{\alpha}} + \ldots$$

hvor kun de led $\frac{1}{n^{\alpha}}$ står tilbage, for hvilke n hverken er delelig med 2 eller med 3. Således fortsættes, og efter k skridt finder vi

$$\zeta(\alpha)(1-2^{-\alpha})(1-3^{-\alpha}) \ldots (1-p_k^{-\alpha}) = 1 + \frac{1}{p_{k+1}^{\alpha}} + \ldots$$

hvor kun de led $\frac{1}{n^\alpha}$ står tilbage, for hvilke n ikke er delelig med noget af primtallene $p_1, p_2, \ldots, p_k$; andet led i summen ovenfor er altså $\frac{1}{p_{k+1}^\alpha}$ og derfor gælder

$$0 < \zeta(\alpha)(1-2^{-\alpha}) \ldots (1-p_k^{-\alpha}) - 1 \le \sum_{n=p_{k+1}}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha) - \sum_{n=1}^{p_{k+1}-1} \frac{1}{n^\alpha} ,$$

hvilket viser, at

$$\zeta(\alpha)(1-2^{-\alpha}) \ldots (1-p_k^{-\alpha}) \to 1 \quad \text{for} \quad k \to \infty ,$$

eller anderledes sagt, at det uendelige produkt $\prod_{k=1}^{\infty} (1-p_k^{-\alpha})$ er konvergent med værdi $\frac{1}{\zeta(\alpha)}$, hvilket viser påstanden. ▮

<u>Korollar 5.5.</u> Den uendelige række $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$ er divergent.

BEVIS. Beviset føres indirekte. Antag altså, at $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$ er konvergent. Så fås af Sætning 5.1, at det uendelige produkt $\prod_{k=1}^{\infty} (1-\frac{1}{p_k})$ er konvergent med værdi $a \neq 0$ (altså $a > 0$) . Dermed er det uendelige produkt $\prod_{k=1}^{\infty} (1-\frac{1}{p_k})^{-1}$ konvergent med værdi $\frac{1}{a}$. For hvert $k \in \mathbb{N}$ og hvert $\alpha > 1$ har vi $(1-p_k^{-\alpha})^{-1} \le (1-p_k^{-1})^{-1}$ og derfor for $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=1}^{n} (1-p_k^{-\alpha})^{-1} \le \prod_{k=1}^{n} (1-p_k^{-1})^{-1} .$$

Lader vi $n \to \infty$ fås heraf $\zeta(\alpha) \le \frac{1}{a}$, hvilket giver den søgte modstrid, idet (se side I.71)

$$\lim_{\alpha\to 1} \zeta(\alpha) = \lim_{\alpha\to 1}\left(\frac{1}{\alpha-1} + \theta(\alpha)1\right) = +\infty \quad . ▮$$

BEMÆRKNING. Vi nævner uden bevis en anden produktfremstilling, der også skyldes Euler, nemlig at

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} .$$

For $x = \frac{\pi}{2}$ fås heraf det af Wallis (1655) fundne produkt

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot 2n}$$

eller

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots \quad .$$

Lidt historie. Indførelsen af differential- og integralregningen med dens "infinitesimaler" og opdagelsen af rækkeudviklingerne for de elementære funktioner, som i hovedsagen går tilbage til Leibniz (1646-1716) og Newton (1643-1727), gjorde en præcisering af konvergens begrebet for følger og rækker påtrængende.

Det var dog først Cauchy (1789-1857), der skaffede fastere grund under fødderne med "Cours d'analyse" fra 1821. Inden da havde man arbejdet "intuitivt" med begreberne, og for det meste på en måde, der kan "bringes i orden", og derfor gav "korrekte" resultater. F.eks. går integral kriteriet tilbage til Euler (1707-1783). Der var dog også "svipsere". F.eks. skrev man (nogle):

$$1-1+1-1+\ \dots = \frac{1}{2}$$

og

$$1+2+4+8+\ \dots = -1\ .$$

Dette er meningsløst; rækkerne er ikke konvergente, da det almindelige led ikke går mod 0. Men det kan være instruktivt at se hvilke grunde man angav til disse "identiteter": For $x \in\ ]-1,1[$ gælder (kvotientrække med kvotient x) ligningen

$$1+x+x^2+\ \dots = \frac{1}{1-x}\ , \qquad (*)$$

og indsætter man $x = -1$ på begge sider heraf, fås den første ligning, og indsættes $x = 2$ fås (!) den anden ligning.

"Fejlen" består naturligvis i at slutte fra, at de to udtryk i (*) er ens for visse værdier af x ($x\in\ ]-1,1[$) til, at de er ens for andre (f.eks. $x = -1$ og $x = 2$) .

Medens mange følte det naturligt at tillægge $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ værdien $\frac{1}{2}$, idet afsnitsfølgen er $(1,0,1,0,\dots)$ som "svinger" omkring værdien $\frac{1}{2}$, var de fleste skeptiske med hensyn til $\sum_{n=1}^{\infty}(2)^{n-1} = -1$, da alle rækkens led er positive og den påståede "sum" negativ (!).

Cauchy's gennembrud bestod først og fremmest i, at han gav en præcis (verbal) definition af begrebet konvergent talfølge. Herudfra kunne han så definere konvergens og absolut konvergens af uendelige rækker, og udlede mange af de resultater som vi har mødt i det foregående. Af særlig betydning er det almindelige konvergensprincip (Sætning 2.9), at enhver Cauchy-følge er konvergent, som Cauchy hævdede var "indlysende". Som vi har set bygger det almindelige konvergensprincip på fundamentale egenskaber ved de reelle tal, egenskaber som på Cauchy's tid endnu ikke var præcist formulerede, men vel nok "kendte". Dette blev bragt i orden i sidste fjerdedel af 18-hundredtallet og på samme tid gav Weierstrass (1815-1897) den ε-N definition på konvergens som vi har benyttet her.

I.0.1. Vis, ved at opskrive sandhedstabellerne de på side I.2 angivne udsagnslogiske ækvivalenser.

I.0.2. Vis, at konnektivet $\vee$ kan udtrykkes ved konnektiverne $\neg$ og $\Rightarrow$, og udtryk derefter konnektiverne $\wedge$ og $\Leftrightarrow$ alene ved $\neg$ og $\Rightarrow$.

I.0.3. Sandhedstabellen for et udsagn der er opbygget af tre udsagn p, q og r har 8 indgange svarende til de 8 kombinationer af sandhedsværdier. Find sandhedstabellerne for følgende udsagn

p	q	r	$p \wedge q \wedge r$
s	s	s	s
s	s	f	f
s	f	s	f
s	f	f	f
f	s	s	f
f	s	f	f
f	f	s	f
f	f	f	f

1) $(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$,
2) $(q \wedge \neg r) \Rightarrow p$
3) $p \vee q \vee r$.

I.0.4. Ved universitetet i Tbilisi afholdes for 1. års studerende et kursus i fysik, et i datalogi og et i matematik med følgende studieordning:

§1. Hvis en student følger fysik-, men ikke datalogi-kursus skal han/hun følge matematikkursus.

§2. Hvis han/hun følger datalogikursus, men ikke matematikkursus så skal han/hun følge fysikkursus.

§3. Han/hun skal følge fysik-, datalogi- eller matematikkursus.

Kan man om en student, der læser efter denne studieordning slutte: "Han/hun følger fysik- og datologi-kursus, eller matematikkursus.
(Vink: Benyt den foregående opgave.)

I.0.5. Tre damer var inde i en rammebutik. Samtidig var der i butikken tre herrer med samme navne som damerne, nemlig Andersen, Larsen og Svendsen. Af herrerne var den ene konsul, den anden lektor og den tredie direktør.

Fru Andersen boede på Christianshavn.

Direktøren boede på Vesterbro.

Fru Svendsen købte to rammer.

Hr. Larsen var højere end konsulen.

En af damerne, der var nabo til direktøren, købte tre gange så mange rammer som denne.

Den dame, der havde samme navn som direktøren, boede i Hellerup.

Hvad hed så lektoren?
(Nøddeknækkeren. Politikens Forlag.)

I.0.6. Giv et indirekte og et direkte bevis for uligheden:
$\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$.

I.0.7. For positive reelle tal a,b gælder ulighederne

$$\sqrt{ab} \leq \tfrac{1}{2}(a+b) \quad \text{og} \quad \tfrac{1}{2}(a+b) \leq \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)} \ .$$

Giv direkte og indirekte beviser for hver af disse uligheder.

I.0.8. Opskriv med brug af logiske tegn: "en nødvendig betingelse for, at andengradsligningen $x^2+ax+1 = 0$ har en positiv (reel) rod, er, at $a > 0$ ".

I.0.9. Opskriv med brug af logiske tegn: "en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at andengradsligningen $x^2+ax+b = 0$ har en (reel) rod, er, at $a^2-4b \geq 0$ ".

I.0.10. Vis ved et induktionsbevis, at for $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) \ .$$

I.0.11. Vis, at for $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 = (1\ +2\ +\ldots+n\ )^2 = \frac{1}{4}\, n^2(n+1)^2 \ .$$

I.0.12. Vis, at for $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} \ .$$

I.0.13. Vis, at for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder at

$$7 \text{ går op i } 11^n - 4^n \ .$$

(et naturligt tal a <u>går op</u> i et naturligt tal b hvis der findes et $c \in \mathbb{N}$ så $a \cdot c = b$).

(fortsætter)

(Vink. For $n = 1$ er $11^1 - 4^1 = 7$ og 7 går op i 7. Hvis 7 går op i $11^n - 4^n$ for et $n \in \mathbb{N}$ har vi

$$\begin{aligned} 11^{n+1} - 4^{n+1} &= 11^{n+1} - 11\cdot 4^n + 11\cdot 4^n - 4\cdot 4^n \\ &= 11(11^n - 4^n) + 4^n(11-4) \end{aligned}$$

hvilket viser at 7 går op i $11^{n+1} - 4^{n+1}$. Beviset afsluttes nu ved princippet om matematisk induktion.)

I.0.14. Vis, at 36 går op i $7^n - 6n - 1$ for $n = 2,3,4,\ldots$.

I.0.15. Lad X, Y og Z være ikke tomme mængder og lad $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to Z$ være afbildninger. Vis, at hvis $g \circ f$ er injektiv så er f injektiv og, at hvis $g \circ f$ er surjektiv så er g surjektiv.

I.0.16. Lad X være en ikke tom mængde. Delmængder A_1, A_2 af X er ens hvis de indeholder de samme elementer, og et bevis for at $A_1 = A_2$ føres ofte ved at godtgøre 1) $A_1 \subseteq A_2$ og 2) $A_2 \subseteq A_1$ (altså i ord: 1) at hvert element af A_1 er element af A_2, og 2) hvert element af A_2 er element af A_1).

Vis, at dualitetslovene side I.7 gælder.

I.0.17. Lad $f\colon X \to Y$ være en afbildning af mængden X ind i mængden Y.

Vis, de på side I.17 anførte ligninger for originalmængder ($f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ etc.).

I.0.18. Vis, at afbildningen $j\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ givet ved

$$j(x,y) = \tfrac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+x$$

er bijektiv og svarer til den på figuren angivne nummerering af $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$\begin{array}{c|cccc} y & & & & \\ 3 & 6. & . & . & . \\ 2 & 3. & 7. & . & . \\ 1 & 1. & 4. & 8. & . \\ 0 & 0. & 2. & 5. & 9. \\ \hline & 0 & 1 & 2 & 3 \quad x \end{array}$$

Vink. Vis, at $j(0,0) = 0$ og at hvis $j(x,y) = n$ for et $n \in \mathbb{N}$ så gælder

$(y=0 \Rightarrow j(0,x+1) = n+1)$ og

$(y>0 \Rightarrow j(x+1,y-1) = n+1)$.

I.0.19. Lad X være en uendelig mængde.

Vis, at for enhver endelig delmængde $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\} \subseteq X$ er X og $X \setminus \{a_1,\ldots,a_n\}$ ekvipotente.

I.0.20. Lad H være et hotel med uendelig mange værelser og antag at alle værelser er optaget. Prøv at skaffe plads på hotellet til et numerabelt rejseselskab ved at flytte rundt på gæsterne.

I.0.21. Vis, at mængden A af funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indeholder en med $\mathbb{R}$ ekvipotent mængde, men ikke selv er ekvipotent med $\mathbb{R}$.
Vink. Hvis delmængden B af A er ekvipotent med $\mathbb{R}$, og $x \mapsto g_x$ er en bijektiv afbildning af $\mathbb{R}$ på B, vil den ved

$$f(x) = g_x(x) + 1 \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R},$$

definerede funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ikke tilhøre B.

I.1.1. Undersøg for hver af nedenstående delmængder af $\mathbb{R}$ om den er opad eller nedad begrænset, angiv supremum og infimum og undersøg om der findes maksimum henholdsvis minimum.

(a) $[0,1]$,

(b) $[0,1[$,

(c) $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$,

(d) $\left\{n+\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$,

(e) $\left\{n+\frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$,

(f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 8\}$

(h) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$

(i) $\left\{\frac{x}{|x|+1} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$.

I.1.2. Lad A og B være ikke tomme delmængder af $\mathbb{R}^*$, og antag $A \subseteq B$.

Vis, at $\sup A \leq \sup B$ og $\inf A \geq \inf B$.

Vis, at hvis A og B begge har et maksimum så gælder

$$\max A \leq \max B .$$

Giv eksempler på mængder $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^*$ hvor $A \neq B$ og $\sup A = \sup B$ og $\inf A = \inf B$.

I.1.3. Lad A og B være ikke tomme delmængder af $\mathbb{R}^*$ og antag at $\forall a \in A \;\forall b \in B: a \leq b$.

Vis, at $\sup A \leq \inf B$.

(fortsætter)

Giv eksempler på mængder $A,B \subseteq \mathbb{R}^*$ for hvilke

1) $\forall a \in A \quad \forall b \in B: a < b$.

2) $\sup A = \inf B$.

I.1.4. Lad A være en ikke-tom delmængde af $\mathbb{R}_+$. Vis, at $\inf A \geq 0$.

I.1.5. Find supremum og infimum for mængden

$$\left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \mid p,q,r \in \mathbb{N}\right\} .$$

Har mængden maksimum og/eller minimum?

I.1.6. For vilkårlige ikke tomme delmængder af $\mathbb{R}$ defineres mængden $A+B$ ved

$$A+B = \{a+b \mid a \in A , b \in B\} .$$

Vis, at der gælder

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B , \quad \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

Vis, at hvis A og B begge har et maksimum så har $A+B$ et maksimum og der gælder

$$\max(A+B) = \max A + \max B .$$

Vis, at hvis $A+B$ har et maksimum så har både A og B et maksimum.

I.1.7. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$ være en ikke tom mængde og lad $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi definerer mængden λA ved

$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\} .$$

Prøv at udtrykke $\sup(\lambda A)$ og $\inf(\lambda A)$ ved $\sup A$ og $\inf A$ samt λ .

Vink. Resultaterne afhænger af beliggenheden af A og λ i forhold til 0.

I.1.8. Lad $M \subseteq \mathbb{R}$ være ikke tom og opad begrænset og lad D_M betegne mængden af ikke tomme delmængder af M . Vi sætter

$$M^* = \{\sup M' \mid M' \in D_M\} .$$

Vis, at

$$\sup M^* = \sup M$$

og at M^* har et maksimum.

I.1.9. Find supremum og infimum for hver af mængderne

$$\left\{x^2+y \mid x \in \left[-\tfrac{1}{2},1\right] , y \in \left[0,\tfrac{1}{2}\right]\right\} ,$$
$$\left\{x^2+y^2 \mid x \in \left[-\tfrac{1}{2},1\right] , y \in \left[0,\tfrac{1}{2}\right[\right\} ,$$
$$\left\{x^2-y^2 \mid x \in \left[-\tfrac{1}{2},1\right] , y \in \left]0,\tfrac{1}{2}\right[\right\} ,$$
$$\left\{x^2-5y \mid x \in \left]-\tfrac{1}{2},1\right] , y \in \left]0,\tfrac{1}{2}\right[\right\} ,$$

og undersøg om der findes maksimum, henholdsvis minimum.

I.1.10. Lad $A \subseteq]0,\infty[$ være ikke tom.
Vis, at mængden

$$A' = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} \in A\} ,$$

er opad begrænset hvis og kun hvis $\inf A > 0$, og at i så fald

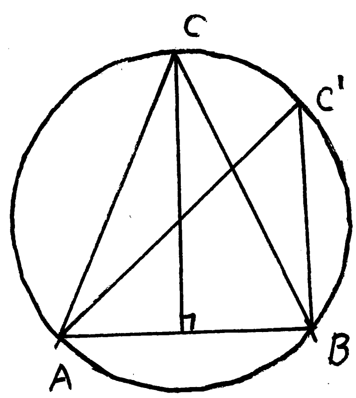
$$\sup A' = \frac{1}{\inf A} .$$

Vis, at A' har et maksimum hvis og kun hvis A har et minimum $\min A$ (>0), og at i så fald

$$\max A' = \frac{1}{\min A} .$$

I.1.11. Lad M betegne mængden af arealer for trekanter, der er indskrevet i en fast cirkel med radius $r > 0$. Find $\sup M$ og $\inf M$ og undersøg om M har maksimum, henholdsvis minimum.

Vink. Man kan benytte at for faste punkter A og B på cirkelperiferien vil trekanten ABC med størst areal være den hvor C ligger på midtnormalen for AB og den "længste" af buerne $\widehat{AB}$.



I.1.12. Samme som foregående opgave, hvor M nu er mængden af arealer for firkanter indskrevet i cirklen med radius $r > 0$.

I.2.1. Vis, at $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Det drejer sig om at vise, at der til hvert $\varepsilon > 0$ kan findes et $N \in \mathbb{N}$ (som afhænger af ε) så det for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ gælder at $|\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon$, altså at $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ for alle n større end eller lig et N (som vi skal finde). Lad os starte med at indse hvornår $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$. For givne tal $\varepsilon > 0$ og $n \in \mathbb{N}$ ser vi at $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ hvis og kun hvis $\frac{1}{\varepsilon} < n^2$ altså hvis og kun hvis $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} < n$ (positiv kvadratrod). Vi gætter derfor på at $N \in \mathbb{N}$ kan bruges (svarende til et givet $\varepsilon > 0$) hvis blot $N > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$. Et præcist bevis kan f.eks. se ud på følgende måde:

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Lad $N \in \mathbb{N}$ være valgt så $N > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ (hvilket er muligt). For hvert $n \in \mathbb{N}$ som opfylder $n \geq N$ har vi da

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} < \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon ,$$

hvilket viser, at $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

I.2.2. Vis, at $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{7n-4} = \frac{3}{7}$.

Lad os starte med at undersøge, for et $\varepsilon > 0$, for hvilke $n \in \mathbb{N}$ der gælder at $\left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon$, altså hvornår

$$\left|\frac{7(3n+1)-3(7n-4)}{7(7n-4)}\right| = \left|\frac{19}{7(7n-4)}\right| < \varepsilon .$$

Et givet $n \in \mathbb{N}$ opfylder denne ulighed hvis og kun hvis $7n-4 = |7n-4| > \frac{19}{7\cdot\varepsilon}$, altså hvis og kun hvis $n > \frac{1}{7}\left(\frac{19}{7\cdot\varepsilon} + 4\right)$. Et præcist bevis kan f.eks. se således ud:

Lad $\varepsilon > 0$ være givet og vælg $N \in \mathbb{N}$ så $N > \frac{1}{7}\left(\frac{19}{7\cdot\varepsilon} + 4\right)$ (hvilket er muligt). For alle $n \in \mathbb{N}$ som opfylder $n \geq N$ har vi da at $|7n-4| > \frac{19}{7\varepsilon}$ og dermed

$$\left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| = \left|\frac{19}{7(7n-4)}\right| < \frac{19}{7} \cdot \frac{1}{\frac{19}{7\varepsilon}} = \varepsilon ,$$

hvilket viser at $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{7n-4} = \frac{3}{7}$.

I.2.3. Giv et præcist bevis for, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 .$$

I.2.4. Giv et præcist bevis for, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2} = 0 .$$

I.2.5. Giv et præcist bevis for, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+14}{4n+1} = \frac{1}{4} .$$

I.2.6. Lad (x_n) være en konvergent talfølge i $\mathbb{R}^*$ med grænseværdi x, og lad $a \in \mathbb{R}^*$.

Vis, at hvis $x_n \geq a$ (henholdsvis $x_n \leq a$) for alle $n \in \mathbb{N}$ så gælder $x \geq a$ (henholdsvis $x \leq a$).

I.2.7. Lad (a_n) og (b_n) være konvergente reelle talfølger med $\lim_{n\to\infty} a_n = a \ (\in \mathbb{R})$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = b \ (\in \mathbb{R})$.

Vis, at talfølgen (a_n+b_n) er konvergent med grænseværdi $a+b$, og at talfølgen $(a_n \cdot b_n)$ er konvergent med grænseværdi ab.

Vink. Giv præcise beviser.

I.2.8. Lad (a_n) være en talfølge af tal $a_n \neq 0$.

Vis, at hvis a_n er konvergent med grænseværdi $a \neq 0$ så er talfølgen $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ konvergent med grænseværdi $\frac{1}{a}$.

Vis, at $\lim a_n = 0$ hvis og kun hvis $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right| = +\infty$.

I.2.9. Vis, ved hjælp af opgaverne I.2.7 og I.2.8, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{7n-4} = \frac{3}{7}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+14}{4n+1} = \frac{1}{4} .$$

I.2.10. Undersøg om talfølgen (a_n) givet ved

$$a_n = 6n-10\sqrt{n}, \quad a_n = \frac{5+\sin n}{n}, \quad a_n = n(1+(-1)^n), \quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1000},$$

er konvergent i $\mathbb{R}$, og find i bekræftende fald grænseværdien.

I.2.11. Vis, at talfølgen (a_n) givet ved

$$a_n = \frac{1-n}{1+n}\ , \quad a_n = \frac{1-n}{1+n^2}\ , \quad a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}\ , \quad a_n = \frac{n^2+4n+2}{n+18}\ ,$$

er konvergent i $\mathbb{R}^*$, og find grænseværdien.

I.2.12. Lad (a_n), (b_n) og (c_n) være talfølger i $\mathbb{R}^*$ og antag $a_n \leq b_n \leq c_n$ for alle n, samt, at (a_n) og (c_n) er konvergente med $\lim a_n = \lim c_n$. Vis, at $\lim b_n = \lim a_n$.

I.2.13. Lad a og b være reelle tal opfyldende $0 < b \leq a$. Vis, at

$$\lim \sqrt[n]{a^n+b^n} = a\ .$$

Vink. Benyt f.eks. I.2.12.

I.2.14. Vis, at en talfølge (x_n) i $\mathbb{R}$ er begrænset, hvis og kun hvis

$$-\infty < \lim\inf x_n \quad \text{og} \quad \lim\sup x_n < \infty\ .$$

I.2.15. Angiv to talfølger (a_n) og (b_n) i $\mathbb{R}$ som opfylder at $a_n < b_n$ for alle n og

$$\lim\sup a_n > \lim\inf b_n\ .$$

I.2.16. Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en vilkårlig følge af rationale tal så $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Find $\lim\inf x_n$ og $\lim\sup x_n$.

I.2.17. Lad (x_n) være en talfølge i $\mathbb{R}^*$. Vis, at

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = -\liminf_{n\to\infty} (-x_n)\ .$$

I.2.18. Lad (a_n) og (b_n) være talfølger i $\mathbb{R}$ og antag at (a_n) er konvergent med grænseværdi $a \in \mathbb{R}$. Vis, at

$$\lim\sup (a_n+b_n) = a + \lim\sup b_n\ ,$$

$$\lim\inf (a_n+b_n) = a + \lim\inf b_n.$$

I.2.19. Find lim inf og lim sup af talfølgen (a_n) hvor

$$a_n = (1+(-1)^n)^n \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}\ .$$

I.2.20. Find lim inf og lim sup af talfølgen

$$a_n = \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} .$$

I.2.21. Vis, at der for begrænsede talfølger (a_n) og (b_n) i $\mathbb{R}$ gælder ulighederne

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n+b_n)$$

$$\leq \begin{Bmatrix} \liminf a_n + \limsup b_n \\ \limsup a_n + \liminf b_n \end{Bmatrix}$$

$$\leq \limsup (a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup a_n .$$

I.2.22. Vis, at en talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ er konvergent med grænseværdien $x \in \mathbb{R}^*$, hvis og kun hvis enhver delfølge af (x_n) har en delfølge, der er konvergent med grænseværdien x.

I.2.23. Find alle fortætningspunkter for talfølgerne (a_n) i $\mathbb{R}^*$, hvor

$(a_n) = (1,2,3,4,\ldots)$, $(a_n) = (0,1,-1,2,-2,\ldots)$,
$(a_n) = (\sin \frac{n\pi}{2})$.

I.2.24. Angiv en talfølge der netop har punkterne $\{1,2,3,4\}$ som fortætningspunkter.

I.2.25. Angiv en talfølge der netop har alle de naturlige tal som fortætningspunkter.

I.2.26. Vis, at hvis talfølgen (x_n) i $\mathbb{R}^*$ er konvergent så er $\lim x_n$ fortætningspunkt for (x_n).

I.2.27. Vis, at hvis talfølgen (x_n) i $\mathbb{R}^*$ er konvergent så er enhver delfølge (x_{n_p}) af (x_n) konvergent og

$$\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

I.2.28. Vis, at en fundamentalfølge (x_n) i $\mathbb{R}$ er begrænset.

I.2.29. Giv et eksempel på en talfølge (x_n) i $\mathbb{R}$ med egenskaberne

1) for hvert $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ gælder at $|x_{n+1}-x_n| < \varepsilon$,

2) (x_n) er ikke en fundamentalfølge.

I.2.30. Lad (a_n) være en talfølge i $\mathbb{R}$ og sæt

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{1}{n}(a_1+\ldots+a_n) \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Vis, at hvis (a_n) er konvergent med grænseværdi $a \in \mathbb{R}$ så er (b_n) konvergent med grænseværdi a . Giv et eksempel på en divergent følge (a_n) for hvilken følgen (b_n) er konvergent.

I.2.31. Vis, at for hvert $x \in \mathbb{R}$ er talfølgen $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ konvergent med grænseværdi 0.

I.2.32. Lad talfølgen (a_n) i $\mathbb{R}$ være givet ved

$$a_1 = 2 \quad \text{og} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{a_n} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Vis, at (a_n) er dalende og find dens grænseværdi.

I.2.33. Lad $(a_n \in \mathbb{R}_+ \mid n \in \mathbb{N})$ være givet ved

$$a_1 = \sqrt{2} \quad \text{og} \quad a_{n+1}^2 = a_n + 2 \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Vis, at (a_n) er stigende og find dens grænseværdi.

I.2.34. Idet $0 < a < b < +\infty$, defineres det <u>aritmetiske middeltal</u> $A(a,b)$, det <u>geometriske middeltal</u> $G(a,b)$ og det <u>harmoniske middeltal</u> $H(a,b)$ ved

$$A(a,b) = \frac{1}{2}(a,b) \ , \ G(a,b) = \sqrt{ab} \ , \ H(a,b) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)^{-1} = \frac{2ab}{a+b} .$$

Vis, at der gælder

$$a < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < b .$$

Idet $0 < a_1 < b_1 < \infty$, sættes for $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = H(a_n,b_n) \quad \text{og} \quad b_n = A(a_n,b_n) .$$

Vis, at (a_n) er stigende og at (b_n) er dalende, og at

$$\lim a_n = \lim b_n = G(a_1,b_1) .$$

I.2.35. Lad (a_n) være en reel talfølge for hvilken det gælder at a_{n+1} for $n = 2,3,\ldots$ tilhører det åbne interval med endepunkterne a_{n-1} og a_n.

Vis, at delfølgerne (a_{2n}) og (a_{2n-1}) er monotone.

Vis, at (a_n) er konvergent hvis og kun hvis

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0 .$$

I tilfældet $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ og $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+a_{n-1})$ for $n = 2,3,\ldots$, vis, at $a_n = \frac{2}{3}\left(1-(-\frac{1}{2})^{n-1}\right)$ for $n = 2,3,4,\ldots$, og find $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

I.2.36. Idet talfølgen $(a_n \in \mathbb{R}_+ \mid n \in \mathbb{N})$ antages at opfylde betingelsen

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \text{for } n \in \mathbb{N} ,$$

skal man vise at $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent, og finde grænseværdien.

I.3.1. Lad (a_n) og (b_n) være konvergente komplekse talfølger med grænseværdier a og b .

Vis, at følgerne (a_n+b_n) og (a_nb_n) er konvergente med grænseværdier $a+b$ og ab .

Vis, at følgen $(\overline{a_n})$ (kompleks konjugering) er konvergent med grænseværdi $\overline{a}$.

Vis, at hvis $a_n \neq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ så er følgen $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ konvergent hvis og kun hvis $a \neq 0$, og at i bekræftende fald gælder

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} .$$

I.3.2. Lad (a_n) være en kompleks talfølge.

Vis, at hvis (a_n) er konvergent med grænseværdi a så er den reelle talfølge $(|a_n|)$ konvergent med grænseværdi $|a|$.

Antag nu at $(|a_n|)$ er konvergent med grænseværdi $r \geq 0$. Kan man slutte at følgen (a_n) er konvergent?

I.3.3. Som sædvanlig betegner $\operatorname{Arg} z$ for $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ <u>hovedargumentet</u> $\in \,]-\pi,\pi]$ for z .

Angiv en kompleks talfølge (a_n) med egenskaberne

1) $a_n \neq 0$ for alle n , 2) $a_n \to a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

3) følgen $(\operatorname{Arg} a_n)$ er ikke konvergent med grænseværdi $\operatorname{Arg} a$.

I.3.4. Lad (a_n) være en konvergent kompleks talfølge af tal $a_n \neq 0$ med grænseværdi $a \neq 0$.

Vis, at hvis $\operatorname{Arg} a \neq \pi$ så gælder

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg} a_n = \operatorname{Arg} a .$$

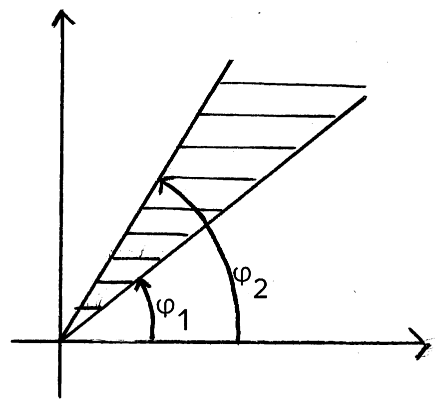
Vink. Udnyt, at hvis

$$[\varphi_1,\varphi_2] \subseteq \,]-\pi,\pi]$$

er et interval omkring $\operatorname{Arg} a$ så er mængden

$$\{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \mid \operatorname{Arg} z \in [\varphi_1,\varphi_2]\}$$

lig det skraverede område på tegningen.



I.3.5. Lad (a_n) være en kompleks talfølge af tal $a_n \neq 0$ og antag at de reelle talfølger $(\operatorname{Arg} a_n)$ og $(|a_n|)$ begge er konvergente.

Vis, at (a_n) er konvergent og find grænseværdien.

I.3.6. For hvert $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ findes præcis ét tal $z' \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ med $\operatorname{Arg} z' \in \,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ så $(z')^2 = z$ (en kvadratrod af z) .

Vis, at hvis (a_n) er en konvergent kompleks talfølge af tal $a_n \neq 0$ med egenskaberne

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ 2) $\operatorname{Arg} a \neq \pi$

så er følgen (a_n') konvergent med grænseværdi a' .

I.3.7. Udfør beviset for Sætning 3.3.

I.4.1. Bevis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(2n^2-\sqrt{n})^{-1}$ er konvergent, og at rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ er divergent.

I.4.2. Bevis, at rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} n^n 2^{-n^2}$ og $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ begge er konvergente.

I.4.3. Undersøg, hvilke af de tre rækker

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}\ ,$$

der er konvergente.

I.4.4. Undersøg, hvilke af de tre rækker

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\log(n+1)}{2^n}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^7}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n}\ ,$$

der er konvergente.

I.4.5. Bevis, at rækkerne $\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$ og $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\log n}{n}\right)^n$ begge er konvergente.

I.4.6. Bevis, at rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\ ,\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log n}\ ,\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\log\log n}$$

er konvergente, men ikke absolut konvergente.

I.4.7. Lad (a_n) være en aftagende følge af positive reelle tal, og antag at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent.

Vis, at $na_n \to 0$ for $n \to \infty$.

Vink. Udsnitskriteriet.

Giv et eksempel på en aftagende følge (a_n) af positive reelle tal, for hvilken $na_n \to 0$ for $n \to \infty$, og rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent.

I.4.8. Vis, at hvis (a_n) er en aftagende følge af positive reelle tal så $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent så gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) .$$

I.4.9. Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, hvis $(n+2)|a_{n+1}| \leq n|a_n|$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$.

I.4.10. Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en i 0 differentiabel funktion, for hvilken $f(0) = 0$. Vis, at hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med reelle led er absolut konvergent, da er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ ligeledes absolut konvergent.

I.4.11. Undersøg for hver af nedenstående rækker, om den er konvergent eller divergent

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2 \log 3 \ldots \log(n+1)}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\log(n+1)]^n}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log 2 - \log 3 + \ldots + (-1)^n \log n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(1+\frac{1}{n})}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n)^2$

(g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[\log n]^2}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^2$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \log[(1+\frac{1}{n})^n]$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(2n)!}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2}-n)$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{1+n^3}-n)$.

I.4.12. Bevis, at rækken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ er konvergent, hvis $\alpha > 1$, og divergent, hvis $\alpha \leq 1$.

I.4.13. Bevis, at talfølgen $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, hvor

$$a_n = \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \ldots + \frac{1}{n \log n} - \log \log n ,$$

er konvergent.

I.4.14. Vis, at hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ har begrænset afsnitsfølge $s_n = a_1+\ldots+a_n$, d.v.s. der findes et M, så at $|s_n| = |a_1+\ldots+a_n| \leq M$ for ethvert n, og $b_1, b_2, \ldots$ er en aftagende følge af positive reelle tal med grænseværdi 0, da er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

Vink. Bevis og udnyt omskrivningen

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

$$= s_1(b_1-b_2) + s_2(b_2-b_3) + \ldots + s_{n-1}(b_{n-1}-b_n) + s_n b_n .$$

I.4.15. Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ er konvergent for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

Vink. Benyt forrige opgave.

I.4.16. Lad (a_n) være en reel talfølge. Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent hvis og kun hvis det for enhver delfølge (a_{n_p}) af (a_n) gælder at rækken $\sum_{p=1}^{\infty} a_{n_p}$ er konvergent.

I.4.17. Lad $a \in \mathbb{R}$. Vis, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ kan omordnes til en konvergent række med sum a.

I.4.18. Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en konvergent uendelig række med sum s, og lad $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være en bijektiv afbildning med egenskaben

$$\sup\{|\tau(n)-n| \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty .$$

Vis, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ er konvergent med sum s.

I.4.19. Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være absolut konvergent med sum A og lad $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være konvergent med sum B. Vis at Cauchy produktrækken er konvergent med sum AB.

(Vink. Med betegnelserne

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \ ; \ A_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \ ; \ B_n = \sum_{j=0}^{n} b_j \ ; \ d_n = B-B_n$$

for $n = 0,1,2,\ldots$ gælder omskrivningen

$$\sum_{j=0}^{n} c_j = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0 = A_n B - (a_0 d_n + \ldots + a_n d_0) .$$

(fortsætter)

Leddet i parentes kan vurderes idet $d_n \to 0$ for $n \to \infty$ og $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent.)

I.5.1. Bestem konvergensforholdene for de uendelige produkter

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) \; ; \quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \; ; \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) \; ;$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \; ; \quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right) \; ; \quad \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{n} \; ;$$

I.5.2. Vis, at $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a^n)$ er konvergent for $0 \leq a < 1$.

I.5.3. Vis, at for $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) .$$

I.5.4. Vis, at for $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) .$$

Vink. Benyt den (ubeviste) produktfremstilling for $\sin x$ der er anført side I.84.

Mat 102, 1981/82

KAPITEL II.

METRISKE RUM OG KONTINUITET.

Indhold:

§1. Metriske rum.

I denne paragraf skal vi indføre en abstrakt begrebsramme for studiet af konvergens og kontinuitet, nemlig teorien for de metriske rum. Vi kommer til at benytte en geometrisk præget sprogbrug og taler således om punkter, afstande, kugler o.s.v. Dette glosevalg henter sin inspiration fra et vigtigt specialtilfælde, som vi starter med.

Euklidisk afstand i talrummene. For et naturligt tal $k \in \mathbb{N}$ betegner $\mathbb{R}^k$ mængden af ordnede k-sæt $\underline{x} = (x_1,\dots,x_k)$ af reelle tal. Elementerne i $\mathbb{R}^k$ kan på naturlig måde adderes

$$\underline{x}+\underline{y} = (x_1+y_1,\dots,x_k+y_k) \quad (\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^k)$$

og skalarmultipliceres

$$\lambda\underline{x} = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_k) \quad (\lambda \in \mathbb{R}\,,\ \underline{x} \in \mathbb{R}^k)\,,$$

og udstyret med disse operationer er $\mathbb{R}^k$ et vektorrum over $\mathbb{R}$, det k-dimensionale reelle talrum $\mathbb{R}^k$. Nulvektoren er $\underline{0} = (0,0,\dots,0)$.

Endvidere er der for $k = 1,2,3$ defineret en længde $\|x\|$ af elementerne $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$, nemlig

$$\|\underline{x}\| = |x_1| \qquad \text{for } \underline{x} = (x_1) \in \mathbb{R}^1\,,$$
$$\|\underline{x}\| = (x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } \underline{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\,,$$

og

$$\|\underline{x}\| = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } \underline{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Idet $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ opfattes som modeller af en linie, en plan og rummet er den anskuelige betydning af tallet $\|\underline{x}\|$ længden af liniestykket eller vektoren, der forbinder punkterne $\underline{0}$ og $\underline{x}$, eller anderledes sagt afstanden mellem $\underline{0}$ og $\underline{x}$.

I almindelighed definerer vi for $k \in \mathbb{N}$ længden $\|\underline{x}\|$ af $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$, som tallet

$$\|\underline{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{hvor} \quad \underline{x} = (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k .$$

For $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, kaldes tallet $\|\underline{x}-\underline{y}\|$ $(= \|\underline{y}-\underline{x}\|)$ for <u>afstanden</u> <u>mellem</u> $\underline{x}$ <u>og</u> $\underline{y}$, altså

$$\|\underline{x}-\underline{y}\| = \left(\sum_{i=1}^{k} (x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for} \quad \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^k .$$

Dette afstandsbegreb har følgende egenskaber:

I. For alle $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^k$ er afstanden mellem $\underline{x}$ og $\underline{y}$ ≥ 0 og $= 0$ hvis og kun hvis $\underline{x} = \underline{y}$.

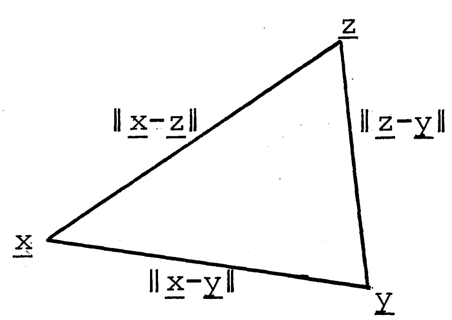
II. For $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ og $\lambda \in \mathbb{R}$ gælder: $\|\lambda\underline{x}\| = |\lambda|\,\|\underline{x}\|$.

III. For alle $\underline{x},\underline{y},\underline{z} \in \mathbb{R}^k$ gælder

$$\|\underline{x}-\underline{y}\| \leq \|\underline{x}-\underline{z}\| + \|\underline{z}-\underline{y}\| , \tag{1}$$

altså afstanden mellem $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er mindre end eller lig summen af afstandene mellem $\underline{x}$ og $\underline{z}$ og mellem $\underline{z}$ og $\underline{y}$.

Egenskaben III udtrykker det velkendte, at for en trekant er længden af en vilkårlig af siderne mindre end eller lig summen af de to andre siders længde, og uligheden (1) kaldes derfor <u>trekantsuligheden</u>.



Det er umiddelbart at verificere egenskaberne I og II ud fra definitionen af $\|\underline{x}-\underline{y}\|$. For at indse III vil vi benytte <u>Cauchy-Schwarz</u>'s <u>ulighed</u>:

For $\underline{a},\underline{b} \in \mathbb{R}^k$ gælder:

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{2}$$

Lad nemlig $\underline{a},\underline{b} \in \mathbb{R}^k$. Så har vi

$$0 \le \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i a_j b_i b_j)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sum_{j=1}^{k} b_j^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2$$

hvilket viser (2).

Af Cauchy-Schwarz's ulighed fås derefter for $\underline{a},\underline{b} \in \mathbb{R}^k$ at,

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + \sum_{i=1}^{k} b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{k} a_i b_i$$

$$\le \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{k} b_i^2$$

$$= \left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 ,$$

altså ved kvadratrodsuddragning

$$\|\underline{a}+\underline{b}\| \le \|\underline{a}\| + \|\underline{b}\| ,$$

og ved at sætte $\underline{a} = \underline{x}-\underline{z}$ og $\underline{b} = \underline{z}-\underline{y}$ fås så

$$\|\underline{x}-\underline{y}\| = \|\underline{a}+\underline{b}\| \le \|\underline{a}\| + \|\underline{b}\| = \|\underline{x}-\underline{z}\| + \|\underline{z}-\underline{y}\| ,$$

hvilket netop er trekantsuligheden (1).

<u>Definition og eksempler</u>. Det vil senere få betydning at kunne tale om indbyrdes afstand for andre objekter end punkter i talrummene, og nedenstående tre simple egenskaber ved afstandsbegrebet er nok til at få hele teorien til at fungere.

Lad M være en ikke tom mængde.

<u>DEFINITION</u>. Ved en <u>metrik</u> eller <u>afstandsfunktion</u> i M forstås en afbildning $d: M \times M \to \mathbb{R}$, for hvilken der for vilkårlige elementer $x,y,z \in M$ gælder

(1) $d(x,y) \geq 0$, og $= 0$ hvis og kun hvis $x = y$,

(2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

En mængde M hvori der er defineret en metrik d kaldes et <u>metrisk rum</u>, og elementerne af M kaldes <u>punkter</u>. Ønsker man i betegnelsen for mængden at anføre afstandsfunktionens navn, taler man om det metriske rum (M,d) , og mængden M kaldes ofte den <u>underliggende mængde</u>. Funktionsværdien $d(x,y)$ kaldes <u>afstanden fra</u> x <u>til</u> y eller, under hensyn til symmetribetingelsen (2), <u>afstanden mellem</u> x og y . Uligheden (3) kaldes <u>trekantsuligheden</u>.

Ved induktion ses let, at der for vilkårlige punkter $x_1,\ldots,x_n$ $(n \geq 2)$ i et metrisk rum (M,d) gælder

$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + \ldots + d(x_{n-1},x_n) .$$

EKSEMPEL. Vi sætter $(M = \mathbb{R})$

$$d(x,y) = |x-y| \quad \text{for} \quad x,y \in \mathbb{R} ,$$

og det er umiddelbart at gå efter, at $(\mathbb{R},d)$ er et metrisk rum. Tallet $d(x,y)$ er simpelthen længden af liniestykket fra x til y på tallinien, og svarer således til det sædvanlige afstandsbegreb i $\mathbb{R}$. Metrikken d kaldes den <u>sædvanlige afstandsfunktion i</u> $\mathbb{R}$.

EKSEMPEL. Vi sætter $(M = \mathbb{C})$

$$d(z,z') = |z-z'| \quad \text{for} \quad z,z' \in \mathbb{C} ,$$

og det ses let, at $(\mathbb{C},d)$ er et metrisk rum. Tallet $d(z,z')$ er her længden af liniestykket der forbinder z og z' i den komplekse plan, altså den <u>sædvanlige afstand</u> mellem z og z' (i $\mathbb{C}$) .

EKSEMPEL. Med $M = \mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N})$ og

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad \text{for} \quad x,y \in \mathbb{R}^k ,$$

følger det af tidligere resultater (se p. II.2) at (M,d) er et metrisk rum, $\mathbb{R}^k$ <u>forsynet med den euklidiske afstand</u>.

For $k = 1$ og $k = 2$ giver dette, idet $\mathbb{R}^2$ opfattes som $\mathbb{C}$, anledning til de sædvanlige afstandsbegreber i $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$.

BEMÆRKNING. En ret linie, en plan, og rummet er således med den sædvanlige betydning af ordet afstand metriske rum. Trekantsuligheden udtrykker, at summen af to sidelængder i en trekant mindst er lig med den tredje sides længde, idet også udartede trekanter tages i betragtning. Man ser, at lighedstegnet i trekantsuligheden i disse tilfælde gælder, hvis og kun hvis punktet y tilhører liniestykket med endepunkterne x og z (inklusive x og z) (hvis $x = z$, menes naturligvis med liniestykket det pågældende punkt). Anskuelsesfigurer til illustration af den almene teori tegnes i reglen, som om det drejede sig om en plan med den sædvanlige betydning af ordet afstand.

Det er imidlertid vigtigt at gøre sig klart, at elementerne i den underliggende mængde i et metrisk rum kan være "hvadsomhelst", og at afstandsfunktionen ikke behøver at svare til noget "naturligt" afstandsbegreb men blot opfylder kravene (1), (2) og (3). Vigtige eksempler fås hvor M er en mængde af funktioner.

EKSEMPEL. Lad M være en vilkårlig ikke tom mængde. Vi definerer $d: M\times M \to [0,\infty[$ ved

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = y \\ 1 & \text{for } x \neq y \end{cases} , \quad x,y \in M .$$

Det er let at se, at (M,d) er et metrisk rum, og (M,d) kaldes det <u>diskrete metriske rum</u> med underliggende mængde M.

EKSEMPEL. Lad A være en ikke tom mængde og lad M betegne mængden af <u>begrænsede</u> funktioner $f: A \to \mathbb{R}$ (f kaldes begrænset hvis $\sup\{|f(t)| \mid t \in A\} < \infty$, altså hvis billedmængden $f(A)$ er begrænset).

Ved fastsættelsen

$$d(f,g) = \sup\{|f(t)-g(t)| \mid t \in A\} ,$$

(dette supremum er endeligt da $f-g$ er begrænset) defineres en afstandsfunktion på M som kaldes den <u>ligelige</u> eller <u>uniforme</u> metrik på M. Det er nemlig klart, at d opfylder betingelserne (1) og (2), og for $f,g,h \in M$ og $t \in A$ har vi

$$\begin{aligned} |f(t)-g(t)| &\leq |f(t)-h(t)| + |h(t)-g(t)| \\ &\leq d(f,h) + d(h,g) \end{aligned}$$

hvoraf

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sup\{|f(t)-g(t)| \mid t \in A\} \\ &\leq d(f,h) + d(h,g) \ , \end{aligned}$$

hvilket viser at trekantsuligheden er opfyldt.

<u>Kugler og begrænsede mængder</u>. Lad (M,d) være et metrisk rum.

<u>DEFINITION</u>. For $a \in M$ og $r > 0$ kaldes mængden

$$K(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) < r\}$$

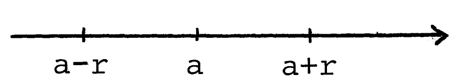
den <u>åbne</u> <u>kugle</u> med <u>centrum</u> a og <u>radius</u> r, og mængden

$$K'(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) \leq r\}$$

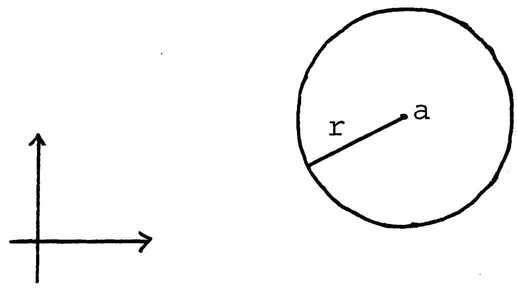
kaldes den <u>afsluttede</u> <u>kugle</u> med <u>centrum</u> a og <u>radius</u> r.

Den åbne kugle $K(a,r)$ består altså af de punkter $x \in M$ for hvilke den indbyrdes afstand mellem a og x er skarpt mindre end r, medens $K'(a,r)$ består af de punkter $x \in M$ hvis afstand til a er $\leq r$.

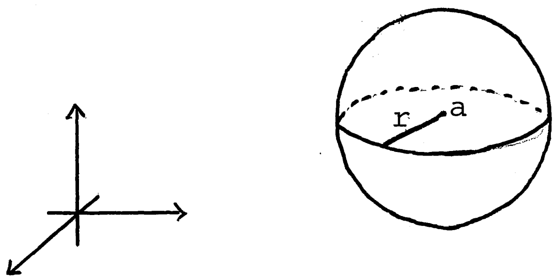
EKSEMPLER. 1) I det metriske rum $\mathbb{R}^k$ forsynet med den euklidiske afstand har kugler følgende udseende:



For $k=1$ er $K(a,r)$ simpelthen det <u>åbne</u> <u>interval</u> $]a-r,a+r[$ og $K'(a,r)$ er det tilsvarende afsluttede interval $[a-r,a+r]$.



For $k = 2$ er $K(a,r)$ <u>cirkelskiven</u> med centrum a og radius r, cirkelperiferien fraregnet, medens $K'(a,r)$ er den tilsvarende cirkelskive med periferien medtaget.



For $k = 3$ er $K(a,r)$ <u>kuglen</u> med centrum a og radius r, overfladen fraregnet, medens $K'(a,r)$ er den tilsvarende kugle hvor overfladen medtages.

2) For det diskrete metriske rum (M,d) med underliggende mængde M har vi for $a \in M$ og $r > 0$ at

$$K(a,r) = \begin{cases} \{a\} & \text{hvis } r \leq 1 \,, \\ M & \text{hvis } r > 1 \,, \end{cases}$$

og

$$K'(a,r) = \begin{cases} \{a\} & \text{hvis } r < 1 \,, \\ M & \text{hvis } r \geq 1 \,. \end{cases}$$

Kuglerne i (M,d) er således alle étpunktsmængder samt hele M.

3) Lad (M,d) være det metriske rum bestående af begrænsede reelle funktioner på en ikke tom mængde A, forsynet med den ligelige metrik (se p. II.5).

For $f \in M$ og $r > 0$ består den åbne kugle $K(f,r)$ af de funktioner $g \in M$ for hvilke

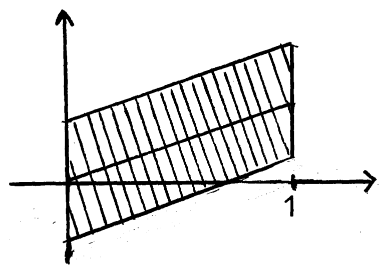
$$d(f,g) = \sup\{|f(t)-g(t)| \mid t \in A\} < r \,.$$

Der gælder altså $g \in K(f,r)$ hvis og kun hvis der findes et tal $r' \in \,]0,r[$ så

$$|f(t)-g(t)| \leq r' \quad \text{for alle } t \in A \,.$$

Den afsluttede kugle $K'(f,r)$ består netop af de funktioner $g \in M$ for hvilke

$$|f(t)-g(t)| \leq r \quad \text{for alle} \quad t \in A .$$



Hvis $A = [0,1]$ og $f(t) = \frac{t}{3}$ for $t \in [0,1]$, består $K'(f,\frac{1}{4})$ simpelthen af de funktioner $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ hvis graf ligger i det skraverede felt.

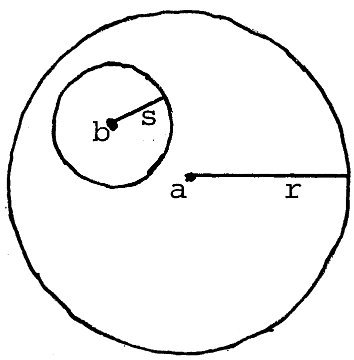
Lad nu igen (M,d) være et abstrakt metrisk rum. Det er klart, at for $a \in M$ og $0 < r < r'$ gælder

$$K(a,r) \subseteq K(a,r') \quad \text{og} \quad K'(a,r) \subseteq K'(a,r') ,$$

og endvidere at

$$x \in K(a,r) \Leftrightarrow d(a,x) < r \Leftrightarrow a \in K(x,r) .$$

Hvis $b \in K(a,r)$, altså $d(a,b) < r$ og $s \in \,]0,r-d(a,b)]$ så gælder



$$K(b,s) \subseteq K(a,r),$$

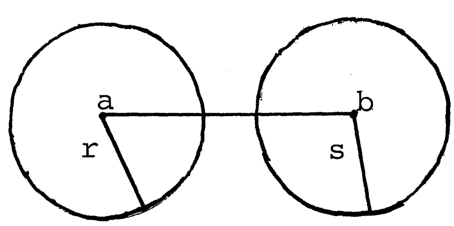
thi hvis $x \in K(b,s)$, altså $d(b,x) < s$, fås af trekantsuligheden at

$$d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x) < d(a,b) + s \leq r ,$$

altså $x \in K(a,r)$.

Hvis $d(a,b) \geq r+s$ hvor $r,s > 0$ så gælder

$$K(a,r) \cap K(b,s) = \emptyset .$$



Findes nemlig et $x \in K(a,r) \cap K(b,s)$ har vi ifølge trekantsuligheden

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < r+s$$

hvilket er umuligt.

DEFINITION. For en ikke tom delmængde A af M kaldes tallet

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x \in A \wedge y \in A\} \in [0,\infty]$$

for diameteren af A. Hvis $\mathrm{diam}(A) < +\infty$, siges A at være begrænset, og A kaldes ubegrænset hvis $\mathrm{diam}(A) = \infty$.

Hvis A er begrænset findes for ethvert $a \in M$ en åben kugle $K(a,r)$, der indeholder A. Thi sættes $\delta = \mathrm{diam}(A)$ og vælges et punkt $x \in A$, gælder for ethvert punkt $y \in A$, at

$$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) \leq d(a,x) + \delta .$$

Følgelig gælder $A \subseteq K(a,r)$ for ethvert $r > d(a,x)+\delta$. Omvendt gælder, at enhver delmængde af en åben eller afsluttet kugle er begrænset. Thi hvis $A \subseteq K'(a,r)$, gælder jo for vilkårlige punkter $x,y \in A$, at

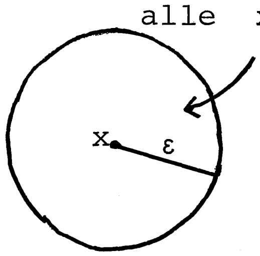
$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) \leq 2r ,$$

og følgelig gælder $\mathrm{diam}(A) \leq 2r$.

Specielt er således en vilkårlig delmængde af et diskret metrisk rum begrænset.

Konvergens af punktfølger. En punktfølge (x_n) i et metrisk rum (M,d) er en afbildning af $\mathbb{N}$ ind i M, hvor billedet af $n \in \mathbb{N}$ altså betegnes $x_n \in M$.

DEFINITION. En punktfølge (x_n) i (M,d) siges at være konvergent med grænsepunkt $x \in M$, hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n \in \mathbb{N}$ som opfylder $n \geq N$ gælder at $d(x,x_n) < \varepsilon$.



Udsagnet er altså, at der til hver radius $\varepsilon > 0$ findes et nummer N så $x_n \in K(x,\varepsilon)$ fra "trin" N.

Punktfølgen (x_n) i (M,d) er således konvergent med grænsepunkt $x \in M$ hvis og kun hvis den reelle talfølge $(d(x,x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdi 0.

En punktfølge kan ikke være konvergent med flere forskellige grænsepunkter. Thi hvis punktfølgen (x_n) er konvergent med grænsepunktet x og også med grænsepunktet y, findes for ethvert $\varepsilon > 0$ et N_0, så at $d(x_n,x) < \varepsilon$ for alle $n \geq N_0$, og et N_1, så at $d(x_n,y) < \varepsilon$ for alle $n \geq N_1$. Da der for alle n gælder

$$d(x,y) \leq d(x_n,x) + d(x_n,y) ,$$

ser vi ved at vælge $n = \max\{N_0,N_1\}$, at $d(x,y) < 2\varepsilon$. Da ε var et vilkårligt positivt tal, følger heraf, idet $d(x,y) \geq 0$, at $d(x,y) = 0$ og altså $x = y$.

Når punktfølgen (x_n) er konvergent, betegnes dens grænsepunkt $\lim x_n$ eller $\lim\limits_n x_n$ eller $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Man skriver også $x_n \to x$ for $n \to \infty$.

EKSEMPEL. For $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ udstyret med de sædvanlige metrikker reducerer begrebet konvergent punktfølge til de tidligere indførte begreber konvergent reel eller kompleks talfølge.

EKSEMPEL. Lad (M,d) være det diskrete metriske rum med underliggende mængde M. En punktfølge (x_n) i (M,d) er konvergent med grænsepunkt $x \in M$ hvis og kun hvis $x_n = x$ fra et vist trin. Hvis der nemlig findes $N \in \mathbb{N}$ så $x_n = x$ for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ er det klart at $x_n \to x$ for $n \to \infty$ (der gælder nemlig

$d(x_n,x) = 0$ for $n \geq N$). Hvis omvendt $x_n \to x$ for $n \to \infty$ så findes $N \in \mathbb{N}$ så

$$d(x_n,x) < \tfrac{1}{2} \quad \text{for} \quad n \geq N$$

og dermed (da $d(x_n,x) = 0$ eller $= 1$) $d(x_n,x) = 0$ for $n \geq N$, altså $x_n = x$ for $n \geq N$.

Åbne og afsluttede mængder.

DEFINITION. En delmængde G af det metriske rum (M,d) kaldes åben, hvis der for ethvert punkt $x \in G$ findes et tal $r > 0$, således at $K(x,r) \subseteq G$.

Enhver åben kugle $K(a,r)$ er en åben mængde (hvilket retfærdiggør benævnelsen åben kugle), thi for ethvert $x \in K(a,r)$ gælder jo $K(x,s) \subseteq K(a,r)$, når blot $s \leq r-d(a,x)$.

SÆTNING 1.1. Systemet af åbne delmængder af et metrisk rum (M,d) har følgende egenskaber:

(1) $\emptyset$ og M er åbne delmængder af M.

(2) Hvis $\{G_i \mid i \in I\}$ er et vilkårligt system af åbne delmængder af M, er foreningsmængden $\cup\{G_i \mid i \in I\}$ ligeledes en åben delmængde af M.

(3) Hvis $G_1,\ldots,G_n$ er endeligt mange åbne delmængder af M, er fællesmængden $G_1 \cap \ldots \cap G_n$ ligeledes en åben delmængde af M.

(4) Hvis x og y er to forskellige punkter i M, findes disjunkte åbne mængder G_1 og G_2, således at $x \in G_1$ og $y \in G_2$.

BEVIS. (1) følger umiddelbart af definitionen.

(2) Lad $x \in G = \cup\{G_i \mid i \in I\}$. Da findes et $i \in I$, så at $x \in G_i$. Idet G_i er åben, findes et $r > 0$, så at $K(x,r) \subseteq G_i$. Da $G_i \subseteq G$, gælder altså $K(x,r) \subseteq G$. Altså er G åben.

(3) Lad $x \in G = G_1 \cap \ldots \cap G_n$. Da gælder $x \in G_i$ for hvert $i = 1,\ldots,n$. Da hvert G_i er åben, findes tal $r_1,\ldots,r_n > 0$ så at $K(x,r_i) \subseteq G_i$ for hvert $i = 1,\ldots,n$. Sættes $r = \min\{r_1,\ldots,r_n\}$, gælder altså $K(x,r) \subseteq G_i$ for hvert $i = 1,\ldots,n$ og følgelig $K(x,r) \subseteq G$. Altså er G åben.

(4) Idet $x \neq y$, er $r = d(x,y) > 0$. De to åbne kugler $K(x,\frac{1}{2}r)$ og $K(y,\frac{1}{2}r)$ indeholder henholdsvis x og y og er disjunkte. ▮

KOROLLAR 1.2. En delmængde G af M er åben, hvis og kun hvis den er foreningsmængde af et system af åbne kugler.

BEVIS. (a) Hvis G er foreningsmængden af et system af åbne kugler, er G åben ifølge (2).

(b) Hvis G er åben, findes for ethvert $x \in G$ et $r_x > 0$, så at $K(x,r_x) \subseteq G$. Der gælder åbenbart

$$G = \cup\{K(x,r_x) \mid x \in G\} . \quad ▮$$

SÆTNING 1.3. En punktfølge (x_n) i (M,d) er konvergent med grænsepunkt $x \in M$ hvis og kun hvis der til enhver åben mængde $G \subseteq M$ som indeholder x findes et tal $N \in \mathbb{N}$ så

$$x_n \in G \text{ for alle } n \geq N .$$

BEVIS. "hvis". Specielt findes til hver åben kugle $K(x,\varepsilon)$ et $N \in \mathbb{N}$ så $x_n \in K(x,\varepsilon)$ for $n \geq N$, hvilket viser, at $x_n \to x$ for $x_n \to \infty$.

"kun hvis". Antag $x_n \to x$ for $n \to \infty$ og lad G være en åben mængde som indeholder x . Der findes så $\varepsilon > 0$ så $K(x,\varepsilon) \subseteq G$ og videre et $N \in \mathbb{N}$ så

$$x_n \in K(x,\varepsilon) \subseteq G \text{ for } n \geq N . \quad ▮$$

DEFINITION. En delmængde F af det metriske rum (M,d) kaldes afsluttet, hvis dens komplementærmængde $M \setminus F$ er åben.

En mængde bestående af et enkelt punkt er afsluttet. Thi hvis $F = \{a\}$, gælder for ethvert punkt $x \in M \setminus F$, at $K(x,d(a,x)) \subseteq M \setminus F$.

En afsluttet kugle $K'(a,r)$ er en afsluttet mængde (ellers ville det også være en uheldig benævnelse), thi komplementærmængden er åben. Lad nemlig $x \in M \setminus K'(a,r)$, d.v.s. $d(a,x) > r$. Med $\varepsilon > 0$ valgt så $d(a,x) > r+\varepsilon$ gælder at

$$K(x,\varepsilon) \cap K'(a,r) = \emptyset$$

(hvis der findes $y \in M$ så $y \in K(x,\varepsilon)$ og $y \in K'(a,r)$ så fås

$$d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x) < \varepsilon + r$$

hvilket er umuligt), altså

$$K(x,\varepsilon) \subseteq M \setminus K'(a,r) .$$

Ved brug af dualitetslovene fås ud fra egenskaberne ved systemet af åbne delmængder af M umiddelbart følgende:

KOROLLAR 1.4. Systemet af afsluttede delmængder af et metrisk rum (M,d) har følgende egenskaber:

(1) $\emptyset$ og M er afsluttede delmængder af M.

(2) Hvis $\{F_i \mid i \in I\}$ er et vilkårligt system af afsluttede delmængder af M, er fællesmængden $\cap\{F_i \mid i \in I\}$ ligeledes en afsluttet delmængde af M.

(3) Hvis $F_1,\ldots,F_n$ er endeligt mange afsluttede delmængder af M, er foreningsmængden $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ ligeledes en afsluttet delmængde af M.

Der gælder følgende vigtige karakterisering af afsluttede mængder ved hjælp af punktfølger.

SÆTNING 1.5. En delmængde A af det metriske rum (M,d) er afsluttet hvis og kun hvis A har egenskaben, at det for enhver konvergent punktfølge (x_n) i M af punkter tilhørende A (altså $x_n \in A$ for alle $n \in \mathbb{N}$) gælder at grænsepunktet tilhører A (altså $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$) .

BEVIS. Antag først, at A er afsluttet, altså at $M \setminus A$ er åben, og lad (x_n) være en konvergent punktfølge af punkter tilhørende A . Vi skal vise, at grænsepunktet x tilhører A . Vi fører beviset indirekte og antager altså at $x \notin A$, d.v.s $x \in M \setminus A$. Så findes, da $M \setminus A$ er åben, et tal $\varepsilon > 0$ så $K(x,\varepsilon) \subseteq M \setminus A$, eller $K(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Nu findes $N \in \mathbb{N}$ så $x_n \in K(x,\varepsilon)$ for $n \geq N$, men dette er umuligt da $x_n \in A$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Antag nu omvendt, at A har egenskaben, og lad os vise at $M \setminus A$ er åben. Lad altså $x \in M \setminus A$. Det drejer sig om at vise, at der findes et $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq M \setminus A$ eller anderledes skrevet så $K(x,r) \cap A = \emptyset$. Vi fører igen beviset indirekte, og antager altså, at der ikke findes et sådant $r > 0$. Så gælder altså, for hvert $r > 0$,

$$K(x,r) \cap A \neq \emptyset ,$$

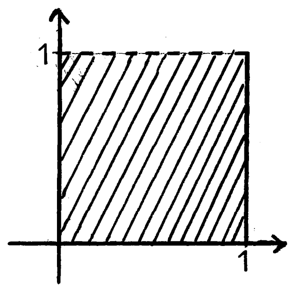
og der findes dermed (idet vi lader r gennemløbe tallene $\frac{1}{n}$ for $n \in \mathbb{N}$) for hvert $n \in \mathbb{N}$ et punkt

$$x_n \in K(x,\tfrac{1}{n}) \cap A .$$

Den derved bestemte punktfølge (x_n) består af punkter fra A og den er konvergent med grænseværdi x , hvilket strider mod at A har egenskaben, idet $x \notin A$. ▮

EKSEMPEL. Betragt $\mathbb{R}$ udstyret med den sædvanlige metrik og lad $a,b \in \mathbb{R}$ med $a < b$. Da er mængden $]a,b[$ åben og $[a,b]$ er afsluttet medens $[a,b[$ og $]a,b]$ hverken er åben eller afsluttet. Videre er $]a,\infty[$ og $]-\infty,a[$ begge åbne og $[a,\infty[$ samt $]-\infty,a]$ begge afsluttede.

EKSEMPEL. Betragt $\mathbb{C}$ med den sædvanlige metrik. Mængderne $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$ og $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ er begge åbne og mængderne $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z \geq 0\}$ og $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq 0\}$ er begge afsluttede. Mængden $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Re } z \leq 1$ og $0 \leq \text{Im } z < 1\}$ er hverken åben eller afsluttet.



EKSEMPEL. Lad (M,d) være det diskrete metriske rum med underliggende mængde M. Enhver delmængde $A \subseteq M$ er både åben og afsluttet. Der gælder nemlig

$$A = \cup\{K(x,\tfrac{1}{2}) \mid x \in A\}$$

og hver af mængderne $K(x,\frac{1}{2})$ er åben. Det følger så at A er afsluttet (thi $M \setminus A$ er jo også åben).

Fuldstændighed. Ifølge det almindelige konvergensprincip er en reel eller kompleks talfølge konvergent hvis og kun hvis den er en fundamentalfølge. Vi skal nu undersøge i hvilken udstrækning dette forhold gælder i et abstrakt metrisk rum.

DEFINITION. En punktfølge (x_n) i et metrisk rum (M,d) kaldes en fundamentalfølge (eller en Cauchy følge) hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et tal $N \in \mathbb{N}$ så der for alle $m,n \in \mathbb{N}$ med $m,n \geq N$ gælder at

$$d(x_n,x_m) < \varepsilon .$$

Udsagnet er, at der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et nummer N så vilkårlige følgeelementer x_n og x_m med numre $m,n \geq N$ har indbyrdes afstand $< \varepsilon$.

SÆTNING 1.6. Enhver konvergent punktfølge (x_n) i (M,d) er en fundamentalfølge.

BEVIS. Lad $\varepsilon > 0$. Idet grænsepunktet for (x_n) betegnes $x \in M$, findes $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n \geq N$ gælder, at

$$d(x,x_n) < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

og af trekantsuligheden fås så for $m,n \geq N$ at

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x,x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

hvilket viser, at (x_n) er en fundamentalfølge. ▮

EKSEMPEL. De reelle tal $\mathbb{R}$ og de komplekse tal $\mathbb{C}$ forsynet med deres sædvanlige metrikker er metriske rum, hvor omvendingen af Sætning 1.6, nemlig at enhver fundamentalfølge er konvergent, gælder. Dette er indholdet af det almindelige konvergensprincip.

EKSEMPEL. Lad (M,d) være det diskrete metriske rum med underliggende mængde M , og lad (x_n) være en fundamentalfølge i (M,d) . Da er (x_n) "konstant" fra et vist trin og dermed konvergent. Der findes nemlig $N \in \mathbb{N}$ så

$$d(x_n,x_m) < \tfrac{1}{2} \quad \text{for alle} \quad m,n \geq N ,$$

specielt

$$d(x_N,x_n) < \tfrac{1}{2} \quad \text{for alle} \quad n \geq N ,$$

men idet $d(x,y) = 0$ eller $= 1$ har vi dermed, at $d(x_N,x_n) = 0$ for $n \geq N$, altså at $x_n = x_N$ for $n \geq N$.

EKSEMPEL. Lad $M =]0,1[$ og $d(x,y) = |x-y|$ for $x,y \in M$. Da er (M,d) et metrisk rum og følgen (x_n) givet ved $x_n = \frac{1}{n}$ for $n \in \mathbb{N}$ er en fundamentalfølge. Lad nemlig $\varepsilon > 0$ være givet. Hvis $N \in \mathbb{N}$ opfylder $N > \frac{2}{\varepsilon}$ har vi for $m,n \in \mathbb{N}$ med $m,n \geq N$ at

$$\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right| \le \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} + \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Altså er (x_n) en fundamentalfølge, men (x_n) er <u>ikke</u> konvergent, thi der findes intet $x \in M$ som (x_n) konvergerer imod (dette x "skulle" nemlig være 0 men 0 tilhører ikke M) .

For visse metriske rum (M,d) gælder altså, at enhver fundamentalfølge er konvergent, medens der i andre findes fundamentalfølger der ikke er konvergente.

<u>DEFINITION</u>. Et metrisk rum (M,d) kaldes <u>fuldstændigt</u>, hvis det har egenskaben, at enhver fundamentalfølge er konvergent.

De fuldstændige metriske rum er naturligvis interessante derved, at det for at vise, at en punktfølge (x_n) er konvergent er "nok" at vise, at den er en fundamentalfølge. Vi har ovenfor set, at $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ med deres sædvanlige metrikker og ethvert diskret metrisk rum er fuldstændige, og vi skal senere møde flere eksempler på fuldstændige metriske rum.

Indholdet i definitionen ovenfor træder måske tydeligere frem hvis vi formulerer begreberne kort ved hjælp af kvantorer. Lad (x_n) være en punktfølge i det metriske rum (M,d) . At (x_n) er en konvergent punktfølge (med grænsepunkt $x \in M$) kan skrives

$$\exists x \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ n \ge N \Rightarrow d(x,x_n) < \varepsilon \qquad (3)$$

medens, at (x_n) er en fundamentalfølge udtrykkes

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n,m \in \mathbb{N}: \ n \ge N \land m \ge N \Rightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon . \qquad (4)$$

En vigtig forskel mellem (3) og (4) ligger således i at (3) indledes med et eksistensudsagn. Sætning 1.6 udtrykker at (3) er "stærkere" end (4) og i et fuldstændigt metrisk rum er de to betingelser ensbetydende (lige "stærke").

Sammenligning af metriker. Det er vigtigt at gøre sig klart på hvilken måde teorien for de metriske rum anvendes. Ofte vil det blot være den underliggende mængde der er givet, og denne forsynes så med en metrik der passer til de formål man har for øje. Vi skal nu kort undersøge hvorledes de indførte begreber afhænger af valget af metrik.

SÆTNING 1.7. Lad M være en ikke tom mængde, og lad d_1 og d_2 være metrikker på M. Antag at der findes en konstant $C > 0$ således, at vi for alle $x,y \in M$ har

$$d_1(x,y) \leq C\, d_2(x,y). \tag{5}$$

Så gælder:

1) Hvis en punktfølge (x_n) i M er konvergent (henholdsvis en fundamentalfølge) i (M,d_2) så er (x_n) konvergent (henholdsvis en fundamentalfølge) i (M,d_1)

2) Hvis en delmængde $A \subseteq M$ er åben (henholdsvis afsluttet) i (M,d_1) så er A åben (afsluttet) i (M,d_2).

3) Hvis en ikke tom delmængde $A \subseteq M$ er begrænset i (M,d_2) så er den begrænset i (M,d_1).

BEVIS. 1) Antag at $x_n \to x$ for $n \to \infty$ i (M,d_2) og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes $N \in \mathbb{N}$ så

$$d_2(x,x_n) < \frac{\varepsilon}{C} \quad \text{for alle} \quad n \geq N$$

og dermed

$$d_1(x,x_n) \leq C\, d_2(x,x_n) < C\,\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N,$$

hvilket viser at $x_n \to x$ for $n \to \infty$ i (M,d_1).

Påstanden om fundamentalfølger indses analogt. Idet vi betegner åbne kugler i (M,d_1) og (M,d_2) med $K_1(\cdot,\cdot)$ henholdsvis $K_2(\cdot,\cdot)$ giver uligheden (5) at for $a \in M$ og $r > 0$ gælder

$$K_2(a,r) = \{x \in M \mid d_2(a,x) < r\}$$
$$\subseteq \{x \in M \mid d_1(a,x) < rC\} = K_1(a,rC) \ .$$

2) Antag at $A \subseteq M$ er åben i (M,d_1) og lad $a \in A$. Vi skal finde $\varepsilon > 0$ så $K_2(a,\varepsilon) \subseteq A$, men der findes $r > 0$ så $K_1(a,r) \subseteq A$ og derfor gælder

$$K_2(a,\tfrac{r}{C}) \subseteq K_1(a,r) \subseteq A \ ,$$

altså er A åben i (M,d_2).

Påstanden om afsluttede mængder fås ved overgang til komplementærmængder.

3) For en vilkårlig ikke tom delmængde $A \subseteq M$ har vi

$$\sup\{d_1(x,y) \mid x,y \in A\} \leq C \sup\{d_2(x,y) \mid x,y \in A\} \leq \infty \ . \quad \blacksquare$$

KOROLLAR 1.8. Lad M være en ikke tom mængde og lad d_1 og d_2 være metrikker på M for hvilke der findes to konstanter $C,D > 0$ så

$$D\, d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq C\, d_2(x,y) \quad \text{for alle} \quad x,y \in M.$$

Da er en punktfølge (x_n) i M konvergent (en fundamentalfølge) i (M,d_1) hvis og kun hvis den er konvergent (en fundamentalfølge) i (M,d_2).

En delmængde $A \subseteq M$ er åben (afsluttet, begrænset) i (M,d_1) hvis og kun hvis den er åben (afsluttet, begrænset) i (M,d_2). Det metriske rum (M,d_1) er fuldstændigt hvis og kun hvis det metriske rum (M,d_2) er fuldstændigt.

BEVIS. De første påstande følger let af Sætning 1.7 idet

$$d_1(x,y) \leq C\, d_2(x,y) \quad \text{og} \quad d_2(x,y) \leq \frac{1}{D}\, d_1(x,y) \tag{6}$$

for alle $x,y \in M$.

Antag, at (M,d_1) er fuldstændigt og lad (x_n) være en punktfølge i M som er en fundamentalfølge i (M,d_2). Så er den en fundamentalfølge i (M,d_1) (Sætning 1.7) og dermed konvergent i (M,d_1) (som jo er fuldstændigt). Men så er den konvergent i (M,d_2) (på grund af Sætning 1.7, som kan anvendes da vi har den anden af ulighederne i (6)) og dette viser at (M,d_2) er fuldstændigt. Den anden vej vises analogt. ▌

Mere om talrummene. Lad $k \in \mathbb{N}$ og betragt det k-dimensionale reelle talrum $\mathbb{R}^k$.

Vi har tidligere beskæftiget os med den euklidiske afstand i $\mathbb{R}^k$, som vi nu betegner d_2 og som er givet ved

$$d_2(\underline{x},\underline{y}) = \left(\sum_{j=1}^{k} (x_j-y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for} \quad \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^k .$$

Denne metrik, som for $k = 1,2,3$ svarer til det naturlige afstandsbegreb i $\mathbb{R}^k$, er imidlertid i mange forbindelser vanskelig at håndtere (det kan være vanskeligt at give vurderinger af d_2 på grund af kvadratrodsuddragningen) og vi indfører derfor en ny metrik, maksimumsmetrikken i $\mathbb{R}^k$, som vi betegner d_∞, ved

$$d_\infty(\underline{x},\underline{y}) = \max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_k-y_k|\} \quad \text{for} \quad \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^k .$$

Det er klart, at d_∞ opfylder de to første betingelser for en metrik. Lad $\underline{x},\underline{y},\underline{z} \in \mathbb{R}^k$. For hvert $j = 1,2,\ldots,k$ har vi da

$$\begin{aligned}|x_j-z_j| &\leq |x_j-y_j| + |y_j-z_j| \\ &\leq \max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_k-y_k|\} + \max\{|y_1-z_1|,\ldots,|y_k-z_k|\} \\ &= d_\infty(\underline{x},\underline{y}) + d_\infty(\underline{y},\underline{z})\end{aligned}$$

hvoraf

$$d_\infty(\underline{x},\underline{z}) = \max\{|x_1-z_1|,\ldots,|x_k-z_k|\} \leq d_\infty(\underline{x},\underline{y}) + d_\infty(\underline{y},\underline{z}) ,$$

hvilket viser, at trekantsuligheden gælder for d_∞, som dermed er en metrik i $\mathbb{R}^k$.

Lad os sammenligne d_2 og d_∞. For $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^k$ har vi

$$\begin{aligned}(d_\infty(\underline{x},\underline{y}))^2 &= \left(\max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_k-y_k|\}\right)^2\\ &= \max\{(x_1-y_1)^2,\dots,(x_k-y_k)^2\}\\ &\leq \sum_{j=1}^{k}(x_j-y_j)^2 \leq k \max\{(x_1-y_1)^2,\dots,(x_k-y_k)^2\}\\ &= k(d_\infty(\underline{x},\underline{y}))^2\end{aligned}$$

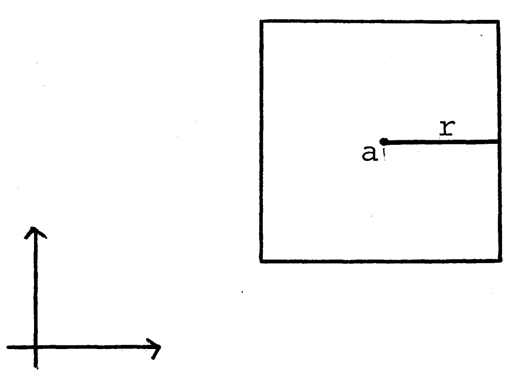
hvoraf ved kvadratrodsuddragning

$$d_\infty(\underline{x},\underline{y}) \leq d_2(\underline{x},\underline{y}) \leq \sqrt{k}\, d_\infty(\underline{x},\underline{y}) \quad . \tag{7}$$

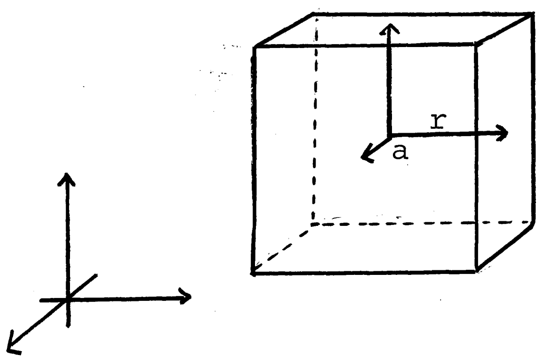
Ifølge Korollar 1.8 har begreberne konvergent følge, fundamentalfølge, åben mængde, afsluttet mængde og begrænset mængde dermed samme indhold i relation til den euklidiske afstand i $\mathbb{R}^k$ og i relation til maksimumsmetrikken i $\mathbb{R}^k$.

Vi har tidligere set hvorledes kugler i $\mathbb{R}^k$ udstyret med den euklidiske metrik ser ud (se p. II. 6-7).

Den euklidiske metrik i $\mathbb{R}$ er identisk med maksimumsmetriken i $\mathbb{R}$. De åbne kugler i $(\mathbb{R}^k, d_\infty)$ har følgende udseende:



For $k = 2$ er den åbne kugle $K(\underline{a},r)$ lig kvadratet med centrum $\underline{a}$ og sidelængde $2r$ (sider akseparallelle), kanterne fraregnet, og $K'(\underline{a},r)$ er det tilsvarende kvadrat, kanterne medtaget.



For $k = 3$ er $K(\underline{a},r)$ lig <u>terningen</u> med centrum $\underline{a}$ og kantlængder $2r$ (kanterne akseparallelle), sidefladerne fraregnet, medens den afsluttede kugle $K'(\underline{a},r)$ er den tilsvarende terning med sidefladerne medtaget.

<u>SÆTNING 1.9</u>. Det k-dimensionale talrum $\mathbb{R}^k$ er, når det forsynes med den euklidiske metrik d_2 eller med maksimumsmetrikken d_∞, et fuldstændigt metrisk rum.

BEVIS. Det er ifølge Korollar 1.8 og uligheden (7) nok at vise påstanden for d_∞. For vilkårlige punkter $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^k$ og $j = 1,2,\ldots,k$ har vi

$$|x_j - y_j| \leq d_\infty(\underline{x},\underline{y}) \leq \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|,$$

som viser, at en punktfølge $(\underline{x}^n)$ i $\mathbb{R}^k$ er konvergent, henholdsvis en fundamentalfølge i $(\mathbb{R}^k, d_\infty)$, hvis og kun hvis enhver af de k koordinatfølger $(x_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ for $j = 1,2,\ldots,k$ er konvergent, henholdsvis en fundamentalfølge i $\mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik. Heraf fås påstanden, idet $\mathbb{R}$ med den sædvanlige afstand er fuldstændigt. ▮

<u>Delrum og produktrum</u>. Ofte vil et metrisk rum (M',d') på naturlig måde kunne opfattes som et delrum af et metrisk rum (M,d) i den forstand, at den underliggende mængde M' er en delmængde af M og afstanden mellem x og y i (M',d') $(x,y \in M')$ er den samme som afstanden mellem x og y opfattet som punkter i (M,d).

EKSEMPEL. Den komplekse plan $\mathbb{C}$ med den sædvanlige metrik $d(z,z') = |z-z'|$ har, idet $\mathbb{C}$ opfattes som $\mathbb{R}^2$, delmængden

$$\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C},$$

som kan fortolkes som et eksemplar af $\mathbb{R}$. For $z = (x,0) \in \mathbb{C}$ og $z' = (x',0) \in \mathbb{C}$ finder vi

$$d(z,z') = |z-z'| = ((x-x')^2+0^2)^{\frac{1}{2}} = |x-x'| ,$$

og dermed er d-afstanden mellem z og z' lig den sædvanlige "reelle" afstand mellem x og x'.

DEFINITION. Lad (M,d) være et metrisk rum og lad M' være en ikke tom delmængde af M. Restriktionen af d til $M' \times M'$, altså funktionen givet ved

$$(x,y) \mapsto d(x,y) \quad \text{for} \quad x,y \in M' ,$$

(som er en metrik i M' og som også betegnes d) kaldes den af d inducerede metrik i M', og det metriske rum (M',d) kaldes delrummet af M med underliggende mængde M'.

Med denne sprogbrug er, når $\mathbb{R}$ opfattes som den reelle akse i den komplekse plan $\mathbb{C}$, den sædvanlige metrik i $\mathbb{R}$ induceret af den sædvanlige metrik i $\mathbb{C}$ og $\mathbb{R}$ er delrummet af $\mathbb{C}$ med underliggende mængde $\mathbb{R}$.

SÆTNING 1.10. Lad (M,d) være et metrisk rum og lad (M',d) være delrummet af M med underliggende mængde M'. En delmængde $A' \subseteq M'$ er åben (afsluttet) i (M',d) hvis og kun hvis der findes en åben (afsluttet) delmængde $A \subseteq M$ så $A' = A \cap M'$.

BEVIS. Idet åbne kugler i (M,d) og (M',d) betegnes $K(x,r)$

henholdsvis $K_{M'}(x,r)$ bemærker vi først, at der for $x \in M'$ og $r > 0$ gælder

$$\begin{aligned} K_{M'}(x,r) &= \{y \in M' \mid d(x,y) < r\} \\ &= \{y \in M \mid d(x,y) < r\} \cap M' \\ &= K(x,r) \cap M' . \end{aligned}$$

Antag nu at $A' \subseteq M'$ er åben i (M',d). Så findes ifølge Korollar 1.2 et system af åbne kugler $K_{M'}(x,r_x)$ i (M',d) så

$$A' = \bigcup_x K_{M'}(x,r_x)$$

og dermed

$$A' = \bigcup_x (K(x,r_x) \cap M') = M' \cap \bigcup_x K(x,r_x)$$

hvoraf $A' = M' \cap A$ med $A = \bigcup_x K(x,r_x)$ hvor A er åben i (M,d).

Hvis omvendt A' har formen $A' = A \cap M'$ hvor A er åben i (M,d), så findes til hvert $x \in A' \subseteq A$ et $r_x > 0$ så

$$K(x,r_x) \subseteq A$$

og dermed

$$K_{M'}(x,r_x) = K(x,r_x) \cap M' \subseteq A \cap M' = A' ,$$

hvilket viser, at A' er åben i (M',d).

Påstanden om afsluttede mængder fås nu på den sædvanlige måde ved betragtning af komplementærmængder. ▮

EKSEMPEL. Betragt $\mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik, og lad (M',d) være delrummet af $\mathbb{R}$ med underliggende mængde $M' =]0,1]$. Mængden $]\frac{1}{2},1]$ er <u>åben</u> i (M',d) fordi $]\frac{1}{2},1] =]0,1] \cap]\frac{1}{2},\infty[$, og mængden $]0,\frac{1}{2}]$ er <u>afsluttet</u> i (M',d) fordi $]0,\frac{1}{2}] =]0,1] \cap [0,\frac{1}{2}]$. Endvidere er $]0,1]$ såvel <u>åben</u> som <u>afsluttet</u> i (M',d) (det er "hele" mængden nemlig altid).

<u>SÆTNING 1.11</u>. Lad (M,d) være et fuldstændigt metrisk rum og lad M' være en ikke tom delmængde af M. Hvis M' er en afsluttet

delmængde af (M,d) så er delrummet (M',d) fuldstændigt.

BEVIS. Vi bemærker først, at en punktfølge (x_n) i M' er en fundamentalfølge i (M',d) hvis og kun hvis den opfattet som en følge i M er en fundamentalfølge i (M,d).

Antag at M' er en afsluttet delmængde af (M,d) og lad (x_n) være en fundamentalfølge i (M',d). Så er (x_n) en fundamentalfølge i (M,d) og dermed konvergent i (M,d). Der findes altså $x \in M$ så $x_n \to x$ for $n \to \infty$ i (M,d), men af Sætning 1.5 fås, at $x \in M'$ og derfor at $x_n \to x$ for $n \to \infty$ i (M',d). ∎

En anden måde at få nye metriske rum ud fra gamle består i dannelse af <u>produktrum</u>.

Lad (M_1,d_1) og (M_2,d_2) være metriske rum, og lad $M = M_1 \times M_2$ betegne produktmængden. Vi definerer en afbildning $d\colon M \times M \to [0,\infty[$ ved at sætte

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)\} \tag{+}$$

for $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M$. Det er umiddelbart at gå efter, at d opfylder kravene (1) og (2) til en metrik, og for $(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2) \in M$ finder vi $(j = 1,2)$

$$\begin{aligned} d_j(x_j,z_j) &\le d_j(x_j,y_j) + d_j(y_j,z_j) \\ &\le \max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)\} + \max\{d_1(y_1,z_1),d_2(y_2,z_2)\} \\ &= d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) + d((y_1,y_2),(z_1,z_2)) \end{aligned}$$

hvoraf

$$\begin{aligned} d((x_1,x_2),(z_1,z_2)) &= \max\{d_1(x_1,z_1),d_2(x_2,z_2)\} \\ &\le d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) + d((y_1,y_2),(z_1,z_2)) \end{aligned}$$

hvilket viser trekantsuligheden for d. Dermed er (M,d) altså et metrisk rum.

DEFINITION. Det metriske rum (M,d) hvor $M = M_1 \times M_2$ og d er defineret ved (+) kaldes produktrummet af de metriske rum (M_1,d_1) og (M_2,d_2) .

EKSEMPEL. Produktrummet af de metriske rum $(\mathbb{R},d)$ og $(\mathbb{R},d)$ hvor d betegner den sædvanlige afstand i $\mathbb{R}$, er som man let ser $\mathbb{R}^2$ forsynet med maksimumsmetriken.

EKSEMPEL. Lad $k \in \{2,3,4,\ldots\}$. Produktrummet af $\mathbb{R}^{k-1}$ forsynet med maksimumsmetriken og $\mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik er $\mathbb{R}^k$ udstyret med maksimumsmetriken.

Lad nu (M,d) være produktrummet af de metriske rum (M_1,d_1) og (M_2,d_2) . Idet åbne kugler i (M_1,d_1) og (M_2,d_2) betegnes $K_1(\cdot,\cdot)$ henholdsvis $K_2(\cdot,\cdot)$ ser man, at den åbne kugle i (M,d) med centrum $(x_1,x_2) \in M$ og radius $r > 0$ er givet ved

$$K((x_1,x_2),r) = K_1(x_1,r) \times K_2(x_2,r) \quad . \tag{*}$$

Der gælder nemlig for $(y_1,y_2) \in M_1 \times M_2$ at

$$\begin{aligned}
(y_1,y_2) \in K((x_1,x_2),r) &\Leftrightarrow d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) < r \\
&\Leftrightarrow \max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)\} < r \\
&\Leftrightarrow d_1(x_1,y_1) < r \wedge d_2(x_2,y_2) < r \\
&\Leftrightarrow y_1 \in K_1(x_1,r) \wedge y_2 \in K_2(x_2,r) \\
&\Leftrightarrow (y_1,y_2) \in K_1(x_1,r) \times K_2(x_2,r) \quad .
\end{aligned}$$

Heraf ses, at hvis $A_1 \subseteq M_1$ er åben i (M_1,d_1) og $A_2 \subseteq M_2$ er åben i (M_2,d_2) så er $A_1 \times A_2$ åben i (M,d) . Lad nemlig $(x_1,x_2) \in A_1 \times A_2$ og $r_1 > 0$ henholdsvis $r_2 > 0$ være valgt så $K_1(x_1,r_1) \subseteq A_1$ og $K_2(x_2,r_2) \subseteq A_2$. Med $r = \min\{r_1,r_2\} > 0$ gælder så

$$K((x_1,x_2),r) = K_1(x_1,r) \times K_2(x_2,r)$$

$$\subseteq K_1(x_1,r_1) \times K_2(x_2,r_2) \subseteq A_1 \times A_2 \ ,$$

hvilket viser, at $A_1 \times A_2$ er åben.

Af (*) fås specielt, at en punktfølge (x_1^n, x_2^n) i (M,d) er konvergent i (M,d) med grænsepunkt $(x_1,x_2) \in M$ hvis og kun hvis (x_1^n) er konvergent i (M_1,d_1) med grænsepunkt $x_1 \in M_1$ og (x_2^n) er konvergent i (M_2,d_2) med grænsepunkt $x_2 \in M_2$.

En punktfølge (x_1^n, x_2^n) i (M,d) er en fundamentalfølge hvis og kun hvis (x_1^n) og (x_2^n) er fundamentalfølger i (M_1,d_1) henholdsvis (M_2,d_2) . Dette fås af biimplikationen $(m,n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0)$

$$d((x_1^n,x_2^n),(x_1^m,x_2^m)) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow d_1(x_1^n,x_1^m) < \varepsilon \wedge d_2(x_2^n,x_2^m) < \varepsilon \ .$$

Ved at kombinere ovenstående bemærkninger fås:

<u>SÆTNING 1.12</u>. Hvis (M_1,d_1) og (M_2,d_2) er fuldstændige metriske rum så er produktrummet (M,d) fuldstændigt.

§2. Kontinuerte afbildninger.

Emnet for denne paragraf er begrebet kontinuitet som er et af analysens vigtigste begreber. Den egenskab ved en afbildning f af X ind i Y som vi ønsker at præcisere i begrebet kontinuitet, er at et element $x \in X$ som "ligger tæt" ved et element $x_0 \in X$ afbildes i et element $f(x)$ som "ligger tæt" ved $f(x_0)$. Udtrykket "ligger tæt" kan gives en præcis betydning, når X og Y er metriske rum.

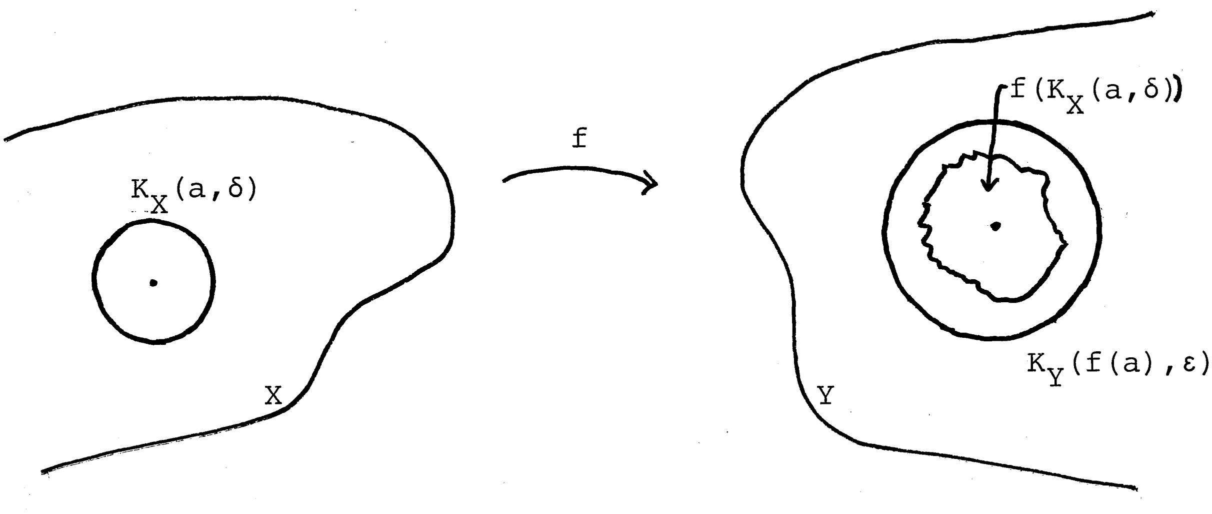
Kontinuitet af en afbildning i et punkt. Lad (X,d_X) og (Y,d_Y) være metriske rum. Åbne kugler i X og Y betegnes $K_X(x,r)$ og $K_Y(y,r)$.

DEFINITION. En afbildning $f: X \to Y$ siges at være kontinuert i punktet $a \in X$, hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ så

$$f(K_X(a,\delta)) \subseteq K_Y(f(a),\varepsilon) ,$$

hvilket kommer ud på, at det for alle $x \in X$ gælder

$$d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a),f(x)) < \varepsilon .$$



Betingelsen kan løst formuleres, at $f(x)$ ligger så tæt ved $f(a)$ som vi ønsker når blot x ligger tilstrækkeligt tæt ved a. Skrevet med logiske symboler udtrykkes betingelsen således:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X: d_X(x,a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(a)) < \varepsilon . \tag{1}$$

Hvis afbildningen ikke er kontinuert i punktet a , siges den at være diskontinuert i a .

Kontinuitet kan også udtrykkes ved hjælp af begrebet konvergent punktfølge.

SÆTNING 2.1. Afbildningen $f: X \to Y$ er kontinuert i punktet $a \in X$, hvis og kun hvis det for enhver punktfølge (x_n) i X gælder, at hvis (x_n) er konvergent med grænsepunkt a , så er følgen $(f(x_n))$ af billedpunkter konvergent med grænsepunkt $f(a)$.

BEVIS. Vi antager først at f er kontinuert i a og at $x_n \to a$ for $n \to \infty$. Til ethvert $\varepsilon > 0$ findes, da f er kontinuert i a , et $\delta > 0$, så at $d_Y(f(x),f(a)) < \varepsilon$, for alle $x \in X$ som opfylder $d_X(x,a) < \delta$. Til dette δ findes, da $x_n \to a$ for $n \to \infty$, et $N \in \mathbb{N}$, så at $d_X(x_n,a) < \delta$ for alle $n \geq N$. Følgelig gælder $d_Y(f(x_n),f(a)) < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Altså gælder $f(x_n) \to f(a)$ for $n \to \infty$.

Antag dernæst, at f ikke er kontinuert i a . Dette betyder (negation af (1)), at der findes et $\varepsilon > 0$, således at der for ethvert $\delta > 0$ findes et $x \in X$ med

$$d_X(x,a) < \delta \quad \text{og} \quad d_Y(f(x),f(a)) \geq \varepsilon .$$

Svarende til $\delta = 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots$ vælges punkterne $x_1,x_2,x_3,\ldots$ i henhold hertil. Herved fås en punktfølge (x_n) i X , for hvilken der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$d_X(x_n,a) < \frac{1}{n} \quad \text{og} \quad d_Y(f(x_n),f(a)) \geq \varepsilon .$$

Følgen (x_n) konvergerer altså mod a , medens følgen $(f(x_n))$ af billedpunkter ikke konvergerer mod $f(a)$. ▮

EKSEMPEL. Enhver konstant afbildning $f: X \to Y$ ($\Leftrightarrow$: $f(x) = f(x')$ for alle $x,x' \in X$) er kontinuert i ethvert punkt af X .

EKSEMPEL. Lad (M,d) være det diskrete metriske rum med underliggende mængde M og lad (Y,d_Y) være et vilkårligt metrisk rum. Enhver afbildning $f: M \to Y$ er kontinuert i ethvert punkt af M. Lad nemlig $a \in M$ og $\varepsilon > 0$ være givet. For $\delta \leq 1$ gælder så $K_M(a,\delta) = \{a\}$ og dermed

$$f(K_M(a,\delta)) = \{f(a)\} \subseteq K_Y(f(a),\varepsilon) \ . \quad ▯$$

Hvis (X,d_X) og (Y,d_Y) er metriske rum og X' er en delmængde af X, siges en afbildning $f: X' \to Y$ at være kontinuert i punktet $a \in X'$, hvis f, betragtet som afbildning af delrummet X' ind i Y, er kontinuert i punktet a.

EKSEMPEL. Idet $\mathbb{R}^2$ udstyres med maksimumsmetriken og $\mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik betragter vi afbildningen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & \text{for} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for} \quad (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

Der gælder

$$f(x,0) = 0 \qquad \text{for alle} \quad x \ ,$$

$$f(0,y) = 0 \qquad \text{for alle} \quad y \ ,$$

og

$$f(x,\alpha x) = \frac{2\alpha x}{x^2+\alpha^2} \qquad \text{for alle} \quad x \ ,$$

for ethvert $\alpha \neq 0$. Heraf ses, at restriktionen af f til enhver ret linie gennem $(0,0)$ er kontinuert i $(0,0)$. Dette er klart for de to aksers vedkommende, og for linien $y = \alpha x$ med $\alpha \neq 0$ ses dette på følgende måde: Til et givet $\varepsilon > 0$ kan $\delta = \frac{|\alpha|}{2}\varepsilon$ benyttes, thi hvis $\max\{|x|,|y|\} < \frac{|\alpha|}{2}\varepsilon$ gælder specielt $|x| < \frac{|\alpha|}{2}\varepsilon$ og dermed

$$|f(x,\alpha x)-f(0,0)| = \left|\frac{2\alpha x}{x^2+\alpha^2}\right| \leq \left|\frac{2\alpha x}{\alpha^2}\right| = \frac{2}{|\alpha|}|x| < \frac{2}{|\alpha|}\,\frac{|\alpha|}{2}\varepsilon = \varepsilon \ .$$

Imidlertid gælder der

$$f(x,x^2) = 1 \quad \text{for alle} \quad x \neq 0 \,,$$

hvoraf ses, at afbildningen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ikke er kontinuert i punktet $(0,0)$. Punktfølgen $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)$ i $\mathbb{R}^2$ er konvergent med grænsepunkt $(0,0)$ medens følgen af billedpunkter $\left(f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)\right)$ er talfølgen $(1,1,1,\ldots)$ som ikke konvergerer mod $f(0,0) = 0$.

<u>Kontinuerte afbildninger</u>. Lad (X,d_X) og (Y,d_Y) være metriske rum.

<u>DEFINITION</u>. En afbildning $f\colon X \to Y$ siges at være <u>kontinuert</u>, hvis den er kontinuert i ethvert punkt $a \in X$.

Hvis afbildningen ikke er kontinuert, siges den at være <u>diskontinuert</u>. En afbildning er altså diskontinuert, hvis den er diskontinuert i mindst et punkt.

<u>SÆTNING 2.2</u>. En afbildning $f\colon X \to Y$ er kontinuert, hvis og kun hvis originalmængden $f^{-1}(G)$ af enhver åben delmængde G af Y er en åben delmængde af X.

BEVIS. (1) Antag, at f er kontinuert, og lad G være en åben delmængde af Y. For ethvert punkt $a \in f^{-1}(G)$ gælder $f(a) \in G$. Da G er åben, findes et $\varepsilon > 0$, så at $K_Y(f(a),\varepsilon) \subseteq G$. Da f er kontinuert i a, findes et $\delta > 0$, så at $f(K_X(a,\delta)) \subseteq K_Y(f(a),\varepsilon)$. Følgelig gælder $K_X(a,\delta) \subseteq f^{-1}(G)$. Mængden $f^{-1}(G)$ er altså åben.

(2) Antag, at $f^{-1}(G)$ er åben for enhver åben delmængde G af Y. For ethvert punkt $a \in X$ og ethvert $\varepsilon > 0$ gælder da, at $f^{-1}(K_Y(f(a),\varepsilon))$ er åben. Der findes altså et $\delta > 0$ så at $K_X(a,\delta) \subseteq f^{-1}(K_Y(f(a),\varepsilon))$. Følgelig er $f(K_X(a,\delta)) \subseteq K_Y(f(a),\varepsilon)$. Altså er f kontinuert i punktet a. ▯

EKSEMPEL. Idet enhver delmængde af et diskret metrisk rum (M,d) er åben følger det at en vilkårlig afbildning af M ind i et vilkårligt metrisk rum (Y,d_Y) er kontinuert.

EKSEMPEL. Lad $\mathbb{R}$ være forsynet med sin sædvanlige metrik. Afbildningen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{hvis } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

som kaldes <u>Dirichlet's</u> <u>funktion</u>, er diskontinuert i alle punkter.

<u>KOROLLAR 2.3</u>. En afbildning $f\colon X \to Y$ er kontinuert, hvis og kun hvis originalmængden $f^{-1}(F)$ af enhver afsluttet delmængde F af Y er en afsluttet delmængde af X.

BEVIS. (1) Antag, at f er kontinuert, og lad F være en afsluttet delmængde af Y. Da er $G = Y \setminus F$ åben og følgelig $f^{-1}(G)$ åben. Men $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(G)$. Altså er $f^{-1}(F)$ afsluttet.

(2) Antag, at $f^{-1}(F)$ er afsluttet for enhver afsluttet delmængde F af Y. For enhver åben delmængde G af Y er $F = Y \setminus G$ afsluttet og følgelig $f^{-1}(F)$ afsluttet. Men $f^{-1}(G) = X \setminus f^{-1}(F)$. Altså er $f^{-1}(G)$ åben. Følgelig er f kontinuert. ∎

EKSEMPEL. Idet $\mathbb{R}^2$ udstyres med maksimumsmetriken og $\mathbb{R}$ med den sædvanlige afstand betragtes afbildningen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = x^2+y^2 \quad \text{for} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Afbildningen f er kontinuert i alle punkter $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Lad nemlig $\varepsilon > 0$ være givet. Vi skal finde et $\delta > 0$ så det for punkter $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ med $|x-a| < \delta$ og $|y-b| < \delta$ gælder at

$$|f(x,y)-f(a,b)| = |(x^2+y^2)-(a^2+b^2)| < \varepsilon .$$

Nu gælder for $x \in \mathbb{R}$ med $|x-a| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2|a|+1}, 1\right\}$ at

$$|x^2-a^2| = |x-a|\,|x+a| \leq |x-a|(|x-a|+2|a|)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2|a|+1}\,(1+2|a|) = \frac{\varepsilon}{2} ,$$

og tilsvarende for $y \in \mathbb{R}$ med $|y-b| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2|b|+1}, 1\right\}$ at

$$|y^2-b^2| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Med $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2|a|+1}, \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2|b|+1}, 1\right\}$ gælder så at hvis $|x-a| < \delta$ og $|y-b| < \delta$, så har vi

$$|f(x,y)-f(a,b)| = |(x^2-a^2)+(y^2-b^2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Benyttes istedet kriteriet fra Sætning 2.1 fås følgende bevis. Lad (x_n, y_n) være en konvergent punktfølge i $\mathbb{R}^2$ med grænsepunkt (a,b). Følgen af billedpunkter $(f(x_n, y_n))$ er simpelthen talfølgen $(x_n^2+y_n^2)$ som er konvergent med grænseværdi $a^2+b^2 = f(a,b)$ hvilket viser at f er kontinuert i (a,b). Et bevis ved hjælp af Sætning 2.2 kan f.eks. se således ud: Lad $I =]\alpha,\beta[$ være et åbent interval. Originalmængden $f^{-1}(I)$ beregnes til

$$\begin{aligned} f^{-1}(I) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < x^2+y^2 < \beta\right\} \\ &= K(0,\sqrt{\beta}) \setminus K'(0,\sqrt{\alpha}) , \end{aligned}$$

hvor K og K' betegner åbne henholdsvis afsluttede kugler i den euklidiske metrik på $\mathbb{R}^2$, og mængden $f^{-1}(I)$ er følgelig åben i $\mathbb{R}^2$ (med maksimumsmetriken). En vilkårlig åben mængde $G \subseteq \mathbb{R}$ er foreningsmængde

$$G = \bigcup_{j \in J} I_j$$

af åbne intervaller, og dermed gælder at

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(I_j)$$

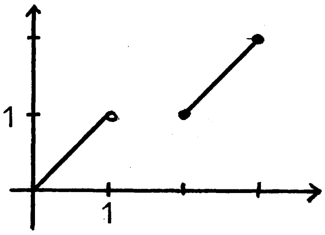
er åben.

KOROLLAR 2.4. Hvis (X,d_X), (Y,d_Y), (Z,d_Z) er metriske rum og $f: X \to Y$ og $g: Y \to Z$ er kontinuerte, er den sammensatte afbildning $g \circ f: X \to Z$ ligeledes kontinuert.

BEVIS. For enhver delmængde C af Z er $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. Hvis C er åben, er $g^{-1}(C)$ åben og følgelig $f^{-1}(g^{-1}(C))$ åben. ▮

Derimod vil den omvendte afbildning til en bijektiv kontinuert afbildning i almindelighed ikke være kontinuert.

EKSEMPEL. Betragt $\mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik og lad X og Y være mængderne $[0,1[\cup [2,3]$ og $[0,2]$ opfattet som delrum af $\mathbb{R}$. Lad $f\colon X \to Y$ være den ved



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0,1[\\ x-1 & \text{for } x \in [2,3] \end{cases}$$

bestemte afbildning. Da er f kontinuert og bijektiv, men f^{-1} er diskontinuert i punktet 1 .

<u>Lipschitz afbildninger</u>. <u>Isometri</u>. <u>Homeomorfi</u>. En afbildning $f\colon X \to Y$ af det metriske rum (X,d_X) ind i det metriske rum (Y,d_Y) kaldes en <u>Lipschitz afbildning med konstant</u> $C > 0$, hvis der for alle x_1 og x_2 i X gælder

$$d_Y(f(x_1),f(x_2)) \leqq C\, d_X(x_1,x_2) .$$

Hvis $C = 1$ kaldes f <u>afstandsformindskende</u>. Disse afbildninger er øjensynligt kontinuerte (til $\varepsilon > 0$ kan $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ benyttes). Afbildningen kaldes en <u>isometri</u>, hvis den er bijektiv, og der for vilkårlige punkter x_1 og x_2 i X gælder

$$d_Y(f(x_1),f(x_2)) = d_X(x_1,x_2) .$$

Afbildningen kaldes en <u>homeomorfi</u>, hvis den er bijektiv og såvel f som f^{-1} er kontinuert. En isometri er en homeomorfi, medens det omvendte i almindelighed ikke gælder.

<u>Kontinuitet i delrum og produktrum</u>. Lad (X,d_X) være et metrisk rum og X' en ikke tom delmængde af X . <u>Inklusionsafbildningen</u> $j\colon X' \to X$ givet ved

$$j(x') = x' \quad \text{for} \quad x' \in X',$$

er kontinuert opfattet som afbildning af delrummet (X',d_X) ind i

(X,d_X) . Lad nemlig $G \subseteq X$ være en åben delmængde af (X,d_X) . Så gælder $j^{-1}(G) = X' \cap G$ som ifølge Sætning 1.10 er åben i (X',d_X) . (Man kunne også blot bemærke at j er afstandsformindskende.) Heraf fås at hvis $f: X \to Y$ er en kontinuert afbildning af (X,d_X) ind i det metriske rum (Y,d_Y) så er <u>restriktionen</u> $f_{|X'}$ af f til X' kontinuert af (X',d_X) ind i (Y,d_Y) thi $f_{|X'} = f \circ j$ og påstanden følger af Korollar 2.4

Er $f: X \to Y$ en afbildning, og Y' en delmængde af Y , der indeholder $f(X)$, defineres ved $\tilde{f}(x) = f(x)$ for $x \in X$ en afbildning $\tilde{f}$ af X ind i delrummet Y' . For enhver delmængde B af Y gælder $\tilde{f}^{-1}(B \cap Y') = f^{-1}(B)$. Heraf følger, at $\tilde{f}$ er kontinuert, hvis og kun hvis f er kontinuert.

Lad (M,d) betegne produktrummet af de metriske rum (M_1,d_1) og (M_2,d_2) (se p. II.25), og betragt de to <u>koordinatafbildninger</u> eller <u>projektioner</u> $\pi_1: M \to M_1$ og $\pi_2: M \to M_2$ givet ved

$$\pi_1((x_1,x_2)) = x_1 \ , \quad \pi_2((x_1,x_2)) = x_2 \quad \text{for} \quad (x_1,x_2) \in M \ .$$

Disse afbildninger er afstandsformindskende og dermed kontinuerte, thi for $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M$ gælder

$$\begin{aligned} d_j(\pi_j((x_1,x_2)),\pi_j((y_1,y_2))) &= d_j(x_j,y_j) \\ &\leq \max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)\} = d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \end{aligned}$$

for $j = 1,2$.

Lad nu (X,d_X) være et metrisk rum. En afbildning $f: X \to M$, hvor (M,d) er produktrummet af (M_1,d_1) og (M_2,d_2) giver anledning til et par af afbildninger $f_1: X \to M_1$ og $f_2: X \to M_2$ givet ved

$$(f_1(x),f_2(x)) = f(x) \quad \text{for} \quad x \in X \ .$$

Der gælder simpelthen $f_j = \pi_j \circ f$ for $j = 1,2$, og f_1 henholdsvis f_2 kaldes <u>første</u> og <u>anden</u> <u>koordinatafbildning</u> for f . Omvendt giver hvert par af afbildninger $f_1\colon X \to M_1$ og $f_2\colon X \to M_2$ anledning til en afbildning $f\colon X \to M$ defineret ved

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \quad \text{for} \quad x \in X ,$$

og der gælder $f_j = \pi_j \circ f$ for $j = 1,2$.

Med disse betegnelser gælder, at $f\colon X \to M$ er kontinuert hvis og kun hvis $f_1\colon X \to M_1$ og $f_2\colon X \to M_2$ begge er kontinuerte. Hvis nemlig f er kontinuert er de sammensatte afbildninger $f_j = \pi_j \circ f$, $j = 1,2$, begge kontinuerte. Antag nu omvendt, at f_1 og f_2 begge er kontinuerte, og lad $a \in X$ og $\varepsilon > 0$ være givet. Så findes $\delta_1 > 0$ så

$$f_1(K_X(a,\delta_1)) \subseteq K_1(f_1(a),\varepsilon)$$

og $\delta_2 > 0$ så

$$f_2(K_X(a,\delta_2)) \subseteq K_2(f_2(a),\varepsilon) .$$

Med $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ har vi så

$$f(K_X(a,\delta)) \subseteq K_1(f_1(a),\varepsilon) \times K_2(f_2(a),\varepsilon) = K(f(a),\varepsilon) . \qquad \square$$

Lad nu $\varphi\colon M \to Y$ være en afbildning af produktrummet (M,d) af (M_1,d_1) og (M_2,d_2) ind i det metriske rum (Y,d_Y) , og lad $(a_1,a_2) \in M$. At φ er kontinuert i punktet (a_1,a_2) kommer ud på, at der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ så

$$d_Y(\varphi(a_1,a_2),\varphi(x_1,x_2)) < \varepsilon$$

for alle $(x_1,x_2) \in M$ som opfylder

$$d((a_1,a_2),(x_1,x_2)) = \max\{d_1(a_1,x_1),d_2(a_2,x_2)\} < \delta .$$

Kontinuitet af regneoperationerne. Addition, subtraktion og multiplikation af komplekse tal giver anledning til afbildningerne af $\mathbb{C}^2$ ind i $\mathbb{C}$ defineret ved

$$\varphi_1(x_1,x_2) = x_1+x_2 ,$$
$$\varphi_2(x_1,x_2) = x_1-x_2 , \quad \text{for} \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{C}^2 .$$
$$\varphi_3(x_1,x_2) = x_1x_2 ,$$

Tilsvarende giver division af komplekse tal anledning til en afbildning af $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ ind i $\mathbb{C}$, nemlig

$$\varphi_4(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{for} \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\}) .$$

Disse afbildninger er kontinuerte. Mere præcist: Udstyres $\mathbb{C}$ med den sædvanlige metrik og $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ med den inducerede metrik samt $\mathbb{C}^2$ og $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ som produktrummene af $\mathbb{C}$ og $\mathbb{C}$ henholdsvis $\mathbb{C}$ og $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ har vi:

<u>SÆTNING 2.5</u>. Afbildningerne $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ og $\varphi_4\colon \mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \to \mathbb{C}$ er kontinuerte.

BEVIS. Lad $(a_1,a_2) \in \mathbb{C}^2$. For $(x_1,x_2) \in \mathbb{C}^2$ har vi da

$$|\varphi_1(x_1,x_2)-\varphi_1(a_1,a_2)| = |(x_1+x_2)-(a_1+a_2)| \leq |x_1-a_1|+|x_2-a_2|$$

og

$$|\varphi_2(x_1,x_2)-\varphi_2(a_1,a_2)| = |(x_1-x_2)-(a_1-a_2)| \leq |x_1-a_1|+|x_2-a_2|,$$

hvilket viser påstanden om φ_1 og φ_2, thi for givet $\varepsilon > 0$ har vi, at hvis

$$d((x_1,x_2),(a_1,a_2)) = \max\{|x_1-a_1|,|x_2-a_2|\} < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

så er

$$|\varphi_1(x_1,x_2)-\varphi_1(a_1,a_2)| < \varepsilon \quad \text{og} \quad |\varphi_2(x_1,x_2)-\varphi_2(a_1,a_2)| < \varepsilon .$$

Videre har vi for $(x_1,x_2) \in \mathbb{C}^2$ at

$$|\varphi_3(x_1,x_2)-\varphi_3(a_1,a_2)| = |x_1x_2-a_1a_2| = |x_1x_2-x_1a_2+x_1a_2-a_1a_2|$$
$$\leq |x_1|\,|x_2-a_2| + |a_2|\,|x_1-a_1|.$$

Summen her er lille når $|x_1-a_1|$ og $|x_2-a_2|$ begge er små, idet faktoren $|x_1|$ i første led da er tæt ved $|a_1|$. Mere præcist: Lad $\varepsilon > 0$ være givet og sæt

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2(1+|a_1|)}\ ,\ \frac{\varepsilon}{2(1+|a_2|)}\ ,\ 1\right\}.$$

For $(x_1,x_2) \in \mathbb{C}^2$ opfyldende

$$d((x_1,x_2),(a_1,a_2)) = \max\{|x_1-a_1|,|x_2-a_2|\} < \delta$$

gælder specielt $|x_1| \le |x_1-a_1|+|a_1| < 1+|a_1|$, og derfor

$$|\varphi_3(x_1,x_2)-\varphi_3(a_1,a_2)| \le (1+|a_1|)|x_2-a_2| + |a_2|\ |x_1-a_1|$$

$$< (1+|a_1|)\frac{\varepsilon}{2(1+|a_1|)} + |a_2|\frac{\varepsilon}{2(1+|a_2|)} < \varepsilon\ ,$$

hvilket viser påstanden om φ_3 .

Lad nu $(a_1,a_2),(x_1,x_2) \in \mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. Vi finder

$$|\varphi_4(x_1,x_2)-\varphi_4(a_1,a_2)| = \left|\frac{x_1}{x_2} - \frac{a_1}{a_2}\right| = \left|\frac{x_1a_2-x_2a_1}{a_2x_2}\right|$$

$$= \frac{1}{|a_2x_2|}|(x_1-a_1+a_1)a_2-(x_2-a_2+a_2)a_1| = \frac{1}{|a_2x_2|}|(x_1-a_1)a_2-(x_2-a_2)a_1|$$

$$\le \frac{1}{|a_2x_2|}(|x_1-a_1||a_2|+|x_2-a_2||a_1|)\ .$$

Denne størrelse er lille når $|x_1-a_1|$ og $|x_2-a_2|$ begge er små, idet faktoren $\frac{1}{|a_2x_2|}$ da er tæt ved $\frac{1}{|a_2|^2}$. Mere præcist: Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Sætter vi

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon|a_2|^2}{4(1+|a_1|)}\ ,\ \frac{\varepsilon}{4}|a_2|,\ \frac{|a_2|}{2}\right\}$$

finder vi for $(x_1,x_2) \in \mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, at hvis

$$\max\{|x_1-a_1|,|x_2-a_2|\} < \delta$$

så gælder (fordi $|a_2| \le |a_2-x_2|+|x_2|$)

$$|x_2| \ge |a_2|-\delta \ge |a_2| - \frac{|a_2|}{2} = \frac{1}{2}|a_2|$$

og derfor

$$|\varphi_4(x_1,x_2)-\varphi_4(a_1,a_2)| \le \frac{1}{|a_2|\frac{1}{2}|a_2|}(|a_2|\delta+|a_1|\delta)$$

$$\le \frac{2}{|a_2|^2}(|a_2|^2\ \frac{\varepsilon}{4} + \frac{|a_1|}{1+|a_1|}|a_2|^2\ \frac{\varepsilon}{4}) < \varepsilon\ ,$$

og dermed er φ_4 kontinuert. ∎

BEMÆRKNING. Kontinuiteten af φ_2 kan fås ud fra additionens kontinuitet ved simpelthen at bemærke at afbildningen af $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$ givet ved $y \mapsto -y$ let indses at være kontinuert og videre at $(x,y) \mapsto (x,-y)$ af $\mathbb{C}^2$ ind i $\mathbb{C}^2$ er kontinuert. Dermed er $(x,y) \mapsto \varphi_2(x,y) = \varphi_1(x,-y)$ kontinuert. Tilsvarende, og her er der måske tale om en lettelse, kan kontinuiteten af φ_4 fås ud fra multiplikationens kontinuitet ved at bemærke at afbildningen $y \mapsto \frac{1}{y}$ af $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ind i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ indses at være kontinuert og derfor er $(x,y) \mapsto (x,\frac{1}{y})$ af $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ ind i $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ kontinuert. Dermed er $(x,y) \mapsto \varphi_4(x,y) = \varphi_3(x,\frac{1}{y})$ kontinuert.

Idet regneoperationerne for reelle tal kan opfattes som de komplekse regneoperationers restriktioner til $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (henholdsvis $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$), og de respektive afstandsbegreber i $\mathbb{C}^2$ henholdsvis $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ inducerer maksimumsmetriken i $\mathbb{R}^2$ og delrumsmetriken fra $\mathbb{R}^2$ på $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ fås følgende:

SÆTNING 2.6. Afbildningerne af $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$:

$$(x_1,x_2) \mapsto x_1+x_2 \ , \quad (x_1,x_2) \mapsto x_1-x_2 \ , \quad (x_1,x_2) \mapsto x_1x_2 \ ,$$

er kontinuerte når $\mathbb{R}^2$ forsynes med maksimumsmetriken og $\mathbb{R}$ med den sædvanlige afstand, og afbildningen af $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ind i $\mathbb{R}$: $(x_1,x_2) \mapsto \frac{x_1}{x_2}$ er kontinuert når $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ forsynes med delrumsmetriken fra $\mathbb{R}^2$ udstyret med maksimumsmetriken og $\mathbb{R}$ er forsynet med den sædvanlige metrik.

SÆTNING 2.7. De ved $x \mapsto |x|$ bestemte afbildninger af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{R}$ er kontinuerte, og den ved $z \mapsto \overline{z}$ (kompleks konjugering) bestemte afbildning af $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$ er en isometri (og dermed kontinuert).

BEVIS. Ifølge den for $x,y \in \mathbb{R}$ eller $x,y \in \mathbb{C}$ gældende ulighed $||x|-|y|| \leq |x-y|$ er afbildningerne $x \mapsto |x|$ afstandsformindskende.

For $z,w \in \mathbb{C}$ har vi

$$|\overline{z}-\overline{w}| = |z-w|$$

hvilket, da $z \mapsto \overline{z}$ er bijektiv, viser at $z \mapsto \overline{z}$ er en isometri. ▮

Benyttes karakteriseringen af kontinuitet ved konvergente punktfølger (cf. Sætning 2.1), og det faktum, at en punktfølge $((x_n,y_n))$ i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{C}^2$ er konvergent med grænsepunktet (x,y), hvis og kun hvis talfølgen (x_n) er konvergent med grænseværdien x og talfølgen (y_n) er konvergent med grænseværdien y, ser vi, at kontinuiteten af regneoperationerne er ensbetydende med følgende sætning om regning med konvergente talfølger:

Hvis de reelle eller komplekse talfølger (x_n) og (y_n) er konvergente med grænseværdierne x og y, er talfølgerne (x_n+y_n), (x_n-y_n), (x_ny_n) konvergente med grænseværdierne $x+y$, $x-y$, xy. Hvis y og hvert y_n er $\neq 0$, er talfølgen $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ konvergent med grænseværdien $\frac{x}{y}$.

Vi ser endvidere:

Hvis den reelle eller komplekse talfølge (x_n) er konvergent med grænseværdien x, er talfølgen $(|x_n|)$ konvergent med grænseværdien $|x|$.

<u>Kontinuerte reelle og komplekse funktioner</u>. Idet (X,d) betegner et metrisk rum, kaldes en kontinuert afbildning $f\colon X \to \mathbb{R}$ eller $f\colon X \to \mathbb{C}$ en kontinuert <u>reel</u> eller <u>kompleks</u> <u>funktion</u> <u>på</u> X. Mængden af kontinuerte reelle funktioner på X betegnes $C^0(X,\mathbb{R})$ og mængden af kontinuerte komplekse funktioner $C^0(X,\mathbb{C})$. Hvis det af sammenhængen fremgår, hvilket af de to tilfælde talen er om, benyttes også den kortere betegnelse $C^0(X)$. Idet $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ gælder, at $C^0(X,\mathbb{R})$ er en delmængde af $C^0(X,\mathbb{C})$.

Vi skal nu se, at en række operationer med kontinuerte funktioner på X fører til kontinuerte funktioner. Lad $f,g,h \in C^0(X,\mathbb{C})$ og $\lambda \in \mathbb{C}$, og antag at $h(x) \neq 0$ for $x \in X$. Ved fastsættelserne

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)\ , \qquad \text{(punktvis addition)}$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)\ , \qquad \text{(punktvis skalarmultiplikation)}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)\ , \qquad \text{(punktvis multiplikation)}$$

$$(\tfrac{1}{h})(x) = \frac{1}{h(x)}\ , \qquad \text{(punktvis reciprok)}$$

$$(\overline{f})(x) = \overline{f(x)}\ , \qquad \text{(punktvis kompleks konjugering)}$$

$$|f|(x) = |f(x)|\ , \qquad \text{(numerisk værdi)}$$

$$(\mathrm{Re}\ f)(x) = \mathrm{Re}\ f(x)\ , \qquad \text{(realdel)}$$

$$(\mathrm{Im}\ f)(x) = \mathrm{Im}\ f(x)\ , \qquad \text{(imaginærdel)}$$

defineres funktioner $f+g$, λf, fg, $\frac{1}{h}$, $\overline{f}$ af X ind i $\mathbb{C}$ og funktioner $|f|$, $\mathrm{Re}\ f$, $\mathrm{Im}\ f$ af X ind i $\mathbb{R}$.

Bemærk at

$$f(x) = \mathrm{Re}\ f(x)+i\ \mathrm{Im}\ f(x) \quad \text{for} \quad x \in X\ .$$

Hvis $f,g,h \in C^0(X,\mathbb{R})$ og $\lambda \in \mathbb{R}$ så har funktionerne $f+g$, λf, fg og $\frac{1}{h}$ <u>reelle</u> værdier. Derudover defineres ved

$$(f\wedge g)(x) = \min\{f(x),g(x)\}$$

$$(f\vee g)(x) = \max\{f(x),g(x)\}$$

funktioner $f\wedge g$, $f\vee g$ af X ind i $\mathbb{R}$. Der gælder

$$(f\wedge g)(x)+(f\vee g)(x) = f(x)+g(x) \quad \text{for} \quad x \in X\ .$$

Disse fastsættelser har naturligvis mening for vilkårlige komplekse (henh. reelle) funktioner på X (kontinuerte eller ej), men vi skal nu se at operationerne anvendt på kontinuerte funktioner giver kontinuerte funktioner.

<u>SÆTNING 2.8</u>. Mængden $C^0(X,\mathbb{C})$ er, udstyret med punktvis addition og skalarmultiplikation, et vektorrum over $\mathbb{C}$, og hvis

$f,g,h \in C^0(X,\mathbb{C})$ med $h(x) \neq 0$ for alle $x \in X$, så gælder $fg, \bar{f}, \frac{1}{h} \in C^0(X,\mathbb{C})$. For $f \in C^0(X,\mathbb{C})$ gælder $|f|, \mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f \in C^0(X,\mathbb{R})$.

Mængden $C^0(X,\mathbb{R})$ er, udstyret med punktvis addition og skalarmultiplikation, et vektorrum over $\mathbb{R}$, og hvis $f,g,h \in C^0(X,\mathbb{R})$ med $h(x) \neq 0$ for alle $x \in X$ så gælder $fg, \frac{1}{h}, |f|, f\wedge g, f\vee g \in C^0(X,\mathbb{R})$.

BEVIS. Idet afbildningerne af X ind i $\mathbb{C}^2$ givet ved

$$x \mapsto (f(x),g(x)) \quad \text{og} \quad x \mapsto (\lambda, f(x))$$

for $f,g \in C^0(X,\mathbb{C})$ og $\lambda \in \mathbb{C}$ er kontinuerte, fås at funktionerne $f+g$ og λf tilhører $C^0(X,\mathbb{C})$ ved hjælp af regneoperationernes kontinuitet og Korollar 2.4. At $C^0(X,\mathbb{C})$ er et vektorrum over $\mathbb{C}$ følger så ved hjælp af regnereglerne i $\mathbb{C}$. På analog måde fås at fg , $\bar{f}$ og $\frac{1}{h}$ er kontinuerte. F.eks. er $x \mapsto \overline{f(x)}$ sammensætningen af de kontinuerte afbildninger

$$x \mapsto f(x) \quad \text{og} \quad z \mapsto \bar{z} .$$

De reelle funktioner $|f|$, $\mathrm{Re}\, f$ og $\mathrm{Im}\, f$ er kontinuerte fordi $z \mapsto |z|$ er kontinuert og idet

$$\mathrm{Re}\, f(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} \overline{f(x)} \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}\, f(x) = \frac{1}{2i} f(x) - \frac{1}{2i}\overline{f(x)} .$$

Tilfældet $C^0(X,\mathbb{R})$ går analogt; idet $f\vee g$ og $f\wedge g$ kan skrives

$$(f\vee g)(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) + \frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$$

$$(f\wedge g)(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) - \frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$$

fås at også $f\wedge g$, $f\vee g$ er kontinuerte. For reelle tal α,β gælder nemlig

$$\max\{\alpha,\beta\} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}|\alpha-\beta|$$

$$\min\{\alpha,\beta\} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}|\alpha-\beta| . \quad \square$$

EKSEMPEL. Ethvert <u>komplekst polynomium</u>, altså en funktion $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ af formen

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

hvor $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ og $n \in \mathbb{N}$, er kontinuert. Det er nemlig klart at afbildningen $z \mapsto z$ af $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$ er kontinuert. Ved induktion ses så, at afbildningen $z \mapsto z^j$ af $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$ er kontinuert for alle $j \in \mathbb{N}$, og påstanden følger herefter af Sætning 2.8.

EKSEMPEL. Afbildningen $x \mapsto \frac{1}{x}$ af $]0,\infty[$ ind i $]0,\infty[$ er kontinuert.

EKSEMPEL. At afbildningen $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ (cf. p. II.32) er kontinuert kan nu indses på følgende måde: Alle afbildningerne

$$(x,y) \mapsto x \ , \ x \mapsto (x,x) \ , \ (x,x) \mapsto x^2$$

er kontinuerte, og derfor er $(x,y) \mapsto x^2$ kontinuert; tilsvarende er $(x,y) \mapsto y^2$ kontinuert, og dermed er $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ kontinuert.

<u>Afstand fra et punkt til en mængde</u>. Betegner A en ikke tom delmængde af et metrisk rum (X,d) defineres ved

$$x \mapsto \varphi(x) = d(x,A) = \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$$

en reel, ikke negativ funktion på X. For et vilkårligt $x \in X$ kaldes $d(x,A)$ <u>afstanden fra punktet</u> x <u>til mængden</u> A. Det bør ikke give anledning til misforståelse, at vi også betegner denne afstand med d.

Det er klart at

$$A \subseteq \{x \in X \mid d(x,A) = 0\} \ ,$$

og hvis $A \subseteq X$ er <u>afsluttet</u> gælder

$$\{x \in X \mid d(x,A) = 0\} = A \ .$$

Hvis nemlig $x \in X$ opfylder $d(x,A) = 0$ så findes for hvert $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \in A$ så $d(x,x_n) < \frac{1}{n}$, og punktfølgen (x_n) er konvergent med grænsepunkt x som, da A er afsluttet, tilhører A.

Afbildningen $\varphi: X \to \mathbb{R}$ er afstandsformindskende og derfor kontinuert. For vilkårlige punkter $x_1, x_2 \in X$ og et vilkårligt punkt $y \in A$ har vi nemlig

$$d(x_1,A) \leq d(x_1,y) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,y) ,$$

hvoraf følger

$$d(x_1,A) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,A) ,$$

altså

$$d(x_1,A) - d(x_2,A) \leq d(x_1,x_2) .$$

Lader vi x_1 og x_2 bytte roller, får vi herved

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| = |d(x_1,A)-d(x_2,A)| \leq d(x_1,x_2) .$$

EKSEMPEL. For $X = \mathbb{R}$ med den sædvanlige afstand finder vi

$$d(x,[0,1]) = \begin{cases} x-1 & \text{for } x > 1 , \\ 0 & \text{for } x \in [0,1] , \\ -x & \text{for } x < 0 , \end{cases}$$

og

$$d(x,\{0,1\}) = \min\{|x-1|,|x|\} .$$

<u>SÆTNING 2.9</u>. Til ethvert par F_1, F_2 af disjunkte, ikke tomme, afsluttede delmængder af det metriske rum (X,d) findes disjunkte åbne mængder G_1, G_2, så at $F_1 \subseteq G_1$ og $F_2 \subseteq G_2$.

BEVIS. Lad $\varphi_1(x) = d(x,F_1)$ og $\varphi_2(x) = d(x,F_2)$. Vi betragter mængderne

$$G_1 = \{x \in X \mid \varphi_1(x) < \varphi_2(x)\} , \; G_2 = \{x \in X \mid \varphi_1(x) > \varphi_2(x)\} ,$$

som øjensynligt er disjunkte, og de er åbne, idet de er originalmængderne af $]-\infty,0[$ og $]0,\infty[$ ved den kontinuerte afbildning $\varphi_1-\varphi_2: X \to \mathbb{R}$. Hvis $x \in F_1$, gælder $\varphi_1(x) = 0$ og $\varphi_2(x) > 0$. Altså har vi $F_1 \subseteq G_1$. Hvis $x \in F_2$, gælder $\varphi_2(x) = 0$ og $\varphi_1(x) > 0$. Altså har vi $F_2 \subseteq G_2$. ∎

<u>Grænseværdier for funktioner på et interval</u>. Lad $f\colon A \to \mathbb{C}$ være en kompleks funktion defineret på en mængde $A \subseteq \mathbb{R}$ som indeholder et <u>punkteret</u> <u>interval</u> <u>omkring</u> $x_0 \in \mathbb{R}$, ↄ: en mængde af formen $]a,x_0[\cup]x_0,b[$ med $a < x_0 < b$.

<u>DEFINITION</u>. Funktionen f siges at have <u>grænseværdien</u> $z_0 \in \mathbb{C}$ <u>for</u> x <u>gående</u> <u>mod</u> x_0 $(x \in A)$, hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ så

$$|f(x)-z_0| < \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in (]x_0-\delta,x_0+\delta[\cap A) \setminus \{x_0\} .$$

Det er let at se, at f højst har én grænseværdi for x gående mod x_0. At f har grænseværdien z_0 for x gående mod x_0, er ensbetydende med at funktionen $\tilde{f}\colon A \cup \{x_0\} \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} z_0 & \text{for } x = x_0 \\ f(x) & \text{for } x \in A\setminus\{x_0\} \end{cases}$$

er kontinuert i punktet x_0, og vi skriver i så fald

$$z_0 = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in A\setminus\{x_0\}}} f(x) .$$

Det er ikke forudsat, at f er defineret i punktet x_0, og hvis f er defineret i x_0 er værdien $f(x_0)$ uden betydning for eksistensen af en grænseværdi af f for x gående mod x_0.

Lad $f\colon A \to \mathbb{C}$ være en kompleks funktion defineret på en mængde $A \subseteq \mathbb{R}$ som indeholder et interval af formen $]a,b[$ med $a < b$.

<u>DEFINITION</u>. Funktionen f siges at have <u>grænseværdien</u> $z_0 \in \mathbb{C}$ <u>for</u> x <u>gående</u> <u>mod</u> a <u>fra</u> <u>højre</u> $(x \in A)$, hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ så

$$|f(x)-z_0| < \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in]a,a+\delta[\cap A .$$

Det ses let, at f højst har én grænseværdi for x gående mod a fra højre, og at f har grænseværdien z_0 for x gående mod a

fra højre netop hvis funktionen $\tilde{f}\colon [a,b[\to \mathbb{C}$ givet ved

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in]a,b[\\ z_0 & \text{for } x = a \end{cases},$$

er kontinuert i punktet a. I så fald skriver vi

$$z_0 = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a+0) .$$

Tilsvarende defineres grænseværdi af f for x gående mod b fra venstre, som betegnes (hvis den eksisterer)

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b-0) .$$

Som ovenfor gælder, at en eventuel værdi af f i a (eller b) er uden betydning for eksistensen af grænseværdi i a (henholdsvis b).

Endvidere ses, at en funktion $f\colon A \to \mathbb{C}$ defineret på et punkteret interval omkring x_0 har grænseværdien z_0 for x gående mod x_0, hvis og kun hvis f har grænseværdier fra højre og venstre i x_0 og

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = z_0 .$$

EKSEMPEL. Funktionen $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

har grænseværdien 1 for x gående mod 0. Vi har nemlig for $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$ uligheden (tegning)

$$\sin x < x < \tan x$$

hvoraf

$$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x} ,$$

eller

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{1-\cos x}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x} < \frac{1-\cos x}{\cos x} .$$

Idet $x \mapsto \cos x$ er kontinuert og $\cos 0 = 1$ findes til givet $\varepsilon > 0$ et $\delta \in]0,\frac{\pi}{2}[$ så

$$x \in]0,\delta[\Rightarrow \frac{1-\cos x}{\cos x} < \varepsilon ,$$

hvilket viser at $f(0^+) = 1$. På analog måde ses at $f(0^-) = 1$. ∎

For funktioner defineret på halvlinier tales på analog måde om grænseværdi for $x \to \pm\infty$. For eksempel siger vi at $f\colon]a,\infty[\to \mathbb{C}$ har <u>grænseværdien</u> $z_0 \in \mathbb{C}$ for $x \to \infty$, hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et tal $b > a$ så

$$x \in]b,\infty[\Rightarrow |f(x)-z_0| < \varepsilon .$$

For <u>reelle</u> eller <u>udvidet</u> <u>reelle</u> funktioner kan også tales om grænseværdien $+\infty$ $(-\infty)$ for x gående mod $a \in \mathbb{R}$ (fra højre, eller fra venstre) eller for $x \to \pm\infty$. For eksempel siges $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ at have <u>grænseværdien</u> $+\infty$ <u>for</u> x <u>gående</u> <u>mod</u> a <u>fra</u> <u>højre</u> hvis der til hvert $\alpha \in \mathbb{R}$ findes et $\delta > 0$ så

$$x \in]a,a+\delta[\cap]a,b[\Rightarrow f(x) > \alpha .$$

EKSEMPEL. Funktionen $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ har grænseværdien 1 for $x \to \infty$ og funktionen $x \mapsto \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ har grænseværdien ∞ for $x \to 0$ fra højre.

<u>Monotone funktioner</u>. En funktion $f\colon A \to \mathbb{R}^*$ defineret på et interval A i $\mathbb{R}^*$ kaldes <u>monoton</u> hvis den er monotont <u>voksende</u> (d.v.s. for $x,y \in A$ gælder: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$) eller monotont <u>aftagende</u> (d.v.s. for $x,y \in A$ gælder $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$) .

Lad nu $A =]a,b[$ være et begrænset eller ubegrænset åbent interval i $\mathbb{R}$ og lad $f\colon A \to \mathbb{R}$ være monotont voksende. Så gælder: for ethvert $x_0 \in [a,b[$ har f en grænseværdi $f(x_0+0) \in \mathbb{R}^*$ for $x \to x_0$ fra højre, og

$$f(x_0+0) = \inf\left\{f(x) \mid x \in A \wedge x > x_0\right\} .$$

Thi betegnes dette infimum med β gælder for ethvert $\beta' > \beta$ at der findes $x' \in A$, $x' > x_0$ så $f(x') < \beta'$ og for alle $x \in]x_0,x'[$ gælder så

$$\beta \leq f(x) < \beta' .$$

Analogt gælder: For ethvert $x_0 \in]a,b]$ har f en grænseværdi $f(x_0-0)$ fra venstre i x_0 som er lig med $\sup\{f(x) \mid x \in A \wedge x < x_0\}$. For ethvert $x_0 \in A$ gælder åbenbart $f(x_0-0) \leq f(x_0) \leq f(x_0+0)$, og f er kontinuert i x_0 hvis og kun hvis $f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0)$. Hvis f er diskontinuert i x_0 vil f ikke antage nogen værdi i intervallet $]f(x_0-0), f(x_0+0)[$ undtagen værdien $f(x_0)$, såfremt denne ikke netop er lig med $f(x_0-0)$ eller $f(x_0+0)$.

Hvis f er defineret i a gælder $f(a) \leq f(a+0)$, og f er kontinuert i a, hvis og kun hvis $f(a) = f(a+0)$. Hvis f er diskontinuert i a, vil f ikke antage nogen værdi i intervallet $]f(a), f(a+0)[$. Hvis f er defineret i b, gælder $f(b-0) \leq f(b)$, og f er kontinuert i b, hvis og kun hvis $f(b-0) = f(b)$. Hvis f er diskontinuert i b, vil f ikke antage nogen værdi i intervallet $]f(b-0), f(b)[$.

For en monotont aftagende funktion $f: A \to \mathbb{R}$ gælder naturligvis tilsvarende resultater.

<u>Kontinuitet i talrummene</u>. Lad (X, d_X) være et metrisk rum. Idet maksimumsmetriken d_∞ på $\mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N})$ og den euklidiske metrik d_2 på $\mathbb{R}^k$ opfylder uligheden (cf. II.21)

$$d_\infty(\underline{x},\underline{y}) \leq d_2(\underline{x},\underline{y}) \leq \sqrt{k}\, d_\infty(\underline{x},\underline{y}) \quad \text{for } \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^k,$$

gælder, at en afbildning $f: X \to \mathbb{R}^k$ er kontinuert i $x \in X$, som afbildning ind i $(\mathbb{R}^k, d_\infty)$ hvis og kun hvis f er kontinuert i x som afbildning ind i $(\mathbb{R}^k, d_2)$. Tilsvarende er en afbildning $g: A \to X$, hvor $A \subseteq \mathbb{R}^k$, kontinuert i et punkt $a \in A$ når A opfattes som delrum af $(\mathbb{R}^k, d_\infty)$ hvis og kun hvis g er kontinuert i a når A opfattes som delrum af $(\mathbb{R}^k, d_2)$. I praksis vil vi dog oftest arbejde med d_∞ da den er lettest at vurdere. Med mindre andet eksplicit anføres, betyder kontinuitet af en afbildning "til" eller "fra" et talrum, kontinuitet mht. d_∞ (eller d_2).

§3. Uniform kontinuitet.

Til mange formål har vi brug for en skærpelse af begrebet kontinuert afbildning, nemlig begrebet uniformt kontinuert afbildning.

Definition af uniform kontinuitet. Lad (X,d_X) og (Y,d_Y) være metriske rum og lad $f: X \to Y$ være en kontinuert afbildning. For hvert $a \in X$ og hvert $\varepsilon > 0$ findes så et $\delta > 0$ således at

$$f(K_X(a,\delta)) \subseteq K_Y(f(a),\varepsilon) \ , \qquad (1)$$

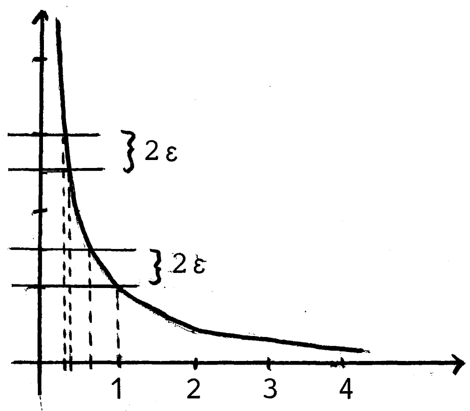
men det er afgørende, at dette tal δ afhænger af både ε og a .

EKSEMPEL. Afbildningen $x \mapsto \frac{1}{x}$ af $]0,\infty[$ ind i $]0,\infty[$ (med den sædvanlige afstand) er kontinuert. Lad $\varepsilon \in]0,1[$ være fast. For hvert $a \in]0,1]$ lader vi $\delta = \delta(a) > 0$ betegne et tal så (1) gælder. Vi ser, at originalmængden til intervallet $]\frac{1}{a}-\varepsilon, \frac{1}{a}+\varepsilon[$ er mængden

$$\left\{x > 0 \mid \frac{1}{a} - \varepsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{a} + \varepsilon\right\},$$

som er intervallet $]\frac{a}{1+a\varepsilon}, \frac{a}{1-a\varepsilon}[$ omkring a , og heraf ses at

$$\delta(a) \leq \frac{a}{1-a\varepsilon} - a = \frac{a^2\varepsilon}{1-a\varepsilon} \ .$$



Dette viser, at $\delta(a) \to 0$ for a gående mod 0 fra højre.

EKSEMPEL. Afbildningen $x \mapsto x^2$ af $[0,\infty[$ ind i $[0,\infty[$ (med sædvanlig metrik) er kontinuert. Lad $\varepsilon \in]0,1[$ være fast. For $a \geq 1$ er originalmængden til intervallet $]a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon[$ intervallet $]\sqrt{a^2-\varepsilon}, \sqrt{a^2+\varepsilon}[$ omkring a , og vi ser at $\delta(a) > 0$ for at kunne benyttes i (1) må opfylde

$$\delta(a) \leq \sqrt{a^2+\varepsilon}-a \leq \frac{\varepsilon}{2a} \ ,$$

den sidste vurdering fås fordi $(\sqrt{a^2+\varepsilon})^2 \leq \left(\frac{\varepsilon}{2a}+a\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{4a^2}+\varepsilon+a^2$. Dette viser, at $\delta(a) \to 0$ for $a \to \infty$. (Lav tegning).

I de ovenstående eksempler gælder, at for fast $\varepsilon > 0$ skal tallene $\delta = \delta(a) > 0$ så (1) er opfyldt vælges "gående mod 0" når

$a \in X$ varierer. Det er netop dette fænomen vi ønsker at udelukke med begrebet uniform kontinuitet.

DEFINITION. En afbildning $f: X \to Y$ kaldes uniformt kontinuert, hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et tal $\delta > 0$ så det for alle $x_1, x_2 \in X$ som opfylder $d_X(x_1,x_2) < \delta$ gælder at $d_Y(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon$.

Formuleret med de logiske tegn er betingelsen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1,x_2 \in X: d_X(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon \ . \quad (2)$$

Det er umiddelbart, at en uniformt kontinuert afbildning $f: X \to Y$ er kontinuert (d.v.s. kontinuert i alle punkter $a \in X$) , men pointen i definitionen er at til et givet $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ som "kan bruges" i alle punkter $a \in X$.

Lad $f: X \to Y$ være en uniformt kontinuert afbildning, og $X' \neq \emptyset$ en delmængde af X . Da er restriktionen af f til X' en uniformt kontinuert afbildning af delrummet (X',d_X) ind i (Y,d_Y) .

EKSEMPEL. En Lipschitz afbildning $f: X \to Y$ er uniformt kontinuert (cf. II.34). Til $\varepsilon > 0$ kan $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ benyttes. Specielt er enhver afstandsformindskende afbildning uniformt kontinuert, hvilket f.eks. viser, at for en ikke tom delmængde $A \subseteq X$ er afbildningen

$$X \ni x \mapsto d_X(x,A)$$

uniformt kontinuert (cf. II.43).

EKSEMPEL. Lad $f: I \to \mathbb{R}$ være en differentiabel funktion på et vilkårligt interval $I \subseteq \mathbb{R}$, og antag at f' er begrænset, altså at

$$C = \sup\{|f'(x)| \mid x \in I\} < \infty \ .$$

Ifølge middelværdisætningen gælder for $x,y \in I$

$$f(x)-f(y) = f'(\xi)(x-y) \ ,$$

hvor ξ ligger mellem x og y ; heraf fås at

$$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| \leq C|x-y| ,$$

hvilket viser at f er en Lipschitz afbildning, og dermed at f er uniformt kontinuert. F.eks. er funktionen $x \mapsto \sin x$ af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ uniformt kontinuert.

Kontinuerte funktioner på et interval. Vi skal nu vise nogle fundamentale egenskaber ved kontinuerte funktioner på et begrænset og afsluttet interval i $\mathbb{R}$.

SÆTNING 3.1. En kontinuert funktion $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ på et begrænset, afsluttet interval i $\mathbb{R}$ er uniformt kontinuert.

BEVIS. Vi fører beviset indirekte, og antager altså at f ikke er uniformt kontinuert, hvilket (negation af (2)) betyder at f opfylder

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x,z \in [a,b]: |x-z| < \delta \wedge |f(x)-f(z)| \geq \varepsilon , \tag{3}$$

eller i ord, at der findes et tal $\varepsilon > 0$ så det for hvert $\delta > 0$ er muligt at vælge $x,z \in [a,b]$ så $|x-z| < \delta$ og samtidig $|f(x)-f(z)| \geq \varepsilon$. Som vi skal se fører dette til en modstrid. Lad $\varepsilon > 0$ være valgt i henhold til (3). For hvert $n \in \mathbb{N}$ betragtes $\delta = \frac{1}{n}$ og ifølge (3) findes så tal $x_n, z_n \in [a,b]$ som opfylder

$$|x_n - z_n| < \frac{1}{n} \quad \text{og} \quad |f(x_n)-f(z_n)| \geq \varepsilon .$$

Derved bestemmes talfølger (x_n) og (z_n) i $[a,b]$. Fra Korollar 2.6 i Kap I. ved vi, at (x_n) har en konvergent delfølge (x_{n_p}). Lad $x \in [a,b]$ betegne grænseværdien. Den tilsvarende nummererede delfølge (z_{n_p}) af (z_n) er ligeledes konvergent med grænseværdi x, idet vi for alle $p \in \mathbb{N}$ har

$$|x-z_{n_p}| \leq |x-x_{n_p}| + |x_{n_p}-z_{n_p}| < |x-x_{n_p}| + \frac{1}{n_p} .$$

Udnyttes, at f er kontinuert, fås

$$f(x) = \lim_p f(x_{n_p}) = \lim_p f(z_{n_p}),$$

hvoraf

$$\lim_p |f(x_{n_p})-f(z_{n_p})| = 0 .$$

På den anden side gælder ifølge valget af x_n og z_n at

$$|f(x_{n_p})-f(z_{n_p})| \geq \varepsilon > 0$$

for alle $p \in \mathbb{N}$, hvilket giver den søgte modstrid. ▯

<u>SÆTNING 3.2.</u> Lad $f: I \to \mathbb{C}$ være en uniformt kontinuert funktion på et <u>begrænset</u> interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Så er billedmængden $f(I) \subseteq \mathbb{C}$ begrænset.

BEVIS. Ifølge den uniforme kontinuitet findes (til $\varepsilon = 1$) et tal $\delta > 0$ så det for $x,y \in I$ gælder

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < 1 .$$

Lad endepunkterne for I være a og b $(a < b)$. Så findes endeligt mange punkter $x_1,\dots,x_n \in I$ så

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$$

og så

$$\bigcup_{j=1}^{n}]x_j-\delta, x_j+\delta[\supseteq I .$$

Dermed gælder for alle $x \in I$ at

$$|f(x)| \leq \max\{|f(x_1)|,\dots,|f(x_n)|\}+1 ,$$

thi der findes et $j \in \{1,\dots,n\}$ så $|x-x_j| < \delta$ og dermed

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x)-f(x_j)| + |f(x_j)| \\ &\leq 1 + \max\{|f(x_1)|,\dots,|f(x_n)|\} . \end{aligned}$$

Dette viser at $f(I)$ er begrænset. ▯

BEMÆRKNING. Det er vigtigt at intervallet I er begrænset. F.eks. er funktionen $f(x) = x$ af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ uniformt kontinuert men $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ som er ikke begrænset.

Medens enhver kontinuert funktion på et begrænset og afsluttet interval ifølge 3.1 er uniformt kontinuert, gælder et tilsvarende resultat ikke for et begrænset åbent interval. Vi har dog:

SÆTNING 3.3. Lad $f:]a,b[\to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion på et åbent begrænset interval. Så er følgende tre betingelser ensbetydende:

(i) f er uniformt kontinuert,

(ii) f har grænseværdier $f(a+0)$ og $f(b-0)$ fra højre i a og fra venstre i b,

(iii) der findes en kontinuert "udvidelse" $\tilde{f}$ af f til $[a,b]$, d.v.s. der findes en kontinuert funktion $\tilde{f}: [a,b] \to \mathbb{C}$ så $f(x) = \tilde{f}(x)$ for alle $x \in]a,b[$.

BEVIS. Antag at f er uniformt kontinuert. Vi vil vise at f har en grænseværdi fra højre i a. Lad (x_n) være en vilkårlig følge af tal $x_n \in]a,b[$ som konvergerer mod a. Så er følgen af funktionsværdier $(f(x_n))$ ifølge 3.2 en begrænset kompleks talfølge. Der findes altså (sætning 3.2 i Kap. I) en konvergent delfølge $(f(x_{n_p}))$. Lad grænseværdien for denne delfølge være $z_a \in \mathbb{C}$. Lad os indse at

$$z_a = f(a+0) . \tag{4}$$

Til et givet $\varepsilon > 0$ findes ifølge den uniforme kontinuitet et $\delta > 0$ så

$$x,y \in]a,b[, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Idet $x_n \to a$ og $f(x_{n_p}) \to z_a$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så $x_{n_N} \in]a,a+\delta[$ og $|f(x_{n_N})-z_a| < \frac{\varepsilon}{2}$ og dermed har vi for alle $x \in]a,b[$ med $|x-a| < \delta$ at

$$|z_a-f(x)| \leq |z_a-f(x_{n_N})| + |f(x_{n_N})-f(x)| < \varepsilon ,$$

hvilket viser (4). Analogt indses at f har en grænseværdi i b fra venstre. Hermed er vist (i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Hvis f har grænseværdier $f(a+0)$ og $f(b-0)$ i a fra højre og b fra venstre, så er funktionen $\tilde{f}: [a,b] \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a+0) & \text{for } x = a \\ f(x) & \text{for } x \in]a,b[\\ f(b-0) & \text{for } x = b \end{cases},$$

kontinuert (cf. side II.46).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Hvis f har en kontinuert udvidelse $\tilde{f}$ til $[a,b]$, så er $\tilde{f}$ uniformt kontinuert ifølge Sætning 3.1, og dette medfører at f er uniformt kontinuert. ▯

BEMÆRKNING. Det er afgørende at intervallet er begrænset. F.eks. er funktionen $\sin x$ af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ uniformt kontinuert, men $\sin x$ har <u>ikke</u> nogen grænseværdi for $x \to \infty$ (eller $x \to -\infty$).

Vi skal nu skærpe udsagnet i Sætning 3.2 i tilfælde af en <u>reel</u> funktion på et <u>afsluttet</u> <u>begrænset</u> interval.

<u>SÆTNING 3.4.</u> Lad $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuert (og dermed uniformt kontinuert) reel funktion på et begrænset og afsluttet interval i $\mathbb{R}$.

Så har f en <u>største</u> <u>værdi</u> $\max f$ og en <u>mindste</u> <u>værdi</u> $\min f$ og f antager alle værdier mellem $\max f$ og $\min f$.

BEVIS. Ifølge Sætning 3.2 er billedmængden

$$A = f([a,b]) = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

begrænset. Lad $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$. Det drejer sig om at finde et $x \in [a,b]$ så $f(x) = \alpha$, thi dermed er α den største værdi for f. Der findes imidlertid tal fra A vilkårligt tæt ved α, d.v.s. der findes en følge (x_n) af punkter fra $[a,b]$ så $f(x_n) > \alpha - \frac{1}{n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Specielt gælder altså (da $f(x_n) \leq \alpha$) at

$$f(x_n) \to \alpha \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Fra Korollar 2.6 i Kap. I ved vi, at der findes en konvergent delfølge (x_{n_p}) af (x_n) med grænseværdi $x \in [a,b]$. Lad os indse at $\alpha = f(x)$. Dette følger af kontinuiteten af f idet

$$f(x) = \lim_{p\to\infty} f(x_{n_p}) = \alpha \; .$$

På analog måde indses, at f har en mindste værdi, d.v.s at der findes $x' \in [a,b]$ så

$$f(x') = \inf\{f(y) \mid y \in [a,b]\} \; .$$

Vi mangler at vise, at f antager alle værdier mellem $\max f$ og $\min f$.

Hvis $\min f = \max f$ er der intet at vise. Antag, at $\min f < \max f$ og betragt $y \in \,]\min f, \max f[$. Vi definerer

$$\mu = \sup\left\{f(x) \mid x \in [a,b],\ f(x) \leqq y\right\}$$
$$\nu = \inf\left\{f(x) \mid x \in [a,b],\ y \leqq f(x)\right\} \; .$$

Så gælder $\mu \leq y \leq \nu$ og på samme måde som ovenfor ses, at der findes $x,x' \in [a,b]$ så $f(x) = \mu$ og $f(x') = \nu$. Vi skal se, at $\mu = \nu$ hvilket viser påstanden, idet $f(x) = \mu = y$. Vi fører beviset indirekte og antager altså at $\mu < \nu$. Dette betyder at f <u>ikke</u> antager nogen værdi i $]\mu,\nu[$. Vi kan gerne antage $x < x'$ (idet tilfældet $x > x'$ behandles analogt). Ifølge den uniforme kontinuitet med $\varepsilon = \nu-\mu$ findes $\delta > 0$ så det for alle $z,z' \in [a,b]$ med $|z'-z| < \delta$ gælder at $|f(z)-f(z')| < \nu-\mu$. Vi vælger nu en inddeling $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ med $x_0 = x$ og $x_n = x'$ og så $|x_j-x_{j-1}| < \delta$ for $j = 1,2,\ldots,n$. Så gælder $f(x_1) \leq \mu$, thi hvis $f(x_1) \geq \nu$ har vi $f(x_1)-f(x_0) \geq \nu-\mu$. Videre gælder $f(x_2) \leq \mu$, thi hvis $f(x_2) \geq \nu$ har vi $f(x_2)-f(x_1) \geq \nu-\mu$. Således går vi frem og vi får at $f(x_{n-1}) \leq \mu$. Heraf fås så, at også $f(x_n) \leq \mu$, thi ellers gjaldt $f(x_n)-f(x_{n-1}) \geq \nu-\mu$. Men

$f(x_n) = f(x') = \nu$ hvilket er en modstrid. ▮

Resultaterne ovenfor kan sammenfattes på følgende måde: En kontinuert funktion $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ på et begrænset afsluttet interval er uniformt kontinuert, og billedmængden for en kontinuert reel funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ på et begrænset afsluttet interval er det <u>begrænsede afsluttede interval</u> $[\min f, \max f]$.

§4 Kompakthed.

Hovedresultaterne fra den foregående paragraf (Sætningerne 3.1 og 3.4) er eksistensudsagn, og den egenskab ved et afsluttet begrænset interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, der blev benyttet i beviserne, er at der til enhver talfølge (x_n) af tal $x_n \in [a,b]$ eksisterer (mindst) en konvergent delfølge (x_{n_p}) af (x_n) med en grænseværdi x tilhørende $[a,b]$.

Vi skal nu, med henblik på anvendelse til bevis for eksistensudsagn i mere generelle situationer, studere denne "delfølgeegenskab" i vilkårlige metriske rum.

Definition af kompakthed. Lad (X,d) være et metrisk rum.

DEFINITION. Det metriske rum (X,d) kaldes kompakt hvis enhver punktfølge (x_n) i X har en delfølge (x_{n_p}) som er konvergent.

Udsagnet er altså, at der til enhver punktfølge (x_n) af punkter $x_n \in X$ eksisterer en delfølge (x_{n_p}) af (x_n) og et punkt $x \in X$ så $x = \lim_p x_{n_p}$.

DEFINITION. En delmængde $K \subseteq X$ kaldes kompakt hvis enten $K = \emptyset$ eller hvis $K \neq \emptyset$ og det metriske rum (K,d), delrummet af (X,d) med underliggende mængde K, er kompakt.

En ikke tom delmængde $K \subseteq X$ er således kompakt hvis der til enhver følge (x_n) af punkter $x_n \in K$ findes et punkt $x \in K$ og en delfølge (x_{n_p}) af (x_n) så $x_{n_p} \to x$.

EKSEMPEL. Et afsluttet begrænset interval $I \subseteq \mathbb{R}$ er en kompakt delmængde af $\mathbb{R}$, når $\mathbb{R}$ udstyres med den sædvanlige metrik. Dette følger af Korollar 2.6 i Kap. I.

EKSEMPEL. Enhver endelig delmængde A af et vilkårligt metrisk rum (X,d) er kompakt. Lad f.eks.

$$A = \{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$$

med $a_1,\dots,a_k \in X$. Er (x_n) en følge af punkter $x_n \in A$, så findes mindst ét $j \in \{1,2,\dots,k\}$ så mængden

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = a_j\}$$

er uendelig (indirekte bevis!). Men så findes $n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$ så $x_{n_p} = a_j$, og det er da klart at delfølgen (x_{n_p}) er konvergent med grænsepunkt $a_j \in A$.

EKSEMPEL. Lad (X,d) være et <u>diskret</u> metrisk rum. En delmængde $K \subseteq X$ er da kompakt hvis og kun hvis K er endelig, d.v.s. består af endelig mange punkter. I det foregående eksempel har vi nemlig set, at hvis K er en endelig delmængde af et vilkårligt metrisk rum, så er K kompakt, og vi skal nu godtgøre at en kompakt delmængde K af det diskrete metriske rum (X,d) er endelig. Dette gøres indirekte. Hvis nemlig K består af uendelig mange punkter, er det muligt at vælge en punktfølge (x_n) af punkter i K med egenskaben

$$x_n \neq x_m \quad \text{hvis} \quad n \neq m ,$$

og dermed (da (X,d) er diskret) $d(x_n,x_m) = 1$ hvis $n \neq m$, og det er herefter klart, at der ikke findes nogen konvergent delfølge af (x_n) . Altså er K ikke kompakt.

<u>Simple egenskaber</u>. Lad (X,d) være et metrisk rum.

<u>SÆTNING 4.1.</u> En kompakt delmængde $K \subseteq X$ er afsluttet og begrænset.

BEVIS. Hvis $K = \emptyset$ er påstanden klar. Vi kan derfor antage at $K \neq \emptyset$ og viser først, at K er afsluttet. Dette kommer ifølge Sætning 1.5 ud på at vise, at hvis (x_n) er en konvergent følge af punkter tilhørende K så vil grænsepunktet $x = \lim x_n$ ligeledes tilhøre K . Lad derfor (x_n) være en konvergent følge af punkter $x_n \in K$ med grænsepunkt $x \in X$. Ifølge kompaktheden af K findes

$x' \in K$ og en delfølge (x_{n_p}) af (x_n) så

$$x' = \lim_p x_{n_p} .$$

Men det er klart at $x' = x$ og derfor $x \in K$.

Lad os derefter vise, at K er begrænset. Dertil vælges $a \in K$ og vi sætter

$$\alpha = \sup\{d(a,y) \mid y \in K\} \in [0,\infty] .$$

Det drejer sig om at vise, at $\alpha \in \mathbb{R}$ (dvs. $\alpha \neq +\infty$) . Ifølge definitionen af α findes en følge (x_n) af punkter $x_n \in K$ så $d(a,x_n) \to \alpha$ i $\mathbb{R}^*$. Ifølge kompaktheden af K findes $x \in K$ og en konvergent delfølge (x_{n_p}) af (x_n) så $x_{n_p} \to x$. Dermed gælder

$$\alpha = \lim_n d(a,x_n) = \lim_p d(a,x_{n_p}) = d(a,x)$$

hvilket viser at $\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

EKSEMPEL. Lad $K \subseteq \mathbb{R}$ være kompakt. Så gælder

$$\sup K , \inf K \in K .$$

Det er nemlig klart, at $\sup K , \inf K \in \mathbb{R}$ (K er begrænset) og hvis $x_n \in K$ er valgt så $x_n < \inf K + \frac{1}{n}$ for $n \in \mathbb{N}$, gælder $x_n \to \inf K$, og idet der findes en konvergent delfølge (x_{n_p}) af (x_n) med grænseværdi i K , sluttes at $\inf K \in K$.

EKSEMPEL. Lad X være en uendelig mængde og lad (X,d) være det diskrete metriske rum med underliggende mængde X . Idet enhver delmængde $A \subseteq X$ er såvel begrænset som afsluttet, men kun de endelige delmængder af X er kompakte, findes der altså delmængder af X som er afsluttede og begrænsede men ikke kompakte. Enhver uendelig delmængde af X har denne egenskab.

SÆTNING 4.2. Antag at (X,d) er kompakt. En delmængde $K \subseteq X$ er kompakt hvis og kun hvis K er afsluttet.

BEVIS. Antag først at $K \neq \emptyset$ er afsluttet, og lad (x_n) være en følge af punkter $x_n \in K$. Opfattes (x_n) som en punktfølge i (X,d) findes, da (X,d) er kompakt, $x \in X$ og en $(i(X,d))$ konvergent delfølge (x_{n_p}) af (x_n) med $\lim_p x_{n_p} = x$. Da K er afsluttet gælder ifølge Sætning 1.5 at $x \in K$, hvilket viser, at K er kompakt. Dette viser "hvis"-delen og "kun-hvis"-delen er indeholdt i den foregående sætning. ▯

<u>Kompakthed og kontinuitet</u>. Lad nu (X,d_X) og (Y,d_Y) være metriske rum og $f\colon X \to Y$ en kontinuert afbildning.

<u>SÆTNING 4.3.</u> For enhver kompakt delmængde $K \subseteq X$ er billedmængden $f(K)$ en kompakt delmængde af (Y,d_Y); specielt er $f(K)$ afsluttet og begrænset.

BEVIS. Lad (y_n) være en følge af punkter $y_n \in f(K)$. Vi skal finde $y \in f(K)$ og en konvergent delfølge (y_{n_p}) af (y_n) så $y_{n_p} \to y$. Dertil vælges for hvert $n \in \mathbb{N}$ et punkt $x_n \in K$ så $f(x_n) = y_n$. Idet K er kompakt findes $x \in K$ og en konvergent delfølge (x_{n_p}) af (x_n) så $x_{n_p} \to x$. Sættes $y = f(x) \in f(K)$ og betegner (y_{n_p}) den delfølge af (y_n) som svarer til delfølgen (x_{n_p}) af (x_n) gælder, da f er kontinuert, at

$$y = f(x) = \lim_p f(x_{n_p}) = \lim_p y_{n_p} . \qquad ▯$$

EKSEMPEL. Lad (X,d) være et kompakt metrisk rum, og lad $f\colon X \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Så er billedmængden $f(X)$ kompakt, og specielt findes punkter $x_1, x_2 \in X$ så

$$f(x_1) = \inf\{f(x) \mid x \in X\} \quad \text{og} \quad f(x_2) = \sup\{f(x) \mid x \in X\} .$$

Et hyppigt benyttet specialtilfælde er følgende: Hvis $f(x) > 0$ for alle $x \in X$ så gælder $\inf\{f(x) \mid x \in X\} > 0$. Der findes nemlig $x_1 \in X$ så

$$f(x_1) = \inf\{f(x) \mid x \in X\}$$

og heraf fås påstanden idet $f(x_1) > 0$.

SÆTNING 4.4. Hvis (X,d_X) er kompakt så er f uniformt kontinuert.

BEVIS. Beviset er analogt til beviset for Sætning 3.1. Vi fører beviset indirekte og antager altså, at f ikke er uniformt kontinuert, d.v.s. opfylder

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta \in 0 \ \exists x,z \in X: d_X(x,z) < \delta \wedge d_Y(f(x),f(z)) \geq \varepsilon \ .$$

Lad $\varepsilon > 0$ være valgt i henhold hertil og vælg for $n \in \mathbb{N}$ punkter $x_n, z_n \in X$ så

$$d_X(x_n,z_n) < \frac{1}{n} \quad \text{og} \quad d_Y(f(x_n),f(z_n)) \geq \varepsilon \ .$$

Derved er bestemt to punktfølger (x_n) og (z_n) i X , og ifølge kompaktheden af X findes $x \in X$ og en konvergent delfølge (x_{n_p}) af (x_n) så $\lim_p x_{n_p} = x$. Den tilsvarende nummererede delfølge (z_{n_p}) af (z_n) er ligeledes konvergent med grænsepunkt x (idet $d_X(x_{n_p},z_{n_p}) < \frac{1}{n_p}$) . Altså gælder, da f er kontinuert, at

$$f(x_{n_p}) \to f(x) \quad \text{og} \quad f(z_{n_p}) \to f(x) \ ,$$

men dette er umuligt, idet der for alle $p \in \mathbb{N}$ gælder

$$d_Y(f(x_{n_p}),f(z_{n_p})) \geq \varepsilon > 0 \ . \qquad \square$$

Kompakthed i talrummene $\mathbb{R}^k$. Som vi så ovenfor findes der metriske rum i hvilke en afsluttet og begrænset mængde ikke nødvendigvis er kompakt. Dette fænomen indtræffer dog ikke i talrummene $\mathbb{R}^k$.

BEMÆRKNING. Idet en følge $(\underline{x}_n)$ af punkter $\underline{x}_n \in \mathbb{R}^k$ er konvergent med grænsepunkt $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$, når $\mathbb{R}^k$ er udstyret med maksimumsmetrikken d_∞ , hvis og kun hvis $(\underline{x}_n)$ konvergerer mod $\underline{x}$ når $\mathbb{R}^k$ er udstyret med den euklidiske metrik d_2, ses, at en delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er kompakt opfattet som delmængde af $(\mathbb{R}^k, d_\infty)$ hvis og kun hvis A er kompakt opfattet som delmængde af $(\mathbb{R}^k, d_2)$.

Som metrik på $\mathbb{R}^k$ vil vi benytte maksimumsmetriken.

<u>SÆTNING 4.5.</u> En delmængde $K \subseteq \mathbb{R}^k$ er kompakt hvis og kun hvis den er afsluttet og begrænset.

BEVIS. "kun-hvis"-delen fås af Sætning 4.1.

Lad $K \subseteq \mathbb{R}^k$ være en ikke tom afsluttet og begrænset delmængde af $\mathbb{R}^k$, og lad $(\underline{x}_n)$ være en følge af punkter $\underline{x}_n \in K$. Det er for at vise påstanden nok at gøre rede for, at $(\underline{x}_n)$ har en konvergent delfølge $(\underline{x}_{n_p})$ idet grænsepunktet for $(\underline{x}_{n_p})$ automatisk vil tilhøre K, da K er forudsat afsluttet.

Idet K er begrænset findes et tal $\alpha > 0$ så K er indeholdt i den afsluttede kugle med centrum $\underline{0}$ og radius α altså

$$K \subseteq [-\alpha,\alpha] \times \dots \times [-\alpha,\alpha] \subseteq \mathbb{R}^k .$$

Betegner vi for $j = 1,2,\dots,k$ med (x_n^j) følgen af j'te koordinater for punkterne $(\underline{x}_n)$ gælder altså

$$x_n^j \in [-\alpha,\alpha] \quad \text{for} \quad j = 1,2,\dots,k \quad \text{og} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Af Korollar 2.6 i Kap. I fås, at der findes en konvergent delfølge $(x_{n_p}^1)$ af (x_n^1). Om den tilsvarende nummererede delfølge $(x_{n_p}^2)$ af (x_n^2) gælder

$$x_{n_p}^2 \in [-\alpha,\alpha] \quad \text{for alle} \quad p \in \mathbb{N} ,$$

og der findes derfor (Korollar 2.6 i Kap. I) en konvergent delfølge $(x_{n_{p_q}}^2)$ af $(x_{n_p}^2)$. Da $(x_{n_{p_q}}^1)$ er en delfølge af $(x_{n_p}^1)$ er $(x_{n_{p_q}}^1)$ og $(x_{n_{p_q}}^2)$ begge konvergente. I tilfældet $k = 2$ er vi dermed færdige idet $(\underline{x}_{n_{p_q}})$ så er en konvergent delfølge af $(\underline{x}_n)$. Ellers fortsættes den successive bestemmelse af konvergente delfølger: Er $(\underline{x}_{n_p})$ en delfølge af $(\underline{x}_n)$ for hvilken de j $(\in \{1,2,\dots,k-1\})$ første koordinatfølger $(x^1_{n_p}),\dots,(x^j_{n_p})$ er konvergente gælder

$$x^{j+1}_{n_p} \in [-\alpha,\alpha]$$

og der findes derfor en delfølge $(x^{j+1}_{n_{p_q}})$ af $(x^{j+1}_{n_p})$ for hvilken <u>alle</u> følgerne

$$(x^1_{n_{p_q}}),\dots,(x^{j+1}_{n_{p_q}})$$

er konvergente. Efter k sådanne skridt er bestemt en delfølge $(\underline{x}_{n_p})$ af $(\underline{x}_n)$ for hvilken alle k koordinatfølger er konvergente, og dermed er $(\underline{x}_{n_p})$ en konvergent delfølge af $(\underline{x}_n)$. $\square$

EKSEMPEL. Ethvert afsluttet begrænset "rektangel" $\subseteq \mathbb{R}^2$, altså en mængde af formen

$$[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$$

er kompakt.

Specielt er enhver kontinuert funktion $f\colon [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \to \mathbb{C}$ altså uniformt kontinuert.

§5. En fikspunktsætning.

En ligning til fastlæggelse af den ubekendte x vil ofte kunne reduceres til formen $T(x) = x$ hvor T er en passende afbildning af den ubekendtes definitionsmængde ind i sig selv. Vi skal nu give et generelt resultat om eksistens af løsninger til sådanne ligninger.

Fikspunkter for en afbildning. Lad (X,d) være et metrisk rum og $T: X \to X$ en afbildning.

DEFINITION. Et punkt $x \in X$ kaldes et fikspunkt for afbildningen T såfremt $T(x) = x$.

Indfører vi grafen for T , altså mængden

$$\text{graf}(T) = \{(x,y) \in X \times X \mid y = T(x)\} ,$$

er fikspunkterne for T de punkter $x \in X$ for hvilke $(x,x) \in \text{graf}(T)$ (hvor grafen for T "skærer" grafen for den identiske afbildning $x \to x$) .

EKSEMPEL. Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funktion. Et tal $z \in \mathbb{R}$ er da løsning til ligningen $f(x) = 0$ hvis og kun hvis afbildningen $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $T(x) = f(x) + x$ har z som fikspunkt.

BEMÆRKNING. Opfattes X som mængden af tilstande for et system (af f.eks. fysisk, kemisk, biologisk eller økonomisk natur) og afbildningen $T: X \to X$ som beskrivende tidsudviklingen af systemet, i den forstand at hvis $x \in X$ er tilstanden til ét tidspunkt så er $T(x)$ tilstanden til det næste (sekund, dag, år; tiden tænkes diskret) tidspunkt, da er et fikspunkt for T en ligevægtstilstand for systemet.

I mange tilfælde vil et system - som tiden går - indstille sig i ligevægt. Mere præcist: Antag at $T: X \to X$ er kontinuert. Hvis $x \in X$ opfylder, at følgen $(T(x), T(T(x)), \ldots) = (T^n(x))$ er konvergent med grænsepunkt $p \in X$ så er p et fikspunkt for T . Vi har nemlig da T er kontinuert

$$T(p) = T(\lim_{n\to\infty} T^n(x)) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(x)) = \lim T^{n+1}(x) = p .$$

Hvis omvendt p er et fikspunkt for T så gælder, at følgen $(T^n(p))$ er konstant (lig p) .

EKSEMPEL. Lad $X = [0,\infty[$ med den sædvanlige metrik og lad $T: X \to X$ være givet ved

$$T(x) = \sqrt{x} \quad \text{for} \quad x \in [0,\infty[\ .$$

Denne afbildning har de to fikspunkter $x = 0$ og $x = 1$ (og ikke andre; hvorfor?). Følgen $(T^n(x))$ er givet ved

$$T^n(x) = \sqrt[2^n]{x} \quad \text{for} \quad x \in [0,\infty[\quad \text{og} \quad n \in \mathbb{N} ,$$

og vi ser at $(T^n(0))$ er den konstante følge $(0,0,0,\ldots)$ medens $(T^n(x))$ for $x \in]0,\infty[$ konvergerer mod fikspunktet $x = 1$.

EKSEMPEL. Lad $X = [0,\infty[$ med den sædvanlige metrik og lad

$$T(x) = x^2 \quad \text{for} \quad x \in [0,\infty[\ .$$

Denne afbildning har de to fikspunkter $x = 0$ og $x = 1$. Følgen $(T^n(x))$ er givet ved

$$T^n(x) = x^{2^n} \quad \text{for} \quad x \in [0,\infty[\quad \text{og} \quad n \in \mathbb{N} ,$$

og vi ser at $(T^n(x))$ for $x \in [0,1[$ konvergerer mod fikspunktet $x = 0$ og for $x = 1$ er den konstant nemlig $(1,1,1,\ldots)$ medens den for $x > 1$ divergerer mod $+\infty$.

BEMÆRKNING. Disse eksempler gør det nærliggende at skelne mellem to typer af fikspunkter: <u>stabile</u> fikspunkter $p \in X$ hvor følgen $(T^n(x))$ for alle x i nærheden af p konvergerer mod p og <u>ustabile</u> fikspunkter $p \in X$ hvor $x = p$ er det eneste punkt i nærheden af p for hvilket $(T^n(x))$ konvergerer mod p . Endvidere ser vi fra eksemplerne, at fikspunktet p er stabilt eller ustabilt afhængigt af "stejlheden" af grafen for T i nærheden af p .

Det er imidlertid ikke alle afbildninger $T: X \to X$ der har et fikspunkt.

EKSEMPEL. Lad $X = [0,\infty[$ med den sædvanlige metrik og lad $T: X \to X$ være givet ved

$$T(x) = \sqrt{1+x^2} \quad \text{for} \quad x \geq 0 \ .$$

Denne afbildning har ingen fikspunkter (hvorfor ikke?) og for hvert $x \geq 0$ gælder, at følgen $(T^n(x))$ divergerer mod $+\infty$. Der gælder nemlig

$$T^n(x) \geq \sqrt{n} \quad \text{for alle} \quad n \in \mathbb{N} .$$

For $n = 1$ har vi jo $T(x) = \sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{1}$, og hvis $T^p(x) \geq \sqrt{p}$ for et $p \in \mathbb{N}$ finder vi $T^{p+1}(x) = \sqrt{1+(T^p(x))^2} \geq \sqrt{1+p}$, og påstanden fås derfor ved induktion.

Kontraktioner. Lad igen (X,d) være et metrisk rum.

DEFINITION. En afbildning $T: X \to X$ kaldes en kontraktion hvis der findes et tal $C \in [0,1[$ så

$$d(T(x),T(y)) \leq C\, d(x,y) \quad \text{for alle} \quad x,y \in X . \tag{1}$$

En kontraktion er således det vi tidligere (p. II.34) kaldte en Lipschitz afbildning med konstant < 1 , og dermed er T specielt kontinuert, men det er afgørende (cf. beviset nedenfor), at kontraktionskonstanten C opfylder $0 \leq C < 1$.

EKSEMPEL. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval forsynet med den sædvanlige metrik og lad $f: I \to I$ være en differentiabel funktion som opfylder

$$C = \sup\left\{|f'(t)| \;\middle|\; t \in I\right\} < 1 .$$

Da er f en kontraktion med kontraktionskonstant C . Ifølge middelværdisætningen gælder nemlig for $x,y \in I$, at

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$$

for et ξ mellem x og y , og vi har derfor

$$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| \leq C|x-y| .$$

SÆTNING 5.1. Lad $T: X \to X$ være en kontraktion. Så gælder:

(a) Der findes højst ét fikspunkt for T ,

(b) Hvis der findes et fikspunkt $p \in X$ for T så er for hvert $x \in X$ punktfølgen $(T^n(x))$ konvergent med grænsepunkt p .

BEVIS. (a). Antag at x og y er fikspunkter for T , altså at

$T(x) = x$ og $T(y) = y$. Så finder vi af (1), at

$$d(x,y) = d(T(x),T(y)) \leq C\, d(x,y) ,$$

hvilket da $C < 1$ medfører, at $d(x,y) = 0$, altså $x = y$.

(b). Antag, at $p \in X$ er et fikspunkt for T , altså $p = T(p)$ og lad $x \in X$. Så gælder

$$d(T(x),p) = d(T(x),T(p)) \leq C\, d(x,p) ,$$

og ved induktion

$$d(T^n(x),p) \leq C^n\, d(x,p) \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N} ,$$

hvilket da $C^n \to 0$ for $n \to \infty$, fordi $C \in [0,1[$, medfører, at $\lim_{n\to\infty} d(T^n(x),p) = 0$, altså det ønskede. ▯

BEMÆRKNING. Sætning 5.1 (b) kan også, med sprogbrugen fra foregående afsnit, udtrykkes at et <u>eventuelt</u> fikspunkt for en kontraktion er stabilt i den forstand at $(T^n(x))$ for alle $x \in X$ vil konvergere mod fikspunktet.

EKSEMPEL. Lad $X =]0,1[$ være forsynet med den sædvanlige metrik og lad

$$T(x) = \frac{1}{2} x \quad \text{for} \quad x \in]0,1[.$$

Da er T en kontraktion <u>uden</u> fikspunkter (i X) . For $x \in X$ er følgen $T^n(x)$ givet ved $T^n(x) = \frac{1}{2^n} x$, og denne følge er <u>ikke</u> konvergent i rummet $]0,1[$.

<u>Fikspunktsætningen</u>. Som vi så af det foregående eksempel har en kontraktion ikke nødvendigvis et fikspunkt. Dette beroede på at "fikspunktet" i en vis forstand lå uden for det metriske rum hvorpå kontraktionen var defineret, og vi skal nu se, at hvis det metriske rum er <u>fuldstændigt</u> kan dette ikke indtræffe.

<u>SÆTNING 5.2</u>. (Fikspunktsætningen.) Lad (X,d) være et fuldstændigt metrisk rum. Enhver kontraktion $T: X \to X$ har netop ét fikspunkt.

BEVIS. Vi ved fra Sætning 5.1, at T har højst ét fikspunkt, og at et eventuelt fikspunkt kan findes som grænsepunkt for følgen $(T^n(x))$ hvor $x \in X$ (hvis den er konvergent). Lad altså $x \in X$, og betragt følgen $(T^n(x))$. Vi skal se, at $(T^n(x))$ er en fundamentalfølge i (X,d). Betegner $C \in [0,1[$ kontraktionskonstanten for T giver (1) og et simpelt induktionsbevis at

$$d(T^{n+1}(x),T^n(x)) \leq C^n\, d(T(x),x) \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}.$$

For $n,p \in \mathbb{N}$ giver trekantsuligheden derefter, at

$$\begin{aligned} d(T^{n+p}(x),T^n(x)) &\leq \sum_{j=0}^{p-1} d(T^{n+1+j}(x),T^{n+j}(x)) \\ &\leq \sum_{j=0}^{p-1} C^{n+j}\, d(T(x),x) = C^n\, d(T(x),x) \sum_{j=0}^{p-1} C^j \\ &= C^n \frac{1-C^p}{1-C}\, d(T(x),x) \leq \frac{C^n}{1-C}\, d(T(x),x)\,. \end{aligned}$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet og lad $N \in \mathbb{N}$ være valgt så

$$C^n \frac{1}{1-C}\, d(T(x),x) \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N\,,$$

hvilket er muligt da $C \in [0,1[$.

For $n \geq N$ og $p \in \mathbb{N}$ har vi dermed at

$$d(T^{n+p}(x),T^n(x)) \leq \varepsilon\,,$$

og $(T^n(x))$ er altså en fundamentalfølge. Da (X,d) er fuldstændigt er $(T^n(x))$ altså konvergent, og grænsepunktet er dermed det entydigt bestemte fikspunkt for T. ▯

BEMÆRKNING. Udsagnet i Sætning 5.2 er et rent eksistensudsagn, men af beviset fås en metode til beregning af fikspunktet, nemlig som grænsepunktet for en vilkårlig af punktfølgerne $(T^n(x))$ hvor $x \in X$. Ofte vil fikspunktet dog kunne findes direkte.

EKSEMPEL. Idet $\mathbb{R}^2$ udstyres med maksimumsmetriken d_∞ betragtes afbildningen $(x,y) \overset{T}{\mapsto} (u,v)$ af $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}^2$ givet ved

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{3}(x+y)+3 \\ v &= \frac{1}{3}(x-y)+2 \end{aligned}\right\} \quad \text{for} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

For $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ finder vi

$$d_\infty((u,v),(u',v')) = \max\left\{|u-u'|,|v-v'|\right\}$$

$$= \max\left\{\left|\frac{1}{3}(x+y)+3-\left(\frac{1}{3}(x'+y')+3\right)\right|,\left|\frac{1}{3}(x-y)+2-\left(\frac{1}{3}(x'-y')+2\right)\right|\right\}$$

$$= \max\left\{\left|\frac{1}{3}(x-x')+\frac{1}{3}(y-y')\right|,\left|\frac{1}{3}(x-x')+\frac{1}{3}(y-y')\right|\right\}$$

$$\leq \max\left\{2\max\left\{\frac{1}{3}|x-x'|,\frac{1}{3}|y-y'|\right\}, 2\max\left\{\frac{1}{3}|x-x'|,\frac{1}{3}|y-y'|\right\}\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\max\left\{|x-x'|,|y-y'|\right\} = \frac{2}{3}d_\infty((x,y),(x',y')) ,$$

hvilket viser, at T er en kontraktion. Fikspunktet (x,y) opfylder ligningerne

$$x = \frac{1}{3}(x+y)+3$$
$$y = \frac{1}{3}(x-y)+2$$

og er altså $(x,y) = (6,3)$.

BEMÆRKNING. Den i Sætning 5.2 benyttede fremgangsmåde til bestemmelse af et fikspunkt kaldes <u>iterationsmetoden</u> eller <u>de successive approksimationers metode</u>. Som et redskab til bevis for eksistens- og entydighedssætninger for differentialligninger (se Kapitel VII) er denne (i princippet gamle) metode udviklet af E. Picard (1856-1941) i 1890. Den kan som nævnt anvendes på mange ligningstyper.

§6. Nogle topologiske begreber.

Tidligere har vi defineret begreberne åben delmængde og afsluttet delmængde af et metrisk rum, og vi skal nu, med henblik på en nærmere beskrivelse af delmængder af et metrisk rum, indføre nogle topologiske begreber, d.v.s. begreber der kan defineres ud fra systemet af åbne mængder i det metriske rum. Det drejer sig om det indre, afslutningen og randen af en mængde.

Det indre af en mængde. Lad (X,d) være et metrisk rum. En åben delmængde af X er karakteriseret ved, at der er plads inden for mængden rundt om ethvert punkt fra mængden. For en vilkårlig delmængde $A \subseteq X$ skal vi nu interessere os for de punkter i mængden for hvilke der er plads inden for mængden til en åben kugle med centrum i punktet.

DEFINITION. Et punkt $x \in A$ kaldes et indre punkt i A hvis der findes et $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq A$.

Mængden af indre punkter i A kaldes det indre af A og betegnes A°, altså

$$A^{\circ} = \{x \in A \mid \exists r > 0: K(x,r) \subseteq A\}.$$

EKSEMPEL. Lad $A \subseteq X$ være åben. Så er ethvert punkt $x \in A$ et indre punkt i A (thi der findes jo $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq A$), altså $A^{\circ} = A$ (når A er åben). Specielt gælder altså $\emptyset^{\circ} = \emptyset$ og $X^{\circ} = X$.

EKSEMPEL. Lad $X = \mathbb{R}$ være forsynet med den sædvanlige metrik og lad $a,b \in \mathbb{R}$ med $a < b$. Så gælder

$$(]a,b[)^{\circ} = ([a,b[)^{\circ} = (]a,b])^{\circ} = ([a,b])^{\circ} =]a,b[$$

og

$$(]-\infty,a])^{\circ} = (]-\infty,a[)^{\circ} =]-\infty,a[.$$

SÆTNING 6.1. Lad $A \subseteq X$ være en delmængde.

1) Det indre af A er en åben delmængde af (X,d).

2) For enhver åben delmængde G af (X,d) som opfylder $G \subseteq A$

gælder $G \subseteq A^o$.

BEVIS. 1) Lad $x \in A^o$. Det drejer sig om at finde et $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq A^o$ altså så alle punkter i $K(x,r)$ er indre punkter i A. Ifølge definitionen findes $r' > 0$ så $K(x,r') \subseteq A$, og for hvert $y \in K(x,r')$ gælder

$$K(y,s) \subseteq K(x,r') \subseteq A ,$$

når blot $s \in]0,r-d(x,y)[$ (cf. p. II.8). Dette viser, at alle punkter $y \in K(x,r')$ er indre punkter i A , altså tilhører A^o og dermed kan vi bruge $r = r'$.

2) Lad G være en åben delmængde af (X,d) som opfylder $G \subseteq A$. Vi skal vise, at hvert punkt $x \in G$ er et indre punkt i A . Til givet $x \in G$ findes, da G er åben, et $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq G$, altså da $G \subseteq A$, så

$$K(x,r) \subseteq A ,$$

og derfor er x et indre punkt i A , d.v.s. $x \in A^o$. ▯

BEMÆRKNING. Resultatet kan sammenfattes på følgende nyttige måde: <u>det indre af A er den største åbne delmængde</u> af A . Ifølge 1) er A^o nemlig en åben mængde og enhver åben delmængde af A er ifølge 2) indeholdt i A^o . Anderledes sagt, er det indre af A altså foreningsmængden af samtlige i A indeholdte åbne delmængder af (X,d) .

<u>KOROLLAR 6.2.</u> Lad A og B være delmængder af (X,d) .

1) Hvis $A \subseteq B$ så gælder $A^o \subseteq B^o$.

2) Det indre af fællesmængden $A \cap B$ <u>er lig</u> fællesmængden af A^o og B^o , altså

$$(A \cap B)^o = A^o \cap B^o .$$

3) Det indre af foreningsmængden $A \cup B$ <u>indeholder</u> foreningsmængden af A^o og B^o , altså

$$(A \cup B)^{\circ} \supseteq A^{\circ} \cup B^{\circ} \,.$$

BEVIS. 1) Idet $A^{\circ} \subseteq A \subseteq B$ ses, at A° er en åben delmængde af B og derfor $A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$.

2) Idet $A^{\circ} \subseteq A$ og $B^{\circ} \subseteq B$ har vi $A^{\circ} \cap B^{\circ} \subseteq A \cap B$ og derfor da $A^{\circ} \cap B^{\circ}$ er åben at $A^{\circ} \cap B^{\circ} \subseteq (A \cap B)^{\circ}$. På den anden side gælder $A \cap B \subseteq A$, altså $(A \cap B)^{\circ} \subseteq A^{\circ}$ og tilsvarende $(A \cap B)^{\circ} \subseteq B^{\circ}$ hvoraf $(A \cap B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cap B^{\circ}$.

3) Det er klart, at $A \subseteq A \cup B$ altså $A^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$ og tilsvarende $B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$ hvoraf $A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$. $\square$

BEMÆRKNING. I almindelighed gælder der <u>ikke</u> lighedstegn i 3). For delmængderne $A = [0,1]$, $B = [1,2]$ af $\mathbb{R}$ (med den sædvanlige metrik) gælder

$$(A \cup B)^{\circ} =]0,2[\quad \text{og} \quad A^{\circ} \cup B^{\circ} =]0,1[\cup]1,2[\,.$$

EKSEMPEL. Betragt $\mathbb{R}^k$ udstyret med maksimumsmetriken d_∞. Idet $K'(\underline{a},r)$ for $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ og $r > 0$ betegner den <u>afsluttede</u> <u>kugle</u> med centrum $\underline{a}$ og radius r har vi

$$(K'(\underline{a},r))^{\circ} = \left(\{\underline{x} \in \mathbb{R}^k \mid d_\infty(\underline{a},\underline{x}) \leq r\}\right)^{\circ} = K(\underline{a},r) \,.$$

Da $K(\underline{a},r)$ er en åben delmængde af $K'(\underline{a},r)$ gælder klart at $K(a,r) \subseteq (K'(\underline{a},r))^{\circ}$. For $x \in K'(\underline{a},r) \setminus K(\underline{a},r)$ gælder $d_\infty(\underline{a},\underline{x}) = r$ og for alle $s > 0$ gælder

$$K(\underline{x},s) \cap (\mathbb{R}^k \setminus K'(\underline{x},r)) \neq \emptyset \,,$$

d.v.s. $K(\underline{x},s)$ er <u>ikke</u> indeholdt i $K'(\underline{a},r)$ for noget $s > 0$, altså $\underline{x} \notin (K'(\underline{x},r))^{\circ}$.

<u>Afslutningen af en mængde</u>. En afsluttet delmængde af det metriske rum (X,d) er karakteriseret ved, at ethvert punkt, der kan approksimeres vilkårligt godt med punkter fra mængden, selv tilhører mængden. Vi skal nu, for en vilkårlig delmængde $A \subseteq X$, interessere os for

de punkter $x \in X$, der er grænsepunkter for konvergente punktfølger af punkter tilhørende A .

DEFINITION. Et punkt $x \in X$ kaldes et kontaktpunkt for $A \subseteq X$ såfremt det for alle $r > 0$ gælder, at

$$K(x,r) \cap A \neq \emptyset ,$$

eller anderledes sagt, at der ligger punkter fra A vilkårligt tæt ved x .

Mængden af kontaktpunkter for A kaldes afslutningen af A og betegnes $\overline{A}$.

Idet $K(x,r) \cap A \neq \emptyset$ for alle $r > 0$ hvis $x \in A$ gælder, at ethvert punkt $x \in A$ er kontaktpunkt for A , d.v.s. $A \subseteq \overline{A}$ altså at A er indeholdt i sin afslutning $\overline{A}$.

SÆTNING 6.3. Lad $A \subseteq X$ være en delmængde. Så gælder:

$$\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^{\circ} ,$$

og specielt er afslutningen $\overline{A}$ af A en afsluttet mængde.

BEVIS. Antag først, at $x \in \overline{A}$. Så gælder for alle $r > 0$ at $A \cap K(x,r) \neq \emptyset$, d.v.s. $K(x,r)$ er ikke en delmængde af $X \setminus A$ for noget $r > 0$, altså $x \notin (X \setminus A)^{\circ}$. Hvis omvendt $x \in X \setminus (X \setminus A)^{\circ}$, så findes intet $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq X \setminus A$ d.v.s. for alle $r > 0$ gælder $K(x,r) \cap A \neq \emptyset$, altså $x \in \overline{A}$. Ifølge Sætning 6.1 er $(X \setminus A)^{\circ}$ åben og dermed er $\overline{A}$ afsluttet. $\square$

Videre gælder, at hvis F er en afsluttet delmængde af X som indeholder A (altså $A \subseteq F$) så gælder $\overline{A} \subseteq F$; thi i så fald har vi $X \setminus F \subseteq X \setminus A$ og dermed da $X \setminus F$ er åben, at $X \setminus F = (X \setminus F)^{\circ} \subseteq (X \setminus A)^{\circ}$, altså

$$\overline{A} = X \setminus (X \setminus A^{\circ}) \subseteq X \setminus (X \setminus F) = F .$$

Specielt er $\overline{A}$ altså fællesmængden af samtlige afsluttede delmængder af X som indeholder A, hvilket kan udtrykkes, at $\overline{A}$ er den <u>mindste afsluttede delmængde indeholdende</u> A.

En anden nyttig beskrivelse af $\overline{A}$ er, at $\overline{A}$ består af samtlige punkter $x \in X$ der kan fås som grænsepunkter for konvergente punktfølger af punkter fra A (hvorfor?).

EKSEMPEL. For $a,b \in \mathbb{R}$ (med den sædvanlige metrik) som opfylder $a < b$ gælder

$$(]a,b[)^- = ([a,b[)^- = (]a,b])^- = ([a,b])^- = [a,b]$$

og

$$(]-\infty,a[)^- = (]-\infty,a])^- =]-\infty,a] .$$

EKSEMPEL. Vi har tidligere defineret den afsluttede kugle med centrum $a \in X$ og radius $r > 0$ som mængden

$$K'(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\} .$$

Der gælder <u>ikke</u>, som man måske kunne fristes til at tro, at denne mængde er afslutningen af den åbne kugle $K(x,r) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$. Idet $K(x,r) \subseteq K'(x,r)$ og $K'(x,r)$ er afsluttet gælder i almindelighed

$$\overline{K(x,r)} \subseteq K'(x,r) ,$$

men inklusionen kan være ægte som i tilfældet med et diskret metrisk rum indeholdende mindst to punkter og $r = 1$ (hvorfor?).

EKSEMPEL. For $\mathbb{R}^k$ udstyret med maksimumsmetriken d_∞ gælder for $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ og $r > 0$, at

$$\overline{K(\underline{a},r)} = K'(\underline{a},r) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid d_\infty(\underline{a},\underline{x}) \leq r\} .$$

Det er nemlig klart, da $K(\underline{a},r) \subseteq K'(a,r)$, at $\overline{K(\underline{a},r)} \subseteq K'(\underline{a},r)$.
For $\underline{x} \in K'(\underline{a},r)$ gælder at følgen

$$\underline{x}_n = \underline{a} + \frac{n-1}{n}(\underline{x}-\underline{a})$$

består af punkter fra $K(\underline{a},r)$ (prøv efter!) og at $\underline{x}_n \to \underline{x}$, altså $\underline{x} \in \overline{K(\underline{a},r)}$.

SÆTNING 6.4. Lad A og B være delmængder af (X,d) .

1) Hvis $A \subseteq B$ så gælder $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

2) Afslutningen af fællesmængden $A \cap B$ er indeholdt i fællesmængden af afslutningerne af A og B , altså

$$(A \cap B)^- \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} .$$

3) Afslutningen af foreningsmængden $A \cup B$ er lig foreningsmængden af afslutningerne af A og B , altså

$$(A \cup B)^- = \overline{A} \cup \overline{B} .$$

BEVIS. Dette fås af Korollar 6.2 ved overgang til komplementærmængder. Hvis f.eks. $A \subseteq B$ gælder $X \setminus B \subseteq X \setminus A$ og dermed $(X \setminus B)^o \subseteq (X \setminus A)^o$ og altså

$$\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^o \subseteq X \setminus (X \setminus B)^o = \overline{B} . \qquad \square$$

BEMÆRKNING. I almindelighed gælder der ikke lighedstegn i 2). For delmængderne $A =]0,1[$ og $B =]1,2[$ af $\mathbb{R}$ har vi $A \cap B = \emptyset$ og dermed $(A \cap B)^- = \emptyset$ medens $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

Randen af en mængde. Lad igen A være en delmængde af det metriske rum (X,d) .

DEFINITION. Ved randen af A forstås delmængden af X som består af de punkter $x \in X$ som ikke er indre punkter i A eller indre punkter i $X \setminus A$. Randen af A betegnes ∂A og er altså givet ved

$$A = X \setminus (A^0 \cup (X \setminus A)^o) = \overline{A} \setminus A^o .$$

Det følger, at randen ∂A af en mængde $A \subseteq X$ er en afsluttet delmængde af X , idet jo $A^o \cup (X \setminus A)^o$ er åben. Af den anden ligning følger, at et punkt $x \in X$ tilhører randen ∂A af A hvis og kun hvis det for alle $r > 0$ gælder, at

$$K(x,r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{og} \quad K(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset .$$

Randen af en mængde kan godt være tom. Dette gælder altid hele det metriske rum. I et diskret metrisk rum (X,d) er enhver delmængde både åben og afsluttet og dermed $\partial A = \emptyset$ for alle $A \subseteq X$.

EKSEMPEL. For $a,b \in \mathbb{R}$ med $a < b$ gælder

$$\partial(]a,b[) = \partial([a,b[) = \partial(]a,b]) = \partial([a,b]) = \{a,b\} ,$$

og

$$\partial(]-\infty,a]) = \partial(]-\infty,a[) = \{a\} ,$$

samt $\partial(\{a\}) = \{a\}$.

EKSEMPEL. For $\mathbb{R}^k$ udstyret med maksimumsmetriken d_∞ gælder ($\underline{a} \in \mathbb{R}^k$, $r > 0$)

$$\partial(K(\underline{a},r)) = \partial(K'(\underline{a},r)) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^k \mid d_\infty(\underline{a},\underline{x}) = r\} .$$

BEMÆRKNING. Vi har set, at begreberne <u>det indre</u>, <u>afslutningen</u> og <u>randen</u> af en delmængde A af det metriske rum (X,d) er fastlagt ud fra systemet af åbne delmængder af (X,d) (via 6.1 og 6.3).

Specielt gælder altså for en delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^k$ at A° , $\bar{A}$ og ∂A har samme betydning ligegyldigt om $\mathbb{R}^k$ betragtes med maksimumsmetriken eller med den euklidiske metrik, thi vi har samme system af åbne mængder i de to tilfælde.

II.1.1. Lad X være en mængde og (Y,d_Y) et metrisk rum, og lad $\varphi: X \to Y$ være en bijektiv afbildning. Vis, at der ved

$$d(x_1,x_2) = d_Y(\varphi(x_1),\varphi(x_2)) \quad \text{for} \quad x_1,x_2 \in X ,$$

defineres en metrik i X .

II.1.2. Vis, at der ved

$$d(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| \quad \text{for} \quad x,y \in \mathbb{R} ,$$

defineres en metrik i $\mathbb{R}$. Angiv de åbne kugler i $(\mathbb{R},d)$ og vis at enhver delmængde af $\mathbb{R}$ er begrænset i $(\mathbb{R},d)$.
Vink. Foregående opgave for en afbildning af $\mathbb{R}$ ind i $]-1,1[$.

II.1.3. Vis, at der ved

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \quad \text{for} \quad x,y \in]0,\infty[,$$

defineres en metrik i $]0,\infty[$. Find de åbne kugler i $(]0,\infty[,d)$ og vis at mængden $[1,\infty[$ er begrænset og at mængden $]0,1[$ er <u>ubegrænset</u> (d.v.s. ikke begrænset) i $(]0,\infty[,d)$.

II.1.4. Vis, at der ved

$$d(x,y) = \left|\frac{x}{1-x^2} - \frac{y}{1-y^2}\right| \quad \text{for} \quad x,y \in]-1,1[,$$

defineres en metrik i $]-1,1[$. Find de åbne kugler i $(]-1,1[,d)$ og vis at $]-1,1[$ er ubegrænset i $(]-1,1[,d)$.

II.1.5. Lad (M,d) være et metrisk rum. Vis, "firkantsuligheden"

$$|d(a,b)-d(x,y)| \leq d(a,x) + d(b,y) \quad \text{for} \quad a,b,x,y \in M .$$

II.1.6. Vis, at hvis (x_n) og (y_n) er konvergente punktfølger i det metriske rum (M,d) med grænsepunkter x og y , så er den reelle talfølge $(d(x_n,y_n))$ konvergent med grænseværdi $d(x,y)$.

II.1.7. Lad (x_n) være en konvergent punktfølge i et metrisk rum (M,d) . Vis, at enhver delfølge (x_{n_p}) (cf. I.p.19) af (x_n) er konvergent og at

$$\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

II.1.8. Vis, at en punktfølge (x_n) i et metrisk rum (M,d) er konvergent med grænsepunkt $x \in M$, hvis og kun hvis enhver delfølge af (x_n) har en (under) delfølge, der er konvergent med grænsepunkt x.

II.1.9. Lad (M,d) være et metrisk rum. Vis, at for alle $a \in M$ og alle $r > 0$ er mængden

$$\{x \in M \mid d(a,x) = r\}$$

afsluttet.

II.1.10. Lad (M,d) være et metrisk rum. Vis, at for punkter $a,b \in M$ og et tal $r > d(a,b)$ er mængden

$$\{x \in M \mid d(a,x)+d(b,x) \leq r\}$$

afsluttet.

II.1.11. Lad $\mathbb{R}$ være forsynet med den sædvanlige metrik. Undersøg for hver af nedenstående delmængder om den er åben eller afsluttet: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

II.1.12. Lad (M,d) være et metrisk rum og (x_n) en konvergent punktfølge. Vis, at mængden

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lim x_n\}$$

er afsluttet.

II.1.13. Lad $\mathbb{R}^2$ være forsynet med den euklidiske afstand. Vis, at mængderne

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 , y \geq 0\} , \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 , y \geq \tfrac{1}{x}\} ,$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} , y = \sin x\} ,$$

er afsluttede.

II.1.14. Lad $\varphi\colon \mathbb{R}^* \to [-1,1]$ være den bijektive afbildning

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = \infty \\ \dfrac{x}{1+|x|} & \text{for } x \in \mathbb{R} \\ -1 & \text{for } x = -\infty , \end{cases}$$

og lad d^* være metrikken (cf. Opgave II.1.1) på $\mathbb{R}^*$ givet ved

$$d^*(x,y) = |\varphi(x)-\varphi(y)| \quad \text{for} \quad x,y \in \mathbb{R}^* .$$

Beskriv de åbne kugler i $(\mathbb{R}^*,d^*)$. Vis, at en talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ er konvergent med grænseværdi $x \in \mathbb{R}^*$ (cf. Kap. I.p.36) hvis og kun hvis (x_n) er konvergent i $(\mathbb{R}^*,d^*)$ med grænsepunkt x. Vis, at $(\mathbb{R}^*,d^*)$ er fuldstændigt.

II.1.15. Undersøg om det metriske rum i Opgave II.1.2 er fuldstændigt.

II.1.16. Vis, at der ved

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \quad \text{for} \quad (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 ,$$

defineres en metrik i $\mathbb{R}^2$, og giv en geometrisk beskrivelse af kuglerne i det metriske rum $(\mathbb{R}^2,d)$.

II.1.17. Vis, at $d_1 \colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to [0,\infty[$ $(k \in \mathbb{N})$ givet ved

$$d_1(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{j=1}^{k} |x_j-y_j| \quad \text{for} \quad \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^k ,$$

er en metrik i $\mathbb{R}^k$.
Idet d_2 og d_∞ betegner den euklidiske metrik og maksimumsmetriken i $\mathbb{R}^k$ skal man vise, at

$$d_2(\underline{x},\underline{y}) \le d_1(\underline{x},\underline{y}) \le k\, d_\infty(\underline{x},\underline{y}) \quad \text{for} \quad \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^k .$$

Vis derved, at begreberne åben, afsluttet og begrænset mængde samt konvergent punktfølge og fundamentalfølge er de samme med hensyn til de tre metriker d_1, d_2 og d_∞.
Vis, at $(\mathbb{R}^k,d_1)$ er fuldstændigt.

II.1.18. Lad $\mathbb{R}^2$ være forsynet med maksimumsmetriken d_∞, og betragt punkterne $\underline{\alpha} = (0,0)$, $\underline{\beta} = (2,0)$, $\underline{\gamma} = (1,2)$ og $\underline{\delta} = (2,2)$. Find mængderne

$$\{\underline{y} \in \mathbb{R}^2 \mid d_\infty(\underline{\alpha},\underline{y}) + d_\infty(\underline{y},\underline{\beta}) = 2\} ,$$

$$\{\underline{y} \in \mathbb{R}^2 \mid d_\infty(\underline{\alpha},\underline{y}) + d_\infty(\underline{y},\underline{\gamma}) = 2\} ,$$

$$\{\underline{y} \in \mathbb{R}^2 \mid d_\infty(\underline{\alpha},\underline{y}) + d_\infty(\underline{y},\underline{\delta}) = 2\} ,$$

hvor "der gælder = i trekantsuligheden".

II.1.19. Lad $\mathbb{R}^2$ være forsynet med maksimumsmetriken d_∞, og lad $\underline{\alpha} = (-1,0)$ og $\underline{\beta} = (1,0)$. Find mængden (lav tegning)

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d_\infty(\underline{\alpha},\underline{x})+d_\infty(\underline{\beta},\underline{x}) = 3\} .$$

II.1.20. Lad V være et vektorrum over $\mathbb{C}$ med nulelement $\underline{0}$. En norm på V er en afbildning $\|\ \|: V \to [0,\infty[$ med egenskaberne:

1) $\forall \underline{x} \in V: \|\underline{x}\| \geq 0$ og $\|\underline{x}\| = 0$ hvis og kun hvis $\underline{x} = \underline{0}$.

2) $\forall \underline{x} \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}: \|\lambda\underline{x}\| = |\lambda|\ \|\underline{x}\|$.

3) $\forall \underline{x},\underline{y} \in V: \|\underline{x}+\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$.

Vis, at hvis $\|\cdot\|$ er en norm på V så er $d: V \times V \to [0,\infty[$ givet ved

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x}-\underline{y}\| \quad \text{for} \quad \underline{x},\underline{y} \in V,$$

en metrik på V.

II.1.21. Med ℓ^∞ betegnes mængden af begrænsede komplekse talfølger, altså talfølger $\underline{z} = (z_1,z_2,\dots)$ med $z_i \in \mathbb{C}$ for hvilke

$$\|\underline{z}\|_\infty = \sup\{|z_i| \mid i \in \mathbb{N}\} < \infty .$$

(a) Gør rede for, at ℓ^∞ er et vektorrum over $\mathbb{C}$ og at afbildningen $\|\cdot\|_\infty: \ell^\infty \to [0,\infty[$ er en norm på vektorrummet ℓ^∞.

(b) Vis, at det metriske rum (ℓ^∞,d_∞), hvor

$$d_\infty(\underline{z},\underline{z}') = \|\underline{z}-\underline{z}'\|_\infty \quad \text{for} \quad \underline{z},\underline{z}' \in \ell^\infty ,$$

er fuldstændigt.

Vink til (b): Lad $(\underline{z}^n)$ være en fundamentalfølge i (ℓ^∞,d_∞). Så er for hvert $j \in \mathbb{N}$ følgen $(z_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fundamentalfølge i $\mathbb{C}$, idet

$$(*) \qquad |z_j^n-z_j^m| \leq \|\underline{z}^n-\underline{z}^m\|_\infty \quad \text{for} \quad m,n \in \mathbb{N} .$$

Lad følgen $\underline{z} = (z_1,z_2,\dots)$ være defineret ved $z_j = \lim_n z_j^n$ for $j \in \mathbb{N}$. Udnyt endnu engang at $(\underline{z}^n)$ er en fundamentalfølge sammen med uligheden (*) til at vise, at $\underline{z} \in \ell^\infty$ og $\underline{z}^n \to \underline{z}$ for $n \to \infty$.

II.1.22. Med ℓ^1 betegnes mængden af komplekse talfølger $\underline{z} =$

$(z_1, z_2, \ldots)$ for hvilke rækken $\sum_1^\infty z_n$ er <u>absolut konvergent</u>, altså

$$\|\underline{z}\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |z_j| < \infty \ .$$

(a) Gør rede for, at ℓ^1 er et vektorum over $\mathbb{C}$ og at afbildningen $\|\cdot\|_1 : \ell^1 \to [0,\infty[$ er en norm på vektorrummet ℓ^1 .

(b) Vis, at det metriske rum (ℓ^1, d_1) , hvor

$$d_1(\underline{z}, \underline{z}') = \|\underline{z}-\underline{z}'\|_1 \quad \text{for} \quad \underline{z}, \underline{z}' \in \ell^1 ,$$

er fuldstændigt.

Vink til (b): Lad $(\underline{z}^n)$ være en fundamentalfølge i (ℓ^1, d_1) . For hvert fast $p \in \mathbb{N}$ har vi

$$(**) \qquad \sum_{j=1}^{p} |z_j^n - z_j^m| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |z_j^n - z_j^m| = \|\underline{z}^n - \underline{z}^m\|_1$$

for $n, m \in \mathbb{N}$, hvilket specielt betyder at følgen $(z_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ for hvert $j \in \mathbb{N}$ er en fundamentalfølge i $\mathbb{C}$. Lad $\underline{z} = (z_1, z_2, \ldots)$ være følgen bestemt ved $z_j = \lim_n z_j^n$. Udnyt (**) til at vise, at $\underline{z} \in \ell^1$ og at $\underline{z}^n \to \underline{z}$ for $n \to \infty$.

II.1.23. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$. Udnyt uligheden

$$0 \leqq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |x_j y_k - x_k y_j|^2$$

til at vise <u>Cauchy-Schwarz' ulighed</u> (cf. II.p.2)

$$\text{(i)} \qquad |x_1\overline{y}_1 + \ldots + x_n\overline{y}_n| \leqq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

og dernæst

$$\text{(ii)} \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

II.1.24. Med ℓ^2 betegnes mængden af komplekse talfølger $\underline{z} = (z_1, z_2, \ldots)$ for hvilke

$$\|\underline{z}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \ .$$

(a) Gør rede for, at ℓ^2 er et vektorrum over $\mathbb{C}$, og at afbildningen

$$\| \ \|_2 : \ell^2 \to [0,\infty[$$

er en norm på ℓ^2 .

Vink: Benyt uligheden (ii) i foregående opgave.

(b) Vis, at det metriske rum (ℓ^2, d_2) , hvor

$$d_2(\underline{z},\underline{z}') = \|\underline{z}-\underline{z}'\|_2 \quad \text{for} \quad \underline{z},\underline{z}' \in \ell^2$$

er fuldstændigt.

Vink: Gå frem som i II.1.22 under udnyttelse af uligheden
$\sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 \leqq (\|\underline{z}\|_2)^2$, som gælder for hvert $p \in \mathbb{N}$.

II.1.25. Vis, at $\ell^1 \subseteq \ell^2 \subseteq \ell^\infty$ og at

(i) $\|\underline{z}\|_2 \leqq \|\underline{z}\|_1$ for $\underline{z} \in \ell^1$ og

(ii) $\|\underline{z}\|_\infty \leqq \|z\|_2$ for $\underline{z} \in \ell^2$.

II.2.1. Lad (X,d_X) , (Y,d_Y) og (Z,d_Z) være metriske rum, og lad $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to Z$ være afbildninger. Vis, at hvis f er kontinuert i $a \in X$ og g er kontinuert i punktet $f(a) \in Y$ så er $g \circ f$ kontinuert i $a \in X$.

II.2.2. Vis, at funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{for} \quad (x,y) \neq (0,0) . \\[2ex] 0 & \text{for} \quad (x,y) = (0,0) , \end{cases}$$

er kontinuert (når $\mathbb{R}^2$ udstyres med maksimumsmetriken og $\mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik).

II.2.3. Vis, at den ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q} & \text{for} \quad x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ , med } p \in \mathbb{Z} \text{ og } q \in \mathbb{N} \\ & \quad \text{og } \dfrac{p}{q} \text{ er uforkortelig,} \end{cases}$$

definerede funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuert i alle punkter af $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, men diskontinuert i alle punkter af $\mathbb{Q}$.

II.2.4. Lad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være funktionen givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{for} \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{for} \quad (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

Vis, at for hvert $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ er funktionerne

$$x \mapsto f(x,b) \qquad \text{og} \qquad y \mapsto f(a,y)$$

af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ kontinuerte.
Vis, at f er diskontinuert i $(0,0)$ ($\mathbb{R}^2$ har maksimumsmetriken).

II.2.5. Lad $f: I \to \mathbb{R}$ være en funktion på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ og lad $x_0 \in I$. For $\delta > 0$ defineres <u>oscillationen af f i punktet x_0 med tilvækster $\leq \delta$</u> som tallet

$$w_f(x_0,\delta) = \sup\left\{ |f(x_0)-f(x)| \;\middle|\; x \in I \cap [x_0-\delta, x_0+\delta] \right\}.$$

Vis, at f er kontinuert i x_0 hvis og kun hvis $\lim_{\delta\to 0} w_f(x_0,\delta) = 0$.

II.2.6. Lad $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \subseteq \mathbb{R}^*$ og lad d^* betegne den fra det metriske rum $(\mathbb{R}^*, d^*)$ (II.1.14) inducerede metrik på $\mathbb{N}^*$. Lad (z_n) være en talfølge i $\mathbb{C}$. Vis, at (z_n) er konvergent med grænseværdi $z \in \mathbb{C}$ hvis og kun hvis afbildningen $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ givet ved

$$f(n) = \begin{cases} z_n & \text{for } n \in \mathbb{N} \\ z & \text{for } n = \infty, \end{cases}$$

er kontinuert af $(\mathbb{N}^*, d^*)$ ind i $\mathbb{C}$.

II.2.7. Lad A og B være ikke tomme delmængder af det metriske rum (X,d).
Vis, at

$$d(x, A\cup B) = \min\{d(x,A), d(x,b)\} \quad \text{for } x \in X.$$

Vis, at hvis $A \cap B \neq \emptyset$ så gælder

$$d(x, A\cap B) \geq \max\{d(x,A), d(x,B)\} \quad \text{for } x \in X,$$

og giv et eksempel der viser at der kan optræde et skarpt ulighedstegn i denne ulighed.

II.2.8. Idet $\mathbb{R}^2$ forsynes med maksimumsmetriken d_∞ skal man finde (lav en tegning) mængderne

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_\infty((x,y),(-1,0)) = d_\infty((x,y),(1,0))\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_\infty((x,y),(0,0)) = d_\infty((x,y),(1,2))\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_\infty((x,y),(0,0)) = d_\infty((x,y),(2,2))\}.$$

II.2.9. Idet d_2 og d_∞ betegner den euklidiske afstand og maksimumsmetriken i $\mathbb{R}^2$ skal man finde (lav en tegning) mængderne

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(\underline{x},L) = d_2(\underline{x},(2,0))\}$$

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d_\infty(\underline{x},L) = d_\infty(\underline{x},(2,0))\}$$

hvor $L = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$.

II.2.10. Undersøg om funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2} & \text{for } x > 0 \\[2mm] \dfrac{x^2}{x^4+2} & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

har grænseværdier i $-\infty$, 0 og $+\infty$.

II.2.11. Undersøg om funktionerne $]0,\infty[\ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sin\frac{1}{x} \quad , \quad x \mapsto x \sin\frac{1}{x}$$

har grænseværdier i 0 (fra højre) og i ∞ .

II.3.1. Lad (X,d_X) , (Y,d_Y) og (Z,d_Z) være metriske rum og $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to Z$ uniformt kontinuerte afbildninger. Vis, at den sammensatte afbildning $g \circ f\colon X \to Z$ er uniformt kontinuert.

II.3.2. Vis, at funktionen $x \mapsto \sqrt{x}$ af $[0,\infty[$ ind i $\mathbb{R}$ er uniformt kontinuert.

II.3.3. Lad d_2 og d_∞ betegne den euklidiske metrik, henholdsvis maksimums metriken på $\mathbb{R}^2$. Vis, at den identiske afbildning af $\mathbb{R}^2$ på sig selv er uniformt kontinuert af $(\mathbb{R}^2,d_2)$ ind i $(\mathbb{R}^2,d_\infty)$.

II.3.4. Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være kontinuert og <u>periodisk med periode</u> 2π , d.v.s. $f(x) = f(x+2\pi)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Vis, at f er uniformt kontinuert.

II.3.5. Lad $f\colon [0,\infty[\ \to \mathbb{C}$ være kontinuert og antag at grænseværdien

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = z_\infty \in \mathbb{C}$$

eksisterer. Vis, at f er uniformt kontinuert.

II.3.6. Lad $f\colon [a,b] \to [a,b]$ være en kontinuert funktion af et begrænset afsluttet interval ind i sig selv. Vis, at der findes et $x \in [a,b]$ så $f(x) = x$ (d.v.s. et fikspunkt for f).
Vink. Betragt $x \mapsto f(x)-x$.

II.3.7. Lad $f\colon I \to \mathbb{R}$ være en funktion på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ og $\delta > 0$. <u>Oscillationen af</u> f <u>over</u> I <u>med tilvækster</u> $\leq \delta$ er tallet

$$w_f(I,\delta) = \sup\left\{ |f(x)-f(z)| \;\middle|\; x,z \in I\ ,\ |x-z| \leq \delta \right\} .$$

Vis, at f er uniformt kontinuert hvis og kun hvis $\lim_{\delta\to 0} w_f(I,\delta) = 0$.

II.3.8. Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være uniformt kontinuert. Vis, at der findes $\alpha \geq 0$ og $\beta \geq 0$ så

$$|f(x)| \leq \alpha|x|+\beta \quad \text{for alle} \quad x \in \mathbb{R} .$$

II.3.9. Undersøg om funktionerne af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$,

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\ ,\quad x \mapsto \frac{x}{1+x^2}\ ,\quad x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}\ ,$$

$$x \mapsto \frac{x^3}{1+x^2}\ ,\quad x \mapsto \frac{x^4}{1+x^2}$$

er uniformt kontinuerte.

II.3.10. Lad $f\colon [a,b] \to Y$ være en kontinuert afbildning af et begrænset afsluttet interval $\subseteq \mathbb{R}$ ind i metrisk rum (Y,d_Y). Vis, at f er uniformt kontinuert og at $f([a,b])$ er begrænset.

II.4.1. Giv et eksempel på et metrisk rum (X,d) og en åben delmængde $K \subseteq X$ så K er kompakt.

II.4.2. Lad (X,d) være et metrisk rum.
Vis, at foreningsmængden af endelig mange kompakte mængder $K_1,\dots,K_n \subseteq X$ er kompakt.
Vis, at fællesmængden af et vilkårligt system af kompakte mængder $K_j \subseteq X$, $j \in J$, er kompakt.

II.4.3. Undersøg om nedenstående delmængder af $\mathbb{R}$ er kompakte når $\mathbb{R}$ forsynes med den sædvanlige metrik.
1) $\mathbb{N}$, 2) $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, 3) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, 4) $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

II.4.4. Undersøg om det metriske rum $(\mathbb{R}^*,d^*)$ indført i opgave II.1.14 er kompakt.

II.4.5. Lad (X,d) være et metrisk rum og lad $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af ikke tomme kompakte delmængder af X som opfylder $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$ ((K_n) er aftagende).
Vis, at fællesmængden $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ er ikke tom.

II.4.6. Lad (X,d) være et metrisk rum. Lad $K \subseteq X$ være en ikke tom kompakt delmængde og lad $x \in X$.
Vis, at der findes et $k \in K$ så (cf. p. II. 43-44)

$$d(x,k) = \inf\left\{d(x,y) \mid y \in K\right\} .$$

II.4.7. Lad (X,d) være et metrisk rum og $K \subseteq X$ en ikke tom kompakt delmængde.
Vis, at der findes $k_1,k_2 \in K$ så

$$d(k_1,k_2) = \operatorname{diam}(K) .$$

II.4.8. Vis, at et kompakt metrisk rum er fuldstændigt.

II.4.9. Lad (X,d_X) være et kompakt metrisk rum og f en kontinuert bijektiv afbildning af X ind i et metrisk rum (Y,d_Y). Vis, at den inverse afbildning $f^{-1}: Y \to X$ er kontinuert.

II.4.10. Lad (X_1,d_1) og (X_2,d_2) være kompakte metriske rum. Vis, at produktrummet $(X_1 \times X_2, d)$ (defineret p. II.25) er kompakt.

II.4.11. Vis, ved at benytte opgaven ovenfor, at enhver afsluttet begrænset "kasse" $K \subseteq \mathbb{R}^k$, altså en delmængde af $\mathbb{R}^k$ af formen

$$K = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_k,b_k]$$

er kompakt. Giv derved et andet bevis for Sætning 4.5.

II.5.1. Vis, at afbildningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ af $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}^2$ givet ved

$$\left.\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{3}y - 2 \\ v &= \tfrac{1}{5}x - \tfrac{1}{3}y + 3, \end{aligned}\right. \qquad \text{for } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

en en kontraktion, når $\mathbb{R}^2$ udstyres med maksimumsmetriken, og find afbildningens fixpunkt.

II.5.2. Vis, at en funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ af klasse C^1, (d.v.s. f er differentiabel og den afledede f' er <u>kontinuert</u>) som opfylder $|f'(x)| < 1$ for alle $x \in [0,1]$, er en kontraktion, når $[0,1]$ udstyres med den sædvanlige metrik.

II.5.3. Lad (M,d) være et fuldstændigt metrisk rum og $f\colon M \to M$ en afbildning så $f \circ f$ er en kontraktion. Vis, at f har netop ét fixpunkt.

II.5.4. Lad (M,d) være et kompakt metrisk rum og $f\colon M \to M$ en afbildning, som opfylder

$$d(f(x),f(y)) < d(x,y) \quad \text{når} \quad x,y \in M \quad \text{og} \quad x \neq y .$$

Vis, at f har netop ét fixpunkt.
(Vink. Betragt f.eks. afbildningen $x \mapsto d(x,f(x))$.)

II.5.5. Vis, at afbildningen $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ givet ved

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad \text{for} \quad x \geq 0$$

opfylder

$$|f(x)-f(y)| < |x-y| \quad \text{for} \quad x,y \geq 0 \quad \text{og} \quad x \neq y \ .$$

Vis, at f ikke har noget fikspunkt.

II.5.6. Angiv samtlige kontraktioner af et diskret metrisk rum (X,d) ind i sig selv.

II.5.7. Betragt funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = 2x - 2x^2 \quad \text{for} \quad x \in [0,1] \ .$$

Vis, at f afbilder ind i $[0,1]$.
Undersøg om f er en kontraktion og find eventuelle fikspunkter for f .
Vis, at for hvert $x \in [0,1]$ er følgen $(f^n(x))$ konvergent og find grænseværdien.

II.6.1. Angiv det indre og afslutningen, samt randen af følgende delmængder af $\mathbb{R}$ udstyret med den sædvanlige metrik

a) $\mathbb{N}$ b) $\{0,1\}$ c) $\mathbb{Q}$ d) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

II.6.2. Angiv et system af åbne mængder $G_1, G_2, \dots$ i $\mathbb{R}$ for hvilket $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ ikke er åben.
Angiv et system af afsluttede mængder $F_1, F_2, \dots$ i $\mathbb{R}$ for hvilket $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ikke er afsluttet.

II.6.3. Vis, at der for et vilkårligt system $\{A_i \mid i \in I\}$ af delmængder af et metrisk rum (X,d) gælder:

i) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^{\circ} \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i^{\circ}$, ii) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\circ} \supseteq \bigcup_{i\in I} A_i^{\circ}$,

iii) $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$, iv) $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \supseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$,

og vis ved eksempler at inklusionerne kan være ægte.

II.6.4. Lad A være en delmængde af et metrisk rum (X,d) . Vis, at

$$(A^{\circ})^{\circ} = A^{\circ} \,, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A} \quad \text{og} \quad \partial(\partial A) = \partial A \,.$$

Vis endvidere, at $\overline{(\overline{A^{\circ}})^{\circ}} = \overline{(A^{\circ})}$.

II.6.5. Find et eksempel på et ikke-diskret metrisk rum (X,d) og en delmængde N , $\emptyset \neq N \neq X$ som både er afsluttet og åben.

II.6.6. Lad $\mathbb{R}$ være forsynet med den sædvanlige metrik. Betragt

$$A = [0,1[\cup]1,2[\cup (\mathbb{Q} \cap]-1,0[) \cup \{3\} \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty}]4-\tfrac{1}{n}, 4-\tfrac{1}{n+1}[\right) .$$

Idet vi benytter betegnelsen A^{-} for afslutningen af en mængde skal det vises, at de syv mængder A , A° , A^{-} , $(A^{\circ})^{-}$, $(A^{-})^{\circ}$, $((A^{-})^{\circ})^{-}$, $((A^{\circ})^{-})^{\circ}$ alle er forskellige. Hvad sker der hvis man fortsætter?

II.6.7. Lad A være en delmængde af (X,d) . Vis, at

$$\partial(A^{\circ}) \subseteq \partial A \quad \text{og} \quad \partial(\overline{A}) \subseteq \partial A \,,$$

og vis ved et eksempel i $\mathbb{R}$, at de tre mængder ∂A , $\partial(A^{\circ})$ og $\partial(\overline{A})$ kan være indbyrdes forskellige.

II.6.8. Lad (X,d_X) og (Y,d_Y) være metriske rum og $f,g\colon X \to Y$ kontinuerte afbildninger og lad $A \subseteq X$ være en delmængde. Vis, at hvis

$$f(x) = g(x) \quad \text{for alle} \quad x \in A$$

så gælder

$$f(x) = g(x) \quad \text{for alle} \quad x \in \overline{A} \,.$$

II.6.9. Lad A være en delmængde af det metriske rum (X,d) . Vis, at

$$d(x,A) = d(x,\overline{A}) \quad \text{for alle} \quad x \in X \,,$$

og

$$d(x,A) \leq d(x,A^{\circ}) \quad \text{for alle} \quad x \in X \,.$$

Vis, ved et eksempel, at der kan gælde skarpt ulighedstegn i den sidste ulighed.

II.6.10. Lad A være en delmængde af det metriske rum (X,d) . Vis, at for $x \in X$ gælder:

$$x \in \overline{A} \iff d(x,A) = 0 \,.$$

Mat 102, 1981/82

KAPITEL III

DIFFERENTIAL- OG INTEGRALREGNING

Indhold:

§1. Integralet af en kontinuert funktion.

Vi skal i denne paragraf indføre integralet for kontinuerte funktioner defineret på et afsluttet og begrænset interval i $\mathbb{R}$ og med komplekse værdier. Læseren vil se at fremgangsmåden i høj grad er analog med det allerede fra skolen kendte.

Definition af integralet ved middelsummer. Lad f være en kontinuert funktion med komplekse værdier defineret på et kompakt (d.v.s. afsluttet og begrænset) interval $[a,b]$ i $\mathbb{R}$. Vi betragter en inddeling af $[a,b]$ ved delepunkter $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b$. Tallet $\max\{x_j - x_{j-1} \mid j = 1,\ldots,k\}$ kaldes inddelingens finhed. I hvert delinterval $[x_{j-1},x_j]$ tænkes givet et punkt ξ_j. Summen

$$S = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})$$

kaldes da en middelsum for f (svarende til den givne inddeling og de valgte punkter $\xi_1,\ldots,\xi_k$).

Vi bemærker med det samme at mængden af alle middelsummer for f (svarende til alle mulige inddelinger af $[a,b]$ og alle mulige valg af punkter ξ_j) er en begrænset delmængde af $\mathbb{C}$: Da f er kontinuert og $[a,b]$ kompakt, er værdimængden for f begrænset; sætter vi $M = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$, fås

$$|S| = \left|\sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})\right| \le \sum_{j=1}^{k} |f(\xi_j)|\,(x_j-x_{j-1})$$
$$\le M \sum_{j=1}^{k} (x_j-x_{j-1}) = M(b-a) ,$$

og da denne vurdering gælder for enhver middelsum S, følger påstanden.

For vilkårligt $\delta \in \mathbb{R}_+$ lader vi $M(f,\delta) \subseteq \mathbb{C}$ betegne mængden af middelsummer for f svarende til alle mulige inddelinger af finhed $\le \delta$. Det er klart at $M(f,\eta) \subseteq M(f,\delta)$, når $0 < \eta < \delta$. Ydermere gælder:

SÆTNING 1.1. For enhver kontinuert funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ går diameteren af mængden $M(f,\delta)$ mod 0 for $\delta \to 0$.

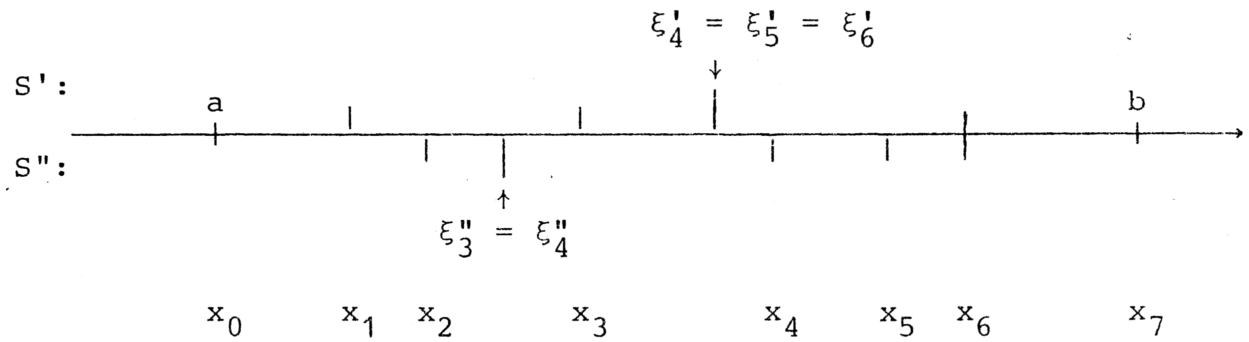
Ved brug af den netop nævnte inklusion kan dette udtrykkes mere formelt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \ \operatorname{diam} M(f,\delta) \leq \varepsilon \ .$$

BEVIS. Bevisets betydende ingrediens er den uniforme kontinuitet af f ; ifølge den kan vi, svarende til vilkårligt givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, finde $\delta \in \mathbb{R}_+$, så $|f(x')-f(x")| \leq \varepsilon/(b-a)$ for alle punkter $x',x" \in [a,b]$ for hvilke $|x'-x"| \leq 2\delta$. Vi vil vise at der for vilkårlige middelsummer $S',S" \in M(f,\delta)$ gælder, at $|S'-S"| \leq \varepsilon$, altså at $\operatorname{diam} M(f,\delta) \leq \varepsilon$.

Lad da $S',S" \in M(f,\delta)$ være givet. Vi betragter foreningsmængden af de to inddelingers delepunkter. Denne foreningsmængde betegner vi med $\{x_0,x_1,\ldots,x_{k-1},x_k\}$; som sædvanlig er $a = x_0$ og $b = x_k$.

På tegningen er vist et eksempel. Alle punkter vedrørende S' er markeret over aksen; alle punkter vedrørende $S"$ under aksen.



Betragt først middelsummen S' . Hvert delinterval er af formen $[x_{p-1},x_q]$, hvor $p \leq q$, og dette interval bidrager til S' med et led af formen $f(\xi)(x_q-x_{p-1})$, hvor ξ er et vist punkt i $[x_{p-1},x_q]$. Ved inddragelsen af delepunkterne fra $S"$ er $[x_{p-1},x_q]$ (muligvis) blevet videredelt. Indfører vi de mellemliggende punkter $\{x_p,\ldots,x_{q-1}\}$ får vi

$$f(\xi)(x_q-x_{p-1}) = \sum_{j=p}^{q} f(\xi)(x_j-x_{j-1}) \ .$$

Omdøber vi ξ i hvert af disse led, idet vi sætter $\xi_j' = \xi$ for $j = p,\dots,q$, kan vi skrive

$$f(\xi)(x_q-x_{p-1}) = f(\xi_p')(x_p-x_{p-1}) + \dots + f(\xi_q')(x_q-x_{q-1}) .$$

Vi indfører dernæst en tilsvarende omskrivning af $S"$. Herved får vi de to middelsummer skrevet på formen

$$S' = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j')(x_j-x_{j-1}) \quad \text{og} \quad S" = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j")(x_j-x_{j-1}) .$$

Bemærk at trods udseendet er de to højresider ikke middelsummer svarende til delepunkterne $\{x_0,\dots,x_k\}$, idet ξ_j' , $\xi_j"$ ikke nødvendigvis tilhører $[x_{j-1},x_j]$ (sml. tegningen). Dog ligger ξ_j' , $\xi_j"$ inden for en kontrollabel afstand fra $[x_{j-1},x_j]$ og det viser sig derved muligt at gennemføre argumentet.

Da begge oprindelige inddelingers finhed er $\leq \delta$, ser vi at punktet ξ_j' ligger i et interval af længde $\leq \delta$, der indeholder $[x_{j-1},x_j]$, og at det samme gælder $\xi_j"$. Heraf følger at $|\xi_j'-\xi_j"| \leq 2\delta$. Altså ved vi at $|f(\xi_j')-f(\xi_j")| \leq \varepsilon/(b-a)$ og kan derfor vurdere:

$$\begin{aligned} |S'-S"| &= \left| \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j')(x_j-x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j")(x_j-x_{j-1}) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{k} (f(\xi_j')-f(\xi_j"))(x_j-x_{j-1}) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} |f(\xi_j')-f(\xi_j")| \, (x_j-x_{j-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{j=1}^{k} (x_j-x_{j-1}) = \varepsilon . \end{aligned}$$

□

Vi skal nu se at mængden $M(f,\delta)$ af middelsummer faktisk trækker sig sammen om et bestemt tal $I \in \mathbb{C}$ for $\delta \to 0$:

<u>SÆTNING 1.2.</u> Lad $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ være kontinuert. Der findes da et og kun et tal $I \in \mathbb{C}$ med egenskaben:

Til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta_0 \in \mathbb{R}_+$, således at $|S-I| < \varepsilon$ for enhver middelsum S for f af finhed $\delta \leq \delta_0$.

BEVIS. At der højst kan være et tal I med den angivne egenskab, følger umiddelbart af at $\operatorname{diam} M(f,\delta) \to 0$ for $\delta \to 0$ (se opgave III.1.1).

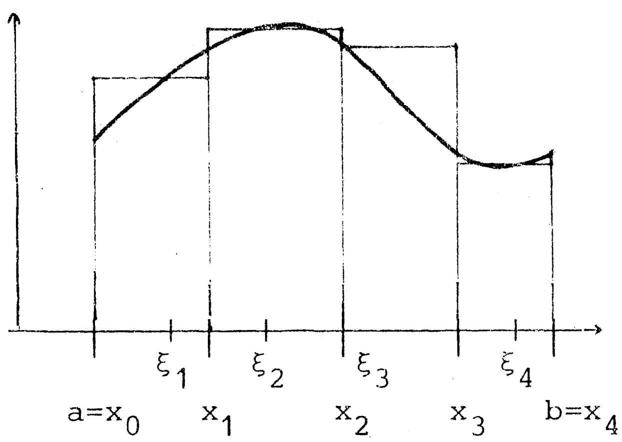
For at bevise eksistensen af det beskrevne I lader vi $\varepsilon > 0$ være givet. For hvert $n \in \mathbb{N}$ vælger vi et tal $S_n \in M(f,\frac{1}{n})$. Svarende til det givne $\varepsilon > 0$ findes et $\delta_0 > 0$ således at $\operatorname{diam} M(f,\delta_0) \leq \varepsilon$. For $\frac{1}{n},\frac{1}{m} \leq \delta_0$, d.v.s. for $n,m \geq \frac{1}{\delta_0}$ gælder da $|S_n - S_m| \leq \varepsilon$. Altså er (S_n) en fundamentalfølge og derfor konvergent. Vi kalder grænseværdien I.

Hvis $S \in M(f,\delta_0)$ er vilkårlig valgt, gælder at $|S-S_n| \leq \varepsilon$ for ethvert $n \geq \frac{1}{\delta_0}$ (hvorfor det?). Da $S_n \to I$ for $n \to \infty$, fås heraf at $|S-I| \leq \varepsilon$. $\square$

DEFINITION. Tallet I som karakteriseres i Sætning 1.2 kaldes <u>integralet af f</u> over $[a,b]$ og betegnes $\int_a^b f(x)dx$.

BEMÆRKNING. For enhver følge (δ_n), der konvergerer mod 0, og enhver følge af middelsummer $S_n \in M(f,\delta_n)$ gælder at $S_n \to I$. Gør rede for dette! Denne bemærkning benyttes i mange beviser i det følgende i stedet for selve definitionen af I.

BEMÆRKNING. Vi minder om den velkendte fortolkning af $\int_a^b f(x)dx$ når f er reel og ikke-negativ; i dette tilfælde opfattes $\int_a^b f(x)dx$ som arealet mellem x-aksen, de lodrette linier $x = a$, $x = b$ og grafen for f. (Overvej rimeligheden af denne fortolkning.)



EKSEMPLER. a) For en konstant funktion $f(x) \equiv c$ på $[a,b]$ er enhver middelsum lig med $c(b-a)$, og dermed

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a) .$$

b) Udover banale eksempler er der kun sjældent anledning til at benytte selve definitionen ved integralberegninger; her nævner vi dog et tilfælde hvor regningerne er gennemførlige. Vi skal senere (i §4) vende tilbage til mulige udnyttelser af definitionen ved approksimative numeriske beregninger.

Betragt $f(x) = x^2$ på intervallet $[0,1]$. Lad $k \in \mathbb{N}$ være givet. Vi deler $[0,1]$ op i k lige lange delintervaller $\left[\frac{j-1}{k},\frac{j}{k}\right]$, $j = 1,\ldots,k$ og sætter $\xi_j = \frac{j}{k}$. Den tilsvarende middelsum er da

$$S_k = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{j}{k}\right)^2 \frac{1}{k} = \frac{1}{k^3}\sum_{j=1}^{k} j^2 ,$$

således at vi ifølge opgave I.0.10 får

$$S_k = \frac{1}{k^3}\;\frac{k}{6}(2k+1)(k+1) = \frac{2k^2+3k+1}{6k^2} .$$

Vi ved fra bemærkningen efter Sætning 1.2, at $S_k \to \int_0^1 x^2\,dx$ for $k \to \infty$, og slutter, at $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, idet jo $\lim \frac{2k^2+3k+1}{6k^2} = \frac{1}{3}$.

Eksakte integralberegninger er i det væsentlige baseret på differentialregningens og integralregningens hovedsætning (Sætning 2.11). Vi ønsker dog at udvikle noget af den grundlæggende teori for integralet, inden vi inddrager nævnte sætning.

<u>Sætninger om integralet.</u> Når $A \subset \mathbb{R}$ er et vilkårligt interval og $f\colon A \to \mathbb{C}$ er kontinuert, så skal integralet $\int_a^b f(x)dx$, hvor $[a,b] \subseteq A$, naturligvis opfattes som integralet af restriktionen $f|_{[a,b]}$. Vi udvider endvidere notationen $\int_a^b f(x)dx$ til tilfældet $b \leq a$, idet vi sætter

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \;, \quad \text{når} \quad a > b$$

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \;, \qquad \text{når} \quad a = b \;.$$

Med disse fastsættelser in mente formulerer vi

Sætning 1.3. (Indskudsreglen.) For enhver kontinuert funktion $f\colon A \to \mathbb{C}$ og $a,b,c \in A$ gælder

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

BEVIS. I tilfældet $a < c < b$ følger indskudsreglen af at hvis $S_n \in M(f|_{[a,c]},\frac{1}{n})$ og $T_n \in M(f|_{[c,b]},\frac{1}{n})$, så er $S_n + T_n \in M(f|_{[a,b]},\frac{1}{n})$. For alle andre placeringer af a,b,c følger påstanden af dette kombineret med den just nævnte fortegnskonvention. (Prøv at gennemføre argumentationen, f.eks. i tilfældet $c < b < a$.) □

Fra kapitel II ved vi om mængden $C^0(A,\mathbb{C})$ af kontinuerte funktioner på et interval A, at hvis $f,g \in C^0(A,\mathbb{C})$, så vil også $|f|$, $\mathrm{Re}f$, $\mathrm{Im}f$ og $\alpha f + \beta g \in C^0(A,\mathbb{C})$ (α og β er vilkårlige komplekse konstanter). Ihukommende dette kan vi opskrive en række regneregler for integralet.

SÆTNING 1.4. Lad $[a,b]$ være et kompakt interval.

a) Afbildningen

$$f \mapsto \int_a^b f(x)dx$$

af $C^0([a,b],\mathbb{C})$ ind i $\mathbb{C}$ er lineær. Med andre ord: $\forall f,g \in C^0([a,b],\mathbb{C})$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$:

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx \;.$$

b) Hvis $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, så er $\int_a^b f(x)dx$ reel. Endvidere gælder at $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ hvis $0 \leq f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$.

BEVIS. a) Vælg en inddeling af $[a,b]$ af finhed $< \frac{1}{n}$ og vælg punkter ξ_j svarende til denne inddeling. Idet $S_n \in M(f,\frac{1}{n})$ og $T_n \in M(g,\frac{1}{n})$ betegner middelsummerne, der svarer til disse valg, vil $\alpha S_n + \beta T_n \in M(\alpha f+\beta g,\frac{1}{n})$. Fra Sætning 1.2 ved vi at $S_n \to \int_a^b f(x)dx$, $T_n \to \int_a^b g(x)dx$ og at $\alpha S_n + \beta T_n \to \int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx$ for $n \to \infty$. Heraf følger integralets linearitet.

b) Dette følger af at enhver middelsum for f er reel (hhv. ≥ 0) hvis f er reel (hhv. ≥ 0). ▯

<u>KOROLLAR 1.5</u>. For ethvert $f \in C^0([a,b],\mathbb{C})$ gælder

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)dx + i\int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)dx$$

BEVIS. Umiddelbar konsekvens af integralets linearitet.

BEMÆRKNING. Formlen i 1.5 kunne være brugt som definition af integralet af en kompleks funktion, hvis man i forvejen havde indført integralbegrebet for reelle funktioner (f.eks. ved hjælp af over- og undersummer).

Det næste korollar er uhyre vigtigt. Navnlig uligheden i 1.6 b) er et af de oftest brugte resultater vedrørende integraler.

<u>KOROLLAR 1.6</u>. a) Hvis $f,g \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ og $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in [a,b]$, så gælder at

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx .$$

b) For alle $f \in C^0([a,b],\mathbb{C})$ gælder at

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx .$$

BEVIS. a) $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x)-f(x))dx \geq 0$. Her har vi benyttet først 1.4 a) og dernæst 1.4 b).

b) Hvis $a = x_0 < x_1 < \dots < x_b = b$ er en vilkårlig inddeling og $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, så gælder at

$$\left|\sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})\right| \le \sum_{j=1}^{k} |f(\xi_j)|\,(x_j - x_{j-1}) .$$

Af Sætning 1.2 fås at venstresiden konvergerer mod $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ og højresiden konvergerer mod $\int_a^b |f(x)|dx$, når inddelingens finhed konvergerer mod 0. $\square$

Uligheden i 1.6 a) kan skærpes, idet der gælder følgende nyttige:

SÆTNING 1.7. Lad $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ og antag at $f(x) \ge 0$ for alle $x \in [a,b]$. Der gælder da at $\int_a^b f(x)dx = 0$ hvis og kun hvis $f \equiv 0$.

BEVIS. Det er klart at $\int_a^b f(x)dx = 0$ hvis $f \equiv 0$. På den anden side har vi at hvis $f \not\equiv 0$, findes der et $x_0 \in]a,b[$ med $f(x_0) > 0$. Derfor findes $\delta \in \mathbb{R}_+$ så $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ for alle $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ vælges nu en inddeling af finhed $< \frac{1}{n}$, således at $x_0 - \delta$ og $x_0 + \delta$ indgår som delepunkter (men naturligvis ikke nødvendigvis som nabodelepunkter). Da $f(x) \ge 0$ for alle $x \in [a,b]$ vil enhver middelsum S_n svarende til den valgte inddeling af finhed $< \frac{1}{n}$ opfylde at $S_n \ge$ bidraget fra intervallerne mellem $x_0 - \delta$ og $x_0 + \delta$, d.v.s. $S_n \ge \frac{f(x_0)}{2} \cdot 2\delta$. Heraf følger at $\int_a^b f(x)dx \ge f(x_0) \cdot \delta > 0$. $\square$

Vi kan nu formulere og bevise

SÆTNING 1.8. (Integralregningens middelværdisætning.) Lad $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$. Der findes da et punkt $\xi \in [a,b]$ for hvilket

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) .$$

BEVIS. Sæt $M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, $m = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ og bemærk at

$$f([a,b]) = [m,M]$$

(dette er indholdet af Sætning II.3.4). Specielt gælder altså for ethvert $x \in [a,b]$, at

$$m \leq f(x) \leq M .$$

Af Sætning 1.7 fås da at

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

eller

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M .$$

Men så siger Sætning II.3.4 jo netop at der findes et $\xi \in [a,b]$ for hvilket

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx . \quad \square$$

BEMÆRKNING. Faktisk kan man slutte at der findes $\xi \in]a,b[$ for hvilket

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

(se opg. III.1.2).

EKSEMPEL. Med $f(x) = \cos x$ på $[-\pi,\pi]$ ser vi at $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx = 0 = \cos(\pm\frac{\pi}{2}) \cdot \pi$. Tilsvarende har vi med $g(x) = \sin x$ på $[-\pi,\pi]$, at $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = 0 = \sin 0 \cdot \pi$. For komplekse funktioner gælder middelværdisætningen ikke: $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + i \sin x)dx = 0$, men der findes ikke noget punkt $\xi \in [-\pi,\pi]$ for hvilket $\cos \xi + i \sin \xi = 0$, idet $|\cos \xi + i \sin \xi| = 1$ for alle $\xi \in \mathbb{R}$.

BEMÆRKNING. Man kan få en anvendelig version frem for komplekse funktioner ved at opskrive real- og imaginærdel hver for sig:

Lad $f \in C^0([a,b],\mathbb{C})$. Der findes da punkter $\xi,\eta \in [a,b]$ for hvilke

$$\int_a^b f(x)dx = (\mathrm{Re}\, f(\xi) + i\, \mathrm{Im}\, f(\eta))(b-a) .$$

<u>Stykkevis kontinuerte funktioner</u>. De begreber, der her er blevet indført for kontinuerte funktioner, kan uden større besvær også defineres for en noget større klasse af funktioner. Vi vil overlade mange af detaljerne til læseren.

En kompleks funktion $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ på et kompakt interval $[a,b]$ kaldes <u>stykkevis kontinuert</u>, hvis f er kontinuert i ethvert punkt $x \in [a,b]$ pånær endeligt mange punkter, og hvis f har grænseværdier fra venstre og højre, betegnet $f(x-)$ og $f(x+)$, i hvert af diskontinuitetspunkterne. Hvis diskontinuitetspunktet er et af intervalendepunkterne a eller b forlanges kun grænseværdi henholdsvis fra højre og venstre.

Hvis diskontinuitetspunkterne i $]a,b[$ er $c_1 < \dots < c_{n-1}$, kan vi, idet vi sætter $c_0 = a$, $c_n = b$, for hvert af delintervallerne $[c_{p-1}, c_p]$, $p \in \{1,\dots,n\}$, betragte den funktion på $[c_{p-1}, c_p]$, der i $]c_{p-1}, c_p[$ stemmer overens med f, og hvis værdier i c_{p-1} og c_p er grænseværdierne af f henholdsvis fra højre og venstre. Denne funktion g_p er kontinuert. Vi definerer integralet af f som summen af integralerne af disse funktioner, altså

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{p=1}^{n} \int_{c_{p-1}}^{c_p} g_p(x)\,dx .$$

En funktion $f: A \to \mathbb{C}$ på et vilkårligt begrænset eller ubegrænset interval $A \subseteq \mathbb{R}$ af enhver af de mulige typer kaldes stykkevis kontinuert, hvis den i ethvert begrænset, afsluttet delinterval $[a,b]$ af A kun har et endeligt antal diskontinuitetspunkter, og der i hvert diskontinuitetspunkt eksisterer grænseværdier fra venstre og højre, eller anderledes sagt, hvis dens restriktion til ethvert begrænset, afsluttet delinterval $[a,b]$ af A er stykkevis kontinuert.

For en sådan funktion kan vi, nøjagtigt som det ovenfor blev gjort for en kontinuert funktion, for vilkårlige $a,b \in A$ definere integralet af f fra a til b. For vilkårlige $a,b,c \in A$ gælder da ligesom for kontinuerte funktioner indskudsreglen.

For integralet af stykkevis kontinuerte funktioner $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ på et interval $[a,b]$ gælder sætninger ganske svarende til de ovenfor for kontinuerte funktioner beviste sætninger. Kun på enkelte punkter må formuleringen ændres lidt. For eksempel kan vi om en stykkevis kontinuert, ikke negativ funktion f med integralet 0 ikke slutte, at $f(x) = 0$ for <u>alle</u> $x \in [a,b]$, men kun, at $f(x) = 0$ i ethvert kontinuitetspunkt.

BEMÆRKNING. Præciseringen af det klassiske Leibniz'ske integralbegreb i tilfælde af kontinuerte funktioner skyldes A.-L. Cauchy (1823). En udvidelse, ved hvilken flere diskontinuerte funktioner end de stykkevis kontinuerte funktioner tilskrives et integral, blev givet af B. Riemann (1854). I den moderne analyse benytter man et videregående af H. Lebesgue (1902) indført integralbegreb, ved hvilket langt flere diskontinuerte funktioner tilskrives et integral.

§2. Differentiable funktioner af en reel variabel.

Teorien for differentiabilitet har to fædre, Newton (1642-1727) og Leibniz (1646-1716), der uafhængigt af hinanden, i forbindelse med arbejder om banetangenter og partikelhastigheder, havde indset det nyttige i kendskab til en funktions "ændringstakt" i nærheden af et givet punkt.

Dette afsnit fremstiller, i nutidens sprog, de grundlæggende aspekter af differentiabilitetsteorien. Der er ingen egentlige overraskende nyheder i forhold til det fra skolen kendte. Men dels er det værdifuldt at præcisere vort grundlag. Og dels ønsker vi, i lighed med det foregående, at udvikle teorien for komplekse funktioner af en reel variabel - og samtidig give fremstillingen en drejning der naturligt fører frem til Taylor udviklingen (§3).

Differentiable funktioner. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$ være et vilkårligt (begrænset eller ubegrænset åbent, halvåbent eller afsluttet) interval. Vi siger at en kompleks funktion $f: A \to \mathbb{C}$ er differentiabel i et punkt $x_0 \in A$ hvis forholdet $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ har en grænseværdi $c \in \mathbb{C}$ for $\Delta x \to 0$. Her er $\Delta x \neq 0$ tilvæksten fra x_0 til "nabopunktet" $x_0 + \Delta x \in A$, mens $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ er den tilsvarende tilvækst af funktionen f.

Indfører vi funktionen

$$\varepsilon(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} - c = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - c$$

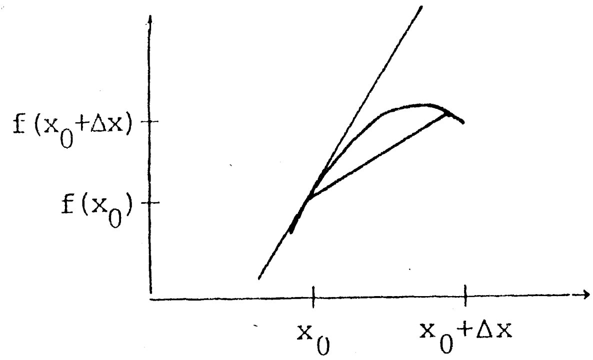
for $\Delta x \neq 0$ og sætter $\varepsilon(0) = 0$, ser vi at ovenstående kan udtrykkes på følgende måde:

DEFINITION. Funktionen $f: A \to \mathbb{C}$ kaldes differentiabel i $x_0 \in A$, såfremt der findes et tal $c \in \mathbb{C}$ for hvilket

$$\Delta f = c\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x ,$$

hvor funktionen $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ for $\Delta x \to 0$. Tallet c kaldes differentialkvotienten af f i punktet x_0 og betegnes ofte $f'(x_0)$.

BEMÆRKNING. Hvis f er reel, har $f'(x_0)$ en velkendt fortolkning som hældningen af tangenten til grafen for f i punktet x_0, idet jo for $\Delta x \neq 0$ udtrykket $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ er hældningen af korden fra $(x_0, f(x_0))$ til $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$.



Under alle omstændigheder kan vi se at hvis $f: A \to \mathbb{C}$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotient $f'(x_0)$, så er funktionen $x \rightsquigarrow f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ det førstegradspolynomium med værdi $f(x_0)$ i x_0, der i nærheden af x_0 bedst approksimerer f: Et førstegradspolynomium "gennem" $(x_0, f(x_0))$ har formen $x \rightsquigarrow \alpha(x-x_0) + f(x_0)$. Sætter vi som før $x = x_0 + \Delta x$, fås

$$|f(x)-[\alpha(x-x_0)+f(x_0)]| = |f(x)-f(x_0)-\alpha(x-x_0)| = |\Delta f - \alpha\,\Delta x|$$

$$= |f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x - \alpha\,\Delta x| = |\Delta x|\;|f'(x_0) - \alpha + \varepsilon(\Delta x)|\ .$$

Da den sidste faktor konvergerer mod 0 for $\Delta x \to 0$ hvis og kun hvis $\alpha = f'(x_0)$, følger påstanden.

BEMÆRKNING 2.1. a) Idet

$$\Delta f = \Delta(\mathrm{Re}\, f + i\,\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{Re}\,\Delta f + i\,\mathrm{Im}\,\Delta f$$

$$= \mathrm{Re}\, c\ \Delta x + i\,\mathrm{Im}\, c\,\Delta x + \mathrm{Re}\,\varepsilon(\Delta x)\Delta x + i\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\Delta x)\Delta x\ ,$$

og idet $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ for $\Delta x \to 0$ hvis og kun hvis $\mathrm{Re}\,\varepsilon(\Delta x) \to 0$ og $\mathrm{Im}\,\varepsilon(\Delta x) \to 0$ for $x \to 0$, ser vi, at f er differentiabel i x_0, hvis og kun hvis $\mathrm{Re}\, f$ og $\mathrm{Im}\, f$ begge er differentiable i x_0. I bekræftende fald gælder åbenbart at

$$f'(x_0) = (\mathrm{Re}\, f)'(x_0) + i(\mathrm{Im}\, f)'(x_0)\ .$$

b) Det følger også direkte af

$$\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x ,$$

at $\Delta f \to 0$ for $\Delta x \to 0$, altså at f er kontinuert i x_0 såfremt f er differentiabel i x_0.

BEMÆRKNING 2.2. Lille o notation. Ligningen

$$\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$$

kan også skrives

$$\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

idet $\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$ er et eksempel på en såkaldt o-funktion: udtrykket $\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$ er en o-funktion af Δx, fordi $\frac{\varepsilon(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \varepsilon(\Delta x) \to 0$ for $\Delta x \to 0$. Generelt siges en kompleks funktion a at være en o-funktion af en kompleks funktion b (i nærheden af et punkt $x_0 \in [-\infty,\infty]$), hvis $\lim_{x\to x_0} \left|\frac{a(x)}{b(x)}\right| = 0$, altså hvis a går "hurtigere mod 0 end b" nær x_0. Da både ε-funktioner og o-funktioner er praktiske skrivemåder i mange forbindelser, benytter vi lejligheden til at stoppe op et øjeblik og opregne deres grundlæggende egenskaber. For overskueligheden skyld refererer vi her udelukkende til funktionernes opførsel nær 0. Lad derfor I være et vilkårligt interval hvori 0 er et punkt, men ikke et endepunkt.

Som allerede nævnt vil vi ved en ε-funktion på I forstå en funktion

$$\varepsilon\colon I \to \mathbb{C}$$

der er kontinuert i 0 med $\varepsilon(0) = 0$. Det væsentlige krav er, at $\varepsilon(t) \to 0$ for $t \to 0$, idet vi så kan sætte $\varepsilon(0) = 0$.

Bemærk at hvis $\varepsilon_1,\varepsilon_2\colon I \to \mathbb{C}$ er ε-funktioner og $g\colon I \to \mathbb{C}$ er begrænset, så er $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$, $|\varepsilon_1|$ og $g\,\varepsilon_1$ alle ε-funktioner.

En funktion $a\colon I \to \mathbb{C}$ siges at være en o-funktion i forhold til en funktion $b\colon I \to \mathbb{C}$, hvis $\left|\frac{a(t)}{b(t)}\right| \to 0$ for $t \to 0$. Med andre ord: a er en o-funktion af b, hvis $\frac{a}{b}$ er en ε-funktion. (Det er nødvendigt at $b(t) \neq 0$ i en udprikket omegn af 0.)

Hvis a_1 og a_2 er o-funktioner af b og $g: I \to \mathbb{C}$ er en begrænset funktion, så er $a_1 \pm a_2$, $|a_1|$ og $g\,a_1$ alle o-funktioner af b. (Gør rede for dette!) Med brud på en grundregel tillader man sig ofte at bruge $o(b)$ som betegnelse ikke blot for en, men for flere forskellige funktioner i samme tekst, blot de er o-funktioner af b.

Vigtige specialtilfælde forekommer når $b(t) = t^n$ for et $n \in \mathbb{N}_0$. Vi angiver her nogle regneregler for disse specialtilfælde. Beviserne følger direkte af definitionen (opgave III.2.1).

En o-funktion af t^n er også en o-funktion af t^m, når $m < n$. Anderledes udtrykt: en funktion der kan betegnes $o(t^n)$ kan også betegnes $o(t^m)$, altså: betegnelse $o(t^n)$ kan erstattes af betegnelsen $o(t^m)$, kort

$o(t^n)$ kan erstattes af $o(t^m)$, når $m < n$.

$o(t^n) + o(t^m)$ kan erstattes af $o(t^k)$, når $k \leq \min(m,n)$.

$o(t^m)o(t^n)$ kan erstattes af $o(t^{m+n})$

$\dfrac{o(t^n)}{t^m}$ kan erstattes af $o(t^{n-m})$, når $m \leq n$.

Bemærk at sidste påstand indeholder tilfældet $o(1)$, der således betegner en vilkårlig funktion af t der konvergerer mod 0 for $t \to 0$ (d.v.s. at $o(1)$ er en anden betegnelse for en ε-funktion).

DEFINITION. En funktion $f: A \to \mathbb{C}$ siges at være differentiabel i A hvis f er differentiabel i hvert $x_0 \in A$. Differentialkvotienten f' er da en funktion defineret på hele A. Den kaldes også den afledede funktion.

EKSEMPEL. For givet $n \in \mathbb{N}$ er funktionen $x \mapsto x^n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentiabel i $\mathbb{R}$ med differentialkvotient nx^{n-1}.

BEVIS. Lad $x_0 \in \mathbb{R}$ og betragt for vilkårlige Δx tilvæksten $\Delta f = (x_0+\Delta x)^n - x_0{}^n$, som ifølge binomialformlen er

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\Delta x)^k \, x_0{}^{n-k} - x_0{}^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (\Delta x)^k \, x_0{}^{n-k}$$

$$= (\Delta x)\left[\binom{n}{1} x_0{}^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (\Delta x)^{k-1} x_0{}^{n-k}\right] = n\, x_0{}^{n-1}\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \; ,$$

hvor

$$\varepsilon(\Delta x) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (\Delta x)^{k-1} x_0{}^{n-k} \to 0$$

for $\Delta x \to 0$. Heraf aflæses også direkte at $(x^n)' = nx^{n-1}$. □

Afledede af højere orden.

Den afledede f' af en differentiabel funktion f er ikke nødvendigvis selv en differentiabel funktion, ja end ikke nødvendigvis kontinuert (jvf. øvelse III.2.2). Men hvis f' er differentiabel i A og altså har en afledet $(f')': A \to \mathbb{C}$, betegnes denne sædvanligvis ved f'' og kaldes den anden afledede af f . Man siger så at f er to gange differentiabel. Samme terminologi kan naturligvis indføres for ethvert $n \geq 1$. For $n \geq 3$ skrives ofte $f^{(3)}$ i stedet for f''' og $f^{(n+1)}$ for $(f^{(n)})'$.

Blandt de n gange differentiable funktioner hæfter man sig navnlig ved dem for hvilke den n^{te} afledede $f^{(n)}$ er kontinuert.

DEFINITION. Med $C^n(A,\mathbb{C})$ betegnes mængden af funktioner $f: A \to \mathbb{C}$ for hvilke $f',\ldots,f^{(n)}$ er defineret og ydermere $f^{(n)} \in C^o(A,\mathbb{C})$. Tilsvarende defineres $C^n(A,\mathbb{R})$ som mængden af n gange kontinuert differentiable reelle funktioner. En funktion $f \in C^n(A,\mathbb{C})$ (eller $C^n(A,\mathbb{R})$) siges at være en C^n-funktion.

Mængden af vilkårligt ofte differentiable funktioner fra A ind i $\mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ betegnes $C^\infty(A,\mathbb{C})$ $(C^\infty(A,\mathbb{R}))$. En funktion i $C^\infty(A,\mathbb{C})$

$(C^\infty(A,\mathbb{R}))$ kaldes en C^∞-funktion.

Ofte forkortes betegnelserne til $C^\infty(A)$ (hhv. $C^n(A)$) hvis sammenhængen gør det klart (eller det er uvæsentligt) om funktionerne har værdier i $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$.

Sætninger om differentiable funktioner. Vi opskriver nu de grundlæggende regneregler for differentiation.

SÆTNING 2.3. Lad $f,g\colon A \to \mathbb{C}$ være differentiable og lad $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$.

a) Funktionen $\alpha f + \beta g$ er differentiabel og

$$(\alpha f+\beta g)' = \alpha f' + \beta g' .$$

b) fg er differentiabel og

$$(fg)' = fg' + f'g$$

c) $\frac{f}{g}$ er differentiabel i alle punkter x af A hvor $g(x) \neq 0$ og

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf'-fg'}{g^2}.$$

BEVIS. Lad x_0 og $x_0 + \Delta x \in A$; lad

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_f(\Delta x)\cdot\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

og

$$\Delta g = g'(x_0)\Delta x + \varepsilon_g(\Delta x)\cdot\Delta x = g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

(bemærk at vi benytter samme o skrivemåde i de to udtryk, selv om de to funktioner er forskellige. Dette skulle ikke give anledning til forvirring. Som det fremgår af argumentet er det udelukkende "henfaldshastigheden" (altså selve o-egenskaben) der er væsentlig).

a)
$$\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_f(\Delta x)\Delta x + g'(x_0)\Delta x + \varepsilon_g(\Delta x)\Delta x$$
$$= (f'(x_0)+g'(x_0))\Delta x \dotplus o(\Delta x) ,$$

idet $\varepsilon_f + \varepsilon_g$ er en ε-funktion og altså $\varepsilon_f(\Delta x)\Delta x + \varepsilon_g(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$.

b) $$\begin{aligned}\Delta(fg) &= f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)\\ &= (f(x_0)+\Delta f)(g(x_0)+\Delta g) - f(x_0)g(x_0)\\ &= \Delta f\cdot g(x_0) + \Delta g\cdot f(x_0) + \Delta f\Delta g\\ &= [f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)]g(x_0) + [g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)]f(x_0)\\ &\quad + [f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)][g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)]\ .\end{aligned}$$

Ved udgangning og benyttelse af bemærkningerne om o-funktioner (Bemærkning 2.2) fås

$$\Delta(fg) = [f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)]\Delta x + o(\Delta x)$$

(gennemfør reduktionen af udtrykket!) og heraf følger påstanden.

c) $$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x_0)+\Delta f}{g(x_0)+\Delta g} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{g(x_0)\Delta f-f(x_0)\Delta g}{(g(x_0)+\Delta g)g(x_0)}\ .$$

Da $(g(x_0)+\Delta g)g(x_0) \to (g(x_0))^2$ (Bemærkning 2.1 b)), følger påstand og formel af at

$$\begin{aligned}g(x_0)\Delta f - f(x_0)\Delta g &= [f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)]g(x_0) - f(x_0)[g'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)]\\ &= [f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)]\Delta x + o(\Delta x)\ .\qquad\square\end{aligned}$$

KOROLLAR 2.4. Hvis f og g er C^n-funktioner (C^∞-funktioner) og $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ så er $\alpha f + \beta g$, fg , $\frac{f}{g}$ også C^n-funktioner (C^∞-funktioner) (for $\frac{f}{g}$ med det sædvanlige forbehold at $g \neq 0$ i A) .

Endvidere er $f \mapsto f'$ en lineær afbildning af $C^n(A)$ $(n \geq 1)$ ind i $C^{n-1}(A)$, hhv. af $C^\infty(A)$ ind i $C^\infty(A)$.

EKSEMPEL. Vi så før at for $n \geq 1$ er $x \mapsto x^n$ differentiabel med afledet nx^{n-1} . Dette følger også af ovenstående produktregel: Ved induktion ses at hvis $f_1,\ldots,f_n\colon A \to \mathbb{C}$ er differentiable, da er produktet $f_1\cdots f_n$ differentiabelt og $(f_1\cdots f_n)' =$ $f_1'f_2\cdots f_n+f_1f_2'f_3\cdots f_n+\ldots+f_1\cdots f_{n-1}f_n'$ (der er n addender, og i hver addend er netop én af faktorerne $f_1,\ldots,f_n$ differentieret).

Sætter vi $f_1 = \dots = f_n =$ den identiske funktion fås formlen fra før: $(x^n)' = x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$. For $x \neq 0$ fås endvidere at $(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$. Fortolkes udtrykket nx^{n-1} som identisk 0 for $n = 0$, ses at differentiationsformlen gælder for alle $n \in \mathbb{Z}$.

<u>SÆTNING 2.5.</u> (Kædereglen.) Lad $A, B \subseteq \mathbb{R}$ være intervaller og antag at $f: B \to \mathbb{C}$ og $g: A \to B$ er differentiable. Så er den sammensatte funktion $f \circ g$ differentiabel og

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g' .$$

BEVIS. Lad x_0 , $x_0 + \Delta x \in A$ og sæt $u_0 = g(x_0)$, $u_0 + \Delta u = g(x_0 + x)$. Så har vi

$$\begin{aligned}\Delta(f \circ g) &= f(g(x_0+\Delta x)) - f(g(x_0)) = f(u_0+\Delta u) - f(u_0) \\ &= f'(u_0)\Delta u + \varepsilon_f(\Delta u)\Delta u = f'(u_0)\Delta g + \varepsilon_f(\Delta u)\Delta u \\ &= f'(u_0)g'(x_0)\Delta x + f'(u_0)\varepsilon_g(\Delta x)\Delta x + \varepsilon_f(\Delta u)\Delta u .\end{aligned}$$

Da $\Delta u \to 0$ for $\Delta x \to 0$ og ε_f er en ε-funktion af Δu , og da $f'(u_0)\varepsilon_g(\Delta x)$ er en ε-funktion af Δx , følger påstanden. $\square$

Om differentiabilitet af omvendt funktion har vi

<u>SÆTNING 2.6.</u> Lad $A, B \subseteq \mathbb{R}$ være intervaller og $f: A \to B$ en bijektion. Antag at f er differentiabel og $f'(x) \neq 0$ for alle $x \in A$. Så er $f^{-1}: B \to A$ differentiabel og

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} .$$

Med andre ord, når $y = f(x)$, så er

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} .$$

BEVIS. Lad y_0, $y_0 + \Delta y \in B$ og sæt $f^{-1}(y_0) = x_0$, $f^{-1}(y_0+\Delta y) = x_0 + \Delta x$. Vi begynder med at vise at f^{-1} er kontinuert. Lad $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ være et kompakt interval i A. Fordi f er kontinuert, ved vi at $f([x_0-\delta, x_0+\delta]) = [c,d]$ er et kompakt interval i B. Endvidere er f en bijektion, så $y_0 \in \,]c,d[$.

Vi viser at f^{-1} er kontinuert på $[c,d]$. Lad $F \subset [x_0-\delta, x_0+\delta] = f^{-1}([c,d])$ være en vilkårlig afsluttet mængde. Så er F kompakt (Sætning II.4.5) og da f er kontinuert er $f(F)$ kompakt og derfor afsluttet. Men $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$, og så følger kontinuiteten af Korollar II.2.3.

Af bijektiviteten af f følger også at $\Delta x \neq 0$ når $\Delta y \neq 0$.

$$\Delta(f^{-1}) = f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x = \frac{\Delta x}{\Delta y}\,\Delta y\ .$$

For $\Delta y \to 0$ vil $\Delta x \to 0$, fordi f^{-1} er kontinuert. Men så vil

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \to \frac{1}{f'(x)}\ .$$

Altså er

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} - \frac{1}{f'(x)} = \varepsilon(\Delta y)\ ,$$

en ε-funktion af Δy, d.v.s.

$$\Delta(f^{-1}) = \Delta x = \frac{1}{f'(x)}\,\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y\ ,$$

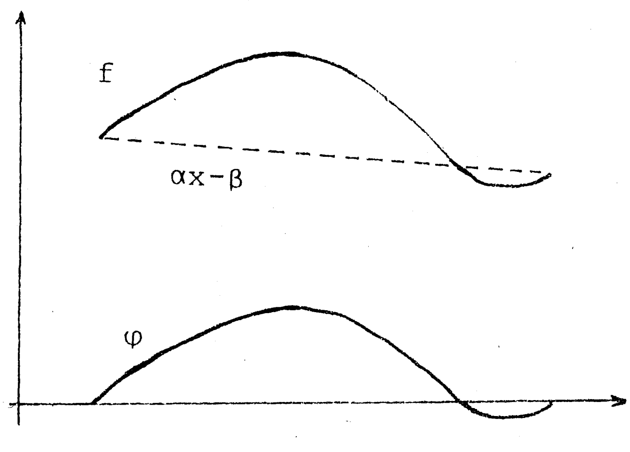
hvoraf sætningens påstand følger. $\square$

<u>Differentialregningens middelværdisætning</u>. Den næste sætning er en af de allermest anvendelige sætninger inden for differentialregningen.

<u>SÆTNING 2.7</u>. (Differentialregningens middelværdisætning.) Hvis $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ er differentiabel i $]a,b[$, så findes et $\xi \in]a,b[$ således at

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) .$$

BEVIS. Sæt $\alpha = (f(b)-f(a))/(b-a)$ og betragt hjælpefunktionen



$$\varphi(x) = f(x) - \alpha x + \beta$$

hvor $\beta = \alpha a - f(a)$. Med dette valg af β er $\varphi(a) = 0$. Bemærk at så er $\varphi(b) = 0$, fordi den rette linie $\alpha x + \beta$ har samme hældning som korden mellem $(a,f(a))$ og $(b,f(b))$. Da φ er kontinuert i $[a,b]$, antager den sin største og sin mindste værdi, og mindst en af dem i et punkt $\xi \in]a,b[$ (hvorfor kan det udelukkes at ξ er et endepunkt?) Funktionen φ er også differentiabel i $]a,b[$, og vi vil vise, at $\varphi'(\xi) = 0$: Antag eksempelvis, at ξ er et maksimumspunkt. Så er $\Delta\varphi \le 0$ i en omegn af ξ . Da

$$\Delta\varphi = \varphi'(\xi)\Delta\xi + o(\Delta\xi) ,$$

ser vi ved at betragte $\Delta\xi > 0$ at $\varphi'(\xi) \le 0$. Var nemlig $\varphi'(\xi) > 0$, kunne vi finde $\delta > 0$, således at $|o(\Delta\xi)| < \frac{\varphi'(\xi)}{2}\Delta\xi$ for $0 < \Delta\xi < \delta$, d.v.s. $\Delta\varphi \ge \frac{\varphi'(\xi)}{2}\Delta\xi > 0$.

På den anden side slutter vi analogt, ved at betragte $\Delta\xi < 0$, at $\varphi'(\xi) \ge 0$. Altså er $\varphi'(\xi) = 0$. Da $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, fås sætningens påstand. $\square$

EKSEMPEL. Ved at betragte den i eksemplet side III.9 nævnte funktion på $[-\pi,\pi]$

$$f(x) = \cos x + i \sin x$$

for hvilken $f'(x) = -\sin x + i\cos x \neq 0$ for alle $x \in [-\pi,\pi]$ ser vi, at Sætning 2.7 ikke gælder for ikke-reelle funktioner: $f(\pi) - f(-\pi) = 0$, mens $(-\sin x + i\cos x) \cdot 2\pi \neq 0$ for alle $x \in [-\pi,\pi]$. Nedenfor nævner vi dog en rimelig erstatning.

KOROLLAR 2.8. Hvis $f \in C^0([a,b],\mathbb{C})$ er differentiabel i $]a,b[$, findes der punkter $\xi,\eta \in]a,b[$, så at

$$f(b) - f(a) = [\operatorname{Re} f'(\xi) + i \operatorname{Im} f'(\eta)]\,(b-a) .$$

BEVIS. Benyt middelværdisætningen på $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ hver for sig. Kombiner leddene ved hjælp af bemærkning a), p. III.13. ▯

Her følger et par andre nyttige konsekvenser af differentialregningens middelværdisætning.

KOROLLAR 2.9. En differentiabel funktion $f: A \to \mathbb{C}$ er konstant hvis og kun hvis $f' = 0$.

BEVIS. Nødvendigheden af betingelsen $f' = 0$ er klar. Tilstrækkeligheden følger af, at hvis $x,y \in A$, og vi anvender middelværdisætningen på intervallet mellem x og y fås $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$ for et eller andet punkt ξ mellem x og y . Da $f' = 0$, fås at $f(x) = f(y)$, og fordi x og y er vilkårlige følger påstanden. ▯

Samme bevisteknik kan udnyttes i

KOROLLAR 2.10. En differentiabel funktion $f: A \to \mathbb{R}$ er monotont voksende hvis og kun hvis $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in A$, og monotont aftagende hvis og kun hvis $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in A$.

BEVIS. Øvelse III.2.10! ▯

Stamfunktion.

DEFINITION. En funktion $f: A \to \mathbb{C}$ siges at have en funktion $F: A \to \mathbb{C}$ som stamfunktion hvis F er differentiabel i A med $F' = f$. En stamfunktion F kaldes også et ubestemt integral til f og betegnes $\int f(x)dx$.

Det er klart, at hvis f har en stamfunktion F, så er F + konstant også en stamfunktion til f. Hvis på den anden side $G: A \to \mathbb{C}$ er en stamfunktion til f, så er $(G-F)' = 0$, d.v.s. (Korollar 2.9) $G = F$ + konstant. Bemærk i denne forbindelse, at symbolet $\int f(x)dx$ bruges om enhver af stamfunktionerne til f. Det betegner altså ikke én bestemt funktion.

Som vi straks skal se, er der en intim forbindelse mellem ubestemte integraler $\int f(x)dx$ og det bestemte integral $\int_a^b f(x)dx$, som vi indførte i dette kapitels første afsnit. Der gælder nemlig:

SÆTNING 2.11. (Differential- og integralregningens hovedsætning.) Enhver kontinuert funktion $f: A \to \mathbb{C}$ har en stamfunktion. Hvis $x_0 \in A$ er et vilkårligt fast punkt, er samtlige stamfunktioner bestemt ved formlen

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + k ,$$

hvor k er en konstant. For enhver stamfunktion F til f og for vilkårlige punkter $a,b \in A$ gælder

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

BEVIS. Lad $x_0, x, x+\Delta x \in A$ og sæt $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Vi har da at

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt ,$$

som ifølge indskudsreglen (Sætning 1.3) kan skrives

$$\Delta F = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt \ .$$

Af Bemærkning nederst side III.9 fås eksistensen af ξ, η i intervallet mellem x og $x + \Delta x$, således at

$$\Delta F = [\mathrm{Re}\ f(\xi) + i\ \mathrm{Im}\ f(\eta)]\ \Delta x$$

(overvej at formlen er korrekt også når $\Delta x < 0$). Da $\mathrm{Re}\ f(\xi) + i\ \mathrm{Im}\ f(\eta) \to f(x)$ for $\Delta x \to 0$, ser vi at F er differentiabel i x med $F'(x) = f(x)$. Da to vilkårlige stamfunktioner kun afviger fra hinanden med en konstant, har vi vist den første påstand i sætningen. Den anden følger af indskudsreglen: For en vilkårlig stamfunktion F og vilkårlige punkter $a, b \in A$ har vi ifølge det hidtil beviste at

$$F(b) - F(a) = \int_{x_0}^{b} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt \ . \qquad \square$$

BEMÆRKNING. Som følge af hovedsætningen bliver bestemmelsen af en stamfunktion til en given funktion f, eller ubestemt integration, en fundamental opgave i analysen. Mens differentiation af funktioner givet ved sammensatte udtryk blot kræver anvendelser af de almene differentiationsregler og kendskab til de afledede af de i udtrykkene indgående elementære funktioner, har man ikke tilsvarende regler til udførelse af enhver integration. Forholdet er endda det, at stamfunktionerne til funktioner givet ved sammensatte udtryk indeholdende de gængse elementære funktioner ofte ikke kan udtrykkes ved hjælp af disse funktioner. Integration bliver derved en kunst. I sin simpleste form beror opgavens løsning på, at det udtryk, hvorved funktionen f er givet, er kendt som udtrykket for den afledede af en anden funktion. I mere komplicerede tilfælde betjener man sig af forskellige <u>integrationsregler</u>, der fås ved omskrivning af visse af differentiationsreglerne. Vi samler nogle af disse integrationsregler i

<u>SÆTNING 2.12</u>. a) (Linearitet)

$$\int(\alpha f+\beta g)(x)dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx .$$

b) (Delvis integration.)

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx .$$

c) (Substitution)

$$\int(f\circ g)(x)g'(x)dx = (F\circ g)(x) ,$$

hvor

$$F(u) = \int f(u)du .$$

BEMÆRKNING. Da et ubestemt integral ikke betegner én bestemt funktion kræver formlerne en vis fortolkning. Eksempelvis skal c) læses således: Hvis F er en stamfunktion til $f\colon B \to \mathbb{C}$ og $g\colon A \to B$ er differentiabel, så er $F\circ g$ en stamfunktion til $(f\circ g)g'$.

BEVIS for Sætning 2.12. a) er en umiddelbar konsekvens af lineariteten af differentiation.

b) er en konsekvens af formlen for differentiation af et produkt: $(fg)' = f'g + fg'$, d.v.s. $\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$ er ifølge a) en stamfunktion til $(fg)'$. Altså har $f'g$ stamfunktionen $fg - \int f(x)g'(x)dx$.

c) følger af kædereglen (Sætning 2.5): $(F\circ g)' = (F'\circ g)g' = (f\circ g)g'$

<u>Integral som funktion af en parameter</u>. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$ og $B \subseteq \mathbb{R}$ være intervaller. I $\mathbb{R}^2$, hvis punkter vi vil betegne (x,t) , betragter vi mængden $A \times B$. Er $f\colon A \times B \to \mathbb{C}$ en funktion på $A \times B$, vil $f(x,t)$ for fast $t \in B$ være en funktion af x (d.v.s. en funktion på A) og for fast $x \in A$ være en funktion af t (d.v.s. en funktion på B) .

Hvis $f(x,t)$ for fast $t \in B$ er en differentiabel funktion af

x, siges f at være differentiabel efter x, og den afledede efter x betegnes f'_x eller $D_x f$ eller $\frac{\partial f}{\partial x}$. Analogt, hvis $f(x,t)$ for fast $x \in A$ er en differentiabel funktion af t, siges f at være differentiabel efter t, og den afledede efter t betegnes f'_t eller $D_t f$ eller $\frac{\partial f}{\partial t}$. Man kalder disse afledede <u>partielle afledede</u>. Bogstavet ∂ læses som d.

I det følgende er det primært $f(x,t)$ som funktion af x for faste t, vi er interesseret i, mens t spiller rollen af en <u>parameter</u>. Hvis A er et afsluttet interval $[a,b]$ og $f(x,t)$ for fast $t \in B$ er en kontinuert funktion af x, bestemmes ved integralet

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

en funktion $g: B \to \mathbb{C}$. Vi siger at integralet efter x er en funktion af parameteren t.

<u>SÆTNING 2.13</u>. Hvis f er kontinuert på $[a,b] \times B$, er integralet g en kontinuert funktion på B.

BEVIS. For at bevise kontinuiteten af $g: B \to \mathbb{C}$ er det tilstrækkeligt at vise, at restriktionen af g til et vilkårligt interval $[c,d] \subseteq B$ er kontinuert. Lad $\varepsilon > 0$ og $t_0 \in [c,d] \subseteq B$ være givet; da restriktionen af f til den kompakte mængde $[a,b] \times [c,d]$ er uniformt kontinuert (II.4.4), findes $\delta > 0$ således at $|f(x_1,t_1) - f(x_2,t_2)| < \varepsilon$ for alle $t_1,t_2 \in [c,d]$ der opfylder $|t_1-t_2| < \delta$ og alle $x_1,x_2 \in [a,b]$ der opfylder $|x_1-x_2| < \delta$. Specielt fås $|f(x,t) - f(x,t_0)| < \varepsilon$ for alle $t \in [c,d]$ for hvilke $|t-t_0| < \delta$, og for alle $x \in [a,b]$. Heraf fås

$$|g(t) - g(t_0)| = \left|\int_a^b f(x,t)\,dx - \int_a^b f(x,t_0)\,dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|\,dx < \varepsilon(b-a) . \quad \square$$

Vedrørende differentiation gælder følgende sætning:

SÆTNING 2.14. Lad f være kontinuert på $[a,b] \times B$ og differentiabel efter t med en partiel afledet f_t' der ligeledes er kontinuert på $[a,b] \times B$. I så fald er integralet

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

en differentiabel funktion på B med kontinuert afledet bestemt ved

$$g'(t) = \int_a^b f_t'(x,t)dx \; .$$

Med andre betegnelser:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx \; .$$

BEVIS. For overskuelighedens skyld antager vi først at f er reel. For t_0, $t_0 + \Delta t \in B$ med $\Delta t \neq 0$ har vi da

$$\frac{g(t_0+\Delta t)-g(t_0)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_a^b [f(x,t_0+\Delta t)-f(x,t_0)]dx \; .$$

Af middelværdisætningen fås

$$f(x,t_0+\Delta t) - f(x,t_0) = \Delta t \cdot f_t'(x,\theta) \; ,$$

hvor θ ligger mellem t_0 og $t_0 + \Delta t$ (bemærk at denne ligning gælder for hvert $x \in [a,b]$, således at θ afhænger af t_0, Δt og x). Heraf fås at

$$\frac{g(t_0+\Delta t)-g(t_0)}{\Delta t} - \int_a^b f_t'(x,t)dx = \int_a^b [f_t'(x,\theta)-f_t'(x,t)]dx \; .$$

Vi kan nu ræsonnere ganske som i beviset for den foregående sætning: Da f_t' forudsættes kontinuert, kan vi, svarende til $\varepsilon > 0$ finde et $\delta > 0$ således at hvis $|\Delta t| < \delta$ gælder at

$$|f_t'(x,\theta) - f_t'(x,t)| < \varepsilon$$

for alle $x \in [a,b]$. Heraf fås at

$$\left|\frac{g(t_0+\Delta t)-g(t_0)}{\Delta t} - \int_a^b f_t'(x,t)\,dx\right| < \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a)$$

når $|\Delta t| < \delta$.

Hvis f ikke nødvendigvis er reel følger sætningen af det allerede viste:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx &= \frac{d}{dt}\left[\mathrm{Re}\int_a^b f(x,t)\,dx + i\ \mathrm{Im}\int_a^b f(x,t)\,dx\right]\\ &= \frac{d}{dt}\int_a^b \mathrm{Re}\ f(x,t)\,dx + i\,\frac{d}{dt}\int_a^b \mathrm{Im}\ f(x,t)\,dx\\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\ f(x,t)\,dx + i\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Im}\ f(x,t)\,dx\\ &= \int_a^b \mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}\,\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx\\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx\ . \qquad \square\end{aligned}$$

EKSEMPEL. På $[0,1]\times]-1,1[$ betragtes funktionen

$$f(x,t) = \frac{xt}{\sqrt{1-x^2t^2}}\ .$$

Da $|t| < 1$, er $1-x^2t^2 > 0$, så f er defineret på $[0,1]\times]-1,1[$. Endvidere ses at $(x,t)\mapsto xt$ er en kontinuert afbildning af $[0,1]\times]-1,1[$ ind i $]-1,1[$ og

$$u \mapsto \frac{u}{1-u^2}$$

er kontinuert på $]-1,1[$, således at $f\colon [0,1]\times]-1,1[\ \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Specielt er for hvert $t\in]-1,1[$

$$x \mapsto f(x,t)$$

en kontinuert afbildning af $[0,1]$ ind i $\mathbb{R}$, så

$$g(t) = \int_0^1 \frac{xt}{\sqrt{1-x^2t^2}}\,dx$$

er veldefineret. Af Sætning 2.13 følger så direkte at g er kontinuert

Ved udregning fås

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{xt}{\sqrt{1-x^2t^2}} = \frac{(1-x^2t^2)x + x^3t^2}{(1-x^2t^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1-x^2t^2)^{3/2}}$$

der er kontinuet på $[0,1] \times]-1,1[$. Af Sætning 2.14 slutter vi at g er differentiabel og

$$g'(t) = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(1-x^2t^2)^{3/2}} \qquad -1 < t < 1 .$$

Heraf fås for det første at

$$g'(0) = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

og for det andet at for $t \neq 0$ er

$$g'(t) = \frac{1}{2t^2}\int_0^1 \frac{2t^2\,x\,dx}{(1-x^2t^2)^{3/2}} = \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2t^2}}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1}{t^2} = \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \frac{1+t^2-1}{t^2\sqrt{1-t^2}\,(\sqrt{1-t^2}+1)} = \frac{1}{1-t^2+\sqrt{1-t^2}} ,$$

således at $g'(t) = \dfrac{1}{1-t^2+\sqrt{1-t^2}}$, $-1 < t < 1$.

Bemærk iøvrigt at g i dette tilfælde kan beregnes eksplicit og at g' derefter kan findes ved differentiation.

§3. Taylor-udviklinger.

Vi nævnte i §2 at $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ er det polynomium af første grad, der bedst approksimerer en differentiabel funktion f i nærheden af x_0. Bemærk at p er karakteriseret ved at være af 1. grad samt ved at $p(x_0) = f(x_0)$ og $p'(x_0) = f'(x_0)$.

Vi skal nu beskrive en naturlig videreførelse af denne tankegang til funktioner der er flere gange differentiable. Idet $A \subset \mathbb{R}$ er et interval og $x_0 \in A$, og $f: A \to \mathbb{C}$ er en n gange differentiabel funktion, søger vi et polynomium P_n af grad $\leq n$ der i en vis forstand approksimerer f godt i nærheden af x_0. Denne "forstand" vil blive præciseret lidt senere. Først bemærker vi, at en måde at generalisere karakteriseringen af 1. grads-polynomiet er at forlange at $P_n^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$, $j = 0,1,\ldots,n$.

Skriver vi P_n på formen

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

fås

$$P_n^{(j)}(x) = j!a_j + \ldots + n(n-1)\ldots(n-j+1)a_n(x-x_0)^{n-j}$$

d.v.s. $P_n^{(j)}(x_0) = j!a_j$ for $j = 0,\ldots,n$ og $P_n^{(j)}(x_0) = 0$ for alle $j \geq n+1$. Heraf følger at kravet $P_n^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$, $j = 0,\ldots,n$, bestemmer P_n entydigt som

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j . \tag{3.1}$$

<u>DEFINITION</u>. Når $f: A \to \mathbb{C}$ er n gange differentiabel og $x_0 \in A$, så kaldes polynomiet (3.1) det n^{te} <u>Taylorpolynomium</u> for f i x_0. Man bruger også vendingen den <u>n^{te} Taylor udvikling</u> i x_0. Afvigelsen

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

kaldes <u>det n^{te} restled</u>.

EKSEMPEL. Lad $f(x) = \sin x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og lad $x_0 = 0$. Idet $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$ og $f'''(x) = -\cos x$ har vi $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$; den 3. Taylor udvikling for $\sin x$ i 0 er derfor

$$x + \frac{-1}{3!} x^3 = x - \frac{x^3}{3!}$$

og det 3. restled er $\sin x - x + \frac{x^3}{3!}$.

Vi begynder med at give en formel for restleddet, når f er en reel funktion.

<u>SÆTNING 3.2</u>. Hvis $f: A \to \mathbb{R}$ er n gange differentiabel og $x_0, x \in A$, så findes et punkt ξ mellem x_0 og x, således at

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n .$$

BEMÆRKNING. Restleddet $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ kaldes <u>Lagranges restled</u>, idet formlen blev angivet af J.-L. Lagrange i 1797. Bemærk iøvrigt, at ordet "mellem" skal tages i streng forstand: $x_0 < \xi < x$, hvis $x > x_0$, $x < \xi < x_0$, hvis $x < x_0$.

BEVIS. Hvis $n = 1$, er udsagnet allerede kendt: det er jo differentialregningens middelværdisætning.

For at bevise sætningen for $n > 1$ antager vi først at $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0$ og at $f(x) = 0$. (Bemærk: også x er et fast punkt.) Vi skal vise at der findes ξ mellem x_0 og x for hvilket $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Det gør vi ved at bruge differentialregningens middelværdisætning flere gange. Fordi $f(x_0) = f(x) = 0$ ved vi at der findes et punkt ξ_1 mellem x_0 og x for hvilket $f'(\xi_1) = 0$. Da så $f'(\xi_1) = f'(x_0) = 0$ findes ξ_2 mellem ξ_1 og x_0 for hvilket $f''(\xi_2) = 0$ (middelværdisætningen anvendt på f'). Således fortsættes, indtil vi af $f^{(n-1)}(x_0) = f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) = 0$ slutter eksistensen af et punkt ξ_n mellem x_0 og ξ_{n-1}, hvor $f^{(n)}(\xi_n) = 0$.

Det almene tilfælde klares nu ved at betragte funktionen

$$t \mapsto \varphi(t) = f(t) - P_{n-1}(t) - K(t-x_0)^n ,$$

hvor P_{n-1} er Taylorpolynomiet for f i x_0 af grad $n-1$, og hvor K er valgt så $\varphi(x) = 0$. Ved differentiation ses at φ falder under det specialtilfælde vi betragtede. Altså findes der et punkt ξ mellem x_0 og x, hvor

$$0 = \varphi^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - 0 - n!K .$$

Med det vil jo netop sige at $K = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. Hermed er formlen for Lagrange's restled vist. $\square$

Hvis f er kompleks må vi spalte op i realdel og imaginærdel (jvf. Korollar 2.8).

KOROLLAR 3.3. Hvis $f\colon A \to \mathbb{C}$ er n gange differentiabel i intervallet $A \subset \mathbb{R}$ og $x_0, x \in A$, findes punkter ξ og η mellem x_0 og x, så at

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$$+ \frac{\operatorname{Re} f^{(n)}(\xi) + i \operatorname{Im} f^{(n)}(\eta)}{n!}(x-x_0)^n .$$

BEVIS. Benyt sætning 3.2 på de to reelle funktioner $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$. $\square$

Under skærpede antagelser om f vil vi vise et meget nyttigt resultat, Taylors grænseformel, der oplyser om restleddet for $x \to x_0$. Samtidig får vi en præcis forstand i hvilken det n^{te} Taylorpolynomium er det n^{te} grads polynomium der bedst approksimerer f nær x_0.

Vi minder om o-skrivemåden indført i afsnit 2: Hvis α er en funktion af x der opfylder at $\alpha(x) \to 0$ for $x \to x_0$, så er udtrykket $\alpha(x)(x-x_0)^n$ en o-funktion af $(x-x_0)^n$, idet jo

$$\left|\frac{\alpha(x)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n}\right| \to 0 \quad \text{for} \quad x \to x_0 \, .$$

Vi angiver dette ved at erstatte $\alpha(x)(x-x_0)^n$ med $o((x-x_0)^n)$.

Nu grænseformlen:

<u>SÆTNING 3.4</u>. (Taylors grænseformel.) Hvis $f\colon A \to \mathbb{C}$ er en C^n-funktion på A, og hvis $x_0 \in A$, så gælder for $x \to x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \, .$$

BEVIS. Idet f forudsættes at være en C^n-funktion, ved vi at $f^{(n)}$ er kontinuert; specielt er $\operatorname{Re} f^{(n)}$ og $\operatorname{Im} f^{(n)}$ begge kontinuerte i x_0. Altså vil

$$\operatorname{Re} f^{(n)}(\xi) + i \operatorname{Im} f^{(n)}(\eta) \to f^{(n)}(x_0)$$

for $x \to x_0$, hvor ξ og η er de punkter der forekommer i Lagrange's restled. Sætter vi $\alpha(x) = \operatorname{Re} f^{(n)}(\xi) + i \operatorname{Im} f^{(n)}(\eta) - f^{(n)}(x_0)$, har vi at $\alpha(x) \to 0$ for $x \to x_0$. Altså er Lagrange's restled af formen

$$\frac{\operatorname{Re} f^{(n)}(\xi) + i \operatorname{Im} f^{(n)}(\eta)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{\alpha(n)}{n!}(x-x_0)^m$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \, . \qquad \square$$

<u>KOROLLAR 3.5</u>. Hvis $f\colon A \to \mathbb{C}$ er en C^n-funktion, og hvis $x_0 \in A$, så er det n^{te} Taylor polynomium i x_0 det eneste polynomium af grad $\leq n$ for hvilket restleddet opfylder

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad \text{for} \quad x \to x_0 \, .$$

BEVIS. Taylors grænseformel viser at Taylor polynomiet opfylder den nævnte betingelse på restleddet. Hvis omvendt P er et polynomium af grad $\leq n$, for hvilket $f - P = o((x-x_0)^n)$, kan vi benytte Taylors grænseformel på f. Altså får vi $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$ og derfor $P_n(x) - P(x) = o((x-x_0)^n)$. Da $P_n - P$ er af grad $\leq n$, er dette kun muligt hvis $P_n - P$ er nulpolynomiet. (Gør rede herfor!)

<u>Anvendelse af Taylorudviklinger til undersøgelse af funktioner af formen</u> $\frac{f(x)}{g(x)}$. Hvis f og g er n gange differentiable i et interval A indeholdende et punkt x_0, hvor både $f(x_0)$ og $g(x_0)$ er 0, kan Taylors grænseformel ofte anvendes til at afgøre om $\frac{f(x)}{g(x)}$ har en grænseværdi for $x \to x_0$. Vi formulerer denne generelle teknik og gennemregner dernæst et par eksempler.

<u>SÆTNING 3.6.</u> (l'Hospitals regel.) Antag $f,g \in C^n(A,\mathbb{C})$ og antag $f(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $g(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$, mens $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Så vil $\frac{f(x)}{g(x)}$ have en grænseværdi for $x \to x_0$ og denne er

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)} .$$

BEVIS. Af Taylors grænseformel fås at

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) ,$$

d.v.s.

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) .$$

Tilsvarende fås for g at

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) .$$

Da $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ kan vi finde en omegn af x_0, hvor $g(x) \neq 0$: vælg $\delta > 0$ således at der for $|x-x_0| < \delta$ gælder

$$\left| g(x) - \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| < \left| \frac{g^{(n)}(x_0)}{2n!}(x-x_0)^n \right| .$$

Dette er muligt da restleddet er $o((x-x_0)^n)$. Men så er

$$|g(x)| > \left| \frac{g^{(x)}(x_0)}{2n!}(x-x_0)^n \right| > 0 .$$

Altså har vi for $|x-x_0| < \delta$ at

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)}{g^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)}$$

(efter forlængelse med $n!$) , og heraf at

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0) + \dfrac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}}{g^{(n)}(x_0) + \dfrac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}} \to \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$$

for $x \to x_0$. $\square$

EKSEMPEL. $\frac{\sin x}{x} \to 1$ for $x \to 0$, thi $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ (ifølge eksemplet, p. III.30 og Taylors grænseformel), og derfor

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^2) \to 1 \quad \text{for} \quad x \to 0 .$$

EKSEMPEL. $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$ for $x \to 0$. Både $f(x) = 1 - \cos x$ og $g(x) = x^2$ er nemlig C^∞-funktioner. Da $f'(x) = \sin x$ og $f''(x) = \cos x$, har vi $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$; da $g'(x) = 2x$ og $g''(x) = 2$ følger af l'Hospitals regel at

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{f''(0)}{g''(0)} = \frac{1}{2} .$$

I mange tilfælde kan Taylors grænseformel give mere detaljeret information end l'Hospitals regel giver. Vi illustrerer dette med følgende

EKSEMPEL. Sæt

$$f(x) = e^{\tan x} - e^{1-\cos 2x}$$

$$g(x) = (1 - \cot x)\cos^2 2x$$

og betragt $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ i en omegn af $\frac{\pi}{4}$. Vi bemærker straks at f og g er C^∞-funktioner på definitionsmængderne for tan og cot, altså specielt på $]0,\frac{\pi}{2}[$, og at $f(\frac{\pi}{4}) = g(\frac{\pi}{4}) = 0$. Udregninger viser at $f'(\frac{\pi}{4}) = 0$, $f''(\frac{\pi}{4}) = 4e$ og $g'(\frac{\pi}{4}) = g''(\frac{\pi}{4}) = 0$, mens $g'''(\frac{\pi}{4}) = 48$. Heraf får vi at $f(x) = 2e(x-\frac{\pi}{4})^2 + o((x-\frac{\pi}{4})^2)$ og $g(x) = 8(x-\frac{\pi}{4})^3 + o((x-\frac{\pi}{4})^3)$ for $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$. Altså er

$$\varphi(x) = \frac{2e(x-\frac{\pi}{4})^2 + o((x-\frac{\pi}{4})^2)}{8(x-\frac{\pi}{4})^3 + o((x-\frac{\pi}{4})^3)} = \frac{1}{x-\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{2e + o(1)}{8 + o(1)}$$

ifølge regnereglerne p. III.15). Heraf får vi at

$$\varphi(x) \cdot (x-\frac{\pi}{4}) = \frac{2e + o(1)}{8 + o(1)} \to \frac{e}{4} \quad \text{for} \quad x \to \frac{\pi}{4},$$

så $|\varphi(x)| \to \infty$ for $x \to \frac{\pi}{4}$.

Tager vi et led mere med i Taylorudviklingerne får vi, idet $f'''(\frac{\pi}{4}) = 48e$ og $g^{(4)}(\frac{\pi}{4}) = -192$, at

$$\varphi(x) = \frac{e(x-\frac{\pi}{4})^2 + 4e(x-\frac{\pi}{4})^3 + o((x-\frac{\pi}{4})^3)}{4(x-\frac{\pi}{4})^3 - 4(x-\frac{\pi}{4})^4 + o((x-\frac{\pi}{4})^4)}.$$

Ved subtraktion af leddet $\frac{e}{4} \cdot \frac{1}{x-\frac{\pi}{4}} = \frac{e}{4x-\pi}$ fås

$$\varphi(x) - \frac{1}{4x-\pi} = \frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}\left[\frac{e + 4e(x-\frac{\pi}{4}) + o((x-\frac{\pi}{4})}{4(1-(x-\frac{\pi}{4}) + o(x-\frac{\pi}{4}))} - \frac{e}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{x-\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{e + 4e(x-\frac{\pi}{4}) - e + e(x-\frac{\pi}{4}) + o(x-\frac{\pi}{4})}{4(1-(x-\frac{\pi}{4}) + o(x-\frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{5e + o(1)}{4(1-(x-\frac{\pi}{4}) + o(x-\frac{\pi}{4}))} \to \frac{5e}{4} \quad \text{for} \quad x \to \frac{\pi}{4}.$$

Altså vil $\varphi(x) - \frac{e}{4x-\pi} - \frac{5e}{4} \to 0$ for $x \to \frac{\pi}{4}$. Heraf ses at φ i nærheden af $\frac{\pi}{4}$ "opfører sig" som funktionen $\frac{e}{4x-\pi} + \frac{5e}{4}$.

§4. Approksimation af integraler.

Lad $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuert reel funktion på et begrænset afsluttet interval. Integralet

$$I = \int_a^b f(t)\,dt$$

er defineret som grænseværdien (som eksisterer) for middelsummer

$$S = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) ,$$

svarende til inddelinger

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

og indskudspunkter $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, når inddelingens finhed

$$\delta = \max\{x_j - x_{j-1} \mid j = 1,2,\ldots,n\}$$

går mod 0.

Vi skal nu, under forskellige forudsætninger om differentiabilitet af f, ved hjælp af Taylor's formel vurdere forskellen $I-S$ og give nogle bedre approksimationer af I.

Middelsummer. Antag nu yderligere at f er af klasse C^1 på $[a,b]$. Lad som ovenfor S betegne middelsummen svarende til inddelingen (1) og indskudspunkter ξ_j. Så finder vi

$$I - S = \sum_{j=1}^{n}\left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)\,dt - (x_j - x_{j-1}) f(\xi_j)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} (f(t) - f(\xi_j))\,dt ;$$

her kan $f(t)$ ved hjælp af Taylor's formel skrives

$$f(t) = f(\xi_j) + f'(\theta_j(t))(t - \xi_j) \quad \text{for} \quad t \in [a,b] ,$$

hvor $\theta_j(t)$ for $j = 1,2,\ldots,n$ ligger mellem ξ_j og t.

Dette udtryk for $f(t)$ indsættes og vi får

$$I - S = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(\theta_j(t))(t-\xi_j)\,dt$$

og med

$$M' = \sup\{|f'(t)| \mid t \in [a,b]\} \quad (< +\infty)$$

kan vi på sædvanlig måde vurdere

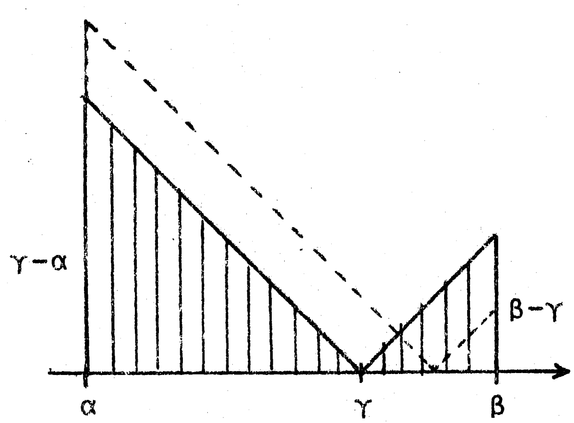
$$|I-S| \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f'(\theta_j(t))(t-\xi_j)|\,dt \leq M' \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |t-\xi_j|\,dt \ .$$

For at vurdere videre skal vi beregne nogle integraler:

LEMMA 4.1. Lad $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ opfylde $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. Så gælder

$$\int_{\alpha}^{\beta} |t-\gamma|\,dt \leq \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^2 \ .$$

BEVIS. Integralet på venstre side er summen af de skraverede trekanters arealer altså



$$\int_{\alpha}^{\beta} |t-\gamma|\,dt = \tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)^2+\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)^2 .$$

Som funktion $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ er det altså

$$\varphi(\gamma) = \tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)^2 + \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)^2 = \gamma^2 - (\alpha+\beta)\gamma + \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) \ .$$

Idet $\varphi'(\gamma) = 2\gamma - (\alpha+\beta)$ ser vi at φ er aftagende på intervallet $[\alpha,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)]$ og voksende på $[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\beta]$. Derfor har vi for $\gamma \in [\alpha,\beta]$

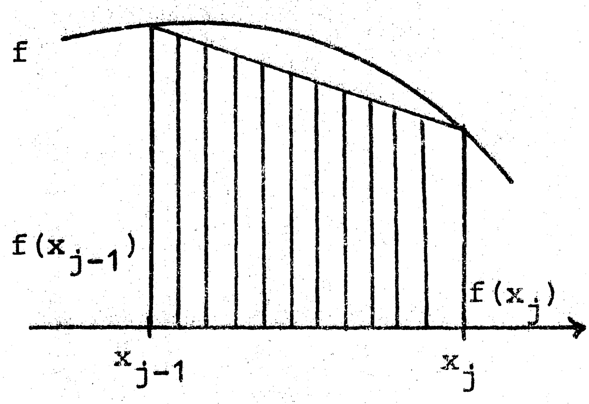
$$\varphi(\gamma) \leq \max\{\varphi(\alpha),\varphi(\beta)\} = \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^2 \ . \quad \blacksquare$$

Sammenfattende har vi således

$$|I-S| \leq M' \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{2}(x_j-x_{j-1})^2 \leq \tfrac{1}{2}M'\delta \sum_{j=1}^{n} (x_j-x_{j-1}) = \tfrac{1}{2}M'\delta(b-a) \quad ,$$

hvilket kan udtrykkes, at middelsummen S for en C^1 funktion f approksimerer I med en fejl der er af højst samme størrelsesorden som inddelingens finhed δ .

Trapezformlen. I stedet for som det sker ved middelsummer at approksimere integralet af f over et delinterval $[x_{j-1},x_j]$ med arealet af rektanglet med grundlinie $[x_{j-1},x_j]$ og højde $f(\xi_j)$, kan dette integral tilnærmes med arealet af trapezet bestemt ved punkterne $(x_{j-1},0)$, $(x_{j-1},f(x_{j-1}))$, $(x_j,f(x_j))$ og $(x_j,0)$. Arealet af et sådant trapez er



$$\tfrac{1}{2}(x_j-x_{j-1})(f(x_j)+f(x_{j-1}))$$

og summen af disse arealer svarende til inddelingen (1) er

$$T = \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{2}(f(x_j)+f(x_{j-1}))(x_j-x_{j-1}) \quad .$$

Dette udtryk simplificerer hvis inddelingen er ækvidistant altså hvis delepunkterne har formen

$$x_j = a + j\,\frac{b-a}{n} \quad \text{for} \quad j = 0,1,\ldots,n \quad . \tag{2}$$

Vi antager derfor at inddelingen har formen (2) og med $h = \frac{b-a}{n}$ (som er inddelingens finhed) har vi

$$T = h(\tfrac{1}{2}(f(a)+f(b)) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)) \quad .$$

Dette udtryk kaldes trapezformlen, og vi skal nu undersøge, hvor god en tilnærmelse T er til I .

Forskellen mellem trapezarealet og integralet svarende til et delinterval $[x,x+h]$ hvor $x \in \{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\}$ er tallet

$$D = \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \tfrac{1}{2}h(f(x)+f(x+h)) \ .$$

For at vurdere D antager vi at f er af klasse C^2 på $[a,b]$, og Taylor's formel giver så $(t \in [x,x+h])$

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + \frac{(t-x)^2}{2} f''(\theta_t)$$

og

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\theta)$$

hvor θ_t og θ tilhører $]x,x+h[$. Dermed kan D beregnes

$$\begin{aligned} D &= \int_x^{x+h}\Big(f(x)+(t-x)f'(x)+\frac{(t-x)^2}{2} f''(\theta_t)\Big)dt \\ &\quad - \tfrac{1}{2}h\Big(f(x)+f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2} f''(\theta)\Big) \\ &= hf(x) + \frac{h^2}{2} f'(x) + \int_x^{x+h} \frac{(t-x)^2}{2} f''(\theta_t)\,dt \\ &\quad - hf(x) - \frac{h^2}{2} f'(x) - \frac{h^3}{4} f''(\theta) \\ &= \int_x^{x+h} \frac{(t-x)^2}{2} f''(\theta_t)\,dt - \frac{h^3}{4} f''(\theta) \ . \end{aligned}$$

Sætter vi

$$M'' = \sup\{|f''(t)| \mid t \in [a,b]\} < \infty$$

gælder så

$$|D| \le M''\Big(\int_x^{x+h} \frac{(t-x)^2}{2}dt + \frac{h^3}{4}\Big) = M''\, h^3\, \frac{5}{12} \ .$$

For forskellen $I-T$ finder vi derfor

$$\begin{aligned} |I-T| &= \Big|\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)\,dt-\tfrac{1}{2}h(f(x_j)+f(x_{j-1}))\Big)\Big| \\ &\le n|D| \le M''\, nh^3\, \frac{5}{12} = \frac{5M''}{12}(b-a)h^2 \ . \end{aligned}$$

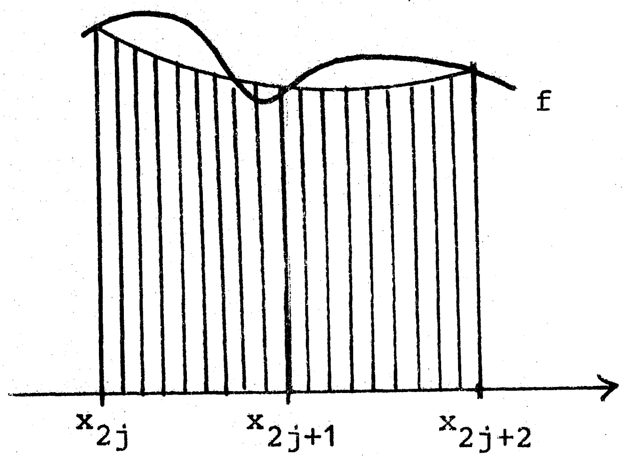
Sammenfattende har vi altså at "trapezsummen" T for en C^2 funktion f approksimerer I med en fejl der højst har størrelsesorden h^2, hvor h er inddelingens finhed.

Simpson's formel. Betragt en ækvidistant inddeling af $[a,b]$ med delepunkter $a = x_0 < \dots < x_{2n} = b$, hvor altså

$$x_j = a + j\,\frac{b-a}{2n} \quad \text{for} \quad j = 0,1,\dots,2n\,,$$

og $h = \frac{b-a}{2n}$ er inddelingens finhed.

Ideen er nu at tilnærme f på intervallet $[x_{2j},x_{2j+2}]$ med den entydigt bestemte funktion (parabelbue eller rette linie)



$$p(t) = at^2+bt+c$$

for hvilken

$$p(t) = f(t)$$

for $t = x_{2j}, x_{2j+1}, x_{2j+2}$, og derefter benytte integralet

$$\int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} p(t)\,dt$$

som approksimation af $\int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} f(t)\,dt$.

LEMMA 4.2. Lad $h > 0$ og $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$. Betegner $p\colon [0,2h] \to \mathbb{R}$ den entydigt bestemte funktion $p(t) = at^2+bt+c$ for hvilken $p(0) = \alpha$, $p(h) = \beta$ og $p(2h) = \gamma$ så gælder

$$\int_0^{2h} p(t)\,dt = \frac{1}{3}h\,(\alpha+4\beta+\gamma)\,.$$

BEVIS. Koefficienterne $a,b,c \in \mathbb{R}$ er givet ved

$$c = \alpha \ , \quad ah^2+bh+c = \beta \quad \text{og} \quad 4ah^2+2bh+c = \gamma \ .$$

Vi finder

$$\int_0^{2h} (at^2+bt+c)\,dt = \frac{8h^3}{3}a + \frac{4h^2}{2}b + 2hc$$

$$= \tfrac{1}{3}h(8ah^2+6bh+6c) = \tfrac{1}{3}h(4(ah^2+bh+c)+4ah^2+2bh+c+c)$$

$$= \tfrac{1}{3}h(\alpha+4\beta+\gamma) \ . \quad \blacksquare$$

Vi har således at "parabelarealet" svarende til intervallet $[x,x+2h]$ for $x \in \{x_0,x_2,\ldots,x_{2n-2}\}$ er givet ved

$$\tfrac{1}{3}h(f(x)+4f(x+h)+f(x+2h)) \ .$$

Benyttes for hvert af delintervallerne $[x_{2j},x_{2j+2}]$ dette "parabelareal" som approksimation til integralet over $[x_{2j},x_{2j+2}]$ fås

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} \tfrac{1}{3}h(f(x_{2j})+4f(x_{2j+1})+f(x_{2j+2}))$$

$$= \tfrac{1}{3}h\Big(f(a)+f(b) + 4\sum_{j=0}^{n-1} f(a+(2j+1)h) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(a+2jh)\Big)$$

som approksimation af I .

Dette udtryk kaldes <u>Simpson's formel</u>, og vi skal nu undersøge hvor godt P approksimerer I .

Det drejer sig om at vurdere forskellen

$$D_1 = \int_x^{x+2h} f(t)\,dt - \tfrac{1}{3}h(f(x)+4f(x+h)+f(x+2h)) \ .$$

Vi antager at f er af klasse C^4 på $[a,b]$ og kan derfor ved hjælp af Taylor's formel skrive

$$f(t) = \sum_{k=0}^{3} f^{(k)}(x)\frac{(t-x)^k}{k!} + f^{(4)}(\theta_t)\frac{(t-x)^4}{4!}$$

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{3} f^{(k)}(x)\frac{h^k}{k!} + f^{(4)}(\theta_1)\frac{h^4}{4!}$$

og

$$f(x+2h) = \sum_{k=0}^{3} f^{(k)}(x)\frac{(2h)^k}{k!} + f^{(4)}(\theta_2)\frac{(2h)^4}{4!}$$

for $\theta_t, \theta_1, \theta_2 \in]x,x+2h[$. Herefter finder vi

$$D_1 = \int_x^{x+2h}\left(f(x)+\ldots+f'''(x)\frac{(t-x)^3}{6} + f^{(4)}(\theta_t)\frac{(t-x)^4}{24}\right)dt$$

$$- \tfrac{1}{3}h\left[f(x)+4\left(f(x)+\ldots+f'''(x)\frac{h^3}{6}+f^{(4)}(\theta_1)\frac{h^4}{24}\right)\right.$$

$$\left. + \left(f(x)+\ldots+f'''(x)\frac{(2h)^3}{6}+f^{(4)}(\theta_2)\frac{(2h)^4}{24}\right)\right]$$

$$= 2hf(x) + \frac{4h^2}{2}f'(x) + \frac{8h^3}{6}f''(x) + \frac{16h^4}{24}f'''(x)$$

$$+ \int_x^{x+2h} f^{(4)}(\theta_t)\frac{(t-x)^4}{24}\,dt$$

$$- \tfrac{1}{3}h(6f(x)+6hf'(x)+4h^2f''(x)+2h^3f'''(x))$$

$$- \tfrac{1}{3}h\left(4f^{(4)}(\theta_1)\frac{h^4}{24} + f^{(4)}(\theta_2)\frac{16h^4}{24}\right)$$

$$= \int_x^{x+2h} f^{(4)}(\theta_t)\frac{(t-x)^4}{24}dt - h^5\left(\frac{1}{18}f^{(4)}(\theta_1)+\frac{2}{9}f^{(4)}(\theta_2)\right) .$$

Sætter vi

$$M^{(4)} = \sup\{|f^{(4)}(t)| \mid t \in [a,b]\} < \infty$$

finder vi

$$|D_1| \le M^{(4)}\int_x^{x+2h}\frac{(t-x)^4}{24}\,dt + h^5\,\frac{5}{18}\,M^{(4)}$$

$$= M^{(4)}\left(\frac{32h^5}{120} + \frac{5h^5}{18}\right) = M^{(4)}\,h^5\,\frac{49}{90} .$$

Herefter finder vi $(2nh = b-a)$

$$|I-P| \le n|D_1| \le nM^{(4)}h^5\,\frac{49}{90} = M^{(4)}\,h^4(b-a)\frac{49}{180} ,$$

hvilket kan udtrykkes, at "parabelsummen" P for en C^4 funktion approksimerer I med en fejl der højst er proportional med h^4, hvor h er inddelingens finhed.

EKSEMPEL. Lad os beregne $I = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \log 2$. Funktionen $f(t) = \frac{1}{t}$ er af klasse C^∞ med

$$f'(t) = -t^{-2}\ ,\ f''(t) = 2t^{-3}\ ,\ f'''(t) = -6t^{-4}\ \text{ og }\ f^{(4)}(t) = 24t^{-5}$$

hvoraf

$$M' = 1\ ,\ M'' = 2\ \text{ og }\ M^{(4)} = 24\ .$$

I tilfældet $h = \frac{1}{10}$ finder vi middelsummen S_{10} svarende til indskudspunkterne $\xi_j = x_{j-1}$

$$S_{10} = 0.7187140\ ,\quad |\text{fejl}| \le 0.05\ .$$

Anvendes trapezformlen henholdsvis Simpsons formel (stadig $h = \frac{1}{10}$) fås

$$T_{10} = 0.6937714\ ,\quad |\text{fejl}| \le 0.008$$

$$P_{10} = 0.6931502\ ,\quad |\text{fejl}| \le 0.0006\ .$$

De tilsvarende størrelser i tilfældet $h = \frac{1}{20}$ er

$$S_{20} = 0.7058034\ ,\quad |\text{fejl}| \le 0.025$$

$$T_{20} = 0.6933033\ ,\quad |\text{fejl}| \le 0.002$$

$$P_{20} = 0.6931474\ ,\quad |\text{fejl}| \le 0.00004\ .$$

Med 7 rigtige decimaler gælder

$$\log 2 = 0.6931472\ .$$

§5. Plane kurver.

Den analytiske behandling af kurver i plan og rum er en nærliggende anvendelse af differentialregning. Her holder vi os til planen. Vi vil lægge vægt på og i nogen grad støtte os til intuitive geometriske fremstillinger.

Ved valg af et fast punkt O i planen som begyndelsespunkt tilvejebringes en enentydig korrespondence $P \to \underline{v}$ mellems planens punkter og vektorer:

$$P \leftrightarrow \underline{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \underline{v} \ .$$

Vektoren $\overrightarrow{OP}$ kaldes stedvektoren for punktet P .

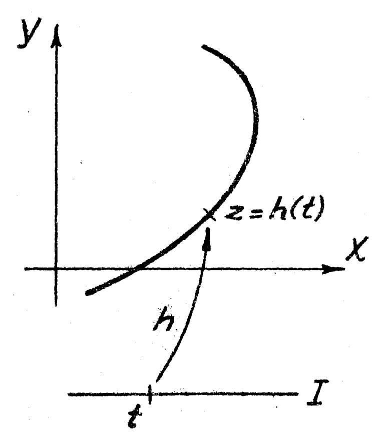
Ved valg af et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XY med O som begyndelsespunkt bringes planens vektorer og dermed planens punkter i korrespondance med de reelle talpar (x,y) , altså med $\mathbb{R}^2$. (I rummet havde vi blot fået taltripler.) Idet vi indfører den komplekse variable $z = x + iy$, føres korrespondancen videre til $\mathbb{C}$. (En tilsvarende mulighed findes ikke for rummets vedkommende.) I den følgende tekst vil vi tillade os at identificere planen med $\mathbb{R}^2$ eller med $\mathbb{C}$, idet vi angiver et punkt P eller en vektor $\underline{v}$ i planen ved det tilsvarende koordinatpar (x,y) eller ved det komplekse tal $z = x + iy$.

BEMÆRKNING. I det følgende støtter vi os således til et bestemt koordinatsystem XY i planen. For de geometriske begreber vi arbejder med, såsom C^n-kurve, tangent, osv., er det imidlertid uden betydning, hvilket koordinatsystem der er valgt. Denne uafhængighed er selvfølgelig afgørende. Den er ret triviel at verificere, men vi vil ikke gå i detaljer med spørgsmålet. - Ved konkrete udregninger vil et hensigtsmæssigt valg af koordinatsystem naturligvis ofte være fordelagtigt.

Kontinuert kurve. En kontinuert afbildning $h: t \to (f(t), g(t))$, $t \in I$, eller $h: t \to h(t) = f(t) + ig(t)$, $t \in I$, af et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ ind i planen, bestemmer en kontinuert kurve. Når t gennemløber intervallet I , vil $(x,y) = (f(t), g(t))$ eller $z = h(t)$ gennemløbe kurven.

Vi kalder h en parameterfremstilling for kurven. Ofte skrives den på formen

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned} \quad , \ t \in I \ ,$$



eller

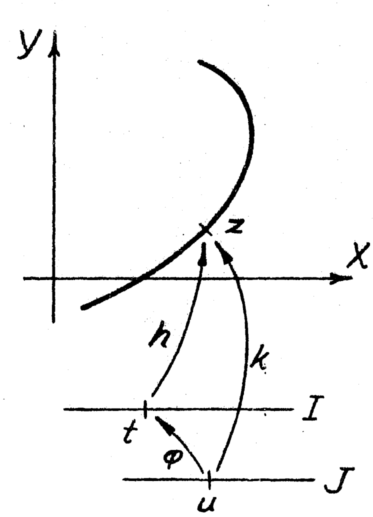
$$z = h(t) = f(t) + ig(t) \quad , \ t \in I \ .$$

Den variable t kaldes <u>parameteren</u>, I kaldes <u>parameterintervallet</u>, medens f og g kaldes <u>koordinatfunktionerne</u>. Samme punkt i planen kan godt svare til flere forskellige værdier af t ; man taler da om et <u>multipelt punkt</u> på kurven, specielt er <u>dobbeltpunkt</u>, hvis punktet svarer til netop to parameterværdier.

En kurve er andet og mere end mængden af punkter på kurven: den rækkefølge, hvori punkterne gennemløbes, er væsentlig. To forskellige parameterfremstillinger $h: I \to \mathbb{C}$ og $k: J \to \mathbb{C}$ kan godt fremstille samme kurve; men det er altså ikke tilstrækkeligt, at $h(I) = k(J)$. Vi belyser først spørgsmålet ved et eksempel:

EKSEMPEL. Ved $(x,y) = (t,t)$, $t \in [0,\infty[$, fremstilles en halvlinie, gennemløbet fra endepunktet 0 . Ved $(x,y) = (u^2,u^2)$, $u \in [0,\infty[$, fremstilles samme kurve, med samme gennemløbsretning. Også $(x,y) = (u^2,u^2)$, $u \in]-\infty,0]$, fremstiller samme kurve, dog med modsat gennemløbsretning. Derimod fremstiller $(x,y) = (u^2,u^2)$, $u \in]-\infty,\infty[$, en ny kurve, skønt mængden af kurvepunkter stadig er den samme: halvlinien gennemløbes to gange.

Nu den almene forklaring: Parameterfremstillingerne $h: I \to \mathbb{C}$ og $k: J \to \mathbb{C}$, dvs. to kontinuerte afbildninger h og k af intervaller $I \subseteq \mathbb{R}$ og $J \subseteq \mathbb{R}$ ind i planen, regnes at fremstille <u>samme kurve</u>, hvis der findes en bijektiv, kontinuert funktion $\varphi: J \to I$, således at $h \circ \varphi = k$, dvs. således at



$$\forall u \in J:\ h(\varphi(u)) = k(u)\ .$$

Man siger, at k fremgår af h ved parameterskiftet $\varphi: J \to I$, eller som det ofte udtrykkes: vi går over til en ny parameter ved parameterskiftet $t = \varphi(u)$, $u \in J$. Man siger endvidere, at h og k fremstiller kurven med samme eller modsat gennemløbsretning, efter som φ er voksende eller aftagende.

Til retfærdiggørelse af den indførte sprogbrug kræves nogle overvejelser, der vil blive taget op i en opgave.

EKSEMPLER. I eksemplet ovenfor kommer man fra parameterfremstillingen $(x,y) = (t,t)$, $t \in [0,\infty[$, til de to følgende ved parameterskifterne $t = u^2$, $u \in [0,\infty[$, henholdsvis $t = u^2$, $u \in]-\infty,0]$.

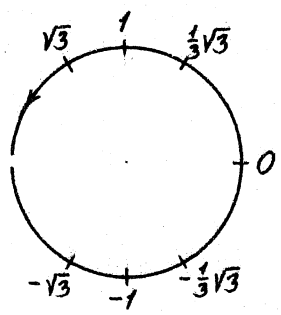
Et andet eksempel: Parameterfremstillingen

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\quad y = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\quad t \in]-\infty,\infty[\ ,$$

går ved parameterskiftet $t = \tan\frac{u}{2}$, $u \in]-\pi,\pi[$, over i

$$x = \frac{1-\tan^2\frac{u}{2}}{1+\tan^2\frac{u}{2}} = \cos u\ ,\quad y = \frac{2\tan\frac{u}{2}}{1+\tan^2\frac{u}{2}} = \sin u\ ,\quad u \in]-\pi,\pi[\ .$$

Den fremstillede kurve er altså enhedscirklen, gennemløbet fra $(-1,0)$ excl. til $(-1,0)$ excl. Gennemløbsretningen er den samme ved de to fremstillinger. På figuren er markeret kurvepunkter svarende til forskellige værdier af t.



Generelt strøs ved en parameterfremstilling tal ud langs kurven: kurvepunkterne knyttes til parameterværdier. Undertiden har parameterens værdier en oplagt geometrisk betydning (det gælder f.eks. u i det sidste eksempel), men det behøver ikke at være tilfældet.

BEMÆRKNING. En kurve med fremstilling $z = h(t)$, $t \in [a,b]$, siges at være lukket, hvis $h(a) = h(b)$, dvs. hvis start- og slutpunkt falder sammen. For lukkede kurver lægger man i almindelighed ikke vægt på, hvilket kurvepunkt der er start- og slutpunkt. F.eks. fremstiller $(x,y) = (\cos u, \sin u)$ så samme lukkede kurve for ethvert parameterinterval $[a,a+2\pi]$, - nemlig enhedscirklen gennemløbet én gang. For et parameterinterval $[a,a+4\pi]$ fås en ny lukket kurve: enhedscirklen gennemløbet to gange.

BEMÆRKNING. En kurve må som fremhævet ikke forveksles med mængden af punkter på kurven. I praksis vil vi dog ofte bruge ordet kurve også om denne punktmængde, blot det er oplagt, hvorledes gennemløbet skal tænkes foretaget. Mængden af løsninger (x,y) til en ligning $F(x,y) = 0$ falder i denne forstand ofte i en eller flere kurver.

EKSEMPEL. Grafen $\{(x,y) \mid y = f(x)\}$ for en kontinuert funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ defineret på et interval I "er" en kontinuert kurve, underforstået når " x bruges som parameter":

$$(x,y) = (t,f(t)) \ , \ t \in I \ .$$

Punktmængden $\{(x,y) \mid x^2-y^2 = 1\}$ falder i to kurver (hyperbelgrene); for hver af dem kan y bruges som parameter:

$$(x,y) = (\sqrt{1+t^2}, t) \ , \ t \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad (x,y) = (-\sqrt{1+t^2}, t) \ , \ t \in \mathbb{R} \ .$$

Punktmængden $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ "er" én lukket kurve, enhedscirklen - underforstået: gennemløbet én gang.

Ved studiet af en kurve lægger vi i almindelighed en bestemt parameterfremstilling til grund. For ikke at få for mange betegnelser skriver vi da ofte parameterfremstillingen

$$(x,y) = (x(t),y(t)) \ , \ t \in I \ , \quad \text{eller} \quad z = z(t) = x(t) + iy(t) \ , \ t \in I \ .$$

BEMÆRKNING. Ligesom i planen kan man tale om kontinuerte kurver i et vilkårligt metrisk rum M. En parameterfremstilling for en kontinuert kurve i M er blot en kontinuert afbildning $h\colon I \to M$, hvor $I \subseteq \mathbb{R}$ er et interval.

C^n-kurve. En C^0-kurve er blot en kontinuert kurve. Nedenfor antages $n \in \mathbb{N}$ eller $n = \infty$.

DEFINITION. Ved en parameterfremstilling for en C^n-kurve i planen forstås en C^n-afbildning $h\colon t \to (f(t),g(t))$, $t \in I$, eller $h\colon t \to h(t) = f(t) + ig(t)$, $t \in I$, af et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ ind i planen.

To C^n-afbildninger $h: I \to \mathbb{C}$ og $k: J \to \mathbb{C}$ fremstiller <u>samme C^n-kurve</u>, hvis der findes en bijektiv C^n-funktion $\varphi: J \to I$ fra intervallet $J \subseteq \mathbb{R}$ til intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$, hvor

(i) $\forall u \in J: \varphi'(u) \neq 0$,

således at $h \circ \varphi = k$, dvs. således at

(ii) $\forall u \in J: h(\varphi(u)) = k(u)$.

Man siger, at k fremgår af h ved <u>C^n-parameterskiftet</u> $t = \varphi(u)$, $u \in J$.

Som vi skal se i det følgende, bl.a. i afsnittet om tangent, Sætning 4.1, opfører kurven sig "pænt" i et punkt $h(t)$, hvor $h'(t) \neq 0$. Det samme kurvepunkt optræder som $k(u)$, hvor $t = \varphi(u)$. Kravet (i) sikrer nu, at $k'(u) \neq 0$, idet jo $k'(u) = h'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$, ifølge kædereglen. Kravet (i) sikrer altså, at parameterskiftet φ ikke fører til tab af kurvepunkter, der er behagelige at arbejde med.

Desuden sikrer (i), at $\varphi^{-1}: I \to J$ er en C^n-funktion (og dermed et C^n-parameterskift, da jo $(\varphi^{-1})'(t) = 1/\varphi(u) \neq 0$), jfr. Sætning 2.6.

Vedr. retfærdiggørelse af sprogbrugen "samme C^n-kurve" henvises i øvrigt til en opgave.

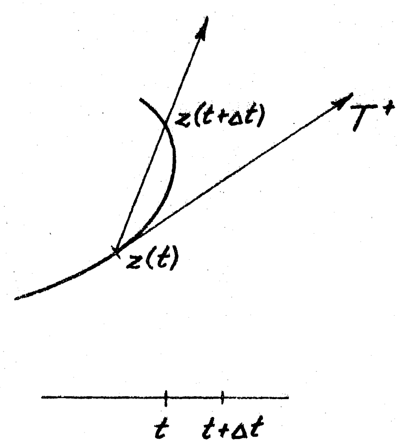
<u>Kinematik</u>. (Et punkts bevægelse.) En parameterfremstilling $t \to (x(t),y(t))$, $t \in I$, eller $t \to z(t) = x(t) + iy(t)$ for en C^n-kurve i planen kan opfattes som beskrivelse af bevægelsen af et punkt P i planen i tidsintervallet $I \subseteq \mathbb{R}$, idet man tolker $(x(t),y(t))$ eller $z(t) = x(t) + iy(t)$ som punktets position til tiden t . Man kalder da den gennemløbne kurve for punktets <u>banekurve</u>.

Er $n \geq 1$, kaldes $(x'(t),y'(t))$ eller $z'(t) = f'(t) + ig'(t)$ - opfattet som vektor i planen - for <u>hastigheden</u> i bevægelsen til tiden t , medens $|z'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ kaldes <u>farten</u>. - Man må her tænke sig, at (x,y) eller $z = x + iy$ repræsenterer stedvektoren $\overrightarrow{OP}$ til det bevægede punkt P , således at hastigheden egentlig er $\dfrac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt}$.

Er $n \geq 2$, kaldes $(x''(t),y''(t))$ eller $z''(t) = x''(t) + iy''(t)$ for <u>accelerationen</u> til tiden t . - Også her skal man tænke på en vektor, $\dfrac{d^2\,\overrightarrow{OP}}{dt^2}$.

<u>Tangent</u>. <u>Spids</u>. Idet en kontinuert kurve i planen tænkes givet ved en parameterfremstilling $z = z(t)$, $t \in I$, vil vi diskutere kurvens forløb i en omegn af kurvepunktet $z(t)$ svarende til en parameterværdi t . - Her, ligesom ved teoretiske overvejelser i det følgende, har vi valgt den komplekse skrivemåde, fordi det er den korteste.

<u>DEFINITIONER</u>. Hvis det for enhver tilpas lille tilvækst $\Delta t > 0$ gælder, at punktet $z(t+\Delta t)$ er forskelligt fra punktet $z(t)$, og hvis halvlinien fra $z(t)$ gennem $z(t+\Delta t)$ konvergerer mod en grænsestilling T^+ for $\Delta t \to 0_+$, så siges kurven at have halvlinien T^+ som <u>positiv halvtangent</u> i $z(t)$.



På tilsvarende måde defineres negativ halvtangent T^- .

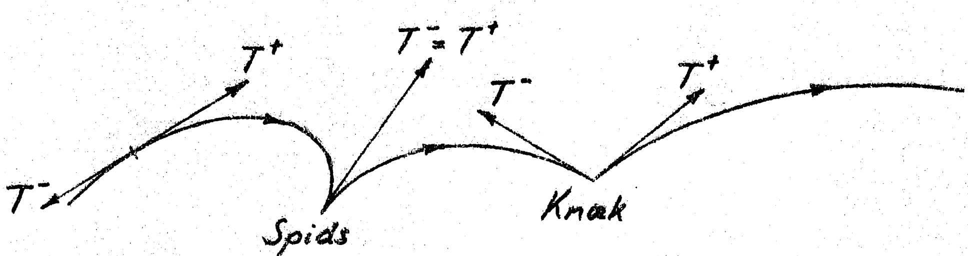
Hvis kurven har såvel en positiv som en negativ halvtangent i $z(t)$, og hvis disse er modsat rettede, siges kurven at have en <u>tangent</u> i $z(t)$, nemlig den linie T gennem $z(t)$, der indeholder halvtangenterne. Tangenten T orienteres i overensstemmelse med den positive halvtanget T^+ .

I tilfælde af ensrettede (altså sammenfaldende) halvtangenter, siges kurven at have en <u>spids</u> i $z(t)$. Også i dette tilfælde tillægges kurven en tangent i $z(t)$, kaldet <u>spidstangent</u>, nemlig den linie T , der indeholder halvtangenterne. Den orienteres i overensstemmelse med den fælles retning af T^+ og T^- .

Eksisterer begge halvtangenterne, men er de hverken modsat rettede eller sammenfaldende, siges kurven at have et <u>knæk</u> i $z(t)$ og tilskrives ingen tangent i $z(t)$.

Vi har stiltiende forudsat, at t ikke er endepunkt for parameterintervallet I ; for et endepunkt bliver der naturligvis kun tale om den ene halvtangent.

Ved ovenstående definitioner har vi nok støttet os til en parameterfremstilling for kurven, men det er uden betydning, hvilken af kurvens parameterfremstillinger der benyttes, sålænge gennemløbsretningen bevares. Vender vi gennemløbsretningen, ombyttes T^+ og T^- . Det indebærer, at orienteringen af en evt. sædvanlig tangent bliver den modsatte, medens det er uden betydning for orienteringen af en evt. spidstangent.

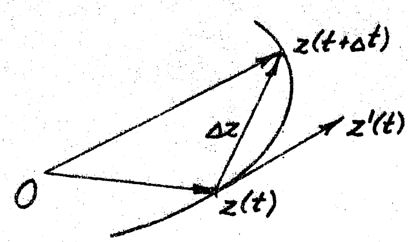


En kurve i planen, der har en tangent T i et kurvepunkt P , tilskrives også en <u>normal</u> N i P , nemlig linien gennem P vinkelret på T . Svarende til en orientering af T orienterer man N , således at N fremgår af T ved en drejning $\frac{1}{2}\pi$ om P i planens positive omløbsretning.

<u>SÆTNING 5.1</u>. Lad en kontinuert kurve i planen været givet ved en parameterfremstilling $z = z(t)$, $t \in I$. En tilstrækkelig betingelse for, at kurven har to modsat rettede halvtangenter T^+ og T^- i $z(t)$ er da, at funktionen $z: I \to \mathbb{C}$ er differentiabel i t med $z'(t) \neq 0$. Den orienterede tangent T er linien gennem $z(t)$ ensrettet med vektoren $z'(t)$.

BEVIS. Antag betingelsen opfyldt, altså

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t} \to z'(t) \neq 0$$



for $\Delta t \to 0$. Vi slutter da først, at $\Delta z \neq 0$, dvs. $z(t+\Delta t) \neq z(t)$, blot

$|\Delta t|$ er tilpas lille. For alle numerisk tilpas små $\Delta t \neq 0$ kan vi altså tale om halvlinien fra punktet $z(t)$ gennem punktet $z(t+\Delta t)$. For $\Delta t > 0$ er den ensrettet med vektoren $\frac{\Delta z}{\Delta t}$, som konvergerer mod $z'(t) \neq 0$ for $\Delta t \to 0$. Følgelig eksisterer en grænsestilling T^+ for $\Delta t \to 0_+$, nemlig halvlinien fra punktet $z(t)$ ensrettet med vektoren $z'(t)$. For $\Delta t < 0$ er den variable halvlinie ensrettet med $-\frac{\Delta z}{\Delta t}$, således at vi for $\Delta t \to 0_-$ får en grænsestilling T^- ensrettet med $-z'(t)$. Det fremgår, at der i $z(t)$ er en sædvanlig tangent T som påstået.

Vi har stiltiende forudsat, at t ikke er endepunkt for parameterintervallet; for et endepunkt bliver der naturligvis kun tale om den ene halvtangent.

Opfattes en parameterfremstilling $z = z(t)$, $t \in I$, for en C^n-kurve, $n \geqq 1$, som beskrivelse af et punkts bevægelse, viser sætningen, med kinematiske ord, at til ethvert tidspunkt $t \in I$, hvor hastigheden $z'(t)$ ikke er 0, har banekurven to modsat rettede halvtangenter, og tangenten er ensrettet med hastigheden.

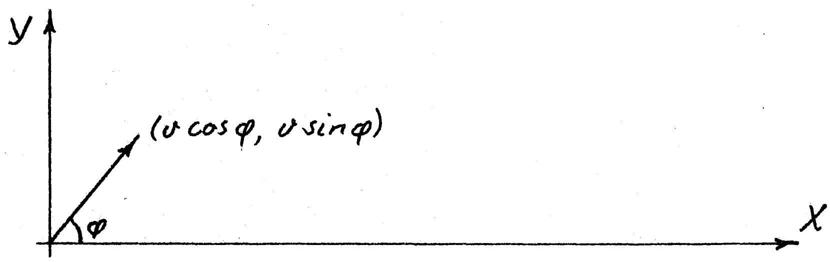
EKSEMPEL. Det skrå kast.

Et projektil affyres - eller mere fredeligt: et bold kastes - skråt opad under en vinkel φ, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, med vandret. Farten i startøjeblikket kaldes v.

Vi vil bestemme bevægelse og banekurve, idet vi ser bort fra luftmodstand. Accelerationen i bevægelsen er da tyngdeaccelerationen, der er rettet lodret nedad og har størrelsen g.

Først bemærkes, at projektilet/bolden vil forblive i den lodrette plan, der indeholder starthastigheden. Vi forbigår begrundelsen, ikke fordi den er vanskelig, men fordi vi har besluttet at holde os til planen i denne §.

I vor lodrette plan vælges et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, f.eks. kan vi tage startpunktet som begyndelsespunkt, Y-aksen lodret opad og X-aksen vandret med orientering, så starthastigheden er $(v\cos\varphi, v\sin\varphi)$. Vi regner tiden ud fra startøjeblikket og vil foreløbig gå ud fra, at der er "plads nok", til at bevægelsen kan fortsætte ubegrænset i tid.



Idet projektilets/boldens position til tiden t betegnes $(x,y) = (x(t),y(t))$, har vi så

$$\begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} x'(0) = v\cos\varphi \\ y'(0) = v\sin\varphi \end{matrix} \quad \text{og} \quad \begin{matrix} x''(t) = 0 \\ y''(t) = -g \end{matrix} \qquad \text{for} \quad t \geqq 0 \ .$$

Dermed er

$$\begin{matrix} x'(t) = v\cos\varphi \\ y'(t) = v\sin\varphi - gt \end{matrix} \qquad \text{for} \quad t \geqq 0$$

og videre

$$\begin{matrix} x(t) = vt\cos\varphi \\ y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2 \end{matrix} \qquad \text{for} \quad t \geqq 0 \ .$$

Hermed er bevægelsen beskrevet, og samtidig har vi en parameterfremstilling for banekurven.

For banekurven kan x bruges som parameter: ved parameterskiftet $t = \xi/(v\cos\varphi)$ fås fremstillingen

$$\begin{matrix} x = \xi \\ y = \xi\tan\varphi - \frac{1}{2}g\xi^2/(v^2\cos^2\varphi) \end{matrix}\ , \qquad \xi \geqq 0 \ .$$

Kurven er således graf for en funktion af form

$$x \to ax + bx^2 \ , \quad x \geqq 0 \ ,$$

og dermed en parabelbue.

I parablens toppunkt, hvor y er størst, er der vandret tangent. Når projektilet/bolden passerer her, er hastigheden $(x'(t),y'(t))$ derfor vandret, dvs. $y'(t) = 0$. Tidspunktet er følgelig $t = v\sin\varphi/g$, der ved indsættelse i udtrykket for y giver <u>kastehøjden</u>

$$v^2\sin^2\varphi\,/(2g) \ .$$

"Nedslaget", hvor $y = 0$, indtræffer for $t = 2v\sin\varphi/g$. Den tilsvarende værdi for x, <u>kastevidden</u>, findes til

$$v^2 \sin 2\varphi \ /g \ .$$

Bemærk sluttelig, hvorledes kastevidden varieres med φ og v. For givet v fås den største kastevidde med $\varphi = 45^\circ$ og for givet φ vokser kastevidden med kvadratet på v. Hust det, næste gang du skal kaste en bold.

Taylor's grænseformel kan ofte give gode oplysninger om en given kurves forløb i omegnen af et kurvepunkt. Vi udmønter dette i sætningerne 5.2 og 5.3.

SÆTNING 5.2. Lad en C^n-kurve i planen, $n \geq 1$, være givet ved en parameterfremstilling $z = z(t)$, $t \in I$. Antag, at parameterværdien t ikke er et endepunkt for parameterintervallet I, samt at de afledede

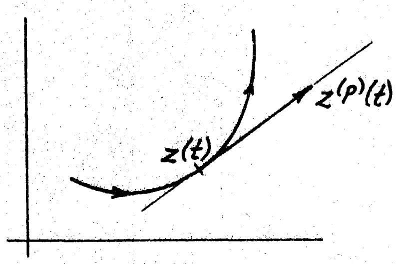
$$z'(t),\dots,z^{(n)}(t) \quad \text{ikke alle er } 0 \quad (\text{i tilfældet } n \in \mathbb{N}),$$

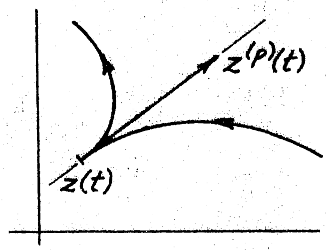
$$\text{resp. } z'(t),z''(t),\dots \quad \text{ikke alle er } 0 \quad (\text{i tilfældet } n = \infty).$$

Idet p betegner det første tal ≥ 1, for hvilket $z^{(p)}(t) \neq 0$, gælder da:

(1) Hvis p er ulige, så har kurven to modsat rettede halvtangenter i punktet $z(t)$, og tangenten har retning efter vektoren $z^{(p)}(t)$.

(2) Hvis p er lige, så har kurven en spids i punktet $z(t)$, og spidstangenten har retning efter vektoren $z^{(p)}(t)$.

p ulige: 

p lige: 

BEMÆRKNING. Tilfældet $p = 1$ er dækket ind af Sætning 5.1, men det dækkes også af beviset nedenfor.

BEVIS. Ifølge Taylors grænseformel har vi

$$\Delta z = z(t+\Delta t) - z(t) = \frac{(\Delta t)^p}{p!}\,(z^{(p)}(t)+\varepsilon(\Delta t)) \ ,$$

hvor $\varepsilon(\Delta t) \to 0$ for $\Delta t \to 0$. Vi slutter da først, at $\Delta z \neq 0$, dvs. $z(t+\Delta t) \neq z(t)$, blot $|\Delta t|$ er tilpas lille. For alle numerisk tilpas små $\Delta t \neq 0$ kan vi altså tale om halvlinien fra punktet $z(t)$ gennem punktet $z(t+\Delta t)$. Den har samme retning som Δz . Hvis p er ulige, er halvlinien altså ensrettet med vektoren $z^{(p)}(t) + \varepsilon(\Delta t)$ for $\Delta t > 0$ og ensrettet med $-z^{(p)}(t) - \varepsilon(t)$ for $\Delta t < 0$. Hvis p er lige, er halvlinien ensrettet med $z^{(p)}(t) + \varepsilon(\Delta t)$ uanset fortegnet for Δt . Idet $z^{(p)}(t) + \varepsilon(\Delta t) \to z^{(p)}(t)$ for $\Delta t \to 0$, fås påstanden heraf.

BEMÆRKNING. Der er ikke i sætningen sagt noget om kurvens forløb omkring $z(t)$ i tilfældet, hvor alle $z^{(q)}(t) = 0$. Da kan der f.eks. være knæk, ja det kan endda ske, at der slet ikke er halvtangenter i $z(t)$, selv når $z(t+\Delta t) \neq z(t)$ for alle (numerisk små) $\Delta t \neq 0$.

BEMÆRKNING. Hvad hidtil er sagt om kurven i planen gælder ord til andet for kurver i rummet, blot må vi afstå fra den komplekse skrivemåde og holde os til parameterfremstillinger på formen

$$(x,y,z) = (f(t),g(t),h(t)) \ , \ t \in I \ .$$

Undtagelse: I rummet har en kurve uendelig mange normaler i et kurvepunkt P , hvor der er tangent. De udfylder kurvens <u>normalplan</u> i P .

De begreber, der nu skal indføres, er derimod specielle for kurver i planen.

<u>Konveksitetspunkt</u>. <u>Vendepunkt</u>. En plan kurves forløb i omegnen af et kurvepunkt med modsat rettede halvtangenter kan ofte, men ikke altid, beskrives nærmere ved et af disse to ord.

<u>DEFINITIONER</u>. Lad en kontinuert kurve i planen være givet ved en parameterfremstilling $z = z(t)$, $t \in I$, og antag, at kurven i punktet $z(t)$ svarende til en parameterværdi t har modsat rettede halvtangenter.

Kurven siges da at være <u>konveks</u> i $z(t)$, hvis nabopunkterne $z(t+\Delta t)$ for alle numerisk tilstrækkeligt små $\Delta t \neq 0$ ligger på samme side af tangenten T i $z(t)$. Kurven siges at have et <u>vendepunkt</u> i $z(t)$, hvis $z(t+\Delta t)$ for alle tilstrækkeligt små $\Delta t > 0$ ligger på den ene side og for alle numerisk tilstrækkeligt små $\Delta t < 0$ ligger på den anden side af T . Tangenten i et vendepunkt kaldes en <u>vendetangent</u>.

<u>SÆTNING 5.3</u>. Forudsætningerne i Sætning 5.2 udbygges her: vi antager $n \geq 2$, og vi antager, at vektorerne

$$z'(t),\dots,z^{(n)}(t) \qquad (\text{i tilfældet } n \in \mathbb{N})$$
$$\text{resp. } z'(t), z''(t),\dots \qquad (\text{i tilfældet } n = \infty)$$

ikke alle ligger på samme linie. Antag endelig, at det første tal $p \geq 1$ for hvilket $z^{(p)} \neq 0$ er ulige, således at Sætning 5.2.(1) kan bruges.

Idet q betegner det første tal efter p , hvor $z^{(q)}(t)$ ikke ligger på samme linie som $z^{(p)}(t)$, gælder da:

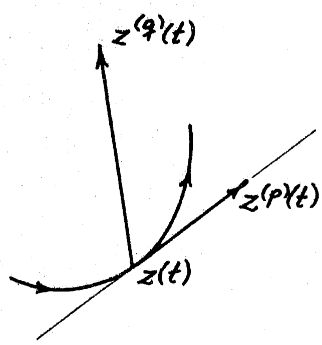
(1a) Hvis q er lige, så er kurven konveks i $z(t)$.

(1b) Hvis q er ulige, så har kurven et vendepunkt i $z(t)$.

I begge tilfælde er kurvens lokale forløb i forhold til tangenten T i $z(t)$ bestemt ved, at $z(t+\Delta t)$ for tilstrækkeligt små $\Delta t > 0$ ligger på den ved retningen af $z^{(q)}(t)$ bestemte side af T .

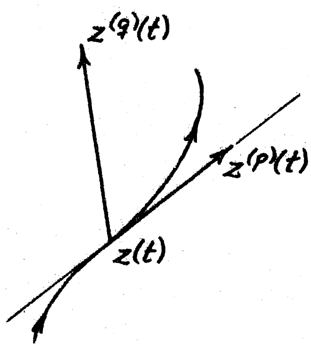
p ulige

q lige



p ulige

q ulige



BEVIS. Ifølge Taylors grænseformel har vi

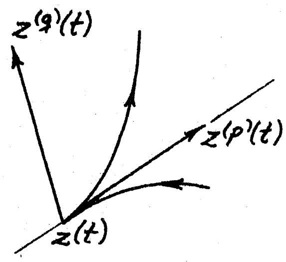
$$z(t+\Delta t)-z(t) = \frac{(\Delta t)^p}{p!}z^{(p)}(t)+\dots+\frac{(\Delta t)^{q-1}}{(q-1)!}z^{(q-1)}(t)+\frac{(\Delta t)^q}{q!}(z^{(q)}(t)+\varepsilon(\Delta t)),$$

hvor $\varepsilon(\Delta t) \to 0$ for $\Delta t \to 0$. Samtlige led på højre side pånær det sidste ligger på tangenten i $z(t)$, og det sidste ligger for numerisk tilstrækkeligt små $\Delta t \neq 0$ ikke på tangenten, men på samme side af tangenten som vektoren $(\Delta t)^q z^{(q)}(t)$, altså på samme eller modsat side af tangenten som vektoren $z^{(q)}(t)$, efter som $(\Delta t)^q > 0$ eller $(\Delta t)^q < 0$.

BEMÆRKNING. Er p lige i stedet for ulige, således at kurven har en spids i $z(t)$, vil kurvens lokale forløb i forhold til spidstangenter være som vist nedenfor. Beviset er det samme som ovenfor.

p lige

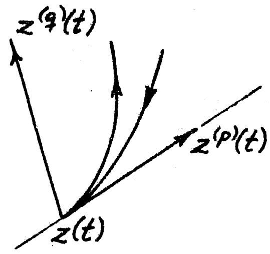
q ulige



Spids af 1. art

p lige

q lige



Spids af 2. art

BEMÆRKNING. Når man vil skaffe sig overblik over forløbet af en plan C^n-kurve, $n \geqq 2$, har det særlig betydning at bestemme eventuelle vendepunkter og spidser samt eventuelle helt udartede punkter.

Er kurven givet ved en C^n-parameterfremstilling $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in I$, må parameterværdierne t for sådanne kurvepunkter søges blandt løsningerne til ligningen

$$\det\begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Thi for ethvert t , hvor vektorerne $z'(t)$ og $z''(t)$, - med kinematiske ord: hastighed og acceleration, - ikke ligger på samme linie, er kurven konveks i $z(t)$, ifølge Sætning 5.3.(1a) med $p = 1$, $q = 2$.

EKSEMPEL. Vi betragter kurven givet ved parameterfremstillingen

$$x = 2t^6 - 3t^4 + 1 \ , \quad y = 2t^3 + 3t^2 - 3 \ , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

Kurven er en C^∞-kurve, og vi har

$$x' = 12t^5 - 12t^3 \qquad y' = 6t^2 + 6t$$
$$x'' = 60t^4 - 36t^2 \qquad y'' = 12t + 6 \ ,$$

altså

$$\det\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 12t^3(t+1)(t-1) & 6t(t+1) \\ 12t^2(5t^2-3) & 6(2t+1) \end{pmatrix}$$

$$= 72t^3(t+1)\det\begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ 5t^2-3 & 2t+1 \end{pmatrix} = -72t^3(t+1)^2(3t-2) ,$$

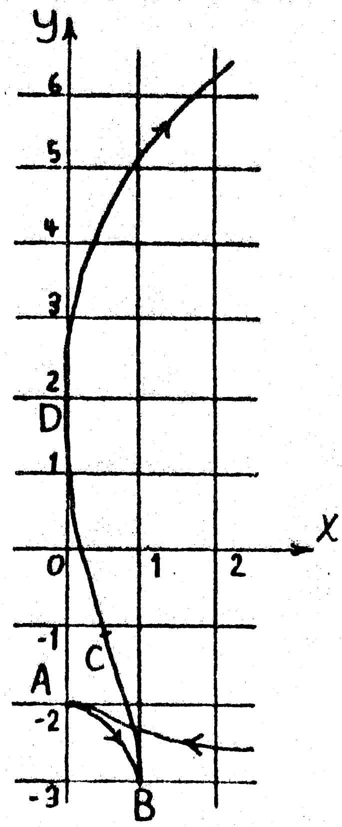
så at eventuelle vendepunkter og spidser må søges for parameterværdierne $t = -1, 0, \frac{2}{3}$. For hver af disse værdier beregner vi $(x,y), (x',y') (x'',y''), \ldots$, idet beregningerne føres så langt frem, at p og q er fundet. Idet

$$x''' = 240t^3 - 72t \qquad y''' = 12$$

$$x^{(4)} = 720t^2 - 72 \qquad y^{(4)} = 0 ,$$

finder vi de i tabellen opstillede resultater

t	-1	0	$\frac{2}{3}$
(x,y)	$(0,-2)$	$(1,-3)$	$(\frac{425}{729},-\frac{29}{27})$
(x',y')	$(0,0)$	$(0,0)$	$(-\frac{160}{81},\frac{20}{3})$
(x'',y'')	$(24,-6)$	$(0,6)$	$(-\frac{112}{27},14)$
(x''',y''')	$(-168,12)$	$(0,12)$	$(\frac{208}{9},12)$
$(x^{(4)},y^{(4)})$		$(-72,0)$	



For hver af værdierne af t er i søjlen af talpar $(x',y'),(x'',y''),\ldots$ understreget det første, der er $\neq (0,0)$, og derefter det første, der ikke er proportionalt med dette. Man ser, at kurven har en <u>spids af første art</u> i det til $t = -1$ svarende punkt $A = (0,-2)$; spidstangenten er bestemt ved vektoren $(24,-6)$, og vektoren $(-168,12)$ bestemmer kurvens forløb i forhold til tangenten. Kurven har en <u>spids af anden art</u> i det til $t = 0$ svarende punkt $B = (1,-3)$; spidstangenten er bestemt ved vektoren $(0,6)$, og kurven ligger i en omegn af B på samme side af tangenten som vektoren $(-72,0)$. Kurven har et <u>vendepunkt</u> i det til $t = \frac{2}{3}$ svarende punkt $C = (\frac{425}{729}, -\frac{29}{27})$; vendetangenten er bestemt ved vektoren $(-\frac{160}{81}, \frac{20}{3})$, og vektoren $(\frac{208}{9}, 12)$ bestemmer kurvens forløb i forhold til tangenten.

Ved tegningen er foruden det således fundne benyttet nogle flere punkter med tangent, blandt andet det til parameterværdien $t = 1$ svarende punkt $D = (0,2)$, hvor kurven har y-aksen til tangent. Det bemærkes, at der gælder

$$x \to +\infty \quad \text{og} \quad y \to -\infty \quad \text{for} \quad t \to -\infty$$

og

$$x \to +\infty \quad \text{og} \quad y \to +\infty \quad \text{for} \quad t \to +\infty \, .$$

§6. Kurvers længde.

Ligesom i §5 tillader vi os - gennem valg af et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XY - at identificere planen med $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{C}$.

<u>Længde af kontinuert kurve</u>. Vi betragter en kontinuert kurve i planen givet ved en parameterfremstilling

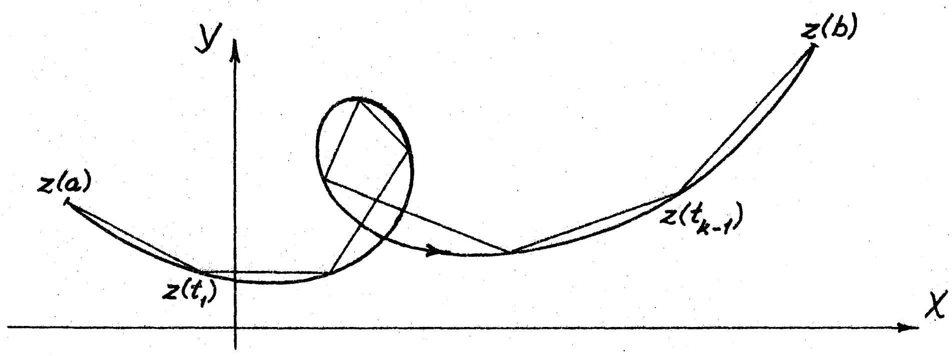
$$(x,y) = (x(t),y(t)) \quad \text{eller} \quad z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad , \quad t \in [a,b] ,$$

med begrænset, afsluttet parameterinterval. Vi ønsker at tilskrive kurven et længdetal ℓ .

For enhver inddeling D af $[a,b]$ ved delepunkter $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$ betragtes længden

$$\ell(D) = \sum_{j=1}^{k} |z(t_j)-z(t_{j-1})|$$

af den brudte linie bestemt ved punkterne $z(a), z(t_1), \ldots, z(t_{k-1}), z(b)$.



Det er et rimeligt ønske, at $\ell \geqq \ell(D)$ for enhver inddeling D , og ligeledes at ℓ kan tilnærmes med tal $\ell(D)$. Vi definerer:

<u>DEFINITION</u>. Ved <u>længden</u> ℓ af kurven forstås supremum af talmængden $\{\ell(D)\}$, hvor D gennemløber af inddelinger af $[a,b]$, altså

$$\ell = \sup\{D\} .$$

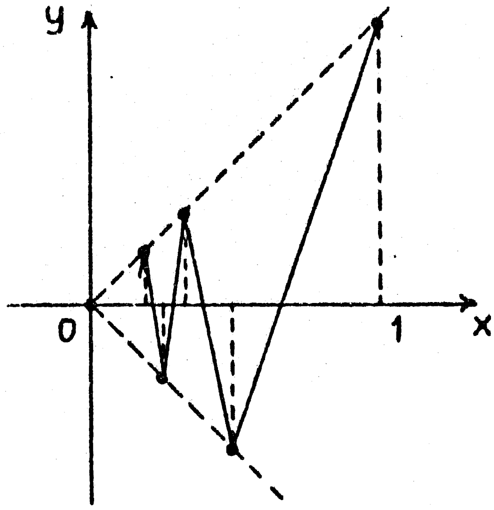
Bemærk, at $0 < \ell \leqq \infty$. Hvis $\ell < \infty$, kaldes kurven <u>rektifikabel</u> (eller rektificerbar).

Her har vi støttet os til en bestemt parameterfremstilling, men som man let gør sig klart, ændres talmængden $\{\ell(D)\}$ ikke ved et parameterskift, og det er følgelig uden betydning, hvilken parameterfremstilling der benyttes.

EKSEMPEL. Der findes kontinuerte kurver med begrænset, afsluttet parameterinterval, der ikke er rektifikable, dvs. har længden $\ell = \infty$. Som et simpelt eksempel nævnes grafen for funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, hvor

$$f(0) = 0$$
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^{n-1}\frac{1}{n} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N},$$

og som har retlinet graf i hvert af intervallerne $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$.



Det er klart, at $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ er kontinuert. (Overvej specielt punktet 0 .) Grafen, hvor vi vil benytte x som parameter, er altså en kontinuert kurve. At

$$\ell = \sup\{D\} = \infty ,$$

kan man se ved specielt at betragte følgen $D_1, D_2, \ldots$ af inddelinger af parameterintervallet $[0,1]$, hvor D_n har delepunkterne

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} < \ldots < \frac{1}{2} < 1 .$$

Om længden $\ell(D_n)$ af den brudte linie bestemt ved punkterne

$$(0,0),\ \left(\frac{1}{n}, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n-1}, (-1)^{n-1}\frac{1}{n-1}\right), \ldots, (1,1)$$

gælder åbenbart $\ell(D_n) > 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$. Da den harmoniske række er divergent, er allerede $\sup\{D_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \infty$.

Et par simple, generelle resultater:

<u>SÆTNING 6.1</u>. Længden ℓ' af en delkurve af en kontinuert kurve med begrænset afsluttet parameterinterval er mindre eller lig længden ℓ af hele kurven, $\ell' \leq \ell$.

Præcist: Lad en kontinuert kurve være givet ved en parameterfremstilling $z = z(t)$, $t \in [a,b]$, og lad $a \leqq a' < b' \leqq b$. Da er

$$\ell' \leqq \ell ,$$

hvor ℓ' er længden af delkurven $z = z(t)$, $t \in [a',b']$, og ℓ er længden af hele kurven.

BEVIS. For en vilkårlig inddeling D' af $[a',b']$ fås ved tilføjelse af a (hvis $a < a'$) og b (hvis $b' < b$) er inddeling D af $[a,b]$, og for længderne $\ell(D')$ og $\ell(D)$ af de tilsvarende brudte linier gælder åbenbart $\ell(D') \leqq \ell(D)$. Da således $\ell(D') \leqq \ell$ for enhver inddeling D' af $[a',b']$, sluttes

$$\ell' = \sup\{\ell(D')\} \leqq \ell . \qquad \square$$

Bemærk specielt, at en delkurve af en rektifikabel kurve ligeledes er rektifikabel. Thi hvis $\ell < \infty$, så er jo også $\ell' < \infty$.

<u>SÆTNING 6.2</u>. Deles en kontinuert kurve med begrænset, afsluttet parameterinterval i to, er længden ℓ lig summen $\ell_1 + \ell_2$ af delenes længder.

Præcist: Lad en kontinuert kurve være givet ved en parameterfremstilling $z = z(t)$, $t \in [a,c]$, og lad $a < b < c$. Da er

$$\ell = \ell_1 + \ell_2 ,$$

hvor ℓ er kurvens længde, medens ℓ_1 og ℓ_2 er længderne af de to delkurver $z = z(t)$, $t \in [a,b]$, henholdsvis $z = z(t)$, $t \in [b,c]$.

BEVIS. 1°. $\ell \geqq \ell_1 + \ell_2$. To vilkårlige inddelinger D' og D'' af henholdsvis $[a,b]$ og $[b,c]$ bestemmer en inddeling D af $[a,b]$, og for længderne $\ell(D')$, $\ell(D'')$, $\ell(D)$ af de tilsvarende brudte linier gælder åbenbart $\ell(D') + \ell(D'') = \ell(D)$. Følgelig er

$$\ell(D') + \ell(D'') \leqq \ell .$$

For fastholdt D'' følger heraf (da D' var vilkårlig)

$$\ell_1 + \ell(D'') = \sup\{\ell(D')\} + \ell(D'') \leqq \ell ,$$

og heraf følger videre (da D'' var vilkårlig)

$$\ell_1 + \ell_2 = \ell_1 + \sup\{\ell(D'')\} \leqq \ell .$$

2°. $\ell \leqq \ell_1 + \ell_2$. For en vilkårlig inddeling D af $[a,c]$ fås ved indføjelse af b som delepunkt en ny inddeling D^*. (Hvis b allerede er delepunkt ved D, sættes $D^* = D$.) For længderne af de tilsvarende brudte linier gælder åbenbart $\ell(D) \leqq \ell(D^*)$. Inddelingen D^* bestemmer en inddeling D' af $[a,b]$ og en inddeling D'' af $[b,c]$, og for længderne af de tilsvarende brudte linier gælder $\ell(D^*) = \ell(D') + \ell(D'')$. Altså er

$$\ell(D) \leqq \ell(D^*) = \ell(D') + \ell(D'') \leqq \ell_1 + \ell_2 .$$

Da D var vilkårlig, følger heraf, at

$$\ell = \sup\{\ell(D)\} \leqq \ell_1 + \ell_2 . \qquad \Box$$

Som umiddelbar konsekvens af Sætning 6.2 bemærkes, at en kontinuert kurve er rektifikabel, hvis den kan deles i to rektifikable delkurver. Thi hvis $\ell_1 < \infty$ og $\ell_2 < \infty$, så er jo også $\ell_1 + \ell_2 < \infty$.

Mere raffineret er

SÆTNING 6.3. Lad en kontinuert kurve være givet ved en parameterfremstilling $z = z(t)$, $t \in [a,b]$, og lad ℓ være kurvens længde. Til hvert tal $\lambda < \ell$ findes da et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at

$$\ell(D) > \lambda$$

for enhver inddeling D af $[a,b]$ af finhed $< \delta$.

Ved finheden af en inddeling D med delepunkter

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$$

forstår vi tallet $\max\{t_j - t_{j-1} \mid j = 1,\ldots,k\}$, jf. §1.

BEVIS. Betragt et vilkårligt $\lambda < \ell$. Vælg et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, således at $\lambda + \varepsilon < \ell$, og derefter en inddeling D^* af $[a,b]$ med $\ell(D^*) > \lambda + \varepsilon$. Idet delepunkterne ved D^* betegnes $a = t_0^* < t_1^* < \ldots < t_{p-1}^* < t_p^* = b$, sætter vi

$$\alpha = \min\{t_i^* - t_{i-1}^* \mid i = 1,\ldots,p\} .$$

For hvert $i \in \{0,1,\ldots,p-1,p\}$ udnyttes nu, at $z = z(t)$ er kontinuert i t_i^*: Vi vælger $\delta_i \in]0,\alpha[$, således at

$$|z(t)-z(t_i^*)| < \frac{\varepsilon}{2p} \quad \text{for alle} \quad t \in]t_i^*-\delta_i, t_i^*+\delta_i[\cap [a,b] .$$

Vi vil vise, at $\delta = \min\{\delta_1,\ldots,\delta_p\}$ er brugbart. Hertil betragter vi en vilkårlig inddeling D af $[a,b]$ af finhed $< \delta$ og skal vise, at $\ell(D) > \lambda$. Delepunkterne ved D betegnes $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$. For det enkelte $i \in \{1,2,\ldots,p\}$ gælder, idet $t_u,\ldots,t_v$ er de delepunkter ved D , der tilhører $]t_{i-1}^*, t_i^*[$, at den brudte linie bestemt ved punkterne $z(t_{i-1}^*), z(t_u),\ldots,z(t_v), z(t_i^*)$ har en længde $\geqq |z(t_i^*)-z(t_{i-1}^*)|$. Da $t_u - t_{i-1}^* \leqq t_u - t_{u-1} < \delta \leqq \delta_{i-1}$, ved vi, at $|z(t_u)-z(t_{i-1}^*)| < \frac{\varepsilon}{2p}$, og tilsvarende indses $|z(t_i^*)-z(t_v)| < \frac{\varepsilon}{2p}$. Den brudte linie bestemt ved punkterne $z(t_u),\ldots,z(t_v)$ har derfor en længde større end

$$|z(t_i^*)-z(t_{i-1}^*)| - \frac{\varepsilon}{p} .$$

Følgelig er

$$\ell(D) > \sum_{i=1}^{p}\left(|z(t_i^*)-z(t_{i-1}^*)| - \frac{\varepsilon}{p}\right) = \ell(D^*) - \varepsilon > \lambda . \qquad \square$$

BEMÆRKNING. Det hidtil sagte kan gentages ord til andet for kontinuerte kurver i rummet eller endda i et vilkårligt metrisk rum (M,d) , jf. bemærkning i §5, p. 48. Kun må man i sidste tilfælde indføre $\ell(D)$ på formen

$$\ell(D) = \sum_{j=1}^{k} d(z(t_{j-1}), z(t_j))$$

og give afkald på at fortolke dette som længden af en brudt linie.

I øvrigt vil den skarpsindige læser have bemærket, at kontinuiteten af $z = z(t)$ kun er benyttet i Sætning 6.3.

Det følgende, hvor vi betragter C^n-kurver i planen, kan umiddelbart overføres til rummet (men naturligvis ikke til et vilkårligt metrisk rum).

<u>Længde af C^1-kurve</u>. Om C^1-kurver gælder følgende hovedsætning:

<u>SÆTNING 6.4</u>. Enhver C^1-kurve med begrænset, afsluttet parameterinterval er rektifikabel. Er $(x,y) = (x(t),y(t))$ eller $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a,b]$, en parameterfremstilling for kurven, da er kurvens længde

$$\ell = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \int_a^b |z'(t)|dt .$$

BEVIS. Vi sætter

$$I = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \int_a^b |z'(t)|dt .$$

For enhver inddeling D af $[a,b]$ ved delepunkter $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$ har vi for længden $\ell(D)$ af den tilsvarende brudte linie

$$\ell(D) = \sum_{j=1}^{k} |z(t_j) - z(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{k} \left|\int_{t_{j-1}}^{t_j} z'(t)dt\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |z'(t)|dt = \int_a^b |z'(t)|dt = I .$$

Følgelig gælder $\ell \leq I$.

Skrives $\ell(D)$ på formen

$$\ell(D) = \sum_{j=1}^{k} \sqrt{[x(t_j)-x(t_{j-1})]^2 + [y(t_j)-y(t_{j-1})]^2} ,$$

fås ved brug af differentialregningens middelværdisætning (Sætning 2.7):

$$\ell(D) = \sum_{j=1}^{k} \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\eta_j)^2}\,(t_j - t_{j-1}) ,$$

hvor $\xi_j, \eta_j \in]t_{j-1}, t_j[$, $j = 1,\ldots,k$. Skrives I på formen

$$I = \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt ,$$

fås ved brug af integralregningens middelværdisætning (Sætning 1.8):

$$I = \sum_{j=1}^{k} \sqrt{x'(\zeta_j)^2 + y'(\zeta_j)^2}\ (t_j - t_{j-1}) ,$$

hvor $\zeta_j \in]t_{j-1}, t_j[$, $j = 1,\dots,k$. Følgelig gælder

$$(0 \leq) I - \ell(D) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sqrt{x'(\zeta_j)^2 + y'(\zeta_j)^2} - \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\eta_j)^2} \right) (t_j - t_{j-1}) .$$

Vi bemærker nu, at funktionen

$$(\xi,\eta) \to \sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\eta)^2} : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$$

er kontinuert og dermed uniformt kontinuert ifølge Sætning II.4.4, da jo $[a,b] \times [a,b]$ er kompakt, ifølge Sætning II.4.5. Til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes altså et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at

$$\left| \sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\eta)^2} - \sqrt{x'(\tilde{\xi})^2 + y'(\tilde{\eta})^2} \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

for alle par $(\xi,\eta), (\tilde{\xi},\tilde{\eta}) \in [a,b] \times [a,b]$, for hvilke $|\xi - \tilde{\xi}| < \delta$, $|\eta - \tilde{\eta}| < \delta$. Benyttes en inddeling D med finhed $\varphi(D) = \max\{t_j - t_{j-1} \mid j = 1,\dots,k\} < \delta$, gælder følgelig

$$(0 \leq) I - \ell(D) < \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon}{b-a} (t_j - t_{j-1}) = \varepsilon .$$

Altså er $I - \ell \leqq \varepsilon$, for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Følgelig er $(0 \leqq) I - \ell \leqq 0$, altså $\ell = I$. □

Som specialtilfælde noteres, at længden af grafen for en C^1-funktion $y = f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ er

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx .$$

Det fremgår af Sætning 6.4, idet x benyttes som parameter.

<u>Buelængde som funktion af parameter</u>. Idet $(x,y) = (x(t),y(t))$ eller $z = z(t)$, $t \in I$, er en parameterfremstilling for en kontinu-

ert kurve med vilkårligt parameterinterval I, vil vi for hvert begrænset, afsluttet delinterval $[t_1,t_2] \subseteq I$ betegne længden af den tilsvarende delkurve med $\ell(t_1,t_2)$.

Vælges et $t_0 \in I$, er buelængden $s = s(t)$ langs kurven fra det faste kurvepunkt $z(t_0)$ til det løbende punkt $z(t)$, regnet med fortegn, givet ved

$$s = \begin{cases} \ell(t_0,t) & \text{for} \quad t > t_0 \ , \ t \in I \\ 0 & \text{for} \quad t = t_0 \\ -\ell(t,t_0) & \text{for} \quad t < t_0 \ , \ t \in I \ . \end{cases}$$

Det er "buelængden som funktion af parameteren t, med $z(t_0)$ som udgangspunkt".

Det er klart, at man ved at sammensætte $s(t)$, $t \in I$, med et voksende parameterskift $t = \varphi(u)$ får "buelængden som funktion af den nye parameter u", regnet ud fra samme kurvepunkt.

Antag nu, at $(x,y) = (x(t),y(t))$ eller $z = z(t)$, $t \in I$, er en parameterfremstilling for en C^n-kurve, $n \geqq 1$. Da er buelængden $s = s(t)$, $t \in I$, som funktion af parameteren t (regnet fra et vilkårligt kurvepunkt $z(t_0)$) af klasse C^n og

$$\frac{ds}{dt} = |z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \ , \quad t \in I \ .$$

Thi ifølge Hovedsætning 6.4 er

$$s = \int_{t_0}^{t} |z'(\tau)| d\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} \, d\tau \ ,$$

og differential- og integralregningens hovedsætning (Sætning 2.11) giver så, at $s = s(t)$ er differentiabel med

$$\frac{ds}{dt} = |z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \ , \quad t \in I \ .$$

BEMÆRKNING. Ligningen $s'(t) = |z'(t)|$ har et interessant geometrisk indhold, når den fælles værdi ikke er 0, nemlig:

forholdet mellem kordelængde $|\Delta z| = |z(t+\Delta t) - z(t)|$ og buelængde $|\Delta s| = |s(t+\Delta t) - s(t)|$ går mod 1, når nabopunktet $z(t+\Delta t)$ rykker ind mod $z(t)$ langs kurven.

Dette følger af, at

$$\frac{|\Delta z|}{|\Delta s|} = \frac{|\Delta z|}{|\Delta t|} : \frac{|\Delta s|}{|\Delta t|} \to |z'(t)| : s'(t) \quad \text{for} \quad \Delta t \to 0 \ .$$

Når $z = z(t)$ opfattes som beskrivelse af et punkts bevægelse, er $s = s(t)$ den tilbagelagte vejlængde. Ligningen $s'(t) = |z'(t)|$ viser da, at farten, som vi i §5 definerede som $|z'(t)| = \lim \frac{|\Delta z|}{|\Delta t|}$, også kan fås ved differentiation af den tilbagelagte vej s med hensyn til tiden t.

Naturlig parameterfremstilling.

DEFINITION. En parameterfremstilling $(x,y) = (x(t),y(t))$ eller $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in I$, for en kontinuert kurve med vilkårligt parameterinterval I kaldes naturlig, hvis

$$\ell(t_1,t_2) = t_2 - t_1$$

for alle $t_1,t_2 \in I$ med $t_1 < t_2$. Her står $\ell(t_1,t_2)$ som i det foregående afsnit for længden af delkurven svarende til parameterintervallet $[t_1,t_2]$.

Betingelsen er ensbetydende med, at buelængden som funktion af parameteren - med et tilfældigt kurvepunkt $z(t_0)$ som udgangspunkt - har formen

$$s = s(t) = t + \text{konstant} \ , \quad t \in I \ .$$

Thi kravet $\ell(t_1,t_2) = t_2 - t_1$ medfører specielt $s(t) = t - t_0$, og omvendt giver Sætning 6.2 ved gennemgang af de forskellige beliggenhedsmuligheder af $t_1 < t_2$ i forhold til t_0, at

$$\ell(t_1,t_2) = s(t_2) - s(t_1) = t_2 - t_1 \ .$$

I en naturlig parameterfremstilling $z = z(t)$, $t \in I$, har parameteren t således en simpel geometrisk betydning: pånær en konstant er t lig kurvelængden fra et fast kurvepunkt $z(t_0)$ til det løbende punkt $z(t)$. Kurvelængden regnes her med fortegn i overensstemmelse med gennemløbsretningen på kurven. - Parameterværdierne "strøet ud langs kurven" danner en længdeskala. - Ofte ser man da også begrebet naturlig parameterfremstilling kort forklaret som en "fremstilling med buelængden som parameter", og det er gængs at kalde parameteren s .

En given kurve med given gennemløbsretning har naturligvis højst én naturlig parameterfremstilling, når bortses fra parameterskift af typen $t = u + \text{konstant}$. Betingelsen for, at et voksende parameterskift $t = \varphi(u)$ i en naturlig parameterfremstilling $z = z(t)$ igen fører til en naturlig parameterfremstilling, er jo, at buelængden som funktion af den nye parameter, $s(\varphi(u)) = \varphi(u) + \text{konstant}$, har formen $u + \text{konstant}$, dvs. at $\varphi(u) = u + \text{konstant}$.

Endnu har vi ikke udtalt os om eksistensen af naturlige parameterfremstillinger for en given kurve. Det er åbenbart nødvendigt, at enhver delkurve med begrænset, afsluttet parameterinterval er rektifikabel, altså at alle længder $\ell(t_1,t_2)$ er endelige, men det er ikke tilstrækkeligt: tænk blot på C^∞-kurven givet ved en fremstilling $z(t) = \text{konstant}$. Vi vil nøjes med følgende hovedtilfælde.

<u>SÆTNING 6.5.</u> Når en C^n-kurve, $n \geqq 1$, har en parameterfremstilling $(x,y) = (x(t),y(t))$ eller $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in I$, hvor

$$\forall t \in I\colon (x'(t),y'(t)) \neq (0,0) \quad \text{eller} \quad \forall t \in I\colon z'(t) \neq 0 ,$$

da har den også en naturlig parameterfremstilling. Denne fremstiller kurven som C^n-kurve.

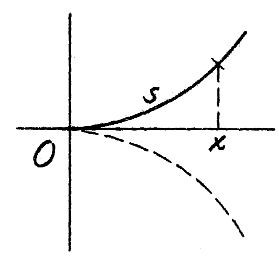
Vælges altså et kurvepunkt z_0 på en C^n-kurve af den beskrevne art, og "bruges buelængden regnet fra z_0 som parameter", da fås en "pæn" parameterfremstilling, dvs. en C^n-fremstilling, af kurven.

BEVIS. Lad en C^n-kurve være givet ved en parameterfremstilling som beskrevet. Buelængden $s = s(t)$, $t \in I$, fra et fast kurvepunkt $z(t_0)$ til det løbende punkt $z(t)$ regnet med fortegn er da som vist i foregående afsnit af klasse C^n med

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} , \quad t \in I .$$

Ifølge forudsætning er $x'(t)^2 + y'(t)^2 > 0$ og dermed $\frac{ds}{dt} > 0$ for alle t. Funktionen $s = s(t)$ afbilder derfor intervallet I voksende og bijektivt på et interval J, og den omvendte funktion $t = t(s)$ er af klasse C^n med $\frac{dt}{ds} = 1 : \frac{ds}{dt}$, altså med afledet > 0. Med $t = t(s)$, $s \in J$, som parameterskift får vi derfor en ny fremstilling af vor C^n-kurve, og netop en naturlig parameterfremstilling: buelængden som funktion af den nye parameter s udtrykkes jo ved $s(t(s)) = s$, - parameteren er lig buelængden fra det faste kurvepunkt.

EKSEMPEL. Den ved ligningen $y^2 = x^3$ bestemte kurve kaldes en <u>semikubisk parabel</u>. Den i første kvadrant liggende del er grafen af funktionen $y = x^{3/2}$. Dette er en C^1-funktion på $[0,+\infty[$. Idet x benyttes som parameter, fås for buelængden regnet fra begyndelsespunktet udtrykket



$$s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1+(\tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\,dx = \tfrac{8}{27}(1+\tfrac{9}{4}x)^{3/2} - \tfrac{8}{27},$$

hvoraf fremgår den naturlige parameterfremstilling

$$(x,y) = \left(\tfrac{4}{9}(1+\tfrac{27}{8}s)^{2/3} - \tfrac{4}{9},\ [\tfrac{4}{9}(1+\tfrac{27}{8}s)^{2/3} - \tfrac{4}{9}]^{3/2}\right).$$

BEMÆRKNING. Ved teoretiske undersøgelser vedrørende C^n-kurver er det ofte en fordel at benytte naturlig parameterfremstilling. I konkrete eksempler er det som regel uhensigtsmæssigt; man vil her foretrække en parameterfremstilling, der giver simple regneudtryk.

BEMÆRKNING. En parameterfremstilling $z = z(t)$, $t \in I$, for en C^1-kurve er naturlig, netop hvis $s'(t) = |z'(t)| = 1$ for alle $t \in I$. Thi kravet var jo $s(t) = t + \text{konstant}$. - Med kinematiske ord er betingelsen, at kurven gennemløbes med den konstante fart 1.

<u>Enhedscirklen</u>. Som et vigtigt eksempel vil vi studere enhedscirklen i $\mathbb{R}^2$. Som punktmængde er det

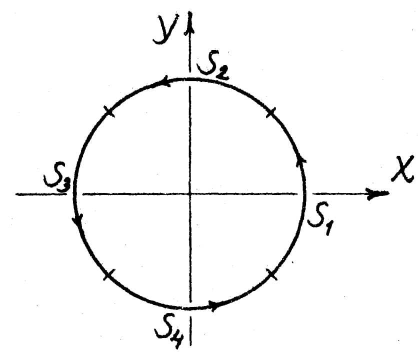
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Vi skal se, at punkterne falder på én lukket C^∞-kurve Γ.

Faktisk har vi allerede i en bemærkning i §5, p. III.48, mødt Γ som vort første eksempel på en lukket kurve, med fremstillingen $x = \cos u$, $y = \sin u$ med parameterinterval $[a,a+2\pi]$. Vi vil imidlertid senere, i kapitel V, gøre rede for den sædvanlige indførelse af funktionerne cos og sin, der netop bygger på cirkelbuers længde, eventuelt forklædt som vinkelmåling, og vi skylder derfor en behandling af enhedscirklen uden støtte i trigonometriske funktioner.

Bemærk først, at

$$S = \{(x,y) \in S \mid x^2 \leqq \tfrac{1}{2} \leqq y^2\} \cup \{(x,y) \in S \mid y^2 \leqq \tfrac{1}{2} \leqq x^2\} .$$



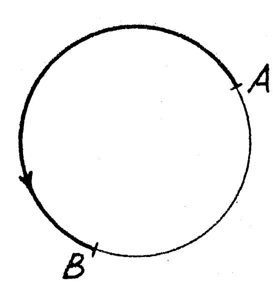
Den første mængde falder i to dele S_2 og S_4, nemlig graferne for de to funktioner

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{og} \quad y = -\sqrt{1-x^2}$$

betragtet på intervallet $I = [-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2}]$. Det er således to C^∞-kurver. Vi tænker os S_4 gennemløbet efter voksende værdier af x, S_2 efter aftagende værdier af x, svarende til parameterskiftet $x = -t$, $t \in I$. Den anden mængde falder tilsvarende i to C^∞-kurver S_1 og S_3 med fremstillinger

$$(x,y) = (\sqrt{1-t^2},t) , \ t \in I \quad \text{og} \quad (x,y) = (-\sqrt{1-t^2},-t) , \ t \in I .$$

Taget i den cykliske rækkefølge S_1, S_2, S_3, S_4, S_1 er slutpunktet for hver kurve = begyndelsespunktet for den følgende. De føjer sig derfor sammen til én lukket kontinuert kurve, Γ.



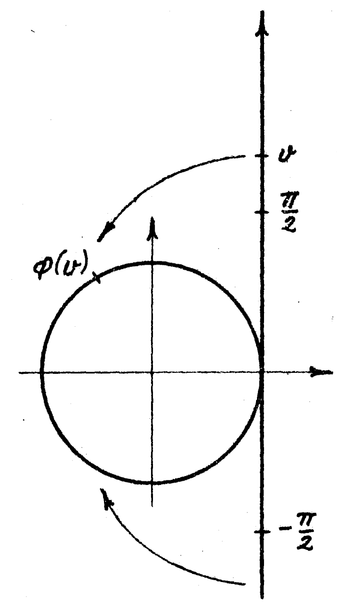
Der er herefter klart, at to vilkårlige punkter A og B på S bestemmer en <u>cirkelbue</u>, $\smile AB$, nemlig delkurven af Γ fra A til B. - Vi betragter Γ med det gennemløb, der stemmer med de valgte gennemløb af S_1, S_2, S_3 og S_4.

Kurven Γ er rektifikabel, da S_1, S_2, S_3 og S_4 er det. (Sætning 6.2.) Og dermed er enhver cirkelbue rektifikabel. (Sætning 6.1.)

<u>DEFINITION</u>. Tallet π defineres som den halve længde af enhedscirklen Γ.

Da S_1, S_2, S_3 og S_4 kan føres over i hinanden ved spejlinger, har de samme længde, som så må være $\frac{1}{2}\pi$. Hver af buerne S_1, S_2, S_3, S_4 har ifølge Sætning 6.5 en naturlig parameterfremstilling, med frihed til parameterskift af typen $u = v + \text{konstant}$. Vi vælger den naturlige parameterfremstilling $(x,y) = (x(v),y(v))$ for S_1 med udgangspunkt i $(1,0)$. Den har parameterintervallet $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$. Den fortsættes i den naturlige parameterfremstilling for S_2 med parameterinterval $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ og videre i naturlige parameterfremstillinger for S_3 og S_4 . Fra S_4 kan man igen fortsætte til S_1 , men parameterværdierne her ligger nu 2π over de oprindelige. Ved dels at fortsætte fremad og dels på samme måde arbejde sig den modsatte vej opnår man en afbildning $\varphi\colon v \to (x(v),y(v))$ af hele $\mathbb{R}$ på enhedscirklen med periode 2π . Den kaldes <u>opviklingen</u> af $\mathbb{R}$ på Γ .

Opviklingen φ kan måske anskueliggøres på følgende måde: Tænkes linien $x = 1$ "bøjelig", men sat fast til Γ i punktet $(1,0)$, er billedet ved φ af $v \in \mathbb{R}$ det punkt på Γ, som v falder i, når linien "vikles" stramt op rundt om Γ .



Det er nu klart, at Γ er en C^∞-kurve, med en naturlig parameterfremstilling af klasse C^∞ , idet opviklingen φ er en C^∞-afbildning af hele $\mathbb{R}$. Det er kun ved sammenføjningspunkterne, der er problemer. Ser vi f.eks. på $v = \frac{\pi}{4}$, har vi imidlertid, at φ betragtet på det åbne interval $]0,\pi[$ er af klasse C^∞ ifølge Sætning 6.5; det er nemlig en naturlig parameterfremstilling for den åbne cirkelbue fra $(1,0)$ til $(-1,0)$, som er graf for C^∞-funktionen $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in]-1,1[$.

Det skal bemærkes, at de fire sammenføjningspunkter på Γ ikke reelt indtager nogen særstilling. Delingen i S_1, S_2, S_3, S_4 er foretaget af rent bevistekniske grunde. (Hvorfor har vi i øvrigt ikke nøjedes med at stykke Γ sammen af de to grafer $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$, og $y = -\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$?)

Det skal til afslutning røbes, at cos og sin i dette kursus

<u>defineres</u> som de to koordinatfunktioner for opviklingen $\varphi: v \to (x(v), y(v))$. Denne kan så skrives $\varphi: v \to (\cos v, \sin v)$, $v \in \mathbb{R}$. En nærmere behandling af de to funktioner vil blive givet i Kapitel V. Foreløbig noteres, at de er af klasse C^∞ og periodiske med periode 2π , samt at $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ for alle $v \in \mathbb{R}$.

<u>Vinkelmål</u>. <u>Polære koordinater</u>. Da vi nu behersker begreberne cirkelbue og længde af cirkelbue, kan vi uden vanskelighed definere måltal for vinkler.

En <u>halvlinie</u> i planen ud fra $(0,0)$ er en mængde af form

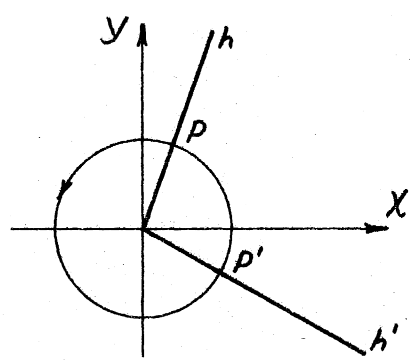
$$h = \{(at,bt) \mid t \in [0,\infty[\} ,$$

hvor $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Den har netop ét punkt fælles med enhedscirklen, kaldet <u>retningspunktet</u> for h , nemlig

$$P = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) .$$

Gennem hvert fra $(0,0)$ forskelligt punkt i planen går netop én halvlinie.

<u>Vinklen mellem</u> to halvlinier h og h' ud fra $(0,0)$ defineres som længden af den korteste af de to buer $\smile PP'$ og $\smile P'P$ på enhedscirklen Γ , hvor P og P' er retningspunkterne for h og h' . Det er et tal tilhørende $[0,\pi]$.



Man taler også om (den med fortegn regnede) <u>vinkel fra</u> h <u>til</u> h' , med hvert af tallene

$$\text{længde af } \smile PP' + p2\pi , \quad p \in \mathbb{Z} ,$$

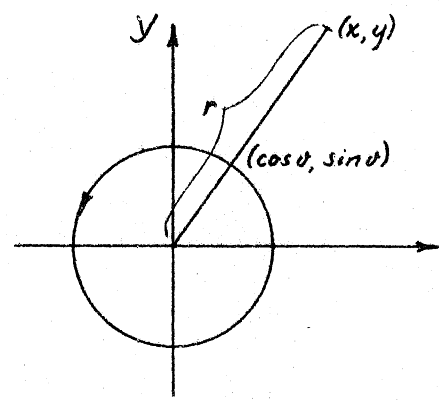
som måltal. Det er længden regnet med fortegn af $\smile PP'$ fulgt af et antal omløb af Γ med eller mod gennemløbsretningen.

Hvert måltal v for vinklen fra den positive X-akse til en halvlinie h ud fra $(0,0)$ kaldes en <u>retningsvinkel</u> for h . Retningsvinklerne for h er åbenbart de tal $v \in \mathbb{R}$, der ved oprulningen φ føres over i retningspunktet P for h , - $\varphi(v) = (\cos v, \sin v) = P$.

Ved <u>polære koordinater</u> for et punkt $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{0,0\}$ forstås ethvert par (r,v) , hvor $r = \sqrt{x^2+y^2}$, medens v er en retningsvinkel for halvlinien fra $(0,0)$ gennem (x,y). Sammenhængen er altså

$$x = r \cos v$$
$$y = r \sin v ,$$

hvor $r \in \mathbb{R}_+$ og $v \in \mathbb{R}$.



Når man arbejder med $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}^2$, kaldes polære koordinater $r = |z|$ og v for $z = x + iy \neq 0$ henholdsvis <u>modulus</u> og <u>argument</u> for z.

BEMÆRKNING. To reelle C^n-funktioner $r = r(t) > 0$ og $v = v(t)$ defineret på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ bestemmer en parameterfremstilling for en C^n-kurve i planen nemlig

$$(*) \qquad \begin{aligned} x &= x(t) = r(t)\cos v(t) , \\ y &= y(t) = r(t)\sin v(t) , \end{aligned} \qquad t \in I ,$$

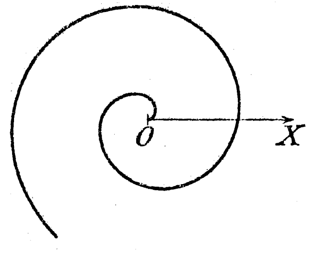
hvor kurvepunktet $(x(t),y(t))$ for hvert $t \in I$ er givet ved sine polære koordinater $r(t)$ og $v(t)$. Man siger, at $r = r(t)$, $v = v(t)$, $t \in I$, er en <u>fremstilling af kurven i polære koordinater</u>. - Sætter man sig ud over kravet $r(t) > 0$, vil $(*)$ stadig fremstille en C^n-kurve.

Et vigtigt specialtilfælde er

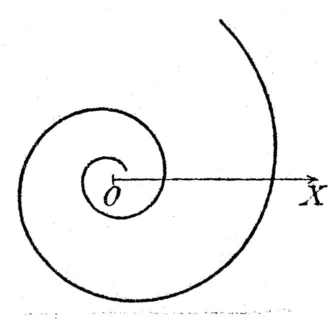
$$\begin{aligned} x &= x(v) = r(v)\cos v , \\ y &= y(v) = r(v)\sin v , \end{aligned} \qquad v \in I ,$$

hvor parameteren v er en retningsvinkel for kurvepunktet $(x(v),y(v))$. Her siger man, at kurven er givet i <u>polære koordinater ved ligningen</u> $r = r(v)$, $v \in I$.

EKSEMPEL. Kurven givet i polære koordinater ved $r = av$, $v \in [0,\infty[$, hvor $a \in \mathbb{R}_+$, kaldes <u>Arkimedes' spiral</u>. Den starter i $(0,0)$ og har uendelig mange vindinger. Kurven givet ved $r = ae^{bv}$, $v \in]-\infty,\infty[$, hvor $a,b \in \mathbb{R}_+$, kaldes en <u>logaritmisk spiral</u>. Den har uendelig mange vindinger, ikke blot udad, men også indad mod $(0,0)$.



Arkimedes' spiral



Logaritmisk spiral

Cirkelskivens areal. Vi vil vise, at arealet af enhedscirkelskiven

$$K = K((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$$

er lig den halve omkreds af enhedscirklen Γ, – som vi jo per definition har sat til π.

BEVIS. Vi benytter, at

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]-1,1[\ ,\ -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}\}$$

har arealet

$$A = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx .$$

Da cirkelbuerne i de fire kvadranter kan føres over i hinanden ved spejlinger, har de samme længde, som så må være $\frac{1}{2}\pi$.

For vilkårligt $\eta \in]0,1[$ vil punktet $P_\eta = (\sqrt{1-\eta^2}, \eta)$ ligge på buen i 1. kvadrant og dermed dele den i to. (Tegn selv.) De to delbuer, der tilsammen har længden $\frac{1}{2}\pi$ (Sætning 6.2), kan fremstilles

$$(x,y) = (\sqrt{1-y^2}, y)\ ,\quad y \in [0,\eta]\ ,$$

henholdsvis

$$(x,y) = (x, \sqrt{1-x^2})\ ,\quad x \in [0,\sqrt{1-\eta^2}]\ ,$$

– gennemløbsretningen er her uden betydning –, og Hovedsætning 6.4 giver så

(1) $$\frac{\pi}{2} = \int_0^\eta \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \int_0^{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx .$$

(Gennemfør selv udregningen.) Sidste led på højre side, længden af buen fra P_η til $(0,1)$ vil – ikke overraskende – gå mod 0 for $\eta \to 1_-$, idet $\sqrt{1-\eta^2} \to 0_+$. Altså har vi

(2) $$\int_0^\eta \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \to \frac{\pi}{2} \quad \text{for} \quad \eta \to 1_- .$$

(Bemærk, at $1/\sqrt{1-y^2} \to \infty$ for $y \to 1_-$. Derfor har vi ikke skrevet $\int_0^1 = \frac{\pi}{2}$.)

Vi vil nu søge at bringe $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{A}{4}$ ind i spillet.

For vilkårligt $\xi \in]0,1[$ kan vi i $\int_\xi^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ benytte substitutionen $x = \sqrt{1-y^2}$, $y \in [0,\sqrt{1-\xi^2}]$. Vi finder

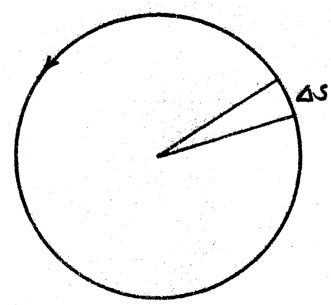
$$\int_{\xi}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\sqrt{1-\xi}}^{0} y\left(-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)dt = \int_{0}^{\sqrt{1-\xi^2}} \left(\frac{y^2-1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)dy$$

altså

$$(3) \qquad \int_{\xi}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{0}^{\sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{1-y^2}\,dy = \int_{0}^{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \ .$$

For $\xi \to 0_+$ vil $\sqrt{1-\xi^2} \to 1_-$ og dermed vil højre side i (3) gå mod $\frac{1}{2}$ ifølge (2), medens hvert af leddene på venstre side går mod $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{A}{4}$. Altså er $\frac{A}{4}+\frac{A}{4} = \frac{\pi}{2}$, dvs. $A = \pi$.

BEMÆRKNING. Resultatet er, som man kunne vente ud fra følgende løse betragtning: Del enhedscirklen Γ i små buestykker og del cirkelskiven i de tilsvarende udsnit. Det enkelte udsnit er omtrentlig en trekant med højde 1 og grundlinie Δs og har derfor arealet



$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta s = \frac{1}{2}\,\Delta s \ .$$

Ved addition over alle dele fås, at det samlede areal $= \frac{1}{2} \cdot$ omkredsen.

§7. Funktioner med værdier i $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$.

Lad E være et vektorrum over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. En norm $\|\cdot\|$ på E er en afbildning $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}$ som opfylder

(i) $\forall x \in E: \|x\| \geq 0$, og $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$ (nulvektoren i E),

(ii) $\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$): $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

(iii) $\forall x,y \in E: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

En vilkårlig norm $\|\cdot\|$ på E giver ved definitionen

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad \text{for} \quad x,y \in E,$$

anledning til en metrik d i E. Det er nemlig klart, at $d(x,y) \geq 0$ og at $d(x,y) = 0$ netop hvis $x = y$. Videre gælder, at

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = \|y-x\| = d(y,x),$$

og trekantsuligheden følger af (iii), idet

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z).$$

For $k \in \mathbb{N}$ består det k-dimensionale reelle (henh. komplekse) talrum $\mathbb{R}^k$ (henh. $\mathbb{C}^k$) af sæt af k reelle (henh. komplekse) tal

$$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_k) \quad \text{hvor} \quad x_j \in \mathbb{R} \text{ (henh. } \mathbb{C}) \quad \text{for} \quad j = 1,2,\ldots,k.$$

Som fælles betegnelse for $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{C}^k$ vil vi benytte V. Med sædvanlig koordinatvis addition og skalarmultiplikation er talrummet V et vektorrum over $\mathbb{R}$ (henh. $\mathbb{C}$), og ved

$$\|\underline{x}\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_k|\} \quad \text{for} \quad \underline{x} \in V,$$

defineres en norm, maksimumsnormen, på V. Vi skal benytte den ved

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x}-\underline{y}\| \quad \text{for} \quad \underline{x},\underline{y} \in V,$$

bestemte metrik på V, som kaldes maksimumsmetriken i $V = \mathbb{R}^k$ eller $V = \mathbb{C}^k$.

BEMÆRKNING. En måske mere naturlig norm på V, den <u>euklidiske norm</u>, er givet ved

$$\|\underline{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for} \quad \underline{x} \in V ,$$

og den hertil svarende metrik, den <u>euklidiske metrik</u>, er

$$d_2(\underline{x},\underline{y}) = \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for} \quad \underline{x},\underline{y} \in V .$$

Denne metrik d_2 er dog ofte vanskeligere at benytte ved vurderinger end d og vi foretrækker derfor at arbejde med maksimumsmetriken.

Lad $X \neq \emptyset$ være en mængde. For en afbildning $\underline{f}: X \to V$ betegner vi med $f_j(x)$ for $j = 1,2,\ldots,k$ den j'te koordinat af $\underline{f}(x) \in V$. Derved er fastlagt k funktioner $f_j: X \to \mathbb{R}$ (henh. $\mathbb{C}$), som kaldes <u>koordinatfunktionerne</u> for $\underline{f}$, således at

$$\underline{f}(x) = (f_1(x),\ldots,f_k(x)) \quad \text{for} \quad x \in X . \tag{4}$$

Er der omvendt givet k reelle (henh. komplekse) funktioner $(f_j)_{j=1,2,\ldots,k}$ defineret på X, fastlægger (4) en afbildning $\underline{f}: X \to V$, der har koordinatfunktionerne $(f_j)_{j=1,\ldots,k}$.

En afbildning $\underline{f}: X \to Y$ vil ofte blive kaldt en <u>funktion med vektorielle værdier</u> (i V), men $\underline{f}: X \to V$ er altså blot en kort skrivemåde for et sæt af k reelle (henh. komplekse) funktioner på X.

<u>Kontinuitet</u>. Antag nu, at X er forsynet med en metrik d_X. En afbildning $\underline{f}: X \to V$ er da kontinuert hvis og kun hvis hver af de k koordinatfunktioner $f_j: X \to \mathbb{R}$ (henh. $\mathbb{C}$) er kontinuert.

Er X et interval i $\mathbb{R}$, bestemmer en kontinuert afbildning $\underline{f}: X \to V$ en <u>kontinuert kurve</u> i V, nemlig kurven med <u>parameterfremstillingen</u> $t \mapsto \underline{f}(t)$.

<u>Integral</u>. Lad $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ være et kompakt interval og $\underline{f}$: $[a,b] \to V$ en kontinuert afbildning. Så er hver af de k koordinatfunktioner f_j , $j = 1,\dots,k$, kontinuert, og dermed er integralet $\int_a^b f_j(t)\,dt$ for $j = 1,2,\dots,k$ et veldefineret reelt (henh. komplekst) tal. Elementet af V givet ved

$$\left(\int_a^b f_1(t)\,dt,\dots,\int_a^b f_k(t)\,dt\right) \tag{5}$$

kaldes <u>integralet</u> af $\underline{f}$ over $[a,b]$ og betegnes kort

$$\int_a^b \underline{f}(t)\,dt \in V .$$

Med denne skrivemåde gælder følgende vigtige vurdering:

$$\left\|\int_a^b \underline{f}(t)\,dt\right\| \leq \int_a^b \|\underline{f}(t)\|\,dt . \tag{6}$$

Bemærk, at der på højre side i (6) er tale om et sædvanligt integral af en ikke-negativ kontinuert funktion defineret på $[a,b]$, nemlig funktionen (se p. II.41)

$$t \mapsto \|\underline{f}(t)\| = \max\{|f_1(t)|,\dots,|f_k(t)|\} .$$

Nu følger (6) af, at der for $j = 1,\dots,k$ gælder

$$\left|\int_a^b f_j(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f_j(t)|\,dt \leq \int_a^b \|\underline{f}(t)\|\,dt ,$$

og dermed

$$\left\|\int_a^b \underline{f}(t)\,dt\right\| = \max\left\{\left|\int_a^b f_1(t)\,dt\right|,\dots,\left|\int_a^b f_k(t)\,dt\right|\right\}$$
$$\leq \int_a^b \|\underline{f}(t)\|\,dt .$$

Svarende til definitionen af integralet for en stykkevis kontinuert funktion f: $[a,b] \to \mathbb{C}$, kan en <u>stykkevis kontinuert afbildning</u> $\underline{f}$: $[a,b] \to V$ tilskrives et integral, nemlig det ved (5) bestemte element af V .

Differentiabilitet. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval. En afbildning $\underline{f}: I \to V$ kaldes differentiabel i punktet $t_0 \in I$ med differentialkvotient $\underline{x} \in V$, hvis

$$\lim_{t \to t_0,\ t \in I \setminus \{t_0\}} \frac{\underline{f}(t) - \underline{f}(t_0)}{t - t_0} = \underline{x} ,$$

d.v.s. hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ så

$$\left\| \frac{\underline{f}(t) - \underline{f}(t_0)}{t - t_0} - \underline{x} \right\| \leq \varepsilon$$

for alle $t \in I \setminus \{t_0\}$ som opfylder $|t - t_0| \leq \delta$. Dette er åbenbart ensbetydende med, at for hvert $j = 1,2,\ldots,k$ den j'te koordinatfunktion f_j af $\underline{f}$ er differentiabel i punktet $t_0 \in I$ med differentialkvotient $f_j'(t_0) = x_j$, hvor $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_k)$. Som betegnelse for differentialkvotienten benyttes $\underline{f}'(t_0)$ eller $\frac{d}{dt}\underline{f}(t_0)$.

Det ses specielt, at hvis $\underline{f}: I \to V$ er differentiabel i $t_0 \in I$ så er $\underline{f}$ kontinuert i $t_0 \in I$.

En afbildning $\underline{f}: I \to V$ som er differentiabel i alle punkter af I kaldes differentiabel i I. Med $C^1(I,V)$ betegnes mængden af differentiable afbildninger $\underline{f}: I \to V$ for hvilke afbildningen $\underline{f}': I \to V$ givet ved $t \mapsto \underline{f}'(t)$ er kontinuert. Som i tilfældet $V = \mathbb{C}$ defineres klasserne $C^n(I,V)$ og $C^\infty(I,V)$.

Af middelværdisætningen for differentiable reelle funktioner på I fås følgende versioner for differentiable afbildninger $\underline{f}: I \to V$.

Tilfældet $V = \mathbb{R}^k$. For hvert par $s,t \in I$ findes tal $\theta_1,\ldots,\theta_k \in]0,1[$ så

$$\begin{aligned}\underline{f}(t) - \underline{f}(s) &= \left(f_1(t)-f_1(s),\ldots,f_k(t)-f_k(s)\right) \\ &= \left(f_j'(s+\theta_j(t-s))(t-s)\right)_{j=1,\ldots,k} .\end{aligned}$$

Tilfældet $V = \mathbb{C}^k$. For hvert par $s,t \in I$ findes tal $\theta_1,\ldots,\theta_k,\theta_1',\ldots,\theta_k' \in]0,1[$ så

$$\underline{f}(t) - \underline{f}(s) = \left((\mathrm{Re}\, f_j'(s+\theta_j(t-s)) + i\,\mathrm{Im}\, f_j'(s+\theta_j'(t-s)))(t-s)\right)_{j=1,\ldots,k} .$$

III.1.1. Vis at det i sætning 1.2 omtalte tal I er entydigt bestemt.

III.1.2. (Skærpelse af integralregningens middelværdisætning). Lad $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$. Vis da, at der findes et punkt $\xi \in]a,b[$ for hvilket

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) .$$

III.1.3. a) Bevis korollar 1.6 b) som en konsekvens af korollar 1.5 og 1.6 a). (Vælg $\alpha \in \mathbb{C}$ så $|\alpha| = 1$ og $\alpha\int f(x)dx \geq 0$.)

b) Lad $f \in C^0([a,b],\mathbb{C})$. Vis da, at

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$$

hvis og kun hvis der findes et $\beta \in \mathbb{C}$ med $|\beta| = 1$, således at

$$f(x) = \beta|f(x)| \quad \text{for alle} \quad x \in [a,b] .$$

III.1.4. Lad $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ og antag at $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a,b]$. Lad M være størsteværdien af f. Vis da, at

$$\left[\int_a^b f(x)^n dx\right]^{\frac{1}{n}} \to M \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

III.1.5. Lad $f,g \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ og antag, at $g(x) \geq 0$ for alle $x \in [a,b]$. Vis da, at der findes et $\xi \in [a,b]$, således at

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx .$$

Gør rede for, at sætning 1.8 er et specialtilfælde af dette.

III.1.6. Lad $f \in C^0([a,b])$. Vis da, at hvis

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

for alle funktioner $g \in C^0([a,b])$, så er $f \equiv 0$.

III.1.7. Vis at $\left|\int_{-2\pi}^{2\pi} x^2\sin^8(e^x)dx\right| \leq \frac{16\pi^3}{3}$.

III.1.8. Lad $f,g \in C^0([a,b])$. Vis da, at hvis $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$, så findes et $\xi \in [a,b]$, for hvilket $f(\xi) = g(\xi)$.

III.2.1. Bevis påstandene om o-funktioner på side III.14.

III.2.2. Lad $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ for $x \neq 0$ og $f(0) = 0$.

i) Vis at f er differentiabel i ethvert punkt $a \neq 0$, og beregn $f'(a)$.

ii) Benyt definitionen af differentiabilitet til at vise at f er differentiabel i 0 med $f'(0) = 0$.

iii) Vis, at f' ikke er kontinuert i 0.

III.2.3. Lad $f(x) = x^2$ for $x \geq 0$ og $f(x) = 0$ for $x < 0$.

i) Skitser grafen for f.

ii) Vis, at f er differentiabel i 0.

iii) Find f' og skitser dens graf.

iv) Er f' kontinuert på $\mathbb{R}$? Er f' differentiabel på $\mathbb{R}$?

III.2.4. Lad f og g være n gange differentiable funktioner i samme interval. Benyt induktion til at vise, at

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

(her betyder $f^{(0)}$ og $g^{(0)}$ funktionerne f og g selv).

III.2.5. Vis, at den afledede af $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+3}$ er negativ, når den eksisterer. Benyt dette til at vise, at ligningen $f(x) = a$ for givet a har en løsning i hvert af intervallerne $]-3,-1[$ og $]-1,0[$, og at den har en løsning i $]0,+\infty[$, hvis $a > 0$, og en løsning i $]-\infty,-3[$, hvis $a < 0$.

III.2.6. Vis, at hvis $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ er differentiabel, $f(0) = 0$, og f' er voksende, da er den ved $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ definerede funktion $g\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ ligeledes voksende.

III.2.7. Vis, at hvis $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert på $[a,b]$ og differentiabel på $]a,b]$, og $f'(x)$ har en grænseværdi c for $x \to a$ fra højre, da er f også differentiabel i punktet a, og der gælder $f'(a) = c$.

III.2.8. Vis, at hvis $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert på $[a,b]$ og differentiabel på $]a,b]$, og $f'(x) \to +\infty$ for $x \to a$ fra højre, da er f ikke differentiabel i punktet a.

III.2.9. Vis, at for enhver differentiabel funktion $f: A \to \mathbb{R}$ er værdimængden $f'(A)$ af den afledede et interval.

III.2.10. Giv et bevis for korollar 2.10.

III.2.11. Vis, at grænseværdierne

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x e^{t^2}\, dt \quad \text{og} \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_3^{3+h} e^{t^2}\, dt$$

eksisterer og find deres værdi.

III.2.12. Lad f være kontinuert på $\mathbb{R}$ og sæt

$$F(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Vis at F er differentiabel på $\mathbb{R}$ og udregn F'.

III.2.13. Beregn $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$.

III.2.14. Lad g være en kontinuert bijektion af $[0,1]$ på $[0,1]$. Giv et geometrisk bevis for at

$$\int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 g^{-1}(x)dx = 1 \ .$$

III.2.15. Udled formlen

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^{2n} d\, dx = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \quad n \geq 0 \ .$$

III.2.16. I hvert af nedenstående tilfælde skal φ' beregnes

a) $\varphi(t) = \int_0^1 \frac{\sin x\ t}{1+x}\, dx$ b) $\varphi(t) = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{1+xt}\, dx$

c) $\varphi(t) = \int_0^1 f(x,t)dx$, hvor $f(x,t) = \begin{cases} \frac{x^t - 1}{\log x} & x \neq 0,1 \\ 0 & x = 0 \\ t & x = 1 \ . \end{cases}$

d) $\varphi(t) = \int_1^{t^2} \cos(x^2)dx$ e) $\varphi(t) = \int_{t^2}^{t} \sin(xt)dx$.

III.2.17. Lad for $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 \qquad \text{og} \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt .$$

a) Vis at $f'(x) + g'(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og slut heraf at $f+g$ er konstant. (Vi skal senere indse at $f+g = \frac{\pi}{4}$.)

b) Vis at $\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

III.3.1. Undersøg den ved

$$\varphi(x) = \frac{\log(1+x) + 3 \sin^2 x - x}{\sin x + x^2 - x}$$

definerede funktion for $x \to 0$.

III.3.2. Undersøg den ved

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x \log x}$$

definerede funktion for $x \to 1$.

III.3.3. Find nedenstående grænseværdier, hvis de eksisterer

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(2x) - \cos x}{x}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

III.3.4. Find nedenstående grænseværdier, hvis de eksisterer

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x - x}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.

III.4.1. Betragt funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = 2x^2 + 8x - 3 \quad \text{for} \quad x \in [0,1] .$$

Hvilken inddelingsfinhed er det rimeligt at benytte når integralet $\int_0^1 f(x)dx$ ønskes beregnet approksimativt, med en fejl der højst er 10^{-3} , ved hjælp af middelsummer, trapezformlen henholdsvis Simpson's formel?

III.4.2. Vis, at der for $a,b \in \mathbb{R}$ med $a < b$ gælder

$$\int_a^b x^3\,dx = \frac{b-a}{6}\left(a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right) .$$

III.4.3. Lad $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ være et polynomium af grad ≤ 3 .

Vis, ved udregning, at Simpson's formel giver den eksakte værdi for $\int_a^b p(x)\,dx$.

Hvordan kunne dette ellers indses?

III.5.1. For kontinuerte afbildninger $h\colon I \to \mathbb{C}$ og $k\colon J \to \mathbb{C}$ af intervaller $I \subseteq \mathbb{R}$ og $J \subseteq \mathbb{R}$ ind i planen vil vi her sætte $h \sim k$, hvis der findes en bijektiv, kontinuert funktion $\varphi\colon J \to I$, således at $h \circ \varphi = k$.

Gør rede for, at $\sim$ er en ækvivalensrelation. (I hvilken mængde ?)

Dette retfærdiggør sprogbrugen, at h og k fremstiller samme kontinuerte kurve, når $h \sim k$. Jf. p. III.46.

III.5.2. (a) Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ og $J \subseteq \mathbb{R}$ være intervallet og lad $h\colon I \to \mathbb{C}$ og $\varphi\colon J \to I$ være af klasse C^n . Vis da, at $h \circ \varphi$ er af klasse C^n .

(b) Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ og $J \subseteq \mathbb{R}$ være intervaller og lad $\varphi\colon J \to I$ være en bijektiv C^n-funktion med $\varphi'(u) \neq 0$ for alle $u \in J$. Vis da, at $\varphi^{-1}\colon I \to J$ er af klasse C^n .

Vink. Benyt sætningerne 2.5 (kædereglen) og 2.6.

III.5.3. Antag $n \in \mathbb{N}$ eller $n = \infty$. For C^n-afbildninger $h\colon I \to \mathbb{C}$ og $k\colon J \to \mathbb{C}$ af intervaller $I \subseteq \mathbb{R}$ og $J \subseteq \mathbb{R}$ ind i planen vil vi her sætte $h \sim k$, hvis der findes en bijektiv C^n-funktion $\varphi\colon J \to I$ med $\varphi'(u) \neq 0$ for alle $u \in J$, således at $h \circ \varphi = k$.

Gør rede for, at $\sim$ er en ækvivalensrelation. (I hvilken mængde ?)

Dette retfærdiggør sprogbrugen, at h og k fremstiller samme C^n-kurve, når $h \sim k$. Jf. p. III.49.

Vink. Benyt opgave III.5.2.

III.5.4. Et punkt P udfører en C^n-bevægelse i planen, $n \geq 1$, hvor hastigheden aldrig er 0 og aldrig vinkelret på X-aksen. Vis, at x kan bruges som parameter for banekurven, dvs. at denne er graf for en reel C^n-funktion.

III.5.5. Et punkt gennemløber parablen $y = -x^2/p$, således at hastighedens projektion på X-aksen har den konstante størrelse c . Find accelerationens størrelse og retning.

III.5.6. Betragt kurven givet ved parameterfremstillingen

$$x = x(t) = t^4(1-t)^2 \quad , \quad y = y(t) = t^5(1-t)^2 \quad , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Vis, at $(0,0)$ er et dobbeltpunkt, og at kurven har en spids i dette ved begge passager.

Vink. Bemærk, at parameteren t for hvert kurvepunkt $(x(t),y(t)) \neq (0,0)$ er hældningskoefficienten for linien gennem $(0,0)$ og $(x(t),y(t))$.

III.5.7. Undersøg kurven givet ved $(x,y) = (t^2+t^3, 1+t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, for tangenter, spidser og konvekspunkter.

III.5.8. Undersøg grafen for funktionen $y = |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$, hvor $\alpha \in \mathbb{R}_+$, for tangenter, spidser, knæk og konvekspunkter.

III.5.9. Undersøg grafen for funktionen $y = \sin x$, $x \in \,]-\infty,\infty[$, for konvekspunkter og vendepunkter.

III.5.10. Undersøg grafen for funktionen

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

for tangenter, konvekspunkter og vendepunkter.

III.5.11. Undersøg kurven givet ved $(x,y) = (t^2,t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, for tangenter, spidser, knæk og konvekspunkter.

III.5.12. Undersøg og tegn kurven givet ved parameterfremstillingen

$$x = t^3 - t^2 + 1 \; , \quad y = t^2 - 1 \; , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Bevis, at tangenterne i to punkter med samme ordinat skærer hinanden på spidstangenten.

III.5.13. Betragt banekurven for en C^1-bevægelse i planen, hvor hastigheden aldrig er 0. Antag, at alle tangenter er parallelle, og vis da, at bevægelsen er retliniet.

Vink. Brug et hensigtsmæssigt koordinatsystem.

III.5.14. (a) Et punkt P udfører en C^1-bevægelse i rummet. Dets retvinklede projektion Q på en fast plan bevæger sig da i denne. Vis, at Q udfører en C^1-bevægelse i planen, og at Q's hastighed er lig projektionen af P's hastighed.

Vink. Indlæg et koordinatsystem XYZ i rummet med den faste plan som XY-plan.

(b) En C^1-kurve i rummet projiceres på en plan. Gør rede for, hvad man kan uddrage af (a) om tangenter til den projicerede kurve.

III.6.1. Vis, at grafen for funktionen

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{for} \quad 0 < x \leq 1/\pi \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases}$$

ikke er rektifikabel.

III.6.2. Beregn buelængden $s = s(x)$ som funktion af x for parablen $y = x^2$, med toppunktet $(0,0)$ som udgangspunkt.

Vink. Sæt $x = \frac{1}{4}(t - \frac{1}{t})$, $t \in \,]0,\infty[$, og find $\frac{ds}{dt}$ som $\frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.

III.6.3. Vis uden brug af trigonometriske funktioner, at

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad y = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad t \in \,]-\infty,\infty[\ ,$$

fremstiller enhedscirklen Γ med rigtigt gennemløb - punktet $(-1,0)$ dog undtaget. (Jf. eksempel s. III.47.)

Vink. Vi har defineret Γ ved sammenføjning af fire buer S_1, S_2, S_3, S_4 med givne fremstillinger (s. III.71). Foretag passende parameterskift heri.

III.6.4. Lad $\varphi: v \to (x(v), y(v))$, $v \in \mathbb{R}$, være opviklingen af $\mathbb{R}$ på enhedscirklen Γ .

1° Vis ved differentation af $x(v)^2 + y(v)^2 = 1$, at

$$(x'(v), y'(v)) = \alpha(v) \cdot (-y(v), x(v))$$

2° Begrund, at $x'(v)^2 + y'(v)^2 = 1$, og vis herved, at

$$\forall v \in \mathbb{R}: \ (\alpha(v) = 1 \ \vee \ \alpha(v) = -1) .$$

3° Benyt fortegnet for x eller y og gennemløbsretningen på buerne S_1, S_2, S_3, S_4 - se s. III.71 - til at vise, at $\alpha(v) = 1$ for alle $v \in \mathbb{R}$ og dermed

$$x'(v) = -y(v) \quad , \quad y'(v) = x(v) \quad \text{for alle} \quad v \in \mathbb{R} .$$

NB. Da cos og sin defineres som koordinatfunktionerne for φ, er resultatet

$$\frac{d \cos v}{dv} = -\sin v \ , \quad \frac{d \sin v}{dv} = \cos v \quad \text{for alle} \quad v \in \mathbb{R} .$$

III.6.5. En kurve er fremstillet i polære koordinater

$$r = r(t) > 0 \ , \quad v = v(t) \ , \quad t \in I \ ,$$

hvor de to funktioner er af klasse C^1. Som hjælpestørrelser indføres enhedsvektorerne

$$\underline{R} = \underline{R}(t) = (\cos v(t), \sin v(t))$$

og

$$\underline{N} = \underline{N}(t) = (-\sin v(t), \cos v(t))$$

på radiusvektor og dennes positive normal. Vi opfatter t som tiden og $r(t)$, $v(t)$ som polære koordinater til et punkt P i bevægelse.

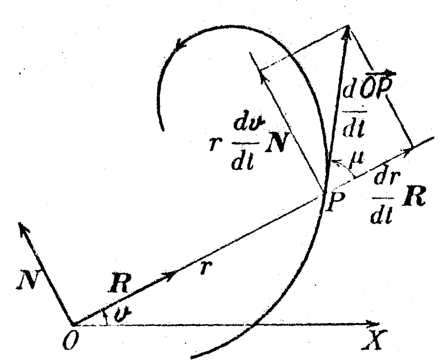
1° Vis, at hastigheden i bevægelsen er

$$\frac{dr}{dt}\underline{R} + r\frac{dv}{dt}\underline{N} .$$

2° Vis, at

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

hvor s er buelængden på kurven.



3° For hvert $t \in I$, hvor radiusvektors <u>strækningshastighed</u> $r'(t)$ og <u>vinkelhastighed</u> $v'(t)$ ikke begge er 0, skal man vise, at kurven har to modsat rettede halvtangenter, og at

$$\cos\mu = \frac{dr}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{dr}{ds} \quad , \quad \sin\mu = r\,\frac{dv}{dt} : \frac{ds}{dt} = r\,\frac{dv}{ds} \, ,$$

hvor μ er vinklen fra radiusvektor til den positive halvtangent.

III.6.6. En bevægelse af et punkt P på en cirkel er beskrevet

$$r = \text{konstant} > 0 \; , \quad v = v(t) \; , \quad t \in I \; ,$$

med $v = v(t)$ af klasse C^2 . Beregn hastighed og acceleration.

III.6.7. Et punkt P bevæger sig på cirklen med centrum $(0,0)$ og radius r , med retningsvinkel $v = v(t)$. Et punkt Q med abscisse $x = x(t)$ er bundet til X-aksen og forbundet med P ved en stang af længde $\ell > r$. Find hastigheden $\frac{dx}{dt}$ udtrykt ved v og $\frac{dv}{dt}$. (Krumtap og drivstang.)

III.6.8. Beskriv kurven givet i polære koordinater ved

$$r = \frac{p}{\cos(v-\alpha)} \; , \quad v \in \left]\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}\right[\; ,$$

hvor $p \in \mathbb{R}_+$ og $\alpha \in \mathbb{R}$.

III.6.9. Beskriv for $a \in \mathbb{R}_+$ kurven givet i polære koordinater ved

$$r = 2a\cos v$$

for $v \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, henholdsvis $v \in \left]-\infty,\infty\right[$.

III.6.10. En kurve er givet i polære koordinater ved ligningen $r = r(v)$, $v \in I$, hvor funktionen er af klasse C^1 .

1° Vis, at $\frac{ds}{dv} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 + r^2}$, hvor s er buelængden på kurven.

2° Vis, at kurven i hvert punkt har to modsat rettede halvtangenter, samt at vinklen μ fra radiusvektor til den positive halvtangent kan vælges i $]0,\pi[$ og så er bestemt ved

$$\cot\mu = \frac{\cos\mu}{\sin\mu} = \frac{1}{r}\,\frac{dr}{dv} \, .$$

Vink. Se opgave 6.5.

III.6.11. <u>Arkimedes' spiral</u>, - givet i polære koordinater ved $r = av$, $v \in [0,\infty[$, med $a \in \mathbb{R}_+$. (Fortsættelse af opgave III.6.10.) Vis, at Arkimedes' spiral i begyndelsespunktet $(0,0)$ har X-aksen som tangent, og at vinklen $\mu \in]0,\pi[$ fra radiusvektor til tangenten for $v \in]0,\infty[$ er givet ved $\cot \mu = \frac{1}{v}$.

III.6.12. <u>Den logaritmiske spiral</u>, - givet i polære koordinater ved $r = r(v) = ae^{bv}$, $v \in]-\infty,\infty[$ med $a,b \in \mathbb{R}_+$. (Fortsættelse af opgave III.6.10.)

1° Vis, at vinklen $\mu \in]0,\pi[$ fra radiusvektor til kurvens positive halvtangent er konstant.

2° Beregn længden $\ell(v_1,v_2)$ af kurvestykket svarende til et parameterinterval $[v_1,v_2]$ og vis, at

$$\ell(v_1,v_2) = (r(v_2)-r(v_1))\,/\cos \mu \ .$$

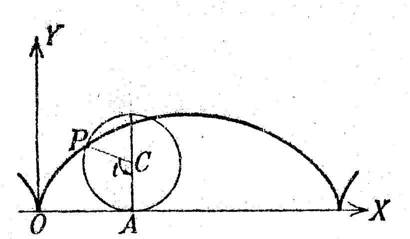
3° Find en naturlig parameterfremstilling for kurven, med parameterinterval $]0,\infty[$, - gerne udtrykt i polære koordinater $r = r(s)$, $v = v(s)$.

4° Vis, at man ved at føje begyndelsespunktet til den logaritmiske spiral, svarende til $s = 0$, får en kontinuert kurve. Vis, at kurvestykket svarende til et parameterinterval $[0,s_0]$ er rektifikabelt, og opskriv en naturlig parameterfremstilling for hele kurven. Undersøg sluttelig, om kurven har en (halv)tangent i endepunktet $(0,0)$.

III.6.13. <u>Cykloiden</u>, - kurven, der beskrives af et punkt P på en cirkelperiferi, når cirklen ruller på en ret linie.

Vi benytter et koordinatsystem XY i planen, hvor X er den rette linie, hvor begyndelsespunktet O er et af de punkter på X , hvori P falder engang under sin bevægelse, og hvor Y er orienteret, så den rullende cirkel befinder sig over X-aksen. Cirklens radius kaldes a .

1° Vis, at koordinaterne $x = x(t)$, $y = y(t)$ til P i den stilling af den rullende cirkel, hvor røringspunktet A har abscissen at , er



$$\begin{aligned} x &= a(t-\sin t) \\ y &= a(1-\cos t) \end{aligned} , \quad t \in]-\infty,\infty[\ .$$

2° Undersøg kurven for konvekspunkter og spidser.

3° Beregn den af P beskrevne vejlængde $s = s(t)$ fra O som funktion af t og vis, at længden af cykloidebuen mellem to på hinanden følgende spidser er 4 gange den rullende cirkels diameter.

4° Vis, at arealet afgrænset af cykloidebuen og liniestykket mellem to spidser er 3 gange den rullende cirkels areal.

III.6.14. Giv for vilkårligt $\xi \in]0,1[$ en geometrisk fortolkning af hvert af de tre led i ligning (3), s. III.76 og bevis herved, at arealet af et cirkeludsnit af enhedscirkelskiven svarende til en bue af enhedscirklen fra $(1,0)$ til et retningspunkt i 1. kvadrant er lig $\frac{1}{2}\cdot$ buelængden.

III.6.15. <u>Skruelinien</u>, - kurven, der beskrives af et punkt P i rummet, hvis projektion P' på XY-planen udfører en jævn cirkelbevægelse

$$\begin{matrix} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{matrix}\quad , \quad t \in]-\infty,\infty[\ ,$$

medens projektionen P'' på Z-aksen udfører en jævn retliniet bevægelse

$$z = ht \ , \quad t \in]-\infty,\infty[\ .$$

Her er $a > 0$ afstanden fra skrueaksen Z til punktet P, medens $h \neq 0$ kaldes den reducerede skruehøjde.

1° Bestem P's hastighed og acceleration til et vilkårligt tidspunkt t. Beskriv de to vektorer og kurvetangenten geometrisk.

2° Find den naturlige parameterfremstilling for skruelinien med $(a,0,0)$ som udgangspunkt.

III.7.1. Vis, at maksimumsnormen på $V = \mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$ faktisk opfylder betingelse iii) i definitionen af en norm.

III.7.2. I $V = \mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$ defineres

$$\forall x \in V: \|x\|_1 = \|(x_1,\ldots,x_k)\|_1 = |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_k| \ .$$

Gør rede for at $\|\cdot\|_1$ er en norm.

Idet $\|\cdot\|_2$ betegner den euklidiske norm på V og $\|\cdot\|$ betegner maksimumsnormen skal det vises at

$$\forall x \in V: \|x\| \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq k\|x\| \ .$$

III.7.3. Bevis påstanden s. III.78, linie ↑6 – ↑4.

III.7.4. Formuler definitionen af differentiabilitet af $\underline{f}: I \to V$ (øverst s. III.80) ved hjælp af ε-funktioner i analogi med situationen i §2.

III.7.5. Lad $\underline{f}: [0,1] \to \mathbb{C}^2$ være defineret ved

$$\forall t \in [0,1]: \underline{f}(t) = (\sin(t-1), i\pi e^{-t}) .$$

Gør rede for at $\underline{f}$ er differentiabel i $[0,1]$. Udregn $\int_0^1 \underline{f}(t)dt$ og $\|\int_0^1 \underline{f}(t)dt\|$.

Mat 102, 1981/82

KAPITEL IV.

UNIFORM KONVERGENS.

Indhold:

§1. Konvergens af funktionsfølger.

I mange situationer vil en funktion f være givet ved, eller kan beskrives ved, en følge (f_n) af funktioner der approksimerer f "bedre og bedre" for $n \to \infty$. Vi skal i denne paragraf præcisere dette og især interessere os for et konvergensbegreb for funktionsfølger, som er kontinuitetsbevarende, i den forstand at grænsefunktionen for en følge af kontinuerte funktioner automatisk bliver kontinuert.

Punktvis konvergens. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og (f_n) en følge af komplekse funktioner $f_n: I \to \mathbb{C}$.

DEFINITION. Følgen (f_n) kaldes punktvis konvergent med grænsefunktion $f: I \to \mathbb{C}$, hvis det for alle $x \in I$ gælder at den komplekse talfølge $(f_n(x))$ er konvergent med grænseværdi $f(x)$, altså

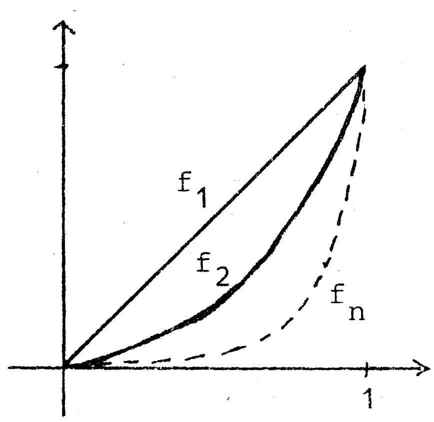
$$\forall x \in I: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) .$$

Dette kommer ud på at talfølgen $(f_n(x))$ i $\mathbb{C}$ er konvergent for alle $x \in I$, idet der i så fald ved

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{for} \quad x \in I ,$$

defineres en funktion $f: I \to \mathbb{C}$, og det er herefter klart at (f_n) er punktvis konvergent med grænsefunktion f.

EKSEMPEL. Lad $I = [0,1]$ og lad (f_n) være følgen af funktioner $f_n: I \to \mathbb{R}$ givet ved $f_n(x) = x^n$ for $x \in I$ og $n \in \mathbb{N}$. For hvert $x \in I$ er følgen (x^n) konvergent med grænseværdi 0 hvis $0 \leq x < 1$ og grænseværdi 1 for $x = 1$. Dermed er (f_n) punktvis konvergent med grænsefunktion f givet ved



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \le x < 1 \, , \\ 1 & \text{for} \quad x = 1 \, . \end{cases}$$

Vi bemærker, at selv om alle funktionerne f_n er kontinuerte er grænsefunktionen f diskontinuert i punktet 1. □

Udtrykt med logiske symboler er betingelsen for at (f_n) konvergerer punktvis mod f at

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \; n \ge N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \, . \tag{1}$$

Dette tal N, som kan bestemmes for hvert $\varepsilon > 0$ og $x \in I$, vil i almindelighed afhænge af både ε og x.

EKSEMPEL. Som foregående eksempel. Vi ser, at talfølgerne $(f_n(0))$ og $(f_n(1))$ er konstante $(= 0$ og $= 1)$, medens $(f_n(x))$ for $0 < x < 1$ blot er konvergent med grænseværdi 0. Lad $\varepsilon \in \,]0,1[$ være givet og betragt $x \in \,]0,1[$. Lad $N = N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ være et tal så (1) er opfyldt. Så har vi $|x^N| < \varepsilon$ eller $N \log x < \log \varepsilon$ hvoraf da $\log x < 0$,

$$N > \frac{\log \varepsilon}{\log x}$$

og vi ser, at $N(x,\varepsilon)$ for x tættere og tættere ved 1 skal vælges større og større, eller anderledes sagt, at den punktvise konvergens bliver langsommere, når x "nærmer" sig 1.

<u>Uniform konvergens</u>. Lad igen $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og lad (f_n) være en punktvis konvergent følge af funktioner $f_n: I \to \mathbb{C}$ med grænsefunktion f og antag, at hver af funktionerne f_n er kontinuert i punktet $x_0 \in I$. Hvilken ekstra betingelse på "konvergensen" vil sikre, at f er kontinuert i x_0? Det drejer sig om at kunne vurdere størrelsen $|f(x)-f(x_0)|$ for $x \in I$ "tæt" ved x_0. Ved hjælp af trekantsuligheden fås

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)| \tag{2}$$

gældende for $n \in \mathbb{N}$ og $x \in I$. Lad $\varepsilon > 0$. Så findes $N \in \mathbb{N}$ så $|f_n(x_0)-f(x_0)| < \varepsilon$ for $n \geq N$. De andre led på højre side kan derimod volde kvaler! Til hvert <u>fast</u> $x \in I$ findes $N \in \mathbb{N}$ så $|f(x)-f_n(x)| < \varepsilon$ for $n \geq N$, men her afhænger N af x (og naturligvis af ε). Tilsvarende findes til hvert <u>fast</u> $n \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$ så $|f_n(x)-f_n(x_0)| < \varepsilon$ hvis blot $x \in I$ opfylder $|x-x_0| < \delta$, men her afhænger δ af n (og naturligvis af ε).

Venstre side i uligheden ovenfor kan imidlertid vurderes hvis $|f(x)-f_n(x)|$ kan vurderes uafhængigt af x, altså hvis den punktvise konvergens er "lige hurtig i alle punkter" $x \in I$ (eller blot tæt ved x_0).

<u>DEFINITION</u>. En følge (f_n) af funktioner $f_n\colon I \to \mathbb{C}$ siges at <u>konvergere uniformt på</u> I med <u>grænsefunktion</u> f, hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder at:

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in I .$$

Skrevet med logiske sympoler er betingelsen for at følgen (f_n) konvergerer uniformt mod f på I, at

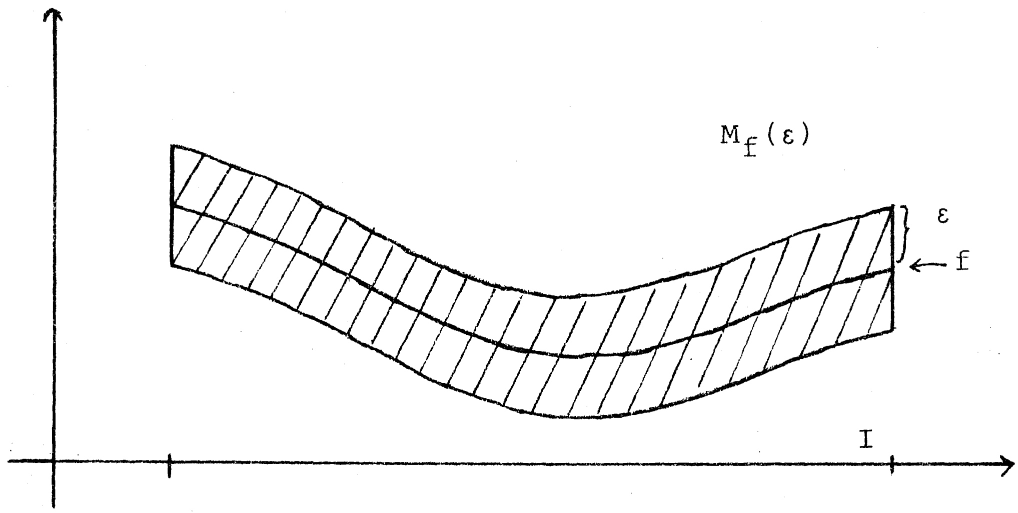
$$\forall \varepsilon \in 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}\colon \ n \geq N \Rightarrow \forall x \in I\colon |f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon . \qquad (3)$$

Det er klart, at hvis (f_n) konvergerer uniformt på I mod f, så konvergerer (f_n) punktvis mod f.

Begrebet uniform konvergens kan illustreres på en tegning i tilfælde af reelle funktioner. Lad $f\colon I \to \mathbb{R}$ være en funktion og lad $\varepsilon > 0$. Mængden

$$M_f(\varepsilon) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid f(x) - \varepsilon \leq y \leq f(x) + \varepsilon\}$$

er da et "bælte" af "højde" 2ε omkring grafen for f.



Følgen (f_n) af funktioner $f_n: I \to \mathbb{R}$ er uniformt konvergent på I med grænsefunktion f hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så grafen for f_n er indeholdt i $M_f(\varepsilon)$ for alle $n \geq N$.

<u>SÆTNING 1.1</u>. Lad (f_n) være en følge af funktioner $f_n: I \to \mathbb{C}$, som er uniformt konvergent på I og lad $x_0 \in I$. Hvis f_n for alle $n \in \mathbb{N}$ er kontinuert i x_0, så er grænsefunktionen f kontinuert i x_0.

BEVIS. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi skal finde $\delta > 0$ så det for alle $x \in I$ med $|x-x_0| < \delta$ gælder at $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. Idet (f_n) konvergerer uniformt mod f kan vi vælge N, så

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{for alle } x \in I \text{ og alle } n \geq N .$$

Da f_N er kontinuert i x_0 kan vi vælge $\delta > 0$ så det for alle $x \in I$ med $|x-x_0| < \delta$ gælder at

$$|f_N(x)-f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

For $x \in I$ med $|x-x_0| < \delta$ har vi så ifølge (2), at

$$|f(x)-f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon ,$$

hvilket viser, at f er kontinuert i $x_0 \in I$. ▯

<u>KOROLLAR 1.2</u>. Grænsefunktionen for en uniformt konvergent følge af kontinuerte funktioner af I ind $\mathbb{C}$ er kontinuert.

EKSEMPEL. Følgen af funktioner $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ givet ved $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n}+x}$ for $n \in \mathbb{N}$ og $x \in [0,1]$ er punktvis konvergent med grænsefunktion $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in [0,1])$. Konvergensen er uniform, idet vi har vurderingen

$$0 \le f_n(x)-f(x) = \sqrt{\frac{1}{n}+x} - \sqrt{x} = \left(\frac{1}{n}+x+x-2\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{n}+x}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le \left(\frac{1}{n}+2x-2\sqrt{x}\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \qquad \text{for} \quad x \in [0,1] .$$

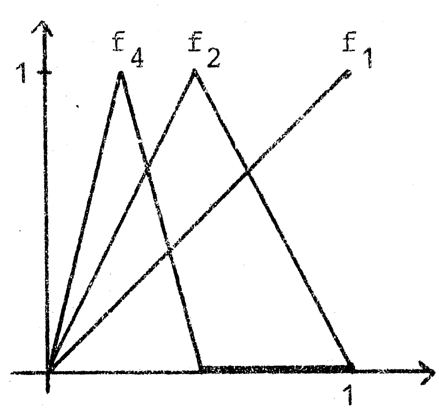
Til et givet $\varepsilon > 0$ gælder derfor at

$$|f_n(x)-f(x)| \le \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in [0,1]$$

når blot $\sqrt{\frac{1}{n}} \le \varepsilon$ d.v.s. $n \ge \frac{1}{\varepsilon^2}$.

For en følge (f_n) af kontinuerte funktioner er den uniforme konvergens mod f en <u>tilstrækkelig betingelse</u> til at sikre at f er kontinuert. Men som eksemplet nedenfor viser kan grænsefunktionen være kontinuert selvom konvergensen <u>ikke</u> er uniform.

EKSEMPEL. Lad $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ for $n \in \mathbb{N}$ være givet ved



$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{for} \quad x \in \left[0,\frac{1}{n}\right] \\ 2-nx & \text{for} \quad x \in \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{for} \quad x \in \left[\frac{2}{n},1\right]. \end{cases}$$

Man ser, at f_n er kontinuert for $n \in \mathbb{N}$, at (f_n) konvergerer punktvis mod 0 funktionen, som er kontinuert, og at konvergensen ikke er uniform, idet $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Uniforme fundamentalfølger. Det vil ofte være nyttigt at kunne efterevise uniform konvergens uden at skulle inddrage grænsefunktionen, og med henblik herpå indfører vi begrebet uniform fundamentalfølge (sml. det almindelige konvergens princip).

DEFINITION. En følge (f_n) af funktioner $f_n : I \to \mathbb{C}$ kaldes en uniform fundamentalfølge, hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så

$$|f_n(x)-f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in I \quad \text{og alle} \quad m,n \geq N .$$

Hvis (f_n) er uniformt konvergent med grænsefunktion f så er (f_n) en uniform fundamentalfølge. Thi lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vælg $N \in \mathbb{N}$ så

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for alle} \quad x \in I \quad \text{og alle} \quad n \geq N .$$

For $n,m \geq N$ har vi så ifølge trekantsuligheden

$$|f_n(x)-f_m(x)| \leq |f_n(x)-f(x)| + |f(x)-f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

gældende for alle $x \in I$, hvilket viser, at (f_n) er en uniform fundamentalfølge.

Det omvendte er også rigtigt.

SÆTNING 1.3. En følge (f_n) af funktioner $f_n : I \to \mathbb{C}$ er uniformt konvergent hvis og kun hvis (f_n) er en uniform fundamentalfølge.

BEVIS. Antag at (f_n) er en uniform fundamentalfølge. Vi starter med at vise, at for hvert $x \in I$ er følgen $(f_n(x))$ en fundamentalfølge i $\mathbb{C}$. Til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n,m \geq N$ gælder at

$$|f_n(y)-f_m(y)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle} \quad y \in I .$$

For fast $x \in I$ har vi så

$$|f_n(x)-f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad n,m \geq N ,$$

hvilket viser, at $(f_n(x))$ er en fundamentalfølge i $\mathbb{C}$. Altså er $(f_n(x))$ konvergent, og ved

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{for} \quad x \in I ,$$

defineres en funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$. Det er klart, at (f_n) konvergerer punktvis mod f, og vi skal se, at (f_n) konvergerer uniformt mod f. Lad $\varepsilon > 0$ være givet og vælg $N \in \mathbb{N}$ så vi for alle $x \in I$ og alle $n,m \geq N$ har

$$|f_n(x)-f_m(x)| \leq \varepsilon .$$

Denne ulighed gælder, for fastholdt $x \in I$ og $n \geq N$, for alle $m \geq N$, og derfor har vi ved at lade $m \to \infty$, at

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad x \in I \quad \text{og} \quad n \geq N ,$$

hvilket netop udtrykker, at (f_n) konvergerer uniformt mod f. $\square$

§2. Weierstrass' approksimationssætning.

Vi skal nu illustrere begrebet uniform konvergens med et berømt resultat, der går tilbage til K. Weierstrass (1815-1897), nemlig at enhver kontinuert funktion på et begrænset afsluttet (altså kompakt) interval kan approksimeres vilkårligt godt med polynomier.

SÆTNING 2.1. Lad $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ være en kontinuert kompleks funktion på et begrænset afsluttet interval. Til hvert $\varepsilon > 0$ findes et polynomium $q(x)$ med komplekse koefficienter så

$$|f(x)-q(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in [a,b] .$$

Resultatet kan også formuleres: til enhver kontinuert funktion $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ findes en følge af polynomier (q_n) med komplekse koefficienter som konvergerer uniformt mod f på $[a,b]$.

Vi bemærker først, at det er nok at vise påstanden i tilfælde af intervallet $[0,1]$, thi er påstanden vist i dette tilfælde og er $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ kontinuert, så definerer

$$f_1(t) = f(a+t(b-a)) \quad \text{for} \quad t \in [0,1] ,$$

en kontinuert funktion $f_1: [0,1] \to \mathbb{C}$. Til et givet $\varepsilon > 0$ findes så et polynomium q_1 så $|f_1(t)-q_1(t)| \leq \varepsilon$ for $t \in [0,1]$. Polynomiet q defineret ved

$$q(x) = q_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right) , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

opfylder da

$$|f(x)-q(x)| = \left|f_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - q_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| \leq \varepsilon$$

for alle $x \in [a,b]$ som ønsket.

I beviset får vi brug for følgende hjælperesultat.

LEMMA 2.2. For $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ og $\delta > 0$ gælder uligheden

$$\sum_{i\in I_\delta} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \leq \frac{1}{4n\delta^2} , \tag{1}$$

hvor $I_\delta = \{i \in \{0,1,\dots,n\} \mid |p-\frac{i}{n}| \geq \delta\}$.

BEVIS. Lad $p \in [0,1]$ og $\delta > 0$ være givet. Af binomialformlen fås for alle $n \in \mathbb{N}$, at

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1 , \tag{2}$$

og derfor, idet $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1}\frac{n}{i}$ for $i = 1,2,\dots,n$, at

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n-1}{i-1}\frac{n}{i}\, p^{i-1+1} (1-p)^{n-1-(i-1)} ,$$

hvoraf ved at sætte $j = i-1$,

$$= \sum_{j=0}^{n-1} np\binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} ,$$

som ved at benytte (2) for $n-1$ giver

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = np . \tag{3}$$

Videre finder vi for $n \in \mathbb{N}$, at

$$\sum_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i^2\binom{n-1}{i-1}\frac{n}{i}\, p^{i-1+1} (1-p)^{n-1-(i-1)}$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}$$

$$= np\left(\sum_{j=0}^{n-1} j\binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}\right)$$

som under brug af (2) og (3) giver

$$\sum_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = np((n-1)p+1) = np + n(n-1)p^2 . \tag{4}$$

Af (2), (3) og (4) får vi

$$\sum_{i=0}^{n}\left(p-\frac{i}{n}\right)^2\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\left(p^2-\frac{2pi}{n}+\frac{i^2}{n^2}\right)\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

$$= p^2 - \frac{2p}{n}np + \frac{1}{n^2}(np+n(n-1)p^2) = \frac{p}{n}(1-p) .$$

Idet $p(1-p) \le \frac{1}{4}$ for $p \in [0,1]$ (grafen for funktionen $x \mapsto x(1-x)$ er en parabel med toppunkt i $x = \frac{1}{2}$), og da alle leddene i summen er ≥ 0 fås

$$\sum_{i\in I_\delta}\left(p-\frac{i}{n}\right)^2\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \le \frac{1}{4n}$$

hvoraf uligheden (1), idet $\left(p-\frac{i}{n}\right)^2 \ge \delta^2$ for $i \in I_\delta$. □

BEVIS for Sætning 2.1. Som nævnt er det nok at betragte tilfældet $[a,b] = [0,1]$. Lad $f: [0,1] \to \mathbb{C}$ være kontinuert. I beviset skal vi benytte, at f er uniformt kontinuert. For $n \in \mathbb{N}$ betragter vi polynomiet

$$q_n(t) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} f\left(\frac{i}{n}\right) t^i(1-t)^{n-i} \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R} ,$$

som kaldes <u>det</u> n'<u>te</u> <u>Bernstein</u> <u>polynomium</u> for f . Vi skal se, at til et givet $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \ge N$ gælder at $|f(t)-q_n(t)| \le \varepsilon$ for alle $t \in [0,1]$, altså at (q_n) konvergerer uniformt på $[0,1]$ mod f . Idet

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t)\binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i} \qquad \text{for} \quad t \in [0,1] ,$$

har vi

$$f(t) - q_n(t) = \sum_{i=0}^{n}\left(f(t)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right)\binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i} \qquad \text{for} \quad t \in [0,1] ,$$

hvoraf

$$|f(t)-q_n(t)| \le \sum_{i=0}^{n}\left|f(t)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right|\binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i} \qquad \text{for} \quad t \in [0,1] .$$

Ideen er nu, at for fast $t \in [0,1]$ kan de led i summen på højre side med $|\frac{i}{n} - t|$ lille vurderes fordi f er kontinuert og resten kan vurderes ved hjælp af (1). Mere præcist: Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Sæt $M = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$ og vælg, idet f er kontinuert og dermed uniformt kontinuert et $\delta > 0$ så det for alle $t,t' \in [0,1]$ med $|t-t'| < \delta$ gælder at $|f(t)-f(t')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Så har vi for fast $t \in [0,1]$ og $n \in \mathbb{N}$ at

$$|f(t)-q_n(t)| \leq \sum_{i=0}^{n} |f(t)-f(\tfrac{i}{n})| \binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i}$$

$$\leq \sum_{i\notin I_\delta} \frac{\varepsilon}{2}\binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i} + \sum_{i\in I_\delta} 2M\binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i} + 2M\frac{1}{4n\delta^2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2} .$$

Denne vurdering er uafhængig af $t \in [0,1]$. Lad $N \in \mathbb{N}$ være valgt så $\frac{M}{2N\delta^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dermed har vi så for $n \geq N$, at

$$|f(t)-q_n(t)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle} \quad t \in [0,1] ,$$

hvilket skulle vises. $\square$

BEMÆRKNING. Man ser, at hvis f er en reel funktion så består følgen (q_n) af Bernstein polynomier for f af polynomier med <u>reelle koefficienter</u>.

EKSEMPEL. Lad os udregne Bernstein polynomierne for funktionerne

$$f_0(x) = 1 , \; f_1(x) = x \;\text{ og }\; f_2(x) = x^2 \quad \text{for} \quad x \in [0,1] .$$

For f_0 finder vi

$$q_n^0(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i} = 1 \qquad \text{for} \quad t \in [0,1] .$$

For f_1 finder vi ved hjælp af (3),

$$q_n^1(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{i}{n} t^i(1-t)^{n-i} = \frac{1}{n} nt = t \quad \text{for} \quad t \in [0,1] ,$$

og for f_2 finder vi hjælp af (4)

$$q_n^2(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{i}{n}\right)^2 t^i (1-t)^{n-i} = \frac{1}{n^2} (nt+n(n-1)t^2)$$

$$= \frac{t}{n} + \frac{n-1}{n} t^2 = t^2 + \frac{1}{n} t(1-t) \qquad \text{for} \quad t \in [0,1] .$$

BEMÆRKNING. For $n \in \mathbb{N}$ betragtes de $n+1$ polynomier af grad n givet ved

$$p_j^n(t) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad j = 0,1,\ldots,n .$$

Disse polynomier opfylder

$$p_j^n(t) \geq 0 \quad \text{for} \quad t \in [0,1] \quad \text{og} \quad j = 0,1,\ldots,n ,$$

og

$$\sum_{j=0}^{n} p_j^n(t) = 1 \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R} .$$

Det n'te Bernstein polynomium for f er dermed linearkombinationen

$$q_n(t) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) p_j^n(t) \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R} ,$$

og heraf ses specielt at

$$q_n(t) \geq 0 \quad \text{for} \quad t \in [0,1],$$

hvis $f(t) \geq 0$ for $t \in [0,1]$.

§3. Den uniforme metrik.

Begrebet uniform konvergens for følger af funktioner defineret på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ kan indordnes som et konvergensbegreb i et passende metrisk rum. Samtidig kan det almindeliggøres til følger af funktioner defineret på en vilkårlig mængde. Vi starter med tilfældet af begrænsede funktioner.

Funktionsrummet $F_b(X,\mathbb{C})$. Lad X være en vilkårlig ikke tom mængde og lad $F_b(X,\mathbb{C})$ betegne mængden af begrænsede komplekse funktioner $f: X \to \mathbb{C}$. At en funktion $f: X \to \mathbb{C}$ er begrænset betyder at

$$\sup\{|f(x)| \mid x \in X\} < \infty .$$

Mængden $F_b(X,\mathbb{C})$ er et vektorrum ved den sædvanlige addition og skalarmultiplikation af funktioner. Specielt er for $f,g \in F_b(X,\mathbb{C})$ funktionen $x \mapsto f(x)-g(x)$ begrænset.

DEFINITION. For $f,g \in F_b(X,\mathbb{C})$ sætter vi

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\} . \tag{1}$$

SÆTNING 3.1. Afbildningen $d_\infty: F_b(X,\mathbb{C}) \times F_b(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ givet ved (1) er en metrik i $F_b(X,\mathbb{C})$.

BEVIS. Dette er vist i eksemplet p. II.5-6. $\square$

BEMÆRKNING. Lad $f \in F_b(X,\mathbb{C})$ og $r > 0$. Den åbne kugle $K(f,r)$, altså mængden

$$K(f,r) = \{g \in F_b(X,\mathbb{C}) \mid d_\infty(f,g) < r\} ,$$

består netop af de begrænsede funktioner $g: X \to \mathbb{C}$ for hvilke

$$\sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\} < r ,$$

som er opfyldt hvis og kun hvis der findes et $r' \in]0,r[$, så det for alle $x \in X$ gælder, at

$$g(x) \in \{z \in \mathbb{C} \mid |f(x)-z| \leq r'\} .$$

SÆTNING 3.2. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og lad (f_n) og f være en følge af begrænsede funktioner henholdsvis en begrænset funktion af I ind i $\mathbb{C}$. Så gælder, at (f_n) konvergerer uniformt på I med grænsefunktion f hvis og kun hvis (f_n), opfattet som punktfølge i $(F_b(I,\mathbb{C}),d_\infty)$, konvergerer mod f (med hensyn til metriken d_∞).

BEVIS. Lad $\varepsilon > 0$ og $n \in \mathbb{N}$ være givet. Så gælder:

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in I ,$$

hvis og kun hvis

$$d_\infty(f_n,f) \leq \varepsilon ,$$

hvilket godtgør påstanden. ▯

Funktionsrummet $F(X,\mathbb{C})$. Indholdet af Sætning 3.2 ovenfor er, at uniform konvergens af begrænsede funktioner på et interval I er ensbetydende med konvergens i det metriske rum $(F_b(X,\mathbb{C}),d_\infty)$. For at formulere uniform konvergens af vilkårlige (begrænsede eller ej) funktioner som konvergens i et metrisk rum må vi modificere definitionen (1).

For en ikke tom mængde X betegner $F(X,\mathbb{C})$ vektorrummet af samtlige funktioner af X ind i $\mathbb{C}$.

DEFINITION. For $f,g \in F(X,\mathbb{C})$ sætter vi

$$d(f,g) = \min\{\sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\},1\} . \qquad (2)$$

For $f,g \in F(X,\mathbb{C})$ er $d(f,g)$ altså det mindste af tallene 1 og $\sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\} \leq +\infty$. Som vi skal se nedenfor er d en metrik i $F(X,\mathbb{C})$, og d kaldes den uniforme eller ligelige metrik i $F(X,\mathbb{C})$.

SÆTNING 3.3. Den ved (2) definerede afbildning $d\colon F(X,\mathbb{C}) \times F(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ er en metrik.

BEVIS. Lad $f,g \in F(X,\mathbb{C})$. Det er klart at $d(f,g) \geq 0$ og $d(f,g) = 0$ hvis $f = g$. Hvis omvendt $d(f,g) = 0$ så gælder

$$\sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\} = 0$$

eller anderledes skrevet $f(x) = g(x)$ for alle $x \in X$, altså $f = g$. Videre er det klart at $d(f,g) = d(g,f)$. For at vise trekantsuligheden betragter vi funktioner $f,g,h \in F(X,\mathbb{C})$. For alle $x \in X$ gælder så

$$|f(x)-h(x)| \leq |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)| . \tag{3}$$

Hvis der findes et $x \in X$ så et af leddene på højre side i (3) er ≥ 1 , da er $d(f,g) + d(g,h) \geq 1$ og så gælder klart

$$d(f,h) \leq 1 \leq d(f,g) + d(g,h) .$$

I modsat fald gælder

$$d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\}$$

og

$$d(g,h) = \sup\{|g(x)-h(x)| \mid x \in X\}$$

og dermed

$$|f(x)-h(x)| \leq d(f,g) + d(g,h)$$

hvoraf

$$d(f,h) \leq \sup\{|f(x)-h(x)| \mid x \in X\} \leq d(f,g) + d(g,h) ,$$

hvilket viser trekantsuligheden for d . Dermed er d en metrik. $\square$

BEMÆRKNINGER. 1) Det kunne måske se ud til at være uhensigtsmæssigt som mål for "afstanden" mellem $f,g \in F(X,\mathbb{C})$ at benytte tallet $d(f,g)$, idet $d(f,g)$ jo altid er ≤ 1 . Hvis f.eks. f og g begge er konstante funktioner

$$f(x) = \alpha , \quad g(x) = \beta \quad \text{for alle } x \in X ,$$

hvor $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, så har vi

$$d(f,g) = \min\{1, |\alpha-\beta|\} ,$$

således at $d(f,g) = 1$ for alle $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ med $|\alpha-\beta| \geq 1$. Med henblik på begrebet konvergens af følger og et begreb som fundamentalfølge er det imidlertid kun "de små" afstande der spiller en rolle, og her er $d(f,g)$ et godt mål for afstanden mellem f og g .

2) For $f,g \in F(X,\mathbb{C})$ er udsagnet

$$d(f,g) \leq 1$$

altid sandt, medens udsagnet

$$d(f,g) \leq \varepsilon$$

for $\varepsilon \in]0,1[$ er ensbetydende med

$$\sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\} \leq \varepsilon .$$

3) Lad $f \in F(X,\mathbb{C})$ og $r > 0$. Den åbne kugle $K(f,r)$ i $(F(X,\mathbb{C}),d)$ er mængden

$$\{g \in F(X,\mathbb{C}) \mid d(f,g) < r\} .$$

Hvis $r > 1$ er $K(f,r) = F(X,\mathbb{C})$ fordi det for alle $g \in F(X,\mathbb{C})$ gælder at $d(f,g) \leq 1$. Hvis derimod $r \leq 1$, så gælder at $g \in F(X,\mathbb{C})$ tilhører $K(f,r)$ hvis og kun hvis $d(f,g) < r$, altså hvis og kun hvis

$$\sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\} < r$$

hvilket er opfyldt hvis og kun hvis der findes et $r' < r$ så det for alle $x \in X$ gælder at

$$g(x) \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z-f(x)| \leq r'\} . \quad \square$$

På samme måde som i beviset for Sætning 3.2 ses, at for et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ og en følge (f_n) af funktioner $f_n\colon I \to \mathbb{C}$ gælder, at (f_n) konvergerer uniformt på I med grænsefunktion $f\colon I \to \mathbb{C}$, hvis og kun hvis (f_n) konvergerer mod f i det metriske rum

$(F(I,\mathbb{C}),d)$. Derfor kaldes metrikken d i $F(X,\mathbb{C})$ for <u>metriken for uniform konvergens på</u> X , og vi siger fra nu af også kort, at en følge (f_n) i $F(X,\mathbb{C})$ <u>konvergerer uniformt mod</u> $f \in F(X,\mathbb{C})$ <u>på</u> X såfremt $d(f_n,f) \to 0$ for $n \to \infty$.

Tilsvarende ser man, at for et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ og en følge (f_n) af funktioner $f_n: I \to \mathbb{C}$ gælder, at (f_n) er en uniform fundamentalfølge hvis og kun hvis (f_n) er en fundamentalfølge i det metriske rum $(F(I,\mathbb{C}),d)$. En fundamentalfølge (f_n) i det metriske rum $(F,X,\mathbb{C}),d)$ kaldes derfor en <u>uniform fundamentalfølge</u>. Dette kommer ud på, at der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n,m \in \mathbb{N}$ med $n,m \geq N$ gælder at

$$d(f_n,f_m) \leq \varepsilon \, .$$

Hvis $\varepsilon \in \,]0,1[$, er denne betingelse ensbetydende med betingelsen

$$\sup\{|f_n(x)-f_m(x)| \mid x \in X\} \leq \varepsilon \, .$$

<u>SÆTNING 3.4</u>. Det metriske rum $(F(X,\mathbb{C}),d)$ er fuldstændigt.

BEVIS. Cf. beviset for Sætning 1.3. Lad (f_n) være en fundamentalfølge i $(F(X,\mathbb{C}),d)$. For hvert fast $x \in X$ er følgen $(f_n(x))$ en fundamentalfølge i $\mathbb{C}$, idet der til hvert $\varepsilon \in \,]0,1[$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så det for $n,m \geq N$ gælder at $d(f_n,f_m) \leq \varepsilon$, og dermed specielt $(\varepsilon < 1)$

$$|f_n(x)-f_m(x)| \leq d(f_n,f_m) \leq \varepsilon \, .$$

Altså er $(f_n(x))$ konvergent i $\mathbb{C}$, og ved

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{for} \quad x \in X \, ,$$

defineres et element $f \in F(X,\mathbb{C})$. Lad os vise, at (f_n) konvergerer mod f i $(F(X,\mathbb{C}),d)$. Betragt et $\varepsilon > 0$. Vi kan gerne antage at $\varepsilon < 1$ og kan, da (f_n) er en fundamentalfølge, finde $N \in \mathbb{N}$ så det for $n,m \geq N$ gælder at

$$d(f_n,f_m) \le \varepsilon .$$

Heraf fås $(\varepsilon < 1)$ at

$$\sup\{|f_n(x)-f_m(x)| \mid x \in X\} \le \varepsilon ,$$

specielt for hvert fast $x \in X$, at

$$|f_n(x)-f_m(x)| \le \varepsilon \quad \text{for} \quad n,m \ge N .$$

Heraf sluttes, idet $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$, at

$$|f_n(x)-f(x)| \le \varepsilon \quad \text{for} \quad n \ge N ,$$

og dermed da dette gælder for hvert $x \in X$, at

$$d(f_n,f) \le \sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x \in X\} \le \varepsilon$$

for $n \ge N$, hvilket viser at (f_n) konvergerer mod f i det metriske rum $(F(X,\mathbb{C}),d)$. □

Funktionsrummet $C^0(X,\mathbb{C})$. Lad nu (X,d_X) være et metrisk rum og lad som sædvanlig $C^0(X,\mathbb{C})$ betegne vektorrummet af kontinuerte komplekse funktioner på mængden X. Sætning 1.1 kan almindeliggøres til:

SÆTNING 3.5. Lad (f_n) være en følge af funktioner $f_n \in F(X,\mathbb{C})$ og antag at (f_n) er konvergent i det metriske rum $(F(X,\mathbb{C}),d)$ med grænsepunkt (grænsefunktion) $f \in F(X,\mathbb{C})$. Hvis hver af funktionerne f_n er kontinuert i punktet $x_0 \in X$ så er f kontinuert i $x_0 \in X$.

BEVIS. Dette går på samme måde som beviset for 1.1. Lad $\varepsilon \in]0,1[$ være givet og vælg $N \in \mathbb{N}$ så

$$d(f_n,f) \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{for alle} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{med} \quad n \ge N .$$

Dette betyder specielt at

$$|f_N(x)-f(x)| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{for alle} \quad x \in X .$$

Nu er f_N kontinuert i $x_0 \in X$ og der findes derfor $\delta > 0$ så det for alle $x \in X$ med $d_X(x_0,x) < \delta$ gælder at

$$|f_N(x)-f_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} .$$

For alle $x \in X$ med $d_X(x_0,x) < \delta$ har vi så ved hjælp af trekantsuligheden (i $\mathbb{C}$) at

$$|f(x_0)-f(x)| \leq |f(x_0)-f_N(x_0)| + |f_N(x_0)-f_N(x)| + |f_N(x)-f(x)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon ,$$

hvilket viser at f er kontinuert i $x_0 \in X$. $\square$

KOROLLAR 3.6. Grænsefunktionen for en uniformt konvergent følge af kontinuerte funktioner er kontinuert.

BEMÆRKNING. Benyttes karakteriseringen fra Sætning 1.5 i Kap. II af afsluttede delmængder af et metrisk rum, kan Korollar 3.6 kort udtrykkes, at delmængden $C^0(X,\mathbb{C})$ af $F(X,\mathbb{C})$ er en afsluttet delmængde af det metriske rum $(F(X,\mathbb{C}),d)$.

I mange tilfælde er grænsefunktionen f , for en punktvis konvergent følge (f_n) af kontinuerte funktioner på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$, kontinuert, selvom konvergensen ikke er uniform. Dette indtræffer specielt, hvis der til hvert punkt $x_0 \in I$ findes et "lille" interval $]a',b'[\subseteq I$ omkring x_0 (d.v.s. $a' < x_0 < b'$) så (f_n) konvergerer uniformt på $]a',b'[$ mod f .

EKSEMPEL. Lad (f_n) være den ved $f_n(x) = x^n$ bestemte følge af kontinuerte funktioner $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. For hvert $a \in]0,1[$ gælder at (f_n) konvergerer uniformt på intervallet $[0,a]$ mod 0-funktionen. Vi har nemlig

$$\sup\{|f_n(x)| \mid x \in [0,a]\} = a^n,$$

og idet $a \in]0,1[$ findes til hvert $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ så $a^n < \varepsilon$ for $n \geq N$.

EKSEMPEL. Som et mere indholdsrigt eksempel betragtes den ved

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+4} + \dots + \frac{x}{x^2+n^2}$$

bestemte følge (f_n) af funktioner $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. For $x \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$ har vi

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)| = \frac{|x|}{x^2+(n+1)^2} \leq \frac{|x|}{(n+1)^2} \leq \frac{|x|}{n(n+1)} = \frac{|x|}{n} - \frac{|x|}{n+1} .$$

For $n,p \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$ fås hermed

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n} - \frac{|x|}{n+p} \leq \frac{|x|}{n} .$$

For et fast $a \in \mathbb{R}_+$ gælder altså

$$|f_m(x)-f_n(x)| \leq \frac{a}{N} ,$$

når $m,n \geq N$ og $x \in [-a,a]$, og derfor har vi

$$\sup\{|f_m(x)-f_n(x)| \mid x \in [-a,a]\} \leq \frac{a}{N}$$

for alle $m,n \in \mathbb{N}$ med $m,n \geq N$. Dette viser at (f_n) er en uniform fundamentalfølge på intervallet $[-a,a]$, og dermed er (f_n) uniformt konvergent på $[-a,a]$ med en grænsefunktion $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ som er kontinuert.

Dette kan gennemføres for hvert $a \in \mathbb{R}_+$, og der findes altså en funktion $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så (f_n) konvergerer punktvis på $\mathbb{R}$ mod $\tilde{f}$, og konvergensen er uniform på hvert interval af formen $[-a,a]$ for $a \in \mathbb{R}_+$, hvilket specielt giver at $\tilde{f}$ er kontinuert.

§4. Uniform konvergens i forbindelse med integral og differentiation.

I denne paragraf skal vi undersøge i hvilken udstrækning "integralet" af grænsefunktionen f for en følge (f_n) af funktioner på et interval, kan beregnes som "grænseværdien" for følgen af integraler for f_n, og tilsvarende om differentialkvotienten f' for f kan beregnes som grænsefunktionen for følgen (f_n') af differentialkvotienter af f_n.

Uniform konvergens under integraltegnet. Lad $[a,b]$ være et kompakt interval i $\mathbb{R}$, og lad som sædvanlig $C^0([a,b],\mathbb{C})$ betegne vektorrummet af kontinuerte funktioner $f: [a,b] \to \mathbb{C}$. Elementerne i $C^0([a,b],\mathbb{C})$ er begrænsede funktioner, og for $f,g \in C^0([a,b],\mathbb{C})$ gælder, cf. Kap. III, Korollar 1.6, den fundamentale vurdering

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt\right| &\leq \int_a^b |f(t)-g(t)|dt \\ &\leq (b-a)\sup\{|f(t)-g(t)| \mid t \in [a,b]\}. \end{aligned} \tag{1}$$

SÆTNING 4.1. Lad (f_n) være en følge af funktioner $f_n \in C^0([a,b],\mathbb{C})$ som konvergerer uniformt på $[a,b]$ mod f (som da også tilhører $C^0([a,b],\mathbb{C})$). Da er følgen af integraler $(\int_a^b f_n(t)dt)$ konvergent med grænseværdi $\int_a^b f(t)dt$. Der gælder også

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt . \tag{2}$$

BEVIS. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Idet (f_n) konvergerer uniformt på $[a,b]$ mod f findes et tal $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n \in \mathbb{N}$ som opfylder $n \geq N$ gælder at

$$\sup\{|f_n(t)-f(t)| \mid t \in [a,b]\} \leq \frac{\varepsilon}{b-a} .$$

For alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ har vi derfor ved hjælp af vurderingen (1), at

$$\left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| \leq (b-a)\sup\{|f_n(t)-f(t)| \mid t \in [a,b]\} \leq \varepsilon ,$$

hvilket viser påstanden. □

BEMÆRKNING. Idet integralet af en kontinuert funktion er defineret som grænseværdien for middelsummer svarende til finere og finere inddelinger af $[a,b]$, er den rette fortolkning af den "uskyldigt" udseende ligning (2), at de to "grænseprocesser"

$$f_n \to f \quad \text{og} \quad g \mapsto \int_a^b g(t)\,dt ,$$

under de anførte forudsætninger, er ombyttelige.

Vektorrummet $C^0([a,b],\mathbb{C}) \subseteq F_b([a,b],\mathbb{C})$ forsynes nu med metriken d_∞ givet ved

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(t)-g(t)| \mid t \in [a,b]\}$$

for $f,g \in C^0([a,b],\mathbb{C})$, og vi betragter den lineære afbildning $L\colon C^0([a,b],\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ defineret ved

$$L(f) = \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{for} \quad f \in C^0([a,b],\mathbb{C}) .$$

<u>SÆTNING 4.2</u>. Afbildningen L er en Lipschitz afbildning med konstant $b-a$, af $(C^0([a,b],\mathbb{C}),d_\infty)$ ind i $\mathbb{C}$ (med den sædvanlige metrik). Specielt er L kontinuert.

BEVIS. For $f,g \in C^0([a,b],\mathbb{C})$ giver den fundamentale vurdering (2), at

$$|L(f)-L(g)| = \left|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt\right|$$
$$\leq (b-a)\sup\{|f(t)-g(t)| \mid t \in [a,b]\} = (b-a)d_\infty(f,g) ,$$

hvilket godtgør påstanden. $\square$

BEMÆRKNING. Sætning 4.2 indeholder Sætning 4.1: hvis følgen (f_n) $(f_n \in C^0([a,b],\mathbb{C}))$ konvergerer uniformt på $[a,b]$ mod f så gælder $f_n \to f$ i det metriske rum $(C^0([a,b],\mathbb{C}),d_\infty)$ og derfor da L er kontinuert

$$\int_a^b f_n(t)\,dt = L(f_n) \to L(f) = \int_a^b f(t)\,dt .$$

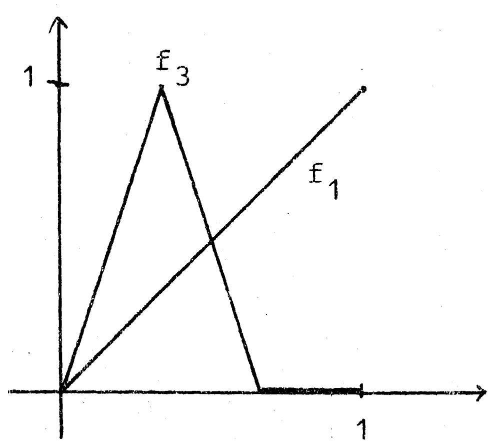
BEMÆRKNING. Hvis en følge (f_n) af funktioner $f_n \in C^0([a,b],\mathbb{C})$ blot konvergerer punktvis med grænsefunktion f kan man i almindelighed

lighed ikke slutte tilsvarende. For det første er f ikke nødvendigvis kontinuert, eller stykkevis kontinuert og dermed er det ikke i almindelighed muligt at tillægge $\int_a^b f(t)dt$ en mening. For det andet, selv om grænsefunktionen tilhører $C^0([a,b],\mathbb{C})$ kan man ikke slutte at

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt \quad . \tag{3}$$

På den anden side findes følger (f_n) af kontinuerte funktioner som konvergerer punktvis men ikke uniformt mod en funktion $f \in C^0([a,b],\mathbb{C})$ og således at (3) gælder.

EKSEMPEL. Lad $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ være funktionen givet ved



$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{for } x \in [0,\frac{1}{n}] \\ n(\frac{2}{n}-x) & \text{for } x \in [\frac{1}{n},\frac{2}{n}] \\ 0 & \text{for } x \in [\frac{2}{n},1] \end{cases} ,$$

og lad g_n og h_n være defineret ved

$$g_n(x) = n\, f_n(x) \quad \text{og} \quad h_n(x) = n^2\, f_n(x) \quad .$$

Da gælder for hvert $x \in [0,1]$

$$f_n(x) \to 0 \ , \quad g_n(x) \to 0 \quad \text{og} \quad h_n(x) \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty ,$$

men konvergensen er i alle tre tilfælde ikke uniform. Videre har vi

$$\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{n} \ , \quad \int_0^1 g_n(t)dt = 1 \ , \quad \int_0^1 h_n(t)dt = n \quad \text{for} \quad n \geq 2 \ .$$

Differentiabilitet og grænseovergang. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og (f_n) en følge af funktioner $f_n\colon I \to \mathbb{C}$ som alle er differentiable i et punkt $x_0 \in I$, og antag at (f_n) konvergerer punktvis på I med grænsefunktion $f: I \to \mathbb{C}$. Som nedenstående eksempler viser, er grænsefunktionen f <u>ikke</u> nødvendigvis differentiabel i x_0 (heller ikke hvis (f_n) konvergerer uniformt på I mod f) og hvis f er differentiabel i $x_0 \in I$ gælder <u>ikke</u> nødvendigvis at

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x_0) .$$

EKSEMPEL. Lad (f_n) være den ved $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ definerede følge af funktioner $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er f_n af klasse C^1 med

$$f'_n(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Følgen (f_n) er uniformt konvergent med grænsefunktion $f(x) = |x|$, idet vi for $x \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$ har

$$\left|f_n(x)-|x|\right| = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \left((x^2+\frac{1}{n})+x^2 - 2\sqrt{x^2}\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq (2x^2+\frac{1}{n}-2\sqrt{x^2}\sqrt{x^2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{n}} .$$

Grænsefunktionen er imidlertid <u>ikke</u> differentiabel i punktet $x = 0$.

EKSEMPEL. Lad (f_n) være den ved $f_n(x) = \frac{1}{n} x^n$ definerede følge af funktioner $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er f_n af klasse C^1 med

$$f'_n(x) = x^{n-1} \quad \text{for} \quad x \in [0,1] .$$

Følgen (f_n) konvergerer uniformt på $[0,1]$ mod funktionen f som er konstant lig 0, idet

$$|f_n(x)-0| = \frac{1}{n} x^n \leq \frac{1}{n} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{og} \quad x \in [0,1] .$$

Endvidere konvergerer (f'_n) punktvis (men ikke uniformt) på $[0,1]$ mod funktionen

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{for} \quad x = 1 . \end{cases}$$

Man ser at $f'(1) \neq g(1)$.

Derimod gælder, som vi nu skal se, at hvis en følge (f_n) af C^1-funktioner konvergerer uniformt og følgen af afledede ligeledes konvergerer uniformt da er grænsefunktionen f af klasse C^1 og $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$.

SÆTNING 4.3. Lad (f_n) være en følge af C^1-funktioner $f_n: I \to \mathbb{C}$ på et begrænset interval $I \subseteq \mathbb{R}$, og antag, at

(i) der findes et $x_0 \in I$ så talfølgen $(f_n(x_0))$ er konvergent.

(ii) følgen af afledede (f_n') konvergerer uniformt på I .

Så findes der en C^1-funktion $f: I \to \mathbb{C}$ så (f_n) konvergerer uniformt på I mod f og $f' = g$, hvor g er grænsefunktionen for følgen (f_n') .

BEVIS. Idet f_n' er kontinuert for alle $n \in \mathbb{N}$ og (f_n') konvergerer uniformt på I mod g , er g kontinuert. Lad k betegne grænseværdien for følgen $(f_n(x_0))$. Lad funktionen $f: I \to \mathbb{C}$ være givet ved

$$f(x) = k + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad \text{for} \quad x \in I . \tag{4}$$

Det er da klart, at f er af klasse C^1 og at $f' = g$. Idet der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \quad \text{for} \quad x \in I ,$$

og (f_n') konvergerer uniformt på intervallet med endepunkter x og x_0 mod g , fås af Sætning 4.1, at

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad \text{for} \quad x \in I ,$$

og dermed at (f_n) konvergerer punktvis på I mod f . Lad os vise, at (f_n) konvergerer uniformt på I mod f . Lad $\varepsilon > 0$ være givet og vælg $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ gælder at $|f_n(x_0)-k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, og

$$|f_n'(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2c} \quad \text{for} \quad t \in I \ ,$$

hvor $c > 0$ er længden af I. For $n \geq N$ og $x \in I$ har vi så

$$f_n(x) - f(x) = f_n(x_0) - k + \int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - g(t))dt \ ,$$

og dermed

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x_0) - k| + \left|\int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - g(t))dt\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)|dt\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |x - x_0| \frac{\varepsilon}{2c} \leq \varepsilon \ , \end{aligned}$$

da $|x-x_0| \leq c$, og dette viser at (f_n) konvergerer uniformt på I mod f. □

BEMÆRKNING. Intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$ er i Sætning 4.3 forudsat begrænset, og dette blev i beviset brugt til at vise, at (f_n) konvergerer uniformt på I mod f.

For et vilkårligt (begrænset eller ej) interval $I \subseteq \mathbb{R}$, kan vi af de øvrige forudsætninger i 4.3 slutte, at der findes en C^1-funktion, nemlig f givet ved (4), således at $f' = g$ (dette er klart) og så (f_n) konvergerer punktvis mod f. Af beviset ses videre, at for ethvert begrænset delinterval $J \subseteq I$ vil (f_n) konvergere uniformt på J mod f.

På samme måde giver beviset, at hvis (f_n) er en følge af C^1-funktioner $f_n: I \to \mathbb{C}$ på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ som opfylder (i) og betingelsen

(ii)' for ethvert begrænset delinterval $J \subseteq I$ er følgen af afledede (f_n') uniformt konvergent på J,

så findes en C^1-funktion f så $f' = \lim_{n\to\infty} [f_n']$, og så (f_n) på ethvert begrænset interval $J \subseteq I$ konvergerer uniformt mod f (Overvej dette!).

Ved anvendelserne af Sætning 4.3 er det i reglen således, at følgen (f_n) vides at konvergere uniformt på I, hvilket specielt medfører at forudsætning (i) er opfyldt.

KOROLLAR 4.4. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et begrænset interval. Hvis en følge (f_n) af C^1-funktioner $f_n: I \to \mathbb{C}$ er uniformt konvergent på I og hvis følgen (f_n') af afledede ligeledes konvergerer uniformt på I, så er grænsefunktionen $f = \lim_{n\to\infty} f_n : I \to \mathbb{C}$ af klasse C^1, og dens afledede er grænsefunktionen $\lim_{n\to\infty} f_n' : I \to \mathbb{C}$. Der gælder altså

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f_n' . \qquad (5)$$

BEMÆRKNING. Afbildningen der til en C^1-funktion h knytter h' er defineret via en grænseovergang, og ligningen (5) kan altså fortolkes at de to "grænseprocesser"

$$f_n \to f \quad \text{og} \quad h \mapsto h'$$

under de gjorte antagelser, er ombyttelige.

§5. Uendelige rækker af funktioner.

De foranstående resultater vedrørende konvergens af funktionsfølger skal udnyttes (eller omformuleres) i tilfældet af uendelige rækker, hvis led er komplekse funktioner.

Definitioner og konvergenskriterier. Lad X være en ikke tom mængde og lad (f_n) være en følge af komplekse funktioner på X, altså $f_n \in F(X,\mathbb{C})$. Den formelle sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{eller} \quad f_1+f_2+\ldots+f_n+\ldots \tag{1}$$

kaldes den uendelige række af funktioner med n'te led f_n, og funktionen $(n \in \mathbb{N})$

$$X \ni x \mapsto s_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$$

kaldes det n'te afsnit i den uendelige række (1). Følgen (s_n) af funktioner $s_n\colon X \to \mathbb{C}$ kaldes afsnitsfølgen for den uendelige række (1).

BEMÆRKNING. En vilkårlig følge (g_n) af funktioner $g_n \in F(X,\mathbb{C})$ er afsnitsfølge for en uendelig række af funktioner. Med $f_1 = g_1$ og $f_n = g_n-g_{n-1}$ for $n \geq 2$ fås nemlig

$$s_n = f_1+\ldots+f_n = g_1+(g_2-g_1)+\ldots+(g_n-g_{n-1}) = g_n .$$

Indsættes et punkt $x \in X$ i (1) fås den (sædvanlige) uendelig række (med komplekse led) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, hvis afsnitsfølge er den kor plekse talfølge $(s_n(x))$, og vi siger derfor, at den uendelige række (1) er punktvis konvergent såfremt afsnitsfølgen (s_n) er punktvis konvergent. I så fald defineres ved

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \quad \text{for} \quad x \in X ,$$

en funktion $f \in F(X,\mathbb{C})$ som kaldes sumfunktionen for den uendel række (1), og vi skriver

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{punktvis.}$$

Dette er ensbetydende med, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ for hvert fast $x \in X$ er konvergent med sum $f(x)$.

EKSEMPEL. Lad $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den ved $f_n(x) = x^n$ definerede funktion og betragt den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Afsnitsfølgen (s_n) beregnes til

$$s_n(x) = \begin{cases} x\,\dfrac{1-x^n}{1-x} & \text{for } x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ n & \text{for } x = 1\,. \end{cases}$$

Heraf ses at $(s_n(x))$ er konvergent hvis og kun hvis $x \in]-1,1[$ med grænseværdi

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{for } x \in]-1,1[\,.$$

Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er dermed, opfattet som en uendelig række af funktioner af $]-1,1[$ ind i $\mathbb{C}$, punktvis konvergent med sumfunktion $f(x) = \frac{x}{1-x}$ $(x \in]-1,1[)$. Derimod er $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ <u>ikke</u> punktvis konvergent på nogen delmængde af $\mathbb{R}$ der indeholder punkter af $\mathbb{R}\setminus]-1,1[$.

EKSEMPEL. Lad $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ være en bijektiv afbildning og lad $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være givet ved

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \neq \varphi(n)\,, \\ 1 & \text{hvis } x = \varphi(n)\,. \end{cases}$$

Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er da punktvis konvergent med sumfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{for } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Ligesom i tilfældet med konvergens af funktionsfølger fås et nyttigere konvergensbegreb ved at skærpe (2) til at være "lige hurtig" i alle punkter $x \in X$.

DEFINITION. Den uendelige række (1) siges at være uniformt konvergent med sumfunktion $f: X \to \mathbb{C}$ hvis afsnitsfølgen (s_n) konvergerer uniformt på X mod f .

Dette betyder, at for hvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ gælder at

$$d(s_n, f) \leq \varepsilon ,$$

eller hvis $\varepsilon \in]0,1[$, at

$$\sup\{|s_n(x)-f(x)| \mid x \in X\} \leq \varepsilon .$$

Det er således klart, at hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergerer uniformt med sumfunktion f er den punktvis konvergent med sumfunktion f .

SÆTNING 5.1. (Udsnitskriteriet for uniform konvergens.) Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er uniformt konvergent, hvis og kun hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$ så

$$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$$

for alle $n \geq N$, alle $p \in \mathbb{N}$ og alle $x \in X$.

BEVIS. Dette følger af Sætning 3.4 idet den anførte betingelse kommer ud på, at afsnitsfølgen (s_n) er en fundamentalfølge i det metriske rum $(F(X,\mathbb{C}),d)$. $\square$

DEFINITION. En uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, hvis led er positive reelle tal, kaldes en majorantrække for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, hvis der gælder

$$|f_n(x)| \leq b_n \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N} \text{ og alle } x \in X .$$

SÆTNING 5.2. (Majorantkriteriet.) Hvis der findes en konvergent majorantrække $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniformt konvergent.

BEVIS. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Idet rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, findes et $N \in \mathbb{N}$, så at

$$b_{n+1}+\dots+b_{n+p} \leq \varepsilon$$

for alle $n \geq N$ og alle $p \in \mathbb{N}$. For ethvert $n \geq N$, ethvert p og ethvert $x \in X$ gælder dermed

$$|f_{n+1}(x)+\dots+f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)|+\dots+|f_{n+p}(x)|$$
$$\leq b_{n+1}+\dots+b_{n+p} \leq \varepsilon .$$

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er altså uniformt konvergent ifølge udsnitskriteriet for uniform konvergens. □

BEMÆRKNING. Som det ses af beviset for Sætning 5.2, er det nok at forudsætte, at den konvergente række $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er "majorantrække fra et vist trin".

Rækker af kontinuerte funktioner. Antag nu at mængden X er udstyret med en metrik d_X.

SÆTNING 5.3. Lad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ være en uendelig række af kontinuerte funktioner $f_n \in C^0(X,\mathbb{C})$, og antag at rækken er uniformt konvergent. Så er sumfunktionen kontinuert.

BEVIS. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er funktionen

$$s_n = f_1 + \dots + f_n$$

kontinuert, og det følger derfor af Korollar 3.6 at sumfunktionen er kontinuert. □

Ledvis integration og differentiation. Vi skal nu betragte uendelige rækker hvis led er komplekse funktioner defineret på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

SÆTNING 5.4. Lad $I = [a,b]$ være et kompakt interval i $\mathbb{R}$, og lad (f_n) være en følge af kontinuerte funktioner $f_n: I \to \mathbb{C}$ for hvilken den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergerer uniformt på I med sumfunktion f (som da ligeledes er kontinuert). Så er den uendelige række med komplekse led

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\,dt \right) \tag{3}$$

konvergent og der gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\,dt \right) = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt .$$

BEVIS. Det n'te afsnit i rækken (3) kan ifølge regnereglerne for integralet skrives

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b f_j(t)\,dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} f_j(t) \right) dt = \int_a^b s_n(t)\,dt ,$$

hvor (s_n) er afsnitsfølgen for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Idet (s_n) konvergerer uniformt på I mod f giver Sætning 4.1, at

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt ,$$

hvilket viser påstanden. □

BEMÆRKNING. Konklusionen i Sætning 5.4 kan også kort udtrykkes, at integralet for sumfunktionen kan beregnes ved "ledvis" integration.

SÆTNING 5.5. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et begrænset interval og lad (f_n) være en følge af C^1-funktioner $f_n: I \to \mathbb{C}$ således, at

(i) der findes $x_0 \in I$ for hvilket den uendelige række (med komplekse led) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ er konvergent,

(ii) den ved ledvis differentiation dannede række $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ er uniformt konvergent på I med sumfunktion $g: I \to \mathbb{C}$.

Så er den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniformt konvergent på I med en sumfunktion $f: I \to \mathbb{C}$, der ligeledes er en C^1-funktion og der gælder $f' = g$, altså

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) .$$

BEVIS. Det er let at se, at afsnitsfølgen (s_n) for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ opfylder betingelserne fra Sætning 4.3, idet følgen af afledede (s'_n) netop er afsnitsfølgen for den ledvis differentierede række $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$. Påstanden er således en konsekvens af Sætning 4.3. ▯

BEMÆRKNING. Vedrørende versioner af Sætning 5.5 for ikke nødvendigvis begrænsede intervaller henvises til bemærkningen efter Sætning 4.3.

Ved anvendelserne vil det i reglen være således, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ på forhånd vides at være uniformt konvergent på I. Vi formulerer derfor særskilt følgende svagere form af sætningen:

KOROLLAR 5.6. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et begrænset interval. Hvis leddene i rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er C^1-funktioner på I, og både rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ og den ved ledvis differentiation dannede række $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ er uniformt konvergent på I, da er sumfunktionen f for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ en C^1-funktion, og dens afledede f' er sumfunktionen for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$. Der gælder altså formlen

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) .$$

EKSEMPEL. En uendelig række af formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

hvor $a_0 \in \mathbb{C}$ og (a_n) og (b_n) er komplekse talfølger, kaldes en <u>trigonometrisk</u> <u>række</u>.

Antag at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er absolut konvergente. Vurderingen

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad n \in \mathbb{N},$$

viser at rækken (4) konvergerer uniformt på $\mathbb{R}$. Sumfunktionen

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R},$$

er kontinuert, idet leddene i (4) er kontinuerte funktioner.

Den ledvis differentierede række er

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\, b_n \cos nx - n\, a_n \sin nx) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

og på samme måde som ovenfor ses, at hvis rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n$ er absolut konvergente, så er (5) uniformt konvergent og dermed er f af klasse C^1 og der gælder

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n\, b_n \cos nx - n\, a_n \sin nx) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}.$$

§6. Konvergens af følger af afbildninger.

Vi har tidligere, med henblik på begrebet uniform konvergens for følger af komplekse funktioner defineret på en mængde X, studeret det metriske rum $(F(X,\mathbb{C}),d)$, og vi skal nu på tilsvarende måde behandle begrebet uniform konvergens for følger af afbildninger af X ind i et metrisk rum. Hovedsigtet skal være at kunne behandle følger af afbildninger med værdier i et talrum $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$.

Afbildningsrummet $F(X,Y)$. Lad X være en ikke tom mængde og (Y,d_Y) et metrisk rum. Mængden af afbildninger $f: X \to Y$ betegnes $F(X,Y)$.

EKSEMPEL. Med denne notation betegner $F([0,1],\mathbb{R})$ altså mængden bestående af samtlige reelle funktioner defineret på $[0,1]$.

DEFINITION. En følge (f_n) af afbildninger $f_n: X \to Y$ (altså $f_n \in F(X,Y)$) siges at konvergere punktvis mod grænseafbildningen $f \in F(X,Y)$, hvis det for hvert $x \in X$ gælder, at punktfølgen $(f_n(x))$ er konvergent i (Y,d_Y) med grænsepunkt $f(x)$, altså hvis

$$\forall x \in X: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) . \tag{1}$$

Videre siges følgen (f_n) at konvergere uniformt på X mod f, såfremt (f_n) konvergerer punktvis mod f, og konvergensen i (1) yderligere er "lige hurtig" i alle punkter $x \in X$, hvilket præcist udtrykt betyder, at der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så

$$d_Y(f_n(x),f(x)) \le \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in X ,$$

når blot $n \ge N$.

Dette konvergensbegreb - uniform konvergens på X - kan formuleres som et konvergensbegreb i et metrisk rum. For $f,g \in F(X,Y)$ definerer vi

$$d(f,g) = \min\{\sup\{d_Y(f(x),g(x)) \mid x \in X\},1\} , \tag{2}$$

og på samme måde som i beviset for Sætning 3.3 ses, at d er en metrik i $F(X,Y)$.

Lad (f_n) være en punktfølge i $F(X,Y)$. Hvis (f_n) er konvergent i det metriske rum $(F(X,Y),d)$ med grænsepunkt $f \in F(X,Y)$, så findes specielt til hvert $\varepsilon \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$ så $d(f_n,f) \leq \varepsilon$ for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$, eller

$$\sup\{d_Y(f_n(x),f(x)) \mid x \in X\} \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N ,$$

hvoraf

$$\forall x \in X: d_Y(f_n(x),f(x)) \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N ,$$

hvilket betyder at (f_n) konvergerer uniformt på X mod f . Hvis omvendt (f_n) konvergerer uniformt på X mod grænseafbildningen f $(\in F(X,Y))$, så findes til hvert $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ så

$$\forall x \in X: d_Y(f_n(x),f(x)) \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N ,$$

hvoraf følger, at

$$\sup\{d_Y(f_n(x),f(x)) \mid x \in X\} \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N .$$

Dette viser specielt, at $d(f_n,f) \leq \varepsilon$ for $n \geq N$, altså at (f_n) konvergerer mod f i det metriske rum $(F(X,Y),d)$.

Metriken d i $F(X,Y)$ kaldes derfor <u>metriken for uniform konvergens på</u> X .

EKSEMPEL. Mængden af afbildninger med værdier i en ikke tom delmængde Y af $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$ (forsynet med maksimumsmetriken, se også nedenfor) er således udstyret med en metrik.

<u>SÆTNING 6.1</u>. Hvis (Y,d_Y) er et fuldstændigt metrisk rum, så er afbildningsrummet $(F(X,Y),d)$ et fuldstændigt metrisk rum.

BEVIS. Fås af beviset for Sætning 3.4 ved at erstatte $\mathbb{C}$ med Y og den sædvanlige metrik i $\mathbb{C}$ med d_Y . $\square$

EKSEMPLER. 1) For en vilkårlig mængde $X \neq \emptyset$ og $Y = \mathbb{R}^k$ eller $Y = \mathbb{C}^k$ $(k \in \mathbb{N})$, er $(F(X,Y),d)$ et fuldstændigt metrisk rum.

2) For en vilkårlig mængde $X \neq \emptyset$ og en afsluttet ikke tom delmængde Y af $\mathbb{R}^k$ (eller $\mathbb{C}^k$) er $(F(X,Y),d)$ et fuldstændigt metrisk rum (thi i så fald er (Y,d_Y) nemlig fuldstændigt).

Uniform konvergens og kontinuitet. Antag nu yderligere, at mængden X er forsynet med en metrik.

SÆTNING 6.2. Lad (f_n) være en følge i $F(X,Y)$ og antag af (f_n) konvergerer mod $f \in F(X,Y)$ i det metriske rum $(F(X,Y),d)$. Hvis hver af afbildningerne f_n er kontinuert i punktet $x_0 \in X$, så er f kontinuert i x_0.

BEVIS. Fås af beviset for Sætning 3.5 ved at erstatte $\mathbb{C}$ med Y og metriken i $\mathbb{C}$ med d_Y. □

Idet vi med $C^0(X,Y)$ betegner mængden af kontinuerte afbildninger af X ind i Y, fås af Sætning 6.2 specielt:

KOROLLAR 6.3. Mængden $C^0(X,Y)$ er en afsluttet delmængde af det metriske rum $(F(X,Y),d)$.

SÆTNING 6.4. Hvis (Y,d_Y) er et fuldstændigt metrisk rum, er delrummet $(C^0(X,Y),d)$ af $(F(X,Y),d)$ et fuldstændigt metrisk rum.

BEVIS. Dette følger af Korollar 6.3 og Sætning II.1.11. □

EKSEMPEL. For et vilkårligt metrisk rum (X,d_X) og $Y = \mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$ (forsynet med maksimumsmetriken) er $(C^0(X,Y),d)$ et fuldstændigt metrisk rum.

Afbildningsrummet $F_b(X,Y)$. Lad igen X være en ikke tom mængde og (Y,d_Y) et metrisk rum. I en række tilfælde er det i (2) optrædende supremum endeligt for alle afbildninger $f,g \in F(X,Y)$, eller i det mindste for de afbildninger fra $F(X,Y)$ som undersøges, og det er da nærliggende at benytte tallet

$$\sup\{d_Y(f(x),g(x)) \mid x \in X\} , \tag{3}$$

som "afstand" mellem $f,g \in F(X,Y)$, i stedet for $d(f,g)$ givet ved (2).

Tallet (3) er endeligt for $f,g \in F(X,Y)$, hvis f.eks. de to billedmængder $f(X)$ og $g(X)$ er begrænsede delmængder af det metriske rum (Y,d_Y) .

Lad $F_b(X,Y)$ betegne mængden af afbildninger $f: X \to Y$ med <u>begrænset</u> <u>billedmængde</u>, d.v.s.

$$\operatorname{diam}(f(X)) = \sup\{d_Y(f(x_1),f(x_2)) \mid x_1,x_2 \in X\} < \infty .$$

Ved for $f,g \in F_b(X,y)$ at sætte

$$d_\infty(f,g) = \sup\{d_Y(f(x),g(x)) \mid x \in X\} ,$$

defineres en afbildning $d_\infty: F_b(X,Y) \times F_b(X,Y) \to [0,\infty[$, der på samme måde som i beviset for Sætning 3.1 ses at være en metrik i $F_b(X,Y)$. Videre gælder (vis det!), at en følge (f_n) i $F_b(X,Y)$ er konvergent i det metriske rum $(F_b(X,Y),d_\infty)$ med grænseafbildning $f \in F_b(X,Y)$ hvis og kun hvis (f_n) , opfattet som følge i $(F(X,Y),d)$, konvergerer mod f .

På samme måde som ovenfor indses, at hvis (Y,d_Y) er et fuldstændigt metrisk rum så er $(F_b(X,Y),d_\infty)$ et fuldstændigt metrisk rum.

EKSEMPLER. 1) Hvis det metriske rum (Y,d_Y) er <u>begrænset</u>, altså $\operatorname{diam}(Y) < \infty$, så gælder

$$F(X,Y) = F_b(X,Y) .$$

2) Hvis (X,d_X) er et <u>kompakt</u> metrisk rum, så gælder

$$C^0(X,Y) \subseteq F_b(X,Y) .$$

3) For en vilkårlig mængde $X \neq \emptyset$ og en <u>kompakt</u> ikke tom delmængde

Y af $\mathbb{R}^k$ (eller $\mathbb{C}^k$) er $(F(X,Y),d_\infty)$ fuldstændigt.

4) For et kompakt metrisk rum (X,d_X) og $Y = \mathbb{R}^k$ (eller $\mathbb{C}^k$) er $(C^0(X,Y),d_\infty)$ et fuldstændigt metrisk rum.

5) For et kompakt interval $I \subseteq \mathbb{R}$ (med den sædvanlige metrik) og en kompakt ikke tom delmængde Y af $\mathbb{R}^k$ (eller $\mathbb{C}^k$) er $(C^0(I,Y),d)$ og $(C^0(I,Y),d_\infty)$ fuldstændige metriske rum.

Funktioner med værdier i $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$. Lad for et $k \in \mathbb{N}$ V betegne det k-dimensionale reelle (eller komplekse) talrum $\mathbb{R}^k$ (eller $\mathbb{C}^k$) . Dette talrum udstyres med maksimumsmetriken givet ved

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_k-y_k|\} \quad \text{for} \quad \underline{x},\underline{y} \in V .$$

Lad $X \neq \emptyset$ være en mængde. For en afbildning $\underline{f}\colon X \to V$ betegner vi med $(f_1,\dots,f_k)$ sættet af koordinatfunktioner for $\underline{f}$, hvor altså $f_j\colon X \to \mathbb{R}$ (henh. $\mathbb{C}$) for $j = 1,2,\dots,k$ er funktioner som opfylder

$$\underline{f}(x) = (f_1(x),\dots,f_k(x)) \quad \text{for} \quad x \in X .$$

Vi skal nu behandle følger $(\underline{f}_n)$ af funktioner med værdier i V, ved hjælp af resultater anvendt på de k følger af koordinatfunktioner.

SÆTNING 6.5. En følge $(\underline{f}_n)$ af afbildninger $\underline{f}_n\colon X \to V$ konvergerer uniformt på X mod afbildningen $\underline{f}\colon X \to V$ hvis og kun hvis for hvert $j \in \{1,2,\dots,k\}$ følgen af j'te koordinatfunktioner (f_{nj}) for $(\underline{f}_n)$ konvergerer uniformt på X mod den j'te koordinatfunktion f_j for $\underline{f}$.

BEVIS. Antag først, at $(\underline{f}_n)$ konvergerer uniformt på X mod $\underline{f}$, og lad $j \in \{1,2,\dots,k\}$ og $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes $N \in \mathbb{N}$ så det alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ gælder, at

$$d(\underline{f}_n(x),\underline{f}(x)) \leq \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in X .$$

For alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ gælder så

$$|f_{nj}(x)-f_j(x)| \leq \max\{|f_{n1}(x)-f_1(x)|,\ldots,|f_{nk}(x)-f_k(x)|\}$$
$$= d(\underline{f}_n(x),\underline{f}(x)) \leq \varepsilon$$

for alle $x \in X$, hvilket viser, at (f_{nj}) konvergerer uniformt på X mod f_j.

Antag nu omvendt, at (f_{nj}) for $j = 1,2,\ldots,k$ konvergerer uniformt på X mod f_j, og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes tal $N_1,\ldots,N_k \in \mathbb{N}$ så det for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N_j$ $(j = 1,2,\ldots,k)$ gælder at

$$|f_{nj}(x)-f_j(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in X .$$

For $n \geq \max\{N_1,\ldots,N_k\}$ har vi så

$$d(\underline{f}_n(x),\underline{f}(x)) = \max\{|f_{n1}(x)-f_1(x)|,\ldots,|f_{nk}(x)-f_k(x)|\} \leq \varepsilon$$

for alle $x \in X$, hvilket viser, at $(\underline{f}_n)$ konvergerer uniformt på X mod $\underline{f}$. $\square$

Lad nu $I = [a,b]$ være et kompakt interval i $\mathbb{R}$. For en følge $(\underline{f}_n)$ af kontinuerte afbildninger $\underline{f}_n\colon I \to V$, altså $\underline{f}_n \in C^0(I,V)$, som konvergerer uniformt på I mod afbildningen $\underline{f}\colon I \to V$ (som også tilhører $C^0(I,V)$) gælder, at følgen af integraler $(\int_a^b \underline{f}_n(t)dt)$, som er en følge af elementer i V, konvergerer mod $\int_a^b \underline{f}(t)dt \in V$, altså

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \underline{f}_n(t)dt = \int_a^b \underline{f}(t)dt ,$$

(V er forsynet med maksimumsmetriken).

Dette fås af Sætning 4.1 ved at betragte koordinatfunktionerne for $\underline{f}_n$ og $\underline{f}$.

Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et vilkårligt interval og lad $(\underline{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af C^1-afbildninger $\underline{f}_n\colon I \to V$ (altså $\underline{f}_n \in C^1(I,V)$). Hvis der findes $t_0 \in I$ så følgen $(\underline{f}_n(t_0))_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent i V og tillige følgen $(\underline{f}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt på I (eller blot for ethvert begrænset delinterval $J \subseteq I$ konvergerer uniformt på J) mod grænseafbildningen $\underline{g}: I \to V$, så findes en afbildning $\underline{f} \in C^1(I,V)$ så $(\underline{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for hvert begrænset delinterval $J \subseteq I$ konvergerer uniformt på J mod $\underline{f}$ og $\underline{f}$ opfylder $\underline{f}' = \underline{g}$.

Dette fås af det tilsvarende resultat for komplekse funktioner på I, Sætning 4.3, ved betragtning af koordinatfunktionerne.

IV.1.1. Lad (f_n) være en punktvis konvergent følge af funktioner $f_n: I \to \mathbb{R}$, hvor $I \subseteq \mathbb{R}$ er et interval, med grænsefunktion $f: I \to \mathbb{R}$. Vis, at hvis f_n er voksende for $n \in \mathbb{N}$ (d.v.s. $x, x' \in I$, $x < x' \Rightarrow f_n(x) \leq f_n(x')$) så er f voksende.

IV.1.2. Lad (f_n) og (g_n) være punktvis konvergente følger af funktioner $f_n, g_n: I \to \mathbb{R}$, hvor $I \subseteq \mathbb{R}$ er et interval, med grænsefunktion f henholdsvis g. Vis, at hvis $f_n \leq g_n$ for $n \in \mathbb{N}$ (d.v.s. $f_n(x) \leq g_n(x)$ for alle $x \in I$) så gælder $f \leq g$.

IV.1.3. Undersøg nedenstående følger (f_n) af funktioner $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med henblik på punktvis og uniform konvergens

1) $f_n(x) = \dfrac{2x}{1+n|x|}$, 2) $f_n(x) = \dfrac{n^3 x}{1+n^4|x|}$,

3) $f_n(x) = \dfrac{n^3 x}{1+n^4 x^2}$, 4) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^2|x|}$.

IV.1.4. Vis, at den ved

$$f_n(x) = \frac{1+x^4}{(1+x^2)(n+x^4)} \quad \text{for } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

definerede følge af funktioner $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergerer uniformt mod funktionen 0.

IV.1.5. Vis, at grænsefunktionen $f:]0,1[\to \mathbb{C}$ for en uniformt konvergent følge (f_n) af uniformt kontinuerte funktioner $f_n:]0,1[\to \mathbb{C}$ selv er uniformt kontinuert.

IV.1.6. En følge af funktioner $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ kaldes <u>stigende</u>, hvis talfølgen $(f_n(x))$ er voksende for alle $x \in [0,1]$. Angiv en stigende, punktvis konvergent følge af kontinuerte funktioner $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$, således at grænsefunktionen $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ <u>ikke</u> er begrænset.

IV.1.7. Lad $a_1, a_2, \ldots$ være en følge af parvis forskellige reelle tal, og lad $g_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den ved

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq a_n \\ 2^{-n} & \text{for } x > a_n \end{cases}$$

bestemte funktion. Vis, at følgen af funktioner

$f_n = g_1+\ldots+g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergerer uniformt mod en monotont voksende funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som er diskontinuert i ethvert af punkterne a_n og kontinuert i ethvert punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots\}$. Vis endvidere, at der i hvert af punkterne a_n gælder

$$f(a_n-0) = f(a_n) \quad \text{og} \quad f(a_n+0) = f(a_n) + \frac{1}{2^n} .$$

Bestem endelig grænseværdierne $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ og $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

IV.1.8. Vis, at den ved

$$f_n(x) = \frac{1+e^x}{(1+x^2)(n+e^x)} \quad \text{for } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

definerede følge af funktioner $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er uniformt konvergent.

IV.1.9. Lad $F\colon [0,1] \times]0,1] \to \mathbb{R}$ være en uniformt kontinuert funktion. Lad for $n \in \mathbb{N}$ funktionen $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$g_n(x) = F(x, \tfrac{1}{n}) .$$

Vis, at følgen (g_n) er uniformt konvergent.

IV.1.10. Lad $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være kontinuert og lad (f_n) være en uniformt konvergent følge af kontinuerte funktioner $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Vis, at følgen $(F\circ f_n)$ af funktioner $F\circ f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ er uniformt konvergent.

IV.2.1. Beregn følgen af Bernstein polynomier for funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = x^3$.

IV.2.2. Vis, at hvis $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ er kontinuert og q_n betegner det n'te Bernstein polynomium for f så gælder

$$\min f \le q_n(t) \le \max f \quad \text{for } t \in [0,1] .$$

IV.2.3. Betragt for $n \in \mathbb{N}$ og $j \in \{0,1,\ldots,n\}$ funktionen $p_j^n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ givet ved

$$p_j^n(t) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} .$$

Find

$$\sup\{p_j^n(t) \mid t \in [0,1]\} .$$

Vis, at hvis (k_n) er en følge af naturlige tal for hvilken der findes $c \in]0,\frac{1}{2}[$ så

$$cn \leq k_n \leq (1-c)n \quad \text{for} \quad n = 2,3,\dots ,$$

så gælder

$$p_{k_n}^n(t) \to 0 \quad \text{uniformt på} \quad [0,1] \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Vink. Man kan benytte at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = \sqrt{2\pi} \qquad \text{(\underline{Stirlings formel})}$$

IV.3.1. Vis, at afbildningen af $(F_b(X,\mathbb{C}),d_\infty)$ ind i $\mathbb{R}$ givet ved

$$f \mapsto \sup\{|f(t)| \mid t \in X\}$$

er kontinuert.
Angiv en følge (f_n) i $F_b([0,1],\mathbb{C})$ som er punktvis konvergent med grænsefunktion $f \in F_b([0,1],\mathbb{C})$ og så

$$\sup\{|f_n(t)| \mid t \in X\} \not\to \sup\{|f(t)| \mid t \in X\} .$$

IV.3.2. Vis, at der ved

$$\|f\| = d_\infty(f,0) \quad \text{for} \quad f \in F_b(X,\mathbb{C}) ,$$

defineres en norm på vektorrummet $F_b(X,\mathbb{C})$ (cf. Øvelse II.1.20)

IV.3.3. Lad (X,d_X) være et metrisk rum og lad $f: X \to \mathbb{C}$ være diskontinuert. Find et tal $r > 0$ så alle funktioner tilhørende den åbne kugle

$$K(f,r) = \{g \in F(X,\mathbb{C}) \mid d(f,g) < r\}$$

er diskontinuerte.

IV.3.4. Lad $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ være en funktion og antag at f <u>ikke</u> er monotont voksende (d.v.s. $\exists x_1,x_2 \in [0,1]: x_1 < x_2 \wedge f(x_1) > f(x_2)$) . Find et tal $r > 0$ så mængden

$$\{g \in F([0,1],\mathbb{R}) \mid d(f,g) < r\}$$

består af funktioner der er ikke-voksende.

IV.3.5. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et begrænset afsluttet interval og lad (f_n) være en følge i $C^0(I,\mathbb{R})$ som konvergerer punktvis mod en funktion $f \in C^0(I,\mathbb{R})$. Vis, at hvis for hvert $x \in I$ talfølgen $(f_n(x))$ er monotont voksende så konvergerer (f_n) uniformt på I mod f. (Hvad kan man slutte hvis $(f_n(x))$ er monotont aftagende for alle $x \in I$?)

Vink. Beviset kan føres indirekte. Antag at talfølgen (α_n) hvor

$$\alpha_n = \sup\{f(t)-f_n(t) \mid t \in I\}$$

ikke konvergerer mod 0. Så findes $\varepsilon > 0$ og en delfølge (α_{n_p}) af (α_n) så $\alpha_{n_p} \geq \varepsilon$ for $p \in \mathbb{N}$. Dernæst vælges $x_{n_p} \in I$ så

$$f(x_{n_p})-f_{n_p}(x_{n_p}) = \alpha_{n_p} \quad \text{for} \quad p \in \mathbb{N}.$$

Følgen (x_{n_p}) har en konvergent delfølge med grænseværdi $x \in I$. Nu kan man nå til en modstrid med at $f_n(x) \to f(x)$ for $n \to \infty$.

IV.3.6. Betragt følgen (u_n) af funktioner $u_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ fastlagt induktivt ved $u_1(t) = 0$ for $t \in [0,1]$ og

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t-u_n^2(t)) \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{og} \quad t \in [0,1].$$

Vis, at (u_n) konvergerer uniformt på $[0,1]$ mod funktionen $t \mapsto \sqrt{t}$. Vink. Benyt foregående opgave.

IV.3.7. Lad (α_n) og (β_n) være følger af reelle tal og antag at følgen (f_n) hvor

$$f_n(x) = \alpha_n x + \beta_n \quad \text{for} \quad x \in [0,1],$$

konvergerer punktvis mod en funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Vis, at der findes $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ så

$$f(x) = \alpha x + \beta \quad \text{for} \quad x \in [0,1].$$

IV.3.8. Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funktion, og betragt følgen (f_n) af funktioner $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f_n(t) = f(t+\tfrac{1}{n}).$$

Vis, at hvis f er kontinuert så konvergerer (f_n) punktvis mod f.
Angiv en diskontinuert funktion f så (f_n) konvergerer punktvis mod f.
Vis, at hvis f er uniformt kontinuert så konvergerer (f_n) uniformt på $\mathbb{R}$ mod f.
Angiv en diskontinuert funktion f så (f_n) konvergerer uniformt mod f.

IV.4.1. Lad (f_n) være en følge i $C^0([0,1],\mathbb{C})$ der konvergerer uniformt mod $f \in C^0([0,1],\mathbb{C})$. Vis, at

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)dt \to \int_0^1 f(t)dt \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

IV.4.2. Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være kontinuert og lad (f_n) være følgen af funktioner $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ givet ved

$$f_n(x) = \int_0^{\frac{1}{n}} n\, f(x+t)dt .$$

Vis, at f_n er af klasse C^1 for alle $n \in \mathbb{N}$ og at (f_n) konvergerer punktvis mod f.
Vis, at (f_n) konvergerer uniformt på $\mathbb{R}$ mod f hvis f er uniformt kontinuert.

IV.4.3. Lad $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ være kontinuert på produktmængden af to afsluttede begrænsede intervaller.
Vis, at funktionen $g: [c,d] \to \mathbb{C}$ givet ved

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)dx \quad \text{for} \quad t \in [c,d]$$

er kontinuert. Vink. Udnyt at f er uniformt kontinuert til at vise at hvis $t_n \in [c,d]$ opfylder $t_n \to t_0$ så gælder

$$f(\cdot,t_n) \to f(\cdot,t_0) \quad \text{uniformt på} \quad [a,b] .$$

Antag, at f har en partiel afledet efter t, $\frac{\partial f}{\partial t}: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ som er kontinuert. Lad $t \in [c,d]$ og lad h_n være en følge af tal $h_n \in \mathbb{R}$ så $h_n \to 0$ og $t+h_n \in [c,d]$. Vis, at følgen af differenskvotienter

$$\frac{f(\cdot,t+h_n)-f(\cdot,t)}{h_n}$$

konvergerer uniformt på $[a,b]$ mod $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)$.
Vis, at g er differentiabel og at

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx \quad \text{for} \quad t \in [c,d] .$$

IV.4.4. Lad $[a,b]$ være et begrænset afsluttet interval og betragt $f \in C^0([a,b],\mathbb{C})$. Vis, at hvis

$$\int_a^b f(t)p(t)dt = 0$$

for alle polynomier p så er $f(x) = 0$ for alle $x \in [a,b]$.

IV.4.5. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et begrænset afsluttet interval. Vis, at funktionen $d_1: C^1(I,\mathbb{C}) \times C^1(I,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ givet ved

$$d_1(f,g) = d_\infty(f,g) + d_\infty(f',g') \quad \text{for} \quad f,g \in C^1(I,\mathbb{C}) ,$$

er en metrik i $C^1(I,\mathbb{C})$. Her betegner

$$d_\infty(\varphi,\psi) = \sup\{|\varphi(t)-\psi(t)| \mid t \in I\} \quad (< \infty)$$

for $\varphi,\psi \in C^0(I,\mathbb{C})$.
Vis, at en følge (f_n) i det metriske rum $(C^1(I,\mathbb{C}),d_1)$ konvergerer mod f $(\in C^1(I,\mathbb{C}))$ hvis og kun hvis (f_n) konvergerer uniformt på I mod f og tillige (f_n') konvergerer uniformt på I mod f' .
Vis, at det metriske rum $(C^1(I,\mathbb{C}),d_1)$ er fuldstændigt.

IV.5.1. Lad følgen (f_n) af funktioner $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{for} \quad t \in [n,n+1[\\ 0 & \text{ellers} . \end{cases}$$

Vis, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er uniformt konvergent.

IV.5.2. Lad (f_n) være en følge af kontinuerte funktioner $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder

$$f_n(t) = 0 \quad \text{for alle} \quad t \notin [n,n+1] .$$

Vis, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er punktvis konvergent og at sumfunktionen er kontinuert.
Lad talfølgen (α_n) være givet ved $\alpha_n = \sup\{|f_n(t)| \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Vis, at $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er uniformt konvergent hvis og kun hvis $\alpha_n \to 0$ for $n \to \infty$.

IV.5.3. Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$$

for hvert $a > 0$ er uniformt konvergent på intervallet $[-a,a]$.
Vis, at rækkens sumfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er af klasse C^∞ .

IV.5.4. Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \sin (2^n x)$$

er uniformt konvergent på $\mathbb{R}$.
Vis, at rækkens sumfunktion f tilhører $C^1(\mathbb{R})$ og find $f'(0)$.
Udregn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.

IV.5.5. Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(3^n x)$$

er uniformt konvergent på $\mathbb{R}$.
Vis, at sumfunktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>ikke</u> er differentiabel i 0 . Udregn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.

IV.5.6. Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx\, e^{-n^2x^2}$$

er punktvis konvergent på $\mathbb{R}$.
Vis, at rækken konvergerer uniformt på ethvert begrænset afsluttet interval $[a,b]$ som ikke indeholder 0 .
Vis, at sumfunktionen er kontinuert på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ men <u>ikke</u> kontinuert i punktet 0 .

IV.6.1. Lad X være en endelig ikke tom mængde og (f_n) en følge af afbildninger $f_n: X \to Y$ hvor (Y, d_Y) er et metrisk rum.

Vis, at (f_n) konvergerer uniformt på X mod $f: X \to Y$ hvis (og kun hvis) (f_n) konvergerer punktvis mod f.

IV.6.2. Lad X være en ikke tom mængde og lad $Y =]0,1[$ være forsynet med den sædvanlige metrik. Gør rede for at $F(X,Y) = F_b(X,Y)$ og at

$$d_\infty(f,g) = d(f,g) \quad \text{for} \quad f,g \in F(X,Y) .$$

Vis, at $(F(X,Y), d)$ er ikke fuldstændigt.

IV.6.3. Lad X være en ikke tom mængde og (Y, d_Y) et fuldstændigt metrisk rum.

Vis, at $(F_b(X,Y), d_\infty)$ er fuldstændigt.
Vink: Udnyt f.eks., at $(F(X,Y), d)$ er fuldstændigt til at vise, at en fundamentalfølge (f_n) i $(F_b(X,Y), d_\infty)$ opfattet som følge i $(F(X,Y), d)$ er konvergent og start med at vise at grænseafbildningen f $(\in F(X,Y))$ faktisk tilhører $F_b(X,Y)$.

IV.6.4. Lad $X \neq \emptyset$ være en mængde og lad $\underline{f}_n: X \to \mathbb{R}^k$ og $\underline{f}: X \to \mathbb{R}^k$ være afbildninger.

Vis, at $(\underline{f}_n)$ konvergerer punktvis på X mod $\underline{f}$ hvis og kun hvis for hvert $j \in \{1,\dots,k\}$ følgen (f_{nj}) af j'te koordinatfunktioner for $\underline{f}_n$ konvergerer punktvis på X mod den j'te koordinatfunktion f_j for $\underline{f}$.

IV.6.5. Lad $(\underline{f}_n)$ være en følge af parameterfremstillinger $\underline{f}_n: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ af klasse C^1 for plane kurver γ_n og antag, at $\underline{f}_n(0) = (0,0)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og at følgen $(\underline{f}'_n)$ konvergerer uniformt på $[0,1]$.

Vis, at følgen $(\underline{f}_n)$ konvergerer uniformt på $[0,1]$ mod en parameterfremstilling $\underline{f}: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ af klasse C^1 for en plan kurve γ, og at der for længderne $L(\cdot)$ af kurverne gælder

$$L(\gamma_n) \to L(\gamma) \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Betragt nu følgen $(\underline{f}_n)$ givet ved

$$\underline{f}_n(t) = (t, \frac{1}{n}\sin(n\pi t)) \quad \text{for} \quad t \in [0,1] .$$

Vis, at $(\underline{f}_n)$ konvergerer uniformt på $[0,1]$ mod en C^0-parameterfremstilling for en rektifikabel kurve γ, og at der for kurvelængderne gælder

$$L(\gamma_n) = \int_0^1 \sqrt{1 + (\cos(\pi t))^2}\, dt > L(\gamma)$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Mat 102, 1981/82

KAPITEL V

ELEMENTÆRE FUNKTIONER, POTENSRÆKKER OG FOURIERRÆKKER

Indhold:

§1. Potensrækker. Almen teori.

De elementære funktioner som eksponential- og logaritmefunktion, potensfunktioner, trigonometriske og hyperbolske funktioner (se senere i kapitlet), såvel som funktioner dannet ud fra disse ved sammensætning og ved de almindelige regneoperationer, kan alle fremstilles ved potensrækker, dvs. rækker af form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots ,$$

i hvert fald i et interval omkring ethvert indre punkt x_0 i definitionsmængden. Dette være sagt for straks at give en fornemmelse af rækkevidden i studiet af potensrækker. Det er her underforstået, at $x_0 \in \mathbb{R}$, og at x er en reel variabel; potensrækkerne kommer dog først rigtig til deres ret i det komplekse, men det kan vi kun i begrænset omfang komme ind på i dette kursus.

I §1 behandler vi potensrækker alment, indledningsvis i det komplekse.

DEFINITION. Ved en <u>potensrække</u> forstås en uendelig række af formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{eller} \quad a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots ,$$

hvor $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ og z_0 er komplekse tal, medens z er en kompleks variabel. Tallene $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ kaldes potensrækkens <u>koefficienter</u>.

For simpelheds skyld vil vi i de følgende almene betragtninger holde os til tilfældet $z_0 = 0$, hvor rækken er

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{eller} \quad a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots .$$

Resultaterne kan umiddelbart overføres til det generelle tilfælde.

<u>Konvergenscirkel</u>. Vi vil undersøge konvergensforholdene for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

For $z = 0$, hvor rækken er $a_0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$, er der selvfølgelig konvergens, med sum a_0 . For et givet $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er det nærliggende at anvende rodkriteriet (s. I.67) på rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, altså se på

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \limsup_{n\to\infty} (\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z|) = |z| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ .$$

Idet vi sætter $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, skelnes mellem tre tilfælde: $L = 0$, $0 < L < \infty$ og $L = \infty$.

I tilfældet $L = 0$ gælder for ethvert $z \in \mathbb{C}$, at

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot 0 = 0 < 1 \ ,$$

og dermed at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ er absolut konvergent.

I tilfældet $L = \infty$ gælder for ethvert $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, at

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \infty = \infty > 1 \ ,$$

og dermed at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ er divergent.

I tilfældet $0 < L < \infty$ er $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot L \lesseqgtr 1$, efter som $|z| \lesseqgtr 1/L$. Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ er derfor absolut konvergent for hvert $z \in \mathbb{C}$ med $|z| < 1/L$ og divergent for hvert z med $|z| > 1/L$. For $|z| = 1/L$ giver rodkriteriet ingen oplysning.

Vi samler resultaterne i følgende hovedsætning:

SÆTNING 1.1. For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ indtræder ét af følgende tre tilfælde:

1) Rækken er absolut konvergent for hvert $z \in \mathbb{C}$.

2) Der findes et tal ρ , $0 < \rho < \infty$, således at rækken er absolut konvergent for hvert $z \in \mathbb{C}$ med $|z| < \rho$, dvs. for hvert punkt z i den åben cirkelskive $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$, divergent for hvert z med $|z| > \rho$.

3) Rækken er kun konvergent for $z = 0$.

I tilfælde 2) kaldes tallet ρ <u>konvergensradius</u> for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, og $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$ kaldes konvergenscirklen. I tilfælde 1) taler man om konvergensradius $\rho = \infty$ og i tilfælde 2) om konvergensradius $\rho = 0$. Regner man $\frac{1}{0} = \infty$ og $\frac{1}{\infty} = 0$, har man så i alle tilfælde

$$\rho = 1 / \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} .$$

I praksis vil man oftest søge at bestemme ρ ad anden vej end ved denne formel. Således giver følgende regel, der bygger på kvotientkriteriet, ofte en simpel bestemmelse af ρ.

<u>SÆTNING 1.2</u>. Hvis potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ har alle koefficienter $a_n \neq 0$ og

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c \in \mathbb{R}^* ,$$

så er konvergensradius $\rho = 1/c$.

BEVIS. Af $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to c$ følger $\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \to c|z|$ for $z \neq 0$. Ifølge kvotientkriteriet (s. I.67) er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ da absolut konvergent i et punkt $z \neq 0$, hvis $c|z| < 1$, og divergent i z, hvis $c|z| > 1$. $\square$

BEMÆRKNING. I tilfælde 2) kan rækken være konvergent i alle, i visse eller i ingen punkter på konvergenscirklens rand.

EKSEMPLER. Potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ eller $1 + z + \ldots + z^n + \ldots$ er for hvert $z \in \mathbb{C}$ en kvotientrække med kvotient z, altså konvergent hvis og kun hvis $|z| < 1$, se s. I.65. Potensrækken har således konvergensradius $\rho = 1$, som det også fremgår såvel af Sætning 1.2 som af det almene udtryk for ρ. Den er divergent i alle punkter af konvergenscirklens rand. I konvergenscirklen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ har den sumfunktionen $1/(1-z)$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + \ldots + z^n + \ldots \quad \text{for } |z| < 1 .$$

Potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ eller $1+z+\ldots+\frac{1}{n!}z^n+\ldots$ er konvergent for ethvert $z \in \mathbb{C}$, thi

$$\frac{1}{(n+1)!} \Big/ \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty ,$$

hvorfor konvergensradius $\rho = 1/0 = \infty$ ifølge Sætning 1.2.

Tilsvarende findes $\rho = 1/\infty = 0$ for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$. Den er altså divergent for ethvert $z \neq 0$.

Det er klart, at potensrækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$, dvs. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n$, er konvergente i de samme punkter. For det enkelte $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ er jo blot hvert rækkeled multipliceret med tallet z. Tilsvarende gælder rækken $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n z^n$ for vilkårligt $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Om summerne i et konvergenspunkt z gælder

$$z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n$$

og

$$c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} ca_n z^n .$$

Har potensrækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ konvergensradier ρ og σ, så er $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) z^n$ konvergent for hvert z med $|z| < \min\{\rho,\sigma\}$, og

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) z^n \quad \text{for} \quad |z| < \min\{\rho,\sigma\} .$$

<u>SÆTNING 1.3</u>. Lad potensrækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ have positive konvergensradier ρ og σ, og lad sumfunktionerne være $f(z)$ og $g(z)$. Produktet $f(z)g(z)$ fremstilles da i cirkelskiven $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \min\{\rho,\sigma\}\}$ ved potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, hvor

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 .$$

BEVIS. For hvert $z \in \mathbb{C}$ med $|z| < \min\{\rho,\sigma\}$ er rækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ absolut konvergente med summer $f(z)$ og $g(z)$. Ved Cauchy multiplikation (Sætning 4.9, s. I.77) fås da

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 \cdot b_n z^n + a_1 z \cdot b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} \cdot b_1 z + a_n z^n \cdot b_0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n . \qquad \square$$

Uniform konvergens. Med Sætning 1.1 er den punktvise konvergens af en potensrække klarlagt. Vi skal nu se på spørgsmålet uniform konvergens. Det skal straks bemærkes, at en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ med konvergensradius $\rho > 0$ ikke i almindelighed er uniformt konvergent i hele konvergenscirklen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$.

EKSEMPEL. Da hvert afsnit $\sum_{n=1}^{p} z^n$ af potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ er begrænset i konvergenscirklen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, medens sumfunktionen $1/(1-z)$ ikke er det, sluttes, at $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ ikke er uniformt konvergent i sin konvergenscirkel.

Der gælder imidlertid følgende

SÆTNING 1.4. En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ med konvergensradius $\rho > 0$ er uniformt konvergent i enhver afsluttet cirkelskive $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$, hvor $0 < r < \rho$.

BEVIS. Da punktet r tilhører konvergenscirklen, er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ absolut konvergent. For ethvert $n \in \mathbb{N}_0$ og ethvert z med $|z| \leq r$ gælder

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n .$$

Potensrækken har altså i cirkelskiven $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ den konvergente majorantrække $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$, og påstanden følger af majorantkriteriet (s. IV.31). $\square$

KOROLLAR 1.5. Sumfunktionen for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ med konvergensradius $\rho > 0$ er kontinuert på konvergenscirklen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$.

BEVIS. Da potensrækkens led er kontinuerte funktioner, giver Sætning 1.4 i forbindelse med Sætning 5.3 s. IV.31 umiddelbart, at sumfunktionen er kontinuert i enhver afsluttet cirkelskive $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq r\}$ med $0 < r < \rho$. Men dette indebærer, at sumfunktionen er kontinuert i alle punkter ζ af konvergenscirklen: For hvert punkt ζ i denne findes jo et r , således at $|\zeta| < r < \rho$. Punktet ζ ligger da i det indre af $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq r\}$, og kontinuitet er jo en lokal egenskab. $\square$

Ledvis differentiation og integration. Det nærmere studium af sumfunktionen for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ med konvergensradius $\rho > 0$ betragtet på konvergenscirklen hører hjemme i den komplekse funktionsteori. I det følgende indskrænker vi os til studere sumfunktionen på intervallet $]-\rho,\rho[$. For at dette skal springe i øjnene, vil vi betegne den variable med x .

For en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ betragtet med x som reel variabel, medens koefficienterne $a_1, a_2, \ldots$ fortsat kan være komplekse, kaldes ρ også konvergenstallet og for $\rho > 0$ kaldes $]-\rho,\rho[$ for konvergensintervallet.

SÆTNING 1.6. En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og den ved ledvis differentiation dannede potensrække $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ har samme konvergenstal.

BEVIS. Da $\sqrt[n]{n} \to 1$ for $n \to \infty$, se s. I.45, gælder

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \limsup_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} .$$

Dette viser, at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ har samme konvergenstal. Og det er klart, at den sidste række er konvergent i de samme punkter $x \in \mathbb{R}$ som $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, jf. s. V.4. $\square$

Med denne hjælpesætning til rådighed er vi nu i stand til at anvende Korollar 5.6 s. IV.33 om ledvis differentiation, ikke på selve konvergensintervallet $]-\rho,\rho[$ for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergenstal $\rho > 0$, men på ethvert interval $]-r,r[$ med $0 < r < \rho$. Pointen er, at ikke blot $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ men også den ledvist differentierede række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ er uniformt konvergent i $]-r,r[$, ifølge Sætning 1.6 og 1.4. Vi slutter da, at sumfunktionen $f(x)$ for $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er differentiabel i hvert punkt $x \in]-r,r[$ med $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Da differentiabilitet er en lokal egenskab, og da der for hvert $x \in]-\rho,\rho[$ findes et r, hvor $0 < r < \rho$ og $x \in]-r,r[$, holder resultatet imidlertid for hvert $x \in]-\rho,\rho[$. Hermed har vi vist:

<u>SÆTNING 1.7</u>. For en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergenstal $\rho > 0$ er sumfunktionen $f(x)$ differentiabel i hvert punkt x af konvergensintervallet $]-\rho,\rho[$ med $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$, kort

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}(a_n x^n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in]-\rho,\rho[.$$

EKSEMPEL. Af

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad x \in]-1,1[,$$

følger

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + \ldots + n x^{n-1} + \ldots, \quad x \in]-1,1[.$$

Resultatet i Sætning 1.7 kan straks anvendes på den ved ledvis differentation dannede potensrække $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Mere generelt findes ved induktion:

<u>SÆTNING 1.8</u>. Sumfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots, \quad x \in]-\rho,\rho[,$$

for en potensrække med konvergensradius $\rho > 0$ er en C^∞-funktion på konvergensintervallet $]-\rho,\rho[$. For ethvert $p \in \mathbb{N}$ er dens p^{te} afledede lig med sumfunktionen for den ved p gange ledvis differentiation dannede række, altså

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p}$$
$$= p!\,a_p + \frac{(p+1)!}{1!}a_{p+1}x + \dots + \frac{(p+n)!}{n!}a_{p+n}x^n + \dots .$$

For en vilkårlig C^∞-funktion $f: I \to \mathbb{C}$ på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$, der indeholder punktet 0, kaldes potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

funktionens Taylor række hørende til punktet 0. (Sml. III.§3.)

De elementære funktioner, hvor 0 er indre punkt i definitionsmængden, fremstilles alle i et større eller mindre interval omkring 0 ved deres Taylor række, som vi skal se i de følgende paragraffer. Men lad det være sagt straks, at dette ikke gælder for C^∞-funktioner i almindelighed. Her er Taylor rækken blot, som Korollar 1.9 viser, den eneste chance for potensrækkefremstilling. Eksempler på en C^∞-funktion f, hvis Taylor række er konvergent på hele $\mathbb{R}$, men ikke har summen $f(x)$ i noget punkt $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, vil blive givet i §5.

KOROLLAR 1.9. En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergenstal $\rho > 0$ er Taylor række hørende til punktet 0 for sin sumfunktion $f(x)$, dvs.

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) , \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

Her har vi ladet $f^{(0)}$ betegne f, medens $0!$ betyder 1.

BEVIS. Sæt $x = 0$ i udtrykket for $f^{(p)}(x)$ i Sætning 1.8.

KOROLLAR 1.10. Identitetssætningen for potensrækker. Hvis sumfunktionerne for to potensrækker $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ med positive konvergensradier stemmer overens på et interval, der indeholder 0, så er potensrækkerne identiske, dvs.

$$a_0 = b_0\ ,\quad a_1 = b_1,\ \dots\ ,\quad a_n = b_n,\ \dots\ .$$

BEVIS. Benyt Korollar 1.9.

EKSEMPEL. Det er oplagt, hvad der menes med Taylor rækken hørende til punktet x_0 for en C^∞-funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$ på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$, der indeholder x_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

Et polynomium $F(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ kan skrives på formen $F(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j (x-x_0)^j$. Det fremgår ved indsættelse af $x = x_0 + (x-x_0)$ og brug af binomialformlen. Fremstillingen $F(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j (x-x_0)^j$ giver ved tilføjelse af 0-led er potensrækkefremstilling $F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (x-x_0)^j$, som ifølge Korollar 1.9 må være Taylor rækken for F hørende til punktet x_0. Fremstillingen $F(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j (x-x_0)^j$ er altså entydig, nemlig

$$F(x) = F(x_0) + \frac{F'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n ,$$

kendt under navnet Taylors formel for et polynomium af grad $\leqq n$.

BEMÆRKNING. En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og den ved ledvis integration dannede potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ har naturligvis også samme konvergensradius ρ, jf. Sætning 1.6. Antag $\rho > 0$ og lad f og F være sumfunktionerne for de to rækker. For hvert $t \in]-\rho,\rho[$ er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ uniformt konvergent i det afsluttede interval med endepunkter 0 og x, iflg. Sætning 1.4, og Sætning 5.4, s. IV.32, om ledvis integration giver da

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\, dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\Big) dt = \int_0^x f(t)\, dt\ .$$

Resultatet stemmer naturligvis med Sætning 1.7.

EKSEMPEL. Af

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots , \quad x \in]-1,1[,$$

følger

$$-\log(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots , \quad x \in]-1,1[.$$

I de følgende paragraffer skal vi behandle de elementære funktioner og deres potensrækkefremstillinger og sluttelig se nogle eksempler på anvendelser.

§2. Eksponential- og logaritmefunktion. Potensfunktioner.

De nævnte funktioner er velkendte fra skolen og har ofte indgået i eksempler og opgaver i det foregående. Vi vil imidlertid her behandle dem fra grunden for at vise, hvorledes det kan gøres. Vi vil således definere funktionerne og udlede deres fundamentale egenskaber, i princippet som om det var nyt for læseren. - Dit forhåndskendskab vil naturligvis lette opfattelsen, således at vi kan stramme fremstillingen, men det må ikke direkte bruges, før der er dækning i de viste sætninger.

Samme bemærkning gælder de trigonometriske funktioner, som vi skal behandle i §3.

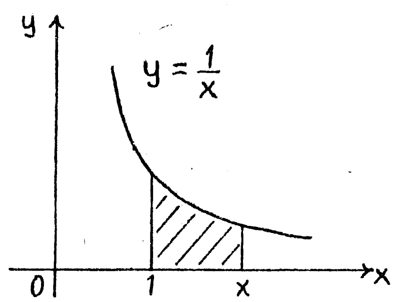
Eksponential- og logaritmefunktion indførtes i begyndelsen af 16-hundredtallet (J. Neper, J. Bürge, H. Briggs).

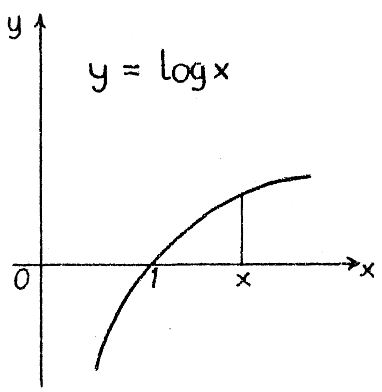
<u>Logaritmefunktionen</u>. Herved forstås i teoretisk matematisk litteratur altid <u>den naturlige logaritmefunktion</u> $\log\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Vi definerer den som den stamfunktion til $\frac{1}{x}$ i $\mathbb{R}_+$, der for $x = 1$ har værdien 0, altså ved betingelserne

$$\log 1 = 0 \;, \quad \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \;, \tag{1}$$

eller ved formlen

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \;, \qquad x \in \mathbb{R}_+ \;. \tag{2}$$



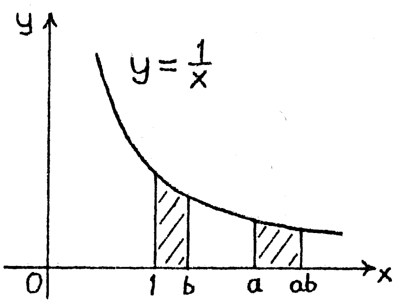


Funktionen udfylder så at sige et hul i analysen: For hvert $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, kendes jo en stamfunktion til x^n, nemlig $x^{n+1}/(n+1)$.

En væsentlig egenskab ved logaritmefunktionen er, at funktionalligningen

(3) $$\log ab = \log a + \log b$$

gælder for vilkårlige $a,b \in \mathbb{R}_+$. Vi har nemlig



$$\log ab = \int_1^{ab} \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \int_1^{a} \frac{1}{x}\,dx + \int_a^{ab} \frac{1}{x}\,dx .$$

Her er første led på højre side lig $\log a$. Andet led omskrives ved substitutionen $x = at$ til $\int_1^b \frac{1}{t}\,dt$ og er altså lig $\log b$. (Bemærk den simple geometriske betydning af denne omskrivning.)

Af (3) følger

(4) $$\log a^n = n \log a$$

for $a \in \mathbb{R}_+$ og $n \in \mathbb{Z}$. Det fås ved induktion for $n \in \mathbb{N}$, og derpå bemærkes, at $\log a^n + \log a^{-n} = \log a^n a^{-n} = \log 1 = 0$. (En generalisering til $n \in \mathbb{R}$ følger i afsnittet Potens, s. V.19.)

Logaritmefunktionen er strengt voksende, da jo $\frac{1}{x} > 0$ for $x \in \mathbb{R}_+$, og der gælder

$$\log x \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty , \qquad \log x \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to 0_+ .$$

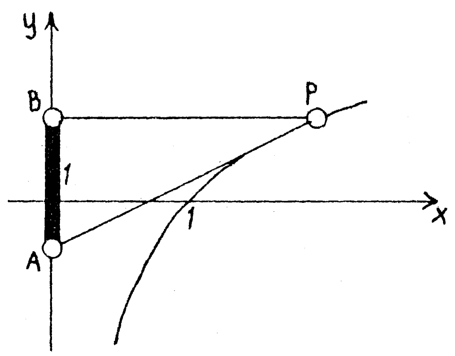
Det er åbenbart nok at vise, at funktionen antager vilkårligt høje og vilkårligt lave værdier. Vælges $a > 1$, er $\log a > 0$, og der gælder så iflg. (4), at $\log a^n = n \log a \to \infty$ for $n \to \infty$ og $\log a^n \to -\infty$ for $n \to \infty$.

Ved brug af kontinuiteten (Sætning 3.4 s. II.54) følger, at værdimængden er hele $\mathbb{R}$, således at $\log\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ er en bijektion. Specielt findes et og kun et tal $x \in \mathbb{R}_+$, for hvilket $\log x = 1$.

Dette tal betegnes e. Ved siden af π er det analysens vigtigste konstant. - At $\log: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ er en bijektion, der opfylder (3), kan som bekendt udtrykkes:

Afbildningen $\log: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ er en isomorfi af $(\mathbb{R}_+,\cdot)$ på $(\mathbb{R},+)$.

BEMÆRKNING. Ligningen $\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}$ betyder geometrisk, at tangenten til grafen $y = \log x$ i punktet $(x, \log x)$ skærer Y-aksen i punktet $(0, \log x - 1)$, altså at det stykke AB af Y-aksen, der afskæres mellem tangenten i kurvepunktet P og den vandrette linie gennem P, har den konstante længde 1.



Dette kan man benytte til at tegne kurven med stor nøjagtighed. Man benytter millimeterpapir og vælger som enhed f.eks. 100 mm. Man tegner nu først tangenten i $(1,0)$ og benytter af denne stykket i strimlen $-0,01 \leqq y \leqq 0,01$. Gennem dettes endepunkter tegnes linier henh. til punktet $(0, -1,02)$ og til punktet $(0, -0,98)$, og af disse benyttes stykkerne henh. i strimlen $-0,03 \leqq y \leqq -0,01$ og i strimlen $0,01 \leqq y \leqq 0,03$. Således fortsættes.

Til afslutning vil vi vise, at $\log x$ kan udvikles i potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ i intervallet $]0,2[$, eller som man gerne udtrykker det: $\log(1+x)$ kan fremstilles ved en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i intervallet $]-1,1[$. Af sumformlen for en kvotientrække (s. I.65) fås

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \dots, \quad x \in\,]-1,1[\,,$$

og heraf følger ved ledvis integration (Bemærkning s. V.9)

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in\,]-1,1[\,.$$

EKSEMPEL. Potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ for $\log(1+x)$ har konvergenstallet 1, ligesom $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^{n-1}$ (Sætning 1.6). Der er altså divergens for hvert x med $|x| > 1$. Sidstnævnte række er divergent i begge endepunkter af konvergensintervallet, den første kun i

$x=-1$, hvor den er "den harmoniske række med modsat fortegn", $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$, medens rækken i $x=1$, altså

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots,$$

er en betinget konvergent alternerende række (se s. I.64).

Sidstnævnte række har faktisk summen $\log 2$.

For at indse dette bemærker vi, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ for hvert $x \in]0,1[$ opfylder forudsætningerne i (a) s. I.64, hvorfor vi for hvert $n \in \mathbb{N}$ har vurderingen

$$\left|\log(1+x) - \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right| \leqq \frac{x^{n+1}}{n+1} .$$

Ved grænseovergangen $x \to 1_+$ for fastholdt n fås heraf

$$\left|\log 2 - \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)\right| \leqq \frac{1}{n+1},$$

og da denne vurdering gælder for alle n , følger

$$\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots .$$

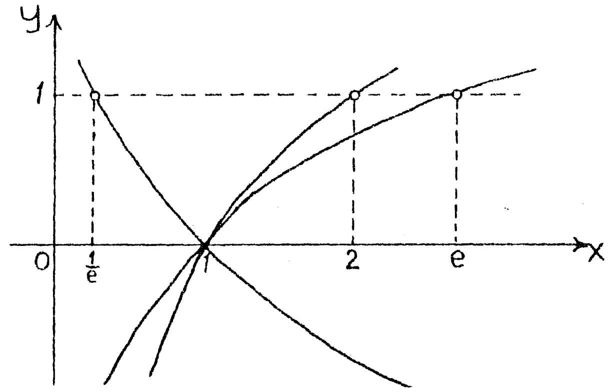
Generelt kan man vise, at hvis en potensrække er konvergent i et endepunkt af konvergensintervallet, så har den også "den rigtige sum".

Logaritmefunktioner med vilkårligt grundtal. Enhver funktion $x \to k\log x$, $x \in \mathbb{R}$, hvor $k \neq 0$ er en reel konstant, er naturligvis også en isomorf afbildning af $(\mathbb{R}_+,\cdot)$ på $(\mathbb{R},+)$. Alle disse funktioner kaldes logaritmefunktioner. Man ser, at der for hvert $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ findes én logaritmefunktion, som for $x=a$ har værdien 1, nemlig

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} .$$

Den kaldes logaritmefunktionen med grundtal a . Den er voksende eller aftagende, eftersom $a>1$ eller $a<1$. Vi har $\log x = \log_e x$. Man bemærker, at den naturlige logaritmefunktion er karakteriseret blandt alle logaritmefunktionerne derved, at dens afledede for $x=1$ har værdien 1.

Figuren viser $\log_a x$ for værdierne $a = e$, $a = 2$ og $a = \frac{1}{e}$.



Eksponentialfunktionen. Herved forstås i teoretisk matematisk litteratur altid den naturlige eksponentialfunktion $y = \exp x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Vi definerer den som den omvendte funktion til funktionen $x = \log y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Af kendte egenskaber ved logaritmefunktionen afledes da straks en række egenskaber ved eksponentialfunktionen:

Eksponentialfunktionen er strengt voksende og har hele $\mathbb{R}_+$ som værdimængde. Specielt gælder da

$$\exp x \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty, \qquad \exp x \to 0 \quad \text{for} \quad x \to -\infty .$$

Vi noterer, at $\exp 0 = 1$ og $\exp 1 = e$.

Afbildningen $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ er en isomorfi af $(\mathbb{R},+)$ på $(\mathbb{R}_+,\cdot)$. Der gælder altså funktionalligningen

$$\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b \tag{5}$$

for vilkårlige $a,b \in \mathbb{R}$. Heraf følger

$$\exp na = (\exp a)^n \tag{6}$$

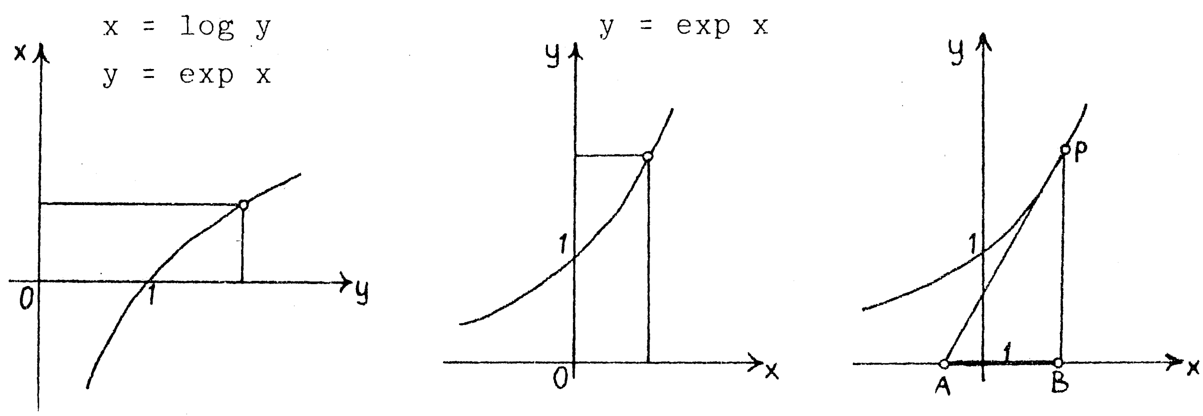
for $a \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{Z}$. Specielt er $\exp n = \exp(n\cdot 1) = e^n$ for alle $n \in \mathbb{Z}$; det giver anledning til, at man for alle $x \in \mathbb{R}$ benytter betegnelsen e^x for $\exp x$, se også V.20. Med denne skrivemåde har eksemplvis funktionalligningen (5) udseendet

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b .$$

Eksponentialfunktionen $y = \exp x = e^x$ er differentiabel med sig selv som afledet,

(7) $$\frac{d \exp x}{dx} = \exp x \quad \text{eller} \quad \frac{de^x}{dx} = e \ , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Thi da $x = \log y$ er differentiabel med $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \neq 0$ for alle $y \in \mathbb{R}_+$, giver Sætning 2.6 s. III.19 om differentiation af omvendt funktion, at $y = \exp x$ er differentiabel med $\frac{dy}{dx} = y = \exp x$ for hvert $x \in \mathbb{R}$.



BEMÆRKNING. Ligningen (7) betyder geometrisk, at tangenten til grafen $y = \exp x$ i punktet $(x, \exp x)$ skærer X-aksen i punktet $(x-1\ ,0)$, altså at det stykke AB af X-aksen, der afskæres mellem tangenten i kurvepunktet P og den lodrette linie gennem P, har den konstante længde 1.

Resultatet (7) kan suppleres til følgende nyttige karakterisering af eksponentialfunktionen:

SÆTNING 2.1. Der findes en og kun en differentiabel funktion f på $\mathbb{R}$, som opfylder betingelserne

$$f(0) = 1 \ , \quad f'(x) = f(x) \quad \text{for alle} \quad x \in \mathbb{R} ,$$

nemlig eksponentialfunktionen, $f = \exp$.

Med en sprogbrug vi senere skal indføre, men som jo nok er læseren bekendt, kan sætningen formuleres: Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y$$

har en og kun en løsning $y = f(x)$ defineret på $\mathbb{R}$ med $f(0) = 1$, nemlig funktionen $y = \exp x = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

BEVIS. Vi ved allerede, at eksponentialfunktionen $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opfylder betingelserne i Sætning 2.1. For at godtgøre, at det er den eneste sådanne funktion, betragter vi en vilkårlig differentiabel funktion f på $\mathbb{R}$, som opfylder sætningens betingelser, og skal da vise, at $f = \exp$, dvs. at $f(x) = \exp x$ for alle $x \in \mathbb{R}$, eller anderledes udtrykt at

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\exp x}$$

er konstant med værdien 1. Dette følger imidlertid af, at $\varphi(0) = 1$ og at

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)\exp x - f(x)\exp x}{(\exp x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{\exp x} = 0 . \qquad \square$$

BEMÆRKNING. Det nyttige ved en sætning som Sætning 2.1, der karakteriserer en funktion ved nogle af dens egenskaber, er, at den giver os et middel til at genkende eller identificere funktionen, når man møder den, ligesom et menneske kan genkendes på sit fingeraftryk.

Vi skal straks udnytte Sætning 2.1 på denne måde og herved vise, at eksponentialfunktionen $\exp x$ kan fremstilles ved en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Den eneste chance er ifølge Korollar 1.9 Taylor rækken hørende til punktet 0 for $\exp x$, altså

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{eller} \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad .$$

Opgaven er derfor at vise, at denne potensrække, som kaldes eksponentialrækken, er konvergent med sumfunktionen $\exp$.

At rækken er konvergent på hele $\mathbb{R}$, ses let af Sætning 1.2 (se et eksempel s. V.4). Idet vi betegner sumfunktionen med f, altså

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots , \quad x \in \mathbb{R},$$

står tilbage at vise, at $f = \exp$. Dette følger imidlertid af Sætning 2.1, idet $f(0) = 1$, og Sætning 1.7 om ledvis differentiation af en potensrække giver, at f er differentiabel med

$$f'(x) = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Hermed er vist

<u>SÆTNING 2.2</u>. For hvert x $\mathbb{R}$ gælder

$$e^x = \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

BEMÆRKNING. Lad os også på dette sted notere resultatet (7) s. I.45. Det bemærkes, at beviset nu forløber inden for, hvad vi har lært (også) i dette kursus.

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^x \quad \text{for alle} \quad x \in \mathbb{R} .$$

<u>Eksponentialfunktionen i det komplekse</u>. Skønt vor interesse i dette kursus er funktioner af reel variabel, vil det give enorme lettelser at inddrage eksponentialfunktionen i det komplekse, $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Vi definerer eksponentialfunktionen exp på $\mathbb{C}$ ved

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad , \quad z \in \mathbb{C} .$$

Definitionen har mening, idet eksponentialrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ er konvergent for hvert $z \in \mathbb{C}$, se s. V.4, og den er tilladelig, idet det fremgår af Sætning 2.2, at funktionen er en udvidelse af den tidligere definerede eksponentialfunktion på $\mathbb{R}$.

Med denne definition gælder funktionalligningen (5) også i det komplekse:

<u>SÆTNING 2.3</u>. For alle $a, b \in \mathbb{C}$ gælder

$$\exp(a + b) = \exp a + \exp b \quad \text{eller} \quad e^{a+b} = e^a \cdot e^b .$$

BEVIS. Da rækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} b^n$ er absolut konvergente, får vi ved Cauchy multiplikation (se eksempel s. I.77)

$$e^a \cdot e^b = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} b^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} a^p \frac{1}{(n-p)!} b^{n-p}\right) .$$

Den inderste sum kan omskrives ved binomialformlen:

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} a^p \frac{1}{(n-p)!} b^{n-p} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} a^p b^{n-p}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = \frac{1}{n!} (a+b)^n .$$

Altså er $e^a \cdot e^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a+b)^n = e^{a+b}$.

Vi må udsætte en nærmere undersøgelse af e^z til senere. (Se afsnittet Eulers formler i §3.) Dog kan vi allerede nu bemærke, at med $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, er

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

ifølge Sætning 2.3. Da e^x er velkendt, mangler vi egentlig kun en bestemmelse af e^{iy} , dvs. af eksponentialfunktionens værdi i punkter på den imaginære akse.

Tilbage til det reelle:

<u>Potens</u>. Som konsekvens af funktionalligningen $\log ab = \log a + \log b$ noterede vi reglen

$$\log a^n = n \log a$$

for $a \in \mathbb{R}_+$ og $n \in \mathbb{Z}$. Den er ensbetydende med

$$a^n = \exp(n \log a) .$$

Vi definerer nu <u>potensen</u> a^b for $a \in \mathbb{R}_+$ og vilkårlig <u>eksponent</u> $b \in \mathbb{R}$ ved

$$a^b = \exp(b \log a) ,$$

altså således, at reglen

(8) $$\log a^b = b \log a$$

gælder for alle $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}$. Der er åbenbar overensstemmelse med den elementært definerede potens a^n, når $b = n \in \mathbb{Z}$. Bemærk også, at $e^b = \exp b$.

<u>SÆTNING 2.4</u>. Potensregler. For vilkårlige $a, b \in \mathbb{R}_+$ og $c, d \in \mathbb{R}$ gælder

(i) $a^{c+a} = a^c a^d$, (ii) $a^0 = 1$, (iii) $a^{-c} = \dfrac{1}{a^c}$,

(iv) $1^c = 1$, (v) $(ab)^c = a^c b^c$, (vi) $(a^c)^d = a^{cd}$.

BEVIS. (i) fremgår af

$$\log a^{c+d} = (c+d)\log a = c \log a + d \log a = \log a^c + \log b^d = \log(a^c a^d).$$

(ii) er klar, og (iii) følger af (i) og (ii).

(iv) er umiddelbar følge af $\log 1 = 0$.

(v) og (vi) fremgår af

$$\log(ab)^c = c \log ab = c(\log a + \log b) = c \log a + c \log b$$
$$= \log a^c + \log b^c = \log(a^c b^c)$$
$$\log(a^c)^d = d \log a^c = dc \log a = \log a^{cd}. \qquad \square$$

Vi bemærker, at $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ for $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Thi $\sqrt[n]{a}$ er defineret som positiv løsning til ligningen $x^n = a$, og vi har jo $a^{1/n} > 0$ og $(a^{1/n})^n = a^1 = a$, ved brug af (vi). Tilsvarende er $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ for $a \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, idet $(a^{p/q})^q = a^p$.

BEMÆRKNING. Potens a^b betragtes også for $a = 0$, $b \geq 0$ samt for $a < 0$ og visse b, men her kan ovenstående definition ikke benyttes. Vi kommer tilbage til spørgsmålet i afsnittet Potensfunktioner.

<u>Eksponentialfunktioner med vilkårligt grundtal</u>. Den funktion på $\mathbb{R}$, der fås ved i potensen a^x at fastholde et $a \in \mathbb{R}_+$ og lade eksponenten x gennemløbe $\mathbb{R}$, kaldes <u>eksponentialfunktionen med grund-</u>

tal a . Den betegnes $\exp_a$ og er altså givet ved

$$\exp_a x = a^x = \exp(x \log a) = e^{x \log a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Man bemærker, at eksponentialfunktionen med grundtal e er den naturlige eksponentialfunktion, $\exp_e = \exp$, og at eksponentialfunktionerne netop er funktionerne af form

$$x \to \exp(kx) = e^{kx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

med $k \in \mathbb{R}$. Bemærk, at $\exp_a 1 = a$.

Funktionen $\exp_1$ er konstanten 1. For $a > 1$ er $\exp_a$ voksende, og for $0 < a < 1$ er $\exp_a$ aftagende; i begge tilfælde er værdimængden $\mathbb{R}_+$, og $\exp_a$ er således en isomorfi af $(\mathbb{R},+)$ på $(\mathbb{R}_+,\cdot)$ i kraft af potensregel (i),

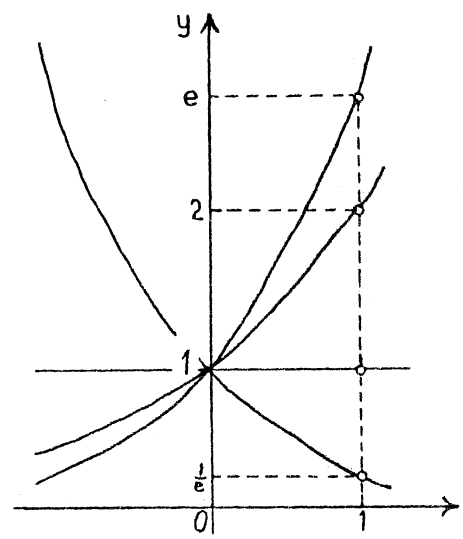
$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$$

For $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ gælder videre, at $\exp_a$ er den omvendte funktion til logaritmefunktionen med grundtal a , $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Vi har jo for $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$:

$$y = \exp_a x = a^x$$

$$\Leftrightarrow \log y = x \log a$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\log y}{\log a} = \log_a y .$$



Figuren viser $\exp_a x = a^x$ for værdierne $a = e$, $a = 2$, $a = \frac{1}{e}$ og $a = 1$.

For hvert $a \in \mathbb{R}_+$ er $\exp_a x = a^x = \exp(x \log a)$, $x \in \mathbb{R}$, ifølge kædereglen differentiabel med den afledede $\log a \cdot \exp(x \log a)$, altså

(9) $$\frac{da^x}{dx} = a^x \log a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Man bemærker, at den naturlige eksponentialfunktion $\exp x = e^x$ er karakteriseret blandt alle eksponentialfunktioner a^x derved, at dens afledede for $x = 0$ har værdien 1. Thi dette krav kommer jo ud på, at $a^0 \log a = \log a = 1$.

BEMÆRKNING. Den simple og historiske baggrund for eksponential- og logaritmefunktioner (de to ting kommer jo ud på et) er følgende: Vælges et tal $h \in \mathbb{R}_+$ og et tal $k \in \mathbb{R}_+$ og betragtes tabellen

x	$\dots$	$-3h$	$-2h$	$-h$	0	h	$2h$	$3h$	$\dots$
y	$\dots$	k^{-3}	k^{-2}	k^{-1}	1	k	k^2	k^3	$\dots$

ser man, at der til addition i første række svarer multiplikation i anden række. Vælges $h = \frac{1}{n}$, har man en tabel med interval $\frac{1}{n}$ for funktionen $y = a^x$, hvor $a = k^n$. for n stor og $k = 1 + \frac{1}{n}$ altså praktisk talt en tabel for $y = e^x$ eller $x = \log y$.

<u>Potensfunktioner</u>. Den funktion på $\mathbb{R}_+$, der fås ved i potensen x^a at fastholde et $a \in \mathbb{R}$ og lade x gennemløbe $\mathbb{R}_+$, altså funktionen

$$x \to x^a = \exp(a \log x) = e^{a \log x}, \quad x \in \mathbb{R}_+ ,$$

kaldes <u>potensfunktionen med eksponent</u> a. For $a = 0$ er det den konstante funktion 1. For $a > 0$ er funktionen voksende, og for $a < 0$ er den aftagende; i begge tilfælde er værdimængden $\mathbb{R}_+$, og potensfunktionen x^a er således en isomorfi af $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ på sig selv i kraft af potensregel (v),

$$(x_1 x_2)^a = x_1^a \cdot x_2^a .$$

For $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ har potensfunktionen med eksponent a som omvendt funktion potensfunktionen med eksponent $1/a$; thi for $x, y \in \mathbb{R}_+$ gælder

$$y = x^a \Leftrightarrow x = y^{1/a} .$$

Pilen mod højre fås ved brug af potensregel (vi),

$$y = x^a \Rightarrow y^{1/a} = (x^a)^{1/a} = x^{a\cdot 1/a} = x^1 = x ,$$

pilen mod venstre er analog.

For hvert $a \in \mathbb{R}$ er potensfunktionen $x^a = \exp(a \log x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, ifølge kædereglen differentiabel med den afledede $\exp(a \log x)\cdot a/x = x^a a x^{-1} = a x^{a-1}$, altså

(10) $$\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1} , \quad x \in \mathbb{R}_+ .$$

BEMÆRKNING. For vilkårligt $x \in \mathbb{R}$ defineres x^n for alle $n \in \mathbb{N}$ som bekendt ved rekursion:

$$x^1 = x , \quad x^{n+1} = x^n x ,$$

og man sætter $x^0 = 1$. For $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ og $n \in \mathbb{N}$ sættes $x^{-n} = 1/x^n$. Den således elementært definerede potens x^a med $a \in \mathbb{Z}$ stemmer som bemærket i afsnittet Potens overens med $\exp(a \log x)$ for $x \in \mathbb{R}_+$ og alle $a \in \mathbb{Z}$.

Som tidligere vist (Eksempel s. III.15 og s. III.19) er potensfunktionen $x \to x^a$ differentiabel på hele $\mathbb{R}$ når $a \in \mathbb{N}_0$, henholdsvis på $]-\infty,0[$ og $]0,\infty[$ når a er negativ hel, med den afledede ax^{a-1} (idet $0\cdot x^{-1}$ skal læses som 0 også for $x = 0$).

For et rationalt a , der kan skrives som en brøk $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) med ulige nævner, benytter vi ligningen

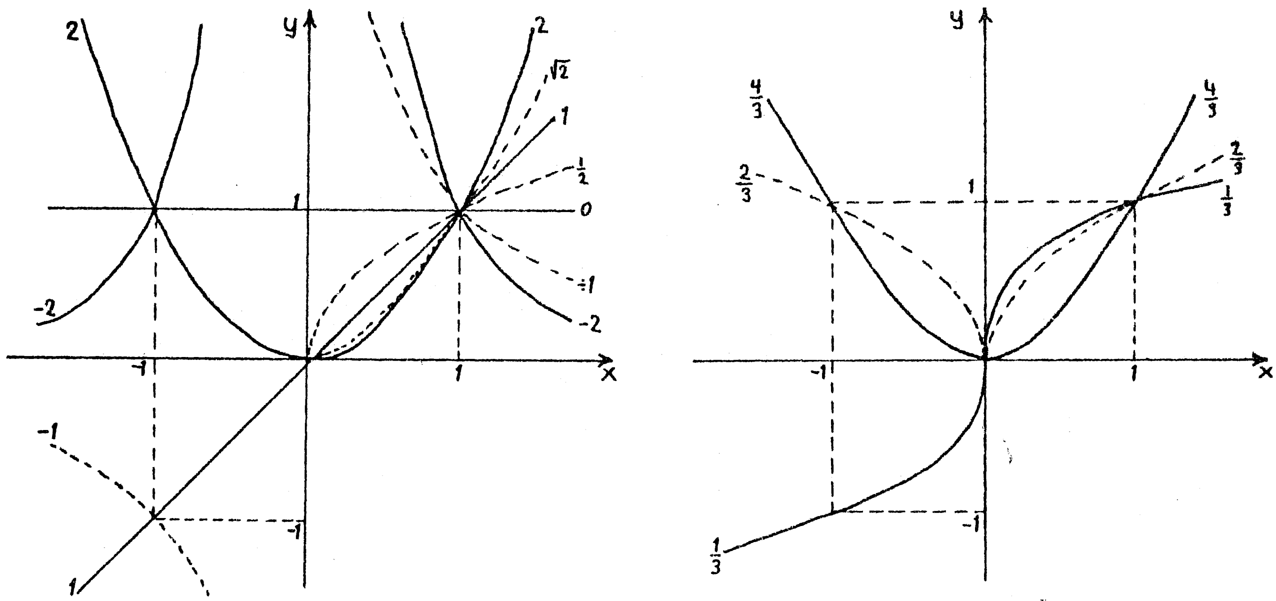
$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} ,$$

der gælder for $x \in \mathbb{R}_+$ (se s. V.20) til definition af x^a for alle $x \in \mathbb{R}$ hvis $a \geq 0$, henholdsvis $x \in]-\infty,0[$ og $x \in]0,\infty[$ hvis $a < 0$. (Der er et lille problem at overveje, da fremstillingen $a = \frac{p}{q}$ ikke er entydig.) Som man let efterviser, er x^a i disse tilfælde differentiabel på $\mathbb{R}$, hvis $a > 1$, og på $]-\infty,0[$ og $]0,+\infty[$, hvis $a < 1$, med den afledede ax^{a-1} . (Opgave V. .)

For de øvrige a , altså for rationale a , der ikke kan skrives som en brøk med ulige nævner, og for irrationale a , defineres x^a ikke for negative x , men for $a > 0$ defineres 0^a som 0. Den således udvidede funktion er da differentiabel i 0 med den afledede 0, hvis $a > 1$. (NB. Vi har sat $0^a = 0$ for $a \in \mathbb{R}_+$, men $0^0 = 1$.)

Sammenfattende har vi: Funktionen x^a er differentiabel med den afledede ax^{a-1} i netop de punkter af definitionsmængden, i hvilke ax^{a-1} er defineret.

Figurerne viser grafen for x^a for $a = -2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2$ og for $a = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$.



Vi vil vise, at potensfunktionerne x^a med vilkårlig eksponent $a \in \mathbb{R}$ kan udvikles i potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ i intervallet $]0,2[$, eller som man gerne udtrykker det: $(1+x)^a$ kan fremstilles ved en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i intervallet $]-1,1[$.

Af (10) fås, at $(1+x)^a$ er vilkårligt ofte differentiabel på $\mathbb{R}_+$ med

$$\frac{d^n (1+x)^a}{dx} = a(a-1)\ldots(a-n+1)(1+x)^{a-n} , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Taylor rækken hørende til 0 er altså

$$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} x^n + \ldots$$

eller $$\binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \ldots + \binom{a}{n}x^n + \ldots ,$$

hvor vi for at få bekvemme betegnelser har indført de <u>generaliserede binomialkoefficienter</u> $\binom{a}{n}$ for vilkårligt $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \quad \text{for } n \in \mathbb{N} , \quad \binom{a}{0} = 1 .$$

Binomialrækken, som den kaldes,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \quad \text{eller} \quad 1 + ax + \ldots + \binom{a}{n} x^n + \ldots ,$$

er ifølge Korollar 1.9 eneste chance for fremstilling af $(1+x)^a$ i et interval omkring 0.

I tilfældet $a \in \mathbb{N}_0$ ender binomialrækken på lutter 0'er, idet $\binom{a}{0} = 0$ for $n > a$, og

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{a} \binom{a}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ ifølge binomialformlen (s. I.11).

I tilfældet $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ er alle koefficienter $\binom{a}{n}$ i binomialrækken forskellige fra 0, og

$$\left| \binom{a}{n+1} \Big/ \binom{a}{n} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \right| \to 1 \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Ifølge Sætning 1.2 er konvergensradius da 1. Idet vi betegner sumfunktionen med f_a, altså

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + ax + \ldots + \binom{a}{n} x^n + \ldots , \quad x \in]-1,1[,$$

står tilbage at vise, at $f_a(x) = (1+x)^a$ for $x \in]-1,1[$. Dette kan indses ad samme vej, som vi benyttede for eksponentialfunktionen:

Vi bemærker først, at der for givet $a \in \mathbb{R}$ findes en og kun en differentiabel funktion f på $]-1,1[$, som opfylder betingelserne

$$f(0) = 1 , \quad f'(x) = a \frac{f(x)}{1+x} \quad \text{for} \quad x \in]-1,1[,$$

nemlig potensfunktionen $(1+x)^a$.

At $(1+x)^a$ opfylder betingelserne, er klart, jf. (10). For at godtgøre, at det er den eneste sådanne funktion, betragter vi en vilkårlig differentiabel funktion f på $]-1,1[$, som opfylder betingelserne, og skal da vise, at $f(x) = (1+x)^a$ for alle $x \in]-1,1[$, eller anderledes udtrykt, at $\varphi(x) = f(x)/(1+x)^a = (1+x)^{-a} f(x)$ er konstant med værdien 1. Dette følger imidlertid af, at $\varphi(0) = 1$ og at

$$\varphi'(x) = (-a)(1+x)^{-a-1} f(x) + (1+x)^{-a} f'(x)$$
$$= -a(1+x)^{-a} f(x)/(1+x) + (1+x)^{-a} a f(x)/(1+x) = 0 .$$

At sumfunktionen $f_a(x)$ for binomialrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ i intervallet $]-1,1[$ er $(1+x)^a$, kan vi nu godtgøre ved at vise, at

$$f_a(0) = 1 , \quad f_a'(x) = a \frac{f_a(x)}{1+x} \quad \text{for} \quad x \in]-1,1[.$$

Det er klart, at $f_a(0) = 1$. Og ved ledvis differentiation af binomialrækken (Sætning 1.7) fås for $x \in]-1,1[$:

$$(1+x) f_a'(x) = (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{a}{n} x^{n-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{a}{n} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{a}{n} x^{n-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\binom{a}{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{a}{n} x^n$$
$$= a + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a\binom{a-1}{n} + a\binom{a-1}{n-1} \right] x^n$$
$$= a\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} x^n\right) = a f_a(x) .$$

Her har vi benyttet, at

$$\binom{a-1}{n} + \binom{a-1}{n-1} = \binom{a}{n} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N} ,$$

hvilket fremgår ved udregning (sml. s. I.12).

Vi har hermed vist

<u>SÆTNING 2.5</u>. For hvert $a \in \mathbb{R}$ fremstilles $(1+x)^a$ ved binomialrækken

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + ax + \ldots + \binom{a}{n} x^n + \ldots$$

for alle $x \in]-1,1[$. For $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ har rækken konvergenstallet 1;

for $a \in \mathbb{N}_0$ er formlen efter bortkastning af nulleddene, svarende til $n > a$, et specialtilfælde af binomialformlen og gælder for alle $x \in \mathbb{R}$.

Størrelsesorden. Indledningsvis skal vi minde om lille o-notationen, supplere med en O-notation og fastlægge en beskrivelse i ord. Vi knytter an til grænseovergangen $x \to \infty$, da det er det indbyrdes størrelsesforhold for logaritme-, potens- og eksponentialfunktioner ved denne grænseovergang, vi vil vise resultater om, men terminologien finder analog anvendelse ved andre grænseovergange.

Lad f og g være (reelle eller komplekse) funktioner defineret på en halvlinie $]a,\infty[$. Vi vil her holde os til tilfældet, hvor ingen af funktionerne antager værdien 0, således at begge brøker $f(x)/g(x)$ og $g(x)/f(x)$ kan dannes.

Man siger da, at $f(x)$ er af lavere størrelsesorden end $g(x)$ for $x \to \infty$, eller $g(x)$ af højere størrelsesorden end $f(x)$, og skriver $f(x) = o(g(x))$, læs: $f(x)$ er lille o af $g(x)$, hvis $|f(x)/g(x)| \to 0$ for $x \to \infty$, eller hvad der kommer ud på det samme, hvis $|g(x)/f(x)| \to \infty$ for $x \to \infty$.

Man siger, at $f(x)$ er af højst samme størrelsesorden som $g(x)$ for $x \to \infty$, eller $g(x)$ af mindst samme størrelsesorden som $f(x)$, og skriver $f(x) = O(g(x))$, læs: $f(x)$ er store O af $g(x)$, hvis der findes et $b \geqq a$ og et $K > 0$, således at $|f(x)| \leqq K|g(x)|$ for $x > b$, eller hvad der kommer ud på det samme, hvis der findes et $b \geqq a$ og et $k > 0$, således at $|g(x)| \geqq k|f(x)|$ for $x > b$.

Hvis $f(x)$ er både af højst samme og mindst samme størrelsesorden som $g(x)$ for $x \to \infty$, altså hvis $f(x) = O(g(x))$ og $g(x) = O(f(x))$, siger man, at $f(x)$ og $g(x)$ er af samme størrelsesorden for $x \to \infty$. Det betyder åbenbart, at der findes $b \geqq a$ og $k, K > 0$, således at $k \leqq |f(x)/g(x)| \leqq K$ for $x > b$.

Det er ligetil at overbevise sig om, at sprogbrugen er valgt "fornuftigt", således at eksempelvis $f(x)$ af samme størrelsesorden som $g(x)$ og $g(x)$ af samme størrelsesorden som $h(x)$ medfører $f(x)$ af samme størrelsesorden som $h(x)$. Men man må naturligvis ikke tro, at to funktioner altid kan "sammenlignes" m.h.t. størrelsesorden: $|f(x)/g(x)|$ kan jo i ethvert interval $]b,\infty[$ antage både vilkårligt store værdier og værdier vilkårligt tæt ved 0.

De tilfælde, som især har interesse, er dem, hvor $f(x)$ og $g(x)$ begge går mod 0 for $x \to \infty$, eller begge er reelle og går mod $+\infty$ for $x \to \infty$. I første tilfælde siger man, hvis $f(x)$ er af lavere størrelsesorden end $g(x)$, at $f(x)$ går hurtigere mod 0 end $g(x)$ for $x \to \infty$, eller at $g(x)$ går langsommere mod 0 end $f(x)$. I andet tilfælde siger man, igen hvis $f(x)$ er af lavere størrelsesorden end $g(x)$, at $f(x)$ går langsommere mod ∞ end $g(x)$ for $x \to \infty$, eller at $g(x)$ går hurtigere mod ∞ end $f(x)$.

Sikkerhed i at kunne bedømme funktioners størrelsesorden ved en grænseovergang er af meget stor betydning i analysen. I tilfælde af funktioner givet ved sammensatte udtryk er det ofte således, at kun størrelsesordenen spiller en rolle, eller man er interesseret i at udskille et hovedled, der er af højere størrelsesorden end de øvrige led.

Efter ovenstående redegørelse for begreberne tager vi nu fat på afsnittets egentlige emne. Vi vil undersøge, hvad man kan sige om indbyrdes størrelsesforhold for logaritme-, potens- og eksponentialfunktioner ved grænseovergangen $x \to \infty$.

Alle logaritmefunktionerne $\log_a x = \log x / \log a$ er indbyrdes proportionale og dermed specielt af samme størrelsesorden.

Potensfunktionen x^b er af højere størrelsesorden end x^a for $x \to \infty$, når $a < b$. Thi $x^b/x^a = x^b x^{-a} = x^{b-a} \to \infty$ for $x \to \infty$.

Eksponentialfunktionen b^x er af højere størrelsesorden end a^x for $x \to \infty$, når $0 < a < b$. Thi $b^x/a^x = (b/a)^x \to \infty$ for $x \to \infty$.

Når vi nu skal sammenligne funktioner af forskellige af de tre typer, kan vi holde os til den naturlige logaritmefunktion, til potensfunktioner x^a med eksponent $a > 0$ og til eksponentialfunktioner b^x med grundtal $b > 1$, hvor jo $\log x \to \infty$, $x^a \to \infty$ og $b^x \to \infty$ for $x \to \infty$. (Man kan for $a < 0$ udnytte $x^a = 1/x^{-a}$ og for $0 < b < 1$ udnytte $b^x = 1/(1/b)^x$.)

SÆTNING 2.6. Logaritmefunktionen er af lavere størrelsesorden end enhver potensfunktion med positiv eksponent:

$$\frac{\log x}{x^a} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to \infty \ , \quad \text{når} \quad a > 0 \ .$$

BEVIS. For alle $x > 1$ er

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt < \int_1^x 1\,dt = x - 1 < x$$

og dermed, idet vi vælger et fast tal $b \in]0,a[$,

$$b \log x = \log x^b < x^b ,$$

følgelig
$$\frac{\log x}{x^a} < \frac{x^b}{bx^a} = \frac{1}{bx^{a-b}} \ .$$

Da højre side går mod 0 for $x \to \infty$, må venstre side, som jo er positiv, også gøre det.

<u>SÆTNING 2.7</u>. Enhver eksponentialfunktion med grundtal > 1 er af højere størrelsesorden end enhver potensfunktion med positiv eksponent:

$$\frac{b^x}{x^a} \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty \ , \quad \text{når} \quad b > 1 \quad \text{og} \quad a > 0 \ .$$

BEVIS. Sættes $b^x = y$, har vi $x = \log y / \log b = \log_b y$ og dermed

$$\frac{b^x}{x^a} = \frac{y}{(\log_b y)^a} = \left(\frac{y^{1/a}}{\log_b y}\right)^a \quad \text{for} \quad x > 0 \ .$$

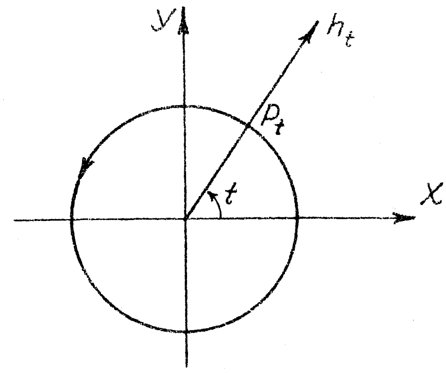
For $x \to \infty$ gælder $y \to \infty$ og dermed ifølge Sætning 2.6

$$\frac{y^{1/a}}{\log_b y} = \frac{y^{1/a}}{\log y} \log g \to \infty \ , \quad \text{altså} \quad \left(\frac{y^{1/a}}{\log_b y}\right)^a \to \infty \ . \qquad \square$$

Af Sætning 2.6 og 2.7 følger naturligvis, at

$$\frac{b^x}{\log x} \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty \ , \quad \text{når} \quad b > 1 \ .$$

§3. De trigonometriske funktioner.



Cosinus og sinus. I skolen indføres cosinus og sinus, to af analysens vigtigste funktioner, i tilknytning til en figur som hosstående på grundlag af intuitive geometriske forestillinger om cirkel og buelængde, ligesom udledelsen af funktionernes differentiabilitetsforhold tager sit udgangspunkt i intuitiv geometri (se s. V.40).

Med vor behandling af kurver i $\mathbb{R}^2$ i III, §§ 5 og 6, har vi imidlertid skabt mulighed for at undgå denne svaghed. Og afsnittet Enhedscirklen i III, §6, er en direkte forberedelse til indføring og behandling af cosinus og sinus. Vi har der gjort rede for, at enhedscirklen i $\mathbb{R}^2$, der som punktmængde er

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \; ,$$

kan opfattes som en lukket C^∞-kurve Γ uden dobbeltpunkter, og vi har defineret tallet π som den halve længde af Γ. Kurven Γ fremkom med en bestemt gennemløbsretning, hvorved buen fra $(1,0)$ til $(0,1)$ har længden $\frac{\pi}{2}$ (og ikke $\frac{3\pi}{2}$). Vi definerede videre den såkaldte opvikling $\varphi\colon \mathbb{R} \to S$ ved at sammenføje naturlige parameterfremstillinger for cirkelbuer, med fastsættelsen $\varphi(0) = (1,0)$. For hvert $t > 0$ er $\varphi(t)$ således det punkt $P = P_t$ på S, hvor t er buelængden fra $(1,0)$ til P_t langs Γ, evt. med flere gennemløb af Γ, medens punktet $\varphi(-t)$ fås ved at "gå lige så langt den modsatte vej". Opviklingen φ er periodisk med periode 2π. Se s. III.70-72.

Med beherskelsen af buelængder på cirklen er det ligetil at definere måltal for vinkler, som vi har gjort det s. III.73. Med de der indførte ord er hvert $t \in \mathbb{R}$ en retningsvinkel for halvlinien $h = h_t$ ud fra $(0,0)$ med retningspunkt $P = P_t = \varphi(t)$.

Da alt dette er bragt i orden, har den gammelkendte definition af cosinus og sinus nu en præcis mening:

DEFINITION. For hvert $t \in \mathbb{R}$ defineres $\cos t$ og $\sin t$ som koordinaterne til retningspunktet P_t for halvlinien h_t ud fra $(0,0)$ i $\mathbb{R}^2$ med retningsvinkel t.

Mere direkte sagt defineres $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som de to koordinatfunktioner for opviklingen $\varphi: \mathbb{R} \to S$,

$$P_t = \varphi(t) = (\cos t, \sin t) , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Som umiddelbar konsekvens af definitionen noteres, at

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \tag{1}$$

for alle $t \in \mathbb{R}$, at $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er periodiske med perioden 2π,

$$\cos(t+2\pi) = \cos t , \quad \sin(t+2\pi) = \sin t ,$$

samt at $\cos(-t) = \cos t , \quad \sin(-t) = -\sin t .$

Endvidere bemærkes, at

$$\cos 0 = 1 , \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0 , \quad \cos \pi = -1 , \quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0 ,$$
$$\sin 0 = 0 , \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 , \quad \sin \pi = 0 , \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1 ,$$

og at fortegnsvariationen for $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er den velkendte. Thi da cirkelbuerne i de 4 kvadranter kan føres over i hinanden ved spejlinger, har de samme længde, som så må være $\frac{\pi}{2}$.

<u>SÆTNING 3.1</u>. Funktionerne $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er vilkårligt ofte differentiable med

$$\frac{d \cos t}{dt} = -\sin t , \quad \frac{d \sin t}{dt} = \cos t , \quad t \in \mathbb{R} .$$

BEVIS. Opviklingen $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ er naturlig parameterfremstilling for en C^∞-kurve, hvor Sætning 6.5, s. III.69, kan anvendes, lokalt kan jo x eller y bruges som parameter. Den er følgelig af klasse C^∞, og det samme er så koordinatfunktionerne $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Desuden gælder (se Bemærkning s. III.70):

$$\left(\frac{d \cos t}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d \sin t}{dt}\right)^2 = 1 , \quad t \in \mathbb{R} . \tag{2}$$

Ved differentiation af (1) findes

$$\cos t \frac{d \cos t}{dt} + \sin t \frac{d \sin t}{dt} = 0 ,$$

som viser, at $(\cos' t, \sin' t)$ for hvert $t \in \mathbb{R}$ er proportionalt med $(-\sin t, \cos t)$, altså

$$\left(\frac{d\cos t}{dt}, \frac{d\sin t}{dt}\right) = k(t)(-\sin t, \cos t) .$$

Det er nemlig oplagt, at $(-\sin t, \cos t)$ for givet $t \in \mathbb{R}$ er en egentlig løsning til ligningen $x\cos t + y\sin t = 0$.

I kraft af (2) og (1) sluttes $k(t)^2 = 1$, altså $k(t) = \pm 1$. Desuden er $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinuert, idet vi ved udnyttelse af (1) finder

$$k(t) = -\sin t \frac{d\cos t}{dt} + \cos t \frac{d\sin t}{dt} .$$

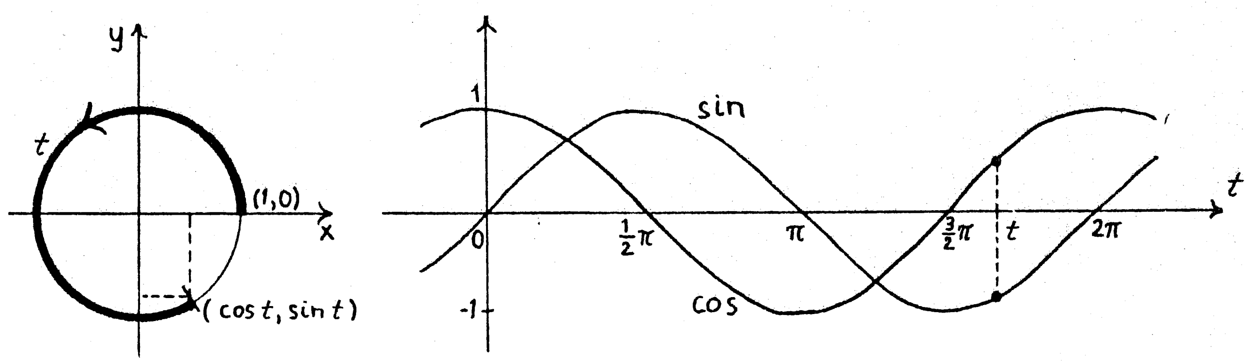
Følgelig (Sætning 3.4, s. II.54) er fortegnet i $k(t) = \pm 1$ det samme for alle t . Faktisk skal der læses + , thi for $t = 0$ kan

$$\frac{d\sin t}{dt} = k(0) \cdot \cos 0 = k(0)$$

ikke være negativ, i betragtning af fortegnsvariationen for $\sin t$ omkring $t = 0$ (se s. III.71, hvor buen S_1 blev ordnet efter voksende værdier af anden koordinat).

Med godtgørelsen af at $k(t) = 1$ for alle $t \in \mathbb{R}$, er beviset fuldført. $\square$

De velkendte monotoniforhold for $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kan afledes direkte af undersøgelsen af enhedscirklen Γ s. III.71, men fremgår også af Sætning 3.1 i forbindelse med fortegnsvariationen for cosinus og sinus. Figuren viser graferne for de to funktioner.



Eulers formler. Til læserens formentlige overraskelse kommer eksponentialfunktionen i det komplekse (se s. V.18) nu afgørende ind i billedet. Blandt de mangfoldige opdagelser, der skyldes Leonhard Euler (1707-1783) er sammenhængen mellem eksponentialfunktionen og de trigonometriske funktioner en af de mærkeligste.

Ligesom i III, §§ 5 og 6, identificerer vi $\mathbb{R}^2$ med $\mathbb{C}$ ved korrespondancen

$$(x,y) \leftrightarrow z \quad \Leftrightarrow \quad z = x + iy$$

med $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{C}$, og opfatter dermed opviklingen φ som en afbildning $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ på enhedscirklen i den komplekse plan,

$$\varphi(t) = \cos t + i \sin t\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi kan så give følgende karakterisering af $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

SÆTNING 3.2. Der findes en og kun en differentiabel funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, som opfylder betingelserne

$$h(0) = 1\,, \quad h'(t) = ih(t) \quad \text{for alle} \quad t \in \mathbb{R},$$

nemlig opviklingen φ af $\mathbb{R}$ på enhedscirklen i $\mathbb{C}$,

$$h(t) = \varphi(t) = \cos t + i \sin t\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ved deling i reelt og imaginært giver sætningen en karakterisering af $f = \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g = \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inden for det reelle ved betingelserne

$$\left.\begin{array}{ll} f(0) = 1\,, & f'(t) = -g(t) \\ g(0) = 0\,, & g'(t) = f(t) \end{array}\right\} \text{for alle} \quad t \in \mathbb{R},$$

eller, anderledes sagt, som løsningspar til differentialligningsparret

$$\frac{dx}{dt} = -y\,, \quad \frac{dy}{dt} = x\,, \quad t \in \mathbb{R},$$

med begyndelsesbetingelserne $f(0) = 1$, $g(0) = 0$.

BEVIS. Det er klart, at $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ opfylder betingelserne, idet jo $\varphi(0) = 1 + i0 = 1$ og, iflg. Sætning 3.1,

$$\varphi'(t) = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t) = i\varphi(t).$$

For at godtgøre, at det er den eneste sådanne funktion, betragter vi en vilkårlig differentiabel funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, som opfylder sætningens betingelser, og skal da vise, at $h = \varphi$, dvs. at $h(t) = \varphi(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Da $\varphi(t) \neq 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, kommer dette ud på, at $h(t)/\varphi(t)$ er konstant med værdien 1. Og det følger af, at $h(0)/\varphi(0) = 1$ og at

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{h(t)}{\varphi(t)}\right) = \frac{h'(t)\varphi(t) - \varphi'(t)h(t)}{(\varphi(t))^2} = \frac{ih(t)\varphi(t) - i\varphi(t)h(t)}{(\varphi(t))^2} = 0 . \qquad \square$$

Nu hovedresultatet:

SÆTNING 3.3. For hvert $t \in \mathbb{R}$ er

$$e^{it} = \exp it = \cos t + i \sin t . \tag{3}$$

Anderledes udtrykt: Afbildningen $t \to e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, er netop opviklingen φ af $\mathbb{R}$ på enhedscirklen i $\mathbb{C}$.

Da hvert $t \in \mathbb{R}$ er en retningsvinkel for halvlinien h_t fra 0 gennem $\varphi(t)$, dvs. (se s. III.74) et argument for $\varphi(t) = \cos t + i \sin t$, kan resultatet også formuleres:

For hvert $t \in \mathbb{R}$ kan e^{it} karakteriseres ved

$$|e^{it}| = 1 , \quad t \text{ er et argument til } e^{it} .$$

BEVIS. Idet vi udnytter Sætning 3.2, er opgaven at vise, at funktionen $t \to e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, opfylder sætningens betingelser. Det er klart, at $e^{i0} = e^0 = 1$. Og for hvert $t \in \mathbb{R}$ har ifølge definitionen af eksponentialfunktionen i det komplekse s. V.18, at

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2} + \ldots + \frac{(it)^n}{n!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} t^n = 1 + it + \frac{i^2}{2} t^2 + \ldots + \frac{i^n}{n!} t^n + \ldots .$$

Funktionen $t \to e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, er altså sumfunktion på hele $\mathbb{R}$ for potensrækken med koefficienter $i^n/n!$ og dermed ifølge Sætning 1.7 om ledvis differentiation af en potensrække differentiabel med

$$\frac{de^{it}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{n!} t^n = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} t^n = i e^{it} . \qquad \square$$

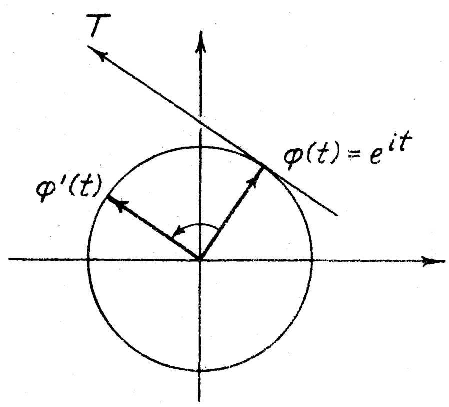
BEMÆRKNING. Vi kan nu - omsider! - bevise, at tangenten i et vilkårligt punkt af enhedscirklen Γ er vinkelret på radius! Med udnyttelse af (3) og funktionalligningen for eksponentialfunktionen i det komplekse (Sætning 2.3, s. V.18) har vi nemlig

$$\varphi'(t) = i\,\varphi(t) = \exp(i\tfrac{\pi}{2})\exp(it) = \exp(i(t+\tfrac{\pi}{2})) = \varphi(t+\tfrac{\pi}{2}) .$$

Opfattet som vektor er $\varphi'(t) = \varphi(t+\frac{\pi}{2})$ ensrettet med den orienterede tangent T til Γ i punktet $\varphi(t)$. (Sætning 5.1, s. III.51.) Og den med fortegn regnede vinkel fra halvlinien h_t til halvlinien $h_{t+\frac{\pi}{2}}$ har naturligvis måltallet $+\frac{\pi}{2}$. Cirkelbuen fra retningspunktet $\varphi(t)$ til retningspunktet $\varphi(t+\frac{\pi}{2})$ har jo

længde = parametertilvækst ,

da opviklingen φ er en naturlig parameterfremstilling.



Ud fra Sætning 3.3 og funktionalligningen for eksponentialfunktionen i det komplekse (Sætning 2.3, s. V.18) fås umiddelbart følgende karakteriseringer af eksponentialfunktionens værdi i et vilkårligt punkt $z = x + iy \in \mathbb{C}$, dels ved real- og imaginærdel, dels ved modulus og argument:

<u>SÆTNING 3.4</u>. For hvert $z = x + iy$, $x,y \in \mathbb{R}$, gælder

(4) $$e^z = e^{x+iy} = e^x\cos x + i\,e^x\sin y .$$

(5) $$|e^z| = e^x , \quad y \text{ er et argument til } e^z .$$

BEVIS. Vi udnytter, at $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Ligning (4) fås da straks af (3), og da $e^x \in \mathbb{R}_+$, er det klart, at $|e^x \cdot e^{iy}| = e^x \cdot |e^{iy}| = e^x$, samt at $e^x \cdot e^{iy}$ ligger på samme halvlinie h_y ud fra 0 som e^{iy} og dermed har y som argument. $\square$

Vi samler påny opmærksomheden om eksponentialfunktionen i punkter it på den imaginære akse. Som specialtilfælde af funktionalligningen for eksponentialfunktionen i det komplekse (Sætning 2.3,

s. V.18) har vi her

(6) $$e^{i(u+v)} = e^{iu}\cdot e^{iv} \;, \quad u,v \in \mathbb{R}\,.$$

Dette udtrykker, at funktionen $t \to e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, dvs. opviklingen φ af $\mathbb{R}$ på enhedscirklen i $\mathbb{C}$, er en homomorfi af $(\mathbb{R},+)$ ind i $(\mathbb{C},\cdot)$,

$$\varphi(u+v) = \varphi(u)\cdot\varphi(v)\;.$$

BEMÆRKNING. Ethvert komplekst tal $z \neq 0$ kan åbenbart skrives $z = r\,e^{it}$, hvor $r = |z| > 0$ og hvor $t \in \mathbb{R}$ er et vilkårligt argument til z. Den velkendte regel om modulus og argument til et produkt af to komplekse tal $\neq 0$ følger da af en lille regning baseret på (6):

$$\left(r_1 e^{it_1}\right)\cdot\left(r_2 e^{it_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(t_1+t_2)}\;.$$

Bemærk, at dette bevis, i modsætning til tidligere du har mødt, ikke bruger skolematematik, der i den sidste ende bygger på intuitiv geometri.

Additionsformlerne for $\cos\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ og $\sin\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er en umiddelbar følge af (3) og (6):

SÆTNING 3.5. For vilkårlige $u,v \in \mathbb{R}$ gælder

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$
$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v\,.$$

BEVIS. Split venstre og højre side i (5) i reelt og imaginært:

$$e^{i(u+v)} = \cos(u+v) + i\sin(u+v)\;,$$

$$\begin{aligned} e^{iu}\cdot e^{iv} &= (\cos u + i\sin u)(\cos v + i\sin v) \\ &= (\cos u\cos v - \sin u\sin v) + i(\cos u\sin v + \sin u\cos v)\;. \quad \square \end{aligned}$$

Ud fra Sætning 3.5 kan som bekendt udledes en lang række formler, dels specialtilfælde som cos og sin til komplementvinkler og supplementvinkler - der også kan indses elementært og erindres i tilknytning til figuren s. V.30 - og til dobbelt vinkel, dels de såkaldt logaritmiske formler for summer som f.eks. $\cos u + \cos v$. Alt dette vil vi ikke gentage her.

BEMÆRKNING. Lad $a = (a_1, b_1)$ og $b = (a_2, b_2)$ være to enhedsvektorer i $\mathbb{R}^2$ og lad θ være vinklen mellem dem, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, dvs. vinklen mellem halvlinierne fra $(0,0)$ gennem punktet (a_1, b_1), henholdsvis (a_2, b_2), se s. III.73. Da er

$$\cos\theta = a_1 a_2 + b_1 b_2 ,$$

hvor højre side udtrykker skalarproduktet $a \cdot b$.

Thi $(a_1, b_1) = (\cos t_1, \sin t_1)$ og $(a_2, b_2) = (\cos t_2, \sin t_2)$, hvor $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ kan vælges, så $|t_2 - t_1| \leqq \pi$. Da er $\theta = |t_2 - t_1|$, og additionsformlen for cosinus giver

$$\cos\theta = \cos(t_1 - t_2) = \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 . \qquad \square$$

Resultatet almindeliggøres let til det kendte udtryk for skalarproduktet af to egentlige vektorer: $|a||b| \cos\theta = a \cdot b$.

P.S. I skolematematikken går man som bekendt den modsatte vej: Additionsformlerne føres tilbage til formlen for $\cos(t_1 - t_2)$, og denne fås ved at udtrykke et skalarprodukt ved hjælp af to koordinatsystemer i planen,

$$\cos(t_1 - t_2) \cdot 1 + \sin(t_1 - t_2) \cdot 0 = \cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2 .$$

Skulle vi følge denne vej, måtte vi enten først diskutere koordinatsystem<u>er</u> i $\mathbb{R}^2$ (hvor vi hidtil blot har sagt, at talparret (x,y) har koordinaterne x og y) eller lade os nøje med at bygge på intuitiv geometri i "planen".

Sammenhængen mellem $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $t \to e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, kan også bringes til udtryk ved Eulers formler:

<u>SÆTNING 3.6</u>. Eulers formler. For hvert $t \in \mathbb{R}$ er

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} , \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} .$$

BEVIS. Formlerne fremgår umiddelbart af

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

og

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t ,$$

hvor den sidste ligning fås af den første ved at erstatte t med -t .

EKSEMPEL. Eulers formler giver et simpelt middel til omskrivning af trigonometriske udtryk. For eksempel finder man

$$\sin^4 t = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4it}-4e^{2it}+6-4e^{-2it}+e^{-4it}}{16}$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{e^{4it}+e^{-4it}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2} + \frac{3}{8}$$
$$= \frac{1}{8}\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{8}\,.$$

På tilsvarende måde kan ethvert produkt $\cos^n t \sin^m t$, hvor $n,m \in \mathbb{N}_0$, omskrives til en linearkombination af funktioner 1, $\cos pt$, $\sin pt$. Af ovenstående finder man

$$\int_0^\pi \sin^4 t\,dt = \left[\frac{1}{32}\sin 4t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{3}{8}t\right]_0^\pi = \frac{3}{8}\pi\,.$$

Eulers formler sætter os umiddelbart i stand til at udvikle cosinus og sinus i potensrækker på $\mathbb{R}$:

<u>SÆTNING 3.7.</u> For hvert $t \in \mathbb{R}$ gælder

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$
$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

BEVIS. Benyt Eulers formler og fremstillingerne

$$e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \ldots$$
$$e^{-it} = 1 - it - \frac{t^2}{2!} + i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - i\frac{t^5}{5!} - \ldots\,. \qquad \square$$

BEMÆRKNING. Funktionerne $\cos\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ og $\sin\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ defineres ved

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

altså således at Eulers formler gælder for alle $z \in \mathbb{C}$. Potensrækkefremstillingen i Sætning 3.7 gælder så, med samme bevis, også når t erstattes med $z \in \mathbb{C}$.

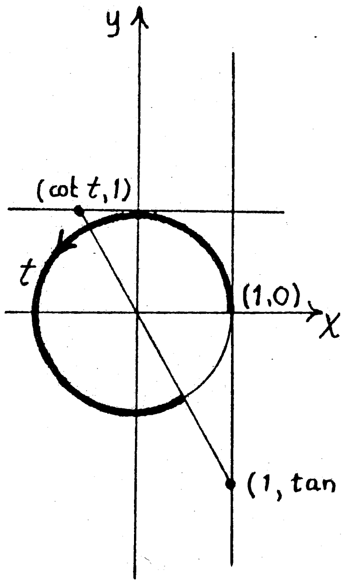
Simple regninger viser, at formlerne (1) og (3) såvel som additionsformlerne for cosinus og sinus og dermed mange afledede formler også gælder i det komplekse.

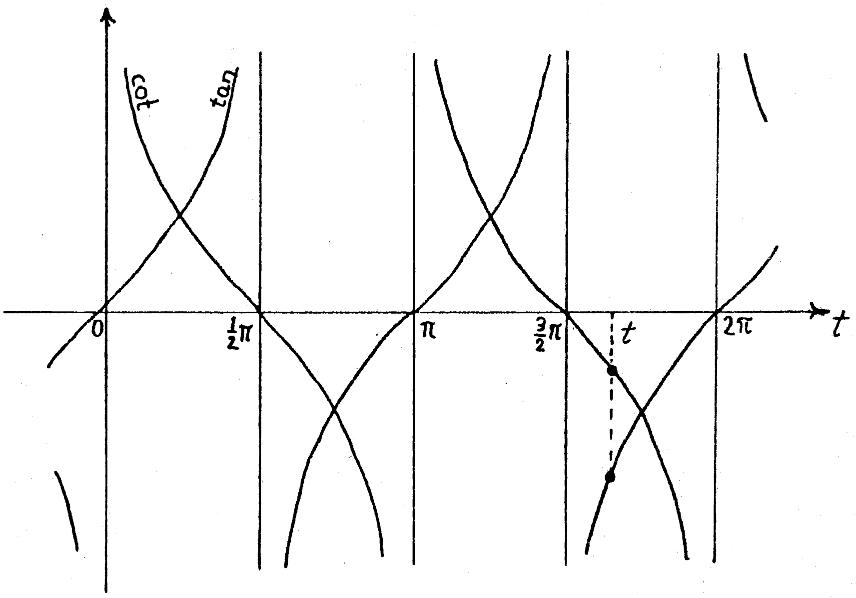
I §4 skal vi, med andre betegnelser, møde $\cos it$ og $\frac{1}{i}\sin it$, men ellers vil vi ikke beskæftige os med cosinus og sinus i det komplekse. Lad os dog advare om, at medens de trigonometriske formler er de velkendte, har afbildningerne helt uvante træk, f.eks. er $\cos\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ og $\sin\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ begge surjektive.

Tangens og cotangens. Disse funktioner defineres ved

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t} .$$

Definitionsmængderne er henholdsvis $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\pi + p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}$ og $\mathbb{R}\setminus\{p\pi \mid p\in\mathbb{Z}\}$. De har den velkendte geometriske betydning. De har periode π, og deres grafer har det velkendte udseende.





Funktionerne er differentiable med de afledede

$$\frac{d\tan t}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t, \qquad \frac{d\cot t}{dt} = -\frac{1}{\sin^2 t} = -(1+\cot^2 t) .$$

Desuden gælder for vilkårlige u,v i de respektive definitionsmængder, når også $u+v$ tilhører definitionsmængden,

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}, \qquad \cot(u+v) = \frac{\cot u \cot v - 1}{\cot u + \cot v} .$$

Af Eulers formler fås

$$\tan t = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2it}-1}{e^{2it}+1}\ , \quad \cot t = i\,\frac{e^{2it}+1}{e^{2it}-1}\ .$$

Kritik af skolematematikkens behandling af de trigonometriske funktioners differentiabilitetsforhold.

Med vor behandling i III, §6, af buelængder på enhedscirklen og af vinkelmål har vi som omtalt i indledningen af indeværende § bragt grundlaget i orden for skolematematikkens definition af $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Disse funktioners differentiabilitetsegenskaber føres i skolen tilbage til

$$\frac{\sin t}{t} \to 1 \quad \text{for } t \to 0$$

ved hjælp af de logaritmiske formler

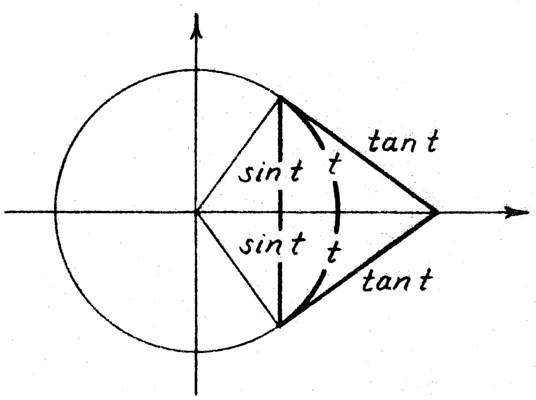
$$\sin t - \sin t_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}(t-t_0)\cos\tfrac{1}{2}(t+t_0)$$
$$\cos t - \cos t_0 = -2\sin\tfrac{1}{2}(t-t_0)\sin\tfrac{1}{2}(t+t_0)\ .$$

Og at $\sin t/t \to 1$ for $t \to 0$, hvilket i øvrigt betyder, at sinus er differentiabel i 0 med differentialkvotienten 1, vises som s. II.46 ud fra ulighederne

$$\sin t < t < \tan t\ , \quad t \in\ ]0,\tfrac{\pi}{2}[\ .$$

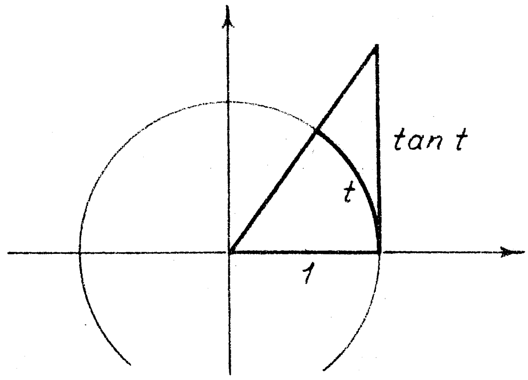
Disse "aflæses" af figuren. At korden $2\sin t$ er kortere end buen $2t$ er ganske rigtigt en umiddelbar konsekvens af vor buelængdedefinition (s. III.60). Men kan man virkelig "aflæse"

$$2t < 2\tan t$$



af figuren ? Der er lidt ældre skolebøger, hvor dette er bragt i orden, (f.eks. ofrer Andersen/Mogensen: Lærebog i matematik II, 3. udg., 1953, fire sider med petit, s. 7-11, på forberedelser), men det er nok mere gjort af hensyn til forfatternes samvittighed end til elevernes interesse. I hvert fald har man nu sænket fanen, og det ville den, der skriver disse linier, også gøre på det pågældende trin. Men læreren bør vide, hvor han snyder ! Og helst hvordan sagen kan bringes i orden.

Som en besnærende mulighed (brugt f.eks. i Juul/Rønnau: Lærebog i matematik II, 4. udg. 1951, s. 95) skal nævnes arealsammenligning for cirkeludsnit og retvinklet trekant:



$$\frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan t\ .$$

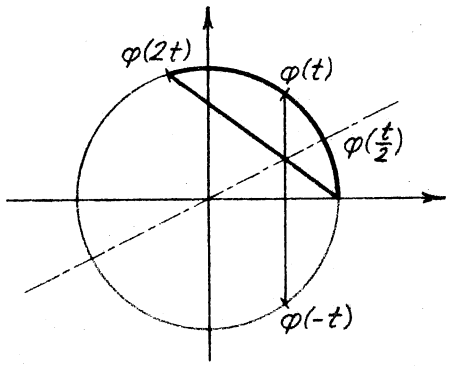
Skønt vi har beregnet arealet af cirkelskiven (s. III.75-76), er vort grundlag her dog løst: vi gør ikke i dette kursus forsøg på en seriøs behandling af arealbegrebet.

At uligheden $t < \tan t$, $t \in]0,\frac{\pi}{2}[$, faktisk er rigtig, er let at bevise eksakt, f.eks. ved middelværdisætningen: Idet $\xi = \xi_t$ er et passende tal i $]0,t[$, har vi

$$\tan t - \tan 0 = (1 + \tan^2\xi)(t - 0) < t\ .$$

Men dette bevis er naturligvis ubrugeligt, før differentiationen af tangens er behandlet.

Selve den efterstræbte grænseovergangsformel $\sin t\,/t \to 1$ for $t \to 0$ kan vi derimod "aflæse" af den første figur ! Det er jo nok at betragte $t > 0$. Spejler vi figuren i den rette linie gennem $(0,0)$ og $\varphi(t/2) = (\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2})$, ses nemlig, at korden fra $(1,0)$ til $\varphi(2t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ har længden $2\sin t$. Og da buelængden jo er $2t$, har vi straks $2\sin t\,/(2t) \to 1$ for $t \to 0_+$, jf. Bemærkning s. III.67.

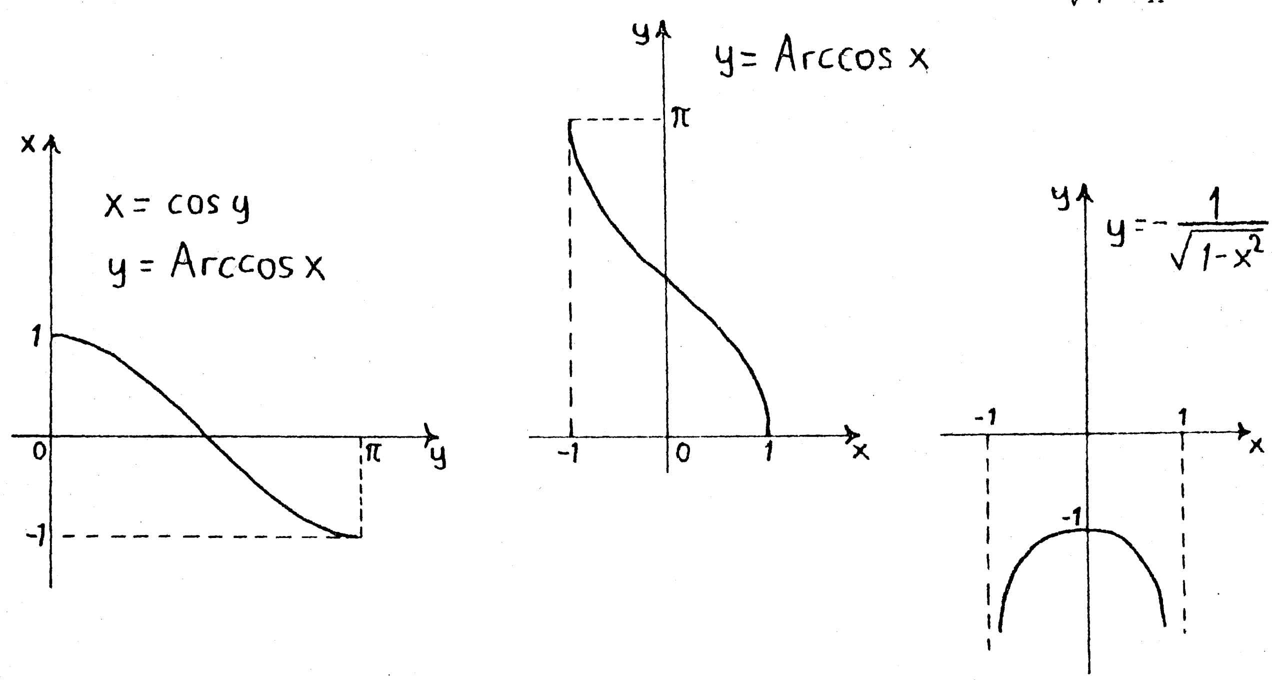


§4. Arcus funktionerne. De hyperbolske funktioner.

I denne paragraf vil vi udvide det arsenal af funktioner, vi er fortrolige med. De nye funktioner er blandt andet af betydning ved stamfunktionsbestemmelser, som vi skal se i Kapitel VI.

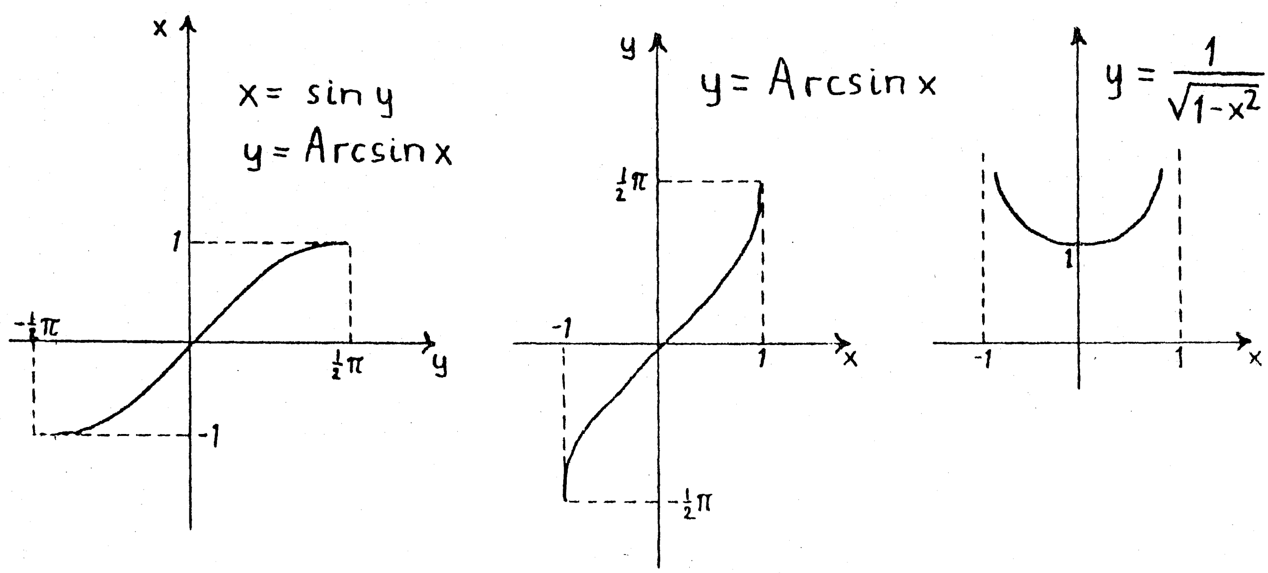
De trigonometriske funktioners omvendte funktioner: Arcus funktionerne. Restriktionen af funktionen $x = \cos y$ til intervallet $[0,\pi]$ er en bijektiv afbildning af $[0,\pi]$ på intervallet $[-1,1]$. Funktionen er aftagende og differentiabel med den afledede $\frac{dx}{dy} = -\sin y$, som er 0 i endepunkterne 0 og π, medens den er negativ og altså lig $-\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}$ i intervallet $]0,\pi[$.

Den omvendte funktion, der betegnes $y = \text{Arccos}\, x$, læs Arcuscosinus x, er således en bijektiv afbildning af intervallet $[-1,1]$ på intervallet $[0,\pi]$; den er aftagende, og ifølge Sætning 2.6 s.III.19 er den differentiabel i $]-1,1[$ med den afledede $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.



Restriktionen af funktionen $x = \sin y$ til intervallet $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ er en bijektiv afbildning af $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ på intervallet $[-1,1]$. Funktionen er voksende og differentiabel med den afledede $\frac{dx}{dy} = \cos y$, som er 0 i endepunkterne $-\frac{1}{2}\pi$ og $\frac{1}{2}\pi$, medens den er positiv og altså lig $\sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ i intervallet $]-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi[$.

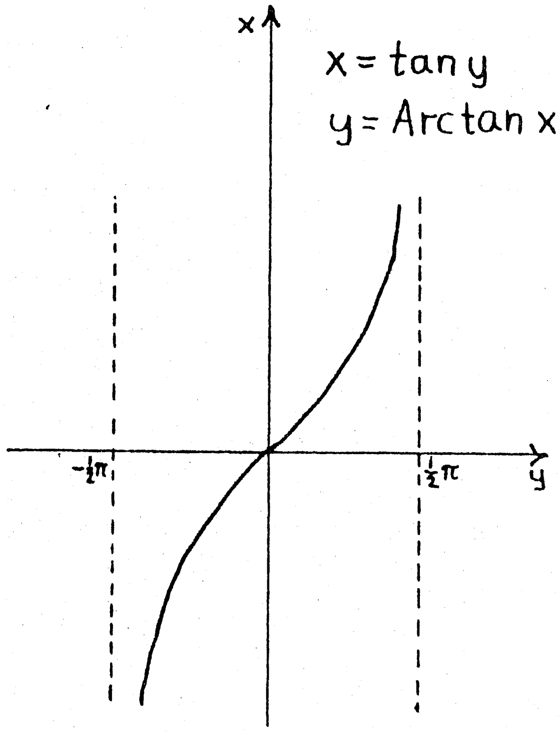
Den omvendte funktion, der betegnes $y = \operatorname{Arcsin} x$, læs Arcussinus x, er således en bijektiv afbildning af intervallet $[-1,1]$ på intervallet $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$; den er voksende, og den er differentiabel i $]-1,1[$ med den afledede $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

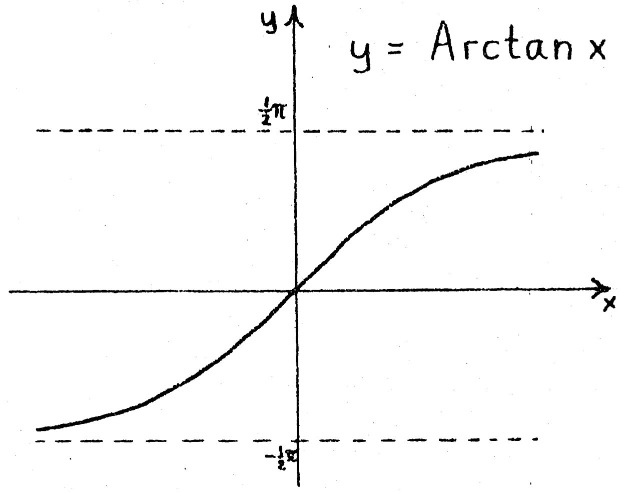


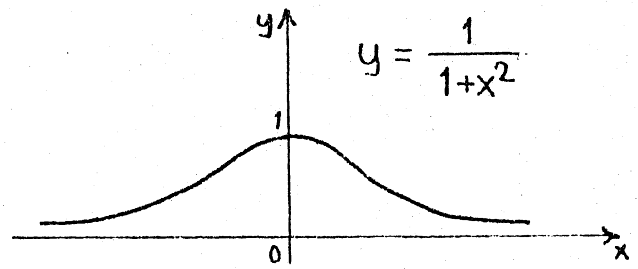
Funktionerne Arccos og Arcsin er ikke differentiable i intervalendepunkterne -1 og 1. I de hertil svarende punkter har graferne lodret tangent.

Restriktionen af funktionen $x = \tan y$ til intervallet $]-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi[$ er en bijektiv afbildning af $]-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi[$ på $\mathbb{R}$. Funktionen er voksende og differentiabel med den afledede $\frac{dx}{dy} = 1+\tan^2 y = 1+x^2$, som er positiv i hele intervallet.

Den omvendte funktion, der betegnes $y = \operatorname{Arctan} x$, læs Arcustangens x, er således en bijektiv afbildning af $\mathbb{R}$ på intervallet $]-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi[$; den er voksende, og den er differentiabel med den afledede $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

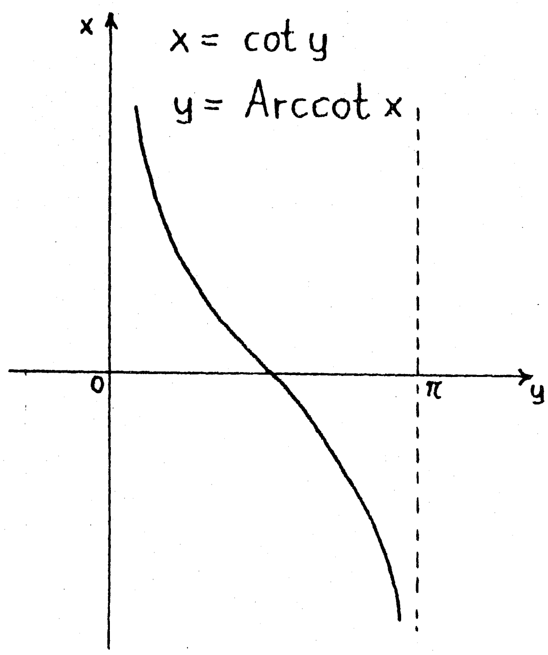


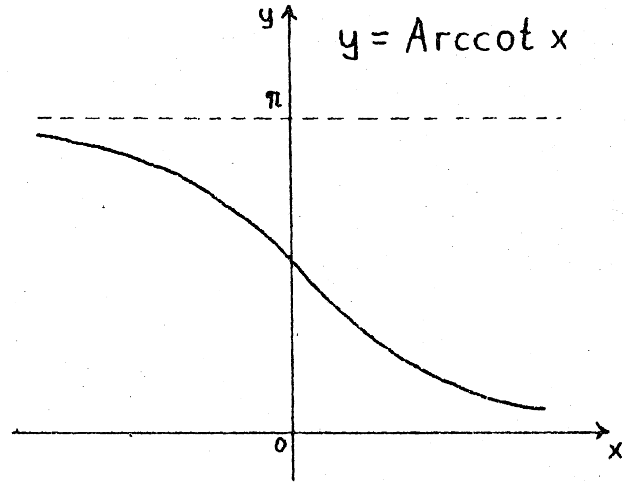


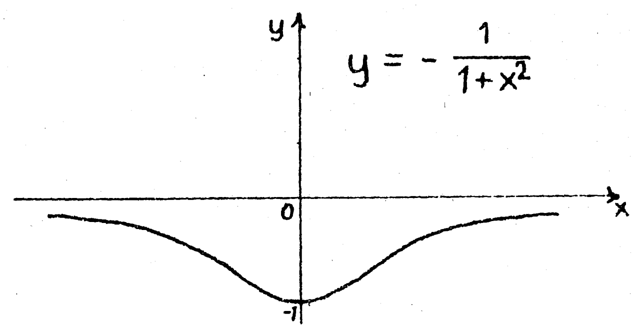


Restriktionen af funktionen $x = \cot y$ til intervallet $]0,\pi[$ er en bijektiv afbildning af $]0,\pi[$ på $\mathbb{R}$. Funktionen er aftagende og differentiabel med den afledede $\frac{dx}{dy} = -(1+\cot^2 y) = -(1+x^2)$, som er negativ i hele intervallet

Den omvendte funktion, der betegnes $y = \text{Arccot}\, x$, læs Arcus-cotangens x, er således en bijektiv afbildning af $\mathbb{R}$ på intervallet $]0,\pi[$; den er aftagende, og den er differentiabel med den afledede $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$.







Vi sammenstiller differentiationsformlerne:

$$\frac{d\,\mathrm{Arccos}\,x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad \frac{d\,\mathrm{Arcsin}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad x \in\,]-1,1[\ ,$$

$$\frac{d\,\mathrm{Arctan}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad \frac{d\,\mathrm{Arccot}\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\ .$$

BEMÆRKNING. For hvert $x \in [-1,1]$ gælder

$$\mathrm{Arccos}\,x + \mathrm{Arcsin}\,x = \frac{\pi}{2}\ .$$

Thi sættes $v = \mathrm{Arcsin}\,x$, har vi $\sin v = x$ og $v \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, altså $\cos(\frac{\pi}{2} - v) = \sin v = x$ og $\frac{\pi}{2} - v \in [0,\pi]$. Men så er

$$\mathrm{Arccos}\,x = \frac{\pi}{2} - v = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}\,x\ .$$

Ud fra reglen $\cot(\frac{\pi}{2} - v) = \tan v$ fås tilsvarende

$$\mathrm{Arccot}\,x + \mathrm{Arctan}\,x = \frac{\pi}{2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\ .$$

Geometrisk betyder de to resultater, at graferne for funktionerne $y = \mathrm{Arccos}\,x$ og $y = \mathrm{Arcsin}\,x$ er symmetriske med hensyn til linien $y = \frac{1}{4}\pi$, og ligeså graferne for funktionerne $y = \mathrm{Arctan}\,x$

og $y = \text{Arccot}\,x$. Vi kunne altså have nøjedes med at indføre f.eks. $\text{Arcsin}\,x$ og $\text{Arctan}\,x$, idet de to andre funktioner udtrykkes ved disse.

BEMÆRKNING. Man skriver ofte $\arccos x$ for en hvilken som helst løsning $y \in \mathbb{R}$ til ligningen $\cos y = x$, undertiden skrives det for mængden af løsningen til ligningen. $\text{Arccos}\,x$ er så den værdi af $\arccos x$, der tilhører intervallet $[0,\pi]$. Tilsvarende bruges betegnelserne $\arcsin x$, $\arctan x$, $\text{arccot}\,x$.

Vi skal til afslutning give potensrækkefremstillinger for Arcsin og Arctan. I begge tilfælde udnyttes kendskabet til den afledede :

Af sumformlen for en kvotientrække (s. I.65) fås

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots , \qquad x \in]-1,1[,$$

og heraf følger ved ledvis integration (Bemærkning s.V.9)

$$\text{Arctan}\,x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots , \quad x \in]-1,1[.$$

Bemærk, at konvergenstallet er 1, skønt Arctan er vilkårligt ofte differentiabel på hele $\mathbb{R}$.

For hvert $x \in]-1,1[$ får vi ved at sætte $t = -x^2$ i binomialrækken $(1+t)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^n$, at

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^{2n} ,$$

og heraf følger ved ledvis integration (Bemærkning s.V.9)

$$\text{Arcsin}\,x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} , \qquad x \in]-1,1[.$$

Idet for $n \in \mathbb{N}$ benytter omformningen

$$\binom{-1/2}{n} (-1)^n = \frac{(-1/2)\cdot(-3/2)\cdot \ldots \cdot(1-2n)/2}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} (-1)^n = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} ,$$

kan resultatet skrives

$$\text{Arcsin}\, x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in]-1,1[.$$

Rækken har konvergenstallet 1. Det følger f.eks. af, at binomialrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^n$ har det.

Hyperbolsk cosinus og hyperbolsk sinus. Vi definerer disse funktioner $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ud fra eksponentialfunktionen ved

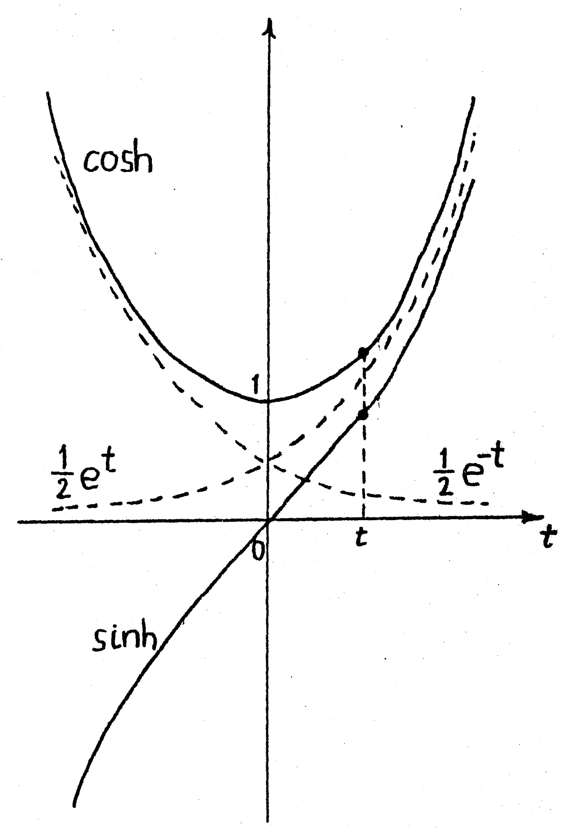
$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad t \in \mathbb{R} .$$

Man ser, at cosh er en lige og sinh en ulige funktion, dvs.

$$\cosh(-t) = \cosh t, \qquad \sinh(-t) = -\sinh t .$$

Endvidere, at $\cosh t > 0$ for alle $t \in \mathbb{R}_+$, medens $\sinh t$ for $t \neq 0$ har samme fortegn som t. For $t = 0$ har vi

$$\cosh 0 = 1, \qquad \sinh 0 = 0 .$$



Funktionerne er differentiable med hinanden som afledede,

$$\frac{d\cosh t}{dt} = \sinh t, \qquad \frac{d\sinh t}{dt} = \cosh t .$$

Heraf fremgår, at cosh er aftagende på $]-\infty,0]$ og voksende på $[0,\infty[$, medens sinh er voksende.

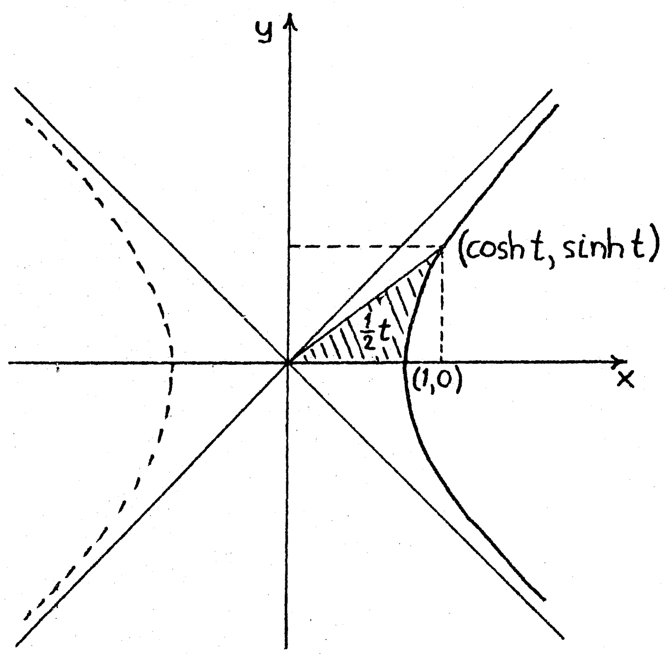
Da $e^t \to \infty$ og $e^{-t} \to 0$ for $t \to \infty$, ses, at $\cosh t \to \infty$ for $t \to \infty$ og altså også for $t \to -\infty$, og at $\sinh t \to \infty$ for $t \to \infty$ og altså $\sinh t \to -\infty$ for $t \to -\infty$. Værdimængden for cosh er derfor $[1,\infty[$, og værdimængden for sinh er hele $\mathbb{R}$.

Funktionernes grafer skitseres let på basis af graferne for funktionerne $\frac{1}{2}e^t$ og $\frac{1}{2}e^{-t}$.

Af definitionen på $\cosh t$ og $\sinh t$ følger umiddelbart

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \; .$$

Af denne grundrelation, i forbindelse med at $\cosh t > 0$ og at



$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er bijektiv med $\frac{d \sinh t}{dt} > 0$, fremgår, at

$(x,y) = (\cosh t, \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$,

er en parameterfremstilling for højre gren af enhedshyperblen

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\} \; ,$$

gennemløbet efter voksende værdier af ordinaten.

BEMÆRKNING. Parameteren t har en simpel geometrisk betydning : For $t > 0$ er $\frac{1}{2} t$ lig arealet af hyperbelsektoren hørende til buen fra $(1,0)$ til $(\cosh t, \sinh t)$.

BEVIS. For arealet A af sektoren finder vi de to udtryk

$$A = \frac{1}{2} \cosh t \sinh t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1} \, dx$$

$$A = \int_0^{\sinh t} \sqrt{y^2 + 1} \, dy - \frac{1}{2} \cosh t \sinh t \; ,$$

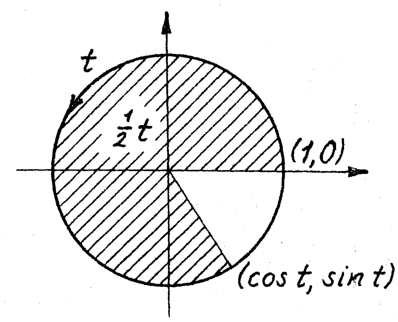
hvoraf

$$2A = \int_0^{\sinh t} \sqrt{y^2 + 1} \, dy - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1} \, dx \; .$$

I det første integral anvender vi substitutionen $y = \sinh u$, i det andet substitutionen $x = \cosh u$. Vi får da

$$2A = \int_0^t \cosh u \,\frac{d\sinh u}{du}\, du - \int_0^t \sinh u \,\frac{d\cosh u}{du}\, du$$
$$= \int_0^t (\cosh^2 u - \sinh^2 u)\, du = \int_0^t 1\, du = t\ . \qquad \square$$

Vi definerede $\cos t$ og $\sin t$ som koordinaterne til det punkt P_t på enhedscirklen Γ, hvor t er længden regnet med fortegn af cirkelbuen fra $(1,0)$ til P_t, evt. med flere gennemløb af Γ. Karakteriserer vi i stedet $P_t = (\cos t, \sin t)$ ved, at $\frac{1}{2}t$ er arealet regnet med fortegn af cirkelsektoren hørende til nævnte bue, ser man, at $(\cosh t, \sinh t)$ fås på præcis samme måde ud fra højre gren af enhedshyperblen. Dette er grunden til navnene hyperbolsk cosinus og sinus.



Ud fra eksponentialfunktionens potensrækkeudvikling finder man umiddelbart

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \dots\ , \qquad t \in \mathbb{R}\ ,$$
$$\sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\ , \qquad t \in \mathbb{R}\ .$$

BEMÆRKNING. Funktionerne $\cosh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ og $\sinh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ defineres ved

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}\ , \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}\ , \qquad z \in \mathbb{C}\ .$$

Det er klart, at potensrækkefremstillingerne ovenfor gælder, også når $t \in \mathbb{R}$ erstattes med $z \in \mathbb{C}$.

I det komplekse er de trigonometriske og de hyperbolske funktioner nært forbundet:

$$\cosh z = \cos iz\ , \qquad \cos z = \cosh iz\ ,$$
$$i \sinh z = \sin iz\ , \qquad i \sin z = \sinh iz\ .$$

Hyperbolsk tangens og hyperbolsk cotangens. Disse funktioner $\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\coth\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ defineres ved

$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}\ , \qquad \coth t = \frac{\cosh t}{\sinh t} = \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1}\ .$$

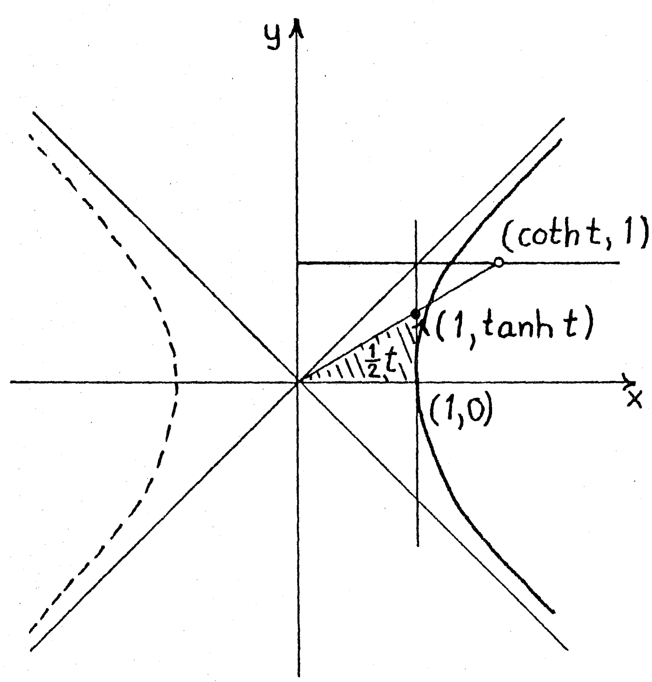
De har en geometrisk betydning svarende til den geometriske betydning af tan og cot . (Se figur.) De er begge ulige,

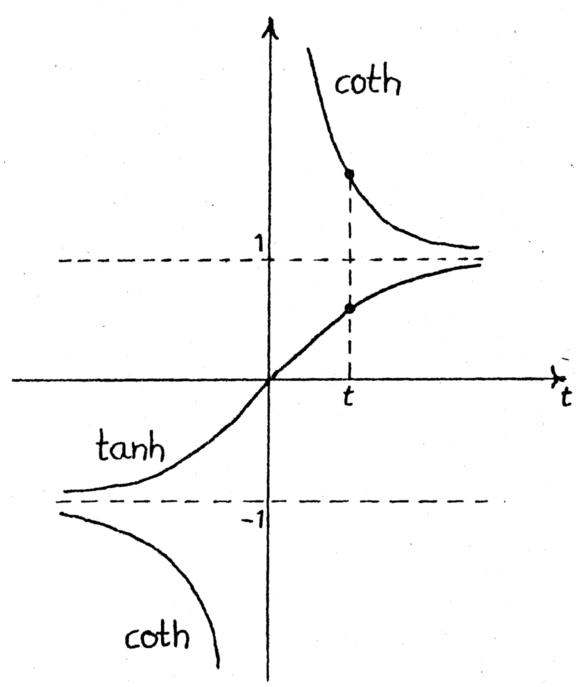
$$\tanh(-t) = -\tanh t \ , \quad \coth(-t) = -\coth t \ .$$

De er differentiable med de afledede

$$\frac{d\tanh t}{dt} = \frac{1}{\cosh^2 t} = 1 - \tanh^2 t \ , \quad \frac{d\coth t}{dt} = -\frac{1}{\sinh^2 t} = 1 - \coth^2 t \ .$$

Funktionen tanh er voksende og har for $x \to \infty$ og $x \to -\infty$ grænseværdierne 1 og -1. Dens værdimængde er derfor intervallet $]-1,1[$. Funktionen coth er aftagende i hvert af intervallerne $]-\infty,0[$ og $]0,+\infty[$ og har for $x \to \infty$ og $x \to -\infty$ grænseværdierne 1 og -1, medens den går mod ∞ og $-\infty$ for $x \to 0$ fra højre og venstre. Dens værdimængde i de to intervaller er derfor $]-\infty,-1[$ og $]1,+\infty[$. Det er nu let at skitsere de to funktioners grafer.





<u>Formler for de hyperbolske funktioner</u>. Vi har allerede nævnt grundrelationen

$$\cosh^2 t - \sin^2 t = 1 ,$$

som afspejler funktionernes forbindelse med enhedshyperblen $\{(x,y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$, på samme måde som relationen $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ afspejler de trigonometriske funktioners forbindelse med enhedscirklen $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Dernæst fremhæves additionsformlerne

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$$
$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b .$$

De verificeres umiddelbart ud fra definitionerne. Videre fås

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}, \qquad \coth(a+b) = \frac{1 + \coth a \coth b}{\coth a + \coth b} ,$$

hvor det naturligvis i den sidste formel må forudsættes, at intet af tallene a , b , $a+b$ er 0.

Man bemærker, at alle formlerne svarer til analoge formler for de trigonometriske funktioner, blot med et fortegnsskifte ved led, der er produkt af to sinh- , tanh- eller coth-faktorer. Dette er let at forstå, når man betænker, at de trigonometriske formler kan verificeres ud fra Eulers formler. Fortegnsafvigelserne kommer fra faktorer $i^2 = -1$, hidrørende fra den faktor $\frac{1}{i}$, der optræder i Eulers formel for sin .

Af de fundne formler kan man udlede en række andre, der på tilsvarende måde modsvarer formler for de trigonometriske funktioner.

§5. Potensrækkefremstillinger. Eksempler og anvendelser.

Potensrækkefremstillinger. Først en oversigt over potensrækkefremstillinger kendt fra §§ 1-4 :

$$e^x = \exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots, \quad x \in \,]-1,1[$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in \,]-1,1[$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \ldots, \quad x \in \,]-1,1[$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \ldots + \binom{a}{n}x^n + \ldots\ldots, \quad x \in \,]-1,1[$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \,]-1,1[.$$

Fremstillingerne af exp, cos, sin, cosh og sinh gælder som tidligere bemærket også for hvert $x \in \mathbb{C}$. De øvrige rækker har konvergenstallet 1, dog gælder fremstillingen af $(1+x)^a$ for alle x, når $a \in \mathbb{N}_0$. Der er ikke medtaget oplysninger om forholdene i konvergensintervallets endepunkter.

De anførte potensrækkefremstillinger er fundet af I. Newton (o. 1665, jf. s.I.85). Uafhængigt af ham blev rækken for $\log(1+x)$ fundet af N. Mercator (1667) og rækken for $\operatorname{Arctan} x$ af J. Gregory (1670) og G.W. Leibniz (1673).

Derpå en oversigt over nogle metoder, der ofte kan anvendes, når man søger en potensrækkefremstilling $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ af en forelagt funktion.

I. Af $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ for $x \in]-\rho,\rho[$ følger umiddelbart, at

$$f(cx) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n a_n x^n, \quad \text{spec.} \quad f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n, \quad x \in]\tfrac{-\rho}{|c|},\tfrac{\rho}{|c|}[,$$

for vilkårligt $c \in \mathbb{R}$, samt at

$$f(x^p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{pn} , \qquad x \in]-\sqrt[p]{\rho}, \sqrt[p]{\rho}[,$$

for vilkårligt $p \in \mathbb{N}$.

EKSEMPLER. Af $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$, $x \in]-1,1[$, følger f.eks.

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots , \quad x \in]-1,1[$$

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n} + \ldots , \quad x \in]-1,1[.$$

II. Søges potensrækkefremstilling af en funktion $f(x)$, der kan fås ud fra en eller flere funktioner med kendte potensrækker ved multiplikation med konstant eller med x, ved addition eller ved multiplikation, byder betragtningerne s.V.4 sig til.

EKSEMPLER. Vi brugte metoden, da vi fandt fremstillingerne af $\cos x$, $\sin x$, $\cosh x$ og $\sinh x$ ud fra eksponentialfunktionens potensrækkeudvikling. (Hvad cos og sin angår, måtte vi for at udnytte Eulers formler benytte $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ med $z = ix$ og med $z = -ix$, se s.V.38.)

Ud fra fremstillingerne

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots , \quad x \in]-1,1[$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots , \quad x \in]-1,1[$$

finder vi for hvert $x \in]-1,1[$:

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right) .$$

Ud fra fremstillingen $\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n}$, $x \in]-1,1[$, finder vi for hvert $x \in]-1,1[$ f.eks.

$$-x\log(1-x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{m} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} = x^2 + \frac{x^3}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n-1} + \ldots$$

og videre

$$(1-x)\log(1-x) = \log(1-x) - x\log(1-x)$$

$$= -x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} = -x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)x^n = -x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)n} .$$

Ud fra fremstillingerne af $\log(1-x)$ og $(1-x)^{-1}$ finder vi ved multiplikationsreglen (Sætning 1.3 s.V.4) for hvert $x \in]-1,1[$:

$$\frac{\log(1-x)}{1-x} = -\left(1x + \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \ldots + \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n + \ldots\right) .$$

III. Ledvis integration og differentiation. Har f en afledet funktion f' med kendt potensrækkefremstilling, fås en fremstilling af f simpelthen ved ledvis integration fra 0 til x og tilføjelse af det konstante led $f(0)$, jf. Bemærkning s.V.9. Har f en stamfunktion F med kendt potensrækkefremstilling, fås en fremstilling af f simpelthen ved ledvis differentiation, jf. Sætning 1.7, s.V.7.

EKSEMPEL. Fremstillingerne af $\log(1+x)$, $\operatorname{Arctan} x$ og $\operatorname{Arcsin} x$ fandt vi ved ledvis integration af potensrækkerne for $(1+x)^{-1}$, $(1+x^2)^{-1}$ og $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Da $(1-x)\log(1-x)$ har den afledede funktion

$$-1 - \log(1-x) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} , \quad x \in]-1,1[,$$

og da $(1-0)\log(1-0) = 0$, finder vi (jf. II):

$$(1-x)\log(1-x) = -x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)n} , \quad x \in]-1,1[.$$

Da $(1-x)^{-2}$ som stamfunktion har $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in]-1,1[$, finder vi som s.V.7: $(1-x)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ for $x \in]-1,1[$.

IV. De ubekendte koefficienters metode.

(a) Differentialligningsmetoden. Som bekendt er Taylor rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ den eneste chance for potensrækkefremstilling af en given funktion f, se s.V.8. En direkte beregning af $f^{(n)}(0)$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$ er imidlertid gerne uoverkommelig. Kan f karakteriseres som løsning til en homogen lineær differentialligning med begyndelsesbetingelse, hvor koefficienterne er polynomier (se s.VI.31), vil det ofte være lettere at udnytte dette til at finde en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, som er eneste kandidat. Og hvis rækkens konvergensradius er positiv, vil der tilmed uden nye regninger være mulighed for at slutte, at sumfunktionen faktisk er f.

Som illustration betragtes funktionen $(1+x)^a$ for vilkårligt $a \in \mathbb{R}$, hvor vi ganske vist allerede kender resultatet. I ethvert interval I, hvor $0 \in I \subseteq]-1,\infty[$, er $f(x) = (1+x)^a$ eneste løsning til differentialligningen

$$(1+x)\frac{dy}{dx} - ay = 0 \quad \text{med } f(0) = 1 ,$$

jf. s.V.25-26.

Vi søger nu at bestemme koefficienter $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, således at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ har en konvergensradius $\rho > 0$, og således at der findes et interval I med $0 \in I \subseteq]-1,\infty[\cap]-\rho,\rho[$, hvor sumfunktionen $f(x)$ tilfredsstiller differentialligning og begyndelsesbetingelse.

Først foretages en <u>analyse</u>: Vi <u>tænker</u> os opgaven løst, og ser, hvad vi kan slutte om $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$. For $x \in I$ har vi

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n x^n + \ldots$$

og

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

således at indsættelse i differentialligningens venstre side giver

$$(1+x)f'(x) - af(x) = f'(x) + xf'(x) - af(x)$$
$$= (a_1 - aa_0) + (2a_2 - (a-1)a_1)x + \ldots + (na_n - (a-n+1)a_{n-1})x^{n-1} + \ldots .$$

Da $f\colon I \to \mathbb{C}$ ifølge antagelse tilfredsstiller differentialligningen, må rækken fremstille nulfunktionen, og identitetssætningen (s.V.8) giver så rekursionsformlerne

$$a_1 = aa_0\ ,\ 2a_2 = (a-1)a_1\ ,\ \ldots,\ na_n = (a-n+1)a_{n-1}\ ,\ \ldots\ .$$

Og da $a_0 = f(0) = 1$, sluttes $a_1 = a$, $a_2 = a(a-1)/2$ og generelt ved induktion

$$a_n = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} = \binom{a}{n},\quad n\in\mathbb{N}_0\ .$$

Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ må altså være binomialrækken $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$.

Analysen viser, at opgaven har højst en løsning, binomialrækken. Men den viser ikke, at denne række faktisk er en løsning. Vi begyndte med at tænke os en løsning - det kan umuligt give et bevis for, at der er en. Men analysen har givet os en eneste mulig kandidat, og så kan vi jo "gøre prøve":

Vi betragter da rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, hvor $a_n = \binom{a}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Først bestemmes konvergenstallet ρ. Vi forudsætter $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0$ og finder så $\rho = 1$, se s.V.25. Indsættelse af sumfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ ,\quad x\in\,]-1,1[\ ,$$

i differentialligningens venstre side giver ifølge de gamle regninger en funktion med fremstilling

$$\sum_{n=1}^{\infty}(na_n-(a-n+1)a_{n-1})x^{n-1}\ ,$$

og da tallene a_n passer i rekursionsformlerne, er koefficienterne i denne potensrække alle 0. Altså er $f\colon\,]-1,1[\,\to\mathbb{R}$ en løsning, og da $f(0) = a_0 = \binom{a}{0} = 1$, sluttes $f(x) = (1+x)^a$, dvs.

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\ ,\quad x\in\,]-1,1[\ .$$

(b). Rekursionsformler til bestemmelse af koefficienterne i en potensrækkefremstilling kan fremkomme på anden vis end via differentialligninger.

EKSEMPEL. Funktionen $1/(1+x+x^2)$ søges fremstillet ved en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i et interval I omkring 0. Idet vi tænker os opgaven løst (analyse!), har vi for hvert $x \in I$

$$1 = (1+x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

$$= a_0 + (a_1+a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})x^n$$

og dermed ifølge entydighedssætningen

$$a_0 = 1\,,\quad a_1 = -a_0\,,\quad a_2 = -a_1 - a_0\,,\ \ldots,\quad a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}\,,\ \ldots,$$

der giver rækken

$$1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + x^9 - x^{10} + \ldots .$$

Den har konvergenstallet 1, og for hvert $x \in]-1,1[$ har vi med de fundne værdier af a_n og med brug af regningen ovenfor, at

$$(1+x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + (a_1+a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})x^n = 1\,,$$

hvor det sidste lighedstegn denne gang følger af rekursionsformlerne. Den fundne række fremstiller altså $1/(1+x+x^2)$ i sit konvergensinterval $]-1,1[$.

P.S. Med opfindsomhed kan opgaven også løses ved omskrivningen

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{1-x^3} - \frac{x}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - x\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}\,,\qquad x \in]-1,1[\,.$$

Til sidst nogle ord om problemet at bestemme sumfunktionen $f(x)$, $x \in]-\rho,\rho[$, for en forelagt potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergenstal $\rho > 0$: Man søger at udtrykke $f(x)$ ved hjælp af kendte funktionstegn.

Her kan man også spille på I, II og III, blot er det nu den forelagte række, man må prøve at føre tilbage til potensrækker med kendt sum.

EKSEMPLER. De under I, II, III givne eksempler kan læses "bagfra". Bemærk, at udnyttelse af ledvis addition og af Cauchy multiplikation (II) kræver mere opfindsomhed "bagfra", ligesom man må være omhyggelig vedrørende konvergens. Tag eksempelvis rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2x^n}{n^2-1} .$$

Da koefficienten til x^n kan dekomponeres (opfindsomhed):

$$\frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} ,$$

fremgår rækken ved ledvis subtraktion af $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1}$ og $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$. Man finder let, at den forelagte række har konvergensradius $\rho = 1$, men det berettiger ikke til at skrive

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2x^n}{(n-1)(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} , \qquad x \in]-1,1[,$$

der må først argumenteres for konvergensen af rækkerne på højre side. Når de som her begge er konvergente for $x \in]-\rho,\rho[$, og summen kan bestemmes, er opspaltningen lovlig og hensigtsmæssig. For $x \in]-1,1[\smallsetminus \{0\}$ har vi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} = x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x\log(1-x) ,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}\left(-x - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) = -1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{x}\log(1-x) ,$$

altså er

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2x^n}{n^2-1} = \begin{cases} 1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{x} - x\right)\log(1-x) & \text{for } x \in]-1,1[\smallsetminus\{0\} \\ 0 & \text{for } x = 0 . \end{cases}$$

BEMÆRKNING. Fremgangsmåden i IV (a) kan også bruges over for en differentialligning uden kendte løsninger. Lykkes det at finde en potensrække, hvis sumfunktion tilfredsstiller differentialligningen, kan man yderligere forsøge at udtrykke løsningen ved hjælp af kendte funktionstegn. Der er eksempler s.VI.53.

<u>C^∞-funktioner, der ikke kan fremstilles ved potensrække</u>. I alle hidtil betragtede tilfælde af C^∞-funktioner $f: I \to \mathbb{C}$ på et interval I, der indeholder 0, har det vist sig, at funktionen kan fremstilles ved en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, om ikke i hele intervallet,

så dog i et delinterval. Som vist af Cauchy er dette ikke altid tilfældet.

Vi minder om, at Taylor rækken med $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ er den eneste mulighed. (Korollar 1.9, s.V.8). Vi vil her give eksempler på C^∞-funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvor Taylorrækken har konvergenstallet $\rho = \infty$, men ikke har f som sumfunktion.

Med T betegner vi klassen af funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ af formen

$$f(x) = \begin{cases} P\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0, \end{cases}$$

hvor P er et polynomium.

Vi betragter en vilkårlig funktion $f \in T$. For $x = 0$ er f differentiabel med $f'(0) = 0$. Vi har nemlig

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} P\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \to 0 \quad \text{for } x \to 0,$$

idet jo $t\,P(t)\exp(-t^2) \to 0$ for $|t| \to +\infty$. For $x \neq 0$ er f differentiabel med den afledede

$$f'(x) = \left[-P'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} + P\left(\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3}\right] \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Altså er f differentiabel på hele $\mathbb{R}$ med

$$f'(x) = \begin{cases} Q\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0, \end{cases}$$

hvor Q er polynomiet $Q(t) = -P'(t)\,t^2 + P(t)2t^3$. Der gælder altså $f' \in T$. Følgelig er f' differentiabel, og der gælder $f'' \in T$, etc.

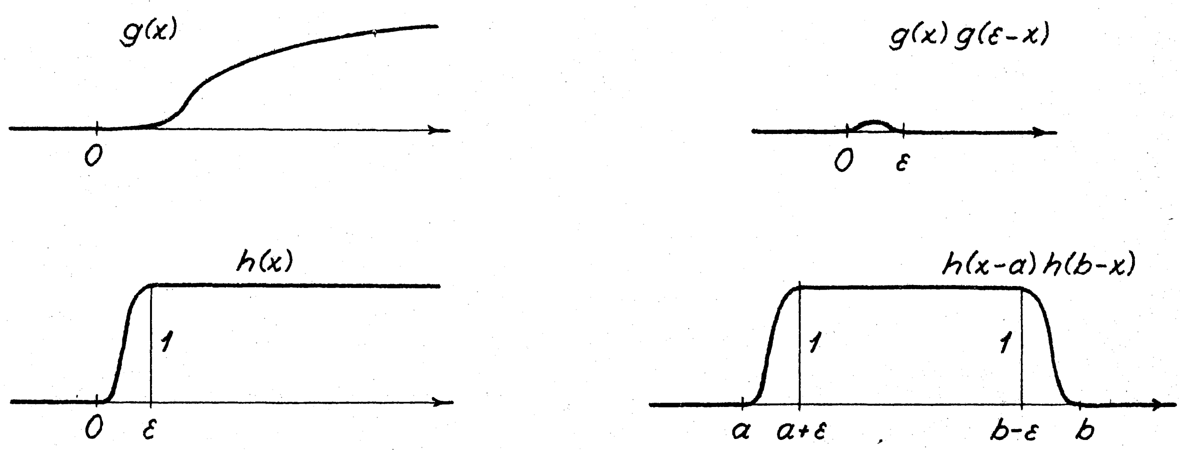
Enhver funktion $f \in T$ er altså af klasse C^∞, og da $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, ..., er dens Taylor række hørende til punktet 0 rækken $\sum_{n=0}^{\infty} 0\,x^n$, som er konvergent for alle x med summen 0. Vælges f.eks. $P = 1$, er $f(x) \neq 0$ for $x \neq 0$. Summen af Taylor rækken er altså kun lig med $f(x)$ for $x = 0$.

BEMÆRKNING. Ud fra dette eksempel kan dannes andre interessante eksempler på C^∞-funktioner. Således ser vi, at funktionen

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

er af klasse C^∞. Det samme gælder derfor for et vilkårligt

$\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ om funktionen $g(x)g(\varepsilon - x)$, som ses at være positiv for $x \in]0,\varepsilon[$ og lig 0 for $x \notin]0,\varepsilon[$.



Funktionen

$$h(x) = \frac{\int_0^x g(t)g(\varepsilon-t)\,dt}{\int_0^\varepsilon g(t)g(\varepsilon-t)\,dt}$$

er derfor af klasse C^∞ og lig 0 for $x \leqq 0$, strengt voksende for $0 \leqq x \leqq \varepsilon$ og lig 1 for $x \geqq \varepsilon$. Betragtes nu et vilkårligt interval $]a,b[$ og vælges $\varepsilon < \frac{1}{2}(b-a)$, ser vi, at funktionen $h(x-a)h(b-x)$ er af klasse C^∞ og lig 0 for $x \leqq a$, strengt voksende for $a \leqq x \leqq a+\varepsilon$, lig 1 for $a+\varepsilon \leqq x \leqq b-\varepsilon$, strengt aftagende for $b-\varepsilon \leqq x \leqq b$ og lig 0 for $x \geqq b$.

Sådanne C^∞-funktioner spiller en vigtig rolle i forskelligartede undersøgelser, som vi skal se i Matematik 2 og 3.

<u>Funktioner af form</u> $\frac{f(x)}{g(x)}$. Det er let at udtale sig om, hvorledes en funktion af nævnte form opfører sig ved grænseovergangen $x \to 0$, når f og g er givet som sumfunktioner af potensrækker $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Vi viser metoden på et par typiske tilfælde.

EKSEMPLER. (a) For $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gælder

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \ldots$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots .$$

Idet sumfunktionerne for potensrækkerne på højre side er kontinuerte i punktet $x=0$, har funktionerne $\frac{1-\cos x}{x^2}$ og $\frac{\sin x}{x}$ for $x \to 0$ grænseværdierne $\frac{1}{2}$ og 1, og tillægger vi dem for $x=0$ disse værdier, gælder formlerne for alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) For $x \in \mathbb{R} \setminus \{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ gælder

$$\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{1-\cos x} = \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - 1}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)}$$

$$= \frac{1}{x}\,\frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \dots}{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \dots} .$$

Idet sumfunktionerne for potensrækkerne i den sidste brøk er kontinuerte i punktet $x=0$, ses, at denne brøk konvergerer mod 2 for $x \to 0$. Følgelig gælder $|\varphi(x)| \to +\infty$ for $x \to 0$. Og da

$$\varphi(x) - \frac{2}{x} = \frac{1}{x}\,\frac{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \dots\right) - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \dots\right)}{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \dots}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \dots}{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + \dots} ,$$

ses, at $\varphi(x) - \frac{2}{x} \to 1$ for $x \to 0$. Vi har altså

$$\varphi(x) = \frac{2}{x} + 1 + \psi(x) ,$$

hvor $\psi(x) \to 0$ for $x \to 0$.

<u>Tilnærmet beregning af e og π</u>. Først e. Ud fra eksponentialrækken fås

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + r_n ,$$

hvor vi for fejlen r_n ved brug af sammenligningskriteriet finder

$$0 < r_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots\right)$$

$$< \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n!} .$$

Vælges $n=13$, fås

$$\begin{aligned}
1 &= 1 & \frac{1}{7!} &= 0{,}000198\ 412698\ \ldots \\
\frac{1}{1!} &= 1 & \frac{1}{8!} &= 0{,}000024\ 801586\ \ldots \\
\frac{1}{2!} &= 0{,}5 & \frac{1}{9!} &= 0{,}000002\ 755731\ \ldots \\
\frac{1}{3!} &= 0{,}166666\ 666666\ \ldots & \frac{1}{10!} &= 0{,}000000\ 275573\ \ldots \\
\frac{1}{4!} &= 0{,}041666\ 666666\ \ldots & \frac{1}{11!} &= 0{,}000000\ 025052\ \ldots \\
\frac{1}{5!} &= 0{,}008333\ 333333\ \ldots & \frac{1}{12!} &= 0{,}000000\ 002087\ \ldots \\
\frac{1}{6!} &= 0{,}001388\ 888888\ \ldots & \frac{1}{13!} &= 0{,}000000\ 000160\ \ldots
\end{aligned}$$

altså $e = 2{,}718281\ 828440 + a + r_{13}$, hvor a er afrundingsfejlen. Idet $0 < a + r_{13} < 11\cdot 10^{-12} + \frac{1}{13}\cdot 161\cdot 10^{-12} < 24\cdot 10^{-12}$, har vi

$$e = 2{,}718281\ 8284\ \ldots\ .$$

Tallet e er irrationalt (J.H. Lambert 1761), se opg. V.2.11, ja endog transcendent (Ch. Hermite 1873).

For π kan vi få en tilnærmet beregning ud fra potensrækken for $\operatorname{Arctan} x$,

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \ldots, \quad x \in]-1,1[.$$

Rækken er konvergent i konvergensintervallets endepunkter med den "rigtige" sum (opg. V.4.13),

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ ,$$

men på grund af rækkens "langsomme konvergens", er denne formel uegnet til beregning. For $x = 1/\sqrt{3}$ fås

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\,\frac{1}{3^3} + \ldots\right),$$

som hurtigt giver π med et antal decimaler. Endnu bedre er det at benytte en af de mange formler, der forbinder værdierne af $\operatorname{Arctan} x$ for simple rationale værdier af x. Et velegnet eksempel på en sådan formel (opg. V.5.16) er

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}\ .$$

Af vurderingen på fejlen ved brug af afsnittet i en alternerende række (s.I.64) fås

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\,\frac{1}{5^7} + \frac{1}{9}\,\frac{1}{5^9} - p$$

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{239^3} + q\ ,$$

hvor $0 < p < \frac{1}{11}\frac{1}{5^{11}} < 2\cdot 10^{-9}$ og $0 < q < \frac{1}{5}\frac{1}{239^5} < 10^{-9}$.

En udregning giver

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad\qquad \frac{1}{239} = 0{,}004184\ 100\ \ldots$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{5^3} = 0{,}002666\ 666\ \ldots \qquad\qquad \frac{1}{3}\frac{1}{239^3} = 0{,}000000\ 024\ \ldots$$

$$\frac{1}{5}\frac{1}{5^5} = 0{,}000064 \qquad\qquad \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = 0{,}004184\ 075 + b\,,$$

hvor $0 < |b| < 3\cdot 10^{-9}$.

$$\frac{1}{7}\frac{1}{5^7} = 0{,}000001\ 828\ \ldots$$

$$\frac{1}{9}\frac{1}{5^9} = 0{,}000000\ 056\ \ldots$$

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = 0{,}197395\ 558 + a\,,$$

hvor $0 < |a| < 6\cdot 10^{-9}$.

Vi har således

$$4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = 0{,}789582\ 232 + 4a\,, \quad 0 < |4a| < 24\cdot 10^{-9}$$

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = 0{,}004184\ 075 + b\,, \quad 0 < |b| < 3\cdot 10^{-9}$$

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}785398\ 154 + c\,, \quad 0 < |c| < 27\cdot 10^{-9}$$

$$\pi = 3{,}141592\ 616 + 4c\,, \quad 0 < |4c| < 108\cdot 10^{-9}\,.$$

Altså er

$$\pi = 3{,}141592\ \ldots\ .$$

Tallet π er irrationalt (J.H. Lambert 1761), ja endog transcendent (F. Lindemann 1882).

§6. Fourierrækker.

I sine undersøgelser over varmeteori gjorde J.-J. Fourier (1768-1830) den skelsættende opdagelse, at enhver funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode 2π, der blot opfylder visse simple betingelser, kan fremstilles ved en trigonometrisk række. Man taler i denne forbindelse om harmonisk analyse, eller man siger, at funktionen kan opløses i rene svingninger, eller at den kan dannes ved superposition af rene svingninger. Resultatet er af stor betydning også for andre problemer i den matematiske fysik. På grund af de krav en eksakt behandling stiller med hensyn til analytisk teknik har teorien for harmonisk analyse øvet stor indflydelse på analysens udvikling. I denne forbindelse kan bemærkes, at Riemanns præcisering af det klassiske integralbegreb (jfr. kap. III) skete i forbindelse med en undersøgelse af trigonometriske rækker. Først med Lebesgues integralbegreb har teorien fået sin naturlige ramme. Vi må derfor her give afkald på en mere dybtgående behandling af teorien og indskrænker os til at bevise nogle af de klassiske resultater under simple antagelser vedrørende de betragtede funktioner.

Definition af Fourierrækker. Ved en trigonometrisk række med periode 2π forstås en række af formen

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

med komplekse koefficienter a_n og b_n. Den variable x er reel. Ved hjælp af Eulers formler kan dette omformes til et udtryk af formen

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}) \quad \text{eller kort} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} .$$

Overgangen fra den ene skrivemåde til den anden sker ved formlerne

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 , \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) , \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) , \quad n \in \mathbb{N},$$

$$a_0 = 2c_0 , \quad a_n = c_n + c_{-n} , \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da funktionerne e^{inx} er bekvemmere at operere med end funktionerne $\cos nx$ og $\sin nx$, foretrækker vi her sidstnævnte form. Rækkens n^{te} afsnit er

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} .$$

Det er klart, at hvis en trigonometrisk række med periode 2π er punktvis konvergent, vil dens sumfunktion være periodisk med periode 2π .

Vi kommer adskillige gange til at benytte at der for funktionerne $x \to e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, gælder

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}dx = \begin{cases} 1 , & n = 0 \\ 0 , & n \neq 0 . \end{cases}$$

<u>SÆTNING 6.1.</u> Hvis en trigonometrisk række $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er uniformt konvergent med sumfunktion $f(x)$, som da er en kontinuert funktion med perioden 2π , er rækkens koefficienter bestemt ved

$$c_n(f) \equiv c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

BEVIS. Afsnitsfølgen $s_p(x) = \sum_{k=-p}^{p} c_k e^{ikx}$ konvergerer uniformt mod $f(x)$. For et fast $n \in \mathbb{Z}$ konvergerer funktionsfølgen $s_p(x)e^{-inx}$ altså uniformt mod $f(x)e^{-inx}$, og der gælder derfor

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s_p(x)e^{-inx}dx .$$

Nu er $s_p(x)e^{-inx} = \sum_{k=-p}^{p} c_k e^{i(k-n)x}$. Følgelig er

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s_p(x)e^{-inx}dx = c_n$, når $p \geq |n|$. Altså er

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = c_n$. $\square$

BEMÆRKNING. Integration over et vilkårligt interval af længde 2π vil give samme resultat.

Denne sætning motiverer følgende:

<u>DEFINITION.</u> For enhver stykkevis kontinuert funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med perioden 2π betegnes den trigonometriske række $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, hvis koefficienter c_n er bestemt ved

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

som <u>Fourierrækken for</u> f . Vi udtrykker dette ved at skrive

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \ .$$

BEMÆRKNING. Med brug af denne definition kan Sætning 6.1 udtrykkes således: Hvis en trigonometrisk række $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er uniformt konvergent, er den Fourierrække for sin sumfunktion $f(x)$.

Skrives Fourierrækken på formen

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{cox} nx + b_n \sin nx) \ ,$$

lyder udtrykkene for koefficienterne (som man umiddelbart efterregner ved brug af de ovenfor anførte overgangsformler)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n = 0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n = 1,2,\dots \ .$$

Tallene c_n , resp. a_n , b_n kaldes funktionens <u>Fourierkoefficienter</u>. Størrelsen $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ kaldes også <u>middelværdien</u> af f .

Vi minder om at definitionen af en stykkevis kontinuert funktion står på s. III.10. Vi kan så formulere og bevise følgende

<u>SÆTNING 6.2</u>. (Bessels ulighed.) For en stykkevis kontinuert funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med perioden 2π og Fourierrækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ gælder for ethvert $n \in \mathbb{N}$ uligheden

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx \ .$$

BEVIS. Bemærk først, at der for $n,m \in \mathbb{Z}$ gælder

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}dx = \begin{cases} 1 \ , & \text{når } n = m \ , \\ 0 \ , & \text{når } n \neq m \ . \end{cases}$$

Idet $s_n(x) = \sum_{s=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, hvor $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$ fås nu for den ikke-negative funktion $|f(x)-s_n(x)|^2$:

$$0 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)-s_n(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x)-s_n(x))(\overline{f(x)}-\overline{s_n(x)})dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|f(x)|^2 - f(x)\overline{s_n(x)} - s_n(x)\overline{f(x)} + s_n(x)\overline{s_n(x)})dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k}\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

$$- \sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx} + \sum_{k=-n}^{n}\sum_{\ell=-n}^{n} c_k\overline{c_\ell}\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-i\ell x}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k}c_k - \sum_{k=-n}^{n} c_k\overline{c_k} + \sum_{k=-n}^{n} c_k\overline{c_k}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 .$$

Heraf aflæses uligheden. $\square$

BEMÆRKNING. Af Bessels ulighed følger straks, at rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ er konvergent, og at dens sum er $\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$. Uden bevis nævner vi, at summen faktisk er $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$. Ligningen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$ er kendt under navnet <u>Parsevals ligning</u>.

<u>KOROLLAR 6.3</u>. For Fourierkoefficienterne c_n (resp. a_n , b_n) for en vilkårlig stykkevis kontinuert funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode 2π gælder $c_n \to 0$ for $|n| \to \infty$, resp. $a_n \to 0$ og $b_n \to 0$ for $n \to \infty$.

BEVIS. Når $\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$ er rækken $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ konvergent, så $|c_k|^2 \to 0$ for $|k| \to \infty$, hvoraf fås at $c_k \to 0$ for $|k| \to \infty$. Heraf følger påstanden for a_n , resp. b_n . $\square$

EKSEMPEL. Vi betragter den funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode 2π der på $[-\pi,\pi[$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} a & -\pi \le x < 0 \\ b & 0 \le x < \pi , \end{cases}$$

hvor a og b er givne komplekse tal. Da f er stykkevis kontinuert kan vi uden videre udregne Fourierkoefficienterne c_n for f

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}dx + \frac{b}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx .$$

Heraf får vi at $c_0 = \frac{a+b}{2}$, mens vi for $n \neq 0$ får

$$c_n = \frac{a}{2\pi}\cdot\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{b}{2\pi}\cdot\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \ n \text{ lige} \\ -\frac{a}{\pi i n}+\frac{b}{\pi i n} = \frac{b-a}{\pi i n} & , \ n \text{ ulige}, \end{cases}$$

således at denne funktion har som Fourierrække

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\pi i}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n \text{ ulige}}} \frac{e^{inx}}{n} \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Rækken kan iøvrigt ved brug af Eulers formler omskrives til

$$\frac{a+b}{2} + 2\,\frac{b-a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i(2n-1)x}-e^{-i(2n-1)x}}{2i(2n-1)} = \frac{a+b}{2} + \frac{2}{\pi}(b-a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} .$$

Specielt kan vi heraf aflæse at Fourierrækken for f i punktet 0 er konvergent med sum $\frac{a+b}{2}$. At dette tal også er $\frac{f(0+)+f(0-)}{2}$ er ikke nogen tilfældighed. Mere herom senere.

<u>Fourierrækkens konvergens</u>. I analogi med begrebet stykkevis kontinuert siger vi, at en funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ er <u>stykkevis differentiabel</u> hvis der findes en deling af $[a,b]$ ved delepunkter $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b$ og for hvert $j \in \{1,\ldots,k\}$ en differentiabel funktion $f_j\colon [x_{j-1},x_j] \to \mathbb{C}$ på det afsluttede interval $[x_{j-1},x_j]$, som stemmer overens med f på det åbne interval $]x_{j-1},x_j[$. En funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$ på et vilkårligt interval $I \subseteq \mathbb{R}$ kaldes stykkevis differentiabel, hvis den er stykkevis differentiabel på ethvert kompakt delinterval $[a,b]$ af I.

En stykkevis kontinuert funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$ kaldes <u>normaliseret</u>, hvis dens værdi $f(x)$ i ethvert diskontinuitetspunkt x, der ikke er endepunkt for I, er lig med middeltallet $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ af grænseværdierne fra højre og venstre. En vilkårlig stykkevis kontinuert funktion $f: I \to \mathbb{C}$ normaliseres ved at man erstatter funktionsværdien i ethvert diskontinuitetspunkt, der ikke er endepunkt for I, med $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ (sml. situationen i Eksemplet efter Korollar 6.3).

BEMÆRKNING. Hvis $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er en funktion kan man betragte forskydningen f_a, hvor $a \in \mathbb{R}$ er et givet tal, defineret ved

$$f_a(x) = f(a+x), \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Det er klart, at hvis f er periodisk med periode 2π bliver f_a periodisk med periode 2π. Endvidere vil stykkevis kontinuitet eller differentiabilitet af f umiddelbart overføres til f_a. Hvis f er stykkevis kontinuert og 2π-periodisk og har Fourierkoefficienter $c_n(f)$, så vil det om Fourierkoefficienterne $c_n(f_a)$ for f_a gælde at

$$c_n(f_a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(t)e^{-int}e^{ina}dt = c_n(f)e^{ina}.$$

Det første udtryk er det n^{te} led i Fourierrækken for f_a i punktet 0, udtrykket til sidst er det n^{te} led i Fourierrækken for f i punktet a, d.v.s. Fourierrækken for f i punktet a er den samme som Fourierrækken for f_a i punktet 0. Vi kan derfor afgøre konvergensforholdene for Fourierrækken for f i et punkt a ved at undersøge konvergensen af Fourierrækken for f_a i 0.

BEMÆRKNING. Det er en umiddelbar konsekvens af integralets linearitet at hvis f har Fourierkoefficienter $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ og g har Fourierkoefficienter $(c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$ så vil $\alpha f + \beta g$ (α, β komplekse konstanter) have Fourierkoefficienter $(\alpha c_n(f)+\beta c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$. Heraf følger også at hvis Fourierrækkerne for f og g er konvergente i et punkt x_0, så er Fourierrækken for $\alpha f + \beta g$ konvergent i x_0 (jvf. s. I.63).

Punktvis konvergens. Vi vil nu vise følgende sætning om punktvis konvergens af en Fourierrække.

SÆTNING 6.4. For enhver stykkevis differentiabel funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode 2π er Fourierrækken punktvis konvergent, og sumfunktionen er den funktion der fås ved normalisering af f.

BEVIS. Lad f have Fourierkoefficienterne $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ og lad $a \in \mathbb{R}$ være givet. Vi skal vise at $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{ina} = \frac{f(a+)+f(a-)}{2}$.
Første etape af beviset går ud på at specificere yderligere forudsætninger om f, som muliggør en smidigere bevisgang, uden at tabe styrke i konklusionen.

For det første kan vi udnytte Bemærkning s. V.68: Erstattes f med forskydningen f_a, kan vi i resten af beviset forudsætte at $a = 0$, altså at vi undersøger konvergensen i punktet 0.

For det andet kan vi sørge for at f er kontinuert i punktet 0: Betragt den type funktion der blev undersøgt i eksemplet s. V. , Mere præcist, lad

$$h(x) = \begin{cases} f(0-) & -\pi \le x < 0 \\ f(0+) & 0 \le x < \pi . \end{cases}$$

Vi kan uden at ændre på forudsætningerne om f vedtage at $f(0) = f(0+)$. Lad så $F = f - h$ på $[-\pi,\pi[$ og udvid F til hele $\mathbb{R}$, således at den er 2π-periodisk. Bemærk at F er stykkevis differentiabel (da både f og h er). Endvidere er

$$\lim_{x\to 0_-} F(x) = \lim_{x\to 0_-} (f(x)-f(0-)) = 0 ,$$

$$\lim_{x\to 0_+} F(x) = \lim_{x\to 0_+} (f(x)-f(0+)) = 0 ,$$

og da $F(0) = 0$ er F altså kontinuert i 0. Vi ved allerede, at Fourierrækken for h er konvergent i 0 med sum $\frac{f(0+)+f(0-)}{2}$ (eksemplet s. V.66). Hvis vi kan vise, at Fourierrækken for F er konvergent i 0 med sum 0, så følger det af Bemærkning s. V.68, at Fourierrækken for f er konvergent i 0 med sum $\frac{f(0+)+f(0-)}{2}$.

Vi definerer så en 2π-periodisk hjælpefunktion g ved at sætte

$$g(x) = \frac{F(x)}{e^{ix}-1} \quad , \quad x \neq 2p\pi \ , \quad p \in \mathbb{Z}$$

og bemærker at

$$\lim_{x\to 0_+} g(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{F(x)}{e^{ix}-1} = \lim_{x\to 0_+} \frac{F(x)}{x} \frac{x}{e^{ix}-1} = -i \lim_{x\to 0_+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} ,$$

og at tilsvarende

$$\lim_{x\to 0_-} g(x) = -i \lim_{x\to 0_-} \frac{F(x)-f(0)}{x-0} .$$

Heraf slutter vi, at da F er stykkevis differentiabel, er g stykkevis kontinuert. For Fourierkoefficienterne $c_n(g)$ og $c_n(F)$ kan vi umiddelbart udregne at

$$c_n(F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)(e^{ix}-1)e^{-inx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-i(n-1)x}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}dx$$

$$= c_{n-1}(g) - c_n(g) .$$

Altså er

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(F) = \sum_{k=-n}^{n} [c_{k-1}(g) - c_k(g)] = c_{-n-1}(g) - c_n(g) .$$

Men af Korollar 6.3 til Bessels ulighed følger så at

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F) = \lim_{n\to\infty} (c_{-n-1}(g)-c_n(g)) = 0 ,$$

hvilket var, hvad vi skulle bevise. $\square$

BEMÆRKNING. Man kan vise, at der findes kontinuerte funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med perioden 2π, hvis Fourierrække er divergent for visse x.

<u>Integration og differentiation af Fourierrækker</u>. Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være stykkevis kontinuert og have periode 2π. Hvis f har middel-

værdi 0, er Fourierkoefficienten $c_0 = 0$, d.v.s.

$$f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n e^{inx} .$$

En stamfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ er da kontinuert og stykkevis differentiabel, og da f har middelværdi 0 er F periodisk med periode 2π . Vi kan finde Fourierrækken for F ; lad $c_n(F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)e^{-inx}dx$, $(n \in \mathbb{Z})$. For $n \neq 0$ benyttes delvis integration på hvert af kontinuitetsintervallerne for f ; hvis $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ er diskontinuitetspunkterne for f i $[0,2\pi]$ og $x_0 = 0$, $x_k = 2\pi$ har vi

$$c_n(F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)e^{-inx}dx = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi}\int_{x_{j-1}}^{x_j} F(x)e^{-inx}dx$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\left(\left[\frac{1}{2\pi} F(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{x_{j-1}}^{x_j} - \frac{1}{2\pi}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{e^{-inx}}{in}\, dx = \frac{c_n}{in} .$$

Af Sætning 6.4 får vi da, at for alle $x \in \mathbb{R}$ er

$$F(x) = c_0(F) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{c_n}{in} e^{inx} ,$$

d.v.s. Fourierrækken for F fremkommer ved ledvis integration af Fourierrækken for f .

Vi har vist

<u>SÆTNING 6.5</u>. Hvis f er stykkevis kontinuert, periodisk med periode 2π og har middelværdi 0, og hvis Fourierrækken for f er givet ved

$$f \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n e^{inx} ,$$

så er enhver stamfunktion F til f periodisk og opfylder at

$$F(x) = C_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

(hvor C_0 er en konstant).

I lighed med definitionen af "stykkevis differentiabel" vil vi sige at en funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ er <u>stykkevis C^1</u>, hvis der findes en inddeling $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ af $[a,b]$ og k funktioner $f_j\colon [x_{j-1},x_j] \to \mathbb{C}$ som alle er C^1 og som stemmer overens med f på $]x_{j-1},x_j[$. Vi vil også sige at en funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$, hvor I er et vilkårligt interval i $\mathbb{R}$, er stykkevis C^1, hvis den er stykkevis C^1 på alle kompakte intervaller $[a,b] \subset I$.

Med denne sprogbrug kan vi omformulere ovenstående sætning til et udsagn om en funktion og dens afledede.

<u>KOROLLAR 6.6.</u> Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være periodisk med periode 2π, kontinuert og stykkevis C^1. Hvis f har Fourierkoefficienter c_n og f' har Fourierkoefficienter c_n' så gælder at

$$c_n' = inc_n \quad \text{for alle} \quad n \in \mathbb{Z},$$

altså Fourierrækken for f' fås ved ledvis differentiation af Fourierrækken for f.

<u>Uniform konvergens</u>. En tilstrækkelig betingelse for, at en trigonometrisk række $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ er <u>uniformt konvergent</u>, er ifølge majorantkriteriet, at rækken $|c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} (|c_n|+|c_{-n}|)$ er konvergent. Denne række skrives kort $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$, i overensstemmelse med skrivemåden $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ for den trigonometriske række.

Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en stykkevis differentiabel funktion med perioden 2π og Fourierrækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. Ifølge Sætning 6.4 er rækken punktvis konvergent, og sumfunktionen er den funktion, der fås ved normalisering af f. Da rækkens led er kontinuerte, ser vi derfor, at en nødvendig betingelse for, at Fourierrækken

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er uniformt konvergent, er, at den funktion, der fås ved normalisering af f, er kontinuert. Når f er kontinuert, vil konvergens af rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ ifølge ovenstående medføre, at Fourierrækken er uniformt konvergent med sumfunktionen f. Vi skal her give en tilstrækkelig betingelse for, at dette finder sted.

<u>SÆTNING 6.7</u>. Når $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er kontinuert og stykkevis C^1 og har perioden 2π, da er den tilhørende Fourierrække $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ uniformt konvergent med sumfunktionen f.

BEVIS. For en funktion af den angivne type har vi fra Bessels ulighed og fra Korollar 6.6, at der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\sum_{k=-n}^{n} |kc_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 \, dx \, .$$

Ved brug af den i II.2 viste Cauchy-Schwarz's ulighed

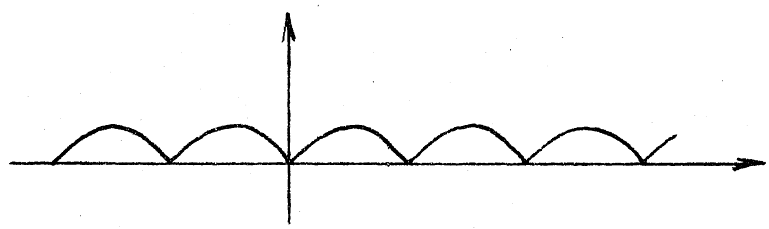
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

fås nu, at der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{n} |c_k| &= |c_0| + \sum_{k=-n}^{n}{}' \, k|c_k| \cdot \frac{1}{k} \\ &\leq |c_0| + \left(\sum_{k=-n}^{n}{}' \, k^2 |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=-n}^{n}{}' \, \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |c_0| + \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} , \end{aligned}$$

hvor mærke på summationstegnet angiver, at $k = 0$ skal overspringes. Altså er $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ konvergent. Vi har imidlertid ovenfor gjort rede for, at når f er kontinuert og stykkevis differentiabel, vil konvergens af rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ medføre, at Fourierrækken er uniformt konvergent med sumfunktionen f. $\square$

EKSEMPEL.



Funktionen $x \to |\sin x|$ er periodisk med periode 2π og endvidere kontinuert og stykkevis C^1. Dens Fourierrække konvergerer derfor uniformt mod $|\sin x|$:

$$|\sin x| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

hvor

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, e^{-inx} dx .$$

Da $e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx$ og da $|\sin x|$ er en lige funktion vil den ulige funktion $|\sin x| \sin nx$ ikke bidrage til integralet og vi får altså at

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\, dx .$$

(Der ligger iøvrigt et par almene fakta om Fourierkoefficienterne for en lige (hhv. ulige) funktion og lurer i baggrunden her. Prøv at overveje, hvad der må gælde.) For $\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\, dx$ får vi ved delvis integration at

$$\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\, dx = -\cos x \cos nx \Big|_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} \cos x \sin nx\, dx$$

$$= \cos n\pi + 1 - n\left[\sin x \sin nx \Big|_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} \sin x \cos nx\, dx\right]$$

$$= \cos n\pi + 1 + n^2 \int_0^{\pi} \sin x \cos nx\, dx ,$$

hvoraf

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & n \text{ ulige} \\ \dfrac{2}{-\pi(n^2-1)} \; , & n \text{ lige} \end{cases} .$$

Altså er $c_0 = \frac{2}{\pi}$ og for $n \neq 0$ gælder at $c_n = c_{-n}$ og derfor, med $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$,

$$c_{2k}e^{i2kx} + c_{-2k}e^{-i2kx} = 2c_{2k}\cos 2kx = -\frac{4}{\pi(4k^2-1)}\cos 2kx ,$$

så

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1} , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Sætter vi specielt $x = \frac{\pi}{2}$ får vi at $\cos 2kx = \cos k\pi = (-1)^k$, og derfor at

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1} = \frac{2}{\pi} - 1 = \frac{2-\pi}{\pi} ,$$

altså

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1} = \frac{2-\pi}{4} .$$

Denne række er alternerende. Vi kan derfor angive med hvilken nøjagtighed π kan beregnes ud fra afsnit af rækken. Gør det!

Mat 102, 1981/82 Øvelser V.1

V.1.1. Betragt følgen $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ af rækkeled for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$, hvis konvergensradius betegnes ρ.

1° Vis, at følgen er begrænset i hvert $z \in \mathbb{C}$ med $|z| < \rho$.

2° Vis, at følgen er ubegrænset i hvert $z \in \mathbb{C}$ med $|z| > \rho$.

3° Hvad kan man slutte, hvis følgen er begrænset i et punkt z?

4° Vis, at $\rho = |z|$, hvis følgen er begrænset i punktet z, og rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ er divergent i punktet.

V.1.2. Find konvergensradius for hver af potensrækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^{2n} .$$

V.1.3. For givne $a, b \in \mathbb{R}_+$ skal man finde konvergensradius for potensrækken

$$az - b^2 z^2 + \dots + a^{2n-1} z^{2n-1} - b^{2n} z^{2n} + \dots .$$

V.1.4. Vis, at potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konvergerer uniformt på konvergenscirklens afslutning.

V.1.5. Lad $f(z)$ være sumfunktion for en potensrække $\sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n$ med konvergensradius $\rho > 0$.

Gør rede for, at funktionen $f(z)/z^p$, som jo er defineret på den udprikkede cirkelskive $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \rho\}$, kan udvides til en kontinuert funktion på hele den åbne cirkelskive.

V.1.6. For hvilke $x \in \mathbb{R}$ er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$ konvergent, og hvad er summen?

V.1.7. 1° For hvilke $x \in \mathbb{R}$ er rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad \text{eller} \quad x + 2x^2 + \dots + nx^n + \dots$$

konvergent, og hvad er summen?

2° Samme spørgsmål for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} 2n\, x^{2n}$.

3° Samme spørgsmål for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{1+x}\right)^n$.

V.1.8. 1° For hvilke $x \in \mathbb{R}$ er rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n\,x^n \quad \text{eller} \quad 1\cdot 2\cdot x^2 + 2\cdot 3\cdot x^3 + \ldots + (n-1)n\,x^n + \ldots$$

konvergent, og hvad er summen ?

2° Samme spørgsmål for rækken $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

V.1.9. Vis, at sumfunktionen f for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med positivt konvergenstal er en lige funktion, dvs. opfylder betingelsen $f(-x) = f(x)$, hvis og kun hvis $a_n = 0$ for alle ulige n , og en ulige funktion, dvs. opfylder betingelsen $f(-x) = -f(x)$, hvis og kun hvis $a_n = 0$ for alle lige n .

V.1.10. Idet $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er en potensrække med reelle, ikke negative koefficienter og konvergenstal 1, skal man vise, at sumfunktionen f er voksende på intervallet $[0,1[$, og at følgende gælder:

1° Hvis $f(x)$ har en grænseværdi c for $x \to 1_-$, så er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent med sum c .

2° Hvis $f(x) \to \infty$ for $x \to 1_-$, så er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

V.2.1. Find stamfunktioner til $x \log x$, $\log x$, $(\log x)^2$, $\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ og $\dfrac{\log x}{x^2}$.

V.2.2. Find en potensrækkefremstilling af $(1+x)\log(1+x)$ for $x \in]-1,1[$, dels ved direkte udregning, dels ved først at finde en potensrækkefremstilling af den afledede funktion.

V.2.3. For hvilke $x \in \mathbb{R}$ er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(2x^2+x)^n}{n}$ konvergent, og hvad er summen ?

V.2.4. For hvilke $x \in \mathbb{R}$ er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^n$ konvergent, og hvad er summen ?

V.2.5. Find konvergenstallet og sumfunktionen i konvergensintervallet for hver af potensrækkerne

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)n} \quad \text{eller} \quad \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \dots,$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)(n-1)n} \quad \text{eller} \quad \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots,$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)n} \quad \text{eller} \quad \frac{x^3}{1\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^5}{3\cdot 5} + \dots .$$

V.2.6. Find konvergenstallet og sumfunktionen i konvergensintervallet for hver af potensrækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^{2n} .$$

V.2.7. Bevis, at rækken

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \dots$$

er konvergent med summen $\frac{1}{2}\log 2$.

V.2.8. 1° Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, der tilfredsstiller funktionalligningen

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

for alle $a,b \in \mathbb{R}$. Vis da, at der findes et $k \in \mathbb{R}$, således at

$$f(x) = kx, \quad x \in \mathbb{R} .$$

Vink. Sæt $k = f(1)$. Vis så, at $f\left(\frac{1}{n}\right) = k\cdot\frac{1}{n}$ for $n \in \mathbb{N}$, og at $f\left(\frac{m}{n}\right) = k\cdot\frac{m}{n}$ for $m,n \in \mathbb{N}$. Vis også, at $f(0) = 0$ og $f(-x) = -f(x)$.

2° Vis, at logaritmefunktionerne $\log_c$ er de eneste kontinuerte funktioner $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ud over nulfunktionen, der tilfredsstiller funktionalligningen

$$g(ab) = g(a) + g(b), \quad a,b \in \mathbb{R}_+ .$$

Vink. Lad $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, der tilfredsstiller ligningen, og betragt $g \circ \exp$.

V.2.9. 1° Vis, at funktionalligningen

$$f(2x) = 2\,f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

har andre kontinuerte løsninger $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ end funktionerne $f(x) = kx$. Kan en sådan løsning være differentiabel ?

2° Find alle differentiable funktioner $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, der tilfredsstiller funktionalligningen

$$g(x^2) = 2\,g(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}_+ \,.$$

V.2.10. Find stamfunktioner til

$$x\,e^x\,, \qquad x^2\,e^{-x}\,, \qquad x\,e^{x^2}\,, \qquad x^3\,e^{-x^2}\,.$$

V.2.11. Bevis, at tallet e er irrationalt.

Vink. Antag, at e er rationalt, $e = p/q$ med $p,q \in \mathbb{N}$, og benyt, at

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,.$$

Multiplicer med $q!$ og vis, at sidste led dels må være et helt tal, dels falder i $]0,1[$.

Resultatet blev først vist af J.H. Lambert (1761). Beviset ovenfor tilskrives J.-J. Fourier.

V.2.12. 1° Angiv $\lim x^y$ for $x \to 0_+$ for hvert fast $y \in \mathbb{R}$.

2° Kan funktionen $(x,y) \to x^y$, $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, udvides til en kontinuert funktion med definitionsmængde

(i) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \cup \{(0,0)\}$? (ii) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \cup \{0\} \times \mathbb{R}_+$?

V.2.13. Vis, at eksponentialfunktionerne $x \to a^x$ med $a \in \mathbb{R}_+$ er de eneste kontinuerte funktioner $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, der tilfredsstiller funktionalligningen

$$g(x_1 + x_2) = g(x_1)\,g(x_2)\,, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Vink. Betragt $\log \circ g$ og se opgave V.2.8.1°.

V.2.14. Find samtlige kontinuerte løsninger $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ til funktionalligningen

$$h(x_1 x_2) = h(x_1)\,h(x_2)\,, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+\,.$$

V.2.15. Vis for hvert $x \in \mathbb{R}_+$, at

$$n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) \to \log x \quad \text{for } n \to \infty\,.$$

Vink. Vis og benyt for $x \neq 1$, at

$$\frac{\exp\left(\frac{1}{n}\log x\right) - 1}{\frac{1}{n}\log x} \to 1 \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

V.2.16. Med $0^a = 0$ for $a \in \mathbb{R}_+$ skal man vise, at funktionen

$$x \to x^a , \quad x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} ,$$

er differentiabel i 0 med den afledede 0, hvis $a > 1$, og at grafen har lodret tangent i $(0,0)$, hvis $0 < a < 1$.

V.2.17. 1° Gør rede for, at definitionen af potensen $x^{p/q}$,

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$$

for vilkårlige $x \in \mathbb{R}$ og $p,q \in \mathbb{N}$ med q ulige er tilladelig.

2° Vis, at funktionen $x \to x^a$, hvor a kan skrives $a = p/q$ med $p,q \in \mathbb{N}$, q ulige, er differentiabel på $\mathbb{R}$, hvis $a > 1$, og på $]-\infty,0[$ og $]0,\infty[$, hvis $0 < a < 1$, med den afledede ax^{a-1}.

Vis også, at grafen har lodret tangent i $(0,0)$, hvis $0 < a < 1$.

3° Hvad sker, når $p \in \mathbb{N}_-$ i stedet for $p \in \mathbb{N}$?

V.2.18. Vis for hvert $a \in \mathbb{R}$, at

$$(x+a)^{1/3} - x^{1/3} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to \infty .$$

V.2.19. Vis for vilkårlige $a,b \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}_0$, at

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{a}{j}\binom{b}{n-j} .$$

Vink. Indfør potensrækkerne for de tre funktioner, der indgår i formlen

$$(1+x)^{a+b} = (1+x)^a(1+x)^b .$$

V.2.20. Undersøg $x^{1003}(e^{-6x} - 1003\, e^{-x^2})$ for $x \to \infty$.

V.2.21. 1° Lad f og g være reelle funktioner defineret på en halvlinie $]a,\infty[$ og antag, at $f(x)$ og $g(x)$ begge går mod $+\infty$ for $x \to \infty$. Betragt udsagnene

(a) $g(x)$ går hurtigere mod ∞ end $f(x)$ for $x \to \infty$.

(b) $g(x) - f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$.

Vis, at (a) $\Rightarrow$ (b) , men at den modsatte implikation ikke gælder i almindelighed.

2^o Vis, at e^{x^2} går hurtigere mod ∞ end x^x for $x \to \infty$.

V.2.22. 1^o Vis, at b^x er af lavere størrelsesorden end a^x for $x \to -\infty$, når $0 < a < b$.

2^o Vis, at $x^n b^x \to 0$ for $x \to -\infty$, når $n \in \mathbb{N}$ og $b > 0$.

V.2.23. 1^o Vis, at x^b er af lavere størrelsesorden end x^a for $x \to 0_+$, når $a < b$.

2^o Vis, at $x^a \log x \to 0$ for $x \to 0_+$, når $a > 0$.

V.2.24. Vis, at $x^x - 1$ er af samme størrelsesorden som $x \log x$ for $x \to 0_+$.

V.2.25. Skitser grafen for funktionen

$$x \to x e^x , \quad x \in \mathbb{R} .$$

(Undersøg funktionen for $x \to \infty$ og for $x \to -\infty$, undersøg monotoniforhold og find ekstrema. Find konvekspunkter, vendepunkter og vendetangenter for grafen.)

V.2.26. Skitser graferne for funktionerne

$$x \to x \log x , \quad x \in \mathbb{R}_+ , \qquad \text{og} \qquad x \to x^x , \quad x \in \mathbb{R}_+ .$$

Vis specielt, at hver af funktionerne kan udvides til en kontinuert funktion på $[0,\infty[$, og undersøg, om graferne har halvtangent i endepunktet.

V.2.27. 1^o Vis for hvert $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, at funktionen $(x,y) \to x^y$ er konstant på grafen for $y = 1/\log_a x$, $x \in]0,1[$.

2^o Vis for hvert $a \in \mathbb{R}_+$, at der findes en kontinuert kurve fra $(0,0)$ ud i $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, således at $x^y \to a$ for $(x,y) \to (0,0)$ langs kurven.

3^o Vis, at funktionen $(x,y) \to x^y$ betragtet i et vilkårligt vinkelrum $\{(x,y) \mid x > 0 \wedge bx \leq y \leq cx\}$ med $b,c \in \mathbb{R}$, $b < c$, har grænseværdien 1 for $(x,y) \to (0,0)$.

4° Vis, at $x^y \to 1$ for $(x,y) \to (0,0)$ langs enhver kontinuert kurve fra $(0,0)$ ud i $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, som har en ikke lodret halvtangent i $(0,0)$. Jf. opgave V.2.12.

V.3.1. 1° Vis, at $\frac{\sin t}{t} \to 1$ for $t \to 0$.

2° Undersøg $\sqrt{t}\,\log \sin t$ for $t \to 0_+$.

V.3.2. Betragt afbildningen $z = x+iy \to w = e^z = \exp z$ af $\mathbb{C}$ ind i sig selv. Benyt til illustration to skitser af $\mathbb{C}$, en "z-plan" og en "w-plan".

1° Bestem for givet $y_0 \in \mathbb{R}$ billedet af linien $\{x+iy_0 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Tegn linien i z-planen og billedet i w-planen, begge med rødt. Hvad sker med billedet, når y_0 gennemløber $\mathbb{R}$?

2° Bestem for givet $x_0 \in \mathbb{R}$ billedet af linien $\{x_0 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$. Tegn med blåt. Hvad sker med billedet, når x_0 gennemløber $\mathbb{R}$?

3° Vis, at $e^z \neq 0$ for alle $z \in \mathbb{C}$, og find for givet $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, samtlige løsninger $z = x+iy$ til ligningen $e^z = w$. (De betegnes alle $\log z$.)

4° Vis, at $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ har periode $2\pi i$, dvs. at

$$\exp(z+2\pi i) = \exp z \quad \text{for alle } z \in \mathbb{C} ,$$

og gør rede for, at restriktionen til strimlen $\{z = x+iy \mid -\pi < y \leq \pi\}$ er en bijektion på $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Giv et explicit udtryk for den omvendte funktion $z = \operatorname{Log} w$, $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Er den kontinuert ?

V.3.3. Vis, at afbildningen $z \to w = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, fører enhver ret linie gennem 0 bortset fra den reelle og den imaginære akse over i en logaritmisk spiral. (Se s.III.74.)

Vink. Skriv linien $\{z = (a+ib)t \mid t \in \mathbb{R}\}$ og brug polære koordinater i w-planen.

V.3.4. Find $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5t \sin^4 t \, dt$,

V.3.5. Find $\int_0^{\pi} \cos^6 t \, dt$.

V.3.6. Find $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \sin^3 t \, dt$.

V.3.7. 1° Vis grundformlen $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ samt additionsformlerne for cosinus og sinus i det komplekse.

2° Vis for $z \in \mathbb{C}$ formlerne

$$\begin{array}{llllll} \cos(z+2\pi) = & \cos z, & \cos(z+\pi) = & -\cos z, & \cos(z+\frac{\pi}{2}) = & -\sin z, \\ \sin(z+2\pi) = & \sin z, & \sin(z+\pi) = & -\sin z, & \sin(z+\frac{\pi}{2}) = & \cos z, \\ \cos(-z) = & \cos z, & \cos(\pi - z) = & -\cos z, & \cos(\frac{\pi}{2} - z) = & \sin z, \\ \sin(-z) = & -\sin z, & \sin(\pi - z) = & \sin z, & \sin(\frac{\pi}{2} - z) = & \cos z. \end{array}$$

V.3.8. Find samtlige løsninger $z \in \mathbb{C}$ til hver af ligningerne

1° $\sin z = 0$, $\sin z = \frac{1}{2}$, $\sin z = 1$.

2° $\sin z = a$ for givet $a \in]1,\infty[$.

V.3.9. Vis, at $\frac{\sin z}{z} \to 1$ for z gående mod 0 i $\mathbb{C}$.

V.4.1. Vis, at $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arg}(x + i\sqrt{1-x^2})$, $x \in [-1,1]$, og find tilsvarende udtryk for $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arctan} x$ og $\operatorname{Arccot} x$.

V.4.2. Vis, at $\operatorname{Arg}(x+iy) = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}$, når $x > 0$. Find også udtryk for $\operatorname{Arg}(x+iy)$, når $y > 0$, henh. $y < 0$. Hvad med tilfældet $x < 0$?

V.4.3. Find $\operatorname{Arcsin}(\cos x)$ for hvert $x \in \mathbb{R}$.

V.4.4. 1° Vis, at $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$.

2° Find også simple udtryk for $\tan(2 \operatorname{Arctan} x)$ og $\sin(2 \operatorname{Arctan} x)$.

V.4.5. 1° Vis, at $\operatorname{Arccos} \sqrt{1-x^2} = |\operatorname{Arcsin} x|$, $x \in [-1,1]$.

2° Prøv at finde en tilsvarende formel for $\operatorname{Arcsin} \sqrt{1-x^2}$.

V.4.6. Vis, at forholdet mellem $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$ og $\frac{1}{x}$ går mod 1 for $x \to \infty$.

Vink. Sæt $t = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$ og udtryk forholdet ved t .

V.4.7. Vis, at $f = \mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opfylder funktionalligningen

$$f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}\right) \quad \text{for} \quad x_1 x_2 < 1 .$$

V.4.8. Vis, at der for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ gælder

$$\mathrm{Arctan}(x_1 + x_2) < \mathrm{Arctan}\, x_1 + \mathrm{Arctan}\, x_2 .$$

V.4.9. Vis, at $2\,\mathrm{Arctan}\, x = \mathrm{Arccos}\, \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ for $x \geqq 0$.

V.4.10. 1° Find $\int_0^1 \mathrm{Arcsin}\, x\, dx$ ved en arealbetragtning.

2° Find $\int_0^1 \mathrm{Arctan}\, x\, dx$.

V.4.11. Find stamfunktioner til Arcsin og Arctan.

V.4.12. Udled formlen

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + n^2} = \frac{\pi}{4}$$

ved at fortolke summen som middelsum for en funktion på intervallet $[0,1]$.

V.4.13. 1° Kritiser følgende: Rækken

$$1 - 2 + 3 - \ldots + (-1)^{n+1} n + \ldots$$

er konvergent med sum $\frac{1}{4}$, thi for $x \in\,]-1,1[$ er

$$\frac{x}{(1+x)^2} = x - 2x^2 + 3x^3 - \ldots + (-1)^{n+1} n x^n + \ldots ,$$

og påstanden fremgår så ved grænseovergangen $x \to 1_-$.

2° Bevis med udgangspunkt i potensrækken for $\mathrm{Arctan}\, x$, at

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots .$$

Vink. Se Eksempel s.V.13-14 om en rækkefremstilling af $\log 2$.

V.4.14. Anvend opgave V.1.10 på potensrækken for $\mathrm{Arcsin}\, x$.

V.4.15. Vis, at $1 - \tanh x$ er af samme størrelsesorden som e^{-2x} ved grænseovergangen $x \to \infty$.

V.4.16. Eftervis additionsformlerne for cosh og sinh.

V.4.17. 1° Vis for $x, y \in \mathbb{R}$, at

$$|\sinh y| \leqq |\cos(x+iy)| \leqq \cosh y .$$

2° Vis, at samme vurdering gælder for $\cos(x-iy)$ og $\sin(x \pm iy)$.

V.4.18. 1° Vis for $x, y \in \mathbb{R}$, at

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y .$$

2° Betragt afbildningen $z = x+iy \to w = \cos z$ af $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$. Bestem for givet $y_0 \in \mathbb{R}$ billedet af linien $\{x+iy_0 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Tegn. Hvad sker, når y_0 gennemløber $\mathbb{R}$? (Læg mærke til tilfældet $y_0 = 0$.) Bestem ligeledes billeder af linier $\{x_0 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$.

V.4.19. De hyperbolske funktioners omvendte: Areafunktionerne.

1° Find for givet $x \in [1,\infty[$ et explicit udtryk for løsningen $y = \operatorname{Arcosh} x \in [0,\infty[$ til ligningen $\cosh y = x$. Vis, at Arcosh er differentiabel i $]1,\infty[$ med den afledede

$$1 \Big/ \sqrt{x^2-1} .$$

2° Bestem ligeledes

$$y = \operatorname{Arsinh} x , \quad y = \operatorname{Artanh} x , \quad y = \operatorname{Arcoth} x$$

ved løsning af henholdsvis

$$\sinh y = x , \quad \tanh y = x , \quad \coth y = x$$

for givet x . Vis, at Arsinh, Artanh og Arcoth er differentiable i deres respektive defintionsmængder med de afledede

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} , \quad \frac{1}{1-x^2} , \quad \frac{1}{1-x^2} .$$

V.4.20. Find stamfunktioner til Artanh og Arsinh .

V.4.21. Find potensrækkefremstillinger af Artanh og Arsinh .

V.4.22. Find den naturlige parameterfremstilling for grafen for $y = \cosh x$ ("kædelinien"), med $(0,1)$ som udgangspunkt.

V.5.1. Find en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, således at

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{for } x \in]-1,1[\; .$$

V.5.2. Find en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, således at

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{for } x \in \mathbb{R} \, .$$

V.5.3. Find potensrækkeudviklingen for $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved differentialligningsmetoden, idet exp karakteriseres som løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

med bibetingelse $y(0) = 1$.

V.5.4. Find potensrækkeudviklingen for $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved differentialligningsmetoden, idet cos karakteriseres som løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

med bibetingelse $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

V.5.5. Søg en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, som i et interval $]-\alpha,\alpha[$ fremstiller funktionen

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} \; .$$

Hvor stort kan α vælges ?

V.5.6. Vis, at sumfunktionen $f:]-\rho,\rho[\to \mathbb{C}$ for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergenstal $\rho > 0$ kan fremstilles

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p (x - x_0)^p$$

i intervallet $]x_0 - (\rho - |x_0|), x_0 + (\rho - |x_0|)$ omkring et vilkårligt $x_0 \in]-\rho,\rho[$.

Vink. Sæt $t = x - x_0$ og omregn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 + t)^n$ til

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left(t^p \sum_{n=p}^{\infty} a_n \binom{n}{p} x_0^{n-p} \right) .$$

V.5.7. Bestem konvergenstallet ρ for potensrækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n-1)(n+2)} x^{n+2}$$

og find rækkens sum i konvergensintervallet $]-\rho,\rho[$.

V.5.8. Bestem konvergenstallet ρ for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n(2n+1)} x^{2n}$$

og find rækkens sum i konvergensintervallet $]-\rho,\rho[$.

V.5.9. Bestem konvergenstallet ρ for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n}$$

og find rækkens sum i konvergensintervallet $]-\rho,\rho[$.

V.5.10. Bestem konvergenstallet ρ for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n$$

og find rækkens sum i konvergensintervallet $]-\rho,\rho[$.

V.5.11. Idet $a_1 < b_1 < c_1 < d_1$ og $a_2 < b_2 < c_2 < d_2$, skal man gøre rede for, at der findes en funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ af klasse C^∞, således at

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 \quad \text{for } (x,y) \in [b_1,c_1] \times [b_2,c_2] \\ 0 < f(x,y) &< 1 \quad \text{for } (x,y) \in (]a_1,d_1[\times]a_2,d_2[) \setminus ([b_1,c_1] \times [b_2,d_2]) \\ f(x,y) &= 1 \quad \text{for } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (]a_1,d_1[\times]a_2,d_2[) . \end{aligned}$$

V.5.12. Gør rede for, at funktionerne

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

er af klasse C^∞, og bestem $f^{(n)}(0)$ og $g^{(n)}(0)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

V.5.13. For et vilkårligt $a \in \mathbb{R}_+$ skal man vise, at

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2} - a}{1-\cos x}$$

har en grænseværdi for $x \to 0$, og finde denne.

V.5.14. Vis, at

$$\frac{(2-2\cos x)\operatorname{Arctan} x}{x^5} - \frac{\sinh x^2}{x^4}$$

har en grænseværdi for $x \to 0$, og find denne.

V.5.15. Vis, at

$$\frac{\sqrt[3]{5+x^5} - \sqrt[3]{5}}{x^5(e^x-1)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

kan skrives på formen $\frac{a}{x} + g(x)$, hvor g er en kontinuert funktion på $\mathbb{R}$. Find a og $g(0)$.

V.5.16. Bevis formlen $\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}$.

V.5.17. Bevis formlen $\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7}$.

V.5.18. Beregn $\log 2$ med tre (eller flere) decimaler ved brug af potensrækken for $\log\frac{1+x}{1-x}$.

V.6.1. a) Vis at hvis $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er en lige stykkevis kontinuert funktion med periode 2π så gælder

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = 0$$

for alle Fourierkoefficienterne a_n, b_n.

b) Vis at $a_n = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, hvis f er en ulige, stykkevis kontinuert funktion med periode 2π. Find en formel for b_n.

V.6.2. Lad $f: [0,\pi] \to \mathbb{C}$ være stykkevis kontinuert. Vis at f kan udvides til en ulige funktion med periode 2π hvis og kun hvis $f(0) = f(\pi) = 0$. Vis også at i så fald er udvidelsen entydig. Benyt dette til at vise at enhver normaliseret stykkevis differentiabel funktion $f: [0,\pi] \to \mathbb{C}$, for hvilken $f(0) = f(\pi) = 0$, kan fremstilles ved en sinusrække:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \text{hvor} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx .$$

V.6.3. Idet $r \in]-1,1[$, skal man vise, at den trigonometriske række

$$1 + 2r\cos\theta + 2r^2\cos 2\theta + \ldots + 2r^n \cos n\theta + \ldots$$

er uniformt konvergent, og at dens sumfunktion er

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} .$$

Vis herved, at

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2r\cos\theta + r^2} \, d\theta = \frac{\pi r^n}{1-r^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

Vink. Benyt Eulers formler.

V.6.4. Idet $r \in]-1,1[$, skal man vise, at den trigonometriske række

$$\sin\theta + r\sin 2\theta + r^2 \sin 3\theta + \ldots + r^{n-1}\sin n\theta + \ldots$$

er uniformt konvergent, og at dens sumfunktion er

$$\frac{\sin\theta}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

Vis herved, at

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta \sin\theta}{1-2r\cos\theta + r^2}\, d\theta = \frac{\pi r^{n-1}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vink. Benyt Eulers formler.

V.6.5. Find Fourierrækken for den ved

$$f(x) = |x| \quad \text{for} \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

bestemte funktion med perioden 2π .

V.6.6. Find Fourierrækken for den ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi & \text{for} \quad 0 < x < \pi \\ -\frac{1}{4}\pi & \text{for} \quad \pi < x < 2\pi \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \quad \text{og} \quad x = \pi \end{cases}$$

bestemte funktion med perioden 2π . Udled herved formlen $\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$.

V.6.7. Fremstil $\cos x$ i intervallet $]0,\pi[$ ved en rækkeudvikling af formen

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx .$$

(Benyt Opgave V.6.2.)

V.6.8. Find Fourierrækken for den ved

$$f(x) = \begin{cases} \pi \sin \alpha x & \text{for} \quad 0 < x < 2\pi \\ \frac{1}{2}\pi \sin 2\alpha\pi & \text{for} \quad x = 0 \end{cases}$$

bestemte funktion med perioden 2π , hvor $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

V.6.9. Vis, at der for $x \in [0,\pi]$ gælder

$$\frac{\sin x}{3} - \frac{\sin 3x}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{\sin 5x}{3\cdot 5\cdot 7} - \frac{\sin 7x}{5\cdot 7\cdot 9} - \dots = \frac{\pi}{8}\sin^2 x ,$$

og at der for $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ gælder

$$\frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 3x}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{\cos 7x}{5\cdot 7\cdot 9} - \dots = \frac{\pi}{8}\cos^2 x .$$

V.6.10. Lad p være et positivt helt tal, og lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en C^p-funktion med perioden 2π , som er stykkevis C^{p+1}. Idet

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ betegner Fourierrækken for f, skal man for hvert $j \in \{1,\ldots,p\}$ vise, at den ved j gange ledvis differentiation dannede række $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^j c_n e^{inx}$ er uniformt konvergent med sumfunktionen $f^{(j)}$.

V.6.11. Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en stykkevis differentiabel, normaliseret funktion med perioden 2π og Fourierrækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. Vis, at hvis rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{3/2} |c_n|^2$ er konvergent, da er f kontinuert.

Mat 102, 1981/82

KAPITEL VI

STAMFUNKTIONSBESTEMMELSER

Indhold:

§1. Polynomier.

Polynomier over $\mathbb{C}$. Mængden af polynomier med komplekse koefficienter, altså mængden af funktioner $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ af formen

$$x \to p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n ,$$

hvor $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, betegnes med $\mathbb{C}[x]$.

Med den sædvanlige metrik på $\mathbb{C}$ er $\mathbb{C}[x]$ åbenbart en mængde af kontinuerte funktioner.

Vi har en identitetssætning for polynomier i analogi med situationen for potensrækker: Det eneste polynomium der fremstiller nulfunktionen er nulpolynomiet (alle koefficienter er nul). (Dette følger direkte af identitetssætningen for potensrækker, idet jo ethvert polynomium er en potensrække; beviset kan også føres direkte. Prøv!)

Betragt for givet helt tal $n \geq 0$ mængden af polynomier af grad $\leq n$. Hertil medregnes nulpolynomiet (som strengt taget ikke tillægges nogen grad). Denne mængde er et vektorrum over $\mathbb{C}$ (hvordan indses det?).

For at finde dette rums dimension betragter vi k polynomier $p_1, \ldots, p_k$ af indbyrdes forskellig grad (k er altså $\leq n+1$) . Disse k polynomier er lineært uafhængige, thi $p = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j p_j$ er identisk nul hvis og kun hvis alle koefficienter i p er nul. Ved at betragte først det polynomium p_j blandt $p_1, \ldots, p_k$, der har højst grad, slutter vi at $\alpha_j = 0$. Ved gentagelse af dette argument fås at $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Vi slutter heraf at rummet af polynomier af grad $\leq n$ har dimension $n+1$ og at ethvert sæt af $n+1$ polynomier indeholdende et polynomium af hver af graderne $0, 1, \ldots, n$ er en basis for dette rum.

Ved hjælp af disse bemærkninger kan vi vise

SÆTNING 1.1. (Interpolationssætningen.) Lad $n \geq 1$. For givne parvis forskellige tal $x_0,\ldots,x_n \in \mathbb{C}$ og givne tal $y_0,y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{C}$ findes præcis et polynomium F af grad $\leq n$ for hvilket

$$F(x_0) = y_0 \;,\quad F(x_1) = y_1,\ldots \;,\quad F(x_n) = y_n \;.$$

BEVIS. Som basis for vektorrummet af polynomier af grad $\leq n$ kan vi benytte

$$1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \ldots, (x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) \;.$$

Hvis F er et givet polynomium, grad $F \leq n$, så findes netop et sæt $(c_0,\ldots,c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ således at

$$F(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \ldots + c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

for alle $x \in \mathbb{C}$. Indsæt $x = x_0$. Så fås at hvis $F(x_0) = y_0$, må gælde $y_0 = c_0$. Indsæt dernæst $x = x_1$; vi får

$$F(x_1) = y_1 = y_0 + c_1(x_1-x_0) \;,$$

og derfor

$$c_1 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \;.$$

Således fortsættes: ved successiv indsættelse af $x_2,\ldots,x_n$ ser vi at betingelserne $F(x_0) = y_0,\ldots,F(x_n) = y_n$ opfyldes af præcis et sæt $(c_0,\ldots,c_n)$. $\square$

BEMÆRKNING. En anden version af samme resultat kan ofte give mere bekvemme regninger. Lad $x_0,\ldots,x_n$, $y_0,\ldots,y_n$ være givet som ovenfor. Betragt polynomierne

$$F_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}$$

$$F_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$F_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} .$$

Disse $n+1$ polynomier må være lineært uafhængige, fordi $F_j(x_j) = 1$ og $F_k(x_j) = 0$ for $j,k = 0,\dots,n$ og $j \neq k$. (Giv argument herfor!) Altså er $\{F_0,\dots,F_n\}$ en basis for rummet af polynomier af grad $\leq n$ og polynomiet

$$F = y_0F_0 + y_1F_1 + \dots + y_nF_n$$

er netop lig y_j i punktet x_j $(j = 0,\dots,n)$. Denne formel kaldes <u>Lagranges interpolationsformel</u>. Den i beviset for Sætning 1.1 kaldes <u>Newtons interpolationsformel</u>.

<u>KOROLLAR 1.2</u>. Hvis to polynomier af grad $\leq n$ stemmer overens i værdi for $n+1$ værdier af x er de identiske. Specielt gælder at hvis to polynomier stemmer overens for uendelig mange værdier af x er de identiske.

BEVIS. Skriv selv beviset her: ______________________________

____

____ . □

<u>KOROLLAR 1.3</u>. Et polynomium af grad $n \geq 1$ har højst n rødder.

BEVIS. Antag at p er af grad $n \geq 1$ og har $n+1$ rødder. Så stemmer p overens med nulpolynomiet i $n+1$ forskellige punkter og må derfor være nulpolynomiet. Denne modstrid beviser korollaret. □

Faktisk gælder en meget bedre sætning for komplekse polynomier, nemlig

<u>SÆTNING 1.4</u>. (Algebraens fundamentalsætning.) Ethvert polynomium $F(x)$ i $\mathbb{C}[x]$ af grad ≥ 1 har en rod, d.v.s. der findes et $x_0 \in \mathbb{C}$, så at $F(x_0) = 0$.

Det første bevisforsøg skyldes Jean le Rond d'Alembert (1746), og sætningen kaldes også d'Alemberts sætning. De første egentlige beviser skyldes C. F. Gauss (1799) og R. Argand (1815). De er dog ikke fuldstændige, idet de bygger på sætninger om kontinuerte funktioner, som man den gang tog for indlysende. Vi gengiver her Argands bevis (i fuldstændiggjort form).

BEVIS. Lad

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \ , \quad n \geq 1 \ , \quad a_n \neq 0 \ .$$

Da er $F(0) = a_0$. For $|x| = R > 0$ gælder

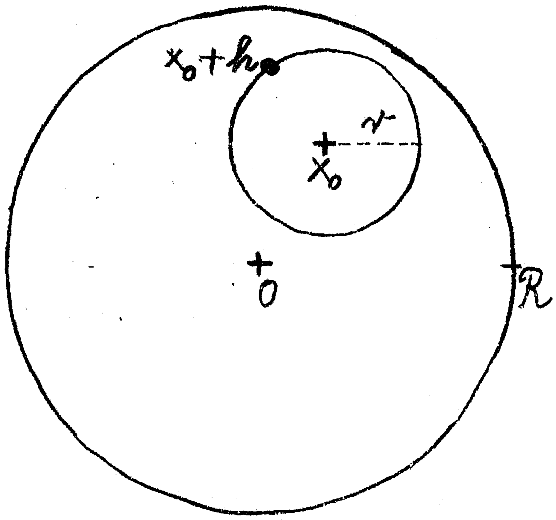
$$\begin{aligned} |F(x)| &\geq |a_n x^n| - |a_0| - |a_1 x| - \ldots - |a_{n-1} x^{n-1}| \\ &= |a_n| R^n - |a_0| - |a_1| R - \ldots - |a_{n-1}| R^{n-1} \\ &= R^n \left(|a_n| - \frac{|a_0|}{R^n} - \frac{|a_1|}{R^{n-1}} - \ldots - \frac{|a_{n-1}|}{R} \right) \ . \end{aligned}$$

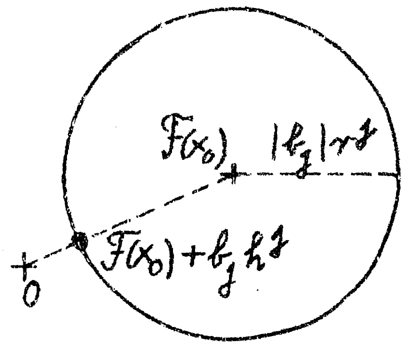
For $R \to +\infty$ konvergerer størrelsen i parentesen mod $|a_n| > 0$ og højre side altså mod $+\infty$. Vi vælger R , så at højre side er $> |a_0|$. Restriktionen af $|F(x)|$ til den afsluttede cirkelskive $\{x \mid |x| \leq R\}$ er en kontinuert reel funktion på en kompakt delmængde af $\mathbb{C}$. Den har altså en mindste værdi, d.v.s. der findes et punkt x_0 i skiven, så at $|F(x_0)| \leq |F(x)|$ for ethvert punkt x i skiven. Specielt gælder $|F(x_0)| \leq |F(0)| = |a_0|$, hvoraf følger, da $|F(x)| > |a_0|$ for $|x| = R$, at $|x_0| < R$. Vi vil vise, at $F(x_0) = 0$. Beviset føres indirekte. Vi antager altså, at $F(x_0) \neq 0$.

Vi sætter $x = x_0 + h$ og finder $F(x_0 + h) = b_0 + b_1 h + \ldots + b_n h^n$, $b_0 = F(x_0) \neq 0$, $b_n = a_n \neq 0$. Lad b_j være det første af tallene $b_1, \ldots, b_n$, der er $\neq 0$. Da er

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + b_j h^j + b_{j+1} h^{j+1} + \ldots + b_n h^n \ , \quad b_j \neq 0 \ .$$

Vi betragter nu et tal $r \in \mathbb{R}_+$, om hvilket vi foreløbig blot for-





udsætter, at $r \leq R - |x_0|$ og $|b_j|r^j \leq |F(x_0)|$, og vi lader h gennemløbe cirklen $\{h \mid |h| = r\}$. Herved gennemløber $x = x_0 + h$ cirklen $\{x \mid |x-x_0| = r\}$, som tilhører skiven $\{x \mid |x| \leq R\}$. Endvidere gennemløber h^j cirklen $\{y \mid |y| = r^j\}$, og $F(x_0) + b_jh^j$ gennemløber derfor cirklen $\{y \mid |y-F(x_0)| = |b_j|r^j\}$. Det er derfor muligt at vælge et h med $|h| = r$, således at $|F(x_0) + b_jh^j| = |F(x_0)| - |b_j|r^j$. [Der findes iøvrigt j sådanne værdier af h, thi når h gennemløber cirklen $\{h \mid |h| = r\}$ een gang, vil h^j gennemløbe cirklen $\{y \mid |y| = r^j\}$ ikke een, men j gange.] Da fås

$$
\begin{aligned}
|F(x_0+h)| &\leq |F(x_0) + b_jh^j| + |b_{j+1}h^{j+1}| + \ldots + |b_nh^n| \\
&= |F(x_0)| - |b_j|r^j + |b_{j+1}|r^{j+1} + \ldots + |b_n|r^n \\
&= |F(x_0)| - r^j(|b_j| - |b_{j+1}|r - \ldots - |b_n|r^{n-j}) .
\end{aligned}
$$

Størrelsen i parentesen konvergerer mod $|b_j| > 0$ for $r \to 0$. Vi kan derfor vælge r i overensstemmelse med de betingelser, der foran er pålagt r, således at størrelsen i parentesen er > 0. Da fås $|F(x_0+h)| < |F(x_0)|$, og da $|x_0+h| \leq R$ er vi nået til en modstrid. $\square$

Vi minder om polynomiers division: Hvis $F, G \in \mathbb{C}[x]$ og G ikke er nulpolynomiet (man siger også at G er et <u>egentligt</u> polynomium) så findes polynomier Q og R, hvor graden af R er mindre end graden af G, således at

$$F = QG + R .$$

Heraf følger bl.a. at et tal $x_0 \in \mathbb{C}$ er rod i et egentligt polynomium p hvis og kun hvis $p(x) = (x-x_0)q(x)$, hvor q er et polynomium. Thi for ethvert $x_0 \in \mathbb{C}$ gælder at $p(x) = (x-x_0)q(x) + r(x)$, hvor $\text{grad}(r) < 1$, d.v.s. r er en konstant. Altså er $p(x_0) = 0$ hvis og kun hvis $r = 0$, altså hvis og kun hvis polynomiet $x - x_0$ er en divisor i polynomiet p.

Vi kan så give en ækvivalent formulering af algebraens fundamentalsætning.

<u>SÆTNING 1.5</u>. (Faktorisering af polynomier over $\mathbb{C}$.) Ethvert polynomium $F(x)$ i $\mathbb{C}[x]$ af grad ≥ 1 kan på en og, bortset fra førstegradsfaktorernes rækkefølge, kun på een måde skrives på formen

$$F(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) , \quad a \neq 0 . \tag{1}$$

Denne sætning indeholder naturligvis algebraens fundamentalsætning. På den anden side følger den, som vi skal se, meget let af den.

BEVIS. (1) Fremstillingens eksistens. Lad $F(x)$ have graden n, og lad α_1 være en rod i $F(x)$. Da er $x-\alpha_1$ divisor i $F(x)$, altså $F(x) = (x-\alpha_1)F_1(x)$, hvor $F_1(x)$ har graden $n-1$. Nu fortsættes med $F_1(x)$, og i n skridt er vi færdige.

(2) Fremstillingens entydighed. Lad

$$a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) = b(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_m) , \quad a \neq 0, b \neq 0 .$$

Da de to polynomier har henh. ax^n og bx^m som højeste grads led er $n = m$ og $a = b$. Da α_1 er rod på venstre side, og altså også på højre side, er α_1 et af tallene β_j, f.eks. β_1. Ellers ændres rækkefølgen af tallene β_j. Ved division med $x-\alpha_1$ fås $a(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) = b(x-\beta_2)\dots(x-\beta_m)$. Efter n skridt er vi færdige. □

De n ikke nødvendigvis parvis forskellige tal $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ er åbenbart samtlige rødder i $F(x)$. Idet en rod regnes med <u>multiplicitet</u> bestemt ved antallet af gange, den forekommer i udtrykket (1), kan vi sige, at et polynomium af grad $n \geq 1$ har <u>netop</u> n <u>rødder</u>. Er $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ de <u>parvis forskellige</u> rødder i $F(x)$ og $\nu_1,\dots,\nu_r$ deres multipliciteter, har vi $\nu_1+\dots+\nu_r = n$, og fremstillingen lyder

$$F(x) = a(x-\alpha_1)^{\nu_1}\dots(x-\alpha_r)^{\nu_r}. \tag{2}$$

I stedet for at sige, at α er rod i $F(x)$ med multiplicitet ν, kan man sige, at α er ν gange rod i $F(x)$. Hvis $\nu = 1$, kaldes α en <u>simpel</u> eller <u>enkelt rod</u>, hvis $\nu > 1$ en <u>multipel rod</u>, specielt hvis $\nu = 2$ en <u>dobbelt rod</u>.

Fremstillingerne (1) og (2) kan naturligvis også benyttes for polynomier af grad 0, idet så blot førstegradsfaktorerne mangler.

<u>Polynomier over $\mathbb{R}$</u>. Med $\mathbb{R}[x]$ betegner vi delmængden af $\mathbb{C}[x]$ bestående af alle reelle polynomier, d.v.s. polynomier med reelle koefficienter.

Hvis $p \in \mathbb{R}[x]$, gælder åbenbart at $p(x) \in \mathbb{R}$ når $x \in \mathbb{R}$. Hvis på den anden side $p \in \mathbb{C}[x]$ har den egenskab at $p(x) \in \mathbb{R}$ for alle $x \in \mathbb{R}$ så gælder at $\overline{p(x)} = p(x)$ for ethvert $x \in \mathbb{R}$ ($\overline{}$ betegner kompleks konjugering). Skriver vi $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ fås $\overline{p(x)} = \overline{a}_0 + \overline{a}_1x + \dots + \overline{a}_nx^n$ for $x \in \mathbb{R}$, så betingelsen $\overline{p(x)} = p(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ medfører iflg. Korollar

1.2 at $a_0 = \bar{a}_0, \dots, a_n = \bar{a}_n$, altså at $p \in \mathbb{R}[x]$.

Er $p \in \mathbb{R}[x]$ skrevet på formen (1.6), $p(x) = a(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$, (hvor $a \in \mathbb{R}$) , fås ved kompleks konjugering, at for $x \in \mathbb{R}$ er

$$p(x) = a(x-\bar{\alpha}_1)\dots(x-\bar{\alpha}_n) .$$

Denne formel må så (iflg. Korollar 1.2) gælde for alle $x \in \mathbb{C}$ og af Sætning 1.5 slutter vi at $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n\}$. Skriver vi først de reelle og dernæst de ikke-reelle rødder, kan mængden af rødder i p skrives

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r \ , \ \xi_1 + i\eta_1, \xi_1 - i\eta_1, \dots, \xi_s + i\eta_s, \xi_s - i\eta_s \ .$$

For et par af konjugerede tal $\xi \pm i\eta$ er

$$(x-(\xi+i\eta))(x-(\xi-i\eta)) = (x-\xi)^2 + \eta^2 = x^2 - 2\xi x + \xi^2 + \eta^2 \ .$$

Vi har dermed vist at et reelt polynomium kan faktoriseres over $\mathbb{R}$ i første og andengradspolynomier. Mere præcist

<u>SÆTNING 1.6</u>. (Faktorisering af polynomier over $\mathbb{R}$.) Ethvert polynomium $F(x)$ i $\mathbb{R}[x]$ af grad ≥ 1 kan på en og, bortset fra faktorernes rækkefølge, kun på een måde skrives på formen

$$F(x) = a(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_r)(x^2 + a_1 x + b_1)\dots(x^2 + a_s x + b_s) \ ,$$

hvor $a \neq 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $a_1, b_1, \dots, a_s, b_s$, er reelle, og andengradsfaktorerne har ikke-reelle rødder.

BEMÆRKNING. Man kan også betragte polynomier af flere variable. F.eks. forstås ved et polynomium af to variable x og y et udtryk af formen

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j} x^i y^j = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2$$
$$+ \dots + a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \dots + a_{0,n}y^n \ ,$$

hvor alle koefficienterne $a_{i,j}$ er komplekse (eller reelle) tal.

§2. Rationale funktioner.

Rationale funktioner over $\mathbb{C}$. Med $\mathbb{C}(x)$ betegner vi mængden af funktioner af en kompleks variabel x af formen

$$x \to f(x) = \frac{F(x)}{G(x)} ,$$

hvor F og G er polynomier med komplekse koefficienter, altså tilhører $\mathbb{C}[x]$, og G er egentligt, og $F(x)$ og $G(x)$ ikke begge er 0 for noget x. Sådanne funktioner kaldes rationale funktioner. Man ser, at polynomierne fremkommer for $G = 1$. Hvis derimod G har grad ≥ 1, er f kun defineret pånær i den endelige mængde, der udgøres af rødderne for G; det er åbenbart en kontinuert funktion på denne mængde. Hvis α er rod i G, gælder $|f(x)| \to +\infty$ for $x \to \alpha$. Polynomierne kaldes hele rationale funktioner, medens rationale funktioner, der ikke er polynomier, kaldes brudne rationale funktioner.

Vi vil også tillade os for et vilkårligt par af polynomier P og Q i $\mathbb{C}[x]$, hvor Q er egentligt, at tale om den rationale funktion

$$x \to f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} .$$

Vi mener hermed den funktion, der bestemmes ved den brøk af ovennævnte art, der dannes ved forkortning.

Denne vedtægt får betydning, idet vi definerer sum og produkt af to rationale funktioner

$$f_1 = \frac{F_1}{G_1} \quad \text{og} \quad f_2 = \frac{F_2}{G_2}$$

ved

$$f_1 + f_2 = \frac{F_1G_2 + F_2G_1}{G_1G_2} \quad \text{og} \quad f_1f_2 = \frac{F_1F_2}{G_1G_2} .$$

Ved en <u>stambrøk</u> i $\mathbb{C}(x)$ forstås en rational funktion af formen

$$\frac{d}{(x-\alpha)^{\nu}}\,, \quad \text{hvor} \quad d,\alpha \in \mathbb{C} \quad \text{og} \quad \nu \in \mathbb{N}\,.$$

<u>SÆTNING 2.1.</u> (Dekomposition i $\mathbb{C}(x)$.) Enhver rational funktion $f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ i $\mathbb{C}(x)$ med nævner $G(x) = (x-\alpha_1)^{\nu_1}\cdots(x-\alpha_r)^{\nu_r}$, hvor $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ er parvis forskellige, kan på en og kun een måde <u>dekomponeres</u> som

$$f(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_qx^q + \sum_{\rho=1}^{r}\left(\frac{d_{\rho 1}}{x-\alpha_\rho} + \frac{d_{\rho 2}}{(x-\alpha_\rho)^2} + \ldots + \frac{d_{\rho\nu_\rho}}{(x-\alpha_\rho)^{\nu_\rho}}\right),$$

d.v.s. som sum af et polynomium og stambrøker med nævnerne $x-\alpha_\rho, (x-\alpha_\rho)^2, \ldots, (x-\alpha_\rho)^{\nu_\rho}$, hvor $\rho = 1,\ldots,r$.

BEVIS. (1) Fremstillingens eksistens. For $G = 1$ er sagen triviel. Vi antager nu, at graden af G er ≥ 1 . Vi sætter $G_1(x) = (x-\alpha_2)^{\nu_2}\cdots(x-\alpha_r)^{\nu_r}$ og subtraherer fra f stambrøken

$$\frac{d}{(x-\alpha_1)^{\nu_1}}\,, \quad \text{hvor} \quad d = \frac{F(\alpha_1)}{G_1(\alpha_1)}\,.$$

Resten bliver

$$f(x) - \frac{d}{(x-\alpha_1)^{\nu_1}} = \frac{F(x) - \frac{F(\alpha_1)}{G_1(\alpha_1)}G_1(x)}{G(x)} = \frac{F_1(x)}{G(x)}\,.$$

Her er $F_1(\alpha_1) = 0$. Altså kan $F_1(x)$ skrives på formen $F_1(x) = (x-\alpha_1)F_2(x)$, hvorefter $x-\alpha_1$ kan bortforkortes. Herved fås en brøk med nævneren $(x-\alpha_1)^{\nu_1-1}(x-\alpha_2)^{\nu_2}\cdots(x-\alpha_r)^{\nu_r}$. Denne forkortes og behandles analogt. Efter højst ν_1 skridt er vi nået til en brøk med nævneren $(x-\alpha_2)^{\nu_2}\cdots(x-\alpha_r)^{\nu_r}$, der behandles på samme måde. Efter højst $\nu_1+\ldots+\nu_r$ skridt har vi en rest med nævner 1, altså et polynomium.

(2) Fremstillingens entydighed. Hvis f er skrevet på den angivne form må gælde

$$\frac{F(x)}{G_1(x)} = f(x)(x-\alpha_1)^{\nu_1} = d_{1\nu_1} + g(x)\,,$$

hvor g er en rational funktion, for hvilken $g(\alpha_1) = 0$. Der må altså gælde

$$d_{1\nu_1} = \frac{F(\alpha_1)}{G_1(\alpha_1)} ,$$

d.v.s. leddet $\dfrac{d_{1\nu_1}}{(x-\alpha_1)^{\nu_1}}$ er netop det ovenfor i første skridt subtraherede led $\dfrac{d}{(x-\alpha_1)^{\nu_1}}$. Det i andet skridt subtraherede led må da på tilsvarende måde være $\dfrac{d_{1\nu_1-1}}{(x-\alpha_1)^{\nu_1-1}}$, og således videre, indtil vi når til restpolynomiet. ▯

Ved multiplikation af dekompositionsformlen med $G(x)$ finder man $F(x) = H(x)G(x) + R(x)$, hvor $H(x)$ er polynomiet $c_0 + c_1x + \ldots + c_qx^q$ og $R(x)$ er et polynomium af lavere grad end $G(x)$ (evt. nulpolynomiet). Ved division af F med G kan man altså straks finde H, hvorefter det kun drejer sig om at dekomponere $\frac{R(x)}{G(x)}$, hvor R er den principale rest ved divisionen.

Ved den praktiske udførelse af dekompositionen står man sig i reglen ved at fraskille flere led ad gangen, nemlig i hvert skridt et for hvert af de tilbageværende nulpunkter i nævneren.

EKSEMPEL. For at dekomponere $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{x^4+2}{x^3-x^2-x+1}$ bemærker vi, at $G(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$ har dobbeltroden $\alpha_1 = 1$ og enkeltroden $\alpha_2 = -1$; disse er ikke rødder i $F(x) = x^4 + 2$. For $x = 1$ er $\frac{F(x)}{x+1} = \frac{3}{2}$, og for $x = -1$ er $\frac{F(x)}{(x-1)^2} = \frac{3}{4}$. Vi fraskiller derfor $\dfrac{\frac{3}{2}}{(x-1)^2}$ og $\dfrac{\frac{3}{4}}{x+1}$. Herved fås resten

$$\frac{x^4+2}{x^3-x^2-x+1} - \frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}}{x+1} = \frac{x^4+2-\frac{3}{2}(x+1)-\frac{3}{4}(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{x^4-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x^2+\frac{1}{4}}{x-1} = x + 1 + \frac{\frac{5}{4}}{x-1} .$$

Altså er

$$\frac{x^4+2}{x^3-x^2-x+1} = 1 + x + \frac{\frac{5}{4}}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{x+1} \ .$$

Pol. Principal del. Nævnerens nulpunkter $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, altså punkter, hvori den rationale funktion $f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ ikke er defineret, kaldes poler for f , og det til polen α_ρ hørende bidrag

$$\frac{d_{\rho 1}}{x-\alpha_\rho} + \frac{d_{\rho 2}}{(x-\alpha_\rho)^2} + \ldots + \frac{d_{\rho\nu_\rho}}{(x-\alpha_\rho)^{\nu_\rho}}$$

til dekompositionsudtrykket kaldes den principale del af f hørende til polen α_ρ . Man bemærker, at hvis man fra f subtraherer den principale del hørende til polen α_ρ , fremkommer en rational funktion, som er defineret også i α_ρ .

Rationale funktioner over $\mathbb{R}$. Med $\mathbb{R}(x)$ betegner vi mængden af rationale funktioner

$$x \to f(x) = \frac{F(x)}{G(x)} \ ,$$

hvor F og G tilhører $\mathbb{R}[x]$, og iøvrigt opfylder de ovenfor angivne betingelser.

SÆTNING 2.2. (Dekomposition i $\mathbb{R}(x)$.) Enhver rational funktion $f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ i $\mathbb{R}(x)$ med nævner $G(x) = (x-\alpha_1)^{\nu_1} \ldots (x-\alpha_s)^{\nu_s} \cdot (x^2+a_1x+b_1)^{\mu_1} \ldots (x^2+a_tx+b_t)^{\mu_t}$, hvor førstegradspolynomierne hører til de forskellige reelle rødder i $G(x)$ og andengradspolynomierne til de forskellige par af konjugerede imaginære rødder i $G(x)$, kan på en og kun een måde dekomponeres som

$$f(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_qx^q + \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{d_{\sigma 1}}{x-\alpha_\sigma} + \frac{d_{\sigma 2}}{(x-\alpha_\sigma)^2} + \ldots + \frac{d_{\sigma\nu_\sigma}}{(x-\alpha_\sigma)^{\nu_\sigma}} \right)$$

$$+ \sum_{\tau=1}^{t} \left(\frac{k_{\tau 1}x+l_{\tau 1}}{x^2+a_\tau x+b_\tau} + \frac{k_{\tau 2}x+l_{\tau 2}}{(x^2+a_\tau x+b_\tau)^2} + \ldots + \frac{k_{\tau\mu_\tau}x+l_{\tau\mu_\tau}}{(x^2+a_\tau x+b_\tau)^{\mu_\tau}} \right) \ .$$

hvor alle de optrædende koefficienter er reelle.

BEVIS. For en rational funktion i $\mathbb{R}(x)$ fås af Sætning 2.1 ved konjugering at $\overline{f(x)} = f(x)$ for alle reelle x i definitionsmængden, d.v.s.

$$f(x) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 x + \ldots + \bar{c}_q x^q + \sum_{\rho=1}^{r} \left(\frac{\bar{d}_{\rho 1}}{x-\bar{\alpha}_\rho} + \frac{\bar{d}_{\rho 2}}{(x-\bar{\alpha}_\rho)^2} + \ldots + \frac{\overline{d_{\rho\nu_\rho}}}{(x-\bar{\alpha}_\rho)^{\nu_\rho}} \right) .$$

Da to rationale funktioner, der stemmer overens i værdi for uendelig mange værdier af x, er den samme funktion, må denne formel gælde for alle x i definitionsmængden. Af dekompositionens entydighed fremgår da, at koefficienterne $c_0, c_1, \ldots, c_q$ må være reelle, ligeså tællerne $d_{\rho 1}, d_{\rho 2}, \ldots, d_{\rho\nu_\rho}$ i alle stambrøker hørende til reelle rødder α_ρ i $G(x)$, medens bidraget fra et par af konjugerede imaginære rødder $\xi + i\eta$ og $\xi - i\eta$ af multiplicitet μ vil have formen

$$\frac{d_1}{x-(\xi+i\eta)} + \ldots + \frac{d_\mu}{(x-(\xi+i\eta))^\mu} + \frac{\bar{d}_1}{x-(\xi-i\eta)} + \ldots + \frac{\bar{d}_\mu}{(x-(\xi-i\eta))^\mu} .$$

Ved forlængning af brøkerne til brøker med den fælles nævner $[(x-(\xi+i\eta))(x-(\xi-i\eta))]^\mu = (x^2+ax+b)^\mu$ omskrives dette bidrag til

$$\frac{T(x)}{(x^2+ax+b)^\mu} , \tag{2.1}$$

hvor polynomiet $T(x)$ åbenbart har reelle værdier for reelle x og altså tilhører $\mathbb{R}[x]$. Man ser, at dets grad er $< 2\mu$. Vi vil vise, at bidraget (2.1) kan skrives på formen

$$\frac{k_1x+l_1}{x^2+ax+b} + \frac{k_2x+l_2}{(x^2+ax+b)^2} + \ldots + \frac{k_\mu x+l_\mu}{(x^2+ax+b)^\mu} , \tag{2.2}$$

hvor tællerne tilhører $\mathbb{R}[x]$. Hertil dividerer vi $T(x)$ med $x^2 + ax + b$ og betegner resten (som vil være af grad ≤ 1) med $kx + l$. Vi har da

$$\frac{T(x)}{(x^2+ax+b)^\mu} - \frac{kx+l}{(x^2+ax+b)^\mu} = \frac{T(x)-(kx+l)}{(x^2+ax+b)^\mu},$$

hvor den sidste brøk kan forkortes med $x^2 + ax + b$. Med den forkortede brøk gås frem på samme måde, og i $\mu - 1$ skridt får vi den ønskede omskrivning. Man bemærker, at omskrivningen af (2.1) til (2.2) kun er mulig på en måde. Thi hvis (2.1) har fremstillingen (2.2), ses ved multiplikation med $(x^2+ax+b)^\mu$, at $T(x)$ ved division med $x^2 + ax + b$ må give resten $k_\mu x + l_\mu$, d.v.s. det sidste led i (2.2) er netop det led, vi subtraherede i første skridt. Det i andet skridt subtraherede led må på tilsvarende måde være det næstsidste led i (2.2), og således videre. ▯

I $\mathbb{R}(x)$ betegnes udtryk af de to former

$$\frac{d}{(x-\alpha)^\nu} \quad \text{og} \quad \frac{kx+l}{(x^2+ax+b)^\mu},$$

som <u>stambrøker</u>.

EKSEMPEL. For at dekomponere $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{3x}{x^3-1}$ bemærker vi, at $G(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, hvor $x^2 + x + 1$ har imaginære rødder. Da $F(x)$ er af lavere grad end $G(x)$, må vi have

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{d}{x-1} + \frac{kx+l}{x^2+x+1}.$$

Multiplikation med $x^3 - 1$ giver $3x = d(x^2+x+1) + (kx+l)(x-1)$. Sættes $x = 1$, fås $d = 1$, og dermed $-(x-1)^2 = (kx+l(x-1)$, hvoraf $k = -1$, $l = 1$. Vi har altså

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

§3. Integration af rationale funktioner.

Rationale funktioner over $\mathbb{C}$. Lad $x \to f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ være en rational funktion i $\mathbb{C}(x)$, og betragt den alene for reelle x. Funktionen er åbenbart differentiabel i den del af $\mathbb{R}$, der tilhører definitionsmængden, d.v.s. i de intervaller, der fås ved af $\mathbb{R}$ at udelade de eventuelle reelle nulpunkter i nævneren. Den afledede $f' = \frac{F'G-FG'}{G^2}$ er ligeledes en rational funktion. Hvis f er givet på dekomponeret form

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_q x^q + \sum_{\rho=1}^{r}\left(\frac{d_{\rho 1}}{x-\alpha_\rho} + \frac{d_{\rho 2}}{(x-\alpha_\rho)^2} + \ldots + \frac{d_{\rho\nu_\rho}}{(x-\alpha_\rho)^{\nu_\rho}}\right),$$

fås

$$f'(x) = c_1 + \ldots + qc_q x^{q-1} - \sum_{\rho=1}^{r}\left(\frac{d_{\rho 1}}{(x-\alpha_\rho)^2} + \frac{2d_{\rho 2}}{(x-\alpha_\rho)^2} + \ldots + \frac{\nu_\rho d_{\rho\nu_\rho}}{(x-\alpha_\rho)^{\nu_\rho+1}}\right),$$

således at f' altså også foreligger dekomponeret. Man bemærker, at der i f' ikke forekommer stambrøker, i hvilke eksponenten i nævneren er 1, og at omvendt enhver rational funktion, i hvis dekomposition sådanne stambrøker ikke forekommer, er afledet af en rational funktion.

For at finde en stamfunktion til en vilkårlig rational funktion mangler vi altså blot at finde stamfunktioner til stambrøker $\frac{1}{x-\alpha}$.

Hvis α er reel, drejer det sig om at finde en stamfunktion på hver af de to halvlinier $]-\infty,\alpha[$ og $]\alpha,+\infty[$. Man ser, at

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \log(x-\alpha) \quad \text{på} \quad]\alpha,+\infty[\,,$$

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \log(\alpha-x) \quad \text{på} \quad]-\infty,\alpha[\,,$$

så at vi som fælles udtryk kan benytte

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \log|x-\alpha|\,, \quad x \neq \alpha\,.$$

Hvis α ikke er reel, lad os sige $\alpha = \xi + i\eta \ (\eta \neq 0)$, er

$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x-\xi-i\eta}$ defineret på hele $\mathbb{R}$. For at finde en stamfunktion skriver vi funktionen på formen

$$\frac{1}{x-\xi-i\eta} = \frac{x-\xi+i\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2} = \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+\eta^2} + i\,\frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}$$

og ser, at den har stamfunktionen

$$\int \frac{1}{x-\xi-i\eta}\,dx = \frac{1}{2}\log[(x-\xi)^2+\eta^2] + i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x-\xi}{\eta} \;.$$

Vi har således følgende sætning

SÆTNING 3.1. En stamfunktion til en funktion $f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ i $\mathbb{C}(x)$ kan i ethvert interval på $\mathbb{R}$, der ikke indeholder noget nulpunkt for nævnerpolynomiet, skrives som sum af en rational funktion og en linearkombination med koefficienter i $\mathbb{C}$ af funktioner af formen $\log|x-\alpha|$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $\log[(x-\xi)^2+\eta^2]$ $(\xi,\eta \in \mathbb{R})$, $\mathrm{Arctan}\,\frac{x-\xi}{\eta}$ $(\xi \in \mathbb{R},$ $\eta \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$.

Udtrykket er det samme i alle sådanne intervaller, men vi kan naturligvis i de forskellige intervaller disponere forskelligt over den additive konstant.

Rationale funktioner over $\mathbb{R}$. Hvis $f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ tilhører $\mathbb{R}(x)$, kan resultatet af integrationen skrives på reel form.

Polynomiumsdelen af f har reelle koefficienter og volder derfor intet problem. Stambrøkerne hørende til reelle rødder i nævneren har reelle tællere og volder derfor heller intet problem. Tilbage er stambrøkerne hørende til de imaginære rødder i nævneren. For et par af konjugerede imaginære rødder $\xi+i\eta$ og $\xi-i\eta$ har bidraget til f formen

$$\frac{d_1}{x-(\xi+i\eta)} + \dots + \frac{d_\mu}{(x-(\xi+i\eta))^\mu} + \frac{\overline{d_1}}{x-(\xi-i\eta)} + \dots + \frac{\overline{d_\mu}}{(x-(\xi-i\eta))^\mu} \;.$$

Stambrøkerne med nævnereksponent > 1 bidrager til stamfunktionen med udtrykket

$$-\frac{d_2}{x-(\xi+i\eta)}-\dots-\frac{1}{\mu-1}\frac{d_\mu}{(x-(\xi+i\eta))^{\mu-1}}-\frac{\overline{d_2}}{x-(\xi-i\eta)}-\dots-\frac{1}{\mu-1}\frac{\overline{d_\mu}}{(x-(\xi-i\eta))^{\mu-1}}$$

der som tidligere vist (se formel (2.2), s. VI.13) kan skrives på formen

$$\frac{p_1x+q_1}{(x-\xi)^2+\mu^2}+\dots+\frac{p_{\mu-1}x+q_{\mu-1}}{((x-\xi)^2+\mu^2)^{\mu-1}}\ ,$$

hvor tællerne tilhører $\mathbb{R}[x]$. Tilbage er stambrøkerne med nævnereksponent 1. Sættes $d_1 = a+ib$, er $\overline{d_1} = a-ib$, og bidraget til stamfunktionen bliver

$$(a+ib)\left(\frac{1}{2}\log[(x-\xi)^2+\eta^2]+i\ \mathrm{Arctan}\ \frac{x-\xi}{\eta}\right)$$

$$+\ (a-ib)\left(\frac{1}{2}\log[(x-\xi)^2+\eta^2]+i\ \mathrm{Arctan}\ \frac{x-\xi}{-\eta}\right)\ ,$$

der omskrives til

$$a\log[(x-\xi)^2+\eta^2]-2b\ \mathrm{Arctan}\ \frac{x-\xi}{\eta}\ .$$

Hermed er stamfunktionen som ønsket udtrykt på reel form.

EKSEMPEL. I simple tilfælde vil det ofte være således, at man hurtigt finder dekompositionen på reel form, og det vil da være naturligt også at foretage integrationen uden at forlade det reelle område. Således har vi tidligere (Eksempel s. VI.14) fundet

$$\frac{3x}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}\ .$$

Vi har altså

$$\int\frac{3x}{x^3-1}\,dx=\log|x-1|-\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx\ .$$

For at finde det sidste integral foretager vi omskrivningen

$$\frac{x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\sqrt{3}\ \frac{\sqrt{3/4}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

og får

$$\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx=\frac{1}{2}\log[x^2+x+1]-\sqrt{3}\ \mathrm{Arctan}\ \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}}\ .$$

EKSEMPEL. Undertiden kan det være en fordel at udelade dekompositionen og i stedet benytte sig af, at man kender stamfunktionens form. Som eksempel vil vi bestemme

$$I(x) = \int \frac{3x^5+5x^3+x-1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx \ .$$

Da tælleren i funktionen under integraltegnet er af lavere grad end nævneren, optræder i dekompositionen i $\mathbb{C}(x)$ kun stambrøker med nævnerne x , x^2 , $x-i$, $(x-i)^2$, $x+i$, $(x+i)^2$. Af den almene diskussion ovenfor fremgår derfor, at der findes en stamfunktion af formen

$$c_1 \log|x| + \frac{c_2}{x} + c_3 \log(x^2+1) + c_4 \operatorname{Arctan} x + \frac{c_5x+c_6}{x^2+1}$$

med reelle koefficienter. Ved differentiation fås ligningen

$$\frac{c_1}{x} - \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3 2x}{x^2+1} + \frac{c_4}{x^2+1} + \frac{c_5(-x^2+1)-c_6 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^5+5x^3+x-1}{x^2(x^2+1)^2}$$

til bestemmelse af koefficienterne. Multiplikation med $x^2(x^2+1)^2$ giver

$$c_1x(x^2+1)^2 - c_2(x^2+1)^2 + c_3 2x^3(x^2+1) + c_4x^2(x^2+1) +$$
$$+ c_5x^2(-x^2+1) - c_6 2x^3 = 3x^5 + 5x^3 + x - 1 \ .$$

$x = 0$ giver $-c_2 = -1$, altså $\underline{c_2 = 1}$.

$x = i$ giver $-c_5 2 + c_6 2i = -1 - i$, altså $\underline{c_5 = \frac{1}{2}}$, $\underline{c_6 = -\frac{1}{2}}$.

Indsættes disse værdier fås

$$c_1x(x^2+1)^2 + c_3 2x^3(x^2+1) + c_4x^2(x^2+1)$$
$$= 3x^5 + \tfrac{3}{2}x^4 + 4x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + x = x(x^2+1)(3x^2+\tfrac{3}{2}x+1) \ ,$$

hvoraf ved forkortning

$$c_1(x^2+1) + c_3 2x^2 + c_4x = 3x^2 + \tfrac{3}{2}x + 1 \ .$$

$x = 0$ giver $\underline{c_1 = 1}$.

$x = i$ giver $-c_3 2 + c_4 i = -2 + \frac{3}{2}i$, altså $\underline{c_3 = 1}$, $\underline{c_4 = \frac{3}{2}}$.

Vi har altså

$$I(x) = \log|x| + \frac{1}{x} + \log(x^2+1) + \frac{3}{2}\text{ Arctan } x + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$= \frac{3x^2-x+2}{2x(x^2+1)} + \log|x^3+x| + \frac{3}{2}\text{ Arctan } x \ .$$

EKSEMPEL. En stamfunktion til en rational funktion kan i mange tilfælde findes (eller bestemmelsen kan tilbageføres til en simplere opgave) ved brug af de almene integrationsregler. Således finder man

$$\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(x^2+1)^2} + \int x \cdot \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{x^2+1} \ .$$

§4. Integration af forskellige typer af funktioner.

For en række funktionstyper kan integrationen udføres, idet man ved en egnet substitution reducerer opgaven til integration af en rational funktion.

<u>En rational funktion af cos og sin</u>. Lad R være en rational funktion af to variable, altså en funktion af formen

$$(u,v) \to R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)} ,$$

hvor P og Q er polynomier, og Q ikke er nulpolynomiet. Indsættes $(u,v) = (\cos x, \sin x)$ fås en funktion

$$x \to f(x) = R(\cos x, \sin x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} ,$$

som naturligvis kun er defineret for de x, for hvilke $Q(\cos x, \sin x) \neq 0$. En sådan funktion f kaldes en rational funktion af cos og sin; den har åbenbart perioden 2π, og den er kontinuert i ethvert interval, hvori den er defineret.

Idet vi foreløbig ser bort fra punkterne $(2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, selv om funktionen skulle være defineret i disse punkter, betragter vi den i periodeintervallet $]-\pi,\pi[$. Vi anvender substitutionen

$$t = \tan\frac{x}{2} , \qquad -\pi < x < \pi$$

$$x = 2 \operatorname{Arctan} t , \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt , \qquad -\infty < t < +\infty .$$

Da x er en strengt voksende differentiabel funktion af t, og t-intervallet $]-\infty,+\infty[$ afbildes på x-intervallet $]-\pi,\pi]$, er forudsætningerne for integration ved substitution opfyldt. Idet

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} , \quad \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} ,$$

finder vi

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \left[\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\,dt\right]_{t=\tan\frac{x}{2}} ,$$

gældende i ethvert delinterval af $]-\pi,\pi[$, hvori f er defineret. Opgaven er således reduceret til integration af en rational funktion. Sættes

$$G(t) = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\,dt ,$$

kan G ifølge §3 udtrykkes ved hjælp af rationale funktioner og funktionerne log og Arctan , og F bliver altså udtrykt ved hjælp af disse funktioner og funktionen tan . Da udtrykket $F(x) = G(\tan\frac{x}{2})$ har perioden 2π , er den herved bestemte funktion F stamfunktion til f på ethvert interval, hvori f er defineret, og som ikke indeholder noget af punkterne $(2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. I ethvert sådant interval fås samtlige stamfunktioner til f ved addition af en vilkårlig konstant. I tilfælde af, at f er defineret også i punkterne $(2p+1)\pi$, kan de additive konstanter vælges således, at den fremkomne funktion F^* får samme grænseværdi fra venstre og højre i disse punkter. Når F^* i disse punkter tillægges denne værdi, bliver F^* stamfunktion i ethvert interval, hvori funktionen f er defineret. (Det kan man indse f.eks. ved hjælp af Sætning III.2.11. Prøv at gennemføre argumentationen!)

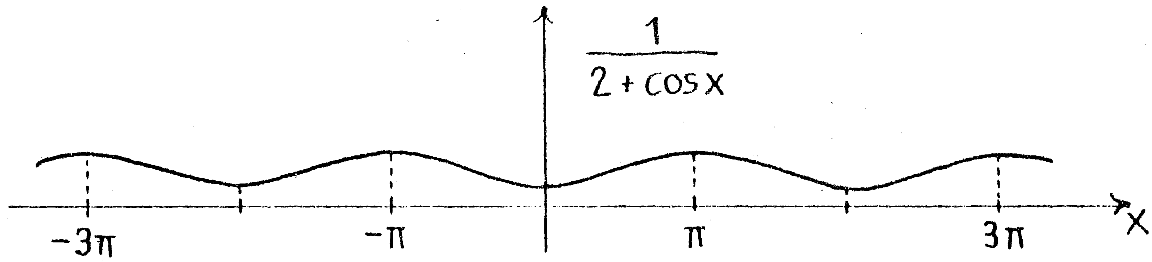
EKSEMPEL. Vælges $R(u,v) = \frac{1}{2+u}$, fås

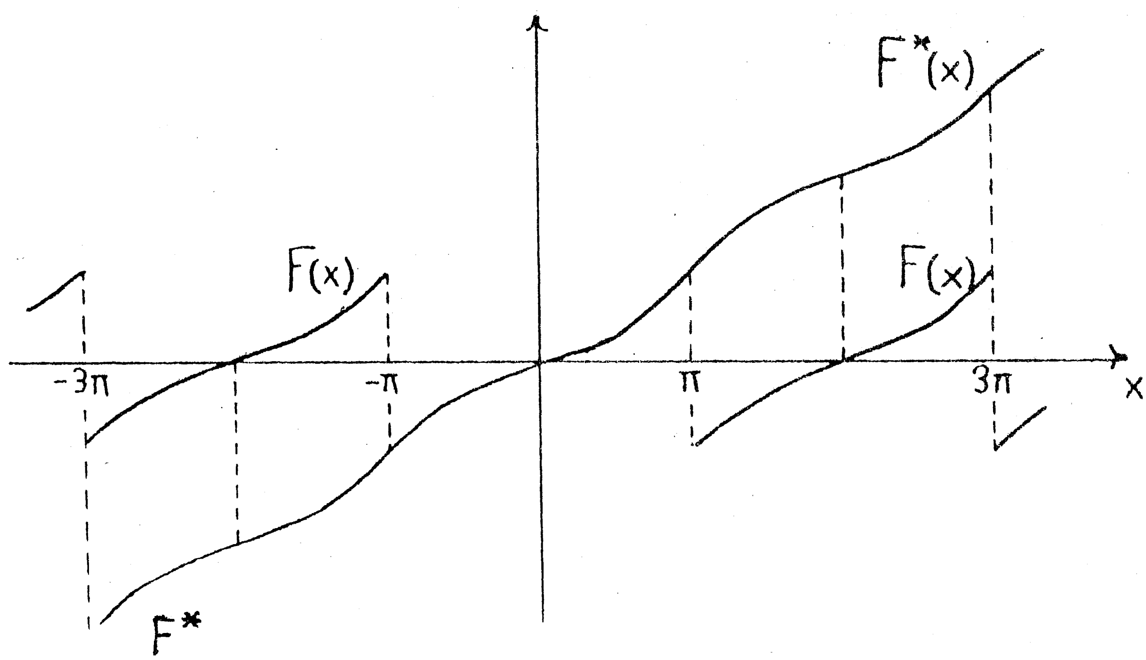
$$F(x) = \int \frac{1}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{3+t^2}\,dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} \frac{dt}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} .$$

Funktionen $\frac{1}{2+\cos x}$ er defineret på hele $\mathbb{R}$. Den fundne funktion $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}$ er stamfunktion på hvert interval $](2p-1)\pi,(2+1)\pi[$, og har i hvert af punkterne $(2p+1)\pi$ grænseværdierne $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ fra venstre og $-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ fra højre. En stamfunktion på hele $\mathbb{R}$ er derfor

$$F^*(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + p\,\frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{for } x \in \left]\,(2p-1)\pi, (2p+1)\pi\,\right[\\ (2p+1)\frac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{for } x = (2p+1)\pi \;. \end{cases}$$





<u>Specielle tilfælde</u>. Den anvendte substitution fører ofte til lange regninger. I specielle tilfælde kan følgende metoder anbefales:

<u>A</u>. Hvis udtrykket for $f(x)$ kan omformes til

$$S(\cos x)\sin x \quad \text{eller} \quad S(\sin x)\cos x \;,$$

hvor S er en rational funktion af én variabel, kan integrationen udføres ved substitutionen $t = \cos x$ eller $t = \sin x$, idet integration ved substitution giver

$$\int S(\cos x)\sin x\,dx = \left[-\int S(t)\,dt\right]_{t=\cos x} ,$$

$$\int S(\sin x)\cos x\,dx = \left[\int S(t)\,dt\right]_{t=\sin x} .$$

B. Hvis udtrykket for $f(x)$ kan omformes til

$$S(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{eller} \quad S(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x}$$

hvor S er en rational funktion af én variabel, kan integrationen på tilsvarende måde udføres ved substitutionen $t = \tan x$ eller $t = \cot x$. Idet $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ og $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$, ser man iøvrigt, at de to former kommer ud på et med, at $f(x)$ kan omformes til $S_1(\tan x)$ eller $S_1(\cot x)$, hvor S_1 er en rational funktion. Da $\tan x$ og $\cot x$ er reciprokke, kan man naturligvis komme fra hver af de to former til den anden.

C. Hvis f er et polynomium i $\cos$ og $\sin$, kan integrationen udføres ved, at man (i reglen enklest ved brug af Eulers formler, jfr. kap. V) omformer udtrykket til en linearkombination af funktionerne $\cos nx$ og $\sin nx$.

Vi viser metoderne på en række eksempler.

EKSEMPLER.

$$\frac{\cos^5 x + \cos x}{2 - \cos^2 x} = \frac{(\cos^4 x+1)\cos x}{2-\cos^2 x} = \frac{(1-\sin^2 x)^2 + 1}{1+\sin^2 x}\cos x . \quad t = \sin x$$

$$\int\frac{\cos^5 x + \cos x}{2-\cos^2 x}dx = \int\frac{(1-t^2)^2+1}{1+t^2}dt = \int\frac{2-2t^2+t^4}{1+t^2} = \int\left(t^2-3+\frac{5}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - 3\sin x + 5\,\mathrm{Arctan}(\sin x) .$$

$$\int\frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \int\frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int\frac{1}{1+4\tan^2 x}\,\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \left[\int\frac{1}{1+4t^2}\,dt\right]_{t=\tan x} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(2\tan x) .$$

Denne regning er gyldig i ethvert af intervallerne $](p-\frac{1}{2})\pi, (p+\frac{1}{2})\pi[$, $p \in \mathbb{Z}$. En stamfunktion på hele $\mathbb{R}$ bestemmes ved

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(2\tan x) + \frac{1}{2}p\pi & \text{for} \quad x \in \,](p-\frac{1}{2})\pi, (p+\frac{1}{2})\pi[\\ (p+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi & \text{for} \quad x = (p+\frac{1}{2})\pi \ . \end{cases}$$

(Skitser graferne for $\dfrac{1}{1+3\sin^2 x}$, $\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(2\tan x)$, og $F(x)$!)

$$\int\left(\frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x+\sin^3 x}\right)^2 dx = \int\frac{\tan^2 x}{(1+\tan^3 x)^2}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}\int\frac{d(1+\tan^2 x)}{(1+\tan^3 x)^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\tan^3 x} = -\frac{1}{3}\,\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x} \ .$$

På den sidst anførte form er resultatet en stamfunktion på ethvert interval, hvor den integrerede funktion er defineret.

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{64}\int\left[e^{6ix}+e^{-6ix}-2(e^{4ix}+e^{-4ix}) - (e^{2ix}+e^{-2ix})+4\right] dx$$

$$= \frac{1}{32}\int(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)\,dx$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + 2x\right) .$$

<u>En rational funktion af cosh og sinh</u>. Her kan man benytte metoder analoge til de ovenfor omtalte, eller man kan bemærke, at funktionen kan skrives om en rational funktion af e^x og benytte substitutionen $t = e^x$.

EKSEMPEL.

$$\int\frac{1}{1+\tanh^2 x}dx = \int\frac{1}{2}\left(\frac{1-\tanh^2 x}{1+\tanh^2 x}+1\right)dx = \frac{1}{2}\int\frac{d\tanh x}{1+\tanh^2 x}+\frac{1}{2}x$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(\tanh x) + \frac{1}{2}x \ .$$

$$\int \frac{1}{\cosh x}\,dx = \int \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x}\,dx = \operatorname{Arctan}(\sinh x) \ .$$

$$\int \frac{1}{\cosh x}\,dx = \int \frac{2e^x}{(e^x)^2+1}\,dx = 2\operatorname{Arctan}(e^x) \ .$$

(Det bemærkes, at $2\operatorname{Arctan}(e^x) = \operatorname{Arctan}(\sinh x) + \frac{1}{2}\pi$.)

<u>En rational funktion af x og en rodstørrelse</u> $\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$. Lad n være et helt tal ≥ 2 , og α , β , γ , δ reelle tal. Vi vil forudsætte at

$$\det\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 ,$$

idet i modsat fald enten et af talparrene (α,β) og (γ,δ) er $(0,0)$, eller talparrene er proportionale. Lad R være en rational funktion af to variable. Funktionen

$$x \to f(x) = R\left(x , \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$$

er åbenbart kontinuert i ethvert interval, hvor den er defineret. For at finde dens integral i ethvert sådant interval anvender vi substitutionen

$$t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$$

$$x = \frac{\delta t^n - \beta}{-\gamma t^n+\alpha} \quad , \quad dx = n\,\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)t^{n-1}}{(-\gamma t^n+\alpha)^2}\,dt \ .$$

Selve udregningen viser, at x-intervallet ved $t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ afbildes injektivt, altså bijektivt på et vist t-interval; omvendt afbilder $x = \frac{\delta t^n-\beta}{-\gamma t^n+\alpha}$ altså t-intervallet bijektivt på x-intervallet. Da x er en differentiabel funktion af t , er forudsætningerne for anvendelse af integration ved substitution opfyldt. Vi finder

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \left[\int R\left(\frac{\delta t^n-\beta}{-\gamma t^n+\alpha} , t\right) n\,\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)t^{n-1}}{(-\gamma t^n+\alpha)^2}\,dt\right]_{t=\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma X+\delta}}} \ .$$

Opgaven er således reduceret til integration af en rational funktion.

EKSEMPEL. Funktionen $\dfrac{1}{x^2\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\right)}$ er defineret på intervallerne $]-\infty,-1[$ og $]0,+\infty[$. For at integrere den anvender vi substitutionen

$$t = \sqrt[6]{\frac{x+1}{x}} \;,\quad x = \frac{1}{t^6-1} \;,\quad dx = \frac{6t^5}{(t^6-1)^2}\,dt \;.$$

Til de to x-intervaller svarer t-intervallerne $]0,1[$ og $]1,+\infty[$. Vi finder

$$\int \frac{dx}{x^2\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\right)} = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t^6-1}\right)^2(t^3+t^2)}\left(-\frac{6t^5}{(t^6-1)^2}\right)dt$$

$$= -6\int\frac{t^3}{t+1}\,dt = -6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt = -6\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\log(1+t)\right]$$

$$= -2\sqrt{\frac{x+1}{x}}+3\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}-6\sqrt[6]{\frac{x+1}{x}}+6\log\left(1+\sqrt[6]{\frac{x+1}{x}}\right) \;.$$

<u>En rational funktion af x og en rodstørrelse $\sqrt{ax^2+bx+c}$</u> . Lad a , b , c være reelle tal. Vi vil antage, at a og b^2-4ac er $\neq 0$. Af omskrivningen

$$ax^2+bc+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

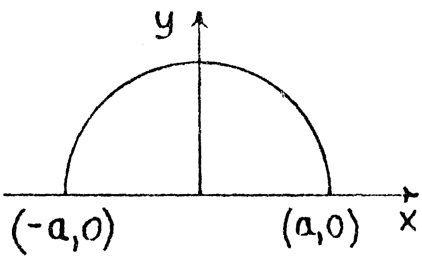
ses, at hvis $\sqrt{|a|}\,(x+\frac{b}{2a})$ benyttes som ny variabel, hvilket blot er en lineær substitution, overføres rodstørrelsen i $\sqrt{k-x^2}$ eller $\sqrt{x^2+k}$, hvor $k \neq 0$. Disse to tilfælde vil vi behandle hver for sig.

<u>A. Rational funktion af x og $\sqrt{k-x^2}$</u> . Her kan vi antage, at $k > 0$, idet rodstørrelsens definitionsmængde ellers er tom. Vi sætter $\sqrt{k} = a$. Opgaven er da at integrere funktionen

$$x \to f(x) = R(x\,,\sqrt{a^2-x^2}) \;,$$

hvor R er en rational funktion af to variable. Funktionen er kontinuert i ethvert interval, hvori den er defineret; disse intervaller er naturligvis indeholdt i rodstørrelsens definitionsinterval $[-a,a]$.

Når x gennemløber intervallet $[-a,a]$, vil $(x,y) =$



$(x\,,\sqrt{a^2-x^2})$ gennemløbe en halvcirkelbue. At finde en egnet substitution kommer derfor ud på at finde en simpel parameterfremstilling for halvcirkelbuen. Nærliggende er den trigonometriske parameterfremstilling

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \end{aligned}\right\}\ 0 \le t \le \pi\ .$$

Benyttes i stedet $\tan\frac{t}{2}$ som parameter, fås en rational parameterfremstilling

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y &= a\,\frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}\right\}\ 0 \le t < +\infty\ ,$$

hvor punktet $(-a,0)$ dog ikke kommer med.

Disse parameterfremstillinger modsvares af substitutionerne

$$\begin{array}{llll} x = a\cos t\ , & t = \operatorname{Arccos}\frac{x}{a} & & -a \le x \le a \\ \sqrt{a^2-x^2} = a\sin t\ , & dx = -a\sin t\,dt & & 0 \le t \le \pi \\ x = a\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\ , & t = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} & & -a < x \le a \\ \sqrt{a^2-x^2} = a\,\frac{2t}{1+t^2}\ , & dx = -a\,\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt & & 0 \le t < +\infty\ . \end{array}$$

Ved anvendelse af substitutionerne reduceres opgaven til integration af en rational funktion af cos og sin , resp. en rational funktion.

EKSEMPEL. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$, $x \in\ ]-1,0[$, $x \in\ ]0,1[$. Benyttes substitutionen $x = \cos t$, fås

$$\int \frac{dt}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\sin t}{\cos^2 t \sin t}\, dt = -\tan t = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} .$$

Benyttes substitutionen $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, fås

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}\frac{1+t^2}{2t}\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt = -\int \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}\,dt$$

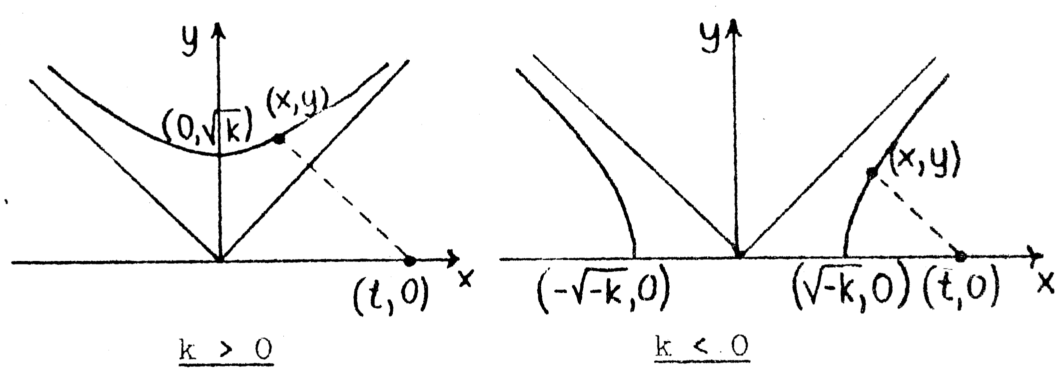
$$= -\int\left(\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1-t)^2}\right)dt = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t} = -\frac{2t}{1-t^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} .$$

B. Rational funktion af x og $\sqrt{x^2+k}$. Opgaven er at integrere funktionen

$$x \to f(x) = R(x, \sqrt{x^2+k}) ,$$

hvor R er en rational funktion af to variable. Funktionen er kontinuert i ethvert interval, hvori den er defineret; disse intervaller er naturligvis indeholdt i rodstørrelsens definitionsmængde, som for $k > 0$ er hele $\mathbb{R}$ og for $k < 0$ er de to intervaller $]-\infty, -\sqrt{-k}[$ og $]\sqrt{-k}, +\infty[$.

Man ser, at når x gennemløber rodstørrelsens definitionsmængde, vil $(x,y) = (x, \sqrt{x^2+k})$ gennemløbe den del af den ligesidede hyperbel med ligningen $y^2 - x^2 = k$, der er beliggende i halvplanen $\{(x,y) \mid y \geq 0\}$.



Sættes $x + y = t$, er $(t,0)$ skæringspunkt mellem x-aksen og linien gennem (x,y) med hældningskoefficient -1 . Idet $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = -k$, finder vi $x - y = -\frac{k}{t}$ og dermed parameterfremstillingen

$$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{t}\right) \qquad y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{k}{t}\right) .$$

Til den betragtede del af hyperblen svarer følgende parameterintervaller

for $k > 0$: $0 < t < +\infty$

for $k < 0$: $-\sqrt{-k} \le t < 0$ og $\sqrt{-k} \le t < +\infty$.

Den til parameterfremstillingen svarende substitution er

$$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{t}\right) \quad , \quad t = x + \sqrt{x^2+k}$$

$$\sqrt{x^2+k} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{k}{t}\right) \quad , \quad dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{t^2}\right)dt \; .$$

Ved anvendelse af substitutionen reduceres opgaven til integration af en rational funktion.

I tilfældet $k > 0$ kan vi, idet vi sætter $\sqrt{k} = a$, også benytte parameterfremstillingen

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sinh t \\ y &= a \cosh t \end{aligned}\right\} -\infty < t < +\infty$$

for hyperbelgrenen. Den giver substitutionen

$$x = a \sinh t \quad , \quad t = \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)$$

$$\sqrt{x^2+a^2} = a \operatorname{cost} t \quad , \quad dx = a \cosh t \, dt \; .$$

I tilfældet $k < 0$ kan vi, idet vi sætter $\sqrt{-k} = a$, for den højre halvhyperbelgren også benytte parameterfremstillingen

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cosh t \\ y &= a \sinh t \end{aligned}\right\} 0 \le t < +\infty \; .$$

Dette giver substitutionen

$$x = a \cosh t \quad , \quad t = \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = a \sinh t \quad , \quad dx = a \sinh t \, dt \; .$$

EKSEMPEL. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$. $x \in]-\infty,0[$ og $x \in]0,+\infty[$. Benyttes substitutionen $x = \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$, $t = x+\sqrt{x^2+1}$, fås

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})}\,\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})\,dt = \int \frac{2}{t^2-1}dt$$

$$= \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \log\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}+1}\right| = \log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|} .$$

Benyttes substitutionen $x = \sinh t$, fås

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{\cosh t}{\sinh t \cosh t}\,dt = \int \frac{1}{\sinh t}\,dt = \int \frac{\sinh t}{\sinh^2 t}\,dt$$

$$= \int \frac{d \cosh t}{\cosh^2 t-1} = \left[\int \frac{du}{u^2-1}\right]_{u=\cosh t} = \frac{1}{2}\log\frac{\cosh t-1}{\cosh t+1}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{\sinh^2 t+1}-1}{\sqrt{\sinh^2 t+1}+1} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)^2}{x^2} = \log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}$$

Benyttes substitutionen $x = \tan t$, $t \in]-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi[$, fås

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\tan t\,\frac{1}{\cos t}}\,\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{1}{\sin t}\,dt = \int \frac{\sin t}{\sin^2 t}\,dt$$

$$= -\int \frac{d \cos t}{1-\cos^2 t} = \left[-\int \frac{du}{1-u^2}\right]_{u=\cos t} = \left[-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du\right]_{u=\cos t}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\log\frac{1-u}{1+u}\right]_{u=\cos t} = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos t}{1+\cos t}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}$$

§5. Simple typer af differentialligninger.

Lineære differentialligninger. Ved en sædvanlig differentialligning forstås en ligning, der udtrykker en relation mellem en (reel eller kompleks) funktion af en reel variabel og nogle af dens afledede. Differentialligningernes teori er opstået samtidig med differential- og integralregningen; dens store betydning for anvendelserne beror på, at naturlovene i vid udstrækning udtrykkes ved differentialligninger. Den almene teori for differentialligninger vil blive behandlet i næste kapitel; på dette sted indskrænker vi os til at omtale løsningsmetoder for visse simple typer af differentialligninger.

Ved en lineær differentialligning af n^{te} orden forståes en ligning af formen

$$p_n(t)\,\frac{d^nx}{dt^n} + \dots + p_1(t)\,\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = q(t) ,$$

hvor $p_0, p_1, \dots, p_n, q\colon I \to \mathbb{C}$ er kontinuerte funktioner på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$, og hvor p_n ikke er nulfunktionen. Ved en løsning eller et integral til ligningen på et interval $J \subseteq I$ forstås en C^n-funktion $x = \varphi(t)\colon J \to \mathbb{C}$, for hvilken

$$p_n(t)\varphi^{(n)}(t) + \dots + p_1(t)\varphi'(t) + p_0(t)\varphi(t) = q(t)$$

for hvert $t \in J$. At løse ligningen vil sige at finde alle dens løsninger. Ligningen kaldes homogen, hvis funktionen q er nulfunktionen, ellers inhomogen. Når vi i forbindelse med en inhomogen lineær differentialligning taler om den tilsvarende homogene ligning, mener vi den ligning, der fås ved at erstatte funktionen q med nulfunktionen.

Hvis funktionen p_n ikke antager værdien 0, kan ligningen ved division med p_n bringes på normeret form, hvor koefficienten til $\frac{d^nx}{dt^n}$ er konstanten 1. Ved de løsningsmetoder, vi i det følgende skal omtale, vil vi hovedsagelig betragte normerede ligninger. I den almene teori bevises, at enhver løsning til en sådan ligning er restriktion af en løsning på intervallet I . Dette vil vi i det følgende tage for kendt, og vi vil, når talen er om løsninger til en normeret ligning, simpelthen mene løsninger på I .

Hvis funktionen p_n kun har isolerede nulpunkter, d.v.s. hvis der for ethvert nulpunkt t_0 for p_n findes en omegn af t_0 , hvori p_n ikke har andre nulpunkter end t_0 (og andre tilfælde vil vi ikke møde), må man opdele intervallet I ved nulpunkterne for p_n og søge løsningerne i hvert af delintervallerne. Løsninger på intervaller, der indeholder nulpunkter for p_n , vil da kunne findes ved hjælp af følgende bemærkning: Hvis $\varphi: J \to \mathbb{C}$ er en C^n-funktion, der tilfredsstiller differentialligningen i ethvert delinterval af J , hvori p_n ikke antager værdien 0, da er φ en løsning til differentialligningen på J . Dette følger af, at vi ved indsætning af φ i ligningens venstre side får en kontinuert funktion på J , der stemmer overens med q i ethvert punkt $t \in J$, der ikke er nulpunkt for p_n ; da q ligeledes er kontinuert, må den også stemme overens med q i nulpunkterne for p_n .

Den simpleste type er ligningen

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \ ,$$

hvor $f: I \to \mathbb{C}$ er en kontinuert funktion. Løsningerne er stamfunktionerne til f . Betegner $F: I \to \mathbb{C}$ en af disse, er samtlige løsninger bestemt ved

$$x = F(t) + c \ , \ c \in \mathbb{C} \ .$$

Man siger, at løsningen indeholder den arbitrære konstant c (arbitrær = vilkårlig).

BEMÆRKNING 5.1. I det følgende skal vi bruge en differentiationsregel for eksponentialfunktionen med kompleks eksponent:

Hvis $f: I \to \mathbb{C}$ er en differentiabel funktion på et interval

$I \subseteq \mathbb{R}$, da er funktionen $\exp f$, eller $t \to e^{f(t)}$, differentiabel med den afledede

$$(e^f)' = e^f \cdot f' .$$

BEVIS. Vi har $e^f = e^{\mathrm{Re}\, f} \cdot e^{i\, \mathrm{Im}\, f}$, hvor funktionerne $e^{\mathrm{Re}\, f}$ og $e^{i\,\mathrm{Im}\, f}$ er differentiable med de afledede $e^{\mathrm{Re}\, f}(\mathrm{Re}\, f')$ og $i\, e^{i\,\mathrm{Im}\, f}(\mathrm{Im}\, f')$. Altså er e^f differentiabel med den afledede

$$(e^f)' = e^{\mathrm{Re}\, f}\,\mathrm{Re}\, f' \cdot e^{i\,\mathrm{Im}\, f} + e^{\mathrm{Re}\, f} \cdot i\, e^{i\,\mathrm{Im}\, f}\,\mathrm{Im}\, f'$$

$$= e^{\mathrm{Re}\, f} e^{i\,\mathrm{Im}\, f} \cdot (\mathrm{Re}\, f' + i\mathrm{Im}\, f') = e^f \cdot f' . \qquad \square$$

<u>Lineær differentialligning af første orden</u>. Vi betragter en normeret lineær differentialligning af første orden

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t) ,$$

hvor $p,q\colon I \to \mathbb{C}$ er kontinuerte funktioner. Lad $P\colon I \to \mathbb{C}$ være en stamfunktion til funktionen p:

$$P(t) = \int p(t)\,dt .$$

Ved indsætning ses, at funktionen $t \to \Phi(t) = e^{-P(t)}$ er en løsning til den homogene ligning

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0 .$$

I den oprindelige ligning sættes nu $x = \Phi \cdot y$. Idet Φ er en C^1-funktion, og $\Phi(t) \neq 0$ for alle $t \in I$, svarer herved til enhver C^1-funktion $y = \psi(t)\colon I \to \mathbb{C}$ en C^1-funktion $x = \varphi(t) = \Phi(t)\psi(t)$, og enhver C^1-funktion $x = \varphi(t)\colon I \to \mathbb{C}$ fremkommer på denne måde (nemlig ved at vælge $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\Phi(t)}$). Ved udregning fås

$$\frac{dx}{dt} + px = \frac{d\Phi}{dt}y + \Phi\frac{dy}{dt} + p\Phi y = \Phi\frac{dy}{dt} .$$

Funktionen $x = \varphi(t) = \Phi(t)\psi(t)$ er altså løsning til den oprindelige ligning, hvis og kun hvis $y = \psi(t)$ er løsning til ligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q(t)}{\Phi(t)} = e^{P(t)}q(t) .$$

Idet denne lignings løsninger bestemmes ved

$$y = \int e^{P(t)}q(t)dt + c , \quad c \in \mathbb{C} ,$$

ser vi, at løsningerne til den givne ligning er bestemt ved

$$x = e^{-P(t)} \int e^{P(t)}q(t)dt + c\ e^{-P(t)} , \quad c \in \mathbb{C} ,$$

hvor $P(t) = \int p(t)dt$.

BEMÆRKNING 5.2. Af løsningsformlen aflæses:

1. Løsningerne til den homogene ligning er funktionerne $c\ e^{-P(t)}$. En løsning til den homogene ligning er altså enten nulfunktionen, eller den har ingen nulpunkter.

2. Hvis $\varphi_0 : I \to \mathbb{C}$ er en løsning til den givne ligning, og φ_1 er en fra nulfunktionen forskellig løsning til den homogene ligning, vil $\varphi = \varphi_0 + c\varphi_1$, $c \in \mathbb{C}$, være samtlige løsninger til den givne ligning.

3. For ethvert $t_0 \in J$ og ethvert $x_0 \in \mathbb{C}$ findes en og kun een løsning $\varphi: J \to \mathbb{C}$ til den givne ligning, for hvilken $\varphi(t_0) = x_0$.

4. Hvis funktionerne p og q er reelle, fås samtlige reelle løsninger ved i løsningsformlen at vælge reelle stamfunktioner og vælge $c \in \mathbb{R}$. For ethvert $t_0 \in J$ og ethvert $x_0 \in \mathbb{R}$ er den ved $\varphi(t_0) = x_0$ bestemte løsning da reel.

EKSEMPEL. Vi søger reelle løsninger til ligningen

$$t\frac{dx}{dt} + x = 4t^3 , \quad t \in \mathbb{R} .$$

I hvert af intervallerne $]-\infty,0[$ og $]0,+\infty[$ betragter vi den tilsvarende normerede ligning

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}x = 4t^2 .$$

Vi finder på $]0,+\infty[$

$$P(t) = \int \frac{1}{t}\,dt = \log t\ , \quad \int e^{P(t)} q(t)\,dt = \int t \cdot 4t^2 dt = t^4\ ,$$

altså løsningerne

$$x = \frac{1}{t}t^4 + c\frac{1}{t} \quad \text{eller} \quad x = t^3 + c\frac{1}{t}\ , \quad c \in \mathbb{R}\ .$$

og på $]-\infty,0[$

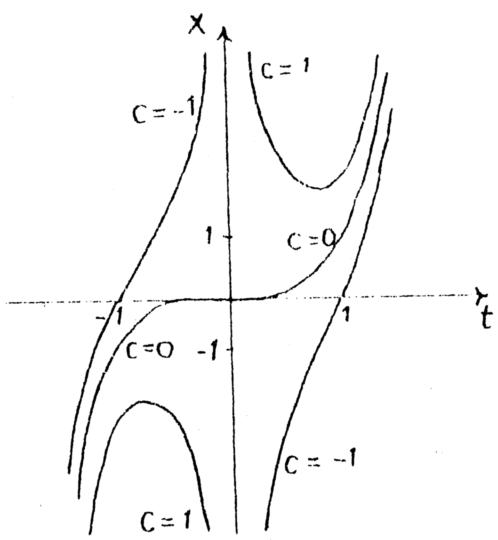
$$P(t) = \int \frac{1}{t}\,dt = \log(-t)\ , \quad \int e^{P(t)} q(t)\,dt = \int -t \cdot 4t^2 dt = -t^4\ ,$$

altså løsningerne

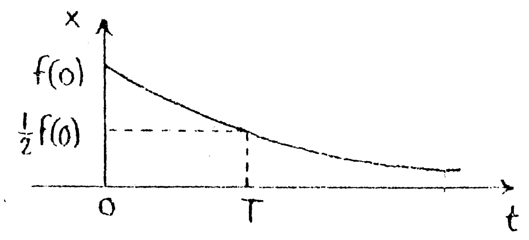
$$x = \left(-\frac{1}{t}\right)(-t^4) + c\left(-\frac{1}{t}\right) \quad \text{eller} \quad x = t^3 + c\frac{1}{t}\ , \quad c \in \mathbb{R}$$

(idet det naturligvis er ligegyldigt, om vi erstatter c med $-c$) .

Man ser, at løsninger, der svarer til et $c \neq 0$, går mod $+\infty$ eller $-\infty$ for $x \to 0$. Ud over disse løsninger (og restriktioner af dem) har den givne ligning den ene løsning $x = t^3$ på $\mathbb{R}$ (og restriktioner af den). Der går altså gennem ethvert punkt (t,x) med $t \neq 0$ og gennem $(0,0)$ een løsning, medens der ikke går nogen løsning gennem et punkt $(0,x)$ med $x \neq 0$. Man kunne naturligvis let have gættet løsningerne $x = t^3 + c\frac{1}{t}$ på $]0,+\infty[$ og $]-\infty,0[$ og derefter af punkt 2 i bemærkningen ovenfor sluttet, at der ikke er andre løsninger.



EKSEMPEL. <u>Radioaktivt henfald</u>. Hvis x betegner mængden af et radioaktivt stof til tiden t , vil mængden af stof, der henfalder i tidsintervallet $[t,t+dt]$ være proportional med x og dt . Proportionalitetsfaktoren λ kaldes <u>henfaldskonstanten</u>. Udtrykt i præcis form betyder dette, at x tilfredsstiller differentialligningen



$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x ,$$

hvis løsninger er funktionerne

$$x = f(t) = c\, e^{-\lambda t} .$$

Man finder $f(0) = c$. Mængden $f(t)$ af stof til tiden t bestemmes altså ud fra mængden $f(0)$ af stof til tiden 0 ved ligningen $f(t) = f(0)e^{-\lambda t}$. Betegner T løsningen til ligningen $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$, altså $T = \frac{\log 2}{\lambda}$, ser man, at der for ethvert t gælder $f(t+T) = \frac{1}{2} f(t)$. Tallet T kaldes halveringstiden.

EKSEMPEL. I oktober 1947 blev en hollandsk kunstmaler, H. A. van Meegeran, dømt for at have fremstillet og solgt adskillige malerier som kunstværker fra det 17. århundrede, bl.a. fire billeder der tilsyneladende var malet af Vermeer. Blandt bevismaterialet fremlagdes at to af billederne indeholdt koboltblå, en farve der ikke kendtes i det 17. århundrede. Endvidere indeholdt malerierne en kunstharpiks af fenolformaldehydgruppen, som først blev opdaget i slutningen af det 19. århundrede.

Men navnlig om billedet "Disciple ved Emmaus" forblev meningerne stærkt delte, og det var først i 1967 ved en undersøgelse foretaget på Carnegie Mellon universitet i USA at spørgsmålet fandt sin endelige løsning.

Hvidt bly (Pb 210) er radioaktivt med en halveringstid på 22 år (se eksemplet ovenfor). Det er et pigment af stor betydning i kunstmaling. Det fremstilles af malme der indeholder uranisotoper og andre grundstoffer der opstår ved urans naturlige spaltning. En af de indgående isotoper er radium 226 med en halveringstid på 1600 år, hvoraf Pb 210 fremkommer ved en spaltningsproces hvis detaljer ikke er af betydning her. I malmens "naturtilstand" dannes derfor hele tiden Pb 210, men ved fremstillingen af farvestoffet fjernes det meste af den radium der opretholder tilstedeværelsen af Pb 210 og mængden af Pb 210 vil derfor falde.

Lader vi $x(t)$ betegne mængden af Pb 210 pr. gram almindeligt bly til tiden t og $r = r(t)$ den tilførte mængde Pb 210 fra henfald af Ra 226 pr. tidsenhed pr. gram almindeligt bly, til tiden t så er (jvf. eksemplet ovenfor).

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x + r \ ,$$

(hvor λ er henfaldskonstanten for Pb 210), der som løsning har

$$x(t) = c\, e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\, r(t)dt \ ,$$

hvor c er en konstant.

Uden nærmere kendskab til r kan vi ikke komme meget videre. Men da halveringstiden for Ra 226 er 1600 år og maleriet højst er ca. 400 år gammelt er der højst forsvundet

$$e^{-\frac{\log 2}{1600}\cdot 400} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

af det oprindelig tilstedeværende Ra 226, dvs. det forekommer rimeligt at antage at henfaldet til Pb 210 har kunnet foregå i jævn takt, altså at r kan antages konstant.

Heraf fås

$$x(t) = c\, e^{-\lambda t} + \frac{r}{\lambda} \ .$$

Lader vi t_0 betegne farvestoffets fremstillingstidspunkt får vi

$$x(t_0) = c\, e^{-\lambda t_0} + \frac{r}{\lambda}$$

således at $\left[x(t_0) - \frac{r}{\lambda}\right]e^{\lambda t_0} = c$, altså

$$x(t) = (x(t_0) - \frac{r}{\lambda})e^{-\lambda(t-t_0)} + \frac{r}{\lambda} \ . \qquad (*)$$

I denne formel er $\lambda = \frac{\log 2}{22}$, mens r er målt til 0,8. Men $x(t_0)$ er ikke kendt, så t_0 kan ikke beregnes direkte.

Imidlertid er Pb 210 i "naturtilstanden" som nævnt opstået ved spaltning af Ra 226 og befinder sig i råmalmene i en radioaktivt ligevægtstilstand, dvs. hvis $x(t)$ er mængden af Pb 210 pr. gram almindeligt bly og $R(t)$ dens tilførte mængde Pb 210 fra henfald af Ra 226 pr. tidsenhed pr. gram bly, da er ligningen for henfald af Pb 210 <u>før</u> farvestoffets fremstilling

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x + R$$

og ligevægtstilstanden ytrer sig ved $\frac{dy}{dt} = 0$, altså

$$R(t) = \lambda x(t) \ , \quad t \le t_0 \ .$$

Specielt fås at $x(t_0) = \frac{R(t_0)}{\lambda}$.

Målinger viser, at R varierer med malmtypen, men som argumenteret ovenfor med r kan tidsafhængigheden negligeres. Vi kan derfor antage, at $R(t_0)$ er af samme størrelsesorden som nutidige målinger angiver, d.v.s. $0 < R(t_0) < 200$. Heraf fås at

$$0 < x(t_0) < \frac{200 \cdot 22}{\log 2} .$$

Antag nu at "Disciple ved Emmaus" er ca. 400 år gammelt. Så fås af (*):

$$\lambda x = (\lambda x(t_0) - r)e^{-\lambda \cdot 400} + r = \lambda x(t_0)e^{-400\,\lambda} + r(1 - e^{-400\,\lambda}) ,$$

altså

$$\lambda x < \frac{200 \cdot 22}{\log 2} \cdot e^{-400 \frac{\log 2}{22}} + 0{,}8$$

idet vi vurderer $1 - e^{-400\,\lambda}$ op til 1. Heraf fås at

$$\lambda x < \frac{4400}{\log 2} \cdot 2^{-20} + 0{,}8 .$$

Men målinger viser at $\lambda x = 8{,}5$, altså mindst 10 gange den værdi der beregnes på grundlag af antagelsen om at farvestoffet i maleriet er ca. 400 år gammelt. Vi må konkludere at "Disciple ved Emmaus" er et falskneri.

Lineær differentialligning af anden orden. Vi betragter en normeret lineær differentialligning af anden orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = q(t) ,$$

hvor $p_0, p_1, q\colon I \to \mathbb{C}$ er kontinuerte funktioner. Der findes ingen formel, hvorved bestemmelsen af løsningerne til en sådan ligning kan reduceres til bestemmelse af stamfunktioner for funktioner dannet ud fra funktionerne p_0, p_1, q. Vi vil imidlertid vise, at hvis vi kender en nulpunktsfri løsning $\Phi\colon I \to \mathbb{C}$ til den tilsvarende homogene ligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = 0 ,$$

kan bestemmelsen af samtlige løsninger til den oprindelige ligning ske ved bestemmelse af stamfunktioner. For at vise dette sætter vi i den oprindelige ligning $x = \Phi \cdot y$. Idet Φ er en C^2-funktion, og $\Phi(t) \neq 0$ for alle $t \in I$, svarer herved til enhver C^2-funktion $y = \psi(t) : I \to \mathbb{C}$ en C^2-funktion $x = \Phi(t)\psi(t)$, og enhver C^2-funktion $x = \varphi(t) : I \to \mathbb{C}$ fremkommer på denne måde (nemlig ved at vælge $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\Phi(t)}$). Ved udregning fås

$$x'' + p_1 x' + p_0 x = \Phi'' y + 2\Phi' y' + \Phi y'' + p_1 \Phi' y + p_1 \Phi y' + p_0 \Phi y$$
$$= \Phi y'' + (2\Phi' + p_1 \Phi) y' \quad .$$

Funktionen $x = \varphi(t) = \Phi(t)\psi(t)$ er altså løsning til den oprindelige ligning, hvis og kun hvis funktionen $y = \psi(t)$ er løsning til ligningen

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2\Phi'(t)}{\Phi(t)} + p_1(t) \frac{dy}{dt} = \frac{q(t)}{\Phi(t)} \quad .$$

Dette er imidlertid en normeret lineær differentialligning af første orden i $\frac{dy}{dt}$. Ved brug af den ovenfor fundne løsningsformel finder vi, at dens løsninger bestemmes ved

$$\frac{dy}{dt} = h_0(t) + c_1 h_1(t) , \quad c_1 \in \mathbb{C} ,$$

hvor funktionerne h_0 og h_1 er udtrykt ved stamfunktioner. Så er

$$y = H_0(t) + c_1 H(t) + c_2 , \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C} ,$$

hvor H_0 og H_1 er stamfunktioner til h_0 og h_1 . Samtlige løsninger til den oprindelige ligning er altså bestemt ved

$$x = \Phi(t) H_0(t) + c_1 \Phi(t) H \ (t) + c_2 \Phi(t) \ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} ,$$

altså på formen

$$x = \varphi_0(t) + c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) \ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad .$$

<u>Homogen ligning med konstante koefficienter</u>. Som et særlig vigtigt tilfælde betragter vi den homogene ligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

med konstante koefficienter $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$. Her er $I = \mathbb{R}$.

Ved indsætning ses, at $x = e^{\lambda t}$, hvor $\lambda \in \mathbb{C}$, er løsning, hvis og kun hvis λ er rod i andengradsligningen.

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 .$$

Lad denne have rødderne λ_1 og λ_2 (hvor eventuelt $\lambda_1 = \lambda_2$). Vi kan da anvende den ovenstående metode med $\Phi(t) = e^{\lambda_2 t}$. Idet vi sætter $x = \Phi \cdot y$ får vi ligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (2\lambda_2 + a_1)\frac{dy}{dt} = 0 .$$

Da $\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1$, har vi $2\lambda_2 + a_1 = \lambda_2 - \lambda_1$. Ligningen lyder altså

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{dy}{dt} = 0 .$$

Dens løsninger bestemmes ved

$$\frac{dy}{dt} = c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} , \quad c_1 \in \mathbb{C} .$$

Undersøgelsen grener sig nu i to tilfælde:

1) To forskellige rødder λ_1 og λ_2. Vi får da

$$y = \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} .$$

Løsningerne til den oprindelige ligning bestemmes da (idet vi erstatter $\frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ med c_1) ved

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} , \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C} .$$

2) En dobbeltrod λ. Vi får da

$$y = c_1 t + c_2 , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} .$$

Løsningerne til den oprindelige ligning bestemmes da ved

$$x = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} .$$

<u>Reelle koefficienter</u>. Hvis koefficienterne a_0, a_1 er reelle, foreligger følgende muligheder:

1a) To forskellige reelle rødder λ_1 og λ_2. Løsningsformlen $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ giver da, som man let indser, de reelle løsninger for $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1b) To konjugerede imaginære rødder $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ og $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Løsningsformlen kan da skrives

$$x = c_1 e^{\alpha t}(\cos \beta t + \sin \beta t) + c_2 c^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t)$$
$$= (c_1 + c_2)e^{\alpha t} \cos \beta t + i(c_1 - c_2)e^{\alpha t} \sin \beta t .$$

Når (c_1, c_2) gennemløber $\mathbb{C}^2$, gennemløber $((c_1+c_2), i(c_1-c_2))$ også $\mathbb{C}^2$. Løsningsformlen kan derfor også skrives

$$x = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} .$$

De reelle løsninger fås da, som man let indser, for $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Sættes $(c_1, c_2) = (r \sin \varphi, r \cos \varphi)$, fås de reelle løsninger på formen

$$x = re^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) , \quad r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} , \quad \varphi \in \mathbb{R} .$$

2) En reel dobbeltrod λ. Løsningsformlen $x = c_1 te^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}$ giver da, som man let indser, de reelle løsninger for $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

<u>Inhomogen ligning med konstante koefficienter</u>. <u>"Gættemetoden"</u>. For en inhomogen ligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = q(t)$$

med konstante koefficienter $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ kan man naturligvis ligesom i tilfældet $q = 0$ anvende den ovenstående metode med $\Phi(t) = e^{\lambda_2 t}$. Idet vi sætter $x = \Phi \cdot y$, får vi ligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{dy}{dt} = q(t)e^{-\lambda_2 t} ,$$

hvis løsninger kan opskrives. Regningerne bliver dog selv for simple valg af funktionen q ofte ret lange. Da vi kender løsninger til den til den oprindelige ligning svarende homogene ligning og ved, at alle løsninger til den inhomogene ligning fås ved til en løsning φ_0 til ligningen at addere løsningerne til den homogene ligning, drejer det sig blot om at finde en enkelt løsning φ_0 til den inhomogene ligning, og dette kan man ofte opnå ved gætning. Hvis $q(t)$ er en af følgende former

1) et polynomium i t, 2) $a\,e^{kt}$, 3) $a \cos kt + b \sin kt$,

eller er dannet ved addition og multiplikation af sådanne funktioner indsætter man en funktion, der er af samme type som $q(t)$, men hvor de enkelte led er forsynet med ubekendte koefficienter, og prøver at tilpasse koefficienterne således, at ligningen tilfredsstilles.

EKSEMPEL. For ligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2t^2 + 3$$

indsætter man $x = at^2 + bt + c$ og får

$$2at^2 + (2b-6a)t + (2c-3b+2a) = 2t^2 + 3 .$$

Funktionen er altså løsning hvis $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$. Da ligningen $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ har rødderne $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$, er samtlige løsninger til differentialligningen bestemt ved

$$x = t^2 + 3t + 5 + c_1e^t + c_2e^{2t} , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} .$$

EKSEMPEL. For ligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 3x = -5 \sin t$$

indsætter man $x = a \cos t + b \sin t$ og får

$$(2a+b)\cos t + (-a+2b)\sin t = -5 \sin t .$$

Funktionen er altså løsning, hvis $a = 1$, $b = -2$. Da ligningen $\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$ har rødderne $\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{11}}{2}$, er samtlige løsninger til differentialligningen bestemt ved

$$x = \cos t - 2\sin t + c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{11}}{2}\, t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{11}}{2}\, t\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}\,.$$

EKSEMPEL. For ligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos t$$

svigter gættemetoden. Man skulle efter metoden forsøge med en funktion af formen $a\cos t + b\sin t$, men enhver sådan funktion er løsning til den homogene ligning.

Vi anvender derfor her den almene metode. Ligningen $\lambda^2 + 1 = 0$ har rødder $\lambda_1 = i$ og $\lambda_2 = -i$. Vælges $\Phi(t) = e^{-it}$, og sættes $x = \Phi \cdot y$ fås ligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2i\,\frac{dy}{dt} = \cos t \cdot e^{it} = \frac{e^{2it} + 1}{2}\,.$$

Løsningsformlen for en differentialligning af første orden giver

$$\frac{dy}{dt} = e^{2it} \int e^{-2it}\, \frac{e^{2it} + 1}{2}\, dt + c_1 e^{2it}$$

$$= \frac{1}{2}\, t\, e^{2it} - \frac{1}{4i} + c_1 e^{2it}\,, \qquad c_1 \in \mathbb{C}\,,$$

hvoraf (med ændret betydning af c_1)

$$y = \frac{1}{4i}\, t\, e^{2it} - \frac{1}{4i}\, t + c_1 e^{2it} + c_2\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Altså er samtlige løsninger til differentialligningen bestemt ved

$$x = e^{-it} y = \frac{1}{2}\, t\, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} + c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}\,,$$

eller

$$x = \frac{1}{2}\, t \sin t + c_1 \cos t + c_2 \sin t\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}\,.$$

I stedet for at vælge $\Phi(t) = e^{-it}$ kunne vi f.eks. have valgt

$\Phi(t) = \cos t$ (nulpunkterne for $\cos t$ skader ikke, da de er isolerede). Regningerne bliver dog da besværlige.

EKSEMPEL. En partikels bevægelse på en ret linie. For en partikel, der kan bevæge sig på en ret linie, hvis punkter på sædvanlig måde fastlægges ved en koordinat (abscisse), er bevægelsen bestemt ved, at koordinaten x er en funktion af tiden t:

$$x = f(t) .$$

Det antages, at f er en C^2-funktion. Hastigheden og accelerationen til tiden t er $\frac{dx}{dt} = f'(t)$ og $\frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$. Ifølge I. Newtons anden lov (Philosophiæ naturalis principia mathematica, 1687) er kraften K til tiden t bestemt som produkt af partiklens masse m og accelerationen, altså

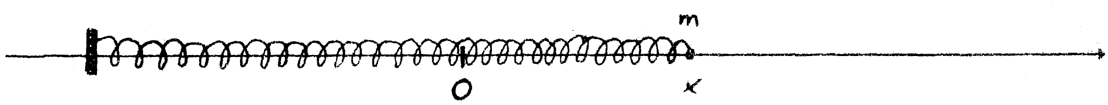
$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = K .$$

Tænkes kraften givet som funktion af tiden, stedet, og hastigheden, er bevægelsen altså løsning til en differentialligning. Er kraftloven af formen

$$K = a(t)x + b(t)\,\frac{dx}{dt} + c(t) ,$$

hvor a,b,c er kontinuerte funktioner af tiden, er talen om en lineær differentialligning af anden orden.

Harmonisk svingning. Partiklen antages fæstnet til en på linien fastspændt fjeder, således at den i



hvilestillingen er i begyndelsespunktet. Fjederkraften K er proportional med ændringen i fjederens længde og af modsat fortegn. Den er altså bestemt ved $K = -kx$, hver $k > 0$ er en konstant. Bevægelsen tilfredsstiller derfor differentialligningen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{eller} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \ ,$$

hvilket er en homogen lineær differentialligning af anden orden med konstante koefficienter. Ligningen $m\lambda^2 + k = 0$ har rødderne $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Vi sætter $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. De reelle løsninger er da bestemt ved

$$x = r\sin(\omega t+\varphi) \ , \quad r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \ , \ \varphi \in \mathbb{R} .$$

Idet vi ser bort fra tilfældet $r = 0$ (hvile), kaldes en sådan bevægelse en retlinet harmonisk svingning eller ren svingning med amplituden r . Bevægelsen har perioden $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, der angiver tiden for en fuld svingning (ↄ: frem og tilbage) og kaldes svingningstiden. Tallet ω kaldes den cykliske frekvens; det angiver antallet af svingninger pr. tidsinterval af længden 2π . Størrelsen $\omega t + \varphi$ kaldes fasen.

Bemærkelsesværdigt er, at svingningstiden $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ kun afhænger af systemets konstanter m og k , og altså er uafhængig af amplituden. Man udtrykker dette ved at sige, at svingningerne er isokrone eller ligetidige. Størrelserne T og ω kaldes også systemets egensvingningstid og cykliske egenfrekvens.

Dæmpet svingning. Det antages nu, at partiklens bevægelse hæmmes af en gnidningskraft, der er proportional med partiklens hastighed og modsat rettet denne. Foruden af fjederkraften $K_1 = -kx$ påvirkes partiklen altså af en gnidningskraft $K_2 = -a\frac{dx}{dt}$, hvor $a > 0$ er en konstant, og ialt altså af kraften $K = K_1 + K_2 = -kx - a\frac{dx}{dt}$. Bevægelsen tilfredsstiller da differentialligningen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\frac{dx}{dt} \quad \text{eller} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0 \ ,$$

hvilket atter er en homogen lineær differentialligning af anden orden med konstante koefficienter. Vi vil kun betragte det tilfælde, hvor gnidningen er lille, nærmere bestemt, hvor

$$a^2 < 4\,m\,k\,.$$

Dette er betingelsen for, at ligningen $m\lambda^2 + a\lambda + k = 0$ har imaginære rødder $\lambda = -\frac{a}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{a}{2m})^2}$. Vi sætter $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{a}{2m})^2}$. De reelle løsninger er da bestemt ved

$$x = r\,e^{-\frac{a}{2m}t}\sin(\omega t+\varphi)\;,\quad r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\;,\;\varphi \in \mathbb{R}\,.$$

Idet vi ser bort fra tilfældet $r = 0$ (hvile), kaldes en sådan bevægelse en <u>dæmpet svingning</u>. Størrelserne $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ω , og $\omega t + \varphi$ kaldes atter <u>svingningstiden</u>, den <u>cykliske frekvens</u>, og <u>fasen</u>. Man ser, at tidsafstanden mellem to på hinanden følgende passager af hvilestillingen er $\frac{1}{2}T$, og at T er tidsafstanden mellem to på hinanden følgende passager i samme retning af hvilestillingen. Hastigheden er bestemt ved

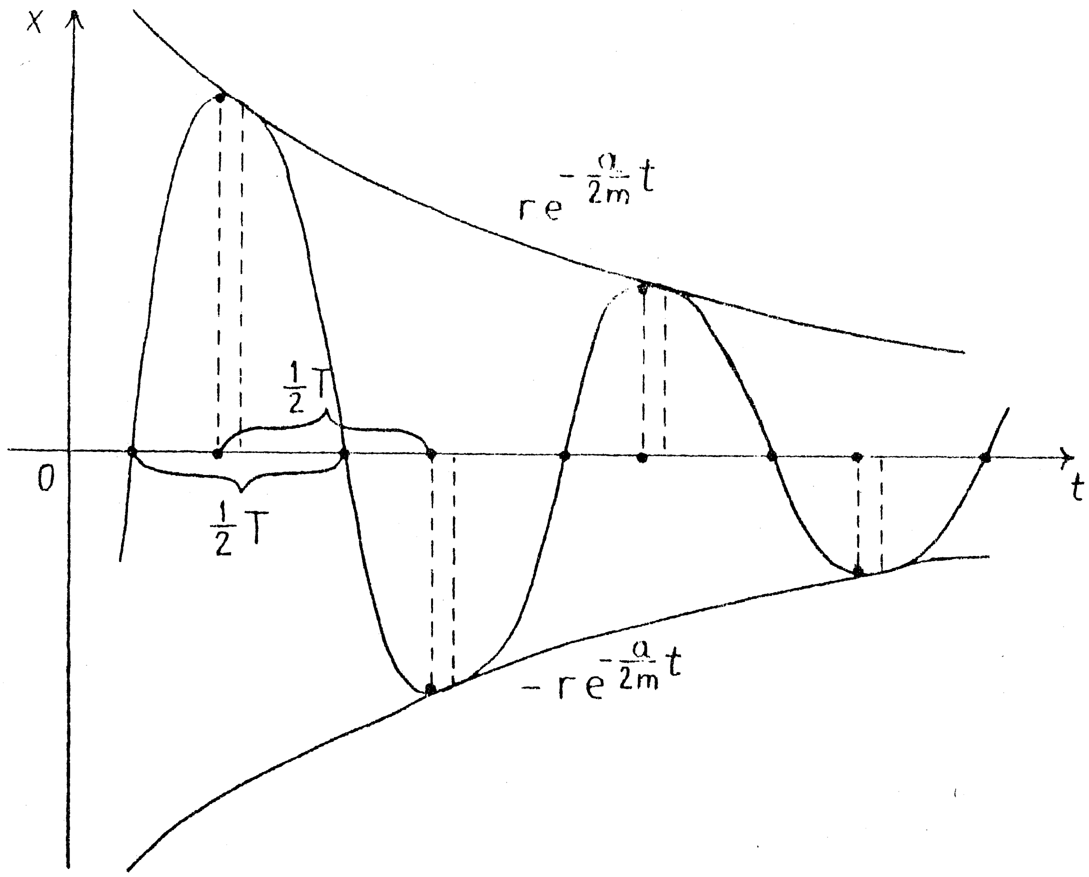
$$\frac{dx}{dt} = r\,e^{-\frac{a}{2m}t}[\omega\cos(\omega t+\varphi) - \frac{a}{2m}\sin(\omega t+\varphi)]\;.$$

Sættes $(\omega,-\frac{a}{2m}) = (r_1\sin\varphi_1,\, r_1\cos\varphi_1)$, har man $r_1 = \sqrt{\omega^2 + (\frac{a}{2m})^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, og følgelig

$$\frac{dx}{dt} = r\sqrt{\frac{k}{m}}\,e^{-\frac{a}{2m}t}\sin(\omega t+\varphi+\varphi_1)\;.$$

Heraf ses, at partiklen mellem to på hinanden følgende passager af hvilestillingen bevæger sig monotont til en yderstilling og monotont tilbage. Yderstillingerne er bestemt ved $\frac{dx}{dt} = 0$. Man ser, at tidsafstanden mellem to på hinanden følgende yderstillinger er $\frac{1}{2}T$, og at T er tidsafstanden mellem to på hinanden følgende yderstillinger til samme side. Tidsintervallet fra en passage af hvilestillingen til den påfølgende yderstilling er en konstant $< \frac{1}{4}T$.

Man ser, at svingningstiden T ved dæmpet svingning kun afhænger af systemets konstanter m , k , a . Ligesom ved harmonisk svingning siger man, at svingningerne er isokrone eller ligetidige. Størrelser-



ne T og ω kaldes atter systemets egensvingningstid og cykliske egenfrekvens.

EKSEMPEL. I en person med sukkersyge er legemet ude af stand til at forbrænde en normal indtagelse af kulhydrater. Dette skyldes et underskud af insulin. Sukkersyge diagnosticeres som regel med en glukose-tolerance test (GTT). En rimelig god fortolkningsmetode for GTT resultater blev udviklet i 1960'erne ved University of Minnesota. Man opstillede en matematisk model for blodets glukoseregulering med følgende forudsætninger:

1. Glukose er en energikilde for legemet og hvert individ har en optimal glukose koncentration i blodet. Store afvigelser fra den optimale koncentration har alvorlige konsekvenser.

2. Glukosekoncentrationen påvirkes af en række faktorer, bl.a. tilstedeværelse af diverse andre stoffer, f.eks. insulin, cortison, thyrozen, væksthormoner.

Den opstillede model er ganske simpel og fordrer kun nogle få blodprøver i løbet af en GTT. Man måler to koncentrationer, nemlig

i) G , glukoseindholdet i blodet

og

ii) H , netto hormonkoncentrationen.

H er, løst sagt, den samlede virkning af alle vigtige hormoner. Man mener at insulin forøger H , mens cortison mindsker H . Den grundlæggende model er da beskrevet ved

$$\frac{dG}{dt} = F_1(G,H) + J(t) \tag{1}$$

og

$$\frac{dH}{dt} = F_2(G,H) \ , \tag{2}$$

hvor F_1, F_2 er funktioner hvis form vi skal vende tilbage til, mens $J(t)$ angiver takten i tilførsel af glukose udefra.

Vi antager at G og H er i ligevægtstilstande G_0 og H_0 ved den fastende patients ankomst på hospitalet, altså

$$F_1(G_0,H_0) = F_2(G_0,H_0) = 0 \ .$$

Vi interesserer os mest for afvigelserne i G og H fra ligevægtstilstanden og sætter derfor

$$G = G_0 + g$$

$$H = H_0 + h \ ,$$

hvor g og h antages at være små i forhold til G_0 og H_0 . Indsættes i (1) og (2) fås

$$\frac{dg}{dt} = F_1(G_0+g,H_0+h) + J(t) = f_1(g,h) + J(t)$$

og

$$\frac{dh}{dt} = f_2(g,h) \ ,$$

med åbenbare betegnelsesskift.

Den væsentlige matematiske simplifikation ligger nu i en antagelse om at f_1 og f_2 er lineære:

$$\frac{dg}{dt} = -ag - bh + J(t) \tag{3}$$

$$\frac{dh}{dt} = -ch + eg \ . \tag{4}$$

De fire konstanter er alle positive med følgende begrundelser

$a > 0$ fordi $\frac{dg}{dt} < 0$ for $h = 0$ på grund af vævsoptagning af glukose fra blodet,

$b > 0$ fordi positivt h er tilbøjeligt til at sænke glukoseindholdet i blodet,

$c > 0$ fordi hormonkoncentrationen falder p.gr.a. hormonmetabolisme,

$e > 0$ fordi positivt g forårsager kirtelafsondring af hormoner, altså øget h.

Af (3) fås

$$h = \frac{1}{b}\left(-ag + J - \frac{dg}{dt}\right) ,$$

og derfor

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{b}\left(-a\frac{dg}{dt} + \frac{dJ}{dt} - \frac{d^2g}{dt^2}\right) ,$$

og indsættes disse to udtryk i (4) fås

$$-a\frac{dg}{dt} + \frac{dJ}{dt} - \frac{d^2g}{dt^2} = -c\left(-ag + J - \frac{dg}{dt}\right) + beg ,$$

hvoraf

$$\frac{d^2g}{dt^2} + (a+c)\frac{dg}{dt} + (ac+be)g = \frac{dJ}{dt} + cJ . \tag{5}$$

Her er højre siden identisk nul undtagen i den korte periode hvor tilførsel af glukose udefra finder sted. Lader vi $t = 0$ svare til afslutningen af denne tilførsel udefra har vi altså

$$\frac{d^2g}{dt^2} + (a+c)\frac{dg}{dt} + (ac+be)g = 0 \tag{6}$$

for $t > 0$.

Med $2\alpha = a + c$ og $\omega^2 = ac + be$ kan den tilsvarende andengradsligning skrives

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2 = 0 ,$$

der har rødderne

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} .$$

Hvis $\alpha^2 < \omega^2$ har (6) den almindelige løsning

$$g = g_0\, e^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\, t + \varphi)$$

hvor g_0 og φ er arbitrære konstanter. Heraf fås

$$G = G_0 + g_0 e^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\; t + \varphi) \;.$$

Af de fem ubekendte størrelser

$$G_0 \;,\; g_0 \;,\; \alpha \;,\; \omega \;,\; \varphi$$

kan G_0 naturligvis måles ved GTT's begyndelse. De øvrige størrelser kan i princippet bestemmes ved måling af G til fire forskellige tidspunkter.

Undersøgelser har vist at selv små fejl i måling af G kan forårsage store fejl i værdien af α, hvorimod størrelsen $\sqrt{\omega^2-\alpha^2}$ viser sig at være meget robust over for experimentelle fejl ved G. Det er derfor $\sqrt{\omega^2-\alpha^2}$ der benyttes ved fortolkning af GTT målingerne.

Bemærk, at T_0 er et mål for frekvensen af den cykliske variation af G. Det har vist sig at $T_0 < 4$ timer angiver det normale individ, mens T_0 væsentlig større end 4 timer er tegn på mild sukkersyge.

Bemærk, at hvis $\alpha^2 > \omega^2$ fås løsninger af formen

$$g = g_0 e^{(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-\omega^2})t} \;,$$

altså exponentielt henfald af g. Dette svarer ikke til de experimentelle erfaringer.

<u>Separation af de variable</u>. Ofte møder man (evt. ikke-lineære) differentialligninger $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$, hvor f er af en sådan form at man kan isolere de to variable t og x på hver sin side af lighedstegnet. Ved integration af venstresiden og højresiden hver for sig kan løsninger beregnes. Denne metode, der kaldes <u>separation af de variable</u>, illustrerer vi først med et eksempel, og retfærdiggør dernæst i Sætning 5.1.

EKSEMPEL. Vi søger alle reelle løsninger til ligningen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$$

i halvplanen $t > 0$. Antag $x(t)$ er en løsning. Så er $x'(t) = \frac{t}{x(t)}$ og derfor $x(t)x'(t) = t$. Da $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\, x(t)^2\right] = x(t)x'(t)$, fås $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\, x(t)^2\right] = t$, og ved integration heraf $\frac{1}{2}\, x(t)^2 = \frac{1}{2}\, t^2 + c_1$ eller $x(t)^2 = t^2 + c$. Da venstresiden er positiv, ses det at valget af c influerer på definitionsintervallet for $x(t)$: x er defineret for $t^2 > \max(0,-c)$. Heraf fås

$$x(t) = \pm\sqrt{t^2+c} ,$$

hvoraf vi slutter, at da x er kontinuert og forskellig fra nul må vi vælge det samme fortegn for alle værdier af t (gennemtænk begrundelsen herfor!). Altså må vi have $x(t) = \sqrt{t^2+c}$ eller $x(t) = -\sqrt{t^2+c}$. Differentiation viser, at begge disse funktioner løser ligningen. Af regningerne følger at vi har fundet samtlige løsninger.

Bemærk at løsningsmetoden <u>formelt</u> forløb på følgende måde:

$$\begin{aligned} & \frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} \\ \Rightarrow\ & xdx = tdt \\ \Rightarrow\ & \int xdx = \int tdt \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}t^2 + c_1 \\ \Rightarrow\ & x^2 = t^2 + c \\ \Rightarrow\ & x = \pm\sqrt{t^2+c} . \end{aligned}$$

At den formelle argumentation ovenfor er foretaget på et korrekt grundlag er indholdet af

<u>SÆTNING 5.1</u>. Lad $f: I \to \mathbb{R}$ og $g: J \to \mathbb{R}$ være kontinuerte funktioner defineret på åbne intervaller I, J . Antag $g(t) \neq 0$ for alle $t \in J$. Lad $(t_0, x_0) \in I \times J$ og betragt differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{g(x)} , \quad \text{for} \quad (t,x) \in I \times J . \tag{7}$$

Så er enhver løsning $t \to x(t)$ til (7) for hvilken $x(t_0) = x_0$ af formen

$$x(t) = (G^{-1} \circ F)(t) ,$$

hvor $G(y) = \int_{x_0}^{y} g(t)dt$ og $F(y) = \int_{t_0}^{y} f(t)dt$.

BEVIS. Da g er forskellig fra nul i hele J og kontinuert, er g enten positiv eller negativ i J og G er derfor strengt monoton. Heraf fås at G^{-1} er defineret (og ligesom G differentiabel).

Betragt først $x(t) = G^{-1}(F(t))$, defineret på mængden $F^{-1}(G(J))$. Lad $t \in F^{-1}(G(J))$ og vælg s så $F(t) = G(s)$. Så er

$$x'(t) = \frac{1}{G'(s)} F'(t) = \frac{f(t)}{g(G^{-1}(F(t)))} = \frac{f(t)}{g(x(t))},$$

og da $x(t_0) = G^{-1}(F(t_0)) = G^{-1}(0) = x_0$, er x en løsning til (7) der opfylder at $x(t_0) = x_0$.

Antag omvendt at x er en reel funktion defineret på et åbent interval K indeholdende t_0, for hvilken $x(t_0) = x_0$ og for hvilken $x'(t) = \frac{f(t)}{g(x(t))}$ for alle $t \in K$. Så er $g(x(t))x'(t) = f(t)$ og da

$$(G \circ x)'(t) = G'(x(t))x'(t) = g(x(t))x'(t) = f(t) = F'(t)$$

må der gælde at $G \circ x = F$ på K (idet både $(G \circ x)(t_0)$ og $F(t_0)$ er nul). Altså er

$$x(t) = G^{-1}(F(t)), \quad \text{for } t \in K. \qquad \square$$

BEMÆRKNING. I eksemplet ovenfor kan vi for $t > 0$ og $x > 0$ lade $f(t) = t$ og $g(x) = x$, mens vi for $t > 0$ og $x < 0$ kan lade $f(t) = -t$ og $g(x) = -x$.

I første tilfælde er $F(t) = \frac{1}{2}t^2$ og $G(x) = \frac{1}{2}x^2$ så $G^{-1}(y) = \sqrt{2y}$ og løsningen derfor

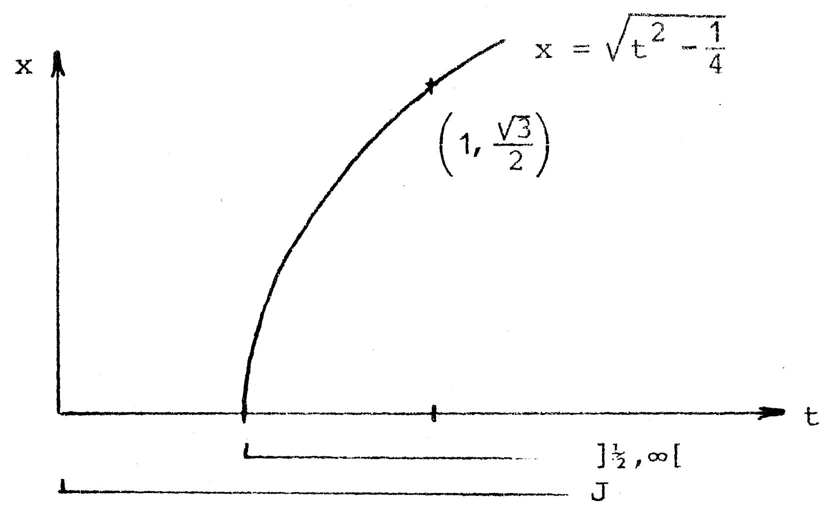
$$x(t) = \sqrt{t^2+c}$$

I andet tilfælde er $F(t) = -\frac{1}{2}t^2$ og $G(x) = -\frac{1}{2}x^2$, så $G^{-1}(y) = -\sqrt{2y}$ og vi får

$$x(t) = -\sqrt{t^2+c}\ .$$

BEMÆRKNING. Det størst mulige definitionsinterval for løsningen $x(t) = G^{-1}(F(t))$ er åbenbart det største interval i J omfattende

t_0 som er indeholdt i mængden $F^{-1}(G(J))$. Vi skal i næste kapitel komme nærmere ind på disse såkaldt <u>maksimale</u> løsninger.



<u>Løsning ved potensrækker</u>. I forbindelse med anden ordens lineære differentialligninger

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \ , \tag{8}$$

hvor a,b,c er polynomier viser det sig ofte muligt at finde løsninger $x(t)$, givet ved en potensrække. Ideen er at vi <u>antager</u> at en løsning $x(t)$ er givet ved $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, hvor rækkens konvergensradius ρ antages positiv. Da

$$x'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}t^n \ , \quad x''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n \tag{9}$$

også har konvergensradius ρ (jvf. kap.V), kan vi ved indsættelse i (7) få en potensrækkefremstilling for nulfunktionen, altså en potensrække hvor alle koefficienter er nul. Herved opnår vi <u>rekursionsformler</u> for de ukendte koefficienter $a_0, a_1, \ldots$.

Vi illustrerer metoden med et par eksempler.

EKSEMPEL. Vi søger en løsning til differentialligningen

$$(1-t^2)x'' - 2t\,x' + 2x = 0 \ , \quad \text{for} \ |t| < 1 \ . \tag{10}$$

Hvis $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ (med positiv konvergensradius) skal være en løsning, må der ifølge (9) gælde at

$$0 = (1-t^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - 2t\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n ,$$

hvilket efter omdøbning af visse indices kan reduceres til

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)((n+1)a_{n+2} - (n-1)a_n)t^n .$$

Af identitetssætningen for potensrækker følger da at

$$a_{n+2} = \frac{n-1}{n+2}a_n , \quad n = 0,1,2,\dots .$$

Vi ser at hvis a_0 , a_1 er kendt, så giver rekursionsformlerne os alle øvrige koefficienter, idet

$$a_3 = 0 \quad \text{og derfor} \quad a_5 = a_7 = \dots = 0 ,$$

mens vi for n lige får at

$$a_n = \frac{n-3}{n-1}a_{n-2} = \frac{n-3}{n-1}\,\frac{n-5}{n-3}a_{n-4} = \dots = -\frac{1}{n-1}a_0 ,$$

altså at

$$x(t) = a_0 + a_1 t - a_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n-1} .$$

Denne løsning har åbenbart $\rho = 1$ og er altså defineret på $]-1,1[$.

(Imidlertid kan vi i dette tilfælde føre regningerne lidt videre, idet (jvf. kap. V)

$$x(t) = a_0 + a_1 t - a_0 t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1} = a_0 + a_1 t - a_0 t\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t} \quad \text{for} \quad |t| < 1$$

$$= a_0 + a_1 t - \frac{a_0}{2}\,t\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| .$$

Dette udtryk har mening for alle $t \neq \pm 1$ og for $|t| > 1$ får vi $x(t) = a_0 + a_1 t - \frac{a_0}{2}\,t\log\frac{1+t}{t-1}$. Ved differentiation heraf og indsættelse kan man direkte konstatere at vi også har fundet en løsning til (10) for $t < -1$, hhv. $t > 1$.)

Bemærk iøvrigt også at hvis vi specificerer t_0 og værdierne $x(t_0)$, $x'(t_0)$ da vil $x(t)$ være entydig bestemt (i det af intervallerne $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,\infty[$ som t_0 tilhører).

EKSEMPEL. Hvis ligningen

$$x'' + tx' + x = 0 \tag{11}$$

som løsning har en funktion $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, hvor potensrækken har positiv konvergensradius, da vil vi ved indsættelse af udtrykkene (9) få at

$$0 = a_0 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)[a_n + (n+2)a_{n+2}]t^n ,$$

således at $a_0 + 2a_2 = 0$ og

$$a_{n+2} = -\frac{1}{n+2} a_n , \quad n = 1,2,\ldots .$$

Vi konstaterer også her at a_0 og a_1 kan vælges frit og at a_n $(n \geq 2)$ derefter er entydig bestemt.

Sættes først $a_0 = 1$ og $a_1 = 0$ fås at a_n for n ulige er nul, mens vi for $n = 2k$, $k = 0,1,\ldots$ får

$$a_{2k+2} = -\frac{1}{2k+2} a_{2k} = \frac{1}{2(k+1)} \cdot \frac{1}{2\cdot k} a_{2k-2} = \ldots = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} a_0 = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}$$

således at

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\, n!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!} = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) , \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R} .$$

Sættes dernæst $a_0 = 0$ og $a_1 = 1$ får vi for $x(t)$ følgende udtryk

$$a_{2k} = 0 , \quad k = 0,1,\ldots$$

$$a_{2k+1} = \frac{-1}{2k+1} a_{2k-1} = \ldots = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)\ldots 3.1} a_1$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} 2^k k!}{(2k+1)!} ,$$

således at

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^t k!}{(2k+1)!} t^{2k+1} .$$

Denne række har også konvergensradius $\rho = \infty$. Vi skal i næste kapitel se at enhver løsning til (11) er en linearkombination af de to her fundne.

Iøvrigt kunne vi også have fundet samtlige løsninger til (11) udfra den først fundne løsning $\exp(-\frac{t^2}{2})$ (der jo er nulpunktsfri på $\mathbb{R}$) ved hjælp af den metode der står beskrevet i dette kapitels afsnit om anden ordensligninger (s. VI.38).

§6. Kurveintegral. Stamfunktionsproblemet i $\mathbb{R}^k$.

Kurveintegral. Først et eksempel, det er bekvemt at have i tankerne.

EKSEMPEL. Føres en partikel retliniet fra et punkt A til et punkt B i rummet under påvirkning af en konstant kraft $\underline{k}$, udfører denne arbejdet $\underline{k}\cdot\underline{AB}$. Det er ikke underforstået, at $\underline{k}$ er resultanten; der kan virke andre kræfter.

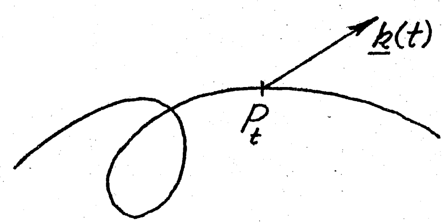
Føres partiklen langs en kurve γ og/eller varierer kraftvektoren $\underline{k}$, udtrykkes arbejdet ved et kurveintegral

$$\int_\gamma \underline{k}\cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_1} k_1 dx + k_2 dy + k_3 dz ,$$

der løst sagt er en sum af bidrag fra små kurvestykker. Det sidste udtryk refererer til sædvanlige retvinklede koordinater.

Den præcise definition af kurveintegral gives nedenfor. For simpelheds skyld betragter vi kurveintegral i planen. Alt forløber dog ganske tilsvarende i rummet og ligeså i $\mathbb{R}^k$ for vilkårligt $k \in \mathbb{N}$.

Idet en kurve γ i planen tænkes givet ved en parameterfremstilling $t \to (x(t),y(t))$, $t \in I$, beskrives et vektorfelt langs γ ved en vektorfunktion $t \to \underline{k}(t) = (f(t),g(t))$. For hvert $t \in I$ tænker man sig gerne



vektoren $\underline{k}(t)$ afsat fra kurvepunktet $P_t(x(t),y(t))$. Det forlanges ikke, at $\underline{k}(t_1) = \underline{k}(t_2)$, når $P_{t_1} = P_{t_2}$ er et dobbeltpunkt på kurven.

Efter overgang til en ny parameter u ved et parameterskift $t = \varphi(u)$, $u \in J$, altså overgang til parameterfremstillingen $u \to (x(\varphi(u)),y(\varphi(u)))$, $u \in J$, beskrives vektorfeltet langs γ ved vektorfunktionen $u \to \underline{k}(\varphi(u)) = (f(\varphi(u)),g(\varphi(u)))$.

Et vektorfelt $(x,y) \to \underline{k}(x,y)$ defineret i en mængde A i planen giver naturligvis anledning til et vektorfelt langs enhver kurve γ, der forløber i A, nemlig feltet beskrevet ved $t \to \underline{k}(x(t),y(t))$, $t \in I$, når $t \to (x(t),y(t))$, $t \in I$, er en parameterfremstilling for γ.

SÆTNING 6.1. Lad γ være en C^1-kurve i planen givet ved en parameterfremstilling $t \to (x(t),y(t))$ med begrænset, afsluttet parameterinterval $[a,b]$. Kurvepunktet $(x(t),y(t))$ kaldes også $P = P_t$, medens (sted)vektoren betegnes $\underline{r} = \underline{r}(t)$. Lad endvidere $t \to \underline{k}(t) = (f(t),g(t)) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [a,b]$, være en kontinuert vektorfunktion.

Der findes da et og kun et tal $I \in \mathbb{R}$ med følgende egenskab:

Til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at

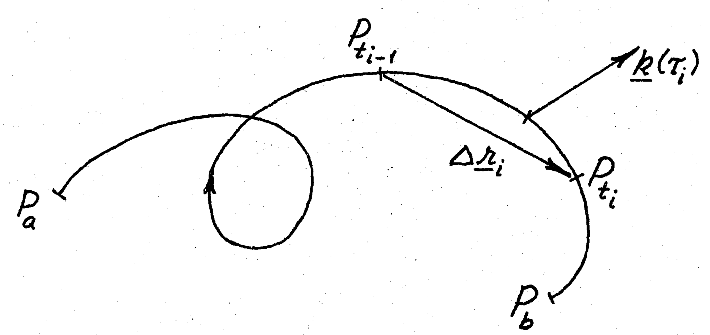
$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} \underline{k}(\tau_i) \cdot \Delta\underline{r}_i \right| < \varepsilon$$

for enhver inddeling $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ af $[a,b]$ med indskudte punkter τ_i, $t_{i-1} \leqq \tau_i \leqq t_i$, hvor

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} < \delta , \quad i = 1,\ldots,n ,$$

dvs. hvor finheden $\max\{\Delta t_i \mid i=1,\ldots,n\} < \delta$.

Her er $\Delta\underline{r}_i = \underline{r}(t_i) - \underline{r}(t_{i-1})$ vektoren fra kurvepunktet $(x(t_{i-1}),y(t_{i-1}))$ til kurvepunktet $(x(t_i),y(t_i))$, og $\underline{k}(\tau_i)\cdot\Delta\underline{r}_i$ er skalarproduktet af de to vektorer.



DEFINITION. Det ved Sætning 6.1 bestemte tal I kaldes kurveintegralet langs γ af vektorfeltet $\underline{k}$ og betegnes

$$\int_\gamma \underline{k}\cdot d\underline{r} \quad \text{eller} \quad \int_\gamma f dx + g dy .$$

Kurveintegralet er knyttet til γ som orienteret kurve: Ved et strengt voksende parameterskift $t = \varphi(u)$, $u \in [c,d]$, fås de samme approksimerende summer og dermed den samme grænseværdi I, medens vi får et fortegnsskift, når φ er strengt aftagende. Lad vi $-\gamma$ betegne kurven med modsat gennemløb, gælder altså

$$\int_{-\gamma} \underline{k}\cdot d\underline{r} = -\int_{\gamma} \underline{k}\cdot d\underline{r}\ .$$

BEVIS for Sætning 6.1. Det er klart, at der er højst et tal I med den ønskede egenskab. Hvis nemlig I_1 og I_2 begge har egenskaben, må der for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælde $|I_2 - I_1| < \varepsilon$, da I_1 og I_2 jo kan approksimeres med nøjagtigheden $\frac{\varepsilon}{2}$ af en og samme sum.

Problemet er således eksistensen. Først vil vi ved en løs overvejelse søge en kandidat til tallet I. Opfattes $\underline{r}'(\tau_i)\Delta t_i$ som en approksimation til $\Delta\underline{r}_i$, føres man til at betragte summer

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{k}(\tau_i)\cdot\underline{r}'(\tau_i)\Delta t_i\ .$$

Det er middelsummer af det sædvanlige integral

$$\int_a^b \underline{k}(t)\cdot\underline{r}'(t)\,dt = \int_a^b \left(f(t)\frac{dx}{dt} + g(t)\frac{dy}{dt}\right)dt\ ,$$

som derfor er et nærliggende bud på I. (Da integranden er en kontinuert funktion fra $[a,b]$ til $\mathbb{R}$, har integralet mening.)

Nu bevis for, at tallet

$$I = \int_a^b \underline{k}(t)\cdot r'(t)\,dt$$

har den i sætningen nævnte egenskab. Ved denne lejlighed benytter vi den euklidiske norm $\|(a,b)\|_2 = \sqrt{a^2+b^2}$ af vektorer, da det er bekvemt ved vurdering af skalarprodukter (Cauchy/Schwarz' ulighed).

Vi udnytter, at $\underline{k}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ er uniformt kontinuert; det følger af, at koordinatfunktionerne $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ og $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ er det ifølge hovedsætningen Sætning 3.1 s.II.51. Til et vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes derfor et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at

$$\|\underline{k}(t_2)-\underline{k}(t_1)\|_2 < \varepsilon/\ell$$

for alle $t_1, t_2 \in [a,b]$ med $|t_2 - t_1| < \delta$. Her betegner ℓ kurvens længde.

For enhver inddeling $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ af $[a,b]$ med indskudte punkter τ_i, $t_{i-1} \leqq \tau_i \leqq t_i$, hvor $t_i - t_{i-1} < \delta$, $i=1,\ldots,n$, gælder da

$$\left|\int_a^b \underline{k}(t)\cdot\underline{r}'(t)\,dt - \sum_{i=1}^n \underline{k}(\tau_i)\cdot\Delta\underline{r}_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underline{k}(t)\cdot\underline{r}'(t)\,dt - \sum_{i=1}^n\left(\underline{k}(\tau_i)\cdot\int_{t_{i-1}}^{t_i}\underline{r}'(t)\,dt\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\underline{k}(t)-\underline{k}(\tau_i))\cdot\underline{r}'(t)\,dt\right|$$

$$\leqq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |(\underline{k}(t)-\underline{k}(\tau_i))\cdot\underline{r}'(t)|\,dt$$

$$\leqq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\underline{k}(t)-\underline{k}(\tau_i)\|_2\|\underline{r}'(t)\|_2\,dt$$

$$\leqq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\varepsilon}{\ell}\|\underline{r}'(t)\|_2\,dt = \frac{\varepsilon}{\ell}\int_a^b \|\underline{r}'(t)\|_2\,dt = \varepsilon\,. \qquad \square$$

Af beviset for Sætning 6.1 og definitionen på kurveintegral fremgår

SÆTNING 6.2. Med forudsætninger og betegnelser som i Sætning 6.1 gælder

$$\int_\gamma \underline{k}\cdot d\underline{r} = \int_a^b \underline{k}(t)\cdot\frac{d\underline{r}}{dt}\,dt\,,$$

anderledes skrevet

$$\int_\gamma f dx + g dy = \int_a^b (f(t)\frac{dx}{dt} + g(t)\frac{dy}{dt})\,dt\,.$$

Udregning af et kurveintegral sker i almindelighed ved Sætning 6.2 eller evt. Sætning 6.7 nedenfor, ikke ved brug af definitionen.

At kurveintegralet er en grænseværdi for summer som beskrevet i Sætning 6.1 er derimod baggrunden for dets brug i mange anvendelser, eksempelvis som udtryk for en krafts arbejde. (Eksempel s.VI.57).

Undertiden kan man dog støtte sig direkte til definitionen, hvad vi straks skal illustrere.

SÆTNING 6.3. Med forudsætninger og betegnelser som i Sætning 6.1 gælder

$$\left|\int_\gamma \underline{k}\cdot d\underline{r}\right| = \left|\int_\gamma f dx + g dy\right| \leqq \ell \max_\gamma \|\underline{k}\|_2 = \ell \max_\gamma \sqrt{f^2+g^2} ,$$

hvor ℓ er længden af kurven γ.

BEVIS. For enhver approksimerende sum $\sum_{i=1}^{n} \underline{k}(\tau_i)\cdot\Delta\underline{r}_i$ har vi

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \underline{k}(\tau_i)\cdot\Delta\underline{r}_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} |\underline{k}(\tau_i)\cdot\Delta\underline{r}_i| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|\underline{k}(\tau_i)\|_2\|\Delta\underline{r}_i\|_2$$

$$\leqq \left(\max_\gamma\|\underline{k}\|_2\right)\sum_{i=1}^{n}\|\Delta\underline{r}_i\|_2 \leqq \left(\max_\gamma\|\underline{k}\|_2\right)\ell .$$

Følgelig er $\left|\int_\gamma \underline{k}\cdot d\underline{r}\right| \leqq (\max_\gamma\|k\|_2)\,\ell$.

I det følgende møder vi kun den situation, at vektorfeltet langs kurven γ fremgår af et givet kontinuert vektorfelt $(x,y) \to \underline{k}(x,y) = (f(x,y),g(x,y))$ defineret i en mængde A i planen, hvori γ forløber. Kurveintegralet skrives da også

$$\int_\gamma \underline{k}(x,y)\cdot d\underline{r} \quad \text{eller} \quad \int_\gamma f(x,y)dx + g(x,y)dy ,$$

og det kan ifølge Sætning 6.2 udtrykkes ved det sædvanlige integral

$$\int_a^b \underline{k}(x(t),y(t))\cdot\frac{d\underline{r}}{dt}\,dt = \int_a^b\left(f(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + g(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right)dt .$$

I denne situation omtales kurveintegralet også som integralet langs γ af <u>differentialformen</u>

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy ,$$

et udtryk, der har form som et differential, men i almindelighed ikke er det. Mere herom nedenfor.

EKSEMPEL. Kurveintegralet

$$I = \int_\gamma y^2 dx + (x+y)dy ,$$

hvor γ er den øvre bue fra $(1,0)$ til $(-1,0)$ på enhedscirklen, kan udregnes ved brug af parameterfremstillingen $(x,y) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$:

$$I = \int_0^\pi (\sin^2 t(-\sin t) + (\cos t + \sin t)\cos t)dt .$$

Da $\int_0^\pi \sin^2 t(-\sin t)dt = \int_1^{-1} (1-x^2)dx = -\frac{4}{3}$,

$$\int_0^\pi \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{2} \qquad \text{og} \qquad \int_0^\pi \sin t \cos t \, dt = 0 ,$$

finder vi $I = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$.

BEMÆRKNING. Kurveintegral langs kontinuerte kurver, som kun stykkevis er C^1-kurver, kan defineres og behandles ved addition af bidrag fra C^1-dele. Mange resultater, som f.eks. Sætning 6.3, gælder uændret.

Stamfunktionsproblemet i $\mathbb{R}^k$, $k \geqq 2$. For simpelheds skyld betragter vi tilfældet $k = 2$. Alt forløber dog tilsvarende for vilkårligt $k \in \mathbb{N}$, $k \geqq 2$.

En differentiabel funktion $u: \Omega \to \mathbb{R}$ defineret på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ har som bekendt fra Matematik 101 et gradientfelt $\underline{k} = \underline{\text{grad}}\, u$ i Ω defineret ved

$$\underline{k}(x,y) = (D_1 u(x,y), D_2 u(x,y)) = (u'_x(x,y), u'_y(x,y)), \quad (x,y) \in \Omega ,$$

og et differential

$$du = u'_x(x,y)dx + u'_y(x,y)dy .$$

Omvendt kan man for et givet vektorfelt $\underline{k}$ defineret på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ spørge efter en funktion $u: \Omega \to \mathbb{R}$, således at

$$\underline{\text{grad}}\, u = \underline{k} .$$

Har $\underline{k}$ koordinatfunktionerne $f,g: \Omega \to \mathbb{R}$, er betingelsen

$$u'_x(x,y) = f(x,y), \quad u'_y(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

eller anderledes sagt,

$$du = f(x,y)dx + g(x,y)dy \ .$$

Enhver sådan funktion $u: \Omega \to \mathbb{R}$ kaldes en <u>stamfunktion</u> til vektorfeltet $\underline{k}$ eller til differentialformen $\underline{k}(x,y)\cdot d\underline{r} = f(x,y)dx + g(x,y)dy$. (Et udtryk $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ omtales egentlig som en differentialform af 1. grad, men vi skal ikke beskæftige os med andre.) Når der findes en stamfunktion $u: \Omega \to \mathbb{R}$, dvs. når vektorfeltet $\underline{k}$ er et gradientfelt, siges differentialformen at være <u>eksakt</u>. En eksakt differentialform er altså blot et andet ord for et differential.

I tilfælde af at den åbne mængde Ω består af flere adskilte åbne dele, er det rimeligt at betragte hver del for sig. Vi vil derfor ofte antage, at Ω er sammenhængende.

<u>DEFINITION</u>. En åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ siges at være <u>sammenhængende</u>, hvis hvilkesomhelst to punkter i Ω kan forbindes med en kontinuert kurve, der helt forløber i Ω.

En sammenhængende åben mængde kaldes et <u>område</u>.

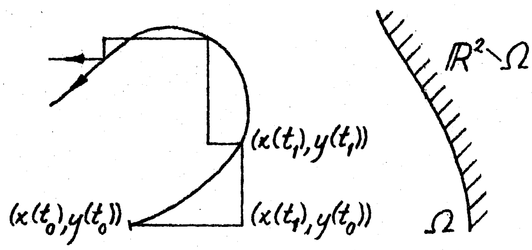
<u>LEMMA 6.4</u>. Hvilkesomhelst to punkter (c_1,d_1) og (c_2,d_2) tilhørende et område $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ kan forbindes med en trappelinie, der forløber i Ω. (En trappelinie er en brudt linie bestående af akseparallelle liniestykker.)

BEVIS. Vi kan antage $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, thi hvis $\Omega = \mathbb{R}^2$ er der intet problem. Da Ω er sammenhængende, findes der en kontinuert kurve γ, som forbinder (c_1,d_1) med (c_2,d_2) og forløber i Ω. Vi tænker os γ givet ved parameterfremstillingen $(x,y) = (x(t),y(t))$, $t \in [a,b]$. Som kontinuert funktion af t i intervallet [a,b] har afstanden

$d_\infty((x(t),y(t)),\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)$ en mindsteværdi $\varepsilon > 0$, og da kontinuiteten er uniform, findes der et $\delta > 0$, således at

$$|x(t_2)-x(t_1)| < \varepsilon \quad \text{og} \quad |y(t_2)-y(t_1)| < \varepsilon ,$$

blot $t_1, t_2 \in [a,b]$ og $|t_2 - t| < \delta$. Vælges nu en inddeling $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ med $|t_i - t_{i-1}| < \delta$, $i=1,\dots,n$,



vil liniestykket fra $(x(t_{i-1}),y(t_{i-1}))$ til $(x(t_i),y(t_{i-1}))$ og ligeledes liniestykket herfra til $(x(t_i),y(t_i))$ ligge i Ω, $i=1,\dots,n$. ▯

<u>SÆTNING 6.5</u>. Hvis en funktion $u: \Omega \to \mathbb{R}$ er differentiabel med gradienten <u>grad</u> $u = \underline{0}$ eller differentialet $du = 0$ i et område Ω, så er u konstant.

BEVIS. Når $u'_x = 0$, er u konstant på ethvert liniestykke i Ω parallelt med X-aksen, og når $u'_y = 0$, er u konstant på liniestykker i Ω parallelle med Y-aksen. Da hvilkesomhelst to punkter (c_1,d_1) og (c_2,d_2) i Ω kan forbindes med en trappelinie i Ω, følger, at $u(c_1,d_1) = u(c_2,d_2)$. ▯

<u>KOROLLAR 6.6</u>. Hvis et vektorfelt $\underline{k}$, respektive en differentialform $f(x,y)dx + g(x,y)dy$, har en stamfunktion u i et område $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, da er samtlige stamfunktioner i Ω netop funktionerne $u + \text{konstant}$.

BEVIS. Hvis u er en stamfunktion, så er $u + \text{konstant}$ det også. Hvis u og v er stamfunktioner, så er $d(v-u) = dv - du = 0$, og følgelig $v - u$ konstant, når definitionsmængden Ω er et område.

Hvad angår entydighed af stamfunktion, er forholdene for vektorfelter eller differentialformer i et område $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ altså ganske som for funktioner af en variabel i et interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

Hvad eksistens angår, er det helt anderledes. Medens enhver kontinuert funktion $f: I \to \mathbb{R}$ har en stamfunktion, er eksistensen af stamfunktioner til et kontinuert vektorfelt $\underline{k}$ eller en C^0-differentialform $\underline{k}\cdot d\underline{r} = f(x,y)dx + g(x,y)dy$ en undtagelse, omend en vigtig undtagelse. Herom nedenfor.

Stamfunktion og kurveintegral. Som vi skal se, hænger stamfunktionsproblemet i $\mathbb{R}^2$ nøje sammen med kurveintegraler, - i analogi med at stamfunktionerne for en kontinuert funktion af en variabel jo er nært forbundet med integralet defineret som grænseværdi for summer (Differential- og integralregningens hovedsætning s.III.23). Vi begynder med den fundamentale

SÆTNING 6.7. Lad $\underline{k}(x,y) = (f(x,y),g(x,y))$ være et kontinuert vektorfelt defineret i en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, eller anderledes udtrykt, lad

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

være en C^0-differentialform i Ω, og antag, at der findes en stamfunktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. For enhver C^1-kurve γ løbende i Ω fra et punkt (x_1,y_1) til et punkt (x_2,y_2) gælder da

$$\int_\gamma \underline{k}(x,y)\cdot d\underline{r} = \int_\gamma f(x,y)dx + g(x,y)dy = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1) .$$

Resultatet generaliseres umiddelbart til kontinuerte kurver γ, som kun stykkevis er C^1-kurver.

Når der findes en stamfunktion, er kurveintegralet fra et punkt til et andet altså lig stamfunktionens tilvækst, ganske svarende til hvad man kender for kontinuerte funktioner af én variabel (hvor dog eksistensen af en stamfunktion er sikker!). Beviset for Sætning 6.7 bygger da også på Differential- og integralregningens hovedsætning (s.III.23).

BEVIS for Sætning 6.7. Lad $t \to (x(t),y(t))$, $t \in [a,b]$, være en C^1-parameterfremstilling for γ, med $(x(a),y(a)) = (x_1,y_1)$ og $(x(b),y(b)) = (x_2,y_2)$. Ifølge Sætning 6.2 er da

$$\int_\gamma \underline{k}\cdot d\underline{r} = \int_\gamma f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$
$$= \int_a^b (f(x(t),y(t))x'(t) + g(x(t),y(t))y'(t))\,dt \;.$$

Nu er funktionen $t \to u(x(t),y(t))$ ifølge kædereglen (Matematik 101 s.Diff.29) differentiabel i $[a,b]$ med den kontinuerte afledede

$$u'_x \frac{dx}{dt} + u'_y \frac{dy}{dt} = f(x(t),y(t))x'(t) + g(x(t),y(t))y'(t) \;.$$

Det sidste integral er derfor ifølge Differential- og integralregningens hovedsætning lig tilvæksten

$$u(x(b),y(b))-u(x(a),y(a)) = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1) \;. \qquad \square$$

Resultatet i Sætning 6.7 er nyttigt ikke blot til udregning af visse kurveintegraler, men også omvendt til bestemmelse af stamfunktioner:

<u>KOROLLAR 6.8</u>. En eventuel stamfunktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ til et kontinuert vektorfelt $\underline{k}(x,y) = (f(x,y),g(x,y))$ eller en C^0-differentialform $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ i et område Ω, med given værdi $u(x_0,y_0) = u_0$ i et punkt $(x_0,y_0) \in \Omega$, er bestemt ved

$$u(x,y) = u_0 + \int_\gamma \underline{k}\cdot d\underline{r} = u_0 + \int_\gamma f(\xi,\eta)\,d\xi + g(\xi,\eta)\,d\eta \;,$$

hvor der for hvert enkelt punkt $(x,y) \in \Omega$ som γ benyttes en kontinuert kurve, som er stykkevis C^1 og løber i Ω fra (x_0,y_0) til (x,y), men i øvrigt kan vælges som man vil.

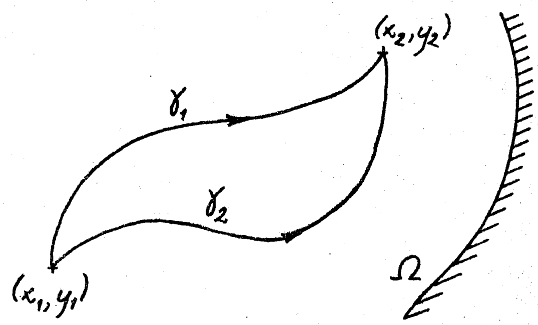
BEVIS. Oplagt.

I praksis benyttes ofte en simpel trappelinie fra (x_0,y_0) til (x,y) , se f.eks. beviset for Sætning 6.10, men der kan være andre muligheder, se Eksempel 3 nedenfor. Om en funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ fundet i henhold til Korollar 6.8 faktisk er stamfunktion, undersøges ved prøve.

Som en umiddelbar konsekvens af Sætning 6.7 noteres, at i et kontinuert gradientfelt er "kurveintegralet uafhængigt af vejen", dvs.

$$\int_{\gamma_1} \underline{k} \cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{k} \cdot d\underline{r} ,$$

når kurverne γ_1 og γ_2 begge løber i den åbne definitionsmængde Ω fra samme punkt (x_1,y_1) til samme punkt (x_2,y_2).



Det er bemærkelsesværdigt, at denne egenskab er karakteristisk for gradientfelter:

SÆTNING 6.9. Lad $\underline{k}(x,y) = (f(x,y),g(x,y))$ være et kontinuert vektorfelt defineret i et område $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, eller anderledes udtrykt, lad $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ være en C^0-differentialform i Ω. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at der findes en stamfunktion i Ω, er da, at "kurveintegralet er uafhængigt af vejen".

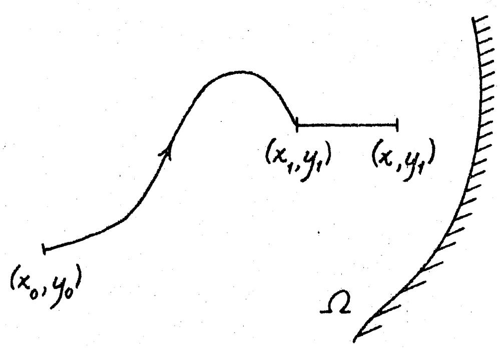
Kurveintegralet $\int_{\gamma} \underline{k} \cdot d\underline{r}$ af vektorfeltet $\underline{k}$ langs en lukket kurve γ i Ω kaldes feltets cirkulation langs γ. Betingelsen i Sætning 6.9 kan åbenbart (overvej) også udtrykkes, at feltet $\underline{k}$ har cirkulationen 0 langs enhver lukket kurve i Ω.

BEVIS for Sætning 6.9. At betingelsen er nødvendig, ved vi som sagt fra Sætning 6.7. Vi antager nu betingelsen opfyldt og skal så vise, at der findes en stamfunktion. Ledet af Korollar 6.8 vælger vi et punkt $(x_0,y_0) \in \Omega$ og sætter for hvert $(x,y) \in \Omega$

$$u(x,y) = \int_{\gamma} \underline{k} \cdot d\underline{r} ,$$

hvor γ er en kontinuert kurve, som er stykkevis C^1 og løber i Ω fra (x_0,y_0) til (x,y). Ifølge forudsætning har kurveintegralet samme værdi, uanset hvilket γ der vælges, således at $u(x,y)$ her er entydigt fastlagt uden nærmere specifikation af γ.

Vi viser først, at u: $\Omega \to \mathbb{R}$ er differentiabel efter x i et vilkårligt punkt $(x_1,y_1) \in \Omega$, og at $u'_x(x_1,y_1) = f(x_1,y_1)$. Hertil betragtes funktionen $x \to u(x,y_1)$, idet vi indskrænker os til værdier af x, hvor hele liniestykket fra (x_1,y_1) til (x,y_1) ligger i Ω. Da $u(x,y_1)$ = kurveintegralet af $\underline{k}$ langs en kurve i Ω fra (x_0,y_0) til (x,y_1), ligegyldigt hvilken, kan vi specielt benytte en kurve fra (x_0,y_0) til (x_1,y_1) fulgt af liniestykket herfra til (x,y_1). Vi har derfor (overvej tilfældene $x > x_0$ og $x < x_0$)



$$
\begin{aligned}
u(x,y_1) &= u(x_1,y_1) + \int_{x_1}^{x} (f(t,y_1)\cdot 1 + g(t,y_1)\cdot 0)\,dt \\
&= u(x_1,y_1) + \int_{x_1}^{x} f(t,y_1)\,dt ,
\end{aligned}
$$

og Differential- og integralregningens hovedsætning (s.III.23) giver, at $x \to u(x,y_1)$ er differentiabel med afledet $f(x,y_1)$, specielt $u'_x(x_1,y_1) = f(x_1,y_1)$.

Analogt indses, at u: $\Omega \to \mathbb{R}$ er differentiabel efter y i (x_1,y_1) med $u'_y(x_1,y_1) = g(x_1,y_1)$. $\square$

Om stamfunktion og kurveintegral gælder ganske tilsvarende resultater i $\mathbb{R}^k$ for vilkårligt $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, som vist i tilfældet $k=2$, og med tilsvarende bevis.

Med ord lånt fra fysikken kaldes et kontinuert gradientfelt $\underline{k}$ også et <u>potentialfelt</u>, og er u en stamfunktion, altså $\underline{\text{grad}}\, u = \underline{k}$, kaldes $-u$ en <u>potentialfunktion</u> eller et <u>potential</u> for $\underline{k}$.

EKSEMPEL 1. Elektrostatisk felt. I et elektrostatisk felt i rummet er feltvektoren $\underline{k}(x,y,z)$ i hvert punkt den kraft, hvormed en enhedsladning anbragt i punktet ville påvirkes. Føres en enhedsladning fra et punkt til et andet langs en kurve γ i feltet, udfører feltkraften arbejdet

$$\int_\gamma \underline{k}(x,y,z)\cdot d\underline{r}\ .$$

Feltets cirkulation langs enhver lukket kurve må ventes at være 0. Kunne der nemlig vindes et arbejde ved at føre en ladning rundt langs en lukket kurve, havde vi et perpetuum mobile, en evigheds-maskine. Et elektrostatisk felt $\underline{k}$ er følgelig (Sætning 6.9) et gradient- eller potentialfelt, med en stamfunktion u eller potentialfunktion -u, hvor $\underline{k} = \underline{\text{grad}}\, u$. Værdien $-u(x,y,z)$ kaldes potentialet eller spændingen i punktet (x,y,z). For en vilkårlig kurve γ i feltet fra et punkt (x_1,y_1,z_1) til et punkt (x_2,y_2,z_2) gælder (Sætning 6.7)

$$u(x_2,y_2,z_2) - u(x_1,y_1,z_1) = \int_\gamma \underline{k}(x,y,z)\cdot d\underline{r}\ ,$$

"spændingsfaldet er det arbejde, feltet ville udføre på en enhedsladning, der blev ført fra det ene punkt til det andet".

EKSEMPEL 2. Konservativt kraftfelt. Der foreligger et kraftfelt $\underline{k}$ i et område i rummet, når en given partikel ville påvirkes med kraften $\underline{k}(x,y,z)$, hvis den blev anbragt i (x,y,z). Feltet kaldes konservativt (dvs. bevarende, - det er partiklens mekaniske energi, der bevares, se opgave VI.6.4), hvis cirkulationen langs enhver lukket kurve er 0. I så fald findes en potentialfunktion -u, med $\underline{\text{grad}}\, u = \underline{k}$, kaldet partiklens potentielle energi. Og for en forskydning af partiklen langs en kurve γ i feltet fra (x_1,y_1,z_1) til (x_2,y_2,z_2) gælder

$$\int_\gamma \underline{k}(x,y,z)\cdot d\underline{r} = u(x_2,y_2,z_2) - u(x_1,y_1,z_1)\ ,$$

"det af feltkraften udførte arbejde på partiklen er lig faldet i dennes potentielle energi".

Gravitationsfelter (tyngdefelter) er - ligesom elektrostatiske felter - konservative som følge af umuligheden af et perpetuum mobile.

EKSEMPEL 3. Gravitationsfelt om en central masse. En partikel, der bevæger sig omkring en masse i $(0,0,0)$, tiltrækkes ifølge Newtons gravitationslov mod dette punkt med en kraft, hvis størrelse er omvendt propartional med kvadratet på afstanden $r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$.

Feltvektoren $\underline{k}(x,y,z)$, der har størrelsen

$$\frac{c}{r^2} = \frac{c}{x^2+y^2+z^2}\ , \qquad (x,y,z) \neq (0,0,0),$$

er altså

$$\underline{k}(x,y,z) = \left(-\frac{cx}{r^3}\ ,\ -\frac{cy}{r^3}\ ,\ -\frac{cz}{r^3}\right), \qquad (x,y,z) \neq (0,0,0)\ .$$

Stamfunktionen $u\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ med $u(1,0,0) = c$ er (Korollar 6.8) bestemt ved

$$u(x,y,z) = c + \int_\gamma \underline{k}(x,y)\cdot d\underline{r}\ ,$$

hvor vi som γ kan bruge hvilken kurve vi vil fra $(1,0,0)$ til (x,y,z). Vælger vi liniestykket fra $(1,0,0)$ til $(r,0,0)$ fulgt af en storcirkelbue fra $(r,0,0)$ til (x,y,z) på kuglefladen med centrum $(0,0,0)$, finder vi

$$u(x,y,z) = c + \int_1^r -\frac{ct}{t^3}\,dt + 0 = c + \left[\frac{c}{t}\right]_{t=1}^{t=r} = \frac{c}{r}\ ,$$

altså

$$u(x,y,z) = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ , \qquad (x,y,z) \neq (0,0,0)\ .$$

Som potentiel energi finder vi således $-u = -\frac{c}{r}$.

Vil man ikke bygge på umuligheden af et perpetuum mobile, se Eksempel 2, kan man ved prøve verificere, at $\underline{\text{grad}}\, u = \underline{k}$, dvs.

$$u'_x = -\frac{cx}{r^3}\ , \qquad u'_y = -\frac{cy}{r^3}\ , \qquad u'_2 = -\frac{cz}{r^3}\ ,$$

og således godtgøre, at der findes en stamfunktion.

<u>En simpel betingelse for eksistens af stamfunktion</u>. Skal man vise, at et forelagt vektorfelt $\underline{k}$ er et gradientfelt, kan man søge at bestemme en eventuel stamfunktion, f.eks. ved Korollar 6.8, og så gøre prøve, som i Eksempel 3 ovenfor. Derimod kan man normalt ikke drømme om en direkte påvisning af, at kurveintegralet er uafhængigt af vejen (Sætning 6.9). Heldigvis er der en simpel metode:

Vi minder om, at $u''_{xy} = u''_{yx}$ for enhver funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ af klasse C^2 defineret på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. (Matematik 101, s. Diff. 18.) En nødvendig betingelse for, at en given C^1-differentialform

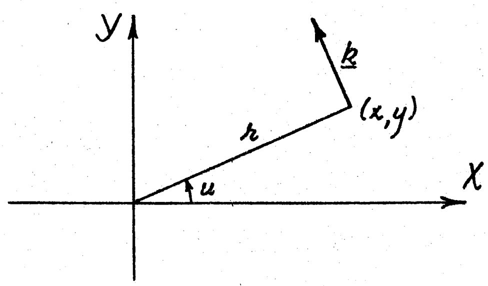
$$f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

i Ω har en stamfunktion, er derfor, at $f'_y = g'_x$.

Bemærk, at vi nu betragter C^1-differentialformer i stedet for som hidtil C^0. Hermed menes blot, at f og g begge er af klasse C^1.

Betingelsen $f'_y = g'_x$ er dog ikke i sig selv tilstrækkelig:

EKSEMPEL. I området $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x \leq 0 , y = 0\}$, planen opskåret langs den negative X-akse, betragtes funktionen u, hvis værdi i hvert punkt (x,y) i området er retningsvinklen $u(x,y) \in]-\pi,\pi[$ for halvlinien fra $(0,0)$ gennem (x,y).



I halvplanen $\{(x,y) \mid x > 0\}$ er $u(x,y) = \text{Arctan}(y/x)$, i halvplanen $\{(x,y) \mid y > 0\}$ er $u(x,y) = \text{Arccot}(x/y)$ og i halvplanen $\{(x,y) \mid y < 0\}$ er $u(x,y) = \text{Arccot}(x/y) - \pi$. Altså er u en C^∞-funktion, og vi finder

$$\underline{\text{grad}}\, u = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y,x)$$

eller

$$du = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy .$$

Vektorfeltet $\underline{k}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$ eller differentialformen

$$-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

er imidlertid defineret og af klasse C^∞ i hele $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ og opfylder

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) .$$

Men der er ingen stamfunktion i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Thi en stamfunktion i $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ måtte i den opskårne plan have form $u + \text{konstant}$, men u kan ikke udvides til en kontinuert funktion på $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

At $\underline{k}$ ikke er et gradientfelt, resp. differentialformen ikke er eksakt i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, fremgår også ved udregning af cirkulationen langs en cirkel γ med centrum i $(0,0)$. Idet feltvektoren i hvert punkt (x,y) er drejet $\pi/2$ i forhold til radius og har størrelsen $1/r = 1/\sqrt{x^2+y^2}$, finder vi

$$\int_\gamma \underline{k}(x,y)\cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{k}(a\cos t, a\sin t)\cdot \frac{d\underline{r}}{dt}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a}\,a\,dt = 2\pi \neq 0 .$$

Feltet $\underline{k}$ kan i øvrigt tolkes som hastighedsfelt for en stationært roterende væske.

I eksemplet bemærkes, at differentialformen nok har en stamfunktion i en opskåret plan, men ikke i hele $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, skønt $f'_y = g'_x$. At det går galt i sidste tilfælde, hænger sammen med, at der er et hul i området. Da begrebet "område uden huller", eller som det kaldes "enkeltsammenhængende område", er lidt raffineret, vil vi imidlertid lade os nøje med

SÆTNING 6.10. En nødvendig betingelse for, at en C^1-differentialform

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

er eksakt i en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, dvs. har en stamfunktion i Ω, er, at

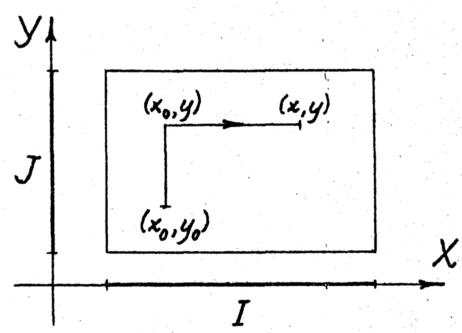
$$f'_y(x,y) = g'_x(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega.$$

Betingelsen er også tilstrækkelig, når Ω er et åbent interval i $\mathbb{R}^2$, dvs. har formen $\Omega = I \times J$, hvor I og J er åbne intervaller på $\mathbb{R}$.

En C^1-differentialform $f(x,y)dx + g(x,y)dy$, der opfylder betingelsen $f'_y(x,y) = g'_x(x,y)$, siges at være lukket. I et åbent interval $I \times J$ er dette altså ensbetydende med, at formen er eksakt.

BEVIS. At betingelsen er nødvendig, har vi allerede begrundet ovenfor.

Vi antager derfor nu, at Ω er et åbent interval $I \times J$, og at differentialformen er lukket, dvs. $f'_y = g'_x$. Idet vi vælger et punkt $(x_0,y_0) \in I \times J$, betragter vi for hvert $(x,y) \in I \times J$ kurven γ bestående af liniestykket fra (x_0,y_0) til (x_0,y) fulgt af linie-



stykket fra (x_0,y) til (x,y) og sætter $u(x,y)$ = kurveintegralet langs γ, altså

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} g(x_0,t)\,dt + \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt .$$

En eventuel stamfunktion har formen $u +$ konstant (Korollar 6.8). Vi må altså håbe på u.

For fastholdt y er første led konstant, medens andet led ifølge Differential- og integralregningens hovedsætning er en differentiabel funktion af x med afledet $f(x,y)$. Altså er $u'_x(x,y) = f(x,y)$ for alle $(x,y) \in I \times J$.

Første led er ifølge Differential- og integralregningens hovedsætning en differentiabel funktion af y med afledet $g(x_0,y)$, medens andet led for fastholdt x er et integral med parameteren y. Da $f(t,y)$ i $I \times J$ er en kontinuert funktion af (t,y) med en kontinuert afledet $f'_y(t,y)$, følger af Sætning 2.14, s.III.27, om differentiation under $\int$-tegn, at også dette led er differentiabelt efter y, med

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt = \int_{x_0}^{x} f'_y(t,y)\,dt = \int_{x_0}^{x} D_2 f(t,y)\,dt .$$

Med benyttelse af $f'_y = g'_x$, dvs. $D_2 f = D_1 g$, har vi så

$$u'_x(x,y) = g(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} D_1 g(t,y)\,dt$$

$$= g(x_0,y) + \Big[g(t,y) \Big]_{t=x_0}^{t=x} = g(x,y) . \qquad \square$$

Det foregående gælder mutatis mutandis i rummet og mere alment i $\mathbb{R}^k$ for vilkårligt $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, med tilsvarende beviser. Således siges

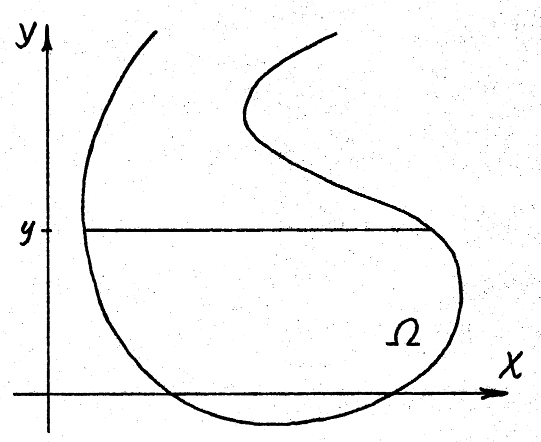
$$f_1(\underline{x})\,dx_1 + \ldots + f_k(\underline{x})\,dx_k$$

at være <u>lukket</u>, hvis

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{for } i,j \in \{1,\ldots,k\},$$

og en lukket C^1-differentialform i et åbent interval $I_1 \times \ldots \times I_k$ er eksakt.

Stamfunktionsbestemmelse. For et forelagt vektorfelt $\underline{k}$ eller tilsvarende differentialform $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ kan man tilbagevise eksistensen af en stamfunktion ved at godtgøre, at differentialformen ikke er lukket (Sætning 6.10), eller at cirkulationen langs en eller anden lukket kurve, eventuelt omkring et hul, ikke er 0 (Sætning 6.9). Har man derimod formodning om, at der findes en stamfunktion, kan man søge at bestemme denne i henhold til Korollar 6.8 og så gøre prøve. Ofte er det dog nemmere at benytte følgende fremgangsmåde; bemærk, at det afsløres undervejs, om differentialformen er eksakt.



Vi søger en funktion $u: \Omega \to \mathbb{R}$ med $u'_x = f$, $u'_y = g$, hvor f og g er givne kontinuerte funktioner, men begynder beskedent: Vi søger først en C^1-funktion $v: \Omega \to \mathbb{R}$, der opfylder $v'_x = f$. Dette kaldes "integration efter x", idet vi jo for fastholdt y søger en stamfunktion $x \to v(x,y)$ til $x \to f(x,y)$. Ved denne integration optræder kun funktioner af én variabel, x, således at hele vor integrationsteknik står til rådighed.

Om en eventuel stamfunktion u til $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ gælder nu $u'_x = v'_x$, dvs. $(u-v)'_x = 0$, således at $u - v$ er konstant på vandrette liniestykker i Ω. Hvis ethvert vandret snit i Ω er et interval, afhænger $w = u - v$ alene af y, og da

$$\frac{dw}{dy} = u'_y - v'_y = g(x,y) - v'_y(x,y) \ ,$$

kan w findes ved sædvanlig integration af højre side, der må ventes at være en funktion af y alene.

Det er nok bedst at gennemgå et eksempel.

EKSEMPEL. Betragt differentialformen

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = (x^2 + y^2)dx + (2xy + y)dy$$

i $\mathbb{R}^2$. For fast y har $x \to x^2 + y^2$ stamfunktionen $x \to \frac{1}{3}x^3 + xy^2$, og $v(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2$ tilhører $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Da nu

$$g(x,y) - v'_y(x,y) = 2xy + y - 2xy = y$$

kun afhænger af y, kan vi finde en stamfunktion $w(y) = \frac{1}{2}y^2$. Det er nu klart, at

$$u(x,y) = v(x,y) + w(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

er en stamfunktion til $f(x,y)dx + g(x,y)dy$, idet jo

$$u'_x = v'_x + 0 = f \quad \text{og} \quad u'_y(x,y) = v'_y(x,y) + w'(y) = g(x,y) .$$

VI.1.1. Find såvel ved Newtons som ved Lagranges interpolationsformel det polynomium af grad ≤ 3, som for $x = -1,0,2,3$ antager værdierne $y = 2,-1,3,1$.

VI.1.2. Gør rede for, at polynomierne

$$1, \frac{x}{1!}, \frac{x(x-1)}{2!}, \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}, \ldots, \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$$

er en basis for vektorrummet bestående af alle polynomier af grad $\leq n$. Vis, at der for et polynomium

$$F(x) = c_0 + c_1 \frac{x}{1!} + c_2 \frac{x(x-1)}{2!} + c_3 \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \ldots + c_n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$$

gælder $F(x) \in \mathbb{Z}$ for alle $x \in \mathbb{Z}$, hvis og kun hvis $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$.

VI.1.3. Bestem a og b således, at $x^2 + x + 1$ er divisor i $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + ax + b$.

VI.1.4. En n^{te}-gradsligning $a_0x^n + a_1x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ antages at opfylde betingelserne $a_k = a_{n-k}$ for $k = 0,\ldots,n$. Vis, at hvis $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ [som åbenbart alle er $\neq 0$] er ligningens rødder, er $\frac{1}{\alpha_1},\ldots,\frac{1}{\alpha_n}$ en permutation af $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

VI.1.5. Idet F er et normeret polynomium med reelle koefficienter af grad $n \geq 1$, skal man vise, at $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, hvis n er ulige, og at $F(\mathbb{R})$ er af formen $[a,+\infty[$, hvis n er lige.

VI.1.6. Vis, at de eventuelle reelle rødder i et normeret polynomium $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ med reelle koefficienter tilhører intervallet $[-1-K, 1+H]$, hvor $H = \max\{-a_1,\ldots,-a_n,0\}$ og $K = \max\{a_1,-a_2,\ldots,(-1)^{n-1}a_n,0\}$.

VI.1.7. Idet $F \in \mathbb{R}[x]$, skal man vise, at $F(x) \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, hvis og kun hvis der findes polynomier $G \in \mathbb{R}[x]$ og $H \in \mathbb{R}[x]$, så at $F = G^2 + H^2$.
Vink. $a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$.

(d) $\dfrac{1}{x^2(x^2-1)(x^2+1)}$ (e) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2(x^2+2)^2}$ (f) $\dfrac{2x^3}{x^4+4}$.

VI.2.3. Dekomponer $\dfrac{5x^4-12x^3+94x^2-156x+369}{(x-1)(x^2+9)^2}$ såvel i $\mathbb{C}(x)$ som i $\mathbb{R}(x)$.

VI.3.1. Find $\displaystyle\int \frac{x-i}{(x+i)^2}\,dx$.

VI.3.2. Find $\displaystyle\int \frac{x^3-4x+9}{x^2(x-1)(x+2)}\,dx$.

VI.3.3. Find $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^4-1}\,dx$.

VI.3.4. Find $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2-1)(x^2+1)}\,dx$.

VI.3.5. Find $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$.

VI.3.6. Find $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{x^3}{(4-x^2)^3}\,dx$.

VI.3.7. Find $\displaystyle\int \frac{x^2+4x-7}{x^3-4x^2+9x-10}\,dx$.

VI.4.1. Find $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\sin x}\,dx$.

VI.4.2. Find $\displaystyle\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos^3 x+\sin^3 x}\,dx$.

VI.4.3. Find $\displaystyle\int \cos x\cot^2 x\,dx$.

VI.4.4. Find $\displaystyle\int \frac{1}{1+\alpha\cos x}\,dx$, hvor $\alpha > 0$.

Tilfældene $\alpha = 1$, $\alpha < 1$, $\alpha > 1$ behandles hver for sig.

VI.4.5. Find $\displaystyle\int x^2\sin^2 x\,dx$.

VI.4.6. Find $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$.

VI.4.7. Find $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{Arctan}(2\tan x)\,dx$.

VI.4.8. Find $\displaystyle\int x\tan^4 x\,dx$.

VI.4.9. Find $\int\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$.

VI.4.10. Find $\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

VI.4.11. Find $\frac{x}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}\,dx$.

VI.4.12. Find $\int x^{-2/3}\,\mathrm{Arctan}\,x\,dx$.

VI.4.13. Find $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

VI.4.14. Find $\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$.

VI.4.15. Find $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x-x^2}}$.

VI.4.16. Find $\int\cos\sqrt{x}\,dx$.

VI.4.17. Find $\int\mathrm{Arctan}\sqrt{x}\,dx$.

VI.5.1. Find samtlige løsninger til hver af differentialligningerne

$$\frac{dx}{dt}-x=t^2+1\,,\qquad \frac{dx}{dt}-x=\cos t\,,$$

$$\frac{dx}{dt}-x=e^t\,,\qquad \frac{dx}{dt}-x=e^{-t}\,.$$

VI.5.2. Find samtlige løsninger til hver af differentialligningerne

$$t\frac{dx}{dt}-x=t^3\,,\qquad t\in\,]0,+\infty[\,,$$

$$t\frac{dx}{dt}-x=(\log t)^3\qquad t\in\,]0,+\infty[\,,$$

$$t\frac{dx}{dt}-x=t\qquad t\in\,]0,+\infty[\,.$$

VI.5.3. Find en genvej til løsning af differentialligninger af formen

$$a(t)\frac{dx}{dt}+a'(t)x=q(t)\quad\text{og}\quad a(t)\frac{dx}{dt}-a'(t)x=q(t)\,.$$

Formuler resultatet som en sætning.

VI.5.4. Find samtlige løsninger til differentialligningerne

$$t\,\frac{dx}{dt} + x = \frac{t^3}{(1+t^2)^2} \quad \text{og} \quad (\sin t)\frac{dx}{dt} - (\cos t)\,x = \frac{\sin^2 t}{1+t^2} \;.$$

Vink. Benyt opgave VI.5.3.

VI.5.5. Tabellen viser måleresultater for en række malerier der påstås at være af Vermeer. Afgør ved metoden i eksemplet side VI.36 om disse billeder er falsknerier

	Pb 212 henfald (λx bestemt ved måling)	Ra 226 henfald (r)
"Fodvask"	12,6	0,26
"Kvinde der læser noder"	10,3	0,3
"Kvinde der spiller madolin"	8,2	0,17
"Kniplingsmager"	1,5	1,4
"Leende pige"	5,2	6,0

VI.5.6. En partikel med massen m synker lodret ned gennem en sej væske. Dens afstand fra overfladen til tiden t betegnes x. Den påvirkes af den nedad rettede tyngdekraft mg og af en med hastighed proportional opad rettet kraft $-k\,\frac{dx}{dt}$ hidrørende fra væskens modstand. Idet bevægelsen sættes i gang til tiden $t = 0$ med $x = 0$ og $\frac{dx}{dt} = 0$, ønskes hastigheden og stedet bestemt som funktioner af tiden. Skitser graferne for de fundne funktioner.

VI.5.7. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\,\frac{dx}{dt} + 2x = 3\cosh t \;.$$

VI.5.8. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$(1-t^2)\,\frac{d^2x}{dt^2} - t\,\frac{dx}{dt} + 4x = t^2 \;, \quad t \in \,]-1,1[\;.$$

Vink. Benyt $u = \operatorname{Arcsin} t$ som ny uafhængig variabel.

VI.5.9. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$t^2\,\frac{d^2x}{dt^2} - 4t\,\frac{dx}{dt} + 6x = 6(\log t)^2 + 2\log t + 4 \;, \quad t \in \,]0,+\infty[\;.$$

(fortsættes)

Vink. Benyt $u = \log t$ som ny uafhængig variabel.

VI.5.10. Benyt separation af de variable til at løse differentialligningen

$$\sin t \frac{dx}{dt} - \cos t\, x = -1 .$$

VI.5.11. Find, udtrykt ved en potensrække, en løsning til differentialligningen

$$(t-t^2)\frac{d^2x}{dt^2} - 3t\frac{dx}{dt} - x = 0$$

som opfylder at $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$. Angiv rækkens konvergensradius og dens sum. Løs dernæst ligningen i intervallerne $]-\infty,0[$, $]0,1[$ og $]1,\infty[$. Undersøg løsningernes opførsel nær $t = 1$.

VI.5.12. Givet differentialligningen

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} + x = 0 .$$

Find i potensrækkefremstilling en løsning til ligningen for hvilken $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$. Angiv rækkens sumfunktion.

VI.6.1. Udregn kurveintegralet

$$\int_\gamma (x+2y)\,dx + (y-2x)\,dy ,$$

idet γ er ellipsen $(x,y) = (4\cos t, 3\sin t)$, $t \in [0,2\pi]$.

VI.6.2. Udregn kurveintegralet

$$\int_\gamma (x^2-y^2)\,dx - (x+y)\,dy ,$$

dels når γ er ellipsebuen $(x,y) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0,\frac{1}{2}\pi]$, dels når γ er dennes korde $(x,y) = (a-at, bt)$, $t \in [0,1]$.

VI.6.3. Udregn

$$u(x,y) = \int_\gamma \underline{k}\cdot d\underline{r} , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

hvor $\underline{k}(x,y) = (2x, 2xy)$, og hvor γ for hvert $(x,y) \in \mathbb{R}$ er liniestykket fra (0,0) til (x,0) fulgt af liniestykket fra (x,0) til (x,y). Er $\underline{k}$ et gradientfelt ?

VI.6.4. 1° Betragt bevægelsen af en partikel med massen m. Til hvert tidspunkt t befinder partiklen sig i et punkt $(x,y,z) = (x(t),y(t),z(t))$ og er påvirket af en resulterende kraft $\underline{k} = \underline{k}(t) = (f(t),g(t),h(t))$. Partiklens kinetiske energi er $\frac{1}{2}mv^2$, hvor $v = v(t)$ er farten.

Vis ved brug af Newtons 2. lov, $\underline{k} = m(x'',y'',z'')$, at det af $\underline{k}$ udførte arbejde i et tidsrum $[a,b]$ er lig tilvæksten i partiklens kinetiske energi.

2° Antag nu, at partiklen bevæger sig i et konservativt kraffelt, kun påvirket af feltvektoren $\underline{k} = \underline{k}(x,y,z)$. (Se Eksempel 2, s.VI.69.)

Vis da, at partiklens mekaniske energi, dvs. summen af dens potentielle og dens kinetiske energi, er konstant.

VI.6.5. To elektriske ladninger q_1 og q_2 i afstanden r påvirker hinanden med kræfter

$$c\,\frac{q_1q_2}{r^2}$$

på forbindelseslinien, frastødning eller tiltrækning efter som q_1q_2 er positiv eller negativ. (Coulombs lov. Konstanten c afhænger af de benyttede enheder.)

1° Find potentialet (spændingen) $-u$ i det elektrostatiske felt omkring en negativ enhedsladning i (0,0,0), med bibetingelsen $u \to 0$ for $r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \to \infty$. (Se Eksempel 1 s.VI.68 og benyt Eksempel 3.)

2° Gør rede for, at potentialet (spændingen) i det elektrostatiske felt omkring punktformede ladninger $q_1,q_2,\dots,q_n$ er

$$-u(x,y,z) = c\,\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \dots + \frac{q_n}{r_n}\,,$$

hvor $r_1,r_2,\dots,r_n$ er afstandene fra (x,y,z) til henholdsvis $q_1,q_2,\dots,q_n$.

VI.6.6. 1° Vis, at vektorfeltet

$$\underline{k}(x,y) = \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

er et gradientfelt i $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, og find en stamfunktion.

2° Find kurveintegralet

$$\int_{\gamma} \underline{k}(x,y)\cdot d\underline{r} ,$$

når γ er en vinding af en logaritmisk spiral givet i polære koordinater ved

$$r = ae^{bv} .$$

VI.6.7. Lad $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ være en lukket C^1-differentialform i $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Idet $\gamma(r)$ betegner cirklen $(x,y) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0,2\pi]$, skal det vises, at kurveintegralet

$$\int_{\gamma(r)} f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

af uafhængigt af r.

VI.6.8. Bestem de C^1-funktioner $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for hvilke differentialformen

$$[2x + y\varphi(y)]dx + [3y^2 + 2x(\varphi(y)+y^3)]dy$$

er eksakt i $\mathbb{R}^2$.

VI.6.9. Vis, at vektorfeltet

$$\left(\frac{-2x}{2-x^2-2y^2} + \frac{-x}{\sqrt{2-x^2-2y^2}}, \frac{-4y}{2-x^2-2y^2} + \frac{-2y}{\sqrt{2-x^2-2y^2}}\right)$$

er et gradientfelt i området $\{(x,y) \mid x^2+2y^2 < 2\}$, og find den stamfunktion, der i punktet $(1,0)$ har værdien 0.

VI.6.10. Vis, at differentialformen

$$\frac{x}{(x-y)^2}dx - \frac{x^2}{y(x-y)^2}dy$$

er eksakt i ethvert af de ved linierne $x = y$ og $y = 0$ bestemte vinkelrum. Find samtlige stamfunktioner i hvert af disse vinkelrum.

VI.6.11. Vis, at differentialformen

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{1+xy}\,dx + \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{1+xy}\,dy$$

er eksakt i $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, og find den stamfunktion $u: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, hvor $u(1,1) = \pi/2$.

VI.6.12. Vis, at vektorfeltet

$$(2xz \exp(x^2+y^2),\ 2yz \exp(x^2+y^2),\ \exp(x^2+y^2))$$

er et gradientfelt i $\mathbb{R}^3$, og find en stamfunktion.

*VI.6.13. Vis, at differentialformen

$$-\frac{y(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}\,dx + \frac{x(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}\,dy$$

er lukket, men ikke eksakt, på mængden $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$.

*VI.6.14. Vis, at differentialformen

$$-\frac{2xy}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}\,dx + \frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}\,dy$$

er eksakt på mængden $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ y=0\}$.

Mat 102, 1981/82

KAPITEL VII

DIFFERENTIALLIGNINGER.

Indhold:

§1. Eksistens- og entydighedssætningen for første ordens systemer.

I denne paragraf skal vi studere differentialligninger af formen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x})$$

hvor $\underline{f}$ er en given kontinuert funktion. Efter at have præciseret begrebet løsning til en sådan ligning vil vi vise, at $\underline{\varphi}$ er en løsning hvis og kun hvis $\underline{\varphi}$ opfylder en vis integralligning. Derefter vises - under den ekstra antagelse at $\underline{f}$ opfylder en Lipschitz betingelse lokalt - ved hjælp af fikspunktsætningen fra Kap. II, at denne integralligning lokalt har en og kun én løsning. Derved har vi fundet løsninger til den oprindelige differentialligning lokalt, og vi skal til slut sammenstykke sådanne lokale løsninger til en såkaldt maksimal løsning.

Indledning. Tidligere er følgende typer af differentialligninger blevet behandlet

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t) \quad , \tag{1}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x + q(t) \quad . \tag{2}$$

Her betegner p, q, p_1 og p_0 givne kontinuerte (reelle eller komplekse) funktioner på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$, og x står for den søgte, ubekendte funktion af $t \in I$. Vi minder om, at der findes en færdig løsningsformel for (1), mens dette ikke gælder for (2).

Ligningen (1) er et specialtilfælde af følgende mere almene første ordens ligning

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad . \tag{3}$$

Her betegner f en given, reel eller kompleks, kontinuert funktion af $(t,x) \in \Omega$, hvor Ω er en delmængde af $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, henholdsvis $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$. Specialtilfældet (1) svarer til $f(t,x) = p(t)x + q(t)$, og $\Omega = I \times \mathbb{R}$, hhv. $I \times \mathbb{C}$.

At søge en løsning til (3) vil sige at søge en reel hhv. kompleks funktion $x = \varphi(t)$ med definitionsinterval J, så at $(t,\varphi(t)) \in \Omega$

for $t \in J$, og φ er differentiabel med

$$\varphi'(t) = f(t,\varphi(t)) \quad \text{for} \quad t \in J .$$

Anden ordens ligningen (2) kan ligeledes bringes på formen (3), når vi tillader f og x at have <u>vektorværdier</u> (dvs. værdier i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{C}^2$). At $\varphi(t): J \to \mathbb{R}$ (hhv. $\mathbb{C}$) er en løsning til (2), betyder, at

$$\varphi''(t) = p_1(t)\varphi'(t) + p_0(t)\varphi(t) + q(t) \quad \text{for} \quad t \in J .$$

Dermed har vi, at vektorfunktionen $\underline{\varphi}(t) = \begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\end{pmatrix}$ opfylder

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ p_0(t) & p_1(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ q(t)\end{pmatrix} \quad \text{for} \quad t \in J . \tag{4}$$

Omvendt, hvis vektorfunktionen $\underline{\varphi}(t)$ opfylder (4), så vil første koordinat $\varphi_1(t)$ være en løsning til (2). Idet vi indfører betegnelserne

$$\underline{\underline{P}}(t) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ p_0(t) & p_1(t)\end{pmatrix} , \quad \underline{q}(t) = \begin{pmatrix}0\\ q(t)\end{pmatrix}$$

kan (4) kort skrives

$$\frac{d\underline{\varphi}(t)}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\varphi}(t) + \underline{q}(t) \quad \text{for} \quad t \in J ;$$

og denne ligning udtrykker at $\underline{\varphi}: J \to \mathbb{R}^2$ (hhv. $\mathbb{C}^2$) er en løsning til differentialligningen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\underline{x} + \underline{q}(t) . \tag{5}$$

Ligningen (5) er et specialtilfælde af den almene <u>vektorielle</u> første ordens differentialligning

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x}) , \tag{6}$$

hvor $\underline{x} = (x_1,\dots,x_k)$ og $\underline{f} = (f_1,\dots,f_k)$ er defineret på en mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ hhv. $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^k$ og har værdier i $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$. Ligningen (3), svarende til tilfældet $k = 1$, siges ofte at være <u>skalær</u>.

At ligningen (6) er vektoriel udtrykkes også ofte ved at kalde den et <u>differentialligningssystem</u>, idet den udskrevet i koordinater tager formen som et "system"

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t,x_1,\ldots,x_k) \ ,$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t,x_1,\ldots,x_k) \ .$$

Specialtilfældet (5) (hvor vi mere alment kan lade $\underline{x}$ betegne en k-vektor $\underline{x} = (x_j)_{j=1,\ldots,k}$ $(k \in \mathbb{N})$, lade $\underline{\underline{P}}(t)$ betegne en k×k-matrix af funktioner $\underline{\underline{P}}(t) = (p_{ij}(t))_{i,j=1,\ldots,k}$, og lade $\underline{q}(t)$ betegne en k-vektor af funktioner $\underline{q}(t) = (q_j(t))_{j=1,\ldots,k}$), kaldes et <u>lineært</u> differentialligningssystem - eller en <u>lineær</u> vektoriel differentialligning - fordi $\underline{f}(t,\underline{x})$ her er en <u>lineær</u> funktion af $\underline{x}$ for hvert t:

$$\underline{f}(t,\underline{x}) = \underline{\underline{P}}(t)\underline{x} + \underline{q}(t) \ , \tag{7}$$

og vi skal studere denne ligningstype nærmere i §§3 og 4.

I §2 vises, hvordan differentialligningssystemer af vilkårlig høj orden omskrives til (større) første ordens systemer.

BEMÆRKNING. De nævnte differentialligninger kaldes <u>sædvanlige</u> (på engelsk: "ordinary"), hvor dette refererer til at den ubekendte er en funktion af een uafhængig variabel t; differentialligninger hvor den ubekendte er en funktion af flere variable kaldes almindeligvis <u>partielle</u> differentialligninger. En ligning (eller et ligningssystem), hvor der optræder differentiationer af til og med p-te orden kaldes en p-te ordens differentialligning. Ligningen (6) kaldes <u>reel</u> eller <u>kompleks</u>, eftersom $\underline{f}$ og $\underline{x}$ betragtes med værdier i et reelt vektorrum $\mathbb{R}^k$ eller et komplekst vektorrum $\mathbb{C}^k$. Ligningen (6) kaldes <u>lineær</u>, præcis når $\underline{f}$ er af formen (7). Når $\underline{f}$ ikke forudsættes at være af denne form, kaldes ligningen gerne <u>ikke-lineær</u>.

Lad os endelig bemærke, at vi i nærværende tekst omhyggeligt kalder en løsningsfunktion $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$, altså skelner mellem punkter $\underline{x}$ og funktionen $\underline{\varphi}\colon J \to \mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$. Det er også almindeligt at bruge betegnelsen $\underline{x}$ <u>både</u> for punktet $\underline{x}$ <u>og</u> funktionen $\underline{x}$: $t \mapsto \underline{x}(t)$; dette er et typisk eksempel på "misbrug af notationen", som kan være praktisk, og som man derfor må leve med. (Den matematiske korrekthed opretholdes da ved at man <u>fortolker</u> symbolerne korrekt.)

Ligningen (6) skrives også ofte

$$\underline{x}' = \underline{f}(t,\underline{x}) \ ,$$

og der er tilsvarende omskrivninger for de andre ligninger. Man møder af og til betegnelsen "et integral" for en løsning.

BEMÆRKNING. Ligningen (6) kan tolkes <u>geometrisk</u> i rummet $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^k$ på følgende måde: Ud fra hvert punkt $(t,\underline{x})$ i Ω afsættes vektoren $(1,\underline{f}(t,\underline{x}))$. Herved fås et <u>vektorfelt</u> på Ω . Det drejer sig da om at bestemme de kurver i Ω , der har en parameterfremstilling af formen $(t,\underline{\varphi}(t))$, $t \in J$, og som i hvert af deres punkter tangerer den i punktet anbragte feltvektor.

<u>Løsning. Omskrivning til integralligning</u>. Idet vi som sædvanlig benytter V som fælles betegnelse for $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{C}^k$ $(k \in \mathbb{N})$ betragter vi i det følgende <u>vektordifferentialligningen</u> eller differentialligningssystemet af første orden (6), altså

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x}) \ ,$$

hvor vi altid antager, at $\underline{f}(t,\underline{x})$ er en given <u>kontinuert</u> funktion fra en <u>åben</u> mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times V$ ind i V .

Her er V og $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times V$ forsynet med de af maksimumsnormerne

$$\|\underline{x}\| = \max\{|x_1|,\ldots,|x_k|\} \ , \quad \underline{x} = (x_1,\ldots,x_k) \in V$$

$$\|(t,\underline{x})\| = \max\{|t|,|x_1|,\ldots,|x_k|\} \ , \quad (t,\underline{x}) \in \mathbb{R}\times V \ ,$$

inducerede metrikker.

<u>DEFINITION</u>. Lad J være et interval af $\mathbb{R}$ (begrænset eller ubegrænset; åbent, halvåbent eller afsluttet). En funktion $\underline{\varphi}: J \to V$ siges at være en <u>løsning</u> <u>til</u> (6) <u>i</u> Ω , hvis der gælder

(i) $(t,\underline{\varphi}(t)) \in \Omega$ for $t \in J$;

(ii) $\underline{\varphi}$ er differentiabel i J ;

(iii) $\underline{\varphi}'(t) = \underline{f}(t,\underline{\varphi}(t))$ for $t \in J$.

Når $(t_0,\underline{x}_0)$ er et punkt i Ω , siges en løsning $\underline{\varphi}: J \to V$ til (6), at gå gennem $(t_0,\underline{x}_0)$, når $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{x}_0$. Ofte benyttes sprogbrugen at $\underline{\varphi}$ tilfredsstiller begyndelsesbetingelsen $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{x}_0$.

BEMÆRKNING. I almindelighed har ligningen (6) uendelig mange løsninger, men ofte er der netop én løsning der går gennem et givet punkt $(t_0,\underline{x}_0) \in \Omega$.

Bemærk også, at hvis $\underline{\varphi}$ er en løsning til (6), så er $\underline{\varphi}$ automatisk af klasse C^1 , idet $\underline{\varphi}'(t) = \underline{f}(t,\underline{\varphi}(t))$ og $\underline{f}$ er kontinuert.

Vi viser nu, at $\underline{\varphi}$ er en løsning til (6) og går gennem $(t_0,\underline{x}_0)$ hvis og kun hvis $\underline{\varphi}$ opfylder en vis integralligning.

LEMMA 1.1. Lad $(t_0,\underline{x}_0) \in \Omega$, lad J være et interval, der indeholder t_0 , og lad $\underline{\varphi}: J \to V$ være en kontinuert funktion, for hvilken $(t,\underline{\varphi}(t)) \in \Omega$ når $t \in J$. Da er $\underline{\varphi}$ en løsning til (6) som går gennem $(t_0,\underline{x}_0)$ hvis og kun hvis $\underline{\varphi}$ opfylder

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau \quad \text{for } t \in J . \tag{8}$$

BEVIS. Bemærk, at den sammensatte funktion $\tau \mapsto \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))$ er en veldefineret og kontinuert funktion af J ind i V og dermed er integralet i (8) veldefineret for hvert $t \in J$ og bestemmer et element af V .

Antag først, at $\underline{\varphi}$ opfylder (8). Så er $\underline{\varphi}$ differentiabel med differentialkvotient $\underline{\varphi}'$ som opfylder $\underline{\varphi}'(t) = \underline{f}(t,\underline{\varphi}(t))$ for $t \in J$ og da $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{x}_0$ er $\underline{\varphi}$ altså en løsning til differentialligningen (6) som går gennem $(t_0,\underline{x}_0)$. (Vi har jo forudsat at $(t,\underline{\varphi}(t)) \in \Omega$ for $t \in J$.)

Hvis omvendt $\underline{\varphi}$ er en løsning til (6) med $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{x}_0$ fås for $t \in J$

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{\varphi}'(\tau)d\tau = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau \ ,$$

altså at $\underline{\varphi}$ opfylder (8). $\square$

Lipschitz betingelse. Vi skal nu formulere den ekstra antagelse om højresiden i ligningen (6) som vi vil benytte i eksistens- og entydighedssætningen nedenfor.

DEFINITION. Lad Ξ være en delmængde af $\mathbb{R}\times V$ og lad $\underline{f}\colon \Xi \to V$ være en funktion. Vi siger at $\underline{f}$ opfylder en Lipschitz betingelse i Ξ, hvis der findes en konstant $C > 0$ så det for alle $(t,\underline{x}_1),(t,\underline{x}_2) \in \Xi$ (med samme t) gælder

$$\|\underline{f}(t,\underline{x}_1) - \underline{f}(t,\underline{x}_2)\| \le C\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\| \ .$$

DEFINITION. Lad Ω være en åben delmængde af $\mathbb{R}\times V$ og lad $\underline{f}\colon \Omega \to V$ være en funktion. Vi siger, at $\underline{f}$ opfylder en Lipschitz betingelse lokalt i Ω, hvis der til hvert punkt $(t_0,\underline{x}_0) \in \Omega$ findes en omegn Ξ af $(t_0,\underline{x}_0)$ af formen

$$\Xi = \{(t,\underline{x}) \in \mathbb{R}\times V \mid |t-t_0| \le a \ , \ \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \le b\} \subseteq \Omega \ ,$$

så $\underline{f}$ opfylder en Lipschitz betingelse i Ξ.

Eksplicit kræver vi altså, at der til hvert $(t_0,\underline{x}_0) \in \Omega$ findes $a,b,C > 0$ så det for $t \in \mathbb{R}$ og $\underline{x}_1,\underline{x}_2 \in V$ gælder at hvis $|t-t_0| \le a$ og $\|\underline{x}_1-\underline{x}_0\| \le b$, $\|\underline{x}_2-\underline{x}_0\| < b$ så er $(t,\underline{x}_1),(t,\underline{x}_2) \in \Omega$ og der gælder $\|\underline{f}(t,\underline{x}_1) - \underline{f}(t,\underline{x}_2)\| \le C\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\|$.

Bemærk, at denne betingelse primært vedrører opførselen af $\underline{f}$ som funktion af $\underline{x}$, men dog kræver en vis uniformitet mht. t .

Nedenstående sætning viser, at for en meget omfattende klasse af ligninger af formen (6) opfylder højresiden en Lipschitz betingelse lokalt i Ω .

LEMMA 1.2. Lad $\underline{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ være en kontinuert funktion defineret på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$, og antag at $\underline{f}$ har partielle afledede med hensyn til $(x_1,\ldots,x_k)$ som er kontinuerte i Ω.

Så opfylder $\underline{f}$ en Lipschitz betingelse i enhver i Ω indeholdt mængde af formen $((t_0,\underline{x}_0) \in \Omega$, $a,b > 0)$

$$\Xi = \{(t,\underline{x}) \mid |t-t_0| \le a\ ,\ \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \le b\} \subseteq \Omega\ . \tag{9}$$

BEVIS. Lad Ξ være givet ved (9) og betragt $(t,\underline{x}_1),(t,\underline{x}_2) \in \Xi$. Det drejer sig om at vurdere differensen mellem værdierne af $\underline{f}$ i de to endepunkter af liniestykket

$$\{(t,\underline{x}_2+\theta(\underline{x}_1-\underline{x}_2)) \mid \theta \in [0,1]\}\ .$$

Dette liniestykke er indeholdt i Ξ, thi for $\theta \in [0,1]$ gælder nemlig

$$\|\underline{x}_2+\theta(\underline{x}_1-\underline{x}_2)-\underline{x}_0\| = \|\theta(\underline{x}_1-\underline{x}_0)+(1-\theta)(\underline{x}_2-\underline{x}_0)\| \le \theta b+(1-\theta)b = b\ .$$

For $i = 1,2,\ldots,k$ er funktionen $F_i(\theta) = f_i(t,\underline{x}_2+\theta(\underline{x}_1-\underline{x}_2))$ differentiabel på $[0,1]$, og der findes derfor ifølge middelværdisætningen tal $\theta_i \in]0,1[$ så

$$f_i(t,\underline{x}_1)-f_i(t,\underline{x}_2) = \frac{d}{d\theta}F_i(\theta_i)\ .$$

Her kan højresiden beregnes ved kædereglen

$$\frac{d}{d\theta}F_i(\theta) = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,\underline{x}_2+\theta(\underline{x}_1-\underline{x}_2))(x_{1j}-x_{2j})\ .$$

Idet hver af funktionerne $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|$ $i,j = 1,\ldots,k$ er kontinuert i Ω og dermed begrænset på den kompakte mængde Ξ, vælger vi nu et tal $A \ge$ supremum over Ξ af hver af disse funktioner, og dermed kan vi vurdere

$$|f_i(t,\underline{x}_1)-f_i(t,\underline{x}_2)| = \left|\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,\underline{x}_2+\theta_i(\underline{x}_1-\underline{x}_2))(x_{1j}-x_{2j})\right|$$

$$\le \sum_{j=1}^{k}A\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\| = kA\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\|$$

for $i = 1,2,\ldots,k$, og dermed

$$\|\underline{f}(t,\underline{x}_1)-\underline{f}(t,\underline{x}_2)\| = \max\{|f_i(t,\underline{x}_1)-f_i(t,\underline{x}_2)| \mid i=1,\ldots,k\} \leq kA\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\| \ . \quad \square$$

BEMÆRKNING. I tilfældet $V = \mathbb{C}^k$ har vi følgende version af Lemma 1.2: Lad $\underline{f}\colon \Omega \to \mathbb{C}^k$ være en kontinuert funktion defineret på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{C}^k$, og antag, at $\underline{f}$ opfattet som funktion af $(t,\mathrm{Re}\,x_1,\mathrm{Im}\,x_1,\ldots,\mathrm{Re}\,x_k,\mathrm{Im}\,x_k)$ har partielle afledede med hensyn til de variable $(\mathrm{Re}\,x_1,\ldots,\mathrm{Im}\,x_k)$. Så opfylder $\underline{f}$ en Lipschitz betingelse i enhver i Ω indeholdt mængde Ξ af formen (9). Beviset er en modifikation af det foregående: Punkterne i $\mathbb{C}^k$ opfattes som punkter i $\mathbb{R}^{2k}$, idet $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_k) = (u_1+iv_1,\ldots,u_k+iv_k) \in \mathbb{C}^k$ hvor $u_j,v_j \in \mathbb{R}$ identificeres med $(u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_k) \in \mathbb{R}^{2k}$.

Dermed giver $\underline{f}\colon \Omega \to \mathbb{C}^k$ anledning til en funktion $\tilde{\underline{f}}$ af en åben delmængde i $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2k}$ ind i $\mathbb{C}^k$, nemlig

$$\tilde{\underline{f}}(t,\underline{u},\underline{v}) = \underline{f}(t,\underline{u}+i\underline{v}) \ ,$$

og forudsætningen om $\underline{f}$ kan udtrykkes, at $\tilde{\underline{f}}$ har kontinuerte partielle afledede efter $(u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_k)$.

Vi går nu frem som ovenfor. Idet hver af funktionerne $\left|\frac{\partial\tilde{f}_p}{\partial u_j}\right|$, $\left|\frac{\partial\tilde{f}_p}{\partial v_j}\right|$ for $p,j=1,\ldots,k$ er begrænsede på Ξ vælges $A \geq$ supremum over Ξ af hver af disse funktioner. Dermed kan vi vurdere $(\underline{x}_1 = \underline{u}_1 + i\underline{v}_1 \ , \ \underline{x}_2 = \underline{u}_2 + i\underline{v}_2)$ for $p = 1,\ldots,k$

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{Re}\ f_p(t,\underline{x}_1) - \mathrm{Re}\ f_p(t,\underline{x}_2)| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\tilde{f}_p}{\partial u_j}(t,\underline{x}_2+\theta_p(\underline{x}_1-\underline{x}_2))(u_{1j}-u_{2j}) + \frac{\partial\tilde{f}_p}{\partial v_j}(t,\underline{x}_2+\theta_p(\underline{x}_1-\underline{x}_2))(v_{1j}-v_{2j})\right)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k}(A|u_{1j}-u_{2j}| + A|v_{1j}-v_{2j}|) \leq 2kA\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\|
\end{aligned}$$

hvor vi benyttede $|u_{1j}-u_{2j}|, |v_{1j}-v_{2j}| \leq |x_{1j}-x_{2j}| \leq \|\underline{x}_1-\underline{x}_2\|$. Tilsvarende fås

$$|\mathrm{Im}\ f_p(t,\underline{x}_1) - \mathrm{Im}\ f_p(t,\underline{x}_2)| \leq 2kA\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\|$$

og dermed

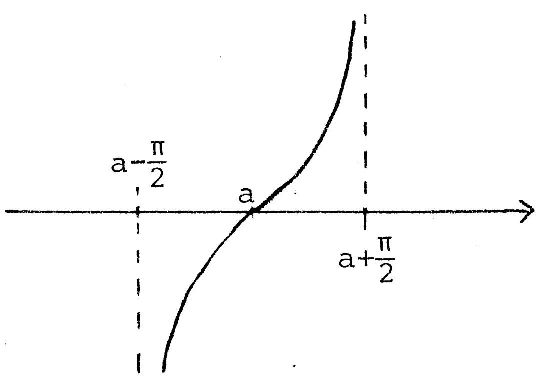
$$|f_p(t,\underline{x}_1)-f_p(t,\underline{x}_2)| \leq \left((2kA\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\|)^2 + (2kA\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{2}\ kA\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\|$$

som giver det ønskede, at

$$\|f(t,\underline{x}_1)-f(t,\underline{x}_2)\| = \max\left\{|f_p(t,\underline{x}_1)-f_p(t,\underline{x}_2)| \,\middle|\, p=1,\ldots,k\right\} \leq 2\sqrt{2}\ kA\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\|$$

<u>Eksistens- og entydighedssætningen</u>. Vi betragter nu differentialligningen (6) og vil under forudsætning af at $\underline{f}$ opfylder en Lipschitz betingelse lokalt i Ω vise, at der til hvert punkt $(t_0,\underline{x}_0) \in \Omega$ findes et interval I omkring t_0 og en funktion $\underline{\varphi}: I \to V$ så $\underline{\varphi}$ er en løsning til (6) som går gennem $(t_0,\underline{x}_0)$ og så $\underline{\varphi}$ er den eneste på I definerede løsning til (6) der går gennem $(t_0,\underline{x}_0)$. Denne indskrænkning til "små" definitionsintervaller omkring t_0 ligger i sagens natur som følgende eksempel viser.

EKSEMPEL. Lad $V = \mathbb{R}$ og $\Omega = \mathbb{R}\times V = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Betragt funktionerne $\varphi_a(t) = \tan(t-a)$ for $|t-a| < \frac{\pi}{2}$; her er a en parameter, der gennemløber $\mathbb{R}$. For hver af funktionerne φ_a gælder, at $\frac{d}{dt}\varphi_a(t) = 1+\tan^2(t-a) = 1+\varphi_a(t)^2$; de er altså løsninger til differentialligningen



$$\frac{dx}{dt} = 1+x^2 ,$$

som er af formen (6) med $f(t,x) = 1+x^2$. Det vil fremgå senere, cf. p. VII.14, at denne differentialligning ikke har andre løsninger end funktionerne φ_a og deres restriktioner. Bemærk, at hvert definitionsinterval er <u>begrænset</u>, til trods for at $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Det følger af Lemma 1.2, at f opfylder en Lipschitz betingelse lokalt i Ω.

<u>SÆTNING 1.3</u>. Lad $V = \mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$, lad Ω være en åben delmængde af $\mathbb{R}\times V$, og lad $\underline{f}: \Omega \to V$ være en kontinuert funktion som opfylder en Lipschitz betingelse lokalt i Ω. For ethvert $(t_0,\underline{x}_0) \in \Omega$ og enhver delmængde $\Xi \subseteq \Omega$ af formen

$$\Xi = \{(t,\underline{x}) \mid |t-t_0| \le a , \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \le b\}$$

hvor $a > 0$ og $b > 0$, findes et $\alpha \in\,]0,a]$, så at der for hvert interval $I \subseteq \mathbb{R}$ med $t_0 \in I \subseteq [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ findes en og kun een løsning $\underline{\varphi}: I \to V$ til differentialligningen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x})$$

som går gennem $(t_0,\underline{x}_0)$ og for hvilken $(t,\underline{\varphi}(t)) \in \Xi$ for alle $t \in I$.

BEVIS. Lad $(t_0,\underline{x}_0) \in \Omega$ og lad Ξ være en mængde af formen

$$\Xi = \{(t,\underline{x}) \in \mathbb{R}\times V \mid |t-t_0| \leq a, \quad \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \leq b\}$$

hvor $a,b > 0$ er valgt så $\Xi \subseteq \Omega$. Med $B \subseteq V$ givet ved

$$B = \{\underline{x} \in V \mid \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \leq b\}$$

har vi altså $\Xi = [t_0-a,t_0+a] \times B$. For et delinterval $I \subseteq [t_0-a,t_0+a]$ med $t_0 \in I$ betegner $C^0(I,B)$ som sædvanlig mængden af kontinuerte afbildninger $\underline{\varphi}: I \to B$, og $C^0(I,B)$ er et metrisk rum med den sædvanlige metrik

$$d_\infty(\underline{\varphi},\underline{\psi}) = \sup\{\|\underline{\varphi}(t)-\underline{\varphi}(t)\| \mid t \in I\}.$$

Ideen i beviset er nu at betragte afbildningen T af $C^0(I,B)$ ind i mængden af funktioner af I ind i V givet ved

$$(T\underline{\varphi})(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau \quad \text{for} \quad t \in I.$$

Som vi skal se gælder, at hvis intervallet I er tilpas lille (og $t_0 \in I$) så har denne afbildning T følgende egenskaber:

(i) T afbilder $C^0(I,B)$ <u>ind i sig selv</u>, d.v.s. for hvert $\underline{\varphi} \in C^0(I,B)$ er $T\underline{\varphi} \in C^0(I,B)$ altså $T\underline{\varphi}$ er kontinuert og grafen for $T\underline{\varphi}$ er indeholdt i Ξ,

(ii) T er en <u>kontraktion</u> i det metriske rum $(C^0(I,B),d_\infty)$, d.v.s. der findes en konstant $\delta \in [0,1[$ så det for alle $\underline{\varphi}_1,\underline{\varphi}_2 \in C^0(I,B)$ gælder at

$$d_\infty(T\underline{\varphi}_1,T\underline{\varphi}_2) \leq \delta d_\infty(\underline{\varphi}_1,\underline{\varphi}_2).$$

Da $C^0(I,B),d_\infty)$ er fuldstændigt, fås af fikspunktsætningen i Kap. II, at T har et og kun eet fikspunkt, dvs. der findes en og kun een funktion $\underline{\varphi} \in C^0(I,B)$, der opfylder $T\underline{\varphi} = \underline{\varphi}$ dvs.

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau \quad \text{for} \quad t \in I .$$

Ifølge Lemma 1.1 er $\underline{\varphi}$ da den entydigt bestemte løsning til differentialligningen som går gennem $(t_0,\underline{x}_0)$.

Ifølge forudsætningerne om $\underline{f}$ findes positive tal C og M, så

$$\|\underline{f}(t,\underline{x}_1) - \underline{f}(t,\underline{x}_2)\| \leq C\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\| \quad \text{for alle} \quad (t,\underline{x}_1),(t,\underline{x}_2) \in \Xi$$

$$\|\underline{f}(t,\underline{x})\| \leq M \qquad \text{for} \quad (t,\underline{x}) \in \Xi .$$

Vælg et tal $\delta \in]0,1[$. Lad α være et tal med $0 < \alpha \leq a$; vi vil lægge yderligere bånd på α senere. Lad I være et delinterval af $[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$ med $t_0 \in I$.

Betragt nu $\underline{\varphi} \in C^0(I,B)$ og lad $T\underline{\varphi}$ være funktionen $T\underline{\varphi}: I \to V$ givet ved

$$T\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau \quad \text{for} \quad t \in I .$$

Det er klart, at $T\underline{\varphi}$ er kontinuert, og ved hjælp af de sædvanlige vurderinger af integraler ses, at for $t \in I$

$$\|T\underline{\varphi}(t)-\underline{x}_0\| = \left\|\int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau\right\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \|\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))\|d\tau\right| \leq |t-t_0|M \leq \alpha M .$$

Dermed har vi, at hvis $\alpha M \leq b$ så gælder $T\underline{\varphi} \in C^0(I,B)$.

Når $\underline{\varphi}_1$ og $\underline{\varphi}_2$ tilhører $C^0(I,B)$, og $\underline{\psi}_1 = T(\underline{\varphi}_1)$, $\underline{\psi}_2 = T(\underline{\varphi}_2)$, finder vi, for $t \in I$,

$$\begin{aligned}\|\underline{\psi}_1(t)-\underline{\psi}_2(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} [\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))-\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_2(\tau))]d\tau\right\| \\ &\leq \left|\int_{t_0}^{t} \|\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))-\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_2(\tau))\|d\tau\right| \\ &\leq C|t-t_0| \sup_{\tau\in I}\|\underline{\varphi}_2(\tau)-\underline{\varphi}_1(\tau)\| .\end{aligned}$$

Vi vil nu yderligere kræve om α , at $\alpha \leq \frac{\delta}{C}$; så kan den netop viste ulighed udtrykkes, at for $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2 \in C^0(I,B)$ gælder

$$\sup_{t\in I}\|T(\underline{\varphi}_2)(t)-T(\underline{\varphi}_1)(t)\| \leq \delta \sup_{t\in I}\|\underline{\varphi}_2(t)-\underline{\varphi}_1(t)\| ,$$

eller

$$d_\infty(T\underline{\varphi}_1, T\underline{\varphi}_2) \leq \delta d_\infty(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2) .$$

Kravene på α opsummeres i betingelsen

$$0 < \alpha \leq \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{\delta}{C}\right\} ,$$

og vi har dermed set, at for $I \subseteq [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ med $t_0 \in I$ er afbildningen T af $C^0(I,B)$ ind i sig selv en kontraktion, hvilket giver påstanden. □

BEMÆRKNING. Fikspunktet $\underline{\varphi}$ for T og dermed den søgte løsning kan ifølge beviset for fikspunktsætningen konstrueres ud fra en vilkårlig funktion $\underline{\varphi}_0 \in C^0(I,B)$, som grænsefunktion for funktionsfølgen $(\underline{\varphi}_p)_{p\in\mathbb{N}}$, hvor

$$\underline{\varphi}_p = T^p(\underline{\varphi}_0) .$$

Mere eksplicit beror konvergensen af denne følge på omskrivningen

$$\underline{\varphi}_p(t) = \underline{\varphi}_0(t) + \sum_{n=1}^{p}(\underline{\varphi}_n(t)-\underline{\varphi}_{n-1}(t)) , \quad \text{for} \quad t \in I ,$$

hvor rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(\underline{\varphi}_n(t)-\underline{\varphi}_{n-1}(t))$ har den konvergente majorantrække

$$\sum_{n=1}^{p} \delta^{-n} d_\infty(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_0) .$$

BEMÆRKNING. Bevismetoden kaldes de "successive approksimationers metode". Den almene teori for sædvanlige differentialligninger, omfattende eksistens- og entydighedssætninger, blev først udviklet af Cauchy og videre udformet gennem undersøgelser i løbet af 18-hundredtallet bl.a. af R. Lipschitz og E. Picard.

<u>Maksimale løsninger</u>. Vi skal herefter se, hvorledes Sætning 1.3 kan bruges til at vise <u>eksistens</u> og <u>entydighed</u> af løsninger med <u>maksimalt</u> (og åbent) definitionsinterval.

Når $\underline{\varphi}_1: J_1 \to V$ og $\underline{\varphi}_2: J_2 \to V$ er funktioner, siges $\underline{\varphi}_1$ som bekendt at være en restriktion af $\underline{\varphi}_2$, når $J_1 \subseteq J_2$ og $\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t)$ for $t \in J_1$ (og $\underline{\varphi}_2$ siges at være en udvidelse af $\underline{\varphi}_1$). Restriktionen (hhv. udvidelsen) kaldes ægte, når $J_1 \neq J_2$.

DEFINITION. Lad Ω være åben $\subseteq \mathbb{R}\times V$, og lad $\underline{f}: \Omega \to V$ være kontinuert. En løsning $\underline{\varphi}: J \to V$ til differentialligningen $\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x})$ siges at være maksimal i Ω, når der ikke findes nogen løsning til ligningen i Ω, som er en ægte udvidelse af $\underline{\varphi}$.

SÆTNING 1.4. Lad $V = \mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$, lad Ω være en åben delmængde af $\mathbb{R}\times V$, og lad $\underline{f}: \Omega \to V$ være en kontinuert funktion som opfylder en Lipschitz betingelse lokalt i Ω. For ethvert $(t_0,\underline{x}_0) \in \Omega$ findes en og kun een maksimal løsning $\underline{\varphi}: J \to V$ til differentialligningen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = f(t,\underline{x}) \quad i \quad \Omega, \tag{10}$$

med $t_0 \in J$ og $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{x}_0$. Enhver maksimal løsning har åbent definitionsinterval J; og enhver løsning til ligningen er restriktion af en maksimal løsning.

BEVIS. Vi starter med at vise, at hvis $\underline{\varphi}_1: J_1 \to V$ og $\underline{\varphi}_2: J_2 \to V$ er løsninger til (10) som går gennem $(t_0,\underline{x}_0)$ så gælder

$$\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t) \quad \text{for alle} \quad t \in J_1 \cap J_2 . \tag{11}$$

Lad $\beta_1,\beta_2 \in [t_0,\infty]$ betegne de højre endepunkter af J_1 og J_2 og definer

$$\beta = \sup\{t \geq t_0 \mid \underline{\varphi}_1(s) = \underline{\varphi}_2(s) \quad \text{for} \quad s \in [t_0,t] \cap J_1 \cap J_2\} .$$

Vi skal se, at $\beta = \min\{\beta_1,\beta_2\}$ eller anderledes udtrykt at $\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t)$ for alle $t \in [t_0,\infty[\cap J_1 \cap J_2$. Hvis $\beta_1 = t_0$ eller $\beta_2 = t_0$ er der intet at vise. Antag $\beta < \beta_1$ og $\beta < \beta_2$. Så gælder, da $\underline{\varphi}_1$ og $\underline{\varphi}_2$ er kontinuerte, at $\underline{\varphi}_1(\beta) = \underline{\varphi}_2(\beta)$. Ifølge Sætning 1.3

findes til hver i Ω indeholdt mængde Ξ af formen (9) omkring $(\beta,\underline{\varphi}_1(\beta)) \in \Omega$ et interval $I_1 = [\beta-\alpha,\beta+\alpha]$ omkring β og en løsning $\underline{\varphi}\colon I_1 \to V$ til (10) som går gennem $(\beta,\underline{\varphi}_1(\beta))$ og som er <u>den eneste</u> på I_1 definerede løsning til (10) gennem $(\beta,\underline{\varphi}_1(\beta))$. Heraf følger at

$$\underline{\varphi}_1(s) = \underline{\varphi}_2(s) = \underline{\varphi}(s) \quad \text{for} \quad s \in I_1 \cap J_1 \cap J_2$$

hvilket strider mod definitionen af β. Altså gælder

$$\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t) \quad \text{for} \quad t \in [t_0,\infty[\cap J_1 \cap J_2 ,$$

og på samme måde ses at

$$\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t) \quad \text{for} \quad t \in]-\infty,t_0] \cap J_1 \cap J_2$$

hvoraf (11).

Vi ser af ovenstående, at vi kan definere en funktion $\underline{\varphi}(t)$ på $J_1 \cup J_2$ ved at sætte $\underline{\varphi}(t) = \underline{\varphi}_1(t)$ for $t \in J_1$ og $\underline{\varphi}(t) = \underline{\varphi}_2(t)$ for $t \in J_2$ og dermed er $\underline{\varphi}\colon J_1 \cup J_2 \to V$ en løsning til (10) gennem $(t_0,\underline{x}_0)$. Det ses da videre, at hvis vi definerer J som foreningsmængden af samtlige definitionsintervaller for løsninger gennem $(t_0,\underline{x}_0)$, stemmer samtlige disse løsninger overens i de punkter, hvor de er defineret, og de definerer derfor på entydig måde en løsning $\underline{\varphi}_0$ med definitionsinterval J. Funktionen $\underline{\varphi}_0$ er klart en <u>maksimal</u> løsning i Ω, og det er den eneste maksimale løsning i Ω.

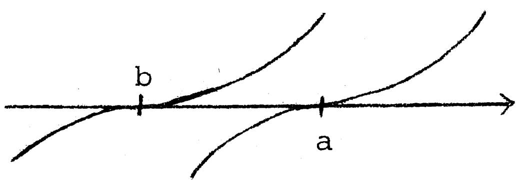
Endelig slutter vi, at J er et <u>åbent</u> interval af $\mathbb{R}$, ved at bemærke, at for ethvert punkt $t' \in J$ findes (ved brug af Sætning 1.3) et interval $[t'-\alpha',t'+\alpha']$ med $\alpha' > 0$, på hvilket der er defineret en løsning $\underline{\varphi}$ gennem $(t',\underline{\varphi}_0(t'))$; da stemmer $\underline{\varphi}$ overens med $\underline{\varphi}_0$ på $J \cap [t'-\alpha',t'+\alpha']$, som må indeholde $[t'-\alpha',t'+\alpha']$ på grund af maksimaliteten af $\underline{\varphi}_0$. □

EKSEMPEL (fortsat fra p. VII.9). Om de angivne funktioner $\varphi_a(t)$ gælder åbenbart, at der for hvert $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ findes netop eet $a \in \mathbb{R}$, så $\varphi_a(t_0) = x_0$; endvidere kan $\varphi_a(t)$ ikke udvides til en kontinuert funktion på noget interval, der indeholder $]a-\frac{\pi}{2},a+\frac{\pi}{2}[$ som ægte delmængde. Vi har altså fundet samtlige maksimale løsninger.

EKSEMPEL. Betragt differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}$$

for $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. I hver af halvplanerne $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ og $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-$ opfylder funktionen $f(t,x) = 3x^{2/3}$ en Lipschitz betingelse lokalt, men dette gælder ikke i nogen omegn af punkter $(t,0)$ (idet $(x^{2/3}-0)/(x-0) = x^{-1/3}$ for $x \neq 0$ er ubegrænset nær $x = 0$). Det ses ved indsættelse, at funktionerne $x = (t-a)^3$ for $t \in]a,+\infty[$ (hvor a vælges i $\mathbb{R}$) er løsninger for $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$; de er endda maksimale, idet kontinuerte udvidelser fører udenfor Ω . Tilsvarende er funktionerne $x = (t-a)^3$ for $t \in]-\infty,a[$ maksimale løsninger for $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_-$.



Funktionerne $x = (t-a)^3$ for $t \in \mathbb{R}$ er maksimale løsninger for $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, men det er følgende funktioner <u>også</u>: Vælg a og b med $b < a$, og sæt

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-b)^3 & \text{for } t \in]-\infty,b[\\ 0 & \text{for } t \in [b,a] \\ (t-a)^3 & \text{for } t \in]a,\infty[\end{cases}$$

(prøv efter!). Altså er der ikke entydighed af maksimale løsninger i $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

I det følgende eksempel skal vi udnytte metoden "separation af de variable" der i en række situationer kan benyttes til den <u>eksplicitte beregning</u> af løsninger. Senere vil denne metode blive nærmere uddybet, se §5.

EKSEMPEL. Vi betragter differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \quad \text{for} \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2 .$$

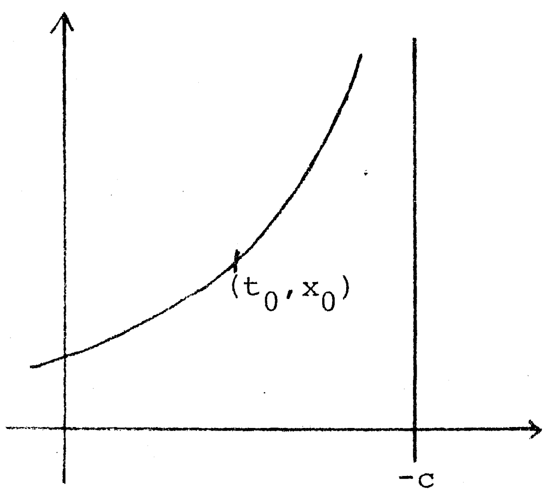
Det ses, at højresiden $f(t,x) = x^2$ er kontinuert differentiabel efter x, og f opfylder altså en Lipschitz betingelse lokalt i $\mathbb{R}^2$, og fra Sætning 1.4 ved vi dermed, at der gennem hvert punkt $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^2$ går netop én maksimal løsning. Idet $x(t) = 0$ er en løsning har vi dermed samtlige maksimale løsninger gennem punkter af formen $(t_0,0) \in \mathbb{R}^2$. Antag nu at $x \neq 0$. Ved en formel omskrivning tager ligningen formen $x^{-2}dx = dt$ som ved at tage stamfunktioner til x^{-2} m.h.t. x og 1 m.h.t. t fører til følgende relation mellem x og t,

$$-x^{-1} = t+c ,$$

hvor $c \in \mathbb{R}$ er en konstant. Vi betragter derfor mængden af funktioner

$$x(t) = \frac{-1}{t+c} \quad \text{for} \quad t \in]-\infty,-c[\cup]-c,\infty[.$$

Det er umiddelbart at konstatere, at disse funktioner er løsninger til den oprindelige ligning.



Idet der gennem hvert punkt $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^2$ med $x_0 \neq 0$ går netop en af disse funktioner, nemlig den bestemt ved at

$$c = \frac{-1}{x_0} - t_0 ;$$

ser vi, at den maksimale løsning gennem punktet $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \in \mathbb{R}, & \text{hvis } x_0 = 0 \\ \dfrac{1}{t_0+\frac{1}{x_0}-t} & \text{for } t \in]-\infty, t_0+\frac{1}{x_0}[, & \text{hvis } x_0 > 0 \\ \dfrac{1}{t_0+\frac{1}{x_0}-t} & \text{for } t \in]t_0+\frac{1}{x_0},\infty[, & \text{hvis } x_0 < 0 . \end{cases}$$

<u>Løsningens afhængighed af begyndelsesværdien og af ligningens højre side.</u> Lad os betragte en differentialligning

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x})$$

hvor $\underline{f}$ opfylder en Lipschitz betingelse lokalt. Ifølge Sætning 1.4 går der da gennem hvert punkt $(t_0,\underline{x}_0)$ af Ω en og kun een maksimal løsning $\underline{\varphi}$. Man kalder $\underline{x}_0$ begyndelsesværdien for $\underline{\varphi}$ svarende til det givne t_0 . I visse forbindelser er det af betydning at vide, hvad der sker, hvis man ændrer begyndelsesværdien $\underline{x}_0$ lidt, eller ændrer ligningens højre side lidt, eller foretager begge ændringer samtidig. Vi vil indskrænke os til at udlede et resultat vedrørende forholdene i en omegn af $(t_0,\underline{x}_0)$, og under sådanne forudsætninger at bevisførelsen bliver enklest mulig.

Foruden den givne ligning betragter vi en ligning

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}_1(t,\underline{x}) ,$$

hvor $\underline{f}_1 \colon \Omega_1 \to V$ ligeledes opfylder en Lipschitz betingelse lokalt i Ω_1 . Vi antager, at $(t_0,\underline{x}_0) \in \Omega \cap \Omega_1$, og vælger en omegn

$$\Xi = \left\{(t,\underline{x}) \;\middle|\; |t-t_0| \le a \,,\ \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \le 2b\right\} \subseteq \Omega \cap \Omega_1 ,$$

hvori $\underline{f}$ og $\underline{f}_1$ hver for sig opfylder en Lipschitz betingelse, lad os sige med konstanter C og $C_1 > 0$. For det ovenfor i beviset for Sætning 1.3 benyttede tal $\delta \in]0,1[$ vælger vi $\frac{1}{2}$. Idet M og M_1 vælges > 0 , så at

$$\sup_{(t,\underline{x})\in\Xi} \|\underline{f}(t,\underline{x})\| \le M \qquad \text{og} \qquad \sup_{(t,\underline{x})\in\Xi} \|\underline{f}_1(t,\underline{x})\| \le M_1 ,$$

sætter vi

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{b}{M_1}, \frac{1}{2C}, \frac{1}{2C_1}\right\} .$$

Definitionsintervallet for den maksimale løsning $\underline{\varphi}$ til ligningen $\underline{x}' = \underline{f}(t,\underline{x})$ gennem $(t_0,\underline{x}_0)$ vil da ifølge beviset for Sætning 1.3 indeholde intervallet $[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$, og der gælder $\|\underline{\varphi}(t)-\underline{x}_0\| \le b$ for alle $t \in [t_0-\alpha,t_0+\alpha]$. Vælges et $\underline{x}_1$, så at $\|\underline{x}_1-\underline{x}_0\| \le b$, vil definitionsintervallet for den maksimale løsning til ligningen $\underline{x}' = \underline{f}_1(t,\underline{x})$ gennem $(t_0,\underline{x}_1)$ ligeledes indeholde intervallet $[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$, og vi har $\|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{x}_1\| \le b$ og følgelig $\|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{x}_0\| \le 2b$ for alle $t \in [t_0-\alpha,t_0+\alpha]$.

Som mål for ændringen af differentialligningen tager vi

$$\sup_{(t,\underline{x})\in\Xi} \|\underline{f}_1(t,\underline{x})-\underline{f}(t,\underline{x})\| = \rho ,$$

og som mål for ændringen af løsningen tager vi

$$\sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} \|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{\varphi}(t)\| = \sigma .$$

For ethvert $t \in [t_0-\alpha,t_0+\alpha]$ finder vi (ifølge Lemma 1.1)

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}(t) &= \underline{x}_1 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}_1(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))d\tau - \underline{x}_0 - \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau \\ &= \underline{x}_1 - \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} [\underline{f}_1(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau)) - \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))]d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} [\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau)) - f(\tau,\underline{\varphi}(\tau))]d\tau ,\end{aligned}$$

hvoraf

$$\begin{aligned}\|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{\varphi}(t)\| &\leq \|\underline{x}_1-\underline{x}_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} \|\underline{f}_1(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau)) - \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau))\|d\tau\right| \\ &\quad + \left|\int_{t_0}^{t} \|\underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_1(\tau)) - f(\tau,\underline{\varphi}(\tau))\|d\tau\right| \\ &\leq \|\underline{x}_1-\underline{x}_0\| + \rho\alpha + \left|\int_{t_0}^{t} C\|\underline{\varphi}_1(\tau) - \underline{\varphi}(\tau)\|d\tau\right| \\ &\leq \|\underline{x}_1-\underline{x}_0\| + \rho\alpha + C\sigma\alpha .\end{aligned}$$

Følgelig gælder $\sigma \leq \|\underline{x}_1-\underline{x}_0\| + \alpha\rho + C\alpha\sigma$, og da $C\alpha \leq \frac{1}{2}$, giver dette $\sigma \leq 2\|\underline{x}_1-\underline{x}_0\| + 2\alpha\rho$. Vi har altså

$$\|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{\varphi}(t)\| \leq 2\|\underline{x}_1-\underline{x}_0\| + 2\alpha\rho , \quad t \in [t_0-\alpha,t_0+\alpha] .$$

Heraf ses: Når $\|\underline{x}_1-\underline{x}_0\|$ og ρ begge er små, er ændringen $\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}(t)$ i løsningen lille på hele intervallet $[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$.

Hvis vi ændrer begyndelsesværdien, men ikke ligningen, falder leddet $2\alpha\rho$ i vurderingen bort. Hvis vi kun ændrer ligningen, men ikke begyndelsesværdien, falder leddet $2\|\underline{x}_1-\underline{x}_0\|$ i vurderingen bort.

§2. Differentialligninger og differentialligningssystemer af højere orden.

Som allerede antydet, i tilfældet af en anden ordens differentialligning, kan løsning af en højere ordens differentialligning føres tilbage til løsning af et system af sammenhørende differentialligninger af første orden, og vi skal nu behandle denne reduktion.

En differentialligning af k'te orden. Det drejer sig om en differentialligning af formen

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}\right) , \tag{1}$$

hvor $f: \Omega \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ er en kontinuert funktion defineret på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ hvis f har reelle værdier og $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}^k$ hvis f har komplekse værdier.

DEFINITION. Lad $J \subseteq \mathbb{R}$ være et interval. En funktion $\varphi: J \to \mathbb{R}$ (henh. $\mathbb{C}$) kaldes en løsning til differentialligningen (1) i Ω, hvis der gælder

(i) φ er k gange differentiabel i J,

(ii) $(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t)) \in \Omega$ for $t \in J$,

(iii) $\varphi^{(k)}(t) = f(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t))$ for $t \in J$.

Bemærk, at en løsning φ til (1) i Ω automatisk er af klasse C^k, idet f er forudsat kontinuert.

En løsning φ til (1) i Ω kaldes maksimal i Ω, hvis der ikke findes nogen løsning til (1) i Ω som er en ægte udvidelse af φ.

Ligningen (1) har i almindelighed uendelig mange løsninger, men ofte vil en løsning φ være fastlagt entydigt ved sin værdi og værdien af de $k-1$ første afledede af φ i et punkt $t_0 \in J$.

DEFINITION. Lad $\varphi: J \to \mathbb{R}$ (henh. $\mathbb{C}$) være en løsning til (1) i Ω og lad $(t_0, \underline{x}_0) \in \Omega$ med $t_0 \in J$. Vi siger, at φ går gennem linieelementet af k'te orden $(t_0, \underline{x}_0)$ eller, at φ opfylder den ved

$(t_0,\underline{x}_0)$ bestemte <u>begyndelsesbetingelse</u> hvis

$$(\varphi(t_0),\varphi'(t_0),\ldots,\varphi^{(k-1)}(t_0)) = \underline{x}_0 \ .$$

Lad nu $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) være en given kontinuert funktion defineret på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times V$, hvor V som sædvanlig betegner $\mathbb{R}^k$ (hvis f har reelle værdier) eller $\mathbb{C}^k$ (hvis f har komplekse værdier). Ved fastsættelsen

$$\underline{\tilde{f}}(t,\underline{x}) = (x_2,x_3,\ldots,x_k,f(t,x_1,\ldots,x_k)) \in V \ , \tag{2}$$

for $(t,\underline{x}) \in \Omega$, defineres en afbildning $\underline{\tilde{f}}\colon \Omega \to V$, og det er klart, at $\underline{\tilde{f}}$ er kontinuert.

Denne funktion $\underline{\tilde{f}}$ giver anledning til differentialligningssystemet af første orden

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(t,\underline{x}) \ , \tag{3}$$

eller skrevet i koordinater

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \ , \\ &\vdots \\ \frac{dx_{k-1}}{dt} &= x_k \ , \\ \frac{dx_k}{dt} &= f(t,x_1,\ldots,x_k) \ . \end{aligned} \tag{4}$$

Vi har følgende relation mellem løsninger til k'te ordens ligninger (1) og løsninger til første ordens systemet (3) eller (4).

<u>SÆTNING 2.1</u>. Lad $J \subseteq \mathbb{R}$ være et vilkårligt interval.

(i) Hvis $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ (henh. $\mathbb{C}$) er en løsning til (1) så er funktionen $\underline{\psi}\colon J \to V$ givet ved

$$\underline{\psi}(t) = (\varphi(t),\varphi'(t),\ldots,\varphi^{(k-1)}(t)) \quad \text{for} \quad t \in J$$

en løsning til (3) eller (4).

(ii) Hvis $\underline{\psi}\colon J \to V$ er en løsning til (3) eller (4) så er den første koordinatfunktion i $\underline{\psi}$ en løsning til (1).

BEVIS. Dette følger ved indsætning. Antag først, at $\underline{\psi}(t) = (\psi_1(t),\ldots,\psi_k(t)): J \to V$ er en løsning til (3) eller (4). Så er $\psi_1,\ldots,\psi_k$ af klasse C^1, og den første ligning i (4) giver $\psi_1' = \psi_2$, altså er ψ_1 af klasse C^2. Den anden ligning (4) giver $\psi_1'' = \psi_2' = \psi_3$ og dermed er ψ_1 af klasse C^3. Således fortsættes og vi finder $\psi_1^{(k-1)} = \psi_k$ hvilket viser, at ψ_1 er af klasse C^k, og den sidste ligning i (4) giver derefter at

$$\psi_1^{(k)}(t) = f(t,\psi_1(t),\ldots,\psi_1^{(k-1)}(t)) \quad \text{for} \quad t \in J ,$$

hvilket netop betyder, at ψ_1 er løsning til (1).

Hvis omvendt $\varphi: J \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) er en løsning til (1) er det let at se, at

$$\underline{\psi}(t) = (\varphi(t),\varphi'(t),\ldots,\varphi^{(k-1)}(t)): J \to V$$

er løsning til (4). $\square$

BEMÆRKNING. En løsning $\varphi: J \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) til (1) går gennem linieelementet af (k-1)-te orden $(t_0,\underline{x}_0)$ $(t_0 \in J, (t_0,\underline{x}_0) \in \Omega)$ hvis og kun hvis den til φ svarende løsning til systemet (4) altså

$$\underline{\psi} = (\varphi,\varphi',\ldots,\varphi^{(k-1)}): J \to V$$

går gennem punktet $(t_0,\underline{x}_0)$.

Ved hjælp af Sætning 2.1 og resultaterne for første ordens systemer i §1 anvendt på systemet (3), kan vi nu behandle ligningen (1). For at kunne anvende Sætning 1.3 og Sætning 1.4 må funktionen $\underline{\tilde{f}}$ antages at opfylde en Lipschitz betingelse lokalt i Ω, hvilket kommer ud på, at der til hvert punkt $(t_0,\underline{x}_0) \in \Omega$ findes en omegn $\Xi \subseteq \Omega$ af $(t_0,\underline{x}_0)$ af formen

$$\Xi = \left\{(t,\underline{x}) \in \mathbb{R}\times V \;\middle|\; |t-t_0| \leq a , \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \leq b\right\}$$

og en konstant $C > 0$ så

$$\|\tilde{\underline{f}}(t,\underline{x}_1) - \tilde{\underline{f}}(t,\underline{x}_2)\| \leq C\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\|$$

for alle $(t,\underline{x}_1),(t,\underline{x}_2) \in \Xi$. Der findes en konstant så dette gælder, hvis og kun hvis der findes en konstant $C^1 > 0$ så

$$|f(t,x_{11},\dots,x_{1k}) - f(t,x_{21},\dots,x_{2k})| \leq C^1\|\underline{x}_1-\underline{x}_2\|$$

for alle $(t,\underline{x}_1),(t,\underline{x}_2) \in \Xi$. Dette beror på formen af systemet (3). Vi har nemlig

$$\|\tilde{\underline{f}}(t,\underline{x}_1) - \tilde{\underline{f}}(t,\underline{x}_2)\|$$
$$= \max\left\{|x_{12}-x_{22}|,\dots,|x_{1k}-x_{2k}|,|f(t,x_{11},\dots,x_{1k})-f(t,x_{21},\dots,x_{2k}|\right\} .$$

Det følger af Lemma 1.2 (med bemærkning), at dette specielt er opfyldt hvis f (i tilfælde af reelle værdier) har partielle afledede efter de variable $x_1,\dots,x_k$ som er kontinuerte i Ω, eller hvis f (i tilfælde af komplekse værdier) har partielle afledede efter de variable $\mathrm{Re}\,x_1,\mathrm{Im}\,x_1,\dots,\mathrm{Re}\,x_k,\mathrm{Im}\,x_k$, som er kontinuerte i Ω.

SÆTNING 2.2. Antag at funktionen f på højre side i ligningen (1) har egenskaben at funktionen $\tilde{\underline{f}}: \Omega \to V$ givet ved (2) opfylder en Lipschitz betingelse lokalt i Ω. For hvert punkt

$$(t_0,\underline{x}_0) = (t_0,x_{01},\dots,x_{0k}) \in \Omega$$

findes netop én maksimal løsning $\varphi: J \to \mathbb{R}$ (hvis f har reelle værdier) eller $\varphi: J \to \mathbb{C}$ (hvis f har komplekse værdier) til differentialligningen af k'te orden (1) for hvilken $t_0 \in J$ og som opfylder

$$(\varphi(t_0),\varphi'(t_0),\dots,\varphi^{(k-1)}(t_0)) = (x_{01},\dots,x_{0k}) .$$

Enhver maksimal løsning til (1) har åbent definitionsinterval, og enhver løsning til (1) er restriktion til en maksimal løsning.

EKSEMPEL. I stedet for t og x skrives x og y ; mærker skal betegne differentiation efter x, og y skal være reel. I halvplanen $\{(x,y) \mid y > 0\}$ betragtes samtlige halvcirkler med centrum på x-aksen; de bestemmes ved funktionerne

$$y = \sqrt{r^2-(x-a)^2} \quad , \quad x \in \,]a-r,a+r[\quad (a \in \mathbb{R}\,,\ r \in \mathbb{R}_+)\ .$$

Vi søger en differentialligning med disse som løsninger. Funktionerne er åbenbart vilkårligt ofte differentiable. Ligningen $(x-a)^2+y^2 = r^2$ giver ved at differentiere to gange $1+y'^2+yy'' = 0$. Funktionerne er altså løsninger til differentialligningen

$$y'' = -\frac{1+(y')^2}{y}$$

og de er åbenbart maksimale løsninger. Funktionen

$$f(x,y_1,y_2) = -\frac{1+(y_2)^2}{y_1}$$

på mængden $\Omega = \{(x,y_1,y_2) \mid y_1 > 0\}$ har kontinuerte partielle afledede efter y_1 og y_2 . Der går altså gennem hvert linieelement (x_0,y_{01},y_{02}) med $y_{01} > 0$ en og kun een maksimal løsning. Men mængden af de betragtede halvcirkler har den egenskab, at der for ethvert sæt (x_0,y_{01},y_{02}) med $y_{01} > 0$ går en halvcirkel gennem (x_0,y_{01}) , hvis tangent i (x_0,y_{01}) har hældningskoefficienten y_{02} . De givne funktioner er derfor samtlige maksimale løsninger til differentialligningen.

<u>Differentialligningssystemer af højere orden</u>. Problemet at bestemme mængden af løsninger til et system af sammenhørende differentialligninger af højere orden kan, på samme måde som det ovenfor er udført for en enkelt ligning af k'te orden, reduceres til bestemmelse af mængden af løsninger til et system af sammenhørende differentialligninger af første orden. Vi nøjes med at antyde fremgangsmåden i følgende:

EKSEMPEL. <u>Newtons differentialligninger for en partikels bevægelse</u>. Idet vi opererer i et fast koordinatsystem i $\mathbb{R}^3$ vil vi opskrive bevægelsesligningen for en partikel med massen m , der når den til tiden t befinder sig i punktet $\underline{x}$ med hastigheden $\underline{y} = \underline{x}'$ er påvirket af kraften $\underline{f}(t,\underline{x},\underline{y})$ hvor $\underline{f} = (f_1,f_2,f_3): \Omega \to \mathbb{R}^3$ er en given kontinuert vektorfunktion defineret på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^7$.

Ifølge Newtons anden lov er accelerationen $\underline{x}''$ og kraften knyttet sammen via ligningen

$$\underline{x}'' = \frac{1}{m}\,\underline{f}(t,\underline{x},\underline{x}') \ . \tag{5}$$

Løsningerne til denne ligning er de mulige partikelbevægelser. Skrevet ud i koordinater $\underline{x} = (x_1,x_2,x_3)$ fås systemet

$$\begin{aligned} x_1'' &= \frac{1}{m}\, f_1(t,x_1,x_2,x_3,x_1',x_2',x_3') \\ x_2'' &= \frac{1}{m}\, f_2(t,x_1,x_2,x_3,x_1',x_2',x_3') \\ x_3'' &= \frac{1}{m}\, f_3(t,x_1,x_2,x_3,x_1',x_2',x_3') \end{aligned} \tag{6}$$

af tre sammenhørende differentialligninger af anden orden.

Ved en <u>løsning til systemet</u> (6) defineret på et interval $J \subseteq \mathbb{R}$ vil vi forstå en funktion $\underline{\varphi}\colon J \to \mathbb{R}^3$ hvis koordinatfunktioner $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\colon J \to \mathbb{R}$ er to gange differentiable og desuden opfylder at

$$(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t),\varphi_1'(t),\varphi_2'(t),\varphi_3'(t)) \in \Omega \quad \text{for alle} \quad t \in J \ ,$$

samt passer i ligningerne (6) d.v.s.

$$\varphi_i''(t) = \frac{1}{m}\, f_i(t,\underline{\varphi}(t),\underline{\varphi}'(t)) \quad \text{for} \quad i = 1,2,3 \quad \text{og alle} \quad t \in J \ .$$

Vi betragter nu differentialligningssystemet af første orden

$$\begin{aligned} x_1' &= y_1 \\ x_2' &= y_2 \\ x_3' &= y_3 \\ y_1' &= \frac{1}{m}\, f_1(t,x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) \\ y_2' &= \frac{1}{m}\, f_2(t,x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) \\ y_3' &= \frac{1}{m}\, f_3(t,x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) \ , \end{aligned} \tag{7}$$

og som ovenfor ses let, at hvis $\underline{\varphi}\colon J \to \mathbb{R}^3$ er en løsning til (6) så er $(\underline{\varphi},\underline{\varphi}')\colon J \to \mathbb{R}^6$ en løsning til (7) og, at hvis $\underline{\psi}\colon J \to \mathbb{R}^6$ er en løsning til (7) så er $\underline{\varphi} = (\psi_1,\psi_2,\psi_3)\colon J \to \mathbb{R}^3$ en løsning til (6).

Under antagelse af, at funktionerne f_1,f_2,f_3 har partielle afledede efter x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3, der er kontinuerte i Ω, findes for givet $(t_0,\underline{x}_0,\underline{y}_0) \in \Omega$ en og kun een bevægelse, ved hvilken partiklen til tiden t_0 befinder sig i punktet $\underline{x}_0$ med hastigheden $\underline{y}_0$. Man kan imidlertid let udtænke mekaniske problemer, hvor den nævnte betingelse ikke er opfyldt, og hvor faktisk flere bevægelser er mulige. For eksempel hvis $\Omega = \mathbb{R}^7$, og kraften er bestemt ved $(f_1,f_2,f_3) = (m\,6\,x_1^{1/3},0,0)$, da findes for $(t_0,\underline{x}_0,\underline{y}_0) = (0,0,0,0,0,0,0)$, foruden hvile bl.a. løsningen $(x_1,x_2,x_3) = (t^3,0,0)$.

For enhver løsning har vi

$$m(x_1'x_1''+x_2'x_2''+x_3'x_3'') = f_1x_1' + f_2x_2' + f_3x_3' ,$$

altså, idet vi sætter $v = \sqrt{x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2}$,

$$[\tfrac{1}{2}mv^2]' = f_1x_1' + f_2x_2' + f_3x_3' ,$$

og følgelig, hvis $[t_1,t_2]$ er et afsluttet delinterval af løsningens definitionsinterval, og v_1 og v_2 er værdierne af v for $t = t_1$ og $t = t_2$

$$\frac{1}{2}\,mv_2^2 - \frac{1}{2}\,mv_1^2 = \int_{t_1}^{t_2}[f_1x_1'+f_2x_2'+f_3x_3']dt .$$

Når x_1,x_2,x_3 er sædvanlige retvinklede koordinater i rummet, er v farten i bevægelsen, og $\frac{1}{2}\,mv^2$ er partiklens <u>kinetiske</u> <u>energi</u>, mens integralet på højre side, er det af kraften under bevægelsen udførte <u>arbejde</u> i tidsintervallet $[t_1,t_2]$. Dette arbejde er altså lig med tilvæksten i partiklens kinetiske energi.

BEMÆRKNING. Et generelt differentialligningssystem af højere orden for n funktioner har formen

$$\begin{aligned} x_1^{(k_1)}(t) &= f_1(t,x_1(t),\ldots,x_1^{(k_1-1)}(t),\ldots,x_n(t),\ldots,x_n^{(k_n-1)}(t)) \\ &\vdots \\ x_n^{(k_n)}(t) &= f_n(t,x_1(t),\ldots,x_1^{(k_1-1)}(t),\ldots,x_n(t),\ldots,x_n^{(k_n-1)}(t)) \end{aligned}$$

hvor $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N}$ (og mindst et $k_i > 1$, da det ellers er et system af første orden) og $f_1,\ldots,f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ er kontinuerte funktioner defineret på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{k_1+\ldots+k_n}$ eller $\subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{C}^{k_1+\ldots+k_n}$.

Som ovenfor kan et sådant system reduceres til et første ordens system ved at indføre differentialligninger der sammenkobler differentialkvotienter af lavere orden.

EKSEMPEL. Betragt de to sammenhørende differentialligninger

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 4x_1 + x_2 - \frac{dx_2}{dt} , \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= 2x_1 - x_2 + 2\,\frac{dx_2}{dt} . \end{aligned} \tag{8}$$

Her er $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ eller $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{C}^3$. Det til (8) svarende system af første orden er

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= 4z_1 + z_2 - z_3 , \\ \frac{dz_2}{dt} &= z_3 , \\ \frac{dz_3}{dt} &= 2z_1 - z_2 + 2z_3 . \end{aligned} \tag{9}$$

Præcist gælder, som man let ser, at (x_1,x_2) er en løsning til (8) hvis og kun hvis $(z_1,z_2,z_3) = (x_1,x_2,x_2')$ er løsning til (9). Vi skal senere give løsningen til (8).

§3. Lineære differentialligninger.

Vi skal nu udnytte de foregående resultater til behandling af en særlig vigtig klasse af differentialligninger, nemlig de lineære differentialligninger, hvor vi kan opnå skarpere resultater vedrørende de maksimale løsninger og desuden præcisere strukturen af mængden af maksimale løsninger.

Lineært differentialligningssystem af første orden. Lad V være $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$, lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et begrænset eller ubegrænset åbent interval, lad $\Omega = I \times V$ og lad $\underline{f}(t,\underline{x}): \Omega \to V$ være en kontinuert funktion.

DEFINITION. Differentialligningen (eller rettere differentialligningssystemet)

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x}) \tag{1}$$

kaldes et lineært differentialligningssystem (af første orden) hvis koordinat funktionerne $f_1,\dots,f_k$ for $\underline{f}$ er førstegradspolynomier i $x_1,\dots,x_k$, altså hvis systemet har formen

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}(t)x_1+\dots+p_{1k}(t)x_k+q_1(t) \\ &\dots \\ \frac{dx_k}{dt} &= p_{k1}(t)x_1+\dots+p_{kk}(t)x_k+q_k(t)\ , \end{aligned} \tag{2}$$

hvor funktionerne $p_{ij}(t)$ og $q_i(t)$ er kontinuerte funktioner på I med værdier i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, eftersom V er $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$. Hvis funktionerne $q_i(t)$ alle er 0, kaldes systemet homogent, ellers inhomogent.

Det følger umiddelbart af Lemma 1.2, at for et lineært differentialligningssystem (1) (eller (2)) opfylder funktionen $\underline{f}(t,\underline{x})$ en Lipschitz betingelse lokalt i $\Omega = I \times V$. Men som vi skal se opfylder $\underline{f}$ en skarpere betingelse.

LEMMA 3.1. For et lineært differentialligningssystem af første orden opfylder funktionen $\underline{f}(t,\underline{x})$ i enhver mængde $I_0 \times V$, hvor I_0 er et kompakt delinterval af I, en Lipschitz betingelse.

BEVIS. Lad I_0 være et kompakt delinterval af I og sæt

$$C = \max\left\{\max\{|p_{ij}(t)| \;\middle|\; t \in I_0\} \;\middle|\; i,j \in \{1,2,\ldots,k\}\right\} \quad (<\infty) .$$

Dermed har vi for ethvert $t \in I_0$ og vilkårlige punkter $\underline{x}_1 \in V$ og $\underline{x}_2 \in V$ for ethvert $i = 1,\ldots,k$

$$|f_i(t,\underline{x}_2) - f_i(t,\underline{x}_1)| = |p_{i1}(t)(x_{21}-x_{11})+\ldots+p_{ik}(t)(x_{2k}-x_{1k})|$$

$$\leq kC\max\{|x_{21}-x_{11}|,\ldots,|x_{2k}-x_{1k}|\} = kC\|\underline{x}_2-\underline{x}_1\| .$$

Følgelig er

$$\|\underline{f}(t,\underline{x}_2) - \underline{f}(t,\underline{x}_1)\| \leq kC\|\underline{x}_2-\underline{x}_1\| . \qquad \square$$

<u>En skærpelse af eksistens- og entydighedssætningen</u>. I beviset for Sætning 1.3 så vi, at den maksimale løsning φ til ligningen $\underline{x}' = \underline{f}(t,\underline{x})$ gennem punktet $(t_0,\underline{x}_0) \in \Omega$ i et tilpas lille interval omkring t_0 kan findes ved de "successive approksimationers metode", cf. Bemærkningen p. VII.12.

I almindelighed vil denne metode kunne benyttes til bestemmelse af løsningen i et større interval. Vi vil vise dette i et særlig simpelt og vigtigt tilfælde.

<u>SÆTNING 3.2</u>. Hvis $\underline{f}(t,\underline{x})$ er kontinuert på $I \times V$, hvor I er et vilkårligt åbent interval i $\mathbb{R}$, og $\underline{f}(t,\underline{x})$ i enhver mængde $I_0 \times V$, hvor I_0 er et kompakt delinterval af I, opfylder en Lipschitz betingelse, da har enhver maksimal løsning φ til differentialligningen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x})$$

definitionsintervallet I, og den maksimale løsning φ gennem et vilkårligt punkt $(t_0,\underline{x}_0) \in I \times V$ kan findes ved successive approksimationer, idet man vælger en vilkårlig kontinuert funktion $\varphi_0 : I \to V$

og derefter definerer $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \ldots$ ved

$$\underline{\varphi}_n(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_{n-1}(\tau))d\tau \ , \quad t \in I \ ;$$

da vil $\underline{\varphi}_n(t) \to \underline{\varphi}(t)$ for $n \to \infty$, uniformt på ethvert kompakt delinterval I_0 af I.

BEVIS. Vi kan nøjes med at betragte intervaller I_0, der indeholder t_0. Vi vælger et sådant. I mængden $I_0 \times V$ opfylder $\underline{f}(t,\underline{x})$ en Lipschitz betingelse, lad os sige med konstanten C. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ og ethvert $t \in I_0$ gælder derfor

$$\begin{aligned} \|\underline{\varphi}_{n+1}(t) - \underline{\varphi}_n(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [\underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_n(\tau)) - \underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_{n-1}(\tau))]d\tau \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|\underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_n(\tau)) - \underline{f}(\tau, \underline{\varphi}_{n-1}(\tau))\| d\tau \right| \qquad (3) \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} C\|\underline{\varphi}_n(\tau) - \underline{\varphi}_{n-1}(\tau)\| d\tau \right| . \end{aligned}$$

Da $\underline{\varphi}_0$ og $\underline{\varphi}_1$ er kontinuerte, og I_0 er kompakt, findes der et tal M, således at

$$\|\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_0(t)\| \leq M \quad \text{for alle} \quad t \in I_0 .$$

Af (3) fås derfor successivt, gældende for $t \in I_0$,

$$\|\underline{\varphi}_2(t) - \underline{\varphi}_1(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} CMd\tau \right| = CM|t-t_0|$$

$$\|\underline{\varphi}_3(t) - \underline{\varphi}_2(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} CCM|\tau-t_0|d\tau \right| = C^2M \frac{|t-t_0|^2}{2!}$$

og almindeligt

$$\|\underline{\varphi}_{n+1}(t) - \underline{\varphi}_n(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} CC^{n-1}M \frac{|\tau-t_0|^{n-1}}{(n-1)!} d\tau \right| = C^nM \frac{|t-t_0|^n}{n!} .$$

Nu er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} C^nM \frac{|t-t_0|^n}{n!}$ konvergent for alle t [med summen $M\exp(C|t-t_0|)$] og uniform konvergent på ethvert begrænset interval. Til ethvert $\varepsilon > 0$ findes altså et $N \in \mathbb{N}_0$, således at

$\sum_{n=p}^{q-1} C^n M \frac{|t-t_0|^n}{n!} < \varepsilon$ for alle $t \in I_0$ og alle $p,q \in \mathbb{N}_0$ med $N_0 \leq p < q$. Følgelig gælder

$$\|\underline{\varphi}_q(t) - \underline{\varphi}_p(t)\| \leq \|\underline{\varphi}_q(t) - \underline{\varphi}_{q-1}(t)\| + \ldots + \|\underline{\varphi}_{p+1}(t) - \underline{\varphi}_p(t)\|$$

$$\leq C^{q-1} M \frac{|t-t_0|^{q-1}}{(q-1)!} + \ldots + C^p M \frac{|t-t_0|^p}{p!} < \varepsilon$$

for alle $t \in I_0$ og alle $p,q \in \mathbb{N}_0$ med $N_0 \leq p < q$. Dette viser, at følgen $(\underline{\varphi}_n(t))$ er uniformt konvergent på I_0.

Idet vi betegner grænsefunktionen med $\underline{\varphi}(t)$, har vi for ethvert $t \in I_0$

$$\|\underline{f}(t,\underline{\varphi}(t)) - \underline{f}(t,\underline{\varphi}_n(t))\| \leq C\|\underline{\varphi}(t) - \underline{\varphi}_n(t)\| .$$

Følgelig konvergerer $\underline{f}(t,\underline{\varphi}_n(t))$ mod $\underline{f}(t,\underline{\varphi}(t))$ uniformt på I_0. Vi får derfor

$$\underline{\varphi}(t) = \lim_{n\to\infty} \underline{\varphi}_n(t) = \underline{x}_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}_{n-1}(\tau))d = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(\tau,\underline{\varphi}(\tau))d\tau ,$$

gældende for ethvert $t \in I$, idet vi blot vælger I_0 således, at $t \in I_0$.

Hermed er vist, at $\underline{\varphi}$ er en løsning til differentialligningen, for hvilken $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{x}_0$, og da dens definitionsinterval er I, er det åbenbart den maksimale løsning gennem $(t_0,\underline{x}_0)$. ▯

<u>Løsning af lineære differentialligninger</u>. <u>Fundamentalmatrix</u>. Lad der nu igen være givet et lineært differentialligningssystem af formen (2). Af Lemma 3.1 ses, at ligningssystemet er af den i Sætning 3.2 behandlede type, og vi får derfor

<u>SÆTNING 3.3</u>. Gennem hvert punkt $(t_0,\underline{x}_0) \in I \times V$ går en og kun een maksimal løsning til (2). Enhver maksimal løsning har definitionsintervallet I. Enhver løsning er restriktion af en maksimal løsning. Den maksimale løsning gennem et vilkårligt punkt $(t_0,\underline{x}_0)$ kan bestemmes ved successive approksimationer.

EKSEMPEL. (Tilfældet $k = 1$.) Vi har tidligere (Kap. VI.34) fundet løsninger til den lineære ligning

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t) \quad ,$$

gennem $(t_0, x_0) \in I \times V$ $(V = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C})$.

Betragt først den <u>homogene ligning</u> hvor altså $q = 0$. Idet vi definerer

$$\Phi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right) \quad \text{for} \quad t \in I \ ,$$

er funktionen

$$x(t) = x_0\Phi(t) \qquad \text{for} \quad t \in I \ , \tag{4}$$

en på I defineret løsning gennem (t_0, x_0) , og samtlige maksimale løsninger er dermed givet ved (4).

For den <u>inhomogene ligning</u> er

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{q(\tau)}{\Phi(\tau)}\, d\tau\right)\Phi(t) \quad \text{for} \quad t \in I \ , \tag{5}$$

en på I defineret løsning gennem (t_0, x_0) , og samtlige maksimale løsninger er dermed givet ved (5).

I det almindelige tilfælde hvor $k > 1$ og $V = \mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$ har man ingen færdig løsningsformel, hvorved bestemmelsen af løsningerne tilbageføres til stamfunktionsbestemmelse. Man kan dog opstille visse resultater. Ved formuleringen er det hensigtsmæssigt i stedet for den hidtil brugte vektorbetegnelse at benytte matricer. Vi sætter

$$\underline{\underline{x}}_{|} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{pmatrix} , \qquad \underline{\underline{P}}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) \ldots p_{1k}(t) \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ p_{k1}(t) \ldots p_{kk}(t) \end{pmatrix} , \qquad \underline{\underline{q}}_{|}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_k(t) \end{pmatrix} .$$

Da kan systemet skrives

$$\frac{d\underline{\underline{x}}_{|}}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{x}}_{|} + \underline{\underline{q}}_{|}(t) \ . \tag{6}$$

Vi betragter først det til (6) svarende <u>homogene</u> system.

<u>SÆTNING 3.4</u>. De maksimale løsninger til et lineært, <u>homogent</u> ligningssystem

$$\frac{d\underline{\underline{x}}|}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{x}}| \tag{7}$$

bestående af k ligninger med k ubekendte funktioner udgør et k-dimensionalt vektorrum af funktioner af I ind i V (over det til grund lagte tallegeme $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$).

BEVIS. Det er klart, at hvis $\underline{\underline{\varphi}}|$ er en løsning, er $a\underline{\underline{\varphi}}|$ en løsning ($a \in \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$), og hvis $\underline{\underline{\varphi}}|$ og $\underline{\underline{\psi}}|$ er løsninger, er $\underline{\underline{\varphi}}| + \underline{\underline{\psi}}|$ en løsning. Dette viser, at løsningerne udgør et underrum i vektorrummet af alle funktioner $\underline{\underline{\varphi}}| : I \to V$.

Vi betegner vektorrummet bestående af alle maksimale løsninger med S . Vi vælger nu et fast $t_0 \in I$ og betragter den ved $\underline{\underline{\varphi}}| \mapsto \underline{\underline{\varphi}}|(t_0)$ bestemte afbildning af S ind i V , altså den afbildning, der til hver løsning $\underline{\underline{\varphi}}|$ lader svare dens værdi i t_0 . Dette er åbenbart en lineær afbildning, og da der for hvert $\underline{\underline{x}}_0| \in V$ findes en og kun een maksimal løsning $\underline{\underline{\varphi}}|$, for hvilken $\underline{\underline{\varphi}}|(t_0) = \underline{\underline{x}}_0|$, er den bijektiv. Den er altså en isomorfi. Følgelig har S dimensionen k . $\square$

Man ser, at et sæt af k løsninger $\underline{\underline{\varphi}}_1|, \ldots, \underline{\underline{\varphi}}_k|$ til det homogene ligningssystem (7) er en basis for løsningsrummet, hvis og kun hvis vektorerne $\underline{\underline{\varphi}}_1|(t_0), \ldots, \underline{\underline{\varphi}}_k|(t_0)$ for <u>eet</u> $t_0 \in I$ er en basis for V og at disse vektorer da for <u>ethvert</u> $t_0 \in I$ er en basis for V . Den ved k løsninger $\underline{\underline{\varphi}}_1|, \ldots, \underline{\underline{\varphi}}_k|$ bestemte matrix

$$\underline{\underline{\Phi}}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \ldots \varphi_{k1}(t) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_{1k}(t) \ldots \varphi_{kk}(t) \end{pmatrix} ,$$

hvis søjler er $\underline{\underline{\varphi}}_1|, \ldots, \underline{\underline{\varphi}}_k|$ (så at første index bliver søjleindex og anden index rækkeindex), er altså regulær for alle $t \in I$, hvis løsningerne danner en basis for løsningsrummet, ellers singulær for alle $t \in I$. I det første tilfælde kaldes $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ en <u>fundamentalmatrix</u>. Ud fra en fundamentalmatrix bestemmes samtlige løsninger til det homogene ligningssystem ved

$$\underline{\underline{x}}| = \underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{\underline{a}}| = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \ldots \varphi_{k1}(t) \\ \vdots \qquad \vdots \\ \varphi_{1k}(t) \ldots \varphi_{kk}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{\underline{a}}| \in V \ .$$

Vælger man specielt $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ således, at $\underline{\underline{\Phi}}(t_0) = \underline{\underline{E}}$, d.v.s. vælger man som basis $\underline{\underline{\varphi}}_1|,\ldots,\underline{\underline{\varphi}}_k|$ for løsningsrummet de k løsninger, for hvilke $\underline{\underline{\varphi}}_1|(t_0),\ldots,\underline{\underline{\varphi}}_k|(t_0)$ er de k enhedsvektorer, vil $\underline{\underline{x}}| = \Phi(t)\underline{\underline{x}}_0|$ for et vilkårligt $\underline{\underline{x}}_0| \in V$ være den løsning, der går gennem $(t_0, \underline{x}_0)$.

Herefter kan vi behandle det almindelige inhomogene system (6).

SÆTNING 3.5. Ud fra en fundamentalmatrix $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ for det homogene ligningssystem bestemmes samtlige løsninger til det inhomogene ligningssystem

$$\frac{d\underline{\underline{x}}|}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{x}}| + \underline{\underline{q}}|(t) \ ,$$

idet $t_0 \in I$, ved

$$\underline{\underline{x}}| = \underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{\underline{a}}| + \underline{\underline{\Phi}}(t)\int_{t_0}^{t} \underline{\underline{\Phi}}(\tau)^{-1}\underline{\underline{q}}|(\tau)\,d\tau \ , \quad t \in I \ .$$

Vælger man specielt $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ således, at $\underline{\underline{\Phi}}(t_0) = \underline{\underline{E}}$, fås for $\underline{\underline{a}}| = \underline{\underline{x}}_0|$ den løsning, der går gennem $(t_0, \underline{x}_0)$.

BEVIS. Vi benytter "de arbitrære konstanters variationsmetode". (Sammenlign med fremgangsmåden fra Kap VI for tilfældet $k = 1$.) Da $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ er regulær for alle $t \in I$, kan enhver funktion $\underline{\underline{\varphi}}|(t)\colon I \to V$ på en og kun een måde skrives på formen $\underline{\underline{\varphi}}|(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{\underline{\psi}}|(t)$, nemlig ved at sætte $\underline{\underline{\psi}}|(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t)^{-1}\underline{\underline{\varphi}}|(t)$. Da elementerne i $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ er differentiable, bliver $\underline{\underline{\varphi}}|(t)$ og $\underline{\underline{\psi}}|(t)$ samtidig differentiable. Betingelsen for, at $\underline{\underline{\varphi}}|$ er løsning til det inhomogene system er nu, at

$$\underline{\underline{\Phi}}(t)\,\frac{d\underline{\underline{\psi}}|(t)}{dt} + \frac{d\underline{\underline{\Phi}}(t)}{dt}\,\underline{\underline{\psi}}|(t) = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{\underline{\psi}}|(t) + \underline{\underline{q}}|(t) \ .$$

Nu er hver søjle i $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ løsning til det homogene system; altså er

$$\frac{d\underline{\underline{\Phi}}(t)}{dt} = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{\Phi}}(t) .$$

Den fundne ligning antager derfor formen

$$\frac{d\underline{\psi}(t)}{dt} = \underline{\underline{\Phi}}(t)^{-1}\underline{q}(t) .$$

Samtlige løsninger til denne ligning bestemmes ved

$$\underline{\psi}(t) = \underline{a} + \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)^{-1}\underline{q}(\tau)\,d\tau ,$$

hvoraf det ønskede resultat. ▯

BEMÆRKNING. Af Sætning 3.5 ses, at (ligesom i tilfældet $k = 1$) samtlige løsninger til det inhomogene system fås ved til een løsning til systemet at addere samtlige løsninger til det homogene system.

Som nævnt ovenfor findes ingen eksplicit løsningsformel for $k > 1$ og i praksis må man derfor udnytte specielle egenskaber ved systemet for at finde løsningerne.

EKSEMPEL. Vi betragter det homogene system

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{t}(x_1 - x_2) , \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{t}(-x_1 + x_2) .$$

Her er $I =]0,\infty[$ og $V = \mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{C}^2$. Ved addition og subtraktion af de to ligninger fås

$$\frac{d(x_1+x_2)}{dt} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d(x_1-x_2)}{dt} = \frac{2}{t}(x_1 - x_2)$$

som har løsningerne $x_1 + x_2 = a$ og $x_1 - x_2 = bt^2$ hvor $a,b \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) og dermed fås den fuldstændige løsning

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + dt^2 \\ c - dt^2 \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad t > 0 ,$$

hvor $c,d \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) er konstanter. Den fundamentalmatrix som for $t = 1$ er enhedsmatricen er altså

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+t^2) & \frac{1}{2}(1-t)^2 \\ \frac{1}{2}(1-t^2) & \frac{1}{2}(1+t)^2 \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad t \in I .$$

EKSEMPEL. Vi ønsker at finde den fuldstændige løsning til det inhomogene system

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{t}(x_1 - x_2) + t^2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{t}(-x_1 + x_2) + 2 \qquad \text{hvor} \quad (t,x_1,x_2) \in \,]0,\infty[\, \times V .$$

Det tilsvarende homogene system blev behandlet ovenfor hvor vi fandt de to lineært uafhængige løsninger

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix} .$$

For at finde en partikulær løsning til det inhomogene system benytter vi Sætning 3.5, og betragter (for at lette regningerne) følgende fundamentalmatrix

$$\underline{\underline{\Psi}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 1 & -t^2 \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad t > 0 ,$$

med invers matrix (idet $\det \underline{\underline{\Psi}}(t) = -2t^2$)

$$\underline{\underline{\Psi}}(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t^{-2} & -\frac{1}{2}t^{-2} \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad t > 0 .$$

Med $q_1(t) = t^2$ og $q_2(t) = 2$ udregner vi $(t_0 = 1)$

$$\int_1^t \left(\tfrac{1}{2}q_1(\tau) + \tfrac{1}{2}q_2(\tau)\right) d\tau = \int_1^t (\tfrac{1}{2}\tau^2 + 1)\, d\tau = \frac{t^3}{6} + t - \frac{7}{6}$$

$$\int_1^t \left(\tfrac{1}{2}\tau^{-2}q_1(\tau) - \tfrac{1}{2}\tau^{-2}q_2(\tau)\right) d = \int_1^t (\tfrac{1}{2} - \tau^{-2})\, d\tau = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{t} - \tfrac{3}{2} ,$$

og dermed finder vi følgende partikulære løsning til systemet

$$\underline{\underline{\Psi}}(t) \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6} + t - \frac{7}{6} \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{t} - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t - \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{6} \end{pmatrix} .$$

Den fuldstændige løsning til det homogene system kan altså skrives

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t - \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{6} \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad t > 0$$

hvor $c,d \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) er vilkårlige konstanter.

En lineær differentialligning af k^{te} orden. Lad V være $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$, lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et vilkårligt åbent interval, og lad $f: I \times V \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ være en kontinuert funktion. Differentialligningen

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}\right)$$

kaldes en lineær differentialligning af k^{te} orden, hvis funktionen f er et førstegradspolynomium i de sidste k variable, altså hvis ligningen har formen

$$\frac{d^k x}{dt^k} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt} + \ldots + p_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + q(t) \;, \tag{8}$$

hvor funktionerne $p_0(t), p_1(t), \ldots, p_{k-1}(t), q(t)$ er kontinuerte funktioner på I med værdier i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, eftersom V er $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$. Ligningen kaldes homogen, hvis funktionen $q(t)$ er 0, ellers inhomogen.

Idet ligningen ifølge Lemma 2.1 er ensgyldig med det lineære differentialligningssystem af første orden

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_k}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \ldots & p_{k-2}(t) & p_{k-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix}$$

(hvor der står nuller på de ubeskrevne pladser i den kvadratiske matrix) i den forstand, at systemets løsninger netop er alle søjler

$$\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} , \tag{9}$$

hvor $\varphi(t)$ er en løsning til ligningen (8), slutter vi straks af de foranstående resultater:

SÆTNING 3.6. For ethvert talsæt $(t_0,x_{10},x_{20},\ldots,x_{k0}) \in I \times V$ findes en og kun een maksimal løsning φ til den lineære differentialligning af k^{te} orden, for hvilken

$$(\varphi(t_0),\varphi'(t_0),\ldots,\varphi^{(k-1)}(t_0)) = (x_{10},x_{20},\ldots,x_{k0}) .$$

Enhver maksimal løsning har definitionsintervallet I. Enhver løsning er restriktion af en maksimal løsning.

Vi behandler først den til (8) svarende homogene ligning.

SÆTNING 3.7. De maksimale løsninger til den homogene ligning

$$\frac{d^kx}{dt^k} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt} + \ldots + p_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}$$

udgør et k-dimensionalt vektorrum af $\mathbb{C}^k$-funktioner af I ind i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ (over det til grund lagte tallegeme $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$).

BEVIS. Det er klart, at løsningerne udgør et vektorrum. At det er k-dimensionalt følger af, at der til den homogene ligning af k^{te} orden svarer det homogene ligningssystem af første orden, og at den bijektive afbildning af løsningsrummet for ligningen af k^{te} orden på løsningsrummet for ligningssystemet af første orden, der består i, at vi til en løsning $\varphi(t)$ lader svare søjlen (9), er en lineær afbildning. $\square$

For et vilkårligt sæt af k løsninger $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_k(t)$ til den homogene ligning af k^{te} orden kan vi danne matricen

$$\underline{\underline{\Phi}}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_k(t) \\ \varphi_1'(t) & \ldots & \varphi_k'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(k-1)}(t) & & \varphi_k^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} .$$

Denne er regulær for alle $t \in I$, hvis og kun hvis sættet er en basis for løsningsrummet for ligningen af k^{te} orden. Ellers er den singulær for alle $t \in I$. Dens determinant $W(t) = \det \underline{\underline{\Phi}}(t)$ kaldes <u>Wronskideterminanten</u> hørende til sættet. Ved hjælp heraf kan den generelle ligning (8) behandles.

<u>SÆTNING 3.8</u>. Ud fra en basis, $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_k(t)$ for løsningsrummet for den homogene ligning bestemmes samtlige løsninger til den inhomogene ligning af k^{te} orden ved

$$x = a_1\varphi_1(t) + \ldots + a_k\varphi_k(t) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+i}\varphi_i(t) \int_{t_0}^{t} \frac{W_i(\tau)}{W(\tau)}\, q(\tau)\,d\tau \ ,$$

hvor $W_i(t)$ er determinanten for den matrix, der fremgår af $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ ved at slette k^{te} række og i^{te} søjle.

BEVIS. Sætningen fremgår af Sætning 3.5 idet man benytter, at elementerne i sidste søjle af $\underline{\underline{\Phi}}(t)^{-1}$ er $(-1)^{k+i}\dfrac{W_i(t)}{W(t)}$. □

BEMÆRKNING. Vi ser specielt, at samtlige løsninger til den inhomogene ligning af k^{te} orden fås ved til een løsning til ligningen at lægge samtlige løsninger til den homogene ligning.

§4. Lineære differentialligninger med konstante koefficienter.

I denne paragraf skal vi anvende resultaterne fra §3 i tilfældet hvor det lineære differentialligningssystem henholdsvis den lineære k'te ordens differentialligning har konstante koefficienter. Ifølge Sætning 3.5 og Sætning 3.8 kan løsningen i det inhomogene tilfælde findes ved en stamfunktionsbestemmelse ud fra den fuldstændige løsning til det tilsvarende homogene system (henholdsvis homogene k'te ordens ligning), og vi nøjes derfor med at betragte det homogene tilfælde.

Lineært, homogent system med konstante koefficienter. Vi betragter et lineært, homogent differentialligningssystem af første orden

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}x_1 + \dots + p_{1k}x_k \\ &\dots \\ \frac{dx_k}{dt} &= p_{k1}x_1 + \dots + p_{kk}x_k \end{aligned} \qquad \text{eller} \qquad \frac{d\underline{\underline{x}}}{dt} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{x}} \tag{1}$$

med konstante koefficienter p_{ij} (i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, eftersom V er $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$), altså med konstant matrix $\underline{\underline{P}}$. Her er $\Omega = \mathbb{R} \times V$.

Ved den eksplicitte løsning af (1) skal vi udnytte strukturen af den lineære afbildning af V ind i sig selv der har matricen $\underline{\underline{P}}$, og vi starter med et vigtigt specialtilfælde.

EKSEMPEL. Vi betragter differentialligningssystemet (1) hvor matricen $\underline{\underline{P}}$ har den simple form

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

med et tal $\lambda \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) i hoveddiagonalen, 1 i skrålinien lige over, og ellers 0.

Skrevet ud er differentialligningerne altså

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_1 + x_2, \dots, \frac{dx_{k-1}}{dt} = \lambda x_{k-1} + x_k, \frac{dx_k}{dt} = \lambda x_k . \tag{2}$$

Disse ligninger kan løses eksplicit ved successivt at anvende løsningsformlen for en første ordens lineær ligning, cf. p. VII.31, startende med den sidste ligning. Nemmere er det måske at indføre funktionerne

$$u_j(t) = x_j(t)e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad j = 1,2,\dots,k \quad ,$$

og bemærke at

$$\frac{du_j}{dt} = \left(\frac{dx_j}{dt} - \lambda x_j\right)e^{-\lambda t} = \begin{cases} u_{j+1} & \text{for} \quad j = 1,2,\dots,k-1 \\ 0 & \text{for} \quad j = k \ . \end{cases}$$

Dermed gælder

$$u_k(t) = c_k \ , \ u_{k-1}(t) = c_k t + c_{k-1}, \dots \ ,$$

$$u_1(t) = c_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + c_2 t + c_1 \ ,$$

for konstanter $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) . Løsningerne til systemet (2) er altså givet ved

$$x_1(t) = \left(c_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + c_2 t + c_1\right)e^{\lambda t} \ ,$$

$$x_2(t) = \left(c_k \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \dots + c_2\right)e^{\lambda t} \ ,$$

$$\vdots$$

$$x_{k-1}(t) = (c_k t + c_{k-1})e^{\lambda t} \ ,$$

$$x_k(t) = c_k e^{\lambda t} \ ,$$

hvor $c_1, \dots, c_k$ er konstanter. Betegner e_i den sædvanlige i'te basisvektor i V er løsningen $\underline{x}_|(t)$ gennem $(0, e_i)$ som man let ser givet ved $c_i = 1$ og $c_j = 0$ for $j \neq i$, altså med koordinaterne

$$\left(\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\, e^{\lambda t}, \frac{t^{i-2}}{(i-2)!}\, e^{\lambda t}, \dots, te^{\lambda t}, e^{\lambda t}, 0, \dots, 0\right)$$

hvor der står 0 på pladserne $i+1, \dots, k$.

Det generelle ligningssystem (1) kan nu behandles ved en reduktion til den i eksemplet behandlede type. Vi foretager en koordinattransformation

$$\underline{x}_| = \underline{S}\, \underline{y}_| \quad , \quad \underline{S} \text{ regulær,}$$

i rummet V . Herved erstattes ligningssystemt med systemet

$$\underline{\underline{S}}\,\frac{d\underline{y}|}{dt} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{S}}\,\underline{y}| \quad \text{eller} \quad \frac{d\underline{y}|}{dt} = \underline{\underline{S}}^{-1}\,\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{S}}\,\underline{y}| \ .$$

Vi benytter nu det fundamentale resultat fra algebraen, at man i tilfældet $V = \mathbb{C}^k$ kan vælge $\underline{\underline{S}}$ således, at $\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{P}}\underline{\underline{S}}$ får Jordans normalform

$$\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{B}}_1 & & & \\ & \underline{\underline{B}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{\underline{B}}_q \end{pmatrix}$$

hvor $\underline{\underline{B}}_1, \underline{\underline{B}}_2, \ldots, \underline{\underline{B}}_q$ er kvadratiske matricer langs hoveddiagonalen, uden for hvilke der står lutter nuller, og som hver for sig er af formen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

med et tal λ i hoveddiagonalen, 1 i skrålinien lige over, og ellers nuller. Samtlige tal i hoveddiagonalen i $\underline{\underline{S}}^{-1}\,\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{S}}$ er samtlige rødder i polynomiet $\det(\underline{\underline{P}} - \lambda\underline{\underline{E}})$, hver skrevet så ofte som multipliciteten angiver, men samme rod kan forekomme i flere af matricerne $\underline{\underline{B}}_p$.

Efter en sådan transformation vil ligningerne i det nye system falde i klasser, en klasse svarende til hver af matricerne $\underline{\underline{B}}_p$. Hvis de af de variable $y_1, \ldots, y_k$, der svarer til de i et bestemt $\underline{\underline{B}}_p$ figurerende rækkenumre, betegnes $z_1, \ldots, z_m$ er den pågældende klasse af ligninger af den i eksemplet ovenfor behandlede type, og vi har derfor

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(t) \\ F'(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} \exp \lambda t ,$$

hvor $F(t)$ er et vilkårligt polynomium af grad $\leq m-1$.

For det oprindelige ligningssystem finder vi samtlige løsninger skrevet på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} F_1(t) \exp \lambda_1 t \\ \vdots \\ F_1^{(m_1-1)}(t) \exp \lambda_1 t \\ \vdots \\ F_q(t) \exp \lambda_q t \\ \vdots \\ F_q^{(m_q-1)}(t) \exp \lambda_q t \end{pmatrix}$$

hvor λ_p betegner det i matricen $\underline{\underline{B}}_p$ $(p = 1, \ldots, q)$ optrædende λ , og m_p denne matrix's orden, og $F_p(t)$ er et vilkårligt polynomium af grad $\leq m_p - 1$. Ialt optræder i disse polynomier k koefficienter. De k løsninger, der opnås ved at vælge alle disse koefficienter pånær een $= 0$, og denne ene $= 1$, vil udgøre en basis for løsningsrummet.

Hvis $\underline{\underline{P}}$ har reelle elementer, kan Jordans normalform opnås ved et $\underline{\underline{S}}$ med reelle elementer, hvis og kun hvis polynomiet $\det(\underline{\underline{P}} - \lambda\underline{\underline{E}})$ har lutter reelle rødder, og metoden er derfor under denne antagelse anvendelig også i tilfældet $V = \mathbb{R}^k$. Ellers må man operere med $V = \mathbb{C}^k$. Herved fås alle komplekse løsninger, blandt hvilke man derefter kan udskille de reelle.

<u>En lineær, homogen k'te ordens ligning med konstante koefficienter</u>.

Løsningen til en lineær, homogen ligning

$$\frac{d^k x}{dt^k} + a_{k-1}\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \tag{3}$$

med konstante koefficienter kan ifølge §3 fås ud fra løsningen til det lineære homogene differentialligningssystem af første orden og konstante koefficienter

$$\frac{d\underline{\underline{x}}|}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}| \tag{4}$$

hvor matricen $\underline{\underline{A}}$ er givet ved

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{k-2} & -a_{k-1} \end{pmatrix} .$$

For at udnytte teorien for løsninger til dette system skal vi kende nulpunkterne i polynomiet $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}})$.

<u>DEFINITION</u>. Polynomiet

$$K(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

kaldes det <u>karakteristiske polynomium for ligningen</u> (3).

Pånær fortegn er $K(\lambda)$ lig $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}})$, idet vi har

$$K(\lambda) = (-1)^k \det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}) .$$

Dette kan for eksempel indses på følgende måde. Idet søjlerne i $\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}$ betegnes $\underline{\underline{h}}_1|,\ldots,\underline{\underline{h}}_k|$ er determinanten for $\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}$ lig determinanten for matricen

$$\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{h}}_1| + \lambda\underline{\underline{h}}_2| + \ldots + \lambda^{k-1}\underline{\underline{h}}_k|, \underline{\underline{h}}_2|, \ldots, \underline{\underline{h}}_k|) .$$

Den første søjle i $\underline{\underline{B}}$ har imidlertid 0 på alle pladser pånær den k'te hvor elementet er

$$-a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 - \ldots - a_{k-2}\lambda^{k-2} - (a_k + \lambda)\lambda^{k-1}$$

og den matrix der fremgår af $\underline{\underline{B}}$ ved at slette første søjle og nederste række er enhedsmatrix (orden $k-1$). Ved udvikling efter første søjle fås derfor

$$\det(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}) = \det \underline{\underline{B}} = (-1)^{k+1}(-a_0-a_1\lambda-\ldots-a_{k-2}\lambda^{k-1}-a_k\lambda^2-\lambda^k)$$

som ønsket.

Idet vi opererer med $V = \mathbb{C}^k$, viser det foranstående resultat, at enhver løsning $(x_1,\ldots,x_k) = (\varphi_1(t),\ldots,\varphi_k(t)$ til systemet (4) må bestå af funktioner af formen

$$G_1(t)\exp\lambda_1 t + \ldots + G_q(t)\exp\lambda_q t ,$$

hvor hvert $G_p(t)$ er et polynomium af grad $\leq m_p - 1$. Da løsningerne til systemet (4) er alle sæt $(\varphi(t),\varphi'(t),\ldots,\varphi^{(k-1)}(t))$, hvor $\varphi(t)$ er en løsning til ligningen af k^{te} orden (3), må specielt enhver løsning til denne ligning havde den nævnte form. Da imidlertid løsningsrummet for ligningen af k^{te} orden har dimension k, er dette kun muligt, når $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ er parvis forskellige, idet der ellers ikke er k lineært uafhængige løsninger, og løsningsrummet består af alle funktioner af den pågældende form. Matricerne $\underline{\underline{B}}_p$ i Jordans normalform må altså i det her foreliggende tilfælde indeholde parvis forskellige λ, og for hvert $p = 1,\ldots,q$ må m_p simpelthen være multipliciteten af λ_p som rod i det karakteristiske polynomium $K(\lambda)$.

Hermed er vist:

<u>SÆTNING 4.1</u>. Løsningsrummet for den lineære, homogene differentialligning af k^{te} orden med konstante koefficienter (3) har som basis de k funktioner af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{C}$

$$\begin{array}{l} \exp\lambda_1 t\ ,\quad t\exp\lambda_1 t,\ldots,t^{m_1-1}\exp\lambda_1 t\ , \\ \ldots \\ \exp\lambda_q t\ ,\quad t\exp\lambda_q t,\ldots,t^{m_q-1}\exp\lambda_q t\ , \end{array} \tag{5}$$

hvor $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ er de parvis forskellige rødder i ligningens karakteristiske polynomium, og $m_1,\ldots,m_q$ er disses multipliciteter.

Hvis koefficienterne $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ er reelle, og $K(\lambda)$ har lutter reelle rødder, giver sætningen også en basis for løsningsrummet svarende til, at vi opererer med $V = \mathbb{R}^k$ nemlig de k løsninger (5). Ellers må vi operere med $V = \mathbb{C}^k$. Ud fra de komplekse basisfunktioner er det dog let at få en basis bestående af reelle funktioner. Thi når $K(\lambda)$ har reelle koefficienter, vil de ikke-reelle rødder falde i par af konjugerede med samme multiplicitet. Er $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ et sådant par af rødder hver med multiplicitet m , ser man, at vi i stedet for de $2m$ basisfunktioner

$$\exp(\alpha+i\beta)t \ , \quad t\exp(\alpha+i\beta)t, \ldots, t^{m-1}\exp(\alpha+i\beta)t \ ,$$

$$\exp(\alpha+i\beta)t \ , \quad t\exp(\alpha-i\beta)t, \ldots, t^{m-1}\exp(\alpha-i\beta)t$$

kan benytte de $2m$ reelle funktioner

$$\exp(\alpha t)\cos(\beta t) \ , \ t\exp(\alpha t)\cos(\beta t), \ldots, t^{m-1}\exp(\alpha t)\cos(\beta t) \ ,$$

$$\exp(\alpha t)\sin(\beta t) \ , \ t\exp(\alpha t)\sin(\beta t), \ldots, t^{m-1}\exp(\alpha t)\sin(\beta t) \ .$$

Betegner vi med $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de reelle rødder i $K(\lambda)$ med multipliciteter $m_1, \ldots, m_r$ og $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_q$ de komplekse rødder $\lambda_p = \alpha_p + i\beta_p$ med $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$ og multipliciteter $m_{r+1}, \ldots, m_q$ fås altså følgende sæt af k reelle løsninger til (3)

$$\begin{array}{l}
e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t} \\
\vdots \\
e^{\lambda_r t}, \ldots, t^{m_r-1} e^{\lambda_r t} \\
e^{\alpha_{r+1} t}\cos(\beta_{r+1} t), \ldots, t^{m_{r+1}-1} e^{\alpha_{r+1} t}\cos(\beta_{r+1} t) \\
e^{\alpha_{r+1} t}\sin(\beta_{r+1} t), \ldots, t^{m_{r+1}-1} e^{\alpha_{r+1} t}\sin(\beta_{r+1} t) \\
\vdots \\
e^{\alpha_q t}\sin(\beta_q t), \ldots, t^{m_q-1} e^{\alpha_q t}\sin(\beta_q t) \ .
\end{array}$$

BEMÆRKNING. Medens vi tidligere har reduceret en k'te ordens ligning eller et system af ligninger af højere orden til et system af første orden, og udnyttet eksistens- og entydighedssætningen for sådanne, kan det ved den eksplicitte beregning af løsninger ofte lønne sig at gå den modsatte vej. Idet man udnytter strukturen af ligningssystemet opstilles en ligning af højere orden hvis løsninger kan bestemmes, f.eks. ved hjælp af Sætning 4.1, og blandt disse "udskilles" så løsningerne til systemet.

EKSEMPEL (fortsat fra p. VII.26). Vi betragter systemet

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 + x_2 - \frac{dx_2}{dt} \quad , \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = 2x_1 - x_2 + 2\,\frac{dx_2}{dt} \ . \tag{6}$$

Antag at $(x_1, x_2): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (eller $\mathbb{C}^2$) er en løsning til dette system. Så er (x_1, x_2, x_2') løsning til et system af første orden med konstante koefficienter og derfor er x_1, x_2 af klasse C^∞. Af den anden ligning i (6) isoleres x_1 hvoraf ved differentiation

$$2\,\frac{dx_1}{dt} = \frac{d^3x_2}{dt^3} + \frac{dx_2}{dt} - 2\,\frac{d^2x_2}{dt^2} \ ,$$

som indsat i den første ligning i (6) giver, at x_2 tilfredsstiller differentialligningen af tredie orden

$$x_2''' - 6x_2'' + 11x_2' - 6x_2 = 0 \ . \tag{7}$$

Det karakteristiske polynomium for ligningen (7) er

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \ ,$$

og den fuldstændige løsning til (7) er derfor

$$x_2(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{3t} \ , \quad t \in \mathbb{R} \tag{8}$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) er konstanter. Heraf beregnes

$$x_2'(t) = c_1e^t + 2c_2e^{2t} + 3c_3e^{3t}$$

som indsættes i den første af ligningerne (6),

$$\frac{dx_1}{dt} - 4x_1 = x_2(t) - x_2'(t) = -c_2e^{2t} - 2c_3e^{3t} \ ,$$

og heraf finder vi

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_4e^{4t} + e^{4t}\int e^{-4t}(-c_2e^{2t} - 2c_3e^{3t})\,dt \\ &= c_4e^{4t} + e^{4t}\left(\frac{c_2}{2}\,e^{-2t} + 2c_3e^{-t}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

hvor $c_4 \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) er en konstant. Løsningerne $(x_1(t),x_2(t))$ til (6) skal altså søges blandt de ved (8) og (9) givne. Idet

$$x_2''(t) = c_1e^t + 4c_2e^{2t} + 9c_3e^{3t}$$

og

$$\begin{aligned} 2x_1(t) - x_2(t) + 2x_2'(t) &= 2\left(c_4e^{4t} + \frac{c_2}{2}\cdot e^{2t} + 2c_3e^{3t}\right) \\ &\quad - \left(c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{3t}\right) + 2\left(c_1e^t + 2c_2e^{2t} + 3c_3e^{3t}\right) \\ &= c_4e^{4t} + 9c_3e^{3t} + 4c_2e^{2t} + c_1e^t \ , \end{aligned}$$

ser vi, at $(x_1(t),x_2(t))$ givet ved (8), (9) opfylder (6) hvis og kun hvis $c_4 = 0$, og den fuldstændige løsning til (6) er derfor

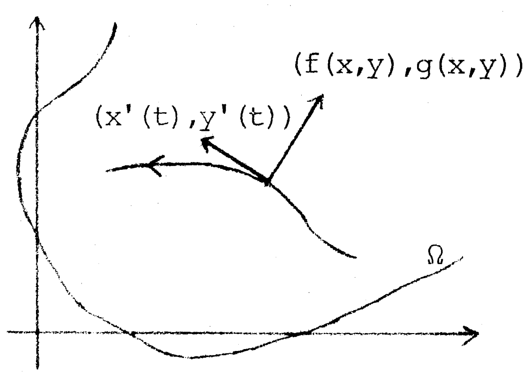
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_2}{2}\, e^{2t} + 2c_3e^{3t} \\ c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{3t} \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R} \ ,$$

hvor c_1,c_2,c_3 er konstanter.

§5. Differentialligninger af formen $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$.

Alle de hidtil betragtede differentialligninger har haft (eller kunne reduceres til en differentialligning af) formen $\underline{x}' = \underline{f}(t,\underline{x})$ hvor $\underline{f}: \Omega \to V$ var en given kontinuert funktion af en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times V$ ind i V (= $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$) . En løsning til ligningen er så en funktion af den reelle variable t med værdier i V . I et specialtilfælde, nemlig hvor $V = \mathbb{R}$ og de to variable t og x dermed begge er reelle, er det ofte ligeså nyttigt at løse ligningen ved at søge t som en funktion af x . Vi skal nu behandle en type differentialligninger hvor de to reelle variable spiller helt analoge roller (og hvor betegnelsen <u>differentialligning</u> måske er særlig velbegrundet). (De hidtil betragtede ligninger kunne så kaldes <u>differentialkvotient</u> ligninger.)

<u>DEFINITION</u>. Lad der være givet en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ og to kontinuerte funktioner $f: \Omega \to \mathbb{R}$ og $g: \Omega \to \mathbb{R}$. Idet vi i ethvert punkt



$(x,y) \in \Omega$ tænker os anbragt vektoren $(f(x,y),g(x,y))$ fremkommer et kontinuert vektorfelt i Ω . Vi søger samtlige C^1-kurver $t \mapsto (x(t),y(t)) \in \Omega$, for hvilke $(x'(t),y'(t)) \neq (0,0)$ for ethvert t i parameterintervallet, og for hvilke tangenten i ethvert kurvepunkt (x,y) er vinkelret på feltvektoren $(f(x,y),g(x,y))$. Dette betyder, at der for ethvert t skal gælde

$$f(x(t),y(t))x'(t) + g(x(t),y(t))y'(t) = 0 .$$

De søgte kurver kaldes derfor <u>løsninger</u> (løsningskurver) eller <u>integraler</u> i mængden Ω til differentialligningen

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0 . \tag{1}$$

Lad γ og γ_1 være løsningskurver til (1) i Ω med parameterfremstillinger $(x,y): I \to \Omega$ og $(x_1,y_1): I_1 \to \Omega$. Vi siger, at γ_1 er en <u>udvidelse af</u> γ såfremt

$$\{(x(t),y(t)) \mid t \in I\} \subseteq \{(x_1(s),y_1(s)) \mid s \in I_1\} ,$$

og γ_1 er en <u>ægte</u> <u>udvidelse</u> af γ hvis de to mængder af kurvepunkter er forskellige.

En løsningskurve γ til (1) i Ω kaldes <u>maksimal</u> hvis der ikke findes nogen løsningkurve til (1) som er en ægte udvidelse af γ.

Enhver sædvanlig differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) , \tag{2}$$

hvor $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ er en kontinuert funktion, giver anledning til en differentialligning af typen (1), nemlig differentialligningen

$$F(x,y)dx - dy = 0 , \tag{3}$$

som <u>formelt</u> fås af (2) ved at multiplicere med dx.

<u>LEMMA 5.1</u>. Løsningskurverne til ligningen (3) er netop graferne for løsningsfunktionerne til ligningen (2).

BEVIS. Antag først, at $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ er en løsning til (2), d.v.s. φ er af klasse C^1 og opfylder at $(x,\varphi(x)) \in \Omega$ samt $\varphi'(x) = F(x,\varphi(x))$ for $x \in I$. Så er $t \mapsto (x(t),y(t)) = (t,\varphi(t))$ parameterfremstilling for en C^1 kurve med parameterinterval I, og det er klart at $(x'(t),y'(t)) = (1,\varphi'(t)) \neq (0,0)$ for $t \in I$ og at

$$F(t,\varphi(t))1 - \varphi'(t) = 0 \quad \text{for} \quad t \in I ,$$

altså er grafen for φ løsningskurve til (3).

Hvis omvendt $t \mapsto (x(t),y(t))$, $t \in I$, er parameterfremstilling for en (C^1-) løsningskurve til (3) gælder

$$(x'(t),y'(t)) \neq (0,0) \quad \text{og} \quad F(x(t),y(t))x'(t) - y'(t) = 0 \quad \text{for} \quad t \in I.$$

Dette medfører, at $x'(t) \neq 0$ for alle $t \in I$, d.v.s. $x'(t)$ har konstant fortegn og x er dermed enten strengt voksende eller strengt aftagende. Lad $h\colon J \to I$ betegne den inverse funktion til x.

Da er funktionen $\varphi: J \to \mathbb{R}$ givet ved $\varphi(s) = y(h(s))$ af klasse C^1, $(s,\varphi(s)) \in \Omega$ for $s \in J$ og

$$\varphi'(s) = y'(h(s))h'(s) = F\Big(x(h(s)),y(h(s))\Big)x'(h(s))h'(s) = F(s,\varphi(s))$$

for $s \in J$, hvilket viser, at $\varphi: J \to \mathbb{R}$ er løsning til (2). $\square$

Bestemmelse af løsningskurver. Ved hjælp af Lemma 5.1 kan vi nu finde løsningskurver til (1) under brug af de tidligere resultater for ligninger af typen (2).

Vi bemærker først, at ligningen $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ og enhver ligning, der fås af denne ved at gange f og g med samme kontinuerte nulpunktsfri funktion, har de samme løsningskurver. Ligningen (1) har derfor i den åbne mængde $\Omega_g = \{(x,y) \in \Omega \mid g(x,y) \neq 0\}$ som løsningskurver netop graferne for løsninger til den sædvanlige differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)} . \tag{4}$$

Ved at lade x og y bytte roller, ser vi, at ligningen i den åbne mængde $\Omega_f = \{(x,y) \in \Omega \mid f(x,y) \neq 0\}$ som løsningskurver netop har graferne for løsninger til den sædvanlige differentialligning

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{g(x,y)}{f(x,y)} . \tag{5}$$

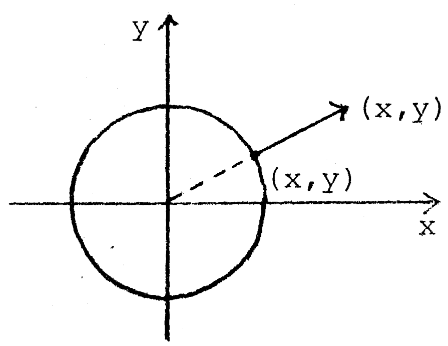
Under forudsætningen at funktionerne f og g begge er C^1-funktioner på Ω, kan vi på hver af disse ligninger (4) og (5) anvende eksistens- og entydighedssætningen for sædvanlige differentialligninger. Ved eventuelt at sammensætte maksimale løsninger med fælles stykker til de to ligninger (4) og (5) fås maksimale løsninger til ligningen (1) i mængden $\Omega^* = \Omega_f \cup \Omega_g = \{(x,y) \in \Omega \mid (f(x,y),g(x,y)) \neq (0,0)\}$. Dermed har vi bevist

SÆTNING 5.2. Når f og g er C^1-funktioner, går der gennem hvert punkt af mængden Ω^* netop én maksimal løsning til ligningen (1) i Ω^*.

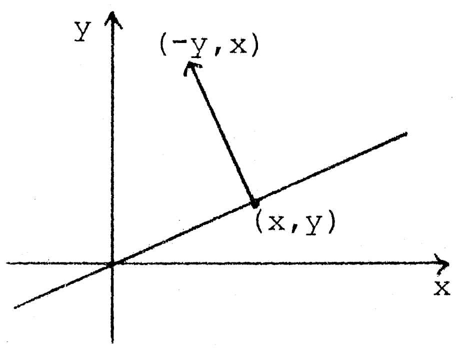
Enhver løsning i Ω^* er del af en maksimal løsning. Det bemærkes, at en maksimal løsning kan være en lukket kurve.

Punkterne af mængden $\Omega \setminus \Omega^*$, altså de punkter $(x,y) \in \Omega$, hvori $(f(x,y),g(x,y)) = (0,0)$, kaldes <u>singulære punkter</u> for differentialligningen (1). Gennem et singulært punkt kan der gå ingen, een, eller flere løsninger. For de ligninger, vi skal betragte, er de singulære punkter i reglen isolerede (d.v.s. i en omegn findes ikke andre singulære punkter). Om der gennem et sådant punkt går løsninger, beror på, om man ved til maksimale løsninger i Ω^* at føje punktet kan danne kurver af den ønskede art i Ω.

EKSEMPEL. Ligningen $x\,dx + y\,dy = 0$ i $\Omega = \mathbb{R}^2$ har det ene singulære punkt $(0,0)$. Funktionerne f og g er C^1 (endda C^∞). Gennem hvert punkt af mængden $\Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ går altså een maksimal løsning til ligningen i Ω^*. Da vektoren $(f(x,y),g(x,y)) = (x,y)$ for ethvert $(x,y) \neq (0,0)$ er beliggende på linien gennem $(0,0)$ og (x,y), ser man umiddelbart (prøv med en parameterfremstilling), at cirklerne med centrum $(0,0)$ udgør de maksimale løsninger til ligningen i Ω^*. Gennem det singulære punkt $(0,0)$ går ingen løsning til ligningen.



EKSEMPEL. Ligningen $-y\,dx + x\,dy = 0$ i $\Omega = \mathbb{R}^2$ har det ene singulære punkt $(0,0)$. Funktionerne f og g er C^1 (endda C^∞). Gennem hvert punkt af mængden $\Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ går altså een maksimal løsningen til ligningen Ω^*. Da vektoren $(f(x,y),g(x,y)) = (-y,x)$ for ethvert $(x,y) \neq (0,0)$, er vinkelret på linien gennem $(0,0)$ og (x,y), ser man umiddelbart, at halvlinierne ud fra $(0,0)$, punktet $(0,0)$ ikke medregnet, udgør de maksimale løsninger til ligningen i Ω^*. Ved tilføjelse af det singulære punkt $(0,0)$ sammensættes halvlinierne til



hele linier gennem $(0,0)$, og man ser, at løsningerne til ligningen i $\mathbb{R}^2$ er samtlige linier gennem $(0,0)$ og dele heraf.

Sammenhæng med eksakte differentialformer. Venstre side i en differentialligning af den betragtede type (1) er en C^0-differentialform af første grad i Ω , og hvis denne differentialform er eksakt, kan løsningskurverne til (1) bestemmes via en stamfunktion til differentialformen.

SÆTNING 5.3. Antag at C^0-differentialformen

$$\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

er eksakt i Ω , altså er differentialet af en C^1-funktion $H: \Omega \to \mathbb{R}$. Da er løsningskurverne til differentialligningen

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

netop niveaukurverne for funktionen H . Nøjagtigt udtrykt: Løsningerne er de C^1-kurver $t \mapsto (x(t),y(t)) \in \Omega$ med $(x'(t),y'(t)) \neq (0,0)$, langs hvilke H er konstant, d.v.s. som er indeholdt i en niveaukurve $\{(x,y) \in \Omega \mid H(x,y) = k\}$.

BEVIS. For en C^1-kurve $t \mapsto (x(t),y(t)) \in \Omega$ med parameterinterval $I \subseteq \mathbb{R}$ gælder nemlig for $t \in I$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} H(x(t),y(t)) &= H'_x(x(t),y(t))x'(t) + H'_y(x(t),y(t))\, y'(t) \\ &= f(x(t),y(t))x'(t) + g(x(t),y(t))y'(t) \ ,\end{aligned}$$

og ligningen

$$f(x(t),y(t))x'(t) + g(x(t),y(t))y'(t) = 0$$

er altså opfyldt for alle t , hvis og kun hvis $H(x(t),y(t))$ er konstant. $\square$

Ved hjælp af Sætning 5.3 kan vi løse differentialligningen $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$, hvis differentialformen ω på venstre side er eksakt. Som ovenfor bemærket ændres løsningerne ikke, selv om f

og g multipliceres med samme kontinuerte nulpunktsfri funktion. Hvis vi kan finde en kontinuert funktion $h: \Omega \to \mathbb{R}$, så at differentialformen $h\omega = h(x,y)f(x,y)dx + h(x,y)h(x,y)dy$ er eksakt, kan vi altså løse ligningen i mængden $\{(x,y) \mid h(x,y) \neq (0,0)\}$. En sådan funktion h kaldes en <u>integrationsfaktor</u> for ω.

En differentialform med <u>adskilte variable</u>

$$\omega = f(x)dx + g(y)dy ,$$

hvor $f: I \to \mathbb{R}$, og $g: J \to \mathbb{R}$ er kontinuerte funktioner på åbne intervaller I og J i $\mathbb{R}$, er eksakt i mængden $\Omega = I \times J$, idet den er differentialet af funktionen

$$H(x,y) = \int f(x)dx + \int g(y)dy .$$

Løsningerne til differentialligningen

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

bestemmes altså ved

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = k ,$$

hvor k er en konstant. Differentialligningen

$$f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0 ,$$

hvor $f_1, g_1: I \to \mathbb{R}$ og $f_2, g_2: J \to \mathbb{R}$ er kontinuerte funktioner, overføres i en ligning med adskilte variable ved division med $f_2(y)g_1(x)$. De eventuelle nulpunkter for f_2 og g_1 kræver naturligvis en særskilt undersøgelse, men man ser umiddelbart, at et nulpunkt $b \in J$ for f_2 giver anledning til løsningskurven $t \mapsto (t,b)$, $t \in I$, og at et nulpunkt $a \in I$ for g_1 giver anledning til løsningskurven $t \mapsto (a,t)$, $t \in J$.

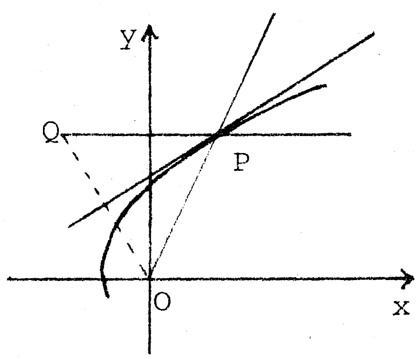
EKSEMPEL. For ligningen $x\,dx + y\,dy = 0$ i $\mathbb{R}^2$ er venstre side en eksakt differentialform (de variable er adskilt). Venstre side er differentialet af funktionen $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Løsningskurverne er altså niveaukurverne for funktionen x^2+y^2, d.v.s. de er bestemt ved $x^2+y^2 = k$. Kun $k > 0$ giver løsninger.

EKSEMPEL. Ligningen $-y\,dx + x\,dy = 0$ i $\mathbb{R}^2$ overføres ved division med xy i ligningen $-\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$, i hvilken de variable er adskildt. I hver af de åbne kvadranter $x \neq 0$ og $y \neq 0$ bestemmes løsningerne altså ved

$$-\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dy}{y} = k \;, \quad \text{d.v.s.} \quad -\log|x| + \log|y| = k \;,$$

eller $\frac{|y|}{|x|} = k \;(> 0)$ (med en ny betydning af k). Herved bestemmes halvlinierne ud fra $(0,0)$, bortset fra dem på koordinatakserne, hvormed, idet $(0,0)$ medtages, er fundet alle løsninger pånær koordinatakserne, der trivielt er løsninger.

EKSEMPEL. Vi søger de kurver, hvis tangent i ethvert kurvepunkt $P = (x,y) \neq (0,0)$ er halveringslinien for vinklen dannet af halvlinien gennem P parallel med den positive del af x-aksen og forlængelsen af liniestykket OP, hvor $O = (0,0)$. Afsættes vektoren $\vec{PQ} = (-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, 0)$, vil vektoren $\vec{OQ} = (x-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, y)$ øjensynlig være vinkelret på tangentretningen. De søgte kurver er altså løsningerne til differentialligningen



$$(x-\sqrt{x^2+y^2})\,dx + y\,dy = 0 \;. \tag{6}$$

Venstre side i denne ligning er ikke en eksakt differentialform, men man ser, at funktionen $(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ er en integrationsfaktor i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, idet

$$d(\sqrt{x^2+y^2}-x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right)dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$$

for $(x,y) \neq (0,0)$. Løsningskurverne bestemmes altså ved

$$\sqrt{x^2+y^2} - x = k \;.$$

Her kommer kun værdier $k \geq 0$ i betragtning. For $k = 0$ fås den positive del af x-aksen (som sammen med $(0,0)$ udgør ligningens singulære punkter). For $k > 0$ kan ligningen for løsningskurven omformes til

$$x^2 + y^2 = (x+k)^2 \;, \quad x > -k \;, \quad \text{eller} \quad y^2 = 2k(x+\tfrac{1}{2}k) \;,$$

og man ser, at den fremstiller parablen med brændpunkt $(0,0)$ og ledelinie $x = -k$.

Opgaven løses måske enklere i polære koordinater (r,φ) . Indsætter vi

$$x = r\cos\varphi\ ,\qquad dx = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi$$

$$y = r\sin\varphi\ ,\qquad dy = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi\ ,$$

i ligning (6) fås ligningen

$$r(\cos\varphi - 1)(\cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi) + r\sin\varphi(\sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi) = 0$$

eller

$$r(1-\cos\varphi)\,dr + r^2\sin\varphi\,d\varphi = 0\ ,$$

hvori de variable kan adskilles ved division med $r^2(1-\cos\varphi)$. Her svarer $r = 0$ blot til begyndelsespunktet, medens $1-\cos\varphi = 0$ giver den positive del af x-aksen som løsningskurve. De øvrige løsningskurver bestemmes af

$$\int\frac{dr}{r} + \int\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\,d\varphi = k\ ,$$

eller (med en ny betydning af k)

$$r = \frac{k}{1-\cos\varphi}\ ,\quad k \in \mathbb{R}_+\ ,$$

hvilket er en parabelligning i polære koordinater.

Separation af de variable. En differentialligning af formen

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

kan ofte løses derved, at de variable i den tilhørende ligning $F(x,y)dx - dy = 0$, ved multiplikation med en passende funktion bliver adskilt, d.v.s. at ligningen bringes på formen $f(x)dx + g(y)dy = 0$. Derved kan løsninger og løsningskurver findes ved stamfunktionsbestemmelse.

EKSEMPEL. Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}\ ,\quad (x,y) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R}\ ,$$

har løsningen $y = 0$. De øvrige løsninger bestemmes af

$$\frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2} = 0\ ,$$

altså

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = k$$

eller

$$y = \frac{x}{1+kx} \quad .$$

For $k = 0$ fås linien $y = x$. For $k \neq 0$ kan ligningen omformes til

$$(x+\frac{1}{k})(y-\frac{1}{k}) = -\frac{1}{k^2} \quad ,$$

der fremstiller en ligesidet hyperbel med asymptoterne $x = -\frac{1}{k}$ og $y = \frac{1}{k}$ og gående gennem punktet $(0,0)$.

Appendiks. Løsningsmetoder.

Det teoretiske fundament for bestemmelsen af løsningsmængden til en differentialligning er eksistens- og entydighedssætningerne Sætning 1.4 og Sætning 3.2 (denne sidste kan specielt anvendes for lineære ligninger). I beviserne benyttes de successive approksimationers metode, og denne metode kan i simple tilfælde bruges ved den eksplicitte løsningsbestemmelse. I almindelighed giver disse sætninger "kun" oplysning om strukturen af løsningsmængden og de benyttes derfor når det skal godtgøres, at et system af løsninger udgør den fuldstændige løsning.

Eksistens- og entydighedssætningerne vedrører ligninger af formen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x}) \quad , \qquad (t,\underline{x}) \in \Omega \ , \tag{1}$$

og det er afgørende, at ligningen er normeret d.v.s., at koefficienten til $\underline{x}'$ er 1. For en k'te ordens ligning, som kan reduceres til et system af formen (1), svarer dette til, at koefficienten til $\frac{d^k x}{dt^k}$ er 1.

For en ikke-normeret ligning spiller de singulære punkter $(t,\underline{x}) \in \Omega$, d.v.s. de punkter hvor koefficienten til $\underline{x}'$ (eller i k'te ordens tilfældet: til $\frac{d^k x}{dt^k}$) er lig 0, en særlig rolle. Ved division med denne koefficient kan ligningen gives formen (1) i mængden af ikke-singulære punkter og derved løses i denne mængde. Eventuelle løsninger gennem de singulære punkter må så bestemmes særskilt.

I den følgende oversigt er det stedse forudsat, at differentialligningen er normeret, og at "koefficienterne" er kontinuerte.

Ligninger for én ubekendt funktion.

a) Lineær k'te ordens ligning: Mængden af løsninger til en homogen ligning udgør et k-dimensionalt vektorrum over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, og den fuldstændige løsning til en inhomogen ligning kan fås ved stamfunktionsbestemmelse ud fra en basis for løsningsrummet til den tilsvarende homogene ligning. Se Sætning 3.7 og Sætning 3.8.

b) Lineær første ordens ligning: Den fuldstændige løsning kan fås ved stamfunktionsbestemmelser. Se p. VII.31.

c) Lineær anden ordens ligning: Der findes ingen metode der giver løsningen ved stamfunktionsbestemmelser. Ofte vil man dog kunne komme igennem ved hjælp af følgende:

α) Ud fra én nulpunktsfri løsning til den tilsvarende homogene ligning kan den fuldstændige løsning findes ved stamfunktionsbestemmelser. Se Kap. VI p. 38. Denne metode er formaliseret i opgave VII.3.5. Ofte er det dog lettere at benytte "gættemetoden", se Kap. VI p. 41.

β) Hvis koefficienterne er simple polynomier i den uafhængige variabel t, kan potensrækkemetoden, se Kap VI p. 53, ofte give den fuldstændige løsning.

d) Lineær k'te ordens ligning med konstante koefficienter: Den fuldstændige løsning til en homogen ligning kan findes ud fra rødderne i det karakteristiske polynomium. Se Sætning 4.1. (Visse ligninger kan ved at indføre en ny variabel $t = v(s)$ overføres i en ligning med konstante koefficienter. Se Opgave VI.5.8 og VI.5.9.)

e) Ikke-lineære ligninger: En ligning af formen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{g(x)} \quad , \quad (g(x) \neq 0)$$

kan løses ved separation af de variable, se Sætning VI.5.1, og en ligning af formen

$$f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0$$

kan ofte løses ved hjælp af en integrationsfaktor, se §5.

Ligningssystemer.

a) Lineært differentialligningssystem af første orden: Mængden af løsninger til et homogent system af k ligninger udgør et k-dimensionalt vektorrum over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, og den fuldstændige løsning til et inhomogent system kan fås ved en stamfunktionsbestemmelse ud fra en basis for løsningsrummet til det tilsvarende homogene system. Se Sætning 3.4 og Sætning 3.5.

b) Et lineært differentialligningssystem af højere orden kan omformes til et (større) system af første orden. Se §2.

c) Lineært differentialligningssystem af første orden med konstante koefficienter: Den fuldstændige løsning til et homogent system kan findes ved hjælp af en koordinattransformation der giver koefficientmatricen Jordan's normalform. Se §4.

VII.1.1. Gør rede for, at højre side af differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = x^3 , \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2 ,$$

opfylder en Lipschitz betingelse lokalt (i $\mathbb{R}^2$) , og find samtlige maksimale løsninger.

VII.1.2. Gør rede for, at højre side af differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{1 - x^2} , \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times]-1,1[,$$

opfylder en Lipschitz betingelse lokalt, og find samtlige maksimale løsninger.

VII.1.3. Find en differentialligning

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) , \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2 ,$$

der som løsninger har følgende funktioner på $\mathbb{R}$:

$$x = a(1+\cos t) , \quad a \in [0,1] ,$$

$$x = b + \cos t , \quad b \in]1,+\infty[,$$

$$x = c , \quad c \in]-\infty,0[.$$

Angiv samtlige maksimale løsninger til ligningen.

VII.1.4. Lad I være et begrænset eller ubegrænset åbent interval på $\mathbb{R}$, og lad $f(t,x): I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, der opfylder en Lipschitz betingelse lokalt. Vis, at hvis $\varphi:]a,b[\to \mathbb{R}$ er en maksimal løsning til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) ,$$

og hvis $b \in I$, da gælder $\varphi(t) \to +\infty$ eller $\varphi(t) \to -\infty$ for $t \to b$ fra venstre.

VII.1.5. Find de maksimale løsninger til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = |x| , \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} ,$$

og bestem specielt løsningen gennem $(0,1)$.

VII.1.6. Find samtlige løsninger på hvert af intervallerne $]-\infty,0[$ og $]0,\infty[$ til differentialligningen

$$\operatorname{Arctan} t \frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t^2}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2 .$$

Find dernæst samtlige maksimale løsninger til ligningen og vis, at der til hvert $\alpha \in \mathbb{R}$ findes netop ên løsning $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder

$$x(0) = 0 , \quad x'(0) = \alpha .$$

Er dette i overensstemmelse med eksistens- og entydighedssætningen?

VII.2.1. Vis, at enhver halvcirkel

$$y = b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2} , \quad x \in]a-r,a+r[,$$

tilfredsstiller differentialligningen

$$y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2} .$$

Find samtlige maksimale løsninger til denne ligning.

Vink. (1) Differentier ligningen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ tre gange og eliminer a,b,r. (2) Godtgør og benyt, at der gennem hvert linie-element af anden orden går en og kun een maksimal løsning.

VII.2.2. Opskriv for vilkårligt $a \in \mathbb{R}$ og $p \in \mathbb{R}_+$ ligningen for parablen med brændpunkt $(a,0)$ og toppunkt $(a,\frac{1}{2}p)$. Vis, at de funktioner $y = \varphi(x)$, hvis graf er den i halvplanen $\{(x,y) \mid y > 0\}$ liggende del af en sådan parabel, er maksimale løsninger til differentialligningen

$$y'' = \frac{y'^2-1}{2y} , \quad (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ ,$$

og at disse og deres restriktioner er samtlige løsninger til differentialligningen, der opfylder betingelsen $|y'| < 1$.

VII.3.1. Bestem løsningen til

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x , \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} ,$$

gennem $(0,a)$ $(a \in \mathbb{R})$, ved successive approksimationer.

VII.3.2. Find løsningen til

$$\frac{dx}{dt} = tx + t, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

gennem $(0,0)$ ved successive approksimationer.

VII.3.3. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 \cos t - x_2 \sin t \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \sin t + x_2 \cos t \end{aligned} \qquad (t,x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3 .$$

Vink. Betragt $z = x_1 + ix_2$.

VII.3.4. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 \cos t \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \cos t \end{aligned} \qquad (t,x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3 .$$

VII.3.5. Vis, at hvis $\varphi_1(t)$ er løsning til den lineære, homogene differentialligning af anden orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt} ,$$

og $\varphi_1(t) \neq 0$ for alle t i det betragtede interval, er samtlige løsninger bestemt ved

$$x = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) ,$$

hvor

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)\int \frac{1}{\varphi_1(t)^2} \left(\exp \int p_1(t)dt\right)dt .$$

Vis, at hvis $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ er en basis for løsningsrummet til den homogene ligning, er samtlige løsninger til den lineære, inhomogene differentialligning af anden orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt} + q(t)$$

bestemt ved

$$x = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_a(t) - \varphi_1(t)\int \frac{\varphi_2(t)}{W(t)}\, q(t)dt + \varphi_2(t)\int \frac{\varphi_1(t)}{W(t)}\, q(t)dt ,$$

hvor

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix} .$$

[Overalt står $\int\ldots dt$ for en vilkårlig valgt af de uendelig mange stamfunktioner til den pågældende funktion.]

VII.3.6. Vis, at differentialligningen

$$\cos x \sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} + (\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x)\frac{dy}{dx} + 2y \cos^3 x = 0$$

har løsningen $y = \sin x$. Find derefter samtlige løsninger i $]0,\frac{1}{2}\pi[\times \mathbb{R}$. Find endelig samtlige løsninger i $]0,\frac{1}{2}\pi[\times \mathbb{R}$ til differentialligningen

$$\cos x \sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} + (\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x)\frac{dy}{dx} + 2y \cos^3 x = \cos^2 x \sin x .$$

Vink. Benyt opg. VII.3.5.

VII.3.7. Bestem samtlige løsninger til differentialligningen

$$(1-t^2)\frac{d^2x}{dt^2} - t\frac{dx}{dt} + x = 0 , \quad t \in]-1,1[,$$

idet det opgives, at $x = t$ er en løsning.

VII.4.1. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 \qquad (t,x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^4 , \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_1 + x_2\end{aligned}$$

og find den fundamentalmatrix for systemet, som for $t = 0$ er enhedsmatrix.

Vink. Systemet kan ved en koordinattransformation føres over i et system med diagonalmatrix.

VII.4.2. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ & \qquad\qquad (t,x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3 , \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 ,\end{aligned}$$

og opskriv den fundamentalmatrix for systemet, som for $t = 0$ er enhedsmatrix. Find dernæst den løsning $(\psi_1(t),\psi_2(t))$ til differentialligningssystemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + t^2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + t , \qquad (t,x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3 ,$$

for hvilken $(\psi_1(0),\psi_2(0)) = (-1,2)$.

VII.4.3. Find den løsning til differentialligningen

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 5\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = -2e^{-t} , \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2 ,$$

for hvilken man for $t = 0$ har $\left(x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\right) = (-1,-2,-10)$.

VII.4.4. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -2\cos t , \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2 ,$$

og den løsning $\varphi(t)$, for hvilken $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \pi$.

VII.4.5. Betragt det lineære homogene differentialligningssystem med konstante koefficienter

$$\frac{d\underline{\underline{x}}|}{dt} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{x}}| , \quad (t,\underline{\underline{x}}|) \in \mathbb{R}\times V . \qquad (*)$$

Lad $\underline{\underline{x}}_{0|} \in V$ og definer følgen $(\underline{\underline{\varphi}}_{n|}(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ved $\underline{\underline{\varphi}}_{0|}(t) = \underline{\underline{x}}_{0|}$ og

$$\underline{\underline{\varphi}}_{n|}(t) = \underline{\underline{x}}_{0|} + \int_0^t \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\varphi}}_{(n-1)|}(\tau)d\tau , \quad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} .$$

Vis, at for $n \in \mathbb{N}$ og $t \in \mathbb{R}$ gælder

$$\underline{\underline{\varphi}}_{n|}(t) = (\underline{\underline{E}} + t\underline{\underline{P}} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\underline{\underline{P}}^n)\underline{\underline{x}}_{0|} .$$

Vis, at følgen $(\underline{\underline{B}}_n(t))$ af matrixfunktioner

$$\underline{\underline{B}}_n(t) = \underline{\underline{E}} + t\underline{\underline{P}} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\underline{\underline{P}}^n , \quad t \in \mathbb{R}$$

konvergerer punktvis på $\mathbb{R}$ og uniformt på ethvert kompakt interval $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ mod en matrixfunktion $\underline{\underline{B}}(t)$, og at $t \mapsto \underline{\underline{B}}(t)\underline{\underline{x}}_{0|}$ er den entydigt bestemte løsning til (*) gennem $(0,\underline{\underline{x}}_{0|})$. (<u>Formelt</u> gælder $\underline{\underline{B}}(t) = \exp(t\underline{\underline{P}})$.)

(fortsættes)

Vink. Benyt Sætning VII.3.2 i tilfældet hvor $\underline{x}_0$ er basisvektorerne i V .

VII.5.1. Find løsningskurverne til differentialligningen

$$(3x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0 \ .$$

Skitser den løsningskurve, der går gennem (1,0) .

VII.5.2. Find de plane kurver, for hvilke tangenten i hvert kurvepunkt (x,y) går gennem punktet (2x,0) .

VII.5.3. Idet $a > 0$ er en given konstant, skal man bestemme de plane kurver, for hvilke linien gennem begyndelsespunktet O parallel med kurvenormalen i det vilkårlige kurvepunkt P afskærer et liniestykke af længden a på den på OP vinkelrette halvlinie ud fra P .

VII.5.4. Find løsningerne til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+y^2}}{x} \qquad (x,y) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R} \ .$$

VII.5.5. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \ .$$

Angiv den løsning $y = f(x)$, for hvilken $f(1) = -1$.

VII.5.6. Find samtlige løsninger til differentialligningen $y\,dx + x\,dy = 0$.

VII.5.7. Find en differentialligning af formen

$$f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0 \ ,$$

hvis løsninger er linierne $y = \alpha x$ og $y = -\alpha x$, hvor $\alpha > 0$ er en given konstant, og alle hyperbler med disse linier som asymptoter.

Nogle bemærkninger til Mat 102, 1981/82, III. Sætning 2.6.

Som det fremgår af beviset for denne sætning om differentiabilitet af omvendt funktion, er hovedsagen at vise følgende:

SÆTNING I. (Kontinuitet af omvendt funktion.) Lad $A \subset \mathbb{R}$ være et interval, $f: A \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion og $B = f(A)$. Såfremt $f: A \to B$ er bijektiv, er $f^{-1}: B \to A$ kontinuert.

I noterne er dette bevist uden, at det bliver klart, at både Sætning 2.6 og Sætning I handler om strengt monotone funktioner. Der gælder nemlig:

SÆTNING II. Lad $A \subset \mathbb{R}$ være et interval, $f: A \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion og $B = f(A)$. Da er $f: A \to B$ bijektiv, hvis og kun hvis f er strengt monoton.

Ved beviset for denne sætning må man indledningsvis gøre sig klart, at $f: A \to \mathbb{R}$ er strengt monoton, hvis og kun hvis

$$\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in A: x_1 < x_2 \wedge x_3 < x_4 \Rightarrow (f(x_2)-f(x_1))(f(x_4)-f(x_3)) > 0 .$$

At $f: A \to \mathbb{R}$ ikke er strengt monoton er derfor ensbetydende med, at

$$\exists x_1, x_2, x_3, x_4 \in A: x_1 < x_2 \wedge x_3 < x_4 \wedge (f(x_2)-f(x_1))(f(x_4)-f(x_3)) \leqq 0 .$$

Vi vil først vise følgende:

LEMMA. Lad $f: A \to B$ være bijektiv og kontinuert. Da gælder

$$\forall a, b, x_1, x_2 \in A: a \leqq x_1 < x_2 \leqq b \Rightarrow (f(b)-f(a))(f(x_2)-f(x_1)) > 0 .$$

BEVIS. Ved eventuelt at erstatte f med $-f$ kan vi antage, at $f(b) \geqq f(a)$ og dermed $f(b) > f(a)$, da $a < b$ og f er bijektiv. Vi skal derfor vise, at $f(x_2) > f(x_1)$. Dette gøres indirekte, idet vi antager at $f(x_2) \leqq f(x_1)$ og dermed $f(x_2) < f(x_1)$, da $x_1 < x_2$ og f er bijektiv. Vi skelner nu mellem tre tilfælde:

1) $\underline{f(x_1) = f(a)}$. Da f er bijektiv, er $x_1 = a$ og $f(x_2) < f(x_1) = f(a) < f(b)$. Ifølge Sætning 3.4 vil ethvert $y \in]f(x_2),f(a)[\subset]f(x_2),f(b)[$ være billede ved f af såvel et $\xi \in]a,x_2[$ som et $\eta \in]x_2,b[$ i strid med bijektiviteten af f.

2) $\underline{f(x_1) > f(a)}$. Her er $f(x_1) > \max(f(a),f(x_2))$, og ethvert $y \in]\max(f(a),f(x_2)),f(x_1)[$ er da tilsvarende billede ved f af såvel et $\xi \in]a,x_1[$ som et $\eta \in]x_1,x_2[$, modstrid!

3) $\underline{f(x_1) < f(a)}$. Her er $f(x_1) < f(a) < f(b)$, og ethvert $y \in]f(x_1),f(a)[\subset]f(x_1),f(b)[$ er da tilsvarende billede ved f af såvel et $\xi \in]a,x_1[$ som et $\eta \in]x_1,b[$, modstrid! $\square$

BEVIS for Sætning II. "Hvis"-delen er oplagt, og vi skal derfor blot vise, at f må være strengt monoton, når $f: A \to B$ er kontinuert og bijektiv. Dette vises indirekte, idet vi antager, at der findes $x_1,x_2,x_3,x_4 \in A$ med $x_1 < x_2$, $x_3 < x_4$ og $(f(x_2)-f(x_1))(f(x_4)-f(x_3)) \leqq 0$. Sæt

$$a = \min(x_1,x_2,x_3,x_4) \ , \quad b = \max(x_1,x_2,x_3,x_4) \ .$$

Da gælder ifølge lemmaet

$$(f(b)-f(a))(f(x_2)-f(x_1)) > 0 \quad \text{og} \quad (f(b)-f(a))(f(x_4)-f(x_3)) > 0 \ .$$

Heraf følger imidlertid, at

$$(f(b)-f(a))^2(f(x_2)-f(x_1))(f(x_4)-f(x_3)) > 0$$

og dermed, at

$$(f(x_2)-f(x_1))(f(x_4)-f(x_3)) > 0$$

i strid med antagelsen. $\square$

BEVIS for Sætning I. Ifølge Sætning II er f strengt monoton, og ved eventuelt at erstatte f med $-f$ kan vi antage, at f er strengt voksende. Lad y_0 være et vilkårligt indre punkt i intervallet B, da er $x_0 = f^{-1}(y_0)$ et indre punkt i intervallet A. Lad $\varepsilon > 0$ være vilkårlig men dog så lille, at $x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \in A$. Sæt $y_0 + \delta_+ = f(x_0+\varepsilon)$, $y_0 - \delta_- = f(x_0-\varepsilon)$. Da f er strengt voksende, er $\delta = \min(\delta_-, \delta_+) > 0$ og

$$f^{-1}(]y_0-\delta, y_0+\delta[) \subset f^{-1}(]y_0-\delta_-, y_0+\delta_+[) =]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[.$$

Dette viser, at f^{-1} er kontinuert i ethvert indre punkt y_0 i B, og beviset er derfor færdigt, når B er et åbent interval. Det overlades til læseren at vise kontinuiteten af f^{-1} i eventuelle endepunkter af B tilhørende B. $\square$

Bemærkning 1. Det kan vises, at $f\colon A \to \mathbb{R}$ er strengt monoton, hvis og kun hvis

$$(*) \qquad \forall x_1, x_2, x_3 \in A\colon (f(x_2)-f(x_1))(f(x_3)-f(x_2)) > 0 ,$$

og ræsonnementet - anvendt tre gange - i lemmaet viser da - anvendt en gang - at Sætning II er opfyldt. Imidlertid må denne lettelse af beviset så betales med et ret så omstændeligt bevis for, at (*) medfører, at f er strengt monoton.

Bemærkning 2. I kapitel III, §5 (III.47, linie 6°) benyttes stiltiende Sætning II.

Mat 102, 1982/83

Nogle rettelser til Kap. I og Kap. II.

Kapitel I.

17^{20}	$f(x)_2$	skal være:	$f(x_2)$
30^{7}	overtal	skal være:	undertal
36^{4}-36^{12}	en bedre formulering:		

af $\mathbb{N}$ ind i $\mathbb{R}^*$, *konvergerer* mod $x \in \mathbb{R}^*$. Ved definitionen skelnes mellem tilfældene $x \in \mathbb{R}$ og $x = \pm\infty$.

DEFINITION. En talfølge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ siges at være *konvergent* med *grænseværdi* $x \in \mathbb{R}$, hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et tal $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ gælder at

$$|x_n - x| < \varepsilon .$$

Talfølgen (x_n) siges at *gå mod* (eller have grænseværdien) ∞ (henh. $-\infty$), hvis der til hvert $a \in \mathbb{R}$ findes et tal $N \in \mathbb{N}$ så det for alle $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$ gælder

$$x_n > a \quad (\text{henh. } x_n < a) .$$

41_7	$x_n > a$	skal være:	$z_n > a$
64_8	tilføj: (p. V.14)		
65^{12}	efter (s_n)	tilføjes:	i tilfældet $a \neq 0$

Kapitel II.

1_4	efter *liniestykket*	tilføjes:	eller *vektoren*
2_5	skal rettes til:	vil	
6_{10}	netop fjernes		
26_{12}	tilføj: (*)		

VEND!

27^{4} skal være:

Af (*) fås specielt, at en punktfølge (x_1^n, x_2^n) i (M,d)

28^{5-8} skal være:

at et element $x \in X$ som "ligger tæt" ved et element $x_0 \in X$ afbildes i et element $f(x)$ som "ligger tæt" ved $f(x_0)$. Udtrykket "ligger tæt" kan gives en præcis betydning, når X og Y er metriske rum.

29^{7} skal være:

hvis (x_n) er konvergent med grænsepunkt a , så er følgen $(f(x_n))$

33^{12} skal være: $K(0,\sqrt{\beta}) \setminus K'(0,\sqrt{\alpha})$.

36_{11} tilføj: $\square$

45^{8} rettes til:

$|f(x)-z_0| < \varepsilon$ for alle $x \in (]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap A) \setminus \{x_0\}$.

45_{3-1} rettes til:

$|f(x)-z_0| < \varepsilon$ for alle $x \in]a,a+\delta[\cap A$.

Det ses let, at f højst har én grænseværdi for x gående mod a fra højre, og at f har grænseværdien z_0 for x gående mod a

46^{1} skal være:

fra højre netop hvis funktionen $\tilde{f}: [a,b[\to \mathbb{C}$ givet ved

48^{16}	sætninger rettes til:		resultater
53_{1}	skal være:		fra venstre. Hermed er vist (i) $\Rightarrow$ (ii).
$54^{12,13}$	sin(x)	skal være:	sin x
$55^{12,13}$	$<$	skal være:	$\leq$
57_{8}	X_n	skal være:	x_n
58_{9}	skal være:		af (x_n) . Altså er K ikke kompakt.
65^{8}	$\sqrt[2n]{x}$	skal være:	$\sqrt[2^n]{x}$
65^{15}	x^{2n}	skal være:	x^{2^n}

Nogle rettelser til Kap. III og IV.

Kap. III.

4^{3-14} erstattes med:

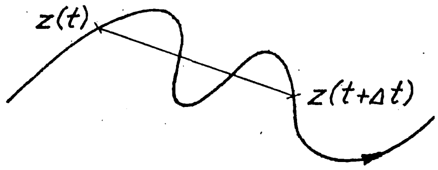
BEVIS. Det er klart, at der højst kan være et tal med den angivne egenskab. Thi er I og I' sådanne tal, findes jo for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ en middelsum S, således at $|S-I| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|S-I'| < \frac{\varepsilon}{2}$ og dermed $|I-I'| < \varepsilon$.

For at fremskaffe et tal I som beskrevet vælger vi for hvert $n \in \mathbb{N}$ et tal $S_n \in M(f,\frac{1}{n})$. Følgen (S_n) vil da være en fundamentalfølge. For ethvert $\varepsilon > 0$ findes nemlig ifølge Sætning 1.1 et $\delta_0 > 0$, således at $\operatorname{diam} M(f,\delta_0) \leqq \varepsilon$, og for $\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \leqq \delta_0$, dvs. for $m,n \geqq \frac{1}{\delta_0}$, gælder da $|S_n - S_m| \leqq \varepsilon$. Følgen (S_n) er altså konvergent. Vi kalder grænseværdien I.

Vi mangler at vise, at tallet $I = \lim_{n\to\infty} S_n$ har den i sætningen beskrevne egenskab. Lad $\varepsilon > 0$ være givet, lad $\delta_0 > 0$ være valgt, således at $\operatorname{diam} M(f,\delta_0) \leqq \varepsilon$, og betragt en vilkårlig middelsum $S \in M(f,\delta_0)$. For hvert $n \geqq \frac{1}{\delta_0}$ er jo $S_n \in M(f,\delta_0)$ og dermed $|S - S_n| \leqq \varepsilon$. Men så er også $|S - \lim S_n| = |S - I| \leqq \varepsilon$. ▯

7^6	Sætning 1.2	rettes til	Bemærkning s.III.4.
7_3	skal være	$\left\|\int_a^b f(x)\,dx\right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\,dx$.	
9^5	Sætning 1.7	skal være	Korollar 1.6
12_7	og sætter $\varepsilon(0) = 0$		slettes
13_5	$x \to 0$	skal være	$\Delta x \to 0$
14^{13}	nær x_0	skal være	for $x \to x_0$

14_{12}	overskueligheden	tilføjes et s	
14_9	skal være	Ved en ε-funktion på I vil vi forstå en funk-	
16_6	$C^o(A,\mathbb{C})$	skal være	$C^0(A,\mathbb{C})$
19^{11}	$g(x_0+ x)$	skal være	$g(x_0+\Delta x)$
20^2	kontinuert	rettes til	kontinuert i y_0 .
$20^{3,4,7}$	$[x_0-\delta,x_0+\delta]$	rettes til	$[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap A$
20_8	.	skal være	,
20_{7-4}	udgår		
21^2	som 16_6		
22^5	som 16_6		
27_6	$f'_t(x,t)$ rettes to steder til		$f'_t(x,t_0)$
27_2	$f'_t(x,t)$	rettes til	$f'_t(x,t_0)$
28^1	som 27_2		
28_7	skal være	$u \to \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$	
28_1	vel	slettes	
33_6	$\frac{\alpha(n)}{n!}\ (x-x_0)^m$	skal være	$\frac{\alpha(x)}{n!}\ (x-x_0)^n$
34_1	$\|x-x_0\| < \delta$	rettes til	$0 < \|x-x_0\| < \delta$
37_3	Taylors formel	rettes til	middelværdisætningen
40_1	$\leq n\|D\|$	slettes	
43_4	$\leq n\|D_1\|$	slettes	
45^5	fremstillinger	- Læs:	forestillinger
45^7	korrespondence	- Læs:	korrespondance
45^7	$P \to \underline{v}$	- Læs:	$P \leftrightarrow \underline{v}$
46^9	specielt er	- Læs:	specielt et

55^{14}	kurven	- Læs:	kurver
60_5	af inddelinger	- Læs:	alle inddelinger
60_3	$\sup\{D\}$	- Læs:	$\sup\{\ell(D)\}$
61_{13}	$\sup\{D\}$	- Læs:	$\sup\{\ell(D)\}$
61_6	$\sup\{D_n$	- Læs:	$\sup\{\ell(D_n)$
67_{11}	dt	- Læs:	$d\tau$
67_4	forholdet	- Læs:	Forholdet
67_{2-6}	Figur mangler:		
73_5	oprulningen	- Læs:	opviklingen
76^1	$\int^0 \sqrt{1-\xi}$	- Læs:	$\int^0 \sqrt{1-\xi^2}$
76^1	dt	- Læs:	dy
Ø III.1	III.1.1	er nu irrelevant og udgår.	

Kap. IV.

3_8	$\forall\varepsilon \in 0$	skal være	$\forall\varepsilon > 0$
21_{10}	også	rettes til	altså

25^{9-11} skal være Da er (f_n) uniformt konvergent på I, grænsefunktionen $f: I \to \mathbb{C}$ er en C^1-funktion, og $f' = g$, hvor g er grænsefunktionen for følgen (f'_n).

Ø 4^{10-12} skal være ikke konvergerer mod 0. Så findes $\varepsilon > 0$ med $\alpha_n \geq \varepsilon$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vælges $x_n \in I$ således at

$$f(x_n) - f_n(x_n) = \alpha_n \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N},$$

har følgen (x_n) en konvergent delfølge med grænseværdi $x \in I$, og der gælder $f_n(x) \to f(x)$ for $n \to \infty$, hvilket giver en modstrid.

Ø 4_{13} induktivt rettes til rekursivt

Ø 9^4 skal være $L(\gamma_n) = \int_0^1 \sqrt{1 + \pi^2(\cos(\pi t))^2}\, dt$

Matematik 102, 1982/83

Nogle rettelser til Kap. V, VI og VII.

Kap. V.

14^{10}	1_+	-Læs: 1_-
18^{6}	$x \quad \mathbb{R}$	-Læs: $x \in \mathbb{R}$
20^{6}	(i) $a^{c+a} = a^c a^d$	-Læs: (i) $a^{c+d} = a^c a^d$
24_7	dx	-Læs: dx^n
25^{6}	$\binom{a}{0}$	-Læs: $\binom{a}{n}$
35_9	$e^x \cos x + i e^x \sin y$	-Læs: $e^x \cos y + i e^x \sin y$
36_7	(5)	-Læs: (6)
37_{12}	$\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2$. Ret - til +	

71 De to linier 6 og 7 fra neden ombyttes med de to foregående linier.

78 Side V.78: skal være side V.75.

Kap. VI.

15^{11} $(x-\alpha_\rho)^2$ rettes til $(x-\alpha_\rho)^3$ det sidst forekommende sted.

21_5 $\frac{1}{1+t^2}$ skal være $\frac{2}{1+t^2}$.

23_5 den første nævner skal være $2-\cos^2 x$.

24^{6} $\cos^2 x+\sin^3 x$ skal være $\cos^3 x+\sin^3 x$.

30 Side VI.30 er forkert angivet som IV.30.

37_{12} mens r er målt til 0,8 henfald pr. minut pr. gram alm. bly.

37_3 $\frac{dy}{dt} = 0$ skal være $\frac{dx}{dt} = 0$.

38^{13} $x = 8,5$ henfald pr. minut pr. gram alm. bly.

39^{11} $\frac{2\Phi'(t)}{\Phi(t)} + p_1(t)\frac{dy}{dt}$ -Læs: $\left(\frac{2\Phi'(t)}{\Phi(t)} + p_1(t)\right)\frac{dy}{dt}$.

49^{6} hormonmetabolisme -Læs: hormonstofskifte.

50^{12-17} T_0 skal være T.

51_7 $g(t),\ t \in J$ -Læs: $g(x),\ x \in J$.

52^{5-6} "Lad $t \in F^{-1}(G(J))\ldots\ldots = \dfrac{f(t)}{g(x(t))}$, erstattes af:

Så er $G(x(t)) = f(t)$ og dermed

$$g(x(t))x'(t) = f(t), \quad \text{dvs.} \quad x'(t) = \frac{f(t)}{g(x(t))} \quad ,$$

VI.§6. Adskillige steder (s. 57^{9}, 59^{3}, 60_{5}, 61^{8})

$\underline{dr}$ -Læs: $d\underline{r}$

57^{9} γ_1 -Læs: γ

59^{1} Lad -Læs: Lader

68^{11} $x > x_0$ og $x < x_0$ skal være $x > x_1$ og $x < x_1$.

Kap. VII.

3_7 et reelt vektorrum $\mathbb{R}^k$ -Læs: $\mathbb{R}^k$

3_6 et komplekst vektorrum $\mathbb{C}^k$ -Læs: $\mathbb{C}^k$

4^{1} $x(t)$ skal være $\underline{x}(t)$

5_8 veldefineret og kontinuert -Læs: kontinuert

5_7 veldefineret -Læs: defineret

6_{13-8} erstattes af:

lokalt i Ω, hvis $\underline{f}$ opfylder en Lipschitz betingelse i enhver i Ω indeholdt mængde Ξ af formen

$$\Xi = \{(t,x) \in \mathbb{R}\times V \mid |t-t_0| \leqq a, \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \leqq b\},$$

hvor $(t_0,\underline{x}_0) \in \Omega$ og $a,b \in \mathbb{R}_+$.

Eksplicit kræver vi altså, at der for enhver sådan mængde $\Xi \subseteqq \Omega$ findes et $C \in \mathbb{R}_+$, så det for $t \in \mathbb{R}$ og $x_1, x_2 \in V$ gælder, at hvis

12_9 δ^{-n} skal være δ^{n}.

21_{4-1} erstattes af:

mer ud på, at der til enhver i Ω indeholdt mængde Ξ af formen

$$\Xi = \{(t,x) \in \mathbb{R}\times V \mid |t-t_0| \leqq a, \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \leqq b\}$$

findes et $C \in \mathbb{R}_+$, således at

$30^{2,5}$ N_0 skal være N

43_1 a_{k-1} i st. f. a_k .

44^4 parentesen skal indeholde: $-a_0-a_1\lambda- \dots -a_{k-2}\lambda^{k-2}$
$- a_{k-1}\lambda^{k-1} - \lambda^k$.

44^2 enhedsmatrix (orden k-1).
Læs: en trekantsmatrix med 1'er i og 0'er over diagonalen.

45^{11} $\alpha - i\beta$ i st. f. $\alpha + i\beta$.

48^{11} betegnelsen -Læs: navnet

50^5 Bestemmelse -Læs: Eksistens

50_4 "Dermed har vi bevist" rettes til "Sammenfattende har vi"

Opgaverne:

V.1.1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ -Læs: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

V.2.27.4^0 ikke lodret -Læs: ikke-lodret

VI.4.1. 2 + sin x -Læs: 2 + cos x

VI.6.5_3 skal være $-u(x,y,z) = c\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \dots + \frac{q_n}{r_n}\right)$,