MF-J O

Lie Grupper og Kuglefunktioner.

Forelæsninger foråret 1973.

Mogens Flensted-Jensen.

Indhold:

Lie grupper og kuglefunktioner.

§1. Matrix-Lie grupper.

Lad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ og $\mathbb{H}$ være henholdsvis de reelle tal, de complexe tal og kvaternionerne. Konjugering i $\mathbb{C}$ og $\mathbb{H}$ betegnes med "$\overline{}$". $\mathbb{R}$ er kanonisk indlejret i $\mathbb{C}$ og $\mathbb{H}$.

$\mathbb{C}$ kan indlejres i $\mathbb{H}$ på følgende måde:

Vælg reel basis $1, i, j, k$ for $\mathbb{H}$ således at

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ og

$ki = -ik = j$.

Det reelle underrum frembragt af 1 og i identificeres med $\mathbb{C}$. En sådan indlejring tænkes valgt en gang for alle i det følgende.

Ethvert $q \in \mathbb{H}$ kan på entydig måde skrives $q = v + jw$ hvor $v, w \in \mathbb{C}$. Tilsvarende fås

$$\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n + j\,\mathbb{C}^n .$$

Lad i det følgende $\mathbb{F}$ være $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{H}$.

Definition 1.1. Lad $gl(n,\mathbb{F})$ betegne algebraen af lineære afbildninger af $\mathbb{F}^n$ ind i $\mathbb{F}^n$. Lad $GL(n,\mathbb{F})$ betegne den generelle lineære gruppe over $\mathbb{F}^n$, d.v.s gruppen af invertible elementer i $gl(n,\mathbb{F})$.

Vi identificerer $gl(n,\mathbb{F})$ med mængden af $(n\times n)$-matricer med elementer fra $\mathbb{F}$. Bemærk at vi opfatter $\mathbb{H}^n$ som et højre-vektorrum, (d.v.s skalarmultiplication fra højre) og $gl(n,\mathbb{H})$ som et venstre-vektorrum. Desuden virker $Q\in gl(n,\mathbb{H})$ på $\underline{q}\in\mathbb{H}^n$ fra venstre:

$$Q\,\underline{q} = \{\, q_{ij} \,\}\begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}.$$

Med de ovenfor valgte indlejringer og identifikationer

$$\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n \subset \mathbb{H}^n \cong \mathbb{C}^{2n} \cong \mathbb{R}^{4n}$$

fås følgende indlejringer:

(1.1) $$gl(n,\mathbb{R}) \subset gl(n,\mathbb{C}) \subset gl(n,\mathbb{H}) \subset gl(2n,\mathbb{C}) \subset gl(4n,\mathbb{R}).$$

og hermed tilsvarende for $Gl(n,\mathbb{F})$.

De to sidste indlejringer har følgende form:

$$Q = Q_1 + j\,Q_2 \in gl(n,\mathbb{H}), \quad Z = Z_1 + i\,Z_2 \in gl(n,\mathbb{C}):$$

(1.2) $$Q \rightsquigarrow \begin{Bmatrix} Q_1 & -\overline{Q}_2 \\ Q_2 & \overline{Q}_1 \end{Bmatrix} \quad \text{og} \quad Z \rightsquigarrow \begin{Bmatrix} Z_1 & -Z_2 \\ Z_2 & Z_1 \end{Bmatrix}.$$

Vi opfatter $gl(n,\mathbb{F})$ som en reel C^∞-mangfoldighed, på naturlig måde. $Gl(n,\mathbb{F})$ bliver da en åben delmangfoldighed.

Definition 1.2. Ved en Lie gruppe forstås en C^∞-mangfoldighed, der tillige er en gruppe, således at gruppe-operationerne er C^∞-afbildninger.

$GL(n,\mathbb{F})$ er klart en Lie gruppe.

Definition 1.3. Ved en matrix Lie gruppe (eller blot matrixgruppe) forstås en afsluttet undergruppe i $GL(n,\mathbb{R})$.

Fra (1.1) ses let at $GL(n,\mathbb{F})$ er en matrix gruppe. I sætning 1.14 skal vi se at en matrix-gruppe er en Lie gruppe.

Definition 1.4. Ved en Lie algebra $\mathfrak{g}$ forstås et vektorrum over $\mathbb{R}$ (evt. $\mathbb{C}$) udstyret med et såkaldt "Lie-produkt" $[\ ,\ ]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ der opfylder:

(i) $[\ ,\ ]$ er bi-lineært

(ii) $[X,X] = 0$ for alle $X \in \mathfrak{g}$

(iii) Jacobi-identiteten: for alle $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Lemma 1.5. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ er en Lie algebra med Lie-produktet:

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Vi definerer nu en afbildning $\exp : gl(n,\mathbb{F}) \to GL(n,\mathbb{F})$ defineret ved da $X \in gl(n,\mathbb{F})$:

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n .$$

<u>Lemma 1.6.</u> Hvis $XY = YX$ (d.v.s $[X,Y]=0$) så gælder

$$\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y).$$

Heraf ses specielt at $\exp(X) \in GL(n,\mathbb{F})$ idet

$\exp(X)^{-1} = \exp(-X)$; samt at afbildningen

$t \to \exp(tX)$ er en homomorfi $:(\mathbb{R},+) \to GL(n,\mathbb{F})$.

<u>Definition 1.7.</u> En <u>én-parameter undergruppe</u> i $GL(n,\mathbb{R})$ er en C^∞-homomorfi af $(\mathbb{R},+) \to GL(n,\mathbb{R})$.

<u>Lemma 1.8.</u> Lad $t \to \gamma(t)$ være en én-parameter undergruppe. Lad $\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma$, da er

$$\gamma(t) = \exp(t\,\dot{\gamma}(0)).$$

<u>Bevis:</u> Det ses at $\gamma(0) = e$ (enhedsmatricen) og at $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(0)\gamma(t)$. Entydighedssætningen for et første ordens differentialligningssystem giver det ønskede. Q.e.d.

Lemma 1.9 Lad $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ være den direkte sum $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_1 + \cdots + \mathfrak{m}_s$ for $s \in \{1, \dots, n\}$, hvor $\mathfrak{m}_i$ er underrum i $\mathfrak{g}$. Der findes omegne U_i af 0 i $\mathfrak{m}_i$ således at afbildningen

$$\phi : (X_1, \dots, X_s) \longrightarrow \exp(X_1) \cdots \exp(X_s)$$

er en diffeomorfi af $U_1 \times \cdots \times U_s$ på en åben omegn af e i $GL(n, \mathbb{R})$.

Bevis: Vælg basis Y_i^{ν}, $\nu = 1, \dots r$ for $\mathfrak{m}_i$. Derved fås en basis for $\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times \mathfrak{m}_s$ og for $\mathfrak{g}$. Jacobi-determinanten for ϕ, m.h.t. tilsvarende koordinater, i 0 ses let at være 1. Da $GL(n, \mathbb{R})$ er åben i $\mathfrak{g}$, og ϕ afbilder ind i $GL(n, \mathbb{R})$ fås det ønskede. Q.e.d.

Lemma 1.10. Lad $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ og $t \in \mathbb{R}$ da gælder

(i) $\exp(tX)\exp(tY) = \exp\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)\right)$,

(ii) $\exp(-tX)\exp(-tY)\exp(tX)\exp(tY) =$

$$= \exp\left(t^2[X,Y] + O(t^3)\right).$$

I hvert tilfælde betegner $O(t^3)$ et element i $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, med følgende egenskab: Der findes $\varepsilon > 0$ således at $t^{-3} O(t^3)$ er begrænset og analytisk for $|t| < \varepsilon$.

<u>Bevis</u>: Det er nok at bevise (i), idet (ii) følger af (i). Af lemma 1.9 ses at

(1.3) $$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(Z(t))$$

for tilstrækkelig små t, hvor $Z(t)$ er en funktion med værdier i $gl(n,\mathbb{R})$, analytisk for $t=0$. Vi har altså $Z(t) = tZ_1 + t^2Z_2 + O(t^3)$, hvor Z_1 og Z_2 er faste elementer i $gl(n,\mathbb{R})$. Ved at opskrive de første led i rækkeudviklingen på begge sider i (1.3) ses, at $Z_1 = X+Y$ og $Z_2 = \frac{1}{2}[X,Y]$. Q.e.d.

<u>Definition 1.11.</u> Lad $\mathfrak{h}$ være en del-Lie algebra i $gl(n,\mathbb{R})$. Ved den <u>analytiske undergruppe</u> i $GL(n,\mathbb{R})$ svarende til $\mathfrak{h}$, forstås gruppen frembragt af $\{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{h}\}$.

Som eksempel kan tages $GL(n,\mathbb{H})$, der er den analytiske undergruppe i $GL(4n,\mathbb{R})$ svarende til $gl(n,\mathbb{H})$.

<u>Definition 1.12.</u> Lad H være en matrix gruppe i $GL(n,\mathbb{R})$. Ved <u>Lie algebraen</u> $\mathfrak{h}$ <u>for</u> $\underline{H}$ forstås Lie algebraen frembragt af $\mathfrak{h}_0 = \{X \in gl(n,\mathbb{R}) \mid \exp(tX) \in H \text{ for alle } t \in \mathbb{R}\}$.

<u>Lemma 1.13.</u> $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0$.

<u>Bevis</u>: Lad $X, Y \in \mathfrak{h}_0$ og $t \in \mathbb{R}$. Ved hjælp af lemma 1.10 fås for $n \in \mathbb{N}$, n passende stor:

$$\left(\exp\left(\tfrac{t}{n}X\right)\exp\left(\tfrac{t}{n}Y\right)\right)^n = \exp\left(t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2n}[X,Y] + O\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right),$$

$$\left(\exp\left(-\tfrac{t}{n}X\right)\exp\left(-\tfrac{t}{n}Y\right)\exp\left(\tfrac{t}{n}X\right)\exp\left(\tfrac{t}{n}Y\right)\right)^{n^2} =$$

$$= \exp\left(t^2[X,Y] + O\left(\tfrac{1}{n}\right)\right).$$

Venstresiderne af disse ligninger tilhører H. Da H er afsluttet vil også grænseværdien for $n \to \infty$ tilhøre H. Da dette gælder for alle $t \in \mathbb{R}$, ses at $(X+Y) \in \mathfrak{h}_0$ og $[X,Y] \in \mathfrak{h}_0$; altså er $\mathfrak{h}_0$ en del Lie algebra af $gl(n,\mathbb{R})$. Q. e. d.

<u>Sætning 1.14.</u> Lad H være en matrix gruppe og lad H_0 være den sammenhængskomponent, der indeholder e.

H_0 er den analytiske undergruppe svarende til Lie algebraen $\mathfrak{h}$ for H.

H er en Lie gruppe og indlejringen af H i $Gl(n,\mathbb{R})$ er en regulær C^∞-afbildning.

<u>Bevis</u>: Lad H^* være den analytiske undergruppe svarende til $\mathfrak{h}$. Da er $H^* \subset H_0$. Hvis H^* er en omegn af e i H_0 er $H^* = H$, antag derfor at H^* ikke er en omegn af e i H. Vælg et komplementært underrum $\mathfrak{m}$ til $\mathfrak{h}$ i $gl(n,\mathbb{R})$. Vælg ifølge lemma 1.9 begrænsede åbne omegne $U_\mathfrak{h}$ og $U_\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{h}$ og $\mathfrak{m}$, således at $(A,B) \to \exp(A)\exp(B)$ er en diffeomorfi af $U_\mathfrak{m} \times U_\mathfrak{h}$ på en åben omegn U af e i $GL(n,\mathbb{R})$.

Ifølge antagelsen findes følge $c_k = \exp(A_k)\exp(B_k)$

i $U \cap H$ således at $c_k \to e$ og $c_k \notin H^*$.
Da $\exp(B_k) \in \exp(U_h) \subset H^*$ fås

$$A_k \neq 0 \quad \text{og} \quad \lim_{k\to\infty} A_k = 0.$$

Vælg $r_k \in \mathbb{N}$ således at

$$r_k A_k \in U_m \quad \text{og} \quad (r_k+1) A_k \notin U_m.$$

Vi kan antage, ved at vælge delfølge, at følgen $r_k A_k$ konvergerer mod et element $A \in \mathfrak{m}$; men da vil også $(r_k+1)A_k$ konvergere mod A, hvoraf A tilhører randen af U_m, og dermed specielt $A \neq 0$.

Lad nu $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, vælg $s_k, t_k \in \mathbb{Z}$ således at $p r_k = q s_k + t_k$ og $0 \leq t_k < q$. Idet $\lim \frac{t_k}{q} A_k = 0$ fås

$$\exp\left(\frac{p}{q}A\right) = \lim_{k\to\infty} \exp\left(\frac{p r_k}{q} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} (\exp(A_k))^{s_k},$$

hvilket viser at $\exp(\frac{p}{q}A) \in H$. Da H er afsluttet viser dette at $\exp(tA) \in H$ for alle $t \in \mathbb{R}$ og dermed at $A \in \mathfrak{h}$; men dette er i strid med at $A \in \mathfrak{m}$ og $A \neq 0$.

Dette viser at $H^* = H_0$; samt at H_0 er åben.

For hvert $x \in H$ er $(U_h,\ X \to x\exp(X) : U_h \to H)$ et C^∞-kort. Resten følger nu let. Q.e.d.

Bemærkning 1.15. Ikke enhver analytisk undergruppe H i $Gl(n,\mathbb{R})$ er afsluttet. Man kan dog vise at H kan gøres til en Lie gruppe således at indlejringen i $Gl(n,\mathbb{R})$ er en regulær C^∞-afbildning.

Man kan også vise, at enhver endelig dimensional Lie algebra kan indlejres i $gl(n,\mathbb{R})$ for et passende stort n. Desuden gælder, at to Lie grupper er "lokalt isomorfe" hvis og kun hvis de har isomorfe Lie algebraer. Heraf fås, at enhver Lie gruppe er lokalt isomorf med en analytisk undergruppe i $Gl(n,\mathbb{R})$.

Eksempel 1.16. Lie algebraen $\mathfrak{h} = \mathbb{R}$, med $[X,Y]=0$, kan indlejres i $gl(2,\mathbb{C}) \subset gl(4,\mathbb{R})$ på væsentligt forskellige måder:

1) $\left\{\begin{matrix} t & 0 \\ 0 & t \end{matrix}\right\}, t \in \mathbb{R}$; 2) $\left\{\begin{matrix} it & 0 \\ 0 & it \end{matrix}\right\}, t \in \mathbb{R}$;

vælg $\alpha \in \mathbb{R}$, α irrational

3) $\left\{\begin{matrix} t & 0 \\ 0 & \alpha t \end{matrix}\right\}, t \in \mathbb{R}$ og 4) $\left\{\begin{matrix} it & 0 \\ 0 & i\alpha t \end{matrix}\right\}, t \in \mathbb{R}$.

Øvelse 1.17. Find i hvert tilfælde den analytisk undergruppe H svarende til $\mathfrak{h}$. Besvar følgende spørgsmål:

1) Er H afsluttet, evt. kompakt ?
2) Er H "algebraisk", d.v.s findes en familie $(P_i)_{i\in I}$ af polynomier i matrix-elementerne således at $H = \{x \in GL(4,\mathbb{R}) \mid P_i(x) = 0\}$? Hvis ikke, hvad er i så tilfælde den "algebraiske afslutning" af H ?
3) Hvis ikke H er afsluttet, hvad er afslutningen af H ?

Eksempler 1.18. Matrix grupper og tilhørende Lie algebraer.

$T(n, \mathbb{F})$: $(n \times n)$- øvre trekantsmatricer, med diagonal elementer $\neq 0$.

$N(n, \mathbb{F})$: øvre trekantsmatricer med 1-taller i diagonalen.

$SL(n, \mathbb{R}) = \{ x \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(x) = 1 \}$,

$SL(n, \mathbb{C}) = \{ x \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det(x) = 1 \}$,

$SU^*(2n) = "SL(n, \mathbb{H})" = GL(n, \mathbb{H}) \cap SL(2n, \mathbb{C})$.

På $\mathbb{H}^n$ indfører vi følgende Hermitisk-bilineære former: Lad $n = p+q$ $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{H}^n$:

(1.4) $$(\underline{x}, \underline{y})_{p,q} = (\underline{x}, \underline{y})^{\mathbb{H}}_{p,q} = -\bar{y}_1 x_1 - \cdots - \bar{y}_p x_p + \bar{y}_{p+1} x_{p+1} + \cdots + \bar{y}_n x_n .$$

På $\mathbb{C}^n$ indføres følgende Hermitisk-bilineære former:

(1.5) $$(\underline{x}, \underline{y})_{p,q} = (\underline{x}, \underline{y})^{\mathbb{C}}_{p,q}$$, givet ved samme formel som ovenfor.

Desuden indføres på $\mathbb{C}^n$ den bilineære form:

(1.6) $$(\!(\underline{x}, \underline{y})\!)_n = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n .$$

På $\mathbb{R}^n$ indføres følgende bilinear-former:

(1.7) $$(\underline{x}, \underline{y})_{p,q} = (\underline{x}, \underline{y})^{\mathbb{R}}_{p,q} = -x_1 y_1 - \cdots - x_p y_p + x_{p+1} y_{p+1} + \cdots + x_n y_n .$$

På $\mathbb{C}^{2n}$ og $\mathbb{R}^{2n}$ indføres de symplectiske bilinear-former: $\langle \, , \, \rangle^{\mathbb{R}}_{2n}$ og $\langle \, , \, \rangle^{\mathbb{C}}_{2n}$ givet ved

(1.8) $$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_{2n} = x_{n+1} y_1 - x_1 y_{n+1} + \cdots + x_{2n} y_n - x_n y_{2n} .$$

Ved hjælp heraf definerer vi følgende grupper:

$$Sp(p,q) = \{x \in GL(n, \mathbb{H}) \mid (x\underline{x}, x\underline{y})_{p,q} = (\underline{x}, \underline{y})_{p,q}\},$$

og $Sp(n) = Sp(n,0) = Sp(0,n)$.

$$U(p,q) = \{x \in GL(n, \mathbb{C}) \mid (x\underline{x}, x\underline{y})_{p,q} = (\underline{x}, \underline{y})_{p,q}\},$$

og $U(n) = U(n,0) = U(0,n)$ og

$$SU(p,q) = U(p,q) \cap SL(n, \mathbb{C}).$$

$$O(p,q) = \{x \in GL(n, \mathbb{R}) \mid (x\underline{x}, x\underline{y})_{p,q} = (\underline{x}, \underline{y})_{p,q}\},$$

og $O(n) = O(n,0) = O(0,n)$ og

$$SO(p,q) = O(p,q) \cap SL(n, \mathbb{R}).$$

$$SO(n, \mathbb{C}) = \{x \in SL(n, \mathbb{C}) \mid ((x\underline{x}, x\underline{y}))_n = ((\underline{x}, \underline{y}))_n\}.$$

$$Sp(n, \mathbb{C}) = \{x \in GL(2n, \mathbb{C}) \mid \langle x\underline{x}, x\underline{y}\rangle_{2n} = \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle_{2n}\}.$$

$$sp(n, \mathbb{R}) = \{x \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid \langle x\underline{x}, x\underline{y}\rangle_{2n} = \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle_{2n}\}.$$

$$SO^*(2n) = SU^*(2n) \cap SO(n, \mathbb{C}).$$

Bemærk at $(\underline{x}, \underline{y})^{\mathbb{H}}_{0,n} = (\underline{x}, \underline{y})^{\mathbb{C}}_{0,2n} + j\,\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle^{\mathbb{C}}_{2n}$ og

$(\underline{x}, \underline{y})^{\mathbb{C}}_{0,n} = (\underline{x}, \underline{y})^{\mathbb{R}}_{0,2n} + i\,\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle^{\mathbb{R}}_{2n}$, hvoraf

det følger at $Sp(n) = Sp(n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$ og $U(n) = sp(n, \mathbb{R}) \cap SO(2n)$.

$$FL(n,\mathbb{F}) = \left\{ \begin{bmatrix} A & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ 0 \ldots 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} A \in Sp(n),\ SU(n) \text{ eller } SO(n) \\ \text{og } \underline{b} \in \mathbb{F}^n \end{matrix} \right\}$$

($Sp(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$ vælges for henh. $\mathbb{F} = \mathbb{H}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$).

Ved at udnytte lemma 1.13 kan vi finde Lie algebraen for hver af de ovennævnte matrix grupper.

Lad for $X \in gl(n,\mathbb{F})$ ${}^tX$ betyde den <u>transponerede</u> matrix, og $Tr(X) = x_{11} + \cdots + x_{nn}$ være <u>sporet</u> af X.

(1.9) X kaldes <u>symmetrisk</u>, hvis ${}^tX = X$
X kaldes <u>skævsymmetrisk</u>, hvis ${}^tX = -X$
X kaldes <u>Hermitisk</u>, hvis ${}^tX = \overline{X}$
X kaldes <u>skævHermitisk</u>, hvis ${}^tX = -\overline{X}$.

Vi betegner Lie algebraen med små skrævne bogstaver, svarende til matrix gruppens navn.

$t(n,\mathbb{F}) = \{ \text{øvre trekant matricer} \in gl(n,\mathbb{F}) \}$,

$n(n,\mathbb{F}) = \{ X \in t(n,\mathbb{F}) \mid x_{11} = \cdots = x_{nn} = 0 \}$,

$sl(n,\mathbb{R}) = \{ X \in gl(n,\mathbb{R}) \mid Tr(X) = 0 \}$,

$sl(n,\mathbb{C}) = \{ X \in gl(n,\mathbb{C}) \mid Tr(X) = 0 \}$

$su^*(2n) = \{ X \in gl(n,\mathbb{H}) \mid \text{Real delen af } Tr(X) = 0 \}$

$$sp(p,q)=\left\{\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ {}^t\overline{X}_2 & X_3 \end{pmatrix}\in gl(n,\mathbb{H}) \;\middle|\; \begin{array}{l} X_1, X_3 \text{ skæv Herm., orden } p \text{ og } q; \\ X_2 \text{ vilkårlig.} \end{array}\right\},$$

$$su(p,q)=\left\{\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ {}^t\overline{X}_2 & X_3 \end{pmatrix}\in sl(n,\mathbb{C}) \;\middle|\; \quad - \text{ do } - \quad \right\},$$

$$so(p,q)=\left\{\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ {}^tX_2 & X_3 \end{pmatrix}\in gl(n,\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} X_1, X_3 \text{ skævsymmetrisk, orden} \\ p \text{ og } q; \; X_2 \text{ vilkårlig.} \end{array}\right\},$$

$$so(n,\mathbb{C})=\{X\in gl(n,\mathbb{C}) \mid X \text{ skævsymmetrisk}\},$$

$$sp(n,\mathbb{C})=\left\{\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -{}^tX_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} X_1, X_2, X_3 \in gl(n,\mathbb{C}), \\ X_2, X_3 \text{ symmetriske.} \end{array}\right\},$$

$$sp(n,\mathbb{R})=\left\{ \quad \text{do} \quad \;\middle|\; \begin{array}{l} X_1, X_2, X_3 \in gl(n,\mathbb{R}) \\ X_2, X_3 \text{ symmetriske} \end{array}\right\},$$

$$fl(n,\mathbb{F})=\left\{\begin{pmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{0} & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} A\in sp(n), su(n) \text{ eller } so(n); \\ \underline{b}\in\mathbb{F}^n \end{array}\right\}.$$

Øvelse 1.19. Vis at ovennævnte Lie algebraer er Lie algebraerne for de tilsvarende grupper.

Bemærk at gruppen af matricer af form

$$\begin{pmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}\in\mathbb{R}^4,$$

kaldes Galilæi gruppen, når $A\in FL(3,\mathbb{R})$, og den inhomogene Lorentz gruppe (eller Poincare gruppen) når $A\in SO(3,1)$.

<u>Sætning 1.20.</u> Lad H være en undergruppe i $GL(n,\mathbb{R})$, således at H med relativ topologi er en lokalkompakt gruppe. Da er H afsluttet og dermed en matrix gruppe.

<u>Bevis</u>: Vælg kompakt omegn U af e i H, da er $U = O \cap H$, hvor O er omegn af e i $G = GL(n,\mathbb{R})$. Vælg omegn $O_1 \subset O$ af e i G, således at $O_1^{-1} O_1 \subset O$. Lad $x \in \overline{H}$ vælg $x_n \in H$ således at $x_n \to x$ indenfor G. Vælg N således at $x_n \in x O_1$ for alle $n \geq N$, da vil $x_N^{-1} x_n \in O_1^{-1} O_1 \cap H \subset O \cap H = U$. Da U er kompakt har vi $x_N^{-1} x = \lim_{n\to\infty} x_N^{-1} x_n \in U$, hvorfor $x \in H$. Q.e.d.

<u>Definition 1.21.</u> Ved en <u>automorfi</u> σ <u>af en Lie algebra</u> $\mathfrak{g}$, forstås en lineær afbildning $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ således at for alle $X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$[\sigma(X), \sigma(Y)] = \sigma([X,Y])$$

σ kaldes en <u>anti-automorfi</u>, hvis den istedet opfylder:

$$[\sigma(X), \sigma(Y)] = \sigma([Y,X]) = -\sigma([X,Y]).$$

En <u>automorfi</u> σ <u>af en Lie gruppe</u> G er en diffeomorfi af G på sig selv, således at for alle $x, y \in G$:

$$\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$$

σ kaldes en <u>anti-automorfi</u>, hvis i stedet

$$\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x).$$

I alle tilfælde siges σ at være <u>involutiv</u> hvis $\sigma^2 = 1$.

<u>Lemma 1.22.</u> Lad $\sigma: gl(n,\mathbb{F}) \to gl(n,\mathbb{F})$ være reelt lineær og opfylde for alle $X, Y \in gl(n,\mathbb{F})$

$$\sigma(XY) = \sigma(X)\sigma(Y) \quad , \text{ respektivt } \sigma(XY) = \sigma(Y)\sigma(X)$$

Da er σ en automorfi, resp. antiautomorfi, af både $gl(n,\mathbb{R})$ og $GL(n,\mathbb{R})$ og der gælder for alle $X \in gl(n,\mathbb{R})$

(1.10) $$\sigma(\exp(X)) = \exp(\sigma(X)) .$$

<u>Eksempler. 1.23.</u> Involutive (anti-) automorfier.

<u>$X \to -X$</u> er antiautomorfi af $gl(n,\mathbb{R})$.

<u>$X \to X^{-1}$</u> er antiautomorfi af $GL(n,\mathbb{R})$.

analogt med formel (1.10) gælder

(1.11) $$\exp(X)^{-1} = \exp(-X).$$

<u>$X \to {}^tX$</u> er antiautomorfi af både $gl(n,\mathbb{R})$ og $GL(n,\mathbb{R})$, restriktionen af denne antiautomorfi til $gl(n,\mathbb{C})$, resp. $gl(n,\mathbb{H})$ tager formen <u>$X \to {}^t\overline{X}$</u>, hvor X nu betragtes som complex-, resp. kvaternion-, matrix.

<u>$X \to {}^tX$</u> er også antiautomorfi af $gl(n,\mathbb{C})$ og $GL(n,\mathbb{C})$. tilsvarende er <u>$X \to \overline{X}$</u> en automorfi.

Lad $A \in Gl(n,\mathbb{R})$ således at $A^2 = e$, definer da $X \in gl(n,\mathbb{R})$: $\sigma_A(X) = AXA$. σ_A er en involutiv automorfi og opfylder (1.10).

Øvelse 1.24. De fleste af de i eks. 1.18 nævnte matrix grupper, resp. Lie algebraer, kan karakteriseres som fixpunkts-gruppen, resp. – Lie algebraen, inden for $GL(n,\mathbb{C})$ eller $SL(n,\mathbb{C})$, resp. $gl(n,\mathbb{C})$ eller $sl(n,\mathbb{C})$, med hensyn til en "passende kombination" af ovennævnte involutive (anti-) automorfier.
Undersøg dette! Benyt dette, sammen med formlerne (1.10) og (1.11), som en hjælp til øvelse 1.19.

Lemma 1.25. $Sp(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$ er kompakte matrix grupper. De øvrige grupper i eks. 1.18 er alle ikke kompakte.

Bevis: $Sp(n)$, $SU(n)$, $O(n)$ og $SO(n)$ er afsluttede undergrupper i $U(n)$ (eller $U(2n)$). Det er derfor nok at vise at $U(n)$ er kompakt. Men dette følger af at

$$X \in U(n) \text{ hvis og kun hvis } {}^t\bar{X}X = e,$$

da dette viser, at $U(n)$ er en afsluttet og begrænset delmængde af $gl(n,\mathbb{C})$ og derfor kompakt. De øvrige grupper i eks. 1.18 er alle ubegrænsede, og derfor ikke kompakte. Q.e.d.

Lad $X \in gl(n, \mathbb{C})$ være Hermitisk, der findes da et $k \in U(n)$ således at ${}^t\bar{k} X k$ er en diagonal-matrix med reelle diagonal elementer $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Talsættet $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ er bestemt som rødderne i ligningen

(1.12) $$\det(X - \lambda e) = 0$$

regnet med multiplicitet.

<u>Definition 1.26.</u> Et element $X \in gl(n, \mathbb{C})$ kaldes <u>positivt definit</u>, hvis X er Hermitisk og hvis alle de til X svarende λ_i er strengt positive.

<u>Lemma 1.27.</u> $X \to \exp(X)$ er en homeomorfi af mængden af Hermitiske elementer i $gl(n, \mathbb{C})$ på mængden af positivt definitte elementer.

<u>Bevis:</u> Det er klart, at $\exp(X)$ er positivt definit når X er Hermitisk, og at $X \to \exp(X)$ er kontinuert. Lad X, Y være Hermitiske og antag $\exp(X) = \exp(Y)$. Vælg $k \in U(n)$ således at ${}^t\bar{k} \exp(X) k = \exp({}^t\bar{k} X k)$ er en diagonal matrix, da er også ${}^t\bar{k} X k$ og ${}^t\bar{k} Y k$ diagonal matricer. Idet diagonal elementerne er reelle slutter vi at ${}^t\bar{k} X k = {}^t\bar{k} Y k$ og dermed $X = Y$. Hermed er vist at afbildningen er injektiv. For at vise at den inverse afbildning er kontinuert, antager vi at $\exp(X_n) \to \exp(X)$, og vi skal vise at $X_n \to X$. De karakteristiske rødder for $\exp(X_n)$, d.v.s rødderne i (1.12), konvergerer mod de karakteristiske rødder for $\exp(X)$. Da alle rødderne er positive og da logaritmefunktionen er kontinuert vil også de karakteristiske rødder for X_n konvergerer mod

de karakteristiske rødder for X. Af dette slutter vi specielt at $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ er begrænset i $gl(n,\mathbb{C})$, dermed har $\{X_n\}$ et fortætningspunkt, men der kan ikke være andre fortætningspunkter end X, idet $\exp(X_n) \to \exp(X)$ og exp er bijektiv. Dette viser at $X_n \to X$. Q. e. d.

__Definition 1.28.__ En undergruppe G i $GL(n,\mathbb{C})$ kaldes __pseudo-algebraisk__, hvis følgende gælder:

Lad for $Z \in GL(n,\mathbb{C})$ $z_{ij} = x_{ij} + i\, y_{ij}$ være matrix-elementerne. Der findes en familie P_α af polynomier i de variable x_{ij} og y_{ij} således at

$Z \in G$ hvis og kun hvis $P_\alpha(\cdots x_{ij}, y_{ij}, \cdots) = 0$ for alle P_α.

__Definition 1.29__ Et par (G,K) af matrix grupper, med Lie algebraer $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ kaldes __reduktivt__ hvis:

(i) $K \subset G$ og K er kompakt,

(ii) der findes en involutiv automorfi σ af G og $\mathfrak{g}$ således, at for $X \in \mathfrak{g}$:

$$\sigma(\exp(X)) = \exp(\sigma(X))$$

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\}$$

$$G = K \cdot \exp(\mathfrak{p}),$$

hvor $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X\}$.

<u>Eksempel 1.30.</u> $(FL(n,\mathbb{H}), Sp(n))$, $(FL(n,\mathbb{C}), SU(n))$ og $(FL(n,\mathbb{R}), SO(n))$ er reduktive par, idet σ er givet ved

$$\sigma\left(\begin{Bmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{0} & a \end{Bmatrix}\right) = \begin{Bmatrix} A & -\underline{b} \\ \underline{0} & a \end{Bmatrix}$$

hvor $a = 0$ eller 1.

<u>Sætning 1.31.</u> Lad σ være automorfien af $gl(n,\mathbb{C})$ givet ved $\sigma(X) = -{}^t\overline{X}$. Lad også σ betegne den tilsvarende automorfi af $GL(n,\mathbb{C})$: $\sigma(X) = ({}^t\overline{X})^{-1}$.

Lad G være en pseudo-algebraisk undergruppe i $GL(n,\mathbb{C})$ således at $\sigma(G) = G$. Lad $K = G \cap U(n)$.

Da er (G, K) et reduktivt par, og der gælder at afbildningen $(k, X) \to k\exp(X)$ er en homeomorfi af $K \times \mathfrak{p}$ på G, hvor $\mathfrak{p}$ er mængden af Hermitiske elementer i Lie algebraen $\mathfrak{g}$ for G.

<u>Bevis:</u> K er kompakt, da en pseudo-algebraisk gruppe er afsluttet og $U(n)$ er kompakt.

At $\exp(\sigma(X)) = \sigma(\exp(X))$ følger af (1.10) og (1.11); heraf fås straks at $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\}$.

<u>Påstand</u>: $X \in gl(n,\mathbb{C})$, $\sigma(X) = -X$ og $\exp(X) \in G \Rightarrow X \in \mathfrak{g}$.
Dette fås ved at anvende, at G er pseudo-algebraisk: For det første kan vi antage at X er en diagonal matrix med reelle diagonal elementer $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. (Hvis ikke, kan vi finde en unitær matrix Q, så-

ledes at $Q^{-1}XQ$ er diagonal. Vi erstatter så G med $Q^{-1}GQ$, der ligeledes er pseudo-algebraisk). Lad nu P_α være et af de polynomier der bestemmer G. Anvendes det på nX, idet $\exp(nX) = \exp(X)^n \in G$, fås en identitet af form

$$(1.13) \qquad \sum_{j=0}^{m} c_j e^{b_j \cdot n} = 0 \quad , \qquad \text{for alle } n \in \mathbb{N}$$

hvor b_j'erne er indbyrdes forskellige summer af λ_i'erne for $j > 0$ og $b_0 = 0$, og c_j'erne er komplexe tal.
Betragtes nu (1.13) som et ligningssystem, $n = 0, 1, \cdots, m$ til bestemmelse af c_j'erne, fås determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{b_0} & (e^{b_0})^2 & \cdots & (e^{b_0})^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & e^{b_m} & (e^{b_m})^2 & \cdots & (e^{b_m})^m \end{vmatrix} ,$$

der er $\neq 0$. (Det er den såkaldte Vandermonde determinant). Dette viser at $c_1 = \cdots = c_m = 0$ er den eneste løsning til (1.13). Heraf fås nu at (1.13) er opfyldt, når n erstattes af et vilkårligt reelt tal t. Da dette ræsonnement gælder for alle P_α, slutter vi at $\exp(tX) \in G$ for alle $t \in \mathbb{R}$, hvorfor $X \in \mathfrak{g}$. Påstanden er vist.

Hvert $x \in GL(n, \mathbb{C})$ har en entydig opspaltning (polar-dekomposition) $x = ky$, hvor $k \in U(n)$ og y er positivt definit, k og y afhænger kontinuert a x. Hvis $x \in G$, gælder ${}^t\overline{x}\,x = y^2 \in G$. Ifølge lemma 1.27 findes et Hermitisk $X \in gl(n, \mathbb{C})$ således at $\exp(X) = y$. Da $\exp(2X) = y^2 \in G$ fås af påstanden ovenfor, at $\exp(X) = y \in G$ og dermed også at $k \in G \cap U(n) = K$. Resten af sætningen følger nu let fra lemma 1.27. Q.e.d.

Sætning 1.31 kan anvendes på de fleste af de i eksempel 1.18 nævnte ikke kompakte grupper. Dette giver.

<u>Korollar 1.32.</u> Følgende par er reduktive

G		K
$SL(n,\mathbb{R})$	,	$SO(n)$
$SL(n,\mathbb{C})$	,	$SU(n)$
$SU^*(2n)$	,	$Sp(n)$
$Sp(p,q)$	,	$Sp(p)\times Sp(q)$
$SU(p,q)$	,	$S(U(p)\times U(q))$
$SO(p,q)$	,	$S(O(p)\times O(q))$
$SO(n,\mathbb{C})$	,	$SO(n)$
$Sp(n,\mathbb{C})$	,	$Sp(n)$
$Sp(n,\mathbb{R})$	,	$U(n)$
$SO^*(2n)$	,	$U(n)$.

$S(U(p)\times U(q)$, og tilsvarende for $S(O(p)\times O(q))$, betegner matricen

$$\begin{Bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Bmatrix}, \quad A \in U(p)\,,\ B \in U(q)\,,$$

hvor $\det(A)\cdot\det(B) = 1$.

$SO(p,q)$ med både $p \neq 0$ og $q \neq 0$ er den eneste af ovennævnte grupper G, der ikke er sammenhængende. Den har to komponenter. Hvis $SO_0(p,q)$ er sammenhængskomponenten, er $SO_0(p,q)$, $SO(p)\times SO(q)$ et reduktivt par.

Teorien for kuglefunktioner, beskæftiger sig med funktioner f på en lokal kompakt gruppe G, hvor f er bi-invariant under en kompakt undergruppe K. Denne teori har sine væsentligste anvendelser, i det tilfælde hvor G, K er et reduktivt par af Lie grupper. Indtil nu har vi kun givet eksempler på reduktive par, hvor G ikke er kompakt. I det følgende skal vi, uden for mange detaljer, anføre en del eksempler, hvor G er kompakt.

<u>Sætning 1.33.</u>. Lad G være kompakt $\underbrace{\text{matrixgruppe}}^{\text{sammenhængende}}$, $G_1 = G \times G$ det direkte produkt af G med sig selv og lad K_1 være diagonalen i G_1 d.v.s

$$K_1 = \Delta_G = \{(x, x) \mid x \in G\}.$$

Da er G_1, K_1 et reduktivt par.

<u>Bevis</u>: Lad $\mathfrak{g}$ være Lie algebraen for G. Da har G_1 Lie algebra $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$; diagonalen i $\mathfrak{g}_1$ er Lie algebraen for K_1. Definer en involutiv automorfi af G_1 og $\mathfrak{g}_1$ ved $\sigma(X,Y) = (Y,X)$. Sæt $\mathfrak{p} = \{(X,-X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$. Vi skal vise at $G_1 = K_1 \exp(\mathfrak{p})$. Hertil benytter vi uden bevis, at exponential afbildningen for en kompakt sammenhængende matrix-gruppe er surjektiv. Dette viser at $\exp(\mathfrak{p}) = \{(x, x^{-1}) \mid x \in G\}$, og sætningen følger let. Q.e.d.

Til hvert par (G, K) som opfylder betingelserne i sætning 1.31, og hvor således G ikke er kompakt, kan vi knytte et "dualt par" (G^*, K), der er reduktivt og hvor G^* er kompakt. Sagt løst går det på følgende måde. Lad $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ være opspaltningen af Lie algebraen fra G, svarende til σ. Antag at $\mathfrak{g} \subset gl(n, \mathbb{R})$ for passende n. Idet $gl(n,\mathbb{R}) \subset gl(n,\mathbb{C})$ har det mening at danne $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}^*$, hvor $\mathfrak{p}^* = i\,\mathfrak{p}$. Det ses let, at følgende gælder:

(1.14) $$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k} \quad [\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p},$$

og derfor også det tilsvarende for $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}^*$. Altså gælder specielt, at $\mathfrak{g}^*$ er en Lie algebra, og at konjugering i $gl(n,\mathbb{C})$ er en involutiv automorfi σ^* af $\mathfrak{g}^*$. Lad nu G^* være den analytiske undergruppe svarende til $\mathfrak{g}^*$. Man kan vise, at G^* er kompakt og at $G^* = K \exp(\mathfrak{p}^*)$, hvoraf det følger at G^*, K er et reduktivt par.

Anvendes dette "dualitetsprincip" på de reduktive par i Korollar 1.32 fås

<u>Sætning 1.34.</u> Følgende par G^*, K er reduktive

G^*		K
$SU(n)$	,	$SO(n)$
$SU(n) \times SU(n)$	,	$SU(n) = \Delta_{G^*}$
$SU(2n)$	,	$Sp(n)$
$Sp(p+q)$	,	$Sp(p) \times Sp(q)$
$SU(p+q)$	,	$S(U(p) \times U(q))$
$SO(p+q)$	,	$SO(p) \times SO(q)$
$SO(n) \times SO(n)$	,	$SO(n) = \Delta_{G^*}$
$Sp(n) \times Sp(n)$	,	$Sp(n) = \Delta_{G^*}$
$Sp(n)$	,	$U(n)$
$SO(2n)$	,	$U(n)$.

<u>Bemærkning 1.35</u>. Betragtes $\mathbb{R}$, $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, G/K og G^*/K, (G, G^*, K svarende til korollar 1.32 og sætn. 1.34) samt alle mulige endelige direkte produkter af disse fås i det væsentlige samtlige Riemann-symmetriske rum. (Ud over de nævnte er der 17 såkaldte exceptionelle, ikke kompakte Riemann-symmetriske rum, og dualt hertil 17 kompakte.) Alle de ovennævnte symmetriske rum, bortset fra T, er enkelt sammenhængende. Der findes andre ikke enkeltsammenhængende Riemann-symmetriske rum, men disse vil have en enkeltsammenhængende overlejringsflade, der kan findes imellem de ovennævnte.

<u>Sætning 1.36.</u> Lad (G, K) være et reduktivt par. Lad $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ være opspaltningen af $\mathfrak{g}$ svarende til σ. Antag at $\mathfrak{p}$ består enten af Hermitiske, eller af skæv-Herm. matricer.
Lad $\mathfrak{a}$ være en maximal kommutativ delalgebra af $\mathfrak{p}$. Lad $A = \exp(\mathfrak{a})$, så er A en afsluttet kommutativ undergruppe i G og
$G = KAK$.

<u>Bevis</u>: Lad $P = \exp(\mathfrak{p})$ og lad A' være afslutningen af A. Lad $\mathfrak{a}'$ være Lie algebraen for A', d.v.s $\mathfrak{a}' = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp(tX) \in A' \text{ for alle } t \in \mathbb{R}\}$. Det er klart, at A' er kommutativ og at for $x \in A'$ er $\sigma(x) = x^{-1}$. Derfor er $\mathfrak{a}'$ kommutativ og $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}$, og dermed $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$. Fra sætning 1.14 fås nu at $A = A'$.

Vi kan gerne antage, at $\mathfrak{a}$ består af diagonal-matricer.

<u>Påstand</u>: Vi kan vælge $H \in \mathfrak{a}$ således at $X \in \mathfrak{p}$ og $[X, H] = 0$ medfører at $X \in \mathfrak{a}$.

Vælg basis $H_1, \cdots, H_\nu$ for $\mathfrak{a}$, og vælg $\alpha_1, \cdots, \alpha_\nu \in \mathbb{R}$ således at

$$\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_\nu \alpha_\nu = 0 \quad \text{medfører} \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_\nu = 0$$

såfremt $\lambda_1, \cdots, \lambda_\nu$ tilhører legemet frembragt af $\mathbb{Q}$ og diagonalelementerne i $H_1, \cdots, H_\nu$.

Sæt $H = \alpha_1 H_1 + \cdots + \alpha_\nu H_\nu$. En simpel udregning viser nu, at $[X, H] = 0$ medfører $[X, H_i] = 0$ for $i = 1, \cdots, \nu$ og dermed at $X \in \mathfrak{a}$. Påstanden er vist.

Vælg nu vilkårligt $X \in \mathfrak{p}$. Lad for $k \in K$ X^k betegne $k^{-1} X k$. Det er klart at $X^k \in \mathfrak{p}$. Lad $\phi(k) = \mathrm{Tr}(H X^k)$. Da ϕ er kontinuert, og K er kompakt findes et $k_0 \in K$ således, at $\phi(k)$ antager sit minimum for $k = k_0$. Heraf fås at

$$\frac{d}{dt} \phi(\exp(tT) k_0) \Big|_{t=0} = 0 \quad , \text{ for } T \in \mathfrak{k}.$$

Ved en let udregning ses, at venstresiden er lig med $\mathrm{Tr}(H[X^{k_0}, T]) = \mathrm{Tr}([H, X^{k_0}] T) = 0$. Vi vælger nu

$$T = {}^t\overline{[H, X^{k_0}]} = [{}^t\overline{X^{k_0}}, {}^t\overline{H}] \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k},$$

og får at $\mathrm{Tr}({}^t\overline{T} T) = 0$. På grund af forudsætningen om, at elementerne i $\mathfrak{p}$ alle enten er Hermitiske eller skævHermitiske, ses at T er skævHermitisk. Hvorfor $\mathrm{Tr}({}^t\overline{T} T) = 0$ medfører at $T = 0$. Men det vil sige at $[X^{k_0}, H] = 0$, hvilket ifølge påstanden ovenfor giver $X^{k_0} \in \mathfrak{a}$.

(1.15) Vi ser altså at $\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} k^{-1} \mathfrak{a} k$.

Lad nu $x \in G$ være vilkårligt. Da G, K er reduktivt findes $k_1 \in K$ og $X \in \mathfrak{p}$ så $x = k_1 \exp(X)$; men nu er $X = k_2^{-1} H_1 k_2$, hvor $k_2 \in K$ og $H_1 \in \mathfrak{a}$, og derfor $\exp(X) = k_2^{-1} \exp(H_1) k_2$. Dermed har vi vist at $x \in KAK$. Q.e.d.

Det er klart, at sætning 1.36 kan anvendes på alle de i korollar 1.32 og sætning 1.34 nævnte reduktive par. Desuden er konklusionen i sætning 1.36 klart rigtig også for $FL(n, \mathbb{F})$.

<u>Definition 1.37.</u> <u>Rangen</u> af et reduktivt par G, K, betegnes $\operatorname{rang}(G, K)$ og defineres som den maximale dimension for en kommutativ delalgebra i $\mathfrak{p}$.

§ 2. Kuglefunktioner.

På en lokalkompakt gruppe G, altså specielt på en matrixgruppe, findes der altid et venstre invariant Radon mål dg, d.v.s. at for $x \in G$ og $f \in C_0(G)$

$$\int_G f(xg)\,dg = \int_G f(g)\,dg.$$

Dette mål er éntydigt bestemt på nær en positiv konstant. dg kaldes Haar-målet på G. Hvis dg også er højre invariant siges G at være unimodulær. Enhver kompakt gruppe er unimodulær, desuden er alle de i eks. 1.18 nævnte grupper unimodulære med undtagelse af $T(n, \mathbb{F})$.

Lad G være unimodulær og H en afsluttet unimodulær undergruppe. Med G/H betegnes rummet af venstresideklasser gH, og med π betegnes den naturlige afbildning af G på G/H. G/H udstyres med topologien bestemt ved at en delmængde $O \subset G/H$ er åben, hvis og kun hvis $\pi^{-1}(O)$ er åben i G. Man kan vise, at der findes et éntydigt (på nær positiv konstant) venstre-invariant mål dg_H på G/H. Desuden gælder for dg og dh passende normaliseret og $f \in C_0(G)$:

$$\int_G f(g)\,dg = \int_{G/H} \left(\int_H f(gh)\,dh \right) dg_H. \tag{2.1}$$

<u>Lemma 2.1.</u> Lad σ være en involutiv automorfi eller anti automorfi, da gælder for $f \in C_0(G)$

$$\int_G f(\sigma(g))\,dg = \int_G f(g)\,dg.$$

<u>Bevis:</u> $f \to \int_G f(\sigma(g))\,dg$ er klart et invariant mål på G, derfor findes en konstant k_σ således at for alle f $\int_G f(\sigma(g))\,dg = k_\sigma \int_G f(g)\,dg$. Da $\sigma^2 = 1$ fås $k_\sigma^2 = 1$, hvoraf $k_\sigma = 1$. Q.e.d.

<u>Definition 2.2.</u> For f_1 og $f_2 \in C_0(G)$ defineres <u>foldningen</u> $f_1 * f_2$ ved

$$f_1 * f_2(x) = \int_G f_1(g)\, f_2(g^{-1}x)\,dg$$

<u>Lemma 2.3.</u> Foldningen er associativ og opfylder

$$\|f_1 * f_2\|_1 \leq \|f_1\|_1 \|f_2\|_1 \qquad \text{for } f_1, f_2 \in C_0(G).$$

Derfor kan $*$ udvides til afbildning $: L^1 \times L^1 \to L^1$, hvorved $(L^1(G), *)$ bliver en Banach algebra.
Lad σ være en involutiv automorfi og τ en involutiv anti automorfi, da gælder

(2.2) $$(f_1 * f_2)^\sigma = f_1^\sigma * f_2^\sigma \quad \text{og} \quad (f_1 * f_2)^\tau = f_2^\tau * f_1^\tau.$$

<u>Bevis:</u> Disse ting ses ved direkte udregning. Q.e.d.

Lad nu G være en unimodulær gruppe og lad K være en kompakt undergruppe. Lad $L^{\natural}(G) = L^{\natural}(G;K)$ betegne underrummet af $L^1(G)$ bestående af funktioner, der er bi-invariante under K. $L^{\natural}(G)$ er klart en afsluttet delalgebra af $L^1(G)$. Tilsvarende betegner $C_0^{\natural}(G)$ delalgebraen af $L^{\natural}(G)$ bestående af kontinuerte funktioner med kompakt støtte.

Den afgørende forudsætning i det følgende er at

(2.3) $\quad L^{\natural}(G;K)$ er kommutativ.

Følgende sætning giver et godt kriterium til afgørelse af om $L^{\natural}$ er kommutativ for et givet par G, K.

Sætning 2.4. Lad G være unimodulær, og lad K være en kompakt undergruppe. Antag at der findes en delmængde $S \subset G$ således at restriktionsafbildningen $f \to f|_S$ er injektiv fra $C_0^{\natural}(G)$ ind i $C(S)$, og at der findes en involutiv automorfi σ af G således at

(i) $\quad \sigma(x) = x^{-1}$ for alle $x \in S$

(ii) $\quad \sigma(K) = K$

Så er $L^{\natural}(G;K)$ kommutativ

Bevis: For $f \in L^1(G)$ betegnes $f^{\vee}(x) = f(x^{-1})$.

For $\phi \in C_0^\natural(G)$ fås af (ii) at $\phi^\sigma \in C_0^\natural$, tilsvarende fås at $\phi^\vee \in C_0^\natural$. Ifølge (i) vil desuden $\phi^\sigma_{|S} = \phi^\vee_{|S}$, hvoraf $\phi^\sigma = \phi^\vee$. Ved at anvende (2.2) fås idet "$\vee$" er en involutiv antiautomorfi

$$\phi_1 * \phi_2 = (\phi_1 * \phi_2)^{\sigma\vee} = (\phi_1^\sigma * \phi_2^\sigma)^\vee = \phi_2^{\sigma\vee} * \phi_1^{\sigma\vee} = \phi_2 * \phi_1.$$

Q.e.d.

<u>Korollar 2.5.</u> Hvis G, K er et reduktivt par er $L^\natural(G;K)$ kommutativ.

<u>Bevis</u>: Dette følger af definition 1.29, idet vi vælger $S = \exp(\mathfrak{p})$. Q.e.d.

<u>Eksempel 2.6</u>. Hvis G er kommutativ og $K \subset G$ er kompakt undergruppe, er $L^\natural(G;K)$ kommutativ. Specielt er jo $L^1(G) = L^\natural(G;\{e\})$ kommutativ.

Eksempler på, at $L^\natural(G;K)$ er kommutativ, uden at G, K er reduktivt gives i følgende

<u>Korollar 2.7.</u> $L^\natural(U(p,q); U(p) \times SU(q))$ er kommutativ.

<u>Bevis</u>: Vi betragter kun tilfældet $p = q = 1$. (De øvrige tilfælde går stort set på samme måde.)
Ifølge sætning 1.31 er parret $U(1,1)$, $U(1) \times U(1)$ reduktivt. Opspaltningen $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ tager følgende explicitte form:

$$\mathfrak{k} : \begin{Bmatrix} i\theta_1 & 0 \\ 0 & i\theta_2 \end{Bmatrix} , \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

$$\mathfrak{p} : \begin{Bmatrix} 0 & x+iy \\ x-iy & 0 \end{Bmatrix} , \quad x, y \in \mathbb{R} .$$

Lad $\mathfrak{a}$ være givet ved:

$$\mathfrak{a} : \begin{Bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{Bmatrix} , \quad x \in \mathbb{R}$$

$\mathfrak{a}$ ses let at være maximal kommutativ i $\mathfrak{p}$. Ifølge sætning 1.36 er $U(1,1) = KAK$, hvor K og A er givet ved

$$K : \begin{Bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{Bmatrix} , \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \ (\mathrm{mod.}\ 2\pi)$$

$$A : \begin{Bmatrix} \mathrm{ch}\, x & \mathrm{sh}\, x \\ \mathrm{sh}\, x & \mathrm{ch}\, x \end{Bmatrix} , \quad x \in \mathbb{R}$$

Lad $K_0 = U(1) \times SU(1)$ og A' være givet ved

$$K_0 : \begin{Bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} , \quad \theta_1 \in \mathbb{R} \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

$$A' : \begin{Bmatrix} e^{i\tau}\mathrm{ch}\, x & e^{i\tau}\mathrm{sh}\, x \\ e^{i\tau}\mathrm{sh} & e^{i\tau}\mathrm{ch}\, x \end{Bmatrix} , \quad \begin{matrix} \tau \in \mathbb{R} \ (\mathrm{mod}\ 2\pi) \\ x \in \mathbb{R} . \end{matrix}$$

Det ses let, at $U(1,1) = K_0 A' K_0$. Lad nu σ være givet ved $X \to {}^tX^{-1}$. Sætning 2.4 anvendt med $S = A'$ viser nu, at $L^\natural(U(1,1) ; K_0)$ er kommutativ.

Hvis G, K_0 var reduktivt, fandtes $\mathfrak{p}_0$ så $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$, og således at (1.14) var opfyldt. Vælg $X, X' \in \mathfrak{p}_0$ så $X_{12} \neq 0$ reel, og $X'_{12} \neq 0$ rent imaginær. Det ses at $[X, X'] \notin \mathfrak{k}_0$, modstrid.

Q.e.d.

Lad i det følgende G være unimodulær, og K en kompakt undergruppe, og antag at $L^\natural(G;K)$ er kommutativ. Antag at $\int_K dk = 1$.

<u>Definition 2.8.</u> En kontinuert, complex funktion φ på G, bi-invariant under K kaldes en <u>kuglefunktion</u>, hvis afbildningen

$$L_\varphi : f \to \int_G f(x)\varphi(x)\,dx$$

er en homomorfi af $C_0^\natural(G)$ på $\mathbb{C}$.

<u>Sætning 2.9.</u> Lad ϕ være kontinuert, complex funktion på G, $\phi \not\equiv 0$. Da er ϕ en kugle funktion hvis og kun hvis

(2.4)
$$\int_K \phi(xky)\,dk = \phi(x)\phi(y)$$

for alle $x, y \in G$.

<u>Bevis:</u> af (2.4) ses let at ϕ er bi-invariant under K, samt at $\phi(x) = \phi(x)\phi(e)$ for alle $x \in G$, hvorfor $\phi(e) = 1$. Vi skal altså vise at L_ϕ er en homomorfi, hvis og kun hvis ϕ opfylder (2.4).

For $g \in C_0(G)$ betegnes $g^\natural$ funktionen

(2.5)
$$g^\natural(x) = \int_{K\times K} g(kxk')\,dk\,dk'.$$

Lad nu $g_1, g_2 \in C_0(G)$, så ses ved direkte udregning at

(2.6) $$L_f(g_1^\natural * g_2^\natural) = \int_{G\times G} g_1(x)\, g_2(y) \int_K f(xky)\, dk\, dx\, dy$$

og

(2.7) $$L_f(g_1^\natural)\, L_f(g_2^\natural) = \int_{G\times G} g_1(x)\, g_2(y)\, f(x)\, f(y)\, dx\, dy,$$

heraf ses at L_f er en homomorfi, hvis og kun hvis (2.4) er opfyldt. Q.e.d.

<u>Sætning 2.10.</u> De kontinuerte homomorfier af $L^\natural(G)$ på $\mathbb{C}$ er precis mængden

$$\{L_\varphi \mid \varphi \text{ begrænset, kuglefunktion}\}.$$

<u>Bevis:</u> Hvis φ er begrænset kuglefunktion er det klart at L_φ er kontinuert homomorfi på $\mathbb{C}$.
Lad nu L være en kontinuert homomorfi af $L^\natural$ på $\mathbb{C}$. Afbildningen $f \to L(f^\natural)$ er en kontinuert linearform på $L^1(G)$. Ifølge Riesz' representations sætning findes et $\varphi \in L^\infty(G)$ således at

$$L(f^\natural) = \int_G f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_G f^\natural(x)\,\varphi(x)\,dx$$

heraf slutter vi at $\varphi(x) = \varphi^\natural(x)$ næsten overalt (n.o.). Vi kan derfor antage at φ er bi-invariant. Da L er en homomorfi slutter vi af (2.6) og (2.7) at φ opfylder (2.4) n.o. i $G\times G$.

Vi mangler nu blot, at vise, at φ er lig med en kontinuert funktion n.o.. Vælg $\psi \in C_0(G)$ således at $\int_G \psi(y)\varphi(y)\,dy \neq 0$. Nu gælder for næsten alle $x \in G$:

$$\varphi(x)\int_G \varphi(y)\psi(y)\,dy = \int_G \psi(y)\int_K \varphi(xky)\,dk\,dy =$$

$$= \int_K \int_G \psi(k^{-1}x^{-1}z)\varphi(z)\,dz\,dk = \int_G \int_K \psi(kx^{-1}z)\,dk\,\varphi(z)\,dz,$$

det sidste udtryk er klart kontinuert i x. Q.e.d.

<u>Korollar 2.11.</u> Enhver kuglefunktion på en Lie gruppe er C^∞.

<u>Bevis</u>: Dette ses analogt med ovenstående ved at vælge $\psi \in C_0^\infty(G)$. Q.e.d.

I det følgende skal vi se på samspillet mellem kuglefunktioner på G og unitære repræsentationer af G.

<u>Definition 2.12.</u> Lad $\mathcal{H}$ være et komplekst Hilbert-rum og lad π være en afbildning af G ind i mængden af unitære operatorer på $\mathcal{H}$.

π siges at være en <u>unitær repræsentation af G på $\mathcal{H}$</u>, hvis

(i) $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ for alle $x, y \in G$ og $\pi(e) = I$.

(ii) $x \to \pi(x)v$ er kontinuert fra G ind i $\mathcal{H}$ for alle $v \in \mathcal{H}$.

π siges at være <u>irreducibel</u>, hvis der ikke findes noget afsluttet, invariant underrum, bortset fra $\{0\}$ og $\mathcal{H}$.

To repræsentationer, π på $\mathcal{H}$ og π' på $\mathcal{H}'$, siges at være <u>ækvivalente</u>, hvis der findes en unitær afbildning U af $\mathcal{H}$ på $\mathcal{H}'$, således at

$$\pi'(x) \circ U = U \circ \pi(x) \quad \text{for alle } x \in G.$$

<u>Lemma 2.13.</u> For $f \in L^1(G)$ betegnes med $\pi(f)$ operatoren

(2.8)
$$\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)\,dx .$$

$f \to \pi(f)$ er en homomorfi (repræsentation) af algebraen $L^1(G)$ ind i mængden af begrænsede normale operatorer på $\mathcal{H}$.

Beviset er ligetil, forudsat at integralet (2.8) har en rimelig mening, hvilket vi ikke skal komme ind på. Bemærk, at den adjungerede operator $\pi(f)^*$ til $\pi(f)$ er operatoren $\pi(f^*)$, hvor $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$.

<u>Lemma 2.14.</u> En repræsentation π af en kommutativ algebra (eller gruppe) ind i mængden af begrænsede normale operatorer på et Hilbertrum $\mathcal{H}$, er irreducibel hvis og kun hvis $\mathcal{H}$ er én-dimensional.

<u>Bevis:</u> Antag at $\dim \mathcal{H} > 1$ og π irreducibel. Lad $\mathcal{A}$ være familien af normale, begrænsede, kommuterende operatorer, der er billeder ved π.

For alle $A \in \mathcal{A}$ er $\overline{A\mathcal{H}}$ og $A^{-1}(0)$ afsluttede og invariante underrum, og derfor er alle disse lig med $\{0\}$ eller $\mathcal{H}$.

Hvis spektret $sp(A)$ består af et punkt $\gamma_A \in \mathbb{C}$, er $A = \gamma_A \cdot I$. I følge antagelsen må der derfor findes et $A_0 \in \mathcal{A}$ således at $sp(A_0)$ indeholder mindst to forskellige punkter, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$. Vælg nu kontinuerte begrænsede funktioner på $\mathbb{C}$ således at

$$f_1(z)\, f_2(z) = 0 \quad \text{for alle } z \in \mathbb{C} \text{ og } f_1(\gamma_1) \neq 0 \text{ og } f_2(\gamma_2) \neq 0.$$

Der gælder nu

$$f_1(A_0)\, f_2(A_0) = 0 \quad \text{og } f_1(A_0) \neq 0 \text{ og } f_2(A_0) \neq 0$$

men dette viser at $\overline{f_2(A_0)\mathcal{H}} \neq \begin{cases} \{0\} \\ \mathcal{H} \end{cases}$. Da

$f_2(A_0)$, ifølge spektralsætningen, kommuterer med alle $A \in \mathcal{A}$ er $\overline{f_2(A_0)\mathcal{H}}$ invariant, hvilket er i strid med antagelsen. Q.e.d.

<u>Definition 2.15.</u> En kompleks kontinuert funktion φ på G siges at være <u>positivt definit</u>, hvis en af følgende to ækvivalente betingelser er opfyldt

(i) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(x_i^{-1}x_j)\, \alpha_i \overline{\alpha_j} \geq 0$ for alle sæt $x_1, \dots, x_n \in G$ og $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

(ii) $\displaystyle\int_{G\times G} \varphi(x^{-1}y)\, f(x)\overline{f}(y)\, dx\, dy = \int_G f^* * f(y)\, \varphi(y^{-1})\, dy \geq 0$ for alle $f \in C_0(G)$.

Det følger let, at en pos. definit funktion opfylder

(2.9) $$\varphi(e) \geq 0\ , \quad \varphi^* = \varphi \quad \text{og} \quad |\varphi(x)| \leq \varphi(e).$$

Sætning 2.16. Lad π være en unitær repræsentation af G på $\mathcal{H}$.

For hvert $v \in \mathcal{H}$ er $x \to (v, \pi(x)v)$ en positivt definit funktion.

Omvendt findes for hver pos. definit funktion $\varphi \not\equiv 0$ på G, en unitær repræsentation π_φ af G således, at $\varphi(x) = (v, \pi_\varphi(x)v)$ for en passende vektor v.

Bevis: Lad $\pi, \mathcal{H}$ være givet og $v \in \mathcal{H}$.
$x \to (v, \pi(x)v)$ er klart kontinuert og for $f \in C_0(G)$:

$$\int_G f^* * f(x)\,(v, \pi(x)v)\,dx = (v, \pi(f^* * f)v) =$$

$$= (\pi(f)v, \pi(f)v) \geq 0,$$

hvorfor $x \to (v, \pi(x)v)$ er pos. defn.

Lad omvendt φ være pos. defn. og ikke identisk nul. Definer for $f_1, f_2 \in C_0(G)$ det indre produkt

(2.10) $$(f_1, f_2)_\varphi = \int_G f_2^* * f_1(x)\,\varphi(x^{-1})\,dx = \int_{G\times G} \overline{f_2(y)} f_1(x)\,\varphi(x^{-1}y)\,dx\,dy$$

Lad $N = \{ f \in C_0(G) \mid (f, f)_\varphi = 0 \}$. N er et vektorunderrum i $C_0(G)$. Kvotientrummet $C_0(G)/N$ fuldstændiggøres på naturlig måde til et Hilbertrum $\mathcal{H}_\varphi$, med et indre produkt som vi også betegner $(\ ,\ )_\varphi$. For hvert $x \in G$ inducerer afbildningen $f \to f^x$, hvor $f^x(y) = f(x^{-1}y)$ en unitær operator $\pi_\varphi(x)$ på $\mathcal{H}_\varphi$. Det er ikke svært at se, at π_φ bliver en unitær repræsentation af G på $\mathcal{H}_\varphi$. Lad δ_x betegne afbildningen $f \to f(x)$ fra $C_0(G)$ ind i $\mathbb{C}$. δ_x kan på kanonisk måde opfattes som element i $\mathcal{H}_\varphi$. (Vælg en approximativ enhed ψ_ε i $C_0(G)$, ψ_ε ses let at være en fundamentalfølge i $\mathcal{H}_\varphi$ og vi definerer $\delta_e = \lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon$). Og der gælder $\pi_\varphi(x)\delta_y = \delta_{xy}$,

hvoraf vi får $(\delta_e, \pi_\varphi(x)\delta_e)_\varphi = (\delta_e, \delta_x)_\varphi = \varphi(x)$. Vælges nu $v = \delta_e$ er sætningen bevist. Q.e.d.

__Øvelse 2.17.__ Gennemfør beviset for sætning 2.16 i detaljer. Vis desuden, at $\{\delta_x\}$ er total i $\mathcal{H}_\varphi$, og at $\pi(f)\delta_e = f$ (i $\mathcal{H}_\varphi$).

__Bemærkning 2.18.__ Hvis vi i sætn. 2.16 yderligere kræver, at mængden $\pi(G)v$ er total i $\mathcal{H}$, er π_φ éntydigt bestemt ved φ, pånær ækvivalens. Se iøvrigt J. Dixmier "Les C^*-algèbres et Leurs représentations", §13.

__Definition 2.19.__ En unitær repræsentation π af G på $\mathcal{H}$ siges at være __klasse-1__ (m.h.t K), hvis π er irreducibel og der findes en vektor $v \in \mathcal{H}$, $v \neq 0$ således at $\pi(k)v = v$ for alle $k \in K$.

Lad π være en klasse-1 repræsentation på $\mathcal{H}$. Med $\mathcal{K}_\pi$ betegnes underrummet af $\mathcal{H}$ bestående af vektorer $v \in \mathcal{H}$, der opfylder $\pi(k)v = v$ for alle $k \in K$. Lad $\hat{G}^{\natural}$ betegne mængden af equivalensklasser af klasse-1 repræsentationer af G.

<u>Sætning 2.20.</u> Der er en én-éntydig korrespondance $\omega \leftrightarrow \varphi$ mellem $\hat{G}^{\natural}$ og mængden af pos. defn. kuglefunktioner på G med $\varphi(e) = 1$. Denne korrespondance $\omega \leftrightarrow \varphi$ opfylder:

(i) hvis $\pi \in \omega$ og v er enhedsvektor i $\mathcal{H}_\pi$ så er $\varphi(x) = (v, \pi(x) v)$

(ii) $\pi_\varphi \in \omega$.

<u>Bevis:</u> 1) antag at φ er pos. defn. kuglefunktion. Lad P være operatoren på $\mathcal{H}_\varphi$ defineret ved

$$P = \int_K \pi_\varphi(k)\, dk,$$

da er $P = P^* = P^2$ den orthogonale projektion på $\mathcal{K}_{\pi_\varphi}$. For $f \in C_0(G)$ fås ved anvendelse af øvelse 2.17:

(2.11) $$Pf = \int_G f(x)\, \varphi(x^{-1})\, dx \cdot \delta_e \quad , \text{ idet}$$

$$(Pf, \delta_x)_\varphi = \int_G f(x)\, \varphi(x^{-1})\, dx \cdot (\delta_e, \delta_x)_\varphi .$$

Men dette viser, at P er en 1-dimensional projektion, og dermed at $\mathcal{K}_{\pi_\varphi} = \mathbb{C} \cdot \delta_e$.

Lad nu $V \subset \mathcal{H}_\varphi$ være et afsluttet, invariant underrum. $V^\perp$ er ligeledes afsluttet og invariant. Enten er $PV \neq \{0\}$ eller $P(V^\perp) \neq \{0\}$, antag f.eks. at $PV \neq \{0\}$; men da er $\delta_e \in PV \subset V$ og dermed er $\{\delta_x \mid x \in G\} \subset V$. Det følger af øvelse 2.17 at $V = \mathcal{H}_\varphi$. Hvoraf ses at π_φ er irreducibel og dermed er π_φ klasse-1.

2) Lad nu $\omega \in \hat{G}^{\natural}$ og $\pi \in \omega$.

<u>Påstand</u>: $\mathcal{K}_\pi$ er invariant under $\pi(f)$, $f \in C_0^{\natural}$ og $\dim \mathcal{K}_\pi = 1$.

(2.12) $$\pi(k)\pi(f) = \int_G f(x)\,\pi(kx)\,dx = \int_G f(x)\,\pi(x)\,dx = \pi(f)$$

idet $f(kx) = f(x)$. Dermed er $\pi(f)\mathcal{H} \subset \mathcal{K}_\pi$ for alle $f \in C_0^{\natural}$, og specielt er $\mathcal{K}_\pi$ invariant.

Lad nu π_0 være den unitære repræsentation af $C_0^{\natural}$ på $\mathcal{K}_\pi$ givet ved $\pi_0(f) = \pi(f)|_{\mathcal{K}_\pi}$.

Lad V og V' være to orthogonale, invariante underrum af $\mathcal{K}_\pi$, under π_0. For $v \in V$ og $v' \in V'$ og $f \in C_0(G)$ fås:

$$(\pi(f)v, v') = \int_{K \times K} (\pi(f)\pi(k_1)v, \pi(k_2)v')\,dk_1\,dk_2 =$$
$$= (\pi(f^{\natural})v, v') = 0.$$

Dette viser, at det mindste, afsluttede, invariante underrum i $\mathcal{H}$, der indeholder V, er vinkelret på V'. Dermed er enten V eller $V' = \{0\}$, hvilket viser, at π_0 er irreducibel. Ifølge lemma 2.14 er $\dim \mathcal{K}_\pi = 1$, og påstanden er vist.

Det følger nu af påstanden, at hvis π og $\pi' \in \omega$, og $v \in \mathcal{K}_\pi$ og $v' \in \mathcal{K}_{\pi'}$ er enhedsvektorer, så er

$$(v, \pi(x)v) = (v', \pi'(x)v').$$

Sæt $\varphi(x) = \varphi_\omega(x) = (v, \pi(x)v)$. φ er klart positivt definit, fra bemærkning 2.18 følger at $\pi_\varphi \in \omega$. Vi mangler derfor blot at vise at φ er en kuglefunktion.

For $f \in C_0^\natural$ og $v \in \underbrace{\mathcal{H}_\pi,}_{(v,v)=1}$ fås af påstanden

$$\pi(f)v = (\pi(f)v\,|\,v)\,v .$$

Lad nu $f_1, f_2 \in C_0^\natural$, vi har da

$$L\varphi(f_1 * f_2) = (v, \pi(f_1)\pi(f_2)v) = (v, \pi(f_1)v)\,(v, \pi(f_2)v) =$$

$$= L\varphi(f_1)\,L\varphi(f_2).$$

Dette viser at φ er en kuglefunktion. Q.e.d.

Lad $\hat{G}$ betegne mængden af equivalensklasser af unitære, irreducible representationer af G. $\hat{G}$ udstyret med en passende topologi, kaldes <u>det duale rum til G</u>.

Den relative topologi på $\hat{G}^\natural$ er lokalkompakt, Den er bestemt som den svageste topologi der gør afbildningerne:

$$\omega \rightarrow \int_G f(x)\,\varphi_\omega(x^{-1})\,dx \quad , \; \omega \in \hat{G}^\natural, \; f \in C_0^\natural(G)$$

kontinuerte.

Vi citerer nu en generel "Plancherel-sætning", der gælder for en ret omfattende klasse af lokalkompakte grupper. Separabel betyder, at der findes en numerabel basis for topologien. Type I betyder løst sagt, at gruppen ikke er for grim (præcist: Enhver unitær repræsentation af G frembringer en type I von Neumann algebra). I alle de eksempler vi har nævnt på grupper G, for hvilken der findes en kompakt undergruppe K, således at $L^1(G;K)$ er kommutativ, er G type I.

Sætning 2.21. Plancherel's sætning:

Lad G være en lokalkompakt, separabel og unimodulær gruppe af type I. Der findes et éntydigt, positivt mål μ på $\hat{G}$ således at for alle $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$:

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_{\hat{G}} \mathrm{Tr}(\pi(f)\pi(f)^*)\, d\mu(\pi).$$

For beviset se f.eks. J. Dixmier "Les C^*-algèbres...", theorème 18.8.2.

Lad nu G, K være som tidligere. Lad $f \in C_0(G/K)$, d.v.s. at for alle $k \in K$ og $x \in G$ gælder $f(xk) = f(x)$. Lad $\pi \in \hat{G}$ og definer $P_\pi = \int_K \pi(k)dk$. Det ses, at P_π er den orthogonale projektion på $\mathcal{H}_\pi$. Derfor er $P_\pi \neq 0$, hvis og kun hvis $\pi \in \hat{G}^\natural$ (se definition 2.19).
Der gælder:

$$\pi(f) = \int_G \pi(x)f(x)dx = \int_K\int_G \pi(xk)f(x)dx = \pi(f)P_\pi .$$

For $f \in C_0(G/K)$, $\lambda \in \hat{G}^\natural$, $v \in \mathcal{H}_\lambda$, $\|v\| = 1$ defineres:

(2.13) $$f^\sim(\lambda) = \int_G f(x)\,\varphi_\lambda(x^{-1})dx = \int_G f(x)(\pi(x)v, v)\,dx =$$
$$= (\pi(f)v, v).$$

Dermed fås for $\lambda \in \hat{G}^\natural$:

$$Tr(\lambda(f)^*\lambda(f)) = Tr(P_\lambda \lambda(f^* * f)P_\lambda) =$$

$$= \sum_\nu (P_\lambda \lambda(f^* * f)P_\lambda v_\nu, v_\nu) = (\lambda(f^* * f)v, v) = (f^* * f)^\sim(\lambda).$$

Hvor $\{v_\nu\}$ er ortonormalbasis for $\mathcal{H}_\lambda$ med $v_0 = v$.

Idet $Tr(\lambda(f^*)\lambda(f)) = Tr(\lambda(f^*)\lambda(f)P_\lambda) = 0$, hvis $\lambda \notin \hat{G}^\natural$ har vi vist følgende Korollar til sætn. 2.21:

<u>Sætning 2.22.</u> Der findes et positivt mål $\mu^\natural$ på $\hat{G}^\natural$, således at for alle $f \in C_0(G/K)$:

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_{\hat{G}^\natural} (f^* * f)^\sim(\lambda)\, d\mu^\natural(\lambda).$$

Bemærk at for $f \in C_0^\natural$ er $(f^* * f)^\sim(\lambda) = |f^\sim(\lambda)|^2$, idet φ_λ er en pos. defn. kuglefunktion.

Denne side erstatter side 44

For vektorer u_1, u_2 i et Hilbertrum gælder Polariseringsidentiteten:

(2.14) $$4(u_1,u_2) = \sum_{\nu=1}^{4} i^\nu (u + i^\nu u_2, u_1 + i^\nu u_2).$$

Lad $f, g \in C_0(G/K)$. Benyttes (2.14) på

$\int_G f(x)\overline{g(x)}\,dx$ og på $(\lambda(g^* * f)v, v) = (\lambda(f)v, \lambda(g)v) =$

$= (g^* * f)^\sim(\lambda)$, fås ifølge sætn. 2.22.

(2.15) $$\int_G f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int_{\hat{G}^\natural} (g^* * f)^\sim(\lambda)\,d\mu^\natural(\lambda).$$

Lad nu $\{\psi_\varepsilon\}$ være en approximativ enhed i $C_0(G)$ d.v.s at for $f \in C_0(G)$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_G f(x)\psi_\varepsilon(x)\,dx \to f(e) \quad \text{og} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon * f = f$$

Da vil $\{\psi_\varepsilon^\natural\}$ være en approximativ enhed i $C_0(G/K)$. Ved at indsætte $g = \psi_\varepsilon^\natural$ i (2.15) fås i grænsen:

(2.16) $$f(e) = \int_{\hat{G}^\natural} f^\sim(\lambda)\,d\mu^\natural(\lambda),$$

såfremt $f^\sim \in L^1(\mu^\natural)$.

<u>Sætning 2.23.</u> Lad for $f \in C_0^\natural(G;K)$ $\tilde{f}$ være defineret ved (2.13). Da gælder

(2.17) $$\int_G |f(x)|^2\,dx = \int_{\hat{G}^\natural} |f^\sim(\lambda)|^2\,d\mu^\natural(\lambda),$$

Hvis $f^\sim \in L^1(\mu^\natural)$ gælder for $x \in G$:

(2.18) $$f(x) = \int_{\hat{G}^\natural} f^\sim(\lambda)\,\varphi_\lambda(x)\,d\mu^\natural(\lambda).$$

<u>Bevis</u>: (2.17) følger af sætning 2.22 og bemærkningen derefter.

Antag at $f^{\sim} \in L^1(\mu^{\natural})$. Lad da $x \in G$

f^x være funktionen $y \to f(x^{-1}y)$. Da er $f^x \in C_c(G/K)$ og

$$(f^x)^{\sim}(\lambda) = \int_G f(x^{-1}y)\,\varphi_\lambda(y^{-1})\,dy = \int_K \int_G f(x)\,\varphi_\lambda(y^{-1}k\,x^{-1})\,dx\,dk =$$

$$= \int_G f(\;)\,\varphi_\lambda(y^{-1})\,\varphi_\lambda(x^{-1})\,dy = f^{\sim}(\lambda)\,\varphi_\lambda(x^{-1}).$$

(Her er benyttet sætning 2.9). Af formel (2.9) fås $|\varphi_\lambda(x)| \leq \varphi_\lambda(e) = 1$. Hvorfor $(f^x)^{\sim} \in L^1(\mu^{\natural})$. Dermed kan vi benytte formel (2.16) og får

$$f(x) = f^{x^{-1}}(e) = \int_{\hat{G}^{\natural}} (f^{x^{-1}})^{\sim}(\lambda)\,d\mu^{\natural}(\lambda) =$$

$$= \int_{\hat{G}^{\natural}} f^{\sim}(\lambda)\,\varphi_\lambda(x)\,d\mu^{\natural}(\lambda).$$

Dermed er (2.18) vist. Q.e.d.

<u>Eksempel 2.24.</u> Lad $G = (\mathbb{R}, +)$ og $K = \{0\}$. Ifølge (2.4) er φ en kuglefunktion, hvis φ er kontinuert og $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$, Altså hvis og kun hvis φ er en kontinuert homomorfi ind i $\mathbb{C}$, Derfor er mængden af kuglefunktioner givet ved:

$$\{\, \varphi_\lambda(x) = e^{i\lambda x} \mid \lambda \in \mathbb{C} \,\}.$$

Ved at benytte definition 2.15 (i) ses, idet

$$\sum_{\ell,j=1}^{n} e^{i\lambda(x_j-x_\ell)}\bar{\alpha}_j\alpha_\ell = \Big(\sum_{\ell=1}^{n} e^{i\lambda x_\ell}\bar{\alpha}_\ell\Big)\Big(\sum_{\ell=1}^{n} e^{-i\lambda x_\ell}\alpha_\ell\Big),$$

at φ_λ er pos. definit hvis og kun hvis $\lambda\in\mathbb{R}$.

I denne situation er formel (2.13) definitionen af den sædvanlige Fourier transformation:

$$f^\sim(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\,.$$

Formel (2.18) er den inverse Fourier transformation:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^\sim(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda\,.$$

Vi bemærker altså at $d\mu^\natural(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\,d\lambda$.
Formel (2.17) er Plancherel's sætning:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\,\|f^\sim\|_2^2\,.$$

Tilsvarende gælder for $G=(\mathbb{R}^n,+)$, $K=\{\underline{0}\}$, hvor kuglefunktionerne er givet ved $\underline{\lambda}\in\mathbb{C}^n$:

$$\varphi_{\underline{\lambda}}(\underline{x}) = e^{i(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)} = e^{i(\underline{\lambda},\underline{x})}.$$

$\varphi_{\underline{\lambda}}$ er pos. defn. hvis og kun hvis $\underline{\lambda}\in\mathbb{R}^n$ og

"Plancherel målet" $d\mu^\natural(\underline{\lambda})$ bliver $\frac{1}{(2\pi)^n}\,d\underline{\lambda}$.

For $G=\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ og $K=\{0\}$ fås tilsvarende med Fourier-rækker.

§ 3. Eksempler.

Eksempel 1. Lad $G = FL(n,\mathbb{R})$, $K = SO(n)$. Da G, K er et reductivt par er $L^\natural$ kommutativ. Vi skal i det følgende finde samtlige kuglefunktioner, $\hat{G}^\natural$ og $\mu^\natural$.

Først bemærker vi at $FL(n,\mathbb{R})$ virker som isometrigruppe på $\mathbb{R}^n$ (med sædvanlig metrik):

$$\begin{Bmatrix} T & \underline{x} \\ \underline{o} & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{y} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T\underline{y} + \underline{x} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{for} \quad \begin{matrix} T \in SO(n) \\ \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n . \end{matrix}$$

Virkningen er transitiv, idet f. eks.

$$\begin{Bmatrix} 1 & & 0 & \underline{x} \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ & \underline{o} & & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{o} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{Bmatrix} .$$

Fixpunktsgruppen for $\underline{o}$ er netop K; d.v.s. at $g \cdot \underline{o} = \underline{o}$, hvis og kun hvis g har form

$$g = \begin{Bmatrix} T & \underline{o} \\ \underline{o} & 1 \end{Bmatrix} .$$

Heraf ses let at mængden af sideklasser G/K på naturlig måde identificeres med $\mathbb{R}^n$. Da Lebesgue-målet $d\underline{x}$ på $\mathbb{R}^n$ er invariant under G (d.v.s under translationer og drejninger) er $d\underline{x}$ netop det i formel (2.1) nævnte mål på G/K. Af (2.1) fås derfor

Lemma 3.1. Identificer $\mathbb{R}^n$ og G/K. Lad $f \in C_0(G)$ opfylde $f(xk) = f(x)$ for $x \in G, k \in K$. Da gælder

(i) $$\int_G f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x})\,d\underline{x}.$$

Lad A være én-parameter undergruppen i G bestående af matricerne

$$a_t = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 \\ & & & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lad $A^+ = \{a_t \mid t > 0\}$ og $\overline{A^+} = \{a_t \mid t \geq 0\}$. Der gælder (sml. sætn. 1.36)

(3.1) $$G = K\overline{A^+}K,$$

idet enhver vektor $\underline{x}$ i $\mathbb{R}^n$ kan skrives som $T(0,\cdots,0,\|\underline{x}\|)$, hvor $T \in SO(n) = K$. Dette viser altså, at $C^\natural(G;K)$ kan identificeres med $C([0,\infty[)$, eller med mængden af lige funktioner på $]-\infty,\infty[$ ($\supset$: $f(t) = f(-t)$). I det følgende vil vi benytte skrivemåden: $f(x)$, $x \in G$, $f(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ for funktioner $f \in C^\natural$.

Lemma 3.2. For $f \in C_0^\natural(G)$ gælder

$$\int_G f(x)\,dx = k_n \int_0^\infty f(t)\, t^{n-1}\,dt,$$

hvor k_n er en konstant afhængig af n.

<u>Bevis:</u> Indfør polære koordinater i $\mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \dots, x_n) = (t u_1, \dots, t u_{n-1}, t\sqrt{1-u_1^2-\dots-u_{n-1}^2}).$$

Jacobi determinanten svarende til dette koordinat skift udregnes let til

$$\det\left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial(\underline{u},t)}\right) = \frac{t^{n-1}}{\sqrt{1-u_1^2-\dots-u_{n-1}^2}} .$$

Da $f \in C^\natural$ kun afhænger af t fås det ønskede, idet vi får

$$k_n = \int_{\{u_1^2+\dots+u_{n-1}^2<1\}} \frac{1}{\sqrt{1-u_1^2-\dots-u_{n-1}^2}} \, d\underline{u},$$

(Det kan ses at k_n bliver volumenet af kugleoverfladen S^{n-1}). Q.e.d.

<u>Lemma 3.3.</u> Lad $f, g \in C_0^\natural$ og definer for $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$T_{\underline{y}} g(\underline{x}) = \int_K g(\underline{y} - k\underline{x})\, dk$$

Da er $T_{\underline{y}} g \in C_0^\natural$ og vi har

$$f * g(\underline{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x})\, g(\underline{y}-\underline{x})\, d\underline{x},$$

eller

$$f * g(t) = k_n \int_0^\infty f(s)\, T_{\underline{t}}\, g(s)\, s^{n-1}\, ds$$

hvor $\underline{t} = (0, \dots, 0, t)$.

<u>Øvelse 3.4.</u> Bevis dette Lemma.

Differentialoperatoren i $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

kaldes Laplace-operatoren, den opfylder

<u>Lemma 3.5.</u> Lad $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ og $g \in FL(n,\mathbb{R})$. Lad f^g betegne funktionen

$$f^g(\underline{x}) = f(g^{-1}\underline{x}).$$

Da gælder

(3.2) $$\Delta(f^g)(\underline{x}) = (\Delta f)^g(\underline{x}).$$

<u>Bevis</u>: Lad g^{-1} være matricen $\begin{Bmatrix} T & \underline{y} \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$, da er

$\underline{x}' = g^{-1}\underline{x} = T\underline{x} + \underline{y}$. Bemærk at T netop er funktionalmatricen for dette koordinatskift $\underline{x} \to \underline{x}'$, d.v.s

$$T = \left\{ \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \right\}.$$ Vi får nu

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f^g = \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial x_j' \partial x_k'} f \cdot \left(\frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial x_k'}{\partial x_i}\right) +$$

$$+ \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_j'} f \cdot \frac{\partial^2 x_j'}{\partial x_i \partial x_k}$$

Den sidste sum er nul da T er uafhængig af $\underline{x}$. Ved at summere over $i = 1, \dots, n$ og benytte at søjlerne i T er orthonormale fås

$$\Delta f^g = \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial x_j' \partial x_k'} f \cdot \sum_i \left(\frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial x_k'}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial x_j' \partial x_k'} f \cdot \delta_{jk} = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j'^2} f = (\Delta f)^g .$$

Q. e. d.

<u>Lemma 3.6.</u> Lad $f \in C^4 \cap C^\infty$ da gælder

$\Delta f \in C^4$ og $\Delta f(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{n-1}{t}\frac{d}{dt}\right) f(t).$

<u>Bevis</u>: $t = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

$$\frac{\partial t}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_i}{t}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x_i^2} = \frac{t - x_i \frac{\partial t}{\partial x_i}}{t^2} = \frac{t^2 - x_i^2}{t^3} .$$

Idet $\frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial}{\partial t} f \cdot \frac{\partial t}{\partial x_i}$ og

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t} f \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x_i^2}$$

fås let

$$\Delta f = \frac{d^2}{dt^2} f + \frac{n-1}{t}\frac{d}{dt} f .$$

Q. e. d.

Bemærk, at $t^{-1} \frac{d}{dt} f(t)$ er veldefineret i $t=0$, idet f er en lige funktion.

Sætning 3.7. Lad φ være bi-invariant under $K = SO(n)$, og $\varphi \in C^\infty(GL(n,\mathbb{R}))$. φ er en kuglefunktion hvis og kun hvis

$$\varphi(e) = 1 \quad \text{og} \quad \Delta\varphi = \mu\varphi \quad \text{for et } \mu \in \mathbb{C}.$$

Bevis: Antag først at φ er en kuglefunktion da gælder for $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ ifølge (2.4):

$$\varphi(\underline{x})\varphi(\underline{y}) = \int_K \varphi(\underline{x} + k\underline{y})\, dk$$

idet
$$\begin{Bmatrix} 1 & \underline{x} \\ \underline{0} & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & \underline{0} \\ \underline{0} & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{y} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{x} + k\underline{y} \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

De følgende ombytninger af integration og differentiation ses let at være tilladte:

$$\varphi(\underline{x})(\Delta\varphi)(\underline{y}) = \int_K \Delta_{\underline{y}}\varphi(\underline{x} + k\underline{y})\, dk =$$

$$\int_K \Delta_{\underline{x}}\varphi(\underline{x} + k\underline{y})\, dk = (\Delta\varphi)(\underline{x})\,\varphi(\underline{y}),$$

her er benyttet Lemma 3.5. Vælg $\underline{x} = \underline{0}$ og $\mu = (\Delta\varphi)(\underline{0})$. Da er $\Delta\varphi = \mu\varphi$.

Antag omvendt at $\Delta\varphi = \mu\varphi$ og $\varphi(\underline{0}) = 1$, betragt funktionen

$$(3.3) \qquad f(\underline{x}, \underline{y}) = \int_K \varphi(\underline{x} + k\underline{y})\, dk.$$

Vi har

$$\Delta_{\underline{y}} f(\underline{x},\underline{y}) = \int_K (\Delta\varphi)(\underline{x}+k\underline{y})\,dk =$$

$$= \mu \int_K \varphi(\underline{x}+k\underline{y})\,dk = \mu \cdot f(\underline{x},\underline{y}).$$

Altså er $y \to f(\underline{x},\underline{y})$ en bi-invariant eigenfunktion for Δ med samme eigenværdi μ som φ. De har begge differentialkvotient 0 i $t=0$. Det følger da af lemma 3.6 at de er proportionale d.v.s.

$$f(\underline{x},\underline{y}) = C_{\underline{x}} \cdot \varphi(\underline{y})$$

vælges $\underline{y}=\underline{0}$ fås $C_{\underline{x}} = \varphi(\underline{x})$ ifølge (3.3). Hermed er vist at φ er en kuglefunktion Q.e.d.

<u>Korollar 3.8.</u> Lad for $\underline{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ og $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\underline{\lambda}, \underline{x})$ være defineret som $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Definer

(3.4)
$$\varphi_{\underline{\lambda}}(\underline{x}) = \int_K e^{i(\underline{\lambda}, k\underline{x})} dk$$

da er $\varphi_{\underline{\lambda}}$ en kuglefunktion med eigenværdi $\mu_{\underline{\lambda}} = -\sum \lambda_i^2$. Desuden er $\varphi_{\underline{\lambda}} = \varphi_{\underline{\lambda}'}$ hvis og kun hvis $\mu_{\underline{\lambda}} = \mu_{\underline{\lambda}'}$, og enhver kuglefunktion er af denne type.

For $\lambda \in \mathbb{C}$ og $t \in \mathbb{R}$ betegner $\underline{\lambda} = (0, \cdots, 0, \lambda)$ og $\underline{t} = (0, \cdots, 0, t)$, og $\varphi_\lambda(t) = \varphi_{\underline{\lambda}}(\underline{t})$.

<u>Øvelse 3.9.</u> Differential ligningen $z \in]0, \infty[$

$$z^2 f''(z) + z f'(z) + (z^2 - a^2) f(z) = 0$$

kaldes Bessel ligningen. Funktionen

$$J_a(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(a+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+a}$$

er løsning og kaldes Besselfunktionen af første slags af orden a. Vis, at med $\nu = \frac{n}{2} - 1$, er

$$\varphi_\lambda(t) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) (\lambda t)^{-\nu} J_\nu(\lambda t).$$

<u>Sætning 3.10.</u> φ_λ er positivt definit på $FL(n, \mathbb{R})$, hvis og kun hvis $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Bevis:</u> For $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ ses let at $\underline{x} \to e^{i(\underline{\lambda}, \underline{x})}$ er pos. defn. på $FL(n, \mathbb{R})$. Heraf følger at $\varphi_{\underline{\lambda}}$ er pos. defn.

antag omvendt, at φ_λ er pos. defn. Af formel (2.9) fås $\overline{\varphi_\lambda(-t)} = \varphi_{\bar\lambda}(t)$, hvilket viser at $\lambda^2 = \bar\lambda^2$, altså $\lambda \in \mathbb{R}$ eller $\lambda \in i\mathbb{R}$. Antag at $\lambda = -i\eta$, $\eta > 0$ og $t > 0$.

Følgende delmængde T af K er uafhængig af t:

$$T = \{ k \in K \mid (k\underline{t})_n > \tfrac{t}{2} \}$$

og $\int_T dk > 0$. Vi får da

$$\varphi_{-i\eta}(t) = \int_K e^{\eta\cdot(k\underline{t})_n} dk > \int_T dk \cdot e^{\eta\cdot\frac{t}{2}},$$

hvor af ses at $\varphi_{-i\eta}$ er ubegrænset i modstrid med at φ_λ er pos. defn. Q.e.d.

Korollar 3.11. Plancherel målet μ^{4} er koncentreret på $\Lambda^+ = \{\lambda \geq 0\}$.

Sætning 3.12. Lad $f \in C_0^{4}(FL(n,\mathbb{R})) \cap C^\infty$ og $\lambda \in \Lambda^+$. Definer

$$f^\sim(\lambda) = \int_{FL(n,\mathbb{R})} f(x)\,\varphi_\lambda(x)\,dx = k_n \int_0^\infty f(t)\,\varphi_\lambda(t)\,t^{n-1}dt,$$

da gælder for $x \in FL(n,\mathbb{R})$:

$$f(x) = \frac{k_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty f^\sim(\lambda)\,\varphi_\lambda(x)\,\lambda^{n-1}d\lambda \quad \text{og}$$

$$\|f\|_2^2 = \frac{k_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty |f^\sim(\lambda)|^2 \lambda^{n-1} d\lambda,$$

hvor $k_n = 2(\pi)^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\tfrac{n}{2})^{-1}$ er samme konstant som i lemma 3.2.

<u>Bevis:</u> Ifølge lemma 3.2 er for $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x})\, e^{-i(\underline{\lambda}, \underline{x})}\, d\underline{x} = k_n \int_0^\infty f(t)\, \varphi_{\underline{\lambda}}(t)\, t^{n-1}\, dt = f^\sim(\underline{\lambda})$$

idet $k_n \varphi_{\underline{\lambda}}(t) = \int_{\{u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 < 1\}} e^{-i(\underline{\lambda}, t\underline{u})} \frac{1}{|u_n|}\, du_1 \cdots du_{n-1}$

(hvor $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $u_n^2 = 1 - u_1^2 - \cdots - u_{n-1}^2$).
Ifølge inversionsformlen for Fourier transformation i $\mathbb{R}^n$ fås:

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f^\sim(\underline{\lambda})\, e^{i(\underline{\lambda}, \underline{x})}\, d\underline{\lambda} ,$$ resten følger

nu ved at indføre polære koordinater for $\underline{\lambda}$. Q.e.d.

<u>Bemærkning 3.13.</u> For at illustrerer at sætning 2.23 er "lige så god" som sætning 2.22, skitserer vi et bevis for Plancherels sætning i $\mathbb{R}^n$, hvor vi forudsætter sætning 3.12. Lad $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(G/K)$, Lad $*$ være foldning i $G = FL(n, \mathbb{R})$, da er $f^* * f \in C_0^b(G)$. Heraf fås specielt

$$\|f\|_2^2 = f^* * f(e) = \frac{k_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty (f^* * f)^\sim(\lambda)\, \lambda^{n-1}\, d\lambda =$$

$$= \frac{k_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_K |f^\wedge(k\underline{\lambda})|^2\, dk\, d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f^\wedge(\underline{\lambda})|^2\, d\underline{\lambda} ,$$

idet det let udregnes at $(f^* * f)^\sim(\lambda) = \int_K |f^\wedge(k\underline{\lambda})|^2 dk$

hvor "$\wedge$" betegner sædvanlig Fourier transformation i $\mathbb{R}^n$, og $\underline{\lambda} = (0, \dots, 0, \lambda)$.

Vi giver i det følgende endnu et bevis for sætning 3.12. Det er mere kompliceret end det første bevis, men det illustrerer en metode der har vist sig nyttig for andre reduktive par:

Først benyttes den såkaldte Radon transformation $f \to F_f$. Det viser sig at $f^{\sim}(\lambda) = (F_f)^{\wedge}(\lambda)$. Vi kan derefter benytte inversionsformlen for $f \to F_f$ og for sædvanlig Fourier transformation til at finde Planchérelmålet $\mu^{\natural}$.

<u>Definition 3.14.</u> Lad Ξ være mængden af $(n-1)$-dim. affine underrum i $\mathbb{R}^n$. Lad $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. For $\xi \in \Xi$ defineres <u>Radon transformation</u>(1) F_f:

$$F_f(\xi) = \int_{\xi} f(x)\,dx .$$

Hvis $f \in C_0^{\natural}$ er F_f kun afhængig af den vinkelrette afstand fra $\underline{o}$ til ξ og vi kan da skrive: med $\underline{t} = (0, \cdots, 0, t)$ og $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$

$$F_f(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\underline{t} + \underline{x})\,d\underline{x} . \tag{3.5}$$

Til at beskrive inversionsformlen for denne transformation kan vi benytte den såkaldte "brudne-integration", her gengivet i en form, der tilskrive H. Weyl; se f. eks.

Erdélyi m.fl. "Tables of integral transforms, Vol. 2" Chap. XIII, s. 181-212.

(1) se f.eks. Gelfand, Graev, Vilenkin: "Generalized functions, Vol 5"

Sætning 3.15. For $f \in C_0^\infty([0,\infty[)$ defineres

$$Af(t) = \int_t^\infty f(\tau)\,d\tau \qquad \text{for} \quad t \in [0,\infty[.$$

For alle n er $A^n f$ og $A^{-n} f \in C_0^\infty$ og der gælder

(3.6)
$$A^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty f(\tau)(\tau - t)^{n-1}\,d\tau \qquad \text{og}$$

$$A^{-n} f(t) = (-1)^n \left(\frac{d^n}{dt^n} f\right)(t).$$

For $\alpha > 0$ defineres

$$A^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty f(\tau)(\tau - t)^{\alpha-1}\,d\tau$$

for $\alpha = 0$ $\quad A^0 f = f \quad$ og

for $\alpha < 0$ (med $[\alpha]$ = den hele del af α) og $\alpha \neq [\alpha]$:

(3.6)'
$$A^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - [\alpha])}\int_t^\infty (A^{-[\alpha]} f)(\tau)(\tau - t)^{\alpha - [\alpha] - 1}\,d\tau.$$

Der gælder for alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\quad A^\alpha A^\beta = A^{(\alpha+\beta)}$.

Bevis: Formlerne (3.6) vises let ved induktion. Definitionen af A^α foregår derefter ved "analytisk fortsættelse" m.h.t α. Tilsvarende følger formlen $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ ved "analytisk fortsættelse" ① idet den gælder for $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Vi skal i øvrigt ikke gå nærmere ind på beviset. Q.e.d.

Vi får også brug for følgende resultat.

① se Titchmarsh: "The theory of functions", 2 ed. sætning 5.81, side 186.

<u>Øvelse 3.16.</u> Lad $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ være lige, vis at følgende gælder:

(3.7) $$\left(\frac{d}{d(t^2)}\right)^n f(t) = \frac{1}{2^n}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\frac{d^{2n}}{dt^{2n}} f\right)(t u_1 \cdots u_n) \cdot$$
$$\cdot\, u_1^{2n-2} \cdot \ldots \cdot u_{n-1}^2 \, du_1 \cdots du_n .$$

Indføres nu polære koordinater i (3.5) fås:

$$F_f(t) = k_{n-1}\int_0^\infty f(\sqrt{t^2+u^2})\, u^{n-2}\, du = \tfrac{1}{2} k_{n-1} \int_{t^2} f(\sqrt{\tau})(\tau - t^2)^{\frac{n-3}{2}} d\tau =$$
$$= \tfrac{1}{2} k_{n-1} \Gamma\left(\tfrac{n-1}{2}\right)\left(A^{\frac{n-1}{2}}\, {}_0f\right)(t^2) = \pi^{\frac{n-1}{2}}\left(A^{\frac{n-1}{2}}\, {}_0f\right)(t^2).$$

Hvor ${}_0f(t^2) = f(t)$. Derfor iflg. sætn. 3.15:

(3.8) $$f(t) = \pi^{-\frac{n-1}{2}}\left(A^{-\frac{n-1}{2}}\, {}_0F_f\right)(t^2)$$

<u>Lemma 3.17.</u> $f^\sim(\lambda) = 2\int_0^\infty F_f(t)\cos(\lambda t)\,dt = F_f^\wedge(\lambda)$.

<u>Bevis</u>: $f^\sim(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\underline{t} + \underline{x})\, e^{-i\lambda t}\, d\underline{x}\, dt$, og det ønskede fås af (3.5). Q.e.d.

<u>Korollar 3.18.</u> Lad $f \in C_0^{\natural}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty$ da gælder

$$f(0) = \frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty f^\sim(\lambda)\,\lambda^{n-1}\,d\lambda .$$

<u>Bevis</u>: Ifølge lemma 3.17 er $F_f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f^\sim(\lambda)\cos(\lambda t)\,d\lambda$

Antag først <u>n ulige</u>, da er ifølge (3.8) og (3.6) og (3.7) med $n = 2\nu + 1$:

$$f(0) = \pi^{-\nu}\left(\frac{d}{dt^2}\right)^{\nu} F_f(0) = \frac{(-1)^{\nu}\pi^{-\nu}}{2^{\nu}(2\nu-1)\cdots 3}\left(\frac{d^{2\nu}}{dt^{2\nu}}F_f\right)(0),$$

men $\frac{d^{2\nu}}{dt^{2\nu}}F_f(0) = \frac{(-1)^{\nu}}{\pi}\int_0^{\infty} f^{\sim}(\lambda)\,\lambda^{2\nu}\,d\lambda$, hvoraf Korollaret følger for n ulige.

Antag nu n lige, $n = 2\nu$. Ved at benytte (3.8), (3.6)′ og (3.7) fås tilsvarende, idet:

$$\int_0^{\infty}\left(\left(\frac{d}{dt^2}\right)^{\nu}F_f\right)(\tau^{\frac{1}{2}})\,\tau^{-\frac{1}{2}}\,d\tau = \frac{(-1)^{\nu}2}{2^{\nu}\pi}\int_0^{\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1\int_0^{\infty} f^{\sim}(\lambda)\,\lambda^{2\nu}\cdot$$

$$\cdot\cos(\lambda\tau u_1\cdots u_n)\,u_1^{2\nu-2}\cdots u_{n-1}^{2}\,d\lambda\,du_1\cdots du_n\,d\tau =$$

$$\frac{(-1)^{\nu}}{2^{\nu}}\int_0^1\cdots\int_0^1\int_0^{\infty} f^{\sim}(\lambda)\,\lambda^{2\nu}\left[\int_0^{\infty}\frac{\sin(\lambda\tau u_1\cdots u_{n-1})}{\lambda\tau u_1\cdots u_{n-1}}\,d\tau\right]d\lambda\,u_1^{2\nu-1}\cdots u_{n-1}^{2}\,d\underline{u}$$

og $\int_0^{\infty}\frac{\sin\gamma t}{\gamma t}\,dt = \frac{\pi}{2\gamma}$ for $\gamma > 0$.

Q.e.d.

Af dette korollar følger nu beviset for sætning 3.12 på sædvanlig måde, (se f. eks. beviset for sætn. 2.23).

I det følgende skitseres en tredie type bevis for sætning 3.12. Udgangspunktet er at Laplace operatoren på radiale funktioner har form (lemma 3.6):

$$T:\quad \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{d}{dt} = \delta^{-1}(t)\frac{d}{dt}\left(\delta(t)\frac{d}{dt}\right) \tag{3.9}$$

og γ er et positivt reelt tal, og $\delta(t) = t^{\gamma}$, $t \in\,]0,\infty[$.
Man kan vise, at T bliver en selvadjungeret

(ubegrænset) operator på Hilbertrummet $H = L^2(]0,\infty[;\ \delta(t)dt)$ med definitionsområde:
for $\gamma \geq 3$:

$$D_T = \{u \in H \mid u \text{ og } u' \text{ er absolut kontinuerte og } T(u) \in H\},$$

for $0 < \gamma < 3$ er definitionen af D_T lidt mere kompliceret, idet der også skal gælde en passende randbetingelse for u i 0. I det følgende antages $\gamma \geq 3$, for nemhedsskyld.

Ifølge spektralsætningen findes en familie af projektioner $E_\mu \in L(H)$, $\mu \in sp(T)$ således at

$$T = \int_{sp(T)} \mu \, dE_\mu \tag{3.10}$$

, d.v.s

at for alle $x, y \in H$ gælder

$$(Tx|y) = \int_{sp(T)} \mu \, d(E_\mu x|y). \tag{3.11}$$

For en anden ordens differentialoperator som T kan denne "spektraloplø sning" beskrives meget mere præcist. Sætning 3.12 er en sådan beskrivelse:

Lad $f, g \in C_0^\infty(]0,\infty[) \subset H$, der gælder

$(Tf)^\sim(\lambda) = -\lambda^2 f^\sim(\lambda)$, dette ses af inversionsformlen:

$$(Tf)(x) = \frac{k_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty f^\sim(\lambda)(T\varphi_\lambda)(x)\, \lambda^{n-1}\, d\lambda,$$

idet $T\varphi_\lambda = -\lambda^2 \varphi_\lambda$.

Heraf fås :

$$(3.12)\quad (Tf\,|\,g) = ((Tf)^{\sim}\,|\,g^{\sim}) = \frac{k_n}{(2\pi)^n}\int_0^{\infty} -\lambda^2 f^{\sim}(\lambda)\,\overline{g^{\sim}(\lambda)}\,\lambda^{n-1}\,d\lambda ,$$

hvilket er formel (3.11) explicit ($\mu = -\lambda^2$).

Der findes en meget veludviklet teori, hvorved spektralopløsningen for en 2. ordens differential operator kan beskrives noget i stil med (3.12).
Historisk tilskrives denne teori :
J. Sturm, J. Liouville, H. Weyl, M. Stone, E. Titchmarsh og K. Kodaira.
En god reference er :
Dunford - Schwartz : "Linear Operators, Part II" Kapitel XIII.
Lettere tilgængelig er
K. Jörgens : "Spectral theory of second order ordinary differential operators" Forelæsningsnoter Matematisk Institut, Århus Universitet.

Metoden er, meget groft beskrevet, :

1) Undersøg eigenfunktionernes opførsel i de to singulariteter 0 og ∞.

2) Vælg to "særlig pæne" eigenfunktioner $\sigma^0(t,\mu)$ og $\sigma^\infty(t,\mu)$ definer :

$$(3.13)\quad K(t,s;\mu) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^\infty(t,\mu)\,\sigma^0(s,\mu)}{W(\sigma^0(\cdot,\mu),\sigma^\infty(\cdot,\mu))} & s<t \\[2ex] \dfrac{\sigma^0(t,\mu)\,\sigma^\infty(s,\mu)}{W(\sigma^0(\cdot,\mu),\sigma^\infty(\cdot,\mu))} & s>t \end{cases}$$

For $\mathrm{Im}\,\mu \neq 0$ er resolventen $(T-\mu I)^{-1} = R(\mu; T)$ begrænset operator givet ved: $f \in H$

$$((T-\mu I)^{-1} f)(t) = \int_0^\infty f(s)\, K(t,s;\mu)\, \delta(s)\, ds \,. \tag{3.14}$$

[$W(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ er Wronski determinanten:

$$W(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = -\delta(t)\left(\mathcal{G}_1(t)\, \mathcal{G}_2'(t) - \mathcal{G}_1'(t)\, \mathcal{G}_2(t)\right),$$

der let ses at være uafhængig af t, når $\mathcal{G}_1$ og $\mathcal{G}_2$ er eigenfunktioner med samme eigenværdi].

3) Lad nu $]\mu_1, \mu_2[$ være et åbent interval i $\mathbb{R}$. Spektralprojektionen svarende til dette interval er givet ved for $f \in H$

$$E(]\mu_1,\mu_2[) f(t) = (E_{\mu_2}^{-} - E_{\mu_1}^{+}) f(t) =$$

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu_1+\delta}^{\mu_2-\delta} [R(\mu - i\varepsilon; T) - R(\mu + i\varepsilon; T)] f(t)\, d\mu . \tag{3.15}$$

Ved at anvende dette er det i mange tilfælde muligt at opnå en isomorfi af Hilbertrummet H på et Hilbertrum $L^2(-\infty, \infty;\, d\rho(\mu))$, hvor $d\rho$ er et mål på $]-\infty, \infty[$, Lad os betegne den: $f \to f^\sim$, således at

$$(E(]\mu_1,\mu_2[) f)^\sim = f^\sim \cdot \chi_{]\mu_1,\mu_2[} \,, \tag{3.16}$$

hvor χ er den karakteristiske funktion og således at

$$(Tf)^\sim = \mu f^\sim \qquad \text{for} \quad f \in D_T .$$

<u>Øvelse 3.19.</u> Bevis følgende, der kan illustrerer formlerne (3.15) og (3.16):

Lad
$$f(\delta,\varepsilon,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a+\delta}^{b-\delta}\left[\frac{1}{\mu-\varepsilon i-\lambda}-\frac{1}{\mu+\varepsilon i-\lambda}\right]d\mu$$

da gælder:

$$\chi_{]a,b[}(\lambda)=\lim_{\delta\to 0}\ \lim_{\varepsilon\to 0} f(\delta,\varepsilon,\lambda).$$

—//—

Vi skal nu anvende punkterne 1), 2) og 3) på den specielle operator $\mathcal{T}$ i (3.9).

Lad $\varphi(t)=\varphi(t,\lambda)$ være en løsning til

(3.17) $$(\mathcal{T}+\lambda^2)\varphi=0$$

substituer heri $\varphi(t,\lambda)=e^{-it\lambda}g(2it\lambda)$, ved nogle regningen fås da med $z=2it\lambda$,

(3.18) $$z\,g''(z)+(\gamma-z)g'(z)-\frac{\gamma}{2}g(z)=0$$

Hvilket er ligningen for de "Confluente Hypergeometriske" funktioner, se f.eks

Erdélyi m.fl. "Higher transcendental functions" vol. 1, Chap. VI.:

(3.19) $$\left(x\frac{d^2}{dx^2}+(c-x)\frac{d}{dx}-a\right)g=0$$

Vi får brug for nogle egenskaber ved

nogle forskellige løsninger til (3.19); antag at $c \neq 0, -1, -2, \dots$:

$$(3.20) \quad \phi(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

er løsning og har følgende integralformel:

$$(3.21) \quad \phi(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xu} u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} du$$

(her er $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$).

Ved et tilsvarende integraludtryk kan vi definere en anden løsning:

$$(3.22) \quad \psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt$$

i denne definition er forudsat $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} x > 0$, men $\psi(a, c; x)$ er veldefineret for $x \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.

$$(3.23) \quad e^x \psi(c-a, c; -x)$$ er også løsning, og

der gælder

$$(3.24) \quad \frac{d}{dx}\psi(a, c; x) = (-1)\, a\, \psi(a+1, c+1, x)$$ og

$$(3.25) \quad \psi(a, c; x) = x^{-a} + O(|x|^{-a-1})$$

for $x \to \infty$ i området $-\frac{3}{2}\pi < \arg x < \frac{3}{2}\pi$.

$$(3.26) \quad \phi(a,c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} e^{i\varepsilon a\pi} \psi(a, c; x) + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^{i\varepsilon(a-c)\pi} e^x \psi(c-a, c; -x),$$

hvor $\varepsilon = \text{sign}.\,\text{Im}(x)$.

Ved hjælp af ϕ og ψ vælger vi nogle løsninger til (3.17): $t \in]0,\infty[$

(3.27)
$$\varphi_\lambda(t) = e^{-i\lambda t}\,\Phi\left(\frac{\gamma}{2},\gamma;2i\lambda t\right)$$
$$\phi_\lambda(t) = (-2i\lambda)^{\frac{\gamma}{2}}\, e^{i\lambda t}\,\psi\left(\frac{\gamma}{2},\gamma;-2i\lambda t\right),$$

φ_λ er veldefineret for alle λ og $\varphi_\lambda = \varphi_{-\lambda}$. (hvis $\gamma = n-1$ er φ_λ den samme function som i Korollar 3.8).
ϕ_λ er veldefineret for $\lambda \notin -i[0,\infty[$, og hvis $\lambda \notin i\mathbb{R}$ er både ϕ_λ og $\phi_{-\lambda}$ løsning til (3.17), og ifølge (3.26) fås, idet vi vælger $\arg(\lambda) \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

(3.28)
$$\varphi_\lambda(t) = c(\lambda)\,\phi_\lambda(t) + c(-\lambda)\,\phi_{-\lambda}(t), \text{ hvor}$$
$$c(\lambda) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})}\cdot(2i\lambda)^{-\frac{\gamma}{2}}.$$

(Formel (3.28) kan betragtes som en generalisering af $\cos\lambda t = \frac{1}{2}e^{i\lambda t} + \frac{1}{2}e^{-i\lambda t}$.)

For fast λ fås af (3.25) og (3.24), $t \to \infty$

(3.29)
$$\phi_\lambda(t) = t^{-\frac{\gamma}{2}}e^{i\lambda t} + O\left(t^{-\frac{\gamma}{2}-1}\right), \text{ og}$$
$$\phi_\lambda'(t) = i\lambda\, t^{-\frac{\gamma}{2}}e^{i\lambda t} + O\left(t^{-\frac{\gamma}{2}-1}\right).$$

Vi skal nu vælge os to "pæne" løsninger $\sigma^0(t,\mu)$ og $\sigma^\infty(t,\mu)$, hvor $\mu = -\lambda^2$ er eigenværdien i (3.17). Kravet er at σ^0 skal tilhører L^2 m.h.t. målet $\delta(t)dt$ i en omegn af 0, og tilsvarende for σ^∞

i en omegn af ∞. Dette krav skal dog kun være opfyldt for $\mathrm{Im}(\mu) \neq 0$. Idet vi har forudsat $\gamma \geq 3$, kan man vise, at dette krav fastlægger σ^0 og σ^∞ éntydigt, nemlig:

$$\sigma^0(t,\mu) = \varphi_\lambda(t)$$

$$\sigma^\infty(t,\mu) = \Phi_\lambda(t)$$

, hvor λ er valgt så $-\lambda^2 = \mu$, og $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$. (At disse løsningen opfylder kravet, ses let af (3.29), (3.27) og (3.20)).

For $\mu > 0$ (el. $\lambda = i\eta$, $\eta > 0$) er kravene også opfyldt, men for $\mu < 0$ (el. λ reel) vil hverken Φ_λ eller $\Phi_{-\lambda}$ opfylde kravet i ∞.

Vi får:

(3.30) $$W(\varphi_\lambda, \Phi_\lambda) = -t^\gamma\left(\Phi_\lambda'(t)\varphi_\lambda(t) - \varphi_\lambda'(t)\Phi_\lambda(t)\right) =$$

$$\lim_{t\to\infty} -t^\gamma\left(\Phi_\lambda'(t)\varphi_\lambda(t) - \varphi_\lambda'(t)\Phi_\lambda(t)\right) = -2i\lambda c(-\lambda).$$

Her er benyttet (3.28) og (3.29).

Dette viser specielt, at for $\lambda \notin -i[0,\infty[$ er φ_λ og Φ_λ lineært uafhængige, idet $-2i\lambda c(-\lambda) \neq 0$.

af (3.13) fås

(3.31) $$K(t,s;\mu) = \begin{cases} \dfrac{\Phi_\lambda(t)\,\varphi_\lambda(s)}{-2i\lambda c(-\lambda)}, & s < t \\[2ex] \dfrac{\varphi_\lambda(t)\,\Phi_\lambda(s)}{-2i\lambda c(-\lambda)}, & s > t \end{cases}$$

Det er forholdsvis klart at

(3.32) $$\overline{\varphi_\lambda(t)} = \varphi_{-\bar\lambda}(t) \quad \text{og} \quad \overline{\Phi_\lambda(t)} = \Phi_{-\bar\lambda}(t)$$

heraf ses at for $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ er

(3.33) $$\overline{K(t,s;\mu)} = K(t,s;\bar\mu)$$

og for $\mu < 0$ eller $\lambda \in \mathbb{R}^+$ er $K(t,s;\mu)$ ikke veldefineret, idet λ og $-\lambda$ begge kan bruges i (3.31) til at definerer $K(t,s;\mu)$, og de to værdier er indbyrdes konjungerede. Desuden gælder med

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} K(t,s;\mu+i\varepsilon) = K(t,s;\text{"}-\lambda\text{"}) \quad \text{og}$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} K(t,s;\mu-i\varepsilon) = K(t,s;\text{"}+\lambda\text{"}) .$$

Altså er for $\mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, med enten $\mathrm{Im}\,\lambda>0$ eller $\lambda>0$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left[K(t,s;\mu-i\varepsilon) - K(t,s;\mu+i\varepsilon)\right] = \mathrm{Im}\,K(t,s;\text{"}\lambda\text{"}),$$

desuden er grænsefunktionen $\mathrm{Im}\,K(t,s;\text{"}\lambda\text{"})$ kontinuert i λ. Af dette kan man se hvis (3.14) indsættes i (3.15) og $0 \notin]\mu_1,\mu_2[$, så kan $\lim_{\varepsilon\to 0}$ og $\lim_{\delta\to 0}$ "flyttes ind", og vi får:

(3.34) $$E(]\mu_1,\mu_2[)f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu_1}^{\mu_2}\int_0^\infty 2\,\mathrm{Im}\,K(t,s;\text{"}\lambda\text{"})\,f(s)\,\delta(s)\,ds\,d\mu,$$

forudsat f.eks. her at $f \in C_0^\infty(]0,\infty[)$.

Hvis $0 < \mu_1 < \mu_2 < \infty$ er $K(t,s;"\lambda")$ reel ifølge (3.33), hvoraf $E(]\mu_1,\mu_2[) = 0$.

For $-\infty < \mu_1 < \mu_2 < 0$ el $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < \infty$ fås $s < t$

$$2 \operatorname{Im} K(t,s;"\lambda") = \varphi_\lambda(s)\left[\frac{1}{-2i\lambda c(-\lambda)}\phi_\lambda(t) - \frac{1}{2i\lambda c(\lambda)}\phi_{-\lambda}(t)\right] =$$

$$\frac{-1}{2i\lambda\, c(\lambda)c(-\lambda)}\varphi_\lambda(s)\,\varphi_\lambda(t),$$ (og tilsvarende for $t<s$),

ifølge (3.28). Indsættes dette i (3.34) fås det ønskede:

$$E(]\mu_1,\mu_2[)f(t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\lambda_2}^{\lambda_1}\int_0^\infty f(s)\,\varphi_\lambda(s)\,\delta(s)\,ds\;\varphi_\lambda(t)\frac{1}{|c(\lambda)|^2}\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\lambda_2}^{\lambda_1} f^\sim(\lambda)\,\varphi_\lambda(t)\frac{1}{|c(\lambda)|^2}\,d\lambda.$$

Hvor $f^\sim(\lambda) = \int_0^\infty f(s)\,\varphi_\lambda(s)\,\delta(s)\,ds$.

Bemærk endelig at $\mu = 0$ ikke er eigenværdi, idet Løsningerne til $\tau\varphi = 0$ let ses at være linear kombinationer af $\varphi_1 \equiv 1$ og $\varphi_2(t) = t^{1-\gamma}$, og $\varphi_1, \varphi_2 \notin L^2(0,\infty;\delta(t)dt)$.

Heraf fås endelig: $E_{-\infty} = 0$ og $E_0 = I$, hvoraf for $f \in H = L^2(\delta(t)dt)$:

$$f(t) = (E_0 f)(t) = (E(-\infty,0)f)(t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty f^\sim(\lambda)\,\varphi_\lambda(t)\frac{1}{|c(\lambda)|^2}\,d\lambda,$$

Her skal lighedstegnene opfattes i $L^2(\delta(t)dt)$.

§4. Invariante differential operatorer og kuglefunktioner.

I denne paragraf og i den følgende, skal vi stort set omtale sætninger uden at bevise dem. En af de ting, der gerne skulle fremgå af det følgende, er at det eksempel, der er gennemgået i §3, er typisk i mange henseender. Dette gælder især sætn. 3.7, Korollar 3.8, Lemma 3.17. Anvendelsen af spektralteori til at finde Plancherelmålet $\mu^{\natural}$, synes kun at kunne anvendes i de tilfælde, hvor rang$(G, K) = 1$ (se defn. 1.37).

—//—

Lad G være en sammenhængende Matrix gruppe med Lie algebra $\mathfrak{g}$. Lad $x \in G$ afbildningen $Ad(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ defineret ved $Ad(x)X = xXx^{-1}$ er en automorfi af $\mathfrak{g}$.

Definition 4.1.
Lad nu H være en afsluttet undergruppe i G, og $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, Lie algebraen for H. Antag at $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, hvor $\mathfrak{m}$ er et vektor underrum i $\mathfrak{g}$, og $\mathfrak{h}$ og $\mathfrak{m}$ danner direkte sum, antag desuden at $Ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Vi kan kalde G, H svagt reduktivt.

Eksempel 4.2. Lad G, K være et reduktivt par, G sammenhængende. Da er G, K svagt reduktivt.
Bevis: vælg $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ $x \in K$ og $X \in \mathfrak{p}$ $t \in \mathbb{R}$, da gælder

$$\exp(t\sigma(Ad(x)X)) = \sigma(x)\exp(t\sigma(X))\sigma(x^{-1}) =$$
$$x\exp(-tX)x^{-1} = \exp(-t\,Ad(x)X),$$

heraf ses at $\sigma(\mathrm{Ad}(x)X) = -\mathrm{Ad}(x)X$, hvorfor $\mathrm{Ad}(x)X \in \mathfrak{p}$,

Q.e.d.

Lad $S(\mathfrak{m})$ betegne polynomiums algebraen over $\mathfrak{m}$, med reelle koefficienter, d.v.s. at $P \in S(\mathfrak{m})$ er en afbildning $P : \mathfrak{m} \to \mathbb{R}$, hvor P kan skrives som en endelig linearkombination af endelige produkter af linear former på $\mathfrak{m}$. (Man kan også vælge basis $X_1, \cdots, X_s$ for $\mathfrak{m}$ og betragte $S(\mathfrak{m})$ som $\mathbb{R}[X_1, \cdots, X_s]$, polynomiumsringen i s variable).

Lad $I(\mathfrak{m})$ være delalgebraen bestående af H-invariante polynomier d.v.s.

$$I(\mathfrak{m}) = \left\{ P \in S(\mathfrak{m}) \;\middle|\; \begin{array}{l} P(\mathrm{Ad}(x)X) = P(X) \text{ for alle} \\ x \in H \text{ og } X \in \mathfrak{m} \end{array} \right\}.$$

<u>Eksempel 4.3.</u> $G = FL(n, \mathbb{R})$, $K = SO(n)$,

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \underline{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Lad $T \in SO(n)$, det ses at $\mathrm{Ad}(T)\underline{x} = T\underline{x}$ da $\underline{x} \in \mathfrak{m}$. Antag nu $P \in I(\mathfrak{m})$. For $\underline{x} \in \mathfrak{m}$ findes $T_1, T_2 \in SO(n)$ således at $T_1\underline{x} = (0, \cdots, 0, \|\underline{x}\|)$, $T_2\underline{x} = (0, \cdots, 0, -\|x\|)$. Derfor gælder

$$P(\underline{x}) = P(\mathrm{Ad}(T_i)\underline{x}) = P(0, \cdots, 0, \|x\|) = P(0, \cdots, 0, -\|x\|),$$

hvorfra $P(\underline{x})$ er et lige polynomium i $\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ og dermed af form

$$P = \sum_{k=0}^{N} a_k P_0^k, \quad \text{hvor } P_0(\underline{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

d.v.s. at $I(\mathfrak{m})$ er frembragt af ét element P_0.

<u>Eksempel 4.4.</u> G vilkårlig sammenhængende matrix gruppe. $H = \{e\}$ $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$. Så er $I(\mathfrak{m}) = S(\mathfrak{g})$.

<u>Definition 4.5.</u> Lad G være en matrixgruppe og H en afsluttet undergruppe. Lad $\pi : G \to G/H$ være den kanoniske afbildning. Man kan udstyre G/H med en C^∞-struktur, således at $f \in C^\infty(G/H)$ hvis og kun hvis $f \circ \pi \in C^\infty(G)$.
Lad $D(G/H)$ betegne mængden af differential operatorer på G/H, der er invariante under G, d.v.s. for $f \in C^\infty(G/H)$ og $g \in G$:

$$D(f^g) = (Df)^g.$$

<u>Sætning 4.6.</u> Lad G, H være et svagt reduktivt par af matrixgrupper.
Der findes en bijektiv lineær afbildning $Q \to D_Q$ af $I(\mathfrak{m})$ på $D(G/H)$ således at for $f \in C^\infty(G/H)$:

$$D_Q f(\pi(g)) = \left[Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) f \circ \pi(g \exp(x_1 X_1 + \cdots + x_s X_s))\right](0),$$

hvor $X_1, \cdots, X_s$ er basis for $\mathfrak{m}$, og $Q(x_1, \cdots, x_s)$ opfattes som polynomium i de tilsvarende koordinater.
Hvis $P_1, P_2 \in I(\mathfrak{m})$ findes $Q \in I(\mathfrak{m})$ således at $\operatorname{grad}(Q) < \operatorname{grad} P_1 + \operatorname{grad} P_2$ og

$$D_{P_1 P_2} = D_{P_1} D_{P_2} + D_Q .$$

<u>Bevis:</u> Se S. Helgasons bog "Diff. Geom. and Symmetric Spaces", kap. X, sætn. 2.7.

<u>Korollar 4.7.</u> Hvis $I(\mathfrak{m})$ er genereret af et enkelt element P, så er ethvert element $D \in D(G/H)$ af form

$$D = \sum_{k=0}^{N} a_k D_P^k \,, \quad \text{med} \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

<u>Bevis</u>: Lad $D = D_Q$, $Q \in I(\mathfrak{m})$ så er

$$Q = \sum_{k=0}^{N} b_k P^k \quad , \text{antag } b_N \neq 0 \text{ , da gælder}$$

ifølge sætningen $D_Q = b_N D_P^N + D_{Q_1}$, hvor $\operatorname{grad}(Q_1) < N \cdot \operatorname{grad}(P)$. Resultatet følger nu let ved induktion. Q.e.d.

<u>Øvelse 4.8.</u> Lad P_0 være som i eks. 4.3. Vis at $D_{P_0} = \Delta$, hvor Δ er Laplace operatoren i $\mathbb{R}^n$.

Benyt, at både D_{P_0} og Δ er invariante under $FL(n,\mathbb{R})$, hvorfor det er nok at vise for $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ at

$$D_{P_0} f(\underline{0}) = \Delta f(\underline{0}).$$

<u>Eksempel 4.9.</u> $G = SO_0(p,q)$, $H = SO_0(p,q-1)$, $p \geq 0$, $q > 0$

$$\mathfrak{m} : \left\{ \begin{pmatrix} & & & & & & x_1 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & 0 & & & x_{p+1} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & x_{p+q-1} \\ x_1, & \cdots & x_p & -x_{p+1} & \cdots & -x_{p+q-1} & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \underline{x} \in \mathbb{R}^{p+q-1} \right\}$$

Det ses at for $T \in H$ og $\underline{x} \in \mathfrak{m}$ at $Ad(T)\underline{x} = T\underline{x}$.
Antag nu at $P \in I(\mathfrak{m})$.

Lad $\underline{X} \in \mathfrak{m}$, $\|\underline{X}\|_{p,q-1} = |X_1^2 + \cdots + X_p^2 - (X_{p+1}^2 + \cdots + X_{p+q-1}^2)|^{\frac{1}{2}}$, antag $X_1^2 + \cdots + X_p^2 < X_{p+1}^2 + \cdots + X_{p+q-1}^2$ (hvis $q-1 > 0$). Der findes T_1 og $T_2 \in H$ således at

$$T_1 \underline{X} = (0, \cdots, 0, \|\underline{X}\|_{p,q-1}) \text{ og } T_2 \underline{X} = (0, \cdots, 0, -\|\underline{X}\|_{p,q-1}).$$

Derfor gælder

$$P(\underline{X}) = P(Ad(T_i)\underline{X}) = P(0, \cdots, 0, \|\underline{X}\|_{p,q-1}) = P(0, \cdots, 0, -\|\underline{X}\|_{p,q-1}),$$

hvorfor $P(\underline{X})$ er et lige polynomium i $\|X\|_{p,q-1}$ og dermed har form

$$P = \sum_{k=0}^{N} a_k P_0^k, \text{ hvor } P_0 = X_1^2 + \cdots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \cdots - X_{p+q-1}^2,$$

d.v.s. at $I(\mathfrak{m})$ er frembragt af P_0, hvorfor $D(G/H)$ er frembragt af D_{P_0}.

(Vi har kun regnet med $\underline{X}$ i en delmængde af $\mathfrak{m}$, men da dette er en åben delmængde af $\mathfrak{m}$ er P fuldstændig bestemt ved sin restriktion til dette område.).

<u>Sætning 4.10.</u> For et reduktivt par G, K er $D(G/K)$ kommutativ.
(Se Helgasons bog, X, sætn. 2.9).

Da således $D(G/K)$ udgør en kommutativ familie af operatorer, har det en vis mening, at forestille sig, at disse har "mange" fælles eigenfunktioner. Man kan vise følgende sætning, der indeholder sætning 3.7 som et specialtilfælde, (for at indse dette benyttes øvelse 4.8). Beviset går iøvrigt i princippet som beviset for sætn. 3.7; det kan findes i Helgasons bog X, § 3.

Sætning 4.11. Lad G, K være således at $L^{\natural}(G;K)$ er kommutativ.[1)] Lad $\varphi \in C^{\infty}(G)$, og antag at $\varphi(e) = 1$ og φ er biinvariant under K, da gælder: φ er en kuglefunktion, hvis og kun hvis

$$D\varphi = \lambda_D \varphi \quad \text{for alle } D \in D(G/K),$$

hvor $\lambda_D \in \mathbb{C}$.

[1) og G sammenhængende.]

§ 5. Iwasawa decomposition.

I denne paragraf betragter vi kun par G, K af "ikke-kompakt" type, d.v.s par der opfylder forudsætningerne i sætning 1.31., specielt er altså G, K et reduktivt par, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ og afbildningen $(k, X) \longrightarrow k\exp(X)$ er en homeomorfi af $K \times \mathfrak{p}$ på G. Hvis $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ er max. kommutativ og $A = \exp(\mathfrak{a})$ er ifølge sætning 1.36 $G = KAK$, og desuden (iflg. beviset for samme sætn.) findes et $H' \in \mathfrak{a}$ således at

(5.1) $$X \in \mathfrak{p} \text{ og } [X, H'] = 0 \quad \Longrightarrow \quad X \in \mathfrak{a}.$$

Lad $\mathfrak{a}^*$ betegne det duale vektorrum til $\mathfrak{a}$. For $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ defineres $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ ved

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \text{ for alle } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Ved at benytte definition 1.4 (iii) ses at

(5.2) $$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

<u>Definition 5.1.</u> Mængden
$$\Sigma = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\},\ \alpha \neq 0\}$$
kaldes <u>rodsystemet</u> for $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ (m.h.t $\mathfrak{a}$). Med m_α betegnes dimensionen af <u>rodrummet</u> $\mathfrak{g}_\alpha$.

Det ses let af definitionen af $\mathfrak{g}_\alpha$ at $\sigma(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$, altså er $\alpha \in \Sigma$ hvis og kun hvis $-\alpha \in \Sigma$, desuden er $m_\alpha = m_{-\alpha}$.

Man kan vise at $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$, d.v.s. at for alle $H \in \mathfrak{a}$ er $\mathfrak{g}$ her skrevet som en direkte sum af eigenrum, med reelle eigenværdier, for afbildningen

$$\mathrm{ad}(H) : X \to [H, X] . \tag{5.3}$$

<u>Lemma 5.2.</u> Vælg $H' \in \mathfrak{a}$ således at (5.1) er opfyldt, da er $\alpha(H') \neq 0$ for alle $\alpha \in \Sigma$.

<u>Bevis:</u> Lad $\alpha \in \Sigma$ og antag $\alpha(H') = 0$. Vælg $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X \neq 0$, da gælder
$$[H', X - \sigma(X)] = \alpha(H')X - (-\alpha(H'))\sigma(X) = 0,$$

men da $X - \sigma(X) \in \mathfrak{p}$ slutter vi af (5.1) at $X - \sigma(X) \in \mathfrak{a}$, altså at for alle $H \in \mathfrak{a}$
$$0 = [H, X - \sigma(X)] = \alpha(H)X - (-\alpha(H))\sigma(X) = \alpha(H)(X + \sigma(X)).$$

Da $\alpha \in \Sigma$ findes $H \in \mathfrak{a}$ således at $\alpha(H) \neq 0$, men så er $X = -\sigma(X)$, hvilket er i modstrid med at $X \neq 0$, idet X og $\sigma(X)$ er eigenvektorer for $ad(H)$ med forskellige eigenværdier. Q.e.d.

Definition 5.3. Vælg H', der opfylder (5.1). Ved de positive rødder forstås

$$\Sigma^+ = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(H') > 0\}.$$

Det er klart at $\Sigma = \Sigma^+ \cup -\Sigma^+$ og at for $\alpha, \beta \in \Sigma^+$ er enten $\alpha+\beta \in \Sigma^+$ eller $\alpha+\beta \notin \Sigma$.

Lad $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$.

Lemma 5.4 $\mathfrak{n}$ og $\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ er delalgebraer i $\mathfrak{g}$.

Bevis: Dette følger straks af (5.2). Q.e.d.

Lad N være den analytiske undergruppe i G svarende til $\mathfrak{n}$. Man kan bevise, at $X \to \exp(X)$ er bijektiv mellem $\mathfrak{n}$ og N. At exp er bijektiv mellem $\mathfrak{a}$ og A følger af sætning 1.31.

Man kan forholdsvis let vise at for $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ og $H \in \mathfrak{a}$ gælder

$$\exp(H)\, X_\alpha \exp(-H) = e^{\alpha(H)} X_\alpha ,$$

og heraf slutte at for $x \in A$ og $y \in N$ gælder $xyx^{-1} \in N$. Heraf sluttes, at $AN = \{xy \mid x \in A, y \in N\}$ er den analytiske undergruppe svarende til $\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$.

Der gælder nu følgende sætning (se Helgasons bog, VI, sætn. 5.1):

Sætning 5.5. Afbildningen

$$(k, a, n) \longrightarrow kan$$

er en diffeomorfi af $K \times A \times N$ på G.

Dette er den såkaldte Iwasawa decomposition af G. Kort skriver vi $G = KAN$, hvilket lige så godt kan skrives $G = KNA = ANK$ etc.

For $x \in G$ betegner vi med $H(x)$ elementet i $\mathfrak{a}$ bestemt ved $x = k \exp(H(x)) n$, hvor $k \in K$ og $n \in N$.

Lad $\rho \in \mathfrak{a}^*$ være "den halve sum" af rødderne d.v.s for $H \in \mathfrak{a}$

(5.4) $$\rho(H) = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \tfrac{1}{2} m_\alpha \cdot \alpha(H)$$

Vi noterer os følgende formler for $f \in C_0(G)$ idet vi forudsætter at Haar-målene dk da dn og dH på K, A, N og $\mathfrak{a}$, (dH er Lebesque-målet på vektorrummet $\mathfrak{a}$) er passende normaliserede:

(5.5) $$\int_G f(g)\,dg = \int_{K \times A \times N} f(kan)\, e^{2\rho(H(a))}\, dk\, da\, dn =$$

$$= \int_{A \times N \times K} f(ank)\, da\, dn\, dk$$

(Helgasons bog, X, prop. 1.11 og 1.12).

(5.6) $$\int_G f(g)\,dg = \int_{K\times\mathfrak{a}\times K} f(k_1 \exp(H) k_2)\,\delta(H)\,dk_1\,dH\,dk_2,$$

hvor $\delta(H) = \prod_{\alpha\in\Sigma^+} [\operatorname{sh}\alpha(H)]^{m_\alpha}$,

(Helgason, X, prop. 1.17).

For $\nu \in \mathfrak{a}^* + i\,\mathfrak{a}^*$ og alle $D \in D(G/K)$ gælder:

(5.7) $$D e^{\nu(H(x))} = \mu_D e^{\nu(H(x))}$$

hvor $\mu_D \in \mathbb{C}$, (Helgason, X, prop. 6.7.).

Vi er nu istand til at finde samtlige kuglefunktioner på G m.h.t K:

<u>Sætning 5.6.</u> Enhver kuglefunktion på G m.h.t. K er givet på følgende måde:

(5.8) $$\varphi_\lambda(x) = \int_K e^{(i\lambda-\rho)(H(xk))}\,dk,$$

hvor $\lambda \in \mathfrak{a}^* + i\,\mathfrak{a}^*$. Desuden gælder, at $\varphi_\lambda = \varphi_{\lambda'}$, hvis og kun hvis der findes $k \in K$ således at $kHk^{-1} \in \mathfrak{a}$ og $\lambda(H) = \lambda'(kHk^{-1})$ for alle $H \in \mathfrak{a}$.

Beviset skyldes Harish-Chandra, idéen er at bevise sætningen ud fra sætning 4.11 og formel (5.7) på samme måde som korollar 3.8 følger af sætning 3.7.

Der er nu problemet , at finde ud af hvilke φ_λ, der er positivt definitte. Dette er kun løst for visse par G, K. Derimod er Plancherel målet $\mu^\natural$ (se sætn. 2.23) kendt helt explicit.

<u>Bemærkning 5.7</u> $FL(n,\mathbb{R})$ er et "degenereret" tilfælde i forhold til sætning 5.5. Enten vælger vi

$$\mathfrak{a} = \left\{ \left(0 \quad \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{matrix} \right) \;\middle|\; \underline{x} \in \mathbb{R}^n \right\} \quad \text{og} \quad \mathfrak{n} = \{\underline{0}\}$$

og får "Iwasawa"-decomposition $G = KA$.

Eller vi vælger

$$\mathfrak{a} = \left\{ \left(0 \quad \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t \\ 0 \end{matrix} \right) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \text{ og } \mathfrak{n} = \left\{ \left(0 \quad \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right) \;\middle|\; \underline{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \right\}$$

og får "Iwasawa"-decomposition $G = KAN$.

Den sidste form benyttede vi i definition 3.14 til at indføre Radon transformationen $f \to F_f$.

<u>Definition 5.8.</u> Lad $f \in C_0^\infty(G) \cap C^\natural(G;K)$.
For $\lambda \in \mathfrak{a}^* + i\mathfrak{a}^*$ defineres <u>Fourier-transformation</u> $f^\sim(\lambda)$ ved

(5.9) $$f^\sim(\lambda) = \int_G f(x)\, \varphi_{-\lambda}(x)\, dx.$$

For $a \in A$ defineres <u>Radon-transformationen</u> $F_f(a)$ ved

(5.10) $$F_f(a) = e^{\rho(H(a))} \int_N f(an)\, dn$$

Bemærk at A er isomorf med $(\mathbb{R}^s, +)$, hvor $s = \dim(\mathfrak{a})$, dermed er sædvanlig Fourier transformation $f \to f^\wedge$ veldefineret på A:

(5.11) $$f^\wedge(\lambda) = \int_A f(a)\, e^{-i\lambda(H(a))} da = \int_{\mathfrak{a}} f(\exp H)\, e^{-i\lambda(H)} dH.$$

<u>Lemma 5.9.</u> Lad $f \in C_0^\infty(G) \cap C^\natural$ og $\lambda \in \mathfrak{a}^* + i\mathfrak{a}^*$ da gælder:

$$f^\sim(\lambda) = \int_G f(x)\, e^{(-i\lambda - \rho)(H(x))} dx =$$

(5.12) $$= \int_A f(\exp H)\, \varphi_{-\lambda}(\exp H)\, \delta(H)\, dH$$

(5.13) $$= F_f^\wedge(\lambda).$$

<u>Bevis</u>: $$f^\sim(\lambda) = \int_G f(x) \int_K e^{(-i\lambda-\rho)(H(kx))} dk\, dx =$$

$$= \int_G f(x)\, e^{(-i\lambda-\rho)(H(x))} dx,$$ ifølge formel (5.5)

er dette lig med

$$= \int_{KAN} f(kan)\, e^{-i\lambda(H(a))}\, e^{\rho(H(a))} dk\, da\, dn = F_f^\wedge(\lambda).$$

Det midterste udtryk følger af formel (5.6) Q.e.d.

I næste paragraf skal vi i de tilfælde hvor $\dim \mathfrak{a} = 1$ benytte spektralteori og (5.12) til at finde Plancherel målet $\mu^\natural$.

Ved at benytte (5.13) og inversionsformlen for (5.11) fås:

(5.14) $$F_f(\exp(H)) = \frac{1}{(2\pi)^s}\int_{\mathfrak{a}^*} f^\sim(\lambda)\, e^{i\lambda(H)}\, d\lambda .$$

Antag nu, at vi kunne finde en explicit inversionsformel for (5.10): $F \to K(F,\cdot)$, hvor

(5.15) $$K(F_f, a) = f(a) \quad \text{for alle } a \in A ,$$

antag desuden, at $F \to K(F,\cdot)$ kan ombyttes med integrationen i (5.14), vi får da

(5.16) $$f(e) = \frac{1}{(2\pi)^s}\int_{\mathfrak{a}^*} f^\sim(\lambda)\, K(e^{i\lambda(\cdot)}, e)\, d\lambda ,$$

vi slutter altså i så tilfælde (sml. (2.16) og sætn. 2.23) at

(5.17) $$d\mu^\natural(\lambda) = K(e^{i\lambda(\cdot)}, e)\, d\lambda .$$

Ovenstående er, meget groft skitseret, Harish-Chandras metode til at finde $\mu^\natural$.

<u>Eksempel 5.10.</u> Lad $G = Sp(n,1)$, $SU(n,1)$ el $SO_0(n,1)$. Lad $\mathbb{F}$ være $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ og $\mathbb{R}$ henholdsvis. Lie algebraen $\mathfrak{g}$ har form: (se side 13):

$$\begin{Bmatrix} X_1 & X_2 \\ {}^t\overline{X}_2 & X_3 \end{Bmatrix} , \qquad \begin{matrix} {}^t\overline{X}_1 = -X_1 , & n\times n\text{-matrix i } \mathbb{F}, \\ X_2 \in \mathbb{F}^n , & X_3 \in \mathbb{F} \text{ og } \overline{X}_3 = -X_3 , \end{matrix}$$

(For $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ kræves desuden $Tr(X_1) = -X_3$).

Desuden er $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, hvor

$$\mathfrak{k} : \left\{\begin{matrix} X_1 & 0 \\ 0 & x_3 \end{matrix}\right\} \quad , \quad \mathfrak{p} : \left\{\begin{matrix} 0 & X_2 \\ {}^t\overline{X_2} & 0 \end{matrix}\right\}$$

Vi vælger $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ maximal kommutativ således:

$$\mathfrak{a} = \left\{ \left\{\begin{matrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ & & & t \\ 0 & \cdots & 0\ t & 0 \end{matrix}\right\} = H_t \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lad nu $X \in \mathfrak{g}$ være givet på formen

$$X = \left\{\begin{matrix} b_1 & b_2 & c_1 \\ -{}^t\overline{b_2} & b_3 & c_2 \\ {}^t\overline{c_1} & \overline{c_2} & b_4 \end{matrix}\right\} ,$$

hvor b_1 er en $(n-1)\times(n-1)$ matrix, ${}^t\overline{b_1} = -b_1$, $b_2, c_1 \in \mathbb{F}^{n-1}$ og $b_3, b_4, c_2 \in \mathbb{F}$, $\overline{b_3} = -b_3$ og $\overline{b_4} = -b_4$. (For $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ desuden $Tr(b_1) + b_3 + b_4 = 0$).
Da bliver

$$[H_t, X] = -t \left\{\begin{matrix} 0 & c_1 & b_2 \\ -{}^t\overline{c_1} & c_2 - \overline{c_2} & b_3 - b_4 \\ {}^t\overline{b_2} & b_4 - b_3 & \overline{c_2} - c_2 \end{matrix}\right\}$$

De $\beta \in \mathfrak{a}^*$, for hvilke $\mathfrak{g}_\beta \neq \{0\}$ ses at være:

$\beta = 0$, $\beta = \pm\alpha$ og $\beta = \pm 2\alpha$, hvor α er givet ved $\alpha(H_t) = t$.

Vælges $H' = H_1 \in \mathfrak{a}$ ses at $\Sigma^+ = \{\alpha, 2\alpha\}$.

Vi finder

$$\mathfrak{g}_0 : \left\{\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_3 \end{pmatrix}\right\}, \quad \begin{array}{l} c_2 \text{ reel} \\ b_1, b_3 \text{ som ovenfor.} \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_{\pm\alpha} : \left\{\begin{pmatrix} 0 & \mp \underline{X} & \underline{X} \\ \pm \overline{\underline{X}} & 0 & 0 \\ \overline{\underline{X}} & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \underline{X} \in \mathbb{F}^{n-1}$$

$$\mathfrak{g}_{\pm 2\alpha} : \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & \mp b \\ 0 & \pm b & -b \end{pmatrix}\right\}, \quad \begin{array}{l} b \in \mathbb{F} \\ \overline{b} = -b . \end{array}$$

Vi finder således :

$$\mathbb{F} = \mathbb{H} \qquad m_\alpha = 4(n-1), \quad m_{2\alpha} = 3, \quad \rho(H_t) = (2n+1)t.$$

(5.18) $$\mathbb{F} = \mathbb{C} \qquad m_\alpha = 2(n-1), \quad m_{2\alpha} = 1, \quad \rho(H_t) = nt.$$

$$\mathbb{F} = \mathbb{R} \qquad m_\alpha = n-1, \quad m_{2\alpha} = 0, \quad \rho(H_t) = \frac{n-1}{2} t.$$

Lie algebraen $\mathfrak{n}$ består af matricerne :

$$T_{\underline{X},b} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & -\underline{X} & \underline{X} \\ + \overline{\underline{X}} & b & -b \\ + \overline{\underline{X}} & b & -b \end{pmatrix}\right\}, \quad \underline{X} \in \mathbb{F}^{n-1}, \quad b = -\overline{b} \in \mathbb{F}.$$

Heraf fremgår det, at $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ er en direkte sum.

Det er en enkel udregning at vise at:

$$\exp(H_t) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ 0 & \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{Bmatrix}, \tag{5.19}$$

og

$$\exp(T_{\underline{X},b}) = \begin{Bmatrix} 1 & -\underline{X} & \underline{X} \\ {}^t\underline{X} & 1-\frac{1}{2}\|\underline{X}\|^2+b & \frac{1}{2}\|\underline{X}\|^2-b \\ {}^t\underline{X} & -\frac{1}{2}\|\underline{X}\|^2+b & 1+\frac{1}{2}\|\underline{X}\|^2-b \end{Bmatrix}. \tag{5.20}$$

I næste paragraf skal vi beskrive en model for G/K, der er let at regne på. Ved hjælp af den er det en elementær udregning at vise Iwasawa-decompositionen (sætn. 5.5) for disse grupper på formen $G = ANK$.
Tilsvarende kan (5.5), (5.6) og (5.7) eftervises ved direkte udregning på denne model.[1] Tilsammen giver dette et elementært bevis for sætn. 5.6.

<u>Øvelse 5.11.</u> $G = SL(2,\mathbb{R})$, $K = \left\{ \begin{Bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{Bmatrix} \middle| \theta \in [0,2\pi[\right\}$,
$A = \left\{ \begin{Bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{Bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$. Find N og vis, at $G = KAN$.

---

1) angående (5.7) finder vi en differentialoperator ω, der frembringer hele $D(G/K)$. I stedet for $e^{\nu(H(x))}$, der ikke er en funktion på G/K anvendes $e^{\nu(H_1(x))}$, hvor $x = \exp(H_1(x))nk \in ANK$.
Formel (5.8) i sætning 5.6. får da formen:

$$\varphi_\lambda(x) = \int_K e^{(i\lambda+\rho)(H_1(kx))}\,dk.$$

§ 6. Kuglefunktioner på de Projektive og Hyperbolske rum.

Vi begynder denne paragraf med at betragte nogle flader i $\mathbb{F}^{n+1}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ el. $\mathbb{H}$, $n \geq 1$.

(6.1) Sphærene : Lad $S^n_{\mathbb{F}}$ betegne enhedssphæren i $\mathbb{F}^{n+1}$:

$$S^n_{\mathbb{F}} = \{ \underline{x} \in \mathbb{F}^{n+1} \mid |x_1|^2 + \cdots + |x_{n+1}|^2 = 1 \}.$$

Vælges $\underline{e} = (0, \cdots, 0, 1)$ som basispunkt i $S^n_{\mathbb{F}}$, ses at

$$S^n_{\mathbb{R}} = O(n+1)/O(n) = SO(n+1)/SO(n)$$

$$S^n_{\mathbb{C}} = U(n+1)/U(n) = SU(n+1)/SU(n) \cong S^{2n+1}_{\mathbb{R}}$$

$$S^n_{\mathbb{H}} = Sp(n+1)/Sp(n) \cong S^{4n+3}_{\mathbb{R}}$$

(6.2) De projektive rum $P^n_{\mathbb{F}}$ fremgår af sphærene $S^n_{\mathbb{F}}$ ved at vektorer der er lineært afhængige over $\mathbb{F}$ identificeres. Derved bliver

$$P^n_{\mathbb{R}} = O(n+1)/O(n) \times O(1) = SO(n+1)/S(O(n) \times O(1))$$

$$P^n_{\mathbb{C}} = U(n+1)/U(n) \times U(1) = SU(n+1)/S(U(n) \times U(1))$$

$$P^n_{\mathbb{H}} = Sp(n+1)/Sp(n) \times Sp(1)$$

Alle disse rum er sammenhængende

Den tilsvarende ikke-kompakte situation fremgår heraf ved "dualitetsprincippet" (se s. 22-23).

(6.3) "Sphærene": $S^{n,1}_{\mathbb{F}} = \{ \underline{x} \in \mathbb{F}^{n+1} \mid |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 - |x_{n+1}|^2 = -1 \}$, vælges $\underline{e} = (0, \dots, 0, 1)$ som basispunkt fås:

$$S^{n,1}_{\mathbb{R}} = O(n,1)/O(n) = SO(n,1)/SO(n)$$

$$S^{n,1}_{\mathbb{C}} = U(n,1)/U(n) = SU(n,1)/SU(n)$$

$$S^{n,1}_{\mathbb{H}} = Sp(n,1)/Sp(n).$$

$S^{n,1}_{\mathbb{R}}$ har to sammenhængskomponenter, der fremgår af hinanden ved skalarmultiplikation med -1. De øvrige er sammenhængende.

(6.4) De Hyperbolske rum $H^n_{\mathbb{F}}$ fremgår af $S^{n,1}_{\mathbb{F}}$ ved at vektorer der er lineært afhængige over $\mathbb{F}$ identificeres. Derved bliver

$$H^n_{\mathbb{R}} = O(n,1)/O(n)\times O(1) = SO(n,1)/S(O(n)\times O(1)) = SO_0(n,1)/SO(n).$$

$$H^n_{\mathbb{C}} = U(n,1)/U(n)\times U(1) = SU(n,1)/S(U(n)\times U(1))$$

$$H^n_{\mathbb{H}} = Sp(n,1)/Sp(n)\times Sp(1)$$

Disse rum er sammenhængende.

Bemærkning 6.1. $L^4(G;K)$ er kommutativ for alle de par G,K der optræder i (6.1) – (6.4) med undtagelse af $Sp(n+1), Sp(n)$ og $Sp(n,1), Sp(n)$, (se f.eks. Korollarene 2.5 og 2.7).

Ønsker vi at regne med funktioner på G/K i tilfældene (6.1) og (6.2) kan vi "løfte" vores beregninger op til $S^m_{\mathbb{R}}$ for passende m. Skal vi f. eks. finde kuglefunktionerne på de projektive rum, kan vi benytte følgende lemma:

<u>Lemma 6.2.</u> Identificer $S^n_{\mathbb{C}}$ med $S^{2n+1}_{\mathbb{R}}$ og $S^n_{\mathbb{H}}$ med $S^{4n+3}_{\mathbb{R}}$, og betragt funktioner på $P^n_{\mathbb{F}}$, som funktioner på $S^n_{\mathbb{F}}$, der er invariante under skalarmultiplikation (med skalarer med norm 1), da gælder:

$$C^{\natural}(SO(n+1); S(O(n)\times O(1))) =$$

$$= \left\{ f \in C(S^n_{\mathbb{R}}) \,\middle|\, f(\underline{x}) = f(\underline{y}) \Leftarrow |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = |y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2 \right\},$$

$$C^{\natural}(SU(n+1); S(U(n)\times U(1))) =$$

$$= \left\{ f \in C(S^{2n+1}_{\mathbb{R}}) \,\middle|\, f(\underline{x}) = f(\underline{y}) \Leftarrow |x_1|^2 + \cdots + |x_{2n}|^2 = |y_1|^2 + \cdots + |y_{2n}|^2 \right\}$$

og

$$C^{\natural}(Sp(n+1); Sp(n)\times Sp(1)) =$$

$$= \left\{ f \in C(S^{4n+3}_{\mathbb{R}}) \,\middle|\, f(\underline{x}) = f(\underline{y}) \Leftarrow |x_1|^2 + \cdots |x_{4n}|^2 = |y_1|^2 + \cdots + |y_{4n}|^2 \right\}.$$

<u>Bevis</u>: f. eks. $P^n_{\mathbb{H}}$ d.v.s $Sp(n+1); Sp(n)\times Sp(1)$.
Lad $f \in C^{\natural}$, opfattet som funktion på $S^n_{\mathbb{H}}$ er f invariant under $Sp(n)$ og afhænger derfor kun af $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$ og af x_{n+1}; men f er også invariant under skalarmultiplikation, hvoraf f kun afhænger af $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$ og $|x_{n+1}|^2 = 1 - (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)$. Betragtes nu hvert x_i som en reel vektor i $\mathbb{R}^4$ fås

at f tilhører højre siden.
Den anden vej følger nu let. Q.e.d.

Ifølge eksempel 4.9. med $p=0$ er der i det væsentlige kun én invariant differential operator ω på $S_{\mathbb{R}}^m$. Denne er (som vi senere skal se) i en vis forstand restriktionen af Laplace-operatoren i $\mathbb{R}^{m+1}$.

Lad $0 < s < m$, $s, m \in \mathbb{N}$. Antag at $f \in C^\infty(S_{\mathbb{R}}^m)$ er invariant under $SO(s) \times SO(m-s)$, d.v.s at f kun afhænger af $\xi^2 = x_1^2 + \cdots + x_s^2$.
Vi skriver $f(\underline{x}) = f(\xi^2)$.
Betragt differential ligningen med $f(0) = 0$

$$\omega f = \mu f \quad , \quad \mu \in \mathbb{C}. \tag{6.5}$$

Det viser sig, at der kun er løsninger for $\mu = 2k(2k+m-2)$, $k = 0, 1, 2, \cdots$.
For disse værdier af μ bliver løsningen entydig. Den bliver et såkaldt Jacobi polynomium, på nær en faktor:

$$\frac{k!}{(\alpha+1)_k} \cdot P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2\xi^2) = F(-k, \tfrac{m}{2}-1+k; \tfrac{s}{2}; \xi^2)$$

hvor $\alpha = \frac{s}{2} - 1$ og $\beta = \frac{m-s}{2} - 1$, og hvor F er den hypergeometriske funktion, (se (6.14) og (6.20)).
Specielt bestemmer dette altså kuglefunktionerne på de projektive rum. Disse bliver polynomierne

$$p_k^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \frac{k!}{(\alpha+1)_k} P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2\xi^2) \;, \; k = 0, 1, \cdots$$

hvor parametrene bliver

$$P^n_{\mathbb{R}} \quad : \quad \alpha = \tfrac{n}{2}-1 \quad , \quad \beta = -\tfrac{1}{2}$$

$$P^n_{\mathbb{C}} \quad : \quad \alpha = n-1 \quad , \quad \beta = 0$$

$$P^n_{\mathbb{H}} \quad : \quad \alpha = 2n-1 \quad , \quad \beta = 1.$$

Opfattes $p_k^{(\alpha,\beta)}$ som funktioner på de tilsvarende grupper $G = SO(n+1)$, $SU(n+1)$ og $Sp(n+1)$ vil

$$p_k^{(\alpha,\beta)} \in L^2(G) \cap L^{\natural}(G).$$

Da de har forskellige eigenværdier for ω er de indbyrdes orthogonale i L^2. Man kan vise at de udgør et fuldstændigt ortogonalsystem i Hilbertrummet $L^2(G) \cap L^{\natural}(G)$.

Lad nu

$$h_k = \| p_k^{(\alpha,\beta)} \|_2^{-2}$$

Ifølge Parsevals sætning fås for $f \in L^2(G) \cap L^{\natural}(G)$:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f^{\sim}(k)\, h_k\, p_k^{(\alpha,\beta)} ,$$

hvor

$$f^{\sim}(k) = \int_G f(x)\, \overline{p_k^{(\alpha,\beta)}(x)}\, dx .$$

Herved har vi altså fundet Plancherelmålet $\mu^{\natural}$ for de projektive rum.

(For Jacobi polynomier, se: Erdélyi m.fl. "Higher transcendental functions, Vol. II", Chap. X.)

Vi skal i det følgende bestemme kuglefunktionerne på de hyperbolske rum, samt finde Plancherel målet $\mu^{\natural}$.

Definition 6.3.
Lad os betegne med $\Omega^{p,q}$ for $p \geq 0, q > 0$ fladen

$$\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^{p+q} \mid x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = -1 \},$$

for $q = 1$ har denne flade 2 sammenhængskomponenter, og vi lader $\Omega^{p,q}$ betegne den komponent, der indeholder basispunktet $\underline{e} = (0, \cdots, 0, 1)$.

Vi ser at

$$\Omega^{p,q} = SO_0(p,q)/SO_0(p,q-1),$$

samt at

$$H^n_{\mathbb{R}} = \Omega^{n,1}$$

(6.6) $$S^{n,1}_{\mathbb{C}} = \Omega^{2n,2}$$

$$S^{n,1}_{\mathbb{H}} = \Omega^{4n,4}$$

og endelig er $$S^m_{\mathbb{R}} = \Omega^{0,m}.$$

Definition 6.4. Lad $C_0^{\natural}(\Omega^{p,q})$ betegne:

$$C_0^{\natural}(\Omega^{p,q}) = \left\{ f \in C_0(\Omega^{p,q}) \;\middle|\; \begin{array}{l} f(k\underline{x}) = f(\underline{x}) \text{ for alle} \\ k \in SO(p) \times SO(q). \end{array} \right\}$$

Fuldstændig analogt med lemma 6.2 fås nu:

<u>Lemma 6.5.</u> For $n \geq 1$ gælder:

$$C_\bullet^\flat(SO_0(n,1); SO(n)) = C_0^\flat(\Omega^{n,1})$$

$$C_0^\flat(SU(n,1); S(U(n)\times U(1))) = C_\bullet^\flat(\Omega^{2n,2})$$

$$C_\bullet^\flat(Sp(n,1); Sp(n)\times Sp(1)) = C_0^\flat(\Omega^{4n,4})$$

<u>Definition 6.6.</u> Lad $\square = \square^{p,q}$ være differential-operatoren i $\mathbb{R}^{p+q}$ givet ved:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}.$$

<u>Lemma 6.7.</u> Lad $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+q})$ og $g \in SO(p,q)$ da gælder

$$(\square f)^g = (\square(f^g)).$$

<u>Bevis</u>: For $p=0$ er dette lemma 3.5, for $p>0$ går beviset fuldstændig analogt. Q.e.d.

Vi definerer nu en afbildning $\omega = \omega_{p,q}$
$\omega: C^\infty(\Omega^{p,q}) \longrightarrow C^\infty(\Omega^{p,q})$ ved

(6.7) $$(\omega f)(\underline{x}) = (\square \bar{f})(\underline{x}) \quad \text{for } \underline{x} \in \Omega^{p,q}$$

hvor $\bar{f}(r\underline{x}) = f(\underline{x})$ for $r > 0$ er defineret i

$$\Omega_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{p+q} \mid x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 < 0\}.$$

Det er klart ifølge lemma 6.7 at ω er invariant under $SO(p,q)$.

Lemma 6.8. ω er en differential operator på $\Omega^{p,q}$. Der gælder
$$\omega = D_{P_o}$$
hvor P_o er polynomiet $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q-1}^2$, (sammenlign med eksempel 4.9).

Bevis: Lad $f \in C^\infty(\Omega^{p,q})$ være vilkårlig, da både ω og D_{P_o} er invariante er det nok at vise at

(6.8) $$\omega f(\underline{e}) = D_{P_o} f(\underline{e}).$$

Vi inddfører nu "polære" koordinater i området $\{\underline{x} \in \Omega_0 \mid x_{p+q} > 0\}$:

$$\underline{x} = r\,(u_1, \cdots, u_{p+q-1}, \sqrt{1+u_1^2+\cdots+u_p^2-u_{p+1}^2-\cdots-u_{p+q}^2}\,)$$

eller

$$r = r(\underline{x}) = |x_1^2+\cdots+x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2|^{\frac{1}{2}}$$

$$u_i = r(\underline{x})^{-1} x_i \qquad , \quad i = 1, \cdots, p+q-1$$

Det ses nu let, at for $1 \le i < p+q$, $1 \le j,k \le p+q$

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|_{\underline{x}=\underline{e}} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}\right|_{\underline{x}=\underline{e}} = 0$$

Benyttes nu $\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{p+q-1} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u_i} + \frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial r}$

fås ved indsættelse i (6.7) med $\underline{x} = \underline{e}$ at

$$\omega f(\underline{e}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial u_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial u_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial u_{p+q-1}^2}\right) f \Big|_{\underline{u}=\underline{0}},$$

heraf følger (6.8) nu let. Q.e.d.

<u>Bemærkning 6.9.</u> Ved en lignende regning kan man se at $\square$ i polære koordinater har form

(6.9) $$\square = \frac{1}{r^2}\omega + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{p+q-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Eksempel 4.9. viser, at ω (og polynomier i ω) er den eneste differential operator på $\Omega^{p,q}$, der er invariant under $SO_0(p,q)$.

<u>Lemma 6.10.</u> $D(SU(n,1)/S(U(n)\times U(1)))$ og $D(Sp(n,1)/Sp(n)\times Sp(1))$ er begge frembragt af et element ω', henh. ω''. For $f \in C^\infty(SU(n,1)/S(U(n)\times U(1)))$, henh. $f \in C^\infty(Sp(n,1)/Sp(n)\times Sp(1))$, opfattet som funktion på $\Omega^{2n,2}$, henh. $\Omega^{4n,4}$, gælder

(6.10) $$\omega' f = \omega f, \quad \text{henh.} \quad \omega'' f = \omega f.$$

<u>Bevis:</u> Beviset for den første påstand går ligesom eksempel 4.9 med $q=1$, blot skal $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$, henh. $\mathbb{H}^n$, og vi skal tage både som P_0' og P_0'' polynomiet $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$ og

$$\omega' = D_{P_0'}, \qquad \omega'' = D_{P_0''}.$$

Lad nu $f \in C^\infty(SU(n,1)/S(U(n)\times U(1)))$, opfattet som funktion på $\Omega^{2n,2}$ har det mening at tage ωf. Det ses let, da ω er invariant under $SO(2n,2)$, at ωf igen tilhører $C^\infty(SU(n,1)/S(U(n)\times U(1)))$. Herved bliver $f \to \omega f$ en invariant differential operator, altså et element i $D(SU(n,1)/S(U(n)\times U(1)))$. Da ω er af 2^{nd} orden, har vi ifølge den første del af lemma'et at

$$\omega = c_1 \omega' + c_2 \qquad \text{med } c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ c_1 \neq 0$$

Vi mangler blot at vise, at $c_2 = 0$, men dette følger af at både $\omega 1 = 0$ og $\omega' 1 = 0$, hvor 1 er funktionen, der er konstant lig med 1.
Tilsvarende vises (6.10) for ω''. Q.e.d.

<u>Kuglefunktionerne</u> på de <u>hyperbolske rum</u> $H^n_{\mathbb{R}}$, $H^n_{\mathbb{C}}$ og $H^n_{\mathbb{H}}$ er nu ifølge sætning 4.11, lemma 6.5 og lemma 6.10 <u>karakteriseret ved</u>

(6.11)
$$\varphi \in C^{\natural} \cap C^\infty(\Omega^{p,q}), \quad \varphi(\underline{e}) = 1$$
$$\omega\varphi = \mu\varphi, \quad \text{hvor } \mu \in \mathbb{C},$$

hvor (p,q) er henholdsvis $(n,1)$, $(2n,2)$ og $(4n,4)$.

<u>Definition 6.11.</u> For $p>0$, $q>0$ kaldes en løsning til (6.11) for en <u>kuglefunktion</u> på $\Omega^{p,q}$.

<u>Sætning 6.12.</u> Lad $f \in C^4 \cap C^\infty(\Omega^{p,q})$.
f kan opfattes som funktion af $z = -(x_1^2 + \cdots + x_p^2)$,
og der gælder

$$\omega f(z) = -4\left[(1-z)z\frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{p}{2} - \frac{p+q}{2}z\right)\frac{d}{dz}\right]f(z).$$

<u>Bevis:</u> Vi anvender (6.7). $\bar{f}$ kan opfattes som funktion af $\xi = (x_1^2 + \cdots + x_p^2)^{\frac{1}{2}}$ og $\eta = (x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2)^{\frac{1}{2}}$ i Ω_0.

Af Lemma 3.6 følger nu at

(6.12) $$\square \bar{f}(\xi,\eta) = \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{p-1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{q-1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\bar{f}(\xi,\eta)$$

substitueres heri
$$z = -\xi^2(\eta^2 - \xi^2)^{-1}$$
$$r = (\eta^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}$$

og benyttes, at $\bar{f}$ ikke afhænger af r, fås idet vi sætter $r = 1$ det ønskede.

(Vi har benyttet

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \xi}\right|_{r=1} = -2\xi\eta^2 = -2\xi(1+\xi^2)$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\right|_{r=1} = -(1+\xi^2)(2+8\xi^2)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \eta}\right|_{r=1} = +\xi^2\eta$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right|_{r=1} = 2\xi^2 - 8(1+\xi^2)\xi^2$$
).

Q. e. d.

<u>Bemærkning 6.13.</u> Dette fører os til differential ligningen for den <u>Hypergeometriske funktion</u> :

(6.13) $$\left[(1-z)z\frac{d^2}{dz^2} + (c-(a+b+1)z)\frac{d}{dz} - ab\right] F = 0$$

med $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0, -1, -2, \cdots$ og $z < 0$.
Denne ligning har præcis én løsning der er analytisk i $z = 0$, ${}_2F_1 = F$ givet ved

(6.14) $$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n \, n!} z^n ,$$

hvor $(x)_0 = 1$ og $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$, og rækken konvergerer for $|z| < 1$.
F kaldes Gauss' Hypergeometriske funktion.
Den fortsættes analytisk til en funktion i området $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(-z) < \pi\}$.

For $a - b \notin \mathbb{Z}$ og $\arg(-z) < \pi$ kan det ses at

(6.15) $$T_1(z) = (-z)^{-a} F(a, a+1-c; a+1-b; z^{-1}) \quad \text{og}$$
$$T_2(z) = (-z)^{-b} F(b, b+1-c; b+1-a; z^{-1})$$

er løsningen til (6.13) og der gælder :

(6.16) $$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} T_1(z) +$$
$$+ \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} T_2(z) .$$

Desuden gælder der

$$\frac{d}{dz}F(a,b;c;z) = \frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;z). \tag{6.17}$$

For ovenstående se f. eks.

Erdélyi m. fl.: "Higher transcendental functions, vol I," Chap. II.

Ved hjælp af den Hypergeometriske funktion kan vi nu beskrive kuglefunktionerne på $\Omega^{p,q}$, samt finde Plancheral målet for de hyperbolske rum.

I ligning (6.11) vælger vi af tekniske grunde

$$\mu = -(\lambda^2+\rho^2) \quad , \text{hvor} \quad \rho = \frac{p+q}{2}-1 . \tag{6.18}$$

(Denne definition af ρ stemmer for de hyperbolske rum overens med (5.18), således at $\rho(t)=\rho\cdot t$).

Ligningen $\omega\varphi = \mu\varphi$ bliver herved til den hypergeometriske ligning (6.13) med konstanterne:

$$a = \tfrac{1}{2}(\rho + i\lambda)$$

$$b = \tfrac{1}{2}(\rho - i\lambda)$$

$$c = \frac{p}{2}$$

For at bringe vores notation i overensstemmelse med eksempel 5.10, (se formel 5.19) erstatter vi den variable z med den variable t således at $\quad z = -(\operatorname{sh} t)^2$. Vi har nu bevist :

<u>Sætning 6.14.</u> Lad $p, q \in \mathbb{N}$ og $\quad \rho = \frac{p+q}{2} - 1$.
Kuglefunktionerne på $\Omega^{p,q}$ er netop

$$\varphi_\lambda(t) = F\left(\tfrac{1}{2}(\rho + i\lambda), \tfrac{1}{2}(\rho - i\lambda); \tfrac{p}{2}; -(\operatorname{sh} t)^2\right)$$

for $\lambda \in \mathbb{C}$. Der gælder at $\varphi_\lambda = \varphi_\nu$ hvis og kun hvis $\lambda^2 = \nu^2$.

Disse funktioner $\varphi_\lambda(t)$ er de såkaldte <u>Jacobi-funktioner</u> , de parametriseres normalt ved (α, β) , hvor

(6.19) $$\alpha = \frac{p}{2} - 1 \quad , \quad \beta = \frac{q}{2} - 1 ,$$

herved bliver $\rho = \alpha + \beta + 1$. De betegnes $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)$, vi har altså

(6.20) $$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\left(\tfrac{1}{2}(\rho + i\lambda), \tfrac{1}{2}(\rho - i\lambda); \alpha + 1; -(\operatorname{sh} t)^2\right)$$

<u>Korollar 6.15.</u> Kuglefunktionerne på de hyperbolske rum er Jacobifunktioner $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ med parametre:

$H^n_{\mathbb{R}}$: $\quad \alpha = \frac{n}{2} - 1 \quad , \quad \beta = -\frac{1}{2}$

$H^n_{\mathbb{C}}$: $\quad \alpha = n - 1 \quad , \quad \beta = 0$

$H^n_{\mathbb{H}}$: $\quad \alpha = 2n - 1 \quad , \quad \beta = 1$.

Vi skal nu anvende spektralteori til at finde Plancherel målet μ^{η} på samme måde som i § 3. For at gøre dette behøver vi ikke forudsætte at $p, q \in \mathbb{N}$, men blot at $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ og $\alpha > -1$.
Vi skal dog forudsætte her at

(6.21) $$-\tfrac{1}{2} \le \beta \le \alpha .$$

Derved undgår vi, at spektret får en diskret del, og analogien med § 3 bliver tydeligere.

Vi tager udgangspunkt i diff. ligningen (6.13) med

$$a = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+1+i\lambda) \quad , \quad b = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+1-i\lambda) \quad , \quad c = \alpha+1 .$$

substitueres heri $z = -(\operatorname{sh} t)^2$ får vi ligningen:

(6.22) $$\mathcal{T} f = -(\lambda^2 + \rho^2) f \quad ,$$

hvor $\rho = \alpha+\beta+1$, $t \in]0,\infty[$ og

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\alpha,\beta} : \frac{d^2}{dt^2} + \left[(2\alpha+1)\coth t + (2\beta+1)\tanh t\right]\frac{d}{dt} =$$

$$= \delta(t)^{-1}\frac{d}{dt}\left(\delta(t)\frac{d}{dt}\right),$$

og

$$\delta(t) = \delta_{\alpha,\beta}(t) = 2^{2\rho}(\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1} .$$

Funktionen $\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)$ er løsning til (6.22) for alle $\lambda \in \mathbb{C}$ og der gælder $\varphi_\lambda(0) = 1$

For $i\lambda = a - b \notin \mathbb{Z}$ har vi desuden løsningerne

$$\phi_\lambda(t) = \phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = 2^{-\varrho+i\lambda}\, T_2(-(\operatorname{sh} t)^2) \quad \text{og}$$

$$\Phi_{-\lambda}(t) = \Phi_{-\lambda}^{\alpha,\beta}(t) = 2^{\varrho-i\lambda}\, T_1(-(\operatorname{sh} t)^2).$$

Ifølge (6.16) gælder i så tilfælde:

$$(6.23) \qquad \varphi_\lambda(t) = c(\lambda)\,\phi_\lambda(t) + c(-\lambda)\,\phi_{-\lambda}(t),$$

hvor

$$(6.24) \qquad c(\lambda) = \frac{2^{\varrho-i\lambda}\,\Gamma(i\lambda)\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}(\varrho+i\lambda))\,\Gamma(\frac{1}{2}(\varrho+i\lambda)-\beta)}.$$

For fast $\lambda \notin i\mathbb{Z}$ fås ved at benytte (6.15), (6.14) og (6.17) for $t \to \infty$:

$$\Phi_\lambda(t) = \delta(t)^{-\frac{1}{2}}\, e^{i\lambda t}(1 + O(e^{-2t}))$$

$$\frac{d}{dt}\phi_\lambda(t) = \delta(t)^{-\frac{1}{2}}\, i\lambda\, e^{i\lambda t}(1 + O(e^{-2t})).$$

Det ses let at randsætningen (6.21) medfører at

$$2i\lambda c(-\lambda) \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \text{ for } \operatorname{Im}\lambda \geq 0.$$

Herefter kan side 66-69 gentages stort set ordret.

Vi har herved bevist følgende sætning:

<u>Sætning 6.16.</u> Lad $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ og $-\frac{1}{2} \leq \beta \leq \alpha$.
For $f \in L^2([0,\infty[;\ \delta_{\alpha,\beta}(t)\,dt)$ og $\lambda \in [0,\infty[$

$$f^\sim(\lambda) = \int_0^\infty f(t)\, \varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\, \delta_{\alpha,\beta}(t)\, dt$$

Da vil $f^\sim \in L^2([0,\infty[; \frac{1}{4\pi}|c(\lambda)|^{-2} d\lambda)$ og der gælder:

$$\|f\|_2 = \|f^\sim\|_2 \quad \text{og}$$

$$f(t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty f^\sim(\lambda)\, \varphi_\lambda(t)\, |c(\lambda)|^{-2} d\lambda .$$

(Integralerne konvergerer i L^2.).

For de værdier af (α,β) for hvilke ovenstående svarer til de hyperbolske rum (se Korollar 6.15) stemmer definitionen af $\delta(t)$ og $\delta(H_t)$ overens, på nær en konstant, se eksempel 5.10 og formel (5.6). Når φ_λ opfattes som funktion på G, fås derfor for $f \in C_0^\natural(G)$:

$$f^\sim(\lambda) = \int_G f(x)\, \varphi_\lambda(x)\, dx$$

Dette viser, at sætning 6.16 giver os Plancherelmålet $\mu^\natural$ for disse grupper:

$$d\mu^\natural(\lambda) = \frac{1}{4\pi}|c(\lambda)|^{-2} d\lambda \quad , \lambda \in [0,\infty[. \tag{6.25}$$

hvor $c(\lambda)$ er givet ved formel (6.24).

Referencer :

[1] C. Chevalley : "Theory of Lie groups."
Princeton University Press. 1946

[2] S. Helgason : "Differential Geometry and Symmetric Spaces"
Academic Press, 1962.

[3] R. Godement, Introduction aux travaux de A. Selberg.
Séminaire Bourbaki, février 1957, exp. 144.

[4] G. Warner : "Harmonic Analysis on semi-simple Lie Groups." Vol I and II.
Springer-Verlag. 1972

Se i øvrigt referencelisten i [4].

Rettelser:

s. 7. l. 9. f.n. $\cdots H^* \subset H_0 \cdots$ skal være $H^* \subset H$.
l. 8. f.n. $\cdots$ i H_0 er $H^* = H \cdots$ skal være
$\cdots$ i H er $H^* = H_0 \cdots$.

s. 17 Beviset for lemma 1.27 går meget let hen over flere ting (l. 5-6 f.n og l. 10-11 f.n.). For et grundigt bevis se ref. [1], Chap. 1, §IV, Prop. 5.

s. 18. Tilføj til definitionen 1.29. betingelsen:
$\sigma(k) = k$ for alle $k \in K$.

s. 33. l. 7. f.n. $\cdots$ Riesz' repræsentations sætning $\cdots$
skal være $\cdots$ Radon-Nikodym's sætning $\cdots$.

s. 35. l. 13. $\cdots$"normale"$\cdots$ udgår.