

Matematik 3, 1970–71

Werner Fenchel

Forelæsninger over geometri

Kap. II. Den affine og den projektive geometris grundlag

Kap. II. Den affine og den projektive geometris grundlag.

§ 1. Lattice	1-3
Opgaver	1-8
§ 2. Incidensrum og incidensplan	1-13
Opgaver	1-6
§ 3. Affine rum og affine planer	1-10
Opgaver	1-8
§ 4. Projektiv plan og projektivt rum	1-13
Opgaver	1-11
§ 5. Sammenhæng mellem affine og projektive planer og rum	1-11
Opgaver	1-3
§ 6. Desargues's sætning	1-11
Opgaver	1-7
§ 7. En affin plans homotetier	1-13
Opgaver	1-6
§ 8. En translationsplans vektorrum	1-6a, 7-13
Opgaver	1-5
§ 9. Divisionsringens kommutativitet og Pappos'sætning	1-5
Opgaver	1-5
§ 10. Ordning og kontinuitet	1-15
Opgaver	1-6
Litteratur	1-2
Rettelser	1-3

Litteratur til kap. II.

Af ældre grundlæggende værker må nævnes:

D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899;
8. Aufl. 1958 (251 s.); 10. Aufl. 1968.

O. Veblen and J. W. Young: Projective Geometry, I, II.
Boston 1910, 1918 (342 + 511 s.).

Den foreliggende fremstilling slutter sig nær til kap. II i:

E. Artin, Geometric Algebra. New York 1957 (214 s.).

En beslagtet, noget mindre vidtgående fremstilling findes i:

R. Hartshorne: Foundations of Projective Geometry. New York
1967 (167 s.).

Andre nyere behandlinger af emnet:

L. M. Blumenthal: A Modern View of Geometry. San Fran-
cisco - London 1961 (191 s.).

H. Heyting: Axiomatic Projective Geometry. Groningen -
Amsterdam 1963 (148 s.).

G. de B. Robinson: The Foundations of Geometry. 2nd Ed.
Toronto 1946 (168 s.).

En indgående behandling af Hilberts opbygning
af geometrien giver:

K. Borsuk and W. Szmielew: Foundations of Geometry.
Amsterdam 1960 (444 s.).

Aksiomatiske spørgsmål behandles også i:

R. Artzy: Linear Geometry. New York 1965 (273 s.).

H.S.M. Coxeter: The Real Projective Plane. 2nd Ed. Cambridge 1955 (226 s.).

A. Seidenberg: Lectures in Projective Geometry. Princeton 1962 (230 s.).

En indgående behandling af samspillet mellem algebra og geometriens grundlag giver:

R. Baer: Linear Algebra and Projective Geometry. New York 1952 (318 s.).

En systematisk undersøgelse af projektive (og affine) planer, især ikke-Desargues-planer:

G. Pickert: Projektive Ebenen. Berlin 1955 (343 s.).

Et kapitel om endelige projektive planer findes i:

M. Hall: Combinatorial Theory. Waltham, Mass. 1967 (310 s.).

Rettelser til Kaps. II.

II.1. Opg. 2. I slutningen af først linie tilføjes: kommutativt.

II.2.3. In 7 skal være: I rummet findes mindst fire punkter, som hverken ligger på samme linie eller i samme plan.

II.2.6. (2.7), 5) skal være: Der findes fire forskellige elementer i G^0 , for hvilke ikke noget element af G^1 eller G^2 er majorant.

II.2. Opg. 4. Opgavens påstand er forkert. Den erstattes med følgende:
 Lad a^2 være en plan i et incidensrum. Antag, at der findes to linier $b^1, c^1 \leq a^2$, som ikke har noget punkt fælles, samt et punkt $d^0 \leq a^2$, som hverken ligger på b^1 eller c^1 . Vis, at der i a^2 findes en linie gennem d^0 , som hverken har et punkt fælles med b^1 eller c^1 .

Vis ved hjælp heraf, at der findes incidensplaner, som ikke er isomorfe med planer i et incidensrum.

(U. Haagerup.)

II.3. Opg. 2. Linie 4: "Hvis $a^2 \wedge b^2 \wedge c^1 = g^{-1}$," erstattes med:
 "Hvis c^1 er parallel med a^2 og b^2 eller skærer a^2 og b^2 ,"

II.3. Opg. 8. Opgavens anden del er forkert. Den erstattes med:
 Vis endvidere, at i aksionsystemet $In 1 - In 7$, Pa for et affint rum er $In 5$ overflødig, og $In 6$ kan erstattes med:

I enhver plan ligger mindst ét punkt.

II. 4. 10. Linie 5 læs $a^\circ \vee e^\circ \vee f^\circ$ i stedet for $a^\circ \vee e^\circ \vee d^\circ$.

II. 6. Opg. 6. Tilføj i slutningen af første stykke: (Det kan hende, at $b_1^\circ, b_2^\circ, b_3^\circ$ ikke danner en trekant, men ligger på en linie, som da betegnes $b_1^1 = b_2^1 = b_3^1$.)

II. 7. Opg. 5. Slet "og tilstrækkelige" to gange.

II. 8. Opg. 2. Linie 4 læs $>$ i stedet for $<$.

II. 9. 3. Tilføj nederst på siden: Fig. 9.2.

II. 9. Opg. 2. Tilføj inden for den første kantede parentes:

Forudsæt $a_1^\circ \vee a_2^\circ \parallel b_1^\circ \vee b_2^\circ$, $a_2^\circ \vee a_3^\circ \parallel b_2^\circ \vee b_3^\circ$ og vis, at $a_1^\circ \vee a_3^\circ \parallel b_1^\circ \vee b_3^\circ$.

II. 10, 6, linie 13-14. Den sidste sætning skal være;

Endelig er Or 5 en følge af $1 \in L_+$.

II. 5. 8. Linie 5 f. n. læs $w \notin U$ i stedet for $w \in U$.

II. 6. 3. Linie 3 f. n. læs $d_1^\circ, d_2^\circ, d_3^\circ$ i stedet for $c_1^\circ, c_2^\circ, c_3^\circ$.

II. 7. 5. Linie 5 læs $d(x^\circ) \leq \underline{f^\circ \vee x^\circ}$ i stedet for $d(x^\circ) \leq f^\circ \vee a^\circ$.

II. 9. 3. Linie 3: Tilføj $d_1, d_2, d_2 \circ d_1$ efter "dilatationerne".

II. 9. Opg. 2. Den første linie skal være:

Gyldigheden af de affine Pappos'sætninger AP og
aP (se opg. 1) i en affin plan...

Kapitel II.

Den affine og den projektive geometris grundlag.§1, Lattice.

Et par $(M, \preceq)$, hvor M er en mængde og $\preceq$ en relation i denne siges som bekendt at være en partielt ordnet mængde (i det følgende ofte forkortet til p.o. mængde), hvis relationen $\preceq$ er reflektiv, dvs.

$$x \preceq x \quad \text{for } x \in M,$$

antisymmetrisk, dvs.

$$x \preceq y \text{ og } y \preceq x \Rightarrow x = y \quad \text{for } x, y \in M$$

og transitiv, dvs.

$$x \preceq y \text{ og } y \preceq z \Rightarrow x \preceq z \quad \text{for } x, y, z \in M.$$

I stedet for $x \preceq y$, $x \neq y$ skrives $x \prec y$.

En p.o. mængde $(M, \preceq)$ siges at være isomorf med en p.o. mængde $(M', \preceq')$, hvis der findes en bijektiv afbildning $\varphi: M \rightarrow M'$, således at

$$x \preceq y \iff \varphi(x) \preceq' \varphi(y).$$

Det ses let, at isomorfi er en ækvivalensrelation i klassen af p.o. mængder. Ethvert sandt udsagn om den partielle ordning i én af to isomorfe p.o. mængder er også sandt for den andens partielle ordning.

Lad $(M, \preceq)$ være en p.o. mængde. Defineres relationen $\succeq$ ved

$$x \succeq y \iff y \preceq x,$$

vil også $(M, \succeq)$ være en p.o. mængde, der kaldes den til $(M, \preceq)$ dual.

Den er almindeligvis ikke isomorf med $(M, \leq)$.

Laad $(M, \leq)$ være en p.o. mængde og M' en delmængde af M .

Et element $p \in M$ siges at være minorant for M' , hvis $p \leq x'$ for alle $x' \in M'$. Hvis der findes en minorant, der tilhører M' , siges denne at være første element af M' . På grund af antisymmetrien af $\leq$ kan der højst findes ét sådant. Tilsvarende defineres majorant for M' og sidste element af M' .

Et element $m' \in M'$ siges at være et minimalelement af M' , hvis der ikke findes noget element $x' \in M'$, for hvilket $x' < m'$. En delmængde af M kan have flere minimalelementer. Hvis den har et første element, er dette det eneste minimalelement. Analogt defineres maximalelement.

Et element $i \in M$ siges at være infimum for M' , hvis det er sidste element af mængden af minoranter for M' , med andre ord, hvis i er minorant og der for hver minorant p gælder $p \leq i$. Det er klart, at M' højst kan have ét infimum. Hvis det eksisterer, betegnes det $\inf M'$. Tilsvarende defineres supremum for M' som første element af mængden af majoranter for M' , såfremt et sådant findes. Det betegnes da $\sup M'$.

En p.o. mængde $(M, \leq)$ siges at have endelig længde $l \in \mathbb{N}$, hvis der for enhver "kæde" $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ af elementer fra M gælder $n \leq l$ og der findes mindst én med $n = l$.

Definition. En partielt ordnet mængde $(M, \leq)$ kaldes en lattice, hvis enhver delmængde $\{x, y\}$ af M bestående af to (ens eller forskellige) elementer har et infimum og et supremum.

I stedet for $\inf\{x, y\}$ skrives $x \wedge y$, og dette element kaldes snittet af x og y . I stedet for $\sup\{x, y\}$ skrives $x \vee y$, og dette element kaldes forbindelsen af x og y . [På grund af denne gængse anvendelse af tegnene $\wedge$ og $\vee$ undgås i det følgende brugen som logiske tegn.]

Af definitionerne slutes umiddelbart, at der gælder

La 1. $x \leq y \iff x \wedge y = x, \quad x \leq y \iff x \vee y = y.$

Kompositionerne $\wedge$ og $\vee$ i M er åbenlyst idempotente:

La 2. $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x,$

og kommutative:

La 3. $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x.$

Endvidere er $\wedge$ og $\vee$ associative:

La 4. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z.$

Dette ses ved at vise, at begge sider i den første ligning er $\inf\{x, y, z\}$, hvilket også skrives $x \wedge y \wedge z$, og at begge sider i den anden ligning er $\sup\{x, y, z\}$, hvilket også skrives $x \vee y \vee z$.

Ved induktion slutes heraf, at enhver endelig delmængde af M har et infimum, et snit, og et supremum, en forbindelses. I en lattice gælder endvidere

La 5. $x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x.$

Hvis en partielt ordnet mængde $(M, \leq)$ er en lattice med snit $\wedge$ og forbindelse $\vee$, vil den duale ligeledes være en lattice, men med "snit" $\vee$ og "forbindelse" $\wedge$.

Opgaver til § 1.

1. Undersøg for hver af følgende mængder, om den er partielt ordnet ved den angivne relation, og i bekræftende fald, om den har et første og/eller sidste element, samt om den er en lattice.

Med relationen $\subseteq$:

- a) mængden af delmængder af en given mængde,
b) mængden af (normale) undergrupper af en given gruppe.

Med relationen $|$ (er divisor i):

- c) mængden af (positive, ikke-negative) hele tal,
d) mængden af positive divisorer i et naturligt tal n ,
e) $\{1, 2, \dots, n\}$, hvor n er et naturligt tal.
f) mængden af polynomier med reelle koefficienter (og højeste koefficient 1).

Endvidere

- g) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ med $\leq$ defineret ved $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq b_1$
og $a_2 \leq b_2$,

- h) mængden af alle (kontinuerte, differentiable) funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med $\leq$ defineret ved $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ for $x \in \mathbb{R}$.

Vis, at de p.o. mængder a), d), g), h) er isomorfe med deres duale.

2. Lad $(V, +, \cdot)$ være et vektorrum af endelig dimension n over et legeme L . Med $\mathcal{M}$ betegnes mængden af alle underrum af V .
Vis, at $(\mathcal{M}, \subseteq)$ er en lattice af endelig længde.

* Lad V^* være det til V duale vektorrum og $\mathcal{M}^*$ mængden af dets underrum. Vis (eventuelt kun for $n=3$, at $(\mathcal{M}^*, \subseteq)$

er isomorf med den duale lattice $(M, \supseteq)$ til $(M, \subseteq)$.

* Lad $\tilde{M}$ betegne mængden, hvis elementer er den tomme mængde $\emptyset$ samt underrummene af $\mathbb{R}^n$ og alle disses sideunderrum. Vis (eventuelt kun for $n=3$), at $(\tilde{M}, \subseteq)$ er en lattice af endelig længde.

3. Vis, at enhver endelig lattice har et første og et sidste element.

4. En partielt ordnet endelig mængde $(M, \leq)$ kan afbildes som en "graf" på følgende måde. Til elementerne $x \in M$ lades svare indbyrdes forskellige punkter P_x i planen. Fra P_x til P_y tegnes en pil, hvis og kun hvis $x < y$ og der ikke findes noget element z med $x < z < y$. [Figuren bliver mest overskuelig, hvis man sørger for, at alle pile peger (skråt eller lige) opad.]

Tegn en graf for

- mængden af delmængder af $\{1, 2, 3\}$ med relationen $\subseteq$,
- mængden af positive divisorer i 72 og mængden af positive divisorer i 1125 med relation $|$, og vis, at disse to p.c. mængder er isomorfe.

Tegn for hver klasse af indbyrdes isomorfe lattices med højst fem elementer en graf, der repræsenterer den. [Benyt opg. 3.] Angiv specielt de grafer, som repræsenterer lattices, der er isomorfe med deres duale.

5. Bervis, at i en lattice gælder $\text{La } 5$.

6. Vis, at i en lattice $(M, \leq)$ gælder for alle $x, y, z \in M$

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

$$x \leq z \implies x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z.$$

7. * Vis, at en mængde M med to kompositioner $\wedge$ og $\vee$, som opfylder
 Læ 2-5 er en lattice, hvis $\leq$ defineres ved den første
 (eller den anden) biimplikation i Læ 1.

8. * Vis, at i en lattice $(M, \leq)$ af endelig længde har enhver
 delmængde et infimum og et supremum. Slut, at $(M, \leq)$
 har både et første og et sidste element. [Begynd med
 at vise, at mængden af delmængdens minoranter
 har mindst ét maximalelement.]

§ 2. Incidensrum og incidensplan.

Som udgangspunkt for en opbygning af geometrien antages forelagt fire parvis disjunkte mængder G^0 , G^1 , G^2 og G^3 . Elementerne af G^0 kaldes punkter, elementerne af G^1 (rette) linier og elementerne af G^2 planer. G^3 antages at have netop ét element g^3 , som kaldes "rummet". Når der kun betragtes plangeometri, ses bort fra G^3 , og det antages, at G^2 har netop ét element g^2 , som da kaldes "planen". Elementerne af G^i siges at være i -dimensionale. At et element x tilhører G^i angives også ved at skrive $\dim x = i$ eller x^i , altså ved en øvre index i .

Det drejer sig om at formulere forudsætninger om de relationer mellem punkter, linier og planer, som i sædvanligt sprog udtrykkes ved "et punkt ligger på eller tilhører en linie" og "et punkt eller en linie ligger i eller tilhører en plan". De kaldes under ét for incidensrelationer og kan sammenfattes til én relation "tilhører", betegnet $\leq$, i foreningsmængden $G^0 \cup G^1 \cup G^2 \cup G^3$ ($G^0 \cup G^1 \cup G^2$). Det er hensigtsmæssigt om hvert element at sige, at det tilhører sig selv, altså at antage relationen refleksiv. Endvidere er det nærliggende at vedtage $x \leq g^3$ ($x \leq g^2$) for alle elementer x . Af formelle grunde tilføjes endnu en mængde G^{-1} bestående af ét element g^{-1} , som tilskrives dimensionen -1 (og som man bedst forestiller sig som den tomme mængde). Om elementet g^{-1} vedtages, at det tilhører sig selv og hvert andet element.

På grund af den anskuelige betydning vi ønsker at tillægge

relationen, må vi kræve, at et element kun kan tilhøre sig selv eller et element af højere dimension, altså at

$$(2.1) \quad x \leq y \Rightarrow x = y \text{ eller } \dim x < \dim y.$$

Dette medfører ofjensynlig, at relationen er antisymmetrisk. Hvad angår transitiviteten, $x \leq y$ og $y \leq z$ medfører $x \leq z$, bemærkes, at dette ifølge det vedtagne er opfyldt, hvis $x = g^{-1}$ eller $z = g^3$ (i det plane tilfælde g^2), endvidere hvis x og y eller y og z har samme dimension, idet da $x = y$ eller $y = z$. Det eneste ikke oplagte tilfælde er altså det, hvor x er et punkt, y en linie og z en plan. Transitiviteten vil man også i dette tilfælde kræve opfyldt, idet den udsiger: Hvis et punkt tilhører en linie og denne en plan, da tilhører punktet denne plan.

Vi bliver altså ledt til at definere incidensrelationerne som en partiel ordening i

$$\mathcal{G}^3 = G^{-1} \cup G^0 \cup G^1 \cup G^2 \cup G^3 \quad \text{eller} \quad \mathcal{G}^2 = G^{-1} \cup G^0 \cup G^1 \cup G^2,$$

som opfylder (2.1), og ved hvilken der findes et første element g^{-1} og et sidste g^3 eller g^2 . Endvidere bemærkes, at de f.o. mængder $(\mathcal{G}^3, \leq)$ og $(\mathcal{G}^2, \leq)$ højst kan have længden 4 henholdsvis 3.

Vi tilføjer yderligere forudsætninger, såkaldte incidensaksiomer. Herved benyttes de sædvanlige spæglige udtryk til angivelse af relationerne $\leq$ og $\geq$, for den sidste f. eks. "går gennem". Et element, som ligger i to elementer, siges også at være fælles for disse.

In 1. Til to forskellige punkter findes netop én linie, som går gennem begge punkter.

In 2. Tæl tre punkter, som ikke ligger på samme linie, findes netop én plan, som går gennem de tre punkter.

In 3. Hvis to forskellige punkter ligger på en linie og i en plan, ligger linien i planen.

In 4. Hvis der findes et punkt, som ligger i to forskellige planer, findes der mindst ét fra dette forskelligt punkt, som også ligger i begge planer.

In 5. På enhver linie ligger mindst to forskellige punkter.

In 6. I enhver plan findes mindst tre punkter, som ikke ligger på samme linie.

In 7. I rummet findes mindst fire punkter, som ikke ligger i samme plan.

Definition: Ved en incidensplan forstås en partielt ordnet mængde $(\mathcal{P}^2, \leq)$, som har de ovenfor omtalte egenskaber og desuden opfylder In 1, In 5 og In 6.

Ved et incidenrum forstås en partielt ordnet mængde $(\mathcal{P}^3, \leq)$, som har de ovenfor omtalte egenskaber og desuden opfylder In 1 - 7.

Lad $(G^{-1} \cup G^0 \cup G^1 \cup G^2 \cup G^3, \leq)$ være et incidensrum og $a^2 \in G^2$ en plan. Med definitionerne

$$G_a^0 = \{x^0 \in G^0 \mid x^0 \leq a^2\}, \quad G_a^1 = \{x^1 \in G^1 \mid x^1 \leq a^2\}, \quad G_a^2 = \{a^2\}$$

er da $(G^{-1} \cup G_a^0 \cup G_a^1 \cup G_a^2, \leq)$ på grund af In 3 en incidensplan. Løst formuleret:

Enhver plan i et incidensrum er en incidensplan.

I et incidensrum har man nedenstående sætninger, som er umiddelbare konsekvenser af de i parentes tilføjede aksiomer eller forudgående sætninger. Der bruges talemåden "to elementer har intet fælles" for at udtrykke, at g^{-1} er det eneste element, der tilhører begge elementer.

(2.2) To forskellige linier har netop ét punkt eller intet fælles. (In 1.)

(2.3) En linie og en plan, som ikke går gennem linien, har netop ét punkt eller intet fælles. (In 3.)

(2.4) Til et punkt og en linie, som ikke går gennem punktet, findes netop én plan, som går gennem punktet og linien. (In 5, In 2, In 3.)

(2.5) Til to forskellige linier, som har et punkt fælles, findes netop én plan, som går gennem begge linier. (In 5, In 2, In 3.)

(2.6) To forskellige planer har netop én linie og de på denne liggende punkter eller intet fælles. (In 4, In 1, In 3, (2.4), (2.5).)

Aksiomerne In 1, In 3 og de anførte sætninger viser, at ethvert incidensrum er en lattice. At to elementer x og y har et infimum og et supremum er nemlig klart, hvis $x \leq y$, altså specielt, hvis $x = g^{-1}$ eller $y = g^3$. Endvidere har de ofensynlig et infimum, nemlig g^{-1} , hvis de har "intet fælles", og et supremum, nemlig g^3 , hvis de ikke ligger i samme plan. I de øvrige tilfælde slutter det af In 1 og In 3 for to punkter, af (2.4) for et punkt og en linie, af (2.2) og (2.5) for to linier, af (2.3) for en linie og en plan og af (2.6) for to planer. Vi kan derfor tale om forbindelse $x \vee y$ og snit $x \wedge y$ af to elementer x og y i overensstemmelse med disse gloers sædvanlige betydning.

De nævnte aksiomer og sætninger indeholder imidlertid også udslag om forbindelsernes og snitternes dimensioner. Man bekræfter let, at man altid har

$$\dim(x \wedge y) + \dim(x \vee y) \leq \dim x + \dim y,$$

og at lighedstegnet gælder, dog muligvis med undtagelse af følgende tilfælde: x og y er linier uden fællespunkt, hvor $\dim(x \vee y)$ kan være 2 eller 3, x er en linie og y en plan uden fællespunkt med x , x og y er to planer uden fællespunkt.

Sammenfattende kan vi altså sige:

(2.7) Ethvert incidensrum er en lattice $(\mathcal{G}^3, \leq)$ med følgende egenskaber:

- 1) $\mathcal{G}^3 = G^{-1} \cup G^0 \cup G^1 \cup G^2 \cup G^3$, hvor G^i , $i = -1, 0, 1, 2, 3$ er parvis disjunkte mængder. Elementerne af G^i tilskrives dimensionen i .
- 2) Hver af mængderne G^{-1} og G^3 har netop ét element, der er henholdsvis første og sidste element.
- 3) Til hvert element af G^1 findes to forskellige elementer af G^0 , for hvilke det er majorant.
- 4) Til hvert element af G^2 findes tre forskellige elementer af G^0 , for hvilke det, men ikke noget element af G^1 er majorant.
- 5) Der findes fire forskellige elementer i G^0 , for hvilke ikke noget element af G^2 er majorant.
- 6) For alle $x, y \in \mathcal{G}^3$ gælder

$$x \leq y \implies x = y \text{ eller } \dim x < \dim y.$$
- 7) For $x, y \in \mathcal{G}^3$ gælder dimensionsformlen

$$\dim(x \wedge y) + \dim(x \vee y) = \dim x + \dim y,$$

idet dog følgende afvigende tilfælde kan forekomme:

$$\dim x = 1, \dim y = 1, \dim(x \wedge y) = -1, \dim(x \vee y) = 2,$$

$$\dim x = 1, \dim y = 2, \dim(x \wedge y) = -1, \dim(x \vee y) = 3,$$

$$\dim x = 2, \dim y = 2, \dim(x \wedge y) = -1, \dim(x \vee y) = 3.$$

Enhver lattice med disse egenskaber er et incidensrum. (Opp. 3.)

Med de oplygte modifikationer gælder det samme for incidensrummet.

Lad $(\mathcal{G}_1^3, \leq)$ og $(\mathcal{G}_2^3, \leq)$ være p.o. mængder. (At der bruges samme tegn for de partielle ordninger i de to mængder, kan ikke give anledning til misforståelser.) Det forudsættes, at begge har egenskaberne (2.7), 1), 2). Antag, at der findes en bijektiv afbildning $\varphi: \mathcal{G}_1^3 \rightarrow \mathcal{G}_2^3$ således, at der for $x, y \in \mathcal{G}_1^3$ gælder

$$(2.8) \quad x \leq y \iff \varphi(x) \leq \varphi(y),$$

$$(2.9) \quad \dim x = \dim \varphi(x).$$

Man kan sige, at $(\mathcal{G}_1^3, \leq)$ er "ordnings- og dimensions-isomorf" med $(\mathcal{G}_2^3, \leq)$.

Af (2.8) sluttes, at hvis $(\mathcal{G}_1^3, \leq)$ er en lattice, vil også $(\mathcal{G}_2^3, \leq)$ være det, og for $x, y \in \mathcal{G}_1^3$ vil der gælde

$$(2.10) \quad \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y), \quad \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y).$$

Hvis $(\mathcal{G}_1^3, \leq)$ er et incidensrum, altså yderligere har egenskaberne 3) - 7), kan man af (2.7) slutte, at $(\mathcal{G}_2^3, \leq)$ også er et incidensrum.

Definition: Et incidensrum $(\mathcal{G}_1^3, \leq)$ siges at være isomorft med et incidensrum $(\mathcal{G}_2^3, \leq)$, hvis der findes en bijektiv afbildning $\varphi: \mathcal{G}_1^3 \rightarrow \mathcal{G}_2^3$, som opfylder (2.8) og (2.9).

Isomorfi mellem incidensrum er en ækvivalensrelation.

Det bemærkes, at det ville være tilstrækkeligt i definitionen at kræve "ordnings-isomorfi", altså (2.8), idet (2.9) kan vises at være en konsekvens af (2.8) og incidensrums egenskaber. (Opg. 5.)

Ifølge det her valgte udgangspunkt er det nødvendigt at skille mellem en linie og dens punktrække, dvs. mængden af

punkter på den, mellem en plan og dens punktfelt, dvs. mængden af punkter i den, og mellem rummet og mængden af alle punkter. Vi skal nu vise, at vi uden væsentlig indskrænkning og i overensstemmelse med den tilvante opfattelse kunne have defineret linier, planer og rummet som punktmængder. At dette ikke er sket, er begrundet i, at det i flere forbindelser er nyttigt at have den valgte, tilsyneladende mere abstrakte opfattelse til rådighed.

Lad $(\mathcal{G}^3, \preceq)$, hvor $\mathcal{G}^3 = G^{-1} \cup G^0 \cup G^1 \cup G^2 \cup G^3$, være et incidensrum. Vi definerer mængderne

$$\dot{G}^{-1} = \{\emptyset\},$$

$$\dot{G}^0 = \{\{a^0\} \mid a^0 \in G^0\},$$

$$\dot{G}^1 = \{\{x^0 \in G^0 \mid x^0 \preceq a^1\} \mid a^1 \in G^1\},$$

$$\dot{G}^2 = \{\{x^0 \in G^0 \mid x^0 \preceq a^2\} \mid a^2 \in G^2\},$$

$$\dot{G}^3 = \{G^0\},$$

hvis elementer alle er delmængder af G^0 . Specielt har $\dot{G}^1$ punkt-rækkerne og $\dot{G}^2$ punktfelterne som elementer. På grund af In 5, In 6 og In 7 er mængderne $\dot{G}^i$ parvis disjunkte. Der gælder

(2.11) $(\mathcal{G}^3, \preceq)$, hvor $\mathcal{G}^3 = G^{-1} \cup G^0 \cup G^1 \cup G^2 \cup G^3$, er et incidensrum, som $(\mathcal{G}^3, \preceq)$ er isomorft med ved den "kanoniske" isomorfi

$$g^{-1} \mapsto \emptyset$$

$$a^0 \mapsto \{a^0\}$$

$$a^1 \mapsto \{x^0 \in G^0 \mid x^0 \preceq a^1\}$$

$$a^2 \mapsto \{x^0 \in G^0 \mid x^0 \preceq a^2\}$$

$$g^3 \mapsto G^0$$

$$\text{for } g^{-1} \in G^{-1},$$

$$\text{for } a^0 \in G^0,$$

$$\text{for } a^1 \in G^1,$$

$$\text{for } a^2 \in G^2,$$

$$\text{for } g^3 \in G^3.$$

Bevis: At der hermed for hvert $i = -1, 0, 1, 2, 3$ er defineret en bijektiv afbildning af G^i på G^i , altså specielt at (2.9) gælder, er klart for $i = -1, 0, 3$. Det er også klart, at den er surjektiv for $i = 1, 2$, og at den er injektiv slutter for $i = 1$ af In 5 og In 1 og for $i = 2$ af In 6 og In 2. At (2.8) gælder, følger umiddelbart af definitionerne, idet der dog i tilfældet x en linie og y en plan foruden transitivitet af $\leq$ også må benyttes In 3. Påstanden følger nu af bemærkningerne i tilknytning til (2.8) og (2.9).

Vi vil kalde $(\mathcal{G}^3, \leq)$ for punktmængdefremstillingen af incidensrummet $(\mathcal{G}^3, \leq)$. Den vil blive brugt i mange af de følgende beviser. I stedet for $(\mathcal{G}^3, \leq)$ skrives kort $\mathcal{G}^3$.

- (2.12) Lad $(\mathcal{G}_1^3, \leq)$ og $(\mathcal{G}_2^3, \leq)$ være incidensrum med punktmængderne G_1^0 og G_2^0 , og lad $\varphi^0: G_1^0 \rightarrow G_2^0$ være en bijektiv afbildning med følgende egenskaber:
- 1) Tre punkter i G_1^0 ligger på en linie, hvis og kun hvis deres billedpunkter ved φ^0 ligger på en linie,
 - 2) Fire punkter i G_1^0 ligger i en plan, hvis og kun hvis deres billedpunkter ved φ^0 ligger i en plan.
- Da kan φ^0 på en og kun én måde udvides til en isomorfi $\varphi: \mathcal{G}_1^3 \rightarrow \mathcal{G}_2^3$, og enhver isomorfi af $\mathcal{G}_1^3$ på $\mathcal{G}_2^3$ kan fås på denne måde.

Beris: Den sidste påstand er oplagt, idet restriktionen φ^0 til G_1^0 af en isomorfi φ ifølge (2.8) har de nævnte egenskaber.

Ifølge (2.11) kan vi erstatte begge incidensrum med deres punktmængdefremstillinger $\tilde{G}_1^3$ og $\tilde{G}_2^3$. Den givne afbildning φ^0 bestemmer den bijektive afbildning $\tilde{\varphi}: \tilde{G}_1^0 \rightarrow \tilde{G}_2^0$ ved $\tilde{\varphi}(\{x^0\}) = \{\varphi^0(x^0)\}$. Idet den søgte udvidelse $\tilde{\varphi}$ til $\tilde{G}_1^3$ skal opfylde (2.8), altså

$$(2.13) \quad \{x^0\} \subseteq \tilde{\alpha} \iff \{\varphi^0(x^0)\} \subseteq \tilde{\varphi}(\tilde{\alpha})$$

for hvert $\tilde{\alpha} \in \tilde{G}_1^3$ og $x^0 \in \tilde{G}_1^0$, må vi have

$$\tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}) = \{\varphi^0(x^0) \mid x^0 \in \tilde{\alpha}\}.$$

Dette viser entydigheden. Defineres $\tilde{\varphi}(\tilde{\alpha})$ for $\tilde{\alpha} \in \tilde{G}_1^3$ herved, fås en afbildning $\tilde{\varphi}$ af $\tilde{G}_1^3$ ind i mængden af delmængder af $\tilde{G}_2^3$. For at vise, at den afbilder bijektivt på $\tilde{G}_2^3$, er det tilstrækkeligt at godtgøre, at mængden af punktrækker og mængden af punktfelter i $\tilde{G}_1^3$ afbildes bijektivt på de tilsvarende mængder i $\tilde{G}_2^3$. Dette, og dermed (2.9), sluttet let af henholdsvis 1) og 2). At (2.8), altså (2.13) gælder for $\tilde{\varphi}$, er klart. Hermed er påstanden bevist.

Med oplagte modifikationer kan definitionen af isomorfi og sætningerne (2.11) og (2.12) overføres til incidensplaner.

Med henblik på (2.11) vil vi i det følgende for kortheds skyld ofte tale om en isomorfi, når der blot foreligger en bijektiv afbildning af det ene incidensrum (den ene incidensplan) punktmængde på det andet (den anden) punktmængde, således at 1) og 2) i (2.12) er opfyldt.

Vi tilføjer nogle bemærkninger om aksiomsystemer i almindelighed og om de her opstillede.

Om et aksiomsystem er Konsistent, dvs. om det er modsigelsesfrit i den forstand, at det er umuligt at udlede af det såvel en sætning som dennes negation, kan undersøges ved hjælp af modeller. Ved en model for et aksiomsystem forstås en mængde af objekter fra et "etableret" matematisk område, således at den med passende fortolkning af de forekommende relationer tilfredsstiller systemets aksiomer. Hvis der findes en model, måtte en eventuel modstrid i aksiomsystemets konsekvenser også optræde i det pågældende matematiske område. Spørgsmålet om aksiomsystemets konsistens føres altså tilbage til samme spørgsmål for det område, fra hvilket modellen er taget.

For aksiomsystemet for incidensrum er det let at angive modeller bestående af endelige mængder. Lad f.eks. G^0 være en mængde bestående af fire elementer, og lad punkterne, linierne og planerne være delmængderne bestående af henholdsvis ét, to og tre elementer. Tilføjes L og G^0 , vil mængden af delmængderne af G^0 tilfredsstille aksiomerne for et incidensrum. Om konsistens vil man her ikke være i tvivl. Tilsvarende får en incidensplan ved at gå ud fra en mængde bestående af tre elementer.

De vigtigste modeller for aksiomsystemerne for incidensplaner og -rum er de 2- og 3-dimensionale affine rum

(som defineret i Mat. 1x, Kap. 9). Endvidere fås modeller af stor interesse ved at gå ud fra et vektorrum af dimension 3 eller 4 og for $i = -1, 0, 1, 2$ henholdsvis $i = -1, 0, 1, 2, 3$ at definere G^i som mængden af alle $(i+1)$ -dimensionale under-rum. Med relationen $\subseteq$ er mængden af alle under-rum en lattice (opg. §1, 2), og ved hjælp af Grassmann's dimensionsformel ses, at alle betingelser (2.7), 1)-7) er opfyldt, den sidste endda uden de tilladte undtagelser. Begge slags modeller vil blive omtalt nedenfor.

Et aksiomsystem siges at være kategorisk, hvis hvilkersomhelst to modeller for det er isomorfe. De omtalte modeller viser, at aksiomsystemerne for incidensplaner og rum ikke er kategoriske. I almindelighed vil man slet ikke være interesseret i kategoriske systemer, idet man netop ønsker at opnå en fælles behandling af mange forskellige modeller. Her kan nævnes aksiomsystemerne for grupper, ringe, legemer, vektorrum, metriske rum. Men ud fra den tidligere fremhævede opfattelse, at der kan findes én "sand" geometri, var det motiveret at tilstræbe et kategorisk aksiomsystem for denne. Der er imidlertid, som det bl. a. vil fremgå af det følgende, mange grunde til også for geometriens vedkommende at tage ikke-kategoriske i betragtning. Aksiomsystemerne for incidensplaner og rum er dog for svage til at give en interessant teori. Der vil derfor blive tilføjet yderligere aksiomer.

Det kan være af interesse at undersøge, om et aksiom er uafhængigt af aksiomsystemets øvrige aksiomer, dvs. om det er umuligt at bevise det ud fra disse. Dette vil være tilfældet, hvis der kan angives en model for systemet bestående af de øvrige aksiomer, i hvilken det pågældende aksiom ikke er gyldigt. (Jf. opg. 6.) Hvis et aksiom viser sig at være afhængigt af de øvrige, dvs. kan bevises ud fra disse, kan man udelukke det, måske på bekostning af væsentligt øget bevisarbejde. Det må dog understreges, at mange sådanne spørgsmål er af ret underordnet betydning, fordi de påvirkes ikke blot af aksiomsystemets indhold, men også af dets udformning. Således kan et aksiom indeholde to udsagn og derfor erstattes med to aksiomer (f. eks. $\text{In } 1$ og $\text{In } 2$, som omhandler både eksistens og entydighed), eller omvendt, to aksiomer kan sammenfattes til ét. Endvidere kan det hende, at et aksioms udsagn kan afsvækkes uden ændring af den på systemet byggede teori (jf. opg. 1), og dette kunne tænkes at gøre et andet, oprindeligt afhængigt aksiom uafhængigt. Nogle relevante uafhængighedsproblemer vil blive omtalt senere.

Opgaver til § 2.

1. I definitionen af incidensrum kunne aksiomet $In 6$ erstattes med det svagere $In 6'$: I enhver plan findes mindst ét punkt. Vis dette ved at udlede $In 6$ af $In 6'$ og de øvrige aksiomer.
2. Vis, at i en incidensplan gælder:
Gennem hvert punkt går mindst to forskellige linier.
Der findes mindst tre forskellige linier, som ikke går gennem samme punkt.
Vis, at i et incidensrum gælder:
Gennem hvert punkt går mindst tre linier, som ikke ligger i samme plan.
Gennem hver linie går mindst to forskellige planer.
Der findes fire planer, som ikke går gennem samme punkt.
Hvis linierne i en mængde af linier to og to har et punkt fælles, da går de alle gennem samme punkt eller ligger alle i samme plan.
3. Bevis den fremsatte påstand, at en lattice med de under (2,7) nævnte egenskaber er et incidensrum.
4. Lad der være givet en incidensplan. Vis, at der findes et incidensrum, som indeholder en med den givne isomorf incidensplan. Løst sagt: Enhver incidensplan kan indlejres.

i et passende incidensrum.

5. Lad $(\mathcal{G}_1^3, \mathcal{L})$ og $(\mathcal{G}_2^3, \mathcal{L})$ være incidensrum. Vis, at hvis $\varphi: \mathcal{G}_1^3 \rightarrow \mathcal{G}_2^3$ er en ordnings-isomorfi, dvs. opfylder (2.8), vil φ også være en dimensions-isomorfi, altså opfylde (2.9).
6. Vis ved angivelse af en model med endelig mange punkter for aksionsystemet $In 1 - In 3, In 5 - In 7$, at aksionet $In 4$ er uafhængigt af de andre.
Angiv også sådanne modeller ved hjælp af et 4-dimensionalt affint rum og et 5-dimensionalt vektorrum.

§ 3. Affine rum og affine planer,

Aksiomsystemet for incidensrum (incidensplaner) forøges nu med et aksiom vedrørende skæring af linier i en plan (i planen). Lad a^1 være en linie og b^0 et punkt uden for denne. Der foreligger da tre muligheder:

- 1) Der findes i planen $a^1 \vee b^0$ netop én linie gennem b^0 , som ikke skærer a^1 .
- 2) Enhver linie i $a^1 \vee b^0$ gennem b^0 skærer a^1 .
- 3) Der findes i $a^1 \vee b^0$ mindst to forskellige linier gennem b^0 , som ikke skærer a^1 .

Det er nærliggende at forudsætte, at ét af disse udsagn er gyldigt for alle par a^1, b^0 . Alle tre muligheder er af interesse. Den tredje vil imidlertid først blive diskuteret senere. Vi begynder med den første, der svarer til den sædvanlige geometri.

Definition: $\left. \begin{array}{l} \text{Et incidensrum} \\ \text{En incidensplan} \end{array} \right\} \text{ kaldes } \left\{ \begin{array}{l} \text{et affint rum} \\ \text{en affin plan} \end{array} \right\},$
hvis følgende "parallelaksiom" er opfyldt:

Er a^1 en linie og b^0 et punkt uden for denne, så findes der i planen $a^1 \vee b^0$ netop én linie gennem b^0 , som ikke skærer a^1 .

Enhver plan i et affint rum er en affin plan. Men det fremhæves allerede nu, at ikke enhver affin plan er isomorf med en plan i et affint rum.

I mængden af linier i et affint rum eller i en affin plan

defineres en relation "parallel med", betegnet $\parallel$, ved

$a^1 \parallel b^1 \iff a^1 = b^1$ eller a^1 og b^1 ligger i samme plan og har ikke noget punkt fælles.

I mængden af planer i et affint rum defineres en relation "parallel med", betegnet $\parallel$, ved

$a^2 \parallel b^2 \iff a^2 = b^2$ eller a^2 og b^2 har ikke noget punkt fælles.

Det er klart, at begge relationer er reflektive og symmetriske.

I et affint rum defineres endvidere en relation "parallel med", betegnet $\parallel$, fra mængden af linier til mængden af planer ved

$a^1 \parallel b^2 \iff a^1 \subseteq b^2$ eller a^1 og b^2 har ikke noget punkt fælles.

Det vedtages, at $b^2 \parallel a^1$ skal betyde det samme som $a^1 \parallel b^2$.

Ved hjælp af relationen "parallel med" kan parallelaksomet formuleres således:

Pa. Er a^1 en linie og b^0 et punkt, så findes der netop én linie, som går gennem b^0 og er parallel med a^1 .

I Mat. 1x, 1969-70, Kap. 9 defineres, hvad vi her vil kalde for et algebraisk affint rum med vektorrum V og vektorafbildning $\varphi: A \times A \rightarrow V$, som en mængde A , hvis elementer kaldes punkter, således at der til hvert punkt $a^0 \in A$ og hver vektor $v \in V$ findes netop ét punkt $b^0 \in A$ med $\varphi(a^0, b^0) = v$ og der for $a^0, b^0, c^0 \in A$ gælder $\varphi(a^0, b^0) + \varphi(b^0, c^0) = \varphi(a^0, c^0)$. Med de 1-dimensionale affine underrum som linier og de 2-dimensionale som planer vil et algebraisk affint rum med 2- eller 3-dimensionalt reelt vektorrum være henholdsvis en affin plan eller et affint rum som defineret ovenfor. Et af hovedformålene med det følgende

er, efter tilføjelse af yderligere aksiomer, at bevise det omvendte.

Vi begynder med at nævne nogle simple sætninger vedrørende affine planer og rum. Herved benyttes de tilvandede sproglige vendinger som "to linier skærer hinanden" i betydningen "linierne har netop ét punkt fælles", mens vendingen "linierne har et punkt fælles" ikke udelukker, at linierne falder sammen. Tilsvarende gælder "en linie skærer en plan" og "to planer skærer hinanden".

For negationerne af $\leq$ og $\parallel$ bruges tegnene $\nless$ og $\nparallel$.

To linier, som ikke ligger i samme plan, som altså hverken skærer hinanden eller er parallelle, siges at være vindekskæve.

(3.1) Enhver linie i en af to parallelle planer er parallel med den anden plan.

Belis: Klært.

(3.2) Enhver plan gennem en af to parallelle linier er parallel med den anden linie.

Belis: Lad $a' \parallel b'$ og $c^2 \nless a'$. Hvis $b' \nless c^2$, er intet at belise. Hvis $b' \nless c^2$, altså $b' \nless a'$, og b' skar c^2 , ville a' og b' være vindeskeve i strid med $a' \parallel b'$.

- (3.3) Hvis en linie a^1 er parallel med en plan b^2 , vil enhver plan c^2 gennem a^1 , som skærer b^2 , skære i en linie parallel med a^1 .

Bevis: Antag, at linierne a^1 og $b^2 \cap c^2$, som begge ligger i c^2 , har et punkt fælles. Dette er da fællespunkt for a^1 og b^2 . Idet $a^1 \parallel b^2$, følger $a^1 \subseteq b^2$, altså $a^1 = b^2 \cap c^2$.

- (3.4) Hvis en linie a^1 er parallel med en plan b^2 og c^0 er et punkt i b^2 , vil linien d^1 gennem c^0 og parallel med a^1 ligge i b^2 .

Bevis: Hvis $a^1 \subseteq b^2$, er påstanden åbenlyst rigtig. Hvis $a^1 \not\subseteq b^2$, må d^1 ifølge (3.3) og Pa være skæringslinjen mellem planerne $a^1 \vee c^0$ og b^2 .

- (3.5) Er a^2 en plan og b^0 et punkt, så findes der netop én plan, som går gennem b^0 og er parallel med a^2 .

Bevis: Hvis $b^0 \subseteq a^2$, er sagen klar. Antag $b^0 \not\subseteq a^2$ og vælg i a^2 to hinanden skærende linier c^1 og d^1 (In 6, In 1). Lad $\bar{c}^1$ og $\bar{d}^1$ være de med henholdsvis c^1 og d^1 parallelle linier gennem b^0 . Da er $\bar{c}^1 \neq \bar{d}^1$ (Pa), $c^1 \neq \bar{c}^1$ og $d^1 \neq \bar{d}^1$. Den eneste plan gennem b^0 , som kan være parallel med a^2 , er $\bar{c}^1 \vee \bar{d}^1$; thi ifølge (3.1) må den være parallel med c^1 og d^1 og derfor ifølge (3.4) indeholde $\bar{c}^1$ og $\bar{d}^1$. Antag, at planerne a^2 og $\bar{c}^1 \vee \bar{d}^1$, som er forskellige,

harde en linie fælles. Denne måtte da ifølge Pa skære mindst én af linierne c^1 og d^1 , f. eks. c^1 i punktet e^0 . Idet $\bar{c}^1$ er skæringslinien mellem planerne $c^1 \vee \bar{c}^1$ og $\bar{c}^1 \vee d^1$, måtte e^0 også ligge på $\bar{c}^1$, hvilket er umuligt, da $c^1 \parallel \bar{c}^1$ og $c^1 \neq \bar{c}^1$.

(3.6) Er a^2 og b^2 parallelle planer, vil enhver plan, som skærer en af dem, også skære den anden, og skæringslinierne vil være parallelle.

Beweis: At en plan, som skærer a^2 også må skære b^2 , sluttet af (3.5). Den sidste påstand følger af, at skæringslinierne ikke kan have noget punkt fælles, hvis $a^2 \neq b^2$, og falder sammen, hvis $a^2 = b^2$.

(3.7) Parallelitet er en ækvivalensrelation såvel i mængden af linier i en affin plan som i mængden af linier i et affint rum.

Beweis: Idet $\parallel$ åbenlyst er refleksiv og symmetrisk, drejer det sig kun om at bevise transitivitet. Lad a^1, b^1, c^1 være linier, således at $a^1 \parallel b^1$ og $b^1 \parallel c^1$. Hvis $a^1 = c^1$, er $a^1 \parallel c^1$. Af Pa sluttet, at a^1 og c^1 ikke kan skære hinanden. Hvis a^1 og c^1 ligger i samme plan, følger altså $a^1 \parallel c^1$, og dermed specielt transitivitet af $\parallel$ for linierne i en affin plan. Tilbage er at vise, at a^1 og c^1 må ligge i samme plan: Lad d^0 være et punkt på c^1 . Planen $a^1 \vee d^0$ er ifølge (3.2) parallel med b^1 , og da $c^1 \parallel b^1$, må c^1 ifølge (3.4) ligge i $a^1 \vee d^0$.

(3.8) Parallelitet er en ækvivalensrelation i mængden af planer i et affint rum.

Beweis: At $\parallel$ er reflektiv og symmetrisk, er oplagt. Lad a^2, b^2, c^2 være planer, således at $a^2 \parallel b^2$ og $b^2 \parallel c^2$. Hvis $a^2 = c^2$, er $a^2 \parallel c^2$. Hvis a^2 skær c^2 , ville a^2 ifølge (3.6) også skære b^2 i strid med $a^2 \parallel b^2$. Relationen er altså transitiv.

Man lægger mærke til, at de under (2.7), 7) tilføjede tilfælde af afvigelser fra dimensionsformlen i et affint rum (i en affin plan) foreligger netop, når de pågældende to elementer er parallelle.

I det følgende betegnes en affin plan med $(A^2, \leq)$ eller, når der tænkes på punktmængdefremstillingen, med A^2 og et affint rum med $(A^3, \leq)$ eller A^3 .

For en affin plan A^2 er (3.7) den eneste relevante blandt de ovenstående sætninger. Ækvivalensklasserne ved relationen $\parallel$ kaldes parallelbunder af linier. Det parallelbundt, som indeholder en given linie a^1 , betegnes $^{\parallel}a^1$. Gennem hvert punkt i A^2 går netop én linie tilhørende $^{\parallel}a^1$. Er b^1 en linie, som ikke er parallel med a^1 , fad en surjektiv afbildning af mængden af planens punkter på b^1 ved til et punkt x^0 at lade svare skæringspunktet mellem b^1 og den linie i $^{\parallel}a^1$, som går gennem x^0 . Denne afbildning (og tillige enhver af dens restriktioner) kaldes parallelprojektionen på b^1 i retningen a^1 . Restriktionen til en linie c^1 , som heller ikke er paral-

hel med a^1 , er en bijektiv afbildning af c^1 på b^1 . Den inverse er parallelprojektion af b^1 på c^1 i retningen a^1 . Heraf kan sluttes:

I en affin plan er hvilket som helst to punktrækker ekvipotente.

Er b^1 og c^1 to forskellige linier, findes der nemlig en tredje linie a^1 , som ikke er parallel med nogen af dem; thi ifølge In5 findes der et punkt på b^1 og et punkt på c^1 , som begge er forskellige fra et eventuelt skæringspunkt mellem b^1 og c^1 , og disse to punkters forbindelseslinie kan bruges som a^1 .

Der findes affine planer med et endeligt antal punkter i hver punktrække (jf. opg. 4). Er $n \in \mathbb{N}$ dette antal, siges den affine plan at være af orden n . Hvilke tal n der her kan forekomme, er et vanskeligt, ikke helt afklaret problem.

Hvis to incidensplaner er isomorfe og den ene er en affin plan $(A_1^+, \leq)$, vil den anden også være en affin plan, og parallelle linier i den ene vil svare til parallelle linier i den anden. Dette ses således: Lad a^0 være et punkt og b^1 en linie i A_1^+ , så at $a^0 \notin b^1$. Mængden af linier gennem a^0 afbildes ved en isomorfi φ bijektivt på mængden af linier gennem $\varphi(a^0)$. Da netop én af linierne gennem a^0 ikke skærer b^1 , vil netop én af linierne gennem $\varphi(a^0)$ ikke skære $\varphi(b^1)$.

Lad G_1^0 og G_2^0 være incidensplaner i punktmængdefremstilling og G_1^1 og G_2^1 deres punktmængder. Ifølge (2.12) bestemmer en bijektiv afbildning $\varphi: G_1^0 \rightarrow G_2^0$ en isomorfi, hvis den har følgende egenskaber: Tre punkter i G_1^0 ligger på en linie, hvis og kun hvis deres billedpunkter ligger på en linie. Hvis G_1^0 er en affin plan,

kan denne betingelse almindeligvis afsvækkes. Der gælder:

(3.9) En affin plan A_1^2 , som ikke er af orden 2, er isomorf med en incidensplan $\mathcal{G}_1^2$, og denne følgelig også en affin plan, hvis og kun hvis der findes en bijektiv afbildning φ^0 af punktmængden G_1^0 i A_1^2 på punktmængden G_2^0 i $\mathcal{G}_1^2$ således, at hvilket som helst tre punkter i G_1^0 , som ligger på en linie, ved φ^0 afbildes på tre punkter i G_2^0 , som ligger på en linie.

Basis: Betingelsens nødvendighed er klar. Ifølge de foregående bemærkninger er det tilstrækkeligt at bevise, at hvis tre punkter i G_2^0 ligger på en linie, vil deres originalpunkter i G_1^0 ligge på en linie. Antag, at der findes punkter $a^0, b^0, c^0 \in G_1^0$, som ikke ligger på samme linie og hvis billedpunkter ligger på en linie π^1 . Ifølge forudsætning må da hvert punkt på en af linierne $a^0 \vee b^0$, $b^0 \vee c^0$, $c^0 \vee a^0$ afbildes i et punkt på π^1 . Lad nu $x^0 \in G_1^0$ være et vilkårligt punkt uden for de tre linier. Hvis linien $a^0 \vee x^0$ skærer $b^0 \vee c^0$, findes der to forskellige punkter på $a^0 \vee x^0$, hvis billeder ligger på π^1 . Ifølge forudsætning medfører dette $\varphi^0(x^0) \in \pi^1$. Hvis $a^0 \vee x^0 \parallel b^0 \vee c^0$, vælges et fra a^0 og b^0 forskelligt punkt d^0 på $a^0 \vee b^0$, hvilket er muligt, da planens orden ikke er 2. Linien $d^0 \vee x^0$ skærer da $b^0 \vee c^0$ i et fra d^0 forskelligt punkt, og man slutter som før, at $\varphi^0(x^0) \in \pi^1$. Hele mængden G_1^0 afbildes følgelig ind i π^1 . Da $\mathcal{G}_1^2$ opfylder In 6, er dette umiddelbart uforeneligt med bijektiviteten af φ^0 .

Opgaver til § 3.

1. Gør rede for, at et algebraisk affint rum med 2-dimensionalt (3-dimensionalt) reelt vektorrum er en affin plan (et affint rum) som defineret i begyndelsen af denne paragraf. (Jf. opg. § 1, 2.)
2. Vis, at der i et affint rum gælder:
 Er a^1 og b^1 ikke-parallele linier, så finder der netop én plan gennem a^1 , som er parallel med b^1 .
 Lad a^2 og b^2 være planer og c^1 en linie. Hvis $a^2 \cap b^2 \cap c^1 = \emptyset$, findes der en plan gennem c^1 , som skærer a^2 og b^2 i parallelle linier.
3. Vis, at en affin plan har mindst 4 punkter og 6 linier, og at der går mindst 3 forskellige linier gennem hvert punkt.
 Vis, at der findes en affin plan med 4 punkter.
 Vis, at et affint rum har mindst 8 punkter, 28 linier og 14 planer, og at gennem hver linie går mindst 3 forskellige planer og gennem hvert punkt mindst 7 forskellige linier og 7 forskellige planer.
 Vis, at der findes et affint rum med 8 punkter.
4. Om en affin plan (et affint rum) antages, at hver punktvække består af $n \in \mathbb{N}$ punkter. Find antallet af planens (rummets) punkter, antallet af dens (dets) linier (og antallet af dens planer).

5. Vis, at der i et affint rum gælder:

Hvis en plan skæres af en af to parallelle linier, skæres den også af den anden.

Hvis en linie er parallel med to hinanden skærende planer, er den parallel med disses skæringslinie.

Til to linier findes altid en plan, som skærer dem begge.

6. Undersøg, hvilke muligheder for den indbyrdes beliggenhed af tre forskellige planer i et affint rum der findes, og angiv for hvert tilfælde antallet og den indbyrdes beliggenhed af eventuelle skæringslinier.

7. Bevis sætning (3.10). [Vis f.eks. i den angivne orden: Hvis fire punkter i $\mathbb{A}_1^3$ ligger i en plan, vil billedpunkterne ligge i en plan. Hvis fire punkter i $\mathbb{A}_1^3$ ikke ligger i en plan, vil billedpunkterne ikke ligge i en plan. Hvis tre punkter i $\mathbb{A}_1^3$ ikke ligger på en linie, vil billedpunkterne ikke ligge på en linie.]

Vis ved angivelse af eksempler, at sætningerne (3.9) og (3.10) ikke er gyldige uden forudsætningen, at den affine plads henholdsvis det affine rum ikke har orden 2.

8. Vis, at i aksiomsystemet $In 1, In 5, In 6$, Pa for en affint plan er $In 5$ afhængigt af de øvrige aksiomer.

Vis endvidere, at i aksiomsystemet $In 1 - In 7$, Pa for et affint rum er både $In 5$ og $In 6$ overflødige.

Vi betragter nu et affint rum A^3 . Ifølge (3.6) er $\parallel$ en ækvivalensrelation i mængden af planer. Ækvivalensklasserne kaldes parallelbundter af planer. Det parallelbundt, som indeholder en given plan a^2 , betegnes ${}^2\parallel a^2$. Gennem hvert punkt i A^3 går netop én plan tilhørende ${}^2\parallel a^2$. For en linie $b^1 \notin a^2$ defineres på oplagt måde parallelprojektion på b^1 i "retningen" a^2 . Restriktionen til en linie $c^1 \notin a^2$ er en bijektiv afbildning af denne på b^1 . Heraf kan man slutte, at hvilkesomhelst to punktvækter er ækvipotente. Dertil behøver man kun at bemærke, at der til to linier findes en plan, som skærer dem begge (opg. 5).

Ifølge (3.7) er $\parallel$ en ækvivalensrelation i mængden af rummets linier. Ækvivalensklasserne kaldes parallelknipper af linier. Det parallelknippe, som indeholder en given linie a^1 , betegnes ${}^1\parallel a^1$. Gennem hvert punkt i A^3 går netop én linie tilhørende ${}^1\parallel a^1$. For en plan $b^2 \notin a^1$ defineres på oplagt måde parallelprojektion på b^2 i retningen a^1 . Herved bemærkes, at hvis en af to parallelle linier skærer en plan, gør den anden det også (opg. 5). Restriktionen til en plan $c^2 \notin a^1$ er en bijektiv afbildning af c^2 på b^2 . Den er endda en isomorfi, idet enhver punktvækter i c^2 afbildes bijectivt på en punktvækter i b^2 . For at indse dette behøver man kun at bemærke: For enhver linie $d^1 \notin a^1$ vil der linier tilhørende ${}^1\parallel a^1$, som skærer d^1 , ligge i en plan gennem d^1 , nemlig den der er parallel med a^1 , og i denne udgøre et parallelbundt (jfr. opg. 2).

Idet man ved hjælp af Im 6 kan slutte, at der til hvilket som helst to planer b^2 og c^2 findes en linie, som ikke er parallel

med nogen af dem, har man: I et affint rum er hvilket som helst to planer (betragtet som affine planer) isomorfe.

Ordenen n af et affint rum med endelig punktmængde defineres som for en affin plan. Senere resultater vil vise, at de naturlige tal, som her kan forekomme, præcis er primtalpotenserne.

Hvis to incidensrum er isomorfe, og det ene er et affint rum, vil det andet også være det, og parallelle elementer i det ene vil svare til parallelle elementer i det andet. Idet P_α kun omhandler elementer i en plan, følger den første påstand af det tilsvarende resultat for planer. Den anden påstand er en umiddelbar konsekvens af, at en isomorfis punktabbildning er bijektiv.

Forudsætningerne i (2.12) kan almindeligvis afsvækkes væsentligt, når et af incidensrummene vides at være et affint rum (opg. 7):

(3.10) Et affint rum A_1^3 , som ikke er af orden 2, er isomorft med et incidensrum G_2^3 , og dette følger også et affint rum, hvis og kun hvis der findes en bijektiv afbildning φ° af punktmængden G_1° i A_1^3 på punktmængden G_2° i G_2^3 således, at hvilket som helst tre punkter i G_1° , som ligger på en linie, ved φ° afbildes på tre punkter i G_2° , som ligger på en linie.

Idet isomorfierne mellem affine planer eller affine rum er karakteriseret ved, at de til linier lader svare linier, kaldes de for Rollineationer.

§ 4. Projektiv plan og projektivt rum.

Vi erstatter nu parallelaksiomet med et aksiom svarende til den anden af de på side II. 3.1 nævnte muligheder. Det ses umiddelbart, at den går ud på:

Pr. Til to forskellige linier i en plan findes netop ét punkt, som ligger på begge linier.

Vi betragter altså incidensplaner og incidensrum, hvori dette er opfyldt. For at undgå uinteressante specielle tilfælde erstattes dog her In 5 med det stærkere aksiom

In 5'. På enhver linie ligger mindst tre forskellige punkter.

Definition: $\left. \begin{array}{l} \text{Et incidensrum} \\ \text{En incidensplan} \end{array} \right\}$ kaldes $\left\{ \begin{array}{l} \text{et projektivt rum} \\ \text{en projektiv plan} \end{array} \right\}$, hvis Pr og In 5' er opfyldt.

For projektive planer og rum benyttes betegnelserne $(P^2, \leq)$ og $(P^3, \leq)$ eller, når talen er om punktmængdefremstillinger, $\tilde{P}^2$ og $\tilde{P}^3$.

Enhver plan i et projektivt rum er en projektiv plan.

Men det vil fremgå af senere resultater, at der findes projektive planer, som ikke er isomorfe med planer i et projektivt rum.

Vi betragter først en projektiv plan.

Man bemærker, at aksiomet P_r er ensbetydende med, at der for to linier x og y altid gælder dimensionsformlen

$$\dim(x \wedge y) + \dim(x \vee y) = \dim x + \dim y.$$

Den eneste af de under (2.7), 7) tilladte undtagelser, som er relevant i det plane tilfælde, falder altså bort, når tællen er om projektive planer. Efter tilpasning til det plane tilfælde og under hensyn til $Ix 5'$ kan vi derfor af (2.7) slutte:

(4.1) En lattice $(P^2, \leq)$ er en projektiv plan, hvis og kun hvis den har følgende egenskaber:

- 1') $P^2 = G^{-1} \cup G^0 \cup G^1 \cup G^2$, hvor G^i , $i = -1, 0, 1, 2$, er parvis disjunkte mængder. Elementerne af G^i tilskrives dimensionen i .
- 2') Hver af mængderne G^{-1} og G^2 har netop ét element, som er henholdsvis første og sidste element.
- 3') Til hvert element af G^1 findes tre forskellige elementer af G^0 , for hvilke det er majorant.
- 4') Der findes tre forskellige elementer af G^0 , for hvilke ikke noget element af G^1 er majorant.
- 6) For alle $x, y \in P^2$ gælder

$$x \leq y \implies x = y \text{ eller } \dim x < \dim y.$$
- 7') For alle $x, y \in P^2$ gælder

$$\dim(x \wedge y) + \dim(x \vee y) = \dim x + \dim y.$$

Vi kan herefter let angive modeller for aksiomsystemet for en projektiv plan. Det er altså Konsistent.

(4.2) Lad V^3 være et 3-dimensionalt vektorrum over et (kommutativt) legeme L , og lad G^i , $i = -1, 0, 1, 2$, være mængden af dets $(i+1)$ -dimensionale underrum. Da er $(P^2, \subseteq)$, hvor $P^2 = G^{-1} \cup G^0 \cup G^1 \cup G^2$ er mængden af samtlige underrum af V^3 , en projektiv plan.

Bewis: $(P^2, \subseteq)$ er i hvert fald en lattice, hvori snit og forbindelse af to elementer, altså to underrum af V^3 , er henholdsvis fællesmængde og sum (opg. § 1, 2). At 1') og 2') er opfyldt, er klart, idet $G^{-1} = \{ \{0\} \}$ og $G^2 = \{ V^3 \}$. At 3') er opfyldt, altså at hvert 2-dimensionalt underrum har mindst tre 1-dimensionale, slutter af, at vektorerne $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_1 + \underline{v}_2$, hvor $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ er en basis for det 2-dimensionale underrum, er parvis lineært uafhængige. At 4') er opfyldt, ses ved hjælp af en basis for V^3 . Kravet 6) er her ensbetydende med den kendte sætning, at hvis et underrum af V^3 er ægte delmængde af et andet, har det lavere dimension end dette. Endelig er 7') her ikke andet end Grassmann's dimensionsformel.

En projektiv plan dannet på den angivne måde ud fra et vektorrum over et legeme L vil vi kalde for en algebraisk projektiv plan over legemet L og betegne en sådan med (P^2, L) . Idet de 3-dimensionale vektorrum over samme legeme L er indbyrdes isomorfe, gælder det samme om de projektive planer over L . Man taler derfor undertiden om den algebraiske projektive plan over L .

Aksiomerne In_1 og Pr fremgår af hinanden ved ombytning af "punkt" og "linie" samt "går gennem" og "ligger på". Aksiomerne In_5' og In_6 har ikke sådanne modstykker blandt aksiomerne, men dog som sætninger:

(4.3) Gennem hvert punkt går mindst tre forskellige linier.

(4.4) Der findes mindst tre linier, som ikke går gennem samme punkt.

Bevís for (4.3) og (4.4): Lad a° være et vilkårligt punkt. Ifølge In_6 findes et sådant, desuden et punkt $b^\circ \neq a^\circ$ samt et punkt $c^\circ \neq a^\circ \vee b^\circ$. På linien $b^\circ c^\circ$, som ikke går gennem a° , findes ifølge In_5' et fra b° og c° forskelligt punkt d° . Linierne $a^\circ \vee b^\circ$, $a^\circ \vee c^\circ$ og $a^\circ \vee d^\circ$ er indbyrdes forskellige, hvilket giver (4.3), og (4.4) følger af, at $a^\circ \vee b^\circ$, $a^\circ \vee c^\circ$ og $b^\circ \vee c^\circ$ ikke går gennem samme punkt.

Herefter kan man slutte, at der af en i enhver projektiv plan gyldig sætning ved ovennævnte ombytninger igen fås en sådan sætning. Vi præciserer og belyser dette såkaldte dualitetsprincip ved hjælp af (4.1).

En projektiv plan, $(P^2, \mathcal{L})$, hvor $P^2 = G^{-1} \cup G^0 \cup G^1 \cup G^2$, har betragtet som lattice en dual lattice $(P^{2*}, \mathcal{L}^*)$, hvor $P^{2*} = P^2$, og hvor (med nærliggende betegnelser) $\mathcal{L}^*$, $\wedge^*$, $\vee^*$ er det samme som henholdsvis $\mathcal{L}$, $\vee$, $\wedge$. Hvis vi sætter

$$(4.5) \quad G^j_* = G^{1-j}, \quad j = -1, 0, 1, 2,$$

og tilskriver elementerne af G^j_* dimensionen j , har vi

$$P^{2*} = G^{-1*} \cup G^{0*} \cup G^{1*} \cup G^{2*},$$

og (4.1), 1'), 2'), 6) og 7) vil øjensynlig være opfyldt for $(P^{2*}, \leq^*)$. Idet (4.3) og (4.4) netop er 3') og 4') for $(P^{2*}, \leq^*)$, har vi altså: Den duale lattice til en projektiv plan er med de nævnte fæst-sættelser ligeledes en projektiv plan, kaldet den til $(P^2, \leq)$ duale projektive plan. Den duale til den duale projektive plan er åbenbart den oprindelige. Et udsagn vedrørende $(P^{2*}, \leq^*)$ kan ved (4.5) oversættes til et udsagn om $(P^2, \leq)$ og omvendt. Dette giver:

Dualitetsprincippet for projektive planer: Af en sætning, som er gyldig i enhver projektiv plan, fås igen en sådan sætning ved i ordlyden at ombytte "punkt" og "linje", "ligger på" og "går gennem", "snit" og "forbindelse". Den fremkomne sætning kaldes den til den oprindelige duale sætning.

Vi fremhæver endnu, at den duale til en algebraisk projektiv plan (P^2, L) bestemt ved vektorrummet V^3 er isomorf med den algebraiske projektive plan (P^{2*}, L) bestemt ved det til V^3 duale vektorrum V^{3*} . Lader man nemlig til hvert underrum $U \subseteq V^3$ svare dets annihilator $U^0 \subseteq V^{3*}$, fås en bijektiv afbildning af mængden af underrum af V^3 på mængden*) af V^{3*} , således at $\dim U + \dim U^0 = 3$. Til $G^j = G^{1-j}$, som jo er mængden af $(2-j)$ -dimensionale underrum af V^3 , svarer herved altså mængden af $(j+1)$ -dimensionale underrum af V^{3*} . (Jf. hertil Mat. 1x, 1969-70, Kap. 3.) Idet $U_1 \supseteq U_2$ medfører

*) af underrum

$\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$, fås påstanden heraf.

En projektiv plan behøver ikke at være isomorf med sin duale. Men da et vektorrum er isomorf med sit duale, har i hvert fald enhver algebraisk projektiv plan denne egenskab. For sådanne "selv-duale" planer kan dualitetsprincippet skrives til: I en projektiv plan, som er isomorf med sin duale, er med enhver sætning også den duale (dvs. den, der fås ved ovennævnte ombytninger) gyldig.

Vi vender tilbage til en vilkårlig projektiv plan $(P^2, \mathcal{L})$ og indfører navne og betegnelser for, hvad vi kort vil kalde for grundmængder.

Mængden af	Navn:	Betegnelse:
punkter på en linie a^1	<u>punktrække med bærer a^1</u>	$^0(a^1)$
linier gennem et punkt a^0	<u>liniebundt med toppunkt a^0</u>	$^1(a^0)$

Ved hjælp af snit og/eller forbindelse fås bijektive afbildninger af grundmængder på grundmængder, som under ét kaldes for perspektiviteter. Er der givet en punktrække $^0(a^1)$ og et punkt $b^0 \notin a^1$, fås en bijektiv afbildning af $^0(a^1)$ på $^1(b^0)$ ved til $x^0 \in ^0(a^1)$ at lade svare forbindelsen $x^0 v b^0$. Omvendt og dualt: er der givet et liniebundt $^1(b^0)$ og en linie $a^1 \neq b^0$, fås en bijektiv afbildning af $^1(b^0)$ på $^0(a^1)$ ved til $x^1 \in ^1(b^0)$ at lade svare snittet $x^1 \wedge a^1$. Er der givet to linier a^1 og b^1 samt et punkt c^0 uden for begge, fås ved først at "forbinde

med c^0 " og dernæst at "skære med b^1 " en perspektivitet af $^0(a^1)$ på $^0(b^1)$, hvorved tilsvarende punkters forbindelseslinier går gennem c^0 . Den kaldes også centralprojektion af a^1 på b^1 fra c^0 . Dualt her til fås en perspektivitet af et liniebundt $^1(a^0)$ på et liniebundt $^1(b^0)$ ved hjælp af en linie c^1 , som ikke går gennem noget af toppunkterne a^0 og b^0 . Tilsvarende linier skærer hinanden på c^1 .

Ved hjælp af perspektiviteter ses let, at alle grundmængder er indbyrdes ækvipotente.

En projektiv plan med endelig punktmængde siges at have orden $n \in \mathbb{N}$, hvis hver punkttrække består af $n+1$ punkter. Der findes endelige projektive planer, nemlig de algebraiske over endelige legemer, men også andre.

Vedrørende isomorfier gælder følgende sætning, der svarer til (3.9) for affine planer og bevises analogt, endda noget simplere på grund af Pr :

(4.6) En projektiv plan $(\mathbb{P}_1^2, \mathbb{Z})$ er isomorf med en incidensplan $(\mathbb{G}_2^2, \mathbb{Z})$, og denne folgelig også en projektiv plan, hvis og kun hvis der findes en bijektiv afbildning φ^0 af punktmængden G_1^0 i $\mathbb{P}_1^2$ på punktmængden G_2^0 i $\mathbb{G}_2^2$ således, at hvilket som helst tre punkter i G_1^0 , som ligger på en linie, ved φ^0 afbildes på tre punkter i G_2^0 , som ligger på en linie.

Vi betragter nu et projektivt rum.

To linier, som ikke ligger i samme plan, siges at være vindskæve.

Aksiomet Pr er også i det rumlige tilfælde ensbetydende med, at dimensionsformlen gælder generelt for to linier. At den også gælder for en linie og en plan samt for to planer, altså helt uden ændringer, fremgår af de to følgende sætninger.

(4.7) En linie og en plan, som ikke går gennem linien, har netop ét punkt fælles.

Bevis: Lad a^2 være en plan og $b^1 \not\subset a^2$ en linie. Ifølge In 6 findes der et punkt $c^0 \in a^2$. Ifølge (2.6) vil planen $b^1 \vee c^0$, hvis $b^1 \not\subset a^2$, skære a^2 i en linie, og denne må skære b^1 ifølge Pr.

(4.8) To forskellige planer har netop én linie og de på denne liggende punkter fælles.

Bevis: Ifølge In 6, In 1 og In 3 findes der en linie i en af planerne, og hvis den ikke er skæringslinien imellem dem, må den ifølge (4.7) skære den anden plan. Resten følger af (2.6).

Vi har derfor svarende til (4.1):

(4.9) En lattice $(P^3, \leq)$ er et projektivt rum, hvis og kun hvis den har egenskaberne (2.7), 1), 2), 4), 5), 6) samt (4.1), 3'), 7').

Som i det plane tilfælde ses, at der findes modeller for aksionsystemet for et projektivt rum:

(4.10) Lad V^4 være 4-dimensionalt vektorrum over et (kommutativt) legeme L . Defineres G^i for $i = -1, 0, 1, 2, 3$ som mængden af $(i+1)$ -dimensionale underrum af V^4 , vil $(P^3, \subseteq)$, hvor $P^3 = G^{-1} \cup G^0 \cup G^1 \cup G^2 \cup G^3$, være et projektivt rum.

Et sådant projektivt rum vil vi kalde et algebraisk projektivt rum over legemet L og betegne det (P^3, L) . Algebraiske projektive rum over samme legeme er indbyrdes isomorfe.

Med henblik på opstilling af et dualitetsprincip, som her i det væsentlige vil gå ud på ombyttelighed af "punkt" og "plan", bevises de tre følgende sætninger:

(4.11) Gennem hver linie går mindst tre forskellige planer.

Bevis: Lad a^1 være en linie. Ifølge In 7 findes der et punkt $b^0 \notin a^1$ og et punkt $c^0 \notin a^1 \vee b^0$. Linierne a^1 og $b^0 \vee c^0$ er vindskæve. Ifølge In 5' findes der et fra b^0 og c^0 forskelligt punkt d^0 på $b^0 \vee c^0$. De tre planer $b^0 \vee a^1$, $c^0 \vee a^1$ og $d^0 \vee a^1$ er da indbyrdes forskellige.

(4.12) Gennem hvert punkt går mindst tre planer, som ikke går gennem samme linie.

Betis: Lad a° være et punkt. Ifølge In 7 findes der et punkt $b^\circ \neq a^\circ$. Ifølge (4.11) går der mindst tre forskellige planer gennem a° og b° . Lad c° og d° være to af dem. Ifølge In 6 findes der punkter $e^\circ \in c^\circ$ og $f^\circ \in d^\circ$ uden for a° og b° . Planerne c° , d° og a° og e° og d° opfylder da kravene.

(4.13) Der findes fire planer, som hverken går gennem samme linie eller gennem samme punkt.

Betis: Ifølge In 7 findes fire punkter $a^\circ, b^\circ, c^\circ, d^\circ$, som hverken ligger på samme linie eller i samme plan. Ifølge (2.4) kan heller ikke tre af dem ligge på en linie. De bestemmer altså ifølge In 2 fire planer $b^\circ c^\circ d^\circ, a^\circ c^\circ d^\circ, a^\circ b^\circ d^\circ$ og $a^\circ b^\circ c^\circ$. Skæringslinierne $c^\circ d^\circ$ mellem de to første og $a^\circ b^\circ$ mellem de to sidste er vindskæve, hvoraf følger, at planerne ikke har noget punkt, og dermed heller ikke nogen linie fælles.

($\mathbb{P}^3, \leq$)
 Den til et projektivt rum $(\mathbb{P}^3, \leq)$ duale lattice $(\mathbb{P}^{3*}, \leq^*)$, hvor $\mathbb{P}^{3*} = \mathbb{P}^3$ og $\leq^*$ er det samme som $\leq$, har egenskaberne (2.7), 1), 2), 6) og (4.1), 7'), hvis følgende fastsættes: Idet $\mathbb{P}^3 = G^1 \cup G^2 \cup G^3 \cup G^4$ defineres $G^{i*} = G^{3-i}$, dvs. mængderne G^i tages i omvendt orden, og elementerne af G^{i*} tilskrives dimensionen i . Sætningerne (4.11) - (4.13) viser, at $(\mathbb{P}^{3*}, \leq^*)$ da også opfylder (4.1), 3') og (2.7), 4), 5). Der gælder altså: Den duale lattice $(\mathbb{P}^{3*}, \leq^*)$ til et projektivt rum $(\mathbb{P}^3, \leq)$ er med de nævnte fastsættelser ligeledes et projektivt rum, kaldet det til $(\mathbb{P}^3, \leq)$ duale projektive rum. Det duale til

det duale rum er det oprindelige.

Ved oversættelse af udsagn om det duale rum til udsagn om det oprindelige rum fås:

Dualitetsprincippet for projektive rum: Af en sætning, som er gyldig i ethvert projektivt rum, fås igen en sådan sætning ved i ordlyden at ombytte "punkt" og "plan", "ligger på (i)" og "går gennem", "snit" og "forbindelse".

Idet vi ved et selv-dualt projektivt rum forstår et, der er isomorft med sit duale, og ved en sætnings duale den, der fås ved de nævnte ombytninger, kan vi yderligere slutte: Et selv-dualt projektivt rum er med enhver sætning også den duale gyldig.

Som i det plane tilfælde ses, at det duale til et algebraisk projektivt rum (P^3, L) bestemt ved et vektorrum V^4 er isomorft med det algebraiske projektive rum (P^{3*}, L) bestemt ved det duale vektorrum V^{4*} . Heraf slutføres videre, at ethvert algebraisk projektivt rum er selv-dualt.

Lad (P^3, L) igen være et vilkårligt projektivt rum. Det er hensigtsmæssigt for disse punkt-, linie- og planmængder, kaldet grundmængder, at indføre navne og betegnelser. De tre førstnævnte af de følgende arter af grundmængder siges at være af type I, de andre af type II:

Mængden af	Navn:	Betegnelse:
punkter på en linie a^1	<u>punktrække med bærer a^1</u>	$^0(a^1)$
linier i en plan a^2 gennem et punkt $a^0 \in a^2$	<u>liniebundt med bærer a^2 og toppunkt a^0</u>	$^1(a^0 \in a^2)$
planer gennem en linie a^1	<u>planbundt med akse a^1</u>	$^2(a^1)$
punkter i en plan a^2	<u>punktfelt med bærer a^2</u>	$^0(a^2)$
linier i en plan a^2	<u>liniefelt med bærer a^2</u>	$^1(a^2)$
linier gennem et punkt a^0	<u>linieknippe med toppunkt a^0</u>	$^1(a^0)$
planer gennem et punkt a^0	<u>planeknippe med toppunkt a^0</u>	$^2(a^0)$

Ved hjælp af snit og/eller forbindelse fås bijektive afbildninger af grundmængder på grundmængder af samme type. Disse afbildninger kaldes også her for perspektiviteter. Som eksempler nævnes: Er $^0(a^1)$ en punktrække og b^1 en til a^1 vinkelret linie, fås ved forbindelse med b^1 en perspektivitet af $^0(a^1)$ på planbundtet $^2(b^1)$. Den inverse fås ved at skære planbundtet med a^1 . Er a^1, b^1, c^1 parvis vinkelrette linier, fås en perspektivitet af $^0(a^1)$ på $^0(b^1)$ ved først at forbinde $^0(a^1)$ med c^1 og dernæst at skære planbundtet $^2(c^1)$ med b^1 . Denne afbildning kan også betegnes som aksialprojektion af a^1 på b^1 fra c^1 . Et liniebundt kan forbindes med et punkt uden for dets bærer. Herved fås en perspektivitet af liniebundtet på et planbundt. Er a^2, b^2 planer og c^0 et punkt udenfor begge, fås en perspektivitet af punktfeltet $^0(a^2)$ og liniefeltet $^1(a^2)$ på henholdsvis $^0(b^2)$ og $^1(b^2)$ ved først at forbinde med c^0 og dernæst at skære med b^2 . Afbildningen, centralprojektion af a^2 på b^2 fra c^0 ,

er åbenlyst en isomorfi.

Det ses herefter let, at grundmængderne af type I er indbyrdes ækvivalente (jf. opg. 4), og at planerne i et projektivt rum er indbyrdes isomorfe.

Et endeligt projektivt rum siges at have orden $n \in \mathbb{N}$, hvis hver punkttrække består af $n+1$ punkter.

Vedrørende isomorfier gælder en sætning, der fuldstændigt svarer til sætning (4.6) og fremgår af denne ved erstatning af "plan" med "rum" og oplagte ændringer af betegnelser. Beviset er analogt til beviset for (3.10) (jf. opg. 3, 7 og opg. 9).

Isomorfier af projektive planer eller rum er karakteriseret ved, at linier (egentlig punkttrækker) afbilles på linier (punkttrækker), kaldes de for Kollinationer.

Opgaver til § 4.

1. Fortolk det 3-dimensionale reelle vektorrumms vektorer som geometriske vektorer afsat fra et fast punkt i det "sedvanlige rum". Herved fås en geometrisk model såvel for den algebraiske projektive plan over $\mathbb{R}$ som for dens duale. Beskriv disse modeller, og angiv en isomorfi af den ene på den anden.
2. Vis, at en projektiv plan har mindst 7 punkter og 7 linier. Vis, at enhver projektiv plan med 7 punkter er isomorf med den algebraiske projektive plan over restklasselegemet modulo 2.
3. Bestem antallet af punkter og linier i en endelig projektiv plan af orden n .
4. Vis, at i et projektivt rum gælder:
Til to linier findes altid en tredje, som er vinkelret til begge.
Er a^1 og b^1 vinkelrette linier og c^0 et punkt uden for begge, så findes der netop én linie gennem c^0 , som skærer a^1 og b^1 .
Formuler de duale sætninger og bevis dem uden benyttelse af dualitetsprincippet.
5. Bevis de (ikke allerede beviste) duale sætninger til aksiomerne for et projektivt rum uden benyttelse af dualitetsprincippet.

6. Formuler den duale til sætningen: Enhver plan i et projektivt rum er en projektiv plan.
7. Angiv alle typer af perspektiviteter mellem grundmængder i et projektivt rum og, hvorledes de svarer til hinanden ved dualiteten.
8. Dualiser punktmængdefremstillingen af en projektiv plan (et projektivt rum).
9. Gennemfør beviset for (4.6) og den analoge sætning for projektive rum.
10. Bestem antallet af punkter, linier og planer i et endeligt projektivt rum af orden n . [Resultatet af opg. 3 kan benyttes med fordel.]
11. Vis, at den algebraiske projektive plan og det algebraiske projektive rum over et endeligt legeme med n elementer har orden n .

§ 5. Sammenhæng mellem affine og projektive planer og rum.

Der findes en simpel overgang fra projektive til affine planer og rum, og omvendt. Forskellen mellem de to slags strukturer er altså ikke så dybtgående, som det kunne synes. Betydningen af indførelsen af de i mange henseender simple projektive strukturer ligger i, at en projektiv sætning i reglen kan opfattes som en sammenfatning af flere affine sætninger.

I de følgende beviser benyttes tit uden henvisning sætninger beviset i § 3 eller § 4.

(5.1) Fjernes fra en projektiv plan én linie og dennes punkter, fås en affin plan.

Basis: Lad der være givet en projektiv plan, kort p -planen, som antages i punktmængdefremstilling. Dens punkter og linier kaldes p -punkter og p -linier. Lad ii^1 være en fast valgt p -linie. Ved et a -punkt vil vi forstå et p -punkt, som ikke ligger på ii^1 . Ved en a -linie vil vi forstå en fra ii^1 forskellig p -linie, fra hvilken dens skæringspunkt med ii^1 er fjernet. Ved a -planen vil vi forstå mængden af a -punkter. Vi skal vise, at $In 1$, $In 5$, $In 6$ og Pa opfyldes af a -punkterne og a -linierne.

For $In 1$ er dette klart, idet to forskellige a -punkter betragtet som p -punkter bestemmer én fra ii^1 forskellig p -linie og dermed én a -linie. $In 5$ følger umiddelbart af $In 5'$ for p -planen. Idet $In 6$ gælder i p -planen, findes der tre p -punkter p^0, q^0, r^0 ,

som ikke ligger på samme p -linje. Mindst ét af dem, f.eks. p^0 , må være α -punkt. Ifølge In 5' ligger der på hver af p -linjerne $p^0 \vee q^0$ og $p^0 \vee r^0$ mindst to fra p^0 forskellige p -punkter, hvoraf mindst ét må være α -punkt, da linjerne er forskellige fra ii^1 . Heraf sluttes In 6 for α -planen. For at bevise P_α bemærkes, at hvis p^1 er en p -linje forskellig fra ii^1 og q^0 et α -punkt, som ikke ligger på p^1 , findes der blandt p -linjerne gennem q^0 netop én, hvis (ifølge P_r eksisterende) skæringspunkt med p^1 falder på ii^1 . Som udsagn om de tilsvarende α -linjer er dette netop P_α .

(5.2) Fjernes fra et projektivt rum én plan og dennes punkter og linier, fås et affint rum.

Bevis: Lad der være givet et projektivt rum, p -rummet, som antages i punktmængdefremstilling. Dets elementer kaldes p -elementer. Lad ii^2 være en fast valgt p -plan. Ved et α -punkt forstås et p -punkt, som ikke ligger i ii^2 . Ved en α -linje forstås en p -linje, som ikke ligger i ii^2 , og fra hvilken skæringspunktet med ii^2 er fjernet. Ved en α -plan forstås en fra ii^2 forskellig p -plan, fra hvilken skæringslinjen med ii^2 og dennes punkter er fjernet. Ved α -rummet forstås mængden af α -punkter. Vi skal vise, at α -elementerne opfylder In 1-7 og P_α .

Dette er igen klart for In 1 og In 5, men også for In 2. Idet enhver α -plan ifølge (5.1) er en affin plan, gælder In 6 og P_α . Endvidere er In 3 og In 4 oplagte Ronskvenner af In 3 henholdsvis In 4 og In 5' for p -rummet. At In 7 gælder i α -rummet, vises

ud fra In 7 og In 5' på samme måde som In 6 i beviset for (5.1) ud fra In 6 og In 5' for p -planen.

Mindre oplagt end de beviste sætninger er de følgende omvendte

(5.3) For enhver affin plan findes en projektiv plan, af hvilken den fås ved fjernelse af én linie og dennes punkter.

Bevis: Lad en affin plan, a -planen, være givet i punkt-mængdefremstilling. Dens punkter og linier kaldes a -punkter og a -linier. Er a^1 en a -linie, forstås ved dens egentlige punkt, kort u -punkt, parallelbundtet $\parallel a^1$ bestående af a -linierne parallel med a^1 . To a -linier har samme u -punkt, hvis og kun hvis de er parallelle, altså tilhører samme parallelbundt. Mængden af alle a -liniers u -punkter kaldes a -planens egentlige linie, kort u -linie, og betegnes u^1 . Ved et p -punkt forstås et a - eller u -punkt. Ved en p -linie forstås u -linien eller en a -linie forenet med sit u -punkt. I det sidste tilfælde siges p -linien at stamme fra eller være bestemt ved a -linien. Ved p -planen forstås mængden af alle p -punkter. Det drejer sig om at vise, at den er en projektiv plan (i punktmængdefremstilling), altså opfylder In 1, In 5', In 6 og Pr.

Først bemærkes, at In 6 er en umiddelbar følge af In 6 for a -planen. In 5' følger for en ved en a -linie bestemt p -linie af, at der på den foruden a -liniens u -punkt ifølge In 5 ligger mindst to forskellige a -punkter. At In 5' også gælder for u^1 , ses ved af In 6

for α -planen at slutte, at der findes tre α -linier, der parvis skærer hinanden, og dermed tre forskellige parallelbunder af α -linier.

II beviset for, at I n 1 gælder, altså at to forskellige p -punkter ligger på netop én p -linie, må der skelnes mellem tilfældene, hvor begge punkter α -punkter, hvor det ene er α -punkt og det andet u -punkt, og hvor begge er u -punkter. Det første og tredje tilfælde er helt oplagt. I det andet er påstanden ensbetydende med, at der i et parallelbundt af α -linier findes netop én, der går gennem et givet α -punkt. Pr, altså at to forskellige p -linier har netop ét p -punkt fælles, er oplagt, hvis p -linierne stammer fra α -linier, der skærer hinanden eller er parallelle, idet de i sidste tilfælde har samme u -punkt. Er i^1 den ene af p -linierne, er det fælles p -punkt den andens u -punkt.

Det er klart, at man kommer tilbage til den givne affine plan ved at fjerne u -punkterne fra mængden af p -punkter og dermed u -linien fra mængden af p -linier.

(5.4) For hvert affint rum findes et projektivt rum, af hvilket det fås ved fjernelse af én plan og dennes punkter og linier.

Bevis: Lad et affint rum, α -rummet, være givet i punkt-mængdefremstilling. Dets elementer kaldes α -elementer. Er i^1 en α -linie, forstås ved dens egentlige punkt, kort u -punkt, parallelknippet $1/i^1$ bestående af α -linierne parallelle med i^1 . To α -linier har samme u -punkt, hvis og kun hvis de er parallelle. Er i^2 en α -plan, forstås ved dens egentlige linie, kort u -linie,

mængden af dens liniers u -punkter, altså mængden af de parallelknipper, hvis linier er parallelle med α^2 . To α -planer har samme u -linie, hvis og kun hvis de er parallelle. Til hvert parallelbundt af α -planer svarer altså en u -linie, og omvendt. En α -linie er parallel med en α -plan, hvis og kun hvis α -liniens u -punkt ligger på α -planens u -linie. Mængden af alle u -punkter kaldes α -rummets uegentlige plan, kort u -plan, og betegnes α^2 . Ved et p -punkt forstås et α - eller u -punkt. Ved en p -linie forstås en u -linie eller en α -linie forenet med sit u -punkt. I det sidste tilfælde siges p -linien at stamme fra eller at være bestemt ved α -linien. Ved en p -plan forstås α^2 eller en α -plan forenet med sin u -linie. I det sidste tilfælde siges p -planen at stamme fra eller at være bestemt ved α -planen. Ved p -rummet forstås mængden af alle p -punkter. Det drejer sig om at vise, at det er et projektivt rum (i punktmængdefremstilling).

Vi begynder med følgende bemærkning. Er α^2 en α -plan og parallelknippet $1 \parallel b^1$ et af dens u -punkter, altså $b^1 \parallel \alpha^2$, vil de α -linier tilhørende $1 \parallel b^1$, som har punkter fælles med α^2 ifølge (3.4) ligge helt i α -planen α^2 og i denne udgøre et parallelbundt. Omvendt vil et parallelbundt af α -linier i α^2 tilhøre netop ét parallelknippe, og dets α -linier vil ifølge (3.2) være parallelle med α^2 . Dette viser, at den her definerede udvidelse af en α -plan til en p -plan er isomorf med den i beviset for (5.3) definerede udvidelse af α -planen betragtet som affin plan. Enhver ved en α -plan bestemt p -plan er altså en projektiv plan.

Dernæst bemærkes, at In 7 for p -rummet følger umiddelbart af In 7 for α -rummet. Idet p -planerne, der stammer fra α -planer, er projektive planer, gælder In 6 og Pr for dem. In 6 for u -planen u^2 går ud på, at der findes tre parallelknipper, hvis α -linier ikke er parallelle med samme α -plan. Dette slutter af, at der gennem et α -punkt går mindst tre α -linier, som ikke ligger i samme α -plan. At Pr gælder i u^2 , går ud på, at der til to forskellige parallelbundter af α -planer findes netop ét parallelknippe, hvis α -linier er parallelle med begge parallelbundters planer, hvilket er rigtigt (jf. opg. § 3, 5). Gyldigheden af In 5' for p -linierne indses som i det plane tilfælde (5.3).

At In 1 er opfyldt i p -rummet, indses som i det plane tilfælde, når mindst ét af de to givne p -punkter er α -punkt. Er p -punkterne begge u -punkter, går påstanden ud på, at der findes netop ét parallelbundet af α -planer, som er parallelle med to forskellige parallelknippers α -linier. (Jf. f. eks. opg. § 3, 2 og (3.2).)

J beviset for In 2, altså at der findes netop én p -plan, som går gennem tre givne p -punkter, som ikke ligger på en p -linie, må der skelnes mellem de fire tilfælde, hvor intet, ét, to eller tre af punkterne er u -punkter. (Opg. 3.)

Beviset for In 3, altså at hvis to forskellige p -punkter ligger på en p -linie og i en p -plan, vil p -linien ligge i p -planen, kræver ligeledes særskilt behandling af flere tilfælde. (Opg. 3.)

At In 4 gælder, slutter ved hjælp af In 5' af, at hvilke-somhelst to p -planer har en p -linie fælles. Dette er opdagt i

hvert af de mulige tilfælde: en af p -planerne er u^2 , begge er bestemt ved α -planer, der skærer hinanden eller er parallelle.

Det er klart, at man kommer tilbage til det givne α -rum ved at fjerne u -punkterne fra punktmængden og dermed u -linierne fra linjemængden og u -planen fra planmængden.

Den affine plan (det affine rum), som fås ved at fjerne en linie u^1 (en plan u^2) fra en projektiv plan $(P^2, \mathfrak{L})$ (et projektivt rum $(P^3, \mathfrak{L})$), vil vi kalde dennes affine delplan med uegentlig linie u^1 (dettes affine delrum med uegentlig plan u^2) og betegne den (det) med $(A^2[P^2, u^1], \mathfrak{L})$ (med $(A^3[P^3, u^2], \mathfrak{L})$).

Medens et projektivt rums affine delrum med forskellige uegentlige planer kan vises at være isomorfe, findes der projektive planer, for hvilke det tilsvarende ikke gælder.

Den projektive plan (det projektive rum), som fås af en affin plan $(A^2, \mathfrak{L})$ (et affint rum $(A^3, \mathfrak{L})$) på den i beviset for (5.3) (for (5.4)) angivne måde, kaldes den affine plans (det affine rums) projektive komplementering og betegnes med $(P^2[A^2], \mathfrak{L})$ (med $(P^3[A^3], \mathfrak{L})$).

Vi undersøger endnu, hvordan de omtalte overgange mellem projektive og affine strukturer formodes sig for algebraiske planer og rum. Et af resultaterne vil være, at de føres fra algebraiske planer og rum til algebraiske over samme legeme. Til dette formål bevises en hjælpesætning om vektorrum:

(5.5) Lad $V = V^{d+1}$ være et vektorrum af dimension $d+1 \geq 2$ over et legeme L . Lad endvidere $U = U^d$ være et d -dimensionalt underrum af V og $\underline{e}$ en vektor i V , som ikke tilhører U . Med M betegnes mængden af de 1-dimensionale underrum af V , som ikke tilhører U . Idet $\underline{e} + U$ er det sideunderrum til U , som indeholder $\underline{e}$, bestemmes der ved

$$W \mapsto (\underline{e} + U) \cap W, \quad W \in M,$$

en bijektiv afbildning $\alpha: M \rightarrow \underline{e} + U$ med følgende egenskab: Tre 1-dimensionale underrum W_1, W_2, W_3 fra M ligger i samme 2-dimensionale underrum af V , hvis og kun hvis der findes et sæt $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ af elementer af L med $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, så at

$$\lambda_1 \alpha(W_1) + \lambda_2 \alpha(W_2) + \lambda_3 \alpha(W_3) = \underline{0}.$$

Basis: Først bemærkes, at $V = L\underline{e} \oplus U$, hvor $L\underline{e}$ betegner det af $\underline{e}$ frembragte 1-dimensionale underrum af V . Idet $\underline{e} \notin U$, altså $L\underline{e} \cap U = \{\underline{0}\}$, kan nemlig den direkte sum dannes, dens dimension er $d+1$, og den må derfor være hele vektorrummet V . En vektor $\underline{w} \neq \underline{0}$, der frembringer et 1-dimensionalt underrum $W \in M$, har altså netop én fremstilling $\underline{w} = \lambda \underline{e} + \underline{u}$, hvor $\underline{u} \in U$ og $\lambda \neq 0$, da $\underline{w} \notin U$. Blandt vektorerne $\mu(\lambda \underline{e} + \underline{u})$, $\mu \in L$, som udgør W , findes præcis én, nemlig $\frac{1}{\lambda}(\lambda \underline{e} + \underline{u})$, som tilhører $\underline{e} + U$. Omvendt vil enhver vektor $\underline{e} + \underline{u} \in \underline{e} + U$ frembringe et 1-dimensionalt underrum af V , som ikke ligger i U . Dermed er vist, at α er bijektiv.

For at vise den sidste påstand behøver man blot at bemærke, at $W_1, W_2, W_3 \in \mathcal{M}$ ligger i et 2-dimensionalt underrum, hvis og kun hvis et vilkårligt sæt af tre vektorer, som frembringer dem, er lineært afhængigt. Tager specielt vektorerne $\alpha(W_1) = \underline{e} + \underline{u}_1$, $\alpha(W_2) = \underline{e} + \underline{u}_2$, $\alpha(W_3) = \underline{e} + \underline{u}_3$, fås som nødvendig og tilstrækkelig betingelse, at der findes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$, så at

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \underline{e} + \lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \lambda_3 \underline{u}_3 = \underline{0}.$$

Da $\underline{e} \notin \mathcal{U}$, men $\lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \lambda_3 \underline{u}_3 \in \mathcal{U}$, kan dette kun opfylde, hvis $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

Denne hjælpesætning anvendes med $d=2$ og $d=3$. Beviserne gennemføres dog kun for $d=2$. For $d=3$ er de fuldstændigt analoge. Det er oplagt, at der med hjælpesætningens betegnelser gælder:

- (5.6) Sideunderrummet $\underline{e} + \mathcal{U}$ er en algebraisk affin plan over L med vektorrummet $\mathcal{U}$ og vektorafbildningen, der for $\underline{e} + \underline{u}_1, \underline{e} + \underline{u}_2 \in \underline{e} + \mathcal{U}$ er bestemt ved
- $$(\underline{e} + \underline{u}_1, \underline{e} + \underline{u}_2) \mapsto \underline{u}_2 - \underline{u}_1.$$

På den anden side får vi ifølge (5.1) af den algebraiske projektive plan bestemt ved V en affin plan ved at fjerne underrummet $\mathcal{U}$ og dets 1-dimensionale underrum. Denne affine delplans punktmængde er folgelig $\mathcal{M}$, og ifølge (3.9) udviser (5.5), at den er isomorf med den i (5.6) definerede algebraiske affine plan. Idet algebraiske affine planer over samme legeme er indbyrdes isomorfe, har vi altså:

(5.7) For enhver linie i en algebraisk projektiv plan er den affine delplan med den som uegentlig linie isomorf med en algebraisk affin plan over samme legeme. Affine delplaner med forskellige uegentlige linier er isomorfe. For enhver plan i et algebraisk projektivt rum er det affine delrum med den som uegentlig plan isomorft med et algebraisk affintrum over samme legeme. Affine delrum med forskellige uegentlige planer er isomorfe.

For at vise den omvendte til sætning (5.7) tænkes givet en algebraisk affin plan A med vektorrum U over et legeme L og vektorafbildningen $(p^{\circ}, q^{\circ}) \mapsto \underline{p^{\circ}q^{\circ}}$ for $p^{\circ}, q^{\circ} \in A$. Vi skal vise, at den er isomorf med den affine plan bestående af et sideunderrum i et 3-dimensionalt vektorrum V som angivet i (5.6).

Mængden $L \times U$ organiseres til et vektorrum V ved for $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \mu \in L$ og $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u} \in U$ at definere

$$(\lambda_1, \underline{u}_1) + (\lambda_2, \underline{u}_2) = (\lambda_1 + \lambda_2, \underline{u}_1 + \underline{u}_2), \quad \mu(\lambda, \underline{u}) = (\mu\lambda, \mu\underline{u}).$$

Idet det 1-dimensionale underrum $(L, \underline{0}) = \{(\lambda, \underline{0}) \mid \lambda \in L\}$ og og det med U isomorfe, altså 2-dimensionale underrum $(0, U) = \{(0, \underline{u}) \mid \underline{u} \in U\}$ kun har nulvektoren $(0, \underline{0})$ fælles, er $V = (L, \underline{0}) \oplus (0, U)$, hvoraf specielt $\dim V = 3$. Vi betragter sideunderrummet $(1, \underline{0}) + (0, U) = (1, U)$ til $(0, U)$ som algebraisk affin plan med vektorrum $(0, U)$ som angivet i (5.6).

I den givne affine plan A vælges et punkt o° , og ved til $p^{\circ} \in A$ at lade svare $(1, \underline{o^{\circ}p^{\circ}}) \in (1, U)$ defineres en bijektiv

afbildning af A på $(1, U)$. Den er åbenlys en isomorfi, nemlig en bijektiv affin afbildning, hvis tilhørende lineære afbildning af U på $(0, U)$ er bestemt ved $u \mapsto (0, u)$ for $u \in U$.

For at indse, at den projektive komplementering af A er isomorf med den projektive komplementering af $(1, U)$, behøver man kun at bemærke følgende: Parallelbundterne af linier i A svarer bi-
jektivt til deres "retninger", altså til de 1-dimensionale under-
rum af U , og disse ved den nævnte lineære afbildning til de
1-dimensionale underrum af $(0, U)$, som igen svarer bi-
jektivt til parallelbundterne af linier i $(1, U)$.

Går man nu fra vektorerne i $(1, U)$ over til de af dem
frembragte 1-dimensionale underrum af V , ser man, at den
projektive komplementering af $(1, U)$ er isomorf med den ved V
bestemte algebraiske projektive plan.

Vi har altså:

- (5.8) Den projektive komplementering af en algebraisk affin plan
(et algebraisk affint rum) er isomorft med en alge-
braisk projektiv plan (et algebraisk projektivt rum)
over samme legeme.

Opgaver til § 5.

1. Beskriv de forskellige typer af afbildninger, som kan fås som restriktioner af perspektiviteter mellem grundmængder i en projektiv plan (et projektivt rum) til en affin delplan (et affint delrum) med givet en egentlig linie (plan). Undersøg, under hvilke betingelser afbildningerne forbliver bijektive.
2. I ethvert projektivt rum gælder sætningen (opg. § 4, 4): Gennem et punkt uden for to vinkelrette linier går netop én linie, der skærer begge linier. Angiv de sætninger om affine rum, som denne sætning og dens duale omfatter.
3. Fuldfør beviset for (5.4) ved at eftervise, at $I_n 2$ og $I_n 3$ gælder i det definerede p -rum.

§ 6. Desargues's sætning.

Laad $(P^3, \mathbb{L})$ være et projektivt rum. Ved en trekant forstås et sæt bestående af tre punkter a_1^0, a_2^0, a_3^0 , som ikke ligger på en linie, og deres forbindelseslinier

$$a_1^1 = a_2^0 \vee a_3^0, \quad a_2^1 = a_3^0 \vee a_1^0, \quad a_3^1 = a_1^0 \vee a_2^0.$$

Disse går ikke gennem samme punkt og ligger i planen $a_1^0 \vee a_2^0 \vee a_3^0$. De tre punkter kaldes trekantens hjørner og de tre linier dens sidelinier. Et hjørne og en sidelinie med samme nummer siges at være modstående. I det følgende benyttes stiltiende den angivne betegnelsesmåde for en trekants sidelinier, når hjørnerne er betegnet ved hjælp af samme bogstav og mærkerne 1, 2, 3.

(6.1) Desargues's sætning. Laad (a_1^0, a_2^0, a_3^0) og (b_1^0, b_2^0, b_3^0) være trekanter, således at $a_i^0 \neq b_i^0$ og $a_i^1 \neq b_i^1$ for $i=1, 2, 3$. Hvis linierne $c_i^1 = a_i^0 \vee b_i^0$, $i=1, 2, 3$, går gennem samme punkt q^0 , vil de to sidelinier a_i^1 og b_i^1 for hvert $i=1, 2, 3$ skære hinanden, og skæringspunkterne $d_i^0 = a_i^1 \wedge b_i^1$ vil ligge på en linie q^1 .

Bevís: Først betragtes det tilfælde, hvor de to trekanter ligger i forskellige planer. Laad $\{i, j, k\}$ være en permutation af $\{1, 2, 3\}$. I det linierne $a_i^0 \vee b_i^0$ og $a_j^0 \vee b_j^0$ har punktet p^0 fælles, ligger punkterne $a_i^0, a_j^0, b_i^0, b_j^0$ i en plan. Heraf sluttes, at $a_k^1 = a_i^0 \vee a_j^0$ og $b_k^1 = b_i^0 \vee b_j^0$, som ligger i den samme plan, skærer hinanden. (fig. 6.1). Skæringspunktet d_k^0 ligger

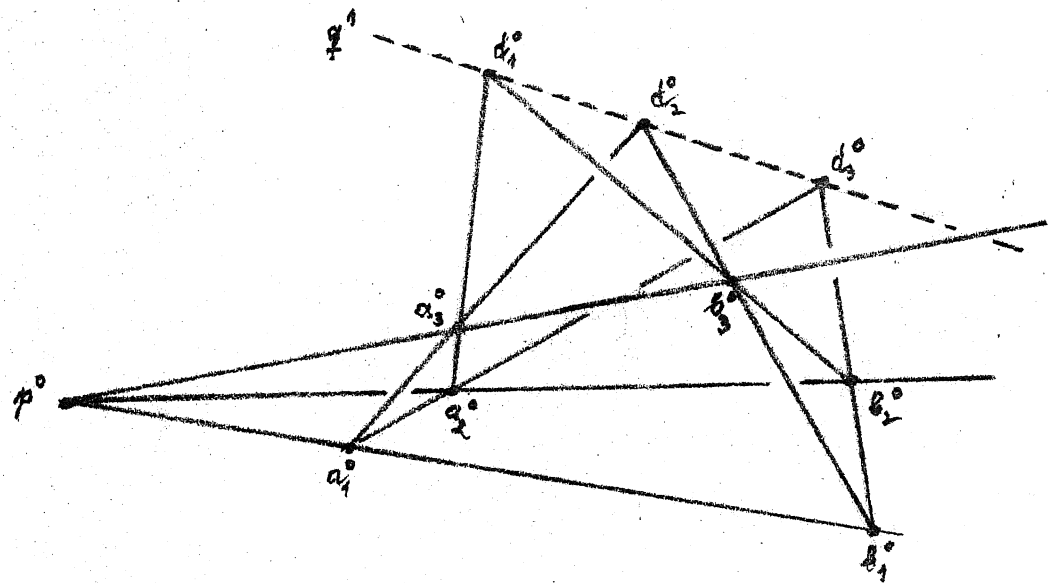


Fig. 6.1

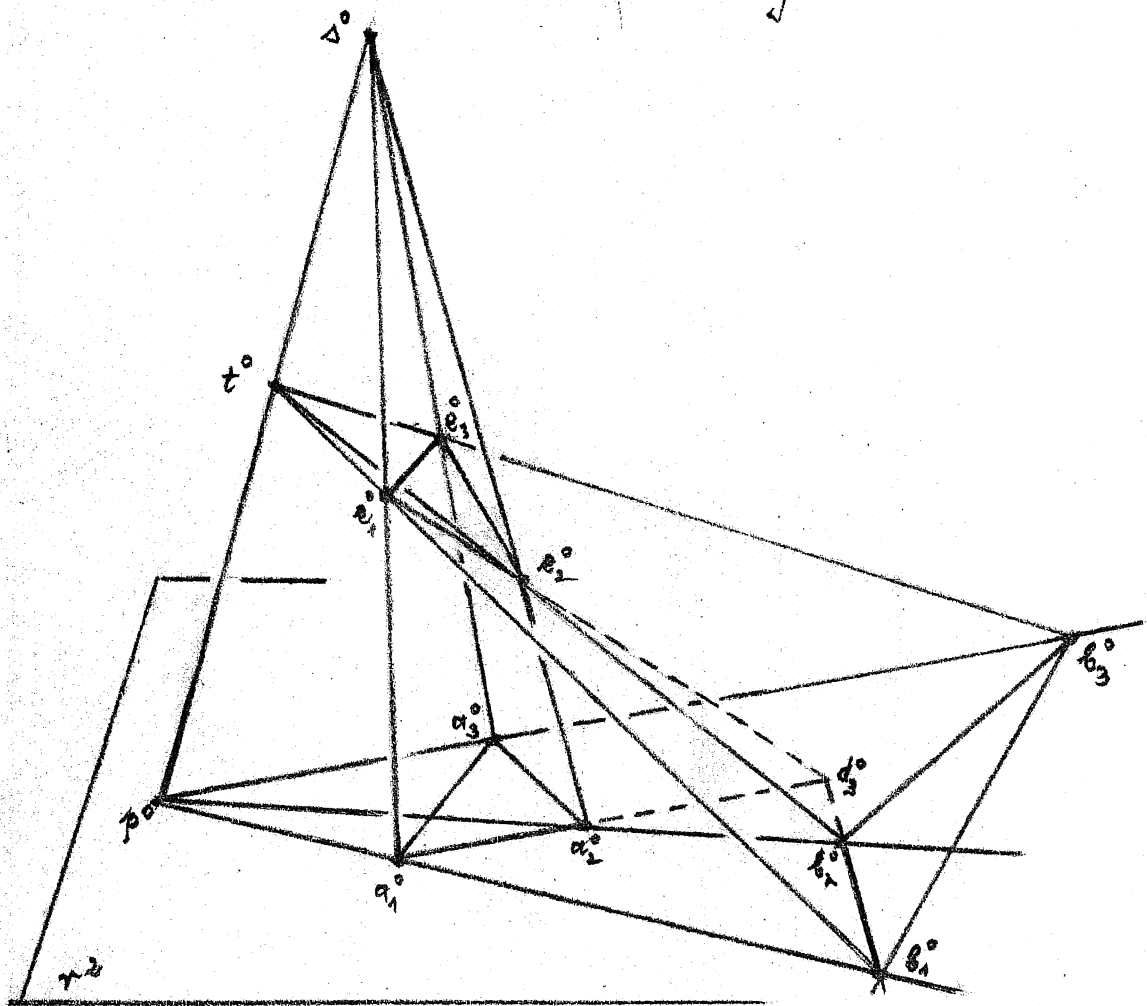


Fig. 6.2

såvel i $a_1^\circ \vee a_2^\circ \vee a_3^\circ$ som i $b_1^\circ \vee b_2^\circ \vee b_3^\circ$, altså på disse planers skæringslinje q° . Hermed er påstanden bevist i det foreliggende tilfælde.

Der næst antages, at de to trekanter ligger i samme plan r^2 (fig. 6.2). Ifølge In 7 findes der et punkt s° uden for r^2 , og ifølge In 5' findes der på linien $p^\circ \vee s^\circ$ et punkt t° forskelligt fra p° og s° . For hvert $i = 1, 2, 3$ vil de to linier $s^\circ \vee a_i^\circ$ og $t^\circ \vee b_i^\circ$ da være forskellige og ligge i en plan, idet linierne $s^\circ \vee t^\circ$ og $a_i^\circ \vee b_i^\circ$ jo skærer hinanden i p° . Lad $e_i^\circ = (s^\circ \vee a_i^\circ) \wedge (t^\circ \vee b_i^\circ)$ være deres skæringspunkt. Det kan ikke ligge i r^2 , da s° og t° ikke gør det. Endvidere kan punkterne $e_1^\circ, e_2^\circ, e_3^\circ$ ikke ligge på en linie. For at indse dette bemærkes, at linierne $s^\circ \vee a_i^\circ$, $i = 1, 2, 3$, ikke kan ligge i en plan, da $a_1^\circ, a_2^\circ, a_3^\circ$ ikke ligger på en linie. Punkterne $e_1^\circ, e_2^\circ, e_3^\circ$ kunne derfor kun ligge på en linie, hvis to af dem, f. eks. e_1° og e_2° , faldt sammen med s° . Men dette ville kræve, at $t^\circ \vee b_1^\circ$ og $t^\circ \vee b_2^\circ$ gik gennem s° , og følgelig, at $b_1^\circ = b_2^\circ = p^\circ$, hvilket strider mod forudsætningerne.

Vi betragter nu trekanten $(e_1^\circ, e_2^\circ, e_3^\circ)$. For hvert $i = 1, 2, 3$ ligger sidelinierne a_i^1, b_i^1, e_i^1 to og to, men ikke alle tre, i samme plan. De går derfor gennem samme punkt c_i° . Idet trekant $(e_1^\circ, e_2^\circ, e_3^\circ)$ sammen med hver af de givne trekanter opfylder forudsætningerne for den allerede beviste del af sætningen, ligger punkterne $c_1^\circ, c_2^\circ, c_3^\circ$ på en linie (nemlig skæringslinjen mellem $e_1^\circ \vee e_2^\circ \vee e_3^\circ$ og r^2). Hermed er sætningen også bevist i dette tilfælde.

Af særlig interesse er det tilfælde, hvor de to trekanter og dermed også de øvrige punkter og linier, som omtales i sætningen, ligger i en plan. Man lægger mærke til, at beviset for dette tilfælde benytter rumlige betragtninger. Der er altså ikke bevist, at Desargues's sætning gælder i enhver projektiv plan, og dette er heller ikke tilfældet, hvilket vises i slutningen af denne paragraf.

Man plejer at kalde en projektiv plan, i hvilken Desargues's sætning gælder, for en projektiv Desargues-plan, kort projektiv D-plan. Vi har altså vist: Enhver plan i et projektivt rum er en projektiv Desargues-plan.

Idet ethvert 3-dimensionalt vektorrum er (isomorft med) et underrum af et 4-dimensionalt vektorrum over samme legeme (jf. f. eks. side II. 5.10), kan vi slutte: Enhver algebraisk projektiv plan er en projektiv Desargues-plan.

Der gælder følgende omvendte sætning til (6.1):

(6.2) Lad (a_1^0, a_2^0, a_3^0) og (b_1^0, b_2^0, b_3^0) være trekanter, således at $a_i^0 \neq b_i^0$ og $a_i^1 \neq b_i^1$ for $i=1, 2, 3$. Hvis sidelinierne a_i^1 og b_i^1 skærer hinanden for hvert $i=1, 2, 3$, og skæringspunkterne $d_i^0 = a_i^1 \cap b_i^1$ ligger på en linie q^1 , vil linierne $c_i^1 = a_i^0 \vee b_i^0$ gå gennem samme punkt p^0 .

Bevis: Først bemærkes, at punkterne d_i^0 er indbyrdes forskellige. Var nemlig f. eks. $d_1^0 = d_2^0$, måtte linierne $a_1^1, b_1^1, a_2^1, b_2^1$

alle gå gennem dette punkt. Men da $a_1^1 \wedge a_2^1 = a_3^0$ og $b_1^1 \wedge b_2^1 = b_3^0$, ville dette medføre $a_3^0 = b_3^0$ i strid med det givne.

Hvis d_2^0 ikke ligger på $a_1^0 \vee b_1^0$ og d_1^0 ikke på $a_2^0 \vee b_2^0$, har vi to trekanter (a_1^0, b_1^0, d_2^0) og (a_2^0, b_2^0, d_1^0) , hvis tilsvarende hjørner er indbyrdes forskellige. Men også deres tilsvarende sidelinier er indbyrdes forskellige. At $a_1^0 \vee b_1^0 \neq a_2^0 \vee b_2^0$, er klart, da man ellers kunne slutte, at $a_1^0 \vee a_2^0 = b_1^0 \vee b_2^0$, altså at $a_3^1 = b_3^1$, i strid med det givne. Idet a_3^0 ligger på både $a_1^0 \vee d_2^0$ og $a_2^0 \vee d_1^0$, men a_1^0, a_2^0, a_3^0 ikke ligger på samme linie, må vi have $a_1^0 \vee d_2^0 \neq a_2^0 \vee d_1^0$. Tilsvarende ses, at $b_1^0 \vee d_2^0 \neq b_2^0 \vee d_1^0$.

Linierne $a_1^0 \vee a_2^0$ og $b_1^0 \vee b_2^0$ går gennem d_3^0 , og ifølge forudsætning går $d_1^0 \vee d_2^0 = q^1$ også gennem d_3^0 . Trekanterne (a_1^0, b_1^0, d_2^0) og (a_2^0, b_2^0, d_1^0) opfylder altså alle forudsætninger i (6.1). Vi kan derfor slutte, at punkterne $(b_1^0 \vee d_2^0) \wedge (b_2^0 \vee d_1^0) = b_3^0$, $(a_1^0 \vee d_2^0) \wedge (a_2^0 \vee d_1^0) = a_3^0$ og $(a_1^0 \vee b_1^0) \wedge (a_2^0 \vee b_2^0) = c_1^1 \wedge c_2^1$ ligger på en linie, nemlig $c_3^1 \approx a_3^0 \vee b_3^0$. Men dette er præcis påstanden i (6.2).

Sætningen er altså bevist under antagelsen, at $d_2^0 \neq a_1^0 \vee b_1^0$ og $d_1^0 \neq a_2^0 \vee b_2^0$. Antag nu, at f. eks. $d_2^0 \leq a_1^0 \vee b_1^0$. (Tilfældet $d_1^0 \leq a_2^0 \vee b_2^0$ fremgår af dette ved ombytning af mærkerne 1 og 2.) Hvis d_2^0 var forskellig fra både a_1^0 og b_1^0 , måtte a_3^0 og b_3^0 ligge på $a_1^0 \vee b_1^0$, hvilket ville medføre $a_3^1 = a_3^0 \vee a_1^0 = b_3^0 \vee b_1^0 = b_2^1$. Vi må altså have $d_2^0 = a_1^0$ eller $d_2^0 = b_1^0$. Det er ingen indskrænkning at antage det første. Da må b_3^0 ligge på $a_1^0 \vee b_1^0$. (Se fig. 6.3.) Linien q^1 , som jo går gennem $d_2^0 = a_1^0$, må også indeholde a_2^0 , idet $a_1^0 \vee a_2^0$ går gennem $d_3^0 \leq q^1$. Endvidere må vi have $a_2^0 = d_1^0$,

fordi $a_3^0 \notin q^1$ og $a_2^0 \vee a_3^0$ går gennem $d_1^0 \in q^1$. Dette medfører, at $a_2^0 = d_1^0 \in b_2^0 \vee b_3^0$, altså at $a_2^0 \vee b_2^0 = c_2^1$ går gennem b_3^0 . Som allerede nævnt, går $a_1^0 \vee b_1^0 = c_1^1$ også gennem b_3^0 . Idet $a_3^0 \vee b_3^0 = c_3^1$ selvfølgelig går gennem b_3^0 , er sætningen også bevist i dette tilfælde, nemlig med $p^0 = b_3^0$.

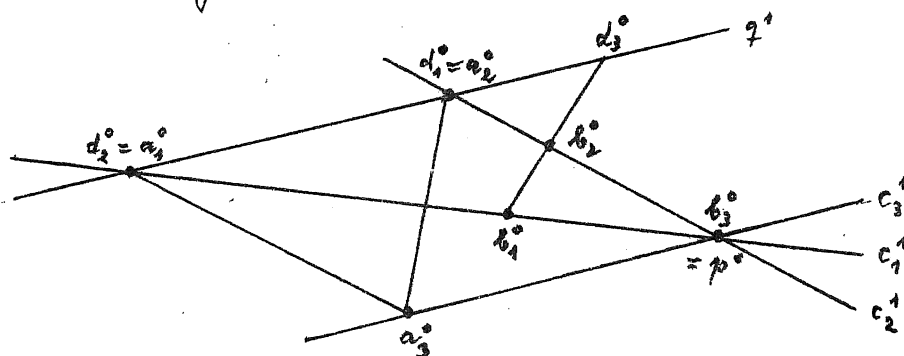


Fig. 6.3

Vi betragter igen specielt det plane tilfælde. I dette forløber ovenstående bevis helt i planen; foruden selve Desargues's sætning benyttes kun aksiomerne for en projektiv plan. Heraf kan sluttes, at i enhver projektiv D-plan gælder den omvendte til Desargues's sætning.

At linierne a_i^1 og b_i^1 skærer hinanden, hvilket er en del af påstanden i (6.1) og en del af forudsætningen i (6.2), er opfyldt af sig selv i det plane tilfælde. Idet vi medtager selve definitionen, har vi altså for projektive D-planer:

D. Lad (a_1^0, a_2^0, a_3^0) og (b_1^0, b_2^0, b_3^0) være trekanter i en projektiv Desargues-plan, således at $a_i^0 \neq b_i^0$ og $a_i^1 \neq b_i^1$ for $i = 1, 2, 3$. Hvis forbindelserne $c_i^1 = a_i^0 \vee b_i^0$, $i = 1, 2, 3$, går gennem et punkt p^0 , ligger snitterne $d_i^0 = a_i^1 \wedge b_i^1$ på en linie q^1 .

Hvis snitterne $d_i^0 = a_i^1 \wedge b_i^1$, $i = 1, 2, 3$, ligger på en linie q^1 , går forbindelserne $c_i^1 = a_i^1 \vee b_i^1$ gennem et punkt p^0 .

Man ser, at de to sidste udsagn er hinandens plant duale. Vi kan ikke slutte det enes rigtighed af det andet under påberåbelse af dualitetsprincippet for projektive planer, idet Desargues's sætning ikke gælder i enhver projektiv plan. Men vi har kunnet slutte af (6.2), at i en projektiv D-plan gælder også den duale til Desargues's sætning. Anderledes udtrykt: Den duale til en projektiv D-plan er en projektiv D-plan.

Vi betragter nu et affint rum $(A^3, \leq)$. Af (6.1) og (6.2) anvendt på rummets projektive Kompletering fås et større antal forskellige affine sætninger svarende til, at et eller flere af de punkter og/eller en eller flere af de linier, som (6.1) og (6.2) omhandler, er uegentlige. Af særlig betydning er (6.1) med q^1 som uegentlig linie. At q^1 er uegentlig, kan bringes til udtryk ved at forudsætte, at d_1^0 og d_2^0 er uegentlige, altså at $a_1^1 \parallel b_1^1$ og $a_2^1 \parallel b_2^1$, og at konkludere, at $d_3^0 \leq d_1^0 \vee d_2^0$, altså at d_3^0 er uegentlig, dvs. $a_3^1 \parallel b_3^1$. Hvad angår forudsætningen om, at linierne c_i^1 går gennem p^0 , må der skelnes mellem de to muligheder p^0 uegentlig og p^0 egentlig. Man får på denne måde:

(6.3) Lad (a_1^0, a_2^0, a_3^0) og (b_1^0, b_2^0, b_3^0) være trekanter i et affint rum, således at $a_i^0 \neq b_i^0$ og $a_i^1 \neq b_i^1$ for $i = 1, 2, 3$. Sæt $c_i^1 = a_i^0 \vee b_i^0$ for $i = 1, 2, 3$, og antag

ad, at $c_1^1 \parallel c_2^1 \parallel c_3^1$,

eller

AD, at c_1^1, c_2^1, c_3^1 går gennem et punkt p^0 .

Da medfører $a_1^1 \parallel b_1^1$ og $a_2^1 \parallel b_2^1$, at $a_3^1 \parallel b_3^1$.

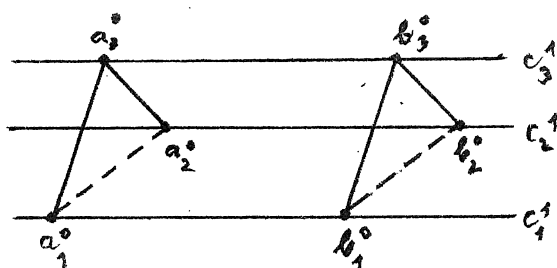


Fig. 6.4

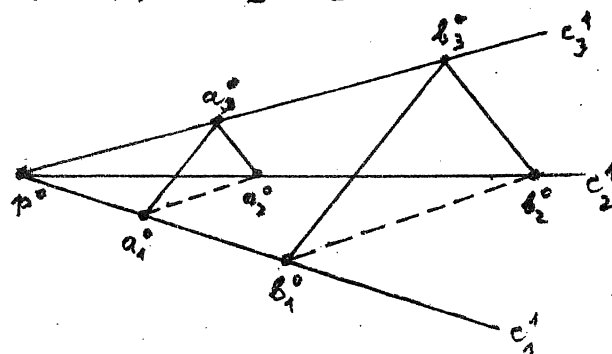


Fig. 6.5

Af særlig interesse er igen tilfældene, hvor de pågældende figurer ligger i en plan. Det er klart, at de to sætninger ad og AD, som er sammenfattet i (6.3) og som kaldes henholdsvis den lille og den store affine Desargues's sætning, gælder i enhver affin plan, hvis projektive komplementering er en projektiv D-plan. En sådan affin plan kaldes en affin Desargues-plan, kort affin D-plan. Enhver plan i et affint rum og dermed enhver algebratisk affin plan er en affin D-plan.

Vi viser nu ved angivelse af et eksempel: Der findes affine planer, som ikke er Desargues-planer.

Som punktmængde G^0 i eksemplet vælges mængden af reelle talpar, altså $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Liniemængden G^1 skal bestå af følgende delmængder af $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\},$$

$$y \in \mathbb{R},$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \alpha x + \beta\} \quad \text{for } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq 0,$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \alpha x + \beta, x \leq 0 \text{ eller } y = 2\alpha x + \beta, x > 0\} \text{ for } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$$

I det følgende benyttes den elementære analytiske geometriske terminologi. Men alt oversættes let til udsagn om reelle tal.

Fortolktes (x, y) som sædvanlige retvinklede koordinatsæt for punkterne i en euklidisk affin plan, er "linierne" dels de sædvanlige paralleller til y -aksen, dels de sædvanlige linier med ikke-positiv hældningskoefficient, dels brudte linier hver bestående af to halvlinier med fælles begyndelsepunkt på y -aksen, som begge har positiv hældningskoefficient, den "højre" halvlinie er dobbelt så stor som den "venstre".

At In 5 og In 6 gælder, er klart.

At In 1 gælder, altså at der findes netop én "linie" gennem to forskellige punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) , hvor vi kan antage $x_1 \leq x_2$, er også klart, når blot ikke $x_1 < 0 < x_2$ og $y_1 < y_2$. I dette sidste tilfælde er påstanden imidlertid også rigtig, idet ligningssystemet

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta &= y_1 \\ 2\alpha x_2 + \beta &= y_2 \end{aligned}$$

har netop én løsning (α, β) , og i denne er $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{2x_2 - x_1} > 0$.

Parallelaaksiomet P_{α} er også opfyldt. Lad nemlig a' være en "linie". At der gennem et punkt uden for a' går netop én "linie", som ikke skærer a' , er oplagt, når a' er en sædvanlig linie, altså enten er parallel med y -aksen eller har ikke-positiv hældning, idet jo en sådan linie skæres af enhver "linie" med

positive hældninger $\alpha, 2\alpha$. Idet to forskellige "linier" med de samme positive hældninger ikke skærer hinanden, er der kun tilbage at vise, at to "linier" med forskellige positive hældninger $\alpha_1, 2\alpha_1$ og $\alpha_2, 2\alpha_2$ skærer hinanden. Linierne $y = \alpha_1 x + \beta_1$ og $y = \alpha_2 x + \beta_2$, som indeholder "liniernes" venstre halvlinier, skærer hinanden i et punkt med 1. Koordinat $x_v = -(\beta_2 - \beta_1)/(\alpha_2 - \alpha_1)$. Linierne $y = 2\alpha_1 x + \beta_1$ og $y = 2\alpha_2 x + \beta_2$, som indeholder "liniernes" højre halvlinier, skærer hinanden i et punkt med 1. Koordinat $x_h = -\frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)/(\alpha_2 - \alpha_1)$. Enten er $\beta_1 = \beta_2$, altså $x_v = x_h = 0$, og "linierne" skærer hinanden på y-aksen, eller x_v og x_h har samme fortegn. I dette tilfælde vil enten de venstre halvlinier skære hinanden til venstre for y-aksen, eller de højre til højre for y-aksen. Heraf følger påstanden.

Vi viser nu, at den lille affine Desargues'sætning aD ikke er alment gyldig i den således definerede affine plan. Vi vælger to trekanter (a_1^0, a_2^0, a_3^0) og (b_1^0, b_2^0, b_3^0) , den første til venstre og den anden til højre for y-aksen, således at følgende er opfyldt: "Linierne" $c_i^1 = a_i^0 \vee b_i^0$, $i = 1, 2, 3$, er parallelle med x-aksen, altså sædvanlige sådanne linier. $a_1^1 \parallel b_1^1$, $a_2^1 \parallel b_2^1$, og disse fire "linier" har negativ hældning, er altså sædvanlige linier. "Linierne" a_3^1 og b_3^1 har positive hældninger. (Se fig. 6.6.) Ifølge aD anvendt på planen betragtet som algebraisk affin plan over $\mathbb{R}$ er da den venstre halvlinie af a_3^1 i sædvanlig forstand parallel med den højre halvlinie af b_3^1 . Men a_3^1 og b_3^1 er ikke parallelle i den ovenfor definerede affine plan, idet

de venstre halmlinier skærer hinanden til venstre for y -aksen.

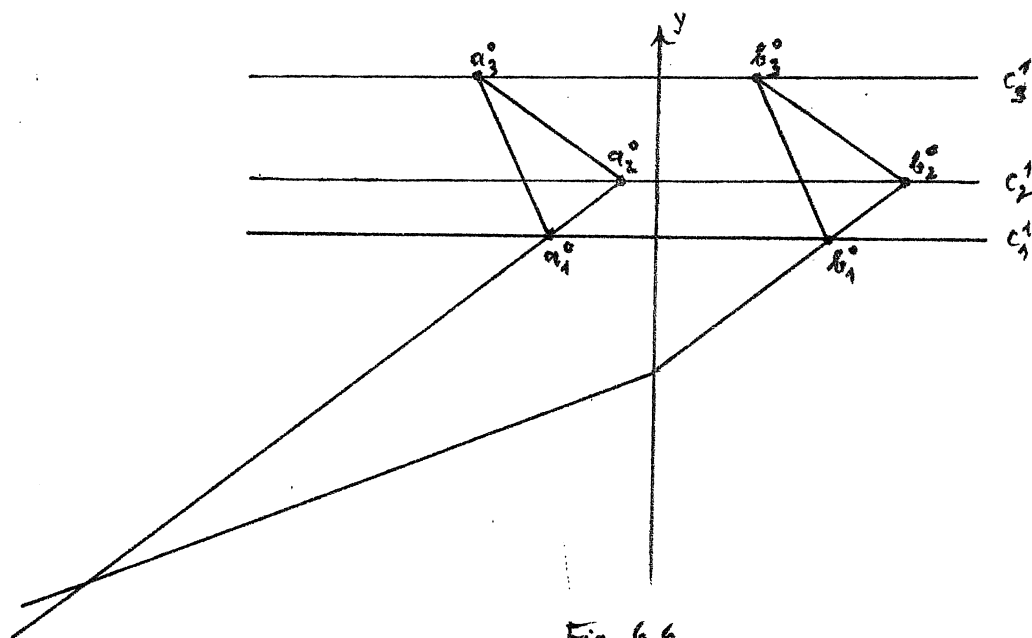


Fig. 6.6

Dermed er vist: Der findes affine planer, som ikke er D-planer, og som folgelig ikke er isomorfe med planer i et affint rum.

Idet den projektive komplettering af den konstruerede affine plan ikke kan være D-plan, har vi ogsa: Der findes projektive planer, som ikke er D-planer, og som folgelig ikke er isomorfe med planer i et projektivt rum.

Endvidere kan vi slutte: Desargues's sætning kan ikke bevises ud fra aksiomerne for en projektiv plan.

Opgaver til § 6.

1. Den duale figur til en trekant i et projektivt rum $(P^3, \mathbb{Z})$ er et såkaldt tresidet hjørne. Det består af tre planer, sideplanerne, som har netop ét punkt, toppunktet, fælles, og af disse planers tre skæringslinier, kanterne.

Formulér den rumligt duale til Desargues's sætning, specielt også til denne for en plan i P^3 .

Benyt den til at bevise den omvendte, altså plan dual til Desargues's sætning for en plan i P^3 .

2. På et stykke papir er tegnet to linier, hvis skæringspunkt falder uden for papiret. Konstruer med linealen den linie, som forbinder et givet punkt på papiret med de to givne liniers skæringspunkt. [Papiret betragtes som del af en D-plan.]

3. I den sædvanlige plan (betragtet som affin D-plan) er givet to forskellige parallelle linier og et punkt uden for dem. Konstruer med linealen den med de givne parallelle linie gennem det givne punkt. (Jf. opg. 2.)

Lad der være givet et parallelogram, dvs. to ikke parallelle par af parallelle linier, samt en anden linie. Konstruer med linealen en med denne parallel, men ikke identisk linie.

(Med en "parallellelineal", dvs. en lineal med to parallelle kanter, kan man altså konstruere linien, der er parallel med en given linie og går gennem et givet punkt.)

4. I den euklidisk affine plan betragtes to cirkler med forskellige centre c_1^o og c_2^o og forskellige radier R_1 og R_2 . Ved cirklernes ydre henholdsvis indre lighedspunkt forstås det punkt på centerlinien $c_1^o \vee c_2^o$, som deler liniestykket $c_1^o c_2^o$ udvendigt henholdsvis indvendigt i forholdet $R_1 : R_2$.

Vis, at de tre ydre lighedspunkter for tre cirkler med indbyrdes forskellige centre og radier ligger på en linie, og at hver linie, der forbinder to indre lighedspunkter, går gennem et ydre. Opsæt en lignende sætning for det tilfælde, at to af cirklerne har samme radius, og bevis den.

5. I en affin D-plan betragtes tre linier k^1, l^1, m^1 , som går gennem samme punkt eller er indbyrdes parallelle. Lad a^1 og b^1 være linier, så at $a^1 \nparallel k^1$, $a^1 \nparallel l^1$, $b^1 \nparallel l^1$, $b^1 \nparallel m^1$. Ved parallelprojektion af $o(k^1)$ på $o(l^1)$ langs a^1 efterfulgt af parallelprojektion af $o(l^1)$ på $o(m^1)$ langs b^1 fås en afbildning af $o(k^1)$ på $o(m^1)$. Vis, at denne er en parallelprojektion.

Oversæt denne sætning til en om den affine plans projektive Komplettering og dermed til en om projektive D-planer.

6. Lad der være givet en trekant (a_1^o, a_2^o, a_3^o) i en projektiv D-plan. Lad p^o være et vilkårligt punkt, som ikke ligger på nogen af sideliniernes a_1^1, a_2^1, a_3^1 . Lad $b_i^o = a_i^1 \wedge (a_i^o \vee p^o)$ for $i=1, 2, 3$, og b_i^1 betegner den modstående sidelinie til hjørnet b_i^o i trekant (b_1^o, b_2^o, b_3^o) , vil punkterne $a_i^1 \wedge b_i^1$ ligge på en linie,

som ikke går gennem noget af hjørnerne a_1^o, a_2^o, a_3^o . Denne linie kaldes den harmoniske polar for punktet p^o med hensyn til trekanten (a_1^o, a_2^o, a_3^o) .

Dualistisk tilsvarende fås til en linie q^1 , som ikke går gennem noget af trekantens hjørner, et punkt, som kaldes den harmoniske pol for linien q^1 med hensyn til trekanten. Gør rede herfor, og vis, at enhver linie, som ikke går gennem noget af trekantens hjørner, er sin harmoniske pols harmoniske polar.

7. Lad $m \geq 7$ og $n \geq 3$ være naturlige tal. Man kalder en figur bestående af m indbyrdes forskellige punkter og m indbyrdes forskellige linier i en projektiv plan for en (m, n) -konfiguration, hvis hvert af de m punkter ligger på netop n af de m linier og hver af de m linier går gennem netop n af de m punkter. (Eventuelle andre forbindelseslinier og skæringspunkter mellem de m punkter og m linier lades ude af betragtning.) En permutation af mængden af de m punkter kaldes en punkt-automorfi af konfigurationen, hvis 3 punkter, som ligger på en af dens linier, altid afbildes i 3 punkter med samme egenskaber. Med sammensætning som komposition danner punkt-automorfierne en undergruppe af den symmetriske gruppe S_m . Dualistisk tilsvarende defineres linie-automorfierne, som ligeledes danner en undergruppe af S_m .

I Desargues's sætning D (side II.6.6) for en projektiv D-plan

indgår 10 punkter og 10 linier. Gør rede for, at hvis disse punkter og linier er indbyrdes forskellige og p^0 ikke ligger på q^1 , udgør de en (10_3) -Konfiguration.

En (10_3) -Konfiguration, som fremkommer på denne måde, kaldes en Desargues-Konfiguration. (Der findes også andre (10_3) -Konfigurationer!) Der gælder følgende sætning:

En Desargues-Konfigurations automorfi-grupper er begge isomorfe med den symmetriske gruppe S_5 . Af en Desargues-Konfiguration kan på 10 væsentlig forskellige måder udvalges 2 trekanter, for hvilke den giver Desargues's sætnings gyldighed.

* Bevis dette f.eks. ved at begrunde og benytte følgende konstruktion af Desargues-Konfigurationer.

En figur i et projektivt rum P^3 , som består af 5 punkter, så at ikke 4 af dem ligger i en plan, derved 10 forbindelseslinier samt de 10 planer gennem 3 af punkterne, som ikke ligger på en linie, kaldes et fuldstændigt femhjørne. De nævnte linier og planer har foruden de fem givne et vist antal skæringspunkter. Enhver plan i P^3 , som ikke går gennem noget af disse punkter, skæres af femhjørnets linier og planer i en Desargues-Konfiguration. Omvendt kan enhver sådan ℓ en plan i et projektivt rum fås på denne måde (jf. fig. 6.2).

§ 7. En affins plans homotetier.

Vi betragter en affin plan A^2 . Indtil videre vil yderligere forudsætninger ikke være påkrævet. Det drejer sig om den nærmere undersøgelse af visse afbildninger af A^2 ind i sig selv.

Definition: Ved en homoteti forstås en afbildning h af den affins plans punktmængde G° ind i sig selv med følgende egenskab: For vilkårlige forskellige punkter x° og y° ligger billederne $h(x^\circ)$ og $h(y^\circ)$ på en linie parallel med $x^\circ \vee y^\circ$, dvs. enten er $h(x^\circ) = h(y^\circ)$ eller $h(x^\circ) \vee h(y^\circ) \parallel x^\circ \vee y^\circ$.

Det fremgår heraf, at hvis tre punkter ligger på en linie, vil også billedpunkterne ligge på en linie. Af (3.9) kan derfor sluttes: Enhver bijektiv homoteti er en kollineation. (Vedrørende tilfældet, at planen har orden 2, som ikke omfattes af (3.9), jf. opg. 1.)

Den identiske afbildning id af G° er en bijektiv homoteti. Endvidere er enhver afbildning, ved hvilken hele mængden G° afbildes i ét punkt, en homoteti. Spørgsmålet, om der findes andre, lades foreløbigt åbent.

Ved et fixpunkt ved en afbildning $h: G^\circ \rightarrow G^\circ$ forstås et punkt a° , for hvilket $h(a^\circ) = a^\circ$. Ved en fixlinie ved h forstås en linie a^1 , for hvilken $h({}^\circ(a^1)) \subseteq {}^\circ(a^1)$. Et skæringspunkt mellem to forskellige fixlinier er et fixpunkt.

Vi beviser en række sætninger om homotetier.

(7.1) En homoteti er enten injektiv, eller hele planen afbildes ved den i ét punkt.

Bevis: Antag, at homotetien h er ikke injektiv, altså at der findes punkter $x^0, y^0, x^0 \neq y^0$, så at $h(x^0) = h(y^0)$. For et punkt $z^0 \notin x^0 \vee y^0$ ligger da $h(z^0)$ på de to linier gennem $h(x^0) = h(y^0)$, der er parallelle med $x^0 \vee z^0$ og $y^0 \vee z^0$, altså på to linier, der skærer hinanden i $h(x^0) = h(y^0)$. Heraf følger $h(z^0) = h(x^0) = h(y^0)$. For et punkt $z^0 \in x^0 \vee y^0$ fås det samme ved at anvende det viste med et punkt uden for $x^0 \vee y^0$ i stedet for x^0 eller y^0 . Hele planen afbildes altså i $h(x^0) = h(y^0)$.

(7.2) Enhver fra identiteten forskellig homoteti har højst ét fixpunkt.

Bevis: Antag, at homotetien h har fixpunkterne a^0 og b^0 , $a^0 \neq b^0$. For hvert punkt $x^0 \notin a^0 \vee b^0$ ligger da $h(x^0)$ på linien parallel med $a^0 \vee x^0$ gennem $h(a^0) = a^0$, altså på $a^0 \vee x^0$. Tilsvarende ses, at $h(x^0) \in b^0 \vee x^0$. Da $a^0 \vee x^0 \neq b^0 \vee x^0$, følger $h(x^0) = x^0$. For et punkt $x^0 \in a^0 \vee b^0$ følger nu $h(x^0) = x^0$ på samme måde med et punkt $c^0 \notin a^0 \vee b^0$ i stedet for a^0 eller b^0 . Dermed er vist, at $h = \text{id}$.

(7.3) Hvis punktet x^0 ikke er fixpunkt ved en homoteti h , vil $x^0 \vee h(x^0)$ være fixlinje ved h .

Bewis: For hvert fra x^0 forskelligt punkt $y^0 \neq x^0 \vee h(x^0)$ ligger $h(y^0)$ på linien parallel med $x^0 \vee y^0$ gennem $h(x^0)$, altså på $x^0 \vee h(x^0)$.

Definition: Ved en translation forstås en homoteti, som enten er identiteten eller fixpunktfri.

Ved en dilatation forstås en homoteti med mindst ét fixpunkt (altså identiteten eller en homoteti med netop ét fixpunkt). De dilatationer, ved hvilke hele planen afbildes i ét punkt, kaldes singulære dilatationer.

(7.4) Fixlinierne ved en fra identiteten forskellig translation udgør et parallelbundt.

Fixlinierne ved en fra identiteten forskellig dilatation udgør et liniebundt med fixpunktet som toppunkt.

Bewis: Lad $t \neq id$ være en translation. Ifølge (7.3) går der gennem hvert punkt en fixlinie. To forskellige af dem kan ikke skære hinanden, da et skæringspunkt ville være fixpunkt. Heraf følger påstanden.

Lad $d \neq id$ være en dilatation med fixpunkt f^0 . Gennem hvert punkt $x^0 \neq f^0$ går ifølge (7.3) en fixlinie. Antag, at en af dem, a^1 , ikke gik gennem f^0 . For et punkt $x^0 \in a^1$ ville da gælde $d(x^0) \in a^1$ og $f^0 \vee d(x^0) \parallel f^0 \vee x^0$, altså $f^0 \vee d(x^0) = f^0 \vee x^0 \neq a^1$. Men heraf ville følge $d(x^0) = x^0$, hvilket er umuligt, da $x^0 \neq f^0$. Alle fixlinier går altså gennem f^0 , som påstået.

(7.5) For givne punkter $a^\circ, \hat{a}^\circ$ findes højst én translation t , for hvilken $t(a^\circ) = \hat{a}^\circ$. Hvis den eksisterer, er den bijektiv.

Bevis: Hvis $a^\circ = \hat{a}^\circ$, er id den eneste translation, som kan komme i betragtning, og den er bijektiv.

I det følgende antages $a^\circ \neq \hat{a}^\circ$ og, at der findes en translation t med $t(a^\circ) = \hat{a}^\circ$. For et punkt $x^\circ \notin a^\circ \vee \hat{a}^\circ$ må vi have $a^\circ \vee x^\circ \parallel \hat{a}^\circ \vee t(x^\circ)$ ifølge definitionen af homoteti og $a^\circ \vee \hat{a}^\circ \parallel x^\circ \vee t(x^\circ)$ ifølge (7.3) og (7.4). Billedet $t(x^\circ)$ er altså entydig bestemt som snit mellem to ikke parallelle linier. Vælges et punkt $b^\circ \notin a^\circ \vee \hat{a}^\circ$, kan nu med $b^\circ, t(b^\circ)$ i stedet for $a^\circ, \hat{a}^\circ$ på samme måde sluttes, at billedet af et punkt $x^\circ \notin a^\circ \vee \hat{a}^\circ$ er entydig bestemt.

Ifølge (7.1) er t injektiv. For at vise, at t er surjektiv betragtes et vilkårligt punkt $\hat{x}^\circ$, som først antages uden for $a^\circ \vee \hat{a}^\circ$. Med x° betegnes skæringspunktet mellem linien gennem $\hat{x}^\circ$ parallel med $a^\circ \vee \hat{a}^\circ$ og linien gennem a° parallel med $\hat{a}^\circ \vee \hat{x}^\circ$. For dette punkt x° er $t(x^\circ) = \hat{x}^\circ$. For et punkt $\hat{x}^\circ \in a^\circ \vee \hat{a}^\circ$ fås det ønskede ved at benytte $b^\circ, t(b^\circ)$, hvor $b^\circ \notin a^\circ \vee \hat{a}^\circ$, i stedet for $a^\circ, \hat{a}^\circ$.

(7.6) For givne punkter $f^\circ, a^\circ, f^\circ \neq a^\circ$, og $\hat{a}^\circ \notin a^\circ \vee f^\circ$ findes der højst én dilatation d , for hvilken $d(f^\circ) = f^\circ$ og $d(a^\circ) = \hat{a}^\circ$. Hvis $\hat{a}^\circ = f^\circ$, er den singular. Hvis $\hat{a}^\circ \neq f^\circ$, er den bijektiv, såfremt den eksisterer.

Bevis: I tilfældet $\hat{a}^\circ = f^\circ$ følger det påståede af (7.1) og

i tilfældet $\hat{a}^\circ = a^\circ$ af (7.2).

Vi antager i det følgende $\hat{a}^\circ \neq a^\circ, f^\circ$ og, at der findes en dilatation d med de angivne egenskaber. Definitionen af homoteti og (7.3), (7.4) viser, at for $x^\circ \notin a^\circ \vee f^\circ = a^\circ \vee \hat{a}^\circ$ er $d(x^\circ)$ entydigt bestemt ved $\hat{a}^\circ \vee d(x^\circ) \parallel a^\circ \vee x^\circ$ og $d(x^\circ) \perp f^\circ \vee a^\circ$. For et punkt $x^\circ \in a^\circ \vee \hat{a}^\circ$ benyttes $b^\circ, d(b^\circ)$, hvor $b^\circ \notin a^\circ \vee \hat{a}^\circ$, i stedet for $a^\circ, \hat{a}^\circ$.

Ifølge (7.1) er d injektiv. Et vilkårligt punkt $\hat{x}^\circ \notin a^\circ \vee \hat{a}^\circ$ er billede ved d af punktet x° bestemt ved $a^\circ \vee x^\circ \parallel \hat{a}^\circ \vee \hat{x}^\circ$ og $x^\circ \perp f^\circ \vee \hat{x}^\circ$. For et punkt $\hat{x}^\circ \in a^\circ \vee \hat{a}^\circ$ fås det ønskede ved at benytte $b^\circ, d(b^\circ)$, hvor $b^\circ \notin a^\circ \vee \hat{a}^\circ$, i stedet for $a^\circ, \hat{a}^\circ$.

(7.7) De bijektive homotetier af en affin plan A^2 danner en gruppe $\text{Hot}(A^2)$.

For hvert punkt f° i A^2 danner de bijektive dilatationer med fixpunkt f° en undergruppe $\text{Dip}_o(A^2)$ af $\text{Hot}(A^2)$. Translationerne af A^2 danner en normal undergruppe $\text{Tr}(A^2)$ af $\text{Hot}(A^2)$.

For hver linie f^1 danner translationerne med fixlinier parallelle med f^1 en normal undergruppe $\text{Tr}_{f^1}(A^2)$ af $\text{Hot}(A^2)$.

Basis: For bijektive homotetier h udsiger definitionen, at for $x^\circ \neq y^\circ$ er $h(x^\circ) \neq h(y^\circ)$ og $h(x^\circ) \vee h(y^\circ) \parallel x^\circ \vee y^\circ$. Det er klart, at den inverse h^{-1} og to sådanne homotetiers sammensatte har samme egenskab. Heraf sluttes den første påstand. Den anden er herefter også klar.

At den inverse til en fra id forskellig translation er en translation, følger af, at den er en fixpunktfri homoteti. Lad t_1 og t_2 være translationer. Antag, at $t_2 \circ t_1$ har et fixpunkt a^0 . Da er $t_1(a^0) = t_2^{-1}(a^0)$, hvilket ifølge (7.5) medfører $t_1 = t_2^{-1}$, altså $t_2 \circ t_1 = \text{id}$. Idet $t_2 \circ t_1$ således i alle tilfælde er en translation, er $\text{Tr}(A^2)$ en undergruppe af $\text{Hot}(A^2)$. At $\text{Tr}_{\mathbb{Z}_2}(A^2)$ også er undergruppe er herefter klart.

Lad nu t være en translation og h en vilkårlig bijektiv homoteti. Vi skal vise, at t og $h \circ t \circ h^{-1}$ har de samme fixlinier. Hvis $t = \text{id}$, er $h \circ t \circ h^{-1} = \text{id}$, altså intet at bevise. Antag $t \neq \text{id}$. For et vilkårligt punkt x^0 er $h^{-1}(x^0) \vee t \circ h^{-1}(x^0)$ fixlinie ved t . Ved h afbildes den på den parallelle linie $x^0 \vee h \circ t \circ h^{-1}(x^0)$, som er fixlinie ved $h \circ t \circ h^{-1}$. Ved hjælp af (7.4) slutes, at $h \circ t \circ h^{-1}$ er en translation med de samme fixlinier som t . Heraf følger, at $\text{Tr}(A^2)$ og $\text{Tr}_{\mathbb{Z}_2}(A^2)$ er normale undergrupper af $\text{Hot}(A^2)$.

(7.8) Hvis der findes fra identiteten forskellige translationer med forskellige fixliniebundter, er gruppen $\text{Tr}(A^2)$ kommutativ.

Beweis: Lad $t_1 \neq \text{id}$ og $t_2 \neq \text{id}$ være translationer med forskellige fixliniebundter, og lad x^0 være et vilkårligt punkt. Man har da $x^0 \vee t_1(x^0) \parallel t_2(x^0) \vee t_1 \circ t_2(x^0)$ og $x^0 \vee t_2(x^0) \parallel t_1(x^0) \vee t_2 \circ t_1(x^0)$, idet de to sidste linier er fixlinier ved t_2 . Lader man t_1 og t_2 bytte rolle, får man $x^0 \vee t_2(x^0) \parallel t_1(x^0) \vee t_1 \circ t_2(x^0)$ og $x^0 \vee t_1(x^0) \parallel t_2(x^0) \vee t_2 \circ t_1(x^0)$. Såvel $t_2 \circ t_1(x^0)$ som $t_1 \circ t_2(x^0)$ er altså fællespunkt for linierne

gennem $t_2(x^0)$ parallel med $x^0 \vee t_1(x^0)$ og linien gennem $t_1(x^0)$ parallel med $x^0 \vee t_2(x^0)$. Idet disse linier som fixlinier for henholdsvis t_1 og t_2 ikke er parallelle, følger $t_2 \circ t_1(x^0) = t_1 \circ t_2(x^0)$ og dermed $t_2 \circ t_1 = t_1 \circ t_2$.

Lad nu $t_1 \neq \text{id}$ og $t_2 \neq \text{id}$ være translationer med samme fixliniebundt. Der findes da ifølge forudsætning en translation t_3 med et andet fixliniebundt. Ifølge det allerede viste er t_3 ombytlig med både t_1 og t_2 . Endvidere er $t_3 \circ t_2 \neq \text{id}$ og har et andet fixliniebundt end t_2 og dermed end t_1 ; thi ellers ville også $t_3 = t_3 \circ t_2 \circ t_2^{-1}$ have samme fixliniebundt som t_2 . Man kan altså slutte, at $t_3 \circ t_2$ og t_1 er ombytlige. Påstanden $t_2 \circ t_1 = t_1 \circ t_2$ fås nu af

$$t_3 \circ t_2 \circ t_1 = t_1 \circ t_3 \circ t_2 = t_3 \circ t_1 \circ t_2$$

ved sammensætning med t_3^{-1} .

Da id er ombytlig med enhver translation, er sætningen hermed bevist.

(7.9) Hvis den lille affine Desargues's sætning gælder i en affin plan, findes der til hvert punktpar $a^0, \hat{a}^0$ en translation t af planen, for hvilken $t(a^0) = \hat{a}^0$.

Beweis: Idet tilfældet $\hat{a}^0 = a^0$ er oplagt, antages $\hat{a}^0 \neq a^0$. En afbildning t_a af mængden af punkter uden for linien $a^0 \vee \hat{a}^0$ ind i sig selv defineres ved til hvert punkt $x^0 \notin a^0 \vee \hat{a}^0$ at lade svare punktet $t_a(x^0)$ bestemt ved $\hat{a}^0 \vee t_a(x^0) \parallel a^0 \vee x^0$ og $x^0 \vee t_a(x^0) \parallel a^0 \vee \hat{a}^0$. Det er klart, at $x^0 \neq t_a(x^0)$, altså at t_a er fixpunktfri. Lad $b^0 \notin a^0 \vee \hat{a}^0$ være fast

valgt og $\hat{b}^\circ = t_a(b^\circ)$. Man kan da på samme måde definere en afbildning t_b af mængden af punkter uden for linien $b^\circ \vee \hat{b}^\circ$ ind i sig selv. Der gælder åbenbart $t_b(a^\circ) = \hat{a}^\circ$. Uden for både $a^\circ \vee \hat{a}^\circ$ og $b^\circ \vee \hat{b}^\circ$ er begge afbildninger t_a og t_b definerede, og de stemmer overens. Dette sidste er klart, hvis $a^\circ, b^\circ, x^\circ$ ligger på en linie, idet både $t_a(x^\circ)$ og $t_b(x^\circ)$ er bestemt som skæringspunkt mellem linien gennem x° parallel med $a^\circ \vee \hat{a}^\circ \parallel b^\circ \vee \hat{b}^\circ$ og linien $\hat{a}^\circ \vee \hat{b}^\circ \parallel a^\circ \vee x^\circ = b^\circ \vee x^\circ$ (fig. 7.1).

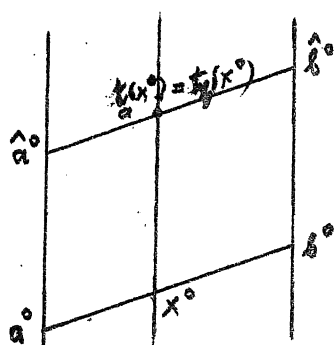


Fig. 7.1

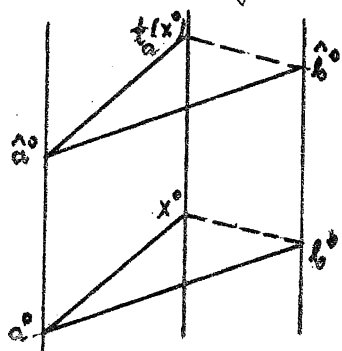


Fig. 7.2

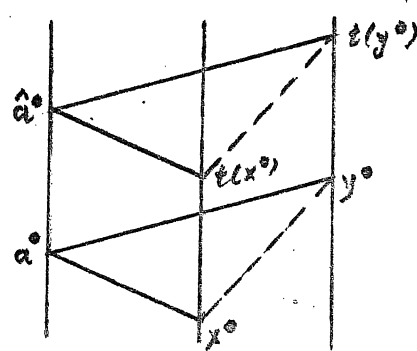


Fig. 7.3

Ellers følger det af aD anvendt på trekanterne $(a^\circ, b^\circ, x^\circ)$ og $(\hat{a}^\circ, \hat{b}^\circ, t_a(x^\circ))$, idet konklusionen $\hat{b}^\circ \vee t_a(x^\circ) \parallel b^\circ \vee x^\circ$ netop udsiger, at $t_b(x^\circ) = t_a(x^\circ)$ (fig. 7.2). Tilsammen bestemmer t_a og t_b altså en fixpunktfri afbildning t af planens hele punktmængde ind i sig selv.

Herefter er det tilstrækkeligt at vise, at t er en homoteti. Dette sker lettest under forudsætning af, at planen ikke har orden 2.

(Hvis planens orden er 2, er sætning (7.9) trivielt rigtig; jf. opg. 1.)

Der findes da et punkt c° uden for både $a^\circ \vee \hat{a}^\circ$ og $b^\circ \vee \hat{b}^\circ$. Med c° og $\hat{c}^\circ = t(c^\circ)$ i stedet for a° og $\hat{a}^\circ$ kan defineres en afbildning t_c af mængden af punkter uden for $c^\circ \vee \hat{c}^\circ$ ind i sig selv. Ifølge det viste stemmer den i hele definitionsområdet overens med t . Lad nu $x^\circ, y^\circ, x^\circ \neq y^\circ$, være vilkårlige punkter i planen. Idet linierne $a^\circ \vee \hat{a}^\circ, b^\circ \vee \hat{b}^\circ, c^\circ \vee \hat{c}^\circ$ er indbyrdes forskellige og parallelle, findes der mindst én

iblandt dem, f.eks. $a^\circ \vee \hat{a}^\circ$, som hverken går gennem x° eller y° . Hvis $x^\circ \vee y^\circ$ går gennem a° , er det klart, at $t(x^\circ)$ og $t(y^\circ)$ ligger på linien gennem $\hat{a}^\circ$ parallel med $a^\circ \vee x^\circ = a^\circ \vee y^\circ$. Hvis $a^\circ, x^\circ, y^\circ$ ikke ligger på en linie, fås påstanden $t(x^\circ) \vee t(y^\circ) \parallel x^\circ \vee y^\circ$ ved hjælp af aD anvendt på trekanterne $(a^\circ, x^\circ, y^\circ)$ og $(\hat{a}^\circ, t(x^\circ), t(y^\circ))$ (se fig. 7.3).

Definitioner: En gruppe af transformationer af en mængde siges at være transitiv, hvis der for hvert par af mængdens elementer findes en transformation i gruppen, ved hvilken parrets første element afbildes på det andet. Hvis der for hvert par findes netop én sådan transformation i gruppen, siges denne at være enkelt transitiv.

Sætningerne (7.5) og (7.9) udsiger, at en affin plan, hvori aD gælder, har en enkelt transitiv translationsgruppe. En sådan affin plan kaldes en translationsplan. Ifølge (7.8) er dens translationsgruppe kommutativ.

De følgende undersøgelser vedrører indtil videre translationsplaner. Vi indskyder imidlertid en til (7.9) analog sætning om dilatationer, hvis forudsætning ikke er opfyldt i alle translationsplaner. Sætningen vil blive anvendt senere.

(7.10) Hvis den store affine Desargues's sætning AD gælder i en affin plan, findes der til hvert sæt af punkter $f^\circ, a^\circ, \hat{a}^\circ$, hvor $f^\circ \neq a^\circ$ og $\hat{a}^\circ \not\leq f^\circ \vee a^\circ$, en dilatation d af planen, for hvilken $d(f^\circ) = f^\circ$ og $d(a^\circ) = \hat{a}^\circ$.

Bevis: Tilfældene $\hat{a}^\circ = f^\circ$ og $\hat{a}^\circ = a^\circ$ er oplagte, idet da henholdsvis den singulære dilatation med fixpunkt f° og identiteten opfylder kravene. For hovedtilfældet $\hat{a}^\circ \neq f^\circ$, $\hat{a}^\circ \neq a^\circ$ forløber beviset fuldstændigt analogt med beviset for (7.9). En afbildning d_a af mangden bestående af f° og punkterne uden for $a^\circ \vee \hat{a}^\circ$ ind i sig selv defineres ved $d_a(f^\circ) = f^\circ$ og for $x^\circ \notin a^\circ \vee \hat{a}^\circ$ ved $\hat{a}^\circ \vee d_a(x^\circ) \parallel a^\circ \vee x^\circ$, $d_a(x^\circ) \leq f^\circ \vee x^\circ$. Tilsvarende defineres d_b ved hjælp af b° og $\hat{b}^\circ = d_a(b^\circ)$, hvor $b^\circ \notin a^\circ \vee \hat{a}^\circ$. Det vises ved hjælp af AD, at afbildningerne d_a og d_b stemmer overens, hvor de begge er definerede. Tilsammen bestemmer de altså en afbildning d med $d(f^\circ) = f^\circ$ og, som man let ser, $d(a^\circ) = \hat{a}^\circ$ af hele planen ind i sig selv. Beviset for, at d er en homoteti, altså at $d(x^\circ) \vee d(y^\circ) \parallel x^\circ \vee y^\circ$ for forskellige punkter x° og y° , føres ved hjælp af en tredje afbildning d_c og anvendelse af AD, idet dog de oplagte tilfælde $x^\circ = f^\circ$ eller $y^\circ = f^\circ$ må tages for sig.

En homomorf afbildning af en gruppe ind i sig selv kaldes en endomorfi af gruppen, specielt en automorfi, hvis afbildningen er bijektiv, altså en isomorfi.

Ved en affin plans translationsgruppe Tr interesserer især endomorfierne $\alpha: Tr \rightarrow Tr$ med følgende egenskab: For hvert $t \in Tr$ er fixlinierne ved t også fixlinier ved $\alpha(t)$, dvs. $\alpha(t)$ er enten id eller har præcis de samme fixlinier som t . Mængden af sådanne fixliniebevarende endomorfier, kort fb-endomorfier, betegnes $fb\text{-}End(Tr)$. Sættens sammensætning $\circ$ er en associativ komposition i denne mængde, og delmængden $fb\text{-}Aut(Tr)$ af fixlinie-

bevarende automorfier er en gruppe.

Afbildningen, der til hver translation lader svare planens identiske afbildning id , er en fb-endomorfi, som vi vil kalde nul-endomorfi og betegne med $\mathbb{O}$.

(7.11) Der betragtes en translationsplan og i denne et fast punkt f° . Lad d være en dilatation med fixpunkt f° . Afbildningen $\alpha_d : \text{Tr} \rightarrow \text{Tr}$, ved hvilken der til translationen t svarer den translation $\alpha_d(t)$, for hvilken

$$\alpha_d(t)(f^\circ) = d(t(f^\circ)),$$

er en fb-endomorfi. Hvis d er den singulære dilatation d_{sing} med fixpunkt f° , er $\alpha_d = \mathbb{O}$, og hvis d er bijektiv, er $\alpha_d(t) = d \circ t \circ d^{-1}$ og α_d en fb-automorfi.

Afbildningen $\Phi : \text{Di}_{f^\circ} \cup \{d_{\text{sing}}\} \rightarrow \text{fb-End}(\text{Tr})$ bestemt ved $\Phi(d) = \alpha_d$ er en isomorfi (med hensyn til kompositionen $\circ$). Restriktionen af Φ til Di_{f° er en isomorfi på $\text{fb-Aut}(\text{Tr})$.

Bevis: Hvis $d = d_{\text{sing}}$, har vi for alle $t \in \text{Tr}$, at $d(t(f^\circ)) = f^\circ$, altså $\alpha_d(t) = \text{id}$, så α_d er nul-endomorfi $\mathbb{O}$, som påstået. Antag nu, at d er bijektiv. Idet $d^{-1}(f^\circ) = f^\circ$, kan sætningens definition af α_d omskrives til

$$\alpha_d(t)(f^\circ) = d \circ t \circ d^{-1}(f^\circ).$$

Da Tr ifølge (7.7) er en normal undergruppe af planens homoteti-gruppe, er $d \circ t \circ d^{-1}$ en translation, og af ligningen kan derfor sluttes, at $\alpha_d(t) = d \circ t \circ d^{-1}$. Undergruppen af Tr bestående af de translationer, som har fixlinierne ved t som fixlinier, er ifølge

det sidste udsagn i (7.7) også en normal undergruppe af homotetigruppen. Den indeholder altså $d \circ t \circ d^{-1}$, hvilket viser, at α_d er fixliniebevarende. At α_d er homomorf, altså $\alpha_d \in \text{fb-End}(Tr)$ ses af, at der for $t_1, t_2 \in Tr$ gælder

$$\alpha_d(t_2 \circ t_1) = d \circ t_2 \circ t_1 \circ d^{-1} = d \circ t_2 \circ d^{-1} \circ d \circ t_1 \circ d^{-1} = \alpha_d(t_2) \circ \alpha_d(t_1).$$

At α_d er surjektiv, ses af, at der for hvert $\hat{t} \in Tr$ gælder $\alpha_d(d^{-1} \circ \hat{t} \circ d) = \hat{t}$. Idet $d \circ t_1 \circ d^{-1} = d \circ t_2 \circ d^{-1}$ for $t_1, t_2 \in Tr$ medfører $t_1 = t_2$, er α_d også injektiv. Dermed er sætningens første del bevist.

At den i sætningen definerede afbildning Φ er en homomorfi, ses af, at der for $d_1, d_2 \in Di_f \cup \{d_{\text{sing}}\}$ og alle $t \in Tr$ gælder $\alpha_{d_2 \circ d_1}(t)(f^\circ) = d_2 \circ d_1(t(f^\circ)) = d_2(\alpha_{d_1}(t)(f^\circ)) = \alpha_{d_2}(\alpha_{d_1}(t)(f^\circ)) = \alpha_{d_2 \circ d_1}(t)(f^\circ)$.

At Φ er injektiv, altså at α_d bestemmer d entydigt, følger af, at der for hvert punkt x° i planen gælder

$$d(x^\circ) = \alpha_d(t_{f^\circ x^\circ})(f^\circ),$$

hvor $t_{f^\circ x^\circ}$ betegner translationen, for hvilken $t_{f^\circ x^\circ}(f^\circ) = x^\circ$.

For at vise, at Φ er surjektiv, antages $\alpha \in \text{fb-End}(Tr)$ givet.

Ved for hvert punkt x° at sætte

$$(7.12) \quad d_\alpha(x^\circ) = \alpha(t_{f^\circ x^\circ})(f^\circ)$$

defineres en afbildning d_α af planen ind i sig selv. Det drejer sig om at vise, at d_α er en dilatation med fixpunkt f° . Idet $\alpha : Tr \rightarrow Tr$ er en homomorfi, er $\alpha(\text{id}) = \text{id}$. For $x^\circ = f^\circ$ fås altså $d_\alpha(f^\circ) = \alpha(t_{f^\circ f^\circ})(f^\circ) = \alpha(\text{id})(f^\circ) = f^\circ$. Der er tilbage at vise, at d_α er en homoteti, altså at $d_\alpha(x^\circ)$ og $d_\alpha(y^\circ)$ for forskellige punkter x° og y° ligger på en linie parallel med $x^\circ \vee y^\circ$. Idet $t_{f^\circ x^\circ}$, $t_{f^\circ y^\circ}$ og $t_{x^\circ y^\circ}$ betegner translationerne, som henholdsvis afbilder

f° på x° , f° på y° og x° på y° , gælder

$$t_{x^\circ y^\circ} \circ t_{f^\circ x^\circ} = t_{f^\circ y^\circ},$$

altså, da α er en homomorfi og (7.12) gælder for d_α ,

$$\alpha(t_{x^\circ y^\circ})(d_\alpha(x^\circ)) = d_\alpha(y^\circ).$$

Nu er $x^\circ \vee y^\circ$ fixlinje ved $t_{x^\circ y^\circ}$, altså ved $\alpha(t_{x^\circ y^\circ})$, og den sidste ligning viser, at $d_\alpha(y^\circ)$ ligger på linien gennem $d_\alpha(x^\circ)$ parallel med $x^\circ \vee y^\circ$.

Dermed er vist, at Φ er en isomorfi af $Di_{f^\circ} \cup \{d_{\text{sing}}\}$ på $\text{fb-End}(Tr)$. Da bevisets første del har givet

$$\text{fb-End}(Tr) = \text{fn-Aut}(Tr) \cup \{0\}$$

og $\Phi(d_{\text{sing}}) = 0$, er restriktionen af Φ til Di_{f° en isomorfi på $\text{fb-Aut}(Tr)$, som påstået.

Opgaver til § 7.

1. Bestem alle homotetier af en affin plan af orden 2.
2. Bevis følgende: I enhver translationsplan gælder aD .
I en affin plan, som har alle dilatationer (som angivet i (7.10)), gælder AD .
* En affin plan, som har alle dilatationer, er en translationsplan.
Slut, at gyldigheden af AD i en affin plan medfører gyldigheden af aD .
3. Lad P^2 være en projektiv D -plan. Fortolk de bijektive homotetier af en affin delplan med vilkårligt valgt egentlig linie som kollineationer af P^2 . Som sådanne kaldes de axialkollineationer. De til translationerne og dilatationerne svarende kaldes henholdsvis elationer og homologier.
Beskriv det projektivegeometriske indhold af sætningerne (7.2) - (7.10).
Vis, at affine delplaner af P^2 med forskellige egentlige linier er isomorfe.
4. Hvis man i sætningerne (7.9) og (7.10) i stedet for aD og AD forudsætter, at den affine plan er en plan i et affint rum, kan de bevises meget simpelt ved hjælp af projektioner. Find sådanne beviser. Opstil og bevis på til-

svarende måde analoge sætninger for en projektiv plan i et projektivt rum (jf. opg. 3).

5. Vis, at hvis to transformationer af en punktmængde er ombyttelige, vil hver af dem afbilde den andens fixpunkt-mængde på sig selv.

Find nødvendige og tilstrækkelige betingelser for, at to bijektive homotetier af en translationsplan er ombyttelige.

Find nødvendige og tilstrækkelige betingelser for, at to axialkollineationer af en projektiv D -plan (se opg. 2) er ombyttelige.

6. Lad A^2 være en translationsplan. Vis, at for hvert punkt q^0 i planen er dilatationsgruppen $D_{q^0}(A^2)$ isomorf med kvotientgruppen $\text{Hom}(A^2)/\text{Tr}(A^2)$.

§ 8. En translationsplans vektorrum.

Vi betragter en translationsplan, altså en affin plan A^* med enkelt transitiv og (ifølge (7.8)) kommutativ translationsgruppe Tr . Det vil vise sig, at i en sådan plan kan vektorbegrebet indføres ganske som i den elementære vektorregning. Mængden af vektorer kan organiseres som vektorrum over en divisionsring (dvs. et ikke nødvendigvis kommutativt legeme). Dennes elementer er de fixliniebevarende endomorfier af Tr . Vi begynder derfor med at bevise:

- (8.1) Defineres $\lambda + \mu: Tr \rightarrow Tr$ for $\lambda, \mu \in L_{A^*} = \text{fb-End}(Tr)$ ved
- 1) $(\lambda + \mu)(u) = \lambda(u) \circ \mu(u)$ for $u \in Tr$,
fås en komposition, kaldet addition, i L_{A^*} . Defineres $\lambda\mu: Tr \rightarrow Tr$ ved $\lambda\mu = \lambda \circ \mu$, altså
 - 2) $(\lambda\mu)(u) = \lambda(\mu(u)) = \lambda(\mu(u))$ for $u \in Tr$,
fås en komposition, kaldet multiplikation. Med disse kompositioner er $(L_{A^*}, +, \cdot)$ en divisionsring, dvs. der gælder:
 - 3) $(L_{A^*}, +)$ er en kommutativ gruppe.
 - 4) Multiplikationen er associativ.
 - 5) $(L_{A^*} \setminus \{0\}, \cdot)$, hvor 0 er neutralelementet af $(L_{A^*}, +)$, er en gruppe.
 - 6) Multiplikationen er distributiv med hensyn til additionen, dvs. for $\lambda, \mu, \nu \in L_{A^*}$ er
- $$\lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu, \quad (\mu + \nu)\lambda = \mu\lambda + \nu\lambda.$$

Bevis: At $\lambda + \mu$ som defineret ved 1) er en endomorfi af T_r , ses af, at der for $u, v \in T_r$ gælder

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)(u \circ v) &= \lambda(u \circ v) \circ \mu(u \circ v) = \lambda(u) \circ \lambda(v) \circ \mu(u) \circ \mu(v) \\ &= \lambda(u) \circ \mu(u) \circ \lambda(v) \circ \mu(v) = (\lambda + \mu)(u) \circ (\lambda + \mu)(v), \end{aligned}$$

hvor der er benyttet, at λ og μ er endomorfier, og at T_r er kommutativ. At $\lambda + \mu$ er fixliniebevarende, sluttet af, at λ og μ er det, og at translationerne, der har fixlinierne ved u som fixlinier, danner en gruppe. Dermed er vist, at $+$ er en komposition i L_{R^2} . Af definitionen¹⁾ og kommutativiteten af T_r fremgår, at den er associativ og kommutativ. Null-endomorfien 0 , som vi nu simpelthen vil betegne med 0 , er neutralelement, idet $0(u) = \text{id}$ for hvert $u \in T_r$. Idet T_r er kommutativ, bestemmes ved $u \mapsto u^{-1}$ for $u \in T_r$ en fb-endomorfi. Når $\lambda \in L_{R^2}$, gælder derfor det samme om den ved $u \mapsto \lambda(u^{-1})$ bestemte afbildning af T_r ind i sig selv. Vi vil betegne den med $-\lambda$, og har da for $u \in T_r$

$$(\lambda + (-\lambda))(u) = \lambda(u) \circ \lambda(u^{-1}) = \lambda(u \circ u^{-1}) = \lambda(\text{id}) = \text{id},$$

altså

$$\lambda + (-\lambda) = 0.$$

Dermed er 3) bevist.

At multiplikationen defineret ved $\lambda\mu = \lambda \circ \mu$ er en associativ komposition i $L_{R^2} = \text{fb-End}(T_r)$, følger umiddelbart af, at $\circ$ er det ifølge (7.11). Idet $L_{R^2} \setminus \{0\} = \text{fb-Aut}(T_r)$ ifølge (7.11) med $\circ$ som komposition er en gruppe, er også 5) rigtig.

For $\lambda, \mu, \nu \in L_{R^2}$ får vi ved hjælp af 1) og 2), idet $u \in T_r$,

$$\begin{aligned} (\lambda(\mu + \nu))(u) &= \lambda((\mu + \nu)(u)) = \lambda(\mu(u) \circ \nu(u)) \\ &= \lambda(\mu(u)) \circ \lambda(\nu(u)) = (\lambda\mu)(u) \circ (\lambda\nu)(u) = (\lambda\mu + \lambda\nu)(u) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
 ((\mu + \nu)\lambda)(u) &= (\mu + \nu)(\lambda(u)) = \mu(\lambda(u)) + \nu(\lambda(u)) \\
 &= (\mu\lambda)(u) + (\nu\lambda)(u) = (\mu\lambda + \nu\lambda)(u).
 \end{aligned}$$

Heraf sluttet 6).

Definition: En kommutativ gruppe $(U, +)$ siges at være et venstre-vektorrum [højre-vektorrum] over en divisionsring L med et element 1 og betegnes da $(U, L)_v$ [$(U, L)_h$], når der er defineret en komposition $L \times U \rightarrow U$, skrevet $(\lambda, \underline{u}) \mapsto \lambda \underline{u}$ [$(\lambda, \underline{u}) \mapsto \underline{u} \lambda$] således, at der for $\lambda, \mu \in L$ og $\underline{u}, \underline{v} \in U$ gælder

(8.2) $\lambda(\mu(\underline{u})) = (\lambda\mu)\underline{u}$ [$(\underline{u}\mu)\lambda = \underline{u}(\mu\lambda)$],

(8.3) $1\underline{u} = \underline{u}$ [$\underline{u}1 = \underline{u}$],

(8.4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ [$\underline{u}(\lambda + \mu) = \underline{u}\lambda + \underline{u}\mu$],

(8.5) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ [$(\underline{u} + \underline{v})\lambda = \underline{u}\lambda + \underline{v}\lambda$],

Mange af begreberne og sætningerne med deres beviser vedrørende vektorrum over kommutative legemer kan uden ændring overføres til venstre-vektorrum over en divisionsring. Hertil hører:

Underrum. Linearkombination. Lineær afhængighed og uafhængighed. Rang af en vektormængde. Maksimalsæt. Dimension. Basis.

Udsiftningssætningen.

Et ægte underrum af et endelig-dimensionalt vektorrum har mindre dimension end dette.

Ethvert endelig-dimensionalt vektorrum har en basis, og

antallet af vektorer i en basis er lig med rummets dimension. Ethvert sæt af lineært uafhængige vektorer i et endelig-dimensionalt vektorrum kan suppleres til en basis.

Koordinatsæt for en vektor med hensyn til en basis.

Sum af underrum. Grassmann's dimensionsformel. Direkte sum af underrum. Komplementært underrum. I et endelig-dimensionalt vektorrum har hvert underrum mindst et komplementært.

Sideunderrum. Kvotientrum.

Lineær afbildning. Isomorfi af vektorrum. Eksistens og entydighed af en lineær afbildning, ved hvilken vektorerne i en basis afbildes på givne vektorer.

Kerne og billedrum. Dimensionssætningen.

[Man overbeviser sig herom ved en gennemgang af noterne Mat. 1x, 1969-70, Lineær algebra, Kap. 1 og Kap. 2, 1-2.2. Skalarfaktorer er der overalt sat til venstre for vektorer, og bortset fra en enkelt undtagelse forekommer aldrig mere end én skalarfaktor til samme vektor, så at den forudsatte kommutativitet af skalarlegemet slet ikke kan komme i anvendelse. Undtagelsen er beviset for, at hvis vektorer er lineært afhængige, er en af dem en linearkombination af de øvrige. I dette bevis multipliceres en linearkombination med den inverse til en af koefficienterne i den forudsatte lineære relation. Men ombyttelighed af skalarer kræves heller ikke her.]

Regning med lineære afbildninger og deres matrixligninger kan derimod ikke opretholdes i samme omfang som

i det kommutative tilfælde (jf. opg. 3), og dualitetsteorien kræver en modifikation, som omtales nedenfor.

Vi vender tilbage til en translationsplan A^2 og vil vise, at dens translationsgruppe $(Tr, \circ)$ kan organiseres som venstre-vektorrum over den ovenfor definerede divisionsring $L_{A^2} = \text{fb-End}(Tr)$. For at komme til overensstemmelse med vektorrumsbetegnelsen behøver man blot at skrive kompositionstegnet $\circ$ i stedet for $\cdot$. Men man plejer da samtidig at kalde gruppens elementer for vektorer i stedet for translationer og at tilføje dem et noget andet anskueligt indhold. Lad G^0 være planens punktmængde. I stedet for en translation $u: G^0 \rightarrow G^0$ som afbildning tænkes på mængden af punktpår (punkt, billedpunkt ved u), altså på

$$u = \{(p^0, q^0) \in G^0 \times G^0 \mid q^0 = u(p^0), p^0 \in G^0\},$$

og denne mængde kaldes den til u svarende vektor. Idet Tr er enkelt transitiv, vil hvert punktpår (p^0, q^0) være indeholdt i, "repræsentere" netop én vektor, og denne betegnes $\underline{p^0 q^0}$. Vektorerne danner altså en klasseinddeling af $G^0 \times G^0$ svarende til ækvivalensrelationen

$$(p_1^0, q_1^0) \sim (p_2^0, q_2^0) \iff t_{p_1^0 q_1^0} = t_{p_2^0 q_2^0},$$

hvor $t_{p_i^0 q_i^0}$ betegner den translation, ved hvilken p_i^0 afbildes på q_i^0 . Mængden af vektorer, som jo ikke er væsentlig forskellig fra Tr , vil vi betegne U_{A^2} . Som allerede nævnt, defineres addition i U_{A^2} ved for $\underline{u}, \underline{v} \in U_{A^2}$ og de tilhørende translationer u, v at sætte

$$(8.6) \quad \underline{u} + \underline{v} = \underline{u \circ v}.$$

Herved bliver $(\mathcal{U}_{A^2}, +)$ en med $(Tr, \circ)$ isomorf og derfor kommutativ gruppe. Dens neutralelement er vektoren $\underline{0} = \underline{p \circ p^0}$, som jo svarer til $id \in Tr$. Endvidere ses, at den modsatte $-\underline{u}$ til en vektor $\underline{u}$ svarende til translationen u er vektoren $\underline{u^{-1}}$ svarende til translationen u^{-1} . Om $(\mathcal{U}_{A^2}, +)$ gælder:

(8.7) Med kompositionen $L_{A^2} \times \mathcal{U}_{A^2} \rightarrow \mathcal{U}_{A^2}$ defineret ved

$$\lambda \underline{u} = \underline{\lambda(u)}$$

for $\lambda \in L_{A^2}$ og $\underline{u} \in \mathcal{U}_{A^2}$ er $(\mathcal{U}_{A^2}, +)$ et venstre-vektorrum $(\mathcal{U}_{A^2}, L_{A^2})_v$ over L_{A^2} .

Bævis: Vektorrumsegenskaberne (8.2) og (8.4) er ikke andet end oversættelser af definitionerne (8.1), 2) og 1) til vektorsprog, (8.3) udsiger, at et element af L_{A^2} er den identiske afbildning af Tr , og (8.5) er oversættelsen af $\lambda(u \circ v) = \lambda(u) \circ \lambda(v)$ for $\lambda \in L_{A^2}$ og $u, v \in Tr$ og bringer altså Rum til udtryk, at λ er en endomorfi af Tr .

Ud fra et venstre vektorrum $(\mathcal{U}, L)_v$ kan der som i det kommutative tilfælde (side II.3.2) defineres et algebraisk affint rum over L . (Dette begreb generaliseres altså herved til en ikke nødvendigvis kommutativ divisionsring L .) Når vektorrummets dimension er 2, fås en algebraisk affin plan, som tilfredsstiller aksiomerne for en affin plan. Bæviset herfor kan føres som i det kommutative tilfælde (jf. opg. 33, 1).

Den betragtede translationsplan A^2 er uden yderligere forudsætninger ikke nødvendigvis en algebraisk affin plan med vektorrum $(U_{A^2}, L_{A^2})_v$. Hvis nemlig L_{A^2} ikke er omfattende nok, vil dette vektorrums dimension være større end 2. Men der gælder følgende hovedsætning:

(8.8) Enhver translationsplan A^2 , i hvilken den store affine Desargues's sætning AD gælder, er en algebraisk affin plan over L_{A^2} med vektorrum $(U_{A^2}, L_{A^2})_v$.

Beweis: Idet G° betegner planens punktmængde, vil den ved $(p^\circ, q^\circ) \mapsto \underline{p^\circ q^\circ}$ bestemte afbildning af $G^\circ \times G^\circ$ ind i U_{A^2} have de egenskaber, der kræves af en algebraisk affins vektorafbildning. Idet τ er enkelt transitiv, er nemlig den ved $q^\circ \mapsto \underline{p^\circ q^\circ}$ bestemte afbildning af G° ind i U_{A^2} for hvert fast $p^\circ \in G^\circ$ bijektiv. Endvidere gælder indskudsreglen

$$\underline{p^\circ q^\circ} + \underline{q^\circ r^\circ} = \underline{p^\circ r^\circ} \quad \text{for } p^\circ, q^\circ, r^\circ \in G^\circ,$$

som jo blot udsiger, at $t_{q^\circ r^\circ} \circ t_{p^\circ q^\circ} = t_{p^\circ r^\circ}$.

Vi har at vise, at $\dim U_{A^2} = 2$, og at den algebraiske affine plan med den indførte vektorafbildning har de samme linier som den givne affine plan A^2 . Vi begynder med at vise:

Lad f° og a° være to forskellige punkter. For $x^\circ \in G^\circ$ gælder da

$$(8.9) \quad x^\circ \in f^\circ v a^\circ \iff \exists \xi \in L_{A^2}: \underline{f^\circ x^\circ} = \xi \underline{f^\circ a^\circ}.$$

Antag, at $x^\circ \in f^\circ v a^\circ$. Der findes da ifølge (7.10) en dilatation d med $d(f^\circ) = f^\circ$ og $d(a^\circ) = x^\circ$. Til d svarer ifølge (7.11) en $\mathbb{A}$ -endomorfi ξ af τ , således at

$$(8.10) \quad \xi(t_{f^0 a^0})(f^0) = d(a^0) = x^0,$$

altså $\xi(t_{f^0 a^0}) = t_{f^0 x^0}$, hvilket oversat ved (8.7) netop er $\underline{f^0 x^0} = \xi \underline{f^0 a^0}$. Lad nu omvendt x^0 være et punkt, som tilfredsstiller denne ligning med et $\xi \in L_{A^2} = f^0\text{-End}(Tr)$. Til ξ svarer ifølge (7.11) en dilatation d med fixpunkt f^0 , som opfylder (8.10). Da $f^0 v a^0$ er fixlinje ved d , har vi $x^0 = d(a^0) \in f^0 v a^0$, som påstået.

Ved hjælp af (8.9) slutter vi dernæst, at to vektorer $\underline{a}$ og $\underline{b}$ er lineært uafhængige, hvis og kun hvis de tilhørende translationer a og b er forskellige fra id og har forskellige fixlinjebundter. Lad der være valgt et punkt f^0 og lad a^0 og b^0 være de punkter i planen, for hvilke $\underline{a} = \underline{f^0 a^0}$ og $\underline{b} = \underline{f^0 b^0}$. Den opstillede betingelse er da ensbetydende med, at f^0, a^0, b^0 ikke ligger på en linie. Men ifølge (8.9) er dette igen ensbetydende med, at der ikke findes noget $\xi \in L_{A^2}$, således at $\underline{b} = \xi \underline{a}$, og ikke noget $\eta \in L_{A^2}$, således at $\underline{a} = \eta \underline{b}$, altså med den lineære uafhængighed af $\underline{a}$ og $\underline{b}$.

Antag nu, at $\underline{a} = \underline{f^0 a^0}$ og $\underline{b} = \underline{f^0 b^0}$ er lineært uafhængige, og lad $\underline{x} = \underline{f^0 x^0}$ være en vilkårlig vektor. Vi skal vise, at $\underline{x}$ er en linearkombination af $\underline{a}$ og $\underline{b}$. Linien gennem x^0 parallel med $f^0 v b^0$ skærer $f^0 v a^0$ i et punkt x_a^0 , og linien gennem x^0 parallel med $f^0 v a^0$ skærer $f^0 v b^0$ i et punkt x_b^0 . Der gælder da $\underline{f^0 x_a^0} = \underline{x_a^0 x^0}$. Dette er nemlig oplagt, hvis x^0 ligger på $f^0 v a^0$ eller $f^0 v b^0$, og ellers følger det af, at $f^0 v x_b^0 \parallel x_a^0 v x^0$ og $f^0 v x_a^0 \parallel x_b^0 v x^0$. Vi har altså

$$\underline{x} = \underline{f^0 x^0} = \underline{f^0 x_a^0} + \underline{x_a^0 x^0} = \underline{f^0 x_a^0} + \underline{f^0 x_b^0}.$$

Ifølge (8.9) findes der $\lambda, \mu \in L_{A^2}$, således at $\underline{f^0 x^0} = \lambda \underline{a}$ og $\underline{f^0 x^0} = \mu \underline{b}$, og heraf fremgår påstanden.

Alt er hermed vist, at $(U_{A^2}, L_{A^2})_0$ har dimensionen 2, og at planens punktmængde G^0 ved vektorafbildningen $(p^0, q^0) \mapsto \underline{p^0 q^0}$ bliver til en algebraisk affin plan med vektorrum $(U_{A^2}, L_{A^2})_0$. Idet dennes linier, altså dens 1-dimensionale affine underrum ifølge (8.9) er identiske med den givne affine plans punkttrækker, kan den algebraiske affine plan opfattes som punktmængdefremstillingen af A^2 . Hermed er sætningen bevist.

Den beviste hovedsætning har en række vigtige konsekvenser.

(8.11) Hvis en affin plan A^2 har én af følgende egenskaber, har den også de øvrige:

- 1° I A^2 gælder de affine Desargues's sætninger aD og AD.
- 2° A^2 er en algebraisk affin plan over en divisionsring.
- 3° A^2 er isomorf med en plan i et affint rum.
- 4° A^2 er en affin Desargues-plan.

Beweis: At $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$, er indholdet af (8.8).

At $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$, ses således: En algebraisk affin plans vektorrum kan (på den måde II.5.10 angivne måde) udvides til et 3-dimensionalt over samme divisionsring. Man betragter et algebraisk affint rum med dette som vektorrum. At

aksiomerne for et affint rum er opfyldt, ses som i det kommutative tilfælde ved hjælp af de ovenfor anførte egenskaber ved venstre-vektorrums. Den betragtede algebraiske affine plan er da isomorf med en plan i dette algebraiske affine rum.

At $3^\circ \Rightarrow 4^\circ$, er vist tidligere (side II. 6.8), og at $4^\circ \Rightarrow 1^\circ$, er klart.

Ud fra et 3-dimensionalt (4-dimensionalt) venstre-vektorrums kan der som i (4.2) ((4.10)) defineres en algebraisk projektiv plan (et algebraisk projektivt rum) over en divisionsring. I beviserne for (4.2) ((4.10)), altså for, at aksiomerne for en projektiv plan (et projektivt rum) er opfyldt, benyttes kun sætninger, som ifølge ovenstående vedgørelse også gælder for venstre-vektorrums over en divisionsring.

Endvidere bemærkes, at sætningerne (5.7) og (5.8) om en algebraisk projektivplans affine delplaner og en algebraisk affin plans projektive komplettering samt deres beviser bevarer gyldigheden uden forudsætning om divisionsringens kommutativitet.

Ved hjælp heraf kan vi bevise:

(8.12) Hvis en projektiv plan P^2 har én af følgende egenskaber, har den også de øvrige:

1° P^2 er en Desargues-plan.

2° P^2 er en algebraisk projektiv plan over en divisionsring

3° P^2 er isomorf med en plan i et projektivt rum.

For en sådan algebraisk affin plan (A^1, L) er U (isomorf med) den ovenfor indførte vektorgruppe U_{A^1} , og L er (isomorf med) den til planen hørende divisionsring L_{A^1} . Dette indses som følger: Lad G° være planens punktmængde og $(p^\circ, q^\circ) \mapsto \underline{p^\circ q^\circ} \in U$ dens vektorafbildning. For hvert $\underline{u} \in U$ vil afbildningen $t: G^\circ \rightarrow G^\circ$ bestemt ved $\underline{p^\circ t(p^\circ)} = \underline{u}$ være en translation; thi den er id, hvis $\underline{u} = \underline{0}$, og ellers bijektiv og fixpunktfri, og for $p^\circ \neq q^\circ$ er $\underline{p^\circ t(p^\circ)} = \underline{q^\circ t(q^\circ)}$, altså $\underline{p^\circ q^\circ} = \underline{t(p^\circ) t(q^\circ)}$ og dermed $p^\circ \vee q^\circ \parallel t(p^\circ) \vee t(q^\circ)$. Af vektorafbildningens egenskaber sluttet, at translationsgruppen er enkelt transitiv og isomorf med U . For hvert $\lambda \in L$ kan den ved $\underline{u} \mapsto \lambda \underline{u}$ bestemte afbildning fortolkes som fb-endomorfi af translationsgruppen. Man kan altså betragte L som delmængde af L_{A^1} . At addition og multiplikation i L og L_{A^1} stemmer overens, fremgår umiddelbart af definitionerne. At $L = L_{A^1}$ sluttet ved hjælp af (7.11). Lad $f^\circ \in G^\circ$ være valgt. Ifølge linies definition i en algebraisk affin plan findes der for hvilket som helst punkt $a^\circ \neq f^\circ$ og $\hat{a}^\circ \perp a^\circ \vee f^\circ$ et $\lambda \in L$ med $\underline{f^\circ \hat{a}^\circ} = \lambda \underline{f^\circ a^\circ}$. Afbildningen $d: G^\circ \rightarrow G^\circ$ bestemt ved $\underline{f^\circ d(p^\circ)} = \lambda \underline{f^\circ p^\circ}$, $p^\circ \in G^\circ$, er en dilatation; thi den har f° som fixpunkt, og for $p^\circ \neq q^\circ$ fås ved subtraktion og anvendelse af vektorregler, at $\underline{d(p^\circ) d(q^\circ)} = \lambda \underline{p^\circ q^\circ}$, altså $d(p^\circ) \vee d(q^\circ) \parallel p^\circ \vee q^\circ$, når $d(p^\circ) \neq d(q^\circ)$. Endvidere er $d(a^\circ) = \hat{a}^\circ$. Dette viser, at enhver dilatation med fixpunkt f° og dermed enhver fb-endomorfi af translationsgruppen bestemmes ved et element af L . Følgelig er $L = L_{A^1}$ som påstået.

Det følgende går ud på at karakterisere de algebraiske affine planer ved geometriske forudsætninger.

Bevis: At $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$, ses således: Hvis P^2 er en D-plan, vil den affine delplan med en vilkårlig valgt egentlig linie være en affin D-plan, altså ifølge (8.11) en algebraisk affin plan over en divisionsring L . Denne plans projektive komplettering, altså P^2 , er da en algebraisk projektiv plan over L .

At $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$, slttes af, at et 3-dimensionalt venstre-vektorrum kan udvides til et 4-dimensionalt over samme divisionsring.

At $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$, er vist tidligere (side II. 6.4).

Den duale til en algebraisk projektiv plan bestemt ved et 3-dimensionalt vektorrum (V, L) over et legeme L er (som omtalt side II. 4.5) isomorf med en algebraisk projektiv plan, nemlig den, der bestemmes ved det duale vektorrum (V^*, L) . Tilsvarende gælder også, når talen er om et venstre-vektorrum $(V, L)_v$ over en divisionsring L . Mængden V^* af linearformer på V kan ganske vist ikke organiseres som et venstre-vektorrum over L (jf. opg. 3), men dog som et højre-vektorrum $(V^*, L)_h$ af samme dimension som $(V, L)_v$.

Inden vi går rede for dette, bemærker vi, at der for højre-vektorrum naturligvis gælder de samme sætninger som for venstre-vektorrum. Højre-vektorrummet $(V^*, L)_h$ bestemmer derfor også en projektiv plan. At den er isomorf med den duale til den ved $(V, L)_v$ bestemte, vil fremgå af det følgende.

Vi betegner værdien i $\underline{u} \in V$ af en linearform $\underline{v}^*: V \rightarrow L$ med $\langle \underline{u}, \underline{v}^* \rangle$ og har da for $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u} \in V$ og $\lambda \in L$ ifølge linear-

formens definition

$$(8.13) \quad \langle \underline{u}_1 + \underline{u}_2, \underline{v}^* \rangle = \langle \underline{u}_1, \underline{v}^* \rangle + \langle \underline{u}_2, \underline{v}^* \rangle, \quad \langle \lambda \underline{u}, \underline{v}^* \rangle = \lambda \langle \underline{u}, \underline{v}^* \rangle.$$

Idet $\underline{v}_1^*, \underline{v}_2^*, \underline{v}^* \in V^*$ og $\mu \in L$, defineres nu funktionerne $\underline{v}_1^* + \underline{v}_2^*: V \rightarrow L$ og $\underline{v}^* \mu: V \rightarrow L$ ved for $\underline{u} \in V$ at sætte

$$(8.14) \quad \langle \underline{u}, \underline{v}_1^* + \underline{v}_2^* \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v}_1^* \rangle + \langle \underline{u}, \underline{v}_2^* \rangle, \quad \langle \underline{u}, \underline{v}^* \mu \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v}^* \rangle \mu.$$

Det er klart, at de er linearformer på V , og det bekræftes let, at V^* herved bliver organiseret som højre-vektorrum $(V^*, L)_h$.

Af (8.13) og (8.14) ses, at funktionen $(\underline{u}, \underline{v}^*) \mapsto \langle \underline{u}, \underline{v}^* \rangle$ fra $V \times V^*$ til L er en bilinearform i den forstand, at den er "venstre-lineær" i den første variable og "højre-lineær" i den anden. Endvidere ses let, at den er ikke-udartet, dvs. at $\langle \underline{u}, \underline{v}^* \rangle = 0$ for alle $\underline{u} \in V$ medfører $\underline{v}^* = \underline{0}^*$ (nulformen), og $\langle \underline{u}, \underline{v}^* \rangle = 0$ for alle $\underline{v}^* \in V^*$ medfører $\underline{u} = \underline{0}$. Man siger derfor, at vektorrummene $(V, L)_v$ og $(V^*, L)_h$ er i dualitet. Med små formelle ændringer kan teorien for vektorrum i dualitet udvikles som for kommutativt L . Specielt kan vises, at de to vektorrum har samme dimension, og hvis denne er endelig, at der for annihilatoren $W^\circ \subseteq V^*$ for et underrum $W \subseteq V$ gælder $\dim W + \dim W^\circ = \dim V = \dim V^*$. Ved hjælp heraf ses som i det kommutative tilfælde, at den duale til den algebraiske projektive plan bestemt ved et 3-dimensionalt vektorrum $(V, L)_v$ er isomorf med den algebraiske projektive plan bestemt ved det duale vektorrum $(V^*, L)_h$. Planen er dog almindeligvis ikke isomorf med sin duale.

Det væsentlige i sætningerne (8.11) og (8.12) kan sammenfattes således: En affin (projektiv) plan er isomorf med en alge-

algebraisk affin (projektiv) plan over en divisionsring, hvis og kun hvis den er isomorf med en plan i et affint (projektivt) rum. Det ligger nær at spørge, om der findes en analog karakterisering af algebraiske affine (projektive) rum. Her er situationen simple-
re, idet der gælder: Ethvert affint (projektivt) rum er isomorf med et algebraisk over en divisionsring. Man kan overbevise sig herom ved at konstatere, at hele indholdet af § 7 og § 8 til og med sætning (8.8) bevarer gyldigheden, når der overalt i stedet for en affin plan betragtes et affint rum. Forudsætningerne aD og AD i henholdsvis (7.9) og (7.10) er da overflø-
dige, idet de er opfyldt af sig selv. Ethvert affint rum har altså "alle" translationer, er et "translationsrum", og har "alle" dilatationer. Sætningerne (7.11), (8.1), (8.7) og (8.8) er derfor gyldige for affine rum uden yderligere forudsætninger.

Opgaver til § 8.

1. I definitionen af en divisionsring L er det tilstrækkeligt at kræve, at $(L, +)$ er en gruppe, idet dennes kommutativitet følger af de øvrige forudsætninger. Bevis dette [ved at betragte $(1+1)(\alpha+\beta)$ for $\alpha, \beta \in L$], og angiv de benyttede forudsætninger.

2. Lad $(V, L)_v$ være et venstre-vektorrum over en divisionsring L . Lad $L' \subset L$ være en ægte deldivisionsring af L . Med restriktionen af multiplikationen med skalarer til $L' \times V$ bliver V til et venstre-vektorrum $(V, L')_v$. Vis, at $\dim(V, L')_v < \dim(V, L)_v$.
 Kvaterniondivisionsringen $\mathbb{H}$ (Mat. 1x, 1968-69, Grundbegreber, §7) kan organiseres som 1-dimensionalt venstre-vektorrum $(\mathbb{H}, \mathbb{H})_v$ over sig selv. $\mathbb{H}$ har et med de reelle tals legeme isomorft dellegeme $\hat{\mathbb{R}}$ og dellegemer, som er isomorfe med de komplekse tals legeme. Lad $\hat{\mathbb{C}}$ være et sådant. Find dimensionerne af og baser for vektorrummene $(\mathbb{H}, \hat{\mathbb{R}})_v$ og $(\mathbb{H}, \hat{\mathbb{C}})_v$.

3. Lad $(U, L)_v$ og $(V, L)_v$ være venstre-vektorrum over samme divisionsring L .
 Opstil matrixligningen for en lineær afbildning f af $(U, L)_v$ ind i $(V, L)_v$ med hensyn til valgte baser for de to rum. Gennemfør det tilsvarende for to højre-vektorrum.
 Lad $\mathcal{L}(U, V)_v$ betegne mængden af lineære afbildninger af $(U, L)_v$ ind i $(V, L)_v$. Gør rede for, at $\mathcal{L}(U, V)_v$ som i det kommutative tilfælde kan organiseres som en kommutativ gruppe.

men at der, når L ikke er kommutativ, ved $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ for $\lambda \in L$ og $f \in \mathcal{L}(U, V)$, ikke bestemmes en komposition

$$L \times \mathcal{L}(U, V) \rightarrow \mathcal{L}(U, V).$$

4. Lad $(U, L)_v$ være et venstre- og $(V, L)_h$ et højre-vektorrum over samme divisionsring L . En afbildning $f: U \rightarrow V$ vil man da kalde lineær, hvis der for $u_1, u_2, u \in U$ og $\lambda \in L$ gælder

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2), \quad f(\lambda u) = f(u)\lambda.$$

Undersøg under antagelsen, at L ikke er kommutativ, om der findes fra nulafbildningen forskellige sådanne afbildninger.

5. En divisionsring $L(+, \cdot)$ siges at være antiisomorf med en divisionsring $\tilde{L}(+, \cdot)$, hvis der findes en bijektiv afbildning $\Phi: L \rightarrow \tilde{L}$, så at der for $\lambda, \mu \in L$ gælder

$$\Phi(\lambda + \mu) = \Phi(\lambda) + \Phi(\mu), \quad \Phi(\lambda\mu) = \Phi(\mu) * \Phi(\lambda).$$

Definer ud fra en given divisionsring L en med denne antiisomorf bestående af de samme elementer.

Vis, at den afbildning af kvaterniondivisionsringen $\mathbb{H}$ ind i sig selv, ved hvilken der til hver kvaternion svarer den konjugerede, er en antiautomorfi.

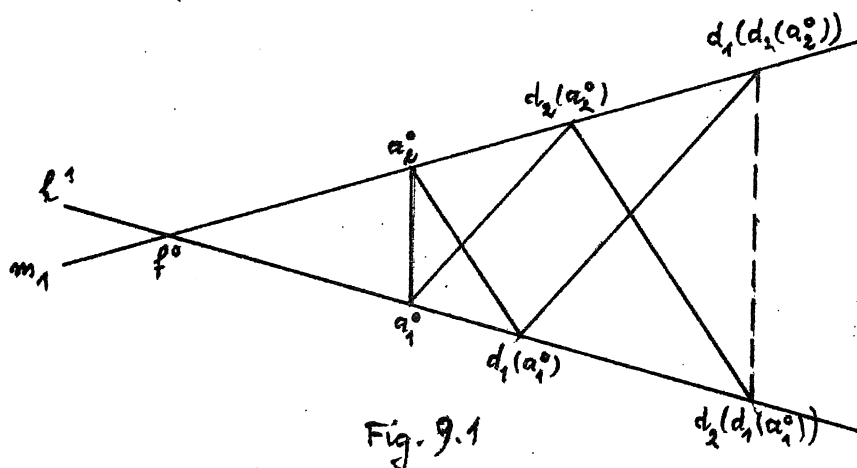
Lad $(U, L)_v$ være et venstre-vektorrum over en divisionsring L , og lad L være antiisomorf med $\tilde{L}$. Definér et højre-vektorrum $(U, \tilde{L})_h$, som i passende forstand kan siges at være isomorf med $(U, L)_v$. Gør rede for, at man efter passende ændring af definitionen (8.1), 2) ville få sætningerne (8.7) og (8.8) med højre- i stedet for venstre-vektorrum.

§ 9. Divisionsringens Kommutativitet og Pappos' sætning.

Idet der findes ikke-kommutative divisionsringe (kvaternionerne f.eks.) og dermed affine planer over sådanne, viser (8.11), at kommutativiteten ikke kan være en følge af aksiomerne for et affint rum (endsige for en affin plan). Den tillader imidlertid en bemærkelsesværdig geometrisk fortolkning.

Af (7.11) og definitionen (8.1), 2) af multiplikationen i $L_{\mathbb{A}} = \text{fk-End}(Tr)$ fremgår, at dennes kommutativitet er ensbetydende med ombytteligheden af dilatationerne med et vilkårligt valgt fixpunkt f^0 . Idet den singulære dilatation med fixpunkt f^0 åbenlyst er ombyttelig med enhver anden dilatation med fixpunkt f^0 , går betingelsen ud på, at gruppen D_{f^0} er kommutativ.

Vi betragter to bijektive dilatationer d_1 og d_2 med fixpunkt f^0 . På en linie l^1 gennem f^0 vælges et punkt $a_1^0 \neq f^0$ og på en anden linie m^1 gennem f^0 et punkt $a_2^0 \neq f^0$. Vi har da $d_1(a_1^0) \in l^1$, $d_1(a_1^0) \neq f^0$, og $d_2(a_2^0) \in m^1$, $d_2(a_2^0) \neq f^0$ (fig. 9.1). Punktet



$d_2(d_1(a_1^0))$ fås som skæringspunkt mellem l^1 og linien gennem $d_2(a_2^0)$

parallel med $a_2^\circ \vee d_1(a_1^\circ)$, og punktet $d_1(d_2(a_2^\circ))$ fås som skæringspunkt mellem m^1 og linien gennem $d_1(a_1^\circ)$ parallel med $a_1^\circ \vee d_2(a_2^\circ)$. Endvidere er $d_1(d_2(a_1^\circ))$ skæringspunktet mellem l^1 og linien gennem $d_1(d_2(a_2^\circ))$ parallel med $a_1^\circ \vee a_2^\circ$. At $d_1(d_2(a_1^\circ)) = d_2(d_1(a_1^\circ))$, altså ifølge (7.6), at $d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$, er herefter ensbetydende med $d_2(d_1(a_1^\circ)) \vee d_1(d_2(a_2^\circ)) \parallel a_1^\circ \vee a_2^\circ$.

Det geometriske udsagn, som er denne betingelses indhold, kan formuleres bekvemt ved hjælp af begrebet sekskant. Herved forstås en figur bestående af 6 punkter $a_1^\circ, a_2^\circ, a_3^\circ, a_4^\circ, a_5^\circ, a_6^\circ$ og 6 linier $a_{12}^1, a_{23}^1, a_{34}^1, a_{45}^1, a_{56}^1, a_{61}^1$, således at linien a_{ij}^1 går gennem punkterne a_i° og a_j° . Punkterne kaldes sekskantens hjørner og linierne dens sidelinier. Sideliniérne a_{12}^1 og a_{45}^1 , a_{23}^1 og a_{56}^1 , a_{34}^1 og a_{61}^1 siges at være modstående. Vi vil her yderligere forudsætte, at hvilket som helst to nabohjørner og hvilket som helst to nabosidelinier er forskellige.

Vi kan nu formulere den såkaldte affine Pappos' sætning:

AP. Hvis en sekskants hjørner skiftevis ligger på to hinanden skærende linier, og hvert af to par modstående sidelinier består af parallelle linier, så er også det tredje pars sidelinier parallelle.

Der gælder:

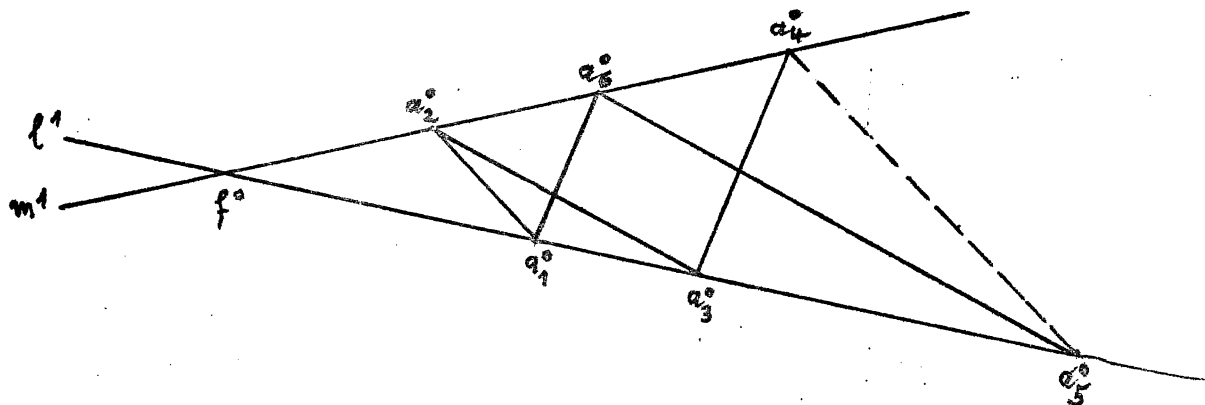
(9.1) En algebraisk affin plans divisionsring er kommutativ, hvis og kun hvis den affine Pappos' sætning AP gælder i planen.

Bevis: Antag, at AP gælder. I beviset for, at to dilatationer d_1 og d_2 med fixpunkt f° er ombyttelige, kan vi se bort fra de oplagte tilfælde, hvor mindst en af dilatationerne er den singulære eller identiteten. Med ovenstående betegnelser (fig. 9.1) vil da $a_1^\circ, a_2^\circ, d_1(a_1^\circ), d_1(d_2(a_2^\circ)), d_2(d_1(a_1^\circ)), d_2(a_2^\circ)$ opfylde kravene til hjørnerne i en sekskant. Endvidere er forudsætningerne i AP opfyldt, idet $a_2^\circ \vee d_1(a_1^\circ) \parallel d_2(d_1(a_1^\circ)) \vee d_2(a_2^\circ)$ og $d_1(a_2^\circ) \vee d_1(d_2(a_2^\circ)) \parallel d_2(a_2^\circ) \vee a_1^\circ$. Konklusionen $a_1^\circ \vee a_2^\circ \parallel d_1(d_2(a_2^\circ)) \vee d_2(d_1(a_1^\circ))$ medfører ifølge ovenstående, at $d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$.

Omvendt, antag, at L_{AP} og dermed D_{f° for hvert f° er kommutativ. Lad $a_1^\circ, a_2^\circ, a_3^\circ, a_4^\circ, a_5^\circ, a_6^\circ$ være hjørnerne i en sekskant, som opfylder forudsætningerne i AP, altså: $a_1^\circ, a_3^\circ, a_5^\circ$ ligger på en linie l^1 og $a_2^\circ, a_4^\circ, a_6^\circ$ på en linie m^1 , der skærer l^1 ; endvidere

$$(9.2) \quad a_2^\circ \vee a_3^\circ \parallel a_5^\circ \vee a_6^\circ, \quad a_3^\circ \vee a_4^\circ \parallel a_6^\circ \vee a_1^\circ.$$

(Kravene, der blev tilfældet til en sekskant, medfører her, at hjørnerne og punktet $f^\circ = l^1 \cap m^1$ er indbyrdes forskellige (jf. fig. 9.2).) Lad d_1 være den dilatation med fixpunkt f° , for hvilken $d_1(a_1^\circ) = a_3^\circ$, og d_2 den dilatation med fixpunkt f° , for hvilken $d_2(a_2^\circ) = a_6^\circ$. Af (9.2) fås da $a_5^\circ = d_2(a_3^\circ) = d_2(d_1(a_1^\circ))$ og $a_4^\circ = d_1(a_6^\circ) = d_1(d_2(a_2^\circ))$. Forudsætningen $d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$ medfører derfor $a_1^\circ \vee a_2^\circ \parallel a_4^\circ \vee a_5^\circ$, altså påstanden i AP.



I en affin plans projektive komplementering kan AP betragtes som indeholdt i den projektive Pappos'sætning:

P. Hvis en sekskant's hjørner skiftevis ligger på to forskellige linier, så ligger de tre skæringspunkter mellem modstående sidelinier på en linie.

Betegnes modstående sideliniers skæringspunkter med d_{ij}^o således, at i og j er numrene af de to hjørner, som ikke ligger på de pågældende modstående sidelinier (fig. 9.3), går nemlig AP ud på, at hvis to af punkterne d_{ij}^o ligger på den rene linie, gør det tredje det også.

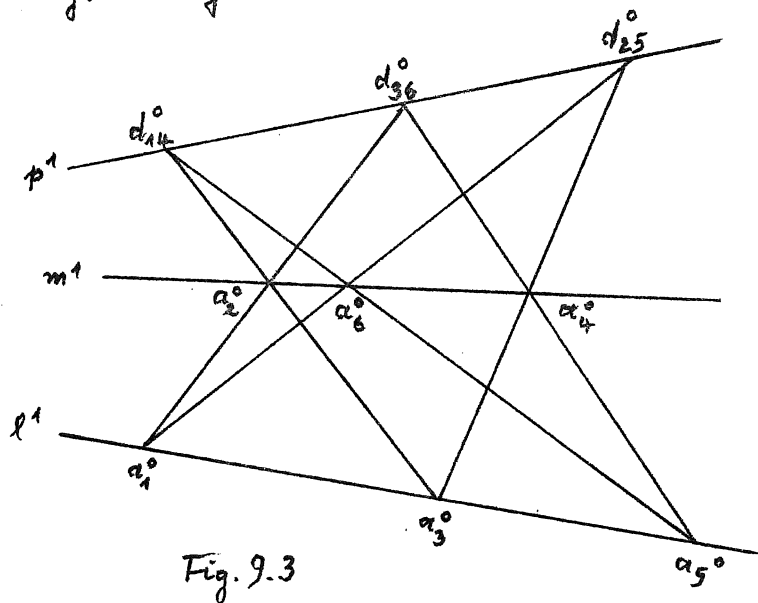


Fig. 9.3

(9.3) En algebraisk projektiv plans divisionsring er kommutativ, hvis og kun hvis Pappos'sætning P gælder i planen.

Beweis: Lad (P^2, L) være en algebraisk projektiv plan, i hvilken

P gælder. I en affin delplan A^2 med en vilkårlig uegentlig linie gælder da AP ifølge ovenstående. Endvidere er A^2 en algebraisk affin plan over samme divisionsring L . Denne er altså kommutativ ifølge (9.1).

Lad nu (P^2, L) være en algebraisk projektiv plan over et kommutativt legeme L . For enhver linie p^1 i P^2 vil den affine delplan med uegentlig linie p^1 da være algebraisk over L . Af (9.1) slutter, at AP gælder i alle disse affine planer. Dette giver P i alle de tilfælde, hvor "Pappos-linien" $p^1 = d_{14}^0 \vee d_{25}^0$ ikke går gennem $l^1 \wedge m^1$. I AP har vi nemlig forudsat, at l^1 og m^1 skæver hinanden (i et egentligt punkt). Men den "lille affine Pappos-sætning", hvor der forudsættes $l^1 \parallel m^1$, gælder i enhver translationsplan (se opg. 1). I P^2 gælder derfor P uden den nævnte indskrænkning.

Det blev ondtalt ovenfor, at Pappos'sætning ikke kan udledes af aksiomerne for et affint eller projektivt rum, og dermed heller ikke af Desargues'sætning. Dette er dog mærkværdigvis tilfældet ved endelige planer, idet der gælder: Enhver endelig divisionsring er kommutativ (J. H. M. Wedderburn). Et bevis for denne sætning kan ikke gives her. Den medfører, at i enhver endelig affin eller projektiv Desargues-plan gælder Pappos'sætning.

Opgaver til § 9.

1. Det udsagn, som fås ved i AP at erstatte antagelsen, at l^1 og m^1 skærer hinanden, med $l^1 \parallel m^1$, $l^1 \neq m^1$, betegnes aP. Vis, at aP er gyldig i en affin plan, hvis den er en translationsplan, altså hvis aD gælder i den.
- 2.* Gyldigheden af den affine Pappos'sætning AP i en affin plan medfører gyldigheden af den store affine Desargues'sætning AD. (G. Hessenberg, 1905.) Beris dette. [Suppler fig. 6.5 (side II.6.8) med punktet q° bestemt ved $q^\circ \in a_2^\circ \vee a_3^\circ$ og $p^\circ \vee q^\circ \parallel a_1^\circ \vee a_2^\circ$, punktet $r^\circ = (b_1^\circ \vee b_2^\circ) \wedge (q^\circ \vee b_3^\circ)$, punktet $s^\circ = (a_1^\circ \vee b_1^\circ) \wedge (a_2^\circ \vee r^\circ)$ og linien $q^\circ \vee s^\circ$. Anvend AP flere gange, først til at vise, at $a_2^\circ \vee r^\circ \parallel p^\circ \vee b_3^\circ$ (og dermed, at s° eksisterer).]

Slut [ved hjælp af opg. § 7, 2], at en affin plan er isomorf med en algebraisk affin plan over et kommutativt legeme, hvis og kun hvis den affine Pappos'sætning AP er gyldig i den.

Formuler og begrund tilsvarende sætninger for projektive planer.

3. Formuler den duale til den projektive Pappos'sætning P, og vis, at den gælder i en projektiv plan, hvis og kun hvis P gælder.
4. Lad $(a_1^\circ, a_2^\circ, a_3^\circ)$ og $(b_1^\circ, b_2^\circ, b_3^\circ)$ være trekanter i en projektiv plan. Den anden siges at være indskrevet i den første eller den første omskrevet om den anden (i hjørnerne angivne orden), hvis

$$b_1^0 \leq a_1^1, b_2^0 \leq a_2^1, b_3^0 \leq a_3^1.$$

Vis, at gyldigheden af Pappos' sætning P i en projektiv plan, som ikke er af orden 2, er ensbetydende med følgende:

For vilkårligst trekanter (a_1^0, a_2^0, a_3^0) og (b_1^0, b_2^0, b_3^0) med indbyrdes forskellige hjørner, således at (b_1^0, b_2^0, b_3^0) er indskrevet i (a_1^0, a_2^0, a_3^0) , og et vilkårligst punkt $c_3^0 \leq b_3^1$, forskelligt fra b_1^0, b_2^0 og $a_3^1 \wedge b_3^1$, findes en trekant (c_1^0, c_2^0, c_3^0) indskrevet i (b_1^0, b_2^0, b_3^0) og omskrevet om (a_1^0, a_2^0, a_3^0) .

5. I Pappos' sætning P indgår 9 punkter, nemlig sekskantens hjørner og de modstående sideliniers skæringspunkter, samt 9 linier, nemlig sekskantens sider, de to linier, på hvilke hjørnerne ligger, og linien, på hvilken de modstående siderliniers skæringspunkter er beliggende, hvis sætningen gælder. Disse 9 punkter og 9 linier udgør da en (9_3) -konfiguration (jf. opg. 6, 7), som kaldes en Pappos-konfiguration.

* Vis, at en Pappos-konfigurations automorfgrupper har orden 108. Find antallet af de væsentlig forskellige sekskanter bestående af konfigurationspunkter og -linier, for hvilke konfigurationen bringer gyldigheden af Pappos' sætning til udtryk.

Ifølge opg. 4 kan en Pappos-konfiguration opfattes som bestående af et sæt af tre trekanter, således at den anden er indskrevet i den første, den tredje i den anden og den første i den tredje. Find antallet af væsentlig forskellige måder, på hvilke dette kan lade sig gøre.

§ 10. Ordning og Kontinuitet.

Vi betragter en affin Desargues-plan A^2 . Lad (U, L) være det tilhørende venstre-vektorrum. Vi forudsætter ikke, at L er kommutativ. Det drejer sig om at præcisere og opstille aksiomer vedrørende udsagn som "et punkt ligger mellem to andre", "en linie kan orienteres på to måder", "en linie deles af et punkt på den i to halvlinier", "planen deles af en linie i to halvplaner". Dette kan ske på flere måder. Som særlig simpelt udgangspunkt kan for hver linie l^1 antages eksistensen af en ternær relation i punktrækken $^0(l^1)$, altså en relation mellem tre punkter p^0, q^0, r^0 på l^1 , hvis anskuelige betydning er, at q^0 ligger mellem p^0 og r^0 . Man opstiller da aksiomer motiveret ved denne fortolkning. Denne, måske mest dybtgående, fremgangsmåde kræver imidlertid ret lange slutningskæder. Væsentlig kortere er vejen, når man går ud fra eksistensen af en total ikke-refleksiv ordningsrelation $<$ i hver punktrække, således at enhver parallelprojektion af en punktrække på en anden er en monoton, altså "voksende" eller "aftagende" afbildning. Vi vælger her i det væsentlige denne fremgangsmåde, dog i en lidt anden udformning, som er mere håndterlig.

For hver linie l^1 vil vi betragte en relation Θ i mængden M_l bestående af punktparrene (p^0, q^0) , hvor $p^0, q^0 \in l^1$ og $p^0 \neq q^0$. Den anskuelige betydning af $(p^0, q^0) \Theta (r^0, s^0)$ skal være, at "retningen fra p^0 mod q^0 er den samme som retningen fra r^0 mod s^0 ". (At linien l^1 ikke indgår i betegnelsen Θ for relationen,

vil ikke give anledning til misforståelser.) Lad fra en ordningsrelation $\prec$ på l^1 kan en sådan relation defineres ved

$$(p^0, q^0) \oplus (r^0, s^0) \iff (p^0 \prec q^0 \text{ og } r^0 \prec s^0) \text{ eller } (q^0 \prec p^0 \text{ og } s^0 \prec r^0).$$

Forudsættes om $\prec$ foruden det ovenfor nævnte, at der for hver l^1 og $p^0, q^0, r^0 \in l^1$, $p^0 \neq q^0$ gælder

$$\underline{p^0 q^0} = \underline{q^0 r^0} \implies (p^0 \prec q^0 \prec r^0) \text{ eller } (r^0 \prec q^0 \prec p^0),$$

kan man vise, at $\oplus$ har de nedenstående egenskaber Or 1-Or 5 (opg. 1), som vi vil tage som ordningsaksiomer.

Or 1. For hver linie l^1 er $\oplus$ en ækvivalensrelation i M_l .

Or 2. For hver linie l^1 og $(p^0, q^0), (r^0, s^0) \in M_l$ gælder

$$(p^0, q^0) \oplus (r^0, s^0) \iff (q^0, p^0) \not\oplus (r^0, s^0),$$

hvor $\not\oplus$ betyder, at punktparrene ikke står i relationen $\oplus$.

Or 3. For hver linie l^1 og $(p^0, q^0), (q^0, r^0) \in M_l$ gælder

$$(p^0, q^0) \oplus (q^0, r^0) \implies (p^0, q^0) \oplus (p^0, r^0).$$

Or 4. Lad l^1 og m^1 være forskellige linier, $(p^0, q^0), (r^0, s^0) \in M_l$, og lad f være en parallelprojektion af l^1 på m^1 . Da gælder

$$(p^0, q^0) \oplus (r^0, s^0) \implies (f(p^0), f(q^0)) \oplus (f(r^0), f(s^0)).$$

Or 5. For hver linie l^1 og $(p^0, q^0), (q^0, r^0) \in M_l$ gælder

$$\underline{p^0 q^0} = \underline{q^0 r^0} \implies (p^0, q^0) \oplus (q^0, r^0).$$

Til disse aksiomer knyttes følgende bemærkninger.

Når Or 1 - Or 5 er opfyldt i planen A^2 , kan man på hver linie l^1 definere en total ordning $<$ ved at vælge et punkt-par $(a^0, b^0) \in M_l$ og for $(p^0, q^0) \in M_l$ at sætte

$$p^0 < q^0 \iff (a^0, b^0) \neq (p^0, q^0).$$

De således definerede ordninger på linierne har da de ovenfor omtalte egenskaber (opg. 1).

Or 2 medfører, at M_l falder i netop to ækvivalensklasser. Sættes nemlig $(r^0, s^0) = (p^0, q^0)$, fås $(p^0, q^0) \neq (q^0, p^0)$, altså at der findes mindst to klasser. På den anden side fås af Or 2, at der for hvert par $(r^0, s^0) \in M_l$ gælder $(r^0, s^0) \neq (p^0, q^0)$ eller $(r^0, s^0) \neq (q^0, p^0)$. Hver af de to klasser kaldes en orientering af l^1 . To punktpar $(p^0, q^0), (r^0, s^0) \in M_l$ siges at være ens orienteret eller modsat orienteret, efter som $(p^0, q^0) \neq (r^0, s^0)$ eller $(p^0, q^0) \neq (r^0, s^0)$.

Af Or 5 og Or 2 sluttet, at $\underline{p^0 q^0} = \underline{q^0 r^0}$ medfører $r^0 \neq p^0$, altså $\underline{p^0 q^0} \neq \underline{q^0 p^0}$ og dermed $\underline{p^0 q^0} + \underline{p^0 q^0} = (1+1) \underline{p^0 q^0} \neq 0$. Dette viser:

(10.1) Gyldigheden af Or 1 - Or 5 i en affin Desargues-plan medfører, at planens divisionsring L ikke har karakteristik 2.

Nedenstående hovedsætning (10.4) gælder også, hvis Or 5 erstattes med den svagere forudsætning, at planen ikke har orden 2, altså at L ikke er restklasselegemet modulo 2. Beviset bliver dog mere indviklet og skal ikke gennemføres her.

Vis beviser to hjælpesætninger, hvoraf den første er gyldig i enhver affin Desargues-plan.

(10.2) Lad l^1 og m^1 være forskellige linier og f en parallelprojektion af l^1 på m^1 . Lad endvidere p^0, q^0, r^0, s^0 , hvor $p^0 \neq q^0$, være punkter på l^1 og λ det element i L , for hvilket $\underline{r^0 s^0} = \lambda \underline{p^0 q^0}$. Da gælder

$$\underline{f(r^0) f(s^0)} = \lambda \underline{f(p^0) f(q^0)}.$$

Bevis: Lad $\underline{u} \neq \underline{0}$ være en vektor i parallelprojektionens retning. Der findes da $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in L$, så at

$$\underline{p^0 f(p^0)} = \alpha \underline{u}, \quad \underline{q^0 f(q^0)} = \beta \underline{u}, \quad \underline{r^0 f(r^0)} = \gamma \underline{u}, \quad \underline{s^0 f(s^0)} = \delta \underline{u}.$$

Man får da

$$\underline{f(p^0) f(q^0)} = \underline{f(p^0) p^0} + \underline{p^0 q^0} + \underline{q^0 f(q^0)} = \underline{p^0 q^0} + (\beta - \alpha) \underline{u}$$

og tilsvarende

$$\underline{f(r^0) f(s^0)} = \underline{r^0 s^0} + (\delta - \gamma) \underline{u} = \lambda \underline{p^0 q^0} + (\delta - \gamma) \underline{u},$$

altså

$$\underline{f(r^0) f(s^0)} - \lambda \underline{f(p^0) f(q^0)} = (\delta - \gamma - \lambda(\beta - \alpha)) \underline{u}.$$

Idet $\underline{u}$ og en egentlig vektor på m^1 er lineært uafhængige, må vektoren på venstre side være $\underline{0}$, som påstået.

(10.3) Antag, at Or 1 - Or 4 gælder. Lad t være en translation, l^1 en vilkårlig linie og $m^1 = t(l^1)$. For $(p^0, q^0), (r^0, s^0) \in M_l$ og dermed $(t(p^0), t(q^0)), (t(r^0), t(s^0)) \in M_m$ gælder da

$$(p^0, q^0) \neq (r^0, s^0) \Rightarrow (t(p^0), t(q^0)) \neq (t(r^0), t(s^0)).$$

Bevis: Idet $m^1 \parallel l^1$, følger påstanden umiddelbart af Or 4, hvis $m^1 \neq l^1$. Er $m^1 = l^1$, altså fixlinie ved t , vælges en fra l^1 forskellig linie $\tilde{m}^1 \parallel l^1$. Ved en parallelprojektion af l^1 på $\tilde{m}^1$ går p^0, q^0, r^0, s^0 over i $\tilde{p}^0, \tilde{q}^0, \tilde{r}^0, \tilde{s}^0$. Ved parallelprojektionen i retningen $\tilde{p}^0 \vee t(p^0)$ af $\tilde{m}^1$ på l^1 går $\tilde{p}^0, \tilde{q}^0, \tilde{r}^0, \tilde{s}^0$ over i $t(p^0), t(q^0), t(r^0), t(s^0)$. Ved at anvende Or 4 to gange fås derfor det påståede.

Definition. En afflin Desargues-plan siges at være ordnet, hvis der for hver linie er defineret en relation $<$, således at Or 1 - Or 5 er opfyldt.

Definition. En divisionsring L siges at være ordnet, hvis:

- 1° $L = L_- \cup \{0\} \cup L_+$, hvor $L_-, \{0\}, L_+$ er disjunkte delmængder,
- 2° $\lambda \in L_+ \Leftrightarrow -\lambda \in L_-$,
- 3° $\lambda, \mu \in L_+ \Rightarrow \lambda + \mu \in L_+$,
- 4° $\lambda, \mu \in L_+ \Rightarrow \mu\lambda \in L_+$.

Man får da en ikke-refleksiv total ordning $<$ i L ved at definere $\lambda < \mu$ ved $\mu - \lambda \in L_+$. Hermed bliver $\lambda \in L_+$ og $\mu \in L_-$ ensbetydende med henholdsvis $0 < \lambda$ og $\mu < 0$. Der gælder de sædvanlige ulighedsregler: for $\lambda, \mu, v \in L$:

$$\lambda < \mu \Leftrightarrow \lambda + v < \mu + v,$$

$$\lambda < \mu \text{ og } 0 < v \Rightarrow \lambda v < \mu v \text{ og } v\lambda < v\mu.$$

Endvidere fremhæves, at følgende kan udledes uden benyttelse af 3°: For $\lambda \in L \setminus \{0\}$ gælder $\lambda^2 \in L_+$, hvilket ses ved at skrive $\lambda^2 = \lambda\lambda$ eller $\lambda^2 = (-\lambda)(-\lambda)$, efter som $\lambda \in L_+$ eller $\lambda \in L_-$, altså $-\lambda \in L_+$. Idet $\lambda^{-1} = \lambda(\lambda^{-1})^2$, fås endvidere, at $\lambda \in L_+$ medfører $\lambda^{-1} \in L_+$.

Vi beviser nu følgende hovedsætning:

(10.4) En affin Desargues-plan kan ordnes, hvis og kun hvis dens divisionsring kan ordnes.

Bevis: Vi antager først, at planens divisionsring L er ordnet.

Lad l^1 være en linie og $(p^0, q^0), (r^0, s^0) \in M_p$. Der findes da ét fra 0 forskelligt $\lambda \in L$, så at $\underline{r^0 s^0} = \lambda \underline{p^0 q^0}$. Vi sætter $(p^0, q^0) \oplus (r^0, s^0)$, hvis $\lambda \in L_+$, og $(p^0, q^0) \oplus (r^0, s^0)$, hvis $\lambda \in L_-$. Den således definerede relation $\oplus$ i M_p er reflektiv, idet $1 \in L_+$, den er symmetrisk, idet $\lambda \in L_+$ medfører $\lambda^{-1} \in L_+$, og at den er transitiv, sluttet af 4°. Dermed er Or 1 bevist. Or 2 følger af 2°.

Forudsætningerne i Or 3 udsiger, at der findes et $\lambda \in L_+$, så at $\underline{q^0 r^0} = \lambda \underline{p^0 q^0}$. Idet $\underline{p^0 r^0} = \underline{p^0 q^0} + \lambda \underline{p^0 q^0} = (1 + \lambda) \underline{p^0 q^0}$, følger Or 3 af 3°. At Or 4 gælder, er en umiddelbar konsekvens af (10.2). Endelig er Or 5 ensbetydende med $1+1 \in L_+$.

Dermed er vist, at en ordning af L giver en ordning af planen.

Før at vise det omvendte antages nu planen at være ordnet.

Der vælges to forskellige punkter p^0 og q^0 . Ved til hvert punkt $s^0 \neq p^0$ på $l^1 = p^0 \vee q^0$ at lade svare det element $\lambda_s \in L$, for hvilket $\underline{p^0 s^0} = \lambda_s \underline{p^0 q^0}$, fås en bijektiv afbildning af ${}^o(l^1) \setminus \{p^0\}$ på $L \setminus \{0\}$. Nu defineres L_+ henholdsvis L_- som mængden af de λ_s , for hvilke $(p^0, q^0) \oplus (p^0, s^0)$ henholdsvis $(p^0, q^0) \oplus (p^0, s^0)$. At L_+ og L_- er disjunkte, er klart. For $\lambda_s \in L \setminus \{0\}$ lad $\bar{s}^0$ være det punkt, for hvilket $\underline{p^0 \bar{s}^0} = -\lambda_s \underline{p^0 q^0}$. Vi har da $\underline{\bar{s}^0 p^0} = \underline{p^0 s^0}$, altså $(\bar{s}^0, p^0) \oplus (p^0, s^0)$ ifølge Or 5.

Dette giver $(p^0, \tilde{s}^0) \neq (p^0, s^0)$ ifølge Or 2. Netop ét af de to punktpar er derfor (igen ifølge Or 2) ens orienteret med (p^0, q^0) . Men dette betyder, at netop ét af elementerne λ_s og $-\lambda_s$ tilhører L_+ . Dermed er 1° og 2° bevist.

Den definerede inddeling af L kunne tænkes at afhænge af valget af p^0 og q^0 . Vi skal vise, at dette ikke er tilfældet. Hjælpsætning (10.3) anvendt på den translation, som fører p^0 over i et vilkårligt andet punkt $\hat{p}^0$, giver, at p^0 kan erstattes med $\hat{p}^0$, når q^0 samtidig erstattes med punktet $\hat{q}^0$ bestemt ved $\underline{\hat{p}^0 \hat{q}^0} = \underline{p^0 q^0}$ og l^1 folgelig med den parallelle linie gennem $\hat{p}^0$. Ved den nævnte translation føres jo et punkt s^0 på l^1 over i det punkt $\hat{s}^0$, for hvilket $\underline{\hat{p}^0 \hat{s}^0} = \underline{p^0 s^0}$. Dernæst vises, at q^0 kan erstattes med et vilkårligt punkt $\tilde{q}^0$ uden for l^1 . Ved parallelprojektion af l^1 på $m^1 = p^0 \vee \tilde{q}^0$ langs $q^0 \vee \tilde{q}^0$ går et vilkårligt punkt $s^0 \in l^1$ ifølge (10.2) (med $v^0 = p^0$) over i det punkt $\tilde{s}^0 \in m^1$, for hvilket $\underline{p^0 \tilde{s}^0} = \lambda_s \underline{p^0 \tilde{q}^0}$. Af Or 4 kan derfor slutes, at inddelingen af L bliver den samme.

Endelig kan q^0 erstattes med et vilkårligt andet fra p^0 forskelligt punkt på l^1 . Dette ses ved at anvende det sidste resultat til først at erstatte q^0 med et eller andet punkt uden for l^1 og dernæst til at erstatte dette med det valgte punkt på l^1 .

Vi beviser dernæst 4°. Lad der være valgt to forskellige punkter p^0 og q^0 , og lad der være givet $\lambda, \mu \in L_+$. Med s^0 og t^0 betegnes de punkter på $l^1 = p^0 \vee q^0$, for hvilke $\underline{p^0 s^0} = \mu \underline{p^0 q^0}$ og $\underline{p^0 t^0} = \mu \underline{p^0 s^0}$, altså $\underline{p^0 t^0} = \mu \lambda \underline{p^0 q^0}$. Da $\lambda \in L_+$, har vi $(p^0, q^0) \neq$

(p^0, s^0) , og da $\mu \in L_+$, har vi $(p^0, s^0) \neq (p^0, t^0)$. Heraf fås $(p^0, q^0) \neq (p^0, t^0)$ ifølge Or 1 og dermed $\mu \lambda \in L_+$.

Endelig bevises 3°. Lad $v \in L_+$. Med r^0 betegnes punktet bestemt ved $\underline{q^0 r^0} = \underline{p^0 q^0}$ og med s^0 punktet bestemt ved $\underline{q^0 s^0} = v \underline{q^0 r^0}$.

Vi har da

$$\underline{p^0 s^0} = \underline{p^0 q^0} + \underline{q^0 s^0} = \underline{p^0 q^0} + v \underline{q^0 r^0} = (1+v) \underline{p^0 q^0},$$

endvidere $(p^0, q^0) \neq (q^0, r^0)$ ifølge Or 5 og $(q^0, r^0) \neq (q^0, s^0)$, fordi $v \in L_+$. Af Or 3 fås derfor $(p^0, q^0) \neq (p^0, s^0)$, altså $1+v \in L_+$.

Lad nu $\lambda, \mu \in L_+$ være givet. Som bemærket tidligere kan uden benyttelse af 3° sluttes, at $\lambda^{-1} \in L_+$, og 4° giver $\lambda^{-1} \mu \in L_+$. Af det allerede beviste får vi altså $1 + \lambda^{-1} \mu \in L_+$, og fornyet anvendelse af 4° giver $\lambda(1 + \lambda^{-1} \mu) = \lambda + \mu \in L_+$.

Dermed er sætning (10.3) bevist.

Idet enhver ordnet divisionsring har karakteristik 0, kan (10.1) skærpes til:

(10.5) En ordnet affin Desargues-plans divisionsring L har karakteristik 0.

Dens primlegeme er altså isomorft med de rationale tallegeme $\mathbb{Q}$. Vi vil identificere primlegemet med dette (hvilket allerede er antydnet ved brugen af betegnelserne 0 og 1 for henholdsvis nul- og et-element af L). Restriktionen af den definerede ordning i L til $\mathbb{Q}$ må være den sædvanlige, fordi $\mathbb{Q}$ kun på én måde kan organiseres som ordnet legeme.

Gyldigheden af ordningsaksiomerne $O_1 - O_5$ i en affin Desargues-plan medfører ikke, at planens divisionsring er kommutativ. Der eksisterer nemlig ordnede ikke-kommutative divisionsringe. Konstruktionen af en sådan er dog ikke helt simpel.

De hidtil inddragne aspekter af den sædvanlige geometri er ikke tilstrækkelige til at motivere brugen af de reelle tals legeme i denne. Allerede oldtidens græske matematik er kommet til den erkendelse, at enhver måling af geometriske størrelser kræver en forudsætning af følgende ontrentlige indhold: Er der givet to størrelser af samme art, skal det være muligt ved passende mangedobling af den ene at komme til størrelse, der er større end den anden. Noget mere præcist formuleret for liniestykker: Lad a^o, b_1^o, c^o være indbyrdes forskellige punkter på en linie l^1 , b_1^o og c^o beliggende på samme side af a^o . Bestemmes punkter $b_2^o, b_3^o, \dots$ på l^1 ved at afmåle liniestykket $a^o b_1^o$ i retningen fra a^o mod b_1^o først fra b_1^o til b_2^o dernæst fra b_2^o til b_3^o , osv., skal der findes et naturligt tal n for hvilket c^o ligger mellem a^o og b_n^o . Denne forudsætning, som kaldes Eudoxos' eller Arkimedes' aksiom, kan formuleres for en ordnet affin Desargues-plan:

EA. For tre forskellige punkter a^o, b^o, c^o på en linie, for hvilken $(a^o, b^o) \neq (a^o, c^o)$, findes der et naturligt tal n , således at $(a^o, c^o) \neq (c^o, d^o)$, hvor punktet d^o er bestemt ved $\underline{a^o d^o} = n \underline{a^o b^o}$.

Definition. En ordnet affin Desargues-plan siges at være eudoxisk eller arkimedisksk ordnet, hvis EA er opfyldt i den.

Der gælder følgende sætning:

(10.6) En ordnet affin Desargues-plan er arkimedisksk ordnet, hvis og kun hvis dens divisionsring L er arkimedisksk ordnet, dvs. for hvert element $\lambda \in L_+$ findes et naturligt tal n med $\lambda < n$.

Bevis: Antag, at L er arkimedisksk ordnet. Lad $a^\circ, b^\circ, c^\circ$ v. indskrives forskellige punkter på en linie l' , således at $(a^\circ, c^\circ) \neq (a^\circ, b^\circ)$. Det ved $\underline{a^\circ c^\circ} = \lambda \underline{a^\circ b^\circ}$ bestemte element $\lambda \in L$ er da positivt. Ifølge forudsætning findes der et $n \in \mathbb{N}$ med $n - \lambda \in L_+$. Bestemmes punktet d° ved $\underline{a^\circ d^\circ} = n \underline{a^\circ b^\circ}$, får $\underline{c^\circ d^\circ} = (n - \lambda) \underline{a^\circ b^\circ}$ hvoraf $(c^\circ, d^\circ) \neq (a^\circ, b^\circ) \neq (a^\circ, c^\circ)$. Dette viser, at EA gælder.

Omvendt, antag planen arkimedisksk ordnet. Vælg en l' og to forskellige punkter a° og b° på denne. Lad $\lambda \in L_+$ være givet, og lad c° være bestemt ved $\underline{a^\circ c^\circ} = \lambda \underline{a^\circ b^\circ}$. Ifølge forudsætning findes et $n \in \mathbb{N}$, således at $(a^\circ, c^\circ) \neq (c^\circ, d^\circ)$ for punkt d° bestemt ved $\underline{a^\circ d^\circ} = n \underline{a^\circ b^\circ}$. Idet $\underline{c^\circ d^\circ} = (n - \lambda) \underline{a^\circ b^\circ}$, kan sluttes at $n - \lambda \in L_+$. Dette viser, at L er arkimedisksk ordnet. (Man lægger mærke til, at det er tilstrækkeligt at forudsætte EA for én linie og ét punktpar (a°, b°) på denne.)

Enhver arkimedisksk ordnet divisionsring er isomorf med.

reelt tallegeme, altså specielt kommutativt.

Hovedtrækkene i et bevis herfor er følgende:

I en arkimediske ordnet divisionsring L ligger de rationale tal overalt tæt. Lad $\lambda, \mu \in L$, $\lambda < \mu$, være givet. Der findes da et $n \in \mathbb{N}$ så at $(\mu - \lambda)^{-1} < n$, altså $\frac{1}{n} < \mu - \lambda$. Lad m være det mindste hele tal så at $n\lambda < m$, altså $\frac{m}{n} - \frac{1}{n} \leq \lambda < \frac{m}{n}$. (Hvis $\lambda > 0$, findes et sådant ifølge forudsætning, men også hvis $\lambda < 0$, idet de hele tal større end $n\lambda$ er nedad begrænset ved det modsatte til et naturligt tal større end $-n\lambda$. Tilfældet $\lambda = 0$ er oplagt.) Vi har altså $\lambda < \frac{m}{n} \leq \lambda + \frac{1}{n} < \mu$. Der ligger altså et rationalt tal mellem λ og μ .

For hvert element $\lambda \in L$ betragtes mængdeparret (U_λ, O_λ) , hvor

$$U_\lambda = \{\varrho \in \mathbb{Q} \mid \varrho < \lambda\}, \quad O_\lambda = \{\sigma \in \mathbb{Q} \mid \lambda < \sigma\}.$$

Hverken "undermængden" U_λ eller "overmængden" O_λ er tom, og $U_\lambda \cup O_\lambda = \mathbb{Q}$ eller $= \mathbb{Q} \setminus \{\lambda\}$, efter som $\lambda \notin \mathbb{Q}$ eller $\lambda \in \mathbb{Q}$. Der gælder $\varrho < \sigma$ for alle $\varrho \in U_\lambda$ og alle $\sigma \in O_\lambda$, altså $\sup U_\lambda \leq \inf O_\lambda$. Men her må gælde lighed; for ellers fandtes der mindst to rationale tal mellem $\sup U_\lambda$ og $\inf O_\lambda$, og disse kunne hverken høre til U_λ eller til O_λ . Ved til $\lambda \in L$ at lade svare det reelle tal

$$\Phi(\lambda) = \sup U_\lambda = \inf O_\lambda$$

fås en afbildning $\Phi: L \rightarrow \mathbb{R}$. Den ses let at være injektiv og ordenstro, dvs. $\lambda < \mu$ medfører $\Phi(\lambda) < \Phi(\mu)$. Det er klart, at $\Phi(\varrho) = \varrho$ for hvert rationalt tal $\varrho \in L$.

At Φ er en homomorfi, går ud på, at der for $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ gælder

$$\sup U_{\lambda_1 + \lambda_2} = \sup U_{\lambda_1} + \sup U_{\lambda_2},$$

$$\sup U_{\lambda_1 \lambda_2} = \sup U_{\lambda_1} \sup U_{\lambda_2}.$$

hvor hvert led for sig kan erstattes med inf af den pågældende overmængde. For summen ses det ved at bemærke, at der for $\rho_1 \in U_{\lambda_1}$, $\rho_2 \in U_{\lambda_2}$, $\sigma_1 \in O_{\lambda_1}$, $\sigma_2 \in O_{\lambda_2}$ gælder $\rho_1 + \rho_2 \in U_{\lambda_1 + \lambda_2}$, $\sigma_1 + \sigma_2 \in O_{\lambda_1 + \lambda_2}$, hvorefter

$$\sup U_{\lambda_1} + \sup U_{\lambda_2} \leq \sup U_{\lambda_1 + \lambda_2} = \inf O_{\lambda_1 + \lambda_2} \leq \inf O_{\lambda_1} + \inf O_{\lambda_2}$$

og dermed det ønskede, idet $\sup U_{\lambda_i} = \inf O_{\lambda_i}$. For produktet er det nødvendigt at skelne mellem flere tilfælde. Hvis λ_1 og λ_2 er positive, kan man slutte som for summen, idet man dog kun betragter $\rho_i \in U_{\lambda_i} \cap \mathbb{Q}_+$ og $\rho_2 \in U_{\lambda_2} \cap \mathbb{Q}_+$. Hvis en af faktorerne er 0, er sagen oplagt. De øvrige tilfælde kan føres tilbage til tilfældet af positive λ_1, λ_2 ved hjælp af

$$\sup U_{-\lambda} = -\inf O_{\lambda}$$

eller, hvad der er ensbetydende hermed,

$$\inf O_{-\lambda} = -\sup U_{\lambda}.$$

Det første er oplagt for $\lambda > 0$, det andet for $\lambda < 0$.

Kommutativiteten af L følger af $U_{\lambda_1 \lambda_2} = U_{\lambda_2 \lambda_1}$ og injektiviteten af Φ .

Vi kan herefter af [9.3] slutte:

(10.7) I enhver arkimedisk ordnet affin Desargues-plan gælder Pappos' sætning.

De hidtil opstillede aksiomer tillader at karakterisere de algebraiske affine planer over reelle tallegemer. Der findes næppe nogen simpel anskuelig motivering for, at man i den sædvanlige

geometri benytter hele legemet $\mathbb{R}$. Undersøgelser af algebraiske kurver, dvs. mængder af punkter, hvis affine koordinater (x_1, x_2) tilfredsstiller en ligning af formen $p(x_1, x_2) = 0$, hvor p er et polynomium, leder til kravet om, at planens legeme i hvert fald indeholder de reelle algebraiske tal. (I den såkaldte algebraiske geometri, hvis emne er dybegrænsede undersøgelser af algebraiske kurver, flader osv. i affine og projektive rum af vilkårlig dimension, lægges algebraisk afsluttede legemer, specielt det, der består af alle komplekse algebraiske tal, eller hele $\mathbb{C}$ til grund. Man giver derved afkald på ordningsegenskaberne.) Benyttelsen af de reelle tals legeme må ses på baggrund af den snævre forbindelse mellem analysen og geometrien. At en arkimediske ordnet affine plans legeme er $\mathbb{R}$, kan formuleres geometrisk på flere måder. Man kan benytte, at $\mathbb{R}$ ifølge ovenstående kan karakteriseres som det "maksimale" arkimediske ordnede legeme. Man kommer da til et "fuldstændighedsaksiom" i Hilberts forstand: Det skal ikke være muligt at udvide den betragtede arkimediske ordnede affine Desargues-plan med nye punkter og linier til en plan af samme art.

Mere nærliggende er det imidlertid at kræve, at planens legeme er fuldstændigt ordnet i den forstand, at hver opad begrænset delmængde har et supremum. For at opstille et sådant aksiom i geometrisk formulering behøver man blot at indføre en total ordning på en linie l^1 som angivet på side II.10.3. Ved til $p^0 \in l^1$ at lade svare det element $\lambda \in L$, for hvilket $\underline{a}p^0 = \lambda \underline{a}b^0$, fås en bijektiv afbildning af ${}^0(l^1)$ på L , som

er ordenstro. Er også $q^0 \leq l^1$ og $a^0 q^0 = \mu a^0 b^0$, har man nemlig $p^0 q^0 = (\mu - 1) a^0 b^0$, og $p^0 < q^0$, dvs. $(p^0, q^0) \neq (a^0, b^0)$, er ensbetydende med $\mu - 1 > 0$. Herefter kan vi formulere Kontinuitetsaksiomet:

K. Med en ved ordningsaksiomerne bestemt ordning af en punktrække har enhver opad begrænset delmængde af denne et supremum.

Idet enhver fuldstændigt ordnet divisionsring er arkimedisk ordnet, er aksiomet EA for en ordnet affin Desargues-plan en følge af K og kunne derfor udelades. Dette indses således: Lad M være mængden af de elementer af divisionsringen L , som har heltallige majoranter. Hvis M ikke var hele L , måtte M være opad begrænset. Elementet $\sup M$ ville da have en heltallig majorant, idet $\sup M - 1$ har en. Men så ville også $\sup M + 1$ have en, hvilket strider mod definitionen af M .

Vi kan herefter sige: Aksiomerne In 1, In 5, In 6, Pa, aD, AD, Or 1 - Or 5, K danner et kategorisk aksiomsystem for den reelle affine plan.

Alle betragtninger i denne paragraf kan med få oplygende ændringer overføres til affine rum. Man har derfor (jf. side II. 8.13): Aksiomerne In 1 - In 7, Pa, Or 1 - Or 5 og K danner et kategorisk aksiomsystem for det reelle 3-dimensionale affine rum.

Vi tilføjer nogle bemærkninger om ordningen i en algebraisk projektiv plan. En simpel anskuelig betragtning viser, at man

ikke vil kunne definere totale ordninger på linierne på en sådan måde, at en centralprojektion af en linie på en anden bliver en monoton afbildning. Punkterne på en projektiv linie må ordnes cyklisk (dvs. som punkter på en cirkel).

I stedet for en relation mellem punktpar må der indføres en relation mellem punkttripler bestående af tre forskellige punkter. Den anskuelige baggrund er, at tre forskellige punkter i bestemt orden fastlægger en "gennemløbsretning" på linien. At to punkttripler står i relationen, skal betyde, at de fastlægger samme gennemløbsretning.

Man kan vise, at hvis planens divisionsring er ordnet, kan der på hver linie defineres en sådan relation med egenskaber, som ligner Or 1-Or 3, og således at punkttripler på en linie, der står i relationen, ved centralprojektion på en anden linie afbildes på punkttripler, der står i relationen. Endvidere kan den projektive form af Or 5 eftervises. Omvendt kan der ud fra sådanne relationer mellem punkttripler bestemmes en ordning af planens divisionsring. Beviserne er dog ikke så simple som for affine planer, selv om resultaterne for disse kan anvendes på den projektive plans affine delplaner.

Herefter kan aksiomerne EA og K formuleres for projektive planer, og man kan opnå en aksiomatisk karakterisering af den reelle projektive plan (og efter mindre modifikationer også for det reelle projektive rum).

Opgaver til § 10.

1. Vis, at gyldigheden af ordningsaksiomerne Or1 - Or4 i en affin D-plan er ensbetydende med, at der i hver punktrække kan defineres en ikke-refleksiv total ordningsrelation, således at enhver parallelprojektion af en punktrække på en anden er en monoton afbildning.
2. Lad l_1^1 være en linie i en ordnet affin D-plan og $(p^0, q^0), (r^0, s^0) \in M_l$. Vis, at for enhver bijektiv dilatation d af planen gælder

$$(p^0, q^0) \oplus (r^0, s^0) \Rightarrow (d(p^0), d(q^0)) \oplus (d(r^0), d(s^0)).$$
3. De rationale funktioner af en reel variabel t danner et legeme $\mathbb{R}(t)$ med sædvanlig addition og multiplikation som kompositioner. (Lighed af rationale funktioner $p_1(t)/q_1(t)$ og $p_2(t)/q_2(t)$, hvor $p_1(t), p_2(t), q_1(t), q_2(t)$ er polynomier, defineres ved $p_1(t)q_2(t) = p_2(t)q_1(t)$ for $t \in \mathbb{R}$.) Vis, at $\mathbb{R}(t)$ kan ordnes ved at regne en rational funktion til $\mathbb{R}(t)_+$, hvis dens værdier for alle tilstrækkelig store t er positive. Vis, at denne ordning ikke er arkimedisk. Slut, at der findes ordnede affine D-planer, som ikke er arkimedisk ordnede.

4. Et 2-dimensionalt venstre-vektorrum $(V, L)_v$ over en ordnet divisionsring L kan orienteres, idet der findes en (og kun én) ækvivalensrelation med to ækvivalensklasser i mængden af baser for V , således at $(\underline{a}_1, \underline{a}_2) \oplus (\underline{a}_1, \underline{a}_2 + \lambda_1 \underline{a}_1) \oplus (\underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2, \underline{a}_2)$ for $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ og $(\underline{a}_1, \underline{a}_2) \oplus (\mu_1 \underline{a}_1, \underline{a}_2) \oplus (\underline{a}_1, \mu_2 \underline{a}_2)$ for $\mu_1, \mu_2 \in L$. Bevis dette under antagelsen, at L er kommutativ.

**Bevis det uden denne antagelse. [Bemærk, at determinant-teori i sædvanlig forstand ikke er til rådighed. Der bliver brug for omskrivninger som $\lambda\mu = (\lambda\mu\lambda^{-1}\mu^{-1})\mu\lambda$.]

5. En ordnet algebraisk affin plan kan orienteres. Der findes nemlig en ækvivalensrelation med to ækvivalensklasser i mængden af trekanter (betragtet som ordnede sæt af tre punkter, der ikke ligger på en linie), således at relationens anskuelige betydning er "bestemmer samme om-løbsretning i planen". Definér en sådan relation ved hjælp af opgave 4, og vis, at den har egenskaber svarende til fortolkningen.

6. En mængde A siges at være cyklisk ordnet, hvis der i mængden af ordnede sæt bestående af tre forskellige elementer fra A er defineret en ækvivalensrelation $\sim$, således at

$$(x_1, x_2, x_3) \nabla (y_1, y_2, y_3) \Rightarrow (x_3, x_2, x_1) \sim (y_1, y_2, y_3),$$

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (x_1, x_3, x_4) \Rightarrow [x_2 \neq x_4 \text{ og }] (x_1, x_2, x_3) \sim (x_3, x_2, x_4).$$

Vis, at der er to ækvivalensklasser, og at $(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}) \sim (x_1, x_2, x_3)$, hvor π er en permutation af $\{1, 2, 3\}$, hvis og kun hvis π er lige.

Gør rede for, at hvis A er cyklisk ordnet og $a \in A$, kan $A \setminus \{a\}$ ordnes på nærliggende måde, så at Or 1-Or 3 gælder, og omvendt.