

Matematik 1, AG, 1960–61

Werner Fenchel

Forelæsningsnoter i Algebra og Geometri

Kap. I. Mængder, afbildninger, relationer

- §1. Indledende bemærkninger om matematisk logik.
- §2. Mængder og deres delmængder.
- §3. Mængdealgebra.
- §4. Afbildninger (funktioner).
- §5. Enentydige afbildninger. Numerable mængder.
- §6. Transformationsgrupper. Permutationsgrupper.
- §7. Mængdeprodukt. Relationer.

Kap. II. Algebraens grundbegreber

- §1. Kompositionsregler.
- §2. Grupper.

Kap. III. Analytisk geometri i det euklidiske rum.

- §1. Om geometriens grundlag: Incidens og parallelitet.
- §2. Translationer og vektorer.
- §3. Om geometriens grundlag: Ordning og kontinuitet.
- §4. Vektorrum.
- §5. Indledning i den affine geometri.
- §6. Koordinattransformationer. Matricer.
- §7. Lineære afbildninger.
- §8. Affine afbildninger.
- §9. Linearformer. Lineære uligheder.
- §12. Bilineære og kvadratiske former.
- §13. Kvadrikker.
- §14. Normerede vektorrum.
- §15. Vektorrum med indre produkt.
- §16. Lineære operatorer i vektorrum med indre produkt.

Index.

Kap. I. Mængder, afbildninger, relationer.

§1. Indledende bemærkninger om matematisk logik.

For på utvetydig og koncis måde at kunne formulere de udsagn, der udgør matematikken, indføres som bekendt et stort antal tegn med nøje aftalt betydning. Men de logiske forbindelser mellem sådanne udsagn, de måder på hvilke vi ifølge lovene for vor tænkning danner nye udsagn ud fra andre, plejer man at udtrykke i sædvanlige ord. Blandt de mange vendinger, der er i brug, kan nævnes: ...og..., ...eller..., ...gælder ikke..., ...følger af..., ...altså..., ...medfører..., ...er ensbetydende med..., ...det vil sige..., for hvert...gælder..., der findes... således at....

I almindelighed fremgår en sådan vendings matematiske betydning klart af dens brug i daglig tale. Dette i forbindelse med, at sproget råder over flere måder at udtrykke den samme mening på, gør sådanne vendinger velegnede til beskrivelse af de skridt, der foretages i matematiske beviser. I enkelte tilfælde kan der dog være tvivl om vendingens eksakte mening, Dette gælder især ordet "eller". Et udsagn som "tallet a er lige eller et primtal" kan forstås således: " a er enten et lige tal eller det er et primtal, men det er ikke begge dele", og udsagnet er da ikke sandt for $a=2$. Men udsagnet kan også forstås således: " a har mindst en af egenskaberne at være et lige tal og at være et primtal", og udsagnet vil da være sandt for $a=2$. Skønt der i mange tilfælde ikke vil kunne opstå en sådan tvivl, idet de to udsagn forbundet ved "eller" udelukker hinanden, som f. eks. i "tallet a er positivt eller negativt", er det i matematikken uomgængeligt at præcisere, hvad der menes. Det har vist sig at være hensigtsmæssigt at holde sig til den anden af de nævnte fortolkninger, således at "eller" altid betyder "det ene eller det andet eller begge dele", med andre ord "mindst en af delene".

Skønt man, som nævnt, ved fremstillingen af matematiske emner i reglet betjener sig af sproglige vendinger som de ovenfor nævnte, har man fundet det nyttigt at indføre tegn, som symboliserer de logiske sammenknytninger af udsagn. Man opnår derved dels at kunne meddele matematiske sætninger og ræsonnementer, som formuleret ved hjælp af det sædvanlige sprog ville være omstændelige eller uoverskuelige, i utvetydig og koncis form, dels at kunne undersøge selve de logiske forbindelsers lovmæssigheder og indbyrdes relationer med matematiske metoder. Dette sidste sker i den matematiske logik. Her skal kun omtales dennes begyndelsesgrunde, som giver en nyttig insigt i de matematiske ræsonnementers logiske struktur.

Når der i det følgende tales om udsagn, tænkes på matematiske udsagn som f. eks. "2 er større end -1", " $2^{2309}-1$ er et primtal", "der findes irrationelle tal", "trekant ABC er retvinklet", "alle trekanter er ligebenede". Det forudsættes, at hvert af disse udsagn er enten sandt eller falsk, men ikke begge dele. Det kommer herved slet ikke an på, om vi er istand til at afgøre, om et forelagt udsagn i "virkeligheden" er sandt eller falsk; foreløbig behøver vi end ikke at tænke på, hvad "sandt" og "falsk" i grunden betyder.

Ikke specificerede udsagn betegnes ved bogstaver eller ved symboler sammensat af bogstaver og visse andre tegn efter regler der angives i det følgende. Hvert udsagn kan og skal tænkes tillagt en "sandhedsværdi", nemlig enten "sandt" eller "falsk".

Et udsagn har en negation, ligesom et udsagn

negationen af et sandt udsagn er falsk og omvendt

Sådan som p betegnes et udsagn, så p betegnes negationen

Negationen af et sandt udsagn er falsk og omvendt

-tabel

Er p et udsagn, dannes et nyt udsagn, negationen af p , betegnet non p (eller $\bar{p}$), der er falsk, når p er sand, og sandt, når p er falsk. Negationerne af de anførte eksempler på udsagn er: "2 er ikke større end -1", " $2^{2309}-1$ er ikke et primtal", "der findes ikke nogen irrationelle tal", "trekant ABC er ikke retvinklet", "ikke alle trekanter er ligebenede". I sædvanligt sprog udtrykkes negationen altså ved hjælp af ordet "ikke". Altså

hvad vi behøver at vide om operationen non, er imidlertid

tid dens såkaldte sandhedstabel:

p	non p
sandt	falsk
falsk	sandt

Man kan endvidere danne udsagnet non non p (eller $\bar{\bar{p}}$), som er sandt, når non p er falsk, altså p sandt, og som er falsk, når non p er sandt, altså p falsk. I en sandhedstabel ville altså de to colonner svarende til p og non non p stemme overens. Idet vi tillader os ved et lighedstegn at betegne, at de to udsagn p og non nonp har samme sandhedsværdi for hvilket som helst udsagn, kan vi altså skrive non non p = p.

Man siger at operationen "non" er involutorisk.

Ud fra to udsagn p og q kan der dannes et nyt udsagn betegnet $p \wedge q$ og kaldet deres konjunktion, som er sandt når både p og q er sande, og ellers falsk. Betegner p f. eks. udsagnet " $2^{2309}-1$ er et printal" og q udsagnet "trekant ABC er retvinklet", vil $p \wedge q$ være udsagnet " $2^{2309}-1$ er et printal og trekant ABC er retvinklet". Sandhedstabellen for $\wedge$ kan skrives:

p	q	$p \wedge q$
sandt	sandt	sandt
sandt	falsk	falsk
falsk	sandt	falsk
falsk	falsk	falsk

Man overbeviser sig umiddelbart om, at der for konjunktionen gælder den kommutative lov

$$p \wedge q = q \wedge p$$

og at den er idempotent

$$p \wedge p = p.$$

Her som i det følgende benyttes lighedstegnet til at udtrykke at to sammensatte udsagn er samtidig sande og samtidig falske, hvilke enkelte udsagn der end indgår i dem, og hvad enten disse er sande eller falske. Dette viser sig simpelthen derved, at de to sammensatte udsagns sandhedstabeller stemmer overens.

*Skilb beteg-
nelser fra bogstaber
forskelt på udsagn
og udsagnsformer*

Endvidere ses, at $p \wedge \text{non} p$ er falsk, hvad enten p er sandt eller falsk. Et sammensat udsagn, der altid er falsk, hvad enten de indgående enkelte udsagn er sande eller falske, kaldes en selvmodsigelse eller absurditet. En sådan betegnes med $\emptyset$, altså $p \wedge \text{non} p = \emptyset$.

Er p , q , r udsagn, kan man danne udsagnene $p \wedge (q \wedge r)$ og $(p \wedge q) \wedge r$, hvor parenteserne har den velkendte funktion, nemlig at angive, at det sammensatte udsagn i parenteser er trådt i stedet for et enkelt udsagn. Det ses, at de to nævnte udsagn stemmer overens, idet begge er sande, når både p og q og r er sande, og ellers begge falske. For konjunktionen gælder altså den associative lov, og parenteserne kan udelades:

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r = p \wedge q \wedge r.$$

Tilsvarende gælder for flere end tre udsagn. Specielt kunne man danne $p \wedge p \wedge \dots \wedge p$. Men alle disse "potenser" er ens, nemlig lig p som følge af $p \wedge p = p$, hvilket har givet anledning til dannelsen af ordet "idempotent".

Ud fra to udsagn p og q kan der dannes et nyt udsagn betegnet $p \vee q$ og kaldet deres disjunktion, som er sandt, når p eller q er sandt, det vil sige, når mindst et af udsagnene er sandt, og ellers falsk. Sandhedstabellen for v kan skrives:

p	q	$p \vee q$
sandt	sandt	sandt
sandt	falsk	sandt
falsk	sandt	sandt
falsk	falsk	falsk

Heraf sluttet umiddelbart, at der for disjunktionen gælder den kommutative lov:

$$p \vee q = q \vee p,$$

og at den er idempotent:

$$p \vee p = p.$$

Endvidere ses, at $p \vee \text{non} p$ er sandt, hvad enten p er sandt eller falsk. Et sammensat udsagn, der altid er sandt, hvad enten de indgående enkelte udsagn er sande eller falske kaldes en tautologi. En sådan betegnes med e , altså

$$p \vee \text{non} p = e.$$

Også for disjunktionen gælder den associative lov, så at parenteser ved disjunktioner mellem flere udsagn er overflødige:

$$pv(qvr) = (pvq)vr = pvqvr.$$

Alle tre udsagn er sande, når mindst et af udsagnene p , q , r er sandt, og ellers falske.

Operationerne $\wedge$ og v kan naturligvis kombineres på mangfoldig måde. Blandt de relationer, som består mellem sådanne kombinationer fremhæves de to distributive love:

$$p \wedge (qvr) = (p \wedge q)v(p \wedge r).$$

$$pv(q \wedge r) = (pvq) \wedge (pvr).$$

Man overbeviser sig om deres gyldighed enten ved at gøre sig indholdet af de fire udsagn klart eller ved at opstille sandhedstabeller for dem. Det ses, at ligningerne fremgår af hinanden ved ombytning af tegnene $\wedge$ og v . Dette er et specielt tilfælde af en almindelig lov, som vil blive omtalt nedenfor.

Af særlig interesse er kombinationerne af $\wedge$ og v med non. Man har dualitetsloven:

$$\text{non}(p \wedge q) = \text{non}pv\text{non}q,$$

$$\text{non}(pvq) = \text{non}p \wedge \text{non}q.$$

Den første ligning udsiger nemlig, at udsagnet "ikke (p og q)" er sandt når mindst et af udsagnene "ikke p " og "ikke q " er sandt, og at udsagnet "ikke (p og q)" er falsk når begge udsagn "ikke p " og "ikke q " er falske. Tilsvarende indses gyldigheden af den anden ligning. Begge bekræftes også let ved hjælp af sandhedstabeller. Som specielt tilfælde fremhæves

$$\text{non} \emptyset = e, \text{ none} = \emptyset,$$

der udsiger henholdsvis, at det altid er sandt, at en modstrid er falsk, og at det altid er falsk, at en tautologi er falsk.

Det ses, at de to dualitetslove er specielle tilfælde af følgende almindelige regel, der kan vises at være en konsekvens af dem:

Et ved hjælp af tegnene non, $\wedge$ og v sammensat udsagns negation fås ved at erstatte de enkelte udsagn, der indgår deri, med deres negationer og samtidig at ombytte tegnene $\wedge$ og v .

Som eksempel på reglens anvendelse udledes den anden distributive lov af den første: Denne anvendt på udsagnene nonp , nonq , nonr i stedet for p , q , r giver

$$\text{nonp} \wedge (\text{nonq} \vee \text{nonr}) = (\text{nonp} \wedge \text{nonq}) \vee (\text{nonp} \wedge \text{nonr}).$$

For negationen heraf fås ved hjælp af reglen og med benyttelse af $\text{nonnonp} = p$ og de tilsvarende netop den anden distributive lov.

Helt generelt kan det vises på samme måde, at enhver ligning, der gælder mellem to udsagn, ved ombytning af $\wedge$ og $\vee$ (og dermed også ombytning af $\emptyset$ og e), går over i en ligning, der ligeledes er gyldig. To ligninger, der fremgår af hinanden ved denne ombytning, siges at være indbyrdes duale. Hele den "logiske algebra", baseret på de hidtil indførte operationer, forbliver således uændret, når man lader konjunktionen og disjunktionen bytte rolle. Man siger, at der gælder et dualitetsprincip i denne algebra.

En for matematikken særlig betydningsfuld forbindelse mellem to udsagn p og q er implikationen, for hvilken der findes en hel række sproglige udtryksformer: "af p følger q ", " p , følgelig q ", " p , altså q ", "hvis p gælder, da gælder også q ", " p medfører q ", " p implicerer q ", " p er en tilstrækkelig betingelse for q ", " q er en nødvendig betingelse for p " og flere andre. Meningen er altid den samme, nemlig, at hvis p er sandt, da er q også sandt. Denne relation mellem udsagnene p og q skrives

$$p \Rightarrow q.$$

Dens eksakte definition, det vil sige fastsættelsen af, hvornår den betragtes som sand og hvornår som falsk, sker simplest ved sandhedstabellen:

p	q	$p \Rightarrow q$
sandt	sandt	sandt
sandt	falsk	falsk
falsk	sandt	sandt
falsk	falsk	sandt

Denne ses let at være identisk med sandhedstabellen for nonpvq . Relationen $\Rightarrow$ kan altså udtrykkes ved de

spørgsmål svarer
snarere til modus
ponens.

tidligere indførte: $p \Rightarrow q = \text{nonpv}q$.

Heraf sluttet umiddelbart, at

$$p \Rightarrow q = \text{non}q \Rightarrow \text{non}p;$$

thi den sidste implikation er jo $q \vee \text{non}p$

Det er vigtigt at gøre sig klart, at når $p \Rightarrow q$ er sandt og q vides at være sandt, kan man ikke slutte noget om p ; det kan være sandt eller falsk. Derimod kan man slutte, at p er falsk, når $p \Rightarrow q$ er sandt og q vides at være falsk.

Det kunne synes urimeligt og stemmer vel heller ikke helt med sædvanlig sprogbrug, at implikationen $p \Rightarrow q$ også betragtes som et sandt udsagn, når blot p er falsk. Det er imidlertid i fuldkommen overensstemmelse med den måde, implikationen optræder i matematikken. Et bevis består netop i efter matematikkens love at eftervise, at hvis et vist udsagn p er sandt, da er et vist andet q det også, og denne eftervisning kan og bør også være rigtig, når p er falsk eller, som det sker ved indirekte beviser, når det slet ikke vides på forhånd, om p er sandt eller falsk. Et direkte bevis for en sætning forløber efter følgende skema:

Forudsætning:	det vides at	p er sandt
Bevis:	det eftervises at	$p \Rightarrow q$ er sandt
Konklusion:		q er sandt

Dette aflæses umiddelbart af sandhedstabellen for implikationen.

Derimod forløber et indirekte bevis i sin simpleste form således:

Forudsætning:	det vides at	p er sandt
Bevis:	det eftervises at	$\text{non}q \Rightarrow \text{non}p$ er sandt
Konklusion:		q er sandt.

Da $\text{non}p$ er falsk ifølge forudsætningen, aflæses nemlig af sandhedstabellen for implikationen, at $\text{non}q$ må være falsk og følgelig q sandt. I stedet for $\text{non}q \Rightarrow \text{non}p$ kan man også eftervise $\text{non}q \Rightarrow r$, hvor r betegner et eller andet udsagn, der vides at være falsk. Dette benytter man sig hyppigt af til forenkling af indirekte beviser.

Blandt reglerne, der gælder for implikationen, nævnes

$$0 \Rightarrow p = e, \quad p \Rightarrow e = e$$

i ord henholdsvis "en selvmodsigelse medfører et hvilket-somhelst udsagn" og "et hvilket-somhelst udsagn medfører en tautologi".

Endvidere er implikationen transitiv. Dermed menes, at udsagnet "hvis p medfører q og q medfører r, da vil p medføre r" er altid sandt, altså en tautologi:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r) = e.$$

Negationen af et sammensat udsagn, hvori der indgår $\Rightarrow$ kan findes ved hjælp af den tidligere nævnte generelle regel, efter at $\dots \Rightarrow \dots$ er erstattet med $\text{non} \dots v \dots$. For eksempel

$$\begin{aligned} \text{non}((p \Rightarrow q) \wedge r) &= \text{non}((\text{non}pvq) \wedge r) = \text{non}(\text{non}pvq) v \text{non}r \\ &= (p \wedge \text{non}q) v r. \end{aligned}$$

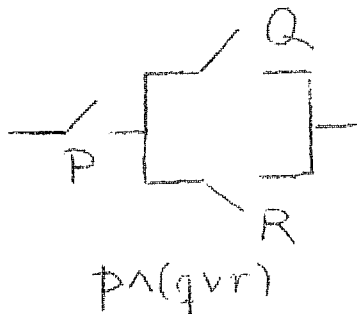
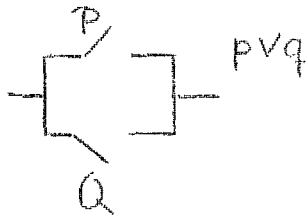
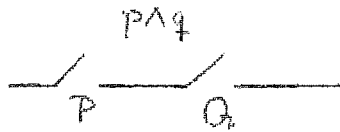
Hvis det for to udsagn p og q gælder, at p medfører q og q medfører p, siges "p og q er ensbetydende", "p og q er ensgyldige", "p gælder hvis (når) og kun hvis (når) q gælder", "p er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for q" eller lignende. Også vendingen "p er ækvivalent med q" er i brug; her vil den imidlertid blive undgået i denne forbindelse, da glosen "ækvivalent" hyppigt anvendes i andre sammenhæng. For denne forbindelse mellem to udsagn indføres en kort betegnelse. Man definerer:

$$p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

Udsagnet $p \Leftrightarrow q$ betyder, at p og q begge er sande eller begge er falske. At der gælder $=$ mellem to af enkelte udsagn p, q, ... sammensatte udsagn, hvilket jo vil sige, at de for hvilket-somhelst udsagn p, q, ... samtidig er sande og samtidig er falske, kommer altså ud på, at de forbundet med $\Leftrightarrow$ danner en tautologi.

Den logiske algebra i det hidtil beskrevne omfang tillader en interpretation ved visse simple typer af elektriske netværk. Et enkelt udsagn p repræsenteres ved et ledningsstykke med en afbryder P, der tillader strøm, når p er sandt, og ikke tillader strøm, når p er falsk. Udsagnet $\text{non}p$ repræsenteres tilsvarende ved et ledningsstykke

med en afbryder $\bar{P}$, der tillader strøm, når og kun når p er falsk. Er p og q to udsagn repræsenteret ved lednings-



stykker med afbrydere P og Q , repræsenteres $p \wedge q$ og $p \vee q$ ved de to ledningsstykker forbundet henholdsvis i serie og parallelt.

Når der inden for et sammensat udtryk forekommer et sammensat udtryk i parentes, tænkes denne først erstattet med et enkelt udsagn, og dernæst i stedet for det tilsvarende ledningsstykke indsat det net, der repræsenteres af udsagnet i parentes.

Udsagnet $p \wedge (q \vee r)$, for eksempel, tænkes først erstattet med $p \wedge s$, der repræsenteres ved et ledningsstykke med afbrydere P og S i serie, og dernæst insættes led-

ningsstykkerne med afbrydere Q og R forbundet parallelt i stedet for ledningsstykket S . Forekommer et udsagn p flere gange i et sammensat udtryk, repræsenteres det ved et tilsvarende antal afbrydere, der alle betegnes P og tænkes koblet således, at de samtidig tillader strøm og [ikke samtidig] tillader strøm. Forekommer afbrydere P og $\bar{P}$, skal disse tænkes koblet således, at den ene tillader strøm, når den anden ikke gør det. På denne måde kan ethvert sammensat udsagn repræsenteres ved et net. Når dette forbindes med to poler med spændingsforskel, vil der løbe strøm, når og kun når udsagnet er sandt.

De i begyndelsen nævnte eksempler på matematiske udsagn falder tydeligt i to klasser. Dels er der udsagn, der udtaler sig om ganske bestemte, specificerede matematiske objekter: "2 er større end -1 ", $2^{2309} - 1$ er et primtal", "trekant ABC er retvinklet", og dels er der udsagn, hvor talen er om hele samlinger af objekter: "der findes irrationale tal", "alle terkanter er ligebenede". Udsagn af den sidstnævnte art spiller en dominerende rolle i matematikken. Det er karakteristisk for dem, at de indledes med vendinger som "(for) alle ...", "(for) hver(t) ...", "der findes ...", "der eksisterer ...", "(for) mindst en (et)..." eller disses negationer. For at få et bedre indblik i deres natur formuleres de to eksempler lidt mere udførligt:

(1) Lad Δ betegne en vilkårlig trekant. Hvert Δ er ligebenet.

(2) Lad x betegne et vilkårligt reelt tal. Mindst eet x er irrationalt.

Sætningerne " Δ er ligebenet" og " x er irrationalt" er i og for sig ikke nogen udsagn, der er sande eller falske, men de bliver det, hver gang der indsættes for den "variable" Δ en bestemt trekant og for den "variable" x et bestemt reelt tal. Hver af dem står altså for uendelig mange udsagn. Man kan kalde dem for "udsagnsfunktioner".

Hvis der fandtes kun endelig mange trekanter $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ og kun endelig mange reelle tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ ville udsagnene (1) og (2) kunne skrives

$$(\Delta_1 \text{ er ligebenet}) \wedge (\Delta_2 \text{ er ligebenet}) \wedge \dots \wedge (\Delta_m \text{ er ligebenet})$$

$$(x_1 \text{ er irrationalt}) \vee (x_2 \text{ er irrationalt}) \vee \dots \vee (x_n \text{ er irrationalt}).$$

Det ses, at "(for) alle ..." eller "(for) hver(t) ..." står for en konjunktion af vilkårlig (endelig eller uendelig) mange udsagn, og at "der eksisterer ..." eller "(for) mindst een (et) ..." står for en disjunktion mellem vilkårlig (endelig eller uendelig) mange udsagn.

Man har indført særlige tegn, al tegnet $\forall$ og eksistens tegnet $\exists$ herfrpr. Disse såkaldte kvantorer bruges på følgende måde: Efter $\forall$ eller $\exists$ skrives tegn for den eller de "variable" objekter efterfulgt af "udsagnsfunktionen" (i reglen i parentes for at undgå misforståelser.

Udsagnene (1) og (2) skrives altså

$$\forall \Delta (\Delta \text{ er ligebenet}), \quad \exists x (x \text{ er irrationalt}),$$

hvor det er underforstået, at Δ betegner en vilkårlig trekant og x et vilkårligt reelt tal. Det er uvæsentligt, hvilke tegn der bruges for de "variable" (jfr. integrationsvariablen i et bestemt integral). Andre eksempler på (sande eller falske) udsagn med kvantorer er følgende, hvor det er underforstået, at x og y betegner reelle tal:

$$\forall x, y (x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)), \quad \exists x (x > x^2),$$

$$\forall x, y (x^2 + y^2 = (x + y)^2), \quad \exists x (x^2 < 0).$$

Negationerne af udsagn med kvantorer kan igen skrives ved hjælp af kvantorer. For det første af de ovenfor omtalte eksempler er negationen "ikke alle trekanter er ligebenede", hvilket er det samme som at sige "der findes trekanter, der er ikke ligebenede" eller "mindst een trekant er ikke ligebenet". I formler

$$\text{non } \forall \Delta (\Delta \text{ er ligebenet}) = \exists \Delta \text{ non}(\Delta \text{ er ligebenet}).$$

Idet det er underforstået, at talen er om reelle tal, haves for det andet eksempel negationen "der findes ikke nogen irrationale tal", hvilket er det samme som at sige "hvert reelt tal er rationalt (ikke irrationalt)". I formler

$$\text{non } \exists x (x \text{ er irrationalt}) = \forall x \text{ non}(x \text{ er irrationalt}).$$

For negationerne af de fire andre udsagn fås:

$$\begin{aligned} \text{non } \forall x, y (x^2 - y^2 &= (x + y)(x - y)) \\ &= \exists x, y \text{ non}(x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)) \\ &= \exists x, y (x^2 - y^2 \neq (x + y)(x - y)), \end{aligned}$$

$$\text{non } \exists x (x > x^2) = \forall x \text{ non}(x > x^2) = \forall x (x \leq x^2),$$

$$\begin{aligned} \text{non } \forall x, y (x^2 + y^2 &= (x + y)^2) \\ &= \exists x, y \text{ non}(x^2 + y^2 = (x + y)^2) \\ &= \exists x, y (x^2 + y^2 \neq (x + y)^2), \end{aligned}$$

$$\text{non } \exists x (x^2 < 0) = \forall x \text{ non}(x^2 < 0) = \forall x (x^2 \geq 0).$$

Man ser, at der for $\forall$ og $\exists$ gælder dualitetslove svarende til dem for $\wedge$ og $\vee$, nemlig

$$\text{non } \forall x (p(x)) = \exists x \text{ non } p(x),$$

$$\text{non } \exists x (p(x)) = \forall x \text{ non } p(x),$$

hvor x står for det variable objekt og $p(x)$ for en udsagns-

funktion. Heraf ses for resten, at een af kvantorerne kunne undværes, da den kan udtrykkes ved den anden og non.

For at vise, hvilken nytte man kan have af kvantorerne, anføres et mere kompliceret eksempel, udsagnet, at en funktion er kontinuert i et punkt af definitionsintervallet. Følgende betegnelser fastsættes.: J er et interval på tallinien, x er et vilkårligt og x_0 et givet reelt tal tilhørende J , $f(x)$ er en given funktion defineret i J , og ϵ og δ er vilkårlige positive reelle tal. Udsagnet, at $f(x)$ er kontinuert i x_0 kan da skrives således:

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall x (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon),$$

i ord: Til hvert ϵ (underforstået > 0) findes et δ (> 0), således at for hvert x (tilhørende J) uligheden $|x - x_0| < \delta$ medfører, at uligheden $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ gælder. For udsagnets negation findes ved gentagen anvendelse af dualitetslovene

$$\exists \epsilon \forall \delta \exists x \text{ non}(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Nu gælder for to vilkårlige udsagn p og q , at

$$\text{non}(p \Rightarrow q) = \text{non}(\text{non } p \vee q) = p \wedge \text{non } q,$$

og følgelig fås

$$\exists \epsilon \forall \delta \exists x [(|x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon)],$$

i ord: Der findes et ϵ (> 0), således at der til hvert δ (> 0) findes et x (tilhørende J), således at ulighederne $|x - x_0| < \delta$ og $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$ begge gælder. Dette er altså indholdet af udsagnet " $f(x)$ er ikke kontinuert i x_0 ".

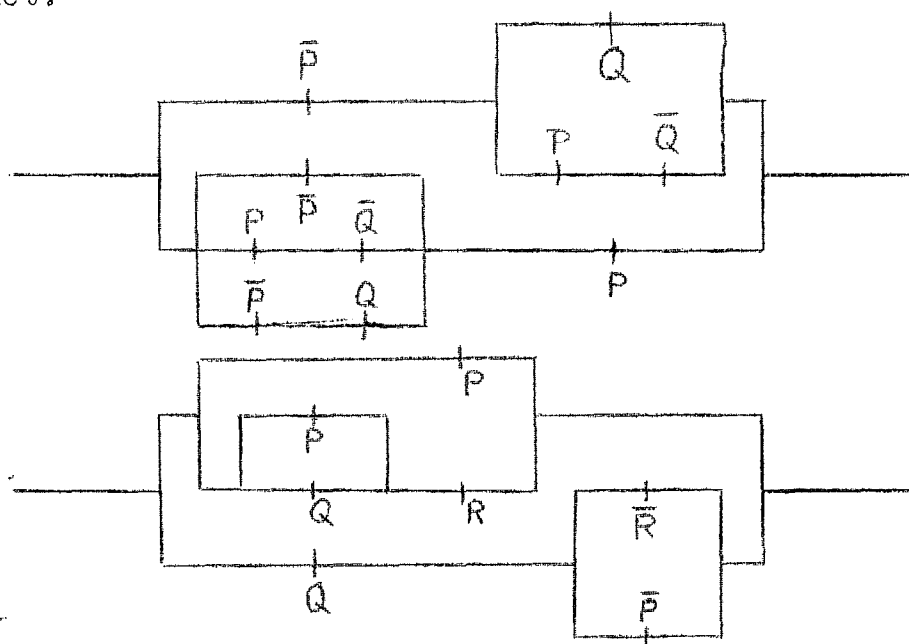
Øvelser til kap.I, 1.

1. Eftervis de distributive love ved hjælp af sandhedstabeller. (En sådan vil her bestå af 8 linier). Tegn ledningsnet, der repræsenterer de 4 udsagn, der optræder i lovene.
2. Vis, at

$$(p \vee q) \wedge ((p \wedge q) \vee r) = (p \wedge q) \vee ((p \vee q) \wedge r).$$
 Tegn de repræsenterende ledningsnet.
3. Vis, at der for vilkårlige udsagn p og q gælder, at

$$\begin{aligned} \emptyset \wedge p &= \emptyset, & \emptyset \vee p &= p, \\ e \wedge p &= p, & e \vee p &= e, \\ p \wedge (p \vee q) &= p, & p \vee (p \wedge q) &= p. \end{aligned}$$
4. Tegn ledningsnet, der repræsenterer $p \Rightarrow q$ og $p \Leftrightarrow q$.
5. Vis, at

$$(p \wedge q) \vee \text{non } p = p \Rightarrow q.$$
6. Eftervis implikationens transitivitet.
7. Vis, at relationen $\Leftrightarrow$ er transitiv, d.v.s. at hvis $p \Leftrightarrow q$ og $q \Leftrightarrow r$, da gælder også $p \Leftrightarrow r$.
8. Angiv udsagn, der repræsenteres ved følgende ledningsnet:



Undersøg, om udsagnene kan simplificeres, og tegn i bekræftende fald ledningsnet, der repræsenterer de simplificerede udsagn. (Både de i teksten og i opg.3 nævnte regler kan benyttes.)

9. En person ønsker at flyve fra København til Rom på en bestemt dag. Der er på denne dag følgende forbindelser:

	afg.	ank.	
København - Rom	9 ³⁰	12 ²⁰	(p)
København - Zürich	10 ³⁵	13 ¹⁰	(q)
København - Frankfurt	10 ²⁵	11 ⁵⁰	(r)
Frankfurt - Zürich	13 ¹⁰	14 ⁰⁵	(s)
Zürich - Rom	14 ⁰⁰	15 ³⁰	(t)
Zürich - Rom	17 ³⁵	19 ⁴⁰	(u)

Hvert af bogstaverne i parentes står for et udsagn, der betragtes som sandt eller falsk, efter som der er plads på det pågældende fly eller det er optaget. Angiv et udsagn, som er sandt, når og kun når personens ønske kan opfyldes.

10. Ved afstemninger i et udvalg betragtes et medlems stemmeafgivelse som et udsagn, der er "sandt" eller "falsk", efter som medlemmet stemmer "ja" eller "nej". Angiv for et udvalg af tre medlemmer et udsagn (sammen-sat af de til de enkelte medlemmer svarende udsagn), som er sandt, når et forslag vedtages med simpel majoritet, og ellers falsk. Tegn et ledningsnet, der ved samtidig betjening af afbrydere ved medlemmerne tillader strøm, når og kun når et forslag vedtages. Løs den tilsvarende opgave for et udvalg af fire medlemmer, hvoraf et er formand, hvis stemme giver udslag ved stemmelighed.
11. Udtryk $\wedge$ ved tegnene non og v.
Vis, at tegnene $\wedge$, v kan udtrykkes ved non og $\Rightarrow$.
12. Udtryk ved de logiske tegn udsagnet "enten p eller q, men ikke begge dele". Vis, at det er negationen af $p \Leftrightarrow q$. Tegn et ledningsnet svarende til udsagnet, og gør rede for, at nettet kan bruges i et belysningsanlæg, der skal kunne tændes og slukkes fra hvert af to forskellige steder.

13. Lad $p|q$ betegne udsagnet "p og q er ikke begge sande". Opskriv sandhedstabellen for dette udsagn, og udtryk det ved hjælp af $\neg$ og $\vee$.
 Vis, at alle tegnene $\neg, \wedge, \vee$ (og dermed også $\Rightarrow$ og $\Leftrightarrow$) kan udtrykkes ved $|$ alene. (betragt først $p|p$.)
14. Hvert af udsagn p og/eller q sammensat udsagn har en sandhedstabel, der kan skrives på formen

p	q	
sandt	sandt	.
sandt	falsk	.
falsk	sandt	.
falsk	falsk	.

Bestem antallet af måder, på hvilke de fire pladser i sidste kolonne kan besættes med "sandt" og "falsk", og angiv for hver af disse muligheder et af p og/eller q sammensat udsagn, der netop har den pågældende sandhedstabel. (Heraf sluttes, at hvert nok så indviklet udsagn sammensat af p og q må være ensgyldig med et af de således fundne.)

15. Giv et direkte og et indirekte bevis for følgende sætning:

a) For hvert reelt tal x , for hvilket $|x| \geq 1$, gælder

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

b) For hvert reelt tal x , for hvilket $0 \leq x \leq 1$, gælder

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x}} + \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}} = \sqrt{2 + 2\sqrt{x}}.$$

16. Giv et direkte og et indirekte bevis for følgende sætning:

For hvert reelt tal x gælder det, at uligheden $x \geq 0$ medfører uligheden

$$\sqrt{1 + x^2} \leq 1 + x.$$

Undersøg, om den omvendte sætning gælder, og giv i bekræftende fald et bevis for den.

17. Opskriv negationen af udsagnet

$$\forall a \exists x (xe^x = a),$$

hvor a og x betegner vilkårlige reelle tal. Gongiv begge udsagn i sproglige vendinger, og afgør, hvilket af dem der er sandt.

18. Gongiv i sproglige vendinger udsagnet

$$\forall a \left[(|a| \leq 1) \Leftrightarrow \exists x (\sin x = a) \right],$$

hvor a og x betegner vilkårlige reelle tal.

19. Opskriv i logiske tegn udsagnet "funktionen $\tan x$ antager i intervallet $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ enhver reel værdi".

20. Opskriv i logiske tegn udsagnet "en tilstrækkelig betingelse for, at $\sin x < x$ for et reelt tal x , er at $x > 0$ ".

21. Opskriv i logiske tegn udsagnet "en nødvendig betingelse for, at ligningen $x^2 - ax + 1 = 0$, hvor a er et reelt tal, har en negativ rod, er, at $a > 0$ ".

22. Opskriv i logiske tegn udsagnet "en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at ligningen $x^2 + ax + b = 0$, hvor a og b er vilkårlige reelle tal, har en reel rod, er at $a^2 - 4b \geq 0$ ".

23. Lad x betegne et vilkårligt positivt reelt tal og $f(x)$ en funktion defineret for $x > 0$. Skriv følgende udsagn med logiske tegn:

" $f(x)$ er opadtil begrænset",

" $f(x) \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow \infty$ ".

Find udsagnenes negationer i logiske tegn, og gongiv dem i sproglige vendinger.

§2. Mængder og deres delmængder.

Ved en mængde forstås en samling af indbyrdes forskellige objekter opfattet som en helhed. Det skal være utvetydigt fastlagt, om et forelagt objekt hører med til mængden eller ej. Dette krav vil ikke altid kunne opfyldes ved ikke-matematiske objekter (eksempler: samlingen af alle tanker, samlingen af alle molekyler, der udgør et bestemt dyrs krop). I det følgende vil der kun være tale om matematiske objekter som tal, punkter, linier, funktioner o.s.v. De objekter, som udgør en mængde, kaldes dens elementer. Både mængder og elementer betegnes med bogstaver eller andre aftalte tegn. At et objekt a er element af mængden A (tilhører A , er indeholdt i A), skrives

$$a \in A,$$

og at a ikke er element af A (ikke tilhører A , ikke er indeholdt i A) skrives

$$a \notin A.$$

At det ovenfor nævnte krav er opfyldt, kommer ud på, at $a \in A$ for ethvert forelagt objekt a er et udsagn, som er sandt, når a tilhører A , og falsk, når a ikke tilhører A . Dette udsagns negation er $a \notin A$.

En mængde kan være givet ved en opremsning af dets elementer, og den angives da ved at sætte elementerne (i en eller anden orden) i en krøllet parentes. For eksempel

$$\{a, b, 5, z, 3, 9, i\}$$

betegner mængden, hvis elementer er bogstaverne a, b, z, i og cifrene $3, 5, 9$. Denne betegnelses måde kan dog i reglen kun bruges ved endelige mængder, d.v.s. mængder, der består af endeligt mange elementer. En uendelig mængde må fastlægges ved angivelse af en eller flere egenskaber, som dens elementer, men ikke nogen andre objekter har. Dette kan ske i almindeligt sprog eller ved hjælp af symbolet

$$\{\dots | \dots\},$$

dog også
Zermelo!

hvor der i parentesen til venstre for den lodrette streg sættes et tegn, som reglen et bogstav, der står for et vilkårligt objekt (af en bestemt slags), og til højre for strengen angives de for mængden karakteristiske egenskaber. Lad x være betegnelsen for et vilkårligt objekt, og lad $p(x)$ betegne det udsagn, der er sandt, når objektet x har den eller de pågældende egenskaber, og ellers falsk. Idet x tænkes variabel, er $p(x)$, hvad vi tidligere har kaldt for en udsagnsfunktion. Betegnelsen for mængden af de objekter, som har egenskaben (egenskaberne) bliver da

$$\{x \mid p(x)\},$$

og dette læses: "mængden af de objekter x , for hvilke $p(x)$ er sandt" eller "som har egenskaberne ..." eller "som opfylder betingelserne ..." eller lignende.

Eksempel: Mængden af alle reelle tal x , som opfylder ulighederne $1 \leq x < 2$ skrives

$$\{x \mid (x \text{ er et reelt tal}) \wedge (1 \leq x < 2)\}.$$

Det er klart, at der i stedet for x kan sættes et vilkårligt andet tegn, som ikke er brugt til et andet formål;

$$\{a \mid (a \text{ er et reelt tal}) \wedge (1 \leq a < 2)\}$$

betegner altså den samme mængde. Hvis det klart fremgår på forhånd, at talen er om mængder af reelle tal, skriver man som regel blot $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$.

En mængdes elementer kan selv være mængder. Idet en ret linie kan opfattes som mængden af sine punkter, vil en mængde af rette linier være et eksempel herpå.

To mængder A og B siges at være lig med hinanden, og man skriver

$$A = B,$$

når de indeholder de samme elementer, d.v.s. når hvert element indeholdt i A også er indeholdt i B og omvendt. I logiske tegn kan dette skrives

$$\forall x \left((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B) \right).$$

Man har altså for eksempel:

$$\begin{aligned} \{a, b, c, d\} &= \{b, c, a, d\}, \\ \{p \mid p \text{ er et primtal og lige}\} &= \{2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{x \mid (x \text{ er et reelt tal}) \wedge (x^2 - 3x + 2 = 0)\} \\ &= \{r \mid (r \text{ er et rationelt tal}) \wedge (r^2 - 3r + 2 = 0)\} \\ &= \{1, 2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{x \mid (x \text{ er et reelt tal}) \wedge (\sin x = 0)\} \\ &= \{y \mid (y \text{ er et reelt tal}) \wedge (\cos 2y = 1)\} \\ &= \{z \mid \exists n ((n \text{ er et helt tal}) \wedge (z = n\pi))\}. \end{aligned}$$

At to mængder A og B ikke er lig med hinanden, er forskellige, d.v.s. at der findes mindst eet element i en af mængderne, som ikke tilhører den anden, skrives

$$A \neq B.$$

Om lighedstegnet bemærkes, at det benyttes her til at udtrykke, at to symboler er navne for den samme ting. Det er da klart, at der gælder følgende regler for dets brug:

Refleksivitet: Der gælder altid $A = A$.

Symmetri: Hvis $A = B$, gælder også $B = A$.

Transitivitet: Hvis $A = B$ og $B = C$, gælder også $A = C$.

I §1 blev lighedstegnet benyttet på en lidt anden måde, nemlig til at udtrykke at to sammensatte udsagn har overensstemmende sandhedstabeller, uden at udsagnene selv behøver at være identiske. Man overbeviser sig umiddelbart om, at de tre regler også gælder i dette tilfælde. De er også blevet benyttet stiltiende, idet det f. eks., ved en skrivemåde som $A = B = C$ er underforstået, at også $A = C$, hvilket netop er en benyttelse af transitiviteten.

*et udsagn
har ikke tabul
(der indlæses af
sagens form)*

Af formelle grunde er det hensigtsmæssigt at indføre begrebet tom mængde. Herunder forstås en mængde, der ikke indeholder noget element, f.eks. mængden af alle ligesidede, retvinklede trekanter i planen. Hvilkesomhelst to tomme mængder sættes lig hinanden, hvilket jo også harmoniserer med ovenstående definition af lighed, idet to tomme mængder indeholder de samme elementer, nemlig ingen. Man taler altså om den tomme mængde. Den betegnes med $\emptyset$. Man har altså f. eks.:

$$\{x \mid (x \text{ er et reelt tal}) \wedge (x^2 < 0)\} = \emptyset.$$

Det bemærkes, at det er nødvendigt at skelne mellem en mængde, der kun indeholder et element, og dette element selv, altså mellem $\{a\}$ og a . Mængden $\{\emptyset\}$, for eksempel, indeholder et element, nemlig $\emptyset$, medens $\emptyset$ selv ifølge definition ikke indeholder noget element. I mange tilfælde, hvor der ikke er fare for misforståelser, tillader man sig dog at skrive a i stedet for $\{a\}$.

En mængde A siges at være en delmængde af mængden B , når hvert element af A også tilhører B , i logiske tegn

$$\forall x ((x \in A) \Rightarrow (x \in B)).$$

Man skriver da

$$A \subseteq B \text{ eller } B \supseteq A$$

og siger da, at A er indeholdt i B , eller at B indeholder A . Det er vigtigt at lægge mærke til, at ifølge denne definition er enhver mængde delmængde af sig selv, altså at der for enhver mængde B gælder

$$B \subseteq B.$$

At mængden A ikke er en delmængde af mængden B , skrives $A \not\subseteq B$ eller $B \not\supseteq A$.

Dette betyder altså, at der findes mindst eet element i A , som ikke tilhører B .

Til en mængdes delmængder regnes også den tomme mængde, hvilket harmonerer med delmængdens definition, idet udsagnet

$$\forall x ((x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in B))$$

er sandt for enhver mængde B , da $x \in \emptyset$ jo er falsk for ethvert objekt x . Man har altså for hver mængde B

$$\emptyset \subseteq B.$$

Vil man udtrykke, at A er en ægte (eller egentlig) delmængde af B , d.v.s. en fra B selv forskellig delmængde, skriver man

$$A \subset B \text{ eller } B \supset A.$$

Dette er altså ensbetydende med, at A er delmængde af B og der findes mindst eet element af B , som ikke tilhører A . At A ikke er en ægte delmængde af B skrives $A \not\subset B$ eller $B \not\supset A$.

(Mange matematikere bruger ikke tegnene $\subseteq$ og $\supseteq$, men kun $\subset$ og $\supset$ til at betegne, at en mængde er en (ægte el-

ler ikke ægte) delmængde af en anden. At A er ægte delmængde af B må da skrives $A \subset B$, $A \neq B$. I det følgende bruges $\subseteq$ og $\supseteq$ for stedse at minde om, at $B \subseteq B$.)

For brugen af tegnet $\subseteq$ gælder nogle simple regler, der enten allerede er nævnt eller umiddelbart følger af definitionerne:

Refleksivitet: Der gælder altid $A \subseteq A$.

Antisymmetri: Hvis $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$, gælder
 $A = B$.

Transitivitet: Hvis $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$, gælder
 $A \subseteq C$.

Tilsvarende gælder naturligvis for $\supseteq$. Man lægger mærke til, at disse regler ganske svarer til den, der gælder for henholdsvis $\leq$ og $\geq$.

For $\subset$ og $\supset$ har man lidt afvigende regler, der svarer til dem, der gælder for $<$ og $>$.

Endeligt nævnes, at man af $A \subseteq B \subset C$ eller af $A \subset B \subseteq C$ kan slutte, at $A \subset C$.

Ud fra en given mængde A kan man danne en ny mængde, nemlig mængden af alle dens delmængder. Vi vil betegne den med $\mathcal{D}(A)$. Er f.eks.

$$A = \{a, b, c\},$$

fås

$$\mathcal{D}(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\} \}.$$

Opgaven at bestemme antallet af delmængder i en mængde A bestående af et endeligt antal n af elementer hænger nøje sammen med et kendt kombinatorisk problem. Man kan tænke sig, at elementerne af A er n pladser

$a_1, a_2, \dots, a_n$, som skal besættes med to slags brikker

(f. eks. hvide og sorte) eller, lad os sige med cifrene 0 og 1. Man spørger, på hvor mange forskellige måder dette kan gøres. Til hver fordeling af 0 og 1 på de n pladser svarer en bestemt delmængde af A , bestående af netop de pladser, som er besat med 1, og omvendt hører der til enhver delmængde af A en bestemt fordeling af 0 og 1, nemlig den, hvor delmængdens pladser er besat med 1 og de øvrige med 0; specielt svarer til den tomme mængde

de den fordeling, ved hvilken alle pladser er besat med 0. Heraf ses, at det omspurgte antal er lig med antallet af delmængder i A.

Lad der være givet en endelig mængde A bestående af n elementer $a_1, a_2, \dots, a_n$, og lad p betegne et bestemt af tallene $0, 1, \dots, n$. En delmængde af A bestående af p elementer plejer man at kalde en kombination af p elementer blandt de n . At bestemme antallet $K_{n,p}$ af disse kombinationer er altså ensbetydende med bestemmelsen af antallet af de delmængder af A, som hver består af p elementer.

Øvelser til kapitel I §2

- 1) Bestem antallet af delmængder af en mængde bestående af n elementer.
- 2) Vis ud fra definitionen af $K_{n,p}$ som antallet af de delmængder af en hvis mængde bestående af n elementer som indeholder p elementer, at der gælder følgende:

$$K_{n,p} = K_{n-1,p} + K_{n-1,p-1},$$

$$p K_{n,p} = n K_{n-1,p-1},$$

$$p K_{n,p} = (n-p+1) K_{n,p-1}.$$

Benyt en af disse formler til at vise, at

$$K_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p}.$$

3. Mængdealgebra.

Ved matematiske undersøgelser møder man hyppigt følgende situation: Der foreligger en mængde E , og man interesserer sig for delmængder af den. I plangeometrien, for eksempel, vil E være mængden af alle planens punkter og de geometriske figurer delmængder af den. Hvis man ikke viger tilbage for kunstige formuleringer, vil man endda kunne give enhver matematisk undersøgelse en sådan ramme. I denne paragraf tænkes derfor givet en mængde E , og der undersøges forskellige forbindelser mellem dennes delmængder. Mængden E kaldes universalmængden for undersøgelsen, idet der ses bort fra alt uden for den. Det vedtages for denne paragrafs vedkommende, at små latinske bogstaver betegner elementer af E , når andet ikke er fremhævet. Idet dette er underforstået, er $x \in E$ et udsagn, der er sandt for hvert x , og $x \notin E$ et udsagn, der er falsk for hvert x . Store latinske bogstaver betegner i denne paragraf altid delmængder af E . Vælger man som E mængden af planens punkter, og tænker man på delmængder begrænset af simple kurver, f. eks. på cirkelskiver, kan man anskueliggøre alle følgende betragtninger ved diagrammer.

Ud fra en mængde A kan der dannes en ny mængde, kaldet dens komplementarmængde eller komplement. Den består af alle de elementer af E , som ikke tilhører A . Den betegnes med $\bar{A}$. Man har altså

$$\bar{A} = \{x \mid \text{non}(x \in A)\} = \{x \mid x \notin A\}.$$

Ud fra to givne mængder A og B kan der dannes en ny mængde, som består af alle de elementer, der tilhører både A og B . Den kaldes fællesmængden (eller gennemsnittet) af A og B og betegnes med $A \cap B$. Dens definition kan skrives

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Endvidere kan man danne mængden af de elementer, som tilhører mindst en af mængderne A og B . Den kaldes de to mængders foreningsmængde og betegnes med $A \cup B$. Dens definition kan skrives

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

For de forskrifter til dannelse af nye mængder ud fra givne, som symboliseres ved tegnene $\bar{}$, $\cap$ og $\cup$, gælder følgende regler:

$$\overline{(\overline{A})} = A \quad (\bar{} \text{ er involutorisk})$$

$$\overline{(\emptyset)} = E, \quad \overline{(E)} = \emptyset$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

($\cap$ og $\cup$ er kommutative)

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

($\cap$ og $\cup$ er associative)

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

($\cap$ og $\cup$ er idempotente)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\cap \text{ er distributiv m.h.t. } \cup)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\cup \text{ er distributiv m.h.t. } \cap)$$

$$\emptyset \cap A = \emptyset, \quad E \cap A = A$$

$$E \cup A = E, \quad \emptyset \cup A = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \cup \overline{A} = E$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Det ses, at disse regler stemmer overens med dem, der gælder for udsagn, idet der til $\bar{}$, $\cap$, $\cup$ svarer henholdsvis non, $\wedge$, $\vee$. Denne overensstemmelse kunne sluttes af den måde, på hvilken de logiske forbindelser optræder i komplementærmængdens, fællesmængdens og foreningsmængdens definition.

Ifølge de associative love er der mening i at tale om fællesmængden $A \cap B \cap C$ og om foreningsmængden $A \cup B \cup C$ af tre mængder. De kan dog naturligvis også defineres direkte, nemlig henholdsvis som mængden af alle elementer af E , som tilhører alle tre mængder, og som mængden af de elementer af E , der tilhører mindst en af de tre mængder. Disse definitioner kan generaliseres til et vilkårligt, endeligt eller uendeligt antal mængder.

Lad Δ betegne en mængde af delmængder af E . Ved fællesmængden af mængderne tilhørende Δ forstås mængden af de elementer af E , der hvert tilhører alle mængder $A \in \Delta$.

I tegn

$$\begin{aligned}\bigcap_{A \in \Delta} A &= \{x \mid \forall A ((A \in \Delta) \Rightarrow (x \in A))\} \\ &= \{x \mid \forall A ((A \notin \Delta) \vee (x \in A))\}\end{aligned}$$

Ved foreningsmængden af mængderne tilhørende Δ forstås mængden af de elementer, der hvert tilhører mindst een af mængderne $A \in \Delta$. I tegn

$$\bigcup_{A \in \Delta} A = \{x \mid \exists A ((A \in \Delta) \wedge (x \in A))\}.$$

Hvis Δ består af endelig mange mængder $A_1, A_2, \dots, A_n$ eller af uendelig mange mængder, der danner en følge $A_1, A_2, \dots$, skrives fællesmængden og foreningsmængden også på følgende måder:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n,$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots,$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots,$$

hvor bogstavet i (lige som en summationsindex) kan erstattes med et vilkårligt andet, der ikke forekommer i den pågældende sammenhang. Det tilsvarende gælder for Δ i symbolerne $\bigcap_{A \in \Delta} A$ og $\bigcup_{A \in \Delta} A$.

For komplementarmængden af fællesmængden fås

$$\begin{aligned}\complement \bigcap_{A \in \Delta} A &= \{x \mid \text{non } \forall A ((A \in \Delta) \Rightarrow (x \in A))\} \\ &= \{x \mid \exists A ((A \in \Delta) \wedge (x \notin A))\} = \{x \mid \exists A ((A \in \Delta) \wedge (x \in \complement A))\}\end{aligned}$$

altså

$$\complement \bigcap_{A \in \Delta} A = \bigcup_{A \in \Delta} \complement A.$$

Tilsvarende findes

$$\complement \bigcup_{A \in \Delta} A = \bigcap_{A \in \Delta} \complement A.$$

Disse to formler, der generaliserer to ovenfor nævnte, kaldes af nogle forfattere de Morgans formler. Deres indhold kan, omend upræcist, gengives således: "Fællesmængdens komplement er komplementernes foreningsmængde" og "Foreningsmængdens komplement er komplementernes fællesmængde".

Det har vist sig at være hensigtsmæssigt at indføre en særlig betegnelse og et navn for mængden af de elementer af E , der tilhører en given mængde B , men ikke tilhører en given mængde A . Det ses, at denne mængde, der betegnes med $B \setminus A$ og kaldes overskudsmængden af B over A , differensmængden mellem B og A eller komplementet af A relativ til B , ikke er andet end fællesmængden af B og $\bar{A}$:

$$B \setminus A = \{x \mid (x \in B) \wedge (x \notin A)\} = B \cap \bar{A}.$$

Specielt haves

$$\bar{A} = E \setminus A$$

og

$$A \setminus A = A \setminus E = \emptyset.$$

Mellem de indførte mængdeoperationer $\bar{}$, $\cap$, $\cup$ og inklusionen $\subseteq$ består der nogle simple forbindelser.

Det er indlysende, at

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}.$$

Idet

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A),$$

fås

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow (\bar{B} \subseteq \bar{A}) \wedge (B \subseteq A) \\ &\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (\bar{A} \subseteq \bar{B}) \\ &\Leftrightarrow (\bar{B} \subseteq \bar{A}) \wedge (\bar{A} \subseteq \bar{B}). \end{aligned}$$

Man benytter sig hyppigt heraf i beviser for, at to på forskellig måde definerede mængder stemmer overens. "At bestemme et geometrisk sted" (en antikveret og overflødig glose) går ud på at vise at mængden A af punkter, der har en vis egenskab, også kan karakteriseres på anden måde, f. eks. som mængden B af punkter på en vis kurve. At vise f. eks., at hvert punkt, der har egenskaben, tilhører B , og at hvert punkt, der ikke har egenskaben, ligger udenfor B , vil sige at vise, at $A \subseteq B$ og $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

Af definitionerne følger, at der for vilkårlige delmængder A og B af E gælder

$$\emptyset \subseteq A \cap B \subseteq \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \subseteq A \cup B \subseteq E.$$

Tilsvarende gælder for fællesmængden og foreningsmængden af vilkårlig (endelig eller uendelig) mange mængder: hver af disse mængder indeholder fællesmængden og er indeholdt i foreningsmængden.

Hvis det for to mængder A og B gælder, at $A \cap B = \emptyset$, siges de at være disjunkte (eller elementfremmede). Vilkårlig (endelig eller uendelig) mange mængder siges at være parvis disjunkte eller bare disjunkte, når hvilket som helst to forskellige af dem er disjunkte.

Ved en overdækning af en mængde $M \subseteq E$ forstås en mængde Δ af delmængder af E, for hvilken

$$M \subseteq \bigcup_{A \in \Delta} A.$$

En overdækning Δ af M siges at være en klasseinddeling af M, når ingen af mængderne i Δ er tom, mængderne i Δ er disjunkte og $M = \bigcup_{A \in \Delta} A$.

De to sidste betingelser er ensbetydende med, at hvert element af M tilhører en og kun en af mængderne i Δ .

- 1) Lad universalmængden E være mængden af alle reelle tal.

a) Gør rede for, at

$$\{x \mid x^2 < 1\} = \{x \mid x < 1\} \cap \{x \mid x > -1\}.$$

Angiv et lignende udtryk for $\{x \mid x^2 \geq 1\}$.

b) Lad $a < b < c$ være givne reelle tal. Udtryk mængden

$$\{x \mid (x-a)(x-b)(x-c) > 0\}$$

ved mængder af formen

$$\{x \mid x \geq d\},$$

hvor d er et af tallene a , b eller c .

Angiv et lignende udtryk for komplementarmængden.

- 2) Lad E være mængden af punkter i planen.

Angiv for to givne punkter a og b mængden af de punkter p , hvis afstand pa fra a er mindre end afstanden pb fra b .

Lad der være givet en trekant abc og et punkt m .

Bestem mængden P af de punkter p i planen, for hvilke afstanden pm er mindre end hver af afstandene pa , pb , pc . Tegn figurer, der viser at P kan være tom, begrænset eller ubegrænset alt efter beliggenheden af m .

Giv en til definitionen af P svarende karakterisering af komplementarmængden til P .

- 3) Lad E være mængden af alle par (x, y) af reelle tal, og fortolk den som par af sædvanlige retvinklede koordinater for punkterne i planen. Angiv ved figurer mængderne

$$\{(x, y) \mid (x+y+1 > 0) \wedge (xy \geq 0)\},$$

$$\{(x, y) \mid (x \leq y) \vee (x^2 + y^2 < 1)\},$$

$$\{(x, y) \mid (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2) = 0\},$$

$$\{(x, y) \mid (x^2 + y^2 - 1)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 0\}.$$

- 4) Lad E være mængden af punkter i planen, og lad A og B være to cirkelbuer (f. eks. med rand), der har indre punkter fælles. Ved de to perimetre inddeles planen i 4 områder. Giv for hver af disse mængder en fremstilling ved A , B og tegnene $\complement$ og $\cap$.

Løs den tilsvarende opgave for tre cirkelskiver A , B og C .

- 5) Lad E være en endelig mængde. Antallet af elementer i en mængde $M \subseteq E$ betegnes med $n(M)$. Lad A , B og C være vilkårlige delmængder af E ; hvilken relation består da mellem antallene $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$ og $n(A \cup B)$?
 Hvordan udtrykkes $n(B \setminus A)$ ved disse tal?
 Er tallene $n(A \cup B \cup C)$, $n(A \cap (B \cup C))$, $n(A \cup (B \cap C))$ bestemt, når tallene $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$, $n(A \cap B)$, $n(B \cap C)$, $n(C \cap A)$ og $n(A \cap B \cap C)$ er givne? Når desuden $n(E)$ er givet?
 Angiv i bekræftende fald fremstillinger af dem ved de givne tal.
- 6) Om resultatet af en eksamination bestående af tre prøver α , β og γ , der skal bestås hver for sig, foreligger følgende oplysninger: Af ialt 100 eksiminanter har 86 bestået α , 82 har bestået β , og 76 har bestået γ . Endvidere har 16 ikke bestået hverken β eller γ , 13 hverken γ eller α , 12 hverken α eller β , og 11 har ikke bestået nogen af prøverne. Hvor mange har bestået alle tre prøver?
- 7) Verificer ved hjælp af diagrammer de ikke helt oplagte blandt reglerne for $\cap$ og $\cup$ (side I, 3, 2). Eftervis med benyttelse af den logiske algebra gyldigheden af en af de distributive love samt af $\overline{C(A \cap B)} = \overline{C(A)} \cup \overline{C(B)}$ og $\overline{C(A \cup B)} = \overline{C(A)} \cap \overline{C(B)}$. Udled ved hjælp af en af de to sidstnævnte regler den anden distributive lov.
- 8) Både $A \setminus (B \cap C)$ og $A \setminus (B \cup C)$ kan bestemmes når $A \setminus B$ og $A \setminus C$ kendes. Hvorledes?
- 9) Verificer ved hjælp af diagrammer og bevis ved hjælp af reglerne på side I, 3, 2 den eller de rigtige blandt ligningerne
- $$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$
- $$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C),$$
- $$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C).$$
- (Overstreg på dette blad den eller de forkerte ligninger.)

10) Vis, at

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \setminus B = \emptyset) \\ \Leftrightarrow (B \supseteq A),$$

og at

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \cup B = A \cap B).$$

- 11) In a very hotly fought battle, at least 70 per cent of the combatants lost an eye, at least 75 per cent an ear, at least 80 per cent an arm, at least 85 per cent a leg. How many lost all four members? (Opgaven skyldes Lewis Carroll, forfatteren til "Alice in Wonderland", lektor i matematik i Oxford.)
- 12) En fabrik producerer tre slags varer, α , β , γ . I løbet af et bestemt år har 70% af fabrikkens kunder købt α , 60% har købt β , og 80% har købt γ . Endvidere vides det, at 40% har købt både α og β , og 50% har købt både β og γ . Vis, at mindst 30% har købt alle tre varer. Procenttallet af de kunder, der ikke har købt nogen af varerne, kan ikke overstige en vis værdi r . Bestem det mindste tal r , for hvilket dette er rigtigt.
- 13) Lad E være mængden af reelle tal. Bestem mængderne $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid 0 < x \leq \frac{1}{n}\}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid \frac{1}{n} \leq x < \frac{n-1}{n}\}$.
- 14) Lad E være mængden af alle reelle talpar fortolket som par af retvinklede koordinater for punkterne i planen, og lad t betegne et reelt tal. Bestem fællesmængden og foreningsmængden for hver af følgende mængder Δ af punktmængder:
- a) Mængden af alle cirkellinier med radius 1 og centrum på x -aksen,

$$\Delta = \{A \mid \exists t (A = \{(x, y) \mid (x-t)^2 + y^2 = 1\})\}.$$
- b) Mængden af alle cirkelskiver, hvis perimetere går gennem punkterne $(0, 1)$ og $(0, -1)$,

$$\Delta = \{A \mid \exists t (A = \{(x, y) \mid x^2 - 2tx + y^2 \leq 1\})\}.$$
- c) For hvert positivt tal t bestemmer uligheden $tx + y/t \geq 1$ en halvplan. Lad Δ være mængden af alle disse halvplaner,

$$\Delta = \{A \mid \exists t ((t > 0) \wedge (A = \{(x, y) \mid tx + y/t \geq 1\}))\}.$$

§ 4. Afbildninger (funktioner).

Lad A og B være to mængder (ikke nødvendigvis forskellige). En forskrift, der til hvert element $x \in A$ lader svare eet bestemt element $y \in B$, kaldes en afbildning af A ind i B eller en funktion fra A til B . (Glossen "funktion" foretrækkes især, når B er en mængde af tal.) En afbildning (funktion) betegnes i reglen med et enkelt bogstav, i nogle tilfælde også med ordforkortelser (log, exp, sin, arctg, ...). Betegner f en afbildning af A ind i B , skrives

$$f:A \text{ ind i } B \quad \text{eller} \quad f:A \rightarrow B \quad \text{eller} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

Mængden A kaldes afbildningens (funktionens) definitions-mængde og B dens dispositionsmængde. Det til et element $x \in A$ svarende element af B betegnes med $f(x)$, undertiden også med andre symboler, som vi vil blive omtalt senere. Det kaldes billedelementet af x eller den til x svarende funktionsværdi. At $f(x)$ svarer til x skrives også hyppigt

$$x \rightarrow f(x).$$

(Denne brug af pilen har naturligvis ikke noget med konvergens at gøre.) Mængden af alle billedelementer (funktionsværdier) kaldes billedmængden (værdimængden) og betegnes med $f(A)$. Den er en (ægte eller uægte) delmængde af dispositionsmængden B .

To afbildninger $f:A \text{ ind i } B$ og $g:A \text{ ind i } B$ siges at være lig med hinanden, at stemme overens, når $f(x) = g(x)$ for hvert element $x \in A$.

Er A' en delmængde af A , vil der med $f:A \text{ ind i } B$ tillige være givet en afbildning af A' ind i B , som kaldes restriktionen af f til A' . I reglen giver det ikke anledning til misforståelser, når denne også betegnes med f . Man skriver altså $f:A' \text{ ind i } B$.

Er B' en fra B forskellig mængde, som også indeholder $f(A)$ som delmængde, vil der med $f:A \text{ ind i } B$ tillige være givet en afbildning af A ind i B' . Den kan i reglen betegnes med $f:A \text{ ind i } B'$ uden fare for misforståelser.

En afbildning $f:A \text{ ind i } B$, ved hvilken der til alle elementer af A svarer et og samme element af B , siges at være konstant.

Eksempler:

Lad $\mathbb{R}$ betegne mængden af alle reelle tal. De fra den elementære differential- og integralregning kendte funktioner er afbildninger af en mængde $A \subseteq \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$. Definitionsmængden A er hyppigt en ægte delmængde af $\mathbb{R}$, nemlig et interval eller foreningsmængden af disjunkte intervaller. Værdimængden $f(A)$ kan være en ægte delmængde af $\mathbb{R}$. Som dispositionsmængde kan da i stedet for $\mathbb{R}$ eksempelvis vælges $f(A)$ eller en vilkårlig anden mængde B , for hvilken $f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$.

Lad A være mængden E_2 af alle punkter i planen og $M \subseteq E_2$ en ret linie. Lader man til hvert punkt $p \in E_2$ svare dets retvinklede projektion på linien M , fås en afbildning $f: E_2$ ind i E_2 eller $f: E_2$ ind i M . Er $L \subseteq E_2$ en anden ret linie, vil restriktionen af f til L være en afbildning $f: L$ ind i M .

Lad $\mathbb{N}$ betegne mængden af de naturlige tal $1, 2, \dots$, og lad B være en vilkårlig mængde. En afbildning $f: \mathbb{N}$ ind i B kaldes en følge af elementer af B . Det til et naturligt tal n svarende element $f(n)$ plejer man at betegne med et bogstav forsynet med mærketallet n for neden, f. eks. $f(n) = b_n$. Hele afbildningen, altså følgen, angives da ved $(b_1, b_2, \dots)$ eller $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eller (b_n) , $n = 1, 2, \dots$. Det er nødvendigt at skelne mellem en følge af elementer $(b_1, b_2, \dots)$ og mængden $\{b_1, b_2, \dots\}$ af disse elementer. (For følgen $n \rightarrow (-1)^n$ vil mængden af dens elementer være $\{-1, 1\}$.) Eftersom B er en mængde af tal, punkter, funktioner o.s.v., taler man om talfølger, punktfølger, funktionsfølger os.v. Er A en uendelig delmængde af $\mathbb{N}$, kaldes restriktionen af f til A for en delfølge af følgen $f: \mathbb{N}$ ind i B .

Lad A være den endelige mængde $\{1, 2, \dots, m\}$, hvor m betegner et naturligt tal, og B en vilkårlig mængde. Enhver afbildning af A ind i B kaldes et m-sæt af elementer af B og betegnes f. eks. med $(b_1, b_2, \dots, b_m)$. Koordinatparret for et punkt i planen kan altså opfattes som en afbildning af mængden $\{1, 2\}$ ind i $\mathbb{R}$.

Lad $A \subseteq \mathbb{R}$ betegne intervallet $a \leq t \leq b$. Mængden af alle kontinuerte funktioner $\varphi: A$ ind i $\mathbb{R}$ betegnes med $\mathcal{C}(A)$. Ved til φ at lade svare funktionen $\int_a \varphi(t) dt \in \mathcal{C}(A)$

defineres en afbildning af $\mathcal{C}(A)$ ind i $\mathcal{C}(A)$. Ved til φ at lade svare tallet $\int_a^b \varphi(t) dt$ defineres en afbildning af $\mathcal{C}(A)$ ind i $\mathbb{R}$.

Lad $A \subseteq \mathbb{R}$ betegne intervallet $a \leq t \leq b$ og E_2 mængden af punkter i planen forsynet med et retvinklet koordinatsystem. Lad endvidere φ og ψ være kontinuerte funktioner fra A til $\mathbb{R}$. Ved $t \rightarrow (\varphi(t), \psi(t))$ defineres da en afbildning af A ind i E_2 , der kaldes en parameterfremstilling for en kontinuert kurve. (Fortolkes t som tiden, kan afbildningen siges at fremstille et punkts kontinuerbe bevægelse i planen.)

Lad E_2 igen være mængden af punkter i planen forsynet med et retvinklet koordinatsystem. Idet a og b er givne reelle tal, fås en afbildning af E_2 ind i E_2 , en "translation" (parallelforskydning) af E_2 ved til punktet (x, y) at lade svare punktet $(x+a, y+b)$. En anden afbildning af E_2 ind i E_2 , en "homoteti" (multiplikation), fås ved til (x, y) at lade svare (mx, my) , hvor m er et givet reelt tal.

Lad E være en vilkårlig mængde og A en af dens delmængder. Ved dennes karakteristiske funktion forstås funktionen $\chi_A: E$ ind i $\{0, 1\}$ defineret ved

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in A \\ 0 & \text{hvis } x \notin A \end{cases}.$$

Ved til hver delmængde af E at lade svare dens karakteristiske funktion fås en afbildning af mængden $\mathcal{D}(E)$ af delmængder af E ind i mængden X_E af funktioner fra E til $\{0, 1\}$. Omvendt, er der givet en sådan funktion $\chi: E$ ind i $\{0, 1\}$, kan man til denne lade svare mængden af de elementer x af E , for hvilke $\chi(x) = 1$. Derved fås en afbildning af X_E ind i $\mathcal{D}(E)$.

Lad der være givet tre mængder A , B , C og afbildninger $f: A$ ind i B og $g: B$ ind i C . Man kan da definere en afbildning af A ind i C ved til elementet $x \in A$ at lade svare elementet $g(f(x))$ af C . Denne af f og g sammensatte afbildning betegnes med $g \circ f$ (når forveksling med et produkt er udelukket, også med gf). I tegn

$$g \circ f: A \text{ ind i } C \quad \text{eller} \quad x \rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Er A, B, C, D mængder og $f:A \text{ ind i } B, g:B \text{ ind i } C, h:C \text{ ind i } D$ afbildninger, kan man danne afbildningerne

$$h \circ (g \circ f): A \text{ ind i } D \quad \text{og} \quad (h \circ g) \circ f: A \text{ ind i } D.$$

For den første fås, idet $x \in A$,

$$x \rightarrow ((h \circ g) \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))),$$

og for den anden

$$x \rightarrow ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$

altså det samme. Følgelig kan vi skrive

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f.$$

For sammensætning af afbildninger gælder den associative lov.

Er der givet afbildninger $f:A \text{ ind i } B$ og $g:B \text{ ind i } C$, kan man i almindelighed ikke danne $f \circ g$. Dette vil være muligt, hvis $C \subseteq A$. Idet g da kan opfattes som en afbildning af $B \text{ ind i } A$, har man $g \circ f:A \text{ ind i } A$ og $f \circ g:B \text{ ind i } B$. Almindeligvis er altså disse to afbildningers definitionsmængder indbyrdes forskellige, og alene af denne grund kan afbildningerne ikke stemme overens. Men også hvis $A = B = C$, således at $g \circ f:A \text{ ind i } A$ og $f \circ g:A \text{ ind i } A$, vil de i almindelighed være forskellige. Den kommutative lov gælder ikke for sammensætning af afbildninger. Eksempler, der viser dette, dannes let ved hjælp af elementære funktioner. Hvis det for to afbildninger $f:A \text{ ind i } A$ og $g:A \text{ ind i } A$ gælder, at $g \circ f = f \circ g$, d.v.s. $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ for hvert element $x \in A$, siges de at være ombyttelige.

Blandt afbildningerne af en mængde $A \text{ ind i } A$ sig selv fremhæves den identiske afbildning e_A , ved hvilken hvert element $x \in A$ svarer til sig selv: $x \rightarrow x$. For hver afbildning $f:A \text{ ind i } A$ gælder

$$f \circ e_A = e_A \circ f = f.$$

En afbildning $f:A \text{ ind i } A$ kan sammensættes med sig selv. Man får da en ny afbildning $f \circ f:A \text{ ind i } A$. Denne kan igen sammensættes med f . På grund af den associative lov bliver resultatet $f \circ f \circ f$ uafhængigt af "fra hvilken af siderne" det sker. På denne måde kan man fortsætte og får da efter i alt $p-1$ sammensætninger, hvor p er et naturligt tal, afbildningens p -te itererede eller p -te potens

$$f^{\circ p} = f \circ f \circ \dots \circ f \quad (p \text{ "faktorer"}).$$

Når forveksling med en sædvanlig potens er udelukket, skrives simpelthen f^p . Som for potenser af tal indses

(med gentagen benyttelse af den associative lov), at der for vilkørsomhelst naturlige tal p og q gælder, at

$$f^{\circ p} f^{\circ q} = f^{\circ (p+q)} .$$

Det er indlysende, at to itererede af den samme afbildning er ombyttelige. Af formelle grunde er det hensigtsmæssigt at definere

$$f^{\circ 0} = e_A .$$

"Potensreglen" gælder da for $p \geq 0$, $q \geq 0$.

Det kan hændes, at den anden itererede $f^{\circ 2}$ af en afbildning $f:A$ ind i A stemmer overens med f selv:

$$f^{\circ 2} = f .$$

Da gælder $f^{\circ p} = f$ for $p > 0$, og afbildningen kaldes idempotent. Det er klart, at den identiske afbildning samt enhver konstant afbildning af A ind i A er idempotent. Men der findes mindre oplagte vigtige eksempler. Her kan nævnes den ovenfor omtalte projektion af planens punkter på en ret linie.

En fra den identiske forskellig afbildning $f:A$ ind i A kaldes involutorisk eller en involution, når

$$f^{\circ 2} = e_A .$$

Eksempler på involutioner er: den ved $x \rightarrow -x$ definerede afbildning af $\mathbb{R}$ ind i sig selv, den ved $x \rightarrow 1/x$ definerede afbildning af $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ind i sig selv, den ovenfor omtalte homoteti af planen E_2 , når $m = -1$.

Når der foreligger en afbildning $f:A$ ind i B , kan man til hver delmængde A' af A lade svare dens billede, altså en delmængde af $f(A)$ og dermed af B . Afbildningen f bestemmer altså en afbildning af $\mathfrak{D}(A)$ ind i $\mathfrak{D}(B)$. Uheldigvis er det sædvane at betegne også denne afbildning med f og følgelig den til $A' \subseteq A$ svarende delmængde af B med $f(A')$ (i overensstemmelse med den allerede indførte betegnelse $f(A)$ for billedmængden ved $f:A$ ind i B). Afbildningen $f:\mathfrak{D}(A)$ ind i $\mathfrak{D}(B)$ vil vi kalde den til $f:A$ ind i B hørende mængdeafbildning. Bemærk, at for $x \in A$ er

$$f(\{x\}) = \{f(x)\} ,$$

hvor f på højre side står for den oprindelige afbildning og på venstre side for den tilhørende mængdeafbildning. (Her udelades i reglen de krøllede parente-

ser; det må da slutes af sammenhængen, om talen er om den ene eller den anden afbildning f .)

Ved en afbildning $f:A$ ind i B bestemmes også en afbildning af $\mathcal{D}(B)$ ind i $\mathcal{D}(A)$, nemlig ved til delmængden B' af B at lade svare den (muligvis tomme) mængde af alle de elementer x af A , hvis billedelement $f(x)$ hører til B' . Denne afbildning betegnes med $f^{\circ-1}$ (eller i reglen blot med f^{-1}). Vi har altså

$f^{\circ-1}:\mathcal{D}(B)$ ind i $\mathcal{D}(A)$, $f^{\circ-1}(B') = \{x \mid f(x) \in B'\}$. Delmængden $f^{\circ-1}(B')$ af A kaldes den til $B' \subseteq B$ hørende originalmængde. I stedet for $f^{\circ-1}(\{y\})$ skrives i reglen $f^{\circ-1}(y)$, men det er vigtigt at gøre sig klart, at $f^{\circ-1}$ i almindelighed ikke kan fortolkes som en afbildning af B ind i A . Ved til elementet $y \in f(A)$ at lade svare originalmængden $f^{\circ-1}(\{y\}) = f^{\circ-1}(y)$ til $\{y\}$ fås en afbildning af $f(A)$ ind i $\mathcal{D}(A)$.

Mængden af originalmængderne $f^{\circ-1}(y)$ til elementerne $y \in f(A)$ (bedre delmængderne $\{y\}$ af $f(A)$) danner en klasseinddeling af A . Ingen af disse mængder er nemlig tom, idet $y \in f(A)$ netop betyder, at der findes mindst eet $x \in A$, for hvilket $f(x) = y$. Endvidere tilhører hvert element $x \in A$ en af mængderne $f^{\circ-1}(y)$, nemlig $f^{\circ-1}(f(x))$. Og endelig er $f^{\circ-1}(y_1) \cap f^{\circ-1}(y_2) = \emptyset$, når $y_1 \neq y_2$, idet et fælles element af de to mængder ville have forskellige billedelementer y_1 og y_2 ved f , hvilket strider mod afbildningens definition.

Hvis det for en afbildning $f:A$ ind i B gælder, at billedmængden $f(A)$ udgør hele dispositions mængden B , hvis altså $f(A) = B$, siges den at være en afbildning af A på B , og man skriver

$$f:A \text{ på } B.$$

Det fremgår heraf, at man i dette symbol ^{Kan} ~~må~~ erstatte "på" med "ind i", idet det sidste jo siger mindre om afbildningen, men i almindelighed ikke omvendt. Enhver afbildning $f:A$ ind i B kan dog betragtes som en afbildning af A på $f(A)$.

Øvelser til kap. I, 4.

- 1) Lad A og B være delmængder af en universalmængde E og χ_A og χ_B deres karakteristiske funktioner. Find, udtrykt ved disse, de karakteristiske funktioner $\chi_{\bar{A}}$, $\chi_{A \cap B}$, $\chi_{A \cup B}$, og $\chi_{A \setminus B}$.
- 2) Vis, at to vilkårlige translationer f_1 og f_2 af planen E_2 givet ved $(x, y) \rightarrow (x+a_1, y+b_1)$ og $(x, y) \rightarrow (x+a_2, y+b_2)$ er ombyttelige. Bestem det punkt, der svarer til (x, y) ved afbildningen $f_2 \circ f_1^{p_1}$, hvor p_1 og p_2 er naturlige tal, og vis derved, at denne afbildning også er en translation. Løs den samme opgave for homotetierne g_1 givet ved $(x, y) \rightarrow (m_1 x, m_1 y)$ og g_2 givet ved $(x, y) \rightarrow (m_2 x, m_2 y)$. Vis, at f_1 og g_1 kun er ombyttelige, når mindst een af dem er den identiske afbildning.
- 3) Vis, at der ved
- $$(x, y) \rightarrow \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$
- bestemmes en afbildning f af $E_2 \setminus \{(0, 0)\}$ på sig selv, som er involutorisk. Søg en geometrisk beskrivelse af afbildningen (som kaldes inversion i enhedscirklen). Lad $C \subseteq E_2$ betegne en cirkellinie, der ikke går gennem $(0, 0)$. Vis, at $f(C)$ også er en cirkellinie. Angiv også billedet af den ved C begrænsede cirkelskive.
- 4) Lad $f: \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ betegne den ved $x \rightarrow x^2$ bestemte funktion. Find $f^{o p}$, hvor p er et naturligt tal, samt originalmængderne $f^{o-1}(\{y \mid -2 < y < 4\})$ og $f^{o-1}(\{y \mid 4 \leq y \leq 9\})$
- 5) Lad $f: \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ betegne funktionen $\sin$. Angiv originalmængderne $f^{o-1}(y)$ for $y = 0, \frac{1}{2}, -2$. Løs den tilsvarende opgave for funktionens restriktion til intervallet $\{x \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$

- 6) Lad A være mængden af alle i et interval $J = \{t \mid a < t < b\}$ vilkårlig ofte differentiable funktioner $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$. Lad $f: A \rightarrow A$ være bestemt ved $\varphi \rightarrow \varphi'$. Angiv den funktion, der svarer til φ ved $f^{\circ p}$, hvor p er et naturligt tal, samt originalmængden $f^{\circ -1}(\psi)$ til $\psi \in A$.

- 7) For den til en afbildning $f: A \rightarrow B$ hørende mængdeafbildning gælder, når A' og A'' betegner vilkårlige delmængder af A , at

$$f(A' \cup A'') = f(A') \cup f(A'').$$

$$f(A' \cap A'') \subseteq f(A') \cap f(A'').$$

$$f(A' \setminus A'') \supseteq f(A') \setminus f(A'').$$

Vis ved angivelse af eksempler, at inklusionstegnene i de to sidste relationer ikke kan erstattes med lighedstegn.

- 8) Med de samme betegnelser som i forrige opgave gælder for vilkårlige delmængder B' og B'' af B , at

$$f^{\circ -1}(B' \cup B'') = f^{\circ -1}(B') \cup f^{\circ -1}(B''),$$

$$f^{\circ -1}(B' \cap B'') = f^{\circ -1}(B') \cap f^{\circ -1}(B''),$$

$$f^{\circ -1}(B' \setminus B'') = f^{\circ -1}(B') \setminus f^{\circ -1}(B''),$$

$$f^{\circ -1}(f(A')) \supseteq A',$$

$$f(f^{\circ -1}(B')) \subseteq B'.$$

Bevis disse relationer, og at der gælder lighed i den sidste inklusion når f er en afbildning af A på B .

- 9) Lad $f: E_2 \rightarrow E_2$ betegne afbildningen der til (x, y) lader svare $(x^2 - y^2, 2xy)$.

Vis, at f er en afbildning af E_2 på E_2 .

Find billedmængderne til følgende mængder:

x -aksen, y -aksen, mængden $\{(x, y) \mid (y \geq 0) \wedge (x \geq y)\}$, linierne $x = 1$ og $y = 1$ og halvplanerne $x > 1$ og $y \leq 1$.

Find originalmængderne ved f til følgende mængder:

linierne $x = 1$ og $y = 1$, halvplanerne $x > 1$ og $y \leq 1$ samt kvadranten $x \leq 0, y \geq 0$.

§ 5. Enentydige afbildninger. Numerable mængder.

En afbildning $f:A \text{ ind i } B$ siges at være enentydig, i tegn 1-1, når to forskellige elementer af A altid har forskellige billedelementer, altså, når

$$\forall_A x_1 \forall_A x_2 ((x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))) ,$$

(hvor der for korthedens skyld er sat A som index til kvantorerne, for at udtrykke, at udsagnet vedrører elementerne tilhørende A). Idet udsagnet $p \Rightarrow q$ er ensbetydende med $\text{non } q \Rightarrow \text{non } p$, kan man erstatte ovenstående udsagn med

$$\forall_A x_1 \forall_A x_2 ((f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)) ,$$

altså med, at to elementer af A stemmer overens, når de har samme billedelement. Dette kan også udtrykkes således: For hvert element $y \in B$ indeholder originalmængden $f^{\circ-1}(y)$ højst eet element, d.v.s. den er tom eller den består af netop eet element af A . Det sidste tilfælde foreligger, når og kun når $y \in f(A)$.

Er $f:A \text{ ind i } B$ (1-1) og $g:B \text{ ind i } C$ (1-1), vil $g \circ f$ være en enentydig afbildning af A ind i C . Af $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ følger nemlig, at $f(x_1) = f(x_2)$, da g er 1-1, og deraf, at $x_1 = x_2$, da f er 1-1.

Når der foreligger en enentydig afbildning $f:A \text{ ind i } B$, kan man definere en afbildning af $f(A)$ på A ved til $y \in f(A)$ at lade svare det entydig bestemte element af A , der udgør originalmængden $f^{\circ-1}(y)$. Idet dette element også betegnes med $f^{\circ-1}(y)$, kan man skrive

$$f^{\circ-1}:f(A) \text{ på } A, \quad y \mapsto f^{\circ-1}(y).$$

Afbildningen kaldes den til f inverse eller omvendte.

Det er klart, at den også er enentydig, idet to forskellige elementer af $f(A)$ ikke kan have samme original-element.

Idet det til $y \in f(A)$ ved den inverse afbildning svarende element $f^{\circ-1}(y)$ af A ifølge definition er det element af A , hvis billede ved f er y , gælder

$$f(f^{\circ-1}(y)) = y \quad \text{for } y \in f(A),$$

altså

$$f \circ f^{\circ-1} = e_{f(A)} .$$

Er $x \in A$, vil det til $f(x)$ ved den inverse afbildning svarende element være det, hvis billede ved f er $f(x)$,

altså x . Følgelig gælder

$$f^{\circ-1}(f(x)) = x \quad \text{for } x \in A,$$

altså

$$f^{\circ-1} \circ f = e_A.$$

Den til $f^{\circ-1}:f(A)$ på A inverse afbildning er $f:A$ på $f(A)$.

Er f en afbildning af A på B , altså $f(A) = B$, vil $f^{\circ-1}$ være en afbildning af B på A . Hvis der findes en enentydig afbildning af en mængde A på en mængde B , siges de to mængder at være lige mægtige (eller ækvivalente), og man skriver

$$A \sim B.$$

Det er klart, at denne relation mellem to mængder er

refleksiv: $A \sim A$,

idet e_A er en enentydig afbildning af A på A ,

symmetrisk: hvis $A \sim B$, da gælder $B \sim A$,

idet $f^{\circ-1}:B$ på A (1-1), når $f:A$ på B (1-1), og

transitiv: hvis $A \sim B$ og $B \sim C$, da gælder $A \sim C$;

thi hvis $f:A$ på B (1-1) og $g:B$ på C (1-1), vil $g \circ f$ være en enentydig afbildning af A på C . På grund af den symmetri, med hvilken A og B optræder her, plejer man om to lige mægtige mængder også at sige, at der består en enentydig korrespondance imellem dem, hvorved det så er ligegyldigt, om man tænker på afbildningen f eller dens inverse.

At to endelige mængder er lige mægtige, er ensbetydende med, at de indeholder det samme antal elementer. At tælle elementerne i en endelig mængde A består jo i at etablere en enentydig korrespondance mellem A og en vis mængde af naturlige tal $\{1, 2, \dots, n\}$. Dette kan naturligvis ske på mange forskellige måder, men det er en forudsætning for, at vi overhovedet kan tale om antallet af elementer i en endelig mængde, at tallet n forbliver det samme, hvordan denne korrespondance end vælges. ER nu $A \sim B$ og $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$, har vi også $B \sim \{1, 2, \dots, n\}$ på grund af ækvivalensrelationens symmetri og transitivitet. Omvendt, er A og B lige mægtige med samme tal-mængde $\{1, 2, \dots, n\}$, er de indbyrdes lige mægtige på grund af ækvivalensrelationens transitivitet og symmetri.

Heraf kan sluttet, at en endelig mængde A og en ægte delmængde A' af den ikke kan være lige mægtige. Antag, at $A' \sim A$ og at $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$. Da ville man også have $A' \sim \{1, 2, \dots, n\}$, d.v.s. der fandtes en enentydig afbildning af A' på $\{1, 2, \dots, n\}$. Men da der findes elementer i A , som ikke tilhører A' , kunne man lade disse svare til $n+1, n+2, \dots, m$ og derved få en enentydig korrespondance mellem A og $\{1, 2, \dots, n\}$, hvor $n > n$, i strid med $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$.

Helt anderledes forholder det sig med uendelige mængder. Idet vi til hvert helt tal p lader svare tallet $2p$, får vi en enentydig korrespondance mellem mængden $\mathbb{Z}$ af alle hele tal og mængden af alle lige tal, der jo er en ægte delmængde af $\mathbb{Z}$. Dette lægger det nær at spørge om alle uendelige mængder er indbyrdes lige mægtige. Svaret herpå er negativt.

En mængde A siges at være numerabel (eller tællelig), når den og mængden $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ af naturlige tal er lige mægtige, d.v.s., når der findes en enentydig afbildning af $\mathbb{N}$ på A , med andre ord, når der findes en følge af elementer af A , hvori hvert element af A forekommer en og kun een gang. Eksepler på numerable mængder er $\mathbb{N}$ selv naturligvis, mængden $\mathbb{Z}$ af alle hele tal, idet $(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots)$ er en følge med den nævnte egenskab, mængden af alle rationale tal (jfr. opgaverne), endvidere enhver uendelig delmængde af en numerabel mængde. For at indse dette antages, at den numerable mængde A er skrevet som en følge $(a_1, a_2, \dots)$, hvori hvert element forekommer en og kun een gang. Lad a_{n_1} være det første element, der tilhører den givne uendelige delmængde A' af A , a_{n_2} det første element efter a_{n_1} , som tilhører A' , a_{n_3} det første element efter a_{n_2} , som tilhører A' , o.s.v. Dette kan ikke ende, da A' er uendelig. Lader man nu a_{n_1} svare til 1, a_{n_2} til 2 o.s.v., fås en enentydig afbildning af $\mathbb{N}$ på A' .

Vi har altså:

Enhver delmængde af en numerabel mængde er højst numerabel, d.v.s. numerabel eller endelig (hvorved den tomme mængde regnes til de endelige).

Lad der være givet en vilkårlig uendelig mængde A . Et vilkårligt valgt element af A betegnes med a_1 , et vilkårligt valgt element af $A \setminus \{a_1\}$ betegnes med a_2 , et vilkårligt valgt element af $A \setminus \{a_1, a_2\}$ betegnes med a_3 , ..., et vilkårligt valgt element af $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ med a_{n+1} . Dette kan fortsættes ubegrænset, thi ingen af mængderne $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kan være tom, da A er uendelig. På denne måde fås en følge af indbyrdes forskellige elementer af A . Idet mængden af en sådan følges elementer er numerabel, har vi:

Enhver uendelig mængde har numerable delmængder.

Et eksempel på en ikke numerabel uendelig mængde er $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, mængden af alle delmængder af naturlige tal. For at bevise dette bemærkes, at der består en enentydig korrespondance mellem delmængderne af $\mathbb{N}$ og deres karakteristiske funktioner (side I, 4, 3). Mængden $(\mathbb{N})$ og mængden $X_{\mathbb{N}}$ af karakteristiske funktioner er altså lige mægtige. Påstanden vil altså følge, når det er vist, at $X_{\mathbb{N}}$ ikke er numerabel. Lad $\chi_1, \chi_2, \dots$ være en vilkårlig følge af karakteristiske funktioner. Hver af dem er en følge bestående af 0 og 1. Indføres betegnelsen (x_{in}) , $n=1, 2, \dots$, for χ_i , kan man stille følgen af følger op i et skema:

$$\begin{array}{lcl} \chi_1 & : & (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots) \\ \chi_2 & : & (x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots) \\ \chi_3 & : & (x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots) \\ & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Idet hvert x_{in} er lig med 0 eller 1, gælder dette også for $1-x_{in}$. Vi betragter nu følgen

$$\chi : (1-x_{11}, 1-x_{22}, 1-x_{33}, \dots).$$

Den er ifølge det sagte også en karakteristisk funktion

defineret i $\mathbb{N}$. Den kan ikke stemme overens med nogen af følgerne $x_1, x_2, \dots$, thi den afviger fra x_1 i hvert fald i det første element, fra x_2 i det andet, fra x_3 i det tredje o.s.v. Ved denne såkaldte Cantors diagonalmetode fås altså følgende resultat: Ikke nogen følge af karakteristiske funktioner fra $X_{\mathbb{N}}$ kan indeholde dem alle, og dette betyder netop, at $X_{\mathbb{N}}$ (og dermed $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) ikke er numerabel. Heraf kan sluttes:

Mængden $\mathbb{R}$ af alle reelle tal er ikke numerabel.

Dette følger af eksistensen af en enentydig afbildning $f: X_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$. Man har da nemlig $X_{\mathbb{N}} \sim f(X_{\mathbb{N}})$, hvilket viser, at $\mathbb{R}$ har en ikke numerabel delmængde, og dermed at $\mathbb{R}$ ikke kan være numerabel. En sådan afbildning fås ved til funktionen $\chi: (x_1, x_2, \dots)$ fra $X_{\mathbb{N}}$ at lade svare det reelle tal, der fremstilles ved den uendelige decimalbrøk $0, x_1 x_2 \dots$. Da to forskellige decimalbrøker, der kun indeholder cifrene 0 og 1, fremstiller forskellige reelle tal, er afbildningen enentydig.

En mængde, der er ækvivalent med mængden $\mathbb{R}$ siges at have kontinuets mægtighed. Af det sagte fremgår, at $\mathbb{R}$ har såvel delmængder, som har kontinuets mægtighed, som numerable og endelige delmængder. Det er et berømt uløst problem, kontinuitetsproblemet, om enhver delmængde af $\mathbb{R}$ hører til en af de tre nævnte kategorier. På den anden side kan man vise, at der findes uendelige mængder, som hverken er numerable eller af kontinuets mægtighed. En sådan er mængden af alle funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Mængden E_1 af punkter på en ret linie har kontinuets mægtighed. At der findes en enentydig korrespondance mellem mængden af reelle tal og mængden af punkter på en ret linie, er et velkendt faktum, som er fundamentalt for den analytiske geometri. Et bevis herfor forudsætter en præcisering af geometriens grundlag, som ikke skal gennemføres her.

Endelig anføres uden bevis, at mængden E_2 af punkter i planen og mængden E_3 af punkter i rummet også har kontinuets mægtighed.

Øvelser til Kap. I, 5.

- 1) For hvilke værdier af konstanten k er den ved $x \rightarrow kx + \sin x$ bestemte afbildning af mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal ind i $\mathbb{R}$ enentydig?

- 2) Idet $x \in \mathbb{R}$, betegnes med $[x]$ det største hele tal, der er mindre end eller lig med x . (sættes $x = m + r$, hvor m er et helt tal og $0 \leq r < 1$, er $[x] = m$.)
Tegn de grafiske billeder af funktionerne $x \rightarrow [x]$, $x \rightarrow x - [x]$ og $x \rightarrow 2[x] - x$ fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Vis, at den sidstnævnte afbildning er en enentydig afbildning af $\mathbb{R}$ på $\mathbb{R}$.

- 3) Bestem billedmængden for hver af følgende afbildninger af E_2 ind i sig selv, hvor E_2 betegner planen forsynet med et retvinklet koordinatsystem:

$$(x, y) \rightarrow (x^2 + y^2, x^2 - y^2),$$

$$(x, y) \rightarrow (x^3 + y^3, x^3 - y^3),$$

$$(x, y) \rightarrow (e^x + e^y, e^x - e^y),$$

$$(x, y) \rightarrow (\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} y, \operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y).$$
 Undersøg, hvilke af afbildningerne der er enentydige og angiv deres inverse afbildninger.

- 4) Angiv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse (udtrykt ved tallene a, b, c, d) for, at den ved

$$(x, y) \rightarrow (ax + by, cx + dy)$$
 givne afbildning af E_2 ind i sig selv er enentydig. Vis, at når og kun når denne betingelse er opfyldt, er den en afbildning af E_2 på E_2 .

- 5) Lad $f: A$ ind i B og $g: B$ ind i C være afbildninger således at $g \circ f: A$ ind i C er enentydig. Vis, at $f: A$ ind i B er enentydig. Vis, at når det yderligere forudsættes, at f er en afbildning af A på B , må også g være enentydig.

- 6) Vis, at en involutorisk afbildning $f: A \rightarrow A$ (d.v.s. en afbildning $f \neq e_A$, for hvilken $f \circ f = e_A$) er en enentydig afbildning af A på A , der stemmer overens med sin inverse.
- 7) Lad afbildningerne $f: A \rightarrow B$ og $g: B \rightarrow C$ være enentydige. Vis, at for afbildningen $(g \circ f)^{-1}: C \rightarrow A$ gælder, at $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- 8) Vis, at hvis A er en endelig delmængde af en uendelig mængde B , da er $B \setminus A \sim B$. (Benyt, at enhver uendelig mængde har en numerabel delmængde.)
- 9) Vis, at hvis A er højst numerabel (endelig eller numerabel) mængde og B en uendelig mængde, da er $A \cup B \sim B$.
- 10) Vis, at hvis mængden A er numerabel og der findes en afbildning af A på mængden B , da er B højst numerabel.
- 11) Vis, at mængden af alle par (m, n) af naturlige tal er numerabel.
Vis (f.eks. med benyttelse af opg. 9), at mængden af alle positive rationale tal er numerabel.
Vis, at mængden af alle rationale tal er numerabel.
- 12) Vis, at følgende mængder af reelle tal er indbyrdes lige mægtige: $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$, $\{x | 0 \leq x < 1\}$, $\{x | 0 < x \leq 1\}$, $\{x | 0 < x < 1\}$, $\{x | x > 0\}$, $\{x | x^2 > 1\}$ og $\mathbb{R}$. (Benyt opg. 7 el. 8)
- 13) Vis, at mængden af alle endelige delmængder af mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal er numerabel.
- 14) Vis, at enhver mængde af disjunkte åbne intervaller på tallinien og enhver mængde af disjunkte cirkelskiver i planen er højst numerabel.

§ 6. Transformationsgrupper. Permutationsgrupper.

Enentydige afbildninger af en mængde A på sig selv spiller en væsentlig rolle i mange undersøgelser. De kaldes for transformationer eller, især når A er en endelig mængde, for permutationer af A .

Mængden $\mathcal{G}$ af alle enentydige afbildninger af en mængde A på sig selv har, som det umiddelbart fremgår af tidligere resultater, følgende egenskaber:

- G1. Hvis $f \in \mathcal{G}$ og $g \in \mathcal{G}$, da er også $g \circ f \in \mathcal{G}$.
- G2. For $f, g, h \in \mathcal{G}$ gælder $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.
- G3. Der findes $e \in \mathcal{G}$, således at $e \circ f = f \circ e = f$ for hvert $f \in \mathcal{G}$ (nemlig $e = e_A$, den identiske afbildning).
- G4. For hvert $f \in \mathcal{G}$ findes der $f' \in \mathcal{G}$, således at $f' \circ f = f \circ f' = e$ (nemlig $f' = f^{-1}$, den til f inverse afbildning).

Enhver mængde $\mathcal{G}$ af enentydige afbildninger af en mængde A på sig selv, for hvilken G1-4 gælder, kaldes en gruppe af transformationer (permutationer) af mængden A . Den betragtede mængde af alle enentydige afbildninger af A på sig selv kaldes den fuldstændige transformationsgruppe for A eller, hvis A er en endelig mængde bestående af n elementer, den symmetriske gruppe af graden n . (I den sidste benævnelse ligger der en hentydning til, at denne gruppe i en vis forstand kun afhænger af antallet af elementer i A . Dette vil blive præciseret senere.) Idet man ved en undergruppe af en transformationsgruppe forstår en delmængde af $\mathcal{G}$ (altså en mængde af transformationer indeholdt i $\mathcal{G}$), der selv har "gruppeegenskaberne" G1-4, kan man sige, at enhver transformationsgruppe for A er en undergruppe af den fuldstændige.

Idet mængden $\{e_A\}$ med den identiske afbildning som eneste element har gruppeegenskaberne, hvilket følger af $e_A \circ e_A = e_A$, har enhver transformationsgruppe for A , foruden sig selv, $\{e_A\}$ som undergruppe.

Undergrupper af en transformationsgruppe $\mathcal{G}$ for en mængde A (dog almindeligvis ikke dem alle) kan fås på følgende måde. Lad A' være en delmængde af A . Man

betragter mængden af alle de afbildninger $f \in \mathcal{G}$, som afbilder delmængden A' på sig selv, for hvilke altså $f: A' \rightarrow A'$. Den identiske afbildning e_A opfylder naturligvis denne betingelse. Muligvis findes der ikke andre i $\mathcal{G}$. Men hvis $f \in \mathcal{G}$ har denne egenskab, vil f^{-1} også have den, og hvis $f_1 \in \mathcal{G}$ og $f_2 \in \mathcal{G}$ har den, vil også $f_2 \circ f_1$ have den. Da den associative lov G2 jo altid gælder for afbildninger af en mængde ind i sig selv, ses heraf, at mængden af afbildninger i $\mathcal{G}$, som afbilder A' på sig selv, danner en undergruppe $\mathcal{G}'$ af $\mathcal{G}$.

Denne måde at udskille undergrupper på kan varieres. Idet et element $x \in A$ kaldes et fixelement ved en afbildning $f: A \rightarrow A$, når $f(x) = x$, kan man betragte mængden af de afbildninger $f \in \mathcal{G}$, for hvilke alle elementer i en foreskreven mængde $A' \subseteq A$ er fixelementer, d.v.s. de afbildninger i $\mathcal{G}$, for hvilke restriktionen til A' er den identiske afbildning $e_{A'}$. Det ses let som før, at disse danner en gruppe, nemlig en undergruppe af $\mathcal{G}'$ og dermed af $\mathcal{G}$.

Eksempler:

Lad $\mathbb{R}$ være mængden af reelle tal, og lad $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ på $\mathbb{R}$, hvor a betegner et reelt tal, være den ved $f_a(x) = x + a$ bestemte funktion. Mængden $\{f_a | a \in \mathbb{R}\}$ er da en transformationsgruppe $\mathcal{T}^1$ for $\mathbb{R}$. Det samme gælder for $\{f_a | a \in \mathbb{Q}\}$, hvor $\mathbb{Q}$ betegner mængden af alle rationale tal, og for $\{f_a | a \in \mathbb{Z}\}$, hvor $\mathbb{Z}$ betegner mængden af alle hele tal. De to sidste er undergrupper af $\mathcal{T}^1$. De består af de afbildninger af $\mathcal{T}^1$, der afbilder henholdsvis $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{Z}$ på sig selv. Derimod er $\{f_a | a \in \mathbb{N}\}$, hvor $\mathbb{N}$ betegner mængden af naturlige tal ikke nogen gruppe. Alt dette følger let af $f_{a_2} \circ f_{a_1} = f_{a_1 + a_2}$. I geometrisk fortolkning drejer det sig om translationer af linien E_1 .

For funktionerne $g_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved $g_m(x) = mx$ gælder det, at $\{g_m | m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ danner en transformationsgruppe $\mathcal{H}_0^1$ for $\mathbb{R}$. Hvis $m=0$ tillades, fås ikke

nogen gruppe, da g_0 ikke har nogen invers.

Eksempler på undergrupper af $\mathcal{H}_0^1$ er $\{g_m \mid m \in \mathbb{R}_+\}$, hvor $\mathbb{R}_+$ betegner mængden af positive reelle tal, $\{g_m \mid m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$, $\{g_m \mid m \in \mathbb{Q}_+\}$, hvor $\mathbb{Q}_+$ betegner mængden af positive rationale tal, og $\{g_1, g_{-1}\}$. Derimod er hverken $\{g_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, $\{g_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ eller $\{g_m \mid m \in \mathbb{R}_-\}$, hvor $\mathbb{R}_-$ betegner mængden af negative reelle tal, grupper. Alt dette følger let af

$g_{m_2} \circ g_{m_1} = g_{m_1 m_2}$. I geometrisk fortolkning drejer det sig om homotetier af linien E_1 "med centrum i nulpunktet".

Tilsvarende gælder for translationerne og homotetierne af planen E_2 . Lad $f_{a,b}$ betegne translationen $(x,y) \rightarrow (x+a, y+b)$. Mængden $\{f_{a,b} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ er en transformationsgruppe $\mathcal{T}^2$ for E_2 . Erstattes $\mathbb{R}$ med $\mathbb{Q}$ eller $\mathbb{Z}$ fås undergrupper. Translationerne, der afbilder en given linie på sig selv, danner en anden undergruppe. For linien med ligningen $x = y$ findes $\{f_{a,a} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

For homotetierne g_m af E_2 "med centrum i nulpunktet" defineret ved $(x,y) \rightarrow (mx, my)$ gælder det samme som for homotetierne af linien.

For hver af de omtalte specielle transformationsgrupper gælder det, at hvilket som helst to afbildninger hørende til en af dem er ombyttelige. En transformationsgruppe med denne egenskab siges at være kommutativ eller abelsk.

Et eksempel på en ikke kommutativ gruppe er $\mathcal{H}^1 = \{f_{a,m} \mid (a \in \mathbb{R}) \wedge (m \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\}$, hvor $f_{a,m}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved $f_{a,m}(x) = mx + a$. At der virkelig foreligger en gruppe, ses således: For $a = 0$, $m = 1$ fås den identiske afbildning. Den inverse til afbildningen $x \rightarrow mx + a$ er $x \rightarrow \frac{x}{m} - \frac{a}{m}$, altså $f_{-\frac{a}{m}, \frac{1}{m}}$, der tilhører

den betragtede mængde. For $f_{a_2, m_2} \circ f_{a_1, m_1}$ findes

$x \rightarrow m_2(m_1 x + a_1) + a_2 = m_1 m_2 x + m_2 a_1 + a_2$, altså $f_{m_2 a_1 + a_2, m_1 m_2}$, der også tilhører den betragtede mængde.

Dermed er grupperegenskaberne eftervist. Det sidste resultat viser tillige, at der i almindelighed gælder

$$f_{a_1, m_1} \circ f_{a_2, m_2} \neq f_{a_2, m_2} \circ f_{a_1, m_1}.$$

For $m \neq 1$ har afbildningen $f_{a, m}$ et og kun et fixelement (fixpunkt) $x = \frac{a}{m-1}$, som findes ved at løse ligningen $mx + a = x$. Sættes $f_{a, m}(x) = mx + a = x'$, har man for $m \neq 1$

$$x' - \frac{a}{m-1} = m(x - \frac{a}{m-1}),$$

hvilket viser, at afbildningen er en homoteti (multiplikation) med centrum $\frac{a}{m-1}$ (ud fra punktet $\frac{a}{m-1}$).

Gruppen $\mathcal{H}^1$ består altså, foruden af den identiske afbildning, af homotetierne med alle mulige centre og faktorer $m \neq 1$ og translationerne af linien ($m = 1$).

For grupper gælder nogle simple sætninger, som følger af (de understregede dele af) G 1-4, uden benyttelse af, at bogstaverne $f, g, \dots$ betegner afbildninger og $\circ$ sammensætning. G 3 udsiger, at der findes mindst eet element $e \in \mathcal{G}$, således at $e \circ f = f \circ e = f$ for hvert $f \in \mathcal{G}$. Det kunne tænkes, at der i gruppen fandtes flere elementer med den samme egenskab. (Der blev kun konstateret, at den identiske afbildning opfylder kravet.) Der gælder imidlertid:

I en gruppe $\mathcal{G}$ findes kun eet element e , således at $e \circ f = f \circ e = f$ for hvert $f \in \mathcal{G}$.

Bevis: Antag, at e og e' har den nævnte egenskab. Da gælder $e \circ e' = e'$, da e har den, og $e \circ e' = e$, da e' har den. Følgelig gælder $e = e'$, som påstået.

Elementet e kaldes gruppens neutrale element.

G 4 udsiger, at der til hvert element $f \in \mathcal{G}$ findes mindst eet element $f' \in \mathcal{G}$, således at $f' \circ f = f \circ f' = e$. Det kunne tænkes, at der var mere end ét sådant $f' \in \mathcal{G}$ fandtes flere sådanne elementer. (Der blev kun sagt, at f^{-1} opfylder kravet). Der gælder imidlertid:

I en gruppe $\mathcal{G}$ findes der til ethvert element f kun eet element $f' = f^{-1}$, således at $f' \circ f = f \circ f' = e$, hvor e er gruppens neutrale element.

Bevis: Antag, at f' og f'' opfylder kravet. Idet $f' \circ f = e$, fås ved at sammensætte begge sider med f''

$$(f' \circ f) \circ f'' = e \circ f'',$$

$$f' \circ (f \circ f'') = f'',$$

$$f' \circ e = f'',$$

$$f' = f'',$$

hvilket skulle bevises.

I resten af denne paragraf udelades for overskuelighedens skyld $\circ$ i eksponenterne.

For elementer i en gruppe $\mathcal{G}$ gælder "forkortningsreglerne"

$$h \circ f_1 = h \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$$

$$g_1 \circ h = g_2 \circ h \Rightarrow g_1 = g_2$$

Bevis: Af $h \circ f_1 = h \circ f_2$ fås

$$h^{-1} \circ (h \circ f_1) = h^{-1} \circ (h \circ f_2),$$

$$(h^{-1} \circ h) \circ f_1 = (h^{-1} \circ h) \circ f_2,$$

$$e \circ f_1 = e \circ f_2$$

$$f_1 = f_2.$$

Den anden regel bevises analogt ved at sammensætte med h^{-1} "fra højre".

Til to vilkårligt opgivne elementer a og b af en gruppe $\mathcal{G}$ findes der et og kun eet element f , således at

$$f \circ a = b,$$

nemlig $f = b \circ a^{-1}$, og et og kun et element g , således

at

$$a \circ g = b,$$

nemlig $g = a^{-1} \circ b$.

Bevis: At "ligningerne" ikke kan have mere end een løsning f henholdsvis g , udsiger forkortningsreglerne. At $f = b \circ a^{-1}$ virkelig er en løsning til den første ligning, ses af

$$(b \circ a^{-1}) \circ a^1 = b \circ (a^{-1} \circ a) = b \circ e = b.$$

Tilsvarende bekræftes, at $g = a^{-1} \circ b$ er en løsning til den anden ligning.

Af disse simple sætninger kan man drage følgende slutning: Sammensættes alle elementer i en gruppe $\mathcal{G}$ med et og samme element a , dannes altså $f \circ a$ for $f \in \mathcal{G}$, fås igen alle elementer i $\mathcal{G}$ og hvert een gang. Med andre ord, ved $f \rightarrow f \circ a$ bestemmes en enentydig afbildning af $\mathcal{G}$ på sig selv. Til hvert element $b \in \mathcal{G}$ findes nemlig et og kun eet element f , således at $f \circ a = b$. Tilsvarende gælder for $g \rightarrow a \circ g$, $g \in \mathcal{G}$.

Er $f: A \rightarrow A$ (1-1), altså f et element af den fuldstændige transformationsgruppe for A , kan man danne de itererede af den inverse afbildning $f^{-1}: A \rightarrow A$. Er n et positivt helt tal, gælder

$$(1) \quad (f^{-1})^n = (f^n)^{-1},$$

hvilket er ensbetydende med, at

$$f^n \circ (f^{-1})^n = e.$$

For at vise dette, skrives venstre side udføreligt:

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n \circ \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_n$$

Idet $f \circ f^{-1} = e$ og $g \circ e = g$ for hver afbildning g af A ind i A , kan de to midsterste "Faktorer" tilsammen erstattes med e og dette derefter udelades, så længe der er "faktorer"

f og f^{-1} tilbage. Gentages dette, ender man med e , som påstået.

Man definerer nu f^{-n} ved

$$(2) \quad f^{-n} = (f^{-1})^n.$$

Da gælder

$$(3) \quad f^{-p} = (f^{-1})^p = (f^p)^{-1}$$

for hvert helt tal p . For $p > 0$ er dette rigtigt, dels ifølge definition (2), dels ifølge (1). For $p = 0$ er det rigtigt, idet $f^0 = (f^{-1})^0 = e$ ifølge en tidligere definition (side I, 4,5) og $e^{-1} = e$. For $p < 0$ fås ifølge definition (2) med $n = -p$ og f^{-1} i stedet for f , og da $(f^{-1})^{-1} = f$, at

$$(f^{-1})^p = ((f^{-1})^{-1})^{-p} = f^{-p},$$

og ifølge definitionen (2) med $n = -p$ og (1), at

$$(f^p)^{-1} = ((f^{-1})^{-p})^{-1} = ((f^{-1})^{-1})^{-p} = f^{-p},$$

hvoraf påstanden følger.

Endvidere gælder "potensreglen"

$$(4) \quad f^p \circ f^q = f^{p+q}.$$

Bevis: Først vises, at hvis reglen gælder for to bestemte hele tal p og q og alle afbildninger af den betragtede art, da vil den også gælde for $-p$ og $-q$. Dette ses af

$$\begin{aligned} f^{-p} \circ f^{-q} &= (f^{-1})^p \circ (f^{-1})^q \\ &= (f^{-1})^{p+q} = f^{-(p+q)}, \end{aligned}$$

hvor reglen med p og q er anvendt på f^{-1} i stedet for f .

Det er altså tilstrækkeligt at bevise reglen under forudsætningen $p+q \geq 0$. Specielt kan altså antages, at højst eet af tallene p og q er negativt. Er de begge større end eller lig med 0, foreligger det tidligere omtalte simple tilfælde (side I, 4,5,). Antag, at f. eks. $q < 0$, men $p+q \geq 0$. Da er

$$f^{p+q} \circ f^{-q} = f^{p+q-q} = f^p$$

$$= f^p \circ f^q \circ (f^q)^{-1} = f^p \circ f^q \circ f^{-q},$$

hvor der er benyttet reglen med $p+q \geq 0$ og $-q > 0$ i stedet for p og q samt (3). Ved hjælp af forkortningsreglen fås så (4) også i dette tilfælde. Tilsvarende behandles tilfældet $p < 0$.

Endelig nævnes, at der for vilkårlige hele tal p og q gælder

$$(5) \quad (f^p)^q = f^{pq}.$$

For $q = 0$ er begge sider lig med e . For $q > 0$ fås (5) ved gentagen anvendelse af potensreglen. For $q < 0$, haves derfor

$$(f^p)^{-q} = f^{-pq},$$

altså ifølge (3)

$$((f^p)^q)^{-1} = (f^{pq})^{-1},$$

og dermed (5) også i dette tilfælde.

Lad $\mathcal{G}$ betegne den fuldstændige transformationsgruppe for en mængde A , og lad $f \in \mathcal{G}$ være givet. Da er $\mathcal{E} = \{f^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$, hvor $\mathbb{Z}$ betegner mængden af alle hele tal, en undergruppe af $\mathcal{G}$. Den kaldes den ved f frembragte cykliske gruppe.

Bevis: Det drejer sig om at vise, at $\mathcal{E}$, altså mængden af alle potenser af f , tilfredsstiller G1 - 4 (side I, 6, 1). At G1 er opfyldt, aflæses af potensreglen (4). G2 er endda gyldig i hele $\mathcal{G}$. G3 er opfyldt, fordi $f^0 = e$, og G4 på grund af (3), der jo blandt andet udsiger, at den inverse til en potens er igen en potens.

Eksempler:

Lad $f : A$ på A være en involutorisk afbildning, altså $f \neq e_A$, men $f^2 = e_A$. En sådan afbildning er enentydig; thi af $f(x_1) = f(x_2)$ følger

$$x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2.$$

Endvidere ses, at $f = f^{-1}$, da $f \circ f = e$. For potensen af f med en vilkårlig hel eksponent p finder man

$$f^p = \begin{cases} e, & \text{når } p \text{ er lige,} \\ f, & \text{når } p \text{ er ulige.} \end{cases}$$

Den ved f frembragte gruppe består altså kun af to transformationer, nemlig e og f . Den siges at være af ordenen 2.

Lad f betegne den ved $(x,y) \rightarrow (-y,x)$ bestemte enentydige afbildning af planen E_2 (forsynet med et retvinklet koordinatsystem) på sig selv. For denne afbildnings potenser fås

$$\begin{aligned} f^1: & \quad (x,y) \rightarrow (-y,x), \\ f^2: & \quad (x,y) \rightarrow (-x,-y), \\ f^3: & \quad (x,y) \rightarrow (y,-x), \\ f^4: & \quad (x,y) \rightarrow (x,y). \end{aligned}$$

Idet $f^4 = e = f^0$, sluttet af potensreglen, at f^p ikke ændres, når eksponenten ændres med et multiplum af 4. Man kan altså erstatte den med den rest, den giver ved division med 4, altså med 0,1,2 eller 3. Den ved f frembragte cykliske gruppe består følgelig af $e = f^0, f = f^1, f^2$ og $f^3 = f^{-1}$. Den siges at være af ordenen 4. Afbildningerne $e = f^0$ og f^2 danner en undergruppe af ordenen 2.

Lad a være et fast reelt tal, og lad $f_a : \mathbb{R}$ på $\mathbb{R}$ betegne translationen $x \rightarrow x+a$. Den ved f_a frembragte cykliske

gruppe består da af translationerne $x \rightarrow x+pa$, hvor p gennemløber mængden $\mathbb{Z}$ af hele tal. Her er alle potenser indbyrdes forskellige. Gruppen siges at være af uendelig orden.

Vi betragter nu det tilfælde, hvor mængden A er endelig. Lad den bestå af n elementer $a_1, a_2, \dots, a_n$. En enentydig afbildning f af A på sig selv, altså en permutation af A , plejer man at angive på følgende måde:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix}.$$

I den øverste række skrives elementerne af A i en eller anden orden, og under hvert element skrives dets billed-element. Det kommer altså ikke an på kolonnernes rækkefølge. Idet afbildningen er 1-1 på A , vil der også i den nederste række stå alle elementer af A , hvert een gang. Når der en gang for alle vælges en rækkefølge af elementerne i den øverste række, svarer der til hver afbildning f af den betragtede art en bestemt rækkefølge af elementerne i den nederste række, altså en "permutation" i den velkendte betydning. Omvendt svarer der til enhver sådan "permutation" af elementerne i den nederste række den enentydige afbildning af A på sig selv, ved hvilken der til hvert element i den øverste række svarer det element, der står under det. Idet der findes $n!$ "permutationer", er antallet af enentydige afbildninger af en mængde bestående af n elementer på sig selv, altså af permutationer i den her indførte betydning, lig med $n!$. Dette bekræftes også let direkte.

Med den ovenfor indførte betegnelse kan man finde sammensætningen $g \circ f$ af to permutationer

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ g(a_1) & g(a_2) & \dots & g(a_n) \end{pmatrix}$$

på følgende måde: Ved afbildningen f har elementet a_i billedelementet $f(a_i)$, som står under a_i i permutationen f . Nu er $f(a_i)$ et af elementerne $a_1, a_2, \dots, a_n$, lad os sige $f(a_i) = a_j$. Dette opsøges i den øverste række af permutationen g . Derunder findes så elementet $g(a_j) = g(f(a_i))$, der svarer til a_i ved permutationen $g \circ f$.

Eksempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Den inverse til en permutation fås ved at ombytte øverste og nederste række:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Ordnes her kolonnerne således, at elementerne i øverste række optræder i rækkefølgen $a_1, a_2, \dots, a_n$, vil de i den nederste række optræde i rækkefølgen $f^{-1}(a_1), f^{-1}(a_2), \dots, f^{-1}(a_n)$. Eksempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

En permutation f , ved hvilken to forskellige elementer a_i og a_j ombyttes, d.v.s. ved hvilken $f(a_i) = a_j$ og $f(a_j) = a_i$, medens hvert af de øvrige elementer svarer til sig selv, altså $f(a_k) = a_k$ for $k \neq i, j$, kaldes en transposition. Den betegnes kort med

$$\begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_j & a_i \end{pmatrix},$$

idet de kolonner i det indførte symbol, der består af to ens elementer, udelades. For sammensætningen af en vilkårlig permutation g med en transposition findes, hvis $i < j$,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ g(a_1) & g(a_2) & \dots & g(a_n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_j & a_i \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i & \dots & a_j & \dots & a_n \\ g(a_1) & \dots & g(a_j) & \dots & g(a_i) & \dots & g(a_n) \end{pmatrix},$$

hvor prikkerne står for kolonner i g , der forbliver uændrede. Den sammensatte permutation fremgår altså af g ved ombytning af elementerne $g(a_i)$ og $g(a_j)$ i den nederste række. Eksempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Det er indlysende, at en transposition er involutorisk.

Den er altså identisk med sin inverse. For enentydige afbildninger $f_1, f_2, \dots, f_r$ af en mængde ind i sig selv gælder

$$(f_r \circ f_{r-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \dots \circ f_{r-1}^{-1} \circ f_r^{-1},$$

hvilket aflæses af

$$f_r \circ f_{r-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 \circ f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \dots \circ f_{r-1}^{-1} \circ f_r^{-1} = e.$$

Heraf sluttet, at den inverse til en permutation sammensat af transpositioner fås ved at sammensætte de samme transpositioner i den omvendte orden.

Hver permutation af en mængde bestående af mindst to elementer kan sammensættes af transpositioner.

Bevis (ved induktion): En mængde $\{a_1, a_2\}$ bestående af to elementer tillader kun to permutationer, nemlig

$$e = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Her er påstanden altså rigtig. Antag, at hver permutation af en mængde $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$, $n \geq 3$, kan sammensættes af transpositioner. Lad

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix}$$

være en permutation af $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Antag først, at $f(a_n) = a_n$. Da fremgår f af permutationen

$$f' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_{n-1}) \end{pmatrix}$$

af $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ ved tilføjelse af kolonnen $\begin{smallmatrix} a_n \\ a_n \end{smallmatrix}$.

Ifølge induktionsforudsætningen kan f' sammensættes af transpositioner. Tænkes til disse føjet kolonnen $\begin{smallmatrix} a_n \\ a_n \end{smallmatrix}$, som jo ikke skrives, fås f sammensat af de "samme" transpositioner. Antag dernæst, at $f(a_n) \neq a_n$. Da findes et nummer $k \neq n$, således at $f(a_k) = a_n$, og følgelig er

$$f \circ \begin{pmatrix} a_k & a_n \\ a_n & a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k & \dots & a_{n-1} & a_n \\ f(a_1) & \dots & f(a_n) & \dots & f(a_{n-1}) & a_n \end{pmatrix} = f_0$$

en permutation, der ifølge det lige viste kan sammensættes af transpositioner. Man får da

$$f = f_0 \circ \begin{pmatrix} a_k & a_n \\ a_n & a_k \end{pmatrix},$$

idet transpositionen stemmer overens med sin inverse.

Dermed er vist, at f kan sammensættes af transpositioner.

Fremstillingen af en permutation som sammensætning af transpositioner er ikke entydig bestemt. For eksempel

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

viser to forskellige fremstillinger af en permutation af $\{1, 2, 3\}$.

Antallene af transpositioner i de forskellige fremstillinger af en og samme permutation som sammensætning af transpositioner er enten alle lige eller alle ulige.

Bevis: Lad

$$f = s_p \circ s_{p-1} \circ \dots \circ s_1 = t_q \circ t_{q-1} \circ \dots \circ t_1$$

være to fremstillinger af permutationen f ved transpositioner $s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_q$. Påstanden, at p og q enten er begge lige eller begge ulige, er ensbetydende med, at $p + q$ er lige. Nu følger af ovenstående

$$\begin{aligned} e = f \circ f^{-1} &= s_p \circ \dots \circ s_1 \circ (t_q \circ \dots \circ t_1)^{-1} \\ &= s_p \circ \dots \circ s_1 \circ t_1 \circ \dots \circ t_q, \end{aligned}$$

altså, at den identiske permutation e kan sammensættes af $p + q$ transpositioner. Det er altså tilstrækkeligt at vise, at antallet af transpositioner i en fremstilling af e altid er lige.

Dette ses let ved hjælp af et kunstgreb. Man vælger en enetydig afbildning φ af elementerne i den mængde $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, hvis permutationer studeres, på mæng-

den $\{1, 2, \dots, n\}$, for eksempel $a_i \rightarrow i$, $i = 1, 2, \dots, n$.
 Er f en permutation af A , betegnes med $f(i)$ det af tallene $1, 2, \dots, n$, som ved φ svarer til $f(a_i)$. For hver permutation f betragter man nu tallet

$$N_f = \prod_{i < j} (f(j) - f(i)), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Specielt haves

$$N_e = \prod_{i < j} (j - i) > 0.$$

Er $t = \begin{pmatrix} a_\lambda & a_\mu \\ a_\mu & a_\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda < \mu$, en transposition, gælder

$$(6) \quad N_{f \circ t} = -N_f.$$

rigtigheden heraf ses ved at omskrive N_f således, at de faktorer, som indeholder $f(\lambda)$ eller $f(\mu)$ skilles ud:

$$\begin{aligned} N_f = (f(\mu) - f(\lambda)) & \prod_{i < \lambda} (f(\lambda) - f(i)) (f(\mu) - f(i)) \\ & \prod_{\mu < j} (f(j) - f(\mu)) (f(j) - f(\lambda)) \\ & \prod_{\lambda < i < \mu} (f(i) - f(\lambda)) (f(\mu) - f(i)) \\ & \prod_{\substack{i < j \\ i \neq \lambda, \mu \\ j \neq \lambda, \mu}} (f(j) - f(i)). \end{aligned}$$

Transpositionen t bevirker en ombytning af $f(\lambda)$ og $f(\mu)$.

Herved skifter den første faktor fortegn, medens hvert af de derpå følgende fire produkter forbliver uændret.

Dermed er (6) bevist. Lad nu en fremstilling

$$e = t_r \circ t_{r-1} \circ \dots \circ t_1$$

af e ved transpositioner være givet. Da gælder ifølge (6)

$$\begin{aligned} N_e = -N_{t_r} &= N_{t_r \circ t_{r-1}} = \dots \\ &= (-1)^r N_{t_r \circ t_{r-1} \circ \dots \circ t_1} = (-1)^r N_e, \end{aligned}$$

altså r lige som påstået.

Dermed er sætningen bevist, og man kan opstille følgende definition: En permutation kaldes lige eller ulige, efter som den kan sammensættes af et lige eller et ulige antal transpositioner. Af formlen (6) følger, at N_f er positiv eller negativ, efter som f er lige eller ulige, og dette gælder for ethvert valg af afbildningen $\varphi: A$ på $\{1, 2, \dots, n\}$, altså hvordan elementerne af A end betegnes med $1, 2, \dots, n$. Efter at φ er valgt, kan man altså afgøre om permutationen f er lige eller ulige ved at bestemme fortegnet for N_f . At en faktor $f(j) - f(i)$, $i < j$, i N_f er negativ, kommer ud på, at det største af tallene $f(i)$ og $f(j)$, nemlig $f(i)$ kommer før $f(j)$ i den nederste række af symbolet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix},$$

at der foreligger en såkaldt "inversion". En permutation er følgelig lige eller ulige, efter som antallet af sådanne "inversioner" er lige eller ulige. Eksempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

er ulige, idet der er følgende 5 "inversioner": 3 før 1, 3 før 2, 5 før 4, 5 før 2, 4 før 2.

Til hver permutation f lader man svare eet af tallene 1 og -1 , nemlig 1 , når f er lige og -1 , når f er ulige. Dette tal kaldes permutationens fortegn og betegnes med $\text{sgn } f$ (læs: signum eller fortegn f .) Ved $f \mapsto \text{sgn } f$ defineres en afbildning af mængden af alle permutationer af A , altså af den symmetriske gruppe S_n af graden n på mængden $\{1, \dots, n\}$. Denne afbildning har følgende egenskab:

For to permutationer $f, g \in S_n$ gælder

$$\operatorname{sgn}(g \circ f) = \operatorname{sgn} g \operatorname{sgn} f.$$

Kan nemlig f og g sammensættes af henholdsvis p og q transpositioner, vil $g \circ f$ kunne sammensættes af $p + q$ transpositioner, og ligningen følger da af $(-1)^{p+q} = (-1)^p (-1)^q$.

Endvidere gælder

$$\operatorname{sgn} f^{-1} = \operatorname{sgn} f,$$

hvilket følger af, at f^{-1} kan sammensættes af de samme transpositioner som f , blot taget i omvendt orden.

Heraf slutes, at sammensætninger af lige permutationer og den inverse til en lige permutation er igen lige permutationer. Da endvidere den identiske permutation er lige, har vi:

Mængden af lige permutationer af en mængde bestående af n elementer er en permutationsgruppe, altså en undergruppe af den symmetriske gruppe S_n af graden n . Den kaldes den alternierende gruppe af graden n og betegnes med A_n .

Der findes lige mange lige og ulige permutationer af en mængde A bestående af n elementer, altså $n!/2$ af hver slags.

Bevis: Lad t være en transposition. Ved $f \mapsto f \circ t$ bestemmes, som vist tidligere (side I, 6, 6), en enentydig afbildning af S_n på sig selv. Til en lige permutation svarer herved en ulige, og til en ulige svarer en lige.

Antallet af permutationer (transformationer) i en gruppe kaldes gruppens orden. (Hvis den er uendelig, kan der være anledning til at skelne mellem numerabel og ikke-numerabel orden). Den symmetriske gruppe af graden n har ordenen $n!$, den alternierende gruppe af graden n har ordenen $n!/2$.

Eksempel:

Lad et regulært tetraeders hjørnespidser i en eller anden fast valgt orden være betegnet med betegnet med 1, 2, 3, 4. Der findes flytninger af tetraedret, efter hvilke det kommer til at dække sin oprindelige stilling, uden at hjørnespidserne behøver at indtage deres oprindelige pladser. Hver sådan flytning giver anledning til en permutation af mængden $\{1, 2, 3, 4\}$ af hjørnespidser bestemt ved, at der til hver hjørnespids svarer den hjørnespids, hvis plads den indtager efter flytningen. Flytninger af denne art er: drejningerne med drejningsvinklerne $2\pi/3$ og $4\pi/3$ om tetraedrets højder samt drejningerne med drejningsvinklerne π om de linier, der forbinder modstående kanters midtpunkter. Idet det kun kommer an på tetraedrets slutstilling, må f.eks. drejninger vinklen $2\pi/3$ den ene vej og $4\pi/3$ den anden vej betragtes som ens, og tilsvarende drejninger vinklen π den ene og den anden vej. Talt på denne måde findes der 12 sådanne flytninger, når den "identiske flytning", ved hvilken hver hjørnespids forbliver på sin plads, medregnes. De danner en transformationsgruppe, kaldet tetraedergruppen. Til hver af dens 12 flytninger svarer en lige permutation af mængden af hjørnespidser, og omvendt, hver lige permutation svarer til een af flytningerne. Der foreligger altså en enetydig korrespondance mellem tetraedergruppen og den alternerende gruppe af graden 4. Det ses let, at der herved til sammensætningen af to flytninger svarer sammensætningen af de tilsvarende permutationer (i samme orden). Sådanne korrespondancer mellem grupper kaldes isomorfier og vil blive undersøgt senere.

Øvelser til kap. I, 6.

- 1) Undersøg for hver af følgende mængder af afbildninger af planen E_2 ind i sig selv, om den er en transformations gruppe:

- a) $(x, y) \rightarrow (x+ay, y)$, $a \in \mathbb{R}$.
 b) $(x, y) \rightarrow (x+ay, y)$, $a \in \mathbb{N}$.
 c) $(x, y) \rightarrow (x, ky)$, $k \in \mathbb{R}$.
 d) $(x, y) \rightarrow (x, ky)$, $k \in \mathbb{R}_+$.
 e) $(x, y) \rightarrow (x, -ky)$, $k \in \mathbb{R}_-$.

($\mathbb{R}_+$ og $\mathbb{R}_-$ betegner henholdsvis mængden af alle positive og mængden af alle negative reelle tal.)

Angiv i de tilfælde, hvor afbildningerne ikke danner en gruppe, det eller de af kravene G1-4 (side I, 6, 1), som ikke er opfyldt.

- 2) Vis, at cirklen med ligningen $x^2+y^2 = a^2$, $a > 0$, afbildes på sig selv ved afbildningerne $f_t: E_2$ på E_2 bestemt ved

$$(x, y) \rightarrow (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Parameterfremstillingen $x = a \cos u$, $y = a \sin u$, $u \in \mathbb{R}$, for cirklen kan benyttes med fordel.)

Vis, at mængden $\{f_t | t \in \mathbb{R}\}$ er en transformationsgruppe (gruppen af drejninger om nulpunktet).

- 3) Vis, at hver af grenene af den ligesidede hyperbel med ligningen $x^2-y^2 = a^2$, $a > 0$, afbildes på sig selv ved afbildningerne $g_t: E_2$ på E_2 bestemt ved

$$(x, y) \rightarrow (x \cosh t - y \sinh t, -x \sinh t + y \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Parameterfremstillingerne $x = a \cosh u$, $y = a \sinh u$, $u \in \mathbb{R}$, og $x = -a \cosh u$, $y = a \sinh u$, $u \in \mathbb{R}$, for de to hyperbelgrene kan benyttes med fordel.)

Vis, at mængden $\{g_t | t \in \mathbb{R}\}$ er en transformationsgruppe (gruppen af Lorentztransformationer).

- 4) Vis, at følgende 4 afbildninger af planen E_2 på sig selv danner en kommutativ transformationsgruppe:

$$\begin{aligned}
g_1: & (x, y) \rightarrow (x, y), \\
g_2: & (x, y) \rightarrow (-x, y), \\
g_3: & (x, y) \rightarrow (-x, -y), \\
g_4: & (x, y) \rightarrow (x, -y).
\end{aligned}$$

Angiv denne gruppes undergrupper.

- 5) Permutationerne
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
- af mængden $\{1, 2, 3, 4\}$ danner en kommutativ gruppe.
 Vis dette med benyttelse af opg. 4 ved at betragte restriktionerne af g_1, g_2, g_3, g_4 til mængden bestående af de fire punkter $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.
 (Betegn disse punkter i den angivne orden med 1, 2, 3, 4.)
- 6) Lad $\mathcal{G}$ være en kommutativ transformationsgruppe. Vis, at der for $f \in \mathcal{G}$, $g \in \mathcal{G}$ og $p \in \mathbb{Z}$ gælder
- $$(f \circ g)^p = f^p \circ g^p.$$
- 7) Vis, at hvis alle fra den identiske afbildning forskellige afbildninger i en transformationsgruppe er involutoriske, da er gruppen kommutativ.
- 8) Lad $\mathcal{G}$ være en transformationsgruppe og $\mathcal{G}'$ og $\mathcal{G}''$ undergrupper af $\mathcal{G}$. Vis, at $\mathcal{G}' \cap \mathcal{G}''$ også er en undergruppe. Afgør, om det tilsvarende altid gælder for $\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''$, enten ved at bevise det eller ved at angive et "modeksempel".
- 9) Angiv samtlige potenser af hver af permutationerne
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$
- 10) Fremstil hver af permutationerne
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$
- som sammensætning af transpositioner.
- 11) Find $\text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$ og $\text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.
- 12) Lad $\mathcal{G}$ være en transformationsgruppe og $\mathcal{Z}$ mængden af de transformationer i $\mathcal{G}$, der hver er ombyttelig med samtlige transformationer i $\mathcal{G}$. Vis, at $\mathcal{Z}$ er en undergruppe af $\mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$'s centrum).

- 13) Vis, at hver permutation af mængden $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kan sammensættes af transpositioner af formen

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_i \\ a_i & a_1 \end{pmatrix}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

- 14) Man betragter de flytninger af en given terning (deriblandt den identiske), efter hvilke den dækker sin oprindelige stilling. (To sådanne flytninger betragtes som ens, når de fører til samme slutstilling.) Bestem antallet af sådanne flytninger. Vis, at de danner en transformationsgruppe af mængden af terningens punkter. Efter de samme flytninger, og kun efter disse, vil også det regulære oktaeder, hvis hjørner er midtpunkterne af terningens sideflader, komme til at dække sin oprindelige stilling. Derfor kaldes den omhandlede gruppe for oktaedergruppen.

Terningens rumdiagonaler betegnes med I, II, III, IV. Til hver af de betragtede flytninger svarer en permutation af mængden $\{I, II, III, IV\}$, således at der til sammensætningen af to af flytningerne svarer sammensætningen af de tilsvarende permutationer. Vis, at alle permutationer af mængden vil fremkomme. (Benyt f.eks. at hver permutation kan sammensættes af transpositioner; resultatet af opg. 13 tillader en yderligere lille forenkling.)

Man betragter nu kun de flytninger af oktaedergruppen, ved hvilke hvert af de tre liniestykker, der forbinder midtpunkterne af to modstående sideflader af terningen (altså oktaedrets diagonaler) afbildes på sig selv. Vis, at de danner en undergruppe, og angiv de tilsvarende permutationer af $\{I, II, III, IV\}$. (sammenlign med opg. 4 og 5; giv en geometrisk forklaring af overensstemmelserne.)

Giv et geometrisk bevis for, at tetraedergruppen er en undergruppe af oktaedergruppen.

§ 7. Mængdeprodukt. Relationer.

Lad A og B være vilkårlige ^emængder. Vi betragter par (a,b) , hvis "første komponent" a tilhører A , og hvis "anden komponent" b tilhører B . Vi fastsætter, at $(a,b) = (a',b')$ skal betyde, at $a = a'$ og $b = b'$. Hvis $a \neq b$, er altså $(a,b) \neq (b,a)$. Her kommer det altså an på den orden, i hvilken de to elementer optræder, medens den jo ikke spiller nogen rolle, når talen er om mængden bestående af de to elementer: $\{a,b\} = \{b,a\}$. Mængden af alle par (a,b) , hvor $a \in A$ og $b \in B$, kaldes mængdeproduktet eller det kartesiske produkt af A og B . Idet det betegnes med $A \times B$, kan definitionen skrives

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Det er tilladt, at $A = B$. I stedet for $A \times A$ skrives også A^2 . Er $A \neq B$, vil også $A \times B \neq B \times A$, idet der da findes elementer $a \in A$ og $b \in B$, for hvilke $a \neq b$, og følgelig $(a,b) \neq (b,a)$. Den kommutative lov gælder altså ikke for denne multiplikation. Men der gælder øjensynlig, at

$$A \times B \sim B \times A;$$

thi ved $(a,b) \rightarrow (b,a)$, $a \in A$, $b \in B$, bestemmes en enentydig afbildning af den ene mængde på den anden. Der findes i almindelighed mange sådanne korrespondancer. Men den nævte udmærker sig ved, at den umiddelbart frembyder sig, og at der ikke er nogen vilkårlighed i dens definition. Skønt det ikke er muligt at sige helt nøjagtigt, hvad man mener dermed, siges en sådan afbildning af en mængde på en anden at være den naturlige eller kanoniske. Det kartesiske produkt af to mængder A og B kan anskueliggøres, hvis hver af dem er en delmængde af mængden af punkter på en ret linie. Lad L og M være to

hinanden skærende linier i planen. (Det kan antages, at linierne er vinkelrette på hinanden). Er $A \subseteq L$ og $B \subseteq M$, vil mængden af alle skæringspunkter mellem de med M parallelle linier gennem punkterne af A og de med L parallelle linier gennem punkterne af B kunne fortolkes som $A \times B$. Er $A = L$ og $B = M$, kan $A \times B$ fortolkes som hele planen.

Idet der, som nævnt tidligere, findes en enentydig korrespondance mellem mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal og mængden af punkter på en ret linie, kan også det kartesiske produkt af to mængder af reelle tal fortolkes på den angivne måde. Specielt kommer man således til fortolkningen af $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ som mængden af punkter i planen. Nu findes der mange enentydige afbildninger af $\mathbb{R}$ på en linie. Ethvert "koordinatsystem", altså valg af et nulpunkt og et enhedspunkt på linien, bestemmer en sådan. Omvendt kan man sige, at enhver enentydig korrespondance mellem punkterne på linien og en delmængde af $\mathbb{R}$, specielt hele $\mathbb{R}$, kan i princippet tjene som koordinatsystem. Ganske tilsvarende forholder det sig med mængden af punkter i planen og mængden $\mathbb{R}^2$ af par af reelle tal. Et retvinklet koordinatsystem er i grunden ikke andet end en forskrift, der giver en enentydig korrespondance mellem de to mængder. Omvendt vil enhver sådan korrespondance kunne tjene som koordinatsystem for planen. I det følgende vil der også i betegnelsen blive skelnet mellem mængden E_1 af punkter på en ret linie og mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal, mellem mængden E_2 af punkter i en plan og mængden $\mathbb{R}^2$ af par af reelle tal.

Begrebet mængdeprodukt kan udvides til et vilkårligt antal af mængder. Lad der være givet mængder $A_1, A_2, \dots, A_n$. Man betragter sæt af n elementer i en bestemt orden, det

første fra A_1 , det andet fra A_2 o.s.v., i tegn

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad , \quad a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n.$$

To sådanne n-sæt $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ og $(a_1', a_2', \dots, a_n')$ siges at være lig med hinanden, når og kun når $a_1 = a_1'$, $a_2 = a_2'$, $\dots$, $a_n = a_n'$. Mængden af alle sådanne n-sæt kaldes mængdeproduktet eller det kartesiske produkt af mængderne $A_1, A_2, \dots, A_n$. Idet det betegnes med $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, kan definitionen skrives

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n \}.$$

Er $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, betegnes produktet også med A^n . Som omtalt tidligere (side I,4,2), er et m-sæt af elementer af A ikke andet end en afbildning af mængden $\{1, 2, \dots, n\}$ ind i A . Derfor kan A^n opfattes som mængden af alle disse afbildninger. Mængden $\mathbb{R}^n$ af alle n-sæt af reelle tal kaldes det n-dimensionale (reelle) talrum eller kort det (reelle) n-talrum.

Er mængderne $A_1, A_2, \dots, A_n$ endelige, og er antallene af elementer henholdsvis $p_1, p_2, \dots, p_n$, vil antallet af elementer i $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ være $p_1 p_2 \dots p_n$.

Når der foreligger tre mængder A, B, C , kan man efter den lige opstillede definition danne $A \times B \times C$. Men man kan også danne $(A \times B) \times C$ og $A \times (B \times C)$. Det er klart, at det drejer sig om tre forskellige mængder. Medens den første består af tripler (a, b, c) , består den anden af par $((a, b), c)$, hvis første element selv er et par, og tilsvarende den tredje. Den associative lov gælder altså ikke for kartesiske produkter. Men der består naturlige enentydige korrespondancer mellem to og to af de tre mængder. Tilsvarende gælder for

flere end tre mængder.

Er der givet en følge $(A_1, A_2, \dots)$ af mængder, forstår man ved det kartesiske produkt $A_1 \times A_2 \times \dots$ mængden $A_1 \times A_2 \times \dots = \{(a_1, a_2, \dots) \mid \forall_N i (a_i \in A_i)\}$, altså mængden af alle følger $(a_1, a_2, \dots)$, hvor $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $\dots$. Er $A_1 = A_2 = \dots = A$, skrives produktet også A^N . Er specielt $A = \mathbb{R}$, fås mængden $\mathbb{R}^N$ af alle følger af reelle tal. For $A = \mathbb{N}$ fås mængden $\mathbb{N}^N$ af alle følger af naturlige tal.

Er $A_1 \times A_2 \times \dots$ et produkt af endelig eller uendelig mange mængder, og er A_i en bestemt af dem, kaldes afbildningen af $A_1 \times A_2 \times \dots$ på A_i bestemt ved

$$(a_1, a_2, \dots) \longrightarrow a_i$$

produktets i -te projektion. Den betegnes med $\text{pr}_i : A_1 \times A_2 \times \dots$ på A_i .

Såvel i den elementære matematik som i det foregående findes der mange eksempler på, hvad man generelt og uden præcisering plejer at kalde for en relation mellem elementerne i en mængde A og elementerne i den samme eller en anden mængde B . Sådanne eksempler er:

- 1) A = mængden af punkter i en plan, B = mængden af rette linier i samme plan. Relationen er: et punkt $a \in A$ ligger på en linie $b \in B$.
- 2) $A = B$ = mængden af rette linier i planen. Relationen er: linien $a \in A$ er parallel med linien $b \in A$, i tegn $a \parallel b$.
- 3) $A = B$ = mængden af alle liniestykker i planen. Relationen er: liniestykket $a \in A$ har samme længde som liniestykket $b \in A$.

- 4) $A = B =$ mængden af alle trekanter i planen. Relationen er: trekant $a \in A$ er kongruent med trekant $b \in A$. (I stedet for "kongruent" kan træde "ensvinklet".)
- 5) $A =$ mængden af trekanter i planen, $B =$ mængden af cirkler i samme plan. Relationen er: trekant $a \in A$ er indskrevet i cirklen $b \in B$.
- 6) $A = B = \mathbb{N}$. Relationen er: det naturlige tal a er divisor i det naturlige tal b , i tegn $a \mid b$.
- 7) $A = B = \mathbb{N}$. Relationen er: det naturlige tal a har en divisor > 1 fælles med det naturlige tal b .
- 8) $A = B = \mathbb{R}$. Relationen er: det reelle tal a er mindre end eller lig med det reelle tal b , i tegn $a \leq b$. (I stedet for $\leq$ kan træde $\geq, <, >$.)
- 9) $A = B = \mathbb{R}$, Relationen er: $a^2 + 3b^2 = 4$.
- 10) $A = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mængden af alle følger af reelle tal, $B = \mathbb{R}$. Relationen er: følgen $a = (a_1, a_2, \dots) \in A$ har grænseværdien $b \in B$, i tegn $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = b$.
- 11) $A = B =$ mængden af alle udsagn sammensat (ved hjælp af udsagnsformerne $\neg, \wedge, \vee$) af to givne udsagn p og q . Relationen er: udsagnet $a \in A$ har samme sandhedstabel som udsagnet $b \in A$, i tegn $a = b$.
- 12) A er en vilkårlig mængde, $B = \mathcal{P}(A)$ mængden af alle delmængder af A . Relationen er: elementet $a \in A$ tilhører mængden $b \in B$, i tegn $a \in b$.
- 13) E er en vilkårlig mængde, $A = B = \mathcal{P}(E)$ mængden af alle delmængder af E . Relationen er: mængden $a \in A$ er delmængde af mængden $b \in A$, i tegn $a \subseteq b$. (I stedet for $\subseteq$ kan træde $\supset, \subset, \supsetneq$.)
- 14) $A = B$ er en vilkårlig mængde. Relationen er: elementet

$a \in A$ er lig med elementet $b \in A$, i tegn $a = b$.

15) E er en vilkårlig mængde, $A = B = \mathcal{P}(E)$ mængden af alle delmængder af E . Relationen er: mængden $a \in A$ er komplementærmængde til mængden $b \in B$, i tegn $a = \bar{b}$.

16) A og B er vilkårlige mængder, $f: A \rightarrow B$ en given afbildning. Relationen er: elementet $a \in A$ afbildes ved f i elementet $b \in B$, i tegn $f(a) = b$.

Foruden sådanne rent matematiske findes der talrige andre eksempler på relationer, f.eks. de forskellige slægtskabsrelationer mellem mennesker. Endvidere kan nævnes følgende: Lad $A = B$ være mængden af alle sporvognsstoppesteder i København, og lad relationen være: der findes en sporvognsline, der fører fra stoppestedet a til stoppestedet b . Lad A betegne mængden af alle mennesker i Danmark og B mængden af alle købmandsforretninger i Danmark, og lad relationen være: personen a har (inden for en bestemt periode) købt varer i købmandsforretningen b .

Ved hjælp af de ovenfor indførte begreber er det muligt at give en generel og præcis definition af relationsbegrebet. Det, der er fælles for alle de nævnte eksempler, er, at for hvert par (a, b) af elementer $a \in A$ og $b \in B$ er udsagnet " a står i den pågældende relation til b " enten sandt eller falsk: Mængden R af alle de par (a, b) , for hvilke udsagnet er sandt, er en delmængde af $A \times B$, der omvendt bestemmer relationen fuldstændig. Man opstiller derfor følgende definition:

En relation fra en mængde A til en mængde B er en delmængde R af $A \times B$. (Er $B = A$, taler man også om en relation i A). At et element $a \in A$ står i den pågældende relation til B er ensbetydende med $(a, b) \in R$.

Skønt en relation fra A til B ifølge denne definition ikke er andet end en delmængde R af $A \times B$, kan det være mere suggestivt rent sprogligt at skelne mellem relationen og mængden R. Denne mængde kaldes da relationens graf. Når A og B er mængder af reelle tal, og relationen er bestemt ved en funktion $f:A \rightarrow B$ (eksempel 16), vil relationens graf som delmængde af $A \times B$ kunne fortolkes som funktionens grafiske billede i sædvanlig forstand. I et tilfælde som 9), hvor relationen er en ligning mellem reelle tal, vil grafen kunne fortolkes som den kurve, der fremstilles ved den pågældende ligning.

Er R en relation fra A til B, forstås ved den til R inverse relation den relation $R^{-1} \subseteq B \times A$ fra B til A, for hvilken

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Den er altså bestemt ved billedmængden af R ved den naturlige afbildning $(a, b) \mapsto (b, a)$ af $A \times B$ på $B \times A$. De to udsagn "a står i relationen R til b" og "b står i relationen R^{-1} til a" er ensbetydende.

I mange tilfælde har man et andet sprogligt udtryk for en relations inverse end for relationen selv. Blandt de ovenfor anførte eksempler gælder dette følgende:

- 1) Linien b går gennem punktet a.
- 5) Cirklen b er omskrevet om trekant a.
- 6) b er et multiplum af a.
- 8) b er større end eller lig med a, i tegn $b \geq a$.
- 10) b er grænseværdi for følgen $a = (a_1, a_2, \dots)$.
- 12) b indeholder a, i tegn $b \ni a$.
- 13) b indeholder a, i tegn $b \supseteq a$.
- 16) b er billede af a ved f.

Som nævnt under eksempel 16) bestemmer enhver afbildning $f: A \text{ ind i } B$ en relation fra A til B , hvis graf er mængden af alle par $(a, f(a))$, $a \in A$. Denne relation har den særlige egenskab, at der til hvert $a \in A$ findes et og kun eet element $b \in B$, således at a står i relationen til b , nemlig $b = f(a)$. Heraf ses, at ikke enhver relation fra A til B kan være bestemt ved en afbildning af A ind i B . Af de ovenfor nævnte specielle relationer har 1)-4), 6)-9), 11)-13) ikke den nævnte egenskab. I disse tilfælde findes der flere, almindeligvis uendelig mange, elementer $b \in B$, til hvilke et givet $a \in A$ står i den pågældende relation. Men der gælder følgende:

Lad $R \subseteq A \times B$ være en relation fra mængden A til mængden B , således at

$$\forall_A a \forall_B b_1, b_2 ((a, b_1) \in R \wedge (a, b_2) \in R \Rightarrow b_1 = b_2),$$

altså således at der til hvert $a \in A$ findes højst eet $b \in B$, for hvilket $(a, b) \in R$. Dette er ensbetydende med, at hvert element $a \in A$ forekommer i højst eet par (a, b) , der tilhører R . Lad A' være mængden af de elementer af A , som forekommer i et par tilhørende R , altså billedet af R ved den første projektion af $A \times B$:

$$A' = \text{pr}_1(R).$$

Til hvert element $a \in A'$ svarer da et og kun eet element $b \in B$, således at $(a, b) \in R$. Derved defineres en afbildning $f: A' \text{ ind i } B$, som bestemmer den givne relation. Ovenstående betingelse er nødvendig og tilstrækkelig for, at relationen R bestemmes ved en afbildning af en delmængde af A ind i B .

Relationerne 5), 10), 14), 15) bestemmes ved afbildninger af A ind i B .

Relationsbegrebet er overordentlig omfattende. Der er imidlertid forskellige specielle klasser af relationer, som optræder hyppigt, og som derfor undersøges særskilt. Foruden den lige omtalte klasse af relationer, som bestemmes ved afbildninger, og som er blevet behandlet i de foregående paragraffer, drejer det sig hovedsagelig om to klasser af relationer i en mængde, ækvivalensrelationer og ordningsrelationer.

Er A en vilkårlig mængde, kaldes den delmængde Δ af $A \times A$, der består af alle par (a,a) , $a \in A$, for diagonalen i $A \times A$. Opfattet som relation er den lighed mellem elementer af A , idet $(a,b) \in \Delta$, når og kun når $a = b$. (jfr. eks. 14). En relation $R \subseteq A \times A$ siges at være refleksiv, når $\Delta \subseteq R$, d.v.s. $(a,a) \in R$ for hvert $a \in A$, med andre ord, når hvert element af A står i den pågældende relation til sig selv. Blandt eksemplerne er de under 3), 6), 8) ($\leq, \geq$), 11), 13) ($\subseteq, \supseteq$) og 14) angivne relationer refleksive. Det er hensigtsmæssigt også at betragte de to under 4) nævnte som refleksive, altså at sige om en trekant, at den er kongruent (ensvinklet) med sig selv. Det er endvidere i reglen hensigtsmæssigt at gøre den under 2) nævnte relation refleksiv ved at erstatte "parallel" med "parallel eller sammenfaldende" eller også ved at fastsætte, at "parallel" skal inkludere "sammenfaldende". Den under 16) nævnte relation er kun refleksiv, når $A = B$ og $f = e_A$.

En relation $R \subseteq A \times A$ siges at være symmetrisk, hvis det for alle $a, b \in A$ gælder, at $(a,b) \in R$ medfører $(b,a) \in R$, altså at når a står i relationen til b , vil også b stå i relationen til a . Blandt eksemplerne er de under 2)-4), 11), 14), 15) nævnte ^{symmetriske} relationer. Den under 16) nævnte relation er kun symmetrisk, når $A = B$ og $f = f^{-1}$.

En relation $R \subseteq A \times A$ siges at være transitiv, når det for alle $a, b, c \in A$ gælder, at $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$ medfører $(a, c) \in R$, altså at når a står i relationen til b , og b står i relationen til c , da vil a stå i relationen til c . Blandt eksemplerne er de under 2)-4), 6), 8), 11), 13), 14) transitive. (Bemærk, at dette ikke gælder for 2) og 4) uden de ovenfor nævnte vedtægter, der gør de pågældende relationer refleksive.) Den under 16) nævnte relation er kun transitiv, når $A = B$ og f er idempotent, altså $f \circ f = f$.

Det kunne synes, at en symmetrisk og transitiv relation altid er refleksiv, idet $(a, b) \in R$ ifølge symmetrien medfører $(b, a) \in R$ og dette ifølge transitiviteten $(a, a) \in R$. Dermed er imidlertid ikke vist, at $(a, a) \in R$ for alle $a \in A$, men kun for de $a \in A$, som står i relationen til mindst et element $b \in A$.

En relation R i en mængde A kaldes en ækvivalensrelation, hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv, altså hvis den opfylder følgende tre betingelser:

$$\text{Æ 1. } \forall a ((a, a) \in R).$$

$$\text{Æ 2. } \forall a, b ((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R).$$

$$\text{Æ 3. } \forall a, b, c (((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \Rightarrow (a, c) \in R).$$

Når R er en ækvivalensrelation, skrives i reglen $a \sim b$ eller $a = b$ i stedet for $(a, b) \in R$, og man siger, at a er ækvivalent (lig) med b , eller, idet Æ 2 gælder, at a og b er ækvivalente. I visse tilfælde bruges også andre tegn. Angående brugen af lighedstegnet bemærkes, at det normalt udtrykker, at de to symboler, som det forbinder, er (almindeligvis forskellige) betegnelser for den samme ting. Lighedstegnet udtrykker da identiteten (jfr. eks. 14)). Der er imidlertid tilfælde, hvor det kun tilsyneladende bruges på

denne måde. Det mest kendte er vel følgende: Vi skriver $4/12 = 6/18$, skønt der jo ikke står den samme brøk på begge sider af lighedstegnet. Alment, når $p, q, \acute{p}, \acute{q}$ betegner positive hele tal, skriver vi $p/q = \acute{p}/\acute{q}$, hvis og kun hvis $p\acute{q} = q\acute{p}$. Det sidste lighedstegn udtrykker identitet af de to positive hele tal $p\acute{q}$ og $q\acute{p}$. Herved defineres der en relation R i mængden af alle positive brøker: p/q står i relationen R til $\acute{p}/\acute{q}$ betyder, at $p\acute{q} = q\acute{p}$. Det ses let, at R er en ækvivalensrelation. Et andet eksempel er følgende: Betegner $A, B, \acute{A}, \acute{B}$, punkter, skrives ofte $AB = \acute{A}\acute{B}$ for at udtrykke, at de to liniestykker AB og $\acute{A}\acute{B}$ har samme længde, uden at de derfor behøver at være identiske. Her foreligger også en ækvivalensrelation (jfr. eks. 3)).

Blandt de nævnte eksempler på relationer er 2)(parallel eller sammenfaldende), 3), 4), 11), 14) ækvivalensrelationer. En ved en afbildning $f: A \text{ ind i } A$ bestemt relation (16)), er kun en ækvivalensrelation, når f er den identiske afbildning e_A .

Til disse eksempler kan føjes den tidligere (side I, 5, 2) indførte ækvivalens af mængder. For ikke at tale om begrebet "mængden af alle mængder", som ikke kan gives nogen præcis mening, betragtes kun delmængder af en given universalmængde E . Relationen er da en ækvivalensrelation i mængden $\mathcal{P}(E)$ af alle delmængder af E .

Lad A og B være vilkårlige mængder, og lad der være givet en afbildning $f: A \text{ ind i } B$. En relation R i A defineres på følgende måde: Elementet $a \in A$ siges at stå i relationen R til $\acute{a} \in A$, når $f(a) = f(\acute{a})$. Det er indlysende, at R er en ækvivalensrelation. Den under 3) nævnte relation er

af denne art, idet f er den afbildning af mængden af liniestykker i planen ind i $\mathbb{R}$, der til et liniestykke lader svare dets længde.

Lad A være en vilkårlig mængde, og lad der være givet en klasseinddeling af A (side I,3,5), d.v.s. en mængde Φ af disjunkte, ikke tomme delmængder $F \subseteq A$, kaldet klasserne, hvis foreningsmængde er lig med A . Hvert element $a \in A$ er da indeholdt i en og kun een af klasserne F , og denne betegnes med F_a . Af klasseindelingsdefinition følger, at $F_a \cap F_a' \neq \emptyset$ medfører, at $F_a = F_a'$. En relation R_Φ i A defineres på følgende måde. Elementet $a \in A$ siges at stå i relationen R_Φ til elementet $a' \in A$, når $a \in F_a'$, eller, hvad der ifølge det sagte kommer ud på det samme, når $F_a = F_a'$, altså når a og a' tilhører samme klasse. Det er indlysende, at R_Φ er en ækvivalensrelation. [Idet der ved $a \rightarrow F_a$ defineres en afbildning $f:A$ på Φ , kan denne måde at definere en ækvivalensrelation på opfattes som et (tilsyneladende specielt) tilfælde af den foregående. Men da originalmængderne $f^{-1}(y), y \in f(A)$, ved en afbildning $f:A$ ind i B danner en klasseinddeling af A (jfr. side I,4,6), kan man også slutte det omvendte.]

Lad der nu være givet en vilkårlig ækvivalensrelation R i en mængde A . For et givet element $a \in A$ defineres

$$G_a = \{x \mid (a, x) \in R\} = \{x \mid a \sim x\},$$

hvor der er skrevet $a \sim x$ i stedet for $(a, x) \in R$. Mængden G_a består altså af de elementer af A , der er ækvivalente med a . Vi skal vise, at

$$\Psi = \{G_a \mid a \in A\},$$

altså mængden af de indbyrdes forskellige blandt mængderne

G_a , er en klasseinddeling af A . Idet $a \sim a$ ifølge $\mathbb{A} 1$, er $a \in G_a$, hvoraf ses, at ingen af mængderne er tom, og at hvert element $a \in A$ er indeholdt i mindst en af dem. Antag, at G_a og $G_{a'}$ har et element a'' fælles. Da gælder $a \sim a''$, $a' \sim a''$, altså ifølge $\mathbb{A} 2$ også $a \sim a'$, og ifølge $\mathbb{A} 3$ også $a \sim a'$. Er nu x et vilkårligt element af G_a , , altså $a \sim x$, fås af $\mathbb{A} 3$, at $a \sim x$, altså $x \in G_a$. Dette viser, at $G_{a'} \subseteq G_a$. Idet rollerne af a og a' kan ombyttes, fås $G_a = G_{a'}$. Dermed er vist, at to af mængderne G er enten disjunkte eller identiske. Mængden $\mathcal{P}$ er altså en klasseinddeling, og på den ovenfor angivne måde bestemmer denne den givne ækvivalensrelation R . To elementer x og x' tilhører nemlig da og kun da den samme mængde G , når de er ækvivalente; thi af $x \sim x'$ følger $x' \in G_x$, og af $x, x' \in G_a$ følger $a \sim x$, $a \sim x'$, altså $x \sim x'$ (hvorved $\mathbb{A} 2-3$ er benyttede).

Dermed er følgende sætning bevist:

Enhver klasseinddeling af en mængde A bestemmer en ækvivalensrelation i A , således at to elementer af A er ækvivalente, når og kun når de hører til samme klasse. Omvendt bestemmer enhver ækvivalensrelation i A en klasseinddeling af A , således at to elementer af A hører til samme klasse, når og kun når de er ækvivalente.

Klasserne af den ved en ækvivalensrelation bestemte klasseinddeling af A kaldes ækvivalensklasser. Et element $a \in A$ siges at repræsentere eller at være en repræsentant for den ækvivalensklasse, som det tilhører.

En relation R i en mængde A siges at være antisymmetrisk, når det for alle $a, b \in A$ gælder, at $a \neq b$ og $(a, b) \in R$ medfører $(b, a) \notin R$, med andre ord, når højst eet af parrene

(a,b) og (b,a) , hvor $a \neq b$, tilhører R . Blandt eksemplerne er de under 6), 8) og 13) nævnte antisymmetriske.

En relation R i en mængde A siges at være en refleksiv ordningsrelation, hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv, altså hvis den opfylder følgende tre betingelser:

$$01. \quad \forall_A a ((a,a) \in R).$$

$$02. \quad \forall_A a, b ((a \neq b \wedge (a,b) \in R) \implies (b,a) \notin R). \quad \text{Sådan som: } (Rab \wedge Rba) \implies a=b$$

$$03. \quad \forall_A a, b, c (((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \implies (a,c) \in R).$$

Det er her ikke krævet, at der for hvilke som helst to elementer a og b af A gælder enten $(a,b) \in R$ eller $(b,a) \in R$.

Efter som også dette, altså

$$04. \quad \forall_A a, b ((a,b) \in R \vee (b,a) \in R)$$

gælder eller ikke gælder, siges R at bestemme en total (fuldstændig) eller en partiell (delvis) ordning af elementerne i A .

Er R en refleksiv ordningsrelation, skrives som regel $a \leq b$ i stedet for $(a,b) \in R$, når der ikke er vedtaget et særligt tegn for relationen.

Blandt eksemplerne er de under 6), 8) ($\leq, \geq$) og 13) ($\subseteq, \supseteq$) nævnte refleksive ordningsrelationer, 6) og 13) partielle og 8) totale.

Erstattes 01 med kravet

$$01. \quad \forall_A a ((a,a) \notin R),$$

erstattes altså R med $\bar{R} = R \setminus \Delta$, fås en ikke refleksiv ordningsrelation. Man skriver da $a \not\leq b$ i stedet for $(a,b) \in \bar{R}$, når der ikke er vedtaget et særligt tegn for relationen.

Eksempler på ikke-refleksive ordningsrelationer er de med $<, >, \subset, \supset$ betegnede. Ud fra en ikke-refleksiv ordning $\bar{R}$

fås en refleksiv ved at erstatte $\bar{R}$ med $R = \bar{R} \cup \Delta$. En ikke-refleksiv ordning siges at være total eller partiel, efter som den i denne forstand tilsvarende refleksive er total eller partiel. De ved $<, >$ betegnede ordninger (eks.8) er totale, de ved $\subset, \supset$ betegnede (eks.13) er partielle.

Hidtil har der kun været tale om relationen mellem to elementer. De kaldes derfor binære relationer. Der forekommer imidlertid hyppigt relationer, hvori der indgår tre eller flere elementer. Eksempler: Lad A være mængden af punkter i en plan. "Tre punkter a, b, c ligger på ret linie" og "fire punkter a, b, c, d ligger på en cirkel" er da sådanne relationer. Lad A være mængden af punkter på en ret linie. Da er "punktet b ligger mellem punkterne a og c " en sådan relation, der i modsætning til de to førstnævnte ikke er "symmetrisk". Lad $f(x, y, z)$ være en funktion fra en delmængde af $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$. Da vil $f(x, y, z) = 0$ være en relation. Uden at gå ind på en almindelig teori for sådanne "ternære", "kvaternære", ... relationer skal det bemærkes, at de defineres analogt til de binære som delmængder af kartesiske produkter $A \times B \times C$ o.s.v.

Øvelser til kap. I, 7.

- 1) Fortolk hver af mængderne $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ og $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ som en punktmængde i planen.
- 2) Lad A betegne mængden af punkter tilhørende et liniestykke, B mængden af punkter på en ret linie, C mængden af punkter i en halvplan, D mængden af punkter på en cirkellinie og E mængden af punkter tilhørende en cirkelskive. Angiv punktmængder i rummet, der kan fortolkes som mængderne $A \times C$, $B \times C$, $A \times D$, $B \times D$, $C \times D$, $A \times E$, $B \times E$, $D \times D$ og $D \times E$.
- 3) Lad A og B være vilkårlige mængder, $A' \subseteq A$, $A'' \subseteq A$ og $B' \subseteq B$.
- $$(A' \cup A'') \times B = (A' \times B) \cup (A'' \times B)$$
- $$(A' \cap A'') \times B = (A' \times B) \cap (A'' \times B)$$
- $$(A \times B) \setminus (A' \times B') =$$
- $$[(A \setminus A') \times (B \setminus B')] \cup [(A \setminus A') \times B'] \cup [A' \times (B \setminus B')].$$
- 4) Skitser grafen for hver af følgende relationer i $\mathbb{R}$:
- a) $R = \{(x, y) \mid x \leq y\}.$
- b) $R = \{(x, y) \mid x > y\}.$
- c) $R = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 0\}.$
- d) $R = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 0\}.$
- e) $R = \{(x, y) \mid x - y^2 = 0\}.$
- f) $R = \{(x, y) \mid x - y^2 > 0\}.$

Angiv for hver af disse relationer følgende mængder af reelle tal:

$$\left\{ y \mid (0, y) \in R \right\}, \quad \left\{ y \mid (1, y) \in R \right\},$$

$$\left\{ y \mid (0, x) \in R^{-1} \right\}, \quad \left\{ x \mid (1, x) \in R^{-1} \right\},$$

- 5) Angiv ved en figur en punktmængde i planen, som kan fortolkes som $A \times A$, hvor $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Angiv ved figurer graferne for følgende relationer i A :

- a) $\{(a, b) \mid a+b \text{ er lige}\}$,
- b) $\{(a, b) \mid a \text{ er lige} \wedge b \text{ er lige}\}$,
- c) $\{(a, b) \mid ab = 6\}$,
- d) $\{(a, b) \mid a = 6 \vee b = 1\}$,
- e) $\{(a, b) \mid a \geq b+2\}$,
- f) $\{(a, b) \mid \max\{a, 6-b\} \leq 4\}$,

hvor $a, b \in A$. Undersøg, hvilke af relationerne der er refleksive, symmetriske, antisymmetriske, transitive, og hvilke der er af formen $f(a) = b$, hvor f er en afbildning af en delmængde af A ind i A .

Angiv ækvivalensklasserne for eventuelle ækvivalensrelationer blandt de givne relationer.

- 6) Afsæt i planen endelig mange punkter. Mængden af disse punkter betegnes med A . Forbind visse par af punkterne med liniestykker (eller kurver). (For overskuelighedens skyld må det undgås, at de får andre fællespunkter end de givne.) Vælg for hvert af liniestykkerne een eller begge orienteringer, og angiv dem ved pile. Man kan da tale om et liniestykkes begyndelses- og endepunkt. Har et liniestykke begge orienteringer, kan hvert af de punkter, det forbinder, betragtes som begyndelses- eller som endepunkt. Ved en vej i en sådan figur forstås et ordnet sæt af liniestykker blandt de tegnede, således at det første liniestykkes endepunkt er det andets begyndelsespunkt, det andets endepunkt er det

tredies begyndelsespunkt o.s.v. En relation R defineres i A ved fastsættelsen, at $(a,b) \in R$ betyder, at der findes en vej, der fører fra a til b .

Vis, at R er transitiv. Vis, at R er antisymmetrisk, hvis og kun hvis der ikke findes nogen lukket vej i figuren.

Tegn figurer af den betragtede art således, at R er henholdsvis en ækvivalensrelation, en total ordningsrelation, en partiel, men ikke total, ordningsrelation.

- 7) Lad A betegne en mængde af tegn, nemlig alfabetets (små) bogstaver samt et mellemrums- eller tomrumstegn, f.eks. en prik. Ved den alfabetiske orden sammen med fastsættelsen, at mellemrumstegnet skal gå forud for bogstavet a , bestemmes en ikke-refleksiv total ordningsrelation i A . Ved et "ord" af længden λ , hvor λ er et positivt helt tal, forstås et λ -sæt af elementer af A . Lad M betegne en mængde af "ord" af længden λ , altså $M \subseteq A^\lambda$. I M defineres en relation R på følgende måde: Et ord $\Phi \in M$ siges at stå i relationen R til ordet $\Psi \in M$, hvis $\Phi \neq \Psi$ og det første tegn i Φ , som er forskelligt fra det på den tilsvarende plads stående tegn i Ψ , går forud for dette i den for tegnene i A fastsatte orden. Vis, at R er en ikke-refleksiv total ordningsrelation i M . (Leksikografisk ordning).

- 8) I mængden $\mathbb{Z}$ af alle hele tal defineres en relation R på følgende måde: Idet m er et givet positivt helt tal, siges $a \in \mathbb{Z}$ at stå i relationen R til $b \in \mathbb{Z}$, hvis $b-a$ er deleligt med m , altså

$$R = \{(a,b) \mid m \mid (b-a)\}.$$

Man skriver da

$$a \equiv b \pmod{m},$$

hvilket læses a er kongruent med b modulo m. Vis, at R er en ækvivalensrelation. Angiv ækvivalensklasserne samt et sæt af repræsentanter for disse.

- 9) Lad E være en vilkårlig mængde og $\mathcal{G}$ en gruppe af transformationer af E. En relation R i mængden $\mathcal{P}(E)$ af delmængder af E defineres på følgende måde: Delmængden $A \subseteq E$ siges at stå i relationen R til delmængden $B \subseteq E$, hvis der findes en transformation $f \in \mathcal{G}$ (ikke nødvendigvis den samme for alle $(A, B) \in R$), således at $f(A) = B$. Vis, at R er en ækvivalensrelation.
- 10) Lad A være en totalt ordnet mængde, d.v.s. en mængde, hvori der er givet en total reflektiv ordningsrelation. Denne betegnes med $\leq$, den tilsvarende ikke-refleksive med $<$. Lad a, b, c, være tre forskellige elementer af A. Vis, at et og kun eet af dem "ligger mellem de to andre". (At et element e ligger mellem elementerne d og f betyder, at $d < e < f$ eller $f < e < d$.)
- Ved afsluttede, åbne og halvåbne intervaller i en totalt ordnet mængde A forstås delmængder af formerne
- $$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}, \quad]a, b[= \{x \mid a < x < b\},$$
- $$[a, b[= \{x \mid a \leq x < b\}, \quad]a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$
- Vis, at hvis J er et interval og $c, d \in J$, da gælder $[c, d] \subseteq J$. Bevis endelig følgende sætning: Hvis det for endelig mange intervaller i en totalt ordnet mængde gælder, at

fællesmængden for hvilke som helst to af dem ikke er tom, da er fællesmængden for dem alle ikke tom. (Betragt f.eks. først tre intervaller, og anvend induktion.)

- 11) Lad $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ være en endelig mængde, hvis elementer tænkes repræsenteret ved n punkter i planen, således at ikke tre af punkterne ligger på ret linie. For hvert af de liniestykker, der forbinder to af punkterne, vælges på vilkårlig måde en orientering, der angives ved en pil. Derved defineres en relation R i A , idet $(a_i, a_j) \in R$, hvis $a_i \neq a_j$ og liniestykket, der forbinder de to punkter er orienteret fra a_i mod a_j . Denne relation opfylder betingelserne 02, 04 og 01 (side I, 7, 14), og omvendt kan enhver relation i en endelig mængde, som opfylder disse betingelser, anskueliggøres på den angiven måde.
- Vis, at der findes mindst eet blandt punkterne i A , fra hvilket man kan komme til hvert andet punkt i A enten ved at gennemløbe eet af liniestykkerne i den foreskrevne retning eller ved at gennemløbe to af dem i træk i de for dem foreskrevne retninger. Formuleret som et udsagn om relationen R er påstanden: Der findes mindst eet element $a_\mu \in A$, således at der for hvert element $a_i \neq a_\mu$ af A gælder, at $(a_\mu, a_i) \in R$ eller der findes et element $a_j \in A$, for hvilket $(a_\mu, a_j) \in R$ og $(a_j, a_i) \in R$. (Betragt et eller det af punkterne i A , for hvilket antallet af de punkter i A , som kan nås fra det på den forlangte måde, er størst muligt, og slut indirekte.) Slut af resultatet, at påstanden gælder for enhver relation i en endelig mængde, som blot opfylder betingelsen 04.

Kap. II. Algebraens grundbegreber.§ 1. Kompositionsregler.

I den elementære matematik såvel som i det foregående forekommer mangfoldige forskrifter til dannelsen af et objekt ud fra to givne taget i en bestemt orden. Eksempler på sådanne forskrifter er : at danne summen, differensen, produktet, kvotienten af to tal, at danne potensen af et tal med et andet tal som eksponent, at danne konjunktionen, disjunktionen, implikationen af to udsagn, at danne foreningsmængden, fællesmængden, overskudsmængden af to mængder, at danne den sammensatte af to afbildninger, at danne det kartesiske produkt af to mængder. I hvert af disse tilfælde svarer der til et par af objekter, hvert tilhørende sin mængde, et bestemt objekt tilhørende en tredje mængde. Betegnes disse (ikke nødvendigvis forskellige) mængder med henholdsvis K, L og M , drejer det sig altså om en afbildning af mængden $K \times L$ (eller en delmængde af den) ind i M . Er $K = L = M = R$, vil

$$\varphi(x, y) = x + y, xy, x - y, x / y, x^y$$

være de afbildninger af henholdsvis $R \times R, R \times R, R \times R, R \times (R \setminus \{0\})$ og $R \times R$ ind i R , der giver de ovennævnte regneoperationer. Lad $K = L = M$ være en mængde af udsagn med den egenskab, at når to udsagn tilhører den, vil også de af disse sammensatte udsagn tilhøre den. Eksemplerne vedrørende udsagn, er da de ved

$$\varphi(p, q) = p \vee q, p \wedge q, p \Rightarrow q$$

bestemte afbildninger af $M \times M$ ind i M . Er E en vilkårlig mængde og $K = L = M = \mathcal{P}(E)$ mængden af dens delmængder, drejer det sig ved eksemplerne taget fra mængdealgebraen om afbildningerne

$$\varphi(A, B) = A \cup B, A \cap B, A \setminus B$$

af $M \times M$ ind i M . Er A, B, C vilkårlige mængder, K mængden af alle afbildninger $f: A$ ind i B , L mængden af alle afbildninger $g: B$ ind i C og M mængden af alle afbildninger af A ind i C , er sammensætningsforskriften givet ved afbildningen

$$\varphi(f, g) = g \circ f$$

af $K \times L$ ind i M . I det sidste af de nævnte tilfælde kan man vælge $K = \mathcal{A}(E)$, $L = \mathcal{A}(F)$, $M = \mathcal{A}(E \times F)$, hvor E og F er vilkårlige mængder, og talen er da om den ved

$$\varphi(A, B) = A \times B, \quad A \subseteq E, B \subseteq F,$$

bestemte afbildning $\varphi: K \times L$ ind i M .

En afbildning φ af det kartesiske produkt $K \times L$ af to mængder ind i en mængde M kaldes en kompositionsforskrift. I stedet for $\varphi(x, y)$, hvor $x \in K$ og $y \in L$, skrives, som det fremgår af de nævnte eksempler, i reglen x , et vist tegn, y . Derfor er det hensigtsmæssigt ved betragtning af ikke specificerede kompositionsforskrifter at bruge en lignende skrivemåde med et tegn, som ikke har fået nogen speciel betydning af den her betragtede art. Når φ betegner en ikke specificeret kompositionsforskrift, vil vi skrive $x \$ y$ i stedet for $\varphi(x, y)$.

Foreløbig betragtes tilfældet $K = L = M$. En kompositionsforskrift er da en afbildning $\varphi: M \times M$ ind i M . Man taler da om en kompositionsforskrift inden for M .

En kompositionsforskrift $\$$ inden for en mængde M kan være associativ, d.v.s.

$$\forall_M x, y, z (x \$ (y \$ z) = (x \$ y) \$ z).$$

Additionen og multiplikationen er associative kompositionsforskrifter inden for $\mathbb{R}$ (også inden for $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ og $\mathbb{N}$). Differensen er en ikke associativ kompositionsforskrift inden for $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$,

men ikke N). Tilsvarende gælder for divisionen i $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ og for potensdannelsen i $\mathbb{R}_+$. Dannelsen af foreningsmængde og fællesmængde af to delmængder af en mængde E er associative kompositionsforskrifter inden for $\mathcal{P}(E)$; dannelsen af overskudsmængden er ikke associativ. Sammensætning af afbildninger er en associativ kompositionsforskrift inden for mængden af alle afbildninger af en mængde A ind i sig selv.

En kompositionsforskrift $\$$ inden for en mængde M kan være kommutativ, d.v.s.

$$\forall_{M^x, y} (x \$ y = y \$ x).$$

Det ses umiddelbart, hvilke af de nævnte specielle kompositionsforskrifter der er kommutative. Der findes kommutative kompositionsforskrifter, som ikke er associative, f.eks. $x \$ y = (x + y)/2$ inden for $\mathbb{R}$.

For en kompositionsforskrift $\$$ inden for en mængde M kan der findes et neutralt element, d.v.s.

$$\exists_{M^e} \forall_{M^x} (x \$ e = e \$ x = x).$$

Ved additionen og multiplikationen i $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$) er det henholdsvis tallet 0 og tallet 1. Ved dannelsen af foreningsmængde og fællesmængde er det henholdsvis den tomme mængde $\emptyset$ og universalmængden E . Ved sammensætning af afbildninger er det den identiske afbildning. Der findes ikke associative kompositionsforskrifter, for hvilke der findes et neutralt element, f.eks. $x \$ y = (x^3 + x^2y + y^3)^{1/3}$ inden for $\mathbb{R}$.

For en given kompositionsforskrift inden for en mængde M findes der højst eet neutralt element i M .

Bevis: Betegner $e \in M$ og $e' \in M$ neutrale elementer, fås $e \$ e' = e$, da e' er neutralt element, og $e \$ e' = e'$, da e er neutralt element, altså $e = e'$.

Lad $\$$ være en kompositionsforskrift inden for en mængde M , for hvilken der findes et neutralt element $e \in M$. Et element $x \in M$ siges at være regulært med hensyn til $\$$, hvis der findes et element $x' \in M$, således at

$$x \$ x' = x' \$ x = e.$$

Et element x' med denne egenskab kaldes et til x inverst element. Er $M = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ eller $\mathbb{Z}$, og er kompositionsforskriften addition, vil hvert element $x \in M$ være regulært, og $x' = -x$ vil være inverst til x . Med multiplikationen som kompositionsforskrift inden for de samme mængder M vil hvert $x \neq 0$ være regulært med $x' = 1/x$ som inverst. Er $M = \mathcal{P}(E)$ og kompositionsforskriften dannelse af foreningsmængde, er ikke nogen delmængde $A \neq \emptyset$ af E regulær, da der ikke findes nogen delmængde af E , der forenet med A giver $\emptyset$. Tilsvarende gælder for dannelse af fællesmængden, hvor E er det eneste regulære element i M . Er M mængden af alle afbildninger af en mængde A ind i sig selv med sammensætning af afbildninger som kompositionsforskrift, vil de enentydige afbildninger af A på A være de regulære elementer i M med de inverse afbildninger som inverse elementer. Der findes kompositionsforskrifter med neutralt element, hvor et element kan have flere inverse, f.eks.

$$x \$ y = (x^3 - x^2y - xy^2 + y^3)^{1/3}$$

inden for $\mathbb{R}$, hvor tallet 0 er det neutrale element, og hvor x og $-x$ er inverse til x .

Ved en associativ kompositionsforskrift med neutralt element har hvert element højst eet inverst.

Bevis: Lad x' og x'' være inverse til x . Da gælder specielt, at

$$x' \$ x = e, \quad x \$ x'' = e,$$

hvor e er det neutrale element. Heraf fås

$$\begin{aligned} x' &= x' \$ e = x' \$ (x \$ x'') \\ &= (x' \$ x) \$ x'' = e \$ x'' = x''. \end{aligned}$$

Forkortningsreglerne siges at gælde for en kompositionsforskrift $\$$ inden for en mængde M , hvis

$$\forall_{M} x, y, z ((x \$ z = y \$ z) \vee (z \$ x = z \$ y) \implies x = y).$$

Dette ses let at være ensbydende med, at hver af ligningerne $a \$ x = b$ og $y \$ a = b$ for vilkårligt opgivne $a, b \in M$ har højst een løsning x henholdsvis y . For additionen eller subtraktionen som kompositionsforskrift inden for en talmængde gælder forkortningsreglerne, for multiplikation^{en} eller divisionen kun, hvis den pågældende talmængde ikke indeholder tallet 0. For dannelsen af foreningsmængde og fællesmængde er forkortningsreglerne ikke gyldige. For sammensætning af enentydige afbildninger af en mængde på sig selv er de gyldige (jfr. side I,6,5).

I det følgende undersøges mængder, inden for hvilke der er defineret en eller flere kompositionsforskrifter og/eller relationer. En sådan mængde siges at være organiseret ved kompositionsforskrifterne og/eller relationerne. En organiseret mængde angives ved til tegnet for selve mængden at føje tegn for de pågældende kompositionsforskrifter og relationer. Er M en mængde og $\$$ en kompositionsforskrift inden for denne, betegnes den ved $\$$ organiserede mængde med $(M, \$)$. Er der desuden f.eks. givet en ordningsrelation $<$ i M , skrives $(M, \$, <)$ o.s.v. En og samme mængde kan i almindelighed organiseres på mange forskellige måder. Det er derfor vigtigt ved hver undersøgelse af en organiseret mængde at præcisere, hvilke kompositionsforskrifter og/eller relationer den tænkes organiseret ved. Således skrives $(\mathbb{R}, +)$, når det drejer sig om at undersøge den

ved additionen organiserede mængde af reelle tal, tilsvarende $(\mathbb{R}, \cdot)$, når multiplikationen, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, når begge kompositionsforskrifter, og $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, når desuden ordningen efter størrelse indgår i undersøgelsen.

Lad der være givet to mængder M og M' samt kompositionsforskrifter $\$$ og $\$'$ inden for henholdsvis M og M' . En afbildning $f : M \text{ ind i } M'$ siges at være en homomorf afbildning eller en homomorfi af den organiserede mængde $(M, \$)$ ind i den organiserede mængde $(M', \$')$, hvis

$$\forall_{x,y} (f(x \$ y) = f(x) \$' f(y)).$$

Er $(M, \$)$, $(M', \$')$ og $(M'', \$'')$ ved kompositionsforskrifter organiserede mængder, og er f og f' homomorfier henholdsvis af $(M, \$)$ ind i $(M', \$')$ og af $(M', \$')$ ind i $(M'', \$'')$, vil $f' \circ f$ være en homomorfi af $(M, \$)$ ind i $(M'', \$'')$. For vilkårlige elementer $x, y \in M$ fås nemlig

$$\begin{aligned} f'(f(x \$ y)) &= f'(f(x) \$' f(y)) \\ &= f'(f(x)) \$'' f'(f(y)). \end{aligned}$$

En enentydig homomorf afbildning af $(M, \$)$ på $(M', \$')$ kaldes en isomorf afbildning eller isomorfi af $(M, \$)$ på $(M', \$')$.

Den inverse til en isomorfi af $(M, \$)$ på $(M', \$')$ er en isomorfi af $(M', \$')$ på $(M, \$)$.

Bevis: Idet f er en enentydig afbildning af M på M' , er f^{-1} en afbildning af M' på M . Lad x' og y' være vilkårlige elementer af M' . Da fås, idet f er en isomorfi,

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x') \$ f^{-1}(y')) &= f(f^{-1}(x')) \$' f(f^{-1}(y')) \\ &= x' \$' y', \end{aligned}$$

hvoraf ses, at

$$f^{-1}(x' \$' y') = f^{-1}(x') \$ f^{-1}(y'),$$

hvilket skulle vises.

Hvis der eksisterer en isomorf afbildning af $(M, \$)$ på $(M', \$')$, siges $(M, \$)$ at være isomorf med $(M', \$')$, og vi skriver $(M, \$)$ isom $(M', \$')$. Betegner A en mængde af mængder, der hver er organiseret ved en kompositionsforskrift, defineres herved en ækvivalensrelation i A . Relationen er nemlig refleksiv, da den identiske afbildning af M er en isomorf afbildning af $(M, \$)$ på $(M, \$)$. Endvidere er den symmetrisk; thi hvis f er en isomorf afbildning af $(M, \$)$ på $(M', \$')$, er f^{-1} en isomorf afbildning af $(M', \$')$ på $(M, \$)$. Endelig er relationen transitiv; thi er f en isomorf afbildning af $(M, \$)$ på $(M', \$')$ og f' en isomorf afbildning af $(M', \$')$ på $(M'', \$'')$, da vil $f' \circ f$ være en isomorf afbildning af $(M, \$)$ på $(M'', \$'')$.

Eksempler:

$M = M' = N$ (eller $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$). Da er $f : M$ ind i M' bestemt ved $f(x) = ax$, hvor a er et givet tal tilhørende den pågældende talmængde, en homomorfi af $(M, +)$ ind i $(M, +)$.

$M = \mathbb{R}$, $M' = \mathbb{R}_+$. Da er $f : M$ ind i M' bestemt ved $f(x) = a^x$, hvor a er et givet positivt tal, en homomorfi af $(\mathbb{R}, +)$ ind i $(\mathbb{R}_+, \cdot)$. Er $a \neq 1$, foreligger en isomorfi.

$(M, \circ) = S_n$ den symmetriske gruppe af graden n , altså mængden af alle permutationer af en mængde bestående af n elementer med sammensætning som kompositionsforskrift. Ved til permutationen x at lade svare den ^sfortegn $\text{sgn } x$ fås en homomorf afbildning af $(M, \circ)$ ind i $(\mathbb{R}, \cdot)$ eller på $(\{1, -1\}, \cdot)$.

Lad f være en homomorf afbildning af $(M, \$)$ på $(M', \$')$. Da gælder følgende:

Hvis kompositionsforskriften $\$$ er associativ, da er også $\$'$ associativ.

Bevis: Lad x', y', z' være vilkårlige elementer af M' . Da f afbilder på M' , findes der elementer $x, y, z \in M$, således at $f(x) = x', f(y) = y', f(z) = z'$. Vi har da

$$\begin{aligned} x' \$' (y' \$' z') &= f(x) \$' (f(y) \$' f(z)) \\ &= f(x) \$' f(y \$ z) = f(x \$ (y \$ z)) \end{aligned}$$

og på den anden side

$$\begin{aligned} (x' \$' y') \$' z' &= (f(x) \$' f(y)) \$' f(z) \\ &= f(x \$ y) \$' f(z) = f((x \$ y) \$ z). \end{aligned}$$

Da $\$$ er associativ, stemmer de højre sider overens, og påstanden følger.

Tilsvarende indses, at hvis $\$$ er kommutativ, er også $\$'$ kommutativ.

Findes der et neutralt element $e \in M$ for $\$$, vil $f(e)$ være neutralt element for $\$'$.

Bevis: Lad x' være et vilkårligt element af M' og x et element af M , således at $f(x) = x'$. Da fås

$$x' \$' f(e) = f(x) \$' f(e) = f(x \$ e) = f(x) = x',$$

og tilsvarende $f(e) \$' x' = x'$.

Findes der et neutralt element $e \in M$ for $\$$, er $x \in M$ regulært med hensyn til $\$$, og er y et til x inverst element, da vil $f(x)$ være regulært med hensyn til $\$'$, og $f(y)$ vil være et til $f(x)$ inverst element.

Bevis: Da $x \$ y = y \$ x = e$, fås

$$f(x) \$' f(y) = f(x \$ y) = f(e),$$

$$f(y) \$' f(x) = f(y \$ x) = f(e),$$

som påstået.

Lad der være givet to kompositionsforskrifter $\$$ og $\pounds$ inden for en mængde M . Man siger, at $\pounds$ er distributiv med hensyn

til \$, hvis de distributive love

$$x \text{ £ } (y \$ z) = (x \text{ £ } y) \$ (x \text{ £ } z),$$

$$(y \$ z) \text{ £ } x = (y \text{ £ } x) \$ (z \text{ £ } x)$$

gælder for alle $x, y, z \in M$. Er £ kommutativ, følger den ene af den anden. I mængder af udsagn er hver af kompositionsforskrifterne $\wedge$ og $\vee$ distributiv med hensyn til den anden. Det samme gælder i mængden af alle delmængder af en universalmængde for kompositionsforskrifterne $\cap$ og $\cup$. I talmængder derimod er multiplikationen distributiv med hensyn til additionen, men ikke omvendt. Bortset fra de to førstnævnte vil alle for os vigtige tilfælde være af den sidstnævnte art. Man plejer da at kalde den kompositionsforskrift, som er distributiv med hensyn til den anden for en multiplikation og også at betegne den som en sådan, medens den anden kompositionsforskrift kaldes for en addition og betegnes som en sådan. Lige som ved regning med tal vedtages, at når der ikke er angivet andet ved hjælp af parenteser, går multiplikation forud for addition. Herved reduceres antallet af nødvendige parenteser betydeligt. Den første af de ovenfor nævnte distributive love, f.eks., antager da det velkendte udseende: $x(y + z) = xy + xz$.

Lad $(M, \$, \text{£})$ og $(M', \$', \text{£}')$ være to mængder M og M' hver organiseret ved to kompositionsforskrifter. En afbildning $f : M \text{ ind i } M'$ siges at være en homomorf afbildning eller en homomorfi af $(M, \$, \text{£})$ ind i $(M', \$', \text{£}')$, hvis den er såvel en homomorfi af $(M, \$)$ ind i $(M', \$')$ som af $(M, \text{£})$ ind i $(M', \text{£}')$, med andre ord, hvis

$$\begin{aligned} & \forall_{M} x, y (f(x \$ y) = f(x) \$' f(y)) \\ & \wedge \forall_{M} x, y (f(x \text{ £ } y) = f(x) \text{ £}' f(y)). \end{aligned}$$

En enentydig homomorf afbildning af $(M, \$, \text{£})$ på $(M', \$', \text{£}')$ kal-

des en isomorf afbildning eller isomorfi.

Af resultaterne for mængder med een kompositionsforskrift fås umiddelbart de tilsvarende for mængder med to kompositionsforskrifter. Der gælder desuden, at hvis der findes en homomorf afbildning af $(M, \$, \&)$ på $(M', \$', \&')$, og hvis $\&$ er distributiv med hensyn til $\$$, da vil også $\&'$ være distributiv med hensyn til $\$'$.

I nogle tilfælde, især ved undersøgelser af talmængder, er det af betydning foruden kompositionsregler at betragte ordningsrelationer i de pågældende mængder. Lad $(M, <)$ og $(M', <')$ være mængder, der er organiseret ved ikke-refleksive ordningsrelationer. En afbildning $f : M \text{ ind i } M'$, for hvilken

$$\bigvee_M x, y (x < y \implies f(x) <' f(y))$$

siges at være ordenstro.

Eksempler:

M mængden af endelige delmængder af en mængde E og $M' = N$. Lader man til mængden $x \in M$ svare antallet af dens elementer, fås en ordenstro afbildning af $(M, \subset)$ ind i $(N, <)$.

$M \subseteq \mathbb{R}$ og $M' = \mathbb{R}$. De ordenstro afbildninger af $(M, <)$ ind i $(\mathbb{R}, <)$ er da netop de i M definerede strengt voksende funktioner, og de ordenstro afbildninger af $(M, <)$ ind i $(\mathbb{R}, >)$ de strengt aftagende.

Er $f : M \text{ ind i } M'$ en ordenstro afbildning af $(M, <)$ ind i $(M', <')$, og er $<$ en total ordningsrelation, da er f enentydig. Er nemlig x og y to forskellige elementer af M , gælder enten $x < y$, og da $f(x) <' f(y)$, eller $y < x$, og da $f(y) <' f(x)$, altså i begge tilfælde $f(x) \neq f(y)$, hvilket skulle vises.

Er to mængder M og M' organiseret ved refleksive ordnings-

relationer $\leq$ og $\leq'$, defineres en ordenstro afbildning af $(M, \leq)$ ind i $(M', \leq')$ som en afbildning $f : M \rightarrow M'$, for hvilken

$$\forall_{x,y} (x \leq y \implies f(x) \leq' f(y)).$$

Det er klart, at enhver afbildning, der er ordenstro for to ikke-refleksive ordningsrelationer, også er det for de tilsvarende refleksive, idet jo $x = y$ altid medfører, at $f(x) = f(y)$.
 og $M' = \mathbb{R}$,
 Det omvendte gælder imidlertid ikke. Er $M \subseteq \mathbb{R}$ (vil de ordenstro afbildninger af $(M, \leq)$ ind i $(\mathbb{R}, \leq)$ være de i M definerede voksende funktioner, og ved en sådan kan det hænde, at $x < y$, men $f(x) = f(y)$).

Det er klart, hvad man vil forstå ved en ordenstro homomorfi (isomorfi) af en mængde M ind i (på) en mængde M' , når hver af de to mængder er organiseret såvel ved en eller to kompositionsforskrifter som ved en ordningsrelation. Ved $x \rightarrow a^x$, hvor $a > 0$, bestemmes en ordenstro isomorfi af $(\mathbb{R}, +, <)$ på $(\mathbb{R}_+, \cdot, <)$, en ordenstro homomorfi af $(\mathbb{R}, +, \leq)$ ind i $(\mathbb{R}_+, \cdot, \leq)$ eller en ordenstro isomorfi af $(\mathbb{R}, +, <)$ på $(\mathbb{R}_+, \cdot, >)$, efter som $a > 1$, $a = 1$ eller $a < 1$. For $a \neq 1$ bestemmes den inverse isomorfi ved $x \rightarrow \log_a x$.

Homomorfier af en organiseret mængde ind i sig selv kaldes også endomorfier. Isomorfier af en organiseret mængde på sig selv kaldes også automorfier.

Øvelser til kap. I, 8.

- 1) Undersøg for hver af følgende kompositionsforskrifter \$, £ inden for de angivne mængder M med elementer $x, y, \dots$, om den er associativ, kommutativ, om forkortningsreglen gælder, om der findes et neutralt element, og i bekræftende fald, hvilke elementer der er regulære:
- $M = \mathbb{R}$, $x \$ y = (x^2 + y^2)^{1/2}$.
 - $M = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $x \$ y = (x^2 + y^2)^{1/2}$.
 - $M = \mathbb{R}_+$, $x \$ y = (xy)^{1/2}$.
 - $M = \mathbb{N}$, $x \$ y =$ største fælles divisor for x og y .
 - $M =$ mængden af alle funktioner $x : A \rightarrow \mathbb{R}$, hvor A er en given, ikke tom mængde, $x \$ y = x + y$, d.v.s. funktionen bestemt ved $t \rightarrow x(t) + y(t)$, $t \in A$, endvidere $x £ y = xy$, d.v.s. den ved $t \rightarrow x(t)y(t)$, $t \in A$, bestemt funktion.
- 2) Om en kompositionsforskrift \$ inden for en mængde M forudsættes, at den er associativ, og at der findes et neutralt element e . Vis, at hvis $a \in M$ er et regulært element, gælder det for ethvert element $b \in M$, at hver af ligningerne
- $$x \$ a = b, \quad a \$ y = b$$
- har en og kun een løsning x henholdsvis y .
- 3) Inden for en mængde M er defineret to kompositionsforskrifter \$ og £. Det forudsættes, at \$ har et neutralt element n , at forkortningsreglerne gælder for \$, og at £ er distributiv med hensyn til \$.
- Vis, at $n £ x = x £ n = n$ for hvert element $x \in M$. (Benyt, at $n \$ n = n$.)
- Heraf sluttet, at forkortningsreglerne ikke kan gælde generelt for £. Forudsættes det, at $x £ z = y £ z$ eller $z £ x = z £ y$ for $z \neq n$ medfører $x = y$, gælder "nulreglen"

$$\forall_{M} x, y ((x \text{ £ } y = n) \implies (x = n) \vee (y = n)).$$

Bevis dette. (Som vejledning kan benyttes det specielle tilfælde $M = \mathbb{Z}$, $\$ = +$, $\text{£} = \cdot$, $n = 0$.)

- 4) Om to kompositionsforskrifter $\$$ og £ inden for en mængde M forudsættes, at $\$$ er associativ, at forkortningsreglerne gælder for $\$$, at der findes et neutralt element e for £ , og at £ er distributiv med hensyn til $\$$. Vis, at $\$$ er kommutativ.

- 5) Vis, at følgende afbildninger af de angivne organiserede mængder er homomorfier, og undersøg, hvilke af dem der er isomorfier:

a) $f : (\mathbb{N}, \cdot) \text{ ind i } (\mathbb{N}, \cdot) , \quad f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}.$

b) $f : (\mathbb{Q}, \cdot) \text{ ind i } (\mathbb{Q}, \cdot) , \quad f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}.$

c) $f : (\mathbb{R}_+, \cdot) \text{ ind i } (\mathbb{R}_+, \cdot) , \quad f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}.$

d) $f : (\mathbb{C}, +) \text{ ind i } (\mathbb{R}, +), \quad f(z) = (z + \bar{z})/2.$

e) $f : (\mathbb{C}, \cdot) \text{ ind i } (\mathbb{R}, \cdot) , \quad f(z) = |z|.$

f) $f : (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) \text{ ind i } (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) , \quad f(z) = z/|z|.$

g) $f : (\mathbb{C}, +) \text{ ind i } (\mathbb{C}, \cdot) , \quad f(z) = e^z.$

h) $f : (\mathbb{C}, +, \cdot) \text{ ind i } (\mathbb{C}, +, \cdot) , \quad f(z) = \bar{z}.$

$\mathbb{C}$ betegner mængden af komplekse tal.

- 6) Lad $(M, \$, \text{£})$ og $(M', \$', \text{£}')$ være to mængder, der hver er organiseret ved to kompositionsforskrifter. Det forudsættes, at der findes en homomorf afbildning af $(M, \$, \text{£})$ på $(M', \$', \text{£}')$, og at £ er distributiv med hensyn til $\$$. Vis, at $\text{£}'$ er distributiv med hensyn til $\$'$.

- 7) Med M og M' betegnes mængderne af alle reelle tal henholdsvis af formen $r + s\sqrt{2}$ og $r + s\sqrt{3}$, hvor r og s er rationale tal.

Vis, at addition og multiplikation er kompositionsforskrifter

inden for hver af de to mængder.

Undersøg om de ved

$$\begin{aligned} r + s\sqrt{2} &\rightarrow r - s\sqrt{2}, \\ r + s\sqrt{2} &\rightarrow r + s\sqrt{3}, \end{aligned} \quad r, s \in \mathbb{Q},$$

bestemte afbildninger er homomorfier af $(M, +, \cdot)$ ind i henholdsvis $(M, +, \cdot)$ og $(M', +, \cdot)$.

- 8) Lad f være en homomorf afbildning af $(\mathbb{Z}, +)$ ind i $(\mathbb{Z}, +)$, som altså tilfredsstiller "funktionalligningen" $f(x + y) = f(x) + f(y)$ for alle $x, y \in \mathbb{Z}$. Vis, at der findes et tal $c \in \mathbb{Z}$, således at f bestemmes ved $x \mapsto cx$.

Bestem alle homomorfe afbildninger af $(\mathbb{Q}, +)$ ind i $(\mathbb{Q}, +)$.

Bestem alle ordenstro homomorfier af $(\mathbb{R}, +, <)$ ind i $(\mathbb{R}, +, <)$. (Benyt f.eks., at hvert irrationalt tal er grænseværdi såvel for en strengt voksende som for en strengt aftagende følge af rationale tal.)

Benyt resultatet til at vise:

- Enhver ordenstro homomorfi f af $(\mathbb{R}, +, <)$ ind i $(\mathbb{R}_+, \cdot, <)$, altså enhver strengt voksende funktion f , som tilfredsstiller funktionalligningen $f(x + y) = f(x)f(y)$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$, er positiv og af formen $f(x) = a^x$, hvor $a > 1$. (Sammensæt f med en passende isomorfi.)
- Enhver ordenstro homomorfi g af $(\mathbb{R}_+, \cdot, <)$ ind i $(\mathbb{R}, +, <)$, altså enhver strengt voksende funktion g , som tilfredsstiller funktionalligningen $g(xy) = g(x) + g(y)$ for alle $x, y \in \mathbb{R}_+$, er af formen $g(x) = \log_a x$, hvor $a > 1$.
- Enhver ordenstro homomorfi h af $(\mathbb{R}_+, \cdot, <)$ ind i $(\mathbb{R}_+, \cdot, <)$, altså enhver strengt voksende funktion h , som tilfredsstiller funktionalligningen $h(xy) = h(x)h(y)$ for alle $x, y \in \mathbb{R}_+$,

er af formen $h(x) = x^b$, hvor $b > 0$.

Angiv endelig alle . . . ordenstro homomorfier af $(\mathbb{R}, +, <)$ og $(\mathbb{R}_+, \cdot, <)$ ind i $(\mathbb{R}, +, >)$ og $(\mathbb{R}_+, \cdot, >)$.

- 9) Lad E være en vilkårlig ikke tom mængde, og lad X_E betegne mængden af alle funktioner $\chi: E \rightarrow [0,1]$. Idet χ_1 og $\chi_2 \in X_E$, forstås ved $\chi_1 + \chi_2$ og $\chi_1 \chi_2$ henholdsvis den ved $x \rightarrow \chi_1(x) + \chi_2(x)$ og den ved $x \rightarrow \chi_1(x) \chi_2(x)$ bestemte funktion fra E til $\mathbb{R}$. Vis, at

$$\chi_1 + \chi_2 = \chi_1 + \chi_2 - \chi_1 \chi_2$$

er en kompositionsforskrift i X_E (d.v.s. at hvis $\chi_1, \chi_2 \in X_E$, vil også $\chi_1 + \chi_2 \in X_E$).

Idet A betegner en vilkårlig delmængde af E , defineres ved $A \rightarrow \chi_A$, hvor χ_A betegner den til A hørende karakteristiske funktion (side I, 4, 3), en afbildning af $\mathcal{D}(E)$ ind i X_E . Vis, at denne er en ordenstro isomorfi af $(\mathcal{D}(E), \cup, \cap, \subseteq)$ på $(X_E, +, \cdot, \leq)$, hvor den partielle ordningsrelation $\leq$ inden for X_E er defineret ved, at $\chi_1 \leq \chi_2$ betyder $\chi_1(x) \leq \chi_2(x)$ for alle $x \in E$. (Jfr. I, 4, opg. 1.)

§ 2. Grupper.

En ved en kompositionsforskrift $\$$ organiseret mængde M kaldes en gruppe, hvis $\$$ er associativ, der findes et neutralt element e og hvert element x er regulært. Det drejer sig her om en generalisation af det tidligere (I, § 6) indførte begreb "transformationsgruppe" (permutationsgruppe). Ovenstående krav kan nemlig også formuleres således:

$$G\ 1. \quad \forall_{M^x, y} (x \$ y \in M).$$

$$G\ 2. \quad \forall_{M^x, y, z} (x \$ (y \$ z) = (x \$ y) \$ z).$$

$$G\ 3. \quad \exists_{M^e} \forall_{M^x} (e \$ x = x \$ e = x).$$

$$G\ 4. \quad \forall_{M^x} \exists_{M^{x'}} (x' \$ x = x \$ x' = e).$$

Kravene G 2-4 er jo ikke andet end definitionerne af associativitet, eksistens af neutralt element og regularitet, medens G 1 udsiger, at $\$$ skal være en kompositionsforskrift inden for M .

Ved en gruppe af transformationer (permutationer) er M en mængde af enentydige afbildninger af en mængde A på sig selv, og $\$$ er sammensætning af afbildninger symboliseret ved $\circ$.

Af de i den foregående paragraf beviste sætninger sluttes, at der for enhver gruppe $(M, \$)$ gælder:

Der findes kun eet neutralt element, og hvert element i M har kun eet inverst.

Dette fremgår dog også af tidligere resultater (side I, 6, 4-5); thi de der førte beviser var udelukkende baseret på gruppeegenskaberne G 1-4 (side I, 6, 1), som kun adskiller sig fra ovenstående i betegnelsen for mængden og kompositionsforskriften. Af samme grund har de nedenfor nævnte, i kap. I, § 6 beviste sætninger også gyldighed for vilkårlige grupper.

Det er sædvane også i vilkårlige grupper $(M, \$)$ at betegne

det inverse til et element $x \in M$ med x^{-1} (dog med $-x$, når kompositionsforskriften er addition (af tal) eller betegnes som addition). Endvidere bruges potensbetegnelsen: For $p \in \mathbb{Z}$ defineres

$$x^p = \begin{cases} \underbrace{x \$ x \dots \$ x}_p & \text{for } p > 0, \\ e & \text{for } p = 0, \\ (x^{-1})^{-p} & \text{for } p < 0. \end{cases}$$

De pågældende sætninger kan da formuleres på følgende måde:

I enhver gruppe gælder forkortningsreglerne.

Er a og b vilkårlige elementer af en gruppe $(M, \$)$, findes der et og kun eet element $x \in M$, således at $x \$ a = b$, nemlig $x = b \$ a^{-1}$, og et og kun eet element $y \in M$, således at $a \$ y = b$, nemlig $y = a^{-1} \$ b$.

I enhver gruppe $(M, \$)$ gælder potensreglerne

$$x^p \$ x^q = x^{p+q}, \quad (x^p)^q = x^{pq}$$

for hvert $x \in M$ og alle $p, q \in \mathbb{Z}$.

Følgende talmængder med de angivne kompositionsforskrifter er eksempler på grupper: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$, $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\{0\}, +)$, $(\{1\}, \cdot)$, $(\{1, -1\}, \cdot)$, $(\{mz | z \in \mathbb{Z}\}, +)$ og $(\{m^z | z \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$, hvor m betegner et fast positivt helt tal. Derimod er f.eks. $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\{0, 1\}, +)$ ikke grupper.

Ved en undergruppe i en gruppe $(G, \$)$ forstås en delmængde H af G , som organiseret ved restriktionen af kompositionsforskriften $\$$ til H er en gruppe. Dette indebærer især, at $\$$ skal være en kompositionsforskrift inden for H , d.v.s. at for hvilke som helst elementer x og y tilhørende H skal $x \$ y$ også tilhøre H . Endvidere skal det for hvert element x til-

hørende H gælde, at x^{-1} også tilhører H . Disse øjensynlig nødvendige betingelser viser sig også at være tilstrækkelige. Der gælder med andre ord:

Er $(G, \$)$ en gruppe og H en ikke tom delmængde af G , vil $(H, \$)$ være en undergruppe af $(G, \$)$, hvis og kun hvis følgende betingelser er opfyldt:

$$\text{UG 1: } \forall_H x, y (x \$ y \in H).$$

$$\text{UG 2: } \forall_H x (x^{-1} \in H).$$

Bevis: Nødvendigheden af disse betingelser fremgår af det sagte. Tilstrækkeligheden ses således: UG 1 udsiger, at $\$$ er en kompositionsforskrift inden for H . Da den associative lov gælder for elementerne i G , gælder den specielt for elementerne i delmængden H . Af UG 1 og UG 2 følger, at når x er et eller andet element af H , vil $x \$ x^{-1} = e$ tilhøre H . At hvert element $x \in H$ har et inverst i H , er sikret ved UG 2. Dermed er godtgjort, at H har alle gruppeegenskaber G 1-4.

Enhver gruppe $(G, \$)$ har sig selv samt $(\{e\}, \$)$ som undergruppe.

For hvert element c af en gruppe $(G, \$)$ gælder det, at $(\{c^p \mid p \in \mathbb{Z}\}, \$)$ er en undergruppe i $(G, \$)$, kaldet den af c frembragte cykliske gruppe.

Bevis: Idet $\{c^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ betegnes med C , er påstanden, at $c^p \$ c^q \in C$ for alle $p, q \in \mathbb{Z}$ (UG 1), og at $(c^p)^{-1} \in C$ for alle $p \in \mathbb{Z}$ (UG 2). Det første følger af $c^p \$ c^q = c^{p+q}$, det andet af $(c^p)^{-1} = c^{-p}$. (Jfr. side I, 6, 8.)

Det er indlysende, at hvis $(K, \$)$ er undergruppe i $(H, \$)$ og $(H, \$)$ er undergruppe i $(G, \$)$, da vil $(K, \$)$ være undergruppe i $(G, \$)$.

Eksempler:

$(\mathbb{Z}, +)$ er undergruppe i $(\mathbb{Q}, +)$ og også i $(\mathbb{R}, +)$. Er $c \in \mathbb{Z}$ (eller $\mathbb{Q}$ eller $\mathbb{R}$), vil den ved c frembragte cykliske undergruppe af $(\mathbb{Z}, +)$ (eller $(\mathbb{Q}, +)$ eller $(\mathbb{R}, +)$) bestå af tallene pc , $p \in \mathbb{Z}$. (Er kompositionsforskriften addition eller betegnes den som addition, skrives naturligvis pc i stedet for c^p .)

$(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ er en undergruppe i $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, i $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. Den ved $c = -1$ frembragte cykliske undergruppe af $(\mathbb{Q}, :)$ består kun af tallene 1 og -1.

Eksempler på transformationsgrupper samt på cykliske og andre undergrupper i sådanne blev nævnt i kap. I, § 6.

Lad $(H, \$)$ være en undergruppe i $(G, \$)$. Man definerer da i mængden G en relation R_v på følgende måde: Elementet $x \in G$ siges at stå i relationen R_v til elementet $y \in G$, hvis der findes et element $h \in H$, således at $x \$ h = y$, eller, hvad der kommer ud på det samme, hvis $x^{-1} \$ y \in H$. Denne relation er en ækvivalensrelation. Den er nemlig refleksiv, da $x \$ e = x$ og $e \in H$. Den er symmetrisk, da $x \$ h = y$, $h \in H$, medfører $y \$ h^{-1} = x$, $h^{-1} \in H$. Endelig er den transitiv, da $x \$ h = y$ og $y \$ h' = z$, hvor $h, h' \in H$, medfører

$$(x \$ h) \$ h' = x \$ (h \$ h') = z, \quad h \$ h' \in H.$$

Ifølge en sætning om ækvivalensrelationer (side I, 7, 13) bestemmer R_v en inddeling af G i ækvivalensklasser. Den ækvivalensklasse, der indeholder et givet element $x \in G$, består af alle med x ækvivalente elementer, altså af alle elementer, der kan skrives på formen $x \$ h$, hvor $h \in H$. Mængden af disse elementer, kaldes den ved x bestemte venstre sideklasse til undergruppen H . Man plejer at betegne den med $x \$ H$, sætter altså

$$x \$ H = \{x \$ h \mid h \in H\}.$$

Undergruppen H selv er altså en af sine sideklasser; den fremkommer f.eks. for $x = e$.

Af den anførte sætning fremgår, at to venstre sideklasser $x \$ H$ og $y \$ H$ er enten disjunkte eller identiske. Det sidste indtræffer, hvis og kun hvis $x^{-1} \$ y \in H$. Heraf sluttes specielt, at ikke nogen fra H forskellig sideklasse kan være en undergruppe af $(G, \$)$, da H er den eneste sideklasse, der indeholder e .

Analogt til relationen R_v kan man definere en relation R_h i G ved at fastsætte, at $x \in G$ står i relationen R_h til $y \in G$, hvis der findes et element $h \in H$, således at $h \$ x = y$, d.v.s. hvis $y \$ x^{-1} \in H$. Denne relation R_h ses ligeledes at være en ækvivalensrelation og giver således anledning til en klasseinddeling af G . Den ækvivalensklasse, der indeholder et givet element $x \in G$, er her den ved x bestemte højre sideklasse

$$H \$ x = \{h \$ x \mid h \in H\}.$$

To højre sideklasser $H \$ x$ og $H \$ y$ er identiske, hvis $y \$ x^{-1} \in H$, og ellers disjunkte.

Dermed er følgende sætning bevist:

Til hver undergruppe $(H, \$)$ i en gruppe $(G, \$)$ svarer to klasseinddelinger af G , hvis klasser er henholdsvis de venstre sideklasser $x \$ H$, $x \in G$, og de højre sideklasser $H \$ x$, $x \in G$. To elementer $y, z \in G$ hører til samme venstre sideklasse, nemlig til $y \$ H = z \$ H$, hvis og kun hvis $y^{-1} \$ z \in H$, og til samme højre sideklasse, nemlig $\overset{\text{til}}{H \$ y = H \$ z}$, hvis og kun hvis $z \$ y^{-1} \in H$.

Hvert til en sideklasse hørende element kaldes en repræsentant for denne.

De to til undergruppen hørende klasseinddelinger er i almindelighed forskellige fra hinanden. Men det kan hænde, at de

stemmer overens, d.v.s. at $x \$ H = H \$ x$ for hvert element $x \in G$. I så fald siges $(H, \$)$ at være en normal (eller invariant) undergruppe i $(G, \$)$.

En undergruppe $(H, \$)$ i en gruppe $(G, \$)$ er normal, hvis og kun hvis

$$x \$ h \$ x^{-1} \in H$$

for hvert $h \in H$ og hvert $x \in G$.

Bevis: Hvis $(H, \$)$ er normal, d.v.s. $x \$ H = H \$ x$ for hvert $x \in G$, vil hvert element $x \$ h$ af $x \$ H$ tilhøre $H \$ x$, altså kunne skrives på formen $h' \$ x$, hvor $h' \in H$. Men af $x \$ h = h' \$ x$ fås

$$x \$ h \$ x^{-1} = h' \in H,$$

hvilket viser betingelsens nødvendighed. Omvendt, lad det være givet, at $x \$ h \$ x^{-1} \in H$ for hvert $h \in H$ og hvert $x \in G$. Til givne h og x findes der altså et $h' \in H$, således at $x \$ h \$ x^{-1} = h'$. Heraf fås

$$x \$ h = h' \$ x \in H \$ x,$$

hvilket viser, at hvert element af $x \$ H$ er indeholdt i $H \$ x$, altså at $x \$ H \subseteq H \$ x$. Da det givne gælder for hvert $x \in G$, kan det anvendes på x^{-1} i stedet for x , hvilket giver $x^{-1} \$ h \$ x \in H$. Der findes altså et $h'' \in H$, således at $x^{-1} \$ h \$ x = h''$. Heraf fås

$$h \$ x = x \$ h'' \in x \$ H,$$

og dette viser, at også $H \$ x \subseteq x \$ H$. Dermed er også betingelsens tilstrækkelighed bevist.

I en kommutativ gruppe er alle undergrupper normale.

Af $x \$ h = h \$ x$ sluttes jo umiddelbart, at venstre og højre sideklasser er identiske.

Eksempler:

Den alternerende gruppe A_n af graden n er en undergruppe i den symmetriske S_n . Den ene (til H svarende) sideklasse er A_n , består altså af alle lige permutationer. Er x en vilkårlig ulige permutation, er $x \circ A_n$ den venstre sideklasse, der indeholder x , og denne må ifølge en tidligere bemærkning (side I, 6,17) bestå af samtlige ulige permutationer. Det samme må imidlertid gælde for den højre sideklasse $A_n \circ x$. Heraf sluttes, at venstre og højre sideklasseinddeling stemmer overens, altså at A_n er en normal under-gruppe i S_n . Der findes kun to sideklasser.

Lad m være et givet positivt helt tal, og lad $\mathbb{Z}_m$ betegne mængden af de med m delelige hele tal, altså

$$\mathbb{Z}_m = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

$(\mathbb{Z}_m, +)$ er en undergruppe i den kommutative gruppe $(\mathbb{Z}, +)$. Det er altså ikke nødvendigt at skelne mellem venstre og højre sideklasser. Den sideklasse, der indeholder tallet $x \in \mathbb{Z}$ er

$$x + \mathbb{Z}_m = \{x + mz \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

Den består af alle hele tal, som ved division med m kan give resten x . Betingelsen for, at tallene x og y tilhører samme sideklasse er, at $y - x \in \mathbb{Z}_m$, d.v.s. at der findes et tal $z \in \mathbb{Z}$, således at $y - x = mz$, med andre ord, at m er divisor i $y - x$. For denne relation i mængden af hele tal, der ifølge de fundne generelle resultater er en ækvivalensrelation (hvilket også let bekræftes direkte; jfr. I, 7, opg. 8), har man indført en særlig betegnelse

$$x \equiv y \pmod{m}$$

(x er kongruent med y modulo m). At to sideklasser $x + \mathbb{Z}_m$ og $y + \mathbb{Z}_m$ stemmer overens, er altså ensbetydende med, at $x \equiv y$

(mod m). Nu er hvert helt tal kongruent modulo m med et og kun eet af tallene $0, 1, \dots, m-1$ (hvert helt tal giver ved division med m en og kun een af disse rester). Heraf sluttes, at der findes netop m sideklasser, de såkaldte restklasser modulo m . Tallene $0, 1, \dots, m-1$ er repræsentanter for dem.

Lad $(H, \$)$ være en undergruppe i $(G, \$)$. Idet g betegner et fast element af G , defineres ved $h \rightarrow g \$ h$ en afbildning af H på sideklassen $g \$ H$ ("på" ifølge sideklassens definition). Denne afbildning er enentydig; thi af $g \$ h_1 = g \$ h_2$ følger $h_1 = h_2$, da forkortningsreglerne gælder i $(G, \$)$. Hver venstre sideklasse er altså lige mægtig med H . Det samme gælder for hver højre sideklasse. Alle sideklasser til en given undergruppe er altså lige mægtige. Heraf kan drages en vigtig slutning for grupper af endelig orden (d.v.s. med et endeligt antal elementer). Lad $\text{ord}(G)$ og $\text{ord}(H)$ betegne ordenen af henholdsvis G og H . Idet alle sideklasser til H indeholder det samme antal elementer, nemlig $\text{ord}(H)$, og de indbyrdes forskellige venstre sideklasser er disjunkte og tilsammen udgør hele G , fås

$$j \text{ ord}(H) = \text{ord}(G).$$

Her betegner j undergruppens index, d.v.s. antallet af venstre sideklasser (og som det ses af ligningen tillige antallet af højre sideklasser). Af ligningen aflæses Lagrange's sætning:

For hver undergruppe i en endelig gruppe gælder det, at dens orden er divisor i hele gruppens orden.

Af de i § 1, side II,1, 7-8, beviste sætninger sluttes umiddelbart:

Lad $(G, \$)$ være en gruppe og $(G', \$')$ en ved en kompositions-
forskrift $\$'$ organiseret mængde. Hvis der findes en homomorf
afbildning f af $(G, \$)$ på $(G', \$')$, så er $(G', \$')$ ligeledes en
gruppe. Er e' dennes neutrale element, haves $f(e) = e'$, og er
 $g' = f(g)$, haves $f(g^{-1}) = g'^{-1}$.

I det følgende betragtes homomorfe afbildninger af en gruppe $(G, \$)$ ind i en gruppe $(G', \$')$. Er f en sådan homomorfi, fås

$$f(e) = e',$$

hvor e og e' betegner det neutrale element i henholdsvis G og G' . Af $e \$ e = e$ sluttes nemlig, at

$$f(e \$ e) = f(e) \$' f(e) = f(e),$$

og da ligningen $x' \$' f(e) = f(e)$ kun har een løsning, nemlig $x' = e'$, fås $f(e) = e'$. Endvidere gælder for hvert $x \in G$, at

$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1};$$

thi af $x \$ x^{-1} = e$ fås $f(x) \$' f(x^{-1}) = e'$, hvilket viser, at $f(x^{-1})$ er det til $f(x)$ inverse element i G' .

Om homomorfier af en gruppe ind i en gruppe gælder følgende sætning:

Lad f være en homomorf afbildning af en gruppe $(G, \$)$ ind
i en gruppe $(G', \$')$ med det neutrale element e' . Da er $(K, \$)$,
hvor $K = f^{-1}(e')$ en normal undergruppe i $(G, \$)$, kaldet homomor-
fiens kerne.

For hvert element $g' \in G'$ gælder det, at originalmængden
 $f^{-1}(g')$ er en sideklasse til K , nemlig $g \$ K$, hvor g betegner
et element af G , for hvilket $f(g) = g'$. Herved bestemmes en en-
entydig korrespondance mellem sideklasserne til K og elementer-
ne af G' .

Bevis: Er x og y elementer tilhørende $K = f^{-1}(e')$, altså $f(x) = f(y) = e'$, fås

$$f(x \$ y) = f(x) \$' f(y) = e' \$ e' = e',$$

altså $x \$ y \in K$, og

$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = e'^{-1} = e',$$

altså $x^{-1} \in K$. Dette viser, at K opfylder betingelserne UG 1 og UG 2 (side II,2,3) og er følgelig en undergruppe. Endvidere gælder for hvert element $g \in G$ og hvert element $k \in K$, at

$$\begin{aligned} f(g \$ h \$ g^{-1}) &= f(g) \$' f(h) \$' f(g^{-1}) \\ &= f(g) \$ e' \$ f(g)^{-1} = e', \end{aligned}$$

hvilket viser, at $g \$ h \$ g^{-1} \in K$, og altså at $K = f^{-1}(e')$ er en normal undergruppe i $(G, \$)$. Dermed er sætningens første del bevist.

Idet g_1 og g_2 betegner elementer af G , have

$$f(g_1 \$ g_2^{-1}) = f(g_1) \$' f(g_2^{-1}) = f(g_1) \$ f(g_2)^{-1},$$

og dette er lig med e' , hvis og kun hvis $f(g_1) = f(g_2)$. Heraf ses, at $g_1 \$ g_2^{-1} \in K$, altså at g_1 og g_2 tilhører samme sideklasse til K (jfr. side II,2,5), hvis og kun hvis $f(g_1) = f(g_2)$. Alle elementer i samme sideklasse har altså samme billedelement ved f , og elementer af forskellige sideklasser har forskellige billedelementer. Heraf sluttet rigtigheden af sætningens anden del.

Et vigtigt eksempel er følgende: Lad

$$(C, \$), \quad C = \{c^p \mid p \in \mathbb{Z}\},$$

være en af et element c frembragt cyklisk gruppe. Ved $p \mapsto c^p$ defineres en afbildning af $\mathbb{Z}$ på C . Ifølge potensreglen $c^{p+q} = c^p \$ c^q$ er den en homorfi af $(\mathbb{Z}, +)$ på $(C, \$)$. Kernen K består af alle de hele tal p , for hvilke $c^p = e$, altså

$$K = \{p \mid (p \in \mathbb{Z}) \wedge (c^p = e)\}.$$

$(K,+)$ er ifølge ovenstående sætning en undergruppe i $(\mathbb{Z},+)$. Nu er det let at bestemme alle sådanne undergrupper.

Lad $(H,+)$ være en undergruppe i $(\mathbb{Z},+)$. Enten er $H = \{0\}$, eller der findes i H et tal $p \neq 0$. Da hører også det inverse, d.v.s. $-p$ til H . Heraf sluttet, at H indeholder mindst eet positivt tal. Lad a være det mindste positive (hele) tal, der tilhører H . Da vil også alle "potenser" pa , hvor $p \in \mathbb{Z}$, altså den ved a frembragte cykliske undergruppe af $(\mathbb{Z},+)$ være indeholdt i H . Det påstås, at den er identisk med H :

$$H = \{pa \mid p \in \mathbb{Z}\}.$$

For at vise dette betragtes et helt tal $y \in H$. For hvert $p \in \mathbb{Z}$ er da $y + pa \in H$. Med andre ord, hele den restklasse modulo a , som indeholder y , tilhører H (jfr. side II,2, 7-8). Nu findes der i denne restklasse eet af tallene $0, 1, \dots, a-1$, og det kan kun være 0 , da a var det mindste positive tal i H . Følgelig er y delelig med a , altså indeholdt i $\{pa \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Dermed er påstanden bevist, og vi har følgende sætning:

Hver undergruppe i $(\mathbb{Z},+)$ er af formen $(\{pm \mid p \in \mathbb{Z}\},+)$, hvor m er et helt tal.

For $m = 0$ fås nemlig $(\{0\},+)$, og for hver af de andre undergrupper er det lige blevet vist, at de har denne form.

Dette resultat giver oplysning om kernen K i den homomorfe afbildning $p \rightarrow c^p$ af $(\mathbb{Z},+)$ på den cykliske gruppe $(C, \$)$. Idet $(K,+)$ er undergruppe i $(\mathbb{Z},+)$, findes der et helt tal m , som kan vælges større end eller lig med 0 , således at K består af alle multipla af m . Er $m = 0$, består kernen kun af 0 , og $c^p = e$, hvis og kun hvis $p = 0$. Er $m > 0$, fås $c^p = e$, hvis og kun hvis p er delelig med m , altså

$$c^p = e \iff p \equiv 0 \pmod{m}.$$

Heraf eller af den generelle sætning (side II,2,9 nederst) slut-

tes, at for $p, q \in \mathbb{Z}$ gælder

$$c^p = c^q \iff p = q \quad \text{i tilfældet } m = 0,$$

$$c^p = c^q \iff p \equiv q \pmod{m} \quad \text{i tilfældet } m > 0.$$

Når $m = 0$, er altså alle potenser c^p , $p \in \mathbb{Z}$, indbyrdes forskellige, og den cykliske gruppe $(C, \$)$ er af uendelig orden. Når $m > 0$, findes der så mange indbyrdes forskellige potenser, som der er restklasser modulo m . Den cykliske gruppe $(C, \$)$ er altså af ordenen m . Specielt er $e = c^0, c^1, \dots, c^{m-1}$ indbyrdes forskellige, medens $c^m = e$. En endelig cyklisk gruppes orden er altså den mindste positive eksponent, for hvilken potensen af det frembringende element er lig med det neutrale element. Vi har altså:

I en cyklisk gruppe $(\{c^p | p \in \mathbb{Z}\}, \$)$ af uendelig orden er alle potenser c^p indbyrdes forskellige. I en cyklisk gruppe af den endelige orden $m (> 0)$ er potenserne $e = c^0, c^1, \dots, c^{m-1}$ indbyrdes forskellige, og hver potens c^p er lig med een af disse, nemlig den, hvis eksponent er resten r , $0 \leq r < m$, som p giver ved division med m .

Den af et element frembragte cykliske gruppes orden kaldes også kort elementets orden.

Lad $(G, \$)$ være en gruppe af den endelige orden n . Da vil hvert element $g \in G$ frembringe en cyklisk undergruppe af endelig orden, og ifølge Lagranges sætning vil denne være divisor i n . I forbindelse med ovenstående fås altså:

I en gruppe af den endelige orden n gælder det for hvert element g , at dets orden er divisor i n , og specielt, at $g^n = e$.

Som nævnt tidligere (side II,1,7) er isomorfi mellem mængder, der hver er organiseret ved en kompositionsforskrift, en ækvivalensrelation. Dette gælder specielt for grupper. Man kan derfor inddele mængden af alle grupper i klasser af indbyrdes

isomorfe. Er grupperne $(G, \$)$ og $(G', \$')$ isomorfe, og er g, g_1, g_2 vilkårlige elementer i G og g', g_1', g_2' de til disse ved en isomorfi svarende elementer af G' , haves $g_1 \$ g_2 = g$, hvis og kun hvis $g_1' \$' g_2' = g'$, og $g_2 = g_1^{-1}$, hvis og kun hvis $g_2' = g_1'^{-1}$. Med andre ord "regninger" i den ene gruppe og tilsvarende "regninger" i den anden med de tilsvarende elementer følges fuldstændigt ad. Ved en isomorfi vil endvidere til hver undergruppe i den ene gruppe svare en undergruppe i den anden. Kort sagt, interesserer man sig kun for kompositionsforskrifterne, men ikke for gruppeelementernes konkrete betydning (tal, afbildninger,...), må man betragte isomorfe grupper som ens, idet de fra dette synspunkt kun adskiller sig i gruppeelementernes og kompositionsforskrifternes betegnelser. Man siger derfor, at isomorfe grupper er den samme "abstrakte gruppe".

Alle cykliske grupper af uendelig orden er indbyrdes isomorfe. Hver af dem er isomorf med $(\mathbb{Z}, +)$.

Det samme gælder for de cykliske grupper af en given endelig orden m . Er $(C, \$)$ og $(C', \$')$, hvor $C = \{c^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ og $C' = \{c'^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$, to sådanne grupper, defineres ved $c^p \longrightarrow c'^p$ en enentydig afbildning af C på C' ; thi to potenser af c stemmer overens, hvis og kun hvis de tilsvarende potenser af c' stemmer overens. At denne afbildning er en isomorfi, følger umiddelbart af potensreglen.

Også blandt de cykliske grupper af ordenen m findes der en "standardgruppe" svarende til $(\mathbb{Z}, +)$ blandt de uendelige. Som vist består der en enentydig korrespondance mellem elementerne i en cyklisk gruppe af ordenen m og restklasserne modulo m . Lad $\mathbb{Z} \pmod{m}$ betegne mængden af disse restklasser. Denne organiseres ved en kompositionsforskrift, som betegnes med $+$ og defineres på følgende måde: Er $\{p_1 + mz_1 \mid z_1 \in \mathbb{Z}\}$ og $\{p_2 + mz_2 \mid z_2 \in \mathbb{Z}\}$ to restklasser, vil mængden bestående af alle summer af et tal fra den

første og et tal fra den anden, altså

$$\{p_1 + p_2 + m(z_1 + z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$$

være indeholdt i (endda være identisk med) en bestemt restklasse, idet $z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}$ (og $z_1 + z_2$ gennemløber hele $\mathbb{Z}$, når z_1 og z_2 gør det). Denne restklasse kaldes de to givnes sum, og man skriver med den tidligere indførte betegnelse for restklasserne

$$(p_1 + \mathbb{Z}_m) + (p_2 + \mathbb{Z}) = p_1 + p_2 + \mathbb{Z}_m,$$

hvor $\mathbb{Z}_m = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ er mængden af de med m delelige hele tal.

Repræsenteres restklasserne ved tallene $0, 1, \dots, m-1$, findes summen af to af dem ved at addere repræsentanterne og, hvis disses sum ikke findes blandt $0, 1, \dots, m-1$, at erstatte den med resten, som den giver ved division med m . Den således organiserede mængde $(\mathbb{Z}(\text{mod } m), +)$ er en gruppe. Dette bekræftes let direkte. Men det følger også af en ovenfor vist sætning (side II, 2, 9), idet der ved $p \longrightarrow p + \mathbb{Z}_m$ defineres en afbildning af gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ på $(\mathbb{Z}(\text{mod } m), +)$, som er en homomorfi ifølge ovenstående definition af summen af to restklasser. At $(\mathbb{Z}(\text{mod } m), +)$ er en cyklisk gruppe af orden m , sluttet af, at hver restklasse $p + \mathbb{Z}_m$, $p \in \mathbb{Z}$, er en "potens", nemlig den p -te, af $1 + \mathbb{Z}_m$. Gruppen $(\mathbb{Z}(\text{mod } m), +)$ kaldes den additive gruppe af restklasserne modulo m .

Alle cykliske grupper af samme endelige orden m er indbyrdes isomorfe. Hver af dem er isomorf med $(\mathbb{Z}(\text{mod } m), +)$, den additive gruppe af restklasserne modulo m .

Er nemlig $(C, \$)$ en sådan gruppe og $c \in C$ et element, der frembringer den, bestemmes ved $p + \mathbb{Z}_m \longrightarrow c^p$ ifølge det tidligere viste en enentydig afbildning af $\mathbb{Z}(\text{mod } m)$ på C . At den er en isomorfi aflæses af

$$(p + \mathbb{Z}_m) + (q + \mathbb{Z}_m) = p + q + \mathbb{Z}_m \longrightarrow c^{p+q} = c^p \$ c^q.$$

En abstrakt endelig gruppe (altså en klasse af indbyrdes isomorfe endelige grupper) kan angives fuldstændigt ved en såkaldt gruppetavle. Lad $(G, \$)$ være en sådan gruppe, og lad dens elementer være $g_1, g_2, \dots, g_n$. For at lette oversigten noget vælges $g_1 = e$, det neutrale element. Man opstiller en kvadratisk tavle bestående af n^2 felter:

	g_1	g_2	$\dots$	g_j	$\dots$	g_n
g_1	g_1	g_2	$\dots$	g_j	$\dots$	g_n
g_2	g_2					
$\vdots$	$\vdots$					
g_i	g_i			$g_i \$ g_j$		
$\vdots$	$\vdots$					
g_n	g_n					

Rækkerne mærkes med $g_1, g_2, \dots, g_n$ i en eller anden orden, og ligeledes kolonnerne (ikke nødvendigvis, som angivet, i den samme orden). I det felt, der er fælles for rækken mærket g_i og kolonnen mærket g_j , skrives det af elementerne $g_1, g_2, \dots, g_n$, som er lig med $g_i \$ g_j$. Gøres dette for alle $i, j = 1, 2, \dots, n$, fås en tavle, som gengiver kompositionsforskriften fuldstændigt. I den med g_i mærkede række står elementerne $g_i \$ g$, $g \in G$, altså G 's samtlige elementer, hvert een gang. I den med g_j mærkede kolonne står elementerne $g \$ g_j$, $g \in G$, altså G 's samtlige elementer, hvert een gang. Specielt findes det neutrale element g_1 een gang i hver række og een gang i hver kolonne. At to elementer g_i og g_j er indbyrdes inverse, er ensbetydende med, at g_1 står i feltet, der er fælles for rækken g_i og kolonnen g_j (og også i feltet, der er fælles for rækken g_j og kolonnen g_i ,

da indbyrdes inverse elementer er ombyttelige. En mindre over-
skuelig egenskab ved gruppetavlen følger af den associative
lovs gyldighed. Denne omstændighed bevirker, at det kan være
meget besværligt at afgøre, om en forelagt tavle med de ovenfor
nævnte egenskaber er en gruppetavle.

Som eksempel betragtes den symmetriske gruppe S_3 . Dens
elementer betegnes således:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Det ses, at g_1, g_2, g_3 er de lige permutationer. De ulige er her
alle transpositioner. Man finder følgende tavle:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_2	g_2	g_3	g_1	g_6	g_4	g_5
g_3	g_3	g_1	g_2	g_5	g_6	g_4
g_4	g_4	g_5	g_6	g_1	g_2	g_3
g_5	g_5	g_6	g_4	g_3	g_1	g_2
g_6	g_6	g_4	g_5	g_2	g_3	g_1

Udfyldningen af første række og kolonne er oplagt. Idet $g_2 \circ g_3$
er en lige permutation og hverken kan være g_2 eller g_3 , må den
være g_1 . Følgelig er også $g_3 \circ g_2 = g_1$. Da $g_3 \circ g_3$ er lige og g_1
og g_3 allerede står i tredje række, må den være g_2 . Dermed er
kvadratet øverst til venstre med 3 rækker og 3 kolonner udfyldt.
Det er gruppetavlen for undergruppen A_3 i S_3 . At transpositio-
nerne g_4, g_5, g_6 er involutoriske, giver placeringen af g_1 i de
tre sidste rækker. Man finder $g_2 \circ g_4 = g_6$. Derefter kan de to
sidste felter i anden række udfyldes. Der mangler nemlig g_4 og

g_5 , og g_5 kan ikke stå i femte kolonne. Endvidere ses uden regning, at $g_3 \circ g_4 = g_5$, da denne permutation vides at være ulige, og g_4 og g_6 findes allerede i fjerde kolonne. På denne måde kan man fortsætte og får hele tavlen udfyldt efter ganske få regninger.

Lad A være en mængde bestående af n elementer. Den fuldstændige permutationsgruppe for A kaldes "den symmetriske gruppe af graden n " og den betegnes med S_n uden angivelse af selve mængden A (jfr. side I,6,1). Berettigelsen heraf ligger i, at de fuldstændige permutationsgrupper for mængder, som indeholder det samme antal elementer, er indbyrdes isomorfe. De er altså den samme abstrakte gruppe. Dette indses let således: Lad $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ og $B = \{1, 2, \dots, n\}$, og lad f være en permutation af B . Lader man til f svare den ved $a_i \longrightarrow a_{f(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, bestemte permutation f' af A , for hvilken altså

$$f'(a_i) = a_{f(i)},$$

fås en enentydig afbildning af den fuldstændige permutationsgruppe for B på den fuldstændige permutationsgruppe for A . At det er en isomorfi følger af, at når f og g er permutationer af B , vil der til $g \circ f$ svare $(g \circ f)'$, hvor

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a_i) &= a_{g \circ f(i)} = a_{g(f(i))} \\ &= g'(a_{f(i)}) = g'(f'(a_i)) = g' \circ f'(a_i), \end{aligned}$$

altså $(g \circ f)' = g' \circ f'$.

I det følgende vises, at enhver gruppe er isomorf med en transformationsgruppe, specielt at enhver endelig gruppe er isomorf med en permutationsgruppe. Lad $(G, \circ)$ være en vilkårlig gruppe, og lad $\mathcal{G}$ betegne den fuldstændige transformationsgruppe for mængden G af den givne gruppes elementer. Er g et vilkårligt

element af G , defineres ved $x \mapsto g \$ x$, hvor $x \in G$, en enentydig afbildning af G på sig selv; thi er y et vilkårligt element af G , findes der et og kun eet element $x \in G$, således at $g \$ x = y$ (jfr. side II,2,2). Idet denne afbildning, som er et element af $\mathcal{G}$, betegnes med $g' : G$ på $G(1-1)$, haves

$$g'(x) = g \$ x.$$

Det drejer sig om at vise, at der ved $g \mapsto g'$, $g \in G$, bestemmes en enentydig homomorf afbildning φ af $(G, \$)$ ind i $\mathcal{G}$ (underforstået: med sammensætning $\circ$ som kompositionsforskrift). At denne afbildning φ er enentydig sluttet af, at $g_1' = g_2'$, altså $g_1 \$ x = g_2 \$ x$ for alle $x \in G$ (endda for et enkelt, f.eks. $x = e$) medfører, at $g_1 = g_2$. At φ er en homomorfi, altså at

$$(g_2 \$ g_1)' = g_2' \circ g_1' \quad \text{for } g_1, g_2 \in G,$$

ses af

$$\begin{aligned} (g_2 \$ g_1)'(x) &= (g_2 \$ g_1) \$ x = g_2 \$ (g_1 \$ x) \\ &= g_2 \$ g_1'(x) = g_2'(g_1'(x)) = (g_2' \circ g_1')(x). \end{aligned}$$

Betegner $\varphi(G) \subseteq \mathcal{G}$ billedmængden af G ved afbildningen φ , vil denne være en homomorfi af $(G, \$)$ på den organiserede mængde $(\varphi(G), \circ)$. Denne er følgelig en gruppe (jfr. side II,2,9), altså en undergruppe i $\mathcal{G}$. Da φ er enentydig, er $(G, \$)$ isomorf med $(\varphi(G), \circ)$. Dermed er følgende sætning bevist:

Enhver gruppe $(G, \$)$ er isomorf med en transformationsgruppe, nemlig med en undergruppe i den fuldstændige transformationsgruppe for mængden G af gruppens elementer. Specielt er hver endelig gruppe af ordenen n isomorf med en undergruppe i den symmetriske gruppe S_n .

Ved en endelig gruppe $(G, \$)$, hvor $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, kan den til et element g_i svarende permutation af mængden G aflæses af gruppetavlen. De til $g_1, g_2, \dots, g_n$ svarende elementer står under

dem i den med g_i mærkede række.

Ved gruppen $(\mathbb{R}, +)$ svarer til $a \in \mathbb{R}$ afbildningen $x \longrightarrow a + x$ af $\mathbb{R}$ på sig selv. Den tilsvarende transformationsgruppe er altså gruppen af translationer af tallinien. Ved gruppen $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ svarer til $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ afbildningen $x \longrightarrow mx$. Den tilsvarende transformationsgruppe er gruppen af homotetier af tallinien med centrum 0. (Til disse eksempler se side I, 6, 2-3.)

Lad $(G, \$)$ igen være en vilkårlig gruppe. I stedet for til elementet $g \in G$ at lade svare afbildningen $x \longrightarrow g \$ x$, en såkaldt venstre translation af G , kan man til g lade svare højre translationen $x \longrightarrow x \$ g$. Hvis gruppen $(G, \$)$ ikke er kommutativ, fås på denne måde en anden ^{med} $(G, \$)$ isomorf undergruppe i $\mathcal{G}$. Er gruppen endelig, aflæses disses permutationer af gruppetavlens kolonner.

Rettelse til II, 2, øv. 16. De to sidste linier erstattes med:
Vis ved hjælp heraf, at for hvert primtal m og hvert helt tal a , som ikke er deleligt med m , er $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ eller, hvad der kommer ud på det samme, for hvert primtal m og hvert helt tal a er $a^m \equiv a \pmod{m}$ (Fermats "lille" sætning).

Øvelser til kap. II, 2.

- 1) Lad n være et positivt helt tal. Vis, at mængden bestående af de n -te enhedsrødder, d.v.s. de komplekse rødder i ligningen $z^n = 1$, med multiplikationen som komposition danner en cyklisk gruppe af ordenen n , og angiv et element, der frembringer gruppen.

Angiv for $n = 6$ alle undergrupper. Vis, at de alle er cykliske, og angiv frembringere for dem.

- 2) Vis, at en endelig gruppe, hvis orden er et primtal, er cyklisk.

- 3) Med $(H, \circ)$ betegnes den af $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ frembragte cykliske undergruppe i den symmetriske gruppe S_3 af graden 3. Angiv såvel de venstre som de højre sideklasser til H .

- 4) Den tidligere indførte gruppe $\mathcal{R}^1$ (side I,6,3)

$$(G, \circ) = (\{f_{a,m} \mid (a \in \mathbb{R}) \wedge (m \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\}, \circ),$$

hvor $f_{a,m}$ er den ved

$$f_{a,m}(x) = mx + a$$

bestemte afbildning af $\mathbb{R}$ på $\mathbb{R}$, har som undergrupper

$$(H, \circ) = (\{f_{a,1} \mid a \in \mathbb{R}\}, \circ)$$

og

$$(K, \circ) = (\{f_{0,m} \mid m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \circ).$$

Angiv for hver af disse den venstre og den højre sideklasse, som indeholder elementet $f_{b,n} \in G$. Undersøg, om nogen af disse undergrupper er normal.

- 5) Lad $(G, \$)$ være en endelig gruppe og H en ikke tom delmængde af G , for hvilken UG 1 (side II,2,3) gælder. Vis, at $(H, \$)$ er undergruppe i $(G, \$)$.

Angiv et eksempel på en uendelig gruppe $(G, \$)$ med en delmængde H af G , som opfylder UG 1, men for hvilken $(H, \$)$ ikke er undergruppe i $(G, \$)$.

- 6) Lad G være en endelig mængde og $\$$ en associativ kompositions-forskrift inden for G , for hvilken der findes et neutralt element $e \in G$, og for hvilken forkørtningsreglerne gælder. Vis, at $(G, \$)$ er en gruppe.
- 7) Lad G være en ikke tom mængde, hvori der er defineret en associativ kompositionsforskrift $\$$. Det forudsættes, at for vilkårligt opgivne elementer a og b af G har hver af ligningerne

$$x \$ a = b, \quad a \$ y = b$$

mindst een løsning x henholdsvis y . Vis, at $(G, \$)$ er en gruppe. (Betragt en løsning til en ligning af formen $x \$ a = a$, og vis, at den er neutralt element.)

- 8) Lad a og b være elementer af en gruppe $(G, \$)$. Vis, at de cykliske undergrupper, der frembringes af $a \$ b$ og $b \$ a$ enten er begge af uendelig orden eller begge af den samme endelige orden.

- 9) Idet $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, betragtes de i A definerede funktioner

$$f_1(t) = t, \quad f_2(t) = 1/t, \quad f_3(t) = -t, \quad f_4(t) = -1/t.$$

Vis, at $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$ er en transformationsgruppe i A , som er isomorf med den i I, 6, opg. 4 omtalte transformationsgruppe.

- 10) Idet $A = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, betragtes de i A definerede funktioner

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t, & f_2(t) &= 1/t, & f_3(t) &= 1-t, \\ f_4(t) &= t/(t-1), & f_5(t) &= 1/(1-t), & f_6(t) &= (t-1)/t. \end{aligned}$$

Vis, at $(\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}, \circ)$ er en med den symmetriske gruppe S_3 isomorf transformationsgruppe i A . (Giv intervallerne $\{t | -\infty < t < 0\}$, $\{t | 0 < t < 1\}$ og $\{t | 1 < t < \infty\}$, hvis foreningsmængde er A , numrene 1, 2 og 3, og undersøg, hvorledes de afbildes ved funktionerne f_i .)

- 11) Idet c betegner et givet positivt tal, defineres i intervallet $M = \{v | -c < v < c\}$ en kompositionsforskrift $\$$ ved

$$v_1 \$ v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

(Einsteins lov for sammensætning af parallelle hastigheder).

Vis, at $(M, \$)$ er en gruppe.

Vis, at denne er isomorf med $(\mathbb{R}, +)$. (Dette går ud på at finde en funktion $F : \mathbb{R}$ på M (1-1), således at $F(x_1 + x_2) = F(x_1) \$ F(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.)

- 12) Lad $(G, \$)$ være en gruppe, $(H, \$)$ en undergruppe, og g et fast element af G . Vis, at $(g \$ H \$ g^{-1}, \$)$, hvor $g \$ H \$ g^{-1}$ betegner delmængden $\{g \$ h \$ g^{-1} | h \in H\}$ af G , er en med $(H, \$)$ isomorf undergruppe i $(G, \$)$. (Den kaldes en til $(H, \$)$ konjugeret undergruppe.)

Er $(G, \circ)$ en transformationsgruppe for en mængde A , og er α et fast element af A , vil de transformationer tilhørende G , ved hvilke α svarer til sig selv (som har α til fixelement), udgøre en undergruppe $(H_\alpha, \circ)$ i $(G, \circ)$ (jfr. side I, 6, 2). Vis, at hvis g er et fast element af G , består den til $(H_\alpha, \circ)$ konjugerede undergruppe $(g \circ H_\alpha \circ g^{-1}, \circ)$ netop af de transformationer i G , som har $g(\alpha)$ som fixelement, altså at

$$g \circ H_\alpha \circ g^{-1} = H_{g(\alpha)}.$$

(i stedet for en vilkårlig transformationsgruppe må betrag-

tes en speciel, f.eks. den side I,6, 3-4 og i ovenstående opg. 4 omtalte.)

- 13) Se I,6, opg. 2. Ved til det reelle tal t at lade svare afbildningen f_t af planen på sig selv, defineres en homomorf afbildning af gruppen $(\mathbb{R}, +)$ på drejningsgruppen $(\{f_t | t \in \mathbb{R}\}, \circ)$. Vis dette, bestem homomorfiens kerne, og angiv sideklasserne.

(Den I,6, opg. 3 definerede gruppe $(\{g_t | t \in \mathbb{R}\}, \circ)$ er isomorf med $(\mathbb{R}, +)$.)

- 14) Se I,6, opg. 14. Oktaedergruppen er ifølge denne opgave isomorf med den symmetriske gruppe S_4 . Oktaedrets diagonaler gives numrene 1,2,3. Til hver flytning tilhørende oktaedergruppen svarer da en permutation af $\{1,2,3\}$. Vis, at der herved bestemmes en homomorf afbildning af oktaedergruppen, og dermed af S_4 , på S_3 , hvis kerne er den i den nævnte opgave angivne undergruppe.

- 15) Lad der være givet to hele tal, der ikke begge er 0. Mængden $H = \{ax + by | x, y \in \mathbb{Z}\}$ med additionen som komposition er en undergruppe i $(\mathbb{Z}, +)$. Vis dette. Ifølge en ovenfor bevist sætning (side II,2,11) findes der et positivt helt tal d , således at $H = \{pd | p \in \mathbb{Z}\}$. Vis, at d er den største fælles divisor for a og b .

Opstil en nødvendig og tilstrækkelig betingelse, som et helt tal c må opfylde, for at den "diofantiske ligning" $ax + by = c$ har en løsning (x, y) bestående af hele tal. (En ligning med ubekendte, for hvilke der søges heltallige værdier, kaldes en diofantisk ligning efter den græske matematiker Diofantos, ca. + 250, der har behandlet sådanne opgaver.)

Antag, at ligningen har en heltallig løsning (x_0, y_0) . Vis, at den da har uendelig mange andre, og find dem alle udtrykt ved x_0 , y_0 og en heltallig parameter t . (Find først alle heltallige løsninger til ligningen $ax + by = 0$.)

Eksempler: $3x - 4y = 1$ og $6x - 8y = 4$.

- 16) Definer, analogt til den på side II,2, 13-14 indførte addition af restklasser modulo m , en multiplikation af restklasser modulo m . Den ved denne organiserede mængde $(\mathbb{Z}(\text{mod } m), \cdot)$ er ikke nogen gruppe. Vis dette.

Lad m være et primtal. Vis, at de fra $\mathbb{Z}_m$ forskellige restklasser modulo m med multiplikationen som komposition danner en gruppe. (Sætningen i ovenstående opgave 6 kan benyttes til forenkling af beviset. Man får brug for sætningen, at et primtal, som er divisor i et produkt af to hele tal, er divisor i mindst een af disse faktorer.)

Vis ved hjælp heraf, at for hvert helt tal a og hvert primtal m er $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ (Fermats "lille" sætning). *Se sætning II, 2, 17*

- 17) Blandt de tidligere nævnte eksempler på grupper findes 2 ikke isomorfe grupper af ordenen 4. Opstil gruppetavler for dem.

Vis, at en gruppetavle for en gruppe af ordenen 4, bortset fra rækkernes og kolonnernes rækkefølge samt betegnelserne for elementerne, må stemme overens med en af de to fundne, altså at der findes netop 2 forskellige abstrakte grupper af ordenen 4. (Antag først, at gruppen indeholder et element af ordenen 4.)

- 18) De flytninger efter hvilke et givet regulært ikosaeder dækker sin oprindelige stilling, danner en gruppe, kaldet iko-

saedergruppen. (Efter den^s flytninger og kun efter disse vil også det regulære dodekaeder, hvis hjørner er midtpunkterne af ikosaedrets sideflader, komme til at dække sin oprindelig stilling.) Vis, at ikosaedergruppen er isomorf med den alternerende gruppe A_5 . (Studer en model.)

Kap. III. Analytisk geometrii det euklidiske rum.§ 1. Om geometriens grundlag: Incidens og parallelitet.

Den elementære geometri i planen og i rummet kan baseres på relativt få såkaldte aksiomer, d.v.s. ikke beviste sætninger, der tjener som grundlag for lærebygningen. Erkendelsen af, at geometriens mangfoldige sætninger kan udledes af nogle simple af dem ved rent logiske ræsonnementer uden benyttelse af anskuelsen, skyldes oldtidens græske matematikere. En for hele matematikken forbilledlig udformning har geometriens systematiske opbygning fået i Euklid's "Elementer" (ca. -300). (Visse mangler i Euklid's aksiomsystem er dog først blevet klarlagt ^{i slutningen} af forrige århundrede.) En opbygning af geometrien på så få aksiomer som mulig kan ikke gennemføres her. For hurtigt at kunne nå hovedmålet, vektoralgebraen og den analytiske geometri, forudsættes mange flere geometriske sætninger end nødvendigt.

Rummet opfattes som en uendelig mængde, betegnet med E_3 , hvis elementer kaldes punkter. Visse uendelige delmængder af E_3 kaldes rette linier, og visse uendelige delmængder af E_3 kaldes planer. Er A et punkt, a en linie og α en plan, siges i stedet for $A \in a$ også, at "punktet A ligger på linien a " eller "linien a går gennem punkt A ", i stedet for $A \in \alpha$ også, at punkt A ligger i planen α eller "planen α går gennem punkt A ", i stedet for $a \subseteq \alpha$ også, at "linien a ligger i planen α " eller "planen α går gennem linien a ". Er a og b linier, $a \neq b$ og $a \cap b \neq \emptyset$, siges at "linierne a og b skærer hinanden", tilsvarende for to planer α og β , $\alpha \neq \beta$, og for en linie a og en plan α , $a \not\subseteq \alpha$. To linier a og b siges at være parallelle, og man skriver $a \parallel b$,

hvis de falder sammen eller ligger i samme plan og ikke har nogen punkter fælles. To planer α og β siges at være parallelle, og man skriver $\alpha \parallel \beta$, hvis de falder sammen eller ikke har nogen punkter fælles.

Om rummet E_3 og de som linier og planer betegnede delmængder forudsættes foreløbig kun gyldigheden af de følgende 8 aksiomer, der kaldes incidens- og parallelaksiomer, idet de udelukkende handler om relationer, der udtrykkes ved "ligger på", "går gennem" eller lignede og som sammenfattende kaldes incidensrelationer, samt ved "parallel".

J 1: Til hvilket som helst to forskellige punkter findes der en og kun een linie, der indeholder dem.

*rettelse
se III, 1, 9*
J 2: Til en hvilken som helst plan og en hvilken som helst linie i den findes der mindst eet punkt i planen, som ikke ligger på linien.

J 3. Til hvilket som helst tre punkter, som ikke ligger på samme linie, findes der en og kun een plan, der indeholder dem.

J 4: Til en hvilken som helst plan findes der mindst eet punkt, som ikke ligger i den.

J 5: Hvis en linie har to forskellige punkter fælles med en plan, ligger den helt i planen.

J 6: Hvis to planer har et punkt fælles, har de mindst eet fra dette forskelligt punkt fælles.

J 7: Til en hvilken som helst linie og et hvilket som helst punkt findes der en og kun een linie, der er parallel med den givne linie og går gennem punktet.

J 8: Til en hvilken som helst plan og et hvilket som helst punkt findes der en og kun een plan, som er parallel med den givne plan og går gennem punktet.

Det bemærkes, at disse aksiomer kan skrives ved hjælp af logiske tegn og tegnene $\in$, $\subseteq$, $\parallel$, på samme måde som f.eks. "gruppeaksiomerne" G 1-4 (side II,2,1). Ovenstående formuleringer svarer mere til det anskuelige og erfaringsmæssige indhold, som de udtrykker i idealiseret og præciseret form.

For at undgå forvekslinger, som de sædvanlige betegnelsesmåder for linier og planer kan give anledning til, benyttes her de følgende: Den ved to forskellige punkter A og B bestemte linie betegnes med $li(A,B)$. Er M en punktmængde, som vides at ligge på samme linie, og som indeholder mindst to forskellige punkter, betegnes linien, der indeholder M, med $li(M)$. Den plan, som indeholder tre punkter A,B,C, der ikke ligger på samme linie, betegnes med $pl(A,B,C)$. Er M en punktmængde, som vides at ligge i en plan, og som indeholder mindst tre punkter, der ikke ligger på samme linie, betegnes planen, der indeholder M, med $pl(M)$. Den ved en linie a og et punkt A uden for denne bestemte plan betegnes med $pl(a,A)$ o.s.v.

Af aksiomerne J 1-8 udledes let en række simple sætninger, der formuleres her til senere brug. (Ved sætninger, der er umiddelbare konsekvenser af visse aksiomer, angives disse i parentes i stedet for et bevis.)

1. To forskellige linier har højst eet punkt fælles.
(J 1)

2. To planer er enten parallelle eller de har netop een linie fælles. (J6, J5, J3)

3. En plan og en linie, der ikke ligger i den, har højst eet punkt fælles. (J5)

En plan α og en linie a siges at være parallelle, i tegn $\alpha \parallel a$, hvis a ligger i α eller ikke har noget punkt fælles med α .

4. Der findes en og kun een plan, der går gennem en given linie og et givet punkt uden for denne.

Bevis: Ifølge J3 findes der en og kun een plan, som går gennem det givne punkt og gennem to forskellige punkter på den givne linie. Denne plan indeholder linien ifølge J5.

5. Der findes en og kun een plan, der indeholder to givne, hinanden skærende linier.

Bevis: Ifølge J3 findes der en og kun een plan, som går gennem liniernes skæringspunkt og gennem et fra dette forskelligt punkt på hver af linierne. Denne plan indeholder begge linier ifølge J5.

Heraf og af parallelitetens definition sluttes umiddelbart:

6. To linier ligger i samme plan, hvis og kun hvis de skærer hinanden eller er parallelle.

To linier, som ikke ligger i samme plan, siges at være vindskæve.

7. Er a og b to parallelle linier, vil enhver plan α , der går gennem a være parallel med b .

Bevis: Er $pl(a,b) = \alpha$, er påstanden rigtig. Ellers har de to planer kun linien a fælles (2). Da a og b ikke har noget punkt fælles, kan altså α og b heller ikke have noget punkt fælles.

8. En linie b er parallel med en plan α , hvis og kun hvis den ligger i en plan parallel med α . (Def. og 7)

9. Er α en plan, A et punkt i α og b en linie parallel med α , vil den med b parallelle linie a gennem A ligge helt i α .

Bevis: $pl(a,b)$ har punktet A fælles med α . Falder de to planer sammen, vil a ligge i α som påstået. Ellers har de to planer netop een linie gennem A fælles. Denne må være parallel med b , da $\alpha \cap b = \emptyset$. Ifølge J7 er den identisk med a .

Af parallelitetens definition og 8 sluttes specielt:

10. En linie b er parallel med en plan α , hvis og kun hvis der findes en linie $i\alpha$, som er parallel med b .

11. Er a og a' hinanden skærende linier og b og b' hinanden skærende linier, således at $a \parallel b$ og $a' \parallel b'$, da er $pl(a, a') \parallel pl(b, b')$.

Bevis: Lad α betegne den med $pl(b, b')$ parallelle plan gennem skæringspunkt A mellem a og a' . Da er ifølge 10 begge linier b og b' parallelle med α . Ifølge forudsætningerne $a \parallel b$ og $a' \parallel b'$ samt 8 ligger både a og a' i α . Følgelig er $\alpha = pl(a, a')$.

12. Er a , b , c tre linier i samme plan, $a \parallel b$, og skærer c linien a , vil c også skære b . (J7)

13. Relationen $\parallel$ er en ækvivalensrelation såvel i mængden af alle linier i en plan som i mængden af alle linier i rummet.

Bevis: At relationen er reflektiv og symmetrisk, fremgår umiddelbart af dens definition. Lad a , b , c være tre linier i samme plan, $a \parallel b$ og $b \parallel c$. Er $a = c$, haves $a \parallel c$. Er $a \neq c$, og var linien c ikke parallel med a , ville den ifølge 12 heller ikke være parallel med b , i strid med det givne. Følgelig er $a \parallel c$. Dermed er parallelitetens transitivitet bevist for linier i en plan. Lad nu a , b , c være tre linier, der ikke ligger i samme plan, $a \parallel b$ og $b \parallel c$. Disse linier er da indbyrdes forskellige. På c vælges et fra det eventuelle skæringspunkt med a forskelligt punkt C . Den ved linien a og punktet C bestemte plan β er ifølge 7 parallel med b . Ifølge $b \parallel c$ og 8 ligger c da helt i β . Linierne a og c ligger altså i samme plan β . Hvis de havde et skæringspunkt B , måtte dette tilhøre både den ved de parallelle linier a og b bestemte plan og den ved de parallelle linier b og c bestemte plan. Disse to planer har imidlertid kun linien b fælles. Punk-

tet B måtte altså også ligge på b , hvilket strider mod $a \parallel b$,
 $a \neq b$. Følgelig er $a \parallel c$, og parallelitetens transitivitet er bevist.

14. Er α, β, γ tre planer, $\alpha \parallel \beta$, og skærer γ planen α ,
 vil γ også skære β , og de to skæringslinier vil være par-
 allelle. (J8)

15. Relationen $\parallel$ er en ækvivalensrelation i mængden af
 alle planer i rummet.

Bevis: At relationen er reflektiv og symmetrisk, fremgår
 umiddelbart af dens definition. Antag, at $\alpha \parallel \beta$ og $\beta \parallel \gamma$.
 Er $\alpha = \gamma$, haves $\alpha \parallel \gamma$. Er $\alpha \neq \gamma$,
 og var planen γ ikke parallel med α , ville den ifølge 14 heller
 ikke være parallel med β , i strid med det givne. Følgelig er $\alpha \parallel \gamma$.
 Dermed er relationens transitivitet bevist.

Den følgende sætning spiller en grundlæggende rolle i geome-
 triens opbygning. Den er et specielt tilfælde af den såkaldte
Desargues' sætning (jfr. III, 1, opg. 7).

16. Lad a, b, c være indbyrdes forskellige, parallelle
 linier, A og A' punkter på a , B og B' punkter på b og C og C'
 punkter på c . Er $li(A, B) \parallel li(A', B')$ og $li(B, C) \parallel li(B', C')$,
 da er også $li(A, C) \parallel li(A', C')$.

Bevis: Først antages, at linierne a, b, c ikke ligger i samme
 plan. Punkterne A, B, C kan da ikke ligge på samme linie; thi ellers
 ville $pl(a, b)$ (jfr. 6), som jo indeholder $li(A, B)$ (ifølge J5), og-
 så indeholde C og dermed den med a parallelle linie c (ifølge J7).
 Endvidere ses, at $pl(A, B, C)$ ikke kan indeholde nogen af linierne
 a, b, c ; thi hvis den indeholdt en af dem, måtte den også indeholde
 de to andre (ifølge J7). Da $li(A, B) \parallel li(A', B')$ og $li(B, C) \parallel li(B', C')$,
 er $pl(A, B, C) \parallel pl(A', B', C')$ (ifølge 11). Falder disse to planer
 sammen, er $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, altså $li(AC) \parallel li(A', C')$, idet
 $pl(A, B, C)$ ifølge det viste kun kan have A, B, C fælles med henholds-

Øvelser til kap. III, 1.

- 1) Om en mængde af rette linier i rummet forudsættes, at hvilke-somhelst to af linierne skærer hinanden. Kan man heraf slutte, at alle linier i mængden går gennem samme punkt?
- 2) Hvilke muligheder for den indbyrdes beliggenhed af tre forskellige planer findes der? (Angiv for hvert tilfælde antallet og den indbyrdes beliggenhed af eventuelle skæringslinier.)
- 3) Givet to forskellige rette linier a og b samt et punkt P , som ikke ligger på nogen af dem. Under hvilke betingelser findes der netop een linie, der går gennem P og skærer både a og b . Samme spørgsmål, når der er givet tre forskellige linier a , b , c og der forlanges eksistensen af netop een linie, der er parallel med c og skærer både a og b .
- 4) Givet to forskellige planer α og β samt en ret linie p . Under hvilke betingelser findes der en plan gennem p , der skærer α og β i parallelle linier?
- 5) Vis, at aksiom J8 er en følge af aksiomerne J1-7.
- 6) Det blev forudsat, at rummet E_3 , planerne og linierne er uendelige mængder. Der findes imidlertid også endelige mængder, der opfylder aksiomerne J1-8, hvis en sådan mængdes elementer kaldes for "punkter", visse ikke tomme delmængder for "linier" og visse andre ikke tomme delmængder for "planer". Det mindste antal "punkter", et sådant "rum" må bestå af, kan vises at være 8 (når det kræves, at der findes mindst een "plan", der indeholder mindst to "punkter", og at der findes mindst to "punkter" på hver "linie").
Lad "rummet" bestå af 8 "punkter". Hver delmængde bestående af 2 "punkter" kaldes en "linie", og visse 14 delmængder hver be-

stående af 4 "punkter" kaldes "planer". For på overskuelig måde at kunne angive disse, tænkes de 8 "punkter" repræsenteret ved en ternings hjørnespidser. "Planer" er da for det første de 6 delmængder, der hver består af en sideflades hjørner, for det andet de 6 delmængder, der hver består af to modstående kanters endepunkter, og for det tredje de 2 delmængder, der hver består af fire af terningens hjørner, som tilhørende er hjørner i et indskrevet regulært tetraeder. Vis, at dette "rum" tilfredsstiller aksiomerne J1-8.

- 7) Desargues'sætning lyder således: Lad a , b , c være indbyrdes forskellige linier, som enten går gennem samme punkt P eller er parvis parallelle. Om 6 punkter A , B , C , A' , B' , C' forudsættes, at de og P er indbyrdes forskellige, at A og A' ligger på a , B og B' på b og C og C' på c . For hvert af linieparrene AB og $A'B'$, BC og $B'C'$, AC og $A'C'$ gælder det da, at dets to linier ligger i samme plan, altså at de to linier skærer hinanden eller er parallelle. Skærer hvert pars linier hinanden, ligger de tre skæringspunkter på ret linie. Skærer kun to pars linier hinanden, er skæringspunkternes forbindelseslinje parallel med det tredje pars linier. Er to pars linier parallelle, er også det tredje pars linier parallelle, og alle seks linier er parallelle med samme plan.

Bevis denne sætning under forudsætningen af, at linierne a , b , c har et punkt fælles, og at linierne i hvert af de tre nævnte par skærer hinanden. (Antag først, at linierne a , b , c ikke ligger i samme plan, og benyt dette tilfælde til at bevise sætningen i det plane tilfælde.)

- 8) Benyt Desargues'sætning til at løse følgende konstruktionsopgave (med linealen alene): På tegnepapiret er givet to linier,

vis a , b og c . Er $pl(A,B,C) \neq pl(A',B',C')$ har disse to planer og derfor også linierne $li(A,C)$ og $li(A',C')$, som de indeholder, ikke noget punkt fælles. Da de to linier desuden ligger i $pl(a,c)$, er de parallelle, som påstået. - Dernæst antages, at a,b,c ligger i samme plan. Lad D være et punkt uden for denne plan (J4) og d linien parallel med b gennem D . Da er også $d \parallel a$ og $d \parallel c$ (ifølge 13). Gennem B' lægges linien parallel med BD . Denne linie ligger i planen $pl(b,d)$, da B,D og B' ligger i den, og skærer følgende d i et punkt D' (ifølge 12). Anvendes nu den allerede beviste del af sætningen for det første på linierne a,b,d og punkterne A,A',B,B',D,D' , for det andet på linierne c,b,d og punkterne C,C',B,B',D,D' , fås henholdsvis $li(A,D) \parallel li(A',D')$ og $li(C,D) \parallel li(C',D')$. Derefter kan den beviste del af sætningen anvendes på linierne a,d,c og punkterne A,A',D,D',C,C' , hvilket giver $li(A,C) \parallel li(A',C')$, hvormed sætningen også er bevist i tilfældet, hvor a,b,c ligger i samme plan.

Ifølge 13 er parallelitet en ækvivalensrelation i mængden af linier i rummet E_3 . Denne mængde falder altså i klassen af indbyrdes parallelle linier. En sådan klasse kaldes hyppigt et parallelknippe af linier. Et sådant omfatter altså alle linier af en bestemt "retning", og er fuldstændig bestemt, når en repræsentant, altså een af dets linier er givet. Det parallelknippe, der indeholder en linie a , betegnes med $kn(a)$. Ifølge definition er $kn(a) = kn(b)$, hvis og kun hvis $a \parallel b$. Da parallelitet også er en ækvivalensrelation i mængden af linier i en given plan, kan også en sådan mængde inddeles i klasser af indbyrdes parallelle linier. Hver klasse kaldes et parallelbunt af linier og betegnes med $bt(a)$, når det indeholder linien a i den givne plan.

Ifølge J7 går der gennem hvert punkt i rummet en og kun een linie tilhørende et givet parallelknippe $kn(a)$. Er π en plan, som ikke er parallel med a , vil enhver linie i $kn(a)$ skære π ; thi var $b \in kn(a)$ parallel med π , måtte a ifølge 9 ligge i π , i strid med det givne. Lad P være et vilkårligt punkt i rummet og P' det punkt, hvori den gennem P gående linie fra $kn(a)$ skærer π . Ved til P at lade svare P' fås en afbildning f af rummet på π ("på", da der gennem hvert punkt af π går en linie fra $kn(a)$). Denne afbildning kaldes parallelprojektionen på π i retningen a . Hvert punkt af π svarer herved til sig selv. For hvert punkt P i rummet gælder altså $f(f(P)) = f(P)$; afbildningen er altså idempotent: $f \circ f = f$. Originalmængden $f^{-1}(P')$ til et punkt $P' \in \pi$ er den gennem P' gående linie fra $kn(a)$.

Er M en delmængde af E_3 , kan man betragte afbildningens restriktion til M . Man taler da om parallelprojektionen af M på π i retningen a . Er M specielt en linie b , vil billedet $f(b)$ være et punkt, hvis b tilhører $kn(a)$, og en linie, hvis b ikke tilhører $kn(a)$. Det sidste ses således: De med a parallelle linier gennem punkterne af b ligger ifølge parallelitetens definition i den ved en af dem og b bestemte plan, og denne skærer π i billedet af b . Det ses også let, at to parallelle linier, der ikke tilhører $kn(a)$, afbildes i parallelle linier. Er M en plan π' , som ikke ^{er} parallel med a , fås en enetydig afbildning af π' på π , hvis inverse er parallelprojektionen af π på π' i retningen a . Er M en plan $\alpha \parallel a$, og betegnes linien, hvori den skærer π , med p , vil restriktionen af parallelprojektionen f være en afbildning af α på den i α beliggende linie p . En linie i α , som er ikke parallel med a , afbildes enetydigt på p .

Ifølge 15 er parallelitet en ækvivalensrelation i mængden af planer i E_3 . Denne mængde falder altså i klasser af indbyrdes

parallelle planer. En sådan klasse kaldes et parallelbundt af planer og er fuldstændig bestemt, når en af dets planer er givet. Det parallelbundt, som indeholder en plan α betegnes med $bt(\alpha)$. Ifølge definition er $bt(\alpha) = bt(\beta)$, hvis og kun hvis $\alpha \parallel \beta$.

Ifølge J8 går der gennem hvert punkt i rummet en og kun een plan tilhørende et givet parallelbundt $bt(\alpha)$. Er p en linie, som ikke er parallel med α , vil enhver plan i $bt(\alpha)$ skære p ; thi ellers måtte p ifølge 9 ligge i α , i strid med det givne. Lad P være et vilkårligt punkt i rummet og P' det punkt, hvori den gennem P gående plan fra $bt(\alpha)$ skærer p . Ved til P at lade svare P' fås en afbildning g af rummet på p ("på", da der gennem hvert punkt af p går en plan fra $bt(\alpha)$). Denne afbildning kaldes parallelprojektion på p i planretningen α . Den er idempotent: $g \circ g = g$. Originalmængden $g^{-1}(P')$ til et punkt $P' \in p$ er den gennem P' gående plan fra $bt(\alpha)$. Blandt denne afbildnings restriktioner til delmængder M af E_3 fremhæves de, hvor M er en ret linie q . Er $q \parallel \alpha$, vil billedet $g(q)$ være et punkt. Er q ikke parallel med α , fås en enentydig afbildning af q på p , hvis inverse er parallelprojektion af p på q i planretningen α .

Rettelse til side III,1,2: Ordlyden af J2 erstattes med:

J2: Til en hvilkensomhelst linie findes der mindst eet punkt, som ikke ligger på den.

hvis skæringspunkt ligger uden for papiret, samt et punkt. Konstruer en linie, der går gennem dette punkt og de givne liniers skæringspunkt.

- 9) Lad ABC være en trekant, som hverken er ligebenet eller retvinklet. Med A', B', C' betegnes fodpunkterne for de fra henholdsvis A, B, C udgående højder. Vis, at skæringspunkterne mellem $li(B, C)$ og $li(B', C')$, mellem $li(C, A)$ og $li(C', A')$, mellem $li(A, B)$ og $li(A', B')$ ligger på ret linie.

Gælder noget tilsvarende, når højderne erstattes med vinkelhalveringslinierne, med medianerne? Søg at formulere en almen sætning.

- 10) Lad E_2 betegne en plan. Det vedtages at kalde hvert parallelbundt af linier i E_2 for et uegentligt punkt. Mængden u af uegentlige punkter kaldes planens uegentlige linie. Foreningsmængden $E_2 \cup u$, hvis elementer altså dels er punkter og dels parallelbundter, kaldes den projektive plan og betegnes med P_2 . Det vedtages endvidere at sige, at en (egentlig) linie a i E_2 går gennem (indeholder) det uegentlige punkt U , hvis $bt(a) = U$. Elementerne af P_2 kaldes under eet for "punkterne", og den uegentlige og de egentlige linier under eet for "linierne" i P_2 .

Vis (udfra aksiomerne J1-8 og deres konsekvenser), at der i P_2 gælder: Til hvilket som helst to forskellige "punkter" findes der en og kun een "linie", der indeholder dem begge. Til hvilket som helst to "linier" findes der et og kun eet "punkt", som er indeholdt i dem begge.

Lad C være et punkt uden for E_2 . Vis, at der findes en enentydig korrespondance mellem P_2 og mængden af alle linier gennem C , således at der til "punkter" på en "linie" i P_2 sva-

rer linier gennem C , der ligger i en plan.

Idet E_3 betegner rummet, vedtages at kalde hvert parallelknippe af linier i E_3 for et uegentligt punkt. Mængden ω af uegentlige punkter kaldes rummets uegentlige plan. Foreningsmængden $E_3 \cup \omega$, hvis elementer altså dels er punkter og dels parallelknipper, kaldes det projektive rum og betegnes med P_3 . En mængde af uegentlige punkter kaldes en uegentlig linie, hvis den består af parallelknipperne, hvis linier er parallelle med en og samme (egentlige) plan. Det vedtages at sige, at en (egentlig) linie a i E_3 går gennem (indeholder) det uegentlige punkt U , hvis $kn(a) = U$. Elementerne af P_3 kaldes under eet for "punkterne", de uegentlige og egentlige linier under eet for "linierne" og den uegentlige og de egentlige planer under eet for "planerne" i P_3 .

Vis (ud fra aksiomerne J1-8 og deres konsekvenser), at der i P_3 gælder:

Til hvilkesomhelst to forskellige "punkter" findes der en og kun een "linie", der indeholder dem begge.

Til hvilkesomhelst to forskellige "planer" findes der en og kun een "linie", der er indeholdt i dem begge.

Til hvilkesomhelst tre "punkter", som ikke er indeholdt i samme "linie", findes der en og kun een "plan", som indeholder dem alle tre.

Til hvilkesomhelst tre "planer", som ikke indeholder samme "linie", findes der et og kun eet "punkt", som er indeholdt i dem alle tre.

Til to "linier" findes der en "plan", som indeholder dem begge, hvis og kun hvis der findes et "punkt", som er indeholdt i dem begge.

Bemærk, at de forskellige tilfælde af Desargues'sætning (opg.7)

i det projektive rum tillader samme formulering. Det i opg. 7 forlangte bevis kan overføres ordret til P_3 og dækker da alle tilfælde.

§ 2. Translationer og vektorer.

En enentydig afbildning t af rummet E_3 på sig selv kaldes en translation (eller parallelforskydning), hvis den enten er den identiske afbildning e eller tilfredsstiller følgende betingelser:

T 1: $t(P) \neq P$ for alle $P \in E_3$.

T 2: $li(P, t(P)) \parallel li(Q, t(Q))$ for alle $P, Q \in E_3$.

T 3: $li(P, Q) \parallel li(t(P), t(Q))$ for alle $P, Q \in E_3, P \neq Q$.

Om translationer gælder følgende hovedsætning:

Er A og A' to vilkårligt givne punkter i E_3 , findes der en og kun een translation $t = t_{AA'}$, for hvilken $t(A) = A'$.

Bevis: Er $A = A'$, er den identiske afbildning $t = e$ den eneste, der kommer i betragtning, da enhver anden translation opfylder T 1. På den anden side er e en translation ifølge definition. I det følgende antages, at $A \neq A'$. - Først vises, at der findes en translation af den forlangte art. Lad P være et vilkårligt punkt, som ikke ligger på $li(A, A')$. Linierne gennem P parallel med $li(A, A')$ og gennem A' parallel med $li(A, P)$ skærer hinanden; thi de ligger i samme plan, nemlig $pl(A, A', P)$, og kan ikke være parallelle, da dette ville medføre, at A, A', P ligger på samme linie. Idet de to liniers skæringspunkt betegnes med P' , haves $li(A, A') \parallel li(P, P')$ og $li(A, P) \parallel li(A', P')$. Endvidere bemærkes, at $P' \neq P$, og $P' \neq A'$, da $P' = P$ eller $P' = A'$ igen ville medføre, at A, A', P ligger på samme linie. Lad nu $P \neq A$ være et punkt på $li(A, A')$. Man vælger da (J2) et fast punkt B uden for $li(A, A')$, bestemmer som angivet det punkt $B' \neq B$, for hvilket $li(B, B') \parallel li(A, A')$ og $li(A, B) \parallel li(A', B')$. Punkterne B, B' og P ligger da ikke på samme linie. Dernæst bestemmes på samme måde det punkt $P' \neq P$, for hvilket $li(P, P') \parallel li(B, B')$ og $li(B, P) \parallel$

$li(B', P')$. Det bemærkes, at $P' \in li(A, A')$, da $li(A, A') \parallel li(B, B') \parallel li(P, P')$, og $li(A, A')$ og $li(P, P')$ har punktet P fælles. Lader man nu til hvert punkt $P \neq A$ svare det på de angivne måder bestemte punkt P' og til A punktet A' , fås en afbildning $f : E_3$ ind i E_3 , som skal vises at være en translation. - At f er enentydig, ses således: Er $f(P) = f(Q)$, altså $P' = Q'$, for to punkter P og Q , fås af $li(P, P') \parallel li(A, A')$ og $li(Q, Q') = li(Q, P') \parallel li(A, A')$, at P og Q må ligge på en linie p parallel med $li(A, A')$. Er disse to linier forskellige, sluttes af

$$li(A, P) \parallel li(A', P') = li(A', Q') \parallel li(A, Q),$$

at $P = Q$. Er $p = li(A, A')$, slutter man på samme måde med B, B' i stedet for A, A' . Dermed er enentydigheden bevist. At f er en afbildning på E_3 , ses således: Lad R være et vilkårligt punkt. Ligger R ikke på $li(A, A')$, vil linierne gennem A og R parallelle med henholdsvis $li(A', R)$ og $li(A, A')$ skære hinanden i et punkt S , og for dette gælder åbenbart $f(S) = S' = R$. Ligger R på $li(A, A')$ lader man træde B, B' i stedet for A, A' . Dermed er vist, at f afbilder på E_3 . At T_1 er opfyldt for f , altså at $P' \neq P$ for hvert P blev allerede bemærket. I det følgende betegnes $li(A, A')$, $li(B, B')$, $li(P, P')$, ... med henholdsvis a, b, p , At f opfylder kravet T_2 , er oplagt; thi for hvert punkt P er $p \parallel a$, og der gælder altså for vilkårlige punkter P og Q , at

$$li(P, f(P)) = p \parallel q = li(Q, f(Q)).$$

At f opfylder kravet T_3 , ses således: Lad P og Q , $P \neq Q$, være vilkårlige punkter. Er $p = q$, haves også $li(P, Q) = li(P', Q')$ og dermed påstanden $li(P, Q) \parallel li(P', Q')$. Det kan derfor antages, at $p \neq q$. Er nu begge disse linier forskellige fra a , følger påstanden af Desargues' sætning 16 anvendt på de tre linier p, a, q , idet det vides, at $li(A, P) \parallel li(A', P')$ og $li(A, Q) \parallel li(A', Q')$. Noget mere inviklet er det tilfælde, hvor en af linierne p og q , f.eks.

p , falder sammen med a . Her får man brug for det valgte punkt B , ved hjælp af hvilket P' blev bestemt i dette tilfælde. Er $q \neq b = li(B, B')$, kan man af det lige beviste (med B, B' i stedet for P, P') slutte, at $li(B, Q) \parallel li(B', Q')$. Derefter giver Desargues' sætning anvendt på linierne $p (= a), b, q$, at $li(P, Q) \parallel li(P', Q')$, idet man jo har $li(B, P) \parallel li(B', P')$ ifølge bestemmelsen af P' og $li(B, Q) \parallel li(B', Q')$. Er endelig $q = b$, vælges et punkt R uden for linierne $p = a$ og $q = b$ (hvilket er muligt ifølge J4). Det allerede viste giver da dels $li(Q, R) \parallel li(Q', R')$, dels $li(P, R) \parallel li(P', R')$, og af Desargues' sætning følger, at $li(P, Q) \parallel li(P', Q')$ også i dette tilfælde. Dermed er bevist for, at f er en translation, afsluttet. - At der ikke kan findes mere end een translation, ved hvilken A afbildes i A' , indses således: Lad t være en sådan translation. Er P et punkt uden for $li(A, A') = li(A, t(A))$, må $t(P)$ ifølge T 2 ligge på linien gennem P parallel med $li(A, A')$ og ifølge T 3 på linien gennem $t(A) = A'$ parallel med $li(A, P)$. Men da der kun findes eet sådant punkt, nemlig P' , er $t(P) = P' = f(P)$. Dette viser, at t må stemme overens med f i alle punkter uden for $li(A, A')$. Specielt er altså $t(B) = B'$. Heraf sluttes nu på samme måde, blot med B, B' i stedet for A, A' , at $t(P) = P' = f(P)$ også må gælde for hvert punkt P på $li(A, A')$. Dermed er hovedsætningen fuldstændig bevist.

Ved en translation $t \neq e$ afbildes hver linie p på en linie $t(p) \parallel p$ og hver plan π på en plan $t(\pi) \parallel \pi$. Hver linie, som forbinder et punkt med sit billedpunkt afbildes på sig selv, og alle sådanne linier udgør et parallelknippe, hvis retning kaldes translations- eller forskydningsretningen. En plan afbildes på sig selv, hvis og kun hvis den er parallel med denne retning.

Alt dette følger næsten umiddelbart af translationens definition: Lad p være en vilkårlig linie og P et punkt på p . For

hvert andet punkt Q på p gælder da ifølge T 3, at $t(Q)$ ligger på den med p parallelle linie p' gennem $t(P)$. Heraf sluttes, at p afbildes ind i p' ved t . På den anden side kan et punkt R uden for p ikke have sit billede $t(R)$ på p' , da jo linien gennem $t(P)$ parallel med $li(P,R)$, på hvilken $t(R)$ må ligge, ikke har andre punkter end $t(P)$ fælles med p' . Da t afbilder E_3 på E_3 , må hvert punkt af p' være billede af et punkt af p . Dermed er vist, at t afbilder p på p' . - Hvis og kun hvis $t(P)$ ligger på p , er $p' = p$. Ifølge T 2 er linierne, der forbinder et punkt med sit billedpunkt, indbyrdes parallelle, og idet der gennem hvert punkt i rummet går en af dem, udgør de et parallelknippe, som påstået. - Lad Π være en plan og P et punkt i den. Billedet $t(Q)$ af et fra P forskelligt punkt Q i Π ligger ifølge T 3 på den med $li(P,Q)$ parallelle linie gennem $t(P)$, altså (8) i den med Π parallelle plan Π' gennem $t(P)$. Planen Π afbildes altså ind i Π' . At t afbilder Π på Π' , ses som for linier. Hvis og kun hvis $t(P)$ ligger i Π , er $\Pi' = \Pi$. Heraf sluttes rigtigheden af den sidste påstand.

Translationerne danner en transformationsgruppe $\mathcal{T}_3$ for E_3 .

Bevis: Da den associative lov gælder for sammensætning af afbildninger, drejer det sig kun om at eftervise G1, G3 og G4 (side I,6,1 eller II,2,1). G3 er opfyldt, da den identiske afbildning er en translation ifølge definition. G4 : Er t en translation, vil t^{-1} være en enentydig afbildning af E_3 på E_3 . At den er en translation, følger af, at T1-3 forbliver uændrede, når de der nævnte punkter og deres billedpunkter ombyttes. G1: Lad t og t' være translationer. Det skal vises, at $t' \circ t$ også er en translation. Er $t = e$ eller $t' = e$, er intet at bevise. Det forudsættes derfor, at $t \neq e$ og $t' \neq e$. Er P og Q to forskellige punkter, fås af T 3 for t og for t' , at

$$li(P, Q) \parallel li(t(P), t(Q)) \parallel li(t'(t(P)), t'(t(Q))),$$

altså, at T 3 gælder for $t' \circ t$. Antag først, at der findes et fixpunkt, altså et punkt P, for hvilket $t' \circ t(P) = P$. Da er $t(P) = t'^{-1}(P)$, d.v.s. ved de to translationer t og t'^{-1} har P samme billedpunkt. Ifølge hovedsætningen stemmer de da overens, og følgelig er $t' \circ t = e$, altså en translation. Endvidere ses heraf, at T 1 er opfyldt, når $t' \circ t \neq e$. At T 2 gælder i dette tilfælde, ses således: Lad P og Q være vilkårlige punkter. Antag, at $li(P, t''(P))$ og $li(Q, t''(Q))$, hvor $t'' = t' \circ t$, ikke var parallelle, og lad R betegne deres skæringspunkt. Da T 3 allerede vides at gælde for t'' , ville man have

$$li(P, t''(P)) = li(P, R) \parallel li(t''(P), t''(R)),$$

såfremt $P \neq R$. Heraf aflæses, at $t''(R)$ måtte ligge på $li(P, t''(P))$, og dette gælder selvfølgelig også, hvis $R = P$. Tilsvarende ses, at $t''(R)$ også måtte ligge på $li(Q, t''(Q))$ og følgelig være skæringspunktet R. Men $t''(R) = R$ ville være i strid med, at T 1 gælder for t'' . Antagelsen, at T 2 ikke gælder, må altså forkastes. Dermed er sætningen bevist.

Gruppen $\mathcal{T}$ er kommutativ.

Bevis: Lad t og t' være translationer. Det skal vises, at de er ombyttelige. Herved kan det antages, at begge er forskellige fra e , da påstanden ellers er oplagt. Først betragtes det tilfælde, hvor de har forskellige forskydningsretninger. Ifølge hovedsætningen er det tilstrækkeligt at vise, at $t' \circ t(P) = t \circ t'(P)$ for eet punkt P, idet translationerne $t' \circ t$ og $t \circ t'$ da må stemme overens. Under den gjorte antagelse ligger $P, t(P)$ og $t'(P)$ ikke på ret linie. Ifølge T 2 anvendt på t' er $li(P, t'(P)) \parallel li(t(P), t'(t(P)))$, og ifølge T 3 anvendt på t er $li(P, t'(P)) \parallel li(t(P), t(t'(P)))$. Heraf ses, at punkterne $t'(t(P))$ og $t(t'(P))$ ligger begge på den med $li(P, t'(P))$ parallelle linie p gennem $t(P)$.

Ombyttes rollerne af t og t' , ses, at disse punkter også ligger på den med $li(P, t(P))$ parallelle linie p' gennem $t'(P)$. De falder altså begge i skæringspunktet mellem p og p' . Dette viser, at $t' \circ t = t \circ t'$ i det foreliggende tilfælde. - Dernæst betragtes det tilfælde, hvor t og t' har samme forskydningsretning. Lad dem være repræsenteret ved linien a , og lad A være et punkt på a . Da ligger også $t(A)$ på a . Man vælger et punkt B uden for a (J2). Ifølge hovedsætningen findes der en translation u , for hvilken $u(a) = B$, og en translation v , for hvilken $v(B) = t(A)$. Begge disse translationer har fra a forskellige forskydningsretninger, er altså ifølge det allerede viste ombyttelige med t' , og der gælder $v \circ u = t$ (ifølge hovedsætningen). Følgelig er

$$t' \circ t = t' \circ v \circ u = v \circ t' \circ u = v \circ u \circ t' = t \circ t'.$$

Dermed er sætningen også bevist i dette tilfælde.

De translationer, som afbilder en given linie a på sig selv danner en undergruppe $\overline{\mathcal{T}}_1(a)$ i $\overline{\mathcal{T}}_3$.

De translationer, som afbilder en given plan α på sig selv danner en undergruppe $\overline{\mathcal{T}}_2(\alpha)$ i $\overline{\mathcal{T}}_3$.

Det drejer sig her om to specielle tilfælde af en simpel sætning om transformationsgrupper (jfr. side I, 6, 1-2).

Lad $t \neq e$ være en translation. Alle potenser t^p , hvor p er et helt tal forskellig fra 0, har samme forskydningsretning. Med andre ord, for hvert punkt P gælder det, at punkterne $t^p(P)$, $p \in \mathbb{Z}$, ligger på samme linie, nemlig $li(P, t(P))$. Ifølge T 2 fås nemlig

$$. . . \parallel li(t^{-3}(P), t^{-2}(P)) \parallel li(t^{-2}(P), t^{-1}(P)) \parallel li(t^{-1}(P), P) \parallel$$

$li(P, t(P)) \parallel li(t(P), t^2(P)) \parallel li(t^2(P), t^3(P)) \parallel . . .$,
og to på hinanden følgende af disse linier har altid et punkt fælles. Følgelig falder de sammen. Betegnes denne linie med p , kan dette også formuleres således: Den af t frembragte cykliske undergruppe i $\mathcal{T}_3$ er en undergruppe i $\mathcal{T}_1(p)$.

For potenser^{ne} af t med vilkårlige heltallige eksponenter gælder potensreglerne

$$(1) \quad t^p \circ t^q = t^{p+q},$$

$$(2) \quad (t^p)^q = t^{pq},$$

(se side I, 6, 7-8). Da gruppen $\mathcal{T}_3$ er kommutativ, gælder for vilkårlige translationer s og t og $p \in \mathbb{Z}$

$$(3) \quad (t \circ s)^p = t^p \circ s^p.$$

Idet s og t er ombyttelige fås nemlig for $p > 0$

$$\begin{aligned} & t \circ s \circ t \circ s \circ t \circ s \circ \dots \circ t \circ s \\ &= t \circ t \circ s \circ s \circ t \circ s \circ \dots \circ t \circ s \\ &= t \circ t \circ s \circ t \circ s \circ s \circ \dots \circ t \circ s = \dots \\ &= t \circ t \circ \dots \circ t \circ s \circ s \circ \dots \circ s. \end{aligned}$$

For $p = 0$ er (3) rigtig, da $e = e \circ e$, og for $p < 0$ fås ved at anvende (3) med $-p > 0$ i stedet for p og ved at benytte (2) og

$$(t \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ t^{-1}, \text{ at}$$

$$\begin{aligned} (t \circ s)^p &= ((t \circ s)^{-1})^{-p} = (s^{-1} \circ t^{-1})^{-p} \\ &= (s^{-1})^{-p} \circ (t^{-1})^{-p} = s^p \circ t^p = t^p \circ s^p. \end{aligned}$$

Hermed er (3) bevist for alle hele tal p .

I det følgende forudsættes:

Enhver cyklisk undergruppe i $\mathcal{T}_3$, der frembringes af en fra

den identiske afbildning forskellig translation, er af uendelig orden.

(Det vil blive vist i den følgende paragraf, at denne tilsyneladende komplicerede forudsætning er en følge af nogle simple aksiomer.)

Af en tidligere bevist sætning. (side II, 2, 12) kan da sluttes, at alle potenser t^p , $p \in \mathbb{Z}$, af en translation $t \neq e$ er indbyrdes forskellige. Hovedsætningen viser da, at det for hvert punkt P gælder, at punkterne $t^p(P)$, $p \in \mathbb{Z}$, er indbyrdes forskellige.

Til enhver translation t og hvert positivt helt tal n findes der en og kun een translation t_n , således at $t_n^n = t$.

Bevis: Er $t = e$, opfylder $t_n = e$ det stillede krav. Det antages derfor, at $t \neq e$. Lad P være et vilkårligt punkt, og lad punktet $Q \neq P$ være valgt således, at $li(P, Q) \neq li(P, t(P))$. Med u betegnes den translation, for hvilken $u(P) = Q$. Punktet $R = u^n(P)$ er da forskelligt fra P , ligger på $li(P, Q)$, men ikke på $li(P, t(P))$, da disse to linier ellers ville falde sammen. Gennem Q lægges linien parallel med $li(R, P(t))$. Denne parallel må skære $li(P, t(P))$, da $li(R, P(t))$ gør det. Skæringspunktet kaldes S . Med v betegnes den translation, for hvilken $v(Q) = S$. Det påstås, at $t_n = v \circ u$ opfylder det stillede krav. Idet $S = t_n(P)$ ligger på $li(P, P(t))$, må $t_n^n(P)$ også ligge på denne linie. Af (3) fås $t_n^n = v^n \circ u^n$, altså

$$t_n^n(P) = v^n(u^n(P)) = v^n(R).$$

Nu har v og v^n samme forskydningsretning, så at

$$li(R, v^n(R)) \parallel li(Q, v(Q) = li(Q, S)),$$

og S var bestemt således, at $li(Q, S) \parallel li(R, t(P))$. Heraf sluttes, at $v^n(R)$ også må ligge på $li(R, t(P))$, altså at $v^n(R) = t_n^n(P)$ må være skæringspunktet mellem $li(P, P(t))$ og $li(R, t(P))$, d.v.s.

$t_n^n(P) = t(P)$. Af hovedsætningen sluttet da, at $t_n^n = t$, som påstået. - For at vise, at der ikke kan findes mere end een translation, der opfylder kravet, antages, at både t_n og s_n gør det. Af $t_n^n = s_n^n = t$ sluttet da ved hjælp af (2) og (3), at

$$e = t_n^n \circ (s_n^n)^{-1} = t_n^n \circ (s_n^{-1})^n = (t_n \circ s_n^{-1})^n.$$

Men da alle potenser af en fra e forskellig translation er indbyrdes forskellige, kan $(t_n \circ s_n^{-1})^n$ kun være lig med $e = (t_n \circ s_n^{-1})^0$, hvis $t_n \circ s_n^{-1} = e$, altså $t_n = s_n$. Dermed er sætningen bevist.

Idet n og q er positive hele tal, betragtes de to translationer t_q og t_{nq} , for hvilke $t_q^q = t$ og $t_{nq}^{nq} = t$, hvor t er en vilkårlig given translation. Det skal vises, at

$$(4) \quad t_q^p = t_{nq}^{np}$$

for hvert helt tal p . Ved hjælp af (2) fås

$$(t_q^p)^q = t_q^{pq} = (t_q^q)^p = t^p$$

og

$$(t_{nq}^{np})^q = t_{nq}^{npq} = (t_{nq}^{nq})^p = t^p.$$

Da der ifølge den ovenfor beviste sætning kun findes een translation, hvis q -te potens er t^p , må (4) gælde. Hvert rationalt tal kan skrives på formen p/q , hvor $p \in \mathbb{Z}$ og $q \in \mathbb{N}$. Hvis p/q er uforkortelig, vil hver brøk, der har positiv nævner og er lig med p/q kunne skrives np/nq , hvor $n \in \mathbb{N}$. Derfor kan man af (4) drage den slutning, at t_q^p kun afhænger af det rationale tal p/q . Dette viser, at det er tilladt at definere

$$t^{p/q} = t_q^p,$$

idet (4) da udsiger, at $t^{p/q} = t^{np/nq}$.

For de således definerede potenser med rationale eksponenter gælder de til (1), (2) og (3) svarende potensregler. Man har nemlig for $p, r \in \mathbb{Z}$ og $q, s \in \mathbb{N}$

$$(t^{p/q} \circ t^{r/s})^{qs} = (t_q^p \circ t_s^r)^{qs} = t_q^{pqs} \circ t_s^{rqs}$$

nemlig for $p \in \mathbb{Z}$ og $q \in \mathbb{N}$

$$(t^{p/q})^q = (t_q^p)^q = t^p,$$

som vist ovenfor, og ved hjælp heraf og af (1), (2), (3) fås for $m \in \mathbb{Z}$ og $n \in \mathbb{N}$:

$$(t^{p/q} \circ t^{m/n})^{qn} = (t^{p/q})^{qn} \circ (t^{m/n})^{nq} = t^{pn} \circ t^{mq} = t^{pn + mq}$$

og

$$(t^{p/q + m/n})^{qn} = (t^{(pn + mq)/qn})^{qn} = t^{pn + mq}.$$

Idet translationerne $t^{p/q} \circ t^{m/n}$ og $t^{p/q + m/n}$ således har den samme qn -te potens, sluttes af sætningen ovenfor, at

$$(5) \quad t^{p/q} \circ t^{m/n} = t^{p/q + m/n}.$$

Endvidere have

$$((t^{p/q})^{m/n})^{qn} = (t^{p/q})^{mq} = t^{pm}$$

og

$$(t^{pm/qn})^{qn} = t^{pm},$$

hvoraf som før

$$(6) \quad (t^{p/q})^{m/n} = t^{pm/qn}.$$

Endelig have for to translationer t og s

$$((t \circ s)^{p/q})^q = (t \circ s)^p = t^p \circ s^p$$

og

$$(t^{p/q} \circ s^{p/q})^q = (t^{p/q})^q \circ (s^{p/q})^q = t^p \circ s^p,$$

hvoraf som før

$$(7) \quad (t \circ s)^{p/q} = t^{p/q} \circ s^{p/q}.$$

Ifølge hovedsætningen i begyndelsen af denne paragraf svarer der til hvert punktpar (P, P') en og kun een translation $t = t_{PP}$, for hvilken $t(P) = P'$. Omvendt, givet en translation t , findes der punktpar (P, P') , således at $t(P) = P'$, og herved kan P endda vælges vilkårligt. Der foreligger altså en afbildning ψ af mængden $E_3 \times E_3$ af alle punktpar på mængden $\mathcal{T}_3$ af alle translationer. Denne afbildning giver anledning til en klasseinddeling

af mængden af alle punktpar på følgende måde (jfr. side I,4,6):
 For en given translation t betragtes originalmængden $\psi^{-1}(t)$,
 d.v.s. mængden af alle punktpar (P, P') , for hvilke $t(P) = P'$. Af
 det anførte fremgår, at to forskellige sådanne originalmængder
 er disjunkte, og at hvert punktpar tilhører en af dem. Mængden
 $\{\psi^{-1}(t) \mid t \in \mathcal{T}_3\}$ af mængder af punktpar er altså en klasseind-
 deling af $E_3 \times E_3$. Hver af klasserne kaldes en vektor. Til hver
 translation t svarer altså en og kun een vektor, nemlig $\psi^{-1}(t)$.
 Denne betegnes med $\underline{v}_t$. Et punktpar (P, P') betegnes i denne for-
 bindelse med $\overrightarrow{PP'}$ og angives på figurer ved en pil fra P til P' .
 At to punktpar $\overrightarrow{PP'}$ og $\overrightarrow{QQ'}$ repræsenterer (tilhører) samme vektor,
 er en ækvivalensrelation (jfr. side I,7, 11-12). Til betegnelse
 af denne plejer man at bruge lighedstegnet. Man skriver altså

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$$

når de to punktpar tilhører samme klasse, altså samme vektor,
 d.v.s. når der findes en translation t , således at $P' = t(P)$ og
 $Q' = t(Q)$. I stedet for $\overrightarrow{PP'} \in \underline{v}$, hvor $\underline{v}$ er en vektor, tillader
 man sig den ukorrekte skrivemåde

$$\overrightarrow{PP'} = \underline{v}$$

og siger, at $\overrightarrow{PP'}$ er vektoren $\underline{v}$ afsat fra eller bundet til punktet
 P . Da en vektor er fuldstændig bestemt ved eet punktpar, der re-
 præsenterer den, giver skrivemåden ikke anledning til misforstå-
 elser.

Idet mængden af alle vektorer betegnes med V_3 , defineres en
 enentydig afbildning $\varphi: \mathcal{T}_3$ på V_3 ved til hver translation t at
 lade svare vektoren $\underline{v}_t$. Er også t' en translation og $\underline{v}_t$, den til-
 svarende vektor, kaldes den til $t' \circ t$ svarende vektor $\underline{v}_{t' \circ t}$ for
 summen af vektorerne $\underline{v}_t$ og $\underline{v}_{t'}$, man sætter altså

$$\underline{v}_{t' \circ t} = \underline{v}_{t'} + \underline{v}_t.$$

Er $\overrightarrow{PP'}$ vektoren $\underline{v}_t$ afsat fra P , altså $P' = t(P)$, og $\overrightarrow{P'P''}$ vektoren $\underline{v}_t$, afsat fra P' , altså $P'' = t'(P')$, vil $\overrightarrow{PP''}$, hvor $P'' = t'(t(P))$, være vektoren $\underline{v}_t + \underline{v}_t$ afsat fra P .

På denne måde er der defineret en kompositionsforskrift $+$ i V_3 , og dette på en sådan måde, at afbildningen $\varphi: t \rightarrow \underline{v}_t$ er homomorf. Da $\varphi: \overline{J}_3$ på $V_3(1-1)$, er den specielt en isomorfi af gruppen $(\overline{J}_3, \circ)$ på $(V_3, +)$. Af en tidligere sætning (side II, 2, 9 øverst) sluttes, at $(V_3, +)$ er en gruppe, og at den til det neutrale element e i $\overline{J}_3$ svarende vektor bestående af parrene $\overrightarrow{PP}$, $P \in E_3$, er det neutrale element i V_3 . Denne vektor kaldes nulvektoren og betegnes med $\underline{0}$. Endvidere svarer til den inverse t^{-1} til en translation t vektoren $\underline{v}_{t^{-1}}$, som i $(V_3, +)$ er invers til $\underline{v}_t$. Den betegnes derfor med $-\underline{v}_t$ og kaldes den til $\underline{v}_t$ modsatte vektor. Det er indlysende, at gruppen $(V_3, +)$ er kommutativ, da $(\overline{J}_3, \circ)$ er det.

Er n et positivt helt tal og t en translation, vil der ved φ til t^n svare en sum af n ens vektorer $\underline{v}_t$. Det ligger nær at betegne denne sum med $n\underline{v}_t$ eller $\underline{v}_t n$. (Begge betegnelser vil blive brugt.) Tilsvarende vil der til $t^{-n} = (t^{-1})^n$ svare en sum af n ens vektorer $-\underline{v}_t$. For denne indføres analogt betegnelsen $-n\underline{v}_t = \underline{v}_t(-n)$. Almindeligt defineres et rationalt multiplum af en vektor $\underline{v}_t$ ved

$$\underline{v}_t r = r\underline{v}_t = \underline{v}_t r, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Med denne definition svarer der til reglerne (6), (5) og (7) for translationers potenser med rationale eksponenter følgende regler for vektorers multiplikation med rationale tal, hvor $\underline{u}$ og $\underline{v}$ betegner vilkårlige vektorer og r og s vilkårlige rationale tal:

$$r(s\underline{v}) = (rs)\underline{v},$$

$$(r+s)\underline{v} = r\underline{v} + s\underline{v},$$

$$r(\underline{u} + \underline{v}) = r\underline{u} + r\underline{v}.$$

Endvidere medfører definitionen, at

$$1\underline{v} = \underline{v}, \quad 0\underline{v} = \underline{0}, \quad (-1)\underline{v} = -\underline{v},$$

idet det jo for den til $\underline{v}$ svarende translation t gælder, at $t^1 = t$ og $t^0 = e$, og at t^{-1} er invers til t .

Sammenfattende kan siges, at mængden V_3 af vektorer er organiseret ved to kompositionsforskrifter. Den ene, betegnet med $+$, er en kompositionsforskrift inden for V_3 , således at $(V_3, +)$ er en kommutativ gruppe. Den anden er en "ydre" kompositionsforskrift der til hvert par bestående af et rationalt tal r og en vektor $\underline{v}$ lader svare en vektor $r\underline{v}$, der siges at fremgå af $\underline{v}$ ved multiplikation med r , således at ovenstående regler gælder. Denne kompositionsforskrift er altså en afbildning af $\mathbb{Q} \times V_3$ ind i V_3 . Når V_3 betragtes som organiseret ved begge kompositionsforskrifter, skrives $(V_3, +, \mathbb{Q})$.

Der foreligger her et eksempel fra en klasse af organiserede mængder, der benævnes vektorrum eller lineære rum, og som spiller en fremtrædende rolle i det følgende og i matematikken og dens anvendelser overhovedet. Ved et tallegeme L forstås en mængde af tal med følgende egenskaber: L indeholder mindst eet fra 0 forskelligt tal, og $a, b \in L$ medfører $a+b \in L$, $a-b \in L$, $ab \in L$ og, hvis $b \neq 0$, $a/b \in L$. Eksempler på tallegemer er mængden $\mathbb{Q}$ af rationale tal, mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal og mængden $\mathbb{C}$ af komplekse tal. Ved et vektorrum over tallegemet L forstås en ikke tom mængde V , hvis elementer kaldes "vektorer", organiseret ved to kompositionsforskrifter, den ene inden for V , betegnet som addition, den anden fra $L \times V$ ind i V og betegnet som multiplikation, således at følgende er opfyldt:

$$V1: \forall \underline{u}, \underline{v} (\underline{u} + \underline{v} \in V).$$

$$V2: \forall \underline{u}, \underline{v} (\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}).$$

$$V3: \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} (\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}).$$

$$V4: \exists \underline{v} \underline{0} \forall \underline{v} (\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}).$$

$$V5: \forall \underline{v} \exists \underline{v}^{-1} (\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}).$$

$$V6: \forall \underline{L} a \forall \underline{v} (a\underline{v} = \underline{v}a \in V).$$

$$V7: \forall \underline{L} a, b \forall \underline{v} (a(b\underline{v}) = (ab)\underline{v}).$$

$$V8: \forall \underline{L} a, b \forall \underline{v} ((a+b)\underline{v} = a\underline{v} + b\underline{v}).$$

$$V9: \forall \underline{L} a \forall \underline{u}, \underline{v} (a(\underline{u} + \underline{v}) = a\underline{u} + a\underline{v}).$$

$$V10: \forall \underline{v} (1\underline{v} = \underline{v}).$$

Af disse 10 regler udtrykker V1 og V6 blot, at det drejer sig om kompositionsregler, og V2-5 udsiger, at $(V, +)$ er en kommutativ gruppe. Fra sætninger om grupper (side II, 2, 1) vides, at det neutrale element, "nulvektoren" $\underline{0}$ og den til $\underline{v}$ inverse, modsatte vektor er entydig bestemt. V7 er en slags associativ lov for multiplikationen. (Da der ikke er defineret noget produkt af vektorer, kan der ikke være tale om andre former for associative love, hvori der indgår vektorer.) Der findes to væsentlig forskellige distributive love, da faktorerne i et produkt kan, som i eksemplet ovenfor, være elementer af helt forskellig art. De nævnte regler $0\underline{v} = \underline{0}$ og $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$ kan vises at være konsekvenser af V1-10 (se III, 2, opg. 6).

En delmængde $V' \neq \emptyset$ i V siges at være et (lineært) underrum i et vektorrum $(V, +, L)$, hvis $(V', +, L)$ er et vektorrum. Nødvendig og tilstrækkelig herfor er, at V1 og V6 er opfyldt med V' i stedet for V . Nødvendigheden er oplagt, og tilstrækkeligheden ses således: Regnereglerne V2-3 og V7-10 gælder selvfølgelig i V' , da de endog gælder i V . Ifølge V6 og V1 og regnereglerne er for en eller anden vektor $\underline{v} \in V'$

$$\underline{0} = (1 + (-1))\underline{v} = 1\underline{v} + (-1)\underline{v} \in V',$$

og

$$-\underline{v} = \underline{0} + (-1)\underline{v} \in V',$$

hvormed også V4-5 er vist for V' .

Eksempler på underrum i et vektorrum $(V, +, L)$ er $V' = \{\underline{0}\}$,
 $V' = V$, $V' = \{a\underline{y} \mid a \in L\}$ for enhver given vektor $\underline{y} \in V$.

I det ovenfor definerede vektorrum $(V_3, +, Q)$ danner mængden
af nulvektoren og alle vektorer parallelle med en given linie
eller alle vektorer parallelle med en given plan et underrum.

Rettelse til side III, 2, 9:

De to sidste linier slettes.

Øvelser til kap. III, 2.

- 1) Givet to parallelle planer Π og Π' samt to linier a og b , som ikke er parallelle med dem. Lad f betegne parallelprojektion af Π på Π' i retningen a og g parallelprojektion af Π' på Π i retningen b . Vis, at $g \circ f$ er restriktion af en translation til Π . Undersøg, om denne påstand også er rigtig, hvis Π og Π' skærer hinanden.
- 2) Vis, at en enentydig afbildning t af rummet E_3 på sig selv er en translation, når den blot opfylder kravene T1 og T3, altså at T2 er en følge af de øvrige egenskaber ved en translation. (Jfr. beviset for, at sammensætningen af to translationer er igen en translation, side III, 2,5.)
- 3) Lad s og t være translationer. Danner $\{s^p \circ t^q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$ en undergruppe i $\overline{V}_3$? Findes der linier eller planer, som ved alle disse translationer afbildes på sig selv?
- 4) Idet der i beviset for hovedsætningen og for, at translationerne danner en gruppe, kun blev benyttet aksiomerne J1-8 (og konsekvenser deraf), gælder disse sætninger også for det i III, 1, opg. 6 definerede "rum" bestående af 8 "punkter". Bestem for dette "rum" translationsgruppens orden, vis, at alle fra den identiske afbildning forskellige translationer er involutoriske, og opstil en gruppetavle.

- 5) A. Lad $\mathbb{R}^n$ betegne det n -dimensionale reelle talrum, altså mængden af alle n -sæt af reelle tal. Idet $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ og $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$ er elementer af $\mathbb{R}^n$, defineres en addition i $\mathbb{R}^n$ ved

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

og en multiplikation med tal $\lambda \in \mathbb{R}$ ved

$$\lambda \underline{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Vis, at $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$ er et vektorrum. Undersøg, om mængden af alle talsæt $\underline{x}$, som tilfredsstiller en ligning af formen $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta$, hvor $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$ er givne reelle tal, er et underrum. (Skeln mellem tilfældene $\beta = 0$ og $\beta \neq 0$). Generaliser til mængder af talsæt, som tilfredsstiller flere ligninger af den angivne form.

B. Lad $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ betegne mængden af alle følger $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots)$ af reelle tal. Idet addition af to følger og multiplikation af en følge med et reelt tal defineres som for talsæt, er $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \mathbb{R})$ et vektorrum. Undersøg, om følgende delmængder af $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ er underrum deri:

- Mængden af alle konvergente følger.
- Mængden af alle følger, der konvergerer mod et givet tal.
- Mængden af alle følger $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots)$, for hvilke rækken $x_1^2 + x_2^2 + \dots$ er konvergent (Hilberts talrum).

C. Lad $\mathcal{F}_M$ betegne mængden af alle funktioner $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$, hvor M er en given mængde. Addition af funktioner og multiplikation af en funktion med et reelt tal defineres på sædvanlig måde. Vis, at $(\mathcal{F}_M, +, \mathbb{R})$ er et vektorrum, og undersøg om følgende delmængder $\mathcal{F}'_M$ i $\mathcal{F}_M$ for de angivne definitionsmængder M er underrum deri:

- M vilkårlig, $\mathcal{F}'_M$ mængden af alle i M begrænsede funktio-

ner; $\mathcal{F}_M$ mængden af alle funktioner $t \rightarrow \varphi(t)$, for hvilke $|\varphi(t)| < k$, $t \in M$, hvor k er et givet tal.

b) M et topologisk rum, $\mathcal{F}_M$ mængden af alle i M kontinuerte funktioner.

c) M et interval i $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}_M$ mængden af alle i M differentiable funktioner.

d) M et interval i $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}_M$ mængden af alle i M to gange differentiable funktioner $y = \varphi(t)$, som tilfredsstiller differentialligningen

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t),$$

hvor $a(t)$, $b(t)$ og $f(t)$ er givne, i M definerede reelle funktioner. (Betragt tilfældet $f(t) = 0$ for $t \in M$ særskilt.)

e) $M = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_M$ mængden af alle reelle polynomier, mængden af alle polynomier af en given grad m , mængden af alle polynomier af højst m -te grad. (heri indbefattes "nulpolynomiet", d.v.s. funktionen, der er identisk 0).

6) Lad $(V, +, L)$ være et vilkårligt vektorrum. Vis følgende (på grundlag af VI-10), hvor $\underline{u}$ og $\underline{v}$ betegner elementer fra V og a og b tal fra L :

a) $a\underline{0} = \underline{0}$ (d.v.s. $\underline{v} + a\underline{0} = \underline{v}$ for mindst eet, og da for alle, $\underline{v} \in V$).

b) $0\underline{v} = \underline{0}$.

c) Løsningen til ligningen $\underline{u} + \underline{x} = \underline{v}$, hvor $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er givne, betegnes med $\underline{v} - \underline{u}$. (Den eksisterer og er entydig bestemt, da $(V, +)$ er en gruppe.) Da er $\underline{v} - \underline{u} = \underline{v} + (-\underline{u})$.

d) $(b-a)\underline{v} = b\underline{v} - a\underline{v}$.

e) $a(\underline{v} - \underline{u}) = a\underline{v} - a\underline{u}$.

f) $a\underline{v} = \underline{0}$ medfører $a = 0$ eller $\underline{v} = \underline{0}$.

7) En afbildning h af rummet E_3 ind i E_3 defineres på følgende måde: Givet et punkt C og et rationalt tal r . Til hvert punkt $P \in E_3$ lader man svare det punkt $P' = h(P)$, for hvilket $\overrightarrow{CP'} = r\overrightarrow{CP}$. En sådan afbildning kaldes en homoteti eller dilatation (eller også "multiplikation") med centrum C og multiplikator r .

Vis, at hvis $r \neq 0$, vil h være en enentydig afbildning af E_3 på E_3 , og at h for $r \neq 1$ har et og kun eet fixpunkt.

Vis, med benyttelse af regneregler for vektorer, at for hvilket som helst to forskellige punkter P og Q er $li(h(P), h(Q)) \parallel li(P, Q)$. Slut heraf for $r \neq 0, 1$: For hver linie p er $h(p) \parallel p$, og der gælder $h(p) = p$, hvis og kun hvis p går gennem C . Formulér og vis det tilsvarende for planer.

I det følgende betegnes den ovenfor definerede homoteti med $h_{r,C}$:

Vis, at $(\{h_{r,C} \mid r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}, \circ)$ er en transformationsgruppe for E_3 , som er isomorf med $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Lad $t \neq e$ være en translation og $\underline{v}$ den tilsvarende vektor.

Vis, at $h_{r,C} \circ t$ og $t \circ h_{r,C}$ er homotetier med multiplikatoren r , og angiv deres centre. Vis, at $h_{r,C} \circ t \circ h_{r,C}^{-1}$ er en translation, og angiv den tilsvarende vektor.

Slut af disse resultater, at

$$(\{h_{r,C} \mid r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \wedge C \in E_3\} \cup \overline{\mathcal{T}}_3, \circ)$$

og en transformationsgruppe med $\overline{\mathcal{T}}_3$ som normal undergruppe (se side II, 2, 6).

§ 3. Om geometriens grundlag: Ordning og kontinuitet.

Den videre opbygning af den sædvanlige geometri kræver aksiomer, der blandt andet vedrører punkters indbyrdes beliggenhed på en linie. Det drejer sig her om at give udsagn som "et punkt ligger mellem to andre", "punkterne på en linie ligger i en bestemt orden", "en linie kan orienteres på to måder" og lignende et præcist grundlag. Dette udgøres af såkaldte ordningsaksiomer.

I det følgende betragtes mængden af alle punktpar $\overrightarrow{PP'}$, bestående af to forskellige punkter, altså mængden $\Omega = E_3 \times E_3 \setminus \Delta$, hvor $\Delta = \{\overrightarrow{PP} \mid P \in E_3\}$ er diagonalen i produktmængden (jfr. side I, 7,9). Ved at fastsætte at $\overrightarrow{PP'} \parallel \overrightarrow{QQ'}$ skal betyde, at $li(P, P') \parallel li(Q, Q')$, defineres åbenbart en ækvivalensrelation i Ω ; thi reflexiviteten og symmetrien er oplagt, og transitiviteten følger af, at parallelitet mellem linier er transitiv. En ækvivalensklasse består af de punktpar $\overrightarrow{PP'}$, for hvilke linierne $li(P, P')$ udgør et parallelknippe. Idet et sådant knippe fastlægges ved en af sine linier a , betegnes den pågældende klasse af punktpar med Ω_a . De fire første af de følgende aksiomer udtaler sig om en relation inden for hver af disse klasser, medens det femte, som først vil blive brugt senere, handler om forbindelsen mellem to klasser. For denne relation, som beskrives ved ordene ensrettet eller ens orienteret, bruges tegnet $\circ$, for dens negation modsat rettet eller modsat orienteret tegnet $\neq$, der skrives altså henholdsvis $\overrightarrow{PP'} \circ \overrightarrow{QQ'}$ og $\overrightarrow{PP'} \neq \overrightarrow{QQ'}$.

Or 1: For hver linieretning a er $\circ$ en ækvivalensrelation i Ω_a .

Or 2: For punktpar $\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{QQ'} \in \Omega_a$ er $\overrightarrow{PP'} \circ \overrightarrow{QQ'}$ ensbetydende med $\overrightarrow{P'P} \neq \overrightarrow{QQ'}$.

Or 3: For punktpar $\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{QQ'} \in \Omega_a$ medfører $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$, at

$$\overrightarrow{PP'} \circ \overrightarrow{QQ'}.$$

Or 4: For punktpar $\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{P'P''} \in \Omega_a$ medfører $\overrightarrow{PP'} \circ \overrightarrow{P'P''}$, at $P \neq P''$ og $\overrightarrow{PP''} \circ \overrightarrow{PP'}$.

Or 5: Er $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS} \in \Omega_a$ og $\overrightarrow{P'Q'}, \overrightarrow{R'S'} \in \Omega_a$, og findes der linier $p \parallel q \parallel r \parallel s$, som hverken er parallelle med a eller a' , således at $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$, $R, R' \in r$ og $S, S' \in s$, da vil $\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{RS}$ medføre, at $\overrightarrow{P'Q'} \circ \overrightarrow{R'S'}$.

En simpel konsekvens af aksiom Or 2 er, at der findes netop 2 ækvivalensklasser. Det udsiger nemlig, at $\overrightarrow{PP'}$ og $\overrightarrow{P'P}$ hører til forskellige klasser, og at hvert punktpar, som ikke tilhører samme klasse som $\overrightarrow{P'P}$, vil tilhøre samme klasse som $\overrightarrow{PP'}$. Endvidere sluttes, at $\overrightarrow{PP'} \circ \overrightarrow{QQ'}$ er ensbetydende med $\overrightarrow{P'P} \circ \overrightarrow{Q'Q}$. Hver af de to klasser kaldes en orientering af parallelknippet $kn(a)$. At orientere knippet (eller dettes linier) vil sige at udvælge een af disse klasser.

Aksiom Or 3 udsiger, at punktpar, der repræsenterer samme vektor er ensrettede.

Aksiom Or 4 udsiger, at hvis tre punkter P, P', P'' ligger på samme linie, og $\overrightarrow{PP'}$ og $\overrightarrow{P'P''}$ er ensrettede, da vil P'' være forskellig fra P og $\overrightarrow{PP''}$ vil være ensrettet med $\overrightarrow{PP'}$. Den i forrige paragraf (side III, 2, 7-8) gjorde forudsætning, at alle (fra $\{e\}$ forskellige) cykliske undergrupper i translationsgruppen $\sqrt[3]{}$ følger let heraf ved induktion. Lad $t \neq e$ være en translation og P et vilkårligt punkt. For hvert positivt helt tal n betegnes punktet $t^n(P)$ med P_n . Det er tilstrækkeligt at vise, at $P_n \neq P$; thi dette medfører, at $t^n \neq e$ for $n \in \mathbb{N}$, og ifølge en sætning om cykliske grupper (side II, 2, 12) kan den af t frembragte cykliske gruppe ikke være endelig. Antag, at $P_{n-1} \neq P$ og $\overrightarrow{PP_1} \circ \overrightarrow{PP_{n-1}}$ for et $n > 1$. For $n = 2$ er dette rigtigt, idet $P_1 = t(P) \neq P$. Da $\overrightarrow{PP_1}$

$= \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$, altså $\overrightarrow{PP_1} \in \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ (ifølge Or 3) og derfor $\overrightarrow{PP_{n-1}} \in \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ (ifølge Or 1), fås af Or 4, at $P_n \neq P$ og $\overrightarrow{PP_n} \in \overrightarrow{PP_1}$ (ifølge Or 1). Dermed er induktionsbeviset ført.

Som en anden simpel følge af aksiomerne nævnes, at ved en parallelprojektion af en linie $p \in \text{kn}(a)$ på en anden linie $q \in \text{kn}(a)$ vil et punktpar på p afbildes på et dermed ensrettet punktpar på q . Da $p \parallel q$, repræsenterer de to punktpar nemlig den samme vektor.

Lad P, Q, R være indbyrdes forskellige punkter på en linie tilhørende $\text{kn}(a)$. Hvis $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{QR}$ eller, hvad der er ensbetydende hermed, $\overrightarrow{QP} \in \overrightarrow{RQ}$, siges Q at ligge mellem P og R .

Iblandt tre indbyrdes forskellige punkter på en linie findes et og kun eet, som ligger mellem de to andre.

Bevis: Lad punkterne være P, Q, R . Hvis $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{QR}$, kan der ikke gælde $\overrightarrow{PR} \in \overrightarrow{RQ}$; thi dette ville ifølge Or 4 medføre, at $\overrightarrow{RQ} \in \overrightarrow{PR} \in \overrightarrow{PQ}$, altså $\overrightarrow{RQ} \in \overrightarrow{QR}$, i strid med Or 2. Tilsvarende ses, at P ikke kan ligge mellem Q og R . Hvis $\overrightarrow{PQ} \notin \overrightarrow{QR}$, haves $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{RQ}$. Endvidere er enten $\overrightarrow{PR} \in \overrightarrow{RQ}$, altså $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{PR}$, altså $\overrightarrow{QP} \notin \overrightarrow{PR}$ og påstanden følgende rigtig eller $\overrightarrow{PR} \notin \overrightarrow{RQ}$, altså $\overrightarrow{RP} \in \overrightarrow{RQ}$, altså $\overrightarrow{RP} \notin \overrightarrow{PQ}$ og påstanden også rigtig i dette tilfælde.

Svarende til hver af de to orienteringer af parallelknippet $\text{kn}(a)$ kan der defineres en total ordningsrelation i mængden af punkter på en vilkårlig linie $p \in \text{kn}(a)$ på følgende måde: Lad orienteringen være fastlagt ved punktparret $\overrightarrow{P_0P_1}$ på p . Er Q og R , hvor $Q \neq R$, punkter på p , siges Q at komme før R eller at gå forud for R , i tegn $Q \prec R$, hvis $\overrightarrow{QR} \in \overrightarrow{P_0P_1}$. Denne relation opfylder betingelserne for en ikke-refleksiv, total ordningsrelation (jfr. side I, 7, 14-15):

$$O\ 1: \forall_p P (P \prec P).$$

$$O\ 2: \forall_p P, Q (P \neq Q \wedge P \prec Q \implies Q \not\prec P).$$

$$O\ 3: \forall_p P, Q, R (P \prec Q \wedge Q \prec R \implies P \prec R).$$

$$O\ 4: \forall_p P, Q (P \neq Q \implies P < Q \vee Q < P).$$

Før dette eftervises, bemærkes, at $O\ 2$ er en følge af $O\ 1$ og $O\ 3$; thi er $P \neq Q$ og $P < Q$, og var også $Q < P$, ville man af $O\ 3$ få $P < P$ i strid med $O\ 1$. Det er altså tilstrækkeligt at vise, at $O\ 1$, $O\ 3$ og $O\ 4$ gælder. Ifølge definitionen forudsætter $P < Q$, at $P \neq Q$, altså $O\ 1$. At $O\ 3$ gælder, ses således: Idet $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$ og $\overrightarrow{QR} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$ medfører $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{QR}$ ifølge Or 1, fås af Or 4, at $\overrightarrow{PR} \in \overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$, hvorefter $P < R$. At $O\ 4$ gælder ses således: Antag, at $P \neq Q$ og $P \not< Q$, altså $\overrightarrow{PQ} \notin \overrightarrow{P_0 P_1}$. Da gælder ifølge Or 2, at $\overrightarrow{QP} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$, altså $Q < P$.

Det fremgår umiddelbart af definitionen, at ordningsrelationen på linien p forbliver uændret, når det givne punktpar $\overrightarrow{P_0 P_1}$ erstattes med et andet $\overrightarrow{P'_0 P'_1} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$; thi $\overrightarrow{QR} \in \overrightarrow{P'_0 P'_1}$ er jo ifølge Or 1 ensbetydende med $\overrightarrow{QR} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$. Ordningsrelationen afhænger altså kun af den valgte orientering. Erstattes $\overrightarrow{P_0 P_1}$ med et punktpar $\overrightarrow{P'_0 P'_1} \notin \overrightarrow{P_0 P_1}$ fås en anden ordningsrelation $<'$. Da i dette tilfælde $\overrightarrow{P_1 P_0} \in \overrightarrow{P'_0 P'_1}$, vil $Q <' R$, altså $\overrightarrow{QR} \in \overrightarrow{P'_0 P'_1}$ ifølge Or 2 være ensbetydende med $\overrightarrow{RQ} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$, altså med $R < Q$. Ordningsrelationen $<'$ siges at være den til $<$ modsatte ordningsrelation, og man skriver også $Q > R$ i stedet for $Q <' R$.

Lad a og a' være to forskellige linier beliggende i samme plan, og lad $f : a \rightarrow a'$ betegne en parallelprojektion i en fra både a og a' forskellig retning. Af aksiom Or 5 fås da, at hvis $P_0 \neq P_1$, $Q \neq R$ er punkter på a , vil $\overrightarrow{QR} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$ medføre, at $\overrightarrow{f(Q)f(R)} \in \overrightarrow{f(P_0)f(P_1)}$. Med andre ord, tænkes en orientering, og dermed en ordning $<$, fastlagt på a ved $\overrightarrow{P_0 P_1}$ samt en orientering, og dermed en ordning $<'$, på a' ved et punktpar $\overrightarrow{P'_0 P'_1}$, vil $Q < R$ medføre $f(Q) <' f(R)$ eller $f(R) <' f(Q)$, efter som $\overrightarrow{f(P_0)f(P_1)} \in \overrightarrow{P'_0 P'_1}$ eller $\overrightarrow{f(P_0)f(P_1)} \notin \overrightarrow{P'_0 P'_1}$. Altså:

En parallelprojektion af en orienteret linie a på en orienteret linie a' er en ordenstro afbildning af $(a, \prec)$ på $(a', \prec')$ eller på $(a', \succ)$, efter som de to orienteringer "svarer eller ikke svarer til hinanden ved projektionen". Her betegner $\prec$ og $\prec'$ de til de givne orienteringer svarende ordningsrelationer på a og a' , og $\succ$ er den modsatte til $\prec$.

Umiddelbart følger dette ganske vist kun for linier a og a' i samme plan. Men hvis de ikke ligger i samme plan, lægges en med a' parallel og ens orienteret linie a'' gennem et punkt på a . Parallelprojektionerne $f : a$ på a' kan da sammensættes af to parallelprojektioner, en af a på a'' , på hvilken det viste kan anvendes, og en af a'' på a' , der ifølge en tidligere bemærkning (forrige side, øverst) er ordenstro.

Lad der være givet to forskellige punkter P_0 og P_1 på en linie p . Til hvert rationalt tal r findes der da et og kun eet punkt P_r på linien, således at

$$\overrightarrow{P_0 P_r} = r \overrightarrow{P_0 P_1},$$

nemlig punktet $P_r = t^r(P_0)$, hvor t betegner den translation, for hvilken $t(P_0) = P_1$. Ved $r \rightarrow P_r$ defineres altså en afbildning

$\varphi : \mathbb{Q}$ ind i p . Det skal vises, at φ er en ordenstro afbildning af $(\mathbb{Q}, \prec)$ ind i $(p, \prec)$, hvor $\prec$ betegner den til orienteringen $\overrightarrow{P_0 P_1}$ hørende ordning på p .

Bevis: Først bemærkes, at hvis $n \in \mathbb{N}$ og Q og R er to forskellige punkter på p , vil $n\overrightarrow{QR} \in \overrightarrow{QR}$. Dette blev vist ovenfor (med P og P_1 i stedet for Q og R , side III, 3, 2-3). Er $r = m/n$, hvor $m, n \in \mathbb{N}$, et positivt rationalt tal, fås deraf $\overrightarrow{P_0 P_{1/n}} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$, idet $n \overrightarrow{P_0 P_{1/n}} = \overrightarrow{P_0 P_1}$. Endvidere have

$$\overrightarrow{P_0 P_r} = \frac{m}{n} \overrightarrow{P_0 P_1} = m \overrightarrow{P_0 P_{1/n}},$$

hvoraf man slutter tilsvarende, at $\overrightarrow{P_0 P_r} \in \overrightarrow{P_0 P_1/n} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$. Er nu r og s , hvor $r < s$, rationale tal, fås af det viste med $s-r$ i stedet for r , at $\overrightarrow{P_0 P_{s-r}} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$. Nu er $\overrightarrow{P_0 P_{s-r}} = \overrightarrow{P_r P_s}$; thi betegner t den ved $t(P_0) = P_1$ bestemte translation, have

$$t^r(P_0) = P_r \quad \text{og} \quad t^r(P_{s-r}) = t^r(t^{s-r}(P_0)) = t^s(P_0) = P_s.$$

Af $r < s$ følger altså $\overrightarrow{P_r P_s} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$, d.v.s. $P_r < P_s$, hvormed påstanden er bevist.

Som bekendt går man i den elementære geometri ud fra, at der findes enentydige, ordenstro korrespondancer mellem mængden af alle reelle tal og mængden af alle punkter på en linie. Eksistensen af sådanne korrespondancer følger ikke af de hidtil opstillede aksiomer. Den sikres ved at tilføje såkaldte kontinuitetsaksiomer. Her vil blive opstillet to. Det første går tilbage til oldtidens græske matematikere og benævnes efter Eudoxos (ca. -400 til -350) eller (historisk ukorrekt, men saglig ikke uberettiget) efter Archimedes (-287 til -212). Det anskuelige indhold er følgende: Er der givet to liniestykker, findes der et positivt helt tal n , således at det ene liniestykke taget n gange er større end det andet. Aksiomet formuleres her med benyttelse af de indførte begreber således:

K 1: Er P_0 og P_1 forskellige punkter på en linie, og er Q et vilkårligt punkt på linien, findes der et helt tal m , således at der for det ved $\overrightarrow{P_0 P_m} = m\overrightarrow{P_0 P_1}$ bestemte punkt P_m gælder $\overrightarrow{QP_m} \in \overrightarrow{P_0 P_m}$.

Ved hjælp heraf bevises følgende sætning, der udsiger, at der mellem to vilkårlige punkter Q og R , $Q \neq R$, på en linie ligger mindst eet punkt P_r , som ved den ovenfor indførte afbildning φ svarer til et rationalt tal r .

Er $P_0 \neq P_1$, $Q \neq R$ punkter på en linie, findes der et ratio-

nalt tal r , således at der for det ved $\overrightarrow{P_0 P_r} = r \overrightarrow{P_0 P_1}$ bestemte punkt P_r gælder $\overrightarrow{QP_r} \in \overrightarrow{P_r R}$.

Med andre ord, mellem hvilke somhelst to forskellige punkter på linien ligger mindst eet af de "rationale punkter" P_r . Disse ligger altså "overalt tæt" på linien.

Beviset for denne sætning føres i flere skridt.

Først bemærkes, at enhver translation t bevarer orienteringen. Er nemlig Q, R to forskellige punkter, haves $\overrightarrow{Qt(Q)} = \overrightarrow{Rt(R)}$, altså

$$\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{Rt(Q)} = \overrightarrow{Rt(Q)} + \overrightarrow{t(Q)t(R)},$$

hvoraf $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{t(Q)t(R)}$, altså specielt $\overrightarrow{QR} \in \overrightarrow{t(Q)t(R)}$. Heraf sluttes videre, at hvis en ved punktparret $\overrightarrow{P_0 P_1}$ orienteret linie afbildes på sig selv ved t , vil denne afbildning være ordenstro; thi er Q og R punkter på p og $Q < R$, d.v.s. $\overrightarrow{QR} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$, fås $\overrightarrow{t(Q)t(R)} \in \overrightarrow{QR} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$, altså $t(Q) < t(R)$.

Lad nu P_0, P_1, Q og R , hvor $P_0 \neq P_1$ og $Q \neq R$, ^{være} de givne punkter på linien. Uden indskrænkning kan det antages, at $\overrightarrow{QR} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$, da dette ellers kan opnås ved ombytning af betegnelserne Q og R . Ved den translation t , ved hvilken Q går over i P_0 , vil R gå over i et punkt R' , for hvilket $\overrightarrow{P_0 R'} = \overrightarrow{QR}$, altså $\overrightarrow{P_0 R'} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$. Det første skridt består i at vise, at der findes et positivt helt tal n , således at $P_{1/n}$ ligger mellem P_0 og R' . Ifølge K 1 anvendt på R' og P_1 i stedet for henholdsvis P_1 og Q findes der et helt tal n , således at der for det ved $\overrightarrow{P_0 R'_n} = n \overrightarrow{P_0 R'}$ bestemte punkt R'_n gælder $\overrightarrow{P_1 R'_n} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$. Da følgelig $\overrightarrow{P_0 R'_n} \in \overrightarrow{P_0 R'_n} = n \cdot \overrightarrow{P_0 R'}$ ^{slut-}
tes, at $n > 0$. Nu er

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0 P_1} + \overrightarrow{P_1 R'_n} &= \overrightarrow{P_0 R'_n} = n \overrightarrow{P_0 R'} = n(\overrightarrow{P_0 P_{1/n}} + \overrightarrow{P_{1/n} R'}) \\ &= n \overrightarrow{P_0 P_{1/n}} + n \overrightarrow{P_{1/n} R'} = \overrightarrow{P_0 P_1} + n \overrightarrow{P_{1/n} R'}, \end{aligned}$$

hvoraf $\overrightarrow{P_1 R'_n} = n \overrightarrow{P_{1/n} R'}$. Heraf sluttes, at $n \overrightarrow{P_0 P_{1/n}} \in \overrightarrow{P_0 P_1} \in n \overrightarrow{P_{1/n} R'}$, altså da $n > 0$, at $\overrightarrow{P_0 P_{1/n}} \in \overrightarrow{P_{1/n} R'}$, hvilket er påstanden. Hvis nu $Q = P_0$ og dermed $R = R'$, er sætningen allerede bevist.

Er $Q \neq P_0$, vises dernæst, at der findes et helt tal m , således at Q ligger mellem $P_{(m-1)/n}$ og $P_{m/n}$. Dertil bemærkes, at K 1 anvendt med $P_{1/n}$ i stedet for P_1 viser, at der findes hele tal p , for hvilke

$$(1) \quad \overrightarrow{QP_{p/n}} \in \overrightarrow{P_0 Q}.$$

Er nu $\overrightarrow{P_0 Q} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$, fås (ifølge Or 4), at $\overrightarrow{P_0 P_{p/n}} \in \overrightarrow{P_0 P_1}$, altså at $p > 0$. Betegner da m det mindste positive hele tal p , for hvilket (1) gælder, haves

$$(2) \quad \overrightarrow{P_{(m-1)/n} Q} \in \overrightarrow{P_0 P_1} \in \overrightarrow{QP_{m/n}}.$$

Er derimod $\overrightarrow{P_0 Q} \notin \overrightarrow{P_0 P_1}$, fås $\overrightarrow{P_0 P_{p/n}} \notin \overrightarrow{P_0 P_1}$, altså $p < 0$. Betegner da $m-1$ det største negative hele tal p , for hvilket (1), altså i dette tilfælde $\overrightarrow{QP_{p/n}} \notin \overrightarrow{P_0 P_1}$ gælder, fås ligeledes (2). Af (2) ses, at m har den ønskede egenskab.

Nu afsluttes beviset på følgende måde: Ved translationen t , for hvilken $t(Q) = P_0$ og $t(R) = R'$, føres $P_{(m-1)/n}$ og $P_{m/n}$ over i punkter S og T , således at $\overrightarrow{SP_0} \in \overrightarrow{P_0 T}$. Endvidere er $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{P_{(m-1)/n} P_{m/n}} = \overrightarrow{P_0 P_{1/n}}$, altså, som nævnt i begyndelsen af beviset, $\overrightarrow{SP_0} = \overrightarrow{TP_{1/n}}$. Dette sammen med $\overrightarrow{SP_0} \in \overrightarrow{P_0 T}$ viser, at $\overrightarrow{P_0 T} \in \overrightarrow{TP_{1/n}}$. Nu var n bestemt således, at $\overrightarrow{P_0 P_{1/n}} \in \overrightarrow{P_{1/n} R'}$. Ved hjælp af Or 4 sluttes, at $\overrightarrow{P_0 T} \in \overrightarrow{TR'}$, altså at T ligger mellem P_0 og R' . Da translationen t^{-1} er ordenstro, må $P_{m/n}$ ligge mellem Q og R . Dermed er beviset for sætningen afsluttet.

I det andet kontinuitetsaksiom kræves, at mængden af punkter på en linie har en "kontinuitetsegenskab", der ganske svarer

til en velkendt ved mængden af reelle tal (jfr. Apostol: Mathematical Analysis, side 7, Axiom 10). For at forenkle aksiomets formulering indføres følgende definition:

Lad $\mathcal{M}$ være en mængde af punkter på en orienteret ret linie. Findes der et punkt K på linien, således at $X \leq K$ for hvert $X \in \mathcal{M}$, siges $\mathcal{M}$ at være fremadtil begrænset og K at være skranke for $\mathcal{M}$.

K 2: Er $\mathcal{M}$ en ikke tom, fremadtil begrænset punktmængde på en orienteret linie, så findes der en skranke $\sup \mathcal{M}$ for $\mathcal{M}$, som går forud for enhver anden skranke for $\mathcal{M}$.

Den sidstnævnte egenskab ved $\sup \mathcal{M}$ kan også udtrykkes således: Ikke noget punkt $L < \sup \mathcal{M}$ på linien er skranke for $\mathcal{M}$, d.v.s. der findes mindst eet punkt $X \in \mathcal{M}$, for hvilket $L < X$.

Det bemærkes, at det kan vises, at K 1 er en følge af K 2 (jfr. øv.). Man kan altså nøjes med det ene kontinuitetsaksiom K 2.

På grundlag af K 2 kan følgende hovedsætning bevises:

Lad der være givet to forskellige punkter P_0 og P_1 på en linie p , og lad $<$ betegne ordningen hørende til den ved $\overrightarrow{P_0 P_1}$ fastlagte orientering af p . Der findes da en og kun een Ordenstro afbildning $\varphi: (\mathbb{R}, <) \rightarrow (p, <)$, hvis restriktion til mængden $\mathbb{Q}$ af rationale tal stemmer overens med den ved $r \rightarrow P_r$ bestemte.

Bevis: Først bevises eksistensen. Lad φ være et vilkårligt reelt tal, og lad $\mathbb{Q}_\varphi$ betegne mængden af alle rationale tal $r \leq \varphi$. Mængden

$$\mathcal{M}_\varphi = \{P_r \mid r \in \mathbb{Q}_\varphi\}$$

af punkter på p er da fremadtil begrænset; thi for et rationalt tal $s > \varphi$ haves $P_r < P_s$ for $r \in \mathbb{Q}_\varphi$, da afbildningen $r \rightarrow P_r$ af $\mathbb{Q}$

ind i p er ordenstro. Ifølge K 2 findes der et punkt $\sup \mathcal{M}_g$ med de i K 2 angivne egenskaber. Sættes nu $\varphi(q) = \sup \mathcal{M}_q$, fås en afbildning $\varphi: \mathbb{R} \text{ ind i } p$. Er g specielt et rationalt tal, haves øjensynlig $\sup \mathcal{Q}_g = g$, altså $\varphi(g) = P_g$. Det er derfor tilladt at betegne $\varphi(g)$ med P_g for ethvert reelt tal g . Dernæst skal det vises, at φ er ordenstro. Lad g og τ være reelle tal, $g < \tau$, og lad a og b være rationale tal, for hvilke $g < a < b < \tau$. Da $r \rightarrow P_r$ er ordenstro for $r \in \mathbb{Q}$, haves $P_a < P_b$. Da $r < a$ for $r \in \mathcal{Q}_g$, fås af samme grund $P_r < P_a$ for disse r , hvilket viser, at P_a er skranke for $\mathcal{M}_g$. Heraf sluttet, at $\sup \mathcal{M}_g = P_g \leq P_a$ (jfr. K 2). Da $b \in \mathcal{Q}_\tau$, haves $P_b \in \mathcal{M}_\tau$ og følgelig $P_b \leq \sup \mathcal{M}_\tau = P_\tau$. Der gælder altså $P_g \leq P_a < P_b \leq P_\tau$, hvorefter $P_g < P_\tau$, hvilket viser, at afbildningen er ordenstro. Dette medfører, at den er enentydig (jfr. side II, 1,10 nederst). Endvidere skal vises, at φ er en afbildning af $\mathbb{R}$ på p . Lad altså P være et vilkårligt punkt af p . Med $\mathcal{Q}_P$ betegnes mængden af alle rationale tal r , for hvilke $P_r \leq P$. Denne mængde er hverken tom eller hele $\mathbb{Q}$, d.v.s. der findes "rationale punkter" både før og efter P . Er nemlig R et vilkårligt andet punkt på p , vil P ligge mellem R og det ved $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PS}$ bestemte punkt S , og ifølge den foregående sætning findes der "rationale punkter" såvel mellem R og P som mellem P og S . Endvidere ses, at talmængden $\mathcal{Q}_P$ er begrænset opadtil; thi er s et rationalt tal, for hvilket $P < P_s$, haves for hvert $r \in \mathcal{Q}_P$, at $P_r \leq P < P_s$, altså $r < s$. Talmængden $\mathcal{Q}_P$ har følgelig en øvre grænse g . Lad u være et rationalt tal, som ikke tilhører $\mathcal{Q}_P$, for hvilket altså $P < P_u$. Ifølge den foregående sætning findes der et "rationalt punkt" P_s , således at $P < P_s < P_u$. Man har da $r < s$ for hvert $r \in \mathcal{Q}_P$, altså $g \leq s$, da g er den øvre grænse for

$\mathbb{Q}_P$. Idet $s < u$, fås $\varphi < u$. Dette vil sige, at ethvert rationalt tal, som ikke tilhører $\mathbb{Q}_P$, er større end φ , med andre ord, mængden $\mathbb{Q}_P$ indeholder alle rationale tal mindre end eller lig med φ , men heller ikke andre, da φ er dens øvre grænse. Man har altså $\mathbb{Q}_P = \mathbb{Q}_\varphi$, og dette viser, at P svarer til φ ved den indførte afbildning φ . Dermed er eksistensen af en afbildning af den ønskede art bevist.

At der ikke kan findes mere end een sådan afbildning, er indeholdt i følgende sætning:

Lad p være en orienteret linie og $<$ den tilhørende ordningsrelation. Er da φ og ψ to ordenstro afbildninger af $(\mathbb{R}, <)$ på $(p, <)$, således at $\varphi(r) = \psi(r)$ for hvert rationalt tal r , da er $\varphi = \psi$.

Bevis: Lad φ være et reelt tal, og antag, at $\varphi(\varphi) \neq \psi(\varphi)$, f.eks. $\varphi(\varphi) < \psi(\varphi)$. Idet φ afbilder på p og er ordenstro, findes der da et reelt tal $\tau > \varphi$, for hvilket $\varphi(\tau) = \psi(\varphi)$. For et rationalt tal r , for hvilket $\varphi < r < \tau$, ville man da få

$$\psi(r) = \varphi(r) < \varphi(\tau) = \psi(\varphi)$$

i strid med, at ψ er ordenstro.

På dette grundlag kan produktet af en vektor med et vilkårligt reelt tal defineres. Lad $\underline{v}$ være en vektor. Hvis $\underline{v} = \underline{0}$ defineres $\varphi \underline{v} = \varphi \underline{0} = \underline{0}$ for $\varphi \in \mathbb{R}$. I det følgende antages, at $\underline{v} \neq \underline{0}$. Idet punktparret $\overrightarrow{P_0 P_1}$ er en repræsentant for $\underline{v}$, betegnes den ved $\overrightarrow{P_0' P_1'}$ bestemte og orienterede linie med p . Ved den ovenfor indførte afbildning φ af $\mathbb{R}$ på p svarer der til tallet $\varphi \in \mathbb{R}$ et punkt P_φ på p . Er $\overrightarrow{P_0' P_1'}$ en anden repræsentant for $\underline{v}$, altså $\overrightarrow{P_0' P_1'} = \overrightarrow{P_0 P_1}$, og p' den derved bestemte og orienterede linie, haves en

tilsvarende afbildning $\varphi' : (\mathbb{R}, <) \text{ på } (p', <')$. Sættes $P'_g = \varphi'(g)$ have $\overrightarrow{P'_0 P'_g} = \overrightarrow{P_0 P_g}$, hvilket vise^s nedenfor. Idet den vektor, som repræsenteres ved $\overrightarrow{P_0 P_g}$, således er uafhængig af valget af repræsentanten $\overrightarrow{P_0 P_1}$ for $\underline{v}$, kan $g\underline{v}$ defineres som den ved $\overrightarrow{P_0 P_g}$ repræsenterede vektor. For rationale g stemmer denne definition overens med den tidligere.

At $\overrightarrow{P'_0 P'_g} = \overrightarrow{P_0 P_g}$, ses således: Ved den translation t , der fører P_0 over i P'_0 , afbildes $(p, <)$ ordenstro på $(p', <')$, og man har $t(P_r) = P'_r$ for hvert rationelt r . Heraf sluttet, at $t \circ \varphi$ og φ' er to ordenstro afbildninger af $(\mathbb{R}, <)$ på $(p', <')$, som stemmer overens for rationale tal. Ifølge den sidst viste sætning er de følgelig identiske. Der gælder altså $t(P_g) = P'_g$ for $g \in \mathbb{R}$, altså $\overrightarrow{P_0 P'_g} = \overrightarrow{P'_0 P'_g}$, hvorefter $\overrightarrow{P_0 P_g} = \overrightarrow{P'_0 P'_g}$ (jfr. bemærkningen på side III,3,7).

Det drejer sig nu om at vise, at mængden V_3 af vektorer i E_3 med den indførte multiplikation med reelle tal er et vektorrum over de reelle tals legeme, med andre ord, at reglerne V1-10 (side III,2, 13-14) også gælder, når de i V6-9 optrædende faktorer a, b er vilkårlige reelle tal. Idet V6 er sikret ved definitionen af produktet, forbliver kun V7-9 at bevise.

Den indførte afbildning $\varphi: \mathbb{R} \text{ på } p$ afhænger af og er fuldstændig bestemt ved de to givne punkter P_0 og P_1 på p , altså de to punkter, der svarer til tallene 0 og 1. Den betegnes nu med $\varphi_{P_0 P_1}$, da også tilsvarende afbildninger bestemt ved andre punkter vil blive betragtet. Er R og S forskellige punkter, betyder φ_{RS} den af disse afbildninger på $li(R, S)$, ved hvilken R svarer til 0 og S til 1. Det er endvidere hensigtsmæssigt ved φ_{RR} at

forstå den konstante afbildning, der til hvert reelt tal lader svare punktet R.

Endvidere vil der være brug for følgende hjælpesætning:

Lad q betegne en orienteret linie, C et fast punkt på q og $r \neq 0$ et rationalt tal. Den "homoteti" (multiplikation) af q med "centrum" C , der til punktet $Q \in q$ lader svare $Q' = h_r(Q)$ bestemt ved $\overrightarrow{CQ'} = r \overrightarrow{CQ}$, er da en ordenstro afbildning af $(q, <)$ på $(q, <)$ eller $(q, >)$, efter som $r > 0$ eller $r < 0$.

Dette indses således: Er Q' et vilkårligt givet punkt på q og Q det ved $\frac{1}{r} \overrightarrow{CQ'} = \overrightarrow{CQ}$ bestemte, vil $h_r(Q) = Q'$; thi

$$r \overrightarrow{CQ} = r(\frac{1}{r} \overrightarrow{CQ'}) = (r \frac{1}{r}) \overrightarrow{CQ'} = 1 \cdot \overrightarrow{CQ'} = \overrightarrow{CQ'}$$

ifølge V7 (for rationale faktorer) og V10. Dette viser, at h_r er en afbildning på q . Lad nu Q_1 og Q_2 , $Q_1 < Q_2$, være to forskellige punkter på q . For deres billeder Q'_1 og Q'_2 ved h_r have

$$\overrightarrow{CQ'_1} = r \overrightarrow{CQ_1}, \quad \overrightarrow{CQ'_2} = r \overrightarrow{CQ_2},$$

altså, idet V9 gælder for en rational faktor,

$$\begin{aligned} r \overrightarrow{CQ_1} + r \overrightarrow{Q_1Q_2} &= r(\overrightarrow{CQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2}) = r \overrightarrow{CQ_2} = \overrightarrow{CQ'_2} \\ &= \overrightarrow{CQ'_1} + \overrightarrow{Q'_1Q'_2} = r \overrightarrow{CQ_1} + \overrightarrow{Q'_1Q'_2}. \end{aligned}$$

Heraf sluttet, at $r \overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q'_1Q'_2}$ og følgelig at $\overrightarrow{Q_1Q_2} \in \overrightarrow{Q'_1Q'_2}$ eller $\overrightarrow{Q_1Q_2} \notin \overrightarrow{Q'_1Q'_2}$, efter som $r > 0$ eller $r < 0$. Dermed er også påstanden, at h_r er ordenstro, bevist.

Idet $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ og $\underline{v} \in V_3$, gælder

$$V7: \quad \lambda(\mu \underline{v}) = (\lambda \mu) \underline{v}.$$

Bevis: Er $\underline{v} = \underline{0}$, er dette rigtigt, da ifølge definition $\underline{g} \underline{0} = \underline{0}$ for hvert reelt tal $\underline{g}$. Lad $\underline{v} \neq \underline{0}$, og lad $\overrightarrow{P_0P_1}$ være en repræsentant for $\underline{v}$. Den ved $\overrightarrow{P_0P_1}$ bestemte og orienterede linie betegnes med p . Vektoren $(\lambda \mu) \underline{v}$ repræsenteres ved $\overrightarrow{P_0P_{2\mu}}$, hvor

$P_{\lambda\mu} = \varphi_{P_0P_1}(\lambda\mu)$. Vektoren $\lambda(\underline{\mu v})$ repræsenteres ved $\overrightarrow{P_0(P_\mu)_\lambda}$, hvor $(P_\mu)_\lambda = \varphi_{P_0P_\mu}(\lambda)$. Det drejer sig altså om at vise, at $(P_\mu)_\lambda = P_{\lambda\mu}$. Dette vides at gælde for rationale λ og μ . Endvidere gælder det for $\lambda = 0$. Først antages, at $\lambda = r \neq 0$ er et rationelt tal, som tænkes fast. Ved $\mu \rightarrow P_{r\mu}$ bestemmes da en afbildning af $\dot{R}$ på p . Denne er sammensat af $\mu \rightarrow r\mu$, som er en ordenstro afbildning af $(\dot{R}, <)$ på $(\dot{R}, <)$, hvis $r > 0$, og på $(\dot{R}, >)$, hvis $r < 0$, og den ordenstro afbildning $\varphi_{P_0P_1} : (\dot{R}, <) \text{ på } (p, <)$ eller $(\dot{R}, >) \text{ på } (p, >)$, hvilket kommer ud på det samme. Heraf ses, at ved den sammensatte afbildning $\mu \rightarrow P_{r\mu}$ afbildes $(\dot{R}, <)$ ordenstro på $(p, <)$, hvis $r > 0$, og på $(p, >)$, hvis $r < 0$. Nu har afbildningen $\mu \rightarrow (P_\mu)_r$ de samme egenskaber. Den er nemlig $h_r \circ \varphi_{P_0P_1}$, hvor h_r betegner homotetien indført i ovenstående hjælpesætning, og ifølge denne er h_r en ordenstro afbildning af $(p, <)$ på $(p, <)$, hvis $r > 0$, og på $(p, >)$, hvis $r < 0$. I forbindelse med, at $\varphi_{P_0P_1}$ afbilder $(\dot{R}, <)$ ordenstro på $(p, <)$, fås heraf, at $\mu \rightarrow (P_\mu)_r$ afbilder $(\dot{R}, <)$ ordenstro på $(p, <)$, hvis $r > 0$, og på $(p, >)$, hvis $r < 0$. Idet de to afbildninger $\mu \rightarrow P_{r\mu}$ og $\mu \rightarrow (P_\mu)_r$ stemmer overens for rationale μ (da jo V7 gælder for rationale λ, μ), er de ifølge den sidst viste sætning identiske, d.v.s. $P_{r\mu} = (P_\mu)_r$ for alle reelle μ og hvert rationelt r . Nu tænkes det vilkårlige reelle tal μ fast, og man betragter afbildningerne $\lambda \rightarrow P_{\lambda\mu}$ og $\lambda \rightarrow (P_\mu)_\lambda$ af $\dot{R}$ på p . Her kan antages, at $\mu \neq 0$, da V7 gælder for $\mu = 0$ ifølge definition. Afbildningen $\lambda \rightarrow P_{\lambda\mu}$ er sammensat af $\lambda \rightarrow \lambda\mu$ og $\varphi_{P_0P_1}$, og det ses som før, at den afbilder $(\dot{R}, <)$ ordenstro på $(p, <)$, hvis $\mu > 0$, og på $(p, >)$, hvis $\mu < 0$. Afbildningen $\lambda \rightarrow (P_\mu)_\lambda$ er $\varphi_{P_0P_\mu}$, og da $P_0P \in P_0P_1$ eller $P_0P \notin P_0P_1$, efter som $\mu > 0$ eller $\mu < 0$, har den de

samme egenskaber. Som vist, er $P_{\lambda\mu} = (P\mu)_\lambda$ for rationale λ , og man kan slutte som før, at dette må gælde for alle reelle λ .

Dermed er V7 bevist i alle tilfælde.

Idet $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ og $\underline{v} \in V_3$, gælder

$$V8: \quad (\lambda + \mu)\underline{v} = \lambda\underline{v} + \mu\underline{v}.$$

Bevis: For $\underline{v} = \underline{0}$ er dette øjensynlig rigtigt; det antages derfor, at $\underline{v} \neq \underline{0}$. Lad $\overrightarrow{P_0 P_1}$ være en repræsentant for $\underline{v}$. Den ved $\overrightarrow{P_0 P_1}$ bestemte og orienterede linie betegnes igen med p . Vektoren $(\lambda + \mu)\underline{v}$ repræsenteres ved $\overrightarrow{P_0 P_{\lambda+\mu}}$ hvor $P_{\lambda+\mu} = \varphi_{P_0 P_1}(\lambda + \mu)$. For hvert fast λ defineres ved $\mu \rightarrow P_{\lambda+\mu}$ en ordenstro afbildning af $(\mathbb{R}, <)$ på $(p, \triangleleft)$, da $\mu \rightarrow \lambda + \mu$ er en ordenstro afbildning af $(\mathbb{R}, <)$ på sig selv. Lad t_λ betegne den translation, der fører P_0 over i P_λ . Vektoren $\lambda\underline{v} + \mu\underline{v}$ repræsenteres da ved $\overrightarrow{P_0 t_\lambda(P\mu)}$, idet $\lambda\underline{v} = \overrightarrow{P_0 P_\lambda}$ og $\mu\underline{v} = \overrightarrow{P_0 P_\mu} = t_\lambda(P_0)t_\lambda(P\mu) = \overrightarrow{P_\lambda t_\lambda(P\mu)}$. Ved $\mu \rightarrow t_\lambda(P\mu)$ defineres igen en ordenstro afbildning af $(\mathbb{R}, <)$ på $(p, \triangleleft)$, idet denne afbildning er $t_\lambda \circ \varphi_{P_0 P_1}$, altså sammensat af en ordenstro afbildning af $(\mathbb{R}, <)$ på $(p, \triangleleft)$ og en ordenstro afbildning af $(p, \triangleleft)$ på sig selv. Er $\lambda = r$ et rationelt tal, haves $P_r + \mu = t_r(P\mu)$ for alle rationale μ , altså og-så for alle reelle μ . Da $\lambda\underline{v} + \mu\underline{v} = \mu\underline{v} + \lambda\underline{v}$, haves $t_\mu(P_\lambda) = t_\lambda(P\mu)$, og man kan slutte, at $P_{\lambda+\mu} = t_\lambda(P_\mu)$ for alle reelle λ og alle rationale μ . Ifølge den flere gange benyttede sætning må dette da gælde for alle reelle μ .

Dermed er V8 bevist.

Idet $\lambda \in \mathbb{R}$ og $\underline{u}, \underline{v} \in V_3$, gælder

$$V9: \quad \lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}.$$

Bevis: Er mindst een af vektorerne nulvektoren, er dette øjensynlig rigtigt. Der antages derfor, at $\underline{u} \neq \underline{0}$ og $\underline{v} \neq \underline{0}$. Lad $\overrightarrow{P_0 P_1}$, $\overrightarrow{P_0 Q_1}$ og $\overrightarrow{P_0 R_1}$ repræsentere henholdsvis $\underline{u}$, $\underline{v}$ og $\underline{u} + \underline{v}$. De

ved $\overrightarrow{P_0P_1}$ og $\overrightarrow{P_0Q_1}$ bestemte linier betegnes henholdsvis med p og q . Først betragtes tilfældet, hvor $p \neq q$. Da er $R_1 \neq P_0$; thi $R_1 = P_0$ ville betyde $\underline{u} + \underline{v} = \underline{0}$, altså $\underline{v} = -\underline{u}$, og dette ville medføre, at P_0, P_1 og Q_1 lå på samme linie $p = q$. Ved $\overrightarrow{P_0R_1}$ bestemmes og orienteres følgende en linie, der betegnes med r . Idet vektoren $\lambda \underline{u}$ repræsenteres ved $\overrightarrow{P_0P_\lambda}$, hvor $P_\lambda = \varphi_{P_0P_1}(\lambda)$ ligger på p , vektoren $\lambda \underline{v}$ ved $\overrightarrow{P_0Q_\lambda}$, hvor $Q_\lambda = \varphi_{P_0Q_1}(\lambda)$ ligger på q og vektoren $\lambda(\underline{u} + \underline{v})$ ved $\overrightarrow{P_0R_\lambda}$, hvor $R_\lambda = \varphi_{P_0R_1}(\lambda)$ ligger på r . Fåstanden er, at

$$\overrightarrow{P_0R_\lambda} = \overrightarrow{P_0P_\lambda} + \overrightarrow{P_0Q_\lambda},$$

og dette er ensbetydende med, at R_λ ved parallelprojektion i retningen q afbildes i P_λ på p og ved parallelprojektion i retningen p afbildes i Q_λ på q . Dette vides at gælde for rationale λ . Betegnes for vilkårligt reelt λ projektionerne af R_λ i retningen q på p og i retningen p på q med henholdsvis R'_λ og R''_λ , vil de ved $\lambda \rightarrow R'_\lambda$ og $\lambda \rightarrow R''_\lambda$ bestemte afbildninger af $(\mathbb{R}, <)$ på henholdsvis $(p, <)$ og $(q, <)$ være ordenstro, da $\lambda \rightarrow R_\lambda$ og projektionerne er det. Idet også $\lambda \rightarrow P_\lambda$ og $\lambda \rightarrow Q_\lambda$ er ordenstro, fås $R'_\lambda = P_\lambda$ og $R''_\lambda = Q_\lambda$ for alle reelle λ og dermed V9 i det betragtede tilfælde. Det resterende tilfælde, hvor $p = q$, altså specielt $Q_1 \in p$, kan føres tilbage til de allerede beviste regler. Der findes her et tal φ , således at $Q_1 = P_\varphi$, altså $\underline{v} = \varphi \underline{u}$. Med benyttelse af V10, V7, V8 og V7 fås da

$$\begin{aligned} \lambda(\underline{u} + \underline{v}) &= \lambda(\underline{u} + \varphi \underline{u}) = \lambda(1\underline{u} + \varphi \underline{u}) = \lambda((1+\varphi)\underline{u}) \\ &= (\lambda + \lambda\varphi)\underline{u} = \lambda \underline{u} + (\lambda\varphi)\underline{u} = \lambda \underline{u} + \lambda(\varphi \underline{u}) = \lambda \underline{u} + \lambda \underline{v}. \end{aligned}$$

Dermed er V9 også bevist i dette tilfælde.

Rettelser:

Side III,3,2, linie 8 f.n. læs " $\sqrt{3}$ er uendelige, føl-" i stedet for " $\sqrt{3}$ føl-".

Side III,3,3, linie 13 f.n. læs "altså $\overrightarrow{RP} \in \overrightarrow{PQ}$ og" i stedet for "altså $\overrightarrow{RP} \notin \overrightarrow{PQ}$ og".

Side III,3,6, linie 9 f.n. læs "er $Q \neq P_0$ " i stedet for "er Q ",
linie 6 f.n. læs " $\overrightarrow{P_0Q}$ " i stedet for " $\overrightarrow{P_0P_m}$ ".

Øvelser til kap. III, 3.

- 1) Lad P, Q, R, S være punkter på en orienteret linie.

Vis, at hvis Q ligger mellem P og R , og R ligger mellem Q og S , så vil R ligge mellem P og S .

Vis, at hvis Q ligger mellem P og S , og R ligger mellem Q og S , så vil R ligge mellem P og S .

Vis, at hvis både Q og S ligger mellem P og R , og $Q \neq S$, så vil S ligge enten mellem P og Q eller mellem Q og R (men ikke begge dele).

- 2) Er P og Q forskellige punkter i rummet, forstås ved det åbne liniestykke $]P, Q[$ mængden af punkter på $li(P, Q)$, som ligger mellem P og Q . Ved $]P, P[$ forstås den tomme mængde $\emptyset$.

Lad A, B, C være punkter, som ikke ligger på samme linie, π planen, som indeholder dem, og p en linie i π , som ikke går gennem noget af punkterne A, B, C . Vis, at hvis $p \cap]A, B[\neq \emptyset$ og $p \cap]B, C[= \emptyset$, så gælder $p \cap]A, C[\neq \emptyset$. (Pasch's aksiom. Dette kunne træde i stedet for Or 5, som beviset må baseres på.)

- 3) Lad π være en plan og p en linie i π . I mængden af de punkter i π , som ikke ligger på p , defineres en relation ved at fastsætte, at punktet A står i relationen til punktet B , hvis og kun hvis $p \cap]A, B[= \emptyset$. Vis, at der foreligger en ækvivalensrelation, og at der findes netop to ækvivalensklasser (de ved p bestemte halvplaner af π). (Benyt resultatet i opgave 2.)

Gennemfør det tilsvarende for mængden af de punkter i rummet,

som ikke ligger i en given plan.

- 4) Lad p være en linie. Idet en delmængde af p kaldes åben, hvis den er foreningsmængde af (endelig eller uendelig mange) åbne liniestykker $]P, Q[$, $P, Q \in p$. Herved bliver p et topologisk rum (jfr. MA, 9, 1).

Vis dette, og undersøg om der foreligger et Hausdorffrum.

Vis, at en translation, ved hvilken p afbildes på sig selv, er en kontinuert afbildning.

Vis, at en parallelprojektion af en linie på en anden er en kontinuert afbildning, hvis begge linier betragtes som topologiske rum på den angivne måde.

- 5) Et topologisk rum T kaldes sammenhængende, hvis det ikke kan inddeles i to ikke tomme, disjunkte og åbne delmængder, med andre ord, hvis der ikke findes åbne delmængder O_1 og O_2 , som opfylder betingelserne: $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ og $O_1 \cup O_2 = T$.

Vis, at aksiom K2 er ensbetydende med, at hver linie, opfattet som topologisk rum (som angivet i opg. 4), er sammenhængende. (Dette vil sige, at aksiomerne inklusive K2 medfører, at linien er sammenhængende, og omvendt, aksiomerne eksklusive K2 og forudsætningen, at linien er sammenhængende, medfører K2.)

- 6) Vis, at K1 er en følge af K2 og de øvrige aksiomer. (Antag, at mængden $\{P_n | n \in \mathbb{N}\}$ var begrænset fremadtil, og søg at komme til en modstrid ved hjælp af ordningsaksiomerne og translationernes egenskaber.)

§ 4. Vektorrum.

Før geometriens opbygning fortsættes, omtales en række simple begreber og sætninger, som vedrører vilkårlige vektorrum. For at lette oversigten gentages definitionen:

En mængde V kaldes et vektorrum over et tallegeme L , hvis der inden for V er defineret en kompositionsforskrift $+$ samt en kompositionsforskrift $L \times V$ ind i V , betegnet som multiplikation, således at følgende gælder:

V1: For alle $\underline{u}, \underline{v} \in V$ er $\underline{u} + \underline{v} \in V$.

V2: For alle $\underline{u}, \underline{v} \in V$ er $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$.

V3: For alle $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ er $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$.

V4: Der findes i V et element $\underline{0}$, således at

$$\underline{v} + \underline{0} = \underline{v} \text{ for hvert } \underline{v} \in V.$$

V5: Til hvert $\underline{v} \in V$ findes der et element $-\underline{v} \in V$, således at

$$\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}.$$

V6: For hvert $a \in L$ og hvert $\underline{v} \in V$ er $a\underline{v} = \underline{va} \in V$.

V7: For alle $a, b \in L$ og hvert $\underline{v} \in V$ er $a(b\underline{v}) = (ab)\underline{v}$.

V8: For alle $a, b \in L$ og hvert $\underline{v} \in V$ er $(a+b)\underline{v} = a\underline{v} + b\underline{v}$.

V9: For hvert $a \in L$ og alle $\underline{u}, \underline{v} \in V$ er $a(\underline{u} + \underline{v}) = a\underline{u} + a\underline{v}$.

V10: For hvert $\underline{v} \in V$ er $1\underline{v} = \underline{v}$.

Elementerne i $\underline{v}$ kaldes for vektorer og tallene i L i denne forbindelse hyppigt for skalarer. Vektorrummet betegnes med $(V, +, L)$

Ved induktion ses, at V2, V3, V8 og V9 kan udvides til et vilkårligt (endeligt) antal af summander. Tilsvarende kan V7 udvides til mere end to skalære faktorer.

Idet V1-5 udsiger, at $(V, +)$ er en kommutativ gruppe, kan følgende sluttet umiddelbart af tidligere resultater

(side II,2, 1-2):

Der findes kun eet neutralt element, nulvektoren $\underline{0}$, og til hver vektor $\underline{v}$ findes kun een modsat vektor $-\underline{v}$.

Der gælder forkortningsreglen: $\underline{u} + \underline{w} = \underline{v} + \underline{w}$ medfører $\underline{u} = \underline{v}$.

For vilkårligt givne $\underline{u}, \underline{v} \in V$ har ligningen $\underline{u} + \underline{x} = \underline{v}$ en og kun een løsning, nemlig $\underline{x} = \underline{v} + (-\underline{u})$, som også skrives $\underline{v} - \underline{u}$.

Specielt er altså $\underline{0} - \underline{v} = -\underline{v}$ og $\underline{v} - \underline{v} = \underline{0}$.

Af løsningens entydighed sluttet specielt, at hvis $\underline{x}$ blot for een vektor $\underline{v}$ tilfredsstiller ligningen $\underline{v} + \underline{x} = \underline{v}$, så er $\underline{x} = \underline{0}$.

Hvad angår vektorers multiplikation med skalarer, bemærkes først, at ethvert tallegeme L indeholder alle rationale tal. Ifølge definition (side III,2,13) indeholder L nemlig mindst eet tal $a \neq 0$, altså $a/a = 1$, altså $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, ..., altså alle positive hele tal, endvidere $1 - 1 = 0$ og $0 - n = -n$ for hvert $n \in \mathbb{N}$, altså alle hele tal, og endelig m/n for hvert $m \in \mathbb{Z}$ og hvert $n \in \mathbb{N}$.

Er $n \in \mathbb{N}$, haves ifølge V8 og V10

$$n\underline{v} = (1+1+\dots+1)\underline{v} = 1\underline{v} + 1\underline{v} + \dots + 1\underline{v} = \underline{v} + \underline{v} + \dots + \underline{v},$$

således at $n\underline{v}$ stemmer overens med den n -te "potens" af $\underline{v}$ i gruppen $(V, +)$.

Der gælder $0\underline{v} = \underline{0}$ for hvert $\underline{v} \in V$, således at $0\underline{v}$ er det neutrale element, altså den 0-te "potens" af $\underline{v}$ i gruppen $(V, +)$. Ifølge V10, V8 og V10 fås nemlig

$$\underline{v} + 0\underline{v} = 1\underline{v} + 0\underline{v} = (1+0)\underline{v} = 1\underline{v} = \underline{v}.$$

Endvidere gælder $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$ for hvert $\underline{v} \in V$; thi ifølge V10, V9 og det lige viste fås

$$\underline{v} + (-1)\underline{v} = 1\underline{v} + (-1)\underline{v} = (1-1)\underline{v} = 0\underline{v} = \underline{0}.$$

Heraf og af V7 sluttet let, at $(-n)\underline{v} = n(-\underline{v})$, altså at $(-n)\underline{v}$

for $n \in \mathbb{N}$ er den $-n$ -te potens af $\underline{v}$ i $(V, +)$.

Der gælder $a\underline{0} = \underline{0}$ for hvert tal $a \in L$; thi ifølge V9 er $a\underline{0} + a\underline{0} = a(\underline{0} + \underline{0}) = a\underline{0}$.

Nulreglen: Af $a\underline{v} = \underline{0}$ følger $a = 0$ eller $\underline{v} = \underline{0}$.

Bevis: Er $a \neq 0$, fås ifølge V10, V7 og det lige viste, at

$$\underline{v} = 1\underline{v} = \left(\frac{1}{a}\right)\underline{v} = \frac{1}{a}(a\underline{v}) = \frac{1}{a}\underline{0} = \underline{0}.$$

Er $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p$ vilkårlige vektorer i V og $a_1, a_2, \dots, a_p$ vilkårlige tal i L , fås en ny vektor i V ved at danne udtrykket

$$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \dots + a_p\underline{v}_p,$$

som kaldes en linearkombination af vektorerne $\underline{v}_i$. Ifølge den (som antydnet udvidede) associative lov er parenteser overflødige, og ifølge den (udvidede) kommutative lov er leddenes rækkefølge ligegyldig. Sådanne linearkombinationer kan adderes, subtraheres og multipliceres med skalarer efter de sædvanlige regler. Dette gælder også for eventuelt optrædende minustegn, idet et led af formen $-a\underline{v}$ jo ifølge det sagte kan omskrives til $(-1)(a\underline{v}) = (-a)\underline{v}$. Flere led, der indeholder samme vektor som faktor kan sammenfattes til eet (ifølge V9). Alt i alt kan det siges, anvendelsen af de nævnte regneoperationer på linearkombinationer fører igen til linearkombinationer.

Som allerede nævnt (side III, 2, 14) siges en delmængde $V' \neq \emptyset$ i V at være et underrum i vektorrummet $(V, +, L)$, hvis den organiseret ved de samme kompositionsforskrifter er et vektorrum $(V', +, L)$.

En delmængde V' af V er et underrum $(V', +, L)$ i vektorrummet $(V, +, L)$, hvis og kun hvis $\underline{u} + \underline{v} \in V'$ og $a\underline{v} \in V'$ for alle $\underline{u}, \underline{v} \in V'$ og alle $a \in L$.

Bevis: Betingelserne er ensbetydende med, at V_1 og V_6 gælder for V' i stedet for V . Dette viser deres nødvendighed. Tilstrækkeligheden følger af, at de medfører, at $\underline{0} = \underline{v} + (-1)\underline{v}$ og $-\underline{v} = (-1)\underline{v}$ hører til V' , når $\underline{v} \in V'$, således at V_4 og V_5 er gyldige for V' . De øvrige regneregler gælder i V' , da de endog gælder i V .

Det ses umiddelbart, at $V' = \{\underline{0}\}$ og $V' = V$ er underrum i $(V, +, L)$.

Er $M \subseteq V$ en vilkårlig mængde af vektorer, vil hvert underrum, som indeholder M , indeholde enhver linearkombination af (endelig mange) vektorer tilhørende M . På den anden side danner mængden af alle sådanne linearkombinationer selv et underrum $V(M)$; thi summen af to af dem og produktet af en af dem med en skalar kan igen skrives som en linearkombination af vektorer tilhørende M . Dette viser, at $V(M)$ er det "mindste" underrum, som indeholder M . Det kaldes det af M frembragte underrum^d. Af ovenstående karakterisering af underrum fremgår det, at fællesmængden for vilkårlig (også uendelig) mange underrum er ligeledes et underrum. Heraf sluttes videre, at $V(M)$ er fællesmængden for alle de underrum, som indeholder M ; thi $V(M)$ er selv et sådant underrum og er indeholdt i dem alle.

Er M specielt en mængde bestående af endelig mange vektorer, kan hver linearkombination af nogle af dem skrives som en linearkombination af dem alle, idet de eventuelt manglende kan tilføjes med faktoren 0. Det af en endelig delmængde M frembragte underrum består altså af alle linearkombinationer af samtlige vektorer tilhørende M .

Eksempler på vektorrum:

1) De i § 2 (side III,2,11) indførte vektorer i rummet E_3 vil blive betegnet som geometriske vektorer, når der er mulighed for forvekslingen. Det blev vist, at de med den i § 2 indførte addition og den i § 3 indførte multiplikation med reelle tal danner et vektorrum $(V_3, +, \cdot)$ over de reelle tals legeme. I det følgende bestemmes dette vektorrums underrum. Med henblik på senere anvendelser og også for overskuelighedens skyld tænkes samtlige vektorer afsat fra et fast punkt O i E_3 , nulpunktet eller begyndelsespunktet. Hver vektor $\underline{v}$ i V_3 tænkes altså repræsenteret ved et punktpar $\overrightarrow{OP}$. Herved bestemmes en enentydig korrespondance mellem V_3 og E_3 , idet der til hver vektor $\underline{v}$ svarer et punkt, nemlig endepunktet P for repræsentanten $\overrightarrow{OP}$, og omvendt svarer der til hvert punkt P i E_3 en vektor, nemlig den ^{ved} $\overrightarrow{OP}$ repræsenterede. Den kaldes stedvektoren for punktet P (ud fra O). Vælges et andet punkt O' som nulpunkt, fås en anden korrespondance. Stedvektoren for punktet P vil da være $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$. Den fremgår altså af stedvektoren ud fra O ved addition af en af P uafhængig vektor.

I det følgende tænkes nulpunktet O fast valgt. For korthedens skyld skelnes her ikke mellem en vektor og den stedvektor ud fra O , ved hvilken den repræsenteres.

Mængden V_0 bestående af nulvektoren alene er som nævnt et underrum.

En mængde $V_1 \subseteq V_3$, som består af vektorer på en linie gennem O og som indeholder mindst een vektor $\underline{u} \neq \underline{0}$, er et underrum, hvis og kun hvis den består af samtlige vektorer på linien. Det

er åbenbart nødvendigt, at V_1 indeholder alle vektorer $t\underline{u}$, $t \in L$. På den anden side udgør de et underrum, nemlig det ved $\underline{u}$ frembragte, og er netop samtlige vektorer på den ved $\underline{u}$ bestemte linie gennem 0.

En mængde $V_2 \subseteq V_3$, som består af vektorer i en plan gennem 0 og som indeholder to vektorer $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$, der ikke ligger på samme linie gennem 0, er et underrum, hvis og kun hvis den består af samtlige vektorer i planen. Det er åbenbart nødvendigt, at V_2 indeholder alle vektorer $t_1\underline{u}_1 + t_2\underline{u}_2$, $t_1, t_2 \in L$. På den anden side udgør de et underrum, nemlig det ved $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$ frembragte, og er netop samtlige vektorer i den ved $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$ bestemte plan. Det er nemlig klart, at hver linearkombination af $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$ ligger i denne plan, og omvendt er hver vektor $\underline{v}$ i planen en sådan linearkombination. Det sidste ses således: Lad $\underline{u}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\underline{u}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ og $\underline{v} = \overrightarrow{OQ}$. Idet $0, P_1, P_2$ ikke ligger på samme linie, vil linien gennem Q parallel med $li(OP_2)$ skære $li(OP_1)$ i et punkt Q' . Da er $\underline{v} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{Q'Q}$, og påstanden følger af, at $\overrightarrow{OQ'}$ er et skalært multiplum af $\overrightarrow{OP_1} = \underline{u}_1$, og $\overrightarrow{Q'Q} \parallel \overrightarrow{OP_2}$ er et skalært multiplum af $\overrightarrow{OP_2} = \underline{u}_2$.

En mængde af vektorer, som indeholder tre vektorer $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ og $\underline{u}_3$, som ikke ligger i samme plan gennem 0, er kun et underrum, hvis den er V_3 , altså består af samtlige vektorer. Det er åbenbart nødvendigt, at den indeholder alle linearkombinationer $t_1\underline{u}_1 + t_2\underline{u}_2 + t_3\underline{u}_3$, $t_1, t_2, t_3 \in L$. På den anden side er enhver vektor $\underline{v}$ en sådan linearkombination. Lad $\underline{u}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\underline{u}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, $\underline{u}_3 = \overrightarrow{OP_3}$ og $\underline{v} = \overrightarrow{OQ}$. Idet $0, P_1, P_2, P_3$ ikke ligger i samme plan og derfor $0, P_1, P_2$ ikke på samme linie, vil linien gennem Q parallel med $li(0, P_3)$ skære $pl(0, P_1, P_2)$ i et punkt Q'' . Da er

$\vec{w} = \vec{OQ} = \vec{OQ''} + \vec{Q''Q}$. Ifølge det ovenfor viste er $\vec{OQ''}$ en linearkombination af $\vec{u}_1$ og $\vec{u}_2$, og $\vec{Q''Q} \parallel \vec{OP}_3$ er et skalært multiplum af $\vec{OP}_3$. Dermed er påstanden bevist.

Idet de betragtede tilfælde udtømmer alle muligheder, er hermed alle underrum i $(V_3, +, \mathbb{R})$ bestemt.

2) Lad L være et tallegeme og n et positivt helt tal. Mængden L^n af alle talsæt $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, hvor $x_i \in L$ for $i = 1, \dots, n$, kan organiseres til et vektorrum $(L^n, +, L)$ over L ved følgende definitioner: Er $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in L^n$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in L^n$ og $a \in L$, sættes

$$\begin{aligned}\underline{x} + \underline{y} &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ a\underline{x} &= (ax_1, \dots, ax_n).\end{aligned}$$

Det ses uden vanskelighed, at samtlige regler V1-10 er gyldige, idet $\underline{0} = (0, \dots, 0)$ og $-\underline{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$. For $n = 1$ fås legemet L fortolket som et vektorrum over sig selv.

De vigtigste tilfælde fås ved for L at vælge mængden $\mathbb{R}$ af reelle eller mængden $\mathbb{C}$ af komplekse tal. Man taler da henholdsvis om det n -dimensionale reelle eller komplekse talrum. Når denne benævnelse, som jo ikke bringer til udtryk, at det netop drejer sig om $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$ organiseret som vektorrum ved definitionerne ovenfor, kan give anledning til misforståelser, vil der blive brugt "talvektorrum" i stedet for.

Underrummene i $(L^n, +, L)$ vil blive bestemt senere.

3) Lad M være en vilkårlig mængde, og lad $\mathcal{F}_M$ betegne mængden af alle funktioner definerede i M og med værdier i et tallegeme L . Denne mængde af funktioner kan organiseres til et vektorrum $(\mathcal{F}_M, +, L)$ på følgende måde: Lad $f : M \rightarrow L$ og $g : M \rightarrow L$ være to sådanne funktioner og a et tal fra L . Ved $f + g$

forstås da den ved $t \longrightarrow f(t) + g(t)$, $t \in M$, og ved ag den ved $t \longrightarrow ag(t)$, $t \in M$, bestemte funktion. Det er indlysende, at reglerne V1-10 er gyldige. Nulvektoren er her funktionen, der er konstant lig med 0.

Den således definerede klasse af vektorrum er overordentlig omfattende. Vælges for M den endelige mængde $\{1, \dots, n\}$, fås $\mathcal{F}_M = L^n$, og vektorrummet bliver det under 2) omtalte. For $M = \mathbb{N}$, mængden af naturlige tal, er $\mathcal{F}_M = L^{\mathbb{N}}$, d.v.s. mængden af alle talfølger med elementer fra L . Vektorrummene $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \mathbb{R})$ og $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \mathbb{C})$ af reelle og komplekse talfølger har mange for analysen vigtige underrum. Det samme gælder, når M er et topologisk eller metrisk rum, en delmængde af $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ eller et flerdimensionalt talrum (se III, 2, øv. 5).

Lad $(V, +, L)$ være et vektorrum. Endelig mange vektorer $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ fra V siges at være lineært afhængige, hvis der findes skalarer $x_1, \dots, x_p$, som ikke alle er lig 0, således at

$$x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_p \underline{v}_p = \underline{0}.$$

Hvis der ikke findes sådanne skalarer, med andre ord, hvis ligningen kun tilfredsstilles af $x_1 = \dots = x_p = 0$, siges vektorerne at være lineært uafhængige. En ligning af ovenstående form kaldes en lineær relation mellem de p vektorer; den kaldes egentlig, hvis ikke alle koefficienter $x_1, \dots, x_p$ er lig 0.

At een vektor $\underline{v}$ er lineært afhængig, altså at der findes en skalar $x \neq 0$, således at $x\underline{v} = \underline{0}$, er ifølge tidligere resultater (deriblandt nulreglen) ensbetydende med, at $\underline{v} = \underline{0}$.

Når en del af vektorerne i et vektorsæt er lineært afhængige, altså specielt når $\underline{0}$ forekommer blandt sættets vektorer,

er hele sættets vektorer lineært afhængige; thi i en egentlig lineær relation mellem en del af vektorerne, kan sættets resterende vektorer tilføjes med koefficienten 0. Dette er ensbetydende med, at når vektorerne i et sæt er lineært uafhængige, vil vektorerne i hvert del sæt også være det.

Vektorer $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ er lineært afhængige, hvis og kun hvis mindst een af dem er en linearkombination af de øvrige.

Bevis: Betingelsen er nødvendig. Er nemlig $x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_p \underline{v}_p = \underline{0}$ en egentlig lineær relation mellem vektorerne, altså f.eks. $x_1 \neq 0$, fås ved addition af $-x_1 \underline{v}_1$ på begge sider og påfølgende multiplikation med $-1/x_1$

$$\underline{v}_1 = -\frac{x_2}{x_1} \underline{v}_2 - \dots - \frac{x_p}{x_1} \underline{v}_p.$$

Betingelsen er også tilstrækkelig. Er nemlig f.eks.

$$\underline{v}_1 = y_2 \underline{v}_2 + \dots + y_p \underline{v}_p,$$

fås ved addition af $-\underline{v}_1 = (-1)\underline{v}_1$ på begge sider

$$(-1)\underline{v}_1 + y_2 \underline{v}_2 + \dots + y_p \underline{v}_p = \underline{0},$$

og dette er en egentlig lineær relation mellem vektorerne.

Herefter er to vektorer lineært afhængige, hvis og kun hvis mindst een af dem er et skalært multiplum af den anden. Dette udtrykkes i reglen kort ved at sige, at en af vektorerne er proportional med den anden.

Hvis en vektor $\underline{v}$ kan fremstilles som en linearkombination af vektorer $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$, hvis den altså tilhører det af disse vektorer frembragte underrum, vil den fremstilling, altså koefficienterne, være entydig bestemt, når og kun når $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ er lineært uafhængige.

Bevis: Lad

$$\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_p \underline{v}_p, \quad \underline{v} = y_1 \underline{v}_1 + \dots + y_p \underline{v}_p$$

være to fremstillinger af $\underline{v}$. Ved subtraktion fås

$$(x_1 - y_1)\underline{v}_1 + \dots + (x_p - y_p)\underline{v}_p = \underline{0}.$$

Er $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ lineært uafhængige, kan heraf sluttes, at $x_1 - y_1 = \dots = x_p - y_p = 0$, altså at de to fremstillinger af $\underline{v}$ stemmer overens. Dette viser, at betingelsen er tilstrækkelig. Findes der en egentlig lineær relation

$$\underline{0} = z_1 \underline{v}_1 + \dots + z_p \underline{v}_p,$$

fås ved at addere den til f.eks. den første fremstilling af $\underline{v}$ en fra denne forskellig fremstilling. Dette viser, at betingelsen også er nødvendig.

Eksempler:

1) I rummet E_3 tænkes valgt et begyndelsespunkt 0, og de geometriske vektorer tænkes repræsenteret ved stedvektorerne ud fra 0. Der gælder da:

To geometriske vektorer er lineært afhængige, hvis og kun hvis de ligger på samme linie gennem 0.

Tre geometriske vektorer er lineært afhængige, hvis og kun hvis de ligger i samme plan gennem 0.

Hvilkesomhelst fire geometriske vektorer er lineært afhængige.

Bevis: Den første påstand er indlysende; thi ifølge det viste er udsagnet, at en af vektorerne er et skalært multiplum af den anden, ensbetydende såvel med, at de to vektorer ligger på samme linie gennem 0 som med, at de er lineært afhængige. - Er tre vektorer $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ lineært afhængige, altså f.eks. $\underline{v}_3$ en linearkombination af $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$, vil $\underline{v}_3$ ligge i den ved $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ bestemte plan eller linie, efter som $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ ikke ligger eller

ligger på samme linie gennem 0. Omvendt, ligger $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ i samme plan, vil enten $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ og dermed også $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ være lineært afhængige eller $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ er lineært uafhængige altså ifølge det allerede viste ikke beliggende på samme linie. Da $\underline{v}_3$ ifølge forudsætning ligger i den ved $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ bestemte plan gennem 0, er $\underline{v}_3$ en linearkombination af $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$, altså de tre vektorer også lineært afhængige i dette tilfælde. - Er tre af fire vektorer $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ lineært afhængige, er de det alle fire. Antag, at $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ er lineært uafhængige. Ifølge det allerede viste ligger de da ikke i samme plan, og som vist tidligere er $\underline{v}_4$ en linearkombination af dem. De fire vektorer er altså også lineært afhængige i dette tilfælde.

2) Lad der være givet vektorer

$$\begin{aligned}\underline{a}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), \\ \underline{a}_2 &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \\ &\vdots \\ \underline{a}_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})\end{aligned}$$

i et talrum $(L^n, +, L)$. En lineær relation

$$(h) \quad x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

er da ensbetydende med

$$\begin{aligned}(h) \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0,\end{aligned}$$

som kan opfattes som et system af m homogene lineære ligninger med de n ubekendte $x_1, \dots, x_n$. Ved en løsning til systemet forstås et talsæt $(x_1, \dots, x_n)$, for hvilket ligningerne er opfyldt. At

vektorerne $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ er lineært uafhængige er ensbetydende med, at systemet kun har nullløsningen $(0, \dots, 0)$. At de er lineært afhængige er følgelig ensbetydende med, at systemet også har andre, egentlige løsninger.

Det viser sig at være hensigtsmæssigt, at betragte løsninger som vektorer i talrummet $(L^{\underline{m}}, +, L)$.

Er $x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{0}$ og $x'_1 \underline{a}_1 + \dots + x'_n \underline{a}_n = \underline{0}$ to lineære relationer mellem $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$, fås ved addition en ny, nemlig

$$(x_1 + x'_1) \underline{a}_1 + \dots + (x_n + x'_n) \underline{a}_n = \underline{0},$$

og ved multiplikation af den første med en vilkårlig skalar $k \in L$

$$kx_1 \underline{a}_1 + \dots + kx_n \underline{a}_n = \underline{0}.$$

Heraf sluttes, at hvis $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ og $\underline{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ er løsninger til systemet (h), vil $\underline{x} + \underline{x}'$ og $k\underline{x}$ ligeledes være løsninger, altså:

Mængden af løsninger til et homogent lineært ligningssystem med n ubekendte er et underrum i talrummet $(L^{\underline{m}}, +, L)$.

At en given vektor $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m) \in (L^{\underline{m}}, +, L)$ er en linearkombination

$$(ih) \quad y_1 \underline{a}_1 + \dots + y_n \underline{a}_n = \underline{b}$$

af vektorerne $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$, er ensbetydende med det inhomogene lineære ligningssystem

$$(ih) \quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

At dette ligningssystem har en løsning, er ensbetydende med,

at vektoren $\underline{b}$ tilhører det af $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ frembragte underrum i $(L^m, +, L)$. Idet dette underrum ikke behøver at være hele vektorrummet, findes der ligningssystemer (ih) , som ingen løsninger har.

Antag, at $(\underline{ih})$, altså (ih) , har en løsning $\underline{y}$, og lad $\underline{x}$ være en vilkårlig løsning til $(\underline{h})$, altså til (h) . Da er også $\underline{x} + \underline{y}$ en løsning til $(\underline{ih})$, altså (ih) , hvilket ses ved at addere $(\underline{h})$ til $(\underline{ih})$. Ved til en løsning $\underline{y}$ til det inhomogene system at addere vilkårlige løsninger $\underline{x}$ til det homogene, fås altså igen løsninger til det inhomogene, og på denne måde fås dem alle. Er nemlig $\underline{z}$ en vilkårlig løsning til $(\underline{ih})$, altså $z_1 \underline{a}_1 + \dots + z_n \underline{a}_n = \underline{b}$, fås ved at subtrahere $(\underline{ih})$ fra denne ligning, at $\underline{x} = \underline{z} - \underline{y}$ tilfredsstiller $(\underline{h})$. I forbindelse med resultatet vedrørende mængden af løsninger til (h) giver dette:

Hvis et inhomogent lineært ligningssystem med n ubekendte har mindst en løsning, fås alle løsninger ved at addere en af dem til alle løsninger til det tilsvarende homogene system. Mængden af løsninger til det inhomogene system fås altså ved at addere en og samme vektor til vektorerne i et underrum i $(L^n, +, L)$.

Idet et ^dunderrum i et vektorrum $(V, +, L)$ kan opfattes som en undergruppe i den kommutative gruppe $(V, +)$, vil løsningsmængden være en sideklasse (se side II, 2, 5) til den undergruppe i $(L^n, +)$, som udgøres af løsningerne til det homogene system. Løsningsmængden vil derfor kunne kaldes for et "sideunderrum".

Om antallet af løsninger til $(\underline{ih})$, og dermed (ih) kan siges følgende:

Hvis $\underline{b}$ ikke tilhører det af $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ frembragte underrum

i $(L^m, +, L)$, findes der ingen løsninger. Hvis $\underline{b}$ tilhører dette underrum, findes der een løsning eller uendelig mange løsninger, efter som $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ er lineært uafhængige eller lineært afhængige.

Spørgsmålet om, hvorledes det afgøres, hvilket af tilfældene der foreligger ved et givet ligningssystem, og hvorledes eventuelle løsninger findes, vil blive behandlet senere.

Lad $(V, +, L)$ være et vilkårligt vektorrum og M en delmængde af V . Der foreligger da to muligheder. Enten findes der et helt tal $r \geq 0$, således at hvilke som helst $r + 1$ vektorer tilhørende M er lineært afhængige, medens der findes i M et sæt af r vektorer, som er lineært uafhængige, eller der eksisterer ikke noget tal med disse egenskaber, d.v.s. hvor stort et positivt helt tal p man end vælger, findes der mindst p vektorer i M , som er lineært uafhængige. I det første tilfælde siges M at have rang $r = \text{rg } M$, og hvert sæt af r lineært uafhængige vektorer fra M kaldes et maximalsæt for M . I det andet tilfælde siges M at have uendelig rang, og man skriver $\text{rg } M = \infty$.

Er mængden M et vektorrum, altså et underrum $(V', +, L)$ i $(V, +, L)$, specielt hele $(V, +, L)$, kaldes dens rang for vektorrummets dimension og betegnes med $\dim(V', +, L)$ eller kort $\dim V'$. Vektorrummet bestående af nulvektoren alene har dimensionen 0, da der ikke findes nogen linear uafhængig vektor i det.

Ved en basis for et vektorrum $(V, +, L)$ forstås en delmængde B af V , således at hver vektor i V kan fremstilles på en og kun een måde som en linearkombination af vektorer tilhørende B . (Mere udførligt: Er der givet en vektor $\underline{y}$ i V , skal der findes et

og kun eet sæt af endelig mange vektorer tilhørende B , således at $\underline{v}$ på en og kun een måde kan skrives som linearkombination af disse ^{med} fra O forskellige koefficienter. (Vektore^r fra B forsynet med koefficienter O kan naturligvis tilføjes eller udelades i en sådan linearkombination.) Det er herefter klart, at en mængde $B \subseteq V$ er en basis for $(V, +, L)$, hvis og kun hvis den frembringer hele rummet og hvilket som helst endelig mange vektorer fra B er lineært uafhængige.

Man kan vise, at hvert vektorrum har en basis. Her vil dette imidlertid kun blive godtgjort for endelig-dimensionale vektorrum.

Ethvert maximalsæt for en delmængde M af endelig rang r i et vektorrum er en basis for det af M frembragte underrom $V(M)$.

Bevis: Er $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r$ et maximalsæt for M og $\underline{v}$ en vilkårlig vektor tilhørende M , vil $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r, \underline{v}$ være lineært afhængige. I en egentlig lineær relation mellem disse vektorer kan koefficienten til $\underline{v}$ ikke være O , da der ellers fandtes en egentlig lineær relation mellem $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r$. Følgelig er $\underline{v}$ en linearkombination af $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r$. Ifølge definition af $V(M)$ er hver vektor $\underline{x} \in V(M)$ en linearkombination af vektorer fra M . Da nu hver af disse er en linearkombination af $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r$, fås ved indsættelse, at $\underline{x}$ er en linearkombination af $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r$. At denne fremstilling er entydig bestemt følger af, at disse vektorer er lineært uafhængige (jfr. side III, 4, 7). Dermed er påstanden bevist.

Som specielt tilfælde fås, at hvert maximalsæt i et endelig-dimensionalt vektorrum er en basis for rummet. At omvendt hver basis for et sådant rum er et maximalsæt, vil vise sig at

være en konsekvens af følgende "udskiftningssætning":

Lad $(V, +, L)$ være et vilkårligt vektorrum, $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q$ vektorer i V og V' det af dem frembragte underrum. Lad endvidere $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p$ være lineært uafhængige vektorer i V' . Da er $p \leq q$, og der findes $q - p$ blandt vektorerne $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q$, som sammen med $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p$ frembringer underrummet V' .

Bevis: Ifølge forudsætning er $\underline{u}_1$ som vektor i V' en linearkombination af $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q$. I denne må mindst een af vektorerne $\underline{v}_i$ optræde med fra 0 forskellig koefficient, da $\underline{u}_1$ som vektor i et sæt lineært uafhængige er forskellig fra 0. Man kan tænke sig vektorerne $\underline{v}_i$ nummeret således, at $\underline{v}_1$ har en koefficient forskellig fra 0. Da kan $\underline{v}_1$ fås som en linearkombination af $\underline{u}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_q$. Men dette medfører, at hver vektor $\underline{x}$ i V' er en linearkombination af disse vektorer; thi ifølge forudsætning er $\underline{x}$ en linearkombination af $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q$, og deri kan vektoren $\underline{v}_1$ erstattes med den linearkombination af $\underline{u}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_q$, som den ifølge det sagte er lig med. I sættet $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q$ kan altså $\underline{v}_1$ erstattes med $\underline{u}_1$, uden at det mister egenskaben at frembringe V' . Specielt er altså $\underline{u}_2$ en linearkombination af $\underline{u}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_q$. I denne må mindst een af vektorerne $\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_q$ optræde med fra 0 forskellig koefficient; thi ellers ville $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$ være lineært afhængige. Lad nummereringen være valgt således, at dette gælder for $\underline{v}_2$. Da kan $\underline{v}_2$ skrives som linearkombination af $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_q$, og man ser som før, at disse vektorer frembringer V' . På denne måde fortsættes. Var nu $p > q$, ville man få vektorerne $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q$ erstattet med $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_q$, og de resterende vektorer $\underline{u}_{q+1}, \dots, \underline{u}_p$ ville være linearkombinationer af $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_q$, hvilket er umuligt, da $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p$ er line-

ært uafhængige. Dermed er sætningen bevist.

Udskiftningssætningen har en række vigtige konsekvenser.

Et sæt af vektorer i et n -dimensionalt vektorrum er en basis for rummet, hvis og kun hvis det består af n lineært uafhængige vektorer.

Bevis: At betingelsen er tilstrækkelig er allerede vist, idet den udsiger, at sættet er et maximalsæt. At den lineære uafhængighed er en nødvendig betingelse, er ligeledes vist. Lad $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q$ være en vilkårlig basis for rummet og $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ et maximalsæt. Udskiftningssætningen (anvendt med $V' = V$) viser da, at $q \geq n$. Men da n er maximaltallet af lineært uafhængige vektorer, kan q ikke være større end n . Følgelig er $q = n$, som påstået.

Er M en vilkårlig delmængde af et vektorrum, vil $\text{rg } M$ være lig med dimensionen af det af M frembragte vektorrum $V(M)$.

Bevis: Er $\text{rg } M = \infty$, haves øjensynlig også $\dim V(M) = \infty$. Er $\text{rg } M = r$ endelig, vil et maximalsæt for M , som vist ovenfor, være en basis for $V(M)$, antallet r af vektorer i sættet altså ifølge den foregående sætning lig med $\dim V(M)$.

Er $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p$ lineært uafhængige vektorer i et n -dimensionalt vektorrum V , og er $p < n$, findes der vektorer $\underline{u}_{p+1}, \dots, \underline{u}_n$ i V , således at sættet $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ er en basis for V .

Bevis: Lad $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ være en vilkårlig basis for V . Erstatte visse p af disse vektorer med $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p$, fås ifølge udskiftningssætningen et sæt af n vektorer, som frembringer V . Ifølge den foregående sætning er sættets rang lig med rummets dimension n . De n vektorer, hvoriblandt $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p$, er altså lineært uafhængige og danner derfor en basis af den forlangte art.

Eksempler:

1) Det geometriske vektorrum $(V_3, +, \mathbb{R})$ har dimensionen 3; thi der findes tre lineært uafhængige vektorer, nemlig tre vektorer, der afsat fra et begyndelsespunkt 0 ikke ligger i samme plan, og på den anden side er hvilket som helst fire vektorer lineært afhængige. Tre lineært uafhængige vektorer danner en basis for rummet. Der findes et og kun eet underrum af dimensionen 0, nemlig det, der kun består af nulvektoren. (Dette gælder jo for hvert vektorrum.) Et underrum i $(V_3, +, \mathbb{R})$ har dimensionen 1, hvis og kun hvis det består af alle vektorer, der afsat fra begyndelsespunktet ligger på en og samme linie. Enhver fra nulvektoren forskellig vektor på denne linie danner en basis. Et underrum har dimensionen 2, hvis og kun hvis det består af alle vektorer, der afsat fra begyndelsespunktet ligger i en og samme plan. To lineært uafhængige vektorer i denne plan danner en basis.

2) For talsættene

$$\underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

$$\underline{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$$

$$\vdots$$

$$\underline{e}_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 1, 0)$$

$$\underline{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

og et vilkårligt talsæt $(a_1, \dots, a_n)$ i talrummet $(L^n, +, L)$ gælder øjensynlig, at

$$a_1 \underline{e}_1 + \dots + a_n \underline{e}_n = (a_1, \dots, a_n).$$

Heraf ses, at hvert talsæt er en linearkombination af $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$, og at en linearkombination af disse talsæt kun kan være nulsæt-

tet, når alle koefficienter er 0. Med andre ord, talsættene $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ frembringer hele rummet og er lineært uafhængige. De danner altså en basis for $(L^n, +, L)$. Dette rum har følgelig dimensionen n , hvilket harmonerer med benævnelsen "det n -dimensionale talrum".

3) I rummet $(L^{\mathbb{N}}, +, L)$ af alle talfølger med elementer fra L er vilkårlig mange af følgerne $\underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$, . . . lineært uafhængige. Men de danner ikke nogen basis, idet f. eks. følgen $(1, 1, 1, \dots)$ ikke kan fås som en linearkombination af endelig mange af dem.

4) Polynomierne med reelle (komplekse) koefficienter danner et underrum i vektorrummet af alle reelle (komplekse) funktioner, der er definerede i mængden $\mathbb{R}$ af alle reelle tal (mængden $\mathbb{C}$ af alle komplekse tal). Polynomierne $1, x, x^2, \dots$ danner en basis for dette underrum, som altså har uendelig dimension. Ethvert polynomium er nemlig ifølge definition en linearkombination af endelig mange af funktionerne $1, x, x^2, \dots$, og en sådan linearkombination kan kun være identisk 0, når alle koefficienter er 0, da jo et egentligt polynomium kun antager værdien 0 for endelig mange værdier af den variable. Polynomierne af højst n -te grad danner et underrum, for hvilket funktionerne $1, x, \dots, x^n$ danner en basis. Det har altså dimensionen $n + 1$.

Der findes uendelig-dimensionale vektorrum med ikke-numerabel basis

Øvelser til kap. III, 4.

- 1) *brugt* Undersøg, om vektorerne i de følgende vektorsæt tilhørende de angivne vektorrum er lineært afhængige, og fremstil i bekræftende fald en af dem som en linearkombination af de øvrige:
- a) $(-1, 1), (2, 2), (0, 3)$ i $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$.
 - b) $(i, 1), (1+i, 0), (0, 1-i)$ i $(\mathbb{C}^2, +, \mathbb{C})$.
 - c) $(1, 1, 1), (0, 2, 2), (0, 1, 3)$ i $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$.
 - d) $(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, -1, 1, -1), (0, 0, 1, 1)$ i $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R})$.
- 2) *brugt* For hvilke tal t er:
- a) vektorerne $(1, t)$ og $(t, 1)$ i $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$
 - b) vektorerne $(1, t, 0), (t, 0, 1)$ og $(0, 1, t)$ i $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$
 - c) de samme vektorer i $(\mathbb{C}^3, +, \mathbb{C})$
- lineært afhængige?
- 3) *brugt* Angiv en betingelse, som tallene a_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, opfylder, hvis og kun hvis vektorerne
- $$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
- i vektorrummet $(L^n, +, L)$ er lineært uafhængige.
- 4) *brugt* Vis, at hvis vektorerne $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p$ i et vektorrum $(V, +, L)$ er lineært uafhængige, vil også vektorerne $\underline{v}_1 + a\underline{v}_2$, $\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p$, hvor a betegner et tal fra L , være lineært uafhængige.

5) Gælder det, at når tre vektorer $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ i et vektorrum er
 brugt lineært uafhængige, vil også vektorerne $\underline{v} + \underline{w}$, $\underline{w} + \underline{u}$, $\underline{u} + \underline{v}$
 være lineært uafhængige? Gælder det omvendte?

6) Vis, at to vektorer (x_1, x_2) og (y_1, y_2) i $(L^2, +, L)$ er line-
 brugt ært afhængige, hvis og kun hvis $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

$(3,0,1,2)$ og $(-1,2,0,-1)$.

10) Vektorerne $(1,0,0,0,\dots)$, $(0,1,0,0,\dots)$, $(0,0,1,0,\dots)$, ... i
brugt rummet $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \mathbb{R})$ af alle reelle talfølger frembringer et underrum. Hvorledes kan det ses på en talfølge, om den tilhører dette underrum?

11) Lad $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R})$ betegne vektorrummet af alle funktioner
brugt $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Funktionerne 1 , $\cos t$, $\sin t$, $\cos^2 t$, $\cos t \sin t$, $\sin^2 t$ frembringer et underrum. Bestem dettes dimension, og angiv en basis for det.

12) For hvert reelt tal φ og hvert reelt tal $a \geq 0$ er $a \cos(t-\varphi)$
brugt en funktion defineret for $t \in \mathbb{R}$. Vis, at alle sådanne funktioner af t danner et vektorrum, bestem dettes dimension, og angiv en basis for det.

13) Vis, at hvis et underrum V' i et vektorrum V af endelig dimension har den samme dimension som V , så er $V' = V$. Vis ved angivelse af et eksempel, at dette ikke kan slutes, når V har uendelig dimension.

14) Lad V' og V'' være underrum i et endelig-dimensionalt vektorrum V . Idet

$\dim V = n$, $\dim V' = n'$, $\dim V'' = n''$, $\dim(V' \cap V'') = r$,
skal det vises, at $r \geq n' + n'' - n$.

(Betragt tilfældet $r = 0$ for sig. I tilfældet $r > 0$ start med en basis for $V' \cap V''$.)

15) Lad P_n betegne vektorrummet af alle polynomier af højst n -te
brugt grad af en reel (kompleks) variabel med reelle (komplekse)

koefficienten. Lad der endvidere være givet $n + 1$ indbyrdes forskellige reelle (komplekse) tal $t_0, t_1, \dots, t_n$. Man betragter polynomierne

$$f_i(t) = (t-t_0) \cdots (t-t_{i-1})(t-t_{i+1}) \cdots (t-t_n)$$

for $i = 0, 1, \dots, n$. (Hvert af disse fremgår altså af produktet

$$f(t) = (t-t_0) \cdots (t-t_n)$$

ved udeladelse af een af faktorerne.)

Vis, at $f_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$, danner en basis for P_n .

Vis, at der findes et og kun eet polynomium af højst n -te grad, som for $t_0, t_1, \dots, t_n$ antager givne reelle (komplekse) værdier $a_0, a_1, \dots, a_n$, og angiv dette polynomium (udtrykt ved $f_i(t)$). (Lagrange's interpolations-formel.)

Bestem polynomiet $p(t)$ af højst tredje grad, således at $p(-1) = 3$, $p(0) = 1$, $p(2) = -1$ og $p(4) = 2$.

Benyt formelen til, at udlede følgende relationer, der gælder for vilkårlige indbyrdes forskellige komplekse tal og for de angivne hele tal m :

$$\sum_{i=0}^n \frac{t_i^m}{f_i'(t_i)} = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq m \leq n-1 \\ 1 & \text{for } m = n. \end{cases}$$

16) Bestem dimensionen af vektorrummet $(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{R})$, og angiv en basis for det. (Betragt først tilfældet $n = 1$.)

17) Vis, at vektorrummet $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q})$ har uendelig dimension. (Benyt, at mængden $\mathbb{Q}$ af rationale tal er numerabel, eller opgavens sidste resultat.)

Hvad betyder det for det reelle tal a , at 1 og a er lineært

uafhængige i dette vektorrum ?

Vis, at $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ er lineært uafhængige i $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q})$.

Vis, at $\log p_1, \dots, \log p_n$, hvor $p_1, \dots, p_n$ er indbyrdes forskellige primtal, er lineært uafhængige i $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q})$. (Bemærk, at hvis vektorer i et vektorrum over $\mathbb{Q}$ er lineært afhængige, består der en egentlig lineær relation med heltallige koefficienter mellem dem.)

18) Der betragtes kontinuerte reelle funktioner definerede i
bragt intervallet $0 \leq x \leq 1$. En sådan funktion siges at være stykkevis lineær, hvis der findes en inddeling af intervallet, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, og førstegradspolynomier $a_i x + b_i$, således at

$$\begin{aligned} f(x) &= a_i x + b_i && \text{for } t_{i-1} \leq x \leq t_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ a_i t_i + b_i &= a_{i+1} t_i + b_{i+1}, && i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

For $n = 1$ fås specielt de i hele intervallet lineære funktioner.

Vis, at mængden af stykkevis lineære funktioner $f(x)$ i $0 \leq x \leq 1$, danner et vektorrum $(\mathcal{F}_{sl}, +, \mathbb{R})$.

For hvert tal t , $0 \leq t < 1$, er

$$g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq x \leq t \\ x - t & \text{for } t < x \leq 1 \end{cases}$$

en stykkevis lineær funktion i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Vis, at funktionerne $g_t(x)$, $0 \leq t < 1$, sammen med konstanten $g_1(x) = 1$ danner en basis for $(\mathcal{F}_{sl}, +, \mathbb{R})$. Dette vil sige, at der til hver stykkevis lineær funktion $f(x)$ findes et og

kun eet talsæt $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ og et og kun eet talsæt $c_0, c_1, \dots, c_n$, hvor $c_1, \dots, c_{n-1}$ er forskellige fra 0, således at

$$f(x) = c_0 g_{t_0}(x) + \dots + c_n g_{t_n}(x).$$

(Benyt ved beviset for en sådan fremstillings eksistens induktion efter antallet af "knæk" af $f(x)$.)

For hvert t , $0 \leq t \leq 1$, er $h_t(x) = |x - t|$ ligeledes en stykkevis lineær funktion i intervallet. Vis, at disse funktioner danner en anden basis for $(\mathcal{F}_{sl}, +, \mathbb{R})$, altså at hver stykkevis lineær funktion $f(x)$ har en og kun een fremstilling af formen

$$f(x) = d_0 |x - t_0| + \dots + d_n |x - t_n|,$$

hvor $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ og $d_1, \dots, d_{n-1}$ er forskellige fra 0. (Fremstil hver funktion $g_t(x)$ som en linearkombination af funktioner $h_t(x)$, og omvendt.)

§ 5. Indledning i den affine geometri.

Lad der være valgt en basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ for det geometriske vektorrum $(V_3, +, \dot{\mathbb{R}})$. Hver vektor $\underline{v} \in V_3$ har da en og kun een fremstilling af formen

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3,$$

og omvendt er enhver linearkombination af $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ en vektor i V_3 . Der består altså en enentydig korrespondance mellem vektorerne $\underline{v} \in V_3$ og talsættene $(v_1, v_2, v_3) \in \dot{\mathbb{R}}^3$. Denne enentydige afbildning af V_3 på $\dot{\mathbb{R}}^3$ har følgende egenskaber: Til summen af to vektorer svarer summen af de tilsvarende talsæt, d.v.s. hvis

$$\underline{u} \longleftrightarrow (u_1, u_2, u_3), \quad \underline{v} \longleftrightarrow (v_1, v_2, v_3)$$

vil

$$\underline{u} + \underline{v} \longleftrightarrow (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$

Er a et reelt tal, gælder endvidere

$$a\underline{v} \longleftrightarrow (av_1, av_2, av_3).$$

Heraf sluttes let, at der til en linearkombination af geometriske vektorer svarer linearkombinationen med de samme koefficienter af de til vektorerne svarende talsæt, og omvendt. Herved kan undersøgelser af det geometriske vektorrum føres tilbage til undersøgelser af talrummet $\dot{\mathbb{R}}^3$.

I denne forbindelse kaldes en basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ også for et koordinatsystem for vektorrummet $(V_3, +, \dot{\mathbb{R}})$ og basisvektorerne $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ også for dets grundvektorer. Tallene i det til en vektor svarende talsæt er vektorens koordinater. Tilsvarende kan der i et underrum, som ikke består af nulvektoren alene, vælges et koordinatsystem, altså en basis, der alt efter underrummets dimension består af een eller to grundvektorer. Betrag-

tes kun vektorer på en given linie, svarer der til hver vektor een koordinat, og man har en enentydig afbildning af mængden af disse vektorer på talrummet $(\mathbb{R}, +, \mathbb{R})$, d.v.s. mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal. Betragtes kun vektorer i en given plan, svarer der til hver vektor to koordinater, og man har en enentydig afbildning af mængden af disse vektorer på talrummet $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$.

Som omtalt i den foregående paragraf (side III,4,5) fås en enentydig korrespondance mellem vektorrummet V_3 og "punktrummet" E_3 ved at vælge et begyndelsespunkt⁰, at afsætte alle vektorer fra 0 og til hver sådan stedvektor at lade svare dens endepunkt. Vælges desuden et koordinatsystem $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ for vektorrummet V_3 , fås en enentydig afbildning af punktrummet E_3 på talrummet $\mathbb{R}^3$ ved til hvert punkt $X \in E_3$ at lade svare koordinatsættet (x_1, x_2, x_3) for stedvektoren $\overrightarrow{OX}$. Tallene x_1, x_2, x_3 kaldes punktets koordinater i det affine koordinatsystem (eller parallelkoordinatsystemet) $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Man har altså

$$\overrightarrow{OX} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3.$$

Tilsvarende forstås ved et affint eller parallel-koordinatsystem i en plan E_2 et sæt $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$, hvor 0 er et vilkårligt, fast valgt punkt i E_2 og $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ er en basis for det underrum i V_3 , som består af de med E_2 parallelle vektorer. Afsat fra 0 er $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$ altså beliggende i E_2 , men ikke på samme linie, og for hvert punkt $X \in E_2$ haves

$$\overrightarrow{OX} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2,$$

hvor x_1 og x_2 er entydig bestemte reelle tal. Omvendt svarer der til hvert talpar (x_1, x_2) et punkt X i planen. Ved et affint koordinatsystem på en linie E_1 forstås et sæt $(0; \underline{e})$, hvor 0 er et fast valgt punkt på linien og $\underline{e}$ en basis for underrummet i

V_3 bestående af de med E_1 parallelle vektorer. Afsat fra 0 er $\underline{e}$ altså en fra $\underline{0}$ forskellig vektor på E_1 , og for hvert punkt $X \in E_1$ have

$$\overrightarrow{OX} = x\underline{e},$$

hvor det reelle tal x er entydigt bestemt. Omvendt svarer der til hvert reelt tal x et punkt X på linien. (Sættes $P_0 = 0$ og repræsenteres $\underline{e}$ ved $\overrightarrow{P_0 P_1}$, er denne afbildning $x \rightarrow X = P_x$ åbenbart den side III, 3, 9 og følgende omhandlede afbildning φ af $\mathbb{R}$ på mængden af punkter på linien.)

Det er vigtigt at skelne mellem en vektors og et punkts koordinater. Forskellen gør sig gældende dels ved overgangen til et nyt begyndelsespunkt, dels ved translationer af rummet (planen eller linien).

Lad $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ og $(0'; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ være to affine koordinatsystemer med de samme grundvektorer. Er X et vilkårligt punkt, have

$$\overrightarrow{0'X} = \overrightarrow{0'O} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OO'},$$

altså

$$x'_1 = x_1 - o_1, \quad x'_2 = x_2 - o_2, \quad x'_3 = x_3 - o_3,$$

hvor (o_1, o_2, o_3) og (x_1, x_2, x_3) er koordinatsættene for $0'$ og X i det førstnævnte koordinatsystem og (x'_1, x'_2, x'_3) koordinatsættet for X i det andet. På den anden side har en vektors koordinater ifølge definition ikke noget med valget af et nulpunkt at gøre. Dette bekræftes også, når vektoren tænkes repræsenteret ved et punktpar. Lad nemlig $\underline{v}$ være en vektor med koordinatsættet (v_1, v_2, v_3) i koordinatsystemet $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, og antag, at $\overrightarrow{PQ} = \underline{v}$. Da fås

$$\underline{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP},$$

altså i koordinater

$$v_i = q_i - p_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

hvor p_i og q_i betegner koordinaterne for henholdsvis P og Q i koordinatsystemet $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. For disse punkters koordinater p'_i og q'_i i systemet $(0'; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ haves ifølge ovenstående $q'_i - p'_i = q_i - p_i$, i overensstemmelse med at vektorens koordinater ikke kan afhænge af valget af nulpunktet. Er altså et affint koordinatsystem $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ valgt, kan en vektors koordinater i koordinatsystemet $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ fås som differenserne mellem koordinaterne for endepunktet og begyndelsespunktet af et vilkårligt punktpar, der repræsenterer vektoren.

Lad der være valgt et affint koordinatsystem $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ i rummet E_3 . Lad t være en translation og $\underline{a}$ den til denne svarende vektor. For det til et vilkårligt punkt X svarende punkt $\hat{X} = t(X)$ haves da

$$\overrightarrow{O\hat{X}} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{X\hat{X}} = \overrightarrow{OX} + \underline{a},$$

altså i koordinater (med nærliggende betegnelser)

$$\hat{x}_i = x_i + a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Er $\underline{v}$ en vektor og $\overrightarrow{PQ}$ et punktpar, der repræsenterer den, vil punktparret $\overrightarrow{\hat{P}\hat{Q}}$, hvor $\hat{P} = t(P)$ og $\hat{Q} = t(Q)$, repræsentere den samme vektor. Dette kan sluttes let af translationernes egenskaber. Men det følger også umiddelbart af, at den ved $\overrightarrow{\hat{P}\hat{Q}}$ repræsenterede vektor har koordinaterne

$$\hat{q}_i - \hat{p}_i = q_i + a_i - (p_i + a_i) = q_i - p_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

En vektors koordinater ændres altså ikke ved en translation af rummet.

Lad l være en linie i rummet, A et fast valgt punkt på l og $\underline{v} \neq \underline{0}$ en med l parallel vektor. Er da X et vilkårligt punkt

på l , findes der et reelt tal t , således at $\vec{AX} = t\vec{v}$. Omvendt vil vektoren $t\vec{v}$ for et vilkårligt reelt tal t afsat fra A ende i et punkt X på l . For stedvektoren til X ud fra et fast valgt nulpunkt O haves

$$\vec{OX} = \vec{OA} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

og når t gennemløber alle reelle tal, vil X gennemløbe l på en sådan måde, at hvert punkt på l kommer med en og kun een gang. Man siger, at der foreligger en lineær parameterfremstilling af l . Betegnes koordinatsættene for punkterne X og A i et affint koordinatsystem $(O; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ og for vektoren $\underline{v}$ i koordinatsystemet $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ med henholdsvis (x_1, x_2, x_3) , (a_1, a_2, a_3) og (v_1, v_2, v_3) , fås

$$x_i = a_i + tv_i, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Man kan opfatte $(A; \underline{v})$ som et affint koordinatsystem på linien l , hvor altså A er nulpunktet, $\underline{v}$ grundvektoren og t koordinaten til punktet X .

Omvendt, er der valgt et affint koordinatsystem i rummet E_3 , og er der givet to talsæt (a_1, a_2, a_3) og $(v_1, v_2, v_3) \neq (0, 0, 0)$, vil mængden af de punkter, hvis koordinater er $x_i = a_i + tv_i$, hvor $t \in \mathbb{R}$, være en ret linie, nemlig den, der er parallel med vektoren med koordinaterne v_i og går gennem punktet med koordinaterne a_i .

Med parameteren t fortolket som tiden angiver parameterfremstillingen en jævn bevægelse af punktet X på linien, idet $\vec{OX}$ for hvert tidspunkt t er stedvektoren til det sted, hvor punktet befinder sig til dette tidspunkt. Bevægelsens hastighedsvektor er $\underline{v}$.

Er en linie l bestemt ved to forskellige punkter A og B

på den, vil $\overrightarrow{AB}$ repræsentere en fra nulvektoren forskellig vektor parallel med l , og man har derfor parameterfremstillingen

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB},$$

som med betegnelserne $\underline{x} = \overrightarrow{OX}$, $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$ og $\underline{b} = \overrightarrow{OB}$

kan skrives

$$\underline{x} = (1-t)\underline{a} + t\underline{b}, \quad t \in \mathbb{R},$$

eller i koordinater

$$x_i = (1-t)a_i + tb_i, \quad t \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3.$$

Indskrænkes t til intervallet $0 < t < 1$, fremkommer mængden af punkter mellem A og B , altså det "åbne liniestykke" $]A, B[$. For $0 \leq t \leq 1$ fås det "afsluttede liniestykke" $[A, B]$. For $t > 0$ fås den "åbne halvlinie" ud fra A i retningen mod B , d.v.s. mængden af punkter X på l , for hvilke $\overrightarrow{AX} \in \overrightarrow{AB}$. For $t < 0$ fås den modsat rettede halvlinie, som består af de punkter X , for hvilke $\overrightarrow{AX} \notin \overrightarrow{AB}$. Tages værdien $t = 0$ og dermed punktet A med, fås de tilsvarende "afsluttede halvlinier". Mere alment gælder det, at når t gennemløber et interval, vil punktet X gennemløbe et liniestykke på l eller en halvlinie, efter som intervallet er begrænset eller ensidigt ubegrænset.

Er A og B forskellige punkter, siges et punkt P at dele $\overrightarrow{AB}$ i forholdet f , hvor $f \in \mathbb{R}$, hvis

$$\overrightarrow{AP} = f\overrightarrow{BP}.$$

(Dermed er tillige bragt til udtryk, at P er et punkt på $li(A, B)$.)

Er P det ved

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad t \in \mathbb{R},$$

bestemte punkt på $li(A, B)$, have

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = t\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = (t-1)(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (t-1)\overrightarrow{AB}.$$

For $t \neq 1$ fås heraf, at

$$\overrightarrow{AP} = \frac{t}{t-1} \overrightarrow{BP}.$$

Hvert fra B forskelligt punkt P på $li(A,B)$ deler altså $\overrightarrow{AB}$ i et bestemt forhold, og er t den til P svarende parameterværdi ved den valgte parameterfremstilling, er delingsforholdet $f = t/(t-1)$. Punkterne mellem A og B, som jo fås for $0 < t < 1$, deler i et negativt forhold, punktet A deler i forholdet 0, og punkterne uden for liniestykket $[A,B]$, som fås for $t < 0$ og for $t > 1$, deler i et positivt forhold. Der findes et og kun eet punkt P på linien, der deler $\overrightarrow{AB}$ i et givet forhold $f \neq 1$, nemlig det til parameterværdien $t = f/(f-1)$ svarende. For dette punkts stedvektor fås

$$\overrightarrow{OP} = \frac{-1}{f-1} \overrightarrow{OA} + \frac{f}{f-1} \overrightarrow{OB}$$

og for dets koordinater

$$p_i = \frac{fb_i - a_i}{f - 1}, \quad i = 1, 2, 3,$$

hvor a_i og b_i betegner koordinaterne til A og B. For $f = -1$ fås midtpunktet af liniestykket $[A,B]$.

Lad $\underline{x} = \underline{a} + s\underline{u}$, $s \in \mathbb{R}$, og $\underline{y} = \underline{b} + t\underline{v}$, $t \in \mathbb{R}$, være parameterfremstillinger for to linier l og m i rummet. Her er $\underline{u}$ og $\underline{v}$ fra O forskellige vektorer, $\underline{a}, \underline{x}$ og $\underline{b}, \underline{y}$ er stedvektorer til punkter på henholdsvis l og m, $\underline{a}$ og $\underline{b}$ til givne og $\underline{x}$ og $\underline{y}$ til variable. Liniernes indbyrdes beliggenhed kan bestemmes på følgende måde:

- 1) Linierne l og m er parallelle, hvis og kun hvis $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er lineært afhængige.
- 2) Linierne l og m skærer hinanden, hvis og kun hvis vektorerne $\underline{b} - \underline{a}$, $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er lineært afhængige, men $\underline{u}$ og $\underline{v}$ lineært uafhængige.
- 3) Linierne l og m er vindskæve, hvis og kun hvis vektorerne $\underline{b} - \underline{a}$, $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er lineært uafhængige.

I tilfældene 1) og 2) ligger linierne i samme plan. Nødvendig og tilstrækkelig herfor er, at vektorerne $\underline{b} - \underline{a}$, $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er

lineært afhængige. At finde skæringspunktet i tilfældet 2) går ud på at bestemme tallene s og t således, at $\underline{a} + s\underline{u} = \underline{b} + t\underline{v}$, altså

$$\underline{b} - \underline{a} - s\underline{u} + t\underline{v} = \underline{0}.$$

Da $\underline{b} - \underline{a}$, $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er lineært afhængige, findes der tal λ, μ, ν , som ikke alle er 0, for hvilke

$$\lambda(\underline{b}-\underline{a}) + \mu\underline{u} + \nu\underline{v} = \underline{0},$$

og her er $\lambda \neq 0$, da $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er lineært uafhængige. Multipliseres med $1/\lambda$, ses, at $s = -\mu/\lambda$ og $t = \nu/\lambda$ tilfredsstiller kravet. At s og t er entydig bestemte (i overensstemmelse med, at linierne kun har eet punkt fælles) følger af, at $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er lineært uafhængige (jfr. side III, 4, 13-14). Opskrives ovenstående vektorligning i koordinater, ses at opgaven går ud på at løse et system af tre (almindeligvis) inhomogene lineære ligninger med de to ubekendte s og t .

Lad $\mathcal{M}$ være en plan i rummet, A et fast valgt punkt i $\mathcal{M}$ og $\underline{v}'$ og $\underline{v}''$ to lineært uafhængige vektorer, der er parallelle med $\mathcal{M}$. Er da X et vilkårligt punkt i $\mathcal{M}$, findes der reelle tal t' og t'' , således at $\overrightarrow{AX} = t'\underline{v}' + t''\underline{v}''$. Omvendt vil vektoren $t'\underline{v}' + t''\underline{v}''$ afsat fra A ende i et punkt X på $\mathcal{M}$. For stedvektoren til X ud fra et fast valgt nulpunkt O haves

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t'\underline{v}' + t''\underline{v}'', \quad (t', t'') \in \mathbb{R}^2,$$

og når (t', t'') gennemløber hele talrummet $\mathbb{R}^2$, vil X gennemløbe $\mathcal{M}$ på en sådan måde, at hvert punkt i $\mathcal{M}$ kommer med en og kun een gang. Man siger, at der foreligger en lineær parameterfremstilling af $\mathcal{M}$. Betegnes koordinatsættene for punkterne X og A i et affint koordinatsystem $(O; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ og for vektorerne $\underline{v}'$ og $\underline{v}''$ i koordinatsystemet $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ med henholdsvis (x_1, x_2, x_3) , (a_1, a_2, a_3) , (v'_1, v'_2, v'_3) og (v''_1, v''_2, v''_3) , fås

$$x_i = a_i + t'v_i' + t''v_i'', \quad (t', t'') \in \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Man kan opfatte $(A; \underline{v}', \underline{v}'')$ som et affint koordinatsystem i planen $\overline{\Pi}$.

Omvendt, er der valgt et affint koordinatsystem i rummet, og er der givet et talsæt (a_1, a_2, a_3) samt to lineært uafhængige talsæt (v_1', v_2', v_3') og (v_1'', v_2'', v_3'') , vil mængden af de punkter, hvis koordinater er $x_i = a_i + t'v_i' + t''v_i''$, hvor $(t', t'') \in \mathbb{R}^2$, være en plan, nemlig den, der går gennem punktet med koordinaterne a_i og er parallel med vektorerne med koordinaterne v_i' og v_i'' .

Er en plan $\overline{\Pi}$ bestemt ved tre punkter A, B og C, som ikke ligger på samme linie, vil $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ repræsentere to lineært uafhængige vektorer parallelle med $\overline{\Pi}$, og man har derfor parameterfremstillingen

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t'\overrightarrow{AB} + t''\overrightarrow{AC},$$

som med betegnelserne $\underline{x} = \overrightarrow{OX}$, $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$, $\underline{b} = \overrightarrow{OB}$, $\underline{c} = \overrightarrow{OC}$ og $t = 1 - t' - t''$ kan skrives

$$\underline{x} = t\underline{a} + t'\underline{b} + t''\underline{c}, \quad t + t' + t'' = 1,$$

eller i koordinater

$$x_i = ta_i + t'b_i + t''c_i, \quad t + t' + t'' = 1.$$

Her gennemløber (t, t', t'') alle de talsæt i $\mathbb{R}^3$, for hvilke $t + t' + t'' = 1$. Den overskydende parameter t , ved hvis indførelse der opnås større symmetri, kan naturligvis elimineres igen ved hjælp af den sidstnævnte ligning.

Lad $\underline{x} = \underline{a} + s\underline{u}$, $s \in \mathbb{R}$, være en parameterfremstilling for en linie l og $\underline{y} = \underline{b} + t'\underline{v}' + t''\underline{v}''$, $(t', t'') \in \mathbb{R}^2$, en parameterfremstilling for en plan $\overline{\Pi}$. Linien l er parallel med planen, hvis og kun hvis $\underline{u}$ er en linearkombination af $\underline{v}'$ og $\underline{v}''$. Idet disse to vektorer er lineært uafhængige, er dette ensbetydende med,

at $\underline{u}, \underline{v}', \underline{v}''$ er lineært afhængige. Når og kun når desuden $\underline{a} - \underline{b}$ er en linearkombination af $\underline{v}'$ og $\underline{v}''$, altså $\underline{a} - \underline{b}, \underline{v}', \underline{v}''$ lineært afhængige, ligger l i π' . Er dette tilfældet, og er $\underline{u} = u'\underline{v}' + u''\underline{v}''$, $\underline{a} - \underline{b} = a'\underline{v}' + a''\underline{v}''$, vil l i koordinatsystemet $(B; \underline{v}', \underline{v}'')$, hvor $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$, have parameterfremstillingen

$$t' = a' + su', \quad t'' = a'' + su'', \quad s \in \mathbb{R}.$$

Linien l og planen π' skærer hinanden, hvis og kun hvis $\underline{u}, \underline{v}', \underline{v}''$ er lineært uafhængige. At finde skæringspunktet går ud på at bestemme tallene s, t', t'' således, at

$$-s\underline{u} + t'\underline{v}' + t''\underline{v}'' = \underline{a} - \underline{b}.$$

Der findes netop ét talsæt $(-s, t', t'')$, som opfylder denne ligning, idet $\underline{u}, \underline{v}', \underline{v}''$ danner en basis for vektorrummet $(V_3, +, \mathbb{R})$. Opskrives vektorligningen i koordinater, fås et system af tre (almindeligvis) inhomogene lineære ligninger med de ubekendte s, t', t'' . Dette system vides at have en og kun een løsning. Det er klart, at det er tilstrækkeligt at beregne s .

En punktmængde $K \subseteq E_3$ siges at være konveks, hvis det for hvilket som helst to punkter tilhørende K gælder, at også hele det liniestykke, som forbinder dem, tilhører K . Er der valgt et begyndelsespunkt O , og fastlægges punkterne ved deres stedvektorer, kan denne definition også formuleres således: Er $\underline{x}$ og $\underline{y}$ stedvektorer til punkter i K , skal også punkterne med stedvektorerne $(1-\theta)\underline{x} + \theta\underline{y}$ for $0 \leq \theta \leq 1$ tilhøre K . Idet vi tillader os skrivemåden $\underline{x} \in K$ for at udtrykke, at det punkt, hvis stedvektor er $\underline{x}$, tilhører K , kan definitionen kort skrives

$$\forall_{\underline{x}, \underline{y}} (0 \leq \theta \leq 1 \Rightarrow (1-\theta)\underline{x} + \theta\underline{y} \in K).$$

(Bemærk, at den indførte skrivemåde kun har en mening for sted-

vektorer ud fra et fast valgt nulpunkt.)

En mængde, der kun består af eet punkt, regnes også til de konvekse. Det ses let, at hvert liniestykke (åbent, "halvåbent" eller afsluttet), hver (åben eller afsluttet) halvlinie og hver linie er en konveks mængde. Andre konvekse delmængder af en linie findes ikke. Endvidere er planerne og naturligvis hele rummet konvekse mængder. Flere eksempler vil blive omtalt nedenfor.

Det følger umiddelbart af definitionen, at fællesmængden for en vilkårlig mængde af konvekse mængder er en konvekse mængde, såfremt den ikke er tom. Dette muliggør følgende definition:

Ved en ikke tom punktmængdes konvekse hylster forstås fællesmængden for alle konvekse mængder, som indeholder den. Er M den givne punktmængde, betegnes dens konvekse hylster med $\text{konv } M$. Dette kan siges at være den "mindste" konvekse mængde, som indeholder M , idet det er indeholdt i enhver anden konveks mængde, som indeholder M . Det er klart, at $M' \subseteq M$ medfører, at $\text{konv } M' \subseteq \text{konv } M$.

I fysikken har man ofte anledning til at betragte punkter til hvilke der er knyttet tal. Således er en partikel, altså et legeme, der (i den pågældende undersøgelse) kan betragtes som meget lille, karakteriseret ved angivelsen af dens sted, idealiseret til et punkt, og dens masse, altså et positivt tal. En "punktformet" elektrisk ladning er karakteriseret ved dens sted, idealiseret til et punkt, og ladningens størrelse, altså et reelt tal. Det til et punkt X knyttede tal μ kaldes i reglen en skalar og siges at være bundet til X . Ved et skalarsystem forstås en endelig mængde $(X_1, \mu_1), \dots, (X_r, \mu_r)$ af punkter

$X_1, \dots, X_r$ med til disse bundne skalarer $\mu_1, \dots, \mu_r$. Det forudsættes i det følgende, at

$$\mu = \mu_1 + \dots + \mu_r \neq 0.$$

Er der valgt et begyndelsespunkt O , bestemmes ved

$$\vec{OX} = \frac{1}{\mu} (\mu_1 \vec{OX}_1 + \dots + \mu_r \vec{OX}_r)$$

et punkt X , som er uafhængigt af dette valg. Dette sidste beror på, at stedvektoren til X er en linearkombination med koefficientssummen 1 af stedvektorerne til de givne punkter. Man har nemlig for et andet begyndelsespunkt O'

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} (\mu_1 \vec{O'X}_1 + \dots + \mu_r \vec{O'X}_r) \\ &= \frac{1}{\mu} (\mu_1 (\vec{O'O} + \vec{OX}_1) + \dots + \mu_r (\vec{O'O} + \vec{OX}_r)) \\ &= \vec{O'O} + \vec{OX} = \vec{O'X}. \end{aligned}$$

Det således bestemte punkt X kaldes skalarsystemets midtpunkt eller, når det drejer sig om et system af partikler med masserne $\mu_1, \dots, \mu_r$, partikelsystemets massemidtpunkt eller tyngdepunkt. Den sidstnævnte benævnelse vil blive brugt i det følgende, når skalarerne er større end eller lig med 0 (og følgelig kan fortolkes som masser).

Et skalarsystems midtpunkt ændres øjensynligt ikke, når alle skalarer multipliceres med et og samme fra 0 forskellige tal. Specielt kan man multiplicere dem med $1/\mu$. Derefter bliver deres sum lig med 1. Man kan altså ved bestemmelse af midtpunkter i forvejen antage at skalarsummen er lig med 1, hvilket ofte medfører forenklinger.

For et skalarsystem $\{(X_1, \mu_1), (X_2, \mu_2)\}$, hvor $X_1 \neq X_2$, $\mu_1 \neq 0$, er midtpunktet X , bestemt ved

$$\vec{OX} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \vec{OX}_1 + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \vec{OX}_2,$$

et punkt på $li(X_1, X_2)$ og deler $\overrightarrow{X_1 X_2}$ i forholdet $-\mu_2/\mu_1$. For $\mu_1 = 0$ haves $X = X_1$. Er $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 > 0$, vil X ligge på liniestykket $[X_1, X_2]$. Tyngdepunktet for to partikler ligger altså på liniestykket, der forbinder dem.

Er $\{(X_1, \mu_1), \dots, (X_r, \mu_r)\}$, $\mu_1 + \dots + \mu_r = \mu \neq 0$, og $\{(Y_1, \nu_1), \dots, (Y_s, \nu_s)\}$, $\nu_1 + \dots + \nu_s = \nu \neq 0$, to skalarsystemer med midtpunkterne X og Y , og er $\mu + \nu \neq 0$, vil skalarsystemet

$$\{(X_1, \mu_1), \dots, (X_r, \mu_r), (Y_1, \nu_1), \dots, (Y_s, \nu_s)\}$$

have midtpunktet Z bestemt ved

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{\mu + \nu} (\mu \overrightarrow{OX} + \nu \overrightarrow{OY}).$$

Dette sluttes let af midtpunktets definition.

Tyngdepunktet X for et skalarsystem med positive skalarer tilhører det konvekse hylster af mængden af systemets punkter.

(Dette gælder også, når skalarerne blot vides at være ikke-negative, idet punkter, hvis tilhørende skalarer er 0, kan udelades uden at tyngdepunktet ændres.)

Bevis (ved induktion efter antal af punkter i systemet):

Består systemet kun af eet punkt X_1 , er tyngdepunktet identisk med X_1 , og det samme gælder for det konvekse hylster. Antag, at sætningen gælder for alle skalarsystemer med $r-1$ punkter, hvor $r > 1$, og lad der være givet et skalarsystem $\{(X_1, \mu_1), \dots, (X_r, \mu_r)\}$ hvor $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, r$. Er X systemets tyngdepunkt og X' tyngdepunktet af det delsystem, som fås ved at udelade (X_1, μ_1) , vil X ifølge ovenstående være tyngdepunktet af systemet

$\{(X_1, \mu_1), (X', \mu')\}$, hvor $\mu' = \mu_2 + \dots + \mu_r$. Af antagelsen følger,

$$X' \in \text{konv} \{X_2, \dots, X_r\} \subseteq \text{konv} \{X_1, \dots, X_r\}.$$

Da også $X_1 \in \text{konv} \{X_1, \dots, X_r\}$, og X ligger på liniestykket

$[X_1, X']$, følger påstanden for det betragtede system med r punkter.

Der gælder omvendt, at hvert punkt X i det konvekse hylster af en endelig punktmængde $\{X_1, \dots, X_r\}$ er tyngdepunkt for et skalarsystem $\{(X_1, \mu_1), \dots, (X_r, \mu_r)\}$, hvor $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, r$, og $\mu_1 + \dots + \mu_r = 1$. Sammen med den foregående sætning udsiger dette, at mængden af tyngdepunkter for de skalarsystemer, der fås ved til punkterne $X_1, \dots, X_r$ at knytte alle mulige ikke-negative skalarer med summen 1, er identisk med $\text{konv } \{X_1, \dots, X_r\}$.

Bevis: Mængden T af disse tyngdepunkter indeholder punkterne $X_1, \dots, X_r$; thi hvert af dem fås ved at knytte 1 til det og 0 til de øvrige. Endvidere er T konveks. Er nemlig X og Y to tyngdepunkter bestemt ved

$$\begin{aligned}\vec{OX} &= \mu_1 \vec{OX}_1 + \dots + \mu_r \vec{OX}_r, & \mu_1 + \dots + \mu_r &= 1, \\ \vec{OY} &= \nu_1 \vec{OX}_1 + \dots + \nu_r \vec{OX}_r, & \nu_1 + \dots + \nu_r &= 1,\end{aligned}$$

og er $0 \leq \theta \leq 1$, fås ved multiplikation af den første vektorligning med $1-\theta$, af den anden med θ og påfølgende addition

$$\begin{aligned}(1-\theta)\vec{OX} + \theta\vec{OY} \\ = ((1-\theta)\mu_1 + \theta\nu_1)\vec{OX}_1 + \dots + ((1-\theta)\mu_r + \theta\nu_r)\vec{OX}_r.\end{aligned}$$

Idet koefficienterne $(1-\theta)\mu_i + \theta\nu_i$ er større end eller lig med 0 (da $\mu_i \geq 0$ og $\nu_i \geq 0$) og har summen 1, viser denne ligning, at det vilkårlige punkt på liniestykket $[X, Y]$ med stedvektoren $(1-\theta)\vec{OX} + \theta\vec{OY}$ er et tyngdepunkt af den betragtede art. Idet T altså er konveks og indeholder $\{X_1, \dots, X_r\}$, gælder $\text{konv } \{X_1, \dots, X_r\} \subseteq T$. På den anden side følger $T \subseteq \text{konv } \{X_1, \dots, X_r\}$ af den foregående sætning. Dermed er påstanden bevist.

Den omtalte parameterfremstilling for en linie bestemt ved to forskellige punkter A og B kan fortolkes således: Mængden af midtpunkter af skalarsystemer $\{(A, \lambda), (B, \mu)\}$, hvor $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ og $\lambda + \mu \neq 0$, er $li(A, B)$. Underkastes skalarerne betingelsen $\lambda + \mu = 1$, vil hvert punkt på linien være midtpunkt af netop eet sådant skalarsystem (idet der da findes et og kun eet tal t , for hvilket $\lambda = 1 - t$ og $\mu = t$). For $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ fås liniestykket $[A, B]$ i overensstemmelse med, at dette er $\text{konv}\{A, B\}$.

Parameterfremstillingen for en plan bestemt ved tre punkter A, B, C, som ikke ligger på samme linie, kan fortolkes tilsvarende: Mængden af midtpunkter af skalarsystemer $\{(A, \lambda), (B, \mu), (C, \nu)\}$, hvor $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ og $\lambda + \mu + \nu \neq 0$, er $pl(A, B, C)$. Underkastes skalarerne betingelsen $\lambda + \mu + \nu = 1$, vil hvert punkt i planen være midtpunkt af netop eet sådant skalarsystem. For $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$ fås $\text{konv}\{A, B, C\}$, trekanten ABC. Betegnes stedvektorerne for A, B, C og X ud fra et nulpunkt O med $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ og $\underline{x}$, har man følgende parameterfremstillingen

$$\underline{x} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} + \nu \underline{c}, \quad \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \nu \geq 0, \lambda + \mu + \nu = 1,$$

for trekantskiven. Ligger punkterne A, B, C på samme linie, fremstilles herved det mindste liniestykke, som indeholder dem.

Lad der være givet fire punkter A, B, C, D, som ikke ligger i samme plan, og lad $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ betegne deres stedvektorer ud fra et nulpunkt O. Vektorerne $\underline{b} - \underline{a}, \underline{c} - \underline{a}$ og $\underline{d} - \underline{a}$ er da lineært uafhængige. Betegner $\underline{x}$ stedvektoren til et vilkårligt punkt X, vil følgende $\underline{x} - \underline{a}$ være en linearkombination af disse tre vektorer:

$$\underline{x} - \underline{a} = \mu(\underline{b} - \underline{a}) + \nu(\underline{c} - \underline{a}) + \varphi(\underline{d} - \underline{a}),$$

hvor koefficienterne er entydig bestemte. Heraf fås

$$\underline{x} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} + \nu \underline{c} + \varphi \underline{d},$$

hvor $\lambda = 1 - \mu - \nu - \varphi$, altså

$$\lambda + \mu + \nu + \varphi = 1.$$

Dette viser, at hvert punkt i rummet er midtpunkt af et skalar-system $\{(A,\lambda), (B,\mu), (C,\nu), (D,\varphi)\}$, og kun af eet med skalarsummen 1. Underkastes skalarene betingelserne $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \nu \geq 0, \varphi \geq 0$, fås konv $\{A,B,C,D\}$, tetraedret ABCD. Ligger punkterne A,B,C,D i samme plan, men ikke på samme linie, fås en firkants- eller trekantsskive.

Lad der være givet et punkt A med stedvektoren $\underline{a}$ samt to (tre) lineært uafhængige vektorer $\underline{v}$ og $\underline{v}'$ ($\underline{v}, \underline{v}'$ og $\underline{v}''$). Mængden af punkter X, hvis stedvektorer $\underline{x}$ er givet ved

$$\underline{x} = \underline{a} + t\underline{v} + t'\underline{v}' (+t''\underline{v}''), \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq t' \leq 1, (0 \leq t'' \leq 1),$$

er parallelogrammet (parallelepipedet), som udspændes af de fra A afsatte vektorer $\underline{v}$ og $\underline{v}'$ ($\underline{v}, \underline{v}'$ og $\underline{v}''$). Parallelogrammets vinkelspidser (parallelepipedets hjørnespidser) er punkterne med stedvektorerne $\underline{a}, \underline{a} + \underline{v}, \underline{a} + \underline{v}'$ og $\underline{a} + \underline{v} + \underline{v}'$ (desuden $\underline{a} + \underline{v}''$, $\underline{a} + \underline{v} + \underline{v}''$, $\underline{a} + \underline{v}' + \underline{v}''$ og $\underline{a} + \underline{v} + \underline{v}' + \underline{v}''$). Parallelogrammets sider fås ved at sætte en af parametrene t, t' konstant lig med 0 eller 1 (parallelepipedets sideflader og kanter fås ved at sætte henholdsvis en eller to af parametrene lig med 0 eller 1). Parallelogrammet (parallelepipedet) er det konvekse hylster af mængden bestående af vinkelspidserne (hjørnespidserne). Parallelogrammet (parallelepipedet) er nemlig indeholdt i dette konvekse hylster, idet dette gælder for siderne (sidefladerne), og hvert af parallelogrammets (parallelepipedets) punkter ses at ligge på et liniestykke, hvis endepunkter tilhører sider (sideflader). Endvidere er parallelogrammet (parallelepipedet) en konveks punktmængde (øv. 13) og følgelig identisk med det konvekse hylster.

Er der valgt et affint koordinatsystem $(O; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ i planen, og er et parallelograms sider, altså vektorerne $\underline{v}$ og $\underline{v}'$, parallelle med henholdsvis $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$, vil koordinatsættene (x_1, x_2) for

parallelogrammets punkter udgøre det ved ulighederne

$$a_1 \leq x_1 \leq a_1 + v_1, \quad a_2 \leq x_2 \leq a + v_2'$$

bestemte interval i talrummet $\mathbb{R}^2$, idet koordinatsættene for vektorerne $\underline{a}, \underline{v}, \underline{v}'$ er betegnet med henholdsvis $(a_1, a_2), (v_1, 0), (0, v_2')$ og det er antaget, at v_1 og v_2' er positive (ellers skal visse eller alle ulighedstegn vendes). Tilsvarende gælder det, at hvis et parallelepipedets kanter er parallelle med grundvektorerne i et affint koordinatsystem i rummet, vil koordinatsættene for parallelepipedets punkter udgøre et interval i talrummet $\mathbb{R}^3$.

Rettelser:

Side III, 4, l2 nederst. I ligningssystemet (ih) læs $y_1, y_2, \dots, y_n$ i stedet for $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Side III, 4, øv. 5-8, linie 2, læs $\underline{u} + \underline{v}$ i stedet for $\underline{u} + \underline{w}$.

Side III, 4, øv. 9-15, linie 2, læs $(0, 1, 0, 0, \dots)$ i stedet for $(, 1, 0, 0, \dots)$.

Side III, 4, øv. 15-17, linie 7 f.n. I brøkens nævner læs $f_i(t_i)$ i stedet for $f(t_i)$.

Side III, 4, øv. 18. I sidste linie kan "og omvendt" stryges.

Side III, 5, øv. 19-20. Efter linie 4 tilføj "eller er indbyrdes parallelle".

Øvelser til kap. III, 5.

- 1) I planen E_2 tænkes valgt et affint koordinatsystem $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Angiv en parameterfremstilling for linien l_1 gennem punktet med koordinatsættet $(3, 2)$ og parallel med vektoren med koordinatsættet $(-1, -2)$, for linien l_2 gennem punkterne med koordinatsættene $(0, -1)$ og $(-2, 1)$ og for linien l_3 gennem punkterne med koordinatsættene $(2, 4)$ og $(0, 0)$. Bestem linierne indbyrdes beliggenhed, og find eventuelle skæringspunkters koordinatsæt. (Tegn en figur — med et koordinatsystem, som ikke netop er et sædvanligt retvinklet.)
- 2) I rummet E_3 tænkes valgt et affint koordinatsystem $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Undersøg, om linierne givet ved parameterfremstillingerne
- $$\begin{array}{ll} x_1 = 5 + s & y_1 = 3 \\ x_2 = -2 - s & \text{og} \quad y_2 = 2 + 2t \\ x_3 = -1 + s & y_3 = -1 + 2t \end{array}$$
- skærer hinanden, og bestem i bekræftende fald koordinatsættet for skæringspunktet.
- 3) Med P, Q, R betegnes midtpunkterne af siderne BC, CA, AB i en trekant ABC . Vis, at $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \underline{0}$.
- 4) Lad A, B, C, D være fire indbyrdes forskellige punkter i rummet, og lad P, Q, R, S betegne midtpunkterne af henholdsvis $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$. Vis ved regning med vektorer, at $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ og $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$.
- 5) To punkter A og B i planen E_2 har i et affint koordinatsy-

stem koordinatsættene $(5,2)$ og $(-1,-1)$. Find koordinatsættene for de punkter P og Q, som deler $\overrightarrow{AB}$ i forholdene -3 og 3 . Bestem dernæst de forhold, hvori A og B deler $\overrightarrow{PQ}$.

- 6) Lad A,B,P,Q være indbyrdes forskellige punkter på en linie E_1 . Punktparret $\overrightarrow{PQ}$ siges at dele punktparret $\overrightarrow{AB}$ harmonisk, hvis P og Q deler $\overrightarrow{AB}$ i numerisk lige store, men modsatte forhold, altså hvis der findes et tal f, således at $\overrightarrow{AP} = f \overrightarrow{BP}$ og $\overrightarrow{AQ} = -f \overrightarrow{BQ}$. Bemærk, at hvis dette er tilfældet, vil også $\overrightarrow{QP}$ dele $\overrightarrow{AB}$ harmonisk, og vis, at $\overrightarrow{AB}$ deler $\overrightarrow{PQ}$ harmonisk og angiv de tilhørende delingsforhold. Idet de to punktpar følgelig kan bytte rolle og det ikke kommer an på punkternes rækkefølge i de enkelte par, siges punktparrene A,B og P,Q at være harmonisk forbundne.

Vis, at der til indbyrdes forskellige punkter A,B,P, hvor P ikke er midtpunktet af $\overrightarrow{AB}$, findes et og kun eet punkt Q, således at A,B og P,Q er harmonisk forbundne.

Lad punkterne A,B,P,Q have koordinaterne a,b,p,q i et affint koordinatsystem $(O;\underline{e})$ på linien. Vis, at punktparrene A,B og P,Q er harmoniske forbundne, hvis og kun hvis tallene a,b,p,q er indbyrdes forskellige og

$$2(ab+pq) - (a+b)(p+q) = 0.$$

- 7) Lad O,A,B være punkter, som ikke ligger på samme linie, og lad punktet C være bestemt ved $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$. Punktet D antages at dele $\overrightarrow{AC}$ i forholdet f. Angiv de værdier af f, for hvilke $li(O,D)$ og $li(A,B)$ skærer hinanden. For en sådan værdi af f betegnes disse liniers skæringspunkt med E. Find $\overrightarrow{OD}$ og $\overrightarrow{OE}$, udtrykt ved $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$, $\underline{b} = \overrightarrow{OB}$ og f, samt det forhold, hvori

E deler $\overrightarrow{AB}$.

- 8) Med $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ betegnes stedvektorerne til en trekants vinkelspidser. Angiv parameterfremstillinger for trekantens medianer, og vis, at disses skæringspunkt er punktet med stedvektoren $\frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$.

Med $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ betegnes stedvektorerne til et tetraeders hjørnespidser. Angiv parameterfremstillinger for de liniestykker, som hvert forbinder to modstående kanter midtpunkter, og for de liniestykker, som hvert forbinder en hjørnespids med medianernes skæringspunkt i den modstående sideflade. Angiv stedvektoren til et punkt, som ligger på alle disse liniestykker, og bestem de forhold, hvori det deler dem.

- 9) I rummet tænkes valgt et affint koordinatsystem. Der er givet et punkt $(2, -1, 3)$ samt to linier med parameterfremstillingerne

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1 + s & y_1 = 2 - 2t \\ x_2 = s & \text{og} \quad y_2 = 0 \\ x_3 = -1 + s & y_3 = t. \end{array}$$

Angiv en parameterfremstilling for planen, der går gennem det givne punkt og den førstnævnte linie.

Angiv en parameterfremstilling for linien, der går gennem det givne punkt og skærer begge de givne linier.

- 10) Lad der være givet to vindskæve linier l og m samt et tal $f \neq 0, 1$. Man betragter alle liniestykker $\overrightarrow{PQ}$, som forbinder et punkt P på l med et punkt Q på m . Bestem mængden af (det geometriske sted for) de punkter, der deler disse liniestykker

ker i forholdet f. (Benyt vektorielle parameterfremstillinger for linierne.)

- 11) Vis, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at tre punkter ligger på ret linie, er, at der består en egentlig lineær relation med koefficientsummen 0 mellem deres stedvektorer ud fra et vilkårligt valgt nulpunkt.

Formuler og bevis en analog betingelse for, at fire punkter ligger i en plan.

- 12) Lad to planer være givet ved parameterfremstillingerne $\underline{x} = \underline{a} + s'\underline{u} + s''\underline{u}''$ og $\underline{y} = \underline{b} + t'\underline{v}' + t''\underline{v}''$. Angiv i form af udsagn om lineære afhængigheder eller uafhængigheder mellem de givne vektorer $\underline{a}, \underline{b}, \underline{u}', \underline{u}'', \underline{v}', \underline{v}''$ en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at 1) planerne skærer hinanden, 2) falder sammen.

- 13) Bevis den i teksten fremsatte påstand, at parallelogrammer og parallelepipeder er konvekse punktmængder.

- 14) Overfør definitionen på konveks punktmængde til det n-dimensionale talrum $\mathbb{R}^n$.

Vis for hver af de følgende uligheder, at mængden af de tal sæt $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, som tilfredsstiller den, er konveks:

$$\begin{aligned} |x_1| + \dots + |x_n| &\leq r, \\ \max\{x_1, \dots, x_n\} &\leq r, \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 &\leq r^2. \end{aligned}$$

Her betegner r et givet positivt tal.

- 15) En punktmængde $S \subseteq E_3$ siges at være stjerneformet med hensyn

til et punkt A , hvis det for hvert punkt $X \in S$ gælder, at hele liniestykket $[A, X]$ tilhører S . Vis, at mængden af de punkter, med hensyn til hvilke en mængde S er stjerneformet, er konveks, hvis den ikke er tom.

16) Afsæt fire (fem) punkter i planen og konstruer tyngdepunktet for skalarsystemet bestående af disse punkter med skalaren 1 knyttet til hvert af dem.

17) Til en trekants vinkelspidser knyttes som skalarer de modstående ^{siders} længder. Angiv skalarsystemets tyngdepunkt.

Søg et analogt resultat for et tetraeder.

(Benyt fra gymnasiet kendte elementargeometriske sætninger.)

18) Angiv skalaren, som knyttet til en trekants vinkelspidser udgør et skalarsystem, hvis midtpunkt er 1) højdernes skæringspunkt, 2) den omskrevne cirkels centrum. (Benyt trigonometri.)

19) Lad ABC være en trekant og P et punkt i dennes plan, som ikke ligger på nogen af linierne $li(B, C)$, $li(C, A)$, $li(A, B)$. Skæringspunktet mellem $li(A, P)$ og $li(B, C)$, mellem $li(B, P)$ og $li(C, A)$ og mellem $li(C, P)$ og $li(A, B)$ betegnes med henholdsvis A' , B' og C' . Er da f, g og h de forhold, hvori A' deler $\overrightarrow{BC}$, B' deler $\overrightarrow{CA}$ og C' deler $\overrightarrow{AB}$, gælder $fgh = -1$.

(Ceva's sætning.) (Benyt, at P er midtpunktet af et skalarsystem, som fås ved at knytte passende skalarer til A, B og C .)

Bevis også den omvendte sætning: Er ABC en trekant, og lig-

ger punkterne A', B' og C' på henholdsvis $li(B, C)$, $li(C, A)$ og $li(A, B)$ således, at produktet af de tre forhold, hvori A' , B' og C' deler henholdsvis $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ og $\overrightarrow{AB}$, er lig med -1 , så vil $li(A, A')$, $li(B, B')$ og $li(C, C')$ gå gennem samme punkt.

- 20) Lad $\{(X_1, \mu_1), \dots, (X_r, \mu_r)\}$ være et skalarsystem med et midtpunkt X . Lad der endvidere være givet en plan $\overline{\pi}$ og en linie p , som skærer $\overline{\pi}$. Idet $X'_1, \dots, X'_r$ betegner projektionerne af $X_1, \dots, X_r$ på $\overline{\pi}$ i retningen p , skal det vises, at midtpunktet X' af skalarsystemet $\{(X'_1, \mu_1), \dots, (X'_r, \mu_r)\}$ fås ved at projicere X på $\overline{\pi}$ i retningen p . (Benyt f.eks. et passende affint koordinatsystem.)

§ 6. Koordinattransformationer. Matricer.

Lad $(V, +, L)$ være et vektorrum af den endelige dimension n . Er $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ en basis for rummet, svarer der til hver vektor $\underline{v} \in V$ et talsæt $(v_1, \dots, v_n)$ og omvendt til hvert sådant talsæt en vektor $\underline{v}$, således at

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n.$$

Tallene $v_1, \dots, v_n$ kaldes vektorens koordinater i koordinatsystemet eller med hensyn til basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$. For denne enentydige korrespondance mellem $(V, +, L)$ og talrummet $(L^n, +, L)$ gælder øjensynlig, at hvis

$$\underline{u} \longleftrightarrow (u_1, \dots, u_n), \quad \underline{v} \longleftrightarrow (v_1, \dots, v_n)$$

og $a \in L$, så vil

$$\underline{u} + \underline{v} \longleftrightarrow (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), \quad a\underline{v} \longleftrightarrow (av_1, \dots, av_n).$$

Dette indebærer specielt, at afbildningen er en isomorfi mellem grupperne $(V, +)$ og $(L^n, +)$. Desuden svarer multiplikation med en skalar til multiplikation med samme skalar. En sådan enentydig korrespondance mellem to vektorrum over samme tallegeme kaldes ligeledes en isomorfi.

Det følger af egenskaberne ved en isomorfi mellem grupper, og det bekræftes også let direkte, at nulvektorerne i de to vektorrum svarer til hinanden. Endvidere er det klart, at der til en linearkombination af vektorer i det ene vektorrum svarer linearkombinationen med de samme koefficienter af de tilsvarende vektorer i det andet vektorrum. Heraf kan sluttet, at der til lineært afhængige vektorer svarer lineært afhængige, og da dette gælder begge veje, at der til lineært uafhængige svarer lineært uafhængige. To vektorsæt bestående af til hinanden svarende vektorer har altså samme rang. Endvidere svarer der til et underrum i det ene vektorrum øjensynlig et underrum i det andet, og disse to

underrum har altså samme dimension. Det ses heraf, at alle undersøgelser vedrørende det vilkårligt givne n -dimensionale vektorrum $(V, +, L)$ efter valg af en basis kan føres over i undersøgelser af talrummet $(L^n, +, L)$.

*ny og gammel
modsat fessen*

Man har imidlertid tit anledning til at skifte koordinatsystemet, d.v.s. ved siden af den oprindelig valgte basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ at betragte en anden $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$. En og samme vektor $\underline{v} \in V$ vil da have (almindeligvis) forskellige koordinatsæt $(v_1^{(e)}, \dots, v_n^{(e)})$ og $(v_1^{(f)}, \dots, v_n^{(f)})$ med hensyn til de to baser. Det drejer sig om at finde relationen mellem disse koordinatsæt. Dette kan lade sig gøre, hvis man kender fremstillingerne af vektorerne i den ene basis som linearkombinationer af vektorerne i den anden, med andre ord, hvis koordinatsættene for vektorerne i den ene basis med hensyn til den anden er givet. Antag først, at

$$\begin{aligned}\underline{e}_1 &= t_{11}\underline{f}_1 + t_{21}\underline{f}_2 + \dots + t_{n1}\underline{f}_n \\ \underline{e}_2 &= t_{12}\underline{f}_1 + t_{22}\underline{f}_2 + \dots + t_{n2}\underline{f}_n \\ &\vdots \\ \underline{e}_n &= t_{1n}\underline{f}_1 + t_{2n}\underline{f}_2 + \dots + t_{nn}\underline{f}_n,\end{aligned}$$

hvor talsættene $(t_{11}, t_{21}, \dots, t_{n1}), (t_{12}, t_{22}, \dots, t_{n2}), \dots, (t_{1n}, t_{2n}, \dots, t_{nn})$, altså koordinatsættene for vektorerne $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ i koordinatsystemet $(\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_n)$ er givet. Er da

$$\underline{v} = v_1^{(e)}\underline{e}_1 + v_2^{(e)}\underline{e}_2 + \dots + v_n^{(e)}\underline{e}_n$$

en vilkårlig vektor i V , fås ved indsættelse

$$\begin{aligned}\underline{v} &= (t_{11}v_1^{(e)} + t_{12}v_2^{(e)} + \dots + t_{1n}v_n^{(e)})\underline{f}_1 \\ &\quad + (t_{21}v_1^{(e)} + t_{22}v_2^{(e)} + \dots + t_{2n}v_n^{(e)})\underline{f}_2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (t_{n1}v_1^{(e)} + t_{n2}v_2^{(e)} + \dots + t_{nn}v_n^{(e)})\underline{f}_n.\end{aligned}$$

Heraf sluttes, at koordinatsættet for $\underline{v}$ i koordinatsystemet

$(\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_n)$ er

$$\begin{aligned} v_1^{(f)} &= t_{11}v_1^{(e)} + t_{12}v_2^{(e)} + \dots + t_{1n}v_n^{(e)} \\ v_2^{(f)} &= t_{21}v_1^{(e)} + t_{22}v_2^{(e)} + \dots + t_{2n}v_n^{(e)} \\ &\vdots \\ v_n^{(f)} &= t_{n1}v_1^{(e)} + t_{n2}v_2^{(e)} + \dots + t_{nn}v_n^{(e)}. \end{aligned}$$

Omregningen af en vilkårlig vektors koordinater til det nye koordinatsystem sker altså ved hjælp af de n^2 tal t_{ij} .

Når der er valgt en bestemt nummering af vektorerne i de to baser, fremtræder disse tal i ovenstående ligninger ordnet i et kvadratisk skema

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

med n "rækker" og n "søjler". Lignende gælder f.eks. for koefficienterne i lineære ligningssystemer, når der er valgt en bestemt orden såvel for de ubekendte som for ligningerne. Koefficienterne i det homogene ligningssystem (h) (side III,4,11) fremtræder i det rektangulære skema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

med m rækker og n søjler. Et sådant rektangulært, specielt kvadratisk skema kaldes en matrix eller, når det er nødvendigt at angive antallet m af rækker og antallet n af søjler, en

(m × n)-matrix. Angående brugen af dobbeltmærker ved betegnelsen af matricers elementer har man vedtaget, at første indeks angiver rækkenummer og anden søjlenummer. Elementerne i en matrix kan være vilkårlige matematiske objekter. Men da andre elementer end tal kun vil optræde undtagelsesvis, underforstås i det følgende når andet ikke udtrykkeligt fremhæves, at matricerne består af tal fra det betragtede tallegeme L.

Det har vist sig at være hensigtsmæssigt at indføre korte betegnelser for matricer. Dette sker enten ved enkelte bogstaver, som her for tydelighedens skyld vil blive dobbelt understreget, eller ved at angive det "almene" element samt de værdier, de to mærker gennemløber. Ovenstående to matricer vil altså f. eks. kunne betegnes således:

$$\underline{\underline{T}} = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \quad , \quad \underline{\underline{A}} = (a_{\alpha\beta})_{\alpha=1,\dots,m;\beta=1,\dots,n} \quad .$$

Talsæt, specielt koordinatsæt (lejlighedsvis også sæt af vektorer) kan betragtes som matricer med een række, altså $(1 \times n)$ -matricer, kaldet rækkematricer eller kort rækker, eller også som matricer med een søjle, altså $(m \times 1)$ -matricer, kaldet søjlematricer eller kort søjler. Idet det er vigtigt at skelne mellem de to fortolkninger af et sæt, indføres følgende betegnelser for henholdsvis rækken og søjlen bestående af tallene $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\underline{\underline{x}}_- = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \quad , \quad \underline{\underline{x}}_| = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

I de i denne paragrafs begyndelse opstillede udtryk for de oprindelige basisvektorer $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ som linearkombinationer af de nye $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$ optræder de samme tal t_{ij} som i matricen $\underline{\underline{T}}$, men ordnet som en anden matrix $\underline{\underline{T}}'$, som fremgår af $\underline{\underline{T}}$ ved, at dennes søjler og rækker skrives henholdsvis som rækker og søjler.

Alment hører der til hver $(m \times n)$ - matrix $\underline{A} = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$, en $(n \times m)$ - matrix $\underline{A}' = (a_{ji}')$, $j = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, m$, den transponerede af $\underline{A}$, hvis rækker og søjler er henholdsvis søjlerne og rækkerne i $\underline{A}$. Det er klart, at den transponeredes transponerede $(\underline{A}')'$ er den oprindelige matrix $\underline{A}$. For en søjlematrix $\underline{x}_|$ haves specielt $\underline{x}_|' = \underline{x}_-$ og derfor også $\underline{x}_-' = \underline{x}_|$.

Inden for mængden $\mathcal{M}(L)$ af matricer med tal fra L som elementer defineres to "partielle kompositionsforskrifter", som ikke kan finde anvendelse på vilkårlig, men kun på visse par af matricer. Desuden defineres en kompositionsforskrift fra $L \times \mathcal{M}(L)$ til $\mathcal{M}(L)$.

For at begynde med den sidste, lad k være et tal fra L og $\underline{A} = (a_{ij})$ en matrix. Produktet af k med $\underline{A}$ defineres da som matricen, der fås ved at multiplicere hvert element i $\underline{A}$ med k :

$$k\underline{A} = \underline{A}k = (ka_{ij}).$$

Er $\underline{A} = (a_{ij})$ og $\underline{B} = (b_{ij})$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$, to $(m \times n)$ -matricer, forstås ved deres sum $(m \times n)$ - matricen

$$\underline{A} + \underline{B} = (a_{ij} + b_{ij}).$$

For matricer, som ikke stemmer overens i såvel række- som søjleantal defineres ikke nogen sum. Hvad angår regneregler for de to hidtil indførte kompositionsforskrifter, er det tilstrækkeligt at bemærke, at for givne m og n vil mængden $\mathcal{M}_{m,n}(L)$ af $(m \times n)$ -matricer med disse kompositionsforskrifter danne et vektorrum over L . Tænker

man sig nemlig en sådan matrices rækker sat i forlængelse af hinanden og elementerne fortløbende nummereret fra 1 til mn , bliver kompositionsforskrifterne identiske med dem for talrummet $(L^{mn}, +, L)$. Vektorrummet $(M_{m,n}(L), +, L)$ er altså på oplagt måde isomorf med dette talrum. "Nulvektoren" i dette vektorrum af matricer er $(m \times n)$ -matricen, hvis samtlige elementer er lig 0. Den betegnes med $\underline{0}$ og kaldes nulmatrix. (Række- og søjleantal optræder ikke i denne betegnelse og må altså angives på en eller anden måde, hvis de ikke fremgår af sammenhængen, hvilket ganske vist er tilfældet i almindelighed.)

Den anden partielle kompositionsforskrift inden for mængden af matricer kaldes matrixmultiplikation. Er $\underline{A}$ en $(m \times n)$ -matrix og $\underline{B}$ en $(n \times p)$ -matrix, dannes en $(m \times p)$ -matrix $\underline{C} = \underline{AB}$ på følgende måde: Idet

$$\underline{A} = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}, \quad \underline{B} = (b_{jk})_{j=1, \dots, n; k=1, \dots, p},$$

sættes

$$\underline{AB} = \underline{C} = (c_{ik})_{i=1, \dots, m; k=1, \dots, p},$$

hvor

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + \dots + a_{in} b_{nk}.$$

Man finder altså produktmatricens element i den i -te række og k -te søjle ved at multiplicere hvert element i den første faktors i -te række med det "tilsvarende placerede" element i den anden faktors k -te søjle og at addere alle disse produkter. Produktet af to matricer defineres altså kun, hvis den førstes søjleantal er lig med den andens rækkeantal. Kan produktet $\underline{AB}$ dannes, vil produktet $\underline{BA}$ i almindelighed ikke kunne dannes, nemlig kun hvis rækketallet i $\underline{A}$ er lig med søjletallet i $\underline{B}$.

Det ses^s også, at hvis $\underline{\underline{AB}}$ kan dannes, vil $\underline{\underline{B}}'\underline{\underline{A}}'$ også kunne dannes (med almindeligvis ikke $\underline{\underline{A}}'\underline{\underline{B}}'$), og der gælder

$$(\underline{\underline{AB}})' = \underline{\underline{B}}'\underline{\underline{A}}';$$

i ord: den transponerede af et produkt af to matricer er lig med de transponerede matricers produkt taget i omvendt orden. Dette følger umiddelbart af produktets definition, idet række- og søjlenummer for et element i en matrix er henholdsvis dets søjle- og rækkenummer i den transponerede matrix.

For matrixmultiplikationen gælder den associative lov: Er $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ en $(m \times n)$ -matrix, $\underline{\underline{B}} = (b_{jk})$ en $(n \times p)$ -matrix og $\underline{\underline{C}} = (c_{kl})$ en $(p \times q)$ -matrix, kan både $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{BC}})$ og $(\underline{\underline{AB}})\underline{\underline{C}}$ dannes, og der gælder

$$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{BC}}) = (\underline{\underline{AB}})\underline{\underline{C}}.$$

Elementet i den i -te række og den l -te søjle i matricen $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{BC}})$ er

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl},$$

og elementet på samme plads i matricen $(\underline{\underline{AB}})\underline{\underline{C}}$ er

$$\sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl}.$$

Påstanden følger af, at begge disse summer kan omskrives til dobbeltsummen

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij} b_{jk} c_{kl}.$$

Er $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ en $(m \times n)$ -matrix og $\underline{\underline{B}} = (b_{jk})$ og $\underline{\underline{C}} = (c_{jk})$ $(n \times p)$ -matricer, gælder de distributive love

$$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{AB}} + \underline{\underline{AC}}, \quad (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}})\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{BA}} + \underline{\underline{CA}}.$$

Dette ses for den førstes vedkommende af

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk},$$

og tilsvarende for den anden.

Som første eksempler på matrixregningens anvendelse nævnes følgende:

Det lineære homogene ligningssystem (h) (side III, 4, 11) kan med de ovenfor (side III, 6, 4) indførte betegnelser skrives

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{x}}\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{0}}.$$

Formlerne (side III, 6, 3), som giver en vektors koordinater i koordinatsystemet $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$ udtrykt ved dens koordinater i koordinatsystemet $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, kan med nærliggende betegnelser skrives

$$\underline{\underline{v}}^{(f)} = \underline{\underline{T}} \underline{\underline{v}}^{(e)} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{v}}^{(f)} = \underline{\underline{v}}^{(e)} \underline{\underline{T}}'.$$

Søjlerne i matricen $\underline{\underline{T}}$ er, som det fremgår af dennes oprindelse koordinatsættene for vektorerne $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ i koordinatsystemet $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$. Er der givet en tredje basis $(\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n)$ i det betragtede vektorrum, har man for vektorens koordinater i dette system en tilsvarende matrixligning

$$\underline{\underline{v}}^{(g)} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{v}}^{(f)},$$

hvor søjlerne i matricen $\underline{\underline{S}}$ er koordinatsættene for vektorerne $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$ i koordinatsystemet $(\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n)$.

Ved indsættelse fås med benyttelse af den associative lov

$$\underline{\underline{v}}^{(g)} = \underline{\underline{S}}(\underline{\underline{T}}\underline{\underline{v}}^{(e)}) = (\underline{\underline{ST}})\underline{\underline{v}}^{(e)}.$$

En kvadratisk matrix $\underline{\underline{E}} = (\delta_{ij})$, hvor det såkaldte Kronecker-symbol δ_{ij} er defineret ved $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i=j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}$, kaldes enhedsmatrix. Er $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ en $(m \times n)$ -matrix og $\underline{\underline{E}}^{(m)}$ og $\underline{\underline{E}}^{(n)}$ henholdsvis $(m \times m)$ - og $(n \times n)$ -enhedsmatricen, gælder

$$\underline{\underline{E}}^{(m)} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{AE}}^{(n)} = \underline{\underline{A}}.$$

Dette sluttet af $\sum_{j=1}^m \delta_{ij} a_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{jk}$ for $i = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, n$.

Inden for mængden $\mathcal{M}_{n,n}$ af alle $(n \times n)$ -matricer med elementer fra tallegemet L er matrixmultiplikationen en kompositionsforskrift, og ifølge det viste er $\underline{E}$ et neutralt element for denne. Som vist tidligere (side II, 1, 3) kan der ikke findes nogen anden $(n \times n)$ -matrix $\underline{F}$, for hvilken $\underline{FA} = \underline{AF}$ for hver $(n \times n)$ -matrix $\underline{A}$.

Er $\underline{A}$ en kvadratisk matrix, kan man for hvert positivt helt tal p danne potensen

$$\underline{A}^p = \underline{AA} \dots \underline{A} \quad (p \text{ faktorer}).$$

Sættes desuden

$$\underline{A}^0 = \underline{E},$$

gælder for enhver kvadratisk matrix $\underline{A}$ og vilkårlige ikke-negati-
ve hele tal p og q potensreglerne

$$\underline{A}^p \underline{A}^q = \underline{A}^{p+q}, \quad (\underline{A}^p)^q = \underline{A}^{pq}.$$

Derimod gælder $(\underline{AB})^p = \underline{A}^p \underline{B}^p$ kun, hvis $\underline{A}$ og $\underline{B}$ er ombyttelige $(n \times n)$ -matricer, d.v.s. kun hvis $\underline{AB} = \underline{BA}$.

En kvadratisk $(n \times n)$ -matrix $\underline{A}$ siges at have en invers eller at være regulær, hvis der findes en $(n \times n)$ -matrix $\underline{X}$, således at $\underline{AX} = \underline{XA} = \underline{E}$. Idet matrixmultiplikationen er en associativ kompositionsforskrift, er $\underline{X}$ ifølge en tidligere sætning (side II, 1, 4) entydig bestemt ved $\underline{A}$, og man skriver derfor $\underline{X} = \underline{A}^{-1}$. For en regulær matrix gælder altså

$$\underline{AA}^{-1} = \underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{E}.$$

Heraf ses, at hvis $\underline{A}$ er en regulær matrix, er også $\underline{A}^{-1}$ regulær og der gælder

$$(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}.$$

Af det sagte sluttet umiddelbart, at mængden af regulære

$(n \times n)$ -matricer med elementer fra tallegemet L danner en gruppe med matrixmultiplikationen som komposition. Er nemlig $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ regulære $(n \times n)$ -matricer, vil også $\underline{\underline{AB}}$ være regulær med $\underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1}$ som invers matrix, da jo

$$\begin{aligned}\underline{\underline{ABB}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1} &= \underline{\underline{AEA}}^{-1} = \underline{\underline{AA}}^{-1} = \underline{\underline{E}}, \\ \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{AB}} &= \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{EB}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}}.\end{aligned}$$

Matrixmultiplikationen er altså en kompositionsforskrift inden for mængden af regulære $(n \times n)$ -matricer. Da endvidere matrixmultiplikationen er associativ, der findes et neutralt element, nemlig $\underline{\underline{E}}$, som øjensynlig er regulær, og enhver regulær matrix ifølge definition har en invers, der også er regulær, er de fire gruppeaksiomer G1-4 (side II, 2, 1) opfyldt. Denne gruppe kaldes den generelle lineære gruppe af graden n over tallegemet L og betegnes med $GL(n, L)$.

Ved anvendelse af sætninger om grupper fås specielt, at de ovenfor nævnte potensregler gælder for regulære matricer med vilkårlige hele eksponenter. Endvidere ses, at

$$(\underline{\underline{A}}_1 \underline{\underline{A}}_2 \dots \underline{\underline{A}}_p)^{-1} = \underline{\underline{A}}_p^{-1} \dots \underline{\underline{A}}_2^{-1} \underline{\underline{A}}_1^{-1}$$

for vilkårlige regulære $(n \times n)$ -matricer $\underline{\underline{A}}_1, \underline{\underline{A}}_2, \dots, \underline{\underline{A}}_p$.

Er $\underline{\underline{A}}$ en regulær matrix, vil også den transponerede $\underline{\underline{A}}'$ være regulær, og der gælder

$$(\underline{\underline{A}}')^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})'.$$

Af $\underline{\underline{AA}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$ sluttet nemlig (jfr. side III, 6, 7), at $(\underline{\underline{A}}^{-1})' \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{E}}$, idet $\underline{\underline{E}}' = \underline{\underline{E}}$, og tilsvarende fås af $\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$, at $\underline{\underline{A}}' (\underline{\underline{A}}^{-1})' = \underline{\underline{E}}$.

Er $\underline{\underline{A}}$ en regulær $(n \times n)$ -matrix, $\underline{\underline{B}}$ en $(n \times p)$ -matrix og $\underline{\underline{C}}$ en $(m \times n)$ -matrix, findes der en og kun een $(n \times p)$ -matrix $\underline{\underline{X}}$ og en

og kun een $(m \times n)$ -matrix $\underline{Y}$, således at

$$\underline{AX} = \underline{B}, \quad \underline{YA} = \underline{C}.$$

Multipliseres nemlig den første ligning fra venstre og den anden fra højre med $\underline{A}^{-1}$, ses at de eneste matricer, der kan være løsninger til disse matrixligninger er

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}, \quad \underline{Y} = \underline{CA}^{-1}.$$

Ved indsættelse ses, at de virkelig tilfredsstiller ligningerne.

En $(n \times n)$ -matrix $\underline{A}$ er regulær, hvis og kun hvis dens søjler $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ er lineært uafhængige talsæt.

Bevis: Først bemærkes, at en linearkombination af søjlerne i $\underline{A}$ med koefficienterne $x_1, \dots, x_n$ kan skrives som et matrixprodukt, nemlig

$$\underline{a}_1 x_1 + \dots + \underline{a}_n x_n = \underline{Ax},$$

hvor $\underline{x}$ betegner søjlematrixen med elementerne $x_1, \dots, x_n$:

At søjlerne i $\underline{A}$ er lineært uafhængige er altså ensbetydende med, at matrixligningen $\underline{Ax} = \underline{0}$ kun har løsningen $\underline{x} = \underline{0}$. Men dette vil ifølge den foregående sætning være tilfældet, når $\underline{A}$ er regulær. Dermed er vist, at søjlernes lineære uafhængighed er en nødvendig betingelse for, at $\underline{A}$ er regulær. For at vise tilstrækkeligheden antages nu at søjlerne $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ er lineært uafhængige. Som vist tidligere (side III, 4, 17 - 19) danner de n lineært uafhængige talsæt $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ en basis for det n -dimensionale talrum L^n , d.v.s. hvert n -talsæt $\underline{b}$, som tænkes skrevet som en søjlematrix, kan på en og kun een måde skrives som en linearkombination af dem:

$$\underline{a}_1 y_1 + \dots + \underline{a}_n y_n = \underline{b}.$$

Denne ligning er ikke andet end et lineært inhomogent lignings-system (ih) (side III, 4, 12) bestående af n ligninger med n ubekendte, som altså under den gjorte forudsætning har en og kun een løsning. Systemet kan skrives

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{b}}.$$

Er $\underline{\underline{B}}$ en vilkårlig given $(n \times p)$ -matrix med søjlerne $\underline{\underline{b}}_1, \dots, \underline{\underline{b}}_p$, har altså hver af matrixligningerne

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{Y}}_1 = \underline{\underline{b}}_1, \dots, \underline{\underline{A}}\underline{\underline{Y}}_p = \underline{\underline{b}}_p$$

en og kun een løsning henholdsvis $\underline{\underline{Y}}_1, \dots, \underline{\underline{Y}}_p$. Betegnes $(n \times p)$ -matricen bestående af disse søjler med $\underline{\underline{Y}}$, kan de p matrixligninger sammenfattes til $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{B}}$. Når søjlerne i $\underline{\underline{A}}$ er lineært uafhængige, har denne matrixligning altså en og kun een løsning $\underline{\underline{Y}}$. Anvendes dette specielt på $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}}$, ses, at der findes en $(n \times n)$ -matrix $\underline{\underline{Y}}$, således at $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{E}}$. For at vise, at der for denne matrix også gælder $\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$, multipliceres ligningen $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{E}}$ med $\underline{\underline{A}}$ fra højre, hvilket giver $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$. Denne ligning omskrives til

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{O}}.$$

Da ligningen $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{O}}$, hvor $\underline{\underline{X}}$ og $\underline{\underline{O}}$ er $(n \times n)$ -matricer, kun har een løsning, nemlig $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{O}}$, sluttet, at $\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{O}}$, d.v.s. $\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$ som påstået. Dermed er sætningen bevist.

Da den transponerede til en regulær matrix $\underline{\underline{A}}$, som vist ovenfor, også er regulær, kan sluttet, at en $(n \times n)$ -matrix er regulær, hvis og kun hvis dens rækker er lineært uafhængige talsæt.

Idet vi vender tilbage til koordinattransformationerne, betragter vi som før to baser $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$ for et n -dimensionalt vektorrum $(V, +, L)$. Tillader man sig også at bruge matricer med vektorer som elementer, kan ligningerne (side III, 6,2), som giver de oprindelige grundvektorer $\underline{e}_i$ udtrykt som linearkombinationer af de nye $\underline{f}_j$, sammenfattes til matrixligningen

$$(\underline{e}_1 \ \dots \ \underline{e}_n) = (\underline{f}_1 \ \dots \ \underline{f}_n) \underline{T},$$

hvor matricen $\underline{T} = (t_{ij})$ er regulær, idet dens søjler er koordinatsættene for de lineært uafhængige vektorer $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ og følgende lineært uafhængige. Endvidere er

$$(\underline{v}) = (\underline{e}_1 \ \dots \ \underline{e}_n) \underline{v} \begin{smallmatrix} (e) \\ | \end{smallmatrix} = (\underline{f}_1 \ \dots \ \underline{f}_n) \underline{v} \begin{smallmatrix} (f) \\ | \end{smallmatrix}$$

fremstillingerne af vektoren $\underline{v}$ som linearkombinationer af de to sæt basisvektorer. På venstre side står (1×1) -matricen, hvis eneste element er vektoren $\underline{v}$. I stedet for $(\underline{v})$ kan man også skrive $\underline{v}$.

Hvad angår regning med matricer, hvis elementer er vektorer, bemærkes følgende: To $(m \times n)$ -matricer bestående af vektorer fra samme vektorrum $(V, +, L)$ kan adderes, en sådan matrix kan multipliceres med et tal fra L , og det følger umiddelbart af de for vektorrummet $(V, +, L)$ gyldige regler, at også disse matricer danner et vektorrum over L . Definitionen af et produkt af to matricer kan uden videre overføres til det tilfælde, hvor een af faktorerne er en matrix, hvis elementer er vektorer. En $(n \times p)$ -matrix af vektorer kan altså multipliceres med en $(m \times n)$ -talmatrix fra venstre og en $(p \times q)$ -talmatrix fra højre. Resultatet er i begge tilfælde en vektormatrix, og denne kan igen multipliceres med passende talmatricer, o.v.s. Man kan altså sige, at produktet af flere tal- og vektormatricer kan dannes, når de nødvendige betingelser vedrørende række- og søjleantal er opfyldt og højst een af dem er en vektormatrix. Den associative lov er også gyldig her,

idet den regning, ved hvilken den blev bevist (side III, 6, 7), bevarer sin gyldighed, når elementerne i een af de tre matricer er vektorer. Begreberne "regulær matrix" og "invers matrix" defineres ikke for vektormatricer.

Af den første af ovenstående matrixligninger fås ved multiplikation med $\underline{\underline{T}}^{-1}$ fra højre

$$(\underline{f}_1 \dots \underline{f}_n) = (\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n) \underline{\underline{T}}^{-1}$$

eller transponeret

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_n \end{pmatrix} = (\underline{\underline{T}}^{-1})' \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \vdots \\ \underline{e}_n \end{pmatrix},$$

hvilket giver de nye grundvektorer som linearkombinationer af de gamle. For en vektors koordinater i det nye system udtrykt ved dets koordinater i det gamle system blev fundet (side III, 6, 8)

$$(2) \quad \underline{v} \Big|^{(f)} = \underline{\underline{T}} \underline{v} \Big|^{(e)}.$$

Man ser altså, at der til hver overgang fra et givet koordinatsystem $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ i et n -dimensionalt vektorrum til et nyt svarer en bestemt regulær $(n \times n)$ -matrix $\underline{\underline{T}}$, ved hjælp af hvilken de nye basisvektorer kan findes ud fra de gamle efter formel (1) og en vektors nye koordinater ud fra dens gamle efter formel (2). Omvendt, er der givet en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ samt en regulær $(n \times n)$ -matrix $\underline{\underline{T}}$ med elementer fra L , vil matricen $(\underline{\underline{T}}^{-1})'$ eksistere, være regulær og altså have lineært uafhængige søjler. Ved (1) bestemmes da n lineært uafhængige vektorer $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$, altså en basis, og (2) giver en vektors koordinater i denne basis.

Gennemløber $\underline{v}$ vektorrummet V , vil talsættet $\underline{v} \Big|^{(e)}$ gennemløbe hele talrummet L^n , og ved (2) er der givet en enentydig afbildning af dette talrum på sig selv. Da $\underline{\underline{T}}$ jo er regulær, findes der til hvert talsæt $\underline{v} \Big|^{(f)}$ et og kun eet talsæt $\underline{v} \Big|^{(e)}$, til hvilket det svarer, nemlig $\underline{\underline{T}}^{-1} \underline{v} \Big|^{(f)}$.

Øvelser til kap. III, 6.

- 1) Lad $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ og $(0; \underline{f}_1, \underline{f}_2)$ være to affine koordinatsystemer i planen E_2 , således at

$$\underline{f}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2, \quad \underline{f}_2 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2.$$

Find $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$ som linearkombinationer af $\underline{f}_1$ og $\underline{f}_2$.

En linie har i koordinatsystemet $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ parameterfremstillingen

$$x_1 = 3 - t, \quad x_2 = -2 + 2t.$$

Omregn denne til koordinatsystemet $(0; \underline{f}_1, \underline{f}_2)$.

Lad Q betegne punktet med koordinatsættet $(3, -4)$ i systemet $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Angiv liniens parameterfremstilling i koordinatsystemet $(Q; \underline{f}_1, \underline{f}_2)$.

- 2) I et tredimensionalt vektorrum $(V, +, L)$ er givet et koordinatsystem $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Vis, at de tre vektorer

$$\underline{f}_1 = \underline{e}_1 + a\underline{e}_2 + b\underline{e}_3, \quad \underline{f}_2 = \underline{e}_2 + c\underline{e}_2, \quad \underline{f}_3 = \underline{e}_3,$$

hvor a, b, c er givne tal fra L , danner en basis.

Find koordinaterne til en vilkårlig vektor $\underline{v}$ i koordinatsystemet $(\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3)$ udtrykt ved dens koordinater i systemet $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Find også omvendt de sidstnævnte koordinater udtrykt ved de førstnævnte.

- 3) I rummet E_3 er valgt et koordinatsystem $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. To planer har i dette koordinatsystem parameterfremstillingerne

$$\begin{array}{ll} x_1 = 2 + s' & y_1 = 3 + 2t' \\ x_2 = s' - s'' & y_2 = 1 + 2t'' \\ x_3 = 1 - s'' & y_3 = 1 - 2t' + 2t''. \end{array}$$

Vis, at de er identiske. Til et punkt i denne plan svarer altså såvel et parameterpar (s', s'') i den første som et parameterpar (t', t'') i den anden parameterfremstilling. Find t' og t'' udtrykt ved s' og s'' .

- 4) Beregn alle produkter med to faktorer, som kan dannes af matricerne

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \underline{C} = (1 \ -1 \ 1), \underline{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 5) Beregn matrixproduktet $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, hvor a, b, c, d betegner vilkårlige tal.

- 6) Beregn de indbyrdes forskellige potenser $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^p$, hvor $p = 0, 1, 2, \dots$. Vis, at disse potenser danner en gruppe med matrixmultiplikationen som komposition.

- 7) Beregn produkterne $\underline{A}_{t=s}$ og $\underline{A}_{t=t'}$, $s, t \in \mathbb{R}$, hvor

$$\underline{A}_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Vis, at matricerne $\underline{A}_t, t \in \mathbb{R}$, med matrixkompositionen som komposition danner en gruppe, der er homomorft billede af gruppen $(\mathbb{R}, +)$.

- 8) Reducer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \delta_{ji}$ og $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \delta_{ij}$, hvor δ_{ij} er Kronecker-symbolet.

Reducer også $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ij} \delta_{kl} a_{jk}$, hvor $\underline{A} = (a_{jk})$ er en $(n \times n)$ -matrix, og omskriv den fremkommende ligning til en matrixligning.

- 9) Ved en diagonalmatrix forstås en kvadratisk matrix $\underline{D} = (d_{ij})$, hvor $d_{ij} = 0$ for $i \neq j$.

Multipliser en vilkårlig $(m \times n)$ -matrix med en diagonalmatrix
1) fra venstre, 2) fra højre.

- 10) Er $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ en $(n \times n)$ -matrix, forstås ved dens spor (engelsk og fransk: trace) tallet $\text{tr } \underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Vis, at der for en $(m \times n)$ -matrix $\underline{\underline{B}}$ og en $(n \times m)$ -matrix $\underline{\underline{C}}$ gælder $\text{tr}(\underline{\underline{BC}}) = \text{tr}(\underline{\underline{CB}})$.

- 11) Vis, at der for to vilkårlige $(m \times n)$ -matricer $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ gælder $(\underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{A}}' \pm \underline{\underline{B}}'$ og $(k\underline{\underline{A}})' = k\underline{\underline{A}}'$ for hvert tal k .

- 12) En kvadratisk matrix $\underline{\underline{B}}$ kaldes symmetrisk, hvis den stemmer overens med sin transponerede, altså hvis $\underline{\underline{B}}' = \underline{\underline{B}}$. En kvadratisk matrix $\underline{\underline{C}}$ kaldes skævsymmetrisk, hvis $\underline{\underline{C}}' = -\underline{\underline{C}}$ (d.v.s. $(-1)\underline{\underline{C}}$). Angiv eksempler på symmetriske og skævsymmetriske (2×2) - og (3×3) -matricer, som ikke er nulmatricer.

Vis, at $\underline{\underline{AA}}'$, hvor $\underline{\underline{A}}$ er en vilkårlig matrix, er symmetrisk.

Undersøg, om der gælder $\underline{\underline{AA}}' = \underline{\underline{A}}' \underline{\underline{A}}$ for hver kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$.

Vis, at hvis $\underline{\underline{A}}$ er en vilkårlig $(m \times n)$ -matrix og $\underline{\underline{B}}$ en symmetrisk (skævsymmetrisk) $(n \times n)$ -matrix, vil $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}'$ være symmetrisk (skævsymmetrisk).

Undersøg om matricerne $\underline{\underline{BC}} + \underline{\underline{CB}}$ og $\underline{\underline{BC}} - \underline{\underline{CB}}$, hvor $\underline{\underline{B}}$ er en symmetrisk og $\underline{\underline{C}}$ en skævsymmetrisk $(n \times n)$ -matrix, er symmetriske eller skævsymmetriske.

Vis, at hver kvadratisk matrix på en og kun een måde kan fremstilles som en sum af en symmetrisk og en skævsymmetrisk matrix.

- 13) Vis, at der til en given $(n \times n)$ -matrix $\underline{\underline{A}}$ med elementer tilhørende tallegemet L findes tal $c_0, c_1, c_2, \dots, c_p$ fra L , hvor $p \leq n^2$,

således at

$$c_0 \underline{\underline{E}} + c_1 \underline{\underline{A}} + c_2 \underline{\underline{A}}^2 + \dots + c_p \underline{\underline{A}}^p = \underline{\underline{0}}.$$

- 14) Med $\underline{\underline{E}}_{\alpha\beta}$ betegnes den $(m \times n)$ -matrix, hvis elementer alle er lig 0 med undtagelse af elementet i α -te række og β -te søjle, som er lig 1.

Vis, at matricerne $\underline{\underline{E}}_{\alpha\beta}$, $\alpha = 1, \dots, m$; $\beta = 1, \dots, n$, danner en basis for vektorrummet $(M_{m,n}, +, L)$ af $(m \times n)$ -matricer med elementer fra tallegemet L .

Find for $m = n$ matrixprodukterne $\underline{\underline{E}}_{\alpha\beta} \underline{\underline{P}}$ og $\underline{\underline{P}} \underline{\underline{E}}_{\alpha\beta}$, hvor $\underline{\underline{P}} = (p_{ij})$ er en vilkårlig $(n \times n)$ -matrix.

Bestem alle $(n \times n)$ -matricer $\underline{\underline{P}}$, der hver er ombyttelig med alle $(n \times n)$ -matricer $\underline{\underline{A}}$, altså således at $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}} \underline{\underline{A}}$ for alle disse matricer $\underline{\underline{A}}$. (Betragt eventuelt først $n = 2$.)

- 15) Find en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en (2×2) -matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ har en invers, og angiv denne for det tilfælde, at betingelsen er opfyldt. (Se øv. 5.)
- 16) Under hvilke betingelser har en diagonalmatrix en invers, og hvorledes bestemmes denne, når betingelsen er opfyldt.
- 17) Vis, at hvis en symmetrisk (skæv-symmetrisk) matrix (jfr. øv. 12) har en invers, vil denne også være symmetrisk (skæv-symmetrisk).
- 18) Vis, at en skævsymmetrisk (3×3) -matrix ikke har nogen invers. (Vis, at søjlerne er lineært afhængige). Søg en generalisation.

19) En $(n \times n)$ -matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$, hvis elementer er reelle tal, siges at være en ortogonal matrix, hvis $\underline{\underline{A}}' \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$.

a) Angiv relationerne, som består mellem elementerne a_{ij} i en ortogonal matrix, og vis, at $|a_{ij}| \leq 1$.

b) Vis, at $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ for hvert reelt tal t er en ortogonal matrix.

c) Bestem tallene a_{13} , a_{23} , a_{33} således, at matricen

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -4/13 & a_{13} \\ 0 & 12/13 & a_{23} \\ 4/5 & -3/13 & a_{33} \end{pmatrix}$$

bliver ortogonal.

d) Vis, at hver ortogonal matrix er regulær. (Benyt, at søjlerne i en matrix $\underline{\underline{A}}$ er lineært uafhængige, hvis (og kun hvis) man af $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}}$, hvor $\underline{\underline{x}}$ er en søjlematrix, kan slutte, at $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}}$.)

e) Vis, at hvis matricen $\underline{\underline{A}}$ er ortogonal, er også dens transponerede $\underline{\underline{A}}'$ ortogonal.

f) Vis, at de ortogonale $(n \times n)$ -matricer danner en undergruppe $O(n, \mathbb{R})$ i den generelle lineære gruppe $GL(n, \mathbb{R})$.

20) Lad $\underline{\underline{S}}$ betegne en skævsymmetrisk matrix, altså en matrix, for hvilken $\underline{\underline{S}}' = -\underline{\underline{S}}$, således at $\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{S}}$ er regulær. Vis, at $\underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{S}})(\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{S}})^{-1}$ er ortogonal. Find $\underline{\underline{A}}$ for $\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{pmatrix}$, hvor s er et reelt tal.

21) En $(n \times n)$ -matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$, hvis elementer er komplekse tal, siges at være unitær, hvis $\overline{\underline{\underline{A}}}^{\prime} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$. Her betegner

$\overline{\underline{A}}$ den til $\underline{A}$ konjugeret komplekse matrix $(\overline{a}_{ij})$. En unitær matrix med reelle elementer er ortogonal. Søg at generalisere a), d), e), f) i øv. 19 til unitære matricer.

22) Angiv en (4×4) -matrix bestående af tallene $\frac{1}{2}$ og $-\frac{1}{2}$, som er ortogonal og symmetrisk (d.v.s. lig med sin transponerede).

23) Lad $z_i = f_i(y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, m$, være et sæt af reelle funktioner, der er definerede og differentiable i en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$. Ved sættets funktionalmatrix forstås $(m \times n)$ -matricen $(\frac{\partial z_i}{\partial y_j})$. Er $y_j = g_j(x_1, \dots, x_p)$, $j = 1, \dots, n$, et sæt af funktioner, som er definerede og differentiable i en åben delmængde af $\mathbb{R}^p$ og hvis værdisæt $(y_1, \dots, y_n)$ tilhører definitionsmængden for funktionerne f_i , kan man danne sættet af sammensatte funktioner

$$z_i = f_i(g_1(x_1, \dots, x_p), \dots, g_n(x_1, \dots, x_p)).$$

Vis, at

$$\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_j}\right) \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right).$$

24) Lad $\underline{A}$ være en (2×2) -matrix med elementer fra et tallegeme L . Vis, at der ikke findes nogen (2×2) -matrix $\underline{X}$ med elementer fra L , således at $\underline{AX} - \underline{XA} = \underline{E}$.

25) For et vilkårligt tal x og et positivt tal p defineres

$$\binom{x}{p} = \frac{x(x-1) \cdots (x-p+1)}{1 \cdot 2 \cdots p}, \binom{x}{0} = 1.$$

Vis, at $\underline{A}^2 = \underline{E}$, hvor $\underline{A}$ betegner $((n+1) \times (n+1))$ -matricen $\left((-1)^j \binom{j}{i}\right)_{i,j=0,1,\dots,n}$.

26) Vis, at $(n \times n)$ -matricen

$$\underline{A} = \left(n^{-1/2} \exp(2\pi i p q / n)\right)_{p,q=0,1,\dots,n-1},$$

hvor i betegner den imaginære enhed og n et givet positivt helt tal, er unitær (jfr. øv. 21).

- 27) Matrixadditionen og matrixmultiplikationen er kompositionsregler inden for mængden af alle reelle (2×2) -matricer (a_{ij}) , der opfylder betingelserne $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = -a_{21}$. Eftervis dette, og vis at $a + ib \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ er en isomorf afbildning af de komplekse tals legeme på denne mængde af matricer. (Jfr. side II, 1, 9-10.)
- 28) Lad $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ være en talmatrix, og for hvert tal $p \in \mathbb{N}$ sæt $\underline{A}^p = \begin{pmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{pmatrix}$. Opstil rekursionsformler til bestemmelse af $a(p), b(p), c(p), d(p)$ (d.v.s. formler som tillader at beregne disse tal, når a, b, c, d og $a(p-1), b(p-1), c(p-1), d(p-1)$ kendes).
Find derefter $a(p), b(p), c(p), d(p)$ udtrykt ved a, b, c og d .
Bestem samtlige reelle (2×2) -matricer $\underline{X}$, som tilfredsstiller ligningen $\underline{X}^p = \underline{X}$, hvor $p \in \mathbb{N}$ er givet.

Rettelser til ovenstående øvelser:

Øv. 2), linie 3: Læs $\underline{f}_2 = \underline{e}_2 + c\underline{e}_3$ i stedet for $\underline{f}_2 = \underline{e}_2 + c\underline{e}_2$.

Øv. 13), linie 2: Læs "hvor $c_p \neq 0$ og $p \leq n^2$ " i stedet for "hvor $p \leq n^2$ ".

Øv. 18), linie 2-3: Stryk "Søg en generalisation".

Rettelse til III, 6, øv. 28.

De tre sidste linier erstattes med:

Find derefter $a(p)$, $b(p)$, $c(p)$, $d(p)$ udtrykt ved p , a , b og d , når det er givet, at $c = 0$.

Bestem samtlige reelle matricer $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, som tilfredsstiller ligningen $\underline{A}^p = \underline{A}$, hvor $p \in \mathbb{N}$ er givet.

Rettelse til III, 6, øv. 19 c).

Læs: $3/13$ i stedet for $-3/13$.

§ 7. Lineære afbildninger.

Lad der være givet to vektorrum $(U, +, L)$ og $(V, +, L)$ over det samme legeme L . (De to additioner plejer man at betegne på samme måde, skønt de jo er kompositionsforskrifter i forskellige mængder.) Ved en homomorf afbildning $f: (U, +, L) \rightarrow (V, +, L)$ vil man forstå en afbildning, der opfylder følgende betingelser:

$$LA1: \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \quad (f(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = f(\underline{u}_1) + f(\underline{u}_2)).$$

$$LA2: \forall_L a \quad \forall_U \underline{u} \quad (f(a\underline{u}) = a f(\underline{u})).$$

(Jfr. side II, 1, 9, hvor det dog drejede sig om mængder organiseret ved to indre kompositionsforskrifter.) Homomorfe afbildninger af vektorrum kaldes i reglen lineære afbildninger, lineære vektorfunktioner, tensorer eller (især, når det drejer sig om uendelig-dimensionale vektorrum) lineære operatorer. Sådanne afbildninger har en række vigtige egenskaber.

Billedet $f(U')$ af et underrum U' i $(U, +, L)$ er et underrum i $(V, +, L)$; thi LA1 og LA2 viser, at hvis $\underline{v}_1 = f(\underline{u}_1)$, $\underline{v}_2 = f(\underline{u}_2)$ og $\underline{v} = f(\underline{u})$ tilhører $f(U')$, d.v.s. $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u} \in U'$, vil $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = f(\underline{u}_1 + \underline{u}_2)$ og $a\underline{v} = f(a\underline{u})$ ligeledes tilhøre $f(U')$, da $\underline{u}_1 + \underline{u}_2, a\underline{u} \in U'$. (Jfr. karakteriseringen af underrum side III, 4, 3 - 4).

Ved induktion sluttes af LA 1 - 2, at

$$f(a_1 \underline{u}_1 + \dots + a_p \underline{u}_p) = a_1 f(\underline{u}_1) + \dots + a_p f(\underline{u}_p)$$

for vilkårlige vektorer $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p$ fra U og skalarer $a_1, \dots, a_p$ fra L . Idet

$$f(\underline{0}) = f(0\underline{0}) = 0f(\underline{0}) = \underline{0},$$

(hvor der er brugt samme betegnelse for nulvektorerne i U og i V), ses, at lineært afhængige vektorer afbildes i lineært afhængige, med andre ord, hvis billedvektorerne $f(\underline{u}_1), \dots, f(\underline{u}_p)$ af vektorer i U er lineært uafhængige, må vektorerne $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p$ være lineært uafhængige. (Derimod kan lineært uafhængige vektorer have lineært afhængige billedvektorer). Heraf kan sluttes videre, at for hvert underrum U' i $(U, +, L)$ gælder

$$\dim f(U') \leq \dim U'.$$

(Hvis $\dim f(U') = \infty$, skal dette betyde, at også $\dim U' = \infty$). Findes der nemlig p lineært uafhængige vektorer i $f(U')$ må der ifølge det sagte findes mindst p lineært uafhængige vektorer i U' .

Eksempler på lineære afbildninger:

1) Lad U være talrummet L^n og V talrummet L^m , og lad der være givet en $(m \times n)$ -matrix $\underline{A}$ med elementer fra L . Er da $\underline{x}_|$ et talsæt fra L^n skrevet som søjlematrix vil

$$\underline{y}_| = \underline{A}\underline{x}_|$$

være en $(m \times 1)$ -matrix, altså et talsæt tilhørende L^m . Ved denne matrixligning bestemmes altså en afbildning $\underline{x}_| \rightarrow \underline{y}_|$ af L^n ind i L^m . Denne afbildning er lineær; thi er $\underline{x}_|_1, \underline{x}_|_2 \in L^n$ og

$k_1, k_2 \in L$, fås

$$\underline{A}(k_1 \underline{x}_|_1 + k_2 \underline{x}_|_2) = k_1 \underline{A}\underline{x}_|_1 + k_2 \underline{A}\underline{x}_|_2.$$

2) Lad $(U_1 +, \mathbb{R})$ være vektorrummet bestående af alle reelle konvergente talfølger og $V = \mathbb{R}$. Ved

$$(x_1, x_2, \dots) \longrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$$

bestemmes ifølge regnereglerne for konvergente talfølger en lineær afbildning af $(U, +, \mathbb{R})$ på $(\mathbb{R}, +, \mathbb{R})$.

3) Lad $(U, +, \mathbb{R}) = (V, +, \mathbb{R})$ være vektorrummet af alle i et interval definerede og kontinuerte reelle funktioner $\varphi(t)$. Er da a et fast tal i intervallet, bestemmes ved

$$\varphi(t) \longrightarrow \int_a^t \varphi(\tau) d\tau$$

en lineær afbildning af $(U, +, \mathbb{R})$ ind i sig selv.

4) Lad der være givet $p + 1$ reelle funktioner $\alpha_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, p$, af en reel variabel t , definerede i et interval J . Lad endvidere $(U, +, \mathbb{R})$ og $(V, +, \mathbb{R})$ betegne henholdsvis vektorrummet af de i J p gange differentiable og vektorrummet af alle i J definerede funktioner $\varphi(t)$. Ved

$$\varphi(t) \longrightarrow \sum_{i=0}^p \alpha_i(t) \frac{d^i \varphi(t)}{dt^i}$$

(hvor der ved $d^0 \varphi(t)/dt^0$ forstås $\varphi(t)$) defineres da en lineær afbildning af $(U, +, \mathbb{R})$ ind i $(V, +, \mathbb{R})$. En sådan afbildning siges at være en sædvanlig lineær differentialoperator af p -te orden. (Tilsvarende afbildninger af vektorrum bestående af funktioner af flere variable betegnes som partielle lineære differentialoperatorer.)

Lad $f: (U, +, L) \rightarrow (V, +, L)$ være en lineær afbildning. Mængden af de vektorer $\underline{u} \in U$, som afbildes i nulvektoren $\underline{0} \in V$, udgør et underrum $(K, +, L)$ i $(U, +, L)$, som kaldes afbildningens kerne eller nulrum. Er nemlig $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ og $\underline{u}$ vektorer i K og $k \in L$, har man

$$f(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = f(\underline{u}_1) + f(\underline{u}_2) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}, \quad f(k\underline{u}) = kf(\underline{u}) = k\underline{0} = \underline{0},$$

altså $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in K$ og $k\underline{u} \in K$, og heraf følger påstanden (jfr. side III, 4, 3).

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en lineær afbildning $f: (U, +, L) \rightarrow (V, +, L)$ er enentydig, er at kernen K kun består af nulvektoren.

Bevis: At betingelsen er nødvendig, er indlysende, da jo nulvektoren i V ved en enentydig afbildning ikke kan have mere end eet originalelement. At den er tilstrækkelig, ses således:

Antag, at $f(\underline{u}_1) = f(\underline{u}_2)$. Da er

$$f(\underline{u}_2 - \underline{u}_1) = f(\underline{u}_2 + (-1)\underline{u}_1) = f(\underline{u}_2) + (-1)f(\underline{u}_1) = f(\underline{u}_2) - f(\underline{u}_1) = \underline{0}.$$

Dette viser, at $\underline{u}_2 - \underline{u}_1 \in K$. Ifølge forudsætningen er altså

$$\underline{u}_2 - \underline{u}_1 = \underline{0}, \text{ d.v.s. } \underline{u}_1 = \underline{u}_2 \text{ som påstået.}$$

Er $f:(U,+,L)$ ind i $(V,+,L)$ en enentydig lineær afbildning, er også den omvendte f^{-1} lineær, lineært uafhængige vektorer afbildes i lineært uafhængige, og for hvert underrum U' i U gælder $\dim f(U') = \dim U'$.

Bevis: Lad $\underline{v}_1 = f(\underline{u}_1)$, $\underline{v}_2 = f(\underline{u}_2)$ og $\underline{v} = f(\underline{u})$ være vilkårlige vektorer i $f(U)$. Da fås ved hjælp af LA1-2

$$\begin{aligned} f^{-1}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) &= f^{-1}(f(\underline{u}_1) + f(\underline{u}_2)) = f^{-1}(f(\underline{u}_1 + \underline{u}_2)) \\ &= \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = f^{-1}(\underline{v}_1) + f^{-1}(\underline{v}_2) \end{aligned}$$

og for en vilkårlig skalar $k \in L$

$$f^{-1}(k\underline{v}) = f^{-1}(kf(\underline{u})) = f^{-1}(f(k\underline{u})) = k\underline{u} = kf^{-1}(\underline{v}).$$

Dermed er vist, at f^{-1} opfylder LA1-2. At lineært uafhængige vektorer i U ved f afbildes i lineært uafhængige vektorer i V , følger af, at lineært afhængige vektorer i V ved f^{-1} afbildes i lineært afhængige vektorer i U . At $\dim f(U') = \dim U$, er her-
efter indlysende.

Sætningen udsiger blandt andet, at en nødvendig betingelse for en lineær vektorfunktions enentydighed er, at hvert underrum afbildes på et underrum af samme dimension. Denne betingelse er imidlertid også tilstrækkelig. Ifølge den foregående sætning er det endog tilstrækkeligt, at et bestemt underrum, nemlig kernen K , har samme dimension 0 som sit billedrum.

Kernerne ved de ovenfor nævnte eksempler på lineære afbildninger er:

- 1) Løsningsrummet til det lineære homogene ligningssystem $\underline{Ax} = \underline{0}$.
- 2) Mængden af følger, der konvergerer mod 0.
- 3) Funktionen, der er konstant lig 0 i intervallet. Afbildningen er altså enentydig i dette tilfælde.
- 4) Mængden af løsninger til differentiaalligningen
$$\sum_{i=0}^p \alpha_i(t) \frac{d^i \varphi(t)}{dt^i} = 0.$$

Er $(U, +, L)$, $(V, +, L)$ og $(W, +, L)$ vektorrum og $f: (U, +, L) \text{ ind i } (V, +, L)$ og $g: (V, +, L) \text{ ind i } (W, +, L)$ lineære afbildninger, vil også afbildningen $g \circ f: (U, +, L) \text{ ind i } (W, +, L)$ være lineær. For $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u} \in U$ og $k \in L$ fås nemlig

$$\begin{aligned} g(f(\underline{u}_1 + \underline{u}_2)) &= g(f(\underline{u}_1) + f(\underline{u}_2)) = g(f(\underline{u}_1)) + g(f(\underline{u}_2)), \\ g(f(k\underline{u})) &= g(kf(\underline{u})) = kg(f(\underline{u})). \end{aligned}$$

Samtlige enentydige lineære afbildninger af et vektorrum $(U, +, L)$ på sig selv danner en transformationsgruppe. Dette følger af, at den sammensatte af to sådanne afbildninger er af samme art, at den associative lov gælder for sammensætning af afbildninger, at den identiske afbildning er lineær, og at den inverse til en lineær afbildning også er lineær.

Lad $(U, +, L)$ være et vektorrum af den endelige dimension n og $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ en basis for det. Er da $(V, +, L)$ et vilkårligt vektorrum og $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vilkårligt opgivne vektorer i V , findes der en og kun en lineær afbildning $f: (U, +, L) \text{ ind i } (V, +, L)$, således at $f(\underline{e}_i) = \underline{v}_i$, $i = 1, \dots, n$.

Bevis: At der ikke kan eksistere mere end en sådan lineær afbildning, ses på følgende måde: Er $\underline{u}$ en vilkårlig vektor i U ,

findes der en og kun een fremstilling

$$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + \dots + u_n \underline{e}_n.$$

Ved en lineær afbildning f , der opfylder kravet, må der følgelig til $\underline{u}$ svare vektoren

$$\begin{aligned} f(\underline{u}) &= f(u_1 \underline{e}_1 + \dots + u_n \underline{e}_n) \\ &= u_1 f(\underline{e}_1) + \dots + u_n f(\underline{e}_n) = u_1 \underline{v}_1 + \dots + u_n \underline{v}_n. \end{aligned}$$

Den eneste afbildning, der kan opfylde kravet bestemmes altså ved

$$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + \dots + u_n \underline{e}_n \longrightarrow u_1 \underline{v}_1 + \dots + u_n \underline{v}_n.$$

På den anden side ses det let, at denne afbildning har de forlangte egenskaber.

Antag nu, at også $(V, +, L)$ er af endelig dimension. Er denne lig m , og er $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ en basis for dette vektorrum, kan billedvektorerne $\underline{v}_i = f(\underline{e}_i)$ på en og kun een måde skrives som linearkombinationer

$$\begin{aligned} f(\underline{e}_1) &= a_{11} \underline{f}_1 + \dots + a_{m1} \underline{f}_m \\ &\vdots \\ f(\underline{e}_n) &= a_{1n} \underline{f}_1 + \dots + a_{mn} \underline{f}_m. \end{aligned}$$

Til hver lineær afbildning $f : (U, +, L) \text{ ind i } (V, +, L)$ hører der altså en $(m \times n)$ -matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

hvis søjler er koordinatsættene i koordinatsystemet $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ for billedvektorerne $f(\underline{e}_i)$ af basisvektorerne $\underline{e}_i$. Den lige beviste sætning viser, at der til enhver $(m \times n)$ -matrix med elementer fra L hører en og kun een lineær afbildning $f : (U, +, L) \text{ ind i } (V, +, L)$, såfremt der er valgt baser i de to vektorrum.

Betegnes koordinatsættet for en vektor $\underline{u} \in U$ skrevet som søjle med $\underline{u}_|$ og koordinatsættet for vektoren $\underline{v} = f(\underline{u}) \in V$ skrevet som søjle med $\underline{v}_|$, har man ifølge ovenstående matrixligningerne

$$\begin{aligned}(\underline{v}) &= (\underline{f}_1 \dots \underline{f}_m) \underline{v}_| = (f(\underline{e}_1) \dots f(\underline{e}_n)) \underline{u}_|, \\ (f(\underline{e}_1) \dots f(\underline{e}_n)) &= (\underline{f}_1 \dots \underline{f}_m) \underline{A},\end{aligned}$$

hvoraf

$$(\underline{f}_1 \dots \underline{f}_m) \underline{v}_| = (\underline{f}_1 \dots \underline{f}_m) \underline{A} \underline{u}_|.$$

I denne ligning er såvel den venstre som den højre side en linearkombination af vektorerne $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m$. Koefficienterne er henholdsvis elementerne i søjlen $\underline{v}_|$ og i søjlen $\underline{A} \underline{u}_|$. Da $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m$ er lineært uafhængige, kan man altså slutte, at

$$\underline{v}_| = \underline{A} \underline{u}_|.$$

Herved bestemmes ifølge eksempel 1) en lineær afbildning af talrummet $(L^n, +, L)$ ind i $(L^m, +, L)$. Sammenfattende kan man altså sige:

Lad $(U, +, L)$ være et n -dimensionalt og $(V, +, L)$ et m -dimensionalt vektorrum. Er der valgt en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ for U og en basis $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ for V , hører der til hver lineær afbildning $f: (U, +, L) \rightarrow (V, +, L)$ en $(m \times n)$ -matrix $\underline{A}$ med elementer fra L , således at koordinatsættet $\underline{v}_|$ for billedvektoren $\underline{v} = f(\underline{u}) \in V$ er billedet af koordinatsættet $\underline{u}_|$ for $\underline{u} \in U$ ved den lineære afbildning $\underline{v}_| = \underline{A} \underline{u}_|$ af $(L^n, +, L)$ ind i $(L^m, +, L)$. Søjlerne i matricen $\underline{A}$ er koordinatsættene for billedvektorerne $f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n)$ i koordinatsystemet $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$.

Omvendt svarer der til en vilkårligt given $(m \times n)$ -matrix $\underline{A}$ en lineær afbildning af $(U, +, L)$ ind i $(V, +, L)$, nemlig den, ved hvilken $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ afbildes på de vektorer, som i koordinatsy-

stemet $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ har søjlerne i $\underline{A}$ som koordinatsæt.

Billedrummet $f(U)$ ved en lineær afbildning af det n -dimensionale vektorrum $(U, +, L)$ er et underrum i $(V, +, L)$, der frembringes af vektorsættet $(f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n))$, da jo hver billedvektor $\underline{v} = f(\underline{u})$, $\underline{u} \in U$, er en linearkombination af disse vektorer. Ifølge en tidligere sætning (side III, 4, 17) er altså

$$\dim f(U) = \text{rg}(f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n))$$

(hvor vektorsættets rang er defineret som maximaltallet af lineært uafhængige blandt sættes vektorer). Om denne dimension har man følgende sætning:

Er f en lineær afbildning af det n -dimensionale vektorrum $(U, +, L)$ ind i et vektorrum $(V, +, L)$, og er K afbildningens kerne, gælder

$$\dim K + \dim f(U) = n.$$

Bevis: I kernen K vælges en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k)$, hvor $k = \dim K$. Er $k = n$, afbildes alle vektorer $\underline{u}$ på $\underline{0}$, og man har $\dim f(U) = 0$ som påstået. Er $k < n$, kan der til denne basis føjes vektorer $\underline{e}_{k+1}, \dots, \underline{e}_n$, således at der fremkommer en basis for U . Det drejer sig om at vise, at maximaltallet af lineært uafhængige blandt vektorerne $f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n)$ er $n - k$. Nu er

$$f(\underline{e}_1) = \dots = f(\underline{e}_k) = \underline{0},$$

da $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ tilhører kernen. Påstanden kommer altså ud på, at de $n - k$ vektorer $f(\underline{e}_{k+1}), \dots, f(\underline{e}_n)$ er lineært uafhængige.

Nu er for vilkårlige tal $u_1, \dots, u_n$ fra L

$$\begin{aligned} & f(u_1 \underline{e}_1 + \dots + u_k \underline{e}_k + u_{k+1} \underline{e}_{k+1} + \dots + u_n \underline{e}_n) \\ &= f(u_{k+1} \underline{e}_{k+1} + \dots + u_n \underline{e}_n) = u_{k+1} f(\underline{e}_{k+1}) + \dots + u_n f(\underline{e}_n). \end{aligned}$$

At denne vektor er nulvektoren, vil sige, at vektoren

$$u_{k+1}e_{k+1} + \dots + u_n e_n$$

tilhører K og følgelig er en linearkombination af $e_1, \dots, e_k$.

Men da $e_1, \dots, e_n$ er lineært uafhængige, kan dette kun være tilfældet, hvis $u_{k+1} = \dots = u_n = 0$. Heraf sluttet, at $f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)$ er lineært uafhængige. Dermed er sætningen bevist.

Dimensionen af billedrummet $f(U)$ ved en lineær afbildning f kaldes også afbildningens rang.

Idet man ved en matrices søjlerang forstår rangen af sættet af dens søjler, altså maximaltallet af lineært uafhængige blandt søjlerne, vil rangen af en lineær afbildning af et n -dimensionalt vektorrum ind i et m -dimensionalt være lig med søjlerangen af den $(m \times n)$ -matrix, som den efter valg af baser i de to vektorrum bestemmes ved. Heraf og af den foregående sætning fås følgende resultat vedrørende dimensionen af løsningsrummet for et homogent lineært ligningssystem:

Er $\underline{A}$ en $(m \times n)$ -matrix, vil dimensionen af løsningsrummet for ligningssystemet $\underline{A}\underline{x} = \underline{0}$ med n ubekendte være lig $n - r$, hvor r er søjlerangen af matricen $\underline{A}$.

Er $r = n$, altså søjlerne i $\underline{A}$ lineært uafhængige, findes altså kun nullløsningen i overensstemmelse med et tidligere resultat (side III, 4, 11 - 12). Da søjlerne i $\underline{A}$ tilhører L^m , haves $r \leq m$. Er altså $m < n$, findes der altid egentlige løsninger.

Kernen K for en lineær afbildning $f: (U, +, L)$ ind i $(V, +, L)$ var defineret som originalmængden til nulvektoren $\underline{0}$ i V og kan derfor også betegnes med $f^{-1}(\underline{0})$. For en vilkårligt given vektor $\underline{d} \in V$ betragtes originalmængden $f^{-1}(\underline{d})$. Hvis $\underline{d}$ ikke tilhører billedrummet $f(U)$, er $f^{-1}(\underline{d}) = \emptyset$. Er $\underline{d} \in f(U)$, findes der altså en vektor $\underline{c} \in U$, for hvilken $f(\underline{c}) = \underline{d}$, fås for hver vektor $\underline{k} \in K$

$$f(\underline{c} + \underline{k}) = f(\underline{c}) + f(\underline{k}) = f(\underline{c}) = \underline{d}.$$

Sættes

$$\underline{c} + K = \{\underline{c} + \underline{k} \mid \underline{k} \in K\},$$

haves altså $\underline{c} + K \subseteq f^{-1}(\underline{d})$. På den anden side sluttes af $\underline{u}, \underline{c} \in f^{-1}(\underline{d})$, at $f(\underline{u} - \underline{c}) = f(\underline{u}) - f(\underline{c}) = \underline{d} - \underline{d} = \underline{0}$. Heraf ses, at $\underline{u} - \underline{c} \in K$, altså $\underline{u} \in \underline{c} + K$. Dette viser, at $f^{-1}(\underline{d}) \subseteq \underline{c} + K$, og følgelig

$$f^{-1}(\underline{d}) = \underline{c} + K.$$

Originalmængden $f^{-1}(\underline{d})$ til en vektor $\underline{d} \in V$ er enten tom eller et "siderum" til kernen K , d.v.s. den fås ved til samtlige vektorer i underrummet K at addere en fast (men vilkårlig) vektor $\underline{c} \in f^{-1}(\underline{d})$.

Anvendt på den ved en $(m \times n)$ -matrix $\underline{A}$ bestemte lineære afbildning af L^n ind i L^m giver dette den tidligere viste sætning om løsningsmængden for et inhomogent lineært ligningssystem (side III, 4, 13).

Anvendt på en lineær differentialoperator (side III, 7, 4, eksempel⁴) giver det sætningen, at samtlige løsninger til en inhomogen lineær differentiaalligning fås ved at addere een af dem til samtlige løsninger til den tilsvarende homogene differentiaalligning.

Lad der være givet tre vektorrum $(U, +, L)$, $(V, +, L)$ og $(W, +, L)$ af dimensionerne n, m og p , og lad der være valgt baser $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ og $(\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_p)$ for disse rum. Koordinatsættene for vektorerne $\underline{u} \in U$, $\underline{v} \in V$ og $\underline{w} \in W$ betegnes med $\underline{u}|$, $\underline{v}|$ og $\underline{w}|$. Er da $f: (U, +, L) \rightarrow (V, +, L)$ og $g: (V, +, L) \rightarrow (W, +, L)$ lineære afbildninger og $\underline{A}$ ($m \times n$) og $\underline{B}$ ($p \times m$) de tilsvarende matricer, haves $\underline{v}| = \underline{A}\underline{u}|$ og $\underline{w}| = \underline{B}\underline{v}|$, hvoraf

$$\underline{w}| = \underline{B}\underline{A}\underline{u}|$$

som den til $g \circ f$ svarende matrixligning. Ved sammensætning af lineære afbildninger multipliceres altså de tilsvarende matricer i samme orden.

Tilsvarende eller ved hjælp heraf besvares spørgsmålet om, hvorledes den til en lineær afbildning hørende matrix ændres ved koordinattransformationer i de to vektorrum. Lad $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ være to baser i det n -dimensionale vektorrum $(U, +, L)$ og $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ og $(\hat{\underline{f}}_1, \dots, \hat{\underline{f}}_m)$ to baser i det m -dimensionale vektorrum $(V, +, L)$. Med nærliggende betegnelser for koordinatsættene for vektorer $\underline{u} \in U$ og $\underline{v} \in V$ med hensyn til de nævnte baser haves

$$\hat{\underline{u}}| = \underline{S}\underline{u}|, \quad \hat{\underline{v}}| = \underline{T}\underline{v}|,$$

hvor $\underline{S}$ er en regulær ($n \times n$)-matrix og $\underline{T}$ en regulær ($m \times m$)-matrix (jfr. side III, 6, 14). Er nu $f: (U, +, L) \rightarrow (V, +, L)$ en lineær afbildning, som med hensyn til baserne $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ fremstilles ved matrixligningen

$$\underline{v}| = \underline{A}\underline{u}|,$$

fås

$$\hat{\underline{v}}| = \underline{T}\underline{A}\underline{S}^{-1}\hat{\underline{u}}|,$$

Ved passende valg af baserne kan den til en vilkårligt givne lineær afbildning hørende matrix $\underline{A}$ bringes på en særlig simpel "normalform". Lad r betegne afbildningens rang. Man vælger

en basis $(\hat{e}_{r+1}, \dots, \hat{e}_n)$ for afbildningens kerne K og supplerer den til en basis $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r, \hat{e}_{r+1}, \dots, \hat{e}_n)$ for U (jfr. side III, 4, 17). Vektorsættet $(f(\hat{e}_1), \dots, f(\hat{e}_n))$ vides at have rangen r . Da $f(\hat{e}_{r+1}) = \dots = f(\hat{e}_n) = \underline{0}$, må $\hat{f}_1 = f(\hat{e}_1), \dots, \hat{f}_r = f(\hat{e}_r)$ være lineært uafhængige. Sættet $(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_r)$ suppleres om fornødent til en basis $(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m)$ for V . Idet den til afbildningen hørende matrices søjler er koordinatsættene for vektorerne $f(\hat{e}_1), \dots, f(\hat{e}_n)$ i koordinatsystemet $(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m)$, fås for matricen

$$\underline{\hat{A}} = \begin{pmatrix} \underline{E}_{r,r} & \underline{0}_{r,n-r} \\ \underline{0}_{m-r,r} & \underline{0}_{m-r,n-r} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{E}_{r,r}$ betegner $(r \times r)$ -enhedsmatricen og $\underline{0}_{p,q}$ $(p \times q)$ -nulmatricen. Denne matrix betegnes i det følgende med $\underline{E}_{m,n}^{(r)}$. (Er f.eks. $r = m$, falder de to nederste nulmatricer naturligvis bort, og tilsvarende gælder for de andre grænsetilfælde $r = 0$ eller n .)

Heraf kan drages flere vigtige slutninger vedrørende matricer med elementer fra et givet tallegeme L :

Er $\underline{A}$ en vilkårlig $(m \times n)$ -matrix, findes der en regulær $(m \times m)$ -matrix $\underline{P}$ og en regulær $(n \times n)$ -matrix $\underline{Q}$, således at $\underline{PAQ} = \underline{E}_{m,n}^{(r)}$. Med ovenstående betegnelser vil nemlig $\underline{P} = \underline{T}$ og $\underline{Q} = \underline{S}^{-1}$ opfylde kravet.

Er $\underline{A}$ en $(m \times n)$ -matrix, $\underline{P}$ en vilkårlig regulær $(m \times m)$ -matrix og $\underline{Q}$ en vilkårlig regulær $(n \times n)$ -matrix, vil matricen $\underline{PAQ}$ have samme søjlerang som $\underline{A}$. Idet $\underline{T} = \underline{P}$ og $\underline{S} = \underline{Q}^{-1}$ opfattes som koordinattransformationsmatricer, vil nemlig $\underline{A}$ og $\underline{PAQ}$ kunne fortolkes som matricer hørende til den samme lineære afbildning. Begge matrices søjlerang er altså lig med denne afbildnings rang.

Det er indlysende, at den transponerede $\underline{E}_{m,n}^{(r)'} = \underline{E}_{n,m}^{(r)}$ til matricen $\underline{E}_{m,n}^{(r)}$ har samme søjlerang som denne. Idet man ved en matrices rækkerang forstår maximaltallet af lineært uafhængige blandt

dens rækker, gælder altså for matricen $\underline{E}_{m,n}^{(r)}$, at dens søjle- og rækkerang stemmer overens. Af ovenstående kan sluttes, at dette gælder for enhver matrix $\underline{A}$. Har $\underline{A}$ søjlerangen r og er $\underline{P}$ og $\underline{Q}$ regulære matricer, for hvilke $\underline{PAQ} = \underline{E}_{m,n}^{(r)}$, fås nemlig $\underline{Q}'\underline{A}'\underline{P}' = \underline{E}_{n,m}^{(r)}$. Da $\underline{P}'$ og $\underline{Q}'$ også er regulære, sluttes, at $\underline{A}'$ har samme søjlerang r som $\underline{A}$. Altså:

For enhver talmatrix $\underline{A}$ stemmer søjlerang og rækkerang overens, og dette tal kaldes matricens rang og betegnes med $\text{rg } \underline{A}$.

Særlige forhold gør sig gældende ved lineære afbildninger af et vektorrum $(U, +, L)$ ind i sig selv.

Har $(U, +, L)$ endelig dimension n , hører der til sådanne afbildninger $(n \times n)$ -matricer $\underline{A}$. Vælger man to baser i rummet og fremstiller originalvektorerne i den ene og billedvektorerne i den anden, gælder det ovenfor sagte naturligvis også i dette tilfælde. Man vil dog her almindeligvis foretrække at fremstille original- og billedvektorerne i den samme basis. Udføres en koordinattransformation med den regulære $(n \times n)$ -matrix $\underline{S}$, vil $\underline{A}$ nu blive erstattet med $\underline{SAS}^{-1}$. En $(n \times n)$ -matrix $\underline{B}$ siges at være regulær-ækvivalent eller ligedannet med $(n \times n)$ -matricen $\underline{A}$, hvis der findes en regulær $(n \times n)$ -matrix $\underline{S}$, således at $\underline{B} = \underline{SAS}^{-1}$. Skrives $\underline{B} \sim \underline{A}$, hvis dette er tilfældet, er $\sim$ faktisk en ækvivalensrelation i mængden af alle $(n \times n)$ -matricer (med elementer fra L). Refleksiviteten følger af, at $\underline{A} = \underline{EAE}^{-1}$. Symmetrien følger af, at $\underline{B} = \underline{SAS}^{-1}$ medfører $\underline{A} = \underline{S}^{-1}\underline{B}(\underline{S}^{-1})^{-1}$. Transiviteten følger af, at $\underline{B} = \underline{SAS}^{-1}$ og $\underline{C} = \underline{TB}T^{-1}$ medfører

$$\underline{C} = \underline{TSAS}^{-1}\underline{T}^{-1} = (\underline{TS})\underline{A}(\underline{TS})^{-1}.$$

Regulær-ækvivalente matricer har samme rang.

Foreligger der en lineær afbildning af et n -dimensionalt vektorrum ind i sig selv, ligger det nær ved passende valg af basis

at søge at opnå en så simpel matrixfremstilling som muligt. Forholdene er dog her betydelig mere indvinklet, end når to koordinattransformationer er til rådighed. Man kan opstille visse normalformer, som imidlertid ikke er så simple som den ovenfor nævnte. Spørgsmålet vil kun blive behandlet under visse specielle forudsætninger.

Lad $(U, +, L)$ og $(V, +, L)$ igen være vilkårlige vektorrum. Er f og g to lineære afbildninger af $(U, +, L)$ ind i $(V, +, L)$, forstås ved deres sum $f + g$ afbildningen, der til $\underline{u} \in U$ lader svare $f(\underline{u}) + g(\underline{u}) \in V$. Det er indlysende, at $f + g$ også er en lineær afbildning. Er k et vilkårligt tal fra L , forstås ved kf den afbildning, der til $\underline{u} \in U$ lader svare $kf(\underline{u}) \in V$. Også denne afbildning er øjensynlig lineær. Med disse kompositionsforskrifter danner de lineære afbildninger af $(U, +, L)$ ind i $(V, +, L)$ et vektorrum.

Har $(U, +, L)$ og $(V, +, L)$ endelige dimensioner n og m , og vælges en basis i hvert af de to rum, svarer der til lineære afbildninger f og g $(m \times n)$ -matricer $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$. Til $f + g$ og kf vil da svare henholdsvis $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ og $k\underline{\underline{A}}$. Er nemlig $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ den valgte basis for U , vil billedvektoren af $\underline{e}_i$ ved $f + g$ og ved kf være henholdsvis $f(\underline{e}_i) + g(\underline{e}_i)$ og $kf(\underline{e}_i)$. Søjlerne i den til $f + g$ svarende matrix fås altså ved at addere tilsvarende søjler i $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ og søjlerne i den til kf svarende matrix ved at multiplicere søjlerne i $\underline{\underline{A}}$ med k . Idet der (efter at baserne er valgt) består en enentydig korrespondance mellem de lineære afbildninger og matricerne, sluttet, at vektorrummet bestående af alle lineære afbildninger af $(U, +, L)$ ind i $(V, +, L)$ er iso-

morft med det tidligere (side III, 6, 5) omtalte vektorrum $M_{m,n}(L)$ af $(m \times n)$ -matricer med elementer fra L .

Er specielt $U = V$ og benyttes den samme basis ved fremstillingen af original- og billedvektorerne, strækker sig denne isomorfi videre, idet der nemlig til sammensætningen $g \circ f$ af to lineære afbildninger af $(U, +, L)$ ind i sig selv svarer produktet $\underline{BA}$ af de to til f og g hørende matricer $\underline{A}$ og $\underline{B}$ (se side III, 7, 12). Idet f er en enetydig lineær afbildning af $(U, +, L)$ på sig selv, hvis og kun hvis den tilsvarende matrix er regulær, ses, at gruppen af enetydige lineære afbildninger af et n -dimensionalt vektorrum $(U, +, L)$ på sig selv (jfr. side III, 7, 6) er isomorf med den generelle lineære gruppe $GL(n, L)$ (jfr. side III, 6, 10).

Dybere gående undersøgelser af lineære afbildninger baseres på de vigtige begreber "egenvektor" og "egenværdi". Lad $(V, +, L)$ være et vilkårligt vektorrum og $(U, +, L)$ et underrum i dette. En vektor $\underline{u} \neq \underline{0}$ fra U siges at være en egenvektor for den lineære afbildning $f: (U, +, L) \text{ ind i } (V, +, L)$, hvis dens billedvektor $f(\underline{u})$ er proportional med den selv, hvis der altså findes et tal $\lambda \in L$, således at

$$f(\underline{u}) = \lambda \underline{u}.$$

Tallet λ kaldes den til egenvektoren $\underline{u}$ hørende egenværdi. Op-gives tallet λ vilkårligt, vil der i almindelig ikke findes nogen fra $\underline{0}$ forskellig vektor $\underline{u}$, som tilfredsstiller ligningen.

Betegnes den identiske afbildning af U på sig selv med e , vil

$$f_{\lambda} = f - \lambda e$$

være en lineær afbildning af $(U, +, L)$ ind i $(V, +, L)$, og ligningen kan skrives $f_{\lambda}(\underline{u}) = \underline{0}$. Heraf ses, at hvis kernen K_{λ} ved afbildningen f_{λ} indeholder fra $\underline{0}$ forskellige vektorer, vil disse og kun disse være egenvektorer med egenværdien λ . Heraf sluttes for det første, at λ er en egenværdi, hvis og kun hvis $\dim K_{\lambda} > 0$, og for det andet, at de til en egenværdi λ hørende egenvektorer sammen med $\underline{0}$ udgør et underrum, nemlig K_{λ} , som kaldes det til λ hørende egenrum. Dets dimension kaldes multipliciteten af egenværdien λ og betegnes med $\text{mlt } \lambda$. Et tal λ , som ikke er egenværdi, siges at have multipliciteten 0. Man har da for hvert tal $\lambda \in L$, at $\text{mlt } \lambda = \dim K_{\lambda}$.

Som simple eksempler kan nævnes følgende:

Er k et fast tal fra L , vil k_e , hvor e betegner den identiske afbildning af U , have $\lambda = k$ som eneste egenværdi, og det tilhørende egenrum er hele rummet U .

Lad $(U, +, \mathbb{R})$ være det tredimensionale geometriske vektorrum, U' et endimensionalt og U'' et todimensionalt underrum, som ikke indeholder U' . Afsat fra et og samme punkt O vil vektorerne i U' ligge på en linie p og vektorerne i U'' i en plan π , som skærer p . Ved til hver vektor $\underline{u} \in U$ at lade svare dens parallelle projektion $f(\underline{u})$ på π i retningen $\underline{u}$ defineres en lineær afbildning af $(U, +, L)$ ind i sig selv. Den har 0 som egenværdi med U' som egenrum og 1 som egenværdi med U'' som egenrum. Der gælder altså $\text{mlt } 0 = 1$ og $\text{mlt } 1 = 2$. Der findes ikke andre egenvektorer; thi projektionen $f(\underline{u})$ af en vektor $\underline{u}$, som hverken tilhører U' eller U'' , er ikke parallel med $\underline{u}$.

Lad $(V, +, \mathbb{R})$ være vektorrummet bestående af alle i $\mathbb{R}$ definerede reelle funktioner $\varphi(t)$ med perioden 2π , og lad $(U, +, \mathbb{R})$

være underrummet bestående af de to gange differentiable blandt disse funktioner. Ved til $\varphi \in U$ at lade svare den anden afledede φ'' fås en lineær afbildning af $(U, +, \mathbb{R})$ ind i $(V, +, \mathbb{R})$. For at bestemme denne lineære differentialoperators egen^{er}værdier og "egenfunktioner" løses differentialligningen $\varphi'' = \lambda \varphi$ for et vilkårligt givet reelt tal λ . Det vides, at for $\lambda > 0$ er løsningerne ikke periodiske. Man kan derfor forudsætte $\lambda \leq 0$. Sættes $\lambda = -k^2$, hvor $k \geq 0$, kan løsningerne skrives

$$\varphi(t) = c_1 + c_2 t \quad \text{for } k = 0,$$

$$\varphi(t) = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt \quad \text{for } k > 0,$$

hvor c_1 og c_2 er arbitrære reelle konstanter. Blandt løsningerne for $k = 0$ er kun konstanterne $\varphi(t) = c_1$ periodiske med perioden 2π . Idet disse danner et endimensionalt underrum, er $\lambda = 0$ egen^{er}værdi med multipliciteten 1 og de fra 0 forskellige konstanter som egenfunktioner. Løsningerne for $k > 0$ er periodiske med perioden 2π , hvis og kun hvis k er et helt tal $p = 1, 2, \dots$. Tallene $\lambda = -p^2$, $p = 1, 2, \dots$, og kun disse, er altså ligeledes egen^{er}værdier. Egenrummet hørende til $-p^2$ består af funktionerne $c_1 \cos pt + c_2 \sin pt$. Da $\cos pt$ og $\sin pt$ er lineært uafhængige (ikke proportionale), har hvert af disse egenrum dimensionen 2, d.v.s. $\dim(-p^2) = 2$ for $p = 1, 2, \dots$.

Egenvektorerne $u_1, \dots, u_p$ hørende til indbyrdes forskellige egen^{er}værdier $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ for en lineær afbildning er lineært uafhængige.

Bevis: Lad r betegne rangen af sættet $(u_1, \dots, u_p)$. Det drejer sig om at vise, at $r = p$. Antag, at $r < p$. Nummeringen af egenvektorerne (og de tilhørende egen^{er}værdier) tænkes valgt således, at $u_1, \dots, u_r$ er lineært uafhængige, altså danner et maximalsæt. Da er u_p en linearkombination

$$\underline{u}_p = k_1 \underline{u}_1 + \dots + k_r \underline{u}_r.$$

For billedvektoren $f(\underline{u}_p)$ fås

$$f(\underline{u}_p) = \lambda_p \underline{u}_p = k_1 \lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + k_r \lambda_r \underline{u}_r.$$

Sammen med den foregående ligning multipliceret med λ_p giver dette

$$k_1 (\lambda_p - \lambda_1) \underline{u}_1 + \dots + k_r (\lambda_p - \lambda_r) \underline{u}_r = 0,$$

hvoraf $k_1 (\lambda_p - \lambda_1) = \dots = k_r (\lambda_p - \lambda_r) = 0$, da $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r$ er lineært uafhængige, og følgelig $k_1 = \dots = k_r = 0$, d.v.s. $\underline{u}_p = \underline{0}$, da $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ er indbyrdes forskellige. Dette strider imidlertid mod, at $\underline{u}_p$ som egenvektor er forskellig fra $\underline{0}$. Dermed er sætningen bevist.

Som en umiddelbar konsekvens af sætningen (eller også let direkte) fås, at to egenrum hørende til forskellige egenverdier har kun nulvektoren fælles.

Er $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ indbyrdes forskellige egenverdier med multipliserne $m_1, \dots, m_p$ for en lineær afbildning f , og vælges for $i = 1, \dots, p$ en basis for det til λ_i hørende egenrum K_i , vil de $m_1 + \dots + m_p$ således valgte vektorer være lineært uafhængige. En linearkombination af disse vektorer med koefficienter, som ikke alle er 0 er nemlig en sum $\underline{u}_1 + \dots + \underline{u}_p$, hvor $\underline{u}_i$ tilhører K_i , og ikke alle $\underline{u}_i$ er lig $\underline{0}$. Ifølge ovenstående sætning kan en sådan sum ikke være nulvektoren. Dermed er påstanden bevist.

I eksemplet ovenfor omhandlende differentialoperatoren d^2/dt^2 anvendt på funktionerne med perioden 2π danner $\phi(t) = 1$ en basis for det til egenværdien $\lambda = 0$ hørende egenrum og funktionerne $\cos pt, \sin pt$ en basis for det til $\lambda = -p^2$ hørende egenrum. Af det lige beviste følger den vigtige kendsgerning, at hvilke som helst endelig mange blandt funktionerne

$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos pt, \sin pt, \dots$
er lineært uafhængige.

Nu betragtes specielt et vektorrum $(U, +, L)$ af den endelige dimension n og en lineær afbildning f af dette ind i sig selv. Vælges der en basis for U , svarer der til f en $(n \times n)$ -matrix $\underline{\underline{A}}$, således at $\underline{\underline{v}}_i = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{u}}_i$, hvor $\underline{\underline{u}}_i$ og $\underline{\underline{v}}_i$ som før betegner koordinatsættene (nu i samme koordinatsystem) for $\underline{u} \in U$ og $\underline{v} = f(\underline{u}) \in U$. At tallet $\lambda \in L$ er en egenværdi, er ensbetydende med, at ligningen $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{u}}_i = \lambda \underline{\underline{u}}_i$ eller

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{u}}_i = \underline{\underline{0}}_i$$

har en løsning $\underline{\underline{u}}_i \neq \underline{\underline{0}}_i$. Løsningsrummet til dette homogene lineære ligningssystem er det til λ hørende egenrum og har ifølge en tidligere sætning (side III, 7, 10) dimensionen $n - \text{rg}(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})$. Følgelig gælder for hvert reelt tal λ

$$\text{mlt } \lambda = n - \text{rg}(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}).$$

Dette tal er nul, hvis og kun hvis matricen $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}$ er regulær. Afbildningens (eller matricen $\underline{\underline{A}}$'s) spektrum, d.v.s. mængden af dens egenværdier, består altså af de tal λ , for hvilke matricen $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}$ er singular, d.v.s. ikke regulær.

Af den foregående sætning følger, at en afbildning af den her betragtede art højst kan have n indbyrdes forskellige egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_p, p \leq n$. Er $m_1, \dots, m_p$ egenværdiernes multiplaciteter, haves endda

$$m_1 + \dots + m_p \leq n;$$

thi vælges i hvert af egenrummene en basis, fås ialt $m_1 + \dots + m_p$ vektorer, som ifølge det viste er lineært uafhængige. Suppleres (om fornødent) disse vektorer $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_q$, hvor $q = m_1 + \dots + m_p$, til en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ for U , vil den tilhørende matrix $\underline{\underline{A}}$ have en form, der kan beskrives således: I de q første søjler er alle elementer uden for hoveddiagonalen (diagonalen fra øverste venstre

til nederste højre hjørne) lig 0, og i diagonalen står egenverdierne hver så mange gange som dens multiplicitet angiver. De resterende $n - q$ søjler kan der ikke siges noget om.

Er specielt summen af egenverdiernes multipliciteter, altså q , lig med n , findes der en basis, som kun består af egenvektorer, og den til afbildningen hørende matrix vil da være en "diagonalmatrix" med egenverdierne i hoveddiagonalen, hver taget med så mange gange som dens multiplicitet angiver, og nuller på de øvrige pladser. Der gælder altså (jfr. side III, 7, 14):

Hvis en $(n \times n)$ -matrix har egenverdier, hvis multipliciteter har summen n , er den regulær-ækvivalent med en diagonalmatrix.

Rettelse:

III, 7, øv. 5 slettes. Den der fremsatte påstand er forkert.

Øvelser til kap. III, 7.

- 1) Lad $(V_2, +, \cdot)$ betegne det todimensionale vektorrum bestående af alle geometriske vektorer i en given plan, og lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ være en basis for det.
- a) En lineær afbildning $f: V_2 \rightarrow V_2$ bestemmes ved $f(\underline{e}_1) = \underline{e}_2, f(\underline{e}_2) = \underline{e}_1$. Angiv afbildningens matrixfremstilling. Bestem samtlige vektorer $\underline{u}$, for hvilke $f(\underline{u}) = \underline{u}$. Afsæt to basisvektorer (ikke netop lige store og vinkelrette på hinanden) samt en vilkårlig vektor $\underline{u}$ ud fra et punkt 0 i planen, og konstruer billedvektoren $f(\underline{u})$ afsat fra 0.
- b) Gennemfør det tilsvarende for afbildningerne f_1, f_2, f_3 bestemt ved $f_1(\underline{e}_1) = \underline{e}_2, f_1(\underline{e}_2) = -\underline{e}_1, f_2(\underline{e}_1) = -\underline{e}_1, f_2(\underline{e}_2) = -\underline{e}_2, f_3(\underline{e}_1) = -\underline{e}_2, f_3(\underline{e}_2) = \underline{e}_1$. Vis ved hjælp af matrixregning, at de tre afbildninger sammen med den identiske afbildning danner en cyklisk gruppe af ordenen 4.

- 2) Ved

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

bestemmes en lineær afbildning f af $\mathbb{R}^4$ ind i $\mathbb{R}^3$. Angiv en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^4)$, og bestem en basis for afbildningens kerne (altså en basis for løsningsrummet for det lineære homogene ligningssystem, der fremkommer, når man sætter $y_1 = y_2 = y_3 = 0$).

- 3) Find samtlige løsningssæt til det homogene lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} -a_3x_2 + a_2x_3 &= 0 \\ a_3x_1 - a_1x_3 &= 0 \\ -a_2x_1 + a_1x_2 &= 0, \end{aligned}$$

hvor talsættet $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ er givet. (Jfr. III, 6, øv. 18, og vis, at der blandt koeficientmatricens søjler findes to lineært uafhængige.)

- 4) Om en lineær afbildning f af et n -dimensionalt vektorrum ind i sig selv forudsættes, at hver vektor $\underline{u} \neq \underline{0}$ er en egenvektor, d.v.s. til hver vektor $\underline{u} \neq \underline{0}$ svarer der en skalar $k(\underline{u})$, den til $\underline{u}$ hørende egenværdi, således at $f(\underline{u}) = k(\underline{u})\underline{u}$. Vis, at $k(\underline{u})$ ikke kan afhænge af $\underline{u}$, og angiv afbildningens matrixfremstilling i en vilkårligt valgt basis for rummet.
- 5) Om en lineær afbildning f af et todimensionalt vektorrum ind i sig selv forudsættes, at der findes en egenvektor $\underline{a}$, altså en vektor $\underline{a} \neq \underline{0}$ og en skalar λ , således at $f(\underline{a}) = \lambda \underline{a}$. Vis, at hvis $\lambda \neq 1$, findes der (mindst) en fra $\underline{a}$ lineært uafhængig egenvektor $\underline{b}$. Undersøg, om man kan drage samme slutning, hvis $\lambda = 1$. (Benyt f.eks. en basis bestående af $\underline{a}$ og en anden vektor.)
- 6) En lineær afbildning f af vektorrummet $(\mathbb{R}^N, +, \cdot)$ af alle reelle talfølger ind i sig selv defineres ved

$$(u_1, u_2, \dots) \quad (v_1, v_2, \dots),$$

hvor

$$v_i = \frac{1}{i} (u_1 + \dots + u_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Vis, at f er en enentydig afbildning af $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ på sig selv, og angiv den inverse afbildning.

Vis, at ved restriktionen af f til underrummet bestående af alle konvergente talfølger vil dette underrum afbildes ind i, men ikke på sig selv.

[Dette går ud på at vise, at hvis følgen $(u_1, u_2, \dots)$ er konvergent, vil også $(v_1, v_2, \dots)$ være konvergent (med samme grænseværdi), og at det omvendte ikke generelt gælder. (Beviset for den første påstand er ikke helt simpelt)]

- 7) Med $\mathcal{P}_n$ betegnes vektorrummet af alle reelle polynomier af højst n -te grad. Ved til polynomiet

$$p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_n t^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

at lade svare dets differentialkvotient fås en lineær afbildning $D : \mathcal{P}_n$ ind i $\mathcal{P}_n$. Angiv afbildningens kerne og billedrummet $D(\mathcal{P}_n)$. Find afbildningens matrixfremstilling, idet der som basis benyttes $(1, t, t^2, \dots, t^n)$. Angiv kernen og billedrummet ved afbildningen D^2 , og bekræft ved matrixregning, at D^2 er afbildningen, der til et polynomium $p(t)$ lader svare dets anden afledede.

Idet h er et givet reelt tal, defineres ved $F_h(p(t)) = p(t + h)$ en afbildning $F_h : \mathcal{P}_n$ ind i $\mathcal{P}_n$. Vis, at den er en enentydig lineær afbildning af $\mathcal{P}_n$ på $\mathcal{P}_n$, og find dens matrixfremstilling i den nævnte basis. (Begynd med at bestemme de til basispolynomierne svarende polynomier.)

Vis, at polynomierne

$$t^{(0)} = 1, \quad t^{(i)} = t(t-h)(t-2h)\cdots(t-(i-1)h), \quad i = 1, \dots, n,$$

danner en basis for $\mathcal{P}_n$. Angiv matrixfremstillingen for den

øjensynlig lineære afbildning $\Delta_h : \mathcal{P}_n$ ind i $\mathcal{P}_n$ bestemt ved $\Delta_h(p(t)) = p(t+h) - p(t)$ og for afbildningen F_h i denne basis.

- 8) Lad $(V, +, \mathbb{R})$ betegne vektorrummet bestående af alle reelle funktioner $\varphi(t)$, som er definerede i intervallet $0 \leq t \leq \overline{t}$. Lad endvidere $(U, +, \mathbb{R})$ betegne underrummet bestående af de to gange differentiable blandt disse funktioner, for hvilke desuden $\varphi(0) = \varphi(\overline{t}) = 0$. Ved til $\varphi(t)$ at lade svare $\varphi''(t)$ defineres en lineær afbildning af $(U, +, \mathbb{R})$ ind i $(V, +, \mathbb{R})$. Bestem denne afbildnings egenverdier og tilhørende "egenfunktioner", d.v.s. de reelle tal λ , for hvilke der findes en funktion $\varphi(t) \in U$, som ikke er identisk 0 og for hvilken $\varphi''(t) = \lambda \varphi(t)$, samt for hver sådan værdi af λ de pågældende funktioner. (Begynd med at bestemme samtlige løsninger til differentialligningen $\varphi'' - \lambda \varphi = 0$ for et vilkårligt λ .)

- 9) En lineær afbildning af et tredimensionalt vektorrum $(U, +, L)$, hvori der er valgt en basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, ind i et todimensionalt vektorrum $(V, +, L)$, hvori der er valgt en basis $(\underline{f}_1, \underline{f}_2)$, er med hensyn til de nævnte baser givet ved

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a-1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

hvor a er et givet tal. Angiv for hver værdi af a afbildningens rang r . Bestem dernæst nye baser i de to rum, således at den til afbildningen hørende matrix antager normalformen med $(r \times r)$ -enhedsmatricen i øverste venstre hjørne og nuller på alle andre pladser. Angiv også de tilsvarende regulære koordinattransformationsmatricer $\underline{S}$ og $\underline{T}$ og gennemfør en kontrol ved at udregne $\underline{T} \underline{A} \underline{S}^{-1}$, hvor $\underline{A}$ er ovenstående (2×3) -matrix.

10) Lad $(U, +, L)$ være et vilkårligt vektorrum og f en lineær afbildning af $(U, +, L)$ ind i sig selv.

Vis, at hvis f er involutorisk, d.v.s. f^2 den identiske afbildning, vil 1 og -1 være de eneste tal, der kan være egenverdier for f .

Vis, at hvis f er idempotent, d.v.s. $f^2 = f$, vil 0 og 1 være de eneste tal, der kan være egenverdier for f .

Antag dernæst, at $(U, +, L)$ har den endelige dimension n . Vis, at det da for enhver involutorisk eller idempotent afbildning f gælder, at summen af egenverdiernes multipliciteter er lig med n . (Påstanden går, som det let ses, ud på, at hver vektor $\underline{u} \in U$ kan fremstilles som en linearkombination af egenvektorer. Benyt f.eks. i det involutoriske tilfælde, at

$$\underline{u} = \frac{1}{2} (\underline{u} + f(\underline{u})) + \frac{1}{2} (\underline{u} - f(\underline{u}))$$

og i det idempotente, at

$$\underline{u} = (\underline{u} - f(\underline{u})) + f(\underline{u}).$$

Giv i det tilfælde, hvor U er det tredimensionale geometriske vektorrum, en geometrisk beskrivelse af alle involutoriske og idempotente afbildninger.

§ 8. Affine afbildninger.

I denne paragraf undersøges en klasse af afbildninger af punktrummet E_3 , en plan E_2 eller en linie E_1 ind i E_3 .

En afbildning φ ind i E_3 , hvis definitionsområde M er E_3 , en plan E_2 eller en linie E_1 , kaldes en affin afbildning, hvis den opfylder følgende betingelse:

$$AA: \forall_{M} P, Q, R, S \quad \forall_{R} \lambda \quad (\overrightarrow{RS} = \lambda \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{\varphi(R)\varphi(S)} = \lambda \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}).$$

For $\lambda = 1$ kræver dette specielt, at hvis to punktpar $\overrightarrow{RS}$ og $\overrightarrow{PQ}$ repræsenterer samme vektor, skal de to billedpunktpar ligeledes repræsentere samme vektor. Dette vil sige, at en affin afbildning tillige bestemmer en afbildning f_φ af det tre-, to- eller endimensionale vektorrum $V(M)$ bestående af alle geometriske vektorer i M ind i det geometriske vektorrum V_3 . Er nemlig $\underline{v} \in V(M)$, og er $\overrightarrow{PQ}$, hvor $P, Q \in M$, en repræsentant for $\underline{v}$, vil $\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$ repræsentere en vektor, som kun afhænger af vektoren $\underline{v}$, men ikke af den for denne valgte repræsentant, og som derfor kan betegnes med $f_\varphi(\underline{v})$. Af AA følger umiddelbart, at $f_\varphi(\lambda \underline{v}) = \lambda f_\varphi(\underline{v})$ for hver vektor $\underline{v} \in V(M)$ og hvert reelt tal λ . Endvidere gælder $f_\varphi(\underline{u} + \underline{v}) = f_\varphi(\underline{u}) + f_\varphi(\underline{v})$ for hvilke som helst to vektorer $\underline{u}, \underline{v} \in V(M)$. Repræsenteres nemlig $\underline{u}$ ved $\overrightarrow{PQ}$ og $\underline{v}$ ved $\overrightarrow{QR}$, vil $\underline{u} + \underline{v}$ repræsenteres ved $\overrightarrow{PR}$. Da endvidere

$$\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} + \overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(R)} = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(R)},$$

og $\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$, $\overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(R)}$ og $\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(R)}$ repræsenterer henholdsvis $f_\varphi(\underline{u})$, $f_\varphi(\underline{v})$ og $f_\varphi(\underline{u} + \underline{v})$, er påstanden rigtig. Til hver affin afbildning φ af M ind i E_3 hører altså en lineær afbildning f_φ af vektorrummet $V(M)$ ind i V_3 , som vil blive betegnet som den ved φ inducerede lineære vektorfunktion.

Omvendt, lad der være givet en lineær afbildning $f: V(M)$ ind i V_3 , et punkt $A \in M$ og et punkt $A' \in E_3$. Der findes da en og kun een affin afbildning $\varphi: M$ ind i E_3 , for hvilken $\varphi(A) = A'$, og som inducerer f . Er nemlig X et vilkårligt punkt i M og $\underline{x} = \overrightarrow{AX}$ dets stedvektor ud fra A , er det punkt X' , hvis stedvektor $\overrightarrow{A'X'}$ ud fra A' er $f(\underline{x})$, det eneste der kan være billedpunkt af X ved en affin afbildning af den forlangte art. Sættes på den anden side $\varphi(X) = X'$, fås en affin afbildning af M ind i E_3 . For at vise dette betragtes fire punkter P, Q, R, S i M , for hvilke $\overrightarrow{RS} = \lambda \overrightarrow{PQ}$, hvor λ er et reelt tal. Disse punkters billedpunkter ved den lige definerede afbildning φ betegnes med P', Q', R', S' . Idet

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}, \quad \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AR},$$

haves på grund af lineariteten af vektorfunktionen f

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{PQ}) &= f(\overrightarrow{AQ}) - f(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{A'Q'} - \overrightarrow{A'P'} = \overrightarrow{P'Q'} \\ f(\overrightarrow{RS}) &= f(\overrightarrow{AS}) - f(\overrightarrow{AR}) = \overrightarrow{A'S'} - \overrightarrow{A'R'} = \overrightarrow{R'S'}, \end{aligned}$$

og derfor

$$\overrightarrow{R'S'} = f(\overrightarrow{RS}) = f(\lambda \overrightarrow{PQ}) = \lambda f(\overrightarrow{PQ}) = \lambda \overrightarrow{P'Q'},$$

hvormed påstanden er bevist.

Disse resultater sammenfattes til følgende sætning:

Lad M betegne punktrummet E_3 , en plan E_2 eller en linie E_1 . Lad endvidere $V(M)$ betegne det tre-, to- eller endimensionale vektorrum bestående af de geometriske vektorer i M . Enhver affin afbildning $\varphi: M$ ind i E_3 inducerer ved $f_\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$ en lineær vektorfunktion $f_\varphi: V(M)$ ind i V_3 . Omvendt induceres enhver lineær vektorfunktion $f: V(M)$ ind i V_3 af mindst en affin afbildning af M ind i E_3 , og denne er entydig bestemt, hvis der foruden f foreskrives billedpunktet for eet punkt af M .

Lad $n = 1, 2, 3$ betegne dimensionen af $V(M)$, og lad der være valgt en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ for $V(M)$. Som vist tidligere (side III, 7, 6 - 7) findes der netop een lineær vektorfunktion f , for hvilken $f(\underline{e}_1) = \underline{v}_1, \dots, f(\underline{e}_n) = \underline{v}_n$, hvor $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ er vilkårligt opgivne vektorer i V_3 . Er endvidere A_0 et punkt i M og A'_0 et punkt i E_3 , findes der altså en og kun een affin afbildning $\phi: M \rightarrow E_3$, således at

$$\phi(A_0) = A'_0, \quad \phi(\underline{e}_1) = \underline{v}_1, \dots, \phi(\underline{e}_n) = \underline{v}_n.$$

Afsættes vektorerne $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ fra A_0 og vektorerne $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ fra A'_0 , og sættes

$$\underline{e}_1 = \overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \underline{e}_n = \overrightarrow{A_0 A_n}, \underline{v}_1 = \overrightarrow{A'_0 A'_1}, \dots, \underline{v}_n = \overrightarrow{A'_0 A'_n},$$

ses, at de nævnte opgivelser kommer ud på for den affine afbildning ϕ at foreskrive billedpunkterne $A'_0, A'_1, \dots, A'_n$ af punkterne $A_0, A_1, \dots, A_n$. Tager man i betragtning, hvad den forudsatte ^{lineære} uafhængighed af $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ betyder for den indbyrdes beliggenhed af punkterne $A_0, A_1, \dots, A_n$, får man:

I. Der findes en og kun een affin afbildning ϕ af en linie E_1 ind i E_3 , ved hvilken der til to givne forskellige punkter A_0 og A_1 på E_1 svarer to vilkårligt givne punkter $\phi(A'_0) = A'_0$ og $\phi(A'_1) = A'_1$ i E_3 .

II. Der findes en og kun een affin afbildning ϕ af en plan E_2 ind i E_3 , ved hvilken der til tre givne punkter A_0, A_1 og A_2 i E_2 , som ikke ligger på samme linie, svarer tre vilkårligt givne punkter $\phi(A'_0) = A'_0, \phi(A'_1) = A'_1$ og $\phi(A'_2) = A'_2$.

III. Der findes en og kun een affin afbildning ϕ af rummet E_3 ind i sig selv, ved hvilken der til fire givne punkter A_0, A_1, A_2 og A_3 i E_3 , som ikke ligger i samme plan, svarer fire vilkårligt givne punkter $\phi(A'_0) = A'_0, \phi(A'_1) = A'_1, \phi(A'_2) = A'_2$ og $\phi(A'_3) = A'_3$.

Idet de tre tilfælde igen behandles sammen, vælges A_0 som begyndelsespunkt og $\underline{e}_1 = \overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \underline{e}_n = \overrightarrow{A_0 A_n}$ som grundvektorer for et affint koordinatsystem i M . Er da $(x_1, \dots, x_n)$ koordinatsættet for et vilkårligt punkt $X \in M$, have

$$\overrightarrow{A_0 X} = x_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \dots + x_n \overrightarrow{A_0 A_n} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n.$$

For billedpunktet $X' = \varphi(X)$ ved en affin afbildning φ af M gælder da med de ovenfor indførte betegnelser

$$\overrightarrow{A'_0 X'} = f_\varphi(\overrightarrow{A_0 X}) = x_1 \overrightarrow{A'_0 A'_1} + \dots + x_n \overrightarrow{A'_0 A'_n} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n.$$

Omvendt vil der ved denne ligning for vilkårligt opgivne punkter $A'_0, A'_1, \dots, A'_n$ i E_3 bestemmes en affin afbildning $X \rightarrow X'$ af M ind i E_3 .

Ved rangen af en affin afbildning forstås rangen r af den inducerede lineære vektorfunktion f_φ , altså maximaltallet af lineært uafhængige blandt vektorerne $\underline{v}_1 = f_\varphi(\underline{e}_1), \dots, \underline{v}_n = f_\varphi(\underline{e}_n)$. Man har øjensynlig $r \leq n$. Der kommer altså kun værdierne $r = 0, 1, 2, 3$ i betragtning.

Er $r = 0$, d.v.s. $\underline{v}_1 = \dots = \underline{v}_n = \underline{0}$, består billedmængden $\varphi(M)$ kun af punktet A'_0 . Da M indeholder mere end eet punkt, er afbildningen ikke enentydig.

Er $r = 1$, altså $n = 1, 2$ eller 3 , og er f.eks. $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, vil de øvrige vektorer $\underline{v}_i$ (i tilfældet $n > 1$) være skalære multipla af $\underline{v}_1$. Billedmængden $\varphi(M)$ er da den med $\underline{v}_1$ parallelle linie gennem A'_0 . At hele denne linie kommer med, ses ved at lade x_1 gennemløbe mængden af reelle tal og at sætte eventuelle andre $x_i = 0$. Hvis $n > 1$, er afbildningen ikke enentydig, idet $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ da er lineært afhængige og ovenstående fremstilling af $\overrightarrow{A'_0 X'}$ følgelig ikke entydig bestemt. I tilfældet $n = r = 1$ foreligger en afbild-

ning af en linie E_1 på en linie $E'_1 = \varphi(E_1)$. Vælges A'_0 som begyndelsespunkt og $\overrightarrow{A'_0 A'_1} = \underline{v}_1$ som grundvektor for et affint koordinatsystem på E'_1 , får billedpunktet $X' = \varphi(X)$ for et punkt $X \in E_1$ samme koordinat x_1 , som X har med hensyn til koordinatsystemet $(A_0; \overrightarrow{A_0 A_1})$. Heraf ses, at afbildningen er enentydig i dette tilfælde.

Er $r = 2$, altså $n = 2$ eller 3 , og f.eks. $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ lineært uafhængige, vil $\underline{v}_3$ (i tilfældet $n = 3$) være en linearkombination af $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$. Billedmængden $\varphi(M)$ er da den med $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ parallelle plan gennem A'_0 . At hele denne plan kommer med, ses ved at lade (x_1, x_2) gennemløbe mængden af reelle talpar og i tilfældet $n = 3$ at sætte $x_3 = 0$. Hvis $n = 3$, er afbildningen ikke enentydig. I tilfældet $n = r = 2$ foreligger en afbildning af en plan E_2 på en plan $E'_2 = \varphi(E_2)$. Vælges A'_0 som begyndelsespunkt og $\overrightarrow{A'_0 A'_1} = \underline{v}_1$ og $\overrightarrow{A'_0 A'_2} = \underline{v}_2$ som grundvektorer for et affint koordinatsystem i E'_2 , får billedpunktet $X' = \varphi(X)$ for et punkt $X \in E_2$ samme koordinatpar (x_1, x_2) , som X har med hensyn til koordinatsystemet $(A_0; \overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2})$. Heraf ses, at afbildningen er enentydig i dette tilfælde.

Hvis $r = 3$, altså også $n = 3$, er vektorerne $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ og $\underline{v}_3$ lineært uafhængige. Billedpunktet $X' = \varphi(X)$ for et punkt $X \in E_3$ har da samme koordinatsæt med hensyn til det affine koordinatsystem $(A'_0; \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$, som X har med hensyn til koordinatsystemet $(A_0; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Heraf ses, at der foreligger en enentydig afbildning af E_3 på sig selv.

Lad M igen betegne en linie E_1 , en plan E_2 eller rummet E_3 , og lad n være henholdsvis 1, 2 eller 3. Lad endvidere M' betegne en linie E'_1 , en plan E'_2 eller rummet E'_3 , og lad m' være henholdsvis 1, 2 eller 3. I M vælges et affint koordinatsystem $(A_0; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$

og i M' et affint koordinatsystem $(B_0; \underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$. En affin afbildning $\varphi: M \text{ ind i } M'$ tænkes bestemt ved billedpunktet $A'_0 = \varphi(A_0)$ samt den inducerede vektorfunktion f_φ . Er

$$\overrightarrow{A_0 X} = \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n$$

stedvektoren ud fra A_0 for et vilkårligt punkt X i M og

$$\overrightarrow{B_0 A'_0} = \underline{a} = a_1 \underline{f}_1 + \dots + a_m \underline{f}_m, \quad \overrightarrow{B_0 Y} = \underline{y} = y_1 \underline{f}_1 + \dots + y_m \underline{f}_m$$

stedvektorerne ud fra B_0 for henholdsvis $A'_0 = \varphi(A_0)$ og $Y = \varphi(X)$,
haves

$${}_y \underline{Y} = \underline{a} + f_\varphi(\underline{x}).$$

Den lineære vektorfunktion f_φ har med hensyn til de to baser $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ en matrixfremstilling $\underline{y}| = \underline{A} \underline{x}|$, hvor $\underline{A}$ er en $(m \times n)$ -matrix, hvis søjler er koordinatsættene for $\underline{v}_1 = f_\varphi(\underline{e}_1), \dots, \underline{v}_n = f_\varphi(\underline{e}_n)$ i koordinatsystemet $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$. Idet

$$\underline{x}| = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{a}| = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \underline{y}| = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

har man følgende matrixligning for den affine afbildning φ :

$$\underline{y}| = \underline{a}| + \underline{A} \underline{x}|.$$

Omvendt bestemmer enhver matrixligning af denne form en affin afbildning af M ind i M' . Afbildningens rang stemmer overens med $\text{rg } \underline{A}$.

Der foreligger en enentydig afbildning φ af M på M' , hvis og kun hvis $m = n = \text{rg } \underline{A}$, altså hvis $\underline{A}$ er kvadratisk og regulær.

Er $M' = M$, altså φ en afbildning af M ind i sig selv, er $\underline{A}$ ligeledes kvadratisk (men ikke nødvendigvis regulær). Ved en sådan afbildning vil man i reglen fremstille original- og billedpunkter i samme koordinatsystem, altså vælge $B_0 = A_0$, $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n = \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$.

Ved overgangen til nye koordinatsystemer $(\hat{A}_0; \hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ og $(\hat{B}_0; \hat{\underline{f}}_1, \dots, \hat{\underline{f}}_m)$ i henholdsvis M og M' fås for den samme affine af-

bildning ϕ en ny matrixligning. Betegnes med $\underline{\underline{S}}$ den regulære $(n \times n)$ -matrix, hvis søjler er koordinatsættene for de oprindelige grundvektorer $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ i den nye basis $(\hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ og med $\underline{s}_|$ koordinatsættet for punktet $\hat{A}_0$ i det oprindelige koordinatsystem $(A_0; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, haves relationen

$$\hat{\underline{x}}_| = \underline{\underline{S}}(\underline{x}_| - \underline{s}_|)$$

mellem koordinatsættene $\underline{x}_|$ og $\hat{\underline{x}}_|$ for et punkt $X \in M$ i henholdsvis det oprindelige og det nye affine koordinatsystem; thi $\underline{x}_| - \underline{s}_|$ er det oprindelige koordinatsæt for vektoren $\vec{\hat{A}_0 X}$, hvis nye koordinatsæt er $\hat{\underline{x}}_|$. Med tilsvarende betegnelser gælder for overgangen fra det oprindelige til det nye koordinatsystem i M'

$$\hat{\underline{y}}_| = \underline{\underline{T}}(\underline{y}_| - \underline{t}_|).$$

Af $\underline{y}_| = \underline{a}_| + \underline{\underline{A}}\underline{x}_|$ og de to koordinattransformationsligninger fås efter en kort regning

$$\hat{\underline{y}}_| = \underline{\underline{T}}(\underline{a}_| - \underline{t}_| + \underline{\underline{A}}\underline{s}_|) + \underline{\underline{T}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{S}}^{-1}\hat{\underline{x}}_|$$

som matrixligning for afbildningen ϕ i de nye koordinatsystemer. Ved passende valg af disse kan matrixligningen bringes på samme simple normalform som ved en lineær afbildning af vektorrum (side III, 7, 13). Vælges nemlig for B_0 specielt billedpunktet $\phi(A_0)$ af A_0 , antager matrixligningen formen $\underline{y}_| = \underline{\underline{A}}\underline{x}_|$, og situationen bliver formelt den samme som ved lineære afbildninger, når kun de to sæt af grundvektorer ændres, men begyndelsespunkterne bibeholdes. Drejer det sig om afbildninger af M ind i sig selv, og vil man benytte det samme koordinatsystem for original- og billedpunkterne, kan noget tilsvarende kun opnås, hvis afbildningen ϕ har mindst eet fixpunkt, d.v.s. hvis der findes et punkt A , for hvilket $\phi(A) = A$. Et sådant kan da med fordel benyttes som begyndelsespunkt. Forenklinger af matricen $\underline{\underline{A}}$ opnås

ved at vælge eventuelle egenvektorer for den inducerede lineære vektorfunktion som grundvektorer (jfr. side III, 7, 20 - 21).

Er $\varphi: E_3$ ind i E_3 en affin afbildning og E_2 en plan, vil restriktionen af φ til E_2 være en affin afbildning af E_2 ind i E_3 . Dette følger umiddelbart af den definerende betingelse AA, idet denne jo forbliver opfyldt, hvis kun punkter P, Q, R, S beliggende i planen E_2 tages i betragtning. Tilsvarende gælder for restriktionen af en affin afbildning, der er defineret i rummet eller i en plan, til en linie E_1 . Billedmængden ved en affin afbildning af en plan (en linie) er som vist ovenfor, en plan, en linie eller et punkt (en linie eller et punkt) og dette gælder altså også, når planen (linien) kun er en del af afbildningsens definitionsmængde.

Lad M igen betegne rummet E_3 , en plan E_2 eller en linie E_1 , og lad $\varphi: M$ ind i E_3 være en affin afbildning. En linie $a \subseteq M$ tænkes fastlagt ved et punkt A og en vektor $\underline{u} \neq \underline{0}$ på den. Vælges et begyndelsespunkt O i M, og betegnes et variabelt punkt på a med X, haves altså parameterfremstillingen

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\underline{u}$$

for a. For billedpunktet $Y = \varphi(X)$ fås da med betegnelserne

$$O' = \varphi(O), B = \varphi(A) \text{ og } \underline{v} = f_{\varphi}(\underline{u});$$

$$\overrightarrow{O'Y} = f_{\varphi}(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{O'B} + t\underline{v}.$$

Er $\underline{v} \neq \underline{0}$, er dette igen en parameterfremstilling for en linie b. Der foreligger en enentydig afbildning af a på b, og tilsvarende punkter på de to linier hører til samme parameterværdi t. Heraf (eller også direkte af AA) kan drages følgende slutning: Er X_1, X_2, X_3 tre indbyrdes forskellige punkter på a og Y_1, Y_2, Y_3

deres billedpunkter på b , vil Y_3 dele $\overrightarrow{Y_1 Y_2}$ i samme forhold som X_3 deler $\overrightarrow{X_1 X_2}$; thi vælges $A = X_1$, altså $B = Y_1$, og $\underline{u} = \overrightarrow{X_1 X_2}$, altså $\underline{v} = \overrightarrow{Y_1 Y_2}$, og betegnes den til X_3 og Y_3 hørende parameter-værdi med t , haves for begge delingsforhold $f = t/(t-1)$ (se side III, 5, 6-7). Da vektoren $\underline{v} = f_{\varphi}(\underline{u})$, ^{som} fastlægger retningen af b , kun afhænger af vektoren $\underline{u}$, som fastlægger retningen af a , men ikke af punktet A , ses, at de med a parallelle linier i M afbildes på linier, der er parallelle (eventuelt sammenfaldende) med b .

Er $\underline{v} = f(\underline{u}) = \underline{0}$, afbildes a på et punkt, og det samme gælder da for hver med a parallel linie i M . Mængden af de således fremkommende punkter er billedet $\varphi(M)$ af hele M , udgør altså en plan, en linie eller et punkt, idet $\varphi(M) = E_3$ jo er udelukket ved en ikke enentydig affin afbildning.

Lad M nu betegne rummet E_3 eller en plan E_2 . Med tilsvarende betegnelser tænkes en plan α i M fastlagt ved et punkt A og to lineært uafhængige vektorer $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$. Man har da parameterfremstillingen

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t_1 \underline{u}_1 + t_2 \underline{u}_2$$

for α . For billedet $Y = \varphi(X)$ findes

$$\overrightarrow{O'Y} = \overrightarrow{O'B} + t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2,$$

hvor $\underline{v}_1 = f_{\varphi}(\underline{u}_1)$ og $\underline{v}_2 = f_{\varphi}(\underline{u}_2)$. Er $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ lineært uafhængige, er billedet af α en plan β . Afbildningen er enentydig, og tilsvarende punkter i de to planer hører til samme parameterpar (t_1, t_2) . Planer i M , som er parallelle med α afbildes på planer parallelle med β .

Er $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ lineært afhængige, men f.eks. $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, altså $\underline{v}_2$ et skalært multiplum af $\underline{v}_1$, er billedet af α en linie med

retning $\underline{v}_1$, og det samme gælder da for alle med α parallelle planer i M . Foreningsmængden af de linier, der således fremkommer, er $\varphi(M)$, altså en plan eller en linie, idet $\varphi(M) = E_3$ jo er udelukket ved en ikke enentydig affin afbildning.

Er $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = \underline{0}$, vil billedet af α være et punkt, og det samme gælder da for alle med α parallelle planer i M . Mængden af de således fremkommende punkter er $\varphi(M)$, altså en linie eller et punkt, da rangen af φ i dette tilfælde højst kan være 1.

Af det, der blev sagt om affin afbildning af en linie, følger umiddelbart, at et liniestykke PQ ved enhver affin afbildning afbildes på et liniestykke eller på et punkt. Heraf sluttet, at enhver konveks mængde afbildes på en konveks mængde (jfr. side III, 5, 10).

Er M igen definitionsmængden for en affin afbildning φ , og er der givet et skalarsystem

$$(X_1, \mu_1), \dots, (X_p, \mu_p), \quad \mu = \mu_1 + \dots + \mu_p \neq 0,$$

hvis punkter tilhører M , fås et nyt skalarsystem $(Y_1, \mu_1), \dots, (Y_p, \mu_p)$ ved til billedpunkterne $Y_i = \varphi(X_i)$ at knytte de samme skalarer μ_i . (Jfr. side III, 5, 11-12.) Dette skalarsystem siges at

være billedet ved φ af det givne system. Vælges i M et begyndelsespunkt O , haves for det givne systems midtpunkt X

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{\mu} (\mu_1 \overrightarrow{OX_1} + \dots + \mu_p \overrightarrow{OX_p}).$$

Idet $(O) = O'$ og $(X) = Y$, fås

$$\overrightarrow{O'Y} = f(\overrightarrow{OX}) = \frac{1}{\mu} (\mu_1 \overrightarrow{O'Y_1} + \dots + \mu_p \overrightarrow{O'Y_p}),$$

hvoraf ses, at ved enhver affin afbildning afbildes et skalarsystems midtpunkt i billedsystemets midtpunkt. Specielt gælder dette for tyngdepunkter (ikke-negative skalarer). Heraf kan sluttet videre, at det konvekse hylster af en endelig punktmængde

afbildes på billedmængdens konvekse hylster (jfr. side III, 5, 11 og 14). Således vil en trekant afbildes på en trekant, et liniestykke eller et punkt, og tilsvarende gælder for et tetraeder, et parallelogram o.s.v.

Af særlig interesse er de enentydige affine afbildninger af en linie, en plan eller rummet på sig selv. Lad M igen betegne en sådan definitions­mængde. Det fremgår af diskussionen af de enkelte tilfælde (side III, 8, 4-5), at en affin afbildning af M på sig selv nødvendigvis er enentydig. Er φ og ψ affine afbildninger af M på sig selv, vil også $\psi \circ \varphi$ være en sådan afbildning. Dette sluttet direkte af AA. Endvidere er det blevet vist, at den inverse til en enentydig affin afbildning er en affin afbildning. Da den identiske afbildning øjensynlig er affin, ses, at de affine afbildninger af M på sig selv danner en transformationsgruppe, der kaldes den affine gruppe for linien, planen eller rummet.

Lad der være valgt et affint koordinatsystem $(A_0; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ i M . En affin afbildning $\varphi: M \rightarrow M$ har da en matrix­ligning af formen

$$\underline{y} = \underline{a} + \underline{A}\underline{x},$$

hvor $\underline{a}$, $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er koordinatsættene for henholdsvis billedpunktet $\varphi(A_0)$, originalpunktet X og dettes billedpunkt $Y = \varphi(X)$, og hvor $\underline{A}$ er en $(n \times n)$ -matrix. Eventuelle fixpunkter ved φ har koordinatsæt $\underline{x}$, som tilfredsstiller ligningen

$$\underline{x} = \underline{a} + \underline{A}\underline{x}.$$

Denne kan omskrives til det inhomogene lineære ligningssystem

$$(\underline{A} - \underline{E})\underline{x} = -\underline{a},$$

som vides at have netop een løsning $\underline{x}_1 = -(\underline{A} - \underline{E})^{-1} \underline{a}_1$, hvis og kun hvis $\underline{A} - \underline{E}$ er regulær, d.v.s. hvis og kun hvis matricen $\underline{A}$, og dermed den inducerede lineære vektorfunktion ikke har egenværdien 1. Har $\underline{A}$ egenværdien 1, er altså $\underline{A} - \underline{E}$ ikke regulær, vil ligningssystemet have uendelig mange eller slet ingen løsninger. Ifølge et tidligere resultat (side III, 4,13) fås de eventuelle løsninger ved til een af dem at addere samtlige løsninger til det tilsvarende homogene system. De sidste udgør egenrummet hørende til egenværdien 1 for den inducerede lineære vektorfunktion f_φ . Stedvektorerne for fixpunkterne fås altså ved at addere stedvektoren for eet af dem til vektorerne i et underrum i $V(M)$. De udgør altså et sideunderrum, hvilket i det foreliggende tilfælde betyder, at mængden af fixpunkter er en linie, en plan eller hele rummet, efter som egenrummets dimension, d.v.s. multipliciteten af egenværdien 1, er 1, 2 eller 3. Man har altså:

Hvis mængden af fixpunkter ved en ikke identisk affin afbildning $\varphi:M$ ind i M ikke er tom, består den, hvis M er en linie, af eet punkt, hvis M er en plan, af eet punkt eller en linie, og hvis M er hele rummet, af eet punkt, en linie eller en plan.

Dette kan også indses på følgende måde: Antag, at φ har to forskellige fixpunkter F_1 og F_2 . Linien, der forbinder dem, må da afbildes ind i sig selv, og denne afbildning er som restriktion til linien af en affin afbildning selv affin. Men der findes kun en sådan afbildning af linien, ved hvilken F_1 svarer til F_1 og F_2 til F_2 , nemlig den identiske. Hele linien består altså af fixpunkter. Tilsvarende ses, at hvis en affin afbildning har tre fixpunkter, som ikke ligger på samme linie, (fire fixpunkter,

som ikke ligger i samme plan,) vil hele den af dem bestemte plan (hele rummet) bestå af fixpunkter.

Eksempler:

1) Translationer af rummet (og følgelig også deres restriktioner til en plan eller en linie) er øjensynlig affine afbildninger. De er karakteriseret ved, at den inducerede lineære vektorfunktion er den identiske. Matrixligninger for translationer har formen $\underline{y} = \underline{a} + \underline{x}$. Ikke identiske translationer har ikke nogen fixpunkter.

Det ses, at hver affin afbildning $\varphi: M \text{ ind i } E_3$ kan sammensættes af en affin afbildning $\varphi_F: M \text{ ind i } M$ med et vilkårligt opgivet fixpunkt $F \in M$ og en translation τ . Vælges F som begyndelsespunkt for et koordinatsystem i M , aflæses dette nemlig umiddelbart af den tilsvarende matrixligning $\underline{y} = \underline{a} + \underline{Ax}$. Man har $\varphi = \tau \circ \varphi_F$, hvor φ_F har matrixligningen $\underline{z} = \underline{Ax}$ og τ matrixligningen $\underline{y} = \underline{a} + \underline{z}$.

2) En enentydig affin afbildning φ af rummet E_3 på sig selv, hvis inducerede lineære vektorfunktion f_φ består i multiplikationen af vektorerne med et fast reelt tal $\varrho \neq 0$, kaldes en homoteti. For $\varrho = 1$ fås en translation; en sådan regnes altså til homotetierne. Vektorfunktionen f_φ har egenværdien ϱ med hver fra $\underline{0}$ forskellig vektor som tilhørende egenvektor. For $\varrho \neq 1$ findes der altså ifølge det ovenfor viste netop eet fixpunkt F , og afbildningen er en "multiplikation" med ϱ ud fra F .

Fremstilles originalpunkterne X og billedpunkterne Y i samme koordinatsystem i E_3 , har matrixligningen for en homoteti formen

$$\underline{y} = \underline{a} + \varrho \underline{x}.$$

Omvendt vil enhver matrixligning af denne form med $c \neq 0$ fremstille en homoteti. For den inverse afbildning φ^{-1} fås

$\underline{x}| = -\frac{1}{c} \underline{a}| + \frac{1}{c} \underline{y}|$; denne er altså ligeledes en homoteti. (Dette sluttes også let direkte af definitionen, når det bemærkes, at den ved φ^{-1} inducerede lineære vektorfunktion er $(f_\varphi)^{-1}$.)

Er ψ en homoteti, som med hensyn til det samme koordinatsystem fremstilles ved matrixligningen

$$\underline{z}| = \underline{b}| + c \underline{y}|,$$

fås for den sammensatte afbildning $\psi \circ \varphi$ fremstillingen

$$\underline{z}| = \underline{b}| + c \underline{a}| + c \underline{y}|.$$

Heraf aflæses, at $\psi \circ \varphi$ er en homoteti. (Også dette sluttes let direkte af definitionen, når det bemærkes, at $f_{\psi \circ \varphi} = f_\psi \circ f_\varphi$.) Disse resultater viser, at homotetierne i E_3 danner en undergruppe $\mathcal{K}_3$ i den affine gruppe.

Analogt defineres homotetier i en plan eller på en linie. Homotetierne i en plan danner en undergruppe $\mathcal{K}_2$ i planens affine gruppe. Enhver affin afbildning af en linie på sig selv er en homoteti.

3) En fra den identiske forskellig affin afbildning φ af en plan på sig selv kaldes en (aksial) affinitet, hvis dens fixpunkter udgør en linie. Denne linie kaldes dens akse. Der findes en og kun een affinitet med en given akse a , ved hvilken der til et givet punkt P uden for a svarer et fra dette forskelligt, givet punkt P' uden for a . Vælges nemlig to forskellige punkter A_0 og A_1 på a , findes der jo netop een affin afbildning af planen, ved hvilken der til de tre punkter A_0, A_1, P , som ikke ligger på samme linie, svarer henholdsvis A_0, A_1, P' , og ved denne afbildning er alle punkter på $li(A_0, A_1) = a$ fixpunkter. Der

skelnes mellem to tilfælde: I) $li(P, P')$ skærer a , II) $li(P, P') \parallel a$.

I tilfældet I lad A være de to liniers skæringspunkt. Idet $\varphi(A) = A$ og $\varphi(P) = P'$, afbildes $li(P, P') = p$ på sig selv. Det samme gælder da for enhver med p parallel linie q ; thi dens bilde $\varphi(q)$ må være parallel med $\varphi(p) = p \parallel q$, og skæringspunktet mellem q og a afbildes på sig selv. Endvidere afbildes hver med a parallel linie på en med $\varphi(a) = a$ parallel linie. De med a parallelle vektorer er egenvektorer til egenværdien 1, og de med "affinitetsretningen", d.v.s. retningen af p , parallelle vektorer er egenvektorer til en egenværdi λ , som er forskellig fra 1, da $P \neq P'$. Vælges A som begyndelsespunkt samt $\underline{e}_1$ på a og $\underline{e}_2 = \overrightarrow{AP}$ som grundvektorer for et koordinatsystem i planen fås som matrixligning for afbildningen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Tallet λ kaldes hyppigt affinitetsforholdet.

I tilfældet II afbildes $p = li(P, P') \parallel a$ på sig selv; thi $\varphi(p) \parallel \varphi(a) = a$, og p og $\varphi(p)$ har punktet P' fælles. Lad Q være et punkt, som hverken ligger på a eller på p . Er A skæringspunktet mellem $li(P, Q)$ og a , haves $\overrightarrow{AQ} = k \overrightarrow{AP}$, hvor $k \neq 0$ er et reelt tal. Idet $\varphi(A) = A$, $\varphi(P) = P'$ og $\varphi(Q)$ betegnes med Q' , fås heraf $\overrightarrow{AQ'} = k \overrightarrow{AP'}$. Subtraktion af de to vektorligninger giver $\overrightarrow{QQ'} = k \overrightarrow{PP'}$, altså $q = li(Q, Q') \parallel li(P, P') \parallel a$. Heraf sluttes, at hver med a parallel linie q afbildes på sig selv. "Affinitetsretningen" falder her sammen med aksens retning. En sådan affinitet kaldes hyppigt en lige affinitet. Hver med a parallel vektor er egenvektor til egenværdien 1, og der findes ikke andre

egenvektorer. Vælges et punkt A på a som begyndelsespunkt samt $\underline{e}_1$ på a og $\underline{e}_2 = \vec{AP}$ som grundvektorer for et koordinatsystem i planen, antager affinitetens matrixligning formen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

hvor $(\kappa, 1)$ er koordinatsættet for P' i det valgte koordinatsystem. Vælges specielt $\underline{e}_1 = \vec{PP'}$, fås $\kappa = 1$.

En ikke identisk affin afbildning φ af rummet på sig selv kaldes en affinitet, hvis dens fixpunktmængde er en plan α , affinitetsplanen. Der findes netop en sådan afbildning med en given affinitetsplan α , ved hvilken der til et givet punkt P uden for α svarer et vilkårligt givet punkt P' uden for α . Der skelnes igen mellem tilfældet, hvor $p = li(P, P')$ skærer α , og tilfældet hvor $p \parallel \alpha$. Det vises som i planen, at hver med p parallel linie afbildes på sig selv. Disse liniers retning kaldes igen affinitetsretningen. I begge tilfælde er alle med α parallelle vektorer egenvektorer til egenværdien 1, som altså har multipliciteten 2 (da denne kun er 3 ved den identiske afbildning). I det første tilfælde er desuden vektorerne parallelle med affinitetsretningen egenvektorer til en egenværdi $\lambda \neq 1$, medens der i det andet ikke findes andre egenvektorer. Ved passende valg af koordinatsystemet kan matrixligningerne i de to tilfælde bringes på formerne

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

4) Parallelprojektioner af rummet på en plan eller en linie, af en plan på en plan eller en linie, af en linie på en linie er affine afbildninger.

5) I den såkaldte deskriptive geometri udvikles metoder til afbildning af rumfigurer ved tegninger, som enten kan tjene til at afløse en figurs mål, f.eks. som grundlag for fremstillingen af en genstand, eller til at give et anskueligt billede af rumfiguren. Her spiller affine afbildninger af rummet på en plan en fremtrædende rolle. De såkaldte aksonometriske afbildninger, som i reglen tjener det sidstnævnte formål, defineres således: I rummet vælges et koordinatsystem $(A; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ (i bekvem beliggenhed i forhold til den figur, der skal afbildes). I tegneplanen vælges billedpunktet B af A samt billedvektorerne $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ af $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ (bedst således, at ikke to af dem er lineært afhængige). Derved bestemmes, som vist, netop een affin afbildning af rummet på tegneplanen. Til punktet X i rummet, hvis stedvektor ud fra A er

$$\overrightarrow{AX} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3,$$

svarer herved punktet Y, hvis stedvektor ud fra B er

$$\overrightarrow{BY} = x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + x_3 \underline{v}_3.$$

To punktmængder L og M i rummet (i samme plan, på samme linie) siges at være affin-ækvivalente (eller kort affine), hvis der findes en enentydig affin afbildning af rummet (planen, linien) på sig selv, ved hvilken L afbildes på M. At der virkelig foreligger en ækvivalensrelation, følger umiddelbart af, at de pågældende affine afbildninger danner en gruppe. Hvilkesomhelst to tetraedre, hvilkesomhelst to trekanter, hvilkesomhelst to

liniestykker er affin-ækvivalente. To punktmængder $\{A, B, C\}$ og $\{A', B', C'\}$, hver bestående af tre forskellige punkter på samme linie er almindeligvis ikke affin-ækvivalente. Nødvendig (og, som man let ser, også tilstrækkelig) for, at der findes en affin afbildning ϕ , for hvilken $\phi(A) = A'$, $\phi(B) = B'$ og $\phi(C) = C'$, er, at C' deler $\overrightarrow{A'B'}$ i samme forhold som C deler $\overrightarrow{AB}$. Dette forhold siges at være en affin-invariant af mængden $\{A, B, C\}$. Egenskaben ved en punktmængde L at være konveks er affin-invariant, d.v.s. enhver med L affin-ækvivalent mængde har den samme egenskab. I den affine geometri studeres de affin-invariante egenskaber ved de geometriske figurer.

To punktmængder L og M i rummet (i samme plan) siges at være homotetiske, hvis der findes en homoteti i rummet (planen), ved hvilken L afbildes på M . Idet de pågældende homotetier danner en gruppe, defineres herved en ækvivalensrelation mellem punktmængder. I den elementære geometri siges homotetiske punktmængder at være "ligedannede og ligedan beliggende".

Øvelser til kap. III, 8.

- 1) På en linie E_1 er valgt et affint koordinatsystem. En affin afbildning af E_1 på sig selv er bestemt ved, at de to punkter med koordinaterne p og q , hvor $p \neq q$, har billedpunkter, hvis koordinater er henholdsvis p' og q' . Find afbildningens "matrixligning".

- 2) I en plan E_2 er valgt et affint koordinatsystem. En affin afbildning φ af E_2 ind i sig selv er bestemt ved, at punkterne med koordinatsættene $(1,1), (1,2), (2,-1)$ har billedpunkter, hvis koordinatsæt er henholdsvis $(0,3), (0,0), (2,-2)$. Find afbildningens matrixligning. (Begynd f. eks. med at bestemme matrixligningen for den inducerede lineære vektorfunktion.)
Bestem den inducerede lineære vektorfunktions egenverdier og egenvektorer, og angiv et koordinatsystem, i hvilket den affine afbildnings matrixligning bliver særlig simpel.

- 3) I en plan E_2 er givet to hinanden skærende linier l_1 og l_2 samt to punkter P og P' , som ikke ligger på nogen af disse linier. Vis, at der findes en og kun een affin afbildning af E_2 på sig selv, ved hvilken P afbildes på P' og hver af linierne l_1 og l_2 1) på sig selv, 2) på den anden.
Find i hvert af tilfældene afbildningens matrixligning i det affine koordinatsystem med liniernes skæringspunkt som begyndelsespunkt og grundvektorer $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$ på henholdsvis l_1 og l_2 , der er valgt således, at P har koordinatsættet $(1,1)$. Koordinatsættet (p_1, p_2) for P' tænkes givet.

- 4) I en plan E_2 er givet tre punkter A_1, A_2, A_3 , som ikke ligger på samme linie. En affin afbildning $\varphi : E_2$ på E_2 bestemmes ved $\varphi(A_1) = A_2, \varphi(A_2) = A_3, \varphi(A_3) = A_1$. Angiv et fixpunkt F for afbildningen, og vis, at der ikke findes andre.

Angiv afbildningens matrixligning i det affine koordinatsystem $(F; \overrightarrow{FA_1}, \overrightarrow{FA_2})$.

- 5) I rummet E_3 er givet fire punkter A_1, A_2, A_3, A_4 , som ikke ligger i samme plan. Find for den ved $\varphi(A_1) = A_2$, $\varphi(A_2) = A_1$, $\varphi(A_3) = A_4$, $\varphi(A_4) = A_3$ bestemte affine afbildning $\varphi: E_3$ på E_3 mængden af fixpunkter samt egenvektorer og egenverdier. (Undersøg, hvorledes midtpunkterne af de seks liniestykker, der forbinder de givne punkter, afbildes ved φ .)
- 6) I en plan E_2 er givet tre punkter A_0, A_1, A_2 , som ikke ligger på samme linie, samt et punkt $A'_2 \neq A_2$, som ikke ligger på $li(A_0, A_1)$. Ved $\varphi(A_0) = A_0$, $\varphi(A_1) = A_1$, $\varphi(A_2) = A'_2$ bestemmes en affinitet med akse $li(A_0, A_1)$. Konstruer billedet af en vilkårligt opgiven trekant 1) hvis $li(A_2, A'_2)$ skærer $li(A_0, A_1)$, 2) hvis $li(A_2, A'_2) \parallel li(A_0, A_1)$.
- 7) Lad E_1 og E'_1 være to linier, der skærer hinanden, og lad der være givet en affin afbildning $\varphi: E_1 \rightarrow E'_1$. Vis, at φ kan sammensættes af en translation, ved hvilken E_1 afbildes på sig selv, og en parallelprojektion af E_1 ind i E'_1 .
- 8) I en plan E_2 er givet en affinitet φ med akse l . Vis, at der findes en plan E'_2 , således at φ kan sammensættes af en parallelprojektion af E_2 på E'_2 og en parallelprojektion af E'_2 på E_2 .
- 9) Konstruer et aksonometrisk billede af en terning og af et regulært oktaeder. (Et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet tænkes anbragt i hensigtsmæssig beliggenhed i forhold til terningen eller oktaedret. De tre grundvektorer af billedvektorer i planen vælges således, at ikke to af dem er lineært afhængige.)

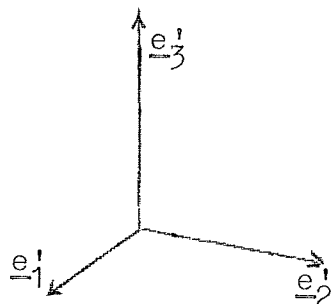
- 10) Et polyeders 15 hjørnespidser har i et koordinatsystem $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ (som man bedst tænker sig sædvanligt retvinklet) koordinatsættene $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,1,0), D(1,1,0), E(1,3,0), F(0,3,0), A_1(0,0,1), B_1(2,0,1), C_1(2,1,1), D_1(1,1,1), E_1(1,3,1), F_1(0,3,1), G(3/2, 1/2, 3/2), H(1/2, 1/2, 3/2), I(1/2, 5/2, 3/2)$. Polyedret har 13 sideflader: $ABCDEF, ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1, EFF_1E_1, FAA_1F_1, A_1B_1GH, B_1C_1G, C_1D_1HG, D_1E_1IH, E_1F_1I, F_1A_1HI$. Tegn et aksonometrisk billede af polyedret. (Vælg billedvektorerne $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2$ og $\underline{e}'_3$ af $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ og $\underline{e}_3$ omtrent som angivet på næste side.)
- 11) Søg nødvendige og tilstrækkelige betingelser for 1) at to trapezeder i planen, 2) to firkanter i planen, 3) to tresidede prismer, 4) to tresidede dobbeltpyramider er affin-ækvivalente. (Ved en tresidet dobbeltpyramide forstås her et polyeder sammensat af to treta^redre, som har en sideflade fælles og ligger på hver sin side af denne.)
- 12) Søg nødvendige og tilstrækkelige betingelser for, at en sekskant i planen er affin-ækvivalent med en regulær sekskant. Konstruer en sådan sekskant, når tre på hinanden følgende af dens vinkelspidser er givet vilkårligt, dog således, at de ikke ligger på samme linie.
- 13) Samlingen af alle affine afbildninger af rummet på sig selv, ved hvilke en given delmængde D af E_3 afbildes på sig selv, danner en transformationsgruppe G_D . Bekræft dette. Vis, at hvis D er en endelig mængde $\{A_1, \dots, A_q\}$, findes der et punkt, som er fixpunkt for alle afbildninger tilhørende G_D . Vis, at hvis det desuden forudsættes, at D ikke er indeholdt i en plan, vil G_D være af endelig orden, og angiv et kun af q afhængigt overtal for denne orden.

- 14) Vis, at hvis en affin afbildning $\varphi : E_3 \rightarrow E_3$ er af endelig orden, d.v.s. hvis der findes et positivt helt tal p , således at φ^p er den identiske afbildning, vil den afbilde E_3 på sig selv, have mindst eet fixpunkt, og tallene 1 og -1 vil være de eneste (reelle) tal, som kan være egenverdier for den ved φ inducerede lineære vektorfunktion.
- 15) Vis, at gruppen $\mathcal{T}_3$ af translationer i rummet E_3 danner en normal undergruppe i gruppen af alle affine afbildninger. (Jfr. side II,2,6. Det drejer sig om at vise, at hvis τ er en translation og φ en vilkårlig affin afbildning af E_3 på sig selv, vil $\varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$ være en translation.)

Vis dernæst, at der består en enentydig korrespondance mellem sideklasserne til $\mathcal{T}_3$ og de af de affine afbildninger inducerede lineære vektorfunktioner.

Undersøg, om gruppen $\mathcal{H}_3$ af homotetier i E_2 er en normal undergruppe i gruppen af alle affine afbildninger af E_3 på sig selv.

10)



§ 9. Linearformer. Lineære uligheder.

De lineære afbildninger af et vektorrum $(V, +, L)$ ind i tallegemet L , opfattet som det endimensionale vektorrum $(L, +, L)$, kaldes linearformer eller (især når V er uendelig-dimensionalt) lineære funktionaler i $(V, +, L)$. En sådan er altså en i V defineret funktion Δ med værdier i L , som for alle vektorer $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v} \in V$ og alle tal $a \in L$ opfylder betingelserne

$$\Delta(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \Delta(\underline{v}_1) + \Delta(\underline{v}_2), \quad \Delta(a\underline{v}) = a\Delta(\underline{v}).$$

Den konstante funktion, der for hver vektor $\underline{v} \in V$ har værdien 0, er øjensynlig en linearform. Den kaldes nulformen eller nulfunktionalen og kan uden fare for misforståelser betegnes med 0.

Eksempler:

1) Lad $(V, +, L)$ være talrummet $(L^n, +, L)$, og lad der være givet et talsæt $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, hvis tal tilhører L . Ved til vektoren $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in L^n$ at lade svare tallet

$$\Delta(\underline{v}) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

fås en linearform. Nulformen fremkommer, hvis og kun hvis $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Det vil fremgå af en sætning nedenfor, at hver linearform defineret i L^n er et sådant homogent førstegradspolynomium.

2) Lad V betegne mængden af alle komplekse talfølger $(v_1, v_2, \dots)$, for hvilke rækken $|v_1| + |v_2| + \dots$ er konvergent, d.v.s. for hvilke rækken $v_1 + v_2 + \dots$ er absolut konvergent. Med de sædvanlige definitioner

$$(u_1, u_2, \dots) + (v_1, v_2, \dots) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots),$$

$$a(v_1, v_2, \dots) = (av_1, av_2, \dots)$$

er V et vektorrum (et underrum i $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \mathbb{C})$); thi er rækkerne $u_1 + u_2 + \dots$ og $v_1 + v_2 + \dots$ absolut konvergente, vil også

$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\dots$ være det, idet $|u_i+v_i| \leq |u_i|+|v_i|$, og for hvert tal $a \in \mathbb{C}$ vil $av_1+av_2+\dots$ være absolut konvergent, når $v_1+v_2+\dots$ er det.

Er $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ en begrænset følge af komplekse tal, vil rækken $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots$ for hver følge $(v_1, v_2, \dots) \in V$ være konvergent (endda absolut konvergent). Ved til $(v_1, v_2, \dots) \in V$ at lade svare det komplekse tal

$$\Lambda(v_1, v_2, \dots) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots$$

defineres en linearform i $(V, +, \mathbb{C})$.

3) Lad $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ være et interval, og lad $(V, +, \mathbb{R})$ være vektorrummet af de i $[a, b]$ definerede kontinuerte reelle funktioner. For en given reel funktion α af begrænset variation i $[a, b]$ er da

$$\Lambda(f) = \int_a^b f \, d\alpha, \quad f \in V,$$

en lineær funktional $\frac{1}{2}(V, +, \mathbb{R})$.

Er Λ_1, Λ_2 og Λ linearformer i et vektorrum $(V, +, L)$ og k et tal fra L , vil de ved $\underline{v} \rightarrow \Lambda_1(\underline{v}) + \Lambda_2(\underline{v})$ og $\underline{v} \rightarrow k\Lambda(\underline{v})$ definerede funktioner $\Lambda_1 + \Lambda_2$ og $k\Lambda$ fra V til L også være linearformer (jfr. side III, 7, 15). Linearformerne i $(V, +, L)$ danner altså et nyt vektorrum (et underrum af funktionsrummet $(\mathcal{F}_V, +, L)$ indført side III, 4, 7). Det kaldes det til $(V, +, L)$ duale vektorrum og betegnes med $(V^*, +, L)$. (I uendelig-dimensionale vektorrum over de reelle eller komplekse tals legeme indføres i reglen topologier, og man har ofte anledning til specielt at betragte de kontinuerte linearformer. Ved et sådant vektorrums duale forstås derfor almindeligvis vektorrummet bestående af alle kontinuerte linearformer. Det her betragtede, bestående af alle linearformer overhovedet, betegnes da som det "algebraisk duale").

Nulvektoren i det duale vektorrum $(V^*, +, L)$ er naturligvis nulformen.

Linearformer $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$ er lineært afhængige, hvis og kun hvis der findes $k_1, \dots, k_p$ i L , som ikke alle er 0, således at $k_1\Lambda_1 + \dots + k_p\Lambda_p$ er nulformen, d.v.s. således at

$$k_1\Lambda_1(\underline{v}) + \dots + k_p\Lambda_p(\underline{v}) = 0$$

for hver vektor $\underline{v} \in V$. Det er herefter klart, hvad begreber som lineær uafhængighed, maximal sæt, rang kommer til at betyde, når talen er om sæt af linearformer.

Lad linearformen Λ være forskellig fra nulformen, hvilket kort skrives $\Lambda \neq 0$ (medens $\Lambda(\underline{v}) \neq 0$ betyder, at den til $\underline{v}$ svarende værdi af Λ er forskellig fra 0). Værdimængden ved Λ er da hele tallegemet L , d.v.s. Λ er en afbildning af V på L . Er nemlig $\underline{a}$ en vektor, for hvilken $\Lambda(\underline{a}) \neq 0$, og gennemløber k hele tallegemet L , vil $\Lambda(k\underline{a}) = k\Lambda(\underline{a})$ ligeledes gennemløbe hele L . Nulrummet eller kernen ved Λ , altså $\Lambda^{-1}(0)$, d.v.s. underrummet bestående af alle $\underline{v} \in V$, for hvilke $\Lambda(\underline{v}) = 0$, er da ikke hele rummet V , og for hvert $b \in L$ er $\Lambda^{-1}(b)$, d.v.s. mængden af alle $\underline{v} \in V$, for hvilke $\Lambda(\underline{v}) = b$, et sideunderrum til $\Lambda^{-1}(0)$ (jfr. side III, 7, 11). Et sådant sideunderrum $\Lambda^{-1}(b)$, specielt altså nulrummet $\Lambda^{-1}(0)$, kaldes en hyperplan i V . Ligningen $\Lambda(\underline{v}) = b$, der for et givet $b \in L$ tilfredsstilles netop af alle $\underline{v} \in \Lambda^{-1}(b)$, kaldes hyperplanens ligning.

Lad der være givet en linearform $\Lambda \neq 0$, og lad $\underline{a} (\neq 0)$ være en fast valgt vektor, for hvilken $\Lambda(\underline{a}) \neq 0$. Hver vektor $\underline{v} \in V$ kan da på en og kun een måde skrives på formen

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \alpha \underline{a}, \quad \underline{v}_0 \in \Lambda^{-1}(0), \alpha \in L,$$

altså som sum af en vektor $\underline{v}_0$ i nulrummet og en vektor proportional med $\underline{a}$. Med andre ord V er den direkte sum af nulrummet

$\Lambda^{-1}(0)$ og det af $\underline{a}$ frembragte endimensionale underrum $V(\underline{a})$:

$$V = \Lambda^{-1}(0) \oplus V(\underline{a})$$

(jfr. side III, 4, 20). Dette sluttet af, at der for $\alpha \in L$ gælder

$$\Lambda(\underline{v} - \alpha \underline{a}) = \Lambda(\underline{v}) - \alpha \Lambda(\underline{a}) = 0,$$

altså $\underline{v}_0 = \underline{v} - \alpha \underline{a} \in \Lambda^{-1}(0)$, hvis og kun hvis $\alpha = \Lambda(\underline{v})/\Lambda(\underline{a})$.

Dette giver tillige udtrykket

$$\underline{v}_0 = \underline{v} - \frac{\Lambda(\underline{v})}{\Lambda(\underline{a})} \underline{a}$$

for parallelprojektionen i retningen $\underline{a}$ af den vilkårlige vektor $\underline{v} \in V$ på hyperplanen $\Lambda^{-1}(0)$ (jfr. side III, 4, 21).

To linearformer $\Lambda \neq 0$ og $\Lambda' \neq 0$ har samme nulrum, hvis og kun hvis de er lineært afhængige, hvilket her vil sige proportionale. At proportionale, fra nulformen forskellige linearformer har samme nulrum. Det omvendte følger af, at hvis Λ og Λ' har samme nulrum, medfører $\Lambda(\underline{v}_0) = 0$, at $\Lambda'(\underline{v}_0) = 0$. Af det fundne udtryk for $\underline{v}_0$ fås da nemlig

$$\Lambda'(\underline{v}) - \frac{\Lambda(\underline{v})}{\Lambda(\underline{a})} \Lambda'(\underline{a}) = 0,$$

hvoraf påstanden aflæses, idet $\Lambda'(\underline{a})/\Lambda(\underline{a})$ er uafhængigt af $\underline{v}$.

Som originalmængder til elementerne i billedmængden L ved afbildningen Λ danner hyperplanerne $\Lambda^{-1}(b)$, $b \in L$, en klasseinddeling af V (se side I, 4, 6); d.v.s. to hyperplaner $\Lambda^{-1}(b_1)$ og $\Lambda^{-1}(b_2)$ er disjunkte eller identiske, efter som $b_1 \neq b_2$ eller $b_1 = b_2$, og hver vektor $\underline{v} \in V$ tilhører een af hyperplanerne. Man siger, at originalmængderne ved en linearform $\Lambda \neq 0$ danner et bundt eller en skare af parallelle hyperplaner.

To fra nulformen forskellige linearformer bestemmer den samme skare af parallelle hyperplaner, hvis og kun hvis de er proportionale.

Bevis: Lad Λ og $\Lambda' = k\Lambda$, hvor $k \neq 0$, være to proportio-

-nale linearformer. Af $\bigwedge(\underline{y}) = b$ følger da $\bigwedge'(\underline{y}) = kb$, og omvendt. Dette viser, at $\bigwedge^{-1}(b) = \bigwedge'^{-1}(kb)$ for $b \in L$, altså at $\bigwedge$ og $\bigwedge'$ bestemmer de samme hyperplaner. Omvendt, hvis $\bigwedge$ og $\bigwedge'$ bestemmer de samme hyperplaner, har de specielt samme nulrum og er ifølge det ovenfor viste proportionale.

Det er muligt og ofte hensigtsmæssigt at bestemme en fra nulformen forskellig linearform ved en "figur" i selve vektorrummet V . Lad $\bigwedge \neq 0$ være en linearform. Nulrummet $\bigwedge^{-1}(0)$ og sideunderrummet $\bigwedge^{-1}(1)$, som udgøres af de vektorer i V , for hvilke $\bigwedge$ antager værdien 1, er to disjunkte, parallelle hyperplaner, hvoraf den første indeholder nulvektoren. Ved disse to hyperplaner er linearformen fuldstændig bestemt; med andre ord, hvis det for to linearformer $\bigwedge$ og $\bigwedge'$ gælder, at $\bigwedge^{-1}(0) = \bigwedge'^{-1}(0)$ og $\bigwedge^{-1}(1) = \bigwedge'^{-1}(1)$, gælder $\bigwedge = \bigwedge'$. Idet $\bigwedge$ og $\bigwedge'$ har samme nulrum, er nemlig som vist $\bigwedge' = k\bigwedge$, hvor $k \in L$, og for en vektor $\underline{y}$, for hvilken $\bigwedge(\underline{y}) = \bigwedge'(\underline{y}) = 1$, fås

$$1 = \bigwedge'(\underline{y}) = k\bigwedge(\underline{y}) = k.$$

Der foreligger her en vis analogi med bestemmelsen af en geometrisk vektor (specielt en stedvektor) ved et punktpar (ved et punktpar med nulpunktet som første punkt). Linearformerne, d.v.s. vektorerne i det til V duale vektorrum V^* kan altså fremstilles i V ved par af parallelle hyperplaner. De kaldes i denne forbindelse ofte for kovariante vektorer i V , medens de vektorer, der ifølge definition udgør V , da benævnes kontravariante vektorer. Motiveringen for disse benævnelser vil blive omtalt nedenfor.

Det forudsættes nu, at vektorrummet V har den endelige dimension n . Idet billedet af V ved en linearform $\bigwedge \neq 0$ er det endimensionale vektorrum $(L, +, L)$, har kernen $\bigwedge^{-1}(0)$ dimensionen $n-1$

(se side III, 7, 9). Idet man tilskriver siderummene til et underrum den samme dimension som dette (dimensionens definition, side III, 4, 14, vedrører kun underrum), kan man sige, at hyperplanerne i et n -dimensionalt vektorrum er $(n-1)$ -dimensionale. (Er $\dim V = \infty$, vil også $\Lambda^{-1}(0)$ være uendelig-dimensionalt. Det faktum at billedrummet ved Λ er endimensionalt og dermed, at kernen $\Lambda^{-1}(0)$ har en dimension, "der er 1 mindre end rummets", plejer man at udtrykke ved at tilskrive hyperplanen $\Lambda^{-1}(0)$ kodimensionen 1.)

Lad der være valgt en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ i det n -dimensionale vektorrum $(V_n, +, L)$. Er Λ en linearform, gælder for hver vektor

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n \in V_n,$$

at

$$\Lambda(\underline{v}) = v_1 \Lambda(\underline{e}_1) + \dots + v_n \Lambda(\underline{e}_n).$$

Det ses heraf, at linearformen er entydig bestemt ved de værdier, den antager for de n lineært uafhængige vektorer $\underline{e}_i$. Er der på den anden side givet vilkårlige tal $a_1, \dots, a_n$ fra L , og lader man til vektoren $\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n$ svare tallet

$$\Lambda(\underline{v}) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n,$$

fås øjensynlig en linearform, og for denne gælder, som det let bekræftes, at

$$\Lambda(\underline{e}_i) = a_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Heraf sluttes:

I et n -dimensionalt vektorrum $(V_n, +, L)$ findes der en og kun een linearform, som for n givne lineært uafhængige vektorer antager givne værdier fra L .

Dette kan opfattes som et specielt tilfælde af sætningen om bestemmelsen af en lineær afbildning af et vektorrum ind i et andet

(side III, 7, 6). Koefficientsættet $(a_1, \dots, a_n)$ er ikke andet end den til afbildningen hørende matrix, som i det foreliggende tilfælde er en række.

Af ovenstående aflæses endvidere, at efter valg af en basis i V_n er linearformerne netop de homogene førstegradspolynomier i den variable vektors koordinater. Der består altså en enen-tydig korrespondance mellem linearformerne og koefficientsættene $(a_1, \dots, a_n)$. Da denne øjensynlig er lineær, kan sluttes, at det til et endelig-dimensionalt vektorrum V_n duale vektorrum V_n^* er isomorft med talrummet L^n . Da også V_n selv er isomorft med L^n , gælder: Hvert endelig-dimensionalt vektorrum er isomorft med sit duale. (For uendelig-dimensionale vektorrum gælder ikke noget tilsvarende.) Koefficientsættet $(a_1, \dots, a_n)$ for en linearform

$$\Lambda(\underline{v}) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

kan opfattes som koordinatsæt for vektoren Λ i det duale rum V_n^* , hvis man som basis for dette rum vælger $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$, hvor $\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \dots, \underline{e}_n^*$ betegner linearformerne med koefficientsættene $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$. For disse linearformer gælder følgende

$$\underline{e}_i^*(\underline{e}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

og de er herved fuldstændig bestemt. Anderledes udtrykt, $\underline{e}_i^*$ er den linearform, der til vektoren $\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n$ lader svare dens i -te koordinat v_i , altså $\underline{e}_i^*(\underline{v}) = v_i$. Til hver basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ for V_n hører således en bestemt basis $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$ for V_n^* , som kaldes den til $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ duale basis.

Som nævnt ovenfor, kaldes linearformerne også for kovariante vektorer i V_n . Disse kan ganske som de kontravariante vektorer, d.v.s. vektorerne, der udgør V_n , bestemmes ved koordi-

natsæt bestående af n tal. Forskellen inellen den træder inid-
lertid fren, når der skiftes basis i V_n . Med de tidligere be-
tegnelser (side III, 6, 13) lad en ny basis $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$ være
bestemt ved

$$(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = (\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n) \underline{T},$$

hvor $\underline{T}$ er en regulær kvadratisk matrix. For koordinatsættene
 $\underline{v}|^{(e)}$ og $\underline{v}|^{(f)}$ for en vektor $\underline{v} \in V_n$ med hensyn til de to baser
gælder da (jfr. side III, 6, 14)

$$\underline{v}|^{(f)} = \underline{T} \underline{v}|^{(e)}.$$

Lad Λ være en lineærform, og lad $\underline{a}^{(e)}$ og $\underline{a}^{(f)}$ betegne koeffi-
cientsættene, skrevet som rækkematricer, ved fremstillingerne af
 Λ som homogene førstegradspolynomier, når henholdsvis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$
og $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$ benyttes som basis. Man har da for hver vektor
 $\underline{v} \in V_n$

$$\Lambda(\underline{v}) = \underline{a}^{(e)} \underline{v}|^{(e)} = \underline{a}^{(f)} \underline{v}|^{(f)},$$

altså

$$\underline{a}^{(e)} \underline{v}|^{(e)} = \underline{a}^{(f)} \underline{T} \underline{v}|^{(e)}.$$

Da dette gælder for hver søjlematrix $\underline{v}|^{(e)}$, kan man slutte, at

$$\underline{a}^{(e)} = \underline{a}^{(f)} \underline{T}$$

eller udførligere

$$(a_1^{(e)}, \dots, a_n^{(e)}) = (a_1^{(f)}, \dots, a_n^{(f)}) \underline{T}.$$

Det ses, at denne transformationsformel har samme form som den
for basisvektorerne. Koefficientsættene for linearformer trans-
formerer med (på samme måde som) baserne; derfor navnet kovariant
vektor for en lineærform. Derimod transformeres koordinatsæt-
tene for vektorer på en anden, "modsat" måde. Omskrives nemlig
den pågældende ligning for sammenligningens skyld ved at gå over
til de transponerede matricer og at løse med hensyn til $\underline{v}|^{(e)}$,

Øvelser til kap. III, § 9.

1. I rummet E_3 med basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ er givet vektoren $\underline{v}$ med koordinatsættet $(2, -1, 3)$ og vektoren $\underline{a}$ med koordinatsættet $(1, 0, -3)$.

Idet Λ er den ved

$$\Lambda(\underline{e}_1) = 1$$

$$\Lambda(\underline{e}_2) = 1$$

$$\Lambda(\underline{e}_3) = 1$$

bestemte linearform, skal man vise, at $\Lambda(\underline{a}) \neq 0$ og skrive $\underline{v}$ på formen

$$(1) \quad \underline{v} = \underline{v}_0 + \alpha \underline{a},$$

hvor $\Lambda(\underline{v}_0) = 0$.

Bestem samtlige linearformer Λ' for hvilke en opspaltning af $\underline{v}$ på formen (1) giver det samme $\underline{v}_0 \in \Lambda'^{-1}(0)$.

2. Bevis, at ethvert underrum i et endeligdimensionalt vektorrum er gennemsnit af endelig mange hyperplaner.
3. Vis, at vektorrummet $(V, +, L)$ er isomorft med et (ægte eller uægte) underrum af $(V^{**}, +, L)$.
4. Lad $(V, +, L)$ være et endeligdimensionalt vektorrum og V' og V'' to underrum i V , og lad U betyde det af $V' \cup V''$ frembragte vektorrum.

Vis, at

$$\dim U + \dim (V' \cap V'') = \dim V' + \dim V''.$$

Find v. hj. heraf dimensionen af det af $V' \cup V'' \cup V'''$ frembragte vektorrum udtrykt ved dimensionerne af V' , V'' , V''' , $V' \cap V''$, $V' \cap V'''$, $V'' \cap V'''$ og $V' \cap V'' \cap V'''$.

Søg at generalisere resultatet.

§ 12. Bilineære og kvadratiske former.

Lad der være givet to vektorrum $(U, +, L)$ og $(V, +, L)$ over samme tallegeme L . En funktion $B : U \times V$ ind i L siges at være en bilineær form (bilinearform), hvis den for alle $\underline{u}, \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$, alle $\underline{v}, \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ og alle $\lambda, \mu \in L$ opfylder følgende krav:

$$BL1: \quad B(\underline{u}_1 + \underline{u}_2, \underline{v}) = B(\underline{u}_1, \underline{v}) + B(\underline{u}_2, \underline{v}),$$

$$BL2: \quad B(\lambda \underline{u}, \underline{v}) = \lambda B(\underline{u}, \underline{v}),$$

$$BL3: \quad B(\underline{u}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2) = B(\underline{u}, \underline{v}_1) + B(\underline{u}, \underline{v}_2),$$

$$BL4: \quad B(\underline{u}, \mu \underline{v}) = \mu B(\underline{u}, \underline{v}),$$

med andre ord, hvis $B(\underline{u}, \underline{v})$ for hver fast vektor $\underline{v} \in V$ er en linearform i U og for hver fast vektor $\underline{u} \in U$ en linearform i V (jfr. side III, 9, 1). Er der givet en bilinear form $B(\underline{u}, \underline{v})$, vil der altså til hver vektor $\underline{v} \in V$ svare linearformen $\bigwedge_{\underline{v}}$ bestemt ved, at $\bigwedge_{\underline{v}}(\underline{u}) = B(\underline{u}, \underline{v})$. Der foreligger altså en afbildning $\underline{v} \rightarrow \bigwedge_{\underline{v}}$ af V ind i det til U duale rum U^* (se side III, 9, 2). De to sidste af ovenstående ligninger udsiger, at denne afbildning er lineær. Er der omvendt givet en lineær afbildning $\underline{v} \rightarrow \bigwedge_{\underline{v}}$ af V ind i U^* , for hvilken altså $\bigwedge_{\underline{v}_1 + \underline{v}_2} = \bigwedge_{\underline{v}_1} + \bigwedge_{\underline{v}_2}$ og $\bigwedge_{\mu \underline{v}} = \mu \bigwedge_{\underline{v}}$, fås en bilinearform ved at definere $B(\underline{u}, \underline{v}) = \bigwedge_{\underline{v}}(\underline{u})$. På tilsvarende måde kan en bilinear form fortolkes som en lineær afbildning af U ind i V^* .

Eksempler:

1) Lad $(U, +, L)$ være det m -dimensionale talrum $(L^m, +, L)$ og $(V, +, L)$ det n -dimensionale talrum $(L^n, +, L)$, og lad der være givet en $(m \times n)$ -matrix $\underline{B} = (b_{ij})$ med $\overset{\text{med}}{\text{elementer}}$ fra L . For $\underline{u} = (u_1, \dots, u_m) \in L^m$ og $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in L^n$ er da

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} u_i v_j = \underline{u} \cdot \underline{B} \cdot \underline{v}$$

en bilinearform. Af en sætning nedenfor vil det fremgå, at enhver

bilinær form defineret i endelig-dimensionale vektorrum efter valg af baser i disse kan fremstilles på denne måde.

2) Lad $(U, +, \mathbb{C})$ være vektorrummet bestående af alle komplekse talfølger $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots)$, således at rækken $u_1 + u_2 + \dots$ er absolut konvergent, og lad $(V, +, \mathbb{C})$ være vektorrummet bestående af alle begrænsede komplekse talfølger $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots)$. For $\underline{u} \in U$ og $\underline{v} \in V$ er da rækken

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots$$

konvergent og definerer en bilinear form i $U \times V$ (jfr. eksempel 2) side III, 9, 1).

3) Lad $(U, +, \mathbb{R})$ og $(V, +, \mathbb{R})$ henholdsvis være vektorrummet bestående af alle reelle kontinuerte funktioner $f(x)$ defineret i $a \leq x \leq b$ og alle reelle kontinuerte funktioner $g(y)$ defineret i $c \leq y \leq d$. Er der givet en reel funktion $K(x, y)$, der er defineret og kontinuert i rektanglet $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, vil

$$B(f, g) = \int_a^b \int_c^d K(x, y) f(x) g(y) dx dy$$

være en bilinear form defineret i $U \times V$.

I det følgende forudsættes, at $(U, +, L)$ og $(V, +, L)$ har de endelige dimensioner m og n . Lad der være valgt baser $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m)$ og $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$ i henholdsvis U og V . Idet

$$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + \dots + u_m \underline{e}_m, \quad \underline{v} = v_1 \underline{f}_1 + \dots + v_n \underline{f}_n,$$

fås for en bilinear form $B(\underline{u}, \underline{v})$ ved gentagen anvendelse af BL1-4

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n B(\underline{e}_i, \underline{f}_j) u_i v_j.$$

Sættes

$$B(\underline{e}_i, \underline{f}_j) = b_{ij}, \quad (b_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} = \underline{\underline{B}},$$

kan dette skrives som matrixligningen

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \underline{B} \underline{v}.$$

Heraf ses, at en bilinearform er fuldstændig bestemt, når de værdier, som den antager for de mn par $(\underline{e}_i, \underline{f}_j)$ af basisvektorer, altså $(m \times n)$ -matricen $\underline{B}$ kendes. Omvendt vil der for en vilkårlig opgiven $(m \times n)$ -matrix $\underline{B} = (b_{ij})$, $b_{ij} \in L$, ved ovenstående matrixligning defineres en bilinearform B i $U \times V$, for hvilken $B(\underline{e}_i, \underline{f}_j) = b_{ij}$. Vi har altså:

Lad $(U, +, L)$ være et m -dimensionalt og $(V, +, L)$ et n -dimensionalt vektorrum. Er der valgt en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m)$ for U og en basis $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$ for V , hører der til hver bilinearform B defineret i $U \times V$ en $(m \times n)$ -matrix $\underline{B}$ med elementer fra L , således at dennes værdi $B(\underline{u}, \underline{v})$, $\underline{u} \in U$, $\underline{v} \in V$, er givet ved $\underline{u} \underline{B} \underline{v}$, hvor $\underline{u}$ betegner koordinatsættet for $\underline{u}$ skrevet som række og $\underline{v}$ koordinatsættet for $\underline{v}$ skrevet som søjle.

Omvendt svarer der til en vilkårligt given $(m \times n)$ -matrix $\underline{B}$ en bilinearform givet ved $B(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \underline{B} \underline{v}$.

Som omtalt tidligere (side III, 7, 8) svarer der på lignende måde til hver lineær afbildning af et n -dimensionalt ind i et m -dimensionalt vektorrum en $(m \times n)$ -matrix, og omvendt. Efter valg af baser i de to vektorrum U og V kan altså en og samme matrix fortolkes som hidrørende såvel fra en bilinearform defineret i $U \times V$ som fra en lineær afbildning af V ind i U . Forskellen mellem de to fortolkninger viser sig imidlertid ved overgangen til andre baser i de to vektorrum. Af formelle grunde er det her at foretrække at antage koordinattransformationsformlerne løst med hensyn til de oprindelige koordinater. De kan da skrives

$$\underline{u} = \underline{S} \hat{\underline{u}}, \quad \underline{v} = \underline{T} \hat{\underline{v}},$$

hvor $\hat{\underline{u}}$ og $\hat{\underline{v}}$ er de nye koordinatsæt for $\underline{u}$ og $\underline{v}$, og hvor $\underline{S}$ er en regulær $(m \times m)$ -matrix og $\underline{T}$ en regulær $(n \times n)$ -matrix. Ved trans-

ponering af den første ligning fås $\underline{u} = \underline{\hat{u}} \underline{S}'$, altså

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \underline{B} \underline{v} = \underline{\hat{u}} \underline{S}' \underline{B} \underline{T} \underline{\hat{v}}.$$

Heraf ses, at matricen, som ved de nye baser hører til bilinearformen, bliver

$$\underline{\hat{B}} = \underline{S}' \underline{B} \underline{T}.$$

[For den ved $\underline{B}$ bestemte lineære afbildning $\underline{u} = \underline{B} \underline{v}$ af V ind i U ville $\underline{B}$ ved de samme koordinattransformationer blive erstattet med $\underline{S}^{-1} \underline{B} \underline{T}$. Hvis der til en bilinearform i $U \times V$ og til en lineær afbildning af V ind i U ved et bestemt valg af baser i U og V hører den samme matrix, vil der altså ved valg af andre baser i almindelighed høre forskellige matricer til dem. Uden at gå ind på enkeltheder skal det bemærkes, at der dog består en nøje sammenhæng mellem de to transformationslove. Som bemærket ovenfor, kan en bilinearform fortolkes som en lineær afbildning af V , ikke ind i U , men i det duale rum U^* , ved hvilken der altså til hver (kontravariant) vektor i V svarer en kovariant vektor i U . Forskellen i transformationsloven fremkommer ved, at en koordinattransformation i U bestemt, som ovenfor, ved matricen $\underline{S}$ bevirker en koordinattransformation med matricen $\underline{S}'^{-1}$ i det duale rum U^* (se side III, 9, 8).]

Da $\underline{S}'$ og $\underline{T}$ er regulære matricer, har $\underline{B}$ og $\underline{\hat{B}}$ samme rang r (se side III, 7, 13). Dette tal afhænger altså kun af den givne bilinearform, men ikke af valget af baser. Det kaldes derfor bilinearformens rang og kan betegnes med $\text{rg } B$. En af basisvalget uafhængig bestemmelse af r fås ved at bemærke, at $n-r$ er dimensionen af kernen ved den til bilinearformen hørende lineære afbildning af V ind i U^* . Ved denne svarer der nemlig til vektoren med koordinatsættet $\underline{v}$ linearformen med koefficientsættet $\underline{Bv}$ (skrevet som søjle). Kerne, som jo består af de vektorer $\underline{v}$, til hvilke

der svarer nulformen, udgøres altså af løsningsrummet til det homogene lineære ligningssystem $\underline{B} \underline{v} = \underline{0}$, som har dimensionen $n-r$, som påstået. Idet de to vektorrum kan bytte rolle, gælder følgende:

Er $B(\underline{u}, \underline{v})$ en bilinearform defineret i $U \times V$, hvor $(U, +, L)$ er et m -dimensionalt og $(V, +, L)$ et n -dimensionalt vektorrum, og er $r = \text{rg } B$ dens rang, vil de vektorer $\underline{v} \in V$, for hvilke $B(\underline{u}, \underline{v}) = 0$ for alle $\underline{u} \in U$, udgøre et $(n-r)$ -dimensionalt underrum i V og de vektorer $\underline{u} \in U$, for hvilke $B(\underline{u}, \underline{v}) = 0$ for alle $\underline{v} \in V$, et $(m-r)$ -dimensionalt underrum i U . Disse underrum kaldes bilinearformens nulrum i henholdsvis V og U .

I det følgende antages specielt, at $(U, +, L)$ og $(V, +, L)$ er det samme vektorrum. Som betegnelse for det vælges $(V, +, L)$. Indtil videre forudsættes derimod ikke, at det har endelig dimension. En bilinearform defineret i $V \times V$ kaldes kort en bilinearform i V .

Restriktionen af en bilinearform B i V til diagonalen i $V \times V$, altså $B(\underline{v}, \underline{v})$, $\underline{v} \in V$, kan betragtes som en funktion defineret i V med værdier i L . Er $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ vektorer fra V og $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tal fra L , fås ved gentagen anvendelse af BL1-4

$$\begin{aligned} B(\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_p \underline{v}_p, \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_p \underline{v}_p) \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B(\underline{v}_i, \underline{v}_j) \lambda_i \lambda_j . \end{aligned}$$

For hvert fast sæt af vektorer $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ er dette et homogent andengradspolynomium, en kvadratisk form, i de variable $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Tænker man specielt på lineært uafhængige vektorer $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ og opfatter disse som basisvektorer for det af dem udspændte p -dimensionale underrum og dermed $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ som koordinater for dettes vektorer, udsiger det fundne resultat følgende: Inden for hvert endelig-dimensionalt underrum af V og for hvert valg af basis i

dette er $B(\underline{v}, \underline{v})$ et homogent andengradspolynomium i koordinaterne for vektoren $\underline{v}$.

En funktion defineret i et vektorrum $(V, +, L)$ og med værdier i L , som har den omtalte egenskab kaldes en kvadratisk form i V . Det vil vise sig at være tilstrækkeligt at kræve ovenstående for to vektorer. Dette leder til følgende definition:

En funktion $Q : V \rightarrow L$ kaldes en kvadratisk form i V , hvis der til hvert par $\underline{u}, \underline{v}$ af vektorer fra V findes tal a, b, c fra L , således at

$$(1) \quad Q(\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}) = a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2$$

for alle $\lambda, \mu \in L$. (Faktoren 2 er tilføjet af formelle grunde.) Koefficienterne a, b, c afhænger naturligvis af $\underline{u}$ og $\underline{v}$. Ved at sætte $\lambda = 1, \mu = 0$ og $\lambda = 0, \mu = 1$ fås

$$(2) \quad a = Q(\underline{u}), \quad c = Q(\underline{v}),$$

og $\lambda = 1, \mu = 1$ giver derefter

$$(3) \quad 2b = 2b(\underline{u}, \underline{v}) = Q(\underline{u} + \underline{v}) - Q(\underline{u}) - Q(\underline{v}).$$

Det ses heraf, at

$$(4) \quad b(\underline{v}, \underline{u}) = b(\underline{u}, \underline{v}).$$

Det blev vist ovenfor, at restriktionen $B(\underline{v}, \underline{v})$ af en bilinearform $B(\underline{u}, \underline{v})$ til diagonalen i $V \times V$ er en kvadratisk form. Der gælder imidlertid også det omvendte, nemlig at enhver kvadratisk form $Q(\underline{v})$ kan fås på denne måde. Det vil nemlig vise sig, at $b(\underline{u}, \underline{v})$ er en bilinearform, og at $b(\underline{v}, \underline{v}) = Q(\underline{v})$. Denne bilinearform har desuden symmetriegenskaben (4), der giver anledning til definitionen:

En bilinearform B i et vektorrum V siges at være en symmetrisk bilinearform, hvis

$$B(\underline{v}, \underline{u}) = B(\underline{u}, \underline{v})$$

for alle par $\underline{u}, \underline{v}$ af vektorer i V .

Herefter kan den sætning, der skal bevises, formuleres på følgende måde:

Til hver kvadratisk form Q i et vektorrum V findes der en og kun een symmetrisk bilinearform B i V , således at $B(\underline{v}, \underline{v}) = Q(\underline{v})$ for alle $\underline{v} \in V$; og omvendt, for hver bilinearform B i V er $B(\underline{v}, \underline{v})$ en kvadratisk form.

Bevis: Først vises, at $b(\underline{v}, \underline{v}) = Q(\underline{v})$. Af (1) for $\lambda = 0$ og (2) fås

$$(5) \quad Q(\mu \underline{v}) = \mu^2 Q(\underline{v})$$

for alle $\mu \in L$. Herefter giver (3) for $\underline{u} = \underline{v}$

$$2b(\underline{v}, \underline{v}) = Q(2\underline{v}) - 2Q(\underline{v}) = 2Q(\underline{v}).$$

Dernæst vises, at $b(\underline{u}, \underline{v})$ er en bilinearform, og dermed eksistensen af en bilinearform af den ønskede art. På grund af (4) er det tilstrækkeligt at vise, at BL1-2 gælder for b . - Ifølge (1) med $\mu = 1$ og (2) har man

$$Q(\lambda \underline{u} + \underline{v}) = Q(\underline{u})\lambda^2 + 2b(\underline{u}, \underline{v})\lambda + Q(\underline{v}),$$

men også

$$Q(\lambda \underline{u} + \underline{v}) = Q(\lambda \underline{u}) + 2b(\lambda \underline{u}, \underline{v}) + Q(\underline{v}).$$

Med benyttelse af (5) fås heraf ved subtraktion

$$(6) \quad b(\lambda \underline{u}, \underline{v}) = \lambda b(\underline{u}, \underline{v}),$$

altså BL2. - Ved i (3) at erstatte $\underline{v}$ med $-\underline{v}$ og at benytte, at $b(\underline{u}, -\underline{v}) = -b(\underline{u}, \underline{v})$ ifølge (4) og (6), fås en ligning, der sammen med (3) ved addition og subtraktion giver

$$(7) \quad Q(\underline{u} + \underline{v}) + Q(\underline{u} - \underline{v}) = 2Q(\underline{u}) + 2Q(\underline{v}),$$

$$(8) \quad 4b(\underline{u}, \underline{v}) = Q(\underline{u} + \underline{v}) - Q(\underline{u} - \underline{v}).$$

Ved hjælp heraf kan BL1 bevises på følgende måde: For vilkårlige vektorer $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ og $\underline{v}$ fra V fås med betegnelserne

$$\underline{x} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2, \quad \underline{y} = \underline{u}_1 - \underline{u}_2,$$

at

$$\begin{aligned}
& 8b(\underline{u}_1, \underline{v}) + 8b(\underline{u}_2, \underline{v}) = 4b(\underline{x}+\underline{y}, \underline{v}) + 4b(\underline{x}-\underline{y}, \underline{v}) \\
& = Q(\underline{x}+\underline{y}+\underline{v}) - Q(\underline{x}+\underline{y}-\underline{v}) + Q(\underline{x}-\underline{y}+\underline{v}) - Q(\underline{x}-\underline{y}-\underline{v}) \\
& = 2Q(\underline{x}+\underline{v}) - 2Q(\underline{x}-\underline{v}) = 8b(\underline{x}, \underline{v}) = 8b(\underline{u}_1+\underline{u}_2, \underline{v}).
\end{aligned}$$

Her er benyttet: (6) ved det første skridt, (8) ved det andet, (7) ved det tredje, hvorved to led $2Q(\underline{v})$ hæver hinanden, og endelig (8) ved det sidste. Dermed er eksistensen af en bilinearform med de forlangte egenskaber bevist. - At der højst kan findes een symmetrisk bilinearform i V , hvis restriktion til diagonalen i $V \times V$ er en given kvadratisk form, følger af, at der for en symmetrisk bilinearform B gælder

$$B(\underline{u}+\underline{v}, \underline{u}+\underline{v}) = B(\underline{u}, \underline{u}) + 2B(\underline{u}, \underline{v}) + B(\underline{v}, \underline{v}).$$

Heraf sluttet nemlig, at bilinearformens værdi $B(\underline{u}, \underline{v})$ for det vilkårlige par $\underline{u}, \underline{v}$ af vektorer kan udtrykkes ved værdier, som formen antager på diagonalen i $V \times V$. To symmetriske bilinearformer, som stemmer overens på denne diagonal er altså identiske. - Idet det allerede blev vist (side III, 12, 5), at enhver bilinearforms restriktion til diagonalen i $V \times V$ er en kvadratisk form, er beviset for sætningen hermed afsluttet.

Af sætningen fremgår den allerede fremsatte påstand, at det for hver kvadratisk form Q gælder, at $Q(\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_p \underline{v}_p)$, hvor $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ er vilkårlige, fast valgte vektorer, er et homogent andengradspolynomium i $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in L$; thi dette vides at gælde for en bilinearforms restriktion til diagonalen i $V \times V$.

Den symmetriske bilinearform, som ifølge sætningen hører til en given kvadratisk form Q , og som kan bestemmes ved hjælp af (3) eller (8), siges at fremgå af Q ved polarisering. Ved undersøgelser af kvadratiske former spiller de tilhørende symmetriske bilinearformer en fremtrædende rolle. En kvadratisk form vil derfor i almindelighed blive betegnet $B(\underline{v}, \underline{v})$, hvor B er en symmetrisk bilinearform.

Har vektorrummet V den endelige dimension n , svarer der til hver bilinearform B i V efter valg af en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ en kvadratisk matrix

$$\underline{\underline{B}} = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \quad b_{ij} = B(\underline{e}_i, \underline{e}_j).$$

Bilinearformen B er symmetrisk, hvis og kun hvis den tilhørende matrix $\underline{\underline{B}}$ er symmetrisk. Er nemlig B symmetrisk, gælder $B(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = B(\underline{e}_j, \underline{e}_i)$, altså $b_{ij} = b_{ji}$. Det omvendte følger af, at (1×1) -matrixen

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \underline{\underline{B}} \underline{v}$$

er lig med sin transponerede. Hvis $\underline{\underline{B}}' = \underline{\underline{B}}$, har man altså

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{u} \underline{\underline{B}} \underline{v})' = \underline{v} \underline{\underline{B}}' \underline{u} = \underline{v} \underline{\underline{B}} \underline{u} = B(\underline{v}, \underline{u}).$$

Er B en vilkårlig bilinearform og $\underline{\underline{B}}$ den tilsvarende matrix, fås for den kvadratiske form

$$\begin{aligned} B(\underline{v}, \underline{v}) &= \underline{v} \underline{\underline{B}} \underline{v} = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} v_i v_j \\ &= \sum_i b_{ii} v_i^2 + \sum_{i < j} (b_{ij} + b_{ji}) v_i v_j. \end{aligned}$$

Er $\underline{\underline{B}}$ symmetrisk, kan dette skrives

$$B(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_i b_{ii} v_i^2 + \sum_{i < j} 2b_{ij} v_i v_j.$$

Af det ovenfor viste følger blandt andet, at hver kvadratisk form i V kan skrives på denne måde, altså at den er et homogent andengradspolynomium i vektorernes koordinater. Ved polarisering af en kvadratisk form givet på denne måde fås

$$\begin{aligned} B(\underline{u}, \underline{v}) &= \sum_i b_{ii} u_i v_i + \sum_{i < j} b_{ij} (u_i v_j + u_j v_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_i v_j. \end{aligned}$$

Lad $(V, +, L)$ igen være et vilkårligt (ikke nødvendigvis endelig-dimensionalt) vektorrum, og lad B være en symmetrisk bili-

nearform. Ovenfor (side III, 12,5) blev en bilinearforms to nulrum omtalt. Idet bilinearformen B er symmetrisk, bliver disse underrum identiske; thi

$$\{\underline{u} \mid \forall \underline{v} (B(\underline{u}, \underline{v}) = 0)\} = \{\underline{v} \mid \forall \underline{u} (B(\underline{u}, \underline{v}) = 0)\} = N_B,$$

hvor der tillige er indført betegnelsen N_B for den symmetriske bilinearforms nulrum.

En vektor $\underline{u} \in V$ siges at være konjugeret til en vektor $\underline{v} \in V$ med hensyn til den symmetriske bilinearform B , hvis

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = 0.$$

Da $B(\underline{u}, \underline{v}) = B(\underline{v}, \underline{u})$, defineres herved en symmetrisk (men almindeligvis hverken reflektiv eller transitiv) relation i V . Der er altså mening i at tale om to med hensyn til B konjugerede vektorer.

De til en given vektor $\underline{u}_0$ konjugerede vektorer $\underline{v}$ udgør et underrum i V , nemlig kernen

$$K_B(\underline{u}_0) = \{\underline{v} \mid B(\underline{u}_0, \underline{v}) = 0\}$$

for linearformen $B(\underline{u}_0, \underline{v})$. Dette underrum er hele V , hvis $\underline{u}_0 \in N_B$; og ellers en hyperplan (se side III, 9,3). Det er klart, at

$$N_B \subseteq K_B(\underline{u}_0)$$

for enhver vektor $\underline{u}_0$. Er der givet en mængde M af vektorer i V , vil de vektorer $\underline{v}$, som er konjugerede til hver vektor $\underline{u} \in M$, udgøre et underrum, nemlig

$$K_B(M) = \bigcap_{\underline{u} \in M} K_B(\underline{u}).$$

Det vil blive kaldt det fuldstændige til M konjugerede underrum.

Idet man af $B(\underline{u}', \underline{v}) = 0$, $B(\underline{u}'', \underline{v}) = 0$ for $\lambda', \lambda'' \in L$ kan slutte, at $B(\lambda' \underline{u}' + \lambda'' \underline{u}'', \underline{v}) = 0$, vil vektorerne i det af M frembragte underrum $V(M)$ være konjugerede til de samme vektorer som vektorerne i M . Der gælder altså

$$K_B(V(M)) = K_B(M).$$

Kaldes to underrum V' og V'' i V konjugerede underrum med hensyn til den symmetriske bilinearform B , hvis

$$\forall \underline{v}, \underline{v}' \quad \forall \underline{v}'' \quad (B(\underline{v}', \underline{v}'') = 0),$$

gælder øjensynlig, at hvert af to konjugerede underrum V' og V'' er indeholdt i det andets fuldstændige konjugerede underrum.

Det forudsættes nu, at vektorrummet $(V, +, L)$ har den endelige dimension n . Det følgende går ud på ved passende valg af en basis at simplificere den til en given symmetrisk bilinearform B hørende matrix $\underline{B}$. Først bemærkes, at hvis en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ består af parvis konjugerede vektorer, vil $\underline{B}$ være en diagonal-matrix. Man har da nemlig

$$b_{ij} = B(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = 0 \quad \text{for } i \neq j,$$

og for bilinearformen fås

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n b_{ii} u_i v_i.$$

Det skal vises, at der altid findes en sådan basis:

For hver symmetrisk bilinearform B i et n -dimensionalt vektorrum $(V, +, L)$ findes der mindst en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ bestående af vektorer, som er parvis konjugerede med hensyn til B .

Bevis (ved induktion): For $n = 1$ er påstanden intetsigende, men rigtig. Det antages, at sætningen gælder for $(n-1)$ -dimensionale vektorrum. Lad B være en symmetrisk bilinearform i det n -dimensionale vektorrum $(V, +, L)$. Hvis $\text{rg } B = 0$, d.v.s. $B(\underline{u}, \underline{v}) = 0$ for alle $\underline{u}$ og $\underline{v}$, er påstanden rigtig, idet hvilket som helst to vektorer er konjugerede. Er $\text{rg } B > 0$, findes der mindst en vektor $\underline{e}_1$, for hvilken $B(\underline{e}_1, \underline{e}_1) \neq 0$; thi var den kvadratiske form $B(\underline{v}, \underline{v})$ identisk 0, ville

$$4 B(\underline{u}, \underline{v}) = B(\underline{u} + \underline{v}, \underline{u} + \underline{v}) - B(\underline{u} - \underline{v}, \underline{u} - \underline{v})$$

ligeledes være identisk 0 i strid med $\text{rg } B > 0$. Underrummet $K_B(\underline{e}_1)$ bestående af de til $\underline{e}_1$ konjugerede vektorer er en hyperplan, altså $(n-1)$ -dimensionalt (og ikke hele rummet V , da $\underline{e}_1$ ikke kan tilhøre dette underrum). Restriktionen af B til $K_B(\underline{e}_1) \times K_B(\underline{e}_1)$ er åbenbart en bilinearform B_1 , og to vektorer i $K_B(\underline{e}_1)$, som er konjugerede med hensyn til B_1 , er det også med hensyn til B . Ifølge induktionsforudsætningen findes der en basis $(\underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$ for $K_B(\underline{e}_1)$ bestående af vektorer, som er parvis konjugerede med hensyn til B_1 , altså B . Ifølge definitionen af $K_B(\underline{e}_1)$ er alle disse vektorer konjugerede til $\underline{e}_1$. Sættet $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ består altså af parvis konjugerede vektorer. At det er en basis, følger af, at hver vektor i V kan skrives på formen $\alpha \underline{e}_1 + \underline{v}_1$, hvor $\underline{v}_1 \in K_B(\underline{e}_1)$ og $\alpha \in L$ (se side III, 9,3). Dermed er sætningen bevist.

Heri er indeholdt en sætning om symmetriske matricer. Lad $\underline{B}$ være en symmetrisk $(n \times n)$ -matrix med elementer fra L . I det n -dimensionale vektorrum $(V, +, L)$, hvori der er valgt en vilkårlig basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, defineres ved

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \underline{B} \underline{v}_|$$

en bilinearform. Lad $(\hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ være en basis bestående af vektorer, som er parvis konjugerede med hensyn til B . Der findes da en regulær matrix $\underline{T}$, således at

$$(\hat{\underline{e}}_1 \dots \hat{\underline{e}}_n) = (\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n) \underline{T}.$$

For koordinatsættene $\hat{\underline{u}}_|$ og $\hat{\underline{v}}_|$ for vektorerne $\underline{u}$ og $\underline{v}$ i den nye basis haves da

$$\underline{u}_| = \underline{T} \hat{\underline{u}}_|, \quad \underline{v}_| = \underline{T} \hat{\underline{v}}_|.$$

Den til B hørende matrix bliver

$$\hat{\underline{B}} = \underline{T}' \underline{B} \underline{T},$$

(jfr. side III, 12,3-4), og denne er en diagonalmatrix. Der gælder altså:

Til hver symmetrisk $(n \times n)$ -matrix $\underline{B}$ med elementer fra et tallegeme L findes der en regulær $(n \times n)$ -matrix $\underline{T}$, således at $\underline{T}'\underline{B}\underline{T}$ er en diagonalmatrix.

Denne diagonalmatrix vides at have samme rang r som $\underline{B}$. Følgelig er netop r blandt de n diagonalelementer forskellige fra 0. Det er klart, at de nye basisvektorer kan nummereres således, at dette gælder for de r første diagonalelementer.

I det følgende betragtes de to specielle tilfælde, hvor L er henholdsvis de komplekse tals legeme $\mathbb{C}$ og de reelle tals legeme $\mathbb{R}$. I begge disse tilfælde er det muligt at opnå skarpere resultater.

Lad $(V, +, \mathbb{C})$ være et n -dimensionalt vektorrum over de komplekse tals legeme, B en symmetrisk bilinearform af rang r i V og $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ en basis, for hvilken

$$\begin{aligned} b_{ii} &= B(\underline{e}_i, \underline{e}_i) \neq 0 && \text{for } i = 1, \dots, r, \\ b_{ii} &= B(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = 0 && \text{for } i = r + 1, \dots, n, \\ b_{ij} &= B(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = 0 && \text{for } i \neq j. \end{aligned}$$

Der findes komplekse tal $\beta_1, \dots, \beta_r$, således at

$$b_{ii}\beta_i^2 = 1 \quad \text{for } i = 1, \dots, r.$$

Vektorsættet $(\beta_1\underline{e}_1, \dots, \beta_r\underline{e}_r, \underline{e}_{r+1}, \dots, \underline{e}_n)$ er da en ny basis, og idet

$$B(\beta_i\underline{e}_i, \beta_i\underline{e}_i) = \beta_i^2 B(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = 1 \quad \text{for } i = 1, \dots, r,$$

vil den matrix, som i denne basis hører til B være en diagonalmatrix, hvis r første diagonalelementer er lig 1 og de øvrige lig 0. For bilinearformen fås i dette koordinatsystem

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = u_1 v_1 + \dots + u_r v_r.$$

Ved passende valg af en basis kan altså hver kompleks symmetrisk bilinearform af rang r bringes på denne "normalform".

Idet $\underline{E}_{r,r}$ og $\underline{O}_{p,q}$ betegner henholdsvis $(r \times r)$ -enhedsmatricen og $(p \times q)$ -nulmatricen, kan den sætning om komplekse matricer, som dette er ensbetydende med, formuleres på følgende måde:

Til hver kompleks symmetrisk $(n \times n)$ -matrix findes der mindst een regulær kompleks $(n \times n)$ -matrix $\underline{T}$, således at

$$\underline{T}' \underline{B} \underline{T} = \begin{pmatrix} \underline{E}_{r,r} & \underline{O}_{r,n-r} \\ \underline{O}_{n-r,r} & \underline{O}_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Ved reelle symmetriske bilinearformer bliver det analoge resultat ikke helt så simpelt, idet den tilhørende kvadratiske forms værdiers fortegn kommer til at spille en rolle.

Lad $(V, +, \mathbb{R})$ være et n -dimensionalt vektorrum over de reelle tals legeme, B en symmetrisk bilinearform af rang r i V og $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ en basis, for hvilken

$$b_{ii} = B(\underline{e}_i, \underline{e}_i) \begin{cases} \neq 0 & \text{for } i = 1, \dots, r, \\ = 0 & \text{for } i = r+1, \dots, n, \end{cases}$$

$$b_{ij} = B(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = 0 \quad \text{for } i \neq j.$$

Antallet af positive blandt tallene $b_{11}, \dots, b_{rr}$ betegnes med p . De øvrige $q = r - p$ er da negative. (Det udelukkes ikke, at $p = 0$ eller $q = 0$.) Det kan antages, at basisvektorerne er nummererede på en sådan måde, at

$$b_{ii} = B(\underline{e}_i, \underline{e}_i) \begin{cases} > 0 & \text{for } i = 1, \dots, p, \\ < 0 & \text{for } i = p+1, \dots, r. \end{cases}$$

Der findes da reelle tal $\beta_1, \dots, \beta_r$, således at

$$b_{ii} \beta_i^2 = \begin{cases} 1 & \text{for } i = 1, \dots, p \\ -1 & \text{for } i = p+1, \dots, r. \end{cases}$$

Med vektorsættet $(\beta_1 \underline{e}_1, \dots, \beta_r \underline{e}_r, \underline{e}_{r+1}, \dots, \underline{e}_n)$ som basis vil den til bilinearformen B hørende matrix være en diagonalmatrix, hvis to første diagonalelementer er lig 1, de næste $q = n - r$ lig -1 og de øvrige lig 0. For bilinearformen fås i dette

koordinatsystem

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = u_1 v_1 + \dots + u_p v_p - u_{p+1} v_{p+1} - \dots - u_r v_r.$$

Ved passende valg af en basis kan altså hver reel symmetrisk bilinearform af rang r bringes på en sådan form. Nu findes der uendelig mange koordinatsystemer, for hvilke dette gælder; thi vektoren $\underline{e}_1$ kunne vælges frit blandt vektorerne $\underline{v}$, for hvilke $B(\underline{v}, \underline{v}) > 0$, hvis sådanne findes, og ellers blandt dem, for hvilke $B(\underline{v}, \underline{v}) < 0$ (det oplagte tilfælde $r = 0$ ladet ude af betragtning). Der rejser sig derfor spørgsmålet, om antallet p af led med plustegn er uafhængigt af koordinatsystemet. At dette er tilfældet (Sylvester's sætning) vil blive bevist ved angivelsen af en af koordinatsystemet uafhængig bestemmelse af tallet p .

Til dette formål indføres følgende definitioner:

Den til en symmetrisk bilinearform B i et vektorrum $(V, +, \cdot)$ hørende kvadratiske form siges at være positiv definit eller kort positiv (negativ definit eller kort negativ) i et underrum V' i V , specielt hele rummet V , hvis $B(\underline{v}, \underline{v}) > 0$ ($B(\underline{v}, \underline{v}) < 0$) for alle vektorer $\underline{v} \neq \underline{0}$ fra V' . Den kvadratiske form siges at være positiv semidefinit eller kort ikke-negativ (negativ semidefinit eller kort ikke-positiv), hvis $B(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0$ ($B(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0$) for alle vektorer $\underline{v}$ fra V' .

Et underrum, hvori den kvadratiske form er positiv definit (negativ definit) kaldes et positivitetsrum (negativitetsrum) for formen. Det bemærkes, at hvis der overhovedet findes en vektor $\underline{v}$, for hvilken $B(\underline{v}, \underline{v}) > 0$, vil det af $\underline{v}$ bestemte endimensionale underrum være et positivitetsrum, da

$$B(k\underline{v}, k\underline{v}) = k^2 B(\underline{v}, \underline{v}) > 0$$

for hvert reelt tal $k \neq 0$. Formen er altså negativ semidefinit, hvis der ikke findes andre positivitetsrum end $\{\underline{0}\}$. Af

$B(\underline{u}, \underline{u}) > 0$ og $B(\underline{v}, \underline{v}) > 0$ kan man almindeligvis ikke slutte, at det af $\underline{u}$ og $\underline{v}$ udspændte underrum er et positivitetsrum. Da negativitetsrummene for B er positivitetsrummene for formen $-B$, overføres alt, hvad der blev sagt om disse, uden videre til negativitetsrummene.

Lad P være et positivitetsrum, Q et negativitetsrum og N_B nulrummet for en symmetrisk bilinearform. Det skal vises, at det af de tre underrum frembragte underrum af V er deres direkte sum (se side III, 4, 20). Tilstrækkelig herfor er, at man af

$$\underline{v}_P + \underline{v}_Q + \underline{v}_N = \underline{0}$$

hvor $\underline{v}_P \in P$, $\underline{v}_Q \in Q$, $\underline{v}_N \in N_B$, kan slutte, at

$$\underline{v}_P = \underline{v}_Q = \underline{v}_N = \underline{0}.$$

At dette er tilfældet følger således: Man har

$$\begin{aligned} B(\underline{v}_P, \underline{v}_P) &= B(-\underline{v}_P, -\underline{v}_P) = B(\underline{v}_Q + \underline{v}_N, \underline{v}_Q + \underline{v}_N) \\ &= B(\underline{v}_Q, \underline{v}_Q) + 2B(\underline{v}_Q, \underline{v}_N) + B(\underline{v}_N, \underline{v}_N) = B(\underline{v}_Q, \underline{v}_Q), \end{aligned}$$

da $B(\underline{v}, \underline{v}_N) = 0$ for hver vektor $\underline{v} \in V$. Nu er $B(\underline{v}_P, \underline{v}_P) \geq 0$ og $B(\underline{v}_Q, \underline{v}_Q) \leq 0$, altså begge disse værdier lig 0. Idet den kvadratiske form er positiv definit i P og negativ definit i Q , følger heraf $\underline{v}_P = \underline{v}_Q = \underline{0}$ og dermed også $\underline{v}_N = \underline{0}$. Har vektorrummet $(V, +, \cdot)$ den endelige dimension n , og betegner r den givne symmetriske bilinearforms rang, har nulrummet N_B dimensionen $n-r$. Nu er

$$\dim(P + Q + N_B) = \dim P + \dim Q + n - r$$

(se side III, 4, 21-22), og denne dimension kan ikke være større end $\dim V = n$. Heraf fås

$$\dim P + \dim Q \leq r$$

for hvert positivitetsrum P og hvert negativitetsrum Q .

Det største naturlige tal, som forekommer som et positivitetsrums (negativitetsrums) dimension, kaldes den kvadratiske forms eller også den symmetriske bilinearforms positivitetsindex

(negativitetsindex) og betegnes med $\text{ind}_+ B$ ($\text{ind}_- B$). Et positivitetsrum (negativitetsrum) af dimensionen $\text{ind}_+ B$ ($\text{ind}_- B$) siges at være maximalt. Der findes almindeligvis uendelig mange sådanne underrum. Af det viste følger, at

$$\text{ind}_+ B + \text{ind}_- B \leq \text{rg } B.$$

Her gælder imidlertid lighedstegnet. For at vise dette benyttes, at der findes et koordinatsystem $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, i hvilket den kvadratiske form er givet ved

$$B(\underline{v}, \underline{v}) = v_1^2 + \dots + v_p^2 - v_{p+1}^2 - \dots - v_r^2,$$

hvor $r = \text{rg } B$. Det ses umiddelbart, at det af $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_p)$ udspændte underrum er et positivitetsrum og det af $(\underline{e}_{p+1}, \dots, \underline{e}_r)$ udspændte et negativitetsrum for formen. Dette viser, at

$$p \leq \text{ind}_+ B, \quad q = n-r \leq \text{ind}_- B,$$

hvilket sammen med ovenstående ulighed giver

$$r = p + q \leq \text{ind}_+ B + \text{ind}_- B \leq \text{rg } B = r.$$

Heraf fås

$$p = \text{ind}_+ B, \quad q = \text{ind}_- B, \quad \text{ind}_+ B + \text{ind}_- B = \text{rg } B,$$

altså den ønskede, af koordinatsystemet uafhængige fortolkning af p og q og dermed Sylvester's sætning. Resultaterne formuleres såvel som en sætning om reelle symmetriske bilinearformer som en sætning om reelle symmetriske matricer:

Til hver symmetrisk bilinearform B i et n -dimensionalt vektorrum over de reelle tals legeme findes der baser, i hvilke

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = u_1 v_1 + \dots + u_p v_p - u_{p+1} v_{p+1} - \dots - u_{p+q} v_{p+q}.$$

For alle sådanne baser er tallene p og q de samme, nemlig henholdsvis formens positivitetsindex $\text{ind}_+ B$ og dens negativitetsindex $\text{ind}_- B$, og $p + q$ er formens rang $\text{rg } B$.

Til hver reel symmetrisk matrix B findes der reelle

regulære matricer $\underline{T}$, således at $\underline{T}'\underline{B}\underline{T}$ er en diagonalmatrix, hvis diagonalelementer er 1, -1 eller 0. For alle disse matricer $\underline{T}$ har $\underline{T}'\underline{B}\underline{T}$ det samme antal elementer lig 1 og det samme antal lig -1, og disse to antals sum er lig med rangen af $\underline{B}$.

De fundne resultater tillader en anden betydningsfuld fortolkning.

Lad $(V, +, L)$ være et vilkårligt vektorrum og $\underline{v} \rightarrow \dot{\underline{v}} = f(\underline{v})$ en lineær afbildning af V på sig selv. Er da $B(\underline{u}, \underline{v})$ en bilinear form i V , vil

$$B_f(\dot{\underline{u}}, \dot{\underline{v}}) = B(f^{-1}(\dot{\underline{u}}), f^{-1}(\dot{\underline{v}})) ,$$

som det umiddelbart ses, ligeledes være en bilinear form i V . Den siges at fremgå af eller at svare til B ved afbildningen f . Man har også

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = B_f(f(\underline{u}), f(\underline{v})) ,$$

hvoaf ses, at billedvektorerne ved f af to med hensyn til B konjugerede vektorer er konjugerede vektorer med hensyn til B_f . Endvidere er det klart, at hvis en af formerne er symmetrisk, er den anden det også.

En bilinearform B siges at være lineær-ækvivalent med en bilinearform $\dot{B}$, hvis der findes en enentydig lineær afbildning f af V på sig selv, således at $\dot{B} = B_f$, altså hvis $\dot{B}$ fremgår af B ved en eller anden afbildning af den betragtede art. Det er let at vise, at der foreligger en ækvivalens relation i mængden af bilinearformer i V . Specielt falder altså mængden af symmetriske bilinearformer i ækvivalensklasser. Ved hjælp af de fundne sætninger kan disse klasser let angives for endelig-dimensionale vektorrum over de komplekse eller de reelle tals legeme.

Lad $(V, +, L)$ være et vektorrum af den endelige dimension n , og lad der være valgt en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$. En enentydig lineær afbildning f af V på sig selv er da bestemt ved

$$\dot{\underline{v}} = \underline{A} \underline{v},$$

hvor $\underline{A}$ er en regulær $(n \times n)$ -matrix og $\underline{v}$ og $\dot{\underline{v}}$ koordinatsættet for henholdsvis $\underline{v} \in V$ og $f(\underline{v})$. Er nu B en symmetrisk bilinearform i V , altså

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \underline{B} \underline{v},$$

hvor $\underline{B}$ er en symmetrisk matrix, fås (med nærliggende betegnelser) for den til B ved afbildningen svarende form B_f

$$B_f(\dot{\underline{u}}, \dot{\underline{v}}) = \dot{\underline{u}} (\underline{A}^{-1})' \underline{B} \underline{A}^{-1} \dot{\underline{v}}.$$

Lader man her $\underline{A}$ og dermed også $\underline{A}^{-1}$ gennemløbe alle regulære $(n \times n)$ -matricer med elementer fra L , fås netop alle med B lineær-ækvivalente symmetriske bilinearformer.

Er L specielt de komplekse tals legeme $\mathbb{C}$, og har B rangen r , findes der ifølge en af de viste sætninger en kompleks regulær matrix $\underline{A}$, således at

$$B_f(\dot{\underline{u}}, \dot{\underline{v}}) = \dot{u}_1 \dot{v}_1 + \dots + \dot{u}_r \dot{v}_r.$$

Dette viser:

Hver kompleks symmetrisk bilinearform af rang r er lineær-ækvivalent med den form, som i et vilkårligt valgt koordinatsystem er givet ved

$$u_1 v_1 + \dots + u_r v_r.$$

Idet lineær-ækvivalente bilinearformer har samme rang, sluttes heraf: To komplekse symmetriske bilinearformer er lineær-ækvivalente, hvis og kun hvis de har samme rang. Der findes altså $n + 1$ ækvivalensklasser svarende til værdierne $r = 0, 1, \dots, n$.

Er L de reelle tals legeme $\mathbb{R}$, og har B positivitetsindex p og negativitetsindex q , findes der ifølge en af de viste sætninger

en reel regulær matrix $\underline{A}$, således at

$$B_f(\underline{\dot{u}}, \underline{\dot{v}}) = \dot{u}_1 \dot{v}_1 + \dots + \dot{u}_p \dot{v}_p - \dot{u}_{p+1} \dot{v}_{p+1} - \dots - \dot{u}_{p+q} \dot{v}_{p+q}.$$

Dette viser:

Hver reel symmetrisk bilinearform med positivitetsindex p og negativitetsindex q er lineær-ækvivalent med den form, som i et vilkårligt valgt koordinatsystem er givet ved

$$u_1 v_1 + \dots + u_p v_p - u_{p+1} v_{p+1} - \dots - u_{p+q} v_{p+q}.$$

Da et positivitetsrum (negativitetsrum) for en reel symmetrisk bilinearform ved en enentydig lineær afbildning f af V på sig selv afbildes på et positivitetsrum (negativitetsrum) for den tilsvarende form B_f , har lineær-ækvivalente former samme positivitetsindex og samme negativitetsindex. Man har følgelig: To reelle symmetriske bilinearformer er lineær-ækvivalente, hvis og kun hvis de har samme positivitetsindex og samme negativitetsindex. Der findes altså $(n+1)(n+2)/2$ ækvivalensklasser svarende til parrene (p, q) af hele tal, for hvilke $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n$, $p+q \leq n$. I stedet for tallene $p = \text{ind}_+ B$ og $q = \text{ind}_- B$ bruges hyppigt rangen $\text{rg } B = p+q$ og formens såkaldte signatur $\text{sgt } B = p-q$ som kendetegn for klassen. Disse fire tal kaldes den reelle symmetriske bilinearforms invarianter ved lineære afbildninger. Ved to af dem er formens klasse bestemt.

En symmetrisk bilinearform B eller den tilhørende kvadratiske form siges at være udartet eller singulær, når $\text{rg } B < n$, og ikke-udartet eller regulær, når $\text{rg } B = n$. Ved $p = n$ ($q = n$) karakteriseres de positiv definite (negativ definite) reelle kvadratiske former. Disse er ikke-udartede. De positiv (negativ) semidefinite reelle kvadratiske former er karakteriseret ved $q = 0$ ($p = 0$). Hvis sådanne er ikke-udartede, er de positiv (negativ) definite.

Som vist ovenfor hører der efter valg af et koordinatsystem i $(V, +, \dot{R})$ til lineær-ækvivalente symmetriske bilinearformer B og B_f matricer $\underline{\underline{B}}$ og $\underline{\underline{\dot{B}}}$, for hvilke $\underline{\underline{\dot{B}}} = (\underline{\underline{A}}^{-1})' \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}^{-1}$, hvor $\underline{\underline{A}}$ er den til den lineære afbildning hørende matrix. For determinanterne fås

$$\det \underline{\underline{\dot{B}}} = (\det \underline{\underline{A}}^{-1})^2 \det \underline{\underline{B}}.$$

Idet $\det \underline{\underline{B}}$ er 0 eller forskellig fra 0, efter som B er udartet eller ikke-udartet, sluttet heraf, at $\det \underline{\underline{\dot{B}}} = \det \underline{\underline{B}} = 0$, hvis $\text{rg } B < n$, og at $\det \underline{\underline{\dot{B}}}$ og $\det \underline{\underline{B}}$ har samme fortegn, hvis $\text{rg } B = n$. Antages $\underline{\underline{B}}$ at have ovenstående normalform, ses dette fortegn i det sidste tilfælde at være $(-1)^q = (-1)^{n-p}$. Der gælder altså uafhængigt af det valgte koordinatsystem: Matricerne hørende til lineær-ækvivalente ikke-udartede reelle symmetriske bilinearformer har determinanter med samme fortegn, nemlig $(-1)^q$, hvor q er formernes negativitetsindex. Specielt haves: Matricerne hørende til positiv definite kvadratiske former har positive determinanter. For positiv semidefinite former kan sluttet at determinanterne er større end eller lig med 0.

En interessant anvendelse af disse resultater fås på følgende måde: Lad $(V, +, \dot{R})$ være et vilkårligt (endelig-eller uendelig-dimensionalt) vektorrum over de reelle tals legeme, og lad der være givet en positiv semidefinit kvadratisk form B i V . For vilkårligt givne vektorer $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s$ fra V er da

$$B\left(\sum_{i=1}^s x_i \underline{v}_i, \sum_{i=1}^s x_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i,j=1}^s B(\underline{v}_i, \underline{v}_j) x_i x_j = \beta(\underline{x}, \underline{x}),$$

hvor $x_1, \dots, x_s$ er reelle tal, også en positiv semidefinit kvadratisk form, nemlig i talrummet $(\dot{R}^s, +, \dot{R})$. Er B positiv definit og vektorerne $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s$ lineært uafhængige, er $\beta(\underline{x}, \underline{x}) > 0$ for alle $\underline{x} = (x_1, \dots, x_s) \neq \underline{0}$, altså β ligeledes positiv definit. Er vektorerne $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s$ lineært afhængige, findes der et talsæt $\underline{x} \neq \underline{0}$, for hvilket $x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_s \underline{v}_s = \underline{0}$, altså $\beta(\underline{x}, \underline{x}) = 0$.

I dette tilfælde er formen § følgelig ikke positiv definit, og idet den er positiv semidefinit, nødvendigvis udartet. I forbindelse med ovenstående resultater vedrørende de til positive kvadratiske former hørende determinanter fås heraf Gram's sætning:

Er $(V, +, \mathbb{R})$ et vilkårligt vektorrum over de reelle tals legeme og $B(\underline{v}, \underline{v})$ en positiv semidefinit kvadratisk form i V , gælder for vilkårlige vektorer $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s$ fra V

$$\det(B(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j=1, \dots, s} \geq 0.$$

En nødvendig betingelse for, at vektorerne $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s$ er lineært afhængige, er at lighedstegnet gælder. Hvis B er positiv definit, er denne betingelse også tilstrækkelig.

I det specielle tilfælde $s = 2$ fremkommer Cauchy-Schwarz's ulighed:

$$B(\underline{v}_1, \underline{v}_2)^2 \leq B(\underline{v}_1, \underline{v}_1) B(\underline{v}_2, \underline{v}_2).$$

Er B positiv definit, gælder lighedstegnet, når og kun når vektorerne $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ er lineært afhængige.

Øvelser til kap. III, 12.

- 1) Find parameterfremstillinger for nulrummene for den i $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4$ definerede bilinearform

$$u_1 v_1 + 4u_2 v_1 + 2u_3 v_1 + 3u_1 v_2 - 2u_2 v_3 - u_3 v_3 + u_1 v_4,$$
 og angiv dens rang.

- 2) Er B en bilinearform defineret i de vilkårlige vektorrum $(U, +, L)$ og $(V, +, L)$, udgør de vektorer $\underline{v} \in V$, for hvilke $B(\underline{u}, \underline{v}) = 0$ for alle $\underline{u} \in U$, formens nulrum i V. Tilsvarende defineres nulrummet i U.
 Hvilke talfølger udgør nulrummene for den i eksempel 2 (side III, 12,2) definerede bilinearform?
 Hvilke funktioner udgør nulrummene for den i eksempel 3 (side III, 12,2) definerede bilinearform, når den givne funktion $K(x, y)$ er positiv i hele sin definitionsmængde?
 Hvad kan der siges om Fourierrækkerne for de funktioner, som udgør nulrummene, når $a = c = -\pi$, $b = d = \pi$ og $K(x, y) = \sin(2x - y)$?

- 3) Bilinearformerne i et vektorrum $(V, +, L)$ danner (med de sædvanlige definitioner af summen af to af dem og produkt af en af dem med et tal fra L) et nyt vektorrum $(W, +, L)$.
 De symmetriske bilinearformer i $(V, +, L)$ danner et underrum i W. Det samme gælder for de antisymmetriske bilinearformer.
 (En bilinearform B i V siges at være antisymmetrisk eller alternierende, hvis $B(\underline{v}, \underline{u}) = -B(\underline{u}, \underline{v})$ for alle $\underline{u}$ og $\underline{v}$ fra V.)
 Vis, at W er den direkte sum af de to nævnte underrum (d.v.s. at hver bilinearform i V på en og kun een måde kan skrives som en sum af en symmetrisk og en antisymmetrisk bilinearform).

Bestem dimensionen af W og af de to underrum, når V har dimensionen n .

- 4) Vis, at en bilinearform B i et vektorrum $(V, +, L)$ er antisymmetrisk, hvis og kun hvis den tilhørende kvadratiske form $B(\underline{v}, \underline{v})$ er identisk 0.

- 5) I et todimensionalt vektorrum $(V_2, +, L)$ er hvert arealmål en antisymmetrisk bilinearform af rangen 2. (Se side III, 10, 2.) Findes der andre antisymmetriske bilinearformer i et sådant vektorrum ?

Hvilke værdier kan rangen af en antisymmetrisk bilinearform i et tredimensionalt vektorrum $(V_3, +, L)$ antage? Er F et volumenmål og $\underline{a}$ en fast valgt vektor i V_3 , vil $F(\underline{a}, \underline{u}, \underline{v})$ være en antisymmetrisk bilinearform i V_3 . (Se side III, 10, 12.) Kan hver antisymmetrisk bilinearform i V_3 fås på denne måde?

- 6) Vis, at en bilinearform defineret i to endelig-dimensionale vektorrum er et produkt af en linearform i U og en linearform i V , hvis og kun hvis dens rang er 1 eller 0.

- 7) Polarisér de kvadratiske former

$$\begin{array}{ll} v_1 v_2 - v_3^2, & v_2 v_3 + v_3 v_1 + v_1 v_2, \\ (v_1 + v_2 + v_3)^2, & (v_1 + 2v_2)(3v_1 - v_3) \end{array}$$

i $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$, og angiv for hver af dem rangen og den tilhørende symmetriske matrix.

Bestem endvidere for hver af de fundne bilinearformer det fuldstændige konjugerede underrum til det af vektorerne $(1, -1, 0)$ og $(0, 0, 1)$ udspændte underrum.

- 8) Bestem en basis for vektorrummet $(\mathbb{C}^3, +, \mathbb{C})$, med hensyn til hvilken bilinearformen

$$u_2 v_2 - i u_2 v_3 - i u_3 v_2$$

antager normalformen.

- 9) Bestem en basis for vektorrummet $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R})$, med hensyn til hvilken den kvadratiske form

$$v_1^2 + 4v_1 v_4 - 2v_2 v_3 + 2v_2 v_4 + 2v_3 v_4 + 4v_4^2$$

antager normalformen.

- 10) Bevis følgende sætning: En kvadratisk form i et endeligt-dimensionalt vektorrum over de komplekse tals legeme er et produkt af to indbyrdes og fra nulformen forskellige linearformer, hvis og kun hvis dens rang er 2, og den er kvadratet på en fra nulformen forskellig linearform, hvis og kun hvis dens rang er 1.

Opstil en tilsvarende sætning for kvadratiske former i vektorrum over de reelle tals legeme.

- 11) Lad $(V, +, \mathbb{R})$ være et vilkårligt vektorrum over de reelle tals legeme og B en bilinearform i V .

Vis, at hvis vektorerne $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s$ er parvis konjugerede og $B(\underline{v}_1, \underline{v}_1) > 0, \dots, B(\underline{v}_s, \underline{v}_s) > 0$, vil disse vektorer være lineært uafhængige, og det af dem udspændte underrum vil være et positivitetsrum for B .

- 12) Lad B være en bilinearform med positivitetsindex 1 i et vektorrum $(V, +, \mathbb{R})$. Vis, at der for to vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$, for hvilke $B(\underline{u}, \underline{u}) > 0$ og $B(\underline{v}, \underline{v}) > 0$, gælder uligheden

$$B(\underline{u}, \underline{v})^2 \leq B(\underline{u}, \underline{u}) B(\underline{v}, \underline{v}).$$

(Betragt $B(\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}, \lambda \underline{u} + \mu \underline{v})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.)

- 13) Lad $\underline{\underline{M}}$ være en vilkårlig reel $(m \times n)$ -matrix. Vis, at den kvadratiske form med $(n \times n)$ -matricen $\underline{\underline{M}}' \underline{\underline{M}}$ er positiv semidefinit, og at den er positiv definit, når og kun når $\text{rg } \underline{\underline{M}} = n$.

Vis, at der til hver reel symmetrisk $(n \times n)$ -matrix $\underline{\underline{B}}$, hvis tilhørende kvadratiske form er positiv definit, findes en reel regulær $(n \times n)$ -matrix $\underline{\underline{M}}$, således at $\underline{\underline{M}}' \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{B}}$.

- 14) Vis, at hvis $\underline{\underline{B}}$ er en reel symmetrisk matrix, hvis tilhørende reelle kvadratiske form er definit, vil alle hovedunderdeterminanter i $\underline{\underline{B}}$ være forskellige fra 0. Bestem disses fortegn, når formen er positiv definit, og når den er negativ definit.

- 15) Angiv nødvendige og tilstrækkelige betingelser, som de reelle tal a, b, c må opfylde, for at den reelle kvadratiske form med matricen $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ er positiv (negativ) definit.

Undersøg, om der findes reelle tal a, b, c , således at den reelle kvadratiske form med matricen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

er positiv definit.

- 16) Bekræft ved hjælp af Gram's sætning, at funktionerne $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos pt, \sin pt$ i intervallet $[-\pi, \pi]$ er lineært uafhængige. (Jfr. side III, 7, 19.)
- 17) Lad α betegne en reel voksende funktion defineret i et interval $[a, b]$. Ved denne funktions i-te moment forstås

$$c_i = \int_a^b t^i d\alpha(t), \quad i = 0, 1, \dots$$

Vis, at der gælder ulighederne

$$c_{2i-1}^2 \leq c_{2i-2} c_{2i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Vis endvidere, at der for determinanterne

$$D_k = \det(c_{i+j})_{i,j=0,1,\dots,k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

gælder følgende: Enten er $D_k > 0$ for alle k , eller der findes et naturligt tal m , således at $D_k > 0$ for $k < m$ og $D_k = 0$ for $k \geq m$.

Det sidstnævnte tilfælde indtræffer, hvis og kun hvis funktionen α kun antager endelig mange forskellige værdier (er stykkevis konstant).

- 18) Om en reel funktion f defineret i en åben delmængde Ω af $\mathbb{R}^n$ forudsættes, at den har kontinuerte partielle afledede $D_{ij}f$, $i, j = 1, \dots, n$, af anden orden. Lad $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ være et punkt i Ω , for hvilket funktionens første differential er nulformen, altså

$$df(\underline{a}, d\underline{x}) = \sum_{i=1}^n D_i f(\underline{a}) dx_i = 0$$

for alle $d\underline{x} = (dx_1, \dots, dx_n) \in \mathbb{R}^n$. Bevis følgende: En nødvendig betingelse for, at f har et lokalt minimum (maximum) i $\underline{a}$ er at det andet differential

$$d^2f(\underline{a}, d\underline{x}) = \sum_{i,j=1}^n D_{ij}f(\underline{a}) dx_i dx_j$$

er en positiv (negativ) semidefinit kvadratisk form. En tilstrækkelig betingelse er, at denne kvadratiske form er positiv (negativ) definit.

§ 13. Kvadrikker.

I denne paragraf betragtes bilineære og kvadratiske former i det geometriske vektorrum $(V_3, +, \cdot)$ og dens underrum. Alle vektorer tænkes afsat fra samme punkt O i punktrummet E_3 , planen E_2 eller linien E_1 . (Det uinteressante endimensionale tilfælde tages under tiden med af formelle grunde.) Formerne bliver da funktioner af stedvektorer og derved af disses endepunkter. For i videst mulig udstrækning at kunne behandle det todimensionale og det tredimensionale tilfælde under eet, tales om det n -dimensionale punktrum E_n . (Et sådant kan defineres for hvert naturligt tal n . Men de følgende resultater er med "vektorer" i stedet for "punkter" gyldige i vektorrum af vilkårlig endelig dimension over de reelle tals legeme.)

Lad $B(\underline{x}, \underline{x})$ være en kvadratisk form og c et reelt tal. Mængden af de punkter $\underline{x} \in E_n$, for hvilke

$$B(\underline{x}, \underline{x}) = c$$

kaldes en centrumskvadrik (for $n = 2$ keglesnit med midtpunkt, for $n = 3$ keglesnitsflade med midtpunkt). Idet nemlig $B(-\underline{x}, -\underline{x}) = B(\underline{x}, \underline{x})$, har denne mængde (for så vidt den ikke er tom) nulpunktet som midtpunkt. Idet tilfældet $\text{rg } B = 0$ er ganske uden interesse, forudsættes i det følgende $\text{rg } B > 0$.

Ved en homoteti $\underline{x} \rightarrow \underline{y} = m\underline{x}$, $m \neq 0$, vil kvadrikken $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$ afbildes i kvadrikken $B(\underline{y}, \underline{y}) = m^2 c$. Heraf ses, at for $c = 0$, afbildes kvadrikken på sig selv ved hver homoteti med centrum O . Med andre ord, hvis et punkt $\underline{x} \neq \underline{O}$ tilfredsstiller ligningen $B(\underline{x}, \underline{x}) = 0$, vil alle punkter på linien, der forbinder $\underline{O}$ med $\underline{x}$ også gøre det. Kvadrikken

$$B(\underline{x}, \underline{x}) = 0$$

består altså enten kun af $\underline{O}$, nemlig hvis og kun hvis B er defi-

nit, eller den er en foreningsmængde af rette linier gennem $\underline{0}$. Den kaldes en andengradskegle og linierne gennem $\underline{0}$, som den består af, dens frembringere. Endvidere kan sluttes, at alle kvadrisker $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$, hvor B er fast og c gennemløber alle positive tal, er indbyrdes homotetiske, og det samme gælder for kvadriskerne, der fås for negative c .

Lad der være givet en kvadrisk $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$ og en ret linie med parameterfremstillingen

$$\underline{x} = \underline{a} + t\underline{v}, \quad \underline{v} \neq \underline{0}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Eventuelle fællespunkters parameterverdier er da rødderne i ligningen

$$B(\underline{a} + t\underline{v}, \underline{a} + t\underline{v}) = B(\underline{a}, \underline{a}) + 2t B(\underline{a}, \underline{v}) + t^2 B(\underline{v}, \underline{v}) = c.$$

Hvis

$$(B(\underline{a}, \underline{a}) - c)B(\underline{v}, \underline{v}) > B(\underline{a}, \underline{v})^2$$

eller

$$B(\underline{a}, \underline{a}) \neq c, \quad B(\underline{a}, \underline{v}) = B(\underline{v}, \underline{v}) = 0,$$

og kun i disse tilfælde, findes der ingen fællespunkter. I de andre tilfælde kan det antages, at $\underline{a}$ er et fællespunkt, altså at

$$B(\underline{a}, \underline{a}) = c.$$

Ligningen bliver da

$$t(2B(\underline{a}, \underline{v}) + t B(\underline{v}, \underline{v})) = 0.$$

Når $B(\underline{a}, \underline{v}) \neq 0$ og $B(\underline{v}, \underline{v}) \neq 0$ og kun da, findes der foruden roden $t = 0$, der svarer til fællespunktet $\underline{a}$, en og kun een fra denne forskellig rod

$$t = -2 \frac{B(\underline{a}, \underline{v})}{B(\underline{v}, \underline{v})}.$$

Linien har altså to punkter $\underline{a}$ og $\underline{a} - 2 \frac{B(\underline{a}, \underline{v})}{B(\underline{v}, \underline{v})} \underline{v}$ fælles med kvadriskken. Liniestykket, der forbinder de to punkter, kaldes en korde. Kordens midtpunkt har stedvektoren

$$\underline{m} = \underline{a} - \frac{B(\underline{a}, \underline{v})}{B(\underline{v}, \underline{v})} \underline{v},$$

og for denne findes

$$B(\underline{m}, \underline{v}) = B(\underline{a}, \underline{v}) - \frac{B(\underline{a}, \underline{v})}{B(\underline{v}, \underline{v})} B(\underline{v}, \underline{v}) = 0.$$

Heraf sluttes: Midtpunkterne af de med en vektor $\underline{v} \neq \underline{0}$ parallelle korder ligger i den til $\underline{v}$ konjugerede hyperplan gennem $\underline{0}$.

(At det fuldstændige til $\underline{v}$ konjugerede underrum er en hyperplan, følger af $B(\underline{v}, \underline{v}) \neq 0$.)

Dernæst betragtes tilfældet $B(\underline{a}, \underline{v}) \neq 0$, $B(\underline{v}, \underline{v}) = 0$. Da $\underline{v} \neq \underline{0}$, kan det kun foreligge, når B ikke er definit. Linien er altså parallel med en frembringer af keglen $B(\underline{x}, \underline{x}) = 0$, og vektoren $\underline{v}$ på linien er ikke konjugeret til $\underline{a}$. Ligningen reduceres da til en førstegradslikning, der kun har roden $t = 0$. Linien har altså kun punktet $\underline{a}$ fælles med kvadrikken.

Er $B(\underline{a}, \underline{v}) = 0$, men $B(\underline{v}, \underline{v}) \neq 0$, er altså $\underline{v}$ konjugeret til $\underline{a}$, men ikke parallel med nogen frembringer af keglen $B(\underline{x}, \underline{x}) = 0$, foreligger der en andengradslikning med dobbeltroden $t = 0$. Linien har kun punktet $\underline{a}$ fælles med kvadrikken og kaldes en tangent til denne i punktet $\underline{a}$. Dette punkt kaldes tangentens røringspunkt. Motiveringen for denne betegnelse vil blive givet nedenfor.

Er både $B(\underline{a}, \underline{v}) = 0$ og $B(\underline{v}, \underline{v}) = 0$, hvilket kun kan indtræffe, når B ikke er definit, er ligningen opfyldt for alle $t \in \mathbb{R}$. Hele linien tilhører altså kvadrikken og kaldes en frembringer af denne af grunde, som vil blive omtalt senere. Frembringerne regnes med til kvadrikkens tangenter. Hvert af en frembringers punkter betragtes som et røringspunkt.

Det fremgår af det sagte, at en linie er tangent til en kvadrik i et punkt $\underline{a}$, hvis og kun hvis $B(\underline{a}, \underline{v}) = 0$ for hver vektor $\underline{v}$ på linien, altså hvis og kun hvis vektorerne på linien er konjugerede til vektoren $\underline{a}$. Disse vektorer udgør det fuldstæn-

dige til $\underline{a}$ konjugerede underrum, når alle tangenter i $\underline{a}$ tages i betragtning. Hvis $\underline{a}$ ikke tilhører nulrummet for formen B, vil det konjugerede underrum være en hyperplan, og tangenterne i $\underline{a}$ vil udgøre den med denne parallelle hyperplan gennem $\underline{a}$, kvadrikkens tangenthyperplan i punktet $\underline{a}$. I de punkter $\underline{a}$ på kvadrikken, som tillige tilhører nulrummet, og som kaldes kvadrikkens singulære punkter, defineres ikke nogen tangenthyperplan. Tangenterne i et sådant punkt udfylder hele rummet. Singulære punkter kan på grund af $B(\underline{a}, \underline{a}) = c$ kun forekomme, når $c = 0$, altså når kvadrikken er en kegle. Toppunktet $\underline{a} = \underline{0}$ er i hvert fald et singulært punkt. Men der kan også forekomme andre. Det ses umiddelbart, at hver tangenthyperplan til en kegle indeholder alle singulære punkter, altså hele nulrummet for formen B.

Lad $\underline{a}$ være et regulært (d.v.s. ikke singulært) punkt på en kvadrik $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$. Et punkt $\underline{\xi}$ vil ligge i tangenthyperplanen i $\underline{a}$, hvis og kun hvis vektoren $\underline{\xi} - \underline{a}$ er konjugeret til $\underline{a}$, altså hvis og kun hvis

$$B(\underline{a}, \underline{\xi} - \underline{a}) = B(\underline{a}, \underline{\xi}) - B(\underline{a}, \underline{a}) = B(\underline{a}, \underline{\xi}) - c = 0.$$

Tangenthyperplanens ligning kan følgelig skrives

$$B(\underline{a}, \underline{\xi}) = c.$$

At den her givne algebraiske definition af tangenthyperplanen harmonerer med den i analysen givne, ses på følgende måde: Lad $\underline{x}(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, være en parameterfremstilling for en fra $\underline{a}$ udgående kurve, der forløber på kvadrikken, så at $\underline{x}(\alpha) = \underline{a}$ og

$$B(\underline{x}(\tau), \underline{x}(\tau)) = c \quad \text{for } \alpha \leq \tau \leq \beta.$$

Man har da for $\alpha < \tau \leq \beta$.

$$0 = \frac{B(\underline{x}(\tau), \underline{x}(\tau)) - B(\underline{x}(\alpha), \underline{x}(\alpha))}{\tau - \alpha}$$

$$= B\left(\underline{x}(\tau), \frac{\underline{x}(\tau) - \underline{x}(\alpha)}{\tau - \alpha}\right) + B\left(\frac{\underline{x}(\tau) - \underline{x}(\alpha)}{\tau - \alpha}, \underline{x}(\alpha)\right).$$

Antages, at

$$\lim_{\tau \rightarrow \alpha} \frac{\underline{x}(\tau) - \underline{x}(\alpha)}{\tau - \alpha} = \underline{x}'(\alpha).$$

eksisterer, altså at kurven er differentiabel i punktet $\underline{x}(\alpha) = \underline{a}$, vil den højre side/ovenstående ligning for $\tau \rightarrow \alpha$ konvergere mod $2B(\underline{x}(\alpha), \underline{x}'(\alpha))$. Indføres et koordinatsystem i E_n , ses nemlig $B(\underline{x}, \underline{y})$ at være en kontinuert funktion i $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ med hensyn til dette talrums sædvanlige topologi. Man har altså $B(\underline{a}, \underline{x}'(\alpha)) = 0$, hvilket viser, at hvis $\underline{x}'(\alpha) \neq \underline{0}$ og kurven følgelig har en tangent i $\underline{a}$, vil denne tangent ligge i tangenthyperplanen.

Lad $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$, hvor $c \neq 0$, være en kvadrik. Antag, at der på keglen $B(\underline{x}, \underline{x}) = 0$ findes et punkt $\underline{b} \neq \underline{0}$, som ikke tilhører nulrummet for formen B . Det skal vises, at den gennem $\underline{b}$ gående frembringer af keglen er en asymptote for kvadrikken $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$. Der findes mindst een vektor $\underline{u}$, for hvilken $B(\underline{u}, \underline{u}) \neq 0$, og som ikke er konjugeret til $\underline{b}$, som altså hverken ligger på keglen eller i keglens tangenthyperplan i $\underline{b}$; thi der findes i hvert fald en vektor $\underline{u}$, for hvilken $B(\underline{b}, \underline{u}) \neq 0$, da $\underline{b}$ ikke tilhører nulrummet, og hvis $B(\underline{u}, \underline{u})$ skulle være 0, vil f.eks. $\underline{u} + \underline{b}$ i stedet for $\underline{u}$ som det let ses opfylde de stillede krav. Lad nu $\underline{u}$ være en sådan vektor og β et reelt tal. Linien med parameterfremstillingen

$$\underline{x} = \beta \underline{b} + t \underline{u}, \quad t \in \mathbb{R},$$

skærer da kvadrikken i to forskellige punkter, når $|\beta|$ er tilstrækkeligt stort. Andengradsligningen

$$B(\beta \underline{b} + t \underline{u}, \beta \underline{b} + t \underline{u}) - c = t^2 B(\underline{u}, \underline{u}) + 2t\beta B(\underline{b}, \underline{u}) - c = 0$$

har nemlig to indbyrdes og fra 0 forskellige rødder, når

$$cB(\underline{u}, \underline{u}) < \beta^2 B(\underline{b}, \underline{u})^2.$$

For hvert β , der opfylder denne betingelse, betegnes rødderne med $t_1(\beta)$ og $t_2(\beta)$, således at $|t_1(\beta)| \leq |t_2(\beta)|$.

Idet

$$t_1(\beta) + t_2(\beta) = -2\beta \frac{B(\underline{b}, \underline{u})}{B(\underline{u}, \underline{u})}, \quad t_1(\beta)t_2(\beta) = -\frac{c}{B(\underline{u}, \underline{u})},$$

er

$$|t_1(\beta)| \leq \left| \frac{c}{B(\underline{u}, \underline{u})} \right|^{\frac{1}{2}},$$

altså $t_1(\beta)$ begrænset som funktion af β , og

$$|t_1(\beta) + t_2(\beta)| = \left| t_1(\beta) - \frac{c}{t_1(\beta)B(\underline{u}, \underline{u})} \right| \rightarrow \infty \quad \text{for } |\beta| \rightarrow \infty.$$

Heraf sluttet, at $t_1(\beta) \rightarrow 0$ for $|\beta| \rightarrow \infty$. Vektoren $t_1(\beta)\underline{u}$ forbinder punktet $\beta\underline{b}$ på keglens frembringer med et punkt på kvadriken $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$, og da denne vektor konvergerer mod $\underline{0}$ for $|\beta| \rightarrow \infty$, er frembringeren altså asymptote til kvadriken såvel for $\beta \rightarrow \infty$ som for $\beta \rightarrow -\infty$. Af denne grund kaldes keglen $B(\underline{x}, \underline{x}) = 0$ i de tilfælde, hvor den har punkter, som ikke tilhører nulrummet for formen B , for den til kvadrikkerne $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$ hørende asymptotekegle.

Lad $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$ være en vilkårlig kvadrik, og lad H betegne en hyperplan gennem nulpunktet, som ikke er tangenthyperplan til keglen $B(\underline{x}, \underline{x}) = 0$. Da findes der en linie l gennem nulpunktet, som er konjugeret til, men ikke beliggende i H , og kvadrikken skæres af de med H parallelle hyperplaner i centrumskvadrikker med centrer beliggende på l .

Bevis: Først bevises, at der findes en vektor $\underline{a}$, som er konjugeret til, men ikke beliggende i H . Indeholder H ikke hele nulrummet, vil en vilkårlig vektor $\underline{a}$ i dette, som ikke ligger i H , opfylde kravet. Antag nu, at hele nulrummet tilhører H . Da dets dimension er $n - r$, hvor $r = \text{rg } B$, kan der vælges en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{n-r})$ for H , hvis $n - r$ sidste vektorer udspænder nulrummet. Denne basis suppleres med en vektor $\underline{e}_n$ til en basis for hele rummet. En vektor

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n$$

er da konjugeret til H , hvis og kun hvis ligningerne

$$B(\underline{v}, \underline{e}_i) = v_1 B(\underline{e}_1, \underline{e}_i) + \dots + v_n B(\underline{e}_n, \underline{e}_i) = 0$$

er opfyldte for $i = 1, \dots, n-1$. De $n-r$ sidste af ligningerne er imidlertid opfyldt for alle vektorer $\underline{v}$, idet $\underline{e}_r, \dots, \underline{e}_{n-1}$ tilhører nulrummet. Disse ligninger kan følgelig udelades, så at der foreligger et system af $r-1$ lineære homogene ligninger med de n ubekendte $v_1, \dots, v_n$. Løsningsrummet har altså mindst dimensionen $n-r+1$. Det må derfor indeholde en vektor $\underline{a}$, som ikke tilhører nulrummet. Denne vektor $\underline{a}$ kan heller ikke ligge i H ; thi da $B(\underline{v}, \underline{a}) = 0$ for alle vektorer $\underline{v} \in H$, ville man ellers også have $B(\underline{a}, \underline{a}) = 0$, og H ville være tangenthyperplan til keglen $B(\underline{x}, \underline{x}) = 0$ i strid med forudsætningen. Dermed er eksistensen af en vektor $\underline{a}$ med de ønskede egenskaber bevist. For et vilkårligt reelt tal α betragtes nu den med H parallelle hyperplan H_α med parameterfremstillingen

$$\underline{x} = \alpha \underline{a} + \underline{x}^*, \quad \underline{x}^* \in H.$$

Stedvektorerne for fællespunkterne af H_α og kvadrikken $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$ er altså dem, der tilfredsstiller ligningen

$$B(\alpha \underline{a} + \underline{x}^*, \alpha \underline{a} + \underline{x}^*) = \alpha^2 B(\underline{a}, \underline{a}) + B(\underline{x}^*, \underline{x}^*) = c,$$

hvor det er benyttet, at $B(\underline{a}, \underline{x}^*) = 0$ for $\underline{x}^* \in H$. Nu er $B(\underline{x}^*, \underline{x}^*)$ ikke andet end restriktionen af $B(\underline{x}, \underline{x})$ til H , altså en kvadratisk form i H . Skrives ligningen

$$B(\underline{x}^*, \underline{x}^*) = c - \alpha^2 B(\underline{a}, \underline{a}),$$

ses, at fællesmængden er en kvadrik med centrum $\underline{x}^* = \underline{0}$, d.v.s. $\underline{x} = \alpha \underline{a}$. Centrerne svarende til de forskellige værdier af α ligger altså på den ved $\underline{a}$ bestemte linie gennem $\underline{0}$. Dermed er sætningen bevist.

Fællesmængden af en kvadrik og hyperplaner, som er parallelle med en tangenthyperplan til den tilhørende asymptotekegle, vil blive undersøgt senere.

Lad $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$ igen være en vilkårlig centrumskvadrik og $\underline{b}$ et ikke singulært punkt på den. For de punkter $\underline{x}$, som er fælles for kvadrikken og dens tangenthyperplan i punktet $\underline{b}$ gælder da

$$B(\underline{x}, \underline{x}) = c, \quad B(\underline{b}, \underline{x}) = c$$

(se side III, 13, 4). Heraf fås

$$B(\underline{x} - \underline{b}, \underline{x} - \underline{b}) = B(\underline{x}, \underline{x}) - 2B(\underline{b}, \underline{x}) + B(\underline{b}, \underline{b}) = 0.$$

Vektorerne $\underline{x}^* = \underline{x} - \underline{b}$ fra røringpunktet til fællespunkterne for kvadrikken og tangenthyperplanen tilfredsstiller altså ligningen $B(\underline{x}^*, \underline{x}^*) = 0$, som fremstiller en kegle i tangenthyperplanen, hvis den ikke er opfyldt for alle $\underline{x}^*$ i tangenthyperplanen. Heraf ses, at der i et bundt af parallelle hyperplaner, som ikke er parallelle med en tangenthyperplan til keglen $B(\underline{x}, \underline{x}) = 0$, højst kan findes to tangenthyperplaner til kvadrikken $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$. Med ovenstående betegnelser kan nemlig H_α kun være tangenthyperplan, når α tilfredsstiller ligningen

$$c - \alpha^2 B(\underline{a}, \underline{a}) = 0,$$

d.v.s., når

$$B(\alpha \underline{a}, \alpha \underline{a}) = c,$$

altså punktet $\alpha \underline{a}$ ligger på kvadrikken. For et sådant α er H_α virkelig en tangenthyperplan; thi for hvert punkt $\underline{\xi}$ i H_α gælder

$$B(\alpha \underline{a}, \underline{\xi}) = B(\alpha \underline{a}, \alpha \underline{a} + (\underline{\xi} - \alpha \underline{a})) = B(\alpha \underline{a}, \alpha \underline{a}) = c,$$

da dem med H_α parallelle vektor $\underline{\xi} - \alpha \underline{a}$ er konjugeret til $\underline{a}$.

Lad f være en enentydig lineær afbildning af vektorrummet $(V_n, +, \cdot)$ på sig selv. (En sådan kan også opfattes som en affin afbildning af punktrummet på sig selv, ved hvilken nulpunktet svarer til sig selv.) Ved f svarer der til en symmetrisk bilinearform B en symmetrisk bilinearform B_f , for hvilken

$$B_f(f(\underline{u}), f(\underline{v})) = B(\underline{u}, \underline{v})$$

for alle $\underline{u}, \underline{v} \in V_n$ (se side III,12,18). Billedpunktet $f(\underline{x})$ af et punkt $\underline{x}$ på kvadrikken $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$ ligger altså på kvadrikken $B_f(\dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}}) = c$, og hvert punkt $\underline{x}$ på denne er ifølge definitionen af B_f billedpunkt af et punkt $\underline{x} = f^{-1}(\dot{\underline{x}})$ på den første. Ved f afbildes altså kvadrikken $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$ på kvadrikken $B_f(\dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}}) = c$ og altså også asymptotekeglen for den første på asymptotekeglen for den anden. Lad $B(\underline{a}, \underline{\xi}) = c$ være ligningen for tangenthyperplanen til $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$ i punktet $\underline{a}$. For billedpunkterne $\dot{\underline{a}} = f(\underline{a})$ og $\dot{\underline{\xi}} = f(\underline{\xi})$ gælder da $B_f(\dot{\underline{a}}, \dot{\underline{\xi}}) = c$. Heraf sluttes, at den givne tangenthyperplans billede, som jo er en hyperplan, må være tangenthyperplanen til $B_f(\dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}}) = c$ i det til røringspunktet $\underline{a}$ svarende punkt. Endelig mindes om, at med hensyn til B konjugerede vektorer afbildes i med hensyn til B_f konjugerede vektorer.

Multipliseres en ligning for en kvadrik med et fra 0 forskelligt tal, fås en ligning af samme form, som fremstiller den samme kvadrik. Enhver centrumskvadrik har derfor en ligning af en af formerne $B(\underline{x}, \underline{x}) = 1$ og $B(\underline{x}, \underline{x}) = 0$. Af sætningen om lineær-ækvivalens af reelle symmetriske bilinearformer (side III,12,20) fås da: Hver centrumskvadrik kan ved en enentydig lineær afbildning overføres i en, der i et vilkårligt valgt koordinatsystem har en ligning af en af formerne

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}.$$

Dette leder til den følgende såkaldte affine klassifikation af centrumskvadrikkerne i en-, to- og tredimensionale reelle rum:

Oversigt over centrumskvadrikerne
i en-, to- og tredimensionale rum.

n	rg B	sgt B	B(<u>x</u> , <u>x</u>) = 1		B(<u>x</u> , <u>x</u>) = 0	
			ligning	navn	ligning	navn
1	1	1	$x_1^2 = 1$	punktpar	$x_1^2 = 0$	dobbeltpunkt
		-1	$-x_1^2 = 1$	$\emptyset$		
2	2	2	$x_1^2 + x_2^2 = 1$	ellipse	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	dobbeltpunkt
		-2	$-x_1^2 - x_2^2 = 1$	$\emptyset$		
		0	$x_1^2 - x_2^2 = 1$	hyperbel	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	par af skærende linier
	1	1	$x_1^2 = 1$	par af parallelle linier	$x_1^2 = 0$	dobbeltpunkt
		-1	$-x_1^2 = 1$	$\emptyset$		
3	3	3	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$	ellipsoide	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	dobbeltpunkt
		-3	$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$	$\emptyset$		
		1	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$	hyperboloide med eet net		keglesnitskegle
		-1	$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1$	hyperboloide med to net	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	
	2	2	$x_1^2 + x_2^2 = 1$	elliptisk cylinder	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	dobbeltpunkt
		-2	$-x_1^2 - x_2^2 = 1$	$\emptyset$		
		0	$x_1^2 - x_2^2 = 1$	hyperbolsk cylinder	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	par af skærende planer
	1	1	$x_1^2 = 1$	par af parallelle planer	$x_1^2 = 0$	dobbeltpunkt
		-1	$-x_1^2 = 1$	$\emptyset$		

Øvelser til kap III, § 13.

1. Angiv for hvert af de i oversigten (side III,13,10) opførte kvadrikker mængden af dens singulære punkter.
2. Vis, at planen med ligningen $2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -8$ er en tangentplan til keglesnitsfladen med ligningen $4x_1^2 + x_2^2 - 9x_3^2 = 16$, og find røringspunktets koordinatsæt.
3. Find ligningerne for de tangentplaner til keglesnitsfladen med ligningen $2x_1^2 - 6x_2^2 + 3x_3^2 = 5$, som hver går gennem de to punkter med koordinatsættene $(0, \frac{1}{3}, 1)$ og $(3, -\frac{2}{3}, -1)$.
4. Lad $B(\underline{x}, \underline{x}) = 1$ være ligningen for en ellipse (ellipsoide) og $\underline{p}$ og $\underline{q}$ stedvektorer til to forskellige punkter på denne. Vis, at linien, der forbinder disse punkter, er en tangent til ellipsen (ellipsoiden) med ligningen $B(\underline{x}, \underline{x}) = \frac{1}{2}$, hvis og kun hvis vektorerne $\underline{p}$ og $\underline{q}$ er konjugerede med hensyn til formen B .
5. En ellipsoide, en hyperboloide med eet net og en hyperboloide med to net, som antages at have de i oversigten (side III,13,10) angivne ligninger, skæres med de med koordinatplanerne parallelle planer. Beskriv og diskuter snitkurverne. Angiv specielt eventuelle tangentplaner blandt de betragtede planer samt deres fællesmængder med fladerne.
6. Vis, at der i en plan findes et og kun eet keglesnit, som har et givet centrum O og som går gennem tre givne, fra O forskellige punkter, som ikke ligger på samme linie gennem O .
7. I rummet er givet et tetraeder $P_1P_2P_3P_4$. Midtpunktet af kanten P_iP_j betegnes med M_{ij} . De tre forbindelseslinier af

modstående kanter midtpunkter går gennem samme punkt O . Der findes en og kun een ellipsoide med centrum O , som går gennem de seks punkter M_{ij} , og med hensyn til hvilken vektorerne $\vec{OM}_{12}$, $\vec{OM}_{13}$ og $\vec{OM}_{14}$ er parvis konjugerede. Vis, at tetraedrets seks kanter er tangenter til denne ellipsoide.

8. Lad $B(\underline{x}, \underline{x}) = c$ være ligningen for en centrumskvadrik og $\underline{p}$ et punkt, som ikke ligger på denne. Vis, at hvis der gennem $\underline{p}$ går tangenter til kvadrikken, vil deres røringpunkter ligge i en hyperplan, der er parallel med den til stedvektoren $\underline{p}$ konjugerede hyperplan.

Formuler og bevis en tilsvarende sætning om tangenter, som er parallelle med en given vektor.

9. Om den kvadratiske form $B(\underline{x}, \underline{x})$ antages: a) at den er positiv semidefinit, b) at den har positivitetsindex 1. Angiv i hvert af de to tilfælde typerne af de kvadrikker i en-, to- og tredimensionale rum, som har en ligning af formen $B(\underline{x}, \underline{x}) = 1$. Vis i tilfældet a), at mængden

$$\{\underline{x} \mid B(\underline{x}, \underline{x}) < 1\}$$

af kvadrikkens "indre punkter" er konveks.

Vis i tilfældet b), at mængden af "den ene grens (det ene nets) indre punkter", d.v.s.

$$\{\underline{x} \mid B(\underline{x}, \underline{x}) > 1 \wedge B(\underline{a}, \underline{x}) > 0\},$$

hvor $\underline{a}$ er en fastvektor, for hvilken $B(\underline{a}, \underline{a}) > 0$, er konveks.

10. Vis, at hvis en keglesnitsflade skæres af en plan π i en hyperbel, vil den med π parallelle plan gennem fladens centrum skære dennes asymptotekegle i to linier, der er parallelle med hyperblens asymptoter.

normeret vektorrum.§ 14. Vektorrum med indre produkt.

Lad $(V, +, L)$ betegne et vektorrum over de reelle eller de komplekse tals legeme. (I det følgende er altså $L = \mathbb{R}$ eller $L = \mathbb{C}$.) I et sådant vektorrum kan man på mangfoldig måde tilskrive hver vektor $\underline{x}$ en "længde" $\|\underline{x}\|$, d.v.s. man kan definere en funktion $\underline{x} \rightarrow \|\underline{x}\|$ fra V til $\mathbb{R}$. Til denne vil man stille visse krav, der medfører, at den kan betragtes som en naturlig generalisering af en geometrisk vektors længde i sædvanlig forstand. Det har vist sig at være hensigtsmæssigt at forlange:

$$N1: \forall_V \underline{x}, \underline{y} \quad [\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|].$$

$$N2: \forall_V \underline{x} \quad \forall_L \lambda \quad [\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\|].$$

$$N3: \forall_V \underline{x} \quad [\underline{x} \neq \underline{0} \Rightarrow \|\underline{x}\| \neq 0].$$

Af N2 sluttes, at $\|0\| = \|0\underline{0}\| = 0$, og at $\|-\underline{x}\| = \|(-1)\underline{x}\| = \|\underline{x}\|$.

Ved hjælp af N1 fås da

$$\|\underline{x}\| = \frac{1}{2}(\|\underline{x}\| + \|-\underline{x}\|) \geq \frac{1}{2}\|\underline{x} - \underline{x}\| = 0.$$

Dette sammen med N3 viser, at

$$\|\underline{x}\| \begin{cases} > 0 & \text{for } \underline{x} \neq \underline{0}, \\ = 0 & \text{for } \underline{x} = \underline{0}. \end{cases}$$

En funktion fra V til $\mathbb{R}$ med disse egenskaber kaldes en norm og et vektorrum sammen med en bestemt valgt norm et normeret vektorrum. Et sådant betegnes med $(V, +, L, \|\cdot\|)$.

Et normeret vektorrum bliver til et metrisk rum ved den nærliggende definition

$$\text{dist}(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{y} - \underline{x}\|,$$

idet jo

$$\text{dist}(\underline{x}, \underline{x}) = \|\underline{x} - \underline{x}\| = 0,$$

$$\text{dist}(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{y} - \underline{x}\| > 0 \quad \text{for } \underline{x} \neq \underline{y},$$

$$\text{dist}(\underline{y}, \underline{x}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \|\underline{y} - \underline{x}\| = \text{dist}(\underline{x}, \underline{y}),$$

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(\underline{x}, \underline{z}) &= \|\underline{z} - \underline{x}\| = \|\underline{z} - \underline{y} + \underline{y} - \underline{x}\| \\
 &\leq \|\underline{z} - \underline{y}\| + \|\underline{y} - \underline{x}\| \\
 &= \text{dist}(\underline{x}, \underline{y}) + \text{dist}(\underline{y}, \underline{z}).
 \end{aligned}$$

Derved bestemmes tillige en topologi i V , for hvilken kugle-omegnene

$$K(\underline{a}, r) = \{\underline{x} \in V \mid \|\underline{x} - \underline{a}\| < r\}$$

med centrum $\underline{a} \in V$ og radius $r \in \mathbb{R}_+$ danner en basis.

Eksempler:

1) De endimensionale talvektorrums $(\mathbb{R}, +, \mathbb{R})$ og $(\mathbb{C}, +, \mathbb{C})$ er normerede vektorrum med den numeriske værdi som norm.

2) I de n -dimensionale talvektorrums $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$ og $(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C})$ kan man for hvert tal $p \geq 1$ definere en norm, den såkaldte p -norm, ved for hver vektor $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$ at sætte

$$\|\underline{x}\| = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

At N2 og N3 er gyldige, er klart. At N1 gælder, er ensbetydende med Minkowski's ulighed

$$(\sum |x_i + y_i|^p)^{1/p} \leq (\sum |x_i|^p)^{1/p} + (\sum |y_i|^p)^{1/p},$$

hvor summationerne over i udstrækkes fra 1 til n . Den kan bevises på følgende måde: Først bemærkes, at funktionen t^p , $t \geq 0$, for hver konstant $p \geq 1$ er konveks, d.v.s. at

$$((1-\vartheta)t_0 + \vartheta t_1)^p \leq (1-\vartheta)t_0^p + \vartheta t_1^p$$

for $t_0 \geq 0$, $t_1 \geq 0$ og $0 < \vartheta < 1$. Dette, og at lighedstegnet, når $p > 1$, kun gælder for $t_0 = t_1$ vil blive vist nedenfor. Idet Minkowski's ulighed øjensynlig er opfyldt med lighedstegnet, hvis $\underline{x} = 0$ eller $\underline{y} = 0$, kan man antage, at $\|\underline{x}\|_p > 0$ og $\|\underline{y}\|_p > 0$. Sættes

$$t_0 = \frac{|x_i|}{\|\underline{x}\|_p}, \quad t_1 = \frac{|y_i|}{\|\underline{y}\|_p}, \quad \vartheta = \frac{\|\underline{y}\|_p}{\|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p},$$

og summeres over i fra 1 til n , fås

$$(\|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p)^{-p} \sum (|x_i| + |y_i|)^p \leq 1$$

og heraf ved at opløfte til $(1/p)$ -te potens på begge sider

$$(\|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p)^{-1} (\sum (|x_i| + |y_i|)^p)^{1/p} \leq 1,$$

altså

$$(\sum (|x_i|)^p)^{1/p} \leq \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p.$$

Da $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ er Minkowski's ulighed hermed bevist.

Når $p > 1$, er det ifølge det sagte nødvendigt for lighedstegnets gyldighed, at

$$\frac{|x_i|}{\|\underline{x}\|_p} = \frac{|y_i|}{\|\underline{y}\|_p} \quad \text{for } i = 1, \dots, n.$$

Deusden er det nødvendigt, at $|x_i + y_i| = |x_i| + |y_i|$ for

$i = 1, \dots, n$, altså at tallene x_i og y_i har samme argument, så-

fremt de begge er forskellige fra 0. I så fald er altså

$y_i/x_i > 0$, så at $|y_i|/|x_i| = y_i/x_i$. Den første betingelse giver da

$$x_i \|\underline{y}\|_p = y_i \|\underline{x}\|_p,$$

hvilket også gælder, når $x_i = y_i = 0$. En nødvendig og, som det

let ses, også tilstrækkelig betingelse for, at lighedstegnet i

Minkowski's ulighed med $p > 1$ gælder for to vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er,

at mindst een af dem er 0 eller de er proportionale med en positiv proportionalitetsfaktor.

Den ovenfor benyttede konveksitet af funktionen t^p , $t \geq 0$, følger af, at dens afledede pt^{p-1} er voksende, når $p \geq 1$, og strengt voksende, når $p > 1$. Der gælder nemlig, at hver i et interval $J \in \mathbb{R}$ defineret reel, differentiabel funktion ϕ med voksende afledet ϕ' er konveks i J , d.v.s. at der gælder

$$\phi((1-\vartheta)t_0 + \vartheta t_1) \leq (1-\vartheta) \phi(t_0) + \vartheta \phi(t_1)$$

for $t_0, t_1 \in J$ og $0 < \vartheta < 1$. Er $\phi'(t)$ strengt voksende, gælder lighedstegnet kun for $t_0 = t_1$.

Bevis: Man kan antage, at $t_0 < t_1$, da der ikke er noget at bevise for $t_0 = t_1$. Sættes

$$t_{\nu} = (1-\nu)t_0 + \nu t_1,$$

haves

$$t_{\nu} - t_0 = \nu(t_1 - t_0) > 0, \quad t_1 - t_{\nu} = (1-\nu)(t_1 - t_0) > 0,$$

og påstanden

$$(1-\nu+\nu)\varphi(t_{\nu}) \leq (1-\nu)\varphi(t_0) + \nu\varphi(t_1)$$

kan omskrives til

$$\frac{\varphi(t_{\nu}) - \varphi(t_0)}{t_{\nu} - t_0} \leq \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_{\nu})}{t_1 - t_{\nu}}.$$

Ifølge differentialregningens middelværdisætning er den venstre side lig med $\varphi'(\tau_0)$, hvor $t_0 < \tau_0 < t_{\nu}$, og den højre side lig med $\varphi'(\tau_1)$, hvor $t_{\nu} < \tau_1 < t_1$. Da $t_0 < t_1$ og altså $\varphi'(\tau_0) \leq \varphi'(\tau_1)$ ifølge forudsætning, er påstanden hermed bevist. Det ses også, at lighedstegnet ikke kan gælde, når φ' er strengt voksende.

Til de indførte p -normer i rummene $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$ og $(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C})$ føjer sig endnu en på naturlig måde, nemlig

$$\|\underline{x}\|_{\infty} = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Det bekræftes umiddelbart, at N2 og N3 er opfyldt, og gyldigheden af N1 sluttet let af $|x_1 + y_1| \leq |x_1| + |y_1|$. Betegnelsen $\|\cdot\|_{\infty}$ er motiveret ved, at der for hver fast vektor $\underline{x}$ gælder

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\underline{x}\|_p = \|\underline{x}\|_{\infty}.$$

Dette ses af den for $\underline{x} \neq \underline{0}$ gyldige omskrivning

$$\|\underline{x}\|_p = \|\underline{x}\|_{\infty} \left(\sum \frac{|x_i|^p}{\|\underline{x}\|_{\infty}^p} \right)^{1/p}.$$

Summen i parentes har nemlig for hvert $p \geq 1$ en værdi større end eller lig med 1 og mindre end eller lig med n . Dens $(1/p)$ -te potens konvergerer altså mod 1 for $p \rightarrow \infty$.

De med p -normen forsynede vektorrum $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$ og $(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C})$ betegnes med henholdsvis $l_p(n, \mathbb{R})$ og $l_p(n, \mathbb{C})$. De normerede rum

$l_p(n, \mathbb{R})$ for de forskellige værdier af p er indbyrdes forskellige, skønt det underliggende vektorrum er det samme. Tilsvarende gælder for $l_p(n, \mathbb{C})$.

De vigtigste specielle tilfælde er $p = 1$, $p = 2$ og $p = \infty$.

3) For et fast reelt tal $p \geq 1$ betragtes mængden af de reelle eller komplekse talfølger $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots)$, for hvilke $\sum |x_i|^p$ er konvergent. (Her som i det følgende udstrækkes summationen over i fra 1 til ∞ .) Er $\sum |x_i|^p$ og $\sum |y_i|^p$ konvergent, vil også $\sum |x_i + y_i|^p$ være konvergent, og der gælder Minkowski's ulighed i den ovenfor angivne form. Dette ses ved uligheden for rækernes n første led på højre side at lade n gå mod ∞ , af den fremkomne ulighed at slutte konvergens af $\sum (|x_i| + |y_i|)^p$ og derefter at lade n gå mod ∞ på venstre side. Mængden af følger $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots)$, for hvilke $\sum |x_i|^p$ er konvergent, er et vektorrum, nemlig et underrum i vektorrummet af alle reelle henholdsvis komplekse talfølger, og

$$\|\underline{x}\|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$$

er en norm deri. Man får således normerede vektorrum $l_p(\mathbb{R})$ og $l_p(\mathbb{C})$. Mængden af reelle eller komplekse talfølger, som hver for sig er begrænset, danner ligeledes et vektorrum, og i dette er

$$\|\underline{x}\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots\},$$

en norm. Forsynet med denne norm betegnes det med henholdsvis $l_\infty(\mathbb{R})$ og $l_\infty(\mathbb{C})$.

4) Lad M være en vilkårlig mængde og $(B(M), +, L)$ vektorrummet af alle begrænsede funktioner $\phi: M \rightarrow L$, hvor L er $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Det er let at se, at

$$\|\phi\|_\infty = \sup_{t \in M} |\phi(t)|$$

er en norm i dette vektorrum. Er M et topologisk rum vil de i M kontinuerte, begrænsede funktioner danne et underrum $C(M)$ i $B(M)$,

og $\|\cdot\|_\infty$ vil også være en norm i dette. I vektorrummet af alle kontinuerte funktioner φ i et afsluttet interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ er

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_a^b |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

for hvert $p \geq 1$ en norm, idet Minkowski's ulighed

$$\|\varphi + \psi\|_p \leq \|\varphi\|_p + \|\psi\|_p$$

også gælder for integraler. Den kan bevises på samme måde som for endelige summer. Det med denne p -norm forsynede vektorrum af de kontinuerte funktioner i $[a,b]$ betegnes med $C_p[a,b]$. Det er imidlertid muligt at definere $\|\varphi\|_p$ for en mere omfattende klasse af funktioner, nemlig alle i $[a,b]$ målelige funktioner, for hvilke $|\varphi(t)|^p$ er Lebesgue-integrabel. At mængden af disse funktioner er et vektorrum, følger af Minkowski's ulighed. Denne udsiger tillige, at $\|\varphi\|_p$ opfylder N1. At N2 er gyldig er klart. Derimod er N3 ikke opfyldt, idet man af $\int |\varphi(t)|^p dt = 0$ ikke kan slutte, at $\varphi(t) = 0$ i hele intervallet, men kun på nær en nulmængde. Man indfører derfor en ækvivalensrelation i den betragtede funktionsmængde ved at sætte $\varphi \sim \psi$, hvis $\psi(t) - \varphi(t) = 0$ for alle $t \in [a,b]$ med eventuel undtagelse af en nulmængde. Man viser let, at $\varphi \sim \psi$ medfører $\lambda\varphi \sim \lambda\psi$ for $\lambda \in \mathbb{L}$, og at $\varphi_1 \sim \psi_1$ og $\varphi_2 \sim \psi_2$ medfører $\varphi_1 + \varphi_2 \sim \psi_1 + \psi_2$. Heraf kan man slutte, at mængden af ækvivalensklasser med nærliggende definitioner af sum og produkt med et reelt eller komplekst tal danner et vektorrum. Da $\varphi \sim \psi$ endvidere medfører $\|\varphi\|_p = \|\psi\|_p$, afhænger $\|\varphi\|_p$ kun af den ækvivalensklasse, som φ tilhører, og ses let at være en norm i vektorrummet af ækvivalensklasser. Det således definerede normerede vektorrum betegnes med $L_p[a,b]$. Rummene L_p for $p \geq 1$ undersøges i mål- og integralteorien.

5) En særlig betydningsfuld klasse af normerede vektorrum, som vil være hovedemnet i denne paragraf, defineres på følgende måde: Lad $(V, +, \cdot)$ være et vektorrum over de reelle tals legeme og $B(\underline{x}, \underline{x})$ en positiv definit kvadratisk form i V . Da er $\underline{x} \rightarrow \|\underline{x}\| = B(\underline{x}, \underline{x})^{\frac{1}{2}}$ en norm i V . At N1 er opfyldt, følger af Cauchy-Schwarz's ulighed (side III, 12, 22), idet

$$\begin{aligned}\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 &= B(\underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}) = B(\underline{x}, \underline{x}) + 2B(\underline{x}, \underline{y}) + B(\underline{y}, \underline{y}) \\ &\leq B(\underline{x}, \underline{x}) + 2B(\underline{x}, \underline{x})^{\frac{1}{2}}B(\underline{y}, \underline{y})^{\frac{1}{2}} + B(\underline{y}, \underline{y}) \\ &= (B(\underline{x}, \underline{x})^{\frac{1}{2}} + B(\underline{y}, \underline{y})^{\frac{1}{2}})^2 = (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2.\end{aligned}$$

At N2 er opfyldt, aflæses af

$$\|\lambda \underline{x}\|^2 = B(\lambda \underline{x}, \lambda \underline{x}) = \lambda^2 B(\underline{x}, \underline{x}) = \lambda^2 \|\underline{x}\|^2,$$

og at N3 gælder, følger af $B(\underline{x}, \underline{x}) > 0$ for $\underline{x} \neq \underline{0}$. Da

$$B(\underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}) + B(\underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y}) = 2B(\underline{x}, \underline{x}) + 2B(\underline{y}, \underline{y})$$

for den kvadratiske form B , har man

$$(*) \quad \|\underline{x} + \underline{y}\|^2 + \|\underline{x} - \underline{y}\|^2 = 2\|\underline{x}\|^2 + 2\|\underline{y}\|^2.$$

Dette kan opfattes som en generalisering af den elementære geometriske sætning: I et parallelogram er summen af kvadraterne på diagonalernes længder lig med summen af kvadraterne på sidernes længder. Beviset for denne sætning kan føres ved hjælp af Pythagoras' sætning. Det specielle tilfælde, hvor parallelogrammet er en rombe ($\|\underline{x}\| = \|\underline{y}\|$) er så godt som ensbetydende med denne sætning. Man kan omvendt vise, at hvis $(*)$ gælder i et normeret vektorrum over de reelle tals legeme for alle par $\underline{x}, \underline{y}$ af vektorer, for hvilke $\|\underline{x}\| = \|\underline{y}\|$, så er kvadratet på normen en positiv definit kvadratisk form. De betragtede normerede vektorrum udmærker sig altså ved, at der i dem gælder Pythagoras' sætning ganske som i det sædvanlige "euklidiske rum". Blandt de ovenfor omtalte "p-rum" er de reelle for $p = 2$, men ikke for nogen anden værdi af p , af denne art.

Lad $(V, +, L, \| \cdot \|)$ være et vilkårligt normeret vektorrum. Som allerede nævnt, er V med $\text{dist}(x, y) = \|y - x\|$ et metrisk, og dermed også et topologisk rum. I dette er normen $\|x\|$ en ligelig kontinuert funktion. Dette aflæses af uligheden

$$| \|y\| - \|x\| | \leq \|y - x\| = \text{dist}(x, y),$$

som følger af

$$\|y - x\| + \|x\| \geq \|y\|, \quad \|x - y\| + \|y\| \geq \|x\|.$$

Af normens kontinuitet følger, at $\{x \in V \mid \|x - a\| \leq r\}$, hvor $r \in \mathbb{R}_+$, er afslutningen $\bar{K}(a, r)$ af kugleomegnen $K(a, r)$. Såvel kugleomegnene som deres afslutninger er konvekse mængder. (En mængde $M \subseteq V$ kaldes konveks, hvis det for alle $x, y \in M$ og alle tal $\vartheta \in [0, 1]$ gælder, at $(1-\vartheta)x + \vartheta y \in M$.) Er nemlig $x, y \in K(a, r)$, altså $\|x - a\| < r$ og $\|y - a\| < r$, haves

$$\begin{aligned} \|(1-\vartheta)x + \vartheta y - a\| &= \|(1-\vartheta)(x-a) + \vartheta(y-a)\| \\ &\leq \|(1-\vartheta)(x-a)\| + \|\vartheta(y-a)\| \\ &= (1-\vartheta)\|x-a\| + \vartheta\|y-a\| < (1-\vartheta)r + \vartheta r = r. \end{aligned}$$

Tilsvarende bevises påstanden for $\bar{K}(a, r)$.

To normerede vektorrum $(V, +, L, \| \cdot \|)$ og $(V', +, L, \| \cdot \|')$ siges at være isomorfe, hvis der findes en enentydig lineær afbildning f af V på V' , således at

$$\|f(x)\|' = \|x\|$$

for alle $x \in V$. Idet f er lineær, sluttes heraf, at

$$\|f(x) - f(y)\|' = \|x - y\|,$$

altså f er en isometrisk, d.v.s. afstandsbevarende afbildning.

Det er klart, at den således definerede isomorfi mellem normerede vektorrum er en ækvivalensrelation. Isomorfe normerede vektorrum har "samme struktur" og adskiller sig kun i betegnelserne. En isomorfi f og dens inverse f^{-1} er øjensynlig kontinuerte afbildninger.

En lineær afbildning (operator) f af et normeret vektorrum

$(V, +, L, \| \cdot \|)$ ind i et normeret vektorrum $(V', +, L, \| \cdot \|')$ behøver ikke at være kontinuert. Men der gælder, at hvis afbildningen f er kontinuert i $\underline{0}$, er den kontinuert i hele rummet V . Hvis der nemlig til hvert positivt tal ε findes et positivt tal δ , således at

$$\|f(\underline{x})\|' \leq \varepsilon \quad \text{for } \|\underline{x}\| \leq \delta,$$

fås for hver fast vektor $\underline{a} \in V$

$$\|f(\underline{x}) - f(\underline{a})\|' = \|f(\underline{x} - \underline{a})\|' \leq \varepsilon \quad \text{for } \|\underline{x} - \underline{a}\| \leq \delta.$$

En lineær afbildning (operator) f af et normeret vektorrum $(V, +, L, \| \cdot \|)$ ind i et normeret vektorrum $(V', +, L, \| \cdot \|')$ siges at være begrænset, hvis der findes en konstant M , således at

$$\|f(\underline{x})\|' \leq M\|\underline{x}\| \quad \text{for } \underline{x} \in V.$$

eller, hvad der kommer ud på det samme,

$$\sup_{\|\underline{x}\| \leq 1} \|f(\underline{x})\|' \leq M.$$

Af denne definition fremgår umiddelbart, at hver begrænset lineær afbildning er kontinuert. Der gælder imidlertid også det omvendte. Er nemlig f kontinuert, findes der et tal $\delta > 0$, således at $\|f(\underline{x})\|' \leq 1$ for $\|\underline{x}\| \leq \delta$, og for $\|\underline{x}\| \leq 1$ har man da

$$\|f(\underline{x})\|' = \|f(\frac{1}{\delta}\delta\underline{x})\|' = \frac{1}{\delta}\|f(\delta\underline{x})\|' \leq \frac{1}{\delta}.$$

Hver lineær afbildning f af et endelig-dimensionalt normeret vektorrum $(V_n, +, L, \| \cdot \|)$ ind i et normeret vektorrum $(V', +, L, \| \cdot \|')$ er kontinuert.

Beviset baseres på følgende specielle tilfælde:

Lad $l_1(n, L)$, hvor $L = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, være det ovenfor (side III, 14, 2-4) indførte normerede talvektorrum L^n med normen

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

Lad der endvidere være valgt en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ for V_n . Med φ betegnes den enentydige lineære afbildning af $l_1(n, L)$ på $(V_n, +, L, \| \cdot \|)$, ved hvilken der til talsættet $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$

svarer vektoren $x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n \in V_n$. Denne afbildning φ er begrænset, altså kontinuert, da

$$\begin{aligned} \|x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n\| &\leq |x_1| \|\underline{e}_1\| + \dots + |x_n| \|\underline{e}_n\| \\ &\leq M(|x_1| + \dots + |x_n|), \end{aligned}$$

hvor $M = \max\{\|\underline{e}_1\|, \dots, \|\underline{e}_n\|\}$. Ikke helt så oplagt er, at også den inverse afbildning $\varphi^{-1}: (V_n, +, L, \|\cdot\|)$ på $l_1(n, L)$ er begrænset, altså kontinuert, hvilket vil sige, at der findes en (nødvendigvis positiv) konstant M^* , således at

$$|x_1| + \dots + |x_n| \leq M^* \|x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n\|$$

for alle $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$. Sættes

$$y_i = \frac{x_i}{|x_1| + \dots + |x_n|} \quad \text{for } i = 1, \dots, n,$$

ses dette at være ensbetydende med

$$\inf_{|y_1| + \dots + |y_n| = 1} \|y_1 \underline{e}_1 + \dots + y_n \underline{e}_n\| > 0.$$

Nu er $\|y_1 \underline{e}_1 + \dots + y_n \underline{e}_n\| = \|\varphi(y_1, \dots, y_n)\|$ en kontinuert funktion, da såvel φ som normen $\|\cdot\|$ er kontinuert. Da "enhedskuglefladen"

$$\{(y_1, \dots, y_n) \mid |y_1| + \dots + |y_n| = 1\} \subseteq l_1(n, L)$$

er afsluttet og begrænset, altså kompakt, har funktionen

$\|\varphi(y_1, \dots, y_n)\|$ på denne et minimum. Da $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ er lineært uafhængige, er $y_1 \underline{e}_1 + \dots + y_n \underline{e}_n \neq \underline{0}$, altså $\|y_1 \underline{e}_1 + \dots + y_n \underline{e}_n\| > 0$, når $|y_1| + \dots + |y_n| = 1$. Minimet må altså være positivt. Dermed er vist, at også φ^{-1} er kontinuert.

Herefter kan påstanden, at hver lineær afbildning $f: (V_n, +, L, \|\cdot\|) \rightarrow (V', +, L, \|\cdot\|')$ er kontinuert, bevises på følgende måde: I V_n vælges en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$. For hver vektor $x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n$ gælder da

$$\begin{aligned} \|f(x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n)\|' &= \|x_1 f(\underline{e}_1) + \dots + x_n f(\underline{e}_n)\|' \\ &\leq M'(|x_1| + \dots + |x_n|) \leq M' M^* \|x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n\|, \end{aligned}$$

hvor $M' = \max\{\|f(\underline{e}_1)\|', \dots, \|f(\underline{e}_n)\|'\}$ og M^* er den konstant, hvis

eksistens blev vist ovenfor. Afbildningen f er altså begrænset og dermed kontinuert.

Er $(V_n, +, L, \| \cdot \|)$ og $(V'_n, +, L, \| \cdot \|')$ to vektorrum over samme legeme $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ og af samme endelige dimension n , vil hver entydig lineær afbildning f af V_n på V'_n være en homeomorfi, idet den selv og dens inverse ifølge det viste er kontinuerte. Ved at anvende dette på den identiske afbildning ses, at alle normerede vektorrum med samme underliggende endelig-dimensionale vektorrum $(V_n, +, L)$ er indbyrdes topologisk ækvivalente. De forskellige normer i et sådant vektorrum bestemmer altså samme topologi. For uendelig-dimensionale rum gælder ikke noget tilsvarende.

Lad nu $(V, +, L, \| \cdot \|)$ igen være et vilkårligt normeret vektorrum. Linearformerne i V er lineære afbildninger ind i det endimensionale vektorrum $(L, +, L)$. Forsynes dette med den numeriske værdi som norm, kan man specielt betragte de kontinuerte linearformer. Disse udgør, som det let ses, et underrum $V^\dagger$ i det til V (algebraisk) duale rum V^* (se side III, 9,2). Har V endelig dimension, er $V^\dagger = V^*$ ifølge det viste. I uendelig-dimensionale vektorrum kan der findes ikke-kontinuerte linearformer. (Som et simpelt eksempel nævnes rummet $C_1[a, b]$ af de i intervallet $[a, b]$ kontinuerte funktioner φ med normen

$$\|\varphi\|_1 = \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

Lader man til hver funktion φ i dette rum svare den værdi $\varphi(c)$, som den antager for et i forvejen givet tal $c \in [a, b]$, fås en linearform. Denne kan ikke være begrænset, da der til hvert nok så stort positivt tal K findes kontinuerte funktioner φ , for hvilke $|\varphi(c)| > K$, men $\int |\varphi(t)| dt \leq 1$.) Er Λ en begrænset linearform i V , sættes

$$\|\Lambda\|^\dagger = \sup_{\|\underline{x}\| \leq 1} |\Lambda(\underline{x})|.$$

Herved defineres der en norm i $V^\dagger$. Er nemlig Λ_1 og Λ_2 to linearformer i V , gælder

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1 + \Lambda_2\|^\dagger &= \sup_{\|\underline{x}\| \leq 1} |\Lambda_1(\underline{x}) + \Lambda_2(\underline{x})| \\ &\leq \sup_{\|\underline{x}\| \leq 1} (|\Lambda_1(\underline{x})| + |\Lambda_2(\underline{x})|) \\ &\leq \sup_{\|\underline{x}\| \leq 1} |\Lambda_1(\underline{x})| + \sup_{\|\underline{x}\| \leq 1} |\Lambda_2(\underline{x})| \\ &= \|\Lambda_1\|^\dagger + \|\Lambda_2\|^\dagger. \end{aligned}$$

Endvidere gælder for hvert tal $\lambda \in L$

$$\|\lambda\Lambda\|^\dagger = \sup_{\|\underline{x}\| \leq 1} |\lambda\Lambda(\underline{x})| = |\lambda| \sup_{\|\underline{x}\| \leq 1} |\Lambda(\underline{x})| = |\lambda| \|\Lambda\|^\dagger$$

Endelig medfører

$$\|\Lambda\|^\dagger = \sup_{\|\underline{x}\| \leq 1} |\Lambda(\underline{x})| = 0,$$

at $\Lambda(\underline{x}) = 0$ for alle $\underline{x} \in V$, for hvilke $\|\underline{x}\| \leq 1$. For en vilkårlig vektor $\underline{y} \neq \underline{0}$, fås da ligeledes

$$\Lambda(\underline{y}) = \|\underline{y}\| \Lambda\left(\frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|}\right) = 0.$$

Dermed er N1-3 eftervist. Det normerede vektorrum $(V^\dagger, +, L, \|\cdot\|^\dagger)$ af de kontinuerte linearformer i V kaldes det til $(V, +, L, \|\cdot\|)$ norm-duale.

Som et første eksempel betragtes rummet $l_1(n, L)$, hvor $L = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Hver linearform Λ i $l_1(n, L)$ er et homogent førstegrads-polynomium

$$\Lambda(\underline{x}) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

(se side III, 9, 6-7). Ifølge definition er

$$\|\Lambda\|^\dagger = \sup_{|x_1| + \dots + |x_n| \leq 1} |\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n|.$$

For $|x_1| + \dots + |x_n| \leq 1$ har man

$$|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n| \leq \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\},$$

og er $|\lambda_1|$ det største, eller et af de største, blandt tallene

$|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|$, gælder lighedstegnet for $x_1 = \dots = x_{i-1} = 0$, $x_i = 1$, $x_{i+1} = \dots = x_n = 0$. Dette viser, at

$$\|\Lambda\|^\dagger = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}.$$

Lader man altså til hver linearform svare dens koefficientsæt, fås en isomorf afbildning af det til $l_1(n, L)$ norm-duale vektorrum på $l_\infty(n, L)$.

Som andet eksempel betragtes rummet $l_2(n, L)$, hvor $L = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Hver linearform i $l_2(n, L)$ kan skrives

$$\Lambda(\underline{x}) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n,$$

og ifølge definition er

$$\|\Lambda\|^\dagger = \sup_{\|\underline{x}\|_2 \leq 1} |\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n|,$$

hvor $\|\underline{x}\|_2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Nu gælder for $\|\underline{x}\|_2 \leq 1$

$$\begin{aligned} |\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n| &\leq |\lambda_1| |x_1| + \dots + |\lambda_n| |x_n| \\ &\leq (|\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \|\underline{\lambda}\|_2 \end{aligned}$$

ifølge Cauchy-Schwarz's ulighed, og for et givet sæt $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gælder begge lighedstegn, når

$$x_i = \frac{\bar{\lambda}_i}{\|\underline{\lambda}\|_2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

hvor $\bar{\lambda}_i$ betegner det til λ_i konjugeret komplekse tal. Dette viser, at

$$\|\Lambda\|^\dagger = \|\underline{\lambda}\|_2.$$

Lader man altså til linearformen Λ svare koefficientsættet $\underline{\lambda}$, fås en isometrisk afbildning af det til $l_2(n, L)$ norm-duale vektorrum på $l_2(n, L)$. Heraf sluttes, at det normerede vektorrum $l_2(n, L)$ er isomorf med sit norm-duale.

I nogle tilfælde kan uendelig-dimensionale normerede vektorrums norm-duale bestemmes på lignende måde, f.eks. for følge-rummene $l_p(L)$, $1 \leq p < \infty$, derimod ikke for $l_\infty(L)$. For funktionsrum er bestemmelsen i almindelighed vanskeligere.

Et normeret vektorrum $(V, +, L, \| \cdot \|)$ siges at være et Banach-rum, hvis det er fuldstændigt. Dette betyder følgende: Til hver fundamentalfølge, d.v.s. til hver følge $\underline{x}_i \in V$, $i \in \mathbb{N}$, for hvilken

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} [i, j > m \Rightarrow \|\underline{x}_j - \underline{x}_i\| \leq \varepsilon],$$

findes der en vektor $\underline{x} \in V$, således at $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\underline{x}_i - \underline{x}\| = 0$. Alle endelig-dimensionale normerede vektorrum er Banach-rum. (Dette er en følge af Bolzano-Weierstrass' sætning.) Endvidere kan det vises, at f.eks. følgerummene $l_p(\mathbb{R})$ og $l_p(\mathbb{C})$, $1 \leq p \leq \infty$, samt funktionsrummet $C[a, b]$ af alle i det afsluttede interval $[a, b]$ kontinuerte funktioner φ med normen $\|\varphi\| = \max_{t \in [a, b]} |\varphi(t)|$, er Banach-rum.

Der gælder endvidere, at det norm-duale $(V^\dagger, +, L, \| \cdot \|^\dagger)$ til et vilkårligt normeret vektorrum $(V, +, L, \| \cdot \|)$ er et Banach-rum.
Bevis: Lad Λ_i , $i \in \mathbb{N}$, være en fundamentalfølge af linearformer i V . Til hvert $\varepsilon > 0$ findes der altså et $m \in \mathbb{N}$, således at

$$\|\Lambda_j - \Lambda_i\|^\dagger = \sup_{\|\underline{x}\| \leq 1} |\Lambda_j(\underline{x}) - \Lambda_i(\underline{x})| \leq \varepsilon \quad \text{for } i, j > m.$$

For hvert fast $\underline{x}$ haves da

$$|\Lambda_j(\underline{x}) - \Lambda_i(\underline{x})| \leq \varepsilon \|\underline{x}\|$$

for de samme i, j . Talfølgen $\Lambda_i(\underline{x})$ er altså konvergent for hvert $\underline{x}$. Dens grænseværdi betegnes med $\Phi(\underline{x})$. Det drejer sig om at vise, at den således definerede funktion $\Phi : V \rightarrow L$ er en kontinuert linearform, og at $\|\Lambda_i - \Phi\|^\dagger$ konvergerer mod 0 for $i \rightarrow \infty$. For $\lambda \in L$ er $\Lambda_i(\lambda \underline{x}) = \lambda \Lambda_i(\underline{x})$, altså for hvert fast $\underline{x}$

$$\Phi(\lambda \underline{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_i(\lambda \underline{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda \Lambda_i(\underline{x}) = \lambda \Phi(\underline{x}).$$

For hvert par $\underline{x}, \underline{y} \in V$ er $\Lambda_i(\underline{x} + \underline{y}) = \Lambda_i(\underline{x}) + \Lambda_i(\underline{y})$, altså

$$\Phi(\underline{x} + \underline{y}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_i(\underline{x} + \underline{y}) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\Lambda_i(\underline{x}) + \Lambda_i(\underline{y})) = \Phi(\underline{x}) + \Phi(\underline{y}).$$

Dermed er vist, at Φ er en linearform i V . Af

$$|\Lambda_j(\underline{x}) - \Lambda_i(\underline{x})| \leq \varepsilon \quad \text{for } i, j > m$$

og hvert $\underline{x}$, for hvilket $\|\underline{x}\| \leq 1$, fås ved grænseovergangen $i \rightarrow \infty$ at

$$|\Lambda_j(\underline{x}) - \Phi(\underline{x})| \leq \varepsilon \quad \text{for } \|\underline{x}\| \leq 1, j > m.$$

Heraf slutes for det første, at

$$\|\Lambda_j(\underline{x}) - \Phi(\underline{x})\|^\dagger = \sup_{\|\underline{x}\| \leq 1} |\Lambda_j(\underline{x}) - \Phi(\underline{x})| \leq \varepsilon \quad \text{for } j > m,$$

hvilket viser, at

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\Lambda_j(\underline{x}) - \Phi(\underline{x})\| = 0,$$

og for det andet, at der for $\|\underline{x}\| \leq 1$, et fast $\varepsilon > 0$ og et fast $j > m$ gælder

$$|\Phi(\underline{x})| \leq |\Lambda_j(\underline{x})| + |\Lambda_j(\underline{x}) - \Phi(\underline{x})| \leq \|\Lambda_j\|^\dagger + \varepsilon,$$

hvilket viser, at Φ er begrænset og dermed kontinuert.

Med henblik på senere anvendelser tilføjes følgende bemærkninger:

Er V' et underrum i et normeret vektorrum $(V, +, L, \|\cdot\|)$, vil restriktionen af $\|\cdot\|$ til V' være en norm i V' , og når andet ikke fremhæves, betragtes underrummet som normeret ved denne.

Afslutningen $\bar{V}'$ af et underrum V' i et normeret vektorrum $(V, +, L, \|\cdot\|)$ er et underrum. Er nemlig $\underline{u}, \underline{v} \in \bar{V}'$, findes der følger $\underline{u}_i, i \in \mathbb{N}$, og $\underline{v}_i, i \in \mathbb{N}$, af vektorer i V , som konvergerer mod henholdsvis $\underline{u}$ og $\underline{v}$, for hvilke altså

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\underline{u}_i - \underline{u}\| = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|\underline{v}_i - \underline{v}\| = 0.$$

Heraf slutes, at også

$$\|(\underline{u}_i + \underline{v}_i) - (\underline{u} + \underline{v})\| \leq \|\underline{u}_i - \underline{u}\| + \|\underline{v}_i - \underline{v}\|$$

og for hvert $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda \underline{v}_i - \lambda \underline{v}\| = |\lambda| \|\underline{v}_i - \underline{v}\|$$

konvergerer mod 0. Dette viser, at også $\underline{u} + \underline{v} \in \bar{V}'$ og $\lambda \underline{v} \in \bar{V}'$, da $\underline{u}_i + \underline{v}_i \in V'$ og $\lambda \underline{v}_i \in V'$.

Hvert fuldstændigt underrum, altså specielt hvert endelig-dimensionalt underrum, i et normeret vektorrum er afsluttet.

Lad V' være et fuldstændigt underrum i det normerede vektorrum $(V, +, L, \| \cdot \|)$, og lad $\underline{v}$ være en vektor i underrummets afslutning $\bar{V}'$. Der findes altså en følge $\underline{v}_i$, $i \in \mathbb{N}$, af vektorer i V' , for hvilken $\|\underline{v} - \underline{v}_i\| \rightarrow 0$ for $i \rightarrow \infty$. Denne følge er en fundamental-følge. På grund af fuldstændigheden af V' konvergerer den mod en vektor i V' . Da vektoren, mod hvilken den konvergerer, er $\underline{v}$, må $\underline{v}$ tilhøre V' . Dette viser, at V' er afsluttet.

Hvert afsluttet underrum i et Banach-rum er et Banach-rum. Er nemlig V' et afsluttet underrum i det fuldstændige normerede vektorrum $(V, +, L, \| \cdot \|)$, vil hver fundamental-følge af vektorer i V' konvergere mod en vektor i V , og denne vektor må tilhøre V' , da V' er afsluttet.

En delmængde T af et normeret vektorrum $(V, +, \mathbb{R}, \| \cdot \|)$ siges at være total, hvis det af T frembragte underrum $V(T)$ er overalt tæt i V . Dette betyder, at der til hver vektor $\underline{x} \in V$ og hvert tal $\varepsilon > 0$ findes en linearkombination $\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_s \underline{v}_s$ af endelig mange vektorer tilhørende T , således at

$$\|\underline{x} - (\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_s \underline{v}_s)\| \leq \varepsilon.$$

Er vilkesomhelst endelig mange vektorer i en total mængde T lineært uafhængige, vil T være en basis for underrummet $V(T)$ og kaldes da en tilnærmelsesbasis for hele rummet V . En basis for V er naturligvis også tilnærmelsesbasis. I endelig-dimensionale rum gælder også det omvendte; thi det af en tilnærmelsesbasis T frembragte underrum er da afsluttet og, idet det er overalt tæt i hele rummet, identisk med dette.

Som et vigtigt eksempel nævnes: I rummet $C_\infty[a, b]$ af alle

i det endelige interval $[a,b]$ kontinuerte reelle funktioner φ med normen

$$\|\varphi\|_{\infty} = \sup_{t \in [a,b]} |\varphi(t)|$$

er mængden $\{1, t, t^2, \dots\}$ af restriktionerne til $[a,b]$ af den variables potenser med ikke-negative eksponenter en tilnærmelsesbasis. Dette er ensbetydende med Weierstrass' approksimations-sætning, som udsiger, at der til hver i $[a,b]$ kontinuert funktion φ og hvert tal $\varepsilon > 0$ findes et polynomium

$\lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_s t^s$, således at

$$|\varphi(t) - (\lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_s t^s)| \leq \varepsilon \quad \text{for } t \in [a,b].$$

Sætningen skal ikke bevises her.

Øvelser til kap. III, § 14.

- Bestem samtlige normer i de endimensionale talrum $(\mathbb{R}, +, \mathbb{R})$ og $(\mathbb{C}, +, \mathbb{C})$.
- Vis, at der for hver vektor $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i de n-dimensionale talrum $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$ og $(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C})$ gælder

$$\|\underline{x}\|_p \geq \|\underline{x}\|_q,$$

når $1 \leq p < q \leq \infty$, og angiv de vektorer, for hvilke de to normer stemmer overens. (Betragt først vektorer, for hvilke $\|\underline{x}\|_p = 1$.)

Skitser "enhedscirklerne" $\|\underline{x}\|_p = 1$ for $p = 1, 2, 3, \infty$ i $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$.

- Med $(C^1[a, b], +, \mathbb{R})$ betegnes vektorrummet bestående af de i intervallet $[a, b]$ differentiable reelle funktioner med kontinuerle afledede. Vis, at der ved

$$\|\varphi\|_\infty^{(1)} = \sup_{t \in [a, b]} |\varphi(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |\varphi'(t)|$$

for $\varphi \in C^1[a, b]$ defineres en norm i dette vektorrum.

For givne, i $[a, b]$ kontinuerte og i $]a, b[$ positive funktioner p og q er også

$$\|\varphi\| = \left(\int_a^b [p(t)\varphi'(t)^2 + q(t)\varphi(t)^2] dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

en norm i det betragtede vektorrum. Bevis dette.

- Lad K være en konveks delmængde i et vektorrum $(V, +, \mathbb{R})$ over de reelle tals legeme. Det forudsættes, at der til hver vektor $\underline{x} \in V$ findes mindst eet tal $t > 0$, således at $t\underline{x} \in K$ (d.v.s. på hver halvlinie ud fra $\underline{0}$ ligger mindst eet fra $\underline{0}$ forskelligt punkt tilhørende K). Vis, at funktionen

$$F(\underline{x}) = \inf_{t\underline{x} \in K, t > 0} \frac{1}{t}, \quad \underline{x} \in V,$$

opfylder N_1 og N_2 for $\lambda \geq 0$.

Vis, at F er en norm, hvis K er symmetrisk med hensyn til $\underline{0}$ (d.v.s. hvis $\underline{x} \in K$ medfører, at $-\underline{x} \in K$) og der til hver vektor $\underline{x} \neq \underline{0}$ findes et tal $t > 0$, således at $t\underline{x} \notin K$ (altså K ikke indeholder nogen halvlinje ud fra $\underline{0}$).

5. De i et interval $[a, b]$ definerede reelle funktioner af begrænset variation danner et vektorrum $BV[a, b]$ over de reelle tals legeme. Vis, at man ved til hver funktion $\alpha \in BV[a, b]$ at lade svare dens totale variation $V_\alpha(a, b)$ får en norm i dette vektorrum.

6. Vektorrummet $(C^1[a, b], +, \mathbb{R})$ af alle i intervallet $[a, b]$ differentiable reelle funktioner med kontinuerede afledede er et underrum i vektorrummet $(C[a, b], +, \mathbb{R})$ af alle i $[a, b]$ kontinuerede reelle funktioner. Ved til hver funktion $\varphi \in C^1[a, b]$ at lade svare dens afledede φ' fås en lineær afbildning $D: C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$. Forsynes $C[a, b]$ med normen

$$\|\psi\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |\psi(t)|, \quad \psi \in C[a, b],$$

og underrummet $C^1[a, b]$ med denne norms restriktion, er D ikke kontinuert. Forsynes derimod $C^1[a, b]$ med normen $\|\cdot\|_\infty^{(1)}$ (se opg. 3) vil D være en kontinuert afbildning af dette normerede vektorrum på $C[a, b]$ med normen $\|\cdot\|_\infty$. Bevis disse påstande.

7. Vis, at mængden U af reelle talfølger $(x_1, x_2, \dots)$, for hvilke

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 x_i^2 < \infty,$$

er et underrum i talfølgerummet $l_2(\mathbb{R})$.

Vis, at der ved

$$(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \rightarrow (x_1, 2x_2, \dots, ix_i, \dots)$$

defineres en lineær afbildning af $(U, +, \mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ på $l_2(\mathbb{R})$, som ikke er begrænset.

8. Bestem de norm-duale til de endelig-dimensionale normerede vektorrum $l_\infty(n, \mathbb{R})$ og $l_\infty(n, \mathbb{C})$.

9. Bestem de norm-duale til rummene $l_p(n, \mathbb{R})$ og $l_p(n, \mathbb{C})$ for $1 < p < \infty$ ved hjælp af Hölder's ulighed

$$|\sum x_i y_i| \leq (\sum |x_i|^p)^{1/p} (\sum |y_i|^q)^{1/q},$$

som er gyldig for $1 < p < \infty$, $1/q = 1 - 1/p$ og alle par af komplekse talsæt $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$. Lighedstegnet gælder, når og kun når talsættene opfylder følgende betingelser: Tallene $x_i y_i$, $i = 1, \dots, n$, er reelle og enten alle ikke-negative eller alle ikke-positive, og talsættene $|x_i|^p$ og $|y_i|^q$, $i = 1, \dots, n$, er proportionale.

For at bevise Hölder's ulighed slut af, at funktionen $-\log t$, $t > 0$, er konveks, at

$$s^{1/p} t^{1/q} \leq s/p + t/q \quad \text{for } s, t \geq 0,$$

og indsæt $s = |x_i|^p / \sum |x_j|^p$ og $t = |y_i|^q / \sum |y_j|^q$.

10. Vis, at hver kontinuert linearform Λ i talfølgerummet $l_p(\mathbb{R})$, hvor $1 \leq p < \infty$, har en fremstilling af formen

$$\Lambda(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i,$$

hvor $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ er en reel talfølge, således at den uendelige række på højre side konvergerer absolut for hver talfølge $(x_1, x_2, \dots) \in l_p(\mathbb{R})$.

Bestem det norm-duale til rummet $l_p(\mathbb{R})$.

11. De reelle talfølger, som hver for sig kun har endelig mange fra 0 forskellige elementer, udgør et underrum $(U, +, \mathbb{R}, \| \cdot \|_\infty)$ i talfølgerummet $l_\infty(\mathbb{R})$. For hver reel talfølge $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ defineres ved

$$\Lambda(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$$

en linearform Λ i U . Vis, at hver linearform i U har en sådan fremstilling.

Vis, at det til $(U, +, \dot{R}, \| \cdot \|_{\infty})$ norm-duale rum er isomorft med $l_1(\dot{R})$.

De reelle talfølger, som konvergerer mod 0, udgør et U omfattende underrum $(V, +, \dot{R}, \| \cdot \|_{\infty})$ i $l_{\infty}(\dot{R})$. Vis, at dette har samme norm-duale rum som $(U, +, \dot{R}, \| \cdot \|_{\infty})$.

12. Med $C_{\infty}[a, b]$ betegnes vektorrummet af alle i intervallet $[a, b]$ kontinuerte reelle funktioner med den numeriske værdis supremum som norm. For hver i $[a, b]$ defineret reel funktion α af begrænset variation bestemmes ved

$$\Lambda(\varphi) = \int_a^b \varphi d\alpha, \quad \varphi \in C[a, b]$$

en linearform Λ i dette rum. Vis, at den er begrænset, og find dens norm. (At hver kontinuert linearform i det betragtede rum har en sådan integralfremstilling, er indholdet i en sætning af F. Riesz, hvis bevis er ret vanskeligt.)

13. Lad $(V, +, \dot{R}, \| \cdot \|)$ være et normeret vektorrum over de reelle tals legeme. Med Λ betegnes en fra nulformen forskellig linearform i dette rum. Vis, at hyperplanen $\Lambda(\underline{x}) = 0$ er en afsluttet delmængde af V , hvis og kun hvis Λ er kontinuert. Vis, at en hyperplan, som ikke er afsluttet, er overalt tæt i V .

14. Er M en delmængde og $\underline{y}$ en vektor i et normeret vektorrum $(V, +, L, \| \cdot \|)$, defineres afstanden mellem M og $\underline{y}$ ved

$$\text{dist}(M, \underline{y}) = \inf_{\underline{x} \in M} \| \underline{y} - \underline{x} \|.$$

Vis, at hvis M er en hyperplan H med ligningen $\Lambda(\underline{x}) = 0$, hvor Λ er en fra nulformen forskellig, begrænset linearform, gælder

$$\text{dist}(H, \underline{y}) = \frac{|\Lambda(\underline{y})|}{\|\Lambda\|^\dagger},$$

(Benyt, at hvis $\underline{y} \notin H$, kan hver vektor i V skrives som linearkombination af $\underline{y}$ og en vektor i H ; se side III, 9, 3.)

Er M en afsluttet delmængde og $\underline{y}$ en vektor i et endelig-dimensionalt vektorrum, findes der mindst een vektor $\underline{x}_0 \in M$, for hvilken $\|\underline{y} - \underline{x}_0\| = \text{dist}(M, \underline{y})$. I uendelig-dimensionale rum er dette ikke altid tilfældet. I det i opg. 11 indførte normerede vektorrum $(U, +, \dot{R}, \|\cdot\|_\infty)$ er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = 0$$

ligningen for en afsluttet hyperplan H . Når $\underline{y} \in U$ ikke tilhører H , findes der ikke nogen vektor $\underline{x}_0 \in H$, for hvilken $\|\underline{y} - \underline{x}_0\| = \text{dist}(H, \underline{y})$. Bevis dette.

15. Vis, at alle talfølgerum $l_p(\dot{R})$ og $l_p(\dot{C})$, $1 \leq p \leq \infty$, er Banach-rum.

16. Lad T være et topologisk rum og $C_\infty(T)$ vektorrummet af alle i T definerede, begrænsede og kontinuerte reelle funktioner med ∞ -normen. Vis, at $C_\infty(T)$ er et Banach-rum.

Rummene $C_p[a, b]$, hvor $[a, b]$ er et interval og $1 \leq p < \infty$, er derimod ikke fuldstændige. Bevis dette for $p = 1$.

17. Lad $(V, +, L, \|\cdot\|)$, hvor L står for $\dot{R}$ eller $\dot{C}$, være et vilkårligt normeret vektorrum og $(V^\dagger, +, L, \|\cdot\|^\dagger)$ dets norm-duale. For en fast vektor $\underline{y} \in V$ defineres en funktion i $V^\dagger$ ved til hver begrænset linearform Λ på V at lade svare den værdi $\Lambda(\underline{y})$, som

den antager for $\underline{v}$. Vis, at denne funktion $\varphi_{\underline{v}}: V^{\dagger} \rightarrow \mathbb{R}$ er en begrænset linearform, altså et element af det til $V^{\dagger}$ normduale rum $V^{\dagger\dagger}$, hvis norm

$$\|\varphi_{\underline{v}}\|^{\dagger\dagger} = \sup_{\|\Lambda\|^{\dagger} \leq 1} |\Lambda(\underline{v})|$$

tilfredsstiller uligheden $\|\varphi_{\underline{v}}\|^{\dagger\dagger} \leq \|\underline{v}\|$.

Ved til hver vektor at lade svare linearformen $\varphi_{\underline{v}}$ fås en naturlig afbildning $f: V \rightarrow V^{\dagger\dagger}$. Vis, at f er lineær.

Det er en konsekvens af en fundamental sætning, Hahn-Banach's sætning (som her benyttes uden bevis), at der for hver vektor $\underline{v} \in V$ findes en begrænset linearform $\Lambda \in V^{\dagger}$, for hvilken $\|\Lambda\|^{\dagger} = 1$ og $|\Lambda(\underline{v})| = \|\underline{v}\|$. Slut heraf, at $\|\varphi_{\underline{v}}\|^{\dagger\dagger} = \|\underline{v}\|$, og dermed at f er en isomorf afbildning af $(V, +, L, \|\cdot\|)$ på et underrum i $(V^{\dagger\dagger}, +, L, \|\cdot\|)$.

Hvis dette underrum er hele rummet $V^{\dagger\dagger}$, altså f en isomorf afbildning af V på $V^{\dagger\dagger}$, siges det normerede vektorrum $(V, +, L, \|\cdot\|)$ at være (norm-)refleksivt. Et sådant er nødvendigvis et Banach-rum. Alle endelig-dimensionale normerede vektorrum samt følgerummene $l_p(L)$, $1 < p < \infty$, er refleksive. Underrummet i $l_{\infty}(\mathbb{R})$ bestående af alle reelle talfølger, som konvergerer mod 0, er et eksempel på et Banach-rum, som ikke er refleksivt. Bevis disse påstande. (Benyt bl.a. opg. 10 og 11.)

§ 15. Vektorrum med indre produkt.

I det følgende betragtes normerede vektorrum $(V, +, \mathbb{R}, \| \cdot \|)$ over de reelle tals legeme med normen $\|x\| = B(x, x)^{\frac{1}{2}}$, hvor $B(x, x)$ er en positiv definit kvadratisk form i V . Til denne kvadratiske form hører en symmetrisk bilinearform $B(x, y)$. Den værdi, som denne bilinearform antager for et par af vektorer x og y , kaldes de to vektorers indre produkt og betegnes $x \cdot y$. I stedet for $x \cdot x$ skrives også x^2 . Idet det indre produkt er en symmetrisk bilinearform, hvis tilhørende kvadratiske form er positiv definit, har det følgende egenskaber:

$$\text{IP1: } \forall_V x, y \ [x \cdot y = y \cdot x].$$

$$\text{IP2: } \forall_V x', x'', y \ [(x' + x'') \cdot y = x' \cdot y + x'' \cdot y].$$

$$\text{IP3: } \forall_{\mathbb{R}} \lambda \ \forall_V x, y \ [(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y)].$$

$$\text{IP4: } \forall_V x \ [x \neq 0 \Rightarrow x \cdot x > 0].$$

Omvendt vil et indre produkt, d.v.s. en funktion $x \cdot y$ fra $V \times V$ til $\mathbb{R}$ med disse egenskaber være en symmetrisk bilinearform, hvis tilhørende kvadratiske form $x \cdot x$ er positiv definit. De betragtede normerede vektorrum kaldes derfor for reelle vektorrum med indre produkt, de endelig-dimensionale også for euklidiske vektorrum og de uendelig-dimensionale Banach-rum iblandt dem for reelle Hilbert-rum. Et vigtigt eksempel på et Hilbert-rum er følgerummet $l_2(\mathbb{R})$.

I det ved $\text{dist}((x, y), (x', y')) = \|x' - x\| + \|y' - y\|$ for $x, y, x', y' \in V$ metriserede rum $V \times V$ er det indre produkt en kontinuert funktion; thi ved hjælp af Cauchy-Schwarz's ulighed fås for $a, b, x, y \in V$

$$\begin{aligned} |x \cdot y - a \cdot b| &= |(x-a) \cdot (y-b) + a \cdot (y-b) + b \cdot (x-a)| \\ &\leq |(x-a) \cdot (y-b)| + |a \cdot (y-b)| + |b \cdot (x-a)| \\ &\leq \|x-a\| \|y-b\| + \|a\| \|y-b\| + \|b\| \|x-a\|, \end{aligned}$$

og dette er mindre end eller lig med et vilkårligt tal $\varepsilon \in]0,1[$, når

$$\|\underline{x} - \underline{a}\| + \|\underline{y} - \underline{b}\| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \|\underline{a}\| + \|\underline{b}\|}.$$

Specielt fremhæves, at for hver fast vektor $\underline{a} \in V$ er linearformen $\underline{a} \cdot \underline{x}$, $\underline{x} \in V$, kontinuert. Heraf følger videre, at en hyperplan med en ligning af formen $\underline{a} \cdot \underline{x} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, som originalmængde af α ved den kontinuerte afbildning $x \rightarrow \underline{a} \cdot \underline{x}$ af V ind i $\mathbb{R}$ er en afsluttet delmængde af V .

To med hensyn til bilinearformen $\underline{x} \cdot \underline{y}$ konjugerede vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$, for hvilke altså

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = 0,$$

siges at være ortogonale. Den eneste vektor, som er ortogonal til sig selv, er $\underline{0}$. Bilinearformens nulrum består altså kun af nulvektoren. (Jfr. side III, 12, 10.) Er M og N delmængder af V , således at

$$\forall \underline{x} \in M \quad \forall \underline{y} \in N \quad [\underline{x} \cdot \underline{y} = 0],$$

siges M og N at være ortogonale, og man skriver

$$M \perp N.$$

Det fuldstændige til M konjugerede underrum (side III, 12, 10), som altså består af alle vektorer, som hver for sig er ortogonal til alle vektorer i M , kaldes det fuldstændige til M ortogonale underrum og betegnes med $M^\perp$. (Det understreges, at brugen af orden "fuldstændig" i denne forbindelse naturligvis ikke har noget at gøre med dets brug i "fuldstændigt metrisk rum".) For hver mængde $M \subseteq V$ er underrummet $M^\perp$ en afsluttet delmængde af V . For hver vektor $\underline{y} \in M$ er nemlig hyperplanen $\{\underline{x} \mid \underline{y} \cdot \underline{x} = 0\}$ afsluttet, og $M^\perp$ er fællesmængden for disse hyperplaner. Det er klart, at det fuldstændige til $M^\perp$ ortogonale

underrum $M^{\perp\perp}$ indeholder M , altså det af M frembragte underrum $V(M)$ og dermed dets afslutning $\overline{V(M)}$. For hver mængde $M \subseteq V$ gælder altså

$$\overline{V(M)} \subseteq M^{\perp\perp}.$$

Lad U være et afsluttet underrum i et Hilbert-rum V , og lad y være en vilkårlig vektor i V . Da findes der en og kun een vektor $u \in U$, således at

$$y - u \perp U,$$

og $\|y - u\|$ er afstanden mellem y og U i den forstand, at

$$\|y - u\| = \min_{x \in U} \|y - x\|.$$

Bevis: Opfylder både u og u' kravet, er

$$(y - u) - (y - u') = u' - u \perp U,$$

altså specielt $u' - u$ ortogonal til sig selv, hvorefter $u' - u = 0$.

Der findes altså højst een vektor u af den forlangte art. Idet der indføres betegnelsen

$$d = \inf_{x \in U} \|y - x\|,$$

bevises først eksistensen af en vektor u i U , for hvilken

$$\|y - u\| = d.$$

Der findes en følge x_i , $i \in \mathbb{N}$, af vektorer i U , således at

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|y - x_i\| = d.$$

Det skal vises, at denne følge er en fundamentalfølge. Der gælder

$$\|x_j - x_i\|^2 = 2\|y - x_i\|^2 + 2\|y - x_j\|^2 - 4\|y - \frac{1}{2}(x_i + x_j)\|^2$$

(jfr. (*), side III, 14, 7). Idet $\|y - x_k\|^2$ konvergerer mod d^2 for $k \rightarrow \infty$, findes der til hvert tal $\varepsilon > 0$ et tal $m \in \mathbb{N}$, således at

$$\|y - x_k\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \quad \text{for } k > m.$$

Da endvidere $\frac{1}{2}(\underline{x}_i + \underline{x}_j)$ tilhører U , er ifølge definitionen af d

$$\|\underline{v} - \frac{1}{2}(\underline{x}_i + \underline{x}_j)\|^2 \geq d^2.$$

For $i, j > m$ fås altså

$$\|\underline{x}_j - \underline{x}_i\|^2 \leq 2(d^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^2) + 2(d^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^2) - 4d^2 = \varepsilon^2,$$

hvoraf sluttes, at $\underline{x}_i$, $i \in \mathbb{N}$, er en fundamentalfølge. Da rummet er fuldstændigt, findes der en vektor $\underline{u}$, mod hvilken den konvergerer. Idet $\underline{x}_i \in U$, og U er afsluttet, må $\underline{u}$ tilhøre U . Endvidere må gælde

$$\|\underline{v} - \underline{u}\| = d,$$

da normen er en kontinuert funktion i V . At $\underline{v} - \underline{u}$ er ortogonal til hver vektor $\underline{x}$ i U , følger således: Idet d er den mindste afstand mellem $\underline{v}$ og en vektor i U , gælder

$$(\underline{v} - \underline{u})^2 \leq (\underline{v} - \underline{u} - \lambda \underline{x})^2,$$

altså

$$2\lambda(\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{x} \leq \lambda^2 \underline{x}^2$$

for hver vektor $\underline{x} \in U$ og hvert tal $\lambda \in \mathbb{R}$. Heraf fås

$$2(\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{x} \leq \lambda \underline{x}^2 \quad \text{for } \lambda > 0,$$

$$2(\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{x} \geq \lambda \underline{x}^2 \quad \text{for } \lambda < 0,$$

og grænseovergangen $\lambda \rightarrow 0$ giver

$$(\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{x} = 0.$$

Vektoren $\underline{v} - \underline{u}$ er altså ortogonal til alle vektorer i U . Dermed er sætningen bevist.

Den vektor $\underline{u}$, hvis eksistens og entydighed er blevet bevist, kaldes ortogonalprojektion af vektoren $\underline{v}$ på det afsluttede underrum U . Den til U ortogonale vektor $\underline{v} - \underline{u}$ kaldes også en normalvektor til U . Da hver vektor $\underline{v}$ ifølge sætningen på en og kun een måde kan fremstilles som en sum af en vektor $\underline{u} \in U$ og en vektor $\underline{v} - \underline{u} \in U^\perp$, er V den direkte sum af disse to under- rum (jfr. side III, 4, 20): For hvert afsluttet underrum U i et Hilbert-rum V gælder

$$U \oplus U^\perp = V,$$

og $U^\perp$ siges da at være det ortogonale komplement til U . Under disse forudsætninger gælder endvidere

$$U^{\perp\perp} = U.$$

Er nemlig $\underline{v}$ en vektor ortogonal til $U^\perp$, har den ifølge sætningen en fremstilling $\underline{v} = \underline{v} - \underline{u} + \underline{u}$, hvor $\underline{u} \in U$ og $\underline{v} - \underline{u} \in U^\perp$. Man har da $\underline{v} \cdot (\underline{v} - \underline{u}) = 0$ og $\underline{u} \cdot (\underline{v} - \underline{u}) = 0$, hvorefter $(\underline{v} - \underline{u})^2 = 0$, altså $\underline{v} = \underline{u} \in U$. Dette viser, at det ortogonale komplement til $U^\perp$ er U .

Afbildningen $p_U : V \rightarrow U$, ved hvilken der til hver vektor $\underline{v} \in V$ svarer dens ortogonalprojektion $\underline{u}$ på U , er parallelprojektion af V på U parallel med $U^\perp$ (jfr. side III, 4, 21). Den kaldes ortogonalprojektion af V på U . Den er idempotent, d.v.s.

$$p_U \circ p_U = p_U,$$

og for de to projektioner p_U og $p_{U^\perp}$ gælder

$$p_U \circ p_{U^\perp} = 0,$$

hvor 0 står for den afbildning, der til hver vektor lader svare nulvektoren, samt

$$p_U + p_{U^\perp} = e.$$

Det sidste udsiger, at hver vektor $\underline{v}$ er summen af sin projektion $\underline{u}$ på U og sin projektion på $U^\perp$, med andre ord, at projektionen af $\underline{v}$ på $U^\perp$ er $\underline{v} - \underline{u}$. Dette slutes af, at $\underline{u} \in U$ ifølge $U = U^{\perp\perp}$ er ortogonal til hver vektor i $U^\perp$.

Ortogonalprojektionen p_U er en kontinuert (og som parallel-projektion) lineær afbildning af V ind i sig selv. Idet der for $\underline{u} = p_U(\underline{v})$ gælder $\underline{u} \cdot (\underline{v} - \underline{u}) = 0$, har man nemlig

$$p_U(\underline{v})^2 = \underline{u}^2 \leq \underline{u}^2 + (\underline{v} - \underline{u})^2 = \underline{v}^2.$$

Det betragtede afsluttede underrum antages nu specielt at være en hyperplan H , altså nulrummet for en fra nulformen forskellig linearform Λ . Er $\underline{v}$ en vektor, for hvilken $\Lambda(\underline{v}) \neq 0$, som altså ikke tilhører H , og $\underline{u}$ dens ortogonalprojektion på H , vil $\underline{v} - \underline{u}$ være forskellig fra $\underline{0}$ og ortogonal til H . For hver vektor $\underline{x} \in H$ gælder altså $(\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{x} = 0$. Omvendt vil hver vektor $\underline{y}$, som opfylder denne ligning, tilhøre H . Som vist tidligere (side III, 9, 3) kan $\underline{y}$ nemlig skrives på formen

$$\underline{y} = \underline{x} + \alpha(\underline{v} - \underline{u}),$$

hvor $\underline{x} \in H$ og $\alpha \in \mathbb{R}$, og da

$$(\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{y} = (\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{x} = 0,$$

slutes heraf, at $\alpha(\underline{v} - \underline{u})^2 = 0$, altså $\alpha = 0$, altså $\underline{y} = \underline{x} \in H$, som påstået. De to linearformer $\Lambda(\underline{x})$ og $(\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{x}$ har følgelig samme nulrum H . Dette medfører, at de er proportionale (se side III, 9, 4), d.v.s., at der findes et reelt tal λ , således at

$$\Lambda(\underline{x}) = \lambda(\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{x} \quad \text{for } \underline{x} \in V.$$

Sættes $\lambda(\underline{v} - \underline{u}) = \underline{a}$, har man altså

$$\Lambda(\underline{x}) = \underline{a} \cdot \underline{x} \quad \text{for } \underline{x} \in V.$$

Denne fremstilling af Λ viser specielt, at Λ er kontinuert. Da omvendt en kontinuert linearforms nulrum er en afsluttet, kan man slutte af det viste, at hver fra nulformen forskellig kon-

tinuert linearform har en sådan fremstilling som indre produkt. Da $0 \cdot \underline{x} = 0$ for alle $\underline{x} \in V$, gælder dette også for nulformen. Endvidere bemærkes, at denne fremstilling er entydig bestemt, altså at der til en given kontinuert linearform Λ kun kan findes een vektor $\underline{a}$, således at $\Lambda(\underline{x}) = \underline{a} \cdot \underline{x}$ for $\underline{x} \in V$. Af $\underline{a} \cdot \underline{x} = \underline{a}' \cdot \underline{x}$ for alle $\underline{x} \in V$, altså specielt for $\underline{x} = \underline{a}' - \underline{a}$, følger nemlig $(\underline{a}' - \underline{a})^2 = 0$, altså $\underline{a}' = \underline{a}$. For normen $\|\Lambda\|^\dagger$ af linearformen $\Lambda(\underline{x}) = \underline{a} \cdot \underline{x}$ findes

$$\|\Lambda\|^\dagger = \sup_{\|\underline{x}\| \leq 1} |\underline{a} \cdot \underline{x}| = \|\underline{a}\|,$$

idet der i Cauchy-Schwarz's ulighed $|\underline{a} \cdot \underline{x}| \leq \|\underline{a}\| \|\underline{x}\|$ gælder lighedstegnet for $\underline{x} = \underline{a}/\|\underline{a}\|$. Dermed er vist:

For hver kontinuert linearform Λ i et Hilbert-rum $(V, +, \dot{R}, \| \cdot \|)$ findes der en og kun een vektor $\underline{a} \in V$, således at $\Lambda(\underline{x}) = \underline{a} \cdot \underline{x}$ for $\underline{x} \in V$. Ved til Λ at lade svare $\underline{a}$ defineres en isomorf afbildning π af det norm-duale rum $(V^\dagger, +, \dot{R}, \| \cdot \|^\dagger)$ på $(V, +, \dot{R}, \| \cdot \|)$.

Afbildningen π kan beskrives geometrisk på følgende måde: Som omtalt tidligere (side III,9,5) bestemmes en fra nulformen forskellig linearform Λ ved de to parallelle hyperplaner $\Lambda^{-1}(0)$ og $\Lambda^{-1}(1)$. Er Λ kontinuert og fremstillet som indre produkt $\underline{a} \cdot \underline{x}$, drejer det sig om hyperplanerne med ligningerne $\underline{a} \cdot \underline{x} = 0$ og $\underline{a} \cdot \underline{x} = 1$. Vektoren $\underline{a}/\|\underline{a}\|^2$ er normal til hyperplanerne, og idet $\underline{a} \cdot \underline{a}/\|\underline{a}\|^2 = 1$, vil den, "afsat fra begyndelsespunktet, ende i hyperplanen $\underline{a} \cdot \underline{x} = 1$ ". Dens længde $1/\|\underline{a}\|$ er lig med "hyperplanernes afstand". Den til Λ svarende vektor $\underline{a}$ er altså den fra $\Lambda^{-1}(0)$ mod $\Lambda^{-1}(1)$ rettede normalvektor til $\Lambda^{-1}(0)$, hvis længde er lig med den reciproke værdi af afstanden mellem de to hyperplaner. At hyperplanen $\Lambda^{-1}(1)$ har ligningen $\underline{a} \cdot \underline{x} = 1$, viser, at $\underline{a}$ er denne hyperplans pol med hensyn til enhedskuglen $\underline{x}^2 = 1$, som jo i vektorrum med indre produkt er en kvadrik. Afbildningen π^{-1} kan altså fortolkes som po-

lariteten med hensyn til enhedskuglen.

Da de endelig-dimensionale euklidiske rum er fuldstændige og alle deres underrum afsluttede, gælder de omtalte sætninger for alle underrum i sådanne rum.

Lad $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ være et vilkårligt vektorrum med indre produkt. Fra 0 forskellige, parvis ortogonale vektorer $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_s$ i V , for hvilke altså

$$\underline{u}_\rho \cdot \underline{u}_\sigma = \begin{cases} \neq 0 & \text{for } \rho = \sigma \\ = 0 & \text{for } \rho \neq \sigma \end{cases} \quad \rho, \sigma = 1, \dots, s,$$

er lineært uafhængige. Af $\lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_s \underline{u}_s = \underline{0}$, hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ er reelle tal, fås nemlig ved indre multiplikation med $\underline{u}_\sigma$, at $\lambda_\sigma \underline{u}_\sigma^2 = 0$, altså $\lambda_\sigma = 0$ for $\sigma = 1, \dots, s$.

En indiceret mængde $\underline{u}_\iota$, $\iota \in J$, af vektorer fra V , hvor J er en endelig eller uendelig indexmængde, kaldes et ortonormalt system, hvis

$$\underline{u}_\iota \cdot \underline{u}_\kappa = \begin{cases} 1 & \text{for } \iota = \kappa \\ 0 & \text{for } \iota \neq \kappa \end{cases} \quad \iota, \kappa \in J.$$

Et ortonormalt system i et endelig-dimensionalt vektorrum med indre produkt kan kun bestå af endelig mange, nemlig højst n vektorer, når n er rummets dimension. I talfølgerummet $l_2(\mathbb{R})$ danner vektorerne $(1, 0, 0, \dots)$, $(0, 1, 0, \dots)$, $(0, 0, 1, \dots)$, ... et numerabelt ortonormalt system. Der findes vektorrum med indre produkt, som har ikke-numerale ortonormale systemer.

Et ortonormalt system i et vektorrum V , som tillige er en basis for V , kaldes en ortonormal basis. I det af et ortonormalt system frembragte underrum er det en ortonormal basis, idet hvilkensomhelst endelig mange vektorer i systemet er lineært uafhængige.

Lad $\underline{u}_i$, $i = 1, \dots, r$, være et endeligt ortonormalt system i et vektorrum V med indre produkt og $\underline{v}$ en vilkårlig vektor i V . Ortogonalprojektionen $\underline{v}'$ af $\underline{v}$ på det af $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r$ udspændte underrum U er den linearkombination $\lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_r \underline{u}_r$, for hvilken

$$\underline{v} - (\lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_r \underline{u}_r) \perp \underline{u}_i \quad \text{for } i = 1, \dots, r.$$

Ifølge de tidligere resultater findes der et og kun eet sæt $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, for hvilket kravet er opfyldt. Dette bekræftes også let direkte: Indre multiplikation af differensen på venstre side med $\underline{u}_i$ viser, at kravet er opfyldt, hvis og kun hvis

$$\lambda_i = \underline{v} \cdot \underline{u}_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Ortogonalprojektion af $\underline{v}$ på det af ortonormalsystemet $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r)$ udspændte underrum U er altså

$$\underline{v}' = (\underline{v} \cdot \underline{u}_1) \underline{u}_1 + \dots + (\underline{v} \cdot \underline{u}_r) \underline{u}_r.$$

Tallene $\underline{v} \cdot \underline{u}_1, \dots, \underline{v} \cdot \underline{u}_r$ er koordinaterne for vektoren $\underline{v}'$ i den ortonormale basis $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r)$ for U . Hvis $\underline{v} \in U$, altså $\underline{v}' = \underline{v}$, er disse tal koordinaterne for vektoren $\underline{v}$ selv.

Da $(\underline{v} - \underline{v}') \cdot \underline{v}' = 0$ og $(\underline{v} - \underline{v}')^2 \geq 0$, fås

$$\begin{aligned} (\underline{v} - \underline{v}')^2 &= (\underline{v} - \underline{v}') \cdot (\underline{v} - \underline{v}') = \underline{v}^2 - \underline{v}' \cdot \underline{v} \\ &= \underline{v}^2 - \sum_{i=1}^r (\underline{v} \cdot \underline{u}_i)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Denne ulighed er et specielt tilfælde af Bessel's ulighed, som omtales nedenfor. Lighedstegnet gælder, når og kun når $\underline{v} = \underline{v}'$, altså når og kun når $\underline{v} \in U$. Kvadratet på normen (længden) af en vektor i rummet U med den ortonormale basis $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r)$ er altså lig med kvadratsummen af vektorens koordinater med hensyn til denne basis.

At $\|\underline{v} - \underline{v}'\|$ er den mindste afstand mellem $\underline{v}$ og en vektor $\underline{x}$ i U (se side III,15,3), altså at

$$\|\underline{v} - \underline{x}\| \geq \|\underline{v} - \underline{v}'\| \quad \text{for } \underline{x} \in U,$$

bekræftes også let direkte i det foreliggende tilfælde. Idet $\underline{x} - \underline{v}' \in U$, har man nemlig $(\underline{v} - \underline{v}') \cdot (\underline{x} - \underline{v}') = 0$ og følgelig

$$\begin{aligned}(\underline{v} - \underline{x})^2 &= ((\underline{v} - \underline{v}') - (\underline{x} - \underline{v}'))^2 \\&= (\underline{v} - \underline{v}')^2 + (\underline{x} - \underline{v}')^2 \geq (\underline{v} - \underline{v}')^2,\end{aligned}$$

hvor lighedstegnet kun gælder for $\underline{x} = \underline{v}'$. Dette resultat kan også formuleres således: Blandt alle linearkombinationer

$$\underline{x} = x_1 \underline{u}_1 + \dots + x_r \underline{u}_r$$

af ortonormalsystemets vektorer tilnærmes $\underline{v}$ bedst af den med koefficienterne $x_i = \underline{v} \cdot \underline{u}_i$, når afvigelsen måles ved normen af de to vektorers differens. Tallene $\underline{v} \cdot \underline{u}_i$ kaldes Fourier-koefficienterne for vektoren $\underline{v}$ med hensyn til ortonormalsystemet $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r)$.

Det antages nu, at der findes et numerabelt ortonormalsystem $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$ i rummet V . Er $\underline{v}$ en vilkårlig vektor i V , sluttet af det lige viste, at der for hvert $r \in \mathbb{N}$ gælder

$$\|\underline{v} - \sum_{i=1}^r (\underline{v} \cdot \underline{u}_i) \underline{u}_i\|^2 = \underline{v}^2 - \sum_{i=1}^r (\underline{v} \cdot \underline{u}_i)^2 \geq 0.$$

Heraf ses, at den uendelige række $\sum (\underline{v} \cdot \underline{u}_i)^2$ med ikke-negative led er konvergent, og at der gælder Bessel's ulighed

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\underline{v} \cdot \underline{u}_i)^2 \leq \underline{v}^2.$$

Lighedstegnet gælder, når og kun når følgen af vektorerne

$$\underline{v}_r = \sum_{i=1}^r (\underline{v} \cdot \underline{u}_i) \underline{u}_i, \quad r \in \mathbb{N},$$

konvergerer mod $\underline{v}$.

Konvergens af rækken $\sum (\underline{v} \cdot \underline{u}_i)^2$ medfører, at $\underline{v}_r$, $r \in \mathbb{N}$, er en fundamentalfølge. For $p < q$ har man nemlig

$$\|\underline{v}_q - \underline{v}_p\|^2 = \left(\sum_{i=p+1}^q (\underline{v} \cdot \underline{u}_i) \underline{u}_i \right)^2 = \sum_{i=p+1}^q (\underline{v} \cdot \underline{u}_i)^2,$$

og for hvert tal $\varepsilon > 0$ findes der et tal $m \in \mathbb{N}$, således at summen på højre side er mindre end eller lig med ε^2 for $q > p > m$. Vektorerne $\underline{v}_r$ er lig med afsnittene af den uendelige række $\sum (\underline{v} \cdot \underline{u}_i) \underline{u}_i$. Hvis der findes en vektor $\underline{v}'$, mod hvilken $\underline{v}_r$, $r \in \mathbb{N}$, konvergerer, siges denne såkaldte Fourierrække for $\underline{v}$ med hensyn til ortonormalsystemet $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$ at være konvergent, og man skriver

$$\underline{v}' = \sum_{i=1}^{\infty} (\underline{v} \cdot \underline{u}_i) \underline{u}_i.$$

Vektoren $\underline{v}'$ tilhører afslutningen $\bar{U}$ af det af ortonormalsystemet $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$ udspændte under rum U og er ortogonalprojektion af $\underline{v}$ på $\bar{U}$. For hvert $r \in \mathbb{N}$ og hvert $i \leq r$ har man nemlig ifølge bestemmelsen af vektorerne $\underline{v}_r$, at $(\underline{v} - \underline{v}_r) \cdot \underline{u}_i = 0$, og for $r \rightarrow \infty$ fås heraf $(\underline{v} - \underline{v}') \cdot \underline{u}_i = 0$ for hvert $i \in \mathbb{N}$, altså $\underline{v} - \underline{v}' \perp U$ og dermed $\underline{v} - \underline{v}' \perp \bar{U}$. Er det betragtede vektorrum specielt et Hilbert-rum, altså fuldstændigt, er hver vektors Fourierrække konvergent.

Af særlig interesse er de tilfælde, hvor man har lighed i Bessel's ulighed, hvor altså "Parseval's formel"

$$\|\underline{v}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\underline{v} \cdot \underline{u}_i)^2$$

gælder. Nødvendig og tilstrækkelig herfor er (som nævnt ovenfor), at følgen $\underline{v}_r$, $r \in \mathbb{N}$, konvergerer mod $\underline{v}$, altså at

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{\infty} (\underline{v} \cdot \underline{u}_i) \underline{u}_i.$$

Dette kræver, at $\underline{v} \in \bar{U}$. Omvendt kan af $\underline{v} \in \bar{U}$ sluttes, at

Parseval's formel gælder for $\underline{v}$: For hvert tal $\varepsilon > 0$ findes der da en vektor $\underline{x} \in U$, altså en linearkombination $\underline{x} = x_1 \underline{u}_1 + \dots + x_s \underline{u}_s$, således at $\|\underline{v} - \underline{x}\| \leq \varepsilon$. Nu kan $\underline{x}$ for hvert $r \geq s$ opfattes som en linearkombination af $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r$, idet de $r - s$ sidste vektorer tænkes tilføjet med 0 som koefficienter. Da $\underline{v}_r$ er ortogonalprojektionen af $\underline{v}$ på det af $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r)$ udspændte undertrum, er

$$\|\underline{v} - \underline{v}_r\| \leq \|\underline{v} - \underline{x}\| \leq \varepsilon \quad \text{for } r \geq s.$$

Dette viser, at $\underline{v}_r$, $r \in \mathbb{N}$, konvergerer mod $\underline{v}$. Sammenfattende kan man altså sige: Hvis en vektor $\underline{v} \in V$ for et givet ortonormalsystem opfylder en af betingelserne

- 1) $\underline{v} \in \bar{U}$,
- 2) Parseval's formel gælder for $\underline{v}$,
- 3) Fourierrækken for $\underline{v}$ er konvergent med summen $\underline{v}$,

opfylder den også de to andre.

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at 1), 2) og 3) gælder for alle vektorer i V , er øjensynlig, at $\bar{U} = V$. Dette kommer ud på, at $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$ er en tilnærmelses basis for V (se side III, 14, 16). (En sådan kaldes i denne sammenhæng ofte kort, men ukorrekt, for en ortonormal basis.) Man har altså følgende sætning:

Hvis et numerabelt ortonormalsystem $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$ i et vektorrum V med indre produkt har en af følgende egenskaber, har det også de to andre:

- a) $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$ er en tilnærmelsesbasis for V .
- b) Parseval's formel

$$\underline{v}^2 = (\underline{v} \cdot \underline{u}_1)^2 + (\underline{v} \cdot \underline{u}_2)^2 + \dots$$

gælder for hver vektor $\underline{v} \in V$.

- c) For hver vektor $\underline{v}$ er Fourierrækken konvergent og

$$\underline{v} = (\underline{v} \cdot \underline{u}_1) \underline{u}_1 + (\underline{v} \cdot \underline{u}_2) \underline{u}_2 + \dots$$

Er systemet $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$ en ortonormal tilnærmelsesbasis for V , vil det være maximalt eller fuldstændigt (en tredje anvendelse af ordet inden for dette område). Dermed menes, at der ikke findes noget ortonormalt system, som indeholder $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$ som ægte delsystem, eller, hvad der kommer ud på det samme, at der ikke findes nogen enhedsvektor i V , som er ortogonal til alle vektorer $\underline{u}_i$, $i \in \mathbb{N}$. Af Parseval's formel aflæses nemlig, at den eneste vektor $\underline{y}$, som er ortogonal til alle vektorer $\underline{u}_i$, hvis Fourierkoefficienter $\underline{y} \cdot \underline{u}_i$ altså alle er 0, er nulvektoren $\underline{0}$. Man kan imidlertid ikke slutte det omvendte; det kan hænde, at et maximalt ortonormalsystem ikke er en tilnærmelsesbasis. Dette beror på, at afslutningen $\bar{U}$ af det af systemet frembragte under rum kan være forskellig fra V , uden at nogen egentlig vektor i V er ortogonal til $\bar{U}$. Er V et Hilbert-rum, kan dette dog ikke indtræffe. Hver vektor $\underline{y} \in V$ har da nemlig en ortogonalprojektion $\underline{y}'$ på $\bar{U}$ (side III, 15, 3 og 5), og hvis $\underline{y}$ ikke tilhørte $\bar{U}$, havde man $\underline{y} - \underline{y}' = \underline{0}$ og $\underline{y} - \underline{y}' \perp \bar{U}$. Systemet $((\underline{y} - \underline{y}')/\|\underline{y} - \underline{y}'\|, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$ ville da være ortonormalt og $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$ ikke maximalt. Ovenstående sætning kan altså suppleres med:

Et numerabelt ortonormalsystem $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$ i et Hilbert-rum har egenskaberne a), b) og c), hvis og kun hvis det er maximalt.

At et numerabelt ortonormalsystem er maximalt, er som nævnt ensbetydende med, at $\underline{0}$ er den eneste vektor i V , hvis samtlige Fourierkoefficienter med hensyn til systemet er 0. Dette er igen ensbetydende med, at den såkaldte entydighedssætning gælder for systemet: To vektorer med de samme Fourierkoefficienter stemmer overens. I Hilbert-rum gælder altså denne sætning for et numerabelt ortonormalsystem, hvis og kun hvis det har en af egenska-

berne a), b) og c).

Som allerede valget af benævnelserne antyder, finder de omtalte sætninger om numerable ortonormalsystemer anvendelse i teorien for periodiske funktioners "trigonometriske" Fourier-rækker. Man betragter vektorrum bestående af reelle funktioner med en given periode, f.eks. alle kontinuerte funktioner med perioden 2π . Er f og g to sådanne, defineres deres indre produkt ved

$$f \cdot g = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt.$$

Derved fås, som det let bekræftes, et vektorrum V med indre produkt. Funktionerne

$$2^{-\frac{1}{2}}, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots$$

danner et ortonormalsystem i dette rum. Fourierkoefficienterne for en funktion f med hensyn til dette system er

$$2^{-\frac{1}{2}}a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2^{-\frac{1}{2}}f(t) dt, \quad a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos \nu t dt$$

$$\nu = 1, 2, \dots,$$

$$b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin \nu t dt$$

og Fourierrækken bliver

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + \dots$$

Idet $n \in \mathbb{N}$, indføres betegnelsen

$$s_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^n (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t)$$

for dens afsnit, og desuden sættes $s_0(t) = \frac{1}{2}a_0$. I analysen bevises, at følgen af rækkens middelsommer

$$M_i(t) = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{i-1} s_n(t)$$

konvergerer ligeligt mod $f(t)$ (Fejér's sætning). For hvert tal $\varepsilon > 0$ findes der altså et tal $m \in \mathbb{N}$, således at

$$\sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(t) - M_i(t)| \leq \varepsilon \quad \text{for } i \geq m.$$

Nu gælder for hver kontinuert funktion g , at

$$\|g\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |g(t)|.$$

Anvendt på $g(t) = f(t) - M_i(t)$ giver dette

$$\|f - M_i\| \leq \varepsilon/\sqrt{2} \quad \text{for } i \geq m,$$

og da funktionerne M_i er linearkombinationer af ortonormalsystemets funktioner, viser denne ulighed, at systemet er en tilnærmelsesbasis. Ifølge den beviste sætning gælder altså Parseval's formel

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2),$$

og Fourierrækkens afsnit s_n konvergerer mod f i den forstand, at $\|f - s_n\| \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$. Man siger, at afsnittene konvergerer i norm eller i middel mod f for at understrege, at dette ikke medfører, at $s_n(t)$ for hver værdi af t konvergerer mod $f(t)$. Det sidste er uden yderligere forudsætninger om funktionen f (f.eks. stykkevis differentiability) heller ikke rigtigt. For dyberegående undersøgelser over trigonometriske Fourier-rækker er det imidlertid hensigtsmæssigt at lægge rummet $L_2[0, 2\pi]$ (jfr. side III, 14, 6) til grund.

Som allerede nævnt, findes der vektorrum med indre produkt, som har ikke-numerable ortonormalsystemer. Lad V være et sådant rum og $\underline{u}_{\iota}$, $\iota \in J$, et ortonormalt system, hvor indexmængden J ikke er numerabel. Er $(\underline{u}_{\iota_1}, \dots, \underline{u}_{\iota_r})$ et vilkårligt endeligt del sæt og $\underline{v}$ en vilkårlig vektor i V , har man ifølge Bessel's ulighed

$$(\underline{v} \cdot \underline{u}_{\iota_1})^2 + \dots + (\underline{v} \cdot \underline{u}_{\iota_r})^2 \leq \underline{v}^2.$$

Antallet af de Fourierkoefficienter $\underline{v} \cdot \underline{u}_{\iota}$, for hvilke

$|\underline{v} \cdot \underline{u}_{\iota}| \geq \|\underline{v}\|/n$, er altså højst lig med n^2 , når $\underline{v} \neq \underline{0}$. Heraf kan sluttes, at delmængden

$$J_{\underline{v}} = \{\iota \in J \mid \underline{v} \cdot \underline{u}_{\iota} \neq 0\}$$

af indexmængden J er højst numerabel, endvidere, at rækken

$\sum (\underline{v} \cdot \underline{u}_{\iota})^2$ med positive led, hvor ι gennemløber $J_{\underline{v}}$ og leddenes orden er ligegyldig, er konvergent (såfremt den er uendelig), og at Bessel's ulighed

$$\sum_{\iota \in J_{\underline{v}}} (\underline{v} \cdot \underline{u}_{\iota})^2 \leq \underline{v}^2$$

gælder. Om lighedstegnets gyldighed har man sætninger, som ganske svarer til dem for numerable ortonormalsystemer, og som bevises på samme måde. Vektorrum med indre produkt, hvori der findes ikke-numerable ortonormalsystemer, finder anvendelse i H. Bohr's teori for næstenperiodiske funktioner.

Hidtil har spørgsmålet om eksistensen af ortonormale tilnærmelsesbaser i et forelagt vektorrum med indre produkt ikke været berørt. Den følgende sætning indeholder et positivt svar for de rum, der har en højst numerabel tilnærmelsesbasis. Også i alle andre vektorrum med indre produkt eksisterer der ortonormale tilnærmelsesbaser, men dette vil ikke blive bevist her.

Lad V være et vilkårligt vektorrum med indre produkt, og lad $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots)$ være et endeligt eller numerabelt sæt af vektorer i V , således at hvert endeligt del sæt er lineært uafhængigt. Da findes der i V et ortonormalt system $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$ med samme indexmængde, således at $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r)$ for hvert r tilhørende indexmængden frembringer det samme underrum U_r som $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r)$.

Bevis: Idet $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, vil sættet bestående af vektoren $\underline{u}_1 = \underline{v}_1 / \|\underline{v}_1\|$ være et ortonormalsystem, som frembringer det samme underrum U_1 som $\underline{v}_1$. Antag, at der for et r tilhørende indexmængden eksisterer et ortonormalsystem $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r)$, således at $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_\rho)$ for hvert $\rho \leq r$ frembringer det samme underrum U_ρ som $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_\rho)$. Findes der nu i det givne sæt en vektor $\underline{v}_{r+1}$, vil vektoren

$$\underline{w}_{r+1} = \underline{v}_{r+1} - (\underline{v}_{r+1} \cdot \underline{u}_1) \underline{u}_1 - \dots - (\underline{v}_{r+1} \cdot \underline{u}_r) \underline{u}_r$$

være ortogonal til $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r$ og tilhøre U_{r+1} . Endvidere er $\underline{w}_{r+1} \neq \underline{0}$; thi ellers ville $\underline{v}_{r+1}$ være en linearkombination af $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r$ og altså tilhøre U_r i strid med forudsætningen. Sættes $\underline{u}_{r+1} = \underline{w}_{r+1} / \|\underline{w}_{r+1}\|$, fås følgelig et ortonormalsystem $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{r+1})$ tilhørende U_{r+1} . Da dets vektorer er lineært uafhængige, må det udspænde U_{r+1} . Sætningens påstand følger nu ved induktion.

Den i beviset angivne fremgangsmåde tillader ud fra det givne sæt $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots)$ successivt at bestemme ortonormalsystemets vektorer $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots$ og kaldes Gram-Schmidt's ortogonalisering.

Som en umiddelbar anvendelse fås: Hvert endelig-dimensionalt vektorrum med indre produkt har ortonormale baser; thi ud fra en vilkårlig basis fås ved ortogonalisering en ortonormal basis.

Lad $(V_n, +, \cdot, \|\cdot\|)$ være et vektorrum med indre produkt og den endelige dimension n , og lad $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ være en ortonormal basis for det. Lader man til den vilkårlige vektor

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n \in V_n$$

svare koordinatsættet $(x_1, \dots, x_n)$, fås en enentydig lineær afbildning af V_n på talrummet $l_2(n, \mathbb{R})$. Da

$$\|\underline{x}\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

er denne afbildning isometrisk. For to vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ fra V_n finder man med nærliggende betegnelser

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

hvilket viser, at afbildningen er en isomorfi i den forstand, at hvilkesomhelst to vektorer i V_n afbildes på vektorer i $l_2(\mathbb{R})$ med samme indre produkt. Der gælder altså: Hvert n-dimensionalt vektorrum med indre produkt er isomorft med talrummet $l_2(\mathbb{R})$. Alle n-dimensionale vektorrum med indre produkt er indbyrdes isomorfe.

Lad $(V, +, \mathbb{R}, \| \cdot \|)$ være et uendelig-dimensionalt vektorrum med indre produkt, som har en numerabel tilnærmelsesbasis. Ved ortogonalisering fås af denne en numerabel ortonormal tilnærmelsesbasis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots)$. For en vilkårlig vektor $\underline{x} \in V$ gælder med betegnelsen $x_i = \underline{x} \cdot \underline{e}_i$ for Fourierkoefficienterne Parseval's formel

$$\|\underline{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots$$

Denne viser, at der ved $\underline{x} \rightarrow (x_1, x_2, \dots)$ defineres en isometrisk, altså kontinuert, lineær afbildning af V ind i følgerummet $l_2(\mathbb{R})$. Heraf sluttes, at hvert vektorrum med indre produkt, som har en numerabel tilnærmelsesbasis, er isomorft med et under- rum i $l_2(\mathbb{R})$.

Er det betragtede rum fuldstændigt, altså et Hilbert-rum, vil det være isomorft med hele rummet $l_2(\mathbb{R})$. Dette kommer ud på, at hver følge tilhørende $l_2(\mathbb{R})$, altså hver følge med konvergent kvadratsum, er følgen af Fourierkoefficienterne med hensyn til $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots)$ for en vektor i V . For at bevise det betragtes for en given følge $(x_1, x_2, \dots) \in l_2(\mathbb{R})$ vektorfølgen

$$\underline{x}_r = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_r \underline{e}_r, \quad r \in \mathbb{N}.$$

For $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, har man

$$\|\underline{x}_q - \underline{x}_p\|^2 = \left(\sum_{i=p+1}^q x_i e_i \right)^2 = \sum_{i=p+1}^q x_i^2.$$

Da rækken $\sum x_i^2$ er konvergent, findes der til hvert $\varepsilon > 0$ et tal $m \in \mathbb{N}$, således at summen på højre side for $q > p > m$ er mindre end eller lig med ε^2 . Heraf sluttes, at følgen $\underline{x}_r$, $r \in \mathbb{N}$, er en fundamentalfølge. Da V er fuldstændigt, konvergerer den mod en vektor $\underline{x} \in V$. Denne har Fourierkoefficienterne x_j , $j \in \mathbb{N}$; thi for $r \geq j$ er $\underline{x}_r \cdot \underline{e}_j = x_j$, og for $r \rightarrow \infty$ fås heraf på grund af det indre produkts kontinuitet, at $\underline{x} \cdot \underline{e}_j = x_j$.

Der gælder også det omvendte. Hvert vektorrum med indre produkt, som er isomorft med $l_2(\mathbb{R})$, er fuldstændigt. Idet isomorfien mellem de to rum er en kontinuert afbildning, følger dette af, at $l_2(\mathbb{R})$ er fuldstændigt, hvilket kan indses på følgende måde: Lad

$$\begin{aligned} \underline{x}^{(1)} &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_i^{(1)}, \dots) \\ \underline{x}^{(2)} &= (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_i^{(2)}, \dots) \\ &\vdots \\ \underline{x}^{(p)} &= (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_i^{(p)}, \dots) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

være en fundamentalfølge af vektorer i $l_2(\mathbb{R})$. For hvert $\varepsilon > 0$ findes der altså et tal $m \in \mathbb{N}$, således at

$$\|\underline{x}^{(q)} - \underline{x}^{(p)}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^{(q)} - x_i^{(p)})^2 \leq \varepsilon^2$$

for $q > p > m$. Da den uendelige rækkes led er ikke-negative, gælder uligheden for hvert af dem. Man har altså

$$|x_i^{(q)} - x_i^{(p)}| \leq \varepsilon$$

for de nævnte p og q , og dette viser, at $x_i^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, for hvert fast $i \in \mathbb{N}$ er en fundamentalfølge af reelle tal. Den har altså en grænseværdi x_i . Det skal vises, at følgen x_i , $i \in \mathbb{N}$, er en vektor i $l_2(\mathbb{R})$, altså at den har konvergent kvadratsum, og at den givne følge $\underline{x}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, konvergerer mod den. Af ovenstående

ulighed for den uendelige række fås for hvert $j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^j (x_i^{(q)} - x_i^{(p)})^2 \leq \varepsilon^2,$$

og grænseovergangen $q \rightarrow \infty$ giver

$$\sum_{i=1}^j (x_i - x_i^{(p)})^2 \leq \varepsilon^2$$

for hvert $p > m$. For $j \rightarrow \infty$ fås heraf, at følgen $x_i - x_i^{(p)}$, $i \in \mathbb{N}$, tilhører $l_2(\mathbb{R})$, og da også $\underline{x}^{(p)} \in l_2(\mathbb{R})$, kan sluttes, at $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots) \in l_2(\mathbb{R})$, og tillige at $\|\underline{x} - \underline{x}^{(p)}\| \leq \varepsilon$ for $p > m$. Dermed er fuldstændigheden af $l_2(\mathbb{R})$ bevist.

Riesz-Fischer's sætning (som ikke skal bevises her) udsiger, at rummet $L_2[a, b]$ (jfr. side III, 14, 6) er fuldstændigt og isomorft med $l_2(\mathbb{R})$.

Øvelser til kap. III, § 15.

1. Undersøg om bilinearformerne

$$B_1(\underline{x}, \underline{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_3 - x_1y_2 - x_2y_1,$$

$$B_2(\underline{x}, \underline{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_3 - x_1y_2 - x_2y_1,$$

hvor $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ og $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$, er indre produkter i talrummet $\mathbb{R}^3$.

2. Lad $(V', +, \mathbb{R}, \| \cdot \|')$ og $(V'', +, \mathbb{R}, \| \cdot \|'')$ være vektorrum med indre produkt. Idet $\underline{x}', \underline{y}' \in V'$ og $\underline{x}'', \underline{y}'' \in V''$, bliver $V' \times V''$ ved definitionerne

$$(\underline{x}', \underline{x}'') + (\underline{y}', \underline{y}'') = (\underline{x}' + \underline{y}', \underline{x}'' + \underline{y}''), \quad \lambda(\underline{x}', \underline{x}'') = (\lambda \underline{x}', \lambda \underline{x}'')$$

for $\lambda \in \mathbb{R}$ til et vektorrum. Vis, at $(V' \times V'', +, \mathbb{R}, \| \cdot \|)$, med normen $\| \cdot \|$ defineret ved

$$\|(\underline{x}', \underline{x}'')\| = (\|\underline{x}'\|'^2 + \|\underline{x}''\|''^2)^{\frac{1}{2}}$$

ligeledes er et vektorrum med indre produkt.

- 3*. Om et normeret vektorrum $(V, +, \mathbb{R}, \| \cdot \|)$ forudsættes, at

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 + \|\underline{x} - \underline{y}\|^2 = 2(\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2)$$

for alle $\underline{x}, \underline{y} \in V$. Vis, at $(V, +, \mathbb{R}, \| \cdot \|)$ er et vektorrum med indre produkt [nemlig $\frac{1}{2}(\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 - \|\underline{x}\|^2 - \|\underline{y}\|^2)$].

4. Vis, at der for hvilke som helst to vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i et vektorrum med indre produkt gælder

$$\underline{x} \perp \underline{y} \iff \|\underline{x} + \underline{y}\| = \|\underline{x} - \underline{y}\| \iff \|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2.$$

5. Vis, at når $\underline{a}$ og $\underline{b}$ er to forskellige vektorer i et vektorrum med indre produkt, vil mængden af de vektorer $\underline{x}$ i rummet, for hvilke $\|\underline{x} - \underline{a}\| = \|\underline{x} - \underline{b}\|$, være en afsluttet hyperplan.

6. Lad U_1 og U_2 være underrum i et vektorrum V med indre produkt. Idet $V(U_1 \cup U_2)$ betegner det af $U_1 \cup U_2$ frembragte

underrum, gælder

$$v(U_1 \cup U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp.$$

Bevis dette, og * undersøg, om også ligningen

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = v(U_1^\perp \cup U_2^\perp)$$

er almengyldig.

7. Med $C_2[-1,1]$ betegnes vektorrummet af alle i intervallet $[-1,1]$ definerede reelle og kontinuerte funktioner med det indre produkt

$$\varphi \cdot \psi = \int_{-1}^1 \varphi(t) \psi(t) dt.$$

Vis, at rummet ikke er fuldstændigt.

De ulige funktioner i $C_2[-1,1]$, som altså opfylder $\varphi(-t) = -\varphi(t)$ for $-1 \leq t \leq 1$, udgør et underrum U . Bestem underummet $U^\perp$.

Vis, at underrummet bestående af funktionerne φ , for hvilke $\varphi(0) = 0$, er overalt tæt i $C_2[-1,1]$.

8. Lad U være et afsluttet underrum i et euklidisk eller Hilbert-rum $(V, +, \mathbb{R}, \| \cdot \|)$. Vis, at der til hver vektor $\underline{x} \in V$ findes en og kun een vektor $\underline{x}^* \in V$, således at $\underline{x}^* - \underline{x} \perp U$ og $\frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{x}^*) \in U$.

Vis, at der ved $\underline{x} \rightarrow \underline{x}^*$ defineres en isometrisk afbildning af V på sig selv (spejling i underrummet U).

9. Find ortogonalprojektionen af vektoren $(1,1,1,1,1)$ på det af vektorerne

$$(1,0,1,1,0), \quad (2,1,0,1,1), \quad (1,2,0,-1,1)$$

udspændte underrum i talrummet $l_2(5, \mathbb{R})$.

10. I et vektorrum med indre produkt er

$$\underline{x} = \underline{a} + s\underline{u}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \underline{y} = \underline{b} + t\underline{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

hvor $\underline{a}$, $\underline{u}$, $\underline{b}$, $\underline{v}$ er givne vektorer, $\underline{u} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, parameterfremstillinger for to linier. Find den mindste afstand mellem linierne udtrykt ved de givne vektorer.

11. Vis, at mængden af de funktioner $\varphi \in C_2[-1,1]$ (jfr. øv. 7), for hvilke

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = 0,$$

er et afsluttet underrum $U \subset C_2[-1,1]$. Vis endvidere, at $U^\perp = \emptyset$.

12. Anvend Gram-Schmidt's ortogonaliseringsmetode på vektorerne

$$(9, 12, 0, -20), \quad (-1, -18, 0, 20), \quad (7, -24, 3, 20)$$

og bestem derved en ortonormal basis for det af disse vektorer udspændte underrum U i talrummet $l_2(4, \mathbb{R})$. Angiv også en ortonormal basis for $U^\perp$.

Opstil matrixligningerne [med hensyn til basen $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$] for ortogonalprojektionerne p_U og $p_{U^\perp}$ af $l_2(4, \mathbb{R})$ på U og $U^\perp$. (Som kontrol kan $p_U \circ p_U = p_U$, $p_U \circ p_{U^\perp} = 0$ og $p_U + p_{U^\perp} = e$ verificeres ved matrixregning.)

13. Find ved ortogonalisering en ortonormal basis for det af funktionerne $1, t, t^2$ udspændte underrum i $C_2[-1,1]$ (jfr. øv. 7), og bestem Fourierkoefficienterne for t^2 med hensyn til det fundne system.

Vis, at funktionerne

$$\varphi_n(t) = (n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} P_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

hvor

$$P_n(t) = (2^n n!)^{-1} D^n (t^2 - 1)^n$$

er de såkaldte Legendre-polynomier, danner et ortonormalsystem i $C_2[-1,1]$. (Begynd med at vise, at $P_n(t)$ er ortogonal til alle polynomier af højst $(n-1)$ -te grad.) Af Weierstrass' approksimationssætning sluttes, at ortonormalsystemet er en tilnærmelsesbasis.

14. Med $C_2[a,b;c,d]$ betegnes vektorrummet bestående af alle i rektanglet $[a,b] \times [c,d]$ definerede og kontinuerte funktioner

$f(s, t)$ med

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b \int_c^d f(s, t)^2 ds dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

som norm. Vis, at hvis $\varphi_i(s)$, $i \in \mathbb{N}$, og $\psi_j(t)$, $j \in \mathbb{N}$, er

a) ortonormalsystemer, b) tilnærmelsesbaser for henholdsvis $C_2[a, b]$ og $C_2[c, d]$, vil $\varphi_i(s)\psi_j(t)$, $i, j \in \mathbb{N}$, være a) et ortonormalsystem, b) en tilnærmelsesbasis for $C_2[a, b; c, d]$.

15. Vis, at hvis $\underline{u}_i$, $i \in \mathbb{N}$, er en numerabel ortonormal tilnærmelsesbasis for et vektorrum med indre produkt, gælder for hvilket som helst vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i rummet den generaliserende Parseval's formel

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^{\infty} (\underline{x} \cdot \underline{u}_i)(\underline{y} \cdot \underline{u}_i).$$

16. Vis, at enhedskuglen $\{\underline{x} \in V \mid \|\underline{x}\| \leq 1\}$ i et uendelig-dimensionalt vektorrum V med indre produkt ikke er kompakt.
17. Er den delmængde af følgerummet $l_2(\mathbb{R})$, som består af følgerne $(x_1, x_2, \dots)$ med $\sum x_i^2 < \infty$ og $x_i > 0$ for $i \in \mathbb{N}$, åben?
18. Lad $C_2]a, b[$ og $C_1]a, b[$, hvor $-\infty \leq a < b \leq \infty$, betegne de normerede vektorrum bestående af de i intervallet $]a, b[$ kontinuerede funktioner φ , for hvilke henholdsvis

$$\|\varphi\|_2^2 = \int_a^b \varphi(t)^2 dt \quad \text{og} \quad \|\varphi\|_1 = \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

eksisterer. Undersøg i hvert af de tre tilfælde

$$-\infty < a < b < \infty, \quad a = -\infty, b = \infty, \quad a = 0, b = \infty,$$

om et af disse rum er et underrum i det andet.

- 19*. Der er givet en reel funktion $w(t)$, som er defineret, kontinuert og positiv i det åbne interval $]a, b[$,

hvor $-\infty \leq a < b \leq \infty$, og for hvilken integralerne

$$\int_a^b w(t) |t|^n dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

alle er konvergente. I vektorrummet $P]a,b[$ bestående af de reelle polynomiers restriktioner til intervallet $]a,b[$ defineres et indre produkt ved

$$p \cdot q = \int_a^b w(t)p(t)q(t)dt.$$

Vis, at dette vektorrum med indre produkt har en og kun een ortonormal basis $(\varphi_0, \varphi_1, \dots)$, således at φ_n for hvert $n = 0, 1, \dots$ er et polynomium af n -te grad, hvori t^n har en positiv koefficient.

Vis, at polynomiet φ_n har n forskellige reelle rødder, som alle ligger i intervallet $]a,b[$. (Benyt, at der findes polynomier af $(n-1)$ -te grad, som har $n-1$ foreskrevne rødder.)

De til visse specielle "vægtfunktioner" w hørende ortonormalsystemer af polynomier spiller en fremtrædende rolle i analysen og dens anvendelser.

For $a = -1$, $b = 1$, $w(t) = 1$ fås de ovenfor (øv. 13) omtalte polynomier, som fremgår ved normering af Legendre-polynomierne $P_n(t)$.

For $a = -1$, $b = 1$, $w(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ fås

$$\varphi_0(t) = \pi^{-\frac{1}{2}}, \quad \varphi_n(t) = (\frac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}} T_n(t), \quad n = 1, 2, \dots,$$

hvor

$$T_n(t) = \cos(n \operatorname{Arccos} t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

er de såkaldte Čebyšev-polynomier.

For $a = 0$, $b = \infty$, $w(t) = e^{-t}$ fås

$$\varphi_n(t) = n!^{-1} L_n(t),$$

hvor

$$L_n(t) = e^t D^n(t^n e^{-t}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

er de såkaldte Laguerre-polynomier.

For $a = -\infty$, $b = \infty$, $w(t) = e^{-t^2}$ fås

$$\varphi_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} H_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

hvor

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} D^n e^{-t^2}$$

er de såkaldte Hermite-polynomier.

Eftervis, at disse polynomfølger er ortonormalsystemer hørende til de angivne vægtfunktioner.

§ 16. Lineære operatorer i vektorrum med indre produkt.

Lad $(V_n, +, \cdot, \|\cdot\|)$ være et vektorrum med indre produkt, som har den endelige dimension n . Som vist ovenfor, har et sådant rum ortonormale baser. Med henblik på anvendelser i det følgende betragtes koordinattransformationer svarende til overgangen fra en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ til en anden $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$. Er $\underline{T}$ koordinattransformationsmatricen, for hvilken

$$(\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n) = (\underline{f}_1 \dots \underline{f}_n) \underline{T},$$

vil dens søjler $\underline{t}_{|1}, \dots, \underline{t}_{|n}$ være koordinatsættene for vektorerne $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ i koordinatsystemet $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$ (se side III,6,2 og 13). Når $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$ er et ortonormalsystem, har man

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k = (\underline{t}_{|i})' \underline{t}_{|k} = t_{1i} t_{1k} + \dots + t_{ni} t_{nk}$$

for $i, k = 1, \dots, n$ (se side III,15,18). Højre side er elementet på pladsen i, k i matricen $\underline{T}' \underline{T}$. Heraf ses, at også $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ er et ortonormalsystem, altså at $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k = \delta_{ik}$ for $i, k = 1, \dots, n$, hvis og kun hvis

$$\underline{T}' \underline{T} = \underline{E}.$$

En (nødvendigvis kvadratisk) matrix $\underline{T}$, som tilfredsstiller denne ligning, kaldes en ortogonal matrix. En sådan er altså karakteriseret ved, at dens søjler danner et ortonormalsystem i talrummet $l_2(n, \mathbb{R})$.

Da matricerne $\underline{T}'$ og $\underline{T}$ har samme determinant, fås for en ortogonal matrix $(\det \underline{T})^2 = 1$, altså

$$\det \underline{T} = \pm 1.$$

Alle ortogonale matricer er følgelig regulære. Af ligningen

$\underline{T}' \underline{T} = \underline{E}$ fås ved multiplikation med $\underline{T}^{-1}$ fra højre

$$\underline{T}' = \underline{T}^{-1},$$

altså: En ortogonal matrices inverse er lig med dens transponerede. Ensbetydende hermed er, at hvert element t_{ij} i en ortogonal matrix $\underline{T}$ er lig med sit komplement T_{ij} , hvis $\det \underline{T} = 1$, og

lig med $-T_{ij}$, hvis $\det \underline{T} = -1$ (jfr. side III,10,20).

Er $\underline{T}$ ortogonal, har man

$$\underline{T}'\underline{T} = \underline{T}^{-1}\underline{T} = \underline{T}\underline{T}^{-1} = \underline{T}\underline{T}' = (\underline{T}')'\underline{T}' = \underline{E},$$

hvilket viser, at $\underline{T}'$ også er ortogonal, altså: En ortogonal matrices transponerede, altså dens inverse, er ortogonal.

Anderledes udtrykt, hvis en kvadratisk matrices søjler danner et ortonormalsystem i $l_2(n, \mathbb{R})$, gælder det samme om dens rækker, og omvendt.

Er $(n \times n)$ -matricerne $\underline{S}$ og $\underline{T}$ ortogonale, har man

$$(\underline{TS})'\underline{TS} = \underline{S}'\underline{T}'\underline{TS} = \underline{S}'\underline{S} = \underline{E}$$

altså: Et produkt af to ortogonale matricer er en ortogonal matrix. Idet $\underline{E}$ og en ortogonal matrices inverse er ortogonale, sluttet heraf, at de reelle ortogonale $(n \times n)$ -matricer danner en undergruppe i den generelle lineære gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ (se side III,7,16). Den kaldes den ortonale gruppe og betegnes med $O(n, \mathbb{R})$. De "egentlig ortogonale matricer" med determinanten 1 danner en undergruppe $O^+(n, \mathbb{R})$ med indeks 2 i denne. Den fra undergruppen forskellige sideklasse udgøres af de "uegentlig ortogonale matricer" med determinanten -1.

Lad λ være en karakteristisk rod for den reelle ortogonale matrix $\underline{T}$, altså en (reel eller kompleks) rod i ligningen $\det(\underline{T} - \lambda \underline{E}) = 0$. Det homogene lineære ligningssystem

$$\underline{T}\underline{x} = \lambda \underline{x}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

har da en (reel eller kompleks) løsning $\underline{x} \neq \underline{0}$. Ved at gå over til de konjugeret komplekse tal på begge sider af lighedstegnet fås $\underline{T}\underline{\bar{x}} = \bar{\lambda} \underline{\bar{x}}$ (da $\underline{T}$ er reel), altså i transponeret form

$$\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{T}}' = \lambda \underline{\underline{x}}.$$

Sammen med den oprindelige matrixligning giver denne

$$\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}' \underline{\underline{x}} = \lambda \lambda \underline{\underline{x}} - \underline{\underline{x}}.$$

Da $\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{x}} = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0$, sluttet heraf, at $\lambda \lambda = |\lambda|^2 = 1$, altså: En reel ortogonal matrices karakteristiske rødder er (reelle eller komplekse) tal med den absolutte værdi 1.

Da $\det(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{E}})$ er et polynomium med reelle koefficienter, kan man slutte, at hvis det har en kompleks rod λ_0 , vil også det konjugeret komplekse tal $\bar{\lambda}_0$ være rod. Der gælder mere præcist, at de to tal er rødder med samme multiplicitet. Dette kan ses således: Er λ_0 en rod med multipliciteten m i et polynomium P med reelle koefficienter, har man

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

hvor Q betegner et polynomium, som ikke har roden λ_0 . Antages nu først, at $\lambda \in \mathbb{R}$, vil den venstre side være reel, og man får ved overgang til de konjugeret komplekse tal

$$P(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda}_0)^m \bar{Q}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

hvor $\bar{Q}$ betegner polynomiet, der fremgår af Q ved at erstatte koefficienterne med de konjugeret komplekse tal. De to polynomier, som ifølge den sidste ligning stemmer overens for alle reelle tal λ , må være identiske, da deres differens ellers ville være et egentligt polynomium med uendelig mange rødder. Ligningen viser altså, at $\bar{\lambda}_0$ er rod i P med en multiplicitet, der er mindst m . Ved at lade λ_0 og $\bar{\lambda}_0$ bytte rolle ses, at den heller ikke kan være større end m . Dermed er påstanden bevist.

Anvendt på det karakteristiske polynomium for en ortogonal matrix giver dette sammen med den foregående sætning: 1 og -1 er de eneste reelle tal, der kan være karakteristiske rødder for en ortogonal matrix; eventuelle ikke-reelle karakteristiske rødder optræder i lige antal og kan samles i par af indbyrdes

konjugeret komplekse tal med den absolutte værdi 1. For hvert sådant par findes der et reelt tal α (som ikke er entydigt bestemt), således at parrets tal kan skrives $e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}$.

Lad $p \geq 0$ og $q \geq 0$ være rodmultipliciteterne af henholdsvis 1 og -1. Idet en matrices determinant er lig med de karakteristiske rødders produkt (se side III,11,18) og to konjugeret komplekse tal med den absolutte værdi 1 har produktet 1, finder man for en ortogonal matrices determinant

$$\det \underline{T} = (-1)^q.$$

Heraf ses, at hver uegentlig ortogonal matrix har den karakteristiske rod -1. Er $\underline{T}$ en ortogonal $(n \times n)$ -matrix, hvor n er ulige, vil dens karakteristiske ligning være af ulige grad og følgelig have et ulige antal reelle rødder, d.v.s. $p+q$ vil være ulige. Hvis $\det \underline{T} = 1$, altså q lige, må p være ulige, altså: Hver egentlig ortogonal matrix af ulige orden har den karakteristiske rod 1.

De ortogonale (2×2) -matricer lader sig let fremstille ved hjælp af en parameter α . Idet

$t_{11}^2 + t_{21}^2 = 1, \quad t_{12}^2 + t_{22}^2 = 1, \quad t_{11}t_{12} + t_{21}t_{22} = 0,$
findes der reelle tal α og β , således at

$t_{11} = \cos \alpha, \quad t_{21} = \sin \alpha, \quad t_{12} = \sin \beta, \quad t_{22} = \cos \beta,$
og disse to tal må tilfredsstille ligningen

$$\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) = 0.$$

Heraf fås $\beta = -\alpha + p\pi, p \in \mathbb{Z}$. For lige p og ulige p fås henholdsvis

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Det ses umiddelbart, at begge matricer er ortogonale for enhver reel værdi af α , den første egentlig, den anden uegentlig. Den førstes karakteristiske rødder er $e^{i\alpha}$ og $e^{-i\alpha}$, den andens -1 og 1.

Lad $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ være et vilkårligt vektorrum med indre produkt, og lad f være en lineær og isometrisk afbildning af V ind i sig selv, altså en lineær afbildning med den egenskab, at $\|f(\underline{x})\| = \|\underline{x}\|$ for alle $\underline{x} \in V$. En sådan afbildning er øjensynlig begrænset, og den er enentydig, da jo $f(\underline{x}) = f(\underline{y})$, altså $\|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\| = 0$, medfører, at $\|\underline{x} - \underline{y}\| = 0$. Idet man for $\underline{x}, \underline{y} \in V$ har

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \frac{1}{2}(\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 - \|\underline{x}\|^2 - \|\underline{y}\|^2),$$

kan man endvidere slutte, at hvis f er isometrisk, gælder

$$f(\underline{x}) \cdot f(\underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{y} \quad \text{for } \underline{x}, \underline{y} \in V.$$

Specielt fås heraf, at et ortonormalsystem afbildes på et ortonormalsystem. Er rummets dimension endelig, vil en ortonormal basis ved f blive afbildet på en ortonormal basis, altså V på sig selv. I det uendelig-dimensionale tilfælde forholder det sig anderledes. Ved $(x_1, x_2, \dots) \rightarrow (0, x_1, x_2, \dots)$ defineres en lineær isometrisk afbildning af $l_2(\mathbb{R})$ ind i sig selv, hvor billedrummet er hyperplanen bestående af de talfølger tilhørende $l_2(\mathbb{R})$, hvis første element er 0.

Lineære isometriske afbildninger af et vektorrum V med indre produkt på sig selv kaldes ortogonale operatorer i V . En sådan har en i hele rummet defineret invers afbildning, og denne er åbenbart også en ortogonal operator. Bemærkes desuden, at såvel den identiske afbildning som den sammensatte af to ortogonale operatorer er ortogonale operatorer, ses, at de ortogonale operatorer i V danner en gruppe.

Det forudsættes nu, at det betragtede vektorrum har den endelige dimension n . Det betegnes derfor med V_n . Er $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ en ortonormal basis for V_n , bestemmes en lineær afbildning $\hat{\underline{x}} = f(\underline{x})$ af V_n ind i sig selv ved en matrixligning af formen

$$\hat{\underline{x}} = A\underline{x},$$

hvor $\underline{x}_i$ og $\hat{\underline{x}}_i$ betegner koordinatsættene for $\underline{x}$ og $\hat{\underline{x}}$ skrevet som søjler og $\underline{A}$ en reel $(n \times n)$ -matrix. Afbildningen f er en ortogonal operator, hvis og kun hvis $\hat{\underline{x}} \cdot \hat{\underline{x}} = \underline{x} \cdot \underline{x}$, altså

$$\underline{x} \cdot \underline{A}' \underline{A} \underline{x} = \underline{x} \cdot \underline{x}$$

for alle $\underline{x}$. Denne ligning udsiger, at de to kvadratiske former i $\mathbb{R}^n$ med de symmetriske matricer $\underline{A}' \underline{A}$ og $\underline{E}$ er identiske. Dette er ensbetydende med, at de tilhørende symmetriske bilinearformer er identiske (jfr. side III, 12, 7) og altså med

$$\underline{A}' \underline{A} = \underline{E}.$$

Dermed er vist: En lineær afbildning af et endelig-dimensionalt vektorrum med indre produkt ind i sig selv er en ortogonal operator, hvis og kun hvis den med hensyn til en ortonormal basis bestemmes ved en ortogonal matrix. Heraf sluttes videre, at gruppen af ortogonale operatorer i et n -dimensionalt vektorrum med indre produkt er isomorf med den ortogonale gruppe $O(n, \mathbb{R})$.

Ved overgangen fra den ortonormale basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ til en anden ortonormal basis $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$ bestemt ved

$$(\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n) = (\underline{f}_1 \dots \underline{f}_n) \underline{T},$$

hvor altså $\underline{T}$ er en ortogonal matrix, erstattes den til en lineær afbildning $f: V_n \rightarrow V_n$ hørende matrix $\underline{A}$ med

$$\underline{T} \underline{A} \underline{T}' = \underline{B}.$$

To matricer $\underline{A}$ og $\underline{B}$ siges at være ortogonal-ækvivalente, hvis der findes en ortogonal matrix $\underline{T}$, således at $\underline{B} = \underline{T} \underline{A} \underline{T}'$. (Denne relation mellem $(n \times n)$ -matricer er virkelig en ækvivalensrelation; den er reflektiv, idet $\underline{A} = \underline{E} \underline{A} \underline{E}'$ og $\underline{E}$ er ortogonal, den er symmetrisk, idet man af $\underline{B} = \underline{T} \underline{A} \underline{T}'$ kan slutte, at $\underline{A} = \underline{T}^{-1} \underline{B} (\underline{T}')^{-1} = \underline{T}^{-1} \underline{B} (\underline{T}^{-1})'$, og $\underline{T}^{-1}$ er ortogonal, den er transitiv, idet man af $\underline{B} = \underline{T} \underline{A} \underline{T}'$ og $\underline{C} = \underline{U} \underline{B} \underline{U}'$, hvor også $\underline{U}$ er ortogonal, kan slutte, at $\underline{C} = \underline{U} \underline{T} \underline{A} \underline{T}' \underline{U}' = (\underline{U} \underline{T}) \underline{A} (\underline{U} \underline{T})'$, og $\underline{U} \underline{T}$ er ortogonal.) Ortogonalækvivalens giver anledning til en finere klasseinddeling af de kva-

dratiske matricer end regulærækvivalens. Som ved denne foreligger der opgaven i hver klasse at finde en særlig simpel repræsentant. Anderledes udtrykt drejer det sig om til en given lineær afbildning af et endelig-dimensionalt vektorrum ind i sig selv at bestemme en ortonormal basis, med hensyn til hvilken den til afbildningen hørende matrix får en simpel "normalform". Denne opgave vil her blive behandlet for visse specielle typer af afbildninger.

Selv om man kun er interesseret i de her betragtede vektorrum over de reelle tals legeme, er det af formelle grunde ofte hensigtsmæssigt at inddrage vektorrum over de komplekse tals legeme. Dertil kommer, at disse rum har stor selvstændig interesse, ikke mindst på grund af deres anvendelser i kvanteteorien. Lad $(V, +, \cdot)$ være et vektorrum over de komplekse tals legeme. En funktion $\underline{x} \cdot \underline{y}$ fra $V \times V$ til $\mathbb{C}$ kaldes et indre produkt i $(V, +, \cdot)$, hvis den opfylder

$$IP1*: \forall_{\underline{x}, \underline{y}} [\underline{y} \cdot \underline{x} = \overline{\underline{x} \cdot \underline{y}}]$$

samt IP2-4 (side III, 15,1), (Overstregning betyder kompleks konjugering.) Dette indre produkt er altså ikke symmetrisk. Af IP1* og IP3 sluttes, at

$$\underline{x} \cdot (\lambda \underline{y}) = \overline{\lambda} (\underline{x} \cdot \underline{y}),$$

hvilket viser, at et komplekst indre produkt heller ikke er en bilinearform; det er ikke lineært i den anden faktor, idet en talfaktor til denne erstattes med den konjugeret komplekse, når den træder uden for produktet. En funktion $H(\underline{x}, \underline{y})$ fra $V \times V$ til $\mathbb{C}$, som opfylder de til IP1*, IP2 og IP3 svarende krav

$$\text{HF1: } \forall_{\underline{x}, \underline{y}} [H(\underline{y}, \underline{x}) = \overline{H(\underline{x}, \underline{y})}].$$

$$\text{HF2: } \forall_{\underline{x}', \underline{x}'', \underline{y}} [H(\underline{x}' + \underline{x}'', \underline{y}) = H(\underline{x}', \underline{y}) + H(\underline{x}'', \underline{y})].$$

$$\text{HF3: } \forall_{\lambda} \forall_{\underline{x}, \underline{y}} [H(\lambda \underline{x}, \underline{y}) = \lambda H(\underline{x}, \underline{y})]$$

kaldes en Hermiteisk symmetrisk form eller kort en Hermiteisk form i V . En sådan forms restriktion til diagonalen i $V \times V$, altså $H(\underline{x}, \underline{x})$, er en reel funktion i V , idet $H(\underline{x}, \underline{x}) = \overline{H(\underline{x}, \underline{x})}$ ifølge HF1. Formen H siges at være positiv semidefinit, hvis $H(\underline{x}, \underline{x}) \geq 0$ for alle $\underline{x} \in V$, og positiv definit, hvis $H(\underline{x}, \underline{x}) > 0$ for $\underline{x} \neq \underline{0}$. Et indre produkt i et komplekst vektorrum kan herefter defineres som en positiv definit Hermiteisk symmetrisk form. Med henblik på en anvendelse nedenfor bemærkes, at Cauchy-Schwarz's ulighed

$$|H(\underline{x}, \underline{y})|^2 \leq H(\underline{x}, \underline{x})H(\underline{y}, \underline{y})$$

gælder for hver positiv-semidefinit, Hermiteisk symmetrisk form. Dette kan ses på følgende måde: Til givne $\underline{x}, \underline{y} \in V$ bestemmes det komplekse tal c således, at $c\bar{c} = |c|^2 = 1$ og $|H(\underline{x}, \underline{y})| = cH(\underline{x}, \underline{y})$. Da er

$$H(c\underline{x}, c\underline{x}) = c\bar{c}H(\underline{x}, \underline{x}) = H(\underline{x}, \underline{x}),$$

$$|H(\underline{x}, \underline{y})| = H(c\underline{x}, \underline{y}) = \overline{H(c\underline{x}, \underline{y})} = H(\underline{y}, c\underline{x}),$$

og for $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ fås

$$\begin{aligned} &H(\lambda c\underline{x} + \mu \underline{y}, \lambda c\underline{x} + \mu \underline{y}) \\ &= \lambda^2 H(\underline{x}, \underline{x}) + 2\lambda\mu |H(\underline{x}, \underline{y})| + \mu^2 H(\underline{y}, \underline{y}). \end{aligned}$$

Uligheden følger af, at dette er en reel, positiv semidefinit kvadratisk form i de variable λ og μ .

Lad $(V, +, \cdot)$ være et komplekst vektorrum med et indre produkt $\underline{x} \cdot \underline{y}$. Da er $\|\underline{x}\| = (\underline{x} \cdot \underline{x})^{1/2}$ en norm i V . At kravene N2 og N3 til en norm (side III, 14,1) er opfyldt, er klart. At også N1 er gyldig, ses ved hjælp af Cauchy-Schwarz's ulighed som i det reelle tilfælde (side III, 14,7):

$$\begin{aligned}
\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 &= (\underline{x} + \underline{y}) \cdot (\underline{x} + \underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{x} + \underline{x} \cdot \underline{y} + \underline{y} \cdot \underline{x} + \underline{y} \cdot \underline{y} \\
&= \underline{x} \cdot \underline{x} + \underline{x} \cdot \underline{y} + \overline{\underline{x} \cdot \underline{y}} + \underline{y} \cdot \underline{y} \\
&\leq \underline{x} \cdot \underline{x} + 2|\underline{x} \cdot \underline{y}| + \underline{y} \cdot \underline{y} \\
&\leq \underline{x} \cdot \underline{x} + 2(\underline{x} \cdot \underline{x})^{\frac{1}{2}}(\underline{y} \cdot \underline{y})^{\frac{1}{2}} + \underline{y} \cdot \underline{y} \\
&= (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2.
\end{aligned}$$

Det med denne form forsynede komplekse vektorrum $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ kaldes et unitært rum, og hvis det er uendelig-dimensionalt og fuldstændigt, et komplekst Hilbertrum. Eksempler på unitære rum er talrummene $l_2(n, \mathbb{C})$ og talfølgerummet $l_2(\mathbb{C})$ med de indre produkter

$$\begin{aligned}
\underline{x} \cdot \underline{y} &= x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n, \\
\underline{x} \cdot \underline{y} &= x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots
\end{aligned}$$

(jfr. side III, 14,4-5). Endvidere kan nævnes rummet $C_2[a, b]$ af de kontinuerte funktioner fra intervallet $[a, b]$ til $\mathbb{C}$ (se side III, 14,6) med det indre produkt

$$\varphi \cdot \psi = \int_a^b \varphi(t) \overline{\psi(t)} dt.$$

To vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i et unitært rum siges at være unitær-ortogonale eller, hvis misforståelser er udelukket, blot ortogonale, når $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$. Alle i §15 omtalte begreber, sætninger og beviser vedrørende reelle vektorrum med indre produkt kan næsten uden ændringer overføres til unitære rum. (I stedet for kvadratsummer af reelle tal, som i Bessel's ulighed, træder her kvadratsummer af komplekse tals absolutte værdier. I anvendelsen på periodiske funktioners Fourierrækker (side III, 15,14-15) erstattes det trigonometriske ortonormalsystem med det unitære ortonormalsystem $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i \nu t}$, $\nu \in \mathbb{Z}$.) Her vil kun blive benyttet,

at ortogonaliseringen af et endeligt sæt af lineært uafhængige vektorer kan gennemføres på ganske samme måde som i det reelle tilfælde, at der følgelig eksisterer unitær-ortonormale baser i ethvert endelig-dimensionalt unitært rum, og at hvert unitær-ortonormalt system i et sådant rum kan suppleres til en unitær-ortonormal basis.

Er $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ en unitær-ortonormal basis i et n -dimensionalt unitært rum $(V_n, +, \cdot, \| \cdot \|)$, fås for det indre produkt af to vektorer

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n, \quad \underline{y} = y_1 \underline{e}_1 + \dots + y_n \underline{e}_n$$

i V_n

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Som ovenfor i det reelle tilfælde (side III, 16,1) ses: Er $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$ en unitær-ortonormal basis og

$$(\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n) = (\underline{f}_1 \dots \underline{f}_n) \underline{U},$$

vil også $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ være unitær-ortonormal, hvis og kun hvis den komplekse $(n \times n)$ -matrix $\underline{U}$ tilfredsstiller ligningen

$$\underline{U}' \underline{U} = \underline{E},$$

der udsiger, at søjlerne i $\underline{U}$ danner et unitær-ortonormalt system i talrummet $l_2(n, \mathbb{C})$. Her betegner $\underline{\bar{U}}$ matricen, hvis elementer er kompleks konjugeret til de tilsvarende elementer i $\underline{U}$. Idet $\underline{E}$ er reel og $\overline{\underline{U}'} = \underline{\bar{U}}'$, er ligningen ensbetydende med

$$\underline{\bar{U}}' \underline{U} = \underline{E}.$$

Matricerne, der tilfredsstiller den, kaldes unitære matricer.

De reelle iblandt dem er præcis de ortogonale.

For en unitær matrices determinant fås

$$\overline{\det \underline{U}} \det \underline{U} = 1,$$

altså $|\det \underline{U}| = 1$. Endvidere har man $\underline{U}^{-1} = \overline{\underline{U}}'$, altså

$$\underline{U} \overline{\underline{U}}' = \overline{(\underline{U}')'} \overline{\underline{U}}' = \underline{E},$$

hvoraf ses, at en unitær matrices inverse også er unitær. Som for ortogonale matricer bevises, at produktet af to unitære matricer er unitær. (Herved benyttes, at der gælder $\overline{\underline{A}\underline{B}} = \overline{\underline{A}} \overline{\underline{B}}$ for to matricer, hvis produkt kan dannes.) De unitære $(n \times n)$ -matricer danner altså en gruppe, den såkaldte unitære gruppe $U(n)$.

Ved overgangen fra en unitær-ortonormal basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ til en anden unitær-ortonormal basis $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$ bestemt ved

$$(\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n) = (\underline{f}_1 \dots \underline{f}_n) \underline{U},$$

hvor altså $\underline{U}$ er unitær, erstattes matricen $\underline{A}$, der hører til en lineær afbildning af $(V_n, +, \cdot, \| \cdot \|)$ ind i sig selv, med $\underline{U} \underline{A} \underline{U}^{-1} = \underline{U} \underline{A} \overline{\underline{U}}'$. Dette giver anledning til begrebet unitær-ækvivalens mellem komplekse $(n \times n)$ -matricer. Matricen $\underline{A}$ siges at være unitær-ækvivalent med matricen $\underline{B}$, hvis der findes en unitær matrix $\underline{U}$, således at $\underline{B} = \underline{U} \underline{A} \overline{\underline{U}}'$. At der virkelig foreligger en ækvivalensrelation, ses som for ortogonal-ækvivalens. Herom gælder følgende sætning:

Enhver kompleks $(n \times n)$ -matrix er unitær-ækvivalent med en trekantsmatrix med nuller under hoveddiagonalen.

Bevis ved induktion: For $n = 1$ er intet at bevise. Lad $\underline{A}$ være en $(n \times n)$ -matrix og λ_1 en af dens karakteristiske rødder. Der findes da en søjle $\underline{u}_{|1} \neq \underline{0}_{|1}$, således at $\underline{A} \underline{u}_{|1} = \lambda_1 \underline{u}_{|1}$. Denne søjle kan antages at være normeret, altså at opfylde $\overline{\underline{u}_{|1}} \underline{u}_{|1} = 1$. Der findes søjler $\underline{u}_{|2}, \dots, \underline{u}_{|n}$, som sammen med $\underline{u}_{|1}$

danner en unitær-ortonormal basis for $l_2(n, \mathbb{C})$ (ortogonalisering).

Matricen $\underline{\underline{U}}$ med disse søjler er da unitær, og man får

$$\underline{\underline{U}}' \underline{\underline{A}} \underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \underline{\underline{b}}_- \\ \underline{\underline{0}}_+ & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix},$$

hvor delmatricerne $\underline{\underline{b}}_-$ og $\underline{\underline{B}}$ er henholdsvis af typen $1 \times (n-1)$ og $(n-1) \times (n-1)$. Den første søjle i $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{U}}$ er nemlig $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{u}}_1 = \lambda_1 \underline{\underline{u}}_1$, og multipliceres rækkerne $\underline{\underline{u}}_j$ i $\underline{\underline{U}}'$ med den, fås $\lambda_1 \underline{\underline{u}}_j \cdot \underline{\underline{u}}_1 = \lambda_1 \delta_{j1}$. Matricen $\underline{\underline{A}}$ er altså unitær-ækvivalent med matricen på ovenstående lignings højre side. Det er altså tilstrækkeligt at vise, at denne matrix er unitær-ækvivalent med en trekantsmatrix. Forudsættes nu, at påstanden er rigtig for $(n-1) \times (n-1)$ -matricer, findes der en unitær $(n-1) \times (n-1)$ -matrix $\underline{\underline{V}}$, således at $\underline{\underline{V}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{V}}'$ er en trekantsmatrix med nuller under hoveddiagonalen. Det ses umiddelbart, at $(n \times n)$ -matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & \underline{\underline{0}}_- \\ \underline{\underline{0}}_+ & \underline{\underline{V}} \end{pmatrix}$$

er unitær, og ved udregning findes

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & \underline{\underline{0}}_- \\ \underline{\underline{0}}_+ & \underline{\underline{V}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \underline{\underline{b}}_- \\ \underline{\underline{0}}_+ & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \underline{\underline{0}}_- \\ \underline{\underline{0}}_+ & \underline{\underline{V}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \underline{\underline{0}}_- \\ \underline{\underline{0}}_+ & \underline{\underline{V}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \underline{\underline{b}}_- \\ \underline{\underline{0}}_+ & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \underline{\underline{0}}_- \\ \underline{\underline{0}}_+ & \underline{\underline{V}}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \underline{\underline{b}}_- \underline{\underline{V}}' \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{V}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{V}}' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Idet den sidste matrix er en trekantsmatrix, er sætningen hermed bevist.

Da en trekantsmatrices diagonalelementer er dens karakteristiske rødder, og regulær-ækvivalente (altså specielt unitær-ækvivalente) matricer har samme karakteristiske polynomium, vil diagonalelementerne i enhver med en matrix $\underline{\underline{A}}$ regulær-ækvivalent trekantsmatrix være de karakteristiske rødder for $\underline{\underline{A}}$. Af induk-

tionsbeviset fremgår, at man kan opnå, at de karakteristiske rødder optræder i trekantsmatricens diagonal i en vilkårlig valgt orden.

Hvis en reel matrix ikke har lutter reelle karakteristiske rødder, kan den herefter i det reelle talrum $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$ ikke være regulær-ækvivalent (og dermed specielt ikke ortogonal-ækvivalent) med en trekantsmatrix. Der gælder imidlertid:

En reel $(n \times n)$ -matrix er ortogonal-ækvivalent med en trekantsmatrix, hvis og kun hvis alle dens karakteristiske rødder er reelle.

At betingelsen er nødvendig, fremgår af det sagte. Tilstrækkeligheden kan indses ved at gennemgå ovenstående bevis for det komplekse tilfælde: Er $\underline{A}$ og λ_1 reelle, kan søjlen $\underline{u}_1$ vælges reel og suppleres til en ortogonal matrix, og induktionsslutningen forløber da som før.

Af særlig betydning er spørgsmålet om matricers ækvivalens med diagonalmatricer. I det komplekse område tillader det et simpelt svar.

En kompleks kvadratisk matrix $\underline{A}$ kaldes en normal matrix, hvis

$$\underline{A} \underline{A}' = \underline{A}' \underline{A},$$

altså hvis den er ombyttelig med den transponerede konjugeret komplekse. Specielt er en reel matrix normal, hvis og kun hvis den er ombyttelig med sin transponerede.

Hver med en normal matrix unitær-ækvivalent matrix er normal.

Bevis: Er $\underline{A}$ normal, $\underline{U}$ unitær og $\underline{B} = \underline{U} \underline{A} \underline{U}'$, altså $\underline{B}' = \underline{U} \underline{A}' \underline{U}'$, har man

$$\underline{B} \underline{B}' = \underline{U} \underline{A} \underline{U}' \underline{U} \underline{A}' \underline{U}' = \underline{U} \underline{A} \underline{A}' \underline{U}' = \underline{U} \underline{A}' \underline{A} \underline{U}' = \underline{U} \underline{A}' \underline{U}' \underline{U} \underline{A} \underline{U}' = \underline{B}' \underline{B}.$$

(En med en normal matrix regulær-ækvivalent matrix behøver ikke at være normal; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ er normal, men $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ er ikke normal.)

En trekantmatrix er normal, hvis og kun hvis den er en diagonalmatrix.

Bevis: At hver diagonalmatrix er normal, er indlysende.

Antag, at

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

er normal, altså at

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Udregning af det første diagonalelement i de to produktmatricer giver

$$|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2 = |a_{11}|^2,$$

altså $a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$. Derefter fås for det andet diagonalelement

$$|a_{22}|^2 + |a_{23}|^2 + \cdots + |a_{2n}|^2 = |a_{22}|^2,$$

altså $a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0$. Ved at fortsætte på denne måde ses, at alle elementer over hoveddiagonalen i $\underline{A}$ må være lig 0.

Af de beviste sætninger følger nu umiddelbart:

En kompleks kvadratisk matrix er unitær-ækvivalent med en diagonalmatrix, hvis og kun hvis den er normal.

Bevis: En normal matrix er unitær-ækvivalent med en trekantmatrix, som må være normal, altså en diagonalmatrix. Omvendt, en matrix, som er unitær-ækvivalent med en diagonalmatrix, må være normal, da diagonalmatricen er det.

Er $\underline{A}$ en normal matrix og $\underline{U}$ en unitær matrix, for hvilken $\underline{U}'\underline{A}\underline{U}$ er diagonalmatricen $\underline{\Lambda}$ med de karakteristiske rødder $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ for $\underline{A}$ som diagonalelementer, har man

$$\underline{A}\underline{U} = \underline{U}\underline{\Lambda}.$$

Denne ligning udsiger, at søjlerne i $\underline{U}$ danner et unitær-ortonormalt system af egenvektorer for den ved matricen $\underline{A}$ bestemte lineære afbildning af $l_2(n, \mathbb{C})$ ind i sig selv. Når de karakteristiske rødder for $\underline{A}$ kendes, kan altså søjlerne i $\underline{U}$ bestemmes som løsninger til lineære ligningssystemer.

Til klassen af normale matricer hører vigtige, mere specielle klasser af matricer. Det fremgår umiddelbart af definitionerne, at hver unitær matrix er normal. Endvidere er hver Hermiteske symmetrisk matrix, d.v.s. hver matrix $\underline{A}$, for hvilken $\overline{\underline{A}}' = \underline{A}$, øjensynlig normal. Det samme gælder for hver Hermiteske skævsymmetrisk matrix, d.v.s. for hver matrix $\underline{A}$, for hvilken $\overline{\underline{A}}' = -\underline{A}$. Specielt er altså blandt de reelle alle ortogonale, symmetriske og skævsymmetriske matricer normale. (Bemærk, at den symmetriske, men ikke reelle matrix $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ikke er normal.)

Hvis en matrix $\underline{A}$ har en af egenskaberne at være unitær, Hermiteske symmetrisk, Hermiteske skævsymmetrisk, vil enhver med $\underline{A}$ unitær-ækvivalent matrix have den samme egenskab.

Bevis: Er $\underline{A}$ unitær, følger dette af, at et produkt af unitære matricer er unitær. Er $\underline{A}$ Hermitesk symmetrisk, altså $\overline{\underline{A}}' = \underline{A}$, og $\underline{U}$ unitær, har man

$$(\overline{\underline{U} \underline{A} \underline{U}'})' = \underline{U} \overline{\underline{A}'} \underline{U}' = \underline{U} \underline{A} \underline{U}',$$

som påstået. På samme måde sluttet i tilfælde af Hermitesk skævsymmetri.

For reelle matricer fås heraf:

Hvis en reel matrix $\underline{A}$ har en af egenskaberne at være ortogonal, symmetrisk, skævsymmetrisk, vil enhver med $\underline{A}$ ortogonal-ækvivalent matrix have den samme egenskab.

En diagonalmatrix er åbenbart unitær, hvis og kun hvis dens diagonalelementer har den absolutte værdi 1. Da hver unitær matrix ifølge det viste er unitær-ækvivalent med en sådan diagonalmatrix, kan sluttet, at en unitær matrices karakteristiske rødder er tal med den absolutte værdi 1.

En diagonalmatrix er Hermitesk symmetrisk, hvis og kun hvis den er reel. Dette i forbindelse med de foregående sætninger giver:

En kompleks matrix er unitær-ækvivalent med en reel diagonalmatrix, hvis og kun hvis den er Hermitesk symmetrisk. Hver Hermitesk symmetrisk matrix har luttet reelle karakteristiske rødder.

For reelle matricer fås specielt:

En reel matrix er ortogonal-ækvivalent med en diagonalmatrix, hvis og kun hvis den er symmetrisk. Hver reel symmetrisk matrix har luttet reelle karakteristiske rødder.

Denne vigtige sætning vil nedenfor blive belyst, bevist og generaliseret til uendelig-dimensionale rum ud fra et andet synspunkt.

Først omtales imidlertid en anvendelse af ovenstående resultater på en undersøgelse af de ortogonale operatorer i et endelig-dimensionalt reelt vektorrum $(V_n, +, \cdot, \| \cdot \|)$ med indre produkt.

I V_n vælges en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$. En ortogonal operator $f: V_n \rightarrow V_n$ bestemmes med hensyn til denne ved en ortogonal matrix $\underline{A}$. Denne er unitær-ækvivalent med en $(n \times n)$ -diagonalmatrix af formen

$$\begin{pmatrix} \underline{E}^* & & & \\ & \underline{e}_{\alpha_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{e}_{\alpha_r} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{E}^*$ betegner en $((n-2r) \times (n-2r))$ -diagonalmatrix, med diagonalelementer, der er 1 eller -1, og

$$\underline{e}_{\alpha} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

(jfr. side III, 16,3-4). Idet

$$\underline{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

findes

$$\overline{\underline{h}}' \underline{e}_{\alpha} \underline{h} = \underline{d}_{\alpha},$$

hvor

$$\underline{d}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Man har derfor

$$\begin{pmatrix} \underline{E} & & & \\ & \underline{h} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{E}^* & & & \\ & \underline{e}_{\alpha_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{e}_{\alpha_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{E} & & & \\ & \underline{h} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}^* & & & \\ & \underline{d}_{\alpha_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{d}_{\alpha_r} \end{pmatrix}$$

Øvelser til kap. III, § 16.

1. Bestem en reel ortogonal (3×3) -matrix, hvis første søjle består af tre lige store tal, og hvis determinant er lig 1.
2. Med $\underline{\underline{S}}$, $\underline{\underline{T}}$ og $\underline{\underline{U}}$ betegnes reelle matricer, som er henholdsvis af typen $m \times m$, $n \times n$ og $m \times n$. Vis, at den af disse og $(n \times m)$ -nulmatricen sammensatte matrix $\begin{pmatrix} \underline{\underline{S}} & \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T}} \end{pmatrix}$ er ortogonal, hvis og kun hvis $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{0}}$ og $\underline{\underline{S}}$ og $\underline{\underline{T}}$ er ortogonale.
Vis, at en ortogonal trekantsmatrix er en diagonalmatrix, og angiv alle reelle ortogonale diagonalmatricer.
3. Lad $(\underline{\underline{e}}_1, \dots, \underline{\underline{e}}_n)$ være en ortonormal basis i et n -dimensionalt vektorrum med indre produkt og π en permutation af $\{1, \dots, n\}$. Beskriv den ortogonale koordinattransformationsmatrix $\underline{\underline{P}}_\pi$ svarende til overgangen til basen $(\underline{\underline{e}}_{\pi(1)}, \dots, \underline{\underline{e}}_{\pi(n)})$. "Permutationsmatricerne" $\underline{\underline{P}}_\pi$, $\pi \in S_n$, danner med matrixmultiplikationen som kompositionsforskrift en gruppe, der er isomorf med S_n .
Bestem alle ortogonale $(n \times n)$ -matricer, hvis elementer er hele tal, og vis, at de ligeledes danner en gruppe. Beskriv de koordinattransformationer, som de svarer til.
5. Vis, at en reel skævsymmetrisk matrix $\underline{\underline{S}}$, altså en matrix $\underline{\underline{S}}$, for hvilken $\underline{\underline{S}}' = -\underline{\underline{S}}$, ikke kan have fra 0 forskellige reelle karakteristiske rødder. Slut heraf, at $\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{S}}$ er regulær.
Vis, at for hver reel skævsymmetrisk matrix $\underline{\underline{S}}$ er matricen $\underline{\underline{T}} = (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{S}})(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{S}})^{-1}$ ortogonal, dens determinant er 1, og $\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{E}}$ er regulær.
Vis, at hver reel ortogonal matrix med disse egenskaber har en og kun een sådan fremstilling. (Cayley's parameterfremstilling for de ortogonale matricer.)

5. Lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ være en ortonormal basis for det tredimensionale euklidiske rum $(V_3, +, \cdot, \|\cdot\|)$, og lad f være en lineær afbildning af rummet ind i sig selv. Vis, at den til f hørende matrix $\underline{A}$ er skævsymmetrisk, hvis og kun hvis hver vektor $\underline{v} \in V_3$ er ortogonal til sin billedvektor $f(\underline{v})$.

Lad f være en afbildning med positiv rang, som har denne egenskab. Vis, at der findes en og kun en vektor $\underline{a}$, således at $f(\underline{v})$ er ortogonal til $\underline{a}$ for hver vektor $\underline{v}$, og at

$$F(\underline{a}, \underline{v}, f(\underline{v})) = f(\underline{v})^2,$$

hvor F betegner det volumenmål i rummet, for hvilket

$$F(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = 1.$$

Angiv elementerne i $\underline{A}$ udtrykt ved koordinaterne for $\underline{a}$. (Vektorprodukt: $f(\underline{v}) = \underline{a} \times \underline{v}$, når $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ er et højresystem.)

6. Der er givet reelle tal d_1, d_2, d_3 og α , således at

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1.$$

Med $\underline{D}$ betegnes matricen

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vis, at (3×3) -matricen

$$\underline{P} = \underline{E} + \sin \alpha \underline{D} + (1 - \cos \alpha) \underline{D}^2$$

er ortogonal.

I det tredimensionale euklidiske rum $(V_3, +, \cdot, \|\cdot\|)$ vælges en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Matricen $\underline{P}$ bestemmer da en isometri f af rummet. Vis, at denne (når alle vektorer tænkes afsat fra samme punkt) består i en drejning, hvis akse er bestemt ved vektoren $\underline{d}$ med koordinatsættet (d_1, d_2, d_3) og hvis drejningsvinkel er α .

Find billedvektoren $f(\underline{v})$ af vektoren $\underline{v}$ udtrykt ved $\underline{v}$, $\underline{d}$ og α . (Benyt vektorprodukter; jfr. øv. 5.)

7. I et n -dimensionalt vektorrum med indre produkt vælges en orthonormal basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$. Med F betegnes det volumenmål i rummet, for hvilket $F(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = 1$. Vis, at for vilkårlige vektorer $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ er

$$|F(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)| \leq \|\underline{v}_1\| \dots \|\underline{v}_n\| ,$$

hvor lighedstegnet gælder, når og kun når vektorerne er parvis ortogonale. (Betragt først parvis ortogonale vektorer, og benyt i det almindelige tilfælde ortogonalisering uden normering.)
Formuler udsagnet som en sætning om determinanter (Hadamard's determinantsætning).

8. Bestem for en given kompleks (2×2) -matrix $\underline{A}$ alle unitære matrixer $\underline{U}$, for hvilke $\underline{U}\underline{A}\underline{U}'$ er en trekantsmatrix med 0 under diagonalen.

9. I vektorrummet af alle komplekse $(n \times n)$ -matrixer $\underline{A} = (a_{\lambda\mu})$ defineres en norm ved

$$\|\underline{A}\|_{\infty} = \max_{\lambda, \mu=1, \dots, n} |a_{\lambda\mu}| .$$

Bevis følgende påstande: For hvert $k \in \mathbb{N}$ er

$$\|\underline{A}^k\|_{\infty} \leq n^{k-1} \|\underline{A}\|_{\infty}^k .$$

Følgen af matrixer

$$\underline{S}_p = \underline{E} + \frac{1}{1!}\underline{A} + \frac{1}{2!}\underline{A}^2 + \dots + \frac{1}{p!}\underline{A}^p , \quad p \in \mathbb{N},$$

er konvergent. Idet den matrix, mod hvilken den konvergerer, betegnes med $\exp \underline{A}$, gælder for ombyttelige $(n \times n)$ -matrixer $\underline{A}$ og $\underline{B}$, at

$$\exp(\underline{A} + \underline{B}) = \exp \underline{A} \exp \underline{B} .$$

Heraf følger, at $\exp \underline{A}$ er regulær, og at $\exp(-\underline{A}) = (\exp \underline{A})^{-1}$.

Er $\underline{A}$ reel og skævsymmetrisk, vil $\exp \underline{A}$ være orthogonal.

* Vis, at $\det(\exp \underline{A}) = \exp(\text{tr } \underline{A})$, hvor $\text{tr } \underline{A}$ betegner matrixens spor, altså summen af elementerne i dens hoveddiagonal.

* Vis, at med de i øv. 6 indførte betegnelser er $\exp(\alpha \underline{D}) = \underline{P}$.

10. Bestem for

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en unitær matrix $\underline{\underline{U}}$, således at $\underline{\underline{U}}' \underline{\underline{A}} \underline{\underline{U}}$ bliver en diagonalmatrix.

11. Vis, at gruppen $U(n, \mathbb{C})$ af unitære $(n \times n)$ -matricer er isomorf med en undergruppe i den ortogonale gruppe $O(2n, \mathbb{R})$.

12. I et vektorrum $(V, +, \mathbb{R}, \| \cdot \|)$ med indre produkt er givet to vektorer $\underline{a} \neq \underline{0}$ og $\underline{b} \neq \underline{0}$. Ved $f(\underline{x}) = (\underline{a} \cdot \underline{x}) \underline{b}$ defineres en lineær operator $f: V \rightarrow V$. Vis, at den er begrænset. Bestem dens egenverdier og egenrum. Vis, at den har en adjungeret operator f' (for hvilken $f(\underline{x}) \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot f'(\underline{y})$, $\underline{x}, \underline{y} \in V$), og angiv f' .

13. Lad $f: V \rightarrow V$ være en lineær operator i et vektorrum $(V, +, \mathbb{R}, \| \cdot \|)$ med indre produkt. Det forudsættes, at f har en adjungeret operator f' . Vis, at hvis et underrum $U \subseteq V$ er invariant ved f , altså $f(U) \subseteq U$, vil $U^\perp$ være invariant ved f' .

14. Vis, at hvis en lineær operator f i et n -dimensionalt vektorrum med indre produkt har n egenvektorer, som danner et ortonormalt sæt, vil den være symmetrisk (d.v.s., at $f(\underline{x}) \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot f(\underline{y})$ for alle vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i rummet).

15. Med $C_2[a, b]$ betegnes vektorrummet af alle i intervallet $[a, b]$ definerede kontinuerte reelle funktioner med det indre produkt

$$\varphi \cdot \psi = \int_a^b \varphi(t) \psi(t) dt.$$

Lad der være givet en reel funktion K , som er defineret og kontinuert i kvadratet $[a, b] \times [a, b]$, og som er "symmetrisk": $K(s, t) = K(t, s)$ for $s, t \in [a, b]$. Vis, at der ved $\varphi \rightarrow \psi$, hvor

$$\psi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt,$$

defineres en lineær, begrænset og symmetrisk operator i hele rummet $C_2[a,b]$.

16. Lad $C_2[-1,1]$ have samme betydning som i øv. 15.

Med $C_2^2[-1,1]$ betegnes underrummet bestående af de i intervallet $[-1,1]$ definerede reelle funktioner med kontinuert afledet af anden orden. En lineær differential operator

$L: C_2^2[-1,1] \rightarrow C_2[-1,1]$ defineres ved

$$L\varphi(t) = D[(t^2-1)D\varphi(t)], \quad \varphi \in C_2^2[-1,1].$$

Vis, at L er symmetrisk (d.v.s., at $L\varphi \cdot \psi = \varphi \cdot L\psi$ for $\varphi, \psi \in C_2^2[-1,1]$).

17. Bestem for hver af følgende kvadratiske former en ortogonal koordinattransformation, ved hvilken den reduceres:

$$B(\underline{x}, \underline{x}) = x_1^2 - x_1x_2 \quad \underline{x} \in l_2(2, \mathbb{R})$$

$$B(\underline{x}, \underline{x}) = 5x_1^2 + 7x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 \quad \underline{x} \in l_2(2, \mathbb{R})$$

$$B(\underline{x}, \underline{x}) = x_1^2 - x_2x_3 \quad \underline{x} \in l_2(3, \mathbb{R})$$

$$B(\underline{x}, \underline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 \quad \underline{x} \in l_2(3, \mathbb{R})$$

$$B(\underline{x}, \underline{x}) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 \quad \underline{x} \in l_2(3, \mathbb{R})$$

$$B(\underline{x}, \underline{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 \quad \underline{x} \in l_2(4, \mathbb{R})$$

Angiv i hvert af de fem første tilfælde typerne keglesnit og keglesnitsflader med ligningerne

$$B(\underline{x}, \underline{x}) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

18. Lad $f : V_n \rightarrow V_n$ og $g : V_n \rightarrow V_n$ være to ombyttelige symmetriske lineære operatorer i et n -dimensionalt vektorrum V_n med indre produkt. Vis, at der findes en ortonormal basis i V_n , hvis vektorer er egenvektorer for både f og g . (Vis først, at hvert egenrum for f er invariant ved g , d.v.s., at det afbildes ind i sig selv ved g . Benyt dernæst, at restriktionen af g til et sådant egenrum også er en symmetrisk operator.)

*Vis det tilsvarende for totalkontinuerte, ombyttelige og symmetriske lineære operatorer $f : V \rightarrow V$ og $g : V \rightarrow V$, hvor V er et vektorrum med indre produkt, som har en numerabel ortonormal tilnærmelsesbasis.

19. Om en lineær operator $f : V_n \rightarrow V_n$ i et n -dimensionalt vektorrum V_n med indre produkt forudsættes, at den er symmetrisk og positiv semidefinit, hvormed menes, at den kvadratiske form $f(\underline{x}) \cdot \underline{x}$ er positiv semidefinit. Vis, at der findes en og kun een symmetrisk og positiv semidefinit operator $g : V_n \rightarrow V_n$, således at $g^2 = f$. Den betegnes med $f^{\frac{1}{2}}$. (Hver symmetrisk matrix, hvis tilhørende kvadratiske form er positiv semidefinit, har netop een "kvadratrod", som er symmetrisk, og hvis tilhørende kvadratiske form er positiv semidefinit.) (Benyt, at der findes en ortonormal basis i V_n , således at f bestemmes ved en diagonalmatrix, og for entydigheden, at en operator g af den forlangte art må være ombyttelig med f ; jfr. øv. 18.)

*Vis det tilsvarende for en totalkontinueret og positiv semidefinit symmetrisk operator $f : V \rightarrow V$ i et vektorrum V med indre produkt, som har en numerabel ortonormal tilnærmelsesbasis.

20. Lad f være en enentydig lineær afbildning af et n -dimensionalt vektorrum V_n på sig selv. Vis, at der findes en og kun een symmetrisk lineær afbildning $s : V_n \rightarrow V_n$ og en og kun een isometrisk afbildning $i : V_n \rightarrow V_n$, således at $f = s \circ i$. (Hver regulær $(n \times n)$ -matrix kan på en og kun een måde skrives som produkt af en symmetrisk med en ortogonal matrix.) (Betragt $(f \circ f')^{\frac{1}{2}}$; se øv. 19.)

21. Lad f være en symmetrisk lineær operator i et n -dimensionalt vektorrum med indre produkt og $B(\underline{x}, \underline{x}) = f(\underline{x}) \cdot \underline{x}$ den tilhørende kvadratiske form. Lad endvidere

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

være dens egenverdier, hver taget med så mange gange, som dens multiplicitet angiver. Da gælder

$$\lambda_1 = \max_{\|\underline{x}\| \leq 1} B(\underline{x}, \underline{x}), \quad \lambda_n = \min_{\|\underline{x}\| \leq 1} B(\underline{x}, \underline{x}).$$

Vis, at

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \min_{V_{i-1} \subseteq V_n} \max_{\underline{x} \in V_{i-1}} B(\underline{x}, \underline{x}) \\ &= \max_{V_{n-i} \subseteq V_n} \min_{\underline{x} \in V_{n-i}} B(\underline{x}, \underline{x}), \end{aligned} \quad i = 2, \dots, n-1,$$

hvor V_{i-1} og V_{n-i} gennemløber alle underrum i V_n af dimensionen henholdsvis $i-1$ og $n-i$.

22. En ellipsoide i det tredimensionale rum V_3 har halvakserne $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. En plan gennem centrum skærer ellipsoiden i en ellipse med halvakserne $b_1 \leq b_2$, Vis, at

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq a_3.$$

Generaliser dette til en kvadrik med ligningen $B(\underline{x}, \underline{x}) = 1$ i et n -dimensionalt vektorrum med indre produkt.

23. Der er givet en ellipsoide med halvakserne $a_1 \leq a_2 \leq a_3$.

Vis, at der findes mindst een plan gennem fladens centrum, som skærer den i en cirkel, og bestem antallet af sådanne planer. Angiv samtlige planer, som skærer ellipsoiden i en cirkel.

Gennemfør en tilsvarende undersøgelse for hyperboloiderne og en keglesnitskegle.

24. Lad $f: V_n \rightarrow V_n$ og $g: V_n \rightarrow V_n$ være to symmetriske lineære operatorer i et n -dimensionalt vektorrum med indre produkt.

Deres egenverdier betegnes henholdsvis med

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ og } \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n.$$

Om de tilhørende kvadratiske former forudsættes, at

$f(\underline{x}) \cdot \underline{x} \leq g(\underline{x}) \cdot \underline{x}$ for alle $\underline{x} \in V_n$. Vis, at $\lambda_i \leq \mu_i$ for $i = 1, \dots, n$. (Benyt øv. 21).

Fortolk dette, når $n = 3$ og begge kvadratiske former er positiv definite, som en sætning om halvakserne i to ellipsoider med fælles centrum, hvoraf den ene omslutter den anden.

25. Lad f være en begrænset lineær afbildning af et vektorrum V med indre produkt ind i sig selv. Det antages, at der findes et ortonormalsystem $\underline{e}_i$, $i \in \mathbb{N}$, og et reelt tal $\mu \neq 0$, således at følgen af vektorer $f(\underline{e}_i) - \mu \underline{e}_i$ konvergerer mod $\underline{0}$. Undersøg, om f kan være total kontinuert.

26. De begrænsede lineære afbildninger af et vektorrum med indre produkt ind i sig selv udgør med additionen og sammensætningen som kompositionsforskrifter en ring. Eftersis dette. Vis, at de total kontinuerte blandt disse afbildninger danner et ideal i denne ring.

27. Lad $f_n: V \rightarrow V$, $n \in \mathbb{N}$, og $f: V \rightarrow V$ være lineære operatorer i et vektorrum V med indre produkt. Det forudsættes, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|\underline{x}\|=1} \|f(\underline{x}) - f_n(\underline{x})\| = 0.$$

Vis, at hvis rummet V er fuldstændigt og operatorerne f_n , $n \in \mathbb{N}$, er totalkontinuerte, vil f også være totalkontinuert.

28. Om en lineær operator $f: V \rightarrow V$ i et fuldstændigt vektorrum V med indre produkt forudsættes, at den har en adjungeret $f': V \rightarrow V$. Vis, at hvis en af operatorerne f , $f' \circ f$, f' er totalkontinuert, er de to andre også totalkontinuerte.

Indeks.

<u>Abelsk</u> gruppe	I, 6, 3
absurditet	I, 1, 4
afbildning af en mængde ind i en mængde	I, 4, 1
" " " " på " "	I, 4, 6
affin afbildning	III, 8, 1
" geometri	III, 8,18
" gruppe	III, 8,11
affin-invariant	III, 8,18
affin-ækvivalente = affine mængder	III, 8,17
affinitet i planen	III, 8,14
" " rummet	III, 8,16
affinitetsakse	III, 8,14
affinitetsforhold	III, 8,15
affinitetsplanen	III, 8,16
affinitetsretning i planen	III, 8,15
" " rummet	III, 8,16
affint koordinatsystem	III, 5,2
aksiomer, incidens- og parallelitets-	III, 1
" , ordnings- og kontinuitets-	III, 3
aksonometrisk afbildning	III, 8,17
al tegn	I, 1,10
alternerende bilinearform	III,10,2
" gruppe	I, 6,17
" multilinearform	III,10,12
antisymmetrisk bilinearform	III,10,2
" multilinearform	III,10,12
" relation	I, 7,13
areal, en polygons	III,10,6
arealfaktor, en lineær eller affin afbild-	
nings	III,10,9
arealforhold	III,10,4
arealmål for parallelogrammer	III,10,1
associativ kompositionsforskrift	II, 1,2
automorfi	II, 1,11
<u>Basis</u>	III, 4,14
begyndelsespunkt	III, 4, 5
bilinearform, alternerende, antisymmetrisk	III,10, 2
binær relation	I, 7,15

billedelement	I, 4, 1
billedmængde	I, 4, 1
<u>Cramers</u> formler	III, 11, 2
cyklisk gruppe	II, 2, 3
<u>De</u> Morgans formler	I, 3, 4
definitions­mængde	I, 4, 1
delfølge	I, 4, 2
delmatrix	III, 10, 21
delmængde	I, 2, 4
Desargues' sætning	III, 1, 6
determinant	III, 10, 14
diagonal i et mængdeprodukt	I, 7, 9
diagonalmatrix	III, 7, 21
differensmængde	I, 3, 4
disjunkte mængder	I, 3, 5
disjunktion	I, 1, 4
dispositions­mængde	I, 4, 1
distributiv	II, 1, 8
distributive love i den logiske algebra	I, 1, 5
" " " mængdealgebraen	I, 3, 2
" " for kompositions­forskrifter	II, 1, 9
" " " matricer	III, 6, 7
dualitetslovene i den logiske algebra	I, 1, 5 og 11
<u>Egenrum</u>	III, 7, 17
egentlig delmængde	I, 2, 4
" lineær relation	III, 4, 8
" løsning til lineært ligningssystem	III, 4, 12
egenvektor	III, 7, 16
egen­værdi	III, 7, 16
egen­værdimultiplicitet	III, 11, 14
eksistens tegn	I, 1, 10
element, mængdes	I, 2, 1
" , matrices	III, 6, 4
elementarsymmetrisk funktion	III, 11, 18
elementfremmede mængder	I, 3, 5

elimination af parametre	III, 11, 7
endomorfi	II, 1, 11
enentydig afbildning	I, 5, 1
" korrespondance	I, 5, 2
enhedsmatrix	III, 6, 8
ens orienterende vektorer	III, 3, 1
" " parallelogrammer	III, 10, 5
" " trekanter	III, 10, 6
" " parallelotoper	III, 10, 24
" " tetraedre	III, 10, 27
<u>Fermats</u> "lille" sætning (II, 2, øv. 16), rettelse	II, 2, 19
fixelement	I, 6, 2
fixpunkt	III, 8, 11
foreningsmængde af to mængder	I, 3, 1
" " vilk. mange mængder	I, 3, 3
forkortningsregler	I, 6, 5; II, 1, 5
forskydningsretning, translations	III, 2, 3
fortegn, permutations	I, 6, 16
fuldstændig transformationsgruppe	I, 6, 1
funktion	I, 4, 1
funktionsværdi	I, 4, 1
fællesmængde for to mængder	I, 3, 1
" " vilk. mange mængder	I, 3, 3
følge af elementer	I, 4, 2
<u>Generel</u> lineær gruppe	III, 6, 10
gennemsnit = fællesmængde	I, 3, 1
geometrisk vektor	III, 4, 5
graf, relations	I, 7, 7
grundparallelogram	III, 10, 5
grundvektor	III, 5, 1
gruppe	II, 2, 1
" , abelsk	I, 6, 3
" , abstrakt	II, 2, 13
" , additiv, af restklasser	II, 2, 14
" , alternerende	I, 6, 17
" , cyklisk	II, 2, 3

gruppe, generel lineær	III, 6,10
" , ikosaeder-	II, 2, øv. 18
" , kommutativ	I, 6,3
" , oktaeder-	I, 6, øv. 14
" , permutations-	I, 6,1
" , speciel lineær = unimodular	III,10,26
" , symmetrisk	I, 6,1
" , tetraeder	I, 6,18
" , transformations-	I, 6,1
gruppens orden	I,6,17; II, 2,8
gruppetavle	I, 6,17
<u>Homogen lineær ligning</u>	III, 4,11
homomorf afbildning = homorfi	II, 1,6 og 9
homoteti	III, 8,13
homotetiske mængder	III, 8,18
hoveddiagonal i kvadratisk matrix	III, 7,20
hovedunderdeterminant	III,11,16
højre sideklasse	II, 2,5
" translation i gruppe	II, 2,19
<u>Idempotent (konjunktion)</u>	I, 1,3
" (disjunktion)	I, 1,4
" afbildning	I, 4,5
" (parallelprojektion)	III, 1,8
identisk afbildning	I, 4,4
implikation	I, 1,6
incidensaksiomer	III, 1,2
indeks, undergruppens	II, 2,8
induceret lineær vektorfunktion	III, 8,1
inhomogen lineær ligning	III, 4,12
inklusion	I, 3,4
invariant undergruppe	II, 2,6
invers afbildning	I, 5,1-2
" matrix	III, 6,9
inverst element	II, 1,4
involution	I, 4,5
involutorisk (negation)	I, 1,3
involutorisk afbildning	I, 4,5
isomorf afbildning = isomorfi	II, 1,6 og 10
isomorfi mellem grupper	II, 2,6

<u>Kanonisk afbildning</u>	I, 7,1
karakteristiske funktion, delmængdes	I, 4,3
" polynomium, matrices	III,11,13
" rødder, "	III,11,13
kartesisk produkt = mængdeprodukt	I, 7,1 og 3
kerne ved homomorf afbildning	II, 2,9
" " lineær "	III, 7,4
klasseinddeling af mængde	I, 3,5
kombination	I, 2,6
kommutatativ gruppe	I, 6,3
" kompositionsforskrift	II, 1,3
" lov for konjunktionen	I, 1,3
" " " disjunktionen	I, 1,4
komplekst talrum	III, 4,7
komplement, mængdes	I, 3,1
" af en mængde relativ til en anden	I, 3,4
" , elements, i en determinant	III,10,20
komplementærmængde	I, 3,1
kompositionsforskrift	II, 1,2
konjunktion	I, 1,3
konstant afbildning	I, 4,1
kontinuets mægtighed	I, 5,5
kontinuitetsaksiom	III, 3,6
konveks mængde	III, 5,10
konvekst hylster	III, 5,11
koordinater (i vektorrum)	III, 6,1
" , affine	III, 5,2
koordinatsystem (i vektorrum)	III, 6,1
" , affint	III, 5,1
Kronecker-symbol	III, 6,8
kvadratisk matrix	III, 6,9
kvantor	I, 1,10
<u>Lagranges sætning</u>	II, 2,8
lige affinitet	III, 8,15
" mægtige mængder	I, 5,2
ligedannede matricer	III, 7,14
ligning for en linie	III,11,9
" " " plan	III,11,10

linearkombination (af vektorer)	III, 4,3
lineær afbildning	III, 7,1
" differentialoperator	III, 7,4
" gruppe, generel	III, 6,10
" " ; speciel	III,10,26
" operator	III, 7,1
" parameterfremstilling for en linie	III, 5,5
" " " plan	III, 5,8
" relation (mellem vektorer)	III, 4,8
" vektorfunktion	III, 7,1
" " , induceret	III, 8,1
lineært afhængige vektorer	III, 4,8
" ligningssystem, homogent	III, 4,11
" " , inhomogent	III, 4,12
" rum = vektorrum	III, 2,13
" uafhængige vektorer	III, 4,8
linie, orienteret	III, 3,2
liniebundet	III, 1,7
linieknippe	III, 1,7
" " , orienteret	III, 3,2
linies ligning	III,11,9
" parameterfremstilling	III, 5,5
liniestykke	III, 5,15
lukket polygon	III,10,6
" polyeder	III,10,28
<u>Masse</u> midtpunkt	III, 5,12
matrix	III, 6,3
" , diagonal-	III, 7,21
" , invers	III, 6,9
" , kvadratisk	III, 6,9
" , regulær	III, 6,9
" , singulær	III, 7,20
" , trekants-	III,10,16
matrixmultiplikation	III, 6,6
maximalsæt af vektorer	III, 4,14
midtpunkt, skalarsystems	III, 5,7
modsat ordningsrelation	III, 3,4
modsat orienterede vektorer	III, 3,1

modsat orienterede parallelogrammer	III,10,5
" " trekanter	III,10,6
" " parallelotoper	III,10,24
" " tetraedre	III,10,27
" vektor	III,2,12; III, 4,2
multilinearform	III,10,12
multiplicitet, egenværdi-	III,7,17; III,11,14
" , rod-	III,11,14
mægtighed, kontinuets	I, 5,5
mængde	I, 2,1
" af delmængder	I, 2,5
" , tom	I, 2,3
mængdeafbildning	I, 4,5
mængdeprodukt	I, 7,1 og 3
<u>N</u> aturlig (= kanonisk) afbildning	I, 7,1
negation	I, 1,2
neutralt element i gruppe	I, 6,4
" " for kompositionsforskrift	II, 1,3
normal (= invariant) undergruppe	II, 2,6
nulløsning	III, 4,12
nulmatrix	III, 6,6
nulpunkt	III, 4,5
nulrum (= kerne ved en lineær afbildning)	III, 7,4
nulvektor	III,2,12 og 14; III, 4,2
<u>O</u> ktaedergruppe	I, 6, øv. 14
ombyttelige afbildninger	I, 4,4
" matricer	III, 6,9
omvendt (= invers) afbildning	I, 5,1
orden, gruppes	I,6,17; II, 2,8
" , gruppeelements	II, 2,12
ordenstro afbildning	II, 1,10
ordningsaksion	III, 3,1
ordningsrelation	I, 7,14
organiseret mængde	II, 1,10
orienteret linie	III, 3,2

orienteret plan	III, 10, 5
" parallelknippe	III, 3, 2
" parallelogram	III, 10, 5
" parallelotop	III, 10, 23
" polyederflade	III, 10, 28
" polygon	III, 10, 6
" tetraeder	III, 10, 27
" trekant	III, 10, 6
orienteringsbevarende afbildning	III, 10, 26
originalmængde	I, 4, 6
overdækning af mængde	I, 3, 5
overskudsmængde	I, 3, 4

<u>Parallelle linier</u>	III, 1, 1
" planer	III, 1, 2
parallelaksiom	III, 1, 2
parallelbundet af linier	III, 1, 7
" " planer	III, 1, 9
parallelepiped	III, 5, 16
" , orienteret	III, 10, 26
parallelforskydning = translation	III, 2, 1
parallelknippe	III, 1, 7
parallelkoordinatsystem	III, 5, 2
parallelogram	III, 5, 16
" , orienteret	III, 10, 5
parallelotop	III, 10, 10
" , orienteret	III, 10, 23
parallelprojektion	III, 1, 8 og 9
parameterfremstilling for en linie	III, 5, 5
" " " plan	III, 5, 8
parametre, elimination af	III, 11, 7
partiel (=delvis) ordningsrelation	I, 7, 14
parvis disjunkte mængder	I, 3, 5
permutation	I, 4, 1; I, 6, 10
" , lige, ulige	I, 6, 16
permutations fortegn	I, 6, 16
permutationsgruppe	I, 6, 1
plan, ligning for en	III, 11, 10
" , orienteret	III, 10, 5
" , parameterfremstilling for en	III, 5, 8
polyederflade	III, 10, 28
polyederflades volumen	III, 10, 28-29
polygon	III, 10, 6
polygons areal	III, 10, 6-7
polynomium, karakteristisk	III, 11, 13
potens, afbildnings	I, 4, 4
" , gruppeelements	II, 2, 2
potensregler for afbildninger	I, 4, 7; I, 6, 7-8
" " translationer	III, 2, 7 og 10
" i gruppe	II, 2, 2
produkt af matricer	III, 6, 6
" " mængder	I, 7, 1

<u>Rang</u> , affin afbildnings	III, 8, 4
" , lineær afbildnings	III, 7, 10
" , matrices	III, 7, 10, 13-14
" , vektormængdes	III, 4, 14
reduktionsdeterminant	III, 11, 12
reelt talrum	III, 4, 7
refleksiv relation	I, 7, 9
regulær matrix	III, 6, 9
regulær-ækvivalente matricer	III, 7, 14
regulært element	II, 1, 4
relation	I, 7, 6
" , antisymmetrisk	I, 7, 13
" , binær	I, 7, 15
" , invers	I, 7, 7
" , ordnings-	I, 7, 14
" , refleksiv	I, 7, 9
" , symmetrisk	I, 7, 9
" , transitiv	I, 7, 10
" , ækvivalens-	I, 7, 10
relations graf	I, 7, 7
repræsentant for sideklasse	II, 2, 5
" " ækvivalensklasse	I, 7, 13
restklasse	II, 2, 8
restriktion, afbildnings, funktions	I, 4, 1
rod, karakteristisk	III, 11, 13
" , multiplicitet af	III, 11, 13
rodmultiplicitet af egenværdi	III, 11, 14
rum, punkt-	III, 1, 1
" , tal-	III, 4, 7
" , vektor-	III, 4, 1
række (i en matrix)	III, 6, 3-4
rækkematrix	III, 6, 4
rækkerang, matrices	III, 7, 13
<u>Sammenhørende orienteringer</u>	III, 10, 27
sammensætning af afbildninger	I, 4, 3
selvmodsigelse	I, 1, 4
sideklasse	II, 2, 5
sideunderrum	III, 4, 13
singulær matrix	III, 7, 20

skalar	III, 4, 1; III, 5,11
skalarsystem	III, 5,11
skalarsystems midtpunkt	III, 5,12
skævsymmetrisk bilinearform	III,10, 2
" multilinearform	III,10,12
speciel lineær gruppe	III,10,26
spektrum	III, 7,20
spor, matrices	III,11,16
stedvektor	III, 5,11
symmetrisk gruppe	I, 6, 1
" relation	I, 7, 9
søjle (i en matrix)	III, 6, 3-4
søjlematrix	III, 6, 4
søjlerang, matrices	III, 7,10
<u>Tallegeme</u>	III, 2,13
tautologi	I, 1, 4
tensor (= lineær afbildning)	III, 7, 1
tetraeder	III, 5,16
" , orienteret	III,10,27
tetraedergruppe	I, 6,18
tetraeders volumen	III,10,27
tom mængde	I, 2, 3
total (= fuldstændig) ordningsrelation	I, 7,14
transformation	I, 6, 1
transformationsgruppe	I, 6, 1
transitiv relation	I, 7,10
translation	III, 2, 1
" , højre, i gruppe	III, 2,19
" , venstre, i gruppe	III, 2,19
translationsretning	III, 2, 3
transponeret matrix	III, 6, 5
transposition (speciel permutation)	I, 6,12
trekant	III, 5,15
" , orienteret	III,10, 6
trekants areal	III,10, 6
trekantsmatrix	III,10,16
tyngdepunkt	III, 5,12
tællelig (=numerabel) mængde	I, 5, 3

<u>Udsagn</u>	I, 1, 2
udskiftningssætning	III, 4,16
uendelig mængde	I, 2, 2
ulige permutation	I, 6,16
underdeterminant	III,10,21
undergruppe	I, 6, 1; II, 2, 2 og 6
" , normal (= invariant)	II, 2, 6
undergruppes indeks	II, 2, 8
underrum (i vektorrum)	III, 2,14; III, 4, 3
unimodular gruppe	III,10,26
universalmængde	I, 3, 1
 <u>Vandermonde-determinant</u>	 III,10,22
vektor	III, 2,11; III, 4, 1
" , geometrisk	III, 2,11; III, 4, 5
" , modsat	III, 2,12; III, 4, 2
" , nul-	III, 2,12; III, 4, 2
" , sted-	III, 5,11
vektorfunktion, lineær	III, 7, 1
" , " , induceret	III, 8, 1
vektorrum	III, 2,13; III, 4, 1
" , orienteret	III,10,24
vektorrumms dimension	III, 4,14
vektors koordinater	III, 5, 1
venstre sideklasse	II, 2, 4
" translation i gruppe	II, 2,19
vindskæve linier	III, 1, 4
volumen, polyederflades	III,10,28-29
" , totæders	III,10,27
volumenfaktor	III,10,25 og 30
volumenmål for parallelotoper	III,10,10
volumentro afbildninger	III,10,26 og 30
 <u>Wronski-determinant</u>	 III,10, øv. 29
 <u>Ægte delmængde</u>	 I, 2, 4
ækvivalensklasse	I, 7,13
ækvivalensrelation	I, 7,10
ækvivalente (=lige mægtige) mængder	I, 5, 2

Rettelser.

III, 8, 10, linie 6-5 f.n. læs: $\varphi(0), \varphi(X), f\varphi(\overrightarrow{OX})$ i stedet for $(0), (X), f(\overrightarrow{OX})$.

III, 8, øv. 7, linie 2 læs: E_1 på E'_1 i stedet for E_1 ind i E'_1 .

III, 10, 2, linie 1 læs: $= F(\underline{u}_1 + \lambda \underline{u}_2, \underline{u}_2) =$ i stedet for $= F(\underline{u}_1 + \lambda \underline{u}_2, \underline{u}_1) =$.

III, 10, 3, linie 3 læs: $F(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ i stedet for $f(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$;

linie 4 læs: $\underline{u}_2 \underline{u}_{22}$ i stedet for $\underline{u}_2, \underline{u}_{22}$.

III, 10, 11, sidste linie læs: $\lambda' \underline{e}$ og $\lambda'' \underline{e}$ i stedet for $'\underline{e}$ og $''\underline{e}$.

III, 10, 12, linie 5-4 f.n. skal være:

$$\begin{aligned} & F(\dots, \underline{u}_i + \lambda \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_j, \dots) \\ &= F(\dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots) + \lambda F(\dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_j, \dots). \end{aligned}$$

III, 10, 19, linie 4 læs: $\delta_{|i}$ i stedet for $=|i$.

III, 10, øv. 7, linie 3 f.m. læs: $= -\frac{1}{6} F(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{PQ})$ i stedet for $= \frac{1}{6} F \dots$.

III, 10, øv. 24: det tredje element i determinantens næstsidste række skal være $\frac{1}{(m-3)!}$ i stedet for $\frac{1}{(n-1)!}$.

III, 10, øv. 29, sidste linie læs: (Bemyt øv. 28) i stedet for $(\dots 27)$.

III, 11, 3, linie 4 f.m. skal være

$$x_{ii} = \frac{\det(\hat{\underline{a}}_1, \dots, \hat{\underline{a}}_{i-1}, \hat{\underline{b}}, -\hat{\underline{a}}_{r+1}, \dots, -\hat{\underline{a}}_m, \hat{\underline{a}}_{i+1}, \dots, \hat{\underline{a}}_r)}{\det(\hat{\underline{a}}_1, \dots, \hat{\underline{a}}_r)}$$

III, 11, 8, linie 6 f.n. læs $(w_1, w_2) \neq (0, 0)$ i stedet for $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$.

III, 11, øv. 3. Tilføj efter matricem: idet de komplekse tals legene lægges til grund.