Matematik H 2

ANALYSE OG OPTIMERING

1999

Indhold

ISBN 87-91180-00-7

TALFØLGER, RÆKKER OG KOMPLEKSE TAL

Ved Tage Gutmann Madsen, omredigeret til HHK af Gerd Grubb.

§1. De reelle tal

Det er helt afgørende for den matematiske analyse, at det er de reelle tal, der er lagt til grund. Det særegne ved de reelle tal fremfor f.eks. de rationale er, at $\mathbb{R}$ har supremumegenskaben (mere herom nedenfor). Herpå beror egenskaberne ved kontinuerte funktioner og med dem hele differential- og integralregningen, såvel som den videregående matematiske analyse.

På dette sted vil vi opstille en fuldstændig liste over de reelle tals grundlæggende egenskaber, fuldstændig i den forstand, at enhver egenskab ved de reelle tal følger heraf. Det giver os et helt fast grundlag. Og det er praktisk at have listen stående, når vi i §5 skal indføre de komplekse tal.

Vi går ud fra, at de naturlige tal $\mathbb{N}$, de hele tal $\mathbb{Z}$ og rationale $\mathbb{Q}$ er kendt, og opstiller så den nævnte liste. Den kaldes et **aksiomsystem for de reelle tal** eller en **aksiomatisk karakterisering af de reelle tal,** idet de anførte grundegenskaber kaldes **aksiomer.**

Aksiomatisk karakterisering af de reelle tal.

De reelle tal er en mængde $\mathbb{R}$, som indeholder $\mathbb{Q}$. I $\mathbb{R}$ er defineret to **kompositioner** (regneoperationer), **addition** $(+)$ og **multiplikation** $(\cdot)$, som er en udvidelse af kompositionerne i $\mathbb{Q}$, og således at følgende aksiomer (grundregler) er opfyldt:

(1.1) $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}: \quad (x + y) + z = x + (y + z).$

(1.2) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad x + y = y + x.$

(1.3) $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x + 0 = x.$

(1.4) $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, (-x) \in \mathbb{R}: \quad x + (-x) = 0.$

(1.5) $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}: \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$

(1.6) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad x \cdot y = y \cdot x.$

(1.7) $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x \cdot 1 = x.$

(1.8) $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists\, \frac{1}{x} \in \mathbb{R}: \quad x \cdot \frac{1}{x} = 1\,.$

(1.9) $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$

Reglerne (1.1) og (1.2) kaldes henholdsvis den **associative** og **kommutative** regel for additionen, og tilsvarende betegnes reglerne (1.5) og (1.6) for multiplikationen. Samspillet mellem de to kompositioner følger den **distributive** regel (1.9). Ofte udelades $\cdot$ for multiplikationen.

Man efterviser let entydigheden af **modsat** element $-x$ til $x \in \mathbb{R}$ og af **reciprokt** element $\frac{1}{x}$ til $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Herefter kan **subtraktion** (-1) og **division** $(/)$ indføres, karakteriseret ved

$$\begin{aligned} x - y &= x + (-y) \quad &&\text{for} \quad x, y \in \mathbb{R}, \\ x/y &= x \cdot \tfrac{1}{y} \quad &&\text{for} \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,. \end{aligned}$$

Endvidere er der i $\mathbb{R}$ defineret en **total ordning, mindre end eller lig** $(\leq)$, som er en udvidelse af ordningen i $\mathbb{Q}$, og således at følgende aksiomer er opfyldt:

(1.10) $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \implies x + z \leq y + z.$

(1.11) $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \wedge 0 \leq z \implies x \cdot z \leq y \cdot z\,.$

Naturligvis skriver vi også $y \geq x$ i stedet for $x \leq y$, og $x < y$, når $x \leq y \wedge x \neq y$, samt $y > x$ i stedet for $x < y$.

For fuldstændighedens skyld skal vi præcisere, at aksiomerne for en total ordning ($\leq$) på $\mathbb{R}$ kræver, at

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \forall\, x, y \in \mathbb{R}: & x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y, \\ \text{(ii)} & \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}: & x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z, \\ \text{(iii)} & \forall\, x, y \in \mathbb{R}: & x \leq y \vee y \leq x\,. \end{array}$$

Nu følger et aksiom, der sikrer, at udvidelsen fra $\mathbb{Q}$ til $\mathbb{R}$ ikke er unødigt omfattende:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N}: \qquad n > x\,. \tag{1.12}$$

Det kaldes sædvanligvis **Arkimedes' aksiom** efter den store græske matematiker (187–212 f.Kr.), skønt æren rettere tilkommer Eudoxos (ca. 380 f.Kr.). Hos grækerne forekommer det i en geometrisk form.

Ved hjælp af (1.12) kan vi vise, at de rationale tal $\mathbb{Q}$ ligger **overalt tæt** i $\mathbb{R}$, dvs.

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \ \text{ med } \ a < b\ \exists\, x \in \mathbb{Q}: \quad a < x < b\,.$$

Bevis. Lad $a, b \in \mathbb{R}$ med $a < b$. Vi kan uden indskrænkning antage $a > 0$. (I modsat fald erstatter vi a og b med $a + n$ og $b + n$, hvor $n \in \mathbb{N}$ i henhold til (1.12) er valgt, så $n > -a$.) Vi vælger nu $q \in \mathbb{N}$ i henhold til (1.12), således at

$$q > \frac{1}{b-a}\,, \quad \text{dvs.} \ \frac{1}{q} < b - a\,.$$

Videre findes, stadig ifølge (1.12), naturlige tal p, hvor

$$p > qa\,, \quad \text{dvs.} \ a < \frac{p}{q}\,.$$

Lad p' være det mindste sådanne $p \in \mathbb{N}$. Så er $\frac{p'}{q} = x \in \mathbb{Q}$, hvad vi søger, thi

$$a < \frac{p'}{q}\,, \quad \text{men} \ \frac{p'-1}{q} \leq a\,, \quad \text{altså} \ \frac{p'}{q} \leq a + \frac{1}{q} < b\,.$$

$\square$

En ikke tom mængde $A \subseteq \mathbb{R}$ siges at være **opad begrænset** *(i $\mathbb{R}$), hvis der findes et $b \in \mathbb{R}$, således at $\forall\, a \in A\colon a \leq b$. Ethvert sådant b kaldes et* **overtal** *for A. Tilsvarende siges A at være* **nedad begrænset,** *hvis der findes et* **undertal** *b for A, dvs. et $b \in \mathbb{R}$ således at $\forall\, a \in A\colon b \leq a$.*

Med denne sprogbrug kan Arkimedes' aksiom formuleres

$$\mathbb{N} \ \text{er ikke opad begrænset i} \ \mathbb{R}\,. \tag{1.12$'$}$$

Thi

$$(\neg\ 1.12) \iff \exists\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\colon n \leq x \iff \mathbb{N} \text{ er opad begrænset.}$$

De hidtidige aksiomer fremhæver ikke $\mathbb{R}$ fremfor f.eks. $\mathbb{Q}$. De gælder jo alle for $\mathbb{Q}$. Der skal altså endnu føjes noget til, noget som udtrykker, at $\mathbb{R}$ løst sagt er "uden huller". Vi vælger "supremumegenskaben". Det bliver vort sidste aksiom:

(1.13) *Enhver ikke tom, opad begrænset mængde $A \subseteq \mathbb{R}$ har et mindste overtal.*

Dette overtal (hvis entydighed er klar) kaldes **Øvre grænse** *eller* **supremum** *for A og betegnes* $\sup A$. *Anvendelse af* (1.13) *på* $\{-x \mid x \in A\}$ *viser, at en ikke tom, nedad begrænset delmængde A af $\mathbb{R}$ har et største undertal. Det kaldes* **nedre grænse** *eller* **infimum** *for A og betegnes* $\inf A$.

Aksiom (1.13) kaldes undertiden **Kontinuitetsaksiomet** for $\mathbb{R}$. Vi understreger endnu en gang, at gyldigheden af dette aksiom er ganske afgørende for, at Matematisk analyse kan opbygges i en tilfredsstillende form (jf. indledningen til denne §). Udvidelsen fra $\mathbb{Q}$ til $\mathbb{R}$ er således en nødvendighed.

Som vigtige eksempler, hvor man udnytter Kontinuitetsaksiomet, kan nævnes den egenskab, at kontinuerte funktioner har sammenhængende værdimængde, og ligeledes definitionen af integralet af en kontinuert funktion.

Der findes en række andre egenskaber, som lige så fuldt udtrykker de reelle tals "kontinuitet", dvs. at "$\mathbb{R}$ er uden huller", i den præcise forstand, at de kunne være brugt som sidste aksiom i stedet for supremumegenskaben (1.13), se §4. Bemærkning 1.2. (Et trivielt eksempel: Vi kunne have hæftet os ved infimum i stedet for supremum.)

Bemærkning 1.1. Arkimedes' aksiom (1.12) er overflødigt i vort aksiomsystem, idet det kan bevises ud fra de øvrige. Det kan altså slettes blandt aksiomerne og opføres blandt sætningerne om $\mathbb{R}$.

Beviset for (1.12) kan føres indirekte. Vi antager altså $\neg$(1.12), dvs. at $\mathbb{N}$ er opad begrænset i $\mathbb{R}$, og skal udlede en modstrid. Vi benytter (1.13) og sætter $\sup \mathbb{N} = b$. Idet $b - 1 < b = \sup \mathbb{N}$, er $b - 1$ ikke et overtal for $\mathbb{N}$. Der findes altså et $n \in \mathbb{N}$, hvor $n > b - 1$. Så er $n + 1 > b$, men det er i strid med, at b er et overtal for $\mathbb{N}$. □

De udvidede reelle tal.

I nogle sammenhænge er det praktisk at føje to nye elementer $+\infty$ og $-\infty$ til mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal. Vi taler da om **de udvidede reelle tal**

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} .$$

Ofte skrives $+\infty$ blot som ∞. De nye elementer indgår på følgende måde, hvad angår ordning, addition og multiplikation:

$$\begin{array}{lll}
-\infty < \infty, & \forall\, x \in \mathbb{R}:\ -\infty < x, & \forall\, x \in \mathbb{R}: x < \infty \\
\forall\, x \in [-\infty, \infty[: & x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty & \\
\forall\, x \in]-\infty, \infty] & x + \infty = \infty + x = \infty & \\
\forall\, x \in]0, \infty]: & x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty, & x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty \\
\forall\, x \in [-\infty, 0[: & x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty, & x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty \\
 & 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0, & 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0 .
\end{array}$$

Bemærk, at $\infty + (-\infty)$ og $(-\infty) + \infty$ forbliver udefineret.

En differens $y - x$ tolkes som $y + (-x)$. F.eks. er da $\infty - \infty$ ikke defineret. Endelig sættes

$$\forall x \in \mathbb{R} \colon \frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon \frac{\infty}{x} = \frac{1}{x} \cdot \infty, \ \frac{-\infty}{x} = \frac{1}{x}(-\infty),$$

medens $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$ og $\frac{-\infty}{-\infty}$ ikke defineres, ligesom $\frac{x}{0}$ ikke defineres for noget $x \in \mathbb{R}^*$.

Bemærkning 1.2. Regningen med ∞ og $-\infty$ er fastsat under inspiration af grænseovergang med summer, produkter, differenser og kvotienter (jf. Sætning 2.12 nedenfor). En undtagelse er produkterne $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$, som ud fra nævnte synspunkt burde lades udefineret. Det er imidlertid hensigtsmæssigt specielt i mål- og integralteorien at give disse produkter værdien 0. Foreløbig kan vi i det mindste bemærke, at ethvert produkt xy med $x, y \in \mathbb{R}^*$ har en mening, og at multiplikationen i $\mathbb{R}^*$ er associativ og kommutativ.

Det kunne måske være fristende at sætte $\infty + (-\infty) = (-\infty) + \infty = 0$ og dermed give $x + y$ en mening for alle $x, y \in \mathbb{R}^*$. Men det ville være ufornuftigt, idet additionen dog ikke ville være associativ (sammenhold f.eks. $(\infty + (-\infty)) + 1$ med $\infty + ((-\infty) + 1)$, ligesom den distributive lov ikke ville gælde (sammenhold f.eks. $(2 + (-1)) \cdot \infty$ med $2 \cdot \infty + (-1) \cdot \infty$).

Hvad regneoperationer angår, er og bliver $\mathbb{R}^*$ særdeles klodset at arbejde med. I $\mathbb{R}$ må man som bekendt passe på ikke uforvarende at bortforkorte 0 i en ligning, i $\mathbb{R}^*$ er der meget andet at tage sig i agt for.

I talområdet $[0, \infty] = \{0\} \cup \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, som vi ofte skal regne i, går alt dog glat, så længe vi kun adderer og multiplicerer: Begge regneoperationer er her defineret uindskrænket, begge er associative og kommutative, og den distributive lov gælder.

Fordelen ved $\mathbb{R}^*$ fremfor $\mathbb{R}$ er, at en række resultater i tilknytning til de reelle tals ordning får en meget enkelt formulering i $\mathbb{R}^*$.

Kontinuitetsaksiomet (1.13) får således følgende simple udseende i $\mathbb{R}^*$:

(1.13∗) Enhver ikke tom delmængde A af $\mathbb{R}^*$ har et mindste overtal i $\mathbb{R}^*$.

Dette kaldes **øvre grænse** eller **supremum** for A (i $\mathbb{R}^*$) og betegnes $\sup A$. Analogt for **nedre grænse** eller infimum.

I praksis må man dog ofte dele op og bruge følgende **karakterisering af supremum,** hvor vi forudsætter $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\sup A = b \\
&\quad \iff (\forall x \in A \colon x \leq b) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \colon x > b - \varepsilon) \\
&\sup A = +\infty \iff \forall c \in \mathbb{R} \exists x \in A \colon x > c \\
&\sup A = -\infty \iff A = \{-\infty\}\,.
\end{aligned}$$

Øvelse 1.3. Gennemtænk selv denne karakterisering, og formuler en tilsvarende karakterisering af infimum. Overvej også, at ovenstående definition af f.eks. $\sup A$ (inden for $\mathbb{R}^*$) er en udvidelse af den tidligere definition (inden for $\mathbb{R}$).

Der advares mod forveksling af $\sup A$ og største element $\max A$, resp. $\inf A$ og $\min A$. Dette gælder lige fuldt for delmængder $A \neq \emptyset$ af $\mathbb{R}^*$. Største og mindste element $\max A$ og $\min A$ eksisterer **ikke i almindelighed,** derfor arbejder vi med de mere komplicerede begreber $\sup A$ og $\inf A$, som **altid** findes. Sammenhængen er, også i $\mathbb{R}^*$:

$$A \text{ har et største element} \iff \sup A \in A\,,$$

og i bekræftende fald er $\max A = \sup A$. Analogt for $\min A$ og $\inf A$.

Bemærkning 1.4. Lad os kalde en mængde $M \subseteq \mathbb{R}^*$ **konveks**, hvis

$$\forall\, x, x' \in M \text{ med } x < x' \colon [x, x'] \subseteq M\,.$$

Der gælder da: De konvekse delmængder af $\mathbb{R}^*$, der indeholder mere end et punkt, er netop intervallerne på $\mathbb{R}^*$.

Bevis. Et interval på $\mathbb{R}^*$ er af formen $[a,b]$, $[a,b[\,$, $]a,b]$ eller $]a,b[$ med $a < b, a, b \in \mathbb{R}^*$. I alle fire tilfælde er det klart, at der er tale om en konveks mængde.

Antag omvendt, at M er en konveks delmængde af $\mathbb{R}^*$, der indeholder mere end et punkt. Vi definerer $a, b \in \mathbb{R}^*$ ved

$$a = \inf M, \qquad b = \sup M$$

og bemærker, at $a < b$. Der er nu fire muligheder:

(i) $a, b \in M$. I så fald er det klart, at $M = [a,b]$.

(ii) $a \in M$, $b \notin M$. I så fald er $M = [a,b[\,$. Thi det er klart, at $M \subseteq [a,b[\,$. Og omvendt: Er $x \in [a,b[\,$, så er $x < b$, og derfor findes et $m \in M$, så at $m > x$. Da M er konveks, er $x \in [a,n] \subseteq M$. Dette viser, at $[a,b[\, \subseteq M$.

I de resterende tilfælde (iii) $a \notin M$, $b \in M$, resp. (iv) $a \notin M$, $b \notin M$, indses, at $M =]a,b]$, henh. $M =]a,b[\,$. □

NB. I $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$ gælder ikke et tilsvarende resultat. Der er langt flere $\mathbb{Q}^*$-konvekse mængder end intervaller af $\mathbb{Q}^*$.

§2. Reelle talfølger

Reelle talfølger og punktfølger.

En funktion eller afbildning φ med mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal som definitionsmængde kaldes også en **følge**. *Funktionsværdien eller billedet svarende til vilkårligt $n \in \mathbb{N}$ kaldes* **det** *n-te* **element** *i følgen og betegnes gerne x_n, a_n el.lign., i stedet for $\varphi(n)$. Følgen φ skrives tilsvarende $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, evt. blot (x_n), eller mere malende $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, evt. blot $x_1, x_2, \ldots$.*

Er følgens elementer reelle tal, taler man om en **reel talfølge** eller en følge i $\mathbb{R}$, tilhører de et talrum $\mathbb{R}^k$ eller det geometriske rum, siger man **punktfølge**. Elementerne i en følge kan også være funktioner; man taler da om en **funktionsfølge.**

Eksempel 2.1. Nogle simple eksempler på talfølger er

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ldots \qquad (x_n = n), \tag{2.1}$$

$$1,\ -2,\quad 3,\ -4,\ldots \qquad (x_n = (-1)^{n-1}n), \tag{2.2}$$

$$1,\quad \tfrac{1}{2},\quad \tfrac{1}{3},\quad \tfrac{1}{4},\ldots \qquad (x_n = \tfrac{1}{n}), \tag{2.3}$$

$$1,\quad 0,\quad 1,\quad 0,\ldots \qquad (x_n = \tfrac{1}{2}(1+(-1)^{n-1})), \tag{2.4}$$

$$2,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\ldots \qquad (x_n = \text{ det } n\text{-te primtal})\,. \tag{2.5}$$

En mere raffineret talfølge er

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots , \tag{2.6}$$

hvis elementer præcist udgør $\mathbb{Q} \cap]0,1]$, hvert skrevet på uforkortelig form $\frac{p}{q}$ med $p, q \in \mathbb{N}$.

Eksempel 2.2. Følger kan været givet **rekursivt,** hvor det n-te element ved en **rekursionsformel** er bestemt ud fra det (eller de) nærmest foregående samt evt. nummeret n. Det (eller de) første element(er) i følgen må fastlægges explicit. F.eks. er **fakultetfølgen**

$$1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ldots \qquad (x_n = n!)$$

givet ved udgangselementet $x_1 = 1$ og rekursionsformlen

$$x_n = n x_{n-1}, \qquad n \geq 2\,.$$

Med udgangselementerne $F_1 = F_2 = 1$ og rekursionsformlen

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \quad n \geq 3\,, \tag{2.7}$$

fås følgen af såkaldte **Fibonacci tal:**

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ldots\ .$$

Konvergente talfølger og punktfølger har vor særlige interesse:

Definition 2.3. *En følge (x_n) i $\mathbb{R}$ siges at have $a \in \mathbb{R}$ som* **grænseværdi** *(eller* **grænsepunkt***), og vi skriver*

$$x_n \to a \text{ for } n \to \infty, \quad \text{kort } x_n \to a\,,$$

hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \colon |x_n - a| < \varepsilon \text{ for alle } n > N\,. \tag{2.8}$$

(Sagt med ord: For ethvert positivt ε findes et nummer N, så at $|x_n - a| < \varepsilon$ for alle n større end dette nummer. Billedligt talt: Hver gang "fjenden" præsenterer et $\varepsilon > 0$, kan vi "afparere" dette med et N, for hvilket der gælder at $|x_n - a| < \varepsilon$ for $n > N$.)

Når der er en grænseværdi (i $\mathbb{R}$), siges følgen at være **konvergent.** *Ellers kaldes den* **divergent.**

Ordret samme definition bruges med $\mathbb{R}^k$ i stedet for $\mathbb{R}$, blot taler man da helst om **grænsepunkt** *eller* **grænsevektor, og $|x_n - a|$ læses som afstanden mellem x_n og a, også betegnet $\|x_n - a\|$, hvor $\|y\| = (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2)^{1/2}$.**

I Eksempel 2.1 er talfølgen (2.3) konvergent med grænseværdien 0, de øvrige er divergente.

Bemærk, at i Definition 2.3 kan "$< \varepsilon$"erstattes med "$\leq \varepsilon$", og "$> N$" med "$\geq N$", uden at virkningen ændres.

Når en følge (x_n) i $\mathbb{R}^k$ og $a \in \mathbb{R}^k$ er givet, er $(|x_n - a|)$ en reel talfølge. Det er klart, at

$$x_n \to a \iff |x_n - a| \to 0\,.$$

For to følger (x_n) og (y_n), der har en "fælles hale", dvs. hvor $\exists\, M, N \in \mathbb{N}\, \forall\, p \in \mathbb{N} \colon x_{M+p} = y_{N+p}$, gælder naturligvis

$$x_n \to a \iff y_n \to a\,.$$

Enhver konvergent følge (x_n) er **begrænset**, dvs. mængden $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er begrænset. Thi når $N \in \mathbb{N}$ afparerer $\varepsilon = 1$ i henhold til definitionen på $x_n \to a$, er

$$|x_n| \leq M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|, |a| + 1\} \text{ for alle } n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.9}$$

Derimod er en begrænset følge naturligvis ikke i almindelighed konvergent. (Eksempel: talfølgen (2.4) i Eksempel 2.1.)

Bemærkning 2.4. Lad os sammenholde Definition 2.3 med definitionerne vedr. grænseovergang for funktioner f på $\mathbb{R}$:

Man siger, at $f(x) \to A$ for $x \to a$ (i ord: $f(x)$ går mod A for x gående mod a), når

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : |f(x) - A| < \varepsilon \text{ for } |x - a| < \delta. \tag{2.10}$$

Funktionen f siges at være **kontinuert i** a, når $f(x) \to f(a)$ for $x \to a$. Funktionen f siges at være **kontinuert,** når f er kontinuert i ethvert punkt a.

Man siger, at $f(x) \to A$ for $x \to \infty$, når

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{R} : |f(x) - A| < \varepsilon \text{ for } x > N. \tag{2.11}$$

Den sidste definition bliver til Definition 2.3, når definitionsmængden for f indskrænkes fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{N}$.

For følger i $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^k$ gælder:

Sætning 2.5 ENTYDIGHED AF GRÆNSEPUNKT. *En følge (x_n) i $\mathbb{R}^k$ kan højst have ét grænsepunkt.*

Et eventuelt grænsepunkt kan da omtales som grænsepunkt**et** eller grænseværdi**en**. Vi betegner det

$$\lim_{n\to\infty} x_n, \quad \text{kort: } \lim x_n\,.$$

Bevis. Idet vi antager $x_n \to a' \in \mathbb{R}^k$ og $x_n \to a'' \in \mathbb{R}^k$, gælder det om at vise, at $a' = a''$, dvs. $|a' - a''| = 0$. Og det fås, hvis vi kan vise, at $|a' - a''| < \varepsilon$ for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

For vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ udnytter vi, at der findes et $n \in \mathbb{N}$, således at

$$|x_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ og } |x_n - a''| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

thi så følger

$$|a' - a''| \le |a' - x_n| + |x_n - a''| < \varepsilon\,.$$

Vi kan blot vælge $n > \max\{N', N''\}$, hvor N' og N'' afparerer $\frac{\varepsilon}{2}$ i henhold til definitionen af konvergens mod a' og a''. □

Sætning 2.6. KOORDINATVIS GRÆNSEOVERGANG. *Lad $x_n = (x_{n1}, \cdots, x_{nk})$ være en følge i $\mathbb{R}^k$, og lad $a = (a_1, \cdots, a_k) \in \mathbb{R}^k$. Der gælder at*

$$x_n \to a \textit{ for } n \to \infty \iff x_{ni} \to a_i \textit{ for } n \to \infty, \textit{ for hvert } i = 1, \cdots, k.$$

Bevis. Bemærk, at

$$|x_n - a| = ((x_{n1} - a_1)^2 + \cdots + (x_{nk} - a_k)^2)^{1/2}$$

for hvert n. Da således

$$|x_{ni} - a_i| \le |x_n - a| \text{ for hvert } i,$$

er " $\Longrightarrow$ " oplagt: For et givet $\varepsilon > 0$ findes et N, så $|x_n - a| < \varepsilon$ for $n > N$; det samme N kan bruges på følgen x_{ni}, for hvert i.

Vi viser " $\Longleftarrow$ " således: Til et givet $\varepsilon > 0$ findes for hvert i et N_i, så at $|x_{ni} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ for $n > N_i$. Men så er

$$|x_n - a| < \left(\frac{\varepsilon^2}{k} + \cdots + \frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{1/2} = \varepsilon$$

for $n > N$, hvor $N = \max\{N_1, \cdots, N_k\}$. □

Sætning 2.7. REGNING MED GRÆNSEVÆRDIER. *Antag, at*

$$x_n \to x \in \mathbb{R}^k, \quad y_n \to y \in \mathbb{R}^k \quad \textit{og} \quad a_n \to a \in \mathbb{R}\,.$$

Da gælder:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && x_n \pm y_n \to x \pm y,\\
&\text{(ii)} && x_n \cdot y_n \to x \cdot y,\\
&\text{(iii)} && |x_n| \to |x|,\\
&\text{(iv)} && a_n x_n \to ax\,.
\end{aligned}$$

Hvis $a \neq 0$, gælder desuden

$$\begin{aligned}
&\text{(v)} && \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}\,,\\
&\text{(vi)} && \frac{x_n}{a_n} \to \frac{x}{a}\,,
\end{aligned}$$

når vi negligerer de højst endelig mange n, hvor $a_n = 0$.

Bevis. For $k = 1$ går beviserne således:

Til (i) bemærkes, at

$$|(x_n \pm y_n) - (x \pm y)| = |(x_n - x) \pm (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|.$$

Dette er $< \varepsilon$, når N vælges så stor, at $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ og $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $n > N$.

Til (ii) (og (iv)) bemærkes, at

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy|\\
&\leq |x_n|\,|y_n - y| + |x_n - x|\,|y|\\
&\leq M|y_n - y| + (|y| + 1)|x_n - x|,
\end{aligned}$$

hvor M vælges som i (2.9). Dette er $< \varepsilon$ for $n > N$, når N vælges så stor, at $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2(|y|+1)}$, $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$, for $n > M$.

Til (iii) bemærkes, at da

$$\begin{aligned}
|x_n| &= |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x|,\\
|x| &= |x - x_n + x_n| \leq |x_n - x| + |x_n|,
\end{aligned}$$

er

$$\big||x| - |x_n|\big| \leq |x_n - x|, \tag{2.12}$$

hvoraf udsagnet fås.

Til (v) vælger vi først $N_0 \in \mathbb{N}$, så at $|a_n - a| \leq \frac{1}{2}|a|$ for $n > N_0$ og dermed, ved (2.12),

$$|a_n| - |a| \geq -|a_n - a| \geq -\tfrac{1}{2}|a|,$$

så at

$$|a_n| \geq \frac{1}{2}|a|, \quad \frac{1}{|a_n|} \leq \frac{2}{|a|}.$$

Så er

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a_n a}\right| \leq \frac{2}{|a|^2}|a_n - a|,$$

som er $< \varepsilon$, når $N \geq N_0$ vælges så stor at $|a_n - a| < \frac{\varepsilon |a|^2}{2}$ for $n > N$.

(vi) følger nu af (ii), når vi sætter $y_n = \frac{1}{a_n}$.

For $k > 1$ fås (i), (iv) og (vi) ved brug af de forrige resultater koordinatvis. Til (ii) og (iii) benytter vi, idet

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k \quad \text{(det sædvanlige skalarprodukt i } \mathbb{R}^k\text{)},$$
$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = (x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{1/2} \quad \text{(den euklidiske norm på } \mathbb{R}^k\text{)},$$

at ulighederne

(2.13) $$|x \cdot y| \leq |x|\,|y| \quad \text{(Cauchy-Schwarz' ulighed)}$$

(2.14) $$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{(trekantsuligheden)}$$

gælder for $x, y \in \mathbb{R}^k$. (2.13) ses ved udregning af $(x \cdot y)^2$ og $(x \cdot x)(y \cdot y)$ og sammenligning. (2.14) følger så af, at

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + y \cdot y + 2x \cdot y \\ &\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x|\,|y| = (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

Ved brug af (2.14) ses, at

$$\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x|$$

gælder som i tilfældet $k = 1$, hvorefter beviset for (ii) gennemføres som ovenfor. Ved brug af (2.13) generaliseres ovenstående bevis for (iii) til tilfældet $k > 1$. □

Bemærkning 2.8. Når vi om en funktion $f\colon [1, \infty[\to \mathbb{R}^k$ ved, at $f(x) \to c \in \mathbb{R}^k$ for $x \to \infty$, så vil specielt $f(n) \to c$ for $n \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$, dvs. følgen

$$f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$$

er konvergent med grænsepunkt c. Det gælder, fordi konvergensegenskaben bevares, når x indskrænkes til den mindre mængde $\mathbb{N}$, jf. Bemærkning 2.4.

Eksempel 2.9. For $n \to \infty$ har vi fra kendskabet til de tilsvarende funktioner af $x \in \mathbb{R}_+$, at

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && b^n \to 0 \text{ når } -1 < b < 1,\\
&\text{(ii)} && \frac{1}{n^a} \to 0 \text{ når } a > 0,\\
&\text{(iii)} && \frac{\log n}{n^a} \to 0 \text{ når } a > 0,\\
&\text{(iv)} && \frac{n^a}{b^n} \to 0 \text{ når } a > 0,\ b > 1\,.
\end{aligned}$$

Sætning 2.10. *Lad*

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \to a$$

være en konvergent følge i $\mathbb{R}^k$, lad følgens elementer x_n såvel som grænsepunktet a tilhøre mængden $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ være **kontinuert** *i a. Da gælder*

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots \to f(a)\,.$$

Som oplagte eksempler i tilfældet $k = m = 1$ kan vi nævne, at da $\frac{1}{n} \to 0$ for $n \to \infty$, følger

$$\tan \tfrac{1}{n} \to \tan 0 = 0, \quad \sqrt[n]{2} = 2^{1/n} \to 2^0 = 1, \text{ osv.}$$

Sætningen er blot et specialtilfælde af grænseovergang med sammensat afbildning, men lad os alligevel udføre beviset.

Bevis. Til vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tænkes valgt et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ for alle } x \in A \text{ med } |x - a| < \delta\,.$$

Til det valgte δ kan nu findes et $N \in \mathbb{N}$, således at $|x_n - a| < \delta$ for alle $n > N$.

For hvert $n > N$ er så $x_n \in A$, $|x_n - a| < \delta$, og dermed

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon\,.$$

□

Eksempel 2.11.
1) Talfølgen $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}} = 1, \sqrt{2}\,, \sqrt[3]{3}, \dots$ er konvergent med grænseværdien 1,

$$\sqrt[n]{n} \to 1 \text{ for } n \to \infty\,.$$

Thi $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = \exp(\frac{1}{n}\log n)$. Og da $\frac{1}{n}\log n \to 0$, og $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuert i 0, gælder

$$\exp(\tfrac{1}{n}\log n) \to \exp 0 = 1 \text{ for } n \to \infty\,.$$

2) For hvert $x \in \mathbb{R}$ er talfølgen $((1+\frac{x}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent med grænseværdien $e^x = \exp x$,

$$(1+\tfrac{x}{n})^n \to e^x \text{ for } n \to \infty\,.$$

Thi for $n > -x$ er $\log(1+\frac{x}{n})^n = n\log(1+\frac{x}{n})$, dvs.

$$(1+\tfrac{x}{n})^n = \exp(n\log(1+\tfrac{x}{n}))\,.$$

Da nu

$$n\log(1+\tfrac{x}{n}) = x\frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} \to x\log'(1) = x\,,$$

— regningen forudsætter $x \neq 0$, men resultatet gør det ikke — og da $\exp\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ er kontinuert i x, gælder

$$\exp(n\log(1+\frac{x}{n})) \to \exp x\,.$$

Følgende sætning viser, at kontinuitet kan karakteriseres ved følger, i stedet for ved ε, δ-definitionen.

Sætning 2.12. *Lad $f\colon A \mapsto \mathbb{R}^m$ være defineret i en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $a \in A$. Da gælder*

$$f \text{ er kontinuert i } a \iff f(x_n) \to f(a) \text{ for enhver følge } (x_n) \text{ i } A, \text{ hvor } x_n \to a\,.$$

Bevis. Sætning 2.11 udtrykker netop rigtigheden af “ $\Longrightarrow$ ”. Den modsatte implikation “ $\Longleftarrow$ ” viser vi på kontraponeret form. Vi antager altså, at f ikke er kontinuert i a, og skal så godtgøre eksistensen af en følge (x_n) i A, hvor $x_n \to a$, medens $(f(x_n))$ ikke har grænsepunktet $f(a)$. Antagelsen er, at der findes et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, som ikke kan afpareres:

$$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \forall\delta \in \mathbb{R}_+ : \ |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon \text{ for mindst et } x \in A \text{ med } |x-a| < \delta\,.$$

For et sådant ε betragter vi $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, og tænker os valgt $x_n \in A$ med $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, hvor $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Det giver en følge (x_n) i A med $x_n \to a$, hvor det ikke gælder, at $f(x_n) \to f(a)$. ☐

Medens det hidtil ikke gjorde nogen forskel, om vi betragtede følger i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^k$, har følgende definition naturligvis kun mening for $k = 1$.

Definition 2.13. *For en følge (x_n) i $\mathbb{R}$ skriver man*

$$x_n \to +\infty \text{ for } n \to \infty, \qquad \text{kort } x_n \to +\infty,$$

hvis

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \ x_n > a \quad \text{for alle } n > N\,,$$

henh.

$$x_n \to -\infty \text{ for } n \to \infty\,, \qquad \text{kort } x_n \to -\infty\,,$$

hvis

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \ x_n < a \quad \text{for alle } n > N\,.$$

Her som andre steder tillader man sig at skrive ∞ i stedet for $+\infty$, altså $x_n \to \infty$ i stedet for $x_n \to +\infty$.

I Eksempel 2.1 gælder $x_n \to \infty$ for følgerne (2.1) og (2.5).

NB. Følger (x_n) i $\mathbb{R}$, hvor $x_n \to \infty$ eller $x_n \to -\infty$, kaldes dog **divergente** (i $\mathbb{R}$).

For følger (x_n) i $\mathbb{R}_+$ (henh. $\mathbb{R}_-$) gælder åbenbart

$$x_n \to +\infty \iff \frac{1}{x_n} \to 0 \quad (\text{henh. } x_n \to -\infty \iff \frac{1}{x_n} \to 0)\,.$$

Ved vi om en funktion $f\colon [1,\infty[\, \to \mathbb{R}$, at $f(x) \to \infty$ (henh. $-\infty$) for $x \to \infty$, da gælder specielt $f(n) \to \infty$ (henh. $-\infty$) for $n \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$, dvs.

$$f(1), f(2), \dots, f(n), \dots \to \infty \quad (\text{henh. } -\infty)\,.$$

Eksempel 2.14. For $n \to \infty$ har vi

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && \log n \to \infty, \\ &\text{(ii)} && b^n \to \infty \text{ når } b > 1, \\ &\text{(iii)} && n^a \to \infty \quad \text{når } a > 0. \end{aligned}$$

Størrelsesorden.

Definition 2.15. *Lad f og g være funktioner på et interval $[a,\infty[$.*

Man skriver, at

$$f(x) = O(g(x)) \text{ for } x \to \infty$$

(sagt med ord: f er store O af g for x gående mod uendelig), når der findes en konstant M og et $x_0 \geq a$, så $g(x) \neq 0$ for $x \geq x_0$ og

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M \text{ for } x \geq x_0.$$

Man skriver, at

$$f(x) = o(g(x)) \text{ for } x \to \infty$$

(sagt med ord: f er lille o af g for x gående mod uendelig), når $g(x) \neq 0$ for tilstrækkeligt store x, og

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \text{ for } x \to \infty.$$

Lignende begreber bruges for et intervalendepunkt:

Definition 2.16. *Lad f og g være funktioner på et interval $[a,b[$. Man skriver, at*

$$f(x) = O(g(x)) \text{ for } x \to b,$$

når der findes en konstant M og et $x_0 \in [a,b[$ så $g(x) \neq 0$ for $x \in [x_0,b[$ og

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M \text{ for } x \geq x_0.$$

Man skriver, at

$$f(x) = o(g(x)) \text{ for } x \to b,$$

når $g(x) \neq 0$ for $x \geq x_0$ for et vist $x_0 \in [a,b[$, og

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \text{ for } x \to b.$$

Meget lignende som Definition 2.15 definerer vi for talfølgen:

Definition 2.17. *Lad (x_n) og (y_n) være talfølger. Man siger, at*

$$x_n = O(y_n) \text{ for } n \to \infty$$

når der findes en konstant M og et nummer N, så $y_n \neq 0$ for $n \geq N$ og

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \leq M \text{ for } n \geq N.$$

Man siger, at

$$x_n = o(y_n) \text{ for } n \to \infty,$$

når $y_n \neq 0$ for $n \geq N$ for et vist N, og

$$\frac{x_n}{y_n} \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Hvis $x_n = f(n)$ og $y_n = g(n)$, hvor $f(x)$ og $g(x)$ er defineret for $x \in [1, \infty[$, og vi har et udsagn som i Definition 2.15 om størrelsesforholdet mellem f og g for $x \to \infty$, så gælder det tilsvarende udsagn i Definition 2.17 om (x_n) og (y_n), jvf. Bemærkning 2.8. F.eks. kan udsagnene i Eksempel 2.9 skrives:

(i) $b^n = o(1)$ for $n \to \infty$, når $|b| < 1$.

(ii) $\dfrac{1}{n^a} = o(1)$ for $n \to \infty$, når $a > 0$.

(iii) $\log n = o(n^a)$ for $n \to \infty$, når $a > 0$.

(iv) $n^a = o(b^n)$ for $n \to \infty$, når $a > 0$, $b > 1$.

Talfølger i $\mathbb{R}^*$.
Skønt det er talfølger i $\mathbb{R}$, der har vor egentlige interesse, er det i nogle sammenhænge teknisk set en fordel at arbejde med talfølger i $\mathbb{R}^* = [-\infty, \infty]$. Vi accepterer da talfølger som f.eks.

$$\infty, 0, -\infty, 0, \infty, 0, -\infty, \dots \,. \tag{2.15}$$

For talfølger (x_n) i $\mathbb{R}^*$ opretholder vi ordret definitionerne ovenfor af

$$x_n \to a \in \mathbb{R}, \quad x_n \to +\infty \text{ og } x_n \to -\infty\,.$$

I alle tre tilfælde vil vi sige, at (x_n) har en grænseværdi i $\mathbb{R}^*$ og benytte betegnelsen $\lim x_n$. Men bemærk: Siger vi, at en følge (x_n) i $\mathbb{R}$ er konvergent, menes **altid** konvergent i $\mathbb{R}$. Her er nogle nyttige regler.

Sætning 2.18. *Lad* (x_n), (y_n), (z_n) *være følger i* $\mathbb{R}^*$ *og lad* $x, y \in \mathbb{R}^*$.

1. *Antag, at* $x_n \le y_n \le z_n$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$. *Da gælder:*
$$(x_n \to y \ \wedge \ z_n \to y) \implies y_n \to y\,.$$
2. *En speciel variant heraf er følgende:*
Antag, at $z_n \ge 0$ *og* $|y_n| \le z_n$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$. *Da gælder:*
$$z_n \to 0 \implies y_n \to 0\,.$$
3. *Antag, at* $x_n \to x$ *og* $y_n \to y$. *Da gælder:*
$$(\forall n : x_n \le y_n) \implies x \le y\,.$$
4. *Specielle varianter heraf er følgende:*
Antag, at $x_n \to x$. *Da gælder for* $a, b \in \mathbb{R}^*$*:*
$$(\forall n : x_n \le b) \implies x \le b, \qquad (\forall n : x_n \ge a) \implies x \ge a\,.$$

Øvelse 2.19. Bevis disse regler. Vink: I 1. deles i tilfældene $y \in \mathbb{R}$, $y = \infty$, $y = -\infty$. I 3. kontraponeres, hvorpå man deler i tilfælde.

ADVARSEL til regel 3. og 4. Som trivielle modeksempler viser, gælder der ikke tilsvarende regler med skarpe ulighedstegn.

I $\mathbb{R}^*$ er der naturligt nok komplikationer med "regning med grænseværdier". (Sætning 2.7* nedenfor.) Der er jo allerede problemer med selve regneoperationerne. Til gengæld er bl.a. Sætning 2.21* væsentlig enklere, end om vi havde holdt os til $\mathbb{R}$.

Ved **sumfølgen** af to følger (x_n) og (y_n) i $\mathbb{R}^*$ forstås følgen $(x_n + y_n)$, **forudsat** at $x_n + y_n$ er defineret for ethvert $n \in \mathbb{N}$. Tilsvarende defineres **differensfølgen** $(x_n - y_n)$, **produktfølgen** $(x_n y_n)$ og **kvotientfølgen** (x_n/y_n), stadig **under forudsætning af**, at $x_n - y_n$, $x_n y_n$ og x_n/y_n er defineret for ethvert $n \in \mathbb{N}$.

Sætning 2.7*. *Lad* (x_n) *og* (y_n) *være følger i* $\mathbb{R}^*$, *for hvilke* $x_n \to x \in \mathbb{R}^*$ *og* $y_n \to y \in \mathbb{R}^*$. *Da gælder*
$$|x_n| \to |x|\,,$$
for sum-, differens- og kvotientfølgen gælder
$$x_n + y_n \to x + y, \quad x_n - y_n \to x - y, \quad x_n/y_n \to x/y\,,$$
forudsat *disse følger og de påståede grænseværdier er defineret, og for produktfølgen gælder*
$$x_n y_n \to xy\,,$$
forudsat *xy ikke har formen* $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$ *eller* $(-\infty) \cdot 0$.

Bevis. Vi vil nøjes med at vise multiplikationsreglen. Vi må skelne mellem tre tilfælde:

(i) $x, y \in \mathbb{R}$. Her er vi i virkeligheden på "hjemmebane", idet også $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, blot n er tilpas stor. Vi har så

$$x_n y_n - xy = x_n(y_n - y) + (x_n - x)y$$

og dermed

$$|x_n y_n - xy| \leq |x_n|\,|y_n - y| + |x_n - x|\,|y|\,.$$

Her er faktoren $|x_n|$ mindre bekvem end det faste $|y|$, men den kan erstattes med $|x|+1$, så snart $|x_n - x| < 1$. Da er jo

$$|x_n| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|\,.$$

Lad nu $\varepsilon \in]0, 2]$ være givet. Da $x_n \to x$ og $y_n \to y$, findes $N_x, N_y \in \mathbb{N}$, således at

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon/2}{|y| + 1} \quad \text{for} \quad n > N_x$$

og

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon/2}{|x| + 1} \quad \text{for} \quad n > N_y\,.$$

For hvert $n > N = \max\{N_x, N_y\}$ er $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, således at den indledende regning gælder, og desuden $|x_n - x| < \varepsilon/2 \leq 1$, således at vurderingen kan fortsættes

$$|x_n y_n - xy| \leq (|x| + 1)|y_n - y| + |x_n - x|\,|y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Hermed er vist, at $x_n y_n \to xy$. (Sml. s.II.2.3. Hvorfor er det nok at betragte $\varepsilon \in]0, 2]$?)

(ii) $x \in \mathbb{R}_+, y = \infty$ (tilfældene $x \in \mathbb{R}_+, y = -\infty$ og $x \in \mathbb{R}_-, y = \pm\infty$ vises analogt). Lad $a \in \mathbb{R}_+$ være givet, og sæt $\varepsilon = \frac{x}{2}$. Da $x_n \to x$ og $y_n \to +\infty$, findes $N_x, N_y \in \mathbb{N}$, således at

$$x_n \in \,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\, = \,]\varepsilon, 3\varepsilon[\quad \text{for} \quad n > N_x, \qquad y_n > \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{for} \quad n > N_y\,.$$

For $n > N = \max\{N_x, N_y\}$ gælder da $x_n y_n > a$. Hermed er det ønskede vist. (Hvorfor er det nok at betragte $a \in \mathbb{R}_+$?)

(iii) $x = y = +\infty$ (tilfældene $x = y = -\infty$ og $x = -y = \pm\infty$ vises analogt). Lad $a \in \mathbb{R}_+$ være givet. Da $x_n \to \infty$ og $y_n \to \infty$, findes $N_x, N_y \in \mathbb{N}$, således at

$$x_n > \sqrt{a} \quad \text{for} \quad n > N_x, \qquad y_n > \sqrt{a} \quad \text{for} \quad n > N_y\,.$$

For $n > N = \max\{N_x, N_y\}$ gælder da $x_n y_n > a$. Hermed er det ønskede vist. □

Monotone talfølger.

En meget speciel, men vigtig type reelle talfølger er de monotone. De udmærker sig ved yderst enkle konvergensforhold, jf. Sætning 2.21 og 2.21* nedenfor.

Definition 2.20. *En følge* (x_n) *i* $\mathbb{R}^*$ *kaldes* **voksende***, hvis* $x_n \leq x_{n+1}$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$*. Den kaldes* **strengt voksende,** *hvis* $x_n < x_{n+1}$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

Definitionen på en **aftagende,** henh. **strengt aftagende** følge i $\mathbb{R}^*$ er ganske analog. En følge i $\mathbb{R}^*$ kaldes **monoton,** hvis den er voksende eller aftagende, og den kaldes **strengt monoton,** hvis den er strengt voksende eller strengt aftagende.

Vi holder os først til $\mathbb{R}$:

Sætning 2.21. *En voksende følge (x_n) i $\mathbb{R}$ er konvergent, blot den er opad begrænset. Og der gælder da*

$$\lim x_n = \sup x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Triviel tilføjelse: *For en voksende følge (x_n) i $\mathbb{R}$, der* **ikke** *er opad begrænset, gælder $x_n \to +\infty$.*

Bevis for Sætning 2.21. Vi påviser konvergensen ved brug af definitionen. Det kræver, at vi har en kandidat til grænseværdien. Og den får vi fra Kontinuitetsaksiomet (1.13): Når følgen (x_n) er opad begrænset, dvs. mængden $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er opad begrænset, eksisterer øvre grænse $c = \sup A = \sup x_n \in \mathbb{R}$.

Lad nu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet. Da $c - \varepsilon$ ikke er et overtal for A, findes der et $N \in \mathbb{N}$, hvor $x_N > c - \varepsilon$. For $n \geq N$ gælder så

$$x_n \geq x_N > c - \varepsilon\,.$$

Men for alle $n \in \mathbb{N}$ er jo $x_n \leq \sup A = c$. Altså gælder for $n \geq N$, at

$$x_n \in \left]c - \varepsilon, c\right] \subset \left]c - \varepsilon, c + \varepsilon\right[\,.$$

Hermed er vist, at $x_n \to c = \sup A$.

Bevis for tilføjelse. Lad $a \in \mathbb{R}$ være givet. Da a ikke er et overtal for $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, findes der et $N \in \mathbb{N}$, hvor $x_N > a$. For $n \geq N$ gælder så $x_n \geq x_N > a$.

I $\mathbb{R}^*$ får vi følgende simple formulering:

Sætning 2.21*. *Enhver voksende følge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ har en grænseværdi i $\mathbb{R}^* = [-\infty, \infty]$, nemlig*

$$\lim x_n = \sup x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Sætning 2.21* dækker både Sætning 2.21 og tilføjelsen.

Vil man starte beviset forfra, har vi nu den forenkling, at $c = \sup x_n \in \mathbb{R}^*$ uden videre eksisterer (aksiom 1.13*). Alligevel må vi skelne mellem tre tilfælde:

(i) $c = \sup x_n \in \mathbb{R}$. Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet og fortsæt ordret som i beviset for Sætning 2.18.

(ii) $c = \sup x_n = +\infty$. Beviset for tilføjelsen benyttes ordret.

(iii) $c = \sup x_n = -\infty$. Her er $x_n = -\infty$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og dermed gælder $x_n \to -\infty$.

For aftagende følger gælder naturligvis analoge resultater.

Eksempel 2.22. Lad følgen (x_n) være givet rekursivt ved udgangselementet $x_1 = 0$ og rekursionsformlen

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}\,, \quad n \geq 1\,.$$

Vi vil vise, at $(x_n) = 0,\ 1,\ \sqrt{2}\,,\ \sqrt{1+\sqrt{2}}\,, \dots$ er konvergent, og finde grænseværdien.

Rekursionsformlen kan skrives $x_{n+1} = f(x_n)$, hvor funktionen $t \mapsto f(t) = \sqrt{1+t}\,$, $t \in [-1, \infty[\,$, afbilder halvlinien $[0, \infty[$ ind i sig selv. Det er dermed klart, dels at rekursionen "bliver ved at løbe", så der virkelig er fastlagt en følge (x_n) i $\mathbb{R}$, dels at $x_n \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi vil først vise, hvorledes man **under forudsætning af,** at (x_n) er konvergent, kan bestemme grænseværdien $x \in \mathbb{R}$. Fremgangsmåden beror på, at følgen er givet rekursivt.

Antag altså $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Idet $x_n \geq 0$ for alle n, er også $x \geq 0$. (Sætning 2.18 regel 4.) Og da f er kontinuert, specielt i x, fås af Sætning 2.10, at $f(x_n) \to f(x)$, dvs.

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} \to \sqrt{1 + x}\,.$$

Men følgen $(x_{n+1}) = x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots$ har jo samme grænseværdi x som følgen (x_n), dvs. $x_{n+1} \to x$. Altså er

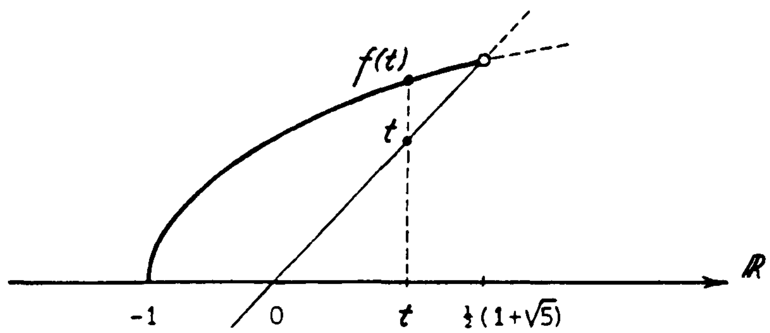
$$\sqrt{1 + x} = x$$

og dermed $1 + x = x^2$, hvorfor x må være et af tallene $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$, $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\,)$. Da $x \geq 0$, må det være det sidste.

Hermed har vi vist, at **hvis** (x_n) er konvergent, så er grænseværdien $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\,)$. Men om (x_n) faktisk er konvergent, ved vi endnu ikke. Det kan vi imidlertid indse ved Sætning 2.21:

Bemærk (jf. figur), at

$$-1 \leq t < f(t) < \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\,) \quad \text{for} \quad -1 \leq t < \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\,).$$



Da $x_1 = 0$, $x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$, fremgår dels, at $x_n \in [-1, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\,)[$ for alle $n \in \mathbb{N}$, dels at $x_n < x_{n+1}$, således at (x_n) er (opad) begrænset og strengt voksende og dermed konvergent.

Hermed er godtgjort, at $x_n \to \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\,)$.

Når $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en given punktfølge i $\mathbb{R}^k$, og

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_p < \cdots$$

er en voksende følge af naturlige tal, kan vi danne en ny følge $(x_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$ ved at udtage elementerne med numre $n_1, n_2, \cdots$, det kaldes en **delfølge** af den oprindelige følge.

Man har somme tider brug for følgende begreb:

Definition 2.23. *Et punkt $x \in \mathbb{R}^k$ siges at være et* **fortætningspunkt** *for en given punktfølge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $\mathbb{R}^k$, når $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ har en delfølge $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$, som konvergerer mod x.*

Sætning 2.24. *Et punkt x er fortætningspunkt for (x_n), netop når der gælder:*

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : |x - x_n| < \varepsilon \ \textit{ for uendelig mange } \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Bevis. Hvis $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ er en delfølge af $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ som konvergerer mod x, så opfylder x (2.16) ovenfor, da der for hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes $P \in \mathbb{N}$ så

$$|x - x_{n_p}| < \varepsilon \ \text{ for } \ p > P.$$

Antag omvendt, at x opfylder (2.16). Vi anvender udsagnet for $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$.

Til $\varepsilon = \frac{1}{p}$ findes en uendelig delmængde M_p af $\mathbb{N}$, så $|x - x_n| < \frac{1}{p}$ for $n \in M_p$. Det er klart, at

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_p \supseteq \cdots$$

for $p \in \mathbb{N}$. Da hver af mængderne M_p har uendeligt mange elementer, vil $\{j \in M_p \mid j > a\}$ stadig være en uendelig mængde, ligegyldigt hvor stor a vælges. Nu vælges $n_1 \in M_1$, og dernæst $n_2 \in M_2$ med $n_2 > n_1$, og så videre successivt, så vi får en følge

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_p < \cdots$$

med $n_p \in M_p$. Så er $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ en delfølge af $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, som konvergerer mod x.

$\square$

§3. Uendelige rækker

Uendelige rækker i $\mathbb{R}$ og i $\mathbb{R}^k$.

Givet en følge $(a_n) = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ i $\mathbb{R}$.

Vi vil se på, om man på rimelig måde kan definere en sum af følgens elementer. Først udskiftes betegnelser og navn for at markere, at vi har spørgsmålet om en mulig addition af elementerne a_n i tankerne. Som ny betegnelse bruges

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{eller} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dots ,$$

og man siger, at der foreligger en **uendelig række** eller blot en **række.** Man kalder a_n for rækkens n'te **led.**

Vi begynder så at addere fra en ende af: Til a_1 lægger vi a_2, derpå a_3, osv. Ganske vist når vi aldrig vejs ende, men der fastlægges dog en følge (s_n), givet ved

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ \cdots,\ s_{n+1} = s_n + a_{n+1}, \cdots \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man kalder

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

for det n'te **afsnit** af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, og $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kaldes rækkens **afsnitsfølge.**

Definition 3.1. *En række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med led $a_n \in \mathbb{R}$ siges at være* **konvergent** *eller* **divergent,** *efter som den tilsvarende afsnitsfølge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent eller divergent. Er rækken konvergent, kaldes grænseværdien $s = \lim s_n$ for rækkens* **sum.**

Ovenstående kan læses ordret med $\mathbb{R}^k$ i stedet for $\mathbb{R}$.

Bemærk, at det kun er visse rækker, vi tillægger en sum. Bemærk også, at leddenes rækkefølge spiller en rolle i definitionen. Vi skal senere se, at rækkefølgen kan være afgørende både for spørgsmålet om konvergens eller divergens og for den eventuelle sum.

NB. For en konvergent række tillader man sig at skrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{eller} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dots$$

i to betydninger:

1. Som betegnelse for rækken (som ovenfor).
2. Som betegnelse for rækkens sum. Man skriver altså

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \dots .$$

Eksempel 3.2. Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

er konvergent med sum 1, thi det n'te afsnit er

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

hvorfor $s_n \to 1$.

P.S. Undersøgelsen gik så let, fordi vi ved en simpel omskrivning $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ af leddene kunne gøre rækken "**teleskopisk**". Pas på! Find i sådanne tilfælde s_n i stedet for kritikløst at lade leddene i parenteserne i selve rækkeudtrykket gå ud mod hinanden. F.eks. er rækken $(1-2)+(2-1)+(1-2)+\ldots$ divergent (og ikke konvergent med sum 1).

Et nyttigt resultat til afsløring af "grove" tilfælde af divergens:

Sætning 3.3. *En* **nødvendig** *betingelse for, at rækken* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er konvergent, er, at* $a_n \to \mathbf{0}$.

Bevis. Antag, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent. Så er følgerne $(s_n) = s_1, s_2, \ldots$ og $(s_{n+1}) = s_2, s_3, \ldots$ konvergente med samme grænse s, hvorfor differensfølgen $(s_{n+1} - s_n) = (a_{n+1})$ er konvergent med grænseværdien $s - s = \mathbf{0}$. □

Betingelsen er **ikke** tilstrækkelig. F.eks. er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ divergent, skønt $1/\sqrt{n} \to 0$. Vi har nemlig

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} 1/\sqrt{j} \geq \sum_{j=1}^{n} 1/\sqrt{n} = \sqrt{n}, \text{ så at } s_n \to \infty. \tag{3.1}$$

Eksempel 3.4. For $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ betragtes den **uendelige kvotientrække**

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + \cdots + aq^n + \ldots,$$

hvor vi for bekvemmeligheds skyld har benyttet $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ som **indeksmængde** i stedet for $\mathbb{N}$.

For $a = 0$ er det nulrækken, som klart er konvergent med sum 0.

For $a \neq 0$ er rækken konvergent med sum

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}, \quad \textit{når } |q| < 1, \tag{3.2}$$

men divergent, når $|q| \geq 1$.

I tilfældet $|q| < 1$ benytter vi den velkendte udregning

$$\begin{aligned}(x-y)(x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n) &= x^{n+1} + x^n y + \cdots + xy^n \\ &\quad - x^n y - \cdots - xy^n - y^{n+1} \\ &= x^{n+1} - y^{n+1},\end{aligned}$$

der medfører, at

$$x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y} \text{ når } x \neq y. \tag{3.3}$$

Den giver, for $x = 1$ og $y = q$, at

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} aq^j = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to a\frac{1-0}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

I tilfældet $|q| \geq 1$ går leddene aq^n ikke mod 0.

Eksempel 3.5. Achilleus og skildpadden. På besøg i Athen omkring 450 f.Kr. stillede Zenon fra Elea filosofferne over for følgende paradoks:

> "Hvis Achilleus og en skildpadde løber om kap, og skildpadden har et forspring, da kan Achilleus aldrig indhente den. Thi medens han løber fra sit startpunkt til skildpaddens, har skildpadden bevæget sig et vist stykke. Og medens Achilleus løber dette stykke, bevæger skildpadden sig videre, og således i det uendelige. Altså kan Achilleus løbe uendeligt uden at overhale skildpadden."

Lad os sige, at Achilleus løber p gange så hurtigt som skildpadden, $p > 1$, og at denne starter med forspringet a. Faktisk indhenter Achilleus da skildpadden efter at have løbet strækningen $x = a/(1-p^{-1})$, som er løsning til ligningen $x = p(x-a)$. Men lad os se, hvad vi kommer til ved at følge Zenons tankegang: Først løber Achilleus distancen a og skildpadden stykket ap^{-1}, dernæst løber Achilleus ap^{-1} og skildpadden ap^{-2}, osv. For Achilleus bliver det i alt

$$a + ap^{-1} + \cdots + ap^{-n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} ap^{-n}.$$

Her er ganske vist uendelig mange led, men summen er dog ikke ∞, som Zenon siger, men $a/(1-p^{-1})$, jf. Eksempel 3.4. Samtidig bevæger skildpadden sig stykket

$$ap^{-1} + ap^{-2} + \cdots + ap^{-n-1} + \cdots = ap^{-1}/(1-p^{-1}).$$

Forskellen er $a/(1-p^{-1}) - ap^{-1}(1-p^{-1}) = a$. Achilleus indhenter altså netop skildpadden efter at have løbet distancen $a/(1-p^{-1})$. Vor håndtering af summer med en uendelig følge af led har således ført til det rette resultat.

Definition 3.1 fører spørgsmål vedrørende rækkers konvergens og eventuelle sum tilbage til deres afsnitsfølger. Mange resultater om følger kan derfor umiddelbart overføres til rækker. Således gælder

Sætning 3.6. *Lad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *og* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *være rækker i* $\mathbb{R}^k$*, som er konvergente med summer* s *og* t*, og lad* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Da gælder*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *er konvergent med sum* $s + t$*.*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ *er konvergent med sum* λs*.*

Bevis. (i) Idet afsnitsfølgerne for $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ betegnes (s_n) og (t_n), har $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ afsnitsfølgen $(s_n + t_n)$. Og af $s_n \to s$, $t_n \to t$ følger $s_n + t_n \to s + t$ (Sætning 2.7).

(ii) Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ har afsnitsfølgen (λs_n). Og af $s_n \to s$ følger $\lambda s_n \to \lambda s$. □

Bemærkning 3.7. Sletter man de N første led i en række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, fremkommer den N'te **restrække**

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_{N+p} + \cdots = \sum_{p=1}^{\infty} a_{N+p} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \,.$$

Den er konvergent eller divergent, efter som den oprindelige række er det, og i konvergenstilfældet er summerne forbundet med ligningen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \,.$$

Påstanden følger af

$$\sum_{n=1}^{N+p} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{N+p} a_n$$

ved grænseovergangen $p \to \infty$.

Rækker af positive led.

En række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, hvor $a_n \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, kaldes kort en **række med positive led**. (Her kan eventuelt $a_n = +\infty$.) **Enhver** sådan række tillægges en sum $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in [0, \infty]$, nemlig grænseværdien $s \in \mathbb{R}^*$ for afsnitsfølgen $(s_n) = (\sum_{j=1}^{n} a_j)$. Her er $s \in \mathbb{R}$ når afsnitsfølgen konvergerer i $\mathbb{R}$, mens $s = \infty$ når afsnitsfølgen ikke er opad begrænset. Se også Sætning 2.21 og 2.21* om voksende talfølger i $\mathbb{R}^*$, som tillige giver, at $\lim s_n = \sup s_n$. Vi har altså

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = \sup s_n = \sup\{\sum_{j=1}^{n} a_j \mid n \in \mathbb{N}\} \,. \tag{3.4}$$

Bemærk, at vi bygger på Kontinuitetsaksiomet (1.13) (og (1.13*)).

For rækker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ af positive led og $\lambda \in [0, \infty]$ gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,,$$

læst som ligninger mellem rækkesummer. Beviset føres ganske som for Sætning 3.6 ovenfor, men nu under benyttelse af Sætning 2.7*. Tilfældene $\lambda = 0$ og $\lambda = \infty$ verificeres direkte.

For rækker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ af positive led, hvor $a_n \leq b_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, gælder naturligvis

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,,$$

læst som ulighed mellem rækkesummer. Thi da

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \leq \sum_{j=1}^{n} b_j = t_n$$

for alle n, kan vi anvende Regel 3 i Sætning 2.18 på afsnitsfølgerne (s_n) og (t_n).

Det er bemærkelsesværdigt, at summen s af en række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ af **positive** led kan karakteriseres på en måde, hvor leddenes rækkefølge ikke spiller ind. Det skal vi nu se.

For enhver endelig delmængde $E \neq \emptyset$ af $\mathbb{N}$ er

$$\sum_{j \in E} a_j \leq \sum_{j=1}^{\max E} a_j = s_{\max E} \,.$$

Eksempelvis: For $E = \{7, 9, 13\}$ er

$$\sum_{j \in E} a_j = a_7 + a_9 + a_{13} \leq \sum_{i=1}^{13} a_j = s_{13} \,.$$

Derfor vil et overtal for mængden $A = \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0, \infty]$ af afsnit tillige være et overtal for

$$B = \{\sum_{j \in E} a_j \mid E \neq \emptyset \,,\; E \subseteq \mathbb{N} \,,\; E \text{ endelig}\} \,.$$

Det omvendte er klart, da $A \subseteq B$. Ethvert afsnit s_n kan jo skrives $\sum_{j \in E} a_j$ med $E = \{1, 2, \dots, n\}$.

Da A og B således har de samme overtal, er $\sup B = \sup A$. Sammenholdt med $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup s_n = \sup A$ giver dette

Sætning 3.8. *For summen s af en række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ af positive led gælder*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_E \sum_{j \in E} a_j \,,$$

hvor supremum tages over alle endelige delmængder $E \neq \emptyset$ af $\mathbb{N}$.

Resultatet er til ringe nytte, hvor det gælder om at finde summen af en forelagt række. Men eksistensen af en karakterisering, hvor leddenes rækkefølge er uden betydning, har en vigtig konsekvens:

Korollar 3.9. *Summen af en række* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *af positive led ændres ikke ved omordning af leddene.*

Omordning af leddene i en række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sker ved en bijektion $\tau : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$. Den omordnede række er

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = a_{\tau(1)} + a_{\tau(2)} + \cdots + a_{\tau(n)} + \dots .$$

Bevis for Korollar 3.9. Når E "gennemløber" alle endelige, ikke tomme delmængder af $\mathbb{N}$, vil $\tau(E)$ gøre det samme. Da nu

$$\sum_{j \in E} a_{\tau(j)} = \sum_{k \in \tau(E)} a_k ,$$

er det simpelthen de samme summer, der skal tages supremum over ved karakteriseringen af $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i henhold til Sætning 3.8. □

Bemærkning 3.10. Summer $\sum_{j \in J} a_j$ med $a_j \in [0, \infty]$.

En funktion φ med definitionsmængde $J \neq \emptyset$ kaldes også en **familie.** Man skriver da gerne a_j, x_j eller lignende i stedet for $\varphi(j)$, man kalder J for **indeksmængden,** og familien betegnes $(a_j)_{j \in J}$.

Summen $\sum_{j \in J} a_j$ af en familie af **positive** tal $a_j \in [0, \infty]$ med vilkårlig uendelig indeksmængde J (f.eks. $J = \mathbb{Z}$ eller $J = \mathbb{R}$) defineres ved

$$\sum_{j \in J} a_j = \sup \sum_{j \in E} a_j ,$$

hvor supremum tages over alle endelige delmængder $E \neq \emptyset$ af J.

Definitionen er tydeligvis inspireret af Sætning 3.8, som i tilfældet $J = \mathbb{N}$ sikrer, at summen $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ stemmer med rækkesummen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dots$.

Konvergenskriterier for rækker af endelige positive led.

I dette afsnit betragtes rækker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ af **endelige** positive led, dvs. $a_n \in [0, \infty[$. En sådan række kan være konvergent eller divergent (i $\mathbb{R}$), men den har altid en sum $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in [0, \infty]$. Der gælder

Sætning 3.11. *For en række* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *af endelige positive led, dvs.* $a_n \in [0, \infty[$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$, *er* (i), (ii) *og* (iii) *ensbetydende:*

(i) *rækken* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er konvergent (i* $\mathbb{R}$*).*

(ii) *afsnitsfølgen* $(s_n) = (\sum_{j=1}^{n} a_j)$ *er opad begrænset (i* $\mathbb{R}$*).*

(iii) *summen* $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Bevis. Da afsnitsfølgen (s_n) er en voksende følge i $\mathbb{R}$, er (i) $\iff$ (ii) en direkte konsekvens af Sætning 2.21 med tilføjelse. Og (ii) $\iff$ (iii) fremgår af, at $s = \sup s_n$, som bemærket i formel (3.4). □

Eksempel 3.12. For $a \in \mathbb{R}_+$, $q \in \mathbb{R}_+$ er kvotientrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + \dots + aq^n + \dots$$

konvergent eller divergent, efter som $q < 1$ eller $q \geq 1$. (Se Eksempel 3.4.) Summen er

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} < \infty & \text{når } \ q < 1 \\ \infty & \text{når } q \geq 1 \,. \end{cases}$$

De følgende kriterier (tilstrækkelige betingelser) til påvisning af konvergens eller divergens bygger på Sætning 3.11.

Sætning 3.13. SAMMENLIGNINGSKRITERIET. *Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være to rækker med (endelige) positive led, hvor*

$$a_n \leq b_n \quad \textit{for alle} \ \ n > \quad \textit{et vist} \ \ N \,.$$

Da gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \textit{er konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{er konvergent.}$$

På kontraponeret form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{er divergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \textit{er divergent.}$$

Bevis. Vi kan antage $a_n \leq b_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, da det er uden betydning for spørgsmålet om konvergens af en række i $\mathbb{R}$, om man ændrer endelig mange af leddene (jf. Bemærkning 3.7). Om rækkesummerne gælder da

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \infty \,,$$

specielt

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \ \Longrightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \,,$$

og påstanden fremgår af Sætning 3.11. □

Eksempel 3.14. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ er konvergent. Thi for $n \geq 2$ kan leddene vurderes opad,

$$0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}\,,$$

og rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

vides at være konvergent (Eksempel 3.2). For summen har vi

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} 1/n^2 < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 2\,.$$

Faktisk kan man vise, at $s = \pi^2/6$.

Konvergensen af $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ medfører atter, at $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^a$ er konvergent for $a \geq 2$. Og da $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ er divergent (jvf. (3.1)), giver Sammenligningskriteriet, at $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^a$ er divergent for $a \leq \frac{1}{2}$.

Eksempel 3.15. Uendelige decimalbrøker. (Hvad er størst, 1 eller 0, 99...9...?)

En **decimalbrøk** $0, a_1, a_2 \ldots a_n$ står som bekendt for tallet $a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \cdots + a_n 10^{-n}$. Tilsvarende står en **uendelig decimalbrøk** $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ for rækkesummen

$$s = a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \cdots + a_n 10^{-n} + \ldots\,.$$

Decimalerne a_j vælges blandt cifrene $0, \ldots, 9$.

At rækken er konvergent, ses ved sammenligning med

$$9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + \cdots + 9 \cdot 10^{-n} + \ldots\,,$$

svarende til den uendelige decimalbrøk $0, 99 \ldots 9 \ldots$ med lutter 9-taller. Det er en kvotientrække med kvotient 10^{-1} og sum

$$\frac{9 \cdot 10^{-1}}{1 - 10^{-1}} = 1\,.$$

Bemærk i forbifarten: $0, 99 \ldots 9 \cdots = 1$.

Der gælder naturligvis

$$0, a_1, a_2 \ldots a_n \leq 0, a_1, a_2 \ldots a_n \cdots \leq 0, a_1, a_2 \ldots a_n + 10^{-n}\,.$$

Thi venstre side er lig afsnittet s_n i rækken svarende til den uendelige decimalbrøk, og højre side fås ved at erstatte cifrene $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ med lutter 9-taller.

P.S. I matematik skelnes skarpt mellem **eksakte** og **tilnærmede** værdier. Nutildags angives tilnærmede værdier for konkrete talstørrelser næsten altid som endelige decimalbrøker (på lommeregnere, datamater), medens man tidligere også benyttede brøker som f.eks. 22/7. Mener man eksakt 1/4, er det derfor bedst at skrive 1/4 og ikke $0, 25$ eller $0, 2500$. Endelige decimalbrøker opfattes nemlig ofte som tilnærmede værdier, med en vis usikkerhed på sidste decimal.

Bemærkning 3.16. I Sammenligningskriteriet kan forudsætningen $a_n \le b_n$ for alle $n >$ et vist N naturligvis svækkes til $a_n = O(b_n)$. Thi dette betyder (jf. Definition 2.17), at der findes et $K \in \mathbb{R}_+$, således at

$$a_n \le K b_n \text{ for alle } n > \text{ et vist } N\,,$$

og Sætning 3.13 kan så anvendes på rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} K b_n$.

Specielt: Er $a_n, b_n \in \mathbb{R}_+$ af samme størrelsesorden for $n \to \infty$, har vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ er konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ er konvergent.}$$

Eksempelvis: Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-n+3}{n^4+2n}$ er konvergent, da $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ er det, og da leddene i de to rækker er af samme størrelsesorden for $n \to \infty$.

Korollar 3.17 KVOTIENTKRITERIET. *En række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ af led $a_n \in \,]0,\infty[$ er konvergent, hvis der findes et tal $q < 1$, således at*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \textit{ for alle } n \ge \textit{ et vist } N\,.$$

Rækken er divergent, hvis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \textit{ for alle } n \ge \textit{ et vist } N\,.$$

Bevis. Af forudsætningen $a_{n+1}/a_n \le q < 1$ for alle $n \ge N$ følger umiddelbart, at

$$a_{N+1} \le q a_N,\; a_{N+2} \le a q_{N+1} \le q^2 a_N, \dots\,,$$

altså at leddene i rækken

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$$

er $\le$ de tilsvarende led i den konvergente kvotientrække

$$a a_N + a_N q + a_N q^2 + \dots\,.$$

Konvergensen af den givne række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ følger så af Sammenligningskriteriet.

Når $a_{n+1}/a_n \ge 1$ for alle $n \ge N$, er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent, da den nødvendige betingelse $a_n \to 0$ for konvergens ikke er opfyldt. (Sætning 3.3.) □

Tilføjelse. Når alle $a_n \in \,]0,\infty[$ og $a_{n+1}/a_n \to k$ for $n \to \infty$, slutter vi af Kvotientkriteriet, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ er } \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{hvis } k < 1 \\ \text{divergent,} & \text{hvis } k > 1\,. \end{cases}$$

Bemærk, at $k = 1$ kan indtræffe både for konvergente og for divergente rækker ($\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$). Og at $a_{n+1}/a_n < 1$ for alle n **ikke** sikrer konvergens ($\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$).

Korollar 3.18. Rodkriteriet. *En række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ af led $a_n \in [0, \infty[$ er konvergent, hvis der findes et tal $q < 1$, således at*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \text{ for alle } n \geq \text{ et vist } N\,.$$

Rækken er divergent, hvis

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \text{ for uendelig mange } n\,.$$

Bevis. Forudsætningen $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, dvs. $a_n \leq q^n$, for $n \geq N$ kommer ud på, at leddene i rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ fra det N'te at regne er $\leq$ de tilsvarende led i den konvergente kvotientrække $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$. Konvergensen af $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ følger så af Sammenligningskriteriet.

Når $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, dvs. $a_n \geq 1$, for uendelig mange n, er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Den nødvendige betingelse $a_n \to 0$ for konvergens er jo ikke opfyldt. □

Tilføjelse. Når alle $a_n \in [0, \infty[$ og $\sqrt[n]{a_n} \to k$ for $n \to \infty$, slutter vi af Rodkriteriet, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ er } \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{hvis } k < 1 \\ \text{divergent,} & \text{hvis } k > 1\,. \end{cases}$$

Bemærk, at $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ kan indtræffe både for konvergente og for divergente rækker ($\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$, jf. Eksempel 3.14). Og at $\sqrt[n]{a_n} < 1$ for alle n ikke sikrer konvergens ($\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$).

For en **voksende** funktion $F : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ gælder, at

$$F(x) \to \sup\{F(x) \mid x \in [a, \infty[\} \in \mathbb{R}^* \text{ for } x \to \infty\,.$$

Det bevises ganske som det tilsvarende resultat om voksende talfølger i $\mathbb{R}$. Og det finder specielt anvendelse på en funktion F givet ved

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,,\ x \in [a, \infty[\,,$$

hvor f er en kontinuert funktion på $[a, \infty[$ med værdier ≥ 0.

Vi kan nu formulere

Sætning 3.19. Integralkriteriet. *Lad $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}_+$ være en aftagende og kontinuert funktion. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er da konvergent eller divergent, eftersom*

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

ved grænseovergangen $x \to \infty$ har en grænseværdi i $\mathbb{R}$ eller går mod ∞.

For rækkesummen $s = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ gælder (i begge tilfælde)

$$\lim_{x\to\infty} F(x) \le s \le f(1) + \lim_{x\to\infty} F(x)\,. \tag{3.5}$$

Bevis. For vilkårligt $n \ge 2$ er afsnittet $s_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} f(j)$ en oversum for f i intervallet $[1, n]$ svarende til den ækvidistante inddeling $1 \le 2 \le \cdots \le n$. Thi da f er aftagende, er $G_j = f(j)$ et overtal for funktionen i intervallet $[j, j+1]$ af længde $\Delta t_j = 1$. Tilsvarende er

$$\sum_{j=2}^{n} f(j) = s_n - f(1)$$

en undersum. Vi har altså

$$s_n - f(1) \le F(n) = \int_1^n f(t)\,dt \le s_{n-1}\,.$$

Ved grænseovergangen $n \to \infty$ fås heraf

$$s - f(1) \le \lim_{n\to\infty} F(n) \le s\,,$$

dvs.

$$\lim_{x\to\infty} F(x) \le s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le f(1) + \lim_{x\to\infty} F(x)\,,$$

som påstået. Specielt er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, dvs. $s < \infty$, hvis og kun hvis $\lim_{x\to\infty} F(x) < \infty$. □

Eksempel 3.20. 1) Den harmoniske række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots$$

er **divergent.**

Den kan jo skrives $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ med $f(t) = \frac{1}{t}$, $t \in [1, \infty[$, hvor f er aftagende og kontinuert, og

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \log x \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty\,.$$

2) Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ er **divergent** for $a \in\,]-\infty, 1]$ og **konvergent** for $a \in\,]1, \infty[$.

Den første påstand følger af den harmoniske rækkes divergens, ved Sammenligningskriteriet, idet $1/n^a \ge 1/n$ for hvert $n \in \mathbb{N}$, når $a \le 1$. Den sidste fremgår af Integralkriteriet med $f(t) = 1/t^a$, $t \in [1, \infty[$. For $a > 1$ er f jo både kontinuert og aftagende, og

$$\int_1^x t^{-a}dt = \left[\frac{t^{1-a}}{1-a}\right]_1^x = \frac{x^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} \to \frac{1}{a-1} \in \mathbb{R} \text{ for } x \to \infty . \qquad \square$$

Funktionen $\zeta :]1,\infty[\to \mathbb{R}_+$ givet ved $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ kaldes **zetafunktionen.** Den spiller en betydningsfuld rolle i talteorien. Ulighederne (3.5) giver

$$\frac{1}{a-1} \le \zeta(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \le 1 + \frac{1}{a-1} = \frac{a}{a-1} \text{ for } 1 < a < \infty .$$

Bemærkning 3.21. Det er nærliggende at benytte et afsnit $s_N = \sum_{j=1}^{N} a_j$ som tilnærmelsesværdi for summen $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ af en konvergent række. Men det har ikke megen interesse, med mindre man kan vurdere afvigelsen $s - s_N$. Ifølge Bemærkning 3.7 er den lig summen $r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ af den N'te restrække. Her er to anvendelser:

1. For en række $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, der er konvergent i henhold til Integralkriteriet, får vi ved at anvende (3.5) på funktionen $t \mapsto f(N+t)$, $t \in [1,\infty[$, i stedet for på f, at

$$\lim_{x\to\infty} \int_{N+1}^{x} f(t)\,dt \le r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \le \lim_{x\to\infty} \int_{N+1}^{x} f(t)\,dt + f(N+1) .$$

Og da $f(N+1) \le \int_N^{N+1} f(t)\,dt$, følger vurderingen

$$\lim_{x\to\infty} \int_{N+1}^{x} f(t)\,dt \le r_N \le \lim_{x\to\infty} \int_{N}^{x} f(t)\,dt . \tag{3.6}$$

Eksempelvis har vi for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ svarende til $f(t) = 1/t^2$, at

$$\frac{1}{N+1} = \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_{N+1}^{x} \le r_N \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_{N}^{x} = \frac{1}{N} .$$

2. For en række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, hvor $a_n \in]0,\infty[$ og $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$ for alle $n \ge N$, kan vi vurdere

$$a_{N+1} < r_N = a_{N+1} + a_{N+2} + \dots \le qa_N + q^2 a_N + \dots = a_N \frac{q}{1-q} .$$

Eksempelvis har vi for rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (som kan vises at have summen e), at $a_{n+1}/a_n = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{N+1}$ for alle $n \ge N$, følgelig

$$\frac{1}{(N+1)!} < r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \le \frac{1}{N!} \frac{1}{N} .$$

Der skal yderligere nævnes følgende metode til at finde summen af en forelagt række. Antag, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, hvor $a_n \geq 0$ for alle n, er konvergent med sum $f(x)$ for $x \in [0, r[$ $(r > 0)$. Så kan man vise (det gør vi ikke her), at $f(x)$ er *differentiabel*, og at

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{3.7}$$

for $x \in [0, r[$. Denne række er netop den række man får ved at differentiere hvert led i den oprindelige række m.h.t. x; den er altså konvergent med sum $f'(x)$ når $x \in [0, r[$.

Gentagelse af argumentet giver endvidere, at $f(x)$ er vilkårligt ofte differentiabel, med

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1) a_n x^{n-m} \tag{3.8}$$

for $x \in [0, r[$.

Eksempel 3.22. Vi ønsker at finde summen af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n q^n$, hvor $q \in]0, 1[$. Rækken kan skrives som $q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}$.

Vi ved fra Eksempel 3.4, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ er konvergent med sum $f(x) = \frac{1}{1-x}$ for $x \in [0, 1[$. Så fås af ovenstående, at den ledvis differentierede række $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ er konvergent for $x \in [0, 1[$ med sum

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

For det forelagte problem giver dette, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} n q^n = q \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Bemærkning 3.23. Ovennævnte forhold kan udstrækkes til rækker, hvis led ikke nødvendigvis er ≥ 0, idet man kan vise følgende:

Hvis der om en række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (hvor $a_n \in \mathbb{R}$) gælder, at $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ er konvergent for et $r > 0$, så er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent for alle $x \in]-r, r[$. Summen $f(x)$ er vilkårligt ofte differentiabel, og de afledte er summer af konvergente rækker (3.7), (3.8), for $x \in]-r, r[$.

§4. Det almindelige konvergensprincip

I analysen bestemmes et tal $x \in \mathbb{R}$ ofte som grænseværdi for en følge. Det er derfor vigtigt at kunne afgøre, om en given følge (x_n) i $\mathbb{R}$ er konvergent (i $\mathbb{R}$) og dermed talbestemmende. Definition 2.3 er ikke egnet til dette formål: her indgår jo selve den grænseværdi, som følgen skulle bruges til at fastlægge. Hvad vi har behov for, er en generelt anvendelig nødvendig og tilstrækkelig betingelse for konvergens (i $\mathbb{R}$), som ikke inddrager grænseværdien, men kun følgens elementer. En sådan betingelse er angivet af A.L. Cauchy (fransk matematiker, 1789 – 1857):

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} : \ |x_n - x_m| < \varepsilon \text{ for alle } m, n \geq N.$$

(I ord: For ethvert positivt ε findes et nummer N, så differensen mellem to vilkårlige elementer med højere nummer er numerisk mindre end ε)

Beviset for tilstrækkeligheden af **Cauchys konvergensbetingelse** ligger ikke lige for: hvordan fremskaffe en kandidat til grænseværdien? Det følgende afsnit vil hjælpe os.

Limes superior og limes inferior.

Nogle følger (x_n) i $\mathbb{R}^*$ har en grænseværdi $\lim x_n \in \mathbb{R}^*$, andre ikke, men alle tillægges, som vi skal se, en limes superior, $\limsup x_n \in \mathbb{R}^*$, og en limes inferior, $\liminf x_n \in \mathbb{R}^*$.

Vi vil sige, at et tal $b \in \mathbb{R}^*$ er et **kvasiovertal** *for en følge (x_n) i $\mathbb{R}^*$, hvis $x_n \leq b$ for alle $n \in \mathbb{N}$ fra et vist trin, dvs. hvis*

$$\exists N \in \mathbb{N} : \ x_n \leq b \text{ for alle } n > N. \tag{4.1}$$

Anderledes sagt: hvis $x_n > b$ for højst endelig mange $n \in \mathbb{N}$.

Enhver følge i $\mathbb{R}^*$ har (mindst) et kvasiovertal: $+\infty$.

Definition 4.1. *Ved* **limes superior** *for en følge (x_n) i $\mathbb{R}^*$, skrevet $\limsup x_n$ eller $\lim_n \sup x_n$, forstås infimum for mængden B af følgens kvasiovertal,*

$$\limsup x_n = \lim_n \sup x_n = \inf B \in \mathbb{R}^*.$$

Eksempel 4.2. Med $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ er $B =]1, \infty]$, og med $x_n = (-1)^n - \frac{1}{n}$ er $B = [1, \infty]$. I begge tilfælde er $\limsup x_n = 1$.

Det kan være, at $\limsup x_n$ selv er et kvasiovertal for (x_n), og det kan være, at det ikke er tilfældet. Jf. eksempel 4.2.

Men et skridt til højre fra $\limsup x_n$ fører altid til et kvasiovertal for (x_n), et skridt til venstre gør det aldrig:

Sætning 4.3. *Lad (x_n) være en vilkårlig følge i $\mathbb{R}^*$.*

(i) *For hvert $x > \limsup x_n$ gælder*

$$x \text{ er et kvasiovertal for } (x_n),$$

dvs. $x_n \leq x$ for alle $n \in \mathbb{N}$ fra et vist trin.

(ii) *For hvert $x < \limsup x_n$ gælder*

$$x \text{ er ikke et kvasiovertal for } (x_n),$$

dvs. $x_n > x$ for uendelig mange $n \in \mathbb{N}$.

Er $\limsup x_n = +\infty$ bortfalder (i), er $\limsup x_n = -\infty$ bortfalder (ii). Vi illustrerer hovedtilfældet $\limsup x_n \in \mathbb{R}$:

Bevis for Sætning 4.3. Ifølge Definition 4.1 er $\limsup x_n = \inf B$, hvor B er mængden af kvasiovertal b for (x_n).

(i) Når $x > \inf B$, findes der et kvasiovertal $b < x$. Men så er det klart, at x ligeledes er et kvasiovertal for (x_n).

(ii) Når $x < \inf B$, er naturligvis $x \notin B$, dvs. x er ikke et kvasiovertal for (x_n). Og det betyder

$$\forall N \in \mathbb{N} : \; x_n > x \text{ for mindst et } n > N,$$

dvs. der "bliver ved at komme" numre n, hvor $x_n > x$. $\square$

For en given følge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ er $\limsup x_n$ naturligvis entydigt fastlagt ved egenskaberne i Sætning 4.3. Det kan vi udmønte i følgende **Karakterisering af limes superior** $\limsup x_n$, hvor vi lader $c \in \mathbb{R}$:

$$\limsup x_n = c \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \begin{cases} x_n \leq c + \varepsilon & \text{for alle } n \text{ fra et vist trin} \\ x_n > c - \varepsilon & \text{for uendelig mange } n \end{cases}$$

$$\limsup x_n = -\infty \iff x_n \to -\infty \;\text{ for }\; n \to \infty.$$

$$\limsup x_n = +\infty \iff \forall x \in \mathbb{R} : x_n > x \;\text{ for uendelig mange } n.$$

Her er det naturligvis uvæsentligt, om man benytter skarpe eller uskarpe ulighedstegn.

Hvis (x_n) specielt er en følge i $\mathbb{R}$, dvs. $-\infty < x_n < \infty$ for alle n, gælder endvidere

$$\limsup x_n = +\infty \iff (x_n) \;\text{ er ikke opad begrænset (i } \mathbb{R}).$$

(Ad " $\Longleftarrow$ ". Antag $\limsup x_n < \infty$ og vælg et $b > \limsup x_n$, $b \in \mathbb{R}$. Da er $x_n > b$ for højst endelig mange n, og det er derfor klart, at (x_n) er opad begrænset.

Limes inferior *for en talfølge* (x_n) *i* $\mathbb{R}^*$ *defineres som supremum for mængden* A *af følgens kvasiundertal,*

$$\liminf x_n = \liminf_n x_n = \sup A. \tag{4.2}$$

At $a \in \mathbb{R}^*$ *er et* **kvasiundertal** *for* (x_n), *betyder naturligvis, at* $a \leq x_n$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$ *fra et vist trin.*

Hvad vi har sagt om limes superior, kan selvfølgelig gentages ord til andet om limes inferior. Man skal blot vende alle ulighedstegn, erstatte inf med sup, kvasiovertal med kvasiundertal, og ombytte $+\infty$ og $-\infty$ samt ε og $-\varepsilon$. Eksempelvis har vi med $c \in \mathbb{R}$:

$$\liminf x_n = c \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \begin{cases} x_n \geq c - \varepsilon & \text{for alle } n \text{ fra et vist trin} \\ x_n < c + \varepsilon & \text{for uendelig mange } n. \end{cases}$$

Tegn selv illustration.

For talfølgerne (2.1) – (2.6) i Eksempel 2.1 samt (2.15) har vi

(2.2), (2.15)	$\liminf x_n = -\infty$, $\limsup x_n = +\infty$
(2.4), (2.6)	$\liminf x_n = 0$, $\limsup x_n = 1$
(2.1), (2.5)	$\liminf x_n = \limsup x_n = \lim x_n = +\infty$
(2.3)	$\liminf x_n = \limsup x_n = \lim x_n = 0.$

Sætning 4.4. *Når* (x_n), (y_n) *er følger i* $\mathbb{R}^*$ *og* $a, b \in \mathbb{R}^*$, *gælder*

1. $\liminf x_n \leq \limsup x_n.$

2. $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n.$

3. $(x_n \leq b \text{ for alle } n > \text{ et vist } N) \implies \limsup x_n \leq b$
   $(x_n \geq a \text{ for alle } n > \text{ et vist } N) \implies \liminf x_n \geq a.$

4. $x_n \leq y_n$ *for alle* $n >$ *et vist* N
   $\implies \liminf x_n \leq \liminf y_n \ \wedge\ \limsup x_n \leq \limsup y_n.$

5. $a \in [0, \infty[\implies \begin{cases} \liminf(ay_n) = a \liminf y_n \\ \limsup(ay_n) = a \limsup y_n. \end{cases}$

6. $x_n \to a \in]0, \infty[\implies \begin{cases} \liminf(x_n y_n) = a \liminf y_n \\ \limsup(x_n y_n) = a \limsup y_n. \end{cases}$

Øvelse 4.5. Bevis disse regler.

ADVARSEL til Regel 3. og 4. Der gælder ikke tilsvarende regler med skarpe ulighedstegn.

Bemærkning 4.6. Betegnelserne $\limsup x_n$ og $\liminf x_n$ kan ses i sammenhæng med, at der for enhver følge (x_n) i $\mathbb{R}^*$ gælder

$$\begin{aligned} \limsup x_n &= \lim_{p\to\infty}(\sup\nolimits_{n>p} x_n) = \inf_{p\in\mathbb{N}}(\sup\nolimits_{n>p} x_n) \\ \liminf x_n &= \lim_{p\to\infty}(\inf_{n>p} x_n) = \sup\nolimits_{p\in\mathbb{N}}(\inf_{n>p} x_n). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Betragt f.eks. den første linie. Betegn $\sup_{n>p} x_n = y_p \in \mathbb{R}^*$. Da y_p'erne er kvasiovertal for (x_n), er

$$\inf\{y_p \mid p \in \mathbb{N}\} \geq \inf B$$

hvor B er mængden af alle kvasiovertal for (x_n). På den anden side gælder, hvis $b \in B$, at $b \geq y_N$, når N opfylder (4.1), derfor må

$$\inf B \geq \inf_{p\in\mathbb{N}} y_p.$$

Dette viser, at $\limsup x_n = \inf_{p\in\mathbb{N}} y_p$, jf. Definition 4.1. Da følgen (y_p) er *aftagende*, er $\lim_{p\to\infty} y_p = \inf_{p\in\mathbb{N}} y_p$. I alt fås første linie i (4.3), og anden linie vises på tilsvarende måde.

Vor væsentlige interesse i limes inferior og limes superior ligger i

Sætning 4.6. *En talfølge* (x_n) *i* $\mathbb{R}^*$ *har en grænseværdi* $\lim x_n \in \mathbb{R}^*$, *hvis og kun hvis*

$$\liminf x_n = \limsup x_n,$$

og i bekræftende fald er

$$\lim x_n = \liminf x_n = \limsup x_n.$$

Bevis. At $x_n \to c \in \mathbb{R}$, betyder jo, at for hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ er

$$c - \varepsilon < x_n \leq c + \varepsilon$$

for alle n fra et vist trin. Men så er specielt $\limsup x_n = c$ ifølge karakteriseringen af limes superior. Tilsvarende er $\liminf x_n = c$.

Antag omvendt $\liminf x_n = \limsup x_n = c \in \mathbb{R}$. For vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ er da $x_n \leq c + \varepsilon$ for alle $n >$ et vist N_1 og ligeledes $x_n \geq c - \varepsilon$ for alle $n >$ et vist N_2, altså

$$c - \varepsilon \leq x_n \leq c + \varepsilon$$

for alle $n > N = \max\{N_1, N_2\}$. Det viser $x_n \to c$.

Vi fuldfører beviset ved at bemærke, at

$$x_n \to -\infty \iff \limsup x_n = -\infty \iff \liminf x_n = \limsup x_n = -\infty$$

og tilsvarende

$$x_n \to +\infty \iff \liminf x_n = +\infty \iff \liminf x_n = \limsup x_n = +\infty.$$

□

Det almindelige konvergensprincip.

Vi kan nu bevise Det almindelige konvergensprincip i $\mathbb{R}$ (Sætning 4.10 nedenfor.) Det generaliseres umiddelbart til $\mathbb{R}^k$. (Korollar 4.11.)

Definition 4.7. *En følge (x_n) i $\mathbb{R}^k$ (NB: gerne $\mathbb{R}$, men* **ikke** *$\mathbb{R}^*$) kaldes en* **fundamentalfølge** *eller en* **Cauchy følge,** *hvis den opfylder følgende betingelse:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} : \quad |x_n - x_m| < \varepsilon \textit{ for alle } m, n \geq N.$$

Løst sagt er betingelsen, at afstanden $|x_n - x_m|$ mellem to elementer x_m og x_n i følgen er lille, **blot** *numrene m og n begge er tilstrækkelig store.*

Eksempel 4.8. Afsnitsfølgen (s_n) for den harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er ikke en Cauchy følge. Ganske vist har vi

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ for } n \to \infty,$$

ligesom

$$s_{n+p} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

når $p \geq 1$ fastholdes. Men da

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

for alle n, kan $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ikke afpareres af noget N i definitionen ovenfor.

I kraft af Sætning 4.9 nedenfor har vi hermed et nyt bevis for den harmoniske rækkes divergens. (Sml. Eksempel 3.20 1).)

Sætning 4.9. *Enhver konvergent følge (x_n) i $\mathbb{R}^k$ er tillige en Cauchy følge.*

Bevis. Trivielt. Lad $x_n \to x \in \mathbb{R}^k$. For vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes da et $N \in \mathbb{N}$, således at $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ for alle $n \geq N$. Og for $m, n \geq N$ har vi så

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hermed er vist, at (x_n) er en Cauchy følge. □

Sætning 4.10. Det almindelige konvergensprincip i $\mathbb{R}$. *Enhver Cauchy følge i $\mathbb{R}$ er konvergent (i $\mathbb{R}$).*

Bevis. 1° Idet (x_n) er en følge i $\mathbb{R}$, viser vi her implikationen

$$(x_n) \text{er en Cauchy følge} \implies \liminf x_n = \limsup x_n$$

eller, hvad der kommer ud på det samme (kontraposition),

$$\liminf x_n < \limsup x_n \implies (x_n) \text{ er ikke en Cauchy følge.}$$

Antag hertil $\liminf x_n < \limsup x_n$. Vi kan så tænke os $a, b \in \mathbb{R}$ valgt, således at

$$\liminf x_n < a < b < \limsup x_n.$$

Nu kan $\varepsilon = b - a$ ikke afpareres i henhold til definitionen af Cauchy følge: For ethvert $N \in \mathbb{N}$ findes jo dels et $n > N$, hvor $x_n > b$ (jf. Sætning 4.3 (ii)), dels et $m > N$, hvor $x_m < a$, og vi har så

$$x_n - x_m > b - a = \varepsilon.$$

Hermed er godtgjort, at (x_n) ikke er en Cauchy følge, og den ønskede implikation er vist.

2° Lad nu (x_n) være en Cauchy følge i $\mathbb{R}$. Ifølge 1° er så

$$\liminf x_n = \limsup x_n,$$

og Sætning 4.6 giver, at (x_n) har grænseværdien $\lim x_n = \liminf x_n = \limsup x_n \in \mathbb{R}^*$.

Hermed er vi næsten færdige, thi enten er $\lim x_n \in \mathbb{R}$, dvs.(x_n) er konvergent (i $\mathbb{R}$), som vi skulle vise, eller $x_n \to \infty$ eller $x_n \to +\infty$. Og de to sidste muligheder er lette at udelukke: Vælg f.eks. N svarende til $\varepsilon = 1$ i henhold til definitionen på Cauchy følge, dvs. således at $|x_n - x_m| < 1$ for alle $m, n \geq N$. Med $m = N$ er specielt

$$x_N - 1 < x_n < x_N + 1 \text{ for alle } n \geq N,$$

og heraf følger

$$-\infty < x_N - 1 \leq \lim x_n \leq x_N + 1 < \infty.$$

□

Korollar 4.11. Det almindelige konvergensprincip i $\mathbb{R}^k$. *Enhver Cauchy følge i $\mathbb{R}^k$ er konvergent.*

Bevis. Idet vi eksempelvis betragter tilfældet $k = 2$, føres beviset ved for en vilkårlig følge $((x_n, y_n))$ i $\mathbb{R}^2$ at eftervise implikationskæden

$$\begin{aligned}
&((x_n, y_n)) \text{ er en Cauchy følge i } \mathbb{R}^2 \\
&\Rightarrow (x_n) \text{ og } (y_n) \text{ er begge Cauchy følger i } \mathbb{R} \\
&\Rightarrow (x_n) \text{ og } (y_n) \text{ er begge konvergente i } \mathbb{R} \\
&\Rightarrow ((x_n, y_n)) \text{ er konvergent i } \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Den første implikation fås umiddelbart af ulighederne

$$|x_n - x_m| \leq |(x_n, y_n) - (x_m, y_m)|, \quad |y_n - y_m| \leq |(x_n, y_n) - (x_m, y_m)|.$$

Den anden, bevisets kerne, fås ved at anvende Sætning 4.10 på (x_n) og (y_n), og den tredje fremgår af Sætningen om koordinatvis grænseovergang (Sætning 2.6). □

Bemærkning 4.12. At Det almindelige konvergensprincip gælder i $\mathbb{R}$ udtrykker man ofte ved at sige, at $\mathbb{R}$ er **fuldstændigt.** Ligeså for $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Da $\mathbb{R}$ er fuldstændigt, og da $\mathbb{Q}$ er overalt tæt i $\mathbb{R}$, kaldes udvidelsen fra $\mathbb{Q}$ til $\mathbb{R}$ også **fuldstændiggørelsen** af $\mathbb{Q}$.

En nærmere undersøgelse, som vi ikke skal gå ind på, viser, at Sætning 2.21 og Sætning 4.10 hver især kan erstatte Kontinuitetsaksiomet (1.13) eller (1.13*). I mange tilsvarende fremstillinger af den matematiske analyse lægges således Det almindelige konvergensprincip til grund.

§5. De komplekse tal

De reelle tal $\mathbb{R}$ lider af følgende defekt: Et polynomium $a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ med reelle koefficienter og lige grad $n \geq 2$ har ikke nødvendigvis en reel rod. Eksempelvis er således $t^{2n} + 1$ uden reelle rødder for $n \geq 1$. For at råde bod på denne mangel indførte en række matematikere (C. Wessel, R. Argand, C.F. Gauss) omkring år 1800 de komplekse tal $\mathbb{C}$. Det er værd at nævne, at Caspar Wessel (norsk-dansk landmåler og matematiker, 1745–1818, bror til digteren Johan Herman Wessel) var den første, som præsenterede de komplekse tal på tryk.

Indførelse af komplekse tal. Fundamentale egenskaber.

Efter W.R. Hamilton (irsk matematiker, 1805–1865) indføres de **komplekse tal** $\mathbb{C}$ som mængden $\mathbb{R}^2$, hvori kompositionerne **addition** $(+)$ og **multiplikation** $(\cdot)$ er defineret ved

$$(5.2)\qquad \begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2),\\ (x_1, y_1) \ \cdot\ (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}$$

Det er nu let — omend lidt omstændeligt — direkte at verificere, at $\mathbb{C}$ med disse kompositioner og med $(0, 0)$ og $(1, 0)$ i rollen som henholdsvis 0 og 1 opfylder de til aksiomerne (1.1) – (1.9) for $\mathbb{R}$ svarende aksiomer.

Afbildningen (**indlejringen**) af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{C}$, defineret ved $x \mapsto (x, 0)$, er injektiv og har homomorfiegenskaberne

$$(5.2)\qquad \begin{aligned}x_1 + x_2 &\mapsto (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0),\\ x_1 \cdot x_2 &\mapsto (x_1 \cdot x_2, 0) \ = (x_1, 0)\ \cdot\ (x_2, 0),\end{aligned}$$

for $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

I praksis skriver man nu $(x, 0) = x$, specielt altså $(0, 0) = 0$ og $(1, 0) = 1$. Endvidere indføres den **imaginære enhed** $(0, 1) = i$. Det komplekse tal (x, y) i Hamiltons model skrives derfor i praksis som $x + iy = x + yi$, og kompositionerne ser herefter således ud:

$$\begin{aligned}(x_1 + iy)\ \ + (x_2 + iy_2) &= x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),\\ (x_1 + iy_1)\ \cdot\ (x_2 + iy_2) &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$

Man regner altså med komplekse tal på en meget naturlig måde, idet man udover sædvanlige regneregler kun behøver at vide, at

$$i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -1.$$

Bemærkning 5.1. At $\mathbb{C}$, forsynet med regnereglerne (5.1), opfylder aksiomer svarende til (1.1)–(1.9) udtrykkes ved at sige, at $\mathbb{C}$ (ligesom $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$) er et **kommutativt legeme.** Ved indlejringen $x \mapsto (x, 0)$ af $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, indlejres $\mathbb{R}$ som et dellegeme af $\mathbb{C}$, og $\mathbb{C}$ er herved blevet et **udvidelseslegeme** for $\mathbb{R}$.

For $n \in \mathbb{Z}$ defineres **potensen** z^n af et komplekst tal z ligesom ved reelle tal ved

$$\begin{aligned}&z^n = z \cdot \ \cdots \ \cdot z \quad (n \text{ faktorer}) \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N},\\ &z^0 = 1 \quad \text{for} \quad z \neq 0,\\ &z^n = 1/z^{-n} \quad \text{for} \quad z \neq 0 \quad \text{og} \ -n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Åbenbart gælder potensreglerne

$$z^m z^n = z^{m+n},\ (z^m)^n = z^{mn}$$

for $m, n \in \mathbb{Z}$, idet z forudsættes $\neq 0$, hvis enten $m \leq 0$ eller $n \leq 0$.

Geometrisk beskrivelse af $\mathbb{C}$.

Ofte opfatter man det komplekse tal $x + iy$ som et punkt (x, y) i planen. Mængden $\mathbb{C}$ kaldes i den forbindelse **den komplekse plan.** Er $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, et vilkårligt komplekst tal, kaldes

$$\mathrm{Re}\, z = x \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}\, z = y$$

realdelen og **imaginærdelen** af z. Komplekse tal z med $\mathrm{Re}\, z = 0$ kaldes **rent imaginære.** Bemærk reglerne:

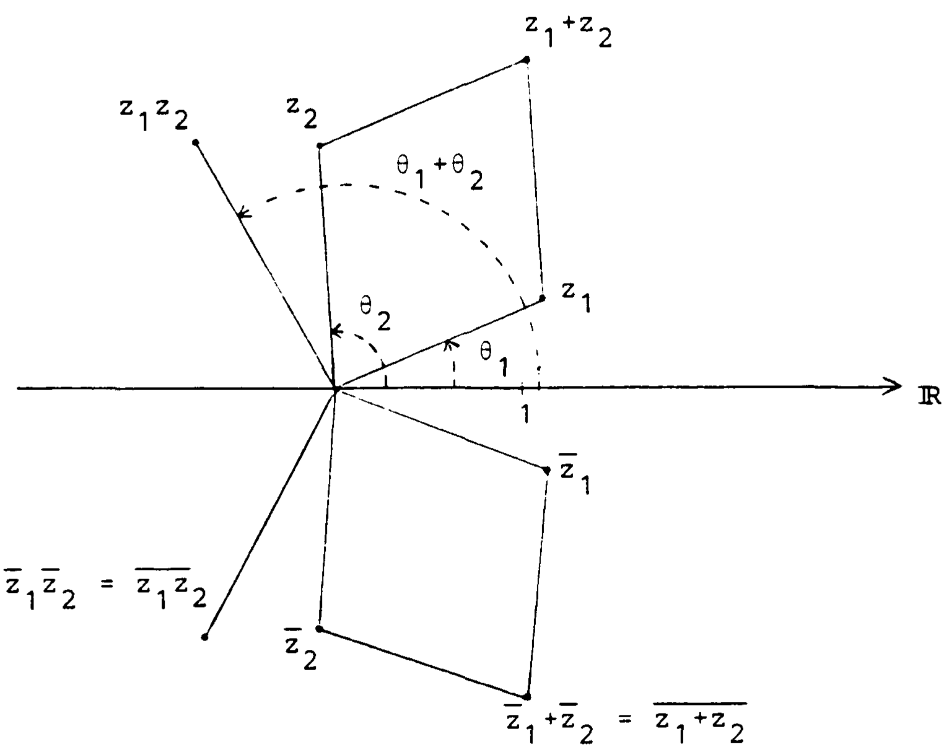
$$\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2,\ \mathrm{Im}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, z_2.$$

For ethvert $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, kaldes $\overline{z} = x - iy$ det (**komplekst**) **konjugerede** til z. Det fremgår umiddelbart, at $z \mapsto \overline{z}$ er en bijektiv afbildning $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, som opfylder homomorfirelationerne

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2,\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 \tag{5.3}$$

for $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Man udtrykker dette ved at sige, at konjugeringen er en **automorfi** af $\mathbb{C}$, dvs. en isomorfi af $\mathbb{C}$ på sig selv.



For ethvert $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, kaldes

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

z's **modulus**, **numeriske værdi** eller **absolutte værdi.** Bemærk: Afbildningen $|\ \ | : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ er en udvidelse af den sædvanlige numeriske værdi på $\mathbb{R}$, altså afbildningen $|\ \ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Bemærk endvidere, at længden $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$ netop er den sædvanlig norm for $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Der gælder for modulus følgende vigtige relationer:

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|, \\
|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|.
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

Bemærk, at da addition af komplekse tal modsvarer addition af talpar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, og der for længden $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$ af (x,y) gælder trekantsuligheden

$$|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)| \leq |(x_1, y_1)| + |(x_2, y_2)|,$$

følger den første relation heraf. Den kaldes **trekantsuligheden** for komplekse tal. Den anden relation følger af

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = (z_1 \overline{z}_1)(z_2 \overline{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

Begge relationer udvides ved gentagen anvendelse til endeligt mange komplekse tal. Endvidere følger af den anden relation, at

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ for } z_2 \neq 0.$$

Man viser også let, at

$$|z^n| = |z|^n \text{ for } n \in \mathbb{Z} \text{ og } z \in \mathbb{C} \ (z \neq 0, \text{ hvis } n \leq 0).$$

For ethvert $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gælder

$$\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = 1,$$

hvorfor

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i \sin\theta, \tag{5.5}$$

hvor vinklen θ (målt i radianer) er bestemt pånær et heltalligt multiplum af 2π. Enhver vinkel θ som tilfredsstiller (5.5) kaldes et **argument** for z og betegnes arg z; specielt kaldes det entydigt bestemte argument i intervallet $]-\pi, \pi]$ **hovedargumentet,** og dette betegnes Arg z. Der gælder altså for $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + p \cdot 2\pi, \ p \in \mathbb{Z}. \tag{5.6}$$

Relationen (5.5) kan nu skrives

$$z = |z|\,(\cos(\arg\, z) + i\sin(\arg\, z)).$$

Udregningen

$$\begin{aligned}\frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|} &= \frac{z_1}{|z_1|}\cdot\frac{z_2}{|z_2|} = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

viser gyldigheden af relationen

$$\arg\,(z_1 z_2) = \arg\, z_1 + \arg\, z_2.$$

Denne relation skal forstås således, at for vilkårligt valgte blandt de uendelig mange værdier af $\arg\, z_1$ og af $\arg\, z_2$ er $\arg\, z_1 + \arg\, z_2$ en af værdierne af $\arg\,(z_1 z_2)$. Jf. også foranstående figur.

NB. Der gælder normalt **ikke**

$$\mathrm{Arg}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2.$$

Find selv et modeksempel. Hvilke muligheder er der for differensen mellem de to sider?

Eksempel 5.1. Vi søger samtlige løsninger til **den binome ligning** (binom = to led)

$$z^n = d,$$

hvor $d \in \mathbb{C}$ og $n \in \mathbb{N}$ er givne.

For $d = 0$ er

$$z^n = 0 \iff |z^n| = 0 \iff |z|^n = 0 \iff |z| = 0 \iff z = 0.$$

For $d \neq 0$ er

$$z^n = d \iff |z|^n = |d| \wedge \arg\, z^n = \arg\, d,$$

det sidste forstået således, at z^n og d har en fælles argumentværdi og defor helt de samme argumenter. Altså er

$$z^n = d \iff |z| = \sqrt[n]{|d|} \wedge n\arg\, z \text{ er en værdi af } \arg\, d.$$

Den fuldstændige løsning er derfor

$$\left\{ \sqrt[n]{|d|}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\arg\, d\right) + i\sin\left(\frac{1}{n}\arg\, d\right)\right)\right\},$$

hvor

$$\arg d = \operatorname{Arg} d + p \cdot 2\pi,\ p \in \mathbb{Z}.$$

Ligningen har altså n forskellige løsninger, nemlig

$$\left\{ \sqrt[n]{|d|} \left(\cos \left(\frac{1}{n} (\operatorname{Arg} d + p \cdot 2\pi) \right) + i \sin \left(\frac{1}{n} (\operatorname{Arg} d + p \cdot 2\pi) \right) \right) \mid p = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}.$$

Løsningerne er hjørner i en regulær n-kant indskrevet i cirklen med centrum 0 og radius $\sqrt[n]{|d|}$.

Eksempelvis har det i indledningen nævnte polynomium $t^{2n} + 1$ de $2n$ komplekse rødder

$$\left\{ \cos \left(\frac{1}{2n} (\pi + p \cdot 2\pi) \right) + i \sin \left(\frac{1}{2n} (\pi + p \cdot 2\pi) \right) \mid p = 0, 1, \ldots, 2n-1 \right\}.$$

Eksempel 5.2. For den binome ligning af 2. grad

$$z^2 = \alpha + i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

søger vi her rødderne på formen $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ved at "splitte i reelt og imaginært", dvs. udnytte, at

$$(x+iy)^2 = \alpha + i\beta \iff \operatorname{Re}((x+iy)^2) = \alpha, \quad \operatorname{Im}((x+iy)^2) = \beta,$$

omformer vi til det reelle ligningssystem

$$\begin{aligned} &(1) \qquad x^2 - y^2 = \alpha \\ &(2) \qquad 2xy = \beta. \end{aligned}$$

Analyse: Vi antager, at $x, y \in \mathbb{R}$ tilfredsstiller (1) og (2). Ved kvadrering finder vi så

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2y^2 + y^4 &= \alpha^2 \\ 4x^2y^2 &= \beta^2, \end{aligned}$$

hvilket ved addition giver

$$(x^2 + y^2)^2 = \alpha^2 + \beta^2, \qquad \text{dvs. } x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Til den sidste ligning adderer, henh. subtraherer vi (1) og får

$$2x^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha, \quad 2y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha,$$

altså

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}.$$

Bemærk, at der kun optræder sædvanlige kvadratrødder af reelle tal ≥ 0.

Prøve: Kvadrerer vi de fundne udtryk for x og y, ses let, at (1) er opfyldt, samt at $(2xy)^2 = \beta^2$, dvs. $2xy = \pm\beta$.

Resultat: Rødderne $z = x + iy$ i ligningen $z^2 = \alpha + i\beta$ er bestemt ved de fundne udtryk for x og y, hvor der skal benyttes samme fortegn, hvis $\beta > 0$, og modsatte fortegn, hvis $\beta < 0$.

Eksempel 5.3. Ligesom i det reelle tilfælde vises, at andengradspolynomiet

$$at^2 + bt + c,\ a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0,$$

har rødderne

$$\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a},\ d = b^2 - 4ac,$$

hvor $\sqrt{d}$ betegner en vilkårlig løsning (jf. Eksempel 5.2) til den binome ligning

$$z^2 = d.$$

For $d \neq 0$ er den anden løsning hertil så $-\sqrt{d}$. Andengradspolynomiet har derfor 2 forskellige komplekse rødder, når diskriminanten $d \neq 0$, og en dobbeltrod, når $d = 0$.

Eksempel 5.4. For ethvert $n \in \mathbb{Z}$ gælder **de Moivres formel**

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^n, \tag{5.7}$$

thi de to sider har samme modulus (nemlig 1) og et fælles argument (nemlig $n\theta$). (A. De Moivre, fransk matematiker, 1667–1754.)

Da de to sider i (5.7) har samme real- og imaginærdel, fås specielt for $n \in \mathbb{N}$

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k}\theta \sin^{2k}\theta,$$

$$\sin n\theta = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \cos^{n-2k-1}\theta \sin^{2k+1}\theta.$$

Da $\sin\theta$ kun optræder i lige potenser i formlen for $\cos n\theta$, kan $\cos n\theta$, idet $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, udtrykkes som $T_n(\cos\theta)$, hvor T_n er et polynomium i én variabel med heltallige koefficienter. Polynomiet T_n (som ifølge Identitetssætningen, Korollar 5.9 nedenfor, er entydigt bestemt) kaldes det n'te **Tschebychef polynomium.** (P.L. Tschebychef, russisk matematiker, 1821 – 1894).

Eksempel 5.5. En **endelig kvotientrække** i $\mathbb{C}$ er en sum af formen

$$s = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1},$$

hvor a og q er givne komplekse tal. For at bestemme summen s, udregnes

$$sq = aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Det fremgår da, at

$$s(q-1) = sq - s = aq^n - a = a(q^n - 1),$$

idet alle mellemliggende led i summerne udgår. Følgelig er

$$s = \begin{cases} a\frac{q^n-1}{q-1} & \text{for } q \neq 1 \\ an & \text{for } q = 1. \end{cases}$$

Algebraens fundamentalsætning.

Den grundlæggende sætning om komplekse tal er først (korrekt) vist af C.F. Gauss (1799).

Sætning 5.6 ALGEBRAENS FUNDAMENTALSÆTNING. *Ethvert polynomium*

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

med komplekse koefficienter $a_0, \cdots, a_n$ *og* $a_n \neq 0$ *har en kompleks rod, når graden* $n \geq 1$.

Bemærkning 5.7. Den noget prætentiøse betegnelse for denne sætning har den historiske forklaring, at det vigtigste uløste problem i algebraen omkring år 1800 var, hvorvidt der for polynomier af vilkårlig grad fandtes formler for rødderne, som generaliserede de da kendte for grader ≤ 4, hvor bestemmelsen af rødderne føres tilbage til gentagne løsninger af binome ligninger. Først med N.H. Abel (norsk matematiker, 1802-29) og E. Galois (fransk matematiker, 1811-32) blev det klart, at dette ikke var tilfældet.

Algebraens fundamentalsætning vises nemmest inden for den komplekse funktionsteori, der omhandler funktioner $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Uden at gå ind i dette vil vi uddrage nogle vigtige konsekvenser af sætningen.

I første række (eksistensdelen af) følgende faktoriseringssætning, som naturligvis indeholder fundamentalsætningen.

Sætning 5.8. *Ethvert polynomium* f *i én variabel*

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

med komplekse koefficienter og grad $n \geq 1$ *kan på en og (pånær ombytning af faktorerne) på kun én måde skrives på formen*

$$f(t) = a(t - \alpha_1)^{r_1} \cdots (t - \alpha_m)^{r_m},$$

hvor $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ *er indbyrdes forskellige komplekse tal,* $a \in \mathbb{C}$, *og* $r_1, \cdots, r_m \in \mathbb{N}$. *Åbenbart er* $a = a_n$.

Rødderne $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ i polynomiet f siges at have **multipliciteter** $r_1, \cdots, r_m$. Antallet af rødder regnet med multiplicitet er derfor

$$r_1 + \cdots + r_m = n \text{ graden af } f.$$

Rødder af multiplicitet 1 og 2 kaldes også **simple** og **dobbelte** rødder.

Bevis. Eksistensen af en faktorisering vises ved induktion efter n. For $n = 1$ er

$$f(t) = a_1 t + a_0 = a_1(t - \alpha)^1, \quad \alpha = -\frac{a_0}{a_1} \in \mathbb{C}.$$

For vilkårligt $n \geq 2$ antager vi nu, at ethvert polynomium af grad $n - 1$ har en faktorisering. Vi betragter så et vilkårligt polynomium f af grad n. Det har ifølge Algebraens fundamentalsætning en rod $\alpha \in \mathbb{C}$. Ved sædvanlig polynomiumsdivision findes da polynomier q og r med komplekse koefficienter, så at

$$f(t) = q(t)(t - \alpha) + r(t), \quad \text{grad } r < 1.$$

Her er r defor en konstant og $r(\alpha) = 0$, dvs. r er nulpolynomiet, og følgelig gælder

$$f(t) = q(t)(t - \alpha).$$

Da q har grad $n - 1$, har q en faktorisering af den ønskede art og dermed også f.

Entydigheden af en sådan faktorisering vises ligeledes ved induktion efter n. For $n = 1$ er nødvendigvis $m = 1$, $r_1 = 1$, $\alpha_1 = -\frac{a_0}{a_1}$, $a = a_1$. Vi antager dernæst entydigheden for ethvert polynomium af grad $n - 1$ og betragter et polynomium f af grad n $(n \geq 2)$. Såfremt

$$f(t) = a(t - \alpha_1)^{r_1} \cdots (t - \alpha_m)^{r_m} = b(t - \beta_1)^{s_1} \cdots (t - \beta_p)^{s_p},$$

vil, da $f(\alpha_1) = 0$ og $b \neq 0$, nødvendigvis et af tallene $\beta_1, \cdots, \beta_p$ være lig α_1, og vi kan ved bogstavombygning antage, at $\beta_1 = \alpha_1$. Men da er

$$\begin{aligned} q(t) &= a(t - \alpha_1)^{r_1 - 1}(t - \alpha_2)^{r_2} \cdots (t - \alpha_m)^{r_m} \\ &= b(t - \alpha_1)^{s_1 - 1}(t - \beta_2)^{s_2} \cdots (t - \beta_p)^{s_p}. \end{aligned}$$

Ifølge induktionsantagelsen må de to fremstillinger af q være ens, og det gælder så også de to fremstillinger af f. □

Korollar 5.9 Identitetssætningen for polynomier. *Hvis to polynomier*

$$a_p t^p + a_{p-1} t^{p-1} + \cdots + a_1 t + a_0,$$
$$b_q t^q + b_{q-1} t^{q-1} + \cdots + b_1 t + b_0,$$

stemmer overens i værdi for uendelig mange $t \in \mathbb{C}$, så er de identiske, dvs. $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \cdots a_m = b_m$, $m = \min\{p, q\}$, medens koefficienter med indeks $> m$ alle er 0.

Konsekvens. Hvis to (funktioner $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, der kan skrives som) polynomier stemmer overens i værdi for uendelig mange $t \in \mathbb{C}$, så gør de det for alle $t \in \mathbb{C}$.

Bevis. Korollar 5.9 indses på kontraponeret form. Antag, at de givne polynomier ikke er identiske, dvs. at vi ved subtraktion led for led får et polynomium, hvor ikke alle koefficienter er 0 (et egentligt polynomium)

$$c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0.$$

Vi kan tænke os $c_n \neq 0$ ved om fornødent at slette nogle nuller. Er nu $n = 0$, har differenspolynomiet ingen nulpunkter, og er $n > 0$, har det ifølge Sætning 5.2 højst endelig mange (nemlig højst n) nulpunkter. Og nulpunkterne her er jo netop de punkter, hvor de givne polynomier stemmer overens i værdi.

Sætning 5.10. *Ethvert polynomium f i én variabel*

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a, t + a_0$$

med **reelle** *koefficienter og grad $n \geq 1$ kan på en og kun en måde skrives på formen*

$$f(t) = a(t - \alpha_1)^{r_1} \cdots (t - \alpha_k)^{r_k} (t^2 + \beta_1 t + \gamma_1)^{s_1} \cdots (t^2 + \beta_\ell t + \gamma_\ell)^{s_\ell},$$

hvor $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ er indbyrdes forskellige reelle tal, $a \in \mathbb{R}$, og $(\beta_1, \gamma_1), \cdots, (\beta_\ell, \gamma_\ell)$ er indbyrdes forskellige par af reelle tal, som opfylder ulighederne

$$\beta_1^2 - 4\gamma_1 < 0, \cdots, \beta_\ell^2 - 4\gamma_\ell < 0.$$

Bevis. Entydigheden følger af, at to forskellige produktfremstillinger ved videre faktorisering af andengradspolynomierne i komplekse førstegradspolynomier ville give to væsentlig forskellige komplekse faktoriseringer, i strid med Sætning 5.2.

For at vise eksistensen af en reel faktorisering af den ønskede form tager vi udgangpunkt i den komplekse faktorisering af f,

$$f(t) = a_n(t-\alpha_1)^{r_1}\cdots(t-\alpha_m)^{r_m}, \quad t \in \mathbb{C}. \tag{5.8}$$

Som følge af homomorfirelationerne (5.3) har vi

$$\overline{f(t)} = a_n(\overline{t}-\overline{\alpha}_1)^{r_1}\cdots(\overline{t}-\overline{\alpha}_m)^{r_m}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

For $t \in \mathbb{R}$ er $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}$, da jo $a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Altså er $\overline{f(t)} = f(t)$, således at

$$f(t) = a_n(t-\overline{\alpha}_1)^{r_1}\cdots(t-\overline{\alpha}_n)^{r_m} \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Men denne fremstilling af $f(t)$ gælder så også for alle $t \in \mathbb{C}$, ifølge Konsekvens af Korollar 5.9. Og så er den ifølge Sætning 5.8 identisk med (5.8) ovenfor, pånær faktorernes rækkefølge. Heraf følger, at de ikke-reelle rødder i f optræder i par af konjugerede med samme multiplicitet. Faktoriseringen (5.8) kan derfor skrives

$$f(t) = a \prod_{\alpha_j \in \mathbb{R}} (t-\alpha_j)^{r_j} \prod_{\alpha_j \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\ \alpha_j > 0} ((t-\alpha_j)(t-\overline{\alpha}_j))^{r_j}\ .$$

For de j for hvilke $\alpha_j \in \mathbb{C}$, Im $\alpha_j > 0$, er

$$\begin{aligned}(t-\alpha_j)(t-\overline{\alpha}_j) &= t^2 - (\alpha_j + \overline{\alpha}_j)t + \alpha_j\overline{\alpha}_j \\ &= t^2 + \beta_j t + \gamma_j,\end{aligned}$$

hvorfor $\beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, og diskriminanten $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$, da rødderne $\alpha_j, \overline{\alpha}_j$ i polynomiet $t^2 + \beta_j t + \gamma_j$ ikke er reelle. Vi har således fundet en produktfremstilling af den ønskede form.

□

Bemærkning 5.11. Sætning 5.10 handler om faktorisering af reelle polynomier i simplest mulige reelle polynomier. Vi har her et eksempel på et rent reelt resultat opnået ved at gå ud i $\mathbb{C}$. Et andet er formlerne for $\cos n\theta$ og $\sin n\theta$ i Eksempel 5.4. Der findes adskillige tilsvarende eksempler, hvor man har fordel af at arbejde med $\mathbb{C}$ under angreb på problemer vedrørende $\mathbb{R}$.

Øvelser til §2

Øv. 2.1 Verificér, f.eks. ved induktion, at det n'te Fibonacci tal F_n (jvf. (2.7)) er

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Øv. 2.2 Et eksempel fra rentesregning (knytter an til Eksempel 2.11 2)):
En kapital på 1 kr. anbringes til forrentning med rente og renters rente i et tidsrum af m år og vokser derved til K kr. Rentefoden omsat til årsbasis kaldes r, altså $100r\%$ p.a. Vi antager, at der går n terminer på et år (det almindeligste p. t. er $n = 4$). Hver termin er således $1/n$ år, og rentefoden pr. termin er r/n. Det samlede antal terminer på de m år, forrentningen varer, er mn. Slutkapitalen er derfor

$$K = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{mn}.$$

Udregn for $r = 0,08$ kapitalen K i hvert af tilfældene

1) $n = 2$ (halvårlig rentetilskrivning)
2) $n = 4$ (kvartårlig rentetilskrivning)
3) $n = 12$ (månedlig rentetilskrivning)
4) $n \to \infty$ (kontinuerlig rentetilskrivning)

Vedr. 4) benyttes omskrivningen

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{mn} = \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n}\right]^{m},$$

og K defineres som grænseværdien heraf for $n \to \infty$.

Hvad er i øvrigt forklaringen på, at K bliver større når terminerne bliver kortere (og derfor størst ved kontinuerlig rentetilskrivning)?

Øv. 2.3 Følgende opgave knytter an til Eksempel 2.22.

(i) Vis, at funktionen

$$f\colon\ ]-\tfrac{1}{2},\infty[\to \mathbb{R}$$

givet ved

$$f(t) = \sqrt{1+2t}$$

er voksende, og at der gælder

$$t \le f(t) \text{ for alle } t \in [0, 1+\sqrt{2}\,].$$

(ii) Vis, at følgen (x_n) givet rekursivt ved

$$x_1 = 0 \text{ og } x_{n+1} = \sqrt{1+2x_n}\,,\ n \ge 1$$

er konvergent og bestem grænseværdien.

Øv. 2.4 Hvilke af nedenstående talfølger er delfølger af følgen $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$?

(i) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \cdots, \frac{1}{10^n}, \cdots$

(ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \cdots$

(iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \cdots$

Øv. 2.5 Angiv to konvergente delfølger af følgen (2.6) i Eksempel 2.1, således at den ene konvergerer mod 0 og den anden mod 1.

Øv. 2.6 Hvilke fortætningspunkter har de respektive talfølger (2.1)–(2.6) i Eksempel 2.1?

Øv. 2.7 Lad følgen $a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots$ være givet rekursivt ved

$$a_n = \tfrac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \text{ for } n \geq 2,$$

med udgangselementerne $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

(i) Vis ved induktion efter n, at der for alle $n = 0, 1, 2, \cdots$ gælder

$$a_n = \tfrac{2}{3}\left(1 - (-\tfrac{1}{2})^n\right).$$

(ii) Vis, at følgen a_n er konvergent og bestem grænseværdien.

(iii) Gør rede for at delfølgen $a_0, a_2, a_4, \cdots$ er strengt voksende og at delfølgen $a_1, a_3, a_5 \cdots$ er strengt aftagende.

Øvelser til §3

Øv. 3.1 Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$$

er konvergent, og find dens sum.

Vink. Vis, at rækkens n'te led kan omskrives til $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Øv. 3.2 Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(2n^2 - \sqrt{n})^{-1}$ er konvergent, og at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ er divergent. (Benyt sammenligningskriteriet.)

Øv. 3.3 Vis, at rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} n^n 2^{-n^2}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ begge er konvergente.

(Benyt rodkriteriet, hhv. kvotientkriteriet.)

Øv. 3.4 Vis, at rækken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^a}$ er konvergent, hvis $a > 1$, og divergent hvis $a \leq 1$. (Benyt integralkriteriet).

Øv. 3.5 Undersøg, hvilke af rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n},$$

der er konvergente. (Benyt kvotientkriteriet og Eksempel 2.11).

Øv. 3.6 Den uendelige decimalbrøk $0,127127127\cdots$, som er periodisk med perioden 127, fremstiller et rationalt tal. Hvilket? – Samme spørgsmål for decimalbrøken $2,85127127127\cdots$, som er periodisk fra et vist trin med perioden 127.

Øv. 3.7 Vis, at $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$ er konvergent. Find summen. (Vink: For $0 < x < 1$ er $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.)

Øv. 3.8 Vis, at for $0 < x < 1$ er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ konvergent. Find summen. (Vink: Som i Øv. 3.7.) Bestem $\ln 2$ med 4 decimalers nøjagtighed.

Øv. 3.9 Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ er divergent og at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ er konvergent.

Øv. 3.10 Lad $x > 0$ og betragt rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

1) Vis, at rækken er konvergent.

2) Idet rækkens sum kaldes $f(x)$ og vi får at vide, at denne række kan differentieres ledvist, d.v.s. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)'$ er konvergent med sum $f'(x)$, skal man vise, at $f(x) = e^x$.

3) Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!}$ er konvergent med sum $(1 + x)e^x$.

Øv. 3.11 Vis, at rækken $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ er konvergent og find dens sum.

Øvelser til §4

Øv. 4.1 Find lim inf og lim sup af talfølgen

$$x_n = \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Øv. 4.2 Find lim inf og lim sup af talfølgen

$$x_n = (1 + (-1)^n)\frac{n^4 + 5n^3 + 3n}{8n^4 + 7n^3 + 6n^2 + 1}.$$

Øv. 4.3 Lad $x_n = (1 + \frac{1}{n}(-1)^n)\sin(n\frac{\pi}{2}), \quad n \in \mathbb{N}$.
Bestem $\liminf x_n$ og $\limsup x_n$.

Øvelser til §5

Øv. 5.1 Vis på en figur følgende punktmængder:

(a) $\{z \in \mathbb{Z} \mid |z| = 1\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \frac{\pi}{4}\}$,

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, (d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$,

(e) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z - 1| < 3\}$.

Øv. 5.2 Vis på en figur følgende punktmængder:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = |z - 2i|\}$,

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| + |z + 1| = 3\}$,

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| < \pi, \quad |z| > 5\}$.

Øv. 5.3 Bring ethvert af nedenstående komplekse tal på formen $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $(1 + 2i)^2 + \frac{1}{2}(1 + i)(1 + i^8)$

(b) $i\sqrt{5}\,(1 - i\sqrt{5}\,) - (\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{5}\,)(-2 + 2i)$

(c) $\dfrac{2 + 5i}{(3 - 7i)^2} + (2 + 3i)(3 - 4i)$

(d) $\dfrac{6 + 7i}{7i - 3} - \dfrac{2 + 5i}{3 + 7i} + \dfrac{30 - 23i}{58}$

(e) $\dfrac{2\sqrt{3} - i3\sqrt{2}}{3i\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} + (1 + i)^4$.

Øv. 5.4 Find modulus og argument for ethvert af følgende komplekse tal:

(a) $-4 - 4i$, (b) $2\sqrt{3} - 6i$, (c) $-\dfrac{\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

(d) $3 + i\sqrt{3}$, (e) $\dfrac{4}{1 + i}$, (f) $\dfrac{1}{-2 + i2\sqrt{3}}$.

Øv. 5.5 Bring ethvert af nedenstående komplekse tal på formen $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $(1 + i\sqrt{3}\,)^5$ (b) $(-\sqrt{3} + i\sqrt{3}\,)^9$

(c) $\dfrac{(-i\sqrt{2}\,)^6}{(-3 - i\sqrt{3}\,)^7}$.

Øv. 5.6 Find de komplekse tal x og y af ligningerne

$$(3 + i)x + (1 - 2i)y = 1,$$
$$(2 + i)x + (1 - i)y = i.$$

Øv. 5.7 Vis, at for ethvert $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$ gælder

$$|z| = 1 \iff \operatorname{Re} \frac{1 + z}{1 - z} = 0,$$

idet $\operatorname{Re} z$ betegner realdelen af z.

Øv. 5.8 Løs følgende ligninger for $z \in \mathbb{C}$:

(a) $z^2 = -4$,

(b) $z^2 + 2z + 10 = 0$,

(c) $z^3 = i$.

Øv. 5.9 Løs ligningen i $\mathbb{C}$

(a) $z^4 - z^2 + 1 = 0$ (b) $(1 + i)z^2 - 2iz + 4 - 2i = 0$.

Øv. 5.10 Løs ligningen i $\mathbb{C}$

$$(1 + i)z^2 - (1 - 4i)z - 5 = 0$$

og beregn $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}$, idet α og β betegner rødderne.

Øv. 5.11 Find en andengradsligning med reelle koefficienter, som har roden

(a) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, (b) $a + ib$ hvor $a, b \in \mathbb{R}$.

Øv. 5.12 Rødderne i ligningen $z^2 + az + b$ forudsættes at være konjugerede komplekse tal. Vis, at koefficienterne er reelle.

Øv. 5.13 Løs ligningen

(a) $z^3 + z^{-3} = 1$, (b) $z^8 - 2\sqrt{3}\,iz^4 - 4 = 0$.

Øv. 5.14 Begrund, at ligningen $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ har mindst en reel rod og løs derefter ligningen.

Øv. 5.15 Begrund, at ligningen $z^4 + 2z^3 + 16z^2 - 2z - 17 = 0$ har en reel rod og dermed også mindst 2 reelle rødder. Løs ligningen.

Bent Fuglede

Lineær optimering

Noter til Matematik H2

Indhold

Københavns Universitet
Matematisk Institut
1989

§1. Basisløsninger til et lineært ligningssystem

Vi betragter et vilkårligt lineært ligningssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{1}$$

hvor $\mathbf{A} = (a_{ij})$ er en $m \times n$-matrix, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ og $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ er hhv. $m \times 1$ og $n \times 1$ søjlematricer. (Index i gennemløber stedse $\{1, \dots, m\}$ og j gennemløber $\{1, \dots, n\}$.) Vektorer opfattes stedse som søjlematricer, når ikke andet anføres. Vi betegner med

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

den j'te søjle i $\mathbf{A}$. Så gælder for enhver $n \times 1$-matrix $\mathbf{x}$ at

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Ligningssystemet (1) kan herefter skrives på formen

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}, \tag{2}$$

og en løsning til (1) er således det samme som sættet af koefficienter $x_1, \dots, x_n$ i en fremstilling af $\mathbf{b}$ som linearkombination af $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$.

Lad nu $\mathbf{x}$ betegne en forelagt løsning til (1) (eller (2)). Vi betegner med $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ de eventuelle indices j for hvilke $x_j \neq 0$. (Mængden af sådanne j kan eventuelt være $\emptyset$ eller $\{1, \dots, n\}$.) Så antager (2) formen

$$x_\alpha\mathbf{a}_\alpha + x_\beta\mathbf{a}_\beta + \dots \quad = \mathbf{b}, \tag{3}$$

og vi siger derfor, at den betragtede løsning x *involverer* søjlerne $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta, \dots$ (og ingen andre).

Definition 1.1. En løsning $\mathbf{x}$ til (1) kaldes en *basisløsning*, hvis de involverede søjler $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta, \dots$ er *lineært uafhængige*.

Medens (1) ofte har uendelig mange løsninger, findes der altid højst *endelig mange basisløsninger* til (1), nemlig højst én for hver delmængde $\{\alpha, \beta, \dots\}$ af $\{1, \dots, n\}$, for hvilken søjlerne $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta, \dots$ er lineært uafhængige.

§2. Basisløsninger til et lineært program på kanonisk form

Et lineært program på *kanonisk form* er en opgave af formen

(P) Maksimér $\mathbf{c}^t\mathbf{x} = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ under hensyn til bibetingelserne

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{o}.$$

Her er $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ en given vektor i $\mathbb{R}^n$, medens $\mathbf{A}$ og $\mathbf{b}$ er som i §1, og ligeså den variable $\mathbf{x}$. Med $\mathbf{o}$ betegnes nulvektor. Skrivemåden $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$ betyder $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$. Superscript t angiver transponering. Funktionen $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{c}^t\mathbf{x}$ kaldes *objektfunktionen* (eller *kriteriefunktionen*). En vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kaldes en *tilladt* (eller *mulig*) *"løsning"* til (P), hvis $\mathbf{x}$ opfylder bibetingelserne $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ og $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$.

Den *optimale værdi* af (P) defineres som supremum af objektfunktionen betragtet på mængden af tilladte løsninger:

$$\sup\{\mathbf{c}^t\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \wedge \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\}.$$

Den er $-\infty$, hvis (P) ikke har tilladte løsninger. Den er $+\infty$, hvis funktionen $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{c}^t\mathbf{x}$ er opad ubegrænset på mængden

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \wedge \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\} \quad (\neq \emptyset)$$

af tilladte løsninger til (P). Ellers er den optimale værdi $\in \mathbb{R}$.

Ved en *optimal løsning* til (P) forstås en tilladt løsning $\mathbf{x}$ for hvilken $\mathbf{c}^t\mathbf{x}$ er lig med den optimale værdi (der så må være endelig), altså for hvilken $\mathbf{c}^t\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^t\mathbf{z}$ for enhver anden tilladt løsning $\mathbf{z}$.

De tilladte løsninger til (P) udgør en konveks mængde i $\mathbb{R}^n$. Nærmere er denne et *konvekst polyeder*, forstået som fællesmængden for et endeligt sæt af afsluttede halvrum i $\mathbb{R}^n$, jf. Konveksitet, §6. (Også $\emptyset$ og $\mathbb{R}^n$ regnes for konvekse polyedre.) Thi (1) er jo ensbetydende med sættet af $2m$ lineære uligheder $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$, hhv. $\leq b_i$, og dertil kommer de n lineære uligheder $x_j \geq 0$.

Også de optimale løsninger til (P) danner et konvekst polyeder, idet der blot kommer endnu en lineær ulighed til, nemlig $\mathbf{c}^t\mathbf{x} \geq$ den optimale værdi (altså lig med denne).

SÆTNING 2.1. *Betragt et kanonisk lineært program* (P).

a) *Hvis der findes en tilladt løsning, så også en tilladt basisløsning.*
b) *Hvis der findes en optimal løsning, så også en optimal basisløsning.*

Bevis. Denne sætning er i det væsentlige et specialtilfælde af Konveksitet, Sætning 7.3. Vi giver dog et direkte bevis. Vi kan nøjes med at vise b); thi heraf følger a) ved blot at ændre programmet (P) til et nyt program (P_0), hvori $\mathbf{c}$ erstattes med $\mathbf{o}$

medens $\mathbf{A}$ og $\mathbf{b}$ bibeholdes. Den optimale værdi for (P_0) er åbenbart 0, og en tilladt løsning [resp. tilladt basisløsning] til (P) er det samme som en optimal løsning [resp. optimal basisløsning] til (P_0).

Vi antager således, at der findes mindst én optimal løsning til (P). Blandt samtlige optimale løsninger til (P) findes en (eller flere), for hvilken antallet af strengt positive koordinater er så lille som muligt. Lad $\mathbf{x}$ betegne en sådan optimal løsning til (P) med færrest mulige koordinater > 0, lad os sige

$$x_\alpha > 0, \quad x_\beta > 0, \ \dots \ ,$$

hvor $\{\alpha, \beta, \dots\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, og $x_j = 0$ for $j \notin \{\alpha, \beta, \dots\}$. Så er (3) opfyldt (se §1):

$$x_\alpha \mathbf{a}_\alpha + x_\beta \mathbf{a}_\beta + \dots \quad = \mathbf{b}. \tag{3}$$

Vi vil nu vise, at $\mathbf{x}$ er en basisløsning til (1): $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, og dermed en optimal basisløsning til (P). Hertil skal vises, at søjlerne $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta, \dots$ i $\mathbf{A}$ er lineært uafhængige, jf. Definition 1.1. Antag, at $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta, \dots$ er lineært afhængige. Så findes reelle tal $y_\alpha, y_\beta, \dots$, ikke alle 0, så at

$$y_\alpha \mathbf{a}_\alpha + y_\beta \mathbf{a}_\beta + \dots \quad = \mathbf{o}. \tag{4}$$

Vi kan gerne antage, at f.eks. $y_\alpha \neq 0$, og nærmere at $y_\alpha > 0$, thi er $y_\alpha < 0$, erstatter vi blot $y_\alpha, y_\beta, \dots$ med $-y_\alpha, -y_\beta, \dots$, hvorved (4) bevarer sin gyldighed. Vi sætter

$$y_j = 0 \qquad \text{for } \ j \notin \{\alpha, \beta, \dots\},$$

og har derved en vektor $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \neq \mathbf{o}$ med $\mathbf{Ay} = \mathbf{o}$.

Nu multipliceres (4) med et tal $\lambda \in \mathbb{R}$, og det fremkomne trækkes fra (3). Resultatet er $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}) = \mathbf{b}$, eller udførligt

$$(x_\alpha - \lambda y_\alpha)\mathbf{a}_\alpha + (x_\beta - \lambda y_\beta)\mathbf{a}_\beta + \dots \quad = \mathbf{b}. \tag{5}$$

Da $x_\alpha > 0, \ x_\beta > 0, \ \dots$, er også $x_\alpha - \lambda y_\alpha > 0, \ x_\beta - \lambda y_\beta > 0, \ \dots$ for alle numerisk tilstrækkelig små $\lambda \in \mathbb{R}$, lad os sige for $|\lambda| < \delta$. Endvidere er $x_j - \lambda y_j = 0 - 0 = 0$ for alle $j \notin \{\alpha, \beta, \dots\}$.

Vektoren $\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}$ er således en ny tilladt løsning til (P), når $|\lambda| < \delta$. Den tilhørende værdi af objektfunktionen er

$$\mathbf{c}^t(\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}) \ = \ \mathbf{c}^t\mathbf{x} - \lambda\mathbf{c}^t\mathbf{y} \ \leq \ \mathbf{c}^t\mathbf{x}, \tag{6}$$

fordi $\mathbf{x}$ var forudsat optimal. Heraf sluttes

$$\mathbf{c}^t\mathbf{y} = 0, \tag{7}$$

thi hvis $\mathbf{c}^t\mathbf{y} < 0$ fås modstrid i (6) for $0 < \lambda < \delta$, og hvis $\mathbf{c}^t\mathbf{y} > 0$ fås modstrid i (6) for $-\delta < \lambda < 0$. Ifølge (7) gælder lighedstegn i (6) for ethvert $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{c}^t(\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}) = \mathbf{c}^t\mathbf{x} \tag{8}$$

(den optimale værdi). Vi efterlyser nu det største tal $\lambda > 0$ for hvilket $\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y} \geq \mathbf{o}$, eller udførligt

$$x_\alpha - \lambda y_\alpha \geq 0, \quad x_\beta - \lambda y_\beta \geq 0, \; \ldots \; . \tag{9}$$

Blandt disse uligheder er sådanne, for hvilke den pågældende y-koordinat er ≤ 0, trivielt opfyldt for alle $\lambda > 0$. Den søgte maksimale værdi λ er derfor

$$\lambda = \min\left\{ \frac{x_j}{y_j} \;\middle|\; j \in \{\alpha, \beta, \ldots\} \quad \wedge \quad y_j > \mathbf{o} \right\},$$

thi når $y_j > 0$ kan den j'te ulighed $x_j - \lambda y_j \geq 0$ jo omskrives til $\lambda \leq x_j/y_j$. Med dette valg af λ gælder ulighederne (9), og der gælder lighedstegn i den eller de af ulighederne hvis "nummer" j minimerer x_j/y_j. Vektoren $\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}$ er således en tilladt løsning til (P) (her benyttes tillige (5)), og endda en optimal løsning ifølge (8). Men antallet af koordinater > 0 for denne nye optimale løsning er mindre end for den givne optimale løsning x, i strid med valget af $\mathbf{x}$. $\square$

§3. Farkas' alternativ

Definition 3.1. En delmængde Γ af $\mathbb{R}^m$ kaldes som bekendt (Konveksitet, Definition 7.1) en *kegle*, hvis

$$\forall\, \lambda \in [0, +\infty[\quad \forall\, \mathbf{b} \in \Gamma \;:\quad \lambda\mathbf{b} \in \Gamma.$$

Enhver ikke tom kegle indeholder $\mathbf{o}$, som man ser ved at vælge en vilkårlig vektor $\mathbf{b} \in \Gamma$ og tage $\lambda = 0$. En kegle, som tillige er en konveks mængde, kaldes naturligvis en *konveks kegle*.

Vi benytter betegnelsen

$$E_n = [0, +\infty[^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq 0\}$$

for den positive "ortant" i $\mathbb{R}^n$. Denne er åbenbart en afsluttet konveks kegle i $\mathbb{R}^n$.

Ethvert sæt $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ af vektorer i $\mathbb{R}^m$ frembringer jo en konveks kegle $\Gamma = \mathrm{cone}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, bestående af alle positive kombinationer (dvs. linearkombinationer med koefficienter ≥ 0) af $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$:

$$\Gamma = \{x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n \mid \mathbf{x} \in E_n\} = \{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in E_n\},$$

se Konveksitet, Sætning 7.2. Og Γ er *afsluttet*, fordi den frembringes af endelig mange vektorer $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, se Konveksitet, Sætning 7.4.

Ved at kombinere dette med en af separationssætningerne for konvekse mængder kan vi nu udlede det afgørende hjælpemiddel i dualitetsteorien for lineær optimering (jf. §6):

Sætning 3.2. (J. Farkas, 1902). *For ethvert lineært ligningssystem* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *(jf. §1) indtræffer netop ét af følgende to tilfælde:*

1^0. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *har mindst én løsning* $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$ *(altså* $\mathbf{x} \in E_n$*), eller*

2^0. $\mathbf{A}^t\mathbf{y} \geq \mathbf{o} \;\; \wedge \mathbf{b}^t\mathbf{y} < 0$ *har mindst én løsning* $\mathbf{y}$ $(\in \mathbb{R}^m)$.

Bemærk, at ulighederne i 2^0 ved transponering antager den ækvivalente form $\mathbf{y}^t\mathbf{A} \geq \mathbf{o}^t \wedge \mathbf{y}^t\mathbf{b} < 0$ (jf. LD, s. 6.2.1).

Bevis. Først bemærkes, at 1^0 og 2^0 ikke begge kan indtræffe, thi af $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \;\wedge \mathbf{y}^t\mathbf{A} \geq \mathbf{o}^t \;\; \wedge \mathbf{x} \geq \mathbf{o}$ ville følge

$$\mathbf{y}^t\mathbf{b} = \mathbf{y}^t(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{y}^t\mathbf{A})\mathbf{x} \geq 0$$

i strid med sidste ulighed i 2^0. – Vi har her benyttet, at produktet af to matricer (som $\mathbf{y}^t\mathbf{A}$ og $\mathbf{x}$), der begge har alle elementer ≥ 0, ligeledes har lutter elementer ≥ 0.

Tilbage står at indse, at hvis 1^0 ikke indtræffer, så gælder til gengæld 2^0. At 1^0 ikke indtræffer, er ensbetydende med, at $\mathbf{b}$ ikke tilhører den *afsluttede* konvekse kegle

$$\Gamma = \{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in E_n\} \;(\subseteq \mathbb{R}^m)$$

som vi betragtede ovenfor. Men så kan $\mathbf{b}$ og Γ ifølge Konveksitet, Sætning 9.3 separeres *stærkt* ved en hyperplan H i $\mathbb{R}^m$. Der eksisterer derfor en vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ (normalvektor til H) og et tal $\beta \in \mathbb{R}$ så at

$$\mathbf{y}^t\mathbf{z} > \beta \quad \text{for } \mathbf{z} \in \Gamma, \tag{12}$$

$$\mathbf{y}^t\mathbf{z} < \beta \quad \text{for } \mathbf{z} = \mathbf{b}. \tag{13}$$

For enhver vektor $\mathbf{x} \in E_n$ gælder $\mathbf{Ax} \in \Gamma$ ifølge definitionen af Γ. Og da Γ er en kegle, gælder også $\lambda\mathbf{Ax} \in \Gamma$ for ethvert $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ifølge Definition 3.1. Vi kan derfor indsætte $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{Ax}$ i (12) og slutte, at

$$\lambda\mathbf{y}^t\mathbf{Ax} = \mathbf{y}^t(\lambda\mathbf{Ax}) > \beta \quad \text{for } \lambda \in \mathbb{R}_+, \ \mathbf{x} \in E_n.$$

Efter division med λ og grænseovergang $\lambda \to +\infty$ fås heraf

$$\mathbf{y}^t\mathbf{Ax} \geq 0 \quad \text{for } \mathbf{x} \in E_n. \tag{14}$$

Dette viser, at $\mathbf{y}^t\mathbf{A} \geq \mathbf{o}^t$. (Thi det j'te element i rækkematricen $\mathbf{y}^t\mathbf{A}$ er jo $(\mathbf{y}^t\mathbf{A})\mathbf{e}_j \geq 0$ ifølge (14) anvendt på $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$, den j'te naturlige basisvektor i $\mathbb{R}^n$.)

Endelig viser (13), at $\mathbf{y}^t\mathbf{b} < \beta$ og dermed $\mathbf{y}^t\mathbf{b} < 0$; thi der gælder $\beta < 0$ ifølge (12) anvendt på $\mathbf{z} = \mathbf{o} \in \Gamma$. Ialt er hermed påvist, at hvis 1^0 ikke indtræffer, så er 2^0 opfyldt. $\square$

§4. Det generelle lineære program og dets duale

Et *lineært program* i dets generelle skikkelse er en opgave, der består i at maksimere eller minimere en lineær funktion $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{c}^t\mathbf{x}$ defineret på $\mathbb{R}^n$ under hensyn til visse *lineære bibetingelser*. Hver af disse udtrykker enten, at en lineær funktion skal være $\leq$ en konstant eller at en lineær funktion skal være $=$ en konstant. Det kan specielt kræves, at visse af de variable $x_1, \ldots, x_n$ skal være ≥ 0. Et sådant krav $x_j \geq 0$ er jo ensbetydende med en bibetingelse $-x_j \leq 0$ af den allerede nævnte art; men man plejer alligevel at holde sådanne *fortegnskrav* for sig.

I tilfælde af en maksimeringsopgave kan det ovenstående konkretiseres således:

Definition 4.1. Et lineært program i den variable $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ er en opgave af formen:

(P) Maksimér $\mathbf{c}^t\mathbf{x} = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ under hensyn til følgende m bibetingelser

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \begin{cases} \leq \ b_i & \text{for} \quad i \in I^* \\ = \ b_i & \text{for} \quad i \in I \setminus I^* \end{cases} \tag{15}$$

samt et antal fortegnskrav

$$x_j \geq 0 \qquad \text{for} \quad j \in J^*. \tag{16}$$

Her betegner I^* en given delmængde af

$$I = \{1, \ldots, m\},$$

medens J^* er en given delmængde af

$$J = \{1, \ldots, n\}.$$

Koefficienterne c_j, a_{ij} og højresiderne b_i er givne reelle tal. De variable x_j med $j \in J \setminus J^*$ er således *frie* variable (ikke underkastet fortegnskrav). Mulighederne $I^* = \emptyset$ eller $I^* = I$ kan forekomme, og ligeså mulighederne $J^* = \emptyset$ eller $J^* = J$. Undertiden kalder vi betingelserne (15) for de *egentlige* bibetingelser for at skelne dem fra fortegnskravene (16).

Ved en *tilladt* (eller *mulig*) *løsning* til (P) forstås en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ som opfylder bibetingelserne (15) og fortegnskravene (16).

Den *optimale værdi* af (P) defineres som supremum af objektfunktionen $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{c}^t\mathbf{x}$ over alle tilladte løsninger $\mathbf{x}$, og betegnes kort med $\sup(P)$. (Er opgaven i stedet at minimere $\mathbf{c}^t\mathbf{x}$ under hensyn til (15), (16) bliver der naturligvis tale om infimum i stedet for supremum.)

Ved en *optimal løsning* til (P) forstås en tilladt løsning $\mathbf{x}$, for hvilken $\mathbf{c}^t\mathbf{x}$ er lig med den optimale værdi.

Mængden af alle tilladte løsninger til (P) er åbenbart et konvekst polyeder, og ligeså mængden af alle optimale løsninger, jf. Lineær optimering, s. 2.1.

Matricen (a_{ij}) (hvor i gennemløber $I = \{1, \ldots, m\}$ og j gennemløber $J = \{1, \ldots, n\}$) vil i det følgende blive betegnet med $\mathbf{A}$.

Eksempel 4.2. Betragt det lineære program

(P) Maksimér $x_1 + 5x_2 - 2x_3$ under hensyn til bibetingelserne

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 \qquad &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

samt fortegnskravene $x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0$.

Her er således $m = 2, \; n = 3$,

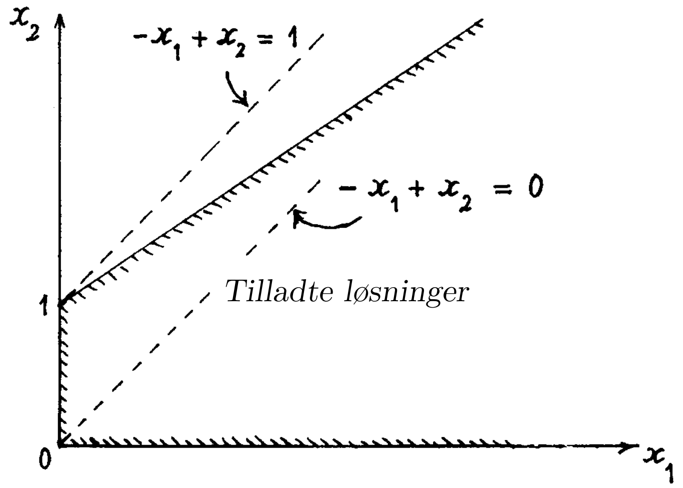
$$\mathbf{c}^t = (1, 5, -2), \quad \mathbf{b}^t = (3, 4), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$I = \{1, 2\}, \quad I^* = \{1\}, \quad J = \{1, 2, 3\}, \quad J^* = \{1, 2\}.$$

Da $I \setminus I^* = \{2\}$ kan vi løse den 2. bibetingelse f.eks. m.h.t. x_3 og indsætte resultatet $x_3 = x_1 + 2x_2 - 4$ i objektfunktionen (og i den 1. bibetingelse, som dog her ikke indeholder x_3). Herved omformes (P) til et ækvivalent program:

Maksimér $-x_1 + x_2 + 8$ under hensyn til $-2x_1 + 3x_2 \leq 3$ og $x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$.

Dette program kan let løses elementært, f.eks. ved at indtegne mængden af tilladte løsninger i x_1, x_2-planen og desuden et par niveaulinier for objektfunktionen, eller lige så gerne for funktionen $-x_1 + x_2$; f.eks. niveaulinierne gennem $(0, 0)$ og $(0, 1)$ med ligningerne $-x_1 + x_2 = 0$, hhv. $-x_1 + x_2 = 1$.



Det ses heraf, at $(x_1, x_2) = (0, 1)$ er den eneste optimale løsning til det omformede program, og derfor er $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, -2)$ eneste optimale løsning til det oprindelige program. Den optimale værdi er følgelig $\sup(P) = 9$.

Definition 4.3. Til det lineære program (P) i Definition 4.1 knyttes følgende *duale program* (P') i den variable $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$:

(P') Minimér $\mathbf{b}^t\mathbf{y} = b_1y_1 + \ldots + b_my_m$ under hensyn til bibetingelserne

$$a_{1j}y_1 + \ldots + a_{mj}y_m \begin{cases} \geq c_j & \text{for} \quad j \in J^* \\ = c_j & \text{for} \quad j \in J \setminus J^*, \end{cases} \tag{17}$$

samt fortegnskravene

$$y_i \geq 0 \quad \text{for} \quad i \in I^*. \tag{18}$$

Bemærk, at der er lige så mange duale variable $y_1, \ldots, y_m$ som der er egentlige bibetingelser i (P). Det er nyttigt at opfatte y_i som knyttet til den i'te bibetingelse (15) for (P).

Eksempel 4.4. Det duale program (P') til programmet (P) i Eksempel 4.2 er:

(P') Minimér $3y_1 + 4y_2$ under hensyn til bibetingelserne

$$\begin{aligned} -2y_1 + y_2 &\geq 1 \\ 3y_1 + 2y_2 &\geq 5 \\ -y_2 &= -2 \end{aligned}$$

samt fortegnskravet $y_1 \geq 0$.

Bemærk, at koefficientmatricen i bibetingelserne i (P') er den transponerede til koefficientmatricen $\mathbf{A}$ i bibetingelserne i (P). Bemærk i øvrigt, at når (P) som her er en maksimeringsopgave, bliver (P') en minimeringsopgave (og vice versa), og at ulighedstegnene i bibetingelserne i de to programmer vender modsat. Alt dette gælder åbenbart generelt.

Vi kan let løse ovenstående program (P') ved at indsætte bibetingelsen med lighedstegn: $-y_2 = -2$ i det øvrige. Herved omformes (P') til at minimere $3y_1 + 8$ under hensyn til $-2y_1 \geq -1$ og $3y_1 \geq 1$ (samt $y_1 \geq 0$). Eneste optimale løsning til (P') bliver $(y_1, y_2) = (\frac{1}{3}, 2)$, og den optimale værdi af (P') bliver $\inf(P') = 9$.

I dette eksempel har således (P) og (P') samme optimale værdi: $\sup(P) = \inf(P')$. Vi skal senere se, at dette altid gælder (blot enten (P) eller (P') har en tilladt løsning).

Det kan være bekvemt at opstille et program (P) og dets duale (P') skematisk på følgende måde, der lader forbindelsen mellem dem i henhold til Definition 4.3 træde anskueligt frem. Vi opskriver kun koefficienterne, ikke de variable. Det er praktisk at skrive koefficienterne til objektfunktionen nederst (altså under den vandrette streg). Højresidekonstanterne står til højre for den lodrette streg. (I det tomme felt i nederste højre hjørne i hvert af skemaerne kan man skrive et eventuelt konstantled i objektfunktionen for (P) og dermed for (P'), hvis man vælger at tillade et sådant) – I eksemplerne 4.2 og 4.4 fås således følgende skemaer for (P) og (P'):

$$(P)\ \text{Max},\ \le \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} & * & * & & \\ * & -2 & 3 & 0 & 3 \\ & 1 & 2 & -1 & 4 \\ & 1 & 5 & -2 & \end{array}$$

$$(P')\ \text{Min},\ \ge \qquad\qquad \begin{array}{cccc} & * & & \\ * & -2 & 1 & 1 \\ * & 3 & 2 & 5 \\ & 0 & -1 & -2 \\ & 3 & 4 & \end{array}$$

En stjerne til venstre for en række angiver, at rækkens nummer tilhører I^* (ved (P)), hhv. J^* (ved (P')), altså at der skal stå ulighedstegn i den tilsvarende bibetingelse (nemlig $\le$ ved (P) og $\ge$ ved (P')), således som det er anført over skemaerne. – En stjerne over en af søjlerne angiver fortegnskravet, at den tilhørende variable (i (P) eller (P')) skal være ≥ 0, svarende til at søjlens nummer tilhører J^*, hhv. I^*.

Herefter ses, at skemaet for (P') simpelthen fås ved at transponere hele skemaet for (P) (inklusive stjernerne) og erstatte Max med Min og $\le$ med l $\ge$. Tilsvarende fremkommer skemaet for (P) ved at transponere skemaet for (P') og erstatte Min med Max og $\ge$ med $\le$. Hermed har vi i realiteten bevist Sætning 4.5 nedenfor.

Der er tradition for at kalde (P) for det *primale program*. Heri ligger der dog ingen skelnen mellem arten af (P) og (P'), som det netop ses af

SÆTNING 4.5. *Det duale til det duale program er det primale program.*

En mere tungtvejende begrundelse for den valgte definition af det duale program (P') haves i følgende lemma, hvis bevis beror på alle enkeltheder i Definition 4.3.

LEMMA 4.6. *For enhver tilladt løsning* $\mathbf{x}$ *til* (P) *i Definition 4.1 og enhver tilladt løsning* $\mathbf{y}$ *til* (P') *gælder*

$$\mathbf{c}^t\mathbf{x} \le \mathbf{y}^t\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{y}^t\mathbf{b}, \tag{19}$$

og derfor

$$\mathbf{c}^t\mathbf{x} \le \sup(P) \le \inf(P') \le \mathbf{y}^t\mathbf{b}. \tag{20}$$

Bevis. For at vise den sidste ulighed i (19) skriver vi $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{u}$ $(\in \mathbb{R}^m)$. Vi finder

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^t\mathbf{u} = \sum_{i\in I} y_i u_i &= \sum_{i\in I^*} y_i u_i + \sum_{i\in I\setminus I^*} y_i u_i \\ &\overset{1}{\le} \sum_{i\in I^*} y_i b_i + \sum_{i\in I\setminus I^*} y_i b_i = \sum_{i\in I} y_i b_i = \mathbf{y}^t\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Ad uligheden mærket 1: For $i \in I^*$ er $u_i \le b_i$ ifølge (15) og $y_i \ge 0$ ifølge (18), derfor $y_i u_i \le y_i b_i$. For $i \in I \setminus I^*$ er $u_i = b_i$ ifølge (15), derfor $y_i u_i = y_i b_i$.

Den første ulighed i (19) vises analogt, idet vi skriver $\mathbf{A}^t \mathbf{y} = \mathbf{v}$ $(\in \mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}^t\mathbf{x} = \sum_{j\in J} v_j x_j &= \sum_{j\in J^*} v_j x_j + \sum_{j\in J\setminus J^*} v_j x_j \\ &\overset{2}{\ge} \sum_{j\in J^*} c_j x_j + \sum_{j\in J\setminus J^*} c_j x_j = \sum_{j\in J} c_j x_j = \mathbf{c}^t\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Ad uligheden mærket 2: For $j \in J^*$ er $v_j \ge c_j$ ifølge (17) og $x_j \ge 0$ ifølge (16), derfor $v_j x_j \ge c_j x_j$. For $j \in J \setminus J^*$ er $v_j = c_j$ ifølge (18), derfor $v_j x_j = c_j x_j$.

Af (19) følger (20) ud fra definitionen på $\sup(P)$ og $\inf(P')$. Man benytter, at hvis det om to ikke-tomme mængder $A, B \subseteq \mathbb{R}^*$ gælder, at ethvert $a \in A$ er $\le$ ethvert $b \in B$, så er $\sup A \le \inf B$. − Hvad er A og B i den foreliggende sammenhæng? □

Spørgsmålet melder sig, hvornår der gælder lighedstegn i Lemma 4.6.

Sætning 4.7. *For enhver tilladt løsning* $\mathbf{x}$ *til* (P) *og enhver tilladt løsning* $\mathbf{y}$ *til* (P') *er følgende tre udsagn ensbetydende*

- α) $\mathbf{x}$ *er en optimal løsning til* (P) *og* $\mathbf{y}$ *er en optimal løsning til* (P') [*og de optimale værdier er ens:* $\sup(P) = \inf(P')$].
- β) $\mathbf{c}^t\mathbf{x} = \mathbf{y}^t\mathbf{b}$ *(derfor også* $= \mathbf{y}^t\mathbf{A}\mathbf{x}$ *ifølge Lemma 4.6).*
- γ) *Der gælder lighedstegn i (15) for ethvert* $i \in I^*$ *med* $y_i > 0$, *og der gælder lighedstegn i (17) for ethvert* $j \in J^*$ *med* $x_j > 0$.

Kommentar. Vi har anbragt sidste del af α) i klammer, fordi denne del af α) kan slettes, idet $\sup(P) = \inf(P')$ er automatisk opfyldt her, som vi senere skal se (Sætning 6.1).

Bevis for Sætning 4.7. $\alpha) \Rightarrow \beta)$ er oplagt, idet $\mathbf{c}^t\mathbf{x} = \sup(P)$ og $\mathbf{y}^t\mathbf{b} = \inf(P')$, når $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er optimale for hhv. (P) og (P').

$\beta) \Rightarrow \gamma)$: Af β) følger ved Lemma 4.6: $\mathbf{c}^t\mathbf{x} = \mathbf{y}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^t\mathbf{b}$, og der må derfor gælde lighedstegn i ulighederne mærkede 1 og 2 i beviset for lemmaet.

Lighedstegnet i uligheden mærket 1 viser, at

$$\sum_{i\in I^*} y_i(b_i - u_i) = 0,$$

fordi

$$\sum_{i\in I\setminus I^*} y_i u_i = \sum_{i\in I\setminus I^*} y_i b_i$$

ifølge (15) (husk, at $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$). Og da der for $i \in I^*$ gælder både $y_i \ge 0$ ifølge (18) og $b_i - u_i \ge 0$ ifølge (15), så er $y_i(b_i - u_i) \ge 0$ og dermed $= 0$, da summen over I^* er

$= 0$. For ethvert $i \in I^*$ med $y_i > 0$ må der derfor gælde $b_i - u_i = 0$, altså lighedstegn i (15), idet $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Lighedstegnet i uligheden mærket 2 viser tilsvarende, at

$$\sum_{j \in J^*} (v_j - c_j)x_j = 0,$$

og igen er hvert led i summen ≥ 0 og derfor $= 0$. For ethvert $j \in J^*$ med $x_j > 0$ må der derfor gælde $v_j = c_j$, altså lighedstegn i (17), idet jo $\mathbf{v} = \mathbf{A}^t\mathbf{y}$.

$\gamma) \Rightarrow \beta)$. Ved tilbageslutning ses ud fra $\gamma)$, at der påny gælder lighedstegn i ulighederne mærkede 1 og 2, hvoraf $\mathbf{c}^t\mathbf{x} = \mathbf{y}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^t\mathbf{b}$, altså lighedstegn i (19) i Lemma 4.6 og derfor også i (20). Det betyder, at $\mathbf{x}$ er optimal for (P) og $\mathbf{y}$ for (P'), og at $\sup(P) = \inf(P')$. □

§5. Omformning til kanonisk form eller standardform

I §2 betragtede vi et *kanonisk* lineært program, dvs. specialtilfældet $I^* = \emptyset$, $J^* = J$ (altså lighedstegn i *alle* de egentlige bibetingelser, og *alle* variable skal være ≥ 0).

Ved løsning af et lineært program på datamat er det ofte fordelagtigt først at bringe programmet på kanonisk form. Dette kan let lade sig gøre, f.eks. således:

1^0. For hver ulighed (15), altså for $i \in I^*$, indføres en *restvariabel* (slack variable) z_i, og vi omskriver uligheden til en *ligning*:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + z_i = b_i \qquad (i \in I^*),$$

idet vi samtidig stiller fortegnskravet

$$z_i \geq 0 \qquad (i \in I^*).$$

På denne måde kan alle ulighederne i (15) erstattes med ligninger.

2^0. For hver fri variabel x_j, altså for $j \in J \setminus J^*$, indføres to nye variable

$$x'_j \geq 0, \quad x''_j \geq 0 \qquad (j \in J \setminus J^*),$$

og vi erstatter x_j med $x'_j - x''_j$ alle steder, hvor x_j forekommer, altså dels i objekt-funktionen $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ og dels i hver af de egentlige bibetingelser (15). At vi ikke herved taber nogen tilladt eller optimal løsning, beror simpelthen på, at ethvert reelt tal (som x_j) kan skrives (på mange måder) som differens mellem to tal ≥ 0.

Eksempel 5.1. Vi bringer programmet i Eksempel 4.2 på kanonisk form således:

1^0. Vi tilføjer en restvariabel $z_1 \geq 0$ for at omforme uligheden $-2x_1 + 3x_2 \leq 3$ til ligningen $-2x_1 + 3x_2 + z_1 = 3$.

2^0. Vi erstatter overalt den frie variabel x_3 med $x'_3 - x''_3$, hvor $x'_3 \geq 0$, $x''_3 \geq 0$.

I alt omformes det givne program herved til følgende kanoniske program:

Maksimér $x_1 + 5x_2 - 2x'_3 + 2x''_3$ under hensyn til

$$\begin{array}{rrrrrl} -2x_1 & +3x_2 & & & +z_1 & = 3 \\ x_1 & +2x_2 & -x'_3 & +x''_3 & & = 4 \end{array}$$

med alle fem variable $x_1, x_2, x'_3, x''_3, z_1 \geq 0$.

Af hensyn til beviset for dualitetssætningen i §6 skal vi betragte endnu en speciel form for et lineært program – den såkaldte standardform.

Definition 5.2. Et lineært program (P) har *standardform*, hvis der gælder *ulighedstegn* i alle bibetingelser og hvis alle de variable skal være ≥ 0.

Med betegnelserne fra Definition 4.1 kræves altså $I^* = I, \quad J^* = J$. Et standardprogram har således formen

(P) Maksimér $\mathbf{c}^t\mathbf{x}$ under hensyn til $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ og $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$.

Det duale hertil er åbenbart

(P') Minimér $\mathbf{b}^t\mathbf{y}$ under hensyn til $\mathbf{A}^t\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ og $\mathbf{y} \geq \mathbf{o}$,

altså påny et standardprogram. (Det tilsvarende gælder ikke om kanoniske programmer.)

Bemærkning 5.3. Ethvert lineært program kan omformes til et standardprogram således:

1^0. Hver *ligning* i (15), altså for $i \in I \setminus I^*$, erstattes med de to uligheder

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

$$-a_{i1}x_1 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i.$$

2^0. Hver *fri variabel* x_j $(j \in J \setminus J^*)$ erstattes overalt med $x_j' - x_j''$, hvor $x_j' \geq 0$, $x_j'' \geq 0$, ganske som ved omformning til et kanonisk program.

Lemma 5.4. *Når to indbyrdes duale lineære programmer bringes på standardform på den ovenfor beskrevne måde, er de fremkomne standardprogrammer ligeledes hinandens duale.*

Beviset er i princippet såre ligetil, men lidt besværligt at skrive op. Vi nøjes derfor med at verificere påstanden i et eksempel, der indeholder alle fornødne ingredienser til et generelt bevis.

Eksempel 5.5. Vi bringer programmet (P) i Eksempel 4.2 på standardform således: 1^0. Ligningen $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$ erstattes med to uligheder, og 2^0. Den frie variabel x_3 erstattes med $x_3' - x_3''$, hvor $x_3' \geq 0$, $x_3'' \geq 0$. Herved omformes (P) til standardprogrammet

(Q) Maksimér $x_1 + 5x_2 - 2x_3' + 2x_3''$ under hensyn til

$$\begin{array}{lrcl} y_1 & -2x_1+3x_2 & \leq & 3 \\ y_2' & x_1+2x_2-x_3'+x_3'' & \leq & 4 \\ y_2'' & -x_1-2x_2+x_3'-x_3'' & \leq & -4 \end{array}$$

med alle fire variable $x_1, x_2, x_3', x_3'' \geq 0$. Til venstre for hver bibetingelse er til orientering anført den tilhørende duale variabel, henholdsvis y_1, y_2', y_2''.

På lignende måde kan vi bringe (P') i Eksempel 4.4 på standardformen (Q') nedenfor, der ses at være dual til (Q):

(Q') Minimér $3y_1 + 4y_2' - 4y_2''$ under hensyn til

$$\begin{array}{lrcl}
x_1 & -2y_1 + \;\; y_2' - \;\; y_2'' & \geq & 1 \\
x_2 & 3y_1 + 2y_2' - 2y_2'' & \geq & 5 \\
x_3' & -y_2' + \;\; y_2'' & \geq & -2 \\
x_3'' & y_2' - \;\; y_2'' & \geq & 2
\end{array}$$

med alle tre variable $y_1, y_2', y_2'' \geq 0$. Igen er de duale variable anført foran de respektive bibetingelser. Bemærk, at koefficientmatricen i (Q') faktisk er transponeret til koefficientmatricen i (Q), og tilsvarende ses at gælde for de fuldstændige skemaer for (Q) og (Q'), hvori objektfunktionerne medtages, ganske som i skemaerne på side 4.4.

Bemærkning 5.6. Ved omformning af et lineært program (P) til enten kanonisk form eller standardform er det nye program (Q) *ækvivalent* med (P) i følgende forstand:

1) Hvis et af de to programmer har en tilladt, hhv. optimal løsning, da også det andet.
2) Værdimængden for objektfunktionen betragtet på tilladte løsninger er den samme for (P) som for (Q).
3) (P) og (Q) har derfor samme optimale værdi:

Her er en nærmere begrundelse for alt dette. Lad q være antallet af variable i (Q), og lad $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^q$ betegne den variable vektor i (Q). Så er $q \geq n$. Den foretagne substitution (= variabelskift) er givet ved en (lineær) afbildning $\varphi : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$. Definitionen af (Q) er netop lavet sådan, at φ afbilder mængden af tilladte løsninger $\mathbf{u}$ til (Q) på mængden af tilladte løsninger $\mathbf{x}$ til (P), og så at objekt- funktionen for (Q), udregnet i en tilladt løsning til (Q), er lig med objektfunktionen for (P) udregnet i den tilsvarende tilladte løsning $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{u})$ til (P). Det følger umiddelbart af disse egenskaber ved φ, at φ afbilder mængden af *optimale* løsninger til (Q) på mængden af optimale løsninger til (P). Selv om der måske kun er én optimal løsning til (P), vil der ofte være uendelig mange optimale løsninger til (Q). – De anførte betragtninger medfører specielt 1), 2) og 3).

Læseren opfordres til at gå ovenstående igennem i tilknytning til Eksempel 5.5.

§6. Dualitetssætningen

Denne lyder i sin fuldstændige skikkelse således:

SÆTNING 6.1. *For et lineært program (P) (som i Definition 4.1) og dets duale program (P') indtræffer præcis ét af følgende fire tilfælde:*

1. *(Hovedtilfældet) Såvel (P) som (P') har mindst én optimal løsning, og (P) og (P') har samme optimale værdi:* $\sup(P) = \inf(P') \in \mathbb{R}$.
2. *(P), men ikke (P'), har tilladte løsninger, og den optimale værdi af (P) (og af (P')) er* $\sup(P) = +\infty$.
3. *(P'), men ikke (P), har tilladte løsninger, og den optimale værdi af (P') (og af (P)) er* $\inf(P')) = -\infty$.
4. *Hverken (P) eller (P') har tilladte løsninger.*

Således har (P) og (P') altid samme optimale værdi, undtagen i Tilfælde 4., hvor der trivielt gælder $\sup(P) = -\infty$, $\inf(P') = +\infty$ (fordi vi har defineret $\sup\emptyset = -\infty$ og $\inf\emptyset = +\infty$). Bemærk, at *Hovedtilfældet 1. indtræffer præcis når (P) og (P') hver har mindst én tilladt løsning.*

Som forberedelse til beviset for Sætning 6.1 udleder vi en variant af Farkas' sætning (Sætning 3.2). Matricen $\mathbf{A}$ er fortsat $m \times n$, $\mathbf{b}$ er $m \times 1$, og $\mathbf{x}$ er $n \times 1$.

LEMMA 6.2. *Der indtræffer netop ét af følgende to tilfælde:*

i) $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$ *har mindst én løsning* $\mathbf{x} \ge \mathbf{o}$, *eller*

ii) $\mathbf{y}^t\mathbf{A} \ge \mathbf{o}^t \ \wedge\ \mathbf{y}^t\mathbf{b} < 0$ *har mindst én løsning* $\mathbf{y} \ge 0$.

Bevis. Vi omformer uligheden $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$ til ligningen

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{z} = \mathbf{b}$$

ved indførelse af en restvektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$, som forlanges at være ≥ 0. Herved kan i) omskrives til

i') $$(\mathbf{A}, \mathbf{E})\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{har mindst én løsning} \quad \begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix} \ge \mathbf{o},$$

hvor $\mathbf{E}$ er $m \times m$ enhedsmatrix, og de optrædende blokmatricer næppe kræver nærmere forklaring.

Ifølge Sætning 3.3 er negationen til i') (eller til i)) ensbetydende med, at

ii') $$\mathbf{y}^t(\mathbf{A}, \mathbf{E}) \ge \mathbf{o}^t \ \wedge\ \mathbf{y}^t\mathbf{b} < 0 \quad \text{har mindst én løsning} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m.$$

Ved udregningen $\mathbf{y}^t(\mathbf{A}, \mathbf{E}) = (\mathbf{y}^t\mathbf{A}, \mathbf{y}^t)$ omskrives ii') til

$$\mathbf{y}^t\mathbf{A} \ge \mathbf{o}^t \ \wedge\ \mathbf{y} \ge \mathbf{o} \ \wedge\ \mathbf{y}^t\mathbf{b} < 0 \quad \text{har mindst én løsning } \mathbf{y},$$

hvilket åbenbart er ensbetydende med ii). $\square$

Bevis for Sætning 6.1. Det er klart, at de fire tilfælde parvis udelukker hinanden. Vi skal derfor blot vise, at mindst ét af tilfældene indtræffer.

Først omformer vi (P) og (P') til standardprogrammer (Q) og (Q'), jf. Bemærkning 5.3. Så er (Q) og (Q') hinandens duale ifølge Lemma 5.4. Hvis nu et af tilfældene 1.–4. indtræffer for parret $(Q), (Q')$, så indtræffer det samme tilfælde for $(P), (P')$ ifølge Bemærkning 5.6.

Det er derfor tilstrækkeligt at bevise Sætning 6.1 for et *standardprogram* (P) og dettes duale (P'):

(P) Maksimér $\mathbf{c}^t\mathbf{x}$ under hensyn til $\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \ \wedge \ \mathbf{x} \ge \mathbf{o}$,

(P') Minimér $\mathbf{b}^t\mathbf{y}$ under hensyn til $\mathbf{A}^t\mathbf{y} \ge \mathbf{c} \ \wedge \ \mathbf{y} \ge \mathbf{o}$.

I denne situation vil beviset bestå i en anvendelse af Lemma 6.2 på visse blokmatricer. Lad os se på de enkelte udsagn, der tilsammen udgør Tilfælde 1. i Sætning 6.1.

For det første kræves, at (P) overhovedet har en tilladt løsning $\mathbf{x}$, altså en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ som opfylder

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \tag{21}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{o}. \tag{22}$$

For det andet kræves tilsvarende, at (P') har en tilladt løsning $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$-\mathbf{A}^t\mathbf{y} \le -\mathbf{c}, \tag{23}$$

$$\mathbf{y} \ge \mathbf{o}. \tag{24}$$

For det tredie kræves, at $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ kan vælges optimale for hhv. (P) og (P'), og at de optimale værdier er ens. Ifølge Sætning 4.7, $\alpha) \iff \beta)$, kommer dette ud på, at $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ foruden (21), (22), (23), (24) skal opfylde

$$\mathbf{b}^t\mathbf{y} - \mathbf{c}^t\mathbf{x} \le 0, \tag{25}$$

nemlig i første omgang $\mathbf{b}^t\mathbf{y} = \mathbf{c}^t\mathbf{x}$, men der gælder jo ifølge Lemma 4.6 automatisk $\mathbf{b}^t\mathbf{y} \ge \mathbf{c}^t\mathbf{x}$ for tilladte løsninger $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ til hhv. (P) og (P').

De tre uligheder (21), (23), (25) kan sammenfattes til

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{A}^t \\ -\mathbf{c}^t & \mathbf{b}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{c} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Blokmatricerne

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{A}^t \\ -\mathbf{c}^t & \mathbf{b}^t \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{c} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

har åbenbart god mening. (De to nulmatricer i $\hat{\mathbf{A}}$ er hhv. $m \times m$ (i øverste højre hjørne) og $n \times n$. Og ialt er $\hat{\mathbf{A}} : (m+n+1) \times (m+n)$, $\hat{\mathbf{b}} : (m+n+1) \times 1$, $\hat{\mathbf{x}} : (m+n) \times 1$).

Vi har hermed set, at (21)–(25) kan sammenfattes til

$$\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} \leq \hat{\mathbf{b}} \ \wedge \ \hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{o},$$

og Tilfælde 1. er således ensbetydende med følgende udsagn:

i) $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} \leq \hat{\mathbf{b}}$ har mindst én løsning $\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{o}$ (i $\mathbb{R}^{m+n}$).

Negationen til Tilfælde 1. er derfor ifølge Lemma 6.2

ii) $\hat{\mathbf{y}}^t\hat{\mathbf{A}} \geq \mathbf{o}^t \ \wedge \ \hat{\mathbf{y}}^t\hat{\mathbf{b}} < 0$ har mindst én løsning $\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{o}$ (i $\mathbb{R}^{m+n+1}$).

Beviset er herefter reduceret til at påvise, at hvis vort par af duale standardprogrammer $(P), (P')$ opfylder ii), så indtræffer mindst ét af tilfældene 2., 3. eller 4. I det følgende antager vi derfor, at ii) gælder.

Vi navngiver koordinaterne til $\hat{\mathbf{y}}$ ($\geq \mathbf{o}$ i $\mathbb{R}^{m+n+1}$) således:

$$\hat{\mathbf{y}}^t = (v_1, \ldots, v_m; u_1, \ldots; u_n; \alpha) = (\mathbf{v}^t, \mathbf{u}^t, \alpha),$$

hvor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \geq \mathbf{o}, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \geq \mathbf{o}, \qquad \alpha \geq 0.$$

Herefter kan ulighederne $\hat{\mathbf{y}}^t\hat{\mathbf{A}} \geq \mathbf{o}^t$ og $\hat{\mathbf{y}}^t\hat{\mathbf{b}} < 0$ i ii) skrives:

$$\mathbf{v}^t\mathbf{A} - \alpha\mathbf{c}^t \geq \mathbf{o}^t, \qquad -\mathbf{u}^t\mathbf{A}^t + \alpha\mathbf{b}^t \geq \mathbf{o}^t, \qquad \mathbf{v}^t\mathbf{b} - \mathbf{u}^t\mathbf{c} < 0.$$

Den mellemste ulighed overføres ved transponering i $\mathbf{Au} \leq \alpha\mathbf{b}$, og i den tredie ulighed er $\mathbf{u}^t\mathbf{c} = \mathbf{c}^t\mathbf{u}$. Nu lyder ii) således:

$$(26) \quad \begin{cases} \mathbf{Au} \leq \alpha\mathbf{b} \quad \wedge \quad \mathbf{v}^t\mathbf{A} \geq \alpha\mathbf{c}^t \quad \wedge \quad \mathbf{c}^t\mathbf{u} > \mathbf{v}^t\mathbf{b} \\ \text{har mindst én løsning } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \alpha) \text{ med } \mathbf{u} \geq \mathbf{o} \text{ i } \mathbb{R}^n,\ \mathbf{v} \geq \mathbf{o} \text{ i } \mathbb{R}^m \text{ og } \alpha \geq 0 \text{ i } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Her kan $\alpha > 0$ imidlertid ikke forekomme, thi efter division med α og diverse transponeringer ville det føre til

$$\mathbf{A}(\alpha^{-1}\mathbf{u}) \leq \mathbf{b} \quad \wedge \quad \mathbf{A}^t(\alpha^{-1}\mathbf{v}) \geq \mathbf{c} \quad \wedge \quad \mathbf{c}^t(\alpha^{-1}\mathbf{u}) > \mathbf{b}^t(\alpha^{-1}\mathbf{v}).$$

De to første uligheder udtrykker, at $\alpha^{-1}\mathbf{u}$ ($\geq \mathbf{o}$) og $\alpha^{-1}\mathbf{v}$ ($\geq \mathbf{o}$) skulle være tilladte løsninger til hhv. (P) og (P'), men så ville den tredie ulighed stride mod Lemma 4.6. Da således $\alpha = 0$, simplificeres (26) til

$$(27) \quad \begin{cases} \mathbf{Au} \leq \mathbf{o} \quad \wedge \quad \mathbf{v}^t\mathbf{A} \geq \mathbf{o}^t \quad \wedge \quad \mathbf{c}^t\mathbf{u} > \mathbf{v}^t\mathbf{b} \\ \text{har mindst én løsning } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ med } \mathbf{u} \geq \mathbf{o} \text{ i } \mathbb{R}^n,\ \mathbf{v} \geq \mathbf{o} \text{ i } \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Uligheden $\mathbf{c}^t\mathbf{u} > \mathbf{v}^t\mathbf{b}$ medfører, at enten er $\mathbf{c}^t\mathbf{u} > 0$ eller $\mathbf{v}^t\mathbf{b} < 0$ (eller begge dele).

Antag først, at $\mathbf{c}^t\mathbf{u} > 0$.

Da kan (P') ikke have nogen tilladt løsning $\mathbf{y}$, thi for en sådan ville gælde $\mathbf{c}^t \leq \mathbf{y}^t\mathbf{A}$ og derfor (da $\mathbf{u} \geq \mathbf{o}$)

$$\mathbf{c}^t\mathbf{u} \leq (\mathbf{y}^t\mathbf{A})\mathbf{u} = \mathbf{y}^t(\mathbf{A}\mathbf{u}) \leq 0 \quad \text{(modstrid)},$$

hvor vi har benyttet, at $\mathbf{y} \geq \mathbf{o}$, og at $\mathbf{A}\mathbf{u} \leq 0$ ifølge (27).

Hvis (P) heller ikke har nogen tilladt løsning, er vi i Tilfælde 4. Hvis derimod (P) har en tilladt løsning $\mathbf{x}$, så er for ethvert tal $\lambda > 0$ også $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}$ en tilladt løsning til (P), idet der ifølge (27) gælder

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \lambda\mathbf{A}\mathbf{u} &\leq \mathbf{b} + \lambda\mathbf{o} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} + \lambda\mathbf{u} &\geq \mathbf{o} + \lambda\mathbf{o} = \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Den tilhørende værdi af objektfunktionen for (P) er

$$\mathbf{c}^t(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}) = \mathbf{c}^t\mathbf{x} + \lambda\mathbf{c}^t\mathbf{u} \to +\infty \qquad \text{for } \lambda \to +\infty$$

ifølge antagelsen $\mathbf{c}^t\mathbf{u} > 0$. Den optimale værdi af (P) er således $\sup(P) = +\infty$, og vi er i Tilfælde 2.

Antag derpå, at $\mathbf{v}^t\mathbf{b} < 0$.

Dette tilfælde kan føres tilbage til tilfældet $\mathbf{c}^t\mathbf{u} > 0$ ved ombytning af (P) og (P'). Vi giver dog et direkte bevis ganske analogt med før:

Nu kan (P) ikke have en tilladt løsning $\mathbf{x}$, thi da var $\mathbf{b} \geq \mathbf{A}\mathbf{x}$ og derfor (da $\mathbf{v} \geq \mathbf{o}$)

$$\mathbf{v}^t\mathbf{b} \geq \mathbf{v}^t(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{v}^t\mathbf{A})\mathbf{x} \geq 0,$$

idet $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$, og $\mathbf{v}^t\mathbf{A} \geq \mathbf{o}^t$ ifølge (27).

Hvis (P') heller ikke har nogen tilladt løsning, er vi i Tilfælde 4. Hvis derimod (P') har en tilladt løsning $\mathbf{y}$, så er for ethvert $\lambda > 0$ også $\mathbf{y} + \lambda\mathbf{v}$ en tilladt løsning til (P'), idet (27) giver

$$\begin{aligned} (\mathbf{y} + \lambda\mathbf{v})^t\mathbf{A} = \mathbf{y}^t\mathbf{A} + \lambda\mathbf{v}^t\mathbf{A} \ &\geq \mathbf{c}^t + \lambda\mathbf{o}^t = \mathbf{c}^t, \\ \mathbf{y} + \lambda\mathbf{v} &\geq \mathbf{o} + \lambda\mathbf{o} = \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Den tilhørende værdi af objektfunktionen for (P') er

$$(\mathbf{y} + \lambda\mathbf{v})^t\mathbf{b} = \mathbf{y}^t\mathbf{b} + \lambda\mathbf{v}^t\mathbf{b} \to -\infty \qquad \text{for } \lambda \to +\infty,$$

ifølge antagelsen $\mathbf{v}^t\mathbf{b} < 0$. Således er $\inf(P') = -\infty$, og vi er i Tilfælde 3.

Ialt er hermed bevist, at hvis Tilfælde 1. ikke indtræffer, så indtræffer til gengæld et af tilfældene 2., 3. eller 4. $\square$

Bemærkning 6.3 Efter således at have udledt Sætning 6.1 kan vi vende tilbage til Sætning 4.7 og i udsagnet α) slette det i den kantede parentes anførte om, at de optimale værdier er lige store; thi dette følger nu af Sætning 6.1 (fordi vi er i Tilfælde 1.), og denne sætning viser tillige, at der eksisterer optimale løsninger til (P) og (P'), d.v.s. Sætning 4.7 er ikke et tomt udsagn.

Det vil ses, at Sætning 4.7 minder om Konvekse funktioner, Korollar 6.7 vedrørende Kuhn-Tucker vektorer. Dette er ingenlunde tilfældigt, som det fremgår af følgende resultat, der er elementært, idet det ikke beror på Farkas' sætning.

For at vort lineære program (P) skal være et specialtilfælde af det konvekse program i Konveksitet, Korollar 6.7, må vi åbenbart antage, at (P) har *standardform*, og desuden må vi omskrive (P) til en *minimeringsopgave*.

SÆTNING 6.4. *Lad (P) være et lineært standardprogram, som har mindst én optimal løsning. En optimal løsning til det duale program (P') er da det samme som en Kuhn-Tucker vektor for (P) (efter af (P) er omskrevet til en minimeringsopgave).*

Bevis. Omskrevet til en minimeringsopgave lyder (P):

$$\text{Minimér } -\mathbf{c}^t\mathbf{x} \text{ under hensyn til } \mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b} \le \mathbf{o} \ \wedge\ \mathbf{x} \ge 0. \tag{28}$$

Dette er et konvekst program som i Konvekse funktioner, Korollar 6.7 med $p = m$ og

$$f(\mathbf{x}) = -\mathbf{c}^t\mathbf{x}, \qquad \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}.$$

Lad $\mathbf{x}^*$ betegne en optimal løsning til (P). For enhver vektor $\mathbf{u} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^t \in E_m$ sætter vi som i Konvekse funktioner, §6

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \\ &= -\mathbf{c}^t\mathbf{x} + \mathbf{u}^t(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}), \qquad \mathbf{x} \in C = E_n. \end{aligned} \tag{29}$$

Antag først, at $\mathbf{u}$ er en optimal løsning til (P'). For ethvert $\mathbf{x} \in E_n$ gælder da, idet $\mathbf{u}^t(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{u}^t\mathbf{A})\mathbf{x}$,

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= (\mathbf{u}^t\mathbf{A} - \mathbf{c}^t)\mathbf{x} - \mathbf{u}^t\mathbf{b} \overset{1}{\ge} -\mathbf{u}^t\mathbf{b} \overset{2}{=} -\mathbf{c}^t\mathbf{x}^* \\ &\overset{3}{=} -\mathbf{c}^t\mathbf{x}^* + \mathbf{u}^t(\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}) = h(\mathbf{x}^*). \end{aligned}$$

Her fremgår uligheden mærket 1 af, at $\mathbf{u}$ specielt er en tilladt løsning til (P') og at $\mathbf{x} \ge \mathbf{o}$; ligningen mærket 2 følger af, at $\mathbf{x}^*$ og $\mathbf{u}$ er optimale løsninger til hhv.

(P) og (P'); og endelig fremgår uligheden mærket 3 af Sætning 4.7, $\beta) \Rightarrow \gamma)$. Da Lagrangefunktionen h således opfylder

$$h(\mathbf{x}) \geq h(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*) = \text{den optimale værdi} \tag{30}$$

for ethvert $\mathbf{x} \in E_n$, er vektoren $\mathbf{u} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^t$ en Kuhn-Tucker vektor for (P) i henhold til Konvekse funktioner, Definition 6.1.

Antag dernæst omvendt, at $\mathbf{u}$ er en Kuhn-Tucker vektor for programmet (28). For ethvert $\mathbf{x} \in C = E_n$ gælder så (30), og ved addition af $\mathbf{u}^t\mathbf{b}$ fås under benyttelse af (29)

$$(\mathbf{u}^t\mathbf{A} - \mathbf{c}^t)\mathbf{x} \;\geq\; \mathbf{u}^t\mathbf{b} - \mathbf{c}^t\mathbf{x}^*, \qquad \mathbf{x} \in E_n. \tag{31}$$

Lad os heri indsætte $\mathbf{x} = p\mathbf{e}_j$, hvor $p \in \mathbb{N}$ og $\mathbf{e}_j$ er den j'te naturlige basisvektor for $\mathbb{R}^n$. Efter division med p og grænseovergang $p \to +\infty$ sluttes, at den j'te koordinat af $\mathbf{u}^t\mathbf{A} - \mathbf{c}^t$ er ≥ 0, $j = 1, \dots, n$, altså

$$\mathbf{u}^t\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^t.$$

Således er $\mathbf{u}$ $(\geq \mathbf{o})$ en *tilladt* løsning til (P'). – Indsættes i stedet $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ i (31), fås $\mathbf{c}^t\mathbf{x}^* \geq \mathbf{u}^t\mathbf{b}$, og derfor endda $\mathbf{c}^t\mathbf{x}^* = \mathbf{u}^t\mathbf{b}$ ifølge Lemma 4.6. Ved anvendelse af Sætning 4.7, $\beta) \Rightarrow \alpha)$, ses at $\mathbf{u}$ er en *optimal* løsning til (P'). □

Stikordsregister

Symbolregister