Thøger Bang

Noter til Matematik 311

(Udvalgte emner fra Matematikken af didaktisk Betydning)

1984

1. Weierstrass' Approksimationssætning.
2. Borels Sætning om $\mathcal{C}^\infty$ paa $\mathbb{R}$.
3. Konstruktion af den regulære 17-Kant.
4. Umuligheden af Vinklens Tredeling med Passer og Lineal.
5. Konstruktion med Passer alene
   – Digression om ældre danske Matematikere og andet.
6. Linietilnærmelser ved Stangsystemer.
7. Kempes Sætning.
8. Rationale Tal.
9. Algebraiske Tal.
10. Transcendens af e.
11. Transcendens af π.
12. Königs Sætning. Skuffeprincippet.
13. Bevis for Tchebycheffs generelle Sætning.

    Opgaver.

Nærværende notesæt er blevet til på baggrund af udgaven fra 1984, trykt/kopieret af Matematisk Notetrykkeri fra en maskinskrevet original. Disse kopier er blevet skannet og konverteret til en text-fil med et OCR-program. Derefter er den nødvendige TEX-kodning tilføjet, herunder tegningerne, der udnytter macro-pakken SPLINE.STY.

København, juni 2004
Anders Thorup

§ 1: Weierstrass' Approksimationssætning.

Til enhver kontinuert Funktion f, som afbilder et lukket Interval ind paa $\mathbb{R}$, og ethvert positivt ε findes et Polynomium $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, saa $|f(x)-p(x)| < \varepsilon$ for alle x i Intervallet.

(Weierstrass 1885).

Hvis $\mathcal{C}$ er Mængden af kontinuerte reelle Funktioner paa det givne interval af den reelle Akse, saa er $\mathcal{C}$ med Normen $\|f\| = \max_x |f(x)|$ et Banachrum. Det indeholder $\mathcal{P}$ lig Mængden af Polynomiumsfunktioner paa det samme Interval, og – med samme Norm – udgør disse et normeret Vektorrum. Sætningen udsiger saa, at Fuldstændiggørelsen af $\mathcal{P}$ er lig $\mathcal{C}$.

Da Sætningen er saa væsentlig, og vi senere kommer tilbage til dens Forhistorie skal vi gøre lidt mere ud af den.

Uniform Konvergens var længe et taaget Begreb, mange ellers habile Matematikere i forrige Aarhundrede havde svært ved at skelne mellem uniform Konvergens og punktvis Konvergens efter at selve Konvergensbegrebet var blevet klarlagt af Cauchy ca. 1820 med ε og δ. Naturligvis havde man længe inden haft en mere løs Opfattelse med "uendelig smaa Størrelser", og det indgaar jo fx implicit i al Differentialregning (opfundet ca. 1650–1700).

Punktvis konvergens: $\forall \varepsilon > 0\ \forall x\ \exists n_0 : n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Uniform Konvergens: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall x : n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Forskellen er en Ombytning af to Kvantorer (og Kvantorers Rækkefølge er altsaa ikke ligegyldig!).

Ved Hjælp af Sætningen er det muligt udfra de elementære Polynomier ad "konstruktiv Vej" at opbygge en Teori for kontinuerte Funktioner. Som Regularitetsmaal for en Funktion kan man benytte den Hastighed med hvilken den kan tilnærmes uniformt med Polynomier (altsaa ε som Funktion af Polynomiets Grad n).

Det er klart, at det vil være tilstrækkeligt at vise Sætningen for det specielle Interval $[0\,,1]$. Thi til $f(x)$ paa $[a\,,b]$ dannes $g(y) = f(a+y\cdot(b-a))$ som bliver kontinuert for $y \in [0\,,1]$, og hvis denne kan tilnærmes med et Polynomium $p(y)$, saa indsætter man $y = (x-a)/(b-a)$ og faar dermed et Polynomium af samme Grad, og det tilnærmer $f(x)$ ligesaagodt paa $[a\,,b]$.

Bernstein–Korovkins Bevis (B.1912,K.1953):

Der eksisterer en Følge $B_1, B_2, B_3, \dots$ *af Operatorer som ved* $f \mapsto B_n f$ *afbilder de kontinuerte Funktioner paa* $[0\,,\,1]$ *over i Polynomier* (*paa samme Interval*)*, saaledes at Følgen* $\dots, B_n f, \dots$ *konvergerer uniformt mod* f.

Operatoren B_n gives ved

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\tfrac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Aabenbart er B_n en lineær Operator, d.v.s. for Konstanter a og b er $B_n(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot B_n f + b \cdot B_n g$. Endvidere er Operatoren positiv, d.v.s. hvis for $x \in [0\,,\,1]$ gælder $f(x) \geq 0$, saa gælder ogsaa $B_n f(x) \geq 0$, og generelt har man derfor at $f(x) \geq g(x)$ medfører $B_n f(x) \geq B_n g(x)$.

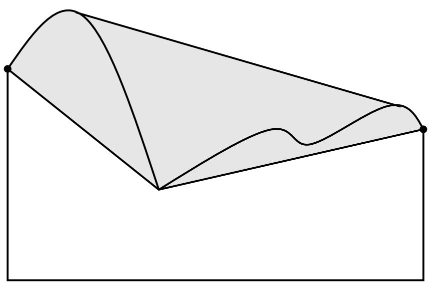
Hvis $f(x)$ er konstant, saa er $B_n f(x) = f(x)$; vi kan nøjes med at betragte $f(x)$ identisk lig 1, og saa er jo

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \big(x + (1-x)\big)^n = 1.$$

Af det hidtil nævnte ses umiddelbart, at Værdimængden for $B_n f$ er indeholdt i Værdimængden for f.

For Funktionen $f(x) = x$ gælder ogsaa, at $B_n f(x) = f(x)$. Thi

$$\begin{aligned} B_n f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = x \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x \cdot \big(x + (1-x)\big)^{n-1} = x. \end{aligned}$$



For ethvert $f(x) = ax+b$ har man altsaa $B_n f = f$, og derfor vil $f(x) \geq ax+b$ medføre $B_n f(x) \geq ax+b$. Heraf ses, at Grafen for $B_n f(x)$ ligger i det konvekse Omraade udspændt af Grafen for $f(x)$, dette for alle n.

For $f(x) = x^2$ er $B_n f(x) = x^2 + \frac{1}{n} \cdot (x - x^2)$. En simpel Udregning viser nemlig, at

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{k^2}{n^2} = \binom{n-2}{k-2} + \frac{1}{n}\binom{n-2}{k-1}$$

(dette gælder alment, for som sædvanligt sættes $\binom{p}{q} = 0$ naar q er negativ). Saa bliver

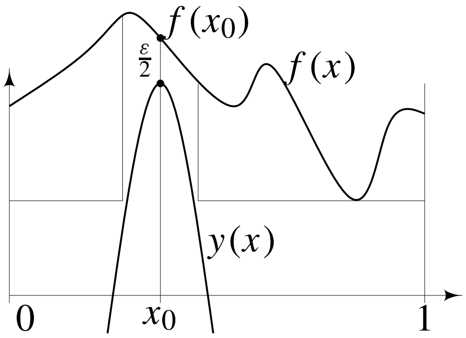
$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x^2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{x(1-x)}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x^2 \cdot 1 + \frac{x(1-x)}{n} \cdot 1.$$

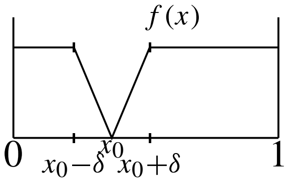
For denne Funktion vil $B_n f(x)$ altsaa konvergere mod $f(x)$ for $n \to \infty$, og det samme gælder altsaa for enhver Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Vi betragter nu en vilkaarlig kontinuert Funktion $f(x)$ i et Punkt x_0; ε er givet. Det er da muligt at finde et Andengradspolynomium $y(x)$ (altsaa en Parabel), saaledes at $y(x_0) = f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$ og samtidig $y(x) < f(x)$ for alle $x \in [0\,,1]$ (til det sidste benyttes baade at f er kontinuert ved x_0 og at $f(x)$ er nedad begrænset). For n tilstrækkelig stor har vi saa $B_n y(x_0) > f(x_0) - \varepsilon$ og samtidig $B_n y(x) \leq B_n f(x)$, altsaa $B_n f(x_0) > f(x_0) - \varepsilon$. Analogt ses, at for n tilstrækkelig stor er $B_n f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$. For n stor er altsaa $|B_n f(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$, og denne Ulighed gælder altsaa ogsaa for alle x i en Omegn af x_0. Ifølge Borels Overdækningssætning er $[0\,,1]$ dækket af et *endeligt* Antal saadanne Omegne, og for n større end det største tilsvarende n_0 har vi saa



$$|B_n f(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{for } x \in [0\,,1]. \qquad \square$$

Anvendes Sætningen specielt paa en Funktion $f(x)$ med $f(x_0) = 0$ og $f(x) = 1$ for $|x - x_0| \geq \delta$ (og iøvrigt positiv) ses at for ethvert positivt δ vil



$$\sum_{k,\text{saa } |\frac{k}{n}-x_0|>\delta} \binom{k}{n} x_0^k (1 - x_0)^{n-k} \qquad \text{gaa mod 0 for } n \to \infty.$$

Uligheder af denne Type gaar tilbage til Tchebycheff (ca. 1850), og er fundamentale for Sandsynlighedsregningen. Saafremt der ikke var nogen Begrænsning for k vilde Summen af Leddene være lig 1, og man ser derfor, at $\binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1 - x)^{n-k}$ kun er stort for k-Værdier nær $n \cdot x$. Iøvrigt er det let at finde det k som gør Leddet maximalt, da Forholdet mellem det k'te Led og det $(k - 1)$'te Led er

$$\binom{n}{k} \cdot x^k (1-x)^{n-k} \Big/ \binom{n}{k-1} \cdot x^{k-1} (1-x)^{n-k+1} = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{n-k+1}{k},$$

og dette ses at være større end eller lig 1 for $k \leq (n + 1)x$, og et maximalt Led fremkommer derfor for $k = [(n + 1)x]$ = det største hele Tal mindre end eller lig $(n + 1)x$; og dette ligger jo virkelig nær $n \cdot x$.

Man ser, at $\binom{n}{k} \cdot x^k (1-x)^{n-k}$ netop angiver Sandsynligheden for at vinde k udaf n Spil, saafremt Sandsynligheden for at vinde et enkelt Spil er x.

Bernsteinpolynomiet $B_n f(x)$ faar derved ogsaa en simpel sandsynlighedsteoretisk Betydning. Lad Sandsynligheden for at vinde et Spil være lig x. Spillet spilles n Gange, og der er givet en Gevinstfunktion $f(y)$ i den Forstand, at hvis Brøkdelen af vundne Spil er lig y, saa udbetales Gevinsten $f(y)$. Hvis n er stor maa man vente sig at Gevinsten er omtrent $f(x)$; men den sandsynlige Gevinst ved n Spil findes ved at betragte alle Muligheder for Antallet k af vundne Spil, $k = 0, 1, \ldots, n$, og idet k vundne Spil giver Gevinsten $f(\frac{k}{n})$ faar man som sandsynlig Gevinst netop

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\tfrac{k}{n}) x^k (1 - x)^{n-k} = B_n f(x),$$

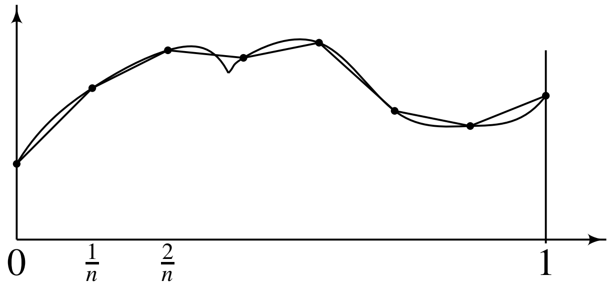
og det er altsaa helt naturligt, at dette ligger nær $f(x)$.

Lebesgues' Bevis for Weierstrass' Sætning.

Vi betragter igen normerede Vektorrum V og deres Fuldstændiggørelser, betegnet $\overline{V}$. Hvis Rummet $\mathcal{B}$ har en (gerne uendelig) Basis $\{r\}$, i den Forstand at ethvert $b \in \mathcal{B}$ er en Linearkombination af et endeligt Antal Elementer fra $\{r\}$, og hvis ethvert $r \in \overline{\mathcal{P}}$, saa er det klart at $\mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{P}}$. Hvis yderligere $\mathcal{C} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$, saa er aabenbart $\mathcal{C} \subseteq \overline{\overline{\mathcal{P}}} = \overline{\mathcal{P}}$.

Som før skal $\mathcal{C}$ være Rummet af reelle kontinuerte Funktioner paa $[0\,,\,1]$ og $\mathcal{P}$ skal være Rummet af Polynomiumsfunktioner paa det samme Interval, og $\|f(x)\| = \max_x |f(x)|$.

Som $\mathcal{B}$ tager vi Rummet bestaaende af de Funktioner paa $[0\,,\,1]$ hvis Graf er en brudt Linie.



Det ses let, at $\mathcal{C} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$, thi hvis $f(x)$ er en kontinuert Funktion, kan vi som $b(x)$ tage den Funktion, hvis Graf er den brudte Linie som forbinder Punkterne

$$\big(0,\, f(0)\big)\,,\ \big(\tfrac{1}{n},\, f(\tfrac{1}{n})\big)\,,\ \big(\tfrac{2}{n},\, f(\tfrac{2}{n})\big)\,,\ \ldots\,,\ \big(\tfrac{n-1}{n},\, f(\tfrac{n-1}{n})\big),\ \big(1,\, f(1)\big),$$

og da $f(x)$ er uniformt kontinuert ser man umiddelbart, at dersom blot n er tilstrækkelig stor, saa er $|f(x) - b(x)| < \varepsilon$.

Som Basiselementer r tager vi Funktionerne $r(x) = |x - x_0|$, hvor $x_0 \in [0\,,\,1]$. For $b(x)$ er en endelig Linearkombination af disse, idet vi for ethvert Knæk paa $b(x)$, altsaa et x_0 hvori $b'(x)$ har et Spring af Størrelse a, faar et Bidrag paa $\frac{1}{2}a \cdot r_{x_0}(x)$, og efter at have subtraheret disse har vi en lineær Funktion som kan fremstilles ved de to Funktioner $r(x)$ med x_0 lig 0 og 1.

Saa mangler vi blot at vise at ethvert $r(x)$ tilhører $\overline{\mathcal{P}}$. Det gør vi ved at vise, at $|y|$ paa $[-1\,,\,1]$ kan approksimeres uniformt med Polynomier i y, for deraf følger jo at $|x - x_0|$ kan approksimeres for $x \in [0\,,\,1]$ med Polynomier i $x = y + x_0$.

Nu er $|y| = \sqrt{y^2} = \sqrt{1-(1-y^2)} = (1-t)^{\frac{1}{2}}$, hvor $t = 1-y^2$. Dersom blot $(1-t)^{\frac{1}{2}}$ for $t \in [0\,,\,1]$ kan approksimeres uniformt med Polynomier i t, saa kan $|y|$ approksimeres uniformt med Polynomier i y paa $[-1\,,\,1]$.

For $(1-t)^{\frac{1}{2}}$ har vi Binomialrækken, som er konvergent paa $(-1\,,1)$, men Problemet er om den er konvergent uniformt helt hen i $t=1$ (som svarer til det "kriminelle" Knæk for $|y|$ i $y=0$). Rækken er

$$1-\binom{1/2}{1}t+\binom{1/2}{2}t^2-\binom{1/2}{3}t^3+\cdots$$
$$\text{med}\ \binom{1/2}{q}=\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-q+\frac{3}{2})}{q!}.$$

Binomialkoefficienterne faar alternerende Fortegn, saa Rækken har Formen $1-\sum_{j=1}^{\infty}a_jt^j$ hvor alle $a_j>0$. For $t<1$ er den konvergent med Summen $\sqrt{1-t}$, og for ethvert $k\in\mathbb{N}$ er derfor

$$\sum_{j=1}^{k}a_jt^j<1-\sqrt{1-t},\quad \text{hvoraf}\ \sum_{j=1}^{k}a_j\le 1,\quad \text{hvoraf}\ \sum_{j=1}^{\infty}a_j\le 1,$$

saa vi har majoriseret uniform Konvergens af Binomialrækken paa $[0\,,1]$.

$\square$

§ 2: Borels Sætning om $\mathcal{C}^\infty$ paa $\mathbb{R}$.

Vi betragter reelle $\mathcal{C}^\infty$-Funktioner paa et Interval (evt. paa hele $\mathbb{R}$).

De udgør et afsluttet Regneomraade (en “Algebra” over $\mathbb{R}$), idet med $f(x)$ og $g(x)$ vil ogsaa $a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$ tilhøre Mængden, og ogsaa $f(x) \cdot g(x)$, hvor vi har Leibniz’ Formel

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x).$$

Og Differentialkvotienter og Integraler af Funktioner i Mængden vil igen tilhøre Mængden.

Normalt konstruerede matematiske Funktioner er $\mathcal{C}^\infty$, paanær eventuelle “singulære Punkter”, som hyppigt er fremkommet ved spidsfindige Konstruktioner, som fx

$$|x| = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x < 0 \end{cases},$$

og bortset fra saadanne Fænomener er de sædvanligvis *analytiske*, d.v.s. at de i ethvert Punkt x_0 har en Taylorrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

som fremstiller Funktionen i en Omegn af x_0; fra et Punkt i denne Omegn kan man igen danne Taylorrækken og derved fremstille Funktionen længere frem i en ny Omegn o.s.v., og derved frembringe $f(x)$ i hele dens Forløb.

(I den komplekse Funktionsteori vises, at en Funktion som er differentiabel i et Omraade af $\mathbb{C}$ i ethvert Punkt vil have en Konvergenscirkel som naar ud til det nærmeste singulære Punkt, fra et Punkt i Konvergenscirklen kan fortsættes o.s.v., og en analytisk Funktion defineret paa et reelt Interval kan altid fremkomme paa denne Maade).

Ved et *Jet* for en $\mathcal{C}^\infty$-Funktion forstaar vi en Følge $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0), \ldots$, og en analytisk Funktion er altid entydigt bestemt ved ethvert af sine Jet.

Borel skrev sin Disputats 1894, og (foruden at han angav den velkendte Overdækningssætning for reelle Intervaller) heri beskæftigede han sig med $\mathcal{C}^\infty$-Funktioner: “On voit bien en effet, si l’on considère une fonction définie physiquement, par exemple la fonction qui exprime l’indice de réfraction au moyen de la longueur d’onde, on voit bien les raisons, un peu vagues et de sentiment, il est vrai, qui conduisent à admettre que cette fonction admet des dérivées de tous les ordres. Mais ce que, pour ma part, je ne vois pas *du tout*, c’est la *moindre raison plausible* (B.’s Fremhævelse) pour admettre que la formule de Taylor s’applique à cette fonction de variable réelle”.

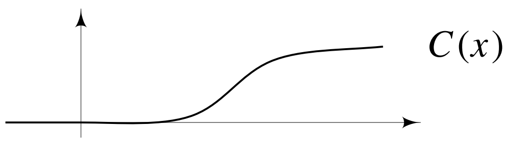
Borel betoner altsaa, at selvom forekommende Funktioner maa antages at være $\mathcal{C}^\infty$, saa er der ingen Grund til at tro at de er analytiske. Hvis man betragter Funktioner i Dagliglivet vil (indenfor den klassiske Fysiks Rammer) Diskontinuiteter ikke forekomme, og nærmere Analyse af Situationerne medfører Differentiation af højere og højere Orden, saa det er ikke urimeligt at antage at de er $\mathcal{C}^\infty$ (hvis en Person falder ud af en Flyvemaskine og rammer Jorden, bliver Hastigheden ikke diskontinuert ændret til 0; der findes faktisk nogen som er sluppet levende fra mange Kilometers Fald). Men dersom Funktionerne var analytiske, vilde de være entydigt bestemte, og Tilværelsen vilde være forudbestemt paa en Maade som vi vanskeligt kan forlige os med.

At de analytiske Funktioner ikke paa alle Maader er et helt afsluttet Regneomraade blev vist kort efter, idet man fandt partielle Differentialligninger hvori de givne Data (Randværdifunktioner) var analytiske, men hvor Løsningerne ikke var det.

Det første Eksempel paa at et Jet ikke entydigt bestemmer Funktionen blev givet af Cauchy med

$$c(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases};$$

for $x > 0$ faas $c'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ og generelt $c^{(k)}(x) = p_k(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ hvor p_k er et Polynomium



(ses ved Induktion: $c^{(k+1)}(x) = \left(\frac{-1}{x^2} \cdot p_k'(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2} \cdot p_k(\frac{1}{x})\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$) og da $\frac{1}{x^m} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \to 0$ for $x \to 0^+$ for ethvert $m \in \mathbb{N}$, vil $c^{(k)}(x) \to 0$ for $x \to 0^+$, hvilket som bekendt medfører at $c(x)$ ogsaa i $x = 0$ er $\mathcal{C}^\infty$ og med Jettet $(0, 0, 0, \dots)$.

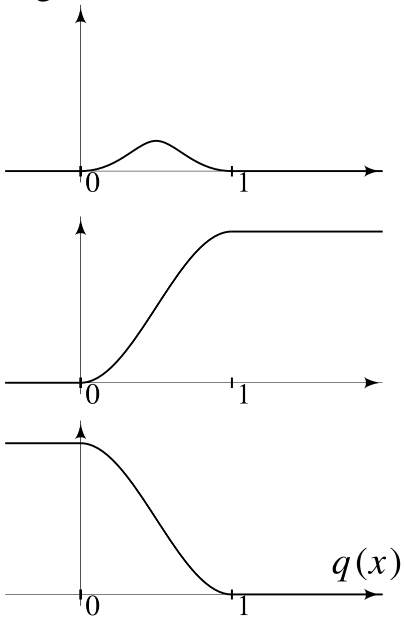
Borel viste i Disputatsen at

En vilkaarlig Talfølge $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *er Jet i* $x = 0$ *for en paa* $\mathbb{R}$ *eksisterende* $\mathcal{C}^\infty$*-Funktion.*

Følgende Bevis er ikke Borels.

Det er aabenbart nok at vise at det er Jet for en $\mathcal{C}^\infty$-Funktion paa $[0\,,\infty)$, for saa kan Konstruktionen gentages efter et Fortegnsskifte i x.

Vi tager $c(x) \cdot c(1-x)$; og integrerer den fra 0 og multiplicerer den op, saa den bliver 1 for $x \geq 1$; og subtraherer dernæst fra 1, hvorved vi faar en Funktion vi kalder $q(x)$, og den har Jettet $(1, 0, 0, 0, \dots)$ i $x = 0$, paa $[0\,,1]$ aftager den, og for $x > 1$ er den lig 0; vi vil kun betragte positive x.



Dens Integral fra 0 betegner vi $q_1(x)$, den har Jettet $(0, 1, 0, 0, \dots)$ i $x = 0$ og vi har $0 \leq q_1(x) < 1$.

Dens Integral fra 0 betegner vi $q_2(x)$, den har Jettet $(0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ i $x = 0$, og $0 \leq q_2(x) \leq \int_0^x 1\,dt = \frac{x}{1} = \frac{x}{1!}$.

Dens Integral fra 0 betegner vi $q_3(x)$, den har Jettet $(0, 0, 0, 1, 0, \dots)$ i $x = 0$, og $0 \leq q_3(x) \leq \int_0^x \frac{t}{1!}\,dt = \frac{x^2}{2!}$.

Saaledes fortsættes, og almindeligt vil $q_n(x)$ have Jettet $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ i $x = 0$ og $0 \leq q_n(x) < \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

For at kunne benytte dem som Byggesten maa vi modificere dem, men vi konstaterer at med et $c_n > 0$ vil $c_n^{-n} \cdot q_n(c_n x)$ i $x = 0$ have samme Jet som $q_n(x)$.

For at faa en Funktion med Jettet $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ i $x = 0$ tager vi nu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot c_n^{-n} \cdot q_n(c_n x).$$

Det er klart at formelt faar den det rigtige Jet i $x = 0$, og vi skal blot vise, at det er muligt at vælge $c_1, c_2, \ldots$ saa det hele konvergerer uniformt i samtlige Differentialkvotienter.

Formelt er

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n \cdot c_n^{k-n} \cdot q_n^{(k)}(c_n x) + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \cdot c_n^{k-n} \cdot q_{n-k}(c_n x).$$

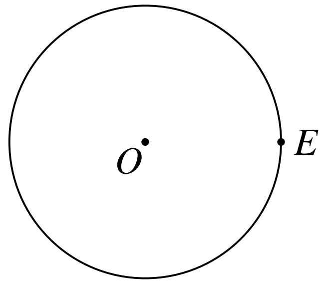
Den første Sum er en $\mathcal{C}^\infty$-Funktion og volder ikke Besvær. I den sidste Sum vurderer vi ledvis,

$$\left|a_n \cdot c_n^{k-n} \cdot q_{n-k}(c_n x)\right| < |a_n| \cdot c_n^{k-n} \cdot \frac{c_n^{n-k-1} \cdot x^{n-k-1}}{(n-k-1)!} = \frac{|a_n|}{c_n} \cdot \frac{x^{n-k-1}}{(n-k-1)!}$$

Vi skal saa blot vælge $c_n > |a_n|$, saa er Leddet majoriseret af et tilsvarende Led i Rækken for $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \cdots$ ($n-k-1$ løber jo gennem $0, 1, 2, \ldots$). Rækken er altsaa uniformt konvergent paa ethvert endeligt Interval, og ifølge kendte Sætninger er saa $f(x)$ differentiabel, og Rækken for $f'(x)$ fremstiller $f'(x)$, og denne er igen differentiabel o.s.v. $\square$

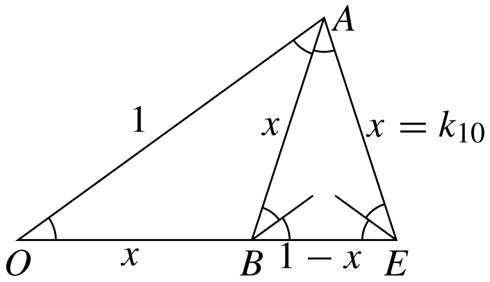
Man ser altsaa det forbløffende, at fx Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$ er Taylorrække for en $\mathcal{C}^\infty$-Funktion (og endda for uendelig mange).

§ 3: Konstruktion af den regulære 17-Kant.



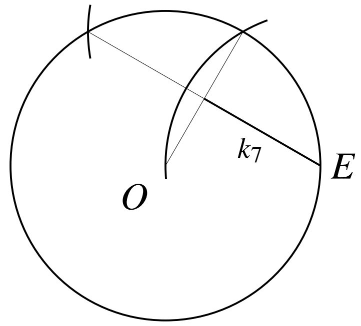
Givet Punkter 0 og E. Konstruer en regulær n-Kant med Centrum i 0 og en Vinkelspids i E.

Det er let at konstruere 3-Kanter, 4-Kanter, 6-Kanter, og hvad der fremkommer heraf ved Fordoblinger af Sidetallet.



Hos Euklid findes ogsaa Konstruktion af den regulære 5-Kant og 10-Kant v.Hj.a. en ligebenet Trekant med Vinkler 36°, 72°, 72°. Paa Fig. er $OE = 1$ og $EA = k_{10}$ (Korden til $360°/10$), og enhver $\measuredangle$ angiver 36°. Trekanterne OEA, BAO,og ABE er alle ligebenede og den første og den sidste er ensvinklede, saa $\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$, hvoraf $x = (\sqrt{5}-1)/2$, og denne Længde kan konstrueres. Det føltes smukt, men tilfældigt.

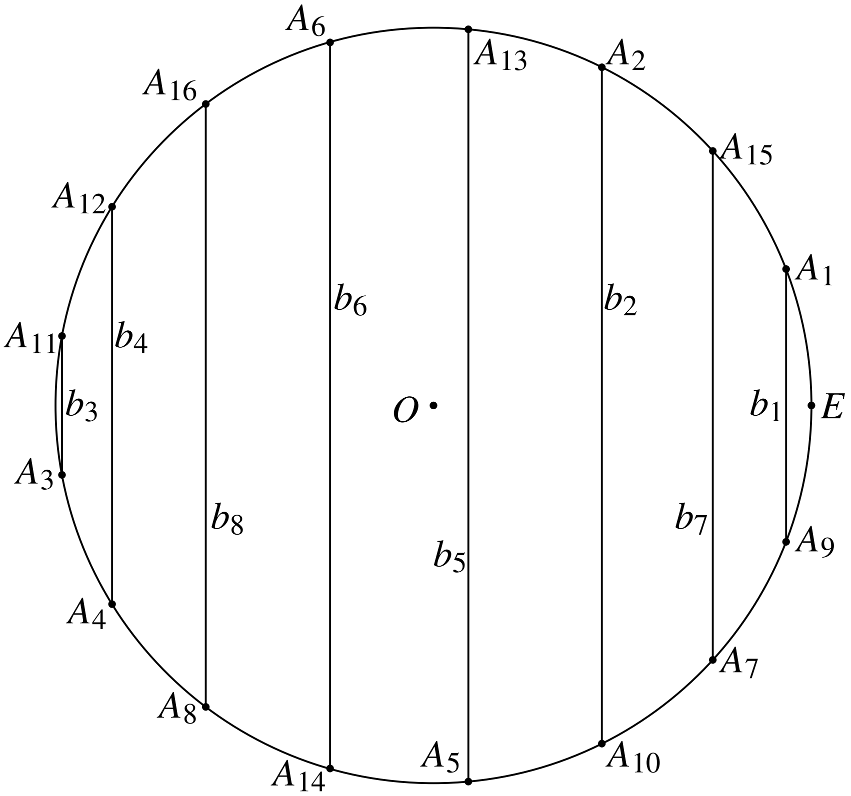
I Renæssancen genoptog man med Iver dette Emne, som var væsentligt ved Byanlæg, og ikke blot udfra skønhedssøgende Regularitetshensyn. Efter Bastionssystemets Opfindelse ca. 1520 stod man overfor den Opgave at omgive Byerne (ofte nyanlagte) med en Befæstningslinie med Polygonsider af given Længde, og her løser de regulære Polygoner to Optimeringsopgaver, nemlig dels for et givet Areal at opnaa den korteste Perimeter, og dels at maximere den mindste Polygonvinkel (idet en lille Vinkel betød, at en Fjende kunde angribe mere koncentrisk).



Der findes adskillige udførlige Tabeludregninger for Maalstørrelserne (normalt stoppede man dog ved 23-Kant, 24-Kant) og Angivelser af Konstruktioner af regulære Polygoner, fx 7-Kanten:

Men Konstruktionen af k_7 er kun tilnærmet (Fejl ca. 2‰), og noget tilsvarende gjaldt for de fleste af de andre Konstruktioner, da man ikke med Passer og Lineal kunde finde en exakt Konstruktion, udover i de fra Oldtiden kendte Tilfælde.

Det kom derfor som en stor Overraskelse at den 19-aarige Gauss i 1796 viste at *det er muligt at konstruere en regulær* 17*-Kant.*



Opgaven er aabenbart at konstruere Punktet A_1, hvor $\angle EOA_1 = v = 2\pi/17$, da Resten af Figuren derefter let faas.

De øvrige Punkter er nummereret sukcessivt, svarende til 3-Dobling af Vinklerne, altsaa $\angle EOA_2 = 3v$, og almindeligt $\angle EOA_h = 3 \cdot \angle EOA_{h-1} = 3^{h-1} \cdot v$, og det er saa heldigt at man netop faar navngivet samtlige ubekendte Punkter som $A_1, \dots, A_{16}$ hvorefter A_{17} falder i A_1 og det hele gentages periodisk.

Ethvert Par A_h og A_{h+8} ligger symmetrisk om OE, fordi allerede A_1 og A_9 gør det. A_1's Projektion paa OE har Afstanden $\cos v$ fra 0, og vi skal vise, at dette Tal kan konstrueres.

Vi sætter $b_1 = 2\cos v$, og alment $b_h = 2\cos 3^{h-1}v$, $h = 1, 2, \dots, 8$. Paa Figuren er b_h markeret paa Forbindelseslinien mellem A_h og A_{h+8} (man ser, at opfattes Planen som en kompleks Plan, saa er b_h lig Summen af de komplekse Tal A_h og A_{h+8}). Forøges Index h med 1 svarer det til 3-Dobling af Vinklen, og hvis man fortsatte blev $b_9 = b_1$ o.s.v..

Vi vil nu samle parvis efter følgende Skema

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{b_1+b_5}_{c_1} + \underbrace{b_3+b_7}_{c_3}}_{d_1} + \underbrace{\underbrace{b_2+b_6}_{c_2} + \underbrace{b_4+b_8}_{c_4}}_{d_2}}_{e_1}$$

og vise, at alle disse Størrelser bliver Kvadratrodsudtryk, som kan konstrueres med Passer og Lineal. For alle Bogstaverne gælder, at Forøgelse af Index med 1 betyder 3-Dobling af Vinklerne, og man faar Periodicitet, idet $c_5 = c_1$ o.s.v. og $d_3 = d_1$ o.s.v.

Vi skal gentagende bruge Formlen

$$2\cos x \cdot 2\cos y = 2\cos(x+y) + 2\cos(x-y),$$

v.Hj.a. hvilken et Produkt af b'er kan skrives som en Sum af b'er; en Størrelse $2\cos mv$ kan jo opfattes som et b_h, hvilket b_h det er kan aflæses af Figuren, fx $2\cos 5v$ er lig b_6.

Vi udregner $b_1 \cdot b_5 = 2\cos v \cdot 2\cos 4v = 2\cos 3v + 2\cos 5v = b_2 + b_6 = c_2$. Men saa er ogsaa $b_2 \cdot b_6 = c_3$ og $b_3 \cdot b_7 = c_4$ og $b_4 \cdot b_8 = c_1$ (Indexforøgelse med 1 lig Multiplikation af Vinklerne med 3).

For ethvert Par b_h, b_{h+4} har vi dermed baade Summen og Produktet udtrykt ved c'er, og hvis vi kender disse kan vi derfor finde b'erne af en Andengradsligning, d.v.s. ved Kvadratrodsudtryk:

$$\begin{matrix} b_1+b_5=c_1 \\ b_1b_5=c_2 \end{matrix}\ ; \quad \begin{matrix} b_2+b_6=c_2 \\ b_2b_6=c_3 \end{matrix}\ ; \quad \begin{matrix} b_3+b_7=c_3 \\ b_3b_7=c_4 \end{matrix}\ ; \quad \begin{matrix} b_4+b_8=c_4 \\ b_4b_8=c_1 \end{matrix}\ ;$$

For c'erne gaar vi frem ligesaadan:
$c_1 \cdot c_3 = (b_1+b_5)(b_3+b_7) = b_1b_3 + b_3b_5 + b_5b_7 + b_7b_1$, og idet

$$\begin{aligned} b_1b_3 &= 2\cos v \cdot 2\cos 8v = 2\cos 7v + 2\cos 9v = b_4 + b_3 \\ b_3b_5 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b_6 + b_5 \\ b_5b_7 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b_8 + b_7 \\ b_7b_1 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b_2 + b_1 \end{aligned}$$

faar vi $c_1 \cdot c_3 = e_1 = d_1 + d_2$.

Altsaa
$$\begin{matrix} c_1 + c_3 = d_1 \\ c_1 c_3 = d_1 + d_2 \end{matrix} ; \quad \begin{matrix} c_2 + c_4 = d_2 \\ c_2 c_4 = d_1 + d_2 \end{matrix} ;$$

For d'erne har vi $d_1 d_2 = (b_1 + b_3 + b_5 + b_7)(b_2 + b_4 + b_6 + b_8)$, altsaa en Sum af 16 Produkter $b_i b_j$. Vi kan undgaa den besværlige Omskrivning af alle disse, ved blot at bemærke, at forskyder vi Index med 1 vil det hele gaa over i sig selv, $d_1 d_2 \to d_2 d_1$. Hvert Produkt $b_i b_j$ kan skrives som $b_h + b_k$ (NB, idet $i \neq j$ kan der aldrig ved Omskrivningen komme Led med $\cos 0v$, saa vi holder os indenfor b-Mængden), vi faar derfor en Sum af 32 b-Led, og da den er invariant ved en Indexforskydning paa 1 maa alle de 8 Stk. b_j forekomme lige ofte, altsaa 4 Gange, saa $d_1 d_2 = 4e_1$.

Endvidere er $d_1 + d_2 = e_1$.

Det er umiddelbart at se, at $e_1 = -1$, thi Summen af de komplexe Tal (eller Vektorer ud fra 0) $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$ og E maa af Symmetrigrunde evident være lig 0, saa $b_1 + b_2 + \cdots + b_8 = -1$.

Saa kan vi løse Systemet af Andengradsligninger; for at faa Rødderne nummereret rigtigt maa vi tænke paa deres Størrelse, men den kan let aflæses af Figuren, idet jo $b_i > b_j$ betyder at b_i er afmærket til højre for b_j.

Først $d_1 + d_2 = -1$ og $d_1 d_2 = -4$, som giver $d_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17})$ og $d_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{17})$, da $d_1 = b_1 + b_3 + b_5 + b_7$ aabenbart er større end $d_2 = b_2 + b_4 + b_6 + b_8$. Saa c_1 og c_3 af $c_1 + c_3 = d_1$ og $c_1 c_3 = e_1 = -1$, og hvor $c_1 > c_3$; det giver

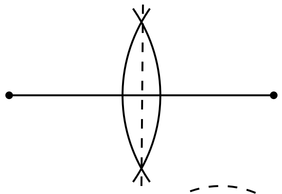
$$c_1 = \tfrac{1}{4}\big(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\big);$$
$$\text{analogt} \quad c_2 = \frac{1}{4}\big(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\big).$$

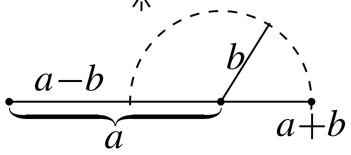
Endelig b_1 af $b_1 + b_5 = c_1$ og $b_1 b_5 = c_2$, hvor $b_1 > b_5$:

$$b_1 = \frac{1}{8}\Bigg(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$
$$+ \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\Bigg);$$

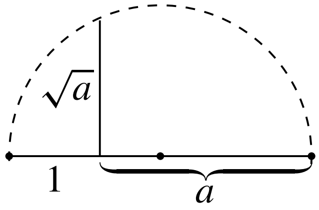
Om man vil, kan man jo saa opskrive Korden $k_{17} = \sqrt{2 - b_1}$.

Disse Størrelser kan virkelig konstrueres med Passer og Lineal, da jo



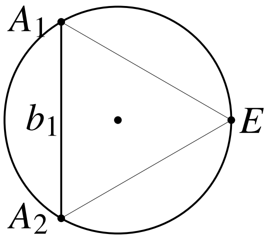


1) har man et Liniestykke af Længde a kan man ved gentagne Halveringer finde $\frac{1}{8}a$:
2) har man Liniestykker af Længder a og b kan man konstruere Længderne $a \pm b$:
3) har man Liniestykker af Længden 1 og a kan man konstruere Længden $\sqrt{a}$:

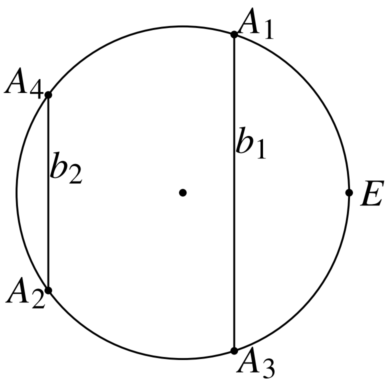


Ligningssystemet kunde ligesaagodt være løst m.H.t. et vilkaarligt b_j, blot kunde man i saa Fald faa andre Størrelsesrelationer, og Løsningen vilde paanær nogle Udvekslinger af $+$ og $-$ se ud som for b_1.

Det er faktisk den samme Metode, som ligger til Grund for Konstruktionen af den regulære Trekant og den regulære Femkant.



For Trekanten bliver det uhyre simpelt, $v = 2\pi/3$, og vi faar kun én Størrelse $b_1 = 2\cos v$, og p.G.a. Symmetrien af E, A_1 og A_2 omkring 0 faar vi $b_1 = -1$, altsaa $\cos 2\pi/3 = -\frac{1}{2}$.



For Femkanten er $v = 2\pi/5 = 72^\circ$, og $b_1 = 2\cos v$ og $b_2 = 2\cos 3v$. Her er $b_1 + b_2 = -1$, og $b_1 b_2$ er $2\cos v \cdot 2\cos 3v = 2\cos 2v + 2\cos 4v = b_2 + b_1 = -1$, saa b_1 er Rod i Ligningen $x^2 + x - 1 = 0$, og $b_1 > b_2$ giver $b_1 = (\sqrt{5} - 1)/2$, det samme som den foran fundne k_{10}, men det er jo ogsaa klart, at $2\cos 72^\circ = 2\sin 18^\circ = k_{10}$.

Som nævnt beskæftigede allerede de gamle Grækere sig med dette Tal $x = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0{,}618\ldots$, hvor $(1 - x)/x = x/1$. Det har jo den Egenskab, at hvis det afsættes henad en Enhedslængde, saa vil Resten forholde sig til x som x til hele Længden. Det er det "gyldne Snit", "sectio aurea". I Aarhundredernes Løb er der tillagt det megen magisk Betydning, især af Kunstnere og Arkitekter. Som Forhold mellem Siderne i et Rektangel skulde det frembringe noget særlig smukt (det er dog overraskende saa let man nu internationalt har vænnet sig til det standardiserede Papirformat med Sideforholdet $\sqrt{2}$). For mange virker det ogsaa ejendommeligt, at det optræder som Grænseværdi for Forholdet mellem konsekutive Led i Fibonaccis Række $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ (hvert Led er Summen af de to foregaaende), og det synes at man visse Steder i Naturen kan paavise dette Forhold.

Ideen i Gauss' Metode var den successive Sammenparring af de ubekendte, og det er nærliggende at tro, at Metoden er anvendelig for alle Polygoner med Sidetal $n = 2^h + 1$, men det er ikke Tilfældet; i næste § vises, at det gaar ikke med en 9-Kant. Det er nødvendigt at $2^h + 1$ er et Primtal, men saa gaar det, og Vinkeltredoblingen kan stadig indgaa paa samme Maade. Gauss viste (nogle Aar senere), at *nødvendigt og tilstrækkeligt for at en regulær n-Kant kan konstrueres med Passer og Lineal er det at $n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$, hvor $p_1, \dots, p_r$ er forskellige Primtal $p = 2^h + 1$.* At 2^k indgaar er klart, da man kan halvere Buer, og at p'erne kan multipliceres ses let, $\frac{1}{85} = \frac{7}{17} - \frac{2}{5}$ o.s.v.

Primtal $p = 2^h + 1$ kaldes Fermattal (Pierre Fermat 1601–65); nødvendigt (men ikke tilstrækkeligt) for at $2^h + 1$ er Primtal er det at h er en Potens af 2 (hvis $h = d \cdot f$, hvor d er ulige og større end 1, saa er $2^{df} + 1 = (2^f + 1)(2^{(d-1)f} - 2^{(d-2)f} + \cdots - 2^f + 1)$). $2^{2^m} + 1$ kaldes F_m. Man kender ikke flere Fermatprimtal end $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ og $F_4 = 65537$, og de tilsvarende Polygoner kan altsaa konstrueres.

$F_5 = 2^{32} + 1$ er delelig med 641, fordi $641 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4$, og ogsaa $641 = 640 + 1 = 5 \cdot 2^7 + 1$, saa modulo 641 er $F_5 = 2^4 \cdot 2^{28} + 1 \equiv (-5^4) \cdot 2^{28} + 1 = -(5 \cdot 2^7)^4 + 1 \equiv -(-1)^4 + 1 = 0$. (vist af Euler).

Og F_6 er ikke Primtal, det er $274177 \cdot 67280421310721$; dette blev udregnet af den sønderjydske Matematiker Thomas Clausen i 1854 (han var dog paa det Tidspunkt anset Astronom i Dorpat (nuv. Tartu) i Estland); han viste ogsaa, at den sidste Faktor er et Primtal, det største paa den Tid kendte.

Tallene F_m vokser enormt hurtigt. Med de moderne Regnemaskiner har man undersøgt nogle af de næste, de er sammensatte, men i nogle af dem kender man ingen Faktorer (!).

§ 4: Umuligheden af Vinklens Tredeling med Passer og Lineal.

Vi skal benytte, at for en given Længdeenhed vil alle de Længder som kan opnaas ved Konstruktion med Passer og Lineal være de samme som kan faas ved de fire Regningsarter og Kvadratrodstegn. Først lidt Algebra:

Adjunktion af Kvadratrod.

Vi betragter Tallegemer, d.v.s. Dellegemer af $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Et saadant er defineret ved at det med a og b indeholder $a \pm b$, $a \cdot b$ og for $b \neq 0$ ogsaa $\frac{a}{b}$, og endvidere Tallet 1. Tallegemet betegnes F. Det er klart at $\mathbb{Q} \subseteq F$ og at $a \in F$ medfører $-a \in F$.

Lad os antage, at $q \in F \cap \mathbb{R}^+$, men $\sqrt{q} \notin F$. Vi definerer saa det udvidede Legeme $F(\sqrt{q})$; saadanne Legemsudvidelser er velkendte fra Algebraen, men da alt her udspilles indenfor $\mathbb{R}$ er der en Del som bliver simplere.

Vi sætter

$$F(\sqrt{q}) = \left\{ a_1 + a_2\sqrt{q} \ : \ a_1, a_2 \in F \right\}.$$

Vi vil vise, at $F(\sqrt{q})$ er et Legeme, og aabenbart det mindste som indeholder F og $\sqrt{q}$.

Lad os først bemærke, at et Tal $a_1 + a_2\sqrt{q}$ kan kun fremstilles ved det ene Par $a_1, a_2 \in F$, altsaa at hvis $a_1 + a_2\sqrt{q} = b_1 + b_2\sqrt{q}$, saa er $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$; det følger af at $a_1 - b_1 = (b_2 - a_2)\sqrt{q}$, og naar $\sqrt{q} \notin F$ er det kun muligt med $a_1 = b_1$ og $a_2 = b_2$.

At $F(\sqrt{q})$ er stabil ved Addition og Subtraktion ses af at $(a_1 + a_2\sqrt{q}) \pm (b_1 + b_2\sqrt{q}) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2)\sqrt{q}$ og ved Multiplikation af at $(a_1 + a_2\sqrt{q}) \cdot (b_1 + b_2\sqrt{q}) = (a_1b_1 + a_2b_2q) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{q}$. Ved Divisionen forlænger vi Brøken $\frac{a_1+a_2\sqrt{q}}{b_1+b_2\sqrt{q}}$ med $b_1 - b_2\sqrt{q}$ (dette er ikke 0, idet 0 kun har Fremstillingen $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{q}$, og $b_1 + b_2\sqrt{q}$ var forudsat $\neq 0$), hvorved faas

$$\frac{a_1b_1 - a_2b_2q}{b_1^2 - b_2^2q} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1^2 - b_2^2q} \cdot \sqrt{q}.$$

Vi siger at $F(\sqrt{q})$ er fremgaaet af F ved Adjunktion af $\sqrt{q}$. Tallet $a_1 - a_2\sqrt{q}$ kaldes for det konjugerede til $a = a_1 + a_2\sqrt{q}$, og vi vil betegne det $\overline{a}$ (da vi slet ikke skal bruge komplekse Tal er der ingen Mulighed for Misforstaaelser, og iøvrigt ser man, at Begrebet "komplekst konjugeret", som ogsaa ofte betegnes med $\overline{a}$, fremkommer ved en ganske lignende Konstruktion, der blot er noget vanskeligere, fordi $\sqrt{-1}$ ikke eksisterer indenfor $\mathbb{R}$). Vi har at $a = \overline{a}$ er ensbetydende med $a \in F$, og endvidere er $\overline{\overline{a}} = a$ ("Konjugering er involutorisk").

Aabenbart er $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a-b} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}$ og $\overline{(a/b)} = \overline{a}/\overline{b}$, det er klart, da man i de ovenfor udregnede Udtryk blot skal skifte Fortegn overalt ved $\sqrt{q}$, medens $(\pm\sqrt{q})^2 = q$ altid. Med andre Ord er den ved $a \mapsto \overline{a}$ givne Afbildning af $F(\sqrt{q})$ en ikke-triviel Automorfi, ved hvilken F udgør Mængden af Fixelementer.

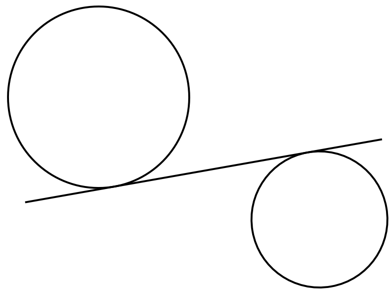
Heraf følger, at hvis $c(x) \in F[x]$, altsaa $c(x)$ er et Polynomium $c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$, alle $c_i \in F$, og det har en Rod $a \in F(\sqrt{q})$, saa vil ogsaa $\overline{a}$ være Rod, fordi $c(\overline{a}) = \overline{c(a)} = \overline{0} = 0$.

Specielt gælder for Trediegradspolynomier $x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ at hvis der findes en Rod $a \in F(\sqrt{q})$, saa har Polynomiet ogsaa en Rod i F. For enten ligger a selv i F, eller ogsaa er $a \neq \overline{a}$ og disse vil begge være Rødder, og da Røddernes Sum er $-c_2$ maa den tredie Rod være $-c_2 - a - \overline{a}$, som ligger i F.

Hvis der foretages flere Adjunktioner kan man anvende dette ved hver af dem, hvormed man har Sætningen: *Har man et Polynomium* $c(x) = x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \in F[x]$, *og det ikke har nogen Rod i* F, *saa kan det heller ikke have nogen Rod i noget Legeme, som fremkommer af* F *ved* (*et endeligt Antal*) *Kvadratrodsadjunktioner.*

Konstruktion med Passer og Lineal:

Disse var de "autoriserede" Hjælpemidler siden den græske Oldtid. Med Hensyn til hvad der kan konstrueres og hvorledes, kan der være Grund til at nævne Julius Petersens "Metoder og Teorier" (til Løsning af geometriske Konstruktionsopgaver) fra 1866, det er den danske Matematikbog som har vundet den største internationale Udbredelse, oversat og benyttet som Skolebog i adskillige Lande (J.P. 1839–1910, Professor ved Universitetet, beskæftigede sig med Algebra og Grafteori og Forfatter til et meget og meget længe benyttet Skolebogssystem).



Passeren og Linealen maa kun bruges paa visse bestemte Maader, det er fx ikke tilladt at tegne Fællestangenten for to Cirkler ved blot at lægge Linealen til, skønt det er baade nemmere og fuldt saa nøjagtigt som den geometriske Konstruktion.

De tilladte Operationer er

1) at tegne en Linie gennem to foreliggende Punkter

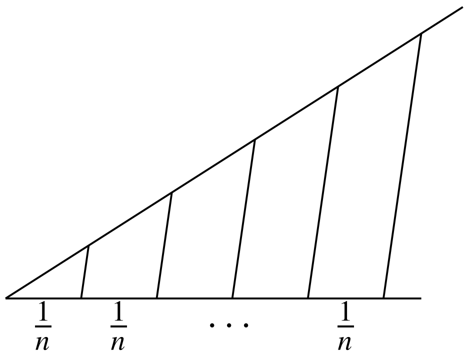
2) at tegne Cirkel med et foreliggende Punkt som Centrum og Radius lig Afstanden mellem to foreliggende Punkter.

3) at opsøge et Skæringspunkt mellem en foreliggende Linie eller Cirkel og en anden foreliggende Linie eller Cirkel (NB Tangering er ikke nok, det skal være Skæring).

4) at vælge et Punkt indenfor en foreliggende Del af Planen eller paa en foreliggende Del af en Linie eller af en Cirkel.

Til Konstruktionen skal være forelagt et Udgangspunkt O og en Enhedslængde OE.

Operationen 4) kan undværes, thi det er muligt ud fra O og E og kun ved Hjælp af 1), 2) og 3) at konstruere et vilkaarlig fint Kvadratnet i Planen (se Opgave 9), og saa kan 4) erstattes med 3) anvendt paa dette Kvadratnet i Forbindelse med de øvrige Linier og Cirkler.



Til n-Deling af et Liniestykke findes en velkendt Konstruktion (man afsætter en Række ækvidistante Punkter ud til Siden fra Liniestykket og tegner parallelle Linier gennem dem), og heraf og af de paa Side 17 anførte Konstruktioner af Sum, Differens og Kvadratrod ses, at med en given Enhedslængde er det muligt at konstruere enhver Størrelse som kan udtrykkes v.Hj.a. rationale Tal og Kvadratrodstegn, altsaa ethvert Element i et Legeme som kan fremgaa af $\mathbb{Q}$ ved Kvadratrodsadjungeringer (det er som bekendt altid muligt at skaffe rational Nævner i Kvadratrodsudtryk).

Vi vil operere i et Koordinatsystem med første Akse udaf OE; hvis vi har et Punkt kan dets Koordinaters Størrelser konstrueres (ved Projektion paa Akserne), og er omvendt disse givne kan Punktet konstrueres (ved at oprejse vinkelrette).

Vi definerer nu Mængden af *konstruerbare Tal* som de Tal, der er Koordinater for Punkter der kan konstrueres udfra O og E. Vi vil vise, at et konstruerbart Tal altid tilhører et Legeme, som er fremkommet af $\mathbb{Q}$ ved Kvadratrodsadjungeringer.

Det følger umiddelbart af

Hvis der foreligger Punkter, hvis Koordinater alle tilhører et Legeme F, og man udfra disse konstruerer et nyt Punkt P v.Hj.a. 1), 2) og en enkelt Anvendelse af 3), saa vil Koordinaterne for P tilhøre et Legeme $F(\sqrt{q})$, hvor $q \in F \cap \mathbb{R}^+$ (evt. Legemet F selv).

Bevis: En Linie gennem Punkterne $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$ har Ligningen $(x_1 - x_2)(y - y_2) = (x - x_2)(y_1 - y_2)$, altsaa af Formen $ax + by = c$ med $a, b, c \in F$ og $(a, b) \neq (0, 0)$ (idet Punkterne er forudsat forskellige).

En Cirkel med Centrum $P_1 = (x_1, y_1)$ og Radius lig Afstanden mellem $P_2 = (x_2, y_2)$ og $P_3 = (x_3, y_3)$ har Ligningen $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2$, altsaa af Formen $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ med $d, e, f \in F$.

Hvis P er Skæringspunkt mellem to Linier, saa er x og y bestemt ved

$$\begin{array}{c} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_1 y = c_2 \end{array} ; \quad \begin{array}{l} \text{hvor } \det\left[\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right] \neq 0, \\ \text{da Linierne ikke er parallelle,} \end{array}$$

og af de kendte Formler (med Determinanter) for Løsning af et lineært Ligningssystem ses, at $x, y \in F$.

Hvis P er Skæringspunkt mellem en Linie og en Cirkel, saa er x og y bestemt ved

$$\begin{array}{c} ax + by = c \\ x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \end{array} ;$$

antag $a \neq 0$ (ellers ombyttes x og y), saa er $x = -by/a + c/a$, som indsat i nederste Ligning giver en Andengradsligning i y af Formen $Ay^2 + By + C = 0$, med $A, B, C \in F$ og $A > 0$. Den har Løsningerne $y = \frac{1}{2A}(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})$; her er $B^2 - 4AC \in F$ og > 0, da Skæring jo var forudsat. Kaldes denne Størrelse q ser man, at $y \in F(\sqrt{q})$, og indsættes saa i Udtrykket for x ses at $x \in F(\sqrt{q})$. Det kan naturligvis godt ske, at $\sqrt{q} \in F$, saa der ikke er nogen effektiv legemsudvidelse.

Hvis P er Skæringspunkt mellem to Cirkler findes x og y af

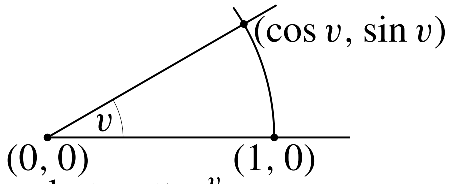
$$\begin{matrix} x^2 + y^2 + d_1 x + e_1 y + f_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + d_2 x + e_2 y + f_2 = 0 \end{matrix} ;$$

da Cirklerne ikke kan have samme Centrum er $(d_1, e_1) \neq (d_2, e_2)$, og ved Subtraktion faar vi derfor Ligningen for en Linie $(d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2)y + (f_1 - f_2) = 0$, og tager vi den sammen med en af Cirkelligningerne er vi tilbage i forrige Tilfælde (Linien er Cirklernes “Radikalakse”). $\square$

Af Beviset fremgaar, at hvis der ved en Konstruktionsopgave er givet flere Liniestykker (fx de tre Sider i en Trekant er givne), saa kan man vælge et vilkaarligt af dem som Enhed, og saa vil enhver udfra Liniestykkerne konstruerbar Længde have en Størrelse tilhørende et Legeme fremkommet ved Adjunktion af Kvadratrødder til det mindste Legeme som indeholder de givne Længder (OBS dette Tallegeme er uafhængigt af hvilket Liniestykke der er valgt som Enhed!).

Vi kan nu hurtigt se Umuligheden af Vinklens Tredeling.

Ved den givne Vinkel indlægger vi et Koordinatsystem som paa Figuren, og tegner Enhedscirklen. Dermed har vi som Udgangslegeme $F_0 = \mathbb{Q}(\cos v, \sin v)$.



Da $\cos 3w = 4\cos^3 w - 3\cos w$ faar vi ved at sætte $\frac{v}{3} = w$ og $x = 2\cos w$, at $x^3 - 3x - 2\cos v = 0$; Problemet er om x er konstruerbar.

Lad os prøve med $v = \frac{\pi}{3} = 60°$. Saa er $\cos v = \frac{1}{2}$ og $\sin v = \frac{\sqrt{3}}{2}$, og Ligningen er $x^3 - 3x - 1 = 0$ og $F_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Dersom Ligningen havde en konstruerbar Rod, skulde den ifølge Sætningen Side 20 have en Rod i $\mathbb{Q}$, men det er ikke Tilfældet.

For Polynomier med heltallige Koefficienter gælder nemlig:

Hvis $c(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ har en rational Rod $\frac{a}{b}$ (skrevet som uforkortelig Brøk), saa gælder $a \mid c_0$ og $b \mid c_n$.

Rigtigheden ses let, for indsætter man $\frac{a}{b}$ for x og ganger med b^n faas $c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + c_1 ab^{n-1} + c_0 b^n = 0$, og her vil a gaa op i alle de første Led og derfor ogsaa i $c_0 b^n$, og da a og b er primiske haves $a \mid c_0$; analogt ses at $b \mid c_n$. De eneste Muligheder for en rational Rod i $x^3 - 3x - 1 = 0$ er derfor $x = \pm 1$, og ingen af dem er Rod.

Dermed er altsaa vist, at en Vinkel paa 60° ikke kan tredeles ved Konstruktion, og det er derfor heller ikke muligt at konstruere en regulær 9-Kant. $\square$

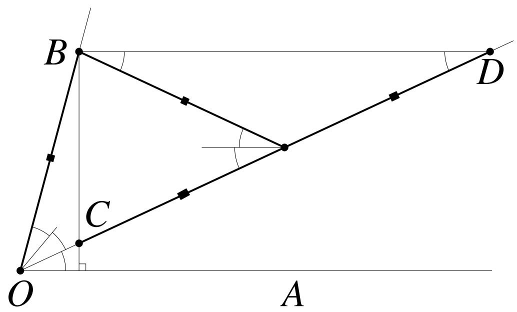
Generelt ses, at Ligningen $x^3 - 3x - 2\cos v = 0$ kun har en konstruerbar Rod dersom $\cos v$ er et Tal der kan skrives paa Formen $\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, hvor $x \in \mathbb{Q}$; i saa Fald er de tre Rødder $2\cos\frac{v}{3}$, $2\cos\frac{v+2\pi}{3}$ og $2\cos\frac{v+4\pi}{3}$, som alle er konstruerbare (én rational og to som evt. indeholder Kvadratrødder).

Et andet Problem fra den klassiske Oldtid var Spørgsmaalet om Terningens Fordobling, altsaa om $\sqrt[3]{2}$ er konstruerbar. Det kan vi øjeblikkelig besvare negativt, idet $x^3 - 2 = 0$ ikke har nogen rationale Løsninger (de eneste Muligheder, ± 1 og ± 2 duer ikke), og derfor heller ingen konstruerbare.

Spørgsmaalet om Vinklens Tredeling har optaget Sindene hos mange, og det er ikke usædvanligt, at der kommer Henvendelser til Matematisk Institut fra Personer som har fundet en Maade at tredele Vinkler paa (Terningens Fordobling har aldrig nydt en tilsvarende Popularitet, men den drejer sig jo ogsaa kun om det enkelte Tal $\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ldots$, og noget lignende gælder “Cirklens Kvadratur”, som mere er en Talemaade og blot omhandler $\pi = 3{,}14159\ldots$; “Fermatister” er et Kapitel for sig).

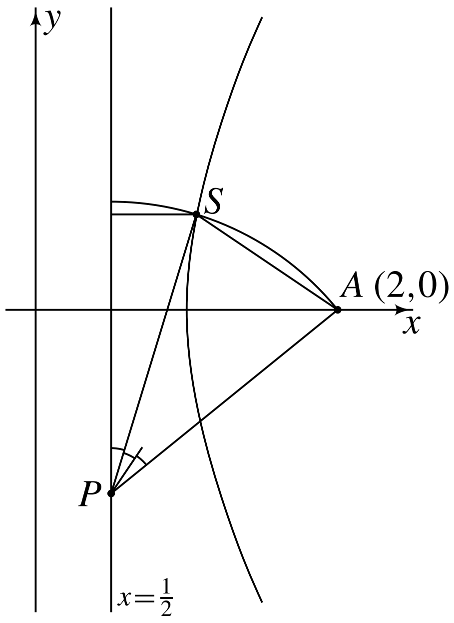
Tredelingerne kan være matematisk rigtige, men benytter altsaa saa Hjælpemidler, som gaar ud over den (for saa vidt noget tilfældigt afgrænsede) autoriserede Brug af “Passer og Lineal” (vi vil her se bort fra rent mekaniske, saasom Anvendelser af Tandhjul, hvad man ogsaa kan blive stillet overfor).

Allerede i Oldtiden kendte man “Indskydning”. Paa det ene Vinkelben afsættes et Punkt B, og gennem B tegnes Linier parallelle med det andet Ben og vinkelret paa det andet Ben. Paa en Lineal afsættes to Mærker med Afstand $CD = 2 \cdot OB$. Linealen an-

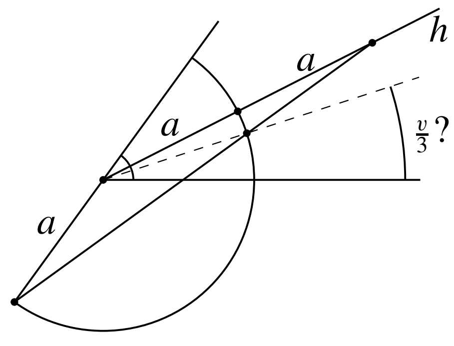


bringes saaledes at den gaar gennem O og at Mærkerne falder paa Linierne gennem B. Saa er $\angle AOD = \frac{1}{3} \cdot \angle AOB$. Der fremkommer nemlig fire lige store Liniestykker, mærket —▪— paa Fig., og derfor ligebenede Trekanter som foraarsager at Vinklerne, mærket $\measuredangle$, bliver lige store. Det var uautoriseret Brug af Passer og Lineal.

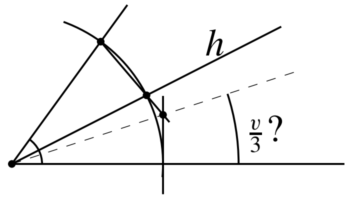
Hvis man i et Koordinatsystem har Hyperblen $x^2 - \frac{1}{3}y^2 = 1$, saa kan den bruges til at tredele Vinkler. Man anbringer Vinklen med det ene Ben paa Linien $x = \frac{1}{2}$ og saadan at det andet Ben gaar gennem $A = (2, 0)$. Saa tegnes en Cirkelbue med Centrum i Vinklens Toppunkt P og gaaende gennem A, og dens Skæringspunkt med Hyperblen kaldes S. Saa er $\angle OPS = \frac{1}{3}\angle OPA$. Thi da Hyperbelligningen kan skrives $(2-x)^2 + y^2 = (2(x - \frac{1}{2}))^2$ ses at AS er det dobbelte af S's Afstand fra Linien $x = \frac{1}{2}$ ("Hyperblens Karakterisering ved Brændpunkt og Ledelinie"), hvilket viser at $\angle APS$ er det dobbelte af $\angle SPO$. Det var Brug af lidt mere Matematik.



Man bliver hyppigt udsat for Personer, som kommer med tilnærmede Løsninger, og Tilnærmelsen er ofte er saa god, at Fejlen ikke kan opdages paa en Tegning af rimelige Dimensioner (og til praktiske Formaal er det godt nok). I begge de her viste Eksempler er Vinklen betegnet v, og dens Halveringslinie h er tegnet.



Første Metode skyldes Huygens (1629 –1695); Stykket $2a$ afsættes udad h, og udad Forlængelsen af det andet Ben afsættes a. Saa vil disse Punkters Forbindelseslinie skære Cirklen med Radius a i et Punkt som tredeler Buen over v. Anden Metode er simplere: I den ene Ende af



Buen over v oprejses Tangenten, og fra den anden Ende tegnes Sekanten over Halvdelen af Buen; Skæringspunktet bestemmer Tredelingen.

§ 5: Konstruktion med Passer alene – Digression om ældre danske Matematikere og andet.

Danskeren Georg Mohr viste i 1672 at det er muligt med Passeren alene at udføre de samme Konstruktioner som med Passer og Lineal.

Præcist: *Dersom man ud fra Udgangspunkter $A_1, \ldots, A_m$ kan konstruere et Punkt P ved et endeligt Antal Operationer*

1) at tegne en Linie gennem to foreliggende Punkter,
2) at tegne en Cirkel med et foreliggende Punkt som Centrum og Afstanden mellem to foreliggende Punkter som Radius,
3) at opsøge Skæringspunkter mellem foreliggende Linier og/eller Cirkler,

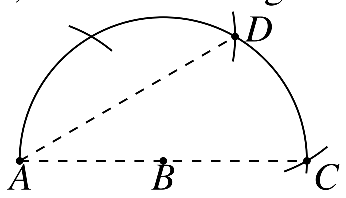
da kan man ogsaa konstruere P ved et endeligt Antal Operationer af Arterne 2) *og* 3) (*hvor* 3) *saa bliver "at opsøge Skæringspunkter mellem Cirkler"*).

Her er 1), 2) og 3) de paa Side 22 anførte; det blev dér bevist, at 4) ("frie Valg") var overflødigt, og vi skal ogsaa se, at i Mohrs Metode – som vi i alt væsentligt skal følge – er der intetsteds Brug for frie Valg ved Konstruktionerne.

Vi skal altsaa fra nu af kun bruge Passer.

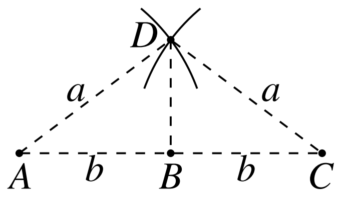
a) *Givet Punkterne A og B. Det er muligt at konstruere C saa A, B og C ligger paa Linie og $BC = AB$. Hvis $AB = a$, saa er det muligt at konstruere Længder $a\sqrt{3}$ og $2a$.*

Konstruktionen fremgaar af Figuren, hvor de tegnede Cirkelbuer alle har Radius a. $AD = a\sqrt{3}$ og $AC = 2a$.



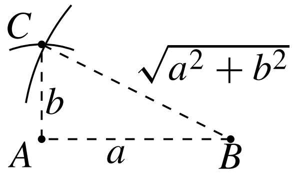
b) *Givet Længder a og $b < a$. Det er muligt at konstruere Længden $\sqrt{a^2 - b^2}$.*

Hvis $AB = b$, saa bestemmes C som i a), og fra A og C tegnes Buer med Radius a, Skæringspunkt D; saa er $BD = \sqrt{a^2 - b^2}$. Specielt ses, at for givet a er det muligt at konstruere $a\sqrt{2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2}$.



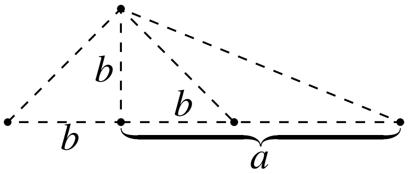
c) *Givet Længder a og b. Det er muligt at konstruere Lænden $\sqrt{a^2 + b^2}$. Det er muligt at afsætte en given Længde b vinkelret i det ene Endepunkt af a.*

For $b < a$ er $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - (\sqrt{a^2-b^2})^2}$ konstruerbar; $\triangle ABC$ tegnes.



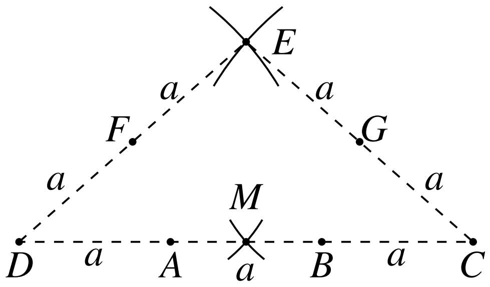
d) *Givet Længder a og $b < a$. Det er muligt at afsætte b henad a fra det ene Endepunkt og til den ene eller anden Side, og altsaa konstruere Længder $a + b$ og $a - b$.*

Ved Hjælp af c) afsættes b vinkelret udfra a i det ene Endepunkt, og dernæst afsættes b vinkelret paa igen.



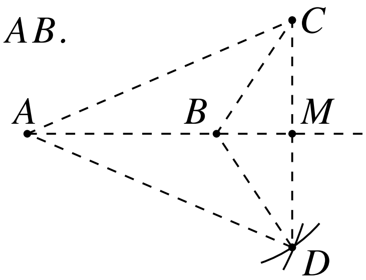
e) *Givet Punkterne A og B. Det er muligt at konstruere Midtpunktet M af AB. For en given Længde a kan man altsaa bestemme Længden $\frac{a}{2}$.*

Først afsættes $DABC$ paa Linie ved Metoden fra a); med D og C som Centre tegnes Buer med Radius = $2a$; fra Skæringspunktet E afsættes Liniestykker af Længde a udad ED og EC til F og G (Metoden fra d) benyttes); fra F og G tegnes Buer med Radius a, de skærer hinanden i M.



f) *Givet Punkterne A, B og C, ikke liggende paa samme Linie. Det er muligt at konstruere C's Projektion paa Linien AB.*

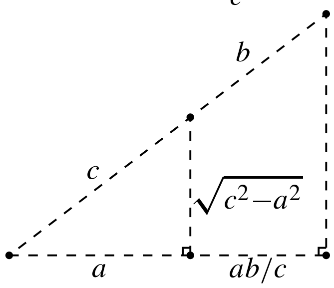
Ved Hjælp af Cirkelbuer med Centrer i A og B og gaaende gennem C finder man C's symmetriske Punkt D m.H.t. Linien AB; Midtpunktet af CD er den ønskede Projektion.



g) *Givet Længder a, b og c. Det er muligt at konstruere Længden $\frac{ab}{c}$.*

("Fjerdeproportional"; det betyder, at man i Tallegemet af Længder med en valgt Enhed kan multiplicere og dividere; at man kan addere og subtrahere blev vist under d)).

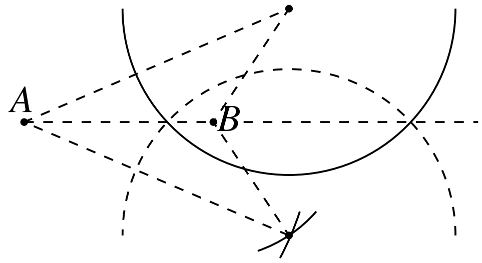
Lad os antage $c > a$, ellers kan man med a) og e) erstatte a, b med $\frac{a}{2}$, $2b$ og om fornødent gentage dette; man konstruerer en retvinklet Trekant med Katete a og Hypotenuse c (idet b) benyttes), og afsæt-



ter b i Forlængelse af c (idet d) benyttes) og projicerer paa a's Linie; Projektionen af b er den ønskede Længde.

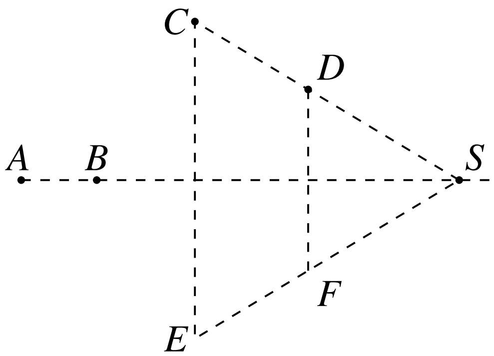
Vi kan nu bevise selve Sætningen.

α) At finde Skæringspunktet mellem to Cirkler er intet Problem, da Cirklerne foreligger tegnet.



β) At finde Skæringspunktet mellem en tegnet Cirkel og en Linie bestemt ved to Punkter A og B henføres let til det foregaaende, idet man som under f) tegner den m.H.t. Linien symmetriske Cirkel og skærer den med den givne (er Cirklerne sammenfaldende, afsættes Radius paa AB).

γ) At finde Skæringspunktet mellem to Linier, hver givet ved to Punkter, er lidt sværere. Lad Linierne være AB og CD, saa kan vi ligesom før konstruere C's og D's symmetriske Punkter E, F m.H.t. Linien AB, og det søgte Skæringspunkt er ogsaa Skæringspunkt S mellem CD og EF; af de ensvinklede Trekanter ser man, at Længden $SD = \frac{DF \cdot CD}{(CE-DF)}$, og denne Længde kan konstrueres ved g), og saa afsættes i Forlængelse af CD v.Hj.a. d). (selvom CD er vinkelret paa AB er Konstruktionen gyldig).



Dermed er Georg Mohrs Sætning bevist. ∎

Georg Mohr (1640–1697) er født i København, men tog som 22-aarig til Holland (Leiden bl.a.), hvor han opholdt sig i en længere Aarrække og kom i Forbindelse med Tidens bedste videnskabelige Kredse. Bogen "Euclides Danicus" udkom 1672 og blev trykt baade paa Dansk og Hollandsk, men har ikke desto mindre været glemt (eller rettere sagt ikke været læst) i Eftertiden, indtil den tilfældigt i 1927 blev fundet, og man blev klar over at Mohr havde Prioriteten til noget som man ellers troede først var fundet 1797 af Italieneren Mascheroni (og paa en ikke nær saa elegant Maade). Fornylig har det vist sig, at Mohr ogsaa er Forfatter til en anonym Bog

"Euclides Curiosi", hvori det vises at man med Lineal og en Passer med fast Aabning ogsaa kan udføre alle de sædvanlige Konstruktioner, men det Resultat var ikke nyt (hvad Mohr ogsaa var klar over). Bøgerne tryktes i Amsterdam. Senere opholdt Mohr sig i Danmark og Tyskland.

For Georg Mohr var det ren Grundforskning, saaledes som han ogsaa selv fremhæver det i Slutstykket af sin Bog:

> Mens der ſom nogen monne være/ huilcke denne maner af opløſning: icke kunde behage/ fordi dend var lettere at giøre med Linial oc Circkel / de maa vide at mig det icke ubewiſt er / mens at min Oyemerck alleniſt haff ver været/ om Circulens Natur (noget) at underſøge / om dends egenſkab derudi beſtod / at mand der med alleniſte kand opløſe de platte Werckſtycker (foruden Liniall at bruge) med ſkærelſer af Runder/ lige ſom herudi forrettit er. Beedendis dend godvillige Læſer/ at hand dette efter Kierlighet til beſte vil antage / Synderlig derſom herudi noget monne være forſeet / tænckende at alle wores Gierninger ere Ufulkommene.

E N D E.

Mascheronis mere kluntede Bog kom paa italiensk og derefter 1798 i en fransk Udgave; i Overensstemmelse med den franske Revolutions Tanker om Nyttiggørelse giver han i Forordet en Begrundelse af Emnet som Maalforskning (Napoleon havde lige erobret Italien, og han hædres med et langt Hyldestdigt foran i Bogen). Han nævner nemlig, at han hos engelske Astronomer har læst, at det er bedre at benytte Passer (under en eller anden Form) end Lineal til den nøjagtige Inddeling af Gradkredsene til de store Kikkerter.

Hvorfor er en Passer bedre end en Lineal?

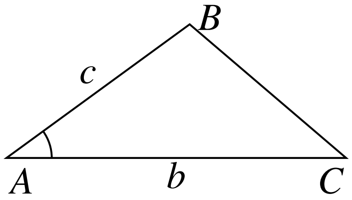
En Passer *frembringer* en Cirkel; en Lineal er et (merkantilt fremstillet) Stykke Retlinietilnærmelse, som man benytter til at *kopiere*, medens det ved Konstruktioner er forbudt at skaffe sig Cirkler ved Kopiering (tegne rundt om en Mønt eller Tallerken). Hvis man ikke har en Købepasser, kan man let improvisere en (fx med et Stykke Sejlgarn), medens man i Mangel af en Lineal maa tage sin Tilflugt til en af de (ganske vist mange) Retlinietilnærmelser man er omgivet af eller have Tillid til mere eller mindre gyldige fysiske Situationer (at en Lysstraale eller en stram Snor er retliniet). Og man haaber, at en Lineal bevarer sin Form i aarevis, medens en Passer kun skal være afstandsbevarende i den Brøkdel af et Minut som hver enkelt Anvendelse varer.

I næste § skal vi se paa Spørgsmaalet om det er muligt at give en matematisk Frembringelse af en ret Linie.

Digression

Fra Middelalderen kendes af danske Matematikere *Petrus Philomena de Dacia* (hans Betegnelse ved Universitetet i Paris), en Kannik fra Roskilde (?), som omkring Aar 1300 var Forfatter til nogle anerkendte Manuskripter om Regneteknik og Kalendervæsen, men som man iøvrigt ikke ved ret meget sikkert om.

Universitetet er fra 1479, og der har i hvert Fald fra 1537 (hvor det kom igang igen efter Reformationen) været undervist i Matematik. En fremtrædende Personlighed var *Thomas Fincke* (1561–1656). Født i Flensborg, studerede i Strasbourg og udgav allerede som 22-aarig i Basel et imponerende Værk om Trigonometri (plan og sfærisk, bl.a. "Finckes Formel" $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cdot\cot\frac{A}{2}$), 400 Sider hvoraf dog 130 er 7-cifrede trigonometriske Tabeller; naturligvis ikke selvstændigt Arbejde, i Forordet takkes bl.a. Tycho Brahe. Naar Tabellerne kan kaldes 7-cifrede er det fordi de er angivet udfra en Enhed paa 10^7, systematisk Anvendelse af Decimalbrøker kom først lidt senere, med den hollandske Matematiker, Fysiker og Fæstningsingeniør Simon Stevins Bog "De Tiende". Efter at have været matematisk Professor i en Aarrække opterede Fincke et medicinsk Professorat (som det dengang var Skik) og virkede som saadan i 53 Aar, og hans Oprettelse af "Museum Naturaæ" gav Anledning til Mindetavlen ved Jagtvej.



Trigonometriske Tabeller med mange Decimaler var nyttige, ikke blot til astronomiske og andre geometriske Beregninger, men de blev ogsaa brugt til Multiplikation (fx af Tycho Brahe). Logaritmer blev først opfundet en Menneskealder senere; Princippet i dem er jo, at hvis man vil have en Tabel til den besværlige Operation Multiplikation, saa maa den have dobbelt Indgang (være todimensional), men ved at have en Tabel med enkelt Indgang over

Logaritmefunktionen, og saa benytte Formlen $\log xy = \log x + \log y$ faar man Opgaven reduceret til den simple Operation Addition. Det samme kan opnaas ved en Cosinustabel, idet en velkendt Formel (iøvrigt anført Side 15) siger, at hvis $f(x) = 2\cos x$, saa er $f(x)\cdot f(y) = f(x+y)+f(x-y)$, dog skal man addere og subtrahere lidt mere. Noget lignende kunde iøvrigt opnaas, hvis man havde en større Kvadrattabel, thi hvis vi sætter $f(t) = (\frac{t}{2})^2$; saa er $xy = f(x+y) - f(x-y)$. Man kan altsaa erstatte en (urealiserbar) Tabel med dobbelt Indgang med en med enkelt Indgang.

Et andet Spørgsmaal af lignende Art blev trukket frem af Hilbert i det 13'de af hans berømte 23 Problemer fra Pariserkongressen i 1900. Nemlig (idet vi ser bort fra hans specielle Eksempel): *Findes der Funktioner af tre variable?*, forstaaet paa den Maade, at de ikke kan udtrykkes ved Funktioner af to variable. Hvis man prøver at skrive Udtryk op med Logaritmer, Gammafunktion o.s.v. (Funktioner af en variabel) og Sum og Produkt (Funktioner af to variable), saa giver det i hvert Fald ikke Eksempler.

For kontinuerte Funktioner blev et Svar givet 1957 af Kolmogorov med Sætningen: Enhver kontinuert Funktion af n variable defineret paa Terningen $[0\,,\,1]^n$ kan skrives som et Udtryk, hvori kun indgaar kontinuerte Funktioner af én variabel og Addition (!).

Af senere danske Matematikere, som har givet Bidrag, der internationalt anerkendes som originale, kommer saa *Georg Mohr*.

Næste Navn paa Listen er *Caspar Wessel*, der 1797 forud for Argand og Gauss angav Afbildningen af komplekse Tal i Planen $\mathbb{C}$, og viste hvorledes man kan regne med dem (at Talpar kan adderes som Vektorer er ikke overraskende, derimod den simple Multiplikation af komplexe Tal afbildet geometrisk). Han havde ingen Forbindelse med Universitetet, hvis Matematik i denne Periode stod svagt, men han deltog i Videnskabernes Selskabs Kortlægning ("Han tegner Landkort og læser Loven, og er saa flittig som jeg er doven" skrev Broderen Johan Herman Wessel).

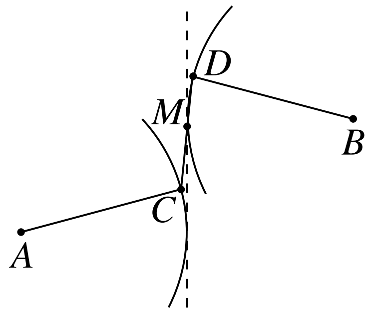
Thomas Clausen er nævnt tidligere, han deltog ogsaa i Kortlægning, i Hertugdømmerne hos Universitetets Astronomiprofessor.

Indtil ca. 1875 maa dansk Matematik karakteriseres som provinsiel, saa springer den ret brat op paa et internationalt Niveau med *Zeuthen* og *Julius Petersen*, Navnet *Gram* er ogsaa velkendt. At omtale den senere Udvikling vilde føre ind i for mange Specialiteter, saa det skal ikke gøres.

§ 6: Linietilnærmelser ved Stangsystemer.

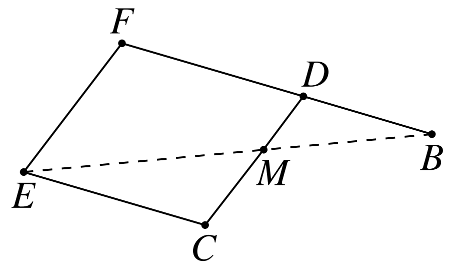
En væsentlig Anledning til den saakaldte industrielle Revolution var, at Dampmaskinen blev gjort praktisk anvendelig af James Watt i Tiden omkring 1780. Et af hans vigtige Bidrag bestod i at han ved Hjælp af et Stangsystem kunde frembringe en tilnærmet retliniet Bevægelse af et Punkt. I en Dampmaskine er der et Stempel med en Stempelstang, som skal styres, saa den bevæger sig translatorisk i Dampcylinderens Retning; man kan gøre det ved at lade den passere gennem et passende anbragt Hul, men med Datidens manglende Smøringsteknik gav det et altfor stort Energitab.

Ved Bevægelse af ledforbundne Stænger er Friktionstabet forsvindende (Arbejdet = Kraften · den relativt gennemløbne Vej, og naar Ledforbindelserne er næsten punktformede er Vejen praktisk talt Nul). Watts Princip er antydet paa Fig., hvor de tre Stænger er forbundet ved Led i C og D, og hvor Punkterne A og B er fastgjorte. Naar Systemet bevæger sig i Planen vil C og D beskrive modvendte Cirkelbuer, og et passende Punkt M paa CD vil med Tilnærmelse beskrive et Liniestykke, punkteret paa Figuren, og omvendt vil M's Bevægelse paa dette faa BD til at svinge op og ned.



Naar Mekanismen har faaet Navnet "Watts Parallellogram" er det fordi den er udvidet med endnu et Punkt, som bevæger sig tilnærmet retliniet naar BD drejer sig (det kan saa være dette som er forbundet med Stemplet eller med et andet Stempel, den vigtigste tidlige Brug af Dampmaskiner var til Pumpeværker i Gruber), men det er egentlig blot en Pantograf.

Pantografen, vigtig for Korttegnere og Kunstnere, er opfundet 1629 af Scheiner. Den bruges til at gengive en Figur i et andet Maalestoksforhold. Den bestaar af fire ledforbundne Stænger, som danner et Parallellogram, og med et fastgjort Punkt B. Hvis B, M og E ligger paa Linie i én Situation, saa vil de altid gøre det, og BE/BM er konstant lig BF/BD; deraf følger, at hvis M gennemløber en Kurve, saa vil E gennemløbe en dermed ligedannet, med B som



Ligedannethedscentrum.

Denne simple Ingeniørteknik blev gjort til Genstand for matematisk Behandling af Tchebychef (1821–1894; hans Arbejder i Sandsynlighedsregning er omtalt i §1; han var ogsaa den første, som fandt ikke-trivielle Resultater om Primtallenes Fordeling).

Det turde være overflødigt at bemærke, at Stænger ikke behøver at være retliniede, de skal blot være afstandsbevarende.

Det *første*, som Tchebychef fremhæver er

Har man et plant System af ledforbundne Stænger, som tvinger et Punkt til at bevæge sig paa en Kurve, da vil denne Kurve være algebraisk, d.v.s. at dens Punkter (x, y) *tilfredsstiller en Ligning* $P(x, y) = 0$*, hvor* $P(x, y)$ *er et Polynomium.*

Som bekendt er algebraiske Kurver differentiable, idet Tangenten bestemmes ved implicit Differentiation, undtagen i de "singulære Punkter", d.v.s Punkter hvori $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

Vi skal benytte Eulers Eliminationsresultat til Beviset:

Dersom

$$\begin{aligned} A(t) &= a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m, \qquad a_m \neq 0 \\ B(t) &= b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n, \qquad b_n \neq 0 \end{aligned}$$

er Polynomier over en kommutativ Ring, saa er det nødvendigt for at de har en fælles Rod i Ringen, at deres Resultant $R(A, B)$ *er lig* 0*. Her er*

$$R(A, B) = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_m & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_n & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ \ddots \\ a \end{matrix}}\right\} n \text{ rækker} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} b \\ b \\ \ddots \\ b \end{matrix}}\right\} m \text{ rækker} \end{array}$$

(*med* 0 *i de tomme Trekanter*).

Bevis: Hvis $A(t)$ har en Rod t_0, da er $A(t)$ delelig med $t - t_0$ fordi $A(t) = A(t) - A(t_0) = a_1(t - t_0) + a_2(t^2 - t_0^2) + \cdots + a_m(t^m - t_0^m)$, hvori hvert Led er deleligt med $t - t_0$.

Dersom nu $A(t)$ og $B(t)$ har den fælles Rod t_0 kan de altsaa skrives $A(t) = (t - t_0) \cdot C(t)$ og $B(t) = (t - t_0) \cdot D(t)$, med $\deg C = m - 1$ og $\deg D = n - 1$, og vi har at $A(t) \cdot D(t) - B(t) \cdot C(t) = P(t)$ er Nulpolynomiet (NB det er ikke sikkert, at der er entydig Faktorisering af Polynomierne, men det benyttes heller ikke).

Rækkerne i Matricen (taget oppefra nedad) betegnes $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}, S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$, og man ser, at Linearkombinationen

$$d_0 R_0 + d_1 R_1 + \cdots + d_{n-1} R_{n-1} - c_0 S_0 - c_1 S_1 - \cdots - c_{m-1} s_{m-1}$$

er lig Rækken af Koefficienter til $t^0, t^1, \ldots, t^{m+n-2}, t^{m+n-1}$ i $P(t)$; denne Linearkombination af Rækkerne er altsaa en Nulrække, hvormed Sætningen er vist. $\square$

Man bemærker, at Matricen er en $(m + n)\times(m + n)$-Matrix, og at Hoveddiagonalleddet er $a_0^n b_n^m$.

Betingelsen er kun nødvendig, ikke tilstrækkelig, fx er $A(t) = B(t) = 1 + t^2 \in \mathbb{R}[t]$, men Polynomierne har ingen fælles Rod i $\mathbb{R}$, selvom

$$R(A, B) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

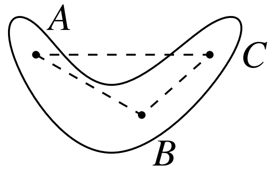
Men saafremt man betragter *Polynomier over et kommutativt Legeme* (her er entydig Faktorisering af dem), *og dette Legeme er algebraisk afsluttet*, d.v.s. at ethvert Polynomium kan skrives som Produkt af Førstegradsfaktorer (fx $\mathbb{C}$), saa *er Betingelsen aabenbart ogsaa tilstrækkelig*, idet der saa maa findes $C(t)$ og $D(t)$ med $\deg C < m$ og $\deg D < n$, saa $A(t) \cdot D(t) = B(t) \cdot C(t)$, og da der er entydig Faktorisering maa $A(t)$ og $B(t)$ have en fælles Faktor, hvilket ses ved at betragte Graderne.

Et plant System af ledforbundne Stænger giver aabenbart Ligninger af Typen

$$(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 = L_{jk}{}^2,$$

som udtrykker, at Stanglængden L_{jk} er fast.

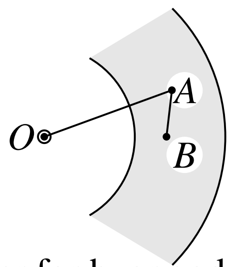
For en bevægelig stiv Figur faas Ligninger af samme Type, som blot udtrykker at AB, BC og CA har faste Længder (dette ogsaa selvom Punkterne ligger paa Linie, saa er $AB + BC = AC$).



Nogle Punkter er fastgjorte, d.v.s. visse Koordinatpar er givne, og man søger Betingelsen for et bestemt Koordinatpar (x_0, y_0). Ialt er der et endeligt Antal algebraiske Ligninger $P_m(x_1, y_1, \ldots, x_r, y_r, x_0, y_0) = 0$, hvoraf man v.Hj.a. Resultanten kan eliminere alle de første variable, en ad Gangen (Koefficientringen er hver Gang Ringen af Polynomier i de resterende variable), og tilsidst ender man med en Ligning $P(x_0, y_0) = 0$, altsaa at (x_0, y_0) ligger paa en algebraisk Kurve. $\square$

Da det hele foregaar over $\mathbb{R}$ er det kun nødvendige Betingelser, og det er maaske kun en Del af Kurven man kan faa. Det er ogsaa klart, at et Systems Bevægelse kun kan give et endeligt sammenhængende Kurvestykke.

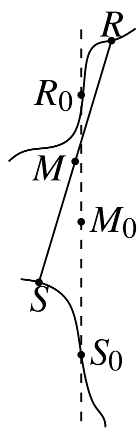
Vi skal ikke gaa nærmere ind paa de Begrænsninger, som kommer af at fx en stiv Stangtrekant ikke kan vendes; vi har ogsaa antaget at vi endte med en “Kurve”, ellers kunde man faa Omraader, fx hvis O fast og $OA > AB$, saa kan B bevæge sig i en Cirkelring om O.



Tchebychefs *anden* Iagttagelse er, at der er ingen Grænser for hvor god Linietilnærmelse man kan opnaa lokalt.

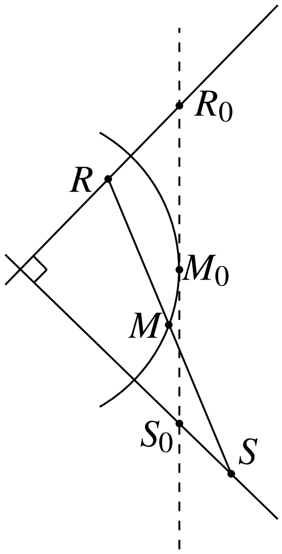
For ethvert naturligt Tal n er det muligt at konstruere et Stangsystem med et Ledpunkt som i Omegnen af et givet Punkt paa en given Linie bevæger sig paa en Banekurve, der giver, en Tilnærmelse til Linien af mindst n'te Orden.

Det kan indses ved at benytte Ideen fra Watts Mekanisme (side 21). Lad R være et Punkt som bevæger sig saaledes at det i Omegnen af R_0 har en Afstand af Størrelsesordenen a^p fra den lodrette Tangent i R_0, hvor a angiver Højdeforskellen mellem R og R_0. Nedenunder anbringes et modvendt System, hvori S bevæger sig ud fra S_0 og med den samme lodrette Tangent. Idet R og S forbindes med en Stang af Længde R_0S_0 vil Midtpunktet M af denne Stang i Omegnen af sin



Neutralstilling M_0 bevæge sig paa en Banekurve hvor Afvigelsen fra den lodrette Linie er af Størrelsesordenen a^{3p-1}. Det ses ved en lille Regning med Potensrækkeudvikling af Størrelserne. I Watts Mekanisme bevægede R og S sig paa Cirkelbuer, altsaa $p = 2$, saa M giver en 5'te Ordens Tilnærmelse til Linien. Gentages Ideen faar man en 14'de Ordens Tilnærmelse o.s.v.

Groft Eksempel: $p = 1$; naar R og S med konstant Længde af RS bevæger sig paa Linier som danner en Vinkel paa 45° med R_0S_0, saa vil Midtpunktet M løbe paa en Cirkelbue med Centrum i Skæringspunktet for Linierne for R og S og som tangerer R_0S_0 i M_0 ("Medianen i en retvinklet Trekant = $\frac{1}{2}$·Hypotenusen"); Buens Tilnærmelse til Tangenten er af Orden $3p - 1 = 2$.



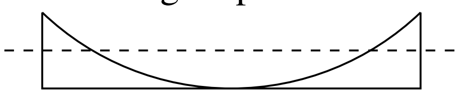
I Praksis er alt dette uanvendeligt, men Tchebychef angav simple Systemer med fx kun 4 Stænger sat sammen med bestemte Længdeforhold, og som gav Tilnærmelse af 8'de Orden.

Vigtigere, baade for de praktiske Anvendelser og for Matematikkens Udvikling er Tchebychefs *tredie* Iagttagelse:

Det er ikke afgørende at have en Tilnærmelse af høj Orden ved et Punkt, men derimod at have en uniformt god Tilnærmelse paa det Interval, som har Interesse.

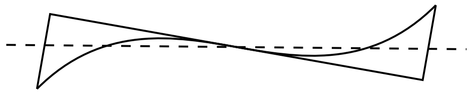
Hvis man har et System med et Punkt, som i Omegnen af P_0 bevæger sig paa en Kurve der tilnærmer en ret Linie gennem P_0 med en Afvigelse som er lille af n'te Orden, saa kan man med smaa Ændringer af Systemet væsentligt forbedre den uniforme Linietilnærmelse paa et Interval omkring P_0.

Har man fx en Cirkelbue, saa tilnærmer den sin Tangent paa et Interval omkring Røringspunktet, men hvis man forskyder Buen (eller Tangenten) kan



man opnaa at den maximale Afstand mellem dem bliver halveret. Har man

Tilnærmelse af 3'die Orden (Fig. t.h.) kan man ved at dreje Linien formindske Afstanden med en Faktor $\sim \frac{1}{4}$.



Man kan ofte opnaa en Forbedringsfaktor af Størrelsesordenen 2^{1-n}. Tchebychef beviste nemlig følgende Sætning:

Til cx^n kan man addere Led af Grad mindre end n, saaledes at der fremkommer et Polynomium $P(x) = cx^n + \cdots$, for hvilket

$$\max_{|x|\leq k} |P(x)| = 2^{1-n} \cdot |c| \cdot k^n = 2^{1-n} \cdot \max_{|x|\leq k} |cx^n|,$$

og dette Resultat er bedst muligt.

Det er klart, at vi til Beviset kan normere, saaledes at vi sætter $k = 1$ og c vælger vi til 2^{n-1}. Vi skal altsaa vise, at til $2^{n-1}x^n$ er det muligt at addere Led af lavere Grad, saaledes at der fremkommer et Polynomium $P(x)$, for hvilket

$$\max_{|x|\leq 1} |P(x)| = 1,$$

og at det ikke er muligt at opnaa noget $P(x)$ med $\max_{|x|\leq 1} |P(x)| < 1$.

Dertil skal vi bruge *Tchebychef-polynomierne*:

$$T_n(x) = \cos nv \ , \quad \text{idet } x = \cos v.$$

Vi har $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ og $T_2(x) = 2x^2 - 1$, (det sidste er en kendt Formel for $\cos 2v$). Af Formlen $\cos nv = 2\cos v \cdot \cos(n-1)v - \cos(n-2)v$ faas

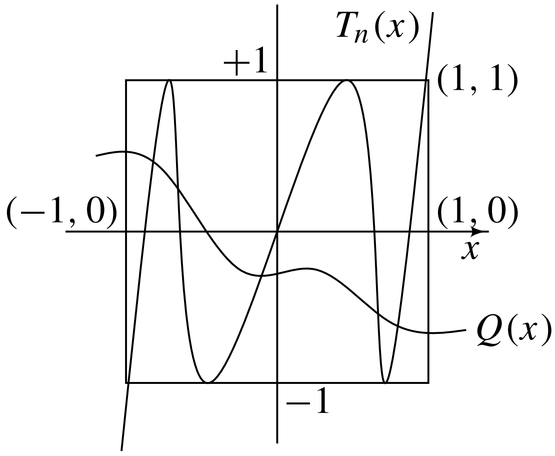
$$T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),$$

hvoraf man ved Induktion ser, at $T_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, og at *Højestegradsleddet i $T_n(x)$ er $2^{n-1}x^n$.*

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \ ; \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \ ; \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \ ;$$

man ser ogsaa, at *$T_n(x)$ har Paritet (lige/ulige) som n.*

Naar x løber fra 1 til -1 vil $v = \operatorname{Arccos} x$ løbe fra 0 til π, og nv løbe



fra 0 til $n\pi$, og derfor vil $T_n(x) = \cos nv$ ialt n Gange variere frem og tilbage mellem 1 og -1, idet $T_n(1) = 1$ og $T_n(-1) = (-1)^n$. Dermed har vi det ønskede $P(x)$.

Vi mangler at vise, at der ikke findes noget $Q(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$, for hvilket $\max_{|x|\leq 1} |Q(x)| < 1$, men det er klart, for saa var jo $Q(x) - T_n(x)$ et Polynomium af Grad mindre end n, hvilket strider mod at denne Differens har mindst n Nulpunkter (se Figuren !). $\square$

Man ser, at Sætningen kan opfattes som Løsning af en speciel Approksimationsopgave, nemlig "Til $2^{n-1}x^n$ ønskes bestemt et Polynomium af lavere Grad som giver den bedst mulige uniforme Approksimation".

Tchebychef viste generelt, at til en vilkaarlig kontinuert Funktion paa et lukket Interval findes for et givet m netop ét Polynomium af grad højst m, som giver den bedst mulige uniforme Approksimation til Funktionen; dette er karakteriseret ved at Afvigelsen mindst $m + 2$ Gange med alternerende Fortegn antager sin numerisk største Værdi, naar x voksende gennemløber Intervallet.

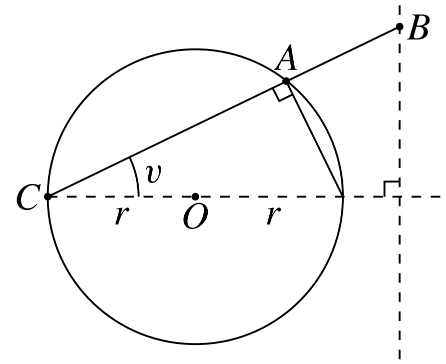
Dette var den – meget konkrete – Indledning til Studiet af uniform Approksimation. Da Afvigelsen, som er kontinuert, højst endelig mange Gange med skiftende Fortegn kan antage sin Ekstremalværdi, følger, at Approksimationen maa blive bedre og bedre naar m vokser; at den kan blive vilkaarlig god viste Weierstrass (§1) i 1885.

§ 7: Kempes Sætning.

Med Tchebychefs Resultater havde man opnaaet Mekanismer, som i Praksis gav fuldt tilstrækkelige Tilnærmelser til rette Liniestykker.

Saa kom Sensationen: *Det er muligt at angive et Stangsystem, som frembringer et matematisk eksakt Liniestykke.*

Det blev fundet af Russeren Lipkin i 1871, og den russiske Regering belønnede ham med en Pengepræmie. Derefter opdagede Franskmændene, at Peaucellier havde beskrevet det samme Stangsystem i 1864, og Frankrig gav *ham en Præmie.* Senere har man i England fundet, at Englænderen de Morgan endnu tidligere havde gjort samme Opfindelse.

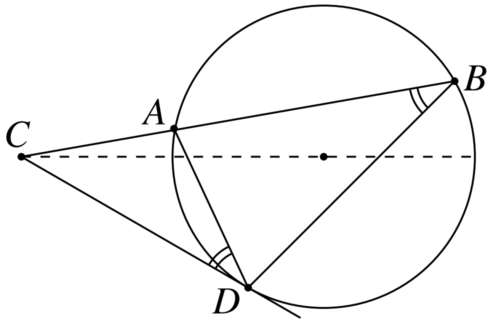


Ideen er, at man ved Inversion af en Cirkel udfra et Punkt paa Periferien opnaar en ret Linie.

Paa Figuren er $CA = 2r \cdot \cos v$, og hvis man derfor indretter det saadan at $CA \cdot CB$ er konstant, bliver $CB \cdot \cos v$ = konstant, og for alle Værdier af v bliver B projiceret i det samme Punkt paa CO; B bevæger sig altsaa paa en ret Linie.

Det er let nok at faa A til at bevæge sig paa en Cirkel, nemlig ved en Stang fastgjort i O.

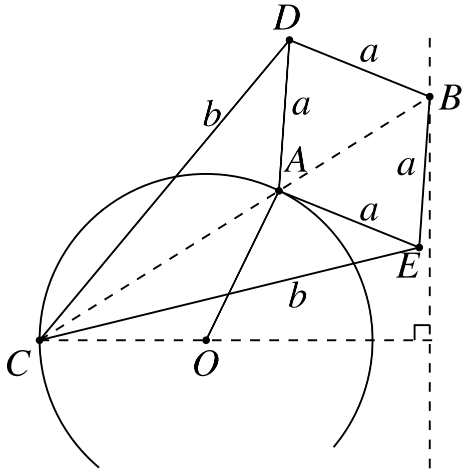
For at opnaa, at $CA \cdot CB$ er konstant benyttes Sætningen om "et Punkts Potens med Hensyn til en Cirkel", som siger, at hvis man har en Cirkel med Radius a og et Punkt C udenfor Cirklen med Afstanden b til Centrum, saa vil en Sekant gennem C skære Cirklen i to Punkter A og B, hvor $CA \cdot CB = b^2 - a^2$.



Det ses let, hvis man fra C tegner en Tangent til Cirklen, Røringspunkt D; saa er Vinklerne CDA og CBD (markeret paa Fig.) lige store, da de er Periferivinkler som spænder over den samme Bue, og heraf følger, at Trekanterne CDA og CBD er ensvinklede da $\angle C$ er fælles, og vi har derfor

$CA \cdot CB = CD^2$; lægges specielt en Linie gennem C og Centrum ses at dette Produkt er lig $(b-a)(b+a) = b^2 - a^2$.

Det ønskede Stangsystems Realisation er vist paa Figuren. Her er C og O fastgjorte Punkter, og A er forbundet med O ved en Stang af samme Længde som OC, saa A bevæger sig paa en Cirkel gennem C. I C er fastgjort to Stænger af Længde b og deres Endepunkter. D og E er forbundet ved to Par Stænger af Længde a; af Symmetrigrunde maa C, A og B ligge paa en ret Linie, og vi har at $CA \cdot CB = b^2 - a^2$. Følgelig vil B bevæge sig paa en Normal til CO.



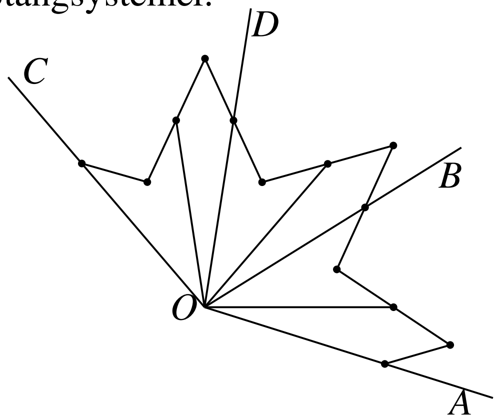
Da Systemet – som nu normalt gaar under Navnet *Peaucelliermekanisme* – blev bekendt, blev det benyttet adskillige Steder, fx ved Ventilationsanlægget i Parlamentsbygningen i London, hvor Mekanismen fik det populære Navn Octopus (Blæksprutten).

Efter at man havde set, at Stangsystemer kunde frembringe Liniestykker, var det nærliggende spørge om hvad der overhove- det kan frembringes, og Svaret blev givet af Englænderen Kempe i 1876 i en lille Bog med den charmerende Titel "How to draw a straight line".

(Kempe er ogsaa bekendt for sin Behandling af "Firfarveproblemet", den gammelkendte Observation, at fire Farver er tilstrækkeligt til at farvelægge Landene paa et Landkort, hvis man ønsker at Lande med en fælles Grænse skal have forskellig Farve (– der er ganske vist nogen som paastaar at Tanken aldrig er tænkt før 1851). Denne Kuriositet beviste Kempe i 1879, omend med nogle Smaaunøjagtigheder, hvorefter ingen tænkte nærmere over det, førend man (Heawood) i 1890 viste at lidt af Unøjagtighederne var irreparable, men at der var en rigtig Eftervisning af at fem Farver var tilstrækkeligt. Derefter har det staaet som et berømt uløst Problem, indtil Firfarvehypotesen blev bevist 1976 af Appel & Haken (amrk.), men paa en matematisk lidet tilfredsstillende Maade).

Der gælder: *Givet et Polynomium som fremstiller en algebraisk Kurve* $P(x, y) = 0$. *Det er muligt at konstruere et Stangsystem, saaledes at et Ledpunkt i dette kan gennemløbe en vilkaarlig endelig, sammenhængende* *og afsluttet Del af denne Kurve og intet mere.*

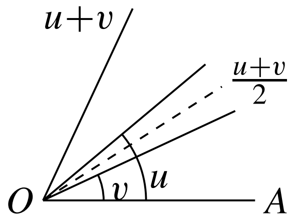
Bevis: Vi betragter først nogle specielle Stangsystemer.



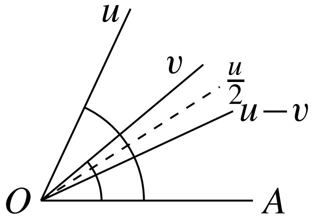
Givet to Stænger OA og OB forbundet med et Led i O. Det er muligt at opbygge et System med en Stang OC, saaledes at Vinklen fra OA til OC er $n \cdot$ Vinklen fra OA til OB (n vilkaarlig $\in \mathbb{Z}$).

Figuren viser et saadant System svarende til $n = 3$. Alle de smaa Stykker er lige lange, og ogsaa alle de store Stykker. Derved fremkommer kongruente Figurer i Vinkelrummene AOB, BOD og DOC (men OH er ikke Halveringslinie for Vinkel AOB).

Man ser, at Systemet ogsaa kan bruges til at dele en Vinkel i n lige store Dele, altsaa fx tredele en Vinkel. Men da det er lovet, at enhver algebraisk Kurve kan frembringes, og altsaa enhver algebraisk Ligning kan løses, er der ikke noget mærkeligt ved det.

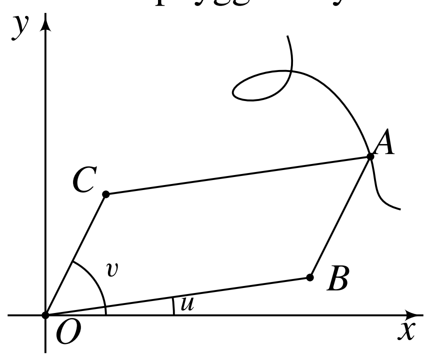


Givet en Stang OA og Stænger udfra O som med den danner Vinkler paa u og v. Det er muligt at opbygge Systemer med Stænger gennem O, som danner Vinkler paa $u + v$ og $u - v$ med CA.



For hvis man halverer Vinklen mellem u og v faas $\frac{u+v}{2}$, som ved Fordobling ud fra OA giver $u + v$. Og hvis man spejler Linien v i Linien $\frac{u}{2}$ faar man $u - v$.

Lad der nu i et Koordinatsystem med Begyndelsespunkt O være givet en endelig sammenhængende Del af en algebraisk Kurve $P(x, y) = 0$, og vi ønsker at opbygge et System med et Punkt A som bevæger sig paa denne Kurvedel. Vi forbinder O med A med 4 Stænger som danner et Parallellogram med A modsat O. Stængernes Længder p og q skal være tilstrækkelig store til at A kan gennemløbe hele Kurvestykket. Vinklerne fra X-Aksen til p og q kaldes hhv. u og v. Opgaven er nu at lave et System som giver



netop den Forbindelse mellem u og v, som sikrer at A bevæger sig paa Kurven $P(x, y) = 0$.

For A har vi Koordinaterne

$$x = p\cos u + q\cos v$$
$$y = p\sin u + q\sin v$$

og indsætter vi i $P(x, y)$ faar vi et Polynomium i $\cos v$, $\sin u$, $\sin v$ (idet p og q er faste).

Af de “anti-logaritmiske Formler”

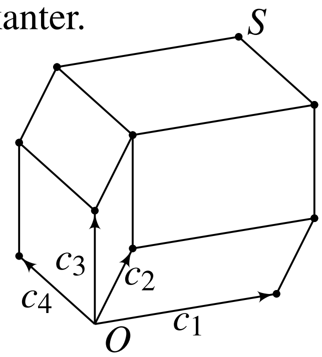
$$2\cdot\cos w\cdot\cos z = \cos(w+z) + \cos(w-z)$$
$$2\cdot\sin w\cdot\sin z = \cos(w-z) - \cos(w+z)$$
$$2\cdot\cos w\cdot\sin z = \sin(w+z) - \sin(w-z)$$

ser vi nu, at $P(x, y)$ kan skrives paa Formen

$$\sum_j c_j\cdot\cos(m_j u + n_j v + r_j), \quad \text{alle } c_j > 0.$$

her er $r_j \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$; i første Omgang faar man Led med baade sin og cos og baade positive og negative Koefficienter, men ved at indføre Vinklerne r_j kan vi opnaa kun at have cos-Led, og at alle Koefficienterne c_j bliver positive.

Svarende til det almindelige Led i Formlen indfører vi nu en Stang af Længde c_j udgaaende fra O, og forbundet med OB og OC paa en saadan Maade at den danner Vinklen $(m_j u + n_j v + r_j)$ med X-Aksen. Det er muligt ifølge det tidligere, da jo $m_j, n_j \in \mathbb{Z}$, og en eller flere Drejninger paa $\frac{\pi}{2}$ opnaas ved blot at tilføje stive retvinklede Trekanter.



Til Stængerne c_j som udgaar fra O føjer vi nu et Stangsystem som giver deres Vektorsum. Det sker ved Hjælp af Parallellogrammer, hvori alle Stanglængder er $c_1, c_2, \ldots$ saaledes som det er vist paa Figuren.

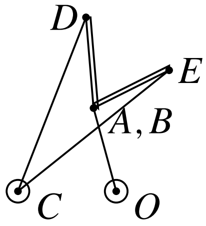
Ligningen $P(x, y) = 0$ siger nu at Vektorsummen ligger paa Y-Aksen.

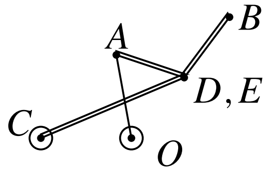
Det opnaas simpelthen ved at styre Vektorsumspunktet med en Peaucelliermekanisme.

Dermed har vi opnaaet baade at Koordinaterne for A opfylder Ligningen $P(x, y) = 0$ og at naar A kontinuert bevæger sig paa den algebraiske Kurvedel saa vil Sumpunktet bevæge sig paa Y-Aksen.

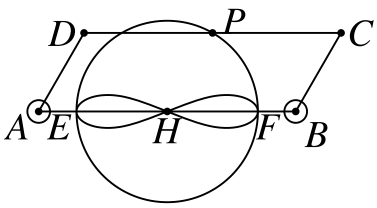
At Kurvestykket kan afgrænses til et vilkaarligt endeligt sammenhængende Stykke skal vi ikke bevise detailleret, men blot sandsynliggøre (det interesserede Kempe sig heller ikke for). Det vilde ogsaa kræve lidt Viden om algebraiske Kurver, bl.a. at de singulære Punkter ligger diskret. Men vi kan bemærke, at vi kan altid indskrænke et Punkts frie Bevægelse til en vilkaarlig Cirkelring eller Cirkelskive, saaledes som det er illustreret paa Figuren Side 36.

Man kan ogsaa sikre sig mod at Figurerne ved singulære Konfigurationer løber videre paa uønsket Maade. Fx kan man ved Peaucelliermekanismen (Fig. Side 41) sørge for Linien for B ikke skærer hinanden, for ellers kunde B fortsætte med at falde sammen med A og at Cirklen og altsaa beskrive en Cirkelbue. Og hvis Mekanismen kunde blive helt strakt saa D og E faldt sammen kunde de fortsætte med at falde sammen og B kunde bevæge sig i et plant Omraade.



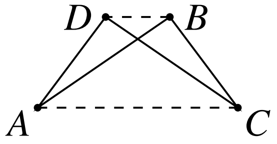


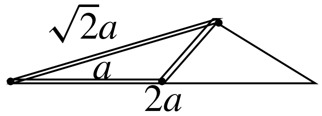
Ligeledes kan et Parallellogram (A og B faste) “slaa over” og blive til et “Kontraparallellogram” (Opg. 22), Figuren viser *hele* den Kurve som Midtpunktet P af CD kan gennemløbe; Parallellogramformen kan opretholdes ved en ekstra Stang parallel med de korte Sider; hvis man derimod netop ønskede Kontraparallellogrammet, altsaa at de lange Sider stedse skar hinanden, kunde det opnaas ved at forsyne hver af dem med en Peaucelliermekanisme, og saa forbinde de to Mekanismer. Nok om Sætningen. □



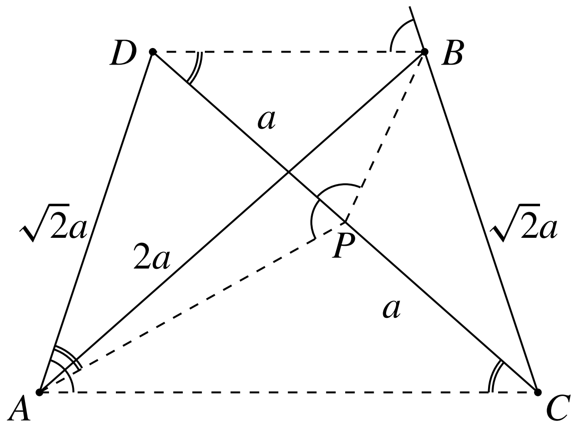
Saaledes som Stangsystemet foran i Beviset var konstrueret vilde det ændre sig kontinuert naar A gennemløb Kurven, og et Dobbeltpunkt paa denne betyder at Systemet kan fortsætte Bevægelsen paa flere Maader, det sker fx ved E og F paa forrige Figur. Men det kan ogsaa ske, at et Dobbeltpunkt kan opnaas for to helt forskellige Stillinger af Systemet, det indtræffer ved H paa forrige Figur, og vi skal uddybe Eksemplet lidt nærmere, fordi det giver Anledning til at omtale den vigtige Kurve *Lemniskaten*.

Vi vil betragte et Kontraparallellogram $ABCD$, hvori A og B er fastholdte, og Sidelængderne skal være $AB = CD = 2a$ og $BC = AD = \sqrt{2}a$; vi skal undersøge Banekurven for Midtpunktet P af CD.

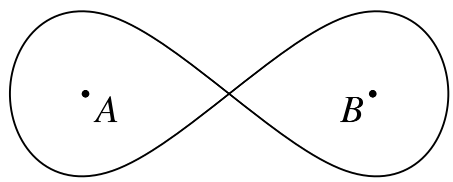




Det er klart, at et Kontraparallellogram er symmetrisk, og at AC er parallel med BD (da $\triangle ABC$ og $\triangle CDA$ er kongruente). Figuren indeholder to Par ensvinklede Trekanter, nemlig $\triangle DPA \sim \triangle DAC$ og $\triangle CPB \sim \triangle CBD$, fordi hvert af Parrene er af den Type der er angivet paa Fig. for oven til højre; deraf følger at $\angle DAP = \angle DCA = \angle CDB$, markeret $\measuredangle$ paa Fig., og at $\angle DPA = \angle DAC = \angle DBF = \angle BPD$, markeret $\measuredangle$ paa Fig.; altsaa er Trekanterne $\triangle APD$ og $\triangle DPB$ ensvinklede og derfor $AP/DP = DP/BP$ eller $AP \cdot BP = DP^2 = a^2$.



Naar AB holdes fast, og man lader Kontraparallellogrammet bevæge sig, vil P gennemløbe en *Lemniskat*, d.e. *det geometriske Sted for de Punkter P, for hvilke Produktet $PA \cdot PB$ er konstant lig a^2, idet $AB = 2a$.*



Man ser, at Kempes Sætning udsiger noget i Retning af at Ligninger af Typen $(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 = L_{jk}{}^2$ udgør et algebraisk "Universalsystem", idet enhver algebraisk Ligning $P(x, y) = 0$ kan opnaas ud fra Ligninger i Systemet ved at visse Variabelpar fixeres, $(x_j, y_j) = (a_j, b_j)$, og de øvrige variable elimineres paanær et enkelt Par.

Det er klart, at har man et System som frembringer $P(x, y) = 0$ og et andet System som frembringer $Q(x, y) = 0$, saa kan man ved at overlejre de to Systemer faa noget som frembringer Fællesmængden (denne forudsat tilpas regulær), og dette stemmer meget godt med at Fællesmængden fremstilles ved den algebraiske Ligning $P(x, y)^2 + Q(x, y)^2 = 0$. Derimod kan det virke mere overraskende, at der findes et System som frembringer Foreningsmængden, men det er Tilfældet, fordi denne ogsaa fremstilles ved en algebraisk Ligning, nemlig ved $P(x, y) \cdot Q(x, y) = 0$.

§ 8: Rationale Tal.

Ethvert rationalt Tal kan skrives som en uforkortelig Brøk $\frac{a}{b}$, hvor $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ og $(a, b) = 1$, og denne Fremstilling er entydig.

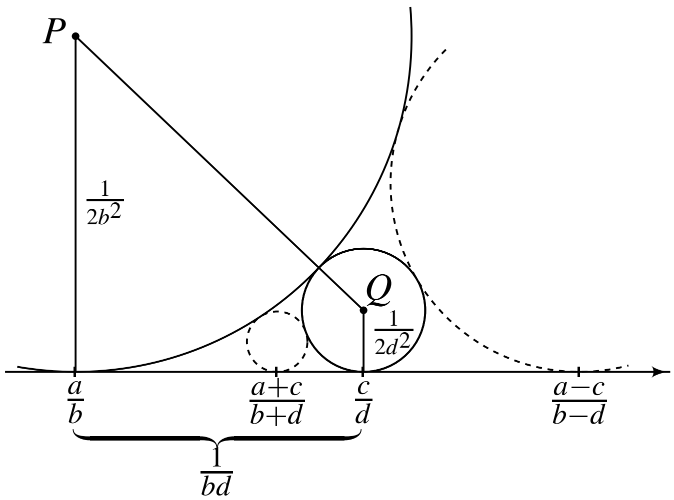
Vi definerer nu en Relation mellem rationale Tal, idet vi vil sige at $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ relaterer saafremt deres Forskel $|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}| = \frac{1}{bd}$, ækvivalent med $|ad - bc| = 1$.

Det er altid muligt at finde et $\frac{c}{d}$ som relaterer med $\frac{a}{b}$, thi da a og b er primiske, er Idealet $(a, b) = \{ax + by\} = (1) \ni 1$, altsaa $d = x_0$ og $c = -y_0$ (hvis saa $d < 0$ skiftes Fortegn for c og d).

Vi bemærker, at hvis vi for to Brøker $\frac{p}{q}$ og $\frac{r}{s}$ har $ps - qr = 1$ saa maa Brøkerne være uforkortelige da fx p og q ikke kan have nogen fælles Faktor, og de er altsaa relaterende.

Hvis $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ relaterer, saa vil $\frac{a+c}{b+d}$ relatere med dem begge fordi $a(b+d) - b(a+c) = ad - bc = \pm 1$ og analogt med $\frac{c}{d}$ (der er Symmetri mellem (a, b) og (c, d)). Og for $b \neq d$ vil de ogsaa begge relatere med $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c-a}{d-b}$ (hvor vi skal vælge den med positiv Nævner), fordi $a(b-d) - b(a-c) = -ad + bc = \mp 1$.

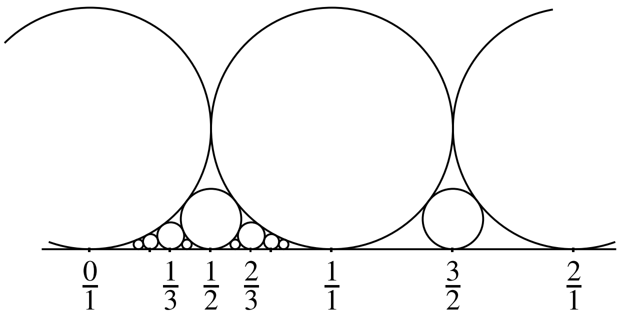
Relationen har et simpelt geometrisk Billede. Paa en Abscisseakse afbildes Punkterne $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ og man tegner Cirkler med Radier hhv. $\frac{1}{2b^2}$ og $\frac{1}{2d^2}$ som rører Linien i disse to Punkter; Centrer P og Q. Centerliniens Længde udregnes: $PQ^2 = (\frac{1}{bd})^2 + (\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2})^2 = (\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2})^2$, som viser, at de to Cirkler netop rører hinanden.



I Omraadet mellem de to Cirkler og Abscisseaksen er det muligt at placere netop én Cirkel som rører Omraadets tre Begrænsninger, og saafremt de to første Cirkler er af forskellig Størrelse, altsaa $b \neq d$, findes der ogsaa i Omraadet over dem netop én Cirkel som tangerer dem begge og Abscisseaksen; det indses hvis man betragter en Cirkel som tangerer de to oprindelige, og saa lader den variere kontinuert indtil den rører Abscisseaksen. Da vi ved, at $\frac{a+c}{b+d}$ og $\frac{a-c}{b-d}$ relaterer med baade $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ maa de nye Cirkler svare til netop disse to Brøker, som derfor angiver Abscisserne for Røringspunkterne paa Aksen, og Cirklernes Radier er hhv. $1/2(b+d)^2$ og $1/2(b-d)^2$. Vi noterer, at den første Cirkel er mindre end de to oprindelige, og at den sidste Cirkel i hvert Fald er større end den mindste af de to oprindelige (da $|b-d| < \max\{b, d\}$).

Undtagelsestilfældet med $b = d$ indtræffer kun naar de begge er 1, idet jo $ad - bc$ saa er delelig med b og derfor b skal gaa op i 1. Da $b = 1$ er den mindst mulige Nævner svarer det til en størst mulig Cirkel, Radius = $\frac{1}{2}$, og Abscissen for dens Røringspunkt er heltallig.

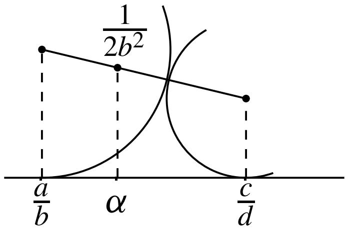
Paa Figuren er vist Cirklerne som rører Aksen i de heltallige Punkter. Naar man mellem dem og Aksen indskyder mindre Cirkler faar Røringspunkterne Abscisser $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ og naar man bliver ved at indskyde mindre Cirkler mellem to forhaanden værende og Aksen faar alle Røringspunkterne rationale Abscisser $\frac{a}{b}$ og de tilsvarende Cirkler har Radius $1/2b^2$. Omvendt kan man begynde med et vilkaarligt



rationalt Tal $\frac{a}{b}$ med tilhørende Cirkel, dertil bestemme et relateret Tal $\frac{c}{d}$ med dets Cirkel, til de to bestemme en Cirkel som rører dem og Aksen udenfor paa en af Siderne, den vil være større end den mindste af de to første Cirkler, saa til den største af dem og den nye Cirkel bestemme en ny Cirkel o.s.v.; man faar aftagende Nævnere i de Brøker som Røringen med Abscisseaksen bestemmer, saa det kan ikke blive ved uendeligt, og det stopper naar man naar to lige store Cirkler med Radius $\frac{1}{2}$, som rører i Heltalspunkter.

Ialt: *Hvis man tegner en Linie og en Række Cirkler med Radius* $\frac{1}{2}$ *som rører den i alle heltallige Punkter (og rører hinanden), og man saa indskyder mindre Cirkler som rører de allerede forhaanden værende og Linien, og bliver ved med det, saa vil Røringspunkterne paa Linien netop give alle rationale Tal* $\frac{a}{b}$, *og den tilsvarende Cirkelradius bliver* $1/2b^2$.

Denne smukke Konfiguration er angivet af Speiser (schweiz.) 1923, hyppigt gaar den dog ogsaa under Betegnelsen “Fords Cirkler” (L.R.Ford, amrk., 1937).



En interessant Iagttagelse er: *Til ethvert irrationalt α findes uendelig mange Tilnærmelsesbrøker $\frac{a}{b}$ for hvilke $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{2b^2}$.*

Det følger umiddelbart af at α uendelig mange Gange maa komme til at ligge under en Cirkleradius af Længde $1/2b^2$. (Sætningen er ikke bedst mulig, man kan vise, at Faktoren 2 kan erstattes med $1/\sqrt{5}$, som er bedst mulig).

Lad os betragte *uforkortelige Brøker med Nævnere mindre end eller lig n* (det betyder altsaa at vi kun betragter Cirkler ned til en vis Størrelse), og *ordne dem efter Størrelse*, saa

1) *For to Nabobrøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er $b + d > n$.*
2) *Yderligere gælder $bc - ad = 1$ og $(b, d) = 1$.*
3) *For tre Nabobrøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ og $\frac{e}{f}$ gælder $\frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f}$.*

Rigtigheden følger let af det tidligere. Naar $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er Nabobrøker kan $\frac{a+c}{b+d}$ som ligger imellem dem (se Fig.) ikke være med, saa $b + d > n$, hvormed 1) er vist. Nabobrøker relaterer, hvilket umiddelbart viser 2). Deraf haves til 3) at $bc - ad = 1$ og $de - cf = 1$, som ved Subtraktion giver $c(b + f) = d(a + e)$, hvoraf det ønskede. Med Hensyn til 3) kan bemærkes, at hvis $\frac{a}{b}$ og $\frac{e}{f}$ relaterer (de tilsvarende Cirkler tangerer hinanden), saa var det den tidligere betragtede Situation, men hvis dette ikke er tilfældet gælder 3) altsaa alligevel, men det er muligt, at Højresiden i 3) kan forkortes.
Eksempel: $n = 7$; de uforkortelige Brøker ordnet efter Størrelse er

$$\ldots \quad \frac{-1}{7} \ \frac{0}{1} \ \frac{1}{7} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{5} \ \frac{1}{4} \ \frac{2}{7} \ \frac{1}{3} \ \frac{2}{5} \ \frac{3}{7} \ \frac{1}{2} \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{5} \ \frac{2}{3} \ \frac{5}{7} \ \frac{3}{4} \ \frac{4}{5} \ \frac{5}{6} \ \frac{6}{7} \ \frac{1}{1} \quad \ldots$$

hvor man kan efterprøve, at 1), 2) og 3) gælder.

Disse Sætninger er Iagttagelser som blev gjort af Haros i 1802, da han i Anledning af den franske Revolutions Indførelse af Decimalsystemet paa mange nye Felter udarbejdede Omsætningstabeller fra sædvanlige Brøker til Decimalbrøker; en Englænder, Farey, omtalte det i en Notits i 1816, hvorfor Brøker opfattet paa denne Maade ofte kaldes Fareybrøker; Sætningerne blev umiddelbart efter bevist af Cauchy.

§ 9: Algebraiske Tal.

Lad K være et uendeligt *Integritetsomraade*, fx $K = \mathbb{Z}$.

Med $K[x]$ betegnes mængden af Polynomier over K, d.v.s. af alle endelige Summer

$$A(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad \text{alle } a_j \in K.$$

Hvis alle a_j er 0, har vi Nulpolynomiet. Ellers defineres Graden = deg A som det største Index j for hvilket $a_j \neq 0$.

Vi har $\deg(A+B) \leq \max\{\deg A, \deg B\}$, hvilket er klart. For Produktet har vi $\deg(A \cdot B) = \deg A + \deg B$, hvilket let bevises: vi tager Højestegradsleddet fra hvert af Polynomierne og multiplicerer sammen, det faar en Koefficient $\neq 0$, da Koefficientomraadet var et Integritetsomraade, og dets Grad er $\deg A + \deg B$; alle de øvrige Led fra A og B giver ved Multiplikationen Led af lavere Grad, hvoraf Paastanden ses at gælde. Vi har altsaa, at *Mængden af Polynomier over et Integritetsomraade er igen et Integritetsomraade.* Dersom man ønsker Gradreglerne opfyldt ogsaa for Nulpolynomiet, kan man tilskrive dette Graden $-\infty$, og saa paa en selvfølgelig Maade regne med dette "Tal".

Indsætter man for x et $k \in K$, faar man en homomorf Afbildning af $(K[x], +, \cdot)$ ind paa $(K, +, \cdot)$. Hvis et k faar Billedet 0 siger vi, at k er Rod i Polynomiet. *Antallet af Rødder i et Polynomium er højst lig Graden.* Det ses let ved Induktion, for hvis k er Rod i $A(x)$, saa kan $A(x)$ skrives som $(x - k) \cdot B(x)$ (omtalt Side 35), og enhver fra k forskellig Rod maa være Rod i $B(x)$, og $\deg B = \deg A - 1$.

Lad os her minde om at hvis man betragter Polynomier over en Ring, hvori Nulreglen ikke gælder, saa svigter denne Sætning, hvis man fx betragter Restklasser modulo 8, altsaa Ringen $\mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}/(8)$, saa har Polynomiet $x^2 - ①$ de fire Rødder ①, ③, ⑤, ⑦.

Specielt ses, at *hvis man indenfor et Integritetsomraade har to Polynomier A og B, for hvilke $A(k) = B(k)$ for et Antal k som er større end* $\deg(A - B)$, *saa maa Polynomierne være identiske.*

Man kan ogsaa have Polynomier af flere variable. Med $K[x_1, \ldots, x_n]$ betegnes Mængden af Polynomier i de n variable $x_1, \ldots, x_n$ over K, d.v.s.

af alle endelige Summer

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_i \in \mathbb{N}_0} a_{j_1,\dots,j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}, \quad \text{alle } a_{\dots} \in K.$$

Her kan A opfattes som et Polynomium i en af de variable med Koefficienter A_r fra Ringen $K[x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n]$ og det har en Grad i x_j betegnet $\deg_{x_j} A$,

$$A = A_0 + A_1 x_j + \cdots + A_m x_j^m, \quad \deg_{x_j} A = m;$$

at $K[x_1, \dots, x_n]$ er et Integritetsomraade ses umiddelbart ved Induktion efter Antallet n af variable, for naar Koefficienterne $A_0, \dots, A_r, \dots$ i det opskrevne Udtryk tilhører et Integritetsomraade, saa vil Polynomierne A i den ene variable x_j ogsaa udgøre et Integritetsomraade.

For et Polynomium $A(x_1, \dots, x_n)$ kan man ogsaa tale om en (uspecificeret) Grad, og dermed menes den maximale Værdi af $j_1 + j_2 + \cdots + j_n$ for Led med $a_{j_1,\dots,j_n} \neq 0$. Som før gælder at $\deg(A + B) \leq \max\{\deg A, \deg B\}$, hvilket er klart, og for Produktet gælder ogsaa, at $\deg(A \cdot B) = \deg A + \deg B$, hvilket ses ligesom før: vi tager Højestegradsleddene fra hvert af Polynomierne og multiplicerer sammen, det bliver ikke 0, da vi er i et Integritetsomraade, og Graden er aabenbart $\deg A + \deg B$; alle de øvrige Led fra A og B giver ved Multiplikationen Led af lavere Grad, hvoraf Paastanden ses at gælde.

I $K[x_1, \dots, x_n]$ spiller de *symmetriske Polynomier* en særlig Rolle. Dermed menes Polynomier som er invariante ved Permutationer af $x_1, \dots, x_n$. For Eksempel

$$3x_1^2 x_2 + 3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_1 + 3x_2^2 x_3 + 3x_3^2 x_1 + 3x_3^2 x_2 - x_1 - x_2 - x_3$$

er symmetrisk i x_1, x_2, x_3.

Da Addition og Multiplikation af symmetriske Polynomier igen fører til symmetriske Polynomier, ses at Mængden af symmetriske Polynomier i $K[x_1, \dots, x_n]$ udgør en Delring af $K[x_1, \dots, x_n]$.

Vigtige er de *elementarsymmetriske Polynomier*

$$
\begin{array}{ll}
s_0 = 1 & \binom{n}{0} \text{ Addender} \\
s_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n & \binom{n}{1} \text{ Addender} \\
s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n & \binom{n}{2} \text{ Addender} \\
\quad \ldots & \quad \ldots \\
s_n = x_1x_2\cdots x_n & \binom{n}{n} \text{ Addender,}
\end{array}
$$

altsaa s_r er Summen af alle Produkter af r forskellige Faktorer udtaget blandt $x_1, \ldots, x_n$. Man ser, at $\deg s_r = r$.

Udregnes $(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$ faar man

$$x_n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n s_n,$$

saa at $(-1)^r s_r$ er Koefficienten til x^{n-r} i det moniske n'te Grads Polynomium som har Rødder $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Heraf, eller ogsaa direkte af de opskrevne Udtryk, ser man, at $s_r = s'_r + x_n \cdot s'_{r-1}$, idet s'_j betegner det j'te elementarsymmetriske Polynomium af de variable $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Har man et Polynomium $T(s_1, \ldots, s_n) \in K[s_1, \ldots, s_n]$ og man indsætter for $s_1, \ldots, s_n$ faar man aabenbart et symmetrisk Polynomium $S(x_1, \ldots, x_n)$ i Ringen $K[x_1, \ldots, x_n]$, men der gælder ogsaa den omvendte Sætning:

Ethvert symmetrisk Polynomium $S(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ kan skrives som et Polynomium $T(s_1, \ldots, s_n)$ med Koefficienter $\in K$, og $\deg T \leq \deg S$.

Beviset gaar let ved Induktion efter n. For $n = 1$ er $x_1 = s_1$, og Paastanden er triviel. Vi antager den nu gyldig for $n - 1$. Vi opfatter $S(x_1, \ldots, x_n)$ som et Polynomium i x_n, dets Koefficienter er symmetriske i $x_1, \ldots, x_{n-1}$ og kan derfor udtrykkes ved $s'_1, \ldots, s'_{n-1}$, hvormed vi har et

Polynomium $P(s'_1, \dots, s'_{n-1}, x_n)$. Idet

$$\begin{aligned} s'_{n-1} &= s_{n-1} - x_n \cdot s'_{n-2} \\ s'_{n-2} &= s_{n-2} - x_n \cdot s'_{n-3} \\ &\dots \\ s'_1 &= s_1 - x_n \end{aligned}$$

kan vi sukcessivt indsætte disse udtryk, og opnaar et Polynomium $Q(s_1, \dots, s_{n-1}, x_n)$. Da $x_n^n - s_1 x_n^{n-1} + s_2 x_n^{n-2} - \dots + (-1)^n s_n = 0$ kan vi i Q bortskaffe alle Potenser af x_n med Eksponent større end $n - 1$, men til Gengæld kommer s_n ind, saaledes at $S(x_1, \dots, x_n) = R(s_1, \dots, s_n, x_n)$, hvor R er et Polynomium med $\deg_{x_n} R < n$; Koefficienten til x_n^j kan vi kalde $R_j(s_1, \dots, s_n)$. Idet S er symmetrisk kan vi erstatte x_n med et vilkaarligt x_r, hvoraf ses, at følgende to *Polynomier i* x med *Koefficienter fra Integritetsomraadet* $K[x_1, \dots, x_n]$

$$\sum_{j=0}^{n-1} R_j(s_1, \dots, s_n) \cdot x^j \quad \text{og} \quad S(x_1, \dots, x_n) \qquad (\text{med } \deg_x S = 0)$$

er ens for de n forskellige Elementer $x_1, \dots, x_n$ i Integritetsomraadet, og derfor er identiske, saa $S = R_0(s_1, \dots, s_n)$ (og alle øvrige $R_j = 0$), hvormed $T(s_1, \dots, s_n)$ er fundet.

Betragter vi Graderne m.H.t. de variable $x_1, \dots, x_n$ har vi $\deg s_r = \deg s'_r = r$ og

$$\deg_{x_1,\dots,x_n} T(s_1, \dots, s_n) = \deg_{x_1,\dots,x_n} S(x_1, \dots, x_n)$$

hvis Rigtighed igen følger ved Induktion efter n, og naar man betænker at i de anvendte Substitutioner er der overalt erstattet med Led af samme Grad i $x_1, \dots, x_n$; man kunde frygte, at nogle Højestegradsled havde ophævet hinanden, saa at Venstresiden i Ligningen ovenfor var mindre end Højresiden, men da man ved at indsætte for $s_1, \dots, s_n$ kan komme tilbage til $S(x_1, \dots, x_n)$ kan et saadant Tab ikke være sket. Da $\deg s_r = r$ er det klart, at $\deg_{s_1,\dots,s_n} T \leq \deg_{x_1,\dots,x_n} S$. ∎

(Vi skal ikke benytte, at $T(s_1, \dots, s_n)$ er entydigt bestemt, men det er temmelig klart, i hvert Fald for Polynomier over $\mathbb{Q}$, for ellers maatte der gælde en Polynomiumsidentitet mellem $s_1, \dots, s_n$, i Strid med at Koefficienterne i en Ligning kan vælges vilkaarligt, og Ligningen vil altid have Rødder $\in \mathbb{C}$).

Ved den praktiske Bestemmelse af T udfra S kan man med Fordel sætte $x_n = 0$, udtrykke det fremkomne som $T'(s'_1, \dots, s'_{n-1})$, saa vil $T'(s_1, \dots, s_{n-1})$ være lig $T(s_1, \dots, s_n)$ paanær de Led som indeholder s_n som Faktor. Eksempel: $S = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$; $x_2 = 0$ giver 0, altsaa $S = s_2 \cdot (x_1^2 + x_2^2)$; i Parentesen sættes $x_2 = 0$, $x_1^2 = {s'_1}^2$, saa $x_1^2 + x_2^2 = s_1^2$ + Led med $s_2 = s_1^2 - 2s_2$; og $S = s_2 \cdot (s_1^2 - 2s_2)$.

Det ses umiddelbart, at har man et Udtryk i brudne rationale Funktioner, som er symmetrisk i $x_1, \dots, x_n$ kan det omskrives til et Udtryk i $s_1, \dots, s_n$. For Eksempel; $x_1/x_2 + x_1/x_3 + x_2/x_1 + x_2/x_3 + x_3/x_1 + x_3/x_2$ har Fællesnævneren $x_1 x_2 x_3 = s_3$, og den tilsvarende Tæller $x_1^2 x_2 + \cdots$ (6 Led) ses at være $s_1 s_2$ + Led med s_3, og ialt faas Udtrykket $(s_1 s_2 - 3s_3)/s_3$.

Vi skal nu betragte *Mængden* $\mathbb{A}$ *af algebraiske Tal*, d.v.s. Tal α som er Rødder i Polynomier tilhørende $\mathbb{Q}[x]$. Vi bemærker, at vi kan nøjes med at se paa Polynomier tilhørende $\mathbb{Z}[x]$, idet vi altid kan gange med Koefficienternes Fællesnævner. Hvis et Tal τ ikke er algebraisk kaldes det *transcendent*.

Eksempler:

En rational Brøk $\frac{a}{b}$ er algebraisk, da den er Rod i Polynomiet $bx - a$.

$\sqrt[3]{2}$ er algebraisk, Rod i $x^3 - 2$.

Det komplekse i er algebraisk, Rod i $x^2 + 1$.

Vi vil vise, at *Mængden* $\mathbb{A}$ *er et Legeme*, Dellegeme af $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Deraf følger, at selvom vi kun betragter de *reelle algebraiske Tal*, saa udgør de ogsaa et *Legeme*, nemlig Fællesmængden af to Legemer. $\mathbb{R} \cap \mathbb{A}$. Det er i denne Forbindelse uvæsentligt, at $\mathbb{C}$ og $\mathbb{R}$ er forskellige med Hensyn til Polynomier, idet $\mathbb{C}$ er *algebraisk afsluttet*, d.v.s. at ethvert Polynomium kan opløses i Førstegradsfaktorer ("Algebraens Fundamentalsætning"), hvilket ikke gælder for $\mathbb{R}$.

Vi skal vise, at $\mathbb{A}$ er stabil ved de fire Regningsarter, og vi begynder med den simpleste, Divisionen.

Antag, at $\alpha \neq 0$ er Rod i Polynomiet $A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \in \mathbb{Q}[x]$, hvor $a_0 \neq 0$ (muligt, da $\alpha \neq 0$) og at β er Rod i det egentlige Polynomium $B(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \in \mathbb{Q}[x]$, hvor $b_n \neq 0$, og $y = \frac{\beta}{\alpha}$; saa $B(y\alpha) = b_0 + b_1 y\alpha + \cdots + b_n y^n \alpha^n \neq 0$ samtidig med at $A(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_m\alpha^m = 0$. Idet α er fælles Rod er Resultanten $R(A, B) = 0$ (Side 34), d.v.s.

$$R(A,B) = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_m & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 y & \dots\dots & b_n y^n & & & \\ & b_0 & b_1 y & \dots\dots & b_n y^n & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 y & \dots\dots & b_n y^n \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ rækker} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ rækker} \end{array}$$

Determinanten er et Polynomium tilhørende $\mathbb{Q}[y]$,og Højestegradsleddet er $a_0^n \cdot b_n^m \cdot y^{mn}$, hvor Koefficienten er ulig 0 (i alle de andre Led faar y en lavere Eksponent). Altsaa er $y = \beta/\alpha$ algebraisk.

Da 1 er algebraisk følger at $\frac{1}{\alpha}$ er algebraisk, og dermed at $\beta/(1/\alpha) = \alpha\beta$ er algebraisk, saa $\mathbb{A}$ er stabil ved Multiplikation.

Hvis $\alpha = 0$ er det klart, at $\beta \pm \alpha$ er algebraisk naar β er det, og hvis $\alpha \neq 0$ er β/α algebraisk, og dermed ogsaa $\beta/\alpha \pm 1$ (for hvis $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, saa er ogsaa $p(x \mp 1) \in \mathbb{Q}[x]$), saa at $\alpha \cdot (\beta/\alpha \pm 1) = \beta \pm \alpha$ er algebraisk, hvormed Stabiliteten ved Addition og Subtraktion er vist.

Mere generelt gælder: *Mængden $\mathbb{A}$ af algebraiske Tal er stabil ved algebraiske Operationer*, hvormed menes, at *hvis α er Rod i et Polynomium med algebraiske Koefficienter, saa er α selv algebraisk*. Det viser, at Mængden $\mathbb{A}$ af komplekse algebraiske Tal er algebraisk afsluttet (ethvert Polynomium over $\mathbb{A}$ er Produkt af Førstegradsfaktorer over $\mathbb{A}$), for de reelle algebraiske Tal gælder det ikke.

Da $\mathbb{A}$ er stabil ved Division kan vi dividere Polynomiet med Højestegradskoefficienten, saa det er nok at betragte moniske Polynomier. Vi fører Beviset ved at godtgøre, at hvis x er Rod i et Polynomium

$$\begin{aligned} A(x, b_1, \dots, b_r) = x^m + A_{m-1}(b_1, \dots, b_r)x^{m-1} + \dots \\ + A_1(b_1, \dots, b_r)x + A_0(b_1, \dots, b_r) \end{aligned}$$

hvor ethvert A_j er et Polynomium i de algebraiske Tal $b_1, \dots, b_r$ med rationale Koefficienter, saa er x Rod i et Polynomium af samme Type, hvori b_r ikke forekommer, men hvor til Gengæld Graden m er blevet større. Paa denne Maade kan vi sukcessivt eliminere $b_r, \dots, b_1$, og vi ender med et Polynomium tilhørende $\mathbb{Q}[x]$, og hvori x er Rod.

Antag, at b_r er Rod i $B(x)$, monisk,

$$B(x) = B_0 + B_1 x + \cdots + x^k, \qquad \text{alle } B_j \in \mathbb{Q};$$

vi opfatter A$(x, b_1, \dots, b_r)$ som et Polynomium i b_r,

$$A = a_0(x, b_1, \dots, b_{r-1}) + a_1(x, b_1, \dots, b_{r-1})b_r + \dots a_s(x, b_1, \dots)b_r^s;$$

i Koefficienterne forekommer x med den maximale Eksponent m kun i $a_0 = x^m + \dots$, medens x har lavere Eksponenter i alle de øvrige Polynomier $a_j(x, b_1, \dots, b_{r-1})$.

Saa udtrykker vi, at A og B har den fælles Rod b_r, altsaa at deres Resultant er lig 0:

$$R(A, B) = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_s & & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_s & & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_s & \\ B_0 & B_1 & \dots & B_{k-1} & 1 & & & \\ & B_0 & B_1 & \dots & B_{k-1} & 1 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & B_0 & B_1 & \dots & B_{k-1} & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k \text{ rækker} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} s \text{ rækker} \end{matrix}$$

Determinanten er et Polynomium i $x, b_1, \dots, b_{r-1}$ med rationale Koefficienter, og det er monisk i x, da Højestegradsleddet i x bliver x^{mk}, fremkommet fra Hoveddiagonalen $a_0^k \cdot 1^s$. $\square$

Som bekendt er $\mathbb{A}$ numerabel (Bevis: $\mathbb{Q}$ vides at være numerabel, deraf følger at for given Grad m er Mængden af Polynomier $\in \mathbb{Q}[x]$, d.v.s. Mængden af Koefficientsæt $a_0, a_1, \dots, a_m$, numerabel; tages Foreningsmængden for $m = 1, 2, \dots$ bliver den numerabel, og da hvert Polynomium kun har endelig mange Rødder bliver $\mathbb{A}$ numerabel). Paa den anden Side vides, at $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ ikke er numerable, hvoraf følger Eksistensen af transcendente Tal. Dette vistes af Cantor i hans grundlæggende Arbejder for Mængdelæren, 1874.

Men allerede 1844 havde Liouville angivet *Eksempler paa transcendente Tal*. Han viste, at *hvis et irrationalt Tal t er Rod i et Polynomium af m'te Grad tilhørende* $\mathbb{Q}[x]$ (eller om man vil $\mathbb{Z}[x]$), *saa findes en positiv Konstant c, saa man for enhver Brøk $\frac{a}{b}$, ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$) har* $|t - \frac{a}{b}| > c \cdot \frac{1}{b^m}$. For $P(x) = (x-t)^h \cdot R(x)$ giver $|\frac{a}{b} - t|^h = |P(\frac{a}{b})/R(\frac{a}{b})|$, og (idet det er nok at betragte Brøker $\frac{a}{b}$ liggende nær ved t) her er $R(\frac{a}{b})$ begrænset, og $|P(\frac{a}{b})|$ er større end eller lig $\frac{1}{b^m}$ naar $P \in \mathbb{Z}[x]$ og $\frac{a}{b}$ ikke er Rod; altsaa $|t - \frac{a}{b}| \geq |t - \frac{a}{b}|^h >$ konst. $\cdot \frac{1}{b^m}$. Samtidig angav han et Tal hvortil der findes en Følge af Brøker, som tilnærmer Tallet saa hurtigt, at det nævnte svigter for ethvert m; han angav Tallet $t = \sum 1/10^{n!}$, hvor der summeres for $n \in \mathbb{N}$, for tager man her det k'te Afsnit af Rækken, er det aabenbart en brøk $\frac{a}{b}$ med $b = 10^{k!}$, og dets Afvigelse fra t er af en Størrelsesorden $10^{-(k+1)!} = 1/b^{k+1}$, og k kan blive vilkaarlig stor.

Liouvilles Resultat blev forbedret en Række Gange, idet man efterhaanden fandt at Eksponenten $m = \deg P$ kunde erstattes med mindre Funktioner af $\deg P$, og i 1955 lykkedes det Roth (eng.) at vise, at for ethvert algebraisk irrationalt t og ethvert $\mu > 2$ er det umuligt at finde en Følge af Tilnærmelsesbrøker $\frac{a}{b}$, hvor $|t - \frac{a}{b}| <$ konst. $\cdot \frac{1}{b^\mu}$; det indbragte ham en Fieldsmedaille, ("Matematikkens Nobelpris"). Som omtalt Side 49 kan man altid tilnærme saa Fejlen er mindre end $\frac{\text{konst.}}{b^2}$.

Alt det her omtalte er Algebra i klassisk Forstand, d.v.s. Ligningsteori (ved Beviset for Sætn. om symmetriske Polynomier gik vi dog lidt derudover). Den moderne Betydning af "Algebra" som en generel Lære om matematiske Strukturer er først indført i dette Aarhundrede, selvom en Del af Objekterne nok var kendt tidligere; fx var Grupper noget som indførtes i Begyndelsen af 1800-tallet omhandlende Permutationer af Rødder i et Polynomium, kulminerende i Galoisteorien (G.1811–1832, dræbt i Duel), og den moderne Definition af en Gruppe gaar tilbage til Cayley 1854. Af Betydning for det ændrede Syn paa "Algebra" var van der Waerdens Værk "Moderne Algebra" fra 1930, en Bog som i de nyere Udgaver har skiftet Titel, saa den blot hedder "Algebra".

§ 10: Transcendens af e.

Hermite (fr.) viste 1873 at Tallet $e = 2,71828\ldots$ er transcendent, hvilket vi nu skal godtgøre, og derefter kunde Lindemann (ty.) i 1882 vise at π er transcendent, det skal vi gennemføre i næste §. Lad os først bemærke, at det er let at se, at *e er irrational.* Vi har

$$e = \underbrace{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}} + \underline{\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots}$$

og her er Summen af de første Led $\underbrace{\qquad}$ lig $\frac{\text{hel}}{n!}$, medens Resten $\underline{\quad}$ er mindre end $\frac{1}{n!}$, saa e er ikke $\frac{\text{hel}}{n!}$, og kan defor ikke for noget m være lig $\frac{\text{hel}}{m}$.

Det er sværere at vise, at π *er irrational*, men lad os gøre det her, ogsaa fordi det kan betragtes som en Forberedelse til Beviset for e's Transcendens.

Naar $f(x)$ er et Polynomium faas ved delvis Integration at

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\cdot\sin x\,dx &= \big[f(x)\cdot(-\cos x)\big]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\cdot\cos x\,dx \\ &= f(\pi) + f(0) + \big[f'(x)\cdot\sin x\big]_0^\pi - \int_0^\pi f''(x)\cdot\sin x\,dx \\ &= f(0) + f(\pi) - \int_0^\pi f''(x)\cdot\sin x\,dx.\end{aligned}$$

For det sidste Integral kan vi fortsætte paa samme Maade, og paa den Maade bliver vi ved indtil Differentialkvotienten bliver 0, og idet vi sætter $f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots = F(x)$ faas

$$\int_0^\pi f(x)\cdot\sin x\,dx = F(0) + F(\pi).$$

Antag nu, at $\pi = \frac{a}{b}$, hvor $a, b \in \mathbb{N}$. Saa vælges $f(x) = x^p\cdot(a-bx)^p = b^p\cdot x^p\cdot(\pi - x)^p$, hvor Tallet p bestemmes senere. Da $f(x)$ har Formen $\sum_j c_j x^j$, hvor alle $c_j \in \mathbb{Z}$ og $p \le j \le 2p$ er $f^{(k)}(0) = 0$ for $k < p$ og de paafølgende $f^{(j)}(0) = j!\cdot c_j$, hvoraf ses at $F(0)$ er delelig med $p!$.

Endvidere er $f(x) = f(\pi - x)$, saa $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(\pi)$ for alle lige j og derfor $F(\pi) = F(0)$, og ialt er altsaa $\int_0^\pi f(x) \cdot \sin x \, dx$ delelig med $p!$, og da $f(x)$ og $\sin x$ er positive paa $[0\,, \pi]$ er Integralet et positivt Multiplum af $p!$.

Samtidig har vi $f(x) = x^p \cdot (a - bx)^p < (b\pi^2)^p$ paa $[0\,, \pi = \frac{a}{b}]$, saa Integralet skal være mindre end $\pi \cdot \text{konst}^p$, og da $p!$ som bekendt vokser hurtigere end eksponentielt med p er det muligt at vælge p saa stor at der er Modstrid (Stirlings Formel siger at $p! \sim (\frac{p}{e})^p \cdot \sqrt{2\pi p}$, og det er jo ogsaa velkendt at Leddet $\frac{c^p}{p!}$, i Rækken for e^c gaar mod 0). $\square$

Det at e og π er irrationale kan tolkes som tydende paa at de er transcendente. For fra Algebrakurset vides det, at ethvert algebraisk Tal a er Rod i netop ét monisk irreducibelt Polynomium $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, og at Integritetsomraadet $\mathbb{Q}[a]$ er lig Legemet $\mathbb{Q}(a)$ (det er altid muligt at "skaffe rational Nævner"), og dette er isomorft med Kvotientringen $\mathbb{Q}[x]/(p(x))$. De forskellige Rødder i et irreducibelt Polynomium ligner paa mange Maader hinanden, saaledes som det fx er omtalt tidligere ved Konstruktionen af 17-Kanten Side 16, og hvis e eller π var Rod i et irreducibelt Polynomium, som maatte være af Grad større end 1 da de er irrationale, maatte man vente sig at Polynomiets andre Rødder var Tal med Egenskaber som paa en eller anden Maade var sammenlignelige med e eller π, og saadanne Tal kendes ikke. Transcendente Tal t er individuelle, og man har $\mathbb{Q}[t]$ isomorf med $\mathbb{Q}[x]$.

Vi skal nu vise, at *e er transcendent*. Vi skal vise, at det fører til en Modstrid at antage at

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0.$$

hvor Polynomiet har heltallige Koefficienter (hvis de var rationale er der ganget med Fællesnævneren), hvor $a_0 \neq 0$ (evt. 0-Rødder er bortdivideret) og hvor $a_n \neq 0$.

Vi skal benytte en Vurdering af e^k, og den faas saaledes:

Naar $f(x)$ er et Polynomium faas ved delvis Integration at

$$\int_0^k e^{k-t} \cdot f(t) \, dt = \Big[-e^{k-t} \cdot f(t)\Big]_0^k + \int_0^k e^{k-t} \cdot f'(t) \, dt,$$

og her er første Led lig $e^k \cdot f(0) - f(k)$; for det sidste Integral kan vi fortsætte paa samme Maade, og saaledes bliver vi ved indtil vi naar en Differentialkvotient som forsvinder. Sættes $f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots = F(x)$ har vi dermed

$$\int_0^k e^{k-t} \cdot f(t)\,dt = e^k \cdot F(0) - F(k).$$

Vi vurderer saa den numeriske Værdi af Integralet, idet k er et af Tallene $0, 1, \ldots, n$, og faar

$$n \cdot e^n \cdot \max_{0 \le t \le n} |f(t)| \ge \left| e^k \cdot F(0) - F(k) \right|.$$

Den antagne Polynomiumsligning for e multipliceres med $F(0)$, saa

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot e^k \cdot F(0) = 0,$$

og af Uligheden ovenfor faar vi dermed

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot F(k) \right| \le n \cdot e^n \cdot \max_{0 \le t \le n} |f(t)| \cdot \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

Vi skal nu vælge Polynomiet $f(t)$ saa det fører til en Modstrid. Vi tager, idet p er et naturligt Tal, som senere bestemmes,

$$f(t) = t^{p-1}(t-1)^p(t-2)^p \cdots (t-n)^p.$$

Idet vi vurderer $f(t)$ paa $0 \le t \le n$ giver den forrige Ulighed

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot F(k) \right| \le n \cdot e^n \cdot n^{np+p-1} \cdot \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \left(e^n \cdot \sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) \cdot (n^{n+1})^p,$$

altsaa et Udtryk af Formen $C \cdot D^p$, med C og D uafhængige af p.

For at vurdere Venstresiden betragter vi først Leddet $a_0 F(0) = a_0 \cdot (f(0) + f'(0) + \dots)$. Da $f(t)$ har Formen $(-n!)^p t^{p-1} + \sum_j c_j t^j$ hvor alle $c_j \in \mathbb{Z}$ og $j \geq p$ bliver $F(0) = (-n!)^p \cdot (p-1)! + \sum_j c_j \cdot j!$, hvori det sidste Led er deleligt med $p!$. Vi vælger nu p som et Primtal større end baade $|a_0|$ og n, dette er muligt, da der som bekendt (vist af Euklid) findes vilkaarligt store Primtal; saa vil p med Sikkerhed ikke gaa op i Leddet $(-n!)^p \cdot (p-1)!$, medens det gaar op i alle de følgende $c_j \cdot j!$, saa p gaar ikke op i $a_0 F(0)$; derimod er samtlige Led delelige med $(p-1)!$, saa dette gaar op i $a_0 F(0)$.

Dernæst betragter vi de øvrige Led $a_k \cdot F(k)$, og disse vil alle være delelige med $p!$. For udvikler vi $f(t)$ som et Polynomium i $t' = t-k$ faar det Formen $\sum_j c_j t'^j$, hvor alle $c_j \in \mathbb{Z}$ og $j \geq p$, saa $F(k) = f(k) + f'(k) + \dots$ bliver $\sum_j c_j \cdot j!$, hvor $p!$ gaar op i alle $j!$.

Dermed har vi ialt faaet, at

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot F(k) = \text{Multiplum af } (p-1)!, \quad \text{og ulig } 0,$$

det sidste fordi det ikke er deleligt med Primtallet p. Den numeriske Værdi af det er derfor mindst lig $(p-1)!$. Men som bekendt vokser $(p-1)!$ stærkere end enhver Kvotientrække $C \cdot D^p$, saa hvis blot p er tilstrækkelig stor har vi Modstrid. Dermed er vist, at e er transcendent. $\square$

§ 11: Transcendens af π.

Vi skal nu vise, at π *er transcendent*. Det blev gjort af Lindemann 1882 som en Videreførsel af den Metode, som Hermite havde benyttet ved e; de tekniske Vanskeligheder er større, men der er ingen Tvivl om at Hermite var en større Matematiker end Lindemann.

For "almindelige Mennesker" var Lindemanns Arbejde dog nok mere slaaende, idet det gav et negativt Svar paa det gamle Problem om Cirklens Kvadratur. For som tidligere omtalt eksisterede for de gamle Grækere kun de Tal som er konstruerbare med Passer og Lineal, og som omtalt i § 4 er det hvad der kan faas udfra Legemet $\mathbb{Q}$ ved Adjunktion af Kvadratrødder, og altsaa (§ 9) kun en vis Delmængde af de algebraiske Tal. Tallet e er først kommet ind langt senere, egentlig først med Euler i 1700-tallet; dog var de første Logaritmer, indført af Napier (skotsk) ved Aar 1600 egentlig naturlige Logaritmer, men de blev hurtigt overskygget af de til praktisk Regning mere anvendelige Brigg'ske (10-tals) Logaritmer.

Eftervisning af Transcendens maa ske med Uligheder, thi hele det reelle Talsystem er jo konstrueret ved Uligheder, hvad enten man tænker paa Fundamentalfølger eller mere naive Metoder med Grænsepunkter paa et Liniestykke.

At saadanne Problemer er vanskelige fremgaar af at medens man siden Eulers Dage har vidst at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \ ; \quad \text{o.s.v.} \ ,$$

saa var det en Sensation da det i 1978 blev bevist af Apery (fr.) at Tallet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ er irrationalt (men algebraisk ? ?).

Tallet π kan angives paa mange Maader, fx som Cirkelperiferi/Diameter eller Kugleoverflade/Diameter^2, og det giver Anledning til komplekse Integralformler $\frac{1}{2\pi i}\int_{\circlearrowleft} \cdots$ og rumlige Potentialformler $\frac{1}{4\pi}\int_{\bullet} \cdots$. Man har ogsaa Rækkeudviklinger og Produktudviklinger som

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad \text{og} \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots \ ,$$

men de konvergerer altfor langsomt til at være til nogen Nytte ved Transcendensbeviser.

Noget bedre er det at π er Halvperioden for Løsningerne til Differentialligningen $y + y'' = 0$, det var jo egentlig det som blev benyttet i § 10 ved Eftervisningen af at π er irrational, men det synes vanskeligt at faa Potenser af π ind i denne Forbindelse, saa det duer heller ikke her.

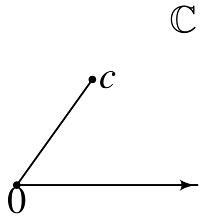
Derimod kan man komme igennem ved at benytte Formlen

$$1 + e^{\pi i} = 0,$$

idet vi vil vise, at Ligningen $1 + e^a = 0$ ikke er opfyldt af noget algebraisk Tal a. Vi skal altsaa nu betragte Mængden $\mathbb{A}$ af komplekse algebraiske Tal, og da $i \in \mathbb{A}$ vil π og πi samtidig være transcendente.

Paa Side 60 fandt vi, at naar $f(t)$ er et Polynomium, saa er

$$\int_0^c e^{c-t} \cdot f(t)\,dt = e^c \cdot F(0) - F(c),$$



hvor $F(t) = f(t) + f'(t) + \cdots$. Det blev udledt under Antagelse af at $c \in \mathbb{R}$, men Formlen gælder for et vilkaarligt komplekst c, idet saa Integralet tages langs fx Liniestykket fra 0 til c. Hvis man kender kompleks Funktionsteori er det klart ved den samme Regning som i det reelle Tilfælde (og Integralet er uafhængigt af den benyttede Vej), og ellers kan det ogsaa let ses, idet man ved en Drejning kan føre Integrationsliniestykket ned paa den reelle Akse. Formlen her er egentlig ogsaa begrundet i en Differentialligning, idet e^t er Løsning til Ligningen $y - y' = 0$, og $F(t)$ er Løsning til den tilsvarende inhomogene Ligning $F(t) - F'(t) = f(t)$. Ligesom tidligere skal vi bruge Formlen til Vurdering af e^c, og vi har

$$\left| e^c \cdot F(0) - F(c) \right| \leq |c| \cdot e^{|c|} \cdot \max_{|t| \leq |c|} |f(t)|.$$

Vi antager nu, at der findes et algebraisk Tal $a_1 \in \mathbb{C}$, saaledes at $1 + e^{a_1} = 0$, og ønsker at naa frem til en Modstrid. Lad $A(x) \in \mathbb{Q}(x)$ være et Polynomium med a_1 som Rod, de øvrige Rødder betegnes $a_2, \ldots, a_r$, idet $\deg A = r$.

Saa er

$$\prod_{j=1}^{r}(1+e^{a_j})=0,$$

altsaa

$$1+e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_r}+e^{a_1+a_2}+\cdots+e^{a_1+a_2+\cdots+a_r}=0$$

(der er 2^r Addender). Her er samtlige Eksponenter algebraiske Tal, lad os betegne dem $b_1, b_2, \ldots, b_{2^r}$; nogle af dem er 0, fx Eksponenten til det første Ettal, men ogsaa andre, fx er foruden $a_1 = \pi i$ ogsaa dets konjugerede $-\pi i$ Rod i $A(x)$, og deres Sum er 0; andre saasom a_1 er med Sikkerhed ikke 0.

Saa sættes

$$B(x)=\prod_{j=1}^{2^r}(x-b_j).$$

Vi har ogsaa $B(x) \in \mathbb{Q}(x)$, for Koefficienterne i $B(x)$ er de elementarsymmetriske Polynomier i $b_1, \ldots, b_{2^r}$ og de er aabenbart symmetriske Polynomier (med Koefficienter $\in \mathbb{Z}$) i $a_1, \ldots, a_r$ og kan derfor (ifølge Sætn. Side 52) skrives som Polynomier med heltallige Koefficienter i de elementarsymmetriske Polynomier i $a_1, \ldots, a_r$, altsaa i Koefficienterne i $A(x)$, og er derfor rationale.

Vi havde

$$\sum_j e^{b_j}=0,$$

hvor b_j er samtlige 2^r Rødder i $B(x)$. Nogle af dem er 0, lad os sige k Stk., saa er $B(x)/x^k = C'(x)$, hvor

$$C'(x)=C'_0+C'_1x+\cdots+C'_mx^m\,,\quad m=2^r-k,$$

og Rødderne i $C'(x)$ betegnes $c_1, c_2, \ldots, c_m$; for Koefficienterne i $C'(x)$ gælder $C'_0 \neq 0$ og $C'_m \neq 0$, og vi har

$$k+\sum_{j=1}^{m}e^{c_j}=0.$$

Alle Koefficienter i $C'(x)$ er rationale, og vi multiplicerer med Fællesnævneren saa de bliver heltallige, og kalder det fremkomne for

$$C(x) = C_0 + C_1 x + \cdots + C_m x^m.$$

Vi sætter $\max_j |c_j| = R$, og da vi har $k \cdot F(0) + \sum_j e^{c_j} \cdot F(0) = 0$ giver Uligheden for e^c at

$$\left| k \cdot F(0) + \sum_{j=1}^{m} F(c_j) \right| \leq m \cdot R \cdot e^R \cdot \max_{|t| \leq R} |f(t)|.$$

Vi skal nu vælge Polynomiet $f(t)$, og dermed $F(t)$, saaledes at det fører til en Modstrid.

Vi tager, idet p er et naturligt Tal, som senere bestemmes

$$f(t) = t^{p-1} \cdot C(t)^p.$$

Som Vurdering for $f(t)$ paa $|t| \leq R$ faar vi

$$\max_{|t| \leq R} |C(t)| \cdot \max_{|t| \leq R} |t \cdot C(t)|^{p-1},$$

som er et Udtryk af Formen $L' \cdot M^p$, hvor L' og M er uafhængige af p, og dermed er

$$\left| k \cdot F(0) + \sum_{j=1}^{m} F(c_j) \right| \leq m \cdot R \cdot e^R \cdot L' \cdot M^p = L \cdot M^p,$$

hvor L og M er uafhængige af p. Modstriden skal fremkomme ved at vi viser, at Venstresiden for alle tilstrækkelig store Primtal p er større end $(p - l)! \cdot g^p$, hvor g er positiv og uafhængig af p.

Vi vurderer $F(0)$ paa den tidligere anvendte Maade. Da $f(t)$ har Formen $C_0^p \cdot t^{p-1} + \sum_j d_j t^j$, hvor alle $d_j \in \mathbb{Z}$ og $j \geq p$ bliver $F(0) = C_0^p \cdot (p - 1)! + \sum_j d_j \cdot j!$, hvori det sidste Led er deleligt med $p!$.

Dernæst skal vi betragte

$$\sum_{j=1}^{m} F(c_j) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} f^{(s)}(c_j)\ ;$$

sættes $t' = t - c_j$ bliver $f(t) = \sum_s h_s t'^s$, hvor $p \leq s$, og hvor paa den anden Side s er opad begrænset, da $f(t)$ er et Polynomium, og hvor *Koefficienten h_s er et heltalligt Polynomium i de algebraiske Tal $c_1, \ldots, c_m$ af Grad mindre end eller lig mp*, da $\deg_{c_1\cdots c_m} f(t) = mp$. Følgelig er $f^{(s)}(c_j) = s! \cdot h_s$ lig $p!$ gange et Polynomium med de samme Egenskaber. Dette Polynomium er ikke symmetrisk i $c_1, \ldots, c_m$ da jo c_j indtager en Særstilling, men naar vi tager $\sum_{j=1}^{m} f^{(s)}(c_j)$ faar vi et Polynomium $S(c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{Z}(c_1, \ldots, c_m)$ hvor S er symmetrisk i $c_1, \ldots, c_m$ og hvor $\deg_{c_1\cdots c_m} S \leq mp$.

Ifølge Sætningen Side 52 kan $S(c_1, \ldots, c_m)$ skrives som et Polynomium T med $\deg T \leq mp$ og med heltallige Koefficienter i de elementarsymmetriske Polynomier i $c_1, \ldots, c_m$ og disse udtrykkes ved Koefficienterne i $C(x)$, altsaa

$$T\left(\tfrac{-C_1}{C_m}, \tfrac{-C_2}{C_m}, \tfrac{-C_3}{C_m}, \ldots\right); \quad \deg t \leq mp; \quad \text{hele Koefficienter;}$$

og hvor yderligere alle Koefficienterne er delelige med $p!$, for det var de i S.

Men saa er jo $T = p! \cdot \text{helt Tal}/C_m^{mp}$; det var $\sum_{j=1}^{m} F(c_j)$.

Ialt er

$$k \cdot F(0) + \sum_{j=1}^{m} F(c_j) = k \cdot C_0^p \cdot (p-1)! + \frac{p! \cdot \text{helt Tal}}{C_m^{mp}};$$

eller

$$\frac{k \cdot C_0^p \cdot (p-1)! \cdot C_m^{mp} + p! \cdot \text{helt Tal}}{C_m^{mp}}.$$

Vi vælger saa p som et Primtal større end k, $|C_0|$, $|C_m|$; saa er Tælleren ikke 0, da p ikke gaar op i første Led medens det gaar op i sidste Led, og den er numerisk større end eller lig $(p-1)!$ da dette gaar op i begge Led. Den numeriske Værdi er derfor mindst $(p-1)! \cdot (C_m^{-m})^p$, og dermed har vi den lovede Modstrid. $\square$

Kort efter Lindemanns Bevis kunde Weierstrass give en mere generel Sætning, som fx viser at de naturlige Logaritmer af alle algebraiske Tal ($\neq 1$ og 0) er transcendente. Andre Transcendensspørgsmaal blev stillet af Hilbert i det 7'de af de 23 Problemer fra Aar 1900, og adskillige af dem er besvaret siden, fx er $2^{\sqrt{2}}$ transcendent (H. nævnte specielt dette Tal). Side 57 er ogsaa omtalt, hvordan Liouvilles Eksempel paa et transcendent Tal kan generaliseres til langt større Talmængder.

§ 12: Königs Sætning. Skuffeprincippet.

Vi skal betragte endelige Mængder. Antallet Elementer i Mængden M betegnes $|M|$. Man ser, at

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

Vi betragter nu Mængder S og A, og Afbildninger $f\colon S \to \mathcal{P}(A)$ ($\{$Delmængder af $A\}$), altsaa for ethvert $s \in S$, $s \mapsto f(s) \subseteq A$. Afbildningen kan udvides til en Afbildning af alle Delmængder D af S over i Delmængder af A idet vi tager

$$D \mapsto f(D) = \bigcup_{s \in D} f(s).$$

Vi har aabenbart

$$f(D_1 \cup D_2) = f(D_1) \cup f(D_2)$$

og endvidere

$$f(D_1 \cap D_2) \subseteq f(D_1) \cap f(D_2)$$

(selvom D_1 og D_2 er fx disjunkte, behøver $f(D_1)$ og $f(D_2)$ ikke at være det).

En Afbildning $f\colon S \to A$ kan opfattes som en Afbildning af ovenstaaende Type, hvor man for alle s har $|f(s)| = 1$, og specielt vil en injektiv Afbildning $f\colon S \to A$ være en, hvor man for ethvert $D \subseteq S$ har $|f(D)| = |D|$.

For Afbildningerne definerer vi en partiel Ordning, idet vi vil sige, at f majoriserer g, eller at f kan formindskes til g, skrevet $f \succeq g$, saafremt vi for alle $s \in S$ har $f(s) \supseteq g(s)$. Dette er aabenbart ensbetydende med at man for alle $D \subseteq S$ har $f(D) \supseteq g(D)$. Det er klart, at dette er en partiel Ordning og saafremt f majoriserer en injektiv Afbildning, saa har man $|f(D)| \geq |D|$ for alle $D \subseteq S$.

Eksempel: $A =$ Mængden af Auditorier i H.C.Ørstedinstituttet.
$S =$ Mængden af Studenterhold paa et vist Tidspunkt.

For $s \in S$: $f(s) =$ Mængden af de Auditorier, som er brugbare for Holdet s (altsaa opfylder Kravene m.H.t. Størrelse, Tavler, Lysbilledapparater o.s.v.). D er en Samling af visse Hold, $D \subseteq S$, og $f(D)$ er Mængden af alle de Auditorier som kan komme paa Tale for Hold $s \in D$. At $f(D_1 \cup D_2) = f(D_1) \cup f(D_2)$ og $f(D_1 \cap D_2) \subseteq f(D_1) \cap f(D_2)$ er klart.

En Afbildning $f: S \to A$ betyder, at man anbringer hvert Hold i et Auditorium, og at Afbildningen er injektiv betyder at man ikke anbringer to Hold i samme Auditorium.

At f majoriserer en injektiv Afbildning betyder, at det er muligt at placere Holdene i Auditorierne paa rimelig Maade. For at dette skal være muligt er det klart, at for ethvert $D \subseteq S$ maa man have $|D| \leq |f(D)|$.

Königs Sætning: Dersom $|D| \leq |f(D)|$ for enhver Delmængde D af S, saa vil f majorisere en injektiv Afbildning af S ind i A.

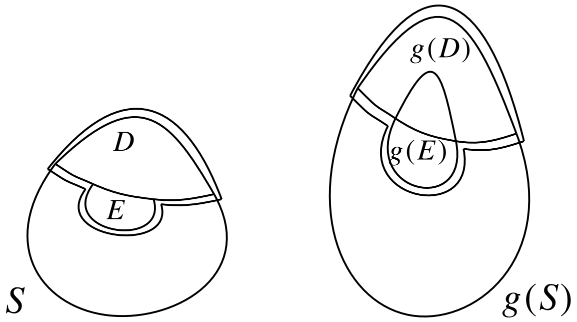
(König var en ungarsk Matematiker, som angav Sætningen 1916; man kan skændes om Prioriteten, praktisk talt det samme er fundet af Frobenius (tidligere) og af Philip Hall (senere)).
Bevis: Det skal ske ved Induktion efter $|S|$. For $|S| = 1$ er det klart, og vi antager derfor $|S| > 1$.

Ideen er nu, at dersom vi kan finde en egentlig Delmængde D af S for hvilken $|D| = |f(D)|$, saa ved vi, at D maa afbildes over i $f(D)$, bijektivt, og at Resten af S skal afbildes over i Resten af A, og der er Haab om at kunne anvende Induktion; det svære ved at angive en Afbildning er jo at finde ud af hvad man skal gøre, og jo flere Muligheder der er (og jo lettere man altsaa skulde tro det var), jo sværere er det, “embarras de richesse”.

Vi antager altsaa nu, at $|f(D)| \geq |D|$ for alle $D \subseteq S$. I det følgende ser vi bort fra $D = \emptyset$, idet baade den og dens Billedmængde altid har Elementantallet 0. Saafremt $|f(D)| > |D|$ for alle $D \subset S$, saa formindsker vi Afbildningen f til et g idet vi fjerner ét Billedelement fra ét $f(s)$; dermed har vi $|g(D)| \geq |D|$ for alle $D \subset S$, for Antallene er jo hele Tal, saa et Ulighedstegn kan i værste Fald blive til et Lighedstegn. Det kunde være, at $|f(S)| = |S|$, men $g(S) \supseteq g(S \setminus \{s\}) = f(S \setminus \{s\})$, saa $|g(S)| \geq |f(S \setminus \{s\}| > |S| - 1$, altsaa $|g(S)| \geq |S|$, og vi har dermed $|g(D)| \geq |D|$ for alle $D \subset S$, Hvis Sætningens Forudsætning er opfyldt af f er det altsaa muligt ved et Antal Formindskelser at naa til et g som ogsaa opfylder

Sætningens Forudsætning, og hvor man har $|g(D)| = |D|$ for en ægte Delmængde D af S.

Idet D og dens Delmængder nu opfylder Sætningens Forudsætning kan vi ifølge Induktionsforudsætningen formindske g paa D til en injektiv Afbildning (bijektiv) af D paa $g(D)$. Vi mangler at se, at vi paa $S \setminus D$ kan formindske g til en injektiv Afbildning ind i $g(S) \setminus g(D)$. Lad E være en Delmængde af $S \setminus D$, saa skal vi vise, at $|E| \leq |g(E) \setminus g(D)|$, men det følger af at

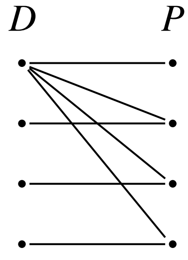


$$|E| + |D| = |E \cup D| \leq |g(E \cup D)| = |g(E) \cup g(D)| =$$
$$|[g(E) \setminus g(D)] \cup g(D)| = |g(E) \setminus g(D)| + |g(D)| = |g(E) \setminus g(D)| + |D|,$$

(paa Fig. er med Dobbeltlinie markeret $D \cup E$ og $g(D \cup E)$).
Sætningens Forudsætning er altsaa ogsaa opfyldt paa $S \setminus D$, saa ifølge Induktionsforudsætningen kan Afbildningen ogsaa formindskes her. $\square$

Eksempel: En Samling K af Komiteer k skal hver sende en Repræsentant r til et Raad R. I dette kan hvert Medlem kun repræsentere en af de oprindelige Komiteer. For at dette skal være muligt er det klart nødvendigt, at enhver Delmængde D af K skal have tilsammen mindst $|D|$ Medlemmer, men Sætningen siger altsaa, at denne Betingelse ogsaa er tilstrækkelig.

Eksempel: “Partnerproblemet”. Givet to Mængder, hhv. Drenge og Piger, begge med n Elementer, og en Del Bekendtskaber (gensidige og venligtsindede) mellem Elementerne fra den ene Mængde og fra den anden Mængde. Dersom blot vilkaarlige m Stk. Drenge tilsammen kender mindst m Piger, $m = 1, 2, \ldots, n$, saa er det muligt at foretage en Sammenparring, hvor enhver kender sin Partner. Heraf følger det – paa Forhaand langtfra indlysende – at saa kender vilkaarlige m Stk. Piger tilsammen mindst m Drenge (!). Dette uanset, at Situationen kan være meget usymmetrisk, saaledes som fx paa hostegnede graf, hvor Bekendtskab er angivet med Linier. At Königs Sætning ogsaa i Almindelighed kan opfattes som en grafteoretisk Sætning behøver næppe at fremhæves.



Eksempel: Samtidig med at König viste Sætningen gav han følgende Anvendelse: en kvadratisk $n \times n$-Matrix kaldes dobbeltstokastisk, hvis dens Elementer er ikke-negative og alle Rækkesummer og alle Søjlesummer er lig 1; i en saadan Matrix er det muligt at udtage n Elementer, et fra hver Række og et fra hver Søjle, som alle er positive. Bevis: For den i'te Række sættes $f(i) = \{j : a_{ij} > 0)$, saa skal man vise, at f kan formindskes til en Bijektion mellem Rækkenumrene og Søjlenumrene, men det følger umiddelbart af Sætningen, for tager man en Delmængde D af Rækker, saa er Summen af Elementerne i dem lig $|D|$, og de positive Elementer maa altsaa være fordelt paa mindst $|D|$ forskellige Søjler.

Udregnes Matricens Determinant er der altsaa mindst et af de $n!$ indgaaende Produkter som er ulig 0. Man taler ogsaa om Matricens "Permanent", dermed menes Summen af de $n!$ Produkter, alle taget med Fortegn $+$ (Navnet skyldes at Værdien er uændret selv om to Rækker (eller Søjler) ombyttes), og Permanenten er altsaa positiv. Da det er en kontinuert Funktion paa en kompakt Mængde i det n^2-dimensionale Rum af Tallene a_{ij} maa den have en positiv Mindsteværdi, og i 1926 spurgte v.d.Waerden om ikke denne Mindsteværdi er lig $n!/n^n$, altsaa antages for en Matrix hvori alle Elementer er lig $\frac{1}{n}$. (V.d.Waerden er omtalt Side 57, og han er bl.m.a. ogsaa kendt for at have vist, at deles $\mathbb{N}$ i to Mængder, saa vil mindst en af dem indeholde vilkaarlig lange Differensrækker). Det blev efterhaanden et berømt uløst Problem, behandlet i henved hundrede Afhandlinger, indtil Permanenthypotesens Rigtighed fornylig er vist af en Russer, Falikman (se NORMAT 1983).

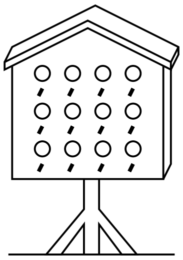
Skuffeprincippet.

I Beviset for Königs Sætning benyttedes "Skuffeprincippet":

Hvis en Afbildning $A \to B$ er injektiv, saa er $|A| \leq |B|$
surjektiv, saa er $|A| \geq |B|$
bijektiv, saa er $|A| = |B|$.

Hvor nyttigt dette og dets umiddelbare Konsekvenser kan være er især fremhævet af Lejeune Dirichlet (tysk, 1805–1859), som med Succes anvendte det paa talteoretiske Problemer. Man har fx: Hvis der er flere Skuffer end Ting i dem, saa er nogle af Skufferne tomme. Hvis uendelig mange

Ting er fordelt i endelig mange Skuffer, saa vil mindst en af Skufferne indeholde uendelig mange Ting.



Det kan bemærkes, at paa engelsk gaar det under Navnet "pigeonhole-principle".

Eksempel: Der findes tre Mennesker i København med det samme Antal Haar paa Hovedet. Uanset den lidt løse Formulering er Antallet Mennesker i hvert Fald større end 450.000, og Antallet Haar paa et Menneskehovede angives af frisørkyndige til ca. 50.000, extremt op til 120.000, saa det kan med Sikkerhed regnes at være under 200.000; deraf følger Paastanden.

Eksempel: Ethvert naturligt Tal n har et positivt Multiplum, som i 10-talssystemet skrives med kun Cifrene 0 og 1. Bevis: De uendelig mange Tal af Form $11\ldots11$ giver ved Division med n en af de endelig mange Rester $0, 1, 2, \ldots, n-1$, saa der findes to med samme Rest. Deres Differens har Egenskaben.

§ 13: Bevis for Tchebycheffs generelle Sætning Side 39.

En kontinuert Funktion $f(x)$ er givet paa et lukket Interval, eller mere generelt paa en kompakt Mængde $M \subset \mathbb{R}$, bestaaende af mindst $n+1$ Punkter. Da findes netop ét Polynomium $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg p < n$, som approksimerer f bedst muligt, i den Forstand at $D = \max_{x \in M} |f(x) - p(x)|$ er minimal, og der findes $n+1$ Punkter i M, $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, saaledes at for alle i er $f(x_i) - p(x_i) = (-1)^i \cdot d$, med $|d| =$ dette minimale D.

Bevis: Først betragtes Tilfældet, hvor M er en Mængde X bestaaende af kun $n+1$ Punkter $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Ved Lagranges Interpolationsformel bestemmes et Polynomium af Grad højst n, hvis Graf gaar gennem de $n+1$ Punkter $(x_i, f(x_i))$. Det er

$$\sum_i \frac{s_i(x)}{s_i(x_i)} \cdot f(x_i)\,, \quad \text{med } s_i(x) = \prod_{j \neq i}(x - x_j)$$

(Brøken er et Polynomium af n'te Grad, som er 1 for $x = x_i$ og 0 for de øvrige x_j). Man ser umiddelbart, at $(-1)^i \cdot s_i(x_i)$ er positiv. Koefficienten til x^n er

$$C_X = \sum_i \frac{f(x_i)}{s_i(x_i)}.$$

Hvis $p(x)$ er af Grad mindre end n er altsaa

$$\sum_i \frac{p(x_i)}{s_i(x_i)} = 0.$$

Følgelig er

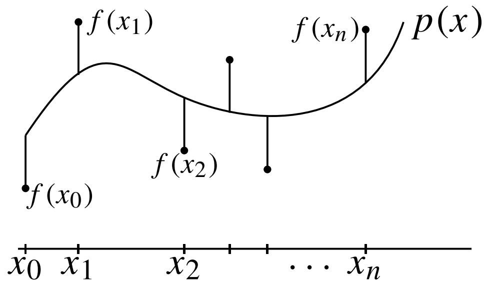
$$\begin{aligned} |C_X| &= \left| \sum_i \frac{f(x_i) - p(x_i)}{s_i(x_i)} \right| \le \sum_i \left| \frac{f(x_i) - p(x_i)}{s_i(x_i)} \right| \\ &= \sum_i \frac{|f(x_i) - p(x_i)|}{(-1)^i \cdot s_i(x_i)} \le \max_i |f(x_i) - p(x_i)| \cdot \sum_i \frac{1}{(-1)^i \cdot s_i(x_i)}. \end{aligned}$$

Den sidste Sum kalder vi S_X, den er positiv og afhænger kun af X, og $\max_i |f(x_i) - p(x_i)|$ er altsaa mindst lig $D_X = \frac{|C_X|}{S_X}$.

Bestemmer vi et Polynomium $p(x)$ ved Interpolation saaledes at $p(x_i) = f(x_i) - (-1)^i \cdot D_X \cdot \operatorname{sign} C_X$ kommer der Lighedstegn i de opskrevne Uligheder, første Sted fordi alle $\frac{f(x_i)-p(x_i)}{s_i(x_i)}$ faar samme Fortegn (nemlig $\operatorname{sign} C_X$), og andet Sted fordi alle $|f(x_i) - p(x_i)| = D_X$; endvidere findes

$$\sum_i \frac{p(x_i)}{s_i(x_i)} = \sum_i \frac{f(x_i) - (-1)^i \cdot D_X \cdot \operatorname{sign} C_X}{s_i(x_i)} = C_X - C_X = 0$$

saa $p(x)$ er virkelig af Grad mindre end n.



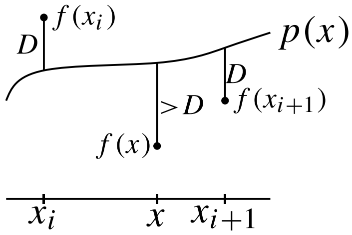
Det angivne $p(x)$, og kun dette, har altsaa de forlangte Egenskaber. Paa Figuren har de lodrette Liniestykker Længden D_X.

Saa betragtes det almindelige Tilfælde, hvor M er en kompakt Delmængde af $\mathbb{R}$. Vi vil se paa Sæt $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ af Punkter $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ som alle tilhører M. Tallet D_X er aabenbart en kontinuert Funktion af X, da baade C_X og S_X er det.

Vi udvider Mængden af X til den kompakte Mængde $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Hvis x_i og x_{i+1} nærmer sig hinanden vil D_X konvergere mod 0, for hvis vi ser bort fra $(x_i, f(x_i))$ findes der et Interpolationspolynomium af Grad mindre end n gennem de øvrige $(x_j, f(x_j))$, og da x_i og x_{i+1} nær hinanden medfører at Funktionsværdierne er nær hinanden, saa vil Polynomiet ogsaa give god Tilnærmelse til $(x_i, f(x_i))$, saa den optimale Tilnærmelse D_X er ogsaa lille. Funktionen D_X kan altsaa med Værdien 0 suppleres til at være kontinuert paa den udvidede Mængde.

D_X vil altsaa antage en maximal Værdi D for et vist X (som iøvrigt ikke tilhører Udvidelsen), og dermed er det ønskede fundet.

1) Det er klart, at vi kan ikke have $|f(x) - p(x)| < D$ for alle $x \in M$, for dette svigter jo allerede for Delmængden X.
2) $p(x)$ er entydigt bestemt, for det er den allerede for Delmængden X.
3) Delmængden X er et Punktsæt, hvori $f(x) - p(x)$ med alternerende Fortegn antager Værdierne $\pm D$.



4) Der findes intet x saa $|f(x) - p(x)| > D$. For antag, at et saadant ligger mellem to Punkter af X. Vi ændrer saa X til et nyt Sæt Y, idet vi indsætter x i St.f. det af dets Nabopunkter fra X, hvori $f(x_j) - p(x_j)$ har samme Fortegn som $f(x) - p(x)$ [paa Figuren: x_{i+1} erstattes med x]. Vi har som før

$$|C_Y| = \sum_i \frac{|f(y_i) - p(y_i)|}{(-1)^i \cdot s_i(y_i)}$$

idet Fortegnene for $f(y_i) - p(y_i)$ er de samme som for $f(x_i) - p(x_i)$, der gav $=$ ved det første $\leq$, 2 Sider tilbage [at $p(x)$ ikke er bedst approksimerende Polynomium svarende til Y er ligegyldigt, vi har kun benyttet, at Koefficienten til x^n er 0]. Idet nu alle Brøktællerne er lig D undtagen en som er større, faar vi $|C_Y| > D \cdot S_Y$, altsaa $D_Y = |C_Y|/S_Y > D$, i Strid med at D var et maximalt D_X. Dersom $x < x_0$ er enten $f(x) - p(x)$ af samme Fortegn som $f(x_0) - p(x_0)$, saa erstattes x_0 med x, eller af modsat Fortegn, saa medtages x og x_n bortkastes for at faa Y (og alle Indices forskydes 1). Man bemærker, at selvom p er entydigt bestemt, og dermed ogsaa D, saa kan mange forskellige X give det samme maximerende D_X. $\square$

OPGAVER

1. Lad F være Mængden af Funktioner f, reelle og kontinuerte paa [0,1], for hvilke der findes Konstanter (afhængige af f) $a < 1$ og A, saa der for ethvert n findes et Polynomium p_n af Grad n for hvilket

$$|f(x) - p_n(x)| < A \cdot a^n.$$

Vis, at F er en Algebra over $\mathbb{R}$, stabil ved Integration.

2. Bevis Weierstrass' Approksimationssætning for Funktioner af to variable, kontinuerte paa $[0, 1] \times [0, 1]$, idet det vises at hvis

$$B_{n,m} f(xy) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{m}{l} f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{l}{m}) x^k (1-x)^{n-k} y^l (1-y)^{n-l}$$

saa vil der til ethvert ε findes et n_0, saa $n, m > n_0$ medfører $|B_{n,m} f(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon$.

3. Bevis, at hvis $f(x)$ er reel og differentiabel paa $[0, 1]$ saa vil Følgen af Polynomier $\frac{d}{dx} B_n f(x)$ konvergere uniformt mod $f'(x)$. Vink: Vis, at

$$\frac{d}{dx} B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} \left\{ f\left(\tfrac{k+1}{n}\right) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right\} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}$$

og vurder Differensen mellem dette og $B_{n-1} f'(x)$.

Udregn ogsaa $\int_0^1 B_n f(x)\, dx$, og kontroller at det konvergerer mod $\int_0^1 f(x)\, dx$.

4. Om en kontinuert Funktion g som afbilder $[a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ vides at

$$\int_a^b x^n g(x)\, dx = 0 \qquad \text{for alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Vis, at $g(x)$ er identisk 0. Vink: Vis, at $\int_a^b f(x) g(x)\, dx$ er 0 for enhver kontinuert Funktion $f(x)$.

Almindeligt er en kontinuert Funktion $g(x)$ derfor entydigt bestemt ved Følgen af dens “Momenter” $M_n = \int_a^b x^n g(x)\,dx$.

Kan en vilkaarlig Talfølge være Momentfølge $M_0, M_1, M_2, \ldots$ for en kontinuert Funktion paa et endeligt Interval?
Samme Spørgsmaal stilles, idet Følgen konvergerer mod 0.

5. Vis, at en Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuert, hvis og kun hvis der findes en Følge af Polynomier, der paa ethvert lukket Interval konvergerer uniformt mod $f(x)$.

6. Vis, at hvis to reelle kontinuerte Funktioner f og g, begge definerede paa $[a, b]$, er saadan at
$$\int_a^b f(t)^n dt = \int_a^b g(t)^n dt \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}_0,$$
da gælder
$$\int_a^b h(f(t))\,dt = \int_a^b h(g(t))\,dt$$
for enhver kontinuert Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vis herved, at f og g maa have samme Værdimængde.

   Eksempel: Om $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ vides at $\int_0^1 (f(t))^n dt = \frac{1}{n+1}$ for $n \in \mathbb{N}_0$. Find Værdimængden for f.

7. En Funktion $f(x)$ er paa den positive Halvakse $[0, \infty[$ er bestemt ved “Differentialligningen” $f'(x) = f(2x)$ i Forbindelse med “Randbetingelserne” $f(0) = 0$, $f(2) = 1$, og for $x \in [0, 4]$ er $f(x) = f(4 - x)$. Vis, at $f(x)$ er intetsteds analytisk, skønt man let ser at den maa være $\mathcal{C}^\infty$ (det er noget vanskeligere at se, at der findes netop én Løsning $f(x)$).

8. Som bekendt har Fermat vist, at hvis p er et Primtal og p ikke gaar op i a, saa vil p gaa op i $a^{p-1} - 1$. Benyt dette til at vise, at dersom $F_m = 2^{2^m} + 1$ gaar op i $3^{\frac{1}{2}(F_m - 1)} + 1 = 3^{2^{2^m - 1}} + 1$, saa er F_m et Primtal. [Vink: Lad p være en Primdivisor i F_m og lad d være det mindste naturlige Tal for hvilket p gaar op i $3^d - 1$; vis, at d gaar op i $p - 1$ og at $d = 2^{2^m}$.]

   (Betingelsen er faktisk baade nødvendig og tilstrækkelig for at F_m er et Primtal, og er brugt ved de moderne Undersøgelser af Fermattallene).

9. Vis, at det er muligt udfra to Punkter O og E, hvor $OE = 1$, at konstruere et Kvadratnet med Siden $\frac{1}{n}$, n vilkaarlig $\in \mathbb{N}$, idet man kun benytter de paa Side 21 anførte 1), 2) og 3), altsaa uden Brug af frie Valg.

10. Vis, at en regulær 7-Kant ikke kan konstrueres med Passer og Lineal. [Vink: det komplekse Tal $e^{2\pi i/7}$ er Rod i Polynomiet $(x^7 - 1)/(x - 1) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; find et monisk (d.v.s. med Højestegradskoefficient lig 1) Trediegradspolynomium med Roden $b = x + \frac{1}{x} = 2\cos 2\pi/7$.]

11. Vis, at en regulær 11-Kant ikke kan konstrueres med Passer og Lineal. [Vink: Polynomiet $x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1$ har Rødderne $e^{2k\pi i/11}$, $k = 1, 2, \ldots, 9, 10$. Find et monisk Femtegradspolynomium med Rødder $b_r = 2\cos 2r\pi/11$, $r = 1, 2, 3, 4, 5$; det er klart, at hvis b_1 er konstruerbart, saa er de det alle, men vis, at de i saa Fald parvis maa tilhøre det samme Tallegeme.]

12. Tilnærmelsen til $\frac{v}{3}$ i den nederste Konstruktion Side 25 betegnes a. Find $\tan a$ som Funktion af $\frac{v}{2}$, og dermed som Funktion af $w = \frac{v}{3}$. Som bekendt (?) har man Rækkeudviklingen $\tan w = w + \underline{\tfrac{1}{3}w^3} + \frac{2}{15}w^5 + \ldots$; vis, at en Rækkeudvikling for $\tan a$ afviger herfra allerede i det understregede Led (skønt Tilnærmelsen er god).

13. Til den paa Side 28 angivne Konstruktion af Midtpunktet M af Liniestykket AB skal Passeren benyttes ca. 20 Gange. Find en Konstruktion, ved hvilken man kun skal benytte Passeren et en-cifret Antal Gange.

14. Givet en Lineal med to parallelle Kanter. Konstruer v.Hj. af denne – men uden Brug af Passer – Midtpunktet M af et givet Liniestykke, idet man samtidig viser hvorledes man kan oprejse den vinkelrette i et givet Punkt af en given Linie.

15. Vis, at man ogsaa med en saadan Lineal kan nedfælde den vinkelrette paa en given Linie fra et givet Punkt udenfor Linien.

16. Restklasseringen $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot\,) = \mathbb{Z}/(12)$ betragtes. For Simpelheds Skyld vil vi nøjes med at skrive a i St.f. Restklassen @. Polynomiet $A(t) = t^2 - 1$ har Rødderne $1, 5, 7, 11$. Idet $B(t) = t^2 - 5t + 6$ ønskes Resultanten $R(A, B)$ udregnet, og eventuelle fælles Rødder for $A(t)$ og $B(t)$ bestemmes.

17. Idet T_n er det n'te Tchebychefpolynomium, ønskes det bevist, at $T_n'(1) = n^2$, og at for $|x| < 1$ er $|T_n'(x)| < n^2$.

18. Vis, at Tchebychefpolynomiet $T_n(x)$ opfylder Differentialligningerne

$$(1-x^2)T_n'(x)^2 - n^2(1-T_n(x)^2) = 0$$

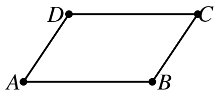
og

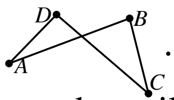
$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

19. Givet at $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P = n$, og for $|x| \le 1$ er $|P(x)| \le 1$. Vis, at for $x > 1$ er $|P(x)^{(k)}(x) \le T_n^{(k)}(x)$. [Vink: betragt Polynomiet $R(x) = T_n(x) - P(x)$ og anvend Rolles Sætning paa det, og før saa Beviset ved Induktion efter k, $k = 0, 1, \ldots, n$; teknisk bliver det lidt simplere, hvis man først antager $|P(x) \le a < 1$ for $|x| \le 1$.]

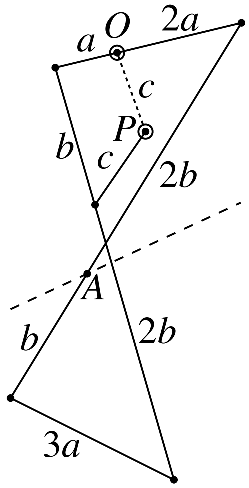
20. Givet at $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P = n$, og for $|x| \le 1$ er $|P(x)| \le 1$. Vis, at $|P'(0)| \le n$. [Vink: betragt det ulige Polynomium $Q(x) = (P(x) - P(-x))/2$, for hvilket $Q'(0) = P'(0)$, og sammenlign det med det ulige af Polynomierne $T_n(x)$ eller $T_{n-1}(x)$; bevis og benyt, at for m ulige er $|T_m'(0)| = m$; samme tekniske Bemærkning som ved forrige Opgave.]

21. Vis, at for Tchebychefpolynomier gælder $2T_n(\frac{x}{2}) \in \mathbb{Z}[x]$. Benyt dette til at vise, at $a \in \mathbb{Q} \ \wedge \ \cos a\pi \in \mathbb{Q}$ medfører at $\cos a\pi \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$. Find derefter de Værdier for b for hvilke $b \in \mathbb{Q} \ \wedge \ \tan b\pi \in \mathbb{Q}$.

22. Hvis Stængerne i et Parallellogram 

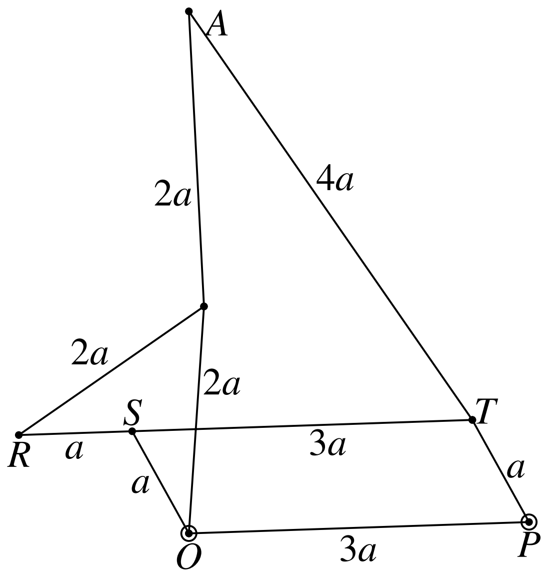
"slaar over", fremkommer et "Kontraparallellogram" 

. Vis, at i dette er $AC \cdot BD$ konstant. Benyt dette til at vise, at i hostegnede System, hvor 0 og P er fastgjorte, vil A beskrive et Liniestykke (punkteret).



23. Vis, ved at betragte et Kontraparallellogram hvori en kort Side (som AD i Opg. 22) holdes fast, at for en Ellipse er Produktet af Brændpunkternes Afstande til en vilkaarlig Tangent konstant.

24. I hostegnede Stangsystem er Punkterne 0 og P fastgjorte; RST er en retliniet Stang med $RS = a$ og $ST = 3a$, Led i alle øvrige Punkter, og Længder som angivet; vis, at A bevæger sig paa en ret Linie.



25. Find Lemniskatens Ligning i et sædvanligt Koordinatsystem. Vis, at en Lemniskat kan frembringes som plant Snit i en Torus, hvori Hullet i Midten har samme Størrelse som den Cirkel, der ved Omdrejning har frembragt Toren (Thomas Clausen).

26. Ved Speiser–Ford's Cirkler lægges en øvre Tangent t til alle Cirklerne C med Radius $\frac{1}{2}$. Vis, at enhver Linie gennem $0 = \frac{0}{1}$ og Røringspunktet mellem to Cirkler svarende til relaterende Brøker vil ramme t i et Røringspunkt P med en af Cirklerne C. Kan det samme P fremkomme for forskellige Par af relaterende Brøker?

27. Bestem et monisk Polynomium tilhørende $\mathbb{Q}[x]$, som har Roden $\sqrt{2}+\sqrt{7}$.

28. Bestem et monisk Polynomium tilhørende $\mathbb{Q}[x]$, som har Roden $\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$.

29. Angiv et monisk Polynomium med Roden $1+\sqrt{2}$, og bestem et monisk Polynomium tilhørende $\mathbb{Q}[x]$ med Roden

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{1+\sqrt{2}}\,.$$

30. Et reelt Tal x opfylder Ligningen

$$x^2 - e = x\sqrt{e-1},$$

hvor (som bekendt) e er transcendent. Godtgør, at x er transcendent.

31. Idet a, b og c er Rødderne i $x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3$ ønskes $a^2b + b^2c + c^2a + a^2c + b^2a + c^2b$ skrevet som et Polynomium i s_1, s_2, s_3.

32. I $x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3$ er en af Rødderne lig Summen af de to andre. Find s_3 udtrykt ved s_1 og s_2 (skriv Betingelsen paa Formen $S(x_1, x_2, x_3) = 0$).

33. Givet et Polynomium $x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n s_n$. Den r'te "Potenssum" af Rødderne, $x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r$, betegnes p_r.
Vis, at for $r \le n$ har man

$$p_r - p_{r-1} \cdot s_1 + p_{r-2} \cdot s_2 - \cdots + (-1)^r \cdot r \cdot s_r = 0,$$

og for $r > n$ har man

$$p_r - p_{r-1} \cdot s_1 + p_{r-2} \cdot s_2 - \cdots + (-1)^n \cdot p_{r-n} \cdot s_n = 0.$$

Angiv for $r = 1, 2, 3, 4$ Potenssummerne p_r udtrykt ved de elementarsymmetriske Polynomier $s_1, \cdot, s_n$.

34. Et "Liouville-Tal" er et reelt Tal t, for hvilket det er muligt at finde en Følge af uforkortelige Tilnærmelsesbrøker $\frac{a}{b}$ (med $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$), hvor Nævnerne b gaar mod uendelig, og hvor man for ethvert m kan finde en Brøk $\frac{a}{b}$ med $|t - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^m}$. (som vist i § 9 er alle Liouville-Tal transcendente).
Vis, at hvis t er et LiouvilleTal, saa gælder det samme for ethvert $q(t)$, hvor $q(t) \in \mathbb{Q}[t]$, og endda ogsaa, hvis $q(t) \in \mathbb{Q}(t)$. Udgør de et Legeme ?

35. Paa lignende Maade som i Beviset for at e er irrational (Side 58) kan man bevise, at e ikke er Rod i noget Andengradspolynomium med hele Koefficienter, gør dette. Kan Metoden generaliseres til Polynomier af højere Grad ?

36. Vis, at for ethvert naturligt Tal n, som ikke er en Potens af 10, er dets Logaritme (med Grundtal 10) irrational.

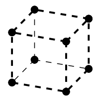
37. Ved "den toppede Høne" danser hver Herre med to ham bekendte Damer. Formuler og bevis den til Königs Sætning svarende Betingelse for Funktionen $f(s) = \{$de Damer som Herren s kender$\}$, som gør Dansen mulig.

38. Vis, at hvis man udtager en Delmængde paa $n+1$ Stk. af Tallene $1, 2, \ldots, 2n$, saa vil der indenfor Delmængden findes to forskellige Tal, af hvilke det ene gaar op i det andet. (det er ikke nok at udtage n Stk., da Mængden $n+1, n+2, \ldots, 2n$ ikke har Egenskaben).

39. I en Biograf befinder sig et Antal Personer. Vis, at der blandt dem vil være to som har det samme Antal bekendte blandt de tilstedeværende (Bekendtskaber er gensidige). Grafteoretisk: En Graf bestaar af endelig mange Punkter, og en Del af Forbindelseslinierne mellem dem; da findes to Punkter med samme "Valens", d.v.s. fra hvilke der udgaar samme Antal Liniestykker (NB en Valens kan godt være 0).

40. Idet A er en Mængde af 10 forskellige tocifrede Tal (i 10-talssystemet), ønskes det vist, at A indeholder to forskellige Delmængder S_1 og S_2, saaledes at Summen af Tallene i S_1 er lig Summen af Tallene i S_2.

41. Givet er 9 Punkter i det 3-dimensionale Gitter $\mathbb{Z}^3$. Bevis, at mindst et af Liniestykkerne mellem to af Punkterne vil indeholde et Gitterpunkt i sit indre (hvis kun 8 Punkter gælder det ikke, hvilket ses af en Enhedsterning).



42. Find bedst approksimerende $p(x)$, $\deg p < 2$, og Afvigelsen D til $\sin x$ paa $[0\,,\,\frac{\pi}{2}]$. Samme Spørgsmaal med $\deg p < 4$ for $|x|$, paa $[-1\,,\,1]$.