Matematik 3GT

Topologi

Christian Berg

2001

Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

FORORD

Kurset 3GT er et nyt kursus i 5. semester omhandlende mængdelære, generel topologi og homotopiteori. Det forudsættes, at læseren er bekendt med grundlæggende operationer med mængder og med teorien for metriske rum. I forbindelse med homotopiteori bedes læseren genopfriske Cauchys integralsætning, hvor begrebet enkeltsammenhængende mængde dukker op. Det forudsættes endelig, at læseren har stiftet bekendtskab med begreberne gruppe og gruppehomomorfi.

Første bogversion udkom efteråret 1997, og de følgende år er bogen blevet genoptrykt uændret bortset fra rettelse af nogle trykfejl. I nærværende optryk er nogle få yderligere trykfejl rettet, og beviset for Sætning 7.13 er erstattet af et simplere bevis af David Brink.

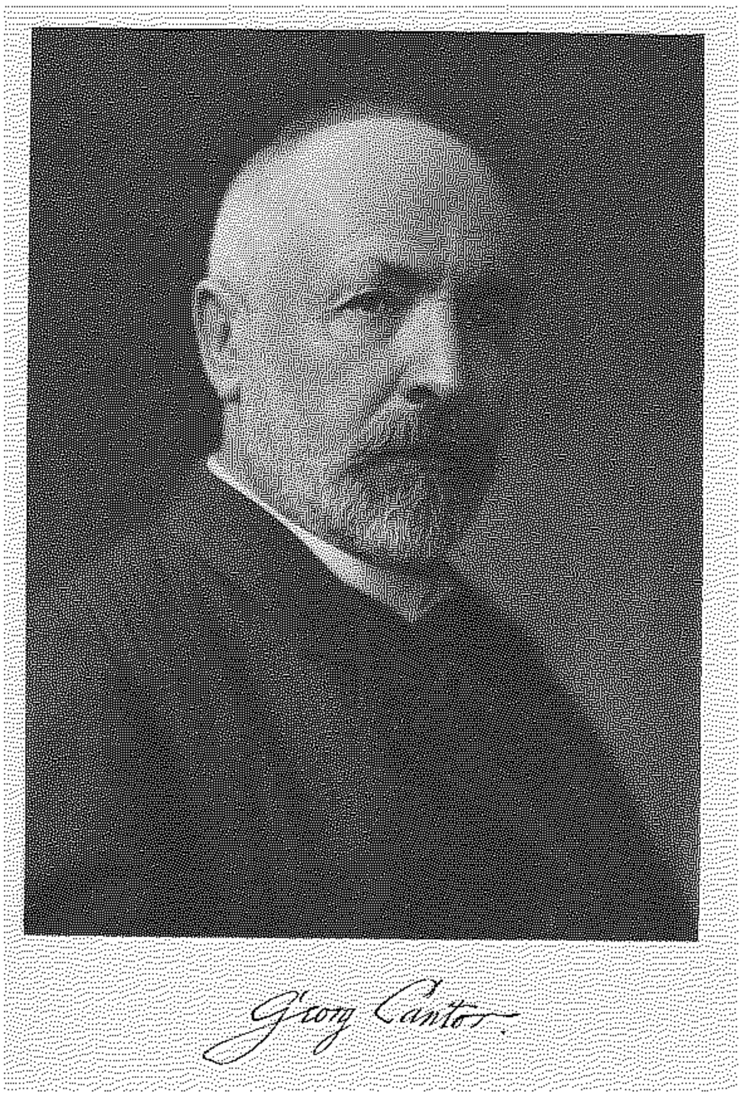
Jeg er René Moss megen tak skyldig for at have samlet materiale til hæftets index.

København, juni 2001
Christian Berg

MATEMATIK 3GT

Generel Topologi

Indhold


Georg Cantor.

Kapitel 1. Mængdelære.

Introduktion.

I dette kapitel behandles ækvivalens- og ordensrelationer som optakt til studiet af ækvipotens og kardinaltal. De to sidste begreber blev indført af Georg Cantor (1845-1918) i slutningen af det 19. århundrede. I denne videregående del af mængdelæren er det nødvendigt at inddrage udvalgsaksiomet, som gør det muligt at vise f.eks. eksistensen af baser i uendelig dimensionale vektorrum. Det vises, at det intuitive udvalgsaksiom er logisk ækvivalent med eksistensen af maksimale elementer i visse ordnede mængder, et vigtigt resultat kaldet Zorns Lemma. For yderligere information om hele denne emnekreds henvises til artiklerne af T. Heiede og H.J. Helms: *Mængdelære og transfinite kardinaltal I-III*. Nordisk Matematisk Tidsskrift bd. 10, 11-51, 108-136, 169-190 (1962). Desuden henvises til K. Hrbacek og T. Jech: *Introduction to set theory*. Marcel Dekker, New York 1984.

§1. Relationer.

1.1. Alment om relationer.

En *relation* i en mængde M defineres som en delmængde $R \subseteq M \times M$. Mængden R fastlægger de par af elementer $(a, b) \in M \times M$, som står i relation til hinanden.

I stedet for at skrive $(a, b) \in R$ indføres ofte et specielt symbol som sættes mellem a og b, f.eks. $3 < 5$ for relationen "mindre end" i $\mathbb{R}$ givet ved

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ mindre end } y\}$$

og $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ for relationen "delmængde af" i mængden $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ af delmængder af $\mathbb{R}$ givet ved

$$R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}\ (x \in A \Rightarrow x \in B)\}\ .$$

Lad os indføre symbolet $\prec$ hørende til en relation R i M. Der gælder altså

$$\forall x, y \in M\ ((x, y) \in R \Leftrightarrow x \prec y)\ .$$

Relationen kaldes

refleksiv, hvis $\forall x \in M\ (x \prec x)$
symmetrisk, hvis $\forall x, y \in M\ (x \prec y \Rightarrow y \prec x)$
transitiv, hvis $\forall x, y, z \in M\ ((x \prec y) \wedge (y \prec z) \Rightarrow x \prec z)$
antisymmetrisk, hvis $\forall x, y \in M\ ((x \prec y) \wedge (y \prec x) \Rightarrow x = y)$

En relation R i en mængde M *inducerer* en relation i enhver delmængde $N \subseteq M$ nemlig relationen $R \cap (N \times N)$. Det betyder blot at $x \in N$ står i relation til $y \in N$ inden for N præcis hvis x står i relation til y, når x og y opfattes som elementer i M.

1.2. Ækvivalensrelationer og klasseinddelinger.

Definition 1.1. Ved en *ækvivalensrelation* i en mængde M forstås en relation, som er *refleksiv, symmetrisk og transitiv.*

Den kendteste ækvivalensrelation er lighed $=$ som er underforstået i mængdebegrebet, i og med at det forudsættes muligt at afgøre om to forelagte elementer er ens eller ej i en given mængde.

En vigtig ækvivalensrelation i $\mathbb{Z}$ kendes fra talteori. For fast $n \in \mathbb{N}$ taler man om, at $x, y \in \mathbb{Z}$ er *kongruente modulo* n, hvis $x - y$ er delelig med n, altså hvis $x - y = kn$ for passende $k \in \mathbb{Z}$. Man bruger betegnelsen $x \equiv y \pmod n$ eller blot $x \equiv y$, hvis n er underforstået af sammenhængen.

Definition 1.2. Ved en *klasseinddeling* af M forstås et ikke tomt system $\mathcal{K}$ af ikke tomme parvis disjunkte delmængder af M så $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = M$.

F.eks. er mængderne af lige og ulige tal en klasseinddeling af $\mathbb{Z}$ i 2 klasser.

Begreberne ækvivalensrelation og klasseinddeling er tæt forbundne, idet en ækvivalensrelation giver anledning til en klasseinddeling og vice versa, som det fremgår af følgende sætning.

Sætning 1.3. *Lad M være en ikke tom mængde. Til en ækvivalensrelation $\sim$ i M betragtes for hvert $x \in M$ ækvivalensklassen $[x]$ bestående af de med x ækvivalente elementer, i.e.*

$$[x] = \{y \in M \mid x \sim y\} .$$

Så er systemet $\mathcal{K} = \{[x] \mid x \in M\}$ en klasseinddeling af M.

Til en klasseinddeling $\mathcal{K}$ af M er relationen $\sim$ defineret ved

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists K \in \mathcal{K}(x, y \in K)$$

en ækvivalensrelation i M.

De to netop definerede afbildninger mellem mængden af ækvivalensrelationer i M og af klasseinddelinger af M er hinandens inverse.

Bevis. Til en given ækvivalensrelation $\sim$ i M er $\mathcal{K} = \{[x] \mid x \in M\}$ et ikke tomt system bestående af ikke tomme mængder med $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = M$ da $x \in [x]$ for $x \in M$. Desuden gælder, at hvis $[x] \cap [y] \neq \varnothing$, så er $[x] = [y]$. Hvis nemlig

$x_0 \in [x] \cap [y]$, ser vi at $[x] \subseteq [y]$ på grund af den transitive lov: For $z \in [x]$ har vi $z \sim x$, $x \sim x_0$ altså $z \sim x_0$, og da også $x_0 \sim y$ fås $z \sim y$ dvs. $z \in [y]$. Inklusionen $[y] \subseteq [x]$ ses analogt. Dermed er $\mathcal{K}$ en klasseinddeling.

Hvis omvendt $\mathcal{K}$ er en klasseinddeling er relationen

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists K \in \mathcal{K}\ (x, y \in K)$$

refleksiv (til $x \in M$ findes $K \in \mathcal{K}$ så $x \in K$ da $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = M$), symmetrisk (oplagt) og transitiv ($x, y \in K$, $y, z \in L$, så må $K = L$ da $K \cap L \neq \varnothing$, altså $x \sim z$).

Lad nu $\sim$ være en ækvivalensrelation med klasseinddeling $\mathcal{K}$ og lad $\sim_{\mathcal{K}}$ være den til $\mathcal{K}$ hørende ækvivalensrelation. Så gælder for $x, y \in M$:

$$\begin{aligned} x \sim_{\mathcal{K}} y &\Leftrightarrow \exists z \in M\ (x, y \in [z]) \\ &\Leftrightarrow \exists z \in M\ (x \sim z \wedge y \sim z) \\ &\Leftrightarrow x \sim y\ , \end{aligned}$$

hvilket viser, at relationerne $\sim$ og $\sim_{\mathcal{K}}$ er ens.

Lad endelig $\mathcal{K}$ være en klasseinddeling med tilhørende ækvivalensrelation $\sim$. Vi skal vise, at $\mathcal{K} = \{[x] \mid x \in M\}$. Til $K \in \mathcal{K}$ og $x \in K$ gælder $[x] = K$, og påstanden følger. $\square$

I en vilkårlig mængde M findes to ekstreme klasseinddelinger $\mathcal{K} = \{M\}$ med kun én klasse og $\mathcal{K} = \{\{x\} \mid x \in M\}$, hvor alle klasser kun består af ét punkt, altså hver klasse er en *singleton.* De to tilhørende ækvivalensrelationer er, at alle elementer er ækvivalente henholdsvis lighed.

1.3. Ordensrelationer.

Definition 1.4. Ved en *ordensrelation* i en mængde M forstås en relation, som er *refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.* Hvis $\prec$ er en ordensrelation i M kaldes $(M, \prec)$ en *ordnet mængde.*

Er en relation i M kun *refleksiv og transitiv*, kaldes den en *præordensrelation.*

Hvis $\prec$ er en præordensrelation i en mængde M, så kan man indføre en ækvivalensrelation $\sim$ i M ved

$$x \sim y \Leftrightarrow x \prec y \wedge y \prec x\ .$$

Herved bliver M inddelt i ækvivalensklasser. Klassen indeholdende $x \in M$ betegnes $[x]$. Der defineres nu en relation i mængden $M/\!\sim$ af ækvivalensklasser ved fastsættelsen

$$[x] \prec [y] \Leftrightarrow x \prec y$$

idet man let ser, at definitionen er uafhængig af valget af repræsentant i ækvivalensklassen. Det er ligeledes umiddelbart at verificere, at der herved defineres en ordensrelation i $M/\sim$, således at en præordensrelation giver anledning til en ordensrelation i mængden af ækvivalensklasser.

Eksempler på ordensrelationer er relationen $\leq$ i $\mathbb{R}$ og relationen $\subseteq$ i mængden $\mathcal{P}(M)$ af delmængder af en mængde M. Endvidere nævnes "gå op" relationen $|$ i $\mathbb{N}$ defineret ved at $a|b$, hvis b er et multiplum af a.

Definition 1.5. En ordensrelation $\prec$ i M kaldes *total* og $(M, \prec)$ kaldes en *totalt ordnet mængde*, hvis der gælder

$$\forall x, y \in M \ (x \prec y \lor y \prec x) \ .$$

Betingelsen kan udtrykkes ved at sige, at to vilkårlige elementer er *sammenlignelige* ved relationen $\prec$.

Af de ovennævnte 3 eksempler er kun den første ordensrelation total.

Vi indfører nu en række vigtige begreber vedrørende en ordnet mængde $(M, \prec)$.

Et element $a \in M$ kaldes *det første element* i M såfremt

$$\forall x \in M \ (a \prec x) \ .$$

Det fremgår af antisymmetrien, at der højst findes et element i M, der tilfredsstiller denne betingelse (og derfor kan vi sige *det* første element).

Analogt kaldes $a \in M$ *det sidste element* i M, såfremt

$$\forall x \in M \ (x \prec a) \ .$$

Det første og det sidste element er per definition sammenlignelige med alle elementer i M.

Et element $a \in M$ kaldes *minimalt* i M, hvis

$$\forall x \in M \ (x \prec a \Rightarrow x = a) \ ,$$

og *maksimalt*, såfremt

$$\forall x \in M \ (a \prec x \Rightarrow a = x) \ .$$

Hvis M har et første element er det også minimalt, og det er det eneste minimale element i M. Hvis M ikke har noget første element, kan der være forskellige minimale elementer, men to af disse vil ikke være sammenlignelige.Ved totalt ordnede mængder er begreberne første element og minimalt element det samme.

Eksempel 1.6. For den ordnede mængde $(\mathbb{N}, |)$ er 1 det første element, og der er ingen maksimale elementer. For den ordnede delmængde $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ er der ikke noget første element og primtallene er præcis de minimale elementer.

Er $(M, \prec)$ og $(N, \prec)$ ordnede mængder kaldes en afbildning $f\colon M \to N$ *ordenstro*, såfremt

$$\forall x, y \in M \ (x \prec y \Rightarrow f(x) \prec f(y)) \ .$$

Hvis f er bijektiv og såvel f som f^{-1} er ordenstro kaldes f en *ordensisomorfi*. Ved en ordensisomorfi overføres alle egenskaber defineret i henhold til ordensrelationen i M til N. Hvis f.eks. $a \in M$ er det første element i $A \subseteq M$, så er $f(a)$ det første element i $f(A)$.

Opgaver til §1

1.1. Lad $f : M \to N$ være en surjektiv afbildning. Vis, at mængden

$$R_f = \{(x, y) \in M \times M \mid f(x) = f(y)\}$$

er en ækvivalensrelation, der svarer til at

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \quad \text{for} \quad x, y \in M\ .$$

Vis, at den tilhørende klasseinddeling er $\{f^{-1}(n) \mid n \in N\}$.

Vis, at man til en vilkårlig ækvivalensrelation i en mængde M altid kan konstruere en mængde N og en surjektiv afbildning $f : M \to N$, så den oprindelige ækvivalensrelation er lig med R_f.

1.2. Lad $(G, +, 0)$ være en abelsk gruppe og P en delmængde af G. Vis, at relationen

$$R = \{(x, y) \in G \times G \mid y - x \in P\}\ ,\quad x \prec y \Leftrightarrow (x, y) \in R$$

er en ordensrelation i G hvis og kun hvis P har egenskaberne

(i) $0 \in P$, (ii) $P \cap (-P) = \{0\}$, (iii) $P + P \subseteq P$.

Vis, at hvis P har disse egenskaber så gælder

(a) $P = \{x \in G \mid 0 \prec x\}$.
(b) $\forall x, y, z \in G\ (x \prec y \Leftrightarrow x + z \prec y + z)$.

Gruppen kaldes en *ordnet gruppe.*

Vis, at ordensrelationen er total hvis og kun hvis $P \cup (-P) = G$.

1.3. Lad $(M_i)_{i \in I}$ være en familie af mængder og antag, at der for hvert $i \in I$ er defineret en ordensrelation $\prec_i$ i M_i.

Vis at produktmængden

$$M = \prod_{i \in I} M_i := \{(m_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I (m_i \in M_i)\}$$

er en ordnet mængde ved relationen

$$(m_i)_{i \in I} \prec (n_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \forall i \in I\ (m_i \prec_i n_i)$$

kaldet *produktordningen.*

1.4. *Leksikografisk ordning.* Lad M_1 og M_2 være to ordnede mængder, hvor ordensrelationen i begge mængder betegnes $\leq$, og på sædvanlig måde betyder $x < y$ at $x \leq y$ og $x \neq y$. Vis, at relationen

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < y_1) \vee ((x_1 = y_1) \wedge (x_2 \leq y_2))$$

er en ordensrelation i $M_1 \times M_2$. Vis, at hvis M_1 og M_2 er totalt ordnet så er også $M_1 \times M_2$ totalt ordnet.

Generaliser ordningen til produkter af n ordnede mængder og forklar navnet leksikografisk ordning.

§2. Ækvipotente mængder.

2.1. Ækvipotens. Kardinaltal.

Vi skal nedenfor definere en ordensrelation mellem mængder. Dermed får vi formelt brug for mængden Ω af alle mængder, men det leder til et paradoks på følgende måde: Vi betragter

$$S = \{A \in \Omega \mid A \notin A\} \ ,$$

altså mængden af mængder A, der ikke er element i sig selv. Så gælder åbenbart

$$S \in S \Leftrightarrow S \notin S \ ,$$

hvilket er absurd. Dette er indholdet af Bertrand Russells paradoks (1904), og det gav anledning til megen skepsis overfor mængdelæren i begyndelsen af 1900-tallet. Problemet er analogt til kasernebarberen, der får ordre til at barbere alle mænd på kasernen, der ikke barberer sig selv. Bliver kasernebarberen barberet? Man undgår paradokser af ovennævnte type ved at tale om klasser af mængder. Visse klasser af mængder er igen mængder men ikke alle. F.eks. er klassen af delmængder af en given mængde en mængde, men klasserne Ω og S er ikke mængder. Vi vil ikke gøre noget forsøg på at præcisere, hvad der er klasser, og hvad der er mængder. Noget sådant vil kræve en aksiomatisk indførelse af mængdelæren.

Der er imidlertid ikke noget til hinder for at tale om relationer i klasser, så de foregående bemærkninger om relationer kan anvendes på f.eks. klassen af alle mængder.

Vi skal diskutere hvad det vil sige, at to mængder har lige mange elementer. For endelige mængder er vi ikke i tvivl – vi tæller –, men tællearbejdet er overflødigt, hvis vi er i stand til at parre elementerne i de to mængder. I et arbejde fra 1638 betragter Galilei to liniestykker af forskellig længde og spørger, om det længste indeholder flere punkter end det korteste. Han svarer, at det ikke har nogen mening om uendelige mængder at sige, at den ene indeholder flere eller færre eller lige så mange elementer som den anden, og han fortsætter med følgende argument: Det synes anskueligt klart, at der findes langt flere naturlige tal end kvadrattal, og dog kan man hævde, at der er lige mange; thi til ethvert kvadrattal svarer et naturligt tal nemlig dets kvadratrod, og til ethvert naturligt tal svarer et kvadrattal nemlig dets kvadrat. Sagt med moderne terminologi: Afbildningen $n \mapsto n^2$ er en bijektiv afbildning af $\mathbb{N}$ på mængden K af kvadrattal.

Det er præcis den definition Georg Cantor (1845-1918) benyttede på "ligestorhed" eller ækvipotens af mængder i sine banebrydende undersøgelser over uendelige mængder omkring 1870. Cantors ideer mødte stor modstand bl.a. fra Kronecker og modstanden var utvivlsomt medvirkende til Cantors nervesammenbrud og depressioner. Hilbert støttede Cantors teori og udtalte: Ingen skal fordrive os fra det paradis, som Cantor har skabt.

Definition 2.1. To mængder kaldes *ækvipotente*, hvis der findes en bijektiv afbildning af den ene mængde på den anden. Herved defineres en ækvivalensrelation kaldet ækvipotens i klassen af alle mængder. Ved et *kardinaltal* forstås en ækvivalensklasse af ækvipotente mængder. For en mængde M betegner $\operatorname{card} M$ den ækvivalensklasse, der indeholder M.

For to mængder M og N betyder $\operatorname{card} M = \operatorname{card} N$ altså, at M og N er ækvipotente.

Hvis en mængde M har n elementer, så har alle med M ækvipotente mængder også n elementer, og derfor betegner man ofte ækvivalensklassen med n, man skriver altså

$$\operatorname{card} M = n\ .$$

Også for andre ækvivalensklasser har man indført særlige symboler. Således betegner $\aleph_0$ og $\aleph$ ækvivalensklasserne, der indeholder henholdsvis $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$. (Symbolet $\aleph$ læses alef og er det første bogstav i det hebræiske alfabet).

At der om en mængde M gælder $\operatorname{card} M = \aleph_0$ betyder altså, at M er ækvipotent med $\mathbb{N}$, og man siger, at M er *numerabel*. En mængde der er endelig eller numerabel kaldes *tællelig* eller *højst numerabel*.

Mængder M med $\operatorname{card} M = \aleph$ er ækvipotente med $\mathbb{R}$ og siges at have *kontinuets mægtighed*. Det er klart, at alle åbne intervaller er ækvipotente med $\mathbb{R}$, f.eks. er $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ en bijektiv afbildning, men at også $]0,1]$ er ækvipotent med $]0,1[$ kan ses f.eks. ved følgende afbildning $f :]0,1] \to]0,1[$, der opfylder $f(1/n) = 1/(n+1)$, $n \geq 1$ og $f(x) = x$ for $x \neq 1/n$, $n \geq 1$. Man ser nu let, at alle intervaller, der indeholder mere end et punkt, er ækvipotente (opg. 2.1). Cantor viste, at mængden af reelle tal er *overtællelig* i betydningen ikke tællelig. Vi kan gengive hans bevis på følgende måde. Lad $x_1, x_2, \dots$ være en vilkårlig følge af tal fra $]0,1[$ og skriv dem som uendelige decimalbrøker

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, x_{11}x_{12}x_{13}\dots \\ x_2 &= 0, x_{21}x_{22}x_{23}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

hvor cifrene $x_{ij} \in \{0,1,\dots,9\}$. Vi kan nu opskrive en uendelig decimalbrøk $y = 0, y_1y_2y_3\dots$ som er forskellig fra tallene $x_1, x_2, \dots$. Vi skal blot vælge cifferet y_1 så $|x_{11} - y_1| \geq 2$, cifferet y_2 så $|x_{22} - y_2| \geq 2$, osv. (Hvis vi kun krævede $|x_{ii} - y_i| \geq 1$ kunne vi være uheldige: $x_1 = 0,299\cdots = 0,300\cdots$). En følge af tal fra $]0,1[$ kan altså ikke indeholde alle tal fra $]0,1[$.

Definition 2.2. For to mængder M og N defineres at $\operatorname{card} M \leq \operatorname{card} N$, hvis der findes en injektiv afbildning f af M ind i N.

Det er klart, at der herved er defineret en præordensrelation i klassen af kardinaltal. Den følgende sætning viser, at $\leq$ faktisk er en ordensrelation.

2.3. Felix Bernsteins ækvivalenssætning (1897). *Hvis der om to mængder M og N gælder* $\operatorname{card} M \leq \operatorname{card} N$ *og* $\operatorname{card} N \leq \operatorname{card} M$*, så er M og N ækvipotente.*

Bevis. Der findes injektive afbildninger $f\colon M \to N$ og $g\colon N \to M$. Vi indfører mængden

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (g \circ f)^n (M \backslash g(N))$$

og afbildningen

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for} \quad x \in A\,, \\ g^{-1}(x) & \text{for} \quad x \in M \backslash A\,, \end{cases}$$

hvilket har mening da $g(N) \supseteq M \setminus A$, som følger af at $A \supseteq M \setminus g(N)$. Vi påstår nu, at h er en bijektiv afbildning af M på N.

Injektiviteten kan kun gå galt ved at

$$f(x) = g^{-1}(y) \quad \text{for} \quad x \in A,\, y \in M \backslash A\ ,$$

men dette kræver, at $y = g \circ f(x) \in g \circ f(A) \subseteq A$, og er altså umuligt.

Surjektiviteten følger af at

$$N \backslash f(A) \subseteq g^{-1}(M \backslash A)\ .$$

Denne inklusion ses således:

Hvis $x \notin f(A)$ vil også $g(x) \notin g \circ f(A)$ fordi g er injektiv, men da

$$A = g \circ f(A) \cup (M \backslash g(N))\ ,$$

følger videre at $g(x) \notin A$, altså $x \in g^{-1}(M \backslash A)$. $\square$

Vi viser dernæst, at der ikke findes noget største kardinaltal. Som ved tal skriver vi $\operatorname{card} M < \operatorname{card} N$, hvis der gælder $\leq$ og $\neq$.

2.4. Cantors sætning. *For en vilkårlig mængde M gælder*

$$\operatorname{card} M < \operatorname{card} \mathcal{P}(M) \ ,$$

hvor $\mathcal{P}(M)$ er mængden af delmængder af M.

Bevis. Der gælder klart $\operatorname{card} M \leq \operatorname{card} \mathcal{P}(M)$, idet afbildningen, der til $x \in M$ knytter delmængden $\{x\}$ af M, er injektiv.

Vi antager nu, at der findes en bijektiv afbildning f af M på $\mathcal{P}(M)$. Vi betragter delmængden

$$A = \{x \in M \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(M) \ ,$$

og da f specielt er surjektiv, findes et element $a \in M$ så $f(a) = A$. Der gælder da

$$a \in A \Leftrightarrow a \notin f(a) = A \ ,$$

hvilket er en modstrid.

Der må altså gælde $\operatorname{card} M < \operatorname{card} \mathcal{P}(M)$. $\square$

Vi minder om, at for to mængder X og Y betyder X^Y mængden af alle afbildninger af Y ind i X.

2.2. Regning med kardinaltal.

Vi får brug for følgende lemma:

Lemma 2.5. *Lad der være givet fire mængder M_i, N_i, $i = 1, 2$, opfyldende $\operatorname{card} M_i = \operatorname{card} N_i$, $i = 1, 2$. Så er*

$$\begin{array}{lrcl} & \operatorname{card} M_1 \times M_2 & = & \operatorname{card} N_1 \times N_2 \ , \\ & \operatorname{card} M_1^{M_2} & = & \operatorname{card} N_1^{N_2} \ , \\ \textit{og} & \operatorname{card} M_1 \cup M_2 & = & \operatorname{card} N_1 \cup N_2 \ , \end{array}$$

det sidste under forudsætning af at $M_1 \cap M_2 = N_1 \cap N_2 = \varnothing$.

Bevis. Lad φ_i være en bijektiv afbildning af M_i på N_i, $i = 1, 2$. Så er $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ en bijektiv afbildning af $M_1 \times M_2$ på $N_1 \times N_2$ givet ved

$$\varphi((m_1, m_2)) = (\varphi_1(m_1), \varphi_2(m_2)) \ ,$$

og $h \to \varphi_1 \circ h \circ \varphi_2^{-1}$ definerer en bijektiv afbildning af $M_1^{M_2}$ på $N_1^{N_2}$. Endelig definerer

$$\psi(m) = \begin{cases} \varphi_1(m), & \text{for} \quad m \in M_1 \\ \varphi_2(m), & \text{for} \quad m \in M_2 \end{cases}$$

en bijektiv afbildning af $M_1 \cup M_2$ på $N_1 \cup N_2$ under forudsætningen $M_1 \cap M_2 = N_1 \cap N_2 = \varnothing$. $\square$

Lemmaet viser, at det har mening at definere produkt, potens og sum af to kardinaltal α og β ved

$$\alpha\beta = \alpha \cdot \beta = \operatorname{card} A \times B$$
$$\alpha^\beta = \operatorname{card} A^B$$
$$\alpha + \beta = \operatorname{card} A \cup B\ ,$$

hvor A og B er vilkårlige mængder med $\operatorname{card} A = \alpha$, $\operatorname{card} B = \beta$, idet man dog forudsætter at $A \cap B = \varnothing$ ved additionen. Vi bemærker, at det altid er muligt at finde disjunkte repræsentanter for to kardinaltal α og β, vi skal blot tage $A \times \{1\}$ og $B \times \{2\}$, hvor A og B er repræsentanter for α og β.

Herved udvides definitionen af sum og produkt af naturlige tal til vilkårlige kardinaltal, og det er klart, at de kommutative og associative love vedbliver at gælde. Bemærk også at

$$\underbrace{\alpha + \ldots + \alpha}_{n \ \text{addender}} = n \cdot \alpha \quad \text{og at} \quad \underbrace{\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{n \ \text{faktorer}} = \alpha^n\ .$$

Der gælder imidlertid helt specielle regneregler for uendelige kardinaltal (også kaldet *transfinite* kardinaltal). F.eks. gælder følgende resultat

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0\ ,$$

og det kan naturligvis udvides til et vilkårligt endeligt antal af faktorer og addender.

Den første påstand kommer ud på at $\mathbb{N}^2$ er ækvipotent med $\mathbb{N}$, hvilket følger af opstillingen

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots \\ \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots \\ \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \cdots \\ \\ . & . & . & \\ . & . & . & \end{array}$$

ved hvilken $\mathbb{N}^2$ stilles i rækkefølgen $(1,1)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(3,1)$, $(2,2),\dots$.
Den anden påstand følger f.eks. af spaltningen

$$\mathbb{N} = \{2n|n \in \mathbb{N}\} \cup \{2n-1|n \in \mathbb{N}\} \, .$$

Vi skal senere generalisere dette resultat til vilkårlige transfinite kardinaltal, men dette bygger på *udvalgsaksiomet* som igen hænger nøje sammen med *velordnede mængder*.

Opgaver til §2

2.1. Vis, at alle intervaller, der indeholder mere end et punkt, er ækvipotente med $\mathbb{R}$.

2.2. Lad M være en uendelig mængde og $E \subseteq M$ en endelig mængde. Vis, at M og $M \backslash E$ er ækvipotente. (På "Hilberts hotel" er der altid plads til en til). Lad N være tællelig. Vis, at $N \cup M$ og M er ækvipotente.

2.3. Illustrér Bernstein's ækvivalenssætning idet $M =]0,1[$, $N = [0,1]$, $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x$.

2.4. Vis, at for en vilkårlig mængde M er $\mathcal{P}(M)$ ækvipotent med $\{0,1\}^M$, og vis derved, at

$$\operatorname{card} \mathcal{P}(M) = 2^{\operatorname{card} M} .$$

2.5. Vis, at $\mathbb{Q}$ er numerabel. Vis dernæst, at en vilkårlig familie J af parvis disjunkte åbne intervaller er tællelig.

2.6. Lad M være en numerabel mængde. Vis, at mængden $\mathcal{P}_e(M)$ af endelige delmængder af M er numerabel.

2.7. Vis, at mængden af alle polynomier med heltallige koefficienter er numerabel. Et komplekst tal kaldes *algebraisk*, hvis det er rod i et polynomium med heltallige koefficienter som ikke alle er 0. De øvrige komplekse tal kaldes *transcendente*. Vis, at der findes transcendente tal ved at vise, at mængden af algebraiske tal er numerabel. (G. Cantor 1874).

2.8. Vis, at $\mathbb{R}^2$ er ækvipotent med $\mathbb{R}$, altså $\aleph^2 = \aleph$. Det er nok at vise, at $]0,1]^2$ er ækvipotent med $]0,1]$. Udfyld detaljerne i følgende bevisskitse. Ethvert tal $x \in]0,1]$ har en og kun en fremstilling som uendelig decimalbrøk, som ikke ender med lutter nuller. Lad $x = 0,x_1x_2\dots$ være denne fremstilling af x, idet $x_1, x_2, \dots$ ikke nødvendigvis er cifrene, men x_1 er de første decimaler efter kommaet til og med den første, der er forskelligt fra 0; x_2 er de følgende cifre til og med det første, der er forskelligt fra 0, osv. Hvis $y = 0,y_1y_2\dots \in]0,1]$ har samme betydning er afbildningen $(x,y) \mapsto 0,x_1y_1x_2y_2\dots$, hvor grupperne anføres skiftevis, en bijektiv afbildning af $]0,1]^2$ på $]0,1]$. Hvorfor kan dette argument ikke bruges, hvis $x_1, x_2, \dots$ betegner cifrene? (Resultatet skyldes G. Cantor (1877), som meddelte resultatet til Dedekind med ordene: Je le vois, mais je ne le crois pas.)

2.9. Vis, at $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ er ækvipotent med $\mathbb{R}$, altså $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$. *Vink.* Det er nok at vise, at $]0,1]^{\mathbb{N}}$ er ækvipotent med $]0,1]$, og betragt afbildningen

$$0, x_1 x_2 x_3 \cdots \mapsto (0, x_1 x_3 x_5 \ldots, 0, x_2 x_6 x_{10} \ldots, 0, x_4 x_{12} x_{20} \ldots, 0, x_8 x_{24} x_{40} \ldots, \ldots)$$

af $]0,1]$ på $]0,1]^{\mathbb{N}}$, hvor samme princip er brugt som i opg. 2.8. I n'te koordinat har x følgende indices $2^{n-1} + k2^n$, $k \geq 0$.

§3. Velordnede mængder.

Lad M være en ordnet mængde, og lad os bruge det sædvanlige symbol $\leq$ for ordningen i stedet for symbolet $\prec$. Dermed vil vi også skrive $x < y$ for $x \leq y$ og $x \neq y$.

Definition 3.1. Ordensrelationen $\leq$ kaldes en *velordning* og $(M, \leq)$ kaldes en *velordnet mængde*, såfremt enhver ikke tom delmængde af M har et første element.

Den tomme mængde kaldes velordnet.

Ved at betragte delmængder af M bestående af to elementer indses det, at en velordnet mængde er totalt ordnet. Enhver delmængde af en velordnet mængde er velordnet under den inducerede ordensrelation.

Mængden af naturlige tal $\mathbb{N}$ er velordnet ved den sædvanlige ordning, hvorimod $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ ikke er det. Enhver endelig mængde kan velordnes f.eks. ved at man nummererer elementerne. Det samme gælder om enhver numerabel mængde, idet den kan afbildes bijektivt på $\mathbb{N}$.

Begrebet velordnet mængde går tilbage til Cantor, som også hævdede, at enhver mængde kan velordnes. Det første strenge bevis for dette resultat (velordningssætningen) blev givet af E. Zermelo (1871-1953) i 1904. Hans bevis byggede på følgende aksiom som synes indlysende:

3.2. Udvalgsaksiomet: *Til enhver ikke tom mængde M findes en afbildning*

$$u \colon \mathcal{P}(M) \setminus \{\varnothing\} \to M$$

med egenskaben

$$\forall A \subseteq M \,, A \neq \varnothing \; (u(A) \in A) \,.$$

Afbildningen u kaldes en *udvalgsfunktion for M*, fordi den til enhver ikke tom delmængde $A \subseteq M$ knytter et element i A.

Vi viser senere, at velordningssætningen og udvalgsaksiomet er logisk ækvivalente og fortsætter her studiet af velordnede mængder.

Definition 3.3. Ved et *afsnit* i en velordnet mængde $(M, \leq)$ forstås en delmængde $V \subseteq M$ med egenskaben

$$\forall x, y \in M ((x \leq y \wedge y \in V) \Rightarrow x \in V) \,.$$

Af definitionen følger umiddelbart, at en vilkårlig foreningsmængde og en vilkårlig fællesmængde af afsnit igen er et afsnit.

For $a \in M$ sættes

$$V_M(a) = \{x \in M \mid x < a\} \,.$$

Det ses let, at $V_M(a)$ er et afsnit i M, og det kaldes det ved a bestemte afsnit.

Hele M er et afsnit, og er V et afsnit forskelligt fra M, har $M \backslash V$ et første element a, og vi har da $V_M(a) \subseteq V$. Antager vi nu, at der findes $y \in V \backslash V_M(a)$, gælder $y \in V$ og $a \leq y$, men da V er et afsnit må $a \in V$, hvilket er en modstrid.

Et afsnit i en velordnet mængde M er altså enten hele M eller af formen $V_M(a)$ for et $a \in M$.

Lemma 3.4. *Mængden af afsnit i en velordnet mængde* $(M, \leq)$ *er velordnet ved inklusion.*

Bevis. Lad $\mathcal{A}$ være en ikke tom mængde af afsnit i M. Hvis $\mathcal{A}$ har M som eneste element, er M første element i $\mathcal{A}$ ved inklusion og ellers kan mængden $\mathcal{A} \setminus \{M\}$ skrives på formen $\{V_M(x) \mid x \in A\}$, hvor A er en ikke tom delmængde af M. Hvis x_0 er første element i A er $V_M(x_0)$ første element i $\mathcal{A}$. □

Af lemmaet følger specielt, at af to afsnit i M er det ene en delmængde af det andet. Det følgende lemma viser endda, at af to afsnit i en velordnet mængde er det ene et afsnit af det andet:

Lemma 3.5. *Lad* $(M, \leq)$ *være en velordnet mængde,* N *et afsnit i* M *og* V *en delmængde af* N.

Da er V *et afsnit i* N *hvis og kun hvis* V *er et afsnit i* M.

Bevis. Det er klart, at hvis V er et afsnit i M så også i N. Hvis omvendt V er et afsnit i N, og der om $x, y \in M$ gælder $x \leq y$ og $y \in V$, så vil $x, y \in N$, da N var et afsnit i M. Heraf følger dernæst at $x \in V$. □

Den følgende sætning kaldes *princippet om transfinit induktion.* Den er meget anvendelig, når man skal vise, at en delmængde af en velordnet mængde udgør hele den velordnede mængde.

Sætning 3.6. *Lad* $(M, \leq)$ *være en velordnet mængde og* $A \subseteq M$ *en delmængde med egenskaben*

$$\forall x \in M (V_M(x) \subseteq A \Rightarrow x \in A) . \tag{TI}$$

Da er $A = M$.

Bevis. I modsat fald har $M \backslash A$ et første element x, og det medfører at $V_M(x) \subseteq A$, altså ifølge antagelsen $x \in A$, hvilket strider mod, at $x \in M \backslash A$. □

Hvis vi som velordnet mængde M benytter $(\mathbb{N}, \leq)$, reduceres princippet om transfinit induktion til en variant af det sædvanlige induktionsprincip. I et sædvanligt induktionsbevis for at $A = \mathbb{N}$ starter man med at vise, at $1 \in A$. Noget tilsvarende er overflødigt i transfinit induktion, idet første element m_1 i M automatisk tilhører A ifølge (TI). Der gælder nemlig $V_M(m_1) = \varnothing \subseteq A$, og derfor vil $m_1 \in A$.

Der findes uendelig mange ordensisomorfier af $(\mathbb{R}, \leq)$ på sig selv, bl.a. alle afbildningerne $f(x) = ax$, $a > 0$. Dette indtræffer ikke ved velordnede mængder.

Sætning 3.7. *Identiteten er den eneste ordensisomorfi af en velordnet mængde $(M, \leq)$ på sig selv.*

Bevis. Lad $\varphi \colon M \to M$ være en ordensisomorfi. Vi indser at mængden

$$E = \{x \in M \mid x = \varphi(x)\}$$

er hele M ved princippet om transfinit induktion. For $x \in M$ er x første element i $M \setminus V_M(x)$, og så er $\varphi(x)$ første element i $\varphi(M \setminus V_M(x)) = M \setminus \varphi(V_M(x))$. Hvis nu $V_M(x) \subseteq E$ er $\varphi(V_M(x)) = V_M(x)$, men så er både x og $\varphi(x)$ første element i $M \setminus V_M(x)$, altså $x = \varphi(x)$, og derfor er $x \in E$. $\square$

Vi tænker os, at $(M, \leq)$ er en ordnet mængde, og at u er en udvalgsfunktion for M.

For en delmængde $A \subseteq M$ betegner $H(A)$ mængden af *ægte majoranter* for A, dvs.

$$x \in H(A) \Leftrightarrow \forall a \in A \ \ (a < x) \ .$$

Der gælder altså $A \cap H(A) = \varnothing$ og $H(\varnothing) = M$.

En delmængde $K \subseteq M$ kaldes en *kæde*, hvis K er velordnet (under den inducerede ordensrelation), og der desuden for alle $x \in K$ gælder

$$(*) \qquad x = u(H(V_K(x))) \ ,$$

altså hvis udvalgsfunktionen vælger x blandt de ægte majoranter for $V_K(x)$. Bemærk, at $x \in H(V_K(x))$. Hvis k betegner første element i kæden K giver $(*)$ specielt $k = u(M)$, således at alle kæder har $u(M)$ som første element. Bemærk også, at $\{u(M)\}$ er en kæde.

3.8. Kædelemmaet. *Lad* K_1, K_2 *være kæder i* M *så* $K_1 \backslash K_2 \neq \varnothing$*. Så gælder* $K_2 = V_{K_1}(x_1)$*, hvor* x_1 *er første element i* $K_1 \backslash K_2$*.*

Bevis. Da $x_1 \leq k$ for alle $k \in K_1 \backslash K_2$ må gælde

$$V_{K_1}(x_1) \subseteq K_2 \ . \tag{a}$$

[Hvis $z \in K_1$, $z < x_1$ gælder $z \notin K_1 \backslash K_2$ og dermed $z \in K_2$.]

Lad os indse, at antagelsen $V_{K_1}(x_1) \neq K_2$ leder til en modstrid. På grund af antagelsen findes et første element x_2 i $K_2 \backslash V_{K_1}(x_1)$, fordi K_2 er velordnet. Dermed har vi

$$V_{K_2}(x_2) \subseteq V_{K_1}(x_1) \ , \tag{b}$$

og der gælder faktisk $=$, thi ellers findes et første element $y \in V_{K_1}(x_1) \setminus V_{K_2}(x_2)$. Om dette y gælder $y \in K_2$ på gund af (a), og $\neg(y < x_2)$ altså $x_2 \leq y$, da K_2 er totalt ordnet. Videre gælder ifølge definitionen på y at

$$V_{K_1}(y) \subseteq V_{K_2}(x_2) \ . \tag{c}$$

Her gælder faktisk $=$, thi hvis $z \in V_{K_2}(x_2)$ gælder $z \in K_1$ på grund af (b), og af $z < x_2 \leq y$ sluttes $z < y$, altså $z \in V_{K_1}(y)$.

Af kædebetingelsen $(*)$ anvendt på såvel K_1 som K_2 sluttes af $V_{K_1}(y) = V_{K_2}(x_2)$ at $y = x_2$, men da $y \in V_{K_1}(x_1)$ og $x_2 \notin V_{K_1}(x_1)$ er der modstrid, og vi slutter, at der gælder $=$ i inklusionen (b). Kædebetingelsen $(*)$ giver derefter $x_1 = x_2$, som strider mod $x_1 \notin K_2$, $x_2 \in K_2$. Dermed må der gælde lighedstegn i betingelse (a), altså $V_{K_1}(x_1) = K_2$. $\square$

Korollar 3.9. *Af to vilkårlige kæder i* M *er den ene altid et afsnit af den anden.*

Opgaver til §3

3.1. Lad M_1 og M_2 være velordnede mængder. Vis, at $M_1 \times M_2$ er velordnet i den leksikografiske ordning (jfr. opg. 1.4).

3.2. Vis sætningen: *En velordnet mængde M er ikke ordensisomorf med noget afsnit $V_M(a)$.*

Vink. Antag at $\varphi\colon M \to V_M(a)$ er en ordensisomorfi og brug transfinit induktion på mængden $E = \{x \in M \mid \varphi(x) = x\}$.

3.3. Lad $f\colon M \to N$ være injektiv. Vis, at der findes en surjektiv afbildning $g\colon N \to M$ så $g \circ f = I_M$ (identiteten på M).

Lad $f\colon M \to N$ være surjektiv. Vis (ved hjælp af udvalgsaksiomet), at der findes en injektiv afbildning $g\colon N \to M$ så $f \circ g = I_N$.

3.4. Vis, at ordensisomorfi er en ækvivalensrelation i klassen af alle velordnede mængder. En ækvivalensklasse af ordensisomorfe velordnede mængder kaldes et *ordinaltal*. Medens endelige velordnede mængder er ordensisomorfe netop hvis de har samme elementantal, så behøver ækvipotente uendelige velordnede mængder ikke være ordensisomorfe. Giv et eksempel.

§4. Induktivt ordnede mængder, Zorns lemma.

Det er vigtigt i mange grene af matematikken at kunne udtale sig om eksistensen af maksimale eller minimale elementer. Det vigtigste resultat i den retning kaldes *Zorns lemma* og er fremsat af Max Zorn (1906-1993) i 1935, men er kendt af Kuratowski allerede i 1922. Zorns lemma bygger på følgende begreb:

Definition 4.1. En ordnet mængde $(M, \leq)$ kaldes *induktivt ordnet*, såfremt *enhver totalt ordnet delmængde* $A \subseteq M$ *har en majorant*, altså såfremt der findes $x \in M$ med $a \leq x$ for alle $a \in A$.

4.2. Zorns lemma. *Enhver ikke tom induktivt ordnet mængde* $(M, \leq)$ *har et maksimalt element.*

Korollar 4.3. *Lad* $(M, \leq)$ *være en induktivt ordnet mængde og lad* $a \in M$. *Der findes et maksimalt element* $m \in M$ *så* $a \leq m$.

Bevis. Vi anvender Zorns lemma på den induktivt ordnede mængde $N = \{x \in M \mid a \leq x\}$ og bemærker, at et element $y \in N$ er maksimalt i N, hvis og kun hvis det er maksimalt i M. $\square$

Hovedsætning 4.4. *Følgende 3 udsagn er ækvivalente:*

(1) *Velordningssætningen: Enhver mængde kan velordnes.*
(2) *Udvalgsaksiomet.*
(3) *Zorns lemma.*

Bevis. "(1) $\Rightarrow$ (2)". Lad M være en ikke tom mængde. Vi ønsker at vise eksistensen af en udvalgsfunktion for M under forudsætning af, at M er udstyret med en velordning $\leq$. Enhver ikke tom delmængde $A \subseteq M$ har et første element, og betegnes dette $u(A)$, er u en udvalgsfunktion for M.

"(2) $\Rightarrow$ (3)". Lad $(M, \leq)$ være en ikke tom induktivt ordnet mængde, lad u være en udvalgsfunktion for M, og lad os betragte mængden $\{K_i \mid i \in I\}$ af alle kæder. Vi vil vise, at

$$K = \bigcup_{i \in I} K_i$$

er en kæde.

Først bemærkes, at

$$(*) \qquad V_K(x) = V_{K_i}(x) \ \text{ for } \ x \in K_i \ .$$

Til $z \in V_K(x)$ findes $j \in I$ så $z \in K_j$, og enten er $K_j \subseteq K_i$ og så er klart $z \in V_{K_i}(x)$, eller også er K_i et afsnit af K_j ifølge kædelemma 3.8. Da $x \in K_i$ og $z < x$

følger heraf at $z \in K_i$, altså igen $z \in V_{K_i}(x)$, og dermed har vi $V_K(x) \subseteq V_{K_i}(x)$. Den omvendte inklusion er triviel.

Vi kan nu let se, at K er velordnet, thi hvis $A \subseteq K$ er en ikke tom delmængde findes $i \in I$ så $A \cap K_i \neq \varnothing$, og af $(*)$ fremgår, at første element i $A \cap K_i$ også er første element i A.

Egenskaben $(*)$ viser også, at K er en kæde, og dermed er K den mest omfattende af alle kæder. Heraf følger at $H(K) = \varnothing$, thi hvis $H(K) \neq \varnothing$ og hvis $a = u(H(K))$, er $K \cup \{a\}$ en kæde der er effektivt større end K.

Da M er induktivt ordnet har K en majorant a, men a har ingen ægte majoranter da $H(K) = \varnothing$. Dette viser, at a er et maksimalt element i M.

"(3) $\Rightarrow$ (1)". Lad M være en vilkårlig ikke tom mængde, og lad $\mathcal{A}$ være mængden af delmængder $K \subseteq M$ på hvilke der findes en velordning $\leq_K$. Mængden $\mathcal{A}$ er ikke tom, idet den indeholder f.eks. alle endelige delmængder af M.

Vi indfører nu en ordensrelation $\leq$ på $\mathcal{A}$, idet vi skriver

$$(K, \leq_K) \leq (L, \leq_L)$$

hvis K er et afsnit af L, og hvis ordensrelationen $\leq_K$ er restriktionen til K af ordensrelationen $\leq_L$ på L. Vi overbeviser os nu om, at $\mathcal{A}$ herved er induktivt ordnet. Vi gør det omhyggeligt, da det er et typisk eksempel på anvendelse af Zorns lemma.

Lad $\{K_i \mid i \in I\}$ være en totalt ordnet delmængde af $\mathcal{A}$ og lad velordningen på K_i være betegnet $\leq_i$. For at finde en majorant for $\{K_i \mid i \in I\}$ i $\mathcal{A}$ sættes

$$K = \bigcup_{i \in I} K_i \ .$$

Til to vilkårlige elementer $x, y \in K$ findes $i, j \in I$ så $x \in K_i$, $y \in K_j$, men forudsætningen om total ordning sikrer, at $(K_i, \leq_i) \leq (K_j, \leq_j)$ (eller omvendt) og derfor vil $x, y \in K_j$. Ved fastsættelsen

$$x \leq y \Leftrightarrow x \leq_j y$$

defineres en ordensrelation i K, idet $x \leq_j y \Leftrightarrow x \leq_k y$ hvis også $x, y \in K_k$. Relationen $\leq$ er en velordning på K, thi hvis A er en ikke tom delmængde af K findes $i \in I$ så $A \cap K_i \neq \varnothing$, og som under "(2) $\Rightarrow$ (3)" ses det, at første element i $A \cap K_i$ er første element i A. Dermed er $(K, \leq) \in \mathcal{A}$ og det er let at se, at $(K, \leq)$ er en majorant for $\{K_i \mid i \in I\}$.

Et maksimalt element $(L, \leq_L)$ i $(\mathcal{A}, \leq)$ må opfylde $L = M$, thi ellers findes $a \in M \backslash L$, og ved at betragte mængden $L \cup \{a\}$ forsynet med velordningen $x \leq_L y$

for $x, y \in L$, $x < a$ for $x \in L$, når vi til en modstrid med maksimaliteten af $(L, \leq_L)$. Der findes altså en velordning af M. $\square$

Vi har hidtil arbejdet med mængder ud fra det intuitive standpunkt, hvorefter en mængde er en velafgrænset samling af elementer. Skal man udtale sig præcist om mængdelæren og udvalgsaksiomets stilling, er det nødvendigt at aksiomatisere mængdelæren, nøjagtig som man kan aksiomatisere geometrien eller teorien for reelle tal. En sådan aksiomatisering af mængdelæren er bl.a. udført af Zermelo og Fraenkel. I 1938 viste K. Gödel (1906-1978), at hvis Zermelo-Fraenkels aksiomsystem er konsistent (dvs. modsigelsesfrit) – men det ved man ikke om det er – så er også Zermelo-Fraenkels aksiomer plus udvalgsaksiomet et konsistent system.

I 1963 har amerikaneren P.J. Cohen vist, at negationen af udvalgsaksiomet er konsistent med Zermelo-Fraenkels aksiomer. Hermed indtager udvalgsaksiomet samme stilling i mængdelæren som parallelaksiomet i geometrien.

Udvalgsaksiomet og dermed Zorns lemma og velordningssætningen accepteres af de fleste matematikere, og en gennemgang af den moderne matematik viser at mange nøgleresultater (f.eks. Tychonoffs sætning og Hahn-Banachs sætning) bygger på udvalgsaksiomet. Opgiver man derfor dette aksiom, må man opgive væsentlige dele af den moderne matematik eller i det mindste nøjes med mindre generelle resultater.

Der findes dog matematikere, der ikke accepterer udvalgsaksiomet og som kun anerkender konstruktive eksistensbeviser, nemlig den intuitionistiske retning, hvis betydeligste talsmand var hollænderen Brouwer (1881-1966). Han kom i bitter strid med Hilbert (1862-1943) på grund af dette.

Lad os give et eksempel på en bevismetode som intuitionisterne ikke anerkender: Vi ønsker at bevise, at uendelig mange naturlige tal har en vis egenskab E. Vi gør det indirekte og antager, at der findes et naturligt tal N så ingen tal $n \geq N$ har egenskaben E. Vi viser dernæst, at denne antagelse leder til en modstrid. Hermed har vi bevist, at uendelig mange naturlige tal har egenskaben. Ræsonnementet bygger på det klassiske princip "tertium non datur", altså "en tredie mulighed findes ikke": Hvis et udsagn ikke er falsk er det sandt.

Intuitionisterne vil derimod godtage et bevis som angiver et tal med egenskaben E og en metode til ud fra et tal med egenskaben E at konstruere et større tal med egenskaben E.

Opgaver til §4

4.1. Vis, at enhver mængde kan velordnes på en sådan måde, at den har et sidste element.

4.2. Vis følgende variant af Zorns lemma: Lad $(M, \leq)$ være en ordnet mængde med egenskaben, at enhver velordnet delmængde har en majorant. Så har $(M, \leq)$ et maksimalt element.

4.3. For et mængdesystem $(A_i)_{i \in I}$ betegner produktmængden $\prod_{i \in I} A_i$ mængden af alle afbildninger $f \colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ med egenskaben $\forall\, i \in I (f(i) \in A_i)$.

Vis, at udsagnet: "For ethvert ikke tomt mængdesystem $(A_i)_{i \in I}$ af ikke tomme mængder er $\prod_{i \in I} A_i$ ikke tom" er logisk ækvivalent med udvalgsaksiomet.

4.4. *Det første ikke tællelige ordinaltal* Ω.

(i) Vis, at der findes en ikke tællelig velordnet mængde Ω, så ethvert afsnit $V_\Omega(x)$, $x \in \Omega$ er tællelig.

Vink. Konstruer først en ikke tællelig velordnet mængde M, for hvilken der findes $x \in M$, så $V_M(x)$ er ikke tællelig. Betragt så $\{x \in M \mid V_M(x) \text{ er ikke tællelig}\}$.

(ii) Vis, at enhver tællelig delmængde A af Ω har en majorant og dermed en mindste majorant i Ω.

Vink. Vis, at $\bigcup_{x \in A} V_\Omega(x) \neq \Omega$.

§5. Anvendelser af Zorns lemma.

5.1. Transfinite kardinaltal.

Ved hjælp af velordningssætningen er det muligt at vise følgende resultat om kardinaltallene (beviset forbigås).

Sætning 5.1. *Klassen af kardinaltal er velordnet.*

Ifølge sætningen kan vi opstille kardinaltallene i rækkefølge, hvoraf begyndelsen ser således ud:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$$

idet som tidligere $\aleph_0 = \operatorname{card} \mathbb{N}$, og derefter er $\aleph_1$ det umiddelbart efterfølgende osv.

Man spørger nu sig selv, hvor man i denne rækkefølge skal placere kardinaltallet $\aleph = \operatorname{card} \mathbb{R}$. Det er klart at $\aleph_1 \leq \aleph$. *Kontinuumshypotesen*, der blev opstillet af Cantor, udsiger at $\aleph = \aleph_1$, eller med andre ord, at enhver delmængde $A \subseteq \mathbb{R}$ enten er endelig, numerabel eller ækvipotent med $\mathbb{R}$.

Kontinuumshypotensen er senere kendt som det første af de 23 problemer Hilbert opstillede ved matematikerkongressen i Paris år 1900. En del af problemerne er i dag løst, andre er stadig uløste.

I 1938 viste Gödel, at Zermelo-Fraenkels aksiomer sammen med udvalgsaksiomet og kontinuumshypotesen udgør et konsistent system under forudsætning af, at Zermelo-Fraenkels aksiomer er konsistente.

Hilberts 1. problem blev løst af P.J. Cohen i 1963, idet han beviste, at kontinuumshypotesen ikke kan udledes af Zermelo-Fraenkels aksiomsystem inklusive udvalgsaksiomet. Der er altså mulighed for at opbygge mængdeteorier med og uden kontinuumshypotesen i analogi med euklidisk og ikke-euklidisk geometri.

Vi viser nu forskellige resultater om regning med *transfinite kardinaltal*, dvs. kardinaltal $\geq \aleph_0$.

Sætning 5.2. *Der gælder $\alpha + \alpha = \alpha$ for alle transfinite kardinaltal α.*

Bevis. Lad A være en mængde med $\operatorname{card} A = \alpha$. Det er nok at vise, at $A \times \{0,1\}$ er ækvipotent med A.

Lad $\mathcal{F}$ være mængden af par $(X \times \{0,1\}, f)$, hvor X er en delmængde af A og f er en bijektiv afbildning af $X \times \{0,1\}$ på X. Mængden $\mathcal{F}$ er ikke tom, idet numerable delmængder $X \subseteq A$ er ækvipotente med $X \times \{0,1\}$ ($\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$). Vi indfører en ordensrelation på $\mathcal{F}$ ved

$$(X \times \{0,1\}, f) \leq (Y \times \{0,1\}, g)$$

hvis $X \subseteq Y$, og hvis f er g's restriktion til $X \times \{0,1\}$. Det er ligetil at bevise, at $(\mathcal{F}, \leq)$ er induktivt ordnet, så Zorns lemma sikrer eksistensen af et maksimalt element $(M \times \{0,1\}, h)$ i $\mathcal{F}$. Specielt gælder altså $\operatorname{card}(M \times \{0,1\}) = \operatorname{card} M$, og det vil derfor være nok at vise, at $\operatorname{card} A = \operatorname{card} M$. Antag, at $\operatorname{card} M < \operatorname{card} A$. Mængden $A \backslash M$ må være uendelig, jfr. opg. 2.2, og dermed indeholder $A \backslash M$ en numerabel delmængde Y. Da er også $Y \times \{0,1\}$ numerabel, og der findes følgelig en bijektiv afbildning f af $Y \times \{0,1\}$ på Y. Sammenstykkes de to afbildninger h og f på oplagt måde, fås en bijektiv afbildning af $(M \cup Y) \times \{0,1\}$ på $M \cup Y$, – hvilket strider mod maksimaliteten af $(M \times \{0,1\}, h)$. $\square$

Korollar 5.3. *Lad α og β være kardinaltal opfyldende $\alpha \leq \beta$, $\aleph_0 \leq \beta$. Så er $\alpha + \beta = \beta$.*

Bevis. Der gælder $\alpha + \beta \leq \beta + \beta = \beta$, og uligheden $\alpha + \beta \geq \beta$ er klar. Påstanden følger nu af at $\leq$ er en ordensrelation. $\square$

Sætning 5.4. *Der gælder $\alpha^2 = \alpha$ for ethvert transfinit kardinaltal α.*

Bevis. Lad A være en mængde med $\operatorname{card} A = \alpha$. Vi betragter mængden $\mathcal{G}$ af par $(X \times X, f)$, hvor $X \subseteq A$, og f er en bijektion af $X \times X$ på X. Der findes sådanne par da $\aleph_0^2 = \aleph_0$. Som ordensrelation på $\mathcal{G}$ indføres

$$(X \times X, f) \leq (Y \times Y, g) ,$$

hvis $X \subseteq Y$ og hvis f er lig g's restriktion til $X \times X$. Det ses at Zorns lemma kan anvendes og lad $(M \times M, h)$ være et maksimalt element i $\mathcal{G}$. Specielt gælder altså $\operatorname{card}(M \times M) = \operatorname{card} M$, og det vil derfor være nok at vise, at $\operatorname{card} A = \operatorname{card} M$. Antag at $\operatorname{card} M < \operatorname{card} A$. Det er klart at $A \backslash M$ er uendelig (jfr. opg. 2.2), og ved brug af Korollar 5.3 sluttes, at der også gælder $\operatorname{card} M < \operatorname{card} A \backslash M$. Der findes derfor en delmængde N af $A \backslash M$ med $\operatorname{card} N = \operatorname{card} M$. Vi bemærker nu, at

$$(M \cup N) \times (M \cup N) = (M \times M) \cup (M \times N) \cup (N \times M) \cup (N \times N) ,$$

samt at

$$\operatorname{card} M \times N = \operatorname{card} N \times M = \operatorname{card} N \times N = \operatorname{card} N ,$$

idet $\operatorname{card} N = \operatorname{card} M = \operatorname{card} M \times M$. Ved brug af Sætning 5.2 følger herefter, at der findes en bijektiv afbildning k af $(M \times N) \cup (N \times M) \cup (N \times N)$ på N. Afbildningerne h og k kan derfor på oplagt måde stykkes sammen til en bijektiv afbildning af $(M \cup N) \times (M \cup N)$ på $M \cup N$, – hvilket strider mod maksimaliteten af $(M \times M, h)$. $\square$

5.2. Baser i vektorrum. Dimension.

Lad $(E, +, L)$ være et vektorrum over et kommutativt legeme L. Et vektorsystem $(e_i)_{i\in I}$ kaldes som bekendt en *basis* for E over L, hvis det både er *lineært uafhængigt* og *frembringer* E, altså hvis hvert element $x \in E$ er en linearkombination af endelig mange vektorer e_i og denne fremstilling er entydig.

Det er kendt fra Matematik 1, at ethvert endelig dimensionalt vektorrum har en basis. Zorns lemma tillader nu at generalisere dette resultat:

Sætning 5.5. *Ethvert vektorrum $(E, +, L)$ med $E \neq \{\underline{0}\}$ har en basis.*

Bevis. Mængden $\mathcal{U}$ af lineært uafhængige vektorsystemer i E er ordnet ved inklusion. Hvis $(U_k)_{k\in K}$ er en totalt ordnet delmængde af $\mathcal{U}$ er også

$$U = \bigcup_{k\in K} U_k$$

et lineært uafhængigt system, idet endelig mange elementer i U ligger i endelig mange U_k og derfor i det mest omfattende af disse systemer. Zorns lemma viser nu eksistensen af maksimale elementer i den induktivt ordnede mængde $\mathcal{U}$. Et maksimalt lineært uafhængigt vektorsystem $V = (e_i)_{i\in I}$ må imidlertid være en basis for E, thi hvis det af V udspændte underrum F er et ægte underrum i E, kan vi vælge $e \in E\backslash F$ og dermed er $V \cup \{e\} \in \mathcal{U}$, i strid med maksimaliteten af V. □

Af Korollar 4.3 fås, at ethvert lineært uafhængigt system i E kan udvides til en basis for E, dvs. *suppleringssætningen* gælder uindskrænket.

Det er kendt fra Matematik 1, at hvis E har en endelig basis på n elementer, vil alle baser have n elementer, og n kaldes dimensionen af E over L. (Det kendte bevis for $L = \mathbb{R}$ gælder uændret).

Vi vil nu indse, at to vilkårlige uendelige baser er ækvipotente, og dermed har det mening af definere *dimensionen* af E som

$$\dim E = \operatorname{card} I \ ,$$

hvor $(e_i)_{i\in I}$ er en basis for E.

Sætning 5.6. *To uendelige baser $(e_i)_{i\in I}$ og $(f_j)_{j\in J}$ for et vektorrum E er ækvipotente.*

Bevis. Hver vektor e_i kan på entydig måde skrives som

$$e_i = \sum_{j\in A_i} \lambda_j f_j$$

hvor A_i er en endelig delmængde af J og $\lambda_j \in L \setminus \{0\}$. Hvert $j \in J$ ligger i mindst et A_i, $i \in I$, thi fandtes et $j_0 \in J$ så

$$j_0 \notin \bigcup_{i \in I} A_i \ ,$$

ville $(f_j)_{j \in J \setminus \{j_0\}}$ frembringe E, hvilket strider mod at $(f_j)_{j \in J}$ er lineært uafhængigt. Der gælder altså

$$J = \bigcup_{i \in I} A_i \ .$$

Lad nu u være en udvalgsfunktion for I,

$$u : \mathcal{P}(I) \setminus \{\varnothing\} \to I \ ,$$

og lad os for hvert $i \in I$ vælge en injektiv afbildning φ_i af A_i på et afsnit af $\mathbb{N}$. Vi kan da konstruere en injektiv afbildning $\varphi : J \to I \times \mathbb{N}$ ved fastsættelsen

$$\varphi(j) = (i_0, \varphi_{i_0}(j)) \ ,$$

hvor $i_0 = u(\{i \in I \mid j \in A_i\})$.

Heraf fås

$$\operatorname{card} J \leq \operatorname{card} I \times \mathbb{N} \leq \operatorname{card} I \times I = \operatorname{card} I$$

på grund af Sætning 5.4. Af symmetrigrunde gælder også $\operatorname{card} J \geq \operatorname{card} I$, altså $\operatorname{card} I = \operatorname{card} J$. $\square$

Mængden af reelle tal $\mathbb{R}$ kan opfattes som et vektorrum over de rationale tals legeme $\mathbb{Q}$. Enhver basis i dette vektorrum kaldes en *Hamelbasis*, og er altså et system af reelle tal $(e_i)_{i \in I}$, og ethvert reelt tal x kan på præcis en måde skrives

$$x = \sum_{i \in I} q_i e_i$$

hvor $q_i \in \mathbb{Q}$ er 0 for alle $i \in I$ på nær endelig mange.

Til hver basisvektor e_i svarer en $\mathbb{Q}$-lineær afbildning $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ givet ved

$$p_i(x) = q_i$$

altså ved koefficienten til e_i i ovennævnte fremstilling af x. Afbildningerne p_i : $\mathbb{R} \to \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ tilfredsstiller specielt den klassiske funktionalligning

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \ ,$$

og er *diskontinuerte*, idet billedet af $\mathbb{R}$ ved en kontinuert reel funktion er et interval.

De kontinuerte løsninger til denne funktionalligning er som bekendt funktionerne $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$. Ved hjælp af udvalgsaksiomet er det hermed vist, at der findes andre løsninger end disse til funktionalligningen, men det pointeres, at det er umuligt at angive en eksplicit formel for sådanne funktioner.

Opgaver til §5

5.1. Vis følgende regneregler for kardinaltal α, β, γ:

(i) $\alpha^\beta \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$
(ii) $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \beta^\gamma$
(iii) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

5.2. Lad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ være fire kardinaltal. Vis, at hvis $\alpha \leq \beta$ og $\gamma \leq \delta$, så er også

$$\alpha^\gamma \leq \beta^\delta .$$

5.3. Lad α og β være kardinaltal opfyldende $1 < \alpha \leq 2^\beta$, $\aleph_0 \leq \beta$. Vis, at

$$\alpha^\beta = 2^\beta .$$

5.4. Lad M være en uendelig mængde, $\mathcal{P}_e(M)$ mængden af endelige delmængder af M. Vis, at

$$\operatorname{card} M = \operatorname{card} \mathcal{P}_e(M) .$$

5.5. Idet $\aleph = \operatorname{card} \mathbb{R}$ skal man vise, at

$$\aleph = 2^{\aleph_0} .$$

Af opgave 5.3 følger da, at

$$\aleph = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0} .$$

5.6. Vis, at $\operatorname{card} A = \aleph$ for enhver ikke tom åben delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

5.7. Vis, at ethvert ægte ideal i en ring med etelement er indeholdt i et maksimalt ideal.

5.8. Vis, at alle Hamelbaser er ækvipotente med $\mathbb{R}$, altså at

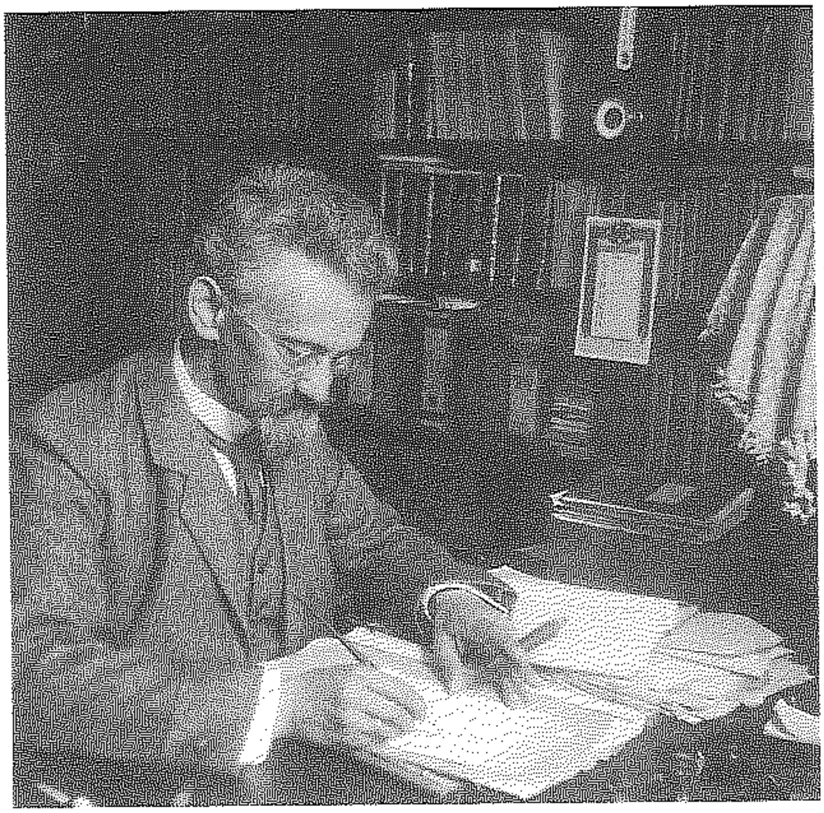
$$\dim(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q}) = \aleph .$$

5.9. Lad $\mathcal{F}$ og $\mathcal{C}$ være mængden af vilkårlige henholdsvis kontinuerte funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Vis, at $\operatorname{card} \mathcal{F} = 2^{\aleph} > \aleph$, men at $\operatorname{card} \mathcal{C} = \aleph$.

5.10. Vi betragter en vilkårlig afbildning $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Kan vi da altid konstruere en kontinuert afbildning $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, således at $\forall x \in [0,1]\ (f(x) \neq g(x))$? Svaret er benægtende på grund af følgende konstruktion:

Lad $C([0,1],\mathbb{R})$ være mængden af kontinuerte afbildninger $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Ifølge opgave 5.9 eksisterer en bijektiv afbildning φ af $[0,1]$ på $C([0,1],\mathbb{R})$ og for $x \in [0,1]$ er $\varphi(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ en kontinuert afbildning, som til $y \in [0,1]$ lader svare $\varphi(x)(y) \in \mathbb{R}$. Vis, at der til afbildningen $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ defineret ved $g(x) = \varphi(x)(x)$ ikke svarer noget kontinuert f med den ønskede egenskab.



Kapitel 2. Generel topologi.

Introduktion.

Det er velkendt, at begreber som åben mængde, randpunkt og kontinuitet uden problemer kan overføres fra de euklidiske talrum $\mathbb{R}^n$ til metriske rum. I studiet af metriske rum bemærker man, at en række begreber kun afhænger af systemet af åbne mængder i det metriske rum, – det er de såkaldte *topologiske begreber*. Andre begreber som uniform kontinuitet og fuldstændighed kan derimod ikke beskrives alene ved de åbne mængder.

I generel topologi går man et skridt videre i abstraktion fra klassen af metriske rum. Man definerer et topologisk rum som en mængde, hvor det aksiomatisk er specificeret hvilke delmængder, der skal kaldes åbne. Derefter studerer man de begreber, der naturligt kan defineres i denne ramme. Den abstrakte definition af et topologisk rum går i det væsentlige tilbage til Felix Hausdorffs bog: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914. En fyldig moderne fremstilling findes i R. Engelking: *General Topology*, Warszawa 1977, samt i J.R. Munkres: *Topology, a first course*, Prentice-Hall, Inc., 1975.

§1. Topologiske rum.

1.1. Åbne mængder.

Definition 1.1. Ved en *topologi* på en mængde M forstås et system $\mathcal{T}$ af delmængder af M med følgende egenskaber:

(1) Enhver foreningsmængde af mængder fra $\mathcal{T}$ tilhører $\mathcal{T}$.
(2) Enhver fællesmængde af endelig mange mængder fra $\mathcal{T}$ tilhører $\mathcal{T}$.
(3) $\varnothing \in \mathcal{T}$ og $M \in \mathcal{T}$.

Er $\mathcal{T}$ en topologi på M, kaldes parret $(M, \mathcal{T})$ et *topologisk rum*, og mængderne i $\mathcal{T}$ kaldes de *åbne mængder* i $(M, \mathcal{T})$.

Bemærk, at (2) er opfyldt blot enhver fællesmængde af to mængder fra $\mathcal{T}$ tilhører $\mathcal{T}$.

Er $\mathcal{T}_1$ og $\mathcal{T}_2$ forskellige topologier på samme mængde M, så er $(M, \mathcal{T}_1)$ og $(M, \mathcal{T}_2)$ forskellige topologiske rum. Dog tillader man sig at sige, at M er et topologisk rum, dersom det af sammenhængen fremgår, hvilken topologi $\mathcal{T}$ på M talen er om. Er $(M, \mathcal{T})$ et topologisk rum, og er A en delmængde af M, tillades sprogbrugen, at A er en delmængde af $(M, \mathcal{T})$.

Eksempel 1.2. Lad (M, d) være et metrisk rum. En delmængde A af M siges da som bekendt at være åben, dersom der for ethvert $x \in A$ findes et $r > 0$, således at den "åbne" kugle

$$K(x, r) := \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$$

er indeholdt i A. Mængden af de i denne forstand åbne delmængder af M er faktisk en topologi på M i betydningen af 1.1. Denne topologi på (M, d), som betegnes $\mathcal{T}_d$, siges at være *induceret* af d. – Bemærk i øvrigt, at de "åbne" kugler $K(x, r)$ faktisk er $\mathcal{T}_d$-åbne ifølge kuglelemmaet, jfr. mat. 2.

Bemærkning 1.3. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være *metrisabelt*, dersom der findes en metrik d på M, således at $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$. Ikke alle topologiske rum er metrisable. To forskellige metrikker på en mængde M kan inducere samme topologi, og i så fald kaldes de to metrikker *ækvivalente*.

Eksempler 1.4. For en vilkårlig mængde M er $\mathcal{T} := \{\varnothing, M\}$ en topologi på M, kaldet den *trivielle topologi* eller den *diffuse topologi*. Den indeholder færrest muligt åbne mængder ifølge aksiom (3). Rummet $(M, \mathcal{T})$ kaldes *trivielt*.

For en vilkårlig mængde M er $\mathcal{T} := \mathcal{P}(M)$ en topologi på M, kaldet den *diskrete topologi*, som indeholder flest muligt åbne mængder. Rummet $(M, \mathcal{T})$ kaldes *diskret*. Bemærk, at den diskrete topologi er induceret af den *diskrete metrik*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1\,, & x \neq y \\ 0\,, & x = y\,. \end{cases}$$

1.2. Omegne og indre punkter.

Definition 1.5. En mængde A i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være en *omegn* af et punkt x i M, dersom der findes en åben mængde O, således at $x \in O \subseteq A$. – Systemet af x's omegne betegnes $\mathcal{U}(x)$, og kaldes *omegnsfiltret* i x.

Definition 1.6. Et punkt x i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være et *indre punkt* i en mængde A i M, dersom der findes en åben mængde O, således at $x \in O \subseteq A$. – Mængden af indre punkter i A betegnes $\operatorname{int} A$ (eller A^0), og kaldes A's *indre* ("int" for interior).

Læg mærke til "dualiteten" mellem begreberne omegn og indre punkt: A er en omegn af x, hvis og kun hvis x er et indre punkt i A.

Eksempel 1.7. Lad (M, d) være et metrisk rum. Et punkt x siges som bekendt at være et indre punkt i $A \subseteq M$, dersom der findes et $r > 0$, således at $K(x, r)$ er indeholdt i A. De således definerede indre punkter i en mængde A i (M, d) er faktisk de $\mathcal{T}_d$-indre punkter.

Sætning 1.8. *For en mængde A i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er $\operatorname{int} A$ den største (m.h.t. $\subseteq$) åbne mængde indeholdt i A.*

Bevis. Ifølge 1.6 er $\operatorname{int} A$ foreningen af alle åbne mængder indeholdt i A. Denne forening er åben ifølge 1.1 (1), og er derfor den største åbne mængde indeholdt i A. $\square$

Sætning 1.9. *For en mængde A i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er følgende tre påstande ensbetydende: (1) A er åben. (2) A er omegn af alle sine punkter. (3) Ethvert punkt i A er indre punkt i A (dvs. $A = \operatorname{int} A$).*

Bevis. Ækvivalensen af (2) og (3) er oplagt, og ækvivalensen af (1) og (3) følger af 1.8. $\square$

Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum. Man kan sige, at $\mathcal{T}$ giver anledning til en afbildning $\mathcal{U}: M \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$, nemlig afbildningen, som til $x \in M$ lader svare omegnsfiltret $\mathcal{U}(x)$. Lad nu omvendt M være en mængde, og lad $\mathcal{U}: M \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ være en afbildning; til hvert $x \in M$ er altså knyttet et system $\mathcal{U}(x)$ af delmængder af M. Man kan da spørge, under hvilke omstændigheder der findes en topologi $\mathcal{T}$ på M, således at $\mathcal{U}(x)$ netop er $\mathcal{T}$-omegnsfiltret i x. Af 1.9 [(1) $\Leftrightarrow$ (2)] fremgår, at hvis en sådan topologi $\mathcal{T}$ eksisterer, så må $\mathcal{T}$ bestå af netop de mængder A for hvilke $A \in \mathcal{U}(x)$ for alle $x \in A$. Spørgsmålet er derfor, under hvilke omstændigheder der gælder både, at systemet af sådanne mængder A er en topologi, og at omegnsfiltrene i punkterne $x \in M$ netop er mængdesystemerne $\mathcal{U}(x)$. Svaret gives i 1.10. – Bemærk i øvrigt, at blot det om $\mathcal{U}$ vides, at $x \in U$ for alle $U \in \mathcal{U}(x)$, så findes mindst én topologi $\mathcal{T}$ på M (nemlig i hvert fald den diskrete, jfr. 1.4), således at alle mængderne i $\mathcal{U}(x)$ er $\mathcal{T}$-omegne.

Sætning 1.10. *(a) Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum. Omegnsfilterafbildningen $\mathcal{U}: M \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ har da følgende egenskaber:*

(1) $\forall x \in M : M \in \mathcal{U}(x)$.
(2) $\forall x \in M \; \forall U \in \mathcal{U}(x) : x \in U$.
(3) $\forall x \in M \; \forall U \in \mathcal{U}(x) \; \forall A \subseteq M : U \subseteq A \Rightarrow A \in \mathcal{U}(x)$.
(4) $\forall x \in M \; \forall U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) : U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$.
(5) $\forall x \in M \; \forall U \in \mathcal{U}(x) \; \exists V \in \mathcal{U}(x) \; \forall y \in M : y \in V \Rightarrow U \in \mathcal{U}(y)$.

(b) Lad omvendt M være en mængde, og lad $\mathcal{U}: M \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ være en afbildning med egenskaberne (1)-(5). Der findes da en og kun en topologi $\mathcal{T}$ på M, således at $\mathcal{T}$-omegnsfiltret i $x \in M$ netop er $\mathcal{U}(x)$.

Bevis. (a) Egenskaberne (2) og (3) er oplagte, (1) følger af 1.1 (3), og (4) følger af 1.1 (2). For at vise (5) betragtes $U \in \mathcal{U}(x)$. Der findes da $O \in \mathcal{T}$ med $x \in O \subseteq U$. Vi har da $O \in \mathcal{U}(x)$ og $U \in \mathcal{U}(y)$ for alle $y \in O$, – begge dele ifølge 1.5. Dette viser, at (5) er opfyldt med $V = O$.

(b) Som allerede bemærket ovenfor er

$$(*) \qquad \mathcal{T} := \{O \subseteq M \mid \forall x \in O : O \in \mathcal{U}(x)\}$$

den eneste mulige topologi med den ønskede egenskab. – Vi viser først, at $\mathcal{T}$ faktisk er en topologi. Lad $\{O_i \mid i \in I\}$ være et system af mængder fra $\mathcal{T}$. For at vise, at $\cup O_i \in \mathcal{T}$, betragtes $x \in \cup O_i$. Der findes da $i_0 \in I$ med $x \in O_{i_0}$. Vi har da $O_{i_0} \in \mathcal{U}(x)$ ifølge $(*)$. Ved brug af (3) sluttes dernæst, at $\cup O_i \in \mathcal{U}(x)$. Hermed er vist, at $\mathcal{T}$ har egenskaben 1.1 (1). Lad dernæst $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$. For at vise, at $O_1 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{T}$ betragtes $x \in O_1 \cap \cdots \cap O_n$. Ifølge $(*)$ har vi da $O_i \in \mathcal{U}(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Ved brug af (4) sluttes dernæst, at $O_1 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{U}(x)$. Hermed er vist, at $\mathcal{T}$ har egenskaben 1.1 (2). Endelig er det trivielt, at $\varnothing \in \mathcal{T}$, og klart ifølge (1) at $M \in \mathcal{T}$. Hermed er også godtgjort, at 1.1 (3) er opfyldt og $\mathcal{T}$ er altså en topologi. – Det skal herefter vises, at $\mathcal{T}$-omegnsfiltret i $x \in M$ netop er $\mathcal{U}(x)$. Lad først U være en $\mathcal{T}$-omegn af x; der findes altså en mængde $O \in \mathcal{T}$ med $x \in O \subseteq U$. Ifølge $(*)$ har vi da $O \in \mathcal{U}(x)$. Ved brug af (3) sluttes dernæst, at $U \in \mathcal{U}(x)$. Lad omvendt $U \in \mathcal{U}(x)$. Sæt

$$(\dagger) \qquad O := \{y \in M \mid U \in \mathcal{U}(y)\}\ .$$

Bemærk, at $x \in O$. Endvidere har vi $O \subseteq U$; thi $U \in \mathcal{U}(y)$ giver $y \in U$ ifølge (2). Det påstås, at $O \in \mathcal{T}$; ifølge det lige sagte vil hermed være vist, at U er en $\mathcal{T}$-omegn af x. Lad derfor $z \in O$; det skal da vises, at $O \in \mathcal{U}(z)$, jfr. $(*)$. Ifølge $(\dagger)$ har vi $U \in \mathcal{U}(z)$, og ifølge (5) findes derfor $V \in \mathcal{U}(z)$, således at $U \in \mathcal{U}(y)$ for alle $y \in V$. Heraf fremgår, at $V \subseteq O$, jfr. $(\dagger)$. Idet $V \in \mathcal{U}(z)$, fås det ønskede ved brug af (3). $\square$

Sætning 1.10 anviser en alternativ definition af begrebet topologi: Ved en topologi på en mængde M forstås en afbildning $\mathcal{U}: M \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ med egenskaberne (1)-(5) i 1.10.

Bemærk, at (1) i 1.10 kan erstattes med

$$(6) \qquad \forall x \in M : \mathcal{U}(x) \neq \varnothing\ .$$

Thi (6) følger oplagt af (1), og (1) følger af (6) ved brug af (3).

Bemærk også, at (1)-(4) alene udtaler sig om omegnsfiltret i hvert enkelt punkt, hvorimod (5) sammenknytter omegnsfiltrene i forskellige punkter. – I sproglig formulering lyder (5) således: Enhver omegn af x er tillige omegn af alle punkter y i en (passende) omegn af x.

1.3. Afsluttede mængder. Randpunkter.

Definition 1.11. En mængde A i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være *afsluttet* (eller *lukket*), dersom $M \backslash A$ er åben.

Sætning 1.12. *I et topologisk rum* $(M, \mathcal{T})$ *gælder:*

(1) *Enhver fællesmængde af afsluttede mængder er afsluttet.*
(2) *Enhver foreningsmængde af endelig mange afsluttede mængder er afsluttet.*
(3) M *og* $\varnothing$ *er afsluttede.*

Bevis. Umiddelbar konsekvens af 1.1. □

Bemærk at afbildningen $A \mapsto \complement A$ (komplementærmængde) er en bijektion mellem systemerne af åbne og afsluttede mængder.

Definition 1.13. Et punkt x i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være et *kontaktpunkt* for en mængde A i M, dersom enhver omegn af x har en ikke tom fællesmængde med A. – Mængden af kontaktpunkter for A kaldes A's *afslutning*, og betegnes $\operatorname{cl} A$ (eller $\overline{A}$). ("cl" for closure).

Der gælder altså om $x \in M$, $A \subseteq M$:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \varnothing$$

og ved negation

$$\begin{aligned} x \notin \overline{A} &\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \subseteq M \backslash A \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{int}(\complement A) \end{aligned}$$

altså

$$\complement \overline{A} = (\complement A)^0 \,, \quad \text{eller} \quad \overline{A} = \complement(\complement A)^0 \,.$$

Heraf fås følgende duale sætning til 1.8:

Sætning 1.14. *For en delmængde* A *i et topologisk rum* $(M, \mathcal{T})$ *er* $\overline{A}$ *den mindste (m.h.t.* $\subseteq$*) afsluttede mængde, som indeholder* A.

Definition 1.15. Et punkt x i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være et *randpunkt* for en mængde A i M, dersom x er kontaktpunkt for både A og $\complement A$. – Mængden af randpunkter for A kaldes A's *rand*, og betegnes $\operatorname{bd} A$ (eller ∂A). ("bd" for boundary).

Definition 1.16. Et punkt x i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være et *ydre* punkt for $A \subseteq M$, dersom x er et indre punkt for $\complement A$.

Vi har umiddelbart følgende vigtige egenskaber:

(a) $\partial A = \partial(\complement A)$
(b) $M = A^0 \cup (\complement A)^0 \cup \partial A$
(c) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\complement A} = \overline{A} \setminus A^0$
(d) $\overline{A} = A^0 \cup \partial A = A \cup \partial A$.

Definition 1.17. Er A og B delmængder af et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$, siges A at være *tæt* i B, dersom $\overline{A} \supseteq B$. Er A tæt i M altså $\overline{A} = M$, siges A at være *overalt tæt*.

Bemærk at A er overalt tæt i M hvis og kun hvis

$$\forall G \in \mathcal{T}(G \neq \varnothing \Rightarrow A \cap G \neq \varnothing) \ .$$

Definition 1.18. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være *separabelt*, dersom der findes en tællelig delmængde A af $(M, \mathcal{T})$, som er overalt tæt.

De euklidiske talrum $\mathbb{R}^n$ er separable, da $\mathbb{Q}^n$ er numerabel og overalt tæt.

1.4. Sammenligning af topologier.

Definition 1.19. Lad $\mathcal{T}_1$ og $\mathcal{T}_2$ være topologier på samme mængde M. Topologien $\mathcal{T}_1$ siges da at være *grovere* end $\mathcal{T}_2$, og $\mathcal{T}_2$ siges at være *finere* end $\mathcal{T}_1$, dersom $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, altså dersom enhver åben mængde i $(M, \mathcal{T}_1)$ er åben i $(M, \mathcal{T}_2)$.

Sætning 1.20. *Er $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ en familie af topologier på en mængde M, så er også $\cap \mathcal{T}_i$ en topologi på M.*

Bevis. Det skal vises, at hvis enhvert af mængdesystemerne $\mathcal{T}_i$ har egenskaberne (1)-(3) i 1.1, så har også $\cap \mathcal{T}_i$ disse egenskaber. Dette er oplagt. $\square$

En topologi $\mathcal{T}$ på M er et element i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ og mængden af topologier på M er altså en delmængde af $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$, som vi betegner $\operatorname{Top}(M)$. Relationen "grovere end" er en ordensrelation i $\mathrm{Top}(M)$ induceret af relationen $\subseteq$ i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$. Den trivielle topologi er det første element og den diskrete topologi det sidste element i $\mathrm{Top}(M)$. En anden måde at sige dette på er, at den trivielle topologi er grovere end en vilkårlig topologi, som på sin side er grovere end den diskrete topologi. Det er let at konstruere eksempler der viser, at $\mathrm{Top}(M)$ ikke er totalt ordnet. Dette skal sammenholdes med Sætning 1.22 nedenfor.

Definition 1.21. En ordnet mængde $(M, \leq)$ kaldes et *fuldstændigt gitter* (eng. complete lattice), hvis enhver ikke tom delmængde har en største minorant og en mindste majorant.

Sætning 1.22. *Mængden* $\mathrm{Top}(M)$ *af topologier på en mængde* M *er et fuldstændigt gitter under ordningen* $\subseteq$.

Bevis. Det skal vises, at for en vilkårlig ikke tom mængde $\{\mathcal{T}_i \mid i \in I\}$ af topologier $\mathcal{T}_i$ på M findes en fineste, som er grovere end dem alle, og en groveste, som er finere end dem alle. – Det er trivielt, at en topologi $\mathcal{T}$ på M er grovere end alle $\mathcal{T}_i$'erne hvis og kun hvis $\mathcal{T} \subseteq \cap\mathcal{T}_i$. Da imidlertid $\cap\mathcal{T}_i$ er en topologi ifølge 1.20, er $\cap\mathcal{T}_i$ den fineste blandt de topologier, som er grovere end alle $\mathcal{T}_i$'erne. – Der findes mindst én topologi, som er finere end alle $\mathcal{T}_i$'erne, nemlig den diskrete. Lad $\{\mathcal{S}_j \mid j \in J\}$ være mængden af de topologier, som er finere end alle $\mathcal{T}_i$'erne. Ifølge 1.20 er $\cap\mathcal{S}_j$ en topologi på M, og den er åbenbart den groveste blandt de topologier, som er finere end alle $\mathcal{T}_i$'erne. $\square$

Sætning 1.23. *Lad* $\mathcal{S}$ *være et vilkårligt system af delmængder af en mængde* M*. Der findes da en groveste topologi* $\mathcal{T}$ *på* M *med* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$*. – Denne topologi* $\mathcal{T}$ *siges at være frembragt af* $\mathcal{S}$*.*

Bevis. Der findes (mindst) en topologi på M, som indeholder $\mathcal{S}$, – nemlig i hvert fald den diskrete. Fællesmængden af alle sådanne topologier er en topologi ifølge 1.20; den er derfor den groveste, som indeholder $\mathcal{S}$. $\square$

Sætning 1.24. *Lad* $\mathcal{S}$ *være et system af delmængder af* M*. Den af* $\mathcal{S}$ *frembragte topologi* $\mathcal{T}$ *på* M *består af* $\varnothing$ *og* M *samt de delmængder af* M*, som er foreningsmængde af fællesmængder af endelig mange mængder fra* $\mathcal{S}$*.*

Bevis. Lad $\mathcal{S}'$ betegne systemet af de delmængder af M, som er fællesmængde af endelig mange mængder fra $\mathcal{S}$. Lad $\mathcal{S}''$ betegne systemet af de delmængder af M, som er foreningsmængde af mængder fra $\mathcal{S}'$. Påstanden er, at $\mathcal{S}'' \cup \{\varnothing, M\}$ er den groveste topologi på M, som indeholder $\mathcal{S}$. Det er klart ifølge 1.1, at enhver topologi på M, som indeholder $\mathcal{S}$, tillige må indeholde $\mathcal{S}'' \cup \{\varnothing, M\}$. Det skal derfor vises, at $\mathcal{S}'' \cup \{\varnothing, M\}$ er en topologi. Men dette verificeres let. $\square$

Opgaver til §1

1.1. Lad (M, d) være et metrisk rum og sæt

$$\mathcal{T}_d = \{A \in \mathcal{P}(M) \mid \forall x \in A\ \exists r > 0 : K(x,r) \subseteq A\}\ ,$$

hvor som sædvanlig $K(x,r) = \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$. Vis, at $\mathcal{T}_d$ er en topologi på M.

1.2. Lad M være en ikke tom mængde. Vis, at systemet

$$\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{A \in \mathcal{P}(M) \mid \complement A \text{ endelig}\}$$

er en topologi på M. Beskriv systemet af afsluttede mængder. Vis, at enhver uendelig mængde er overalt tæt i $(M, \mathcal{T})$.

1.3. Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum. Vis, at afbildningen $\varphi = \mathrm{cl} : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ har egenskaberne

(i) $\varphi(\varnothing) = \varnothing$
(ii) $\forall A \in \mathcal{P}(M)$: $A \subseteq \varphi(A)$
(iii) $\forall A \in \mathcal{P}(M)$: $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$
(iv) $\forall A, B \in \mathcal{P}(M)$: $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$.

Vis omvendt, at hvis M er en vilkårlig mængde og hvis $\varphi: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ er en afbildning med egenskaberne (i)-(iv), så findes en og kun en topologi på M så $\varphi(A)$ er afslutningen af A i denne topologi. (Kuratowski indførte topologi på denne måde).

Vink. Vis at mængdesystemet

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(M) \mid A = \varphi(A)\}$$

opfylder betingelserne i Sætning 1.12.

1.4. Lad A være overalt tæt i det topologiske rum $(M, \mathcal{T})$. Vis, at for enhver åben mængde G gælder $\mathrm{cl}(A \cap G) = \mathrm{cl}(G)$.

1.5. Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum. Vis, at

$$\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B\ .$$

1.6. Vis, at $\mathcal{T} = \{\,]t,\infty[\,\mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ er en topologi på $\mathbb{R}$. Bestem systemet af afsluttede mængder. Vis, at $\overline{\{t\}} =]-\infty, t]$ for $t \in \mathbb{R}$ og beskriv $\overline{A}$ for en vilkårlig delmængde $A \subseteq \mathbb{R}$.

1.7. Lad $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ være topologier på M og lad $\overline{A}^1$, $\overline{A}^2$ være afslutningen af A i de to topologier. Vis, at $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ hvis og kun hvis $\overline{A}^1 \supseteq \overline{A}^2$ for alle $A \subseteq M$. [Jo finere topologi jo mindre afslutning].

1.8. En åben mængde G i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ kaldes *regulær* hvis $G = \operatorname{int}(\overline{G})$. Tilsvarende kaldes en afsluttet mængde F *regulær* hvis $F = \operatorname{cl}(F^0)$. Vis, at for en vilkårlig delmængde $A \subseteq M$ er $\operatorname{int}(\overline{A})$ og $\operatorname{cl}(A^0)$ regulære. Vis, at komplementærmængde-operationen fører de afsluttede regulære mængder over i de åbne regulære mængder og omvendt.

1.9. En mængde i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ kaldes en F_σ-*mængde*, hvis den er foreningsmængde af en følge af afsluttede mængder. Den kaldes en G_δ-*mængde*, hvis den er fællesmængde af en følge af åbne mængder. Vis, at komplementærmængde-operationen fører klassen af F_σ-mængder over i klassen af G_δ-mængder. Vis, at klassen af F_σ-mængder er stabil ved tællelige foreningsmængder, og at klassen af G_δ-mængder er stabil ved tællelige fællesmængder.

1.10. Vis, at en åben mængde G i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er regulær (jfr. opg. 1.8) hvis og kun hvis $\partial G = \partial(\overline{G})$. Vis, at en afsluttet mængde F er regulær hvis og kun hvis $\partial F = \partial(F^0)$.

§2. Baser, tællelighedsaksiomer.

Definition 2.1. Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum, og lad $x \in M$. Ved en *basis* for omegnsfiltret i x, eller en *omegnsbasis* i x, forstås et system $\mathcal{B}(x)$ af omegne af x med egenskaben, at enhver omegn af x indeholder en af omegnene i $\mathcal{B}(x)$.

Definition 2.2. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at opfylde *1. tællelighedsaksiom*, dersom der for ethvert punkt $x \in M$ findes en tællelig omegnsbasis i x.

Eksempel 2.3. Lad (M, d) være et metrisk rum, og lad $x \in M$. Lad D være en delmængde af $\mathbb{R}_+$, og sæt

$$\mathcal{B}(x) := \{K(x, r) \mid r \in D\} .$$

Det er da klart, at $\mathcal{B}(x)$ er en basis for $\mathcal{T}_d$-omegnsfiltret i x, hvis $\inf D = 0$. Specielt noteres, at der findes numerable omegnsbaser, nemlig f.eks. systemet $\mathcal{B}(x)$ med $D = \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ethvert metrisabelt topologisk rum opfylder altså *1.* tællelighedsaksiom.

Definition 2.4. Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum. Et system $\mathcal{S}$ af åbne mængder kaldes en *basis* for $\mathcal{T}$, dersom enhver ikke tom mængde i $\mathcal{T}$ er forening af mængder fra $\mathcal{S}$.

Systemet af alle kugler i et metrisk rum (M, d) er en basis for $\mathcal{T}_d$. Systemet af singletons $\mathcal{S} = \{\{x\} \mid x \in M\}$ er en basis for den diskrete topologi på M.

Sætning 2.5. *Et system $\mathcal{S}$ af delmængder af en mængde M er basis for en topologi på M, nemlig den af $\mathcal{S}$ frembragte topologi, hvis og kun hvis $\mathcal{S}$ er en overdækning af M (dvs. $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = M$) og der for alle $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ og alle $x \in S_1 \cap S_2$ findes $S_3 \in \mathcal{S}$, således at $x \in S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$.*

Bevis. Antag først, at $\mathcal{S}$ er basis for en topologi $\mathcal{T}$. Det er da for det første klart, at $\mathcal{S}$ er en overdækning; thi M er åben, og enhver åben mængde er forening af mængder fra $\mathcal{S}$. Betragt dernæst $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ og $x \in M$ med $x \in S_1 \cap S_2$. Da enhver åben mængde er forening af mængder fra $\mathcal{S}$, og $S_1 \cap S_2$ er åben, findes $S_3 \in \mathcal{S}$ med $x \in S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$. Antag omvendt, at betingelserne er opfyldt, og lad $\mathcal{T}$ være den af $\mathcal{S}$ frembragte topologi, jfr. Sætning 1.24. Det påstås, at $\mathcal{S}$ er en basis for $\mathcal{T}$. Betragt derfor $O \in \mathcal{T}$ og $x \in O$; det skal da vises, at der findes $S \in \mathcal{S}$ med $x \in S \subseteq O$. Hvis $O = M$, findes S som ønsket på grund af, at $\mathcal{S}$ er en overdækning. Hvis $O \neq M$, så findes ifølge 1.24 endelig mange mængder $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ med

$$(*) \qquad x \in S_1 \cap \ldots \cap S_n \subseteq O .$$

Hvis $n > 1$, så findes ifølge antagelsen $S'_{n-1} \in \mathcal{S}$ med $x \in S'_{n-1} \subseteq S_{n-1} \cap S_n$, hvormed

$$x \in S_1 \cap \ldots \cap S_{n-2} \cap S'_{n-1} \subseteq O \, .$$

Antallet af mængder S_j i $(*)$ kan altså reduceres med 1, dersom $n > 1$. Heraf følger påstanden. $\square$

Sætning 2.6. *Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum. Et delsystem $\mathcal{S}$ af $\mathcal{T}$ er da en basis for $\mathcal{T}$, hvis og kun hvis for hvert $x \in M$ systemet*

$$\mathcal{B}(x) := \{S \in \mathcal{S} \mid x \in S\}$$

er en omegnsbasis i x.

Bevis. Antag først, at $\mathcal{S}$ er en basis for $\mathcal{T}$, og lad $U \in \mathcal{U}(x)$. Der findes da $O \in \mathcal{T}$ med $x \in O \subseteq U$. Da $\mathcal{S}$ er en basis for $\mathcal{T}$, følger heraf, at der findes $S \in \mathcal{S}$ med $x \in S \subseteq O \subseteq U$, – hvilket viser, at $\mathcal{B}(x)$ er en omegnsbasis i x. Antag omvendt, at $\mathcal{B}(x)$ er en omegnsbasis i x for hvert $x \in M$. Lad $O \in \mathcal{T}$, og lad $x \in O$. Da er O en omegn af x, og der findes følgelig $S \in \mathcal{S}$ med $x \in S \subseteq O$. Heraf fremgår, at $\mathcal{S}$ er en basis for $\mathcal{T}$. $\square$

Definition 2.7. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at opfylde *2. tællelighedsaksiom*, dersom der findes en tællelig basis for topologien $\mathcal{T}$.

Bemærkning 2.8. Hvis et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ opfylder 2. tællelighedsaksiom, så opfylder det også 1. tællelighedsaksiom (jfr. 2.2), og det er separabelt (jfr. 1.18). Det første følger af Sætning 2.6. Det andet indses således: Er $\mathcal{S} = \{S_n \mid n \in I\}$ en tællelig basis for $\mathcal{T}$, og er x_n et punkt i S_n, så er $A := \{x_n \mid n \in I\}$ en tællelig overalt tæt delmængde.

Opgaver til §2

2.1. Lad M være en vilkårlig ikke tom mængde og lad $a \in M$. Vis at $\mathcal{T}_a = \{\varnothing, M, \{a\}\}$ er en topologi på M. Vis dernæst, at $\mathrm{Top}(M)$ ikke er totalt ordnet, hvis M har mindst 2 elementer $a \neq b$. Beskriv den groveste topologi på M der er finere end $\mathcal{T}_a$ og $\mathcal{T}_b$.

2.2. *Sorgenfrey topologien på* $\mathbb{R}$. Sådan kaldes topologien på $\mathbb{R}$ frembragt af intervallerne $[a, b[$, $a < b$. Vis, at disse mængder udgør en basis for topologien. Vis, at mængderne $[a, b[$ er afsluttede (og åbne per definition) i topologien. Vis, at Sorgenfrey topologien er finere end den sædvanlige topologi, og at 1. tællelighedsaksiom gælder. Vis, at Sorgenfrey topologien er separabel, men at 2. tællelighedsaksiom ikke gælder. (*Vink.* Hvis $\mathcal{B}$ er en basis kan vi til hvert $a \in \mathbb{R}$ finde $A_a \in \mathcal{B}$ så $a \in A_a \subseteq [a, a+1[$. Så er $a \mapsto A_a$ injektiv.)

2.3. Gennemfør beviset for at hvis $(M, \mathcal{T})$ opfylder 2. tællelighedsaksiom, så opfylder $(M, \mathcal{T})$ også 1. tællelighedsaksiom og er separabelt.

Vis, at hvis $(M, \mathcal{T})$ er metrisabelt, så gælder det omvendte. Dermed har vi altså følgende:

Sætning. *Et metrisabelt rum $(M, \mathcal{T})$ er separabelt hvis og kun hvis 2. tællelighedsaksiom gælder.*

Konkludér at Sorgenfrey topologien (2.2) ikke er metrisabel.

2.4. Vis, at et diskret topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ opfylder 2. tællelighedsaksiom netop hvis M er tællelig.

2.5. Vis, at de åbne intervaller $]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$ med $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ udgør en numerabel basis for $\mathbb{R}^n$.

2.6. *Ordenstopologien.* Lad $(M, \leq)$ være en totalt ordnet mængde, som ikke er en singleton. Definér "intervallerne" for $a, b \in M$:

$$\begin{aligned}]a, \infty[&= \{x \in M \mid a < x\}\,, \\ ]-\infty, b[&= \{x \in M \mid x < b\}\,, \\ ]a, b[&= \{x \in M \mid a < x < b\}\,. \end{aligned}$$

Vis, at ovenstående mængder for $a, b \in M$ udgør en basis for en topologi på M. Topologien kaldes ordenstopologien.

Vis, at ordenstopologien på $\mathbb{R}$ med den sædvanlige ordning er den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$.

§3. Kontinuerte og åbne afbildninger.

Definition 3.1. En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ siges at være *kontinuert*, dersom for enhver åben mængde O_2 i $(M_2, \mathcal{T}_2)$ originalmængden $f^{-1}(O_2)$ er åben i $(M_1, \mathcal{T}_1)$.

Betingelsen kan kort udtrykkes således: $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subseteq \mathcal{T}_1$, altså enhver åben mængde i $\mathcal{T}_2$ tilbagetransporteres i en åben mængde i $\mathcal{T}_1$.

Hvis $\mathcal{T}_1$ er den diskrete topologi, så er f kontinuert for enhver topologi $\mathcal{T}_2$ på M_2. Og hvis $\mathcal{T}_2$ er den trivielle topologi, så er f kontinuert for enhver topologi $\mathcal{T}_1$ på M_1. Afbildningen f har vanskeligere ved at blive kontinuert, des grovere $\mathcal{T}_1$ er og des finere $\mathcal{T}_2$ er.

Bemærkning 3.2. Lad $\mathcal{T}_1$ og $\mathcal{T}_2$ være topologier på samme mængde M. Topologien $\mathcal{T}_1$ er da finere end $\mathcal{T}_2$, hvis og kun hvis den identiske afbildning Id_M af M er kontinuert som afbildning af $(M, \mathcal{T}_1)$ på $(M, \mathcal{T}_2)$.

Definition 3.3. En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ siges at være *kontinuert i et punkt $x \in M_1$*, dersom for enhver omegn U_2 af $f(x)$ i $(M_2, \mathcal{T}_2)$ originalmængden $f^{-1}(U_2)$ er en omegn af x i $(M_1, \mathcal{T}_1)$.

Bemærkning 3.4. Idet $\mathcal{U}_1$ hhv. $\mathcal{U}_2$ betegner omegnsfilterafbildningen i $(M_1, \mathcal{T}_1)$ hhv. $(M_2, \mathcal{T}_2)$, kan betingelsen i 3.3 kort udtrykkes således: $f^{-1}(\mathcal{U}_2(f(x))) \subseteq \mathcal{U}_1(x)$ eller ækvivalent hermed

$$\forall U_2 \in \mathcal{U}_2(f(x)) \exists U_1 \in \mathcal{U}_1(x) : f(U_1) \subseteq U_2 \ ,$$

hvorved definitionen ligner den sædvanlige ε-δ-definition. Heraf ses også, at Definition 3.3 er en udvidelse af den kendte definition i tilfælde af at topologierne er inducerede af metrikker.

Sætning 3.5. *En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ er kontinuert, hvis og kun hvis den er kontinuert i ethvert punkt af M_1.*

Bevis. Antag først, at f er kontinuert. Lad $x \in M_1$ og lad $U_2 \in \mathcal{U}_2(f(x))$. Der findes da $O_2 \in \mathcal{T}_2$ med $f(x) \in O_2 \subseteq U_2$, hvormed $x \in f^{-1}(O_2) \subseteq f^{-1}(U_2)$. Ifølge antagelsen er $f^{-1}(O_2)$ åben i $(M_1, \mathcal{T}_1)$, og $f^{-1}(U_2)$ er derfor en omegn af x. Antag omvendt, at f er kontinuert i ethvert punkt af M. Lad $O_2 \in \mathcal{T}_2$. For ethvert $x \in f^{-1}(O_2)$ er da O_2 en omegn af $f(x)$; thi $f(x) \in O_2$, og O_2 er åben. Ved brug af antagelsen følger heraf, at $f^{-1}(O_2)$ er omegn af alle sine punkter, hvormed $f^{-1}(O_2)$ er åben, jfr. 1.9. $\square$

Definition 3.6. En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ siges at være *åben*, dersom for enhver åben mængde O_1 i $(M_1, \mathcal{T}_1)$ billedmængden $f(O_1)$ er åben i $(M_2, \mathcal{T}_2)$.

Betingelsen kan kort udtrykkes således: $f(\mathcal{T}_1) \subseteq \mathcal{T}_2$.

Hvis $\mathcal{T}_1$ er den trivielle topologi og $f(M_1) = M_2$, eller $\mathcal{T}_2$ er den diskrete topologi, så er f åben, uanset hvilken topologi $\mathcal{T}_2$ hhv. $\mathcal{T}_1$, der betragtes. Afbildningen f har vanskeligere ved at blive åben, des finere $\mathcal{T}_1$ er og des grovere $\mathcal{T}_2$ er.

Bemærkning 3.7. Lad $\mathcal{T}_1$ og $\mathcal{T}_2$ være topologier på samme mængde M. Topologien $\mathcal{T}_1$ er da grovere end $\mathcal{T}_2$, hvis og kun hvis $\mathrm{Id}_M\colon (M, \mathcal{T}_1) \to (M, \mathcal{T}_2)$ er åben.

Definition 3.8. En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ siges at være *åben i et punkt* $x \in M_1$, dersom for enhver omegn U_1 af x i $(M_1, \mathcal{T}_1)$ billedmængden $f(U_1)$ er en omegn af $f(x)$ i $(M_2, \mathcal{T}_2)$.

Sætning 3.9. *En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ er åben, hvis og kun hvis den er åben i ethvert punkt af M_1.*

Bevis. Se opgave 3.3.

Definition 3.10. En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ siges at være *homeomorf* (eller en *homeomorfi*), dersom den er bijektiv, kontinuert og åben.

Betingelsen i 3.10 er ensbetydende med, at f er bijektiv, og f og f^{-1} begge er kontinuerte. Betingelsen kan kort udtrykkes således: f er bijektiv og $f(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_2$. (Eller således: f er bijektiv og $f^{-1}(\mathcal{T}_2) = \mathcal{T}_1$.)

Den inverse afbildning til en homeomorfi er en homeomorfi. Findes en homeomorfi af $(M_1, \mathcal{T}_1)$ på $(M_2, \mathcal{T}_2)$, så findes følgelig også en homeomorfi af $(M_2, \mathcal{T}_2)$ på $(M_1, \mathcal{T}_1)$. To rum med denne egenskab siges at være *homeomorfe*.

Sætning 3.11. *Ved sammensætning af kontinuerte hhv. åbne hhv. homeomorfe afbildninger fås igen en kontinuert hhv. åben hhv. homeomorf afbildning.*

Bevis. Lad $(M_1, \mathcal{T}_1)$, $(M_2, \mathcal{T}_2)$ og $(M_3, \mathcal{T}_3)$ være topologiske rum, lad f være en afbildning af $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i $(M_2, \mathcal{T}_2)$ og lad g være en afbildning af $(M_2, \mathcal{T}_2)$ ind i $(M_3, \mathcal{T}_3)$. Antag, at f og g begge er kontinuerte, og lad O være en åben mængde i $(M_3, \mathcal{T}_3)$. Da er $g^{-1}(O)$ åben i $(M_2, \mathcal{T}_2)$ på grund af g's kontinuitet, og $f^{-1}(g^{-1}(O))$ er derfor åben i $(M_1, \mathcal{T}_1)$ på grund af f's kontinuitet. Men $f^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ f)^{-1}(O)$, og følgelig er $g \circ f$ kontinuert. – Påstanden om åbenhed vises på tilsvarende måde. Påstanden om homeomorfi følger af de to første påstande. □

Via dualiteten mellem åbne og afsluttede mængder kan man let se, at $f\colon (M_1, \mathcal{T}_1) \to (M_2, \mathcal{T}_2)$ er kontinuert hvis og kun hvis $f^{-1}(F)$ er afsluttet i M_1 for enhver afsluttet mængde F i M_2. Som anvendelse af det foregående ses, at hvis $f\colon (M, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ er kontinuert, så er mængderne

$$\{x \in M \mid f(x) > a\} , \quad \{x \in M \mid a < f(x) < b\}$$

åbne i M, og mængderne

$$\{x \in M \mid f(x) \leq a\} , \quad \{x \in M \mid a \leq f(x) \leq b\}$$

er afsluttede i M.

Ved inddragelse af begrebet basis kan beviset for at en afbildning er kontinuert eller åben forenkles.

Sætning 3.12. *Lad $f\colon (M_1, \mathcal{T}_1) \to (M_2, \mathcal{T}_2)$ og lad $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{T}_i$ være baser for topologierne.*

(a) *Hvis $f^{-1}(O_2) \in \mathcal{T}_1$ for enhver mængde $O_2 \in \mathcal{B}_2$, så er f kontinuert.*
(b) *Hvis $f(O_1) \in \mathcal{T}_2$ for enhver mængde $O_1 \in \mathcal{B}_1$, så er f åben.*

Bevis. En vilkårlig ikke tom åben mængde $O_2 \in \mathcal{T}_2$ kan skrives $O_2 = \bigcup_{i \in I} G_i$ med $G_i \in \mathcal{B}_2$, og da $f^{-1}(O_2) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i)$ ser man, at $f^{-1}(O_2)$ er åben, hvis betingelsen i (a) er opfyldt.

Tilsvarende kan en ikke tom åben mængde $O_1 \in \mathcal{T}_1$ skrives $O_1 = \bigcup_{i \in I} G_i$ med $G_i \in \mathcal{B}_1$, og da $f(O_1) = \bigcup_{i \in I} f(G_i)$ ser man, at $f(O_1)$ er åben, hvis betingelsen i (b) er opfyldt. □

For et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ kan vi betragte mængderne $\mathcal{C}(M, \mathbb{K})$ af kontinuerte funktioner $f\colon M \to \mathbb{K}$, hvor $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Fuldstændig som ved metriske rum ses, at $\mathcal{C}(M, \mathbb{K})$ er et $\mathbb{K}$-vektorrum og en kommutativ ring ved de punktvise operationer. Desuden er underrummet af kontinuerte begrænsede funktioner $\mathcal{C}_b(M, \mathbb{K})$ et normeret rum under den uniforme norm

$$\|f\|_U = \sup\{|f(x)| \mid x \in M\} .$$

At dette rum er fuldstændigt, altså et Banach rum, følger af, at *kontinuitet bevares ved uniform konvergens.* Vi minder om resultatet i følgende formulering:

Sætning 3.13. *(a) Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum og $A \subseteq \mathcal{F}(M, \mathbb{C})$ være en mængde af funktioner som alle antages kontinuerte i $x_0 \in M$. Hvis $f : M \to \mathbb{C}$ kan approksimeres uniformt med funktioner fra A, altså hvis*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in A \ \forall x \in M : |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \ ,$$

så er f kontinuert i x_0.

(b) (Weierstrass' majorantrække-kriterium). Hvis den uendelige række $\sum_1^\infty f_n$ af kontinuerte funktioner ($f_n \in \mathcal{C}(M, \mathbb{C})$) har en konvergent majorantrække $\sum_1^\infty a_n$ hvor $|f_n(x)| \leq a_n$ for alle $x \in M$, så er $f(x) = \sum_1^\infty f_n(x)$ en kontinuert funktion på M.

Bevis. (a) Vi ønsker til $\varepsilon > 0$ at finde $U \in \mathcal{U}(x_0)$ så

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in U \ .$$

Først vælges $g \in A$ så $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon/3$ for alle $x \in M$, og da g er kontinuert i x_0 kan vi vælge $U \in \mathcal{U}(x_0)$ så $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/3$ for $x \in U$. Heraf fås for $x \in U$ ved trekantsuligheden for numerisk værdi:

$$|f(x) - f(x_0)| = |(f(x) - g(x)) + (g(x) - g(x_0)) + (g(x_0) - f(x_0))| < 3 \cdot \varepsilon/3 = \varepsilon \ .$$

(b) Rækken $\sum_1^\infty f_n(x)$ er konvergent for hvert x ifølge sammenligningskriteriet, og om sumfunktionen $f(x)$ har vi

$$\Big| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \ ,$$

og da "halen" i en konvergent række går mod 0 ses, at betingelsen i (a) er opfyldt med A lig med mængden af afsnit i rækken. $\square$

Opgaver til §3

3.1. Gør omhyggeligt rede for at $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ er kontinuert i $x \in X$ i henhold til Definition 3.3 hvis og kun hvis f er kontinuert i henhold til den sædvanlige ε-δ-definition for metriske rum.

3.2. (a) Angiv en kontinuert funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ikke er åben. (b) Der findes en åben afbildning $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ikke er kontinuert.

Vink. Hvert tal $x \in]0, 1]$ har en entydig fremstilling $x = {}^2 0, a_1 a_2 \dots$ som dualbrøk, der ikke ender på lutter nuller. (Cifrene a_i er enten 0 eller 1, og dualbrøken fremstiller tallet $\sum a_i 2^{-i}$). Definer nu

$$g(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \ , \quad x \in]0, 1] \ ,$$

og udvid g til $\mathbb{R}$ ved periodicitet. Vis, at $g(I) = [0, 1]$ for ethvert interval I med indre punkter.

Vis, at $g({}^2 0, a_1 a_2 \dots a_n 11 \dots) = 1$, $g({}^2 0, a_1 a_2 \dots a_n 10101 \dots) = \frac{1}{2}$.

Lad $h :]0, 1[\to \mathbb{R}$ være en homeomorfi med $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ og udvid h til $[0, 1]$ ved $h(0) = 0$, $h(1) = 1$. Vis, at $f = h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er åben, men ikke kontinuert.

3.3. Gennemfør beviset for Sætning 3.9.

3.4. Lad $f, g : (M, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ være kontinuerte funktioner. Vis, at funktionerne $f \vee g(x) = \max(f(x), g(x))$ og $f \wedge g(x) = \min(f(x), g(x))$ er kontinuerte.

3.5. En funktion $f : (M, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ kaldes *nedad* (hhv. *opad*) *halvkontinuert* i $x \in M$ hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U \in \mathcal{U}(x) : f(U) \subseteq]f(x) - \varepsilon, \infty[\ ,$$
$$(\text{hhv.} \forall \varepsilon > 0 \ \exists U \in \mathcal{U}(x) : f(U) \subseteq] - \infty, f(x) + \varepsilon[) \ .$$

Vis, at f er kontinuert i x hvis og kun hvis den er både opad og nedad halvkontinuert i x.

Vis, at f er nedad halvkontinuert i x netop hvis $-f$ er opad halvkontinuert i x.

Vis, at f er nedad halvkontinuert (dvs. nedad halvkontinuert i hvert $x \in M$) hvis og kun hvis

$$f^{-1}(]a, \infty[) \in \mathcal{T} \quad \text{for alle} \quad a \in \mathbb{R} \ .$$

Vis, at indikatorfunktionen 1_A for en delmængde $A \subseteq M$ er nedad (hhv. opad) halvkontinuert hvis og kun hvis A er åben (hhv. afsluttet). (Per definition er $1_A(x) = 1$ for $x \in A$ og $1_A(x) = 0$ for $x \notin A$).

3.6. *Mængden af kontinuitetspunkter $C(f)$ er en G_δ-mængde*, jfr. opg. 1.9. Lad $f : (M, \mathcal{T}) \to (X, d)$ være en afbildning af et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ ind i et metrisk rum (X, d). For $\varepsilon > 0$ defineres U_ε som foreningsmængden af de $O \in \mathcal{T}$ for hvilke $\operatorname{diam} f(O) < \varepsilon$, idet diameteren for en delmængde $A \subseteq X$ defineres som

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} .$$

Vis, at mængden $C(f)$ af f's kontinuitetspunkter er lig med $\bigcap_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon$, og gør rede for, at dette er en G_δ-mængde.

3.7. Vis, at $f : (M_1, \mathcal{T}_1) \to (M_2, \mathcal{T}_2)$ er kontinuert hvis og kun hvis

$$\forall A \subseteq M_1 : f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} .$$

§4. Konstruktioner med topologiske rum.

4.1. Delrum.

Sætning 4.1. *Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum og lad A være en delmængde af M. Systemet*

$$\mathcal{T}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{T}\}$$

er da en topologi på A. For $x \in A$ gælder

$$\mathcal{U}_A(x) = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{U}(x)\} ,$$

hvor $\mathcal{U}$ hhv. $\mathcal{U}_A$ betegner $\mathcal{T}$-omegnsfiltret hhv. $\mathcal{T}_A$-omegnsfiltret i x. – Topologien $\mathcal{T}_A$ kaldes delrumstopologien på A (eller den af $\mathcal{T}$ inducerede topologi på A). Det topologiske rum $(A, \mathcal{T}_A)$ kaldes et delrum af $(M, \mathcal{T})$.

Beviset er oplagt. $\square$

Eksempel 4.2. Lad A være en delmængde af et metrisk rum (M, d). Restriktionen d' af d til $A \times A$ er da en metrik på A. Den af d' inducerede topologi på A er netop delrumstopologien på A, induceret af $\mathcal{T}_d$. Med andre ord: $\mathcal{T}_{d'} = (\mathcal{T}_d)_A$.

Sætning 4.3. *De afsluttede mængder i et delrum $(A, \mathcal{T}_A)$ af et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er netop mængderne af formen $A \cap F$, hvor F er afsluttet i $(M, \mathcal{T})$.*

For en delmængde $X \subseteq A$ gælder om afslutningen $\mathrm{cl}_A(X)$ i $(A, \mathcal{T}_A)$ at

$$\mathrm{cl}_A(X) = A \cap \mathrm{cl}(X) .$$

Bevis. Første påstand følger af formlen $A \cap \complement O = A \setminus (A \cap O)$, $O \in \mathcal{T}$. Da $A \cap \mathrm{cl}(X)$ er afsluttet i $(A, \mathcal{T}_A)$ og omfatter X fås $\mathrm{cl}_A(X) \subseteq A \cap \mathrm{cl}(X)$ ifølge Sætning 1.14. På den anden side ved vi at $\mathrm{cl}_A(X) = A \cap F$, hvor F er afsluttet i $(M, \mathcal{T})$, altså $X \subseteq F$. Men så er $\mathrm{cl}(X) \subseteq F$, og derfor har vi også $A \cap \mathrm{cl}(X) \subseteq A \cap F = \mathrm{cl}_A(X)$. $\square$

Bemærkning 4.4. Lad $(A, \mathcal{T}_A)$ være et delrum af $(M, \mathcal{T})$. En delmængde B af A kan da både opfattes som en mængde i $(A, \mathcal{T}_A)$ og som en mængde i $(M, \mathcal{T})$. Når man udtaler sig om topologiske egenskaber ved B (f.eks. "B er åben"), må man derfor præcisere, om B opfattes som en mængde i $(A, \mathcal{T}_A)$ eller i $(M, \mathcal{T})$. Dette kan f.eks. ske ved benyttelse af vendinger som "B er åben relativt til A". – Bemærk i øvrigt at den af $\mathcal{T}$ og den af $\mathcal{T}_A$ inducerede delrumstopologi på B er den samme (når $B \subseteq A \subseteq M$), altså $\mathcal{T}_B = (\mathcal{T}_A)_B$.

Inklusionsafbildningen $I_A : A \to M$ givet ved $I_A(x) = x$ for $x \in A \subseteq M$ er kontinuert, idet

$$I_A^{-1}(O) = A \cap O$$

for $O \in \mathcal{T}$. Vi ser endda, at $\mathcal{T}_A$ er den groveste topologi på A, så I_A er kontinuert.

Hvis $f\colon M \to (N, \mathcal{T}_N)$ er kontinuert i $a \in A$, så er *restriktionen* $f|A\colon A \to N$ kontinuert i a idet $f|A = f \circ I_A$.

Hvis $f(M) \subseteq B \subseteq N$ kan vi betragte f som afbildning $f\colon M \to B$. Man ser, at $f\colon M \to B$ er kontinuert i $a \in M$ hvis og kun hvis $f\colon M \to N$ er kontinuert i a.

4.2. Produktrum.

Lad $(M_i)_{i\in I}$ være en familie af mængder. Produktmængden $\prod_{i\in I} M_i$ består af mængden af afbildninger $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} M_i$ så $f(i) \in M_i$ for alle $i \in I$, men det er ofte hensigtsmæssigt (i stil med $\mathbb{R}^k$) at opfatte sådanne afbildninger som familier $(f(i))_{i\in I}$ af elementer, hvor $x_i := f(i) \in M_i$. I praksis ignoreres afbildningen og man tænker på produktmængden som mængder af familier $(x_i)_{i\in I}$, hvor $x_i \in M_i$ for hvert $i \in I$.

Lad $\pi_{i_0} : \Pi M_i \to M_{i_0}$ betegne den i_0'te *projektion*, dvs. afbildningen $\pi_{i_0}((x_i)_{i\in I}) = x_{i_0}$. Den følgende sætning beskriver en naturlig topologi på ΠM_i, når hver af mængderne M_i er forsynet med en topologi $\mathcal{T}_i$.

Sætning 4.5. *Lad* $((M_i, \mathcal{T}_i))_{i\in I}$ *være en familie af topologiske rum, og lad* $\mathcal{S}$ *betegne systemet af delmængder af* ΠM_i *af formen*

$$(*) \qquad \pi_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(O_{i_n}) \,,$$

hvor $\{i_1, \dots, i_n\}$ *er en vilkårlig endelig delmængde af* I*, og* O_{i_k} *er en vilkårlig åben mængde i* $(M_{i_k}, \mathcal{T}_{i_k})$*,* $k = 1, \dots, n$*. Systemet* $\mathcal{S}$ *er da basis for en topologi* $\mathcal{T}$ *på* ΠM_i*. Omegnsfiltret i et punkt* $(x_i)_{i\in I}$ *har en basis bestående af mængderne af formen* $(*)$ *med* $x_{i_k} \in O_{i_k}$*,* $k = 1, \dots, n$*. – Topologien* $\mathcal{T}$ *kaldes produkttopologien på* ΠM_i*; den betegnes lejlighedsvis* $\Pi\mathcal{T}_i$*. Det topologiske rum* $(\Pi M_i, \Pi\mathcal{T}_i)$ *kaldes produktrummet af faktorrummene* $(M_i, \mathcal{T}_i)$*.*

Bevis. Den første påstand følger umiddelbart af Sætning 2.5 idet man bemærker, at $\mathcal{S}$ er afsluttet under dannelse af endelige fællesmængder. Den anden påstand er derefter en umiddelbar konsekvens af Sætning 2.6. $\square$

Mængderne af formen (∗) i 4.5 kan også beskrives som produktmængderne ΠO_i, hvor $O_i = M_i$ for $i \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$. Hvis I er en endelig mængde, består basen for $\Pi\mathcal{T}_i$ altså af produktmængderne ΠO_i, hvor $O_i \in \mathcal{T}_i$. Man ser af (∗) at alle projektionerne π_i er kontinuerte i produkttopologien, som er den groveste topologi på ΠM_i, så alle projektionerne er kontinuerte.

4.3. Kvotientrum.

Lad $\sim$ være en ækvivalensrelation i en mængde M, lad $M/_\sim$ betegne kvotientmængden, dvs. mængden af ækvivalensklasser, og lad $\kappa\colon M \to M/_\sim$ betegne afbildningen, som til $x \in M$ lader svare den ækvivalensklasse $[x]$, som indeholder x. Den kaldes den *kanoniske afbildning*. Den følgende sætning beskriver en naturlig topologi på $M/_\sim$, når M er forsynet med en topologi $\mathcal{T}$.

Sætning 4.6. *Lad $\sim$ være en ækvivalensrelation i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$. Systemet*

$$\mathcal{T}_\sim := \{A \subseteq M/_\sim \mid \kappa^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$$

er da en topologi på $M/_\sim$. – Topologien $\mathcal{T}_\sim$ kaldes kvotienttopologien. Det topologiske rum $(M/_\sim, \mathcal{T}_\sim)$ kaldes kvotientrummet m.h.t. $\sim$.

Det simple bevis overlades til læseren.

Bemærk, at kvotienttopologien er konstrueret, så afbildningen κ er kontinuert, idet man som åbne mængder har brugt alle mængder, hvis originalmængde er åben i M. Vi har derfor, at topologien på $M/\sim$ er den fineste, så κ er kontinuert.

4.4. Initial- og finaltopologi.

Lad f være en afbildning af en mængde M_1 ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$. Vi ser, at f bliver kontinuert, hvis M_1 forsynes med den diskrete topologi. Endvidere gælder, at f har vanskeligere ved at blive kontinuert jo grovere topologi M_1 tænkes forsynet med. Af den følgende sætning vil fremgå, at der findes en groveste topologi $\mathcal{T}_1$ på M_1, som gør f kontinuert. Hermed vil samtidig være givet en eksplicit beskrivelse af samtlige de topologier på M_1, som gør f kontinuert.

Sætning 4.7. *Lad M være en mængde, lad $((M_i, \mathcal{T}_i))_{i\in I}$ være en familie af topologiske rum, og lad der for hvert $i \in I$ være givet en afbildning $f_i : M \to M_i$. Der findes da en groveste topologi $\mathcal{T}$ på M med egenskaben, at alle afbildningerne $f_i\colon (M, \mathcal{T}) \to (M_i, \mathcal{T}_i)$ er kontinuerte, nemlig topologien frembragt af mængderne $f_i^{-1}(O_i)$, hvor $i \in I$ og $O_i \in \mathcal{T}_i$. Mængderne i M af formen*

$$(*) \qquad f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(O_{i_n}) \ ,$$

hvor $\{i_1, \dots, i_n\}$ er en endelig delmængde af I og hvor $O_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$ for $k = 1, \dots, n$, udgør en basis for $\mathcal{T}$. For hvert $x \in M$ udgør de mængder af formen $(*)$, som indeholder x, en $\mathcal{T}$-omegnsbasis i x. – Topologien $\mathcal{T}$ på M kaldes initialtopologien m.h.t. afbildningerne $f_i\colon M \to (M_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$.

Bevis. Enhver topologi på M, som gør f_i kontinuert, må indeholde mængderne $f_i^{-1}(O_i)$, hvor $O_i \in \mathcal{T}_i$. Den af mængderne $f_i^{-1}(O_i)$, $i \in I$, $O_i \in \mathcal{T}_i$, frembragte topologi er derfor den groveste, som gør alle f_i'erne kontinuerte. Hermed er sætningens første og anden påstand eftervist. Idet $\varnothing$ og M begge er af formen $f_i^{-1}(O_i)$ – nemlig med $O_i = \varnothing$ hhv. $O_i = M_i$ for et vilkårligt $i \in I$ – følger sætningens tredie påstand af Sætning 1.24. Sidste påstand følger derefter af Sætning 2.6. $\square$

Eksempel 4.8. Lad A være en delmængde af et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$, og lad $\mathrm{I}_A\colon A \to M$ betegne *inklusionsafbildningen*, dvs. $I_A(x) = x$ for $x \in A$. Initialtopologien på A m.h.t. afbildningen $\mathrm{I}_A\colon A \to (M, \mathcal{T})$ er da delrumstopologien $\mathcal{T}_A$.

Eksempel 4.9. Lad $((M_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$ være en familie af topologiske rum, og lad M betegne produktmængden ΠM_i. Initialtopologien på M m.h.t. projektionerne $\pi_i\colon M \to (M_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, er da produkttopologien $\Pi \mathcal{T}_i$.

Sætning 4.10. *Lad M være en mængde, og lad $\mathcal{T}$ være initialtopologien på M m.h.t. afbildningerne $f_i\colon M \to (M_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$. Lad g være en afbildning af et topologisk rum $(M_0, \mathcal{T}_0)$ ind i $(M, \mathcal{T})$. Afbildningen g er da kontinuert, hvis og kun hvis alle afbildningerne $f_i \circ g\colon (M_0, \mathcal{T}_0) \to (M_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, er kontinuerte.*

Bevis. Hvis g er kontinuert, så er også alle $f_i \circ g$ kontinuerte, jfr. 3.11. Antag omvendt, at alle $f_i \circ g$ er kontinuerte. Da mængderne $(*)$ fra Sætning 4.7 udgør en basis for $\mathcal{T}$, er det ifølge Sætning 3.12 nok at vise at

$$\Omega := g^{-1}(f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_n}^{-1}(O_{i_n})) \in \mathcal{T}_0 \ ,$$

men det følger af omskrivningen

$$(*) \qquad \begin{aligned} \Omega &= g^{-1}(f_{i_1}^{-1}(O_{i_1})) \cap \dots \cap g^{-1}(f_{i_n}^{-1}(O_{i_n})) \\ &= (f_{i_1} \circ g)^{-1}(O_{i_1}) \cap \dots \cap (f_{i_n} \circ g)^{-1}(O_{i_n})) \end{aligned}$$

idet kontinuiteten af afbildningerne $f_i \circ g$ sikrer, at mængderne

$$(f_{i_k} \circ g)^{-1}(O_{i_k}) \,, \quad k = 1, \dots, n \ ,$$

er åbne i $(M_0, \mathcal{T}_0)$. Fællesmængden af disse mængder er følgelig også åben, altså $\Omega \in \mathcal{T}_0$. $\square$

Ved anvendelse af Sætning 4.10 på produktrum fås følgende væsentlige resultat:

Korollar 4.11. *En afbildning g af et topologisk rum $(M_0, \mathcal{T}_0)$ ind i et produktrum $(\Pi M_i, \Pi \mathcal{T}_i)$ er kontinuert, hvis og kun hvis alle afbildningerne $\pi_i \circ g\colon (M_0, \mathcal{T}_0) \to (M_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, er kontinuerte.*

Vi skal dernæst betragte en dual situation. Lad f være en afbildning af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i en mængde M_2. En topologi $\mathcal{T}_2$ på M_2 gør f kontinuert hvis og kun hvis $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subseteq \mathcal{T}_1$. Den trivielle topologi på M_2 har denne egenskab. Jo finere topologier på M_2, man betragter, des vanskeligere har f ved at blive kontinuert. Af det følgende fremgår, at der findes en fineste topologi på M_2, som gør f kontinuert. Hermed vil samtidig mængden af de topologier på M_2, som gør f kontinuert, være bestemt.

Sætning 4.12. *Lad M være en mængde, lad $((M_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$ være en familie af topologiske rum, og lad der for hvert $i \in I$ være givet en afbildning $f_i\colon M_i \to M$. Der findes da en fineste topologi $\mathcal{T}$ på M med egenskaben, at alle afbildningerne f_i er kontinuerte. Systemet af åbne mængder i $(M, \mathcal{T})$ er de delmængder A af M for hvilke $f_i^{-1}(A) \in \mathcal{T}_i$ for alle $i \in I$. – Topologien $\mathcal{T}$ på M kaldes finaltopologien m.h.t. afbildningerne $f_i\colon (M_i, \mathcal{T}_i) \to M$, $i \in I$.*

Bevis. Det er let at eftervise, at systemet

$$\mathcal{T} := \{A \subseteq M \mid \forall i \in I\colon f_i^{-1}(A) \in \mathcal{T}_i\}$$

er en topologi på M, og det er derefter klart, at $\mathcal{T}$ gør alle f_i'erne kontinuerte. Men heraf fremgår det ønskede. Thi er $\mathcal{T}'$ en topologi på M, som gør alle f_i'erne kontinuerte, så må der for alle $O \in \mathcal{T}'$ gælde $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$, $i \in I$, – og dermed $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. $\square$

Eksempel 4.13. Lad $\sim$ være en ækvivalensrelation i en mængde M, og lad $\kappa\colon M \to M/\sim$ betegne afbildningen, som til $x \in M$ lader svare den ækvivalensklasse $[x]$, som indeholder x. Lad yderligere $\mathcal{T}$ være en topologi på M. Finaltopologien på $M/\sim$ m.h.t. afbildningen $\kappa\colon (M, \mathcal{T}) \to M/\sim$ er da kvotienttopologien $\mathcal{T}_\sim$, jfr. 4.6.

Sætning 4.14. *Lad M være en mængde, og lad $\mathcal{T}$ være finaltopologien på M m.h.t. afbildningerne $f_i\colon (M_i, \mathcal{T}_i) \to M$, $i \in I$. Lad g være en afbildning af $(M, \mathcal{T})$ ind i et topologisk rum $(M_0, \mathcal{T}_0)$. Afbildningen g er da kontinuert, hvis og kun hvis alle afbildningerne $g \circ f_i\colon (M_i, \mathcal{T}_i) \to (M_0, \mathcal{T}_0)$, $i \in I$, er kontinuerte.*

Bevis. Hvis g er kontinuert, så er også alle sammensatte afbildninger $g \circ f_i$, $i \in I$, kontinuerte. Antag omvendt, at alle $g \circ f_i$, $i \in I$, er kontinuerte. Lad O være en åben mængde i $(M_0, \mathcal{T}_0)$. Af det givne følger da at $(g \circ f_i)^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$ for hvert $i \in I$. Men idet $(g \circ f_i)^{-1}(O) = f_i^{-1}(g^{-1}(O))$ ses, at $g^{-1}(O) \in \mathcal{T}$, jfr. 4.12. Heraf fremgår, at g er kontinuert. $\square$

Opgaver til §4

4.1. Lad M være mængden af punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så enten $x = y = 0$ eller $xy = 1$, og lad M være forsynet med delrumstopologien fra $\mathbb{R}^2$. Lad $f : M \to \mathbb{R}$ være restriktionen $f = \pi_1 | M$ af projektionen $\pi_1(x, y) = x$ på $\mathbb{R}^2$. Vis, at f er kontinuert men ikke åben.

4.2. Lad $(M_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ være en vilkårlig familie af topologiske rum. Vis, at projektionen π_i er en åben afbildning af produktrummet $(\prod M_i, \prod \mathcal{T}_i)$ på M_i.

Vis, at hvis F_i er afsluttet i M_i for hvert $i \in I$, så er $\prod F_i$ afsluttet i produktrummet. Vis videre, at for vilkårligt $A_i \subseteq M_i$ er

$$\mathrm{cl}\left(\prod_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathrm{cl}\, A_i \ .$$

4.3. Lad $\sim$ være en ækvivalensrelation i det topologiske rum $(M, \mathcal{T})$ og lad $M \backslash \sim$ være mængden af ækvivalensklasser forsynet med kvotienttopologien $\mathcal{T}_\sim$. Vis, at $A \subseteq M \backslash \sim$ er afsluttet hvis og kun hvis $\kappa^{-1}(A)$ er afsluttet i M. Vis, at punkterne i $M \backslash \sim$ er afsluttede netop hvis alle ækvivalensklasser er afsluttede i M.

For en mængde $S \subseteq M$ er *mætningen* af S givet ved

$$\widetilde{S} = \{x \in M \mid \exists y \in S : x \sim y\} = \bigcup_{y \in S} [y] \ .$$

Vis, at κ er en åben afbildning hvis og kun hvis mætningen af enhver åben mængde er åben.

Vis, at hvis ækvivalensklasserne er åbne mængder, så er de også afsluttede.

4.4. Vis, at hvis $(M, \mathcal{T})$ opfylder 1. hhv. 2. tællelighedsaksiom, så gælder det samme om ethvert delrum.

4.5. Lad M være en vilkårlig ikke tom mængde og antag, at $A \subseteq M$ er ikke tom og $A \neq M$. Konstruer en topologi på M så delrumstopologien på A er den diskrete, og på $\complement A$ den trivielle topologi (jfr. 1.4). Brug dette til at konstruere et separabelt topologisk rum med et ikke-separabelt delrum.

4.6. Lad $(M_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, \ldots, n$ være en endelig familie af topologiske rum. Lad $(*)$ stå for en af de 3 egenskaber: 1. tællelighedsaksiom, 2. tællelighedsaksiom, separabilitet. Vis, at hvis hvert af rummene har egenskaben $(*)$, så har produktrummet $\prod M_i$ også egenskaben $(*)$.

4.7. Lad $(M_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ være en vilkårlig familie af topologiske rum og lad $\varphi : I \to I$ være en *permutation*, dvs. en bijektiv afbildning. Vis, at afbildningen $(x_i)_{i \in I} \mapsto (x_{\varphi(i)})_{i \in I}$ af $\prod M_i$ på $\prod M_{\varphi(i)}$ er en homeomorfi.

4.8. Lad I være en vilkårlig mængde og antag, at der for hvert $i \in I$ foreligger en kontinuert afbildning $f_i : (M_i, \mathcal{T}_i) \to (N_i, \mathcal{S}_i)$. Lad $f = \prod f_i$ være afbildningen defineret ved

$$f\left((x_i)_{i \in I}\right) = \left(f_i(x_i)\right)_{i \in I}$$

af produktrummet $\prod M_i$ ind i produktrummet $\prod N_i$.

Vis, at f er kontinuert.

4.9. Lad $(M_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ være en tællelig familie af topologiske rum, som alle antages at opfylde 2. tællelighedsaksiom. Vis, at initialtopologien på en mængde M med hensyn til afbildningerne $f_i : M \to (M_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, opfylder 2. tællelighedsaksiom.

4.10. På $\mathbb{R}$ betragtes akvivalensrelationen $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$. Vis, at kvotientmængden kan identificeres med enhedscirklen $\mathbb{T}$ i den komplekse plan og vis, at kvotienttopologien dermed identificeres med delrumstopologien på $\mathbb{T}$ fra $\mathbb{C}$. Anderledes udtrykt: $[x] \mapsto e^{ix}$ er en homeomorfi af $\mathbb{R}/\sim$ på $\mathbb{T}$.

4.11. Betragt produktrummet $M \times N$ af to topologiske rum. For $x \in M$ og $A \subseteq M \times N$ betegner A_x *snitmængden*

$$A_x = \{y \in N \mid (x, y) \in A\} .$$

Vis, at hvis A er åben hhv. afsluttet i $M \times N$, så er A_x åben hhv. afsluttet i N.

Vis, at hvis $f : M \times N \to T$ er kontinuert, så er *snitafbildningen* $f(x, \cdot) : N \to T$ kontinuert. Her er T et vilkårligt topologisk rum, og $f(x, \cdot)$ er afbildningen $y \mapsto f(x, y)$.

§5. Hausdorff rum, normale rum.

5.1. Adskillelsesaksiomer.

Det er velkendt, at der for to forskellige punkter x_1 og x_2 i et metrisk rum (M, d) findes disjunkte åbne mængder O_1 og O_2 med $x_1 \in O_1$ og $x_2 \in O_2$ f.eks. $O_1 = K(x_1, r)$, $O_2 = K(x_2, r)$, hvor $r = \frac{1}{2}d(x_1, x_2)$. Dette kan udtrykkes ved at sige, at der er "tilstrækkeligt mange" åbne mængder til at skille punkter. I det følgende skal denne og andre lignende skillende egenskaber ved de åbne mængder formuleres som såkaldte adskillelsesaksiomer. [T i 5.1-5.4 står for Trennung.]

Definition 5.1. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være et T_1-*rum*, dersom følgende betingelse er opfyldt:

(T_1) For alle punkter x_1 og x_2 med $x_1 \neq x_2$ findes en åben mængde O med $x_1 \in O$, $x_2 \notin O$.

Definition 5.2. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være et T_2-*rum*, dersom følgende betingelse er opfyldt:

(T_2) For alle punkter x_1 og x_2 med $x_1 \neq x_2$ findes disjunkte åbne mængder O_1 og O_2 med $x_1 \in O_1$ og $x_2 \in O_2$.

Et T_2-rum kaldes også et *Hausdorff rum*.

Definition 5.3. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være et T_3-*rum*, dersom følgende betingelse er opfyldt:

(T_3) For alle punkter x og alle afsluttede mængder F med $x \notin F$ findes disjunkte åbne mængder O_1 og O_2 med $x \in O_1$ og $F \subseteq O_2$.

Et T_3-rum, som tillige er et T_1-rum, kaldes et *regulært* rum.

Definition 5.4. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være et T_4-*rum*, dersom følgende betingelse er opfyldt:

(T_4) For alle disjunkte afsluttede mængder F_1 og F_2 findes disjunkte åbne mængder O_1 og O_2 med $F_1 \subseteq O_1$ og $F_2 \subseteq O_2$.

Et T_4-rum, som tillige er et T_1-rum, kaldes et *normalt* rum.

Bemærkning 5.5. Åbenbart gælder $(\mathrm{T}_2) \Rightarrow (\mathrm{T}_1)$. Ingen anden implikation mellem de fire betingelser er almengyldig. Men for et topologisk rum, hvori alle 1-punkts mængder vides at være afsluttede, gælder åbenbart, at (T_4) implicerer (T_3), og (T_3) implicerer (T_2). Af Sætning 5.6 fremgår, at 1-punkts mængderne i $(M, \mathcal{T})$ er afsluttede, hvis og kun hvis $(M, \mathcal{T})$ er et T_1-rum. Der gælder derfor $(\mathrm{T}_4) \wedge (\mathrm{T}_1) \Rightarrow (\mathrm{T}_3)$ og $(\mathrm{T}_3) \wedge (\mathrm{T}_1) \Rightarrow (\mathrm{T}_2)$. Ethvert normalt rum er altså regulært, og ethvert regulært rum er et Hausdorff rum. Heraf ses, at i definitionen af regulært og normalt rum kan betingelsen (T_1) erstattes med den stærkere betingelse (T_2).

Sætning 5.6. *Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er et T_1-rum, hvis og kun hvis enhver 1-punkts mængde i M er afsluttet.*

Beviset overlades til læseren.

Sætning 5.7. *Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er et T_2-rum, hvis og kun hvis der for ethvert punkt $x \in M$ og ethvert punkt $y \in M \setminus \{x\}$ findes en afsluttet omegn U af x med $y \notin U$.*

Beviset overlades til læseren.

Sætning 5.8. *Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er et T_3-rum, hvis og kun hvis der for ethvert punkt $x \in M$ og enhver åben mængde O_1 med $x \in O_1$ findes en åben mængde O_2 med $x \in O_2 \subseteq \overline{O}_2 \subseteq O_1$, – altså hvis og kun hvis ethvert punkt har en omegnsbasis bestående af afsluttede mængder.*

Beviset overlades til læseren.

Sætning 5.9. *Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er et T_4-rum, hvis og kun hvis der for enhver afsluttet mængde F i M og enhver åben mængde O_1 med $F \subseteq O_1$ findes en åben mængde O_2 med $F \subseteq O_2 \subseteq \overline{O}_2 \subseteq O_1$.*

Beviset overlades til læseren.

5.2. Adskillelse ved kontinuerte funktioner.

Spørgsmålet om gyldighed af et eller flere af adskillelsesaksiomerne for et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er tæt forbundet med spørgsmålet om eksistens af "mange" kontinuerte (reelle) funktioner på $(M, \mathcal{T})$. Det kan meget vel tænkes, at der ikke findes andre kontinuerte funktioner $f : M \to \mathbb{R}$ end de konstante. Hvis $(M, \mathcal{T})$ har egenskaben, at de kontinuerte funktioner på $(M, \mathcal{T})$ *skiller punkter*, – dvs. at der for alle punkter $x_1, x_2 \in M$ med $x_1 \neq x_2$ findes en kontinuert funktion f på $(M, \mathcal{T})$ med $f(x_1) \neq f(x_2)$, – så er $(M, \mathcal{T})$ et Hausdorff rum. Thi af $f(x_1) \neq f(x_2)$ følger eksistensen af åbne mængder O_1 og O_2 i $\mathbb{R}$ med $f(x_1) \in O_1$, $f(x_2) \in O_2$ og $O_1 \cap O_2 = \varnothing$; mængderne $f^{-1}(O_1)$ og $f^{-1}(O_2)$ er da disjunkte åbne mængder i $(M, \mathcal{T})$ med $x_1 \in f^{-1}(O_1)$ og $x_2 \in f^{-1}(O_2)$.

Et analogt argument viser, at hvis de kontinuerte funktioner på $(M, \mathcal{T})$ *skiller punkter og afsluttede mængder*, – dvs. at der for alle punkter x og alle ikke tomme afsluttede mængder F med $x \notin F$ findes en kontinuert funktion f på $(M, \mathcal{T})$, som er konstant på F, således at $f(x)$ er forskellig fra f's værdi på F, – så har $(M, \mathcal{T})$ egenskaben (T_3).

Hvis de kontinuerte funktioner på $(M, \mathcal{T})$ *skiller afsluttede mængder*, – dvs. at der for alle ikke tomme disjunkte afsluttede mængder F_1 og F_2 findes en kontinuert funktion f på $(M, \mathcal{T})$, som er konstant på F_1 og F_2, således at værdien på F_1 er forskellig fra værdien på F_2, – så har $(M, \mathcal{T})$ egenskaben (T_4). Vi skal i den følgende sætning vise, at hvis omvendt $(M, \mathcal{T})$ er et T_4-rum, så skiller de kontinuerte funktioner afsluttede mængder. “Kun hvis” udsagnet kaldes *Urysohns lemma*.

Sætning 5.10 (Urysohns lemma)**.** *Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er et T_4-rum, hvis og kun hvis der for alle ikke tomme disjunkte afsluttede mængder F_0 og F_1 findes en kontinuert funktion f på $(M, \mathcal{T})$ med $f(F_0) = \{0\}$, $f(F_1) = \{1\}$ og $f(M) \subseteq [0, 1]$.*

Bevis. Som bemærket er “hvis” udsagnet oplagt. Antag derfor, at $(M, \mathcal{T})$ er et T_4-rum, og lad F_0 og F_1 være ikke tomme disjunkte afsluttede mængder i $(M, \mathcal{T})$. Da er $O_1 := M \backslash F_1$ en åben mængde med $F_0 \subseteq O_1$, og ifølge 5.9 findes derfor en åben mængde O_0 med

$$F_0 \subseteq O_0 \subseteq \operatorname{cl} O_0 \subseteq O_1 = M \backslash F_1 \ .$$

Anvendes derefter 5.9 på $\operatorname{cl} O_0$ og O_1, fås en åben mængde $O_{1/2}$ med

$$\operatorname{cl} O_0 \subseteq O_{1/2} \subseteq \operatorname{cl} O_{1/2} \subseteq O_1 \ .$$

Anvendes derefter 5.9 på $\operatorname{cl} O_0$ og $O_{1/2}$, og på $\operatorname{cl} O_{1/2}$ og O_1, fås åbne mængder $O_{1/4}$ og $O_{3/4}$ med

$$\operatorname{cl} O_0 \subseteq O_{1/4} \subseteq \operatorname{cl} O_{1/4} \subseteq O_{1/2} \ ,$$
$$\operatorname{cl} O_{1/2} \subseteq O_{3/4} \subseteq \operatorname{cl} O_{3/4} \subseteq O_1 \ .$$

Ved induktion indses herefter, at der for hvert rationalt tal i $[0, 1]$ af formen $k/2^n$ kan tilordnes en åben mængde $O_{k/2^n}$, således at der gælder $\operatorname{cl} O_r \subseteq O_s$ når $r < s$. Vi sætter nu

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{k/2^n \mid x \in O_{k/2^n}\} & \text{for} \quad x \in M \backslash F_1 \ , \\ 1 \qquad \text{for} \quad x \in F_1 \ . \end{cases}$$

Vi har da $f(M) \subseteq [0, 1]$, $f(F_0) = \{0\}$ og $f(F_1) = \{1\}$. Det påstås, at f er kontinuert. Betragt først et punkt $x \in M$ med $f(x) \in]0, 1[$, og lad U være en omegn af $f(x)$ i $[0, 1]$. Der findes da r, s af formen $k/2^n$ med $r < f(x) < s$ og $[r, s] \subseteq U$. Sæt $V := (M \setminus \operatorname{cl} O_r) \cap O_s$; da er V åben i $(M, \mathcal{T})$. Af $f(x) < s$ følger

$x \in O_s$, og af $r < f(x)$ følger $x \notin \operatorname{cl} O_r$. Vi har altså $x \in V$, og V er derfor en (åben) omegn af x. For et vilkårligt punkt $y \in V$ gælder $f(y) \in [r, s]$; thi $y \notin \operatorname{cl} O_r$ giver $r \leqq f(y)$, og $y \in O_s$ giver $f(y) \leqq s$. Vi har derfor $f(V) \subseteq U$, hvormed $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$. Dette viser, at f er kontinuert i x. På tilsvarende måde ses, at f også er kontinuert i ethvert punkt, hvor f tager værdien 0 eller 1. $\square$

Det er værd at notere sig, at hvis der til givne ikke tomme disjunkte mængder F_0 og F_1 i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ findes en kontinuert funktion, som blot skiller F_0 og F_1 som beskrevet lige før Sætning 5.10, så findes også en, som skiller på den i 5.10 beskrevne måde. Er nemlig f en kontinuert funktion på $(M, \mathcal{T})$ med $f(F_0) = \{a\}$, og $f(F_1) = \{b\}$, hvor $a \neq b$, så vil funktionen

$$g := \inf\{1,\ |(f-a)(b-a)^{-1}|\}$$

ligeledes være kontinuert, og der vil gælde $g(F_0) = \{0\}$, $g(F_1) = \{1\}$ og $g(M) \subseteq [0, 1]$. Kernen i Urysohns lemma er altså udsagnet, at de kontinuerte funktioner på et T_4-rum skiller de afsluttede mængder.

Bemærkning 5.11. De til 5.10 analoge udsagn om T_2-rum og T_3-rum er ikke sande: Der findes T_2-rum hhv. T_3-rum uden egenskaben, at de kontinuerte funktioner skiller punkter hhv. punkter og afsluttede mængder.

Definition 5.12. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være et $T_{3.5}$-*rum*, dersom følgende betingelse er opfyldt:

($T_{3.5}$) For alle punkter x og alle ikke tomme afsluttede mængder F med $x \notin F$ findes en kontinuert funktion f på $(M, \mathcal{T})$ med $f(x) = 0$, $f(F) = \{1\}$ og $f(M) \subseteq [0, 1]$.

Et $T_{3.5}$-rum, som tillige er et T_1-rum, kaldes et *fuldstændig regulært* rum.

Det er klart, at ethvert normalt rum er fuldstændig regulært, og ethvert sådant rum er regulært.

Sætning 5.13. *Ethvert metrisk rum er normalt.*

Bevis. For en afsluttet mængde F i et metrisk rum (M, d) indføres afstandsfunktionen

$$d_F(x) = \inf\{d(x, y) \mid y \in F\}\ ,$$

som er afstandsformindskende og dermed kontinuert, jfr. Mat 2. Bemærk også, at $d_F(x) = 0$ hvis og kun hvis $x \in F$. Det er nu let at finde en kontinuert funktion, som adskiller to afsluttede disjunkte mængder $F_0, F_1 \subseteq M$, nemlig

$$f(x) = \frac{d_{F_0}(x)}{d_{F_0}(x) + d_{F_1}(x)}\ , \quad x \in M\ . \quad \square$$

I normale rum gælder et vigtigt resultat om udvidelse af kontinuerte bgrænsede funktioner.

Sætning 5.14 (Tietzes udvidelsessætning). *I et T_4-rum $(M, \mathcal{T})$ kan enhver kontinuert begrænset funktion $f : F \to \mathbb{R}$ på en afsluttet delmængde $F \subseteq M$ udvides til en kontinuert begrænset funktion $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}$.*

Bevis. Vi kan uden indskrænkning antage, at $f(F) \subseteq [-1, 1]$. Vi vil konstruere en kontinuert udvidelse $\widetilde{f} : M \to [-1, 1]$.

De disjunkte delmængder $f^{-1}([-1, -\frac{1}{3}])$ og $f^{-1}([\frac{1}{3}, 1])$ af F er afsluttede relativt til F, da f er kontinuert, men da F er forudsat afsluttet, er de afsluttede i $(M, \mathcal{T})$. Ifølge Urysohns lemma findes en kontinuert funktion $f_1 : M \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, som er $-\frac{1}{3}$ på den første mængde, $\frac{1}{3}$ på den anden mængde. I den resterende del af F har f (og f_1) værdier i intervallet $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, altså $|f(x) - f_1(x)| \leq 2/3$ for alle $x \in F$.

Anvendes dette argument på den begrænsede kontinuerte funktion $f - f_1|F$ med værdier i $\left[-\frac{2}{3}\, ,\, \frac{2}{3}\right]$, kan man finde en kontinuert funktion $f_2 : M \to \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\, ,\, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right]$ så

$$|f(x) - f_1(x) - f_2(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 , \quad x \in F .$$

Fortsættes på denne måde findes for hvert n en kontinuert funktion f_n med $|f_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ for $x \in M$ og

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n , \quad x \in F .$$

Idet rækken $\sum f_k$ har en konvergent majorantrække fremstiller den en kontinuert begrænset funktion $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}$, som klart opfylder $f(x) = \widetilde{f}(x)$ for $x \in F$. Desuden gælder

$$|\widetilde{f}(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1 .$$

□

Opgaver til §5

5.1. Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum og lad $A \subseteq M$. Vis, at hvis M opfylder en af betingelserne (T_i), $i = 1, 2, 3, 3.5$, så gælder det samme om delrummet $(A, \mathcal{T}_A)$. (Det behøver derimod ikke gælde for (T_4)).

5.2. Vis, at et vilkårligt produkt af rum, der alle opfylder betingelsen (T_i) igen opfylder (T_i) når $i = 1, 2, 3$. (Det er også rigtigt for $(\mathrm{T}_{3.5})$ men ikke for (T_4), men det fører for vidt at gå ind herpå).

5.3. Lad $(M_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ være en familie af Hausdorff rum og lad M være forsynet med initialtopologien for en familie af afbildninger $f_i : M \to M_i$. Vis, at hvis familien af afbildninger *skiller punkter* i M, dvs.

$$\forall x, y \in M \ , \ x \neq y \ \exists i \in I : f_i(x) \neq f_i(y) \ ,$$

så er initialtopologien på M Hausdorff.

5.4. *Tychonoff-terningen* er et produktrum, hvor alle faktorer er enhedsintervallet $[0, 1]$. Vis Tychonoffs resultat: *Ethvert fuldstændig regulært rum* $(M, \mathcal{T})$ *er homeomorft med et delrum af en Tychonoff-terning.*

Vink. Lad I være mængden af alle kontinuerte afbildninger $f : M \to [0, 1]$ og lad $T = \prod_I [0, 1]$ være Tychonoff-terningen, hvor $[0, 1]$ optræder som faktor en gang for hvert $f \in I$. Lad $\Phi : M \to T$ være defineret ved $\Phi(x) = (f(x))_{f \in I}$. Vis først, at Φ er kontinuert og injektiv. Vis endelig, at Φ er åben som afbildning af M på $\Phi(M)$.

5.5. Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum og lad $M^2 = M \times M$ være forsynet med produkttopologien.

Vis, at M er et Hausdorff rum hvis og kun hvis diagonalen $\triangle = \{(x, y) \in M^2 \mid x = y\}$ er afsluttet i M^2.

5.6. Lad $f : M \to N$ være en kontinuert afbildning af et topologisk rum M ind i et topologisk rum N. Ved grafen af f forstås mængden

$$G(f) = \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\} \ .$$

Vis, at hvis N er et Hausdorff rum, så er $G(f)$ afsluttet i produktrummet $M \times N$.

5.7. Lad $f, g : M \to N$ være kontinuerte funktioner mellem topologiske rum, hvor N antages at være Hausdorff. Vis, at mængden

$$\{x \in M \mid f(x) = g(x)\}$$

er afsluttet. Vis, at hvis f og g stemmer overens på en overalt tæt delmængde af M, så er $f = g$.

5.8. En *topologisk gruppe* er en gruppe G forsynet med en topologi $\mathcal{T}$ så afbildningen $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ af $G \times G$ med produkttopologien ind i G er kontinuert. (Kompositionen i G af x og y skrives xy, det neutrale element betegnes e og det inverse element til x betegnes x^{-1}).

Vis, at en gruppe G med en topologi $\mathcal{T}$ er en topologisk gruppe netop hvis afbildningerne $(x, y) \mapsto xy$ og $x \mapsto x^{-1}$ er kontinuerte.

Vis, at i en topologisk gruppe gælder følgende:

a) Afbildningen $x \mapsto x^{-1}$ er en homeomorfi.
b) Ventre- og højretranslationerne $v_a, h_a : G \to G$ givet ved $v_a(x) = ax$, $h_a(x) = xa$ er homeomorfier.
c) $v_a(\mathcal{U}(e)) = h_a(\mathcal{U}(e)) = \mathcal{U}(a)$ for omegnsfiltrene.
d) Vis, at der for enhver omegn $U \in \mathcal{U}(e)$ findes en symmetrisk omegn V af e (i.e. $V^{-1} = V$) så $VV \subseteq U$, og slut at $\overline{V} \subseteq U$.
e) Vis, at hvis $\{e\}$ er afsluttet ($\Leftrightarrow$ G er et T_1-rum), så er G automatisk Hausdorff og regulært. (Man kan endda vise, at G er fuldstændig regulært.)

§6. Kompakthedsbegreber.

6.1. Indledning.

Begrebet kompakthed spiller en vigtig rolle i alle dele af matematik, bl.a. fordi det kan bruges til at vise eksistens af maksimum og minimum. Følgende sætning forudsættes bekendt fra Matematik 2.

Sætning 6.1. *For en delmængde K af et metrisk rum (M, d) er følgende egenskaber ensbetydende:*

(i) *Enhver punktfølge fra K har et fortætningspunkt i K.*
(ii) *Enhver punktfølge fra K har en delfølge, der er konvergent i K.*
(iii) *Enhver åben overdækning af K kan udtyndes til en endelig overdækning.*

Delmængder K med de tre egenskaber er netop hvad man forstår ved *kompakte* delmængder af et metrisk rum.

I beviset for (i) $\Rightarrow$ (iii) benytter man følgende delresultat om Lebesgue tal:

Lad K være en kompakt (dvs. (i) gælder) delmængde af et metrisk rum (M, d) og lad $(S_i)_{i\in I}$ være en åben overdækning af K. Så findes et $\varepsilon > 0$ så der til hver delmængde $A \subseteq K$ med $\operatorname{diam}(A) < \varepsilon$ findes $i \in I$ med $A \subseteq S_i$.

Et sådant ε kaldes *Lebesgue tal* for overdækningen.

Bevis. I modsat fald gælder

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A \subseteq K :\ \operatorname{diam}(A) < \varepsilon\ \forall i \in I (A \not\subseteq S_i)\ ,$$

og udnyttes dette for $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ findes $a_n \in A_n$, $\operatorname{diam}(A_n) < 1/n$ så $A_n \not\subseteq S_i$ for alle n og i.

Da (a_n) har et fortætningspunkt $a \in K$ findes $i_0 \in I$ så $a \in S_{i_0}$ og altså $K(a, \varepsilon) \subseteq S_{i_0}$ for $\varepsilon > 0$ tilstrækkeligt lille. Vi kan dernæst finde $n \in \mathbb{N}$ så

$$d(a, a_n) < \varepsilon/2\ ,\ \ 1/n < \varepsilon/2\ ,$$

men da $\operatorname{diam}(A_n) < 1/n < \varepsilon/2$ må $A_n \subseteq K(a, \varepsilon)$, og dermed opnår vi modstrid, idet $K(a, \varepsilon) \subseteq S_{i_0}$. $\square$

Det forudsættes bekendt og er iøvrigt let at vise, at en kompakt mængde i et metrisk rum er afsluttet og begrænset. For talrummene $\mathbb{R}^n$ gælder også det omvendte, dvs. de kompakte delmængder af $\mathbb{R}^n$ er præcis de afsluttede og begrænsede delmængder. At dette ikke gælder for alle metriske rum ses f.eks. ved at betragte en uendelig mængde med den diskrete metrik.

Når man skal generalisere kompakthed til topologiske rum, kan man tage udgangspunkt i (i), (ii) eller (iii), og det er også gjort i tidens løb, men det leder til forskellige begreber: (i) tællelig kompakthed (ii) følge-kompakthed eller (iii) *kompakthed.* Det mest udbredte idag er at tage udgangspunkt i (iii), der er særdeles velegnet til topologiske rum, og det vil vi også gøre, jfr. Definition 6.2 nedenfor. Vi bruger altså betegnelsen *kompakt*, når "Borels overdækningssætning gælder". Sprogbrugen er imidlertid ikke universelt accepteret. Hos visse forfattere, f.eks. Bourbaki og Engelking bruges betegnelsen *quasikompakt* for betingelse (iii), og kompakt defineres som quasikompakt og Hausdorff.

6.2. Kompakte rum.

Et system $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$ af delmængder af en mængde M siges som bekendt at være *overdækning* af $K \subseteq M$, dersom $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} S_i$. En overdækning i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ kaldes en *åben overdækning*, dersom den består af åbne mængder.

Definition 6.2. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være *kompakt*, dersom enhver åben overdækning af M indeholder (kan udtyndes til) en overdækning bestående af kun endelig mange mængder. Der forlanges altså, at det for et vilkårligt system $\mathcal{S} = (S_i)_{i\in I}$ af åbne mængder opfyldende $\bigcup\limits_{i\in I} S_i = M$ er muligt at vælge en endelig delmængde $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$ så

$$S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_n} = M \ .$$

Bemærkning 6.3. Ved overgang til komplementærmængder ses, at $(M, \mathcal{T})$ er kompakt, hvis og kun hvis der for ethvert system $\mathcal{S}$ af afsluttede delmængder af $(M, \mathcal{T})$ gælder, at hvis alle mængderne i $\mathcal{S}$ har en tom fællesmængde, så vil der findes endelig mange mængder fra $\mathcal{S}$ med tom fællesmængde.

Definition 6.4. En delmængde K af et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være *kompakt*, dersom delrummet $(K, \mathcal{T}_K)$ er kompakt.

Bemærkning 6.5. En delmængde K af $(M, \mathcal{T})$ er kompakt, hvis og kun hvis der for ethvert system $\mathcal{S}$ af åbne delmængder af M, som overdækker K, findes et endeligt delsystem af $\mathcal{S}$, som overdækker K.

Sætning 6.6. *Lad K være en afsluttet delmængde af et kompakt topologisk rum $(M, \mathcal{T})$. Da er K kompakt.*

Bevis. Lad $\mathcal{S}$ være et system af åbne mængder i $(M, \mathcal{T})$ som overdækker K, – jfr. 6.5. Da K er afsluttet, er $M \backslash K$ åben, og $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \cup \{M \backslash K\}$ er derfor et system af åbne mængder i $(M, \mathcal{T})$, som overdækker M. Da $(M, \mathcal{T})$ er kompakt, vil der findes et endeligt delsystem $\mathcal{S}''$ af $\mathcal{S}'$ som overdækker M. Systemet $\mathcal{S}''' := \mathcal{S}'' \setminus \{M \backslash K\}$ er da et endeligt delsystem af $\mathcal{S}$, som overdækker K. Hermed er påstanden bevist. $\square$

Sætning 6.7. *Lad K være en kompakt delmængde af et Hausdorff rum $(M, \mathcal{T})$. Da er K afsluttet.*

Bevis. Lad $x \in M \backslash K$. For hvert $y \in K$ findes da på grund af Hausdorff egenskaben disjunkte åbne mængder O'_y og O''_y med $x \in O'_y$ og $y \in O''_y$. Systemet af mængderne O''_y, $y \in K$, er åbenbart en åben overdækning af den kompakte mængde K, og der findes derfor $y_1, \ldots, y_n \in K$ med $K \subseteq O''_{y_1} \cup \cdots \cup O''_{y_n}$. Fællesmængden af de tilsvarende mængder $O'_{y_1}, \ldots, O'_{y_n}$ er en åben mængde, som er disjunkt med $O''_{y_1} \cup \cdots \cup O''_{y_n}$, og derfor yderligere disjunkt med K. Hermed er vist, at der til hvert $x \in M \backslash K$ findes en åben mængde O med $x \in O \subseteq M \backslash K$. Dette viser, at K er afsluttet. $\square$

Af 6.6 og 6.7 fremgår, at de kompakte delmængder af et kompakt Hausdorff rum netop er de afsluttede mængder.

Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum. Det er da klart, at foreningsmængden af endelig mange kompakte delmængder af $(M, \mathcal{T})$ igen er kompakt. Endvidere er det let at se ved anvendelse af 6.6, at fællesmængden af et system af afsluttede mængder er kompakt, når blot en af mængderne er kompakt. I et Hausdorff rum er fællesmængden af kompakte mængder igen kompakt.

6.8. Kompakthedsteoriens 1. hovedsætning. *Lad $(M_1, \mathcal{T}_1)$ være kompakt, og lad f være en kontinuert afbildning af $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$. Da er $f(M_1)$ kompakt i $(M_2, \mathcal{T}_2)$.*

Bevis. Lad $\mathcal{S}$ være et system af åbne mængder i $(M_2, \mathcal{T}_2)$, som overdækker $f(M_1)$. Systemet $f^{-1}(\mathcal{S})$ af originalmængder er da en overdækning af M_1, og mængderne i $f^{-1}(\mathcal{S})$ er åbne på grund af f's kontinuitet. Kompaktheden af $(M_1, \mathcal{T}_1)$ sikrer, at der findes et endeligt delsystem $\mathcal{S}'$ af $\mathcal{S}$, således at $f^{-1}(\mathcal{S}')$ overdækker M_1. Men så vil $\mathcal{S}'$ være et endeligt delsystem af $\mathcal{S}$, som overdækker $f(M_1)$. $\square$

Følgende Korollar af 1. hovedsætning har mange velkendte anvendelser:

Korollar 6.9. *Lad $f : (M, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion på et kompakt rum. Så er f begrænset og har maksimum og minimum, dvs. der findes punkter $x_{\max}, x_{\min} \in M$ så*

$$f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max}) \quad \textit{for alle} \quad x \in M \; .$$

Bevis. Billedmængden $f(M)$ er kompakt, altså afsluttet og begrænset i $\mathbb{R}$, og påstanden følger. □

Resultatet er også en konsekvens af følgende sætning, der begrebsmæssigt bygger på opgave 3.5.

Sætning 6.10. *Lad $(M, \mathcal{T})$ være et kompakt rum og $f : M \to \mathbb{R}$ en funktion, som er opad (hhv. nedad) halvkontinuert. Så har f maksimum (hhv. minimum).*

Bevis. Ved at gå over til $-f$ er det tilstrækkeligt at vise påstanden, når f er opad halvkontinuert. I dette tilfælde er mængdesystemet $\{f^{-1}(]-\infty, a[) \mid a \in \mathbb{R}\}$ en åben overdækning af M, og da denne kan udtyndes til en endelig overdækning (givet ved $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$) er f opad begrænset ved $\max(a_1, \dots, a_n)$. Antages dernæst, at $a := \sup f(M)$ ikke tilhører $f(M)$, altså at supremum ikke er et maksimum, så findes en følge $a_n < a$ med $a_n \in f(M)$ og $\lim a_n = a$. Mængderne $\{f^{-1}(]-\infty, a_n[) \mid n \in \mathbb{N}\}$ er en åben overdækning af M, idet der for $x \in M$ gælder $f(x) < a$ og altså $f(x) < a_n$ for passende n. Da endelig mange af disse mængder overdækker M, er der modstrid med at $a = \sup f(M)$. □

6.11. Kompakthedsteoriens 2. hovedsætning. *Lad $(M_1, \mathcal{T}_1)$ være kompakt, lad $(M_2, \mathcal{T}_2)$ være et Hausdorff rum, og lad f være en kontinuert bijektiv afbildning af $(M_1, \mathcal{T}_1)$ på $(M_2, \mathcal{T}_2)$. Da er f en homeomorfi.*

Bevis. Vi viser, at f er åben. Hertil betragtes en åben mængde O i $(M_1, \mathcal{T}_1)$. Vi har $\complement f(O) = f(\complement O)$ på grund af at f er bijektiv. Af 6.6 følger, at $\complement O$ er kompakt, og af 6.8 følger dernæst, at $f(\complement O)$ er kompakt. Derefter giver Sætning 6.7, at $f(\complement O)$ er afsluttet og derfor er komplementærmængden $f(O)$ åben. □

Sætning 6.12. *Ethvert kompakt Hausdorff rum $(M, \mathcal{T})$ er normalt.*

Bevis. Lad F_1 og F_2 være ikke tomme disjunkte afsluttede mængder i $(M, \mathcal{T})$. Ifølge 6.6 er da F_1 og F_2 kompakte. Af F_1's kompakthed følger, at der for hvert $x \in F_2$ findes disjunkte åbne mængder O'_x og O''_x med $F_1 \subseteq O'_x$ og $x \in O''_x$; dette indses som i beviset for Sætning 6.7. Af F_2's kompakthed følger dernæst, at der findes endelig mange punkter $x_1, \dots, x_n \in F_2$, således at mængderne $O''_{x_1}, \dots, O''_{x_n}$ overdækker F_2. Mængderne

$$O_1 := O'_{x_1} \cap \cdots \cap O'_{x_n}$$
$$O_2 := O''_{x_1} \cup \cdots \cup O''_{x_n}$$

er disjunkte åbne mængder med $F_1 \subseteq O_1$ og $F_2 \subseteq O_2$. Rummet er altså et T_4-rum. Da det tillige er et Hausdorff rum, er det altså normalt. $\square$

Fra teorien for kompakte metriske rum vil man forvente at et produkt af endelig mange kompakte rum er kompakt. Vi viser senere (§7) Tychonoffs sætning, der siger, at et vilkårligt (endeligt eller uendeligt) produkt af kompakte rum er kompakt.

6.3. Lokalkompakte rum.

Definition 6.13. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være *lokalkompakt*, hvis ethvert punkt har mindst en kompakt omegn.

Et kompakt rum er specielt lokalkompakt. Ligesom ved kompakthed er begrebet mest interessant, når det kombineres med Hausdorff egenskaben.

Sætning 6.14. *Lad $(M, \mathcal{T})$ være et lokalkompakt Hausdorff rum. Da har hvert punkt en omegnsbasis bestående af kompakte mængder.*

Bevis. Lad x være et punkt i M, og lad A være en kompakt omegn af x. Da $(A, \mathcal{T}_A)$ er normalt (jfr. 6.12), og dermed et T_3-rum, har x en $\mathcal{T}_A$-omegnsbasis $\mathcal{B}_A(x)$ bestående af $\mathcal{T}_A$-afsluttede mængder. Idet A er en $\mathcal{T}$-omegn af x, er systemet $\mathcal{B}_A(x)$ faktisk en $\mathcal{T}$-omegnsbasis i x, og af 6.6 fremgår, at omegnene i $\mathcal{B}_A(x)$ er kompakte. $\square$

Hvis man kan udvide et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ til et kompakt rum, så taler man om en kompaktifikation af M. Vi giver en præcis definition.

Definition 6.15. Ved en *kompaktifikation* af et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ forstås et par $((\widehat{M}, \widehat{\mathcal{T}}), \varphi)$, hvor $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{T}})$ er et kompakt topologisk rum, og φ er en homeomorfi af $(M, \mathcal{T})$ på en tæt delmængde af $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{T}})$.

Da M og $\varphi(M)$ er homeomorfe kan man opfatte M som en overalt tæt delmængde af $\widehat{M}$, og dermed tænke på $\widehat{M}$ som en udvidelse af M.

Sætning 6.16. *Ethvert lokalkompakt Hausdorff rum $(M, \mathcal{T})$ har en Hausdorff kompaktifikation.*

Bevis. Hvis $(M, \mathcal{T})$ endda er kompakt, så er parret $((M, \mathcal{T}), \mathrm{Id}_M)$ en kompaktifikation af $(M, \mathcal{T})$. Antag derfor, at $(M, \mathcal{T})$ ikke er kompakt. Vi sætter $\widehat{M} := M \cup \{\omega\}$, hvor ω er et punkt, som ikke tilhører M. Sæt

$$\mathcal{S} := \{O \subseteq \widehat{M} \mid \omega \in O \text{ og } M \backslash O \text{ kompakt}\} ,$$

og sæt $\widehat{\mathcal{T}} := \mathcal{T} \cup \mathcal{S}$. Da er $\widehat{\mathcal{T}}$ en topologi på $\widehat{M}$, som altså består af de sædvanlige åbne mængder i M samt mængderne $(M \backslash K) \cup \{\omega\}$, hvor $K \subseteq M$ er kompakt. Dette eftervises let ved brug af at $\mathcal{S}$ er afsluttet under dannelse af vilkårlige foreningsmængder og endelige fællesmængder. Det påstås, at det topologiske rum $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{T}})$ er kompakt. Betragt først et system $\mathcal{R}$ af åbne mængder i $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{T}})$, som overdækker $\widehat{M}$. Mindst en af mængderne i $\mathcal{R}$ må da indeholde punktet ω; for den pågældende mængde O må derfor gælde, at $M \backslash O$ er kompakt. Da nu $\mathcal{R} \setminus \{O\}$ overdækker $M \backslash O$, findes endelig mange mængder $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{R} \setminus \{O\}$, som overdækker $M \backslash O$. Ialt fås derfor, at $O, O_1, \ldots, O_n$ overdækker $\widehat{M}$. Hermed er vist, at $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{T}})$ er kompakt. Betragt dernæst to forskellige punkter x og y i $\widehat{M}$. Hvis begge punkter ligger i M, så findes disjunkte mængder $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ med $x \in O_1$ og $y \in O_2$, thi $(M, \mathcal{T})$ er et Hausdorff rum. Da $\mathcal{T} \subseteq \widehat{\mathcal{T}}$, findes altså åbne mængder i $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{T}})$, som skiller de to punkter. Dernæst betragtes det tilfælde, hvor det ene af de to punkter er punktet ω, lad os sige, at $y = \omega$. Da $(M, \mathcal{T})$ er lokalkompakt, findes en kompakt mængde A i $(M, \mathcal{T})$ med $x \in \operatorname{int} A$. Der gælder da $x \in \operatorname{int} A \in \widehat{\mathcal{T}}$ og $y \in \widehat{M} \setminus A \in \widehat{\mathcal{T}}$; mængderne $\operatorname{int} A$ og $\widehat{M} \backslash A$ er derfor åbne mængder i $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{T}})$, som skiller de to punkter. Hermed er vist, at $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{T}})$ er Hausdorff. For at se at M er overalt tæt i $\widehat{M}$ bemærkes, at en vilkårlig åben omegn O af ω må opfylde $O \cap M \neq \varnothing$, thi ellers var $M = M \setminus O$ kompakt. Det bemærkes endelig, at for enhver mængde $O \in \mathcal{S}$ gælder $M \cap O \in \mathcal{T}$, jfr. 6.7. Dette viser, at den af $\widehat{\mathcal{T}}$ på M inducerede delrumstopologi $\widehat{\mathcal{T}}_M$ er identisk med den givne topologi $\mathcal{T}$. Anderledes formuleret: Afbildningen $x \mapsto x$ af M ind i $\widehat{M}$ er en homeomorfi af $(M, \mathcal{T})$ på delrummet $(M, \widehat{\mathcal{T}}_M)$ af $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{T}})$. Hermed er sætningen bevist. □

Bemærkning 6.17. Den i beviset for Sætning 6.16 angivne kompaktifikation af et lokalkompakt rum $(M, \mathcal{T})$ kaldes 1-*punkts kompaktifikationen* eller *Alexandroff kompaktifikationen*, og ω kaldes det uendeligt fjerne punkt, og det betegnes ofte ∞.

Bemærkning 6.18. Sætning 6.16 viser specielt, at ethvert lokalkompakt Hausdorff rum og mere almindeligt ethvert rum, der har en Hausdorff kompaktifikation, er fuldstændig regulært; thi et kompakt Hausdorff rum er normalt (jfr. 6.12), et normalt rum er fuldstændig regulært, og et delrum af et fuldstændig regulært rum er fuldstændig regulært (jfr. opg. 5.1). Man kan omvendt vise, at ethvert fuldstændigt regulært rum har en Hausdorff kompaktifikation, jfr. opg. 7.1. Et lokalkompakt Hausdorff rum behøver derimod ikke at være normalt.

De lokalkompakte Hausdorff rum spiller en vigtig rolle i nyere mål- og integralteori, jfr. Radon mål og Riesz's repræsentationssætning.

6.4. Parakompakte rum.

Dette begreb, som er indført i 1944 af Dieudonné, spiller især en rolle i differentialgeometri.

Definition 6.19. Et system $\mathcal{S}$ af delmængder af et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være *lokalt endeligt*, dersom der for ethvert $x \in M$ findes en omegn $U \in \mathcal{U}(x)$, således at der kun gælder $U \cap S \neq \varnothing$ for endelig mange mængder $S \in \mathcal{S}$.

Definition 6.20. Lad $\mathcal{R}$ og $\mathcal{S}$ være systemer af delmængder af en mængde M. Systemet $\mathcal{R}$ siges da at være en *forfining* af $\mathcal{S}$, dersom der for enhver mængde $R \in \mathcal{R}$ findes en mængde $S \in \mathcal{S}$, således at $R \subseteq S$.

Definition 6.21. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ siges at være *parakompakt*, dersom det er et Hausdorff rum, og der for enhver åben overdækning $\mathcal{S}$ af $(M, \mathcal{T})$ findes en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{R}$, således at $\mathcal{R}$ er en forfining af $\mathcal{S}$.

Bemærkning 6.22. Ethvert endeligt system af delmængder er lokalt endeligt. Er $\mathcal{R}$ og $\mathcal{S}$ systemer af delmængder med $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, så er $\mathcal{R}$ en forfining af $\mathcal{S}$. Følgelig er ethvert kompakt Hausdorff rum parakompakt.

Sætning 6.23. *Lad $\mathcal{S}$ være et lokalt endeligt system af delmængder af et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$. Da er også systemet $\overline{\mathcal{S}} := \{\operatorname{cl} S \mid S \in \mathcal{S}\}$ lokalt endeligt, og der gælder*

$$\operatorname{cl}\left(\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S\right) = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \operatorname{cl} S \,.$$

Bevis. Lad $x \in M$. Der findes da en åben omegn U af x og endelig mange mængder $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$, således at $U \cap S = \varnothing$ for alle $S \in \mathcal{S} \setminus \{S_1, \ldots, S_n\}$. For de samme mængder S gælder da også $U \cap \operatorname{cl} S = \varnothing$; thi $M \backslash U$ er en afsluttet mængde, som indeholder S, og dermed $\operatorname{cl} S$. Dette viser, at $\overline{\mathcal{S}}$ er lokalt endeligt. Lad dernæst x være et punkt i $\operatorname{cl}(\cup S)$, hvor foreningsmængden tages over $S \in \mathcal{S}$. Lad U være en åben omegn af x med den ovenfor angivne egenskab. Der må da gælde $x \in \operatorname{cl}(S_1 \cup \cdots \cup S_n)$, men $\operatorname{cl}(S_1 \cup \cdots \cup S_n) = \operatorname{cl} S_1 \cup \cdots \cup \operatorname{cl} S_n$ (jfr. opg. 1.3), og vi får derfor $x \in \cup \operatorname{cl} S$, hvor foreningsmængden tages over $S \in \mathcal{S}$. Hermed er den ene inklusion vist. Den anden er almengyldig. □

Sætning 6.24. *Ethvert parakompakt topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er normalt.*

Bevis. Der vises først, at $(M, \mathcal{T})$ er regulært. Lad x være et punkt i M, og lad F være en afsluttet mængde, således at $x \notin F$. For ethvert punkt $y \in F$ findes da en åben omegn U_y af y med $x \notin \operatorname{cl} U_y$. Systemet

$$\mathcal{S} := \{U_y \mid y \in F\} \cup \{M \setminus F\}$$

er nu en åben overdækning af M. Lad $\mathcal{R}$ være en lokalt endelig åben overdækning, som er en forfining, og sæt

$$\mathcal{R}' := \{R \in \mathcal{R} \mid R \cap F \neq \varnothing\} ,$$

$$A := \bigcup_{R \in \mathcal{R}'} \operatorname{cl} R ,$$

$$O_1 := M \setminus A , \qquad O_2 := \bigcup_{R \in \mathcal{R}'} R .$$

Systemet $\mathcal{R}'$ er lokalt endeligt, så af 6.23 fremgår, at A er afsluttet; O_1 og O_2 er altså åbne. Endvidere er det klart, at O_1 og O_2 er disjunkte, og let at se, at $x \in O_1$ og $F \subseteq O_2$. Hermed er vist, at rummet er regulært. – Dernæst betragtes to ikke tomme disjunkte afsluttede mænger F_0 og F. For ethvert punkt $y \in F$ findes da en åben omegn U_y af y med $F_0 \cap \operatorname{cl} U_y = \varnothing$; dette følger af 5.8. Lad derefter $\mathcal{S}, \mathcal{R}, \mathcal{R}', A, O_1$ og O_2 være som ovenfor. Da er O_1 og O_2 disjunkte åbne mængder med $F_0 \subseteq O_1$ og $F \subseteq O_2$. □

I 1948 viste A. H. Stone det overraskende resultat, at ethvert metrisabelt rum er parakompakt.

6.5. Metrisationsproblemet.

Metrisationsproblemet drejer sig om at karakterisere de topologier, der er metrisable. Da ethvert metrisk rum er normalt (jfr. 5.13) er normalitet en nødvendig betingelse. En række matematikere har bidraget med tilstrækkelige betingelser for metrisabilitet. Vi nævner her uden bevis følgende 2 sætninger af Urysohn fra henholdsvis 1923 og 1925.

6.25. Urysohns første metrisationssætning. *Et kompakt Hausdorff rum er metrisabelt, hvis og kun hvis det har en tællelig basis.*

6.26. Urysohns anden metrisationssætning. *Et topologisk rum* $(M, \mathcal{T})$ *med en tællelig basis er metrisabelt, hvis og kun hvis det er normalt.*

Urysohn karakteriserede således metrisabilitet indenfor to vigtige klasser af rum. De første fuldt tilfredsstillende karakterisationer af metrisabilitet for generelle topologiske rum hænger sammen med begrebet *lokalt endeligt mængdesystem*, jfr. §6.4. Næsten ækvivalente resultater blev opnået uafhængigt af Nagata, Smirnov og Bing 1950-51.

6.27. Nagata-Smirnov-Bings metrisationssætning. *Et topologisk rum er metrisabelt, hvis og kun hvis det er regulært og har en basis, der består af tælleligt mange lokalt endelige familier af åbne mængder.*

6.6. Baire rum.

I 1899 viste den franske matematiker René Baire (1874-1932), at der om en følge af åbne overalt tætte delmængder af $\mathbb{R}$ gælder, at fællesmængden igen er overalt tæt.

Resultatet har givet navn til en klasse af topologiske rum, hvor Baires resultat gælder.

Definition 6.28. Et topologisk $(M, \mathcal{T})$ rum kaldes et *Baire rum*, hvis der om enhver følge (G_n) af åbne overalt tætte mængder gælder, at $\bigcap_1^\infty G_n$ er overalt tæt.

Ved overgang til komplementærmængde svarer åbne overalt tætte mængder til afsluttede mængder uden indre punkter. Man kalder en delmængde $A \subseteq (M, \mathcal{T})$ af *første kategori*, hvis den kan overdækkes med en følge af afsluttede mængder uden indre punkter, altså hvis der findes en følge (F_n) af afsluttede mængder med $F_n^0 = \varnothing$ så $A \subseteq \bigcup_1^\infty F_n$.

Vi har derfor straks følgende oplagte omformulering:

Sætning 6.29. *Et topologisk rum* $(M, \mathcal{T})$ *er et Baire rum, hvis og kun hvis komplementærmængden til enhver mængde af første kategori er overalt tæt.*

Det afgørende er at kende nogle omfattende klasser af Baire rum.

Sætning 6.30. *Fuldstændige metriske rum og lokalkompakte Hausdorff rum er Baire rum.*

Bevis. Lad (G_n) være en følge af åbne overalt tætte mængder i rummet $(M, \mathcal{T})$ og lad $U \in \mathcal{U}(x)$ være en vilkårlig omegn af et vilkårligt punkt $x \in M$. Vi skal vise

$$U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing \, .$$

Vi vil konstruere en *dalende* følge $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$ af afsluttede mængder så $\bigcap_1^{\infty} K_n \neq \varnothing$ og $K_n \subseteq U \cap G_n$ for hvert n, og heraf følger påstanden.

(a) Antag først, at M er et fuldstændigt metrisk rum. Da $U^0 \cap G_1$ er en åben mængde $\neq \varnothing$ (G_1 er overalt tæt), kan vi vælge en afsluttet kugle $K_1 \subseteq U^0 \cap G_1$, f.eks.

$$K_1 = \{x \in M \mid d(c_1, x) \leq r_1\} \, .$$

Da $K_1^0 \cap G_2$ er en åben mængde $\neq \varnothing$ (G_2 er overalt tæt), kan vi vælge en afsluttet kugle $K_2 \subseteq K_1^0 \cap G_2$, f.eks.

$$K_2 = \{x \in M \mid d(c_2, x) \leq r_2\} \, ,$$

og vi kan uden indskrænkning antage, at $r_2 \leq \frac{1}{2} r_1$. Dernæst vælges en afsluttet kugle

$$K_3 = \{x \in M \mid d(c_3, x) \leq r_3\} \subseteq K_2^0 \cap G_3 \, , \quad r_3 \leq \frac{1}{2} r_2 \, ,$$

og sådan fortsættes. De afsluttede kugler (K_n) udgør en dalende følge, og $K_n \subseteq U \cap G_n$. Da $r_n \to 0$ vil centrene (c_n) udgøre en Cauchy følge, så fuldstændigheden af M sikrer, at $c = \lim c_n$ eksisterer, og dernæst ses, at $c \in \bigcap_1^{\infty} K_n$, da $c_n \in K_m$ for $n \geq m$.

(b) Antag dernæst, at M er et lokalkompakt Hausdorff rum. Ifølge Sætning 6.14 har hvert punkt en omegnsbasis af kompakte omegne.

Da $U^0 \cap G_1$ er åben og $\neq \varnothing$, kan vi vælge en kompakt omegn $K_1 \subseteq U^0 \cap G_1$ af et vilkårligt punkt i $U^0 \cap G_1$. Da $K_1^0 \cap G_2$ er åben og $\neq \varnothing$, kan vi vælge en kompakt omegn $K_2 \subseteq K_1^0 \cap G_2$. Dernæst vælges en kompakt omegn $K_3 \subseteq K_2^0 \cap G_3$, og sådan fortsættes. Dermed er (K_n) en dalende følge af ikke tomme afsluttede delmængder af den kompakte mængde K_1 og $K_n \subseteq U \cap G_n$. Vi har at $\bigcap_1^{\infty} K_n \neq \varnothing$ ifølge Bemærkning 6.3. $\square$

Mængder af første kategori opfattes naturligt som "små" i et Baire rum $(M, \mathcal{T})$. Hvis man ønsker at vise, at der findes punkter $x \in M$ med en vis egenskab E, kan det undertiden realiseres ved at vise, at mængden af punkter, der ikke har egenskaben, er af første kategori. Baire anvendte metoden til følgende resultat.

Sætning 6.31. *Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum og $f_n : M \to \mathbb{R}$ en følge af kontinuerte funktioner som konvergerer punktvis mod en funktion $f : M \to \mathbb{R}$, dvs. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for alle $x \in M$. Så er mængden $D(f)$ af diskontinuitetspunkter for f af første kategori.*

Specielt er mængden $C(f)$ af kontinuitetspunkter for f overalt tæt, hvis M er et Baire rum.

Bevis. For $\varepsilon > 0$ defineres

$$P_m(\varepsilon) = \{x \in M \mid |f(x) - f_m(x)| \le \varepsilon\} \ , \quad G(\varepsilon) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{int}(P_m(\varepsilon)) \ .$$

Vi vil indse at

$$(*) \qquad C(f) = \bigcap_{\varepsilon>0} G(\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{1}{n}\right) .$$

Idet $G(\varepsilon)$ vokser med ε er det sidste lighedstegn klart.

Antag først, at f er kontinuert i $x_0 \in M$ og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da $\lim f_n(x_0) = f(x_0)$ findes m, så $|f(x_0) - f_m(x_0)| \le \varepsilon/3$, og da f og f_m begge er kontinuerte i x_0, findes en åben omegn U af x_0 så $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon/3$ og $|f_m(x) - f_m(x_0)| \le \varepsilon/3$ for $x \in U$. Af trekantsuligheden finder vi for $x \in U$

$$|f(x) - f_m(x)| \le |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f_m(x)| \le \varepsilon \ ,$$

altså $U \subseteq P_m(\varepsilon)$, hvilket viser, at $x_0 \in \mathrm{int}(P_m(\varepsilon)) \subseteq G(\varepsilon)$. Da $\varepsilon > 0$ var vilkårlig har vi

$$C(f) \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} G(\varepsilon) \ .$$

Vi viser dernæst, at x_0 i højresiden ovenfor er et kontinuitetspunkt for f. For givet $\varepsilon > 0$ er specielt $x_0 \in G(\varepsilon/3)$ og dermed findes $m \in \mathbb{N}$ så $x_0 \in \mathrm{int}(P_m(\varepsilon/3))$. I den åbne omegn $U = \mathrm{int}(P_m(\varepsilon/3))$ af x_0 gælder $|f(x) - f_m(x)| \le \varepsilon/3$. Da f_m er kontinuert i x_0, gælder $|f_m(x) - f_m(x_0)| \le \varepsilon/3$ for x i en passende omegn V af x_0, og ved trekantsuligheden fås som før

$$|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon \ \text{ for } \ x \in U \cap V \ ,$$

hvilket viser at $x_0 \in C(f)$.

For $\varepsilon > 0$ defineres dernæst

$$F_m(\varepsilon) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in M \mid \ |f_m(x) - f_{m+k}(x)| \leq \varepsilon\} \ ,$$

som er fællesmængde af afsluttede mængder, og dermed afsluttet. Da $\lim f_n(x) = f(x)$ for alle $x \in M$, gælder for alle $\varepsilon > 0$

$$M = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(\varepsilon) \ , \ \ F_m(\varepsilon) \subseteq P_m(\varepsilon) \ ,$$

hvoraf

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int}(F_m(\varepsilon)) \subseteq G(\varepsilon) \ ,$$

altså

$$\complement G(\varepsilon) \subseteq \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(\varepsilon) \right) \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int}(F_m(\varepsilon)) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(\varepsilon) \setminus \operatorname{int} F_m(\varepsilon) \ ,$$

og i følge $(*)$

$$D(f) = \complement C(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \complement G\left(\frac{1}{n}\right) \subseteq \bigcup_{n,m=1}^{\infty} \partial F_m\left(\frac{1}{n}\right) \ .$$

Da randen af en afsluttet mængde ikke har indre punkter, er $D(f)$ af første kategori. $\square$

Opgaver til §6

6.1. Lad M være en uendelig mængde og lad $\mathcal{T}$ bestå af $\varnothing$ og de delmængder $A \subseteq M$ så $\complement A$ er endelig. Vis, at $\mathcal{T}$ er en topologi og at $(M, \mathcal{T})$ er et kompakt T_1-rum, som ikke er Hausdorff. Vis, at enhver delmængde af $(M, \mathcal{T})$ er kompakt.

6.2. Ved et *fortætningspunkt* for en følge (x_n) i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ forstås et punkt $a \in M$ med de ækvivalente egenskaber:

$$(1) \quad \forall U \in \mathcal{U}(a) \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n \geq N : x_n \in U \ ,$$

$$(2) \quad a \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \overline{\{x_n | n \geq N\}} \ .$$

Vis, at (1) og (2) er ækvivalente. Vis, at følgende egenskaber for $(M, \mathcal{T})$ er ækvivalente:

(a) Enhver tællelig åben overdækning kan udtyndes til en endelig overdækning.
(b) Enhver følge i M har et fortætningspunkt.

Et rum med disse egenskaber kaldes *tælleligt kompakt.*

6.3. Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum med en tællelig basis.

Vis, at enhver åben overdækning kan udtyndes til en tællelig åben overdækning. Vis derved, at for rum med en tællelig basis er tællelig kompakthed og kompakthed det samme.

6.4. Vis, at de kompakte topologier på en mængde M er minimale elementer i mængden af Hausdorff topologier på M ved relationen $\subseteq$.

Vink. Hvis $\mathcal{T}_1$ er kompakt og $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ er en grovere Hausdorff topologi, så er $I_M : (M, \mathcal{T}_1) \to (M, \mathcal{T}_2)$ en kontinuert bijektion.

6.5. Lad en ret linie ℓ tangere en cirkel C i punktet S og lad P være det diametralt modsatte punkt på C. Lad $\varphi : \ell \to C$ være defineret ved at $A \in \ell$ afbildes i linien AP's skæringspunkt ($\neq P$) med cirklen. Vis, at (C, φ) er en Hausdorff kompaktifikation af ℓ, og at C er homeomorf med 1-punkts kompaktifikationen af ℓ.

Generaliser ovennævnte ved at erstatte ℓ med en plan og C med en kugle, og mere generelt, ved at erstatte ℓ med $\mathbb{R}^n$ og C med en n-dimensional kugleflade.

6.6. Lad $(M, \mathcal{T})$ være et Hausdorff rum og antag at $A \subseteq M$ er overalt tæt, og at delrummet $(A, \mathcal{T}_A)$ er lokalkompakt. Vis, at A er åben i M.

Vink. Lad $K \in \mathcal{U}_A(x)$ være en kompakt omegn af $x \in A$ i delrumstopologien, så er $K \in \mathcal{U}(x)$. For at se dette bemærkes, at $K = A \cap U$, hvor $U \in \mathcal{U}(x)$. Så er $U^0 \subseteq K$, thi ellers er $(\overset{\circ}{U} \setminus K) \cap A \neq \varnothing$, da A er overalt tæt).

6.7. Lad $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ og definer

$$d(x,y) = |\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y| \quad \text{for} \quad x, y \in \widetilde{\mathbb{R}}\ ,$$

idet $\operatorname{Arctan}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$. Vis, at d er en metrik på $\widetilde{\mathbb{R}}$, og at $(\widetilde{\mathbb{R}}, d)$ er et kompakt metrisk rum.

Beskriv $\mathcal{U}(\infty)$, $\mathcal{U}(-\infty)$ og vis, at delrumstopologien på $\mathbb{R}$ er den sædvanlige topologi. Gør rede for at $\widetilde{\mathbb{R}}$ kan opfattes som en kompaktifikation af $\mathbb{R}$.

6.8. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ kaldes et *Lindelöf rum*, hvis enhver åben overdækning af M kan udtyndes til en tællelig overdækning. Vis følgende:

(a) Hvis $(M, \mathcal{T})$ opfylder 2. tællelighedsaksiom, så er M et Lindelöf rum.

Vink. Lad $\mathcal{S}$ være en åben overdækning og (B_n) en tællelig basis for topologien. Sæt $\mathcal{S}_n = \{S \in \mathcal{S} \mid B_n \subseteq S\}$ og vælg $S_n \in \mathcal{S}_n$, hvis $\mathcal{S}_n \neq \varnothing$. Vis, at systemet af de udvalgte mængder S_n udgør en overdækning.

(b) Vis, at hvis et Lindelöf rum opfylder adskillelsesaksiomet (T_3), så opfylder det også (T_4).

Vink. Lad F_1 og F_2 være disjunkte afsluttede mængder. Vis, at der findes en følge U_n af åbne mængder som overdækker F_1, og så $\overline{U}_n \cap F_2 = \varnothing$ for alle n. Lad tilsvarende (V_n) være en følge af åbne mængder som overdækker F_2, og som opfylder $F_1 \cap \overline{V}_n = \varnothing$ for alle n. Sæt

$$U'_n = U_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{V}_k \right), \quad V'_n = V_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_k \right)$$

og vis, at de er åbne, at $U'_n \cap V'_m = \varnothing$ for alle n, m, og at (U'_n) overdækker F_1, (V'_n) overdækker F_2.

6.9. *Sorgenfrey topologien på $\mathbb{R}$ er Lindelöf.* (Jfr. opg. 2.2). Lad $\mathcal{S}$ være et vilkårligt system af intervaller af formen $[x, y[$. Vis, at der findes et tælleligt delsystem $\mathcal{S}'$ som overdækker det samme som $\mathcal{S}$. Vis dernæst, at dette medfører påstanden i opgaven.

Vink. (a) Sæt

$$A = \left(\bigcup_{[x,y[\in \mathcal{S}} [x,y[\right) \setminus \bigcup_{[x,y[\in \mathcal{S}}]x,y[$$

og vis, at hvis $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, og hvis $[x_1, y_1[, [x_2, y_2[\in \mathcal{S}$, så er $[x_1, y_1[\cap [x_2, y_2[= \varnothing$ og slut, at A er tællelig.

(b) For $x \in A$ defineres

$$Y_x = \{y \in \mathbb{R} \mid [x,y[\in \mathcal{S}\} \ .$$

Vis, at der findes en tællelig mængde $Y_x' \subseteq Y_x$ så

$$\bigcup_{y \in Y_x} [x,y[= \bigcup_{y \in Y_x'} [x,y[\ .$$

(c) Udnyt, at den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$ har en tællelig basis til at vise, at der findes et tælleligt delsystem $\widetilde{\mathcal{S}}$ af $\mathcal{S}$, så

$$\bigcup_{[x,y[\in \mathcal{S}}]x,y[= \bigcup_{[x,y[\in \widetilde{\mathcal{S}}}]x,y[\ .$$

6.10. Et topologisk rum kaldes *σ-kompakt*, hvis der findes en tællelig overdækning med kompakte mængder.

Vis, at et σ-kompakt rum er Lindelöf.

Vis, at et lokalkompakt og σ-kompakt Hausdorff rum er normalt. (Udnyt opg. 6.8).

6.11. Vis den simple del af Urysohns første metrisationssætning: *Et kompakt metrisk rum (M,d) har en tællelig basis.*

Vink. For hvert $\varepsilon > 0$ findes en endelig delmængde $A_\varepsilon \subseteq M$ så $\bigcup_{x \in A_\varepsilon} K(x,\varepsilon) = M$. Vis, at $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$ er overalt tæt, og udnyt opg. 2.3.

§7. Konvergens.

7.1. Introduktion.

En følge i en mængde M er som bekendt en afbildning $\varphi : \mathbb{N} \to M$. Ved at indføre symbolet $x_n = \varphi(n)$ for det almindelige element i følgen, får vi de suggestive skrivemåder (x_n) og $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for følgen.

Følgekonvergens i et metrisk rum (M, d) forudsættes bekendt. Der gælder, at $x_n \to x \in M$ hvis og kun hvis

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\colon d(x, x_n) < \varepsilon$$

eller ækvivalent hermed

$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\colon x_n \in U\ .$$

Den sidste betingelse kan uden videre benyttes som definition af følgekonvergens i et vilkårligt topologisk rum. Følgekonvergens kan ofte benyttes til "malende" beskrivelser af begreber i metriske rum, f.eks. gælder om afslutningen af en delmængde $A \subseteq (M, d)$:

$$(*) \qquad x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subseteq A : x_n \to x\ .$$

Hvis man prøver at kopiere dette resultat til topologiske rum $(M, \mathcal{T})$, ser man straks, at "$\Leftarrow$" gælder, men der er "problemer" med "$\Rightarrow$" med mindre rummet opfylder første tællelighedsaksiom. Hvis dette gælder, kan man til hvert $x \in M$ vælge en tællelig omegnsbasis $(B_n(x))$ som kan antages aftagende (ellers erstattes den n'te mængde med fællesmængden af de n første). For $x \in \overline{A}$ vil $A \cap B_n(x) \neq \varnothing$, og vælges $x_n \in A \cap B_n(x)$, så er (x_n) en følge fra A som konvergerer mod x.

Der findes eksempler på rum $(M, \mathcal{T})$, hvor $(*)$ er forkert, jfr. opg. 7.6, og der er således behov for et mere generelt konvergensbegreb end følgekonvergens.

Der findes to forskellige (men ækvivalente) begreber, der tilfredsstiller dette behov nemlig *net* og *filtre*, og matematiksamfundet har delte meninger om, hvad der er bedst. Se f.eks. R.G. Bartle: *Nets and filters in topology.* Amer. Math. Monthly, **62**(1955), 551-557. Vi vil her basere fremstillingen på net, men vil også kort berøre begrebet filter.

7.2. Net og filtre.

Ved en *præordensrelation* i en mængde I forstås en relation $\leq$ som er refleksiv og transitiv. Parret $(I, \leq)$ kaldes en præordnet mængde.

En præordensrelation $\leq$ i en mængde I kaldes *opad filtrerende*, hvis to vilkårlige elementer fra I har en majorant, altså hvis

$$\forall i, j \in I \; \exists k \in I : i, j \leq k \; .$$

Nedad filtrerende defineres analogt ved at majorant erstattes af minorant. En total ordning er opad filtrerende, men f.eks. $\mathcal{P}(M)$ er opad filtrerende ved inklusion, men ikke totalt ordnet (med mindre M er en singleton).

Definition 7.1. Ved et *net* i en mængde M forstås en afbildning $\varphi :$ $(I, \leq) \to M$ defineret på en opad filtrerende præordnet mængde I kaldet nettets *indeksmængde*. Nettet betegnes $(I, \leq, \varphi)$ eller blot (I, φ).

Ved at indføre symbolet $x_i = \varphi(i)$ for det almindelige element i nettet, får vi de suggestive skrivemåder (x_i) og $(x_i)_{i \in I}$ for nettet. Net kaldes også *generaliserede følger*.

Eksempel 7.2. Som et vigtigt eksempel på net i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ betragtes som indeksmængde omegnssystemet $I = \mathcal{U}(x)$ af x med ordensrelationen $U \leq V \Leftrightarrow U \supseteq V$, altså omvendt inklusion. At ordensrelationen er opad filtrerende skyldes at $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$ når $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$. Dernæst vælges et element $x_U \in U$ for hvert $U \in \mathcal{U}(x)$. Nettet er altså $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$.

Definition 7.3. Et net (J, ψ) i M kaldes et *delnet* af nettet (I, φ) i M, hvis der findes en afbildning $h : J \to I$ med egenskaberne

(a) $$\varphi \circ h = \psi, \text{ i.e. hvis } x_i = \varphi(i), \; y_j = \psi(j), \text{ så er } x_{h(j)} = y_j \; .$$

(b) $$\forall i_0 \in I \; \exists j_0 \in J \; \forall j \in J \;\; (j_0 \leq j \Rightarrow i_0 \leq h(j)) \; .$$

Som generalisation af begrebet delfølge er (a) naturlig, medens (b) er mindre gennemskuelig. Den er et modstykke til at $n_1 < n_2 < \cdots \in \mathbb{N}$, når (x_{n_k}) er en delfølge af (x_n). Delnet af $(x_i)_{i \in I}$ vil analogt kort skrives $(x_{i_j})_{j \in J}$, idet $h : j \mapsto i_j$ af J ind i I underforstås at opfylde (b).

I mange konkrete tilfælde vil $h : J \to I$ være ordenstro, altså $j_1 \leq j_2 \Rightarrow h(j_1) \leq h(j_2)$, og så kan (b) simplificeres til

(b′) $$\forall i_0 \in I \; \exists j_0 \in J \colon i_0 \leq h(j_0) \; .$$

Definition 7.4. Lad $(x_i)_{i\in I}$ være et net i M og lad $A \subseteq M$. Man siger, at $(x_i)_{i\in I}$ *efterhånden* er i A eller tilhører A *fra et vist trin*, hvis der findes $i_0 \in I$ så $x_i \in A$ for $i_0 \leq i$.

Man siger, at $(x_i)_{i\in I}$ er *ofte* i A, hvis der for hvert $i \in I$ findes $j \in I$ med $i \leq j$ så $x_j \in A$.

Da $(I, \leq)$ er opad filtrerende har vi (naturligvis), at hvis (x_i) er efterhånden i A, så er (x_i) ofte i A. Desuden gælder:

$$(x_i) \ \text{tilhører } \textit{ikke} \ A \ \text{ofte} \ \Leftrightarrow (x_i) \ \text{tilhører} \ \complement A \ \text{efterhånden} \, .$$

Definition 7.5. Et net $(x_i)_{i\in I}$ i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ *konvergerer* mod $x \in M$, i symboler $x_i \to x$, $\lim x_i = x$ eller $\lim\limits_{i\in I} x_i = x$ hvis

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \ \exists i(U) \in I \ \forall i \in I \ (i(U) \leq i \Rightarrow x_i \in U) \, ,$$

altså hvis (x_i) efterhånden er i enhver omegn af x. Et sådant x kaldes *grænsepunkt* for nettet.

Definition 7.6. Et punkt x i $(M, \mathcal{T})$ kaldes *fortætningspunkt* for nettet $(x_i)_{i\in I}$ fra M hvis

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \ \forall i \in I \ \exists j \in I \ \ (i \leq j \wedge x_j \in U) \, ,$$

altså hvis (x_i) er ofte i enhver omegn af x.

Sætning 7.7. *Et punkt x i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er fortætningspunkt for et net $(x_i)_{i\in I}$ præcis hvis der findes et delnet, der konvergerer mod x.*

Bevis. Hvis et delnet af (x_i) konvergerer mod x er (x_i) ofte i enhver omegn af x ifølge 7.3 (b), og dermed er x et fortætningspunkt. Den modsatte implikation er en konsekvens af følgende lemma anvendt på $\mathcal{B} = \mathcal{U}(x)$. $\square$

Fundamentallemma 7.8. *Lad $\mathcal{B}$ være et system af ikke tomme delmængder af M, og antag, at $\mathcal{B}$ er nedad filtrerende under inklusion, dvs.*

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \ \exists B_3 \in \mathcal{B} \ \ (B_3 \subseteq B_1 \cap B_2) \, .$$

Hvis et net $(x_i)_{i\in I}$ er ofte i enhver mængde $B \in \mathcal{B}$, så findes et delnet $(x_{h(j)})_{j\in J}$ som er efterhånden i alle $B \in \mathcal{B}$.

Bevis. Mængden $I \times \mathcal{B}$ forsynes med produkt-præordensrelationen

$$(i_1, B_1) \leq (i_2, B_2) \Leftrightarrow (i_1 \leq i_2) \wedge (B_1 \supseteq B_2) \, ,$$

og vi sætter
$$J = \{(i, B) \in I \times \mathcal{B} \mid x_i \in B\} .$$
Relationen $\leq$ på J er opad filtrerende, thi hvis $x_{i_1} \in B_1 \in \mathcal{B}$ og $x_{i_2} \in B_2 \in \mathcal{B}$ findes $i_0 \in I$ så $i_1, i_2 \leq i_0$ og $B_3 \in \mathcal{B}$ så $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, og da (x_i) er ofte i B_3 findes $i_3 \in I$ med $i_0 \leq i_3$ og $x_{i_3} \in B_3$, hvilket viser, at $(i_3, B_3) \in J$ er en majorant for (i_1, B_1) og (i_2, B_2). Defineres $\psi : J \to M$ ved $\psi((i, B)) = x_i$ og $h : J \to I$ ved $h((i, B)) = i$ ser man, at (J, ψ) er et delnet af $(x_i)_{i \in I}$.

Til $i_0 \in I$ og $B \in \mathcal{B}$ findes $i_1 \in I$ med $i_0 \leq i_1$ og $x_{i_1} \in B$, så den ordenstro afbildning h opfylder (b′) med $j_0 = (i_1, B)$. Desuden gælder $\psi(j) \in B$ for $j_0 \leq j \in J$ så nettet (J, ψ) er efterhånden i enhver mængde $B \in \mathcal{B}$. $\square$

Definition 7.9. Lad M være en ikke tom mængde. Ved et filter $\mathcal{F}$ på M forstås et system $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ af *ikke tomme* delmængder af M med egenskaberne

(F1): $M \in \mathcal{F}$
(F2): $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}\ (F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F})$
(F3): $\forall F \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{P}(M)\ (F \subseteq A \Rightarrow A \in \mathcal{F})$.

Et filter er altså et ikke tomt mængdesystem af ikke tomme mængder som er stabilt ved endelig fællesmængde og som yderligere opfylder, at hvis en mængde F tilhører $\mathcal{F}$, så tilhører enhver større mængde automatisk filtret.

Et typisk eksempel er systemet $\mathcal{U}(x)$ af omegne af x i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$. Vi har da også brugt betegnelsen omegnsfiltret om $\mathcal{U}(x)$.

Mængden af filtre $\mathcal{F}$ på M er ordnet ved inklusion, og man siger, at filtret $\mathcal{F}_2$ er finere end filtret $\mathcal{F}_1$, som er grovere end $\mathcal{F}_2$, hvis $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Filtret $\{M\}$ er det groveste (første element) i mængden af alle filtre på M. Man ser let, at mængden af filtre er induktivt ordnet, så ifølge Zorns lemma findes maksimale elementer. Disse kaldes *ultrafiltre*, og Korollar I.4.3 giver, at ethvert filter kan forfines til et ultrafilter.

Lemma 7.10. *Lad $\mathcal{F}$ være et filter på M og lad $A \subseteq M$. Filtret $\mathcal{F}$ kan forfines til et filter $\mathcal{F}_A$, der indeholder A, hvis og kun hvis $\complement A \notin \mathcal{F}$.*

Bevis. Hvis der findes et filter $\mathcal{F}_A \supseteq \mathcal{F}$ med $A \in \mathcal{F}_A$ må $\complement A \notin \mathcal{F}$, thi ellers ville $\complement A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_A$ og dermed $\varnothing = A \cap \complement A \in \mathcal{F}_A$. Hvis omvendt $\complement A \notin \mathcal{F}$, kan vi slutte at $F \not\subseteq \complement A$ for alle $F \in \mathcal{F}$ (iflg. (F3)), altså $A \cap F \neq \varnothing$ for alle $F \in \mathcal{F}$. Systemet
$$\mathcal{F}_A = \{X \subseteq M \mid \exists E \in \mathcal{F} : A \cap E \subseteq X\}$$
ses let at være et filter, hvorom der gælder $A \in \mathcal{F}_A$ og $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_A$. $\square$

Korollar 7.11. *Et filter $\mathcal{F}$ på M er et ultrafilter hvis og kun hvis der om enhver mængde $A \subseteq M$ gælder enten $A \in \mathcal{F}$ eller $\complement A \in \mathcal{F}$.*

Bevis. Hvis $\mathcal{F}$ er et ultrafilter og $\complement A \notin \mathcal{F}$ så findes et filter $\mathcal{F}_A \supseteq \mathcal{F}$ med $A \in \mathcal{F}_A$, men ifølge maksimaliteten gælder $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}$ altså $A \in \mathcal{F}$.

Hvis et filter $\mathcal{F}$ har egenskaben fra korollaret er det maksimalt, altså et ultrafilter, thi hvis $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, hvor $\mathcal{G}$ er en ægte filterudvidelse af $\mathcal{F}$, så må $\complement A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, hvilket leder til modstriden $\varnothing = A \cap \complement A \in \mathcal{G}$. □

Definition 7.12. Et net $(x_i)_{i\in I}$ i en mængde M kaldes *universelt*, hvis der om enhver delmængde $A \subseteq M$ gælder at enten er nettet efterhånden i A eller efterhånden i $\complement A$.

Et net $(x_i)_{i\in I}$ der efterhånden er konstant, dvs. for hvilket der findes $a \in M$ og $i_0 \in I$ så $x_i = a$ for $i_0 \leq i$, er klart universelt. At der findes andre typer universelle net er ikke oplagt, og de kan kun påvises ved brug af udvalgsaksiomet. Hvis et net har et fortætningspunkt så kan vi "udtynde" det til et net (dvs. vælge et delnet), der konvergerer mod fortætningspunktet (jfr. Sætning 7.7). Et universelt net er i en vis forstand "maksimalt udtyndet", idet *ethvert fortætningspunkt x automatisk er grænsepunkt.* Hvis nemlig $U \in \mathcal{U}(x)$ er en vilkårlig omegn af fortætningspunktet x, så er det ikke muligt at (x_i) er i $\complement U$ efterhånden, fordi det er ofte i U, men så giver definitionen på et universelt net, at det er efterhånden i U.

Det følgende elegante bevis for Sætning 7.13 skyldes en tidligere studerende David Brink.

Sætning 7.13. *Ethvert net $(x_i)_{i\in I}$ i en mængde M har et universelt delnet.*

Bevis. Lad $\mathcal{F}_0$ være systemet af delmængder F, således at nettet er i F fra et vist trin. Det er klart, at $M \in \mathcal{F}_0$, og at $F \subseteq G$ samt $F \in \mathcal{F}_0$ medfører $G \in \mathcal{F}_0$. Hvis både F og G tilhører $\mathcal{F}_0$, vil der findes i_1 og i_2 i I, således at $x_i \in F$ for $i \geq i_1$ og $x_i \in G$ for $i \geq i_2$. Men så vil x_i tilhøre $F \cap G$ for hvert $i \geq i_3$, såfremt i_3 er valgt større end både i_1 og i_2. Dette viser, at $\mathcal{F}_0$ er et filter, jf. Definition 7.9.

Ifølge Zorn's lemma, jf. Korollar I.4.3, er $\mathcal{F}_0$ indeholdt i et ultrafilter $\mathcal{F}$. Vi hævder nu, at nettet kommer ofte i enhver mængde F fra $\mathcal{F}$. Thi i modsat fald findes $F \in \mathcal{F}$ så nettet tilhører $M \setminus F$ fra et vist trin, jf. Definition 7.4, hvormed $M \setminus F \in \mathcal{F}_0$. Men da $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ vil dette medføre, at både F og $M \setminus F$ tilhører $\mathcal{F}$, hvilket giver en modstrid idet $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Anvend nu fundamentallemmaet 7.8 på det givne net, men med ultrafilteret $\mathcal{F}$ i stedet for $\mathcal{B}$. Vi får så et delnet $(x_{h(j)})_{j\in J}$, som tilhører enhver mængde fra $\mathcal{F}$ fra et vist trin. Men for en vilkårlig delmængde A af M gælder enten at $A \in \mathcal{F}$, eller at $M \setminus A \in \mathcal{F}$. Dette viser, at $(x_{h(j)})_{j\in J}$ er et universalnet i M. □

7.3. Simple anvendelser af net.

Vi skal nu se, at når følger erstattes af net, så opnår vi egenskaben $(*)$ fra afsnit 7.1.

Sætning 7.14. *Afslutningen af en delmængde A af et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er karakteriseret ved*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_i)_{i\in I} \subseteq A : x_i \to x \; .$$

Bevis. Implikationen "$\Leftarrow$" er simpel. For at se "$\Rightarrow$" antager vi at $x \in \overline{A}$ og sætter $I = \mathcal{U}(x)$, som forsynes med ordensrelationen $U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2$. Da $U \cap A \neq \varnothing$ for alle $U \in \mathcal{U}(x)$ kan vi ved udvalgsaksiomet vælge et punkt $x_U \in U \cap A$ for hvert $U \in \mathcal{U}(x)$, og dermed er $(x_U)_{U\in I}$ et net i A som konvergerer mod x. $\square$

Et net $(x_i)_{i\in I}$ i et topologisk rum kan have mange grænsepunkter. F.eks. er ethvert net i et *trivielt rum* $(M, \mathcal{T})$ $(\mathcal{T} = \{\varnothing, M\})$ konvergent med ethvert $x \in M$ som grænsepunkt. For det ekstremt modsatte rum, et diskret rum $(M, \mathcal{P}(M))$, er et net $(x_i)_{i\in I}$ kun konvergent med grænsepunkt x hvis $x_i = x$ efterhånden.

Sætning 7.15. *Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er et Hausdorff rum hvis og kun hvis ethvert net har højst et grænsepunkt.*

Bevis. I et Hausdorff rum M kan vi til to forskellige punkter $x, y \in M$ finde disjunkte omegne U og V af henholdsvis x og y, og da et net $(x_i)_{i\in I}$ ikke kan være efterhånden i to disjunkte mængder ser man, at der er højst et grænsepunkt. Hvis derimod rummet ikke er Hausdorff, så findes $x \neq y$ så

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \; \forall V \in \mathcal{U}(y) \quad (U \cap V \neq \varnothing) \; .$$

Lad dernæst $I = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}(x)\, , \; V \in \mathcal{U}(y)\}$ være forsynet med relationen $A \leq B \Leftrightarrow A \supseteq B$. Så er $(I, \leq)$ en opad filtrerende ordnet mængde, og vælges $x_A \in A = U \cap V$ for hvert $A \in I$, så er $(x_A)_{A\in I}$ et net i M, der konvergerer mod såvel x som y. $\square$

Det er velkendt, at en afbildning f af et metrisk rum (M_1, d_1) ind i et andet metrisk rum (M_2, d_2) er kontinuert i $x \in M_1$ hvis og kun hvis der om enhver følge (x_n) fra M_1 gående mod x gælder, at billedfølgen $(f(x_n))$ konvergerer mod $f(x)$.

Dette udsagn gælder i rammen af topologiske rum, når følger erstattes af net.

Sætning 7.16. *Lad f være en afbildning af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$. Så er f kontinuert i $x \in M_1$ hvis og kun hvis*

$$\forall (x_i)_{i\in I} \subseteq M_1 (\lim x_i = x \Rightarrow \lim f(x_i) = f(x)) \ .$$

Bevis. Antag først at f er kontinuert i x, og lad $(x_i)_{i\in I}$ være et net fra M_1, der konvergerer mod x. Til en vilkårlig omegn $U \in \mathcal{U}(f(x))$ findes $V \in \mathcal{U}(x)$, så $f(V) \subseteq U$, jfr. 3.4, og dernæst findes $i(V) \in I$, så der for $i \in I$, $i(V) \leq i$ gælder $x_i \in V$. Heraf følger at $f(x_i) \in f(V) \subseteq U$ for $i(V) \leq i$, altså at $(f(x_i))_{i\in I}$ tilhører enhver omegn af $f(x)$ efterhånden.

Hvis f derimod ikke er kontinuert i x har vi:

$$\exists U \in \mathcal{U}(f(x)) \ \forall V \in \mathcal{U}(x) \quad (f(V) \setminus U \neq \varnothing) \ .$$

Vælges $x_V \in V$ så $f(x_V) \in f(V) \setminus U$ for hvert $V \in \mathcal{U}(x)$, er $(x_V)_{V\in\mathcal{U}(x)}$ på sædvanlig måde et net i M_1 gående mod x, men billednettet $(f(x_V))_{V\in\mathcal{U}(x)}$ kan ikke konvergere mod $f(x)$, da $f(x_V) \notin U$ for alle $V \in \mathcal{U}(x)$. Dette viser, at betingelsen i sætningen ikke er opfyldt. $\square$

Også i kompakthedsteorien gælder de fra metriske rum kendte resultater, jfr. Sætning 6.1.

Sætning 7.17. *For en delmængde K af et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er følgende egenskaber ensbetydende:*

(i) *Ethvert net fra K har et fortætningspunkt i K.*
(ii) *Ethvert net fra K har et delnet, der er konvergent i K.*
(iii) *Ethvert universelt net fra K er konvergent i K.*
(iv) *K er kompakt, dvs. enhver åben overdækning af K kan udtyndes til en endelig overdækning.*

Bevis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" følger af Sætning 7.7.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)". Hvis (ii) gælder og (x_i) er et universelt net i K, så har (x_i) et konvergent delnet og dermed et fortætningspunkt i K, men for universelle net, er fortætningspunkter automatisk grænsepunkter, og dermed gælder (iii).

"(iii) $\Rightarrow$ (iv)". Antag at (iii) gælder, og at der findes en åben overdækning $\mathcal{S}$ af K, som ikke kan udtyndes til en endelig overdækning. For alle $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ gælder altså $K \not\subseteq S_1 \cup \cdots \cup S_n$, og dermed

$$(*) \qquad K \cap \complement(S_1 \cup \cdots \cup S_n) = \bigcap_{i=1}^{n} K \setminus S_i \neq \varnothing \ .$$

Lad I være mængdesystemet af alle mængder af formen $(*)$, hvor $n \in \mathbb{N}$ og $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ er vilkårlige, og lad I være ordnet ved omvendt inklusion $A \le B \Leftrightarrow A \supseteq B$. Vælges $x_A \in A$ for vilkårligt $A \in I$, er $(x_A)_{A \in I}$ et net i K, og ifølge Sætning 7.13 har det et universelt delnet, som altså er konvergent i K ifølge (iii). Dette viser, at $(x_A)_{A\in I}$ har et fortætningspunkt $x \in K$, og da $\mathcal{S}$ er en overdækning af K, findes $S \in \mathcal{S}$ med $x \in S$. Nettet $(x_A)_{A\in I}$ er ofte i $K \cap S$, og da $K \backslash S \in I$, findes altså $A \in I$, $A \subseteq K\backslash S$, så $x_A \in K \cap S$, men da også $x_A \in A$, får vi en modstrid.

"(iv) $\Rightarrow$ (i)". Antag at (iv) gælder, og at $(x_i)_{i\in I}$ er et net fra K uden fortætningspunkt i K. Dermed gælder (idet $\mathcal{U}_K(x)$ betegner omegnssystemet af x i K):

$$\forall x \in K\ \exists U \in \mathcal{U}_K(x)\ \ ((x_i)\ \text{ tilhører } \textit{ikke}\ U \text{ ofte})\ .$$

Idet mængderne $S \cap K$, $x \in S \in \mathcal{T}$, udgør en basis for $\mathcal{U}_K(x)$, kan vi altså til hvert $x \in K$ vælge $S_x \in \mathcal{T}$ med $x \in S_x$, så (x_i) tilhører $K\backslash S_x$ efterhånden (jfr. biimplikationen efter Definition 7.4). Systemet $\mathcal{S} = \{S_x \mid x \in K\}$ er en åben overdækning af K, og ifølge (iv), findes altså $x_1, \dots, x_n \in K$, så

$$K \subseteq S_{x_1} \cup \cdots \cup S_{x_n}$$

eller

$$\bigcap_{j=1}^{n} K \setminus S_{x_j} = \varnothing\ ,$$

men det strider mod at der for hvert $j = 1, \dots, n$ findes $i_j \in I$, så $x_i \in K \setminus S_{x_j}$ for $i \ge i_j$. Hvis nemlig $i^* \in I$ er en majorant for $i_1, \dots, i_n$ gælder

$$x_{i^*} \in \bigcap_{j=1}^{n} K \setminus S_{x_j}\ .$$

□

7.4. Tychonoffs sætning.

Det er velkendt, at produktet af 2 kompakte metriske rum er kompakt. Vi skal nu præsentere en vidtrækkende generalisation af dette resultat, som skyldes den russiske matematiker A. Tychonoff (1930).

Sætning 7.18. *Lad* $(M_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in A}$ *være en vilkårlig familie af topologiske rum. Produktrummet* $(M, \mathcal{T}) = (\prod M_\alpha, \prod \mathcal{T}_\alpha)$ *er kompakt hvis og kun hvis alle rummene* $(M_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ *er kompakte.*

Bevis. Da projektionerne $\pi_\alpha : \prod M_\alpha \to M_\alpha$ er kontinuerte og på, så følger det umiddelbart af Sætning 6.8, at hvert af rummene M_α er kompakte, hvis $\prod M_\alpha$ er kompakt. Den vanskelige del – som er camoufleret i begrebet universelt net og Sætning 7.17 – er, at produktet af kompakte rum er kompakt. Det er Tychonoffs sætning.

Vi antager altså, at M_α er kompakt for alle $\alpha \in A$, og betragter et vilkårligt universelt net $(x_i)_{i\in I}$ i $\prod M_\alpha$ og vil vise, at det er konvergent.

For hvert $\alpha \in A$ er billednettet $(\pi_\alpha(x_i))_{i\in I}$ universelt i M_α. For en vilkårlig delmængde $X \subseteq M_\alpha$ er (x_i) nemlig efterhånden i $\pi_\alpha^{-1}(X)$ eller efterhånden i $\complement\pi_\alpha^{-1}(X) = \pi_\alpha^{-1}(\complement X)$, hvilket netop siger, at $(\pi_\alpha(x_i))$ er efterhånden i X, eller efterhånden i $\complement X$. Da M_α er kompakt, findes $m_\alpha \in M_\alpha$, så $\lim_{i\in I} \pi_\alpha(x_i) = m_\alpha$. Punktet $m = (m_\alpha)_{\alpha\in A}$ er da grænsepunkt for $(x_i)_{i\in I}$. Hvis nemlig U er en omegn af m af formen

$$U = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha\,,$$

hvor U_α er en omegn af m_α for hvert α, og $U_\alpha = M_\alpha$ for $\alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, så findes for hvert $j = 1, \dots, p$ et $i_j \in I$, så der for $i \in I$, $i_j \leq i$ gælder

$$\pi_{\alpha_j}(x_i) \in U_{\alpha_j}\,,$$

og altså $x_i \in U$ for $i^* \leq i$, hvor i^* er en majorant for $i_1, \dots, i_p$. $\square$

Bemærkning 7.19. Man ser let, at et produkt $(\prod M_\alpha, \prod \mathcal{T}_\alpha)$ er Hausdorff hvis og kun hvis alle $(M_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ er Hausdorff. Dermed kan Tychonoffs sætning også formuleres således:

Et produkt er et kompakt Hausdorff rum hvis og kun hvis alle faktorerne er kompakte Hausdorff rum.

Opgaver til §7

7.1. Vis, at ethvert fuldstændig regulært rum har en Hausdorff kompaktifikation, som er et delrum af en Tychonoff-terning. (*Vink.* Se opgave 5.4).

7.2. Lad $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ være en familie af ikke tomme topologiske rum. Vis, at $\prod M_\alpha$ er lokalkompakt hvis og kun hvis M_α er lokalkompakt for alle $\alpha \in A$, og M_α er kompakt for alle α på nær endelig mange.

7.3. Lad H være et uendelig dimensionalt Hilbert rum. 1) Vis, at enhedskuglen $B = \{x \in H \mid \|x\| \le 1\}$ ikke er kompakt.

Vink. Betragt en ortonormal følge (e_n).

2) Vis, at H ikke er lokalkompakt.

7.4. Lad M være forsynet med initialtopologien for en familie af afbildninger $f_\alpha : M \to (M_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$. Vis, at et net $(x_i)_{i\in I}$ i M konvergerer mod $x \in M$ hvis og kun hvis

$$\forall \alpha \in A \left(\lim_{i\in I} f_\alpha(x_i) = f_\alpha(x) \right) .$$

7.5. Lad G være en topologisk gruppe, jfr. opg. 5.8. Vis, at hvis $A, B \subseteq G$ er henholdsvis afsluttet og kompakt i G, så er $AB = \{ab \mid a \in A\,,\, b \in B\}$ afsluttet i G.

Vink. Lad $x \in \overline{AB}$, og betragt et net (x_i) fra AB, så $x_i \to x$.

7.6. Lad Ω være det første ikke tællelige ordinaltal, jfr. opg. 4.4 i kap. 1, og lad $\overline{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$. Velordningen udvides til $\overline{\Omega}$ ved at $\omega < \infty$ for alle $\omega \in \Omega$. Idet $\overline{\Omega}$ forsynes med ordenstopologien skal det vises, at ∞ er et kontaktpunkt for Ω, (så betegnelsen $\overline{\Omega}$ er fornuftig). Vis, at ∞ ikke er grænsepunkt for nogen følge fra Ω.

Vink. Brug (ii) fra ovennævnte opgave.

7.7. For en ikke tom delmængde $A \subseteq M$ sættes

$$\mathcal{U}_A = \{B \subseteq M \mid A \subseteq B\} .$$

Vis, at $\mathcal{U}_A$ er et filter, og at $\mathcal{U}_A$ er et ultrafilter hvis og kun hvis A er en singleton. Vis, at hvis M har mindst 2 punkter, så findes der ikke noget største (fineste) element i mængden af filtre på M.

§8. Sammenhæng.

8.1. Om intervaller på den reelle akse.

Mængden af reelle tal $\mathbb{R}$ har den fundamentale egenskab, at enhver ikke tom opad begrænset delmængde har et supremum, dvs. en mindste majorant. Følgende mængder vil vi omtale som intervaller:

$$\begin{aligned}
&\{a\}\,,\ a \in \mathbb{R} \\
&[a,b]\,,\ [a,b[\,,\ ]a,b]\,,\ ]a,b[\,,\ a,b \in \mathbb{R}\,,\ a<b \\
&[a,\infty[\,,\ ]a,\infty[\,,\ ]-\infty,b]\,,\ ]-\infty,b[\,,\ a,b \in \mathbb{R} \\
&]-\infty,\infty[=\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Intervaller kan karakteriseres ved følgende ordningsegenskab.

Sætning 8.1. *En ikke tom delmængde $E \subseteq \mathbb{R}$ er et interval, hvis og kun hvis den har følgende egenskab*

$$\forall a,b \in E\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ (a<x<b \Rightarrow x \in E)\,.$$

Bevis. Det er klart, at ethvert interval har ovenstående egenskab. Hvis en ikke tom mængde E har egenskaben sætter vi

$$\sup E = \begin{cases} b\,, & \text{hvis } E \text{ er opad begrænset} \\ \infty\,, & \text{hvis } E \text{ ikke er opad begrænset} \end{cases}$$
$$\inf E = \begin{cases} a\,, & \text{hvis } E \text{ er nedad begrænset} \\ -\infty\,, & \text{hvis } E \text{ ikke er nedad begrænset}\,, \end{cases}$$

og dermed gælder

$$]\inf E, \sup E[\subseteq E \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid \inf E \le x \le \sup E\}\,,$$

hvoraf påstanden fremgår.

Den sidste inklusion følger af definitionen på inf og sup. Den første inklusion følger, fordi der til x opfyldende $\inf E < x < \sup E$ findes $a,b \in E$ med $a<x<b$, altså $x \in E$. $\square$

Vi skal nu karakterisere intervallerne ved en topologisk egenskab, dvs. en egenskab som kun involverer de åbne mængder. Vi bemærker som optakt, at i et vilkårligt topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er $\{\varnothing, M\}$ et system af mængder, der er både åbne og afsluttede.

Sætning 8.2. *For en ikke tom delmængde E af $\mathbb{R}$ er følgende to betingelser ensbetydende:*

(1) *E er et interval.*
(2) *Mængderne $\varnothing$ og E er de eneste delmængder af E, der er både åbne og afsluttede i den inducerede topologi på E.*

Betingelse (2) kan også udtrykkes således:

E kan ikke deles i to disjunkte, ikke tomme mængder, der begge er åbne relativt til E,

eller således:

E kan ikke deles i to disjunkte, ikke tomme mængder, der begge er afsluttede relativt til E

.

Bevis. "(2) $\Rightarrow$ (1)". Antag, at E ikke er et interval, altså at (1) ikke gælder. Ifølge Sætning 8.1 findes $a < x < b$, hvor $a, b \in E$, men $x \notin E$. Da er de to mængder $E \cap]-\infty, x[$ og $E \cap]x, \infty[$ disjunkte og ikke tomme, og deres foreningsmængde er E. Da $]-\infty, x[$ og $]x, \infty[$ er åbne, er $E \cap]-\infty, x[$ og $E \cap]x, \infty[$ åbne relativt til E. Altså er (2) ikke opfyldt.

"(1) $\Rightarrow$ (2)". Antag, at (1) gælder, men ikke (2), altså at E er et interval, som kan deles i to disjunkte, ikke tomme mængder A og B, der begge er afsluttede relativt til E. Lad $a \in A$ og $b \in B$. Vi kan antage, at $a < b$ (idet A og B kan bytte roller). Da E er et interval gælder $[a, b] \subseteq E$. Vi indfører tallet $c = \sup\{x \in A \mid x < b\}$, som opfylder $a \leq c \leq b$, hvoraf sluttes $c \in E$. Da A er afsluttet relativt til E, må der gælde $c \in A$, men så må $c < b$, og følgelig $]c, b[\subseteq B$. Da B er afsluttet relativt til E følger at $c \in B$, altså $c \in A \cap B$, hvilket er en modstrid, da A og B er forudsat disjunkte. $\square$

8.2. Sammenhængende delmængder.

Motiveret af Sætning 8.2 indføres følgende:

Definition 8.3. En ikke tom delmængde E af et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ kaldes *sammenhængende*, hvis $\varnothing$ og E er de eneste delmængder af E, der er både åbne og afsluttede relativt til E.

Specielt er rummet $(M, \mathcal{T})$ sammenhængende, hvis $\varnothing$ og M er de eneste delmængder af M, der er både åbne og afsluttede i M.

Med brug af definitionen siger Sætning 8.2 simpelthen, at de sammenhængende delmængder af $\mathbb{R}$ er præcis intervallerne.

Sætning 8.4. *Lad $f : (M_1, \mathcal{T}_1) \to (M_2, \mathcal{T}_2)$ være en kontinuert afbildning mellem topologiske rum. Hvis M_1 er sammenhængende, så er billedmængden $f(M_1)$ en sammenhængende delmængde af M_2.*

Bevis. Lad $G_2 \subseteq f(M_1)$ være både åben og afsluttet relativt til $f(M_1)$. Da f også er kontinuert som afbildning af M_1 ind i $f(M_1)$ er $f^{-1}(G_2)$ åben og afsluttet i M_1. Idet M_1 er forudsat sammenhængende, er $f^{-1}(G_2) = \varnothing$ eller $f^{-1}(G_2) = M_1$, og da $G_2 = f(f^{-1}(G_2))$ (da $G_2 \subseteq f(M_1)$), gælder altså $G_2 = \varnothing$ eller $G_2 = f(M_1)$, hvorved er vist, at $f(M_1)$ er sammenhængende. $\square$

Som en vigtig anvendelse noteres følgende hovedsætning om reelle funktioner af en reel variabel.

Sætning 8.5. *Værdimængden for en kontinuert reel funktion på et interval er et interval.*

Under inddragelse af Sætning 8.1 kan vi også formulere Sætning 8.5 på den malende måde: *En kontinuert reel funktion på et interval E springer ingen værdier over: Hvis f antager værdierne $\alpha < \beta$ i to punkter af E, så findes for hvert $\xi \in]\alpha, \beta[$ et $x \in E$ så $f(x) = \xi$.*

Kombineres Sætning 6.8 og Sætning 8.4 fås

Sætning 8.6. *Lad $f : (M, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ være kontinuert på et sammenhængende kompakt rum. Så er billedmængden $f(M)$ et afsluttet og begrænset interval.*

Om sammenhængende delmængder gælder følgende elementære

Sætning 8.7. *Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum.*

(a) Hvis $(E_i)_{i \in I}$ er en familie af sammenhængende delmængder, og hvis $E_i \cap E_j \neq \varnothing$ for alle $i, j \in I$, så er $\bigcup_{i \in I} E_i$ sammenhængende.

(b) Hvis E er sammenhængende, så er $\overline{E}$ også sammenhængende.

Bevis. (a) Lad $O \subseteq \bigcup_{i \in I} E_i$ være åben og afsluttet relativt til $\bigcup E_i$. Hvis $O \neq \varnothing$ findes $i \in I$, så $O \cap E_i \neq \varnothing$, og da $O \cap E_i$ er åben og afsluttet relativt til E_i, og da E_i er sammenhængende, er $O \cap E_i = E_i$, altså $E_i \subseteq O$. Da $E_i \cap E_j \neq \varnothing$ for alle $j \in I$, må $O \cap E_j \neq \varnothing$. Da E_j er sammenhængende og $O \cap E_j$ er både åben og afsluttet relativt til E_j, må $O \cap E_j = E_j$, altså $E_j \subseteq O$, og da $j \in I$ er vilkårlig, fås $O = \bigcup E_i$.

(b) Lad $\varnothing \neq O \subseteq \overline{E}$ og antag, at O er åben og afsluttet relativt til $\overline{E}$. Dermed er O specielt afsluttet. Mængden $O \cap E$ er åben og afsluttet relativt til E. Da

E er forudsat sammenhængende, er enten $O \cap E = \emptyset$ eller $O \cap E = E$. Antages $O \cap E = \emptyset$ og udnyttes, at $O = \overline{E} \cap G$ med G åben, så fås $O \cap E = G \cap E = \emptyset$, altså $E \subseteq \complement G$. Da $\complement G$ er afsluttet fås $\overline{E} \subseteq \complement G$ eller $O = \overline{E} \cap G = \emptyset$, hvilket er en modstrid.

Dermed sluttes, at $O \cap E = E$, altså $E \subseteq O$, og da O var afsluttet fås også $\overline{E} \subseteq O$, altså $\overline{E} = O$. □

Ved brug af Sætning 8.7 skal vi beskrive en opdeling af et topologisk rum i naturlige sammenhængende dele, nemlig de såkaldte sammenhængskomponenter.

I et vilkårligt rum $(M, \mathcal{T})$ vil vi kalde to punkter *forbundne*, hvis der findes en sammenhængende delmængde af M, der indeholder dem begge. På grund af 8.7.(a) er den herved definerede relation transitiv, og dermed er den klart en ækvivalensrelation. Klasserne i den tilsvarende klasseinddeling kaldes *sammenhængskomponenter*, eller kort *komponenter*.

Sætning 8.8. *Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum.*

(1) Sammenhængskomponenterne er de maksimale sammenhængende delmængder af M.

(2) Sammenhængskomponenterne er afsluttede.

(3) M er sammenhængende, netop når der kun er én komponent.

Bevis. (1): Hvis $K = [x]$ er ækvivalensklassen, der indeholder x, så er K foreningsmængden af alle sammenhængende delmængder, der indeholder x, og derfor sammenhængende ifølge 8.7.(a). Maksimaliteten følger af konstruktionen.

(2): Hvis K er en komponent, så er også $\overline{K}$ sammenhængende ifølge 8.7.(b), men ifølge (1) må så $K = \overline{K}$.

(3): Klar. □

Eksempel 8.9. Et diskret rum M, hvor $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$, er sammenhængskomponenterne reduceret til de enkelte punkter. Et rum med denne egenskab kaldes *totalt usammenhængende*. Et rum kan være totalt usammenhængende uden at være diskret, jfr. opg. 8.3.

Det trivielle rum M, hvor $\mathcal{T} = \{\emptyset, M\}$, er sammenhængende.

8.3. Kurvesammenhæng.

Definition 8.10. Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum. Ved en *kontinuert kurve* i M forstås en kontinuert afbildning φ af et interval $[a, b]$ ind i M, idet vi antager $a < b$.

Ved et parameterskift kan man naturligvis altid antage, at en kontinuert kurve er parametriseret af enhedsintervallet $[0, 1]$. En kontinuert kurve $\varphi : [0, 1] \to M$ kaldes kort en *sti*.

En delmængde $E \subseteq M$ kaldes *kurvesammenhængende* såfremt hvilke som helst to punkter i E kan forbindes med en kontinuert kurve, der forløber helt i E.

Kravet kommer ud på, at der for vilkårlige punkter $P, Q \in E$ findes $a < b$ og en kontinuert afbildning $\varphi : [a, b] \to E$ med $\varphi(a) = P$, $\varphi(b) = Q$.

Sætning 8.11. *Et kurvesammenhængende rum er sammenhængende.*

Bevis. Lad $(M, \mathcal{T})$ være et kurvesammenhængende rum og antag, at der findes en ikke tom mængde $E \neq M$, som er både åben og afsluttet. Vælges $P \in E$, $Q \in \complement E$, findes en sti $\varphi : [0, 1] \to M$ med $\varphi(0) = P$, $\varphi(1) = Q$. Mængden $\varphi^{-1}(E)$ er da både åben og afsluttet i $[0, 1]$ og $0 \in \varphi^{-1}(E)$, så da $[0, 1]$ er sammenhængende, er $\varphi^{-1}(E) = [0, 1]$, men det strider mod at $\varphi(1) \in \complement E$. $\square$

Der findes sammenhængende rum, der ikke er kurvesammenhængende, jfr. opg. 8.2. Dette gælder dog ikke for åbne delmængder af $\mathbb{R}^k$.

Sætning 8.12. *For en åben mængde $G \subseteq \mathbb{R}^k$ er følgende betingelser ækvivalente:*

(i) *G er kurvesammenhængende.*
(ii) *G er sammenhængende.*
(iii) *To hvilke som helst punkter $P, Q \in G$ kan forbindes med en kontinuert kurve, der består af akseparallelle liniestykker.*

Bevis. Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) er eftervist og implikationen (iii) $\Rightarrow$ (i) er triviel. Beviset for ækvivalensen er derfor gennemført, når vi har vist implikationen (ii) $\Rightarrow$ (iii).

For et givet punkt $P \in G$ indføres mængden

$$A_P = \{Q \in G \mid P \ \text{ forb } \ Q\}$$

idet " P forb Q" skal betyde, at der findes en kontinuert kurve fra P til Q i G bestående af akseparallelle liniestykker.

Om A_P noteres tre egenskaber:

a) $A_P \neq \emptyset$, idet P kan forbindes til P ved en konstant kurve (som er akseparallel per definition).

b) A_P er åben. (Se fig. 1.)
Hvis nemlig $Q \in A_P$ findes $r > 0$ så $K(Q, r) \subseteq G$, da G er åben. For et vilkårligt punkt $R \in K(Q, r)$ gælder åbenbart Q forb R, og fortsættes kurven fra P til Q (som findes, da $Q \in A_P$) med kurven fra Q til R fås en akseparallel kontinuert kurve fra P til R, altså $K(Q, r) \subseteq A_P$.

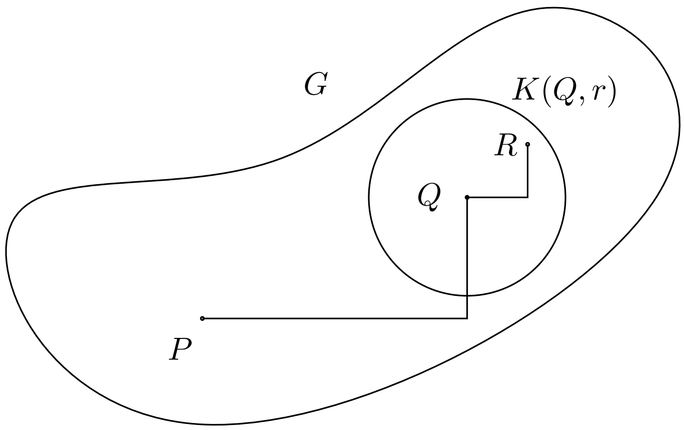


FIG. 1

c) A_P er afsluttet relativt til G. (Se fig. 2.)
Hvis nemlig $Q \in G$ tilhører afslutningen af A_P relativt til G har vi $K(Q, r) \cap A_P \neq \emptyset$, idet $r > 0$ vælges så lille at $K(Q, r) \subseteq G$, hvilket er muligt, da G er åben. Hvis $R \in K(Q, r) \cap A_P$ har vi P forb R og R forb Q, altså som før P forb Q så $Q \in A_P$.

Da G er forudsat sammenhængende, er $\emptyset$ og G de eneste delmængder af G, der er åbne og afsluttede relativt til G. Af a) - c) ovenfor sluttes at $A_P = G$, og dermed er (iii) opfyldt. $\square$

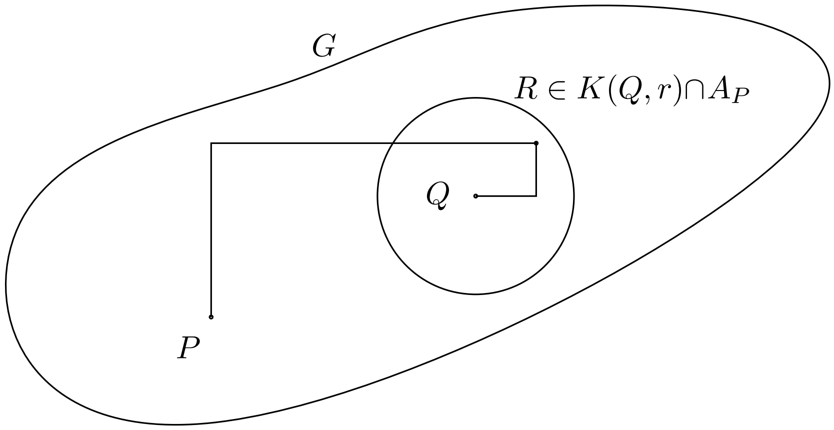


FIG. 2

I det følgende får vi hyppigt brug for at sammenstykke kontinuerte afbildninger til nye kontinuerte afbildninger. Vi kalder resultatet:

8.13. Tuborg-lemma. *Lad $F_1, \dots, F_n$ være afsluttede delmængder af det topologiske rum $(M, \mathcal{T})$ så $M = F_1 \cup \cdots \cup F_n$, og lad $f_i : F_i \to N$, være en kontinuert afbildning med hensyn til den inducerede topologi på F_i, $i = 1, \dots, n$. Hvis for $i \neq j$ $f_i(x) = f_j(x)$ når $x \in F_i \cap F_j$, så er den sammenføjede afbildning*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \, , & \text{for} \quad x \in F_1 \\ \vdots & \\ f_n(x) \, , & \text{for} \quad x \in F_n \end{cases}$$

veldefineret og kontinuert fra M til N.

Bevis. Vi indser, at f er kontinuert ved at vise, at $f^{-1}(A)$ er afsluttet i M for en vilkårlig afsluttet delmængde $A \subseteq N$. Vi har

$$f^{-1}(A) = \{x \in M \mid f(x) \in A\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x \in F_i \mid f_i(x) \in A\} = \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(A) \, ,$$

og $f_i^{-1}(A)$ er afsluttet relativt til F_i, da f_i er kontinuert. Da F_i er afsluttet i M, er $f_i^{-1}(A)$ endda afsluttet i M, og dermed er $f^{-1}(A)$ afsluttet i M. □

I analogi med sammenhængskomponenter for et usammenhængende rum, vil vi definere kurvekomponenter.

To punkter $P, Q \in M$ kaldes *kurveforbundne*, hvis der findes en sti fra P til Q. Den herved definerede relation i M er en ækvivalensrelation: Den konstante sti $\varphi(t) = P$ for $t \in [0,1]$ er en sti fra P til P. Hvis φ er en sti fra P til Q, er den modsatte sti $\overline{\varphi}(t) = \varphi(1-t)$ en sti fra Q til P. Hvis desuden ψ er en sti fra Q til R, så er

$$\rho(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{for} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \psi(2t-1) & \text{for} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

en sti fra P til R ifølge Tuborg-lemmaet.

Ækvivalensklasserne kaldes *kurvekomponenter*, som er maksimale kurvesammenhængende delmængder. Rummet er kurvesammenhængende, netop hvis der er én kurvekomponent. Derimod behøver kurvekomponenterne ikke at være afsluttede, jfr. opg. 8.2.

Ifølge Sætning 8.11 er enhver kurvekomponent en delmængde af en sammenhængskomponent, og kurvekomponenterne udgør en klasseinddeling af sammenhængskomponenterne.

Opgaver til §8

8.1. Vis, at $(M, \mathcal{T})$ er sammenhængende hvis og kun hvis $\partial A \neq \varnothing$ for enhver delmængde $A \subseteq M$ med $A \neq \varnothing$, $A \neq M$.

8.2. Lad $M \subseteq \mathbb{R}^2$ være defineret ved

$$M = \{(x, \sin \tfrac{1}{x}) \mid x \in]0,1]\} \cup \{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \,.$$

Vis, at M er en sammenhængende men ikke kurvesammenhængende delmængde af $\mathbb{R}^2$. Find kurvekomponenterne.

8.3. Find sammenhængskomponenterne i $\mathbb{Q}$ med delrumstopologien fra $\mathbb{R}$.

8.4. Vis, at følgende egenskaber ved et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ er ækvivalente:

(i) Hvert punkt $x \in M$ har en omegnsbasis bestående af sammenhængende mængder.

(ii) For enhver ikke tom åben delmængde $G \subseteq M$ er komponenterne i delrummet $(G, \mathcal{T}_G)$ åbne i $(M, \mathcal{T})$.

Et rum med de nævnte egenskaber kaldes *lokalt sammenhængende*.

8.5. Lad $G \subseteq \mathbb{R}^k$ være en ikke tom åben mængde. Vis, at G har tælleligt mange sammenhængskomponenter, som alle er åbne.

Vis, at en åben mængde $G \subseteq \mathbb{R}$ er foreningsmængde af tælleligt mange parvis disjunkte åbne intervaller.

8.6. Lad M være en uendelig mængde forsynet med topologien fra opg. 6.1. Vis, at enhver uendelig delmængde af M er sammenhængende og vis derved, at M er sammenhængende og lokalt sammenhængende, (jfr. opg. 8.4).

8.7. Lad C være en sammenhængende delmængde af et topologisk rum M. Vis, at hvis C har punkter fælles med både $A \subseteq M$ og $M \setminus A$, så er $C \cap \partial A \neq \varnothing$.

8.8. (a) Vis, at et produkt af to sammenhængende rum M og N er sammenhængende.

Vink. Vis, at mængderne $T_{m,n} = (\{m\} \times N) \cup (M \times \{n\})$ for $(m,n) \in M \times N$ er sammenhængende og udnyt, at

$$M \times N = \bigcup_{n \in N} T_{m,n} \,.$$

(b) Vis, at et vilkårligt produkt $\prod_{\alpha \in A} M_\alpha$ af sammenhængende rum er sammenhængende.

Vink. Vælg $(m_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod M_\alpha$. For enhver endelig delmængde $B \subseteq A$ sættes

$$M_B = \{(x_\alpha) \mid x_\alpha = m_\alpha \text{ for } \alpha \in A \setminus B\}\ .$$

Vis, at M_B er sammenhængende og slut, at

$$\widetilde{M} := \bigcup_{B \subseteq A} M_B$$

er sammenhængende, idet der forenes over de endelige delmængder $B \subseteq A$. Vis endelig, at $\widetilde{M}$ er tæt i $\prod M_\alpha$.

8.9. Vis, at kontinuert afbildning af et sammenhængende rum ind i et totalt usammenhængende rum er konstant.

8.10. Et rum kaldes *lokalt kurvesammenhængende*, hvis hvert punkt har en omegnsbasis bestående af kurvesammenhængende mængder.

Vis følgende om et lokalt kurvesammenhængende rum $(M, \mathcal{T})$:

(a) Hvis $A \subseteq M$ er åben, så er også delrummet A lokalt kurvesammenhængende, og kurvekomponenterne i M er åbne.

(b) Vis, at enhver åben sammenhængende delmængde af M er kurvesammenhængende.

Vink. Søg inspiration i beviset for Sætning 8.12.

(c) Vis, at komponenter og kurvekomponenter er det samme.

Appendix 1

Oversigt over nogle vigtige typer af topologiske rum

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \text{Fuldstændig metrisk} & \Rightarrow & \text{Baire} \\
 & & & & \Downarrow & & \\
 & & & & \text{Metrisabelt} & & \\
 & & & & \Downarrow & & \\
\text{Kompakt Hausdorff} & \Rightarrow & \text{Parakompakt} & \Rightarrow & \text{Normalt} & \Rightarrow & \mathrm{T}_4 \\
\Downarrow & & & & \Downarrow & & \\
\text{Lokalkompakt Hausdorff} & & \Rightarrow & & \text{Fuldstændigt regulært} & \Rightarrow & \mathrm{T}_{3.5} \\
 & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\Downarrow & & & & \text{Regulært} & \Rightarrow & \mathrm{T}_3 \\
\text{Baire} & & & & \Downarrow & & \\
 & & & & \text{Hausdorff, } \mathrm{T}_2 & & \\
 & & & & \Downarrow & & \\
 & & & & \mathrm{T}_1 & &
\end{array}
$$

Appendix 2

Lidt om topologiens historie

Ordet topologi er afledt af græsk og betyder "stedlære" ligesom topografi betyder "stedbeskrivelse". Det er betydeligt vanskeligere at præcisere, hvad emnet dækker over.

Man plejer at føre topologi tilbage til Leibniz (1646–1716), som præsenterede nogen vage ideer om "analyse af steder" i korrespondance med Huygens i 1679. Leibniz brugte det latinske navn Analysis Situs, som forblev i brug indtil begyndelsen af det 20. århundrede. Ordet topologi blev foreslået af Listing i et brev fra 1836. I 1847 udgav han: *Vorstudien zur Topologie.* Flere af de kendte topologiske begreber som åben og afsluttet mængde og fortætningspunkt, blev indført af Cantor for delmængder af $\mathbb{R}^n$. Han kom ind på disse ting i forbindelse med studier over konvergensspørgsmål for trigonometriske rækker.

Uden at være alt for præcis kan man sige, at topologi drejer sig om kontinuerte transformationer (deformationer) af rum, hvor man med rum i første omgang kan tænke på kurver, flader og højere dimensionale analoge objekter, altså *n-dimensionale mangfoldigheder*, dvs. strukturer der lokalt ligner kugler i det euklidiske talrum $\mathbb{R}^n$. Riemann (1826–66) nævnte kort mangfoldigheder i sit berømte Habilitationsschrift (1859): *Über die Hypothesen welche der Geometrie zur Grunde liegen.* H. Weyl præciserede visse af Riemanns ideer i sin bog fra 1913: *Die Idee der Riemannschen Fläche.* De italienske matematikere G. Ascoli (1843–96) og V. Volterra (1860–1940) betragtede rum af kurver og funktioner i 1880'erne, men det virkelige gennembrud skete med indførelsen af metriske rum i 1906 af den franske matematiker M. Fréchet (1878–1973). Topologiske rum blev indført i 1914 af den tyske matematiker F. Hausdorff (1868–1942). Hausdorff indførte topologi ved at fastlægge omegnsfiltrene af hvert punkt i mængden, sådan som det er muligt ifølge Sætning 1.10. Den her anvendte metode med at fastlægge systemet af åbne mængder aksiomatisk går tilbage til H. Tietze (1880–1964), hvis navn er knyttet til udvidelsessætningen 5.14.

En række russiske matematikere bidrog afgørende til topologiens udvikling: P. Urysohn (1898–1924) (der omkom ved en drukneulykke), P. Alexandroff (1896–1982), og A. Tychonoff (1906-1993). Kompakthedsbegrebet optrådte i forskellige varianter i mellemkrigsårene, jfr. tællelig kompakthed og følgekompakthed, men fra omkring 1940 har man fokuseret på overdækningsdefinitionen.

Af de mange nyere begreber spiller parakompakthed (1944) en vigtig rolle. Ophavsmanden er den franske matematiker Jean Dieudonné (1906–1992), som sammen med Henri Cartan (f. 1904) og André Weil (1906–1998) var med til at starte forfatterkollektivet Bourbaki. Cartan indførte begrebet filter i 1937.

Fuldstændighed kan ikke defineres i generelle topologiske rum. Blandt de abstrakte teorier for fuldstændighed kan nævnes de uniforme strukturer, indført i 1937 af André Weil.

Kapitel 3. Homotopiteori.

Introduktion.

Et grundlæggende problem i topologi er at afgøre om to forelagte topologiske rum er homeomorfe, jfr. kapitel 2, 3.10. Der er ikke nogen metode til at løse dette problem generelt, men den *algebraiske topologi*, en af det 20. århundredes matematiske nyskabelser, giver en række anvendelige redskaber.

Hvis det lykkes at konstruere en homeomorfi $f : M \to N$, så er M og N homeomorfe, men hvis det ikke lykkes, så kan det jo være, at man ikke har været tilstrækkelig opfindsom. En måde hvorpå man kan afgøre, at M og N ikke er homeomorfe, er at finde en topologisk egenskab, som M har, men som N ikke har. F.eks. er det klart, at $[0, 1]$ og $]0, 1[$ ikke er homeomorfe, da $[0, 1]$ er kompakt, og det er $]0, 1[$ ikke. Tilsvarende er $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^2$ ikke homeomorfe, fordi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er usammenhængende, men $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ er sammenhængende. At bevise, at $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$ ikke er homeomorfe når $n \neq m$, er kompliceret, og det blev først gjort af hollænderen L.E.J. Brouwer (1881-1966) i 1911. Man skal huske på, at Cantor havde bevist, at $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$ altid er ækvipotente, og at Peano i 1890 havde konstrueret en kontinuert surjektiv funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]^2$, altså en kontinuert kurve, der løber gennem alle punkter i enhedskvadratet.

I den algebraiske topologi knytter man forskellige algebraiske objekter til et rum på en sådan måde, at homeomorfe rum har isomorfe objekter. Objektet kaldes så en *topologisk invariant.* Der findes f.eks. homologigrupper, cohomologigrupper og homotopigrupper, som kan bruges til at skelne mellem rum. Vi skal her kun beskæftige os med den *første homotopigruppe*, som blev indført af H. Poincaré (1854-1912) i 1895 under navnet *fundamentalgruppen.* En indføring i algebraisk topologi findes i W.S. Massey: *A basic course in algebraic topology.* Graduate Texts in Mathematics **127**. Springer, New York 1991.

§1. Homotopi af stier.

I det følgende bruger vi ordet rum som kort betegnelse for et topologisk rum. Vi sætter $I = [0, 1]$ forsynet med delrumstopologien fra $\mathbb{R}$.

Definition 1.1. Hvis f, g er kontinuerte afbildninger af et rum X ind i et rum M kaldes f *homotop* med g, hvis der findes en kontinuert afbildning $F : X \times I \to M$ så

$$F(x, 0) = f(x) \ , \quad F(x, 1) = g(x) \ \text{ for } \ x \in X \ .$$

Afbildningen F kaldes en *homotopi* fra f til g, og man skriver $f \simeq g$.

Man skal tænke på homotopien som en énparameter familie af kontinuerte afbildninger fra X til M. Familien varierer kontinuert fra $f(t=0)$ til $g(t=1)$. Man kan tænke på t som en tidsvariabel. I tidsrummet $[0,1]$ deformeres f kontinuert til g.

Vi skal nu betragte det specielle tilfælde, hvor afbildningerne er *stier* i rummet M, dvs. kontinuerte afbildninger af I ind i M.

Definition 1.2. Hvis $f, g : I \to M$ er stier med samme begyndelsespunkt $x_0 = f(0) = g(0)$ og samme endepunkt $x_1 = f(1) = g(1)$, kaldes f *sti-homotop* med g, hvis der findes en kontinuert afbildning $F : I \times I \to M$, så

$$\begin{aligned} F(s,0) &= f(s)\,, & F(s,1) &= g(s) & &\text{for} \quad s \in I \\ F(0,t) &= x_0\,, & F(1,t) &= x_1 & &\text{for} \quad t \in I\,. \end{aligned}$$

Afbildningen F kaldes en *sti-homotopi* fra f til g med begyndelsespunkt x_0 og endepunkt x_1. Man skriver $f \simeq_s g$.

Den første betingelse udtrykker, at F er en homotopi fra afbildningen f til g, og den anden udtrykker, at alle de "mellemliggende stier" har samme begyndelsespunkt x_0 og samme endepunkt x_1.

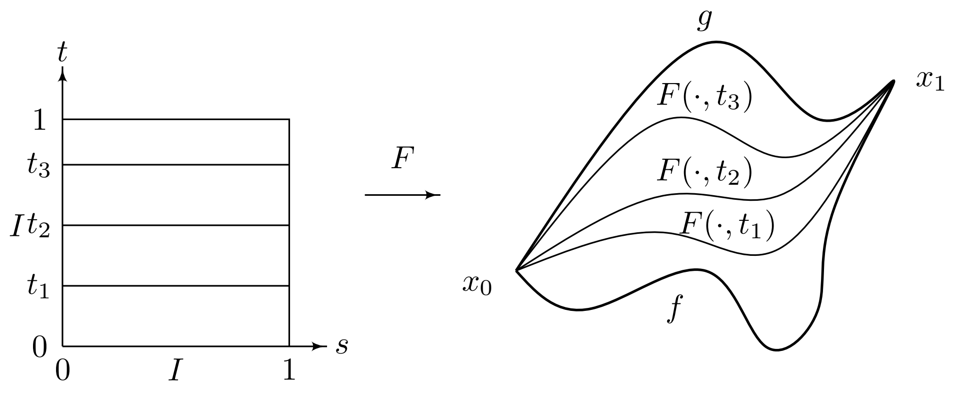


Fig. 1

Lemma 1.3. *Relationerne $\simeq$ og $\simeq_s$ er ækvivalensrelationer i mængderne $\mathcal{C}(X,M)$ og $\{f \in \mathcal{C}(I,M) \mid f(0)=x_0, f(1)=x_1\}$. De tilhørende mængder af ækvivalensklasser betegnes henholdsvis $[X,M]$ og $\pi_1(M;x_0,x_1)$.*

Bevis. For givet $f \in \mathcal{C}(X, M)$ ser man, at $f \simeq f$ ved at sætte $F(x,t) = f(x)$. Hvis f er en sti i M fra x_0 til x_1, er F automatisk en sti-homotopi. Dermed er begge relationer refleksive. Symmetrien er også let:

Hvis F er en homotopi fra f til g, så er $G(x,t) = F(x, 1-t)$ en homotopi fra g til f. Hvis F er en sti-homotopi, så er G også en sti-homotopi.

Antag endelig, at F er en homotopi fra f til g, og at G er en homotopi fra g til h. Vi kan da definere en homotopi H fra f til h ved fastsættelsen

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{for} \quad x \in X \ , \ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t-1) & \text{for} \quad x \in X \ , \ t \in [\frac{1}{2}, 1] \ . \end{cases}$$

Afbildningen er veldefineret, da der for $t = \frac{1}{2}$ gælder $F(x,1) = G(x,0) = g(x)$. Da H er kontinuert på de to afsluttede delmængder $X \times [0, \frac{1}{2}]$ og $X \times [\frac{1}{2}, 1]$, er H kontinuert ifølge Tuborg-lemmaet. Man ser klart, at H er en sti-homotopi, hvis F og G er sti-homotopier. $\square$

Eksempel 1.4. To vilkårlige kontinuerte afbildninger $f, g : X \to \mathbb{R}^2$ er homotope, idet

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

er en homotopi. Den kaldes den *ret-liniede homotopi*, idet $f(x)$ deformeres til $g(x)$ langs liniestykket fra $f(x)$ til $g(x)$. Vi ser, at det afgørende for konklusionen er, at f, g afbilder X ind i en konveks delmængde af et normeret vektorrum, eller et *topologisk vektorrum*, dvs. et vektorrum E med en topologi så afbildningerne $(x,y) \mapsto x+y$ og $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ af henholdsvis $E \times E$ og $\mathbb{R} \times E$ ind i E er kontinuerte.

Eksempel 1.5. Stierne $\varphi(t) = e^{i\pi t}$, $\psi(t) = e^{-i\pi t}$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ fra 1 til -1 er intuitivt *ikke* homotope, da man ikke kan passere 0. Fænomenet kendes fra kompleks analyse, hvor det udregnes, at

$$\mathrm{int}_\varphi \frac{dz}{z} = i\pi \neq \mathrm{int}_\psi \frac{dz}{z} = -i\pi \ .$$

I kompleks analyse betragter man stier φ som er stykkevis C^1 for at kunne definere kurveintegralet $\mathrm{int}_\varphi f(z)dz$. Man kan vise, at hvis f er holomorf i et område G, og hvis φ, ψ er homotope stykkevis C^1-stier i G, så er

$$\mathrm{int}_\varphi f(z)dz = \mathrm{int}_\psi f(z)dz \ .$$

Under diskussionen af kurvesammenhæng har vi kort berørt sammensætning af stier ved fortsættelse. Vi vil nu gøre det mere systematisk.

Definition 1.6. Hvis f er en sti i M fra x_0 til x_1 og g er en sti i M fra x_1 til x_2, så betegner $h = f \star g$ den sammensatte sti i M fra x_0 til x_2 givet ved ligningen

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{for} \quad s \in [0, \frac{1}{2}]\,, \\ g(2s-1) & \text{for} \quad s \in [\frac{1}{2}, 1]\,. \end{cases}$$

Funktionen h er veldefineret ($f(1) = g(0) = x_1$) og kontinuert ifølge Tuborg-lemmaet. (NB! Sammensætning af stier har intet med foldning at gøre selv om der bruges samme symbol.)

Vi vil dernæst vise, at sammensætning af stier *harmonerer* med ækvivalensrelationen $\simeq_s$, dvs.

$$\left.\begin{matrix} f \simeq_s f' \text{ fra } x_0 \text{ til } x_1 \\ g \simeq_s g' \text{ fra } x_1 \text{ til } x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \star g \simeq_s f' \star g' \ \text{ fra } \ x_0 \ \text{ til } \ x_2\,.$$

Hvis F er en sti-homotopi fra f til f', og G er en sti-homotopi fra g til g', så er

$$H(s,t) = F(\cdot,t) \star G(\cdot,t)(s) = \begin{cases} F(2s,t) & \text{for} \quad s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,t) & \text{for} \quad s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \ t \in I$$

en sti-homotopi fra $f \star g$ til $f' \star g'$ ifølge Tuborg-lemmaet.

Hvis ækvivalensklassen ved $\simeq_s$ indeholdende f betegnes $[f]$, er det altså muligt at sammensætte ækvivalensklasserne ved følgende definition:

$$[f] \star [g] = [f \star g]\,.$$

Vi samler de vigtigste egenskaber ved operationen $\star$.

Sætning 1.7. *Operationen $\star$ på sti-homotopiklasserne har følgende egenskaber:*

(i) *(Associativitet). Hvis $[f] \star ([g] \star [h])$ er defineret, så er også $([f] \star [g]) \star [h]$ defineret, og de er ens.*

(ii) *(Højre og venstre neutralt element). For $x \in M$ betegner $e_x : I \to M$ den konstante sti $e_x(s) = x$. Så gælder for en vilkårlig sti f fra x_0 til x_1, at*

$$[e_{x_0}] \star [f] = [f] \star [e_{x_1}] = [f]\,.$$

(iii) *(Inverst element). Hvis f er en sti fra x_0 til x_1 betegner $\overline{f}$ den modsatte sti $\overline{f}(s) = f(1-s)$, som går fra x_1 til x_0, og der gælder*

$$[f] \star [\overline{f}] = [e_{x_0}]\,,\ [\overline{f}] \star [f] = [e_{x_1}]\,.$$

Bevis. (i): Vi ser, at

$$f\star(g\star h)(s) = \begin{cases} f(2s)\,, & s\in[0,\frac{1}{2}] \\ g(4s-2)\,, & s\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}] \\ h(4s-3)\,, & s\in[\frac{3}{4},1] \end{cases}; \quad (f\star g)\star h(s) = \begin{cases} f(4s)\,, & s\in[0,\frac{1}{4}] \\ g(4s-1)\,, & s\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \\ h(2s-1)\,, & s\in[\frac{1}{2},1]\,, \end{cases}$$

og begge stier består af gennemløb af f, g, h efter hinanden blot med forskelligt tempo i de 3 afsnit.

For at definere homotopien inddeles enhedskvadratet i 3 firkanter ved rette linier ℓ_1 og ℓ_2, der forbinder de tidspunkter, svarende til $t = 0$ og $t = 1$, hvor der skiftes "bane" fra f til g og fra g til h, se fig. 2.

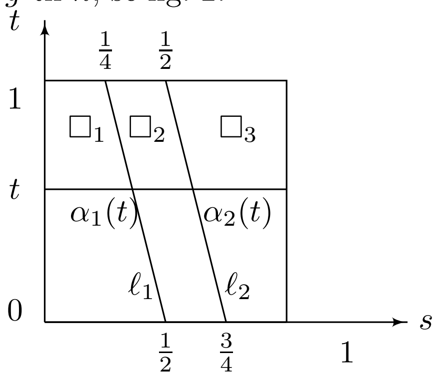


Fig. 2

For at definere $F(s,t)$ for $t\in]0,1[$ udregnes skæringspunkterne $(\alpha_1(t),t)$ og $(\alpha_2(t),t)$ mellem den vandrette linie med ordinat t og ℓ_1 og ℓ_2. Idet ligningerne for ℓ_1 og ℓ_2 er nemme at opstille, finder man

$$\alpha_1(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}t\ ,\ \alpha_2(t) = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}t\ .$$

Når s gennemløber de 3 intervaller $I_1(t) = [0,\alpha_1(t)]$, $I_2(t) = [\alpha_1(t),\alpha_2(t)]$, $I_3(t) = [\alpha_2(t),1]$, skal man gennemløbe f, g, h. Man skal altså udregne de 3 bijektive affine funktioner $\beta_i : I_i(t) \to [0,1]$, og sammensætte med f, g, h. Man finder

$$F(s,t) = \begin{cases} f\left(\frac{s}{\alpha_1(t)}\right)\,, & s\in I_1(t) \\ g\left(\frac{s-\alpha_1(t)}{\alpha_2(t)-\alpha_1(t)}\right)\,, & s\in I_2(t) \\ h\left(\frac{s-\alpha_2(t)}{1-\alpha_2(t)}\right)\,, & s\in I_3(t)\ . \end{cases}$$

At F er kontinuert følger af Tuborg-lemmaet, da F er sammenføjet af kontinuerte funktioner på de 3 firkanter $\square_1, \square_2, \square_3$.

(ii): Vi viser, at $f \simeq_s f \star e_{x_1}$. Idet

$$f \star e_{x_1}(s) = \begin{cases} f(2s) \ , & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ x_1 \ , & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

inddeles enhedskvadratet i 2 dele D_1, D_2 ved linien ℓ, der forbinder $(1,0)$ med $(\frac{1}{2}, 1)$, se fig. 3.

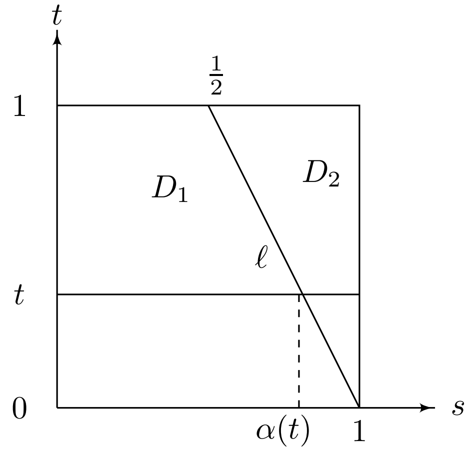


Fig. 3

Den vandrette linie med ordinat t skærer ℓ i $(\alpha(t), t)$, hvor $\alpha(t) = 1 - \frac{1}{2}t$. Man skal dernæst beregne de bijektive affine funktioner $\gamma_1 : [0, \alpha(t)] \to [0,1]$, $\gamma_2 : [\alpha(t), 1] \to [0,1]$, og sammensætte med f og e_{x_1} for at få den ønskede homotopi G, som bliver

$$G(s,t) = \begin{cases} f\left(\frac{s}{\alpha(t)}\right) \ , & s \in [0, \alpha(t)] \\ x_1 \ , & s \in [\alpha(t), 1] \ . \end{cases}$$

At G er kontinuert følger af Tuborg-lemmaet, da G er sammenføjet af to kontinuerte funktioner på D_1 og D_2.

Beviset for at $e_{x_0} \star f \simeq_s f$ er analogt.

(iii): Vi viser, at $e_{x_0} \simeq_s f \star \overline{f}$.

Stien $f \star \overline{f}$ går langs f fra x_0 til x_1 og tilbage igen. For at lave homotopien går vi fra x_0 et stykke langs f (indtil punktet $f(t)$), og tilbage til x_0. Vi sætter altså

$$H(s,t) = \begin{cases} f(2ts) \ , & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2t(1-s)) \ , & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} , t \in I \ ,$$

som ses at være en sti-homotopi med de ønskede egenskaber.

Anvendes ovenstående på stien $\overline{f}$ med begyndelsespunkt x_1 fås $e_{x_1} \simeq_s \overline{f} \star f$, idet $\overline{\overline{f}} = f$. $\square$

Opgaver til §1

1.1. Vis, at hvis $f, f' : X \to M$ er homotope, og hvis $g, g' : M \to N$ er homotope, så er $g \circ f$, $g' \circ f' : X \to N$ homotope. Bemærk specielt, at $g \circ f$, $g \circ f'$ er homotope når $g : M \to N$ er kontinuert, og $g \circ f$, $g' \circ f$ er homotope når $f : X \to M$ er kontinuert.

1.2. Lad $f_i, f_i' : M_i \to N_i$, $i \in I$ være en familie af par af homotope kontinuerte afbildninger. Vis, at produkt-afbildningerne (jfr. opg. II.4.8) $\prod f_i$, $\prod f_i' : \prod M_i \to \prod N_i$ er homotope.

1.3. (a) Vis, at for et vilkårligt rum X er $[X, I]$ en singleton.

(b) Vis, at hvis X er kurvesammenhængende, så er $[I, X]$ en singleton.

Vink. Vis først, at en vilkårlig kontinuert afbildning $f : I \to X$ er homotop med den konstante afbildning $t \mapsto f(0)$.

1.4. Et rum X kaldes *kontraktibelt* (sammentrækkeligt), hvis identiteten $I_X : X \to X$ er homotop med en konstant afbildning.

(a) Vis, at I og $\mathbb{R}^k$ er kontraktible.

(b) En delmængde K i et vektorrum kaldes *stjerneformet*, hvis der findes $a \in K$, så liniestykket fra a til x tilhører K for hvert $x \in K$, i.e.

$$\forall x \in K \;\; \forall t \in I \;\; (tx + (1-t)a \in K)\ .$$

Vis, at en stjerneformet delmængde af et normeret rum er et kontraktibelt rum.

(c) Vis, at et kontraktibelt rum er kurvesammenhængende.

1.5. (a) Vis, at hvis Y er kontraktibelt, så er $[X, Y]$ en singleton for ethvert rum X.

(b) Vis, at hvis X er kontraktibelt, og Y er kurvesammenhængende, så er $[X, Y]$ en singleton.

1.6. Lad $f, g : X \to M$ være kontinuerte afbildninger og antag, at $A \subseteq X$ er en delmængde så $f(x) = g(x)$ for alle $x \in A$. Man kalder f, g homotope relativt til A, i symboler $f \simeq g \operatorname{rel} A$, hvis der findes en homotopi F fra f til g med egenskaben $F(x,t) = f(x) = g(x)$ for alle $x \in A$, $t \in [0,1]$. Vis, at relationen $f \simeq g \operatorname{rel} A$ er en ækvivalensrelation. Vis, at relationerne $\simeq$ og $\simeq_s$ er specialtilfælde af denne relation.

1.7. En kontinuert afbildning $f : X \to Y$ kaldes en *homotopiækvivalens*, hvis der findes en kontinuert afbildning $g : Y \to X$, så $g \circ f : X \to X$ er homotop med I_X og $f \circ g : Y \to Y$ er homotop med I_Y.

Rummet X kaldes homotopiækvivalent med Y, hvis der findes en homotopiækvivalens $f : X \to Y$. Vis, at homotopiækvivalens er en ækvivalensrelation i klassen af topologiske rum.

Vis, at homeomorfe rum er homotopiækvivalente.

Vis, at et kontraktibelt rum er homotopiækvivalent med et rum bestående af ét punkt.

§2. Fundamentalgruppen.

Hvis vi nøjes med at betragte stier, der alle begynder og ender i samme punkt $x_0 \in M$, kan vi uindskrænket sammensætte dem, og det følger umiddelbart af Sætning 1.7, at de tilhørende sti-homotopiklasser udgør en gruppe, som vi nu skal studere nærmere. Vi præciserer først begreberne:

Definition 2.1. Lad M være et rum og lad $x_0 \in M$. Ved en *løkke baseret i* x_0 forstås en sti i M, der begynder og ender i x_0. Mængden af sti-homotopiklasser af løkker baseret i x_0 kaldes *fundamentalgruppen* for M med hensyn til *basispunktet* x_0, og den betegnes $\pi_1(M, x_0)$ $(= \pi_1(M; x_0, x_0))$.

Det neutrale element i $\pi_1(M, x_0)$ er ækvivalensklassen $[e_{x_0}]$ af løkker baseret i x_0, som er sti-homotope med den konstante løkke $e_{x_0}(s) = x_0$. Det inverse element til $[f]$ er klassen $[\overline{f}]$, der indeholder den til f modsatte løkke $\overline{f}(s) = f(1-s)$. Vi betegner det neutrale element med tallet 1.

Gruppen $\pi_1(M, x_0)$ kaldes også den *første homotopigruppe*, idet man i videregående homotopiteori opererer med homotopigrupper $\pi_n(M, x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Eksempel 2.2. Lad M være en konveks delmængde af $\mathbb{R}^n$ eller mere generelt en konveks delmængde af et normeret rum (eller et topologisk vektorrum) med delrumstopologien. For hvert $x_0 \in M$ er $\pi_1(M, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$. Man siger, at gruppen er *triviel* i dette tilfælde, hvor den kun består af det neutrale element. Påstanden følger af at enhver løkke f i M baseret i x_0 er sti-homotop med e_{x_0} via *den retliniede sti-homotopi*

$$F(s,t) = (1-t)f(s) + te_{x_0}(s) = (1-t)f(s) + tx_0 \ , \quad (s,t) \in I^2 \ .$$

Man kan bevise, at enhver gruppe kan optræde som $\pi_1(M, x_0)$ for passende rum M, men det ligger udenfor rammerne af dette kursus. Vi vil senere vise, at $(\mathbb{Z}, +)$ er fundamentalgruppe for en cirkel uafhængigt af basispunkt. Intuitivt svarer det til, at enhver løkke er sti-homotop med en løkke, der går n gange rundt, idet fortegnet for $n \in \mathbb{Z}$ sættes i forhold til en på forhånd valgt omløbsretning.

Vi vil kort se på, hvordan fundamentalgruppen afhænger af basispunktet.

Sætning 2.3. *Til en vilkårlig sti* α *i* M *fra* x_0 *til* x_1 *induceres en afbildning* $\widehat{\alpha} : \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(M, x_1)$ *ved fastsættelsen*

$$\widehat{\alpha}([f]) = [\overline{\alpha}] \star [f] \star [\alpha] \ , \quad [f] \in \pi_1(M, x_0) \ .$$

Afbildningen $\widehat{\alpha}$ er en gruppeisomorfi. Specielt vil enhver løkke α i x_0 inducere en automorfi af $\pi_1(M, x_0)$ – nemlig konjugering med $[\alpha]$.

Bevis. Hvis f betegner en løkke baseret i x_0, og α er en sti fra x_0 til x_1, så er $(\overline{\alpha} \star f) \star \alpha$ en løkke baseret i x_1, se fig. 4.

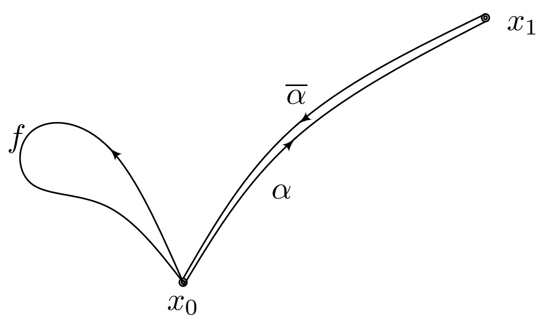


Fig. 4

Dermed er $[\overline{\alpha}] \star [f] \star [\alpha]$ et element i $\pi_1(M, x_1)$ – husk at den associative lov gælder for klasserne, så paranteser er overflødige. At $\widehat{\alpha}$ er en homomorfi ses således, idet f og g er løkker baseret i x_0:

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}([f]) \star \widehat{\alpha}([g]) &= ([\overline{\alpha}] \star [f] \star [\alpha]) \star ([\overline{\alpha}] \star [g] \star [\alpha]) \\ &= [\overline{\alpha}] \star [f] \star ([\alpha] \star [\overline{\alpha}]) \star [g] \star [\alpha] \\ &= [\overline{\alpha}] \star ([f] \star [g]) \star [\alpha] = \widehat{\alpha}([f] \star [g]) \,.\end{aligned}$$

Her er benyttet, at $[\alpha] \star [\overline{\alpha}] = [e_{x_0}]$ og $[f] \star [e_{x_0}] = [f]$ ifølge Sætning 1.7.

Den modsatte sti $\overline{\alpha}$ fra x_1 til x_0 inducerer på tilsvarende måde en gruppehomomorfi $\widehat{\overline{\alpha}} : \pi_1(M, x_1) \to \pi_1(M, x_0)$, som er den inverse til $\widehat{\alpha}$ idet

$$\widehat{\overline{\alpha}} \circ \widehat{\alpha}([f]) = [\overline{\overline{\alpha}}] \star ([\overline{\alpha}] \star [f] \star [\alpha]) \star [\overline{\alpha}] = [f],$$

og tilsvarende er $\widehat{\alpha} \circ \widehat{\overline{\alpha}}$ den identiske afbildning af $\pi_1(M, x_1)$ på sig selv. $\square$

Korollar 2.4. *For et kurvesammenhængende rum M er alle grupperne $\pi_1(M, x_0)$, $x_0 \in M$ isomorfe, og man kan tale om fundamentalgruppen $\pi_1(M)$ for M.*

Bemærkning 2.5. Lad M være et topologisk rum og lad C være kurvekomponenten, der indeholder $x_0 \in M$, jfr. §8.3 i kapitel 2. Enhver løkke i M baseret i x_0 må nødvendigvis forløbe helt i C, og derfor ser man let, at $\pi_1(C, x_0) = \pi_1(M, x_0)$.

Fundamentalgruppen i et punkt x_0 giver således kun information om kurvekomponenten indeholdende punktet. Derfor er det naturligt kun at betragte kurvesammenhængende rum.

For et kurvesammenhængende rum M og x_0, $x_1 \in M$ er $\pi_1(M, x_0)$ og $\pi_1(M, x_1)$ isomorfe, idet ethvert valg af sti α fra x_0 til x_1 inducerer en isomorfi $\widehat{\alpha}$ af $\pi_1(M, x_0)$ på $\pi_1(M, x_1)$. Kan det tænkes, at to forskellige stier α_1, α_2 fra x_0 til x_1 giver forskellige isomorfier? Ja, men det kan kun ske hvis fundamentalgruppen er ikke-kommutativ, jfr. opg. 2.2.

Definition 2.6. Et kurvesammenhængende rum M kaldes *enkeltsammenhængende*, hvis gruppen $\pi_1(M, x_0)$ er triviel for et og dermed for alle $x_0 \in M$.

I et enkeltsammenhængende rum kan enhver løkke trækkes sammen til basispunktet. Begrebet er velkendt for områder i den komplekse plan, hvor enkeltsammenhæng er en forudsætning i Cauchys integralsætning. For områder i $\mathbb{C}$ er enkeltsammenhæng intuitivt det samme som et *område uden huller*, men dette gælder ikke i rum af højere dimension. F.eks. er $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ enkeltsammenhængende, jfr. opg. 2.4, idet der er “mere plads” i 3 dimensioner end i 2.

Vi vil nu vise, at fundamentalgruppen er en *topologisk invariant*, altså at homeomorfe rum har samme fundamentalgruppe. Udgangspunktet er, at en kontinuert afbildning $h : M \to N$ inducerer en *gruppehomomorfi* $\pi_1(M, x) \to \pi_1(N, h(x))$ for hvert $x \in M$. Denne afbildning betegnes $h_{\star,x}$, og er defineret ved

$$h_{\star,x}([f]) = [h \circ f] \ , \quad [f] \in \pi_1(M, x) \ .$$

Betegner f en løkke i M baseret i $x \in M$, så er $h \circ f$ en løkke i N baseret i $y = h(x)$, og for at afbildningen $h_{\star,x}$ er veldefineret, skal det eftervises, at der gælder

$$f \simeq_s f' \Rightarrow h \circ f \simeq_s h \circ f'$$

for vilkårlige løkker f, f' baseret i x. Dette er let, for hvis F er en sti-homotopi fra f til f', så er $h \circ F$ en sti-homotopi fra $h \circ f$ til $h \circ f'$.

Sætning 2.7. *For enhver kontinuert afbildning $h : M \to N$ og hvert $x \in M$ er $h_{\star,x} : \pi_1(M, x) \to \pi_1(N, h(x))$ en gruppehomomorfi. Hvis yderligere $k : N \to P$ er kontinuert gælder*

(1) $$(k \circ h)_{\star,x} = k_{\star,h(x)} \circ h_{\star,x} \ .$$

Bevis. For at vise, at $h_{\star,x}$ er en gruppehomomorfi betragtes to løkker f, g i M baseret i x, og man har da

$$f \star g(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{for} \quad s \in [0, \frac{1}{2}]\ , \\ g(2s-1) & \text{for} \quad s \in [\frac{1}{2}, 1]\ , \end{cases}$$

og derfor

$$h(f \star g(s)) = \begin{cases} h(f(2s)) & \text{for} \quad s \in [0, \frac{1}{2}]\ , \\ h(g(2s-1)) & \text{for} \quad s \in [\frac{1}{2}, 1]\ , \end{cases}$$

men dette udtryk er lig med $(h \circ f) \star (h \circ g)(s)$, og altså gælder

$$[h \circ (f \star g)] = [(h \circ f) \star (h \circ g)]\ .$$

Udnyttes definitionen på gruppekompositionen i fundamentalgruppen fås

$$\begin{aligned} h_{\star,x}([f] \star [g]) = h_{\star,x}([f \star g]) &= [h \circ (f \star g)] = [(h \circ f) \star (h \circ g)] = [h \circ f] \star [h \circ g] \\ &= h_{\star,x}([f]) \star h_{\star,x}([g])\ . \end{aligned}$$

Den anden egenskab følger således:

$$\begin{aligned} (k \circ h)_{\star,x}([f]) &= [(k \circ h) \circ f] = [k \circ (h \circ f)] = k_{\star,h(x)}([h \circ f]) \\ &= k_{\star,h(x)}(h_{\star,x}([f]))\ . \qquad \square \end{aligned}$$

Bemærkning 2.8. Man udelader ofte basispunktet i notationen $h_{\star,x}$ og skriver $h_\star$. Derved kan (1) i Sætning 2.7 skrives $(k \circ h)_\star = k_\star \circ h_\star$.

Det er en god ide at sammenligne ovenstående med egenskaber ved differentialet af en afbildning $h : M \to N$, hvor M, N er åbne mængder i euklidiske rum, f.eks. $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$. For hvert $x \in M$ er differentialet i x, dh_x en lineær afbildning af $\mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}^n$ (hvis matrix er Jacobi-matricen). Er $k : N \to P$ også differentiabel og $P \subseteq \mathbb{R}^p$ gælder *kædereglen*

$$d(k \circ h)_x = dk_{h(x)} \circ dh_x\ .$$

Differentialet dh kan opfattes som en familie af lineære afbildninger $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ indiceret af punkterne i M. På samme måde kan $h_\star$ opfattes som en familie af gruppehomomorfier indiceret ved punkterne i M. Definitionsmængden $\pi_1(M, x)$ varierer med x. Analogien med differentiable afbildninger bliver mere fuldkommen, når man tænker på $\mathbb{R}^m$ som tangentrum til den åbne mængde $M \subseteq \mathbb{R}^m$. I hvert punkt $x \in M$ har man et tangentrum, som er isomorft med $\mathbb{R}^m$, og i beskrivelsen af differentialet ovenfor har man identificeret dem alle med $\mathbb{R}^m$. I studiet af kurver og flader og mere generelt differentiable mangfoldigheder, har man en tangent (tangentplan, tangentrum) i hvert punkt, og differentialet er en lineær afbildning af tangentrummet i x ind i tangentrummet i billedpunktet $h(x)$.

Sætning 2.9. *Hvis $h : M \to N$ er en homeomorfi så er $h_{\star,x}$ en gruppeisomorfi for hvert $x \in M$.*

Bevis. Hvis $I : M \to M$ er den identiske afbildning, er det oplagt, at $I_{\star,x} : \pi_1(M,x) \to \pi_1(M,x)$ er den identiske afbildning. Sammenholdt med ligning (1) giver dette det ønskede. Af $h \circ h^{-1} = I_N$ og $h^{-1} \circ h = I_M$ følger nemlig

$$h_\star \circ (h^{-1})_\star = (I_N)_\star \ , \quad (h^{-1})_\star \circ h_\star = (I_M)_\star \ ,$$

som viser, at gruppehomomorfien $h_{\star,x}$ har gruppehomomorfien $(h^{-1})_{\star,h(x)}$ som invers. □

Bemærkning 2.10. Sætning 2.9 viser, at kurvesammenhængende homeomorfe rum har samme fundamentalgruppe. En dybere liggende hovedsætning, som vi ikke beviser, siger, at også homotopiækvivalente kurvesammenhængende rum har samme fundamentalgruppe. Jfr. opg. 1.7.

Opgaver til §2

2.1. Lad S være et delrum af et normeret vektorrum (eller mere generelt, et topologisk vektorrum, jfr. 1.4). Vis, at hvis S er stjerneformet med hensyn til $a \in S$ (jfr. opg. 1.4), så er $\pi_1(S, a)$ triviel.

2.2. Lad M være et kurvesammenhængende rum og lad $x_0 \in M$. Vis, at $\pi_1(M, x_0)$ er kommutativ, hvis og kun hvis der for alle $x_1 \in M$ og for vilkårlige stier α, β fra x_0 til x_1 gælder $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$, idet $\widehat{\alpha}$ og $\widehat{\beta}$ er de inducerede isomorfier af $\pi_1(M, x_0)$ på $\pi_1(M, x_1)$.

2.3. Lad M være et kurvesammenhængende rum. Vis, at M er enkeltsammenhængende, hvis og kun hvis der for alle $x_0, x_1 \in M$ og alle stier α, β fra x_0 til x_1 gælder, at α og β er sti-homotope.

2.4. Vis, at $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ er enkeltsammenhængende.
Vink. Udfyld detaljerne i følgende bevisskitse.

(i) $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ er kurvesammenhængende.

(ii) Lad $f : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ være en løkke baseret i $x_0 \neq \underline{0}$. Vis, at der findes $\varepsilon > 0$ så $\|f(t)\| \geq \varepsilon$ for alle $t \in I$. Vis, at der findes $N \in \mathbb{N}$ så der for vilkårlige $s, t \in I$, $|s - t| \leq 1/N$ gælder $\|f(s) - f(t)\| < \varepsilon/3$.

(iii) Vis, at hvis $x_k \in \mathbb{R}^3$ opfylder $\|f(k/N) - x_k\| < \varepsilon/3$, $k = 1, \dots, N-1$, så vil den stykkevis retliniede løkke $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{N-1} \to x_0$ tilhøre $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ og være sti-homotop med f.

(iv) Vælg først x_1 så $\|f(1/N) - x_1\| < \varepsilon/3$, $x_0 \neq x_1$ og så linien bestemt ved x_0 og x_1 ikke indeholder $\underline{0}$. Vælg derefter successivt $x_2, \dots, x_{N-1}$ så planerne udspændt af x_0, x_k, x_{k+1}, $k = 1, 2, \dots, N-2$ ikke indeholder $\underline{0}$. Vis, at den derved bestemte retliniede løkke $x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_{N-1} \to x_0$ er sti-homotop med e_{x_0}.

2.5. Lad $h, h' : X \to Y$ være kontinuerte afbildninger, som antages homotope relativt til en singleton $A = \{x_0\}$, jfr. opg. 1.6, specielt er altså $h(x_0) = h'(x_0)$.
Vis, at $h_{\star,x} = h'_{\star,x}$.

2.6. $\pi_1(X \times Y)$ *er isomorf med* $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$. Vis følgende:

1) For to grupper G_1, G_2 er produktmængden $G_1 \times G_2$ en gruppe ved koordinatvis produkt $(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$.

2) For to topologiske rum X og Y og løkker α i X baseret i $x \in X$, β i Y baseret i $y \in Y$, er $(\alpha \times \beta)(s) = (\alpha(s), \beta(s))$ en løkke i $X \times Y$ baseret i (x, y). Enhver løkke γ i $X \times Y$ baseret i (x, y) har denne form.
3) Afbildningen φ, der til $([\alpha], [\beta]) \in \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ lader svare $[\alpha \times \beta] \in \pi_1(X \times Y, (x, y))$, er veldefineret.
4) $\varphi : \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X \times Y, (x, y))$, er en gruppeisomorfi.

§3. Overlejringsrum.

Vi skal nu introducere det vigtige begreb *overlejring*, som er et uundværligt hjælpemiddel ved beregning af fundamentalgrupper.

Definition 3.1. Lad $p : E \to B$ være en kontinuert surjektiv afbildning mellem topologiske rum. En åben delmængde $U \subseteq B$ kaldes *jævnt overlejret* ved p, hvis den åbne originalmængde $p^{-1}(U)$ kan skrives som foreningsmængde af en familie $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ af disjunkte åbne delmængder af E således, at der for alle $\alpha \in A$ gælder, at restriktionen af p til V_α er en homeomorfi af V_α på U.

Alle mængderne V_α er altså homeomorfe med U og dermed indbyrdes homeomorfe. Man kan forestille sig $p^{-1}(U)$ som en stabel pandekager alle med samme form som U. Hvis U er jævnt overlejret ved $p : E \to B$, så er enhver åben mængde $U' \subseteq U$ også jævnt overlejret ved p.

Definition 3.2. Ved en *overlejring* af et rum B (basisrummet) forstås et par (E, p) af et rum E, *overlejringsrummet*, og en kontinuert surjektiv afbildning $p : E \to B$, *overlejringsafbildningen*, med egenskaben:

Ethvert punkt $b \in B$ har en åben omegn U som er jævnt overlejret ved p.

Ethvert rum B har mange forskellige overlejringer. Produktrummet $E = B \times \{1, \dots, n\}$, hvor $\{1, \dots, n\}$ har den diskrete topologi, er et overlejringsrum under projektionen $p : E \to B$ givet ved $p(b, i) = b$ for $b \in B$, $i = 1, \dots, n$. For hvert $b \in B$ er B en åben omegn af b som er jævnt overlejret ved p, idet $p^{-1}(B) = B \times \{1, \dots, n\}$ består af n disjunkte åbne mængder $B \times \{i\}$, $i = 1, \dots, n$. Mere generelt kan man betragte en vilkårlig mængde I med den diskrete topologi, og sætte $E = B \times I$, $p(b, i) = b$ for $b \in B$ og $i \in I$. Overlejringer af denne form kaldes *trivielle*. De inkluderer den *identiske* overlejring $I : B \to B$.

Vi skal nu give et vigtigt eksempel, hvor både B og E er sammenhængende.

Sætning 3.3. *Ved afbildningen*

$$p(t) = (\cos t, \sin t)\ , \quad t \in \mathbb{R}$$

er $(\mathbb{R}, p)$ *en overlejring af enhedscirklen* $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Bevis. For $U = \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}$ gælder

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left]2\pi n - \frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right[\ ,$$

hvilket viser, at U er jævnt overlejret ved p, idet p's restriktion til intervallet $V_n = \left]2\pi n - \frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right[$ er en homeomorfi på U, se fig. 5.

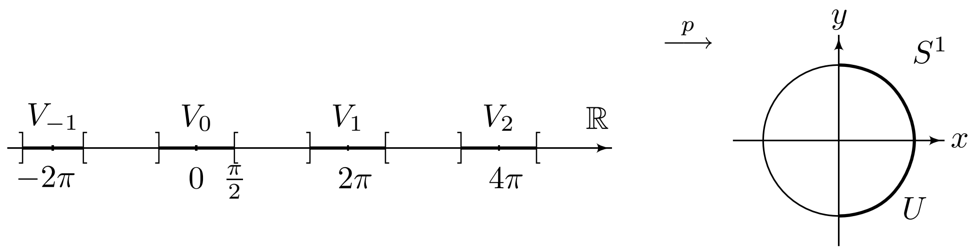


FIG. 5

Ved at betragte den åbne overdækning af S^1 bestående af de fire delmængder af S^1, hvor henholdsvis $x > 0$, $x < 0$, $y > 0$, $y < 0$ ser man, at hvert punkt $b \in S^1$ har en åben omegn som er jævnt overlejret ved p. □

Sætning 3.4. *For en overlejring $p : E \to B$ gælder:*

(i) *For hvert $b \in B$ er fiberen $p^{-1}(b)$ et diskret delrum af E.*
(ii) *Afbildningen p er en lokal homeomorfi, dvs. for hvert $x \in E$ findes en åben omegn af x som afbildes homeomorft på en åben delmængde af B. Specielt er p en åben afbildning.*

Bevis. (i) Lad $b \in B$ og lad U være en åben omegn af b, som er jævnt overlejret ved p. Lad $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$, idet $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ er givet ved definition 3.1. Da fiberen $p^{-1}(b)$ er en delmængde af $p^{-1}(U)$, vil hvert punkt $x \in p^{-1}(b)$ ligge i netop et V_α, men da $p : V_\alpha \to U$ er bijektiv fås

$$p^{-1}(b) \cap V_\alpha = \{x\} ,$$

som viser, at $\{x\}$ er åben relativt til $p^{-1}(b)$.

(ii) For $x \in E$ sættes $b = p(x)$. Med betegnelserne fra (i) fås, at p afbilder den åbne omegn V_α af x homeomorft på U. Heraf ses, at p er åben i x, idet en vilkårlig omegn W af x indeholder den åbne mængde $W^0 \cap V_\alpha$, som afbildes på den åbne omegn $p(W^0 \cap V_\alpha)$ af b. Anvendes Sætning 3.9 i kapitel 2 finder man, at p er åben.
□

Eksempel 3.5. En *ringflade* eller en *2-dimensional torus* D (D for doughnut) kan simpelt beskrives som produktrummet af 2 cirkler C_1 og C_2, se fig. 6. For en vilkårlig ringflade D defineres en overlejring $p : \mathbb{R}^2 \to D$ ved

$$p(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u) ,$$

hvor $R > r > 0$ er radierne i de to cirkler.

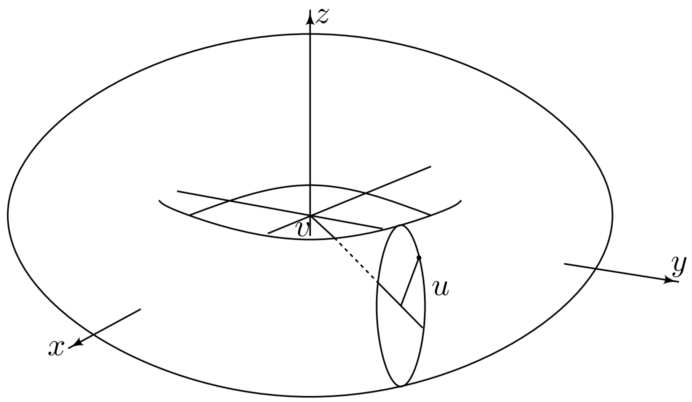


FIG. 6

Resultatet er intuitivt klart. For $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ sættes

$$K(u_0, v_0) = \left]u_0 - \frac{\pi}{2}, u_0 + \frac{\pi}{2}\right[\times \left]v_0 - \frac{\pi}{2}, v_0 + \frac{\pi}{2}\right[$$

og det ses, at p afbilder $K(u_0, v_0)$ homeomorft på billedet $p(K(u_0, v_0))$, idet $p(u, v) = p(u', v')$ hvis og kun hvis $(u - u', v - v') \in (2\pi\mathbb{Z}) \times (2\pi\mathbb{Z})$. Den åbne mængde $p(K(u_0, v_0))$ er jævnt overlejret ved p idet

$$p^{-1}(p(K(u_0, v_0)) = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} K(2\pi n + u_0, 2\pi m + v_0) .$$

Det kan tilføjes, at D *er homeomorft med kvotientrummet* $\mathbb{R}^2/\sim$ *under ækvivalensrelationen* $(u, v) \sim (u', v') \Leftrightarrow p(u, v) = p(u', v')$.

For det første inducerer p en bijektion $\widetilde{p} : \mathbb{R}^2/\sim \to D$ således at $\widetilde{p}([(u, v)]) = p(u, v)$, altså så diagrammet

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & D \\ & \mathbb{R}^2/\sim \arrow[ur, "\widetilde{p}"'] & \end{tikzcd}$$

kommuterer, hvilket blot betyder, at $p = \widetilde{p} \circ \kappa$, hvor $\kappa((u, v)) = [(u, v)]$ er den kanoniske afbildning, jfr. §4.3 i kapitel 2.

Da p er kontinuert, bliver $\widetilde{p}$ kontinuert i kvotienttopologien: Hvis nemlig U er åben i D er $\widetilde{p}^{-1}(U)$ åben i $\mathbb{R}^2 \backslash \sim$, fordi det betyder, at $\kappa^{-1}(\widetilde{p}^{-1}(U))$ skal være åben i $\mathbb{R}^2$, men $\kappa^{-1}(\widetilde{p}^{-1}(U)) = p^{-1}(U)$.

Da p er en åben afbildning, er $\widetilde{p}$ åben: Hvis V er åben i $\mathbb{R}^2/\sim$ bliver $\widetilde{p}(V)$ åben i D. Per definition er nemlig $\kappa^{-1}(V)$ åben i $\mathbb{R}^2$, og dermed er $p(\kappa^{-1}(V))$ åben i D. Til slut bemærkes, at $p(\kappa^{-1}(V)) = \widetilde{p}(V)$.

Dermed er vist, at $\widetilde{p} : \mathbb{R}^2/\sim \to D$ er en homeomorfi. En ringflade er altså et kvotientrum af planen.

Definition 3.6. Lad (E, p) være en overlejring af B, og lad $f : X \to B$ være en kontinuert afbildning. Ved et *løft* af f forstås en kontinuert afbildning $\widetilde{f} : X \to E$ så $p \circ \widetilde{f} = f$, altså så diagrammet kommuterer:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Man siger også, at f kan *løftes* til en afbildning $\widetilde{f} : X \to E$.

Lad os se på nogle eksempler på løft ved overlejringen $p : \mathbb{R} \to S^1$ fra Sætning 3.3.

Stien $f : I \to S^1$ givet ved $f(s) = (\cos(as), \sin(as))$ kan løftes til stien $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$ givet ved $\widetilde{f}(s) = as$ som begynder i 0 og ender i a, men den kan også løftes til stien $\widetilde{f}_k(s) = 2\pi k + as$, der begynder i $2\pi k$ og ender i $2\pi k + a$. Her er $k \in \mathbb{Z}$ vilkårlig.

Der gælder følgende generelle resultat.

Sætning 3.7. *(Løft af stier). Lad (E, p) være en overlejring af B, og lad $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Enhver sti $f : I \to B$ med begyndelsespunkt b_0 kan på en og kun en måde løftes til en sti $\widetilde{f} : I \to E$ med begyndelsespunkt e_0.*

Bevis. Vi vælger en familie $\mathcal{U}$ af åbne mængder $U \subseteq B$ som overdækker B, og som alle er jævnt overlejret ved p. De tilhørende originalmængder $f^{-1}(U)$ udgør en åben overdækning af $[0, 1]$. Ifølge §6.1 i kapitel 2 findes et Lebesgue tal $\varepsilon > 0$ så alle delintervaller af $[0, 1]$ af længde $\leq \varepsilon$ er indeholdt i en af mængderne $f^{-1}(U)$. Vi laver dernæst en inddeling $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ så $s_i - s_{i-1} \leq \varepsilon$ for $i = 1, \ldots, n$. For hvert i gælder altså, at $f([s_{i-1}, s_i])$ tilhører en af mængderne $U \in \mathcal{U}$.

Vi definerer nu et løft skridtvis, idet vi starter med at sætte $\widetilde{f}(0) = e_0$. Idet $f([0, s_1]) \subseteq U$ for passende $U \in \mathcal{U}$, specielt $b_0 = f(0) \in U$, og idet $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$ med betegnelserne fra 3.1, så findes α med $e_0 \in V_\alpha$ og $p|V_\alpha : V_\alpha \to U$ er en homeomorfi. På intervallet $[0, s_1]$ er der således et løft $\widetilde{f}$ af f med $\widetilde{f}(0) = e_0$, nemlig $\widetilde{f}(s) = (p|V_\alpha)^{-1}(f(s))$.

Tilsvarende vil $f([s_1, s_2]) \subseteq U'$ for passende $U' \in \mathcal{U}$ med $p^{-1}(U') = \bigcup V'_\alpha$ og $\widetilde{f}(s_1) \in V'_\alpha$. En måde at fortsætte løftet på, er at sætte $\widetilde{f}(s) = (p|V'_\alpha)^{-1}(f(s))$ for $s \in [s_1, s_2]$. Efter endelig mange skridt har vi defineret et løft $\widetilde{f}$ af f med begyndelsespunkt e_0. Kontinuiteten af $\widetilde{f}$ følger af Tuborg-lemmaet.

Vi skal dernæst indse, at løftet er entydigt bestemt. Tænker vi os to løft $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2$ af f med $\widetilde{f}_1(0) = \widetilde{f}_2(0) = e_0$, så indser vi først, at $\widetilde{f}_1(s) = \widetilde{f}_2(s)$ for $s \in [0, s_1]$, hvor $s_0, \ldots, s_n$ og $\mathcal{U}$ er som i bevisets begyndelse og $e_0 \in V_\alpha$. Da $p(\widetilde{f}_1(s)) = p(\widetilde{f}_2(s)) = f(s) \in U$ for $s \in [0, s_1]$ må $\widetilde{f}_1([0, s_1]), \widetilde{f}_2([0, s_1]) \subseteq p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$, og da $\widetilde{f}_1([0, s_1])$ og $\widetilde{f}_2([0, s_1])$ er sammenhængende, må de begge tilhøre V_α. Da p's restriktion til V_α specielt er injektiv, sluttes $\widetilde{f}_1(s) = \widetilde{f}_2(s)$ for $s \in [0, s_1]$. Efter endelig mange skridt er det bevist, at $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$. $\square$

Bemærkning 3.8. Lad os give et eksempel på en kontinuert afbildning $f : X \to S^1$, som *ikke* har et løft $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$, hvor $p : \mathbb{R} \to S^1$ er overlejringen fra Sætning 3.3.

Vi lader $X = S^1$, og betragter den identiske afbildning $i : S^1 \to S^1$. Et løft $\widetilde{i}$ af i, er det samme som en *kontinuert argumentfunktion* for S^1, og en sådan eksisterer ikke. En kontinuert argumentfunktion $\widetilde{i} : S^1 \to \mathbb{R}$ så $\widetilde{i}(1, 0) = 0$ må nødvendigvis være vinklen $\theta \in [0, \pi]$ på

$$S^1_+ = \{(x, y) \in S^1 \mid y \geq 0\} ,$$

idet S^1_+ er homeomorft med I, så Sætning 3.7 kan anvendes på $i|S^1_+$. Tilsvarende må $\widetilde{i}$ være vinklen $\theta \in [-\pi, 0]$ på

$$S^1_- = \{(x, y) \in S^1 \mid y \leq 0\} ,$$

og derfor skal $\widetilde{i}(-1, 0)$ være både π og $-\pi$, hvilket er en modstrid.

Hvis $f : X \to B$ fra Definition 3.6 kan løftes til $\widetilde{f} : X \to E$ med $f(x) = b$, $\widetilde{f}(x) = e$, $p(e) = b$, giver Sætning 2.7 følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(E, e) \arrow[d, "p_{\star,e}"] \\
\pi_1(X, x) \arrow[ur, "\widetilde{f}_{\star,x}"] \arrow[r, "f_{\star,x}"'] & \pi_1(B, b)
\end{tikzcd}$$

Specielt gælder $f_{\star,x}(\pi_1(X,x)) \subseteq p_{\star,e}(\pi_1(E,e))$.

Denne inklusion er altså en *nødvendig* betingelse for at f kan løftes. I eksemplet ovenfor med $B = S^1$ og $E = \mathbb{R}$, $b = (1,0)$, $e = 0$, er $\pi_1(\mathbb{R},0)$ og $p_{\star,0}(\pi_1(\mathbb{R},0))$ den trivielle gruppe $\{0\}$, medens $\pi_1(S^1,(1,0)) = \mathbb{Z}$ (dette er antydet tidligere, men vises først i Sætning 4.1 nedenfor), og da $i_\star$ er den identiske afbildning, ledes man til inklusionen $\mathbb{Z} \subseteq \{0\}$, hvis der fandtes en kontinuert argumentfunktion.

Man ser, at det er nyttigt at kunne udregne fundamentalgrupper.

Også homotopier kan løftes. Det er indholdet af

Lemma 3.9. *Lad (E,p) være en overlejring af B og lad $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Enhver kontinuert afbildning $F : I \times I \to B$ med $F(0,0) = b_0$ kan på en og kun en måde løftes til en kontinuert afbildning $\widetilde{F} : I \times I \to E$ med $\widetilde{F}(0,0) = e_0$.*

Hvis F er en sti-homotopi så er $\widetilde{F}$ en sti-homotopi.

Bevis. Ideen er den samme som i Sætning 3.7, blot er udførelsen mere teknisk, se fig. 7. Ved hjælp af Sætning 3.7 løftes stierne $F(t,0)$ og $F(0,t)$ til stier med begyndelsespunkt e_0. Vi har altså defineret $\widetilde{F}$ på venstre og nedre rand af $I \times I$. Vi vælger en familie $\mathcal{U}$ af åbne mængder $U \subseteq B$ som overdækker B, og som alle er jævnt overlejret ved p. Da mængderne $F^{-1}(U)$ udgør en åben overdækning af $I \times I$ kan vi inddele $I \times I$ i et kvadratnet $I_{i,j}$, $i,j = 1,\dots,N$, så hvert $F(I_{i,j})$ er indeholdt i et passende $U \in \mathcal{U}$.

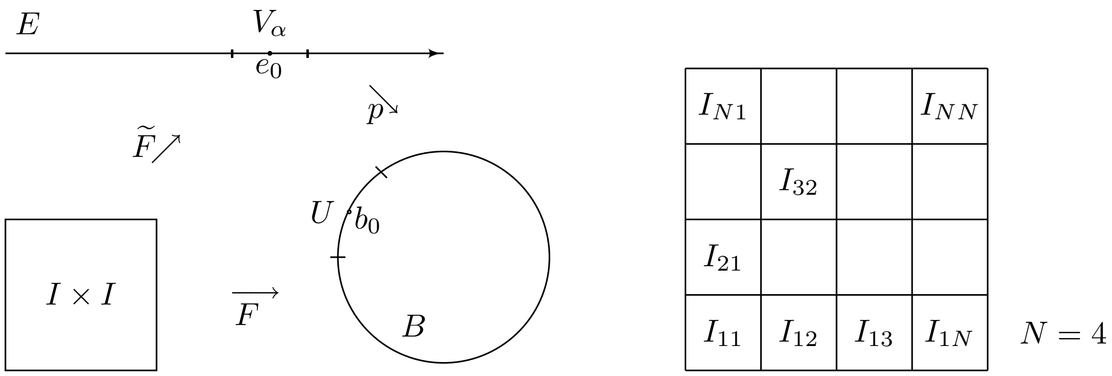


Fig. 7

Vi løfter successivt F til kvadraterne $I_{11},\dots,I_{1,N},I_{2,1},\dots,I_{2,N},\dots,I_{N,N}$, idet vi i hvert skridt allerede kender $\widetilde{F}$ på kvadratets venstre og nedre side. Lad os starte med at løfte F betragtet på kvadratet I_{11}. Idet $F(I_{11}) \subseteq U$ for passende $U \in \mathcal{U}$

og $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$ bestemmes α så $e_0 \in V_\alpha$. Lad C betegne den delmængde af I_{11} der består af venstre og nedre rand. Da C er sammenhængende, og da $\widetilde{F}$ allerede er defineret og kontinuert på venstre og nedre rand af $I \times I$, er $\widetilde{F}(C)$ sammenhængende og indeholder e_0. Altså må $\widetilde{F}(C) \subseteq V_\alpha$, og vi løfter så F til I_{11} ved fastsættelsen $\widetilde{F} = (p|V_\alpha)^{-1} \circ F$. Vi ender med en kontinuert afbildning $\widetilde{F}$ på grund af Tuborg-lemmaet.

Antag dernæst, at F er en sti-homotopi; specielt vil F afbilde $\{0\} \times I$ i det fælles begyndelsespunkt b_0. Derfor vil løftet $\widetilde{F}$ afbilde $\{0\} \times I$ ind i den diskrete fiber $p^{-1}(b_0)$, og så må den sammenhængende mængde $\widetilde{F}(\{0\} \times I)$ bestå af et enkelt punkt $e_0 \in p^{-1}(b_0)$, det fælles begyndelsespunkt for alle stierne $\widetilde{F}(\cdot, t)$, $t \in I$. På tilsvarende måde ses, at $\widetilde{F}(\{1\} \times I)$ består af ét punkt, og dermed er $\widetilde{F}$ en sti-homotopi.

Beviset for at løftet er entydigt ses i analogi med Sætning 3.7. □

Sætning 3.10. *Lad (E, p) være en overlejring af B og antag, at f og g er to stier i B fra b_0 til b_1. Lad $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ og lad $\widetilde{f}$ og $\widetilde{g}$ være de løftede stier i E med begyndelsespunkt e_0.*

Hvis f og g er sti-homotope, så ender $\widetilde{f}$ og $\widetilde{g}$ i samme punkt, og er sti-homotope.

Bevis. Lad $F : I \times I \to B$ være en sti-homotopi fra f til g, dvs. $F(s, 0) = f(s)$, $F(s, 1) = g(s)$ og $F(0, t) = b_0$, $F(1, t) = b_1$. Lad $\widetilde{F} : I \times I \to E$ være sti-homotopien fra Lemma 3.9, som løfter F og som opfylder $\widetilde{F}(0, t) = e_0$, $\widetilde{F}(1, t) = e_1$. Dermed er $\widetilde{F}(s, 0)$ et løft af $f(s)$ begyndende i e_0. Af entydigheden fra Sætning 3.7 ses at $\widetilde{f}(s) = \widetilde{F}(s, 0)$, og tilsvarende er $\widetilde{g}(s) = \widetilde{F}(s, 1)$. Dermed ender både $\widetilde{f}$ og $\widetilde{g}$ i e_1, og $\widetilde{F}$ er en sti-homotopi fra $\widetilde{f}$ til $\widetilde{g}$. □

Korollar 3.11. *For en overlejring $p : E \to B$ med $p(e_0) = b_0$ er $p_{\star, e_0} : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ injektiv.*

Bevis. Da $p_{\star, e_0}$ er en gruppehomomorfi, er det nok at vise, at kernen er triviel. Hvis γ er en løkke i E baseret i e_0 så $p_{\star, e_0}([\gamma]) = 1$ (det neutrale element i $\pi_1(B, b_0)$), så er løkken $p \circ \gamma$ altså sti-homotop med den konstante løkke e_{b_0} i B. De entydigt bestemte løftede stier i E med begyndelsespunkt e_0 er henholdsvis γ og e_{e_0}, og de er homotope løkker ifølge Sætning 3.10, men det viser at $[\gamma] = 1$. □

Vi skal nu vise, hvordan en enkeltsammenhængende overlejring bestemmer fundamentalgruppen som mængde.

Sætning 3.12. *Lad (E, p) være en enkeltsammenhængende overlejring af B, og lad $p(e_0) = b_0$. Afbildningen $\varphi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$, givet ved $\varphi([\gamma]) = \widetilde{\gamma}(1)$, er en bijektion.*

Bevis. For en løkke γ i B baseret i b_0, betegner $\widetilde{\gamma}$ det entydige løft af γ med begyndelsespunkt e_0. Iføle Sætning 3.10 er $\widetilde{\gamma}(1)$ samme punkt for alle med γ homotope løkker, og dermed er φ veldefineret. Punktet $\widetilde{\gamma}(1)$ tilhører $p^{-1}(b_0)$, da $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ ender i b_0.

Afbildningen φ er surjektiv. Til et vilkårligt punkt $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ findes nemlig en sti α i E fra e_0 til e_1, da E er forudsat enkeltsammenhængende, og dermed specielt kurvesammenhængende. Den projicerede sti $\gamma = p \circ \alpha$ er en løkke baseret i b_0 og $\widetilde{\gamma}(1) = \alpha(1) = e_1$, altså $\varphi([\gamma]) = e_1$.

Afbildningen φ er injektiv. Hvis nemlig γ_1, γ_2 er to løkker i B baseret i b_0 så $\widetilde{\gamma}_1(1) = \widetilde{\gamma}_2(1)$, så er $\widetilde{\gamma}_1 \star \overline{\widetilde{\gamma}}_2$ en løkke i E baseret i e_0. Ifølge forudsætningen er $[\widetilde{\gamma}_1 \star \overline{\widetilde{\gamma}}_2] = 1$, hvoraf $p_{\star,e_0}([\widetilde{\gamma}_1 \star \overline{\widetilde{\gamma}}_2]) = 1$, hvilket viser, at $p \circ (\widetilde{\gamma}_1 \star \overline{\widetilde{\gamma}}_2) = \gamma_1 \star \overline{\gamma}_2$, er homotop med den konstante løkke i b_0. Dette viser, at $[\gamma_1] = [\gamma_2]$. $\square$

Bemærkning 3.13. En enkeltsammenhængende overlejring (E, p) af B kaldes også en *universel overlejring.*

Man kan vise, at hvis B er lokalt kurvesammenhængende, så er E entydig i den forstand, at universelle overlejringer er homeomorfe. En universel overlejring eksisterer ikke altid, men f.eks. for differentiable mangfoldigheder.

Opgaver til §3

3.1. Vis, at hvis (E_1, p_1) er en overlejring af B_1 og (E_2, p_2) en overlejring af B_2, så er $(E_1 \times E_2, p_1 \times p_2)$ en overlejring af $B_1 \times B_2$, idet $(p_1 \times p_2)(e_1, e_2) = (p_1(e_1), p_2(e_2))$.

3.2. Lad $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ være enhedscirklen i den komplekse plan. Vis, at afbildningen $p : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ givet ved $p(z) = z^k$, hvor $k \in \mathbb{N}$, definerer en overlejring af $\mathbb{T}$. Vis også at $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, p)$ er en overlejring af $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Gælder det også for $\mathbb{C}$?

3.3. Lad (E, p) være en overlejring af et sammenhængende rum. Vis, at hvis fiberen $p^{-1}(b_0)$ har k elementer for et $b_0 \in B$, så har alle fibre $p^{-1}(b)$ også k elementer.

3.4. Betragt $p :]0, \infty[\to S^1$ givet ved $p(s) = (\cos s, \sin s)$. Hvorfor er $(]0, \infty[, p)$ ikke en overlejring af S^1 ?

3.5. Udnyt overlejringen fra opg. 3.2 med $k = 2$ til at vise, at løkkerne $f(s) = e^{2\pi i s}$, $g(s) = e^{4\pi i s}$, $s \in I$ baseret i $z = 1$ ikke er sti-homotope. Prøv at udvide resultatet til at løkkerne $e^{2\pi i n s}$, $e^{2\pi i m s}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$ ikke er sti-homotope og slut, at $\pi_1(\mathbb{T}, 1)$ er en uendelig gruppe.

3.6. Betragt overlejringen $p : \mathbb{R}^2 \to D$ fra eksempel 3.5. Løft stierne $p(au, 0)$ og $p(0, bv)$ til stier i $\mathbb{R}^2$ med begyndelsespunkt $(0, 0)$ og slut, at løkkerne $p(2\pi u, 0)$, $p(0, 2\pi v)$ ikke er sti-homotope.

3.7. Lad $p : E \to B$ være en overlejring så $p^{-1}(b)$ er endelig for alle $b \in B$. Vis, at hvis $q : F \to E$ er en overlejring, så er $p \circ q : F \to B$ en overlejring.

(Man kan vise, at sammensætningen af to overlejringer ikke behøver at være en overlejring).

3.8. Lad $p : E \to B$ med $p(e_0) = b_0$ være en overlejring og antag, at E er kurvesammenhængende.

(i) Vis, at afbildningen $\varphi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ er veldefineret ved

$$\varphi([\gamma]) = \widetilde{\gamma}(1) ,$$

hvor $\widetilde{\gamma}$ er det entydige løft af løkken γ baseret i b_0, så $\widetilde{\gamma}(0) = e_0$.

(ii) Vis, at φ er surjektiv.

(iii) Vis, at $\varphi([\alpha]) = \varphi([\beta])$, hvis og kun hvis $[\alpha] \star [\overline{\beta}] \in p_{\star,e_0}(\pi_1(E, e_0))$.

(iv) Sæt $G = \pi_1(B, b_0)$ og $H = p_{\star,e_0}(\pi_1(E, e_0))$, som er en undergruppe af G. Mængden af højre sideklasser $\{Hg \mid g \in G\}$ betegnes som sædvanlig G/H. Vis, at φ inducerer en bijektion $\widetilde{\varphi} : G/H \to p^{-1}(b_0)$, så diagrammet kommuterer

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & p^{-1}(b_0) \\ & G/H \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

idet κ er afbildningen $g \mapsto Hg$.

3.9. Vis, at Sætning 3.7 kan generaliseres på følgende måde: Lad (E, p) være en overlejring af B og antag, at $p(e_0) = b_0$. Lad X være lokalt kurvesammenhængende og enkeltsammenhængende og antag, at $f : X \to B$ er en kontinuert afbildning med $f(x_0) = b_0$. Vis, at f kan løftes på en og kun en måde til en kontinuert afbildning $\widetilde{f} : X \to E$ så $\widetilde{f}(x_0) = e_0$.

Vink. (a) Entydigheden: For to løft $\widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}$ er $\{x \in X \mid \widetilde{f_1}(x) = \widetilde{f_2}(x)\}$ både åben og afsluttet.

(b) Eksistensen: Til $x \in X$ vælges en sti α i X fra x_0 til x. Løft stien $f \circ \alpha$ til en sti med begyndelsespunkt e_0 og endepunkt e og vis, at $\widetilde{f}(x) = e$ er et veldefineret løft af f.

3.10. Lad (E, p) være en enkeltsammenhængende overlejring af B, som antages lokalt kurvesammenhængende.

(i) Vis, at E er lokalt kurvesammenhængende.

(ii) Lad (E', p') være en kurvesammenhængende overlejring af B. Vis, at der findes en overlejring $q : E \to E'$ så $p = p' \circ q$.

Vink. Opg. 3.9. Vi har altså: En enkeltsammenhængende overlejring af B overlejrer enhver kurvesammenhængende overlejring, og kaldes derfor en *universel overlejring.*

(iii) Antag, at (E, p) og (E', p') er enkeltsammenhængende overlejringer af B. Så findes en homeomorfi $h : E \to E'$ så $p' \circ h = p$. (Dette viser, at en universel overlejring er entydig på nær homeomorfi).

§4. Nogle fundamentalgrupper.

Vi bestemmer først fundamentalgruppen for cirklen S^1. Derefter vil vi antyde forskellige fundamentalgrupper uden grundige beviser, da det vil være for tidskrævende.

Sætning 4.1. *Fundamentalgruppen for S^1 er isomorf med $(\mathbb{Z}, +)$.*

Bevis. Vi betragter afbildningen $p : \mathbb{R} \to S^1$ givet ved $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Da $t \mapsto 2\pi t$ er en homeomorfi af $\mathbb{R}$, er $(\mathbb{R}, p)$ en overlejring, jfr. Sætning 3.3. Vi sætter $b_0 = (1, 0)$, $e_0 = 0$, og vil vise, at afbildningen $\varphi : \pi_1(S^1, b_0) \to p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$ fra Sætning 3.12, er en isomorfi. Vi ved allerede, at den er bijektiv, og for at vise homomorfiegenskaben betragtes to løkker α, β i S^1 baseret i b_0. Vi antager, at $\varphi([\alpha]) = \widetilde{\alpha}(1) = n$, $\varphi([\beta]) = \widetilde{\beta}(1) = m$, og definerer

$$\gamma(s) = \begin{cases} \widetilde{\alpha}(2s) & \text{for} \quad s \in [0, \frac{1}{2}] \ , \\ n + \widetilde{\beta}(2s - 1) & \text{for} \quad s \in [\frac{1}{2}, 1] \ . \end{cases}$$

Det er klart, at γ er en sti i $\mathbb{R}$ fra 0 til $n + m$. Den projiceres ved p i følgende løkke i S^1 baseret i b_0:

$$p(\gamma(s)) = \begin{cases} p(\widetilde{\alpha}(2s)) = \alpha(2s) \quad \text{for} \quad s \in [0, \frac{1}{2}] \\ p(n + \widetilde{\beta}(2s - 1)) = p(\widetilde{\beta}(2s - 1)) = \beta(2s - 1) \quad \text{for} \;\; s \in [\frac{1}{2}, 1] \ , \end{cases}$$

idet vi har brugt, at p er periodisk med alle hele tal som periode, og at $\widetilde{\alpha}$ og $\widetilde{\beta}$ løfter α og β henholdsvis. Vi har altså $p \circ \gamma = \alpha \star \beta$, hvoraf

$$\varphi([\alpha] \star [\beta]) = \varphi([\alpha \star \beta]) = \gamma(1) = n + m = \varphi([\alpha]) + \varphi([\beta]) \ . \qquad \square$$

Eksempel 4.2. En ringflade D, jfr. eks. 3.5, kan opfattes som produkt af 2 cirkler, og er altså homeomorf med $S^1 \times S^1$. Ved hjælp af opg. 2.6 ses, at $\pi_1(D)$ er isomorf med $(\mathbb{Z}^2, +)$.

Eksempel 4.3. Vi vil vise nedenfor, at n-sfæren

$$S^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

har samme fundamentalgruppe som $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Man kan vise, at $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ er enkeltsammenhængende for $n \geq 2$, jfr. opg. 2.4 for $n = 2$, og det dér skitserede bevis, gælder også for $n > 2$. Dermed har man

$$\pi_1(S^n) = \pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \begin{cases} (\mathbb{Z}, +) & \text{for} \quad n = 1 \\ \{1\} & \text{for} \quad n \geq 2 \ . \end{cases}$$

Sætning 4.4. *Inklusionsafbildningen*

$$j : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

inducerer isomorfier $j_{\star,\xi} : \pi_1(S^n, \xi) \to \pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \xi)$ *for* $\xi \in S^n$.

Bevis. Lad $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ være givet ved $r(x) = x/\|x\|$. Da $r \circ j = I_{S^n}$ fås af Sætning 2.7, at $r_\star \circ j_\star = (I_{S^n})_\star$, hvilket viser, at $j_\star$ er injektiv. At $j_\star$ er surjektiv følger af, at en vilkårlig løkke α i $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ baseret i ξ er sti-homotop med løkken $\beta = j \circ r \circ \alpha$, for så er $[\alpha] = [\beta] = j_\star([r \circ \alpha])$. En sti-homotopi F fra α til β kan defineres ved

$$F(s,t) = t\frac{\alpha(s)}{\|\alpha(s)\|} + (1-t)\alpha(s) \ ,$$

idet $F(s,0) = \alpha(s)$, $F(s,1) = \alpha(s)/\|\alpha(s)\| = \beta(s)$, $F(0,t) = F(1,t) = \xi$. Det bemærkes, at $F(s,t) \neq 0$ for alle $s,t \in I$, idet $F(s,t)$ ligger på halvlinien $\{\lambda\alpha(s) \mid \lambda > 0\}$ mellem $\alpha(s)$ og enhedsvektoren $\beta(s)$. □

Eksempel 4.5. *Den frie gruppe med 2 frembringere.* Lad G være en gruppe med neutralt element e og to frembringere a, b. Gruppen G består altså af alle udtryk af formen

$$a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2}\cdots a^{m_p}b^{n_p} \ ,$$

hvor $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$, idet det er underforstået, at hvis $m_1 = 0$, så startes med en potens af b, og hvis $n_p = 0$, så sluttes med en potens af a. Vi tænker os, at udtrykkene er reduceret mest muligt, så a og b optræder skiftevis i potenser $\neq 0$. Det neutrale element e svarer til, at alle $m_i = n_i = 0$. Hvis frembringerne a og b er sådan, at der *ikke* er nogen relationer mellem a og b, dvs. ovenstående udtryk er kun det neutrale element, når alle $m_i = n_i = 0$, så siger vi, at G er en fri gruppe med 2 frembringere.

Vi skal nu antyde et rum, der har denne gruppe som fundamentalgruppe. Lad X være et ottetalsrum, dvs. X er en kurve i planen af form som tallet 8. Via en homeomorfi kan vi tænke på X som bestående af 2 cirkler, der tangerer hinanden udvendigt i x_0. En løkke i X baseret i x_0 kan først gå m_1 gange rundt om den første cirkel, n_1 gange rundt om den anden cirkel, m_2 gange rundt om den første cirkel osv., idet fortegnene for m_1, $n_1, \ldots$ fastlægger omløbsretningerne. Det er nærliggende, at fundamentalgruppen for X er den frie gruppe med 2 frembringere, men det vil føre for vidt at bevise dette.

Eksempel 4.6. *Den projektive plan* $\mathbb{P}^2$. Den projektive plan kan defineres som kvotientrummet af 2-sfæren S^2 ved at identificere antipodale punkter ξ, $-\xi$ på sfæren. Vi har altså $\mathbb{P}^2 = S^2/\sim$, hvor $\xi \sim \eta \Leftrightarrow \eta = \pm\,\xi$. Den kanoniske afbildning $\kappa : S^2 \to \mathbb{P}^2$ er altså $\kappa(\xi) = \{\xi, -\xi\}$, og $\mathbb{P}^2$ er forsynet med finaltopologien, så $U \subseteq \mathbb{P}^2$ er åben, hvis og kun hvis $\kappa^{-1}(U)$ er åben i S^2.

1°. $\kappa : S^2 \to \mathbb{P}^2$ *er en tofoldig overlejring*, (i.e. hver fiber består af 2 punkter).

For hvert punkt $\xi \in S^2$ sættes

$$N(\xi) = \{\eta \in S^2 \mid \xi \cdot \eta > 0\} ,$$

som er "den nordlige halvkugle med nordpol ξ". Mængden $\kappa(N(\xi))$ er åben i $\mathbb{P}^2$, idet

$$\kappa^{-1}(\kappa(N(\xi))) = N(\xi) \cup N(-\xi)$$

og det ses, at $\kappa(N(\xi))$ er jævnt overlejret ved κ.

2°. $\mathbb{P}^2$ *er et kompakt kurvesammenhængende Hausdorff rum.*

De to første egenskaber arves fra S^2, da κ er kontinuert og surjektiv. At $\mathbb{P}^2$ er Hausdorff, ses også let.

3°. *Fundamentalgruppen* $\pi_1(\mathbb{P}^2)$ *er en gruppe med 2 elementer, og dermed isomorf med restklassegruppen* $(\mathbb{Z}_2, +)$.

Dette følger af Sætning 3.12, da $\kappa : S^2 \to \mathbb{P}^2$ er en enkeltsammenhængende overlejring, og fiberen har 2 elementer.

Opgaver til §4

4.1. Et delrum A af X kaldes en *stærk deformationsretrakt* af X, hvis der findes en kontinuert afbildning $H : X \times I \to X$ så

$$H(x,0) = x \;\text{ for }\; x \in X\,, \quad H(x,1) \in A \;\text{ for }\; x \in X$$
$$H(a,t) = a \;\text{ for }\; a \in A\,,\; t \in I\,.$$

Sagt med andre ord skal identiteten I_X på X være homotop relativt til A med en kontinuert udvidelse $r = H(\cdot, 1) : X \to A$ af identiteten på A.

Vis, at under disse betingelser vil inklusionsafbildningen $j : A \to X$ inducere en isomorfi $j_{\star,a} : \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$ for alle $a \in A$. (Sammenligning med Sætning 4.4).

4.2. Vis, at hvis A er en stærk deformationsretrakt af X, og B er en stærk deformationsretrakt af A, så er B en stærk deformationsretrakt af X.

4.3. Vis, at et 8-tals rum er en stærk deformationsretrakt af den dobbelt punkterede plan $\mathbb{R}^2 \setminus \{a,b\}$, hvor $a \neq b \in \mathbb{R}^2$. Brug dette til at vise, at $\pi_1(\mathbb{R} \setminus \{a,b\})$ er en fri gruppe med 2 frembringere.

4.4. Lad L betegne z-aksen i $\mathbb{R}^3$ og sæt $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$. Vis, at $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \{0\}$ er en stærk deformationsretrakt af X og slut, at $\pi_1(X) = (\mathbb{Z}, +)$.

4.5. Find fundamentalgruppen for følgende rum:

(i) En massiv cylinder.
(ii) En cylinderflade.

INDEX