Matematik 3AN
Nøgle

Søren Eilers

Trykt version, fjerde udgave

Søren Eilers, email: eilers@math.ku.dk
Matematik 3AN: Nøgle

Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
ISBN 87-91180-09-0

Indhold

Kapitel A

At bruge dette hæfte

A.1 Vejledning

Materialehæftet her indeholder en opgavesamling og andet materiale, der tjener til supplement af lærebogen [MV]. Bortset fra nogle danske oversættelser af visse af opgaverne fra [MV], som forfatterne har bedt om at få udeladt, findes alt materialet i hæftet frit tilgængeligt på kursets hjemmeside

www.math.ku.dk/ma/kurser/mat3an

Oven i købet er et temmelig omfangsrigt baggrundsmateriale til udvalgte opgaver udelukkende tilgængeligt på internet, ligesom oversigter over planlagte aktiviteter og stillede opgaver findes dér. Det betyder at hvis læseren altid er i umiddelbar nærhed af internettet, så er hæftet principielt overflødigt. Imidlertid er det mit gæt, at hæftet vil kunne tjene som en praktisk *nøgle* til 3AN, både når computeren er slukket og når internetversionen bliver for uoverskuelig.

Flere steder i materialesamlingen henvises til supplerende materiale, som primært af pladsårsager (hele dokumentet fylder godt 150 sider) kun findes på internetversionen. Læseren kan her se hvad der findes på nettet inden han eller hun gør sig ulejlighed med at logge på der. Det er muligt at der vil komme mere supplerende materiale på netversionen undervejs i kursusforløbet.

Henvisningerne til internetversionen benytter følgende notation:

- Noter er noter om materialets historie. Jeg har bestræbt mig på at angive de kilder jeg har benyttet, hvis ikke materialet stammer fra [MV] eller er noget jeg selv har udviklet.

- Vink giver tips til løsning af en opgave. Jeg placerer herunder information af en art som jeg ikke ville tøve længe med at sætte på opgaven, hvis den var en eksamensopgave. Man bør således ikke vente så længe efter man er gået i stå i en opgave før man indhenter et vink.

- Strategi er en mere detaljeret slagplan for regning af en opgave, ikke information som jeg ville kunne give på et eksamenssæt. Så selv om strategierne er udarbejdet for at blive brugt, så må læseren være forsigtig med ikke at blive for afhængig af dem.

- Forudsætninger anfører metoder fra andre kurser, som tænkes benyttet ved opgaveregningen. Læseren kan bruge dem som vink, undtagen (som forklaret i afsnit F.4.1) hvis de er af typen "Forudsætninger om riemannintegration", hvor de nærmere modsvarer strategier.

- Besvarelse giver besvarelser af opgaven, udarbejdet af lærer, instruktor eller, i sjældnere tilfælde, af en deltager. Den bølgede linje indikerer at disse først bliver tilgængelige i ugen efter at en opgave bliver stillet.

Det overlades til deltagerne at finde gode arbejdsformer for brug af vink og andet materiale, men som en generel anbefaling skal det nævnes at udbyttet af opgaverne bliver størst, hvis man venter med at indhente vink til man har tænkt over opgaven og identificeret ens problemer med at regne den.

A.2 Tak

Materialet her er blevet til mens jeg har været tilknyttet 3AN i 1997, 1999, 2000, 2001 og 2002. Der er en lang tradition for at stjæle med arme og ben ved udarbejdelsen af sådanne værker, og dette hæfte er ingen undtagelse. Jeg står i dybest taknemmelighedsgæld til mine egne lærere Gert Kjærgård Pedersen og Esben Kehlet, men også til Gerd Grubb, Kjeld Bagger Laursen og Ryszard Nest, som alle har bidraget ved deres udviklingsarbejde ved 3AN eller dets forgængere 3FU og 3MA.

Også Toke Meier Carlsen, Lars Hansen og Rolf Dyre Svegstrup, der som instruktorer i 1999, 2000, 2001 og/eller 2002 udarbejdede en del materiale til kurset, har ydet uvurderlige bidrag ved sammenskrivningen af dette hæfte. Jeg er ligeledes taknemmelig for at Reinhold Meise og Dietmar Vogt har tilladt mig at inkludere danske oversættelser af udvalgte opgaver fra deres lærebog i hæftet her.

Til sidst skal rettes tak til de kursusdeltagere som rapporterede fejl og unøjagtigheder til mig, således at de kunne rettes inden denne udgave blev trykt. Ansvaret for alle de tilbageværende, eller nye, fejl er naturligvis mit.

Søren Eilers, København, 27.12.2002

Kapitel F

Forudsætninger

Dette kapitel indeholder materiale der kan benyttes til at skabe kontakt fra teori i lærebogen til pensum kendt fra de kurser der er forudsætninger for 3AN. Kapitlet er søgt afstemt med en baggrund fra 1999-versionen af 1GA, 2000-versionerne af 1GB og 2AN, samt 2001-versionerne af 2KF og 3GT. Flere af disse kurser er under nogen forandring, så der vil muligvis vise sig ændringsbehov allerede i forårssemestret 2003.

I tabellerne herunder benyttes følgende opdeling af resultater som vi helt eller delvis importerer fra andre kurser:

○	Forudsættes kendt, gennemgås ikke ved forelæsninger
•	Forudsættes kendt, repeteres kort ved forelæsninger
••	Gennemgås ved forelæsninger, men er muligvis bekendt
♣	Definition afviger fra andre kurser

I opgavesamlingen henvises til yderligere materiale af en sådan brobyggende natur med "Forudsætninger". Bortset fra nogle få centrale resultater, der er samlet i dette afsnit, er dette materiale kun tilgængeligt gennem internetversionen.

F.1 Lineær algebra

F.1.1 Oversigt

Den lineære algebra indtager en central rolle i 3AN. Begrebet *vektorrum* forudsættes kendt fra 1GA, og en dybere forståelse af begreber som basis og dimension i det endelige tilfælde er en absolut forudsætning for kurset. Matrixregning, herunder diagonalisering af symmetriske reelle matricer, forudsættes ligeledes bekendt fra 1GA.

Deltagerne forventes at være bekendte med basisbegrebet for uendeligdimensionale vektorrum fra 3GT.

Man bedes bide mærke i notationen $N(A)$ og $R(A)$ på [MV] side 5.

F.1.2 Materiale fra [MV, Kapitel 1]

Bogens første kapitel giver en kort gennemgang af resultater fra den lineære algebra som vi har brug for. Nedenstående forudsættes kendt:

[MV]	Status	Emne	Kendt fra
1	○	Vektorrum, definition	[Mes, 1.1]
1	○	Underrum, definition	[Mes, 1.10]
1	○	Uafhængighed, definition	[Mes, 3.4]
1	•	Basis, definition	[Mes, 3.6], [3GTB, 1.5]
1	•	Dimension, definition	[Mes, 3.7]
1.1	•	Zorns lemma	[3GTB, 1.4.2]
1.2	•	Suppleringssætningen	[3GTB, 1.5.5]
1	○	Lineær afbildning, definition	[Mes, 6.1]

Materialet om kvotient og konveksitet sidst i kapitlet forudsættes ikke kendt.

F.2 Normerede, metriske og topologiske rum

F.2.1 Oversigt

Med 3GT i baghånden er deltageren mere end rigeligt klædt på til den del af 3AN der omhandler topologiske spørgsmål. I den del af [MV] som vi skal beskæftige os med er næsten alle topologiske rum givet ved metrikker eller normer. Vi kan således arbejde med følger i stedet for net undervejs.

Af samme grund skal vi ikke benytte definitionerne af "topologisk rum" og "net" i [MV] noget videre, men det er dog værd at bemærke at de ikke er de samme som i 3GT, som beskrevet herunder.

Man bedes bemærke at en kugle

$$\{x \in M \mid d(a,x) < \varepsilon\},$$

som vi i 2AN ville kalde $K(a,\varepsilon)$, i [MV] kaldes $U_\varepsilon(x)$.

F.2.2 Materiale fra [MV, Kapitel 2]

Det meste af dette materiale skulle være læseren bekendt:

[MV]	Status	Emne	Kendt fra
2	○	Metrisk rum, definition	[2ANB, I.1.1]
2	♣	Topologisk rum, definition	~~[3GTB, 2.1.1]~~
2	○	Omegn, definition	[3GTB, 2.1.5]
2	○	Omegnsbasis, definition	[3GTB, 2.2.1]
2	○	Lukket (afsluttet) mængde, definition	[3GTB, 2.1.11]
2	♣	Net, definition	~~[3GTB, 2.7.1]~~
2.1	○	Kontinuert afbildning ved net	[3GTB, 2.7.16]
2.2	○	Sammensætning af kontinuerte	[3GTB, 2.3.11]
2.3	○	Karakterisering af kontinuitet	[3GTB, 2.3.12, opgave 2.3.7]
2	○	Delrumstopologi, definition	[3GTB, 2.4.1]
2	○	Produktrum, definition	[3GTB, 2.4.5]
2.5	●●	Omvendt trekantsulighed	[2ANB, opgave 2.1.4]

Definitionen af “topologisk rum” afviger fra den der benyttes i 3GT, jf. T.8.1, og svarer i stedet til definitionen af et hausdorffrum. Denne (misbrug af) notation er ret udbredt.

Definitionen af “net” afviger ligeledes fra 3GT, se T.9.1. Dette er dog uden betydning pga Sætning F.2.6.3 herunder.

F.2.3 Materiale fra [MV, Kapitel 3]

Kapitlet indeholder materiale funderet på begrebet fuldstændighed. Det skulle være kendt som følger:

[MV]	Status	Emne	Kendt fra
3	○	Cauchyfølge, definition	[2ANB, 5.1]
3.1	○	Fuldstændighed, definition, bemærkning	[2ANB, 5.2]
3.2	●	Baires sætning	[3GTB, 2.6.30]
3	●●	Kategori, definition	[3GTB, 2.6.29]
3.3	●●	Baires sætning vha kategori	[3GTB, 2.6.29]
3.4	●	Rum af begrænsede følger	[2ANB, 5.7]
3	○	Uniform kontinuitet, definition	[2ANB, 6.19]
3.5	●●	Udvidelsessætning for uniform kontinuitet	[2ANB, 6.21]
3	●●	Fuldstændiggørelse, definition	[2ANB, afsnit 5.3]
3	●●	Åben afbildning, definition	[3GTB, 2.3.6]

[MV, 3.6-3.9] forudsættes ikke kendt.

F.2.4 Materiale fra [MV, Kapitel 4]

Kapitlet indeholder kendte resultater om kompakthed:

[MV]	Status	Emne	Kendt fra
4	◦	Kompakt rum, definition	[3GTB, 2.6.2]
4.1	◦	Bemærkninger om kompakthed	[3GTB, 2.6.6, 2.6.7]
4.2	◦	Hovedsætninger om kompakthed	[3GTB, 2.6.8, 2.6.11]
4.3	◦	Tychonoffs sætning	[3GTB, 2.7.18]
4	◦	Separabel, definition	[3GTB, 2.2.6]
4	◦	Basis for topologien	[3GTB, 2.2.10]
4.7	◦	Om baser for separable metriske rum	[3GTB, Opgave 2.2.3]
4.11	•	Funktionsrum, definition	[2ANB, 5.7]
4	◦	Lokalkompakt, definition	[3GTB, 2.6.13]
4.17	◦	Urysohns lemma	[3GTB, 2.5.10]

Resultaterne om relativ kompakthed og prækompakthed er ikke kendt og tænkes gennemgået, ligesom hovedsætningerne af Arzela-Ascoli og Stone-Weierstrass.

F.2.5 Materiale fra [MV, Kapitel 5]

Materialet i [MV, 5] er kernestof, men dele af det kan være bekendt fra 2AN. Vi starter forfra og repeterer det hele. Bemærk at definitionen af operatornorm afviger fra den der muligvis vil være kendt fra 2AN. Imidlertid ender vi, som vi skal se, med at definere præcis den samme værdi.

[MV]	Status	Emne	Kendt fra
5.1	•	norm & kontinuitet	[2ANB, 4.4]
5.4	•	karakterisering af kontinuitet	[2ANB, 4.6]
5	♣	operatornorm, definition	~~[2ANB, efter 4.4]~~
5	••	$L(E, F)$, definition	[2ANB, 4.7]
5.6	••	$L(E, F)$ som normeret rum	[2ANB, 4.8, I.5.12]
5.14	•	Endelig-dimensionale normerede rum.	[2ANB, 6.15]
5.15	•	Automatisk kontinuitet i endelig dimension	jf. [2ANB, 6.16]

F.2.6 Brobyggende resultater

Uniform konvergens Flere steder i kurset får vi brug for et kriterium der fortæller at grænseværdien af en følge af differentiable funktioner er differentiabel. Et sådant resultat findes i [2ANB, 5.11], der desværre springes over i nyere versioner af 2AN. Den tilsvarende sætning for *rækker*, [2AND, C.3], bliver til gengæld gennemgået.

Faktisk er beviset næsten det samme for de to sætninger, men vi kan også simpelthen udlede [2ANB, 5.11] af [2AND, C.3]:

Sætning F.2.6.1 *Lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af differentiable funktioner på et kompakt interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Hvis*

(i) (f_n) er punktvis konvergent mod f på I

(ii) (f'_n) konvergerer uniformt mod g på I,

så er f differentiabel med $f' = g$.

Bevis: Sæt $h_1 = f_1$ og $h_n = f_n - f_{n-1}$ for $n > 1$. Bemærk at afsnitssummerne for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ netop er f_n, således at rækkens sum er f. Derfor oversættes (i) og (ii) præcis til kravene i [2andD, C.3], og vi får at f er differentiabel med

$$f' = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n'$$

Men afsnitssummerne for rækken til højre er jo

$$\sum_{n=1}^{N} h_n' = f_1' + \sum_{n=2}^{N}(f_n' - f_{n-1}') = f_N',$$

der konvergerer mod g, som ønsket. □

Sætningen gælder hvis blot (f_n) er konvergent i et enkelt punkt, og man kan endda konkludere at f_n konvergerer uniformt; se [2anB, 5.11]. Bemærk også at sætningen gælder for ikke-kompakte I; det følger ved at anvende resultatet fra det kompakte tilfælde på en følge af kompakte intervaller I_n med egenskaben $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Tietze Nedenstående version af Tietzes udvidelsessætning siger at udvidelsen af en begrænset kontinuert funktion kan vælges begrænset, med samme konstant. Dette er nyttigt i opgaver.

Sætning F.2.6.2 *Lad $f\colon F \to \mathbb{K}$ være en kontinuert funktion på en lukket delmængde $F \subseteq X$ af et normalt rum X. Hvis f er begrænset af en konstant, kan f udvides til en kontinuert funktion $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{K}$ begrænset af samme konstant.*

Bevis: Vi tager udgangspunkt i den version af Tietzes udvidelsessætning som er kendt fra [3gtB, 2.5.14]. Antag at $|f| \leq c$.

"$\mathbb{K} = \mathbb{R}$": Udvid f til en kontinuert funktion $g\colon X \to \mathbb{R}$ og sæt $\tilde{f}(t) = \max(-c, \min(c, f(x)))$.

"$\mathbb{K} = \mathbb{C}$": Da $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ er kontinuerte og begrænsede, kan disse udvides til kontinuerte funktioner $g_1, g_2\colon X \to \mathbb{R}$. Sættes $g = g_1 + ig_2$, er g en kontinuert udvidelse af f. Eftersom

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \leq c \\ \frac{c}{x} & \text{ellers} \end{cases}$$

definerer en kontinuert funktion på $[0, \infty[$, er også $\tilde{f} = (h \circ |g|)g$ er kontinuert. For $|g(x)| \leq c$ er $\tilde{f}(x) = g(x)$, og for $|g(x)| > c$ er $\tilde{f}(x) = \frac{c}{|g(x)|}g(x)$. Dette viser dels at $|\tilde{f}| \leq c$, dels at $\tilde{f}$ udvider g. □

Net Ifølge [3GTB, 7.1] er et net en afbildning (x_i) defineret på en mængde I med en opad filtrerende præordning $\preceq$, mens det i [MV] (og i fx [Ped]) yderligere kræves at $\preceq$ skal være antisymmetrisk, dvs. en ordning. At der er en tæt sammenhæng mellem [MV]-net og 3GT-net ses ved følgende argument:

Betragt en præordning $\preceq$ i X. Så definerer

$$x \sim y \iff x \preceq y \wedge y \preceq x$$

en ækvivalensrelation i X, som giver anledning til en klassedeling $X/\sim$ af X. Eftersom der for $x \sim x'$ og $y \sim y'$ gælder

$$x \preceq y \implies x' \preceq y'$$

kan vi definere er relation $\leq$ i $X/\sim$ ved

$$[x] \leq [y] \iff x \preceq y \qquad \text{når } x, y \in X \tag{$*$}$$

Hermed er $\leq$ en ordensrelation i $X/\sim$. Det ses let at $\leq$ er opad, henholdsvis nedad, filtrerende blot $\preceq$ er det.

Sætning F.2.6.3 *Et net i [MV]-forstand er også et net i* 3GT*-forstand. Ethvert* 3GT*-net* $\{x_i \mid i \in I\}$ *har et* 3GT*-delnet* $\{x_{i_j} \mid j \in J\}$ *som er et [MV]-net.*

Bevis: Den første påstand er oplagt, lad os vise den anden.

Lad $\{x_i \mid i \in I\}$ være et 3GT-net. Definér nu som ovenfor en ordning $\leq$ på $J = I/\sim$, og vælg for hver klasse $K \in J$ en repræsentant $\varphi(K) \in K$. Så er $\varphi\colon J \to I$ voksende ifølge definitionen af "$\leq$", og for $i \in I$ gælder $i \sim \varphi([i])$ og dermed også $i \preceq \varphi([i])$. Altså er $\{x_{\varphi(j)} \mid j \in J\}$ et 3GT-delnet af $\{x_i \mid i \in I\}$. Da $\leq$ er en ordning i J, er $\{x_{\varphi(j)} \mid j \in J\}$ et [MV]-net. □

Noter

F.3 Hilbertrum

F.3.1 Oversigt

Hilbertrummene udgør en af de absolut vigtigste klasser af objekter i 3AN. Vi bruger dem forskelligt i løbet af kurset; først som eksempler der tjener til at forstå udviklingen af den gennemgåede teori i den første halvdel af kurset, sidenhen som et univers hvorpå vi skal definere og studere kontinuerte lineære afbildninger.

Overordnet skal der gøres opmærksom på den fundamentale forskel mellem fremstillingerne i [2AND] og i [MV] at man i 2AN kun beskæftiger sig med *separable* hilbertrum, altså med hilbertrum som har en tæt tællelig følge. Der er det særlige ved dem, at de også har en tællelig ortonormalbasis, og materialet er organiseret i [2AND] således, at sætninger såsom projektionssætningen [2AND, 1.15] kun bevises i det separable tilfælde, selv om den gælder ordret for vilkårlige hilbertrum.

Vi er udelukkende interesserede i separable hilbertrum, så vi skal kun overfladisk gennemgå hvordan teorien ser ud generelt. Ved læsning af [MV, 11-12] er man derfor velkommen til overalt at tilføje en betingelse om separabilitet. I opgavesamlingen er alle hilbertrum eksplicit erklæret separable, men hvor separabilitet ikke betyder noget for opgavens sandhedsværdi, er denne betingelse sat i parentes.

F.3.2 Materiale fra [MV, Kapitel 11]

I dette kapitel gennemgås først fundamental teori om hilbertrum. De centrale ideer vil være kendt fra 2AN omtrent frem til [MV, 11.5], men da der benyttes en lidt anden metode i udvikling af teorien får vi brug for at gennemgå alternative beviser for visse kendte resultater:

[MV]	Status	Emne	Kendt fra
11	○	Indre produkt, definition	[2AND, 1.1]
11.1	○	Indre produkt, regneregler	[2AND, 1.6]
11.2	○	Indre produkt, regneregler	[2AND, 1.1]
11.2	○	Hilbertrum, definition	[2AND, 1.8]
11.3	○	Rum med indre produkt, eksempler	[2AND, 1.2]
11.4	••	dist-lemma	
11.4	••	Ortogonalkomplement, definition	[2AND, afsnit 1.2]
11.5	••	Projektionen er den nærmeste vektor	[2AND, bemærkning efter 1.15]
11.5	••	Kommentarer om projektion	[2AND, bemærkning efter 1.15]

Resten af kapitlet indeholder nyt materiale, særligt om afbildninger i $L(H)$ hvor H er et hilbertrum. Dette vil blive gennemgået.

F.3.3 Materiale fra [MV, Kapitel 12]

Her gennemgås teorien for baser af hilbertrum. Disse udvikles i bogen, i modsætning til i 2AN, uden nogen krav om separabilitet. Som nævnt herover er vi ikke interesserede i denne generalisering, og gennemgår derfor stoffet uden at gøre det ekstra arbejde, der skal til for at vise resultaterne i det ikke-separable tilfælde.

[MV]	Status	Emne	Kendt fra
12.3	•	Bessels ulighed	[2AND, 1.5]
12.4	•	Ortonormaludvikling	[2AND, 1.14]
12	•	Ortonormalsystem, definition	[2AND, p. 1.4]
12	•	Ortonormalbasis, definition	[2AND, 1.11]
12.6	•	Ortonormalbasis, eksistens	[2AND, 1.12]
12.7	••	Gram-Schmidt	[Mes, p. 159], [2AND, 1.16]

Et centralt eksempel på en ortonormalbasis i et hilbertrum er de fourierrækker, der studeres in [2ANS].

F.4 Integration

F.4.1 Oversigt

3AN forudsætter ikke 3MI, og de funktionalanalytiske hovedsætninger, vi skal beskæftige os med, inddrager ikke målteori. Det betyder at vi forudsætter fortrolighed med (Riemanns) integration af kontinuerte funktioner, fx fra 1GB og 2AN, men ikke med (Lebesgues) integration af mere generelle funktioner og de dertil hørende hovedsætninger.

Ikke desto mindre er målteoretisk funderede normerede rum blandt de allervigtigste eksempler hvori resultaterne anvendes. Et centralt eksempel er således rummet $L_2[0,1]$, som vi skal definere som en fuldstændiggørelse af et kendt rum, men som bedst beskrives som et rum af mere generelle funktioner — dem der er integrable i en forstand, der forklares nærmere i 3MI. Vi kan således ikke styre helt udenom målteori, men må vælge følgende model: at benytte os af hovedsætningerne uden bevis i teorien, men ikke gå nærmere ind i dem ved eksamen.

I opgavesamlingen samler vi under overskrifterne "Forudsætninger om lebesgueintegration" (kun tilgængeligt gennem internetversionen) eventuel relevant information om lebesgueintegration. De er designede til at give den læser, som ikke har taget 3MI, en indgang til opgaven. De kan forhåbentlig også bruges til at bygge bro til kendt materiale for læseren med 3MI-baggrund.

Skulle lebesgueintegration dukke op ved eksamen vil det være ifølge med assistance af denne type. Men information placeret ved "Forudsætninger om riemannintegration" forudsættes bekendt ved eksamen, og er givet i opgavesamlingen mest for at undgå at deltagere uden 3MI-baggrund lader sig skræmme væk fra en opgave hvori der optræder et integral.

Kapitel O

Opgavesamling

Visse af de følgende opgaver tager direkte udgangspunkt i en opgave fra [MV], og de vil være nummereret tilsvarende. Ved at sammenligne opgavetekster kan læseren tilegne sig viden om den fremherskende danske sprogbrug. Over sådanne opgaver er anført i *kursiv* hvilke redaktionelle ændringer der er foretaget. Opgaver markeret med *Oversat** findes ikke i internetversionen efter anmodning fra Meise & Vogt.

De øvrige opgaver er placeret under det første kapitel, hvor den nødvendige teori for at regne dem er gennemgået. En undtagelse er visse af opgaverne til kapitel 11, som kan regnes tidligt i kurset da de kun forudsætter teori der er kendt fra 2AN.

Notationen følger [MV] så tæt som muligt, bortset fra at vektorrum benævnes som $\mathsf{E}, \mathsf{F}, \mathsf{X}$ og Y. Endvidere foretrækker vi i modsætning til [MV] at kalde hilbertrum for H og G.

O.1 Lineær algebra

O.1.4 *Oversat, notation ændret*

Lad E være et vektorrum over $\mathbb{C}$, og bemærk at vi kan opfatte E som et vektorrum over $\mathbb{R}$ ved blot at restringere skalarmultiplikation til de reelle tal. Vi kalder dette $\mathbb{R}$-vektorrum for $\mathsf{E}_{\mathbb{R}}$.

(a) Lad $y : \mathsf{E} \to \mathbb{C}$ være en $\mathbb{C}$-lineær afbildning. Vis at $u = \operatorname{Re} y$ er en $\mathbb{R}$-lineær afbildning fra $\mathsf{E}_{\mathbb{R}}$ til $\mathbb{R}$, og at

$$y(x) = u(x) - iu(ix)$$

for alle $x \in \mathsf{E}$. Vis at

$$\sup_{x \in A} |y(x)| = \sup_{x \in A} |u(x)|$$

når A er en $\mathbb{C}$-absolut konveks delmængde af E.

(b) Lad $u : \mathsf{E}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ være $\mathbb{R}$-lineær. Vis at $y(x) = u(x) - iu(ix)$ er $\mathbb{C}$-lineær.

O.1.5 Afslutning/indre bevarer konveksitet

Lad $A \subseteq \mathsf{E}$ være en konveks mængde i et metrisk vektorrum. Vis at $\overline{A}$ er konveks. Vis at A° er konveks.

Noter

O.1.6 Om conv og Γ

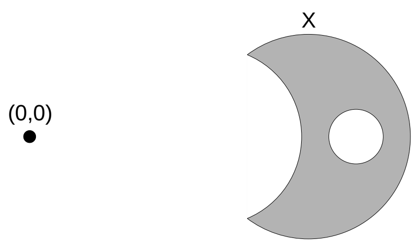
Lad E være et vektorrum, og X en delmængde heraf.

(a) Vis påstanden nederst på side 6 af [MV]: Mængden

$$\operatorname{conv}(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \,\middle|\, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, x_j \in X, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\}$$

er den mindste konvekse delmængde af E, som indeholder X.

(b) Indtegn $\operatorname{conv}(X)$ og $\Gamma(X)$ på figuren herunder. Figuren skal opfattes som illustration af en delmængde X i $\mathbb{R}^2$.



(c) Vis, at hvis (E, d) er et metrisk vektorrum og $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ er endelig, så er $\operatorname{conv}(X)$ kompakt.

O.1.7 Operationer på mængder

Lad E være et vektorrum over $\mathbb{K}$. Når delmængder M og M' af E samt $\lambda \in \mathbb{K}$ er givne, skriver vi i 3AN:

$$\begin{aligned} M + M' &= \{x + x' \mid x \in M, x' \in M'\} \\ M - M' &= \{x - x' \mid x \in M, x' \in M'\} \\ \lambda M &= \{\lambda x \mid x \in M\} \end{aligned}$$

Redegør for at $M - M = M + ((-1)M)$. Redegør for at $M + M \supseteq 2M$ og at der ikke i almindelighed gælder lighedstegn her.

O.1.8 Konveksitet og operationer på mængder

Lad E være et vektorrum. Vis at $M+M = 2M$ når $M \subseteq \mathsf{E}$ er konveks. Vis at $M-M = 2M$ når M er absolut konveks.

Besvarelse
Noter

O.1.9 Konkret kvotientrum

Betragt $\mathsf{E} = \mathbb{R}^2$ og underrummet F heri udspændt af vektoren $(1,2)$. Find to forskellige repræsentanter for elementet $[(2,1)]$ i E/F, altså for ækvivalensklassen som vektoren $(2,1)$ frembringer der. Find ligeledes to repræsentanter for $[(3,2)]$ og kontrollér ved direkte udregning det ikke gør nogen forskel hvilke repræsentanter man benytter når $[(2,1)] + [(3,2)]$ skal udregnes. Illustrér situationen på en figur.

O.1.10 Komplement af lige funktioner

Betragt $\mathbb{R}$-vektorrummet $\mathsf{E} = C[-1,1]$ bestående af kontinuerte reelle funktioner på intervallet $[-1,1]$. Vis at

$$\mathcal{L} = \{f \in \mathsf{E} \mid \forall x \in [-1,1] : f(x) = f(-x)\}$$
$$\mathcal{U} = \{f \in \mathsf{E} \mid \forall x \in [-1,1] : f(x) = -f(-x)\}$$

er underrum af E, og vis at der ved $Af = g$, hvor

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

defineres en lineær afbildning $A : \mathsf{E} \longrightarrow \mathcal{L}$. Redegør for at A inducerer en isomorfi (en lineær bijektion) mellem $E/\mathcal{U}$ og $\mathcal{L}$.

O.1.11 Tællelige delmængder af vektorrum

Lad E være et vektorrum over $\mathbb{R}$ og lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af elementer heri. Betragt mængden $M = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ bestående af samtlige $\mathbb{Q}$-linearkombinationer af x_n'erne. Vis at M er en tællelig mængde.

Strategi

O.1.12 Additivitet sikrer ikke kontinuitet på $\mathbb{R}$

Vis at der findes en diskontinuert bijektion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ som opfylder funktionalligningen

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

for alle x og y i $\mathbb{R}$.

Forudsætninger fra 3GT
Strategi
Alternativ strategi
Besvarelse
Alternativ besvarelse
Noter

O.2 Metriske og topologiske rum

O.2.6 Detaljer på [MV], side 11

Når $(X_j, d_j)_{j\in\mathbb{N}}$ er en følge af metriske rum og

$$X = \prod_{j=1}^{\infty} X_j = X_1 \times X_2 \times \cdots ,$$

definerer vi en afbildning $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty[$ ved

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{d_j(x_j, y_j)}{1 + d_j(x_j, y_j)}$$

Følgende 3 udsagn er givet med kun en skitse af et bevis på side 11 af [MV]:

(a) d er en metrik på X.

(b) En følge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod $x^{(0)}$ i (X, d) præcis når

$$x_j^{(0)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_j^{(n)}$$

for alle $j \in \mathbb{N}$.

(c) d inducerer produkttopologien på X (jf. [3GTB, §4.2]).

Giv fuldstændige beviser for (a)–(c).

Forudsætninger fra 3GT
Besvarelse
Noter

O.4 Kompakthed

O.4.2 *Oversat, kraftigt uddybet*

Lad (X, d) være et kompakt metrisk rum.

(a) Vis ved henvisning til 3GT at (X, d) er et separabelt rum.

Fasthold herefter en tæt tællelig mængde i (x_n) i X, og betragt

$$f_n(x) = d(x, x_n)$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Vis at $\mathcal{F}_0 = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ skiller punkter i X.

(c) Vis at

$$\mathcal{F}_1 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\{1\} \cup \{f_{n_1} \cdots f_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\})$$

er en delalgebra af $C(X, \mathbb{R})$. *[$\mathcal{F}_1$ er altså mængden af endelige, reelle linearkombinationer af endelige produkter af funktioner fra $\mathcal{F}_0$]*

(d) Vis at $C(X, \mathbb{R})$ er separabel.

Forudsætninger fra 3GT
Vink
Besvarelse
Noter

O.4.5 Detaljer om [MV, 4.15]

Gennemfør beviset for at [MV, 4.15] følger af [MV, 4.14]. Hvorfor skiller A_0 punkter når A gør det?

Vink

O.5 Normerede rum

O.5.1 *Oversat, uddybet**

Opgaveteksten udvidet til tre trin

(a) Vis at ethvert endelig-dimensionalt underrum af et normeret vektorrum er lukket.

(b) Vis at et ægte underrum af et normeret rum har tomt indre.

(c) Vis at der ikke eksisterer noget uendelig-dimensionalt banachrum med en tællelig basis.

Forudsætninger fra 3GT [til (c)]
Strategi

O.5.2 *Oversat**

Lad $\mathsf{E} = (C[0,1], \|\cdot\|_1)$ og $\mathsf{F} = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, hvor $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ og $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. For $k \in C([0,1] \times [0,1])$ sæt

$$K(f) = s \mapsto \int_0^1 k(s,t)f(t)dt, \qquad s \in [0,1]$$

Vis at K er en kontinuert lineær afbildning fra E til F, og bestem operatornormen af K (udtrykt ved k).

Forudsætninger om riemannintegration

O.5.3 *Oversat**

Lad E være et normeret vektorrum, F et lukket underrum heri og $q : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E}/\mathsf{F}$ den kanoniske kvotientafbildning. Vis følgende udsagn:

(a) $U \subseteq \mathsf{E}/\mathsf{F}$ er åben hvis og kun hvis $q^{-1}(U)$ er åben.

(b) Hvis V er åben i E, så er $q(V)$ åben i E/F.

(c) Hvis X er et metrisk rum, så er $f : \mathsf{E}/\mathsf{F} \longrightarrow X$ kontinuert præcis når $f \circ q : \mathsf{E} \longrightarrow X$ er kontinuert.

Vink
Besvarelse
Noter

O.5.4 *Oversat, notation ændret, uddybet**

Vi søger at definere $A : C[0,1] \longrightarrow c$ ved

$$A(f) = (f(1/n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Vis at A er defineret og at den inducerede afbildning $\overline{A} : C[0,1]/N(A) \longrightarrow c$ er en isometrisk isomorfi.

O.5.6 *Oversat**

Lad $C^\infty[0,1]$ betegne vektorrummet af alle uendeligt ofte differentiable funktioner på $[0,1]$, og definér herpå seminormer ved

$$\|f\|_j = \sup_{x\in[0,1]} |f^{(j)}(x)|.$$

Bevis at

$$d(f,g) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f-g\|_j}{1+\|f-g\|_j}$$

er en metrik på $C^\infty[0,1]$ og at $(C^\infty[0,1], d)$ er et fréchetrum.

Vink

Besvarelse

Noter

O.5.10 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ som frechétrum

Betragt rummet af schwartzfunktioner $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ defineret i [2ANG, 10.6]. Bemærk at definitionen medfører at

$$\|f\|_{n,N} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f^{(n)}(x)(1+|x|)^N \right|$$

definerer en seminorm på $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, for hvert par $n, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(a) Redegør for, gerne ved henvisning til ligheder med andre regnede opgaver, at der ved

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+N}} \frac{\|f-g\|_{n,N}}{1+\|f-g\|_{n,N}}$$

defineres en metrik på $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(b) Vis at $\partial : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ givet ved $\partial f = f'$ er en kontinuert afbildning på $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), d)$.

Forudsætninger fra 2AN

O.5.11 Kvotientafbildningen og enhedskugler

Sammenlign med trykfejl T.36.1. Temaet fortsættes i opgave O.11.12 og O.5.19.

Lad E være et normeret vektorrum, $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{E}$ et lukket underrum, og $q : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E}/\mathsf{F}$ den kanoniske kvotientafbildning.

(a) Vis at

$$q(\{x \in \mathsf{E} \mid \|x\| < 1\}) = \{y \in \mathsf{E}/\mathsf{F} \mid \|y\| < 1\})$$

(b) Giv et eksempel på at der kan gælde

$$q(\{x \in \mathsf{E} \mid \|x\| \leq 1\}) \neq \{y \in \mathsf{E}/\mathsf{F} \mid \|y\| \leq 1\})$$

Vink til (b)

O.5.12 Detaljer om [MV, 5.18(3)]

Lad Ω være en åben delmængde af $\mathbb{C}$. Betragt $C(\Omega) = C(\Omega, \mathbb{C})$ udstyret med metrikken d fra [MV, 5.18(2)].

(a) Lad γ være en lukket kurve i Ω. Vis, at hvis $f_n \longrightarrow f$ i $(C(\Omega), d)$, så gælder

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$$

(b) Vis at $A(\Omega)$, mængden af analytiske (= holomorfe) funktioner over Ω, er afsluttet med hensyn til topologien induceret af d.

Forudsætninger fra 2KF

O.5.13 Kompaktifikation og C_0-rum

Lad X være et lokalkompakt topologisk hausdorffrum som ikke er kompakt. Lad $\widehat{X}$ være etpunktskompaktifikationen af X, jf. [3GTB, 2.6.16]. Der erindres om at $\widehat{X} = X \cup \{\omega\}$, hvor ω kaldes *det uendelig fjerne punkt*. Bevis at

$$\mathsf{E} = \{f \in C(\widehat{X}) \mid f(\omega) = 0\}$$

er et afsluttet underrum af $C(\widehat{X})$. Find en isometrisk isomorfi mellem E og $C_0(X)$.

Forudsætninger fra 3GT

Vink

Besvarelse

Noter

O.5.14 MVR værktøjskasse, del I

Minusset i (c) skal læses som i opgave O.1.7.

Lad E være et metrisk vektorrum. Vis følgende påstande:

(a) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathsf{E} : x + U_\delta(0) \subseteq U_\varepsilon(x)$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathsf{E} : U_\delta(x) \subseteq x + U_\varepsilon(0)$

(c) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : U_\delta(0) - U_\delta(0) \subseteq U_\varepsilon(0)$

hvor $U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathsf{E} \mid d(x, y) < \varepsilon\}$. Redegør også for at man kan vælge $\delta = \varepsilon$ i (a) og (b), når E er et normeret rum.

O.5.15 MVR værktøjskasse, del II

Lad E være et metrisk vektorrum over $\mathbb{K}$, og betragt $A \subseteq \mathsf{E}$, $\xi \in \mathsf{E}$ samt $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Vis følgende påstande:

(d) $\overline{A+\xi} = \overline{A} + \xi$, $(A+\xi)^\circ = A^\circ + \xi$.

(e) $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$, $(\lambda A)^\circ = \lambda(A^\circ)$

(f) Hvis A er en omegn af 0, så gælder $\bigcup_{n=1}^{\infty} nA = \mathsf{E}$.

O.5.16 Konkret operatornorm, I

Temaet i opgaven fortsættes i Opgave O.12.12

Betragt $\mathbb{R}^2$ udstyret med normen $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Bestem operatornormen for operatoren

$$A(x,y) = (x+y, x+y).$$

O.5.17 Separable normerede rum

Lad X være et normeret rum over $\mathbb{K}$ hvori følgen af elementer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ opfylder at

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

er tæt. Vis at X er separabelt.

Vink

O.5.18 Eksamen V88-89 *[Opgave 4]*

Lad X og Y være metriske vektorrum over $\mathbb{R}$.

(a) Vis, at hvis S er en kontinuert lineær afbildning af X ind i Y, så er, for enhver begrænset delmængde B af X, billedet $S(B)$ en begrænset delmængde af Y.

(b) Vis, at hvis en delmængde A af X ikke er en omegn af 0, så findes der en følge $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ i X, sådan at $x_n \notin nA$ for hvert $n \in \mathbb{N}$, og $x_n \to 0$ for $n \to \infty$.

(c) Lad A være en delmængde af X. Vis, at hvis der for enhver begrænset delmængde B af X findes $k \in \mathbb{N}$, sådan at $B \subseteq kA$, så er A en omegn af 0.

(d) Vis, at en lineær afbildning S af X ind i Y er kontinuert, hvis enhver begrænset delmængde B af X har begrænset billede $S(B)$ i Y.

O.5.19 Guldølsopgave 2002

Jf. opgave O.5.11.

Giv et eksempel på at der kan gælde

$$q(\{x \in \mathsf{E} \mid \|x\| \leq 1\}) \neq \{y \in \mathsf{E}/\mathsf{F} \mid \|y\| \leq 1\})$$

hvor E er et banachrum, $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{E}$ et lukket underrum, og $q : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E}/\mathsf{F}$ den kanoniske kvotientafbildning.

Besvarelse
Noter

O.6 Dualrum og Hahn-Banach

O.6.1 *Oversat**

Vis at der på ethvert uendelig-dimensionalt normeret vektorrum findes en diskontinuert lineær funktional.

Vink

O.6.2 *Oversat, notation præciseret**

I det følgende er $N(y)$ nulrummet for y, altså $N(y) = \{x \in \mathsf{E} \mid y(x) = 0\}$.

Lad E være et normeret vektorrum og $y : \mathsf{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ en linearform med $y \neq 0$. Vis at de følgende tre udsagn er ækvivalente:

(i) y er kontinuert

(ii) $N(y)$ er afsluttet i E

(iii) $N(y)$ er ikke tæt i E

Strategi

O.6.3 *Oversat**

Lad E være et normeret rum, F et afsluttet underrum af E og $x_0 \in \mathsf{E}\backslash\mathsf{F}$. Vis at der findes $y \in \mathsf{E}'$ så at

$$\|y\| = 1 \qquad y(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, \mathsf{F}) = \inf_{x \in \mathsf{F}} \|x_0 - x\| \qquad y|\mathsf{F} = 0$$

Vink

Besvarelse

O.6.5 *Oversat, beskåret*

> *Opgaven er beskåret i forhold til opgaven i [MV], idet vi kun betragter det reelle tilfælde. Den anden del af opgaven, det komplekse tilfælde, er stillet som opgave O.6.10.*

Vis at enhver funktion $g \in C([0,1],\mathbb{R})$ definerer en kontinuert funktional $l_g : (C[0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ved

$$l_g(f) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

og at

$$\|l_g\| = \int_0^1 |g(t)|dt$$

Forudsætninger om riemannintegration

Forudsætninger fra 3GT

Strategi

Besvarelse

Noter

O.6.6 *Oversat, notation præciseret**

> *Med "$\circ$" i opgaven henvises til polarmængden; ikke til det indre*

Lad E være et normeret rum, F et underrum af E og M en delmængde af E med $0 \in M$. Vis at $(M + \mathsf{F})^\circ = M^\circ \cap \mathsf{F}^\circ$.

O.6.7 *Oversat**

Vis at rummet c_0 er separabelt og at rummet ℓ_∞ ikke er separabelt.

Forudsætninger fra 3GT [til ℓ_∞]

Strategi

Alternativ strategi

O.6.10 *Den komplekse version af Opgave O.6.5*

Vis at enhver funktion $g \in C([0,1],\mathbb{C})$ definerer en kontinuert funktional $l_g : (C[0,1],\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ ved

$$l_g(f) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

og at

$$\|l_g\| = \int_0^1 |g(t)|dt$$

Forudsætninger om riemannintegration

Forudsætninger fra 3GT

Strategi

O.6.12 Normer og enhedskugler

Lad E være et endelig-dimensionalt vektorrum over $\mathbb{K}$. Der erindres om at E kan udstyres med en norm, og at den topologi, man herved opnår, ikke afhænger af valget af norm.

Betragt mængden $\mathcal{A}$ af delmængder $A \subseteq \mathsf{E}$ som har egenskaberne

(i) A er kompakt

(ii) A er absolut konveks

(iii) $\operatorname{span} A = \mathsf{E}$

Find en norm $\|\cdot\|$ på E så at A er den afsluttede enhedskugle for $\|\cdot\|$; altså så

$$A = \{x \in \mathsf{E} \mid \|x\| \leq 1\}$$

Vis at der er en entydig korrespondance mellem mængden af normer på E og mængden $\mathcal{A}$.

Strategi

O.6.13 Halvplaner og absolut konveksitet

Lad $\mathfrak{H}_2$ betegne mængden af mængder på formen

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \alpha x + \beta y \geq \gamma\}$$

hvor $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Bemærk at $\emptyset, \mathbb{R}^2 \in \mathfrak{H}_2$, og at alle de øvrige mængder i $\mathfrak{H}_2$ kan beskrives som *afsluttede halvplaner* i $\mathbb{R}^2$.

For en delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^2$ betragter vi ligningen

$$A = \bigcap\{H \in \mathfrak{H}_2 \mid A \subseteq H\} \tag{$*$}$$

Når $(*)$ gælder, så er A altså lig med fællesmængden af alle de mængder fra $\mathfrak{H}_2$, der indeholder A.

Brug teori fra [MV, §6] til at vise, at når $A \subseteq \mathbb{R}^2$ er en absolut konveks og afsluttet mængde, så gælder $(*)$. Illustrér fænomenet ved figur, og find et eksempel på en afsluttet mængde $A \subseteq \mathbb{R}^2$ der ikke opfylder $(*)$.

Strategi
Besvarelse
Noter

O.6.14 Præmieopgave 2000

Lad E være et normeret rum over det reelle skalarlegeme. Definer for $M \subseteq \mathsf{E}$ og $N \subseteq \mathsf{E}'$ de to mængder

$$M^\sharp = \{y \in \mathsf{E}' \mid \forall x \in M : y(x) \leq 1\}$$
$$N^\sharp = \{x \in \mathsf{E} \mid \forall y \in N : y(x) \leq 1\}$$

Bemærk at ulighederne har mening, da de er udsagn om værdier i $\mathbb{R}$.

(a) Vis følgende variant af bipolarsætningen: Hvis A er en konveks delmængde af E med $0 \in A$, så gælder $\overline{A} = A^{\sharp\sharp}$.

(b) Konkluder at ligheden (*) i opgave O.6.13 gælder for alle konvekse og afsluttede ægte delmængder af $\mathbb{R}^2$.

Vink
Besvarelse
Alternativ besvarelse
Noter

O.6.15 Eksamen V96-97 *[Opgave 2]*

Lad Y være et (lineært) underrum af et reelt vektorrum X. Da siges et underrum Z af X at være et *komplement* til Y såfremt

$$\mathsf{Y} \cap \mathsf{Z} = \{0\} \quad \text{og} \quad \mathsf{Y} + \mathsf{Z} = \mathsf{X}.$$

(a) Vis at ethvert underrum Y har et komplement i X.

(b) Vis at hvis X er et banachrum og Y har endelig dimension, så kan man til enhver basis $\{y_1, \cdots, y_n\}$ for Y finde et system $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ af funktionaler i X' så $\varphi_i(y_j) = \delta_{ij}$ for $1 \leq i, j \leq n$.

(c) Vis under forudsætningerne i spørgsmål (b) at Y har et lukket (= afsluttet) komplement Z i X.

Noter

O.6.16 Eksamen V99-00 *[Opgave 3]*

Lad X være et normeret vektorrum over $\mathbb{R}$, og betragt to vektorer $y, z \in \mathsf{X}$. Der erindres om at y og z er *lineært uafhængige* netop når

$$\alpha y + \beta z = 0$$

kun forekommer for $\alpha = \beta = 0$. Vi siger at de to vektorer er *lineært afhængige* hvis de ikke er lineært uafhængige.

(a) Antag at der findes et $\gamma \in \mathbb{R}$ så at

$$\varphi(y) = \gamma\varphi(z)$$

gælder for alle kontinuerte funktionaler $\varphi \in \mathsf{X}'$. Vis at da er y og z lineært afhængige.

(b) Antag at y og z er lineært uafhængige. Vis at da findes, for hvert $\gamma \in \mathbb{R}$, en kontinuert funktional $\varphi \in \mathsf{X}'$ med

$$\varphi(y) = 5\gamma \qquad \varphi(z) = 5$$

Besvarelse

O.6.17 Eksamen S01 *[Opgave 1]*

I det følgende betragtes to normerede rum X og Y over skalarlegemet $\mathbb{K}$, hvorom det antages at $\mathsf{X} \neq \{0\}$. Det antages *ikke*, at X og Y er fuldstændige rum.

(a) Vis, at der findes en lineær afbildning

$$\Phi : L(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \longrightarrow \mathsf{Y}$$

som har egenskaben

$$\|\Phi(A)\| \leq \|A\| \qquad \forall A \in L(\mathsf{X}, \mathsf{Y}),$$

og som er *surjektiv.*

(b) Antag, at $L(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$ er et banachrum. Vis, at da er Y ligeledes et banachrum. Slut videre, at $L(\mathsf{Z}, \mathsf{Y})$ er et banachrum for ethvert normeret rum Z.

Besvarelse

O.6.18 Eksamen S02 *[Opgave 2]*

Lad Ω betegne et kompakt hausdorffrum, og betragt det normerede rum

$$\mathsf{E} = C(\Omega, \mathbb{R})$$

af reelle, kontinuerte funktioner på Ω, udstyret med den uniforme norm $\|\cdot\|_\infty$.

Når $f, g \in \mathsf{E}$ er givet, skriver vi "$f \geq g$" når $f(\omega) \geq g(\omega)$ for hvert $\omega \in \Omega$.

Lad $\mathcal{M}$ være et underrum af E med den egenskab, at alle de konstante funktioner på Ω er elementer i $\mathcal{M}$, og lad endvidere en lineær afbildning

$$\psi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

være givet med positivitetsegenskaben

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{M} \\ f \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(f) \geq 0$$

(a) Vis, at $\psi \in \mathcal{M}'$ med $\|\psi\| \leq \psi(1)$, hvor 1 betegner funktionen med konstant værdi 1.

(b) Vis, at $p : \mathsf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$p(f) = \inf\{\psi(g) \mid g \in \mathcal{M} \text{ og } g \geq f\}$$

definerer en sublineær funktional.

(c) Vis, at der findes en funktional $\Psi \in \mathsf{E}'$ som er en udvidelse af ψ i forstanden

$$\Psi(f) = \psi(f), \qquad f \in \mathcal{M},$$

og som har positivitetsegenskaben

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathsf{E} \\ f \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \Psi(f) \geq 0.$$

Besvarelse

Noter

O.7 Bidual og refleksivitet

O.7.1 *Oversat, uddybet**

Benyt at $C([0,1])$ er separabel til at vise at $C([0,1])$ ikke er refleksiv.

Strategi

Besvarelse

Noter

O.7.2 *Oversat**

Vis, at hvis E og F er isomorfe banachrum, og E er refleksiv, da er F også refleksiv.

Strategi

O.7.3 *Oversat, forkortet*

Lad $1 \leq p < q \leq \infty$. Vis

(a) $\ell_p \subsetneq \ell_q$ og $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ for alle $x \in \ell_p$

(c) For hvert $x \in \ell_p$ gælder $\lim_{q \longrightarrow \infty} \|x\|_q = \|x\|_\infty$.

Vink

O.7.7 Normer på $\mathbb{R}^2$

Vi betragter $\mathbb{R}^2$ udstyret med forskellige normer.

(a) Vis at $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ og $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ er isometrisk isomorfe.

(b) Vis at $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ og $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ ikke er isometrisk isomorfe hvis $p \in]1; \infty[$.

(c) Find en norm $|||\cdot|||$ så $(\mathbb{R}^2, |||\cdot|||)$ ikke er isometrisk isomorf med $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ for noget $p \in [1; \infty]$.

Vink
Strategi

O.7.8 Detaljer om [MV, 7.9]

Udfør i detaljer beviset for at der ved

$$\Phi(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

defineres en isometrisk isometri $\Phi : \ell_\infty \longrightarrow (\ell_1)'$. Følg fremgangsmåden i [MV, 7.9].

Besvarelse
Noter

O.7.9 Konkret fuldstændiggørelse

Find fuldstændiggørelsen af $(\varphi, \|\cdot\|_\infty)$.

O.7.10 $(c, \|\cdot\|_\infty)'$

Vis at dualrummet til $(c, \|\cdot\|_\infty)$ er isometrisk isomorf med $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.

Vink
Strategi
Besvarelse
Noter

O.7.11 Funktionaler skiller punkter

Lad E være et normeret rum. Vis at E' skiller punkter i E; altså at hvis $x_1 \neq x_2$ i E, så findes $y \in \mathsf{E}$ med $y(x_1) \neq y(x_2)$.

O.7.12 Eksamen V88-89 *[Opgave 3]*

Lad X være et normeret topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$. For $A \subseteq \mathsf{X}$ sættes

$$A^d = \{(f, \alpha) \in \mathsf{X}' \times \mathbb{R} \mid \forall a \in A : |f(a)| \leq \alpha\}.$$

For $B \subseteq \mathsf{X}' \times \mathbb{R}$ sættes

$${}^dB = \{x \in \mathsf{X} \mid \forall (f, \alpha) \in B : |f(x)| \leq \alpha\}.$$

Vis, at for en vilkårlig delmængde A af X er ${}^d(A^d)$ den mindste afsluttede absolut konvekse delmængde af X, der indeholder A.

Noter

O.7.13 Eksamen V89-90 *[Opgave 1]*

(a) Vis, at $l^1 \subseteq l^2 \subseteq c_0$.

(b) Vis, at l^1 ikke er en afsluttet delmængde af l^2.

(c) Vis, at for hvert $N \in \mathbb{N}$ er
$\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2 \mid \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq 1\}$ afsluttet i l^2.

Noter

O.7.14 Eksamen V95-96 *[Opgave 2a]*

Lad ℓ^∞ betegne banachrummet af begrænsede, reelle talfølger. Vis at hvis Y er et lineært underrum af et reelt normeret rum X, så vil der til enhver operator T i $L(\mathsf{Y}, \ell^\infty)$ findes en udvidelse $\widetilde{T}$ i $L(\mathsf{X}, \ell^\infty)$ (dvs. $\widetilde{T} \mid \mathsf{Y} = T$) med $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

O.7.15 Eksamen S00 *[Opgave 2]*

I det komplekse banachrum ℓ_∞ (som sædvanligt udstyret med normen $\|\cdot\|_\infty$) betragter vi mængden

$$M = \left\{ (x_i) \in \ell_\infty \,\middle|\, (x_i) \text{ er konvergent}, \left| \lim_{i \longrightarrow \infty} x_i \right| \leq 1 \right\}$$

bestående af konvergente følger med grænseværdi af modulus højst én, og vektoren

$$z = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

(a) Vis at M er en absolut konveks delmængde af ℓ_∞. Vis at der findes $\psi_0 \in \ell'_\infty$ som opfylder både

$$|\psi_0(x)| \leq 1 \text{ for alle } x \in M$$

og

$$|\psi_0(z)| > 1$$

(b) Vis, at hvis $\varphi \in \ell'_\infty$ har formen

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \qquad \forall x = (x_i) \in \ell_\infty$$

for en vektor $y = (y_i) \in \ell_1$, og hvis

$$|\varphi(x)| \leq 1 \text{ for alle } x \in M,$$

så er $\varphi = 0$. Benyt dette, og ψ_0 fra (a), til at give et direkte bevis for at ℓ_1 ikke er et refleksivt banachrum.

Besvarelse
Alternativ besvarelse
Noter

O.7.16 $C([0,1])$ *er separabel*

Vis at mængden af stykkevis lineære funktioner med samtlige delepunkter og hældninger i $\mathbb{Q}$ er tæt i $PL[0,1]$ (jf. definition S.3.1.2) Benyt så Lemma S.3.1.3(i) til at vise at $C([0,1])$ er separabel.

O.8 Konsekvenser af Baire

O.8.1 *Oversat**

Lad E og F være banachrum og lad $A \in L(\mathsf{E},\mathsf{F})$. Vis at $R(A)$ er afsluttet i F hvis og kun hvis der findes $C > 0$ med følgende egenskab: for alle $x \in \mathsf{E}$ findes $\xi \in \mathsf{E}$ med

$$A\xi = Ax, \qquad \|\xi\| \leq C\,\|A\xi\|$$

Vink
Strategi

O.8.2 *Oversat, uddybet**

Betragt mængderne $\mathsf{E} = C^1[0,1]$ (mængden af kontinuert differentiable afbildninger på enhedsintervallet) og $\mathsf{F} = C[0,1]$ som normerede rum under den uniforme norm. Vis at $A : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{F}$ defineret ved

$$A(f) = f'$$

ikke er kontinuert, men at grafen for A

$$\{(f, A(f)) \mid f \in \mathsf{E}\} = \{(f, f') \mid f \in \mathsf{E}\}$$

er en afsluttet delmængde af $\mathsf{E} \times \mathsf{F}$, når dette rum udstyres med produkttopologien fra $(\mathsf{E}, \|\cdot\|_\infty)$ og $(\mathsf{F}, \|\cdot\|_\infty)$. Hvad siger dette om sætningen om afsluttet graf?

Forudsætninger fra 2AN
Strategi

O.8.3 *Oversat**

Lad $|||\cdot|||$ være en norm på $C[0,1]$ med følgende egenskaber:

(i) $(C[0,1], |||\cdot|||)$ er et fuldstændigt rum.

(ii) $\lim_{n\longrightarrow\infty} |||f_n||| = 0$ medfører $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(t) = 0$ for alle $t \in [0,1]$.

Vis at $|||\cdot|||$ er ækvivalent med den uniforme norm på $C[0,1]$.

Vink
Besvarelse
Noter

O.8.4 *Oversat**

Antag at følgen $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ har den egenskab, at for enhver følge $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$ bliver rækken

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

konvergent. Vis at da er $x \in \ell^1$.

Strategi
Noter

O.8.8 *Helt omlagt*

> *Afsnit S.3.1 gennemgår næsten det samme som denne opgave lægger op til. Følgende del overlades stadigvæk til deltagerne:*

Bevis påstanden fra S.3.1.1 (I): For fast $n \in \mathbb{N}$ gælder at mængden

$$\mathfrak{M}_n = \{f \in C[0,1] \,|\, \exists x \in [0,1] \forall y \in [0,1] : |f(x) - f(y)| \leq n|x-y|\}$$

er en afsluttet delmængde af $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Strategi

O.8.9 Detaljer om [MV, lemma 8.2]

Lad E, F være normerede rum og lad $A : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{F}$ være lineær og åben. Vis at da er A surjektiv.

Vink

O.8.10 Detaljer om [MV, korollar 8.7]

Gennemgå detaljeret beviset for [MV, korollar 8.7].

O.8.11 Alternative beviser for hovedsætninger

> *I de følgende opgaver udledes specialtilfælde af resultater som vi allerede har bevist i [MV]. Der er altså intet nyt at lære ud fra opgaverne, men udledningsprocessen kan være gavnlig som repetition. Forsøg derfor at udlede resultaterne direkte ved at sammensætte de anførte resultater som anført, og derudover bruge så lidt teori som muligt. Du må selvfølgelig <u>slet ikke</u> bruge det resultat, vi viser et specialtilfælde af!*

Lad E, F være banachrum og lad $A : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{F}$ være en lineær afbildning.

(a) **[Vis [MV, 8.6] ud fra [MV, 8.8]]**
Antag at A er kontinuert og invertibel. Vis at grafen for A^{-1} er afsluttet. Konkludér at A^{-1} er kontinuert.

(b) **[Vis [MV, 8.5] ud fra [MV, 8.6], [MV, 5.12] og opgave O.5.3(b)]**
Antag at A er kontinuert og surjektiv. Vis at $\overline{A} : \mathsf{E}/N(A) \longrightarrow \mathsf{F}$ er åben. Konkludér at A selv er åben.

(c) **[Vis [MV, 5.15(b)] ud fra [MV, 8.8] og opgave O.5.1(i)]**
Antag at $\dim(\mathsf{E}) < \infty$. Vis at grafen for A er afsluttet. Konkludér at A er kontinuert.

O.8.12 ℓ_1 af første kategori i ℓ_2

Påstanden kan vises direkte, men du kan få større udbytte med mindre indsats ved benytte teori fra [MV, kapitel 8].

Vis at ℓ_1 er af første kategori i ℓ_2.

O.8.13 Hovedsætningerne uden linearitet

Betragt, for en ikke nødvendigvis lineær afbildning $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de tre udsagn

(i) Hvis f har lukket graf så er f kontinuert.

(ii) Hvis f er kontinuert og surjektiv, så er f åben.

(iii) Hvis f er kontinuert og invertibel, så er f^{-1} kontinuert.

Netop et af udsagnene er sande. Afgør hvilket, og anfør et argument herfor. Illustrer ved eksempel at de to øvrige udsagn er falske.

Vink
Besvarelse
Alternativ besvarelse
Noter

O.8.14 Eksamen V87-88 *[Opgave 1]*

Lad som sædvanlig ℓ^1 betegne banachrummet af komplekse talfølger $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ med $\|a\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Lad $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en talfølge med $c_n \in]0, \infty[$ for hvert $n \in \mathbb{N}$. Sæt $\|a\|_c = \sum_{n=1}^{\infty} c_n|a_n|$ for $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, og sæt $\ell^1(c) = \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \|a\|_c < \infty\}$.

(a) Vis, at $a \mapsto \|a\|_c$ er en norm på $\ell^1(c)$.

(b) Vis, at for hvert $m \in N$ definerer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto a_m$ en kontinuert lineær afbildning af $\ell^1(c)$ ind i $\mathbb{C}$.

(c) Vis, at $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definerer en lineær isometri af $\ell^1(c)$ på ℓ^1.

(d) Vis, at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ for hvert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $\ell^1(c)$, så findes et tal $r \in]0, \infty[$ med $c_n \geq r$ for hvert $n \in \mathbb{N}$.

O.8.15 Eksamen V93-94 *[Opgave 2]*

Lad Y og Z være lukkede, lineære underrum af det reelle banachrum X, således at Z kan opfattes som et underrum af $\mathsf{Y} + \mathsf{Z}$, og $\mathsf{Y} \cap \mathsf{Z}$ som et underrum af Y.

(a) Vis at afbildningen $\Phi : y + \mathsf{Y} \cap \mathsf{Z} \mapsto y + \mathsf{Z}$ er en normformindskende, bijektiv, lineær afbildning af kvotientrummet $\mathsf{Y}/\mathsf{Y} \cap \mathsf{Z}$ på $(\mathsf{Y} + \mathsf{Z})/\mathsf{Z}$, når begge rum udstyres med kvotientnorm.

(b) Vis at følgende betingelser er ækvivalente:

(i) $(\mathsf{Y} + \mathsf{Z})/\mathsf{Z}$ er et banachrum;

(ii) Φ^{-1} er begrænset;

(iii) $\mathsf{Y} + \mathsf{Z}$ er et lukket underrum af X.

(c) Vis at betingelserne (i)–(iii) er opfyldte hvis X/Z eller X/Y har endelig dimension.

O.8.16 Eksamen V95-96 *[Opgave 2b]*

Lad $T : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ være en lineær operator mellem banachrum X og Y. Antag at der for ethvert φ i Y' findes en konstant $c(\varphi)$ så

$$|\langle\!\langle Tx, \varphi \rangle\!\rangle_{\mathsf{Y}}| \leq c(\varphi)\|x\|, \quad x \in \mathsf{X}.$$

Vis at $T \in L(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$.

O.8.17 Eksamen S97 *[Opgave 1]*

Lad E være et normeret rum og betragt afbildninger

$$R : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E} \qquad S : \mathsf{E}' \longrightarrow \mathsf{E}'$$

der opfylder

$$y(Rx) = (Sy)(x) \qquad \forall x \in \mathsf{E}, y \in \mathsf{E}'$$

eller i dualitetsnotation

$$\langle\!\langle Rx, y \rangle\!\rangle_{\mathsf{E}} = \langle\!\langle x, Sy \rangle\!\rangle_{\mathsf{E}} \qquad \forall x \in \mathsf{E}, y \in \mathsf{E}'$$

(a) Vis at R og S er lineære afbildninger

(b) Vis at S er kontinuert med hensyn til topologien induceret af operatornormen på E'.

(c) Vis, ved hjælp af (b), at R er kontinuert med hensyn til topologien induceret af normen på E.

Vink til (a)
Vink til (b)
Vink til (c)
Besvarelse
Noter

O.8.18 Eksamen S98 *[Opgave 4]*

Lad X, Y og Z være banachrum. Vi har givet en bilineær afbildning

$$B : \mathsf{X} \times \mathsf{Y} \to \mathsf{Z},$$

altså en afbildning B der opfylder at

$$x \mapsto B(x, y_0) \quad y \mapsto B(x_0, y)$$

er lineær for alle $x_0 \in \mathsf{X}$ og $y_0 \in \mathsf{Y}$.

Vis følgende

$$\begin{pmatrix} \forall x \in \mathsf{X} : y \mapsto B(x,y) \text{ er kontinuert og} \\ \forall y \in \mathsf{Y} : x \mapsto B(x,y) \text{ er kontinuert} \end{pmatrix} \iff \left(\sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} \|B(x,y)\| < \infty \right).$$

O.8.19 Eksamen V98-99 *[Opgave 2]*

Vi bruger

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|$$

til at give en banachrumsstruktur på X givet ved

$$\mathsf{X} = \{f \in C[0, 2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$$

(dvs. rummet af kontinuerte periodiske funktioner på intervallet $[0, 2\pi]$). En følge $\{f_n\}$ fra X siges at konvergere uniformt mod en funktion f fra X hvis

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Givet $f \in \mathsf{X}$ er den *partielle fourierrække* $T_n f$ en (kontinuert, periodisk) funktion givet ved:

$$T_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \left(\int_0^{2\pi} f(t) \exp(-ikt) dt \right) \exp(ikx)$$

Det oplyses, at hvis T_n betragtes som begrænsede lineære operatorer på X, da gælder at

$$\|T_n\| \geq 4\pi^{-2} \sum_{k=1}^{n} k^{-1}.$$

Vis hermed følgende påstande:

(a) For $f \in \mathsf{X}$ gælder

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n f - f\|_2 = 0$$

($\|f\|_2$ betegner normen af f som element af hilbertrummet $L^2([0, 2\pi])$).

(b) Der findes $f \in \mathsf{X}$ for hvilke de partielle fourierrækker $T_n f$ ikke konvergerer uniformt.

Noter

O.8.20 Eksamen S99 *[Opgave 1]*

Betragt to afsluttede underrum X og Y af det reelle banachrum E. Vi interesserer os for udsagnet

$$\exists C > 0 \forall x \in \mathsf{X} \forall y \in \mathsf{Y} : \|x\| \leq C \|x + y\| \tag{$*$}$$

Der erindres om notationen $\mathsf{X}+\mathsf{Y} = \{x+y \mid x \in \mathsf{X}, y \in \mathsf{Y}\}$. Endvidere betragter vi rummet $\mathsf{X} \times \mathsf{Y}$ udstyret med normen $|||(x, y)||| = \|x\| + \|y\|$, og afbildningen $\Lambda : \mathsf{X} \times \mathsf{Y} \longrightarrow \mathsf{E}$ givet ved

$$\Lambda(x, y) = x + y$$

(a) Vis at hvis $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} = \{0\}$, så er Λ kontinuert med kerne $N(\Lambda) = \{0\}$ og billede $R(\Lambda) = \mathsf{X} + \mathsf{Y}$.

(b) Vis at $(*)$ medfører at $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} = \{0\}$.

Vi betragter nu også udsagnet

$$\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} = \{0\} \text{ og } \mathsf{X} + \mathsf{Y} \text{ er afsluttet} \tag{$**$}$$

(c) Vis at $(*)$ medfører at $\mathsf{X}+\mathsf{Y}$ er et fuldstændigt underrum af E. Konkludér at $(*)\Longrightarrow(**)$.

(d) Vis at $(**)\Longrightarrow(*)$.

Lad nu E være banachrummet $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$. Sæt som sædvanlig, for $n \in \mathbb{N}$,

$$e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

med ettallet på den n'te plads, og lad

$$\mathsf{X} = \overline{\operatorname{span}\{e_n \mid n \text{ er lige}\}} \subseteq \mathsf{E} = \ell^1$$

(e) Find et afsluttet underrum Y af $\mathsf{E} = \ell^1$ sådan at $\mathsf{X} + \mathsf{Y}$ ikke er afsluttet.

Besvarelse

Noter

O.8.21 Eksamen S99 *[Opgave 3]*

Lad X og Y være normerede rum over $\mathbb{C}$ og lad $A : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ være en lineær afbildning. Det forudsættes **ikke** at A er kontinuert. Det forudsættes **ikke** at X og Y er fuldstændige rum.

(a) Antag at der for ethvert $x \in \mathsf{X}$ gælder at mængden

$$\{y(Ax) \mid y \in \mathsf{Y}'\}$$

er en begrænset delmængde af $\mathbb{C}$. Vis at $A = 0$.

(b) Antag at der for ethvert $y \in \mathsf{Y}'$ gælder at mængden

$$\{y(Ax) \mid x \in \mathsf{X}, \|x\| \leq 1\}$$

er en begrænset delmængde af $\mathbb{C}$. Vis at $A \in L(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$.

Besvarelse
Noter

O.8.22 Eksamen V99-00 *[Opgave 1]*

Betragt $C_0(\mathbb{R})$ (jf. [MV, Example 5.16(4)]), som sædvanligt udstyret med den uniforme norm $\|\cdot\|_\infty$. Definer herudover seminormer

$$\|f\|_N = \sup_{x \in [-N,N]} |f(x)|$$

på $C_0(\mathbb{R})$ for hvert $N \in \mathbb{N}$.

I teksten herunder betegner f, f_n, g og h funktioner fra $C_0(\mathbb{R})$.

(a) Vis at

$$\|f_n\|_\infty \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|f_n\|_N \longrightarrow 0$$

når $n \longrightarrow \infty$, for ethvert $N \in \mathbb{N}$.

Lad $|||\cdot|||$ være en anden norm på $C_0(\mathbb{R})$, og antag at den ligesom $\|\cdot\|_\infty$ har egenskaben

$$|||f_n||| \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|f_n\|_N \longrightarrow 0$$

når $n \longrightarrow \infty$, for ethvert $N \in \mathbb{N}$.

(b) Vis at hvis $\|f_n - g\|_\infty \longrightarrow 0$ og $|||f_n - h||| \longrightarrow 0$, så må $g = h$.

(c) Antag herudover at $(C_0(\mathbb{R}), |||\cdot|||)$ er et fuldstændigt rum. Vis at da er normerne $|||\cdot|||$ og $\|\cdot\|_\infty$ ækvivalente.

Vi betragter til slut den konkrete norm $\|\cdot\|_\Phi$ givet ved

$$\|f\|_\Phi = \|\Phi \cdot f\|_\infty$$

hvor $\Phi(t) = \exp(-|t|)$ og hvor $\Phi \cdot f$ er givet ved punktvis multiplikation.

(d) Vis at $\|\cdot\|_\Phi$ opfylder

$$\|f_n\|_\Phi \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|f_n\|_N \longrightarrow 0,$$

men at $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\Phi)$ ikke er et fuldstændigt rum.

Besvarelse
Noter

O.8.23 Eksamen S01 *[Opgave 2]*

Vi betragter de komplekse vektorrum

$$CB(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ kontinuert og begrænset}\}$$
$$C_0(\mathbb{R}) = \{f \in CB(\mathbb{R}) \mid f(x) \longrightarrow 0, x \longrightarrow \pm\infty\}.$$

Disse rum udstyres som sædvanligt med den uniforme norm $\|\cdot\|_\infty$.

Når f og g er sådanne kontinuerte funktioner, benytter vi notationen

$$f \cdot g$$

til at beskrive den funktion, der i hvert punkt af $\mathbb{R}$ er givet ved produktet af værdierne for f og g i punktet. Der gælder altså

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x),$$

idet vi som sædvanlig udelader symbolet "·" ved multiplikation i $\mathbb{C}$.

(a) Vis, at enhver funktion $g \in CB(\mathbb{R})$ definerer en begrænset operator $M_g \in L(C_0(\mathbb{R}))$ ved

$$M_g(f) = f \cdot g \qquad f \in C_0(\mathbb{R})$$

Eftervis, at denne operator har egenskaben

$$M_g(f_1 \cdot f_2) = M_g(f_1) \cdot f_2 \qquad \forall f_1, f_2 \in C_0(\mathbb{R})$$

Vis endvidere, at $\|M_g\| = \|g\|_\infty$.

(b) Lad en lineær afbildning

$$\mathcal{M} : C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$$

være givet. Det antages *ikke*, at $\mathcal{M}$ er kontinuert.

Vis, at hvis

$$\mathcal{M}(f_1 \cdot f_2) = \mathcal{M}(f_1) \cdot f_2 \qquad \forall f_1, f_2 \in C_0(\mathbb{R}),$$

så gælder $\mathcal{M} \in L(C_0(\mathbb{R}))$.

Besvarelse

O.8.24 Eksamen S02 *[Opgave 3]*

Vi betragter de normerede vektorrum $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ og $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$. Hvert element i disse rum opfattes som en følge $\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indiceret over $\mathbb{N}$.

Med $\underline{e}_N$ benævnes, for hvert $N \in \mathbb{N}$, den følge, der har værdien nul på alle pladser undtagen plads N, hvor den antager værdien én, og vi definerer som sædvanligt

$$\phi = \operatorname{span}\{\underline{e}_N \mid N \in \mathbb{N}\}$$

Der erindres om, at ϕ præcis indeholder alle følger, der er nul fra et vist trin at regne, og at der gælder såvel $\phi \subset \ell_\infty$ som $\phi \subset \ell_1$.

(a) Lad $T \in L(\ell_\infty, \ell_1)$ være en begrænset lineær operator, og antag at T er surjektiv. Vis, at

$$T(\ell_\infty \backslash \overline{\phi})$$

er en åben mængde i ℓ_1, og slut herfra at

$$T(\ell_\infty \backslash \overline{\phi}) \cap \phi \neq \emptyset,$$

altså at billedet under T af komplementet til afslutningen af ϕ i ℓ_∞ møder ϕ i ℓ_1.

(b) Lad $\underline{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af positive tal. Antag at $\underline{a} \in \ell_1$, og vis at der ved

$$T_a \underline{x} = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

defineres en operator $T_a \in L(\ell_\infty, \ell_1)$ med egenskaben at urbilledet $T_a^{-1}(\phi)$ er lig med ϕ. Vis, at T_a ikke er surjektiv.

Besvarelse
Noter

O.9 Dualafbildninger

O.9.1 *Oversat**

Lad E være et separabelt banachrum med $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en tæt følge i $U_1(0)$. Vis at der ved

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

defineres $A \in L(\ell_1, \mathsf{E})$, og at den inducerede afbildning $\overline{A} : \ell_1/N(A) \longrightarrow \mathsf{E}$ er en isometrisk isomorfi.

Vink

O.9.3 *Oversat**

Der henvises til [MV] s. 6 for definitionen af "codim"

Lad E og F være normerede rum og betragt $A \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ med egenskaben at $R(A)$ er afsluttet. Vis at $\operatorname{codim} R(A) = \dim N(A')$ hvis $N(A')$ er endeligdimensional.

Vink

O.9.4 *Oversat, forudsætninger styrket*

Vi kræver i modsætning til opgaveteksten i bogen at E *og* F *er fuldstændige. Ellers er udsagnet falsk, jf. opgave O.12.13. Der henvises til [MV] s. 6 for definitionen af "codim"*

Lad E og F være banachrum og betragt $A \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ med egenskaben at $R(A)$ er afsluttet. Vis at $\operatorname{codim} R(A') = \dim N(A)$ hvis $N(A)$ er endeligdimensional.

Vink

O.9.5 Dualbaser

Lad $x_1, \ldots, x_n$ være en basis for det normerede vektorrum E. Betragt elementerne $y_i \in \mathsf{E}'$ givet ved

$$y_i(x) = y_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right) = \alpha_i$$

Mængden $\{y_1, \ldots, y_n\}$ kaldes den *duale basis* til x_n

(a) Vis at den duale basis faktisk er en basis for E'.

(b) Lad skalarværdier α_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ være givne. Redegør for at der findes en og kun en afbildning $A \in L(\mathsf{E}, \mathsf{E})$ som opfylder

$$Ax_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j.$$

(c) Bestem en formel for $A' y_i$.

(d) Opskriv og sammenlign matricer for A og A'.

Strategi
Besvarelse

O.9.6 Dimensionssætningen

Benyt O.9.5, O.9.3 og O.9.4 til at give et nyt bevis for dimensionssætningen fra [Mes, 6.27] (benyt gerne [Mes, 6.25]).

O.9.7 Detaljer om [MV, proposition 9.2]

Vis Proposition 9.2 fra [MV].

Strategi

O.9.8 Eksamen V90-91 *[Opgave 2]*

Lad X og Y være banachrum med duale rum X' og Y', og lad Y_0 være et tæt, lineært underrum af Y. Antag at der er givet lineære afbildninger $S : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}'$ og $T : \mathsf{Y}_0 \to \mathsf{X}'$, således at

$$(Sx)(y) = (Ty)(x)$$

for ethvert x i X og y i Y_0, eller i dualitetsnotation, således at

$$\langle\!\langle y, Sx \rangle\!\rangle_{\mathsf{Y}} = \langle\!\langle x, Ty \rangle\!\rangle_{\mathsf{X}}$$

(i) Vis at S er begrænset.

(ii) Vis at S' er lig med T på Y_0 (når vi identificerer Y med sin indlejring i Y'').

(iii) Vis at T er begrænset.

O.10 Projektioner

O.10.2 *Oversat, præciseret**

Vis at mængden af lige funktioner i $C[-1, 1]$ har et topologisk komplement, og find det.

Vink

O.10.5 Komplementer i c

Vis at c_0 og det 1-dimensionelle rum af konstante følger

$$k = \{(\lambda, \lambda, \dots) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

er algebraisk komplementerede i c. Opskriv de tilsvarende projektioner på c_0 og k. Afgør hvorvidt c_0 og k også er topologisk komplementerede, når c udstyres med uniform norm.

Vink

O.11 Hilbertrum

O.11.1 *Oversat, uddybet*

Jf. Remark (b) efter Lemma 11.2, tilfældet $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Lad E være et reelt normeret vektorrum hvor normen opfylder parallelogramloven

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Vis at da er afbildningen $\langle\cdot,\cdot\rangle$ givet ved

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

et indre produkt på E.

Vink

O.11.4 *Oversat**

Lad H være et (separabelt) hilbertrum og lad $A : \mathsf{H} \longrightarrow \mathsf{H}$ være en lineær afbildning der opfylder

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

for alle $x, y \in \mathsf{H}$. Vis at A er kontinuert.

O.11.10 *Oversat, forlænget*

Lad H være et (separabelt) hilbertrum og betragt $T \in L(\mathsf{H})$. Vis at følgende udsagn er ækvivalente:

(i) $\forall x, y \in \mathsf{H} : \|Tx - Ty\| = \|x - y\|$

(ii) $\forall x \in \mathsf{H} : \|Tx\| = \|x\|$

(iii) $\forall x, y \in \mathsf{H} : \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$.

En operator med egenskaben (ii) kaldes generelt en *isometri*. Vis at en surjektiv isometri på et (separabelt) hilbertrum er en unitær operator.

Vink
Besvarelse
Noter

O.11.11 PUB i hilbertrum

Lad H være et (separabelt) hilbertrum og M en delmængde heraf. Antag at mængden

$$\{|\langle x, y\rangle| \mid x \in M\}$$

er en begrænset mængde for hvert $y \in \mathsf{H}$. Vis at da er M begrænset i norm.

O.11.12 Kvotient i hilbertrum

Tema fortsat fra opgave O.5.11.

Lad H være et (separabelt) hilbertrum, og F et afsluttet underrum heri. Vis at projektionen fra H ned på $\mathsf{F}^\perp$ inducerer en isometrisk isomorfi mellem H/F og $\mathsf{F}^\perp$. Vis at der for den kanoniske kvotientafbildning q gælder

$$q(\{x \in \mathsf{H} \mid \|x\| \le 1\}) = \{y \in \mathsf{H}/\mathsf{F} \mid \|y\| \le 1\})$$

Besvarelse

O.11.13 Polarer i hilbertrum

Med "∘" i opgaven henvises til polarmængden; ikke til det indre

Lad H være et (separabelt) hilbertrum, og F et underrum heri. Vis formlerne

$$\mathsf{F}^\perp = \Phi_\mathsf{H}(\mathsf{F})^\circ \qquad \mathsf{F}^\circ = \Phi_\mathsf{H}(\mathsf{F}^\perp)$$

O.11.14 Kompakthed for enhedskugler i hilbertrum

Antag at den afsluttede enhedskugle i et (separabelt) hilbertrum H er kompakt. Vis at da er $\dim \mathsf{H} < \infty$.

O.11.15 Konvergens i hilbertrum

Lad x_n og y_n være følger i et (separabelt) hilbertrum H, og antag at $\|x_n\|, \|y_n\| \le 1$. Vis at

$$\langle x_n, y_n \rangle \longrightarrow 1$$

medfører

$$\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0.$$

Vink

O.11.16 Karakterisering af ortogonale projektioner

Lad H være et (separabelt) hilbertrum og betragt en projektion $P \in L(\mathsf{H})$, altså en operator med egenskaben $PP = P$. Antag at $P \neq 0$ og vis at følgende udsagn er ækvivalente:

(i) P er en ortogonal projektion

(ii) $N(P) = R(P)^\perp$

(iii) $R(P) = N(P)^\perp$

(iv) $\|P\| = 1$

(v) P er selvadjungeret

(vi) $\langle Px, x\rangle \geq 0$ for alle $x \in \mathsf{H}$.

Vink
Noter

O.11.17 Tilfældet $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$

Lad H være et (separabelt) hilbertrum over $\mathbb{C}$ og betragt $A \in L(\mathsf{H})$.

(a) Antag at $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ for alle $x \in \mathsf{H}$. Vis at

$$\lambda \langle Ax, y\rangle + \overline{\lambda} \langle Ay, x\rangle = \overline{\lambda} \langle A^*y, x\rangle + \lambda \langle A^*x, y\rangle$$

for alle $\lambda \in \mathbb{C}$ og $x, y \in \mathsf{H}$.

(b) Antag at $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ for alle $x \in \mathsf{H}$. Vis at A er selvadjungeret.

(c) Antag at $\langle Ax, x\rangle = 0$ for alle $x \in \mathsf{H}$. Vis at $A = 0$.

Lad G være et (separabelt) hilbertrum over $\mathbb{R}$.

(d) Vis ved eksempel at $\langle Ax, x\rangle = 0$ for alle $x \in \mathsf{G}$ ikke medfører at $A = 0$.

Vink
Besvarelse
Alternativ besvarelse
Noter

O.11.18 Symmetrier

Lad H være et (separabelt) hilbertrum. Vis at følgende betingelser på en operator $R \in L(\mathsf{H})$ er ækvivalente:

(i) Der findes et lukket underrum X af H sådan at

$$x + Rx \in \mathsf{X} \qquad x - Rx \in \mathsf{X}^{\perp}$$

for alle $x \in \mathsf{H}$.

(ii) R er selvadjungeret og $R^2 = R \circ R = I$.

(iii) $\frac{1}{2}(R + I)$ er en ortogonal projektion

I (ii) og (iii) herover betegner I identitetsoperatoren på H.

Vink
Noter

O.11.19 Eksamen V89-90 *[Opgave 2]*

Lad φ være en lineær afbildning af c_0 ind i l^2. Antag, at for hvert a i c_0 og n i $\mathbb{N}$ er $|\langle\varphi(a)\,,\, e_n\rangle| \leq n\|a\|_\infty$.

(a) Vis, at φ har afsluttet graf.

(b) Vis, at φ er kontinuert.

I spørgsmål (c) og (d) antages også, at for ethvert par (a, b) af følger i c_0 med $a_n b_n = 0$ for hvert n i $\mathbb{N}$ er $\varphi(a)$ vinkelret på $\varphi(b)$.

(c) Vis, at $\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi(e_n)\|_2^2$.

(d) Vis, for eksempel ved hjælp af formlen i spørgsmål (c), at φ ikke er surjektiv.

O.11.20 Eksamen V96-97 *[Opgave 3]*

Lad (x_n) være en følge af vektorer i et komplekst (separabelt) hilbertrum H, og antag at det for ethvert x i H gælder at talfølgen $\langle x_n, x\rangle$ er konvergent.

(a) Vis at (x_n) er begrænset.

(b) Vis at der findes en vektor x_∞ i H således at $\langle x_n - x_\infty, x\rangle \to 0$ for ethvert x i H.

O.11.21 Eksamen S00 *[Opgave 1]*

Lad H være et (separabelt) hilbertrum og lad $A : \mathsf{H} \longrightarrow \mathsf{H}$ være en lineær afbildning defineret herpå. Som sædvanlig betegner A^2 operatoren givet ved sammensætning af A med sig selv.

(a) Antag at der gælder
$$\left\langle A^2x, y\right\rangle = \langle x, Ay\rangle$$
for alle $x, y \in \mathsf{H}$. Vis at da er A kontinuert.

(b) Antag at der gælder
$$\left\langle A^2x, y\right\rangle - \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle + \left\langle x, A^2y\right\rangle$$
for alle $x, y \in \mathsf{H}$. Vis at da er A kontinuert.

Besvarelse
Alternativ besvarelse
Noter

O.11.22 Eksamen S02 *[Opgave 1]*

To funktioner

$$\alpha, \beta : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

er givet ved henholdsvis

$$\alpha(n) = \lfloor n/2 \rfloor, \qquad \beta(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor,$$

hvor $\lfloor x \rfloor$ med $x \in [0, \infty[$ betegner *heltalsdelen* af x, altså det største heltal, der er mindre end eller lig x.

Lad en ortonormalbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ være givet for et separabelt hilbertrum H over $\mathbb{K}$.

(a) Vis, at der findes netop én operator $A \in L(\mathsf{H})$ så

$$Ae_n = e_{\alpha(n)}.$$

Bestem et konkret udtryk for $A^* e_n$. Find $\|A\|$.

(b) Vis, at der ikke findes nogen operator $B \in L(\mathsf{H})$ så

$$Be_n = e_{\beta(n)}.$$

Besvarelse
Noter

O.12 Ortonormalsystemer

O.12.7 En sum af lukkede underrum der ikke selv er lukket

Betragt et hilbertrum H med en tællelig ortonormalbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Sæt

$$f_n = e_{-n} - ne_n$$

for hvert $n \in \mathbb{N}$, og lad

$$\mathsf{X}_1 = \overline{\operatorname{span}\{e_0, e_1, e_2 \dots\}}$$
$$\mathsf{X}_2 = \overline{\operatorname{span}\{f_1, f_2, \dots\}}$$

Vis

(i) $\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2$ er tæt

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_{-n} \in \mathsf{H} \backslash (\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2)$

Konkluder at $\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2$ ikke er et afsluttet underrum.

Vink
Noter

O.12.8 Matricer for operatorer

Lad H være et hilbertrum med en tællelig ortonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vi benævner for hver $A \in L(\mathsf{H})$ familien af skalarer

$$\alpha_{nm} = \langle Ae_m, e_n \rangle$$

som *matricen* for A.

Vi siger at en familie af skalarer (α_{nm}) *definerer en operator* hvis der findes $A \in L(\mathsf{H})$ sådan at $\alpha_{nm} = \langle Ae_m, e_n \rangle$, altså så at (α_{nm}) er matricen for A.

(a) Vis at hvis $\alpha_{nm} = \beta_{nm}$ for alle $n, m \in \mathbb{N}$, hvor (α_{nm}) og (β_{nm}) er matricerne for henholdsvis A og B fra $L(\mathsf{H})$, så er $A = B$.

(b) Vis at en familie af skalarer (α_{nm}) som definerer en operator må være begrænset. Find en begrænset familie af skalarer (α_{nm}) som ikke definerer en operator.

(c) Antag at $\alpha_{nm} = 0$ når $n \neq m$, og at $|\alpha_{nn}| \leq C < \infty$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis at (α_{nm}) definerer en operator A med $\|A\| \leq C$.

Besvarelse
Noter

O.12.9 Schur test

Antag at $\alpha_{nm} \geq 0$ for alle n, m, og at der findes skalarer $p_n > 0$ og $\beta, \gamma > 0$ med egenskaberne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nm} p_n \leq \beta p_m \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} p_m \leq \gamma p_n.$$

Vis at (α_{nm}), i notationen fra opgave O.12.8, definerer en operator A med $\|A\|^2 \leq \beta\gamma$.

Vink

O.12.10 Tschebyscheff polynomier

Der er en trykfejl i bogen; man skal sætte $T_0 = \pi^{-1/2}$, jf. T.97.1. At vise at systemet er en basis kræver Stone-Weierstrass' sætning.

Kontroller ved direkte udregning at Tschebyscheff polynomierne defineret i [MV, 12.13(3)] udgør et ortonormalsystem.

Vink
Forudsætninger om lebesgueintegration

O.12.11 Diagonalisering på $\mathbb{R}^n$

Lad H være det reelle hilbertrum af dimension $n < \infty$, og lad $A \in L(\mathsf{H})$ være en selvadjungeret operator.

(a) Lad en ortonormalbasis for H være givet og vis at den tilhørende matrix for A er symmetrisk.

(b) Redegør ved henvisning til lineær algebra for at H har en ortonormalbasis med hensyn til hvilken matricen for A er diagonal.

(c) Vis at

$$\|A\| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ er en egenværdi for } A\}$$

O.12.12 Konkret operatornorm, II

Tema fortsat fra Opgave O.5.16, fortsættes i opgave O.12.18.

Bestem operatornormen af operatorerne på $\mathbb{R}^2$ der har matricer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

henholdsvis, i den sædvanlige basis.

Vink

O.12.13 Modeksempel til [MV, opgave 9.4]

Lad H være et separabelt hilbertrum, og find en selvadjungeret operator $A \in L(\mathsf{H})$ som er injektiv men ikke surjektiv, og har tæt billede $\mathsf{X} = R(A)$. Vis at når vi betragter A som en operator i $L(\mathsf{H}, \mathsf{X})$, så gælder der *ikke* $\operatorname{codim} R(A') = \dim N(A)$.

Vink

O.12.14 Haar-basen for $L_2([0,1])$

Lad $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ være givet ved

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \le x < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og definer

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

for alle $j, k \in \mathbb{Z}$.

Vis at

$$\{\psi_{j,k} \mid 0 \leq k < 2^j, j \geq 0\} \cup \{1\}$$

udgør en ortonormalbasis for $L_2([0,1])$.

Forudsætninger om lebesgueintegration

O.12.15 Unitære og ortonormalbaser

Lad H være et hilbertrum med ortonormalbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Bestem en entydig korrespondance mellem

$$\{U \in L(\mathsf{H}) \mid U \text{ er unitær}\}$$

og

$$\{(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathsf{H} \mid (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ er en ortonormalbasis for } \mathsf{H}\}$$

O.12.16 Hilbertmatricen

Betragt $\ell_2(\mathbb{N})$ udstyret med den sædvanlige ortonormalbasis. Vis at matricen

$$\alpha_{nm} = \frac{1}{n+m-1}, \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

definerer en operator $T \in L(\ell_2(\mathbb{N}))$ med $\|T\| \leq \pi$. *[Altså at der findes T der opfylder $\langle Te_m, e_n\rangle = \alpha_{nm}$]*

Vink

Strategi

Besvarelse

Noter

O.12.17 Projektioner og unitære på $\mathbb{R}^2$

Betragt hilbertrummet $\mathbb{R}^2$ udstyret med den sædvanlige ortonormalbasis. Betragt herpå en operator $A \in L(\mathbb{R}^2)$ og dens matrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = \langle Ae_j, e_i\rangle$$

(a) Angiv kriterier, udtrykt ved a_{ij}, for at A er en ortogonal projektion.

(b) Angiv kriterier, udtrykt ved a_{ij}, for at A er unitær.

Besvarelse

Noter

O.12.18 Konkret operatornorm, III

Tema fortsat fra Opgave O.12.12.

Betragt hilbertrummet $\mathbb{R}^2$ udstyret med den sædvanlige ortonormalbasis. Betragt herpå en operator $A \in L(\mathbb{R}^2)$ og dens matrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$$

Bevis formlen

$$\begin{aligned} \|A\| \;=\; & \frac{1}{2}\Big(2\,{a_{11}}^2 + 2\,{a_{21}}^2 + 2\,{a_{22}}^2 + 2\,{a_{12}}^2 + \\ & 2\left[({a_{12}}^2 + {a_{11}}^2 - 2\,a_{21}\,a_{12} + {a_{21}}^2 + 2\,a_{11}\,a_{22} + {a_{22}}^2)\right. \\ & \left.({a_{12}}^2 + {a_{11}}^2 + 2\,a_{21}\,a_{12} + {a_{21}}^2 - 2\,a_{11}\,a_{22} + {a_{22}}^2)\right]^{1/2}\Big)^{1/2} \end{aligned}$$

gerne ved brug af et computeralgebrasystem.

Strategi

Besvarelse

Noter

O.12.19 Permutationsoperatorer

Lad H være et hilbertrum med ortonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Lad $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ være en bijektion af $\mathbb{Z}$ på $\mathbb{Z}$. Redegør for at der ved

$$U_\sigma e_n = e_{\sigma(n)}$$

fastlægges en operator på H. Find dens adjungerede og vis at U_σ er unitær.

O.12.20 Gram-Schmidt følger

Lad $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en lineær uafhængig følge af vektorer i et (separabelt) hilbertrum H. Der erindres om at Gram-Schmidt proceduren giver et ortonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ med egenskaben

$$\operatorname{span}\{v_n \mid n \le N\} = \operatorname{span}\{e_n \mid n \le N\} \tag{†}$$

for alle $N \in \mathbb{N}_0$. Vi kalder en sådan følge for en *Gram-Schmidt følge* for v_n.

(a) Redegør for at Gram-Schmidt følgen e_n er entydig op til en skalar i følgende forstand: Hvis et andet ortonormalsystem $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ opfylder (†), så findes en følge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ af skalarer med $|\lambda_n| = 1$ og egenskaben

$$e_n = \lambda_n e'_n$$

(b) Vis at hermitefunktionerne $(H_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en Gram-Schmidt følge i hilbertrummet $L_2(\mathbb{R})$ for følgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ givet ved $v_n(x) = x^n e^{-x^2/2}$.

O.12.21 Eksamen V96-97 *[Opgave 4]*

I det følgende siges to operatorer A og B på et (separabelt) hilbertrum H at være *unitært ækvivalente* såfremt $B = VAV^*$ for en passende unitær operator V på H.

Antag nu at $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ er en ortonormalbasis for H og lad S (det tosidede skift) betegne den unitære operator givet ved

$$Se_n = e_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Lad endvidere U betegne en anden unitær operator på H.

(a) Vis at hvis $|\langle Ux, x\rangle| \geq \varepsilon \|x\|^2$ for et $\varepsilon > 0$ og for alle x i H så er U og S ikke unitært ækvivalente.

(b) Vis at hvis $U^n x = x$ for et helt tal $n \neq 0$ og en vektor $x \neq 0$ så er U og S ikke unitært ækvivalente.

(c) Vis at hvis $Ue_n = e_{\sigma(n)}$ for alle n, hvor σ er en permutation af $\mathbb{Z}$ som virker transitivt ($\forall n, m \exists r : \sigma^r(n) = m$) og frit ($\forall n, m : n \neq 0 \Longrightarrow \sigma^n(m) \neq m$), så er U og S unitært ækvivalente.

O.12.22 Eksamen S98 *[Opgave 1]*

Lad T være en begrænset operator på et (separabelt) hilbertrum H. Vis følgende påstande.

(a) Hvis

$$\forall \xi \in \mathsf{H} : \|T\xi\| = \|T^*\xi\|,$$

så gælder der $TT^* = T^*T$.

(b) Hvis

$$\forall \xi \in \mathsf{H} : \|T\xi\| = \|\xi\|,$$

så gælder der $T^*T = 1$.

(c) $\dim \mathsf{H} < \infty$ netop når der gælder

$$\forall T \in L(\mathsf{H}) : T^*T = 1 \Longrightarrow TT^* = 1.$$

Noter

O.12.23 Eksamen S98 *[Opgave 3]*

Lad T være en lineær afbildning på et (separabelt) hilbertrum H som opfylder at

$$\forall y \in \mathsf{H} : x \to \langle Tx, y\rangle \quad \text{er kontinuert.}$$

Vis at T er kontinuert.

O.15 Kompakte operatorer

O.15.7 *Oversat**

Lad $\mathsf{E}, \mathsf{F}, \mathsf{G}$ være banachrum og betragt

$$K \in K(\mathsf{E}, \mathsf{F}) \qquad T \in L(\mathsf{F}, \mathsf{G})$$

hvor T er injektiv. Vis at der findes, for hvert $\varepsilon > 0$, en konstant $C_\varepsilon > 0$ så at

$$\|Kx\| \leq \varepsilon \|x\| + C_\varepsilon \|TKx\|$$

for alle $x \in \mathsf{E}$.

Vink

O.15.11 Kompakte projektioner

Lad P være en projektion på et banachrum E. Vis

$$P \in K(\mathsf{E}) \iff P \in F(\mathsf{E}).$$

O.15.12 Detaljer om dele af [MV, Example 15.2(2-3)]

Lad $k \in C([0,1] \times [0,1])$ være givet. Vi benytter uniform norm på $C([0,1]))$ som sædvanlig. Gennemfør argumentet for at der ved

$$K_1(f)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy$$

defineres en operator $K_1 \in K(C([0,1]))$. Gennemfør argumentet for at der ved

$$K_2(f)(x) = \int_0^x k(x,y) f(y) dy$$

defineres en operator $K_2 \in K(C([0,1]))$.

Forudsætninger om riemannintegration

O.15.13 Isometrier og kompakte operatorer

Lad E være et banachrum og lad $A, T \in L(\mathsf{E})$ være givne. Antag at T er en isometri. Vis

$$A \in K(\mathsf{E}) \iff TA \in K(\mathsf{E})$$

O.15.14 Automatisk invertibilitet

Lad E være et banachrum og $A \in K(\mathsf{E})$. Antag at $\lambda > \|A\|$ og vis at $\lambda I - A$ er invertibel.

O.15.15 Skift på ℓ_p-rum

Lad $1/p + 1/q = 1$, og betegn med $\Phi_p : \ell_p \longrightarrow \ell_q'$ den kanoniske isometriske isomorfi.

(a) Vis at der ved
$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$
defineres en operator $S \in L(\ell_p)$.

(b) Vis at S ikke har nogen egenværdier.

(c) Vis at der ved
$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4 \dots)$$
defineres en operator $T \in L(\ell_q)$.

(d) Vis at ethvert $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| < 1$, er en egenværdi for T.

(e) Vis at $T = \Phi_q^{-1} \circ S' \circ \Phi_q$.

(f) Vis at ethvert $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| < 1$, er en egenværdi for S'.

Strategi

O.15.16 Adjunktionsinvarians af $F(\mathsf{H}, \mathsf{G})$

Resultatet her skal sammenlignes med [MV, 15.4]

Vis at hvis H og G er (separable) hilbertrum, så er $A \in L(\mathsf{H}, \mathsf{G})$ af endelig rang netop når A^* er af endelig rang.

Vink

O.15.17 Diagonalisering af projektioner

Lad E være et banachrum og lad $P \in K(\mathsf{E})$ være en kompakt projektion. Bestem en egenværdifølge for P, udtrykt ved hjælp af $n = \dim R(P)$.

O.15.18 Eksamen V85-86 *[Opgave 3]*

Lad Ω være et kompakt hausdorffrum og $C(\Omega)$ rummet af kontinuerte funktioner fra Ω ind i $\mathbb{C}$. Udstyr $C(\Omega)$ med den sædvanlige norm $\|\cdot\|_\infty$. Lad X betegne et banachrum og lad $T \in L(\mathsf{X}, C(\Omega))$.

(a) Vis, at der findes en afbildning
$$\tau : \Omega \to \mathsf{X}'$$
så
$$(Tx)(\omega) = \tau(\omega)(x) = \langle\!\langle x, \tau(\omega) \rangle\!\rangle_{\mathsf{X}}, \qquad \forall \omega \in \Omega,\ x \in \mathsf{X}.$$

(b) Vis, at $\|T\| = \sup_{\omega\in\Omega} \|\tau(\omega)\|$.

(c) Vis, at hvis τ er kontinuert i norm-topologien på X', så er T en kompakt operator.

(d) Lad $\varphi \in C([0,1]\times[0,1])$ og definer

$$T : C([0,1]) \to C([0,1])$$

ved

$$Tf(y) = \int_0^1 \varphi(x,y) f(x)\, dx.$$

Gør rede for at T er kompakt.

Noter

O.16 Kompakte operatorer på hilbertrum

O.16.5 *Oversat, opdelt**

Studiet af denne operator fortsættes i opgave O.16.14

Betragt hilbertrummet $\mathsf{H} = L_2([0,2\pi])$ og redegør for at der ved

$$K(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

defineres en operator $K \in L(\mathsf{H})$.

(a) Bestem K^*.

(b) Vis at $R(K) \subseteq C([0,2\pi])$.

(c) Vis at K er en kompakt operator.

(d) Vis at $\sigma(K) = \{0\}$.

Forudsætninger om lebesgueintegration [til (a)]
Forudsætninger om lebesgueintegration [til (b)]
Strategi

O.16.7 *Oversat, tilpasset pensum*

Lad H være et (separabelt) hilbertrum over $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, og lad $(\alpha_n) \in \ell_2(\mathbb{N}) = \ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ være givet. Vis at matricen

$$(\alpha_n \overline{\alpha_m})$$

definerer en operator A. Vis at A er kompakt og selvadjungeret, og bestem $\sigma(A)$. Diagonalisér A.

Vink

O.16.12 Kompakte operatorer er svag-norm kontinuerte

Du behøver ikke at forstå titlen for at kunne regne opgaven; men jf. eventuelt P.7.

Lad H være et (separabelt) hilbertrum og betragt $A \in K(\mathsf{H})$. Antag at (x_n) er en følge i H der opfylder

$$\langle x_n, y \rangle \longrightarrow 0$$

for alle $y \in \mathsf{H}$. Vis at

$$\|Ax_n\| \longrightarrow 0$$

Vink
Strategi
Besvarelse
Noter

O.16.13 Positivitet vs selvadjungerethed

Lad H være et (separabelt) hilbertrum over $\mathbb{K}$ og lad $A \in K(\mathsf{H})$ være en positiv operator. Kan man konkludere at A er selvadjungeret når $\mathbb{K} = \mathbb{C}$? Når $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

O.16.14 Integraloperatoren fra Opgave O.16.5

Betragt operatoren $K \in L(\mathsf{H})$ fra opgave O.16.5.

(e) Vis at $\sigma(KK^*) = \left\{ \left(\frac{4}{2n-1} \right)^2 \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$.

(f) Bestem $\|K\|$.

Vink

O.16.15 Diagonaloperatorer

Lad H være et hilbertrum over $\mathbb{K}$ udstyret med en tællelig ortonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Redegør for at der for enhver begrænset følge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defineres en operator ved

$$Ae_n = \alpha_n e_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

Bevis at A er en kompakt operator hvis og kun hvis $\alpha_n \longrightarrow 0$ når $n \longrightarrow \infty$.

Strategi
Besvarelse
Noter

O.16.16 Refleksionsoperator

Betragt hilbertrummet $\mathsf{H} = L_2([0, 2\pi])$ og redegør for at der ved

$$R(f)(x) = f(2\pi - x)$$

defineres en operator $R \in L(\mathsf{H})$.

(a) Vis at R opfylder betingelserne fra opgave O.11.18.

(b) Vis at R er diagonaliserbar og bestem $\sigma(R)$.

Forudsætninger om lebesgueintegration
Strategi

O.16.17 En anden integraloperator

Betragt hilbertrummet $\mathsf{H} = L_2([0, 2\pi])$ og redegør for at der ved

$$K(f)(x) = \int_{2\pi - x}^{2\pi} f(t)dt$$

defineres en operator $K \in L(\mathsf{H})$. Vis at K er kompakt og selvadjungeret. Bestem $\sigma(K)$ og opskriv K på formen

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle \cdot, e_n \rangle e_n$$

Forudsætninger om lebesgueintegration
Strategi
Besvarelse
Noter

O.16.18 Eksamen V87-88 *[Opgave 4]*

Lad H være et (separabelt) hilbertrum over $\mathbb{C}$, og lad N betegne mængden af kompakte positive operatorer i enhedskuglen i $L(\mathsf{H})$, altså

$$N = K(\mathsf{H}) \cap \{A \in L(\mathsf{H}) \mid \|A\| \leq 1,\ \forall x \in H : \langle Ax, x\rangle \geq 0\}.$$

(a) Vis, at N er en afsluttet konveks delmængde af $L(\mathsf{H})$.

(b) Vis, at hvis $A \in N$ og $x \in \mathsf{H}$ og $\langle Ax, x\rangle = 0$, så er $Ax = 0$.

Vink til (b)
Noter

O.16.19 Eksamen V91-92 *[Opgave 3]*

Lad H være et komplekst (separabelt) hilbertrum og lad $LG(\mathsf{H})$ betegne mængden af operatorer T i $L(\mathsf{H})$ der er venstreinvertible, i den forstand at $ST = I$ for et passende S i $L(\mathsf{H})$. For ethvert A i $L(\mathsf{H})$ defineres

$$m(A) = \inf\{\, \|Ax\| \mid x \in \mathsf{H}\,,\ \|x\| = 1\,\}\ .$$

(a) Vis at hvis $T \in LG(\mathsf{H})$ så vil $m(T) > 0$.

(b) Vis omvendt at hvis $T \in L(\mathsf{H})$ med $m(T) > 0$ så vil $T \in LG(\mathsf{H})$.

O.16.20 Eksamen V92-93 *[Opgave 3]*

På et komplekst (separabelt) hilbertrum H betragtes operatoren T i $L(\mathsf{H})$.

(a) Vis at hvis $T + T^* \geq 0$ (dvs. $T + T^*$ er positiv) så gælder

$$\|(T + I)x\| \geq \|x\| \ \text{ og } \ \|(T + I)x\| \geq \|(T - I)x\|$$

for ethvert x i H.

(b) Vis at hvis $T + T^* \geq 0$ så er $T + I$ invertibel i $L(\mathsf{H})$ og $\|(T - I)(T + I)^{-1}\| \leq 1$.

(c) Antag nu omvendt at $T + I$ er invertibel i $L(\mathsf{H})$ og at $\|(T - I)(T + I)^{-1}\| \leq 1$, og slut heraf at $T + T^* \geq 0$.

Besvarelse

O.16.21 Eksamen V94-95 *[Opgave 3]*

Lad H være et komplekst (separabelt) hilbertrum. Der erindres om at vi skriver $A \leq B$ når $A, B \in L(\mathsf{H})$ med $B - A$ positiv.

(a) Vis, at når $A, S, T \in L(\mathsf{H})$ og $T \leq S$, så er $ATA^* \leq ASA^*$.

I det følgende antages, at

$$S^*S \leq SS^*.$$

(b) Vis for ethvert tal λ i $\mathbb{C}$ at

$$N(T - \lambda I) \subseteq N((T - \lambda I)^*).$$

(c) Vis, at $(T^*T)^2 \leq (T^2)^*T^2$, og slut heraf at $T^2 = 0$ medfører $T = 0$.

(d) Vis, for eksempel ved induktion, at $T^n = 0$ medfører $T = 0$ for ethvert n i $\mathbb{N}$.

Besvarelse
Noter

O.16.22 Eksamen V95-96 *[Opgave 3]*

Lad H være et komplekst (separabelt) hilbertrum. I det følgende siges to operatorer S og T i $L(\mathsf{H})$ at være unitært ækvivalente, hvis der findes en unitær operator U på H, således at $US = TU$. Dette skrives $S \sim T$.

(a) Vis at $S \sim T$ medfører $SS^* \sim TT^*$.

(b) Vis at hvis I som sædvanligt betegner enhedsoperatoren ($Ix = x$ for ethvert x i H), så findes der ingen operator T i (H) så $T \sim T + I$.

(c) Vis at relationen $T \sim \frac{1}{2}T$ kun er opfyldt for én eneste operator T i $L(\mathsf{H})$.

(d) Vis at der findes en selvadjungeret, invertibel operator T i $L(\mathsf{H})$, $T \neq I$, som opfylder relationen $2I - T \sim T^{-1}$.

Vink til (d)
Noter

O.16.23 Eksamen V97-98 *[Opgave 1a]*

Lad $T \in L(\mathsf{H})$ være en kompakt operator på det komplekse hilbertrum H. Lad $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis for H.

Vis, at

$$\|Te_n\| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Vink
Noter

O.16.24 Eksamen V97-98 *[Opgave 1b]*

(a) Lad $S \in L(\mathsf{H})$ være givet ved

$$Se_n = \frac{1}{n} e_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Vis, at S er kompakt.

(b) Find samtlige egenværdier for S. Bestem $\sigma(S)$.

Vink
Noter

O.16.25 Eksamen S98 *[Opgave 2]*

Lad $\ell^2(\mathbb{Z})$ betegne et hilbertrum af kvadratisk summable følger og (λ_n) en begrænset følge af komplekse tal. En *vægtet skifteoperator* S er defineret ved

$$Sx = y, \qquad y_n = \lambda_n x_{n-1}$$

hvor $x = (x_n)$ er et vilkårligt element af $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Vis at S er kompakt netop når

$$\lim_{n \to \pm\infty} \lambda_n = 0.$$

Noter

O.16.26 Eksamen V98-99 *[Opgave 1]*

Lad $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ og $\{\eta_1, \eta_2, \ldots\}$ være to ortonormale følger af vektorer i et (separabelt) hilbertrum H. For en vilkårlig vektor $x \in \mathsf{H}$ lad

$$T_N(x) = \sum_{n \le N} c_n \langle x, \eta_n \rangle \xi_n$$

hvor $\{c_n\}$ er en given følge af komplekse tal.

(a) Vis at

$$\sup_n |c_n| < \infty$$

netop når der findes en begrænset operator T således at $T_N x \to Tx$ for hvert $x \in \mathsf{H}$.

(b) Vis at

$$\lim_{i \to \infty} |c_n| = 0$$

netop når T er kompakt.

(c) Find T^*.

Noter

O.16.27 Eksamen V98-99 *[Opgave 3]*

Vi sætter, for $f \in L^2([0, 2\pi])$,

$$Kf(x) = \int_0^{2\pi} f(y)\cos(x-y)dy.$$

(a) Vis at K er en selvadjungeret operator på $L^2([0, 2\pi])$.

(b) Vis at $\dim R(K) < \infty$.

(c) Vis at $\dim R(K) = 2$.

(d) Vis at $K^2 = \pi K$, og find $\|K\|$.

Noter

O.16.28 Eksamen S99 *[Opgave 2]*

Lad H betegne det komplekse hilbertrum $L_2([0, 2\pi])$ udstyret med det sædvanlige indre produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Det antages kendt, og ønskes derfor ikke bevist, at mængden

$$\mathcal{O} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

udgør en ortonormalbasis for H.

(a) Vis at der er én og kun én operator $T \in L(\mathsf{H})$ med egenskaben

$$T1 = 1 \qquad T\sin(nx) = \frac{1}{n}\cos(nx) \qquad T\cos(nx) = \frac{1}{n}\sin(nx)$$

(b) Vis at vektorerne i $\mathcal{O}$ kan indiceres over $\mathbb{N}$ som

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots, e_{2n}, e_{2n+1}, \ldots$$

således at den tilsvarende matrix $(\langle Te_j, e_i\rangle)_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ for T bliver af formen

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & \frac{1}{2} & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & \frac{1}{n} & \\ & & & & & & \frac{1}{n} & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

med nul på alle tomme pladser.

(c) Vis at T er en kompakt og selvadjungeret operator.

(d) Bestem egenværdierne for T, og bestem spektret $\sigma(T)$ for T.

(e) Bestem et uendeligdimensionalt afsluttet underrum X af H sådan at

$$\langle Tx, x\rangle < 0$$

for alle $x \in \mathsf{X}\backslash\{0\}$.

Vink til (d)
Besvarelse
Noter

O.16.29 Eksamen V99-00 *[Opgave 2]*

Vi betragter et komplekst hilbertrum H med en tællelig basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, og definerer hertil en klasse

$$Z(\mathsf{H}) = \{A \in L(\mathsf{H}) \mid \forall i, j \in \mathbb{N} : \langle Ae_i, e_j\rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

Bemærk at operatorerne i $Z(\mathsf{H})$ netop er dem hvis matrix med hensyn til $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ udelukkende har heltallige indgange.

Der erindres om at klasserne $K(\mathsf{H})$ og $F(\mathsf{H})$ er defineret som de operatorer på H som er kompakte, henholdsvis har endelig-dimensionalt billede.

(a) Vis ved eksempel at $Z(\mathsf{H})\backslash K(\mathsf{H}) \neq \emptyset$, altså at der findes en operator i $Z(\mathsf{H})$ som *ikke* er kompakt.

Vis ved et andet eksempel at der findes $A \in Z(\mathsf{H})$ med $\sigma(A) \not\subseteq \mathbb{Z}$, altså at en operator i $Z(\mathsf{H})$ kan have spektralværdier der ikke er hele tal.

(b) Lad $A \in Z(\mathsf{H})$ og et heltal $M \in \mathbb{N}$ være givne. Vis at der findes $N \in \mathbb{N}$ sådan at

$$\langle Ae_M, e_n\rangle = 0 = \langle Ae_n, e_M\rangle$$

for hvert $n \geq N$.

(c) Vis at hvis $A, B \in Z(\mathsf{H})$ da vil også $AB \in Z(\mathsf{H})$.

(d) Vis at $Z(\mathsf{H}) \cap K(\mathsf{H}) = Z(\mathsf{H}) \cap F(\mathsf{H})$, altså at en operator i $Z(\mathsf{H})$ er kompakt netop når den har endelig rang.

Vink til (d)
Besvarelse
Noter

O.16.30 Eksamen S00 *[Opgave 3]*

Betragt et uendelig-dimensionalt reelt separabelt hilbertrum H og bemærk at enhver ortonormalbasis for H efter eventuel omindicering kan skrives som

$$(e_i)_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$$

Vi siger at en operator $A \in L(\mathsf{H})$ er *antidiagonaliserbar* hvis der findes en ortonormalbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ og en reel talfølge $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ således at

$$Ae_i = \lambda_i e_{-i}.$$

I dette tilfælde siger vi også at $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ antidiagonaliserer A med hensyn til $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$.

(a) Vis, at der findes en operator $U \in L(\mathsf{H})$ som kan antidiagonaliseres med hensyn til $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ givet ved

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & i > 0 \\ -1 & i < 0 \end{cases}$$

Redegør for, at U er unitær og at $U \notin K(\mathsf{H})$.

(b) Lad $A \in K(\mathsf{H})$ være antidiagonaliseret af $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ med hensyn til $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$, og antag videre at A er selvadjungeret. Vis, at $\lambda_i = \lambda_{-i}$ for alle $i \in \mathbb{N}$. Bestem en ortonormalbasis for H bestående af egenvektorer for A og vis at $\sigma(A) = -\sigma(A)$.

(c) Lad $B \in K(\mathsf{H})$ være selvadjungeret og antag at der for hver $\mu \in \sigma(B)\setminus\{0\}$ gælder

$$\dim N(\mu I - B) = \dim N(-\mu I - B)$$

Antag endvidere at

$$\dim N(B) \notin \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

Vis at B er antidiagonaliserbar.

Lad nu $\mathsf{H} = L_2([-1,1])$. Ved

$$(Gf)(x) = \int_{-x}^{1} f(y)dy$$

defineres en operator $G \in K(\mathsf{H})$ som er selvadjungeret, og hvis egenvektorer alle er (kan repræsenteres ved) vilkårligt ofte differentiable funktioner. Dette ønskes ikke eftervist og kan benyttes ved besvarelsen.

(d) Afgør hvorvidt G er antidiagonaliserbar.

Besvarelse
Alternativ besvarelse
Noter

O.16.31 Eksamen S01 *[Opgave 3]*

Vi siger, at et komplekst polynomium af n'te grad er et udtryk af formen

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \alpha_{n-2} z^{n-2} + \cdots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0,$$

hvor $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, og hvor $\alpha_n \neq 0$.

Lad E være et banachrum over $\mathbb{C}$ med $\dim \mathsf{E} = \infty$. Vi siger, at $A \in L(\mathsf{E})$ *er rod i p* hvis operatoren givet ved

$$\alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \alpha_{n-2} A^{n-2} + \cdots + \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 I,$$

er nuloperatoren i $L(\mathsf{E})$. Her betegner I identitetsoperatoren i E, og A^i den operator, der opnås ved komposition af A med sig selv i gange.

(a) Vis, at hvis $A \in L(\mathsf{E})$ er rod i et komplekst polynomium p, da er enhver egenværdi λ for A rod i p i sædvanlig forstand. Redegør for, at enhver projektion $P \in L(\mathsf{E})$ er rod i et passende valgt andengradspolynomium.

(b) Antag, at der om den kompakte operator $B \in K(\mathsf{E})$ gælder, at den er rod i et komplekst polynomium p af første eller højere grad. Vis, at $\sigma(B)$ er en endelig mængde. Vis, at $p(0) = 0$.

Lad nu H være et separabelt hilbertrum over $\mathbb{C}$ med $\dim \mathsf{H} = \infty$.

(c) Antag, at en selvadjungeret, kompakt operator $C \in K(\mathsf{H}), C^* = C$ er rod i et komplekst polynomium p af første eller højere grad. Vis, at $C \in F(\mathsf{H})$, altså at $\dim R(C) < \infty$.

(d) Vis, at der findes netop ét normeret komplekst andengradspolynomium

$$p(z) = z^2 + \beta z + \gamma$$

der har en rod $D \in K(\mathsf{H}) \backslash F(\mathsf{H})$, og angiv et konkret eksempel på en sådan rod.

Vink til (d)
Besvarelse
Noter

O.16.32 Ekstraspørgsmål til Eksamen S01 *[Opgave 3]*

Vis, at hvis et polynomium $q \neq 0$ har en rod i $K(\mathsf{H}) \backslash F(\mathsf{H})$, så er andengradspolynomiet fundet i (d) herover en faktor af q.

O.16.33 Eksamen S02 *[Opgave 4]*

Lad H være et komplekst, uendelig-dimensionalt og separabelt hilbertrum, og lad $A \in K(\mathsf{H})$ med $A = A^*$ betegne en selvadjungeret, kompakt operator på H.

(a) Vis, at der findes $B \in K(\mathsf{H})$ med $B = B^*$ så

$$\sigma(A) = \sigma(B)$$

og så

$$\sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ er en egenværdi for } B\}$$

Vink
Besvarelse
Noter

Kapitel P

Projektkatalog

I dette afsnit gives korte beskrivelser af nogle mulige projekter. Dersom man skulle have andre ideer til projekter der baserer sig helt eller delvis på materiale fra 3AN, så er der en mulighed for at få sådanne projekter udviklet – tag kontakt til forelæseren herom så snart som muligt.

De med stjerne ($*$) markerede projekter kræver 3MI. Øvrige detaljer om benyttet materiale og pensum for projekterne vil forefindes i internetudgaven.

P.1 Avanceret diagonalisering

I [MV, §15–16] udvikler vi en stærk teori for diagonalisering af kompakte operatorer $A \in L(\mathsf{E})$ hvor E er enten et banachrum eller et hilbertrum. I det meget interessante specialtilfælde hvor $\mathsf{E} = \mathbb{R}^n$ eller $\mathsf{E} = \mathbb{C}^n$ giver teorien ny indsigt om matrixregning.

Fx vil vi i [MV, §15] komme frem til de fleste ingredienser der er involveret i at vise at der for enhver lineær afbildning på et endelig-dimensionalt vektorrum findes en basis i hvilken operatoren er *subdiagonal*:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ \mu_1 & \lambda_2 & & & & \\ & \mu_2 & \lambda_3 & & & \\ & & \mu_3 & \lambda_4 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \mu_{n-1} & \lambda_n \end{bmatrix}$$

hvor $\mu_m \in \{0, 1\}$ for hvert m. Dette er det nærmeste man kan komme på at diagonalisere en vilkårlig matrix, og har mange praktiske anvendelser; fx kan man benytte det til at give svar på spørgsmål om hvilke matricer A der har en logaritme, i den forstand at der findes en matrix B så at

$$A = \exp(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n$$

Man kan bemærke at idétransporten i projektet, i modsætning til det meste matematik vi udvikler i 3AN, primært går fra det generelle til det specialiserede. De viste resultater har endvidere stor praktisk betydning, fx i økonomiske anvendelser af matematik. Projektet har derfor særlig relevans for deltagere med ambitioner om en karriere i anvendt matematik.

Noter

P.2 Dualitet for målrum*

Vi studerer følgerummene

$$c_0 \qquad \ell_1 \qquad \ell_p \qquad \ell_\infty$$

intensivt i [MV, §7], og viser sætninger af formen

$$c_0' \cong \ell_1 \qquad \ell_p' \cong \ell_q \qquad \ell_1' \cong \ell_\infty.$$

hvor $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Disse sætninger er kun toppen af et stort isbjerg. Lad fx X være et topologisk rum, da er alle funktionaler i $C(X)'$ af formen

$$f \mapsto \int_X f(x)g(x)d\mu(x)$$

hvor $g \in C(X)$ og μ er et "pænt" mål på X. Og for sådanne mål gælder endda, under ekstra betingelser, at

$$L_p(X,\mu)' \cong L_q(X,\mu) \qquad L_1(X,\mu)' \cong L_\infty(X,\mu)$$

hvor $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

I [MV] vises disse sætninger i en interessant vekselvirkning mellem funktionalanalyse og målteori, idet man med udgangspunkt i Riesz' repræsentationssætning for hilbertrummet $L_2(X,\mu)$ når frem til rent målteoretiske sætninger af Lebesgue, Radon og Nikodym, og sidenhen benytter disse til at nå frem til funktionalanalytisk indsigt af den ovenfor beskrevne type.

Noter

P.3 Fourier og foldning*

Foldningsproduktet $f * g$ af to funktioner $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

kan med rimelighed betragtes som et "afkom" af f og g der arver de bedste sider fra *begge* forældre. Fx behøver man ikke at vide ret meget om f før man kan konkludere at $f * g$

er uendeligt ofte differentiabel, hvis bare g er det. Da foldningsproduktet ved substitution ses at være symmetrisk, sluttes det tilsvarende med f og g ombyttet.

Foldningsprodukter har stor teknisk betydning internt i den matematiske teori, idet de tillader en systematisk udskiftning af mindre pæne funktioner med mere pæne. Men de rækker langt videre; fx giver sandsynlighedsregningen en sammenhæng mellem foldning og summer af uafhængige stokastiske variable, der forklarer hvorfor man i billedbehandlingsprogrammer benytter foldning til at simulere støj, og derved udviske skarpe kanter i et billede.

Foldning kan studeres og forstås ved hjælp af funktionalanalytiske metoder og begreber. Særligt knyttet er foldning til fouriertransformationen, idet der gælder

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Noter

P.4 Komplekse banachalgebraer

Vi har set hvordan man for elementer A i et banachrum som $L(\mathsf{H})$, hvor H er et hilbertrum, kan uddrage megen interessant information fra spektret $\sigma(A)$. Projektet her omhandler en videre abstraktion af denne idé, idet vi her ser på objekter $\mathfrak{A}$ som ligesom $L(\mathsf{H})$ er udstyret med operationer

$$+, \cdot, \|\cdot\|, *$$

og med en enhed e, og definerer

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda e - a \text{ ej invertibel i } \mathfrak{A}\}$$

Det viser sig nu, at vejene skilles mellem tilfældet $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ og tilfældet $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, og at det komplekse tilfælde er mest interessant. For at kunne vise egenskaber som $\sigma(a) \neq \emptyset$ når $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ inddrager vi resultater, særligt Liouvilles sætning, fra kompleks funktionsteori. Noget tilsvarende gør sig gældende for *Fugledes sætning* som nok er det eneste deciderede lærebogsresultat der tilskrives en nulevende matematiker fra vores institut.

Noter

P.5 Spor og sporklasse

Da operatorrummene $K(\mathsf{H})$ og $L(\mathsf{H})$ er vigtige universer for de kompakte og begrænsede operatorer på hilbertrummet H, og da de er banachrum, er det af interesse at undersøge deres dualitetsteori. Det viser sig, at der gælder

$$K(\mathsf{H})'' \simeq L(\mathsf{H})$$

på en meget naturlig måde.

At vise dette resultat kræver en forståelse af $K(\mathsf{H})'$, og en sådan forståelse kan baseres på begrebet *spor*, der allerede har mening i matrixregning og muligvis vil være kendt herfra. Således defineres sporet af en operator $A \in L(\mathbb{K}^n)$ givet ved $n \times n$-matricen $\underline{A} = (a_{ij})$ som

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn},$$

idet det her er en central observation, at denne værdi ikke afhænger af valg af basis.

Det duale af $K(\mathsf{H})$ kan så løst beskrives som de operatorer i $L(\mathsf{H})$ der har "begrænset spor" i en forstand der er en naturlig udvidelse heraf.

Noter

P.6 Sturm-Liouville problemer

Et eksempel på et Sturm-Liouville problem er spørgsmålet om for hvilke λ systemet

$$\begin{cases} u'' + Au' + Bu = \lambda u \\ au(0) - bu'(0) = 0 \\ cu(1) + du'(1) = 0 \end{cases}$$

har løsninger, hvor a, b, c, d er reelle konstanter og A, B er reelle kontinuerte funktioner.

Det viser sig, at hvis der kun til $\lambda = 0$ findes den oplagte løsning $u = 0$, så kan problemet løses ved at inddrage en operator

$$(G_0 f)(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, y) f(y) W(y)^{-1} dy$$

hvor $\mathcal{G}$ og W er funktioner afledt af dataene i systemet. Da denne operator er en kompakt operator defineret på et passende hilbertrum, så kan teorien om diagonalisering af kompakte operatorer benyttes her med stor succes.

Egenværdierne for G_0 giver netop de søgte værdier af λ, og at de tilsvarende egenvektorer giver løsninger for u i problemet. Projektet giver et fundamentalt eksempel på hvordan man ved at kode en differentialligning som en operator kan transportere informationer fra funktionalanalyse til differentialligningsteori.

Noter

P.7 Svage topologier

Vi har set i [MV, §6–7] at der er et interessant samspil

$$\mathsf{E} \leftrightsquigarrow \mathsf{E}'$$

mellem et normeret rum og dets dualrum. Selv om vi når frem til en vis forståelse af en form for symmetri mellem E og E' så er symmetrien langt fra fuldstændig. Fx ved vi at

$$\overline{A} = A^{\circ\circ}$$

når $A \subseteq \mathsf{E}$ er absolut konveks og $A^{\circ\circ}$ bestemmes ved at gå via E'. Men vi ved ikke noget om hvorvidt

$$\overline{B} = B^{\circ\circ}$$

når $B \subseteq \mathsf{E}'$ er absolut konveks og $B^{\circ\circ}$ bestemmes ved at gå via E.

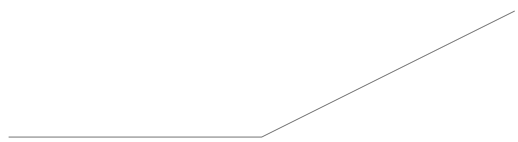
En dybere forståelse af denne problemstilling, og af dualitet i almindelighed, kræver inddragelse af andre topologier på E og E' end dem der kommer fra normer. Projektet omhandler indførelsen af disse såkaldte svage topologier, et studium af deres fundamentale egenskaber, og en diskussion af deres relevans for dualitetsspørgsmål.

Fra et topologisk synspunkt er situationen særligt interessant derved at det giver et eksempel på styrken ved at på samme tid arbejde med to forskellige topologier på et og samme underliggende rum.

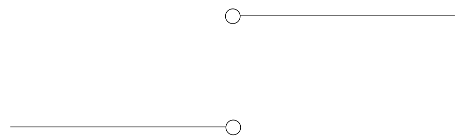
Noter

P.8 Tempererede distributioner*

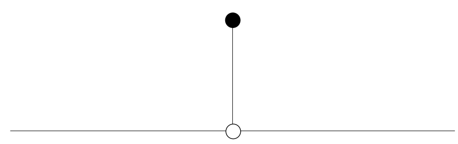
Det har stor teoretisk og praktisk betydning at give rimelige bud på et substitut for "den afledede" af en funktion der ikke er differentiabel, eller ligefrem ikke er kontinuert. *Distributionsteorien* giver en matematisk meget tilfredsstillende løsning på dette problem, idet den afledede til



ville blive



som igen ville have den afledede



Cirklerne på figurerne kræver naturligvis yderligere fortolkning, og den rigtige ramme herfor involverer dualitetsteori, idet vi betragter visse funktionaler på rummet af schwartzfunktioner $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ som generaliserede funktioner, og definerer den afledede $\partial\varphi$ af en sådan funktional φ ved

$$\langle\langle f, \partial\varphi \rangle\rangle = -\left\langle\left\langle f', \varphi \right\rangle\right\rangle$$

Er man således villig til at lade den første funktion $h_1(x) = x \cdot 1_{[0,\infty[}$ repræsentere af φ_1 givet ved

$$\langle\langle f, \varphi_1 \rangle\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h_1(x)dx = \int_0^{\infty} xf(x)dx$$

så får man let

$$\begin{aligned} \langle\langle f, \partial\varphi_1 \rangle\rangle &= \int_0^{\infty} f(x)dx \\ \left\langle\left\langle f, \partial^2\varphi_1 \right\rangle\right\rangle &= f(0), \end{aligned}$$

og derved klar besked om de afledede.

Noter

Kapitel S

Supplerende materiale

I kapitlet her forefindes materiale der supplerer eller erstatter teori fra [MV].

S.1 Stone-Weierstrass' sætning

S.1.1 Kvadratrodslemmaet

Beviset for [MV] 4.13 benytter Stirlings formel, der vist ikke kan forudsættes bekendt her. Vi giver derfor et alternativt bevis.

Bevis for [MV, 4.13]:

Vi viser først påstanden under antagelsen $\|f\|_\infty \leq 1$. Givet $\varepsilon > 0$. Vi argumenterer først for at funktionen $t \mapsto \sqrt{1+t}$ kan rækkeudvikles med konvergensinterval $]-1,1[$ omkring 0. Måske kender man ligefrem rækkeudviklingen

$$\sqrt{1+s} = 1 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{16}s^3 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}s^n + \ldots,$$

men ellers kan man benytte at $\sqrt{1+s} = \exp(\frac{1}{2}\log(1+s))$, og at log har en velkendt rækkeudvikling omkring 0 med konvergensinterval $]-1,1[$. En substitution

$$s = \frac{1}{\frac{1}{2}+\varepsilon^2}t$$

viser så at

$$f(t) = \sqrt{\varepsilon^2 + t}$$

udviklet omkring $\frac{1}{2}$ har konvergensradius $\frac{1}{2}+\varepsilon^2$.

Altså konvergerer potensrækken uniformt i det afsluttede interval $[0,1]$, og ved at medtage tilstrækkeligt mange led i potensrækken får vi et polynomium $p(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i t^i$ så

$$|f(t) - p(t)| < \varepsilon \qquad t \in [0,1]$$

Indsættes heri $t = 0$, fås at $a_0 < 2\varepsilon$, således at

$$|f(t) - q(t)| < 3\varepsilon \qquad t \in [0,1]$$

hvor $q(t) = p(t) - p(0)$ er et polynomium uden konstantled. Og da det ses direkte (fx ved at kvadrere) at

$$|f(t) - \sqrt{t}| < \varepsilon \qquad t \in [0,1]$$

kan vi slutte

$$|q(t) - \sqrt{t}| < 4\varepsilon \qquad t \in [0,1] \tag{S.1}$$

Defineres nu $F \in C(X)$ ved $F(x) = q(f(x))$ er det klart fra (S.1) at

$$\left\| \sqrt{f} - F \right\|_\infty < 4\varepsilon$$

Men $F \in A$ da

$$F = a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_N f^N \in A.$$

Da ε var vilkårlig, og A er afsluttet, er påstanden vist når $\|f\|_\infty \leq 1$. Når $\|f\|_\infty > 1$ viser dette at $\|f\|_\infty^{-1} f \in A$. Da fås

$$f = \|f\|_\infty \left(\|f\|_\infty^{-1} f \right) \in A$$

□

S.2 Dualitet

S.2.1 Dualitetsnotation

Vi skal her kort gøre opmærksom på følgende, meget praktiske, notation, som vi vil benytte i opgaver og ved forelæsninger, selv om den ikke optræder i [MV].

Definition S.2.1.1 Lad E være et normeret rum over $\mathbb{K}$. Vi definerer en afbildning

$$\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{\mathsf{E}} : \mathsf{E} \times \mathsf{E}' \longrightarrow \mathbb{K}$$

ved

$$\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle_{\mathsf{E}} = y(x)$$

for $x \in \mathsf{E}$ og $y \in \mathsf{E}'$.

Når der ikke kan være tvivl om hvilket rum vi arbejder med, skriver vi blot $\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle$. Mange variationer af denne notation anvendes i funktionalanalytisk litteratur; den mest almindelige er nok $\langle x, y \rangle$, men også $\langle y, x \rangle$, (y, x) og (x, y) er ret udbredt.

Notationen stammer fra det indre produkt i hilbertrumsteorien, og vi skal se at der er mange strukturelle ligheder mellem et indre produkt og en sådan dualitetsnotation. Vi vælger imidlertid at anvende forskellige symboler for de to begreber så de ikke kan forveksles. Når læseren har vænnet sig til notationen kan han eller hun benytte $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i stedet.

Vi skal se at den umiddelbare forskel på $\langle \cdot, \cdot \rangle$ og $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ at den første er defineret på et rum af formen $\mathsf{E} \times \mathsf{E}$, og den anden på et rum af formen $\mathsf{E} \times \mathsf{E}'$, i en vis forstand kan bortforklares når E er et hilbertrum. Men der er den helt konkrete forskel at hvor $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ er lineær i begge variable, så er $\langle \cdot, \cdot \rangle$ lineær i første, og konjugeret lineær i anden.

Vi lader nogle eksempler belyse styrken ved notationen. Bemærk først at vi kan definere $J : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E}''$ ved at kræve

$$\langle\!\langle y, Jx \rangle\!\rangle_{\mathsf{E}'} = \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle_{\mathsf{E}}$$

eller blot

$$\langle\!\langle y, Jx \rangle\!\rangle = \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle .$$

Dette udgør en definition da Jx hermed er defineret som funktional; vi har jo specificeret hvilken værdi den skal have på hvert $y \in \mathsf{E}'$.

Lad os herefter give et bevis for påstanden i første linje af beviset for [MV, Proposition 7.3]. Argumentet på denne linje er nemlig ikke helt tilfredsstillende, jf. T.53.1.

Proposition S.2.1.2 *Lad E være et normeret vektorrum. Hvis E er refleksiv, da er E' det også.*

Bevis: Vi skal vise at $J_{\mathsf{E}'} : \mathsf{E}' \longrightarrow \mathsf{E}'''$ er surjektiv, idet vi ved at $J_{\mathsf{E}} : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E}''$ er det. Givet $w \in \mathsf{E}'''$ definerer vi $\widetilde{w} \in \mathsf{E}'$ ved

$$\langle\!\langle x, \widetilde{w} \rangle\!\rangle_{\mathsf{E}} = \langle\!\langle J_{\mathsf{E}} x, w \rangle\!\rangle_{\mathsf{E}''}$$

for hvert $x \in \mathsf{E}$. Det er tilstrækkeligt at vise at $J_{\mathsf{E}'}(\widetilde{w}) = w$, og da J_{E} er surjektiv, vil dette følge af

$$\begin{aligned} \langle\!\langle J_{\mathsf{E}} x, J_{\mathsf{E}'} \widetilde{w} \rangle\!\rangle_{\mathsf{E}''} &= \langle\!\langle \widetilde{w}, J_{\mathsf{E}} x \rangle\!\rangle_{\mathsf{E}'} \\ &= \langle\!\langle x, \widetilde{w} \rangle\!\rangle_{\mathsf{E}} \\ &= \langle\!\langle J_{\mathsf{E}} x, w \rangle\!\rangle_{\mathsf{E}''} \end{aligned}$$

□

Til sammenligning anføres beviset i sædvanlig notation; bemærk at beviset er kortere i denne form, men noget sværere at læse:

Bevis: Vi skal vise at $J_{\mathsf{E}'} : \mathsf{E}' \longrightarrow \mathsf{E}'''$ er surjektiv, idet vi ved at $J_{\mathsf{E}} : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E}''$ er det. Givet $w \in \mathsf{E}'''$ definerer vi $\widetilde{w} \in \mathsf{E}'$ ved

$$\widetilde{w}(x) = w(J_{\mathsf{E}}(x))$$

for hvert $x \in \mathsf{E}$. Det er tilstrækkeligt at vise at $J_{\mathsf{E}'}(\widetilde{w}) = w$, og da J_{E} er surjektiv, vil dette følge af

$$J_{\mathsf{E}'}(\widetilde{w})(J_{\mathsf{E}}(x)) = J_{\mathsf{E}}(x)(\widetilde{w}) = \widetilde{w}(x) = w(J_{\mathsf{E}}(x))$$

□

S.2.2 Konvekse funktioner

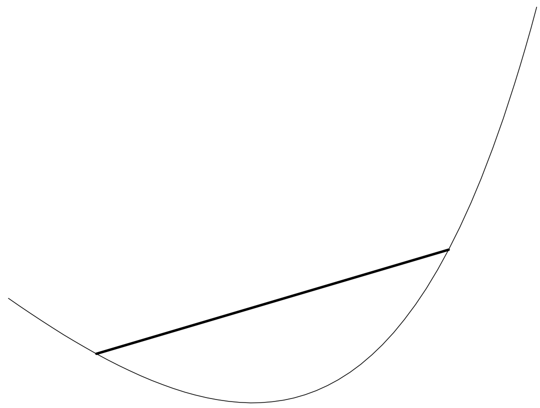
I beviset for [MV, 7.6] benyttes begrebet *konveks funktion*, som vist ikke optræder i nogen af de forudsatte kurser. Vi gennemgår derfor kort teorien:

Definition S.2.2.1 Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent delinterval. En funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ er *konveks* hvis

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

for alle $x, y \in I$ og $\lambda \in [0, 1]$.

En funktion er således konveks når alle punkter på grafen for f mellem x og y ligger under linjestykket fra $f(x)$ til $f(y)$. Jf. Figur S.1.



Figur S.1: En konveks funktion

Studiet af konvekse funktioner fører vidt; fx er Jensens ulighed, der pryder Matematisk Afdelings brevpapir, et fundamentalt resultat. Der henvises til kurset 2OK for en grundig indføring i emnet, og vi viser her kun et lille lemma:

Lemma S.2.2.2 *Hvis f er differentiabel, og f' er voksende, så er f konveks.*

Bevis: Antag at f ikke er konveks, altså at der findes x, y og λ så

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Bemærk at uligheden medfører at $x \neq y$, og at $0 < \lambda < 1$. Vi kan – og vil – endda antage at $x < y$ ved om nødvendigt at bytte om på x og y og erstatte λ med $1 - \lambda$. Sæt $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ og bemærk at

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} > \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

fordi

$$\begin{aligned} (y-x)f(z) &> (y-x)[\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)] \\ &= [\lambda(y-x)]\, f(x) + [(1-\lambda)(y-x)]\, f(y) \\ &= (y-z)f(x) + (z-x)f(y) \end{aligned}$$

Ved middelværdisætningen kan vi nu finde $\xi, \eta \in I$ med $x < \xi < z < \eta < y$ og

$$f'(\xi) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} > \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(\eta).$$

Altså er f' ikke voksende, som ønsket. □

S.3 Konsekvenser af Baires sætning

S.3.1 Kontinuerte funktioner på enhedsintervallet

I Salmonsens Konversationsleksikon fra 1928 finder man følgende passage:

> De ikke analytiske Funktioner, hvis Definitioner kan være fuldstændigt vilkaarlige, var man, for saa vidt de var kontinuerte, tilbøjelig til uden videre at tillægge nogle af de analytiskes Egenskaber, idet man støttede sig paa en antaget geometrisk Fremstilling; Weierstrass paaviste faren herved, idet han opstillede en kontinuert funktion af en reel Variabel, der ikke for nogen Værdi af denne har en bestemt Differentialkvotient.

Citatet giver måske et ekko af samtidens forbavselse, da man med Weierstrass' eksempel i 1861 blev klar over, at der findes kontinuerte funktioner, lad os sige på enhedsintervallet $[0, 1]$, der ikke er differentiable i noget punkt. Weierstrass' eksempel var

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \sin(b^n x), \qquad b > (\tfrac{3\pi}{2} + 1)a,$$

og i nogle versioner af en matematisk førstedel har man allerede set dette bevist.

Lad os her benytte Baires sætning til at vise meget mere, nemlig:

Sætning S.3.1.1 *Mængden af intetsteds differentiable funktioner et tæt i* $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$.

Vi starter med at gennemgå i høj detalje en del af beviset der er elementær, men lidt teknisk anstrengende. Vores mål er at vise at enhver kontinuert funktion på $[0, 1]$ kan approksimeres vilkårligt godt i den uniforme norm med en anden kontinuert funktion, der varierer voldsomt i den forstand at hvis den er differentiabel i et punkt, så er den afledede numerisk stor. For at gøre dette præcist definerer vi:

Definition S.3.1.2 $PL[0, 1]$ betegner mængden af stykkevis lineære kontinuerte funktioner på $[0, 1]$, altså funktioner der kan skrives

$$f(t) = \begin{cases} \alpha_1 t + \beta_1 & s_0 \le t \le s_1 \\ \alpha_2 t + \beta_2 & s_1 \le t \le s_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_N t + \beta_N & s_{N-1} \le t \le s_N \end{cases}$$

hvor $0 = s_0 < s_1 \cdots < s_N = 1$ er en inddeling af enhedsintervallet.

For en stykkevis lineær funktion $f \in PL[0,1]$ sætter vi

$$\mathbf{s}(f) = \min_{1 \le i \le N} |\alpha_i| \qquad \mathbf{S}(f) = \max_{1 \le i \le N} |\alpha_i|$$

Det kontrolleres let, at værdierne $\mathbf{s}$ og $\mathbf{S}$ ikke afhænger af inddelingen. Bemærk også, at da *hældningen* af en affin funktion $x \mapsto \alpha x + \beta$ netop er $|\alpha|$, kan vi opfatte disse tal som den *minimale* hældning $\mathbf{s}(f)$ og den *maksimale* hældning $\mathbf{S}(f)$ af f. Så viser vi:

Lemma S.3.1.3

(i) $PL[0,1]$ *er tæt i* $C[0,1]$.

(ii) Hvis $f, g \in PL[0,1]$ *, så gælder* $\mathbf{s}(f+g) \ge \mathbf{s}(f) - \mathbf{S}(g)$.

(iii) For alle positive tal ε *og* M *findes* $f \in PL[0,1]$ *med*

$$\|f\|_\infty < \varepsilon \qquad \mathbf{s}(f) \ge M$$

(iv) For alle $g \in C[0,1]$, *og alle positive tal* ε *og* M *findes* $f \in PL[0,1]$ *med*

$$\|f - g\|_\infty < \varepsilon \qquad \mathbf{s}(f) \ge M$$

Bevis: Man viser (i) ved uniform kontinuitet, der jo følger af at $[0,1]$ er kompakt. Her er en skitse af argumentet. For givet $f \in C[0,1]$ og givet $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$ så

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Lav en inddeling $s = 0 < \cdots < s_N$ af $[0,1]$ således at $s_i - s_{i-1} < \delta$ og definér en stykkevis lineær funktion g ud fra f's værdi i s_i'erne. Så vil $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

For (ii), lad f, g være stykkevis lineære. Vi kan antage at $\mathbf{s}(f) \ge \mathbf{S}(g)$, for ellers er højresiden negativ. Lad $[s,t]$ være det interval, hvor hældningen af $f + g$ er minimal. Ved at gå ned til et mindre interval kan vi antage at både f og g er affine funktioner på $[s,t]$. Benævn ved α_f og α_g hældningskoefficienterne for henholdsvis f og g. Så er hældningskoefficienten for $f + g$ jo $\alpha_f + \alpha_g$, og vi har

$$\mathbf{s}(f+g) = |\alpha_f + \alpha_g| \ge |\alpha_f| - |\alpha_g| \ge \mathbf{s}(f) - \mathbf{S}(g).$$

For at indse (iii), betragt først $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ givet ved

$$F(x) = 2\,\mathrm{dist}(x, \mathbb{Z}) = 2 \begin{cases} x - n & n \le x \le n + \frac{1}{2} \\ -(x - n - 1) & n + \frac{1}{2} < x \le n + 1 \end{cases}$$

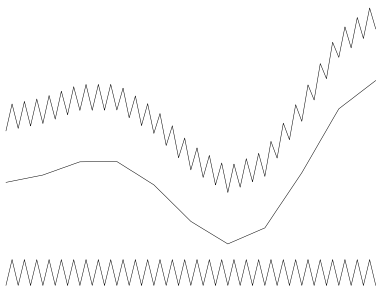
Så er $F \in PL(\mathbb{R})$, og det ses direkte, at hvis vi sætter

$$f_{N_1,N_2}(x) = \tfrac{1}{N_1} F(N_2 x),$$

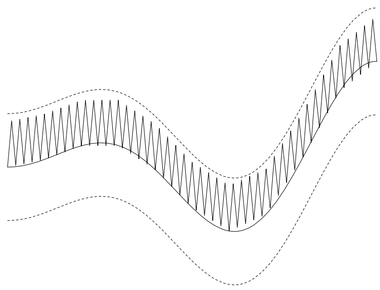
så er $\|f_{N_1,N_2}\|_\infty = \frac{1}{N_1}$, mens $\mathbf{s}(f_{N_1,N_2}) = 2\frac{N_2}{N_1}$. Ved at vælge først N_1, og siden N_2, kan vi opfylde kravet i (iii) med $f = f_{N_1,N_2}$.

Vi viser (iv) ved hjælp af (i)–(iii). Approksimér først ved (i) g med $f_1 \in PL[0,1]$ så $\|g - f_1\|_\infty < \varepsilon/2$. Vælg ved (ii) $f_2 \in PL[0,1]$ med $\|f_2\|_\infty < \varepsilon/2$ og $\mathbf{s}(f_2) > M + \mathbf{S}(f_1)$. Ved (iii) opfylder $f = f_1 + f_2$ det ønskede. $\square$

Kernen i beviset, punkt (ii), siger løst sagt at summen af en relativt flad funktion og en overalt stejl funktion er overalt stejl. Se Figur S.2 for en illustration af dette fænomen; her er summen af de to nederste funktioner lig den øverste. Den nederste funktion er i øvrigt identisk med bevisets $f_{10,30}$. Figur S.3 illustrerer punkt (iv) herover.



Figur S.2: Sum af flad og stejl



Figur S.3: Approksimation med stejl

Bevis for Sætning S.3.1.1: Vi definerer

$$\mathfrak{M}_n = \{f \in C[0,1] \,|\, \exists x \in [0,1] \forall y \in [0,1] : |f(x) - f(y)| \le n|x-y|\}$$

Funktioner i $\mathfrak{M}_n$ kan altså tilskrives et punkt x så at korden gennem $(x, f(x))$ og $(y, f(y))$ har hældning højst n, for ethvert y. Med andre ord forløber grafen for f mellem de to linjer gennem $(x, f(x)$ hvis hældning er $\pm n$, jf. Figur S.4. Lad os også betragte mængden

$$\mathfrak{D} = \{f \in C[0,1] \,|\, \exists x \in [0,1] : f \text{ er differentiabel i } x\},$$

altså mængden af "etsteds differentiable" funktioner. Vort mål er at vise at komplementet til $\mathfrak{D}$ er tæt.

Vi vil vise

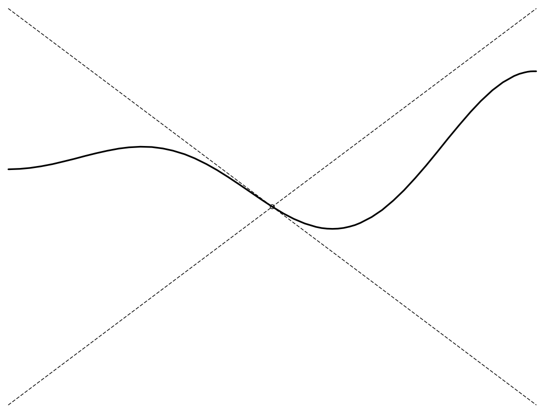
(I) $\mathfrak{M}_n$ er lukket,

(II) $\mathfrak{M}_n$ har tomt indre,

(III) $\mathfrak{D} \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \mathfrak{M}_n$.

men lad os først indse hvorfor det viser det ønskede.

Vi får af (III) at $\mathfrak{D}$ er overdækket af følgen $(\mathfrak{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af delmængder af $C[0,1]$. Hver af disse mængder er afsluttede med tomt indre ved (I) og (II); så $\mathfrak{D}$ er af første kategori i $C[0,1]$.



Figur S.4: Forløb mellem linjerne

Og da $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ er et Baire rum, fordi det er fuldstændigt, så er komplementet til $\mathfrak{D}$ tæt, som ønsket.

Beviset for (I) overlades til læseren. For (II), lad $g \in C([0,1])$, n og ε være givne. Vælg ved Lemma S.3.1.3(iv) en funktion $f \in PL[0,1]$ med $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$ og $\mathbf{s}(f) > n$. Det medfører at $f \notin \mathfrak{M}_n$, og dermed har vi vist at en ε-kugle omkring g indeholder en funktion der ikke ligger i $\mathfrak{M}_n$. Så er g ikke et indre punkt.

For (III), antag at f er differentiabel i x_0. Så er funktionen

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}, & x \neq x_0 \\ |f'(x_0)|, & x = x_0 \end{cases}$$

en kontinuert funktion, og således begrænset over $[0,1]$. Lad n være et helt tal, der dominerer $\widetilde{f}$. Så vil $f \in \mathfrak{M}_n$. □

S.4 Anvendelser af diagonaliseringssætningen

S.4.1 Positivitet

Lad H være et (separabelt) hilbertrum og betragt $A \in K(\mathsf{H})$, en selvadjungeret kompakt operator. I mange tilfælde, også i anvendelser, er det forholdsvis enkelt at udlede information om spektret $\sigma(A)$ ud fra information om A. Diagonaliseringssætningen [MV, 16.2] kan benyttes til at føre os fra viden om $\sigma(A)$ til viden om A.

Lad os fx se på følgende begreb:

Definition S.4.1.1 En operator $A \in L(\mathsf{H})$ kaldes *positiv* hvis der gælder $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ for alle $x \in \mathsf{H}$. Vi skriver $B \geq C$ hvis $B - C$ er positiv.

Lemma S.4.1.2 *Lad $A \in K(\mathsf{H})$ være selvadjungeret. Da er A positiv præcis når $\sigma(A) \subseteq [0; \infty[$.*

Bevis: Antag først at A er positiv. Hvis $\lambda \in \sigma(A) \backslash \{0\}$, så er λ en egenværdi ved [MV, 15.12(2)]. Med x en tilsvarende egenvektor har vi

$$\lambda \|x\|^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle \geq 0.$$

Da $\|x\| \neq 0$ så er $\lambda \geq 0$.

Antag nu at $\sigma(A) \subseteq [0; \infty[$. Vi har altså ved [MV, 16.2] at

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle \cdot, e_n\rangle e_n$$

med $\lambda_n \geq 0$, og så er jo

$$\begin{aligned}
\langle Ax, x\rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n, x \right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle \langle x, e_n\rangle e_n, x\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle \overline{\langle x, e_n\rangle} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |\langle x, e_n\rangle|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

□

Sætningen gælder mere generelt, jf. [MV, 18.16]

S.4.2 Kvadratrod

Ligesom tilfældet er for tal, har positive operatorer en kvadratrod. Endda gælder:

Proposition S.4.2.1 *Lad $A \in K(\mathsf{H})$ være selvadjungeret. Da er A positiv præcis når der findes en selvadjungeret og positiv operator $B \in K(\mathsf{H})$ der opfylder $A = B^2$.*

Bevis: Når $A = B^2$ med $B = B^*$ får vi

$$\langle Ax, x\rangle = \left\langle B^2 x, x\right\rangle = \langle Bx, Bx\rangle \geq 0$$

Når A er positiv kan vi skrive

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle \cdot, e_n\rangle e_n$$

ved [MV, 16.2]. Bemærk at $\lambda_n \geq 0$ ved Proposition S.4.1.2.

Vi supplerer (e_n) til en ortonormalbasis for H med vektorer (f_j), og ser at det har mening at definere:

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \langle \cdot, e_n \rangle e_n$$

Dette ses at være en begrænset og kompakt operator ved opgave O.16.15, man ser let at den også er selvadjungeret. Vi har

$$B^2 e_n = B(\sqrt{\lambda_n} e_n) = \sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_n} e_n = A e_n$$

og $B^2 f_j = 0 = A f_j$ så $B^2 = A$ fordi de to operatorer stemmer overens på en ortonormalbasis. □

Denne operator kaldes *kvadratroden* af A. Sætningen gælder mere generelt, og B er faktisk entydigt bestemt, jf. [MV, 18.17].

S.4.3 $K(\mathsf{H})$ versus $F(\mathsf{H})$

Vi anfører her et alternativt bevis for [MV, 16.4]:

Lemma S.4.3.1 *Lad H være et (separabelt) hilbertrum, og $A \in K(\mathsf{H})$ en selvadjungeret operator. Så findes projektioner $P_k \in F(\mathsf{H})$ for hvilke*

$$\|A - AP_k\| \longrightarrow 0$$

Bevis: Lad P_k være projektionen ned på underrummet udspændt af $e_0, \dots, e_k$ som i beviset for [MV, 16.2]. Formlen følger nu af at der i dette bevis blev etableret uligheden

$$\|A - AP_k\| \leq \left(\sup_{n>k} |\lambda_n|\right)^2 .$$

□

Korollar S.4.3.2 *Når H og G begge er et hilbertrum, så gælder*

$$K(\mathsf{H}, \mathsf{G}) = \overline{F(\mathsf{H}, \mathsf{G})}$$

Bevis: Det er klart fra [MV, 15.2] at $\overline{F(\mathsf{H}, \mathsf{G})} \subseteq K(\mathsf{H}, \mathsf{G})$, så lad $A \in K(\mathsf{H}, \mathsf{G})$ være givet. Vi ved at $A^*A \in K(\mathsf{H})$, og da denne operator direkte ses at være selvadjungeret, findes $P_k \in F(\mathsf{H})$ som i lemma S.4.3.1 herover. Ved [MV, 11.11(3)] og [MV, 5.7] får vi

$$\begin{aligned} \|A - AP_k\|^2 &= \|A(I - P_k)\|^2 \\ &= \|(I - P_k)^* A^* A (I - P_k)\| \\ &\leq \|(I - P_k)\| \, \|A^*A - A^*AP_k\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Da $AP_k \in F(\mathsf{H}, \mathsf{G})$ som bemærket på side 140 af [MV], vil A ligge i afslutningen af $F(\mathsf{H}, \mathsf{G})$.
□

Kapitel T

Trykfejlsliste

Gennemgangen af [MV] fra 1999 til 2001 førte frem til følgende liste over fejl, upræcise påstande og notation som ikke er standard. Ganske få, i betragtning af at vi bruger førsteudgaven af bogen. Vi har stillet dem til rådighed for Meise og Vogt, hvilket forklarer at de er på engelsk i modsætning til resten af hæftet her.

Det er mit håb at de fleste af disse problemer vil blive rettet i næste udgave af [MV]. Men mens vi venter på det så er læseren nok bedst tjent med at med det samme markere i sin bog hvor de fundne trykfejl findes.

T.1 Trykfejlene

T.4.1 Paragraph starting 'Let $(X, \prec)$ be an ordered set' [***Line 3***]

There is an alternate definition of "chain" in use in other parts of the literature, and sometimes the concept of chain used here is called a "totally ordered set".

T.8.1 Topological spaces [***Line 2***]

The definition of "topological space" is non-standard. In most places, $\mathcal{O}1 - \mathcal{O}2$ would define a topological space, while $\mathcal{O}1 - \mathcal{O}3$ would define a *Hausdorff* topological space. More details in Section F.2.6.

T.9.1 Sequences and nets [***Line 3***]

The definition of "net" is non-standard. Usually the index set is only required to be preordered. More details in Section F.2.6.

T.13.1 Proof of Proposition 3.2 [***Line 1***]

Replace "for all $n \in N$" by "for all $n \in \mathbb{N}$"

T.21.1 Statement of Proposition 4.8 [*Line 4*]

Replace "of nonempty subsets" by "of nonempty closed subsets"

T.33.1 Statement of Lemma 5.5 [*Line 3*]

The last supremum only exists if $E \neq \{0\}$. If one was to use the usual convention $\sup \emptyset = -\infty$ the last equality would fail.

T.35.1 Proof of Proposition 5.9 [*Line 3*]

Replace "$\|\widehat{x}\| := \inf_{\xi \in q^{-1}(x)}$" by "$\|\widehat{x}\| := \inf_{\xi \in q^{-1}(\{\widehat{x}\})}$"

T.36.1 Remark 5.11 [*Line 1-4*]

The remark reads as though the set equality on line 3 is a direct consequence of the first sentence. In fact, it is the other way around: The set equality follows directly from the definitions, and from this we can deduce that q is continuous, is open and has norm one.

T.48.1 Proof of Proposition 6.10 [*Line 1*]

Replace "applied to $p = \|y\| \, \|\cdot\|$" by "applied to $p = \|\cdot\|$"

T.52.1 Statement of Proposition 7.2 [*Line 4*]

The proposition can be improved by: Replace "$\widehat{A}|E = A$ and $\left\|\widehat{A}\right\| = \|A\|$" by "$\widehat{A}|E = A$. Moreover, $\left\|\widehat{A}\right\| = \|A\|$"

T.53.1 Proof of Proposition 7.3 [*Line 1-2*]

While the argument clearly proves that E' and E''' are isometrically isomorphic, it seems less clear how to conclude that the map $J_1 : E' \longrightarrow E'''$ is onto. Here is how to proceed from the fact that $J_0 : E \longrightarrow E''$ is onto. Given $w \in E'''$ define $\widetilde{w} \in E'$ by $\widetilde{w}(x) = w(J_0(x))$ for any $x \in E$. It suffices to prove $J_1(\widetilde{w}) = w$, and since J_0 is onto, we get this from

$$J_1(\widetilde{w})(J_0(x)) = J_0(x)(\widetilde{w}) = \widetilde{w}(x) = w(J_0(x))$$

More details in Section S.2.1.

T.54.1 Line preceding Proposition 7.4 [*Line 1*]

This is not a "simple proof"; cf. the material accompanying Exercise O.7.2.

T.57.1 Proof of Proposition 7.9 [*Line 9*]

This requires a little extra explanation. We have seen that for any $y_0 \in l_q$, $\|y_0(\cdot)\|_{l'_p} \leq \|y_0\|_q$. To prove that also $\|y_0(\cdot)\|_{l'_p} \geq \|y_0\|_q$ we apply lines 4-8 to $\eta = y_0(\cdot)$ to achieve an element $y \in l_q$ with

$$y(\cdot) = \eta = y_0(\cdot)$$

By evaluation on e_n for every n we get that $y = y_0$, and we conclude from line 8 of the proof that the desired inequality holds.

T.60.1 Proof of Lemma 8.3 [*Line 8*]

The first inclusion is stated $\overline{A(V) - \xi} \subset \overline{A(V) - A(V)}$ but from what is assumed on ξ it is only really clear that $\overline{A(V) - \xi} \subset \overline{A(V) - \overline{A(V)}}$. This, however, is not a problem; for any $K \subseteq E$ we have $\overline{K} - \overline{K} \subseteq \overline{K - K}$ by continuity of subtraction, so $\overline{K - \overline{K}} \subseteq \overline{K - K}$ follows.

T.62.1 Proof of Uniform Boundedness Principle 8.10 [*Line 9*]

We are using that $\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| < 1\}$; a true statement even though it is not mentioned in Lemma 5.5(1). To prove it from Lemma 5.5(1) we note that if $\|Ax_n\| \nearrow \|A\|$ with $\|x_n\| = 1$ then also $\|Ay_n\| \nearrow \|A\|$ where $y_n = (1 - 1/n)x_n$.

T.67.1 Statement of Proposition 9.1 [*Line 2*]

Replace "The ordering $A \mapsto A'$" by "The map $A \mapsto A'$"

T.71.1 Statement of Exercise 4 [*Line 1*]

If we do not make the extra assumption that E and F are Banach spaces the statement in the exercise is false; cf. Exercise O.12.13.

T.86.1 Statement of Theorem 11.11 [*Line 6*]

Since in this chapter, the convention is to write the composite of two linear operators A and B as "AB", one may wonder whether something else is meant by the circle in "$(B \circ A)^*$" and "$A^* \circ B^*$". But this is not the case.

T.96.1 Examples 12.13(2) [*Line 10-11*]

To differentiate the right hand side of (a) after x we need to know that the series $\sum \frac{1}{n!} h'_n(x) t^n$ converges uniformly in x, at least locally. While no doubt true, this seems a little cumbersome to establish. Here is a direct alternative based on the Leibniz formula:

$$\begin{aligned}
h_n'(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}\exp(2tx-t^2)\right)_{t=0} \\
&= \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{\partial}{\partial x}\exp(2tx-t^2)\right)_{t=0} \\
&= \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}2t\exp(2tx-t^2)\right)_{t=0} \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^i}{\partial t^i}t\frac{\partial^{n-i}}{\partial t^{n-i}}\exp(2tx-t^2)\right)_{t=0} \\
&= 2\left(\binom{n}{1}\frac{\partial}{\partial t}t\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\exp(2tx-t^2)\right)_{t=0} \\
&= 2n\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\exp(2tx-t^2)\right)_{t=0} \\
&= 2nh_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

T.96.1 Examples 12.13(2) [*Line 15*]

Replace "$E := f \in C(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx < \infty$" by "$E := \{f \in C(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx < \infty\}$"

T.97.1 Examples 12.13(3) [*Line 1*]

Replace "$T_0 = (2\pi)^{-1/2}$" by "$T_0 = \pi^{-1/2}$"

T.101.1 Introduction of Chapter 13 [*Line 3*]

The definition of "measure" used in the book is non-standard. The usual term is "Radon measure".

T.101.2 Definition [*Line 7*]

Replace "instaed" by "instead"

T.107.1 Proof of Lemma 13.9 [*Line 2*]

The definition of φ_1 needs a little interpretation for x with $\varphi(x) = 0$; in this case we want $\varphi_1(x) = 0$ as well.

T.120.1 Proof of Lemma 14.4 [*Line 5*]

Replace "preceding lemma" by "preceding proposition"

T.120.1 Proof of Lemma 14.4 [***Line 9***]

This follows from a general inequality:

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} G(\cdot, y) F(y) dy \right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|G(\cdot, y)\|_p F(y) dy$$

where $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0; \infty]$ and $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0; \infty]$ are measurable and $G(\cdot, y) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ for any $y \in \mathbb{R}^n$. This can be proved along the lines of the argument surrounding (2) on page 118.

T.121.1 Proof of Corollary 14.5 [***Line 6***]

Replace "the Lebesgue's dominated convergence theorem" by "Lebesgue's dominated convergence theorem"

T.121.2 Proof of Corollary 14.5 [***Line 7***]

Replace "As $\widehat{f * \varphi_\sigma}$ is continuous and bounded" by "As $f * \varphi_\sigma$ is continuous and bounded". We need to apply the Fourier Inversion Formula 14.3 to $f * \varphi_\sigma$, and not to $\widehat{f * \varphi_\sigma}$. To see that this is possible we note that $f * \varphi_\sigma$ is defined everywhere by (1) of page 117 since $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ and $\varphi_\sigma \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Thus

$$|f * \varphi_\sigma(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)\varphi_\sigma(x-y)| dy \leq (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \leq (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n} \|f\|_1$$

so that $f * \varphi_\sigma$ is bounded. $f * \varphi_\sigma$ is continuous from

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} f * \varphi_\sigma(x_m) = \lim_{m \longrightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\sigma(x_m - y) dy = \lim_{m \longrightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\sigma(x-y) dy = f * \varphi_\sigma(x).$$

This holds since $(2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}|f|$ is an integrable majorant.

T.122.1 Proof of Plancherel's theorem 14.7 [***Line 11***]

Replace "$\cap L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$" by "$L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$"

T.126.1 Statement of Lemma 14.14 [***Line 3***]

When $s < 1$, $D_j f \in H^{s-1}$ is not a function. Hence "$D_j f(x)$" does not make sense. What is true is that

$$\left\| D_j f - \frac{1}{ih}\left(T_{-he_j} f - f\right) \right\|_{s-1} \longrightarrow 0$$

where T_{-he_j} is the translation operator appropriately extended to H_s. This extension exists and is unique even for negative s because L_2 is dense.

T.127.1 Proof of Sobolev's imbedding theorem 14.16 [*Line 5*]

At this stage of the proof we have two different definitions of norms by the name $\|\cdot\|_0$, and three of norms by the name $\|\cdot\|_1$. On this line the reference is to the norms defined on pages 127, 14, 101 and 124, in that order.

T.127.2 Proof of Sobolev's imbedding theorem 14.16 [*Line 12*]

Replace "R^n" by "$\mathbb{R}^n$"

T.127.3 Proof of Sobolev's imbedding theorem 14.16 [*Line 15*]

The norms are again those defined on pages 14, 101 and 124.

T.146.1 Definition [*Line 6*]

Replace "the eigenvalue sequence" by "an eigenvalue sequence"

T.249.1 Remark 22.1(a) [*Line 1*]

Replace "homomorphism" by "homeomorphism"

T.250.1 Text at top of page [*Line 1*]

Replace "homomorphisms" by "homeomorphisms"

T.252.1 Proof of Lemma 22.5 [*Line 8*]

Replace "$(\|\|_\alpha)_{\alpha\in A}$" by "$(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in A}$"

T.252.1 Statement of Lemma 22.6 [*Line 2*]

The linear map A must not be confused with the index set used for $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$. Presumably the latter is a capital Greek letter, while the former is a capital Roman letter.

T.253.1 Definition [*Line 5*]

Replace "homomorphism" by "homeomorphism"

Litteratur

[MV] Meise & Vogt, *Introduction to Functional Analysis*. Oxford University Press, 1997.

[2ALT] Thorup, *Algebra*. HCØ Tryk, 1998.

[2ANB] Berg, *Metriske rum*. HCØ Tryk, 1997.

[2AND] Durhuus, *Hilbert rum med anvendelser*. HCØ Tryk, 1997.

[2ANG] Grønbæk, *Metriske rum 2*. HCØ Tryk, 2000.

[2ANS] Stetkær, *Mat 11 – Fourierrækker*. HCØ Tryk, 2000.

[3GTB] Berg, *Topologi*. HCØ Tryk, 1997.

[Ada] Adams, *Calculus: A Complete Course*. Addison-Wesley, 1993.

[BN] Bak & Newman, *Complex Analysis*. Second edition, Springer-Verlag (UTM), 1996.

[Con] Conway, *A Course in Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1985

[Mes] Messer, *Linear Algebra – Gateway to Mathematics*. Harper-Collins 1993.

[Ped] Pedersen, *Analysis now*. Springer-Verlag (GTM), 1989.

[Rud] Rudin, *Functional Analysis*. 2nd edition. McGraw-Hill 1973, 1991.

[ST] Stewart & Tall, *Complex Analysis*. Cambridge 1983.

Både [Ped] og [Rud] kan anbefales som gode, og meget forskelligartede, alternative kilder til 3AN*, men det er ikke en forudsætning for at følge kurset at eje nogen af dem.*