Kompleks funktionsteori

Christian Berg

2004

Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

Forord

I 1990 udarbejdede jeg noter til kompleks funktionsteori. De indgik som kapitel 3 i analysekurset på andet studieår og byggede derfor på kendskab til teorien for metriske rum og Lebesgueintegralet.

De foreliggende noter er en udbygning og omarbejdning af de gamle noter, idet der er taget hensyn til de ændrede forudsætninger for de studerende. Kurset løber parallelt med analysekurset 2AN, og derfor har jeg indskrænket brugen af begreber fra metriske rum mest muligt. Jeg taler om afsluttede og begrænsede delmængder af den komplekse plan og først sent i kurset bruges glosen kompakt. Enkelte absolut nødvendige hjælpebegreber fra 2AN er samlet i Appendix. Jeg har lagt vægt på anskueligheden i den komplekse plan, og derfor er det mit håb, at kurset også støtter den mere abstrakte teori i 2AN. Hver paragraf indledes med en kort oversigt over de vigtigste resultater.

København, August 2001

I 2. udgave af noterne er der sket mindre justeringer i teksten. Derudover er figurerne–ofte i let ændret udgave–blevet udført ved Anders Thorups tegneprogram spline.sty, så hele notesættet foreligger som en pdf-fil.

København, August 2002

I 3. udgave af noterne er der kun ændret ganske lidt i forhold til 2. udgave. Nogle få trykfejl er rettet, og der er tilføjet et par opgaver.

København, August 2003

I 3. udgave, 3. oplag af noterne er der kun rettet nogle få trykfejl og beviset for Sætning 7.6 er simplificeret.

København, December 2005
Christian Berg

Kompleks funktionsteori

§i. Indledning

i.1. Forudsætninger.

I det følgende forudsættes kendskab til de komplekse tal $\mathbb{C}$ svarende til, hvad der læres på 1. studieår.

Vi vil uden videre opfatte et tal $x + iy \in \mathbb{C}$ som repræsenterende punktet (x, y) i $\mathbb{R}^2$, og vi vil efter behov tale om et komplekst tal eller et punkt i den komplekse plan. En mængde af komplekse tal kan derfor opfattes som en punktmængde i $\mathbb{R}^2$.

Et komplekst tal $z = x+iy \in \mathbb{C}$ har *realdelen* $x = \mathrm{Re}(z)$ og *imaginærdelen* $y = \mathrm{Im}(z)$, og det har den *numeriske værdi* (også kaldes *modulus*) $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Der mindes om den vigtige trekantsulighed for $z, w \in \mathbb{C}$

$$||z| - |w|| \le |z - w| \le |z| + |w|.$$

Når $z \neq 0$ betegner $\arg(z)$ mængden af *argumenter* for z, dvs. mængden af reelle tal θ så

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\,.$$

Talparrene (r, θ) for $\theta \in \arg(z)$ kaldes også *polære koordinater* for det komplekse tal z.

Som afstand mellem to komplekse tal z, w benyttes $d(z, w) = |z - w|$, hvilket svarer til den euklidiske afstand i $\mathbb{R}^2$, når $\mathbb{C}$ opfattes som $\mathbb{R}^2$. Begreberne åben, lukket (afsluttet) og begrænset mængde i $\mathbb{C}$ har den betydning, som svarer til at tænke på mængden som delmængde af $\mathbb{R}^2$.

Til $a \in \mathbb{C}$ og $r > 0$ knyttes den åbne cirkelskive med centrum a og radius $r > 0$ givet som

$$K(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |a - z| < r\}\,.$$

Det er praktisk at indføre betegnelsen $K'(a, r)$ for den udprikkede cirkelskive

$$K'(a, r) = K(a, r) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |a - z| < r\}\,.$$

En afbildning $f : A \to \mathbb{C}$ defineret på en delmængde $A \subseteq \mathbb{C}$ med komplekse værdier kaldes kort en *kompleks funktion.* En sådan funktion kaldes kontinuert i $z_0 \in A$ hvis

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in A : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\,.$$

Denne definition er helt analog til kontinuitet af funktioner med reelle værdier. Til en kompleks funktion $f : A \to \mathbb{C}$ hører to reelle funktioner $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ defineret på A ved

$$(\mathrm{Re}\, f)(z) = \mathrm{Re}(f(z))\,, \quad (\mathrm{Im}\, f)(z) = \mathrm{Im}(f(z))\,, \quad z \in A$$

og forbundet med f ved ligningen

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)\,, \quad z \in A\,.$$

At f er kontinuert i $z_0 \in A$ kommer ud på at $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ begge er kontinuerte i z_0. Dette simple resultat bygger på ulighederne

$$|\operatorname{Re} z| \le |z|\,,\ |\operatorname{Im} z| \le |z|\,,\ |z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|\,, \quad z \in \mathbb{C}$$

for numerisk værdi.

De komplekse tal dukker op ved løsning af ligninger af anden grad eller højere. Det synspunkt, at en andengradsligning ikke har nogen rødder, hvis diskriminanten er negativ, afløstes i 1500-tallet af en begyndende forståelse for, at man kan regne med kvadratrødder af negative tal. De optræder i Cardanos berømte værk *Ars Magna* fra 1545, som også indeholder løsningsformler for ligninger af tredie og fjerde grad. Descartes tog afstand fra komplekse rødder i sit værk *La Géometrie* fra 1637 og kaldte dem imaginære. Matematikerne i 1700-tallet begyndte at forstå de komplekse tals betydning i forbindelse med de almindelige funktioner såsom de trigonometriske og eksponential- og logaritmefunktionen, f. eks. udtrykt i De Moivre og Eulers formler. Omkring år 1800 blev der givet matematisk korrekte indføringer af de komplekse tal, og idag anerkendes Caspar Wessel som den, der først har givet en rigoristisk indføring. Hans arbejde *Om Directionens analytiske Betegning*, blev præsenteret i Videnskabernes Selskab i 1797 og publiceret i dets skrifter to år senere. En fransk oversættelse i 1897 af Wessels arbejde har medvirket til at gøre det internationalt kendt. Caspar Wessel var bror til digteren Johan Herman Wessel, som skrev følgende om sin bror: *Han tegner landkort og læser loven, han er så flittig som jeg er doven.*

i.2. Hvad handler kurset om.

Vi skal betragte funktioner $f : G \to \mathbb{C}$ defineret i en åben delmængde G af $\mathbb{C}$, og studere differentiabilitet helt analogt med differentiabilitet af funktioner $f : I \to \mathbb{R}$, defineret på et åbent interval I. Da man kan regne med komplekse tal, helt som med reelle tal, er det naturligt at undersøge, om differenskvotienten

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,, \quad z, z_0 \in G\,,\ z \ne z_0\,,$$

har en grænseværdi for $z \to z_0$. Hvis dette er tilfældet, kaldes f (komplekst) differentiabel i z_0, og grænseværdien betegnes som i det reelle tilfælde $f'(z_0)$. Der viser sig nu det *forbløffende*, at hvis f er differentiabel i alle punkter

$z_0 \in G$, så er f ikke blot kontinuert som i det reelle tilfælde, men f er *vilkårligt ofte differentiabel*, og fremstilles ved sin Taylorrække

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n ,$$

for alle z i den største cirkelskive $K(z_0, \rho)$ indeholdt i G. Kompleks differentiablitet er et meget stærkere krav end reel differentiablitet på grund af, at differenskvotienten skal have en og samme grænseværdi uanset fra hvilken retning man nærmer sig z_0. På et interval kan man kun nærme sig z_0 fra højre og venstre, men i planen har vi alle retninger til rådighed. En funktion, der er komplekst differentiabel i alle punkter af en åben mængde, kaldes *holomorf* i mængden. I litteraturen møder man ofte navnene *analytisk* eller *differentiabel* med samme betydning som holomorf.

Teorien for holomorfe funktioner blev fuldstændigt udviklet i det 19. århundrede især af Cauchy, Riemann og Weierstrass, og den indeholder en mængde smukke og slående resultater, der ofte afviger væsentligt fra sætninger om tilsvarende begreber i reel analyse.

Vi skal også studere stamfunktioner F til en given funktion f, dvs. funktioner F, som opfylder $F' = f$. Det er stadig "rigtigt", at vi finder en stamfunktion $F(z)$ med $F(z_0) = 0$ ved at integrere fra z_0 til z, men vi har en masse frihed, når vi i planen skal gå fra z_0 til z. Vi går langs en kurve, og må så studere kurveintegraler, og hvordan facit afhænger af den valgte kurve fra z_0 til z.

I studiet af f.eks. kontinuitet og integrabilitet af en funktion f med komplekse værdier gælder, at disse egenskaber suverænt afgøres af de tilsvarende egenskaber ved funktionens real- og imaginærdel. Det vil være katastrofalt at tro, at dette princip kan overføres til holomorfi. Real- og imaginærdel af en holomorf funktion er nemlig forbundet ved to partielle differentialligninger, der kaldes Cauchy-Riemanns ligninger. Disse viser, at en reel funktion $f \colon G \to \mathbb{R}$ på en sammenhængende åben mængde kun er holomorf, når den er konstant.

Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

§1. Holomorfe funktioner

I denne paragraf vil vi indføre holomorfe funktioner på en stringent måde og udlede deres vigtigste elementære egenskaber. Polynomier er holomorfe i hele den komplekse plan.

Holomorfi kan karakteriseres ved to partielle differentialligninger kaldet Cauchy-Riemann ligningerne.

Funktioner givet ved en potensrække er holomorfe i konvergenscirklen, og det er udgangspunktet for, at de elementære funktioner er holomorfe.

1.1. Simple egenskaber.

Definition 1.1. Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde. En funktion $f : G \to \mathbb{C}$ kaldes (*komplekst*) *differentiabel* i $z_0 \in G$, såfremt differenskvotienten

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

har en grænseværdi for $h \to 0$. Denne grænseværdi kaldes *differentialkvotienten* af f i punktet z_0, og betegnes $f'(z_0)$. Hvis f er (komplekst) differentiabel i alle punkter af G, kaldes f *holomorf*, og for en sådan funktion kaldes $f' : G \to \mathbb{C}$ for *differentialkvotienten* eller den *afledede funktion.*

Hvis funktionen f skrives $w = f(z)$, benyttes også betegnelserne

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{df}{dz}$$

for differentialkvotienten i $z \in G$.

Mængden af holomorfe funktioner $f : G \to \mathbb{C}$ betegnes $\mathcal{H}(G)$.

Bemærkning 1.2. For $z_0 \in G$ findes $r > 0$ så $K(z_0, r) \subseteq G$, og differenskvotienten er i hvert fald defineret for $h \in K'(0, r)$.

At f er differentiabel i z_0 med differentialkvotient $f'(z_0) = a$ er ensbetydende med, at der gælder en ligning af formen

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + ha + h\varepsilon(h) \quad \text{for} \quad h \in K'(0, r)\,, \tag{$*$}$$

hvor $r > 0$ er sådan, at $K(z_0, r) \subseteq G$, og $\varepsilon : K'(0, r) \to \mathbb{C}$ er en funktion, så

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0\,.$$

Hvis nemlig f er differentiabel i z_0 med differentialkvotient $f'(z_0) = a$ gælder ligningen $(*)$ med $\varepsilon(h)$ defineret ved

$$\varepsilon(h) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - a\,, \quad h \in K'(0, r)\,.$$

Hvis omvendt $(*)$ gælder for en funktion ε så $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$, så viser en lille udregning, at differenskvotienten går mod a for $h \to 0$.

Af $(*)$ ses, at når f er differentiabel i z_0, så er f også kontinuert i z_0, idet

$$|f(z_0+h) - f(z_0)| = |h|\,|a + \varepsilon(h)|$$

kan blive så lille vi ønsker, blot $|h|$ er tilstrækkeligt lille.

Nøjagtigt som for reelle funktioner på et interval bevises, at hvis f og g er differentiable i $z_0 \in G$ og $a \in \mathbb{C}$, så er også af, $f \pm g$, fg og f/g differentiable i z_0, med differentialkvotienterne

$$\begin{aligned}
(af)'(z_0) &= af'(z_0)\,,\\
(f \pm g)'(z_0) &= f'(z_0) \pm g'(z_0)\,,\\
(fg)'(z_0) &= f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)\,,\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \frac{g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}\,, \quad \text{forudsat } g(z_0) \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Det forventes, at læseren kan gennemføre beviserne. At f.eks. sidste påstand er rigtig, når $g(z_0) \neq 0$, kan ses således: Da g specielt er kontinuert i z_0 findes $r > 0$, så $g(z_0+h) \neq 0$ for $|h| < r$, og for sådanne h har man

$$\frac{f(z_0+h)}{g(z_0+h)} - \frac{f(z_0)}{g(z_0)} = \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{g(z_0+h)} - f(z_0)\frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{g(z_0+h)g(z_0)}\,.$$

Ved at dividere med $h \neq 0$ og dernæst lade $h \to 0$, får man det ønskede.

Ved at anvende ovenstående på funktioner, der er differentiable i alle punkter i en åben mængde fås:

Sætning 1.3. *Mængden $\mathcal{H}(G)$ af holomorfe funktioner i en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$ er stabil ved addition, subtraktion, multiplikation samt division såfremt nævneren aldrig er nul.*[1]

Differentialkvotienten af en konstant funktion $f(z) = k$ er $f'(z) = 0$ og differentialkvotienten af $f(z) = z$ er $f'(z) = 1$.

Mere almindeligt er z^n holomorf i $\mathbb{C}$ for $n \in \mathbb{N}_0$ med differentialkvotienten

$$\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}\,.$$

Dette kan ses ved induktion under brug af reglen om differentiation af et produkt:

$$\frac{d}{dz}(z^{n+1}) = z\frac{d}{dz}(z^n) + \frac{d}{dz}(z)z^n = z(nz^{n-1}) + z^n = (n+1)z^n.$$

[1] $\mathcal{H}(G)$ er med algebraisk sprogbrug et komplekst vektorrum og en kommutativ ring.

Under brug af differentiationsreglen for en sum ses, at et polynomium

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\,, \quad a_k \in \mathbb{C}\,,\ k = 0, 1, \ldots, n\,,$$

er holomorft i $\mathbb{C}$ med den "sædvanlige" differentialkvotient

$$p'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}\,.$$

Af differentiationsreglen for en kvotient ses, at $z^{-n} = 1/z^n$ er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ for $n \in \mathbb{N}$ med

$$\frac{d}{dz}(z^{-n}) = -n z^{-n-1}\,.$$

Også sammensatte funktioner differentieres på sædvanlig måde:

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)\,.$$

Her antages $f\colon G \to \mathbb{C}$ differentiabel i $g(z_0) \in G$, $g\colon U \to \mathbb{C}$ antages differentiabel i $z_0 \in U$, og naturligvis må vi forudsætte $g(U) \subseteq G$, for at kunne danne $f \circ g$. Endvidere bemærkes, at U kan være enten et åbent interval (g er en sædvanlig differentiabel funktion) eller en åben mængde i $\mathbb{C}$ (g er komplekst differentiabel i U).

Vi har nemlig

$$\begin{aligned} g(z_0 + h) &= g(z_0) + hg'(z_0) + h\varepsilon(h) \in G \\ f(g(z_0) + t) &= f(g(z_0)) + tf'(g(z_0)) + t\delta(t)\,, \end{aligned}$$

blot h henholdsvis t er tilstrækkeligt små, og $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \lim_{t\to 0} \delta(t) = 0$. Sættes $t(h) = hg'(z_0) + h\varepsilon(h)$, har vi for h tilstrækkeligt lille:

$$\begin{aligned} f(g(z_0 + h)) &= f(g(z_0) + t(h)) \\ &= f(g(z_0)) + t(h)f'(g(z_0)) + t(h)\delta(t(h)) \\ &= f(g(z_0)) + hf'(g(z_0))g'(z_0) + h\tilde{\varepsilon}(h) \end{aligned}$$

med

$$\tilde{\varepsilon}(h) = \varepsilon(h)f'(g(z_0)) + \delta(t(h))(g'(z_0) + \varepsilon(h))\,,$$

som opfylder $\lim_{h\to 0} \tilde{\varepsilon}(h) = 0$.

Vedrørende omvendt funktion gælder:

Sætning 1.4. *Antag at $f\colon G \to \mathbb{C}$ er holomorf i en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$, og at f er injektiv. Så er $f(G)$ åben i $\mathbb{C}$, og den omvendte afbildning $f^{\circ -1}\colon f(G) \to G$, er holomorf, med*

$$\left(f^{\circ -1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{\circ -1}} \quad \textit{dvs.} \quad \left(f^{\circ -1}\right)'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \textit{for } z \in G\,.$$

Specielt er $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in G$.

Bemærkning 1.5. Sætningen er vanskelig at vise, så beviset overspringes på dette sted. Se dog opg. 7.15. Det er et dybtliggende topologisk resultat, at blot $f : G \to \mathbb{C}$ er injektiv og kontinuert, så er $f(G)$ åben i $\mathbb{C}$ og $f^{\circ -1} : f(G) \to G$ er kontinuert. Selve differentiationsformlen følger ved differentiation af den sammensatte funktion $f^{\circ -1} \circ f(z) = z$, når det vides, at $f^{\circ -1}$ er holomorf. Derfor behøver man ikke huske selve formlen.

Hvis man ved, at $f'(z_0) \neq 0$ og $f^{\circ -1}$ er kontinuert i $w_0 = f(z_0)$, er det simpelt, at $f^{\circ -1}$ er differentiabel i w_0 med den anførte differentialkvotient. Thi hvis $w_n = f(z_n) \to w_0$, vil $z_n \to z_0$, og

$$\frac{f^{\circ -1}(w_n) - f^{\circ -1}(w_0)}{w_n - w_0} = \frac{z_n - z_0}{f(z_n) - f(z_0)} \to \frac{1}{f'(z_0)}\,.$$

1.2. Differentiabilitetens geometriske betydning når $f'(z_0) \neq 0$.

Vi er vant til at illustrere reelle funktioner af en eller to reelle variable ved grafen, som tegnes i henholdsvis $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. For en kompleks funktion af en kompleks variabel vil grafen $\{(z, f(z)) \mid z \in G\}$ være en delmængde af $\mathbb{C}^2$ som identificeres med $\mathbb{R}^4$. Da vi ikke kan visualisere fire dimensioner spiller grafen ikke nogen særlig rolle. I stedet prøver man at danne sig et billede af en holomorf funktion $f : G \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$, på anden måde. Man tænker på to forskellige eksemplarer af den komplekse plan: Definitionsplanen eller z-planen og billedplanen eller w-planen. Man prøver så at undersøge

(i) billedet under f af visse kurver i G, f.eks. vandrette og lodrette linjer;
(ii) billedmængden $f(K)$ for visse simple delområder $K \subseteq G$; især sådanne K, for hvilke f er injektiv på K. I opgaver vil vi se eksempler på dette.

Vi skal nu analysere billedegenskaber ved en holomorf funktion i nærheden af et punkt z_0, hvor $f'(z_0) \neq 0$. I nærheden af punkter z_0, hvor $f'(z_0) = 0$, er situationen mere kompliceret og vil ikke blive analyseret her. Se dog opg. 7.17.

Lad der være givet en holomorf funktion $w = f(z)$ defineret i en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$, og antag, at $z_0 \in G$, $f(z_0) = w_0$.

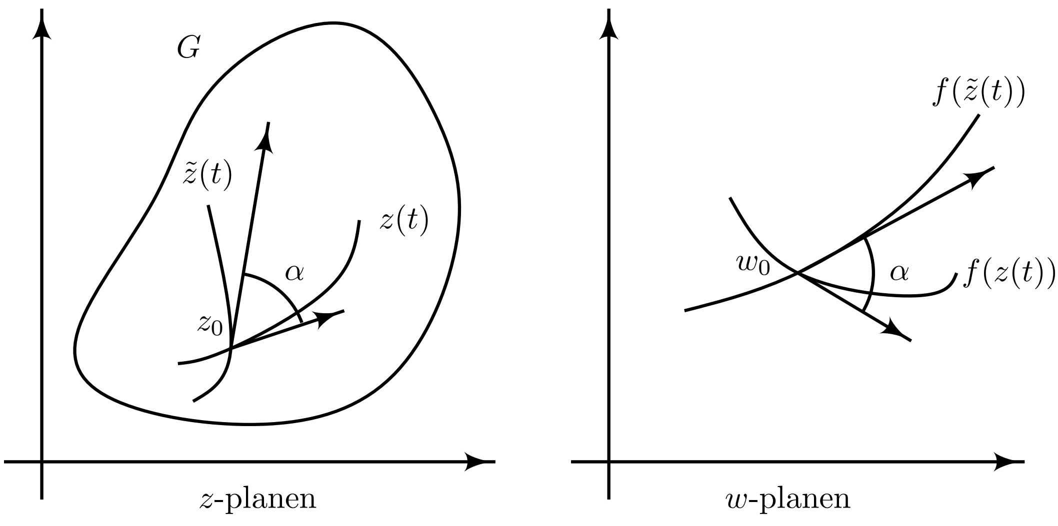
Lad os betragte en differentiabel kurve $z\colon I \to G$ i G gennem z_0. Der findes altså t_0 i intervallet I, så $z(t_0) = z_0$. Ved f afbildes $z(t)$ i en differentiabel kurve $f(z(t))$ gennem w_0. Hvis $z'(t_0) \neq 0$, har $z(t)$ en tangent i z_0, som er parallel med $z'(t_0)$ opfattet som vektoren (Re $z'(t_0)$, Im $z'(t_0)$). En parameterfremstilling af tangenten kan f.eks. skrives

$$z_0 + sz'(t_0)\,, \quad s \in \mathbb{R}\,.$$

Idet $f'(z_0) \neq 0$ er $(f \circ z)'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0$, så billedkurven har en tangent i w_0 med parameterfremstillingen

$$w_0 + sf'(z_0)z'(t_0)\,, \quad s \in \mathbb{R}\,.$$

Hvis vi skriver $f'(z_0) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ med $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, (modulus og argument) fremkommer billedkurvens hastighedsvektor altså ud fra den oprindelige kurves hastighedsvektor ved en strækning (homoteti) med faktor r og en drejning med vinkel θ. Vi siger, at f i punktet z_0 har *strækningsforholdet* $r = |f'(z_0)|$ og *drejningsvinklen* θ. Betragtes en anden kurve $\tilde{z}(t)$ gennem z_0 som skærer $z(t)$ under vinklen α, dvs. vinklen mellem kurvernes tangenter i z_0 er α, så vil også billedkurverne $f(\tilde{z}(t))$ og $f(z(t))$ skære hinanden under vinklen α, idet tangenterne begge drejes vinklen θ i positiv omløbsretning. Man siger, at f er *vinkeltro* eller *konform* i punktet z_0. Specielt vil to kurver, der er ortogonale i z_0, afbildes i to kurver, der er ortogonale i w_0. En afbildning $f : G \to \mathbb{C}$, der er konform i ethvert punkt af G, kaldes en *konform afbildning*. Vi vil senere se konkrete eksempler på disse ting.



Vi ser også en anden vigtig egenskab. *Punkter z tæt på og til venstre for z_0 i forhold til gennemløbsretningen for $z(t)$ afbildes i punkter $w = f(z)$ til venstre for billedkurven $f(z(t))$ i forhold til dens gennemløbsretning.*

Linjestykket $z_0 + t(z - z_0)$, $t \in [0,1]$ fra z_0 til z danner nemlig en vis vinkel $v \in \,]0,\pi[$ med tangenten i z_0, og billedkurverne $f(z_0 + t(z - z_0))$ og $f(z(t))$ skærer så hinanden under samme vinkel v.

1.3. Cauchy-Riemanns differentialligninger.

For en funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$, hvor $G \subseteq \mathbb{C}$ er åben, anvender man ofte skrivemåden $f = u + iv$, hvor $u = \operatorname{Re} f$ og $v = \operatorname{Im} f$ er reelle funktioner på G, og de opfattes som funktioner af de to reelle variable x, y med $x + iy \in G$, altså

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{for} \quad x + iy \in G\,.$$

Den følgende sætning karakteriserer differentiabilitet af f udtrykt ved u og v's egenskaber.

Sætning 1.6. *Funktionen f er kompleks differentiabel i $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$, hvis og kun hvis u og v er differentiable i (x_0, y_0) og de partielle afledede i (x_0, y_0) opfylder*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\,; \;\; \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,.$$

I bekræftende fald er

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,.$$

Bevis. Lad $r > 0$ være bestemt, så $K(z_0, r) \subseteq G$. For $t = h + ik \in K'(0,r)$ og $c = a + ib$ kan vi bestemme en funktion $\varepsilon\colon K'(0,r) \to \mathbb{C}$, så

$$f(z_0 + t) = f(z_0) + tc + t\varepsilon(t) \quad \text{for} \quad t \in K'(0,r)\,, \tag{1}$$

og vi ved, at f er differentiabel i z_0 med $f'(z_0) = c$, hvis og kun hvis $\varepsilon(t) \to 0$ for $t \to 0$. Ved at spalte (1) i real- og imaginærdel og bemærke, at $t\varepsilon(t) = |t|\frac{t}{|t|}\varepsilon(t)$, ser man, at (1) er ensbetydende med de 2 reelle ligninger

$$u((x_0,y_0) + (h,k)) = u(x_0,y_0) + ha - kb + |t|\sigma(h,k)\,, \tag{2'}$$

$$v((x_0,y_0) + (h,k)) = v(x_0,y_0) + hb + ka + |t|\tau(h,k)\,, \tag{2''}$$

hvor
$$\sigma(h,k) = \mathrm{Re}\big(\frac{t}{|t|}\varepsilon(t)\big) \ \text{ og } \ \tau(h,k) = \mathrm{Im}\big(\frac{t}{|t|}\varepsilon(t)\big)\,.$$
Heraf ses
$$|\varepsilon(t)| = \sqrt{\sigma(h,k)^2 + \tau(h,k)^2}\,. \tag{3}$$
Af ($2'$) følger, at u er differentiabel i (x_0, y_0) med de partielle afledede

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = a\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -b\,,$$

hvis og kun hvis $\sigma(h,k) \to 0$ for $(h,k) \to (0,0)$; og af ($2''$) følger, at v er differentiabel i (x_0, y_0) med de partielle afledede

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = b\,,\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = a\,,$$

hvis og kun hvis $\tau(h,k) \to 0$ for $(h,k) \to (0,0)$. Sætningen er nu bevist, idet der ifølge (3) gælder

$$\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sigma(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \tau(h,k) = 0\,.$$

$\square$

Bemærkning 1.7. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at $f = u+iv$ er holomorf i en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$ er altså, at u og v er differentiable, og at de partielle afledede af u og v opfylder de sammenhørende partielle differentialligninger

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\ \text{ i } G\,.$$

Disse ligninger kaldes *Cauchy-Riemanns differentialligninger*. Hvis vi tænker på $f : G \to \mathbb{C}$ som en funktion af to reelle variable, så er differentiabilitet af f i (x_0, y_0) netop at u og v er differentiable i (x_0, y_0). Det der adskiller den komplekse differentiablitet i $x_0 + iy_0$ fra differentiabilitet i (x_0, y_0) er altså kravet om at de fire partielle afledede af u og v med hensyn til x og y skal opfylde Cauchy-Riemanns ligninger.

Jacobi matricen for afbildningen $(x, y) \mapsto (u, v)$ er

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\,,$$

så ved Cauchy-Riemanns differentialligninger finder vi følgende udtryk for *Jacobi determinanten*

$$\det J = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = |f'|^2 .$$

Hidtil har vi formuleret alle sætninger om holomorfe funktioner for en vilkårlig åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$. Vi har imidlertid brug for en speciel type af åbne mængder i $\mathbb{C}$ kaldet *områder*.

Definition 1.8. En åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$ kaldes et *område*, hvis to vilkårlige punkter P og Q i G kan forbindes med en *trappelinje* i G, altså hvis det er muligt at tegne en kurve fra P til Q indenfor G og bestående af vandrette og lodrette linjestykker.

Vi vil senere vende tilbage til begrebet område og vise, at det er det samme som en kurvesammenhængende åben delmængde af $\mathbb{C}$, jf. §5.1.

Sætning 1.9. *Hvis en holomorf funktion $f : G \to \mathbb{C}$ på et område opfylder $f'(z) = 0$ for alle $z \in G$, så er f konstant.*

Bevis. Da

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 0 ,$$

ser man, at de differentiable funktioner u og v opfylder

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

i G. Når $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ følger af middelværdisætningen, at u er konstant på ethvert vandret linjestykke, og tilsvarende giver $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, at u er konstant på ethvert lodret linjestykke. På grund af forudsætningen om G bliver u og v konstante på G, altså f er konstant. □

Funktionen

$$f(z) = \begin{cases} 1 , & z \in K(0,1) \\ 2 , & z \in K(3,1) \end{cases}$$

er ikke konstant og holomorf i $G = K(0,1) \cup K(3,1)$ med $f' = 0$ i G. Bemærk at G *ikke* er et område da 0 og 3 ikke kan forbindes med en trappelinje, der forløber helt i G.

Korollar 1.10. *Hvis $f : G \to \mathbb{C}$ er holomorf i et område $G \subseteq \mathbb{C}$ og kun har reelle værdier, så er f konstant.*

Bevis. Da $v = 0$ i G, giver Cauchy-Riemanns differentialligninger, at $\frac{\partial u}{\partial x}$ og $\frac{\partial u}{\partial y}$ er 0 i G, så u og dermed f er konstant. □

1.4. Potensrækker.

Konvergensforholdene for en potensrække $\sum_0^\infty a_n z^n$, hvor $a_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, er undersøgt i matematik 1. Med potensrækken er associeret en konvergensradius $\rho \in [0, \infty]$, og rækken fremstiller en funktion f i konvergenscirklen $K(0, \rho)$, forudsat at $\rho > 0$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n , \quad |z| < \rho ,$$

og den er vilkårligt ofte differentiabel på intervallet $]-\rho, \rho[$. Vi vil vise, at f er holomorf i $K(0, \rho)$ og også vilkårligt ofte differentiabel i kompleks forstand.

Lemma 1.11. *En potensrække og dens ledvist differentierede række har samme konvergensradius.*

Bevis. Konvergensradius ρ for potensrækken $\sum_0^\infty a_n z^n$ er defineret som

$$\rho = \sup T , \quad \text{hvor } T = \{t \geq 0 \mid \{|a_n| t^n\} \text{ er begrænset}\} ,$$

og vi skal altså vise, at dette tal er lig

$$\rho' = \sup T' , \quad \text{hvor } T' = \{t \geq 0 \mid \{n|a_n| t^{n-1}\} \text{ er begrænset}\} .$$

Hvis for et $t > 0$ følgen $n|a_n|t^{n-1}$ er begrænset, så er $|a_n|t^n$ også begrænset, altså $T' \subseteq T$ hvoraf $\rho' \leq \rho$. Hvis omvendt

$$|a_n| t_0^n \leq M \text{ for } n \geq 0 \tag{1}$$

for et $t_0 > 0$, så gælder for $0 \leq t < t_0$ at

$$n|a_n|t^{n-1} = n(t/t_0)^{n-1}|a_n|t_0^{n-1} \leq n(t/t_0)^{n-1}(M/t_0) ,$$

men da følgen nr^{n-1} er begrænset når $r < 1$ (den konvergerer endda mod 0), er $n|a_n|t^{n-1}$ altså også begrænset. For hvert $t_0 \in T \setminus \{0\}$ gælder altså $[0, t_0[\subseteq T'$, hvoraf $t_0 \leq \rho'$ for alle sådanne t_0 og derfor også $\rho \leq \rho'$. □

Sætning 1.12. *Den ved potensrækken $\sum_0^\infty a_n z^n$ fremstillede funktion f er holomorf i konvergenscirkelskiven $K(0, \rho)$ og der gælder*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \text{ for } |z| < \rho .$$

Bevis. Vi viser, at f er differentiabel i z_0 med $|z_0| < \rho$. Vælg r så $|z_0| < r < \rho$. For $h \in \mathbb{C}$ med $0 < |h| < r - |z_0|$ har vi

$$\begin{aligned}\varepsilon(h) &:= \frac{1}{h}(f(z_0+h) - f(z_0)) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ \frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h} - n z_0^{n-1} \right\},\end{aligned}$$

og vi skal vise, at $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$.

Til givet $\varepsilon > 0$ vælges N så

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{4},$$

hvilket er muligt, da rækken $\sum_1^\infty n|a_n|r^{n-1}$ er konvergent. Ved udnyttelse af identiteten $(a^n - b^n)/(a-b) = \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1}$ fås

$$\frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h} = \sum_{k=1}^{n} (z_0+h)^{n-k} z_0^{k-1},$$

og da $|z_0+h| \le |z_0| + |h| < r$, $|z_0| < r$, har vi vurderingen

$$\left|\frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h}\right| \le \sum_{k=1}^{n} r^{n-k} r^{k-1} = n r^{n-1}.$$

Vi deler nu $\varepsilon(h)$ som $\varepsilon(h) = A(h) + B(h)$ med

$$A(h) = \sum_{n=1}^{N} a_n \left\{ \frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h} - n z_0^{n-1} \right\}$$

og

$$B(h) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left\{ \frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h} - n z_0^{n-1} \right\}$$

og finder $\lim_{h\to 0} A(h) = 0$, da hvert af de endelig mange led går mod 0. For $|h|$ tilstrækkeligt lille ($|h| < \delta$ for passende δ) gælder altså $|A(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$ og for halen har vi vurderingen

$$|B(h)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left\{ n r^{n-1} + |n z_0^{n-1}| \right\} < 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2},$$

der gælder for $|h| < r - |z_0|$. For $|h| < \min(\delta, r - |z_0|)$ har vi altså $|\varepsilon(h)| < \varepsilon$, hvilket viser at f er differentiabel i z_0 med den ønskede differentialkvotient. $\square$

Korollar 1.13. *Den ved potensrækken $\sum_0^\infty a_n z^n$ fremstillede funktion f er vilkårligt ofte differentiabel i $K(0,\rho)$ og der gælder*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,,\ k = 0, 1, \ldots\,.$$

Dermed er potensrækken sin egen Taylorrække omkring 0, i.e.

$$f(z) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\,,\ |z| < \rho\,.$$

Bevis. Ved at anvende Sætning 1.12 k gange finder man

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1) a_n z^{n-k}\,, \quad |z| < \rho$$

og specielt for $z = 0$

$$f^{(k)}(0) = k(k-1)\cdot \ldots \cdot 1\ a_k\,.$$

□

Sætning 1.14. Identitetssætningen for potensrækker. *Antag at potensrækkerne $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ og $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$ har konvergensradier $\rho_1 > 0$ og $\rho_2 > 0$. Hvis der findes et tal $0 < \rho \leq \min(\rho_1, \rho_2)$ så*

$$f(z) = g(z) \quad \textit{for} \quad |z| < \rho,$$

så er $a_n = b_n$ for alle n.

Bevis. Af forudsætningen følger, at $f^{(n)}(z) = g^{(n)}(z)$ for alle n og alle z med $|z| < \rho$. Under brug af Korollar 1.13 får vi

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = b_n.$$

□

1.5. Eksponentialfunktionen og de trigonometriske funktioner.

Fra matematik 1 kendes potensrækken for eksponentialfunktionen

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\,,\ z \in \mathbb{R} \tag{1}$$

som har konvergensradius $\rho = \infty$. Vi benytter derfor (1) som definition af eksponentialfunktionen for vilkårligt $z \in \mathbb{C}$ og har dermed, at $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er holomorf. Da den ledvist differentierede række er rækken selv har vi

$$\frac{d\exp(z)}{dz} = \exp(z)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{2}$$

Sætning 1.15. *Eksponentialfunktionen opfylder funktionalligningen*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)\,, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,. \tag{3}$$

Bevis. For $c \in \mathbb{C}$ betragtes den holomorfe funktion

$$f(z) = \exp(z)\exp(c - z)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Hvis (3) skal gælde, må $f(z)$ være konstant lig med $\exp(c)$. Det giver os ideen til at prøve at vise, at $f(z)$ er konstant.

Ved differentiation finder vi ved hjælp af (2)

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left(\frac{d}{dz}\exp(z)\right)\exp(c-z) + \exp(z)\frac{d}{dz}\exp(c-z) \\ &= \exp(z)\exp(c-z) - \exp(z)\exp(c-z) = 0\,, \end{aligned}$$

og ifølge Sætning 1.9 må f være konstant, specielt $f(z) = f(0) =$ $\exp(0)\exp(c) = \exp(c)$. Sættes $z = z_1$, $c = z_1 + z_2$ heri fås

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)\,.$$

□

Af funktionalligningen (3) sluttes at $\exp(z) \neq 0$ for alle $z \in \mathbb{C}$ idet

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z)\exp(-z)\,.$$

Af denne ligning fås videre

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4}$$

Indføres tallet

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (= 2.718\ldots) \tag{5}$$

giver funktionalligningen ved gentagen anvendelse

$$\exp(nz) = (\exp(z))^n\,,\ n \in \mathbb{N}$$

specielt $\exp(n) = e^n$, og sammenholdt med (4)

$$\exp(n) = e^n\,,\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

For et rationalt tal $x = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ har vi dernæst

$$(\exp(x))^q = \exp(qx) = e^p$$

specielt

$$\exp(x) = \sqrt[q]{e^p} = e^{\frac{p}{q}} = e^x \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{Q}\,.$$

Dette er udgangspunkt for, at man bruger symbolet e^x i betydningen $\exp(x)$, når x er et vilkårligt reelt eller komplekst tal, altså

$$\exp(z) = e^z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,, \tag{6}$$

selv om udtrykket e^z, altså "e ganget med sig selv z gange" er uden mening når $z \notin \mathbb{Q}$.

Funktionerne sin og cos har potensrækkerne

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{7}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\,. \tag{8}$$

Disse rækker har konvergensradius ∞ og vi benytter dem derfor som definition af sinus og cosinus for vilkårligt $z \in \mathbb{C}$. Bemærk at cos er en *lige* funktion, $\cos(-z) = \cos z$, og sin er *ulige*, $\sin(-z) = -\sin z$. Ved ledvis differentiation af potensrækkerne ses, at

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z\,, \; \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$$

altså fuldstændigt som i det reelle tilfælde.

Sætning 1.16. Eulers formler (1740'erne). *For vilkårligt $z \in \mathbb{C}$ gælder*

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,.$$

Specielt gælder

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)\,, \quad z = x + iy\,,\; x, y \in \mathbb{R}$$
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

hvoraf

$$e^{2\pi i} = 1\,, \quad e^{i\pi} = -1\,.$$

Bevis. Ved simpel addition af potensrækkerne for $\cos z$ og $i \sin z$ fås

$$\begin{aligned}\cos z + i\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \exp(iz)\,.\end{aligned}$$

Heraf fås

$$\exp(-iz) = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos z - i\sin z$$

som sammen med den første ligning giver formlerne for $\cos z$ og $\sin z$.

Af funktionalligningen fås dernæst

$$e^z = \exp(x)\exp(iy) = e^x(\cos y + i\sin y)\,.$$

□

Bemærkning 1.17 Af Eulers formler fås

$$u = \mathrm{Re}(e^z) = e^x\cos y\,,\ v = \mathrm{Im}(e^z) = e^x \sin y\,,\ |e^z| = e^x$$

og det kan direkte eftervises, at Cauchy-Riemann ligningerne gælder:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y\,.$$

Videre har vi:

Funktionen $f(\theta) = e^{i\theta}$ definerer en kontinuert gruppehomomorfi af de reelle tals additive gruppe $(\mathbb{R}, +)$ på cirkelgruppen $(\mathbb{T}, \cdot)$, hvor $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Homomorfiligningen

$$f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1)f(\theta_2) \tag{9}$$

er et specialtilfælde af (3) med $z_1 = i\theta_1$, $z_2 = i\theta_2$. Tages real- og imaginærdel af denne ligning fås *additionsformlerne* for cosinus og sinus

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \tag{10}$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\,. \tag{11}$$

De Moivres formel

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}$$

er blot ligningen $(\exp(i\theta))^n = \exp(in\theta)$ eller $f(n\theta) = f(\theta)^n$, som følger af (9).

Af funktionalligningen fås også

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)\exp(2\pi i) = \exp(z)\,,\ z \in \mathbb{C}$$

som kan udtrykkes ved udsagnet: *Eksponentialfunktionen er periodisk med den rent imaginære periode $2\pi i$.*

Sætning 1.18. *Ligningen* $\exp(z) = 1$ *har løsningerne* $z = 2\pi i p$, $p \in \mathbb{Z}$.

De trigonometriske funktioner sin *og* cos *har ikke andre nulpunkter i* $\mathbb{C}$ *end de sædvanlige*

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = p\pi\,,\ p \in \mathbb{Z}\,.$$
$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + p\pi\,,\ p \in \mathbb{Z}\,.$$

Bevis. Idet $z = x + iy$ medfører ligningen $\exp(z) = 1$ at $|\exp(z)| = e^x = 1$, altså må $x = 0$. Dermed har ligningen formen

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y = 1$$

som medfører at $y = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$.

Hvis $\sin z = 0$ giver Eulers formler $e^{iz} = e^{-iz}$ hvoraf $e^{2iz} = 1$ altså $2iz = 2\pi i p$, $p \in \mathbb{Z}$ og dermed er $z = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$.

Hvis $\cos z = 0$ fås $e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}$, altså

$$e^{i(2z-\pi)} = 1$$

som giver $i(2z - \pi) = 2\pi i p$, $p \in \mathbb{Z}$, altså $z = \frac{\pi}{2} + p\pi$. □

Af Sætning 1.18 følger at

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}\,, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

er holomorfe i henholdsvis $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$ og $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

1.6. Hyperbolske funktioner.

I mange sammenhænge spiller funktionerne

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}\,,\ \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}\,,\ z \in \mathbb{C}$$

en vigtig rolle. De er holomorfe i $\mathbb{C}$ og kaldes henholdsvis *sinus hyperbolsk* og *cosinus hyperbolsk*.

Ved indsættelse af potensrækkerne for e^z og e^{-z} finder man følgende potensrækker ($\rho = \infty$)

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,$$
$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,,$$

som altså er af "samme form" som rækkerne for sin og cos men uden fortegnsvariationen. Man ser, at sinh er ulige og cosh er lige og der gælder

$$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z\,,\ \frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z\,.$$

Funktionerne er tæt forbundet med de tilsvarende trigonometriske idet

$$\sinh(iz) = i\sin z\,,\quad \cosh(iz) = \cos z\,,\quad z \in \mathbb{C}$$

som følger af Eulers formler eller af potensrækkerne.

Ækvivalent med disse formler er

$$\sin(iz) = i\sinh z\,,\quad \cos(iz) = \cosh z\,.$$

Heraf ser man, at

$$\begin{aligned} \sinh z = 0 &\iff z = ip\pi\,,\ p \in \mathbb{Z} \\ \cosh z = 0 &\iff z = i\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right)\,,\ p \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Af Eulers formler for $\cos z$ og $\sin z$ ser man ved en lille regning, at den velkendte formel $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ (når $z \in \mathbb{R}$) faktisk gælder for alle $z \in \mathbb{C}$. Ved overgang til iz kan denne ligning udtrykkes

$$(i\sinh z)^2 + (\cosh z)^2 = 1$$

eller

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\,,$$

hvilket specielt viser, at punkterne $(\cosh t, \sinh t)$ for $t \in \mathbb{R}$ ligger på hyperbelgrenen

$$x^2 - y^2 = 1\,,\quad x > 0\,.$$

Dette er forklaringen på funktionernes navne.

Funktionerne *tangens hyperbolsk* og *cotangens hyperbolsk* defineres ved

$$\begin{aligned} \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z} \\ \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z} \end{aligned}$$

og de er holomorfe i henholdsvis $\mathbb{C} \setminus \left\{i\frac{\pi}{2} + i\pi\mathbb{Z}\right\}$ og $\mathbb{C} \setminus i\pi\mathbb{Z}$.

Opgaver til §1.

1.1. Vis, at $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ er vilkårligt ofte differentiabel i $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, og find et udtryk for $f^{(n)}(z)$ for alle $n \geq 0$. (*Vink.* Skriv $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$).

1.2. Beskriv billedkurverne under $f(z) = z^2$ af $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$ af følgende kurver i planen

a) Halvlinjer startende i 0.
b) Cirklerne $|z| = r$.
c) Den vandrette linje $x + \frac{1}{2}i$.
d) De lodrette linjer $a + iy$, hvor $a > 0$ er fast.

Forklar at alle billedkurverne fra d) skærer billedkurven fra c) i rette vinkler.

1.3. Beskriv billedet af vandrette og lodrette linjer i $\mathbb{C}$ under $\exp z = e^x e^{iy}$, $z = x + iy$, og gør rede for at billedkurverne er ortogonale.

1.4. Betragt funktionerne

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 1}\,, \; g(z) = \frac{1}{(z^2 - 2z + 4 - 4i)^2}\,.$$

Gør rede for, at f er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm i\}$ og find f'. Gør rede for, at g er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{-2i, 2 + 2i\}$ og find g'.

1.5. Vis, at funktionerne $z \mapsto \operatorname{Re} z$ og $z \mapsto \bar{z}$ ikke er differentiable i nogen punkter i $\mathbb{C}$.

1.6. Vis, uden at differentiere, at

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}\,, \; v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\,, \; \text{for } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\,,$$

tilfredsstiller Cauchy-Riemanns differentialligninger.

1.7. Lad $f : G \to \mathbb{C}$ være holomorf på området G og antag, at $|f|$ er konstant. Vis, at f er konstant.

Vink. a) Skriv $f = u + iv$ og bemærk, at forudsætningen siger, at $u^2 + v^2$ er konstant, altså $u^2 + v^2 = k \geq 0$ i G. Vi kan så antage $k > 0$ for ellers er $u = v = f = 0$.

b) Udnyt at $\frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2) = \frac{\partial}{\partial y}(u^2 + v^2) = 0$ og brug Cauchy-Riemann-ligningerne til at opnå ligningssystemet

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 0\,. \tag{$*$}$$

c) Ligningssystemet $(*)$ med $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ som ubekendte har determinanten $u^2 + v^2$ og slut, at $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

1.8. Vis, at hvis $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er holomorf og af formen $f(x+iy) = u(x)+iv(y)$, hvor u og v er reelle funktioner, så er $f(z) = \lambda z + c$ med $\lambda \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$.

1.9. Vis formlerne for $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\theta \sin^{2k}\theta$$
$$\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}\theta \sin^{2k+1}\theta\,.$$

($[a]$ betyder den hele del af a, dvs. $[a]$ er det tal $p \in \mathbb{Z}$ som opfylder $a - 1 < p \leq a$.)

1.10. Vis additionsformlerne

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

samt

$$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$$

for alle $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$. (*Vink.* Eulers formler).

1.11. Bestem løsningsmængden af $z \in \mathbb{C}$ til ligningerne $\sin z = 1$, $\sin z = \sqrt{10}$.

1.12. Vis, for eksempel ved at benytte Euler's formler, at der for x og $y \in \mathbb{R}$ gælder:

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\,,$$

og benyt dette til at vise, at sin er holomorf med $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$.

Beskriv billedet af vandrette og lodrette linier i $\mathbb{C}$ ved sinus afbildningen. (Ligningen $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ fremstiller en hyperbel, og ligningen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ fremstiller en ellipse.)

Vis, at sinus afbilder strimlen

$$\left\{x + iy \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,,\ y \in \mathbb{R}\right\}$$

bijektivt på $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, \infty[)$.

1.13. Vis, at Cauchy-Riemanns differentialligninger for $f = u+iv$ kan skrives som en enkelt ligning:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Ved indførelse af udtrykkene

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

skal man vise, at $\overline{\partial} f = 0$ og $f'(z) = \partial f(z)$ for en holomorf funktion f.

1.14. Vis, at for $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$

$$\begin{aligned} 2\tan(x+iy) &= \frac{\sin(2x)}{\cos^2 x + \sinh^2 y} + i\frac{\sinh(2y)}{\cos^2 x + \sinh^2 y} \\ \tan z &= \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}\,. \end{aligned}$$

1.15. Vis, at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ har konvergensradius $\rho = \infty$ hvis og kun hvis $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

1.16. Antag, at $f, g : G \to \mathbb{C}$ er n gange differentiable i den åbne delmængde G i $\mathbb{C}$. Bevis Leibniz formel for den n'te afledede af et produkt:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

1.17. Vis, at funktionen $\tan z$ opfylder $\tan' z = 1 + \tan^2 z$, $\tan'' z = 2\tan z + 2\tan^3 z$ og generelt

$$\tan^{(n)} z = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} \tan^k z, \quad n = 0, 1, \dots,$$

hvor $a_{n,k}$ er ikke-negative hele tal.

Vis, at $a_{n,k} = 0$ når n, k enten begge er lige eller begge er ulige.

Konkludér, at Taylorrækken for tan omkring 0 har formen $\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^{2n+1}$, hvor $t_n = a_{2n+1,0}/(2n+1)!$.

Vis, at Taylorrækken starter

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots.$$

(Koefficienterne i potensrækken for tan kan udtrykkes ved Bernoullitallene, se opg. 6.12.)

§2. Kurveintegraler og stamfunktioner

I denne paragraf indføres det komplekse kurveintegral, der gør det muligt at studere stamfunktionsbestemmelse som omvendt operation til differentiation. Resultaterne bygger på integration af komplekse funktioner på et interval.

Estimationslemmaet 2.8 er vigtigt og bruges utallige gange i kurset.

Sætning 2.13 giver en fuldstændig karakterisering af, hvornår en kontinuert funktion har en stamfunktion.

2.1. Integration af funktioner med komplekse værdier.

For en kontinuert funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ defineres

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt\,, \tag{1}$$

så $\int_a^b f(t)dt$ er et komplekst tal med

$$\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt\,,\ \ \operatorname{Im}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt\,.$$

De sædvanlige regneregler for integraler af reelle funktioner overføres umiddelbart til funktioner med komplekse værdier, f.eks. har vi

$$\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \tag{2}$$

$$\int_a^b cf(t)dt = c\int_a^b f(t)dt\,, \quad c \in \mathbb{C} \tag{3}$$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \,\text{hvis}\, F' = f\,. \tag{4}$$

Følgende vurdering, der ligner den reelle version til forveksling, er lidt tricket at vise.

Sætning 2.1. *For en kontinuert funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ gælder*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt\,.$$

Bevis. Det komplekse tal $z = \int_a^b f(t)dt$ skrives på formen $re^{i\theta}$, hvor $r = |z|$ og θ er et argument for z. Så har vi ifølge (3)

$$r = ze^{-i\theta} = \int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} f(t)\right) dt\,,$$

idet

$$\int_a^b \operatorname{Im}\left(e^{-i\theta} f(t)\right) dt = 0\,,$$

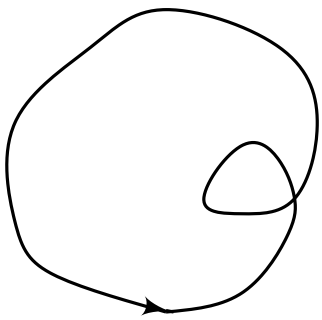
da integralet af $e^{-i\theta} f(t)$ er det reelle tal $r \geq 0$. Vi har altså

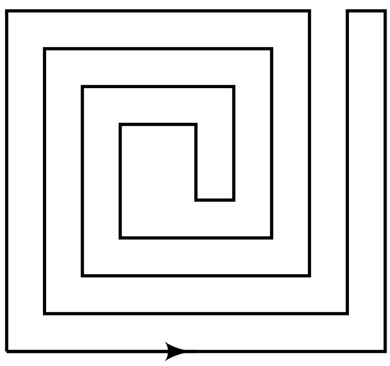
$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(t)dt\Big| &= \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} f(t)\right) dt \leq \int_a^b \Big|\operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} f(t)\right)\Big| dt \\ &\leq \int_a^b \Big|e^{-i\theta} f(t)\Big| dt = \int_a^b \Big|e^{-i\theta}\Big|\, |f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt\,,\end{aligned}$$

idet vi har brugt, at $\operatorname{Re} w \leq |\operatorname{Re} w| \leq |w|$ for ethvert $w \in \mathbb{C}$ og at $|e^{-i\theta}| = 1$.
□

2.2. Komplekse kurveintegraler.

En kontinuert afbildning γ af et lukket begrænset interval $[a, b]$ ind i $\mathbb{C}$ kaldes kort en *kontinuert kurve i* $\mathbb{C}$, men det er mere korrekt at sige, at γ bestemmer en *orienteret kontinuert kurve* i $\mathbb{C}$. Punkterne $\gamma(a)$ og $\gamma(b)$ kaldes henholdsvis begyndelsespunkt og endepunkt, og γ kaldes en *parameterfremstilling* for kurven. Den kaldes *lukket* hvis $\gamma(a) = \gamma(b)$. Mængden af kurvepunkter betegnes kort γ^*, dvs. $\gamma^* = \gamma([a, b])$. Mere præcist vil vi ved en *orienteret kontinuert kurve* i $\mathbb{C}$ forstå en ækvivalensklasse af kontinuerte parameterfremstillinger, idet to sådanne $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ og $\tau\colon [c, d] \to \mathbb{C}$ kaldes ækvivalente, hvis der findes en *kontinuert strengt voksende* afbildning φ af $[a, b]$ på $[c, d]$, så $\tau \circ \varphi = \gamma$. Vi betragter altså kun orienteringsbevarende reparametriseringer.





ikke-simpel kurve simpel kurve

Hvis $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ er parameterfremstilling for en orienteret kontinuert kurve, vil $t \mapsto \gamma(a + b - t)$ være en parameterfremstilling for kurven med modsat gennemløbsretning; den kaldes den *modsatte* kurve.

En lukket orienteret kontinuert kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ kaldes *simpel*, hvis den ikke skærer sig selv, altså hvis γ's restriktion til $[a,b[$ er injektiv.

En simpel lukket orienteret kontinuert kurve γ kaldes ofte en *Jordan kurve* på grund af *Jordans kurvesætning*: (Fremsat af C. Jordan i 1887. Det første korrekte bevis blev givet af O. Veblen i 1905.)

En Jordan kurve deler $\mathbb{C}$ *i to områder: Et indre begrænset område og et ydre ubegrænset område, der begge har kurven som rand.*

En sådan kurve vil vi normalt orientere positivt, dvs. mod uret, så vi under et gennemløb hele tiden har det indre område til venstre.

Begrebet orienteret kontinuert kurve er for generelt til, at vi kan definere kurveintegraler. Vi vil få brug for kurvens tangent og må derfor forudsætte, at parameterfremstillingen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ er C^1 altså kontinuert differentiabel. Vi taler så om en orienteret C^1-*kurve* eller en orienteret *glat kurve*. Differentialkvotienten $\gamma'(t)$ repræsenterer kurvens hastighedsvektor som ligger på tangenten til kurven i punktet $\gamma(t)$. Tallet $|\gamma'(t)|$ er farten i punktet $\gamma(t)$.

Definition 2.2. Lad $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ være en orienteret C^1-kurve og lad $f\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ være kontinuert. Ved *kurveintegralet af* f *langs* γ forstås det komplekse tal

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\,.$$

Bemærkning 2.3.

(i) Værdien af $\int_\gamma f$ ændres ikke, når parameterfremstillingen γ erstattes af en dermed ækvivalent $\gamma \circ \varphi$, hvor $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ er en bijektiv C^1-funktion med $\varphi'(t) > 0$ for alle t. Dette følger af formlen for substitution i et integral.

(ii) Betegner $-\gamma$ den modsatte kurve til γ, gælder

$$\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f\,.$$

(iii) Skrives $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, hvor $z = x+iy$ og $\gamma(t) = x(t)+iy(t)$, ser man, at

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_a^b \big(u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\big)\big(x'(t)+iy'(t)\big)dt\\ &= \int_a^b [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)]dt\\ &\quad + i\int_a^b [v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]dt\,,\end{aligned}$$

så det komplekse kurveintegrals real- og imaginærdel er to sædvanlige tangentielle kurveintegraler også kaldet arbejdsintegraler, som kort kan skrives

$$\int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy = \int_\gamma (u,-v)\cdot ds + i\int_\gamma (v,u)\cdot ds\,.$$

Hvis $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\delta : [c,d] \to \mathbb{C}$ er to orienterede C^1-kurver og $\gamma(b) = \delta(c)$ vil vi intuitivt kunne sætte kurverne sammen, så vi først bevæger os langs γ fra punktet $P = \gamma(a)$ til $Q = \gamma(b)$ og derefter langs δ fra $Q = \delta(c)$ til $R = \delta(d)$.

Denne kurve vil vi betegne $\gamma\cup\delta$, men i andre fremstillinger af teorien møder man betegnelsen $\gamma + \delta$. Ingen af betegnelserne passer med den sædvanlige betydning af symbolerne $\cup$ og $+$.

Vi kan give en parameterfremstilling for $\gamma\cup\delta$ på intervallet $[a, b+(d-c)]$ på følgende måde

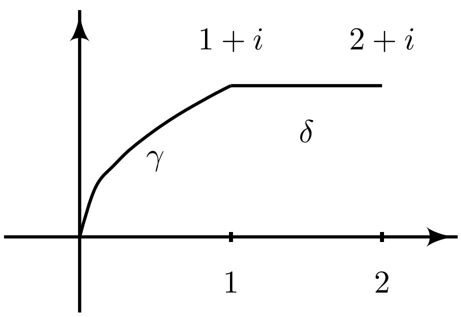
$$\tau(t) = \begin{cases} \gamma(t)\,, & t \in [a,b] \\ \delta(t+c-b)\,, & t \in [b, b+(d-c)]\,. \end{cases}$$

Denne parameterfremstilling er kun stykkevis C^1, idet $\tau \mid [a,b]$ er C^1 og $\tau \mid [b, b+d-c]$ er C^1, men tangentvektorerne $\gamma'(b)$ og $\delta'(c)$ kan være forskellige svarende til, at kurven slår et knæk, når man passerer Q.

Det er nu nærliggende at udvide definition 2.2 til følgende

$$\int_\tau f = \int_{\gamma\cup\delta} f := \int_\gamma f + \int_\delta f\,.$$

Eksempel 2.4. Lad $f(z) = z^2$ og lad $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\delta : [1,2] \to \mathbb{C}$ være C^1-kurverne $\gamma(t) = t^2 + it$, $\delta(t) = t + i$. Bemærk, at γ går fra 0 til $1+i$ langs en parabel ($y = \sqrt{x}$) og δ går fra $1+i$ til $2+i$ langs en vandret linje, se figur.



Den sammensatte kurve $\gamma \cup \delta$ kan beskrives ved parameterfremstillingen $\tau : [0,2] \to \mathbb{C}$

$$\tau(t) = \begin{cases} t^2 + it\,, & t \in [0,1] \\ t + i\,, & t \in [1,2]\,, \end{cases} \quad \tau'(t) = \begin{cases} \gamma'(t) = 2t + i\,, & t \in [0,1[\\ \delta'(t) = 1\,, & t \in]1,2]\,. \end{cases}$$

Bemærk, at $\gamma'(1) = 2 + i \neq \delta'(1) = 1$ så τ' er ikke defineret for $t = 1$. Vi finder

$$\begin{aligned} \int_\tau f = \int_{\gamma\cup\delta} &= \int_0^1 (t^2+it)^2(2t+i)dt + \int_1^2 (t+i)^2 dt \\ &= \int_0^1 (2t^5 + 5it^4 - 4t^3 - it^2)dt + \int_1^2 (t^2 + 2it - 1)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^6 + it^5 - t^4 - \frac{i}{3}t^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}t^3 + it^2 - t\right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i\right) + \left(\frac{4}{3} + 3i\right) = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i\,. \end{aligned}$$

Vi vil nu formalisere ovenstående i en udvidelse af definition 2.2.

Definition 2.5. Ved en *vej* (på engelsk ofte contour) forstås en parameterfremstilling $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ som er *stykkevis* C^1, dvs. der findes delepunkter $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ så

$$\gamma_j = \gamma \,\Big|\, [t_{j-1}, t_j]\,, \quad j = 1, \ldots, n$$

er C^1-parameterfremstillinger, men der må gerne være knæk i punkterne $\gamma(t_j)$, ved at den højreafledede af γ_{j+1} i t_j er forskellig fra den venstreafledede af γ_j i t_j.

Ved *kurveintegralet af f langs vejen* γ forstås tallet

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_n} f = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\,. \tag{1}$$

Bemærkning 2.6. Funktionen $f(\gamma(t))\gamma'(t)$, $t \in [a,b]$ er stykkevis kontinuert, idet den er kontinuert på hvert af intervallerne $]t_{j-1}, t_j[$ med grænseværdier i endepunkterne. Funktionen er derfor Riemann integrabel i den forstand, at dens realdel og imaginærdel er integrable og tallet (1) kan opfattes som definitionen af integralet

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\,.$$

Definition 2.7. Ved *længden* af en vej $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, som i definition 2.5 forstås tallet

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \,,$$

idet den stykkevis kontinuerte funktion $|\gamma'(t)|$ er integrabel.

Til vurdering af kurveintegralers størrelse gælder følgende vigtige:

Estimationslemma 2.8. *Lad $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ være parameterfremstilling for en vej. For en kontinuert funktion $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ gælder*

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| L(\gamma) \,, \tag{2}$$

hvor $L(\gamma)$ er længden af vejen.

Bevis. Vi kan nøjes med at gennemføre beviset for en C^1-parameterfremstilling, da det almene resultat let følger heraf. Ifølge Sætning 2.1 har vi

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \, |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| L(\gamma) \,. \end{aligned}$$

□

Bemærkning 2.9. I praksis er det ikke nødvendigt at bestemme

$$\max_{z \in \gamma^*} |f(z)| = \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \,,$$

idet der ofte frembyder sig en vurdering

$$|f(z)| \leq K \quad \forall z \in \gamma^* \,,$$

og dermed gælder $\max_{\gamma^*} |f| \leq K$. Af (2) fås

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq K \; L(\gamma) \,,$$

som i praksis er lige så nyttig som (2).

2.3. Stamfunktion.

Begrebet stamfunktion som omvendt operation til differentiation kendes fra funktioner på et interval. På engelsk bruger man ofte ordet “antiderivative” som understreger, at operationen er omvendt til differentiation. Vi skal nu studere det analoge begreb for funktioner af en kompleks variabel.

Definition 2.10. Lad $f\colon G \to \mathbb{C}$ være defineret i et område $G \subseteq \mathbb{C}$. En funktion $F\colon G \to \mathbb{C}$ kaldes en *stamfunktion* til f, såfremt F er holomorf i G og $F' = f$.

Hvis F er en stamfunktion til f, er $F + k$ også stamfunktion til f for vilkårligt $k \in \mathbb{C}$, og på denne måde finder vi alle stamfunktioner til f. Er nemlig Φ en anden stamfunktion til f, er $(\Phi - F)' = f - f = 0$, så $\Phi - F$ er konstant ifølge Sætning 1.9.

Et polynomium

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n\,,\ z \in \mathbb{C}$$

har en stamfunktion i $\mathbb{C}$ nemlig polynomierne

$$P(z) = k + a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\,.$$

Mere generelt vil summen af potensrækken

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \quad z \in K(z_0, \rho)$$

med konvergensradius ρ have stamfunktionerne

$$F(z) = k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

i $K(z_0, \rho)$. Vi ved nemlig, at F og f har samme konvergensradius, jf. Lemma 1.11.

Kurveintegraler er nemme at beregne, når man kender en stamfunktion.

Sætning 2.11. *Hvis en kontinuert funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ i et område $G \subseteq \mathbb{C}$ har en stamfunktion $F\colon G \to \mathbb{C}$, gælder*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

for enhver vej γ fra z_1 til z_2. Specielt gælder $\int_\gamma f = 0$ for enhver lukket vej γ.

Bevis. Hvis $\gamma\colon [a, b] \to G$ er en vej med $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$, finder vi

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$
$$= \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

□

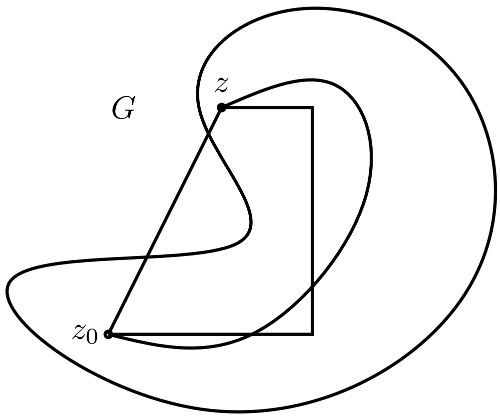
For en kontinuert funktion f på et interval I kan vi finde en stamfunktion ved at vælge $x_0 \in I$ og definere

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt\,, \quad x \in I\,.$$

Når vi skal finde en stamfunktion til $f : G \to \mathbb{C}$ er det nærliggende at vælge $z_0 \in G$ og prøve at definere

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt\,, \quad z \in G\,. \tag{1}$$

Integralet skal forstås som kurveintegralet langs en vej fra z_0 til z. Det var nærliggende at gå langs den rette linje fra z_0 til z, men så risikerer man at komme ud af området. Der er imidlertid flere muligheder for at



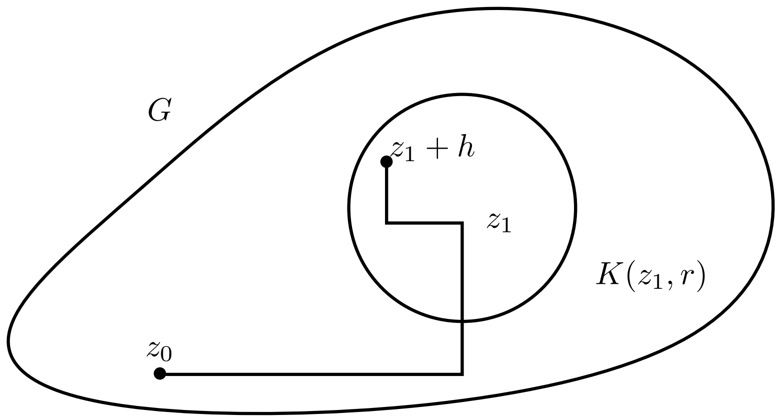
tegne veje γ fra z_0 til z både "snoede" og trappelinjer, og spørgsmålet opstår da om udtrykket (1) er uafhængigt af vejen fra z_0 til z, for ellers er (1) uden mening.

Vi skal nu se, hvornår ovenstående kan realiseres.

Lemma 2.12. *Lad $f\colon G \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion i et område $G \subseteq \mathbb{C}$, og antag at $\int_\gamma f = 0$ for enhver lukket trappelinje i G. Da har f en stamfunktion.*

Bevis. Vi vælger $z_0 \in G$. For $z \in G$ defineres $F(z) = \int_{\gamma_z} f$, hvor γ_z vælges som en trappelinje i G fra z_0 til z. Da G er et område findes en sådan trappelinje, og kurveintegralet er uafhængigt af valget i henhold til forudsætningen. Hvis nemlig δ_z er en anden trappelinje fra z_0 til z vil $\gamma := \delta_z \cup (-\gamma_z)$ være en lukket trappelinje, altså

$$0 = \int_\gamma f = \int_{\delta_z} f - \int_{\gamma_z} f\,.$$



For at vise differentiabiliteten af F i $z_1 \in G$ med $F'(z_1) = f(z_1)$ tænkes $\varepsilon > 0$ givet. Da f er kontinuert i z_1 findes $r > 0$ så $K(z_1, r) \subseteq G$ og så

$$|f(z) - f(z_1)| \le \varepsilon \text{ for } z \in K(z_1, r) . \tag{2}$$

Til $h = h_1 + ih_2$ så $0 < |h| < r$ betragtes trappelinjen ℓ fra z_1 til $z_1 + h$, der først går vandret fra z_1 til $z_1 + h_1$, og dernæst lodret fra $z_1 + h_1$ til $z_1 + h_1 + ih_2 = z_1 + h$. Denne tilhører $K(z_1, r)$ og dermed G. Ved at føje ℓ efter γ_{z_1} har vi en trappelinje $\gamma_{z_1} \cup \ell$ fra z_0 til $z_1 + h$ og får da

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int\limits_{\gamma_{z_1} \cup \ell} f - \int\limits_{\gamma_{z_1}} f = \int_\ell f .$$

For en konstant c gælder ifølge Sætning 2.11

$$\int_\ell c = c(z_1 + h) - cz_1 = ch ,$$

idet c har stamfunktionen $z \mapsto cz$. Med $c = f(z_1)$ finder vi da

$$\frac{1}{h}\,(F(z_1 + h) - F(z_1)) - f(z_1) = \frac{1}{h}\int_\ell f - f(z_1) = \frac{1}{h}\int_\ell (f(z) - f(z_1))\,dz ,$$

og af estimationslemmaet 2.8 og bemærkning 2.9 fås under brug af (2)

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{h}\,(F(z_1 + h) - F(z_1)) - f(z_1)\Big| &= \frac{1}{|h|}\,\Big|\int_\ell (f(z) - f(z_1))\,dz\Big| \\ &\le \frac{1}{|h|}\varepsilon L(\ell) = \frac{|h_1| + |h_2|}{|h|}\varepsilon \le 2\varepsilon .\end{aligned}$$

$\square$

At en kontinuert funktion har en stamfunktion kan karakteriseres på følgende måde:

Sætning 2.13. *For en kontinuert funktion $f : G \to \mathbb{C}$ på et område $G \subseteq \mathbb{C}$ er følgende betingelser ensbetydende:*

(i) *f har en stamfunktion.*
(ii) *For vilkårlige $z_1, z_2 \in G$ har $\int_\gamma f$ samme værdi for enhver vej γ i G fra z_1 til z_2.*
(iii) *$\int_\gamma f = 0$ for enhver lukket vej γ i G.*

Når betingelserne er opfyldt, finder man en stamfunktion F til f ved at vælge et punkt $z_0 \in G$ og sætte

$$F(z) = \int_\gamma f\,, \tag{3}$$

hvor γ er en vilkårlig vej i G fra z_0 til z.

Bevis. (i) $\Rightarrow$ (ii) følger af Sætning 2.11.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Lad γ være en lukket vej i G fra z_0 til z_0 og vælg den konstante vej $\delta(t) = z_0$, $t \in [0,1]$. Ifølge forudsætningen er

$$\int_\gamma f = \int_\delta f = \int_0^1 f(\delta(t))\delta'(t)dt = 0\,.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Da specielt $\int_\gamma f = 0$ for enhver lukket trappelinje i G, giver Lemma 2.12, at f har en stamfunktion $F(z) = \int_\gamma f$, hvor γ vælges som en trappelinje fra et fast punkt z_0 til z. Da (i) – (iii) er ækvivalente gælder udtrykket (3) for F uafhængigt af valget af vej fra z_0 til z. □

Eksempel 2.14. Lad C_r betegne cirklen $|z| = r$ gennemløbet positivt en gang, $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Så er for $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{r^n e^{int}}\,dt = ir^{1-n}\int_0^{2\pi} e^{it(1-n)}dt = \begin{cases} 0\,, & n \neq 1\,, \\ 2\pi i\,, & n = 1\,. \end{cases}$$

Resultatet følger også for $n \neq 1$ af, at z^{-n} har stamfunktionen $z^{1-n}/(1-n)$ i $\mathbb{C}$ for $n \leq 0$, i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ for $n \geq 2$. Da integralet er $\neq 0$ for $n = 1$ kan vi slutte, at z^{-1} ikke har nogen stamfunktion i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Opgaver til §2.

2.1. Udregn kurveintegralerne

$$\int_0^i \frac{dz}{(1-z)^2}\,,\int_i^{2i} \cos z\ dz \ \text{ og } \ \int_0^{i\pi} e^z dz$$

ved brug af definitionen på kurveintegral, idet det er underforstået, at der skal integreres langs linjestykket fra nedre grænse til øvre grænse. Find derefter værdien af de tre integraler ved stamfunktionsbestemmelse og Sætning 2.11.

2.2. Udregn $\displaystyle\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z}$, idet $\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ er en parameterfremstilling for enhedscirklen med $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gennemløb: $\gamma_n(t) = e^{itn}$.

2.3. Vis, at

$$\int_\gamma \frac{z}{(z^2+1)^2} dz = 0\,,$$

når γ betegner en lukket vej i $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

2.4. Vis, at

$$\int_\gamma P(z) dz = 0$$

for ethvert polynomium P og enhver lukket vej γ i $\mathbb{C}$.

2.5. Vis, at $A(\gamma) = \frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}\, dz$ er et reelt tal for enhver lukket vej γ i $\mathbb{C}$.
Vink. Hvis $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, skal man vise at

$$A(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} dt\,.$$

Udregn $A(\gamma_n)$ for $\gamma_n(t) = e^{\text{int}}$, $t \in [0, 2\pi]$, $n = \pm 1$. Gør rede for, at for en simpel lukket vej γ kan $A(\gamma)$ fortolkes som arealet omsluttet af γ med fortegn $\pm$ afhængig af positiv/negativ omløbsretning.

2.6. Vis, at når f og g er holomorfe i et område G, med kontinuerte afledede f' og g', så gælder for enhver lukket vej γ i området:

$$\int_\gamma f'(z)g(z)dz = -\int_\gamma f(z)g'(z)dz\,.$$

(*Vink.* Bemærk at $f'g + fg'$ har en stamfunktion i G.)

2.12

§3. Cauchys sætninger

Hovedresultatet i denne paragraf er *Cauchys integralsætning*: Integralet af en holomorf funktion langs en lukket vej er nul, når området er uden huller. Af resultatet udledes dernæst *Cauchys integralformel*, der udtrykker værdien af en holomorf funktion i et indre punkt af en cirkelskive ved værdierne på periferien. Resultatet viser groft sagt det overraskende, at bare man kender en lille smule af en holomorf funktion, så kender man den hele.

Resultaterne er fundamentet for resten af kurset.

3.1. Cauchys integralsætning.

Vi ved, at eksistensen af en stamfunktion til $f : G \to \mathbb{C}$ er afhængig af om integralet af f langs alle lukkede veje er nul. Vi ved også, at kontinuitet af $f : G \to \mathbb{C}$ ikke er nok (som i reel analyse) til at f har en stamfunktion. Ja selv en pæn funktion som $f(z) = 1/z$ på $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ har ikke en stamfunktion, jf. Eksempel 2.14.

Det viser sig, at der skal stilles "særlige" krav til såvel f som til området G, for at der er en stamfunktion. Dette er Cauchys fundamentale opdagelse omkring 1825.

Det krav, der skal stilles til området, siger løst sagt, at det er uden huller. Området $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ har netop et hul i $\{0\}$.

Et område $G \subseteq \mathbb{C}$ kaldes *enkeltsammenhængende*, hvis der om to vilkårlige kontinuerte kurver γ_0, γ_1 i G med samme begyndelsespunkt a og samme endepunkt b gælder, at den ene kan "deformeres kontinuert" over i den anden. Idet vi kan antage, at begge kurver har parameterinterval $[0, 1]$, vil vi præcist forlange, at der findes en kontinuert funktion $H : [0, 1] \times [0, 1] \to G$, så at

$$H(0, t) = \gamma_0(t)\,, \quad H(1, t) = \gamma_1(t) \ \text{ for } \ t \in [0, 1]\,,$$

og så at $H(s, 0) = a$, $H(s, 1) = b$ for $s \in [0, 1]$. For hvert $s \in [0, 1]$ er $t \mapsto H(s, t)$ en kontinuert kurve fra a til b, og når s varierer fra 0 til 1 varierer kurven fra γ_0 til γ_1. Funktionen H kaldes en *homotopi*.

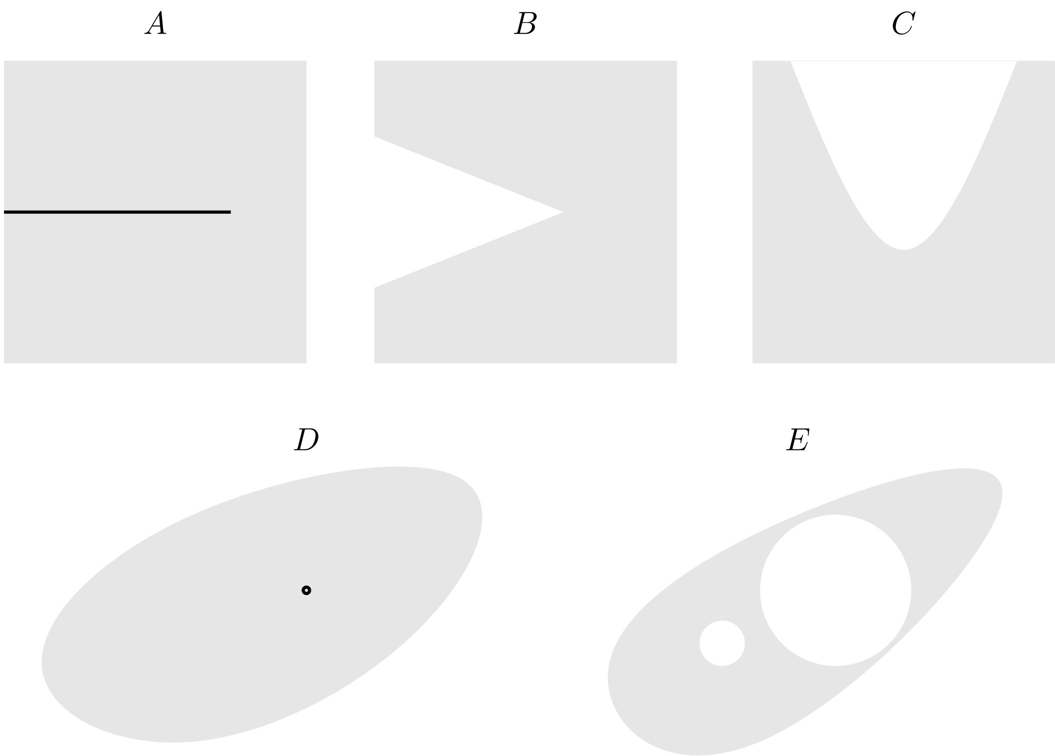
Intuitivt er et enkeltsammenhængende område et *område uden huller*.

Vi nævner uden bevis, at hvis et område G er *stjerneformet omkring et punkt* $a \in G$, dvs. for ethvert $z \in G$ er liniestykket fra a til z indeholdt i G, så er G enkeltsammenhængende, jf. Opg. 3.4. En mængde $G \subseteq \mathbb{C}$ kaldes *konveks*, hvis for alle $a, b \in G$ også linjestykket mellem a og b tilhører G, altså hvis

$$\gamma(t) = (1 - t)a + tb \in G \ \text{ for } \ t \in [0, 1]\,.$$

Da en konveks mængde er stjerneformet omkring ethvert af sine punkter, er et *konvekst* område enkeltsammenhængende.

Fjernes en halvlinie fra $\mathbb{C}$ fås et område, der er stjerneformet omkring ethvert punkt på den modsatte halvlinie (eks. A). Et vinkelrum er stjerneformet og ikke konvekst, når vinklen er mere end 180 grader som i eksempel B. Området udenfor en parabel (eks. C) er enkeltsammenhængende, men ikke stjerneformet. Fjernes et punkt (eks. D) eller en eller flere lukkede cirkelskiver (eks. E) fra et åbent område fås et ikke enkeltsammenhængende område.



Sætning 3.1 (Cauchys integralsætning). *For en holomorf funktion $f : G \to \mathbb{C}$ i et enkeltsammenhængende område $G \subseteq \mathbb{C}$ og en lukket vej γ i G gælder*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0\,.$$

Cauchy viste resultatet i 1825, idet han om en holomorf funktion forudsatte, at f' er kontinuert.

For en differentiabel funktion $f : I \to \mathbb{R}$ på et interval kan det ske, at f' har diskontinuiteter. Et eksempel er $(I = \mathbb{R})$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0\,. \end{cases}$$

For en kompleks differentiabel (holomorf) funktion $f : G \to \mathbb{C}$ på en åben mængde er f' derimod kontinuert. Det blev opdaget af den franske matematiker Goursat i 1899, idet han gav et bevis for Cauchys integralsætning uden at forudsætte, at f' er kontinuert. Kernen i beviset er Goursats lemma, men beviset for, at f' er kontinuert, følger først af Sætning 4.8.

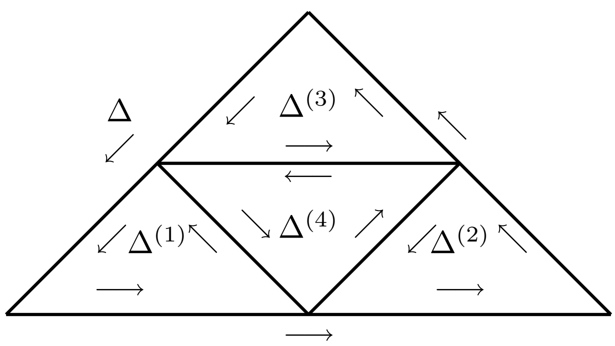
Lemma 3.2 (Goursats lemma 1899). *Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $f \in \mathcal{H}(G)$. Så er*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0$$

for enhver (massiv) trekant $\triangle \subseteq G$.

Bevis. Kurveintegralet langs randen $\partial\triangle$ af et trekant $\triangle$ skal her altid fortolkes således, at siderne gennemløbes i rækkefølge i positiv omløbsretning, men når lemmaet er vist, er integralet selvfølgelig også nul, når vi går rundt i negativ omløbsretning.

Midtpunkterne af siderne i $\triangle$ forbindes.



Dermed er $\triangle$ delt i fire trekanter $\triangle^{(1)}, \dots, \triangle^{(4)}$ som vist på tegningen, og med de viste orienteringer. Idet f.eks. $\triangle^{(1)}$ og $\triangle^{(4)}$ har en fælles side med modsatte orienteringer, har vi

$$I = \int_{\partial\triangle} f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial\triangle^{(i)}} f\,.$$

Mindst et af de fire tal $\int_{\partial\triangle^{(i)}} f$ må have en absolut værdi $\geq \frac{1}{4}|I|$. Kaldes den tilsvarende trekant for $\triangle_1$ har vi altså

$$|I| \leq 4\Big|\int_{\partial\triangle_1} f\Big|\,.$$

Anvendes samme procedure på $\triangle_1$ vil en af de 4 trekanter, hvori $\triangle_1$ deles — lad os kalde den $\triangle_2$ — opfylde

$$|I| \leq 4\Big|\int_{\partial\triangle_1} f\Big| \leq 4^2\Big|\int_{\partial\triangle_2} f\Big|\,.$$

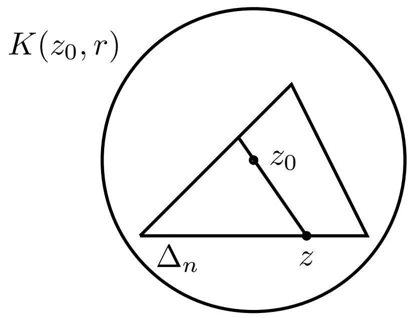
Fortsættes på denne måde fås en dalende følge $\triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \ldots$ af lukkede trekanter så

$$|I| \leq 4^n \Big| \int_{\partial \triangle_n} f \Big| \quad \text{for} \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Der gælder

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \triangle_n = \{z_0\}$$

for et entydigt bestemt punkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Vælges nemlig $z_n \in \triangle_n$ vilkårligt vil (z_n) have en konvergent delfølge med grænsepunkt $z_0 \in \cap_1^\infty \triangle_n$ ifølge Bolzano-Weierstrass' sætning. Da størrelsen af trekanterne halveres i hvert skridt, er der kun ét tal i fællesmængden.



Hvis L betegner længden af $\partial \triangle$, er længden af $\partial \triangle_n$ lig med $2^{-n} L$. Da f er differentiabel i z_0, kan vi til givet $\varepsilon > 0$ finde $r > 0$, så

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \;\text{ for }\; z \in K(z_0, r) \subseteq G \,, \tag{2}$$

og der findes N, så $\triangle_n \subseteq K(z_0, r)$ for $n \geq N$. For $n \geq N$ og $z \in \partial \triangle_n$ er $|z - z_0|$ højst halvdelen af omkredsen af $\triangle_n$, altså $|z - z_0| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-n} L$.

Funktionen $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ er et første grads polynomium, og har dermed en stamfunktion, så ifølge Sætning 2.11 har vi

$$\int_{\partial \triangle_n} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\big) dz = 0 \,,$$

altså ifølge (2) og estimationslemmaet

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\partial \triangle_n} f(z)\, dz \Big| &= \Big| \int_{\partial \triangle_n} \big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big)\, dz \Big| \\ &\leq \varepsilon \cdot \max_{z \in \partial \Delta_n} |z - z_0| \cdot 2^{-n} L \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(2^{-n} L\right)^2 . \end{aligned}$$

Af (1) får vi da

$$|I| \leq 4^n \frac{\varepsilon}{2} \left(2^{-n}L\right)^2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon L^2 \,,$$

og da $\varepsilon > 0$ er vilkårlig, må $I = 0$. $\square$

Cauchys integralsætning for et givet område G handler om integration langs vilkårlige veje i G. Imidlertid fås resultatet, hvis man blot kan vise, at for $f \in \mathcal{H}(G)$ er $\int_\gamma f(z)dz = 0$ for de *lukkede trappelinjer i* G, for i så fald sikrer Lemma 2.12, at f har en stamfunktion i G, hvorefter Sætning 2.11 viser, at $\int_\gamma f(z)dz = 0$ for vilkårlige lukkede veje. Vi behøver derfor blot vise, at $\int_\gamma f(z)dz = 0$ for lukkede trappelinjer i G.

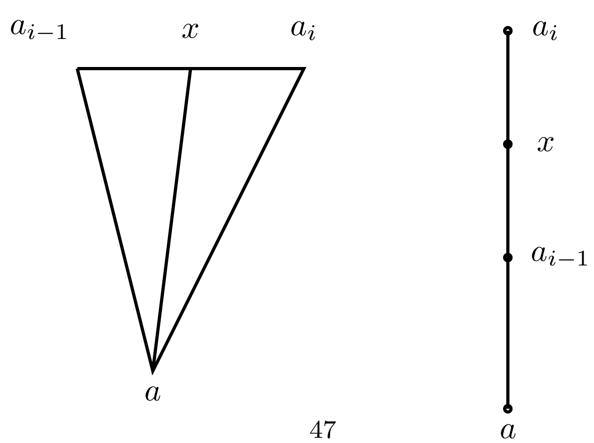
Fra Goursats lemma har vi, at $\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$ for massive trekanter indeholdt i G. For en vilkårlig lukket trappelinje er det nu nærliggende at dele trappelinjen op i trekanter ved tilføjelse af ekstra linjestykker – men da er det ikke sikkert, at alle trekanterne er indeholdt i G, selv hvis der anvendes en fin inddeling. Ved ikke-enkeltsammenhængende områder kan der jo være "huller" i G.

For generelle enkeltsammenhængende områder vil beviset for at der findes en brugbar opdeling i trekanter være ret teknisk, og det overspringes. Vi vil udføre beviset i et specialtilfælde, der rækker til de fleste anvendelser af sætningen.

Sætning 3.3 (Cauchys integralsætning for et stjerneformet område). *Lad G være et stjerneformet område og antag, at $f \in \mathcal{H}(G)$. For enhver lukket vej γ i G gælder*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \,.$$

Bevis. Antag, at G er stjerneformet omkring a, og lad γ være en lukket trappelinje ned knækpunkter $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, $a_n = a_0$.



Et vilkårligt punkt x på vejen ligger på et af liniestykkerne fra a_{i-1} til a_i, $i = 1, \ldots, n$, og da G er stjerneformet med hensyn til a, vil liniestykket fra a til x tilhøre G. Dermed vil hele trekanten $\{a, a_{i-1}, a_i\}$ tilhøre G. Integralet af f langs randen, der går fra a til a_{i-1}, fra a_{i-1} til a_i og fra a_i til a, er da 0. For enten danner punkterne en egentlig trekant, som gennemløbes positivt eller negativt, og så følger påstanden af Goursats lemma, eller også ligger punkterne på linie, og så er påstanden simpel, idet de tre integraler hæver hinanden. Vi har altså

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\{a, a_{i-1}, a_i\}} f = 0 .$$

Hvert af liniestykkerne fra a til a_i, $i = 1, \ldots, n$, giver to bidrag, der hæver hinanden, og resten er netop $\int_\gamma f$, som altså er lig med 0. □

Bemærkning 3.4. Selv om G er et ikke enkeltsammenhængende område, vil der naturligvis ofte alligevel gælde $\int_\gamma f = 0$ for visse $f \in \mathcal{H}(G)$, og visse lukkede veje γ i G. F.eks. i følgende tilfælde (a): f har en stamfunktion i G, eller (b): γ forløber i et enkeltsammenhængende delområde G_1 af G. Således er

$$\int_{\partial K(a,r)} \frac{dz}{z} = 0$$

for $a \neq 0$, $0 < r < |a|$. Kurveintegralet skal forstås således, at vi går én gang rundt langs randen i positiv omløbsretning. Funktionen $\frac{1}{z}$ er holomorf i det ikke enkeltsammenhængende område $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, men kurven forløber helt i en halvplan G_1 (tegn), og derfor er integralet 0.

Ved kombination af Cauchys integralsætning (Sætning 3.1) og Sætning 2.13 finder vi nu også:

Sætning 3.5. *Enhver holomorf funktion i et enkeltsammenhængende område har en stamfunktion.*

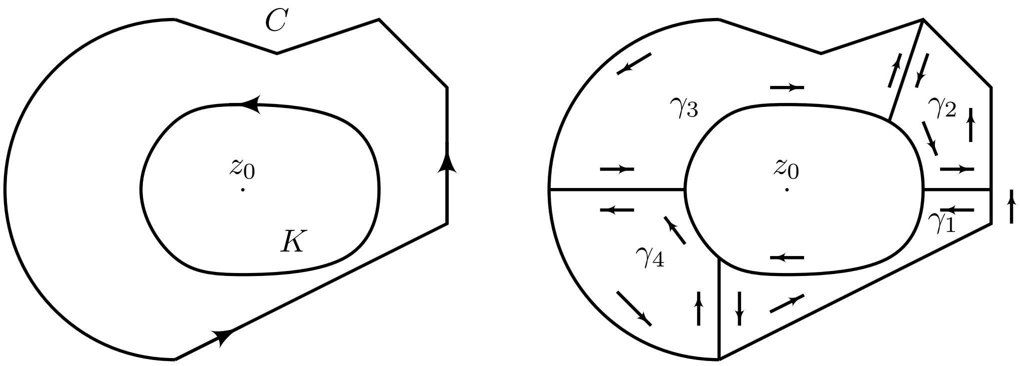
3.2. Cauchys integralformel.

Lad G være et område, $z_0 \in G$, og antag, at $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{z_0\})$. Vi ønsker at udregne integralet af f langs en simpel lukket vej C i G som omslutter z_0. Vi tænker os, at C er orienteret mod uret. Vi vil se, at vi ved Cauchys integralsætning ofte kan erstatte C med en anden simpel lukket vej K i G, orienteret mod uret og som også omslutter z_0, altså at

$$\int_C f(z)\, dz = \int_K f(z)\, dz . \tag{1}$$

Ideen er at lægge en række snit fra C til K (på tegningen fire), og dermed lave et endeligt antal lukkede "småveje" γ_i, der hver består af 1) en del af C, 2) et snit, 3) en del af K med modsat orientering, 4) et snit. Vi antager, at det er muligt at lægge snittene således, at hvert γ_i forløber i et stjerneformet delområde af $G \setminus \{z_0\}$, hvorved $\int_{\gamma_i} f = 0$. Idet hvert snit giver anledning til to bidrag, der hæver hinanden, vil

$$0 = \sum \int_{\gamma_i} f = \int_C f + \int_{-K} f\,,$$



hvoraf ses, at

$$\int_C f = \int_K f\,.$$

Inden vi giver et konkret eksempel på ovenstående, får vi brug for

Lemma 3.6. *Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben og antag $\overline{K(a,r)} \subseteq G$. Så findes $R > r$ med $K(a,R) \subseteq G$. (Der er altså altid plads til en lidt større cirkelskive).*

Bevis. Hvis $G = \mathbb{C}$ kan vi bruge ethvert $R > r$. Antag derfor $G \neq \mathbb{C}$, altså $\complement G \neq \varnothing$, og sæt

$$R = \inf\{|z-a| \mid z \in \complement G\}\,.$$

Så vil $K(a,R) \subseteq G$, og da $\overline{K(a,r)} \subseteq G$ må $r \leq R$. Vi skal altså udelukke muligheden $r = R$.

Ifølge Lemma A.1 i Appendix med $K = \{a\}$, $F = \complement G$ findes $y' \in \complement G$ med $|a - y'| = R$. Hvis vi antager, at $r = R$ må $y' \in \overline{K(a,r)}$, altså $y' \in G$, hvilket er en modstrid. $\square$

Eksempel 3.7. Antag, at $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{z_0\})$, og at kurverne C og K er randen af to cirkler $K(a,r)$ og $K(z_0,s)$ opfyldende

$$\overline{K(z_0,s)} \subseteq K(a,r)\,, \quad \overline{K(a,r)} \subseteq K(a,R) \subseteq G\,.$$

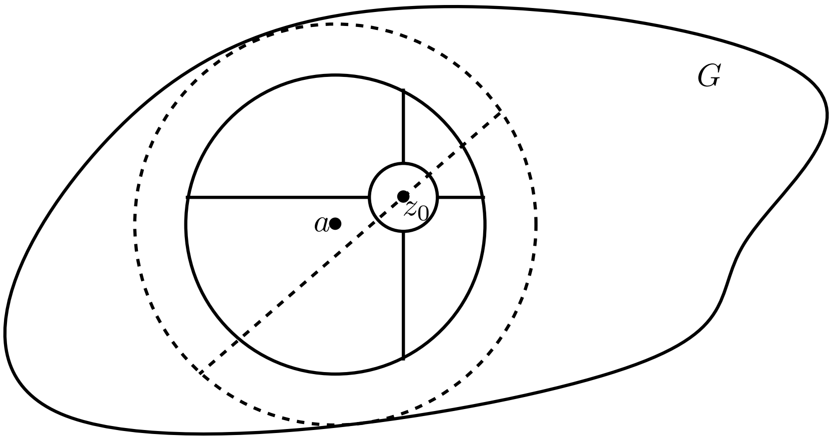
Så er

$$\int_{\partial K(a,r)} f = \int_{\partial K(z_0,s)} f\,.$$

Her og i det følgende gennemløbes cirklerne en gang mod uret, når vi betragter kurveintegraler af formen

$$\int\limits_{\partial K(a,r)} f\,.$$

Lægges fire snit mellem cirklerne ved to på hinanden vinkelrette linier gennem z_0, ser man, at hver af de fire "småveje" ligger i et cirkelafsnit af $K(a,R)$ afgrænset af en korde gennem z_0, altså i en konveks mængde, og dermed har vi det ønskede.



Sætning 3.8 (Cauchys integralformel). *Lad $f : G \to \mathbb{C}$ være holomorf i en åben mængde G og antag at $\overline{K(a,r)} \subseteq G$. For alle $z_0 \in K(a,r)$ gælder*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz\,,$$

idet cirklen gennemløbes en gang mod uret.

Bevis. Lad $z_0 \in K(a,r)$ være fast. Af Eksempel 3.7 anvendt på den i $G\setminus\{z_0\}$ holomorfe funktion

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z - z_0}$$

følger, at

$$\int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \int_{\partial K(z_0,s)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

for $0 < s < r - |a - z_0|$. Indføres parameterfremstillingen $\theta \mapsto z_0 + se^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, for $\partial K(z_0, s)$ finder vi

$$\int_{\partial K(z_0,s)} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{sie^{i\theta}}{se^{i\theta}}\, d\theta = 2\pi i\,,$$

hvoraf

$$I = \int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - 2\pi i\ f(z_0) = \int_{\partial K(z_0,s)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz\,.$$

Dermed har vi ifølge estimationslemmaet

$$\begin{aligned} |I| &\le \sup\{\, \Big|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\Big| \mid |z - z_0| = s\} \cdot 2\pi s \\ &= 2\pi \sup\{\big|f(z) - f(z_0)\big| \mid |z - z_0| = s\}\,, \end{aligned}$$

men da f specielt er kontinuert i z_0, vil det anførte supremum gå mod 0 for $s \to 0$, og vi kan slutte at $I = 0$. □

Korollar 3.9. *Lad $f : G \to \mathbb{C}$ være holomorf i en åben mængde G, og antag $\overline{K(a, r)} \subseteq G$. Så gælder*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta\,.$$

Bevis. Vi anvender sætningen for $z_0 = a$ og indfører parameterfremstillingen

$$\theta \mapsto a + re^{i\theta}\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

□

Cauchys integralformel viser, at blot man kender en holomorf funktions værdier på en cirkel $\partial K(a, r)$, så er funktionens værdier inde i cirkelskiven fastlagt. Korollaret siger specielt, at værdien i centrum er middelværdien af værdierne på periferien.

Eksempel 3.10. Cauchys integralformel kan benyttes til udregning af kurveintegraler.

$$\begin{aligned} \int_{\partial K(0,2)} \frac{\sin z}{1 + z^2}\, dz &= \frac{1}{2i} \int_{\partial K(0,2)} \frac{\sin z}{z - i}\, dz - \frac{1}{2i} \int_{\partial K(0,2)} \frac{\sin z}{z + i}\, dz \\ &= \pi \sin(i) - \pi \sin(-i) = 2\pi \sin(i) = \pi i(e - \frac{1}{e})\,. \end{aligned}$$

Eksempel 3.11. Ved hjælp af Cauchys integralsætning vil vi vise formlen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{itb}dt = e^{-\frac{1}{2}b^2}\,, \quad b\in\mathbb{R}\,.$$

Formlen udtrykker, at $e^{-\frac{1}{2}t^2}$ er sin egen Fourier transformerede, bortset fra en konstant faktor.

For $b=0$ siger formlen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 1,$$

som udtrykker, at den normale fordeling er en sandsynlighedstæthed, og dette vil vi ikke vise. Idet cos er lige og sin ulige, finder vi ved hjælp af Eulers formler

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{itb}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\cos(tb)\,dt\,,$$

så det er tilstrækkeligt at vise formlen for $b>0$.

Vi integrerer den i hele $\mathbb{C}$ holomorfe funktion $f(z) = \exp(-\frac{1}{2}z^2)$ langs med randen af det på figuren viste rektangel, og får 0 ifølge Cauchys integralsætning. De fire sider har parameterfremstillingerne

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t) = t\,, && t\in[-a,a]\,,\\
&\gamma_2(t) = a+it\,, && t\in[0,b]\,,\\
&\gamma_3(t) = -t+ib\,, && t\in[-a,a]\,,\\
&\gamma_4(t) = -a+i(b-t)\,, && t\in[0,b]\,;
\end{aligned}$$

og vi finder

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1} f = \int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\,, && \int_{\gamma_3} f = -e^{\frac{1}{2}b^2}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}t^2}e^{itb}dt\,,\\
&\int_{\gamma_2} f = ie^{-\frac{1}{2}a^2}\int_0^b e^{\frac{1}{2}t^2}e^{-iat}dt\,, && \int_{\gamma_4} f = -ie^{-\frac{1}{2}a^2}\int_0^b e^{\frac{1}{2}(b-t)^2}e^{ia(b-t)}dt\,,
\end{aligned}$$

hvoraf

$$\left|\int_{\gamma_2} f\right|,\left|\int_{\gamma_4} f\right| \le e^{-\frac{1}{2}a^2}b\,e^{\frac{1}{2}b^2} \to 0 \text{ for } a\to\infty\,.$$

Da desuden

$$\lim_{a\to\infty}\int_{\gamma_3} f = -e^{\frac{1}{2}b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}e^{itb}dt\,,$$

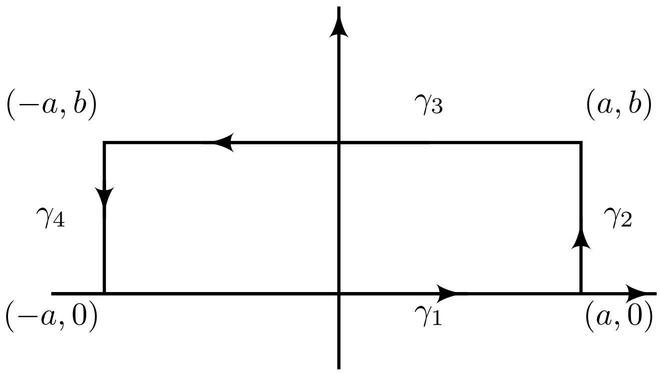
og

$$\lim_{a\to\infty}\int_{\gamma_1} f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = \sqrt{2\pi}\,,$$

fås ved grænseovergangen $a \to \infty$ i $\sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i} f = 0$, at

$$\sqrt{2\pi} + 0 - e^{\frac{1}{2}b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}e^{itb}dt + 0 = 0\,,$$

hvoraf formlen fremgår.



Opgaver til §3.

3.1. Udregn
$$\int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)},$$
når (i) $|a|\,,\,|b| < 1$, (ii) $|a| < 1$, $|b| > 1$, (iii) $|a|\,,|b| > 1$.

3.2. Udregn
$$\int_{\partial K(0,2)} \frac{e^z}{z-1}\,dz \quad \text{og} \quad \int_{\partial K(0,2)} \frac{e^z}{\pi i - 2z}\,dz\,.$$

3.3. Vis, at et konvekst område er enkeltsammenhængende.

3.4. Vis, at ethvert stjerneformet område $G \subseteq \mathbb{C}$ (dvs. der findes mindst et $a \in G$ så G er stjerneformet omkring a) er enkeltsammenhængende.

(*Vink.* Gør rede for, at det er nok at vise påstanden for et område, der er stjerneformet omkring 0. Lad G være et sådant område og lad γ_0 være en kontinuert kurve i G fra $a \in G$ til $b \in G$, med parameterinterval $[0,1]$. Vis, at udtrykket $H(s,t)$ defineret ved
$$H(s,t) = \begin{cases} (1-2t)a\,, & \text{for } \ t \in [0, \frac{1}{2}s]\,, \\ (1-s)\gamma_0\left(\frac{t-\frac{1}{2}s}{1-s}\right)\,, & \text{for } \ t \in [\frac{1}{2}s,\, 1-\frac{1}{2}s[\,, \\ (2t-1)b\,, & \text{for } \ t \in [1-\frac{1}{2}s, 1]\,, \end{cases}$$
er en homotopi, der deformerer γ_0 kontinuert over i kurven
$$\gamma_1(t) = \begin{cases} (1-2t)a\,, & \text{for } \ t \in [0, \frac{1}{2}]\,, \\ (2t-1)b\,, & \text{for } \ t \in [1-\frac{1}{2},\, 1]\,; \end{cases}$$
og afslut derefter beviset for påstanden.)

3.5. Brug Goursats lemma til at vise følgende: Lad G være et område som er stjerneformet omkring z_0. For hvert $z \in G$ betegner $[z_0, z]$ linjestykket fra z_0 til z med parameterfremstillingen $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz$. Gør rede for, at for $f \in \mathcal{H}(G)$ er $F : G \to \mathbb{C}$ defineret ved
$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f$$
den stamfunktion til f, som opfylder $F(z_0) = 0$.

3.6. Lad $G = \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ som er stjerneformet omkring 1. Ifølge opgave 3.5 definerer udtrykket

$$\operatorname{Log} z = \int_{[1,z]} \frac{dt}{t}, \quad z \in G$$

en stamfunktion til $\frac{1}{z}$ i G.

Hvis $z = re^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$, $r > 0$ skal det vises, at

$$\operatorname{Log}(\mathrm{re}^{i\theta}) = \log r + i\theta\,.$$

Vink. Brug vejen fra 1 til r og fra r til $re^{i\theta}$ langs cirklen $|z| = r$).

3.7. Lad G være en åben cirkelskive, lad $a \in G$ og lad b, c være to forskellige punkter på periferien. Lad U være området begrænset af linjestykkerne $[a, b], [a, c]$ og en af de to buer mellem b og c. Vis, at området U er konvekst, hvis vinklen ved a er $\leq \pi$. Vis, at området U er stjerneformet og ikke konvekst, hvis vinklen ved a er $> \pi$. (U er et lagkagestykke).

Brug et sådant område U til at vise, at man kan klare sig med 2 "småveje" i eksempel 3.7.

3.8. Betragt området

$$G = \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}\,.$$

Gør rede for, at G er stjerneformet omkring 0 og definer funktionen Arctan : $G \to \mathbb{C}$ ved

$$\operatorname{Arctan} z = \int_0^1 \frac{z dt}{1 + t^2 z^2}\,.$$

Vis, at Arctan er holomorf på G med den afledede

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Arctan} z = \frac{1}{1 + z^2}\,.$$

Gør rede for, at $\operatorname{Arctan}|\mathbb{R}$ er den omvendte funktion til $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$. (Man kan vise, at Arctan afbilder G bijektivt på strimlen

$$\left\{z = x + iy \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\},$$

og at den er invers til tan.)

Vis, at

$$\operatorname{Arctan} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots \quad \text{for} \quad |z| < 1\,.$$

3.9. (Fresnels integraler). Udregn

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

idet integralerne skal forstås som $\lim_{r\to\infty} \int_0^r$.

Vink. a) Udnyt at $\int_{\gamma_r} \exp(iz^2)dz = 0$, idet γ_r for $r > 0$ betegner vejen rundt om cirkeludsnittet begrænset af x-aksen, vinkelhalveringslinjen $y = x$ og buen $\mathrm{r}e^{it}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

b) Lad $r \to \infty$ og udnyt (eksempel 3.11),

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

samt $\sin 2t \geq t$ for $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (jf. c)) til at opnå resultatet.

c) Vis, at $\min\{\frac{\sin 2t}{t} \mid t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]\} = \frac{4}{\pi} > 1$.

3.10. Betragt mængden $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

1) Vis, at G er et område, altså at G er åben og at to vilkårlige punkter kan forbindes med en trappelinje.

2) Er G konveks?, stjerneformet?, enkeltsammenhængende?

3) Betragt

$$f(z) = 1/\sin(\pi z), \ z \in G$$

og gør rede for, at den er holomorf i G.

4) Sæt $\gamma_T(t) = \frac{1}{2} + it, \ \delta_T(t) = \frac{3}{2} + it, t \in [-T, T]$. Vis, at

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\gamma_T} f(z)\, dz = i \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\cosh(\pi t)}, \quad \lim_{T\to\infty} \int_{\delta_T} f(z)\, dz = -i \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\cosh(\pi t)}$$

5) Sæt $\gamma_{T,a}(t) = a + it, t \in [-T, T]$, hvor $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Vis, at

$$\varphi(a) := \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma_{T,a}} f(z)\, dz$$

er konstant i hvert af intervallerne $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$. (Læg mærke til at $\varphi(a)$ skifter fortegn når a hopper fra $]0, 1[$ til $]1, 2[$.)

Vink: For $n < a < b < n + 1$ brug Cauchys integralsætning på rektanglet med hjørner $a \pm iT, b \pm iT$ og lad $T \to \infty$.

§4. Anvendelser af Cauchys integral–formel

I paragraf 4.2 anvendes Cauchys integralformel til at vise, at en holomorf funktion er vilkårligt ofte differentiabel og fremstilles ved sin Taylorrække. I beviset får vi brug for uniform konvergens af funktionsfølger, som vi behandler i paragraf 4.1. Mængden af holomorfe funktioner er stabil overfor lokal uniform konvergens, som derfor er et vigtigt begreb, der udvikles i paragraf 4.4.

Liouvilles sætning og algebraens fundamentalsætning dukker overraskende op som simple sidegevinster.

4.1. Funktionsfølger.

Lad der være givet en vilkårlig ikke tom mængde M. I anvendelserne vil M typisk være en delmængde af $\mathbb{C}$.

En følge af funktioner $f_n : M \to \mathbb{C}$ siges at *konvergere punktvis* mod funktionen $f : M \to \mathbb{C}$ hvis

$$\forall x \in M : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

Med kvantorer kan dette udtrykkes således:

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon)\,. \tag{1}$$

Eksempler: 1) Lad $M = \mathbb{R}$ og $f_n(x) = |\sin x|^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Så gælder

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad x = \frac{\pi}{2} + p\pi\,,\ p \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{for} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right\}\,, \end{cases}$$

altså $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvergerer punktvis mod indikatorfunktionen $f = 1_{\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi}$ for mængden $\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$, dvs. den funktion som er 1 på mængden og 0 på komplementærmængden.

2) Lad $M = \mathbb{C}$ og $f_n(z) = z^n/n!$, $n = 1, 2, \ldots$. Så gælder

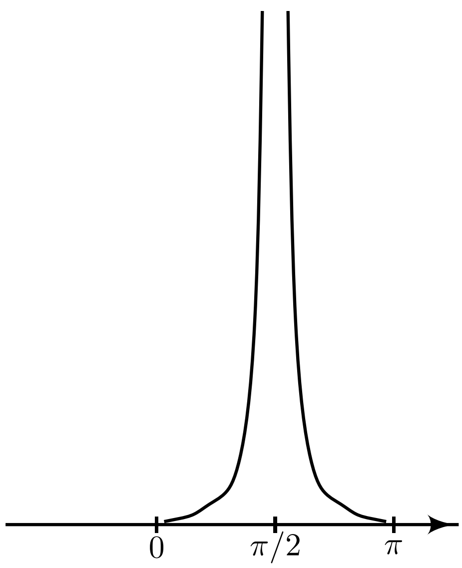
$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0 \quad \text{for alle} \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

altså f_n konvergerer punktvis mod nulfunktionen. Påstanden følger for eksempel af, at potensrækken for exp er konvergent for alle $z \in \mathbb{C}$, og så vil det n'te led gå mod 0.

I begge eksempler er funktionerne f_n kontinuerte, men grænsefunktionen f er ikke kontinuert i det første eksempel.

Hvad er det der gør, at grænsefunktionen er kontinuert i eksempel 2 men ikke i eksempel 1?

Hvis vi til ε med $0 < \varepsilon < 1$ og $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right\}$ skal bestemme det mindste N så $|\sin x|^N \leq \varepsilon$ og dermed $|\sin x|^n \leq \varepsilon$ for $n \geq N$, ser man, at $N = N(x)$ er det mindste naturlige tal $\geq \log \varepsilon/(\log|\sin x|)$ forudsat $x \notin \pi\mathbb{Z}$, og for $x \in \pi\mathbb{Z}$ er $N(x) = 1$. Grafen for $\log \varepsilon/\log|\sin x|$ ser således ud på $]0, \pi[$:



Grafen går mod uendelig når x nærmer sig $\frac{\pi}{2}$, altså $N(x) \to \infty$ for $x \to \frac{\pi}{2}$. Vi er altså *ikke* i stand til at bruge det samme N i (1) for alle de optrædende $x \in M$.

Disse overvejelser motiverer følgende:

Definition 4.1. En følge $f_n : M \to \mathbb{C}$ af funktioner siges at konvergere *uniformt* (eller *ligeligt*) mod funktionen $f : M \to \mathbb{C}$ hvis

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \text{ for alle } x \in M)\,. \quad (2)$$

Idet

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \text{ for alle } x \in M \Leftrightarrow \sup\{|f(x) - f_n(x)| \mid x \in M\} \leq \varepsilon$$

kommer den ligelige konvergens ud på at talfølgen

$$\sup\{|f(x) - f_n(x)| \mid x \in M\}$$

konvergerer mod 0.

Funktionerne $f_n(z) = z^n/n!$ konvergerer uniformt mod nulfunktionen for z tilhørende en *begrænset mængde* $M \subseteq \mathbb{C}$. At M er begrænset betyder netop, at der findes K så $|z| \leq K$ for $z \in M$ og dermed gælder

$$\sup\{|f_n(z) - 0| \mid z \in M\} \leq \frac{K^n}{n!} \to 0\,.$$

Derimod konvergerer f_n *ikke* uniformt mod nulfunktionen på $\mathbb{C}$ idet

$$\sup\{|f_n(z) - 0| \mid z \in \mathbb{C}\} = \infty \;\text{ for alle } n\,.$$

At begrebet kan bruges til det, vi efterlyser, vises i den følgende sætning.

Sætning 4.2. *Lad $M \subseteq \mathbb{C}$ og lad $f_n : M \to \mathbb{C}$ være uniformt konvergent mod funktionen $f : M \to \mathbb{C}$.*

Hvis alle funktionerne f_n er kontinuerte i $z_0 \in M$, så er også funktionen f kontinuert i z_0.

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi skal finde $\delta > 0$ så

$$\forall z \in M \;\; (|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon)\,.$$

Da $\sup\{|f(z) - f_n(z)| \mid z \in M\} \to 0$ for $n \to \infty$ findes N så

$$\sup\{|f(z) - f_n(z)| \mid z \in M\} < \varepsilon/3 \;\text{ for }\; n \geq N$$

specielt

$$\forall z \in M : |f(z) - f_N(z)| < \varepsilon/3\,. \tag{3}$$

Da f_N er kontinuert i z_0 findes $\delta > 0$ så

$$\forall z \in M \left(|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\right)\,. \tag{4}$$

For $z \in M$, $|z - z_0| < \delta$ har vi da

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= |(f(z) - f_N(z)) + (f_N(z) - f_N(z_0)) + (f_N(z_0) - f(z_0))| \\
&\leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| \\
&< \varepsilon/3 \qquad\qquad + \varepsilon/3 \qquad\qquad\quad + \varepsilon/3 = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

$\square$

(I sætning 4.2 kunne M også være en delmængde af $\mathbb{R}^n$ eller et metrisk rum.)

Definition 4.3. En uendelig række $\sum_0^\infty f_n(x)$ af funktioner $f_n : M \to \mathbb{C}$ siges at være uniformt konvergent med sumfunktionen $s : M \to \mathbb{C}$, hvis afsnitsfølgen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,, \quad x \in M$$

konvergerer uniformt mod funktionen s.

Sætning 4.4. Weierstrass' majorantrække sætning. *Lad $\sum_0^\infty f_n(x)$ være en uendelig række af funktioner $f_n : M \to \mathbb{C}$ og antag, at der findes en konvergent majorantrække, dvs. er konvergent række $\sum_0^\infty a_n$ med positive led så*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\ \forall x \in M : |f_n(x)| \le a_n\,.$$

Så er rækken $\sum_0^\infty f_n(x)$ uniformt konvergent på M.

Bevis. Sammenligningskriteriet viser, at rækken $\sum_0^\infty f_n(x)$ er absolut konvergent for hvert $x \in M$. Kaldes sumfunktionen $s : M \to \mathbb{C}$ gælder om det n'te afsnit s_n, at

$$s(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\,,$$

hvoraf

$$|s(x) - s_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

altså

$$\sup\{|s(x) - s_n(x)| \mid x \in M\} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\,,$$

men da $\sum_{k=n+1}^\infty a_k \to 0$ for $n \to \infty$ fordi $\sum_0^\infty a_k < \infty$, får vi at $s_n(x) \to s(x)$ uniformt på M. □

Sætning 4.5. *En potensrække $\sum_0^\infty a_n z^n$ med konvergensradius ρ og sumfunktion*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,, \quad z \in K(0,\rho)$$

konvergerer uniformt mod f på enhver lukket cirkelskive $\overline{K(0,r)}$ med $r < \rho$.

(Konvergensen behøver derimod ikke at være uniform på $K(0,\rho)$. Overvej forskellen i de to udsagn).

Bevis. Resultatet følger umiddelbart af Sætning 4.4 idet $\sum_0^\infty |a_n| r^n$ er en konvergent majorantrække på $\overline{K(0,r)}$. □

Vi kan nu supplere §2.2 med en vigtig regneregel for kurveintegraler.

Sætning 4.6. *Lad* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *være en vej i* $\mathbb{C}$ *og lad* $f_n : \gamma^* \to \mathbb{C}$ *være en følge af kontinuerte funktioner.*

(i) *Hvis* $f_n \to f$ *uniformt på* γ^* *gælder*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f \quad \left(= \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n \right).$$

(ii) *Hvis* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *konvergerer uniformt på* γ^* *med sumfunktion* $s : \gamma^* \to \mathbb{C}$ *gælder*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma s \quad \left(= \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right).$$

Bevis. (i): Bemærk, at f bliver kontinuert på γ^* ifølge Sætning 4.2. Ifølge forudsætningen kan vi til $\varepsilon > 0$ finde $N \in \mathbb{N}$ så der for $n \geq N$ og $z \in \gamma^*$ gælder

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon$$

og af estimationslemmaet 2.8 følger

$$\Big| \int_\gamma f - \int_\gamma f_n \Big| = \Big| \int_\gamma (f - f_n) \Big| \leq \varepsilon L(\gamma)\,,$$

hvilket viser påstanden.

(ii): Idet $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ konvergerer mod s uniformt på γ^*, følger af (i) at $\int_\gamma s_n \to \int_\gamma s$, men idet

$$\int_\gamma s_n = \sum_{k=0}^{n} \int_\gamma f_k\,,$$

følger påstanden. □

Bemærkning 4.7. To simple observationer om uniform konvergens.

(i) Hvis en følge af funktioner $f_n : M \to \mathbb{C}$ konvergerer uniformt mod $f : M \to \mathbb{C}$ så vil restriktionen $f_n|A$ til en vilkårlig delmængde $A \subseteq M$ konvergere uniformt mod $f|A$.

(ii) Antag at $f_n : M \to \mathbb{C}$ konvergerer punktvis mod $f : M \to \mathbb{C}$ og antag $A, B \subseteq M$.

Hvis $f_n|A$ konvergerer uniformt mod $f|A$ og $f_n|B$ konvergerer uniformt mod $f|B$, så vil $f_n|A \cup B$ konvergere uniformt mod $f|A \cup B$.

Kun beviset for (ii) kræver en kommentar. Til givet $\varepsilon > 0$ kan vi ifølge definitionen finde $N_A \in \mathbb{N}$, $N_B \in \mathbb{N}$ så der for $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$n \geq N_A \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \ \text{ for alle } \ x \in A$$

og

$$n \geq N_B \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \text{ for alle } x \in B\,.$$

For $n \geq \max(N_A, N_B)$ gælder da

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \text{ for alle } x \in A \cup B\,,$$

hvilket viser den uniforme konvergens på $A \cup B$.

4.2. Udvikling af holomorfe funktioner i potensrække.

Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde. Hvis $G \neq \mathbb{C}$ vil der til hvert $a \in G$ findes en største åben cirkelskive $K(a, \rho)$ indeholdt i G, og radius er $\rho = \inf\{|a - z| \mid z \in \mathbb{C} \setminus G\}$. Hvis $G = \mathbb{C}$ sætter vi $K(a, \infty) = \mathbb{C}$ og taler også i dette tilfælde om den største cirkelskive indeholdt i G.

Ved hjælp af Cauchys integralformel vil vi nu vise, at $f \in \mathcal{H}(G)$ er vilkårligt ofte differentiabel. For $a \in G$ kaldes rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n$ for f's *Taylorrække* med centrum a.

Sætning 4.8. *Lad $f \in \mathcal{H}(G)$. Så er f vilkårligt ofte differentiabel, og Taylorrækken med centrum $a \in G$ er konvergent med sum f i den største åbne cirkelskive $K(a, \rho) \subseteq G$:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n \quad \textit{for} \quad z \in K(a, \rho)\,. \tag{1}$$

For $\overline{K(a, r)} \subseteq G$ og $z_0 \in K(a, r)$ gælder Cauchys integralformel for den n'te afledede

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,. \tag{2}$$

Bevis. Idet $z \mapsto f(z)/(z - a)^{n+1}$ er holomorf i $G \setminus \{a\}$, følger af Eksempel 3.7, at tallene

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)\, dz}{(z - a)^{n+1}}$$

er uafhængige af r for $0 < r < \rho$, og vi kalder dem derfor blot a_n, $n = 0, 1, \ldots$.

For $z \in K(a, \rho)$ vælges $r > 0$ så $|z - a| < r < \rho$, og Cauchys integralformel giver

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,.$$

Vi vil vise rækkeudviklingen (1) ved at omskrive $\frac{1}{w-z}$ til en konvergent række, indsætte i integralformlen og begrunde, at summation og integration kan ombyttes. Omskrivningen går ud på at bemærke, at der for $w \in \partial K(a,r)$ gælder

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a+a-z} = \frac{1}{w-a}\,\frac{1}{1-(z-a)/(w-a)}\,,$$

hvor $|(z-a)/(w-a)| = |z-a|/r < 1$, så den sidste brøk kan skrives som sum af en uendelig kvotientrække; det giver

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n .$$

Dermed er

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w), \tag{3}$$

med

$$g_n(w) = \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} .$$

Da $\partial K(a,r)$ er lukket og begrænset, er $M = \sup\{\,|f(w)| \mid w \in \partial K(a,r)\,\} < \infty$. Rækken $\sum_0^\infty g_n(w)$ konvergerer uniformt for $w \in \partial K(a,r)$, idet leddene er majoriseret ved

$$|g_n(w)| \le \frac{M}{r}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n , \qquad \sum_0^\infty \left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n < \infty .$$

Af Sætning 4.6 (ii) følger, at det er tilladeligt at integerere ledvist i (3), hvoraf

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(a,r)} g_n(w)\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n . \end{aligned}$$

Potensrækken $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n$ er altså konvergent med sum $f(z)$ for alle $z \in K(a,\rho)$. Sættes $g(z) = f(z+a)$ er dermed $g(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ for $z \in K(0,\rho)$. Ved §1.4 sluttes, at $g(z)$ er vilkårligt ofte komplekst differentiabel på $K(0,\rho)$, hvormed $f(z)$ er det på $K(a,\rho)$. Da koefficienterne i potensrækken $g(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ er fastlagt ved $a_n = g^{(n)}(0)/n!$ (jf. §1.4), finder vi $a_n = f^{(n)}(a)/n!$, hvilket viser (1). Da $f^{(n)}(a) = n! a_n$, viser formlen for a_n ($= a_n(r)$), at

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\,, \quad 0 < r < \rho .$$

Her kan vi ifølge Eksempel 3.7 erstatte $\partial K(a,r)$ med en vilkårlig cirkel $\partial K(b,s)$ så $a \in K(b,s) \subseteq \overline{K(b,s)} \subseteq G$, hvormed

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(b,s)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz\,;$$

dette viser (2) med lidt andre betegnelser. □

Bemærkning 4.9.

(i) Som støtte for hukommelsen noteres, at Cauchys integralformel for de afledede fremkommer ved at differentiere Cauchys integralformel under integraltegnet. Denne ide kan også udbygges til et andet bevis for sætningen.

(ii) Man kalder en funktion $f : G \to \mathbb{C}$ i et område $G \subseteq \mathbb{C}$ for (komplekst) *analytisk*, hvis der til hvert punkt $a \in G$ findes en potensrække $\sum_0^\infty a_n(z-a)^n$ med sum $f(z)$ i en cirkelskive $K(a,r) \subseteq G$, idet r tillades at variere med a. Ifølge §1.4 er en analytisk funktion holomorf, og den netop udviklede teori viser, at en holomorf funktion er analytisk, og at den til a hørende potensrække er Taylorrækken. Begreberne analytisk og holomorf er altså helt ensbetydende. K. Weierstrass (1815–1897) gav den første eksakte behandling af kompleks funktionsteori baseret på begrebet analytisk funktion.

(iii) Da f' igen er holomorf har vi specielt opnået, at f' er kontinuert, jf. præamblen til Goursats lemma.

(iv) Konvergensradius R for potensrækken i (1) er altså $\geq \rho$. Der kan gælde $R > \rho$. Se Sætning 6.24 for et tilfælde hvor $R = \rho$.

4.3. Harmoniske funktioner.

At en holomorf funktion $f \in \mathcal{H}(G)$ er vilkårligt ofte differentiabel medfører, at to differentiable funktioner $u, v : G \to \mathbb{R}$ opfyldende Cauchy-Riemanns differentialligninger

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{i} \quad G,$$

automatisk er C^∞-funktioner i G, opfattet som åben delmængde af $\mathbb{R}^2$. Ved fortsat differentiation finder vi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

altså $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ da $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$. Analogt ses, at $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Udtrykket $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ kaldes *Laplace operatoren* og betegnes sædvanligvis $\triangle$. Man skriver $\triangle\varphi = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$. En reel C^2-funktion φ på en åben mængde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ kaldes *harmonisk* i G, hvis $\triangle\varphi = 0$ i G. Vi har altså, at *realdelen og imaginærdelen af en holomorf funktion er harmoniske.*

Vi vil nu vise, at det omvendte er rigtigt lokalt. Mere præcist gælder:

Sætning 4.10. *Lad u være en reel C^2-funktion, der er harmonisk i et enkeltsammenhængende område $G \subseteq \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$. Så findes en holomorf funktion $f : G \to \mathbb{C}$ med $\operatorname{Re} f = u$, og f er fastlagt på nær addition af en rent imaginær konstant.*

Bevis. Funktionen $g(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ er holomorf i G, idet Cauchy-Riemanns differentialligninger er opfyldt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Ifølge Sætning 3.5 findes en stamfunktion $f \in \mathcal{H}(G)$ til g, altså $f' = g$, og da

$$f' = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Re} f) + i\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Im} f) = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Re} f) - i\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Re} f)$$

finder vi

$$\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Re} f) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Re} f) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Dette viser, at $u - \operatorname{Re} f$ er en reel konstant. Ved at lægge denne til f opnår vi en holomorf funktion med u som realdel. Betegner f og f_1 holomorfe funktioner med $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} f_1 = u$, er $i(f - f_1)$ åbenbart en holomorf funktion med reelle værdier, og dermed konstant (Korollar 1.10). $\square$

Til en harmonisk funktion u i en åben enkeltsammenhængende mængde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ findes altså en harmonisk funktion v i G, så $f = u + iv$ er holomorf. Funktionen v er bestemt på nær addition af en konstant, og kaldes *en til u konjugeret harmonisk funktion.* Funktionerne $u(x, y) = x$ og $v(x, y) = y$ er harmoniske i $\mathbb{R}^2$ og v er konjugeret til u, da $z = u + iv$ er holomorf.

Hvis u er harmonisk i en vilkårlig åben mængde G, kan vi for hver cirkelskive $K(a, r) \subseteq G$ finde en til u konjugeret harmonisk funktion v, så $u + iv$ er holomorf i $K(a, r)$. Dermed er $u \in C^\infty(G)$. Vi er altså i den situation, at $u \in C^2(G)$ og $\triangle u = 0$ medfører, at $u \in C^\infty(G)$, hvilket er en parallel i reel analyse til, at en holomorf funktion er vilkårligt ofte komplekst differentiabel.

4.4. Moreras sætning og lokal uniform konvergens.

I reel analyse ved vi, at en kontinuert funktion på et interval har en stamfunktion. I kompleks funktionsteori er situationen helt anderledes:

Sætning 4.11. *Hvis en funktion $f : G \to \mathbb{C}$ i et område $G \subseteq \mathbb{C}$ har en stamfunktion, da er den holomorf.*

Bevis. Hvis $F \in \mathcal{H}(G)$ er en stamfunktion til f, er også $f = F'$ holomorf iflg. Sætning 4.8. □

Vi minder om, at en holomorf funktion i et område G ikke behøver at have en stamfunktion i G $\quad (f(z) = z^{-1}$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, Eksempel 2.14), men at den har en sådan, hvis G er enkeltsammenhængende, jf. Sætning 3.5.

Den følgende sætning af italieneren G. Morera fra 1886 er en omvendt sætning til Cauchys integralsætning, dog behøver området ikke at være enkeltsammenhængende.

Sætning 4.12. Moreras sætning. *Lad $f : G \to \mathbb{C}$ være kontinuert i et område $G \subseteq \mathbb{C}$. Hvis $\int_\gamma f = 0$ for enhver lukket vej i G, eller blot $\int_{\partial\triangle} f = 0$ for enhvert trekant $\triangle \subseteq G$, så er f holomorf i G.*

Bevis. Det er nok at vise, at for hvert $a \in G$ er f holomorf i $K(a, \rho)$, hvor $K(a, \rho)$ er den største åbne cirkelskive i G med centrum a. Som i beviset for Cauchys integralsætning for et stjerneformet område slutter vi af egenskaben for trekanter, at integralet af f langs enhver lukket trappelinje i $K(a, \rho)$ er lig med 0, og dermed har f en stamfunktion i $K(a, \rho)$. Af Sætning 4.11 følger nu, at f er holomorf i $K(a, \rho)$. □

Vi skal nu minde om et fundamentalt resultat i matematisk analyse, jf. 2AN og 3GT.

Sætning 4.13. Borels overdækningssætning. *Lad K være en afsluttet og begrænset mængde i $\mathbb{C}$ eller mere generelt i $\mathbb{R}^k$.*

Til enhver familie $(G_i)_{i \in I}$ af åbne mængder i $\mathbb{R}^k$ som overdækker K, dvs.

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$$

findes endeligt mange indices $i_1, \ldots, i_n \in I$ så

$$K \subseteq G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_n} .$$

Vi skal bruge resultatet i forbindelse med et nyt konvergensbegreb for følger af funktioner, som er særligt relevant for holomorfe funktioner.

Definition 4.14. Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde. En følge af funktioner $f_n : G \to \mathbb{C}$ siges at konvergere *lokalt uniformt* (eller *lokalt ligeligt*) mod en funktion $f : G \to \mathbb{C}$ såfremt

(lu) Til hvert $a \in G$ findes $r > 0$ så $\overline{K(a,r)} \subseteq G$ og så $f_n(z) \to f(z)$ uniformt for $z \in \overline{K(a,r)}$.

Specielt vil $f_n(a) \to f(a)$ for hvert $a \in G$, altså $f_n \to f$ punktvis, og konvergensen forudsættes uniform i en passende omegn af hvert punkt i G. Spørgsmålet er så for hvilke typer af delmængder $K \subseteq G$ vi har uniform konvergens.

Sætning 4.15. *Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde. En følge af funktioner $f_n : G \to \mathbb{C}$ konvergerer lokalt uniformt mod $f : G \to \mathbb{C}$ hvis og kun hvis følgende betingelse gælder*

(ku) *For hver afsluttet og begrænset delmængde $K \subseteq G$ vil $f_n(z) \to f(z)$ uniformt for $z \in K$.*

Bevis. (lu) $\Rightarrow$ (ku). Lad $K \subseteq G$ være afsluttet og begrænset. For hvert $a \in K$ findes $r = r_a > 0$ så $\overline{K(a,r_a)} \subseteq G$ og så $f_n \to f$ uniformt på $\overline{K(a,r_a)}$. Kuglerne $(K(a,r_a))_{a \in K}$ er åbne og overdækker K, idet hvert $a \in K$ ligger i kuglen $K(a,r_a)$. Ifølge Borels overdækningssætning findes endeligt mange punkter $a_1, \dots, a_n \in K$ så

$$K \subseteq K(a_1, r_{a_1}) \cup \cdots \cup K(a_n, r_{a_n}) .$$

Da følgen konvergerer uniformt på hver af disse cirkelskiver kan vi af Bemærkning 4.7 slutte, at $f_n \to f$ uniformt på K.

(ku) $\Rightarrow$ (lu). Vi skal til vilkårligt $a \in G$ finde en cirkelskive $\overline{K(a,r)} \subseteq G$, så f_n konvergerer uniformt mod f på $\overline{K(a,r)}$. Idet $\overline{K(a,r)}$ er afsluttet og begrænset, har vi imidlertid uniform konvergens på enhver sådan cirkelskive indeholdt i G. □

Bemærkning 4.16. Betingelsen (ku) står for "kompakt uniform" konvergens, idet afsluttede og begrænsede delmængder af $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}^k$) ofte kaldes *kompakte*. Betingelsen er altså uniform konvergens på enhver kompakt delmængde af G. Vi har set, at uniform konvergens i en omegn (uanset hvor lille) af hvert punkt i området leder til uniform konvergens på vilkårlige kompakte delmængder af G.

Af Moreras sætning vil vi udlede:

Sætning 4.17. *Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben. Hvis en følge $f_1, f_2, \dots$ fra $\mathcal{H}(G)$ konvergerer lokalt uniformt på G mod en funktion f, da er $f \in \mathcal{H}(G)$. Følgen $f_1', f_2', \dots$ af afledede konvergerer mod f' lokalt uniformt på G.*

Bemærkning 4.18. Ved gentagen anvendelse af sætningen ses, at der for alle $k \in \mathbb{N}$ gælder: $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ lokalt uniformt på G.

Bevis. Lad $a \in G$ og $\overline{K(a,r)} \subseteq G$ så $f_n \to f$ uniformt på $\overline{K(a,r)}$. Ifølge Sætning 4.2 er f kontinuert i hvert punkt af $K(a,r)$. For enhver trekant $\triangle \subseteq K(a,r)$ gælder $\int_{\partial\triangle} f_n = 0$ ifølge Cauchys integralsætning. Da $f_n \to f$ uniformt over $\partial\triangle$, vil

$$0 = \int_{\partial\triangle} f_n \to \int_{\partial\triangle} f$$

ifølge Sætning 4.6 (i), altså $\int_{\partial\triangle} f = 0$. Ifølge Moreras sætning er f holomorf i $K(a,r)$, og da a var vilkårlig, sluttes at $f \in \mathcal{H}(G)$.

Af Cauchys integralformler følger, at der for $z_0 \in \overline{K(a,r/2)}$ gælder

$$f_n'(z_0) - f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r)} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z-z_0)^2} dz\,.$$

For $z_0 \in \overline{K(a,r/2)}$ og $z \in \partial K(a,r)$ gælder $|(z-z_0)^2| \geq (r/2)^2$, hvoraf

$$|f_n'(z_0) - f'(z_0)| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \left(\frac{2}{r}\right)^2 \sup_{\partial K(a,r)} |f_n(z) - f(z)|\,,$$

altså

$$\sup_{z_0 \in \overline{K(a,r/2)}} |f_n'(z_0) - f'(z_0)| \leq \frac{4}{r} \sup_{z \in \partial K(a,r)} |f_n(z) - f(z)|\,,$$

hvilket viser, at $f_n' \to f'$ uniformt over $\overline{K(a,r/2)}$. Da $a \in G$ er vilkårlig har vi altså lokal uniform konvergens af f_n' mod f'. □

Sætning 1.12 om ledvis differentiation af en potensrække er naturligvis et specialtilfælde af ovenstående.

4.5. Hele funktioner. Liouvilles sætning.

En holomorf funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kaldes en *hel funktion* (eng. entire function). Polynomier, $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\sinh$, $\cosh$ er hele funktioner, men $\frac{1}{z}$ er ikke hel. En hel funktion fremstilles for ethvert $z \in \mathbb{C}$ ved sin Taylorrække med vilkårligt centrum, specielt med centrum 0. Teorien for hele funktioner er altså ækvivalent med potensrækker med centrum 0 og konvergensradius ∞. Hele funktioner er en naturlig generalisation af polynomier: "Polynomier af uendelig grad". Om hele funktioner findes en række dybtliggende sætninger, af hvilke vi uden bevis fremhæver:

Sætning 4.19. Picards sætning. *For en ikke konstant hel funktion* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *er enten* $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ *eller* $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ *for et passende* $a \in \mathbb{C}$. *Hvis* f *ikke er et polynomium, er* $f^{-1}(\{w\})$ *en uendelig mængde for alle* $w \in \mathbb{C}$ *på nær højst ét.*

Som illustration af sætningen kan man tænke på exp, hvor $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Picards sætning (ofte kaldet Picards lille sætning, jf. p. 6.7) viser, at en begrænset hel funktion må være konstant. Vi skal give et simpelt bevis for dette resultat.

Sætning 4.20. Liouvilles sætning. *En begrænset hel funktion er konstant.*

Bevis. Antag, at $|f(z)| \leq M$ for alle $z \in \mathbb{C}$. For $r > 0$ gælder da, ifølge Cauchys integralformler

$$\left|f^{(n)}(0)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M \cdot n!}{r^n}\,.$$

Ved at lade $r \to \infty$ ser man, at $f^{(n)}(0) = 0$ for alle $n \geq 1$, og påstanden følger af Taylorudviklingen for f. □

4.6. Polynomier.

Dybden i Liouvilles sætning antydes af, at den kan bruges til at give et enkelt bevis for:

Sætning 4.21. Algebraens fundamentalsætning. *Ethvert polynomium* $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *af grad* $n \geq 1$ *har mindst en rod i* $\mathbb{C}$.

Bevis. Antages, at $p(z) \neq 0$ for alle $z \in \mathbb{C}$, vil $f(z) = 1/p(z)$ være en hel funktion.

Idet $a_n \neq 0$, har vi

$$p(z) = a_n z^n \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n}\right)\,,$$

så

$$\frac{p(z)}{a_n z^n} \to 1 \quad \text{for} \quad |z| \to \infty\,.$$

Der findes altså et $r > 0$, så der for $|z| \geq r$ gælder

$$\left|\frac{p(z)}{a_n z^n}\right| \geq \frac{1}{2},$$

eller

$$\frac{1}{|p(z)|} \le \frac{2}{|a_n| r^n} \quad \text{for} \quad |z| \ge r\,.$$

Idet $1/|p(z)|$ også er begrænset på den afsluttede og begrænsede cirkelskive $\overline{K(0,r)}$, er $1/p$ altså en begrænset hel funktion og dermed konstant, hvilket giver en modstrid. □

Mængden af polynomier

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

af en kompleks variabel z og med komplekse koefficienter er en delmængde af de hele holomorfe funktioner $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. I algebra betegnes mængden af polynomier sædvanligvis $\mathbb{C}[z]$.

Der gælder følgende fundamentale resultat om *polynomiers division*:

Sætning 4.22. *Lad $d \in \mathbb{C}[z]$ være forskellig fra nulpolynomiet. Til $p \in \mathbb{C}[z]$ findes entydigt bestemte polynomier $q, r \in \mathbb{C}[z]$ så*

$$p = qd + r\,, \quad \text{grad}(r) < \text{grad}(d)^{1)} \tag{1}$$

Polynomierne d, q, r kaldes henholdsvis divisor, kvotient og rest. Hvis d, p har reelle koefficienter, så gælder det også for q, r.

Bevis. At fremstillingen er entydig ses således: Hvis $p = q_1 d + r_1 = q_2 d + r_2$ med $\text{grad}(r_j) < \text{grad}(d)$, $j = 1, 2$, fås $(q_1 - q_2)d = r_2 - r_1$ af grad $<$ $\text{grad}(d)$, men det kan kun lade sig gøre når $q_1 - q_2 = 0$, og så er også $r_1 - r_2 = 0$. Eksistensen ses ved et induktionsbevis, der kan udmøntes i en divisionsprocedure. Når $\text{grad}(p) < \text{grad}(d)$ sættes $q = 0$, $r = p$. Antag dernæst at

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0\,, \quad d(z) = b_k z^k + \cdots + b_0$$

med $n \ge k$, $a_n \ne 0$, $b_k \ne 0$, og at eksistensen er bevist for $k \le \text{grad}(p) \le n-1$. Idet

$$p_1(z) = p(z) - \frac{a_n}{b_k} z^{n-k} d(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 - \frac{a_n}{b_k}\left(b_{k-1} z^{n-1} + \cdots + b_0 z^{n-k}\right)$$

er af grad $\le n-1$, kan induktionsantagelsen benyttes på p_1:

$$p_1 = q_1 d + r_1\,, \quad \text{grad}(r_1) < \text{grad}(d)\,,$$

hvoraf

$$p(z) = p_1(z) + \frac{a_n}{b_k} z^{n-k} d(z) = \left(\frac{a_n}{b_k} z^{n-k} + q_1(z)\right) d(z) + r_1(z)\,.$$

□

1) Nulpolynomiet tillægges som det eneste polynomium graden $-\infty$

Eksempel 4.23. $p(z) = 2z^3 + 3z^2 + z + 3$, $d(z) = z^2 - z + 1$

$$\begin{array}{r|rrrr|l} z^2 - z + 1 & 2z^3 & + 3z^2 & + \ z & + 3 & 2z + 5 \\ & \underline{2z^3} & \underline{- 2z^2} & \underline{+ 2z} & & \\ & & 5z^2 & - \ z & + 3 & \\ & & \underline{5z^2} & \underline{- 5z} & \underline{+ 5} & \\ & & & 4z & - 2 & \end{array}$$

Altså $q(z) = 2z + 5$, $r(z) = 4z - 2$.

Eksempel 4.24. Lad $d(z) = z - a$ være af første grad. Så giver sætningen $p(z) = q(z)(z - a) + r$, hvor $r \in \mathbb{C}$. Heraf fås ved indsættelse af $z = a$ at $r = p(a)$. En rod (et nulpunkt) $z = a$ giver altså faktoriseringen $p(z) = q(z)(z - a)$.

Man får umiddelbart heraf:

Korollar 4.25. *Et polynomium $p(z)$ af grad $n \geq 1$ har netop n rødder i $\mathbb{C}$ (regnet med multiplicitet).*

Bevis. For $n = 1$ er sætningen oplagt. For $n > 1$ benyttes induktion efter n, idet $p(z)$ skrives som $(z - z_0)q(z)$ hvor z_0 er den rod, der findes ifølge Sætning 4.21, og q er af grad $n - 1$. $\square$

Opgaver til §4.

4.1. Antag at G er en åben delmængde af den komplekse plan og at $a \in G$. Lad $f \in \mathcal{H}(G)$, og antag $f'(a) \neq 0$. Vis, at der findes $r > 0$, så $|f'(z) - f'(a)| < |f'(a)|$ for $z \in K(a,r) \subseteq G$. Vis, at for $z_1, z_2 \in K(a,r)$ gælder

$$\Big| \int_0^1 f'(tz_2 + (1-t)z_1)dt - f'(a)\Big| < |f'(a)|\,,$$

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1) \int_0^1 f'(tz_2 + (1-t)z_1)\,dt\,,$$

og slut, at $f|_{K(a,r)}$ er injektiv. Vi har altså vist: *f er injektiv i en passende lille omegn af et punkt a hvor $f'(a) \neq 0$.*

Giv et eksempel på en ikke injektiv holomorf funktion f på $\mathbb{C}$ med $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in \mathbb{C}$.

4.2. Find Taylorrækken med centrum $\pi/4$ for sinus på følgende to måder: (i) Brug additionsformlen. (ii) Bestem koefficienterne ved differentiation.

4.3. Hvad er det største område G i hvilket $f(z) = 1/(1-z+z^2)$ er holomorf? Vis, at $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ for $|z| < 1$, og at $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 0$, og $a_{n+3} = -a_n$ for $n \geq 0$.

Vink. Udnyt at $1 = (1-z+z^2)\sum_0^\infty a_n z^n$ og brug Sætning 1.14.

4.4. Udregn

$$\int_{\partial K(i,2)} \frac{e^z}{(z-1)^n}\,dz \quad \text{for} \quad n \geq 1\,.$$

4.5. Lad $u : G \to \mathbb{R}$ være en harmonisk funktion i en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$. Vis, at hvis $\overline{K(a,r)} \subseteq G$, så er

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})\,d\theta\,.$$

4.6. Vis, at

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{og} \quad u(x,y) = x^2 - y^2$$

er harmoniske funktioner i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ henholdsvis $\mathbb{R}^2$, og find de konjugerede harmoniske funktioner.

4.7. Lad (f_n) være en følge af holomorfe funktioner i en åben mængde G og antag, at

$$\sum_{n=1}^\infty \sup_K |f_n(z)| < \infty,$$

for enhver afsluttet begrænset mængde $K \subseteq G$. Vis, at

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

er holomorf i G, og at $f'(z) = \sum_1^\infty f_n'(z)$, idet rækken konvergerer lokalt uniformt på G.

4.8. Lad K og L være afsluttede og begrænsede mængder i $\mathbb{C}$ så at $K \neq \emptyset$ og $K \subseteq \overset{\circ}{L}$, og lad d være afstanden mellem K og $\mathbb{C} \setminus \overset{\circ}{L}$, dvs.

$$d = \inf\{\, |x-y| \mid x \in K\,,\;\; y \in \mathbb{C} \setminus \overset{\circ}{L}\,\}\,.$$

Gør rede for, at $d > 0$, og at der for enhver åben mængde $G \supseteq L$ og for enhver $f \in \mathcal{H}(G)$ gælder

$$\sup_K |f'(z)| \leq \frac{1}{d} \sup_L |f(z)|\,.$$

Vink. Gør rede for, at man kan bruge Cauchys integralformel

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,d)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^2}\, d\xi \quad \text{for} \quad a \in K\,.$$

4.9. Lad f være en hel funktion, og antag at

$$|f(z)| \leq A + B|z|^n \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

hvor $A, B \geq 0$, og $n \in \mathbb{N}$. Vis, at f er et polynomium af grad $\leq n$.

4.10. Lad f være en ikke konstant hel funktion. Vis (uden at benytte Picard's sætning), at $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.
(*Vink.* Antag $\overline{f(\mathbb{C})} \neq \mathbb{C}$, og forsøg at anvende Liouvilles sætning.)

4.11. Vis, at hvis f er en hel funktion som opfylder $f' = af$ for et $a \in \mathbb{C}$, så findes et $c \in \mathbb{C}$ så at

$$f(z) = c\exp(az)\,,\;\; z \in \mathbb{C}\,.$$

4.12. Lad $\varphi \in \mathcal{H}(G)$. Vis, at rækken

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\varphi(z)}{n^2}\right)$$

definerer en holomorf funktion i G.

4.13. (Bygger på 3 MI). Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og $G \subseteq \mathbb{C}$ en åben mængde. Antag at $f : X \times G \to \mathbb{C}$ opfylder

(i) $\forall x \in X : f(x, \cdot) \in \mathcal{H}(G)$.
(ii) $\forall z \in G : f(\cdot, z) \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$.
(iii) $\exists g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med $\int g \, d\mu < \infty$, så

$$|f(x, z)| \leq g(x) \quad \text{for} \quad x \in X \,, z \in G \,.$$

Vis, at

$$F(z) = \int_X f(x, z) \, d\mu(x) \,, \ \ z \in G \,,$$

er holomorf i G, og

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{d^n}{dz^n} f(x, z) \, d\mu(x) \,, \ z \in G \,, \ n = 1, 2, \dots \,.$$

Vis herved, at hvis $f : [a, b] \times G \to \mathbb{C}$ er kontinuert og $f(x, \cdot) \in \mathcal{H}(G)$ for alle $x \in [a, b]$, så er

$$F(z) = \int_a^b f(x, z) \, dx \,, \quad z \in G \,,$$

holomorf i G, og

$$F^{(n)}(z) = \int_a^b \frac{d^n}{dz^n} f(x, z) \, dx \,.$$

4.14. Potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergerer uniformt mod $\frac{1}{1-z}$ på $\overline{K(0, r)}$ for hvert $r < 1$. Vis, at rækken *ikke* konvergerer uniformt på $K(0, 1)$.

4.15. Lad $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ være et polynomium af grad $n \geq 1$ med *reelle* koefficienter. Vis, at hvis $z = a$ er en rod i p så er $z = \overline{a}$ også en rod af samme multiplicitet. Vis, at hvis n er *ulige*, så har p mindst én reel rod.

4.16. Antag, at $f \in \mathcal{H}(K(0, r))$ har potensrækken

$$f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \quad \text{for} \quad |z| < r \,.$$

Vis, at der findes $\rho > 0$ så $1/f \in \mathcal{H}(K(0, \rho))$, og at der om koefficienterne (b_n) i potensrækken

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \,, \quad |z| < \rho$$

gælder

$$b_0 = 1\,, \quad b_1 = -a_1\,, \quad b_2 = a_1^2 - a_2\,.$$

4.17 Lad $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^k$ være et polynomium af grad $n \geq 1$, dvs. $a_0 \neq 0$, og antag at $a_{n-k} = a_k, k = 0, 1, \ldots, n$.

Vis, at hvis z er en rod i polynomiet p, så er $z \neq 0$ og $1/z$ er også rod i p.

Find rødderne i polynomiet $2z^4 - 3z^3 - z^2 - 3z + 2$, idet det oplyses, at $z = 2$ er rod.

4.18 Vis, at funktionerne

$$u(x, y) = e^x \cos y,\; u(x, y) = \sin x \cosh y,\; u(x, y) = \cos x \cosh y$$

er harmoniske i $\mathbb{R}^2$ og find hele holomorfe funktioner, hvis realdel er disse harmoniske funktioner.

4.20

§5. Argument. Logaritme. Potens

Denne paragraf fokuserer på begrebet argument for et komplekst tal. Da argumentet kun er bestemt modulo 2π, er det af vigtighed at kunne vælge argumentet, så det afhænger kontinuert af de punkter, vi betragter. Vi kan vælge et kontinuert argument i to vigtige situationer: For punkterne i et enkeltsammenhængende område $G \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ (Sætning 5.14), og for punkterne langs en kontinuert kurve i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (Sætning 5.10). For at udføre dette er det nødvendigt at indføre begrebet kurvesammenhæng, som også studeres i generel topologi.

Ved hjælp af kontinuerte argumentfunktioner kan vi definere præcist, hvor mange gange en kontinuert kurve løber rundt om et punkt – det kaldes omløbstallet.

Roduddragning, logaritmer og potens med vilkårlig eksponent er flertydige funktioner. Vi viser, hvordan vi i visse situationer kan vælge værdierne for disse "funktioner", så de bliver sædvanlige holomorfe funktioner.

Der er en anden måde at behandle flertydige funktioner på, som går tilbage til Riemann. Man lægger et antal kopier (lag) af den komplekse plan ovenpå hinanden og klistrer de forskellige lag sammen langs visse kurver, så de udgør, hvad man kalder en Riemann flade. Hvis den flertydige funktion har n værdier ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) i et punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ sørger man for, at fladen har n lag over punktet. Vi skal kun kort diskutere det mest enkle eksempel $\sqrt{z}$, som giver en Riemann flade med to lag. Teorien for Riemann flader er omfattende og kompliceret, og den har været inspirationskilde for den mere generelle teori for differentiable mangfoldigheder.

5.1. Nogle topologiske begreber.

Definition 5.1. En delmængde $A \subseteq \mathbb{C}$ kaldes *kurvesammenhængende*, hvis to vilkårlige punkter fra A kan forbindes med en kontinuert kurve, der forløber helt i A.

Der skal altså til vilkårlige $P, Q \in A$ findes en kontinuert funktion $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ med $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$ og $\gamma(t) \in A$ for alle $t \in [0,1]$.

Hvis en delmængde $A \subseteq \mathbb{C}$ er stjerneformet omkring $P_0 \in A$, så er A kurvesammenhængende.

Vi bemærker først, at et vilkårligt $P \in A$ kan forbindes med P_0 med linjestykket $\gamma(t) = (1-t)P_0 + tP$. Hvis δ er en analog kurve fra P_0 til $Q \in A$ vil $\{-\gamma\} \cup \delta$ definere en kontinuert kurve fra P til Q.

Specielt er enhver konveks mængde kurvesammenhængende.

Ethvert område er kurvesammenhængende, da to vilkårlige punkter kan forbindes med en trappelinje.

En cirkelperiferi er kurvesammenhængende, men vi kan naturligvis ikke forbinde dens punkter med en trappelinje.

Vi vil vise, at hvis en kurvesammenhængende mængde er åben, så kan to vilkårlige punkter endda forbindes med en trappelinje.

Som forberedelse vises et nyttigt resultat, som vi kalder "fliselemmaet", fordi det viser, at en "havesti" altid kan dækkes med et endeligt antal runde fliser af samme størrelse.

5.2. Fliselemmaet. *Lad G være en åben delmængde af $\mathbb{C}$, og lad $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ være en kontinuert kurve, der forløber helt i G.*

Der findes endeligt mange delepunkter $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ i intervallet $[a,b]$ og en radius $r > 0$ så

$$\bigcup_{i=0}^{n} K(\gamma(t_i), r) \subseteq G \tag{1}$$

og så

$$\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq K(\gamma(t_i), r)\,, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1\,. \tag{2}$$

Bevis. Ifølge en hovedsætning fra matematik 1 er γ uniformt kontinuert. Til $\varepsilon = r > 0$ findes altså $\delta > 0$ så der for alle $t, s \in [a,b]$ med $|t-s| \leq \delta$ gælder $|\gamma(t) - \gamma(s)| < r$. Vælges delepunkterne så $t_{i+1} - t_i \leq \delta$ gælder (2). Hvis $G = \mathbb{C}$ gælder (1) uanset størrelsen af $r > 0$. Mængden $\gamma([a,b])$ er afsluttet og begrænset ifølge Appendix, Sætning A.3. Hvis $G \neq \mathbb{C}$ er der en positiv afstand d mellem den afsluttede og begrænsede mængde $\gamma([a,b])$ og den afsluttede mængde $\mathbb{C} \setminus G$, jf. Lemma A.1 i Appendix. Vælges nu $r < d$ gælder både (1) og (2), idet $\delta > 0$ vælges i henhold til den uniforme kontinuitet hørende til $\varepsilon = r$. □

Sætning 5.3. *En åben kurvesammenhængende mængde $G \subseteq \mathbb{C}$ er et område*[2] *i den forstand, at to vilkårlige punkter i G kan forbindes med en trappelinje.*

Bevis. Lad $P, Q \in G$ og lad $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ være en kontinuert kurve i G fra P til Q. Ifølge fliselemmaet findes delepunkter $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ og $r > 0$ så (1) og (2) gælder.

I en cirkelskive $K(a,r)$ kan et vilkårligt punkt $P \in K(a,r)$ forbindes med centrum a med en trappelinje bestående af højst to linjestykker. Vi kan nu konstruere en trappelinje fra $\gamma(0) = P$ til $\gamma(1) = Q$ ved først at gå til $\gamma(t_1)$ i cirkelskiven $K(\gamma(0), r)$, dernæst fra $\gamma(t_1)$ til $\gamma(t_2)$ i cirkelskiven $K(\gamma(t_1), r)$, dernæst fra $\gamma(t_2)$ til $\gamma(t_3)$ i cirkelskiven $K(\gamma(t_2), r)$, osv. Da (1) gælder forløber den sammensatte trappelinje i G. □

[2] Se Definition 1.8

Ligesom Definition 5.1 har følgende to definitioner mening for $\mathbb{R}^k$ eller for et metrisk rum, men vi nøjes med at formulere dem for den komplekse plan.

Definition 5.4. Lad $A \subseteq \mathbb{C}$ være givet. Et punkt $a \in \mathbb{C}$ kaldes *fortætningspunkt* for A hvis

$$\forall r > 0 : K'(a, r) \cap A \neq \varnothing .$$

Det skal altså være muligt at finde punkter $x \in A$ som er vilkårligt tæt på a men forskellig fra a. Ækvivalent hermed er, at der findes en følge $x_n \in A \setminus \{a\}$ så $x_n \to a$ for $n \to \infty$. Et punkt $a \in A$, der ikke er fortætningspunkt for A kaldes *isoleret* i A. Det er karakteriseret ved

$$\exists r > 0 : K(a, r) \cap A = \{a\} .$$

Definition 5.5. Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben. En delmængde $A \subseteq G$ kaldes *diskret* i G, hvis A ikke har nogen fortætningspunkter i G.

Eksempler. For $A = \mathbb{R}$ og for $A = \mathbb{Q}$ er fortætningspunkterne netop punkterne i $\mathbb{R}$. Mængden $A = \mathbb{Z}$ eller en vilkårlig delmængde $A \subseteq \mathbb{Z}$ er diskret i $\mathbb{C}$. Mængden $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ er diskret i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, men 0 er et fortætningspunkt for A.

Sætning 5.6. *Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben. En diskret mængde $A \subseteq G$ er tællelig (se Appendix A.7) og $G \setminus A$ er åben.*[3]

Bevis. Et vilkårligt $a \in G$ er ikke fortætningspunkt for A og altså findes $r = r_a > 0$ så

$$K'(a, r_a) \cap A = \varnothing . \tag{3}$$

Vi kan desuden antage at $K(a, r_a) \subseteq G$ for ellers erstattes r_a af en mindre radius.

Hvis $a \in G \setminus A$ gælder endda $K(a, r_a) \cap A = \varnothing$, altså $K(a, r_a) \subseteq G \setminus A$. Dette viser, at $G \setminus A$ er åben.

Hvis $a \in A$ gælder

$$K(a, r_a) \cap A = \{a\} . \tag{4}$$

Lad nu $K \subseteq G$ være en afsluttet og begrænset mængde. Kuglerne $\{K(a, r_a) \mid a \in K\}$ udgør en åben overdækning af K. Ifølge Borels overdækningssætning, jf. 4.13, findes $a_1, \ldots , a_n \in K$ så

$$K \subseteq K(a_1, r_{a_1}) \cup \ldots \cup K(a_n, r_{a_n}) ,$$

hvoraf

$$A \cap K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A \cap K(a_i, r_{a_i}) \subseteq \{a_1, \ldots , a_n\} .$$

[3] A er altså afsluttet relativt til G.

Dette viser, at $A \cap K$ er en endelig mængde.

Vi afslutter beviset ved at benytte, at der findes en stigende følge $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ af afsluttede og begrænsede delmængder af G med G som foreningsmængde, jf. Sætning A.5 i Appendix.

Dermed er A foreningsmængde af de endelige mængder $A \cap K_n$, $n = 1, 2, \ldots$ og altså tællelig. $\square$

Sætning 5.7. *Lad $f : A \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion på en kurvesammenhængende delmængde $A \subseteq \mathbb{C}$.*

Hvis $f(A)$ er diskret i $\mathbb{C}$, må f være konstant.

Bevis. Vælg $P_0 \in A$. Vi skal vise, at $f(P) = f(P_0)$ for vilkårligt $P \in A$. Til $P \in A$ vælges en kontinuert kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ så $\gamma(0) = P_0$, $\gamma(1) = P$ og $\gamma(t) \in A$ for $t \in [0, 1]$.

Da $f(A)$ er diskret i $\mathbb{C}$ findes $r > 0$ så

$$K(f(P_0), r) \cap f(A) = \{f(P_0)\}$$

jf. (4), men da $f \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ er kontinuert findes $\delta_0 > 0$ så

$$\forall t \in [0, 1] : 0 \leq t \leq \delta_0 \Rightarrow |f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))| < r$$

altså

$$0 \leq t \leq \delta_0 \Rightarrow f(\gamma(t)) \in K(f(P_0), r) \cap f(A) = \{f(P_0)\}\,.$$

Dette viser, at $f(\gamma(t))$ er konstant lig med $f(P_0)$ for $t \in [0, \delta_0]$. Ideen er nu løst sagt, at når $f(\gamma(t_0)) = f(P_0)$ så må som før $f(\gamma(t)) = f(P_0)$ for $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ for et nyt passende lille δ, og efter et antal skridt når vi til $t = 1$. Man kunne frygte, at skridtlængden δ blev mindre og mindre, så man aldrig nåede til $t = 1$. Vi må derfor give et præcist bevis.

Lad

$$E = \{t \in [0, 1] \mid \forall s \in [0, t] : f(\gamma(s)) = f(P_0)\}\,.$$

Vi har indset at $[0, \delta_0] \subseteq E$, og defineres $t_0 := \sup E$ har vi $\delta_0 \leq t_0 \leq 1$.

Da $f(A)$ er diskret i $\mathbb{C}$ er $f(\gamma(t_0))$ ikke fortætningspunkt for $f(A)$, og der findes altså $r > 0$ så

$$K(f(\gamma(t_0)), r) \cap f(A) = \{f(\gamma(t_0))\}\,,$$

jf. (4). Da $f \circ \gamma$ er kontinuert i t_0 findes $\delta > 0$ så

$$\forall t \in [0, 1] : t_0 - \delta \leq t \leq t_0 + \delta \Rightarrow |f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))| < r$$

altså

$$t \in [0, 1] \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \Rightarrow f(\gamma(t)) = f(\gamma(t_0)). \tag{5}$$

Da t_0 er supremum for E findes $t_1 \in E \cap [t_0 - \delta, t_0]$, men så er

$$f(P_0) = f(\gamma(t_1)) = f(\gamma(t_0))\,. \tag{6}$$

Påstanden er nu, at $t_0 = 1$, for hvis $t_0 < 1$ har vi af (5) og (6), at

$$f(\gamma(t)) = f(P_0) \quad \text{for} \quad t \in [0, t_0 + \delta] \cap [0, 1]\,.$$

Dette viser, at $\min(t_0 + \delta, 1) \in E$, men det strider mod definitionen af t_0. $\square$

5.2. Argumentfunktion, omløbstal.

For $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ betegner $\arg z$ mængden af argumenter for z, altså mængden af tal $\theta \in \mathbb{R}$, så $z = |z|e^{i\theta}$. *Hovedargumentet* $\operatorname{Arg} z$ er det entydigt bestemte argument, der tilhører $]-\pi, \pi]$, altså

$$\operatorname{Arg} z \in \arg z \cap]-\pi, \pi]\,, \ \ \arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi\mathbb{Z}\,.$$

Ved en *argumentfunktion* for en delmængde $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ forstås en funktion $\theta : A \to \mathbb{R}$, så $\theta(z) \in \arg z$ for $z \in A$, eller ensbetydende hermed $z = |z|e^{i\theta(z)}$ for $z \in A$.

Hovedargumentet Arg er en kontinuert argumentfunktion for den opskårne plan $\mathbb{C}_\pi := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$. Dette er geometrisk klart, men følger også af at[4]

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arg} z &= \operatorname{Arccos} \frac{x}{r}\,, && \text{når} \quad z = x + iy\,,\ y > 0\,, \\
\operatorname{Arg} z &= \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}\,, && \text{når} \quad z = x + iy\,,\ x > 0\,, \\
\operatorname{Arg} z &= -\operatorname{Arccos} \frac{x}{r}, && \text{når} \quad z = x + iy\,,\ y < 0\,,
\end{aligned}$$

($r = |z|$), hvoraf man endda kan se, at Arg er C^∞ på den opskårne plan.

Tilsvarende kan vi for hvert reelt α bestemme en argumentfunktion $\operatorname{Arg}_\alpha$ for den opskårne plan $\mathbb{C}_\alpha := \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} \mid r \geq 0\}$ ved

$$\operatorname{Arg}_\alpha z \in \arg z \cap \,]\alpha - 2\pi, \alpha[\,,$$

altså $\operatorname{Arg} = \operatorname{Arg}_\pi$ på $\mathbb{C}_\pi$. Idet

$$\operatorname{Arg}_\alpha z = \operatorname{Arg}\left(e^{i(\pi-\alpha)} z\right) + \alpha - \pi \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{C}_\alpha\,,$$

er $\operatorname{Arg}_\alpha$ en C^∞-funktion af z på den opskårne plan.

Arg og $\operatorname{Arg}_\alpha$ er eksempler på kontinuerte argumentfunktioner knyttet til særlige områder af $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. For vilkårlige kurvesammenhængende delmængder $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ har man:

---

[4] $\operatorname{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ er den omvendte funktion til $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$. $\operatorname{Arctan} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ er den omvendte funktion til $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$.

Lemma 5.8. *Lad $\theta : A \to \mathbb{R}$ være en kontinuert argumentfunktion for en kurvesammenhængende delmængde $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Så er for hvert $p \in \mathbb{Z}$ også $\theta + 2\pi p$ en kontinuert argumentfunktion for A, og der er ikke andre.*

Bevis. For hvert $p \in \mathbb{Z}$ er funktionen $\theta + 2\pi p : z \mapsto \theta(z) + 2\pi p$ ligeledes kontinuert, og det er en argumentfunktion for A, da $e^{i\theta(z)+i2\pi p} = e^{i\theta(z)}$. Hvis $\theta_1 : A \to \mathbb{R}$ er en vilkårlig kontinuert argumentfunktion for A, er $z = |z|e^{i\theta(z)} = |z|e^{i\theta_1(z)}$, så da $z \neq 0$, er $e^{i(\theta_1(z)-\theta(z))} = 1$, og det følger af Sætning 1.18, at $\theta_1(z) - \theta(z) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Altså er $\theta_1 - \theta : A \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion med værdimængde indeholdt i $2\pi\mathbb{Z}$. Da $2\pi\mathbb{Z}$ er diskret, er $\theta_1 - \theta$ konstant ifølge Sætning 5.7, altså lig med $2\pi p_0$ for et $p_0 \in \mathbb{Z}$. □

For en kontinuert kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er vi interesseret i at finde en *kontinuert argumentfunktion langs med kurven*, altså en kontinuert funktion $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ så

$$\theta(t) \in \arg\gamma(t) \quad \text{for} \quad t \in [a,b]$$

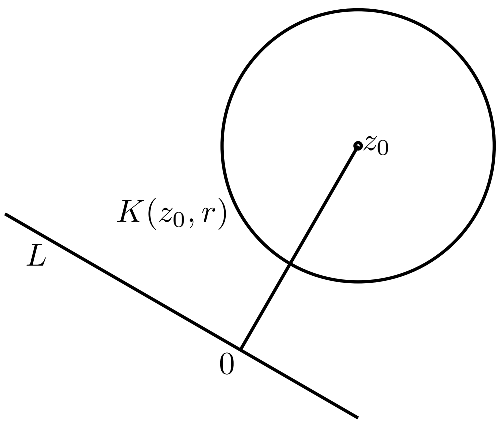
eller ensbetydende hermed

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\theta(t)} \quad \text{for} \quad t \in [a,b]\,.$$

Vi viser først eksistens af en kontinuert argumentfunktion i et specielt tilfælde.

Lemma 5.9. *Lad $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ være en kontinuert kurve, der forløber helt i en cirkelskive $K(z_0,r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Så findes en kontinuert argumentfunktion langs kurven.*

Bevis. Forudsætningen $0 \notin K(z_0,r)$ betyder, at $|z_0| \geq r$.



Lad L være linjen gennem 0 vinkelret på linjestykket $[0,z_0]$. Vi kan beskrive L som $L = \{se^{i\alpha} \mid s \in \mathbb{R}\}$ for passende valg af argument α. Cirkelskiven

$K(z_0, r)$ tilhører en af de to åbne halvplaner, som opstår, når L fjernes fra $\mathbb{C}$. Derfor vil $K(z_0, r) \subseteq \mathbb{C}_\alpha$, og Arg_α er specielt en kontinuert argumentfunktion for $K(z_0, r)$. Den sammensatte funktion $\theta(t) = \mathrm{Arg}_\alpha(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$ er en kontinuert argumentfunktion langs γ. □

Sætning 5.10. *Lad $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være en kontinuert kurve, der ikke passerer gennem* 0*. Der findes en kontinuert argumentfunktion $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ langs γ og enhver kontinuert argumentfunktion langs γ er givet som $\theta(t)+2p\pi$ for passende (fast) $p \in \mathbb{Z}$.*

Bevis. Vi skal kombinere fliselemmaet (5.2) med Lemma 5.9. Ifølge fliselemmaet anvendt på γ findes delepunkter $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ og $r > 0$ så (1) og (2) fra Lemma 5.2 gælder med $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Første del af kurven $\gamma(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ forløber helt i cirkelskiven $K(\gamma(0), r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ifølge Lemma 5.9 findes en kontinuert argumentfunktion $\theta_1 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ langs $\gamma(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Tilsvarende findes en kontinuert argumentfunktion $\theta_2 : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ langs $\gamma(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Da nu $\theta_1(t_1)$ og $\theta_2(t_1)$ begge er argumenter for $\gamma(t_1)$ findes $p_1 \in \mathbb{Z}$ så $\theta_1(t_1) = \theta_2(t_1)+2p_1\pi$. Dermed vil funktionen $\theta : [t_0, t_2] \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_1(t)\,, & t \in [t_0, t_1] \\ \theta_2(t) + 2p_1\pi\,, & t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

være en kontinuert argumentfunktion langs $\gamma(t)$, $t \in [t_0, t_2]$.

Ved på lignende måde at fortsætte θ til $[t_2, t_3]$ osv., opnår vi en kontinuert argumentfunktion $\theta : [t_0, t_n] \to \mathbb{R}$ langs γ.

Hvis $\tilde{\theta} : [a, b] \to \mathbb{R}$ er en anden kontinuert argumentfunktion langs γ må $\tilde{\theta} - \theta$ være en kontinuert funktion på $[a, b]$ med værdimængde i $2\pi\mathbb{Z}$, som er diskret. Af Sætning 5.7 følger, at $\tilde{\theta} - \theta$ er konstant på $[a, b]$, altså $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) + 2\pi p$ for passende $p \in \mathbb{Z}$. □

Bemærk, at en kontinuert argumentfunktion θ langs med γ er defineret på parameterintervallet $[a, b]$. Mængden γ^* af kurvens punkter er en afsluttet og begrænset delmængde af $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Hvis γ^* har en kontinuert argumentfunktion θ_{γ^*}, så er $\theta_{\gamma^*} \circ \gamma$ en kontinuert argumentfunktion langs γ, men det kan sagtens indtræffe, at γ^* ikke har en kontinuert argumentfunktion.

Eksempel 5.11. Lad $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være $\gamma(t) = e^{it}$. Når t gennemløber $[0, 4\pi]$ gennemløber $\gamma(t)$ enhedscirklen startende i 1 og den gennemløbes 2 gange i positiv omløbsretning, idet $\gamma(t) = 1$ for $t = 0,\ 2\pi,\ 4\pi$. En kontinuert argumentfunktion langs γ er $\theta(t) = t$, $t \in [0, 4\pi]$. Punktet 1 på enhedscirklen "får" argumenterne 0, 2π, 4π i de tre tidspunkter, det løbende punkt befinder sig i $z = 1$.

Mængden $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ har *ingen* kontinuert argumentfunktion, jf. opgave 5.4.

På baggrund af ovenstående indfører vi på præcis måde to intuitive begreber.

Definition 5.12. Lad $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være en kontinuert kurve, der ikke passerer 0. Ved *argumentvariationen langs* γ forstås tallet

$$\operatorname{argvar}(\gamma) := \theta(b) - \theta(a)\,,$$

hvor θ er en vilkårlig kontinuert argumentfunktion langs γ.

For en lukket kontinuert kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kaldes

$$\omega(\gamma, 0) := \frac{1}{2\pi} \operatorname{argvar}(\gamma) \in \mathbb{Z}$$

kurvens omløbstal om 0.

I definitionen ovenfor afhænger tallet $\theta(b) - \theta(a)$ ikke af valget af kontinuert argumentfunktion langs γ, idet en anden sådan har formen $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) + 2\pi p$ for passende $p \in \mathbb{Z}$ altså

$$\tilde{\theta}(b) - \tilde{\theta}(a) = \theta(b) + 2\pi p - (\theta(a) + 2\pi p) = \theta(b) - \theta(a)\,.$$

Hvis γ er lukket, altså $\gamma(a) = \gamma(b)$, så må $\theta(a)$ og $\theta(b)$ være argumenter for samme komplekse tal $\gamma(a) = \gamma(b)$. Derfor er $\theta(b) - \theta(a) = 2\pi p$ for et entydigt bestemt $p \in \mathbb{Z}$, og $\omega(\gamma, 0) = p$.

I eksempel 5.11 er argumentvariationen langs γ lig med 4π og omløbstallet om 0 er $\omega(\gamma, 0) = 2$.

Omløbstallet skifter fortegn, hvis vi ændrer gennemløbsretningen for en lukket kurve.

5.3. *n*'te rødder.

Ethvert komplekst tal $z \neq 0$ har som bekendt n forskellige komplekse n'te rødder, $n = 1, 2, \ldots$. Hvis $z = re^{i\theta}$ med $r = |z|$, $\theta \in \mathbb{R}$ er disse givet ved udtrykkene

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta_k}\,, \quad \theta_k = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Vi definerer nu

$$\sqrt[n]{z} = \{z_k \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

og $\sqrt[n]{0} = 0$. Udtrykket $\sqrt[n]{z}$ er ikke nogen kompleks funktion i sædvanlig forstand, fordi der ikke er knyttet en bestemt værdi i $\mathbb{C}$ til hvert $z \in \mathbb{C}$.

Til hvert $z \neq 0$ er knyttet en delmængde af $\mathbb{C}$ bestående af n tal nemlig n'te rødderne z_k, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Vi kan derfor tænke på $\sqrt[n]{z}$ som en afbildning af $\mathbb{C}$ ind i mængden $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ af delmængder af $\mathbb{C}$. Man kan omtale $\sqrt[n]{z}$ som en *multiværdi-funktion.* Vi har brug for at se på en *gren af* $\sqrt[n]{z}$, dvs. en funktion $f : A \to \mathbb{C}$ defineret på en delmængde af $A \subseteq \mathbb{C}$ så $f(z) \in \sqrt[n]{z}$ for alle $z \in A$. Hvis $f : A \to \mathbb{C}$ er en gren af $\sqrt[n]{z}$ så er $z \mapsto f(z)\exp(2\pi i k/n)$ også en gren af $\sqrt[n]{z}$ for $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Tallet 0 spiller en speciel rolle og kaldes et *forgreningspunkt* for $\sqrt[n]{z}$.

Sætning 5.13. *Lad $n = 1, 2, \dots$ være givet. Funktionen z^n afbilder vinkelrummet*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{n} \right\}$$

bijektivt på $\mathbb{C}_\pi$. Den omvendte funktion

$$\rho_n(z) = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{n}}$$

er en holomorf gren af $\sqrt[n]{z}$ på $\mathbb{C}_\pi$.

Bevis. Det er klart, at de to afbildninger er bijektive og hinandens inverse. Da z^n er holomorf og ρ_n er kontinuert, fordi $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}_\pi \to \,]-\pi, \pi[$ er kontinuert, følger af Bemærkning 1.5, at ρ_n er holomorf med

$$\rho_n'(z) = \frac{1}{n(\rho_n(z))^{n-1}} = \frac{1}{n}\rho_n(z)^{1-n}\,.$$

Tillader vi os skrivemåden $\rho_n(z) = z^{\frac{1}{n}}$ kan dette skrives

$$\frac{d}{dz} z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}\,,$$

altså fuldstændigt som når funktionen betragtes på intervallet $]0, \infty[$. $\square$

I tilfældet $n = 2$ har vi to holomorfe grene $\pm\rho_2(z)$ af $\sqrt{z}$ som afbilder $\mathbb{C}_\pi$ på henholdsvis højre og venstre halvplan.

Hvis vi tænker på den opskårne plan $\mathbb{C}_\pi$ som et stykke papir, kan vi vride det fra hinanden langs opskæringen. Dermed bliver den fjernede halvlinje $]-\infty, 0]$ til to stykker rand. Her har vi brug for det tre-dimensionale rum. Funktionen ρ_2 har en naturlig kontinuert fortsættelse til disse rande. Randen for anden kvadrant afbildes ved ρ_2 på $\{iy \mid y > 0\}$ og randen for tredie kvadrant afbildes på $\{iy \mid y < 0\}$. Tilsvarende vil grenen $-\rho_2$ afbilde den opskårne plans rande på de to imaginære halvakser, men ombyttet.

Vi lægger nu to eksemplarer af $\mathbb{C}_\pi$ oven på hinanden og bruger ρ_2 på det øverste eksemplar, $-\rho_2$ på det nederste. Hvis vi limer det øverste eksemplars øverste kant sammen med det nederste eksemplars nederste kant, vil ρ_2 og

$-\rho_2$ føjes sammen til en kontinuert funktion, der tilsammen afbilder de to eksemplarer af $\mathbb{C}_\pi$ på højre og venstre halvplan samt halvlinjen $\{iy \mid y > 0\}$. Hvis vi bagefter limer øverste eksemplars nederste kant sammen med nederste eksemplars øverste kant, får vi også en kontinuert fortsættelse af ρ_2 og $-\rho_2$, hvis billede er $\{iy \mid y < 0\}$.

Den anden sammenlimning kan ikke realiseres i det tre-dimensionale rum, så vi må forestille os en idealiseret flade med 2 lag: Når vi bevæger os langs enhedscirklen fra 1 i øverste eksemplar, så passerer vi ned i underste eksemplar, når vi har bevæget os vinklen π. Efter yderligere drejning på 2π kommer vi op i øverste eksemplar igen. Den idealiserede flade med 2 lag kaldes *Riemannfladen for* $\sqrt{z}$. Ved at føje ρ_2 og $-\rho_2$ sammen på Riemannfladen som ovenfor, får vi realiseret $\sqrt{z}$ som en bijektion af Riemannfladen på $\mathbb{C}$.

Multiværdi-funktioner kan i almindelighed realiseres på en Riemannflade, men vi nøjes med denne lille smagsprøve på emnet.

5.4. Logaritmefunktion.

Idet $\exp(x+iy) = e^x e^{iy}$ ser man, at en vandret linie $y = \alpha$ afbildes bijektivt på halvlinien $\{\, re^{i\alpha} \mid r > 0\,\}$, og dermed afbildes enhver vandret strimmel af bredde 2π af formen

$$\{\, z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im} z \le a + 2\pi \,\}$$

bijektivt på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. For $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ findes der altså uendeligt mange løsninger $w \in \mathbb{C}$ til ligningen $\exp w = z$, og hvis $w = u + iv$ ser man, at $e^u = |z|$, $v \in \arg z$. Løsningsmængden er altså

$$\log|z| + i\arg z = \{\, \log|z| + iv \mid v \in \arg z \,\},$$

og den betegnes $\log z$. Den værdi af $\log z$, der svarer til hovedargumentet for z, kaldes *hovedlogaritmen* og betegnes $\operatorname{Log} z$, altså

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i\operatorname{Arg} z,$$

og den er den omvendte funktion til restriktionen af exp til strimlen $\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z \le \pi\}$.

For et positivt tal r, kan $\log r$ altså betyde enten tallet $\operatorname{Log} r$ eller den uendelige mængde $\operatorname{Log} r + 2\pi i\mathbb{Z}$, men normalt vil denne tvetydighed ikke give anledning til misforståelser.

Ved en *logaritmefunktion* for en delmængde $A \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ forstås en funktion $l\colon A \to \mathbb{C}$, så $l(z) \in \log z$ for $z \in A$, altså så $\exp(l(z)) = z$ for $z \in A$.

Hvis α er en argumentfunktion for A, så er $l(z) = \log|z| + i\alpha(z)$ en logaritmefunktion for A, og hvis l er en logaritmefunktion for A, så er $\alpha = \operatorname{Im} l$ en argumentfunktion for A. Heraf ses, at en delmængde $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ har en kontinuert argumentfunktion, netop hvis den har en kontinuert logaritmefunktion. I stedet for argument- eller logaritmefunktion siger man også en *gren af argumentet* eller *af logaritmen.*

For $\alpha \in \mathbb{R}$ er

$$\exp\colon \{\, z \in \mathbb{C} \mid \alpha - 2\pi < \operatorname{Im} z < \alpha \} \to \mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{\, re^{i\alpha} \mid r \geq 0 \,\}$$

en bijektiv kontinuert afbildning, og den omvendte afbildning er

$$\operatorname{Log}_\alpha z := \log|z| + i \operatorname{Arg}_\alpha(z)\,,$$

som er kontinuert. Ifølge Bemærkning 1.5 er $\operatorname{Log}_\alpha$ holomorf i $\mathbb{C}_\alpha$, og den afledede er

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log}_\alpha z = \frac{1}{\exp(\operatorname{Log}_\alpha z)} = \frac{1}{z}\,.$$

Funktionen $\operatorname{Log}_\alpha$ er altså en holomorf gren af logaritmen i den opskårne plan $\mathbb{C}_\alpha$, og er dér en stamfunktion til $1/z$. Bemærk at $\operatorname{Log}_\pi = \operatorname{Log}$ på $\mathbb{C}_\pi$.

Mere almindeligt gælder:

Sætning 5.14. *Lad $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være et område. Hvis der findes en kontinuert argumentfunktion α for G, så er*

$$l(z) = \log|z| + i\alpha(z)\,, z \in G\,,$$

en holomorf gren af logaritmen, og den er en stamfunktion til $1/z$, dvs.

$$l'(z) = \frac{1}{z} \quad \textit{for} \quad z \in G\,.$$

Ethvert enkeltsammenhængende område $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ har en kontinuert argumentfunktion.

Bevis. Betragt et $z_0 \in G$ og vælg $r > 0$, så at $K(z_0, r) \subseteq G$; vi skal vise, at l er holomorf i $K(z_0, r)$. Som i beviset for Lemma 5.9 findes en linje $L = \{se^{i\alpha} \mid s \in \mathbb{R}\}$ så $K(z_0, r) \subseteq \mathbb{C}_\alpha$. Den ved $\operatorname{Arg}_\alpha$ bestemte kontinuerte gren af argumentet for $\mathbb{C}_\alpha$ er specielt en kontinuert argumentfunktion for $K(z_0, r)$. Idet $\alpha|_{K(z_0,r)}$ også er en kontinuert argumentfunktion for $K(z_0, r)$, sluttes ved Lemma 5.8, at der findes $p \in \mathbb{Z}$ så

$$\operatorname{Arg}_\alpha(z) = \alpha(z) + 2p\pi \quad \text{for} \quad z \in K(z_0, r)\,,$$

altså

$$\operatorname{Log}_\alpha(z) = l(z) + i2p\pi \quad \text{for} \quad z \in K(z_0, r)\,,$$

hvilket viser, at l er holomorf i $K(z_0, r)$ og $l'(z) = 1/z$.

Hvis G er enkeltsammenhængende har $1/z$ en stamfunktion $f \in \mathcal{H}(G)$ ifølge Sætning 3.5, og idet en stamfunktion er bestemt på nær addition af en konstant, kan vi tænke os f valgt, så der for et forelagt $z_0 \in G$ gælder $f(z_0) \in \log z_0$.

Funktionen $\varphi(z) = z \exp(-f(z))$ er holomorf i G, og idet $f'(z) = 1/z$ finder vi

$$\varphi'(z) = \exp(-f(z))\,(1 - zf'(z)) = 0$$

med $\varphi(z_0) = 1$. Dette viser, at $\varphi \equiv 1$, men så er f en holomorf gren af logaritmen, og $\operatorname{Im} f$ er en kontinuert argumentfunktion for G. □

Bemærkning 5.15. Når l er som ovenfor og $p \in \mathbb{Z}$, er også $l(z) + 2\pi i p$ en holomorf gren af logaritmen på G. Der er ikke andre, thi endda enhver *kontinuert* logaritmefunktion l_1 for G har denne form, idet $\operatorname{Im} l_1$ er en kontinuert argumentfunktion for G, og dermed lig med $\alpha + 2\pi p$ for et $p \in \mathbb{Z}$ ifølge Lemma 5.8.

Sætning 5.16. *For $|z| < 1$ gælder potensrækkeudviklingen*

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \cdots .$$

Bevis. Funktionen $f(z) = \operatorname{Log}(1+z)$ er holomorf i $G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq -1\}$, og idet $f'(z) = (1+z)^{-1}$ ser man, at $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+z)^{-n}$. Dermed bliver Taylorrækken med centrum 0 givet ved

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n ,$$

og dens sum er ifølge Sætning 4.8 lig med $\operatorname{Log}(1+z)$ i $K(0,1)$, som er den største åbne cirkelskive i G med centrum 0.

Bemærk, at potensrækken i Sætning 5.16 har konvergensradius lig med 1.

5.5. Potens.

Potenser z^α, hvor z og $\alpha \in \mathbb{C}$, defineres for $z \neq 0$ ved $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$, og dermed er z^α i almindelighed en uendelig mængde, f.eks.

$$i^i = e^{i \log i} = \{\, e^{-\frac{\pi}{2} - 2p\pi} \mid p \in \mathbb{Z} \,\} .$$

Denne definition udvider n'te rødderne $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ defineret i 5.3.

Vi er interesseret i *holomorfe grene af potensfunktionen.* Hvis l er en holomorf gren af logaritmen for et område $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, så er $\exp(\alpha l(z))$ en holomorf gren af z^α med den afledede

$$\alpha l'(z) \exp(\alpha l(z)) = \frac{\alpha}{z} \exp(\alpha l(z)) = \alpha \exp((\alpha - 1) l(z)) \,,$$

idet $\exp(l(z)) = z$. Disse formler er uoverskuelige, og man tillader sig derfor — praktisk men ukorrekt — at skrive

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = \alpha z^{\alpha - 1} \,,$$

idet man tænker sig z^α som en eller anden holomorf gren. Dermed er formlen den man kender for $z > 0$.

Idet $\operatorname{Log}(1+z)$ er en holomorf funktion i den opskårne plan $G = \mathbb{C} \setminus \{ z \in \mathbb{R} \mid z \leq -1 \}$, er $z \mapsto \exp(\alpha \operatorname{Log}(1+z))$ en holomorf gren af $(1+z)^\alpha$ i G. Vi vil finde dens potensrækkeudvikling med centrum 0.

Sætning 5.17. Binomialrækken. *Lad $\alpha \in \mathbb{C}$. For $|z| < 1$ gælder*

$$(1+z)^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}(1+z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \,,$$

idet

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \,, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \textit{for } n \geq 1 \,.$$

Bevis. Den største åbne cirkelskive i G med centrum 0 er $K(0,1)$. For $z \in G$ har man

$$\frac{d}{dz}(1+z)^\alpha = \alpha(1+z)^{\alpha-1} \,,$$

og ved gentagen anvendelse heraf

$$\left[\frac{d^n}{dz^n}(1+z)^\alpha \right]_{z=0} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \,.$$

Påstanden i sætningen følger nu af Sætning 4.8. □

Lad $f \in \mathcal{H}(G)$ og antag, at f er nulpunktsfri, dvs. at $f(z) \neq 0$ for alle $z \in G$. Hvis $f(G)$ er indeholdt i et enkeltsammenhængende område $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, kan vi uden problem opskrive holomorfe grene af $\log f$ og f^α, $\alpha \in \mathbb{C}$, nemlig $l \circ f$ og $\exp(\alpha l \circ f)$, hvor l er en holomorf logaritme for Ω. Selv om denne betingelse på $f(G)$ ikke er opfyldt, kan man undertiden alligevel finde en holomorf gren. For eksempel er $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, og $z \mapsto z$ er jo en holomorf gren af $\log e^z$.

Der gælder følgende:

Sætning 5.18. *Om et område $G \subseteq \mathbb{C}$ er følgende betingelser ensbetydende:*

(a) *G er enkeltsammenhængende.*

(b) *For enhver $f \in \mathcal{H}(G)$ og enhver lukket vej γ i G gælder*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0\,.$$

(c) *Enhver $f \in \mathcal{H}(G)$ har en stamfunktion.*

(d) *Enhver nulpunktsfri $f \in \mathcal{H}(G)$ har en holomorf logaritme, dvs. en funktion $l \in \mathcal{H}(G)$ så $\exp l = f$.*

(e) *Enhver nulpunktsfri $f \in \mathcal{H}(G)$ har en holomorf kvadratrod, dvs. en funktion $g \in \mathcal{H}(G)$ så $g^2 = f$.*

Bevis.

(a) $\Longrightarrow$ (b) er Cauchys integralsætning.

(b) $\Longrightarrow$ (c) er indeholdt i Sætning 2.13.

(c) $\Longrightarrow$ (d) ses således: Hvis $f \in \mathcal{H}(G)$ er nulpunktsfri, så er $f'/f \in \mathcal{H}(G)$, og den har ifølge (c) en stamfunktion l, der endda kan vælges så $l(z_0) \in \log f(z_0)$ for givet $z_0 \in G$. Funktionen $\varphi = f\exp(-l)$ opfylder $\varphi' \equiv 0$, $\varphi(z_0) = 1$, så der gælder $\varphi \equiv 1$, hvilket viser, at $l \in \mathcal{H}(G)$ er en logaritme til f.

(d) $\Longrightarrow$ (e). Hvis l er en holomorf logaritme til den nulpunktsfrie funktion $f \in \mathcal{H}(G)$, så er $g = \exp(\frac{1}{2}\,l)$ en holomorf kvadratrod til f.

(e) $\Longrightarrow$ (a). Denne implikation er vanskelig. Den beror på, at man i tilfældet $G \neq \mathbb{C}$ kan finde $\varphi \in \mathcal{H}(G)$ som afbilder G bijektivt på $K(0,1)$, hvilket hænger sammen med

Sætning 5.19. Riemanns afbildningssætning. *Lad G være et enkeltsammenhængende område forskelligt fra $\mathbb{C}$. Så findes en bijektiv holomorf funktion $\varphi : G \to K(0,1)$.*

Bemærkning 5.20. Beviset for Riemanns sætning og implikationen (e) $\Longrightarrow$ (a) kan findes i W. Rudins bog: Real and complex analysis.

Den omvendte funktion φ^{-1} er ligeledes holomorf (Sætning 1.4). Man kalder derfor en sådan afbildning for *biholomorf.*

Da (a) $\Longleftrightarrow$ (b), er enkeltsammenhæng både en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at Cauchys integralsætning gælder.

Når G er enkeltsammenhængende, og $f \in \mathcal{H}(G)$ er nulpunktsfri, findes ikke blot en holomorf kvadratrod, men en holomorf gren af f^α for hvert $\alpha \in \mathbb{C}$, nemlig $\exp(\alpha\, l)$, hvor l er en holomorf gren af logaritmen til f.

Eksempel 5.21. En holomorf gren af Arcsin. Betragt området

$$G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$$

som er stjerneformet omkring 0, specielt enkeltsammenhængende. Funktionen $1/(1-z^2)$ er holomorf i G (endda i $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$), og den er aldrig 0. Ifølge Sætning 5.18 har funktionen en holomorf kvadratrod. Det er altså muligt at opfatte $1/\sqrt{1-z^2}$ som holomorf funktion i G. For at finde et udtryk for funktionen udnyttes, at $\varphi(z) = 1 - z^2$ afbilder G ind i $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\}$. Hvis vi nemlig løser ligningen $1 - z^2 = a$ med $a \in \mathbb{R}$, $a \le 0$ er $1 - a \ge 1$ og $z = \pm\sqrt{1-a}$, men de to halvlinjer $[1, \infty[$, $]-\infty, -1]$ er jo netop fjernet fra $\mathbb{C}$. Dermed er $\operatorname{Log}(1-z^2)$ holomorf i G, og

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1-z^2)\right)$$

er den holomorfe gren af $1/\sqrt{1-z^2}$, vi er interesseret i. Funktionen

$$-\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1-z^2)\right)$$

er den anden gren af kvadratroden af $1/(1-z^2)$.

Funktionen

$$\operatorname{Arcsin} z = \int_{[0,z]} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad z \in G,$$

der fås ved at integrere langs linjestykket fra 0 til z er holomorf i G og stamfunktion til $1/\sqrt{1-z^2}$, jf. Sætning 2.13 og opgave 3.5. I øvrigt kan vi integrere langs en vilkårlig vej i G fra 0 til z uden at værdien af integralet ændres.

Specielt har vi

$$\operatorname{Arcsin} x = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{for } x \in \,]-1, 1[\,,$$

så restriktionen af Arcsin til $]-1, 1[$ er den omvendte funktion til $\sin : \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\, \to \,]-1, 1[$. Man kan vise, at Arcsin afbilder G bijektivt på strimlen $\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$, og restriktionen af sinus til strimlen er den inverse. Jf. opg. 1.12.

Eksempel 5.22. Elliptiske funktioner. Lad p være et polynomium af grad $n \ge 1$ med rødderne $z_1, \dots, z_n$. Funktionen $1/p(z)$ er holomorf i $G = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, som ikke er enkeltsammenhængende. Hvis vi skal finde en holomorf gren af $1/\sqrt{p(z)}$ er vi nødt til at kigge på et enkeltsammenhængende delområde af G ved f.eks. at skære nogle halvlinjer væk ligesom i Eksempel 5.21. Man kan så studere stamfunktioner

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} \frac{du}{\sqrt{p(u)}}$$

ved at integrere langs en vej fra z_0 til z.

For polynomier p af grad $1, 2$ kan stamfunktionerne udtrykkes ved logaritmefunktionen og de omvendte trigonometriske funktioner. For polynomier af grad 3 og 4 kaldes integralerne *elliptiske integraler*, fordi de bl.a. dukker op, når man skal udregne buelængden af en ellipse. De elliptiske integraler blev studeret af mange af de store matematikere i 1700- og 1800-tallet. Et stort fremskridt indtrådte med Abels og Jacobis arbejder. I analogi med at sinusfunktionen er den omvendte til stamfunktionen

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\,,$$

fandt de ud af, at det var mere hensigtsmæssigt at studere de omvendte funktioner til de elliptiske integraler. Det er disse omvendte funktioner, man i dag kalder *elliptiske funktioner*. Sinusfunktionen er periodisk i $\mathbb{C}$ med periode 2π. De elliptiske funktioner har 2 lineært uafhængige perioder, typisk en reel periode og en rent imaginær periode.

5.6. Mere om omløbstal.

Vi skal nu udtrykke argumentvariation og omløbstal ved et kurveintegral, når kurven er en vej altså stykkevis C^1.

Sætning 5.23. *Lad* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *være en vej, der ikke passerer* 0. *Så er*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \log\left|\frac{\gamma(b)}{\gamma(a)}\right| + i \operatorname{argvar}(\gamma)\,. \tag{1}$$

Hvis γ *er lukket er omløbstallet omkring* 0 *givet ved*

$$\omega(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}\,. \tag{2}$$

Bevis. Vi udnytter samme ideer som i Lemma 5.9 og Sætning 5.10, og vælger en inddeling $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ og et $r > 0$ så (1) og (2) fra fliselemmaet gælder med $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Lad θ være en kontinuert argumentfunktion langs γ. For hver af cirkelskiverne $K(\gamma(t_k), r)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ findes kontinuerte argumentfunktioner $A_k = \operatorname{Arg}_{\alpha_k}$ for passende $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ifølge Sætning 5.14 er

$$l_k(z) = \log|z| + i\,A_k(z)$$

en stamfunktion til $1/z$ i $K(\gamma(t_k), r)$, hvorved

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z} &= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{\gamma|[t_k,t_{k+1}]} \frac{dz}{z} = \sum_{k=0}^{n-1} l_k(\gamma(t_{k+1})) - l_k(\gamma(t_k)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\log|\gamma(t_{k+1})| - \log|\gamma(t_k)|) + i\sum_{k=0}^{n-1} (A_k(\gamma(t_{k+1})) - A_k(\gamma(t_k))) \\ &= \log|\gamma(b)| - \log|\gamma(a)| + i\sum_{k=0}^{n-1} \theta(t_{k+1}) - \theta(t_k)\,.\end{aligned}$$

Her har vi brugt, at leddene teleskoperer[5] i den første sum. I den anden sum er udnyttet, at $\theta(t)$ og $A_k(\gamma(t))$ begge er kontinuerte argumentfunktioner langs med $\gamma|[t_k, t_{k+1}]$, så denne delkurves argumentvariation er lig med

$$A_k(\gamma(t_{k+1})) - A_k(\gamma(t_k)) = \theta(t_{k+1}) - \theta(t_k)\,.$$

Også den sidste sum teleskoperer og giver $\theta(b) - \theta(a)$, altså

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \log\left|\frac{\gamma(b)}{\gamma(a)}\right| + i\,\mathrm{argvar}\,(\gamma)\,.$$

Hvis γ er lukket er $\gamma(a) = \gamma(b)$ og (1) reduceres til (2). □

Vi skal nu se hvordan vi geometrisk kan udregne omløbstallet ved at følge vejen med en finger.

Vi vælger en orienteret halvlinje L startende i 0. Ved at følge kurven med fingeren noterer vi de endeligt mange punkter $A_0, \dots, A_{n-1}$, hvor kurven skærer L. (Vi skal kun betragte halvlinjer L, der skærer vejen i et endeligt antal punkter, og vi undtager også den situation, at vejen tangerer halvlinjen).

Til hvert af punkterne A_k, $k = 0, \dots, n-1$, knytter vi en *signatur* $\mathrm{sign}\,(A_k)$, som er 1, hvis A_k passeres i positiv omløbsretning, og -1 hvis A_k passeres i negativ omløbsretning. Der gælder følgende:

Sætning 5.24. *Omløbstallet omkring* 0 *er givet som*

$$\omega(\gamma, 0) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{sign}\,(A_k)\,, \tag{3}$$

[5] Man bruger dette udtryk om leddene i en sum af formen $\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$, formentlig inspireret af, at en søkikkert kan være trukket ud eller klappet sammen.

altså antallet af gange γ krydser L i positiv omløbsretning minus antallet af gange γ krydser L i negativ omløbsretning.

Bevis. Vi kan vælge en parameterfremstilling $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ for vejen γ, så delepunkterne $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ svarer til punkterne $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_0$, altså $\varphi(t_0) = \varphi(t_n) = A_0$, $\varphi(t_k) = A_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Sæt $A_n = A_0$. Lad $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuert argumentfunktion langs γ. Der gælder nu

$$\theta(t_k) - \theta(t_{k-1}) = \pi(\mathrm{sign}\,(A_k) + \mathrm{sign}\,(A_{k-1}))\,, \quad k = 1, \ldots, n\,, \tag{4}$$

som man ser ved at betragte de fire muligheder:

(i) $\mathrm{sign}\,(A_{k-1}) = \mathrm{sign}\,(A_k) = 1$.

Vejen krydser altså L i positiv omløbsretning til tidspunktet t_{k-1}, og frem til tidspunktet t_k forløber vejen i $\mathbb{C} \setminus L$ for til tidspunktet t_k at krydse L igen i positiv omløbsretning. Idet området $\mathbb{C} \setminus L$ har den kontinuerte argumentfunktion $\mathrm{Arg}_\alpha(z)$, hvis $L = \{\mathrm{r}e^{i\alpha} \mid r \geq 0\}$, er det klart, at

$$\theta(t_k) - \theta(t_{k-1}) = 2\pi\,,$$

så begge sider af (4) er lig med 2π.

(ii) $\mathrm{sign}\,(A_{k-1}) = \mathrm{sign}\,(A_k) = -1$.

Vejen krydser altså L i negativ omløbsretning til tidspunkterne t_{k-1} og t_k, og derimellem forløber vejen i $\mathbb{C} \setminus L$. Argumentvariationen over $[t_{k-1}, t_k]$ må så være -2π, og dermed er begge sider af (4) lig med -2π.

(iii) $\mathrm{sign}\,(A_{k-1}) = 1$, $\mathrm{sign}\,(A_k) = -1$.

Vejen krydser altså L i positiv omløbsretning til tidspunktet t_{k-1}, men i negativ omløbsretning til tidspunktet t_k, og derimellem forløber vejen i $\mathbb{C} \setminus L$. Argumentvariationen over $[t_{k-1}, t_k]$ må så være 0, og begge sider i (4) er lig med 0.

(iv) $\mathrm{sign}\,(A_{k-1}) = -1$, $\mathrm{sign}\,(A_k) = 1$.

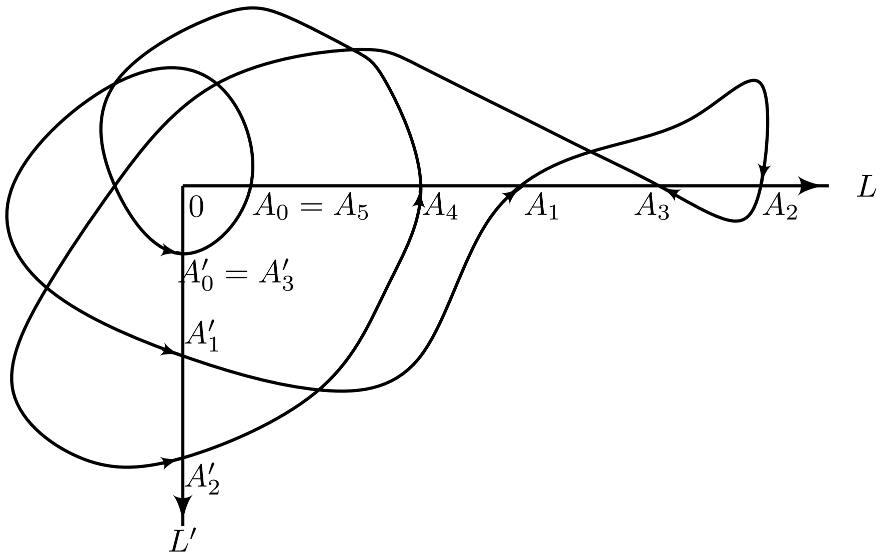
Tilfældet er analogt til (iii).

Vi kan nu afslutte beviset ved at bemærke, at

$$\begin{aligned}
2\pi\omega(\gamma, 0) &= \mathrm{argvar}\,(\gamma) = \theta(b) - \theta(a) = \sum_{k=1}^{n} (\theta(t_k) - \theta(t_{k-1})) \\
&= \pi \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{sign}\,(A_k) + \mathrm{sign}\,(A_{k-1})) = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{sign}\,(A_k)\,.
\end{aligned}$$

□

På figuren nedenfor er tegnet to forskellige halvlinjer L og L'. Den første har skæringspunkterne $A_0, \ldots, A_4$ med signaturerne $1, 1, -1, 1, 1$. Den anden har skæringspunkterne A'_0, A'_1, A'_2 med signaturerne $1, 1, 1$. Begge optællinger giver omløbstallet 3.



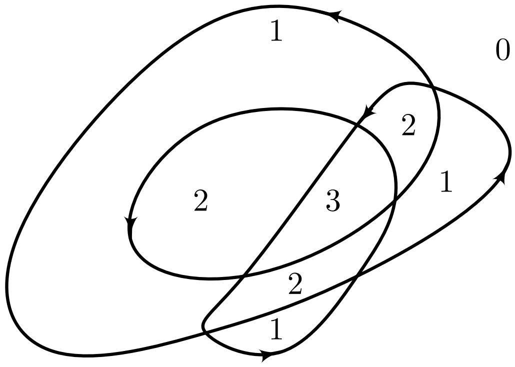
Lad nu $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ være en vilkårlig lukket kontinuert kurve. Mængden $\gamma^* = \gamma([a, b])$ af kurvepunkter er afsluttet og begrænset ifølge en hovedsætning i topologi, jf. Appendix, Sætning A.3. Derfor er $G = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ en åben mængde, og den er foreningsmængde af højst tælleligt mange parvis disjunkte områder, de såkaldte komponenter, jf. opg. 5.1. For $z \in G$ defineres

$$\omega(\gamma, z) = \omega(\gamma - z, 0)\,,$$

idet $\gamma - z : [a, b] \to \mathbb{C}$ er kurven $t \mapsto \gamma(t) - z$ som ikke passerer 0. Det hele tal $\omega(\gamma, z)$ kaldes *kurvens omløbstal omkring* z. Omløbstallet definerer en afbildning $\omega(\gamma, \cdot) : G \to \mathbb{Z}$.

Hvis $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ er $\gamma(t) = e^{it}$, har vi $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ og $G = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ består af to områder $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$, og vi har $\omega(\gamma, z) = 1$ for $z \in D$, $\omega(\gamma, z) = 0$ for $z \in \Omega$.

På den efterfølgende figur er omløbstallet markeret i de 8 områder, som G består af. Omløbstallet omkring z udregnes som ovenfor ved at betragte en halvlinje udfra z og markere kurvens skæringspunkter med halvlinjen.



For en lukket vej γ gælder

$$\omega(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}, \quad z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* . \tag{5}$$

Hvis $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$ er en parameterfremstilling har vi nemlig

$$\begin{aligned}\omega(\gamma, z_0) = \omega(\gamma - z_0, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - z_0} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} .\end{aligned}$$

Sætning 5.25. *Lad $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ være en lukket kontinuert kurve. Omløbstallet $\omega(\gamma, \cdot) : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{Z}$ er konstant i hver af komponenterne af $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

Bevis. Vi gennemfører kun beviset, når γ er en vej. For $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ vælges $r > 0$ så $K(z_0, 2r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. For $z_1 \in K(z_0, r)$ gælder $|z_1 - \gamma(t)| \geq r$ når $t \in [a, b]$, hvoraf

$$\begin{aligned}\omega(\gamma, z_1) - \omega(\gamma, z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_0} \right) dz \\ &= \frac{z_1 - z_0}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_0)} .\end{aligned}$$

Af estimationslemmaet 2.8 fås

$$|\omega(\gamma, z_1) - \omega(\gamma, z_0)| \leq \frac{|z_1 - z_0|}{2\pi r^2} L(\gamma) ,$$

som viser, at $\omega(\gamma, \cdot)$ er kontinuert i punktet z_0.

Lad nu G være en komponent af $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Da G er kurvesammenhængende følger af Sætning 5.7, at $\omega(\gamma, z)$ er konstant for $z \in G$. $\square$

Opgaver til §5

5.1. Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde og definer en relation i G ved

$$\forall P, Q \in G : P \sim Q \iff P \text{ kan forbindes med } Q \text{ med en trappelinje fra } G$$

Vis, at $\sim$ er en ækvivalensrelation, dvs. har egenskaberne

$$\text{(i) } P \sim P \quad \text{(ii) } P \sim Q \implies Q \sim P \quad \text{(iii) } P \sim Q \wedge Q \sim R \implies P \sim R$$

For $P \in G$ sæt $[P] = \{Q \in G \mid P \sim Q\}$.

Vis, at $[P]$ er et område for hvert $P \in G$.
Vis, at hvis $[P_1] \cap [P_2] \neq \varnothing$, så gælder $[P_1] = [P_2]$.

Mængderne $[P]$, $P \in G$ kaldes G's *komponenter*. Giv eksempler på åbne mængder $G \subseteq \mathbb{C}$, hvor antallet af komponenter er $n = 1, 2, \ldots, \infty$.

Vis, at antallet af komponenter er tælleligt.

5.2. Idet summen af to delmængder $A, B \subseteq \mathbb{C}$ defineres som

$$A + B = \{a + b \mid a \in A\,,\, b \in B\}\,,$$

skal man vise, at der for $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gælder

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2\,,$$
$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2\,.$$

Vis, at hvis $\operatorname{Re} z_1$ og $\operatorname{Re} z_2 > 0$, så er

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2\,,$$
$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2\,,$$

og vis ved eksempler, at de to sidste ligninger ikke kan opretholdes for vilkårlige $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5.3. Vis, at $\log(x^2 + y^2)$ er harmonisk i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, og at $\operatorname{Arctan} \dfrac{y}{x}$ er harmonisk i $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\,\}$.

5.4. Vis, at $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ikke har nogen kontinuert argumentfunktion.

Vink: Antag at $\theta : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ er en kontinuert argumentfunktion med $\theta(1) = 0$. Vis, at $\operatorname{Arg}(z) = \theta(z)$ for $z \in \mathbb{T} \cap \mathbb{C}_\pi$. Brug dette til at finde grænseværdien af $\theta(z)$ når $z = x + iy \in \mathbb{T}$ nærmer sig -1 via $y > 0$ og via $y < 0$.

5.5. Lad $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\delta : [b,c] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være kontinuerte kurver med $\gamma(b) = \delta(b)$, så $\gamma \cup \delta$ har mening. Vis, at

$$\operatorname{argvar}(\gamma \cup \delta) = \operatorname{argvar}(\gamma) + \operatorname{argvar}(\delta)\,.$$

5.6. Beregn $\operatorname{Arg} z$ og $\operatorname{Log}\, z$ for følgende $z \in \mathbb{C}$:

$$1+i,\ -\sqrt{3}+i\,,\ (\sqrt{3}+i)^{2001}\,.$$

5.7. Lad $\gamma_a : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være givet ved $\gamma_a(t) = e^{ita}$, hvor $a \in \mathbb{R}$. Find $\operatorname{argvar}(\gamma_a)$. Vis, at γ_a er lukket netop hvis $a = 2\pi p$, $p \in \mathbb{Z}$ og vis, at $\omega(\gamma_a, 0) = p$ når $a = 2\pi p$, $p \in \mathbb{Z}$.

5.8. Find billedet af den opskårne plan $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \,\}$ under den holomorfe gren af $z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}\, z)$ når $0 < \alpha < 1$.

Vis, at $\operatorname{Arg}(z^\alpha) = \alpha \operatorname{Arg}(z), |z^\alpha| = |z|^\alpha$ for $z \in \mathbb{C}_\pi$.

5.9. Lad G være åben, og antag at $f \in \mathcal{H}(G)$ er nulpunktsfri. Vis, at $\log|f|$ er en harmonisk funktion i G.

5.10. Gør rede for, at $\sqrt{z} = z^{1/2}$ har to værdier for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, og at $\cos\sqrt{z}$ fastlægger en afbildning af $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$. Gør rede for, at denne afbildning er holomorf, og angiv dens potensrække med centrum 0.

5.11. For $n \geq 2$, $a \in \mathbb{C}$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ betragtes halvlinjerne

$$L_k = \left\{ a + re^{i(\alpha + \frac{k2\pi}{n})} \mid r \geq 0 \right\}\,, \quad k = 0, 1, \dots, n-1\,,$$

som opdeler $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ i n vinkelrum

$$V_k = \left\{ z = a + re^{i\theta} \mid r > 0\,,\ \alpha + 2\pi\frac{k-1}{n} < \theta < \alpha + \frac{2\pi k}{n} \right\}\,,$$

$k = 1, \dots, n$. Skitser disse halvlinjer og mængder. Vis, at $z \mapsto (z-a)^n$ afbilder hvert V_k bijektivt på $\mathbb{C}_{n\alpha}$ og find den tilhørende inverse funktion.

5.12. Lad $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n, \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ være to potensrækker, som begge antages konvergente for $|z| < \rho$.

1°. Gang rækkerne sammen ved at gange hvert led i den ene med hvert led i den anden og saml leddene, der har faktoren $z^n, n = 0, 1, 2, \dots$. Vis, at man derved får rækken

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)z + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)z^2 + \cdots\,,$$

som også kan skrives

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ hvor } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},\ n = 0, 1, \dots .$$

Man siger, at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ er fremkommet ved *Cauchy multiplikation* af de givne potensrækker.

2°. Bevis, at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ også er konvergent for $|z| < \rho$, og at der for sådanne z gælder

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n).$$

Vink til 2°: Gør rede for, at funktionen $f(z) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n)$ er holomorf i i $K(0, \rho)$, og vis under brug af opg. 1.16, at

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

3°. Anvend Cauchy multiplikation af to eksemplarer af binomialrækken ($\alpha \in \mathbb{C}$)

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n,\ |z| < 1,$$

og vis derved formlen

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k},$$

hvor $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, n = 0, 1, \dots$.

5.13. Lad γ være en lukket vej i $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq r\}$. Vis, at $\omega(\gamma, z)$ er konstant i $K(0, r)$.

5.14. Verificer, at omløbstallet er som anført på figuren side 5.20.

5.15. Lad G være en åben kurvesammenhængende delmængde af $\mathbb{C}$ og lad $P \subset G$ være diskret i G.

1°. Vis, at for en kontinuert kurve $\gamma : [a, b] \to G$ er $\gamma^* \cap P$ en endelig mængde.

2°. Vis, at hvis L er en trappelinje i G med endepunkter $a, b \in G \setminus P$ og for hvilket $L \cap P = \{p_1, \dots, p_n\}$, så findes en kontinuert kurve fra a til b i $G \setminus P$ og som består af linjestykker og cirkelbuer.

3°. Vis, at $G \setminus P$ er kurvesammenhængende.

5.24

§6. Nulpunkter og isolerede singulariteter

En reel (vilkårligt ofte) differentiabel funktion på den reelle akse kan være 0 på et helt interval uden at være identisk nul. Et klassisk eksempel skyldes Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

For holomorfe funktioner er noget sådant udelukket, idet ethvert nulpunkt a nødvendigvis er isoleret i den forstand, at i en tilpas lille cirkelskive $K(a, r)$ er der ikke andre nulpunkter. Dette leder til identitetssætningen for holomorfe funktioner: Hvis to holomorfe funktioner i et område stemmer overens på en mængde med et fortætningspunkt i området, så er de ens.

Hvis man betragter kvotienter af holomorfe funktioner, vil nævnernulpunkter give anledning til isolerede singulariteter. Vi giver en behandling af isolerede singulariteter i almindelighed og klassificerer dem i 3 typer: hævelige singulariteter, poler og væsentlige singulariteter. Typen kan aflæses af den Laurentrække, som erstatter Taylorrækken i omegnen af en isoleret singularitet. Funktioner, der ikke har væsentlige singulariteter, kaldes meromorfe. Mange resultater for holomorfe funktioner kan generaliseres til meromorfe funktioner. Fra et algebraisk synspunkt er mængden $\mathcal{M}(G)$ af meromorfe funktioner brøklegemet for integritetsområdet $\mathcal{H}(G)$ af holomorfe funktioner, altså en parallel til $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{Z}$.

6.1. Nulpunkter.

Hvis et polynomum af grad ≥ 1 har et nulpunkt (= en rod) a, altså hvis $p(a) = 0$, så kan polynomiet faktoriseres $p(z) = (z-a)^n q(z)$ hvor q er et polynomium med $q(a) \neq 0$ og $n \geq 1$ angiver nulpunktets multiplicitet eller orden. Vi vil nu udvide dette elementære resultat til holomorfe funktioner.

Sætning 6.1. *Lad f være holomorf i et område G og antag, at f ikke er identisk 0. Hvis $a \in G$ er et nulpunkt for f, altså hvis $f(a) = 0$, så findes et entydigt bestemt naturligt tal n og en entydigt bestemt holomorf funktion $g \in \mathcal{H}(G)$ med $g(a) \neq 0$ så der gælder*

$$f(z) = (z-a)^n g(z) \quad \text{for } z \in G. \tag{1}$$

Tallet n kaldes nulpunktets multiplicitet eller orden.

Bevis. Vi viser først eksistensen af faktoriseringen (1). Lad $K(a, \rho)$ være den største åbne cirkelskive med centrum a indeholdt i G. Ifølge Sætning 4.8 gælder

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k, \quad z \in K(a, \rho). \tag{2}$$

Antages, at $f^{(k)}(a) = 0$ for alle $k \geq 0$ har vi $f(z) = 0$ for alle $z \in K(a, \rho)$, og vi vil så indse, at f må være identisk 0 i strid med antagelsen.

Til et vilkårligt $z_0 \in G$ findes en kontinuert kurve $\gamma : [0,1] \to G$ som forbinder $\gamma(0) = a$ med $\gamma(1) = z_0$. Ifølge fliselemmaet 5.2 findes endeligt mange delepunkter $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ og $r > 0$ så (1) og (2) fra fliselemmaet gælder. Da specielt $K(\gamma(0), r) = K(a, r) \subseteq G$ må $r \leq \rho$, altså $K(a, r) \subseteq K(a, \rho)$. Da $\gamma(t_1) \in K(a, r)$ og f er identisk 0 i $K(a, \rho)$, må $f^{(k)}(\gamma(t_1)) = 0$ for alle $k \geq 0$. Af Sætning 4.8 kan vi så slutte, at f også er identisk 0 i $K(\gamma(t_1), r)$. Vi slutter nu successivt, at f er identisk 0 i alle cirkelskiverne $K(\gamma(t_k), r)$ og specielt $f(z_0) = 0$.

Da vores antagelse leder til en modstrid findes et mindste $n \geq 1$ så $f^{(n)}(a) \neq 0$. Dermed er $f^{(k)}(a) = 0$ for $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Af (2) fås

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = (z-a)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+n)}(a)}{(k+n)!}(z-a)^k \tag{3}$$

for $z \in K(a, \rho) \subseteq G$. Funktionen

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-a)^n} & \text{for} \quad z \in G \setminus \{a\}, \\[2ex] \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k+n)}(a)}{(k+n)!}(z-a)^k & \text{for} \quad z \in K(a, \rho), \end{cases}$$

er veldefineret på grund af (3) og holomorf i G (overvej dette), og den opfylder

$$f(z) = (z-a)^n g(z) \text{ for } z \in G, \quad g(a) = f^{(n)}(a)/n! \neq 0\,,$$

hvilket afslutter eksistensbeviset for faktoriseringen.

For at bevise entydigheden af faktoriseringen antages, at

$$f(z) = (z-a)^{n_1} g_1(z) = (z-a)^{n_2} g_2(z)\,, \quad z \in G \tag{4}$$

med $g_1(a) \neq 0$, $g_2(a) \neq 0$. Af symmetrigrunde kan vi antage $n_1 \geq n_2$. Af (4) fås

$$(z-a)^{n_1 - n_2} g_1(z) = g_2(z)\,, \quad z \in G \setminus \{a\}\,,$$

men af kontinuitetsgrunde gælder denne ligning også for $z = a$. Da $g_2(a) \neq 0$ må $n_1 = n_2$, og $g_1(z) = g_2(z)$ for $z \in G \setminus \{a\}$. Af kontinuitetsgrunde sluttes $g_1(a) = g_2(a)$, og entydigheden er vist. $\square$

Sætningen viser, at ordenen af et nulpunkt a for $f \not\equiv 0$ er det største n, for hvilket der gælder en faktorisering $f(z) = (z-a)^n g(z)$ med $g \in \mathcal{H}(G)$. Hvis $f(a) \neq 0$, kan det være bekvemt at sige, at f har et nulpunkt af orden 0 i a. Ordenen af nulpunktet a for f betegnes $\operatorname{ord}(f, a)$. Et nulpunkt af orden 1 kaldes også et *simpelt* nulpunkt og et nulpunkt af orden 2 kaldes et *dobbelt* nulpunkt.

Af ovenstående bevis for Sætning 6.1 ses, at der gælder følgende:

Korollar 6.2. *Lad f være holomorf i et område G og antag, at f ikke er identisk* 0. *For et nulpunkt $a \in G$ er ordenen n karakteriseret ved*

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0\,, \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,.$$

Sætning 6.3. *Lad f være holomorf i et område G og antag, at f ikke er identisk* 0.

Ethvert nulpunkt a for f er isoleret i den forstand, at der findes $r > 0$ så $f(z) \neq 0$ for $z \in K'(a, r)$.

Mængden $Z(f)$ af nulpunkter for f er diskret i G, specielt er $Z(f)$ tællelig.

Bevis. Lad $f(z) = (z-a)^n g(z)$ være en faktorisering med $g \in \mathcal{H}(G)$ så $g(a) \neq 0$. Da g er kontinuert findes $r_a > 0$ så $|g(z) - g(a)| < |g(a)|$ for $z \in K(a, r_a) \subseteq G$, men så må $g(z) \neq 0$ for $z \in K(a, r_a)$ og følgelig $f(z) \neq 0$ for $z \in K'(a, r_a)$.

Vi skal vise, at $Z(f)$ ikke har nogen fortætningspunkter i G. Vi har lige vist, at punkterne $a \in Z(f)$ ikke er fortætningspunkter for $Z(f)$.

Antages, at $z_0 \in G \backslash Z(f)$ er et fortætningspunkt for $Z(f)$, så findes en følge (a_n) fra $Z(f)$ så $a_n \to z_0$, men så må $f(z_0) = 0$, da f er kontinuert. Dette viser $z_0 \in Z(f)$, hvilket er en modstrid, og dermed er antagelsen forkert. Altså er $Z(f)$ er diskret i G og specielt tællelig ifølge Sætning 5.6. □

Man kan omvendt vise, at hvis $P \subseteq G$ er en vilkårlig mængde, som er diskret i G, så findes $f \in \mathcal{H}(G)$ med $Z(f) = P$. Man kan endda vælge f så nulpunkterne har forelagte vilkårlige multipliciteter. Resultatet hænger sammen med en generel teori for faktorisering af hele funktioner.

Eksempel 6.4. Eksponentialfunktionen er nulpunktsfri i $\mathbb{C}$. Funktionen $\sin z$ har i $\mathbb{C}$ de numerabelt mange nulpunkter $z = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. Funktionen $\sin(1/z)$ er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, og har nulpunkterne $(p\pi)^{-1}$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, som har 0 som fortætningspunkt, men indenfor $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ er nulpunktsmængden uden fortætningspunkt.

Analogt gælder, at for $\lambda \in \mathbb{C}$ er mængden $\{\, z \in G \mid f(z) = \lambda \,\}$ enten $\varnothing$, G eller tællelig bestående af isolerede punkter. Dette ses ved at anvende nulpunktsresultatet på den holomorfe funktion $f - \lambda$. Det er væsentligt, at G er kurvesammenhængende. Hvis $G = K(0,1) \cup K(2,1)$ kan vi definere $f \in \mathcal{H}(G)$ ved at sætte $f = 0$ i den ene cirkelskive, og $f = 1$ i den anden.

Sætning 6.5. (Identitetssætningen for holomorfe funktioner). *Hvis to holomorfe funktioner f, g i et område G stemmer overens i en delmængde $A \subseteq G$, som har et fortætningspunkt i G, da er $f(z) = g(z)$ for alle $z \in G$.*

Bevis. Nulpunktsmængden $Z(f-g)$ er altså ikke diskret i G, men så er $f-g$ identisk lig med 0. $\square$

Sætningen anvendes hyppigt ved at det f.eks. vides, at $\mathbb{R}\cap G \neq \emptyset$, og at $f(x) = g(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}\cap G$. Idet $\mathbb{R}\cap G$ må indeholde et ikke udartet interval, kan man slutte at $f = g$.

Eksempel 6.6. Vi kan anvende sætningen til at vise, at alle de sædvanlige trigonometriske formler også gælder for komplekse tal, for så vidt som de indgående udtryk er holomorfe. F.eks. er $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ for alle $z \in \mathbb{C}$. Venstre og højre side er nemlig holomorfe i $\mathbb{C}$ og stemmer overens for reelle z.

Lad $f, g \in \mathcal{H}(G)$ og antag, at $f(a) = g(a) = 0$ for et $a \in G$. Vi kan ikke direkte bestemme

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)},$$

idet vi formelt får 0/0. L'Hospitals regel fra reel analyse får en særlig simpel form, når det drejer sig om holomorfe funktioner:

Sætning 6.7. (L'Hospitals regel). *Antag at $f, g \in \mathcal{H}(G)$ ikke er identisk 0 i en omegn af $a \in G$.*

Grænseværdien

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)}$$

eksisterer hvis og kun hvis $\operatorname{ord}(f,a) \geq \operatorname{ord}(g,a)$.

I bekræftende fald gælder

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(q)}(a)}{g^{(q)}(a)},$$

hvor $q = \operatorname{ord}(g,a)$ *og dermed* $g^{(q)}(a) \neq 0$.

Bevis. Lad $p = \operatorname{ord}(f,a)$, $q = \operatorname{ord}(g,a)$ og lad $f_1, g_1 \in \mathcal{H}(G)$ med $f_1(a) \neq 0$, $g_1(a) \neq 0$, så

$$f(z) = (z-a)^p f_1(z), \quad g(z) = (z-a)^q g_1(z).$$

Hvis $p \geq q$ gælder

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} (z-a)^{p-q} \frac{f_1(z)}{g_1(z)} = \begin{cases} 0, & p > q \\ \frac{f_1(a)}{g_1(a)}, & p = q, \end{cases}$$

men dette udtryk er netop $f^{(q)}(a) \,/\, g^{(q)}(a)$ idet $g^{(q)}(a) = q!g_1(a)$,

$$f^{(q)}(a) = \begin{cases} 0\,, & p > q \\ q!f_1(a)\,, & p = q\,. \end{cases}$$

Hvis derimod $p < q$ gælder

$$(z-a)^{q-p}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)} \longrightarrow \frac{f_1(a)}{g_1(a)} \neq 0\,.$$

Dermed kan $f(z)/g(z)$ ikke have en grænseværdi for $z \to a$ for så ville venstre side gå mod 0 for $z \to a$, da $(z-a)^{q-p} \to 0$. □

6.2. Isolerede singulariteter.

Definition 6.8. Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være et område og lad $a \in G$. Hvis $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$, kaldes a en *isoleret singularitet* for f. Hvis f kan tillægges en kompleks værdi i a så f bliver holomorf i G, siges singulariteten at være *hævelig*. Den værdi f skal tillægges i a må nødvendigvis være

$$\lim_{z \to a} f(z)\,,$$

såfremt der er en hævelig singularitet i $z = a$.

Hvis $f \in \mathcal{H}(G)$ og $f \not\equiv 0$, så er den reciprokke funktion $1/f$ holomorf i $G \setminus Z(f)$, og alle punkter $a \in Z(f)$ er isolerede singulariteter.

Sætning 6.9. *Antag, at $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$, og at f er begrænset i $K'(a,r)$ for et $r > 0$. Så har f en hævelig singularitet i a.*

Bevis. Vi definerer $h(a) = 0$ og $h(z) = (z-a)^2 f(z)$ for $z \in G \setminus \{a\}$. Så er h klart holomorf i $G \setminus \{a\}$, og for $z \neq a$ har vi

$$\frac{h(z) - h(a)}{z - a} = (z-a)f(z)\,,$$

som har grænseværdien 0 for $z \to a$, idet f er antaget begrænset i en udprikket cirkelskive omkring a.

Dette viser, at $h \in \mathcal{H}(G)$ og $h'(a) = 0$, så ifølge Sætning 6.1 og Korollar 6.2 findes $g \in \mathcal{H}(G)$, så $h(z) = (z-a)^2 g(z)$ for $z \in G$. Dermed er g en holomorf udvidelse af f til G, hvilket viser, at singulariteten i a er hævelig. □

F.eks. har $\sin z/z$ en hævelig singularitet for $z = 0$, idet $\lim_{z\to 0} \sin z/z = 1$.

Hvis f i punktet a har en isoleret singularitet, der ikke er hævelig, så er billedmængden $f(K'(a,r))$ altså ubegrænset uanset hvor lille r er. Specielt kan $f(z)$ ikke have nogen grænseværdi for $z \to a$. Det er da nærliggende at undersøge, om $(z-a)^m f(z)$ har en hævelig singularitet for $m \in \mathbb{N}$ passende stor. I så fald kaldes a en pol.

Definition 6.10. En isoleret singularitet a kaldes en *pol af orden* $m \in \mathbb{N}$ for f, hvis $(z-a)^m f(z)$ har en grænseværdi for $z \to a$, og
$$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) \neq 0\,.$$
En pol af orden 1 kaldes en *simpel pol*.

Eksempelvis har funktionen $f(z) = c/(z-a)^m$, hvor $c \neq 0, m = 1, 2, \ldots,$ en pol af orden m for $z = a$. Udtrykket $(z-a)^m f(z)$ er nemlig konstant lig med c og har derfor specielt grænseværdien c for $z \to a$. Vi studerer poler nøjere i de følgende afsnit.

Ordenen af en pol a er entydigt fastlagt, thi hvis
$$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = c \neq 0,$$
så vil $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) = 0$ for $k > m$, medens $(z-a)^k f(z)$ ikke har nogen grænseværdi for $z \to a$, når $k < m$. Bemærk også, at $|f(z)| \to \infty$ for $z \to a$, idet $|z-a|^m |f(z)| \to |c|$ og $m \geq 1$.

Antag nu, at $f \in \mathcal{H}(G\setminus\{a\})$ har en pol af orden m i punktet a. Funktionen
$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^m f(z)\,, & z \in G \setminus \{a\}, \\ \lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)\,, & z = a, \end{cases}$$
er da holomorf i G, og har en potensrække
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$
i den største åbne cirkelskive $K(a,\rho) \subseteq G$. Dermed gælder for $z \in K'(a,\rho)$,
$$f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^m} + \frac{a_1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k}(z-a)^k\,. \qquad (1)$$
Funktionen
$$p\left(\frac{1}{z-a}\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{m-k}}{(z-a)^k}\,, \quad \text{hvor } p(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{m-k} z^k\,,$$
kaldes *den principale del* af f i a.

Når man fra f trækker den principale del, får man en holomorf funktion med en hævelig singularitet i a. Singulariteten er altså "koncentreret" i den principale del.

En isoleret singularitet, der hverken er hævelig eller en pol, kaldes en *væsentlig* eller *essentiel singularitet*. I omegnen af en sådan singularitet, er f's opførsel meget kompliceret. Der gælder *Picards store sætning*: For ethvert $r > 0$ så $K(a,r) \subseteq G$ er billedmængden $f(K'(a,r))$ enten hele $\mathbb{C}$, eller $\mathbb{C}$ på nær et punkt, jf. opg. 6.16.

Vi nøjes her med at vise et svagere, men alligevel overraskende resultat:

Sætning 6.11. (Casorati-Weierstrass' sætning). *Hvis $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ har en væsentlig singularitet i a, så er $f(K'(a,r))$ overalt tæt i $\mathbb{C}$,*[6] *for ethvert $r > 0$ for hvilket $K(a,r) \subseteq G$.*

Bevis. Hvis påstanden ikke er rigtig, kan vi finde $r > 0$ og en cirkelskive $K(c,\varepsilon) \subseteq \mathbb{C}$, så at
$$K(c,\varepsilon) \cap f(K'(a,r)) = \varnothing,$$
altså $|f(z) - c| \geq \varepsilon$ for $z \in K'(a,r)$. Dermed er $g(z) = 1/(f(z) - c)$ holomorf i $K'(a,r)$, og begrænset ved $1/\varepsilon$. Ifølge Sætning 6.9 har g en hævelig singularitet i a, så g kan tillægges en værdi $g(a)$ i a, og dermed blive holomorf i $K(a,r)$ og $g(z) \neq 0$ for $z \in K'(a,r)$.

Hvis $g(a) \neq 0$ har vi $\lim_{z\to a} f(z) = c + 1/g(a)$, altså har f en hævelig singularitet i a i strid med antagelsen.

Hvis $g(a) = 0$, har g et nulpunkt af orden $m \geq 1$ i a, og ifølge Sætning 6.1 findes $g_1 \in \mathcal{H}(K(a,r))$ så

$$g(z) = (z-a)^m g_1(z)\,, \quad g_1(a) \neq 0\,.$$

Af udtrykket $f(z) = c + 1/g(z)$ finder vi

$$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = \lim_{z\to a}\left((z-a)^m c + \frac{1}{g_1(z)}\right) = \frac{1}{g_1(a)} \neq 0\,,$$

hvilket betyder, at f har en pol af orden m i a, men dette er også i strid med antagelsen. □

6.3. Rationale funktioner.

Ved en *rational funktion* af en kompleks variabel forstås et udtryk af formen $p(z)/q(z)$, hvor $p, q \in \mathbb{C}[z]$, $q \neq 0$. Som ved sædvanlige brøker regnes p_1/q_1 og p_2/q_2 som samme funktion hvis $p_1q_2 = q_1p_2$. Hvis der er fælles nulpunkter $z = a$ i p og q kan $(z-a)$ i en passende potens forkortes væk. I teoretiske undersøgelser kan vi altså antage, at de to polynomier p, q ikke har fælles nulpunkter.

Funktionen
$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$
er dermed holomorf i $\mathbb{C} \setminus Z(q)$ og $Z(f) = Z(p)$. Lad q's nulpunkter være $a_1, \ldots, a_k$ med multipliciteter $m_1, \ldots, m_k$. Så har vi en fremstilling

$$q(z) = c(z-a_1)^{m_1} \cdots (z-a_k)^{m_k}\,,$$

[6]En mængde $A \subseteq \mathbb{C}$ kaldes overalt tæt hvis $\overline{A} = \mathbb{C}$, altså hvis $K(c,r) \cap A \neq \varnothing$ for alle $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

og man ser umiddelbart, at f har de isolerede singulariteter $a_1, \dots, a_k$ som er poler af orden $m_1, \dots, m_k$. Vi har nemlig

$$(z-a_1)^{m_1} f(z) = \frac{p(z)}{c(z-a_2)^{m_2} \cdots (z-a_k)^{m_k}}$$
$$\longrightarrow \frac{p(a_1)}{c(a_1-a_2)^{m_2} \cdots (a_1-a_k)^{m_k}} \neq 0$$

for $z \to a_1$, og tilsvarende for $a_2, \dots, a_k$.

Mængden af rationale funktioner betegnes $\mathbb{C}(z)$ i algebra. Det er et kommutativt legeme, brøklegemet for integritetsområdet[7] $\mathbb{C}[z]$. Ethvert element p/q fra $\mathbb{C}(z) \setminus \{0\}$ har nemlig et reciprokt element q/p.

Hvis $\operatorname{grad}(p) \geq \operatorname{grad}(q)$ for den rationale funktion $f = p/q$ kan vi benytte polynomiers division (jf. Sætning 4.22): $p = q_1 q + r$ med $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(q)$, hvoraf

$$f(z) = q_1(z) + \frac{r(z)}{q(z)}.$$

Vi ser også, at r og q ikke har nogen fælles nulpunkter, for sådanne ville også være nulpunkter for p.

Sætning 6.12. (Dekomponering). *Lad $r, q \in \mathbb{C}[z]$ være uden fælles nulpunkter, $0 \leq \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(q)$, og lad $a_1, \dots, a_k$ være nulpunkterne for q med multipliciteter $m_1, \dots, m_k$.*

Der findes entydigt bestemte konstanter $c_{j,\ell} \in \mathbb{C}$ så

$$\frac{r(z)}{q(z)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{m_j} \frac{c_{j,\ell}}{(z-a_j)^\ell}. \tag{1}$$

Formlen udtrykker, at den rationale funktion er sum af sine principale dele.

Bevis. Fremstillingen er entydig. Hvis $r > 0$ er så lille, at $K(a_j, r)$ ikke indeholder nogen af de øvrige nulpunkter, kan (1) skrives

$$\frac{r(z)}{q(z)} = \varphi(z) + \sum_{\ell=1}^{m_j} \frac{c_{j,\ell}}{(z-a_j)^\ell}$$

hvor $\varphi \in \mathcal{H}(K(a_j, r))$. Ganges med $(z-a_j)^{m_j}$ fås

$$\frac{r(z)}{q(z)}(z-a_j)^{m_j} = \varphi(z)(z-a_j)^{m_j} + \sum_{\ell=1}^{m_j} c_{j,\ell}(z-a_j)^{m_j-\ell}. \tag{2}$$

[7] En kommutativ ring kaldes et integritetsområde, hvis man af $ab = 0$ kan slutte $a = 0$ eller $b = 0$. Dette gælder for ringen af polynomier.

Funktionen $(r(z)/q(z))(z-a_j)^{m_j}$ har en hævelig singularitet for $z = a_j$, og dermed fremstilles den ved sin Taylorrække omkring a_j i cirkelskiven $K(a_j, r)$,

$$\frac{r(z)}{q(z)}(z-a_j)^{m_j} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a_j)^n . \tag{3}$$

Koefficienterne c_n i Taylorrækken er entydigt bestemt ($n!c_n$ er den n'te afledede af funktionen i a_j). Da $\varphi \in \mathcal{H}(K(a_j, r))$ bidrager $\varphi(z)(z-a_j)^{m_j}$ kun til Taylorrækken med led $c_n(z-a_j)^n$ hvor $n \geq m_j$, medens leddene med $n < m_j$ kommer fra den endelige sum i (2), altså

$$c_{m_j-\ell} = c_{j,\ell}\,, \quad \ell = 1, \ldots, m_j\,,$$

hvilket viser, at $c_{j,\ell}$ er entydigt bestemt.

Eksistensen kan vises ved induktion efter antallet af poler.

Vi vil i stedet udnytte Liouvilles sætning. Hver af polerne a_j har en principal del

$$\sum_{\ell=1}^{m_j} \frac{c_{j,\ell}}{(z-a_j)^\ell}\,,$$

og fratrækkes alle de principale dele fås funktionen

$$f(z) = \frac{r(z)}{q(z)} - \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{m_j} \frac{c_{j,\ell}}{(z-a_j)^\ell}$$

som er holomorf i hele $\mathbb{C}$. Hvert af udtrykkene

$$\frac{c_{j,\ell}}{(z-a_j)^\ell}$$

konvergerer mod 0 for $|z| \to \infty$, og også funktionen $r(z)/q(z)$ konvergerer mod 0 for $|z| \to \infty$ da $\operatorname{grad}(q) > \operatorname{grad}(r)$. Altså vil $f(z) \to 0$ for $|z| \to \infty$, men så er f specielt begrænset og dermed konstant ifølge Liouvilles sætning. Når en konstant funktion går mod 0 for $|z| \to \infty$ må den være identisk 0. □

Koefficienterne i fremstillingen (1) kan findes ved hjælp af entydighedsbeviset ovenfor. For hvert j beregnes de m_j første koefficienter i Taylorrækken for funktionen

$$\frac{r(z)}{q(z)}(z-a_j)^{m_j}\,.$$

I praksis er det imidlertid ofte nemmere at reducere problemet til løsning af et lineært ligningssystem. Metoden illustreres i følgende eksempel.

Eksempel 6.13. Der gælder

$$\frac{z^3+z^2-6z+3}{z^4-2z^3+z^2}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{3}{z^2}\,.$$

Idet $z^4-2z^3+z^2=z^2(z-1)^2$ er der poler af orden 2 for $z=0$, $z=1$. For at finde fremstillingen forsøger vi at finde koefficienterne a,b,c,d i udtrykket

$$\frac{z^3+z^2-6z+3}{z^2(z-1)^2}=\frac{a}{z-1}+\frac{b}{(z-1)^2}+\frac{c}{z}+\frac{d}{z^2}\,.$$

Ganges med $z^2(z-1)^2$ får vi

$$\begin{aligned}z^3+z^2-6z+3&=az^2(z-1)+bz^2+cz(z-1)^2+d(z-1)^2\\&=(a+c)z^3+(-a+b-2c+d)z^2+(c-2d)z+d\,,\end{aligned}$$

hvilket giver ligningssystemet

$$a+c=1\,,\ -a+b-2c+d=1\,,\ c-2d=-6\,,\ d=3\,.$$

Dette løses på en af de kendte måder: $(a,b,c,d)=(1,-1,0,3)$.

Bemærkning 6.14. Mængden $\mathbb{C}(z)$ er et vektorrum over $\mathbb{C}$. Af det foregående følger, at monomierne $1,z,z^2,\ldots$ samt funktionerne $1/(z-a)^k$, $a\in\mathbb{C}$, $k=1,2,\ldots$ udgør en basis for vektorrummet.

6.4. Meromorfe funktioner.

En holomorf funktion, der kun har isolerede singulariteter, som enten er poler eller hævelige singulariteter, kaldes en meromorf funktion. Idet det er naturligt at tillægge funktionen værdien ∞ i polerne, kan vi præcisere begrebet på følgende måde:

Definition 6.15. Ved en *meromorf* funktion i et område $G\subseteq\mathbb{C}$ forstås en afbildning $h:G\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ med egenskaberne:

(i) $P=\{\,z\in G\mid h(z)=\infty\,\}$ er diskret i G.
(ii) Restriktionen $f=h|_{G\setminus P}$ er holomorf i den åbne mængde $G\setminus P$.
(iii) Ethvert punkt $a\in P$ er pol for f.

Det bemærkes, at polmængden P for f er tællelig og afsluttet relativt til G ifølge Sætning 5.6. Mængden af meromorfe[8] funktioner i G betegnes $\mathcal{M}(G)$.

[8] meromorf kommer af græsk: brudden form i modsætning til holomorf: hel form.

En holomorf funktion i G er meromorf med $P = \varnothing$.

Vi vil nu vise, hvorledes en kvotient f/g af to holomorfe funktioner $f, g \in \mathcal{H}(G)$, $g \not\equiv 0$, definerer en meromorf funktion h i G.

Hvis $f \equiv 0$ sættes $h \equiv 0$, så vi kan herefter antage at $f \not\equiv 0$.

Idet $Z(g)$ er en mængde uden fortætningspunkt i G er $h = f/g$ holomorf i $G \setminus Z(g)$, og alle punkterne i $Z(g)$ er isolerede singulariteter for h. Hvis $a \in Z(g)$ er et nulpunkt af orden $q \geq 1$ for g, og et nulpunkt af orden $p \geq 0$ for f, har vi fremstillinger

$$f(z) = (z-a)^p f_1(z)\,,\; g(z) = (z-a)^q g_1(z)\,,$$

hvor $f_1, g_1 \in \mathcal{H}(G)$, og $f_1(a)$ og $g_1(a)$ begge er forskellige fra nul. Heraf ses at

$$h(z) = (z-a)^{p-q}\frac{f_1(z)}{g_1(z)},$$

for $z \in K'(a,r)$, hvor r er valgt så lille, at g_1 er nulpunktsfri i $K(a,r)$. Hvis $p \geq q$, har h altså en hævelig singularitet i a, og a er et nulpunkt af orden $p-q$. Hvis $p < q$, har h en pol af orden $m = q-p$, og vi sætter $h(a) = \infty$. Dette viser, at h er en meromorf funktion, hvis polmængde består af de $a \in Z(g)$, hvor ordenen som nævnernulpunkt er større end ordenen som tællernulpunkt.

Hvis $h : G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ er meromorf, og $a \in G$ er en pol af orden m, så er $f(z) = (z-a)^m h(z)$ holomorf i en passende cirkelskive $K(a,r)$, altså $h(z) = f(z)/(z-a)^m$ i $K'(a,r)$. Enhver meromorf funktion h er altså *lokalt* en kvotient af holomorfe funktioner, men dette gælder endda *globalt*: *Der findes f og $g \in \mathcal{H}(G)$ med $g \not\equiv 0$ så at $h = f/g$.* Hvis P er polmængden for h, så findes nemlig, som omtalt i §6.1, en holomorf funktion $g \in \mathcal{H}(G)$ med $Z(g) = P$, og g kan vælges, så ordenen af hvert nulpunkt $a \in Z(g)$ er lig med ordenen af polen a for h. Funktionen hg er holomorf i $G \setminus P$, men med hævelige singulariteter i punkterne af P. Der findes altså $f \in \mathcal{H}(G)$, så $f = hg$ i $G \setminus P$, og dermed er $h = f/g$.

Man kan på naturlig måde addere og multiplicere to meromorfe funktioner $h_1, h_2 : G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, idet sum og produkt er holomorfe udenfor den samlede polmængde, men visse af polerne kan vise sig at være hævelige singulariteter for summen eller produktet. Hvis h er meromorf og ikke nulfunktionen, så er den reciprokke funktion $1/h$ også meromorf. Nulpunkterne for h af orden n er poler for $1/h$ af orden n, og polerne for h af orden m er nulpunkter af orden m for $1/h$. Man overbeviser sig nu let om, at mængden af meromorfe funktioner i området G er et kommutativt legeme. Fremstillingen $h = f/g$ af en vilkårlig meromorf funktion som kvotient af holomorfe funktioner viser, at legemet af meromorfe funktioner er isomorft med *brøklegemet* for integritetsområdet $\mathcal{H}(G)$ (jvf. Opg. 6.2).

En rational funktion er meromorf i $\mathbb{C}$ med kun endeligt mange poler.

6.5. Laurentrækker.

Funktionen $\exp(\frac{1}{z})$ er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, og $z = 0$ er en isoleret singularitet. Idet der for alle $n \geq 0$ gælder

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to\infty} \frac{\exp(y)}{y^n} = \infty\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} x^n \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to\infty} (-1)^n \frac{\exp(-y)}{y^n} = 0\,,$$

har $z^n \exp(\frac{1}{z})$ ingen grænseværdi for $z \to 0$, og derfor er $z = 0$ hverken en hævelig singularitet eller en pol. Dermed er $z = 0$ en væsentlig singularitet.

Indsættes potensrækken for exp fås

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Vi skal nu studere en type uendelige rækker, der generaliserer potensrækkerne og inkluderer rækken for $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$.

Definition 6.16. Ved en *Laurentrække*[9] forstås en dobbelt uendelig række af formen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n\,, \tag{1}$$

hvor $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ er givne komplekse tal og $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ved studiet af konvergens af Laurentrækken (1) skal denne betragtes som summen af to sædvanlige uendelige rækker

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\,,$$

og vi forlanger, at de hver for sig er konvergente. Disse to rækker er potensrækker i henholdsvis $1/z$ og z. Lad deres konvergensradier være henholdsvis ρ_1, ρ_2. Den første række er absolut konvergent for $|1/z| < \rho_1$, den anden for $|z| < \rho_2$. Kun tilfældet $1/\rho_1 < \rho_2$ har interesse, for så er rækken (1) absolut konvergent i *ringområdet*

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid 1/\rho_1 < |z| < \rho_2\}$$

[9] Opkaldt efter den franske ingeniør P.A. Laurent (1813-1854).

mellem de to koncentriske cirkler med centrum 0 og radier $1/\rho_1, \rho_2$. (Hvis $1/\rho_1 \geq \rho_2$ er $G = \emptyset$). I tilfældet $\rho_1 = \infty$ er $G = K'(0, \rho_2)$ hvis $\rho_2 < \infty$, og $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hvis $\rho_2 = \infty$.

Laurentrækken konvergerer lokalt uniformt mod sumfunktionen, for ifølge teorien for potensrækker konvergerer begge rækker uniformt over mængder af formen $r_1 \leq |z| \leq r_2$ med $1/\rho_1 < r_1 \leq r_2 < \rho_2$. Til enhver kompakt delmængde K af G findes r_1, r_2 så $1/\rho_1 < r_1 \leq r_2 < \rho_2$, og så K er indeholdt i ringområdet $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z| \leq r_2\}$. Man kan bruge $r_1 = \inf\{|z| \mid z \in K\}$, $r_2 = \sup\{|z| \mid z \in K\}$.

Den ved Laurentrækken fremstillede funktion er altså holomorf i ringområdet G, jf. Sætning 4.17.

Mere almindeligt kaldes

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

en Laurentrække med udviklingspunkt $a \in \mathbb{C}$, og den fremstiller en holomorf funktion i et *ringområde med centrum a*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-a| < R_2\}\,.$$

Laurent viste, at enhver holomorf funktion i et ringområde kan fremstilles ved en Laurentrække. Vi formulerer det præcist:

Sætning 6.17. *Antag, at f er holomorf i ringområdet $G = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-a| < R_2\}$, hvor $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Så fremstilles f i G som sum af en entydigt bestemt Laurentrække*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \textit{for} \ \ z \in G\,, \tag{2}$$

og koefficienterne i rækken er givet ved

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{3}$$

hvor $r \in]R_1, R_2[$ er vilkårlig.

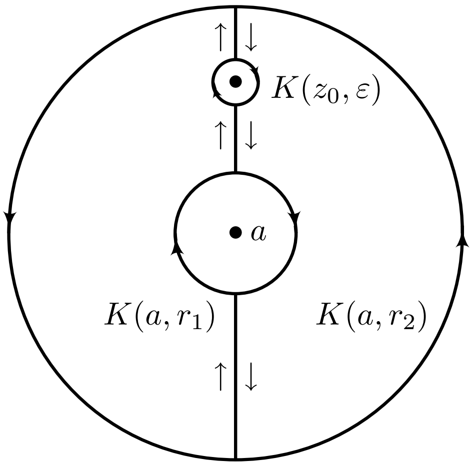
Bevis. Vi viser først, at der højst er én Laurentrække (2) med sum f i ringområdet, og at koefficienterne er givet ved (3). Da nemlig rækken konvergerer uniformt på $\partial K(a,r)$ giver Sætning 4.6 (ii), at

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(a,r)} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{k-n-1} \right) dz =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(a,r)} (z-a)^{k-n-1} dz = c_n \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(a,r)} \frac{dz}{z-a} = c_n\,.$$

(Formelt burde vi splitte rækken op i to rækker $\sum_0^\infty + \sum_{-\infty}^{-1}$ og bruge sætningen på hver af dem, men for at beviset ikke skal være for tungt, går vi let henover dette punkt).

For at vise eksistensen bemærkes, at c_n defineret ved (3) er uafhængig af $r \in]R_1, R_2[$ ifølge §3.2. For fast $z_0 \in G$ vælges r_1, r_2 så $R_1 < r_1 < |z_0 - a| < r_2 < R_2$. Dernæst vælges $\varepsilon > 0$ så lille, at $\overline{K(z_0, \varepsilon)}$ er indeholdt i ringområdet $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-a| < r_2\}$.



Funktionen $F(z) = f(z)/(z - z_0)$ er holomorf i $G \setminus \{z_0\}$, og ved at lægge et snit gennem centrene a og z_0 som på figuren hæver bidragene fra de 6 linjestykker hinanden og vi får

$$\int_{\partial K(a,r_2)} F(z)dz = \int_{\partial K(a,r_1)} F(z)dz + \int_{\partial K(z_0,\varepsilon)} F(z)dz\,.$$

Af Cauchys integralformel fås så

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r_2)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r_1)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Vi omskriver nu det første integral til en uendelig række i analogi med Sætning 4.8.

For $z \in \partial K(a, r_2)$ har vi

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-a} \, \frac{1}{1 - \frac{z_0 - a}{z-a}}\,,$$

hvor $|(z_0-a)/(z-a)| = \frac{|z_0-a|}{r_2} < 1$, så den sidste brøk kan skrives som sum af en uendelig kvotientrække; det giver

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^n ,$$

altså

$$\frac{f(z)}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}(z_0-a)^n . \tag{5}$$

Da denne række konvergerer uniformt for $z \in \partial K(a, r_2)$, er det tilladt at integrere ledvist i (5), hvoraf

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(a,r_2)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(a,r_2)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right)(z_0-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z_0-a)^n .\end{aligned}$$

Da denne række konvergerer for vilkårligt z_0 i ringområdet er konvergensradius $\geq R_2$.

For $z \in \partial K(a, r_1)$ har vi tilsvarende

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{a-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{z_0-a}} ,$$

hvor $|(z-a)/(z_0-a)| = \frac{r_1}{|z_0-a|} < 1$, så den sidste brøk er sum af en uendelig kvotientrække; det giver

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{a-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n$$

altså

$$\frac{f(z)}{z-z_0} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(z)}{(z_0-a)^{n+1}}(z-a)^n . \tag{6}$$

Da denne række konvergerer uniformt for $z \in \partial K(a, r_1)$, er det tilladt at integrere ledvist, hvoraf

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(a,r_1)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz &= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(a,r_1)}f(z)(z-a)^n dz\right)(z_0-a)^{-n-1} , \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n-1}(z_0-a)^{-n-1} .\end{aligned}$$

Da denne række konvergerer for vilkårligt z_0 i ringområdet og er en potensrække i $1/(z_0-a)$, ser man, at rækken konvergerer for vilkårligt z_0 så $|z_0-a| > R_1$. Potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$$

har altså konvergensradius $\geq 1/R_1$.

Ved hjælp af (4) fås nu

$$f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0 - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z_0 - a)^n} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z_0 - a)^n \,.$$

□

Bemærkning 6.18. Til en holomorf funktion f defineret i et ringområde $G = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-a| < R_2\}$ knyttes altså en holomorf funktion f_i i $K(a, R_2)$ med potensrækken

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

og en holomorf funktion f_e i $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| > R_1\}$ med fremstillingen

$$f_e(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \,.$$

For $z \in G$ gælder

$$f(z) = f_i(z) + f_e(z) \,.^4$$

Bemærkning 6.19. Lad f være holomorf i ringområdet $R_1 < |z-a| < R_2$. For $r \in]R_1, R_2[$ betragtes funktionen

$$g_r(\theta) = f(a + re^{i\theta}) \,, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

som er periodisk med periode 2π. Af (2) fås

$$g_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} \,,$$

[4] Index i og e er valgt for interior og exterior.

og denne række konvergerer uniformt for $\theta \in \mathbb{R}$, og er altså Fourierrækken for g_r. Indsættes parameterfremstillingen $a + re^{i\theta}$ for $\partial K(a,r)$ kan (3) skrives

$$c_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_r(\theta) e^{-in\theta} d\theta \,,$$

som er den sædvanlige formel for Fourierkoefficienterne.

Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $a \in G$. Hvis $f \in \mathcal{H}(G \backslash \{a\})$ har f altså en isoleret singularitet. Lad $K(a,\rho)$ være den største åbne cirkelskive med centrum a indeholdt i G. Dermed er f specielt holomorf i ringområdet $K'(a,\rho)$ og der gælder en Laurentrække udvikling

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \,, \quad z \in K'(a,\rho) \tag{7}$$

med

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \,, \quad n \in \mathbb{Z} \,, \tag{8}$$

hvor $r \in]0,\rho[$ er vilkårlig.

Ifølge Bemærkning 6.18 er der til Laurentrækken knyttet en holomorf funktion $f_i \in \mathcal{H}(K(a,\rho))$

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \,,$$

og en holomorf funktion

$$f_e(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{9}$$

defineret for $|z-a| > 0$, altså $f_e \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$, og der gælder

$$f(z) = f_i(z) + f_e(z) \ \text{ for } \ z \in K'(a,\rho) \,. \tag{10}$$

Definition 6.20. Den til $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ hørende funktion $f_e(z)$ givet ved summen af leddene hørende til negative potenser af $(z-a)$ kaldes den *principale del* af f.

Af (10) ses, at $f(z) - f_e(z)$, som er holomorf i $G \setminus \{a\}$, har en hævelig singularitet for $z = a$, og $f_i(z)$ fastlægger den holomorfe udvidelse til a.

Vi skal nu se, hvordan typen af den isolerede singularitet afgøres af Laurentrækkens led med negativt index.

Sætning 6.21. *Den isolerede singularitet a for $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ med Laurentrække (7) er*

(i) *hævelig, hvis og kun hvis $c_n = 0$ for $n < 0$,*
(ii) *en pol, hvis og kun hvis $c_n = 0$ for alle $n < 0$ på nær endeligt mange. Polens orden er det største $m > 0$ så $c_{-m} \neq 0$,*
(iii) *en væsentlig singularitet, hvis og kun hvis $c_n \neq 0$ for uendeligt mange $n < 0$.*

Bevis. (i) Hvis $c_n = 0$ for $n < 0$ er $f_e = 0$ og f_i giver den holomorfe udvidelse af f til a med værdi $f(a) = c_0 = f_i(a)$. Antag dernæst, at a er en hævelig singularitet. Så eksisterer grænseværdien

$$c := \lim_{z \to a} f(z)\,,$$

og specielt findes $r_0 > 0$ ($r_0 < \rho$) så

$$|f(z) - c| \leq 1 \ \text{ for } \ z \in K'(a, r_0)\,. \tag{11}$$

Vi vil heraf slutte, at $c_n = 0$ når $n < 0$.

Ifølge (8) har vi for $0 < r < \rho$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(a,r)} f(z)(z-a)^{-n-1} dz\,,$$

men da $n < 0$ er $-n - 1 \geq 0$, så $(z-a)^{-n-1}$ har stamfunktionen $(z-a)^{-n}/(-n)$. Heraf fås

$$\int\limits_{\partial K(a,r)} (z-a)^{-n-1} dz = 0\,,$$

så

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(a,r)} (f(z) - c)(z-a)^{-n-1} dz\,.$$

For $0 < r < r_0$ giver estimationslemmaet 2.8 sammen med (11), at

$$|c_n| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \cdot 1 \cdot r^{-n-1} = r^{-n}\,,$$

og for $r \to 0$ (husk $-n > 0$) fås $c_n = 0$.

(ii) Hvis $c_{-m} \neq 0$ for et $m \geq 1$ og $c_{-n} = 0$ for $n > m$, så kan (7) skrives

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

altså

$$(z-a)^m f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_{-m+k}(z-a)^k + (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \,,$$

hvoraf

$$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = c_{-m} \neq 0 \,,$$

hvilket viser, at a er en pol af orden m.

Hvis omvendt $z = a$ er en pol af orden $m \geq 1$ vil funktionen $(z-a)^m f(z)$ have en hævelig singularitet. Laurentrækken for $(z-a)^m f(z)$ findes ved at gange (7) med $(z-a)^m$, altså

$$(z-a)^m f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n+m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-m}(z-a)^k \,.$$

Af tilfælde (i) sluttes, at $c_{k-m} = 0$ for $k < 0$, altså $c_n = 0$ for $n < -m$.

(iii) Udsagnet her følger af (i) og (ii), da en væsentlig singularitet er en isoleret singularitet, der hverken er hævelig eller en pol. Tilsvarende er betingelsen på c_n netop den, der udelukker betingelserne på c_n fra (i) og (ii). $\square$

Eksempel 6.22. Lad $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ være en *hel transcendent funktion*, dvs. en hel funktion, der ikke er et polynomium. Det kan også udtrykkes ved, at uendeligt mange af koefficienterne c_n i potensrækken

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \,, \quad z \in \mathbb{C}$$

er forskellig fra 0.

Funktionen $f\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ har en isoleret singularitet for $z = 0$ og der gælder

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \,, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \,. \tag{12}$$

På grund af Laurentrækkens entydighed er (12) netop Laurentrækken for $f\left(\frac{1}{z}\right)$, og da $c_n \neq 0$ for uendeligt mange n er $z = 0$ en væsentlig singularitet.

Eksempel 6.23. Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$, specielt er den holomorf i $K(0,1)$ og i ringområderne $G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$, $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$. Vi vil finde de tilhørende rækkeudviklinger.

For $z \in K(0,1)$ har $f(z)$ en potensrække:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \,.$$

For $1 < |z| < 2$ finder vi

$$f(z) = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} z^n \,.$$

For $2 < |z|$ finder vi

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\left(2^{n-1} - 1\right)\frac{1}{z^n} \,. \end{aligned}$$

Vi finder 3 forskellige rækkeudviklinger i de 3 disjunkte områder. Det er vigtigt ikke at sammenblande disse rækker.

Funktionen har en simpel pol for $z = 1$. Den har en Laurentrække omkring $z = 1$ gyldig for $0 < |z-1| < 1$:

$$f(z) = -\frac{1}{1-(z-1)} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \,.$$

Funktionen har en simpel pol for $z = 2$. Laurentrækken omkring $z = 2$ er gyldig for $0 < |z-2| < 1$:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n \,.$$

Bemærkning om konvergensradius. Lad $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus P)$, hvor $P \subseteq \mathbb{C}$ er diskret i $\mathbb{C}$ og antag, at ingen af f's singulariteter $a \in P$ er hævelige. For hvert $z_0 \in \mathbb{C}\setminus P$ fremstilles f ved en potensrække

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{13}$$

i den største åbne cirkelskive $K(z_0,\rho) \subseteq \mathbb{C}\setminus P$. Vi har altså

$$\rho = \inf\{|z_0 - a| \mid a \in P\} \,.$$

Bemærk, at infimum faktisk er et minimum, altså $\rho = |z_0 - a|$ for et (eller flere) $a \in P$, jf. Lemma A.1 med $K = \{z_0\}, F = P$.

Sætning 6.24. *Med betegnelserne ovenfor gælder, at ρ er konvergensradius for (13).*

Bevis. Vi ved fra Sætning 4.8, at konvergensradius R opfylder $R \geq \rho$. Antages imidlertid at $R > \rho$, så giver (13) en holomorf udvidelse af f til $K(z_0, R)$, men da $a \in P$ opfyldende $|a - z_0| = \rho$ tilhører $K(z_0, R)$, så må a være en hævelig singularitet i strid med antagelsen. □

Opgaver til §6

6.1. Lad G være et område i $\mathbb{C}$ og antag, at $f \in \mathcal{H}(G)$ kun har endeligt mange nulpunkter i G. Vis, at der findes et polynomium $p(z)$ og en nulpunktsfri funktion $\varphi \in \mathcal{H}(G)$, så $f(z) = p(z)\varphi(z)$ for $z \in G$.

6.2. Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben. Vis, at ringen $\mathcal{H}(G)$ er et integritetsområde hvis og kun hvis G er kurvesammenhængende. (En kommutativ ring kaldes et integritetsområde, hvis man af $ab = 0$ kan slutte at $a = 0$ eller $b = 0$.)

6.3. *Spejlingsprincippet.*

1° Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben, og $f \in \mathcal{H}(G)$. Den i x-aksen spejlede mængde og spejlede funktion defineres ved

$$G^* = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in G \,\}$$
$$f^* \colon G^* \to \mathbb{C}\,,\; f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}\,,\; z \in G^*\,.$$

Vis, at $f^* \in \mathcal{H}(G^*)$ og at $(f^*)' = (f')^*$.

2° Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være et område som er *spejlingsinvariant*, dvs. $G = G^*$. Vis, at $G \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$.

Vis, at $f \in \mathcal{H}(G)$ er reel på $G \cap \mathbb{R}$ hvis og kun hvis f er *spejlingsinvariant*, dvs. $f = f^*$ eller

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \;\text{ for alle }\; z \in G\,.$$

(*Vink.* Udnyt identitetssætningen).

3° Vis, at en hel funktion $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ er spejlingsinvariant hvis og kun hvis $a_n \in \mathbb{R}$ for $n = 0, 1, \ldots$.

6.4. Bestem $a \in \mathbb{C}$ så at $\sin z - z(1 + az^2)\cos z$ får et nulpunkt af femte orden for $z = 0$.

6.5. Antag, at $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ er meromorf med endeligt mange poler $z_1, \ldots, z_n$ og antag, at der findes $k > 0$, $N \in \mathbb{N}$ og $R > 0$ så $|h(z)| \le k|z|^N$ for $|z| > R$. Vis, at h er en rational funktion.

(*Vink.* Benyt Opg. 4.9.)

6.6. Vis, at

$$\frac{4z^3}{(z^2+1)^2} = \frac{2}{z+i} - \frac{i}{(z+i)^2} + \frac{2}{z-i} + \frac{i}{(z-i)^2}\,.$$

6.7. Dekomponér den rationale funktion

$$f(z) = \frac{2z - (2+i)}{z^2 - (2+i)z + 2i}$$

og find dernæst dens Laurentrække i ringområdet $1 < |z| < 2$.

6.8. Lad f være holomorf i ringområdet $G = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-a| < R_2\}$, og lad f_i, f_e være de holomorfe funktioner fra Bemærkning 6.18. Vis, at

$$f_e(z) \to 0 \ \text{ for } \ |z-a| \to \infty\,.$$

Antag dernæst, at der findes en holomorf funktion ϕ_i i $K(a, R_2)$ og en holomorf funktion ϕ_e i området $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| > R_1\}$ så

$$\phi_e(z) \to 0 \ \text{ for } \ |z-a| \to \infty\,,$$

og så

$$f(z) = \phi_i(z) + \phi_e(z) \ \text{ for } \ z \in G\,.$$

Vis, at $f_i(z) = \phi_i(z)$, $z \in K(a, R_2)$, $f_e(z) = \phi_e(z)$ for $|z-a| > R_1$.

Vink. Brug Liouvilles sætning på funktionen

$$g(z) = \begin{cases} f_i(z) - \phi_i(z)\,, & |z-a| < R_2 \\ \phi_e(z) - f_e(z)\,, & |z-a| > R_1\,. \end{cases}$$

6.9. Lad $f \in \mathcal{H}(G)$, hvor G er et enkeltsammenhængende område. Lad γ være en lukket vej i G. Vis følgende udvidelse af *Cauchys integralformel*

$$\omega(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz\,, \quad z_0 \in G \setminus \gamma^*\,.$$

Vink. Udnyt at funktionen $z \mapsto (f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ har en hævelig singularitet i z_0.

6.10. Lad $a \in \mathbb{C}$. Find Laurentrækken i ringområdet $0 < |z-a| < \infty$ for funktionen

$$f(z) = \frac{\exp(z)}{(z-a)^3}\,.$$

6.11. For $z \in \mathbb{C}$ betragtes funktionen

$$f(\omega) = \exp\left(\frac{z}{2}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\right)\,, \ \ \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,,$$

som er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vis, at Laurentrækken har formen

$$\exp\left(\frac{z}{2}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\omega^n\,, \quad \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,,$$

hvor

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\sin t - nt)}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin t - nt)dt\,,\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

Funktionen $J_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kaldes *Besselfunktionen* af orden n.

Vis, at

$$z(J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)) = 2nJ_n(z)\,.$$

6.12. Gør rede for at $f(z) = z/(e^z - 1)$ har en hævelig singularitet for $z = 0$ og er holomorf i cirkelskiven $K(0, 2\pi)$. Dens potensrække omkring $z = 0$ skrives

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n\,, \quad \text{altså} \quad B_n = f^{(n)}(0)\,.$$

Gør rede for at konvergensradius er 2π, og at *Bernoullitallene* B_n er fastlagt ved ligningerne

$$B_0 = 1\,, \qquad \sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n+1}{k} = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Vis, at hvert B_n er rationalt og verificer værdierne

$$B_1 = -\frac{1}{2}\,,\ B_2 = \frac{1}{6}\,,\ B_3 = 0\,,\ B_4 = -\frac{1}{30}\,.$$

Vis, at funktionen

$$g(z) = \frac{z}{e^z - 1} - 1 + \frac{z}{2}$$

er lige (i.e. $g(-z) = g(z)$) og slut, at $B_{2n+1} = 0$ for $n \geq 1$.

6.13. Vis, at Laurentrækken for $\cot z$, $0 < |z| < \pi$, er givet som

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} 2^{2k} z^{2k-1}\,,$$

hvor B_n er tallene fra opg. 6.12. *Vink.* Brug Eulers formler fra Sætning 1.16.

6.14. Lad $z_1, \dots, z_n \in K(0,r)$ være indbyrdes forskellige, lad $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ og betragt den rationale funktion

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{z - z_j} ,$$

som er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$.

Vis, at f har en stamfunktion i området $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$ hvis og kun hvis $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 0$.

Vink. Brug Sætning 2.13 og opg. 5.13.

6.15. Vis, at funktionen $1/(1 - z - z^2)$ har simple poler i $z = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ og find konvergensradius for dens potenrække i omegnen af 0:

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \sum_{0}^{\infty} F_n z^n .$$

Vis, at $F_0 = F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$. (Dette er følgen af *Fibonacci-tal*: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$).

Dekomponér den rationale funktion og udnyt dette til at vise formlen

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] .$$

6.16. Udled Picards lille sætning (Sætning 4.19) fra Picards store sætning p. 6.7.

Vink. Lad f være en hel funktion. Se på $f(1/z)$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

6.26

§7. Residuer og deres anvendelse

I denne paragraf vil vi indføre residuer og bevise Cauchys residuesætning, som kan ses som kulminationen på Cauchys udvikling af kompleks funktionsteori. Sætningen kan bruges til at udregne bestemte integraler og til at finde summen af uendelige rækker.

At man kan udregne et reelt integral af typen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

ved at finde et residuum for $z = i$ kan forekomme som ren magi.

7.1. Residuesætningen.

Lad $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ have en isoleret singularitet for $z = a \in G$ med Laurentrækken

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \,.$$

Koefficienten c_{-1} er specielt vigtig og kaldes *residuet* af f i punktet a og betegnes $\mathrm{Res}(f, a)$, altså ifølge §6.5 (8)

$$\mathrm{Res}(f,a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(a,r)} f(z)dz \tag{1}$$

for $0 < r < \rho$, hvor $K(a, \rho)$ er den største cirkelskive i G med centrum a.

Residuer er indført af Cauchy. (Det hedder et residuum, flere residuer; residue i sammensætninger.) Det er den rest (= résidu på fransk), der bliver tilbage, bortset fra faktoren $2\pi i$, når funktionen f integreres rundt om singulariteten. Ifølge §3.2 kan vi erstatte cirklen $\partial K(a, r)$ med andre simple lukkede veje, der løber en gang rundt om singulariteten i positiv omløbsretning.

Vi vil nu formulere og bevise Cauchys residuesætning, der på grund af dens mange anvendelser, vel nok er en af den komplekse funktionsteoris vigtigste sætninger. Man ser, at den indeholder både Cauchys integralsætning og integralformel.

Sætning 7.1. (Cauchys residuesætning). *Lad G være et enkeltsammenhængende område, og lad $P = \{a_1, \dots , a_n\} \subseteq G$. Lad γ være en simpel lukket vej i G som omslutter $a_1, \dots , a_n$ og som gennemløbes én gang med positiv orientering.*[10] *For $f \in \mathcal{H}(G \setminus P)$ gælder*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_j)\,.$$

[10]Formuleringen bygger på geometrisk anskuelighed.

Bevis. Lad p_j betegne den principale del af f i punktet a_j , $j = 1, \dots , n$, jf. Definition 6.20. Så har $\varphi = f - (p_1 + \cdots + p_n)$ en hævelig singularitet i hvert af punkterne $a_1, \dots , a_n$, og kan derfor udvides til en holomorf funktion i G. Fra Cauchys integralsætning ved vi at $\int_\gamma \varphi = 0$, altså

$$\int_\gamma f = \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma p_j \,.$$

Den principale del p_j er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{a_j\}$. For $r > 0$ tilstrækkeligt lille vil γ også omslutte $\overline{K(a_j, r)}$ og ved hjælp af ideen i §3.2 kan man overbevise sig om, at

$$\int_\gamma p_j = \int_{\partial K(a_j,r)} p_j.$$

(Læseren vil ikke blive stillet til regnskab for dette). Lad den principale del p_j have fremstillingen

$$p_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{j,n}}{(z - a_j)^n} \,.$$

Da rækken konvergerer uniformt på $\partial K(a_j, r)$, giver Sætning 4.6 (ii) at

$$\int_{\partial K(a_j,r)} p_j = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial K(a_j,r)} \frac{c_{j,n}}{(z - a_j)^n} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_j),$$

idet kun integranden $c_{j,1}/(z - a_j)$ giver et bidrag, nemlig $2\pi i$ $\operatorname{Res}(f, a_j)$, da de højere potenser har en stamfunktion. Dette viser sætningen. $\square$

Inden vi giver eksempler på anvendelser af residuesætningen, vil vi give en række simple anvisninger på at udregne residuer i det vigtige specialtilfælde med en meromorf funktion h.

1° *Antag, at h har en simpel pol i a. Så er*

$$\operatorname{Res}(h, a) = \lim_{z \to a} (z - a) h(z) \,.$$

I en omegn af a har man nemlig

$$h(z) = \frac{\operatorname{Res}(h, a)}{z - a} + \varphi(z) \,,$$

hvor φ er holomorf.

2° *Antag, at* $h = f/g$ *er meromorf med en simpel pol i* a*, og at* $f(a) \neq 0$*,* $g(a) = 0$ *,* $g'(a) \neq 0$. Så er

$$\operatorname{Res}(h, a) = f(a)/g'(a)\,.$$

Da h har en simpel pol i a, fås af 1° at

$$\operatorname{Res}(h, a) = \lim_{z \to a} f(z) \frac{z - a}{g(z)} = \lim_{z \to a} f(z) \left(\frac{g(z) - g(a)}{z - a} \right)^{-1} = \frac{f(a)}{g'(a)}\,.$$

3° *Antag, at* h *har en pol af orden* $m \geq 1$ *i* a*. Idet vi definerer* φ *ved* $\varphi(z) = (z - a)^m h(z)$ *(så* φ *har en hævelig singularitet i* a*), er*

$$\operatorname{Res}(h, a) = \frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}\,.$$

Vi har nemlig

$$\varphi(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - a) + \cdots + c_{-1}(z - a)^{m-1} + c_0(z - a)^m + \cdots$$

i en omegn af a, og $c_{-1} = \operatorname{Res}(h, a)$. Heraf følger påstanden.

Eksempel 7.2.

(i) Residuet af den rationale funktion $z \mapsto 1/(1 + z^2)$ i punkterne $z = \pm i$ er $\mp \frac{i}{2}$. Dette følger af 2°, men ses også umiddelbart af omskrivningen

$$\frac{1}{1 + z^2} = \frac{i}{2(z + i)} - \frac{i}{2(z - i)}\,.$$

(ii) Den meromorfe funktion $z \mapsto 1/\sin z$ har en simpel pol for $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Residuet for $z = n\pi$ er $1/\cos(n\pi) = (-1)^n$.

(iii) Funktionen

$$h(z) = \frac{z \sin z}{1 - \cos z}$$

er meromorf i $\mathbb{C}$. Nævnerens nulpunkter er $2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, som alle er dobbelte nulpunkter. Tælleren har et dobbelt nulpunkt for $z = 0$, og simple nulpunkter for $z = p\pi$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Heraf følger, at $z = 0$ er en hævelig singularitet, og $z = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ er simple poler.

For at finde værdien i den hævelige singularitet $z = 0$ udvikles tæller og nævner i potensrække ved hjælp af de kendte potensrækker for sin og cos:

$$h(z) = \frac{z\left(z - \frac{z^3}{3!} + - \cdots\right)}{\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + - \cdots} = \frac{1 - \frac{z^2}{3!} + - \cdots}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + - \cdots} \to 2 \quad \text{for} \quad z \to 0\,.$$

Alternativt kan vi benytte L'Hospitals regel (Sætning 6.7), som giver

$$\lim_{z\to 0} h(z) = \frac{f^{(2)}(0)}{g^{(2)}(0)} = 2,$$

hvor $f(z) = z\sin z$, $g(z) = 1 - \cos z$.

Residuerne i $2p\pi$, $p \neq 0$, finder vi ved at sætte $w = z - 2p\pi$ og udnytte, at sin og cos er periodiske. Vi finder

$$\begin{aligned}(z-2p\pi)h(z) &= \frac{w(w+2p\pi)\sin(w+2p\pi)}{1-\cos(w+2p\pi)} \\ &= \frac{(w+2p\pi)w\sin w}{1-\cos w} = (w+2p\pi)h(w),\end{aligned}$$

og udnyttes at $z \to 2p\pi$ er ensbetydende med at $w \to 0$ fås

$$\operatorname{Res}(h, 2p\pi) = \lim_{z\to 2p\pi}(z-2p\pi)h(z) = \lim_{w\to 0}(w+2p\pi)h(w) = 4p\pi,$$

idet vi også udnytter, at vi lige har vist at $\lim_{w\to 0} h(w) = 2$.

(iv) $h(z) = z^2(z^2+1)^{-2}$ er en rational funktion med poler af orden 2 i punkterne $z = \pm i$. Sættes

$$\varphi(z) = (z-i)^2 h(z) = \frac{z^2}{(z+i)^2},$$

er

$$\varphi'(z) = \frac{2iz}{(z+i)^3},$$

hvormed $\operatorname{Res}(h, i) = \varphi'(i) = -\frac{i}{4}$. Analogt findes $\operatorname{Res}(h, -i) = \frac{i}{4}$.

7.2. Argumentprincippet.

Residuesætningen kan benyttes til at beregne antallet af nulpunkter og poler for en meromorf funktion.

Sætning 7.3. *Lad $h : G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ være meromorf i et enkeltsammenhængende område G, og lad γ være en positivt orienteret simpel lukket vej i G, der ikke går igennem nogen af h's nulpunkter og poler. Så er*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz$$

lig med antallet N af nulpunkter minus antallet P af poler for h i det delområde af G som γ omslutter. Ved udregningen tælles et nulpunkt eller en pol af orden m som tallet m.

Bevis. Lad D være mængden af nulpunkter eller poler for h. Så er h'/h holomorf i $G\setminus D$. Vi vil se, at h'/h er meromorf med polmængde D. Betegner a et nulpunkt for h af orden n, har vi i en vis cirkelskive $K(a,r)$

$$h(z) = a_n(z-a)^n + a_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots , \quad a_n \neq 0 ,$$

altså

$$h'(z) = n\ a_n(z-a)^{n-1} + (n+1)a_{n+1}(z-a)^n + \cdots ,$$

hvilket viser, at h'/h har en simpel pol i a med residuet n. Betegner a en pol for h af orden m, har vi i en vis udprikket cirkelskive $K'(a,r)$

$$h(z) = a_{-m}(z-a)^{-m} + a_{-(m-1)}(z-a)^{-(m-1)} + \cdots , \quad a_{-m} \neq 0 ,$$

altså

$$h'(z) = -m\ a_{-m}(z-a)^{-(m+1)} - (m-1)a_{-(m-1)}(z-a)^{-m} - \cdots ,$$

hvilket viser, at h'/h har en simpel pol i a med residuet $-m$.

Lad $\{a_1, \ldots, a_n\}$ være de punkter fra D som omsluttes af γ. Vi bruger nu uden bevis det intuitivt klare, at der findes et enkeltsammenhængende delområde $G_1 \subseteq G$ så $D \cap G_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Anvendes residuesætningen på $h'/h \in \mathcal{H}(G_1 \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$ fås

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\,dz = \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(h'/h, a_j) = N - P,$$

idet $\operatorname{Res}(h'/h, a_j) = \pm m$ eftersom a_j er et nulpunkt eller en pol af orden m for h.

$\square$

Bemærkning 7.4. (Argumentprincippet). Lad $\Gamma = h \circ \gamma$ være den sammensatte lukkede vej, der opnås ved at udregne h langs γ. Bemærk, at Γ forløber i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, da h ikke har nogen nulpunkter og poler på γ^*. Hvis γ er defineret på $[a, b]$ er integralet fra Sætning 7.3 lig med

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{h'(\gamma(t))\gamma'(t)}{h(\gamma(t))}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z} = \omega(\Gamma, 0) ,$$

så resultatet i Sætning 7.3 kan udtrykkes

$$\omega(\Gamma, 0) = N - P$$

eller

$$\operatorname{argvar}(\Gamma) = 2\pi(N - P)\,.$$

Det er grunden til, at Sætning 7.3 ofte kaldes *argumentprincippet.*

Lad os betragte $h(z) = \sin z$ for $z \in \mathbb{C}$. Følger vi $\sin z$ rundt langs enhedscirklen i positiv omløbsretning vil en kontinuert gren af $\arg(\sin(e^{it}))$ altså forøges med 2π, da $\sin(z)$ har et simpelt nulpunkt $z = 0$ indenfor enhedscirklen. Følger vi derimod $\sin z$ rundt langs cirklen $|z| = 4$ vil argumentet forøges med 6π, da der er 3 simple nulpunkter i cirkelskiven $|z| < 4$.

Sætning 7.5. (Rouchés Sætning)[11]**.** *Lad $f, g \in \mathcal{H}(G)$, hvor G er et enkeltsammenhængende område. Lad γ være en simpel lukket vej i G og antag, at*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{for} \quad z \in \gamma^*\,. \tag{1}$$

Så har f og g samme antal nulpunkter talt med multiplicitet i det begrænsede område, som γ omslutter.

Bevis. Af (1) følger, at $f(z) \neq 0$ og $g(z) \neq 0$ for $z \in \gamma^*$. Funktionen $F(z) = g(z)/f(z)$ er meromorf i G og

$$\frac{F'}{F} = \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}\,.$$

Mængden

$$\tilde{G} = \{z \in G \mid f(z) \neq 0\}$$

er åben og $\gamma^* \subseteq \tilde{G} \subseteq G$. Bemærk, at forudsætningen (1) om f, g kan udtrykkes

$$|1 - F(z)| < 1 \text{ for } z \in \gamma^*.$$

Da F er kontinuert på $\tilde{G}$ er

$$\Omega := \{z \in \tilde{G} \mid |1 - F(z)| < 1\} = (F|\tilde{G})^{-1}(K(1,1))$$

åben og $\gamma^* \subseteq \Omega$.

Da Log er holomorf i $\mathbb{C}_\pi \supseteq K(1,1)$, er $\operatorname{Log} F$ en stamfunktion til F'/F i Ω, altså

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F'}{F} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'}{g} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,.$$

[11] Eugène Rouché, fransk matematiker, 1832-1910.

Hvis γ er orienteret i positiv omløbsretning følger påstanden nu af Sætning 7.3. $\square$

Som en anvendelse af Rouchés Sætning vil vi give et nyt bevis for algebraens fundamentalsætning.

Lad $g(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ være et normaliseret polynomium af grad $n \geq 1$, og sæt $f(z) = z^n$. På cirklen $\gamma(t) = \mathrm{Re}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ har vi $|f(z)| = R^n$ og

$$|f(z) - g(z)| \leq |a_{n-1}|R^{n-1} + \cdots + |a_1|R + |a_0|,$$

og højresiden er $< R^n$, bare R er tilstrækkelig stor, altså bare $R \geq R_0$ for passende R_0. Dette viser, at f og g har samme antal nulpunkter i cirkelskiven $K(0, R_0)$. Da $f(z) = z^n$ har en n-dobbelt rod deri, må g have n nulpunkter talt med multiplicitet i $K(0, R_0)$.

Den følgende sætning kaldes på engelsk "The open mapping theorem". Den vises under udnyttelse af Rouchés sætning.

Sætning 7.6. *Lad f være en ikke konstant holomorf funktion på et område $G \subseteq \mathbb{C}$. Så er $f(G)$ et område.*

Specielt er f en åben afbildning, dvs. $f(\Omega)$ er åben for hver åben delmængde $\Omega \subseteq G$.

Bevis. Anden halvdel følger af første halvdel, idet enhver åben delmængde $\Omega \subseteq G$ er foreningsmængde af cirkelskiver

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} K(a_i, r_i)\,,$$

og så er

$$f(\Omega) = \bigcup_{i \in I} f(K(a_i, r_i))$$

foreningsmængde af områderne $f(K(a_i, r_i))$, og derfor åben.

Vi skal nu vise, at $f(G)$ er åben og dermed et område, da $f(G)$ er kurvesammenhængende, når G er det, jf. Appendix A.10.

Sæt $w_0 = f(z_0)$ for $z_0 \in G$. Vi skal finde $\rho > 0$ så $K(w_0, \rho) \subseteq f(G)$. Funktionen $\varphi(z) = f(z) - w_0$ har et nulpunkt for $z = z_0$. Lad $k \geq 1$ være ordenen af dette nulpunkt. Da det er isoleret findes $r > 0$ så $\overline{K(z_0, r)} \subseteq G$ og $f(z) - w_0 \neq 0$ for $z \in \overline{K(z_0, r)} \setminus \{z_0\}$.

Dermed er

$$\rho = \inf\{|w_0 - f(z_0 + re^{i\theta})| \mid \theta \in [0, 2\pi]\} > 0.$$

Ifølge Lemma 3.6 findes $R > 0$ så $\overline{K(z_0, r)} \subset K(z_0, R) \subset G$.

For $w \in K(w_0, \rho)$ vil vi nu bruge Rouchés Sætning på de to funktioner $\varphi(z) = f(z) - w_0$, $\psi(z) = f(z) - w$, som er holomorfe i G og dermed i $K(z_0, R)$.

For $|z - z_0| = r$ har vi

$$|\varphi(z) - \psi(z)| = |w - w_0| < \rho \le \varphi(z),$$

og derfor har ψ samme antal nulpunkter i $K(z_0, r)$ som φ altså k nulpunkter.

For hvert $w \in K(w_0, \rho)$ findes altså $z \in K(z_0, r)$ så $f(z) = w$, dvs. $K(w_0, \rho) \subseteq f(K(z_0, r)) \subseteq f(G)$. □

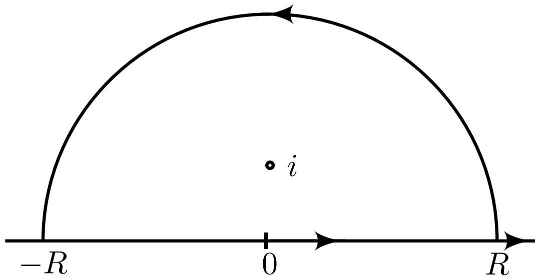
7.3. Udregning af bestemte integraler.

Residuesætningen kan benyttes til udregning af integraler. En ide til udregning af $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ kan groft skitseret være: Man vælger en lukket vej γ i $\mathbb{C}$, der indeholder $[-R, R]$, f.eks. en halvcirkel eller et rektangel, og betragter en meromorf funktion F, som stemmer overens med f på den reelle akse (sædvanligvis skal man bare skrive $f(z)$ i stedet for $f(x)$). Integralet af f fra $-R$ til R plus integralet over resten af vejen er $2\pi i$ multipliceret med summen af residuerne. Lader man $R \to \infty$, vil bidraget over "resten af vejen" ofte gå mod 0, og i grænsen finder man det søgte integral.

Eksempel 7.7. Lad os finde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx\,.$$

Vi lægger halvcirklen $\varphi(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, i den øvre halvplan, og sammen med intervallet $[-R, R]$ giver det en simpel lukket vej.



For $R > 1$ omslutter vejen polen $z = i$ for den meromorfe funktion $f(z) = z^2/(z^2+1)^2$, som har residuet $-i/4$ for $z = i$, jf. Eksempel 7.2 (iv). Altså har vi

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx + \int_0^\pi \frac{R^2e^{2it}}{(1+R^2e^{2it})^2}Rie^{it}dt = 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Den numeriske værdi af integranden i $\int_0^\pi \cdots$ er

$$\frac{R^3}{|1+R^2e^{2it}|^2} \le \frac{R^3}{(R^2-1)^2}\,,$$

så det andet integral er højst

$$\pi\frac{R^3}{(R^2-1)^2}\,,$$

som går mod 0 for $R \to \infty$. Vi finder dermed

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Generelt gælder

Sætning 7.8. *Lad f være en rational funktion*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1z + \cdots + a_mz^m}{b_0 + b_1z + \cdots + b_nz^n}\,, \quad a_m \neq 0\,, b_n \neq 0\,,$$

og antag, at $n \ge m+2$, og at f ikke har nogen poler på den reelle akse. Så er

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j)\,,$$

hvor $z_1, \ldots, z_k$ er polerne i den øvre halvplan.

Bevis. Idet

$$\lim_{|z|\to\infty} z^{n-m}f(z) = \frac{a_m}{b_n}$$

findes $R_0 > 0$, så

$$|z|^{n-m}|f(z)| \le M := \frac{|a_m|}{|b_n|} + 1 \quad \text{for} \quad |z| \ge R_0\,,$$

eller

$$|f(z)| \le \frac{M}{|z|^2} \quad \text{for} \quad |z| \ge \max(1, R_0)\,.$$

Hvis $R > 0$ vælges større end $\max(1, R_0)$ og så stor, at $K(0, R)$ indeholder alle f's poler i den øvre halvplan, så har vi

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_0^\pi f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}\,d\theta = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j)\,,$$

men det andet integral er numerisk begrænset af $\pi\ R(M/R^2)$, som går mod 0 for $R \to \infty$, og sætningen er bevist. $\square$

Bemærkning 7.9. Hvis $w_1, \dots, w_l$ er f's poler i den nedre halvplan, ses analogt at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{Res}(f, w_j)\,.$$

Metoden fra Sætning 7.8 kan også anvendes på andre meromorfe funktioner end rationale. Det afgørende er, at integralet over halvcirklen kan vises at gå mod 0 for $R \to \infty$.

Den følgende sætning kan benyttes til udregning af integraler af formen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x}\,dx,$$

som kaldes Fourier integraler.

Sætning 7.10. *Lad f være meromorf i $\mathbb{C}$ uden poler på den reelle akse og med kun endeligt mange poler $z_1, \dots, z_k$ i den øvre halvplan. Hvis*

$$\max_{0 \le t \le \pi} |f(Re^{it})| \to 0 \quad \textit{for} \quad R \to \infty,$$

så vil

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f(z)e^{i\lambda z}, z_j)\,, \textit{for } \lambda > 0\,.$$

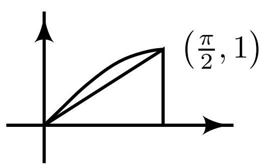
Bevis. Vi betragter en simpel lukket vej bestående af $[-R, R]$ og halvcirklen $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \ge 0$, og betragter kun så store R, at vejen omslutter alle polerne $z_1, \dots, z_k$. Cauchys residuesætning anvendt på $f(z)e^{i\lambda z}$ giver da

$$\int_{-R}^{R} f(x) e^{i\lambda x} dx + \int_0^{\pi} f(Re^{it}) e^{i\lambda Re^{it}} iRe^{it} dt = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\lambda z}, z_j\right).$$

Det andet integral kan numerisk vurderes opad ved

$$I = \max_{0 \le t \le \pi} |f(Re^{it})| \int_0^{\pi} Re^{-\lambda R \sin t}\,dt\,,$$

men idet $\sin t \ge \frac{2}{\pi} t$ for $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (se den efterfølgende tegning),



får man[12] med $a = 2\lambda R/\pi$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-\lambda R \sin t} dt &= 2\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t} dt \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-at} dt \\ &= \frac{2}{a}\left(1 - e^{-a\frac{\pi}{2}}\right) \le \frac{2}{a} = \frac{\pi}{\lambda R}\,,\end{aligned}$$

altså

$$I \le \frac{\pi}{\lambda} \max_{0\le t\le\pi} |f(Re^{it})|\,,$$

som går mod 0 for $R \to \infty$, og sætningen er bevist. □

Bemærkning 7.11. Hvis $w_1, \dots, w_l$ er f's poler i den nedre halvplan og integrationsvejen lægges dér, ses analogt, at når $\max_{\pi\le t\le 2\pi} |f(Re^{it})| \to 0$ for $R \to \infty$ gælder

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x) e^{i\lambda x} dx = -2\pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{Res}(f(z)e^{i\lambda z}, w_j)\,, \quad \text{for} \quad \lambda < 0\,.$$

Eksempel 7.12. Vi vil udregne, at

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x \sin \lambda x}{x^2+1} dx = \pi\ e^{-\lambda} \quad \text{for} \quad \lambda > 0\,.$$

Funktionen $f(z) = z/(z^2+1)$ er meromorf med polerne $z = \pm i$, og $\operatorname{Res}(f(z)e^{i\lambda z}, i)$ er $\frac{1}{2}e^{-\lambda}$. Idet

$$\max_{0\le t\le\pi} |f(Re^{it})| \le \frac{R}{R^2-1} \quad \text{for} \quad R > 1\,,$$

er betingelserne i Sætning 7.10 opfyldt, så

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x\ e^{i\lambda x}}{x^2+1} dx = \pi i\ e^{-\lambda} \quad \text{for} \quad \lambda > 0\,,$$

og tages imaginærdelen, fås det ønskede. (Tages realdelen fås

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x \cos(\lambda x)}{x^2+1}\, dx = 0.$$

Hvorfor er dette klart på forhånd?)

---

[12] Integralet deles i integralet over $[0, \pi/2]$ og $[\pi/2, \pi]$, og det sidste integral omformes under brug af $\sin t = \sin(\pi - t)$.

Eksempel 7.13. Vi vil udregne, at

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x}dx=\pi\,.$$

Lad $f(z)=e^{iz}/z$. Så har f en simpel pol for $z=0$ med residuum 1.

Vi integrerer f rundt langs figuren nedenfor med positiv omløbsretning og får $2\pi i$ af residuesætningen. Den lille halvcirkel med parameterfremstilling

$$c_r(t)=r\,e^{it}\,,\ t\in[-\pi,0]$$

giver bidraget

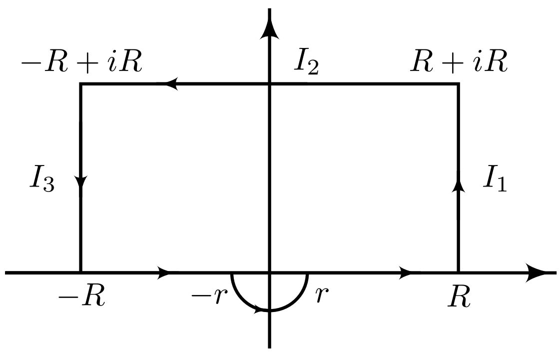
$$\int_{c_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{c_r}\frac{dz}{z}+\int_{c_r}\frac{e^{iz}-1}{z}dz=i\pi+\alpha(r)\,,$$

men da

$$\varphi(z)=\frac{e^{iz}-1}{z}\to i\quad\text{for}\quad z\to 0,$$

(brug f.eks. L'Hospitals regel) findes $r_0>0$ så $|\varphi(z)|\le 2$ for $|z|\le r_0$, hvoraf $|\alpha(r)|\le 2\pi r$ for $r\le r_0$. Dette viser, at $\lim_{r\to 0}\alpha(r)=0$, altså

$$\lim_{r\to 0}\int_{c_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=i\pi\,.$$



Integralet I_1 langs den lodrette side $z=R+it\,,\ t\in[0,R]$ er

$$I_1=\int_0^R\frac{e^{iR-t}}{R+it}i\,dt,$$

så

$$|I_1|\le\int_0^R\frac{e^{-t}}{R}dt\le\frac{1}{R}\int_0^\infty e^{-t}dt=\frac{1}{R}\to 0\ \text{ for }\ R\to\infty\,.$$

Integralet I_2 langs den øverste side $z = -t + iR$, $t \in [-R, R]$ er

$$I_2 = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{-it-R}}{-t+iR} dt$$

så

$$|I_2| \le e^{-R} \int_{-R}^{R} \frac{dt}{R} = 2e^{-R} \to 0 \text{ for } R \to \infty .$$

Integralet I_3 langs den lodrette side $z = -R + i(R-t)$, $t \in [0, R]$ er

$$I_3 = -i \int_0^R \frac{e^{-iR+t-R}}{-R+i(R-t)} dt$$

så

$$|I_3| \le \frac{1}{R} \int_0^R e^{t-R} dt \le \frac{1}{R} \to 0 \text{ for } R \to \infty .$$

Idet

$$I_1 + I_2 + I_3 + \int_{-R}^{-r} + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + i\pi + \alpha(r) = 2\pi i ,$$

får vi ved at tage imaginærdelen og lade $r \to 0$

$$\mathrm{Im}(I_1 + I_2 + I_3) + \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x} dx + \pi = 2\pi.$$

Ved dernæst at lade $R \to \infty$, fås (da $I_j \to 0$ for $j = 1, 2, 3$)

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x} dx = \pi,$$

altså

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi , \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} .$$

Vi bemærker, at det drejer sig om såkaldte uegentlige integraler, idet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty .$$

Dette kan opnås ved sammenligning med den harmoniske række, idet

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \ge \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

Et integral af formen

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)dt$$

kan ofte med fordel omskrives til et kurveintegral

$$\int_{\partial K(0,1)} f\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\, \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)\frac{1}{iz}dz$$

ved at $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, er en parameterfremstilling for cirklen. Kurveintegralet udregnes ved residuesætningen.

Eksempel 7.14. Udregn

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} \quad \text{for} \quad a > 1\,.$$

Vi finder

$$I(a) = \int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{iz(a+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))} = -2i\int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{z^2+2az+1}\,.$$

Nævnerpolynomiet har rødderne $p = -a + \sqrt{a^2-1}\,$, $q = -a - \sqrt{a^2-1}\,$, hvoraf $q < -1 < p < 0$. I området $K(0,1)$ har integranden altså den simple pol $z = p$ med residuet

$$\left[\frac{1}{2z+2a}\right]_{z=p} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\,,$$

hvoraf

$$I(a) = (-2i)(2\pi i)\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

7.4. Evaluering af uendelige rækker.

Lad f være meromorf i $\mathbb{C}$. De meromorfe funktioner

$$f(z)\cot(\pi z), f(z)/\sin(\pi z)$$

har isolerede singulariteter for $z = n \in \mathbb{Z}$ med

$$\mathrm{Res}(f(z)\cot(\pi z), n) = \frac{f(n)}{\pi}$$
$$\mathrm{Res}(f(z)/\sin(\pi z), n) = \frac{(-1)^n f(n)}{\pi}\,,$$

forudsat at f ikke har en pol for $z = n$.

Hvis $f(n) = 0$ er $z = n$ faktisk en hævelig singularitet og residuet er 0. Hvis $z = n$ er en pol for f modificeres residuet.

Lad $\gamma_{m,n}$ betegne en positivt orienteret simpel lukket vej, der omslutter polerne $-m, -m+1, \dots, 0, 1, \dots, n$, hvor $m, n \in \mathbb{N}_0$. For $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ har vi

$$\int_{\gamma_{m,n}} f(z)\cot(\pi z)dz = 2i \sum_{k=-m}^{n} f(k) \tag{1}$$

$$\int_{\gamma_{m,n}} \frac{f(z)}{\sin(\pi z)}dz = 2i \sum_{k=-m}^{n} (-1)^k f(k)\,. \tag{2}$$

Hvis vi kan finde grænseværdien af venstresiderne for $m, n \to \infty$ får vi evalueret summerne

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(k)\,, \quad \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^k f(k)\,.$$

Hvis vi kan finde grænseværdierne for $m = 0$ og $n \to \infty$ får vi tilsvarende evalueret summerne

$$\sum_{0}^{\infty} f(k)\,, \quad \sum_{0}^{\infty}(-1)^k f(k)\,.$$

Hvis f har poler skal højresiderne i (1) og (2) modificeres.

Som lukket vej vælges nu randen af rektanglet

$$F_{m,n} = \{z = x + iy \mid -\left(m + \frac{1}{2}\right) \le x \le n + \frac{1}{2}\,,\ |y| \le n + m\}\,,\ n, m \ge 1\,.$$

Idet (jf. opg. 1.12)

$$\sin(\pi z) = \sin(\pi x)\cosh(\pi y) + i\cos(\pi x)\sinh(\pi y)$$

finder vi følgende vurdering på de lodrette sider af $F_{m,n}$

$$|\sin(\pi z)| = \cosh(\pi y) = \frac{1}{2}\left(e^{\pi y} + e^{-\pi y}\right) \ge \frac{1}{2}e^{\pi|y|}$$

altså

$$\frac{1}{|\sin(\pi z)|} \le 2e^{-\pi|y|} \le 2\,. \tag{3}$$

På de vandrette sider $y = \pm(n + m)$ af $F_{m,n}$ har vi

$$\begin{aligned}
|\sin(\pi z)|^2 &= \sin^2(\pi x)\cosh^2(\pi y) + \cos^2(\pi x)\sinh^2(\pi y)\\
&= \sin^2(\pi x)(1 + \sinh^2(\pi y)) + \cos^2(\pi x)\sinh^2(\pi y)\\
&= \sin^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y)\\
&\ge \sinh^2(\pi y) = \sinh^2(\pi(n + m))
\end{aligned}$$

altså

$$\frac{1}{|\sin(\pi z)|} \le \frac{1}{\sinh(\pi(n+m))} \le \frac{1}{\sinh(2\pi)}\,. \tag{4}$$

Eksempel 7.15. Lad $f(z) = 1/z^2$. Funktionen $1/(z^2 \sin(\pi z))$ har en pol af tredie orden for $z = 0$ med residuet $\pi/6$ (se nedenfor), medens $z = k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ er en simpel pol med residuet $(-1)^k/(\pi k^2)$. Vi har altså

$$\int_{\partial F_{m,n}} \frac{dz}{z^2 \sin(\pi z)} = 2\pi i \frac{\pi}{6} + 2i \sum_{\substack{k=-m \\ k\neq 0}}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}\,. \tag{5}$$

Da $(-1)^k/k^2$ har samme værdi for $\pm\, k$, $k \in \mathbb{N}$, sætter vi $m = n$ og vi udnytter, at $|z| > n$ for $z \in \partial F_{n,n}$ og at længden af rektanglet er

$$L(\partial F_{n,n}) = 2(2n+1) + 8n = 12n + 2\,.$$

Af (3) og (4) ses, at

$$\frac{1}{|\sin(\pi z)|} \le 2 \quad \text{for} \quad z \in \partial F_{n,n}\,,$$

så Estimationslemmaet 2.8 giver

$$\Big| \int_{\partial F_{n,n}} \frac{dz}{z^2 \sin(\pi z)} \Big| \le \frac{2}{n^2}(12n+2) \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty\,,$$

og vi slutter af (5) at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}\,. \tag{6}$$

Beregning af $\mathrm{Res}(1/(z^2 \sin(\pi z)), 0)$.

Vi udregner de første led af potensrækken for $\frac{z}{\sin z}$. Da det er en lige funktion med værdi 1 i den hævelige singularitet $z = 0$ har vi

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + k_1 z^2 + k_2 z^4 + \cdots\,.$$

Ganger vi denne potensrække med den kendte potensrække

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{5!} - + \cdots$$

fås

$$1 = 1 + \left(k_1 - \frac{1}{6}\right) z^2 + \left(k_2 - \frac{k_1}{6} + \frac{1}{5!}\right) z^4 + \cdots$$

altså $k_1 - \frac{1}{6} = 0$, $k_2 - \frac{k_1}{6} + \frac{1}{5!} = 0, \ldots$, specielt $k_1 = \frac{1}{6}$, $k_2 = \frac{7}{360}$.

Heraf fås

$$\frac{1}{z^2 \sin(\pi z)} = \frac{1}{\pi z^3}\left(1 + \frac{\pi^2}{6} z^2 + k_2 \pi^4 z^4 + \cdots\right),$$

og heraf aflæses residuet til $\frac{\pi}{6}$.

Som en sidste anvendelse af residuesætningen vil vi bestemme Eulers *partialbrøk fremstilling* for $1/\sin z$.

Sætning 7.16. *For $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ gælder*

$$\frac{1}{\sin z} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^p}{z - p\pi} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{z^2 - p^2\pi^2},$$

i den forstand, at

$$\sum_{p=-m}^{n} \frac{(-1)^p}{z - p\pi} \to \frac{1}{\sin z} \quad \textit{for} \quad n, m \to \infty,$$

uniformt for z i enhver begrænset delmængde af $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Bevis. For $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ betragtes $f(z) = 1/(z-a)$, så

$$\frac{1}{(z-a)\sin(\pi z)},$$

har simple poler for $z = a$ og $z = k \in \mathbb{Z}$ med residuerne

$$\frac{1}{\sin(\pi a)} \quad \text{og} \quad \frac{(-1)^k}{\pi(k-a)}.$$

Vi integrerer langs randen af rektanglet $F_{m,n}$ ovenfor, hvor $m, n \in \mathbb{N}$ vælges så store, at a er indre punkt i $F_{m,n}$. Vi har da

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F_{m,n}} \frac{dz}{(z-a)\sin(\pi z)} = \frac{1}{\sin(\pi a)} - \sum_{k=-m}^{n} \frac{(-1)^k}{\pi(a-k)},$$

og vi vil godtgøre at $I \to 0$ for $n, m \to \infty$, uniformt for a tilhørende en begrænset delmængde af $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Af (3) og (4) fås

$$|I| \le \frac{1}{2\pi} \sup\left\{ \frac{1}{|z-a|} \;\Big|\; z \in \partial F_{m,n} \right\} \Big(4 \int_{-(n+m)}^{n+m} e^{-\pi|y|} dy + 2 \frac{n+m+1}{\sinh \pi(n+m)}\Big),$$

men idet

$$4\int\limits_{-(n+m)}^{n+m} e^{-\pi|y|}dy = 8\int\limits_{0}^{n+m} e^{-\pi y}dy \leq \frac{8}{\pi} \quad \text{og} \quad \sup\left\{\frac{x+1}{\sinh(\pi x)} \mid x \geq 2\right\} < \infty,$$

findes en konstant K, der ikke afhænger af n og m, så

$$|I| \leq K \sup\Big\{ \frac{1}{|z-a|} \;\Big|\; z \in \partial F_{m,n} \Big\}.$$

Når a tilhører en begrænset delmængde $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ med $\overline{A} \subseteq F_{m,n}$, kan vi under benyttelse af afstand mellem mængder opnå (jf. Appendix A.1)

$$|I| \leq \frac{K}{d(\overline{A}, \partial F_{m,n})},$$

hvilket viser det ønskede.

Altså har vi

$$\frac{1}{\sin(\pi a)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(a-k)},$$

og erstattes a med $\frac{z}{\pi}$ fås den ønskede formel. □

Opgaver til §7

7.1. Find polerne, deres orden og de tilhørende residuer for

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}, \quad f(z) = \frac{1}{z(z+1)^3}, \quad f(z) = \frac{1}{e^{z^2}-1}.$$

7.2. (Opgaven bygger på opg. 6.3.) Lad $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ være en meromorf funktion med polmængde P.

1° Vis, at den spejlede funktion $h^* : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ defineret ved

$$h^*(z) = \begin{cases} \overline{h(\bar{z})}, & \text{for } z \notin P^* \\ \infty, & \text{for } z \in P^* \end{cases}$$

er en meromorf funktion med polmængde $P^* = \{p | \bar{p} \in P\}$.

2° Hvis a er en pol af orden m for h med den principale del

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{(z-a)^j} \,,$$

så er $\bar{a}$ en pol for h^* af samme orden og med principal del

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\overline{c_j}}{(z-\bar{a})^j},$$

og specielt er $\operatorname{Res}(h^*, \bar{a}) = \overline{\operatorname{Res}(h, a)}$ for $a \in P$.

3° Vis, at $\mathbb{C} \setminus (P \cup P^*)$ er et spejlingsinvariant område (her bruges opg. 5.15).

4° Vis, at $h(\mathbb{R} \setminus P) \subseteq \mathbb{R}$ hvis og kun hvis $P = P^*$ og $h = h^*$.

7.3. Lad $f, g \in \mathcal{H}(G)$ og antag, at f har et nulpunkt af orden $n > 0$ i $a \in G$, og at g har et nulpunkt af orden $n+1$ i a. Vis, at

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = (n+1) \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n+1)}(a)} \,.$$

7.4. Lad $h : G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ være meromorf i det enkeltsammenhængende område G, og lad $\varphi \in \mathcal{H}(G)$. Lad γ være en positivt orienteret simpel lukket vej i G, der ikke går gennem nogen af h's nulpunkter og poler, og antag, at γ omslutter nulpunkterne $a_1, \dots, a_p$ og polerne $b_1, \dots, b_q$ for h, hver angivet så ofte som ordenen angiver. Vis, at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\varphi(z)dz = \sum_{j=1}^{p}\varphi(a_j) - \sum_{j=1}^{q}\varphi(b_j)\,.$$

7.5. Vis, at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(0,n+\frac{1}{2})} z^{2k}\cot(\pi z)dz = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n} j^{2k}.$$

for $n, k \in \mathbb{N}$.

7.6. Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,, \qquad \int_0^{\infty}\frac{xdx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4}\,.$$

7.7. Udregn, at $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \frac{\pi}{3}.$

7.8. Udregn, at $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi x}}{x^2-2x+2}dx = -\pi e^{-\pi}.$

7.9. Vis, at $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{a+\cos x}dx = 2\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)$ for $a > 1$.

7.10. Vis, at

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n\sin\frac{p\pi}{2n}}, \qquad p, n \in \mathbb{N}, 1 \le p < 2n.$$

Vink. Integrer langs randen af et cirkeludsnit $z = |z|e^{i\theta}\,,\ |z| \le R\,,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{n}$).

7.11. Udregn, at

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)} \quad \text{for} \quad 0 < a < 1\,.$$

Vink. Integrer langs randen af et rektangel med vinkelspidser i punkterne $z = \pm R\,,\ z = \pm R + 2\pi i$.

7.12. Vis, at

$$\int_0^\infty x^{4n+3} e^{-x} \sin x \; dx = 0 \;\text{ for }\; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Vink. Integrer $f(z) = z^{4n+3} e^{-z}$ langs randen af cirkeludsnittet $z = |z|e^{i\theta}$, $0 \le |z| \le R$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$.

Vis, at

$$\int_0^\infty t^n e^{-\sqrt[4]{t}} \sin \sqrt[4]{t} \; dt = 0 \,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

(For hvert $c \in [-1, 1]$ betragtes Borel målet μ_c på $[0, \infty[$ med tæthedsfunktionen $(1 + c \sin \sqrt[4]{t}) e^{-\sqrt[4]{t}}$ med hensyn til Lebesgue målet. Formlen viser, at alle målene μ_c har de samme momenter. Dette er Stieltjes' eksempel på et *indetermineret* momentproblem.)

7.13. Vis, at

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\lambda x}}{1 + x^2} dx = \pi e^{-|\lambda|} \,, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \,.$$

7.14. Vis, at

$$|\cot z|^2 = \frac{\cos^2 x + \sinh^2 y}{\sin^2 x + \sinh^2 y} \;\text{ for }\; z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

og slut, at $|\cot(\pi z)| < 2$ for $z \in \partial F_{n,n}$ med betegnelsen fra §7.4.

Vis, at

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{2p}} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^{2p}}, 0 \right) \quad p \in \mathbb{N} \,.$$

Udregn højresiden ved hjælp af opgave 6.13 og find dermed Eulers formel

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{2p}} = (-1)^{p+1} \frac{B_{2p}}{(2p)!} 2^{2p-1} \pi^{2p} \,.$$

7.15. Lad $f \in \mathcal{H}(G)$ være ikke konstant i området G, og lad $f(z_0) = w_0$. Vis, at der findes $r > 0$ så $\overline{K(z_0, r)} \subseteq G$, og så

(i) $f(z) \neq w_0$ for $z \in \overline{K(z_0, r)} \setminus \{z_0\}$.
(ii) $f'(z) \neq 0$ for $z \in \overline{K(z_0, r)} \setminus \{z_0\}$.

Antag, at nulpunktet z_0 for $f(z) - w_0$ har orden $k \geq 2$.

Som i beviset for Sætning 7.6 sættes $\Gamma(t) = f(z_0 + re^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, og $\rho > 0$ vælges så $K(w_0, \rho) \cap \Gamma^* = \varnothing$.

Vis, at for hvert $w \in K(w_0, \rho)$ har $f(z) - w$ ialt k *simple* nulpunkter i $K(z_0, r)$.

Gør rede for, at følgende sætning er bevist:

Lad $f \in \mathcal{H}(G)$ være injektiv på området G. Så er $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in G$.

(*Kommentar.* Sætning 7.6 giver også, at $f(G)$ er åben og $f : G \to f(G)$ er en åben afbildning. Dermed er f^{-1} kontinuert. I henhold til Bemærkning 1.5 er det herefter let at se, at f^{-1} er holomorf.)

7.16. Lad f være holomorf i området G. Lad $z_0 \in G$ med $f(z_0) = w_0$ og antag $f'(z_0) \neq 0$.

Vis, at der findes en åben omegn $\mathcal{U}$ af z_0, $z_0 \in \mathcal{U} \subseteq G$ og et $\rho > 0$, så f afbilder $\mathcal{U}$ bijektivt på $K(w_0, \rho)$.

Vink. Udnyt beviset fra Sætning 7.6.

7.17. Lad f være holomorf men ikke konstant i området G. Lad $z_0 \in G$ med $f(z_0) = w_0$ og antag, at $f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ for $k \geq 1$. Vis, at der findes en åben omegn $\mathcal{U}$ af z_0, $z_0 \in \mathcal{U} \subseteq G$ og en holomorf funktion $h : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ med $h'(z_0) \neq 0$ så

$$f(z) = w_0 + (h(z))^k \quad \text{for} \quad z \in \mathcal{U}\,.$$

Vink. Udnyt at

$$f(z) = w_0 + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = w_0 + (z - z_0)^k f_1(z)$$

for $|z - z_0| < r$ med r tilpas lille, og $f_1 \in \mathcal{H}(K(z_0, r))$ med $f_1(z_0) \neq 0$.

Vis, at to differentiable kurver, der skærer hinanden i z_0 under vinklen α afbildes ved f i to kurver der skærer hinanden i w_0 under vinklen $k\alpha$.

Vink. Sammenlign med §1.2.

7.18. Lad $a \in \mathbb{C}$ opfylde $|a| > e$ og lad $n \in \mathbb{N}$. Vis, at $g(z) = az^n - e^z$ har præcis n forskellige nulpunkter i $K(0, 1)$.

Vink. Brug Rouchés sætning med $f(z) = az^n$.

7.19. Betragt polynomiet $p(z) = z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$.

(i) Vis, at p har 7 nulpunkter i $|z| < 2$.

(ii) Vis, at p har 4 nulpunkter i $|z| < 1$.

(iii) Vis, at p ikke har nogen nulpunkter på $|z| = 1$ og slut, at p har 3 nulpunkter i ringområdet $1 < |z| < 2$.

§8. Maksimumprincippet

I denne paragraf vises to versioner af maksimumprincippet: en lokal og en global. Den sidste udnyttes til beviset for Schwarz' lemma, som kan benyttes til en fuldstændig beskrivelse af automorfigruppen af bijektive holomorfe funktioner $f : K(0,1) \to K(0,1)$.

Sætning 8.1. Maksimumprincippet. Lokal version. *Lad $f : G \to \mathbb{C}$ være en ikke konstant holomorf funktion i et område G.*

Så har $|f|$ ikke lokalt maksimum i noget punkt a i G.

Bevis. Antag, at $|f|$ har lokalt maksimum i et punkt af G, altså at der findes $a \in G$ og et $r > 0$ så $K(a,r) \subseteq G$, og så

$$|f(z)| \le |f(a)| \text{ for } z \in K(a,r)\,. \tag{1}$$

Vi skal så vise, at f må være konstant.

Ifølge Cauchys integralformel gælder

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(a,s)} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

for $0 < s < r$. Indsættes parameterfremstillingen $z = a + se^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ fås

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + se^{i\theta}) d\theta\,,$$

hvoraf

$$|f(a)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + se^{i\theta})| d\theta\,. \tag{2}$$

Ifølge (1) har vi

$$|f(a + se^{i\theta})| \le |f(a)|$$

for $0 < s < r$, $\theta \in [0, 2\pi]$, altså

$$0 \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(a)| - |f(a + se^{i\theta})|) d\theta = |f(a)| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + se^{i\theta})| d\theta \le 0\,,$$

idet det sidste ulighedstegn følger af (2). Den kontinuerte ikke-negative funktion

$$\phi_s(\theta) = |f(a)| - |f(a + se^{i\theta})|$$

har altså integral 0 over intervallet $[0, 2\pi]$ og må derfor være identisk lig med 0. Dette viser, at

$$|f(a + se^{i\theta})| = |f(a)|\,, \quad 0 < s < r\,,\, \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

altså $|f|$ er konstant i $K(a,r)$. Ifølge opgave 1.7 er f selv konstant i $K(a,r)$, men ifølge identitetssætningen må f være konstant i G. $\square$

Sætning 8.2. Maksimumprincippet. Global version. *Lad G være et begrænset område i $\mathbb{C}$ og antag, at $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ er kontinuert, samt at f er holomorf i G.*

Størsteværdien

$$M = \sup\{|f(z)| \mid z \in \overline{G}\}$$

antages i et punkt på randen af G, men ikke i noget punkt af G med mindre f er konstant på G.

Bevis. Ifølge Sætning A.3 er billedet $|f|(\overline{G})$ afsluttet og begrænset, og derfor findes $z_0 \in \overline{G}$ så

$$|f(z_0)| = \sup\{|f(z)| \mid z \in \overline{G}\} = M\,.$$

Antag først, at f ikke er konstant. Så må $z_0 \in \partial G$, thi antages at $z_0 \in G$, så har $|f|$ specielt lokalt maksimum i z_0, hvilket strider mod Sætning 8.1, da f ikke er konstant i G. Hvis f er konstant $(= \lambda)$ i G, så er $f^{-1}(\{\lambda\})$ afsluttet i $\overline{G}$ og indeholder G, altså $f^{-1}(\{\lambda\}) = \overline{G}$, og størsteværdien $|\lambda|$ antages i alle punkter af $\overline{G}$ specielt på randen af G. □

For en holomorf funktion $f : K(0,\rho) \to \mathbb{C}$, hvor $0 < \rho \leq \infty$ indføres *maksimum modulen* $m_f : [0,\rho[\to [0,\infty[$ ved

$$m_f(r) = \max\{|f(z)| \mid |z| = r\}\,, \quad 0 \leq r < \rho\,. \tag{3}$$

Da

$$m_f(r) = \max\{|f(z)| \mid |z| \leq r\}$$

ifølge Sætning 8.2, er m_f en voksende funktion, endda *strengt voksende* med mindre f er konstant.

Specielt for hele funktioner f $(\rho = \infty)$ spiller funktionen m_f en stor rolle.

Som en anvendelse af maksimumprincippet vil vi bevise et nyttigt resultat af den tyske matematiker H.A. Schwarz (1843-1921).

Sætning 8.3. Schwarz' lemma. *Lad $f : K(0,1) \to K(0,1)$ være holomorf med $f(0) = 0$.*

Så gælder

(i) $|f(z)| \leq |z|$, $|z| < 1$.
(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

Hvis der gælder lighedstegn i (i) eller (ii) så findes $\lambda \in \mathbb{C}$ med $|\lambda| = 1$, så f har formen $f(z) = \lambda z$. (Afbildningen f er altså en drejning vinklen $\arg(\lambda)$ *omkring* 0*).*

Bevis. Funktionen $f(z)/z$ er holomorf i $K'(0,1)$ med en hævelig singularitet for $z=0$, idet

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}=f'(0)$$

eksisterer (da $f(0)=0$). Funktionen

$$g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{z}\,, & 0<|z|<1\\ f'(0)\,, & z=0\end{cases}$$

er altså holomorf i $K(0,1)$. For $z\in K(0,1)$ og $|z|\le r<1$ giver maksimumprincippet i global form for g

$$|g(z)|\le \max\left\{\left|\frac{f(z)}{z}\right|\;\middle|\;|z|=r\right\}\le\frac{1}{r}\,,$$

da $|f(z)|<1$ for alle $z\in K(0,1)$. Da $r\in[|z|,1[$ er vilkårlig fås $|g(z)|\le 1$ for $|z|<1$, specielt

$$|f(z)|\le|z|\quad\text{og}\quad|f'(0)|\le 1\,.$$

Hvis der gælder lighedstegn i en af disse uligheder har $|g|$ et lokalt maksimum i $K(0,1)$, og følgelig er g konstant lig med $\lambda\in\mathbb{C}$, som nødvendigvis må opfylde $|\lambda|=1$. $\square$

Til $z_0\in K(0,1)$ betragtes den rationale funktion

$$f_{z_0}(z)=\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\,,\tag{4}$$

som er holomorf for $z\ne 1/\overline{z}_0$, specielt i $K(0,\rho)$ med $\rho=|1/\overline{z}_0|>1$. På enhedscirklen har vi

$$f_{z_0}(e^{i\theta})=\frac{e^{i\theta}-z_0}{1-\overline{z}_0e^{i\theta}}=\frac{1}{e^{i\theta}}\,\frac{e^{i\theta}-z_0}{e^{-i\theta}-\overline{z}_0}$$

altså

$$\left|f_{z_0}(e^{i\theta})\right|=1\,,$$

idet $|e^{i\theta}-z_0|=|e^{-i\theta}-\overline{z}_0|$. Dette viser, at

$$\max_{|z|\le 1}|f_{z_0}(z)|=1\,,$$

men da f_{z_0} ikke er konstant, antages maksimum ikke i $K(0,1)$, altså f_{z_0} afbilder $K(0,1)$ ind i $K(0,1)$.

Dermed har vi vist det væsentlige af følgende

Sætning 8.4. *For $z_0 \in K(0,1)$ er f_{z_0} givet ved (4) en bijektiv holomorf funktion af $K(0,1)$ på sig selv. Den omvendte afbildning er f_{-z_0}.*

Bevis. Vi skal blot vise, at $f_{z_0}^{-1} = f_{-z_0}$. Ligningen

$$\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z} = \omega$$

har den entydige løsning

$$z = \frac{\omega + z_0}{1 + \overline{z}_0 \omega} = f_{-z_0}(\omega)\,,$$

og for $\omega \in K(0,1)$ vil $f_{-z_0}(\omega) \in K(0,1)$. □

For et område $G \subseteq \mathbb{C}$ betegner $\mathrm{Aut}(G)$ mængden af bijektive holomorfe funktioner $f : G \to G$. Ifølge Sætning 1.4 vil også den inverse afbildning f^{-1} tilhøre $\mathrm{Aut}(G)$. Ved sammensætning af afbildninger bliver $\mathrm{Aut}(G)$ en undergruppe af gruppen af bijektive afbildninger af G på sig selv. Den kaldes automorfigruppen for G. Ved hjælp af Schwarz' lemma viser man, at

$$\mathrm{Aut}(K(0,1)) = \{\lambda f_{z_0} \mid |\lambda| = 1, |z_0| < 1\}\,, \tag{5}$$

jf. opg. 8.4.

Opgaver til §8

8.1. Lad $f : G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være en ikke konstant holomorf funktion i området G. Vis, at $|f|$ ikke har lokalt minimum i noget punkt $a \in G$.

8.2. Lad $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ og lad G være et begrænset område i $\mathbb{C}$. Antag at

a) $|f(z)| \geq 1$ for $z \in \partial G$.
2) $\exists z_0 \in G : |f(z_0)| < 1$.

Vis, at f har et nulpunkt i G.

8.3. Lad R betegne rektanglet

$$R = \{z = x + iy \mid 0 \leq x \leq 2\pi\,,\ 0 \leq y \leq 1\}\,.$$

Find $M = \sup\{|\sin(z)| \mid z \in R\}$ og angiv de punkter $z_0 \in R$, så $|\sin(z_0)| = M$.

8.4. Vis følgende udsagn om $\mathrm{Aut}(K(0,1))$:

(i) Hvis $f \in \mathrm{Aut}(K(0,1))$ opfylder $f(0) = 0$, så er $f(z) = \lambda z$ med $|\lambda| = 1$.

Vink. Brug Schwarz' lemma på f og på f^{-1}.

(ii) Hvis $f \in \mathrm{Aut}(K(0,1))$ findes $z_0 \in K(0,1)$ og λ med $|\lambda| = 1$ så

$$f(z) = \lambda f_{z_0}\,.$$

Vink. Lad $z_0 \in K(0,1)$ være fastlagt ved $f(z_0) = 0$. Anvend (i) på $f_{z_0} \circ f^{-1} \in \mathrm{Aut}(K(0,1))$.

8.5. Bevis den lokale version af maksimumprincippet ved hjælp af Sætning 7.6.

8.6

§A. Appendix

Forskellige topologiske resultater

Lemma A.1. *Lad $K, F \subseteq \mathbb{C}$ være to ikke tomme afsluttede og disjunkte mængder, og antag desuden at K er begrænset. Så er afstanden*

$$d(K,F) := \inf\{|x-y| \mid x \in K, y \in F\} > 0\,,$$

og der findes punkter $x' \in K$, $y' \in F$ med $|x'-y'| = d(K,F)$.

Bevis. Da $d(K,F)$ er den største nedre grænse for talmængden $\{|x-y| \mid x \in K, y \in F\}$, er $d(K,F) + \frac{1}{n}$ ikke nogen nedre gænse, og vi kan vælge $x_n \in K$, $y_n \in F$ opfyldende

$$d(K,F) \leq |x_n - y_n| < d(K,F) + \frac{1}{n}\,. \tag{1}$$

Da K er begrænset findes $R > 0$ så $|x| \leq R$ for alle $x \in K$. Vi kan nu se, at følgen (y_n) er begrænset, idet

$$|y_n| = |y_n - x_n + x_n| \leq |y_n - x_n| + |x_n| < d(K,F) + \frac{1}{n} + R \leq d(K,F) + 1 + R\,.$$

Da såvel (x_n) som (y_n) er begrænset, har følgen $(x_n, y_n) \in \mathbb{C}^2 \approx \mathbb{R}^4$ en konvergent delfølge (x_{n_p}, y_{n_p}) med grænseværdi $(x', y') \in \mathbb{C}^2$. Da både K og F er afsluttede må $x' \in K$, $y' \in F$, og da $(x,y) \mapsto |x-y|$ er kontinuert fra $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ finder vi

$$|x_{n_p} - y_{n_p}| \to |x' - y'|\,,$$

som sammen med (1) giver

$$d(K,F) = |x' - y'|\,.$$

Dette tal må være > 0, for ellers var $x' = y'$, som altså er et punkt i $K \cap F$ i strid med antagelsen $K \cap F = \emptyset$. □

Bemærkning A.2. To afsluttede ubegrænsede disjunkte delmængder af $\mathbb{C}$ kan have afstand 0. Et simpelt eksempel er $F_1 = \mathbb{R}$, $F_2 = \{x + \frac{i}{x} \mid x > 0\}$, altså en hyperbelgren med x-aksen som asymptote.

Sætning A.3. *Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være afsluttet og begrænset og lad $f : A \to \mathbb{R}^l$ være kontinuert. Så er billedmængden $f(A)$ afsluttet og begrænset i $\mathbb{R}^l$.*

Bevis. For at se, at $f(A)$ er afsluttet betragtes en følge $x^{(n)}$ fra A så $f(x^{(n)}) \to b$. Vi skal se at $b \in f(A)$. Ifølge Bolzano-Weierstrass' sætning findes $a \in A$ og en delfølge $x^{(n_p)}$ af $x^{(n)}$ så $x^{(n_p)} \to a$. Da f er kontinuert vil $f(x^{(n_p)}) \to f(a)$, men da enhver delfølge af $f(x^{(n)})$ også går mod b, ser vi at $f(a) = b$, altså $b \in f(A)$.

Antag, at $f(A)$ er ubegrænset. For hvert $n \in \mathbb{N}$ findes så $x^{(n)} \in A$ med $\|f(x^{(n)})\| \geq n$. Som før findes $a \in A$ med $x^{(n_p)} \to a$ og altså $f(x^{(n_p)}) \to f(a)$ på grund af f's kontinuitet. Da $\|\cdot\|$ er kontinuert sluttes $\|f(x^{(n_p)})\| \to \|f(a)\|$, men det strider mod at $\|f(x^{(n_p)})\| \geq n_p \to \infty$. □

For en afsluttet ikke tom delmængde F af $\mathbb{C}$ defineres $d_F : \mathbb{C} \to [0, \infty[$ ved

$$d_F(z) = \inf\{|z - a| \mid a \in F\}\,, \tag{2}$$

som er afstanden fra z til F.

Sætning A.4. *Afstanden er en kontinuert funktion $d_F : \mathbb{C} \to [0, \infty[$ som opfylder*

$$\forall z \in \mathbb{C} : d_F(z) = 0 \iff z \in F\,.$$

Bevis. For $z \in F$ er $d_F(z) \leq |z - z| = 0$. For $z \notin F$ er $d_F(z) = d(\{z\}, F) > 0$ ifølge Lemma A.1.

For $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $a \in F$ har vi ifølge trekantsuligheden

$$d_F(z_1) \leq |z_1 - a| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - a|\,,$$

hvilket viser, at $d_F(z_1) - |z_1 - z_2|$ er en nedre grænse for tallene $|z_2 - a|$, $a \in F$. Altså har vi

$$d_F(z_1) - |z_1 - z_2| \leq d_F(z_2)$$

eller

$$d_F(z_1) - d_F(z_2) \leq |z_1 - z_2|\,.$$

Af symmetrigrunde kan vi ombytte z_1 og z_2, og får dermed

$$|d_F(z_1) - d_F(z_2)| \leq |z_1 - z_2|\,,$$

som viser, at d_F er kontinuert (endda afstandsformindskende). □

Sætning A.5. *Til enhver åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$ findes en stigende følge $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ af afsluttede begrænsede delmængder af G med foreningsmængde G.*

Bevis. Hvis $G = \mathbb{C}$ kan vi sætte $K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq n\}$. Hvis $G \neq \mathbb{C}$ betragtes afstandsfunktionen $d = d_{\mathbb{C}\setminus G}$, jf. (2) med $F = \mathbb{C} \setminus G$, og vi sætter

$$F_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid d(z) \geq \frac{1}{n} \right\} = d^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, \infty \right[\right).$$

Da d er kontinuert er F_n afsluttet. Da $d(z) > 0$ for $z \in F_n$ må $F_n \subseteq G$. Mængderne

$$K_n = F_n \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq n\}$$

udgør en stigende følge af afsluttede og begrænsede delmængder af G. Et vilkårligt $z \in G$ må tilhøre K_n for n tilstrækkelig stor fordi $d(z) > 0$. □

Bemærkning A.6. I A.1, A.2, A.4, A.5 kan $\mathbb{C}$ erstattes af $\mathbb{R}^k$ for vilkårligt k.

Definition A.7. En mængde M kaldes *tællelig*, hvis der findes en injektiv afbildning $f : M \to \mathbb{N}$.

En mængde kaldes *overtællelig*, hvis den ikke er tællelig.

For at M er tællelig skal man altså være i stand til at give hvert af M's elementer et nummer, så forskellige elementer i M har forskellige numre. Det er det vi gør, når vi tæller. Endelige mængder er tællelige, og per definition er $\mathbb{N}$ en uendelig tællelig mængde.

Sætning A.8. *Mængderne $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ er tællelige og mængden $[0,1]$*[13] *er overtællelig.*

Bevis. At $\mathbb{Z}$ er tællelig følger af opskrivningen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$. En konkret injektiv afbildning $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ svarende til opskrivningen er defineret ved $f(0) = 1, f(n) = 2n$ for $n = 1, 2, \dots, f(n) = 2|n|+1$ for $n = -1, -2, \dots$.

Vi nøjes med at vise, at $\mathbb{Q}_+$ er tællelig, hvorefter du selv skal overbevise dig om, at også $\mathbb{Q}$ er tællelig. I det efterfølgende skema står alle positive rationale tal. De står der endda allesammen uendeligt mange gange.

[13] Det samme gælder om ethvert interval bestående af mere end et tal.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/2 & 2/2 & 3/2 & 4/2 & 5/2 \\ 1/3 & 2/3 & 3/3 & 4/3 & 5/3 \\ 1/4 & 2/4 & 3/4 & 4/4 & 5/4 \\ 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & 5/5 \end{array}$$

Den injektive afbildning $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$ defineres nu på følgende måde. Man tæller diagonalt ved at følge pilene, men hvis tallet allerede er talt med, så overspringes det. Altså

$$f(1) = 1, f(\frac{1}{2}) = 2, f(2) = 3, f(\frac{1}{3}) = 4, f(3) = 5, f(\frac{1}{4}) = 6,$$
$$f(\frac{2}{3}) = 7, f(\frac{3}{2}) = 8, f(4) = 9, f(\frac{1}{5}) = 10, f(5) = 11, \dots .$$

Dernæst gengiver vi Cantors geniale bevis for, at $[0, 1]$ er overtællelig. Hvert tal i $[0, 1]$ kan skrives som en uendelig decimalbrøk $0, a_1 a_2 \dots$, hvor $a_1, a_2 \dots \in \{0, 1, 2, \dots , 9\}$. Hvis $[0, 1]$ var tællelig, kunne vi opstille alle tallene fra $[0, 1]$ som en følge af uendelige decimalbrøker

$$\begin{array}{l} 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\ 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\ 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots \\ \dots \end{array}$$

Det er imidlertid let at opskrive en uendelig decimalbrøk fra $[0, 1]$, der ikke står i listen, nemlig $0, b_1 b_2 \dots$, hvor vi for hvert n vælger b_n blandt cifrene $\{0, 1, 2, \dots , 9\}$ så $|b_n - a_{nn}| \geq 2$. Dette sikrer nemlig, at tallet er forskellig fra det n'te tal i listen for hvert n. □

Sætning A.9. *Lad $A_1, A_2, \dots$ være en følge af tællelige mængder. Så er $M = \cup_1^\infty A_n$ tællelig.*

Lav selv et bevis ved at efterligne beviset for, at $\mathbb{Q}_+$ er tællelig.

Sætning A.10. *Lad $A \subseteq \mathbb{C}$ være kurvesammenhængende og lad $f : A \to \mathbb{C}$ være kontinuert. Så er billedmængden $f(A)$ kurvesammenhængende.*

Bevis. To vilkårlige punkter i $f(A)$ har formen $f(P), f(Q)$, hvor $P, Q \in A$. Hvis $\gamma : [0, 1] \to A$ betegner en kontinuert kurve i A fra P til Q, så er den sammensatte funktion $f \circ \gamma$ en kontinuert kurve i $f(A)$ fra $f(P)$ til $f(Q)$. □

Litteraturliste

Der findes et stort antal elementære lærebøger i kompleks funktionsteori, og listen nedenfor giver et udpluk af, hvad der findes på Institutets bibliotek. Derudover findes en række forskningsmonografier, der behandler forskellige specielle emner fra kompleks analyse.

Udførligere information fås ved søgning i bibliotekets database.

Bak, Joseph; Newman, Donald: *Complex analysis*, 1997.

Berenstein, Carlos A.; Gay, Roger: *Comples variables. An introduction*, 1991.

Churchill, Ruel V.; Brown, James W.; Verhey, Roger, F.: *Complex variables and applications*, 1974.

Conway, John B.: *Functions of one complex variable*, 1973.

Conway, John B.: *Functions of one complex variable* II, 1995.

Forster, Otto: *Lectures on Riemann surfaces*, 1981.

Hayman, W.K.: *Multivalent functions*, 1958.

Hille, Einar: *Analytic function theory*, Volume I, 1959.

Hille, Einar: *Analytic function theory*, Volume II, 1962.

Jameson, G.J.O.: *A first course on complex functions*, 1970.

Kodaira, Kunihiko: *Introduction to complex analysis*, 1984.

Lang, Serge: *Complex analysis*, 1999.

Littlewood, J.E.: *Lectures on the theory of functions*, 1944.

Marsden, Jerrold E.: *Basic complex analysis*, 1973.

Mejlbro, Leif: *Opgaver til kompleks funktionsteori*, 1985.

Mejlbro, Leif: *Kompleks funktionsteori*, 1985.

Narasimhan, Raghavan: *Complex analysis in one variable*, 1985.

Remmert, Reinhold: *Classical topics in complex function theory*, 1998.

Rudin, Walter: *Real and complex analysis*, 1987.

Stewart, Ian; Tall, David: *Complex Analysis*, 1983.

SYMBOLLISTE

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ De naturlige tal
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ De naturlige tal og 0
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ De hele tal
$\mathbb{Q}$ De rationale tal
$\mathbb{R}$ De reelle tal
$\mathbb{C}$ De komplekse tal

INDEX