Matematik 2 AN

Matematisk Analyse

Metriske rum

Christian Berg

1997

Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

Forord

Nærværende notehæfte er oprindelig skrevet i 1990 til kurset Matematik 2MA, pånær visse ændringer foretaget af undertegnede med henblik på at tilpasse indholdet til det nuværende Matematik 1. Disse ændringer er i det væsentlige følgende. I §6 er der indført en mere udførlig omtale af delfølger samt en omformulering af beviset for Sætning 6.5. Den oprindelige §7 om sammenhæng er udeladt. I den nye §7, som er baseret på den oprindelige §8, er Picard's fixpunktssætning udeladt, og beviserne for eksistens- og entydighedssætningerne omformuleret, så de kun udnytter Banach's fixpunktssætning. I tilfælde af en lokal Lipschitz betingelse gennemføres beviset ikke i fuld generalitet. Til gengæld er der indført et nyt afsnit om højere ordens differentialligninger.

København, juli 1997

Bergfinnur Durhuus

Matematik 2 AN
Matematisk Analyse

1997

INDHOLD

Metriske rum

Metriske rum

Introduktion.

Metriske rum er en generel ramme for studiet af grænseovergang og kontinuitet, der er fundamentale begreber i mange grene af matematik. Intuitivt er en afbildning $f : X \to Y$ kontinuert, hvis en lille ændring i argumentet $x \in X$ kun fører til en lille ændring i billedet $f(x) \in Y$. Hvis man har et måleudtryk for afstand mellem punkter (= elementer) i X og tilsvarende et måleudtryk for afstand mellem punkter i Y, har man mulighed for at tale om små ændringer, og dermed om kontinuitet. Det vil også være muligt at tale om at $f(x) \to b$ for $x \to a$.

En mængde hvori man på en rimelig måde kan tale om afstand mellem elementerne kaldes et metrisk rum. Det viser sig, at en række begreber, som er kendt fra plan og rum, så som indre punkter, rand, afslutning, osv., kan defineres i rammen af et metrisk rum. Elementerne i et metrisk rum kan være andet end sædvanlige punkter i rummet. Det kan f.eks. være funktioner eller geometriske figurer.

§1. Metriske rum. Normerede rum

1.1. Metrik.

Begreberne metrik og metrisk rum er indført i 1906 af den franske matematiker Maurice Fréchet (1878–1973).

Definition 1.1. Lad M være en ikke tom mængde. En funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$ kaldes en *metrik* eller en *afstandsfunktion* i M såfremt følgende betingelser er opfyldt for vilkårlige elementer x, y, z fra M:

(M1) $d(x,y) \geq 0\,,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(M2) $d(x,y) = d(y,x)$,
(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Er der på M udvalgt en metrik d, kaldes parret (M,d) et *metrisk rum*. Elementerne i et metrisk rum kaldes ofte punkter.

En metrik er altså en afbildning, der til to punkter $x, y \in M$ knytter et tal $d(x,y)$, der på grund af (M2) kan omtales som afstanden *mellem* x og y, og denne afstand er større end nul undtagen hvis $x = y$, hvor afstanden sættes til nul. I stedet for $d(x,y)$ skrives undertiden $\mathrm{dist}(x,y)$. Uligheden (M3) kaldes *trekantsuligheden*, idet den for 3 punkter x, y og z i planen med den sædvanlige afstand udtrykker, at siden i en trekant er højst summen af de to andre sider.

Man møder undertiden det svagere begreb *pseudometrik*, hvor man i stedet for (M1) blot kræver at $d(x,y) \geq 0$ og $d(x,x) = 0$. Det kan i så fald forekomme at $x \neq y$ og dog $d(x,y) = 0$.

En ret linie, en plan og rummet er med den sædvanlige betydning af ordet afstand et metrisk rum. Mere generelt: For $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ er

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

en metrik i $\mathbb{R}^k$, jf. Mat 1. For en vilkårlig ikke tom delmængde $M \subseteq \mathbb{R}^k$ er (M, d) altså et eksempel på et metrisk rum. Metrikken (1) kaldes den *euklidiske afstand* eller den *sædvanlige afstand*.

En ikke tom delmængde $M \subseteq \mathbb{C}$ udstyres som metrisk rum ved fastsættelsen

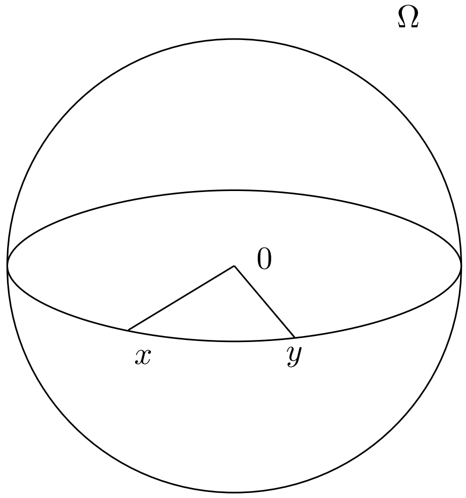
$$d(x,y) = |x - y|\,, \qquad x, y \in \mathbb{C},$$

idet (M1)–(M3) er konsekvenser af velkendte egenskaber ved den numeriske værdi. Identificeres $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$ på sædvanlig måde er denne afstand lig med den euklidiske afstand.

For konkrete mængder kan der være flere metrikker, som er naturlige. Lad os som et eksempel betragte kugleoverfladen

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

i det tre-dimensionale rum.



Som afstand mellem x og y i Ω kan benyttes den euklidiske afstand $d(x,y)$. En anden mulighed er at benytte afstanden *på kuglefladen* mellem x og y, altså længden af den mindste storcirkelbue mellem x og y, dvs. afstandsfunktionen

$$d_\Omega(x,y) = \operatorname{Arccos}(x \cdot y)\,, \quad x, y \in \Omega\,.$$

Udtrykt på anden måde er $d_\Omega(x,y)$ vinklen $\in [0,\pi]$ mellem vektorerne x og y. Det er intuitivt klart, at d_Ω er en metrik på Ω, kaldet den *geodætiske afstand.*

1.2. Normeret rum.

Fra Mat 1 kendes en række eksempler på vektorrum, f.eks. talrummene $\mathbb{R}^k$ og underrum deri samt vektorrum af reelle (eller komplekse) funktioner. Abstrakt set er et vektorrum en mængde E, hvis elementer kaldes vektorer og som kan adderes og multipliceres med tal fra et tallegeme. Hvis tallegemet er $\mathbb{R}$, taler man om et reelt vektorrum $(E,+,\mathbb{R})$, og hvis tallegemet er $\mathbb{C}$, taler man om et komplekst vektorrum $(E,+,\mathbb{C})$. For at kunne behandle de to tilfælde undet ét vil vi tale om et vektorrum $(E,+,\mathbb{L})$, hvor $\mathbb{L}$ angiver tallegemet som enten er $\mathbb{L}=\mathbb{R}$ eller $\mathbb{L}=\mathbb{C}$.

Fra Mat 1 kendes længden eller normen af en vektor $x=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ som værdien af udtrykket

$$|x| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2}\,. \tag{2}$$

Vi vil nu definere et længdebegreb for vektorer i et vektorrum, nemlig begrebet en norm. Ligesom ved begrebet metrik vil vi hæfte os ved nogle få fundamentale egenskaber ved (2) og kræve dem opfyldt for det abstrakte begreb.

Definition 1.2. Ved en *norm* på et vektorrum $E=(E,+,\mathbb{L})$ forstås en afbildning $\|\cdot\|: E\to\mathbb{R}$ opfyldende

(N1) $\|x\|\ge 0\,,\ \|x\|=0 \Leftrightarrow x=\underline{0}$ (nulvektoren),
(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ for alle $x\in E\,,\ \lambda\in\mathbb{L}$,
(N3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ for alle $x,y\in E$.

Parret $(E,\|\cdot\|)$ kaldes et *normeret vektorrum.* I (N2) er $|\lambda|$ den numeriske værdi af tallet λ (tilhørende enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Af (N2) fås specielt $\|-x\| = \|x\|$, og hvis E er et komplekst vektorrum $\|e^{i\theta}x\|=\|x\|$ for alle $\theta\in\mathbb{R}$.

Man møder undertiden det svagere begreb *seminorm*, hvor man i stedet for (N1) blot kræver at $\|x\|\ge 0$. Bemærk at (N2) medfører at $\|\underline{0}\| = \|0\cdot\underline{0}\| = |0|\|\underline{0}\| = 0$. Ved en seminorm kan det altså forekomme at $x\ne\underline{0}$ og dog $\|x\|=0$.

Hvis $\|\cdot\|$ er en norm på E vil fastsættelsen

$$d(x,y)=\|x-y\|\,,\qquad x,y\in E,$$

definere en metrik på E, idet (M2) er en konsekvens af (N2), og (M3) er en konsekvens af (N3), der også kaldes trekantsuligheden:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \\ &\le \|x-z\|+\|z-y\| = d(x,z)+d(z,y)\,. \end{aligned}$$

Man taler om *den af normen* $\|\cdot\|$ *inducerede metrik* på vektorrummet.

Eksempel 1.3. På $\mathbb{R}^k$ er følgende udtryk normer:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{k} |x_j| \qquad (\textit{1–normen}),$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\textit{2–normen} \text{ eller den } \textit{euklidiske norm}),$$

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_k|) \quad (\infty\textit{–normen} \text{ eller } \textit{maksimumsnormen}).$$

At $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_\infty$ er normer følger umiddelbart, medens (N3) for $\|\cdot\|_2$ følger af Cauchy-Schwarz's ulighed, jf. Mat 1.

På $\mathbb{C}^k$ kan man ligeledes betragte normerne $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ og $\|\cdot\|_\infty$. Hvis $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ identificeres med $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k) \in \mathbb{R}^{2k}$ idet $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, k$, har man

$$\|z\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{k} |z_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{k} (x_j^2 + y_j^2)\right)^{\frac{1}{2}},$$

så $\|z\|_2$ kan opfattes som den euklidiske norm på $\mathbb{R}^{2k}$.

Eksempel 1.4. Mængden $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ af reelle funktioner $f : M \to \mathbb{R}$ defineret på en ikke tom mængde M er et reelt vektorrum, når addition af funktioner og multiplikation med skalarer defineres ved

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in M$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \qquad x \in M,$$

hvor $f, g : M \to \mathbb{R}$ og $\lambda \in \mathbb{R}$.

Analogt er mængden $\mathcal{F}(M, \mathbb{C})$ af komplekse funktioner $f : M \to \mathbb{C}$ et vektorrum over $\mathbb{C}$. For $f : M \to \mathbb{L}$, hvor $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, defineres

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| \mid x \in M\}.$$

Det vil sige, at $\|f\|_u$ er det mindste overtal for talmængden $\{|f(x)| \mid x \in M\}$, altså at $t = \|f\|_u$ er det mindste tal i $[0, \infty]$, som opfylder

$$|f(x)| \le t \quad \text{for alle} \quad x \in M.$$

Vi har $0 \le \|f\|_u \le \infty$, og $\|f\|_u = 0$ netop hvis f er nulfunktionen, altså nulvektoren i $\mathcal{F}(M, \mathbb{L})$. Funktionen $f : M \to \mathbb{L}$ er *begrænset*, dvs. har begrænset værdimængde, netop hvis $\|f\|_u < \infty$.

Vi skal nu se, at *mængden*

$$\mathcal{B}(M, \mathbb{L}) = \{f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{L}) \mid \|f\|_u < \infty\}$$

af begrænsede funktioner på M er et vektorrum over $\mathbb{L}$, og $\|\cdot\|_u$ er en norm derpå kaldet den uniforme norm eller sup-normen.

For $f, g \in \mathcal{B}(M, \mathbb{L})$ og $x \in M$, $\lambda \in \mathbb{L}$ har vi

$$\begin{aligned} |\lambda f(x)| &= |\lambda||f(x)| \le |\lambda|\|f\|_u < \infty\,, \\ |(f+g)(x)| &= |f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\|_u + \|g\|_u < \infty\,. \end{aligned}$$

Den første række af uligheder viser, at $\lambda f \in \mathcal{B}(M, \mathbb{L})$ og $\|\lambda f\|_u \le |\lambda|\|f\|_u$; den anden række viser, at $f + g \in \mathcal{B}(M, \mathbb{L})$ og $\|f + g\|_u \le \|f\|_u + \|g\|_u$, og dermed er $\mathcal{B}(M, \mathbb{L})$ et underrum af $\mathcal{F}(M, \mathbb{L})$ altså et vektorrum over $\mathbb{L}$. For at vise, at $\|\cdot\|_u$ er en norm, mangler vi blot at vise (N2), som er klar hvis $\lambda = 0$, og hvis $\lambda \ne 0$ har vi

$$\|\lambda f\|_u = \sup\{|\lambda||f(x)| \mid x \in M\} = |\lambda| \sup\{|f(x)| \mid x \in M\} = |\lambda|\|f\|_u.$$

Af ovenstående følger, at enhver mængde $\mathcal{A}$ af begrænsede funktioner på en mængde M er et metrisk rum med metrikken

$$d(f, g) = \|f - g\|_u = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in M\}\,, \quad f, g \in \mathcal{A}\,.$$

Hvis M specielt er mængden $\{1, 2, \ldots, k\}$ kan en funktion $f : \{1, \ldots, k\} \to \mathbb{L}$ opfattes som et talsæt $(f(1), \ldots, f(k))$ i $\mathbb{L}^k (= \mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k)$, og derved kan vi opfatte funktionsvektorrummet $\mathcal{F}(M, \mathbb{L})$ som $\mathbb{L}^k$. Enhver funktion i $\mathcal{F}(M, \mathbb{L})$ er begrænset og den uniforme norm af $f = (f(1), \ldots, f(k))$ er

$$\|f\|_u = \max(|f(1)|, \ldots, |f(k)|),$$

hvilket er maksimumsnormen $\|\cdot\|_\infty$ fra Eksempel 1.3.

Hvis $M = \mathbb{N}$ kan vi opfatte $\mathcal{B}(M, \mathbb{C})$ som mængden af begrænsede komplekse talfølger $z = (z_n)_{n \ge 1}$ med den uniforme norm

$$\|z\|_u = \sup\{|z_n| \mid n \in \mathbb{N}\}\,, \quad z \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{C})\,.$$

Eksempel 1.5. Mængden $C([0, 1], \mathbb{R})$ af kontinuerte funktioner $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ er et normeret vektorrum ved fastsættelsen

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx\,.$$

1.3. Kugler i et metrisk rum. Begrænsede mængder.

Vi vender os nu mod et vilkårligt metrisk rum (M, d) og definerer for $a \in M$, $r > 0$ *kuglen* med *centrum* a og *radius* r

$$K(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) < r\}\,.$$

Bemærk at $a \in K(a, r)$, og når $r_1 < r_2$ vil $K(a, r_1) \subseteq K(a, r_2)$. Som umiddelbar anvendelse af trekantsuligheden vil vi vise følgende

Kuglelemma 1.6. *(i) Hvis $b \in K(a, r)$ og $0 < s \le r - d(a, b)$ så gælder $K(b, s) \subseteq K(a, r)$.*

(ii) Hvis $K(a, r) \cap K(b, s) \neq \varnothing$ så er $d(a, b) < r + s$.

Bevis. (i) Antag at $x \in K(b, s)$. Vi skal vise at $d(a, x) < r$, men det følger af trekantsuligheden

$$d(a, x) \le d(a, b) + d(b, x) < d(a, b) + s \le r\,.$$

(ii) Vi vælger et punkt $c \in K(a, r) \cap K(b, s)$ og udnytter igen trekantsuligheden

$$d(a, b) \le d(a, c) + d(c, b) = d(a, c) + d(b, c) < r + s\,.$$

□

For enhver ikke tom delmængde $A \subseteq (M, d)$ indføres *diameteren* $\operatorname{diam} A$ af A ved

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}\,.$$

Der gælder $0 \leq \operatorname{diam} A \leq \infty$, og diameteren er 0 når A har netop et element. Mængden A kaldes *begrænset*, hvis den er indeholdt i en kugle. Ved hjælp af trekantsuligheden indses:

$$A \text{ er begrænset netop hvis } \operatorname{diam} A < \infty\,.$$

Hvis nemlig $A \subseteq K(a,r)$ gælder $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} K(a,r) \leq 2r < \infty$, og hvis $\delta = \operatorname{diam} A < \infty$ vil $A \subseteq K(a, \delta + \varepsilon)$ for ethvert $a \in A$ og $\varepsilon > 0$.

Hvis det metriske rum er $\mathbb{R}^k$ med den sædvanlige afstand er $K(a,r) =]a-r, a+r[$ i tilfældet $k = 1$, $K(a,r)$ er en åben cirkelskive i planen for $k = 2$ og endelig en sædvanlig åben kugle for $k = 3$.

Eksempel 1.7. *Diskret metrisk rum.* En vilkårlig mængde $M \neq \varnothing$ kan altid forsynes med den såkaldte *diskrete metrik*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad x \neq y\,, \\ 0 & \text{for} \quad x = y\,. \end{cases}$$

At trekantsuligheden $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ er opfyldt ses således: Hvis $x = y$ er det intet at vise, da venstre side er 0, og hvis $x \neq y$ må enten $x \neq z$ eller $y \neq z$ og dermed er venstre side 1 og højre side er enten 1 eller 2. Er M forsynet med den diskrete metrik taler vi om et *diskret metrisk rum.* Bemærk at

$$K(a,r) = \begin{cases} \{a\}\,, & \text{hvis} \quad 0 < r \leq 1\,, \\ M\;\;, & \text{hvis} \quad 1 < r\,. \end{cases}$$

Enhver mængde i et diskret metrisk rum er begrænset. Et diskret metrisk rum er helt uinteressant; det er kun nævnt for at gøre læseren opmærksom på definitionens rummelighed.

1.4. Konvergente følger.

Som en naturlig generalisering af begrebet talfølge (jf. Adams p.519) forstår vi ved en *punktfølge i en mængde* M en afbildning $\varphi : \mathbb{N} \to M$. Hvis man sætter $x_n = \varphi(n)$, er det kutyme at skrive punktfølgen $(x_n)_{n\geq 1}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eller blot (x_n), hvorved man altså nævner følgens n'te element. I et metrisk rum har det mening at tale om konvergens af punktfølger:

Definition 1.8. Lad $(x_n)_{n\geq 1}$ være en punktfølge i det metriske rum (M,d) og lad $a \in M$. Vi siger, at *følgen konvergerer mod* a, og udtrykker det i symboler ved følgende skrivemåder

$$x_n \to a\,, \quad x_n \to a \text{ for } n \to \infty\,, \quad \lim x_n = a\,, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

såfremt

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0\,,$$

altså såfremt afstanden mellem x_n og a går mod 0 for $n \to \infty$. Hvis $x_n \to a$ kaldes a *grænsepunkt* for følgen (x_n).

Med de logiske symboler udtrykkes konvergensen således:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : d(x_n, a) \leq \varepsilon \, .$$

Hvis $x_n \to a$ vil enhver delfølge $(x_{n_p})_{p \geq 1}$ og enhver afkortet følge $(x_{n+N})_{n \geq 1}$ ligeledes gå mod a.

Bemærkning 1.9. *En følge har højst et grænsepunkt.*

Hvis nemlig $x_n \to a$ og $x_n \to b$ for $n \to \infty$ kan vi til $\varepsilon > 0$ finde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ så

$$\begin{aligned} d(x_n, a) &\leq \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N_1 \, , \\ d(x_n, b) &\leq \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N_2 \, , \end{aligned}$$

og vælges et $n_0 \geq \max(N_1, N_2)$ giver trekantsuligheden

$$d(a, b) \leq d(a, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, b) \leq 2\varepsilon \, .$$

Da $\varepsilon > 0$ er vilkårlig sluttes, at $d(a, b) = 0$ altså at $a = b$.

Eksempel 1.10. Lad det metriske rum være $\mathbb{R}^k$ med den sædvanlige metrik. En punktfølge (x_n) i $\mathbb{R}^k$ konvergerer mod $x \in \mathbb{R}^k$ hvis

$$d(x_n, x) = \left(\sum_{j=1}^{k} (x_{nj} - x_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \, ,$$

hvor $x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nk})$, $x = (x_1, \ldots, x_k)$, altså netop hvis $\lim_{n \to \infty} x_{nj} = x_j$ for hvert $j = 1, \ldots, k$, dvs. hvis hver koordinatfølge konvergerer.

Det er centralt at indse, at uniform konvergens af funktionsfølger kan opfattes som punktfølge konvergens i et metrisk rum.

Sætning 1.11. *Lad $(\mathcal{B}(M, \mathbb{L}), \|\cdot\|_u)$ betegne det normerede rum af begrænsede funktioner på M. Om en punktfølge (f_n) og en funktion f i $\mathcal{B}(M, \mathbb{L})$ gælder*

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \;\; i \; \mathcal{B}(M, \mathbb{L}) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \quad \textit{uniformt på } M \, .$$

Bevis. At $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ betyder at $\|f - f_n\|_u \to 0$, altså

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : \sup\{|f(x) - f_n(x)| \mid x \in M\} \leq \varepsilon$$

eller

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists N \in \mathbb{N}\,\forall n \geq N\,\forall x \in M : |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon\,, \tag{3}$$

idet

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in M$$

er ensbetydende med at

$$\sup\{|f(x) - f_n(x)| \mid x \in M\} \leq \varepsilon\,.$$

Udsagnet (3) er netop, hvad der forstås ved $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ uniformt på M. $\square$

Opgaver til §1

1.1. Vis, at $\cap_{r>0} K(a,r) = \cap_{n=1}^{\infty} K\left(a, \frac{1}{n}\right) = \{a\}$ i et metrisk rum.

1.2. Find diam A for følgende delmængder af $\mathbb{C}$ med den sædvanlige afstand

$$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$A = \{\cos x + i \sin x \mid x \in \mathbb{R}\}\,.$$

1.3. Vis $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ i det metriske rum $(\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$, hvor

a) $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)\,,$

b) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}\,.$

1.4. Vis, at der for vilkårlige fire punkter x, y, z, w i et metrisk rum (M, d) gælder

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(w,y)\,.$$

Vis derved, at hvis $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ og $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ for punktfølger (x_n) og (y_n) i M, så vil $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$.

1.5. Tegn $K(a,r)$ i følgende metriske rum:

a) $[0,1]$ og $\mathbb{R}^2$ med den sædvanlige afstand.

b) $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$, hvor $d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty$ $(= \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|))$.

c) $(\mathbb{R}^2, d_1)$, hvor $d_1(x,y) = \|x-y\|_1$ $(= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)$.

1.6. Beskriv de konvergente følger i et diskret metrisk rum.

1.7. Giv et bevis for at den geodætiske afstand d_Ω på kugleoverfladen (§1.1) er en metrik.

1.8. Vis, at der på vektorrummet $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ af reelle talfølger $\underline{x} = (x_n)_{n\geq 1}$ ikke findes nogen norm $\|\cdot\|$ med den egenskab, at der om følger $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ fra $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ gælder

$$\lim_{n\to\infty} \|\underline{x}_n\| = 0 \Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} x_{nj} = 0\,,$$

idet den j'te koordinat af $\underline{x}_n$ betegnes x_{nj}, altså $\underline{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots)$.

Vink. Antag, at der findes en norm med den søgte egenskab og betragt følgen $(\|e_n\|^{-1} e_n)_{n\geq 1}$ hvor $e_1 = (1,0,0,\dots)$, $e_2 = (0,1,0,\dots), \dots$.

1.9. For $\underline{x} = (x_n)_{n\geq 1}$ og $\underline{y} = (y_n)_{n\geq 1}$ i $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ sættes

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sup\{\min(|x_n - y_n|, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Vis, at d er en metrik på $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ og at $(\underline{x}_n) = (x_{n1}, x_{n2}, \dots)$ konvergerer mod $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots)$ i det metriske rum hvis og kun hvis $\lim_{n\to\infty} x_{nj} = x_j$ for alle $j \in \mathbb{N}$.

1.10. Ved en *pseudometrik* på en mængde M forstås en afbildning $d : M \times M \to \mathbb{R}$, som for alle $x, y, z \in M$ opfylder

(M1′) $d(x,y) \geq 0\,,\ d(x,x) = 0\,,$
(M2) $d(x,y) = d(y,x)\,,$
(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)\,.$

Vis, at hvis d er en pseudometrik på M så defineres der ved "$x \sim y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$" en ækvivalensrelation $\sim$ i M. (Man skal altså vise, at $\sim$ er *refleksiv* ($\forall x : x \sim x$), *symmetrisk* ($\forall x, y : x \sim y \Rightarrow y \sim x$) og *transitiv* ($\forall x, y, z : (x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow x \sim z$).)

Lad $[x]$ betegne ækvivalensklassen indeholdende x altså

$$[x] = \{y \in M \mid x \sim y\}.$$

Vis, at mængden $M/\sim = \{[x] \mid x \in M\}$ af ækvivalensklasser er et metrisk rum ved fastsættelsen $d([x],[y]) = d(x,y)$, idet der først gøres rede for, at definitionen er meningsfuld.

1.11. Vis, at en følge (x_n) i et metrisk rum konvergerer mod a hvis og kun hvis enhver delfølge af (x_n) har en delfølge, der konvergerer mod a.

1.12. Lad $C^1([a,b])$ betegne mængden af kontinuert differentiable funktioner på $[a,b]$. Vis, at $f \mapsto \|f'\|_u$ er en seminorm, og at $f \mapsto \|f\| = \|f\|_u + \|f'\|_u$ er en norm på vektorrummet $C^1([a,b])$. Vis, at (f_n) konvergerer mod f i det normerede rum $(C^1[a,b], \|\cdot\|)$, hvis og kun hvis $f_n \to f$ uniformt på $[a,b]$ og $f'_n \to f'$ uniformt på $[a,b]$.

1.12

§2. Topologiske begreber i et metrisk rum

I det følgende vil vi definere en række begreber, der knytter sig til et metrisk rum (M, d). Begreberne er stort set velkendte i tilfældet $\mathbb{R}^k$ med den sædvanlige metrik.

2.1. Indre, ydre, rand og afslutning.

Lad A være en punktmængde i det metriske rum (M, d), altså $A \subseteq M$. Punkterne i M falder da i forhold til A i tre dele, hvor dog en eller to kan være tom: det indre af A, det ydre af A og randen af A. Præcist:

Definition 2.1. Et punkt $x \in M$ kaldes et *indre punkt* i A, hvis der findes en kugle $K(x, r)$ med centrum i x, som er indeholdt i A, dvs. hvis

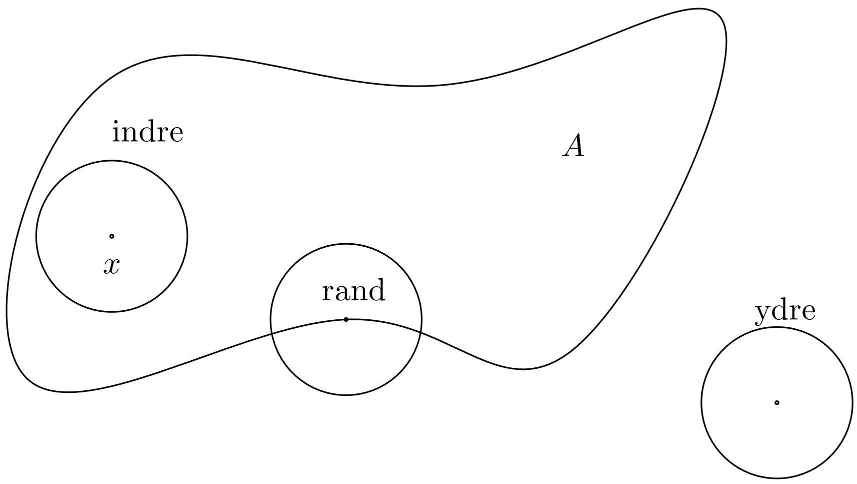
$$\exists r > 0 : K(x, r) \subseteq A\,.$$

Punktet x kaldes et *ydre punkt* for A, hvis der findes en kugle $K(x, r)$, som er disjunkt med A, dvs. hvis

$$\exists r > 0 : K(x, r) \cap A = \varnothing\,.$$

Punktet x kaldes et *randpunkt* for A, hvis det hverken er indre eller ydre punkt for A.

Ved *det indre* $\overset{\circ}{A}$ af A, *det ydre* af A og *randen* ∂A af A forstås henholdsvis mængden af indre punkter, mængden af ydre punkter og mængden af randpunkter for A. (I symbolet for det indre af A kan bollen sættes over eller ved siden af A: $\overset{\circ}{A}, A^\circ$).



Vi har umiddelbart følgende vigtige egenskaber:

1. Et punkt $x \in M$ er ydre punkt for A hvis og kun hvis x er indre punkt for komplementærmængden $\complement A = M \setminus A$.

2. $x \in \partial A \Leftrightarrow \forall r > 0 : K(x,r) \cap A \neq \varnothing \ \wedge \ K(x,r) \cap \complement A \neq \varnothing$.

Thi højre side udtrykker, at x hverken er indre eller ydre punkt for A.

3. $\partial A = \partial(\complement A)\,, \ M = \mathring{A} \cup (\complement A)^\circ \cup \partial A$.

Definition 2.2. Et punkt $x \in M$ kaldes *kontaktpunkt* for mængden $A \subseteq M$, såfremt enhver kugle med centrum x indeholder mindst et punkt fra A, dvs. såfremt

$$\forall r > 0 : K(x,r) \cap A \neq \varnothing\,.$$

Mængden $\overline{A}$ af kontaktpunkter for A kaldes *afslutningen* af A.

Et punkt $x \in A$ kaldes *isoleret punkt* af A, hvis der findes en kugle med centrum x, der ikke indeholder noget andet punkt af A, dvs. hvis

$$\exists r > 0 : K(x,r) \cap A = \{x\}\,.$$

Indre punkter og randpunkter for A er kontaktpunkter for A, medens ydre punkter ikke er det. Altså

$$\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A = A \cup \partial A\,.$$

Anderledes sagt: Afslutningen $\overline{A}$ af A og det ydre $(\complement A)^\circ$ af A er komplementære

$$\complement\overline{A} = (\complement A)^\circ\,, \ \overline{A} = \complement((\complement A)^\circ)\,.$$

Der gælder videre

$$\begin{aligned} \mathring{A} &\subseteq A \subseteq \overline{A}\,, \\ \mathring{A} &= \overline{A} \setminus \partial A = A \setminus \partial A\,, \\ \partial A &= \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{\complement A}\,. \end{aligned}$$

Eksempel 2.3. Lad det metriske rum være $\mathbb{R}$ med den sædvanlige afstand. Om $A = \mathbb{Q}$ gælder $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing\,,\ \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\,,\ \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Ingen af $\mathbb{Q}$'s punkter er isolerede. Om $A = \mathbb{Z}$ gælder $\mathring{\mathbb{Z}} = \varnothing\,,\ \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ og alle punkter i $\mathbb{Z}$ er isolerede punkter.

2.2. Åbne og afsluttede mængder.

Definition 2.4. En mængde $A \subseteq M$ kaldes *åben*, hvis ethvert punkt $x \in A$ er indre punkt for A, dvs. hvis $\mathring{A} = A$.

En punktmængde $A \subseteq M$ kaldes *afsluttet* (eller *lukket*), hvis den indeholder alle sine kontaktpunkter, dvs. hvis $\overline{A} = A$. Bemærk at $\varnothing$ og M er både åbne og afsluttede.

Sætning 2.5. *Begreberne åben og afsluttet er duale: En punktmængde* $A \subseteq M$ *er afsluttet (resp. åben) hvis og kun hvis komplementærmængden* $\complement A$ *er åben (resp. afsluttet).*

Bevis. Formlen $\complement\overline{A} = (\complement A)^\circ$ viser, at $A = \overline{A}$ netop hvis $(\complement A)^\circ = \complement A$, altså at A er afsluttet, netop hvis $\complement A$ er åben. Anvendes dette på $\complement A$ i stedet for A fås, at A er åben netop hvis $\complement A$ er afsluttet. □

I det følgende bruger vi ofte sprogbrugen "en familie" eller "et system" af delmængder af en mængde i stedet for at sige en mængde af delmængder. Det er ofte bekvemt at skrive en familie af delmængder af M på formen $(A_i)_{i\in I}$. Her er underforstået, at I er en mængde kaldet *indeksmængden* for familien, og der foreligger en afbildning $i \mapsto A_i$ af I ind i mængden af delmængder af M.

Sætning 2.6. *Systemet* $\mathcal{G} = \mathcal{G}(M)$ *af åbne delmængder af* M *har følgende egenskaber:*

(i) $\varnothing, M \in \mathcal{G}$ *;*

(ii) *Hvis* $G_1, \dots, G_n$ *er endeligt mange mængder fra* $\mathcal{G}$*, så tilhører fællesmængden* $G_1 \cap \dots \cap G_n$ *igen* $\mathcal{G}$ *;*

(iii) *Hvis* $(G_i)_{i\in I}$ *er en vilkårlig familie af mængder fra* $\mathcal{G}$*, så tilhører foreningsmængden* $\bigcup_{i\in I} G_i$ *igen* $\mathcal{G}$.

Bevis. (ii) Vi skal indse, at vilkårligt $x \in G_1 \cap \dots \cap G_n$ er indre punkt. For $i \in \{1, \dots, n\}$ vil specielt $x \in G_i$, og da G_i er åben findes $r_i > 0$ så $K(x, r_i) \subseteq G_i$. Sættes $r = \min(r_1, \dots, r_n)$ vil $K(x, r) \subseteq G_1 \cap \dots \cap G_n$, hvilket viser, at x er indre punkt.

(iii) Vi skal indse, at vilkårligt $x \in \bigcup_{i\in I} G_i$ er indre punkt i mængden. Til sådant x findes $i_0 \in I$ så $x \in G_{i_0}$, men da G_{i_0} er åben findes $r > 0$ så $K(x, r) \subseteq G_{i_0}$, men så meget mere gælder $K(x, r) \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$, hvilket viser, at x er indre punkt i $\bigcup_{i\in I} G_i$. □

Ved at udnytte Sætning 2.5 fås et dualt udsagn om systemet $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$ af afsluttede delmængder.

Sætning 2.7. *Systemet* $\mathcal{F}$ *af afsluttede delmængder af* M *har følgende egenskaber:*

(i) $\varnothing, M \in \mathcal{F}$ *;*

(ii) *Hvis* $F_1, \dots, F_n$ *er endeligt mange mængder fra* $\mathcal{F}$*, så tilhører foreningsmængden* $F_1 \cup \dots \cup F_n$ *igen* $\mathcal{F}$.

(iii) *Hvis* $(F_i)_{i\in I}$ *er en vilkårlig familie af mængder fra* $\mathcal{F}$*, så tilhører fællesmængden* $\bigcap_{i\in I} F_i$ *igen* $\mathcal{F}$.

En kugle $K(a,r)$ er en åben delmængde, thi af Kuglelemmaet 1.6 ses, at hvis $x \in K(a,r)$ så vil $K(x,s) \subseteq K(a,r)$ blot $s \leq r - d(a,x)$.

Enhver endelig delmængde A er afsluttet, thi hvert $x \in \complement A$ er ydre punkt for A. Hvis nemlig $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, hvor $a_1, \ldots, a_n$ er forskellige, og $x \in \complement A$ sættes $r = \min\{d(x, a_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$, og så er $K(x,r) \subseteq \complement A$. Endvidere er hvert punkt i A et isoleret punkt, thi for hvert $i = 1, \ldots, n$ gælder

$$A \cap K(a_i, r) = \{a_i\} \text{ når } r = \min\{d(a_i, a_j) \mid i \neq j\}\,.$$

Fællesmængden af uendeligt mange åbne mængder er ikke altid åben. (Overvej et eksempel.)

Det indre og afslutningen af en mængde kan karakteriseres på følgende måde:

Sætning 2.8. *Lad $A \subseteq M$.*

(a) Det indre $\overset{\circ}{A}$ af A er en åben mængde. Det er den største åbne delmængde af A i den forstand, at hvis $G \subseteq A$ og G er åben, så er $G \subseteq \overset{\circ}{A}$.
(b) Afslutningen $\overline{A}$ af A er en afsluttet mængde. Det er den mindste afsluttede delmængde af M omfattende A i den forstand, at hvis $A \subseteq F$ og F er afsluttet, så er $\overline{A} \subseteq F$.

Bevis. De to udsagn er duale og det ene fremgår af det andet ved overgang til komplementærmængde.

For $x \in \overset{\circ}{A}$ findes $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq A$. For hvert $y \in K(x,r)$ gælder $K(y, r - d(x,y)) \subseteq K(x,r)$ ifølge Kuglelemmaet. Altså er y også indre punkt af A, og dermed er $K(x,r) \subseteq \overset{\circ}{A}$, hvilket viser, at $\overset{\circ}{A}$ er åben.

Hvis $G \subseteq A$ og G er åben vil der til $x \in G$ findes $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq G$ og følgelig også $K(x,r) \subseteq A$. Ethvert $x \in G$ er altså indre punkt af A, dvs. $G \subseteq \overset{\circ}{A}$. □

Korollar 2.9. *Det ydre af en mængde A er åben og randen ∂A af A er afsluttet.*

Bevis. Det ydre af A er lig med $(\complement A)^\circ$ og dermed åben. Formlen $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\complement A}$ viser at ∂A er fællesmængde af to afsluttede mængder og dermed afsluttet ifølge Sætning 2.7. □

Sætning 2.10. *Afslutningen $\overline{A}$ af A består af de punkter $x \in M$, der er grænsepunkt for en konvergent punktfølge (x_n), hvis punkter alle tilhører A.*

Bevis. (a) Lad $x = \lim x_n$ hvor (x_n) er en punktfølge i A. Da gælder $x \in \overline{A}$, thi for ethvert $r > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$ så $d(x, x_n) < r$ for $n \geq N$, og dermed er $K(x,r) \cap A \neq \varnothing$.

(b) Lad $x \in \overline{A}$. Da gælder $A \cap K(x,r) \neq \varnothing$ for ethvert $r > 0$. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ kan vi altså vælge $x_n \in A \cap K(x, \frac{1}{n})$. Den derved konstruerede følge (x_n) er konvergent med grænsepunkt x, og alle dens punkter tilhører A. $\square$

Definition 2.11. En delmængde $A \subseteq (M,d)$ kaldes *overalt tæt* hvis $\overline{A} = M$, altså hvis M er den mindste afsluttede mængde, der indeholder A. Da de åbne mængder er komplementære til de afsluttede gælder, at A er overalt tæt netop hvis

$$\forall G \in \mathcal{G} : A \cap G = \varnothing \Rightarrow G = \varnothing$$

eller i kontraponeret form

$$\forall G \in \mathcal{G} : G \neq \varnothing \Rightarrow A \cap G \neq \varnothing\,.$$

Et metrisk rum (M,d) kaldes *separabelt*, hvis der findes en tællelig* overalt tæt delmængde A af M.

Idet $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ er $\mathbb{R}$ separabelt. Også $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{C}^k$ er separable metriske rum, idet $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^k$ og $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^k$ er overalt tætte numerable delmængder.

2.3. Topologiske begreber. Ækvivalente metrikker.

I et metrisk rum (M,d) har vi defineret systemet $\mathcal{G}$ af åbne mængder. Vi skal nedenfor se, at en række af de tidligere indførte begreber kan karakteriseres ved hjælp af systemet $\mathcal{G}$. Sådanne begreber kaldes *topologiske begreber.*

For hvert $x \in M$ vil vi indføre systemet

$$\mathcal{G}_x = \{G \in \mathcal{G} \mid x \in G\}$$

af de åbne mængder, der indeholder x.

Definition 2.12. En mængde U i et metrisk rum (M,d) siges at være en *omegn* af et punkt $x \in M$, såfremt x er indre punkt i U. Med $\mathcal{U}(x)$ betegnes systemet af omegne af x.

Vi har straks, at en mængde er åben hvis og kun hvis den er omegn af alle sine punkter.

Vi noterer:

$$\begin{aligned} &U \text{ omegn af } x \\ \Leftrightarrow\, & x \in \overset{\circ}{U} \\ \Leftrightarrow\, & \exists r > 0 : K(x,r) \subseteq U \\ \Leftrightarrow\, & \exists G \in \mathcal{G}_x : G \subseteq U\,. \end{aligned}$$

*Tællelig betyder endelig eller numerabel, og en mængde A kaldes numerabel, hvis den er ækvipotent med $\mathbb{N}$, altså såfremt der findes en bijektiv afbildning $\varphi : \mathbb{N} \to A$.

Den sidste biimplikation viser, at omegnssystemet $\mathcal{U}(x)$ af hvert punkt er entydigt fastlagt ud fra systemet $\mathcal{G}$ af åbne mængder, og dermed er omegne et topologisk begreb. Følgende begreber er alle topologiske:

Indre punkt, ydre punkt, randpunkt, kontaktpunkt, isoleret punkt, afsluttet mængde, indre, ydre og rand af en mængde, følgekonvergens, overalt tæt mængde, separabilitet.

At f.eks. kontaktpunkt og følgekonvergens er topologiske begreber følger af biimplikationerne:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall G \in \mathcal{G}_x : A \cap G \neq \varnothing \,,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall G \in \mathcal{G}_x \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : x_n \in G \,,$$

som gælder fordi $K(x,r) \in \mathcal{G}_x$ for alle $r > 0$, og til enhver mængde $G \in \mathcal{G}_x$ findes $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq G$.

Definition 2.13. To metrikker d_1, d_2 på en mængde M kaldes *ækvivalente*, hvis de fastlægger samme system af åbne mængder.

Erstattes metrikken på en mængde med en ækvivalent, får vi altså samme topologiske begreber. F.eks. ændres det indre af en mængde ikke. Som eksempel på begreber, der *ikke* er topologiske, kan nævnes "kugle" og "begrænset mængde". En metrik d kan nemlig altid erstattes af den ækvivalente metrik $d_1(x,y) = \min(d(x,y),1)$ med hensyn til hvilken alle mængder er begrænsede, nemlig af diameter ≤ 1.

At d_1 opfylder trekantsuligheden ses således: Hvis $d(x,z)$ og $d(z,y)$ begge er ≤ 1 har vi

$$d_1(x,z) + d_1(z,y) = d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y) \geq d_1(x,y) \,,$$

og hvis mindst et af tallene $d(x,z)$ og $d(z,y)$ er større end 1 har vi

$$d_1(x,y) \leq 1 \leq d_1(x,z) + d_1(z,y) \,.$$

Dermed er d_1 en metrik, og hvis $K_1(a,r)$ betegner kuglen med hensyn til metrikken d_1 gælder

$$K_1(a,r) = \begin{cases} K(a,r)\,, & \text{for} \quad r \leq 1 \\ M\,, & \text{for} \quad r > 1\,, \end{cases}$$

hvilket viser, at d og d_1 giver samme system af åbne mængder, altså at d og d_1 er ækvivalente.

Generelt gælder:

Sætning 2.14. *To metrikker d_1 og d_2 på en mængde M er ækvivalente hvis og kun hvis*

(i) $\forall a \in M \, \forall r > 0 \, \exists s > 0 : K_1(a, r) \supseteq K_2(a, s)$,
(ii) $\forall a \in M \, \forall r > 0 \, \exists s > 0 : K_2(a, r) \supseteq K_1(a, s)$,

hvor

$$K_i(a, r) = \{x \in M \mid d_i(a, x) < r\} , \quad i = 1, 2 .$$

Bevis. Lad $\mathcal{G}_i$, $i = 1, 2$ være systemet af åbne mængder i (M, d_i). Hvis d_1 og d_2 er ækvivalente, altså hvis $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$ er specielt $K_1(a, r) \in \mathcal{G}_2$ for alle $a \in M$, $r > 0$, altså er a et indre punkt af $K_1(a, r)$ i (M, d_2), og dermed findes $s > 0$ så $K_2(a, s) \subseteq K_1(a, r)$. Betingelsen (ii) vises analogt.

Omvendt kan man af (i) slutte at $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ og tilsvarende af (ii) slutte at $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1$, så (i) og (ii) medfører, at d_1 og d_2 er ækvivalente. □

Sætning 2.15. *Lad E være et vektorrum over $\mathbb{L}$. To normer $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_2$ på E er ækvivalente i den forstand, at de tilhørende metrikker er ækvivalente, hvis og kun hvis*

(i) $\exists k > 0 \, \forall x \in E : \|x\|_1 \leq k\|x\|_2$
(ii) $\exists \ell > 0 \, \forall x \in E : \|x\|_2 \leq \ell\|x\|_1$.

Bevis. Af (i) fra Sætning 2.15 sluttes

$$K_1(a, r) \supseteq K_2\left(a, \frac{r}{k}\right) ,$$

thi hvis $\|a - x\|_2 < \frac{r}{k}$ finder man $\|a - x\|_1 \leq k\|a - x\|_2 < r$. Dette viser (i) fra Sætning 2.14. Omvendt kan man af denne betingelse slutte at

$$K_1(0, 1) \supseteq K_2(0, s) \tag{1}$$

for passende $s > 0$. Vi påstår nu at $\|x\|_1 \leq \frac{1}{s}\|x\|_2$ for alle $x \in E$, altså at (i) fra Sætning 2.15 gælder med $k = \frac{1}{s}$. Antag nemlig at der fandtes $x \in E$ så

$$\|x\|_1 > \frac{1}{s}\|x\|_2 .$$

Ved udnyttelse af normbetingelsen (N2) finder vi ved division med $\|x\|_1$ at

$$1 > \frac{1}{s}\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_2 ,$$

eller hvis $y = x/\|x\|_1$ at $\|y\|_2 < s$. Dette viser at $y \in K_2(0, s)$, så af (1) fås $\|y\|_1 < 1$, hvilket er i strid med at (N2) giver

$$\|y\|_1 = \left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_1 = \frac{1}{\|x\|_1}\|x\|_1 = 1 .$$

På tilsvarende måde ses at de to betingelser (ii) fra Sætningerne 2.14 og 2.15 er ensbetydende. □

Bemærkning 2.16. Betingelserne (i) og (ii) i Sætning 2.15 kan slås sammen til en enkelt betingelse nemlig

(iii) $\exists c > 0\, \forall x \in E : \frac{1}{c}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c\|x\|_1$.

Hvis (i) og (ii) gælder kan man bruge $c = \max(k, \ell)$, og hvis (iii) gælder vil både (i) og (ii) gælde med $k = \ell = c$. Normerne $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_2$ er altså ækvivalente netop hvis (iii) er opfyldt.

Eksempel 2.17. De tre normer $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ og $\|\cdot\|_\infty$ på $\mathbb{R}^k$, jf. Eksempel 1.3, er ækvivalente på grund af de elementære uligheder

$$\|x\|_\infty \leq \begin{cases} \|x\|_1 \leq k\|x\|_\infty \\ \|x\|_2 \leq \sqrt{k}\|x\|_\infty \,. \end{cases}$$

Ved diskussion af topologiske begreber i $\mathbb{R}^k$ kan vi derfor anvende den norm, der er mest bekvem i den foreliggende situation. Det er ofte nemmere at benytte $\|\cdot\|_\infty$ end $\|\cdot\|_2$.

Man kan vise, at alle normer på et *endelig dimensionalt* vektorrum er ækvivalente, jf. §6.3. Når man siger, at en delmængde af $\mathbb{R}^k$ er begrænset, er det altså ligegyldigt, hvilken norm man refererer til.

2.4. Topologiske rum.

Som vi har indset, er mange af de til et metrisk rum knyttede begrebsdannelser – nemlig de topologiske –allerede fastlagt, når systemet af åbne mængder kendes. Teorien for metriske rum kan derfor indordnes under en mere almen teori for såkaldte *topologiske rum*, der er indført af Felix Hausdorff (1868–1942) i 1914.

Ved en *topologi* på en ikke tom mængde M forstås et system $\mathcal{G}$ af delmængder af M med følgende egenskaber:

(T1) $\varnothing, M \in \mathcal{G}$;
(T2) Hvis $G_1, \ldots, G_n$ er endeligt mange mængder fra $\mathcal{G}$, så tilhører fællesmængden $G_1 \cap \cdots \cap G_n$ igen $\mathcal{G}$;
(T3) Hvis $(G_i)_{i\in I}$ er en vilkårlig familie af mængder fra $\mathcal{G}$, så tilhører foreningsmængden $\bigcup_{i\in I} G_i$ igen $\mathcal{G}$.

Et *topologisk rum* er en mængde M forsynet med en topologi $\mathcal{G}$ og mængderne i $\mathcal{G}$ kaldes åbne mængder. Det topologiske rum betegnes $(M, \mathcal{G})$.

Vi har set i Sætning 2.6, at systemet af åbne mængder i et metrisk rum er en topologi. Ækvivalente metrikker er netop sådanne, der inducerer samme topologi. De fra et metrisk rum kendte topologiske egenskaber kan alle defineres i et topologisk rum, idet man tager udgangspunkt i den for metriske rum givne definition og omformulerer den, så den kun afhænger af systemet af åbne mængder.

Eksempel 2.18. Lad $(M, \mathcal{G})$ være et topologisk rum. For $x \in M$ indføres

$$\mathcal{G}_x = \{G \in \mathcal{G} \mid x \in G\}.$$

Vi siger, at $x \in M$ er *indre* punkt for $A \subseteq M$ såfremt

$$\exists G \in \mathcal{G}_x : G \subseteq A$$

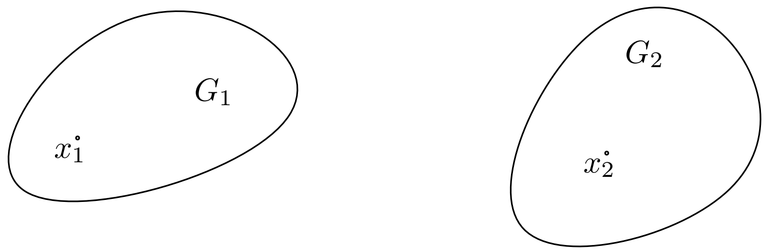
og x er et *kontaktpunkt* for A såfremt

$$\forall G \in \mathcal{G}_x : G \cap A \neq \varnothing .$$

Formlerne i §2.1 vedrørende $\mathring{A}$, $\overline{A}$ og ∂A gælder uændret i et topologisk rum og sætningerne 2.5, 2.7, 2.8 og Korollar 2.9 fra §2.2 gælder ligeledes. (Bemærk, at Sætning 2.6 er rigtig, men er en definition nu). Grænsepunktet for en konvergent følge (x_n) i A tilhører $\overline{A}$, men Sætning 2.10 gælder ikke for topologiske rum, idet der kan være punkter i $\overline{A}$, der ikke kan opnås som grænseværdi for en følge fra A. Dette er årsagen til, at man i topologiske rum må indføre mere generelle konvergensbegreber: Teorien for *net* eller *filtre*, som vil blive taget op i et senere kursus.

Topologien på et metrisk rum har en speciel egenskab, *Hausdorff egenskaben*:

Hvis x_1 og x_2 er forskellige punkter i M findes *disjunkte* mængder $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, så $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$.



Vi kan nemlig sætte $G_i = K(x_i, \frac{1}{2}d(x_1, x_2))$, $i = 1, 2$.

Hausdorff indskrænkede sig til at betragte topologiske rum med Hausdorff-egenskaben, de såkaldte *Hausdorff rum.* Der er Hausdorff rum, hvor topologien ikke kan defineres ved en metrik. Et væsentligt problem i teorien for topologiske rum består i at karakterisere de topologier, der kan induceres af en metrik. Dette *metrisationsproblem* blev løst af 3 forskellige matematikere Bing, Nagata og Smirnov omkring 1950.

Opgaver til §2

2.1. Bestem det indre, afslutningen, randen og mængden af isolerede punkter for følgende delmængder af $\mathbb{R}^2$ med den euklidiske afstand.

a) $A = \mathbb{R}^2$
b) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
c) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.

2.2. Vis, at der for $G \in \mathcal{G}$, $F \in \mathcal{F}$ gælder

$$G \setminus F \in \mathcal{G}, \quad F \setminus G \in \mathcal{F}.$$

2.3. Vis, at hvis der om to metrikker d_1, d_2 på M findes konstanter $A, B > 0$ så $d_1 \le A d_2$, $d_2 \le B d_1$, så er d_1 og d_2 ækvivalente. Overvej om d_1 og d_2 kan være ækvivalente uden at der findes sådanne konstanter A og B.

2.4. Beskriv de topologiske begreber i et diskret metrisk rum.

2.5. Vis, at der for vilkårlige delmængder A, B af et metrisk rum (M, d) gælder

$$A \subseteq B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}, \quad \overline{A} \subseteq \overline{B}.$$

$$(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$(A \cup B)^\circ \supseteq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$$

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overset{\circ}{A} \setminus \overset{\circ}{B} \supseteq (A \setminus B)^\circ$$

$$\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$$

og find eksempler der viser, at der ikke behøver at gælde = i de fire sidste inklusioner.

Vis, at der for en vilkårlig familie $(A_i)_{i \in I}$ af delmængder af M gælder

$$\overline{\bigcup_{i \in I} \overline{A_i}} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}, \quad \left(\bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{A_i} \right)^\circ = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^\circ.$$

2.6. Lad (M, d) være et metrisk rum. Vis, at følgende betingelser om en delmængde $A \subseteq M$ og et punkt $x \in M$ er ækvivalente:

(i) $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$;
(ii) $\forall r > 0 : K(x, r) \cap A$ indeholder uendelig mange punkter;
(iii) $\exists (x_n)$ fra $A \setminus \{x\}$ så $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

Et punkt x med disse egenskaber kaldes et *fortætningspunkt* for A.

Idet mængden af fortætningspunkter for A betegnes A' skal det vises, at $\overline{A} = A' \cup I(A)$, hvor $I(A)$ er mængden af de isolerede punkter for A, samt at A' er en afsluttet mængde.

2.7. Lad (M, d) være et metrisk rum. Vis, at

$$\overline{K(a,r)} \subseteq \{x \in M \mid d(a,x) \leq r\}$$

og at mængden på højre side er afsluttet.

Giv et eksempel hvor inklusionen ovenfor er streng. Vis, at hvis (M, d) er et normeret vektorrum så gælder

$$\overline{K(a,r)} = \{x \in M \mid d(a,x) \leq r\} \ \ (= \{x \in M \mid \|a - x\| \leq r\}).$$

2.8. Lad ℓ_1 være mængden af absolut konvergente rækker, dvs.

$$\ell_1 = \{(a_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}.$$

Vis, at ℓ_1 er et vektorrum ved sædvanlige regneoperationer og at

$$\|(a_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

og

$$\|(a_n)\|_u = \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

er normer på ℓ_1. Er de ækvivalente?

Vis, at delmængden $A = \{(a_n) \in \ell_1 \mid \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \ a_n = 0\}$ af de "endelige rækker" er overalt tæt i $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ og i $(\ell_1, \|\cdot\|_u)$.

2.9. Lad p være et primtal, og lad $c \in]0,1[$.

Vis, at et tal $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ kan skrives

$$r = \frac{a}{b} p^n,$$

hvor $a, n \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, og p går hverken op i a eller b. Vis, at n er entydigt fastlagt ved r.

Vis, at der ved fastsættelsen $|r|_p = c^n$ for r ovenfor, og $|0|_p = 0$ defineres en afbildning $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0, \infty[$ med egenskaberne

$$\begin{aligned} &|rs|_p = |r|_p |s|_p\,, \\ &|r+s|_p \leq \max(|r|_p\,, |s|_p)\,, \\ &|p|_p = c\,. \end{aligned}$$

Afbildningen $|\cdot|_p$ kaldes en *p–adisk absolut værdi*. Vis, at $d_p(r,s) = |r-s|_p$ er en metrik på $\mathbb{Q}$. Undersøg om følgerne (p^n), (p^{-n}), $(n!)$ er konvergente og find eventuelle grænsepunkter.

Vis, at hvis $r_n \to r \neq 0$, så er $|r_n|_p = |r|_p$ fra et vist trin, og vis derved at $K(0,1)$ er både åben og afsluttet.

Den *normaliserede p-adiske absolutte værdi* opnås svarende til $c = \frac{1}{p}$. Vis, at der for alle $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gælder

$$\Pi_p |r|_p = \frac{1}{|r|},$$

hvor produktet er over alle primtal p og $|\cdot|_p$ er den normaliserede p-adiske absolutte værdi.

2.10. En familie $(A_i)_{i\in I}$ af delmængder af et metrisk rum (M,d) kaldes *lokalt endelig* såfremt

$$\forall x \in M\, \exists U \in \mathcal{U}(x) : \{i \in I \mid A_i \cap U \neq \varnothing\} \text{ er endelig},$$

altså såfremt der til ethvert punkt $x \in M$ findes en omegn U af x, der kun har punkter fælles med A_i for endelig mange $i \in I$.

Vis, at hvis $(A_i)_{i\in I}$ er en lokalt endelig familie af afsluttede mængder, så er $\bigcup_{i\in I} A_i$ afsluttet.

2.11. Lad (x_n) være en konvergent følge med grænseværdi x i et metrisk rum (M,d). Vis, at $F = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ er en afsluttet delmængde.

2.12. Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være en konveks mængde, dvs. for $x, y \in A$ er også liniestykket $\{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0,1]\}$ fra x til y indeholdt i A.

Vis, at $\mathring{A}$ og $\overline{A}$ er konvekse ($\mathring{A}$ kan være tom).

§3. Kontinuerte afbildninger

3.1. Kontinuitet af en afbildning i et punkt.

Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum. Kugler i X og Y betegnes $K_X(x, r)$ og $K_Y(y, r)$.

En afbildning $f : X \to Y$ kaldes *kontinuert i punktet* $a \in X$, og a kaldes et *kontinuitetspunkt* for f, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$, således at

$$f(K_X(a, \delta)) \subseteq K_Y(f(a), \varepsilon),$$

altså således at der for $x \in X$ gælder

$$d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Skrevet med logiske symboler udtrykkes definitionen således:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \, \forall x \in X : d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Løst sagt kræves altså, at hvis x er nær ved a, så er $f(x)$ nær ved $f(a)$.

Hvis afbildningen ikke er kontinuert i punktet a, siges den at være *diskontinuert* i a.

For en afbildning $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$ af en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ind i $\mathbb{R}^m$, hvor A og $\mathbb{R}^m$ udstyres med euklidisk metrik, betyder ovenstående definition, at punktet $a \in A$ er kontinuitetspunkt for f, hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \|f(x) - f(a)\|_2 < \varepsilon \text{ for alle } x \in A \text{ med } \|x - a\|_2 < \delta.$$

Specielt bemærkes, at for en reel funktion f defineret på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ er denne definition (med $k = m = 1$ og $A = I$) identisk med den fra Mat 1 kendte, jf. Adams p.A-22.

Kontinuitet kan i stedet udtrykkes under brug af begrebet konvergent punktfølge, idet der gælder:

Sætning 3.1. *Afbildningen $f : X \to Y$ er kontinuert i punktet $a \in X$, hvis og kun hvis det for enhver punktfølge (x_n) i X gælder, at når (x_n) er konvergent med grænsepunkt a, er følgen $(f(x_n))$ af billedpunkter konvergent med grænsepunkt $f(a)$.*

Bevis. (1) Vi antager, at f er kontinuert i a og at $x_n \to a$ for $n \to \infty$. Til ethvert $\varepsilon > 0$ findes, da f er kontinuert i a, et $\delta > 0$, så at $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$, når $d_X(x, a) < \delta$. Til dette δ findes, da $x_n \to a$ for $n \to \infty$, et $n_0 \in \mathbb{N}$, så at $d_X(x_n, a) < \delta$ for alle $n \geq n_0$. Følgelig gælder $d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ for alle $n \geq n_0$. Altså gælder $f(x_n) \to f(a)$ for $n \to \infty$.

(2) Vi antager, at f ikke er kontinuert i a. Dette betyder, at der findes et $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+$, således at der for ethvert $\delta \in \mathbb{R}_+$ findes et $x \in X$ med

$$d_X(x,a) < \delta \quad \text{og} \quad d_Y(f(x), f(a)) \geq \varepsilon_0 \,. \tag{1}$$

Svarende til $\delta = 1\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{3}\,, \ldots$ vælges punkterne $x_1, x_2, x_3, \ldots$ så (1) gælder. Herved fås en punktfølge (x_n) i X, for hvilken der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$d_X(x_n, a) < \frac{1}{n} \quad \text{og} \quad d_Y(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon_0 \,.$$

Følgen (x_n) konvergerer altså mod a, medens følgen $(f(x_n))$ af billedpunkter ikke konvergerer mod $f(a)$. $\square$

3.2. Kontinuerte afbildninger.

Idet (X, d_X) og (Y, d_Y) er metriske rum, siges en afbildning $f : X \to Y$ at være *kontinuert*, hvis den er kontinuert i ethvert punkt $a \in X$.

Hvis afbildningen ikke er kontinuert, siges den at være *diskontinuert*. En afbildning er altså diskontinuert, hvis den er diskontinuert i mindst et punkt. Følgende resultat viser, at kontinuitet er et topologisk begreb.

Sætning 3.2. *En afbildning $f : X \to Y$ er kontinuert, hvis og kun hvis originalmængden $f^{-1}(G)$ af enhver åben delmængde G af Y er en åben delmængde af X.*

Bevis. (1) Antag, at f er kontinuert, og lad G være en åben delmængde af Y. For ethvert punkt $a \in f^{-1}(G)$ gælder $f(a) \in G$. Da G er åben, findes et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, så at $K_Y(f(a), \varepsilon) \subseteq G$. Da f er kontinuert i a, findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så at $f(K_X(a, \delta)) \subseteq K_Y(f(a), \varepsilon)$. Følgelig gælder $K_X(a, \delta) \subseteq f^{-1}(G)$. Mængden $f^{-1}(G)$ er altså åben i X.

(2) Antag, at $f^{-1}(G)$ er åben for enhver åben delmængde G af Y. For ethvert punkt $a \in X$ og ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælder da, at $f^{-1}(K_Y(f(a), \varepsilon))$ er åben og den indeholder a. Der findes altså et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så at $K_X(a, \delta) \subseteq f^{-1}(K_Y(f(a), \varepsilon))$. Følgelig er $f(K_X(a, \delta)) \subseteq K_Y(f(a), \varepsilon)$, og altså er f kontinuert i punktet a. $\square$

Via dualiteten mellem åbne og afsluttede mængder har vi følgende analoge sætning.

Sætning 3.3. *En afbildning $f : X \to Y$ er kontinuert, hvis og kun hvis originalmængden $f^{-1}(F)$ af enhver afsluttet delmængde F af Y er en afsluttet delmængde af X.*

Bevis. (1) Antag, at f er kontinuert, og lad F være en afsluttet delmængde af Y. Da er $G = Y \backslash F$ åben og følgelig $f^{-1}(G)$ åben. Men $f^{-1}(F) = X \backslash f^{-1}(G)$. Altså er $f^{-1}(F)$ afsluttet.

(2) Antag, at $f^{-1}(F)$ er afsluttet for enhver afsluttet delmængde F af Y. For enhver åben delmængde G af Y er $F = Y \setminus G$ afsluttet og følgelig $f^{-1}(F)$ afsluttet. Men $f^{-1}(G) = X \setminus f^{-1}(F)$. Altså er $f^{-1}(G)$ åben. Følgelig er f kontinuert. □

Som anvendelse af ovenstående resultater ser man, at hvis $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ er kontinuert, så er mængderne

$$\{x \in X | f(x) > a\}\,,\ \{x \in X | a < f(x) < b\}$$

åbne i X, og mængderne

$$\{x \in X | f(x) \leq a\}\,,\ \{x \in X | a \leq f(x) \leq b\}$$

er afsluttede i X.

Følgende resultat anvendes ofte:

Sætning 3.4. *Lad $f, g : X \to Y$ være kontinuerte afbildninger. Hvis $f(x) = g(x)$ for alle x i en overalt tæt delmængde $A \subseteq X$, så er $f = g$.*

Bevis. For vilkårligt $x \in X$ findes en følge (x_n) i A så $x_n \to x$ fordi $x \in \overline{A} = X$, jf. Sætning 2.10. Da $f(x_n) = g(x_n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ ifølge forudsætningen, kan vi af Sætning 3.1 slutte, at

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)\,.$$

Da $x \in X$ var vilkårlig er $f = g$. □

Sætning 3.5. *Hvis (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) er metriske rum og $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ er kontinuerte, er den sammensatte afbildning $g \circ f : X \to Z$ ligeledes kontinuert.*

Bevis. For enhver delmængde C af Z er $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. Hvis C er åben, er $g^{-1}(C)$ åben og følgelig $f^{-1}(g^{-1}(C))$ åben. □

Bemærkning 3.6. Der gælder naturligvis også en punktvis version:

Hvis f er kontinuert i $x_0 \in X$ og g er kontinuert i $y_0 = f(x_0)$, så er $g \circ f$ kontinuert i x_0.

Beviset føres f.eks. ved hjælp af Sætning 3.1.

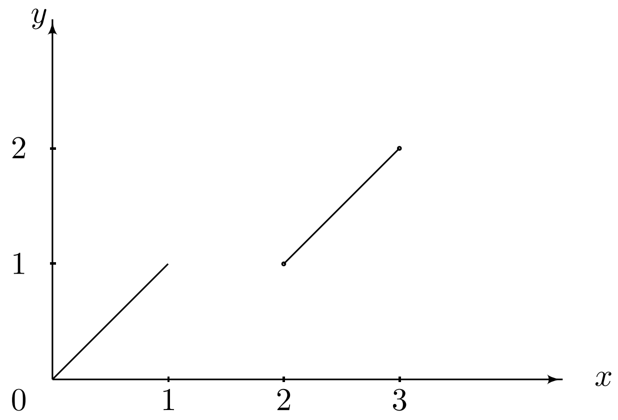
Advarsel 3.7. Den omvendte afbildning til en bijektiv kontinuert afbildning vil i almindelighed ikke være kontinuert.

3.4

Lad X og Y være mængderne $[0,1[\cup[2,3]$ og $[0,2]$ med den sædvanlige metrik $d(x,y)=|x-y|$, og lad $f:X\to Y$ være den ved

$$y=f(x)=\begin{cases} x & \text{for} \quad x\in[0,1[\\ x-1 & \text{for} \quad x\in[2,3] \end{cases}$$

bestemte afbildning.



Da er f kontinuert og bijektiv, men f^{-1} er diskontinuert i punktet 1, idet $1-\frac{1}{n}\to 1$ i Y, men $f^{-1}(1-\frac{1}{n})=1-\frac{1}{n}$ konvergerer ikke mod $f^{-1}(1)=2$.

Definition 3.8. En bijektiv afbildning $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ hvor både f og f^{-1} er kontinuerte kaldes en *homeomorfi*.

Ved en homeomorfi bevares alle topologiske begreber. F.eks. gælder om $a\in A\subseteq X$, at a er indre punkt i A, hvis og kun hvis $f(a)$ er indre punkt i $f(A)$.

Vi nævner uden bevis følgende dybtliggende sætning fra 1911 af den hollandske matematiker L.E.J. Brouwer (1881–1966).

Sætning 3.9. *Lad $X\subseteq\mathbb{R}^k$ være en åben delmængde med den sædvanlige metrik d. Hvis $f:X\to\mathbb{R}^k$ er kontinuert og injektiv, så er $Y=f(X)$ en åben delmængde af $\mathbb{R}^k$ og f er en homeomorfi af (X,d) på (Y,d).*

3.3. Lipschitz afbildning. Isometri.

En afbildning $f:X\to Y$ af det metriske rum (X,d_X) ind i det metriske rum (Y,d_Y) kaldes en *Lipschitz afbildning* med (Lipschitz) konstant C, hvis der for alle $x_1,x_2\in X$ gælder

$$d_Y(f(x_1),f(x_2))\le C\ d_X(x_1,x_2)\,.$$

(Rudolf Lipschitz. Tysk matematiker 1832–1903). Hvis $C=1$ kaldes f *afstandsformindskende*. En Lipschitz afbildning er kontinuert, idet man til $\varepsilon>0$ kan vælge $\delta=\frac{\varepsilon}{C}$.

Afbildningen f kaldes en *isometri*, hvis der for vilkårlige punkter $x_1, x_2 \in X$ gælder

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)\,.$$

En isometri er injektiv. (Hvorfor?) Hvis en isometri desuden er surjektiv er den inverse afbildning $f^{-1} : Y \to X$ ligeledes en isometri. En surjektiv isometri er således en homeomorfi. Afbildningen $(x, y) \mapsto x+iy$ er en isometri af $\mathbb{R}^2$ med euklidisk metrik på $\mathbb{C}$.

Der gælder følgende forbløffende sætning, vist af de polske matematikere Mazur og Ulam i 1932.

Sætning 3.10. *Lad E_1 og E_2 være normerede reelle vektorrum. En surjektiv isometri $f : E_1 \to E_2$ med $f(0) = 0$ er automatisk lineær.*

Det vil føre for vidt at komme ind på beviset.

I tilfældet $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^k$ med den euklidiske afstand er forudsætningen om surjektivitet automatisk opfyldt, og beviset let:

Sætning 3.11. *Lad $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ være en isometri med hensyn til den euklidiske afstand. Så findes en vektor $a \in \mathbb{R}^k$ og en ortogonal matrix A så at*

$$f(x) = Ax + a \quad \textit{for} \quad x \in \mathbb{R}^k\,.$$

(Man har altså, at f er en *ortogonal transformation* $x \mapsto Ax$ efterfulgt af en *translation* $x \mapsto x + a$).

Bevis. Sæt $g(x) = f(x) - a$, hvor $a := f(0)$. Idet

$$\|g(x_1) - g(x_2)\|_2 = \|f(x_1) - f(x_2)\|_2 = \|x_1 - x_2\|_2,$$

er g en isometri og $g(0) = 0$. Heraf følger, at g er normbevarende:

$$\|g(x)\|_2 = \|g(x) - g(0)\|_2 = \|x - 0\|_2 = \|x\|_2 \text{ for } x \in \mathbb{R}^k\,,$$

og da skalarproduktet $x_1 \cdot x_2$ af to vektorer er givet ved

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}(\|x_1\|_2^2 + \|x_2\|_2^2 - \|x_1 - x_2\|_2^2),$$

finder vi

$$\begin{aligned} g(x_1) \cdot g(x_2) &= \frac{1}{2}(\|g(x_1)\|_2^2 + \|g(x_2)\|_2^2 - \|g(x_1) - g(x_2)\|_2^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x_1\|_2^2 + \|x_2\|_2^2 - \|x_1 - x_2\|_2^2) = x_1 \cdot x_2\,. \end{aligned}$$

Dette udtrykker, at g bevarer skalarproduktet. Betegner $e_1, \dots, e_k$ den sædvanlige ortonormale basis i $\mathbb{R}^k$ gælder $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ og derfor også $g(e_i) \cdot g(e_j) = \delta_{ij}$ så $g(e_1), \dots, g(e_k)$ er ligeledes en ortonormal basis. Skrives $g(x)$ som linearkombination af disse vektorer

$$g(x) = \lambda_1 g(e_1) + \cdots + \lambda_k g(e_k)$$

er koefficienterne λ_i givet ved $\lambda_i = g(x) \cdot g(e_i) = x \cdot e_i = x_i$, hvis $x = (x_1, \dots, x_k)$. Hvis A betegner den matrix, der har $g(e_1), \dots, g(e_k)$ som søjler, er A en ortogonal matrix, og ligningerne $\lambda_i = x_i$, $i = 1, \dots, k$ viser, at $g(x) = Ax$, hvor det sidste er matrix produktet af A og x skrevet som en søjle. Vi har hermed vist, at $f(x) = g(x) + a = Ax + a$. $\square$

På talrummet $\mathbb{L}^k$, $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, betragtes maksimumsnormen

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_k|\} \text{ for } x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{L}^k .$$

Da den er ækvivalent med den euklidiske norm, kan vi i kontinuitetsspørgsmål undertiden med fordel betragte den i stedet for den euklidiske norm. Den j'te *koordinatfunktion* eller *projektion*

$$\pi_j : \mathbb{L}^k \to \mathbb{L}$$

er defineret ved $\pi_j(x_1, \dots, x_k) = x_j$, $j = 1, \dots, k$.

Idet der for $x = (x_1, \dots, x_k)$ og $y = (y_1, \dots, y_k)$ i $\mathbb{L}^k$ gælder

$$|\pi_j(x) - \pi_j(y)| = |x_j - y_j| \le \|x - y\|_\infty ,$$

er π_j afstandsformindskende og dermed kontinuert.

En afbildning $f : (M, d) \to \mathbb{L}^k$ af et metrisk rum (M, d) ind i talrummet $\mathbb{L}^k$ har de k *koordinatfunktioner* $f_j = \pi_j \circ f : (M, d) \to \mathbb{L}$, $j = 1, \dots, k$ og man har

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)) , \quad x \in M .$$

Vedrørende kontinuitet gælder:

Sætning 3.12. *f er kontinuert hvis og kun hvis hver koordinatfunktion f_j er kontinuert.*

Et tilsvarende udsagn gælder om kontinuitet i et enkelt punkt.

Bevis. Hvis f er kontinuert er de sammensatte afbildninger $f_j = \pi_j \circ f$ kontinuerte, $j = 1, \dots, k$. Hvis omvendt $f_1, \dots, f_k$ alle er kontinuerte i punktet $a \in M$, og $\varepsilon > 0$ er givet, så findes $\delta_1, \dots, \delta_k > 0$ så der for hvert $j = 1, \dots, k$ gælder

$$d(a, x) < \delta_j \Rightarrow |f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon .$$

Med $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_k)$ gælder da

$$d(a,x) < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_\infty = \max\{|f_j(x) - f_j(a)| \mid j = 1, \dots, k\} < \varepsilon \,.$$

$\square$

Tilsvarende er $f : (M,d) \to \mathbb{C}$ kontinuert hvis og kun hvis $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ er kontinuerte.

3.4. Kontinuitet af regneoperationerne.

Sætning 3.13. *De ved*

$$\varphi_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \,,\ \varphi_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2 \,,\ \varphi_3 : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$$

definerede afbildninger af $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *ind i* $\mathbb{R}$ *eller* $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *ind i* $\mathbb{C}$ *og den ved* $\varphi_4 : (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1}{x_2}$ *definerede afbildning af* $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ *ind i* $\mathbb{R}$ *eller* $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ *ind i* $\mathbb{C}$ *er kontinuerte.*

Bevis. Idet vi i $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ benytter den ved maksimumsnormen $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|\,,\, |x_2|\}$ bestemte metrik, kan påstandene for $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ bevises samtidigt.

Kontinuiteten af *summen* følger af, at der for vilkårlige $a = (a_1, a_2)$ og $x = (x_1, x_2)$ gælder

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x) - \varphi_1(a)| &= |x_1 - a_1 + x_2 - a_2| \le |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \\ &\le 2\max\{|x_1 - a_1|\,,\, |x_2 - a_2|\} = 2\|x - a\|_\infty \,. \end{aligned}$$

Tilsvarende følger kontinuiteten af *differensen* af, at

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x) - \varphi_2(a)| &= |x_1 - a_1 - x_2 + a_2| \le |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \\ &\le 2\max\{|x_1 - a_1|\,,\, |x_2 - a_2|\} = 2\|x - a\|_\infty \,. \end{aligned}$$

Ved *produktet* har vi, idet vi sætter $x - a = y = (y_1, y_2)$,

$$\varphi_3(x) - \varphi_3(a) = (a_1 + y_1)(a_2 + y_2) - a_1 a_2 = a_1 y_2 + y_1 a_2 + y_1 y_2 \,.$$

For $\|x - a\|_\infty = \|y\|_\infty < \delta \le 1$ gælder også

$$|\varphi_3(x) - \varphi_3(a)| < (|a_1| + |a_2| + 1)\delta \,,$$

hvilket viser kontinuiteten i det vilkårlige punkt a, idet vi for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vælge et $\delta \in]0,1]$, så at $(|a_1| + |a_2| + 1)\delta < \varepsilon$.

Ved *kvotienten* skal kontinuiteten vises i et vilkårligt punkt $a = (a_1, a_2)$, hvor $a_2 \neq 0$. Idet vi atter sætter $x-a = y = (y_1, y_2)$, og nøjes med at betragte sådanne x, for hvilke $\|x - a\|_\infty = \|y\|_\infty < |a_2|$ og følgelig $x_2 = a_2 + y_2 \neq 0$, har vi

$$\varphi_4(x) - \varphi_4(a) = \frac{a_1 + y_1}{a_2 + y_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{(a_1 + y_1)a_2 - a_1(a_2 + y_2)}{(a_2 + y_2)a_2} = \frac{y_1 a_2 - a_1 y_2}{(a_2 + y_2)a_2} .$$

For $\|x - a\|_\infty = \|y\|_\infty < \delta \leq \frac{1}{2}|a_2|$ gælder altså

$$|\varphi_4(x) - \varphi_4(a)| < \frac{(|a_1| + |a_2|)\delta}{\frac{1}{2}|a_2||a_2|} ,$$

hvilket viser kontinuiteten i a, idet vi for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vælge et $\delta \in]0, \frac{1}{2}|a_2|]$, så at

$$\frac{(|a_1| + |a_2|)\delta}{\frac{1}{2}|a_2|^2} < \varepsilon .$$

□

Sætning 3.14. *Den ved $x \mapsto \|x\|$ bestemte afbildning af et normeret rum $(E, +, \mathbb{L})$ ind i $\mathbb{R}$ er afstandsformindskende og dermed kontinuert. Specielt er $x \mapsto |x|$ kontinuert af $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{R}$.*

Bevis. Ifølge (N3) gælder $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\|+\|y\|$ hvoraf $\|x\|-\|y\| \leq \|x - y\|$. Ved ombytning af x og y ses at $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. □

Benyttes karakteriseringen af kontinuitet ved konvergente punktfølger, og det faktum, at en punktfølge $((x_n, y_n))$ i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{C}^2$ er konvergent med grænsepunkt (x, y), hvis og kun hvis talfølgen (x_n) er konvergent med grænseværdien x og talfølgen (y_n) er konvergent med grænseværdien y, ser vi, at kontinuiteten af regneoperationerne er ensbetydende med følgende sætning om regning med konvergente talfølger:

Hvis de reelle eller komplekse talfølger (x_n) og (y_n) er konvergente med grænseværdierne x og y, er talfølgerne $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n y_n)$ konvergente med grænseværdierne $x + y$, $x - y$, xy. Hvis y og hvert y_n er $\neq 0$, er talfølgen $\frac{x_n}{y_n}$ konvergent med grænseværdien $\frac{x}{y}$.

Vi ser endvidere:

Hvis den reelle eller komplekse talfølge (x_n) er konvergent med grænseværdien x, er talfølgen $(|x_n|)$ konvergent med grænseværdien $|x|$.

3.5. Kontinuerte reelle og komplekse funktioner.

Idet (M, d) betegner et metrisk rum kaldes en kontinuert afbildning $f : M \to \mathbb{R}$ eller $f : M \to \mathbb{C}$ en kontinuert reel eller kompleks funktion på M. Mængden af kontinuerte reelle funktioner på M betegnes $C(M, \mathbb{R})$ og mængden af kontinuerte komplekse funktioner $C(M, \mathbb{C})$. Hvis det af sammenhængen fremgår, hvilket af de to tilfælde talen er om, benyttes også den kortere betegnelse $C(M)$.

Sætning 3.15. *For $f_1, f_2 \in C(M, \mathbb{C})$ gælder, at funktionerne $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$ og $f_1 f_2$ tilhører $C(M, \mathbb{C})$. Såfremt f_2 ikke antager værdien 0, gælder også at $\frac{f_1}{f_2} \in C(M, \mathbb{C})$.*

Bevis. Dette følger af sætningen om sammensætning af kontinuerte afbildninger og sætningen om regneoperationernes kontinuitet, idet det bemærkes, at afbildningen $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ af M ind i $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ er kontinuert. $\square$

Vi bemærker endvidere, at hvis f er kontinuert, er også funktionen $|f|$, sammensat af $x \mapsto f(x)$ og $|\cdot|$, kontinuert. Hvis $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}$ er kontinuerte følger heraf, at også funktionerne $f_1 \vee f_2 = \max\{f_1, f_2\}$ og $f_1 \wedge f_2 = \min\{f_1, f_2\}$ er kontinuerte. Der gælder nemlig

$$(f_1 \vee f_2)(x) = \max(f_1(x), f_2(x)) = \frac{1}{2}(f_1(x) + f_2(x)) + \frac{1}{2}|f_1(x) - f_2(x)|\,,$$

og

$$(f_1 \wedge f_2)(x) = \min(f_1(x), f_2(x)) = \frac{1}{2}(f_1(x) + f_2(x)) - \frac{1}{2}|f_1(x) - f_2(x)|\,.$$

Hvis en følge $f_n : M \to \mathbb{L}$ af kontinuerte funktioner konvergerer *punktvis* mod en funktion $f : M \to \mathbb{L}$, altså hvis

$$\forall x \in M \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,,$$

kan man i almindelighed ikke slutte, at f er kontinuert, jf. Opg. 3.9. (Som et kuriosum kan nævnes, at Cauchy i sin lærebog Cours d'analyse (1821) hævder, at grænsefunktionen er kontinuert. I et brev fra 1826 gør Abel opmærksom på fejlen, der nok skyldes, at begreberne ikke har været tilstrækkeligt præciserede). Hvis konvergensen derimod er *uniform*, altså hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \, \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,,$$

er *grænsefunktionen f kontinuert.*

Mere almindeligt gælder

Sætning 3.16. *Lad (f_n) være en uniformt konvergent følge af funktioner på et metrisk rum (M, d) med grænsefunktion f. Dersom hver funktion f_n er kontinuert i punktet $x_0 \in M$, er f kontinuert i x_0.*

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi skal bestemme $\delta > 0$ så der for $x \in K(x_0, \delta)$ gælder $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Da (f_n) konvergerer uniformt mod f på M kan vi bestemme $N \in \mathbb{N}$ så der for alle $x \in M$ gælder

$$|f(x) - f_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Udnyttes dernæst, at f_N er kontinuert i x_0 kan vi bestemme $\delta > 0$ så der for $x \in K(x_0, \delta)$ gælder

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

For $x \in K(x_0, \delta)$ gælder altså

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

$\square$

Opgaver til §3

3.1. Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum og lad $\mathcal{U}(a)$ betegne systemet af omegne af $a \in X$. Vis, at $f : X \to Y$ er kontinuert i $a \in X$ hvis og kun hvis

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(a)) : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(a)\,.$$

Vis, at f er kontinuert hvis og kun hvis

$$\forall A \subseteq X : f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}\,.$$

3.2. Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum. Vis, at hvis d_X er den diskrete metrik, så er enhver afbildning $f : X \to Y$ kontinuert. Vis omvendt, at hvis $f : X \to Y$ er en kontinuert injektiv afbildning og d_Y er diskret, så er d_X ækvivalent med den diskrete metrik.

3.3. Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en C^1-funktion med begrænset differentialkvotient. Vis, at f er en Lipschitz afbildning med konstant $C = \sup\{|f'(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$.

3.4. Vis, at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ givet ved $f(x) = (x, |x|)$ er en isometri, når $\mathbb{R}^2$ er udstyret med maksimumsnormen. Hvad viser dette om Mazur-Ulam's Sætning (3.10)?

3.5. En familie $\mathcal{B}$ af åbne mængder i et metrisk rum (Y, d_Y) kaldes en *basis* for systemet $\mathcal{G}$ af åbne mængder, hvis enhver ikke tom åben mængde er foreningsmængde af mængder fra $\mathcal{B}$.

Vis, at mængden af kugler er en basis. Vis også, at hvis A er overalt tæt i Y, så er familien

$$\mathcal{B} = \{K(a, \frac{1}{n}) \mid a \in A\,,\ n \in \mathbb{N}\}$$

en basis.

Vis, at $f : X \to Y$ er kontinuert blot $f^{-1}(G) \in \mathcal{G}(X)$ for alle $G \in \mathcal{B}$, hvor $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathcal{G}(Y)$.

3.6. *Afstanden fra et punkt x til en ikke tom mængde A* i et metrisk rum (M, d) defineres ved

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}\,.$$

Vis, at funktionen $x \mapsto d(x, A)$ af (M, d) ind i $\mathbb{R}$ er afstandsformindskende og dermed kontinuert.

Vis, at $d(x, A) = 0$ hvis og kun hvis $x \in \overline{A}$.

Vis, at enhver afsluttet mængde er fællesmængde af en følge af åbne mængder.

Vis, at $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ er kontinuert i $x_0 \in X$ hvis og kun hvis der for alle ikke tomme delmængder $A \subseteq X$ gælder

$$d_X(x_0, A) = 0 \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(A)) = 0\,.$$

3.7. (Urysohn's lemma for metriske rum.) Lad (M, d) være et metrisk rum. Vis, at der til et par F_1, F_2 af afsluttede, disjunkte og ikke tomme delmængder findes en kontinuert funktion $f : M \to \mathbb{R}$ med egenskaberne

$$\begin{aligned} &f(x) = 0 && \text{for} \quad x \in F_1\,, \\ &f(x) = 1 && \text{for} \quad x \in F_2\,, \\ &0 < f(x) < 1 && \text{for} \quad x \in M \setminus (F_1 \cup F_2)\,. \end{aligned}$$

Vink. Sæt

$$f(x) = \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}.$$

Vis, at der findes åbne disjunkte mængder G_1, G_2 i M så $F_1 \subseteq G_1$ og $F_2 \subseteq G_2$.

3.8. Lad (M, d) være et metrisk rum. Mængden af bijektive afbildninger $f : M \to M$ udgør en gruppe ved sammensætning som komposition, M's transformationsgruppe. Vis, at mængden af homeomorfier og mængden af surjektive isometrier af M udgør undergrupper af M's transformationsgruppe.

3.9. Lad $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f_n(x) = (\sin x)^{2n}\,,\ n = 1, 2, \ldots$.

Vis, at grænseværdien $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ eksisterer for alle $x \in \mathbb{R}$ og afgør, om f_n konvergerer uniformt mod grænsefunktionen f.

§4. Konstruktioner med metriske rum

4.1. Delrum.

Lad (M,d) være et metrisk rum og lad M' være en ikke tom delmængde af M. Så er restriktionen af d til $M' \times M'$ naturligvis også en metrik på M', og vi kan derfor betragte det metriske rum (M',d), som kaldes det *metriske delrum* af M. Vi siger at M' er forsynet med den *inducerede* eller *nedarvede metrik*.

Til det metriske rum (M,d) er altså knyttet en skare af nye metriske rum (M',d), hvor $\varnothing \neq M' \subseteq M$. Dermed kan vi tale om topologiske begreber i rummet (M',d), f.eks. om systemet $\mathcal{G}(M')$ af åbne mængder i M', og systemet $\mathcal{F}(M')$ af afsluttede mængder i M'. Mængderne i $\mathcal{G}(M')$ (resp. $\mathcal{F}(M')$) kaldes åbne (resp. afsluttede) *relativt* til M'.

Sætning 4.1. *Med betegnelserne ovenfor gælder*

(a) $\mathcal{G}(M') = \{M' \cap G | G \in \mathcal{G}(M)\}$.

(b) $\mathcal{F}(M') = \{M' \cap F | F \in \mathcal{F}(M)\}$.

(c) *For $A \subseteq M'$ gælder der om afslutningen $\overline{A}^{M'}$ af A i (M',d) at*

$$\overline{A}^{M'} = M' \cap \overline{A}\,.$$

Bevis. (a) Lad $K_{M'}(a,r)$ være kuglen i (M',d) med centrum i $a \in M'$ og radius $r > 0$. Så er

$$K_{M'}(a,r) = \{x \in M' \mid d(a,x) < r\} = M' \cap K(a,r)\,.$$

Heraf ses, at $M' \cap G \in \mathcal{G}(M')$ for alle $G \in \mathcal{G}(M)$, thi for $a \in M' \cap G$ vil $a \in G$, og derfor findes $r > 0$ så $K(a,r) \subseteq G$, og altså $K_{M'}(a,r) \subseteq M' \cap G$.

Antag omvendt, at $G' \in \mathcal{G}(M')$. Til hvert $x \in G'$ findes $r_x > 0$ så $K_{M'}(x,r_x) \subseteq G'$. Mængden

$$G = \bigcup_{x \in G'} K(x,r_x)$$

er åben i M ifølge Sætning 2.6 (iii), og der gælder

$$M' \cap G = \bigcup_{x \in G'} K_{M'}(x,r_x) = G'\,.$$

(b) Hvis $F \in \mathcal{F}(M)$ er $G = M \setminus F \in \mathcal{G}(M)$. Sættes $F' = M' \cap F$ og $G' = M' \cap G$ er $F' = M' \setminus G'$. Da G' er åben relativt til M' ifølge (a), er F'

relativt afsluttet. Hvis omvendt $F' \subseteq M'$ er relativt afsluttet er $G' = M' \setminus F'$ relativt åben. Følgelig findes en åben mængde G i M så at $G' = M' \cap G$. Sættes $F = M \setminus G$ er F afsluttet og $F' = M' \cap F$.

(c) For $A \subseteq M'$ er $M' \cap \overline{A} \in \mathcal{F}(M')$. Da $\overline{A}^{M'}$ er den mindste mængde i $\mathcal{F}(M')$ der omfatter A (Sætning 2.8) fås $\overline{A}^{M'} \subseteq M' \cap \overline{A}$. På den anden side findes (ifølge (b)) $F \in \mathcal{F}(M)$ så $\overline{A}^{M'} = M' \cap F$, altså $A \subseteq F$. Men så er $\overline{A} \subseteq F$, og derfor har vi $\overline{A}^{M'} = M' \cap F \supseteq M' \cap \overline{A}$. □

Af ovenstående ses, at hvis M' er åben i M, så er $\mathcal{G}(M') \subseteq \mathcal{G}(M)$ og

$$\mathcal{G}(M') = \{G \in \mathcal{G}(M) \mid G \subseteq M'\}.$$

På den anden side kan $\mathcal{G}(M') \subseteq \mathcal{G}(M)$ kun gælde, hvis M' er åben i M, idet $M' \in \mathcal{G}(M')$.

Eksempel 4.2. Lad $M = \mathbb{R}$ have den sædvanlige metrik og lad $M' = [0, \infty[$. Så er $[0, a[$ åben relativt til $[0, \infty[$ og $[0, a]$ afsluttet relativt til $[0, \infty[$ for alle $a > 0$. Sættes $M' =]0, \infty[$ er $]0, a[$ åben relativt til $]0, \infty[$ og $]0, a]$ afsluttet relativt til $]0, \infty[$ for alle $a > 0$.

Inklusionsafbildningen $i = i_{M',M} : M' \to M$ givet ved $i(x) = x$, når $\varnothing \neq M' \subseteq M$, er kontinuert, idet

$$i^{-1}(G) = M' \cap G$$

for $G \in \mathcal{G}(M)$. Afbildningen er endda isometrisk.

Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum, og lad $\varnothing \neq X' \subseteq X$. Hvis $f : X \to Y$ er kontinuert i et punkt $a \in X'$, er også *restriktionen* $f|X' : X' \to Y$ kontinuert i a idet $f|X' = f \circ i_{X',X}$.

Hvis $f(X) \subseteq Y' \subseteq Y$ kan vi betragte f som afbildning $f : X \to Y'$. Man ser, at $f : X \to Y'$ er kontinuert i $a \in X$ hvis og kun hvis $f : X \to Y$ er kontinuert i a.

4.2. Produktrum.

Er (M_1, d_1) og (M_2, d_2) to metriske rum, kan produktmængden $M_1 \times M_2$ gøres til et metrisk rum på følgende måde: For $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in M_1 \times M_2$ er

$$d(x, y) := \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)) \tag{1}$$

en metrik på $M_1 \times M_2$. Betingelserne (M1) og (M2) er oplagte og (M3) eftervises således: Lad $z = (z_1, z_2) \in M_1 \times M_2$ være et tredie punkt. Så giver trekantsuligheden for d_1 at

$$d_1(x_1, y_1) \leq d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

og analogt

$$d_2(x_2, y_2) \leq d_2(x_2, z_2) + d_2(z_2, y_2) \leq d(x, z) + d(z, y)\,,$$

og dermed er

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\,.$$

Metrikken (1) kaldes *produktmetrikken* af d_1 og d_2 og $(M_1 \times M_2, d)$ kaldes det *metriske produktrum* af (M_1, d_1) og (M_2, d_2). Konstruktionen udvides let til et produkt af n metriske rum.

Hvis $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik, er det metriske produktrum lig med $\mathbb{R}^2$ med den af maksimumsnormen inducerede metrik.

Sætning 4.3. *Lad $(M_1 \times M_2, d)$ være det metriske produktrum af (M_1, d_1) og (M_2, d_2). Så gælder*

(a) *For $G_1 \in \mathcal{G}(M_1)$ og $G_2 \in \mathcal{G}(M_2)$ er $G_1 \times G_2 \in \mathcal{G}(M_1 \times M_2)$.*
(b) *For $F_1 \in \mathcal{F}(M_1)$ og $F_2 \in \mathcal{F}(M_2)$ er $F_1 \times F_2 \in \mathcal{F}(M_1 \times M_2)$.*
(c) *For $A_1 \subseteq M_1$ og $A_2 \subseteq M_2$ er $(A_1 \times A_2)^\circ = \mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2$ og $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$.*
(d) *En punktfølge $x_n = (x_{n1}, x_{n2})\,,\ n = 1, 2, \ldots$ i $M_1 \times M_2$ konvergerer mod $x = (x_1, x_2)$ hvis og kun hvis (x_{n1}) konvergerer mod x_1 i M_1 og (x_{n2}) konvergerer mod x_2 i M_2.*

Beviset bygger på at for $x = (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ og $r > 0$ gælder

$$K(x, r) = K_1(x_1, r) \times K_2(x_2, r)\,,$$

hvor $K(x, r)$ er kuglen i produktrummet og $K_i(x_i, r)$ er kuglen i $(M_i, d_i)\,,\ i = 1, 2$. Beviset overlades som en øvelse til læseren. Det bemærkes, at formlen $(A_1 \times A_2)^\circ = \mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2$ naturligvis skal forstås således, at $(A_1 \times A_2)^\circ$ er det indre i rummet $M_1 \times M_2$, $\mathring{A}_1$ er det indre i M_1 og $\mathring{A}_2$ det indre i M_2. Det ville blive for tungt at lade dette fremgå af symbolerne.

Projektionsafbildningerne

$$\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1 \quad \text{og} \quad \pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$$

defineret ved

$$\pi_1(x_1, x_2) = x_1\,, \quad \pi_2(x_1, x_2) = x_2$$

er begge afstandsformindskende, og dermed kontinuerte. For $x = (x_1, x_2)\,,$ $y = (y_1, y_2) \in M_1 \times M_2$ gælder nemlig

$$d_1(\pi_1(x), \pi_1(y)) = d_1(x_1, y_1) \leq d(x, y)$$

og analogt for π_2. Bemærk at

$$\pi_1^{-1}(G_1) \cap \pi_2^{-1}(G_2) = G_1 \times G_2 \quad \text{for} \quad G_1 \subseteq M_1\,,\; G_2 \subseteq M_2\,.$$

For $a \in M_1$ er $j_a : M_2 \to M_1 \times M_2$ givet ved $j_a(y) = (a, y)$ en kontinuert afbildning, ja endda en isometri. Tilsvarende er afbildningen $x \mapsto (x, b)$ en isometri af M_1 ind i $M_1 \times M_2$ for fast $b \in M_2$.

Ved sammensætning af en afbildning $f : M_1 \times M_2 \to M_3$ med j_a fås *snitafbildningen* $f \circ j_a = f(a, \cdot) : M_2 \to M_3$ gived ved $y \mapsto f(a, y)$. Tilsvarende har vi for $b \in M_2$ snitafbildningen $f(\cdot, b) : M_1 \to M_3$ givet ved $x \mapsto f(x, b)$. Da sammensætning af kontinuerte afbildninger igen er kontinuert ses, at *snitafbildningerne af en kontinuert afbildning igen er kontinuerte.*

4.3. Rummet $\mathcal{L}(E, F)$.

Lad E være et normeret rum over $\mathbb{L}$ ($= \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$), hvor normen betegnes $\|\cdot\|$.

Sætning 4.4. *De ved*

$$\varphi(x, y) = x + y \quad \textit{af} \quad E \times E \quad \textit{ind i} \quad E$$

og

$$\psi(\lambda, x) = \lambda x \quad \textit{af} \quad \mathbb{L} \times E \quad \textit{ind i} \quad E$$

definerede afbildninger er kontinuerte.

Bevis. Afbildningen φ opfylder endda en Lipschitz betingelse med konstant 2, idet der for $(x, y) \in E \times E$ og $(a, b) \in E \times E$ gælder

$$\begin{aligned}&\|\varphi(x, y) - \varphi(a, b)\| = \|(x - a) + (y - b)\|\\ &\le \|x - a\| + \|y - b\| \le 2\max\{\|x - a\|, \|y - b\|\}\,.\end{aligned}$$

Vi viser dernæst, at ψ er kontinuert i $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{L} \times E$, og benytter hertil udregningen

$$\psi(\lambda, x) - \psi(\lambda_0, x_0) = \lambda x - \lambda_0 x_0 = \lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0\,,$$

hvoraf

$$\|\psi(\lambda, x) - \psi(\lambda_0, x_0)\| \le |\lambda|\|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0|\|x_0\|\,.$$

Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Hvis $\max(|\lambda - \lambda_0|\,, \|x - x_0\|) \le \delta \le 1$ finder vi

$$\|\psi(\lambda, x) - \psi(\lambda_0, x_0)\| \le \delta(|\lambda| + \|x_0\|) \le \delta(|\lambda_0| + 1 + \|x_0\|) \le \varepsilon\,,$$

hvis vi vælger $\delta \le \varepsilon(1 + |\lambda_0| + \|x_0\|)^{-1}$. $\square$

Lad E, F være normerede vektorrum over samme legeme $\mathbb{L}$. Begge de optrædende normer betegnes $\|\cdot\|$, hvilket ikke skulle kunne give anledning til misforståelse.

For en lineær afbildning $T : E \to F$, altså en afbildning der opfylder

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$
$$T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

for alle $x, y \in E$ og $\lambda \in \mathbb{L}$, indføres

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \mid x \in E\,,\ \|x\| \le 1\} \in [0, \infty]\,.$$

Bemærkning 4.5. Hvis T er en reel $k \times k$ matrix og hvis $x \in \mathbb{R}^k$ opfattes som en søjlevektor, vil matrixproduktet Tx være en søjlevektor i $\mathbb{R}^k$. Ved tilordningen $x \mapsto Tx$ defineres en lineær afbildning af $\mathbb{R}^k$ ind i $\mathbb{R}^k$ og den betegnes også T. Med dette eksempel som baggrund er det blevet kutyme at skrive Tx i stedet for $T(x)$ også når $T : E \to F$ er en vilkårlig lineær afbildning mellem vilkårlige vektorrum.

Sætning 4.6. *For en lineær afbildning $T : E \to F$ er følgende betingelser ensbetydende:*

(1) *T er kontinuert i 0,*
(2) *T opfylder en Lipschitz betingelse,*
(3) *$\|T\| < \infty$.*

Hvis de tre betingelser er opfyldt er $\|T\|$ den mindst mulige Lipschitz konstant.

Bevis. (1) $\Rightarrow$ (2). Hvis T er kontinuert i 0, som afbildes i nulvektoren i F, findes $\delta > 0$, så der for $x \in E$ gælder

$$\|x\| \le \delta \Rightarrow \|Tx\| \le 1\,.$$

Heraf følger, at

$$\|Tx\| \le \frac{1}{\delta}\|x\| \quad \text{for} \quad x \in E\,.$$

Dette er klart for $x = 0$, og hvis $x \ne 0$, vil $y = \frac{\delta}{\|x\|}x$ opfylde $\|y\| = \delta$, hvoraf

$$1 \ge \|Ty\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right)\right\| = \left\|\frac{\delta}{\|x\|}Tx\right\| = \frac{\delta}{\|x\|}\|Tx\|\,,$$

som viser påstanden. Lineariteten viser nu

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \le \frac{1}{\delta}\|x-y\|\,,$$

altså at T opfylder en Lipschitz betingelse med konstant $\frac{1}{\delta}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Hvis (2) gælder med Lipschitz konstant C, har man for $\|x\| \le 1$

$$\|Tx\| = \|Tx - T0\| \le C\|x-0\| = C\|x\| \le C\,,$$

hvilket viser, at $\|T\| \le C < \infty$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Hvis (3) er opfyldt, har vi for $x \in E$ med $\|x\| \le 1$ at $\|Tx\| \le \|T\|$. For $x \in E \setminus \{0\}$ har vi så

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \le \|T\|\,,$$

hvoraf

$$\|Tx\| \le \|T\|\;\|x\|\,,$$

som også gælder for $x = 0$ og viser, at T er kontinuert i 0. Denne ulighed kombineret med lineariteten viser, at T opfylder en Lipschitz betingelse med konstant $\|T\|$, og dermed er $\|T\|$ den mindst mulige Lipschitz konstant. $\square$

Bemærkning 4.7. En lineær afbildning er altså kontinuert, netop hvis den er begrænset på enhedskuglen $\{x \in E \mid \|x\| \le 1\}$. En kontinuert lineær afbildning $T : E \to F$ kaldes ofte en *begrænset operator* fra E til F.

Mængden $\mathrm{Hom}(E,F)$ af lineære afbildninger $T : E \to F$ er på naturlig måde organiseret til et vektorrum over $\mathbb{L}$ ved definitionerne

$$(S+T)(x) = Sx + Tx\,,$$
$$(\lambda T)(x) = \lambda(Tx)\,,$$

hvor $S, T \in \mathrm{Hom}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{L}$, $x \in E$.

For $x \in E$, $\|x\| \le 1$ har vi

$$\|(S+T)(x)\| = \|Sx + Tx\| \le \|Sx\| + \|Tx\| \le \|S\| + \|T\|$$
$$\|(\lambda T)(x)\| = |\lambda|\|Tx\| \le |\lambda|\|T\|\,,$$

hvilket viser, at mængden $\mathcal{L}(E,F)$ af kontinuerte lineære afbildninger er et underrum i $\mathrm{Hom}(E,F)$ og man ser, at $T \mapsto \|T\|$ er en norm på $\mathcal{L}(E,F)$. (Af uligheden $\|Tx\| \le \|T\|\|x\|$ følger, at hvis $\|T\| = 0$, så er $Tx = 0$ for alle $x \in E$, altså T er nulvektoren i $\mathcal{L}(E,F)$).

Vi formulerer det viste i følgende

Sætning 4.8. *Mængden $\mathcal{L}(E,F)$ af kontinuerte lineære afbildninger $T : E \to F$ er et normeret rum ved fastsættelsen*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| \leq 1\}\,.$$

For $T \in \mathcal{L}(E,F)$ og $x \in E$ gælder

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|\,.$$

Opgaver til §4

4.1. Gennemfør beviset for Sætning 4.3.

Vis, at en afbildning $f : X \to M_1 \times M_2$ er kontinuert hvis og kun hvis $f_1 = \pi_1 \circ f$ og $f_2 = \pi_2 \circ f$ begge er kontinuerte. Vis, at en mængde $O \subseteq M_1 \times M_2$ er åben i $M_1 \times M_2$ hvis og kun hvis den er en forening af mængder af formen $U \times V$ med $U \in \mathcal{G}(M_1)$, $V \in \mathcal{G}(M_2)$. Vis endelig, at der om $A_i \subseteq M_i$, $i = 1, 2$ gælder

$$\partial(A_1 \times A_2) = (\partial(A_1) \times \overline{A}_2) \cup (\overline{A}_1 \times \partial(A_2)) .$$

4.2. Lad (M, d) være et metrisk rum. Vis, at metrikken er kontinuert som afbildning af det metriske produktrum $M \times M$ ind i $\mathbb{R}$. (Sammenlign med Opg. 1.4.)

4.3. Lad $X_1 \times X_2$ være det metriske produktrum af (X_1, d_{X_1}) og (X_2, d_{X_2}) og tilsvarende $Y_1 \times Y_2$ det metriske produktrum af (Y_1, d_{Y_1}) og (Y_2, d_{Y_2}). Hvis $f_1 : X_1 \to Y_1$ og $f_2 : X_2 \to Y_2$ defineres en afbildning $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ ved

$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) .$$

Vis, at hvis f_1 og f_2 er kontinuerte så er $f_1 \times f_2$ kontinuert.

4.4. Lad $M_n(\mathbb{R})$ betegne vektorrummet af reelle $n \times n$ matricer, forsynet med maksimumsnormen

$$\|(a_{ij})\| = \max\{|a_{ij}| \mid i, j = 1, \ldots, n\} .$$

Vis, at $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ er en kontinuert afbildning, og at mængden $GL_n(\mathbb{R})$ af invertible (regulære) matricer er en åben delmængde af $M_n(\mathbb{R})$.

Vis, at matrix addition og multiplikation er kontinuerte afbildninger af $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ ind i $M_n(\mathbb{R})$, og at $A \mapsto A^{-1}$ er en homeomorfi af $GL_n(\mathbb{R})$ på sig selv.

4.5. Lad (M, d) betegne et metrisk rum, og lad $\mathcal{F}^*$ betegne mængden af ikke tomme afsluttede og begrænsede delmængder af M. For $A \in \mathcal{F}^*$ og $x \in M$ sættes $d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$. Vis, at $d(x, A) = 0$ hvis og kun hvis $x \in A$. Vis videre, at der ved fastsættelsen

$$D(A, B) = \max\left\{ \sup_{a \in A} d(a, B) \, , \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}$$

defineres en metrik D på $\mathcal{F}^*$ (kaldet *Hausdorff-metrikken*).

Vis, at

$$|d(x,A) - d(y,B)| \le d(x,y) + D(A,B),$$

og at

$$D(A,B) = \sup_{x \in M} |d(x,A) - d(x,B)|.$$

Vis, at $x \mapsto \{x\}$ er en isometri af (M,d) ind i $(\mathcal{F}^*, D)$.

Lad $K(A,r) = \{x \in M | d(x,A) < r\}$ for $A \in \mathcal{F}^*$, og $r > 0$. Vis, at

$$D(A,B) = \inf\{r > 0 | A \subseteq K(B,r) \ \wedge \ B \subseteq K(A,r)\}.$$

4.6. Lad (X_n, d_n), $n = 1, 2, \dots$ være en følge af metriske rum. Vis, at produktmængden $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ bestående af alle følger $\underline{x} = (x_n)_{n \ge 1}$, hvor $x_n \in X_n$, kan udstyres som et metrisk rum ved fastsættelsen

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sup\{\min(d_n(x_n, y_n), \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

jf. Opg. 1.9. Vis, at $\underline{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots)$ konvergerer mod $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots)$ i det metriske rum, hvis og kun hvis $\lim_{n\to\infty} x_{nj} = x_j$ i (X_j, d_j) for ethvert $j \in \mathbb{N}$.

4.7. Lad (M_1, d_1) og (M_2, d_2) være metriske rum. Vis, at for $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in M_1 \times M_2$ er

$$\operatorname{dist}(x,y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

en metrik på $M_1 \times M_2$, som er ækvivalent med produktmetrikken.

4.8. Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum, og lad $\mathcal{F}(X,Y)$ betegne mængden af afbildninger $f : X \to Y$. Vis, at der ved fastsættelsen

$$\operatorname{dist}(f,g) = \sup\{\min(d_Y(f(x), g(x)), 1) \mid x \in X\},$$

defineres en metrik på $\mathcal{F}(X,Y)$, og at der om en følge (f_n) i $\mathcal{F}(X,Y)$ gælder, at $f_n \to f$ i $(\mathcal{F}(X,Y), \operatorname{dist})$, hvis og kun hvis $f_n \to f$ uniformt, dvs.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \ge N \, \forall x \in X : d_Y(f(x), f_n(x)) \le \varepsilon.$$

Vis, at mængden $C(X,Y)$ af kontinuerte afbildninger af X ind i Y er en afsluttet delmængde af $\mathcal{F}(X,Y)$.

4.9. En følge $f_n : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ af afbildninger siges at konvergere *lokalt uniformt* mod $f : X \to Y$, såfremt der til hvert punkt $x \in X$ findes en omegn U af x, så $f_n \to f$ uniformt på U.

Vis, at hvis (f_n) konvergerer lokalt uniformt mod f og hvis hvert f_n er kontinuert, så er f kontinuert.

Anvendelse. Sum-funktionen for en potensrække er kontinuert i konvergenscirklen.

4.10. Begrebet grænseovergang fra Mat 1 kan uden videre overføres til metriske rum. Lad $f : A \to (Y, d_Y)$ være en afbildning defineret på en delmængde A af et metrisk rum (X, d_X) og antag at $a \in \overline{A} \setminus A$. Vi siger da, at f *har grænseværdien* $b \in Y$ *for* x *gående mod* a *fra* A, og vi skriver

$$f(x) \to b \quad \text{for} \quad x \to a\,,\ x \in A$$

såfremt

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : d_Y(f(x), b) < \varepsilon \ \text{ for alle } x \in A \ \text{ med } \ d_X(a, x) < \delta\,.$$

Lad $\tilde{A} := A \cup \{a\}$ og lad os definere $\tilde{f}$ på det metriske delrum $(\tilde{A}, d_X)$ med værdier i (Y, d_Y) ved

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for} \quad x \in A \\ b & \text{for} \quad x = a\,. \end{cases}$$

Vis, at a er et kontinuitetspunkt for $\tilde{f}$ hvis og kun hvis $f(x) \to b$ for $x \to a$, $x \in A$.

§5. Fuldstændige metriske rum

5.1. Cauchy følger. Fuldstændighed.

Det er af stor betydning – specielt ved eksistensbeviser – at man kan afgøre om en reel eller kompleks talfølge (x_n) er konvergent *uden* at kende en eventuel grænseværdi. Det bygger som bekendt på det *almindelige konvergensprincip*, som siger, at enhver Cauchy følge er konvergent, og som for de reelle tals vedkommende er ækvivalent med supremumsegenskaben. (Jf. Mat 1 noterne Om følger og rækker.)

Begrebet Cauchy følge kan umiddelbart generaliseres til metriske rum.

Definition 5.1. En punktfølge (x_n) i et metrisk rum kaldes en *Cauchy følge* eller en *fundamentalfølge* såfremt der gælder

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists N \in \mathbb{N}\,\forall n\,,\, m \geq N : d(x_n, x_m) \leq \varepsilon\,.$$

Som ved talfølger gælder umiddelbart, *at enhver konvergent følge er en Cauchy følge*, thi hvis $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ kan man til $\varepsilon > 0$ finde $N \in \mathbb{N}$, så der for $n \geq N$ gælder $d(x, x_n) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, og for $n, m \geq N$ gælder da ifølge trekantsuligheden

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Definition 5.2. Et metrisk rum (M, d) kaldes *fuldstændigt*, såfremt enhver Cauchy følge er konvergent.

Som nævnt er $\mathbb{R}$ et fuldstændigt metrisk rum med den sædvanlige metrik (dette indses også i næste §). Men også $\mathbb{R}^k$ med den sædvanlige metrik er fuldstændigt. Hvis nemlig $x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nk})\,,\ n \geq 1$ er en Cauchy følge i $\mathbb{R}^k$ sluttes af uligheden

$$|x_{nj} - x_{mj}| \leq \|x_n - x_m\|_2,$$

at hver koordinatfølge $(x_{nj})_{n\geq 1}$ er en Cauchy følge, og dermed konvergent. Sættes $a_j = \lim_{n\to\infty} x_{nj}$ vil $\lim_{n\to\infty} x_n = a = (a_1, \ldots, a_k)$.

Da afbildningen $(x_1+iy_1, \ldots, x_k+iy_k) \to (x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$ er en isometri fra $\mathbb{C}^k$ på $\mathbb{R}^{2k}$, sluttes at også $\mathbb{C}^k$ med sædvanlig metrik er fuldstændigt.

Fuldstændigheden af $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$ med maksimumsnormen ses på lignende vis.

Mængden af rationale tal $\mathbb{Q}$ med den sædvanlige metrik, er som bekendt ikke fuldstændigt. F.eks. vil en følge af rationale tal (r_n) med en irrational grænseværdi være en Cauchy følge i $\mathbb{Q}$, som ikke er konvergent i $\mathbb{Q}$. Mere almindeligt gælder

Sætning 5.3. *Lad (M,d) være et fuldstændigt metrisk rum. For en ikke tom delmængde M' af M er delrummet (M',d) fuldstændigt, hvis og kun hvis M' er en afsluttet delmængde af M.*

Bevis. (a) Antag først, at M' er en afsluttet delmængde af M og lad (x_n) være en Cauchy følge fra M'. Så er (x_n) også en Cauchy følge i M, og dermed findes $x \in M$, så $d(x,x_n) \to 0$. Af Sætning 2.10 følger, at $x \in \overline{M'} = M'$, og dermed er vist, at (x_n) er konvergent med grænsepunkt x i det metriske rum (M',d).

(b) Antag dernæst, at (M',d) er et fuldstændigt metrisk rum. Til $x \in \overline{M'}$ findes—igen på grund af Sætning 2.10— en følge (x_n) fra M', så $d(x,x_n) \to 0$. Dermed er (x_n) en Cauchy følge, og da M' er forudsat fuldstændigt, findes $x' \in M'$, så $d(x',x_n) \to 0$. Da (x_n) således har x og x' som grænsepunkt sluttes $x = x'$, og vi har dermed vist $\overline{M'} \subseteq M'$, altså at M' er afsluttet. □

Bemærkning 5.4. I beviset under (b) benyttes fuldstændigheden af (M,d) ikke. Der gælder altså: *Lad (M,d) være et metrisk rum og (M',d) et fuldstændigt delrum. Så er M' afsluttet i M.*

Begreberne Cauchy følge og fuldstændighed er *ikke* topologiske begreber. I det følgende eksempel angives en metrik dist på $\mathbb{R}$, som er ækvivalent med den sædvanlige metrik, men $(\mathbb{R},\mathrm{dist})$ er ikke fuldstændigt.

Eksempel 5.5. Funktionen Arctan er kontinuert og afbilder $\mathbb{R}$ bijektivt på $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Ved fastsættelsen

$$\mathrm{dist}(x,y) = |\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y|$$

defineres en metrik på $\mathbb{R}$, og idet der for $0 < r < \frac{\pi}{2} - |\operatorname{Arctan} x|$ gælder, at

$$\begin{aligned} K(x,r) &= \{y \in \mathbb{R} \mid \operatorname{Arctan} x - r < \operatorname{Arctan} y < \operatorname{Arctan} x + r\} \\ &=]\tan(\operatorname{Arctan} x - r)\,,\ \tan(\operatorname{Arctan} x + r)[\\ &= \left]\frac{x - \tan r}{1 + x\tan r}\,, \frac{x + \tan r}{1 - x\tan r}\right[\,, \end{aligned}$$

som er et åbent interval omkring x, ser man af Sætning 2.14 at dist er ækvivalent med den sædvanlige metrik. Følgen $1,2,3,\ldots$ er en Cauchy følge i $(\mathbb{R},\mathrm{dist})$, idet

$$\mathrm{dist}(n,m) = |\operatorname{Arctan} n - \operatorname{Arctan} m|\,,$$

og $\operatorname{Arctan} n \to \frac{\pi}{2}$ for $n \to \infty$, men følgen er ikke konvergent i $(\mathbb{R},\mathrm{dist})$, thi så skulle den jo også være det i $\mathbb{R}$.

Vi ser videre, at billedet af et fuldstændigt metrisk rum under en homeomorfi ikke behøver at være fuldstændigt, idet Arctan er en homeomorfi af $\mathbb{R}$ på $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, som ikke er fuldstændigt ifølge Sætning 5.3. Derimod gælder følgende oplagte resultat:

Sætning 5.6. *Lad $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ være en isometri af det fuldstændige metriske rum (X, d_X) ind i (Y, d_Y). Så er billedet $(f(X), d_Y)$ et fuldstændigt metrisk rum.*

Bevis. Lad (y_n) være en Cauchy følge i $(f(X), d_Y)$. Følgen (x_n) i X fastlagt ved $f(x_n) = y_n$ er også en Cauchy følge idet

$$d_X(x_n, x_m) = d_Y(f(x_n), f(x_m)) .$$

Da (X, d_X) er forudsat fuldstændigt findes $x \in X$ så $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, men så gælder $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, da f specielt er kontinuert. $\square$

5.2. Banach rum.

For normerede vektorrum ændres fuldstændighed ikke ved overgang til en ækvivalent norm. Hvis $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_2$ er ækvivalente normer på vektorrummet E gælder nemlig ifølge Sætning 2.15, at

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &\le k\|x\|_2 \\ \|x\|_2 &\le \ell\|x\|_1 \end{aligned}$$

for passende konstanter $k, \ell > 0$. Heraf ses umiddelbart, at (x_n) er en Cauchy følge med hensyn til $\|\cdot\|_1$ hvis og kun hvis (x_n) er en Cauchy følge med hensyn til $\|\cdot\|_2$.

Fuldstændige normerede vektorrum er studeret i en berømt monografi af den polske matematiker Stefan Banach (1892–1945): Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932, og kaldes derfor *Banach rum.*

Sætning 5.7. *(a) Vektorrummet $\mathcal{B}(M, \mathbb{L})$ af begrænsede funktioner på en mængde M med den uniforme norm er et Banach rum.*

(b) Hvis M er et metrisk rum er underrummet $C_b(M, \mathbb{L})$ af kontinuerte begrænsede funktioner afsluttet i $\mathcal{B}(M, \mathbb{L})$ og dermed et Banach rum.

Bevis. (a) Lad (f_n) være en Cauchy følge i $\mathcal{B}(M, \mathbb{L})$. For hvert $x \in M$ gælder

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_u ,$$

hvilket viser, at $(f_n(x))$ er en Cauchy følge i $\mathbb{L}$ og dermed konvergent. Ved fastsættelsen

$$x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

defineres en funktion $f : M \to \mathbb{L}$. Vi vil vise, dels at f er begrænset, dels at $\lim f_n = f$ i den uniforme norm.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes $N \in \mathbb{N}$ så der for $n, m \geq N$ og alle $x \in M$ gælder
$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\,. \tag{1}$$
Holder vi $n \geq N$ og $x \in M$ fast, og lader $m \to \infty$, må også grænseværdien af venstre side i (1) være $\leq \varepsilon$, men denne grænseværdi er $|f_n(x) - f(x)|$ ifølge Sætningerne 3.13 og 3.14. Da $x \in M$ var vilkårlig sluttes, at

$$\|f_n - f\|_u \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N$$

specielt
$$\|f\|_u = \|f - f_N + f_N\|_u \leq \varepsilon + \|f_N\|_u < \infty\,,$$
så $f \in \mathcal{B}(M, \mathbb{L})$ og dermed er vist, at $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

(b) Det er tilstrækkeligt at vise, at hvis $f_n \to f$ uniformt på M, og hvis f_n er kontinuert for alle n, så er f kontinuert, men dette er netop vist i Sætning 3.16. □

Idet enhver kontinuert funktion $f : [a, b] \to \mathbb{L}$ er begrænset (se Adams p. A-25; beviset for dette resultat gives også i næste §), har vi specielt, at rummet $C([a, b], \mathbb{L})$ af kontinuerte funktioner $f : [a, b] \to \mathbb{L}$ er et Banach rum under den uniforme norm

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}\,.$$

Mere almindeligt vil vi betragte vektorrummet $C([a, b], \mathbb{R}^k)$ af kontinuerte funktioner $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$, som er normeret under den uniforme norm

$$\|f\|_u = \sup\{\|f(x)\|_\infty \mid x \in [a, b]\}\,. \tag{2}$$

Sætning 5.8. *Rummet $C([a, b], \mathbb{R}^k)$ er et Banach rum under den uniforme norm.*

Bevis. Idet $f \in C([a, b], \mathbb{R}^k)$ kan skrives $f = (f_1, \dots, f_k)$, hvor $f_j \in C([a, b], \mathbb{R})\,,\ j = 1, \dots, k$, følger fuldstændigheden af $C([a, b], \mathbb{R}^k)$ let af fuldstændigheden af $C([a, b], \mathbb{R})$.

Alternativt kan fuldstændigheden af $\mathbb{R}^k$ udnyttes til et bevis i analogi med beviset for Sætning 5.7. Detaljerne overlades til læseren. □

Bemærkning 5.9. I (2) er den uniforme norm defineret ud fra maksimumsnormen på $\mathbb{R}^k$. Vi kunne også have defineret den ud fra den euklidiske norm, altså
$$\|f\|_{u,2} = \sup\{\|f(x)\|_2 \mid x \in [a, b]\}, \tag{3}$$

og da $\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\|_2 \le \sqrt{k}\,\|\cdot\|_\infty$, jf. Eksempel 2.17, er

$$\|f\|_u \le \|f\|_{u,2} \le \sqrt{k}\,\|f\|_u, \quad f \in C([a,b],\mathbb{R}^k), \tag{4}$$

som viser, at normerne (2) og (3) er ækvivalente.

I differentialligningsteori optræder en række vigtige Banach rum, dels forskellige rum af kontinuert differentiable funktioner, dels Sobolev rummene, som det dog vil føre for vidt at komme ind på her. Vi nævner blot følgende vigtige

Sætning 5.10. *Lad $k = 0,1,\cdots$ være givet. Mængden $C^k([a,b],\mathbb{L})$ af k gange kontinuert differentiable funktioner $f:[a,b]\to\mathbb{L}$ er et Banach rum under normen*

$$\|f\| = \sum_{j=0}^{k} \|D^j f\|_u\,.$$

Som forberedelse til beviset nævner vi følgende vigtige resultat:

Sætning 5.11. *Lad $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ være en følge af C^1-funktioner som opfylder*

(i) $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x)$ *uniformt for* $x \in [a,b]$
(ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = \alpha$

Så findes der en C^1-funktion $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ så

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

uniformt for $x \in [a,b]$.

Bevis. Definer $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ ved

$$f(x) = \alpha + \int_a^x g(t)dt\,.$$

Da g er kontinuert på $[a,b]$ som uniform grænseværdi af følgen f_n' af kontinuerte funktioner, er $f \in C^1$ og $f'(x) = g(x)$. Vi har videre for $x \in [a,b]$

$$f(x) - f_n(x) = \alpha + \int_a^x g(t)dt - \int_a^x f_n'(t)dt - f_n(a)\,,$$

så

$$\begin{aligned}|f(x) - f_n(x)| &\le |\alpha - f_n(a)| + \left|\int_a^x (g(t) - f_n'(t))dt\right| \\ &\le |\alpha - f_n(a)| + \int_a^x |g(t) - f_n'(t)|dt\end{aligned}$$

altså

$$\|f - f_n\|_u \le |\alpha - f_n(a)| + (b-a)\|g - f_n'\|_u\,,$$

hvilket viser, at $f_n \to f$ uniformt. □

Bevis for Sætning 5.10. Det ses umiddelbart, at $\|\cdot\|$ er en norm på vektorrummet $C^k([a,b])$, og en følge (f_n) fra $C^k([a,b])$ konvergerer mod f i det normerede rum, hvis og kun hvis $(D^j f_n)$ konvergerer uniformt mod $D^j f$ for hvert $j = 0,1,\dots,k$. Hvis (f_n) er en Cauchy følge i $C^k([a,b])$, så er $(D^j f_n)$ en Cauchy følge i $C([a,b])$ for hvert $j = 0,1,\dots,k$ eftersom

$$\|D^j f_n - D^j f_m\|_u \le \|f_n - f_m\|\,.$$

Da $C([a,b])$ er et Banach rum, findes funktioner $g_j \in C([a,b])$, så $\lim_{n\to\infty} \|D^j f_n - g_j\|_u = 0$, $j = 0,1,\dots,k$. Specielt gælder

$$\lim_{n\to\infty} D^{j-1} f_n(a) = g_{j-1}(a) \quad \text{for} \quad j = 1,\dots,k\,.$$

Af Sætning 5.11 følger nu, at g_{j-1} tilhører $C^1([a,b])$, og $g_{j-1}' = g_j$ for $j = 1,\dots,k$, altså at $f := g_0 \in C^k([a,b])$, og $D^j f = g_j$ for $j = 0,1,\dots,k$. Dermed er (f_n) konvergent i rummet $C^k([a,b])$ med grænsefunktion f. □

Lad E og F være normerede rum, og $\mathcal{L}(E,F)$ det normerede rum af kontinuerte lineære afbildninger $T : E \to F$.

Sætning 5.12. *Hvis F er fuldstændigt er også $\mathcal{L}(E,F)$ fuldstændigt.*

Bevis. Lad (T_n) være en Cauchy følge i $\mathcal{L}(E,F)$. Idet der for $x \in E$ gælder

$$\|T_n x - T_m x\| \le \|T_n - T_m\|\|x\|\,,$$

ses, at $(T_n x)$ er en Cauchy følge i F for ethvert $x \in E$. Da F er forudsat fuldstændigt eksisterer $\lim_{n\to\infty} T_n x$. Ved fastsættelsen $x \mapsto \lim_{n\to\infty} T_n x$ defineres en afbildning $T : E \to F$, som er lineær idet

$$\begin{aligned} T(x+y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} (T_n x + T_n y) \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n x + \lim_{n\to\infty} T_n y = Tx + Ty\,, \end{aligned}$$

og

$$T(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda T_n x = \lambda \lim_{n\to\infty} T_n x = \lambda T x\,.$$

Undervejs er benyttet, at regneoperationerne i et normeret rum er kontinuerte, jf. Sætning 4.4. Til $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$, så der for $n, m \ge N$ gælder $\|T_n - T_m\| \le \varepsilon$ altså

$$\|T_n x - T_m x\| \le \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in E \ \text{ med } \ \|x\| \le 1\,.$$

For $m \to \infty$ fås heraf for $n \geq N$ og $\|x\| \leq 1$, at

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \,,$$

hvilket viser, at $\|T_n - T\| \leq \varepsilon < \infty$ for $n \geq N$. Heraf ses for det første, at $T_N - T \in \mathcal{L}(E, F)$, og dermed er $T = T_N - (T_N - T) \in \mathcal{L}(E, F)$, og for det andet, at $T_n \to T$ i det normerede rum $\mathcal{L}(E, F)$. □

En lineær afbildning $T : E \to \mathbb{L}$ kaldes en *linearform* eller en *lineær funktional* på E. Mængden $\mathcal{L}(E, \mathbb{L})$ af kontinuerte linearformer på E kaldes det *duale rum* til E, og betegnes E^*. Da $\mathbb{L}$ er fuldstændigt, har vi:

Sætning 5.13. *Det duale rum E^* af kontinuerte linearformer på et normeret rum E er et Banach rum under normen*

$$\|T\| = \sup\{|Tx| \mid \|x\| \leq 1\} \,.$$

5.3. Fuldstændiggørelse.

Et fuldstændigt metrisk rum $(\widehat{M}, \widehat{d}\,)$ kaldes en *fuldstændiggørelse* af et metrisk rum (M, d), hvis der findes en isometri $\varphi : (M, d) \to (\widehat{M}, \widehat{d}\,)$, så $\varphi(M)$ er overalt tæt i $\widehat{M}$. At der altid findes en fuldstændiggørelse vises i Opg. 5.2. Man kan desuden vise, at to vilkårlige fuldstændiggørelser er isometriske, jf. Opg. 6.12, så man kan tillade sig at tale om *fuldstændiggørelsen* af et metrisk rum. Idet (M, d) og $(\varphi(M), \widehat{d}\,)$ er isometriske, kan ethvert metrisk rum altså altid opfattes som et overalt tæt delrum af et fuldstændigt metrisk rum.

Som generelt princip gælder, at hvis (M, d) har yderligere struktur, så kan fuldstændiggørelsen $(\widehat{M}, \widehat{d}\,)$ udstyres med samme struktur. Eksempelvis kan fuldstændiggørelsen af et normeret rum udstyres som et normeret rum, hvorved opnås, at et normeret rum altid kan opfattes som et overalt tæt underrum af et Banach rum.

Opgaver til §5

5.1. Et punkt $a \in (M, d)$ kaldes *fortætningspunkt for en punktfølge* (x_n) i M, hvis enhver kugle med centrum a indeholder x_n for uendeligt mange indices n, dvs. hvis mængden $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(a, r)\}$ er uendelig for ethvert $r > 0$.

Vis, at hvis en Cauchy følge har et fortætningspunkt, så er den konvergent.

5.2. Lad (M, d) være et metrisk rum, og lad $\mathcal{F}_C(\mathbb{N}, M)$ være mængden af Cauchy følger $x = (x_n)_{n \geq 1}$ fra M.

Vis, at for $x = (x_n)$ og $y = (y_n)$ i $\mathcal{F}_C(\mathbb{N}, M)$ er $d(x_n, y_n)$ en Cauchy følge i $\mathbb{R}$, og dermed kan man definere

$$D(x, y) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n)\,.$$

Vis, at D er en pseudometrik på $\mathcal{F}_C(\mathbb{N}, M)$ (jf. Opg. 1.10).

Lad $\widehat{M} = \mathcal{F}_C(\mathbb{N}, M)/\sim$ være det i Opg. 1.10 definerede metriske rum af ækvivalenklasser $\{[x] \mid x \in \mathcal{F}_C(\mathbb{N}, M)\}$, hvor $D([x], [y]) = D(x, y)$. Ved til $x \in M$ at knytte ækvivalensklassen indeholdende den konstante følge $\bar{x} = (x, x, x, \dots)$ defineres en afbildning $\varphi : (M, d) \to (\widehat{M}, D)$.

Vis, at φ er en isometri.

Vis, at $(\widehat{M}, D)$ er fuldstændigt. *Vink:* Lad $([x_n])$ være en Cauchy følge i $\tilde{M}$ idet $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots) \in \mathcal{F}_C(\mathbb{N}, M)$. Vis, at der til hvert $n \in \mathbb{N}$ findes $y_n \in M$, så

$$D([x_n], \varphi(y_n)) = D(x_n, \overline{y_n}) = \lim_{p \to \infty} d(x_{np}, y_n) \leq \frac{1}{n}\,,$$

og vis dernæst, at $y = (y_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}_C(\mathbb{N}, M)$ og at $[x_n] \to [y]$ for $n \to \infty$.

Gør rede for at $(\widehat{M}, D)$ er en fuldstændiggørelse af M.

5.3. Vis, at et diskret metrisk rum er fuldstændigt.

5.4. Lad (M, d) være et fuldstændigt metrisk rum. Vis, at for en dalende følge $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ af afsluttede ikke tomme mængder med $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, vil $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ være ikke tom og bestå af et punkt.

5.5. Lad $(M_1 \times M_2, d)$ være det metriske produktrum af (M_1, d_1) og (M_2, d_2). Vis, at $(M_1 \times M_2, d)$ er fuldstændigt, hvis og kun hvis (M_1, d_1) og (M_2, d_2) begge er fuldstændige. Vis Sætning 5.8 som anvendelse af dette resultat.

5.6. *Hahn's sætning.* Vis, at hvis (M, d) er fuldstændigt, så er rummet $(\mathcal{F}^*, D)$ af afsluttede og begrænsede ikke tomme delmængder med Hausdorff-metrikken igen fuldstændigt, jf. Opg. 4.5. *Vink:* Lad (A_n) være en Cauchy følge i $(\mathcal{F}^*, D)$. Sæt $A = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\overline{\bigcup_{p\geq n} A_p})$ og vis, at A er afsluttet og begrænset. Bestem til $\varepsilon > 0$ en følge $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$, så

$$D(A_n, A_m) < \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \text{for} \quad n, m \geq n_k\,,$$

og vælg $a_0 \in A_{n_0}$ vilkårligt. Bestem successivt $a_1 \in A_{n_1}$, $a_2 \in A_{n_2}$ osv., så $d(a_k, a_{k+1}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, $k = 0, 1, \ldots$ og vis, at (a_n) er en Cauchy følge. Vis derved, at A er ikke tom, og at $D(A_n, A) \to 0$.

5.7. *Baire's sætning.* Lad (M, d) være et fuldstændigt metrisk rum, og lad $(G_n)_{n\geq 1}$ være en følge af åbne tætte delmængder af M.

Vis, at $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ er tæt i M. *Vink:* Vis $K(x, r) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$ for fast $x \in M$, $r > 0$. Gør rede for, at man kan vælge $x_1, x_2, \dots \in M$ og $r_1, r_2, \dots \in]0, \infty[$, så

$$\begin{aligned}
&\overline{K(x_1, r_1)} \subseteq K(x, r) \cap G_1\,, \quad r_1 < \frac{r}{2} \\
&\overline{K(x_2, r_2)} \subseteq K(x_1, r_1) \cap G_2\,, \quad r_2 < \frac{r_1}{2} \\
&\quad\vdots \\
&\overline{K(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq K(x_n, r_n) \cap G_{n+1}\,, \quad r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

og anvend Opg. 5.4.

5.8. Lad $D : C^1([a, b]) \to C([a, b])$ være differentiationsafbildningen $f \mapsto f'$.

1° Vis, at $\|D\| = \infty$ hvis $C([a, b])$ og $C^1([a, b])$ begge er forsynet med den uniforme norm.

2° Vis, at $\|D\| = 1$ hvis $C([a, b])$ er forsynet med den uniforme norm og $C^1([a, b])$ med normen

$$\|f\| = \|f\|_u + \|Df\|_u\,.$$

5.9. Lad $C^1_{\#}(\mathbb{R}^2)$ betegne vektorrummet af reelle eller komplekse C^1-funktioner $f(x, y)$ på $\mathbb{R}^2$, der er periodiske i x og i y med periode 2π, dvs.

$$f(x + 2\pi, y) = f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$$

for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vis, at $C^1_{\#}(\mathbb{R}^2)$ er et Banach rum med normen

$$\|f\| = \|f\|_u + \|\frac{\partial f}{\partial x}\|_u + \|\frac{\partial f}{\partial y}\|_u\,.$$

5.10. Vis, at mængden $C^1([-1,1])$ af C^1-funktioner $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ er et normeret rum under den uniforme norm $\|f\|_u$.

Vis, at følgen (f_n), hvor $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, udgør en Cauchy følge i $C^1([-1,1])$ og slut, at rummet ikke er fuldstændigt.

§6. Kompakte mængder. Uniform kontinuitet

6.1. Karakterisering af afsluttede og begrænsede mængder i $\mathbb{R}^k$.

En af de fundamentale sætninger i analysen er følgende sætning, som først blev vist stringent af K. Weierstrass (tysk matematiker 1815-1897):

En kontinuert reel funktion på et begrænset, afsluttet interval i $\mathbb{R}$ er begrænset og har såvel en størsteværdi som en mindsteværdi.

Vi vil i denne § bevise en række hovedsætninger om kontinuerte afbildninger, herunder ovennævnte sætnings generalisation til talrummene $\mathbb{R}^k$ og mere generelt til metriske rum. I denne sammenhæng spiller begrebet fortætningspunkt for en følge en central rolle.

Definition 6.1. Et punkt a i et metrisk rum (M, d) kaldes *fortætningspunkt* for en punktfølge (x_n), såfremt enhver kugle $K(a, r)$ indeholder x_n for uendeligt mange n, dvs. såfremt mængden

$$\{n \in \mathbb{N} \mid d(a, x_n) < r\} \text{ er uendelig for ethvert } r > 0\,.$$

Bemærk forskellen mellem udsagnene: "$K(a,r)$ indeholder x_n for uendeligt mange n" og "$K(a,r)$ indeholder uendeligt mange x_n". Det sidste udsagn siger implicit, at følgen (x_n) består af uendeligt mange forskellige elementer, og det er stærkere end det første udsagn. En konstant følge $x_n = a$, $n = 1, 2, \ldots$ har a som fortætningspunkt, men $K(a, r)$ indeholder kun et element fra følgen.

Vi skal give en ækvivalent og ofte mere anvendelig karakterisering af fortætningspunkt for en følge. Hertil har vi brug for at indføre begrebet delfølge.

Definition 6.2. Ved en *delfølge* af en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i mængden M forstås en følge $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ i M givet ved

$$y_p = x_{n_p}\,, \quad p \in \mathbb{N}\,,$$

hvor $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ er en voksende følge i $\mathbb{N}$, dvs. der gælder at $n_p < n_q$ når $p < q$. Da er altså $(y_p)_{p\in\mathbb{N}} = (x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$.

Hvis eksempelvis $M = \mathbb{R}$, og (x_n) betegner talfølgen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, dvs. $x_n = \frac{1}{n}$, da er følgen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ en delfølge af (x_n) svarende til at $n_p = 2p$, $p \in \mathbb{N}$. Tilsvarende er $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots$ en delfølge af (x_n) svarende til $n_p = p^2$, $p \in \mathbb{N}$. Sættes $n_p =$ det p'te primtal, fås delfølgen $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots$ af (x_n).

Vi har så følgende karakterisering af fortætningspunkt.

Lemma 6.3. *En følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i et metrisk rum (M,d) har punktet $a \in M$ som fortætningspunkt, hvis og kun hvis der findes en konvergent delfølge af $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ med a som grænsepunkt.*

Bevis. Antag, at der findes en konvergent delfølge $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ af $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ med grænsepunkt a. Givet $r > 0$ findes da et $P \in \mathbb{N}$, således at $x_{n_p} \in K(a,r)$ for alle $p \geq P$. Heraf følger specielt at $K(a,r)$ indeholder x_n for uendeligt mange n. Altså er a et fortætningspunkt for $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hvis omvendt a et fortætningspunkt for $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vælges først for $r = 1$ i Definition 6.1 et $n_1 \in \mathbb{N}$, så $d(a, x_{n_1}) < 1$. Dernæst vælges for $r = \frac{1}{2}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$, så $n_2 > n_1$ og $d(a, x_{n_2}) < \frac{1}{2}$. Dernæst vælges for $r = \frac{1}{3}$ et $n_3 \in \mathbb{N}$, så $n_3 > n_2$ og $d(a, x_{n_3}) < \frac{1}{3}$. Ved gentagelse heraf (induktion) fås en delfølge $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ af $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, således at $d(a, x_{n_p}) < \frac{1}{p}$ for alle $p \in \mathbb{N}$. Heraf følger at $\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = a$, og vi har dermed konstrueret den ønskede konvergente delfølge. $\square$

Lad os ydermere notere følgende simple resultat vedrørende konvergens af delfølger.

Lemma 6.4. *(a) Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en konvergent følge i et metrisk rum (M,d) med grænsepunkt $a \in M$. Da er enhver delfølge af $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent med grænsepunkt a. M.a.o. en konvergent følge har sit grænsepunkt som eneste fortætningspunkt.*

(b) Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en Cauchy følge i et metrisk rum (M,d), og antag at den har en konvergent delfølge. Da er $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. M.a.o. en Cauchy følge har højst et fortætningspunkt, og hvis den har et, da er den konvergent.

Bevis. (a) Lad $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ være en delfølge af $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $x_n \to a$ for $n \to \infty$ findes for givet $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, således at $d(x_n, a) \leq \varepsilon$ for $n \geq N$. Men da $p \leq n_p$ for $p \in \mathbb{N}$ (overvej!), følger heraf, at $d(x_{n_p}, a) \leq \varepsilon$ for $p \geq N$. Dette viser, at $x_{n_p} \to a$ for $p \to \infty$.

(b) Antag, at $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ er en konvergent delfølge af $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ med grænsepunkt a. For givet $\varepsilon > 0$ findes da $P, N \in \mathbb{N}$, så

$$d(x_{n_p}, a) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for} \quad p \geq P \quad \text{og} \quad d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for} \quad n, m \geq N\,.$$

Sættes $M = \max\{P, N\}$ og benyttes, at $n_M \geq M \geq P$, fås heraf at

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_M}) + d(x_{n_M}, a) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq M\,.$$

Dette viser, at $x_n \to a$ for $n \to \infty$. $\square$

Følgende fundamentale resultat kaldes normalt Bolzano-Weierstrass sætning:

Sætning 6.5. *Enhver begrænset reel talfølge har mindst et fortætningspunkt.*

Bevis. Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en begrænset følge i $\mathbb{R}$, dvs. at mængden $B = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er både opad og nedad begrænset.

Lad
$$A = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq \lambda\} \quad \text{er endelig}\} .$$

Da B er opad begrænset, er $A \neq \emptyset$, og da B er nedad begrænset, er A også nedad begrænset (overvej!). Sæt $\lambda_0 = \inf A$. For hvert $\varepsilon > 0$ gælder da, at $\lambda_0 + \varepsilon \in A$ (overvej!), så $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq \lambda_0 + \varepsilon\}$ er endelig, mens $\lambda_0 - \varepsilon \notin A$, og dermed er $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq \lambda_0 - \varepsilon\}$ uendelig. Heraf sluttes, at $\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_0 - \varepsilon \leq x_n < \lambda_0 + \varepsilon\} = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq \lambda_0 - \varepsilon\} \setminus \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq \lambda_0 + \varepsilon\}$ er uendelig. Altså er λ_0 et fortætningspunkt for $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Bemærk, at vi i beviset for sætningen har benyttet *supremumsegenskaben* ved de reelle tal eller snarere den dermed ækvivalente *infimumsegenskab* (jf. Adams p. A-23, hvor supremums- eller infimumsegenskaben kaldes "the completeness axiom"). Sidstnævnte siger jo, at *enhver ikke tom nedad begrænset mængde $A \subset \mathbb{R}$ har et største undertal* $\inf A$, og vi erindrer, at et *undertal* for en delmængde $A \subseteq \mathbb{R}$ defineres som et tal $l \in \mathbb{R}$, der opfylder $l \leq x$ for alle $x \in A$, og A siges at være *nedad begrænset*, såfremt der findes et undertal for A.

Vi noterer, at fuldstændigheden af $\mathbb{R}$ med sædvanlig metrik følger let af de to foregående resultater. Ifølge Lemma 6.4(b) er det nemlig tilstrækkeligt at vise, at enhver Cauchy følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $\mathbb{R}$ har et fortætningspunkt, og ifølge Sætning 6.5 er dette tilfældet, hvis vi blot kan indse, at $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er begrænset. Vælg hertil (svarende til $\varepsilon = 1$ i Definition 5.1) et $N \in \mathbb{N}$ således at $|x_n - x_m| \leq 1$ for $n, m \geq N$. Specielt er da $|x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leq |(x_n - x_N)| + |x_N| \leq 1 + |x_N|$ for $n \geq N$. Heraf følger at $|x_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og dermed at $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er begrænset.

Sætning 6.6. *For en delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er følgende to betingelser ensbetydende:*

(i) *A er afsluttet og begrænset.*
(ii) *Enhver punktfølge i A har et fortætningspunkt i A.*

Bevis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Lad $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k)$, $n = 1, 2, \dots$ være en punktfølge i A, som er forudsat begrænset og dermed indeholdt i en kugle $\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_2 < r\}$. Idet hver koordinatfølge $(x_n^j)_{n\geq 1}$ er begrænset, nemlig $|x_n^j| < r$, har den et fortætningspunkt x^j. Imidlertid behøver $x = (x^1, \dots, x^k)$ ikke at være fortætningspunkt for (x_n) (overvej dette!), og vi må bære os mere snedigt ad. Følgen (x_n^1) af første koordinater har en delfølge $(x_{n_p}^1)$ der konvergerer mod et fortætningspunkt x^1. Den tilsvarende delfølge af anden koordinater $(x^2_{n_p})_{p\geq 1}$ er ligeledes begrænset af r og har derfor en delfølge $(x^2_{n_{p_q}})_{q\geq 1}$, der konvergerer mod et fortætningspunkt x^2 for (x^2_n). Så gælder (jf. Lemma 6.4(a))

$$\lim_{q\to\infty} x^1_{n_{p_q}} = x^1\,,\ \ \lim_{q\to\infty} x^2_{n_{p_q}} = x^2\,,$$

og dermed er (x^1, x^2) fortætningspunkt for (x_n) i tilfældet $k = 2$. Hvis $k = 3$ må ræsonnementet fortsættes ved at $(x^3_{n_{p_q}})$ udtyndes til en konvergent delfølge, og generelt foretages k successive valg af delfølger, så vi ender med en følge $1 \leq m_1 < m_2 < \cdots$ af naturlige tal med egenskaben

$$\lim_{l\to\infty} x^j_{m_l} = x^j$$

for $j = 1, \dots, k$, hvorved $(x^1, x^2, \dots, x^k)$ er fortætningspunkt for (x_n), og det tilhører den afsluttede mængde A, da det er grænsepunkt for en punktfølge i A.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Dette bevises indirekte. Vi antager altså, at A ikke er afsluttet og begrænset, og at enhver punktfølge i A har et fortætningspunkt i A.

Der er to muligheder: Hvis A ikke er afsluttet findes $x \in \overline{A}\setminus A$, og vi kan da finde en følge (x_n) i A med $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Da (x_n) har et fortætningspunkt $x' \in A$ findes en delfølge (x_{n_p}) så $\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = x'$, men da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, må også $\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = x$, hvoraf $x = x'$, altså $x \in A$, hvilket er en modstrid.

Hvis A er ubegrænset, når vi til en modstrid på følgende måde. Først vælges $x_1 \in A$. Da A er ubegrænset kan vi vælge $x_2 \in A \setminus K(x_1, 1)$. Da $K(x_1, 1) \cup K(x_2, 1)$ er begrænset, kan den ikke indeholde A, så vi kan vælge $x_3 \in A \setminus (K(x_1, 1) \cup K(x_2, 1))$. Fortsættes på denne måde finder vi en følge (x_n) i A med egenskaben

$$x_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, 1)\,, \quad n = 1, 2, \dots\,,$$

altså

$$d(x_n, x_m) \geq 1 \quad \text{for} \quad n \neq m\,,$$

men denne følge kan ikke have et fortætningspunkt. □

6.2. Kompakte mængder.

I tilknytning til Sætning 6.6 giver vi følgende

Definition 6.7. En delmængde K af et metrisk rum (M, d) kaldes *kompakt*, hvis enhver punktfølge i K har et fortætningspunkt i K.

Kompakthed er et topologisk begreb. Da der ikke findes følger i $K = \varnothing$, er $\varnothing$ kompakt. For $K = M$ er ovenstående en definition af begrebet *kompakt metrisk rum*. Bemærk at $K \neq \varnothing$ er en kompakt delmængde af (M, d), hvis og kun hvis delrummet (K, d) er et kompakt metrisk rum. Med brug af den nye terminologi udsiger Sætning 6.6 simpelthen:

De kompakte delmængder af $\mathbb{R}^k$ er præcis de afsluttede og begrænsede delmængder af $\mathbb{R}^k$.

Da $\mathbb{C}^k$ er isometrisk med $\mathbb{R}^{2k}$ (jf. Eks. 1.3) gælder samme udsagn om $\mathbb{C}^k$. Den anden del af beviset for Sætning 6.6 kan uden videre overføres til et vilkårligt metrisk rum, hvorfor der gælder:

En kompakt delmængde af et metrisk rum er afsluttet og begrænset.

Den første del af beviset udnytter derimod specielle egenskaber ved talrummet, og derfor kan man i et metrisk rum ikke slutte, at afsluttede og begrænsede mængder er kompakte.

Eksempel 6.8. Enhver *endelig* mængde i et metrisk rum (M, d) er kompakt, thi hvis (x_n) er en punktfølge fra en endelig mængde K, må mindst et element være lig med x_n for uendeligt mange n. I et diskret metrisk rum (M, d), er der ikke andre kompakte mængder end de endelige, da en punktfølge kun er konvergent, hvis den er konstant fra et vist trin. På den anden side, er enhver delmængde af et diskret metrisk rum, både afsluttet og begrænset.

Vi vil nu vise 5 hovedsætninger om kompakte mængder og rum.

Sætning 6.9 (1. Hovedsætning). *Hvis (X, d_X) og (Y, d_Y) er metriske rum, K en kompakt delmængde af X og $f : K \to Y$ en kontinuert afbildning, da er billedet $f(K)$ en kompakt delmængde af Y.*

Bevis. Lad (y_n) være en punktfølge i $f(K)$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ kan vi vælge $x_n \in K$, så $f(x_n) = y_n$, og da K er kompakt findes $x \in K$ og en delfølge (x_{n_p}) af (x_n) så $\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = x$. Af Sætning 3.1 følger, at $\lim_{p\to\infty} f(x_{n_p}) = \lim_{p\to\infty} y_{n_p} = f(x) \in f(K)$, hvilket viser, at $f(K)$ er kompakt. $\square$

For en ikke tom, kompakt delmængde A af $\mathbb{R}$ (altså en ikke tom, afsluttet og begrænset delmængde A af $\mathbb{R}$), gælder $\sup A \in A$ og $\inf A \in A$ (overvej!). En ikke tom, kompakt delmængde A af $\mathbb{R}$ indeholder altså et største og et mindste tal. Af 1. Hovedsætning fremgår derfor følgende sætning, der indeholder den indledningsvis nævnte sætning af Weierstrass:

Sætning 6.10 (2. Hovedsætning). *En kontinuert reel funktion på en kompakt delmængde af et metrisk rum er begrænset og har såvel en størsteværdi som en mindsteværdi.*

Korollar 6.11. *Lad (M, d) være et kompakt metrisk rum. Rummet $C(M, \mathbb{L})$ af kontinuerte (reelle eller komplekse) funktioner $f : M \to \mathbb{L}$ er et Banach rum under den uniforme norm*

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| \mid x \in M\} = \max\{|f(x)| \mid x \in M\} .$$

Bevis. Rummet $C(M, \mathbb{L})$ er identisk med rummet $C_b(M, \mathbb{L})$ af kontinuerte begrænsede funktioner på M studeret i §5.2. $\square$

Vi vil nu undersøge hvordan kompakthed opfører sig ved konstruktion af delrum og produktrum.

Sætning 6.12 (3. HOVEDSÆTNING). *Lad (M, d) være et kompakt metrisk rum. En ikke tom delmængde $K \subseteq M$ er kompakt hvis og kun hvis K er afsluttet.*

Bevis. Vi har tidligere bemærket, at en kompakt mængde er afsluttet. Antag dernæst, at K er afsluttet og lad (x_n) være en punktfølge i K. Da M er kompakt findes en delfølge (x_{n_p}) og $x \in M$, så $\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = x$, men da K er afsluttet må $x \in K$, hvilket viser, at K er kompakt. $\square$

Sætning 6.13 (4. HOVEDSÆTNING). *Lad $(M_1 \times M_2, d)$ være det metriske produktrum af (M_1, d_1) og (M_2, d_2). Så er $(M_1 \times M_2, d)$ kompakt hvis og kun hvis (M_1, d_1) og (M_2, d_2) begge er kompakte.*

Bevis. Antag først, at (M_1, d_1) og (M_2, d_2) er kompakte, og lad $(x_n) = ((x'_n, x''_n))$ være en punktfølge i $M_1 \times M_2$. Da M_1 er kompakt, findes en konvergent delfølge (x'_{n_p}) af (x'_n) med grænseværdi x', og da M_2 er kompakt, har (x''_{n_p}) en konvergent delfølge $(x''_{n_{p_q}})$ med grænseværdi x''. Da $(x'_{n_{p_q}})$ som delfølge af (x'_{n_p}) også har grænseværdien x', sluttes af Sætning 4.3, at $(x_{n_{p_q}})$ konvergerer mod (x', x'').

Antages dernæst, at produktrummet $M_1 \times M_2$ er kompakt, er billedrummet $M_1 = \pi_1(M_1 \times M_2)$ af $M_1 \times M_2$ under den kontinuerte projektion $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$ også kompakt ifølge 1. Hovedsætning. Analogt ses $M_2 = \pi_2(M_1 \times M_2)$ at være kompakt. $\square$

Vi har indset, at en kontinuert bijektiv afbildning, ikke behøver at være en homeomorfi. Hvis afbildningen er defineret på et kompakt rum, gælder påstanden imidlertid:

Sætning 6.14 (5. HOVEDSÆTNING). *Lad $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ være en kontinuert bijektiv afbildning. Hvis (X, d_X) er kompakt, er f en homeomorfi.*

Bevis. Lad $g = f^{-1} : Y \to X$. Vi skal nu vise, at g er kontinuert, og ifølge Sætning 3.3 er det tilstrækkeligt at vise, at for enhver afsluttet mængde

$F \subseteq X$ er $g^{-1}(F) = f(F)$ afsluttet i Y. Ifølge 3. Hovedsætning er F kompakt og dermed er $f(F)$ kompakt (1. Hovedsætning), altså specielt afsluttet. $\square$

6.3. Ækvivalens af normer på et endelig dimensionalt vektorrum.

Vi skal nu ved hjælp af kompakthed vise påstanden fra Eks. 2.17 om, at alle normer på et endelig dimensionalt reelt eller komplekst vektorrum er ækvivalente.

Ved valg af en basis er et k-dimensionalt vektorrum isomorft med $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$, og da $\mathbb{C}^k$ opfattet som reelt vektorrum, er isomorft med $\mathbb{R}^{2k}$, og en norm på $\mathbb{C}^k$ derved kan opfattes som en norm på $\mathbb{R}^{2k}$, er det nok at vise følgende:

Sætning 6.15. *Alle normer på $\mathbb{R}^k$ er ækvivalente.*

Bevis. Vi viser først, at en vilkårlig norm $\|\cdot\|$ på $\mathbb{R}^k$ er ækvivalent med den euklidiske norm $\|\cdot\|_2$, altså at der findes konstanter $\alpha, \beta > 0$ så

$$\|x\| \leq \alpha\|x\|_2 \quad \text{og} \quad \|x\|_2 \leq \beta\|x\| \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^k. \tag{1}$$

Lad $e_1, \ldots, e_k$ betegne basis vektorerne $(1, 0, \ldots, 0), \cdots, (0, \ldots, 0, 1)$ i $\mathbb{R}^k$. For $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ gælder altså $x = x_1e_1 + \cdots + x_ke_k$, og dermed ifølge (N3) og (N2)

$$\|x\| \leq \|x_1e_1\| + \cdots + \|x_ke_k\| = |x_1|\|e_1\| + \cdots + |x_k|\|e_k\|,$$

og ved Cauchy-Schwarz' ulighed fås nu

$$\|x\| \leq \alpha\|x\|_2\,,$$

med $\alpha = \left(\|e_1\|^2 + \cdots + \|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, som er uafhængigt af $x \in \mathbb{R}^k$.

For $x, y \in \mathbb{R}^k$ gælder specielt

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\| \leq \alpha\|x - y\|_2\,,$$

hvilket viser, at $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ opfylder en Lipschitz betingelse, og dermed er $\|\cdot\|$ kontinuert. Kugleoverfladen

$$S = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_2 = 1\}$$

er afsluttet og begrænset, altså kompakt, så ifølge 2. Hovedsætning har $\|\cdot\|$ en mindsteværdi m på S, dvs. der findes $x_0 \in S$ så

$$m = \inf\{\|x\| \mid x \in S\} = \|x_0\|\,,$$

og da $0 \notin S$, er $m = \|x_0\| > 0$. Hvert $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ kan skrives på formen $x = \lambda\xi$ med $\lambda = \|x\|_2$, $\xi = x/\|x\|_2 \in S$, og dermed har vi

$$\|x\| = \|\lambda\xi\| = |\lambda|\|\xi\| \geq |\lambda|m = \|x\|_2 m$$

eller

$$\|x\|_2 \leq \beta\|x\| , \quad \text{når} \quad \beta = \frac{1}{m} .$$

Denne ulighed gælder trivielt for $x = 0$, og dermed er (1) eftervist. At to vilkårlige normer er ækvivalente ses nu let, da de begge er ækvivalente med den euklidiske norm. □

Bemærkning 6.16. Da $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{C}^k$ udstyret med maksimumsnormen er fuldstændige, gælder det samme, når vi benytter en vilkårlig anden norm. Vi har derfor:

Ethvert endelig dimensionalt normeret rum er et Banach rum.

Da et fuldstændigt delrum er afsluttet har vi:

Ethvert endelig dimensionalt underrum i et normeret rum er afsluttet.

6.4. Åbne overdækninger.

I forbindelse med undersøgelser af det man i dag kalder Lebesgue målet, som vi skal berøre senere i dette kursus, og som iøvrigt studeres i kurset Matematik 3MI, opstillede den franske matematiker E. Borel (1871–1956) følgende resultat (1894):

Hvis en følge af åbne delmængder af $\mathbb{R}$ overdækker et afsluttet begrænset interval, så vil allerede endeligt mange af de åbne mængder overdække intervallet.

Lad os præcisere sprogbrugen. En familie $(A_i)_{i\in I}$ af delmængder af en mængde M siges at *overdække* en delmængde $X \subseteq M$, såfremt $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Man siger også, at $(A_i)_{i\in I}$ er en *overdækning* af X. Hvis I er endelig eller numerabel taler man om en endelig eller numerabel overdækning. Hvis $J \subseteq I$ og også $(A_i)_{i\in J}$ overdækker X, siger man, at overdækningen $(A_i)_{i\in I}$ kan *udtyndes* til overdækningen $(A_i)_{i\in J}$. Hvis alle mængderne A_i i overdækningen er åbne (i et metrisk rum M) taler man om en *åben overdækning*. Borel's sætning kan altså formuleres således: *Enhver numerabel åben overdækning af et afsluttet begrænset interval kan udtyndes til en endelig overdækning.*

I 1920'erne blev man klar over at åbne overdækninger spiller en central rolle for kompakthed, idet følgende hovedresultat blev bevist:

Sætning 6.17 (Overdækningssætningen). *For en delmængde A af et metrisk rum (M, d) er følgende betingelser ensbetydende:*
(i) A er kompakt.
(ii) Enhver åben overdækning af A kan udtyndes til en endelig overdækning.

Bevis. (ii) $\Rightarrow$ (i). Vi viser $\neg$(i) $\Rightarrow\neg$ (ii). Lad (x_n) være en følge af punkter i A som ikke har noget fortætningspunkt i A. For ethvert $y \in A$ findes da en kugle $K(y, r_y)$, således at mængden

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(y, r_y)\}$$

er endelig. Familien $(K(y, r_y))_{y\in A}$ er en åben overdækning af A, som ikke kan udtyndes til en endelig overdækning, idet der for et vilkårligt endeligt antal kugler $K(y_1, r_{y_1}), \dots, K(y_p, r_{y_p})$ gælder, at

$$\mathbb{N} \neq \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(y_1, r_{y_1})\} \cup \dots \cup \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(y_p, r_{y_p})\},$$

da højre side er en endelig mængde, og dermed kan $K(y_1, r_{y_1}), \dots, K(y_p, r_{y_p})$ ikke overdække A.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Antag (i) opfyldt og lad $(G_i)_{i\in I}$ være en åben overdækning af A. Det skal vises, at den kan udtyndes til en endelig overdækning. Hvis $A = \varnothing$, er sagen klar. Vi antager derfor $A \neq \varnothing$. Beviset består af to skridt.

(α) Der findes et $\rho > 0$, således at for ethvert $x \in A$ er kuglen $K(x, \rho)$ delmængde af en af mængderne G_i.

I modsat fald fandtes for ethvert $n \in \mathbb{N}$ et punkt $x_n \in A$, så at $K(x_n, \frac{1}{n})$ ikke var delmængde af noget G_i. Ifølge (1) har følgen (x_n) et fortætningspunkt $x \in A$. For et vist $i \in I$ gælder altså $x \in G_i$. Da G_i er åben, findes et $r > 0$, så at $K(x, r) \subseteq G_i$. Da $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(x, \frac{1}{2}r)\}$ er uendelig, kan vi finde et n, så at $x_n \in K(x, \frac{1}{2}r)$ og $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}r$. Da gælder $K(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq K(x, r) \subseteq G_i$, i strid med, at $K(x_n, \frac{1}{n})$ ikke er delmængde af noget G_i.

(β) Vi vælger et vilkårligt punkt $y_1 \in A$. Hvis $A \subseteq K(y_1, \rho)$, er A overdækket af en af mængderne G_i. I modsat fald vælges et punkt $y_2 \in A \setminus K(y_1, \rho)$. Hvis $A \subseteq K(y_1, \rho) \cup K(y_2, \rho)$ er A overdækket af to af mængderne G_i. I modsat fald vælges $y_3 \in A \setminus K(y_1, \rho) \cup K(y_2, \rho)$. Således fortsættes, og vi må ende med at få en overdækning af A med et endeligt antal af mængderne G_i. Thi hvis processen kunne fortsætte i det uendelige, fremkom jo en følge y_n af punkter fra A, for hvilken $d(y_n, y_m) \geq \rho$ for $n \neq m$, og en sådan følge kan åbenbart ikke have noget fortætningspunkt. $\square$

Bemærkning 6.18. Sætningen illustrerer hvad vi allerede ved: Kompakthed er et topologisk begreb. På grund heraf vil man i mange lærebøger se, at kompakthed er *defineret* ved *overdækningsegenskaben* (ii), der er meget bekvem ved teoretiske overvejelser, og som har den yderligere fordel, at den umiddelbart kan benyttes som definition af kompakt mængde i et (Hausdorff) topologisk rum. Betingelsen (i): Enhver punktfølge fra A har et fortætningspunkt i A, har umiddelbart mening i et topologisk rum og en mængde A med denne egenskab kaldes *sekventielt kompakt.* Dette begreb er mindre vigtigt end kompakthed. For topologiske rum er (i) og (ii) ikke længere ensbetydende. Det er let at bevise kompakthedsteoriens hovedsætninger ud fra overdækningsegenskaben, jf. Opg. 6.5.

6.5. Uniform kontinuitet.

Definition 6.19. Idet (X, d_X) og (Y, d_Y) er metriske rum, siges en afbildning $f : X \to Y$ at være *uniformt kontinuert* (eller *ligeligt kontinuert*), hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$, således at der for vilkårlige $x_1, x_2 \in X$ gælder

$$d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon\,.$$

Skrevet med logiske symboler udtrykkes definitionen således:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x_1, x_2 \in X : d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon\,.$$

En uniformt kontinuert afbildning er øjensynligt kontinuert, medens det omvendte ikke behøver at være tilfældet.

F.eks. er den ved $f(x) = x^2$ definerede funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinuert, men ikke uniformt kontinuert, idet

$$f\left(n + \frac{1}{n}\right) - f(n) = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 \quad \text{for alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Hvis f opfylder en Lipschitz betingelse med konstant $C > 0$, er f uniformt kontinuert, idet man til $\varepsilon > 0$ kan vælge $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$.

Uniform kontinuitet er *ikke* et topologisk begreb, jf. Opgave 6.13. Hvis X eller Y derimod er et normeret rum, vil overgang til en ækvivalent norm ikke ændre på om en afbildning er uniformt kontinuert.

Begrebet uniform kontinuitet blev behandlet af den tyske matematiker E. Heine (1821–1881), der i 1872 viste, at en kontinuert funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ på et afsluttet, begrænset interval er uniformt kontinuert. Dette resultat er indeholdt i følgende hovedresultat.

Sætning 6.20 (6. Hovedsætning). *En kontinuert afbildning f af et kompakt metrisk rum (X, d_X) ind i et metrisk rum (Y, d_Y) er uniformt kontinuert.*

Bevis. Antag, at f ikke er uniformt kontinuert, altså

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x_1, x_2 \in X : (d_X(x_1, x_2) < \delta) \ \wedge \ (d_Y(f(x_1), f(x_2)) \geq \varepsilon)\,.$$

Lad $\varepsilon > 0$ være et tal, der opfylder ovenstående udsagn. Sættes successivt $\delta = 1\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{3}, \cdots$ ser man, at der eksisterer følger (x'_n) og (x''_n) i X opfyldende

$$d_X(x'_n, x''_n) < \frac{1}{n}\,,\ d_Y(f(x'_n), f(x''_n)) \geq \varepsilon\,.$$

Da det metriske produktrum $X \times X$ er kompakt ifølge 4. Hovedsætning, findes $(x', x'') \in X \times X$ og en delfølge (x'_{n_p}, x''_{n_p}) af (x'_n, x''_n) så $x'_{n_p} \to x'$ og $x''_{n_p} \to x''$. Idet

$$\lim_{p\to\infty} d_X(x'_{n_p}, x''_{n_p}) = d_X(x', x'')$$

(jf. opgaverne 1.4 og 4.2), og $d_X(x'_{n_p}, x''_{n_p}) < \frac{1}{n_p}$ sluttes $d_X(x', x'') = 0$ altså $x' = x''$. Af f's kontinuitet i punktet $x' = x''$ følger dernæst at

$$\lim_{p\to\infty} f(x'_{n_p}) = \lim_{p\to\infty} f(x''_{n_p}) = f(x') = f(x'')\,,$$

hvoraf som ovenfor

$$\lim_{p\to\infty} d_Y(f(x'_{n_p}), f(x''_{n_p})) = d_Y(f(x'), f(x'')) = 0\,.$$

Dette er imidlertid i modstrid med at $d_Y(f(x'_n), f(x''_n)) \geq \varepsilon$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og vi kan konkludere, at f er uniformt kontinuert. □

Som en vigtig anvendelse af uniform kontinuitet viser vi

Sætning 6.21. *Lad $f : A \to (Y, d_Y)$ være en afbildning af en delmængde A i et metrisk rum (X, d_X). Hvis*

(i) (Y, d_Y) *er fuldstændigt,*

og

(ii) f *er uniformt kontinuert på delrummet* (A, d_X),

så kan f på en og kun en måde udvides til en kontinuert afbildning $\tilde{f} : \overline{A} \to (Y, d_Y)$. Udvidelsen $\tilde{f}$ er endda uniformt kontinuert.

Bevis. Vi foretager først en analyse af situationen og antager at $\tilde{f} : \overline{A} \to (Y, d_Y)$ er en kontinuert udvidelse af f, dvs. $\tilde{f}(x) = f(x)$ for alle $x \in A$. Til vilkårligt $x \in \overline{A} \setminus A$ findes en punktfølge (x_n) i A så $x_n \to x$, og da $\tilde{f}$ er kontinuert i x gælder $\tilde{f}(x) = \lim \tilde{f}(x_n) = \lim f(x_n)$. Dette viser, endda uden brug af forudsætningerne (i) og (ii), at $\tilde{f}$ er entydigt bestemt. Dette sidste er i øvrigt også en konsekvens af Sætning 3.4.

For dernæst under brug af forudsætningerne (i) og (ii) at vise eksistensen af en udvidelse $\tilde{f} : \overline{A} \to Y$ bemærkes først: *Hvis $x \in \overline{A}$ og (x_n) er en vilkårlig konvergent følge i A med grænsepunkt x, så er $(f(x_n))$ en Cauchy følge i Y.*

Til $\varepsilon > 0$ findes nemlig et $\delta > 0$ i henhold til f's uniforme kontinuitet på A, så der for alle $x_1, x_2 \in A$ gælder

$$d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Da (x_n) er konvergent og dermed en Cauchy følge findes $N \in \mathbb{N}$, så der for $n, m \geq N$ gælder $d_X(x_n, x_m) < \delta$, hvoraf

$$d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon \quad \text{for} \quad n, m \geq N\,.$$

Da (Y, d_Y) er forudsat fuldstændigt eksisterer $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Dette grænsepunkt afhænger af $x \in \overline{A}$, men kunne også tænkes at afhænge af den betragtede følge (x_n) i A, der konvergerer mod x. At det *ikke* er tilfældet ses således: Hvis (x_n) og (y_n) er to følger i A, der begge konvergerer mod x vil den blandede følge $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ også konvergere mod x, men ifølge bemærkningen ovenfor, har alle tre følger

$$(f(x_n)),\ (f(y_n)) \ \text{ og } \ f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots$$

et grænsepunkt i Y. Da de to første er delfølger af den sidste, må alle tre grænsepunkter være ens.

Det er nu tilladeligt at definere $\tilde{f} : \overline{A} \to Y$ ved

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)\,, \ \text{ for } x \in \overline{A}\,, x_n \in A\,, x_n \to x\,.$$

At $\tilde{f}(x) = f(x)$ for $x \in A$ følger straks ved at betragte den konstante følge $x, x, \ldots$, og at $\tilde{f}$ er uniformt kontinuert ses således: Til $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$ i henhold til (2). Lad $x', x'' \in \overline{A}$ opfylde $d_X(x', x'') < \delta$. Vælges (x'_n) og (x''_n) fra A så $x'_n \to x'$, $x''_n \to x''$, vil $d_X(x'_n, x''_n) \to d_X(x', x'')$, og altså findes $N \in \mathbb{N}$, så der for $n \geq N$ gælder $d_X(x'_n, x''_n) < \delta$. Ifølge (2) gælder så

$$d_Y(f(x'_n), f(x''_n)) < \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N\,,$$

hvoraf

$$d_Y(\tilde{f}(x'), \tilde{f}(x'')) = \lim_{n\to\infty} d_Y(f(x'_n), f(x''_n)) \leq \varepsilon\,.$$

□

Bemærkning 6.22. I forbindelse med Sætning 6.21 kan vi formulere følgende princip: *Egenskaber ved f nedarves til $\tilde{f}$.*

Som et eksempel herpå viser vi:

Sætning 6.23. *Lad $f : A \to F$ være en kontinuert lineær afbildning af et tæt underrum A af et normeret rum E ind i et Banach rum F.*

Den entydige kontinuerte udvidelse $\tilde{f} : E \to F$ af f er lineær og $\|f\| = \|\tilde{f}\|$.

Bevis. Ifølge Sætning 4.6 opfylder f en Lipschitz betingelse med konstant $\|f\|$ og er specielt uniformt kontinuert, så Sætning 6.21 kan anvendes. At $\tilde{f}(x+y) = \tilde{f}(x)+\tilde{f}(y)$ ses nu ved at vælge følger (x_n) og (y_n) i A, så $x_n \to x$, $y_n \to y$. Dermed gælder $x_n + y_n \to x + y$, så

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x+y) &= \lim_{n\to\infty} f(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n) + f(y_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)\,. \end{aligned}$$

Tilsvarende ses, at $\tilde{f}(\lambda x) = \lambda \tilde{f}(x)$. Altså er $\tilde{f}$ lineær.

Af uligheden $\|f(x)\| \le \|f\|\|x\|$ for $x \in A$ fås ved grænseovergang $\|\tilde{f}(x)\| \le \|f\|\|x\|$ for $x \in E$, hvoraf $\|\tilde{f}\| \le \|f\|$. Den modsatte ulighed gælder, da $\tilde{f}$ udvider f. Altså er $\|f\| = \|\tilde{f}\|$. □

Opgaver til §6

6.1. Vis, at et kompakt metrisk rum er fuldstændigt.

6.2. Lad (M, d) være et metrisk rum. Idet afstanden mellem to ikke tomme delmængder A og B af M defineres ved

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

og specielt $d(x, A) = d(\{x\}, A)$, skal man vise følgende:

(1) Hvis A er kompakt findes for hvert $x \in M$ et punkt $a \in A$, så $d(x, A) = d(x, a)$.

(2) Hvis A og B begge er kompakte findes $a \in A$ og $b \in B$ så

$$d(a, b) = d(A, B).$$

(3) Hvis $M = \mathbb{R}^k$, og hvis $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er afsluttet, $B \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt, så findes $a \in A, b \in B$ så

$$d(a, b) = d(A, B).$$

(4) Giv et eksempel på to afsluttede disjunkte mængder A, B i $\mathbb{R}$ med $d(A, B) = 0$.

6.3. Lad (M, d) være et kompakt metrisk rum.
Vis, at der findes $a, b \in M$ så $d(a, b) = \operatorname{diam} M$.

6.4. Lad (X, d_X) og (K, d_K) være metriske rum, og antag at K er kompakt. For en kontinuert funktion $f : X \times K \to \mathbb{L}$ betragtes for hvert $x \in X$ snitfunktionen $f_x : K \to \mathbb{L}$ givet ved $k \mapsto f_x(k) = f(x, k)$.

Vis, at f_x tilhører Banach rummet $C(K, \mathbb{L})$.

Vis videre, at hvis $x_n \to x$ i X, så vil $f_{x_n} \to f_x$ uniformt på K (gør det indirekte), og gør rede for, at det medfører, at $x \mapsto f_x$ er en kontinuert afbildning af X ind i $C(K, \mathbb{L})$.

6.5. Benyt overdækningsegenskaben til at vise hovedsætningerne 1–3 i §6.2 om kompakte mængder.

6.6. Lad (M, d) være et metrisk rum.

Vis, at M er kompakt hvis og kun hvis *fællesmængdeprincippet* er opfyldt: For enhver familie $(F_i)_{i\in I}$ af afsluttede mængder i M gælder, at hvis $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$, så findes endelig mange indices $i_1, \ldots, i_n \in I$, så

$$F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n} = \varnothing.$$

6.7. Lad (M, d) være et kompakt metrisk rum og lad $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ være en dalende følge af afsluttede ikke tomme mængder.

Vis, at $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.

6.8. Idet afstand mellem mængder er defineret i Opg. 6.2, betragter vi for en afbildning $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ følgende betingelser:

(1) f er uniformt kontinuert.
(2) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall A \subseteq X : (\operatorname{diam} A \leq \delta \Rightarrow \operatorname{diam} f(A) \leq \varepsilon)$.
(3) $\forall A, B \subseteq X : (d_X(A, B) = 0 \Rightarrow d_Y(f(A), f(B)) = 0)$.

Vis, at (1) $\Leftrightarrow$ (2), og at (1) $\Rightarrow$ (3).

6.9.* Med betegnelserne fra Opg. 6.8 skal man vise *Efremovich's sætning:* (3) $\Rightarrow$ (1).

Vink: Antag, at f ikke er uniformt kontinuert. Udnyt dette til at finde $\varepsilon_0 > 0$, og følger (a_n) og (b_n) i X, så der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$d_X(a_n, b_n) < \frac{1}{n}, \; d_Y(f(a_n), f(b_n)) \geq \varepsilon_0 .$$

Se på følgende tre muligheder, idet $\alpha_n = f(a_n), \beta_n = f(b_n)$:

(1) Der findes $n_0 \in \mathbb{N}$ og $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ i $\mathbb{N}$ så

$$d_Y(\alpha_{n_0}, \beta_{n_k}) < \frac{\varepsilon_0}{4} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \dots .$$

(2) Der findes $n_0 \in \mathbb{N}$ og $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ i $\mathbb{N}$ så

$$d_Y(\alpha_{n_k}, \beta_{n_0}) < \frac{\varepsilon_0}{4} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \dots .$$

(3)

$$\forall n \in \mathbb{N} \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall m \geq N : d_Y(\alpha_n, \beta_m) \geq \frac{\varepsilon_0}{4} ,$$

og

$$\forall n \in \mathbb{N} \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall m \geq N : d_Y(\alpha_m, \beta_n) \geq \frac{\varepsilon_0}{4} .$$

Vis, at man i alle tre tilfælde kan finde en følge $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ i $\mathbb{N}$, så der for alle $p, q \in \mathbb{N}$ gælder

$$d(\alpha_{n_p}, \beta_{n_q}) \geq \frac{\varepsilon_0}{4} ,$$

og slut heraf, at (3) ikke er opfyldt.

6.10. Lad (X_n, d_n), $n = 1, 2, \dots$ være en følge af kompakte metriske rum og lad $X = \prod_1^{\infty} X_n$ være det i Opg. 4.6 definerede metriske rum af følger $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots)$, hvor $x_n \in X_n$ for alle n.

Vis, at X er et kompakt metrisk rum.

Vink: Lad $(\underline{x}_n)$ være en følge i X. Konstruer en delfølge $(\underline{x}_n^{(1)})$ af $(\underline{x}_n)$, så første koordinaterne i $(\underline{x}_n^{(1)})$ konvergerer. Konstruer dernæst en delfølge $(\underline{x}_n^{(2)})$ af $(\underline{x}_n^{(1)})$, så 1. og 2. koordinaterne konvergerer. Fortsæt og konstruer i p'te trin en delfølge $(\underline{x}_n^{(p)})$ af $(\underline{x}_n^{(p-1)})$ så de p første koordinatfølger i $\underline{x}_n^{(p)}$ konvergerer. Betragt dernæst diagonalfølgen $(\underline{x}_n^{(n)})$, som er en delfølge af $(\underline{x}_n)$, og vis, at alle dens koordinatfølger konvergerer.

6.11. Lad $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, idet $-\infty < a < b < \infty$. Vis, at følgende betingelser er ækvivalente:

(i) f er uniformt kontinuert.
(ii) f kan udvides til en kontinuert funktion $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$.
(iii) $\lim_{x\to b^-} f(x)$ og $\lim_{x\to a^+} f(x)$ eksisterer.

Vis, at i tilfældet $a = -\infty$, $b = \infty$ gælder (iii) $\Rightarrow$ (i), men at (i) $\Rightarrow$ (iii) er forkert endda med begrænset f.

6.12. Lad (M,d) være et metrisk rum og lad $(\hat{M},\hat{d})$ og $(\tilde{M},\tilde{d})$ være fuldstændiggørelser af M.

Vis, at $(\hat{M},\hat{d})$ og $(\tilde{M},\tilde{d})$ er isometriske, dvs. at der findes en surjektiv isometri af $\hat{M}$ på $\tilde{M}$.

6.13. Sæt $\operatorname{dist}(x,y) = |\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y|$ for $x, y \in \mathbb{R}$.

Vis, at $x \mapsto x$ ikke er uniformt kontinuert fra $(\mathbb{R}, \operatorname{dist})$ til $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, og at $x \mapsto x^2$ er uniformt kontinuert fra $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ til $(\mathbb{R}, \operatorname{dist})$.

6.14. Lad (M,d) være et metrisk rum og lad $\mathcal{K}^*$ betegne systemet af ikke tomme kompakte delmængder af M. Vi forsyner $\mathcal{K}^*$ med Hausdorff metrikken, jf. Opg. 4.5

a) Vis, at hvis $f : M \to M$ er kontinuert, så er $K \mapsto f(K)$ en kontinuert afbildning af $\mathcal{K}^*$ ind i sig selv.
b) Lad der være givet N Lipschitz afbildninger $f_1, \dots, f_N$ af M ind i sig selv med Lipschitz konstanter $C_1, \dots, C_N$. Vis, at der ved fastsættelsen
$$F(K) = \bigcup_{j=1}^{N} f_j(K), \quad K \in \mathcal{K}^*$$
defineres en Lipschitz afbildning på $\mathcal{K}^*$ med Lipschitz konstant $\max(C_1, \dots, C_N)$.

§7. En fixpunktssætning og dens anvendelse i differentialligningsteori

Denne paragraf omhandler eksistens- og entydighedssætninger for differentialligningssystemer. Nærmere bestemt betragter vi 1. ordens differentialligningssystemet

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)\,, \quad (\star)$$

hvor

$$f : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

er en kontinuert funktion, og $I \subseteq \mathbb{R}$ er et interval (af positiv længde). Der tales om et differentiallignings*system*, fordi $(\star)$ også kan skrives som k koblede differentialligninger for koordinaterne $x_1, \ldots, x_k$ til x:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, \ldots, x_k) \\ &\vdots \\ \frac{dx_k}{dt} &= f_k(t, x_1, \ldots, x_k)\,, \end{aligned}$$

hvor $f_1, \ldots, f_k$ er f's koordinatfunktioner. Fra Mat 1 kendes eksempelvis lineære differentialligningssystemer.

Ved en løsning til $(\star)$ forstås følgende.

Definition 7.1. En funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}^k$, hvor J er et delinterval af I, siges at være en løsning til differentialligningssystemet $(\star)$, såfremt den er differentiabel og

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{for alle } t \in J\,.$$

Vi siger, at φ er en maksimal løsning til $(\star)$, hvis der ikke findes nogen løsning defineret på et interval J', så $J \subset J'$, og som er lig med φ på J.

Det skal bemærkes, at differentiabilitet i et evt. endepunkt indeholdt i I naturligvis betyder eksistens af den afledede fra højre eller fra venstre afhængig af, om det er et venstre eller højre endepunkt. Bemærk også, at enhver løsning φ til $(\star)$ er *kontinuert differentiabel*, da f og φ og dermed også $t \to f(t, \varphi(t))$ er kontinuerte.

Tolkes t som tid bestemmer ligningen $(\star)$ ændringen af x pr. tid som funktion af t og $x(t)$. Det er derfor naturligt at formode, at hvis værdien af x fastlægges til x_0 til en given tid $t_0 \in I$, så er $x(t)$ bestemt entydigt af $(\star)$ til enhver tid. Et af hovedresultaterne (Sætning 7.9) i denne § er, at for tilstrækkelig pæne funktioner f holder denne formodning stik, altså at der eksisterer en løsning til ($\star$) på I, der opfylder *begyndelsesbetingelsen* $x(t_0) = x_0$, og at denne er entydig. Det følgende eksempel viser, at kontinuitet af f alene ikke er en tilstrækkelig forudsætning.

Eksempel 7.2. Svarende til $k = 1$ og $I = \mathbb{R}$ lader vi funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(t,x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{for} \quad x > 0 \\ 0 & \text{for} \quad x \leq 0 \,. \end{cases}$$

Denne er kontinuert på $\mathbb{R}^2$, og den tilsvarende differentialligning ($\star$) har foruden nulfunktionen på $\mathbb{R}$ også løsningen

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t - t_0)^2 & \text{for} \quad t > t_0 \\ 0 & \text{for} \quad t \leq t_0 \,, \end{cases}$$

for givet $t_0 \in \mathbb{R}$ (eftervis dette!). Disse to løsninger opfylder øjensynlig begge begyndelsesbetingelsen $x(t_0) = 0$.

7.1. En integralligning.

For et vilkårligt interval $I \subseteq \mathbb{R}$ betragtes rummet $C(I, \mathbb{R}^k)$ af kontinuerte funktioner $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ fra I til $\mathbb{R}^k$. Da alle normer på $\mathbb{R}^k$ er ækvivalente, kan vi fra et topologisk synspunkt vælge den norm, der gør vurderingerne nemmest, og vi vil i det følgende benytte maksimumsnormen $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_k|)$ på $\mathbb{R}^k$.

For $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in C(I, \mathbb{R}^k)$ og $[a, b] \subseteq I$ har vi pr. definition

$$\int_a^b \varphi(s)ds = \left(\int_a^b \varphi_1(s)ds, \ldots, \int_a^b \varphi_k(s)ds \right) ,$$

hvoraf let følger

$$\left\| \int_a^b \varphi(s)ds \right\|_\infty \leq \int_a^b \|\varphi(s)\|_\infty ds \,. \tag{1}$$

Lad der nu være givet en kontinuert funktion f som ovenfor. Som metrik på $I \times \mathbb{R}^k$ benyttes den af maksimumsnormen på $\mathbb{R}^{k+1}$ inducerede metrik.

Til et punkt $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^k$ betragtes for vilkårligt $\varphi \in C(I, \mathbb{R}^k)$ funktionen $T\varphi$ givet ved

$$T\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))ds \,, \quad t \in I, \tag{2}$$

som er den stamfunktion til $f(s,\varphi(s))$, der har værdien x_0 for $t = t_0$. (Differential- og integralregningens hovedsætning.)

Herved har vi defineret en afbildning T af $C(I,\mathbb{R}^k)$ ind i sig selv. Hvis vi vil understrege, at T afhænger af t_0, x_0 og I, bruger vi den udførligere betegnelse $T = T(t_0, x_0, I)$.

At afbildningen T har et fixpunkt $\varphi \in C(I,\mathbb{R}^k)$, altså at $T\varphi = \varphi$, kommer ud på, at φ løser integralligningen

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds\,, \quad t \in I\,, \tag{3}$$

men endnu vigtigere er det, at φ løser en differentialligning. Vi formulerer det i følgende sætning.

Sætning 7.3. *Differentialligningssystemet ($\star$) med begyndelsesbetingelsen $x(t_0) = x_0$ har en løsning $\varphi : I \to \mathbb{R}^k$, netop hvis $\varphi \in C(I,\mathbb{R}^k)$ er fixpunkt for $T = T(t_0, x_0, I)$.*

Bevis. Hvis $\varphi \in C(I,\mathbb{R}^k)$ er et fixpunkt for T, så følger af (3), at $\varphi(t_0) = x_0$ og at φ er differentiabel på I med $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$ ifølge differential- og integralregningens hovedsætning (se Adams p. 318 Thm.5 part I).

Hvis omvendt φ løser differentialligningssystemet ($\star$) med begyndelsesbetingelsen $\varphi(t_0) = x_0$, er $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$ kontinuert, og dermed har vi ifølge differential- og integralregningens hovedsætning (se Adams p.318 Thm.5 part II)

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds\,.$$

□

Bemærk, at Sætning 7.3 erstatter jagten på en *differentiabel* funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^k$ med jagten på en *kontinuert*.

Vi minder om, at i tilfælde af et kompakt interval K er $C(K,\mathbb{R}^k)$ fuldstændigt under den uniforme norm

$$\|\varphi\|_u = \sup_{t\in K} \|\varphi(t)\|_\infty = \sup_{t\in K} \max(|\varphi_1(t)|, \ldots, |\varphi_k(t)|)\,,$$

jf. Sætning 5.8. (Hvis I *ikke* er kompakt, indføres ingen norm på $C(I,\mathbb{R}^k)$).

I det følgende lemma indføres det tidligere antydede ekstra krav til f udover kontinuitet, som vil blive benyttet i beviset for eksistens- og entydighedssætningen 7.9.

Lemma 7.4. *Antag, at K er et kompakt interval, og at den kontinuerte funktion $f : K \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ opfylder en global Lipschitz betingelse*

$$\forall t \in K\, \forall x, y \in \mathbb{R}^k : \|f(t,x) - f(t,y)\|_\infty \le c\|x-y\|_\infty . \tag{4}$$

Så opfylder $T = T(t_0, x_0, K)$ Lipschitz betingelsen

$$\forall \varphi, \psi \in C(K, \mathbb{R}^k) : \|T\varphi - T\psi\|_u \le c\,\ell(K)\|\varphi - \psi\|_u , \tag{5}$$

hvor $\ell(K)$ betegner længden af intervallet K.

Bevis. For $t \in K$ har vi under brug af (1)

$$\begin{aligned}
&\|T\varphi(t) - T\psi(t)\|_\infty = \|\int_{t_0}^t [f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))]ds\|_\infty \\
&\le \left| \int_{t_0}^t \|f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\|_\infty ds \right| \le \left| \int_{t_0}^t c\|\varphi(s) - \psi(s)\|_\infty ds \right| \\
&\le c|t-t_0|\|\varphi - \psi\|_u \le c\,\ell(K)\|\varphi-\psi\|_u ,
\end{aligned}$$

idet det er nødvendigt at opretholde numerisk værdi omkring integralet, da t eventuelt kan være mindre end t_0. Resultatet følger ved at tage supremum over $t \in K$. □

Bemærkning 7.5. For hvert $t \in K$ opfylder $f(t,\cdot) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ altså en Lipschitz betingelse på hele $\mathbb{R}^k$, derfor benyttes glosen "global". Bemærk, at der kræves samme Lipschitz konstant $c > 0$ for alle $t \in K$.

7.2. Banach's fixpunktssætning.

Et vigtigt redskab i beviset for eksistens- og entydighedsresultaterne i næste afsnit er en fixpunktssætning, der vil sikre eksistens og entydighed af løsninger på små intervaller.

Vi starter med at formulere en simpel tilstrækkelig betingelse for, at en følge er en Cauchy følge.

Lemma 7.6. *Hvis en følge $(x_n)_{n\ge 0}$ i et metrisk rum (M,d) opfylder betingelsen*

$$\sum_{j=0}^{\infty} d(x_j, x_{j+1}) < \infty ,$$

så er den en Cauchy følge.

Bevis. Hvis den givne række er konvergent, kan vi til givet $\varepsilon > 0$ finde $N \in \mathbb{N}$ så der for $n \ge N$ og $p \in \mathbb{N}$ gælder

$$\sum_{j=n}^{n+p-1} d(x_j, x_{j+1}) \le \varepsilon ,$$

men ifølge trekantsuligheden anvendt $p-1$ gange er $d(x_n, x_{n+p}) \leq$ venstresiden, og heraf følger påstanden. $\square$

En afbildning T af en mængde M ind i sig selv siges at have et *fixpunkt* $a \in M$, hvis $T(a) = a$. Når man skal finde et fixpunkt for en kontinuert afbildning T af et metrisk rum (M, d) ind i sig selv, kan man forsøge at benytte de *successive approksimationers metode*, der går ud på følgende: Man vælger $x_0 \in M$ og sætter

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1) = T^{\circ 2}(x_0), \dots, x_n = T(x_{n-1}) = T^{\circ n}(x_0), \dots . \tag{6}$$

Hvis følgen $(x_n)_{n\geq 0}$ har et grænsepunkt $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, så er a nødvendigvis et fixpunkt for T, idet

$$T(a) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a,$$

jf. Sætning 3.1. En sådan iterationsproces er velegnet til computerberegning. Følgen (x_n) behøver naturligvis ikke at have et grænsepunkt, og udfaldet kan afhænge af om *startpunktet* x_0 vælges gunstigt. Vi skal se på et tilfælde, hvor iterationen altid leder til et fixpunkt uanset startpunktet.

Definition 7.7. En afbildning T af et metrisk rum (M, d) ind i sig selv kaldes en *kontraktion* af M, såfremt den opfylder en Lipschitz betingelse med konstant c hvor $0 < c < 1$, altså såfremt

$$d(T(x), T(y)) \leq c\, d(x, y) \quad \text{for} \quad x, y \in M\,.$$

Konstanten $c < 1$ kaldes *kontraktionskonstanten.*

Sætning 7.8 (Banach's fixpunktssætning). *Lad T være en kontraktion af et fuldstændigt metrisk rum (M, d).*

Så har T netop et fixpunkt $a \in M$, og for vilkårligt $x_0 \in M$ vil følgen af itererede punkter $x_0, T(x_0), T^{\circ 2}(x_0) = T(T(x_0)), \dots$ konvergere mod a.

Bevis. For vilkårligt $x_0 \in M$ betragtes følgen (x_n) givet ved (6), og vi vil vise, at den er en Cauchy følge. Vi har

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq c\, d(x_{n-1}, x_n),$$

som ved gentagen anvendelse viser, at

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n d(x_0, x_1),$$

og af sammenligningskriteriet sluttes, at rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$$

er konvergent. Ifølge Lemma 7.6 er (x_n) altså en Cauchy følge, så da M er fuldstændigt, har (x_n) et grænsepunkt $a \in M$, som altså er et fixpunkt.

At der kun er et fixpunkt for T ses således: Hvis a og b er fixpunkter for T vil $d(a,b) = d(T(a), T(b)) \leq cd(a,b)$, men da $c < 1$, er dette kun muligt hvis $d(a,b) = 0$, altså har vi $a = b$. □

7.3. Eksistens- og entydighedssætninger for differentialligningssystemer af 1. orden.

Vi giver nu et bevis baseret på Banachs fixpunktssætning for eksistens- og entydighedssætningen for differentialligningssystemet $(\star)$ i tilfældet, hvor funktionen $f : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ på højresiden opfylder en global Lipschitz betingelse på kompakte delintervaller af I. Vi skal altså vise følgende sætning.

Sætning 7.9. *Antag, at funktionen f opfylder den globale Lipschitz betingelse (4) på $K \times \mathbb{R}^k$ for ethvert kompakt delinterval K af I (hvor konstanten c gerne må afhænge af K). For givne $t_0 \in I$ og $x_0 \in \mathbb{R}^k$ har differentialligningssystemet $(\star)$ da netop een løsning $\varphi : I \to \mathbb{R}^k$, der opfylder begyndelsesbetingelsen $\varphi(t_0) = x_0$.*

Bevis. Lad os først antage, at $I = [a,b]$ er kompakt, således at (4) er opfyldt på hele I. Sætning 7.3 og formel (5) giver da i kraft af Banachs fixpunktssætning, at der på ethvert delinterval K af I af længde $\ell(K) \leq \frac{1}{2c} = \delta$ findes en entydig løsning til $(\star)$, der opfylder en given begyndelsesbetingelse $x(t_0') = x_0'$, hvor $t_0' \in K$.

Entydighed af løsning på $[a,b]$: Lad φ og ψ være to løsninger til $(\star)$ på I, som opfylder den givne begyndelsesbetingelse.

Vælg en inddeling $a = t_{-m} < t_{-m+1} < \cdots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ af $[a,b]$, således at $|t_i - t_{i+1}| \leq \frac{1}{2}\delta$ for $i = -m, \dots, n-1$ $(m, n \geq 0)$. Da har intervallerne $[t_i, t_{i+2}]$, $i = -m, \dots, n-2$, længde $\leq \delta$. Vi slutter derfor af det allerede viste, at hvis $\varphi = \psi$ på $[t_i, t_{i+1}]$, da er $\varphi = \psi$ på $[t_i, t_{i+2}]$ (hvis $i + 2 \leq n$) og på $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ (hvis $i - 1 \geq -m$). Ved gentagelse af dette argument et tilstrækkeligt antal gange fås så, at $\varphi = \psi$ på $[a,b]$, hvis blot $\varphi = \psi$ på et af intervallerne $[t_i, t_{i+1}]$. Da $\varphi = \psi$ på ethvert delinterval af længde $\leq \delta$ indeholdende t_0, viser dette entydigheden.

Eksistens af løsning på $[a,b]$: Dette vises ved brug af et argument, som bygger på følgende simple iagttagelse: Givet to løsninger $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^k$ og $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}^k$ til $(\star)$, som er identiske på $I_1 \cap I_2$, og således at I_1 og I_2 overlapper hinanden positivt, dvs. at $I_1 \cap I_2$ har positiv længde, da er funktionen $\varphi : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}^k$, som er lig med φ_1 på I_1 og lig med φ_2 på I_2, en løsning til $(\star)$. Vi siger, at φ_1 og φ_2 kan sammenstykkes til en løsning til $(\star)$. Bemærk, at det ikke er tilstrækkeligt, at I_1 og I_2 kun har et punkt tilfælles, idet φ da ikke nødvendigvis er differentiabel i dette punkt.

Med inddelingen af $[a, b]$ som ovenfor lader vi φ_1 betegne den entydige løsning til $(\star)$ på $[t_{-1}, t_1]$ med begyndelsesbetingelse $\varphi_1(t_0) = x_0$. Hvis $n > 1$ lader vi φ_2 betegne den entydige løsning til $(\star)$ på $[t_0, t_2]$ med begyndelsesbetingelse $\varphi_2(t_1) = \varphi_1(t_1)$. Hvis $n > 2$ lader vi φ_3 betegne den entydige løsning til $(\star)$ på $[t_1, t_3]$ med begyndelsesbetingelse $\varphi_3(t_2) = \varphi_2(t_2)$. Fortsættes hermed fås løsninger $\varphi_{-m+2}, \ldots, \varphi_n$ til $(\star)$, således at φ_i og φ_{i+1} stemmer overens i t_i, $i = -m+2, \ldots, n-1$. Fællesmængden af definitionsintervallerne for φ_i og φ_{i+1} er intervallet $[t_{i-1}, t_i]$, som har længde $\leq \delta$. Det følger, at φ_i og φ_{i+1} stemmer overens på dette interval og kan derfor sammenstykkes til en løsning til $(\star)$ på $[t_{i-2}, t_{i+1}]$. Da dette gælder for alle $i = -m+2, \ldots, n-1$ fås ved sammenstykning en løsning φ til $(\star)$ på [a,b]. (Vi har her antaget, at $m, n \geq 1$. Oplagte modifikationer foretages hvis $m = 0$ eller $n = 0$.)

Hermed er sætningen vist for det tilfælde, hvor I er kompakt. Hvis I ikke er kompakt, findes kompakte intervaller $K_1 \subset K_2 \subset K_3, \ldots$ indeholdende t_0, således at $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Ifølge det allerede viste findes der en entydig løsning ψ_i på K_i til $(\star)$, således at $\psi_i(t_0) = x_0$ for hvert $i \in \mathbb{N}$. Derfor er $\psi_i = \psi_j$ på $K_i \cap K_j$ for alle $i, j \in \mathbb{N}$, og vi slutter (overvej!), at disse definerer en entydig løsning ψ på I, så $\psi(t_0) = x_0$. $\square$

Bemærk. Den i sætningen omtalte løsning er naturligvis maksimal, og dens restriktion til et delinterval K af I indeholdende t_0 er den entydige løsning til $(\star)$ på K, der opfylder den givne begyndelsesbetingelse.

Vi skal dernæst se på en anvendelse af Sætning 7.9 på lineære differentialligningssystemer. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og lad $p_{ij}, q_i, i, j = 1, \ldots, k$, være *kontinuerte* reelle funktioner på I. Vi betragter det lineære differentialligningsystem

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1k}(t)x_k + q_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_k}{dt} &= p_{k1}(t)x_1 + \cdots + p_{kk}(t)x_k + q_k(t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Indføres søjlevektorerne

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \quad q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_k(t) \end{pmatrix}$$

og $k \times k$ matricen $P(t) = (p_{ij}(t))$, kan (7) skrives kort

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + q(t)\,. \tag{7'}$$

Eksistens- og entydighedssætningen for systemet (7) kan nu formuleres således:

Sætning 7.10. *Til hvert punkt* $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^k$ *findes en og kun en løsning* $\varphi : I \to \mathbb{R}^k$ *til* (7)*, som opfylder*

$$\varphi(t_0) = x_0 \,.$$

Bevis. Vi definerer $f : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ved

$$f(t, x) = P(t)x + q(t)\,,$$

idet vi benytter matrix-søjle notationen. Det er klart, at f er kontinuert. Ifølge Sætning 7.9 er det så nok at vise, at restriktionen af f til $K \times \mathbb{R}^k$ opfylder en global Lipschitz betingelse for hvert kompakt delinterval $K \subseteq I$.

Vi har

$$f(t, x) - f(t, y) = P(t)(x - y)$$

altså

$$f_i(t, x) - f_i(t, y) = \sum_{j=1}^{k} p_{ij}(t)(x_j - y_j)\,, \quad i = 1, \dots, k\,,$$

hvoraf

$$|f_i(t, x) - f_i(t, y)| \le \|x - y\|_\infty \sum_{j=1}^{k} |p_{ij}(t)|\,.$$

Da alle funktionerne p_{ij} er kontinuerte på K, findes en konstant $C_K > 0$, så

$$\forall t \in K : |p_{ij}(t)| \le C_K\,, \qquad i, j = 1, \dots, k\,,$$

og dermed finder vi for $t \in K$,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_\infty \le k C_K \|x - y\|_\infty\,,$$

hvilket viser den globale Lipschitz betingelse.

□

Vi diskuterer dernæst en i mange henseender mere central eksistens- og entydighedssætning, idet dens forudsætninger er svagere end i Sætning 7.9, nemlig blot at f opfylder en *lokal Lipschitz betingelse* i følgende forstand.

Definition 7.11. Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ være åben og $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ en kontinuert funktion. Vi siger, at f opfylder en *lokal Lipschitz betingelse*, såfremt følgende gælder:

Til hvert punkt $(t_0, x_0) \in \Omega$ findes et kompakt interval $K_0 = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ og en kompakt kasse $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - x_0\|_\infty \leq r\}$ med $K_0 \times D_0 \subseteq \Omega$ samt en konstant $c > 0$, så at

$$\forall t \in K_0 \, \forall x, y \in D_0 : \|f(t,x) - f(t,y)\|_\infty \leq c\|x - y\|_\infty \,.$$

Vi ser altså på et differentialligningssystem af formen $(\star)$, hvor f nu er som angivet i Definition 7.11. Ved en løsning til $(\star)$ forstås da en funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}^k$, hvor $J \subseteq \mathbb{R}$ er et *åbent* interval, således at

$$\begin{array}{ll} (i) & (t, \varphi(t)) \in \Omega \quad \text{for alle} \quad t \in J \,, \\ (ii) & \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{for alle} \quad t \in J \,. \end{array}$$

En maksimal løsning defineres som tidligere.

Der gælder så følgende

Sætning 7.12. *Antag at $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ er åben, og at $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ er kontinuert og opfylder en lokal Lipschitz betingelse.*

Til hvert $(t_0, x_0) \in \Omega$ findes da en og kun en maksimal løsning $\varphi : J \to \mathbb{R}^k$ til differentialligningssystemet

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)\,, \quad (t,x) \in \Omega\,, \tag{8}$$

med begyndelsesbetingelsen $\varphi(t_0) = x_0$, og enhver løsning er restriktion af en maksimal løsning.

Vi skal kun bevise denne sætning i et vigtigt særtilfælde. Forinden noterer vi følgende resultat, som forsyner os med en stor klasse af funktioner, der opfylder en lokal Lipschitz betingelse.

Lemma 7.13. *Antag, at $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ er åben, at $f = (f_1, \ldots, f_k) : \Omega \to \mathbb{R}^k$ er kontinuert, og at hvert f_i i Ω har kontinuerte partielle afledede $\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ efter de sidste k variable.*

Så opfylder f en lokal Lipschitz betingelse.

Bevis. Da Ω er åben, kan vi til $(t_0, x_0) \in \Omega$ finde $\varepsilon > 0$ og $r > 0$, så $K_0 \times D_0 \subseteq \Omega$, hvor

$$K_0 = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]\,, \quad D_0 = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - x_0\|_\infty \leq r\}\,.$$

Da $K_0 \times D_0$ er kompakt, og $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ er kontinuert på Ω for alle $i, j = 1, \ldots, k$, findes $d > 0$, så

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x) \right| \leq d \quad \text{for} \quad t \in K_0\,, x \in D_0\,.$$

For givne $x, y \in D_0$ og $t \in K_0$ anvendes middelværdisætningen (se Adams p. 254) på funktionen

$$s \mapsto f_i(t, sx + (1-s)y)\,, \quad s \in [0,1]\,,$$

og dermed findes et tal $\tilde{s} \in]0,1[$, så

$$\begin{aligned} f_i(t,x) - f_i(t,y) &= \left[\frac{d}{ds} f_i(t, sx + (1-s)y)\right]_{s=\tilde{s}} \\ &= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \tilde{s}x + (1-\tilde{s})y)(x_j - y_j)\,, \end{aligned}$$

hvoraf

$$|f_i(t,x) - f_i(t,y)| \leq kd\|x-y\|_\infty$$

og endelig

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_\infty \leq kd\|x-y\|_\infty .$$

□

Ser vi på tilfældet $\Omega = I \times \mathbb{R}^k$, hvor I er et åbent interval, og hvor $f : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ opfylder forudsætningerne i Lemma 7.13, så giver beviset for Lemma 7.13, at hvis der findes en kompakt kasse D, således at $f(t,x) = 0$, når $x \notin D$, da opfylder f en *global* Lipschitz betingelse på $K \times \mathbb{R}^k$ for ethvert kompakt delinterval K af I. Dette følger af, at de partielle afledede $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ er lig med 0 udenfor $I \times D$ og begrænsede på den kompakte mængde $K \times D$, og følgelig begrænsede på $K \times \mathbb{R}^k$. Vi udnytter dette i det følgende bevis.

Bevis for Sætning 7.12 for $\Omega = I \times \mathbb{R}^k$ og $f_i\,, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ kontinuerte, $1 \leq i,j \leq k$.

Lad $\chi_R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, R > 0$, betegne en kontinuert differentiabel funktion, således at

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad |x| \leq R\,, \\ 0 & \text{for} \quad |x| \geq R+1\,. \end{cases}$$

Det overlades til læseren at vise at sådanne funktioner eksisterer. Definer funktionen $f_R : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ved

$$f_R(t, x_1, \ldots, x_k) = f(t, x_1, \ldots, x_k)\chi_R(x_1) \cdot \ldots \cdot \chi_R(x_k).$$

Da opfylder f_R forudsætningerne i Lemma 7.13 og $f_R(t,x) = f(t,x)$, når $\|x\|_\infty \leq R$, og $f_R(t,x) = 0$, når x ikke tilhører den kompakte kasse $\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_\infty \leq R+1\}$.

Ifølge bemærkningen ovenfor og Sætning 7.9 har differentialligningssystemet

$$\frac{dx}{dt} = f_R(t,x) \tag{9}$$

for givet $R > \|x_0\|_\infty$ en entydig løsning $\varphi_R : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^k$, der opfylder den givne begyndelsesbetingelse, hvor $\varepsilon > 0$ er valgt således at $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset I$. P.g.a. kontinuitet af φ_R i t_0 kan vi antage, at ε er valgt tilstrækkelig lille så $\|\varphi_R(t)\|_\infty \leq R$ for $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Dermed er $\varphi_R :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}^k$ løsning til (8). Dette viser eksistens af løsninger med en given begyndelsesbetingelse.

Vi viser dernæst eksistens og entydighed af maksimale løsninger. Lad $\varphi_1 : J_1 \to \mathbb{R}^k$ og $\varphi_2 : J_2 \to \mathbb{R}^k$ være to løsninger til (8), så $t_0 \in J_1 \cap J_2$ og $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = x_0$, og betragt et kompakt delinterval K af $J_1 \cap J_2$, så $t_0 \in K$. Da φ_1 og φ_2 er kontinuerte på K findes $R > 0$, således at $\|\varphi_1(t)\|_\infty, \|\varphi_2(t)\|_\infty \leq R$ for alle $t \in K$. Men så er φ_1 og φ_2 løsninger til (9) på K og derfor identiske på K ifølge Sætning 7.9. Da dette gælder for ethvert kompakt delinterval K af $J_1 \cap J_2$ indeholdende t_0, sluttes at $\varphi_1 = \varphi_2$ på $J_1 \cap J_2$, og de kan derfor sammenstykkes til en løsning på $J_1 \cup J_2$. Heraf følger entydigheden af en maksimal løsning med given begyndelsesbetingelse umiddelbart.

Endvidere kan vi nu nemt konstruere en maksimal løsning på følgende vis. Som definitionsinterval tager vi foreningsmængden af alle åbne intervaller J indeholdende t_0, hvorpå der findes en løsning φ_J til (8), så $\varphi_J(t_0) = x_0$. Sammenstykningen af disse løsninger er da åbenbart en maksimal løsning til (8) defineret på denne foreningsmængde, og den opfylder den givne begyndelsesbetingelse. $\square$

Eksempel 7.14. Lad $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(t,x) = 1 + x^2$. Da opfylder f ikke en global Lipschitz betingelse på kompakte intervaller (overvej!), men til gengæld opfylder den en lokal Lipschitz betingelse ifølge Lemma 7.13.

Den tilsvarende differentialligning har for hvert $c \in \mathbb{R}$ løsningen

$$\varphi(t) = \operatorname{tg}(t - c)\,, \quad t \in]c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2}[\,.$$

(Eftervis dette!) Da $\varphi(t) \to \pm\infty$ for $t \to c \pm \frac{\pi}{2}$ er disse løsninger maksimale. Vi har altså her eksempler på maksimale løsninger, som ikke er defineret på hele $I = \mathbb{R}$.

7.4. Differentialligninger af højere orden.

I dette afsnit skal vi se, hvorledes eksistens- og entydighedssætningerne fra forrige afsnit også leder til tilsvarende sætninger for højere ordens differentialligninger. Med henblik på notationsmæssig bekvemmelighed nøjes vi med at se på en enkelt differentialligning i stedet for et system. Nærmere bestemt ser vi på en differentialligning af formen

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}), \quad (\star\star)$$

hvor $F : \Omega \to \mathbb{R}$ er en kontinuert funktion og Ω en åben delmængde af $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definition 7.15. Ved en løsning til $(\star\star)$ forstås en n gange differentiabel funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}$, således at

$$\begin{aligned} &(i) \quad (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega\,, \quad t \in J\,, \\ &(ii) \quad \varphi^{(n)}(t) = F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))\,, \quad t \in J\,. \end{aligned}$$

Løsningen $\varphi : J \to \mathbb{R}$ er *maksimal*, såfremt der ikke findes nogen løsning defineret på et interval J' så $J \subset J'$, som er lig med φ på J.

Løsningen $\varphi : J \to \mathbb{R}$ siges at *gå igennem* $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega$, hvis $t_0 \in J$ og $\varphi(t_0) = x_0, \varphi'(t_0) = x_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

Lad nu $\varphi : J \to \mathbb{R}$ være en løsning til $(\star\star)$. Da ses funktionen $\tilde{\varphi} : t \to (\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))\,, t \in J$, at være løsning til differentialligningssystemet

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ &\vdots \\ \frac{dx_{n-2}}{dt} &= x_{n-1} \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= F(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Hvis omvendt, $\tilde{\varphi} = (\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : J \to \mathbb{R}^n$ er løsning til (10), da fås af de første $n-1$ ligninger, at dens første koordinatfunktion, φ, er $n-1$ gange differentiabel, og

$$\varphi_i(t) = \varphi'_{i-1}(t) = \dots = \varphi_1^{(i-1)}(t) = \varphi^{(i)}(t)\,, i = 1, \dots, n-1\,, t \in J\,,$$

hvorefter den sidste ligning viser, at φ er n gange differentiabel og at

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(t) = \varphi'_{n-1}(t) &= F(t, \varphi(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)) \\ &= F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))\,, \end{aligned}$$

altså at φ er en løsning til $(\star\star)$ på J.

Dette viser, at en funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}$ er en løsning til $(\star\star)$, som går igennem $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1})$, hvis og kun hvis den er første koordinatfunktion i en løsning $\tilde{\varphi}$ til (10) med begyndelsesbetingelse $\tilde{\varphi}(t_0) = (x_0, \ldots, x_{n-1})$. Vi er hermed i stand til som nævnt at udnytte eksistens- og entydigheds-resultaterne for differentialligningssystemer af første orden til at udlede tilsvarende resultater vedrørende $(\star\star)$. Vi nøjes med at betragte tilfældet, hvor $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$, I et åbent interval, og hvor F har kontinuerte partielle afledede efter $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Da højresiderne af de første $n-1$ ligninger i (10) har kontinuerte (konstante) partielle afledede efter $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, opfylder (10) forudsætningerne i det særtilfælde af Sætning 7.12, som vi beviste ovenfor. Heraf følger så

Sætning 7.16. *Antag, at funktionen $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er kontinuert og har kontinuerte partielle afledede efter de sidste n variable. Da findes en entydig maksimal løsning til $(\star\star)$, som går igennem et givet punkt $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n$, og enhver løsning er restriktion af en maksimal løsning.*

7.5. Historiske bemærkninger.

Cauchy viste omkring 1820 eksistensen af lokale løsninger til systemet (8) under forudsætning af, at f har kontinuerte partielle afledede af 1. orden. Lipschitz beviste i 1868, at det er tilstrækkeligt at forudsætte, at f opfylder en lokal Lipschitz betingelse. De successive approksimationers metode er i specialtilfældet med en lineær differentialligning af 2. orden anvendt af Liouville i 1837. Metoden anvendtes systematisk af Picard efter 1890.

Opgaver til §7

7.1 Vis, at der findes en Cauchy følge $(x_n)_{n\geq 0}$ i $\mathbb{R}$ for hvilken

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| = \infty \,.$$

7.2 Lad (M, d) være et kompakt metrisk rum og lad $f : M \to M$ være *strengt afstandsformindskende*, dvs.

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{for} \quad x \neq y \,.$$

Vis, at f har netop et fixpunkt $a \in M$. (*Vink:* Betragt funktionen $x \mapsto d(f(x), x)$ under den antagelse, at f ikke har fixpunkter. Forsøg at udlede en modstrid.)

7.3 Bestem ved diagonalisering samtlige maksimale løsninger til differentialligningssystemet

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 5t + 5 - 2x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 7t + 8 - x_1 - 2x_2 \end{aligned}\right\} \quad (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$$

7.4 Gør rede for, at differentialligningssystemet

$$\left.\begin{aligned} t\frac{dx_1}{dt} &= 2t - 2 - x_1 - x_2 \\ t\frac{dx_2}{dt} &= t + 2 - x_1 + x_2 \end{aligned}\right\} \quad (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$$

har netop een løsning $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$, der opfylder $\varphi(1) = (0, 0)$. Find denne løsning.

7.5 Eftervis, at differentialligningssystemet

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xy \\ \frac{dy}{dt} &= 1 - x^2 \end{aligned}\right\} \quad (t, x, y) \in \mathbb{R}^3$$

har $\varphi(t) = (1, 0)\,, t \in \mathbb{R}\,,$ som maksimal løsning, og begrund at denne er den eneste sådanne, der antager værdien $(1, 0)$ i $t = 0$.

7.6 Gør rede for, at højre side af differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = x^2\,, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2\,,$$

opfylder en lokal Lipschitz betingelse og find samtlige maksimale løsninger.

7.7 Gør rede for, at højre side af differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}\,, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times]-1,1[\,,$$

opfylder en lokal Lipschitz betingelse og find samtlige maksimale løsninger.

7.8 Vis, at løsningerne til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2\,, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2\,,$$

givet i Eksempel 7.14 udgør samtlige maksimale løsninger, og bestem den maksimale løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = 0$.

7.9 Omskriv følgende differentialligninger til systemer af første ordens differentialligninger.

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = x^2 - t\,, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2\,, \\
&(b) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \sin(\frac{dx}{dt}) + x^2t = 0\,, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2\,, \\
&(c) \quad \frac{d^3x}{dt^3} = \operatorname{Arctan}(\frac{d^2x}{dt^2} + t)\,, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2\,.
\end{aligned}$$

7.10 Formuler og bevis en eksistens- og entydighedssætning for den *lineære* n'te ordens differentialligning

$$\frac{d^nx}{dt^n} = p_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x + q(t)\,,$$

hvor $q, p_0, \ldots, p_{n-1}$ er kontinuerte funktioner på et interval I.

Vis herved, at mængden af løsninger på I til den homogene ligning (dvs. når $q = 0$) udgør et n-dimensionalt vektorrum.

7.11 Vis, at funktionerne

$$y = \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\,, \quad x \in]a-r, a+r[\,,$$

hvor $a \in \mathbb{R}$ og $r > 0$, hvis grafer udgøres af halvcirklerne i den øvre halvplan med centrum på x-aksen, er løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y}(1 + (\frac{dy}{dx})^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ .$$

Vink. Differentier ligningen $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ to gange implicit m.h.t. x.

Vis, at disse løsninger udgør samtlige maksimale løsninger.

(Bemærk, at ovennævnte differentialligning ikke tilhører klassen omtalt i Sætning 7.16. Dog kan beviset herfor nemt modificeres til dette formål, blot ved at vælge andre passende funktioner χ_R i beviset for Sætning 7.12. Overvej dette!)

7.12 Vi udstyrer $\mathbb{R}^k$ med den euklidiske norm og betragter en affin afbildning $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ af formen

$$f(x) = Ax + b$$

hvor $A = (a_{ij})$ er en reel $k \times k$ matrix og $b \in \mathbb{R}^k$.

a) Vis, at f er en Lipschitz afbildning med konstant

$$C = \left(\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}^2 \right)^{1/2} .$$

b) Betragt N affine afbildninger som ovenfor med Lipschitz konstanter $C_1, \ldots, C_N$, som alle antages < 1, og definer $F : \mathcal{K}^* \to \mathcal{K}^*$ ved

$$F(K) = \bigcup_{j=1}^{N} f_j(K) ,$$

hvor $\mathcal{K}^*$ betegner mængden af ikke tomme kompakte delmængder af $\mathbb{R}^k$, jf. Opg. 6.14. Vis, at F er en kontraktion af $\mathcal{K}^*$ forsynet med Hausdorff metrikken og slut, at der findes en "*fraktal*" $K_0 \in \mathcal{K}^*$ så de successive billeder $K, F(K), F^{\circ 2}(K), \ldots$ nærmer sig K_0 i Hausdorff metrikken uanset begyndelsesmængden $K \in \mathcal{K}^*$.

Eksempel. Se på $\mathbb{R}^2$, $f_j(x) = A_j x + b_j$, $j = 1, 2, 3$, hvor

$$A_1 = A_2 = A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

Grænsemængden K_0 kaldes *Sierpinski trekanten.* Prøv at tegne de første iterationer for forskellige K, f.eks. K = enhedskvadratet og $K = \{(0,0)\}$.

Der findes illustrationer af dette i artiklen af Peitgen og Jürgens: Fraktaler: Dataexperimenter med (av)–mystificerede komplekse strukturer. Normat 37 (1989) p. 45–72.

INDEX