Matematik 2 AN

Hilbert rum

med anvendelser

Bergfinnur Durhuus

1997

Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

Forord

Sammen med hæftet Metriske rum ved Christian Berg udgør nærværende hæfte om Hilbert rum med anvendelser lærebogsmaterialet i kurset Matematik 2AN. Pånær mindre ændringer falder indholdet i dette hæfte sammen med indholdet i de tilsvarende hæfter fra efteråret 1996. Henvisninger til hæftet Metriske rum er forsynet med et I foran. Eksempelvis henviser Sætning I.3.1 til Sætning 3.1 og (I.1.4) til formel (4) i §1 i nævnte hæfte.

Begrebet Hilbert rum blev først formaliseret af John von Neumann i 1927 (Mathematische Begründung der Quantenmechanik, Göttinger Nachrichten (1927) p.1-57). Konkrete Hilbert rum optræder dog i adskillige tidligere matematiske arbejder. Således indgår rummet $\ell_2(\mathbb{N})$ (defineret i Eksempel 1.9) i David Hilberts undersøgelser af integralligninger kort efter århundredskiftet (D.Hilbert: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig, 1912), og rummet $L_2([a,b])$ af kvadratisk integrable funktioner på et interval (defineret i Appendiks A) blev undersøgt af Frederic Riesz og Ernst Fischer omkring 1907. Herved blev Fourier række teorien, som blev indført af Joseph Fourier omkring hundrede år tidligere, sat ind i en ny ramme med vidtrækkende generaliseringer til følge. Sidenhen har Hilbert rummene fundet vej til adskillige discipliner indenfor matematisk analyse og dens anvendelsesområder. At de indgår som en vigtig del af den kvantemekaniske formalisme (se de to klassikere P.A.M.Dirac: The Principles of Quantum Mechanics (1930) og J. von Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (1932)) er blot et af mange eksempler.

I disse noter omhandler §1 den generelle Hilbert rums teori og §4 elementer af teorien for lineære afbildninger mellem Hilbert rum. Disse afsnit, samt §5 om diagonalisering af visse lineære afbildninger, kan ses som en fortsættelse og udvidelse af den lineære algebra fra Matematik 1. De anvendelsesområder for Hilbert rums teori, der indgår i disse noter, er følgende: Fourier række teori (§2) og dennes anvendelser til løsning af visse partielle differentialligninger (§3). Den såkaldte Fourier transformation på $\mathbb{R}$ og dens vigtigste egenskaber behandles i §6. Endelig anvendes resultaterne om diagonalisering fra §5 på randværdiproblemer for sædvanlige anden ordens differentialligninger i §7.

København, august 1997

Bergfinnur Durhuus

Matematik 2 AN
Matematisk Analyse

1997

INDHOLD

Hilbert rum med anvendelser

§1. Hilbert rum

1.1 Indre produkt rum.

I det følgende skal vi gøre brug af komplekse såvel som reelle vektorrum. Idet $\mathbb{L}$ betegner enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ minder vi om, at et vektorrum over $\mathbb{L}$ er en mængde E udstyret med en addition, dvs. en afbildning $(x, y) \to x+y$ fra $E \times E$ ind i E, og en multiplikation med skalarer fra $\mathbb{L}$, dvs. en afbildning $(\lambda, x) \to \lambda x$ fra $\mathbb{L} \times E$ ind i E, som opfylder vektorrumsbetingelserne i Definition 1.1 i Messers bog (som vi herefter vil betegne med [M]), hvor blot $\mathbb{R}$ erstattes med $\mathbb{L}$. Det understreges, at samtlige definitioner og resultater fra Matematik 1, der vedrører generelle reelle vektorrum også er gældende for komplekse vektorrum, idet de reelle tal blot overalt erstattes med de komplekse tal. Beviserne i det reelle tilfælde kan overføres direkte til det komplekse tilfælde, idet de alene bygger på vektorrumsaksiomerne og de fælles regneregler for reelle og komplekse tal.

Eksempler på reelle vektorrum er velkendte fra Matematik 1, f.eks. $\mathbb{R}^k$ samt mængden $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ af reelle funktioner defineret på en mængde M med punktvis addition og multiplikation med reelle tal. Oplagte eksempler på komplekse vektorrum er mængden $\mathbb{C}^k$ bestående af talsæt med k komplekse koordinater med koordinatvis addition og multiplikation med komplekse tal (i lighed med $\mathbb{R}^k$), samt mængden $\mathcal{F}(M, \mathbb{C})$ af komplekse funktioner defineret på en mængde M med punktvis addition og multiplikation med komplekse tal. Såfremt M er et metrisk rum er mængden $C(M, \mathbb{C})$ bestående af alle kontinuerte komplekse funktioner på M et underrum af $\mathcal{F}(M, \mathbb{C})$ ifølge Sætning I.3.15. Vi skal i det følgende se en hel del andre interessante eksempler på underrum af vektorrum af formen $\mathcal{F}(M, \mathbb{C})$.

Indre produkt rum er indført i Matematik 1, jvf. side 136 i [M]. Den følgende definition generaliserer dette begreb til også at omfatte komplekse vektorrum.

Definition 1.1. Lad E være et vektorrum over $\mathbb{L}$ $(= \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C})$. Et *indre produkt* (også kaldet *skalarprodukt*) på E er en afbildning $(\cdot\ ,\ \cdot) : E \times E \to \mathbb{L}$, der opfylder følgende betingelser (hvor $\underline{0}$ betegner nulvektoren i E):

i) $\forall x \in E \setminus \{\underline{0}\} : (x, x) > 0$,
ii) $\forall x, y \in E : (x, y) = \overline{(y, x)}$,
iii) $\forall x, y, z \in E : (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
iv) $\forall \lambda \in \mathbb{L}\ \forall x, y \in E : (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

Hvis $(\cdot\ ,\ \cdot)$ er et indre produkt på E kaldes parret $(E, (\cdot\ ,\ \cdot))$ et *indre produkt rum*.

Bemærk, at der ved $(x, x) > 0$ i i) forstås, at (x, x) er et reelt positivt tal. Såfremt $\mathbb{L} = \mathbb{R}$, er kompleks konjugering i ii) naturligvis overflødig, og ovenstående definition falder da sammen med Definition 4.1 i [M].

De sidste to af ovenstående betingelser udtrykker, at afbildningen $x \to (x, y)$ fra E ind i $\mathbb{L}$ er lineær for hvert fast $y \in E$. Kombineres dette med ii) finder vi, at

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z) \ , \tag{1}$$

$$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y) \ , \tag{2}$$

for samtlige $x, y, z \in E$ og $\lambda \in \mathbb{L}$, hvilket udtrykkes ved at sige, at det indre produkt er *konjugeret lineært* i anden variabel. I tilfældet $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ kaldes en afbildning fra $E \times E \to \mathbb{C}$, der er lineær i første variabel og konjugeret lineær i anden variabel tit en *sesquilinearform* på E. Vi har altså indset, at et indre produkt på et komplekst vektor rum er en sesquilinearform på E. Omvendt gælder, at en sesquilinearform, der opfylder i), i hvilket tilfælde den siges at være *positiv definit*, er et indre produkt. Hertil skal vi blot indse, at ii) gælder. Lad os først bemærke, at lineariteten i første variabel medfører, at

$$(\underline{0}, x) = 0 \quad \text{for alle} \quad x \in E \ .$$

Specielt følger, at $(\underline{0}, \underline{0}) = 0$, således at i) giver

$$\forall x \in E : (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0} \ . \tag{3}$$

Sammen med i) viser dette, at $(x, x) \in \mathbb{R}$ for alle $x \in E$. Benyttes

$$(x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x)$$

fås derfor, at $(x, y) + (y, x) \in \mathbb{R}$, d.v.s. at $Im(x, y) = -Im(y, x)$ for alle $x, y \in E$. Erstattes heri x med ix og benyttes sesquilineariteten fås $i(x, y) - i(y, x) \in \mathbb{R}$, d.v.s. $Re(x, y) = Re(y, x)$, hvormed det ønskede er vist.

Vi skal nedenfor se, at det indre produkt ved fastsættelsen

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \ , \qquad x \in E \ ,$$

definerer en norm på E. Vi kan allerede her bemærke, at betingelsen (N1) i Definition I.1.2 følger af i) og (3), og at (N2) følger af iv) og (2), idet

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x, x) = |\lambda|^2 \|x\|^2 \ .$$

I ethvert indre produkt rum gælder endvidere *paralellogramidentiteten*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \ ,$$

som vises ved udregning af venstresiden. (Overvej, hvorledes størrelserne i denne identitet kan knyttes til et paralellogram .)

I tilfældet $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ gælder også *polariseringsidentiteten*

$$(x, y) = \frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3} i^{\nu}\|x + i^{\nu}y\|^2 \ ,$$

som kan indses ved udregning af højresiden under brug af sesquilineariteten af det indre produkt (se Opg.1.2). Denne identitet viser specielt, at det indre produkt er entydigt bestemt ved den tilhørende norm.

Eksempel 1.2. 1) Det naturlige indre produkt på $\mathbb{C}^k$ (svarende til det sædvanlige indre produkt på $\mathbb{R}^k$) defineres ved

$$((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)) = x_1\overline{y}_1 + \ldots x_k\overline{y}_k \ .$$

Det overlades til læseren at eftervise, at betingelserne i) – iv) er opfyldt.

2) På vektorrummet $C([a, b])$ af kontinuerte komplekse funktioner på intervallet $[a, b]$ defineres et indre produkt ved

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \tag{4}$$

for $f, g \in C([a, b])$. Mere generelt fås for enhver *positiv* kontinuert funktion $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}_+ =]0, +\infty[$ et indre produkt $(\cdot\ ,\ \cdot)_\rho$ ved at sætte

$$(f, g)_\rho = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx \ . \tag{5}$$

Vi erindrer om, at integralet af en kontinuert kompleks funktion fås ved at integrere real- og imaginærdel hver for sig, dvs. for $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ er

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)dx + i\int_a^b \operatorname{Im} f(x)dx \ . \tag{6}$$

Herved er $f \to \int_a^b f(x)dx$ en lineær afbildning fra $C([a, b])$ ind i $\mathbb{C}$, hvilket umiddelbart medfører, at $(\cdot\ ,\ \cdot)_\rho$ tilfredsstiller iii) og iv) i Definition 1.1. Egenskaben ii) følger af, at $\int_a^b \overline{f(x)}dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}$, og i) følger af, at når f er kontinuert og $f \geq 0$, da er $\int_a^b f(x)dx = 0$ netop hvis $f = 0$.

Bemærk, at hvis $\underline{\rho}$ og $\overline{\rho}$ betegner henoldsvis minimum og maksimum af den positive kontinuerte funktion ρ på det kompakte interval $[a, b]$, således at $0 < \underline{\rho} \leq \rho \leq \overline{\rho} < +\infty$, følger det at

$$\underline{\rho}\|f\| \leq \|f\|_\rho \leq \overline{\rho}\|f\|$$

for $f \in C([a,b])$, hvilket viser at $\|\cdot\|$ og $\|\cdot\|_\rho$ er ækvivalente normer på $C([a,b])$, hvor $\|\cdot\|$, h.h.v. $\|\cdot\|_\rho$, betegner normen givet ved det indre produkt (4), h.h.v. (5).

3) Lad $\ell^0(\mathbb{N})$ betegne mængden af komplekse talfølger $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ som er lig med 0 fra et vist trin, altså med kun endelig mange elementer forskellige fra 0. $\ell^0(\mathbb{N})$ er da et underrum af vektorrummet af alle komplekse talfølger, som jo er lig med $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$. På $\ell^0(\mathbb{N})$ defineres et indre produkt ved

$$((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n \ ,$$

hvor summen på højresiden kun har endelig mange led forskellige fra 0 (og derfor selvfølgelig er konvergent). At der herved defineres et indre produkt på $\ell^0(\mathbb{N})$ ses på samme vis som for $\mathbb{C}^k$.

1.2 Ortogonalitet.

Lad nu $(E,(\cdot\ ,\ \cdot))$ være et indre produkt rum. Som bekendt siges to vektorer $x,y \in E$ at være *ortogonale*, og vi skriver da $x \perp y$, såfremt der gælder, at $(x,y)=0$. Mere generelt siges en vektor $x \in E$ at stå vinkelret på en delmængde $A \subseteq E$, og vi skriver da $x \perp A$, såfremt x står vinkelret på samtlige vektorer i A. Det *ortogonale komplement* $A^\perp$ til A defineres som mængden af alle vektorer, der står vinkelret på A, altså

$$A^\perp = \{x \in E \mid (x,y) = 0 \ \text{ for alle } \ y \in A\} \ . \tag{7}$$

Det bemærkes, at på grund af iii) og iv) i Definition 1.1 er $A^\perp$ et underrum af E for enhver mængde $A \subseteq E$ og af samme grund gælder, at

$$A^\perp = (\operatorname{span} A)^\perp \ , \tag{8}$$

hvor $\operatorname{span} A$ som sædvanlig betegner underrummet af E udspændt af A, som består af samtlige (endelige) linearkombinationer af vektorer fra A.

En familie $(x_i)_{i\in I}$ af vektorer fra E, hvor I er en vilkårlig indeksmængde, siges at være et *ortogonalsystem*, såfremt der gælder at $(x_i,x_j)=0$, når $i \neq j$, altså såfremt systemets vektorer er parvis ortogonale. Hvis også $\|x_i\|=1$ for hvert $i \in I$, taler vi om et *ortonormalsystem*.

Idet en familie $(x_i)_{i\in I}$ af vektorer fra E siges at være en lineært uafhængig familie, hvis ethvert endeligt delsæt af $(x_i)_{i\in I}$ er lineært uafhængigt, har vi følgende.

Lemma 1.3. *Lad $(x_i)_{i\in I}$ være et ortogonalsystem i E, således at $x_i \neq 0$ for alle $i \in I$. Da er $(x_i)_{i\in I}$ et lineært uafhængigt system.*

Bevis. Lad $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ være et endeligt delsæt af $(x_i)_{i\in I}$ og antag at skalarerne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ opfylder $\lambda_1 x_{i_1} + \ldots + \lambda_n x_{i_n} = 0$. Ved at tage det indre produkt med x_{i_j} for ethvert $j \in \{1, \ldots, n\}$ på begge sider af denne ligning, fås under udnyttelse af det indre produkts linearitetsegenskaber, at

$$\lambda_1(x_{i_1}, x_{i_j}) + \ldots + \lambda_n(x_{i_n}, x_{i_j}) = 0 .$$

Men ifølge antagelsen er $(x_{i_k}, x_{i_j}) = 0$ for $k \neq j$, således at $\lambda_j(x_{i_j}, x_{i_j}) = 0$. Men så er $\lambda_j = 0$ eftersom $(x_{i_j}, x_{i_j}) \neq 0$, da $x_{i_j} \neq 0$. □

Endvidere noterer vi følgende generalisering af Pythagoras' sætning.

Sætning 1.4. *Lad $(x_1, \ldots, x_n)$ være et endeligt ortogonalsystem. Da er*

$$\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 .$$

Bevis. Vi har

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i\,,\, \sum_{j=1}^n x_j\right) = \sum_{i,j=1}^n (x_i, x_j) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i, x_i) = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 , \end{aligned}$$

hvor vi ved tredie lighedstegn har benyttet, at kun diagonalleddene svarende til $i = j$ bidrager til summen på grund af ortogonalitetsantagelsen. □

Herefter minder vi om følgende sætning, som også er kendt fra Matematik 1, jvf. Theorem 4.19 side 164 i [M].

Sætning 1.5. *Lad $(e_1, \ldots, e_n)$ være et endeligt ortonormalsystem i E. For enhver vektor $x \in E$ findes en entydig vektor $u \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$, således at*

$$x - u \in \{e_1, \ldots, e_n\}^\perp$$

og den er givet ved

$$u = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i . \tag{9}$$

Endvidere gælder **Bessels ulighed**

$$\sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 \le \|x\|^2 \tag{10}$$

for alle $x \in E$.

Bevis. Enhver vektor $u \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ kan skrives på formen $u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$, hvor $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{L}$. Ved at tage det indre produkt med e_i på begge sider af denne ligning fås, at $(u, e_i) = \lambda_i(e_i, e_i) = \lambda_i$, da $(e_i, e_i) = 1$. Altså har vi

$$u = \sum_{i=1}^{n} (u, e_i) e_i \tag{11}$$

for $u \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Men $x - u \in \{e_1, \ldots, e_n\}^{\perp}$ er ensbetydende med, at $(x - u, e_i) = 0$ for hvert $i = 1, \ldots, n$, hvilket igen er ækvivalent med, at $(x, e_i) = (u, e_i)$ for $i = 1, \ldots, n$. Sammen med (11) viser dette første del af sætningen.

Bessels ulighed følger nu af Sætning 1.4 ved at bemærke at $x = u + (x - u)$, hvor $u \perp (x - u)$, således at

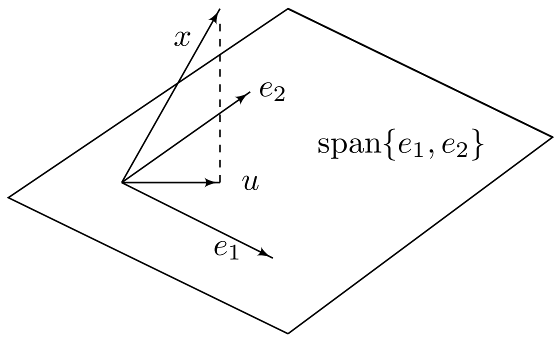
$$\|x\|^2 = \|u\|^2 + \|x - u\|^2 \ge \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 \ .$$

I sidste skridt har vi benyttet, at $\|(x, e_i)e_i\|^2 = |(x, e_i)|^2$. □

Vektoren u givet ved (9) kaldes den *ortogonale projektion* af x på underrummet $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$. Blandt vektorerne i $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ har den mindst afstand til x m.h.t. normen $\|\cdot\|$ og er entydigt bestemt herved. Hvis nemlig $v \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ er vilkårlig, er $x - v = (x - u) + (u - v)$, hvor $(x - u) \perp (u - v)$, således at

$$\|x - v\|^2 = \|x - u\|^2 + \|u - v\|^2 \ge \|x - u\|^2 \ ,$$

og der gælder lighedstegn til sidst, hvis og kun hvis $u = v$. (Se figuren.)



Af Bessels ulighed følger nu nemt *Cauchy-Schwarz' ulighed*:

$$|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\| \tag{12}$$

for alle $x, y \in E$. Hvis nemlig $y = \underline{0}$, står der 0 på begge sider af uligheden, og hvis $y \neq \underline{0}$, er $\|\frac{1}{\|y\|}y\| = 1$, og det følger af (10) med $I = \{1\}$ og $e_1 = \frac{1}{\|y\|}y$, at

$$\left| \left(x, \frac{1}{\|y\|}y \right) \right| \leq \|x\| \ ,$$

hvilket giver (12) efter multiplikation med $\|y\|$ på begge sider.

Som tidligere påstået har vi nu

Sætning 1.6. *Der gælder, at $(E, \|\cdot\|)$, hvor $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ for $x \in E$, er et normeret vektorrum.*

Bevis. Vi har ovenfor set, at (N1) og (N2) i Definition I.1.2 er opfyldt. Ved brug af Cauchy-Schwarz' ulighed fås

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2 \ .
\end{aligned}$$

hvilket viser (N3). □

Når vi i det følgende omtaler et indre produkt rum som et normeret vektorrum, er det underforstået, at der er tale om normen givet ved Sætning 1.6.

1.3 Kontinuitet af indre produkt.

I det følgende skal vi gentagne gange benytte os af, at *det indre produkt* $(\cdot\,,\ \cdot) : E \times E \to \mathbb{L}$ *er kontinuert* (m.h.t. produktmetrikken givet ved normen på E). Dette indses som følger. Lad $x_0, y_0 \in E$ være givne og vælg $x, y \in E$, således at $\|x - x_0\| \leq \delta$ og $\|y - y_0\| \leq \delta$, hvor $\delta > 0$ er givet. Da er

$$\begin{aligned}
|(x,y) - (x_0,y_0)| &= |(x, y-y_0) + (x-x_0, y_0)| \\
&\leq |(x, y-y_0)| + |(x-x_0, y_0)| \\
&\leq \|x\|\,\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\,\|y_0\| \\
&\leq \delta(\|x\| + \|y_0\|) \\
&\leq \delta(\|x_0\| + \delta + \|y_0\|) \ ,
\end{aligned} \tag{13}$$

hvor vi har benyttet Cauchy-Schwarz's ulighed samt $\|x\| = \|(x-x_0)+x_0\| \leq \|x-x_0\|+\|x_0\| \leq \|x_0\|+\delta$. Da det sidste udtryk i (13) går imod 0 for $\delta \to 0$, sluttes at der for givet $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$ således at $|(x,y)-(x_0,y_0)| < \varepsilon$ for $\|x-x_0\| \leq \delta$ og $\|y-y_0\| \leq \delta$. Dette viser det ønskede.

Ækvivalent hermed er, at for vilkårlige følger (x_n) og (y_n) i E gælder, at

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \quad \text{for} \quad n \to \infty\ , \tag{14}$$

hvis $x_n \to x_0$ og $y_n \to y_0$ for $n \to \infty$, jvf. Sætning I.3.1 og Sætning I.4.3 (d).

Definition 1.7. En række $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, hvis led tilhører et normeret vektorrum E, siges at være konvergent med sum $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ i E, såfremt afsnitsfølgen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ defineret ved

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} x_n \tag{15}$$

konvergerer imod x for $k \to \infty$.

Af (14) og iii) i Definition 1.1 følger, at

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, y\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{k} x_n, y\right) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(x_n, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y) \tag{16}$$

og tilsvarende

$$\left(y, \sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(y, x_n) \tag{17}$$

for enhver konvergent række $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ i E, og alle $y \in E$.

En yderligere konsekvens af kontinuiteten af det indre produkt er, at $A^\perp = (\overline{A})^\perp$ for enhver mængde $A \subseteq E$. Hvis nemlig $x \in A^\perp$ og $y \in \overline{A}$ findes ifølge Sætning I.2.10 en følge (y_n) i A så $y = \lim y_n$, hvoraf følger at $(x,y) = \lim(x, y_n) = 0$, altså at $x \perp y$. Da $y \in \overline{A}$ var vilkårligt valgt sluttes, at $A^\perp \subseteq (\overline{A})^\perp$. Den omvendte inklusion følger umiddelbart af, at $A \subseteq \overline{A}$. Sammen med (8) giver dette, at

$$A^\perp = (\operatorname{span} A)^\perp = (\overline{\operatorname{span} A})^\perp\ . \tag{18}$$

Vi kalder $\overline{\operatorname{span} A}$ for det *afsluttede underrum udspændt af* A.

Tilsvarende vises (se Opg.1.3), at $A^\perp$ *er et afsluttet underrum af* E *for enhver mængde* $A \subseteq E$.

1.4 Hilbert rum.

Som bekendt fra Matematik 1 har ethvert endeligdimensionalt indre produkt rum E ortonormale baser. Lader vi $(e_1, \ldots, e_n)$ betegne en sådan basis, og betegner vi med $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{L}^n$ koordinatsættet for vektoren $x \in E$ m.h.t. denne basis, dvs.

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \ ,$$

da er ifølge Sætning 1.4

$$\|x\| = (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2} \ .$$

Det følger, at afbildningen $(x_1, \ldots, x_n) \to x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ er en isomorfi og isometri af $\mathbb{L}^n$ på E, med omvendt afbildning $x \to ((x, e_1), \ldots, (x, e_n))$. Da vektorrummet $\mathbb{L}^n$ vides at være fuldstændigt m.h.t. den euklidiske metrik (se §I.5) følger heraf, at E også er fuldstændigt. Det viser sig, at kravet om fuldstændighed sikrer, at en hel række af de vigtigste resultater vedrørende endeligdimensionale indre produkt rum kan overføres til det uendeligdimensionale tilfælde, som vi skal se i det følgende.

Definition 1.8. Et *Hilbert rum* er et fuldstændigt indre produkt rum.

Eksempel 1.9. 1) Ovenfor er vist, at ethvert endelig-dimensionalt indre produkt rum er et Hilbert rum. Dette gælder specielt $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{C}^k$.

2) Rummet $\ell^0(\mathbb{N})$ (se Eksempel 1.2) er ikke fuldstændigt. Lader vi f.eks. $x_n \in \ell^0(\mathbb{N})$ være givet ved

$$x_n = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$$

har vi for $m \leq n$ at

$$\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

hvilket viser at $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en Cauchy følge i $\ell^0(\mathbb{N})$, eftersom rækken $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ er konvergent. Følgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er dog oplagt ikke konvergent i $\ell^0(\mathbb{N})$.

Lad os i stedet betragte det større underrum $\ell_2(\mathbb{N})$ af $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ bestående af kvadratisk summable følger, altså af komplekse talfølger $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for hvilke

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \ .$$

At $\ell_2(\mathbb{N})$ er et underrum af $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ følger af den velkendte ulighed $|a+b|^2 \le 2(|a|^2+|b|^2)$, som iøvrigt er Cauchy-Schwarz' ulighed for vektorerne $(1,1)$ og (a,b) i $\mathbb{C}^2$. For to følger (a_n) og (b_n) i $\ell_2(\mathbb{N})$ giver denne

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^2 \le 2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < +\infty \ ,$$

altså at $(a_n)+(b_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$. Da det desuden er klart, at $\lambda(a_n) = (\lambda a_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ for $\lambda \in \mathbb{C}$ og $(a_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$, er $\ell_2(\mathbb{N})$ et underrum af $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

Benyttes uligheden $|ab| \le \frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2)$ for $a,b \in \mathbb{C}$ fås, at der ved

$$((a_n),(b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b}_n$$

defineres en afbildning $(\cdot\ ,\ \cdot) : \ell_2(\mathbb{N}) \times \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$, idet rækken på højresiden er absolut konvergent. At der herved defineres et indre produkt på $\ell_2(\mathbb{N})$ ses herefter umiddelbart.

Lad os vise, at $\ell_2(\mathbb{N})$ med dette indre produkt er et Hilbert rum. Antag således, at $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy følge i $\ell_2(\mathbb{N})$, hvor $x^n = (a_1^n, a_2^n, \dots)$. Da der for hvert $k \in \mathbb{N}$ gælder, at $|a_k^n - a_k^m| \le \|x^n - x^m\|$, er følgen $(a_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ for hvert $k \in \mathbb{N}$ en Cauchy følge i $\mathbb{C}$ og derfor konvergent, idet $\mathbb{C}$ er fuldstændigt. Vi kalder grænseværdien a_k, altså $a_k = \lim\limits_{n\to\infty} a_k^n$, og sætter $x = (a_1, a_2, \dots)$. Vi viser nu, at $x \in \ell_2(\mathbb{N})$ og at $x^n \to x$ for $n \to \infty$. Givet $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$, således at

$$\sum_{k=1}^{K} |a_k^n - a_k^m|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k^m|^2 = \|x^n - x^m\|^2 \le \varepsilon^2$$

for $n,m \ge N$ og samtlige $K \in \mathbb{N}$. For $m \to \infty$ fås heraf at $\sum\limits_{k=1}^{K} |a_k^n - a_k|^2 \le \varepsilon^2$ for $n \ge N$ og alle $K \in \mathbb{N}$. For $K \to \infty$ fås så , at

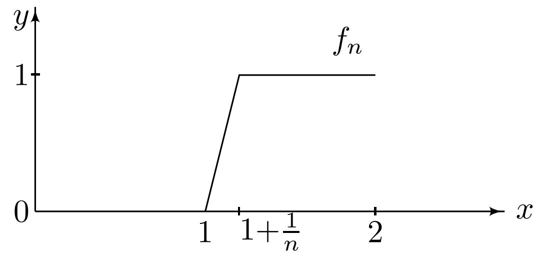
$$\|x^n - x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2 \le \varepsilon^2$$

for $n \ge N$. Dette viser dels, at $x^N - x \in \ell_2(\mathbb{N})$ og derfor $x = x^N - (x^N - x) \in \ell_2(\mathbb{N})$, og dels at $x^n \to x$ for $n \to \infty$ som ønsket.

3) Rummet $C([a,b])$ med indre produkt givet ved (5) er ikke fuldstændigt. Normen på dette rum er givet ved

$$\|f\|_\rho^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx \ .$$

Lader vi f.eks. f_n betegne funktionen på $[0,2]$, hvis graf er givet på figuren nedenfor,



er det let at indse, at (f_n) er en Cauchy følge i $C([0,2])$ m.h.t. $\|\cdot\|_\rho$, men at den ikke har en grænseværdi i $C([0,2])$. Rummet $C([a,b])$ har en fuldstændiggørelse $L_2([a,b],\rho)$, der er et Hilbert rum bestående af kvadratisk integrable funktioner i en generaliseret forstand. Hilbert rum af denne art spiller en vigtig rolle i mange anvendelser af teorien og er nærmere beskrevet i Appendiks A.

I det følgende betegner H et Hilbert rum med indre produkt $(\cdot\,,\,\cdot)$. Ethvert underrum X af H er et indre produkt rum, hvis indre produkt er defineret som restriktionen af $(\cdot\,,\,\cdot)$ til $X\times X$. Ifølge Sætning I.5.3 er $X\subseteq H$ *et Hilbert rum netop hvis* X *er et afsluttet underrum af* H. Specielt er alle endeligdimensionale underrum af H afsluttede.

Vi får brug for følgende vigtige udvidelse af Pythagoras' sætning.

Sætning 1.10. *Lad* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *være et ortogonalsystem i* H. *Da er* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *konvergent i* H *hvis og kun hvis*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2<+\infty\ ,$$

og der gælder da at

$$\|\sum_{i=1}^{\infty}x_i\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2\ . \tag{19}$$

Bevis. Da H er fuldstændigt, er $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ konvergent i H, hvis og kun hvis afsnitsfølgen s_n er en Cauchy følge. Dette betyder, at der for ethvert $\varepsilon>0$ findes et $N\in\mathbb{N}$, således at

$$\|s_n-s_m\|^2=\|\sum_{i=m+1}^{n}x_i\|^2=\sum_{i=m+1}^{n}\|x_i\|^2\leq\varepsilon^2 \tag{20}$$

for $n > m \geq N$, hvor vi har benyttet Sætning 1.4. Da $\mathbb{R}$ er fuldstændigt, haves på den anden side, at $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2$ er konvergent, hvis og kun hvis afsnitsfølgen (r_n) givet ved

$$r_n = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

er en Cauchy følge i $\mathbb{R}$. Men dette betyder, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$, således at

$$|r_n - r_m| = \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\|^2 < \varepsilon^2 \tag{21}$$

for $n > m \geq N$. Ved sammenligning af (20) og (21) følger den første påstand.

Endelig fås ved brug af kontinuiteten af $x \to \|x\|$ og Sætning 1.4

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} x_i\|^2 = \|\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 ,$$

hvilket viser (19). □

Idet en ortonormalbasis for et endeligdimensionalt indre produkt rum H kan karakteriseres som et ortonormalsystem, der udspænder H, og da ethvert endeligdimensionalt underrum af et normeret vektorrum er afsluttet (jvf. side I.6.8), giver følgende definition en udvidelse af begrebet ortonormalbasis til vilkårlige Hilbert rum.

Definition 1.11. En ortonormalbasis for H er et ortonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ i H således at $\overline{span\{e_i \mid i \in I\}} = H$.

Da $H^\perp = \{\underline{0}\}$ følger det af (18), at

$$\{e_i \mid i \in I\}^\perp = \{\underline{0}\} .$$

for enhver ortonormalbasis $(e_i)_{i\in I}$ for H. Dette betyder, at enhver ortonormalbasis er et maksimalt ortonormalsystem i H, d.v.s. at der *ikke* findes nogen vektor $e \in H$ med $\|e\| = 1$, således at e sammen med $(e_i)_{i\in I}$ udgør et ortonormalsystem. At der omvendt gælder, at ethvert maksimalt ortonormalsystem i H er en ortonormalbasis vises i Sætning 1.14 nedenfor.

Bemærk, at det af Definition 1.11 følger, at *et ortonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ er ortonormalbasis for det af $(e_i)_{i\in I}$ udspændte afsluttede underrum.*

Ethvert Hilbert rum har en ortonormalbasis. Et bevis for denne påstand bygger på det såkaldte udvalgsaksiom, hvilket vi ikke skal komme ind på her.

I det følgende indskrænker vi os til at betragte *separable Hilbert rum*, d.v.s. Hilbert rum, der som metrisk rum betragtet er separable. Der gælder, at disse er karakteriseret ved enten at være endeligdimensionale eller at have en numerabel ortonormalbasis svarende til, at indeksmængden I er endelig eller lig med $\mathbb{N}$. Vi udskyder beviset for denne påstand til slutningen af denne § (se Sætning 1.16).

Eksempel 1.12. For rummet $\ell_2(\mathbb{N})$ indført i Eksempel 1.9 fås en ortonormalbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ved at lade følgen e_i være givet ved, at alle dens elementer er 0 pånær det i'te, som sættes til 1, altså

$$(e_i)_j = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad j = i \\ 0 & \text{for} \quad j \neq i \,. \end{cases}$$

At der herved fås en ortonormalbasis følger ved at bemærke, at $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ oplagt er et ortonormalsystem, og at $span\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \ell^0(\mathbb{N})$, som er en tæt delmængde af $\ell_2(\mathbb{N})$ ifølge definitionen af normen på $\ell_2(\mathbb{N})$ (jvf. Opg.I.2.8). Vi kalder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ for den *naturlige ortonormalbasis* for $\ell_2(\mathbb{N})$.

I næste paragraf skal vi bestemme ortonormalbaser for Hilbert rummet $L_2([-\pi,\pi],\frac{1}{2\pi})$. Det vil i dette tilfælde vise sig naturligt at benytte mængden af hele tal $\mathbb{Z}$ som indeksmængde. Denne er naturligvis også tællelig, d.v.s. der findes en bijektiv afbildning $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. F.eks. kan φ defineres ved at stille de hele tal op i rækkefølgen $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$ og sætte $\varphi(n)$ til at være det n'te element i denne følge, for $n \in \mathbb{N}$, eller m.a.o. $\varphi(n) = \frac{1}{2}(n-1)$, hvis n er ulige, og $\varphi(n) = -\frac{1}{2}n$, hvis n er lige.

Til senere brug bør det bemærkes, at tilsvarende kan, for en given tællelig mængde I, hver bijektiv afbildning $\varphi : \mathbb{N} \to I$ opfattes som en opstilling af I's elementer i en rækkefølge $i_1, i_2, i_3, \dots$. Vektorerne i et ortogonalsystem $(e_i)_{i\in I}$ bliver herved tilsvarende ordnet i rækkefølgen $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \dots$.

1.5 Ortonormaludvikling.

Vi sigter nu bl.a. imod at generalisere udviklingen af vektorer m.h.t. ortonormalbaser i endeligdimensionale indre produkt rum (jvf. afsnit 4.5 i [M]) til uendelig-dimensionale Hilbert rum. *H antages altså i det følgende at være uendeligdimensionalt og separabelt.* Samtlige resultater, der vises i dette afsnit, kan dog udvides til vilkårlige Hilbert rum.

Lad $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ være et ortonormalsystem i H (som antages at være uendeligdimensionalt) og betragt en vektor $x \in H$. Ifølge Bessels ulighed (10) har vi da, at $\sum_{i=1}^{n} |(x,e_i)|^2 \leq \|x\|^2$ for hvert $n \in \mathbb{N}$. Heraf følger den *generaliserede Bessels ulighed*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x,e_i)|^2 \leq \|x\|^2 \,. \tag{22}$$

Benyttes Sætning 1.10 sammen med (22) fås, at rækken $\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$ er konvergent i H, og vi sætter

$$u = \sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i \ . \tag{23}$$

Vektoren u tilhører klart $\overline{span\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$. Den kan i princippet afhænge af summationsrækkefølgen, d.v.s. af den valgte rækkefølge $e_1, e_2, e_3, \dots$ af ortonormalsystemets vektorer, der indgår i definitionen af summen i (23), jvf. Definition 1.7. Følgende udvidelse af Sætning 1.5 medfører imidlertid, at dette ikke er tilfældet.

Sætning 1.13. *Lad $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ være et ortonormalsystem i H. For enhver vektor $x \in H$ findes en entydig vektor $u \in \overline{\mathrm{span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$, således at*

$$x - u \in \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}^{\perp} \ ,$$

og den er givet ved (23). Specielt afhænger u ikke af summationsrækkefølgen, og vi skriver derfor også

$$u = \sum_{i\in\mathbb{N}}(x,e_i)e_i \ .$$

Bevis. Vektoren u givet ved (23) opfylder for hvert $j \in \mathbb{N}$ følgende:

$$(u,e_j) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i, e_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)(e_i,e_j) = (x,e_j).$$

Altså er $(x-u,e_j) = 0$ for alle $j \in \mathbb{N}$ og dermed $x - u \in \{e_j \mid j \in \mathbb{N}\}^{\perp}$.

Antag, at $v \in \overline{\mathrm{span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$ således at $x - v \in \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}^{\perp}$. Da er $u - v \in \overline{\mathrm{span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$ og $u - v = (x-v) - (x-u) \in \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}^{\perp} = (\overline{\mathrm{span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}})^{\perp}$. Specielt er $(u-v,u-v) = 0$, hvilket viser at $u = v$.

Hermed er sætningen vist. □

Vi kan nu vise følgende vigtige resultat.

Sætning 1.14. *For et ortonormalsystem $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i H er følgende fire udsagn ensbetydende.*

(i) *$(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ er en ortonormalbasis for H.*
(ii) *$\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{\underline{0}\}$.*
(iii) **Ortonormaludviklingen**

$$x = \sum_{i\in\mathbb{N}}(x,e_i)e_i$$

gælder for alle $x \in H$.

(iv) **Parsevals ligning**

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \tag{24}$$

gælder for alle $x \in H$.

Bevis. Vi har tidligere indset at (i) $\Rightarrow$ (ii). At (ii) $\Rightarrow$ (iii) følger af Sætning 1.13, idet vi med samme betegnelser som der får, at $x = u$. At (iii) $\Rightarrow$ (iv) følger umiddelbart af (19). Antages endelig, at (iv) er gyldig, haves

$$\|x - \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 \to 0 \quad \text{for } n \to \infty \ .$$

Da dette gælder for hvert $x \in H$ følger det, at $span\{e_i \mid i \in I\}$ er tæt i H. Dette viser, at (iv) $\Rightarrow$ (i). □

Som en yderligere følge af Sætning 1.13 har vi *projektionssætningen*:

Sætning 1.15. *Lad X være et afsluttet underrum af H. Da findes for hver vektor $x \in H$ entydige vektorer $u \in X$ og $v \in X^\perp$, således at*

$$x = u + v \ . \tag{25}$$

Bevis. Da X er et afsluttet underrum af H, er X et Hilbert rum, som også er separabelt (se Opg.1.13). Vælges en ortonormalbasis $(e_i)_{i \in I}$ for X, hvor I er endelig eller lig med $\mathbb{N}$, har vi, at $X = \overline{span\{e_i \mid i \in I\}}$. Påstanden følger herefter umiddelbart af Sætningerne 1.5 og 1.13. □

Det bemærkes, at vektoren u i (25) også kan karakteriseres som den entydige vektor i X, som har mindst afstand til x. Argumentet herfor er det samme som givet efter beviset for Sætning 1.5.

Vi siger, at de to underrum X og $X^\perp$ er komplementære og skriver

$$H = X \oplus X^\perp$$

som udtryk for udsagnet i Sætning 1.15. Vektoren u i (25) kaldes den *ortogonale projektion* af x på X og er altså givet ved

$$u = \sum_{i \in I}(x, e_i)e_i \ ,$$

hvor $(e_i)_{i\in I}$ er en ortonormalbasis for X. Da $X^\perp$ også er et afsluttet underrum af H har vi også at $H = X^{\perp\perp} \oplus X^\perp$. Da $X \subseteq X^{\perp\perp}$ sluttes heraf, at

$$X = X^{\perp\perp}$$

for ethvert afsluttet underrum X af H. Det følger så, at v i (25) er den ortogonale projektion af x på $X^\perp$. Vælges en ortonormalbasis $(e_j)_{j\in J}$ for $X^\perp$, da udgør denne sammen med $(e_i)_{i\in I}$ en ortonormalbasis $(e_i)_{i\in I\cup J}$ for H (overvej dette!)

Vi afslutter dette afsnit med følgende tidligere nævnte resultat.

Sætning 1.16. *Et Hilbert rum H er separabelt netop hvis det har en endelig eller tællelig ortonormalbasis.*

Bevis. Antag at $(e_i)_{i\in I}$ er en endelig eller tællelig ortonormalbasis for H (altså at I er endelig eller tællelig). Det følger da, at mængden S af linearkombinationer af vektorer fra $(e_i)_{i\in I}$ med rationale koefficienter er tællelig og tæt i $\operatorname{span}\{e_i \mid i \in I\}$. (Vi siger, at et komplekst tal er rationalt hvis både real- og imaginærdel er rationale). Men da $\operatorname{span}\{e_i \mid i \in I\}$ er tæt i H ifølge Definition 1.11, er S det også, hvilket viser at H er separabelt.

Antag omvendt, at $\{x_1, x_2, \dots\}$ er en tællelig tæt delmængde af H. Sæt $y_1 = x_{i_1}$, hvor i_1 er det mindste indeks i, for hvilket $x_i \neq 0$. Lad $y_2 = x_{i_2}$, hvor i_2 er det mindste indeks $i > i_1$, således at sættet (x_{i_1}, x_i) er lineært uafhængigt. Lad $y_3 = x_{i_3}$, hvor i_3 er det mindste indeks $i > i_2$, således at sættet (x_{i_1}, x_{i_2}, x_i) er lineært uafhængigt. Fortsættes hermed fås ved induktion et lineært uafhængigt system $(y_1, y_2, \dots)$ (eventuelt endeligt) af vektorer, der opfylder $\operatorname{span}\{y_1, y_2, \dots\} = \operatorname{span}\{x_i \mid i \in I\}$. Ved anvendelse af Gram-Schmidts ortonormaliseringsprocedure (jvf. side 159 i [M]) på $(y_1, y_2, \dots)$, fås et ortonormalsystem $(e_1, e_2, \dots)$, således at

$$\operatorname{span}\{e_1, e_2, \dots\} = \operatorname{span}\{y_1, y_2, \dots\} = \operatorname{span}\{x_i \mid i \in I\}\ .$$

Da sidstnævnte mængde er tæt i H, følger af Definition 1.11, at $(e_1, e_2, \dots)$ er en ortonormalbasis for H. $\square$

Opgaver til §1

1.1. Betragt det endeligdimensionale komplekse Hilbert rum $H = \mathbb{C}^k$, med indre produkt som angivet i Eksempel 1.2 1).

Vis, at $((1,0,\dots,0),(0,1,0\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$ er en ortonormalbasis for H.

1.2. Vis, at det indre produkt på et komplekst Hilbert rum tilfredsstiller polariseringsidentiteten

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)\ .$$

1.3. Lad H være et Hilbert rum. Vis, at for enhver delmængde $A \subseteq H$ er $A^\perp$ et afsluttet underrum af H.

1.4. Vis, at $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ er et ortogonalsystem i $C([0,\pi])$ med indre produkt givet ved (4).

1.5. Bestem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$, således at

$$\int_0^\pi |\cos\theta - \sum_{n=1}^{3} a_n \sin n\theta|^2 d\theta$$

antager den mindst mulige værdi.

1.6. Lad polynomierne $p_0(x), p_1(x), \dots$ være defineret ved, at $p_n(x)$ er et polynomium af grad n i den variable x, således at koefficienten til x^n er 1 og $(p_0(x), p_1(x), \dots)$ er et ortogonalsystem i $L_2([0,1])$. Find $p_0(x), p_1(x)$ og $p_2(x)$.

1.7. Vis, at $(\sin(n-\frac{1}{2})\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ er et ortogonalsystem i $C([0,\pi])$ med indre produkt givet ved (4).

1.8. Lad H være et uendeligdimensionalt separabelt Hilbert rum og lad $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være et ortonormalsystem i H.

1) Vis, at rækken $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} e_n$ er konvergent i H, og afgør for hvilke $\alpha \in \mathbb{R}$ rækken $\sum_{n=1}^\infty n^\alpha e_n$ er konvergent i H.

2) Bestem den ortogonale projektion af vektorerne $e_1 \pm 2e_2$ på (underrummet udspændt af) vektoren $\sum_{n=1}^\infty n^{-1} e_n$.
(Man kan benytte, at $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, hvilket vises i Opg.2.5)

1.9. Vis, at $\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \log\theta \sin n\theta d\theta = 0$.

Vink. Dette kan fås som et korollar til Bessels ulighed (22) i forbindelse med ortogonalsystemet i Opg. 1.4.

1.10. Lad $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis for Hilbert rummet H. Vis, at følgende generalisering af Parsevals ligning gælder for alle $x, y \in H$:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)\overline{(y,e_i)}\ .$$

1.11. Betragt indre produkt rummet $\ell_0(\mathbb{N})$ som defineret i Eksempel 1.2 3) og sæt

$$X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_0(\mathbb{N}) \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{1}{n} = 0\}\ .$$

Vis, at X er et afsluttet underrum af $\ell_0(\mathbb{N})$, og at $X \oplus X^{\perp} \neq \ell_0(\mathbb{N})$.

1.12. Lad H være et komplekst Hilbert rum og lad $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$ således at $a^n = 1$ og $a^2 \neq 1$. Vis den *generaliserede polariseringsidentitet*

$$(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} a^{\nu}\|x + a^{\nu}y\|^2\ .$$

1.13. Lad M være et separabelt metrisk rum. Vis, at ethvert metrisk delrum M' af M er separabelt.

Vink. Lad $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ være en tællelig tæt delmængde af M. For $i, n \in \mathbb{N}$ lader vi $x_{i,n}$ betegne et vilkårligt valgt punkt i $K(x_i, \frac{1}{n}) \cap M'$ forudsat denne mængde er $\neq \emptyset$. Ellers sættes $x_{i,n}$ til at være et vilkårligt valgt punkt i M'. Vis så, at mængden $\{x_{i,n} \mid i, n \in \mathbb{N}\}$ er en tællelig tæt delmængde af M'.

§2. Fourier rækker

2.1 Fourier rækker i én variabel.

Vi skal i dette og i de følgende to afsnit beskæftige os med Hilbert rummet $L_2([-\pi,\pi],\frac{1}{2\pi})$ bestående af (klasser af) kvadratisk integrable komplelse funktioner på $[-\pi,\pi]$ (se Appendiks A) og med indre produkt givet ved

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx\ ,\quad f,g\in L_2([-\pi,\pi])\ . \tag{1}$$

Husk, at som vektorrum betragtet er $L_2([-\pi,\pi],\frac{1}{2\pi})$ og $L_2([-\pi,\pi])$ identiske. Den valgte normalisering af det indre produkt er alene gjort af praktiske grunde. I det følgende betegnes normen svarende til det indre produkt (1) med $\|\cdot\|$.

Lad os straks konstatere, at hvis vi sætter

$$e_n(x)=e^{inx}\ ,\quad x\in[-\pi,\pi]\ , \tag{2}$$

da er $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et ortonormalsystem i $L_2([-\pi,\pi])$, idet e_n er kontinuert på det kompakte interval $[-\pi,\pi]$ og derfor tilhører $L_2([-\pi,\pi])$, og der gælder at

$$\begin{aligned}(e_n,e_m)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_n(x)\overline{e_m(x)}dx\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx\\ &=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i(n-m)}e^{i(n-m)x}\right]_{-\pi}^{\pi}=0 & \text{for}\quad n\neq m\\ \frac{1}{2\pi}[x]_{-\pi}^{\pi}=1 & \text{for}\quad n=m\ .\end{cases}\end{aligned}$$

Benyttes at

$$\cos nx=\frac{1}{2}\left(e^{inx}+e^{-inx}\right)\ ,\quad \sin nx=\frac{1}{2i}\left(e^{inx}-e^{-inx}\right)$$

fås heraf, at systemet

$$(1,\ \sqrt{2}\cos x,\ \sqrt{2}\sin x,\ \sqrt{2}\cos 2x,\ \sqrt{2}\sin 2x,\dots) \tag{3}$$

ligeledes er et ortonormalsystem i $L_2([-\pi,\pi])$ (jvf. afsnit 4.5 i [M], hvor dog en anden normalisering af det indre produkt er benyttet).

Et af hovedresultaterne i denne paragraf er, at disse to ortonormalsystemer begge er ortonormalbaser for $L_2([-\pi,\pi])$. Da der gælder, at

$$\begin{aligned}&\operatorname{span}\{e_{-N},\ e_{-N+1},\dots,e_{N-1},\ e_N\}\\=&\operatorname{span}\{1,\ \sqrt{2}\cos x,\ \sqrt{2}\sin x,\dots,\sqrt{2}\cos Nx,\ \sqrt{2}\sin Nx\}\ ,\end{aligned}$$

udspænder de to systemer samme underrum af $L_2([-\pi,\pi])$, og det er derfor i henhold til Definition 1.11 nok at vise, at systemet $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, som i mange henseender er mere praktisk at arbejde med, er en ortonormalbasis for $L_2([-\pi,\pi])$, dvs. at det afsluttede underrum udspændt af $\{e_n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ udgør hele $L_2([-\pi,\pi])$. Dette gøres i afsnit 2.3. Som forberedelse hertil vises først nogle resultater, som er af vigtighed i sig selv i forbindelse med anvendelser i teorien for differentialligninger, som omtales i næste paragraf.

Inden vi går i gang, skal det bemærkes, at valget af intervallet $[-\pi,\pi]$ fremfor et hvilket som helst andet kompakt interval $[a,b]$ alene er gjort, fordi det indebærer en notationsmæssig forenkling. Ved et lineært skift af variabel givet ved

$$y = a + \frac{b-a}{2\pi}(x+\pi)$$

kan resultaterne i afsnittene 2.1–2.3 umiddelbart overføres til tilsvarende resultater for intervallet $[a,b]$ (se begyndelsen af afsnit 6.2).

Givet ortonormalsystemet $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ som ovenfor og $f\in L_2([-\pi,\pi])$ eller $f\in\mathcal{L}_2([-\pi,\pi])$ kaldes rækken $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(f,e_n)e_n$ for *Fourier rækken* for f (somme tider også kaldt den *trigonometriske Fourier række* for f). Vi kalder (f,e_n) for den n'te Fourier koefficient for f og betegner den også med $c_n(f)$. Altså

$$c_n(f) = (f,e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\ . \tag{4}$$

Det sidste udtryk i (4) giver mening for $f\in\mathcal{L}_1([-\pi,\pi])$, idet $|f(x)e^{-inx}| = |f(x)|$, således at $x\to f(x)e^{-inx}$ er integrabel på $[-\pi,\pi]$, hvis f er det. Vi taler derfor også om Fourier rækken

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} \tag{5}$$

for $f\in\mathcal{L}_1([-\pi,\pi])$, hvor $c_n(f)$ er givet ved det sidste udtryk i (4), og man skriver tit

$$f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} \tag{6}$$

som udtryk herfor. At $\mathcal{L}_1([-\pi,\pi])$ er et større rum end $\mathcal{L}_2([-\pi,\pi])$ følger af Cauchy-Schwarz' ulighed, idet den konstante funktion 1 på $[-\pi,\pi]$ jo tilhører $\mathcal{L}_2([-\pi,\pi])$, således at vi for $f \in \mathcal{L}_2([-\pi,\pi])$ kan slutte, at

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx = (|f|,1) \leq \|f\|\;\|1\| = \|f\| < +\infty \ ,$$

hvilket viser, at $f \in \mathcal{L}_1([-\pi,\pi])$. Bemærk, at to funktioner i $\mathcal{L}_1([-\pi,\pi])$, der stemmer overens næsten overalt i $[-\pi,\pi]$, har samme Fourier række, så vi kan med god ret også tale om Fourier rækken for $f \in L_1([-\pi,\pi])$.

Ifølge Sætning 1.13 er Fourier rækken for $f \in L_2([-\pi,\pi])$ konvergent i $L_2([-\pi,\pi])$. Kaldes summen for g gælder altså, at

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \Big|\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx} - g(x)\Big|^2 dx = 0 \ , \tag{7}$$

hvor vi som afsnitsfølge har benyttet $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ med

$$s_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n \ , \tag{8}$$

svarende til rækkefølgen $0,-1,1,-2,2,\ldots$ af de hele tal (og vi husker, at summen g er uafhængig af summationsrækkefølgen). Når vi har vist, at $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormalbasis for $L_2([-\pi,\pi])$, kan vi af Sætning 1.14 slutte, at $g = f$ for hvert $f \in L_2([-\pi,\pi])$.

Det er vigtigt at bemærke, at konvergensen af Fourier rækken for $f \in \mathcal{L}_2([-\pi,\pi])$ i $L_2([-\pi,\pi])$ ikke medfører punktvis konvergens endsige uniform konvergens af den tilsvarende funktionsrække. Nærmere bestemt kan vi for et givet $x \in [-\pi,\pi]$ betragte rækken

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} \tag{9}$$

i $\mathbb{C}$. Vi siger, at Fourier rækken for f er konvergent i x, såfremt afsnitsfølgen $(s_N(x))_{N\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$s_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx} \tag{10}$$

er konvergent (i $\mathbb{C}$). I givet fald betegnes grænseværdien med $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ eller $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{inx}$, og den kaldes Fourier rækkens sum i x. Tilsvarende siges

Fourier rækken for f at konvergere punktvis, hhv. uniformt, imod funktionen g på $[-\pi, \pi]$, såfremt funktionsfølgen $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergerer punktvis, hhv. uniformt, imod g på $[-\pi, \pi]$. Hovedformålet i næste afsnit er at give en tilstrækkelig betingelse for konvergens af Fourier rækken for en funktion f i et punkt x, som specielt indebærer, at hvis f er differentiabel i x, da er Fourier rækken for f konvergent i x med sum $f(x)$ (se Sætning 2.2).

Det er vigtigt at bemærke, at da funktionerne $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, opfattet som funktioner på $\mathbb{R}$, er periodiske med periode 2π, så gælder det samme om afsnitssummerne $s_N(x)$, $N \in \mathbb{N}$, givet ved (8). Hvis derfor Fourier rækken for en funktion f er punktvis konvergent på intervallet $[-\pi, \pi[$ med sumfunktion g, da er den konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$, og summen er givet ved den entydigt bestemte periodiske udvidelse af g til $\mathbb{R}$. I det følgende betegner $\mathcal{L}_{1,per}$, h.h.v. $\mathcal{L}_{2,per}$, vektorrummet bestående af komplekse funktioner på $\mathbb{R}$, der er periodiske med periode 2π, og som er integrable, h.h.v. kvadratisk integrable, over intervallet $[-\pi, \pi]$. Ved Fourier rækken for $f \in \mathcal{L}_{1,per}$ forstås da naturligvis Fourier rækken for restriktionen af f til $[-\pi, \pi]$, og vi betegner de tilsvarende Fourier koefficienter med $c_n(f)$, altså $c_n(f) = c_n(f|_{[-\pi,\pi]})$.

Ligeledes vil vi med C_{per} betegne vektorrummet af kontinuerte, komplekse funktioner på $\mathbb{R}$, der er periodiske med periode 2π, og med C^n_{per}, $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$, vektorrummet af komplekse n gange kontinuert differentiable funktioner på $\mathbb{R}$, der er periodiske med periode 2π. Idet Lebesgue målet på $\mathbb{R}$ er translationsinvariant, d.v.s.

$$m_1(B) = m_1(\alpha + B) \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \, , \ B \in \mathbb{B}_1 \ ,$$

hvor $\alpha + B = \{\alpha + \theta \mid \theta \in B\}$, følger det af definitionen af Lebesgue integralet, at hvis $f \in \mathcal{L}_{1,per}$, da er f integrabel over ethvert interval af længde 2π med samme værdi af integralet. Vi har altså (overvej dette!)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + \alpha)d\theta \ , \tag{11}$$

for $f \in \mathcal{L}_{1,per}$ og $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.2 Punktvis konvergens.

For at etablere det førnævnte kriterium for konvergens af en Fourier række i et punkt $\theta_0 \in \mathbb{R}$ (se Sætning 2.2 nedenfor) har vi brug for følgende resultat.

Sætning 2.1 (Riemann-Lebesgues lemma). *Lad $f \in \mathcal{L}_1([-\pi, \pi])$. Da gælder, at $c_n(f) \to 0$ for $n \to \pm\infty$.*

Bevis. Antag først, at $f \in \mathcal{L}_2([-\pi, \pi])$. Da gælder ifølge Bessels ulighed (1.22), at

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2 < +\infty \ .$$

Heraf følger specielt, at $c_n(f) \to 0$ for $n \to \pm\infty$.

Antag nu, at $f \in \mathcal{L}_1([-\pi,\pi])$ og definer f_N for $N \in \mathbb{N}$ ved

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis} \quad |f(x)| \leq N \\ 0 & \text{hvis} \quad |f(x)| > N \,. \end{cases}$$

Da er f_N målelig og begrænset og tilhører derfor $\mathcal{L}_2([-\pi,\pi])$. Endvidere gælder at $|f(x) - f_N(x)| \to 0$ for $N \to +\infty$ for hvert $x \in [-\pi,\pi]$ samt at $|f - f_N| \leq |f|$. Af Lebesgues majorantsætning (Sætning A.9) følger derfor, at $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_N(x)|dx \to 0$ for $N \to \infty$.

Vælg nu for givet $\varepsilon > 0$ først et $N \in \mathbb{N}$, således at $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f_N(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}$ og derefter et $N_0 \in \mathbb{N}$, således at $|c_n(f_N)| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $|n| \geq N_0$. Det sidste er muligt ifølge det tidligere viste, da $f_N \in \mathcal{L}_2([-\pi,\pi])$. Benytter vi nu, at $c_n(f) = c_n(f - f_N) + c_n(f_N)$, samt at

$$|c_n(f - f_N)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_N(x)|dx$$

følger det, at

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f - f_N)| + |c_n(f_N)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

for $|n| \geq N_0$, hvorved det ønskede er vist. $\square$

Vi er nu klar til at vise følgende vigtige sætning.

Sætning 2.2 (Dinis test). *Lad $f \in \mathcal{L}_{1,per}$. Da er Fourier rækken for f konvergent i punktet $\theta_0 \in \mathbb{R}$ med sum s, såfremt funktionen*

$$g(\theta) = \frac{f(\theta_0 + \theta) + f(\theta_0 - \theta) - 2s}{\theta}\,,\ \theta \in]0,+\infty[\tag{12}$$

er integrabel over intervallet $]0,\delta]$ for et $\delta > 0$.

Bemærkning 2.3. Funktionen g givet ved (12) er integrabel over ethvert kompakt interval $[a,b]$, hvor $a > 0$, idet der for $\theta \in [a,b]$ gælder, at

$$|g(\theta)| \leq a^{-1}(|f(\theta_0 + \theta)| + |f(\theta_0 - \theta)| + 2|s|)\,,$$

hvor højresiden er integrabel over $[a,b]$, eftersom f er integrabel over ethvert kompakt interval (da den er integrabel over $[-\pi,\pi[$ og er periodisk). Dette viser, at hvis g er integrabel over $]0,\delta]$ for et givet $\delta > 0$, da er den integrabel over $]0,\delta]$ for alle $\delta > 0$.

Bevis for Sætning 2.2. Vi betragter afsnitssummen $s_N(\theta_0)$ givet ved (10) for $x = \theta_0$ og skal under de givne forudsætninger vise, at $s_N(\theta_0) \to s$ for $N \to \infty$. Indsættes udtrykket (4) for Fourier koefficienterne $c_n(f)$ i (10) fås, at

$$\begin{aligned} s_N(\theta_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{in(\theta_0-\theta)} f(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_N(\theta_0-\theta)f(\theta)d\theta \ , \end{aligned} \tag{13}$$

hvor vi har indført den N'te *Dirichlet kerne* $\mathcal{D}_N(\theta)$ defineret ved

$$\mathcal{D}_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta} \ .$$

Da højresiden her er en endelig geometrisk række, kan dens sum udregnes (se Adams p.530). Vi får

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_N(\theta) &= e^{-iN\theta}\sum_{n=0}^{2N} e^{in\theta} \\ &= e^{-iN\theta}\begin{cases} \frac{e^{i(2N+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1} & \text{for} \quad \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2N+1 & \text{for} \quad \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} & \text{for} \quad \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2N+1 & \text{for} \quad \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \ . \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

Ifølge definitionen er funktionen $\mathcal{D}_N$ kontinuert og periodisk med periode 2π og dertil lige. Da også f er periodisk med periode 2π, fås af (11)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_N(\theta_0-\theta)f(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_N(\theta)f(\theta_0+\theta)d\theta \ . \tag{15}$$

Benyttes endvidere, at Lebesgue målet er invariant under $x \to -x$, dvs. at $m_1(B) = m_1(-B)$, $B \in \mathbb{B}_1$, hvor $-B = \{-x \mid x \in B\}$, fås

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{0} \mathcal{D}_N(\theta)f(\theta_0+\theta)d\theta &= \int_{0}^{\pi} \mathcal{D}_N(-\theta)f(\theta_0-\theta)d\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} \mathcal{D}_N(\theta)f(\theta_0-\theta)d\theta \ , \end{aligned} \tag{16}$$

hvor vi i sidste skridt har benyttet, at $\mathcal{D}_N(\theta)$ er en lige funktion. Af (13), (15) og (16) kan vi slutte, at

$$s_N(\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(\theta_0+\theta)+f(\theta_0-\theta))\mathcal{D}_N(\theta)d\theta\ .$$

Udnyttes endelig at $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_N(\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathcal{D}_N(\theta)d\theta = 1$ ifølge definitionen af $\mathcal{D}_N(\theta)$ fås under udnyttelse af (14)

$$\begin{aligned} s_N(\theta_0) - s &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(\theta_0+\theta)+f(\theta_0-\theta)-2s)\mathcal{D}_N(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f(\theta_0+\theta)+f(\theta_0-\theta)-2s}{\sin\frac{1}{2}\theta}\sin(N+\tfrac{1}{2})\theta\, d\theta\ . \end{aligned} \tag{17}$$

Vi observerer nu, at funktionen $\theta \to \frac{f(\theta_0+\theta)+f(\theta_0-\theta)-2s}{\sin\frac{1}{2}\theta}$, som optræder i (17), er integrabel over $]0,\pi]$ under de givne forudsætninger, eftersom den er lig med $g(\theta)\frac{\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$ hvor g er givet ved (12), og funktionen $\theta \to \frac{\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$ er kontinuert og begrænset på $]0,\pi]$ (den har grænseværdi 2 for $\theta \to 0$; se Adams p.116). Sætter vi derfor

$$h(\theta) = \begin{cases} \frac{f(\theta_0+\theta)+f(\theta_0-\theta)-2s}{\sin\frac{1}{2}\theta} & \text{hvis} \quad 0<\theta<\pi \\ 0 & \text{hvis} \quad -\pi \le \theta \le 0\ , \end{cases}$$

så er $h \in \mathcal{L}_1([-\pi,\pi])$, og det fremgår af (17), at

$$\begin{aligned} s_N(\theta_0) - s &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\sin(N+\tfrac{1}{2})\theta\ d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2i}e^{\frac{i}{2}\theta}h(\theta)e^{iN\theta}d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2i}e^{-\frac{i}{2}\theta}h(\theta)e^{-iN\theta}d\theta\ . \end{aligned}$$

Dette viser, at

$$s_N(\theta_0) - s = c_{-N}(h_+) - c_N(h_-)\ ,$$

hvor de to funktioner $h_\pm$ er givet på $[-\pi,\pi]$ ved $h_\pm(\theta) = \frac{1}{2i}e^{\pm\frac{i}{2}\theta}h(\theta)$ og tilhører $\mathcal{L}_1([-\pi,\pi])$, da $h \in \mathcal{L}_1([-\pi,\pi])$. Ifølge Riemann-Lebesgues lemma gælder derfor, at $s_N(\theta_0) - s \to 0$ for $N \to \infty$, hvilket viser det ønskede. $\square$

I de følgende to korollarer ses på to vigtige tilfælde, hvor forudsætningerne i Sætning 2.2 er opfyldt. Lad os først genkalde, at en (reel eller kompleks) funktion f defineret på et kompakt interval $[a,b]$ siges at være *stykkevis kontinuert*, såfremt der findes en inddeling $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b$, således at f på hvert interval $]t_i, t_{i+1}[\,, i = 0, \ldots, m-1$ stemmer overens med en kontinuert funktion f_i defineret på $[t_i, t_{i+1}]$, jvf. Adams p.315-316. Bemærk, at dette er ækvivalent med, at f er kontinuert på hvert af intervallerne $]t_i, t_{i+1}[\,, i = 0, \ldots, m-1$, og at den har endelige grænseværdier $f(t_i+)$ fra højre, $i = 0, \ldots, m-1$, og $f(t_i-)$ fra venstre, $i = 1, \ldots, m$. Specielt er selve funktionsværdierne $f(t_0), \ldots, f(t_m)$ i delepunkterne uden betydning for, hvorvidt f er stykkevis kontinuert.

En periodisk funktion f på $\mathbb{R}$ siges at være stykkevis kontinuert, hvis dens restriktion til et periodeinterval (og dermed til ethvert kompakt interval) er stykkevis kontinuert.

Korollar 2.4. *Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en periodisk, stykkevis kontinuert funktion med periode 2π, og lad $\theta_0 \in \mathbb{R}$.*

Hvis grænseværdierne

$$f'_+(\theta_0) = \lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta_0 + \theta) - f(\theta_0+)}{\theta}$$

og

$$f'_-(\theta_0) = \lim_{\theta \to 0-} \frac{f(\theta_0 + \theta) - f(\theta_0-)}{\theta}$$

eksisterer, da er Fourier rækken for f konvergent i θ_0 med sum

$$s = \frac{1}{2}(f(\theta_0+) + f(\theta_0-)) \,.$$

Hvis specielt f **også** *er kontinuert i θ_0, da er Fourier rækken for f konvergent i θ_0 med sum $f(\theta_0)$.*

Bevis. Vi konstaterer først, at funktionen f tilhører $\mathcal{L}_{1,per}$, da den er kontinuert og begrænset på hvert af delintervallerne $]-\pi, t_1[,]t_1, t_2[, \ldots,]t_m, \pi[$. Indsættes $s = \frac{1}{2}(f(\theta_0+) + f(\theta_0-))$ i (12) fås, at

$$g(\theta) = \frac{f(\theta_0 + \theta) - f(\theta_0+)}{\theta} + \frac{f(\theta_0 - \theta) - f(\theta_0-)}{\theta}$$

som ifølge antagelsen har en endelig grænseværdi (nemlig $f'_+(\theta_0) - f'_-(\theta_0)$) for $\theta \to 0+$. Tillægges g en vilkårlig værdi i 0 giver dette, at g er stykkevis kontinuert og dermed integrabel på $[0, \pi]$, og påstanden følger af Sætning 2.2. $\square$

Korollar 2.5. *Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en periodisk, stykkevis kontinuert funktion med periode 2π, og lad $\theta_0 \in \mathbb{R}$.*

Hvis f er Hölder kontinuert af orden $\alpha > 0$ i θ_0, dvs. der findes en konstant $M \geq 0$ og et $\delta > 0$, således at

$$|f(\theta) - f(\theta_0)| \leq M|\theta - \theta_0|^\alpha \quad \textit{for} \quad |\theta - \theta_0| \leq \delta \, ,$$

da er Fourier rækken for f konvergent i θ_0 med sum $f(\theta_0)$.

Bevis. Indsættes $s = f(\theta_0)$ i (12) fås, at

$$g(\theta) = \frac{f(\theta_0 + \theta) - f(\theta_0)}{\theta} + \frac{f(\theta_0 - \theta) - f(\theta_0)}{\theta}$$

hvoraf

$$\begin{aligned} |g(\theta)| &\leq \left|\frac{f(\theta_0 + \theta) - f(\theta_0)}{\theta}\right| + \left|\frac{f(\theta_0 - \theta) - f(\theta_0)}{\theta}\right| \\ &\leq 2M\, \theta^{\alpha - 1} \quad \text{for} \quad 0 < \theta \leq \delta \, . \end{aligned}$$

Heraf følger ved brug af Eksempel A.11 2), at g er integrabel på $]0, \delta]$ for $\alpha > 0$, hvorefter påstanden følger af Sætning 2.2. □

Eksempel 2.6. Lad funktionen f være givet på $[-\pi, \pi[$ ved

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{hvis} \quad \theta \in [0, \pi[\\ 0 & \text{hvis} \quad \theta \in [-\pi, 0[\, . \end{cases}$$

Den periodisk udvidede funktion, som vi også kalder f, er da stykkevis kontinuert og er kun diskontinuert i punkterne $p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. Endvidere opfylder f forudsætningerne i Korollar 2.4 i alle punkter med $f'_+(\theta) = f'_-(\theta) = 0$ for alle $\theta \in \mathbb{R}$.

Ved udregning fås, at

$$c_n(f) = \frac{1}{i\pi n} \, , \quad \text{hvis } n \text{ er ulige} \, ,$$

mens $c_0(f) = \frac{1}{2}$ og $c_n(f) = 0$, hvis n er lige og $\neq 0$. Heraf fås, at Fourier rækken for f er

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ulige}}}^{\infty} \frac{1}{in}(e^{in\theta} - e^{-in\theta}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\theta}{2k+1} \, . \end{aligned}$$

Af Korollar 2.4 fås derfor, idet $\frac{1}{2}(f(p\pi+)+f(p\pi-)) = \frac{1}{2}$ for $p \in \mathbb{Z}$, at Fourier rækken er punktvis konvergent i $[-\pi, \pi[$ og at

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\theta}{2k+1} = \begin{cases} 0 & \text{hvis} \quad -\pi < \theta < 0 \\ 1 & \text{hvis} \quad 0 < \theta < \pi \\ \frac{1}{2} & \text{hvis} \quad \theta = -\pi \ \text{ eller } \ \theta = 0 \,. \end{cases}$$

For $\theta = -\pi$ eller $\theta = 0$ verificeres dette også umiddelbart. Indsættes $\theta = \frac{\pi}{2}$ fås, da $\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k$, at

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}\,.$$

2.3 Uniform konvergens.

Af Korollar 2.4 følger specielt, at hvis $f \in C_{per}$ er differentiabel fra venstre og højre i alle punkter, så er Fourier rækken for f punktvis konvergent med sum f. Vi skal nu se, at hvis vi yderligere kræver, at f er kontinuert differentiabel, så er Fourier rækken endda uniformt konvergent. Derefter skal vi se, hvorledes dette resultat kan anvendes til at vise, at $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormalbasis for $L_2([-\pi, \pi])$.

Vi siger, at en periodisk funktion på $\mathbb{R}$ med periode 2π er *stykkevis glat* (eller stykkevis C^1), hvis f er differentiabel i alle punkter af $[-\pi, \pi]$ pånær muligvis i endelig mange punkter, således at den afledede f' er stykkevis kontinuert (idet f' tillægges vilkårlige værdier i de punkter, hvor f ikke er differentiabel).

Lemma 2.7. *Hvis $f \in C_{per}$ er stykkevis glat, så gælder at*

$$c_n(f') = inc_n(f) \tag{18}$$

Bevis. Da f' er stykkevis kontinuert er f' integrabel over $[-\pi, \pi]$ så $c_n(f')$ er veldefineret. Ved brug af partiel integration fås, at

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2\pi}f(\theta)e^{-in\theta}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} inf(\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ &= inc_n(f)\ , \end{aligned}$$

hvor vi også har benyttet, at f er periodisk. Bemærk, at det for ovenstående udregning er vigtigt, at f er kontinuert (og ikke blot stykkevis kontinuert).$\square$

Sætning 2.8. *Antag, at $f \in C_{per}$ er stykkevis glat. Da er Fourier rækken for f uniformt konvergent på $\mathbb{R}$ med sum f.*

Bevis. Af Lemma 2.7 fås

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| &= |c_0(f)| + \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n(f)| + \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_{-n}(f)| \\ &= |c_0(f)| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}|c_n(f')| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}|c_{-n}(f')| \ .\end{aligned} \tag{19}$$

Da f' er kvadratisk integrabel over $[-\pi,\pi]$ giver Bessels ulighed (1.22), at $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n(f')|^2 < +\infty$ og $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_{-n}(f')|^2 < +\infty$. Altså tilhører følgerne $(|c_n(f')|)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(|c_{-n}(f')|)_{n\in\mathbb{N}}$ Hilbert rummet $\ell_2(\mathbb{N})$. Da også $(n^{-1})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ er

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}|c_n(f')| = \Big((|c_n(f')|)_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ (n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}\Big) < +\infty$$

og tilsvarende $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}|c_{-n}(f')| < +\infty$. Sammen med (19) viser dette, at

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty \ ,$$

således at $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ er en konvergent majorantrække for Fourier rækken for f. Ifølge majorantkriteriet (se Appendiks B) er sidstnævnte derfor uniformt (og absolut) konvergent. At sumfunktionen er f følger af Korollar 2.4. □

Ved hjælp af Sætning 2.8 kan vi nu vise

Sætning 2.9. *Ortonormalsystemerne $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ og*

$$(1, \sqrt{2}\,\cos x, \sqrt{2}\,\sin x, \sqrt{2}\,\cos 2x, \sqrt{2}\,\sin 2x, \dots)$$

er ortonormalbaser for $L_2([-\pi,\pi])$.

Bevis. Som tidligere nævnt er det nok at vise, at

$$L_2([-\pi,\pi]) = \overline{\text{span}\ \{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}}\ .$$

Da $\{-\pi,\pi\}$ er en nulmængde, kan $L_2([-\pi,\pi])$ naturligt identificeres med $L_2(]-\pi,\pi[)$. Da $C_0^\infty(]-\pi,\pi[)$ er tæt i $L_2(]-\pi,\pi[)$ ifølge Sætning A.14, er det nok at vise, at $C_0^\infty(]-\pi,\pi[) \subseteq \overline{\text{span}\ \{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}}$, d.v.s. at der for hvert $f \in C_0^\infty(]-\pi,\pi[)$ findes en følge $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ i span $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, således at $\|f_N - f\| \to 0$ for $N \to \infty$. Vi sætter $f_N = s_N$, hvor s_N er den N'te afsnitssum for f's Fourier række givet ved (8), og bemærker at s_N tilhører $\text{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Eftersom $f \in C_0^\infty(]-\pi,\pi[)$ på entydig vis kan udvides ved periodicitet til en funktion $\bar{f} \in C_{per}^\infty$ (overvej dette!) følger af Sætning 2.8, at $s_N \to \bar{f}$ uniformt på $\mathbb{R}$. Derfor haves også at $s_N \to f$ uniformt på $]-\pi,\pi[$. For givet $\varepsilon > 0$ findes altså et $N_0 \in \mathbb{N}$, således at $|f(\theta) - s_N(\theta)| \leq \varepsilon$ for $N \geq N_0$ og alle $\theta \in]-\pi,\pi[$. Heraf følger, at

$$\begin{aligned}\|f - s_N\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - s_N(\theta)|^2 d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2\, d\theta = \varepsilon^2\end{aligned}$$

for $N \geq N_0$. Dette viser, at $\|f - s_N\| \to 0$ for $N \to \infty$ som ønsket. □

Bemærk, at vi af Sætning 2.9 og Sætning 1.14 opnår Parsevals ligning på formen

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \tag{20}$$

for $f \in L_2([-\pi,\pi])$.

Eksempel 2.10. Ved benyttelse af udtrykket for Fourier koefficienterne for funktionen f i Eksempel 2.6 i (20) fås

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ulige}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1 d\theta = \frac{1}{2}\ ,$$

hvilket kan omskrives til

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\ .$$

2.4 Multiple Fourier rækker.

Vi skal i dette afsnit kort betragte Fourier rækker i flere variable. Hertil betragtes Hilbert rummet $L_2([-\pi,\pi]^k)$, $k = 2, 3, \ldots$, med indre produkt givet ved

$$(f, g) = \frac{1}{(2\pi)^k}\int_{[-\pi,\pi]^k} f(x)\overline{g(x)} dx\ ,$$

og hvis tilhørende norm betegnes med $\|\cdot\|$.

For $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k$ defineres funktionen e_n på $[-\pi, \pi]^k$ ved

$$e_n(\theta) = e^{in\cdot\theta}\ ,\ \theta = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in [-\pi, \pi]^k\ . \tag{21}$$

Da

$$e_n(\theta) = e^{in_1\theta_1} \dots e^{in_k\theta_k}$$

fås ved gentagen anvendelse af Fubinis sætning (jvf. Eksempel A.17) for givne $n = (n_1, \dots, n_k)$ og $n' = (n'_1, \dots, n'_k)$ i $\mathbb{Z}^k$, at

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^k} \int_{[-\pi,\pi]^k} e^{in\cdot\theta} e^{-in'\cdot\theta} dm_k(\theta) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in_1\theta_1} e^{-in'_1\theta_1} d\theta_1 \cdot \dots \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in_k\theta_k} e^{-in'_k\theta_k} d\theta_k \\
&= \begin{cases} 1 & \text{hvis} \quad n = n' \\ 0 & \text{hvis} \quad n \neq n'\ . \end{cases}
\end{aligned}$$

Altså er $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^k}$ et ortonormalsystem i Hilbertrummet $L_2([-\pi, \pi]^k)$.

Ved Fourier rækken for $f \in L_2([-\pi, \pi]^k)$ forstås rækken

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^k} c_n(f) e^{in\cdot\theta}\ , \tag{22}$$

hvor

$$c_n(f) = (f, e_n) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{[-\pi,\pi]^k} f(\theta) e^{-in\cdot\theta} dm_k(\theta)\colon \tag{23}$$

Med samme begrundelse som i afsnit 2.1 for $k = 1$ er rækken (22) konvergent i Hilbert rummet $L_2([-\pi, \pi]^k)$. Vi ønsker at vise, at $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^k}$ er en ortonormalbasis for $L_2([-\pi, \pi]^k)$, hvilket ifølge Sætning 1.14 kan gøres ved at vise, at Parsevals ligning er opfyldt for alle $f \in L_2([-\pi, \pi]^k)$.

Lad os for simpelheds skyld antage at $k = 2$ og lad $f \in L_2([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$. Da fås af Fubinis sætning, at

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta_1, \theta_2)|^2 d\theta_1 \right) d\theta_2\ ,$$

hvor funktionen $f_{\theta_2} : \theta_1 \to f(\theta_1, \theta_2)$ tilhører $L_2([-\pi, \pi])$ for n.a. θ_2. Benyttes nu (20) for f_{θ_2} haves

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} |c_{n_1}(f_{\theta_2})|^2 \right) d\theta_2\ , \tag{24}$$

hvor

$$\begin{aligned} c_{n_1}(f_{\theta_2}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{\theta_2}(\theta_1)e^{-in_1\theta_1}d\theta_1 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_1,\theta_2)e^{-in_1\theta_1}d\theta_1 \end{aligned}$$

er defineret for n.a. θ_2. Ifølge monotonisætningen (Sætning A.8) kan integrationen over θ_2 og summationen over n_1 i (24) ombyttes, således at

$$\|f\|^2 = \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |c_{n_1}(f_{\theta_2})|^2 d\theta_2 \ . \tag{25}$$

Betragt nu funktionen $\theta_2 \to c_{k_1}(f_{\theta_2})$. Den n_2'te Fourier koefficient for denne er givet ved

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c_{n_1}(f_{\theta_2})e^{-in_2\theta_2}d\theta_2 \\ =&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_1,\theta_2)e^{-in_1\theta_1}e^{-in_2\theta_2}d\theta_1\right)d\theta_2 \\ =&\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[-\pi,\pi]^2} f(\theta_1,\theta_2)e^{-i(n_1\theta_1+n_2\theta_2)}dm_2(\theta_1,\theta_2) \\ =&c_{n_1,n_2}(f) \ , \end{aligned}$$

hvor vi har benyttet Fubinis sætning. Anvendes derfor (20) på funktionen $\theta_2 \to c_{n_1}(f_{\theta_2})$ fås, at

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |c_{n_1}(f_{\theta_2})|^2 d\theta_2 = \sum_{n_2\in\mathbb{Z}} |c_{n_1,n_2}(f)|^2 \ ,$$

som ved indsættelse i (25) giver

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\sum_{n_2\in\mathbb{Z}} |c_{n_1,n_2}(f)|^2 \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} |c_n(f)|^2 \ . \end{aligned}$$

Vi har hermed vist, at Parsevals ligning er opfyldt for alle $f \in L_2([-\pi,\pi]^2)$ for ortonormalsystemet $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^2}$.

Ovenstående argument kan umiddelbart generaliseres til $k > 2$. Vi har således vist

Sætning 2.11. *Systemet $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^k}$ defineret ved (21) er en ortonormalbasis for $L_2([-\pi,\pi]^k)$.*

Opgaver til §2

2.1. Vis, at funktionen $x \to x^\alpha \sin nx$ er integrabel over $]0,\pi]$, når $\alpha > -2$ og $n \in \mathbb{N}$, og sæt da $f_n(\alpha) = \int_0^\pi x^\alpha \sin nx dx$.

Vis, at $f_n(\alpha) \to 0$ for $n \to \infty$, når $\alpha > -1$.

(Kan du også sige noget om $\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha)$, når $-2 < \alpha \le -1$?)

2.2. Bestem Fourier rækken for funktionen $f(\theta) = \sin^3 \theta$, $\theta \in [-\pi,\pi]$.

2.3. Bestem Fourier rækken for funktionen $f(\theta) = \theta$, $\theta \in [-\pi,\pi]$. Vis, at den konvergerer punktvis men ikke uniformt på $[-\pi,\pi]$, og find dens sum.

2.4. Bestem Fourier rækken for funktionen $f(\theta) = |\theta|$, $\theta \in [-\pi,\pi]$, og diskuter dens konvergensegenskaber.

2.5. Vis, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ved at bruge Parsevals ligning for f i opg. 2.3.

2.6. Vis, at hvis c_n, $n \in \mathbb{Z}$, er givne komplekse tal, således at rækken

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$$

er uniformt konvergent i $[-\pi,\pi]$ (og dermed i $\mathbb{R}$) med sum f, så er $f \in C_{per}$ og $c_n = c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.7. Antag, at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ har konvergensradius $\rho > 0$ og sæt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ , \quad |z| < \rho \ .$$

Vis ved brug af opg. 2.6, at Fourier rækken for funktionen $f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, er

$$f_r(\theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n) e^{in\theta} \ ,$$

dvs. at $c_n(f_r) = a_n r^n$ for $n \ge 0$ og $c_n(f_r) = 0$ for $n < 0$, for hvert givet r med $0 \le r < \rho$.

Benyt ovenstående til at bestemme Fourier rækken for funktionen $\theta \to \frac{1}{1-ae^{i\theta}}$, $\theta \in \mathbb{R}$, for $0 \le a < 1$.

2.8. Lad $f \in L_2([-\pi,\pi])$ og lad ortonormaludviklingen for f m.h.t. ortonormalbasen (3) være givet på formen

$$\tfrac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos n\theta + b_n(f)\sin n\theta)\ . \tag{$*$}$$

1) Vis, at $a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = 2c_0(f)$ og

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta\ ,$$
$$b_n(f) = ic_n(f) - ic_{-n}(f) \ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta,$$

for $n \in \mathbb{N}$.

Koefficienterne $a_n(f)$ og $b_n(f)$ er veldefinerede ved ovenstående udtryk for $f \in \mathcal{L}_1([-\pi,\pi])$, og vi kalder da også rækken $(*)$ for Fourier rækken for f (når ortonormalbasen (3) er underforstået).

2) Vis, at hvis $f \in \mathcal{L}_1([-\pi,\pi])$ er en reel funktion, da er Fourier koefficienterne $a_n(f)$ og $b_n(f)$ reelle for samtlige n.

3) Vis, at hvis f er en ulige funktion, da er $a_n(f) = 0$, $n = 0,1,2,\dots$, og hvis f er lige, da er $b_n(f) = 0$ for $n = 1,2,3,\dots$.

4) Diskuter, hvorledes resultaterne om punktvis og uniform konvergens overføres til Fourier rækker af formen $(*)$.

2.9. Vis, at systemet $\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin n\theta\right)_{n\in\mathbb{N}}$ er en ortonormalbasis for $L_2([0,\pi])$ (med sædvanligt indre produkt). *Vink.* Benyt 3) i opg. 2.8.

Den tilsvarende ortonormaludvikling for en funktion $f \in \mathcal{L}_2([0,\pi])$ kaldes for sinusrækken for f. Denne er defineret også for $f \in \mathcal{L}_1([0,\pi])$. Skrives rækken på formen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin n\theta$ skal man bestemme et udtryk for $b_n(f)$.

Diskuter endvidere punktvis og uniform konvergens af sinusrækker.

2.10. Vis, at systemet $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\theta, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2\theta, \dots\right)$ er en ortonormalbasis for $L_2([0,\pi])$.

Den tilsvarende ortonormaludvikling for $f \in \mathcal{L}_2([0,\pi])$ kalder vi cosinusrækken for f. Denne er også defineret for $f \in \mathcal{L}_1([0,\pi])$. Skrives rækken på formen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(f)\cos n\theta$, skal man angive et udtryk for $a_n(f)$.

Diskuter endvidere punktvis og uniform konvergens af cosinusrækker.

2.11. Vis, at når $f \in C^m_{per}$, så konvergerer Fourier rækken for f og de ved ledvis differentiation op til orden $m-1$ dannede rækker uniformt imod de tilsvarende afledede af f.

2.12. Vis, at når $f \in \mathcal{L}_{2,per}$, og der om Fourier koefficienterne for f gælder, at $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2m}|c_n(f)|^2 < +\infty$ for et $m \in \mathbb{N}$, så findes $\tilde{f} \in C^{m-1}_{per}$, således at $f = \tilde{f}$ næsten overalt i $\mathbb{R}$.

2.13. Betragt en funktion f på $\mathbb{R}$, der er periodisk med periode 2π, og som er kontinuert undtagen for $\theta = \theta_0 + 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. Antag endvidere, at $f(\theta_0\pm)$ eksisterer, og at der findes $M_\pm \geq 0, \alpha_\pm > 0, \delta_\pm > 0$, således at

$$\begin{aligned} |f(\theta) - f(\theta_0+)| &\leq M_+|\theta - \theta_0|^{\alpha_+} \ \text{ for } \ \theta_0 < \theta < \theta_0 + \delta_+ \ , \\ |f(\theta) - f(\theta_0-)| &\leq M_-|\theta - \theta_0|^{\alpha_-} \ \text{ for } \ \theta_0 - \delta_- < \theta < \theta_0 \ . \end{aligned}$$

Vis, at Fourier rækken for f er konvergent i punktet $\theta = \theta_0$, og at dens sum er $\frac{1}{2}(f(\theta_0+) + f(\theta_0-))$.

2.14. Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den periodiske funktion med periode 2π defineret ved

$$f(\theta) = \begin{cases} \theta^2 & \text{for} \quad 0 < \theta < 2\pi \\ 2\pi^2 & \text{for} \quad \theta = 0 \ . \end{cases}$$

Vis, at

$$f(\theta) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{\cos n\theta}{n^2} - \pi\frac{\sin n\theta}{n}\} \ , \quad \theta \in \mathbb{R} \ .$$

Udled heraf, at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \ .$$

2.15. Vis, at

$$\begin{aligned} &\frac{16\pi^4}{5} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\{\left(\frac{2\pi^2}{n^2} - \frac{3}{n^4}\right)\cos nx + \pi\left(\frac{3}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)\sin nx\} \\ &\qquad = \begin{cases} x^4 & \text{for} \quad 0 < x < 2\pi \\ 8\pi^4 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

og benyt dette (og opg. 2.14) til at vise, at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720} \ , \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ulige}}}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96} \ .$$

2.16. Vis, at rækken
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{4n^5+n+3} e^{in\theta}$$
er konvergent for alle $\theta \in \mathbb{R}$, og at sumfunktionen f tilhører C^3_{per}.

2.17. Vis, at rækken
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-an^2} e^{in\theta} \ , \quad \text{hvor} \ \ a > 0 \ ,$$
er konvergent for alle $\theta \in \mathbb{R}$, og at sumfunktionen g_a tilhører $C^\infty(\mathbb{R})$.

§3. Nogle partielle differentialligninger

En sædvanlig differentialligning (på engelsk: ordinary differential equation, forkortet til ODE) af orden n er som bekendt en ligning for en C^n-funktion u af én variabel, hvori indgår funktionens afledede af orden op til og med n, altså en ligning af formen $F\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^n u}{dx^n}\right) = 0$, hvor F er en funktion af $n+2$ variable. Tilsvarende er en *partiel differentialligning* (på engelsk: partial differential equation, forkortet til PDE) af orden n en ligning for en funktion u af flere variable $x_1, \ldots, x_k$, $k \geq 2$, hvori indgår partielle afledede af u af orden op til og med n. Betegnes de partielle afledede, der indgår, med $D^1 u, \ldots, D^m u$ er ligningen altså af formen

$$F(x_1, \ldots, x_k, u, D^1 u, \ldots, D^m u) = 0 \ ,$$

hvor F er en funktion af $k + m + 1$ variable.

Fourier rækker blev indført af den franske matematiker Joseph Fourier og anvendt af ham omkring 1807 til at løse visse partielle differentialligninger (idet dog Fourier rækkers konvergensegenskaber først blev etableret senere). Hertil anvendte han en metode, som nu går under betegnelsen "separation af variable". Denne metode og dens anvendelse til løsning af nogle udvalgte partielle differentialligninger er hovedemnet for denne paragraf.

3.1 Bølgeligningen i to dimensioner.

Bølgeligningen i $k+1$ dimensioner for en funktion $u(x_1, \ldots, x_k, t)$ er en partiel differentialligning af formen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right) = f(x_1, \ldots, x_k, t) \ ,$$

hvor $c > 0$ er en konstant, og f er en kontinuert funktion af $k+1$ variable. Hvis $f = 0$ tales om den *homogene* bølgeligning. Ligningens navn skyldes naturligvis, at den viser sig at beskrive velkendte bølgeudbredelser, når t opfattes som en tidsvariabel og $x_1, \ldots, x_k$ som rumvariable. Således kan ligningen for $k = 3$ udledes fra Maxwells ligninger for elektromagnetisme. I dette tilfælde betegner u en af komponenterne af det såkaldte vektorpotential, og f er givet ved den elektriske strøm- og ladningstæthed. For $f = 0$ beskriver ligningen da udbredelse af elektromagnetiske bølger i vakuum og c er lig med lyshastigheden. Tilsvarende vises i kontinuumsmekanik, at det såkaldte forskydningsfelt i et isotropt elastisk medium i fravær af ydre påvirkninger tilfredstiller den homogene bølgeligning, og den beskriver da udbredelse af lydbølger i pågældende medium. Betragtes endelig en (tynd) elastisk streng af længde L, som er fastgjort i de to endepunkter, vises under passende antagelser (små udsving, konstant massetæthed og strengspænding), at Newtons 2. lov, som beskriver strengens bevægelse, antager form af bølgeligningen med $k = 1$. Her betegner $u(x,t)$ strengens udsving fra ligevægtsstillingen til tiden t i punktet med afstand x fra det ene endepunkt, og f repræsenterer en ydre kraft. I fravær af en ydre kraft tilfredsstiller u altså den homogene bølgeligning

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \, , \quad 0 < x < L \, , \; t > 0 \, , \tag{1}$$

og *randbetingelserne*

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \, , \quad t > 0 \, . \tag{2}$$

Af pladshensyn skal vi i disse noter kun betragte tilfældet $k = 1$. Herved fås en særlig simpel illustration af brugen af separation af variable.

Betragtes først bølgeligningen (1) i hele $\mathbb{R}^2$ ses ved indsættelse, at enhver funktion af formen

$$u(x,t) = F(x+ct) + H(x-ct) \, , \tag{3}$$

hvor $F, H \in C^2(\mathbb{R})$, er løsning. Her ses $F(x+ct)$ at repræsentere en venstregående bølge med hastighed c, og tilsvarende repræsenterer $H(x-ct)$ en højregående bølge.

Det er ikke svært at indse (jvf. opg. 3.1), at enhver løsning til (1) i $\mathbb{R}^2$ kan skrives på formen (3). Erindres, at bølgeligningen (1) kan opfattes som Newtons 2. lov (for en uendelig lang streng), vil man forvente, at løsningen til (1) er entydigt bestemt ved strengens udsving $u(x,0) = f(x)$ og dens (transversale) hastighed $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ til tiden $t = 0$. Benyttes (3) fås

$$F + H = f \quad \text{og} \quad cF' - cH' = g \, ,$$

hvoraf

$$F = \tfrac{1}{2}(f + c^{-1}G) \quad \text{og} \quad H = \tfrac{1}{2}(f - c^{-1}G) \, ,$$

hvor G er en stamfunktion til g. Da G er entydigt bestemt pånær en additiv konstant, følger det, at

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}(f(x+ct) + c^{-1}G(x+ct)) + \tfrac{1}{2}(f(x-ct) - c^{-1}G(x-ct))$$

er entydigt bestemt ved f og g som forudset.

Af større interesse for os er den endelige streng af længde L beskrevet ved (1) og (2) samt begyndelsesbetingelserne

$$u(x,0) = f(x) \, , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \, , \quad 0 \le x \le L \, . \tag{5}$$

Vi søger da en reel løsning $u \in C([0,L] \times [0,+\infty[)$, som er C^2 og opfylder (1) på den åbne halvstrimmel $]0,L[\times]0,+\infty[$, og som opfylder (2) og (5) på dens rand. Det er her desuden underforstået, at $\frac{\partial u}{\partial t}$ og $\frac{\partial u}{\partial x}$ eksisterer og er kontinuerte på den afsluttede halvstrimmel $[0,L] \times [0,+\infty[$, samt at f og g er kontinuerte på $[0,L]$ og nødvendigvis opfylder $f(0) = f(L) = 0$ og $g(0) = g(L) = 0$.

Vi bemærker, at hvis u_1 er en løsning til (1), (2) og (5) med $g = 0$, og u_2 tilsvarende er en løsning med $f = 0$, da er $u_1 + u_2$ en løsning til (1), (2) og (5). Det er derfor tilstrækkeligt at betragte de to problemer svarende til $g = 0$, hhv. $f = 0$, hvert for sig. Lad os se på det første, dvs.

$$
\text{(A)}\begin{cases}
\text{(A')}\begin{cases}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , \quad 0 < x < L \ , t > 0 & (1) \\
u(0,t) = u(L,t) = 0 \ , \quad t > 0 & (2) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \ , \quad 0 \le x \le L \ , & (6)
\end{cases} \\
\quad u(x,0) = f(x) \ , \quad 0 \le x \le L \ , \qquad (7)
\end{cases}
$$

hvor vi med (A') har betegnet den homogene del af problemet, d.v.s. ligningerne hvis højreside er 0.

At anvende separation af variable går nu ud på at søge løsninger til det homogene problem (A') af formen

$$u(x,t) = X(x)T(t) \ . \tag{8}$$

Da vi her har set bort fra begyndelsebetingelsen (7), forventer vi ikke nødvendigvis at finde en entydig sådan løsning. Som vi skal se, findes der faktisk uendelig mange lineært uafhængige løsninger $u_1, u_2, u_3, \ldots$ til (A'). Da problemet (A') er lineært (dvs. venstresiderne af (1), (2) og (6) er lineære i u) og homogent, er enhver linearkombination af $u_1, u_2, u_3, \ldots$ også løsning til (A'). Man søger derfor en linearkombination, som også opfylder (7). Denne linearkombination vil i almindelighed være uendelig, dvs. være givet som summen af en funktionsrække $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t)$, og det er så nødvendigt at argumentere for dens konvergens, samt for at sumfunktionen faktisk opfylder (A').

Indsættes (8) i (1), hvor det antages at hverken X eller T er trivielle (altså identisk lig med 0), fås

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \ , \tag{9}$$

som ved division med $u(x,t)$ giver

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} \tag{10}$$

i punkter (x,t), hvor $u(x,t) \neq 0$. Da højresiden af (10) er uafhængig af x og venstresiden uafhængig af t, sluttes, at de begge er konstante, dvs. der findes en (reel) konstant λ, således at

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

i delintervaller af $]0,L[$ hhv. $]0,+\infty[$, hvor X, hhv. T, ikke antager værdien 0. Det følger, at λ er uafhængig af, hvilke af disse intervaller, der er tale om, og af kontinuitetsgrunde kan vi derfor slutte at $X'' = -\lambda X$ og $T'' = -\lambda c^2 T$. Alternativt kan man konstatere, at sidstnævnte ligninger medfører (9). Tages nu rand- og begyndelsesbetingelserne (2) og (6) i betragtning, har vi, at u givet ved (8) er løsning til (A'), såfremt X opfylder

$$X'' = -\lambda X \quad \text{i} \quad]0,L[\ , \tag{11}$$

$$X(0) = X(L) = 0\ , \tag{12}$$

og T opfylder

$$T'' = -\lambda c^2 T \quad \text{i} \quad]0,\infty[\ , \tag{13}$$

$$T'(0) = 0\ . \tag{14}$$

For $\lambda = 0$ er løsningerne til (11) af formen $X(x) = a + bx$, hvor a og b er konstanter. Af disse opfylder kun den trivielle løsning (12).

For $\lambda < 0$ er løsningerne til (11) som bekendt (se Adams p.247) af formen $X(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x}$, hvor a og b er konstanter. Af $X(0) = 0$ fås $a = -b$, så $X(x) = 2a\sinh\sqrt{-\lambda}x$, hvorefter $X(L) = 0$ giver $a = 0$, da eneste nulpunkt for sinh er 0. For $\lambda < 0$ haves altså også kun den trivielle løsning.

For $\lambda > 0$ er løsningerne til (11) af formen $X(x) = a\sin\sqrt{\lambda}x + b\cos\sqrt{\lambda}x$, hvor a og b er konstanter. Af $X(0) = 0$ fås $b = 0$, så $X(x) = a\sin\sqrt{\lambda}x$. Da nulpunkterne for sin er $p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, giver $X(L) = 0$ herefter, at $\sqrt{\lambda}L = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

For λ fås derfor de mulige værdier

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\ , \quad n \in \mathbb{N}\ , \tag{15}$$

og de tilsvarende løsninger til (11) og (12) er givet ved

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x\ , \quad n \in \mathbb{N}\ , \tag{16}$$

og er entydigt bestemt pånær en konstant faktor.

Indsættes nu λ_n for λ i (13) fås, at løsningerne til (13) er af formen $T_n(t) = a'e^{ic\frac{n\pi}{L}t} + b'e^{-ic\frac{n\pi}{L}t}$. Af $T_n'(0) = 0$ fås da, at $a' = b'$, og derfor er

$$T_n(t) = \cos\frac{cn\pi}{L}t \ ,$$

den entydige løsning til (13) og (14) med $\lambda = \lambda_n$, pånær en konstant faktor.

Ialt har vi hermed fundet løsningerne

$$u_n(x,t) = \cos\frac{cn\pi}{L}t\sin\frac{n\pi}{L}x \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \tag{17}$$

til (A').

Som nævnt tidligere søger vi nu en løsning til (A) af formen

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{cn\pi}{L}t\sin\frac{n\pi}{L}x \ . \end{aligned} \tag{18}$$

For at definere u ved (18) kræves i det mindste, at rækken er konvergent for $(x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty[$. Lad os antage, at dette er tilfældet. Begyndelsesbetingelsen (7) giver da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \ , \quad 0 \le x \le L \ . \tag{19}$$

Denne formel gør os i stand til at anvende Fourier række teorien til bestemmelse af b_n, $n \in \mathbb{N}$, som følger.

Lad os først bemærke, at (19) medfører

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \tag{20}$$

hvor $\widetilde{f}$ er den entydige ulige periodiske funktion på $\mathbb{R}$ med periode $2L$, som stemmer overens med f på $[0,L]$ (husk at $f(0) = f(L) = 0$). Da vi i forrige paragraf kun har betragtet funktioner med periode 2π er det praktisk at definere funktionen

$$\widetilde{f_0}(\theta) = \widetilde{f}\left(\frac{L}{\pi}\theta\right) \ , \quad \theta \in \mathbb{R} \ , \tag{21}$$

som er periodisk med periode 2π, og ved hjælp af hvilken (20) kan udtrykkes ved

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_0(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2i}\left(e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right) \ . \end{aligned} \tag{22}$$

Vi genkender nu denne række som Fourier rækken for $\widetilde{f}_0$ forudsat

$$b_n = 2ic_n(\widetilde{f}_0) = -2ic_{-n}(\widetilde{f}_0) \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \ \text{ og } \ c_0(\widetilde{f}_0) = 0 \ .$$

At $c_n(\widetilde{f}_0) = -c_{-n}(\widetilde{f}_0)$ følger af, at $\widetilde{f}_0$ er ulige, idet

$$\begin{aligned} c_n(\widetilde{f}_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}_0(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}_0(-\theta) e^{in\theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}_0(\theta) e^{in\theta} d\theta \\ &= -c_{-n}(\widetilde{f}_0) \ , \end{aligned}$$

hvor vi i andet skridt har skiftet variabel til $-\theta$. Vi har således, at rækken i (22) er Fourier rækken for $\widetilde{f}_0$, hvis vi definerer b_n ved

$$b_n = \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}_0(\theta) e^{-in\theta} d\theta \ . \tag{23}$$

Antages nu, at $\widetilde{f}_0$ er kontinuert og stykkevis glat, hvilket naturligvis er ækvivalent med, at $\widetilde{f}$ er kontinuert og stykkevis glat, følger det af Sætning 2.8, at (22) er gyldig for $\theta \in \mathbb{R}$ (og at rækken konvergerer uniformt imod $\widetilde{f}_0$). Det samme gælder derfor om (20). Udnyttes additionsformlen $\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$, følger heraf, at $u(x,t)$ er veldefineret ved (18) og givet ved

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}(\widetilde{f}(x+ct) + \widetilde{f}(x-ct)) \ , \tag{24}$$

hvoraf fremgår, at $u(x,t)$ er løsning til (1) forudsat, at $\widetilde{f}$ er en C^2-funktion. Ligeledes er det ligetil at verificere, at $u(x,t)$ givet ved (24) opfylder (2) og (6).

Tilbage er nu blot at konstatere, at betingelsen for at $\widetilde{f} \in C^2(\mathbb{R})$ er, at $f \in C^2([0,L])$ samt at $f(0) = f(L) = 0$ og $f''(0) = f''(L) = 0$ (jvf. opg. 3.2). Hermed har vi vist

Sætning 3.1. *Antag, at $f \in C^2([0,L])$ og at $f(0) = f(L) = 0$ samt $f''(0) = f''(L) = 0$, og lad $u(x,t)$ være givet ved (24), hvor $\widetilde{f}$ er den ulige periodiske udvidelse af f med periode $2L$. Da er $u(x,t)$ en løsning til problemet (A).*

Vi kunne naturligvis have opnået dette resultat ved blot at verificere, at (24) er en løsning til (A). Vi har imidlertid valgt at illustrere brugen af separation af variable ved ovenstående udledning.

Problemet svarende til $f = 0$, dvs.

$$
\text{(B)}\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , & 0 < x < L \ , t > 0 \ , \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \ , & t > 0 \\ u(x,0) = 0 \ , & 0 \le x \le L \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \ , & 0 \le x \le L \end{cases}
$$

kan løses tilsvarende. Vi nøjes med at angive resultatet.

Sætning 3.2. *Antag, at $g \in C^1([0,L])$ og at $g(0) = g(L) = 0$, og lad*

$$
u(x,t) = \frac{1}{2c}(H(x+ct) - H(x-ct))
$$

hvor

$$
H(x) = \int_0^x \widetilde{g}(s)ds \ ,
$$

og hvor $\widetilde{g}$ er den ulige periodiske udvidelse af g til $\mathbb{R}$ med periode $2L$.

Da er $u(x,t)$ en løsning til (B).

Det skal bemærkes, at den hermed opnåede løsning til det generelle problem (1), (2), (5) er entydig (jvf. opg. 3.3).

Eksempel 3.3. Betragt problemet (A) med $L = \pi$, $c = 2$ og $f(x) = \sin^3 x$, dvs.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , \quad 0 < x < \pi \ , t > 0 \ , \\
&u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \quad t > 0 \ , \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \ , \quad u(x,0) = \sin^3 x \ , \quad 0 \le x \le \pi \ .
\end{aligned}
$$

Da $\sin^3 x$ er ulige og periodisk med periode 2π, er løsningen givet ved

$$
u(x,t) = \tfrac{1}{2}\sin^3(x+2t) + \tfrac{1}{2}\sin^3(x-2t) \ .
$$

Alternativt haves, idet $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$, at

$$u(x,t) = \tfrac{3}{4}\cos 2t \sin t - \tfrac{1}{4}\cos 6t \sin 3x$$

ifølge (18).

Vi afslutter dette afsnit ved til senere brug at notere, at koefficienten b_n givet ved (23) kan udtrykkes direkte ved f, idet

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} \widetilde{f}_0(\theta)e^{-in\theta}d\theta + \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \widetilde{f}_0(\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ &= \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} \widetilde{f}_0(\theta)\left(e^{-in\theta} - e^{in\theta}\right)d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \widetilde{f}_0(\theta)\sin n\theta d\theta \\ &= \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\ , \end{aligned} \tag{25}$$

hvor vi i integralet over $[-\pi, 0]$ har skiftet variabel til $-\theta$ og i sidste skridt har foretaget variabelskiftet $\theta = \frac{\pi}{L}x$.

Heraf ses, at b_n er det indre produkt af f og funktionen $\sin\frac{n\pi}{L}x$ i Hilbert rummet $L_2([0,L])$ med indre produkt

$$(f,g)_L = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\overline{g(x)}dx\ , \tag{26}$$

hvor $f,g \in L_2([0,L])$. I dette rum er $(\sin\frac{n\pi}{L}x)_{n\in\mathbb{N}}$ et ortonormalsystem, hvilket ses ved direkte udregning (eller ved at overføre systemet til $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ i $L_2([0,\pi])$ ved at skifte variabel til $\theta = \frac{\pi}{L}x$, jvf. opg. 1.2). Systemet er endda en ortonormalbasis i $L_2([0,L])$. Dette følger f.eks. af at systemet er maksimalt. At $f \in \{\sin\frac{n\pi}{L}x \mid n \in \mathbb{N}\}^{\perp}$ betyder nemlig, at b_n givet ved (25) er 0 for alle $n \in \mathbb{N}$, og da vi tidligere har set, at $b_n = c_n(\widetilde{f}_0) = -c_{-n}(\widetilde{f}_0)$ og $c_0(\widetilde{f}_0) = 0$, giver dette at $c_n(\widetilde{f}_0) = 0$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, hvilket viser, at $\widetilde{f}_0\Big|_{[-\pi,\pi]} = 0$ n.o. og dermed $f = 0$ n.o.(Se også opg. 2.9.)

Vi har således, at b_n givet ved (25) netop er den n'te koefficient i ortonormaludviklingen af $f \in L_2([0,L])$ m.h.t. ortonormalbasen $(\sin\frac{n\pi}{L}x)_{n\in\mathbb{N}}$. Den tilsvarende række (19) kaldes normalt *sinus-rækken* for f (på $[0,L]$) og b_n for dens n'te *sinus-koefficient.*

Ved tilsvarende argumenter fås, at $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\cos\frac{n\pi}{L}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ er en ortonormalbasis for $L_2([0,L])$, og den tilsvarende ortonormaludvikling

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x \tag{27}$$

af en funktion $f \in L_2([0,L])$ kaldes for *cosinus-rækken* for f (på $[0,L]$). Koefficienterne i denne er givet ved

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\ , \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{28}$$

I argumentet herfor indføres i stedet for $\widetilde{f}$ funktionen $\tilde{\tilde{f}}$ defineret som den (entydigt bestemte) lige periodiske funktion på $\mathbb{R}$ med periode $2L$, der stemmer overens med f på $[0,L]$. Der gælder da, at $a_n = 2c_n(\tilde{\tilde{f}}_0) = 2c_{-n}(\tilde{\tilde{f}}_0)$, for $n \in \mathbb{N}$, hvor $\tilde{\tilde{f}}_0(\theta) = \tilde{\tilde{f}}(\frac{L}{\pi}\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, og konvergensegenskaberne ved cosinusrækken for f kan udledes fra konvergensegenskaberne ved Fourier rækken for $\tilde{\tilde{f}}_0$. Specielt gælder at cosinus-rækken for f konvergerer uniformt imod f på $[0,L]$, hvis $\tilde{\tilde{f}}_0$ er kontinuert og stykkevis glat. Dette er f.eks. tilfældet, hvis $f \in C^1([0,L])$ (jvf. opg. 3.2).

3.2 Varmeledningsligningen.

Varmeledning udgjorde hovedemnet for Fouriers oprindelige undersøgelser, og derom handler hans bog “Theorie analytique de la chaleur” fra 1822, som er et af den matematiske fysiks hovedværker. Varmeledningsligningen i $k+1$ dimensioner

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right) = 0\ , \tag{29}$$

hvor $c > 0$, har (for $k = 3$) længe været kendt som beskrivende varmetransport. Her betegner $u(x,t)$ temperaturen til tiden t i punktet $(x_1,\ldots,x_k)$ af et legeme og varmestrømningen er proportional med gradienten $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$. Konstanten $c > 0$ afhænger af legemets varmespecifikke egenskaber. Det har sidenhen vist sig, at ligningen (29) også optræder i beskrivelsen af en række andre systemer og spiller en vigtig rolle i teorien for stokastiske processer. F.eks. blev den udledt af A. Einstein på grundlag af den kinetiske gasteori og anvendt af ham i en berømt artikel fra 1905 vedrørende undersøgelser af brownske bevægelser. I denne forbindelse betegner $u(x,t)$ en partikeltæthed og tidsudviklingen af u beskriver diffusion af de pågældende partikler. Ligningen kaldes da også tit for *diffusionsligningen* og konstanten c for diffusionskonstanten.

Som tidligere vil vi begrænse os til at betragte tilfældet $k=1$ svarende til varmetransport i et éndimensionalt legeme, dvs. en (tynd) stang. På grundlag af ovenstående tolkning af ligningen forventes det, at løsningen er entydigt bestemt for $t>0$ ved begyndelsesbetingelsen $u(x,0)=f(x)$. For en uendelig lang stang ses ved udregning, at

$$u_{x_0}(x,t) = u_0(x-x_0,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4ct}} \tag{30}$$

er en løsning til (29) (med $k=1$) i $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ for hvert $x_0\in\mathbb{R}$. For $x\neq x_0$ ses, at $u(x,t)\to 0$ for $t\searrow 0$, mens $u(x_0,t)\to+\infty$ for $t\searrow 0$, svarende til en singulær begyndelsesfordeling f. Hvis f er kontinuert og begrænset på $\mathbb{R}$, kan det vises, at

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} u_0(x-y,t)f(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4ct}} f(y)dy \end{aligned} \tag{31}$$

er en løsning til (29), for hvilken $u(x,t)\to f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, for $t\searrow 0$. Vi undlader at vise dette her. I stedet ønsker vi at betragte en stang af endelig længde L, i hvilket tilfælde en lukket løsningsformel svarende til (31) ikke er tilgængelig.

Vi betragter altså problemet

$$\text{(V)}\begin{cases} \text{(V')}\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\ , \quad 0<x<L\ ,t>0\ , & (32)\\ u(0,t)=u(L,t)=0\ , \quad t>0\ , & (33) \end{cases} \\ \qquad\quad u(x,0)=f(x)\ , \quad 0\le x\le L\ , & (34) \end{cases}$$

hvor randbetingelsen (33) svarer til, at stangens endepunkter holdes på konstant temperatur 0. Vi søger en løsning $u\in C([0,L]\times[0,+\infty[)$, som er C^2 og opfylder (32) på den åbne halvstrimmel $]0,L[\times]0,+\infty[$, og som desuden tilfredsstiller (33) og (34) på dens rand. Funktionen f er da nødvendigvis kontinuert på $[0,L]$ og $f(0)=f(L)=0$.

Vi anvender separation af variable og søger løsninger til det homogene problem (V') af formen $u(x,t)=X(x)T(t)$. Ved indsættelse i (32) fås $XT'=cX''T$, som efter division med $u(x,t)$ giver

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c}\,\frac{T'(t)}{T(t)}\ .$$

Ved samme argumenter som i afsnit 3.1 fås, at begge sider af denne ligning er lig med en og samme konstant. Kaldes konstanten $-\lambda$ fås derfor, at X og T opfylder differentialligningerne

$$\begin{aligned} X'' &= -\lambda X \quad \text{ i }]0, L[\ , \\ T' &= -c\lambda T \quad \text{ i }]0, +\infty[\ . \end{aligned} \tag{35}$$

Herudover fås af randbetingelsen (33), at

$$X(0) = X(L) = 0 \ .$$

Vi ser således, at X tilfredsstiller de samme ligninger som i forrige afsnit. De mulige værdier af λ, for hvilke der findes ikke-trivielle løsninger X, er derfor $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n \in \mathbb{N}$, og de tilsvarende løsninger er proportionale med

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x \ , \quad 0 \le x \le L \ .$$

Med $\lambda = \lambda_n$ fås af (35), at T er proportional med

$$T_n(t) = e^{-\frac{cn^2\pi^2}{L^2} t} \ , \quad t \ge 0 \ . \tag{36}$$

Alt i alt har vi således fundet løsningerne

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{cn^2\pi^2}{L^2} t} \sin \frac{n\pi}{L} x \ , \ n \in \mathbb{N} \ ,$$

til (V'), og vi søger en løsning til (V) af formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{cn^2\pi^2}{L^2} t} \sin \frac{n\pi}{L} x \ .$$

Indsættes heri $t = 0$ antager begyndelsesbetingelsen (34) formen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \ , \quad 0 \le x \le L \ . \tag{37}$$

Vi kan derfor benytte samme argumenter som i forrige afsnit til at sætte

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \ , \tag{38}$$

hvorved rækken (37) netop er sinus-rækken for f.

På grundlag heraf kan vi vise følgende

Sætning 3.4. *Hvis f er kontinuert (eller mere generelt, hvis $f \in \mathcal{L}_2([0,L])$), så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{cn^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi}{L}x$, hvor b_n er givet ved (38), uniformt konvergent på enhver halvstrimmel $[0,L] \times [\varepsilon, +\infty[$, $\varepsilon > 0$, og sumfunktionen*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{cn^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi}{L}x \tag{39}$$

er en løsning til (V').

Hvis f er kontinuert og stykkevis glat på $[0,L]$ og $f(0) = f(L) = 0$, eller, mere generelt, hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$, så konvergerer rækken (39) uniformt i $[0,L] \times [0,+\infty[$, og $u(x,t)$ er da en løsning til (V).

Bevis. Ifølge Parsevals ligning er

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)|^2 dx < +\infty \ ,$$

således at følgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ specielt er begrænset, dvs. $|b_n| \le K$, $n \in \mathbb{N}$, for et $K \ge 0$. Det følger heraf for $t \ge \varepsilon$, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| b_n e^{-\frac{cn^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi}{L}x \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} K e^{-\frac{cn^2\pi^2}{L^2}\varepsilon} \ ,$$

da $c > 0$. For $\varepsilon > 0$ er den sidste række konvergent (overvej!) og altså en konvergent majorantrække for rækken (39) i $[0,L] \times [\varepsilon, +\infty[$. Ifølge majorantkriteriet (se Appendiks B) er rækken (39) derfor uniformt konvergent i $[0,L] \times [\varepsilon, +\infty[$ for $\varepsilon > 0$.

Videre ses, at rækken opnået ved ledvis differentiation af rækken (39) r gange m.h.t. t og s gange m.h.t. x har rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} K c^r \left(\frac{\pi}{L}\right)^{2r+s} n^{2r+s} e^{-\frac{cn^2\pi^2}{L^2}\varepsilon}$$

som majorantrække i $[0,L] \times [\varepsilon, +\infty[$. Da denne række er konvergent for $\varepsilon > 0$ (overvej!), er den ledvis differentierede række uniformt konvergent på $[0,L] \times [\varepsilon, +\infty[$ for $\varepsilon > 0$. Men heraf følger ved brug af sætningen i Appendiks C om ledvis differentiation af rækker, at $u(x,t)$ er vilkårligt ofte differentiabel i $[0,L] \times]0, +\infty[$, og at dens partielle afledede fås ved ledvis differentiation af rækken (39).

Specielt fås, at

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right) = 0$$

samt at u tilfredsstiller (33). Altså er u en løsning til (V').

Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ er en majorantrække for rækken (39) i $[0, L] \times [0, +\infty[$, giver majorantkriteriet, at hvis $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$, så er rækken (39) uniformt konvergent og $u(x, t)$ derfor veldefineret og kontinuert i $[0, L] \times [0, +\infty[$. Da den kontinuerte funktion $u(x, 0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$ har samme sinus-koefficienter som f, nemlig b_n, $n \in \mathbb{N}$, (jvf. opg. 2.6) følger det, at $u(x, 0) = f(x)$, $0 \le x \le L$, således at u er en løsning til (V).

Hvis endelig f er kontinuert og stykkevis glat på $[0, L]$ og $f(0) = f(L) = 0$, så er den ulige periodiske udvidelse $\widetilde{f}$ med periode $2L$ stykkevis glat, og det følger som i beviset for Sætning 2.8, at $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$. □

Vi har hermed vist, at problemet (V) har en løsning under de givne forudsætninger om f. Det kan vises, at denne er entydig (jvf. opg. 3.6).

Ved en lignende fremgangsmåde kan løsninger svarende til andre randbetingelser også bestemmes (se opg. 3.9). Ved udnyttelse af multiple Fourier rækker kan metoden også udvides til løsning af varmeledningsligningen for $k > 1$ for legemer, der har form som en kasse, dvs. i mængder af formen $[0, L_1] \times \cdots \times [0, L_k] \times [0, +\infty[$.

Eksempel 3.5. Betragt problemet (V), hvor $L = 1$, $c = 2$ og

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{for} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 - x\,, & \text{for} \quad \frac{1}{2} \le x \le 1\,. \end{cases}$$

Ved udregning af sinus-koefficienterne for f finder man

$$b_n = \begin{cases} (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2}\,, & \text{for} \quad n = 2k - 1\,,\, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{for} \quad n \quad \text{lige}\,. \end{cases}$$

Da $\widetilde{f}$ er stykkevis glat (eller alternativt, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$) giver Sætning 3.4, at løsningen til (V) er

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} e^{-2\pi^2 (2k-1)^2 t} \sin(2k - 1)\pi x\,.$$

3.3 Dirichlet problemet.

Lad os betragte varmeledningsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

i $\Omega\times]0,+\infty[$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ er åben. Med en passende (tidsuafhængig) randbetingelse $u(x,y,t) = f(x,y)$ for $(x,y) \in \partial\Omega$ og $t > 0$ forventes temperaturen $u(x,y,t)$ at nærme sig en ligevægtsfordeling $u(x,y)$ for $t \to +\infty$, som da vil opfylde *Laplaces ligning*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{40}$$

i Ω og desuden opfylder randbetingelsen

$$u(x,y) = f(x,y) \quad \text{for} \quad (x,y) \in \partial\Omega\ . \tag{41}$$

Problemet givet ved (40) og (41) kaldes for et *Dirichlet problem* på Ω. Det kan naturligvis tilsvarende formuleres i en vilkårlig dimension $k \geq 2$ for et område $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ (det trivielle tilfælde $k = 1$ er ikke af interesse her). Dirichlet problemer optræder i en række forskellige sammenhænge. Betragtes f.eks. en elastisk membran over et område $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, og lader vi $u(x,y)$ betegne membranens højde over punktet (x,y), så er dens ligevægtstilstand i fravær af ydre kræfter, når dens rand holdes fast, givet ved løsningen til Dirichlet problemet på Ω, hvor f angiver membranens højde over $\partial\Omega$. Dette skyldes, at membranen i lighed med den svingende streng tilfredsstiller bølgeligningen, og ligevægtstilstanden er givet ved en tidsuafhængig løsning, altså en løsning til Laplaces ligning. Endvidere kan nævnes, at det elektrostatiske potential udenfor en given ladningsfordeling opfylder Laplaces ligning, og er givet som en løsning til et Dirichlet problem i et område Ω, når potentialet fastlægges på randen af Ω, hvilket tit forekommer i praksis.

At løse Dirichlet problemet (40-41) består i at bestemme en funktion $u \in C(\overline{Omega})$, som er C^2 og tilfredsstiller (40) i Ω, og som opfylder (41) i $\partial\Omega$. Funktionen f antages da nødvendigvis at være kontinuert på $\partial\Omega$. Hvis Ω er begrænset kan det vises, at der højst findes én løsning til Dirichlet problemet for givet f (jvf. opg. 3.11). Vi er her interesseret i at vise eksistens af løsninger for specielle valg af Ω og med passende krav til f. Nærmere betegnet skal vi betragte tilfældene, hvor Ω enten er et rektangel eller en cirkelskive.

Lad os starte med rektanglet

$$\Omega_{a,b} = \{(x,y) \mid 0 < x < a\,,\ 0 < y < b\}\ .$$

Funktionen f er da givet ved fire funktioner svarende til de fire sider i rektanglet, og randbetingelsen (41) kan skrives

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_1(x)\,, \qquad & u(x,b) &= f_2(x)\,, \qquad & 0 \le x \le a\,, \\ u(0,y) &= g_1(y)\,, \qquad & u(a,y) &= g_2(y)\,, \qquad & 0 \le y \le b\,, \end{aligned}$$

hvor de fire funktioner f_1, f_2, g_1, g_2 må stemme overens i rektanglets hjørner, dvs. $f_1(0) = g_1(0) = \alpha$, $f_1(a) = g_2(0) = \beta$, $f_2(0) = g_1(b) = \gamma$, $f_2(a) = g_2(b) = \delta$. Vi bemærker nu, at enhver funktion af formen

$$u_0(x,y) = A + Bx + Cy + Dxy\,,$$

hvor A, B, C, D er konstanter, er løsning til (40) i $\mathbb{R}^2$. Da de fire konstanter kan afpasses, således at u_0 antager værdierne α, β, γ, δ i rektanglets hjørner (hvilket overlades til læseren at eftervise), følger det, da venstresiden af (40) er lineær i u, at $u - u_0$ er løsning til et Dirichlet problem på $\Omega_{a,b}$, hvor funktionen f er 0 i rektanglets hjørner. Vi kan derfor begrænse os til at betragte dette tilfælde.

Da er altså funktionerne f_1, f_2, g_1, g_2 kontinuerte på definitionsintervallerne og lig med 0 i endepunkterne. Problemet kan herefter spaltes i fire delproblemer svarende til, at tre af de fire funktioner f_1, f_2, g_1, g_2 sættes til 0. Betegner u_1, u_2, u_3, u_4 løsninger til de fire delproblemer, da ses at $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ er løsning til det oprindelige problem. Da nu de fire delproblemer i det væsentlige kan løses ved samme fremgangsmåde, begrænser vi os til problemet

$$(\mathrm{D}_1)\begin{cases} (\mathrm{D'}_1)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad 0 < x < a\,,\ 0 < y < b & (42) \\ u(x,b) = 0\,, \quad 0 \le x \le a\,, & (43) \\ u(0,y) = u(a,y) = 0\,, \quad 0 < y < b & (44) \end{cases} \\ \qquad\qquad u(x,0) = f(x)\,, \quad 0 \le x \le a\,, \qquad\qquad (45) \end{cases}$$

hvor $f \in C([0,a])$ og $f(0) = f(a) = 0$.

Dette problem kan løses ved separation af variable. Ved indsættelse af $u(x,y) = X(x)Y(y)$ i (42) fås $X''Y + XY'' = 0$, hvilket efter division med $u(x,y)$ giver

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}\,.$$

Ved samme argumenter som tidligere sluttes, at begge sider af denne ligning er lig med en og samme konstant. Kaldes denne $-\lambda$, fås $X'' = -\lambda X$ og $Y'' = \lambda Y$. Tages herefter randbetingelserne (43) og (44) i betragtning fås, at X tilfredsstiller

$$X'' = -\lambda X \ \text{ i } \ [0,a]\,, \quad \text{og } X(0) = X(a) = 0\,,$$

og Y opfylder

$$Y'' = \lambda Y \quad \text{i} \ \ [0,b] \ , \tag{46}$$
$$Y(b) = 0 \ . \tag{47}$$

Vi finder derfor, at λ som tidligere kun kan antage værdierne $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, $n \in \mathbb{N}$, og de tilsvarende løsninger X er proportionale med

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{a}x \ , \quad 0 \leq x \leq a \ .$$

Indsættes $\lambda = \lambda_n$ i (46) fås, at løsningerne Y har formen

$$Y(y) = Ae^{\frac{n\pi}{a}(b-y)} + Be^{-\frac{n\pi}{a}(b-y)} \ .$$

Indsættes heri $y = b$ og benyttes (47) fås $A = -B$ og derfor, at Y er proportional med

$$Y_n(y) = \sinh\frac{n\pi}{a}(b-y) \ .$$

Vi har således fundet løsningerne

$$u_n(x,y) = \sin(\frac{n\pi}{a}x)\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y) \ , \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

til det homogene problem (D_1'), og vi søger en løsning til (D_1) af formen

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(x,y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(\frac{n\pi}{a}x)\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y) \ . \end{aligned}$$

Randbetingelsen (45) antager da formen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(\frac{n\pi}{a}b)\sin\frac{n\pi}{a}x \ , \quad 0 \leq x \leq a \ .$$

Dette leder os til at vælge d_n, $n \in \mathbb{N}$, således at $d_n \sinh\frac{n\pi}{a}b$ er den n'te sinus-koefficient for f, dvs. $d_n = b_n / \sinh\frac{n\pi}{a}b$, hvor

$$\boxed{b_n = \tfrac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx \ .} \tag{48}$$

På grundlag heraf kan vi vise følgende

Sætning 3.6. *Hvis $f \in C([0,a])$ (eller blot $f \in \mathcal{L}_2([0,a])$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{a}x)\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}$, hvor b_n er givet ved (48), uniformt konvergent på rektanglet*

$$\overline{Omega}^{\varepsilon}_{a,b} = [0,a]\times[\varepsilon,b]\ ,$$

for hvert $\varepsilon > 0$, og

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{a}x)\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi}{a}b} \tag{49}$$

er en løsning til (D_1').

Hvis f er kontinuert og stykkevis glat på $[0,a]$ og $f(0) = f(a) = 0$, eller, mere generelt, hvis $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < +\infty$, så er rækken (49) uniformt konvergent i $\overline{Omega}_{a,b}$, og $u(x,y)$ er en løsning til (D_1).

Bevis. Som i beviset for Sætning 3.4 bemærkes, at der findes $K \geq 0$ så $|b_n| \leq K$ for $n \in \mathbb{N}$. Af

$$\begin{aligned}\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi}{a}b} &= \frac{e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)} - e^{-\frac{n\pi}{a}(b-y)}}{e^{\frac{n\pi}{a}b} - e^{-\frac{n\pi}{a}b}}\\ &= e^{-\frac{n\pi}{a}y}\frac{1-e^{-2\frac{n\pi}{a}(b-y)}}{1-e^{-2\frac{n\pi}{a}b}}\\ &\leq e^{-\frac{n\pi}{a}\varepsilon}\frac{1}{1-e^{-2\frac{\pi}{a}b}}\ ,\quad n\in\mathbb{N}\,,\ y\geq\varepsilon\ ,\end{aligned} \tag{50}$$

følger derfor, at den geometriske række

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K}{1-e^{-2\frac{\pi}{a}b}}e^{-\frac{n\pi}{a}\varepsilon}$$

er en konvergent majoranträkke for rækken (49) i $\overline{Omega}^{\varepsilon}_{a,b}$ for $\varepsilon > 0$. Dette medfører, at rækken (49) er uniformt konvergent i $\overline{Omega}^{\varepsilon}_{a,b}$ for $\varepsilon > 0$, således at $u(x,y)$ er veldefineret og kontinuert i $[0,a]\times]0,b]$.

Ved ledvis differentiation r range m.h.t. x og s gange m.h.t. y af rækken (49) multipliceres det n'te led med $\left(\frac{n\pi}{a}\right)^r\left(-\frac{n\pi}{a}\right)^s$, og $\sin\frac{n\pi}{a}x$ og $\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)$ erstattes eventuelt af henholdsvis $\pm\cos\frac{n\pi}{a}x$ og $\pm\cosh\frac{n\pi}{a}(b-y)$ afhængig af om r, henholdsvis s, er ulige eller lige. Benyttes derfor (50) sammen med

$$\begin{aligned}\frac{\cosh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi}{a}b} &= e^{-\frac{n\pi}{a}y}\frac{1+e^{-2\frac{n\pi}{a}(b-y)}}{1-e^{-2\frac{n\pi}{a}b}}\\ &\leq e^{-\frac{n\pi}{a}\varepsilon}\frac{2}{1-e^{-2\frac{\pi}{a}b}}\ ,\quad n\in\mathbb{N}\,,\ \varepsilon\leq y\leq b\ ,\end{aligned}$$

sluttes, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2K}{1-e^{-2\frac{\pi}{a}b}} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{r+s} n^{r+s} e^{-\frac{n\pi}{a}\varepsilon}$ er en majorantrække for den ledvis differentierede række (49) i $\overline{Omega}^{\varepsilon}_{a,b}$. Da majorantrækken er konvergent for $\varepsilon > 0$ (overvej!), sluttes lige som i beviset for Sætning 3.4, at $u(x,y)$ er en C^∞-funktion i $[0,a]\times]0,b]$ og at de partielle afledede af vilkårlig orden fås ved ledvis differentiation af rækken (49). Heraf følger specielt, at u opfylder (42). Da den også tilfredsstiller (43) og (44) pr. konstruktion, er u en løsning til (D_1').

Antages dernæst, at $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$, ses af (50), at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{1-e^{-2\frac{\pi}{a}b}}$ er en konvergent majorantrække for rækken (49) i $\overline{Omega}_{a,b} = [0,a] \times [0,b]$. Vi konkluderer, at u er kontinuert i $\overline{Omega}_{a,b}$, og at u er en løsning til (D_1) ved samme argumenter som for den tilsvarende påstand i beviset for Sætning 3.4. $\square$

Ved brug af multiple Fourier rækker kan Sætning 3.6 generaliseres til $k > 2$ variable i det tilfælde, hvor Ω er en kasse $]0,a_1[\times\cdots\times]0,a_k[$.

Lad os dernæst betragte Dirichlet problemet for en cirkelskive med radius a

$$\Omega_a = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < a^2\} .$$

Vi skal altså løse problemet

$$(D_2)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 , \quad x^2 + y^2 < a^2 & (51) \\ u(x,y) = f(x,y) , \quad x^2 + y^2 = a^2 , & (52) \end{cases}$$

hvor f er en given kontinuert funktion på cirklen $\partial\Omega_a$.

I dette tilfælde kan separation af variable ikke anvendes direkte på grund af Ω_a's form. Benyttes i stedet polære koordinater (r,θ) givet ved

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) ,$$

antager $\Omega_a \setminus \{(0,0)\}$ form af et rektangel $]0,a[\times[-\pi,\pi[$, og man finder (jvf. opg. 3.16), at Laplaces ligning (51) i polære koordinater lyder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 , \tag{53}$$

hvor vi, som det er sædvane, har brugt betegnelsen u også for funktionen $(r,\theta) \to u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, dvs. vi skriver $u(r,\theta)$ i stedet for $u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Løsningen u, som vi søger, kan derfor opfattes som en periodisk C^2-funktion af θ med periode 2π for fast r, $0 < r < a$, for hvilken randbetingelsen (52) antager formen

$$u(a,\theta) = f(\theta) \ , \tag{54}$$

hvor f er en kontinuert periodisk funktion på $\mathbb{R}$ med periode 2π.

Da u er kontinuert i $(x,y) = (0,0)$ må grænseværdien $\lim_{r\to 0} u(r,\theta)$ eksistere og være uafhængig af θ. Specielt må der gælde, at $u(r,\theta)$ er begrænset for $r \to 0$.

Vi anvender nu separation af variable og søger først løsninger til (53) af formen $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, som opfylder sidstnævnte betingelse samt er periodiske med periode 2π i θ. Indsættes i (53) fås

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \ ,$$

som efter division med $u(r,\theta)$ og multiplikation med r^2 giver

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} \ .$$

Ved samme argumenter som tidligere sluttes, at begge sider af denne ligning er lig med en og samme reelle konstant λ, dvs.

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \ \text{ i } \ ]0,a[\tag{55}$$

og

$$\Theta'' = -\lambda\Theta \quad \text{i } \ \mathbb{R} \ . \tag{56}$$

I henhold til ovenstående kræves desuden, at Θ er periodisk med periode 2π, og at $R(r)$ er begrænset for $r \to 0$.

For $\lambda < 0$ overlades det til læseren at eftervise, at kun den trivielle løsning til (56) er periodisk, og at kun de konstante løsninger er periodiske for $\lambda = 0$. For $\lambda > 0$ er det praktisk at skrive den generelle løsning til (56) på formen

$$\Theta(\theta) = Ae^{i\sqrt{\lambda}\theta} + Be^{-i\sqrt{\lambda}\theta} \ , \tag{57}$$

i stedet for ved brug af sin og cos. Da Θ er periodisk, gælder det samme om $\Theta'(\theta) = i\sqrt{\lambda}(Ae^{i\sqrt{\lambda}\theta} - Be^{-i\sqrt{\lambda}\theta})$ og dermed om

$$i\sqrt{\lambda}\Theta(\theta) + \Theta'(\theta) = 2iA\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\theta} \ .$$

Heraf fås $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Z}$, hvis $A \neq 0$, hvoraf $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Den samme konklusion fås, hvis $B \neq 0$. For $\lambda = n^2$ haves ifølge (57) de to lineært uafhængige løsninger

$$e_{\pm n}(\theta) = e^{\pm in\theta} \ , \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

til (56) og for $\lambda = 0$ den ene løsning

$$e_0(\theta) = 1 \; .$$

Indsættes dernæst $\lambda = n^2$ i (55) fås

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0 \quad \text{i} \quad]0, a[\; .$$

For $n > 0$ ses denne ligning at have de to lineært uafhængige løsninger $r^{\pm n}$, $r \in]0, a[$. Da r^{-n} er ubegrænset for $r \to 0$ kommer kun løsningen r^n i betragtning. For $n = 0$ haves de to lineært uafhængige løsninger 1 og $\log r$, af hvilke kun 1 kommer i betragtning. Alt i alt har vi hermed fundet løsningerne

$$u_n(r, \theta) = r^{|n|} e^{in\theta} \; , \quad n \in \mathbb{Z} \; ,$$

til (53), som er periodiske i θ med periode 2π, og som tilfredsstiller regularitetskravet for $r \to 0$.

Vi søger nu en løsning til (D_2) af formen

$$u(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n r^{|n|} e^{in\theta} \; .$$

For $r = a$ fås, at randbetingelsen (54) antager formen

$$f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n a^{|n|} e^{in\theta} \; , \quad \theta \in \mathbb{R} \; .$$

Denne række genkendes som Fourier rækken for f forudsat, at vi sætter $d_n a^{|n|} = c_n(f)$, dvs. $d_n = a^{-|n|} c_n(f)$.

På grundlag heraf kan vi nu vise

Sætning 3.7. *Lad $f \in C([-\pi, \pi])$ (eller mere generelt $f \in \mathcal{L}_2([-\pi, \pi])$). Da er rækken $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in\theta}$ uniformt konvergent i cirkelskiven $\overline{Omega}_{a-\varepsilon}$ for ethvert $\varepsilon > 0$, og sumfunktionen*

$$u(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in\theta} \tag{58}$$

er en løsning til Laplaces ligning i Ω_a.

Hvis f er kontinuert og stykkevis glat på $[-\pi, \pi]$ og $f(-\pi) = f(\pi)$, eller, mere generelt, hvis $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$, så konvergerer rækken (58) uniformt i $\overline{Omega}_a$, og $u(r, \theta)$ er en løsning til (D_2).

Bevis. Som i beviset for Sætning 3.4 konkluderes af Parsevals ligning, at der findes $K \geq 0$, således at $|c_n(f)| \leq K$, $n \in \mathbb{Z}$. Heraf fås, at $\sum_{n \in \mathbb{Z}} K \left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right)^{|n|}$ er en konvergent majorantrække for rækken (58) i $\overline{Omega}_{a-\varepsilon}$ for $\varepsilon > 0$. Altså er rækken (58) uniformt konvergent i $\overline{Omega}_{a-\varepsilon}$ for $\varepsilon > 0$, og $u(r,\theta)$ er veldefineret og kontinuert i Ω_a.

Eftersom

$$r^{|n|}e^{in\theta} = \begin{cases} (x+iy)^n & \text{for} \quad n \geq 0 \\ (x-iy)^{|n|} & \text{for} \quad n < 0 \end{cases}$$

og

$$\frac{\partial(x \pm iy)^n}{\partial x} = n(x \pm iy)^{n-1}\,, \quad \frac{\partial(x \pm iy)^n}{\partial y} = \pm in(x \pm iy)^{n-1} \tag{59}$$

for $n \in \mathbb{N}$ ses, at rækken dannet fra (58) ved ledvis differentiation r gange m.h.t. x og s gange m.h.t. y har rækken $\sum\limits_{|n| \geq r+s} \frac{K}{a^{r+s}}|n|^{r+s}\left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right)^{|n|-(r+s)}$ som majorantrække i $\overline{Omega}_{a-\varepsilon}$. Da sidstnævnte er konvergent for $\varepsilon > 0$ sluttes, at u er en C^∞-funktion i Ω_a og

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n(f)}{a^{|n|}}\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right) = 0\,,$$

idet $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = 0$ som følge af (59) (i $D\backslash\{(0,0)\}$ gælder dette naturligvis pr. konstruktion af u_n).

Vi har hermed vist første del af sætningen. Sidste del vises ved brug af samme argumenter som for de tilsvarende påstande i Sætningerne 3.4 og 3.6 og overlades til læseren. $\square$

På grund af den absolutte konvergens af rækken (58) haves for $r < a$

$$u(r,\theta) = -c_0(f) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)\left(\frac{r}{a}\right)^n e^{in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}(f)\left(\frac{r}{a}\right)^n e^{-in\theta}\,,$$

som ved indsættelse af $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma)e^{-in\sigma}d\sigma$ giver

$$\begin{aligned} u(r,\theta) = -c_0(f) &+ \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma)\left(\frac{r}{a}\right)^n e^{in(\sigma-\theta)}d\sigma \\ &+ \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma)\left(\frac{r}{a}\right)^n e^{-in(\sigma-\theta)}d\sigma\,. \end{aligned}$$

Da rækken $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\sigma)\left(\frac{r}{a}\right)^n e^{\pm in(\sigma-\theta)}$ er uniformt konvergent for $\sigma \in [-\pi,\pi]$, hvis $r < a$, fås heraf ifølge sætningen i Appendiks C om ledvis integration af rækker

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) = &-c_0(f) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}e^{i(\sigma-\theta)}\right)^n d\sigma \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}e^{-i(\sigma-\theta)}\right)^n d\sigma \\
= &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma)\left(\frac{1}{1-\frac{r}{a}e^{i(\sigma-\theta)}} + \frac{1}{1-\frac{r}{a}e^{-i(\sigma-\theta)}} - 1\right) d\sigma \ ,
\end{aligned}
$$

hvoraf

$$
u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ra\cos(\sigma-\theta)} f(\sigma)d\sigma \ . \tag{60}
$$

Denne formel for løsningen til Dirichlet problemet (D_2) kaldes for *Poissons integralformel*. Den er analog til formlen (31) for løsningen til varmeledningsligningen i $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, idet begge udtrykker løsningen u som et integral over randen af det pågældende område af funktionen f multipliceret med en såkaldt integralkerne. I (60) har denne formen

$$
\frac{1}{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ra\cos(\sigma-\theta)} = \frac{1}{2\pi}\frac{|(x',y')|^2-|(x,y)|^2}{|(x',y')-(x,y)|^2} \ ,
$$

hvor $(x',y') = (a\cos\sigma, a\sin\sigma)$, $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ og $|\cdot|$ betegner den euklidiske norm på $\mathbb{R}^2$. Af beviset for Sætning 3.7 (eller ved udregning) følger, at denne integralkerne som funktion af (x,y) er løsning til Laplaces ligning i Ω_a, og vi ser, at på randen $\partial\Omega_a$ svarende til $r \to a$ antager den værdien 0 for $(x',y') \neq (x,y)$, dvs. for $\sigma \neq \theta$, mens den er divergent for $r \to a$, hvis $\sigma = \theta$ (jvf. den tilsvarende egenskab ved integralkernen $u_0(x-y,t)$ i (31)).

Integralformler analoge til (60) er også gældende for løsninger til Dirichlet problemer på højere dimensionale kugler og spiller en vigtig rolle i analysen af såkaldte *harmoniske funktioner*, dvs. funktioner, der tilfredsstiller Laplaces ligning. Disse indgår på væsentlig vis i den matematiske disciplin, der går under navnet *potential teori*.

Opgaver til §3

3.1. 1) Vis, at den homogene bølgeligning i $\mathbb{R}^2$ kan skrives på formen

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = 0 ,$$

hvor de variable ξ og η er givet ved $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$, og hvor $v(\xi, \eta) = u(x, t)$.

2) Vis ved brug af 1), at samtlige løsninger til den homogene bølgeligning i $\mathbb{R}^2$ er af formen (3).

3.2. Lad $g \in C^n(\mathbb{R})$ være periodisk med periode $2L$.

1) Vis, at hvis g er ulige, da er dens k'te afledede $g^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$, periodisk og ulige, hvis k er lige, og at $g^{(k)}$ er periodisk og lige, hvis k er ulige.

2) Vis tilsvarende, at hvis g er lige, da er $g^{(k)}$ periodisk og lige, hvis k er lige, og at den er periodisk og ulige, hvis k er ulige.

Lad nu f være en funktion defineret på $[0, L]$ og lad $\widetilde{f}$ betegne dens ulige periodiske udvidelse, dvs. $\widetilde{f}$ stemmer overens med f på $]0, L[$, er lig med 0 i punkterne pL, $p \in \mathbb{Z}$, og er ulige og periodisk med periode $2L$. Lad endvidere $\tilde{\tilde{f}}$ betegne den lige periodiske udvidelse af f med periode $2L$.

3) Vis, at $\widetilde{f} \in C(\mathbb{R})$, hvis $f \in C([0, L])$ og $f(0) = f(L) = 0$, og at $\tilde{\tilde{f}} \in C(\mathbb{R})$ netop hvis $f \in C([0, L])$.

4) Vis, at $\widetilde{f} \in C^n(\mathbb{R})$ hvis $f \in C^n([0, L])$ og $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(L) = 0$ for k lige, $0 \le k \le n$, (hvor $f^{(0)} = f$).

5) Vis, at $\tilde{\tilde{f}} \in C^n(\mathbb{R})$, hvis $f \in C^n([0, L])$ og $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(L) = 0$ for k ulige, $1 \le k \le n$.

3.3. Betragt problemet

$$(*)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 , & 0 < x < L , \, t > 0 , \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 , & t > 0 , \\ u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 , & 0 \le x \le L . \end{cases}$$

1) Vis, at for $u \in C^2(]0, L[\times]0, +\infty[)$ er

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) - c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right) .$$

2) Vis, ved at integrere begge sider af ligningen i 1) over rektanglet $[0, L] \times [0, T]$, hvor $T > 0$, at hvis u er løsning till $(*)$ (og både $\frac{\partial u}{\partial x}$ og $\frac{\partial u}{\partial t}$ er kontinuerte i $[0, L] \times [0, +\infty[$), da er

$$\tfrac{1}{2} \int_0^L \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, T) \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, T) \right)^2 \right) dx = 0 \ ,$$

og slut derefter at $u = 0$. (Det kan antages, at u er reel.)

3) Vis entydighed af løsningen til bølgeligningen i $[0, L] \times [0, +\infty[$ med rand- og begyndelsebetingelser givet ved (2) og (5).

3.4. Eftervis, at $u(x, t)$ givet som i Sætning 3.2 er løsning til problemet (B).

3.5. Løs bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , \quad 0 < x < 3 \ , \ t > 0 \ ,$$

med randbetingelsen $u(0, t) = u(3, t) = 0$, $t > 0$, og begyndelsesbetingelsen

$$u(x, 0) = \tfrac{1}{4} \sin \pi x \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 10 \sin 2\pi x \ , \ 0 \le x \le 3 \ .$$

3.6. Betragt problemet

$$(**) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , & 0 < x < L \ , \ t > 0 \ , \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \ , & t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \ , & 0 \le x \le L \ . \end{cases}$$

1) Vis, at for $u \in C^2(]0, L[\times]0, +\infty[)$ er

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \tfrac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} + c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - c \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \ .$$

2) Ved at integrere begge sider af ligningen i 1) over rektanglet $[0, L] \times [0, T]$, hvor $T > 0$, skal man vise, at hvis u er en løsning til $(**)$ og $\frac{\partial u}{\partial x}$ antages at være kontinuert i $[0, L] \times [0, +\infty[$, så er

$$\tfrac{1}{2} \int_0^L u^2(x, T) dx + c \int_0^L \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt = 0 \ .$$

Slut heraf at $u = 0$. (Det kan antages at u er reel.)

3) Vis entydighed af løsningen til problemet (V).

3.7. Bestem løsningen til problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, & 0 < x < \pi\,,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, & t > 0 \\ u(x,0) = 4\sin 2x\,, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

3.8. Bestem løsningen til problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, & 0 < x < 1\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\,, & t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x)\,, & 0 \le x \le 1\,. \end{cases}$$

3.9. Løs ved brug af separation af variable problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, & 0 < x < L\,,\ t > 0\,, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0\,, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x)\,, & 0 \le x \le L \end{cases}$$

og diskuter konvergensegenskaberne ved den derved fremkomne række.

3.10. Bestem løsningen til problemet

$$\begin{cases} 5\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, & 0 < x < 1\,,\ t > 0\,, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0\,, & t > 0\,, \\ u(x,0) = 2x\,, & 0 \le x \le 1\,. \end{cases}$$

3.11. 1) (*Maksimumsprincippet*). Antag, at $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ er åben og begrænset, samt at $u \in C(\overline{Omega})$ er C^2 i Ω. Da $\overline{Omega}$ er kompakt antager u en maksimumsværdi i $\overline{Omega}$. Det skal vises, at denne antages på randen $\partial\Omega$, såfremt

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ge 0 \ \text{ i } \ \Omega\,.$$

Vink. Antag først, at $\Delta u \ge \varepsilon > 0$ i Ω, hvor ε er en konstant. Vis da, at u ikke antager maksimumsværdien i noget punkt af Ω. Dermed antages i dette tilfælde altså maksimumsværdien i $\overline{Omega}\backslash\Omega = \partial\Omega$. – Antag så, at $\Delta u \ge 0$ i Ω og betragt funktionen $u_\varepsilon(x,y) = u(x,y) + \frac{\varepsilon}{2}(x^2 + y^2)$ og vis, at $\Delta u_\varepsilon = \Delta u + \varepsilon \ge \varepsilon$ i Ω. Bemærk, at hvis $u \le c$ på $\partial\Omega$, hvor c er en konstant, så er $u_\varepsilon \le c + \frac{1}{2}\varepsilon R^2$ på $\partial\Omega$, hvor $R > 0$ er valgt, således at

$\Omega \subseteq \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$. Vis så ved brug af det lige viste, at $u_\varepsilon \leq c+\frac{1}{2}\varepsilon R^2$ i $\overline{Omega}$ for alle $\varepsilon > 0$ og slut heraf, at $u \leq c$ i $\overline{Omega}$, samt at dette viser det ønskede.

2) Vis ved brug af 1), at hvis $\Delta u = 0$ i Ω og $u = 0$ på $\partial\Omega$, så er $u = 0$.

3) Vis entydighed af løsningen til det generelle Dirichlet problem, når Ω er begrænset.

4) Udvid ovenstående argumenter til vilkårlig dimension.

3.12. Løs ved brug af separation af variable problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, & 0 < x < a\,,\ 0 < y < b\,, \\ u(x,0) = u(x,b) = u(0,y) = 0\,, & 0 \leq x \leq a\,,\ 0 \leq y \leq b \\ u(a,y) = g(y)\,, & 0 \leq y \leq b\,. \end{cases}$$

3.13. Bestem løsningen til problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, & 0 < x < \pi\,,\ 0 < y < \pi\,, \\ u(\pi,y) = u(x,\pi) = u(0,y) = 0\,, & 0 \leq x \leq \pi\,,\ 0 \leq y \leq \pi\,, \\ u(x,0) = \sin^2 x\,, & 0 \leq x \leq \pi\,. \end{cases}$$

3.14. Bestem løsningen til problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, & x^2 + y^2 < 1 \\ u(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta\,, & \theta \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

3.15. Bestem løsningen til problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, & x^2 + y^2 < 4 \\ u(x,y) = x^3\,, & x^2 + y^2 = 4\,. \end{cases}$$

3.16. Vis, at Laplaces ligning i polære koordinater antager formen (53).

§4. Operatorer på Hilbert rum

I denne paragraf og de to efterfølgende udvikles elementer af teorien for lineære afbildninger mellem Hilbert rum. Foruden i sig selv at repræsentere et vigtigt forskningsområde i matematik har denne teori vigtige anvendelser i andre matematiske discipliner såvel som i andre fagområder, eksempelvis i differentialligningsteori (se §7) og i kvantemekanik.

Vi skal mest beskæftige os med begrænsede (dvs. kontinuerte) lineære afbildninger. I stedet for lineær afbildning benyttes tit betegnelsen *operator*, og vi betegner med $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ vektorrummet bestående af begrænsede operatorer fra H_1 ind i H_2, hvor H_1 og H_2 er Hilbert rum over $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Hvis $H_1 = H_2 = H$ skrives $\mathcal{B}(H)$ i stedet for $\mathcal{B}(H, H)$ og en operator $A \in \mathcal{B}(H)$ kaldes en operator på H. Identitetsoperatoren $x \to x$ på H tilhører klart $\mathcal{B}(H)$ og betegnes med I_H eller blot I. Vi erindrer om, at $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ er et normeret vektorrum, idet normen af en operator $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ er givet ved

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid x \in H \, , \, \|x\| \leq 1\} \, ,$$

hvor vi har brugt samme betegnelse $\|\cdot\|$ for normerne i H_1 og H_2. Ifølge Sætning I.4.6 kan $\|A\|$ også karakteriseres som det mindste tal $c \geq 0$, for hvilket

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \, , \quad x \in H_1 \, .$$

$\mathcal{B}(H_1, H_2)$ er ovenikøbet et fuldstændigt normeret vektorrum, jvf. Sætning I.5.12. Vi noterer også, at der for $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ og $B \in \mathcal{B}(H_2, H_3)$ gælder, at $BA \in \mathcal{B}(H_1, H_3)$ og

$$\|BA\| \leq \|B\| \, \|A\| \, ,$$

idet $\|BAx\| = \|B(Ax)\| \leq \|B\| \, \|Ax\| \leq \|B\| \, \|A\| \, \|x\|$ for $x \in H_1$.

Vi begynder i næste afsnit med lineære afbildninger på reelle Hilbert rum af endelig dimension og deres matrixrepræsentationer som en genopfriskning af kendt stof fra Matematik 1. De tilsvarende resultater vedrørende lineære afbildninger på endeligdimensionale komplekse Hilbert rum fås umiddelbart og omtales i afsnit 4.2. Afsnit 4.3 omhandler operatorer mellem vilkårlige uendeligdimensionale (separable) Hilbert rum, hvor matrixrepræsentation normalt ikke er af stor nytte. Vi indfører det vigtige begreb *adjungeret operator*, der svarer til transponeret matrix (suppleret med kompleks konjugering i det komplekse tilfælde). Dette gør det muligt at definere begrebet *selvadjungeret operator* (svarende til symmetrisk matrix). Endelig udgør selvadjungerede operatorer samt *diagonaliserbare operatorer* (svarende til diagonaliserbare matricer) emnet i afsnit 4.4. I afsnit 6.1 omtales yderligere en vigtig klasse af operatorer, de såkaldte *unitære operatorer* (svarende til ortogonale matricer).

4.1 Operatorer på endeligdimensionale reelle Hilbert rum.

Lad i dette afsnit H betegne et reelt Hilbert rum med $\dim H = N < \infty$, og lad $\alpha = (e_1, \ldots, e_N)$ betegne en ortonormalbasis for H. For en given vektor $x \in H$ vil vi med $(x_1, \ldots, x_N)$ betegne dens koordinatsæt m.h.t. α, dvs. $x = x_1 e_1 + \ldots + x_N e_N$, og med $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ den tilsvarende koordinatsøjle.

Vi bemærker, at enhver lineær afbildning $A : H \to H$ er kontinuert. For $x = x_1 e_1 + \ldots + x_N e_N \in H$ haves nemlig

$$Ax = x_1 Ae_1 + \ldots + x_N Ae_N \tag{1}$$

og derfor

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \|x_1 Ae_1 + \ldots + x_N Ae_N\| \\ &\le |x_1| \; \|Ae_1\| + \ldots + |x_N| \; \|Ae_N\| \\ &\le (\|Ae_1\| + \ldots + \|Ae_N\|) \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\} \\ &\le (\|Ae_1\| + \ldots + \|Ae_N\|) \|x\| \; , \end{aligned} \tag{2}$$

hvor vi har benyttet trekantsuligheden samt at $\|x\|^2 = |x_1|^2 + \ldots + |x_N|^2 \ge (\max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\})^2$. Dette viser, at

$$\|A\| \le \|Ae_1\| + \ldots + \|Ae_N\| < \infty \; ,$$

dvs. A er begrænset og dermed kontinuert (jvf. I.4.7).

Som bekendt fra Matematik 1 (se afsnit 6.3 i [M]) repræsenteres en lineær operator $A : H \to H$ af en $N \times N$-matrix $\underline{\underline{A}}$ m.h.t. basen α i den forstand, at sammenhængen mellem koordinatsøjlerne for en vektor $x \in H$ og dens billede $y = Ax$ er givet ved

$$\underline{y} = \underline{\underline{A}} \, \underline{x} \; . \tag{3}$$

Endvidere er matrixmultiplikation defineret således, at hvis operatorerne A, $B \in \mathcal{B}(H)$ repræsenteres af matricerne $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ m.h.t. α, da repræsenteres sammensætningen AB af produktet $\underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{B}}$ m.h.t. α (Theorem 6.13 i [M]).

Eftersom basen α er ortonormal, er matrixelementerne a_{ij}, $1 \le i, j \le N$, i $\underline{\underline{A}}$ givet ved

$$a_{ij} = (Ae_j, e_i) \; , \tag{4}$$

idet jo (1) medfører

$$\begin{aligned} y_i &= (Ax, e_i) \\ &= (x_1 A e_1 + \ldots + x_N A e_N, e_i) \\ &= \sum_{j=1}^{N} (Ae_j, e_i) x_j \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Lad nu A^* betegne operatoren på H, der m.h.t. α repræsenteres af den transponerede matrix $\underline{\underline{A}}^t$ til $\underline{\underline{A}}$. Da er ifølge (4)

$$(Ae_i, e_j) = a_{ji} = (A^* e_j, e_i) = (e_i, A^* e_j) \ ,$$

hvor vi i sidste skridt har benyttet symmetrien af det indre produkt. Da det indre produkt er lineært i begge variable, følger heraf for $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$ og $z = \sum_{j=1}^{N} z_j e_j$ i H, at

$$(Ax, z) = \sum_{i,j=1}^{N} x_i z_j (Ae_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{N} x_i z_j (e_i, A^* e_j) = (x, A^* z) \ . \tag{6}$$

Vi påstår, at gyldigheden af denne ligning for alle $x, z \in H$ medfører, at A^* er entydigt bestemt ved A og altså ikke afhænger af den valgte basis α. Hvis nemlig operatoren B på H tilfredsstiller $(Ax, z) = (x, Bz)$ for alle $x, z \in H$, da er $(x, A^* z - Bz) = 0$ for alle $x, z \in H$, d.v.s. $A^* z - Bz \in H^{\perp} = \{\underline{0}\}$ for alle $z \in H$. Dette viser, at $A^* z = Bz$ for alle $z \in H$, altså at $A^* = B$. Vi kalder operatoren A^* for den *adjungerede operator* til A. Hvis $A = A^*$, siges A at være *selvadjungeret.* Ifølge definitionen af A^* er *de selvadjungerede operatorer på et reelt endeligdimensionalt Hilbert rum netop de operatorer, der m.h.t. en vilkårlig ortonormalbasis repræsenteres af symmetriske matricer.*

Det vides fra Matematik 1 (se afsnit 8.4 i [M]), at enhver symmetrisk $N \times N$-matrix $\underline{\underline{A}}$ kan diagonaliseres m.h.t. en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^N$, dvs. der findes en ortogonal $N \times N$-matrix $\underline{\underline{O}}$, således at

$$\underline{\underline{O}}^{-1} \underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{O}} = \underline{\underline{D}} \ , \tag{7}$$

hvor $\underline{\underline{D}} = \Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ er en $N \times N$-diagonalmatrix med egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ for $\underline{\underline{A}}$ i diagonalen. At $\underline{\underline{O}}$ er ortogonal betyder, at søjlerne (og dermed også rækkerne) i $\underline{\underline{O}}$ udgør en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^N$, hvilket er ækvivalent med, at

$$\underline{\underline{O}}^t\underline{\underline{O}} = \underline{\underline{E}} \,, \tag{8}$$

dvs. at

$$\underline{\underline{O}}^t = \underline{\underline{O}}^{-1} \,. \tag{9}$$

Ligningen (7) udtrykker, at $\underline{\underline{O}}$'s søjler er egensøjler for $\underline{\underline{A}}$. Vi har altså, at der for enhver symmetrisk matrix $\underline{\underline{A}}$ findes en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^N$ bestående af egensøjler for $\underline{\underline{A}}$.

Lad nu $\underline{\underline{A}}$ repræsentere en selvadjungeret operator A m.h.t. basen α som ovenfor, og lad den ortogonale matrix $\underline{\underline{O}} = (o_{ij})$ være valgt i henhold til (7). Vi betegner med $O : H \to H$ operatoren, der repræsenteres af matricen $\underline{\underline{O}}$ m.h.t. α. Tilsvarende betegnes med $D : H \to H$ operatoren, der repræsenteres af $\underline{\underline{D}}$ m.h.t. α, dvs.

$$De_i = \lambda_i e_i \,, \qquad i = 1, \ldots, N \,. \tag{10}$$

Vi har da, at (7) er ækvivalent med

$$O^{-1}AO = D \,, \tag{11}$$

idet jo matricen, der repræsenterer $O^{-1}AO$ m.h.t. α netop er $\underline{\underline{O}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{O}}$.

Tilsvarende er (8) og (9) ækvivalente med

$$O^*O = 1 \tag{12}$$

og

$$O^* = O^{-1} \,. \tag{13}$$

En operator O, der opfylder (13) siges at være *ortogonal. Ortogonale operatorer er altså sådanne, der repræsenteres af ortogonale matricer m.h.t. en vilkårlig ortonormalbasis.*

Sættes

$$f_i = Oe_i \,, \qquad i = 1, \ldots, N \,,$$

fås at

$$(f_i, f_j) = (Oe_i, Oe_j) = (e_i, O^*Oe_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij} \,, \tag{14}$$

hvilket vil sige, at $(f_1, \ldots, f_N)$ er en ortonormalbasis for H. *Ortogonale operatorer afbilder altså ortonormalbaser i ortonormalbaser.*

Af (10) og (11) følger nu, at

$$Af_i = AOe_i = ODe_i = O(\lambda_i e_i) = \lambda_i Oe_i = \lambda_i f_i \; . \tag{15}$$

En vektor $x \in H \setminus \{0\}$, for hvilken billedvektoren Ax er proportional med x, dvs. for hvilken der findes et $\lambda \in \mathbb{R}$, således at

$$Ax = \lambda x \; , \tag{16}$$

kaldes en *egenvektor* for A, og λ kaldes den til x hørende *egenværdi.* Vi kan således konkludere af (14) og (15), at der *for enhver selvadjungeret operator A på et endelig-dimensionalt reelt Hilbert rum findes en ortonormalbasis bestående af egenvektorer for A.* En sådan basis siges at diagonalisere A, idet matricen, der repræsenterer A m.h.t. denne basis netop er diagonalmatricen $\underline{\underline{D}}$, hvis diagonal består af egenværdierne for A.

4.2 Operatorer på endeligdimensionale komplekse Hilbert rum.

Lad i dette afsnit H betegne et endeligdimensionalt komplekst Hilbert rum, og lad igen $\alpha = (e_1, \ldots, e_N)$ være en ortonormalbasis for H.

Ifølge samme argument som i forrige afsnit (se (2)) har vi, at enhver operator $A : H \to H$ er begrænset. Ligeledes følger ved samme udregning som i (5), at en operator $A \in \mathcal{B}(H)$ m.h.t. basen α repræsenteres af den komplekse matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$, hvor

$$a_{ij} = (Ae_j, e_i) \, , \qquad 1 \le i, j \le N \; .$$

Lad A^* betegne operatoren, der m.h.t. basen α repræsenteres af matricen $\underline{\underline{A}}^*$, der opnås fra $\underline{\underline{A}}$ ved dels at transponere og dels kompleks konjugere hvert matrixelement. Vi siger, at $\underline{\underline{A}}^*$ er den *Hermite'sk konjugerede* matrix til $\underline{\underline{A}}$. Da gælder altså, at

$$(Ae_i, e_j) = a_{ji} = \overline{(A^* e_j, e_i)} = (e_i, A^* e_j) \; .$$

For $x = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i e_i$ og $z = \sum\limits_{j=1}^{N} z_j e_j$ i H følger heraf, at

$$(Ax, z) = \sum_{i,j=1}^{N} x_i \overline{z}_j (Ae_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{N} x_i \overline{z}_j (e_i, A^* e_j) = (x, A^* z) \; ,$$

hvoraf det ved samme argument som i forrige afsnit følger, at operatoren A^* er entydigt bestemt ved A. Den kaldes den adjungerede operator til A. Hvis $A = A^*$, siges A at være selvadjungeret. Specielt følger, at hvis A er selvadjungeret, så er $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}$, og vi siger da, at matricen $\underline{\underline{A}}$ er *Hermite'sk*. Det er også sædvanlig sprogbrug at sige, at A er Hermite'sk i stedet for selvadjungeret. Begrebet Hermite'sk for komplekse matricer er således en udvidelse af begrebet symmetrisk for reelle matricer.

Det skal her bemærkes, at regning med komplekse matricer (addition og multiplikation) indføres og opfylder de samme regneregler som for reelle matricer, samt at velkendte begreber som rang og determinant defineres helt analogt, og at sætninger og resultater såvel som beviser for disse kan overføres fra det reelle til det komplekse tilfælde. Vi nøjes her med at nævne, at *en kvadratisk matrix er regulær, eller invertibel, netop hvis dens determinant er forskellig fra nul.* Endvidere bemærkes, at der for en kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$ gælder, at

$$\det \underline{\underline{A}}^* = \overline{\det \underline{\underline{A}}} ,$$

hvilket følger umiddelbart af, at $\det \underline{\underline{A}}^t = \det \underline{\underline{A}}$.

Analogt med begrebet ortogonal operator i det reelle tilfælde siges en operator $U : H \to H$ at være *unitær*, hvis den opfylder

$$U^*U = 1 , \tag{17}$$

dvs.

$$U^* = U^{-1} . \tag{18}$$

Lader vi $\underline{\underline{U}}$ betegne matricen, der repræsenterer U m.h.t. α, er (17) ækvivalent med

$$\underline{\underline{U}}^*\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{E}} . \tag{19}$$

En matrix $\underline{\underline{U}}$, der opfylder (19), kaldes *unitær*. Sådanne matricer udgør den naturlige generalisering af klassen af reelle ortogonale matricer til det komplekse tilfælde. Specielt bemærkes, at (19) er ensbetydende med, at $\underline{\underline{U}}$'s søjler udgør en ortonormalbasis for Hilbert rummet $\mathbb{C}^N$ (betragtet som søjlerum).

Vi bemærker, at ligningen (17) viser, at

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y) , \quad x, y \in H , \tag{20}$$

dvs. U bevarer det indre produkt. Specielt gælder, at U er en isometri, dvs.

$$\|Ux\| = \|x\| , \qquad x \in H . \tag{21}$$

Det følgende resultat viser bl.a., at (21) faktisk er ækvivalent med, at U er unitær.

Sætning 4.1. *Lad $U \in \mathcal{B}(H)$. Følgende fire egenskaber ved U er ækvivalente.*

a) *U er unitær.*
b) *U bevarer det indre produkt.*
c) *U er en isometri.*
d) *U afbilder en ortonormalbasis i en ortonormalbasis for H.*

Bevis. Ovenfor har vi vist a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c).

c) $\Rightarrow$ b): Dette følger ved at benytte polariseringsidentiteten for sesquilinearformerne (x, y) og (Ux, Uy). Såfremt U er en isometri har vi nemlig

$$(Ux, Uy) = \tfrac{1}{4} \sum_{\nu=0}^{3} i^\nu \|U(x + i^\nu y)\|^2 = \tfrac{1}{4} \sum_{\nu=0}^{3} i^\nu \|x + i^\nu y\|^2 = (x, y)$$

for vilkårlige $x, y \in H$.

b) $\Rightarrow$ a): Vi har, at $(Ux, Uy) = (x, y)$ for samtlige $x, y \in H$ netop hvis der gælder at $(x, U^*Uy) = (x, y)$ for samtlige $x, y \in H$, hvilket gælder netop hvis $U^*Uy = y$ for alle $y \in H$. Dette betyder, at $U^*U = 1$ som ønsket.

Vi har hermed vist, at a), b) og c) er ensbetydende.

b) $\Rightarrow$ d): Sættes $f_i = Ue_i$ fås, at

$$(f_i, f_j) = (Ue_i, Ue_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}\,, \quad 1 \le i, j \le N\,,$$

som viser at $(f_1, \ldots, f_N)$ er en ortonormalbasis for H.

d) $\Rightarrow$ c): For $x = x_1e_1 + \ldots + x_Ne_N \in H$ haves

$$\|Ux\|^2 = \|x_1Ue_1 + \ldots + x_NUe_N\|^2 = |x_1|^2 + \ldots + |x_N|^2 = \|x\|^2\,,$$

hvor vi har benyttet Pythagoras sætning to gange. □

Vi bemærker endvidere i tilknytning til Sætning 4.1, at for to givne ortonormalbaser $(e_1, \ldots, e_N)$ og $(f_1, \ldots, f_N)$ for H findes netop én operator U, der afbilder den første på den anden, dvs. for hvilken

$$Ue_i = f_i\,, \qquad i = 1, \ldots, N\,,$$

nemlig operatoren defineret ved

$$U(x_1e_1 + \ldots + x_Ne_N) = x_1f_1 + \ldots + x_Nf_N\,.$$

Denne operator er unitær ifølge Sætning 4.1.

Vi definerer egenvektor og egenværdi for en operator $A \in \mathcal{B}(H)$ som i forrige afsnit (jvf. (16)) bortset fra, at egenværdien nu selvfølgelig skal tilhøre $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$. Ligeledes siges A at være *unitært diagonaliserbar* eller blot diagonaliserbar, såfremt der findes en ortonormalbasis for H bestående af egenvektorer for A. Ækvivalent hermed er, at der findes en ortonormalbasis $(f_1, \ldots, f_N)$ m.h.t. hvilken A repræsenteres af en diagonalmatrix. Hvis nemlig $(f_1, \ldots, f_N)$ er en ortonormalbasis bestående af egenvektorer, så $Af_i = \lambda_i f_i,\ \ i = 1, \ldots, N$, da er

$$a_{ij} = (Af_j, f_i) = (\lambda_j f_j, f_i) = \lambda_j \delta_{ij}\,, \qquad 1 \leq i,j \leq N\,,$$

og hvis omvendt $(f_1, \ldots, f_N)$ er en ortonormalbasis, således at

$$a_{ij} = (Af_j, f_i) = \lambda_j \delta_{ij}\,, \qquad 1 \leq i,j \leq N\,,$$

da er

$$Af_j = \sum_{i=1}^{N} (Af_j, f_i) f_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_j \delta_{ij} f_i = \lambda_j f_j$$

for $1 \leq j \leq N$.

I lyset af diskussionen i forrige afsnit er det naturligt at spørge, om enhver selvadjungeret operator $A \in \mathcal{B}(H)$ er diagonaliserbar. Vi skal se, at dette er tilfældet som følge af et mere generelt resultat, som vises i §5. Det vil deraf endvidere følge, at tillige unitære operatorer er diagonaliserbare i det endeligdimensionale tilfælde.

Lad os imidlertid afslutte dette afsnit med et par simple eksempler.

Eksempel 4.2.

a) Lad H være et 2-dimensionalt komplekst Hilbert rum og lad $\alpha = (e_1, e_2)$ være en ortonormalbasis for H. Vi betragter operatoren $A \in \mathcal{B}(H)$, der m.h.t. α repræsenteres af matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} .$$

Da $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}$, er A selvadjungeret. Vi finder A's egenværdier ved at løse ligningen $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$, idet dette ligesom for reelle matricer betyder, at ligningssystemet $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})\underline{x} = 0$ har en ikke-triviel løsning $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, hvilket igen er ensbetydende med, at vektoren $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ opfylder $Ax = \lambda x$.

Ligningen lyder

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0\,,$$

hvilket giver $\lambda = 0$ eller $\lambda = 2$. For $\lambda = 0$ fås, at ligningen $(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}})\binom{x_1}{x_2} = 0$ er ækvivalent med $x_1 + i\,x_2 = 0$, hvis løsningsmængde er $\left\{t\binom{1}{i} \mid t \in \mathbb{C}\right\}$.

For $\lambda = 2$ fås tilsvarende løsningsmængden $\left\{t\binom{1}{-i} \mid t \in \mathbb{C}\right\}$.

To normerede egensøjler svarende til henholdsvis $\lambda = 0$ og $\lambda = 2$ er da

$$\underline{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\,.$$

Matricen

$$\underline{\underline{U}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

ses at være unitær, og vi slutter, at A er diagonaliserbar, idet

$$\underline{\underline{U}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^{*}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Den unitære operator, der m.h.t. α repræsenteres af $\underline{\underline{U}}$, afbilder basen α i ortonormalbasen $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2)\right)$ bestående af egenvektorer for A.

b) Den reelle matrix

$$\underline{\underline{O}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ses at være ortogonal. Den har ingen reelle egenværdier og er derfor specielt ikke diagonaliserbar over $\mathbb{R}$.

Opfattes den derimod som en kompleks matrix, der repræsenterer en operator O på et 2-dimensionalt komplekst Hilbert rum H m.h.t. en ortonormalbasis $\alpha = (e_1, e_2)$, da er O unitær, og vi finder dens egenværdier af

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{pmatrix} = 0\,,$$

som giver $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$. Tilhørende normerede egensøjler for $\underline{\underline{O}}$ er ligesom i forrige eksempel $\underline{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{i}$ og $\underline{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-i}$.

Idet

$$\underset{=}{U}^*\underset{=}{O}\,\underset{=}{U} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ,$$

sluttes, at O er diagonaliserbar og at $\big(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2)\big)$ er en ortonormalbasis for H, der diagonaliserer O.

4.3 Operatorer på Hilbert rum. Adjungeret operator.

I dette og det følgende afsnit betegner H, H_1 og H_2 vilkårlige separable Hilbert rum over $\mathbb{L}$, hvor $\mathbb{L}$ står for enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Sætninger og resultater formuleres for det meste for det tilfælde, hvor de omtalte Hilbert rum er uendeligdimensionale, men med oplagte modifikationer gælder samtlige resultater i disse afsnit også for det endeligdimensionale tilfælde.

Givet en operator $A \in \mathcal{B}(H)$ og en ortonormalbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ for H defineres som ovenfor matricen

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} , \tag{22}$$

der repræsenterer A m.h.t. $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, ved

$$a_{ij} = (Ae_j, e_i) . \tag{23}$$

For $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j e_j \in H$ haves

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i ,$$

hvor

$$y_i = (Ax, e_i) = \big(\sum_{j=1}^{\infty} x_j Ae_j, e_i\big) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j (Ae_j, e_i) . \tag{24}$$

Vi har her i andet skridt benyttet linearitet og kontinuitet af A til at slutte, at

$$\begin{aligned} Ax &= A\big(\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} x_j e_j\big) = \lim_{N\to\infty} A\big(\sum_{j=1}^{N} x_j e_j\big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} x_j Ae_j = \sum_{j=1}^{\infty} x_j Ae_j , \end{aligned} \tag{25}$$

og i sidste skridt har vi tilsvarende benyttet linearitet og kontinuitet af afbildningen $x \to (x, e_i)$. Af (23) og (24) fremgår, at

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \ ,$$

svarende til (3), og som specielt viser, at matricen (22) fastlægger operatoren A entydigt.

I det uendeligdimensionale tilfælde er matrixregning ikke af stor nytte, bl.a. fordi eksplicitte regninger kun sjældent kan udføres, da uendelige rækker indgår heri. Endvidere bemærkes, at begrebet determinant ikke umiddelbart kan generaliseres til det uendeligdimensionale tilfælde, hvilket indebærer, at den sædvanlige metode til bestemmelse af egenværdier og egenvektorer ikke kan anvendes. Det koordinat uafhængige operatorsynspunkt vil være langt at foretrække, hvilket vi da også vil gøre i det følgende. Lad os først se på et par eksempler på operatorer på uendeligdimensionale Hilbert rum.

Eksempel 4.3. a) Lad $H = \ell_2(\mathbb{N})$. For $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ defineres

$$Ax = (\frac{1}{n} x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ . \tag{26}$$

Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2 \ , \tag{27}$$

følger det, at $Ax \in \ell_2(\mathbb{N})$. Altså defineres der ved (26) en afbildning A fra H ind i H. Det ses umiddelbart (overvej!), at A er lineær, og af (27) følger så, at $\|A\| \leq 1$. Faktisk er $\|A\| = 1$, fordi der i (27) gælder lighedstegn for følgen $(1, 0, 0, \dots)$.

Lad mere generelt $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en *begrænset* (kompleks) talfølge og sæt $\|a\|_u = \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$. For $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ defineres

$$M_a x = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ . \tag{28}$$

Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|^2 \leq \|a\|_u^2 \|x\|^2 \ ,$$

følger det, at $M_a x \in \ell_2(\mathbb{N})$. Altså defineres der ved (28) en afbildning M_a fra H ind i H. Da denne umiddelbart ses at være lineær, viser uligheden ovenfor, at $\|M_a\| \leq \|a\|_u$. Der gælder faktisk, at $\|M_a\| = \|a\|_u$, fordi $M_a e_n = a_n e_n$, hvor e_n betegner den n'te vektor i den naturlige ortonormalbasis for

$\ell_2(\mathbb{N})$, og dermed haves $\|M_a\| \geq \|M_a e_n\| = |a_n|$ for alle $n \in \mathbb{N}$, hvilket giver $\|M_a\| \geq \|a\|_u$.

Opfattes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i (28) som funktoner på $\mathbb{N}$, er operatoren M_a givet ved multiplikation med funktionen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hvorfor den kaldes *multiplikationsoperatoren svarende til følgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bemærk, at med hensyn til den naturlige ortonormalbasis repræsenteres M_a af diagonalmatricen $\Delta(a_1, a_2, \dots)$ (overvej dette!).

b) Lad $H = L_2([a,b])$, hvor $[a,b]$ er et kompakt interval, og lad $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion og sæt

$$M_f g = f \cdot g\ , \quad g \in H\ . \tag{29}$$

Da f er kontinuert, er $f \cdot g$ målelig for $g \in H$, og vi har

$$\int_a^b |f(x)g(x)|^2 dx \leq \|f\|_u^2 \int_a^b |g(x)|^2 dx;. \tag{30}$$

Altså er $f \cdot g \in H$, således at der ved (29) defineres en afbildning M_f fra H ind i H. Da denne klart er lineær, viser (30), at $M_f \in \mathcal{B}(H)$ og at $\|M_f\| \leq \|f\|_u$. Der gælder faktisk at $\|M_f\| = \|f\|_u$ (se Sætning 4.13 nedenfor). Operatoren M_f kaldes *multiplikationsoperatoren hørende til funktionen* f.

c) Lad $H = \ell_2(\mathbb{N})$ og sæt

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

for $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$. Da gælder oplagt, at $T(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$ og at

$$\|T(x_1, x_2, x_3, \dots)\| = \|(0, x_1, x_2, x_3, \dots)\|\ .$$

Endvidere ses umiddelbart, at den således definerede afbildning $T : H \to H$ er lineær. Altså er T en begrænset operator på H med norm 1. T kaldes somme tider *højreforskydningsoperatoren* på $\ell_2(\mathbb{N})$.

d) Lad $H = L_2([-\pi, \pi])$ med sædvanligt indre produkt normaliseret som i §2 og lad $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ betegne ortonormalbasen, hvor $e_n(\theta) = e^{in\theta}$. Idet vi sætter $D = -i\frac{d}{d\theta}$, har vi

$$De_n = ne_n\ ,$$

og D virker naturligvis lineært på $\mathrm{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, som er et tæt underrum af $L_2([-\pi, \pi])$. Imidlertid er D ikke en begrænset operator på dette rum, eftersom $\|D\| \geq \|De_n\| = |n|$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. D kan derfor naturligvis heller ikke udvides til en begrænset operator på hele H. Som vi senere kommer ind på (se Bemærkning 6.9) har D dog en naturlig udvidelse til et større underrum af H.

Mere generelt gælder, at operatorer, i hvis virkning der indgår differentiation, sædvanligvis er ubegrænsede.

e) Lad igen $H = L_2(I)$ hvor I er et kompakt interval og lad $\varphi : I \times I \to \mathbb{C}$ være kontinuert. For $x \in I$ of $f \in H$ defineres

$$(\phi f)(x) = \int_I \varphi(x,y) f(y) dy \ . \tag{31}$$

For ar indse, at $(\phi f)(x)$ hermed er veldefineret bemærkes, at den kontinuerte funktion $\varphi_x : y \to \varphi(x,y)$ tilhører $L_2(I)$ for hvert $x \in I$, og at højresiden af (31) kan opfattes som det indre produkt af φ_x og $\overline{f}$ i H. Af Cauchy-Schwarz' ulighed fås derfor

$$|(\phi f)(x)|^2 \leq \int_I |\varphi(x,y)|^2 dy \cdot \|f\|^2 \ , \tag{32}$$

hvilket specielt viser, at der ved (31) er defineret en begrænset funktion ϕf på I.

Vi viser dernæst, at ϕf er kontinuert. Da $(\phi f)(x) = 0 \ , x \in I$, for $f = \underline{0}$, kan vi antage, at $f \neq \underline{0}$. Først bemærkes, at da $L_2(I) \subseteq L_1(I)$, er f integrabel. Vi sætter $K = \int_I |f(x)| dx$. Lad nu $\epsilon > 0$. Da $I \times I$ er kompakt, følger af Sætning I.6.20, at der findes $\delta > 0$, således at $|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')| < \frac{\epsilon}{K}$ for alle $(x,y), (x',y') \in I \times I$, der opfylder $|x - x'|, |y - y'| < \delta$. Specielt er $|\varphi(x,y) - \varphi(x',y)| < \frac{\epsilon}{K}$ for alle $y \in I$ og alle $x, x' \in I$, for hvilke $|x - x'| < \delta$. Heraf fås

$$|(\phi f)(x) - (\phi f)(x')| \leq \int_I |(\varphi(x,y) - \varphi(x',y)) f(y)| dy \leq \tfrac{\epsilon}{K} \int_I |f(x)| dx = \epsilon \ ,$$

når $|x - x'| < \delta$. Hermed er vist, at ϕf er kontinuert.

Det følger nu af (32), at $\phi f \in H$, og at

$$\|\phi f\|^2 \leq \int_I \int_I |\varphi(x,y)|^2 dy dx \cdot \|f\|^2 \ . \tag{33}$$

Da ϕf klart afhænger lineært af f, har vi hermed vist, at der ved (31) defineres en begrænset operator ϕ på $L_2(I)$, hvis norm opfylder

$$\|\phi\| \leq \Big(\int_I \int_I |\varphi(x,y)|^2 dy dx \Big)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Der gælder her normalt ikke lighedtegn.

Operatoren ϕ kaldes en *integraloperator* og funktionen φ kaldes dens kerne. Operatorer af denne slags spiller en vigtig rolle i differentialligningsteori (se §7).

Vi sigter nu imod for en given begrænset operator A mellem Hilbert rum at definere den adjungerede operator A^*. Det er ikke praktisk at tage udgangspunkt i en matrixrepræsentation af A, da det ikke er klart i det uendeligdimensionale tilfælde, at den Hermite'sk konjugerede matrix repræsenterer en begrænset overalt defineret operator. I stedet vil vi benytte ligningen (6) til at definere A^* (se Sætning 4.5 nedenfor). Først kræves imidlertid lidt forarbejde.

Det duale rum til Hilbert rummet H, som betegnes med H^*, defineres ved

$$H^* = \mathcal{B}(H, \mathbb{L}) \ .$$

Elementerne i H^* er altså kontinuerte lineære funktioner fra H ind i $\mathbb{L}$. Disse kaldes også *kontinuerte linearformer* på H. Defineres for $y \in H$ afbildningen $\ell_y : H \to \mathbb{L}$ ved

$$\ell_y(x) = (x, y) \ , \tag{33}$$

hvor $(\cdot \ , \ \cdot)$ er det indre produkt på H, da er ℓ_y lineær. Ifølge Cauchy-Schwarz ulighed haves

$$|\ell_y(x)| \leq \|x\| \ \|y\| \ , \quad y \in H \ ,$$

hvoraf følger at $\ell_y \in H^*$ og at

$$\|\ell_y\| \leq \|y\| \ . \tag{34}$$

Følgende sætning viser, at alle kontinuerte linearformer på H er af formen (33).

Sætning 4.4. *Lad H være et Hilbert rum over $\mathbb{L}$. Ved $y \to \ell_y$, hvor $\ell_y \in H^*$ er givet ved (33), defineres en bijektiv, isometrisk afbildning af H på H^*, dvs. for hvert $\ell \in H^*$ findes netop én vektor $y \in H$, således at $\ell = \ell_y$, og der gælder at*

$$\|\ell_y\| = \|y\| \ . \tag{35}$$

Bevis. Vi har allerede vist, at der ved $y \to \ell_y$ defineres en afbildning fra H ind i H^*. Ifølge (33) er

$$\ell_{y+z} = \ell_y + \ell_z \ \text{ og } \ \ell_{\lambda y} = \overline{\lambda} \ell_y \tag{36}$$

for $y, z \in H$ og $\lambda \in \mathbb{L}$, hvilket udtrykkes ved at sige, at afbildningen $y \to \ell_y$ er konjugeret lineær.

At den er isometrisk ses som følger. Hvis $y = 0$ er $\ell_y = 0$, så $\|\ell_y\| = \|y\| = 0$. For $y \neq 0$ sættes $x = \|y\|^{-1}y$, således at $\|x\| = 1$. Da

$$|\ell_y(x)| = |(\|y\|^{-1}y, y)| = \|y\|$$

følger det, at $\|\ell_y\| \geq \|y\|$. Sammen med (34) viser dette (35). At (35) er ækvivalent med, at $y \to \ell_y$ er isometrisk, følger nu af (36), idet

$$\|\ell_y - \ell_z\| = \|\ell_{y-z}\| = \|y - z\|$$

for $y, z \in H$.

Da afbildningen $y \to \ell_y$ er isometrisk, er den injektiv. Vi mangler at vise, at den også er surjektiv. Lad hertil $\ell \in H^*$. Vi ønsker da at bestemme $y \in H$, så $\ell = \ell_y$. Hvis $\ell = 0$ kan vi oplagt vælge $y = 0$. Antag derfor at $\ell \neq 0$. Da er $X = \ell^{-1}(\{\underline{0}\}) \neq H$, og da $\{\underline{0}\}$ er et afsluttet underrum af $\mathbb{L}$, er X et afsluttet underrum af H, eftersom ℓ er kontinuert og lineær. Ifølge Sætning 1.15 er da $H = X \oplus X^\perp$ og $X^\perp \neq \{\underline{0}\}$.

Der gælder faktisk, at $X^\perp$ er et en-dimensionalt underrum af H. Vælg nemlig $e \in X^\perp \setminus \{\underline{0}\}$ med $\|e\| = 1$, og lad $z \in X^\perp$ være vilkårlig. Da er $\ell(e) \neq 0$ og

$$\ell(z) = \frac{\ell(z)}{\ell(e)}\ell(e) = \ell\left(\frac{\ell(z)}{\ell(e)}e\right)$$

således at $\ell\left(z - \frac{\ell(z)}{\ell(e)}e\right) = 0$, dvs. $z - \frac{\ell(z)}{\ell(e)}e \in X$. Men da $z, e \in X^\perp$ er også $z - \frac{\ell(z)}{\ell(e)}e \in X^\perp$. Da $X \cap X^\perp = \{\underline{0}\}$, slutter vi at $z = \frac{\ell(z)}{\ell(e)}e$, hvilket viser at e udgør en basis for $X^\perp$.

Enhver vektor i H kan derfor skrives på formen $x + \lambda e$, hvor $x \in X$ og $\lambda \in \mathbb{L}$. Vi har da, at

$$\ell(x + \lambda e) = \ell(x) + \lambda\ell(e) = \lambda\ell(e) = (x + \lambda e, \overline{\ell(e)}e)\ ,$$

således at $\ell = \ell_y$ hvor $y = \overline{\ell(e)}e$. Vi har her brugt lineariteten af ℓ samt at $x \perp e$. $\square$

Bemærk, at (35) er ækvivalent med at

$$\|x\| = \sup\{|(x, y)| \mid \|y\| \leq 1\} \tag{37}$$

for $x \in H$. Til senere brug noterer vi, at der for $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ heraf følger, at

$$\|A\| = \sup\{|(Ax, y)| \mid x \in H_1, y \in H_2\ , \|x\|\ , \|y\| \leq 1\}\ . \tag{38}$$

Vi er nu rede til at indføre den adjungerede operator $A^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ til en operator $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.

Sætning 4.5. *Lad* $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. *Der findes en entydig operator* $A^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ *som opfylder*

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \ , \quad x \in H_1 \ , \ y \in H_2 \ . \tag{39}$$

Der gælder, at

$$\|A\| = \|A^*\| \ . \tag{40}$$

Bevis. Givet $y \in H_2$ har vi, at afbildningen $x \to (Ax, y)$ tilhører H_1^*, da den er sammensat af A og ℓ_y. Ifølge Sætning 4.4 findes derfor en entydig vektor $z \in H_1$, således at

$$(Ax, y) = (x, z) \ , \quad x \in H_1 \ .$$

Da z kun afhænger af y for den givne operator A, defineres der en afbildning $A^* : H_2 \to H_1$ ved at sætte $A^*y = z$. Herved er (39) opfyldt.

At A^* er en lineær afbildning ses som følger. For givne $y, z \in H_2$ haves på den ene side

$$(Ax, y + z) = (x, A^*(y + z)) \ , \quad x \in H_1 \ , \tag{41}$$

og på den anden side

$$\begin{aligned}(Ax, y + z) &= (Ax, y) + (Ax, z) \\ &= (x, A^*y) + (x, A^*z) \\ &= (x, A^*y + A^*z) \ , \quad x \in H_1 \ . \end{aligned} \tag{42}$$

Da A^* er entydigt bestemt ved (39), følger det ved sammenligning af (41) og (42), at

$$A^*(y + z) = A^*y + A^*z \ .$$

Tilsvarende følger

$$A^*(\lambda y) = \lambda A^* y \ ,$$

for $\lambda \in \mathbb{L}$ og $y \in H_1$ af, at der på den ene side gælder, at

$$(Ax, \lambda y) = (x, A^*(\lambda y)) \ ,$$

og på den anden side

$$(Ax, \lambda y) = \overline{\lambda}(Ax, y) = \overline{\lambda}(x, A^*y) = (x, \lambda A^*y)$$

for $x \in H_1$.

At A^* er begrænset og at $\|A\| = \|A^*\|$ følger umiddelbart af (38) og (39).
$\square$

I tilfældet $H_1 = H_2 = H$ siger vi, at en operator $A \in \mathcal{B}(H)$ er *selvadjungeret* såfremt $A = A^*$, hvilket i henhold til (39) betyder, at

$$(Ax, y) = (x, Ay) \ , \quad x, y \in H \ .$$

Selvadjungerede operatorer spiller en særlig rolle i operatorteorien, analog med den, som symmetriske matricer spiller i lineær algebra, som vi skal se i det følgende.

Eksempel 4.6. a) Lad M_a være multiplikationsoperatoren på $\ell_2(\mathbb{N})$ defineret i Eksempel 4.3a. For $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haves

$$(M_a x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{\overline{a_n} y_n} = (x, M_{\overline{a}} y) \ ,$$

hvor $\overline{a} = (\overline{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Altså er

$$M_a^* = M_{\overline{a}} \ .$$

Specielt er M_a selvadjungeret hvis og kun hvis a er en reel talfølge.

b) Lad M_f være multiplikationsoperatoren på $L_2([a,b])$ defineret i Eksempel 4.3b. For $g, h \in L_2([a,b])$ haves

$$(M_f g, h) = \int_a^b f(x) g(x) \overline{h(x)} dx = \int_a^b g(x) \overline{\overline{f(x)} h(x)} dx = (g, M_{\overline{f}} h) \ ,$$

hvoraf følger at

$$M_f^* = M_{\overline{f}} \ ,$$

og specialt at M_f er selvadjungeret hvis og kun hvis f er en reel funktion.

c) Lad ϕ være integraloperatoren på $L_2(I)$ defineret i Eksempel 4.3e). For $f, g \in L_2(I)$ haves

$$\begin{aligned}(\phi f, g) &= \int_I \Big(\int_I \phi(x,y) f(y) dy \Big) \overline{g(x)} dx = \int_I \int_I f(y) \phi(x,y) \overline{g(x)} dy dx \\ &= \int_I \int_I f(y) \overline{\overline{\phi(x,y)} g(x)} dx dy = \int_I \Big(f(x) \overline{\int_I \overline{\phi(y,x)} g(y) dy} \Big) dx \ ,\end{aligned}$$

hvor vi har brugt Fubinis sætning til ombytning af integrationerne. Det fremgår heraf, at

$$(\phi^* g)(x) = \int_I \overline{\phi(y,x)} g(y) dy \ .$$

ϕ^* er altså integraloperatoren på $L_2(I)$, hvis kerne er $\overline{\varphi(y,x)}$.

d) Lad T betegne højreforskydningsoperatoren på $\ell_2(\mathbb{N})$ defineret i Eksempel 4.3c. For $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haves

$$(Tx, y) = x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + x_3\overline{y_4}\ldots = (x, (y_2, y_3, y_4, \ldots)) ,$$

hvoraf fremgår, at

$$T^*y = (y_2, y_3, y_4, \ldots) .$$

Vi kalder T^* for *venstretranslationsoperatoren* på $\ell_2(\mathbb{N})$.

e) Betragt differentialoperatoren D defineret i Eksempel 4.3d. Med samme notation fås, for funktioner $f, g \in \operatorname{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, ved partiel integration

$$\begin{aligned}(Df, g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -i\frac{df}{d\theta}\overline{g(\theta)}d\theta \\ &= \Big[-if(\theta)\overline{g(\theta)}\Big]_{-\pi}^{\pi} + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{\frac{dg}{d\theta}}d\theta = (f, Dg) ,\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet, at det første led efter andet lighedstegn er 0, da f og g er periodiske med periode 2π. Det er muligt at definere den adjungerede til en ubegrænset operator, såsom D. Vi afholder os dog fra at gøre dette her, men nøjes med at bemærke, at på trods af ligningen ovenfor gælder der ikke, at $D = D^*$. D kan dog udvides til en operator $\bar{D}$, således at $\bar{D} = \bar{D}^*$ (se også Bemærkning 6.9).

Vi noterer følgende nyttige regneregler for adjungerede operatorer:

(i) $(A + B)^* = A^* + B^*$, for $A, B \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$
(ii) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^*$, for $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$
(iii) $(BA)^* = A^*B^*$, for $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, $B \in \mathcal{B}(H_2, H_3)$
(iv) $A^{**} = A$, for $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$,

hvor H_1, H_2 og H_3 er (separable) Hilbert rum. Her vises i) og ii) på lignende vis som lineariteten af A^* i beviset for Sætning 4.5 og overlades til læseren. Endvidere følger (iii) af på den ene side

$$(BAx, y) = (x, (BA)^*y)$$

og på den anden side

$$(BAx, y) = (B(Ax), y) = (Ax, B^*y) = (x, A^*(B^*y)) = (x, A^*B^*y)$$

for $x \in H_1$, $y \in H_3$.

Ved at kompleks konjugere begge sider af (39) fås, at

$$(A^*y, x) = (y, Ax) , \quad y \in H_2 , x \in H_1 ,$$

som ved sammenligning med (39) viser, at $A^{**} = A$, hvorved (iv) er vist.

4.4 Diagonaliserbare operatorer og selvadjungerede operatorer på Hilbert rum.

Vi skal nu se, hvorledes begrebet diagonaliserbarhed af en operator, som er velkendt i det endeligdimensionale tilfælde fra Matematik 1, kan formuleres i et vilkårligt separabelt Hilbert rum over $\mathbb{L}$. Fra Matematik 1 vides også, at enhver selvadjungeret operator på et endeligdimensionalt reelt Hilbert rum er diagonaliserbar. Det tilsvarende resultat i det uendeligdimensionale tilfælde (spektralsætningen) kræver en yderligere generalisering af begrebet diagonaliserbarhed end den, vi byder på i disse noter. Vi nøjes med i næste paragraf at vise diagonaliserbarhed for en vis klasse af selvadjungerede operatorer som specielt indebærer, at selvadjungerede og unitære operatorer på et endeligdimensionalt komplekst Hilbert rum er diagonaliserbare. Som en forberedelse omtales i dette afsnit visse grundlæggende egenskaber ved selvadjungerede operatorer.

Definition 4.7. Lad $A \in \mathcal{B}(H)$. Et tal $\lambda \in \mathbb{L}$ siges at være *egenværdi* for A, såfremt der findes en vektor $x \neq \underline{0}$ i H, således at

$$Ax = \lambda x \ . \tag{43}$$

En vektor $x \neq \underline{0}$, der opfylder (43), kaldes en *egenvektor* for A hørende til egenværdien λ, og mængden af samtlige vektorer, der opfylder (43), (altså mængden af egenvektorer og nulvektoren) kaldes *egenrummet* hørende til λ og betegnes med $E_\lambda(A)$.

Defineres *nulrummet* $N(A)$ for en operator $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ved

$$N(A) = \{x \in H_1 \mid Ax = \underline{0}\} \ ,$$

følger det, at $N(A) = A^{-1}(\{\underline{0}\})$ er et afsluttet underrum af H_1, da $\{\underline{0}\}$ er et afsluttet underrum af H_2. Dette følger også af

$$N(A) = (A^*(H_2))^\perp \ ,$$

som er en umiddelbar konsekvens af definitionen af A^*.

Specielt gælder for $A \in \mathcal{B}(H)$, at $\lambda \in \mathbb{L}$ er en egenværdi for A netop hvis

$$N(A - \lambda I) \neq \{\underline{0}\} \ ,$$

og egenrummet $E_\lambda(A) = N(A - \lambda I)$ er et afsluttet underrum af H.

Definition 4.8. En operator $A \in \mathcal{B}(H)$ siges at være (unitært) *diagonaliserbar*, såfremt der findes en ortonormalbasis $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ for H bestående af egenvektorer for A. Ækvivalent hermed er, at A repræsenteres af en diagonalmatrix m.h.t. $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (hvilket ses som i forrige afsnit). Basen $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ siges da at *diagonalisere* A.

Følgende karakterisering af begrænsede diagonaliserbare operatorer er nyttig.

Sætning 4.9. *En operator $A \in \mathcal{B}(H)$ er diagonaliserbar, netop hvis der findes en ortonormalbasis $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ for H og en begrænset følge $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i $\mathbb{L}$, således at*

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, f_i) f_i \,, \quad x \in H \,. \tag{44}$$

Der gælder da, at $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ netop udgør egenværdierne for A (muligvis med gentagelser) og egenrummet hørende til en given egenværdi $\lambda \in \mathbb{L}$ er givet ved

$$E_\lambda(A) = \overline{\operatorname{span}\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\,, \lambda_i = \lambda\}} \,. \tag{45}$$

Endvidere er

$$\|A\| = \sup\{|\lambda_i| \mid i \in \mathbb{N}\} \,. \tag{46}$$

Bevis. Antag, at $A \in \mathcal{B}(H)$ er diagonaliserbar og lad $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis bestående af egenvektorer for A, således at $Af_i = \lambda_i f_i, \; i \in \mathbb{N}$. For $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (x, f_i) f_i \in H$ haves da (se (25))

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} (x, f_i) A f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, f_i) f_i$$

som ønsket. Da

$$|\lambda_i| = \|\lambda_i f_i\| = \|A f_i\| \leq \|A\| \, \|f_i\| = \|A\|$$

for $i \in \mathbb{N}$, har vi også, at

$$\sup\{|\lambda_i| \mid i \in \mathbb{N}\} \leq \|A\| \,. \tag{47}$$

Antag omvendt, at A er givet ved (44), hvor $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ er en ortonormalbasis, og følgen $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ er begrænset, således at

$$\sup\{|\lambda_i| \mid i \in \mathbb{N}\} \equiv M < +\infty \,.$$

Da er

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i (x, f_i)|^2 \leq M^2 \|x\|^2 \ ,$$

hvilket viser, at

$$\|A\| \leq M = \sup\{|\lambda_i| \mid i \in \mathbb{N}\} \ . \tag{48}$$

Ved indsættelse af $x = f_i$ i (44) ses, at

$$Af_i = \lambda_i f_i \ ,$$

så $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ er egenværdier for A.

At der ikke er andre egenværdier ses som følger. Antag, at

$$Ax = \lambda x$$

for givne $\lambda \in \mathbb{L}$ og $x \in H \setminus \{\underline{0}\}$. Da er altså

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, f_i) f_i = \lambda x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda (x, f_i) f_i \ ,$$

hvilket medfører

$$\lambda_i (x, f_i) = \lambda (x, f_i) \, , \qquad i \in \mathbb{N} \ .$$

Da $x \neq \underline{0}$, findes $i_0 \in \mathbb{N}$, så $(x, f_{i_0}) \neq 0$, og det følger at $\lambda = \lambda_{i_0}$, samt at $(x, f_i) = 0$ for $\lambda_i \neq \lambda_{i_0}$. Dette viser (45).

Endelig følger (46) af (47) og (48). $\square$

Eksempel 4.10. Lad H_0 være et afsluttet underrum af H og lad P betegne den ortogonale projektion på H_0, dvs. $Px \in H_0$ er bestemt ved at $x - Px = (1 - P)x \in H_0^{\perp}$ for $x \in H$.

Lad $(f_i)_{i \in I}$ være en ortonormalbasis for H_0 og lad $(f_j)_{j \in J}$ være en ortonormalbasis for $H_0^{\perp}$. Da udgør de to ortonormalbaser tilsammen en ortonormalbasis $(f_i)_{i \in I \cup J}$ for H (og da H er separabelt kan vi antage, at $I \cup J = \mathbb{N}$). Vi har, at

$$Px = \sum_{i \in I} (x, f_i) f_i \, , \qquad x \in H \ , \tag{49}$$

jvf. bemærkningerne efter Sætning 1.15.

Vi har hermed angivet P på formen (44) svarende til, at $\lambda_i = 1$ for $i \in I$ og $\lambda_i = 0$ for $i \in J$. Specielt er 1 og 0 de eneste egenværdier for P, når $I \neq \varnothing$ og $J \neq \varnothing$, og de tilhørende egenrum er henholdsvis H_0 og $H_0^{\perp}$. (For $I = \varnothing$ er $P = 0$ og for $J = \varnothing$ er $P = I$).

Betragtes igen den diagonaliserbare operator A givet ved (44) haves ifølge Eksempel 4.10 specielt, at den ortogonale projektion P_i på det endimensionale underrum $H_i = \operatorname{span}\{f_i\}$ er givet ved

$$P_i x = (x, f_i) f_i \,, \qquad x \in H \,, \tag{50}$$

således at (44) også kan skrives

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i x \,, \qquad x \in H \,, \tag{51}$$

hvilket også udtrykkes ved at skrive

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i \,. \tag{52}$$

Det er værd at bemærke, at rækken i (52) normalt ikke er konvergent i norm, dvs. i Banach rummet $\mathcal{B}(H)$. Dette er faktisk kun tilfældet hvis $\lambda_i \to 0$ for $i \to \infty$. Ellers giver (52) kun mening i kraft af (51).

Eftersom operatoren A givet ved (52) repræsenteres af diagonalmatricen $\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ m.h.t. $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, repræsenteres den adjungerede operator A^* af diagonalmatricen $\Delta(\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \dots)$ m.h.t. $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Altså

$$A^* = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda}_i P_i \,. \tag{53}$$

Specielt er A selvadjungeret, netop hvis dens egenværdier er reelle. Dette er for eksempel tilfældet for ortogonale projektioner, jvf. Eksempel 4.10.

At egenværdierne for en selvadjungeret operator er reelle, gælder generelt (og ikke kun for diagonaliserbare operatorer). Ligeledes gælder, at egenrummene hørende til forskellige egenværdier er ortogonale, hvilket for diagonaliserbare operatorer fremgår af (45) i Sætning 4.9. Dette er indeholdt i følgende lemma.

Lemma 4.11. *Lad $A \in \mathcal{B}(H)$ være selvadjungeret. Da gælder*

a) *Enhver egenværdi for A er reel.*
b) *Hvis λ_1 og λ_2 er to forskellige egenværdier for A, så er de to tilhørende egenrum ortogonale.*
c) *Hvis H_0 er et underrum af H, således at $A\, H_0 \subseteq H_0$, så er $A(H_0^\perp) \subseteq H_0^\perp$.*

Bevis. a) Antag at $Ax = \lambda x$, $x \in H \setminus \{\underline{0}\}$. Da er

$$\lambda \|x\|^2 = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda} \|x\|^2 ,$$

hvoraf følger, at $\lambda = \overline{\lambda}$, da $\|x\| \neq 0$.

b) Antag at $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ og $Ax_2 = \lambda_2 x_2$. Idet $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ifølge a) er

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) &= (\lambda_1 x_1, x_2) - (x_1, \lambda_2 x_2) \\ &= (Ax_1, x_2) - (x_1, Ax_2) \\ &= (x_1, Ax_2) - (x_1, Ax_2) = 0 ,\end{aligned}$$

hvoraf $(x_1, x_2) = 0$, da $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Altså $x_1 \perp x_2$.

c) Lad $x \in H_0^\perp$ og $y \in H_0$. Da er

$$(Ax, y) = (x, Ay) = 0$$

idet $Ay \in H_0$. Da $y \in H_0$ er vilkårlig, følger det, at $Ax \in H_0^\perp$, som ønsket. □

Et underrum H_0 som i Lemma 4.11c kaldes et *invariant underrum* for A. Vi har således, at det ortogonale komplement til et invariant underrum for en selvadjungeret operator $A \in \mathcal{B}(H)$ også er et invariant underrum for A. Hvis H_0 er afsluttet, således at $H = H_0 \oplus H_0^\perp$, betyder dette, at A kan spaltes i to operatorer $A_1 \in \mathcal{B}(H_0)$ og $A_2 \in \mathcal{B}(H_0^\perp)$ i den forstand, at

$$Ax = A_1 x_1 + A_2 x_2$$

for $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in H_0$, $x_2 \in H_0^\perp$. Vi skriver da

$$A = A_1 \oplus A_2 .$$

Som tidligere nævnt sigter vi imod at vise diagonaliserbarhed af en vis klasse af selvadjungerede operatorer. Vi vil gøre dette ved successivt at konstruere egenværdier og egenvektorer. I det endelig-dimensionale tilfælde kan egenværdier findes som rødder i det karakteristiske polynomium. Når H er uendeligdimensionalt, har vi ikke det karakteristiske polynomium til rådighed, så andre metoder må tages i brug. Faktisk findes der selvadjungerede operatorer, som slet ikke har nogen egenværdier i dette tilfælde. Dette illustreres i det næste eksempel.

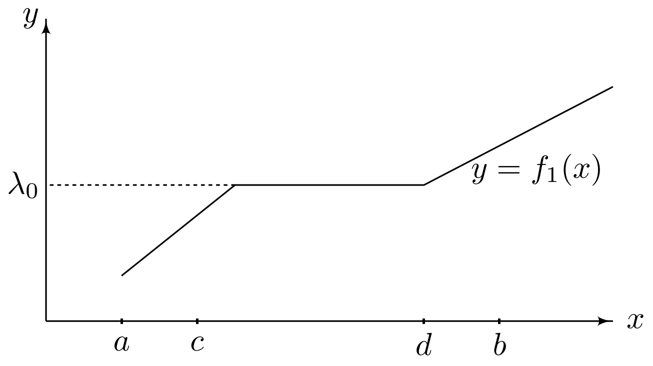
Eksempel 4.12. Lad $H = L_2([a,b])$, hvor $[a,b]$ er et kompakt interval, og lad $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ betegne funktionen

$$f(x) = x\,, \qquad x \in [a,b]\,.$$

Da f er reel, er M_f en selvadungeret operator ifølge Eksempel 4.6b.

At M_f ingen egenværdier har, ses som følger. Antag, at $M_f g = \lambda g$ for et $\lambda \in \mathbb{R}$ og et $g \in H$. Dette betyder, at $(f - \lambda)g = 0$ næsten overalt. Men da $f - \lambda$ er $\neq 0$ næsten overalt, følger det, at $g = 0$ næsten overalt, altså at $g = \underline{0} \in H$, hvilket viser at λ ikke er en egenværdi.

Lad os dernæst betragte multiplikationsoperatoren M_{f_1} hørende til den kontinuerte funktion $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$, hvis graf er antydet på følgende figur,



og som altså er konstant lig med λ_0 på delintervallet $[c,d]$ og ellers strengt voksende. Da er igen M_{f_1} selvadjungeret.

Vi viser, at λ_0 er eneste egenværdi for M_{f_1}. Hvis nemlig $\lambda \neq \lambda_0$, er $f_1 - \lambda \neq 0$ næsten overalt i $[a,b]$, og det følger som før, at λ ikke er egenværdi. Hvis derimod $\lambda = \lambda_0$, da er $f_1 - \lambda = 0$ på $[c,d]$ og ellers $\neq 0$. Heraf følger, at $M_{f_1} g = \lambda_0 g$, netop hvis $g = 0$ næsten overalt i $[a,b] \setminus [c,d]$. Mængden af sådanne funktioner udgør et uendelig-dimensionalt afsluttet underrum af H, som kan identificeres med $L_2([c,d])$, og som altså udgør egenrummet $E_{\lambda_0}(M_{f_1})$.

Vi samler nu vores resultater om multiplikationsoperatorer som følger.

Sætning 4.13. *Lad $[a,b]$ være et kompakt interval. For multiplikationsoperatoren M_f på $H = L_2([a,b])$ hørende til en kontinuert kompleks funktion f på $[a,b]$ gælder*

a) $\|M_f\| = \|f\|_u$
b) $M_f^* = M_{\overline{f}}$
c) $\lambda \in \mathbb{C}$ *er egenværdi for M_f netop hvis $m_1(f^{-1}(\lambda)) > 0$ og $E_\lambda(M_f)$ kan da identificeres med $L_2(f^{-1}(\lambda))$.*

Bevis. I Eksempel 4.3b er vist, at $\|M_f\| \leq \|f\|_u$. For at indse den modsatte ulighed bemærkes, at for vilkårligt $\varepsilon > 0$ er mængden

$$A_\varepsilon = \{x \in [a,b] \mid |f(x)| > \|f\|_u - \varepsilon\}$$

en åben og ikke-tom delmængde af $[a,b]$. Der findes derfor et begrænset åbent ikke-tomt interval I indeholdt i A_ε. Sættes $g_0 = m_1(I)^{-\frac{1}{2}} 1_I$ er derfor $g_0 \in L_2([a,b])$ og $\|g_0\| = 1$, og vi har

$$\begin{aligned}
\|M_f g_0\|^2 &= \int_a^b |f(x)g_0(x)|^2 dx \\
&= \int_{A_\varepsilon} |f(x)g_0(x)|^2 dx \\
&\geq (\|f\|_u - \varepsilon)^2 \int_{A_\varepsilon} |g_0(x)|^2 dx \\
&= (\|f\|_u - \varepsilon)^2 \ .
\end{aligned}$$

Heraf følger, at $\|M_f\| \geq \|f\|_u - \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ var vilkårligt, sluttes derfor, at

$$\|M_f\| \geq \|f\|_u \ ,$$

som ønsket. Hermed er a) vist.

Punkt b) vist i Eksempel 4.6b, og c) vises ved at følge samme fremgangsmåde som i Eksempel 4.12 og overlades til læseren. □

Vi afslutter dette afsnit med at vise en nyttig formel for normen af en selvadjungeret operator på et vilkårligt Hilbert rum, som vi skal gøre brug af i afsnit 5.2.

Lemma 4.14. *Lad $A \in \mathcal{B}(H)$ være selvadjungeret. Da gælder, at*

$$\|A\| = \sup\{|(Ax,x)| \mid \|x\| \leq 1\} \ . \tag{54}$$

Bevis. Betegnes højresiden af (54) med K følger

$$\|A\| \geq K$$

af, at

$$\{|(Ax,x)| \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq \{|(Ax,y)| \mid \|x\|\,,\ \|y\| \leq 1\} \ ,$$

og at $\|A\|$ er lig med supremum af den sidste mængde ifølge (38).

Vi mangler så at vise, at $\|A\| \leq K$. Hertil bemærker vi først, at

$$(Ax, y) + (Ay, x) = \tfrac{1}{2}((A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)) \tag{55}$$

for $x, y \in H$ på grund af linearitet af A og sesquilinearitet af det indre produkt.

Da A er selvadjungeret, er

$$(Ay, x) = (y, Ax) = \overline{(Ax, y)}$$

således at venstresiden af (55) er lig med $2\,\mathrm{Re}(Ax, y)$. Da endvidere

$$|(Ax, x)| = \big|\big(A(\frac{x}{\|x\|}), \frac{x}{\|x\|}\big)\big|\ \|x\|^2 \leq K\|x\|^2\ ,\ x \neq 0\ ,$$

fås derfor af (55), at

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{Re}(Ax, y)| &\leq \tfrac{1}{4}(|(A(x+y), x+y)| + |(A(x-y), x-y)|) \\
&\leq \frac{K}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\
&= \frac{K}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \\
&\leq K
\end{aligned}$$

for alle $x, y \in H$ med $\|x\|$, $\|y\| \leq 1$, hvor vi har benyttet parallellogramloven i næstsidste skridt. Vi påstår, at det heraf følger, at

$$|(Ax, y)| \leq K \quad \text{for} \quad \|x\|\, ,\, \|y\| \leq 1\ . \tag{56}$$

For $(Ax, y) = 0$ er dette selvfølgelig klart, mens vi for $(Ax, y) \neq 0$ kan sætte $\alpha = \mathrm{Arg}(Ax, y)$, således at

$$\begin{aligned}
|(Ax, y)| &= e^{-i\alpha}(Ax, y) \\
&= |\,\mathrm{Re}(Ax, e^{i\alpha}y)| \\
&\leq K\ ,
\end{aligned}$$

da jo

$$\|e^{i\alpha}y\| = \|y\| \leq 1\ .$$

Af (56) og (38) følger, at $\|A\| \leq K$ som ønsket. □

Eksempel 4.12 viser til fulde, at vi ikke kan gøre os håb om at vise en sætning om diagonaliserbarhed af vilkårlige selvadjungerede operatorer i henhold til Definition 4.8. Ikke desto mindre skal vi bevise en sådan sætning i næste paragraf for en klasse af selvadjungerede operatorer, de såkaldte Hilbert-Schmidt operatorer, der er tilstrækkelig omfattende til at have interessante anvendelser, som vi skal se i §7.

Opgaver til §4

4.1. Lad H være et 3-dimensionalt komplekst Hilbert rum og lad $A \in \mathcal{B}(H)$ være operatoren, der m.h.t. en given ortonormalbasis $\alpha = (e_1, e_2, e_3)$ repræsenteres af matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3+i & 2i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 1-i & 2 \end{pmatrix} .$$

Bestem matricen, der repræsenterer A^* m.h.t. α og beregn $A^*(e_1 + ie_2 - e_3)$.

4.2. Lad A være operatoren på $\mathbb{C}^3$, der m.h.t. den naturlige basis repræsenteres af matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Begrund, at A er selvadjungeret, bestem dens egenværdier samt en ortonormalbasis for $\mathbb{C}^3$, der diagonaliserer A.

4.3. Lad H og α være som i opgave 4.1 og lad U være operatoren på H, der m.h.t. α repræsenteres af matricen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6}+\frac{i}{2} & \frac{1}{6}-\frac{i}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6}-\frac{i}{2} & \frac{1}{6}+\frac{i}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

Vis, at U er unitær.

Idet det oplyses, at U har egenværdierne 1, -1, i, skal man bestemme en ortonormalbasis for H, der diagonaliserer U.

4.4. Lad H være et endeligdimensionalt Hilbert rum over $\mathbb{L}$. Vi sætter

$$GL(H) = \{A \in \mathcal{B}(H) \mid A \text{ er invertibel, dvs. } A \text{ er bijektiv}\}$$

og

$$O(H) = \{O \in \mathcal{B}(H) \mid O \text{ er ortogonal}\}\ , \text{hvis } \mathbb{L} = \mathbb{R},$$

og

$$U(H) = \{U \in \mathcal{B}(H) \mid U \text{ er unitær}\}\ , \text{hvis } \mathbb{L} = \mathbb{C}.$$

Vis, at

1) Hvis $A, B \in GL(H)$, da er også $AB \in GL(H)$ og $A^{-1} \in GL(H)$,
2) $O(H) \subseteq GL(H)$ og $U(H) \subseteq GL(H)$,

3) Hvis $A, B \in O(H)$, h.h.v. $A, B \in U(H)$, da er også $AB \in O(H)$ og $A^{-1} \in O(H)$, h.h.v. $AB \in U(H)$ og $A^{-1} \in U(H)$.

Vis også de tilsvarende påstande for $GL(n)$,$O(n)$ og $U(n)$, der betegner mængderne af h.h.v. invertible, ortogonale og unitære $n \times n$-matricer.

$GL(H)$, $O(H)$ og $U(H)$ kaldes henholdsvis den *generelle lineære*, den *ortogonale* og den *unitære gruppe* over H.

4.5. Lad H være et Hilbert rum og lad f være en funktion givet ved en potensrække

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ , \qquad |z| < \rho \ ,$$

hvor $\rho > 0$ er konvergensradius for rækken.

For en operator $A \in \mathcal{B}(H)$ med $\|A\| < \rho$ skal man vise, at $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| \ \|A^n\| < +\infty$, og at rækken $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ er konvergent i Banach rummet $\mathcal{B}(H)$. Summen kaldes da $f(A)$, dvs.

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n \ .$$

Antag nu, at H er endeligdimensionalt og at $\alpha = (e_1, \ldots, e_n)$ er en ortonormalbasis for H, og lad $\underline{\underline{A}}$ være matricen, der repræsenterer A m.h.t. α. Vis så, at rækken $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (\underline{\underline{A}}^n)_{ij}$ er konvergent i $\mathbb{C}$ for alle $1 \leq i, j \leq n$, og at den herved definerede matrix $f(\underline{\underline{A}})$, hvor altså

$$(f(\underline{\underline{A}}))_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\underline{\underline{A}}^n)_{ij} \ ,$$

repræsenterer operatoren $f(A)$ m.h.t. α.

4.6. Lad H, A og f være givet som i opgave 4.5. Vis, at hvis A er diagonaliserbar, således at $A = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i P_i$ med notation som i (58), da er også $f(A)$ diagonaliserbar og

$$f(A) = \sum_{i \in I} f(\lambda_i) P_i \ .$$

4.7. Lad H være et komplekst Hilbert rum og $A \in \mathcal{B}(H)$. Vis, at

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}\ , \quad s, t \in \mathbb{C}\ ,$$

og slut heraf, at e^A er invertibel, samt at

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}\ .$$

Gælder der mon, at $e^{A+B} = e^A e^B$ for vilkårlige $A, B \in \mathcal{B}(H)$?

4.8. Givet et normeret vektorrum V med norm $\|\cdot\|$ siges en afbildning $x : \mathbb{R} \to V$ at være differentiabel i $t_0 \in \mathbb{R}$, såfremt der eksisterer en vektor $a \in V$, således at

$$\|(t-t_0)^{-1}(x(t) - x(t_0)) - a\| \to 0 \ \text{ for } \ t \to t_0\ .$$

Vi betegner da naturligvis a med $x'(t_0)$ eller $\frac{dx}{dt}(t_0)$ og har altså, at

$$\lim_{t \to t_0} (t-t_0)^{-1}(x(t) - x(t_0)) = x'(t_0) \ \text{ i } \ V\ .$$

Vis nu med betegnelser som i opgave 4.7, at afbildningen $t \to e^{tA}$ fra $\mathbb{R}$ ind i $\mathcal{B}(H)$ er differentiabel på $\mathbb{R}$, og at

$$\frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA}\ ; \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

Vis også, at der heraf følger, at afbildningen $x : t \to e^{-itA}x_0$ for hvert $x_0 \in H$ opfylder

$$i\frac{dx}{dt} = Ax(t)\ , \quad x(0) = x_0\ . \tag{$*$}$$

(Hvis A er selvadjungeret, er $(*)$ et særtilfælde af den såkaldte Schrödinger-ligning, der beskriver tidsudviklingen i et kvantemekanisk system, for hvilket energioperatoren A (i passende enheder) er begrænset og tidsuafhængig. I fald A er diagonaliserbar, er A's egenværdier de mulige kvantiserede energiniveauer, og de tilhørende egenvektorer kaldes systemets energiegentilstande.)

4.9. Vis, at der for en ortogonal eller unitær $n \times n$-matrix $\underline{\underline{U}}$ gælder, at $|\det \underline{\underline{U}}| = 1$.

Lad

$$SO(n) = \{O \in O(n) \mid \det O = 1\}$$

og

$$SU(n) = \{U \in U(n) \mid \det U = 1\}\ .$$

Vis, at der for $A, B \in SO(n)$ (hhv. $SU(n)$) gælder, at AB og A^{-1} tilhører $SO(n)$ (hhv. $SU(n)$).

Disse kaldes henholdsvis den *specielle ortogonale* og den *specielle unitære* gruppe.

Vis, at enhver ortogonal 2×2 matrix er af en af formerne

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{$**$}$$

for $\theta \in \mathbb{R}$ og at $SO(2)$ netop udgøres af den første slags. Giv en geometrisk beskrivelse af de lineære operatorer på $\mathbb{R}^2$, som matricerne $(**)$ repræsenterer m.h.t. en ortonormalbasis.

4.10. Lad $\underline{\underline{O}} \in O(3)$ og lad O være den ortogonale operator på $\mathbb{R}^3$, der repræsenteres af $\underline{\underline{O}}$ m.h.t. den naturlige basis. Vis, at det karakteristiske polynomium for $\underline{\underline{O}}$ har en reel rod og derved, at O har en normeret egenvektor e_1 med tilhørende egenværdi $\lambda = \pm 1$.

Suppleres e_1 til en ortonormalbasis (e_1, e_2, e_3) for $\mathbb{R}^3$ skal det vises, at O m.h.t. denne repræsenteres af en matrix af formen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & & \\ & \underline{\underline{O}}_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix} ,$$

hvor $\underline{\underline{O}}_1 \in O(2)$.

Vis herefter ved brug af $(**)$, at hvis $\underline{\underline{O}} \in SO(3)$, da har O en egenvektor e med tilhørende egenværdi 1, og at O kan karakteriseres som en passende rotation omkring aksen gennem $(0,0,0)$ med retningsvektor e. $SO(3)$ kaldes derfor også for rotationsgruppen i 3 dimensioner.

Vis endelig, at en ortogonal operator på $\mathbb{R}^3$ (eller på et vilkårligt tredimensionalt reelt Hilbert rum), enten er en rotation omkring en akse gennem 0 eller en sammensætning af en sådan med spejlingen i 0 (dvs. afbildningen $x \to -x$).

4.11. Lad σ_j, $j = 1, 2, 3$, betegne de såkaldte Pauli matricer givet ved

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Verificer, at

$$\sigma_j^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad j = 1, 2, 3 ,$$

og benyt dette til at beregne $e^{i\theta\sigma_j}$ for $\theta \in \mathbb{C}$ og $j = 1, 2, 3$.

4.12. Lad H være et uendeligdimensionalt separabelt Hilbert rum og lad $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis for H.

Vis, at der findes netop een operator $T \in \mathcal{B}(H)$, således at

$$Te_i = e_{i+1} \ , \quad i \in \mathbb{N} \ ,$$

og at T er en isometri, dvs. $\|Tx\| = \|x\|$, $x \in H$.

Bestem T^* og vis, at

$$T^*T = I \quad \text{og} \quad TT^* \neq I \ .$$

4.13. Vis, at hvis $P \in \mathcal{B}(H)$ opfylder $P^* = P$ og $P^2 = P$, så er P den ortogonale projektion på $X = P(H)$.

4.32

§5. Diagonalisering af Hilbert-Schmidt operatorer

I nærværende paragraf betegner H et separabelt Hilbert rum. Ligesom i afsnit 4.4 formuleres resultater, der gælder for vilkårlige separable Hilbert rum, kun for det tilfælde, hvor H er uendeligdimensionalt, da de tilsvarende resultater for endeligdimensionale Hilbert rum fås ved oplagte modifikationer. Bemærk dog, at Korollarerne 5.6, 5.7, 5.9 og 5.10 kun vedrører det endeligdimensionale tilfælde.

5.1 Hilbert-Schmidt operatorer.

Definition 5.1. En operator $A \in \mathcal{B}(H)$ siges at være en *Hilbert-Schmidt operator*, såfremt matrixelementerne i matricen (a_{ij}), der repræsenterer A m.h.t. en ortonormalbasis for H, er kvadratisk summable, altså hvis

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|^2 < +\infty \,. \tag{1}$$

Lad os først verificere, at gyldigheden af (1) ikke afhænger af valget af ortonormalbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Benyttes ligning (4.23) og Parsevals ligning, har vi for en vilkårlig anden ortonormalbasis $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ for H, at

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|^2 &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} |(Ae_j, e_i)|^2 \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \|Ae_j\|^2 \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} |(Ae_j, f_i)|^2 \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} |(e_j, A^* f_i)|^2 \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \|A^* f_i\|^2 \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} |(f_j, A^* f_i)|^2 \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} |(Af_j, f_i)|^2 \,,
\end{aligned} \tag{2}$$

hvilket dels viser, at kvadratsummen af matrixelementerne er uafhængig af valg af ortonormalbasis, og at den har samme værdi for A og A^*, samt at dens værdi er lig med $\sum_{i\in\mathbb{N}} \|Ae_i\|^2$ for en vilkårlig ortonormalbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Kvadratroden af denne størrelse kaldes *Hilbert-Schmidt normen* af A og betegnes med $\|A\|_2$.

Vi har altså for $A \in \mathcal{B}(H)$, at

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \Big(\sum_{i,j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|^2\Big)^{1/2} \\ &= \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|Ae_i\|^2\Big)^{1/2} , \qquad (3) \\ \|A\|_2 &= \|A^*\|_2 , \qquad (4) \end{aligned}$$

og A er Hilbert-Schmidt netop hvis $\|A\|_2 < +\infty$ (hvor vi i (3) benytter konventionen $(+\infty)^{1/2} = +\infty$). Mængden af Hilbert-Schmidt operatorer på H betegnes med $\mathcal{B}_2(H)$. Det er let at indse, at $\mathcal{B}_2(H)$ er et lineært underrum af $\mathcal{B}(H)$, samt at $\|\cdot\|_2$ er en norm på $\mathcal{B}_2(H)$ (se Opg. 5.1). Endvidere bemærkes, at

$$\|A\| \leq \|A\|_2 \quad \text{for} \quad A \in \mathcal{B}(H) . \qquad (5)$$

Lad nemlig $x \in H \setminus \{\underline{0}\}$, og vælg en ortonormalbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ for H med $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$. Da er

$$\|Ax\| = \|Ae_1\| \, \|x\| \leq \big(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|Ae_i\|^2\big)^{1/2}\|x\| = \|A\|_2\|x\| ,$$

hvoraf (5) følger.

Hvis H er endeligdimensionalt, er det klart, at alle lineære operatorer på H er Hilbert-Schmidt operatorer. Hvis derimod H er uendeligdimensionalt, er $\mathcal{B}_2(H) \neq \mathcal{B}(H)$, idet f.eks. $1 \notin \mathcal{B}_2(H)$. Som følge af kravet (1) kan Hilbert-Schmidt operatorer faktisk approximeres vilkårlig godt i operatornorm med "endeligdimensionale" operatorer, hvilket ses som følger.

Lad Hilbert-Schmidt operatoren A være repræsenteret af matricen (a_{ij}) m.h.t. ortonormabasen $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ og lad, for $N \in \mathbb{N}$, $A^{(N)}$ betegne operatoren, der m.h.t. $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ repræsenteres af matricen $(a_{ij}^{(N)})$ givet ved

$$a_{ij}^{(N)} = \begin{cases} a_{ij} & \text{for} \quad 1 \leq i,j \leq N , \\ 0 & \text{ellers} . \end{cases}$$

Da er $A^{(N)}$ klart en Hilbert-Schmidt operator og kan betragtes som operator på det N-dimensionale underrum $H_N = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_N\}$ af H, i den forstand at

$$A^{(N)}(H_N) \subseteq H_N \quad \text{og} \quad A^{(N)}(H_N^\perp) = \{0\} .$$

Endvidere gælder, at

$$\|A - A^{(N)}\|_2^2 = \sum_{\max\{i,j\}>N} |a_{ij}|^2 \to 0 \tag{6}$$

for $N \to \infty$ ifølge (1), og så meget desto mere

$$\|A - A^{(N)}\| \to 0 \quad \text{for} \quad N \to \infty \tag{7}$$

på grund af (5).

Det er netop denne approximationsegenskab, der i kraft af Lemma 5.3 nedenfor muliggør diagonalisering af selvadjungerede Hilbert-Schmidt operatorer. I lyset af Eksempel 4.12 er det derfor ikke overraskende, at multiplikationsoperatorer generelt ikke er Hilbert-Schmidt operatorer. F.eks. er $M_f : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, hvor $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ er en vilkårlig kontinuert funktion forskellig fra nulfunktionen ikke en Hilbert-Schmidt operator.

Integraloperatorer, som defineret i Eksempel 4.3e, med kontinuert kerne er derimod Hilbert-Schmidt operatorer. Dette vises i følgende sætning, hvor vi også har medtaget tidligere noterede resultater om integraloperatorer.

Sætning 5.2. *Lad I være et kompakt interval. For integraloperatoren ϕ på $L_2(I)$ svarende til en kontinuert funktion $\varphi : I \times I \to \mathbb{C}$ gælder*

a) *ϕ er Hilbert-Schmidt og*

$$\|\phi\|_2 = \Big(\int_I \int_I |\varphi(x,y)|^2 dy dx\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

b) *ϕ^* er lig med integraloperatoren med kerne $(x,y) \to \overline{\varphi(y,x)}$.*
c) *ϕ afbilder $L_2(I)$ ind i $C(I)$.*

Bevis. I Eksempel 4.3e er det vist, at ϕ er begrænset med norm mindre end eller lig med højresiden af (8). Lad $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis for $L_2(I)$. Med samme notation, som i Eksempel 4.3e haves

$$(\phi e_i)(x) = \int_I \varphi(x,y) e_i(y) dy = (\varphi_x, \overline{e}_i)$$

og derfor, idet $(\overline{e}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ også er en ortonormal basis for $L_2(I)$,

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \|\phi e_i\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_I |(\varphi_x, \overline{e}_i)|^2 dx \\
&= \int_I \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |(\varphi_x, \overline{e}_i)|^2\Big) dx \\
&= \int_I \|\varphi_x\|^2 dx \\
&= \int_I \int_I |\varphi(x,y)|^2 dy dx \ ,
\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet Lebesgues monotonisætning (Sætning A.8) i tredie skridt til at ombytte integration over I og summation over $i \in \mathbb{N}$ og Parsevals ligning i fjerde skridt.

Dette viser a). Endelig er b) vist i Eksempel 4.6c, og c) er vist i Eksempel 4.3e.

5.2 Diagonalisering.

Vi skal nu vise det tidligere annoncerede resultat vedrørende diagonalisering af selvadjungerede Hilbert-Schmidt operatorer. Hovedingrediensen i beviset er følgende lemma.

Lemma 5.3. *Lad $A \in \mathcal{B}_2(H)$ og lad $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ være en vilkårlig begrænset følge i H. Da findes en delfølge $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$, således at $(Ax_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent i H.*

Bevis. Vi benytter et såkaldt diagonalargument. Lad $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis for H og vælg $M \geq 0$, så

$$\|x_i\| \leq M \ , \quad i \in \mathbb{N} \ .$$

Da er talfølgen $((Ax_i, e_1))_{i\in\mathbb{N}}$ begrænset, idet

$$|(Ax_i, e_1)| \leq \|Ax_i\| \, \|e_1\| \leq \|A\| \, \|x_i\| \leq M\|A\| \ .$$

Eftersom $\{z \in \mathbb{L} \mid |z| \leq M\|A\|\}$ er kompakt, findes en delfølge $(x_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}$ af $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, således at $((Ax_i^{(1)}, e_1))_{i\in\mathbb{N}}$ er konvergent, dvs.

$$(Ax_i^{(1)}, e_1) \to a_1 \in \mathbb{L} \quad \text{for} \quad i \to \infty \ .$$

Gentages dette argument med følgen $(x_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}$ fås en delfølge $(x_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}}$ af $(x_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}$, således at

$$(Ax_i^{(2)}, e_2) \to a_2 \in \mathbb{L} \quad \text{for} \quad i \to \infty \,.$$

Fortsættes hermed får vi for hvert $n \in \mathbb{N}$ en følge $(x_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$, således at $(x_i^{(n+1)})_{i\in\mathbb{N}}$ er en delfølge af $(x_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ og

$$(Ax_i^{(n)}, e_n) \to a_n \in \mathbb{L} \quad \text{for} \quad i \to \infty \,. \tag{9}$$

Vi sætter nu

$$x_{i_n} = x_n^{(n)} \,, \qquad n \in \mathbb{N} \,.$$

Da er $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ en delfølge af $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, og for hvert $N \in \mathbb{N}$ gælder pr. konstruktion, at $(x_{i_n})_{n\geq N}$ er en delfølge af $(x_i^{(N)})_{i\in\mathbb{N}}$. Heraf følger, at

$$(Ax_{i_n}, e_N) \to a_N \in \mathbb{L} \tag{10}$$

for hvert $N \in \mathbb{N}$ på grund af (9).

Vi skal nu vise, at $\sum\limits_{N=1}^{\infty} |a_N|^2 < +\infty$, således at $\sum\limits_{N=1}^{\infty} a_N e_N$ er konvergent i H, samt at

$$Ax_{i_n} \to \sum_{N=1}^{\infty} a_N e_N \quad \text{for} \quad n \to \infty \,. \tag{11}$$

Hertil bemærkes først, at da

$$|(Ax_{i_n}, e_N)| = |(x_{i_n}, A^* e_N)| \leq \|x_{i_n}\| \, \|A^* e_N\| \leq M \|A^* e_N\| \,, \tag{12}$$

følger det af (10), at

$$|a_N| \leq M \|A^* e_N\| \tag{13}$$

og derfor

$$\sum_{N=1}^{\infty} |a_N|^2 \leq M^2 \sum_{N=1}^{\infty} \|A^* e_N\|_2^2 = M^2 \|A^*\|_2^2 = M^2 \|A\|_2^2 < +\infty \,,$$

da A er Hilbert-Schmidt.

Sættes

$$x = \sum_{N=1}^{\infty} a_N e_N$$

haves

$$
\begin{aligned}
\|Ax_{i_n} - x\|^2 &= \sum_{N=1}^{\infty} |(Ax_{i_n} - x, e_N)|^2 \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} |(Ax_{i_n}, e_N) - a_N|^2 \\
&= \sum_{N=1}^{K} |(Ax_{i_n}, e_N) - a_N|^2 + \sum_{N=K+1}^{\infty} |(Ax_{i_n}, e_N) - a_N|^2 \\
&\leq \sum_{N=1}^{K} |(Ax_{i_n}, e_N) - a_N|^2 + 4M^2 \sum_{N=K+1}^{\infty} \|A^* e_N\|^2 \qquad (14)
\end{aligned}
$$

for alle $K \in \mathbb{N}$, hvor vi i sidste skridt har benyttet, at

$$
|(Ax_{i_n}, e_N) - a_N| \leq |(Ax_{i_n}, e_N)| + |a_N| \leq 2M\|A^* e_N\|
$$

på grund af (12) og (13).

Da nu $\sum\limits_{N=1}^{\infty} \|A^* e_N\|^2$ er konvergent, kan vi for givet $\varepsilon > 0$ vælge $K \in \mathbb{N}$, således at

$$
4M^2 \sum_{n=K+1}^{\infty} \|A^* e_N\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}
$$

og derefter ifølge (10) vælge $N_0 \in \mathbb{N}$, således at

$$
\sum_{N=1}^{K} |(Ax_{i_n}, e_N) - a_N|^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for} \quad N \geq N_0 \, .
$$

Sammen med (14) giver disse to uligheder, at

$$
\|Ax_{i_n} - x\|^2 \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad N \geq N_0 \, ,
$$

hvormed vi har vist, at $Ax_{i_n} \to x$ som ønsket. □

Vi benytter dernæst Lemma 5.3 til at bestemme en egenværdi for A, ifald A er selvadjungeret og tilhører $\mathcal{B}_2(H)$.

Sætning 5.4. *Antag, at A er en selvadjungeret Hilbert-Schmidt operator på H, hvor $H \neq \{0\}$. Da er $\|A\|$ eller $-\|A\|$ (evt. begge) en egenværdi for A.*

Bevis. Ifølge Lemma 4.14 findes en følge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, så $\|x_i\| \leq 1$ for $i \in \mathbb{N}$, og således at $|(Ax_i, x_i)| \to \|A\|$. Ved at udtage en delfølge kan vi antage, at

$$(Ax_i, x_i) \to \lambda \quad \text{for} \quad i \to \infty\ , \tag{15}$$

hvor $\lambda = \|A\|$ eller $\lambda = -\|A\|$.

Da følgen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ er begrænset, kan vi ifølge Lemma 5.3 ved yderligere at udtage en delfølge antage, at følgen $(Ax_i)_{i\in\mathbb{N}}$ er konvergent, dvs.

$$Ax_i \to x \in H \quad \text{for} \quad i \to \infty\ . \tag{16}$$

Vi vil vise, at x er en egenvektor hørende til egenværdien λ for A, såfremt $\lambda \neq 0$. I tilfældet $\lambda = 0$ er påstanden i sætningen triviel, idet så $\|A\| = 0$ og dermed $A = 0$. Så vi antager fra nu af, at $\lambda \neq 0$.

Vi har

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Ax_i - \lambda x_i\|^2 &= \|Ax_i\|^2 - 2\lambda(Ax_i, x_i) + \lambda^2\|x_i\|^2 \\ &\leq \|A\|^2\|x_i\|^2 - 2\lambda(Ax_i, x_i) + \lambda^2\|x_i\|^2 \\ &\leq 2\lambda^2 - 2\lambda(Ax_i, x_i)\ , \end{aligned} \tag{17}$$

hvor vi dels har benyttet, at A er selvadjungeret og dels at $\|x_i\| \leq 1$ samt at $\lambda^2 = \|A\|^2$. Benyttes nu (15), følger det, at

$$\|Ax_i - \lambda x_i\| \to 0 \quad \text{for} \quad i \to \infty\ .$$

Men da $Ax_i \to x$ fås heraf, at

$$\lambda x_i \to x \tag{18}$$

for $i \to \infty$. Da A er kontinuert, medfører (18), at

$$\lambda A x_i = A(\lambda x_i) \to Ax\ .$$

På den anden side medfører (16), at $\lambda A x_i \to \lambda x$, så vi konkluderer, at

$$Ax = \lambda x\ .$$

Der mangler så kun at konstatere, at $x \neq 0$, idet ellers $|(Ax_i, x_i)| \leq \|Ax_i\|\|x_i\| \leq \|Ax_i\|$ sammen med (15) og (16) ville medføre at $\lambda = 0$, hvilket vi har antaget ikke er tilfældet. □

Vejen er hermed klargjort til at vise den ønskede sætning om diagonaliserbarhed af selvadjungerede Hilbert-Schmidt operatorer.

Sætning 5.5. *Enhver selvadjungeret Hilbert-Schmidt operator på H er diagonaliserbar.*

Bevis. Ifølge Sætning 5.4 findes en egenværdi $\lambda_1 = \pm\|A\|$ med tilhørende normeret egenvektor e_1 for A. Lad $H_1 = \operatorname{span}\{e_1\}$. Da er klart $A(H_1) \subseteq H_1$ og derfor $A(H_1^\perp) \subseteq H_1^\perp$ ifølge Lemma 4.11c. Vi sætter

$$A_1 = A\Big|_{H_1^\perp} .$$

Vælges en ortonormalbasis $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ for $H_1^\perp$, er $(e_1, x_1, x_2, \dots)$ en ortonormalbasis for H, og det følger, at A_1 er en selvadjungeret Hilbert-Schmidt operator på $H_1^\perp$ med

$$\begin{aligned}\|A\|_2^2 &= \|Ae_1\|^2 + \sum_{i\in\mathbb{N}} \|Ax_i\|^2 \\ &= |\lambda_1|^2 + \|A_1\|_2^2 .\end{aligned}$$

Yderligere har vi, at

$$\|A_1\| \leq \|A\| = |\lambda_1| .$$

Vi kan nu gentage argumentet med A_1 i stedet for A og få en egenværdi λ_2 for A_1, og dermed for A, hvor

$$|\lambda_2| = \|A_1\| \leq |\lambda_1| ,$$

samt en tilhørende normeret egenvektor $e_2 \in H_1^\perp$. Sættes $H_2 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ er $A(H_2) \subseteq H_2$ og derfor $A(H_2^\perp) \subseteq H_2^\perp$ ifølge Lemma 4.11c. Sættes

$$A_2 = A_1\Big|_{H_2^\perp} = A\Big|_{H_2^\perp}$$

fås ligesom før, at A_2 er en selvadjungeret Hilbert-Schmidt operator på $H_2^\perp$, og at

$$\|A\|_2^2 = |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \|A_2\|_2^2 ,$$

samt

$$\|A_2\| \leq \|A_1\| = |\lambda_2| .$$

Fortsættes på denne måde finder vi en følge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ (som er endelig hvis $\dim H < +\infty$) af egenværdier for A, der opfylder

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots . \tag{19}$$

For de tilhørende normerede og parvis ortogonale egenvektorer $e_1, e_2, e_3, \dots$ gælder, at hvis vi for $N \in \mathbb{N}$ sætter

$$H_N = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_N\} , \tag{20}$$

da er $A(H_N) \subseteq H_N$ og derfor $A(H_N^\perp) \subseteq H_N^\perp$, og det følger, at

$$\|A\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N} |\lambda_i|^2 + \|A_N\|_2^2 \,, \tag{21}$$

hvor

$$A_N = A\Big|_{H_N^\perp} \,, \tag{22}$$

samt at

$$\|A_N\| \leq \|A_{N-1}\| = |\lambda_N| \,. \tag{23}$$

Af (21) følger, at $\sum\limits_{i=1}^{N} |\lambda_i|^2 \leq \|A\|_2^2$ for alle $N \in \mathbb{N}$ og derfor

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \leq \|A\|_2^2 < \infty \,.$$

Men heraf følger specielt, at $|\lambda_N| \to 0$ for $N \to \infty$ og derfor ifølge (23) også, at

$$\|A_N\| \to 0 \quad \text{for} \quad N \to \infty \,. \tag{24}$$

Lader vi nu P_i betegne den ortogonale projektion på e_i (se ligning (4.50)), har vi, at

$$A\Big|_{H_N} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i\Big|_{H_N}$$

og derfor ifølge (22) og (24) at

$$\|A - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i\| = \|A_N\| \to 0 \quad \text{for} \quad N \to \infty \,,$$

hvilket vil sige at $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i P_i$ er konvergent i $\mathcal{B}(H)$, og at

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i \,. \tag{25}$$

Specielt fås, at

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i x \,, \qquad x \in H \,, \tag{26}$$

idet
$$\|Ax - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i x\| \leq \|A - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i\| \, \|x\| \to 0 \text{ for } N \to \infty \, .$$

Genkalder vi ligning (4.51), viser dette netop, at A er diagonaliserbar med egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ samt eventuelt 0, idet vektorer tilhørende $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}^\perp \setminus \{\underline{0}\}$ vil tilhøre nulrummet for A, altså være egenvektorer hørende til egenværdien 0. $\square$

Da $\mathcal{B}_2(H) = \mathcal{B}(H)$, hvis $\dim H < +\infty$, noterer vi som lovet i begyndelsen af afsnit 4.4 følgende konsekvens af Sætning 5.5.

Korollar 5.6. *Enhver selvadjungeret operator på et endeligdimensionalt Hilbert rum er diagonaliserbar.*

Ækvivalent hermed er, jvf. afsnittene 4.1 og 4.2,

Korollar 5.7. *For enhver Hermite'sk (hhv. reel og symmetrisk) $n \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ findes en unitær (hhv. ortogonal) $n \times n$-matrix $\underline{\underline{U}}$, således at $\underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{U}}$ er en diagonalmatrix.*

Tilsvarende sætninger gælder for unitære operatorer og matricer i det komplekse tilfælde. For at vise dette har vi brug for følgende simple udvidelse af Sætning 5.5.

Sætning 5.8. *Antag, at H er et komplekst separabelt Hilbert rum og lad A være en Hilbert-Schmidt operator på H, der opfylder*

$$A\,A^* = A^*A \, . \tag{27}$$

Da er A diagonaliserbar.

Bevis. Vi bemærker, at

$$A = \tfrac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*) \, , \tag{28}$$

hvor operatorerne

$$U = \tfrac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{og} \quad V = \frac{1}{2i}(A - A^*) \tag{29}$$

er selvadjungerede. De er også Hilbert-Schmidt operatorer, da A og A^* begge er Hilbert-Schmidt operatorer, og $\mathcal{B}_2(H)$ som tidligere nævnt er et underrum af $\mathcal{B}(H)$. Desuden har vi som følge af (27), at

$$UV = VU \, . \tag{30}$$

Lad nu λ_j, $j \in J$, betegne de indbyrdes forskellige egenværdier for U. For $x \in E_{\lambda_j}(U)$ har vi da

$$UVx = VUx = V(\lambda_j x) = \lambda_j Vx \ ,$$

hvilket viser, at $Vx \in E_{\lambda_j}(U)$. Altså er $E_{\lambda_j}(U)$ et afsluttet invariant underrum for V. $V\big|_{E_{\lambda_j(U)}}$ kan derfor betragtes som en operator på Hilbert rummet $E_{\lambda_j}(U) \subseteq H$ (med indre produkt arvet fra H) og er oplagt selvadjungeret og Hilbert-Schmidt. Ifølge Sætning 5.5 findes derfor en ortonormalbasis $(e_i)_{i\in I_j}$ for $E_{\lambda_j}(U)$ bestående af egenvektorer for V. Disse er selvfølgelig også egenvektorer for U (med egenværdi λ_j). Ifølge Lemma 4.11b udgør disse ortonormalbaser for $j \in J$ tilsammen et ortonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$, hvor $I = \bigcup\limits_{j\in J} I_j$, i H. Vi viser, at dette sæt er maksimalt: Antag, at $x \in H$, og at $(x, e_i) = 0$ for alle $i \in I$. Da er x ortogonal på alle egenrummene for U, og derfor specielt på samtlige vektorer i en ortonormalbasis for H, som diagonaliserer U, og som findes ifølge Sætning 5.5. Men dette medfører ifølge Sætning 1.14, at $x = 0$, og af samme konkluderes derfor, at sættet $(e_i)_{i\in I}$ er maksimalt.

Vi har hermed fundet en ortonormalbasis for H bestående af fælles egenvektorer for U og V, og disse er ifølge (28) og (29) da også egenvektorer for A. Altså er A diagonaliserbar. $\square$

Da enhver unitær operator opfylder (27), har vi som påstået følgende resultat.

Korollar 5.9. *Enhver unitær operator på et endeligdimensionalt komplekst Hilbert rum er diagonaliserbar.*

Og som følge heraf fås

Korollar 5.10. *For enhver unitær $n \times n$-matrix $\underline{\underline{U}}$ findes en unitær $n \times n$-matrix $\underline{\underline{U}}_0$, således at $\underline{\underline{U}}_0^{-1}\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{U}}_0$ er en diagonalmatrix.*

Som Eksempel 4.2b viser, gælder det tilsvarende resultat, hvor $\underline{\underline{U}}$ og $\underline{\underline{U}}_0$ erstattes af ortogonale matricer, ikke.

Endelig skal det nævnes, at operatorer A for hvilke Lemma 5.3 gælder, kaldes *kompakte*, idet sætningen ved nærmere eftertanke udtrykker, at A afbilder enhver begrænset mængde på en mængde hvis afslutning er kompakt. Selv om vi i beviset for Sætning 5.5 også benyttede særlige egenskaber ved Hilbert-Schmidt operatorer, kan dette undgås med noget mere arbejde, hvorved diagonaliserbarhed kan vises for vilkårlige selvadjungerede kompakte operatorer. Vi henviser til kurset Mat 3AN for en diskussion heraf.

Opgaver til §5

5.1. a) Vis, at $\mathcal{B}_2(H)$ udgør et underrum af $\mathcal{B}(H)$, samt at $\|\cdot\|_2$ er en norm på $\mathcal{B}_2(H)$.

b) Vis, at hvis $A \in \mathcal{B}(H)$ og $B \in \mathcal{B}_2(H)$, da er AB og BA Hilbert-Schmidt operatorer, og der gælder $\|AB\|_2 \leq \|A\|\|B\|_2$ og $\|BA\|_2 \leq \|A\|\|B\|_2$.

5.2. Lad f være en kontinuert funktion på det kompakte interval $[a,b]$, hvor $a < b$. Vis, at multiplikationsoperatoren M_f på $L_2([a,b])$ er en Hilbert-Schmidt operator, hvis og kun hvis $f = 0$.

5.3. Lad X være et afsluttet underrum af H og lad P være den ortogonale projektion på X.

Under hvilke omstændigheder er P en Hilbert-Schmidt operator?

5.4. Lad $H = L_2([a,b])$ og antag, at underrummet X af H er udspændt af et endeligt antal kontinuerte funktioner $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ på $[a,b]$.

Vis, at den ortogonale projektion på X er en integraloperator, hvis kerne er kontinuert.

5.5. Lad I være et kompakt interval, ρ en kontinuert positiv funktion på I og φ en kontinuert funktion på $I \times I$.

Vis, at der ved

$$(\Phi f)(x) = \int_I \varphi(x,y) f(y) \rho(y) dy \ , \quad f \in L_2(I,\rho) \ ,$$

defineres en begrænset operator på Hilbert rummet $L_2(I,\rho)$. Denne kaldes integraloperatoren på $L_2(I,\rho)$ med kerne φ.

Vis, at Φ er en Hilbert-Schmidt operator og bestem $\|\Phi\|_2$.

Vis endelig, at Φ^* er integraloperatoren på $L_2(I,\rho)$ med kerne $\varphi(y,x)$.

§6. Unitære operatorer på Hilbert rum og Fourier transformationen.

6.1 Unitære operatorer.

Vi skal i dette afsnit udvide definitionen af ortogonale og unitære operatorer på endeligdimensionale Hilbert rum, som omtalt i afsnittene 4.1 og 4.2, til at omfatte operatorer mellem vilkårlige separable Hilbert rum. Vigtigheden af disse begreber i det følgende er bl.a. deres sammenhæng med skift af koordinater, dvs. overgang fra én ortonormalbasis til en anden, idet ortogonale, hhv. unitære, operatorer er sådanne, der afbilder ortonormalbaser i ortonormalbaser (jvf. Sætning 6.2). Idet vi genkalder ligningerne (4.13) og (4.18) defineres de som følger.

Definition 6.1. Lad H_1 og H_2 være reelle, hhv. komplekse, Hilbert rum. En begrænset operator $U : H_1 \to H_2$ siges at være ortogonal, hhv. unitær, såfremt den er bijektiv og

$$U^{-1} = U^* \ . \tag{1}$$

Eller, sagt med andre ord, såfremt der gælder, at

$$U^*U = I_{H_1} \quad \text{og} \quad UU^* = I_{H_2} \ , \tag{2}$$

(hvor I_{H_i} betegner identitetsoperatoren på H_i, $i = 1, 2$).

Af praktiske grunde benytter vi tit i det følgende betegnelsen unitær både i det reelle og i det komplekse tilfælde, hvor det er underforstået, at et resultat er gyldigt i begge tilfælde.

Vi bemærker, at den første af ligningerne i (2) medfører, at U er injektiv: Hvis $x \in H_1$ så $Ux = \underline{0}$, fås at $x = U^*Ux = U^*\underline{0} = \underline{0}$. Den anden ligning i (2) medfører tilsvarende, at U er surjektiv: Givet $y \in H_2$ er $y = UU^*y = U(U^*y)$, så $y \in U(H_1)$. Herefter medfører hver af ligningerne i (2) at $U^{-1} = U^*$. Specielt følger det, at operatoren U er unitær, hvis og kun hvis den er surjektiv og opfylder $U^*U = I_{H_1}$ (eller er injektiv og opfylder $UU^* = I_{H_2}$). Endvidere bemærkes, at hvis H_1 og H_2 er endeligdimensionale og $\dim H_1 = \dim H_2$, da følger det af dimensionssætningen (Theorem 6.27 i [M]), at en lineær afbildning $U : H_1 \to H_2$ er injektiv netop hvis den er surjektiv, så i dette tilfælde er de to ligninger i (2) ækvivalente og er hver for sig ensbetydende med, at U er unitær (jvf. ligningerne (4.12) og (4.17)).

Den følgende sætning, der giver en række ækvivalente betingelser for, at en operator er unitær, er analog til Sætning 4.1 i afsnit 4.2.

Sætning 6.2. *Lad $U : H_1 \to H_2$ være en begrænset operator, hvor H_1 og H_2 er Hilbert rum over $\mathbb{L}$ (= $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Da er følgende fem betingelser ækvivalente.*

a) *U er unitær.*
b) *U er surjektiv og $U^*U = I_{H_1}$.*
c) *U er surjektiv og bevarer det indre produkt, dvs. $(Ux, Uy) = (x, y)$, for alle $x, y \in H_1$ (hvor $(\cdot\,,\,\cdot)$ betegner det indre produkt både på H_1 og på H_2).*
d) *U er surjektiv og isometrisk, dvs. $\|Ux\| = \|x\|$, $x \in H_1$.*
e) *U afbilder en ortonormalbasis for H_1 i en ortonormalbasis for H_2.*

Bevis. At a) $\Leftrightarrow$ b) er bemærket ovenfor. At b), c) og d) er ækvivalente, følger ved brug af de samme argumenter som i beviset for Sætning 4.1.

c) $\Rightarrow$ e): Vi antager, at U er surjektiv og bevarer det indre produkt og lader $(e_i)_{i\in I}$ være en ortonormalbasis for H_1. Det er da klart, at $(Ue_i)_{i\in I}$ er et ortonormalsystem i H_2. At det også er maksimalt følger af, at U er surjektiv: Lad $y \in H_2$ således at $(y, Ue_i) = 0$ for alle $i \in \mathbb{N}$. Vælg $x \in H_1$ så $y = Ux$. Da haves, at

$$(x, e_i) = (Ux, Ue_i) = (y, Ue_i) = 0 \quad \text{for alle} \quad i \in \mathbb{N} \ ,$$

og derfor $x = \underline{0}$ ifølge Sætning 1.14. Men heraf fås, at $y = Ux = U\underline{0} = \underline{0}$. Altså er sættet $(Ue_i)_{i\in I}$ maksimalt, og derfor ifølge Sætning 1.14 en ortonormalbasis for H_2.

e) $\Rightarrow$ d): Vi antager, at $(e_i)_{i\in I}$ er en ortonormalbasis for H_1, således at $(f_i)_{i\in I}$ er en ortonormal basis for H_2, hvor $f_i = Ue_i$, $i \in I$. Da U er kontinuert og lineær, har vi for enhver vektor $x = \sum\limits_{i\in I} a_i e_i \in H_1$, hvor $\sum\limits_{i\in I} |a_i|^2 < \infty$, at

$$U\big(\sum_{i\in I} a_i e_i\big) = \sum_{i\in I} a_i U e_i = \sum_{i\in I} a_i f_i \ . \tag{3}$$

Heraf følger, at U er surjektiv, da enhver vektor $y \in H_2$ kan skrives på formen $y = \sum_{i\in I} a_i f_i$, hvor $\sum\limits_{i\in I} |a_i|^2 < \infty$. Ligeledes følger det, at U er isometrisk, idet

$$\|Ux\|^2 = \|\sum_{i\in I} a_i f_i\|^2 = \sum_{i\in I} |a_i|^2 = \|\sum_{i\in I} a_i e_i\|^2 = \|x\|^2 \ ,$$

ifølge Parsevals ligning.

Dette afslutter beviset for sætningen. $\square$

I forlængelse af sætningens punkt e) bemærkes, at for givne ortonormalbaser $(e_i)_{i\in I}$ og $(f_i)_{i\in I}$ for henholdsvis H_1 og H_2, som altså enten begge er uendeligdimensionale, separable Hilbert rum eller endeligdimensionale af samme dimension, findes der netop een begrænset lineær operator $U : H_1 \to H_2$, således at $Ue_i = f_i,\ \ i \in I$. Nemlig operatoren defineret ved (jvf. (3) ovenfor)

$$U\Big(\sum_{i\in I} a_i e_i\Big) = \sum_{i\in I} a_i f_i \ , \tag{4}$$

for $\sum\limits_{i\in I} |a_i|^2 < \infty$, og denne operator er unitær ifølge e) i Sætning 6.2. Ligningen (4) udtrykker, at U afbilder en vektor $x \in H_1$ i vektoren $y \in H_2$, hvis koordinatsæt $(a_i)_{i\in I}$ m.h.t. $(f_i)_{i\in I}$ er det samme som koordinatsættet for x m.h.t. $(e_i)_{i\in I}$, og er ækvivalent med

$$Ux = \sum_{i\in I} (x, e_i) f_i \ , \tag{5}$$

idet jo $x = \sum_{i\in I}(x, e_i)e_i$ for $x \in H_1$. De unitære operatorer U fra H_1 på H_2 er altså netop de operatorer, der kan skrives på formen (5) for passende valg af ortonormalbaser $(e_i)_{i\in I}$ og $(f_i)_{i\in I}$ for henholdsvis H_1 og H_2.

Vi skal nu se på et par vigtige særtilfælde. Lad først $H_1 = H$ være et separabelt Hilbert rum og vælg en ortonormalbasis $(e_i)_{i\in I}$ for H, hvor altså I er endelig eller tællelig. Lad endvidere $H_2 = \ell_2(I)$. Her er $\ell_2(I)$ defineret analogt med $\ell_2(\mathbb{N})$ i Eksempel 1.9 og består altså af de funktioner $x : I \to \mathbb{L}$, som opfylder

$$\sum_{i\in I} |x_i|^2 < +\infty \ ,$$

hvor vi har sat $x(i) = x_i$ for $i \in I$. Det indre produkt er givet ved

$$((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} x_i \overline{y_i} \ ,$$

idet vi benytter betegnelserne $(x_i)_{i\in I}$ og $(y_i)_{i\in I}$ for $x, y \in \ell_2(I)$. At $\ell_2(I)$ er et Hilbert rum følger ganske som i Eksempel 1.9. Bemærk, at hvis I er endelig med n elementer, så kan $\ell_2(I)$ identificeres med $\mathbb{L}^n$. Med $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ betegnes den naturlige ortonormalbasis for $\ell_2(I)$ givet ved

$$(\varepsilon_i)_j = \begin{cases} 1 & \text{hvis} \quad i = j \\ 0 & \text{hvis} \quad i \neq j \end{cases}$$

for $i, j \in I$. Svarende hertil fås ved fastsættelsen (5) med $f_i = \varepsilon_i,\ \ i \in I$, operatoren $U : H \to \ell_2(I)$, som er givet ved

$$Ux = ((x, e_i))_{i\in I} \ , \quad x \in H \ , \tag{6}$$

dvs. *U afbilder $x \in H$ i koordinatsættet for x m.h.t. $(e_i)_{i\in I}$ og er altså unitær* ifølge Sætning 6.2.

Dette kan benyttes til at give en alternativ karakterisering af diagonaliserbarhed. Lad os først notere, at der (ligesom i Eksempel 4.3a) for hver begrænset funktion $a = (a_i)_{i\in I}$ fra I ind i $\mathbb{L}$ defineres en begrænset *multiplikatinsoperator* M_a på $\ell_2(I)$ ved fastsættelsen

$$M_a(x_i)_{i\in I} = (a_i x_i)_{i\in I}\ , \quad (x_i)_{i\in I} \in \ell_2(I)\ .$$

Det ses, at multiplikationsoperatorerne er netop de begrænsede operatorer på $\ell_2(I)$, der diagonaliseres af den naturlige ortonormalbasis for $\ell_2(I)$.

Sætning 6.3. *Lad H være et separabelt Hilbert rum over $\mathbb{L}$. En operator $A \in \mathcal{B}(H)$ er diagonaliserbar, netop hvis der findes en unitær operator $U : H \to \ell_2(I)$, hvor I er en endelig eller tællelig mængde, og en multiplikationsoperator M_a på $\ell_2(I)$, således at*

$$U\,A\,U^{-1} = M_a\ . \tag{7}$$

Bevis. Ifølge bemærkningerne ovenfor skal det vises, at A er diagonaliserbar, netop hvis der findes en unitær operator $U : H \to \ell_2(I)$, således at $U\,A\,U^{-1}$ diagonaliseres af den naturlige basis $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ for $\ell_2(I)$, dvs. at der findes en begrænset funktion $(a_i)_{i\in I}$ fra I ind i $\mathbb{L}$, således at

$$U\,A\,U^{-1}\varepsilon_i = a_i\varepsilon_i\ , \qquad i \in I\ ,$$

hvilket er ensbetydende med, at

$$A\,U^{-1}\varepsilon_i = a_i U^{-1}\varepsilon_i\ , \quad i \in I\ .$$

Men ifølge det ovenfor viste er dette ensbetydende med eksistensen af en ortonormalbasis $(e_i)_{i\in I}$ for H givet ved $e_i = U^{-1}\varepsilon_i$, $i \in I$, bestående af egenvektorer for A. Dette viser det ønskede. $\square$

Bemærkning 6.4. Ifald der findes en unitær operator $U : H \to \ell_2(I)$, således at (7) er opfyldt, siges A at være *unitært ækvivalent* med M_a, og vi siger, at *U diagonaliserer A*.

Af særlig relevans for teorien for Fourier rækker er naturligvis tilfældet $H = L_2([-\pi,\pi])$, hvor vi vælger $I = \mathbb{Z}$ og lader $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ være givet ved

$$e_n(\theta) = e^{in\theta}\ , \quad \theta \in [-\pi,\pi]\ . \tag{8}$$

Den tilsvarende unitære operator defineret ved (6) kaldes *Fourier transformationen på $L_2([-\pi,\pi])$* og betegnes med $F : L_2([-\pi,\pi]) \to \ell_2(\mathbb{Z})$. Den afbilder altså en funktion $f \in L_2([-\pi,\pi])$ i sættet $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ bestående af f's Fourier koefficienter. Vi har hermed indset, at den fundamentale kendsgerning, at $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ udgør en ortonormal basis for $L_2([-\pi,\pi])$ kan udtrykkes som følger.

Sætning 6.5. *Fourier transformationen $F : L_2([-\pi, \pi]) \to \ell_2(\mathbb{Z})$, defineret ved*

$$F(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \ , \tag{9}$$

hvor

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta \tag{10}$$

for $f \in L_2([-\pi, \pi])$, er en unitær operator.

Lad os dernæst betragte det tilfælde, hvor $H_1 = H_2 = H$, og hvor $U : H \to H$ er en diagonaliserbar unitær operator. Vi har da følgende resultat.

Sætning 6.6. *Lad H være et separabelt Hilbert rum over $\mathbb{L}$. Da er en diagonaliserbar operator $U \in \mathcal{B}(H)$ unitær, netop hvis dens egenværdier ligger på enhedscirklen, dvs. har numerisk værdi 1.*

Bevis. Lad $(e_i)_{i\in I}$ være en ortonormalbasis bestående af egenvektorer for U og betegn de tilsvarende egenværdier med $\lambda_i,\ i \in I$. Da er (se (4.52))

$$U = \sum_{i\in I}\lambda_i P_i \quad \text{og} \quad U^* = \sum_{i\in I}\overline{\lambda}_i P_i \ ,$$

hvor P_i er den ortogonale projektion på $\mathrm{span}\{e_i\}$. Men heraf følger, at

$$U^*U = \sum_{i\in I}|\lambda_i|^2 P_i = UU^* \ , \tag{11}$$

idet $U^*Ue_i = \lambda_i U^*e_i = \lambda_i\overline{\lambda}_i e_i = |\lambda_i|^2 e_i$ og tilsvarende $UU^*e_i = |\lambda_i|^2 e_i$ for $i \in I$. Af (11) følger nu, at $U^*U = UU^* = 1$, netop hvis $|\lambda_i|^2 = 1$ for alle $i \in I$, hvilket viser det ønskede. □

Vi bemærker, at en egenværdi λ for en vilkårlig unitær operator $U : H \to H$ nødvendigvis ligger på enhedscirklen, idet vi for en tilhørende egenvektor $x \in H \setminus \{0\}$ har, at

$$\|x\| = \|Ux\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\| \ ,$$

hvoraf følger, at $|\lambda| = 1$. Dette resultat samt Sætning 6.6 bør sammenlignes med de tilsvarende resultater for selvadjungerede operatorer i afsnit 4.4, hvor vi fandt, at egenværdierne for sådanne er reelle.

Eksempel 6.7. Lad H være et reelt Hilbert rum og lad O være en diagonaliserbar ortogonal operator på H. Ifølge Sætning 6.6 er ± 1 de eneste mulige egenværdier for O. Lader vi P betegne den ortogonale projektion på egenrummet $E_{-1}(O)$, er den ortogonale projektion på $E_1(O)$ derfor lig med $1-P$, og vi slutter, at

$$O = (1-P) - P = 1 - 2P \, . \tag{12}$$

Omvendt er det let at se, at enhver operator O givet ved (12), hvor P er en vilkårlig ortogonal projektion, er ortogonal og diagonaliserbar.

Eksempel 6.8. Lad $H = L_2([-\pi,\pi])$, og betragt *translationsoperatoren* $T_\alpha : H \to H$ svarende til vinklen $\alpha \in \mathbb{R}$ defineret ved

$$(T_\alpha f)(\theta) = f(\alpha+\theta) \, , \quad \theta \in \mathbb{R} \, , \tag{13}$$

for $f \in H$ betragtet som periodisk funktion på $\mathbb{R}$ med periode 2π. Da er

$$\begin{aligned} \|T_\alpha f\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\alpha+\theta)|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} |f(\theta)|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \|f\|^2 \, , \end{aligned}$$

dvs. T_α er en isometri. Da T_α desuden er bijektiv, idet $T_\alpha^{-1} = T_{-\alpha}$, er T_α unitær ifølge Sætning 6.2 d).

Lader vi $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ betegne ortonormalbasen for H givet ved (8) har vi, at

$$(T_\alpha e_n)(\theta) = e^{in(\alpha+\theta)} = e^{in\alpha}e^{in\theta} = e^{in\alpha}e_n(\theta) \, , \tag{14}$$

hvilket viser, at $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ diagonaliserer operatoren T_α, og at dens egenværdier er $e^{in\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Idet vi erindrer, at Fourier transformationen på $L_2([-\pi,\pi])$ afbilder ortonormalbasen $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ i den naturlige ortonormalbasis $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ for $\ell_2(\mathbb{Z})$, betyder dette, at $FT_\alpha F^{-1}$ er lig med multiplikationsoperatoren på $\ell_2(\mathbb{Z})$ svarende til funktionen $n \to e^{in\alpha}$ på $\mathbb{Z}$, altså

$$F\,T_\alpha\,F^{-1} = M_{e^{in\alpha}} \, . \tag{15}$$

Vi har hermed set, at *Fourier transformationen på* $L_2([-\pi,\pi])$ *diagonaliserer* T_α.

Bemærkning 6.9. Selv om vi ikke skal gå i detaljer hermed, vil vi på dette sted ikke undlade at komme ind på, at Fourier transformationen på $L_2([-\pi,\pi])$ også i en vis forstand diagonaliserer differentialoperatoren $D = -i\frac{d}{d\theta}$, idet vi allerede i Eksempel 4.3d har bemærket, at e_n er egenvektor for D med egenværdi n. Identitetsfunktionen id, givet ved $id(n) = n$ for $n \in \mathbb{Z}$, er dog ikke begrænset, og derfor er, som vi har set, D ej heller begrænset.

Benyttes Lemma 2.7 og (9) har vi dog for $f \in \operatorname{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, og mere generelt for $f \in C^1_{per}$, at

$$F\big(Df\big) = M_{id}Ff \ , \tag{16}$$

hvor M_{id} betegner multiplikationsoperatoren på $\ell_2(\mathbb{Z})$ svarende til funktionen id, dvs.

$$M_{id} : (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \to (nx_n)_{n\in\mathbb{Z}} \ . \tag{17}$$

Da funktionen id ikke er begrænset på $\mathbb{Z}$, er M_{id} ikke en begrænset operator på $\ell_2(\mathbb{Z})$, jvf. Sætning 4.9, og er endda ikke overalt defineret på $\ell_2(\mathbb{Z})$. Den har dog en naturlig maksimal definitionsmængde $D(M_{id})$ fastlagt ved kravet om, at $M_{id}x \in \ell_2(\mathbb{Z})$ for $x \in D(M_{id})$, hvilket ifølge (17) vil sige, at

$$D(M_{id}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z}) \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |nx_n|^2 < +\infty\} \ . \tag{18}$$

At $D(M_{id}) \neq \ell_2(\mathbb{Z})$ ses ved at bemærke, at følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ givet ved $a_n = \frac{1}{n}$ for $n \neq 0$ og $x_0 = 0$, tilhører $\ell_2(\mathbb{Z})$, men ikke $D(M_{id})$. Dog er $D(M_{id})$ tæt i $\ell_2(\mathbb{Z})$, idet f.eks. alle følger $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, for hvilke $x_n = 0$ for $|n|$ tilstrækkelig stor, tilhører $\ell_2(\mathbb{Z})$. Desuden er $D(M_{id})$ et underrum af $\ell_2(\mathbb{Z})$, hvilket ses på samme vis som i argumentet for, at $\ell_2(\mathbb{N})$ er et vektorrum, jvf. Eksempel 1.9.

Af (16) følger, at $F(C^1_{per}) \subseteq D(M_{id})$. Sættes

$$H^1_{per} = F^{-1}(D(M_{id})) \ ,$$

har vi derfor specielt, at $C^1_{per} \subseteq H^1_{per}$ og ifølge (16) er operatoren

$$\bar{D} = F^{-1}M_{id}F \tag{19}$$

en udvidelse af D fra $\operatorname{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ til H^1_{per}.

Det er måske ikke klart på nuværende tidspunkt, hvilket formål denne udvidelse skal tjene. Pointen er, at den udvidede operator $\bar{D}$ herved bliver en selvadjungeret operator i en generaliseret forstand, gældende også for ubegrænsede tæt definerede operatorer, men som vi af pladshensyn ikke kan komme ind på i dette kursus.

6.2 Fourier transformationen på $\mathbb{R}$.

I dette og det følgende afsnit skal vi indføre en særlig vigtig unitær operator $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, som vi vil kalde Fourier transformationen på $L_2(\mathbb{R}^n)$ (eller blot på $\mathbb{R}^n$). I dette afsnit behandles tilfældet $n = 1$, men beviserne kan umiddelbart generaliseres til $n > 1$, og resultaterne i det generelle tilfælde gives i næste afsnit.

Lad os først forsøge at motivere definitionen af den Fourier transformerede $\hat{f}$ af en funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$. Som bekendt fra §2 udgør $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ en ortonormal basis for $L_2([-\pi, \pi],\ \frac{1}{2\pi})$. Betragtes for $a, b > 0$ afbildningen $U_{a,b} : L_2([-a, a],\ \frac{1}{2a}) \to L_2([-b, b],\ \frac{1}{2b})$, defineret ved

$$(U_{a,b}f)(\theta) = f\big(\frac{a}{b}\,\theta\big)\ , \quad \theta \in [-b, b]\ , \tag{20}$$

for $f \in L_2([-a, a],\ \frac{1}{2a})$, er det oplagt, at $U_{a,b}$ er lineær og dertil bijektiv, idet $U_{a,b}^{-1} = U_{b,a}$. Endvidere er $U_{a,b}$ isometrisk, idet

$$\|U_{a,b}f\|^2 = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} |f\big(\frac{a}{b}\,\theta\big)|^2 d\theta = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} |f(\theta_1)|^2 d\theta_1 = \|f\|^2\ ,$$

hvor vi har foretaget variabelskiftet $\theta_1 = \frac{a}{b}\,\theta$. Altså er $U_{a,b}$ unitær. Sættes $a = \pi$ giver Sætning 6.2 derfor, at $(e^{in\frac{\pi}{b}\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormalbasis for $L_2([-b, b],\ \frac{1}{2b})$, eftersom $U_{\pi,b}$ afbilder funktionen $e^{in\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, i funktionen $e^{in\frac{\pi}{b}\theta}$, $\theta \in [-b, b]$. Svarende hertil definerer vi Fourier koefficienterne $c_n^b(f)$ for $f \in L_2([-b, b])$ ved

$$c_n^b(f) = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} f(\theta)e^{-in\frac{\pi}{b}\theta} d\theta\ , \quad n \in \mathbb{Z}\ , \tag{21}$$

og har, at

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^b(f)e^{in\frac{\pi}{b}\theta} \tag{22}$$

betragtet som ligning i $L_2([-b, b])$. Parsevals ligning lyder i dette tilfælde

$$\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^b(f)|^2 \tag{23}$$

for $f \in L_2([-b, b])$. Vi bemærker også, at hvis $f \in C^1([-b, b])$, så gælder (22) punktvis for hvert $\theta \in]-b, b[$, hvilket følger på samme vis som det tilsvarende resultat i §2.

Vi er interesserede i at betragte "grænsetilfældet" $b \to +\infty$. Hertil bemærker vi først, at størrelserne $n\frac{\pi}{b}$, $n \in \mathbb{Z}$, der optræder i eksponenterne i (21) og (22), danner en inddeling af $\mathbb{R}$ i intervaller af længde $\frac{\pi}{b}$, som går imod 0 for $b \to +\infty$. Det er derfor naturligt i denne grænse at erstatte disse størrelser med en variabel $k \in \mathbb{R}$. Endvidere ville det være nærliggende at erstatte $L_2([-b,b])$ med $L_2(\mathbb{R})$, og tilsvarende erstatte integrationsintervallet $[-b,b]$ i (21) med $\mathbb{R}$. Dette er dog ikke muligt, idet $f \in L_2(\mathbb{R})$ ikke nødvendigvis er integrabel, og det resulterende integral derfor ikke veldefineret. Vi må derfor antage, at f, og dermed $x \to f(x)e^{-ikx}$, tilhører $L_1(\mathbb{R})$.

Definition 6.10. For $f \in L_1(\mathbb{R})$ defineres den *Fourier transformerede* funktion $\hat{f}$ af f ved

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}dx \,, \quad k \in \mathbb{R} \,. \tag{24}$$

Vi noterer straks følgende simple resultat.

Sætning 6.11. *For $f \in L_1(\mathbb{R})$ gælder, at $\hat{f}$ er en kontinuert og begrænset funktion på $\mathbb{R}$, og*

$$\|\hat{f}\|_u \leq \|f\|_1 \,. \tag{25}$$

Bevis. Vi viser først, at $\hat{f}$ er kontinuert. Lad hertil $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i $\mathbb{R}$ med grænseværdi $k \in \mathbb{R}$. Det skal vises, at $\hat{f}(k_n) \to \hat{f}(k)$ for $n \to \infty$. Da funktionen $\theta \to e^{-i\theta}$ er kontinuert, har vi, at $f(x)e^{-ik_nx} \to f(x)e^{-ikx}$ for $n \to \infty$ for hvert $x \in \mathbb{R}$. Da endvidere funktionen $g(x) = |f(x)|$ er en integrabel majorant for hver af funktionerne $x \to f(x)e^{-ik_nx}$, $n \in \mathbb{N}$, følger af Lebesgues majorantsætning (Sætning A.9), at

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ik_nx}dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}dx$$

for $n \to \infty$, hvilket skulle vises.

At $\hat{f}$ er begrænset og opfylder (25) følger af, at for $k \in \mathbb{R}$ er

$$|\hat{f}(k)| = \Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}dx\Big| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \|f\|_1 \,.$$

□

Bemærkning 6.12. Det kan vises, at $\hat{f}(k) \to 0$ for $|k| \to \infty$ (se Opg. 6.6).

I det følgende skal vi se, at på trods af, at definitionen (24) kun giver mening for $f \in L_1(\mathbb{R})$, så fastlægger den en entydig unitær operator $\mathcal{F}$ på $L_2(\mathbb{R})$, således at $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ for $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Strategien vil være følgende: Først vises, at afbildningen $f \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ afbilder underrummet $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq L_2(\mathbb{R})$ bestående af C^∞-funktioner med kompakt støtte isometrisk ind i $L_2(\mathbb{R})$. Dernæst udnyttes at $C_0^\infty(\mathbb{R})$ er tæt i $L_2(\mathbb{R})$ ifølge Sætning A.14, til ved brug af Sætning I. 6.23 at udvide denne afbildning til en isometri $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$. For at vise, at $\mathcal{F}$ er surjektiv, og dermed unitær, udnyttes til sidst (22) på passende vis.

Det førstnævnte resultat er indeholdt i følgende sætning.

Sætning 6.13. *For $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ er $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, og der gælder Fouriers inversionsformel*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k)e^{ikx}dk\ , \quad x \in \mathbb{R}\ , \tag{26}$$

samt Parsevals ligning

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(k)|^2 dk \tag{27}$$

Bevis. I det efterfølgende Lemma 6.16 vises, at for hvert $N = 0, 1, 2, \ldots$ findes $C_N \geq 0$, således at

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C_N}{(1+|k|)^N}\ , \quad k \in \mathbb{R}\ . \tag{28}$$

Da funktionen på højresiden af (28) er integrabel over $\mathbb{R}$ for N tilstrækkelig stor ($N \geq 2$) følger heraf, idet $\hat{f}$ er kontinuert, at $|\hat{f}|^p$ er integrabel over $\mathbb{R}$ for hvert $p > 0$, og derfor specielt at $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.

Vælg $R > 0$, således at f's støtte er indeholdt i $[-R, R]$, og lad os i det følgende antage, at $b \geq \max\{2\pi, R\}$. Da er $f(x) = 0$ for $x \notin [-b, b]$, og det følger derfor af (21) og (24), at

$$c_n^b(f|_{[-b,b]}) = \frac{1}{2b}\hat{f}(n\frac{\pi}{b})\ , \quad n \in \mathbb{Z}\ , \tag{29}$$

hvilket ved indsættelse i (22) og (23) giver

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2b}\hat{f}(n\frac{\pi}{b})e^{in\frac{\pi}{b}x} \quad \text{for} \quad x \in]-b, b[\ , \tag{30}$$

og

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{-b}^{b} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2b} |\hat{f}(n\frac{\pi}{b})|^2 \,. \tag{31}$$

Vi sætter nu $b = m \in \mathbb{N}$ og definerer i analogi med Eksempel A.10 for $x \in \mathbb{R}$ de stykkevis konstante funktioner $\hat{f}_m$ og $g_{m,x}$ ved

$$\hat{f}_m(k) = \hat{f}(n\frac{\pi}{m}) \quad \text{for} \quad k \in \big[n\frac{\pi}{m}\,,\,(n+1)\frac{\pi}{m}\big[\,,\; n \in \mathbb{Z}\,, \tag{32}$$

og

$$g_{m,x}(k) = \hat{f}(n\frac{\pi}{m})e^{in\frac{\pi}{m}x} \quad \text{for} \quad k \in \big[n\frac{\pi}{m}\,,\,(n+1)\frac{\pi}{m}\big[\,,\; n \in \mathbb{Z}\,. \tag{33}$$

Da kan (30) og (31) øjensynlig skrives på formen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g_{m,x}(k)dk \;\text{ for }\; x \in]-m, m[\tag{34}$$

og

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_m(k)|^2 dk\,, \tag{35}$$

forudsat funktionerne $g_{m,x}$ og $|\hat{f}_m|^2$ er integrable. At dette er tilfældet følger af (28), da vi for $k \in \big[n\frac{\pi}{m}\,,\,(n+1)\frac{\pi}{m}\big[$ har

$$|\hat{f}_m(k)| = |g_{m,x}(k)| \le \frac{C_N}{(1+|\frac{n\pi}{m}|)^N} \le \frac{C_N}{(\frac{1}{2}+|k|)^N} \tag{36}$$

idet

$$|\frac{n\pi}{m}| = \big|k + n\frac{\pi}{m} - k\big| \ge |k| - \big|n\frac{\pi}{m} - k\big| \ge |k| - \frac{\pi}{m} \ge |k| - \tfrac{1}{2}$$

for $m \ge 2\pi$. Da funktionen $\varphi_N(k) = \frac{C_N}{(\frac{1}{2}+|k|)^N}$ er integrabel over $\mathbb{R}$ for $N \ge 2$, følger det af (36) ikke blot at $|\hat{f}_m|^2$ er integrabel, men tillige at $|\varphi_N|^2,\ N \ge 1$, er en integrabel majorant for funktionerne $|\hat{f}_m|^2,\ m \ge 2\pi$. Tilsvarende er $|\varphi_N|,\ N \ge 2$, en integrabel majorant for $g_{m,x}$, $m \ge 2\pi$.

Da nu $\hat{f}$ er kontinuert ifølge Sætning 6.11, har vi (jvf. Eksempel A.10) at

$$\hat{f}_m(k) \to \hat{f}(k)\,, \quad k \in \mathbb{R}\,,$$

og

$$g_{m,x}(k) \to \hat{f}(k)e^{ikx}\,, \quad k \in \mathbb{R}\,,$$

for $m \to +\infty$, hvorefter Lebesgues majorantsætning anvendt på (34) og (35) giver (26) og (27). $\square$

Vi viser dernæst (28) ikke kun for $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, men for den større klasse af såkaldte *hurtigt aftagende funktioner* eller *Schwartz funktioner*, der defineres som følger.

Definition 6.14. En funktion f på $\mathbb{R}$ kaldes en Schwartz funktion, såfremt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, og der for hvert par $n, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ findes en konstant $C_{n,N} \geq 0$, således at

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{C_{n,N}}{(1+|x|)^N} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \tag{37}$$

hvor $f^{(n)}$ betegner den n'te afledede af f.

Bemærkning 6.15. a) Af (37) følger, at

$$|x^N f^{(n)}(x)| \leq (1+|x|)^N |f^{(n)}(x)| \leq C_{n,N} \ , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hvis omvendt $|x^N f^{(n)}(x)|$ er begrænset på $\mathbb{R}$ for alle $n, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fås, eftersom $(1+|x|)^N$ er et polynomium i $|x|$, at også $(1+|x|)^N |f^{(n)}(x)|$ er begrænset på $\mathbb{R}$ for alle $n, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Vi har altså, at $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *netop hvis* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *og* $|x^N f^{(n)}(x)|$ *er begrænset på* $\mathbb{R}$ *for alle* $n, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, hvilket også udtrykker, at $f(x)$ såvel som alle dens afledede aftager hurtigere end enhver potens $|x|^{-N}$ for $|x| \to +\infty$.

b) Da de afledede af $x^N f^{(n)}(x)$ er linearkombinationer af funktioner af samme form, følger det, at $x^N f^{(n)}(x)$ *tilhører* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, *hvis* f *gør*.

c) Da funktionen på højresiden af (37) er integrabel over $\mathbb{R}$ for N tilstrækkelig stor ($N \geq 2$), følger det, at *enhver Schwartz funktion samt alle dens afledede tilhører* $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.

d) $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$, fordi hvis $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ har støtte i intervallet $[-R, R]$, $R > 0$, gælder dette også $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Da $|f^{(n)}|$ er kontinuert, er den begrænset på $[-R, R]$, og dermed på $\mathbb{R}$. Vi kan derfor vælge $C_{n,N} \geq 0$, således at

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{C_{n,N}}{(1+R)^N} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

hvorefter (37) er opfyldt.

Uligheden (28) er nu en konsekvens af Definition 6.14 og bemærkningens punkt d) ovenfor, samt følgende lemma.

Lemma 6.16. *For* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *gælder, at* $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *og for hvert* $n \in \mathbb{N}$ *er*

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \hat{f}(k) \ , \tag{38}$$

$$\widehat{x^n f}(k) = \left(i\frac{d}{dk}\right)^n \hat{f}(k) \ , \tag{39}$$

(hvor $x^n f$ betegner funktionen $x \to x^n f(x)$).

Bevis. Af (24) fås

$$\begin{aligned}
ik\,\hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}} ik\, e^{-ikx} f(x)dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx}e^{-ikx}\right) f(x)dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(-\int_{-R}^{R} \left(\frac{d}{dx}e^{-ikx}\right) f(x)dx\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\left[-e^{-ikx} f(x)\right]_{-R}^{R} + \int_{-R}^{R} e^{-ikx} f'(x)dx\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ikx} f'(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-ikx}dx = \widehat{f'}(k) \ ,
\end{aligned}$$

hvor vi i fjerde skridt har benyttet partiel integration, og i femte skridt, at $f(\pm R) \to 0$ for $R \to \infty$, da $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Gentages argumentet med f' istedet for f fås

$$(ik)^2 \hat{f}(k) = ik\widehat{f'}(k) = \widehat{f''}(k) \ ,$$

hvorefter (38) let følger ved induktion.

For at vise (39) bemærkes først, at funktionen $g_x : k \to f(x)e^{-ikx}$ er en C^∞-funktion for hvert $x \in \mathbb{R}$ med differentialkvotient $g_x'(k) = -ixf(x)e^{-ikx}$. Lad nu $k \in \mathbb{R}$ og lad $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i $\mathbb{R}$ med grænseværdi k, således at $k_n \neq k$ for $n \in \mathbb{N}$. Differentialregningens middelværdisætning (se Adams p.254) anvendt på real- og imaginærdelen af g_x medfører, at der findes k_n' og k_n'' i intervallet med endepunkter k og k_n, således at $\mathrm{Re}(\frac{g_x(k_n)-g_x(k)}{k_n-k}) = \mathrm{Re}(-ixf(x)e^{-ik_n'x})$ og $\mathrm{Im}(\frac{g_x(k_n)-g_x(k)}{k_n-k}) = \mathrm{Im}(-ixf(x)e^{-ik_n''x})$. Heraf følger

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{g_x(k_n)-g_x(k)}{k_n-k}\right| \\
&= \sqrt{(\mathrm{Re}(-ixf(x)e^{-ik_n'x}))^2 + (\mathrm{Im}(-ixf(x)e^{-ik_n''x}))^2} \leq \sqrt{2}|xf(x)| \ ,
\end{aligned}$$

altså at $\sqrt{2}|xf(x)|$ en integrabel majorant for funktionen

$$h_n(x) = \frac{g_x(k_n)-g_x(k)}{k_n-k} = f(x)\frac{e^{-ik_nx}-e^{-ikx}}{k_n-k} \ .$$

Da $h_n(x) \to g'_x(k) = -ixf(x)e^{-ikx}$ for hvert $x \in \mathbb{R}$, har vi derfor ifølge Lebesgues majorantsætning (Sætning A.9)

$$\begin{aligned}\frac{\hat{f}(k_n) - \hat{f}(k)}{k_n - k} &= \int_{\mathbb{R}} h_n(x)dx \\ &\to -i\int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-ikx}dx \\ &= -i\widehat{xf}(k)\ ,\end{aligned}$$

hvilket viser (39) for $n = 1$. Resultatet fås herefter ved induktion for vilkårligt $n \in \mathbb{N}$.

Af (39) følger specielt, at $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$. For at vise, at $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, skal det godtgøres, at $|k|^N|(\frac{d}{dk})^n\hat{f}(k)|$ er en begrænset funktion af $k \in \mathbb{R}$ for vilkårlige $N\ , n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Da $x^n f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, er det ifølge (39) tilstrækkeligt at vise dette for $n = 0$, hvorefter det af (38) følger, at vi også kan antage, at $N = 0$ eftersom $f^{(N)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Men så følger påstanden af Sætning 6.11. $\square$

Vi er nu klar til at vise følgende fundamentale resultat.

Sætning 6.17. *Der findes en entydig unitær operator $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, således at*

$$\mathcal{F}(f) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f} \quad \text{for} \quad f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})\ , \tag{40}$$

og der gælder, at $\mathcal{F}$ afbilder $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ bijektivt på $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{F}$ kaldes Fourier transformationen på $L_2(\mathbb{R})$.

Bevis. Vi betragter først den lineære afbildning $f \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ fra $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ind i $L_2(\mathbb{R})$, som ifølge (27) er isometrisk og derfor specielt begrænset. (Vi identificerer her naturligvis de kontinuerte funktioner f og $\hat{f}$ med deres ækvivalensklasser i $L_2(\mathbb{R})$). Da $L_2(\mathbb{R})$ er et Banach rum, følger det af Sætning I. 6.23 og Sætning A.14, at denne afbildning kan udvides til en entydig begrænset operator $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ givet ved at

$$\mathcal{F}(f) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n\ , \tag{41}$$

for enhver følge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $C_0^\infty(\mathbb{R})$ for hvilken $f_n \to f$ i $L_2(\mathbb{R})$. Af (41) følger, at også $\mathcal{F}$ er en isometri, idet

$$\|\mathcal{F}(f)\| = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \|\hat{f}_n\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|\ ,$$

for ethvert $f \in L_2(\mathbb{R})$, hvor $\|\cdot\|$ betegner normen på $L_2(\mathbb{R})$.

For at vise, at $\mathcal{F}$ er unitær, skal vi godtgøre at $\mathcal{F}$ er surjektiv. Hertil bemærker vi først, at $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ for alle $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Dette følger af, at vi ifølge Sætning A.14 for $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ kan vælge følgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i (41), således at

$$\|f - f_n\|_1 \to 0 \quad \text{og} \quad \|f - f_n\|_2 \to 0$$

for $n \to \infty$. Men heraf følger dels, at

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_u \to 0 \tag{42}$$

som følge af (25), og dels at

$$\|\hat{f}_n - \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\| \to 0 \tag{43}$$

i $L_2(\mathbb{R})$ som følge af (41). Af (42) og (43) fås for ethvert begrænset interval $I \subseteq \mathbb{R}$, at

$$\|\hat{f}_n \cdot 1_I - \hat{f} \cdot 1_I\| \to 0 \;\text{ og }\; \|\hat{f}_n\, 1_I - \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f) \cdot 1_I\| \to 0 \tag{44}$$

for $n \to \infty$, eftersom

$$\|\hat{f}_n\, 1_I - \hat{f}\, 1_I\| \leq \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_u \sqrt{m_1(I)}$$

og

$$\|\hat{f}_n\, 1_I - \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f) 1_I\| \leq \|\hat{f}_n - \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\|\ .$$

Af (44) sluttes, at $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f} \cdot 1_I = \mathcal{F}(f)1_I$ i $L_2(\mathbb{R})$. Da dette gælder for ethvert begrænset interval I, er $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ i $L_2(\mathbb{R})$ som ønsket.

Lad os nu for $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ skrive (26) på formen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-k)e^{-ikx}dk$$

og erindre, at $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Sættes $\check{f}(k) = \hat{f}(-k),\ k \in \mathbb{R}$, er derfor $\check{f} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ og $f = \mathcal{F}\big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\check{f}\big)$, hvilket viser at

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}(L_2(\mathbb{R}))\ . \tag{45}$$

Men da $\mathcal{F}$ er en isometri er $\mathcal{F}(L_2(\mathbb{R}))$ et afsluttet underrum af $L_2(\mathbb{R})$, og det følger derfor af (45) og Sætning A.14 at

$$L_2(\mathbb{R}) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R})} \subseteq \mathcal{F}(L_2(\mathbb{R}))\ ,$$

altså at $\mathcal{F}$ er surjektiv. $\square$

Den i beviset indførte funktion $\check{f}$ kaldes somme tider den co-Fourier transformerede af f, og er altså givet ved

$$\check{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ikx}dx \tag{46}$$

for $f \in L_1(\mathbb{R})$. Vi kunne naturligvis være startet med denne i stedet for $\hat{f}$, og tilsvarende defineret co-Fourier transformationen $\overline{\mathcal{F}} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ som den entydige unitære operator, der udvider $f \to \check{f}$ fra $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ til $L_2(\mathbb{R})$. Som bemærket i beviset ovenfor kan (26) da udtrykkes ved

$$f = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) \tag{47}$$

for $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Men da $C_0^\infty(\mathbb{R})$ er tæt i $L_2(\mathbb{R})$, og $\overline{\mathcal{F}}$ og $\mathcal{F}$ begge er kontinuerte er (47) gyldig for alle $f \in L_2(\mathbb{R})$, dvs.

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = 1\ . \tag{48}$$

Da $\mathcal{F}$ vides at være unitær, har vi derfor at

$$\mathcal{F}^* = \overline{\mathcal{F}}\ . \tag{49}$$

6.3 Fourier transformationen på $\mathbb{R}^n$.

Som nævnt i begyndelsen af forrige afsnit kan Fourier transformationen $\mathcal{F}$ på $L_2(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$, defineres analogt med tilfældet $n = 1$, og har de tilsvarende egenskaber. Da beviserne forløber ganske parallelt og ikke kræver væsentlige nye ideer, nøjes vi med at formulere resultaterne (se Sætning 6.20 nedenfor).

Først et par definitioner og lidt notation.

Definition 6.18. For $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ defineres den Fourier transformerede funktion $\hat{f}$ af f ved

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ik\cdot x}dx\ , \quad k \in \mathbb{R}^n\ , \tag{50}$$

(hvor som sædvanlig $k \cdot x = k_1x_1 + \ldots + k_nx_n$ for $k = (k_1, \ldots, k_n)$ og $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathbb{R}^n$).

Som for $n = 1$ vises, at $\hat{f}$ er kontinuert og begrænset, samt at (25) gælder.

For at definere Schwartz funktioner på $\mathbb{R}^n$ gør vi brug af den såkaldte *multi-indeks* notation. Et multi-indeks er et sæt $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, hvor $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. For $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ og et *multi-indeks* α sættes da

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \ ,$$

og tilsvarende sættes

$$\partial^\alpha = \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{x_n}^{\alpha_n} \ ,$$

hvor

$$\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \ , \qquad i = 1, \dots, n \ .$$

∂^α er således en differentialoperator der kan anvendes på f.eks. C^∞-funktioner defineret på $\mathbb{R}^n$.

Definition 6.19. En funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ kaldes en Schwartz funktion, såfremt $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, og der for hvert multi-indeks α og hvert $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ findes en konstant $C_{\alpha,N} \geq 0$, således at

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq \frac{C_{\alpha,N}}{(1 + \|x\|)^N} \ ; \quad x \in \mathbb{R}^n \ . \tag{51}$$

Det ses på lignende vis som i Bemærkning 6.15, at $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ netop hvis $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ og $|x^\alpha \partial^\beta f(x)|$ er begrænset på $\mathbb{R}^n$ for ethvert par af multi-indekser α og β, samt at $x^\alpha \partial^\beta f(x)$ da også tilhører $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, og endvidere, at $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Vi har nu følgende.

Sætning 6.20. *Der findes en entydig unitær operator $\mathcal{F}$ på $L_2(\mathbb{R}^n)$, således at*

$$\mathcal{F}(f) = \tfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \hat{f} \quad \textit{for} \quad f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n) \ . \tag{52}$$

Denne afbilder $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ på $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, og der gælder for $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, at

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(k) = (ik)^\alpha (\mathcal{F} f)(k) \ , \quad k \in \mathbb{R}^n \ , \tag{53}$$

og

$$\mathcal{F}((-ix)^\alpha f)(k) = \partial^\alpha (\mathcal{F} f)(k) \ , \quad k \in \mathbb{R}^n \ , \tag{54}$$

for et vilkårligt multi-indeks α.

Desuden gælder for $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$

$$(\mathcal{F}^* f)(k) = (\mathcal{F} f)(-k) \ , \quad k \in \mathbb{R}^n \ . \tag{55}$$

De vigtige ligninger (53) og (54) udtrykker, at Fourier transformationen "bytter om på" partiel differentiation og multiplikation med $\pm i$ gange tilsvarende koordinatfunktion. Vi skal se en nyttig anvendelse af disse i Eksempel 6.22 nedenfor. Lad os først se på et eksempel analogt til Eksempel 6.8 i forrige afsnit.

Eksempel 6.21. Lad $U_a : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ betegne *translationsoperatoren* på $L_2(\mathbb{R}^n)$ svarende til $a \in \mathbb{R}^n$ givet ved

$$(U_a f)(x) = f(x+a) \ , \qquad x \in \mathbb{R}^n \ . \tag{56}$$

Denne afbildning er oplagt lineær, og den er en isometri på grund af Lebesgue målets translationsinvarians. Da den dertil er bijektiv, idet $U_a^{-1} = U_{-a}$, er U_a en unitær operator.

For $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ haves at

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(U_a f)(k) &= \tfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+a) e^{-ik\cdot x} dx \\
&= \tfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik\cdot(x-a)} dx \\
&= e^{ik\cdot a} (\mathcal{F}f)(k) \ ,
\end{aligned}$$

hvilket også kan skrives

$$\mathcal{F}(U_a f) = M_{e^{ik\cdot a}} (\mathcal{F}f) \ , \tag{57}$$

hvor $M_{e^{ik\cdot a}}$ betegner multiplikationsoperatoren på $L_2(\mathbb{R}^n)$ svarende til funktionen $k \to e^{ik\cdot a}$, defineret analogt med Eksempel 4.3b, blot med $\mathbb{R}^n$ erstattende $[a, b]$. Da denne operator er begrænset, eftersom $e^{ik\cdot a}$ er begrænset på $\mathbb{R}^n$, og $\mathcal{F}$ og U_a også er begrænsede, sluttes at (57) er gyldig for alle $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, da $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ er tæt i $L_2(\mathbb{R}^n)$. Altså er

$$\mathcal{F}\, U_a\, \mathcal{F}^{-1} = M_{e^{ik\cdot a}} \ , \tag{58}$$

dvs. *translationsoperatoren U_a føres ved Fourier transformation over i multiplikationsoperatoren $M_{e^{ik\cdot a}}$*, som forøvrigt er unitær, da $\mathcal{F}$ og U_a er unitære (jvf. Opg. 6.1), og hvilket også følger let af, at $|e^{ik\cdot a}| = 1$ for $k \in \mathbb{R}^n$.

Eksempel 6.22. Lad os betragte den partielle differentialligning

$$(-\Delta + m^2 I) u = f \ , \tag{59}$$

hvor Δ er Laplace operatoren på $\mathbb{R}^n$ givet ved

$$\Delta = \partial^2_{x_1} + \ldots + \partial^2_{x_n} \ ,$$

$m^2 > 0$ er en konstant, og f er en given funktion på $\mathbb{R}^n$. Vi søger så en funktion u på $\mathbb{R}^n$, som er to gange differentiabel og opfylder (59).

Vi antager først, at $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ og viser, at der findes netop en løsning u til (59), som tilhører $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Antages nemlig, at $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ kan $\mathcal{F}$ anvendes på begge sider af (59), hvorved vi ved brug af (53) får

$$(k^2 + m^2)(\mathcal{F}u)(k) = (\mathcal{F}f)(k)\ , \quad k \in \mathbb{R}^n\ .$$

Defineres funktionen $\omega : k \to k^2 + m^2$ på $\mathbb{R}^n$, kan dette også udtrykkes ved

$$\mathcal{F}u = \omega^{-1}\mathcal{F}f = M_{\omega^{-1}}\mathcal{F}f\ ,$$

hvor $M_{\omega^{-1}}$ betegner multiplikationsoperatoren svarende til funktionen $\omega^{-1} = 1/\omega$, og vi har benyttet at ω ikke antager værdien 0, eftersom $m^2 > 0$. Det bemærkes, at da ω^{-1} er begrænset, er $M_{\omega^{-1}}$ en begrænset operator på $L^2(\mathbb{R}^n)$, jvf. Sætning 4.13, og den afbilder $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bijektivt på sig selv (overvej dette!). Hermed har vi vist, at hvis $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ er en løsning til (59), da må

$$u = \mathcal{F}^{-1}M_{\omega^{-1}}\mathcal{F}f\ . \tag{60}$$

At der ved denne ligning faktisk er givet en løsning til (59), fås ved at følge ovenstående skridt baglæns.

Da både $\mathcal{F}$ og $M_{\omega^{-1}}$ afbilder $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bijektivt på sig selv viser ovenstående, at operatoren $-\Delta + m^2 I$ ligeledes afbilder $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bijektivt på sig selv, og at dens inverse på dette rum er givet ved

$$(-\Delta + m^2 I)^{-1} = \mathcal{F}^{-1}M_{\omega^{-1}}\mathcal{F}\ . \tag{61}$$

Idet højresiden af denne ligning er en begrænset operator på $L_2(\mathbb{R}^n)$, viser dette specielt, at $(-\Delta + m^2 I)^{-1}$ på naturlig måde kan udvides fra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ til en begrænset operator på hele $L_2(\mathbb{R}^n)$, jvf. Sætning I.6.23.

Operatoren $M_{\omega^{-1}}$ er selvadjungeret ifølge Sætning 4.13, da funktionen ω^{-1} er reel. Af (61) fås derfor

$$\begin{aligned}((-\Delta + m^2 I)^{-1})^* &= (\mathcal{F}^* M_{\omega^{-1}}\mathcal{F})^* = \mathcal{F}^*(M_{\omega^{-1}})^*\mathcal{F}^{**} \\ &= \mathcal{F}^* M_{\omega^{-1}}\mathcal{F} = (-\Delta + m^2 I)^{-1}\ ,\end{aligned}$$

altså at $(-\Delta + m^2 I)^{-1}$ *er en begrænset selvadjungeret operator.*

Da $\mathcal{F}$ er bijektiv og $M_{\omega^{-1}}$ er injektiv følger, at $(-\Delta + m^2 I)^{-1}$ er injektiv på $L_2(\mathbb{R}^n)$. Dens inverse operator eksisterer derfor og definerer en udvidelse af $-\Delta + m^2 I$ fra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ til billedmængden $(-\Delta + m^2 I)^{-1}(L_2(\mathbb{R}^n))$. Denne operator er ubegrænset, hvilket f.eks. ses ved at invertere begge sider af (61), hvorved

$$-\Delta + m^2 I = \mathcal{F}^{-1}M_{\omega}\mathcal{F}\ . \tag{62}$$

Vi har her benyttet, at den inverse til $M_{\omega^{-1}}$ er multiplikationsoperatoren M_ω, som er ubegrænset, idet ω er en ubegrænset funktion på $\mathbb{R}^n$. Vi skal ikke på dette sted diskutere den ubegrænsede operator $-\Delta + m^2 I$ yderligere. Bemærk dog, at den ikke er overalt defineret svarende til, at M_ω heller ikke er det, idet den naturlige maksimale definitionsmængde for M_ω ses at være

$$D(M_\omega) = \{f \in L_2(\mathbb{R}^n) \mid \int_{\mathbb{R}^n} |(k^2 + m^2) f(k)|^2 dk < \infty\} \ .$$

Det giver herefter mening at betragte ligningen (59) mere generelt for $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Den har da en entydig løsning u i $L_2(\mathbb{R}^n)$ givet ved (60).

Det bemærkes, at for $m^2 = 0$ er operatoren $M_{\omega^{-1}}$ ikke begrænset. Udvides operatoren $(-\Delta)^{-1}$ ved samme fremgangsmåde som ovenfor, bliver den tilsvarende heller ikke begrænset.

Det skal endelig nævnes, at operatorerne $-\Delta + m^2 I$ og $(-\Delta + m^2 I)^{-1}$ har vigtige anvendelser i klassisk fysik såvel som i ikke-relativistisk kvantemekanik og kvantefeltteori.

Opgaver til §6

6.1. Lad H_1, H_2 og H_3 være (separable) Hilbert rum og lad $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ og $V \in \mathcal{B}(H_2, H_3)$ være unitære operatorer.

Vis, at operatorerne $U^{-1} \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ og $VU \in \mathcal{B}(H_1, H_3)$ er unitære.

6.2. Lad H være et Hilbert rum og $A, U \in \mathcal{B}(H)$, hvor U er unitær.

Vis, at $\|AU\| = \|UA\| = \|A\|$ samt at $\|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|A\|_2$.

6.3. Vis, at multiplikationsoperatoren M_f på $L_2(I)$, hvor f er en kontinuert funktion på det kompakte interval I, er unitær hvis og kun hvis $|f(x)| = 1$ for alle $x \in I$.

6.4. Udregn de Fourier transformerede af funktionerne f og f_R, $R > 0$, på $\mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad \text{og} \qquad f_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } -R \le x \le R \\ 0 & \text{ellers} . \end{cases}$$

Tegn graferne for $\hat{f}_1$ og $\hat{f}_{10}$.

6.5. Lad $a > 0$. Udregn de Fourier transformerede af funktionerne

$$g_1(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{for } \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{for } \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{og} \qquad g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } \quad x \ge 0 \\ e^{ax} & \text{for } \quad x < 0 . \end{cases}$$

Eftervis, at den Fourier transformerede af funktionen $g(x) = e^{-a|x|}$ er

$$\hat{g}(k) = \frac{2a}{k^2 + a^2} .$$

6.6 (Riemann-Lebesgues lemma). a) Vis, at $\hat{f}(k) \to 0$ for $k \to \pm\infty$ for enhver integrabel funktion f på $\mathbb{R}$.

Vink. For $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ er påstanden vist i teksten (forklar!). Benyt derefter Sætning A.14 til at slutte, at den også holder for $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

b) Vis, at når $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, så er $\hat{f}$ uniformt kontinuert på $\mathbb{R}$.

6.7. Vis, at hvis $f \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ og $\hat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, da gælder Fouriers inversionsformel

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{ikx} dk , \quad x \in \mathbb{R} .$$

6.8. Benyt Opg.6.5 og Opg.6.7 til at vise, at

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{a}e^{-|a|} \text{ for } a > 0 \ .$$

6.9. Beregn den Fourier transformerede af funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{for} \quad -\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & \quad\ \text{ellers} \ . \end{cases}$$

Vis, at for $-\pi \leq x \leq \pi$ er

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi t \sin xt}{1-t^2}dt = \pi \sin x \ .$$

6.10. Vis, at enhver funktion på $\mathbb{R}$ af formen $P(x)e^{-ax^2}$, hvor $a > 0$ og P er et polynomium, tilhører $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

6.11. Lad $f(x) = e^{-\frac{a}{2}x^2}$.

a) Vis, at

$$\frac{d\hat{f}(k)}{dk} = -\frac{k}{a}\hat{f}(k) \ . \qquad (*)$$

Vink. Benyt (39) og partiel integration.

b) Løs differentialligningen (*) og vis derved, at

$$\hat{f}(k) = c \cdot e^{-\frac{1}{2a}k^2}$$

for en vis konstant c.

c) Benyt Parsevals ligning (27) til at bestemme c til

$$c = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \ .$$

d) Slut af a), b) og c), at

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}e^{-ikx}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}\cos kx dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{1}{2a}k^2}$$

for $a > 0$ og $k \in \mathbb{R}$, og specielt at funktionen $\Omega_0(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ er sin egen Fouriertransformerede (i $L_2(\mathbb{R})$) samt at

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{2\pi} \ .$$

6.12. Lad operatorerne A og $A^\dagger$ på $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ være givet ved

$$(Af)(x) = xf(x) + \frac{df}{dx} \qquad \text{og} \qquad (A^\dagger f)(x) = xf(x) - \frac{df}{dx}\ .$$

a) Benyt (38) og (39) til at vise, at $\widehat{A^\dagger f} = -iA^\dagger \hat{f}$ og mere generelt

$$\widehat{(A^\dagger)^n f} = (-i)^n (A^\dagger)^n \hat{f}$$

for $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

b) Benyt a) og Opg.6.11d til at vise, at funktionen

$$\Omega_n = (A^\dagger)^n \Omega_0\ , \quad n \in \mathbb{N}\ ,$$

er en egenvektor for Fourier transformationen $\mathcal{F}$ med egenværdi $(-i)^n$.

c) I Opg.6.13 vises, at sættet $(\|\Omega_n\|^{-1}\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ er en ortonormalbasis for Hilbert rummet $L_2(\mathbb{R})$. Begrund ved brug heraf, at $\mathcal{F}$ er diagonaliserbar og bestem samtlige egenværdier og tilhørende egenrum.

6.13. I denne opgave benyttes samme betegnelser som i Opg. 6.12.

a) Vis for $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, at

$$\Omega_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}\ ,$$

hvor H_n er et polynomium af grad n og at koefficienten til højestegradsleddet er 2^n. H_n kaldes (pånær en konstant faktor) for det n'te *Hermite polynomium.*

b) Eftervis følgende tre egenskaber ved A og $A^\dagger$:

$$A\Omega_0 = 0\ , \quad AA^\dagger f = (A^\dagger A + 2I)f\ , \quad (Af, g) = (f, A^\dagger g)$$

for $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, hvor $(\cdot,\cdot)$ betegner det sædvanlige indre produkt på $L_2(\mathbb{R})$.

c) Benyt b) til at vise at

$$(\Omega_n, \Omega_m) = 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{n,m}\ , \quad n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ .$$

d) Vis, at $(\|\Omega_n\|^{-1}\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ er en ortonormalbasis for $L_2(\mathbb{R})$ ved at vise, at hvis $f \in L_2(\mathbb{R})$ og $(f, \Omega_n) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, da er $f = 0$.

Vink. Brug først a) til at slutte, at $(f, \varphi_n) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, hvor $\varphi_n(x) = x^n e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Herefter skal følgende argumentation begrundes:

Funktionen $g = f \cdot \Omega_0$ tilhører $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ og det er nok at vise, at $\hat{g} = 0$. Vi har

$$\hat{g}(k) = (f, e^{ikx}\Omega_0) = (f, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikx)^n}{n!}\Omega_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!}(f, \varphi_n) = 0\ .$$

6.14. I denne opgave benyttes sammme betegnelser som i Opg. 6.12 og Opg. 6.13.

a) Vis, at

$$-\frac{d^2f}{dx^2} + x^2 f(x) = A^\dagger A f + f \ , \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

b) Vis, at

$$(A^\dagger A)A^\dagger = A^\dagger(A^\dagger A) + 2A^\dagger \ ,$$

og benyt dette til at indse, at $\Omega_n \ , n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, er en egenvektor for operatoren $-\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ og bestem de tilhørende egenværdier.

c) Benyt b) til at vise, at operatoren $(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2)^{-1}$ kan gives mening som en begrænset selvadjungeret diagonaliserbar operator på $L_2(\mathbb{R})$.

§7. Sturm–Liouville teori

I denne sidste paragraf skal vi se på en anvendelse af resultaterne i §5 i forbindelse med en klasse af 2. ordens lineære differentialligninger og specielt se, hvordan sådanne ligninger giver anledning til ortonormalbaser for visse Hilbert rum af formen $L_2([a,b],\rho)$. Disse kan benyttes til løsning af mere generelle partielle differentialligninger, end dem vi betragtede i §3.

7.1 Begyndelsesværdiproblemer i én variabel.

Vi begynder med at genkalde (jvf. afsnit I.7.4), at den normerede, lineære 2. ordens differentialligning

$$u''(x) + A(x)u'(x) + B(x)u(x) = f(x)\,, \quad x \in I\,, \tag{1}$$

hvor A, B og f er kontinuerte funktioner på intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$, har en entydig løsning $u \in C^2(I)$ der opfylder *begyndelsesbetingelsen* (hvor x betragtes som en tidsvariabel)

$$u(x_0) = a \quad \text{og} \quad u'(x_0) = b \tag{2}$$

for givne $x_0 \in I$ og $a, b \in \mathbb{C}$.

For $f = 0$ følger heraf, at løsningsmængden $\mathcal{L}_0$ for den homogene ligning

$$u'' + Au' + Bu = 0 \quad \text{på} \quad I \tag{3}$$

er et to-dimensionalt underrum af $C^2(I)$, og at en basis (v_1, v_2) for dette fås ved at kræve, at begyndelsesværdierne $(v_1(x_0), v_1'(x_0))$ og $(v_2(x_0), v_2'(x_0))$ for et givet $x_0 \in I$ er lineært uafhængige, idet det heraf følger, at v_1 og v_2 er lineært uafhængige i $C^2(I)$. Der gælder endda, at $(v_1(x), v_1'(x))$ og $(v_2(x), v_2'(x))$ er lineært uafhængige i $\mathbb{C}^2$ for hvert $x \in I$. Antages nemlig, at $k_1(v_1(x_1), v_1'(x_1)) + k_2(v_2(x_1), v_2'(x_1)) = (0,0)$ for givne $x_1 \in I$ og $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$, så er $v = k_1v_1 + k_2v_2$ en løsning til (3), der opfylder begyndelsesbetingelsen $(v(x_1), v'(x_1)) = (0,0)$, og derfor er $v = 0$ ifølge entydigheden af løsningen med denne begyndelsesbetingelse. Specielt følger da, at $k_1(v_1(x_0), v_1'(x_0)) + k_2(v_2(x_0), v_2'(x_0)) = (0,0)$ i modskrid med antagelsen om, at $(v_1(x_0), v_1'(x_0))$ og $(v_2(x_0), v_2'(x_0))$ er lineært uafhængige.

Vi kan også udtrykke ovenstående ved, at *et par (v_1, v_2) af løsninger til (3) er lineært uafhængige netop hvis den såkaldte Wronski determinant knyttet til (v_1, v_2) defineret ved*

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} = v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x) \tag{4}$$

er forskellig fra 0 i et punkt $x = x_0$ af I, og i såfald er

$$W(x) \neq 0 \quad \text{for alle} \quad x \in I \; . \tag{5}$$

Endvidere haves for enhver given partikulær løsning u_0 til (1), at samtlige løsninger til (1) fås ved til u_0 at addere den fuldstændige løsning til (3), dvs. løsningsmængden $\mathcal{L}$ til (1) er

$$\mathcal{L} = \{u_0 + k_1 v_1 + k_2 v_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{C}\} = u_0 + \mathcal{L}_0 \; , \tag{6}$$

hvor (v_1, v_2) er en basis for $\mathcal{L}_0$.

Bemærkning 7.1. Hvis A og B er reelle funktioner og u en løsning til (3), da er oplagt også $\operatorname{Re} u$ og $\operatorname{Im} u$ løsninger til (3). Hvis dertil, begyndelsesværdierne $u(x_0) = a$ og $u'(x_0) = b$ er reelle, da er u en reel funktion, idet $\operatorname{Im} u$ i såfald er en løsning til (3) med $\operatorname{Im} u(x_0) = (\operatorname{Im} u)'(x_0) = 0$, og derfor $\operatorname{Im} u = 0$.

Som bekendt kan man i almindelighed ikke give en løsningsformel for (1). Vi skal nu se, at dette er muligt, såfremt to lineært uafhængige løsninger v_1 og v_2 til (3) kendes.

Vi forsøger med et gæt af formen

$$u(x) = h(x)v_1(x) + k(x)v_2(x) \, , \quad x \in I \; , \tag{7}$$

hvor $h, k \in C^2(I)$. (Bemærk, at hvis h og k er konstanter, da er u løsning til (3).) Vi har så

$$\begin{aligned} u'(x) = {} & h(x)v_1'(x) + k(x)v_2'(x) \\ & + h'(x)v_1(x) + k'(x)v_2(x) \; . \end{aligned}$$

Det er nu praktisk yderligere at antage, at h og k opfylder

$$h'v_1 + k'v_2 = 0 \; , \tag{8}$$

således at

$$u' = h\,v_1' + k\,v_2' \; , \tag{9}$$

og derfor

$$u'' = h\,v_1'' + k\,v_2'' + h'v_1' + k'v_2' \tag{10}$$

på I. Indsættes (7), (9) og (10) i (1), og samles de led, der indeholder henholdsvis h og k, fås

$$\begin{aligned} & h(v_1'' + Av_1' + Bv_1) + k(v_2'' + Av_2' + Bv_2) \\ & \qquad + h'v_1' + k'v_2' = f \; , \end{aligned}$$

hvilket, da v_1 og v_2 er løsninger til (3), giver

$$h'v_1' + k'v_2' = f \ . \tag{11}$$

Vi har således fundet, at (7) er løsning til (1), hvis h og k opfylder (8) og (11). Herved fås for hvert $x \in I$ to lineære ligninger for $(h'(x), k'(x))$. Da koefficientmatricen for ligningssystemet ses at have determinant lig med $W(x)$, giver (5), at løsningen er entydig og givet ved

$$h'(x) = \frac{-v_2(x)f(x)}{W(x)} \ , \quad k'(x) = \frac{v_1(x)f(x)}{W(x)} \tag{12}$$

for $x \in I$. Herved fås

$$h(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{v_2(y)}{W(y)} f(y)dy + k_1 \tag{13}$$

og

$$k(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{v_1(y)}{W(y)} f(y)dy + k_2 \ , \tag{14}$$

som ved indsættelse i (7) giver

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{v_2(x)v_1(y) - v_1(x)v_2(y)}{W(y)} f(y)dy + k_1 v_1(x) + k_2 v_2(x) \ , \tag{15}$$

hvor $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$. Vi bemærker, at vi hermed i henhold til (6), har fundet samtlige løsninger til (1), når k_1 og k_2 gennemløber $\mathbb{C}$. Altså har vi vist følgende resultat.

Sætning 7.2. *Lad v_1 og v_2 være to lineært uafhængige løsninger til (3). Da er samtlige løsninger til (1) givet ved (15), hvor $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$, og løsningen, der opfylder begyndelsebetingelsen (2), fås ved i (15) at indsætte den entydige løsning (k_1, k_2) til ligningssystemet*

$$\left.\begin{aligned} k_1 v_1(x_0) + k_2 v_2(x_0) &= a \\ k_1 v_1'(x_0) + k_2 v_2'(x_0) &= b \ . \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Den sidste del af sætningen følger af (7) og (9), idet $h(x_0) = k_1$ og $k(x_0) = k_2$ ifølge (13) og (14).

Eksempel 7.3. Vi betragter differentialligningen

$$u'' + \omega_0^2 u = f(x) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

hvor $\omega_0 > 0$ er en konstant. (Denne beskriver f.eks. bevægelsen af en partikel under påvirkning af en fjederkraft samt en ydre kraft, hvor $u(x)$ betegner udsvinget til tiden x fra ligevægtsstillingen, ω_0 er egenfrekvensen, og f er proportional med den ydre kraft).

Den homogene ligning har åbenbart $v_1(x) = \cos \omega_0 x$ og $v_2(x) = \sin \omega_0 x$ som lineært uafhængige løsninger. Man finder, at $W(x) = \omega_0$, og ved brug af en additionsformel for cos og sin, at $v_2(x)v_1(y) - v_1(x)v_2(y) = \sin \omega_0(x-y)$, således at (15) med $x_0 = 0$ giver

$$u(x) = \int_0^x \omega_0^{-1} \sin \omega_0(x-y) f(y) dy + k_1 \cos \omega_0 x + k_2 \sin \omega_0 x \ . \tag{17}$$

Benyttes f.eks. $f(x) = F \sin \omega x$, hvor F er en konstant, (harmonisk ydre kraft), fås for $\omega \neq \pm \omega_0$ (igen ved brug af en additionsformel)

$$\begin{aligned} u(x) = & \frac{F}{\omega_0(\omega+\omega_0)} \sin(\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_0)x) \cos(\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_0)x) \\ & - \frac{F}{\omega_0(\omega-\omega_0)} \sin(\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_0)x \cos(\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_0)x) \\ & + k_1 \cos \omega_0 x + k_2 \sin \omega_0 x \ . \end{aligned}$$

Tilsvarende fås for $\omega = \omega_0$

$$u(x) = -\frac{F}{2\omega_0} x \cos \omega_0 x + k_1 \cos \omega_0 x + \big(k_2 + \frac{F}{2\omega_0^2}\big) \sin \omega_0 x \ ,$$

hvor det første led er en harmonisk svingning med en tidsafhængig amplitude $-\frac{F}{2\omega_0}x$, der divergerer for $x \to \pm\infty$, og som er udtryk for et såkaldt resonansfænomen.

7.2 Randværdiproblemer i én variabel.

Erstattes de to betingelser (2) i punktet $x_0 \in I$ med en betingelse i hvert af de to forskellige punkter $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$, af formen

$$a\, u(\alpha) - b\, u'(\alpha) = 0 \tag{17}$$

$$c\, u(\beta) + d\, u'(\beta) = 0 \ , \tag{18}$$

hvor $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $(c, d) \neq (0, 0)$, da taler vi om et *randværdiproblem* for (1) på intervallet $[\alpha, \beta]$. Vi vil da kun være interesserede i løsninger på $[\alpha, \beta]$, og antager derfor fra nu af, at $I = [\alpha, \beta]$. Betingelsen (17), hhv. (18), kaldes da *randbetingelsen* i α, hhv. β.

I modsætning til begyndelsesværdiproblemet i foregående afsnit har randværdiproblemer ikke altid en entydig løsning, hvilket følgende simple eksempel viser.

Eksempel 7.4. Betragt randværdiproblemet

$$\begin{aligned} u'' + u = 0 \quad &\text{på} \quad [0, \pi] \ , \\ u(0) = 0 \ , \quad &u(\pi) = 0 \ . \end{aligned}$$

Differentialligningen har løsningerne $u(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x$, $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$. Af randbetingelsen i 0 fås, at $k_1 = 0$, hvorefter den anden randbetingelse ses at være opfyldt for alle $k_2 \in \mathbb{C}$. Så løsningerne til randværdiproblemet er $u(x) = k_2 \sin x$, hvor $k_2 \in \mathbb{C}$.

Lad os først se på det generelle homogene randværdiproblem

$$(\mathrm{R}_0) \qquad \begin{cases} u'' + Au' + Bu = 0 \quad \text{på} \quad [\alpha, \beta] \ , & (19) \\ au(\alpha) - bu'(\alpha) = 0 \ , & (20) \\ cu(\beta) + du'(\beta) = 0 \ , & (21) \end{cases}$$

som naturligvis altid har den trivielle løsning $u = 0$.

Da (20) øjensynlig er ækvivalent med at $(u(\alpha), u'(\alpha)) = k(b, a)$, hvor $k \in \mathbb{C}$, følger det af forrige afsnit, at hvis u_1 er den entydige løsning til (19), der opfylder $(u_1(\alpha), u_1'(\alpha)) = (b, a)$, da er samtlige løsninger til (19) og (20) givet ved $u = ku_1$, $k \in \mathbb{C}$. Disse udgør altså et en-dimensionalt underrum af $\mathcal{L}_0$, idet $u_1 \neq 0$, da $(b, a) \neq (0, 0)$. Tilsvarende fås et en-dimensionalt løsningsrum for (19) og (21) med basis u_2 bestemt ved at $(u_2(\beta), u_2'(\beta)) = (-d, c)$. Det følger derfor, at *randværdiproblemet* (R_0) *har en ikke-triviel løsning netop hvis* u_1 *og* u_2 *er proportionale og i såfald er løsningsmængden et en-dimensionalt underrum af* $\mathcal{L}_0$. Med andre ord er u_1 og u_2 lineært uafhængige (og udgør dermed en basis for $\mathcal{L}_0$), netop hvis (R_0) kun har løsningen $u = 0$. I den følgende sætning vises, at hvis dette er tilfældet, da har det inhomogene randværdipoblem

$$(\mathrm{R}) \qquad \begin{cases} u'' + Au' + Bu = f \quad \text{på} \quad [\alpha, \beta] \ , & (22) \\ au(\alpha) - bu'(\alpha) = 0 \ , & (23) \\ cu(\beta) + du'(\beta) = 0 \ , & (24) \end{cases}$$

netop een løsning for hvert $f \in C([\alpha, \beta])$, og der gives en løsningsformel analog med (15).

Sætning 7.5. *Lad u_1 være en ikke-triviel løsning til (19), (20) og tilsvarende u_2 til (19), (21). Hvis (R_0) kun har løsningen $u = 0$, da har (R) netop een løsning for hvert $f \in C([\alpha, \beta])$, og den er givet ved*

$$u(x) = \int_\alpha^\beta \mathcal{G}(x,y)W(y)^{-1}f(y)dy \tag{25}$$

hvor $\mathcal{G}$ er den såkaldte Green's funktion for problemet (R) defineret ved

$$\mathcal{G}(x,y) = \begin{cases} u_1(x)u_2(y) & \text{for} \quad \alpha \le x \le y \le \beta \\ u_2(x)u_1(y) & \text{for} \quad \alpha \le y \le x \le \beta \end{cases} \tag{26}$$

og

$$W(y) = u_1(y)u_2'(y) - u_1'(y)u_2(y)\ , \quad y \in [\alpha, \beta]\ . \tag{27}$$

Bevis. Vi har ovenfor vist, at u_1 og u_2 er lineært uafhængige, således at vi ifølge Sætning 7.2 har, at samtlige løsninger til (22) er givet ved

$$u(x) = u_2(x)\int_\alpha^x u_1 W^{-1} f dy - u_1(x)\int_\alpha^x u_2 W^{-1} f dy + k_1 u_1(x) + k_2 u_2(x)\ , \tag{28}$$

og ifølge (7), (9), (13) og (14) er

$$\begin{aligned} u(\alpha) &= k_1 u_1(\alpha) + k_2 u_2(\alpha)\ , \\ u'(\alpha) &= k_1 u_1'(\alpha) + k_2 u_2'(\alpha)\ , \\ u(\beta) &= \big(k_1 - \int_\alpha^\beta u_2 W^{-1} f dy\big) u_1(\beta) + \big(k_2 + \int_\alpha^\beta u_1 W^{-1} f dy\big) u_2(\beta)\ , \\ u'(\beta) &= \big(k_1 - \int_\alpha^\beta u_2 W^{-1} f dy\big) u_1'(\beta) + \big(k_2 + \int_\alpha^\beta u_1 W^{-1} f dy\big) u_2'(\beta)\ . \end{aligned}$$

Udnyttes nu, at u_1 opfylder (20), og at u_2 opfylder (21) fås heraf, at

$$au(\alpha) - bu'(\alpha) = k_2(au_2(\alpha) - bu_2'(\alpha))\ , \tag{29}$$

og

$$cu(\beta) + du'(\beta) = \big(k_1 - \int_\alpha^\beta u_2 W^{-1} f dy\big)(cu_1(\beta) + du_1'(\beta))\ . \tag{30}$$

Det bemærkes nu, at på højresiden af (29) er $au_2(\alpha) - bu_2'(\alpha) \neq 0$, fordi i modsat fald ville (a, b) være en ikke-triviel løsning til ligningssystemet

$$\begin{aligned} au_1(\alpha) - bu_1'(\alpha) &= 0 \\ au_2(\alpha) - bu_2'(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

i modstrid med at $W(\alpha) \neq 0$. Tilsvarende ses, at $cu_1(\beta) + du_1'(\beta) \neq 0$ i (30). Af (29) og (30) følger derfor, at u givet ved (28) opfylder (23) og (24) netop hvis

$$k_2 = 0 \quad \text{og} \quad k_1 = \int_\alpha^\beta u_2 W^{-1} f dy \ .$$

Indsættes dette i (28) fås

$$\begin{aligned} u(x) &= u_2(x) \int_\alpha^x u_1 W^{-1} f dy - u_1(x) \int_\alpha^x u_2 W^{-1} f dy + u_1(x) \int_\alpha^\beta u_2 W^{-1} f dy \\ &= u_1(x) \int_x^\beta u_2 W^{-1} f dy + u_2(x) \int_\alpha^x u_1 W^{-1} f dy \ , \end{aligned}$$

som ses at være identisk med (25). □

Vi bemærker, at funktionen $\mathcal{G} : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ givet ved (26) er en C^2-funktion på de to trekanter $\alpha \leq x \leq y \leq \beta$ og $\alpha \leq y \leq x \leq \beta$, og at de to definitioner i (26) stemmer overens for $x = y$.

Eksempel 7.6. Betragt randværdiproblemet

$$\begin{gathered} u'' + u = f \quad \text{på} \quad [0, \tfrac{\pi}{2}] \\ u(0) = u(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \ . \end{gathered}$$

Her er $(a, b) = (c, d) = (1, 0)$, og det ses, at vi kan vælge $u_1(x) = \sin x$ og $u_2(x) = \cos x$. Da disse er lineært uafhængige, har det homogene problem kun den trivielle løsning (hvilket også let ses direkte). Da $W(x) = -1$ fås, at løsningen til randværdiproblemet er

$$u(x) = -\sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos y f(y) dy - \cos x \int_0^x \sin y f(y) dy \ .$$

7.3 Sturm–Liouville teori.

Vi skal nu formulere resultatet i Sætning 7.5 i operatorsprog. Hertil antages fra nu af, at *A og B er reelle funktioner, samt at $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, og at u_1, u_2 er valgt reelle* i henhold til Bemærkning 7.1. Dermed er også W reel, og da W er kontinuert på $[\alpha, \beta]$, kan vi ved eventuelt at erstatte u_1 med $-u_1$ i (27) antage, at *$W > 0$ på $[\alpha, \beta]$*.

Med L_0 betegner vi den lineære operator defineret ved

$$L_0 u = u'' + Au' + Bu \tag{31}$$

for u tilhørende

$$V(a,b,c,d) = \{u \in C^2[\alpha,\beta] \mid au(\alpha) - bu'(\alpha) = 0\,, cu(\beta) + du'(\beta) = 0\}\ , \tag{32}$$

som er et vektorrum, da randbetingelserne er lineære.

Med G_0 betegnes integraloperatoren med kerne $\mathcal{G}$ (se Eksempel 4.3e, Sætning 5.2 og Opg. 5.5) på Hilbert rummet $H_{W^{-1}}$, hvor vi for en positiv kontinuert vægtfunktion ρ på $[\alpha,\beta]$ sætter

$$H_\rho = L_2([\alpha,\beta],\rho) \tag{33}$$

med indre produkt

$$(f,g)_\rho = \int_\alpha^\beta f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx\ , \quad f,g \in H_\rho\ .$$

Altså

$$(G_0 f)(x) = \int_\alpha^\beta \mathcal{G}(x,y)f(y)W(y)^{-1}\,dy \tag{34}$$

for $f \in H_{W^{-1}}$.

Vi bemærker, at underrummet $V(a,b,c,d)$ er tæt i H_ρ, fordi det åbenbart indeholder mængden af C^∞-funktioner på $[\alpha,\beta]$ med kompakt støtte indenfor $]\alpha,\beta[$, som er tæt i H_ρ ifølge Sætning A.14.

Med disse definitioner fås nu af Sætning 7.5 følgende

Lemma 7.7. *Hvis L_0 er injektiv, er operatoren G_0 en injektiv, selvadjungeret Hilbert-Schmidt operator på $H_{W^{-1}}$, der afbilder underrummet $C([\alpha,\beta])$ af $H_{W^{-1}}$ bijektivt på $V(a,b,c,d)$, og opfylder*

$$L_0 G_0 f = f \quad \textit{for} \quad f \in C[\alpha,\beta]\ , \tag{35}$$

$$G_0 L_0 u = u \quad \textit{for} \quad u \in V(a,b,c,d)\ , \tag{36}$$

(hvilket vil sige, at L_0 og $G_0\Big|_{C([\alpha,\beta])}$ er hinandens inverse.)

Bevis. At L_0 er injektiv, er øjensynlig det samme som, at (R_0) kun har løsningen $u = 0$, således at vi kan benytte Sætning 7.5. G_0 er da en Hilbert-Schmidt operator ifølge Opg. 5.5, eftersom

$$\int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta |\mathcal{G}(x,y)|^2 W(x)^{-1} W(y)^{-1} dxdy < +\infty\ ,$$

da både $\mathcal{G}$ og W^{-1} er kontinuerte funktioner på henholdsvis $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ og $[\alpha, \beta]$ og derfor begrænsede. At G_0 er selvadjungeret følger også af Opg. 5.5, da $\mathcal{G}$ er reel og $\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(y, x)$ ifølge (26).

For $f \in C([\alpha, \beta])$ har vi i Sætning 7.5 set, at $G_0 f \in V(a, b, c, d)$ og at $L_0 G_0 f = f$. Hvis omvendt $u \in V(a, b, c, d)$ sættes $f = L_0 u$. Da er $f \in C([\alpha, \beta])$ og p.gr.a. entydighedsudsagnet i Sætning 7.5 er $G_0 f = u$. Dette viser, at G_0 afbilder $C([\alpha, \beta])$ på $V(a, b, c, d)$, og at (35) og (36) gælder.

Vi mangler at vise, at G_0 er injektiv på $H_{W^{-1}}$, dvs. at 0 ikke er egenværdi for G_0. Antag derfor, at $f \in H_{W^{-1}}$, og at $G_0 f = 0$. Da er for alle $u \in V(a, b, c, d)$

$$0 = (L_0 u, G_0 f)_{W^{-1}} = (G_0 L_0 u, f)_{W^{-1}} = (u, f)_{W^{-1}} \ , \tag{37}$$

hvor vi har benyttet (36), samt at G_0 er selvadjungeret. Men da $V(a, b, c, d)$ er tæt i $H_{W^{-1}}$, er $V(a, b, c, d)^{\perp} = \{0\}$, således at (37) medfører, at $f = 0$, som ønsket. $\square$

Under samme forudsætning som i Lemma 7.7 har vi nu ifølge Sætning 5.5, at der findes en ortonormalbasis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ for $H_{W^{-1}}$ bestående af egenvektorer for G_0. Betegnes de tilhørende reelle egenværdier med $\mu_1, \mu_2, \ldots$, har vi altså, at

$$G_0 e_i = \mu_i e_i \ , \quad i \in \mathbb{N} \ . \tag{38}$$

Der gælder faktisk, at $e_i \in V(a, b, c, d)$, $i \in I$, fordi, da kernen $\mathcal{G}$ er kontinuert, følger det, at $G_0 f \in C([\alpha, \beta])$ for alle $f \in H_{W^{-1}}$ ifølge Sætning 5.2iii), således at e_i er kontinuert ifølge (38), da $\mu_i \neq 0$. Men heraf fås så, at $e_i = \mu_i^{-1} G_0 e_i \in V(a, b, c, d)$ ifølge Lemma 7.7.

Anvendes nu L_0 på (38) og benyttes (35) fås, at

$$L_0 e_i = \mu_i^{-1} e_i \ , \quad i \in \mathbb{N} \ . \tag{39}$$

Hvis omvendt $e \in V(a, b, c, d) \setminus \{0\}$ og $\lambda \in \mathbb{C}$ således at

$$L_0 e = \lambda e \ , \tag{40}$$

fås ved at anvende G på (40), at $e = G_0 L_0 e = \lambda G_0 e$, hvoraf $\lambda \neq 0$ og $G_0 e = \lambda^{-1} e$. Altså er $\lambda = \mu_i^{-1}$ for et $i \in \mathbb{N}$, og e er en tilhørende egenvektor for G_0. Faktisk er e proportional med e_i, fordi de begge er løsninger til randværdiproblemet (R_0) med B erstattet med $B - \mu_i^{-1}$, og er derfor proportionale ifølge bemærkningerne før Sætning 7.5. Dette udtrykkes ved at sige, at egenværdierne for G_0 har *multiplicitet* 1, eller at de er *simple.*

Problemet (40), dvs.

$$\text{(S-L)}_0 \qquad \begin{cases} u'' + Au' + Bu = \lambda u \quad \text{på} \quad [\alpha, \beta]\,, & (41) \\ au(\alpha) - bu'(\alpha) = 0\ , & (42) \\ cu(\beta) + du'(\beta) = 0\ , & (43) \end{cases}$$

kaldes et *Sturm-Liouville problem*, og at løse dette går ud på at finde de værdier af $\lambda \in \mathbb{R}$, for hvilke der findes ikke-trivielle løsninger $u \in C^2([\alpha, \beta])$ til (41–43), og for sådanne værdier af λ at finde løsningerne. Sådanne værdier af λ kaldes *egenværdier for problemet*, og de tilsvarende løsninger for tilhørende *egenfunktioner*. Normalt tillades en yderligere faktor ρ på højresiden af (41), hvor ρ er en positiv, kontinuert funktion på $[\alpha, \beta]$. Vi venter med dette til senere (jvf. Definition 7.10).

I kraft af ovenstående har vi indset, at forudsat 0 ikke er en egenværdi, da er $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en egenværdi for Sturm-Liouville problemet (S-L)$_0$ netop, hvis λ^{-1} er en egenværdi for operatoren G_0, og at egenvektorerne for G_0 hørende til λ^{-1} netop er egenfunktionerne hørende til λ, samt at disse er entydigt bestemt på nær multiplikation med en konstant. Dermed har vi følgende

Sætning 7.8. *Antag, at* 0 *ikke er egenværdi for Sturm-Liouville problemet (S-L)$_0$. Da findes der uendelig mange egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. For disse gælder, at*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{-2} < +\infty\ ,$$

og for hver egenværdi λ_i er de tilhørende egenfunktioner indbyrdes proportionale.

Betegnes med e_i, $i \in \mathbb{N}$, en egenfunktion hørende til λ_i, således at e_i har norm 1 *i $H_{W^{-1}}$, da udgør $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en ortonormalbasis for $H_{W^{-1}}$.*

Bevis. Dette følger umiddelbart af ovenstående bemærkninger samt Sætning 5.5 og af, at Hilbert-Schmidt normen af G_0 er lig med $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{-2}$. $\square$

Eksempel 7.9. I forlængelse af Eksempel 7.6 betragtes Sturm-Liouville problemet

$$u'' + u = \lambda u \quad \text{på} \quad \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$$
$$u(0) = u\big(\frac{\pi}{2}\big) = 0\ .$$

Erstattes u_1 med $-u_1$ i Eksempel 7.6 fås, at $W = 1$, så Sætning 7.8 giver, at der findes uendelig mange egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, samt at egenfunktionerne kan vælges, så de udgør en ortonormalbasis for $L_2\big(\big[0, \frac{\pi}{2}\big]\big)$.

I dette tilfælde kan differentialligningen naturligvis løses eksplicit. Det overlades til læseren at verificere, at egenværdierne er $\lambda_n = 1 - 4n^2,\ n \in \mathbb{N}$, med tilhørende normerede egenfunktioner $e_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin 2nx$.

7.4 Det regulære Sturm–Liouville problem.

Forudsætningen for at kunne anvende Sætning 7.8 er, at det vides, at 0 ikke er en egenværdi. En særlig vigtig klasse af Sturm-Liouville problemer, for hvilke dette let kan afgøres, er de såkaldte *regulære Sturm-Liouville problemer.*

Definition 7.10. Et regulært Sturm-Liouville problem er givet ved

$$\text{(S-L)} \qquad \begin{cases} -(pu')' + qu = \lambda \rho u \quad \text{på} \quad [\alpha, \beta] & (44) \\ au(\alpha) - bu'(\alpha) = 0\ , & (45) \\ cu(\beta) + du'(\beta) = 0\ , & (46) \end{cases}$$

hvor $p \in C^1([\alpha, \beta])$, $q, \rho \in C([\alpha, \beta])$ og $p > 0$, $q \geq 0$, $\rho > 0$ på $[\alpha, \beta]$, samt $ab \geq 0$, $cd \geq 0$.

Da $p > 0$ kan (44) omskrives til den normerede ligning

$$u'' + \frac{p'}{p} u' - \frac{q}{p} u = -\lambda \frac{\rho}{p} u\ , \tag{47}$$

som er af formen (41) bortset fra, at der på højresiden forekommer en ekstra faktor $-\frac{\rho}{p}$. Som vi skal se, udgør dette ikke en reel komplikation i forhold til tidligere.

Som før sætter vi

$$L_0 u = u'' + \frac{p'}{p} u' - \frac{q}{p} u \tag{48}$$

og definerer Sturm-Liouville operatoren L ved

$$Lu = -\frac{p}{\rho} L_0 u = \frac{1}{\rho}(-(pu')' + qu) \tag{49}$$

for $u \in V(a, b, c, d)$. Da er λ egenværdi for (S-L), netop hvis der findes $u \neq 0$, så $Lu = \lambda u$.

Vi har nu følgende

Lemma 7.11. *Operatoren L hørende til det regulære Sturm-Liouville problem (S-L) opfylder*

$$(Lu, u)_\rho \geq 0 \;, \quad u \in V(a, b, c, d) \;, \tag{50}$$

og der gælder lighedstegn i (50) netop hvis $a = c = 0$, $q = 0$ og u er konstant på $[\alpha, \beta]$.

Specielt er $\lambda = 0$ egenværdi alene i sidstnævnte tilfælde, og ellers er alle egenværdier positive.

Bevis. Ved partiel integration fås

$$\begin{aligned}(Lu, u)_\rho &= \int_\alpha^\beta (-(pu')' + qu)\overline{u}\, dx \\ &= p(\alpha)u'(\alpha)\overline{u(\alpha)} - p(\beta)u'(\beta)\overline{u(\beta)} + \int_\alpha^\beta (p|u'|^2 + q|u|^2)dx \;.\end{aligned} \tag{51}$$

Hvis $b \neq 0$ er $p(\alpha)u'(\alpha)\overline{u(\alpha)} = p(\alpha)\frac{a}{b}|u(\alpha)|^2 \geq 0$ ifølge (45), og hvis $b = 0$ er $u(\alpha) = 0$ ifølge (45). Af (46) følger tilsvarende, at $-p(\beta)u'(\beta)\overline{u(\beta)} \geq 0$. Endelig er det sidste integral i (51) klart ≥ 0 og kun lig med 0, hvis $u' = 0$ og $qu = 0$. Idet en konstant funktion $\neq 0$ kun kan opfylde (45) og (46) såfremt $a = c = 0$, viser dette den første del af lemmaet. Den sidste del følger umiddelbart heraf. □

Lad os nu antage, at $\lambda = 0$ ikke er en egenværdi for (S-L), og lad G_0 være defineret som tidligere ved (34), hvor $\mathcal{G}$ er givet ved (26), og hvor u_1 og u_2 er to ikke-trivielle reelle løsninger til $L_0 u = 0$, som opfylder henholdsvis (45) og (46). Vi kan da yderligere antage, at

$$pW = 1 \quad \text{på} \quad [\alpha, \beta] \;, \tag{52}$$

fordi

$$\begin{aligned} W' &= (u_1 u_2' - u_1' u_2)' \\ &= u_1 u_2'' - u_1'' u_2 \\ &= u_1\big(-\frac{p'}{p}u_2' + \frac{q}{p}u_2\big) - \big(-\frac{p'}{p}u_1' + \frac{q}{p}u_1\big)u_2 \\ &= -\frac{p'}{p}(u_1 u_2' - u_1' u_2) \\ &= -\frac{p'}{p}W \end{aligned}$$

medfører, at

$$(pW)' = p'W + pW' = 0 \ ,$$

altså at pW er lig med en konstant $K \neq 0$ på $[\alpha, \beta]$. Erstattes u_1 med $K^{-1}u_1$ opnås (52).

Lader vi nu G betegne integraloperatoren på H_ρ med kerne $-\mathcal{G}$, dvs.

$$(Gf)(x) = -\int_\alpha^\beta \mathcal{G}(x,y)f(y)\rho(y)dy \tag{53}$$

for $f \in H_\rho$, kan vi omformulere Lemma 7.7 til følgende

Lemma 7.12. *Hvis L er injektiv, er G en injektiv selvadjungeret Hilbert-Schmidt operator på H_ρ, der afbilder $C([\alpha,\beta])$ på $V(a,b,c,d)$, og opfylder*

$$L\,Gf = f \quad \textit{for} \quad f \in C([\alpha,\beta]) \tag{54}$$

$$G\,Lu = u \quad \textit{for} \quad u \in V(a,b,c,d) \ . \tag{55}$$

Bevis. Ved at sammenligne (34) med (53) ses, at

$$Gf = -G_0(W\rho f) = -G_0\big(\frac{\rho}{p}f\big) \tag{56}$$

for $f \in H_\rho$, hvor vi har benyttet (52) og det bemærkes, at da $\rho > 0$, $p > 0$ på $[\alpha,\beta]$, så er H_ρ og $H_{W^{-1}} = H_p$ identiske som vektorrum (men med forskelligt indre produkt), og dertil er $\frac{\rho}{p}f \in C([\alpha,\beta])$, hvis og kun hvis $f \in C([\alpha,\beta])$. Indsættes nu $\frac{\rho}{p}f$ i stedet for f i (35), følger (54) af (49) og (56), og tilsvarende følger (55) af (36). Resten følger på samme måde som i beviset for Lemma 7.7. □

Af Lemma 7.12 følger nu som tidligere, at λ er en egenværdi for (S-L), hvis og kun hvis λ^{-1} er en egenværdi for G, samt at egenvektorerne for G hørende til λ^{-1} netop er egenfunktionerne for (S-L) hørende til λ, under forudsætning af, at 0 ikke er en egenværdi for (S-L). Dertil ses som før, at samtlige egenværdier er simple.

Vi får nu heraf let følgende fundamentale resultat.

Sætning 7.13. *Om egenværdier og egenfunktioner for det regulære Sturm-Liouville problem (S-L) gælder følgende.*

1) *Samtlige egenværdier er ≥ 0, og der findes uendelig mange positive egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Disse er alle simple og opfylder*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-2} < +\infty \ . \tag{57}$$

2) *$\lambda = 0$ er egenværdi hvis og kun hvis $a = c = 0$ og $q = 0$, og de tilhørende egenfunktioner er da konstante på $[\alpha, \beta]$.*
3) *Betegnes med e_i en egenfunktion hørende til λ_i, $i \in \mathbb{N}$, som er normeret i H_ρ, og med e_0 en normeret konstant funktion i H_ρ, da er $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en ortonormalbasis for H_ρ, hvis $\lambda = 0$ ikke er en egenværdi for H_ρ, og ellers er $(e_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ en ortonormalbasis for H_ρ.*

Bevis. Påstanden 2) følger af Lemma 7.11 ligesom det faktum, at alle egenværdier er ≥ 0. Hvis $\lambda = 0$ ikke er en egenværdi, følger resten af Sætning 5.5 anvendt på G, samt af bemærkningerne ovenfor.

I fald 0 er en egenværdi for (S-L), således at $a = c = 0$ og $q = 0$, betragtes i stedet problemet

$$\text{(S-L)}' \qquad \begin{cases} -(pu')' + \rho u = \lambda \rho u \\ u'(\alpha) = u'(\beta) = 0 \,. \end{cases}$$

Dette er et regulært Sturm-Liouville problem, og det er klart, at λ er en egenværdi for (S-L)$'$, netop hvis $\lambda - 1$ er en egenværdi for (S-L), og de tilhørende egenfunktioner er de samme. Derfor er samtlige egenværdier for (S-L)$'$ ≥ 1. Specielt er 0 ikke en egenværdi. Ved at anvende det allerede viste på (S-L)$'$ følger samtlige påstande pånær (57), i stedet for hvilken vi opnår

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + 1)^{-2} < +\infty \,. \tag{58}$$

Men af (58) følger, at $\lambda_i \to \infty$ for $i \to \infty$, og derfor $\frac{\lambda_i}{\lambda_i+1} \to 1$ for $i \to \infty$. Specielt fås, at $\frac{\lambda_i}{\lambda_i+1} \geq \frac{1}{2}$ for i tilstrækkelig stor, altså

$$\frac{1}{\lambda_i} \leq \frac{2}{\lambda_i + 1} \quad \text{for } i \text{ tilstrækkelig stor} \,. \tag{59}$$

Herefter følger (57) af (58) og (59). $\square$

Korollar 7.14. *Med betegnelser som i Sætning 7.13 gælder følgende:*

(i) $f = \sum_i (f, e_i)_\rho e_i \,, \quad f \in H_\rho$ (60)

(ii) $\|f\|_\rho^2 = \sum_i |(f, e_i)_\rho|^2 \,, \quad f \in H_\rho$ (61)

(iii) $Lu = \sum_i \lambda_i (u, e_i)_\rho e_i \,, \quad u \in V(a, b, c, d)$ (62)

(iv) *For $u \in V(a, b, c, d)$ er rækken $\sum_i (u, e_i)_\rho e_i(x)$ uniformt konvergent for $x \in [\alpha, \beta]$ med sum $u(x)$.*

Bevis. (i) og (ii) følger af Sætning 1.14 og Sætning 7.13 3).

Indsættes $f = Lu$ i (i) fås

$$Lu = \sum_i (Lu, e_i)_\rho e_i \ . \tag{63}$$

Ved partiel integration som i beviset for Lemma 7.11 fås for $u, v \in V(a, b, c, d)$

$$\begin{aligned}(Lu, v)_\rho &= (u, Lv)_\rho \\ &= p(\alpha)\frac{a}{b}u(\alpha)\overline{v}(\alpha) + p(\beta)\frac{c}{d}u(\beta)\overline{v}(\beta) + \int_\alpha^\beta (pu'\overline{v'} + qu\overline{v})dx \ ,\end{aligned} \tag{64}$$

hvor første, hhv. andet, led i sidste linie skal erstattes med 0 såfremt $b = 0$, hhv. $d = 0$. Da $Le_i = \lambda_i e_i$ og $\lambda_i \geq 0$, fås at $(Lu, e_i)_\rho = (u, Le_i)_\rho = \lambda_i (u, e_i)_\rho$, hvorefter (62) følger af (63).

For at vise (iv) sætter vi for $u \in V(a, b, c, d)$

$$s_n = \sum_{i \leq n} (u, e_i)_\rho e_i \tag{65}$$

for $n \in \mathbb{N}$ og bemærker, at

$$u - s_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} (u, e_i)_\rho e_i$$

ifølge (i), og at

$$L(u - s_n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i (u, e_i)_\rho e_i$$

ifølge (iii). Heraf fås, at

$$(L(u - s_n), u - s_n)_\rho = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i |(u, e_i)_\rho|^2 \ . \tag{66}$$

Da $\sum_i \lambda_i |(u, e_i)_\rho|^2$ er konvergent med sum $(Lu, u)_\rho$, viser (66), at

$$(L(u - s_n), u - s_n)_\rho \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty \ . \tag{67}$$

Af (51) ses på den anden side, at

$$\begin{aligned}(L(u - s_n), u - s_n)_\rho &\geq \int_\alpha^\beta p|u' - s_n'|^2 dx \\ &\geq p_0 \int_\alpha^\beta |u' - s_n'|^2 dx \ ,\end{aligned} \tag{68}$$

hvor

$$p_0 = \min\{p(x) \mid x \in [\alpha, \beta]\} > 0 \,, \tag{69}$$

og hvor vi har brugt, at alle addender på højresiden af (51) er ≥ 0. Det følger derfor af (67) og (68), at

$$\int_\alpha^\beta |u' - s_n'|^2 dx \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty \,. \tag{70}$$

Lad nu $x, y \in [\alpha, \beta]$ være vilkårlige. Da er

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)|^2 &= \Big| \int_x^y v'(t) dt \Big|^2 \\ &\leq \Big(\int_x^y |v'(t)| dt \Big)^2 \\ &\leq \Big(\int_\alpha^\beta |v'(t)| dt \Big)^2 \\ &\leq (\beta - \alpha)^2 \int_\alpha^\beta |v'(t)|^2 dt \,, \end{aligned} \tag{71}$$

når $v \in C^1([\alpha, \beta])$, hvor vi i sidste skridt har brugt Cauchy-Schwarz ulighed. Erstattes heri v med $u - s_n$, og benyttes (70), fås at

$$|(u(x) - s_n(x)) - (u(y) - s_n(y))| \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty \tag{72}$$

uniformt for $x, y \in [\alpha, \beta]$.

Hvis nu $b = 0$, følger af (45) at $u(\alpha) = s_n(\alpha) = 0$, således at vi ved at sætte $y = \alpha$ i (72) opnår det ønskede resultat. I det generelle tilfælde vælger vi for givet $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, således at

$$|u(x) - s_n(x) - (u(y) - s_n(y))| \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N$$

og

$$\|u - s_n\|_\rho \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N$$

i henhold til (72) og (60). Da er

$$\begin{aligned} |u(x) - s_n(x)|^2 &\leq (|u(x) - s_n(x) - (u(y) - s_n(y))| + |u(y) - s_n(y)|)^2 \\ &\leq (\varepsilon + |u(y) - s_n(y)|^2 \\ &\leq 2(\varepsilon^2 + |u(y) - s_n(y)|^2) \,, \end{aligned}$$

for $n \in N$ og alle $x, y \in [\alpha, \beta]$, som efter integration m.h.t. $\rho(y)dy$ på begge sider giver

$$\begin{aligned} |u(x) - s_n(x)|^2 \|1\|_\rho^2 &\leq 2(\varepsilon^2 \|1\|_\rho^2 + \|u - s_n\|_\rho^2) \\ &\leq 2(\|1\|_\rho^2 + 1)\varepsilon^2 \end{aligned}$$

for $n \geq N$ og alle $x \in [\alpha, \beta]$. Dette viser, at $s_n(x) \to u(x)$ for $n \to \infty$ uniformt for $x \in [\alpha, \beta]$, som ønsket. $\square$

Eksempel 7.15. Vi betragter Sturm-Liouville problemet

$$
\begin{aligned}
&-u'' = \lambda u \quad \text{på} \quad [\alpha, \beta] && (73)\\
&u(\alpha) = 0 && (74)\\
&u(\beta) + hu'(\beta) = 0 && (75)
\end{aligned}
$$

hvor $h \geq 0$. Dette er et regulært Sturm-Liouville problem med $p = 1,\ q = 0,$ $\rho = 1,\ a = 1,\ b = 0,\ c = 1,\ d = h.$

Ifølge Sætning 7.13 er alle egenværdier positive. Løsningerne til (73) er da af formen

$$u(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}(x - \alpha) + c_2 \sin\sqrt{\lambda}(x - \alpha)\ . \tag{76}$$

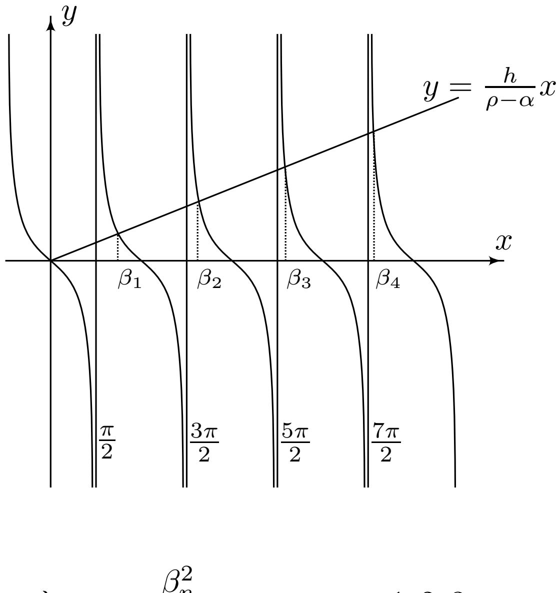
Randbetingelsen (74) giver $c_1 = 0$, hvorefter (75) giver, at

$$\sin\sqrt{\lambda}(\beta - \alpha) + h\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}(\beta - \alpha) = 0\ ,$$

dvs. $\sqrt{\lambda}(\beta - \alpha)$ er løsning til ligningen

$$tg\, x = -\frac{h}{\beta - \alpha} x\ , \qquad x > 0\ . \tag{77}$$

Kaldes løsningerne til denne ligning $\beta_1, \beta_2, \dots$ i voksende rækkefølge (se figuren),



har vi altså

$$\lambda_n = \frac{\beta_n^2}{(\beta - \alpha)^2}\ , \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{78}$$

og de tilhørende egenfunktioner er proportionale med

$$u_n(x) = \sin \frac{\beta_n x}{\beta - \alpha} \ , \quad x \in [\alpha, \beta] \ .$$

Bemærk, at det af figuren fremgår, at $n\pi - \frac{\pi}{2} \leq \beta_n \leq n\pi$ for $n \in \mathbb{N}$, og derfor

$$\frac{\pi^2}{(\beta-\alpha)^2}\left(n - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \lambda_n \leq \frac{\pi^2}{(\beta-\alpha)^2} n^2 \ , \quad n \in \mathbb{N} \ . \tag{79}$$

Lad os nu antage, at egenværdierne $\lambda_i, \ i \in \mathbb{N}$, for det regulære Sturm-Liouville problem (S-L) er ordnet efter størrelse, $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$, hvilket er muligt i kraft af (56) (eller som en direkte følge af beviset for Sætning 5.5) og da alle egenværdier er simple. Da

$$(Lu, u)_\rho = \sum_i \lambda_i |(u, e_i)_\rho|^2 \tag{80}$$

for $u \in V(a,b,c,d)$ ifølge (58) og (60) ses, at vi for $u \in \{e_i \mid i < n\}^\perp \cap V(a,b,c,d)$ har, at

$$\begin{aligned}(Lu, u)_\rho &= \sum_{i \geq n} \lambda_i |(u, e_i)_\rho|^2 \\ &\geq \lambda_n \sum_{i \geq n} |(u, e_i)_\rho|^2 \\ &= \lambda_n \|u\|_\rho^2 \ ,\end{aligned}$$

og at lighedstegnet gælder hvis og kun hvis u er proportional med e_n. Altså er

$$\lambda_n = \min \left\{ \frac{(Lu, u)_\rho}{\|u\|_\rho^2} \ \middle| \ u \in \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}^\perp \cap V(a,b,c,d) \setminus \{0\} \right\} \ . \tag{81}$$

Endvidere haves, at

$$\lambda_n \geq \inf \left\{ \frac{(Lu, u)_\rho}{\|u\|_\rho^2} \ \middle| \ u \in X^\perp \cap V(a,b,c,d) \setminus \{0\} \right\} \tag{82}$$

for ethvert underrum $X \subseteq V(a,b,c,d)$ med $\dim X = n-1$, fordi hvis $(f_1, \ldots, f_{n-1})$ betegner en basis for X, da har det homogene ligningssystem

$$x_1(e_1, f_i)_\rho + \ldots + x_n(e_n, f_i)_\rho = 0 \ , \quad i = 1, \ldots, n-1 \ ,$$

ikke-trivielle løsninger og for en sådan haves, at vektoren $u = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ tilhører $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\} \cap M^\perp \setminus \{0\}$, og derfor opfylder

$$(Lu, u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |(u, e_i)_\rho|^2 \le \lambda_n \sum_{i=1}^{n} |u, e_i)_\rho|^2 = \lambda_n \|u\|_\rho^2 \,.$$

Heraf følger (82), som sammen med (81) viser, at

$$\lambda_n = \max_{\substack{X \subseteq V(a,b,c,d) \\ \dim X = n-1}} \inf \left\{ \frac{(Lu, u)_\rho}{\|u\|_\rho^2} \;\middle|\; x \in X^\perp \cap V(a, b, c, d) \setminus \{0\} \right\} , \tag{83}$$

(hvor det er underforstået, at X er et underrum af $V(a, b, c, d)$).

Tallene $\frac{(Lu,u)_\rho}{\|u\|_\rho^2}$, der forekommer i denne formel, kaldes tit for Rayleigh kvotienter. Vi skal her blot omtale en ud af mange nyttige anvendelser af formlen.

Sætning 7.16. *For to regulære Sturm-Liouville problemer med identiske randbetingelser og med koefficientfunktioner* $p_1,\ q_1,\ \rho_1$, *hhv.* $p_2,\ q_2,\ \rho_2$, *og egenværdier* $\lambda_1^{(1)} < \lambda_2^{(1)} < \ldots$, *hhv.* $\lambda_1^{(2)} < \lambda_2^{(2)} < \ldots$, *gælder at*

$$\lambda_n^{(1)} \le \lambda_n^{(2)} \,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

såfremt

$$p_1 \le p_2 \,, \quad q_1 \le q_2 \,, \quad \rho_1 \ge \rho_2 \,.$$

Bevis. Dette følger umiddelbart af (83) ved at bemærke, at $(Lu, u)_\rho$ ifølge (51) vokser, når p eller q vokser, men er uafhængig af ρ, og at $\|u\|_\rho^2$ aftager når ρ aftager, men er uafhængig af p og q. □

Korollar 7.17. *For det regulære Sturm-Liouville problem (S-L) gælder, at egenværdierne* $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ *opfylder*

$$\lambda_n = 0(n^2) \quad \textit{for} \quad n \to \infty \,,$$

dvs. der findes konstanter $C, C' > 0$ *og* $N \in \mathbb{N}$ *således at*

$$Cn^2 \le \lambda_n \le C'n^2 \quad \textit{for} \quad n \ge N \,. \tag{84}$$

Bevis. Sættes $\underline{p} = \min\{p(x) \mid x \in [\alpha, \beta]\}$, $\overline{p} = \max\{p(x) \mid x \in [\alpha, \beta]\}$ og defineres $\underline{q},\ \overline{q},\ \overline{\rho},\ \underline{\rho}$ tilsvarende, har vi at $0 < \underline{p} \le p \le \overline{p}$, $0 \le \underline{q} \le q \le \overline{q}$,

$0 < \underline{\rho} \le \rho \le \overline{\rho}$ på $[\alpha, \beta]$. Ifølge Sætning 7.16 er det derfor nok at vise (84) i det tilfælde hvor p, q og ρ er konstante funktioner. I så fald antager differentialligningen i (S-L) formen

$$-u'' = \big(\lambda \frac{\rho}{p} - \frac{q}{p}\big) u \ ,$$

således at λ er en egenværdi netop hvis $\mu = \lambda \frac{\rho}{p} - \frac{q}{p}$ er en egenværdi for problemet

$$\begin{cases} -u'' = \mu u \\ au(\alpha) - bu'(\alpha) = 0 \\ cu(\beta) + du'(\beta) = 0 \end{cases} . \tag{$*$}$$

Heraf følger umiddelbart, at det er nok at vise (84) for problemet $(*)$. Men dette problem kan løses eksplicit og (84) verificeres. I tilfældet $a > 0,\ b = 0,$ $c > 0$ er dette gjort i Eksempel 7.15. Det generelle tilfælde overlades til læseren. $\square$

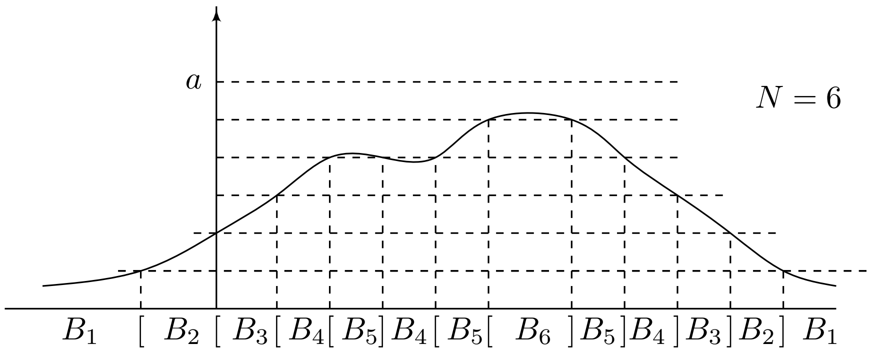
§A. Appendiks A

Appendiks A
Resultater fra mål- og integralteori

A.1 Definition af integral.

Vi skal i dette appendiks uden beviser anføre nogle af de centrale resultater vedrørende det udvidede integralbegreb, som der gøres brug af i hovedteksten. Beviser for disse resultater vil blive givet i kurset Mat 3 MI. I nærværende afsnit gives et antal definitioner med det formål at give læseren et indblik i de grundlæggende ideer. De resultater, vi har brug for, gives i de følgende tre afsnit. Dette gælder i særdeleshed Sætning A.9, som bruges flere steder. Sætning A.12 medfører, at rum af kvadratisk integrable funktioner er fuldstændige, og giver dermed en vigtig klasse af Hilbert rum med talrige anvendelser. Sætning A.14 benyttes i afsnittene 2.3 og 6.2. Endelig bruges Sætning A.16 i afsnittene 2.4 og 5.1.

For at definere det udvidede integral går man i en vis forstand omvendt til værks i forhold til definitionen af Riemann integralet. Fremgangsmåden, der skyldes den franske matematiker Lebesgue (1902), kan beskrives som følger. Lad $f \geq 0$ være en funktion defineret på $\mathbb{R}$ og antag for simpelheds skyld, at f er begrænset med værdimængde indeholdt i intervallet $[0, a[$. Vi deler da $[0, a[$ op i N delintervaller $\left[0, \frac{a}{N}\right[$, $\left[\frac{a}{N}, \frac{2a}{N}\right[, \ldots, \left[\frac{N-1}{N}a, a\right[$ og betragter de tilsvarende originalmængder $B_i = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{N}a, \frac{i}{N}a\right[\right)$, $i = 1, \ldots, N$.



Tænker vi os nu, at vi kan tildele hver af mængderne B_i en (generaliseret) længde, som vi kalder $m_1(B_i)$, er det nærliggende at benytte tallet

$$I_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{i-1}{N} a\, m_1(B_i)$$

som approximation til arealet under grafen for f, d.v.s. til integralet af f over $\mathbb{R}$, og definere sidstnævnte som grænseværdien af I_N for $N \to \infty$, forudsat denne eksisterer. En funktion f, for hvilken mængder af formen $f^{-1}([a,b[)$ kan tildeles en længde i en forstand som præciseres nedenfor, vil blive kaldt en målelig funktion. Hvis ovennævnte grænseværdi eksisterer og er endelig siges funktionen f at være *Lebesgue-integrabel* eller blot integrabel over $\mathbb{R}$ m.h.t. (længde-)målet m_1. Grænseværdien kaldes integralet af f over $\mathbb{R}$ m.h.t. m_1, og for dette benytter vi betegnelserne $\int_{\mathbb{R}} f\,dm_1$, $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ eller $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Lad os se lidt nærmere på definitionen af (længde-)målet m_1. Vi bemærker først, at enhver åben mængde $B \subseteq \mathbb{R}$ er en tællelig disjunkt foreningsmængde af åbne intervaller, dvs.

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} \,]a_i, b_i[$$

hvor $]a_i, b_i[\, \cap \,]a_j, b_j[\, = \emptyset$ for $i \neq j$ (overvej dette!). Vi sætter da

$$m_1(B) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)\ , \tag{1}$$

hvor det naturligvis er underforstået, at $b_i - a_i = +\infty$, hvis intervallet $]a_i, b_i[$ er ubegrænset. Herved er $m_1(B)$ veldefineret, eventuelt lig med $+\infty$, for enhver åben mængde $B \subseteq \mathbb{R}$. Det kan nemt vises, at

$$m_1(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \;\middle|\; B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \,]a_i, b_i[\right\}\ , \tag{2}$$

hvor vi endda kan antage, at intervallerne $]a_i, b_i[$ er begrænsede. Dette udtryk for $m_1(B)$ kan bruges som definition af $m_1(B)$ for en større klasse af mængder, således at m_1 opfylder betingelser, som man naturligt kan kræve af et længdemål. Dette er indholdet i følgende centrale sætning.

Sætning A.1. *Der findes et mindste system $\mathbb{B}_1$ af delmængder af $\mathbb{R}$, som omfatter de åbne mængder, og en entydig afbildning $m_1 : \mathbb{B}_1 \to [0, +\infty]$, med følgende egenskaber:*

a) $\complement B \in \mathbb{B}_1$, *når* $B \in \mathbb{B}_1$,

b) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathbb{B}_1$, *når* $B_1, B_2, \dots \in \mathbb{B}_1$,

c) $m_1(\emptyset) = 0$ *og* $m_1([a,b[) = b - a$ *for* $-\infty < a < b < +\infty$,

d) $m_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m_1(B_n)$,
når $B_1, B_2, \dots \in \mathbb{B}_1$ *og* $B_i \cap B_j = \emptyset$ *for* $i \neq j$.

At der findes et mindste system $\mathbb{B}_1$ indeholdende de åbne mængder og som opfylder a) og b), er ikke svært at indse. Derimod er det ikke ganske ligetil at vise, at m_1 defineret ved (2) besidder egenskaben d), som er afgørende for det følgende. Det bør bemærkes, at m_1 kan antage værdien $+\infty$ (f.eks. er $m_1(\mathbb{R}) = +\infty$), og at vi her og i det følgende benytter de oplagte konventioner for regning med $\pm\infty$. Således er f.eks. $+\infty + a = +\infty$ for $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a \cdot (+\infty) = +\infty$ for $a > 0$, $a \cdot (+\infty) = -\infty$ for $a < 0$ og $0 \cdot (\pm\infty) = 0$, mens $+\infty + (-\infty)$ ikke er defineret.

Funktionen m_1 i Sætning A.1 kaldes Lebesgue målet på $\mathbb{R}$ og $m_1(B)$ kaldes (Lebesgue-)målet af B, når $B \in \mathbb{B}_1$. Mængder, der tilhører $\mathbb{B}_1$, kaldes målelige mængder. Enhver åben delmængde af $\mathbb{R}$ er altså målelig. Af a) følger derfor, at også afsluttede mængder er målelige. Systemet $\mathbb{B}$ omfatter dog betydelig flere mængder end disse. F.eks. er $\mathbb{Q} \in \mathbb{B}_1$, og mere generelt er enhver tællelig delmængde af $\mathbb{R}$ en målelig mængde, idet en sådan jo er en tællelig foreningsmængde af etpunktsmængder, og en etpunktsmængde i $\mathbb{R}$ er som bekendt afsluttet. Ligeledes indses let, at alle intervaller i $\mathbb{R}$, både åbne, afsluttede, halvåbne, begrænsede og ubegrænsede, tilhører $\mathbb{B}_1$.

Af $m_1(\emptyset) = 0$ og d) følger, ikke overraskende, at m_1 er en voksende funktion i den forstand, at $A \subseteq B \Rightarrow m_1(A) \leq m_1(B)$ for alle $A, B \in \mathbb{B}_1$. Heraf fås for $a \in \mathbb{R}$, at $m_1(\{a\}) \leq m_1(]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[) = \frac{2}{n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og dermed $m_1(\{a\}) = 0$. Af d) følger herefter at enhver tællelig delmængde af $\mathbb{R}$ har mål 0. *Målelige mængder med mål* 0 *kaldes også nulmængder.* Ifølge d) er endvidere enhver tællelig foreningsmængde af nul-mængder selv en nulmængde.

Vi definerer nu målelige funktioner som tidligere antydet. Bemærk, at vi tillader funktioner, der antager værdierne $\pm\infty$.

Definition A.2. En funktion $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ siges at være målelig, såfremt $f^{-1}([a, +\infty])$ er målelig for hvert $a \in \mathbb{R}$. En kompleks funktion f på $\mathbb{R}$ (hvor $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ tillades at antage værdierne $\pm\infty$) siges at være målelig, såfremt både $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ er målelige.

Bemærk, at hvis $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ er målelig, så er $f^{-1}([a, b[) = f^{-1}([a, +\infty] \setminus [b, \infty]) = f^{-1}([a, +\infty]) \setminus f^{-1}([b, \infty])$ målelig for alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

For en kontinuert funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gælder, at $f^{-1}([a, +\infty[)$ er afsluttet da $[a, +\infty[$ er afsluttet, jvf. Sætning I.3.3. Altså er enhver kontinuert funktion på $\mathbb{R}$ målelig.

Der gælder følgende sætning, som bl.a. viser, at målelighed i modsætning til kontinuitet bevares under punktvis grænseovergang.

Sætning A.3. *a) Hvis* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *er målelige funktioner, da er også* $f \pm g$ *og* $f \cdot g$ *målelige funktioner.*

b) Antag, at $f_1, f_2, \ldots$ er målelige funktioner fra $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{C}$, og at følgen (f_n) er punktvis konvergent med grænsefunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dvs. at $f_n(x) \to f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Da er f målelig.

Vi kan nu definere integralet af en ikke-negativ målelig funktion $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ som forklaret ovenfor. Da f tillades at være ubegrænset, lader vi $a = a_N$ afhænge af N, således at $a_N \to +\infty$ og således at intervallængden $\frac{a_N}{N}$ på y-aksen går imod 0 for $N \to \infty$. F.eks. kan vi sætte $a_N = \sqrt{N}$.

Definition A.4. For en ikke-negativ målelig funktion $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ defineres integralet af f m.h.t. m_1 ved

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dm_1 = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N+1} \frac{i-1}{N} a_N m_1(B_i^N) \ , \tag{3}$$

hvor $B_i^N = f^{-1}([\frac{i-1}{N} a_N, \frac{i}{N} a_N[)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, og $B_{N+1}^N = f^{-1}([a_N, +\infty])$ (og hvor det bør huskes, at $0 \cdot (+\infty) = 0$).

Det kan vises, at grænseværdien i (3) eksisterer i $[0, +\infty]$, således at vi hermed har tillagt enhver ikke-negativ målelig funktion et integral, som er et ikke-negativt tal eller $+\infty$. Hvis f.eks. $m_1(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = +\infty\}) > 0$ ses umiddelbart af definitionen (3), at $\int_{\mathbb{R}} f \, dm_1 = +\infty$. *Vi siger, at f er (Lebesgue-) integrabel, såfremt $\int_{\mathbb{R}} f \, dm_1 < +\infty$.*

For at definere integrabilitet af en målelig funktion, som også antager negative værdier, betragter vi den negative og den positive del af f defineret ved henholdsvis

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{når } f(x) \le 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad \text{og} \qquad f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{når } f(x) \ge 0 \\ 0 & \text{ellers} \ . \end{cases}$$

Da er f_+ og f_- målelige og $f = f_+ - f_-$ og $|f| = f_+ + f_-$.

Definition A.5. En målelig funktion $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ siges at være (Lebesgue-)integrabel, såfremt f_+ og f_- begge er integrable, og vi definerer da integralet af f m.h.t. m_1 ved

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dm_1 = \int_{\mathbb{R}} f_+ dm_1 - \int_{\mathbb{R}} f_- dm_1 \ . \tag{4}$$

En kompleks funktion f på $\mathbb{R}$ er integrabel netop hvis både $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ er integrable, og vi definerer da

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dm_1 = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} f \, dm_1 + i \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f \, dm_1 \ .$$

Vi har hermed fået indført det ønskede integral over $\mathbb{R}$. Det er herefter ligetil at definere integralet over et interval eller mere generelt over en vilkårlig målelig mængde $B \subseteq \mathbb{R}$. Defineres nemlig en målelig funktion på B ligesom i Definition A.2, hvor blot definitionsmængden $\mathbb{R}$ erstattes med B, ses let, at hvis vi for en given målelig funktion f på B definerer funktionen f_0 på $\mathbb{R}$ ved

$$\begin{cases} f(x) & \text{hvis} \quad x \in B \\ 0 & \text{hvis} \quad x \in \mathbb{R} \setminus B \; , \end{cases}$$

så er f_0 målelig netop hvis f er målelig. *Vi siger så, at f er integrabel over B, hvis f_0 er integrabel over* $\mathbb{R}$, og integralet $\int_B f dm_1$ defineres da som

$$\int_B f dm_1 = \int_{\mathbb{R}} f_0 dm_1 \; .$$

Vi benytter også betegnelsen $\int_B f(x)dx$ for $\int_B f dm_1$.

Eksempel A.6. 1) For $B \subseteq \mathbb{R}$ defineres *indikatorfunktionen* 1_B på $\mathbb{R}$ ved

$$1_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis} \quad x \in B \\ 0 & \text{hvis} \quad x \notin B \; . \end{cases}$$

Det ses let, at 1_B er målelig netop hvis B er målelig, og da er

$$\int_{\mathbb{R}} 1_B dm_1 = m_1(B) \; . \tag{5}$$

1_B er altså integrabel netop hvis B har endeligt mål.

Hvis specielt $B \subseteq \mathbb{R}$ er en tællelig mængde, da er, som tidligere bemærket, B målelig med Lebesgue mål 0. Integralet af 1_B er da 0. Et eksempel herpå fås for $B = \mathbb{Q}$, for hvilken indikatorfunktonen $1_{\mathbb{Q}}$ benævnes *Dirichlet funktionen*.

2) Af Definition A.4 og A.5 følger, at hvis f er en målelig funktion på $B \in \mathbb{B}_1$, således at

$$m_1(\{x \in B \mid f(x) \neq 0\}) = 0 \; ,$$

da er f integrabel og

$$\int_B f \, dm_1 = 0 \; .$$

Med andre ord er integralet af enhver målelig funktion over en nul-mængde lig med 0.

Ligeledes følger, at to integrable funktioner, der kun afviger fra hinanden i en nul-mængde har samme integral (se også (6) og (7) nedenfor). Specielt gælder ved integration over et interval, at det er uden betydning, hvorvidt et eller begge endepunkter medtages eller ej. For integralet af en funktion f over et interval med endepunkter a og b, $a < b$, benyttes derfor den sædvanlige betegnelse $\int_a^b f(x)dx$.

A.2 Integralets egenskaber.

I dette afsnit betegner B en målelig delmængde af $\mathbb{R}$. Eksempel A.6 viser, at der findes ikke-negative integrable funktioner på B, hvis integral er nul på trods af at funktionen ikke er identisk nul. Det tilsvarende gælder som bekendt ikke for kontinuerte funktioner på et interval $[a, b]$. Vi har følgende vigtige resultat.

Sætning A.7. *Antag, at* $f : B \to [0, +\infty]$ *er en ikke-negativ målelig funktion. Da gælder, at*

$$\int_B f\, dm_1 = 0 \Leftrightarrow m_1(\{x|f(x) \neq 0\}) = 0\ . \tag{6}$$

En målelig funktion f defineret på B, for hvilken $m_1(\{x|f(x) \neq 0\}) = 0$, siges at være lig med 0 *næsten overalt* (forkortes n.o.). Mere generelt siges et udsagn, hvori der indgår en variabel $x \in B$, at gælde næsten overalt, såfremt det gælder for alle $x \in B$ pånær i en nul-mængde.

For to integrable komplekse funktioner f og g på B, gælder ifølge Sætning A.7, at

$$f = g \ \text{ n.o.} \quad \Leftrightarrow \int_B |f(x) - g(x)|dx = 0\ . \tag{7}$$

Det skal her bemærkes, at $f(x) - g(x)$ ikke er defineret i de punkter $x \in B$ for hvilke real- eller imaginærdelen af både $f(x)$ og $g(x)$ er lig med $+\infty$ eller $-\infty$. Men da f og g er integrable udgør disse punkter højst en nulmængde, og ifølge Sætning A.7 er det uden betydning for værdien af integralet i (7), hvilken værdi der tillægges $f(x) - g(x)$ i disse punkter. Tilsvarende bemærkninger gælder i det følgende, når integrable funktioner adderes eller subtraheres.

Følgende velkendte regneregler er gældende for det udvidede integral, jvf. Adams p.312. Lad f og g være integrable komplekse funktioner på B og lad $a \in \mathbb{C}$. Da er $f + g$, af og $|f|$ også integrable, og der gælder, at

$$\int_B (f + g)(x)dx = \int_B f(x)dx + \int_B g(x)dx\ , \tag{8}$$

$$\int_B af(x)dx = a\int_B f(x)dx \ , \tag{9}$$

$$\Big|\int_B f(x)dx\Big| \leq \int_B |f(x)|dx \ . \tag{10}$$

Vi noterer dernæst følgende to yderst vigtige grænseværdisætninger.

Sætning A.8 (Lebesgues monotonisætning). *Antag, at $f_1, f_2, \dots$ er en voksende følge af ikke-negative målelige funktioner på B, d.v.s. $f_n \leq f_m$ for $n \leq m$, som er punktvis konvergent med grænsefunktion $f : B \to [0, +\infty]$. Da gælder, at*

$$\int_B f_n dm_1 \nearrow \int_B f\, dm_1 \ .$$

Sætning A.9 (Lebesgues majorantsætning). *Antag, at $f_1, f_2, \dots$ er en følge af målelige funktioner fra B ind i $\mathbb{C}$, og at der findes en integrabel funktion (majorant) $g : B \to [0, +\infty]$, således at $|f_n| \leq g$ for alle $n = 1, 2, 3, \dots$. Da er funktionerne $f_n, n = 1, 2, \dots$, integrable, og hvis yderligere $f_n \to f$ punktvis, hvor $f : B \to \mathbb{C}$, da er også f integrabel og*

$$\int_B f_n dm_1 \to \int_B f\, dm_1 \ .$$

Bemærk, at der specielt gælder, at hvis $f : B \to \mathbb{C}$ er målelig, og $g : B \to [0, +\infty]$ er integrabel, og $|f| \leq g$, da er f integrabel. Specielt er f integrabel, hvis og kun hvis $|f|$ er integrabel.

Eksempel A.10. Vi viser i dette eksempel hvorledes majorantsætningen medfører, at Riemann integralet og Lebesgue integralet af en kontinuert funktion på et afsluttet begrænset interval $[a, b]$ er identiske.

Lad altså $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være kontinuert. Da er Riemann integralet $I(f)$ af f givet ved

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\Big(a + \frac{i-1}{n}(b-a)\Big) \tag{11}$$

ifølge Adams p.309, hvor vi har sat $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ og $c_i = a + \frac{i-1}{n}(b-a)$. Riemann summen på højre side af (11) ses ifølge (5), (8) og (9) at være lig med Lebesgue integralet af funktionen f_n som er konstant lig med $f(c_i)$ på intervallet $[x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, 2, \dots, n$. Altså

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b[} f_n(x)dx \ , \tag{12}$$

hvor

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) 1_{[x_{i-1},x_i[} \ .$$

Da f er kontinuert og $[a,b]$ er kompakt, er f begrænset, d.v.s. der findes et positivt tal c så $|f| \le c$. Da gælder også, at $|f_n| \le c$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Den konstante funktion c er derfor en integrabel majorant for funktionsfølgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, idet jo $[a,b[$ har endeligt mål. Påstanden følger derfor af (12) og majorantsætningen, hvis vi blot viser, at $f_n \to f$ punktvis i $[a,b[$. Men dette følger af, at f er kontinuert. Lad nemlig $x \in [a,b[$. For givet $\varepsilon > 0$ findes da et $\delta > 0$, således at $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, når $|y - x| < \delta$, $y \in [a,b[$. Lad nu $n > \delta^{-1}$. Netop et af intervallerne $[x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, \dots, n$, indeholder x, og for det tilsvarende indeks i_0 gælder da, at

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(c_{i_0}) - f(x)| < \varepsilon$$

eftersom $|c_{i_0} - x| \le |x_{i-1} - x_i| = \frac{1}{n} < \delta$. Hermed er det ønskede vist.

Eksempel A.11. 1) Lad $B = [1, +\infty[$. For $\alpha \in \mathbb{R}$ er funktionen $f_\alpha : x \to x^\alpha$ kontinuert på B, og dermed målelig. Vi påstår, at f_α er integrabel over B, netop hvis $\alpha < -1$: Der gælder, at $f_\alpha \cdot 1_{[1,n]} \nearrow f_\alpha$ for $n \to \infty$, og at

$$\begin{aligned} &\int_B (f_\alpha \cdot 1_{[1,n]}) dm_1 \\ &= \int_1^n x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}(n^{\alpha+1} - 1) & , \quad \text{hvis} \quad \alpha \ne -1 \\ \log(n) & , \quad \text{hvis} \quad \alpha = -1 \end{cases} , \end{aligned}$$

hvoraf ses, at $\int_A (f_\alpha 1_{[1,n]})(x) dx \nearrow \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1} & \text{for} \quad \alpha < -1 \\ +\infty & \text{for} \quad \alpha \ge -1 \end{cases}$. Af monotonisætningen følger derfor det ønskede, samt at

$$\int_1^\infty x^\alpha dx = -\frac{1}{\alpha+1} \quad \text{for} \quad \alpha < -1 \ .$$

Bemærk, at vi her har benyttet, at Lebesgue-integralet og Riemann-integralet stemmer overens for kontinuerte funktioner på kompakte intervaller.

2) Lad $a \in \mathbb{R}$ og lad $B =]a, a+K]$, hvor $0 < K < +\infty$. For $\alpha \in \mathbb{R}$ er funktionen $g_\alpha : x \to (x-a)^\alpha$ kontinuert og dermed målelig på $]a, a+K]$. Vi påstår, at g_α er integrabel over $]a, a+K]$, netop hvis $\alpha > -1$: Der gælder at $g_\alpha \cdot 1_{[a+\frac{1}{n}, a+K]} \nearrow g_\alpha$ for $n \to \infty$, og at

$$\begin{aligned} &\int_B (g_\alpha \cdot 1_{[a+\frac{1}{n}, a+K]}) dm_1 \\ &= \int_{a+\frac{1}{n}}^{a+K} (x-a)^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}(K^{\alpha+1} - n^{-(\alpha+1)}) & \text{for} \quad \alpha \ne -1 \\ \log K - \log \frac{1}{n} & \text{for} \quad \alpha = -1 \end{cases} , \end{aligned}$$

hvoraf ses, at $\int_B (g_\alpha 1_{[a+\frac{1}{n},a+K]})dm_1 \to \begin{cases} \frac{K^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{for} \quad \alpha > -1 \\ +\infty & \text{for} \quad \alpha \leq -1 \end{cases}$.

Monotonisætningen viser herefter det påståede.

A.3 Rummene $\mathcal{L}_p(B)$ og $L_p(B)$.

Lad B være en målelig delmængde af $\mathbb{R}$. For $p = 1$ og $p = 2$ defineres

$$\mathcal{L}_p(B) = \{f : B \to \mathbb{C} \mid f \text{ målelig og } \int_B |f|^p dm_1 < +\infty\} .$$

$\mathcal{L}_1(B)$, som også betegnes $\mathcal{L}(B)$, er med andre ord mængden af integrable komplekse funktioner på B, som er et underrum af vektorrummet af alle komplekse funktioner på B på grund af (8) og (9). At $\mathcal{L}_2(B)$ også er et vektorrum følger ved anvendelse af uligheden $|f+g|^2 \leq 2(|f|^2 + |g|^2)$ (jvf. Eksempel 1.9 2)). Vi kalder $\mathcal{L}_2(B)$ for rummet af kvadratisk integrable funktioner på B. Ved

$$\|f\|_p = \left(\int_B |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

defineres en funktion $f \to \|f\|_p$ på $\mathcal{L}_p(B)$, som opfylder de to betingelser N2) og N3) i Definition I.1.2. Her følger N2) umiddelbart af (9). For $p = 1$ følger egenskaben N3) af (10), mens den for $p = 2$ følger af Cauchy-Schwarz' ulighed for sesquilinearformen $(f, g) = \int_B f(x)\overline{g(x)}d(x)$, $f, g \in \mathcal{L}_2(B)$, (overvej dette!). Derimod er betingelsen N1) ikke nødvendigvis opfyldt p.g.a. (7). Identificerer vi imidlertid funktioner i $\mathcal{L}_p(B)$, der kun afviger fra hinanden på en nulmængde, får vi et normeret vektorrum $L_p(B)$. Mere præcist definerer vi for hvert $f \in \mathcal{L}_p(B)$

$$\widetilde{f} = \{g : B \to \mathbb{R} \mid g \text{ målelig og } g = f \text{ n.o.}\} ,$$

og sætter

$$L_p(B) = \{\widetilde{f} \mid f \in \mathcal{L}_p(B)\} .$$

Ved at sætte $\widetilde{f} + \widetilde{g} = \widetilde{f+g}$, $a\widetilde{f} = \widetilde{af}$ og $\|\widetilde{f}\|_p = \|f\|_p$ for $f, g \in \mathcal{L}_p(B)$ og $a \in \mathbb{C}$ er det nemt at indse, at $L_p(B)$ herved bliver et normeret vektorrum. Vi vil tit ikke skelne mellem en funktion $f \in \mathcal{L}_p(B)$ og elementet $\widetilde{f} \in L_p(B)$, og skriver i overensstemmelse hermed som regel f i stedet for $\widetilde{f}$. Vi kalder $\|\cdot\|_p$ for p-normen.

Vi har nu følgende fundamentale resultat.

Sætning A.12. *De normerede vektorrum $L_1(B)$ og $L_2(B)$ er fuldstændige.*

Heraf følger specielt, at $L_2(B)$ er et Hilbert rum med indre produkt givet ved

$$(f,g) = \int_B f(x)\overline{g(x)}dx$$

for $f, g \in L_2(B)$.

I tilfældet, hvor $B = [a,b]$ er et kompakt interval, og ρ er en positiv kontinuert funktion på $[a,b]$, har vi i Eksempel 1.2 2) mere generelt indført det indre produkt $(\cdot,\cdot)_\rho$ på $C([a,b])$ givet ved

$$(f,g)_\rho = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$$

for $f, g \in C([a,b])$. Dette indre produkt kan udvides til et indre produkt på $L_2([a,b])$ ved samme formel. På samme vis, som i Eksempel 1.2 følger, at den tilsvarende norm $\|\cdot\|_\rho$ er ækvivalent med 2-normen. *$L_2([a,b])$ med indre produkt $(\cdot,\cdot)_\rho$ er derfor også fuldstændigt og dermed et Hilbert rum.* Når vi ønsker at fremhæve det indre produkt betegnes dette Hilbert rum med $L_2([a,b],\rho)$.

I §2 og §6 er det af stor vigtighed for os, at funktioner i $\mathcal{L}_p([-\pi,\pi])$ og $\mathcal{L}_p(\mathbb{R})$ kan approximeres i p-norm med kontinuerte eller endda differentiable funktioner. Nu er det sådan, at ikke alle kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$ er integrable. Men hvis en kontinuert funktion er nul udenfor en kompakt mængde, da er den begrænset ifølge 1. hovedsætning om kontinuerte funktioner, og det følger, at den er integrabel over $\mathbb{R}$. Vi indfører derfor følgende definition.

Definition A.13. Givet en funktion $f : M \to \mathbb{C}$, hvor M er et metrisk rum, kaldes mængden

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}\ ,$$

for *støtten* for f.

Med $C_0(M)$ betegnes vektorrummet bestående af kontinuerte funktioner på M, hvis støtte er kompakt.

Vi bemærker, at to kontinuerte funktioner defineret på en åben delmængde G af $\mathbb{R}$, der stemmer overens næsten overalt, er identiske (overvej dette!). Rummet $C_0(G)$ kan derfor betragtes som underrum af såvel $\mathcal{L}_p(G)$ som $L_p(G)$. Der gælder nu følgende sætning.

Sætning A.14. *Lad G være en åben delmængde af $\mathbb{R}$. Da er rummet $C_0^\infty(G)$ af vilkårligt mange gange differentiable funktioner på G med kompakt støtte et tæt underrum af $L_p(G)$, $p = 1, 2$. Der gælder endda, at for enhver funktion $f \in \mathcal{L}_1(G) \cap \mathcal{L}_2(G)$ og ethvert $\epsilon > 0$ findes $g \in C_0^\infty(G)$, således at*

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon \quad \textit{og} \quad \|f - g\|_2 < \varepsilon.$$

Denne sætning viser specielt, at $L_p(G)$ er en fuldstændiggørelse af $C_0^\infty(G)$ m.h.t. normen $\|\cdot\|_p$.

A.4 Multiple integraler.

I de foregående afsnit har vi beskrevet Lebesgue-integralet på $\mathbb{R}$. Dette kan på direkte vis udvides til $\mathbb{R}^k$, $k > 1$. Der gælder således en ganske analog sætning til Sætning A.1, idet man går ud fra det naturlige volumenmål m_k for kasser $I = I_1 \times \ldots \times I_k$, hvor $I_1, \ldots, I_k$ er intervaller, givet ved

$$m_k(I) = m_1(I_1) \cdot \ldots \cdot m_1(I_k) \ .$$

Herved defineres målelige mængder og et *Lebesgue mål* m_k af sådanne, målelige funktioner, integrable funktioner etc. på $\mathbb{R}^k$, for hvilke der gælder sætninger analoge til dem, der allerede er beskrevet for $\mathbb{R}$. Integralet af en integrabel funktion f over en målelig mængde $B \subseteq \mathbb{R}^k$ betegnes med $\int_B f dm_k$ eller $\int_B f(x) d^k x$. De eneste resultater vi har brug for herudover (i afsnittene 2.4 og 5.1) er følgende to centrale sætninger, af hvilke den første tit kan bruges til at afgøre om en forelagt funktion er integrabel, mens den anden giver mulighed for udregning af integraler over k-dimensionale kasser ved reduktion til udførelse af et antal successive integraler over intervaller.

Sætning A.15 (Tonellis sætning). *Lad I og J være kasser i henholdsvis $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{R}^l$. Hvis $f : I \times J \to [0, +\infty]$ er en ikke-negativ målelig funktion på $I \times J$, gælder følgende:*

(i) *Funktionerne $x \to \int_J f(x,y) d^l y$ og $y \to \int_I f(x,y) d^k x$ er målelige og ikke-negative på henholdsvis I og J.*

(ii)

$$\int_{I \times J} f(x,y) d^{k+l}(x,y) = \int_I \left(\int_J f(x,y) d^l y \right) d^k x = \int_J \left(\int_I f(x,y) d^k x \right) d^l y \ ,$$

(hvor integralerne kan antage værdien $+\infty$).

Sætning A.16 (Fubinis sætning). *Lad I og J være kasser i henholdsvis $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{R}^l$. Hvis $f : I \times J \to \mathbb{C}$ er integrabel over $I \times J$, gælder følgende:*

(i) *Funktionen $y \to f(x, y)$ er integrabel over J for næsten alle $x \in I$ (dvs. for alle x pånær i en nulmængde), og tilsvarende er funktionen $x \to f(x, y)$ integrabel over I for næsten alle $y \in J$.*

(ii) *Funktionerne $x \to \int_J f(x, y) d^l y$ og $y \to \int_I f(x, y) d^k x$ er integrable på henholdsvis I og J, og der gælder at*

$$\int_{I\times J} f(x, y) d^{k+l}(x, y) = \int_I \left(\int_J f(x, y) d^l y\right) d^k x = \int_J \left(\int_I f(x, y) d^k x\right) d^l y \ ,$$

hvor det er underforstået, at ovennævnte funktioner tillægges en vilkårlig værdi (f.eks. 0) i de nulmængder, hvor de ikke er defineret i henhold til (i).

Eksempel A.17. Som en simpel anvendelse betragtes en målelig funktion $f : I \to \mathbb{C}$ af formen $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$, hvor $f_i : I_i \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, er en målelig funktion på I_i og $I = I_1 \times I_2$. Da fås ved anvendelse af Tonellis sætning, at

$$\begin{aligned}\int_I |f(x)| d^2 x &= \int_{I_1} \Big(\int_{I_2} |f_1(x_1)f_2(x_2)| dx_2\Big) dx_1 \\ &= \int_{I_1} |f_1(x_1)| dx_1 \cdot \int_{I_2} |f_2(x_2)| dx_2 \ ,\end{aligned}$$

og vi slutter at f er integrabel netop hvis både f_1 og f_2 er integrable, medmindre $f = 0$ n.o. I bekræftende fald giver Fubinis sætning

$$\int_I f(x) d^2 x = \int_{I_1} f_1(x_1) dx_1 \cdot \int_{I_2} f_2(x_2) dx_2 \ .$$

Et tilsvarende resultat kan ligeledes fås for $k > 2$ ved gentagen anvendelse af de to sætninger.

Eksempel A.18. Funktionen $f : (x, y) \to \frac{1}{x+y}$ er kontinuert på $B =]0, 1[\times]0, 1[$ og derfor målelig. Da $f \geq 0$ haves ifølge monotonisætningen, at

$$\int_B f\, dm_2 = \lim_{n\to\infty} \int_{[\frac{1}{n},1]\times[\frac{1}{n},1]} f\, dm_2 \ ,$$

da $f \cdot 1_{[\frac{1}{n},1]\times[\frac{1}{n},1]} \nearrow f$ for $n \to \infty$. Af Tonellis sætning fås, idet f er kontinuert på $[\frac{1}{n}, 1] \times [\frac{1}{n}, 1]$ at

$$\begin{aligned}
&\int_{[\frac{1}{n},1]\times[\frac{1}{n},1]} f\, dm_2 = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x+y} dx \right) dy \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} (\log(1+y) - \log(\tfrac{1}{n} + y)) dy \\
&= [(1+y)\log(1+y) - (1+y) - (\tfrac{1}{n} + y)\log(\tfrac{1}{n} + y) + (\tfrac{1}{n} + y)]_{\frac{1}{n}}^{1} \\
&= 2\log 2 - 2 - (\tfrac{1}{n} + 1)\log(\tfrac{1}{n} + 1) + (\tfrac{1}{n} + 1) \\
&- (1 + \tfrac{1}{n})\log(1 + \tfrac{1}{n}) + (1 + \tfrac{1}{n}) + \frac{2}{n} \log \frac{2}{n} - \frac{2}{n} \\
&\to 2\log 2 \quad \text{for} \quad n \to \infty\ .
\end{aligned}$$

Heraf følger, at $\int_B f dm_2 = 2\log 2$ og specielt, at f er integrabel på B.

Bemærk, at vi her i stedet for Tonellis sætning kunne have brugt Fubinis sætning, eftersom f er kontinuert på $\left[\frac{1}{n}, 1\right] \times \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ og derfor begrænset og følgelig integrabel, da $m_2(\left[\frac{1}{n}, 1\right] \times \left[\frac{1}{n}, 1\right]) < +\infty$.

A.14

§B.

Appendiks B
Majorantkriteriet

I dette appendiks gives en tilstrækkelig betingelse for uniform konvergens af en funktionsrække, som anvendes gentagne gange i hovedteksten.

Som sædvanlig betegner $\mathcal{B}(M,\mathbb{C})$ vektorrummet af begrænsede komplekse funktioner på mængden M udstyret med den uniforme norm $\|\cdot\|_u$.

Definition B.1. Lad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ være en række i $\mathcal{B}(M,\mathbb{C})$. En talrække $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, hvor $b_n \geq 0$ for $n \in \mathbb{N}$, siges at være en *majorantrække* for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, såfremt

$$\|f_n\|_u \leq b_n \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N},$$

d.v.s. hvis

$$|f_n(x)| \leq b_n \quad \text{for alle } x \in M \text{ og alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sætning B.2 (Majorantkriteriet). *Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ i $\mathcal{B}(M,\mathbb{C})$ har en konvergent majorantrække, da er den uniformt konvergent, d.v.s. den er konvergent i $\mathcal{B}(M,\mathbb{C})$.*

Bevis. Ifølge Sætning I.5.7 er $\mathcal{B}(M,\mathbb{C})$ et fuldstændigt metrisk rum. Det er derfor tilstrækkeligt at vise, at afsnitsfølgen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, hvor

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$$

er en Cauchy følge i $\mathcal{B}(M,\mathbb{C})$. Hertil bemærkes, at for $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$, er

$$s_l - s_k = \sum_{n=k+1}^{l} f_n \ .$$

Lader vi $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ betegne afsnitsfølgen for $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, fås heraf ved brug af trekantsuligheden

$$\|s_l - s_k\|_u \leq \sum_{n=k+1}^{l} \|f_n\|_u \leq \sum_{n=k+1}^{l} b_n = r_l - r_k$$

for k og l som ovenfor. Da $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy følge (idet den er konvergent) sluttes heraf umiddelbart, at $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy følge, som ønsket. □

Såfremt M er et metrisk rum og funktionerne f_n alle er kontinuerte, gælder det samme om funktionerne i afsnitsfølgen. Af Sætning I.3.16 og Sætning B.2 fås derfor følgende resultat.

B.2

Korollar B.3. *Lad* M *være et metrisk rum og lad* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *være en række, hvis led er begrænsede kontinuerte funktioner på* M. *Hvis* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *har en konvergent majorantrække, da er den uniformt konvergent i* M *med kontinuert sumfunktion.*

§C.

Appendiks C
Ledvis integration og differentiation af rækker

I §3 gøres gentagne gange brug af sætningen om ledvis differentiation af funktionsrækker, der vises nedenfor.

Lad os først notere følgende kontinuitetsegenskab ved Riemann integralet.

Lemma C.1. *Lad $[a, b]$ være et kompakt interval. Da er Riemann integralet en kontinuert afbildning fra $C([a, b])$ med uniform norm ind i $\mathbb{C}$, d.v.s. der gælder*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)dx$$

for enhver uniformt konvergent funktionfølge i $C([a, b])$.

Bevis. For $f, g \in C([a, b])$ haves

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\Big| &\le \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \\ &\le \int_a^b \|f - g\|_u dx = (b - a)\|f - g\|_u ,\end{aligned}$$

hvilket viser, at $f \to \int_a^b f(x)dx$ er en Lipschitz afbildning og dermed kontinuert. □

Ved brug heraf kan vi vise følgende sætning om ledvis integration af rækker.

Sætning C.2. *Lad $\sum_{n=1}^\infty f_n$ være en uniformt konvergent række i $C([a, b])$. Da er sumfunktionen kontinuert, og rækken kan integreres ledvis, d.v.s. der gælder*

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\Big)dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b f_n(x)dx.$$

Bevis. Sumfunktionen $\sum_{n=1}^\infty f_n$ er kontinuert ifølge Sætning I.3.16, da den er defineret som grænsefunkton i $C([a, b])$ (med uniform norm) for afsnitsfølgen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, hvis led er kontinuerte funktioner, da

$$s_k = \sum_{n=1}^k f_n$$

for $k \in \mathbb{N}$. Af Lemma C.1 fås nu

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)dx = \int_a^b \Big(\lim_{k\to\infty} s_k(x)\Big)dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^b s_k(x)dx$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{k} f_n(x)\Big)dx = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_a^b f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

som ønsket. □

Endelig har vi følgende resultat om ledvis differentiation af rækker.

Sætning C.3. *Lad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ være en række, hvis led er kontinuert differentiable funktioner på et kompakt interval $[a,b]$. Hvis den givne række er punktvis konvergent, og den ledvis differentierede række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ er uniformt konvergent i $[a,b]$, da er sumfunktionen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ kontinuert differentiabel, og dens differentialkvotient fås ved ledvis differentiation, d.v.s.*

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{df_n}{dx} \ .$$

Bevis. Lad os sætte $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ og $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ er uniformt konvergent i $[a,x]$ for hvert $x \in [a,b]$, kan denne række integreres ledvis over $[a,x]$ ifølge Sætning C.2. Altså er funktionen $G(x) = \int_a^x g(x)dx$ givet ved

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n'(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a) \ . \qquad (1)$$

Ifølge integral- og differentialregningens hovedsætning (se Adams p.318) er G kontinuert differentiabel og $G'(x) = g(x)$. Da $f(a)$ er en konstant, følger derfor af (1), at f er kontinuert differentiabel og

$$f'(x) = G'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \ ,$$

hvilket netop er hvad der skulle vises. □

Ved gentagen anvendelse af Sætning C.3 fås, at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er en punktvis konvergent række af N gange kontinuert differentiable funktioner på $[a,b]$, og de ledvis differentierede rækker op til og med orden N er uniformt konvergente, da er sumfunktionen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ også N gange kontinuert differentiabel, og dens afledede op til og med orden N fås ved ledvis differentiation.

Litteraturhenvisninger.

W. Rudin: *Real and Complex Analysis.*
McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.

H.F. Weinberger: *A First Course in Partial Differential Equations.*
Xerox Publishing Company, Lexington, Massachusetts, 1965.

R. Courant og D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics I, II.*
Interscience Publishers, New York, 1953 og 1965.

M. Reed og B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics I, II.*
Academic Press, New York, 1980 og 1975.

J. von Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.*
Springer Verlag, Berlin, 1932.

INDEX