eXtra-opgaver (DOK)

1. Afgør, om $\dddot{x} + 4\ddot{x} + 5\dot{x} + 3x = 0$ er stabil.

2. Afgør for hver af ligningerne i opgave [S3.2: 1(a)-(c)], om den er stabil uden at løse den.

3. For vilkårligt $a \in \mathbb{R}$ betragtes differentialligningen

$$(\mathrm{IL}_a) \qquad \dddot{x} + a\ddot{x} + \dot{x} + x = t^2 + 2t.$$

Bestem mængden A af tal a, for hvilke (IL_a) er stabil.

4. Betragt differentialligningen (IL_a) $\dddot{x} + a\ddot{x} + \dot{x} + x = t^2 + 2t$ og mængden A af de tal a for hvilke differentialligningen er stabil. Bestem for ethvert $a \in A$ en funktion $f_a(t)$ således, at for enhver løsning $w(t)$ til (IL_a) vil $w(t) - f_a(t) \to 0$ for $t \to \infty$.

5. Betragt for ethvert $a \in \mathbb{R}$ differentialligningssystemet $\dot{\mathbf{x}} = \left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}$. Bestem mængderne:

$$A := \{\, a \in \mathbb{R} \mid \mathbf{0} \text{ er stabilt} \,\} \qquad \text{og} \qquad B := \{\, a \in \mathbb{R} \mid \mathbf{0} \text{ er et saddelpunkt} \,\}.$$

Hvordan opfører løsningerne sig for $a > 1$, for $a = 1$ og for $a = -1$?

6. Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 6\frac{d^3x}{dt^3} + 14\frac{d^2x}{dt^2} + 14\frac{dx}{dt} + 5x = 40e^t + 5t + 14.$$

Bestem den fuldstændige løsning. [Vink: Det karakteristiske polynomium er $\lambda^4 + 6\lambda^3 + 14\lambda^2 + 14\lambda + 5 = (\lambda + 1)^2(\lambda^2 + 4\lambda + 5)$.] Afgør dernæst, om (*) er asymptotisk stabil.

7. Betragt ligningssystemerne i opgave [S 2.9]: 1. Benyt for hvert af dem faseplananalyse til afgøre, om man kan slutte, at det *ikke* er stabilt, *uden* at løse det. Benyt dernæst Sætning [S 2.8.1] til at afgøre asymptotisk stabilitet (stadig uden at løse).

8. (min) $\int_0^1 \exp\big(x(t) + \dot{x}(t)\big)dt$, $x(0) = 0$, og enhver af følgende slutværdibetingelser:
(a) $x(1) = 1$, (b) $x(1) \geq 1$, (c) $x(1)$ fri.

9. Maksimer $\int_0^1 (-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}u^2)\, dt$ for $\dot{x} = -x + \sqrt{3}\,u$, $u \in \mathbb{R}$, $x(0) = 2$, $x(1)$ fri.

10. Maksimer $\int_0^{\ln 2} (-2x^2 - 2xu - u^2)\, dt$ for $\dot{x} = x + u$, $u \in \mathbb{R}$, $x(0) = 5$, $x(\ln 2) = 1$.

11. Maksimer $\int_0^{\ln 2} (-2x^2 - 2xu - u^2)\, dt$ for $\dot{x} = x + u$, $u \geq 0$, $x(0) = 1$, $x(\ln 2)$ fri.

12. Lad $T > 2$. Maksimer $\int_0^T (-3 - u + x)\, dt$ for $\dot{x} = u$, $0 \leq u \leq 1$, $x(0) = 0$, $x(T) \geq 1$.

13. Er differensligningen $x_{t+2} - \frac{1}{3}x_{t+1} + \frac{1}{9}x_t = \frac{31}{9}\,2^t$, $t = 0, 1, \ldots$ asymptotisk stabil? Bestem den fuldstændige løsning.