X-facitliste

Listens numre refererer til samlingen af eXtra-opgaver. På listen står næsten kun facitter, og *ikke* tilstrækkelige svar på opgaverne.

1 Asymptotisk stabil (Hurwitz–Routh).

2 1(a): asymptotisk stabil. 1(b): ustabil. 1(c): ustabil.

3 Asymptotisk stabil: $A = \{a \mid a > 0 \text{ og } a - 1 > 0\} = \{a \mid a > 1\}$.

4 Fx $f_a(t) = t^2 - 2a$ (partikulær løsning) eller $f_a(t) + \varepsilon(t)$ hvor $\varepsilon(t) \to 0$ for $t \to \infty$.

5 tr $= 2a$, det $= a^2 - 1$, så $A = \{a \mid a < -1\}$ (asymptotisk stabil), $B = (-1, 1)$ (saddelpunkt). For $a > 1$: går mod ∞; for $a = 1$: konstant $(c, -c)$ (for passende c) eller går mod ∞; for $a = -1$: går mod (c, c) for passende c.

6 Karakteristiske rødder: $\lambda = -1$ dobbeltrod, og $\lambda = -2 \pm i$. Fuldstændige løsning:

$$e^t + t + C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 e^{-2t} \cos t + C_4 e^{-2t} \sin t.$$

Asymptotisk stabil, da røddernes realdel, -1 og -2, er negativ.

7 1(a): ustabil (saddelpunkt); 1(b): ustabil (saddelpunkt); 1(c): stabil.

8 $F(t, x, u) = e^{x+u}$ konveks, og $\partial F/\partial x = \partial F/\partial u = e^{x+u}$ (spec. $\partial F/\partial u > 0$). Euler: $e^{x+\dot{x}} = d/dt\,(e^{x+\dot{x}}) = e^{x+\dot{x}}(\dot{x} + \ddot{x})$, hvoraf $1 = \dot{x} + \ddot{x}$, og dermed $t + \text{konst.} = x + \dot{x}$. Løsning $x = Ce^{-t} + t + d$, som med $x(0) = 0$ giver $x = Ce^{-t} + t - C$. (a): $x(1) = 1$ giver $C = 0$ og altså $x = t$. (b): $x(1) \geq 1$ giver enten $x(1) = 1$ og $\partial F/\partial u \geq 0$, dvs $x = t$, eller $x(1) \geq 1$ og $\partial F/\partial u = 0$ (umuligt). (c): $x(1)$ fri giver $\partial F/\partial u = 0$; umuligt, så intet minimum.

9 Et konkavt problem, Sætning 9.1.

$$\begin{aligned}
x(t) &= \tfrac{2}{3e^4+1}(3e^{4-2t} + e^{2t}) && 0 \leq t \leq 1\\
p(t) &= \tfrac{2}{3e^4+1}(-e^{4-2t} + e^{2t}) && 0 \leq t \leq 1\\
u(t) &= \sqrt{3}\, p(t) && 0 \leq t \leq 1.
\end{aligned}$$

10

$$\left.\begin{aligned}
u(t) &= -12e^{-t} && 0 \leq t \leq \ln 2\\
x(t) &= -e^t + 6e^{-t} && 0 \leq t \leq \ln 2\\
p(t) &= -2e^t - 12e^{-t} && 0 \leq t \leq \ln 2
\end{aligned}\right\} \text{ Et konkavt problem.}$$

11 Et konkavt problem, [S Sætning 12.2.2]. Vis, at $p(t)$ er voksende og negativ samt at $x(t) \geq 1$ for $0 \leq t \leq \ln 2$

$$\begin{aligned}
u(t) &= 0 && 0 \leq t \leq \ln 2\\
x(t) &= e^t && 0 \leq t \leq \ln 2\\
p(t) &= 2e^t - 8e^{-t} && 0 \leq t \leq \ln 2.
\end{aligned}$$

12

$$u = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T - 1\\ 0, & T - 1 < t \leq T \end{cases} \quad x = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq T - 1\\ T - 1, & T - 1 \leq t \leq T \end{cases} \quad p = T - t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Et konkavt problem, så [S Sætning ??] (ja, find den selv) kan anvendes.

13 Karakteristisk polynomium: $z^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$ har $b = -\frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{9}$, og $D = b^2 - 4c = -3/9$. Stabil, fordi $|b| = \frac{1}{3}$ og $1 + c = 1 + \frac{1}{9}$, og dermed $|b| < 1 + c$, og $c < 1$. Partikulær løsning $u_t^* = 2^t$. Fuldstændig løsning til homogene ligning: $r = 1/3$, $\cos\theta = 1/2$, $\sin\theta = \sqrt{3}/2$, dvs $\theta = \pi/3$ $((= 60^\circ))$. Altså $x_t = C(\frac{1}{3})^t \cos t\pi/3 + C(\frac{1}{3})^t \sin t\pi/3$.