Seddel 14.

Kommentar Dette er ikke en ugeseddel, men et bevis for Arrows Sætning [S, p. 412]. Dette bevis bruger et Lemma i stedet for komplicerede resultater om supergradienter.

Arrows Sætning. *Antag, at* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ *er et tilladt par af (vektor)funktioner, som sammen med funktionen* $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ *opfylder betingelserne i Maksimumprincippet. Antag videre, at skrotfunktionen* $S(\mathbf{x})$ *og Arrows funktion* $\hat{H}(\mathbf{x}) = \hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}(t))$ *er konkave i* $\mathbf{x}$ *for hvert fast* t*. Da løser* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ *maksimeringsopgaven, dvs* $\mathbf{u}^*$ *er en optimal kontrol.*

Bevis. Lad $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = S(\mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})dt$ være kriteriefunktionen. Det skal så vises, at for hvert tilladt par $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ er

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - J(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \leq 0.$$

Som sædvanlig optræder $\mathbf{x}$ i flere betydninger: Det betegner dels et punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, dels en funktion $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ defineret for $t_0 \leq t \leq t_1$, og dels værdien $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ af denne funktion for en bestemt værdi af t. Tilsvarende med $\mathbf{u}$ og $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u}^*$ og $\mathbf{p}$. Kort, hvis $F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ er en funktion, skriver vi F for værdien $F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ og F^* for værdien $F(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ og endelig ΔF for differensen $\Delta F := F - F^*$. Med denne – lidt upræcise – notation er sætningens påstand, at der gælder følgende ulighed:

$$\Delta J \leq 0. \tag{1}$$

Øjensynlig er, med den samme notation,

$$\Delta J = \Delta S(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Delta f(t)\, dt. \tag{2}$$

hvor $\Delta S(t_1) = S(\mathbf{x}(t_1)) - S(\mathbf{x}^*(t_1))$, osv. Vi omskriver differensen Δf ved hjælp af Hamiltonfunktionen, $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, altså

$$\Delta f = \Delta H - \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{g}. \tag{3}$$

Betragt funktionen,

$$\mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{x} = \mathbf{p}(t) \cdot \Delta \mathbf{x}(t).$$

Ved brug af differentialligningerne for $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^*$ og $\mathbf{p}$ fås:

$$\tfrac{d}{dt}\big(\mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{x}\big) = \dot{\mathbf{p}} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{p} \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} = -H_{\mathbf{x}}'^* \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{g},$$

hvor $H_{\mathbf{x}}'^* = H_{\mathbf{x}}'(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t))$, dvs

$$\mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{g} = \tfrac{d}{dt}\big(\mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{x}\big) + H_{\mathbf{x}}'^* \cdot \Delta \mathbf{x}. \tag{4}$$

Indsættes (4) i (3) fås:

$$\Delta f = \Delta H - H_{\mathbf{x}}'^* \cdot \Delta \mathbf{x} - \tfrac{d}{dt}\big(\mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{x}\big). \tag{5}$$

Differentialkvotienten på højresiden kan umiddelbart integreres fra t_0 til t_1: Stamfunktionen er $\mathbf{p} \cdot \Delta\mathbf{x}$ og værdien i begyndelsepunktet er 0, idet $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}^0$. Derfor fås af (2):

$$\Delta J = \Delta S(t_1) - \mathbf{p}(t_1) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \big(\Delta H - H'^*_{\mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x}\big)\, dt\,. \tag{6}$$

For at vise uligheden $\Delta J \le 0$, er derfor nok at vise i (6), at den første differens ≤ 0, og funktionen under integraltegnet er ≤ 0 for alle t. Med andre ord: To uligheder skal vises:

$$\Delta S(t_1) - \mathbf{p}(t_1) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1) \le 0, \quad \text{og} \quad \Delta H - H'^*_{\mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x} \le 0 \ \text{ for alle } t. \tag{7}$$

Den første ulighed i (7). Her udnyttes at $S(\mathbf{x})$ er konkav. Værdien i punktet $\mathbf{x}(t_1)$ ligger derfor „under tangenten“ ud fra $\mathbf{x}^*(t_1)$, dvs $S(\mathbf{x}(t_1)) \le S(\mathbf{x}^*(t_1)) + S'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_1)) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1)$, eller

$$\Delta S(t_1) \le S'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_1)) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1).$$

Det er derfor nok at vise, at

$$S'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_1)) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{p}(t_1) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1) \le 0,$$

eller, ækvivalent,

$$\big(\mathbf{p}(t_1) - S'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_1))\big) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1) \ge 0. \tag{7$'$}$$

Uligheden (7′) følger af, at det indre produkt er en sum $\sum v_j w_j$: for type (i)* vides at $w_j = 0$, for type (iii)* vides at $v_j = 0$, og for type (ii)* vides enten $v_j = 0$ eller $v_j > 0$ og $w_j \ge 0$.

I *den anden ulighed* i (7) har t, og dermed også $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}^*$, og $\mathbf{p}$, en fast værdi. Betragt for disse værdier $H(\mathbf{y}) := H(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ og $H^*(\mathbf{y}) = H(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}^*, \mathbf{p})$ som funktioner af $\mathbf{y}$. Uligheden kan skrives $H(\mathbf{x}) \le H^*(\mathbf{x}^*) + H'^*_{\mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x}$, og af definitionen på $\hat{H}$ følger specielt, at $H(\mathbf{x}) \le \hat{H}(\mathbf{x})$. Derfor er det nok at vise følgende ulighed:

$$\hat{H}(\mathbf{x}) \le H^*(\mathbf{x}^*) + (H^*)'(\mathbf{x}^*) \cdot \Delta\mathbf{x}. \tag{7$''$}$$

Men (7″) er netop uligheden (8) herunder, med $H := H^*$. Vi har $H^*(\mathbf{y}) \le \hat{H}(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{y}$, og $\hat{H}(\mathbf{x}^*) = H^*(\mathbf{x}^*)$ ifølge betingelsen (1) i Maksimumprincippet. Derfor er forudsætningen i Lemmaet opfyldt. Altså gælder (8), og dermed (7″), og følgelig den anden ulighed i (7). ▯

Lemma. *Antag for funktioner $H(\mathbf{x})$ og $\hat{H}(\mathbf{x})$ defineret i en konveks mængde T og et punkt $\mathbf{x}^*$ i det indre af T, at* (1) *$H(\mathbf{x}) \le \hat{H}(\mathbf{x})$ for alle $\mathbf{x}$ og $H(\mathbf{x}^*) = \hat{H}(\mathbf{x}^*)$, at* (2) *$H$ er differentiabel i $\mathbf{x}^*$ og* (3) *$\hat{H}$ er konkav. Da gælder for alle $\mathbf{x}$, at*

$$\hat{H}(\mathbf{x}) \le H(\mathbf{x}^*) + H'(\mathbf{x}^*) \cdot \Delta\mathbf{x}. \tag{8}$$

Bevis. Sæt $\mathbf{x}_\varepsilon := \mathbf{x}^* - \varepsilon\Delta\mathbf{x}$. Da ligger punktet $\mathbf{x}^*$ på liniestykket fra $\mathbf{x}_\varepsilon$ til $\mathbf{x}$. Da $\hat{H}$ er konkav, følger det, at

$$\hat{H}(\mathbf{x}_\varepsilon) \le \hat{H}(\mathbf{x}^*) - \varepsilon\Delta\hat{H}.$$

Da $H(\mathbf{x}_\varepsilon) \le \hat{H}(\mathbf{x}_\varepsilon)$ og $H(\mathbf{x}^*) = \hat{H}(\mathbf{x}^*)$ følger det, at

$$H(\mathbf{x}_\varepsilon) \le H(\mathbf{x}^*) - \varepsilon\Delta\hat{H}.$$

Omordning og division med $-\varepsilon$ giver:

$$\frac{H(\mathbf{x}^* - \varepsilon\Delta\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}^*)}{-\varepsilon} \ge \Delta\hat{H}.$$

Højresiden går mod $H'(\mathbf{x}^*) \cdot \Delta\mathbf{x}$ for $\varepsilon \to 0$. Deraf følger uligheden (8). ▯

Anders Thorup