Ugeseddel 13

Program. I den 13. uge (8/4–11/4) er det „Differensligninger, afrunding“, fra S 9.1, 9.3–9.6. Ugens øvelser: S9.1: 1(a); S9.2: 2; S9.3: 2; S9.4: 1(d), 1(e); EO: **126**.

Kuglerne.

• *Gæt på en af samme slags!* For den inhomogene ligning $x_{t+2} + bx_{t+1} + cx_t = h(t)$ gættes (systematisk) på en partikulær løsning af samme samme slags som højresiden. Husk, at venstresiden er en lineær operator $L(x)$. Indsæt et gæt $x = (x_t)$, og se om $L(x)$ giver følgen $h(t)$, – eller en konstant $K \neq 0$ gange $h(t)$; i det sidste tilfælde rettes gættet til $\frac{1}{K}x$.

For $h(t) = r^t$ gættes på $x_t = r^t$. Indsættelse giver følgen $L(x)_t = (r^2 + br + c)\, r^t$, altså $L(x) = Kr^t$, hvor $K = r^2 + br + c$ er værdien af det karakteristiske polynomium for $z = r$. Hvis r er karakteristisk rod, så er $K = 0$, så det fungerer ikke, men så fungerer gættet tr^t; – vel at mærke, hvis r ikke er dobbeltrod, men så fungerer gættet t^2r^t.

Husk at tilfældet $h(t) = h$ (konstant) er specialtilfældet $r = 1$, idet $h = h\,1^t$. Når 1 ikke er rod i det karakteristiske polynomium, fås den konstante løsning (ligevægt) $x^* = h/(1+b+c)$. Når 1 er rod, prøves med $x_t := t$, og hvis 1 er dobbeltrod, ...

• *n'te-ordens ligning med konstante koefficienter* (*inhomogen* og *karakteristisk polynomium*):

$$x_{t+n} + a_1x_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1}x_{t+1} + a_nx_t = h(t), \qquad z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n.$$

Ligningen er *homogen*, hvis $h(t) = 0$ (nulfølgen), og ellers *inhomogen*.

For den homogene differensligning: En reel karakteristisk rod r, med multiplicitet m, giver m løsninger:

$$r^t,\ tr^t,\ \ldots,\ t^{m-1}r^t,$$

og et par af komplekst konjugerede rødder $\alpha \pm \beta i$, med multiplicitet m, giver $2m$ løsninger:

$$r^t\cos\theta t,\ r^t\sin\theta t,\ tr^t\cos\theta t,\ tr^t\sin\theta t,\ \ldots,\ t^{m-1}r^t\cos\theta t,\ t^{m-1}r^t\sin\theta t,$$

hvor r og θ defineres ud fra α og β som ovenfor. De n rødder giver n løsninger til den homogene ligning, og disse løsninger udgør en basis.

For den inhomogene ligning: Prøv med systematiske gæt som i tilfældet $n = 2$.

• *Stabil lineær differensligning.* Den inhomogene ligning (også med variable koefficienter) er (globalt) *asymptotisk stabil*, hvis alle løsninger opfører sig „ens“ for $t \to \infty$. Vilkårlige to løsninger afviger med en følge, der løser den homogene ligning. Ækvivalent (og mere præcist) er ligningen asymptotisk stabil, hvis der for alle løsninger $u(t)$ til den tilsvarende homogene ligning gælder, at $u(t) \to 0$ for $t \to \infty$. Der findes n følger $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ som er en basis for løsningsrummet til den homogene ligning. For asymptotisk stabilitet er det øjensynlig nok, at der for $j = 1, \ldots, n$ gælder $u_j(t) \to 0$ for $t \to \infty$.

• *Check-betingelse for stabilitet. Den lineære n'te-ordens differensligning med konstante koefficienter er asymptotisk stabil, hvis og kun hvis alle karakteristiske rødder* (*incl. ikke-reelle rødder*) *har numerisk værdi mindre end* 1, jfr [S, s. 297].

For $n = 1$: $x_{t+1} + cx_t = h(t)$ er stabil, hvis og kun hvis $|c| < 1$.

For $n = 2$: $x_{t+2} + bx_{t+1} + cx_t = h(t)$ er stabil, hvis og kun hvis $|b| < c + 1$ og $c < 1$.

For $n > 2$: Schur's uligheder, [S, s. 303] („komplicerede determinanter“).

• *Et lineært differensligningssystem med konstante koefficienter* (af første orden) med n ubekendte følger (eller én ubekendt vektorfølge) har formen:

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}(t),$$

hvor A er en $n \times n$-matrix og $\mathbf{h}(t)$ er en følge af vektorer $\mathbf{h}(0), \mathbf{h}(1), \mathbf{h}(2), \ldots$. Systemet er *homogent*, hvis $\mathbf{h}(t)$ er nul-følgen (dvs lig med nul-vektoren for alle t), og ellers *inhomogent*. Med en given begyndelsesværdi $\mathbf{x}_0$ har systemet præcis én løsning. For $\mathbf{h}(t) = \mathbf{0}$ er der en formel: $\mathbf{x}(t) = A^t\mathbf{x}_0$, men det skal understreges, at differensligningssystemet først er løst eksplicit, når man har angivet de følger, der står på de n^2 pladser i matricen A^t.

Systemet er asymptotisk *stabilt*, hvis der for enhver løsning $\mathbf{x}(t)$ til den homogene ligning gælder, at $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ for $t \to \infty$. Ækvivalent: $A^t \to \mathbf{0}$ for $t \to \infty$ (det betyder, at det numerisk største element i A^t går mod 0 for $t \to \infty$); eller: alle rødder i det karakteristiske polynomium for A har numerisk værdi mindre end 1. Teoretisk: Check med Schur!

• *I planen* ser et lineært differensligningssystem sådan ud:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad \text{eller} \quad \begin{aligned} x_{t+1} &= ax_t + by_t + h(t), \quad (1) \\ y_{t+1} &= cx_t + dy_t + g(t). \quad (2) \end{aligned}$$

• *Metode:* Bestem by_t ud fra ligning (1), og bestem herfra by_{t+1} ved at erstatte t med $t+1$. Multiplicer ligning (2) med b, og indsæt heri de fundne udtryk for by_t og by_{t+1}, – og reducer!

$$\begin{aligned} by_t = x_{t+1} - ax_t - h(t), \qquad by_{t+1} &= x_{t+2} - ax_{t+1} - h(t+1), \\ x_{t+2} - ax_{t+1} - h(t+1) &= bcx_t + d(x_{t+1} - ax_t - h(t)) + bg(t), \\ x_{t+2} - (a+d)x_{t+1} + (ad-bc)x_t &= bg(t) - dh(t) + h(t+1). \end{aligned}$$

Det er en 2. ordens lineær ligning med konstante koefficienter. og $z^2 - (\operatorname{tr} A)z + \det A$ som karakteristisk polynomium. Løs denne ligning (lettest, hvis følgerne $h(t)$ og $g(t)$ er konstante): den generelle løsning har formen $x_t = x_t^* + Cu_t + Dv_t$, hvor u_t og v_t er en basis for løsningerne til den homogene ligning, og x_t^* er en partikulær løsning. Indsæt dette udtryk for x_t i det fundne udtryk for by_t; det kan antages, at $b \neq 0$. Divider med b; slut, færdig!

• *De konstante løsninger til et differensligningssystem* $\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}$, også kaldet *ligevægtsløsninger* eller *stationære tilstande*, er de vektorer $\mathbf{x}^*$, som opfylder matrixligningen

$$\mathbf{x}^* = A\mathbf{x}^* + \mathbf{h}, \quad \text{eller } (I - A)\mathbf{x}^* = \mathbf{h}.$$

Matricen $I - A$ er $zI - A$ for $z = 1$, så determinanten $|I - A|$ er værdien af det karakteristiske polynomium for $z = 1$. Determinanten er altså forskellig fra 0, netop hvis $z = 1$ ikke er egenværdi for A. Når det er tilfældet, har matrixligningen den entydigt bestemte løsning,

$$\mathbf{x}^* = (I - A)^{-1}\mathbf{h}.$$

Hvis systemet er asymptotisk stabilt, dvs hvis alle rødder i det karakteristiske polynomium for A numerisk er mindre end 1, så konvergerer alle løsninger $\mathbf{x}(t)$ for $t \to \infty$ mod $\mathbf{x}^*$.

Planen: Mandag den 15/4: øvelser EO: 46, 51, 76; S9.4: 2; S9.5: 2. Maraton med gennemgang af eksamensopgaver. 23/4: EO: 69, 28, 74, 50, 40, 29, 17, 32, 62, og 25/4: EO: 31, 36, 46, 81, 21, 27; X: 12. Spørgetime den 30/4. – Samt eksamen den 2/5.

Anders Thorup