## Ugeseddel 12

**Program.** I den 12. uge (2/4–4/4) er det „Differensligninger“, fra S 9.1, 9.3–9.6. Ugens øvelser: Nul øvelser 2. påskedag.

**Kuglerne.**

• *Ligninger af højere orden.* Differentialligningen af orden $n$ (på normalform), kan udtrykkes ved „differentieringsoperatoren“ $D$, bestemt ved $Dx(t) = \dot{x}(t)$; det er en ligning af formen $D^n x = g(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^{n-1}x)$. Tilsvarende kunne man få en *differensligning af orden n* ved blot at erstatte $D$ med differensoperatoren $\Delta$. Som oftest bruges i stedet *translationsoperatoren* $T$, bestemt ved $Tx(t) = x(t+1)$. Differensligningen af orden $n$ får så formen $T^n x = f(t, x, Tx, T^2x, \dots, T^{n-1}x)$, hvor den ubekendte $x$ er en *følge* $x(t)$ eller $x_t$ for $t = 0, 1, 2, \dots$. Da $(T^i x)_t = x_{t+i}$, kan ligningen udførligt skrives:

$$x_{t+n} = f(t, x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+n-1}), \quad t = 0, 1, 2, \dots. \tag{†}$$

• *Hovedsætning = Eksistens– og entydighedssætning* er heldigvis triviel: *For $n$ givne tal $x_0^0, \dots, x_{n-1}^0$ findes der en og kun én løsning $x_t$ til differensligningen således, at de første $n$ værdier er de givne: $x_i = x_i^0$ for $i = 0, \dots, n-1$.* Sætningen forudsætter, at funktionen $f(t, y_1, \dots, y_n)$ på højresiden er defineret for alle de sæt $(t, x_t, \dots, x_{t+n-1})$, der fremkommer, når følgen $x_t$ bestemmes *rekursivt* af ligningen, sådan: For $t = 0$ siger ligningen, at $x_n = f(0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. På højresiden skal tallene $x_0, \dots, x_{n-1}$ være de givne, så ligningen giver værdien af $x_n$. For $t = 1$ siger ligningen, at $x_{n+1} = f(1, x_1, \dots, x_n)$; på højresiden kender vi tallene $x_1, \dots, x_n$ (incl $x_n$ som vi lige bestemte), så ligningen giver værdien af $x_{n+1}$. Fortsæt for $t = 2$ med ligningen $x_{n+2} = f(2, x_2, \dots, x_{n+1})$, som giver værdien af $x_{n+2}$, osv.

• *Ligevægtsløsning/stationær tilstand* = konstant løsning $x^*$ (dvs $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x^*$). Tallet $x^*$ er en ligevægt for (†), hvis $x^* = f(t, x^*, \dots, x^*)$ for alle $t = 0, 1, 2, \dots$. For en *autonom* ligning, altså en ligning, hvor højresiden i (†) er bestemt ved en funktion af formen $f(\mathbf{x})$ (uafhængigt af $t$), er $x^*$ en ligevægt, hvis og kun hvis

$$x^* = f(x^*, x^*, \dots, x^*).$$

Intuitivt er en ligevægt $x^*$ *asymptotisk stabil*, hvis der for enhver løsning $x_t$ med $x_0, \dots, x_{n-1}$ tilstrækkeligt tæt ved $x^*$ gælder, at $x_t \to x^*$ for $t \to \infty$.

• *Den lineære differensligning* af $n$'te orden har formen:

$$x_{t+n} + a_1(t)x_{t+n-1} + \dots + a_{n-1}(t)x_{t+1} + a_n(t)x_t = h(t), \tag{‡}$$

hvor $a_1(t), \dots, a_n(t)$ og $h(t)$ er givne talfølger. Den er *homogen*, hvis $h(t) \equiv 0$, og *inhomogen* ellers. Ligningens venstreside er en *operator* $L(x)$: For en given følge $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ kan man aflæse udtrykket på venstresiden for $t = 0, 1, 2, \dots$; det giver en ny følge $L(x) = (L(x)_0, L(x)_1, L(x)_2, \dots)$. Operatoren $L$ er lineær, fra vektorrummet af alle følger ind i det samme vektorrum. Heraf følger: Løsningerne til den homogene ligning er operatorens kerne, $L^{-1}(0)$, og specielt et underrum. Løsningsmængden til den inhomogene ligning er originalmængden $L^{-1}(h(t))$; den fremkommer ved at man til én *partikulær* løsning, dvs til én tilfældigt udvalgt løsning, lægger alle løsninger til den homogene ligning.

Husk, at de to notationer for talfølger bruges i flæng: Både $x_t$ og $h(t)$ er følger, nemlig $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ og $h(0), h(1), h(2), h(3), \dots$,

Den lineære ligning (‡) er *asymptotisk stabil*, hvis ligevægten 0 for den tilsvarende homogene ligning er asymptotisk stabil.

• *Hovedsætningen giver: Løsningsmængden $L^{-1}(0)$ til den homogene ligning er et vektorrum af dimension $n$.* En konsekvens: Der findes $n$ lineært uafhængige følger $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ som løser den homogene ligning, og med $n$ sådanne følger er den generelle løsning til den inhomogene ligning bestemt ved

$$x_t = u_t^* + C_1 u_1(t) + \cdots + C_n u_n(t), \text{ med konstanter } C_i,$$

hvor $u_t^*$ er en partikulær løsning til den inhomogene ligning.

*Bevis.* Afbildningen $x_t \mapsto (x_0, \ldots, x_{n-1})$, der til følgen $x_t$ knytter vektoren bestående af følgens $n$ første elementer, er en lineær afbildning fra vektorrummet af følger til vektorrumet $\mathbb{R}^n$. Det følger af Eksistens- og entydighedssætningen, at hvis vi udelukkende betragter følger, der løser en bestemt $n$'te-ordens differensligning, så er afbildningen bijektiv. Specielt, hvis vi kun betragter løsninger til den homogene ligning ovenfor, er afbildningen bijektiv og lineær; derfor er den en isomorfi $L^{-1}(0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$. Konsekvensen er standard lineær algebra. ▯

• *1.ordens differensligning med konstante koefficienter*: $x_{t+1} + cx_t = h(t)$ skrives ofte $x_{t+1} = ax_t + h(t)$ med $a = -c$. Hvis den er homogen, $h(t) \equiv 0$: generel løsning $x_t = Ca^t$. Med konstant højreside, $h(t) \equiv h$ er den autonom $x_{t+1} = ax_t + h$: Konstant løsning (ligevægt) for $a \neq 1$ er $x^* = h/(1-a)$; generel løsning $x_t = h/(1-a) + Ca^t$. Asymptotisk stabil, hvis $|a| < 1$.

• *2.ordens differensligning med konstante koefficienter* (*homogen*, *inhomogen*, og *karakteristisk polynomium*):

$$(0) \qquad x_{t+2} + bx_{t+1} + cx_t = 0, \qquad\qquad (*) \qquad x_{t+2} + bx_{t+1}x + cx_t = h(t),$$

$$z^2 + bz + c, \quad \text{med rødderne } r = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}, \quad \text{hvor } D = b^2 - 4c.$$

For den homogene ligning (0) afhænger løsningen af fortegnet for $D$ (*diskriminanten*):

$D > 0$: Der er to reelle rødder $r_1$ og $r_2$, og den generelle løsning er $x_t = C_1 r_1{}^t + C_2 r_2{}^t$. Det antages, at $c \neq 0$.

$D = 0$: Der er én (dobbelt)rod $r = -\frac{b}{2}$, og den generelle løsning er $x_t = C_1 r^t + C_2 t r^t$.

$D < 0$: Der er to ikke-relle rødder $\alpha \pm i\beta$, hvor $\alpha = -b/2$, og $\beta = \sqrt{|D|}/2$. Det er bekvemt at skrive rødderne på formen $r(\cos\theta \pm i \sin\theta)$, hvor $r$ er rødderne numeriske værdi og $\theta$ med $0 < \theta < \pi$ er et argument roden i den øvre halvplan:

$$r = |\alpha + i\beta| = \sqrt{c}, \quad \cos\theta = \alpha/r = \tfrac{-b}{2\sqrt{c}}\,.$$

Den generelle løsning er så:

$$x_t = C_1 r^t \cos t\theta + C_2 r^t \sin t\theta, \quad \text{eller} \quad x_t = Ar^t \cos(t\theta + \omega),$$

med reelle konstanter $C_1$ og $C_2$, eller $A$ og $\omega$.

**Planen** for den 13. uge (8/4–11/4) er „Differensligninger, afrunding", fra S 9.1, 9.3–9.6. Ugens øvelser: S9.1: 1(a); S9.2: 2; S9.3: 2; S9.4: 1(d), 1(e); EO: **126**.

Anders Thorup