Ugeseddel 11

Program. I den 11.uge (18/3–21/3) er det „Optimal kontrolteori; Differensligninger“, fra S 12.5, 12.7, 12.9; S 13.1, 13.2; S 9.1, 9.3. Ugens øvelser: EO: **21**, 48, 73, 92. EO er samlingen af eksamensopgaver. Den ligger på nettet i 2 pakker: `EOOLD` er de ældre opgaver, nummereret 1–83, og `EO04` er de nyere, nummereret 84– . Du kan enten printe sider ud efterhånden som du har brug for det. Eller du kan udprinte begge pakker. Der er facit til en del af opgaverne. Den bedste eksamensforberedelse er at regne mange eksamensopgaver, fx de nyeste først; jo flere, jo bedre.

Kuglerne.

• *Hvor er det bare fedt!* Kontrolproblem med skrotværdifunktion:

$$\text{(max)} \quad S(\mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt \quad \text{for (1) } \mathbf{u} \in U, \quad \text{(2) } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \text{(3) } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,$$

med blandede slutbetingelser af typerne (i), (ii), og (iii).

Det ligner jo noget du har set før, men nu er det betydeligt mere indviklet: der er flere variable. *Kontrollen* $\mathbf{u}$ er her en *vektor* af kontrolfunktioner $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)$ og *tilstanden* er en *vektor* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ af tilstandsfunktioner (gerne med $n \neq r$). Begge er funktioner $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ og $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ defineret for $t_0 \le t \le t_1$. *Skrotværdifunktionen* $S(\mathbf{x})$ er en reel funktion af n variable.

Kontrolbetingelsen (1) på kontrollen er, at $\mathbf{u} \in U$ (altså $\mathbf{u}(t) \in U$ for alle t), hvor U er en givet *konveks* delmængde af $\mathbb{R}^r$. *Tilstandsligningen* med *begyndelsesbetingelse*,

$$\text{(2)} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad \text{(3)} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,$$

er et helt *system af differentialligninger*, $\dot{x}_j = g_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, $x_j(t_0) = x_j^0$, for $j = 1, \dots, n$, svarende til at $\mathbf{g}$ er en given *vektorafbildning* $\mathbf{g}$ med n koordinatfunktioner, defineret på (en delmængde af) $\mathbb{R}^{1+n+r}$. [Det er bekvemt at skrive $\mathbf{x}^0$ og $\mathbf{x}^1$ for de faste vektorer, således at fx $\mathbf{x}^1$ ikke kan forveksles med førstekoordinaten af vektoren $\mathbf{x}$.] I *kriteriefunktionen* indgår skrotværdien $S(\mathbf{x}(t_1))$ af *sluttilstanden*, og i integralet $\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt$ er $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ en given reel funktion (af $1 + n + r$ variable); man skal indsætte $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ og $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ når man integrerer.

Slutbetingelsen, der også er en del af (3), er typisk et sæt af blandede betingelser, fx af type (i) for de første n_1 koordinater: $x_j(t_1) = \mathbf{x}_j^1$ for $j = 1, \dots, n_1$, af type (ii) for de næste n_2 koordinater, $x_j(t_1) \ge \mathbf{x}_j^1$ for $j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$, og af type (iii) for de resterende koordinater, dvs $x_j(t_1)$ er fri for $j = n_1 + n_2 + 1, \dots, n$.

• *Tilladte par* er par af funktioner $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ og $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ for $t_0 \le t \le t_1$, der opfylder (1), (2) og (3) (incl slutbetingelser). Tilstanden $\mathbf{x}$ er bestemt ved kontrollen $\mathbf{u}$, via tilstandsligningen, så man kan blot tale om en *tilladt kontrol* $\mathbf{u}$.

Opgaven går ud på blandt de tilladte par $\mathbf{x}(t)$ og $\mathbf{u}(t)$ at finde det *optimale* par, hvor kriteriefunktioen antager sin største værdi.

• *Hamiltonfunktionen* er funktionen $H = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, hvor $\mathbf{p}$ er en vektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, og $\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}$ er skalarproduktet (= indreprodukt, = prik-produktet) af de to vektorer. Hamiltonfunktionen, $H = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$, er altså en funktion af $1 + n + r + n$ variable.

• *Kandidater* er sæt af tre funktioner $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$, hvor $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ er et tilladt par og $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ er en vektorfunktion med n koordinater, som opfylder: (1') $\mathbf{u}(t)$ maksimerer Hamiltonfunktionen $H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$ for $\mathbf{u} \in U$, og hvor $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ tilfredsstiller det adjungerede differentialligningssystem,

$$(2') \quad \dot{\mathbf{p}} = -H'_{\mathbf{x}},$$

dvs $\dot{p}_j = -H'_{x_j}$ for $j = 1, \ldots, n$, med slutbetingelser (3') for $p_j(t_1)$ af typen (i'), (ii'), eller (iii') svarende til slutbetingelsen (i), (ii), eller (iii) for $x_j(t_1)$.

• *Maksimumprincippet*. For et normalt maksimeringsproblem findes de optimale kontroller blandt kandidaterne.

• *Arrows sætning*. Antag at skrotværdifunktionen $S(\mathbf{x})$ er konkav. Antag videre for en kandidat $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$, at Arrows funktion $\widehat{H}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u} \in U} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$ for hvert fast t er konkav mht $\mathbf{x}$. Da er kandidaten en optimal kontrol.

• *Det sværeste ved differensligninger* er måske at vænne sig til, at t ikke længere står for et reelt tal, men for et helt tal $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Notationen $x(t)$ vil typisk stå for en *talfølge*, $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $\ldots$. „Funktionen" $x(t)$ antages kun defineret for $t = 0.1, 2, 3, \ldots$, men den kan selvfølgelig være bestemt ved et udtryk, der giver fornuftig mening for alle reelle tal t. Følgen kan naturligvis også betegnes x_t, altså $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$, og ofte kan begge notationer indgå i en og samme ligning. Når t indgår i en ligning, vil det være underforstået, at ligningen påstås at gælde for alle $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

• *Differensligninger* kan naturligt sammenlignes med differentialligninger: En førsteordens differentialligning for en *funktion* $x(t)$ (Ups, nu er t et øjeblik igen et reelt tal) på normalform har formen

$$Dx\,(t) = g(t, x(t)) \text{ eller } Dx = g(t, x); \qquad (*)$$

differentieringsoperatoren D, med $Dx = \dot{x}$, er bestemt ved $Dx(t) = \lim_{h \to 0} \Delta_h x(t)/h$, hvor Δ_h er differensoperatoren $\Delta_h x(t) = x(t + h) - x(t)$.

For en *følge* $x(t)$ (nu er $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$) kan man kun betragte *differensoperatoren* $\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$, og differensligningen svarende til (*) er egentlig ligningen $\Delta x(t) = g(t, x(t))$. På venstresiden står der $x(t + 1) - x(t)$, og hvis man lægger $x(t)$ til på begge sider får man ligningen,

$$x(t + 1) = f(t, x(t)) \quad \text{eller } x_{t+1} = f(t, x_t), \qquad (**)$$

hvor $f(t, x) = g(t, x) + x$. Det er altid på formen (**), man møder differensligninger. Bemærk, at (**) svarer til de *uendelig* mange ligninger, man får ved at sætte $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$, dvs til $x_1 = f(0, x_0)$, $x_2 = f(1, x_1)$, $x_3 = f(2.x_2)$, $x_4 = f(3, x_3)$, osv.

Planen for den 12. uge (2/4–4/4) er „Differensligninger", fra S 9.1, 9.3–9.6. Ingen øvelser 2. påskedag.

Anders Thorup