Ugeseddel 10

Program. I den 10. uge (11/3–14/3) er emnet „Optimal kontrolteori“, fra S 12.1–12.5, 12.7. Jeg når helt sikkert også [S, 12.9]. Ugens øvelser: S12.4: 5, 9; S12.5: 1; EO: **65**.

Parlør. ‘ulikhetene snus’ = ulighederne vendes; ‘skrapverdifunksjon’ = skrotværdifunktion.

Kuglerne.

• *Det kan siges på mange måder*, fx:

(a) $x(T) \geq x_T$ og $p(T) \geq 0$ med „=“ mindst et af stederne.

(b) ($x(T) \geq 0$ og $p(T) = 0$) eller ($x(T) = x_T$ og $p(T) \geq 0$).

(c) $x(T) \geq x_T$ og $p(T) \geq 0$ (med $p(T) = 0$ hvis $x(T) > x_T$).

Overvej, at de tre måder udtrykker præcis det samme. I (b) er der sat parenteser, fordi det ellers sprogligt er svært at skelne, hvordan og/eller/og skal kombineres. Formuler selv (d)!

• *Et nyttigt lille lemma. Antag, at $x(t)$, for $t \geq t_0$, løser en differentialligning $\dot{x} = a(t)x$, $x(t_0) = x_0$, hvor $a(t)$ er stykkevis kontinuert. Antag videre, at $x_0 > 0$. Da er $x(t) > 0$ for $t \geq t_0$. Hvis $a(t) \geq 0$ for $t \geq t_0$, så er $x(t)$ voksende, og specielt er $x(t) \geq x_0$ for $t \geq t_0$.*

Bevis. Differentialligningen er en lineær, homogen førsteordensligning. Hvis $a(t)$ er kontinuert, er x bestemt ved en formel: $x(t) = x_0 e^{A(t)}$, hvor stamfunktionen $A(t)$ bestemmes som integralet $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$. Da $x_0 > 0$ og $e^v > 0$ for alle v, følger det specielt, at $x(t) > 0$. Og hvis $a(t) \geq 0$, så er $A(t)$, og dermed også $x(t)$, voksende.

Hvis $a(t)$ har spring, kan formlen stadig bruges: stamfunktionen $A(t)$ bestemmes ved at integrere $a(t)$ mellem springene, og lægge sammen. Funktionen $A(t)$ bliver så kontinuert, og stykkevis $\mathcal{C}^1$, og igen gælder $x(t) = x_0 e^{A(t)}$. Og så fremgår de ønskede påstande. ▯

Lemmaet bruges fx [S, s. 381^{1-2}] med $x := k^*$ og $a := u^*$, og [S, s. 418^9] med $x := x_1^*$ og $a(t) := au^*(t)$.

• *Mere triviel* er følgende observation: *Hvis $x'(t) \leq y'(t)$ for $t \geq t_0$ og $x(t_0) \leq y(t_0)$, så er $x(t) \leq y(t)$ for $t \geq t_0$.* Fx bruges en variant i [S, s. 419^{1-2}].

• *Variationsproblemet*, dvs (max) $\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt$ for $x(t_0) = x_0$, med en af slutbetingelserne (i), (ii), (iii), kan opfattes som et kontrolproblem:

$$(\max) \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)\, dt \quad \text{for } \dot{x} = u, \;\; x(t_0) = x_0;$$

her er altså $f(t, x, u) = F(t, x, u)$, $g(t, x, u) = u$, og kontrolområdet er $U = \mathbb{R}$. Hamiltonfunktionen er $H = F(t, x, u) + pu$. Maksimumprincippet fører til Eulerligningen: Når u er maksimumpunkt for H, er $H'_u = 0$, dvs $p = -F'_u$. Videre er $H'_x = F'_x$, så den adjungerede ligning $\dot{p} = -H'_x$ *er* Eulerligningen $\frac{d}{dt}F'_u = F'_x$. Slutbetingelsen $p(t_1) \geq 0$ *er* betingelsen $F'_u|_{t=t_1} \leq 0$.

• *Arrows Sætning.* I den tilstrækkelige betingelse (for at en kandidat $x = x(t)$, $u = u(t)$, $p = p(t)$ er en optimal kontrol) kan kravet om, at for hvert t er Hamiltonfunktionen $H(t, x, u, p(t))$

konkav i x, u svækkes yderligere: *For kandidaten* (x, u, p) *er* (x, u) *en optimal kontrol, hvis der for hvert* t *gælder, at følgende funktion af* x *(Arrows funktion) er konkav:*

$$\widehat{H}(x) = \max_{v \in U} H(t, x, v, p(t)).$$

Brugen af 'max' indikerer, at det forudsættes, at funktionen på højresiden antager sin maksimumværdi i et punkt $u_0 \in U$.

• *En skrotværdifunktion* er en funktion $S(x)$, der til en tilstand x knytter en reel værdi $S(x)$. Skrotværdien $S(x(t_1))$ af sluttilstanden $x(t_1)$ indgår så i det mest generelle: *Kontrolproblem med skrotværdi:*

$$\text{(max)} \quad S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u)\, dt \quad \text{for } u \in U,\ \dot{x} = g(t, x, u),\ x(t_0) = x_0, \qquad \text{(Max)}$$

med slutbetingelser af type (i) $x(t_1) = x_1$; (ii) $x(t_1) \geq x_1$; eller (iii) $x(t_1)$ er fri. Slutbetingelsen (i) for skrotværdier er naturligvis en uinteressant udvidelse af standardproblemet.

Hamiltonfunktionen er stadig $H(t, x, u, p) = f(t, x, u) + pg(t, x, u)$.

• *Kogebog for skrotværdiproblemet.* Led efter *kandidater*, dvs sæt af tre funktioner $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$, der opfylder (1*) og (2*) (uændret), samt den relevante af følgende:

(i*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $p(t_1)$ fri;
(ii*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) \geq x_1$ og $p(t_1) \geq S'(x(t_1))$ og mindst et „=".
(iii*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1)$ fri og $p(t_1) = S'(x(t_1))$.

• *Maksimumprincippet.* Enhver optimal kontrol (x, u) for problemet (Max) findes blandt kandidaterne.

• *Arrows sætning.* Omvendt, hvis skrotfunktionen $S(x)$ er konkav, og hvis der for en kandidat (x, u, p) gælder, at Arrows funktion $\widehat{H}(x)$ er konkav, så er (x, u) en optimal kontrol.

Planen for den 11. uge (18/3–21/3) omfatter „Optimal kontrolteori; Differensligninger", fra S 12.5, 12.7, 12.9; S 13.1, 13.2; S 9.1, 9.3. Ugens øvelser: EO: **<u>21</u>**, 48, 73, 92.

Anders Thorup