Ugeseddel 9

Planen for den 9. uge (4/3–7/3) omfatter „Optimal kontrolteori“, fra S 12.1–12.5. Ugens øvelser: S12.2: 1; S12.4: 3, 4; EO: **47**.

Kuglerne.

• *Med lidt flere detaljer* kan kontrolproblemet (Max_i) se sådan ud:

$$\text{Maksimer} \quad \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt$$

$$\text{for} \quad (1) \quad u(t) \in U, \qquad (2) \quad \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \qquad (3) \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\text{samt} \quad (\text{i}) \quad x(t_1) = x_1,$$

(1) og (2) for „alle“ t, dvs for $t_0 \le t \le t_1$ bortset fra springpunkter. Men normalt skrives blot:

$$(\max) \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u)\, dt \quad \text{for (1) } u \in U, \text{ (2) } \dot{x} = g(t, x, u), \text{ (3) } x(t_0) = x_0, \text{ (i) } x(t_1) = x_1.$$

Analogt med problemerne (Max_ii) og (Max_iii).

• *Husk lige opskriften! Hamilton-funktionen* er $H(t, x, u, p) := f(t, x, u) + pg(t, x, u)$. Kandidater til løsning af kontrolproblemet er sæt af *tre* funktioner $x = x(t)$, $u = u(t)$, $p = p(t)$, bestemt ved opskriften (*Maksimumprincippets betingelser*):

(1*) For hvert fast t har $H(v) := H(t, x(t), v, p(t))$, $v \in U$, maksimum for $v = u(t)$.

(2*) Følgende system af førsteordens differentialligninger er opfyldt:

$$\dot{x} = g(t, x, u), \quad \dot{p} = -H'_x(t, x, u, p).$$

(3*) De relevante af følgende transversalitetsbetingelser gælder:

(i*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $p(t_1)$ fri;

(ii*) $x(t_0) = x_0$, samt $x(t_1) \ge x_1$ og $p(t_1) \ge 0$ med lighed i mindst en af ulighederne;

(iii*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1)$ fri og $p(t_1) = 0$.

Betingelserne er (normalt) nødvendige. Og de er tilstrækkelige under forudsætninger om konkavitet af Hamilton-funktionen.

• *Mangasarians sætning.* Antag, at sættet af tre funktioner (x, u, p) er en kandidat. Hvis Hamiltonfunktionen $H(t, x, u, p(t))$ for hvert fast t er konkav som funktion af de to midterste variable (x, u), så er parret af funktioner (x, u) en optimal kontrol. [Pas på: I spørgsmålet om konkavitet betegner (x, u) vilkårlige variable, i spørgsmålet om at det er en optimal kontrol er $x = x(t)$ og $u = u(t)$ de givne funktioner.]

• *Ideelt* kan man forestille sig opskriften til bestemmelse af kandidater brugt sådan: Betingelsen (1*) udsiger, at for et givet, fast t er $u_0 := u(t)$ et punkt i U, som maksimerer funktionen $H(v) = H(t, x(t), v, p(t))$ for $v \in U$. Bestem nu, for hvert sæt af tre tal t, x, p det punkt u_0 i U, som maksimerer funktionen $H(v) = H(t, x, v, p)$. Punktet u_0 afhænger af tallene t, x, p, så det giver u_0 som en funktion $u_0 = u_0(t, x, p)$. Denne funktion kan så indsættes for u i differentialligningerne i (2*), som så bliver et koblet differentialligningssystem med de to ubekendte funktioner x, p, altså uden u. I den generelle løsning hertil indgår så to arbitrære konstanter; de bestemmes så ud fra de to ligninger i (3*).

Ak, i praksis går det aldrig så glat, og opskriftens instruktioner skal ikke nødvendigvis udføres i den rækkefølge, de står i. Man kan tilføje et notat i kogebogen: Træd tilbage, kig på al den information, der ligger i opskriftens betingelser, og kombiner dem omhyggeligt, afhængigt af det konkrete problem.

• *Maksimumpunktet* u_0 for funktionen $H(v) := H(t, x, v, p)$ for $v \in U$ kan måske ikke bestemmes eksplicit som funktion af t, x, p, – eller der kan være flere maksimumpunkter (fx kan $H(v)$ være konstant), – eller funktionen har måske slet intet maksimum.

Differentialkvotienten af $H(v)$ er den partielle afledede af Hamilton-funktionen, $H'(v) = H'_u(v)$. Hvis kontrolintervallet U er åbent, gælder i et maksimumpunkt u_0, at differentialkvotienten er 0, altså at $H'_u(u_0) = 0$. Denne ligning, $H'_u(u_0) = 0$, kan opfattes som en ligning mellem t, x, u_0, p, og den bestemmer u_0 implicit (eller måske explicit) som funktion af t, x, p. Det er det nemme tilfælde.

I almindelighed, hvis intervallet U ikke er åbent, kan man bruge sin viden om funktioner af én variabel, og sit gode humør, samt eventuelt [S. s.384]: Antag, at u_0 er maksimumpunkt for funktionen $H(v)$ for $v \in U$. Da indtræffer en (eller flere) af følgende muligheder:

(a) $u_0 = u_1,\ H'_u(u_0) \le 0$, (b) u_0 er indre, $H'_u(u_0) = 0$, (c) $u_0 = u_2,\ H'_u(u_0) \ge 0$,

hvor u_1 er venstre endepunkt i U, hvis U har et venstre endepunkt, og, tilsvarende, u_2 er et eventuelt højre endepunkt; „indre“ betyder indre punkt i intervallet U.

Hvis betingelserne kun er opfyldt for én værdi u_0, er det søgte punkt u_0 bestemt, men som nævnt kan flere af betingelserne (a), (b), (c) være opfyldt, specielt kan (b) være opfyldt for flere værdier af u_0. Der vil typisk være visse sæt (t, x, p), hvor u_0 ikke bliver bestemt. Det kan svare til visse springpunkter, eller det kan skyldes, at der er mere end én kandidat. Endelig kan det ske, at betingelserne slet ikke kan opfyldes, fordi funktionen $H(v)$ ikke har et maksimum.

• *Der skal mere til*, naturligvis, end betingelserne i (a), (b), eller (c), til at sikre, at u_0 virkelig er maksimumpunkt for $H(v)$. Bemærk dog det vigtige tilfælde, hvor (a), (b), eller (c) kombineret med (2*) og (3*) opfyldes af tre funktioner x, u, p, og hvor Mangasarians konkavitetsbetingelse er opfyldt. For hvert t er så funktionen $v \mapsto H(t, x(t), v, p(t))$ specielt konkav som funktion af v, og det sikrer, at $u_0 = u(t)$ virkelig er maksimumpunkt. Derfor er (1*) opfyldt, og så er (x, u, p) er kandidat, og derfor (den tilstrækkelige betingelse) er (x, u) en optimal kontrol.

• *Gafler.* Når kontrolintervallet U har begrænsninger, vil maksimumpunktet u_0, som funktion $u_0 = u_0(t, x, p)$ ofte være bestemt ved en ‘gaffeldefinition‘ (et ‘tuborg-udtryk’):

$$u_0 = \begin{cases} \text{udtryk}_1, & \text{når } (t, x, p) \text{ opfylder } \dots \\ \text{udtryk}_2, & \text{når } (t, x, p) \text{ opfylder } \dots \\ \dots, & \end{cases}$$

og det gør det i praksis ekstra kompliceret at indsætte dette udtryk i stedet for u.

Planen for den 10. uge (11/3–14/3) omfatter „Optimal kontrolteori“, fra S 12.1–12.5, 12.7. Ugens øvelser: S12.4: 5, 9; S12.5: 1; EO: **65**.

Anders Thorup