Ugeseddel 8

Planen for den ottende uge (25/2–28/2) omfatter „Optimal kontrolteori“, fra S 12.1–12.4. Ugens øvelser: **Midtvejstest**: Under (lidt) eksamenslignende forhold får du udleveret et sæt opgaver, af en længde svarende til at de bør kunne besvares på 100 minutter. Midtvejstesten er et tilbud!

Kuglerne.

• *Betragt* i det følgende et de tre kontrolproblemer (Max_{i}), (Max_{ii}), (Max_{iii}), altså

$$(\max) \int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)\,dt \quad \text{for (1) } u \in U, \quad \text{(2) } \dot{x} = g(t,x,u), \quad \text{(3) } x(t_0) = x_0,$$

med en af følgende slutbetingelser:

$$\text{(i)} \quad x(t_1) = x_1; \qquad \text{(ii)} \quad x(t_1) \geq x_1; \qquad \text{(iii)} \quad x(t_1) \text{ er fri.}$$

• *Tilladte par* for problemet (Max_{i}) er par af funktioner $x = x(t)$, $u = u(t)$, som opfylder *bibetingelserne*, dvs (1) $u(t) \in I$ for alle t, differentialligningen i (2), og randbetingelserne (3)(i), dvs begyndelsesbetingelsen $x(t_0) = x_0$ og slutbetingelsen $x(t_1) = x_1$. Tilsvarende for (Max_{ii}) og (Max_{iii}). For hvert tilladt par af funktioner (x, u) har integralet en værdi, betegnet $J(x, u)$, og opgaven er at bestemme det *optimale par*, det (eller de) tilladte par, for hvilket *kriteriefunktionen* $J(x, u)$ har den maksimale værdi, — eller eventuelt at afgøre, at et sådant par ikke findes.

Funktionen $u = u(t)$ er *kontrollen*, og det tillades, at den er stykkevis kontinuert („kontinuert, med spring“). Funktionen $x = x(t)$ er *tilstanden*, og det tillades, at den er stykkevis $\mathcal{C}^1$ („differentiabel, med knæk“).

Differentialligningen i (2) er *tilstandsligningen*. Det kræves kun at ligningen $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$ er opfyldt bortset fra eventuelle springpunkter for $u(t)$.

• *Kontrollen bestemmer.* Kontrolfunktion $u = u(t)$ i et tilladt par bestemmer tilstandsfunktionen $x = x(t)$. Antag nemlig, at $s_1 < s_2 < \cdots$ er springpunkterne for $u(t)$. Så er $u(t)$ kontinuert på intervallet $[t_0, s_1]$, og tilstandsligningen i (2) med begyndelsesværdien $x(t_0) = x_0$ bestemmer $x(t)$ på intervallet $[t_0, s_1]$. Specielt er så slutværdien $x(s_1)$ bestemt. Med denne slutværdi som begyndelsesværdi bestemmer tilstandsligningen $x(t)$ på det næste interval $[s_1, s_2]$, osv. Det kan naturligvis ikke udelukkes for en given funktion $u(t)$, at en *maksimal løsning* $x = x(t)$ til (2) faktisk *ikke* defineret på hele intervallet $[t_0, t_1]$. For at $u = u(t)$ er en *tilladt kontrol* kræves altså, at (1) er opfyldt, at tilstanden $x = x(t)$ bestemt ved (2) er defineret for $t_0 \leq t \leq t_1$, og at tilstanden $x = x(t)$ opfylder den relevante slutbetingelse.

• *Hamiltonfunktionen* hørende til det givne kontrolproblem er funktionen H af 4 variable t, x, u, p bestemt ved

$$H(t, x, u, p) = f(t, x, u) + pg(t, x, u).$$

• *Maksimumprincippet* (*Nødvendig betingelse*). Antag, at (x^*, u^*) er et tilladt par af funktioner, som maksimerer kriteriefunktionen $J(x, u)$. „Normalt“ findes da en funktion $p = p(t)$, differentiabel med knæk, så at følgende betingelser er opfyldt:
(1') For hvert fast t maksimerer $u^*(t)$ funktionen $v \mapsto H(t, x^*(t), v, p(t))$ for $v \in U$.
(2') Funktionen $p = p(t)$ opfylder følgende førsteordens differentialligning:

$$\dot{p} = -H'_x(t, x^*, u^*, p)\,,$$

hvor $H'_x = \partial H/\partial x$, og lighed betyder $\dot{p}(t) = -H'_x(t, x^*(t), u^*(t), p(t))$ på nær i springpunkter.
(3') Afhængigt af de forudsatte slutbetingelser (i), (ii), eller (iii) for $x(t)$ gælder den tilsvarende af følgende „transversalitetsbetingelser“:

$$\text{(i')}\ p(t_1) \text{ fri}; \quad \text{(ii')}\ p(t_1) \geq 0, \text{ og enten } p(t_1) = 0 \text{ eller } x^*(t_1) = x_1; \quad \text{(iii')}\ p(t_1) = 0.$$

• *Adjungerede funktion*, det er funktionen $p = p(t)$ i maksimumprincippet.

• *Hvad er normalt?* Nogle kontrolproblemer er ikke normale i den forstand, at der findes optimale kontroller u^*, men ingen tilladte kontroller u i nærheden af u^*. Kontrolproblemer er normalt normale, se [S ,s. 373–74].

• *Kogebogen.* Maximumprincippet giver en opskrift: For det givne kontrolproblem leder man efter *kandidater*, dvs sæt af tre funktioner $x = x(t)$, $u = u(t)$, $p = p(t)$ sådan, at (x, u) er et tilladt par, og så at (x, u, p) opfylder betingelserne i maksimumprincippet. Det giver i alt følgende betingelser, hvor de givne bibetingelser er gentaget:
(1*) For hvert fast t maksimerer $u(t)$ funktionen $v \mapsto H(t, x(t), v, p(t))$ for $v \in U$.
(2*) Følgende system af førsteordens differentialligninger er opfyldt:

$$\dot{x} = g(t, x, u), \quad \dot{p} = -H'_x(t, x, u, p).$$

(3*) De relevante af følgende transversalitetsbetingelser gælder:
(i*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $p(t_1)$ fri;
(ii*) $x(t_0) = x_0$, samt $x(t_1) \geq x_1$ og $p(t_1) \geq 0$ med lighed i mindst en af ulighederne;
(iii*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1)$ fri og $p(t_1) = 0$.

• *Hovedsætning. „Normalt“ findes ethvert optimalt par blandt kandidaterne* (*dvs: hvis* (x, u) *er et optimalt par, så er* (x, u, p) *med en passende funktion* p *blandt kandidaterne*). *Omvendt, hvis Hamilton-funktionen* $H(t, x, u, p)$ *for alle faste tal* t *og* p *er konkav som funktion af* (x, u)*, så er hver kandidat optimal.*

Planen for den 9. uge (4/3–7/3) omfatter „Optimal kontrolteori“, fra S 12.1–12.5. Ugens øvelser: S12.2: 1; S12.4: 3, 4; EO: **47**.

Anders Thorup