Ugeseddel 7

Planen for den 7. uge (18/2–21/2) omfatter „Variationsregning“, fra S 11.1–11.3, 11.5. Måske når jeg at indlede optimal kontrolteori. Ugens øvelser: H2O: **33**, 30, 31; EO: 18; S11.2: 1, 2.

Kuglerne.

• *Kandidaterne* til et maksimeringsproblem er de funktioner $x = x(t)$, der opfylder de *nødvendige betingelser*. At betingelser er nødvendige, siger præcis, at enhver løsning til problemet findes blandt kandidaterne. Men det er en begrænset viden, og der skal mere til for at sikre, at kandidaterne løser problemet. Det kan bruges sådan: Hvis der ikke findes kandidater, så har problemet ingen løsninger. Hvis man har bestemt alle kandidater, og *på forhånd ved* at problemet har løsninger, så er de kandidater, der giver den største værdi af $J(x)$ netop løsningerne til problemet. *Tilstrækkelige betingelser* er typisk yderligere betingelser, som sikrer, at alle kandidater er løsninger.

• *Transversalitetsbetingelserne* i problemet (Max_{ii}): „med lighed i mindst en af ulighederne $x(t_1) \geq x_1,\ F'_u|_{t=t_1} \leq 0$“ giver typisk dobbelt arbejde: Først søges tilladte funktioner x med lighed i den første ulighed, dvs som opfylder $x(t_1) = x_1,\ F'_u|_{t=t_1} \leq 0$. Dernæst søges tilladte funktioner med lighed i den anden ulighed; her kan man, hvis det gør undersøgelsen lettere, antage at den første ulighed er skarp, idet tilladte funktioner med lighed i første ulighed jo allerede er bestemt. Man kan altså nøjes med at søge tilladte funktioner, som opfylder $x(t_1) > x_1,\ F'_u|_{t=t_1} = 0$.

• *Husk*, at man skal tænke sig t indsat ved differentiationen $\frac{d}{dt}F'_u$ på højresiden af Euler-ligningen (EL). Funktionen $F'_u(t, x(t), \dot{x}(t))$ differentieres via kædereglen, så højresiden er

$$\tfrac{d}{dt}F'_u = F''_{ut} + \dot{x}F''_{ux} + \ddot{x}F''_{uu}.$$

• *Trick: Hvis $F(t, x, u)$ ikke afhænger af t*, så kan Euler-ligningen (EL) delvis integreres: En ikke-konstant funktion $x = x(t)$ løser Euler-ligningen, hvis og kun hvis x løser følgende førsteordens ligning (for en passende værdi af konstanten):

$$F - \dot{x}F'_u = \text{konstant}.$$

• *Variationsregning* med variabel tid, dvs med fast begyndelse t_0 og *variabelt* slut(tids)punkt t_1. Maksimeringsproblemet, for en given funktion $F(t, x, u)$ og givne værdier x_1 og x_2:

$$(\max) \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt \quad \text{for } x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,\ t_1 \text{ fri.} \tag{Max}$$

Nødvendig betingelse. Hvis $x = x(t)$ løser problemet (Max), så vil x opfylde Eulerligningen $F'_x = \frac{d}{dt}F'_u$, og transversalitetsbetingelserne: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $\left[F - \dot{x} \cdot \frac{\partial F}{\partial u}\right]_{t=t_1} = 0$.

Bemærk, at der er tre ligninger og (intuitivt) tre ubekendte, nemlig sluttiden t_1 og to arbitrære konstanter i den generelle løsning til (EL).

• *Med lidt øvelse* kan man undvære symbolet u for den tredie variabel, og simpelthen skrive $\dot{x}$ i stedet. Herefter har $\dot{x}$ *to betydninger:* Dels som navn på den tredie variable i $F(t, x, \dot{x})$, dels som den afledede af en funktion $x = x(t)$. I den første betydning kan man fx „differentiere partielt mht $\dot{x}$", som giver $(\partial/\partial\dot{x})F = F'_{\dot{x}}$.

• *I et optimalt kontrolproblem* indgår: et interval $[t_0, t_1]$, to givne funktioner $f(t, x, u)$ og $g(t, x, u)$ i tre variable (de kan antages at være pæne funktioner: $\mathcal{C}^2$-funktioner), og et interval U (som kan være åbent eller afsluttet, begrænset eller ubegrænset), samt to randværdier x_0 og x_1. Problemet, en maksimeringsopgave, kan se sådan ud:

$$(\max) \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u)\, dt \quad \text{for (1) } u \in U,\ \text{(2) } \dot{x} = g(t, x, u),\ x(t_0) = x_0, \ \text{ og (i) } x(t_1) = x_1.$$

Det skal understreges, at dette er en vildt komprimeret form af opgaven; det kræver meget indforstået viden (og implicitte forudsætninger) at se, hvad opgaven i det hele taget går ud på.

For det første: Symbolerne x, u som indgår i opgaven er to funktioner $x = x(t)$ og $u = u(t)$, defineret for $t_0 \le t \le t_1$, og opgaven går ud på at bestemme dem. Der er en række bibetingelser: Kravet i (1) er en begrænsning på funktionen u, nemlig at $u(t) \in U$ for alle t. Kravet i (2) er, for en given funktion $u = u(t)$, en sædvanlig førsteordens differentialligning med randbetingelse for funktionen $x = x(t)$. Differentialligningen er opfyldt, når $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$ for alle t.

Integralet, for givne funktioner x, u, har værdien $J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt$. At der står (max) signalerer, at det er en maksimeringsopgave: den går ud på blandt alle par af funktioner (x, u), der opfylder bibetingelserne, at bestemme det par (eller de par), som gør værdien af *kriteriefunktionen* $J(x, u)$ størst mulig.

En ekstra (implicit) forudsætning er, at de funktioner x, u, der betragtes, behøver at være „pæne". Det er fx nødvendigt at inddrage funktioner $u = u(t)$, der ikke engang er kontinuerte.

• *Kontinuert, med spring.* En funktion $v\colon I \to \mathbb{R}$, defineret på et begrænset interval I, kaldes *stykkevis kontinuert*, hvis den er kontinuert i alle punkter *på nær* i endelig mange *springpunkter* i det indre af I; i et springpunkt a forudsættes, at begge de halvsidige grænseværdier,

$$v(a^-) := \lim_{x \to a^-} v(x), \qquad v(a^+) := \lim_{x \to a^+} v(x),$$

(for $x \to a$ fra venstre og fra højre), eksisterer, men ikke at de er ens (og slet ikke, at de er lig med funktionsværdien $v(a)$). Vi bekymrer os *ikke* om funktionsværdien i springpunkterne.

Hvis intervallet I er uendeligt, tillades uendelig mange spring, men kunne endelig mange i hvert begrænset delinterval.

• *Differentiabel, med knæk.* En funktion $h\colon I \to \mathbb{R}$ på et begrænset interval I kaldes *kontinuert og stykkevis* $\mathcal{C}^1$, hvis den er kontinuert i alle punkter, og differentiabel i alle punkter *på nær* i endelig mange *knækpunkter*, og differentialkvotienten h' (der jo er defineret på nær i de endelig mange knækpunkter) er stykkevis kontinuert. Hvis I er ubegrænset kræves, at der kun er endeligt mange knæk i hvert begrænset delinterval.

Planen for den 8. uge (25/2–28/2) omfatter „Optimal kontrolteori", fra S 12.1–12.4. Ugens øvelser: **Midtvejstest**.

Anders Thorup